MATINTRO
FUNKTIONER AF FLERE VARIABLE

Tore August Kro
Matematisk Institutt
Universitetet i Oslo[1]

5.kapitel skrevet af:
Jan Philip Solovej
Institut for de Matematiske Fag
Københavns Universitet

Forår 2003

[1]På dansk ved Jacob Stevne Jørgensen, sommer 2011

Forord til den danske udgave, 2011

Kros noter, som introducerer studerende til teorien for funktioner af flere variable, har igennem en årrække været anvendt ved undervisningen i kurset MatIntro ved Københavns Universitet. I denne sammenhæng har noterne vist, at de opfylder deres formål på udmærket måde.

Uanset at dansk og norsk skriftsprog er meget nært beslægtede, er der dog visse forskelle i sprogbrugen, som gør, at vi har fundet det ønskeligt at have en dansk udgave af Kros noter.

Dette notesæt er i alt væsenligt en direkte oversættelse af Kros notesæt, men hans liste af trykfejl m. v. er indarbejdet, og på nogle få punkter er teksten ændret således, at den passer bedre til den undervisning, der gives ved kurset MatIntro under Københavns Universitet. Den danske oversættelse er foretaget af Jacob Stevne Jørgensen i samarbejde med de lærere der skal holde kurset i efteråret 2011, Erik Christensen, Søren Eilers og Niels Grønbæk.

Tilføjelse til forord, 2012

Ved revisionen 2012 af "Funktioner af flere variable" er der tilføjet kapitel 5, "Multiple integraler". Dette kapitel udgøres af Jan Philip Solovejs notesæt, der indtil 2012 forelå som separat kursusmateriale.

Indhold

Indledning

De funktioner, du er mest vant til fra tidligere, er funktioner af *en* variabel – det vil sige, at der til et givet reelt tal x svarer en funktionsværdi $y = f(x)$, der er et reelt tal. I dette hæfte vil vi studere funktioner af *flere* variable, det vil sige funktioner, hvor der til et sæt af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svarer et reelt tal $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vi vil specielt interessere os for, hvordan man differentierer sådanne funktioner. Teorien vil nok på mange måder minde dig om det, du ved om differentiation af funktioner af en variabel, men der vil også være vigtige forskelle – specielt kommer geometriske betragtninger til at spille en vigtigere rolle i den nye teori.

Før vi begynder med matematikken, er der et spørgsmål, vi bør afklare – hvad er egentlig hensigten med at studere funktioner af flere variable? Tænker du dig om, er det ikke vanskeligt at finde eksempler på situationer, hvor vi har brug for funktioner af flere variable til at beskrive, hvad der foregår. Her er nogle eksempler:

* Du opvarmer en metalstang fra den ene ende og vil undersøge, hvordan varmen breder sig til andre dele af stangen. Da vil temperaturen T afhænge af afstanden x til opvarmingspunktet og af tiden t siden opvarmingen begyndte. Vi får altså en funktion $T(x, t)$ af to variable.

* Du slår en guitarstreng an, så den begynder at vibrere op og ned. For at beskrive bevægelsen af strengen, må du kende udslaget $u(x, t)$ i positionen x til tiden t. Dette er en funktion af to variable.

* Du er interesseret i at studere, hvordan saltkoncentrationen i havet varierer. For at angive positionen har du brug for tre variable x, y, z, og for at angive tiden har du brug for en fjerde variabel t. Koncentrationen c bliver da en funktion $c(x, y, z, t)$ af fire variable.

* Du driver en virksomhed, der producerer n forskellige varetyper. Bruttoindtægten afhænger af priserne $p_1, p_2, \ldots, p_n$, du kan få for disse varer. Den er altså en funktion $I(p_1, \ldots, p_n)$ af n variable.

Sandsynligvis har du ikke store problemer med at fortsætte denne liste af eksempler på egen hånd.

Kapitel 1

Visualisering

1.1 Funktioner af flere variable

Dette kapitel vil beskrive, hvorledes vi bærer os ad med at skitsere grafen for en funktion af flere variable. Vi er vant til at tegne grafen for en funktion af en variabel i et to-dimensionalt koordinatsystem. Det viser sig, at grafen for en funktion af to variable kan tegnes i et tre-dimensionalt koordinatsystem. Har vi flere variable begrænses mulighederne for at tegne grafen. Rummet, vi lever i, har simpelthen ikke høj nok dimension til at grafen lader sig tegne. Men heldigvis findes der andre måder at visualisere grafen på.

Lad os starte med at sætte navn på tingene. De reelle tal kender du forhåbentligt allerede, og vi betegner de reelle tal med $\mathbb{R}$. Når vi arbejder med to variable, for eksempel x og y, kan vi danne parret (x, y). Mængden af alle talpar (x, y), hvor x og y er reelle, kalder vi $\mathbb{R}^2$. Vi kalder ofte et sådant talpar for et punkt, og tænker på $\mathbb{R}^2$ som en plan. Mængden af alle taltripler af reelle tal kalder vi $\mathbb{R}^3$, og vi tænker på et taltripel som et punkt i rummet. Generelt kalder vi mængden af n-tupler af reelle tal for $\mathbb{R}^n$, og et punkt, altså et n-tupel, kan skrives som $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hvor hver af x_1, x_2, …, x_n er et reelt tal.

Vi er nu klar til at definere hvad en funktion af flere variable er:

1.1 Definition
En reel funktion af n variable er en funktion med reelle værdier defineret på en delmængde A af $\mathbb{R}^n$. Vi skriver $f : A \to \mathbb{R}$.

Sagt på en anden måde er f en regel, der til hvert punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ tilordner et tal $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Vi kalder A for *definitionsmængden* for f, og ofte skriver vi D_f i stedet for A. Funktionen har også en værdi-mængde, V_f, som er defineret ved

$$V_f = \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A\}.$$

Med andre ord er værdimængden mængden af alle funktionsværdier.

De fleste funktioner, vi støder på, er givet ved formeludtryk. Her er nogle eksempler:

1.2 Eksempel

a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4^2 - \frac{1}{3}x_2x_3^3$. Dette er en funktion af fire variable og definitionsmængden er hele $\mathbb{R}^4$. Vælger vi et punkt i $\mathbb{R}^4$, for eksempel $(1, -2, \frac{1}{2}, 1)$, kan vi udregne den tilhørende funktionsværdi

$$f(1, -2, \frac{1}{2}, 1) = 1 \cdot 1^2 - \frac{1}{3}(-2) \cdot (\frac{1}{2})^3 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.$$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Dette er en funktion af tre variable, som er defineret for alle (x_1, x_2, x_3) i $\mathbb{R}^3$ undtagen $(0, 0, 0)$. Definitionsmængden er følgelig $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

c) $f(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(x-y)^2}{2t}}$. Dette er en funktion af tre variable, som er defineret i alle punkter hvor $t > 0$. Bemærk, at vi bruger x, y og t som variabelnavne i stedet for x_1, x_2 og x_3. Dette er helt almindeligt – når funktioner bruges i praksis, hedder de variable ofte noget helt andet end $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

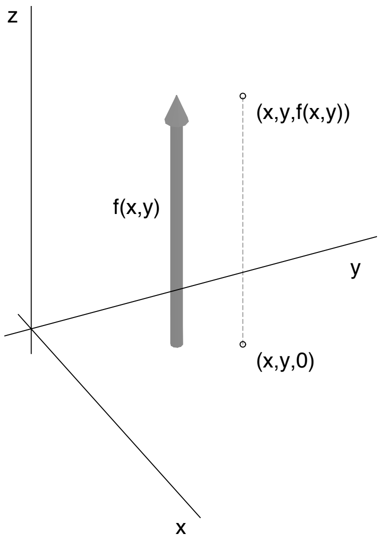
♣

1.2 Grafer for funktioner af to variable

Noget af det første, vi gør, når vi studerer en funktion af to variable, er, at lave en skitse af grafen. Også i tilfælde med flere variable er det vigtigt at danne sig et billede af, hvordan funktionen ser ud, men har den mere end to variable, er det umuligt at lave en tegning af grafen i almindelig forstand. Heldigvis giver tovariabel-tilfældet os megen intuition, som vi kan bygge på, når vi skal studere funktioner af flere variable. I dette afsnit vil vi derfor se ganske nøje på, hvordan vi tegner grafen for en funktion af to variable.

For at undgå alt for mange indices[1] vil vi kalde de variable x og y i stedet for x_1 og x_2, og vi vil bruge z som betegnelse for funktionsværdien. Vi har altså funktioner $z = f(x, y)$.

[1] flertal af indeks



Figur 1.1: Punkt på grafen for f

Før vi kaster os ud i eksempler, må vi præcisere, hvad grafen for en funktion af to variable er. Den befinder sig i et tredimensionalt koordinatsystem. Akserne navngiver vi efter de variable, i vores tilfælde bliver det x-, y- og z-aksen. Givet variabelværdier x og y, således at (x, y) ligger i definitionsmængden for f, kan vi finde funktionsværdien i dette punkt, dvs. $f(x, y)$. Taltriplet $(x, y, f(x, y))$ er koordinaterne til et punkt i det tredimensionale koordinatsystem. Punktet ligger på grafen for funktionen f. Se figur 1.1. Vi definerer grafen for f som mængden af alle punkter af formen $(x, y, f(x, y))$, hvor (x, y) ligger i definitionsmængden for f.

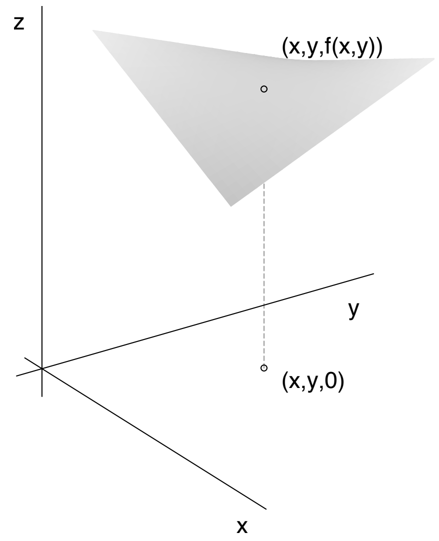
Bemærk, at vi i princippet kan aflæse funktionsværdien for f, hvis vi har en tegning af grafen. For at aflæse $f(x, y)$ finder man først $(x, y, 0)$, derefter bevæger man sig lodret (dvs. parallelt med z-aksen) til man støder på grafen. Dette vil ske i et punkt (x, y, z). Funktionsværdien $f(x, y)$ er da z-værdien i dette punkt. Se figur 1.2.

1.3 Eksempel
Brug af it-værktøjer er ofte nyttigt, når man skal se på grafen for en funktion af to variable. Vi vil se nærmere på, hvordan vi kan bruge computerprogrammet *Maple* til at tegne graferne for følgende funktioner:

a) $f(x, y) = xy$

b) $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

c) $h(x, y) = \frac{4-3y}{x^2+y^2+1}$



Figur 1.2: Aflæsning af funktionsværdien

Vi definerer funktionerne i Maple ved at give følgende kommandoer:

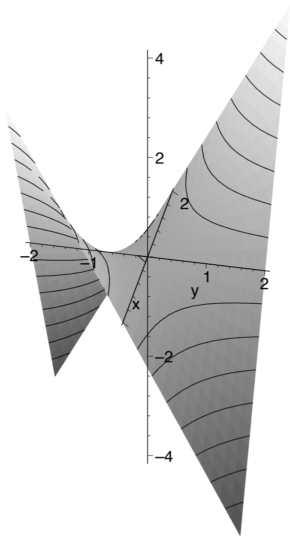
```
f:= (x,y) -> x*y;
g:= (x,y) -> cos(x^2+y^2);
h:= (x,y) -> (4-3*y)/(x^2+y^2+1);
```

For at tegne graferne for disse funktioner skriver vi

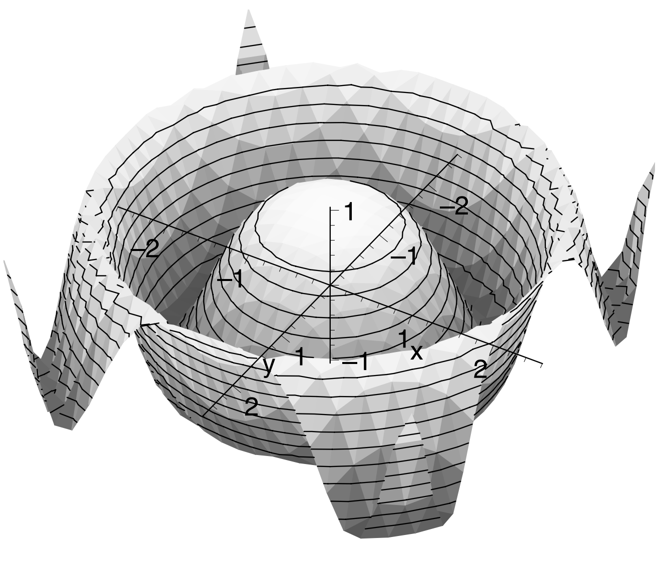
```
plot3d(f(x,y), x=-2..2, y=-2..2);
plot3d(g(x,y), x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5);
plot3d(h(x,y), x=-3..3, y=-4..2);
```

Vi har i hvert af tilfældene angivet et område for x og y. For eksempel har vi for funktionen h ladet x gå fra -3 til 3 og y gå fra -4 til 2. Graferne, der fremkommer, kan du se på figurerne 1.3, 1.4 og 1.5. ♣

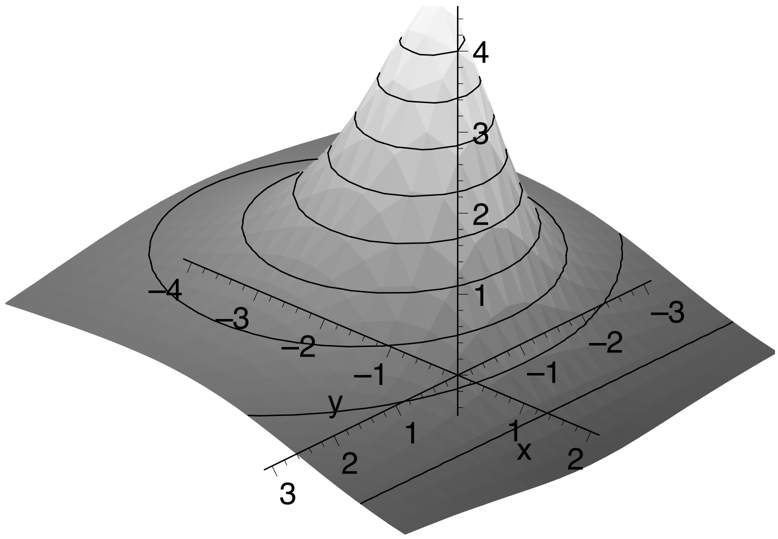
Stoffet, vi har gennemgået hidtil, har sigtet efter at give dig en god intuition om, hvad grafen for en funktion af to variable er, men vi har ikke undersøgt, hvordan man i praksis kan skitsere grafen. At bruge it-værktøj, som i eksemplerne ovenfor, er ofte praktisk, men det er også nyttigt at beherske kunsten at skitsere en graf uden andre hjælpemidler end papir og blyant. Når man studerer grafen ved håndkraft, bliver forståelsen af grafens kvalitative egenskaber ofte dybere end ved brug af it-værktøj. Og med træning og erfaring kan det tilmed være hurtigere at skitsere grafen på papir end at bruge et computerprogram.



Figur 1.3: Grafen for $f(x, y) = xy$



Figur 1.4: Grafen for $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$



Figur 1.5: Grafen for $h(x,y) = \frac{4-3y}{x^2+y^2+1}$

Vi skal nu se på to forskellige hjælpemidler til anskueliggørelse af grafer kaldet *konturer* og *niveaukurver*.

Konturen for grafen over en linje i xy-planen bliver en funktion af én variabel, som vi kan tegne grafen for. Ved at sætte mange konturer sammen kan vi danne os et billede af grafen.

Vi giver en præcis definition af begrebet kontur.

1.4 Definition
En kontur *for en funktion $f(x,y)$ af to variable er grafen for en funktion $f \circ \gamma$ af én variabel, som fremkommer ved at indsætte parameterfremstillingen $(x,y) = \gamma(t)$ for en ret linje l. Funktionen $f \circ \gamma$ er defineret for de $t \in \mathbb{R}$, for hvilke $\gamma(t) \in D_f$*

Rent geometrisk er konturen snittet mellem grafen for f og den lodrette plan i det 3-dimensionale rum, som indeholder l. Vi får herved

$$\text{Kontur}_l(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in l \cap D_f \text{ og } z = f(x,y)\}.$$

Niveaukurver er snit mellem grafen og planer, der er parallelle med xy-planen, og en samling af niveaukurver beskriver grafen på samme måde som højdekurver på et kort beskriver terrænnet.

Den matematiske definition er som følger:

1.5 Definition
Niveaukurven N_c for en funktion $f(x,y)$ af to variable er punktmængden

$$N_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \in D_f \text{ og } f(x,y) = c\}$$

Bemærk, at ifølge definitionen er niveaukurven N_c en del af xy-planen. Undertiden er det praktisk at opfatte den som en del af planen $z = c$ i det tre-dimensionale rum, dvs. mængden

$$\{(x, y, c) \mid (x, y) \in N_c\}.$$

Dette svarer til at højdekurven i højden c ude i naturen forløber i rummet, mens den på et kort naturligvis forløber i kortets plan.

1.2.1 Konturer

De simpleste eksempler på konturer for en funktion f af to variable x og y får vi ved at indsætte en fast værdi for en af de variable. Da bliver det tilbageværende en funktion af en variabel, som vi kan tegne grafen for. Lad os se på nogle eksempler.

1.6 Eksempel
I dette eksempel vil vi forsøge at skitsere grafen for

$$f(x, y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$$

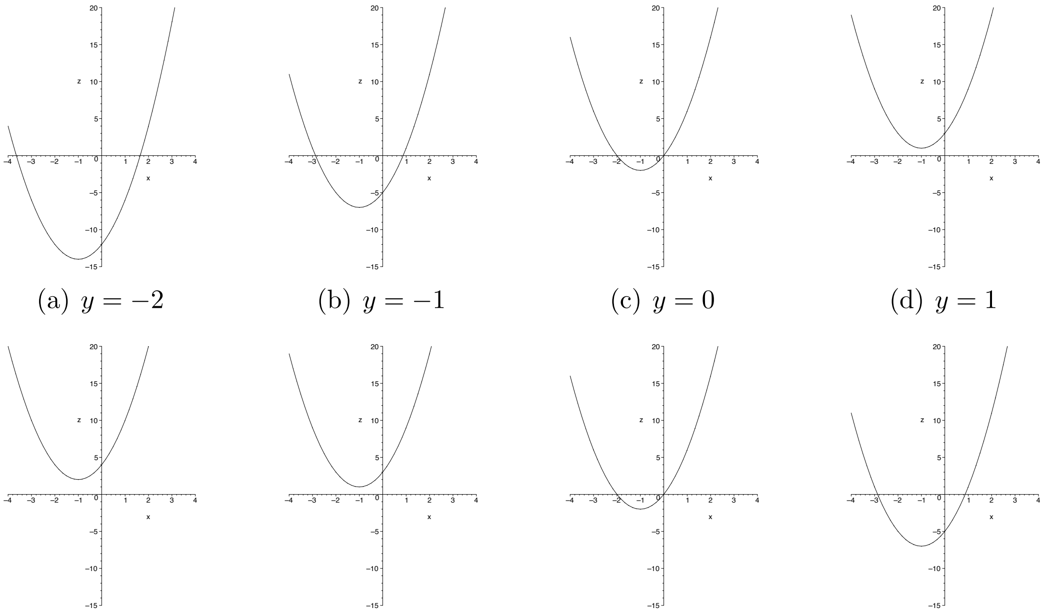
Idéen bag konturer er at indsætte et tal for en af de variable. Så får vi en funktion af den anden variabel, som vi ved, hvordan man tegner grafen for.

Vi prøver at indsætte nogle værdier for y. For eksempel $y = -2$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, $y = 4$ og $y = 5$. Der er ikke nogen speciel grund til at vi valgte netop disse tal, andre valg kan fungere lige så godt. Lad os se, hvad der sker, når vi sætter dem ind:

$$\begin{array}{lll}
y = -2 & \text{giver} & f(x, -2) = 2x^2 + 4x - 12 \\
y = -1 & \text{giver} & f(x, -1) = 2x^2 + 4x - 5 \\
y = 0 & \text{giver} & f(x, 0) = 2x^2 + 4x \\
y = 1 & \text{giver} & f(x, 1) = 2x^2 + 4x + 3 \\
y = 2 & \text{giver} & f(x, 2) = 2x^2 + 4x + 4 \\
y = 3 & \text{giver} & f(x, 3) = 2x^2 + 4x + 3 \\
y = 4 & \text{giver} & f(x, 4) = 2x^2 + 4x \\
y = 5 & \text{giver} & f(x, 5) = 2x^2 + 4x - 5
\end{array}$$

Tegner vi graferne, får vi parabler, som alle har samme form. Den eneste forskel er en forskydning i z-retningen. Se figur 1.6.

Nu forsøger vi at indsætte værdier for x, og derefter tegne $z = f(x, y)$ som en funktion af y for de valgte x-værdier. Vi prøver med $x = -4$, $x = -3$,



(a) $y = -2$ (b) $y = -1$ (c) $y = 0$ (d) $y = 1$

(e) $y = 2$ (f) $y = 3$ (g) $y = 4$ (h) $y = 5$

Figur 1.6: Konturer for $f(x, y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$

$x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ og $x = 2$ Da får vi:

$$
\begin{array}{lll}
x = -4 & \text{giver} & f(-4, y) = 16 - y^2 + 4y \\
x = -3 & \text{giver} & f(-3, y) = 6 - y^2 + 4y \\
x = -2 & \text{giver} & f(-2, y) = -y^2 + 4y \\
x = -1 & \text{giver} & f(-1, y) = -2 - y^2 + 4y \\
x = 0 & \text{giver} & f(0, y) = -y^2 + 4y \\
x = 2 & \text{giver} & f(2, y) = 16 - y^2 + 4y
\end{array}
$$

Igen får vi parabler, og disse kan du se i figur 1.7.

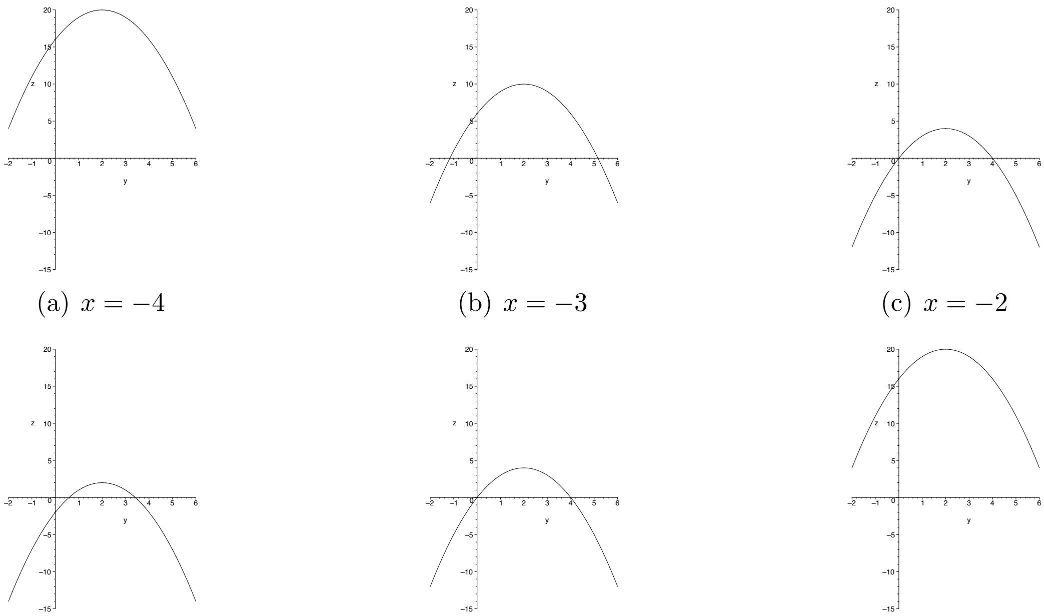
Vi sætter nu disse grafer sammen i et 3-dimensionalt koordinatsystem. Da fremkommer fladen i figur 1.8. Her er konturerne fra figur 1.6 tegnet op parallelt med x-aksen, og konturerne fra figur 1.7 ligger parallelt med y-aksen. ♣

1.7 Eksempel

Lad f være givet ved

$$f(x, y) = \ln(x + y) - y$$

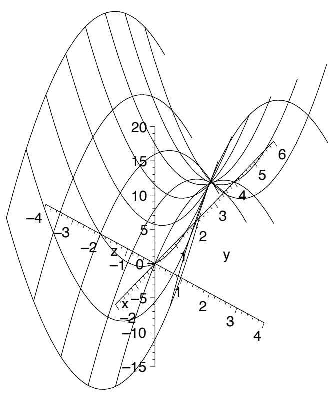
Som i eksemplet ovenfor skal vi indsætte nogle værdier for x og y, tegne konturerne for disse værdier, og til sidst sætte dem sammen og få grafen for



(a) $x = -4$ (b) $x = -3$ (c) $x = -2$

(d) $x = -1$ (e) $x = 0$ (f) $x = 2$

Figur 1.7: Konturer for $f(x, y) = 2x^2 + 4x - y^2 + 4y$



Figur 1.8: Konturerne for f sammensat til grafen for funktionen.

f frem. Vi vælger konturer for $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$ og $y = -1$, $y = 0$ og $y = 2$. De funktioner, vi ønsker at tegne er:

$$\begin{array}{lll} x=-1 & \text{giver} & f(-1,y) = \ln(y-1) - y \\ x=0 & \text{giver} & f(0,y) = \ln(y) - y \\ x=2 & \text{giver} & f(2,y) = \ln(y+2) - y \\ y=-1 & \text{giver} & f(x,-1) = \ln(x-1) + 1 \\ y=0 & \text{giver} & f(x,0) = \ln(x) \\ y=2 & \text{giver} & f(x,2) = \ln(x+2) - 2 \end{array}$$

Vi tegner konturerne i figur 1.9.

Vi ser, at når vi indsætter forskellige x-værdier, så får vi konturer med samme form. Lavere x-værdier forskyder konturen ned mod højre, højere x-værdier forskyder konturen op mod venstre. Bemærk, at funktionen $f(x_0, y) = \ln(x_0 + y) - y$, set som funktion af y, har en lodret asymptote i $y = -x_0$.

Ligeledes ser vi, at når vi indsætter forskellige værdier for y, så får vi igen konturer med samme form. Lavere y-værdier forskyder konturen op mod højre, mens højere y-værdier forskyder konturen ned mod venstre. Som funktion af x har $f(x, y_0)$ en lodret asymptote i $x = -y_0$.

Grafen for f får vi ved at sammensætte konturerne. Den er tegnet i figur 1.10

♣

1.8 Eksempel

Lad f være givet ved

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$$

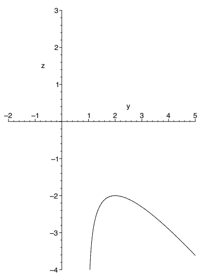
Vi ønsker at tegne grafen for f. Lad os derfor diskutere hvordan forskellige konturer ser ud. Vi ser først på, hvad der sker, hvis vi sætter y til at være en konstant.

$$y = c \quad \text{giver} \quad z = f(x,c) = \sqrt{c^2 - x^2 + 2x - 1}$$

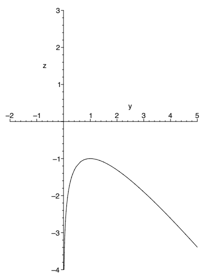
Ved at omskrive denne ligning ser vi, at konturen over $y = c$ er de (x, z) hvor

$$z \geq 0 \quad \text{og} \quad z^2 + (x-1)^2 = c^2$$

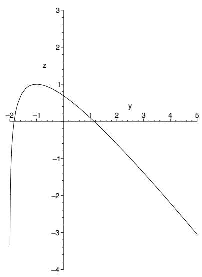
Konturen er altså halvcirkelen med radius $|c|$ og centrum i $(1, 0)$ med $z \geq 0$. Grafen bliver derfor øvre halvdel af en liggende dobbeltkegle med akse $x = 1$, $z = 0$. For at tegne grafen kan det være en god idé først at tegne konturen over $x = 1$, fordi $c = f(1, c)$ er størsteværdien for konturen over linjen $y = c$.



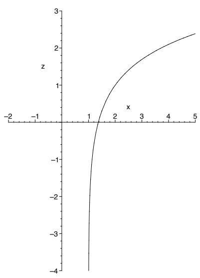
(a) $x = -1$



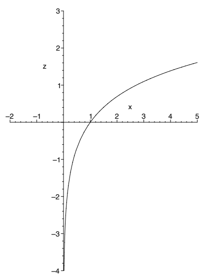
(b) $x = 0$



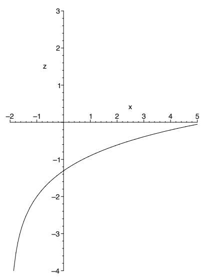
(c) $x = 2$



(d) $y = -1$

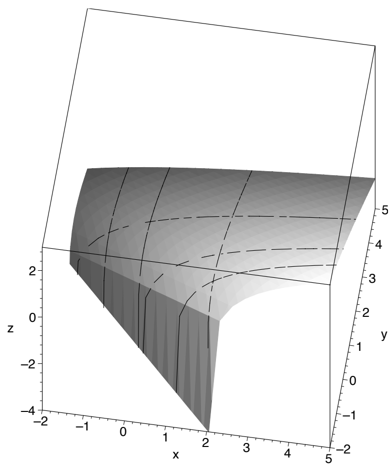


(e) $y = 0$

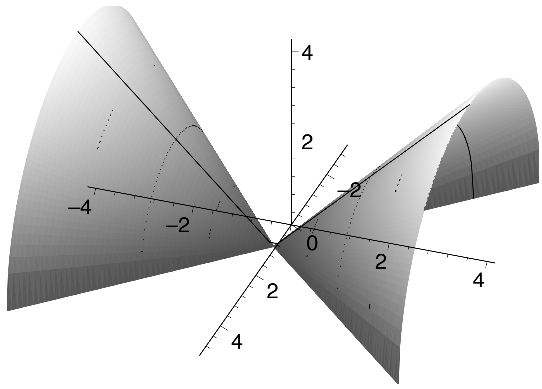


(f) $y = 2$

Figur 1.9: Konturer for $f(x, y) = \ln(x + y) - y$



Figur 1.10: Grafen for $f(x, y) = \ln(x + y) - y$.



Figur 1.11: Grafen for $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$.

Derefter kan man tegne halvcirklerne hængende ned fra denne kurve. Vi har at

$$f(1,y) = \sqrt{y^2 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1} = \sqrt{y^2} = |y|$$

Og vi kan tegne grafen som vist i figur 1.11. ♣

Nogle gange kan det også være hensigtsmæssigt at tegne konturerne for f over en linje, der ikke er parallel med koordinatakserne. Her er et eksempel på dette.

1.9 Eksempel
I dette eksempel betragter vi funktionen

$$f(x,y) = \frac{y}{x}$$

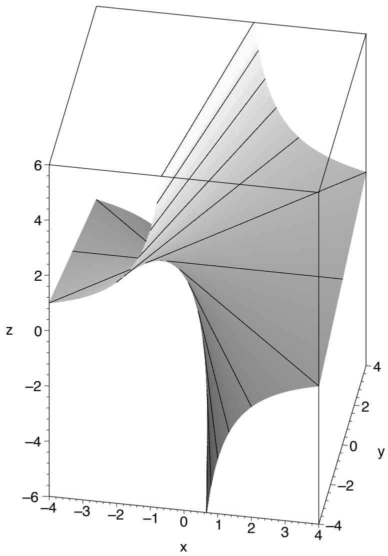
Men i modsætning til eksemplerne ovenfor indsætter vi ikke konstanter for x eller y for at danne konturer. Derimod vil vi se, hvordan grafen ser ud over linjer, der går gennem origo. Rette linjer i xy-planen, som går gennem origo, kan skrives på formen $y = ax$, undtagen linjen $x = 0$. Hvis vi indsætter $y = ax$ i funktionen f, får vi

$$f(x,ax) = \frac{ax}{x} = a$$

Vi ser, at over linjer $y = ax$ er f konstant lig a. Dermed kan vi tegne grafen. Se figur 1.12. ♣

1.2.2 Niveaukurver

Niveaukurven for en funktion f af to variable i højden c er kurven i xy-planen som fremkommer, når man løser ligningen $f(x,y) = c$. Ved at tegne



Figur 1.12: Grafen for $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

flere niveaukurver for samme funktion kan man til sidst skitsere grafen. Vi ser på et eksempel:

1.10 Eksempel
Brug niveaukurver til at skitsere grafen for

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2.$$

For at finde niveaukurverne forsøger vi at løse ligningen

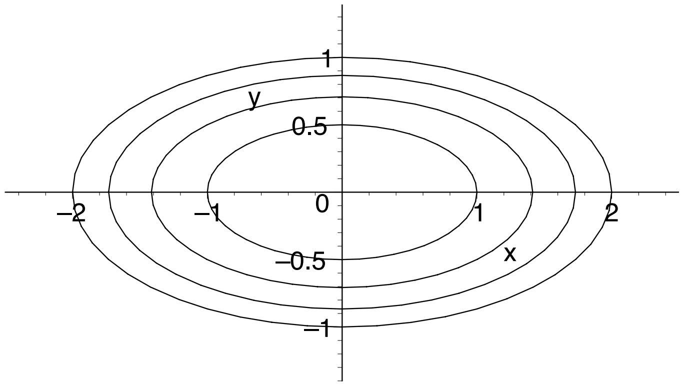
$$x^2 + 4y^2 = c.$$

Løsningskurvens udseende er selvfølgelig afhængig af værdien af c. Hvis c er negativ, har ligningen ingen løsninger, da $x^2 + 4y^2 \geq 0$ for alle x og y. For $c = 0$ er der kun én løsning, nemlig $x = y = 0$. Og for $c > 0$ får vi ellipser. Jo større c bliver, des større bliver ellipserne. Se figur 1.13 for en skitse af niveaukurverne for $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$. Vi bruger niveaukurverne som hjælpemiddel til at skitsere grafen. Se figur 1.14. ♣

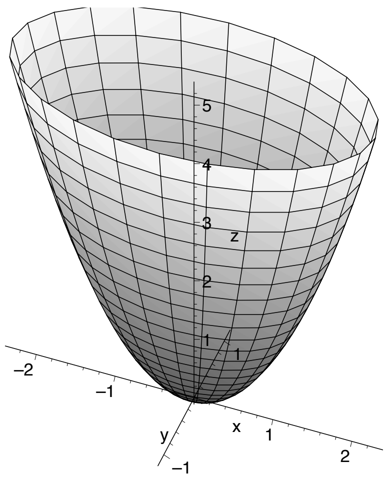
Afslutningsvis i dette afsnit vil vi se på nogle eksempler, hvor vi både bruger konturer og niveaukurver til effektivt at kunne skitsere grafen for nogle funktioner af to variable.

1.11 Eksempel
Lad f være givet ved

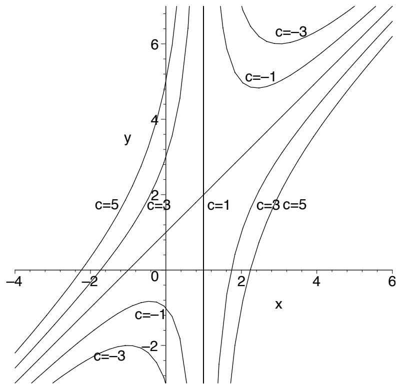
$$f(x,y) = x^2 - xy + y$$



Figur 1.13: Niveaukurver for $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ med $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$.



Figur 1.14: Grafen for $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.



Figur 1.15: Niveaukurver for $f(x, y) = x^2 - xy + y$.

For at undersøge denne funktion ser vi først på niveaukurverne. Lad c være et reelt tal. Da ønsker vi at løse

$$c = f(x, y) = x^2 - xy + y.$$

Vi undersøger først tilfældet $c = 1$, og vi får nedenstående ligning til bestemmelse af niveaukurven.

$$1 = x^2 - xy + y,$$

som kan omformes til

$$0 = x^2 - 1 - xy + y = (x - 1)(x + 1 - y).$$

Heraf ses, at N_1 må bestå af de to rette linjer $x = 1$ og $y = x + 1$.

For $c \neq 1$ ved vi nu, at intet punkt af formen $(1, y)$ ligger i N_c, og vi kan omforme ligningen

$$c = x^2 - xy + y$$

til

$$y = x + 1 + \frac{1 - c}{x - 1}.$$

Vi ser da, at for $c \neq 1$ består N_c af to kurver

$$\begin{aligned} y &= x + 1 + \frac{1 - c}{x - 1} \qquad -\infty < x < 1 \\ y &= x + 1 + \frac{1 - c}{x - 1} \qquad 1 < x < \infty \end{aligned}$$

Betragt figur 1.15, og læg mærke til, at niveaukurverne N_c for $c < 1$ findes i områderne mod "nord" og "syd", mens niveaukurverne for $c > 1$ findes i områderne mod “øst” og “vest”. Enhver af disse kurver har linjerne $x = 1$ og $y = x + 1$ som asymptoter.

Når vi nu skal tegne grafen, er det godt at tegne nogle konturer. Derefter kan vi “ophænge” niveaukurverne på disse. Vi ønsker at udvælge konturerne med omhu, målet er at vælge dem, så vi med få konturer formår at få hængt samtlige niveaukurver op. Se først på konturen over $y = 2$. ($y = 2$ er en ret linje gennem punktet $(1, 2)$). Vi får at

$$f(x, 2) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

Til denne kontur får vi fæstnet alle niveaukurverne med $c \geq 1$. For at fæstne de resterende niveaukurver ser vi på konturen over $y = 2x$. (Dette er også en ret linje gennem $(1, 2)$). Dette giver

$$f(x, 2x) = -x^2 + 2x = 1 - (x - 1)^2$$

På denne kontur kan vi fæstne alle niveaukurver med $c \leq 1$. Vi skitserer nu først de to konturer, derefter fæstner vi niveaukurverne til disse og endelig får vi grafen frem, se figur 1.16 ♣

1.12 Eksempel
En affin funktion i to variable er en funktion f på formen

$$f(x, y) = ax + by + d$$

hvor a, b og d er reelle tal. Grafen består af punkter (x, y, z), som opfylder

$$z = ax + by + d \quad ,$$

og er altså en plan i $\mathbb{R}^3$. Dette fremgår (selvfølgelig) også ved at betragte niveaukurver og konturer.

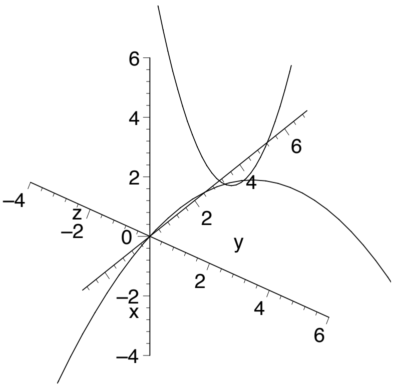
Vi ser først på niveaukurverne, det vil sige, at vi forsøger at løse ligningen

$$c = f(x, y) = ax + by + d$$

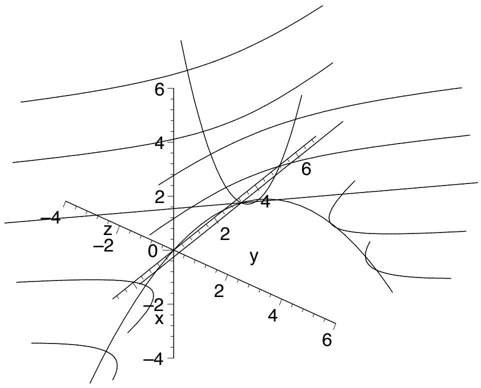
Kurverne, som fremkommer for forskellige værdier af c, er parallelle rette linjer i xy-planen, bortset fra hvis $a = b = 0$. I dette tilfælde bliver “niveau-kurverne” den tomme mængde for $c \neq d$ og hele xy-planen for $c = d$.

Konturen over den rette linje $y = kx + l$ finder vi ved at indsætte i funktionsudtrykket. Vi får:

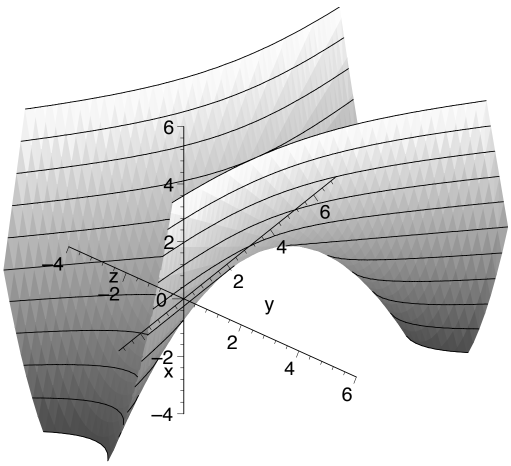
$$f(x, kx + l) = ax + bkx + bl + d = (a + bk)x + (d + bl)$$



(a) Konturerne



(b) med niveaukurver



(c) Grafen

Figur 1.16: At tegne grafen for $f(x, y) = x^2 - xy + y$

Vi tænker på udtrykkene som står inde i parenteserne som konstanter og ser, at konturen er en ret linje. Også konturerne over linjer på formen $x = k$ bliver rette linjer, fordi

$$f(k, y) = ak + by + d = by + (ak + d).$$

Så alle niveaukurverne og alle konturerne er rette linjer, i overensstemmelse med at grafen for en affin funktion er en plan i $\mathbb{R}^3$. ♣

1.3 Grafer for funktioner af tre variable

Når man møder funktioner af tre (eller flere) variable kan man ikke længere tegne grafen af den grund, at rummet i den fysiske verden, vi lever i, har 3 dimensioner, mens det matematiske rum, hvor den abstrakte graf ligger, har 4 eller flere dimensioner. Der er simpelthen ikke plads nok til at tegne grafen.

En slags visualisering af grafen kan man få ved at betragte 3-dimensionale "billeder" af grafen, f.eks. ved at generalisere begrebet "niveaukurve". Herved fremkommer begrebet *niveauflade*.

Lad os se på nogle eksempler med funktioner af tre variable.

1.13 Eksempel
Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2.$$

Vi ønsker at visualisere grafen for f ved hjælp af niveauflader. Niveaufladerne fremkommer ved at løse ligningen

$$c = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2.$$

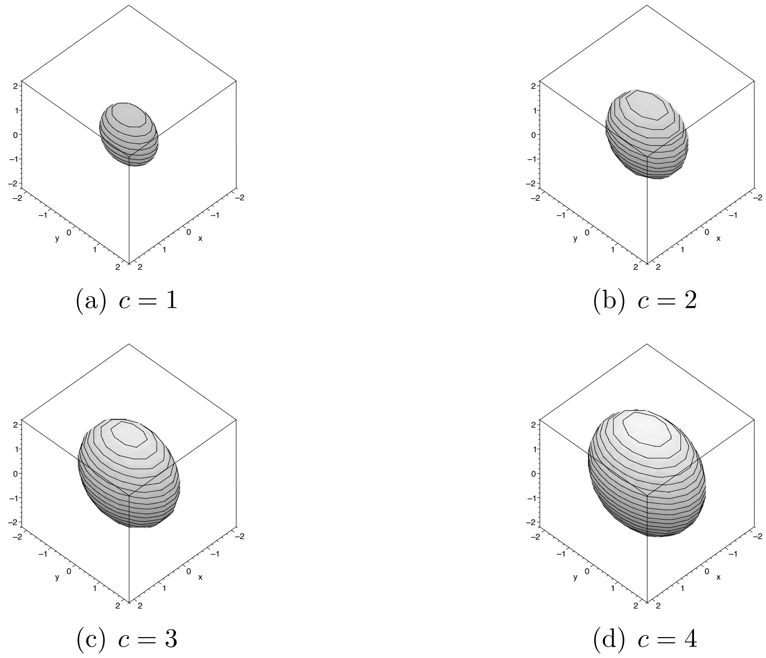
Vi ser, at hvis $c < 0$, har ligningen ingen løsning, fordi $2x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ og $z^2 \geq 0$ for alle x, y og z. Hvis $c = 0$, er den eneste løsning $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, og for $c > 0$ beskriver ligningen $c = 2x^2 + y^2 + z^2$ en ellipsoide. Se figur 1.17 for niveaufladerne $c = 1$, $c = 2$, $c = 3$ og $c = 4$. ♣

1.14 Eksempel
Lad g være funktionen givet ved

$$g(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Niveaufladerne for g finder vi ved at løse ligningen

$$c = z + \sqrt{x^2 + y^2}.$$



(a) $c = 1$ (b) $c = 2$

(c) $c = 3$ (d) $c = 4$

Figur 1.17: Niveauflader for $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$

Dette udtryk kan omskrives således, at z bliver en funktion af x og y, det vil sige

$$z = c - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

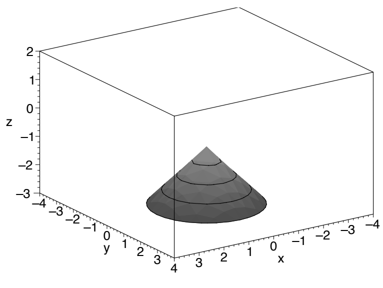
Dermed kan man se, at niveaufladerne er cirkulære kegler med toppunkt i $(0, 0, c)$. Disse er skitseret i figur 1.18 ♣

1.4 Andre koordinatsystemer

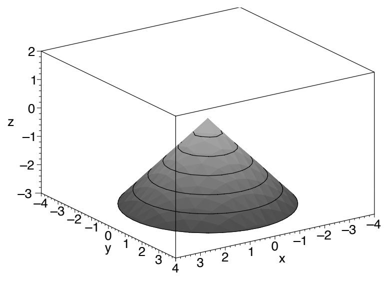
1.4.1 Polære koordinater

Når vi skal angive positionen til et punkt i planen, er det mest almindelige at opgive x- og y-koordinaten som vist i figur 1.19. x og y kaldes *de kartesiske koordinater* til punktet. I en del sammenhænge er det imidlertid lettere og mere nyttigt at bruge *polære koordinater* (r, θ) som vist i figur 1.19. Her betegner r afstanden fra punktet til origo, mens θ er vinklen mellem vektoren $\overrightarrow{OP}$ og den positive del af x-aksen. Vinklen θ er kun bestemt op til et heltalligt multiplum af 2π, men som regel vælger man θ til at ligge i intervallet $[0, 2\pi[$ eller alternativt $[-\pi, \pi[$.

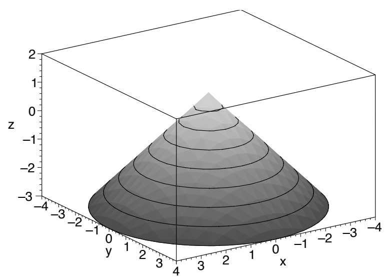
Før vi begynder at benytte polære koordinater til at studere grafer af to



(a) $c = -1$

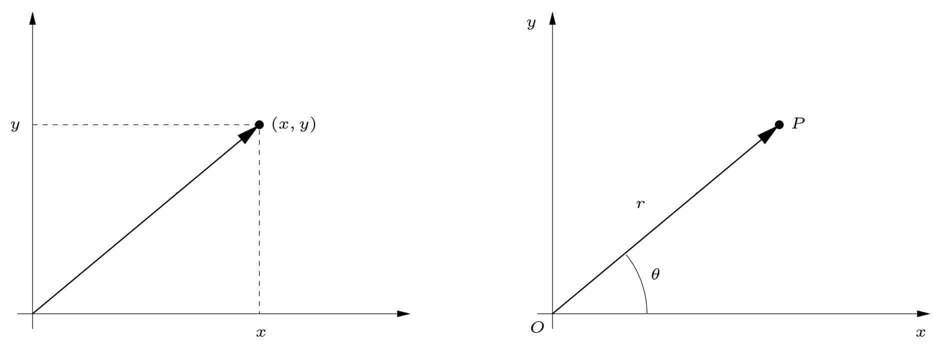


(b) $c = 0$

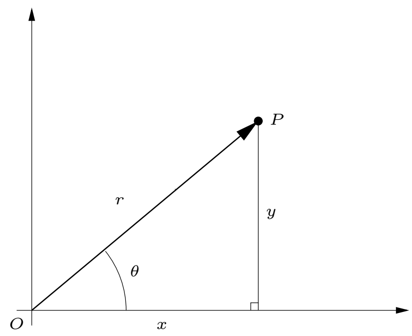


(c) $c = 1$

Figur 1.18: Niveauflader for $g(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$



Figur 1.19: Kartesiske- og polære koordinater



Figur 1.20: Omregning mellem kartesiske og polære koordinater

variable, skal vi se på, hvordan man udtrykker et punkt givet i kartesiske koordinater i polære koordinater, og omvendt.

Grundlaget for omregningen er elementær trigonometri. Se på den retvinklede trekant i figur 1.20. Kateterne har længde x og y, hypotenusen har længde r, og vinklen i origo er θ. For at finde de polære koordinater for punktet (x, y) udregner vi først

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Derefter udregner vi

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

Der er to vinkler i første omløb med samme sinus, men ved at se på hvilken kvadrant punktet (x, y) ligger i, er det ikke vanskeligt at vælge den rigtige vinkel.

Sommetider må vi også gå den anden vej – at vi kender de polære koordinater r og θ, og ønsker at finde de kartesiske koordinater x og y. Dette er lettere – vi observerer bare at

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

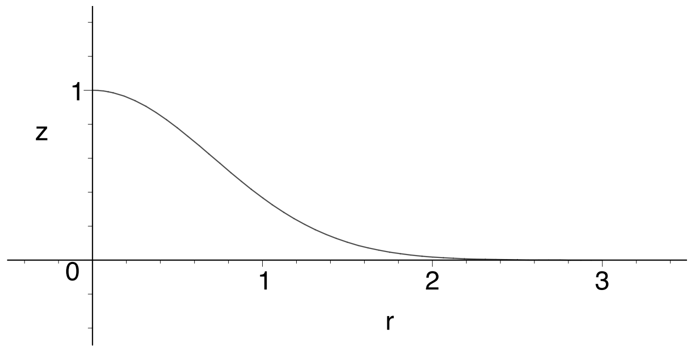
1.15 Eksempel

Find de polære koordinater til punktet med kartesiske koordinater $(-6, 2\sqrt{3}\,)$. Vi udregner afstanden fra punktet til origo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (2\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

For at bestemme vinklen θ kan vi for eksempel udregne sinus:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\,.$$



Figur 1.21: Funktionen $z = e^{-r^2}$

Der findes to vinkler i første omløb med $\sin\theta = \frac{1}{2}$, nemlig $\theta = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{5\pi}{6}$. Eftersom vores punkt $(-6, 2\sqrt{3}\,)$ ligger i anden kvadrant, må vi have $\theta = \frac{5\pi}{6}$. De polære koordinater til $(-6, 2\sqrt{3}\,)$ bliver dermed $r = 4\sqrt{3}\,,\ \theta = \frac{5\pi}{6}$. ♣

Da vi kan angive punkter i planen ved hjælp af polære koordinater (r, θ) i stedet for kartesiske koordinater (x, y), kan vi også beskrive funktioner af to variable ved hjælp af polære koordinater

$$z = g(r, \theta)$$

i stedet for kartesiske

$$z = f(x, y)$$

Dette gør man ved at sætte $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ofte kan det være nyttigt at omskrive en funktion til polære koordinater for at få et bedre indtryk af grafen.

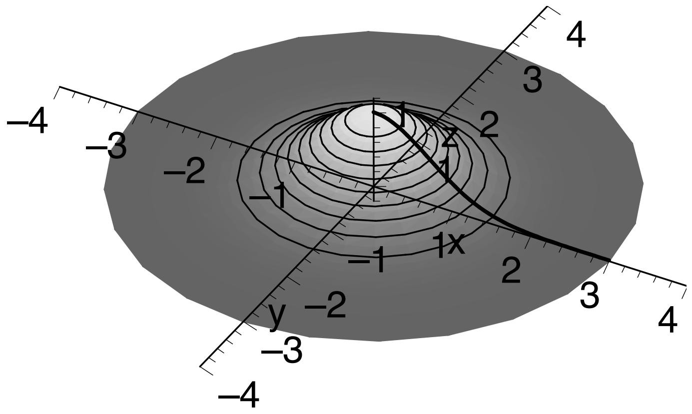
1.16 Eksempel
Hvis vi omskriver $z = e^{-(x^2+y^2)}$ til polære koordinater, får vi $z = e^{-r^2}$. Tegner vi $z = e^{-r^2}$ som en funktion af én variabel, får vi grafen i figur 1.21. Grafen for funktionen $z = e^{-(x^2+y^2)}$ får vi ved at rotere denne graf omkring z-aksen (se figur 1.22). ♣

Vi tager endnu et eksempel med:

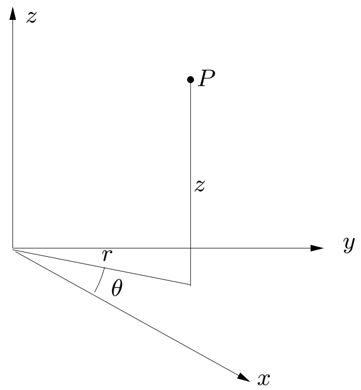
1.17 Eksempel
Omskriver vi funktionen $z = x^2 - y^2$ til polære koordinater, får vi

$$z = x^2 - y^2 = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta\,.$$

Det betyder, at hvis vi holder vinklen θ konstant og varierer afstanden r, så følger z en parabelbue $z = r^2\cos 2\theta$. Fortegnet for $\cos 2\theta$ afgør om parablen



Figur 1.22: Funktionen $z = e^{-r^2}$ roteret om z-aksen



Figur 1.23: Cylinderkoordinater

vokser opad eller nedad når r øges, og størrelsen på $|\cos 2\theta|$ afgør hvor hurtig denne vækst er. Forsøg at lave en skitse af grafen ud fra den information, du nu har. ♣

1.4.2 Cylinderkoordinater

Også for funktioner af tre variable kan det ofte svare sig at omskrive til andre koordinatsystemer. Vi vil hurtigt berøre to sådanne koordinatsystemer – cylinderkoordinater og kuglekoordinater. Figur 1.23 viser grundidéen for *cylinderkoordinater*; vi angiver positionen til punktet P ved hjælp af de tre størrelser r, θ og z. Cylinderkoordinater er nært beslægtet med polære koordinater – vi har bare hægtet en tredje koordinat z på.

1.18 Eksempel
Skriv funktionen

$$u = f(x, y, z) = (x^2 + y^2)e^{-z}$$

ved hjælp af cylinderkoordinater.

Da $x^2 + y^2 = r^2$, har vi

$$u = r^2 e^{-z}$$

♣

1.19 Eksempel
Beskriv niveaufladerne for

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z}$$

ved hjælp af cylinderkoordinater.

Igen kan vi indsætte $x^2 + y^2 = r^2$. Dette giver

$$u = f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z} = \frac{r^2}{z}$$

Niveaufladen $c = u$ bliver dermed givet af ligningen

$$c = \frac{r^2}{z}$$

Dette udtryk kan omskrives til formen

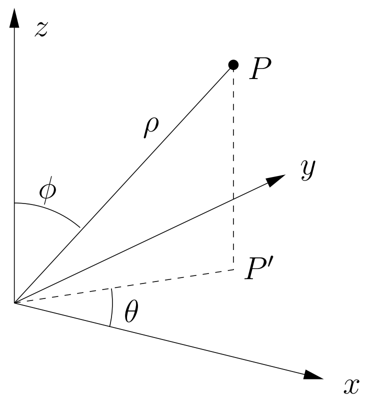
$$z = \frac{r^2}{c}$$

Kigger vi på snittet af denne flade med planen $y = 0$, får vi ligningen $z = \frac{1}{c}x^2$, som i xz-planen beskriver en parabel. Fladen $z = \frac{r^2}{c}$ findes ved at rotere ovennævnte parabel om z-aksen, og den kaldes derfor en omdrejningsparaboloide.

♣

1.4.3 Kuglekoordinater

I *kuglekoordinater* beskrives positionen for et punkt $P(x, y, z)$ ved hjælp af en længde ρ og to vinkler θ og ϕ. Figur 1.24 viser idéen – ρ er afstanden fra P til origo, ϕ er vinklen mellem z-aksen og vektoren $\overrightarrow{OP}$, og θ er den samme vinkel som for cylinderkoordinaterne, nemlig vinklen mellem x-aksen og projektionen $\overrightarrow{OP'}$ af $\overrightarrow{OP}$ ned på xy-planen. Vinklen ϕ ligger mellem 0 og



Figur 1.24: Kuglekoordinater

π, mens θ ligger mellem 0 og 2π. For at udtrykke x, y og z ved hjælp af ρ, ϕ og θ, observerer vi først at

$$z = \rho \cos \phi$$

Vi ser også at $|\overrightarrow{OP'}| = |\overrightarrow{OP}| \cdot \sin \phi = \rho \sin \phi$. Dette betyder, at

$$\begin{aligned} x &= |\overrightarrow{OP'}| \cos \theta = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y &= |\overrightarrow{OP'}| \sin \theta = \rho \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

Lad os se, hvordan disse formler bruges i praksis:

1.20 Eksempel
Hvilken type flade beskriver ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

hvor $a > 0$ er en konstant?

For at svare på dette spørsmål forsøger vi at sætte formlerne for kuglekoordinater ind i ligningen. Dette giver

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = a^2.$$

Vi reducerer lidt på udtrykket i midten og får

$$\begin{aligned} &\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi \\ &\qquad = \rho^2 \left(\left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right) \\ &\qquad\qquad = \rho^2 \left(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right) = \rho^2. \end{aligned}$$

Ligningen kan altså reduceres til

$$\rho^2 = a^2.$$

Men da både a og ρ er større end eller lig med 0, beskriver $\rho = a$ fladen. Fladen er altså en kugle med radius a. ♣

1.21 Eksempel
Omskriv

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

til kuglekoordinater. Vi ser at

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho \cos\theta \sin\phi)^2 + (\rho \sin\theta \sin\phi)^2 = \rho^2 \sin^2\phi \\ z^2 &= \rho^2 \cos^2\phi \end{aligned}$$

så

$$u = \rho^2 \sin^2\phi - \rho^2 \cos^2\phi = -\rho^2 \cos 2\phi\,.$$

Dette betyder, at u er uafhængig af vinklen θ. Holder vi vinklen ϕ konstant, vokser eller aftager u proportionalt med ρ^2. Om u er positiv eller negativ afhænger af størrelsen på ϕ. Vi ser, at u er positiv for $\phi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ og negativ for $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. ♣

Til sidst tager vi et eksempel, hvor vi beskriver en niveauflade ved hjælp af kuglekoordinater:

1.22 *Eksempel
Lad funktionen f være givet ved

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{x^2}.$$

Definitionsmængden for f er alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, hvor både $x \neq 0$ og $z \neq 0$. Vi omskriver funktionsudtrykket til sfæriske koordinater:

$$g(\rho, \theta, \phi) = \cos^2\theta \tan^2\phi + \tan^2\theta.$$

Bemærk, at ρ ikke indgår i dette funktionsudtryk. Det betyder, at for alle punkter på en ret linje i $\mathbb{R}^3$, som går gennem origo, er funktionsværdien den samme.

Vi ønsker at beskrive niveaufladerne for f. Derfor ser vi på ligningen

$$\cos^2\theta \tan^2\phi + \tan^2\theta = c.$$

Begge led på venstre side er større end eller lig 0. Derfor har ligningen ingen løsning for $c < 0$. Dersom $c = 0$ må både $\cos\theta \tan\phi = 0$ og $\tan\theta = 0$. Men vi ser da, at $\tan\theta = 0$ medfører at $\cos\theta = \pm 1$ og da må $\tan\phi = 0$. Dermed er også $\sin\phi = 0$. Men dette er umuligt, da et punkt med $x = \rho\cos\theta\sin\phi = 0$ ikke ligger i definitionsmængden for f. Vi kan derfor antage at $c > 0$.

Husk at (ρ, θ, ϕ) er sfæriske koordinater. Som nævnt indgår ρ ikke i ligningen, og derfor vil løsningen bestå af en mængde linjer gennem origo. For at tegne niveaufladerne ser vi derfor først på, hvordan de snitter en kugle med centrum i origo. Vi sætter derfor ρ til at være en konstant, for eksempel $\rho = 1$.

For at forenkle situationen ser vi nu lidt på symmetrien i udtrykket. Dersom vi har en løsning og lader θ øges med π, får vi igen en løsning. Ligeledes hvis vi erstatter ϕ med $\pi - \phi$, har vi atter en løsning. Det sidste udsagn betyder, at niveaufladen er symmetrisk om xy-planen, mens det første siger, at $180°$ omkring z-aksen sender niveaufladen på sig selv. Derfor er det tilstrækkeligt at se på θ mellem $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ og ϕ mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, resten af løsningerne får vi frem ved at bruge symmetrierne.

Lad os først se på, hvad der sker, når c er lille. Vi vil benytte, at der for små vinkler α gælder

$$\begin{aligned}\sin\alpha &\approx \alpha\\ \cos\alpha &\approx 1\\ \tan\alpha &\approx \alpha\end{aligned}$$

Dette er ikke godt nok, hvis vi eksakt skal finde ud af, hvordan niveaufladerne ser ud, men det er godt nok til at skitsere niveaufladerne.

For at tydeliggøre diskussionen af ligningen skriver vi den lidt om:

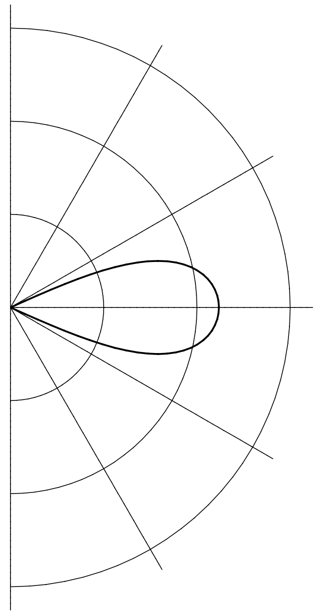
$$(\cos\theta\tan\phi)^2 + (\tan\theta)^2 = c$$

Pointen er, at dette ligner ligningen for en cirkel. Altså $a^2 + b^2 = c$ med $a = \cos\theta\tan\phi$ og $b = \tan\theta$. Vi har at $\tan^2\theta \le c$, dermed er θ en lille vinkel. Det følger, at $\cos\theta \approx 1$ og dermed at $\tan^2\phi \approx (\cos\theta\tan\phi)^2 \le c$, så også ϕ er lille.

Som en tilnærmelse kan vi nu bruge ligningen

$$\phi^2 + \theta^2 = c \quad \text{hvor } \phi \ge 0$$

Vi sætter derfor $\phi = \sqrt{c}\sin t$ og $\theta = \sqrt{c}\cos t$, hvor t går fra 0 til π. For at tegne



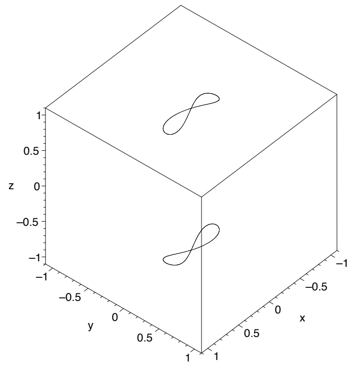
Figur 1.25: Tilnærmelse til en del af kurven $\phi^2 + \theta^2 = 0.2$, $\rho = 1$

denne kurve (med $\rho = 1$) indsætter vi i ligningene for sfæriske koordinater.

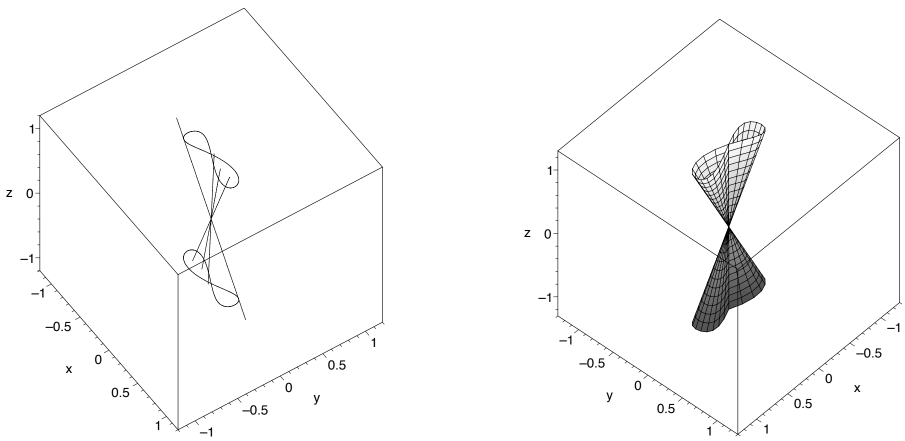
$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta \sin\phi \approx \phi = \sqrt{c}\sin t \\
y &= \rho \sin\theta \sin\phi \approx \theta\phi = c\cos t \sin t = \frac{1}{2}c\sin(2t) \\
z &= \rho\cos\phi \approx 1
\end{aligned}$$

Dette bliver en lille løkke, som slynger sig ud fra nordpolen. Se figur 1.25 for en skitse når $c = 0.2$.

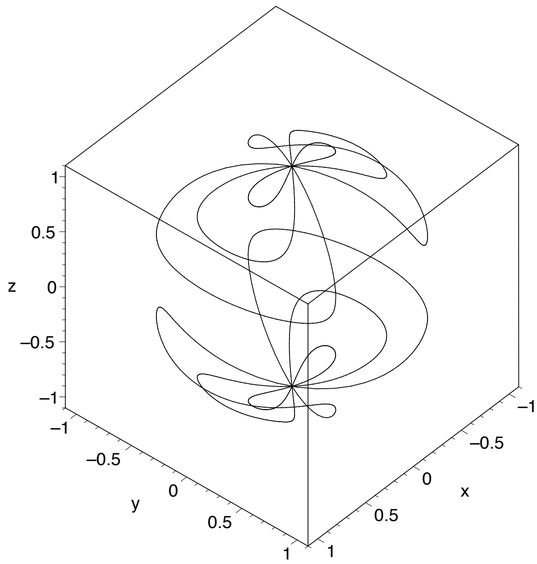
Vi bruger nu symmetrierne til at skitsere hele løsningsmængden for ligningen på sfæren $\rho = 1$. Se figur 1.26. For at tegne hele niveaufladen trækker vi rette linjer fra kurven og gennem origo. (Figur 1.27). Når c øges, vil snittet mellem niveaufladerne og sfæren $\rho = 1$ ligeledes være ottetalsformede kurver, størrelsen vil øges og formen vil deformeres. Se figur 1.28. ♣



Figur 1.26: Hele kurven $\phi^2 + \theta^2 = 0.2$, $\rho = 1$



Figur 1.27: Tegning af niveauflade for $c = 0.2$



Figur 1.28: Snit mellem sfæren $\rho = 1$ og niveaufladerne $c = 0.2$, $c = 1$ og $c = 4$.

1.4.4 Formelsamling for koordinatsystemer

Her er en formelsamling for de forskellige koordinatsystemer vi nu har behandlet.

Polære koordinater
Polære koordinater (r, θ) for planen er givet ved

$$x = r\cos\theta \tag{1.1}$$
$$y = r\sin\theta \tag{1.2}$$

Cylinderkoordinater
Cylinderkoordinater (r, θ, z) for rummet er givet ved

$$x = r\cos\theta \tag{1.3}$$
$$y = r\sin\theta \tag{1.4}$$
$$z = z \tag{1.5}$$

Kuglekoordinater[2]
Kuglekoordinater (ρ, θ, ϕ) for rummet er givet ved

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \tag{1.6}$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\phi \tag{1.7}$$
$$z = \rho\cos\phi \tag{1.8}$$

[2] I litteraturen er der ofte byttet om på betydningen af θ og ϕ. Konventionen her er i overensstemmelse med den, der benyttes i Maples *plot3d*.

1.5 Opgaver

Opgave 1.1
Find definitionsmængden for funktionen.

a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+4y^2}$
b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$
c) $f(x, y) = \ln(x + y)$
d) $f(x, y) = \tan(x - y)$
e) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-25}$

Opgave 1.2
Tegn konturer for funktionen. Skitser derefter grafen.

a) $f(x, y) = x$
b) $f(x, y) = \cos y$
c) $f(x, y) = y + 2e^x$
d) $f(x, y) = \frac{2x-3}{x^2+y^2+1}$
e) $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$
f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opgave 1.3
Find niveaukurverne for funktionen. Tegn nok af dem til, at du kan danne dig et billede af funktionsgrafen.

a) $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$
b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2-y^2}$
c) $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$
d) $f(x, y) = e^{x^2-y}$
e) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Opgave 1.4
Skitser grafen for funktionen

a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2$
b) $f(x, y) = y^2 - x$
c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
d) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$
e) $f(x, y) = \ln(xy)$
f) $f(x, y) = \sqrt{4xy - 3y^2}$

Opgave 1.5
Tegn niveauflader for funktionerne.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
b) $f(x, y, z) = 2x + y - z$
c) $f(x, y, z) = xy + xz$
d) $f(x, y, z) = \frac{x^2-y}{z^2}$
e) $f(x, y, z) = e^{xyz}$
f) $f(x, y, z) = x^2 - 2(x - y + z)y + z^2$

Opgave 1.6
Omskriv funktionen til polære koordinater. Skitser grafen.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$
d) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$
e) $f(x, y) = e^{xy}$
f) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

Opgave 1.7
Omskriv funktionen til både cylinder- og kuglekoordinater. Afgør hvad du synes er mest informativt i hvert enkelt tilfælde.

a) $f(x,y,z) = (x^2+y^2)e^{-z^2}$

b) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

c) $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$

d) $f(x,y,z) = \frac{x^2-y^2}{z}$

e) $f(x,y,z) = z \cdot \arctan(\frac{y}{x})$

f) $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

Opgave 1.8
Brug Maple eller et andet egnet it-værktøj til at tegne følgende grafer:

a) $f(x,y) = \frac{e^x}{1+y^2}$ for $-2 \leq x \leq 2$ og $-2 \leq y \leq 2$.

b) $f(x,y) = 5x^2+y^3-4y$ for $-2 \leq x \leq 2$ og $-3 \leq y \leq 3$.

c) $f(x,y) = x^5-10x^3y^2+5xy^4$ for $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.

Opgave 1.9
Brug Maple eller et andet egnet it-værktøj til at tegne niveauflader for følgende funktioner:

a) $f(x,y,z) = x+y^2+z^3$ for $c=-1$, $c=0$ og $c=1$.

b) $f(x,y,z) = xyz$ for $c=-10$, $c=0$, $c=10$ og $c=100$.

c) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$ for $c=0$ og $c=1$.

d) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2-z^2)+1$ for $c=0$, $c=\frac{1}{2}$, $c=1$ og $c=2$.

Kapitel 2

Kontinuitet og differentiation

Målet med dette kapitel er at etablere et solidt fundament for at kunne drøfte funktioner af flere variable. Fra en teoretisk synsvinkel er et hovedproblem, at funktionsbegrebet favner meget vidt. Hvis vi ved, at f er en reel funktion fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$, ved vi ikke andet, end at for ethvert punkt (x, y) så er $f(x, y)$ et reelt tal. Specielt siger definitionen intet om, at $f(1, 2)$ skal være i nærheden af 3, selv om både $f(1.001, 2)$ og $f(1, 1.9999)$ skulle vise sig at være 3. Derfor er en sky af punkter en god beskrivelse af grafen for en tilfældig valgt funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hvis grafen alligevel skulle vise sig at være en glat flade, må dette siges at være et mirakuløst sammentræf.

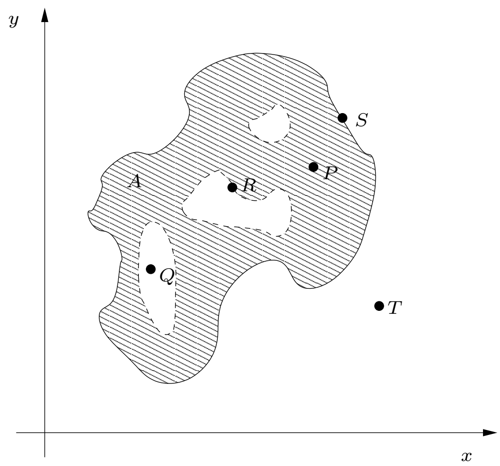
Som du måske har bemærket, er de fleste af de funktioner, vi møder i praksis, ikke omfattet af en sådan vilkårlighed. Som matematiker bør man derfor stille sig spørgsmålet **Kan vi finde et anvendeligt kriterium for at en funktion skal have kvalitative egenskaber, der stemmer overens med vores intuition?**

Vores tilgang til dette spørgsmål vil være at formulere sådanne kriterier og derefter undersøge hvilke kvalitative egenskaber, der følger. Hvorvidt kriterierne er anvendelige, vil vi se ved at forsøge at bruge dem i eksempler, opgaver og anvendelser. Intuitionen vil helt sikkert møde udfordringer undervejs og gradvis ændre og udvikle sig i mødet med teorien for funktioner af flere variable.

2.1 Topologiske begreber

Vi vil her indføre nogle begreber, som omhandler mængder $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Det er vigtigt, at du får en intuitiv forståelse af disse begreber, fordi du vil møde dem ofte, både i dette hæfte og i senere kurser.

En mængde A i $\mathbb{R}^n$ er en samling af punkter, og kan for så vidt se ganske



Figur 2.1: En mængde A og nogle punkter

vilkårlig ud. Men de fleste mængder, vi vil møde i praksis, har gode beskrivelser, ofte givet ved uligheder.

Randen af en mængde A er de punkter i $\mathbb{R}^n$ som skiller A fra det, der ligger udenfor. Se på figur 2.1. Randen af A er en mængde, og vi skriver ∂A for denne. Et punkt **a** kaldes et **randpunkt** for A, såfremt det ligger på randen af A. Bemærk, at a ikke nødvendigvis tilhører A.

Det indre af A er de punkter i A, som ikke ligger på randen. Det er altså de punkter i A som er fuldstændigt omsluttet af andre punkter i A. Et punkt **a** kaldes et **indre punkt** for A, såfremt det ligger i det indre af A.

Afslutningen af A er foreningen af randen for A og det indre af A. Vi indfører notationen $\overline{A}$ for afslutningen af A, og vi kan skrive $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Disse definitioner er ikke meningsfulde, når vi taler om helt generelle mængder, men de er udmærkede som en introduktion til disse topologiske begreber. De eksakte definitioner finder du i afsnit 2.1.1.

Lad os se på nogle eksempler.

2.1 Eksempel

Figur 2.1 viser et skraveret område, mængden A. Vi bruger konventionen, at en heltrukket linje angiver punkter, som er med i mængden, mens en stiplet linje ikke er med i mængden.

Vi ønsker nu at karakterisere punkterne P, Q, R, S og T.

> Punktet P ligger i mængden A. Notationen for dette er $P \in A$. Vi ser at P ikke er et randpunkt, derfor må det være et indre punkt for A.
>
> Punktet Q ligger ikke i mængden A. Det er heller ikke et randpunkt,

da alle andre punkter tilstrækkelig nær Q heller ikke ligger i A. Derfor er Q ikke med i afslutningen af A. Vi kan derfor skrive $Q \notin \overline{A}$.

Punktet R ligger ikke i mængden A. Linjen er stiplet. Derimod ligger det på randen af A. Da R ligger på randen, er det også et punkt i afslutningen. Vi kan skrive $R \notin A$, $R \in \partial A$ og $R \in \overline{A}$.

Punktet S ligger i mængden A. Linjen er heltrukket. Det er også et randpunkt, da der findes punkter vilkårligt nær S, som ikke er i A. S er også et punkt i afslutningen af A, da det allerede ligger i A. Vi har $S \in A$, $S \in \partial A$ og $S \in \overline{A}$.

Punktet T ligger hverken i A eller på randen af A, og følgelig ligger det heller ikke i afslutningen. Vi har da $T \notin \overline{A}$.

♣

Lad os se på endnu et eksempel, men i dette tilfælde med en mere konkret angivet mængde.

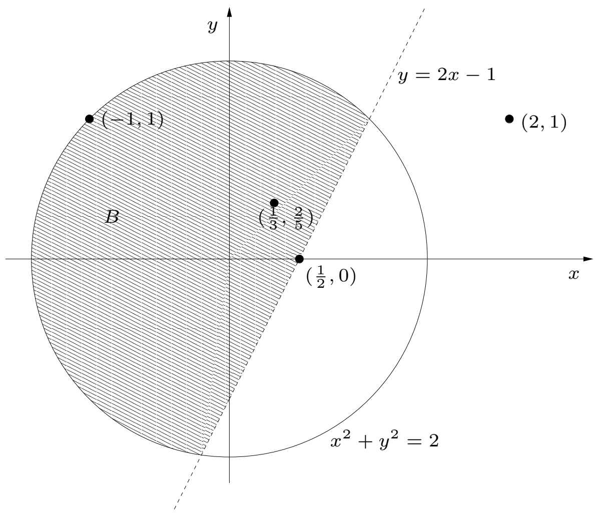
2.2 Eksempel
Lad B være mængden af punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$, som opfylder de to uligheder

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 \leq 2 \\ &y > 2x - 1. \end{aligned}$$

Den er tegnet på næste side. Lad os afgøre, hvordan punkterne $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-1, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ og $(2, 1)$ forholder sig til mængden B. Først skitserer vi mængden. Vi ser, at den første ulighed angiver, at punkterne i B ligger på eller indenfor cirkelen med radius $\sqrt{2}$ og centrum i origo. Den anden ulighed angiver, at punkterne i B ligger over og til venstre for linjen $y = 2x - 1$. Dette giver figuren 2.2. Vi ser at $(-1, 1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}) \in B$, da disse punkter opfylder begge uligheder. Punktet $(\frac{1}{2}, 0) \notin B$ da $(\frac{1}{2}, 0)$ ikke oppfylder den anden ulighed, mens $(2, 1) \notin B$, fordi punktet ikke oppfylder nogen af ulighederne. Videre ser vi, at $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ ligger i det indre af B, mens punkterne $(-1, 1)$ og $(\frac{1}{2}, 0)$ er randpunkter for B. ♣

En **åben mængde** er en mængde, som ikke indeholder nogen af sine randpunkter. Sagt på en anden måde er A åben hvis og kun hvis det indre af A er hele mængden.

En **lukket mængde** er en mængde, som indeholder alle sine randpunkter. Det vil sige, at A er lukket hvis og kun hvis $A = \overline{A}$.



Figur 2.2: Mængden B

2.3 Eksempel
Lad os afgøre om mængden A fra eksempel 2.1 og mængden B fra eksempel 2.2 er åbne eller lukkede.

Vi ser først på A. Mængden er ikke åben, da punktet S både ligger på randen og i A. Den er heller ikke lukket, da R er et eksempel på et punkt på randen, som ikke er i A.

Mængden B er på samme måde hverken åben eller lukket[1]. Vi ser, at B ikke er åben, da $(-1, 1) \in B$ og $(-1, 1) \in \partial B$, og at B ikke er lukket, da $(\frac{1}{2}, 0) \in \partial B$, men $(\frac{1}{2}, 0) \notin B$. ♣

Vi tager også nogle eksempler med på mængder, som er lukkede eller åbne:

2.4 Eksempel
Vi betragter følgende mængder og ønsker at afgøre, om de er åbne eller lukkede:

a) Lad $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$.

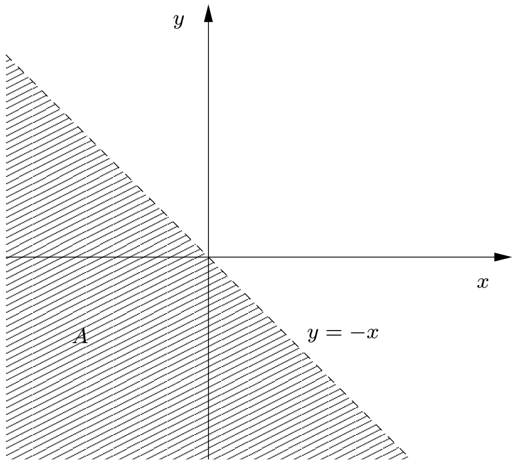
b) Lad $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1\}$.

c) Lad C være det lukkede interval $[-1, 4]$ på $\mathbb{R}$.

d) Lad $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

e) Lad $E = \mathbb{R}^4$.

[1]Så mængder er ikke som døre, der jo enten er åbne eller lukkede!



Figur 2.3: Mængden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < 0\}$

f) Lad $F = \{(1, \pi)\}$.

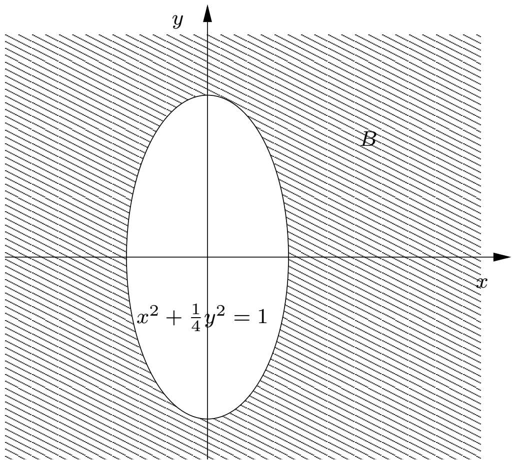
a) Mængden A er punkterne, som ligger nedenfor og til venstre for linjen $y = -x$. Se figur 2.3. Vi ser, at randen af A er punkterne, som ligger på denne linje. Det vil sige, at $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$. Men ingen af disse punkter ligger i mængden A. Følgelig er A en åben mængde.

b) B er mængden af alle punkter i planen, som ligger på eller udenfor ellipsen $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$. Se figur 2.4. Randen af B er $\{(x, y) \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\}$, og disse punkter er med i B. Derfor er B lukket.

c) C er intervallet $[-1, 4]$, og randen består af endepunkterne -1 og 4. Disse er med i intervallet, per definition. Derfor er C en lukket mængde. Dette gælder generelt: Alle lukkede intervaller er lukkede mængder.

d) Mængden D består af alle punkter i $\mathbb{R}^3$ undtagen origo. Randen består derfor af netop punktet origo: $\partial D = \{(0, 0, 0)\}$, og dette punkt ligger ikke i D. Derfor er D en åben mængde.

e) Mængden $E = \mathbb{R}^4$ har ingen rand, det vil sige, at $\partial E = \emptyset$, den tomme mængde. Og da randen ikke har nogen punkter, er det tautologisk sandt, at ingen af randpunkterne ligger i E. Dermed er E åben. Men den tomme mængde er også indeholdt i enhver anden mængde. Derfor er $\partial E = \emptyset \subseteq E$, altså er E også en lukket mængde.



Figur 2.4: Mængden $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1\}$

f) Randen af mængden $F = \{(1, \pi)\}$ består af punktet $(1, \pi)$, og derfor er $\partial F \subseteq F$. Det vil sige, at F er lukket. ♣

En mængde kaldes **begrænset**, hvis vi kan omslutte hele mængden med en kugle (eller cirkel), som har centrum i origo. Det vil sige, at A er begrænset, hvis der findes en radius R, således at $\|\mathbf{a}\| < R$ for alle $\mathbf{a}$ i A. En mængde, som ikke er begrænset, kaldes **ubegrænset**.

2.5 Eksempel
Vi betragter følgende mængder og ønsker at afgøre, om de er begrænsede eller ej:

a) Lad $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 3 \text{ og } 3 \leq y \leq 5\}$.

b) Lad $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$.

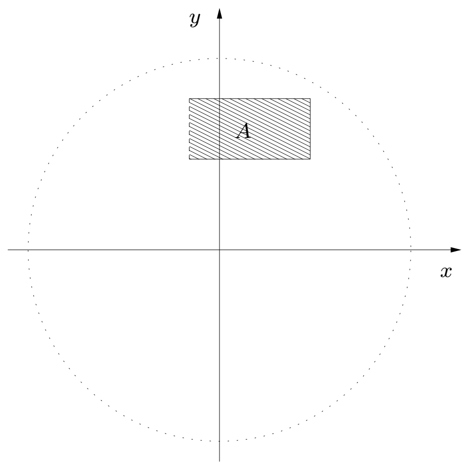
c) Lad $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 2 \text{ og } x \geq -1\}$.

d) Lad $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 4\}$.

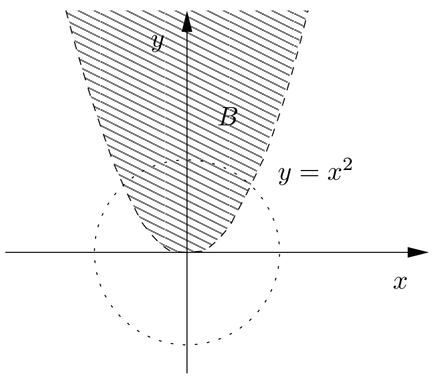
e) Lad $E = \mathbb{R}$.

a) Vi skitserer mængden, figur 2.5, og ser at den prikkede cirkel med centrum i origo omslutter hele mængden. Derfor er A begrænset.

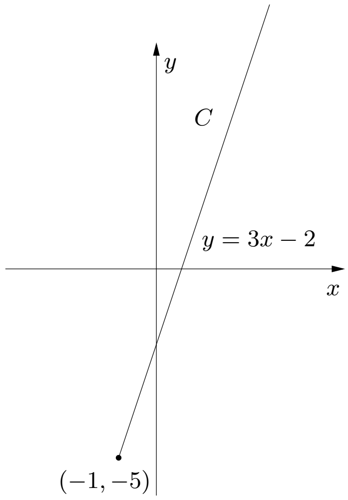
b) Mængden B består af alle punkter over parablen $y = x^2$. Se figur 2.6. Vi ser, at uanset hvor stor en cirkel vi tegner med centrum i origo, vil mængden B have punkter, som ligger udenfor cirkelen. Derfor er B ubegrænset.



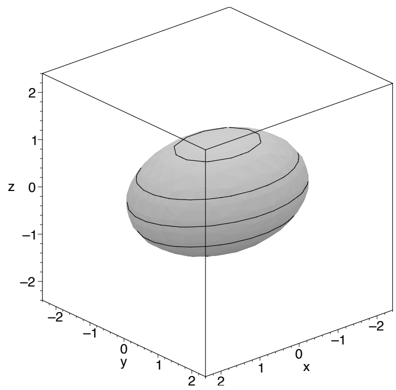
Figur 2.5: Mængden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x \leq 3 \text{ og } 3 \leq y \leq 5\}$



Figur 2.6: Mængden $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$



Figur 2.7: Mængden $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x - 2 \text{ og } x \geq -1\}$



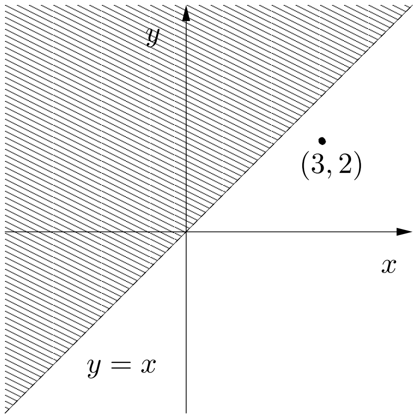
Figur 2.8: Ellipsoiden som afgrænser mængden D.

c) Mængden C er en stråle ud fra punktet $(-1, -5)$, se figur 2.7, og denne stråle har punkter, som befinder sig vilkårlig langt fra origo. C er derfor en ubegrænset mængde.

d) D er de punkter, som ligger på og indenfor ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2 = 4$. Se figur 2.8. Ingen af punkterne har afstand større end 2 til origo. Derfor er D begrænset.

e) $E = \mathbb{R}$ er en ubegrænset mængde, da der findes vilkårligt store tal. Husk at afstanden til origo, punktet 0, er den numeriske værdi af tallet. ♣

Et punkt **a** i en mængde A siges at være et **isoleret punkt** for mængden



Figur 2.9: Mængden $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \cup \{(3, 2)\}$

A, såfremt der ikke findes andre punkter i A vilkårligt nær $\mathbf{a}$. Sagt på en anden måde er $\mathbf{a} \in A$ et isoleret punkt, hvis $\mathbf{a}$ ikke ligger i afslutningen af $A \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Et punkt $\mathbf{a}$ kaldes et **fortætningspunkt** for mængden A, såfremt $\mathbf{a}$ ligger i $\overline{A}$ og ikke er et isoleret punkt.

Lad os se på to eksempler på mængder, som har isolerede punkter.

2.6 Eksempel
Lad A være mængden givet ved

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \cup \{(3, 2)\}$$

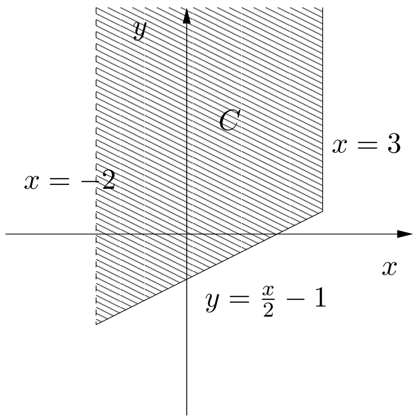
Se figur 2.9 for en skitse af mængden. Bemærk at A både består af punkterne med $x < y$ og punktet $(3, 2)$. Vi ser, at $(3, 2)$ ikke ligger i nærheden af andre punkter i A, og derfor er $(3, 2)$ et isoleret punkt for A. Ingen af de andre punkter i A er isolerede.

Afslutningen af A er mængden

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \cup \{(3, 2)\}$$

Vi ser derved, at fortætningspunkterne for A er de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ med $x \leq y$. Det, vi har gjort, er at smide de isolerede punkter væk fra afslutningen $\overline{A}$. ♣

2.7 Eksempel
Lad B være mængden, som består af de to punkter $(0, 1, 2)$ og $(\pi, \ln 5, -2)$. Vi kan skrive $B = \{(0, 1, 2), (\pi, \ln 5, -2)\}$. Begge punkter i B er isolerede punkter. Videre er afslutningen af B lig B selv. Altså $\overline{B} = B$. Og når vi kasserer de isolerede punkter, får vi den tomme mængde. Følgelig har B ingen fortætningspunkter. ♣



Figur 2.10: Mængden $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$

2.8 Eksempel
Som et sidste eksempel vil vi finde fortætningspunkterne for mængden C givet ved

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$$

Vi skitserer mængden i figur 2.10. Det første, vi observerer, er, at C ikke har nogen isolerede punkter. Derfor er fortætningspunkterne lig afslutningen af C. Afslutningen finder vi ved at tage foreningsmængden af punkterne i C og punkterne på randen af C. Dette giver

$$\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\}$$

(Den eneste forskel på angivelsen af C og $\overline{C}$ er at et $<$-tegn er forandret til et $\leq$-tegn.) Fortætningspunkterne for C er derfor de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som opfylder ulighederne $-2 \leq x \leq 3$ og $y \geq \frac{x}{2} - 1$. ♣

2.1.1 *Formelle definitioner

De uformelle definitioner ovenfor skulle give en intuitiv forståelse af de forskellige begreber. Selv om det ikke er så relevant i dette kursus, vil vi nu give præcise definitioner af de samme begreber.

Vi definerer først randpunkter.

2.9 Definition
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et randpunkt for A, hvis der for ethvert $\delta > 0$ findes et $\mathbf{x} \in A$ og et $\mathbf{y} \notin A$ med

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \text{og} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \delta.$$

Bemærk, at a ikke nødvendigvis tilhører A.

Nu kan vi definere randen af en mængde som foreningen af alle randpunkter.

2.10 Definition
Randen af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er mængden af alle randpunkter. Det vil sige

$$\partial A = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \textit{ er et randpunkt for } A\}$$

Vi kan nu definere det indre af en mængde og afslutningen af en mængde.

2.11 Definition
Det indre af A er $A \setminus \partial A$. Et punkt $\mathbf{a}$ er et indre punkt *for A såfremt $\mathbf{a} \in A$ og $\mathbf{a} \notin \partial A$.*

2.12 Definition
Afslutningen af A er $A \cup \partial A$.

Åbne og lukkede mængder kan nu defineres på følgende måde.

2.13 Definition
En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er åben, *hvis A er lig det indre af A.*

2.14 Definition
En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket, *hvis $A = \overline{A}$.*

Vi har også følgende karakteristik af indre punkter

2.15 Sætning
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et indre punkt for A, hvis og kun hvis der findes et $\delta > 0$, således at alle $\mathbf{x}$ som opfylder

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$$

er med i A.

Husk, at en mængde er åben, hvis og kun hvis alle punkter $\mathbf{a} \in A$ er indre punkter for A.

Vi vil nu definere, hvad det vil sige, at en mængde er begrænset.

2.16 Definition
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi siger, at A er begrænset, *hvis der findes et positivt reelt tal, R, således at der for alle $\mathbf{a} \in A$ gælder*

$$\|\mathbf{a}\| < R$$

Isolerede punkter defineres som følger:

2.17 Definition
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et isoleret punkt for A hvis $\mathbf{a} \in A$ og der findes et $\delta > 0$ således at der for alle $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ gælder

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > \delta$$

Til slut kan vi definere akkumulationspunkter som ovenfor.

2.18 Definition
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et fortætningspunkt for A, såfremt $\mathbf{a} \in \overline{A}$ og $\mathbf{a}$ ikke er et isoleret punkt for A.

Vi har følgende karakteristik af fortætningspunkter.

2.19 Sætning
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er $\mathbf{a}$ et fortætningspunkt for A, hvis og kun hvis der for ethvert $\delta > 0$ findes et $\mathbf{x} \in A$, således at

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$$

2.2 Grænseværdier

Grænseværdier er et vigtigt begreb i studiet af funktioner. I teorien for én variabel brugte vi grænseværdibegrebet til at definere både kontinuitet og differentialkvotient. Vi skal nu definere grænseværdier for funktioner af flere variable. Senere i kapitlet skal vi se, hvordan grænseværdier kan bruges til at forstå kontinuitet og differentiation i tilfældet med to eller flere variable. Grænseværdibegrebet er imidlertid også vigtigt i sig selv.

Intuitivt betyder $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ at funktionsværdierne $f(\mathbf{x})$ nærmer sig L når $\mathbf{x}$ nærmer sig $\mathbf{a}$. For at skrive en præcis definition af grænseværdier må vi afklare et par problemer.

i) Funktionen f har en definitionsmængde, D_f; hvorledes skal punktet $\mathbf{a}$ forholde sig til D_f for at begrebet grænseværdi bliver meningsfuldt?

ii) Hvad er den præcise betydning af “at nærme sig”

For at illustrere det første problem vil vi se på et eksempel:

2.20 Eksempel
Definer funktionen f ved

$$f(x,y) = \sqrt{x+1} + \frac{\sin y}{y}$$

Bemærk, at definitionsmængden D_f er

$$D_f = \{(x,y) \quad | \quad x \geq -1 \text{ og } y \neq 0\}$$

Er der nogen af nedenstående forslag til grænseværdier, du umiddelbart kan se, ikke er meningsfyldte?

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)} f(x,y)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-5,1)} f(x,y)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-1)} f(x,y)$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Pointen er, om punktet vi nærmer os, ligger i det indre af eller på randen af definitionsmængden for funktionen. For eksempel ligger $(4,2)$ i det indre af D_f, punkterne $(-1,-1)$ og $(0,0)$ ligger på randen for D_f, mens $(-5,1)$ ligger adskilt fra D_f. Rent umiddelbart kan vi derfor sige, at grænseværdien b) ikke eksisterer, fordi når (x,y) er tæt nok på $(-5,1)$ vil $f(x,y)$ ikke være defineret. ♣

Moralen i ovenstående eksempel er, at hvis det skal give mening at spørge om, hvad grænseværdien $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ er, så skal punktet $\mathbf{a}$ ligge i afslutningen af definitionsmængden for f.

Hvad så med isolerede punkter? Giver det mening at tale om grænseværdien i $\mathbf{a}$, såfremt $\mathbf{a}$ er et isoleret punkt for definitionsmængden for f. Lad os se på et eksempel.

2.21 Eksempel
Definer funktionen f ved

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{hvis } x > 0 \\ 4 & \text{hvis } (x,y) = (-1,3) \end{cases}$$

Spørgsmålet er, om $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} f(x,y)$ er meningsfuld. Bemærk, at definitionsmængden for f er $D_f = \{(x,y) \quad | \quad x > 0\} \cup \{(-1,3)\}$ og at $(-1,3)$ er et isoleret punkt for denne mængde. Det betyder, at når (x, y) nærmer sig $(-1, 3)$ vil $f(x, y)$ igen blive udefineret. Derfor siger vi, at grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(-1,3)} f(x, y)$ ikke eksisterer. ♣

Lærdommen fra dette eksempel er, at grænseværdien $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ ikke på fornuftig vis kan tillægges en mening, hvis $\mathbf{a}$ er et isoleret punkt for D_f. Derfor definerer vi kun grænseværdien i $\mathbf{a}$, når $\mathbf{a}$ er et akkumulationspunkt for definitionsmængden for f.

Såvidt problem (i). Problem (ii), at beskrive præcist, hvad vi mener med "nærmer sig", kræver et afstandsbegreb. Vi minder om afstandsformlen i $\mathbb{R}^2$: Afstanden mellem punkterne (x, y) og (a, b) i $\mathbb{R}^2$ er

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Det viser sig praktisk at indføre en særlig betegnelse for afstanden til origo. *Normen* af (x, y) i $\mathbb{R}^2$ er

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vi kan så udtrykke afstand vha. norm: Afstanden fra (x, y) til (a, b) er $\|(x, y) - (a, b)\|$

Disse begreber generaliserer vi nu til $\mathbb{R}^n$

2.22 Definition

For $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *defineres* normen af $\mathbf{x}$ *som*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

og afstanden *fra* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *til et andet punkt* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *defineres som*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Vi kan herefter give en formel definition på grænseværdi.

2.23 Definition

Antag at $f : A \to \mathbb{R}$ *er defineret på en delmængde* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *og at* $\mathbf{a}$ *er et akkumulationspunkt for* A. *Vi siger, at det reelle tal* L er grænseværdien for $f(\mathbf{x})$ når $\mathbf{x}$ går mod $\mathbf{a}$, *såfremt der for ethvert tal* $\varepsilon > 0$ *findes et tal* $\delta > 0$, *således at der for alle* $\mathbf{x} \in A$, *som opfylder uligheden* $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, *gælder at* $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$. *Vi skriver*

$$L = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$$

På samme måde som for funktioner af én variabel er det ret omstændeligt at bruge definitionen af grænseværdier til at lave udregninger. Derfor kan det svare sig at indse, at vi stort set kan bruge de sædvanlige regneregler. For god ordens skyld, skriver vi disse op:

2.24 Sætning
Lad f og g betegne funktioner af n variable og lad h være en funktion af én variabel. Antag at grænseværdierne $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ og $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ eksisterer, og at $\mathbf{a}$ er et akkumulationspunkt for $D_f \cap D_g$. Da er

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$
4. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})}$ *forudsat at* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0.$
5. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(f(\mathbf{x})) = h(L)$ *såfremt* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ *og h er kontinuert i L.*

Vi udelader beviset, eftersom det er nøjagtigt det samme som i det endimensionale tilfælde. Vi tager nu nogle eksempler på, hvordan man bruger sætningen.

For at kunne benytte sætningen er det nyttigt at notere sig, at for grænseværdien for koordinatfunktionerne med $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gælder $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} x_i = a_i$, for $i = 1, 2, \ldots, n$. Dette ses let ved definition 2.23: Da $|x_i - a_i| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ kan man vælge $\delta = \varepsilon$.

2.25 Eksempel
Find

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \left(2x - y^2\right)$$

Ved at bruge regel 2 og 3 ser vi, at vi kan indsætte 1 for x og 4 for y. Vi får da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} \left(2x - y^2\right) = 2 \cdot 1 - 4^2 = -14$$

♣

2.26 Eksempel
Beregn grænseværdien

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2, \frac{\pi}{2}, 0)} \left(e^x + \frac{xz + \sin y}{z + 1}\right)$$

Ved at bruge regel 2 har vi:

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} \left(e^x + \frac{xz+\sin y}{z+1}\right) = \lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} e^x + \lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} \frac{xz+\sin y}{z+1}$$

Vi ser på det første led, og ved at bruge regel 5 får vi:

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} e^x = e^{\ln 2} = 2$$

Det andet led beregner vi ved at bruge regel 4:

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} \frac{xz+\sin y}{z+1} = \frac{\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} (xz+\sin y)}{\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} (z+1)}$$
$$= \frac{0\cdot \ln 2 + \sin\frac{\pi}{2}}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Dermed bliver grænseværdien lig

$$\lim_{(x,y,z)\to(\ln 2,\frac{\pi}{2},0)} \left(e^x + \frac{xz+\sin y}{z+1}\right) = 2+1 = 3$$

♣

2.27 Eksempel
Find

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^2+4\sin y}{xy^2}$$

Ved at bruge regel 4 ser vi, at

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^2+4\sin y}{xy^2} = \frac{\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(x^2+4\sin y)}{\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(xy^2)}$$

Tager vi tælleren og nævneren hver for sig, har vi, at

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})}(x^2+4\sin y) = \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} 4\sin y = 1+4 = 5$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} xy^2 = \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} x \cdot \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} y^2 = 1\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Dette giver $\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^2+4\sin y}{xy^2} = \frac{5}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{20}{\pi^2}$. ♣

Også for grænseværdier i flere variable har vi ubestemte udtryk. Et typisk eksempel på sådanne er grænseværdier på formen $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$, hvor både $f(\mathbf{x}) \to 0$ og $g(\mathbf{x}) \to 0$ når $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$. Disse kaldes "0/0"-udtryk. Andre eksempler er "∞/∞"-udtryk, "$\infty - \infty$"-udtryk, og så videre.

Der findes ikke nogen generel metode, man kan benytte for at afgøre, om et ubestemt udtryk har en grænseværdi eller ej. Men vi skal se på nogle eksempler og give forslag til forskellige måder at gribe det an på. Nogle af disse tips fungerer bedst på grænseværdier som eksisterer, mens andre er nyttige til at vise, at udtrykket ikke har nogen grænseværdi.

Lad os se på nogle eksempler med ubestemte udtryk:

2.28 Eksempel
Find grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

Dette er et "0/0"-udtryk, derfor kan vi ikke indsætte $x = 1$ og $y = 1$ for at finde grænseværdien. Vi må finde på noget andet; Måske kan udtrykket forenkles? Lad os forsøge at faktorisere tælleren. Det er let at se, at hvis vi indsætter $y = x$ i $x^3 - y^3$ så får vi 0. Derfor udfører vi polynomiumsdivisionen $(x^3 - y^3) : (x - y)$. Dette giver at $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Vi indsætter i grænseværdien og får:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 + xy + y^2) = 1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 = 3\end{aligned}$$

♣

2.29 Eksempel
Find grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Det kan være en god idé at omskrive udtrykket til polære koordinater. Da vil $(x, y) \to 0$ svare til at $r \to 0$, mens θ er en ondsindet variabel, som forsøger at forvanske vores regnearbejde. Lad os se, hvad der sker:

$$\frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r^2 \sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta$$

Denne gang er vi heldige, fordi talværdien til $\cos\theta\sin^2\theta$ må være mindre end 1 uanset hvad θ måtte være. Da har vi at:

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right| = \lim_{r\to 0} \left|r\cos\theta\sin^2\theta\right| \le \lim_{r\to 0} |r| = 0$$

Derfor må $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$. ♣

Lad os nu se på to klassiske eksempler, hvor noget går galt.

2.30 Eksempel
Undersøg grænsen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

For at undersøge grænseværdien ovenfor kan vi forsøge at nærme os punktet $(0,0)$ langs forskellige linjer. Det vil sige, at vi studerer forskellige konturer for funktionen $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Vi ser først på tilfældet $y = 0$. Da har vi at:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Prøver vi at se, hvad der sker for $x = 0$, får vi:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Indtil videre ser det lovende ud, men hvis vi undersøger, hvad der sker over en generel (ikke-lodret) linje gennem origo, det vil sige $y = kx$, har vi:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}$$

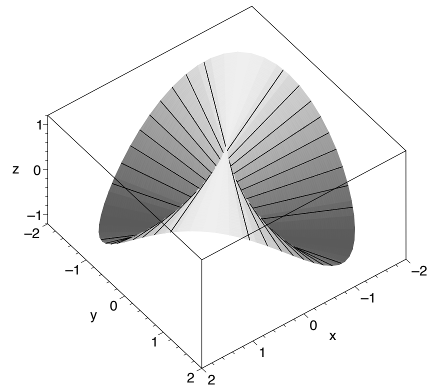
Men $\frac{2k}{1+k^2} \neq 0$ for $k \neq 0$. Derfor nærmer udtrykket $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ sig forskellige værdier alt efter langs hvilken linje vi går mod origo. Grænseværdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ kan følgelig ikke eksistere, da den i så fald skulle være et entydigt bestemt tal.

For at forstå dette eksempel bedre kan det være nyttigt at skrive funktionen $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ om til polære koordinater, og derefter skitsere grafen.

I polære koordinater har vi

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \sin(2\theta) = g(r,\theta)$$

Funktionsværdien bølger op og ned, med en amplitude uafhængig af r, når man roterer omkring origo. Se figur 2.11. ♣



Figur 2.11: Grafen for $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

2.31 Eksempel
Undersøgom funktionen f givet ved

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

har en grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$.

Vi forsøger at nærme os origo langs linjer. Dersom $x = 0$ får vi:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = 0$$

Og langs linjen $y = kx$ har vi

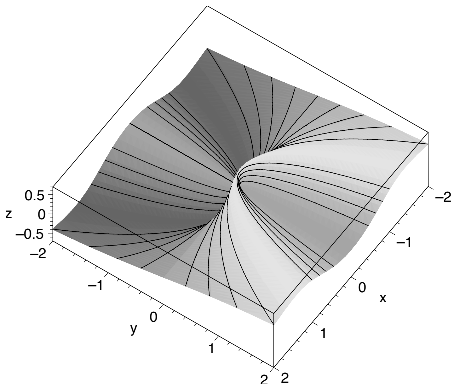
$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0$$

Dette skulle jo tyde på, at grænseværdien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer og er nul, **men dette er ikke sandt!** Lad os se hvorfor: Dersom vi nærmer os origo langs parablen $y = x^2$ får vi:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Eftersom $0 \neq \frac{1}{2}$ kan grænseværdien ikke eksistere.

For bedre at se, hvad der foregår, vil vi se på grafen for f. Se figur 2.12. Den ser ud som en parabelformet dæmning, hvor toppen følger parablen $y = x^2$. Helt forrest i dæmningen, i punktet $(0,0)$, har vandet gravet et hul og er løbet ud. ♣



Figur 2.12: Grafen for $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

2.3 Kontinuitet

Et centralt begreb i teorien for funktioner af flere variable er kontinuitet. Intuitivt kan man forstå dette som, at grafen for funktionen danner en flade. Dette er i modsætning til funktioner, hvis graf er en sky af punkter eller brudte flader. Ved hjælp af grænseværdier kan vi give en præcis definition af kontinuitet:

2.32 Definition
Funktionen f er kontinuert i punktet $\mathbf{a} \in D_f$, såfremt $\mathbf{a}$ er et isoleret punkt for D_f eller

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

Vi siger, at f er kontinuert, såfremt den er kontinuert i alle punkter i sin definitionsmængde.

Kontinuitet af f i $\mathbf{a}$ gælder altså per definition i to tilfælde: Hvis $\mathbf{a}$ er isoleret i D_f, eller hvis $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Det sidste tilfælde er det vigtigste. Det første tilfælde er "udartet" og svarer til et fænomen omtalt i Lindstrøms Eksempel 5.1.12.

Kontinuitet kan i øvrigt også defineres som i Lindstrøms Definition 5.1.1 med ε og δ. Ligesom i hans Observasjon 5.4.7 gælder nemlig at det er ækvivalent.

Når vi støder på en funktion af flere variable er et af de første spørgsmål, vi sædvanligvis stiller, at afgøre hvor funktionen er kontinuert. Når det gælder funktioner af én variabel, er det sjældent, man bruger definitionen direkte til at tjekke kontinuitet. Oftest er funktionen givet ved en formel, og man begrunder kontinuiteten ved at sige, at formeludtrykket er bygget op af kontinuerte funktioner ved hjælp af addition, subtraktion, multiplikation, division og sammensætning af funktioner. Vi har nemlig en sætning, som siger, at hvis vi bruger disse operationer på kontinuerte funktioner, så vil resultatet også være en kontinuert funktion. En tilsvarende sætning har man for funktioner af flere variable.

For addition, subtraktion, multiplikation og division har vi:

2.33 Sætning
Lad funktionerne f og g være kontinuerte i $\mathbf{a}$. Da er funktionerne $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og (forudsat at $g(\mathbf{a}) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ det også.

For sammensætning af funktioner:

2.34 Sætning
Dersom $f_1, \ldots, f_n$ er funktioner af m variable, som alle er kontinuerte i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, og g er en funktion af n variable, der er kontinuert i punktet $(f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_n(\mathbf{a}))$, så er sammensætningen $g \circ f$

$$\mathbf{x} \mapsto g(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$$

også kontinuert i $\mathbf{a}$

Vi tager nogle eksempler på kontinuerte funktioner, og hvordan vi begrunder, at de er kontinuerte:

2.35 Eksempel
Hvis $f(x, y)$ er kontinuert, så er funktionen $x \mapsto f(x, x)$ af én variabel også kontinuert. ♣

2.36 Eksempel
Lad f være givet ved

$$f(x, y) = 3xy - x^4 + 9y^2 + 4$$

Dette er et polynomium i variablene x og y. For at begrunde at f er kontinuert, bruger vi sætning 2.33.

Vi ser først på leddene $3xy$, x^4, $9y^2$ og 4. Alle disse udtryk er formler for kontinuerte funktioner. For eksempel er $3xy$ kontinuert, da dette udtryk er produktet af de kontinuerte funktioner 3, x og y. På samme måde er x^4 kontinuert, da det er produktet af den kontinuerte funktion x med sig selv fire gange. Lignende argumenter giver at $9y^2$ og 4 er kontinuerte udtryk.

Funktionen f er givet ved at addere og subtrahere disse udtryk. Ved sætning 2.33 bliver resultatet da en kontinuert funktion. ♣

2.37 Eksempel
Lad

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 - 4y}{z - y^2}$$

Bemærk, at definitionsmængden for g er $D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq y^2\}$.

Først ser vi, at x^2, $4y$, z og y^2 er kontinuerte udtryk, eftersom de er produkter af udtryk, som oplagt er kontinuerte. Derfor må differenserne $x^2 - 4y$ og $z - y^2$ også være kontinuerte. Sætning 2.33 siger så, at kvotienten

$$\frac{x^2 - 4y}{z - y^2}$$

er kontinuert, såfremt nævneren er forskellig fra 0. Dermed er funktionen g kontinuert. Det er underforstået, at dette betyder kontinuert i definitionsmængden for g. Se definition 2.32. Bemærk denne sprogbrug: Udenfor definitionsmængden siger vi ikke, at g er diskontinuert, men kun udefineret. ♣

2.38 Eksempel
Vi skal nu se på en funktion givet ved en delt forskrift. Lad h være givet ved

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 + x - y + xy - y^2 & \text{når } x \geq y \\ \cos(x - y) & \text{når } x < y \end{cases}$$

Det er klart, at hver for sig er udtrykkene $1 + x - y + xy - y^2$ og $\cos(x - y)$ kontinuerte for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (For at vise at $\cos(x-y)$ er kontinuert bruger vi sætning 2.34 til at sige at resultatet, når man indsætter $x - y$ i $\cos(t)$ er kontinuert.) Spørsmålet vi skal svare på er, hvorvidt disse to udtryk fletter sig sammen til en kontinuert funktion langs linjen $y = x$.

Hvis vi indsætter $y = x$ i $1 + x - y + xy - y^2$ får vi:

$$1 + x - y + xy - y^2 = 1 + x - x + x \cdot x - x^2 = 1$$

og i udtrykket $\cos(x - y)$ får vi

$$\cos(x - y) = \cos(x - x) = \cos(0) = 1$$

Eftersom udtrykkene har samme værdi i sammenfletningen, er funktionen h kontinuert. ♣

Vi skal nu se et eksempel på en diskontinuert funktion. Her bygger vi på eksempel 2.31.

2.39 Eksempel
Lad funktionen f være defineret ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vi ser, at definitionsmængden for f er hele $\mathbb{R}^2$. Udenfor origo er f givet ved det kontinuerte udtryk $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Spørsmålet er da, om f er kontinuert i $(0,0)$.

Men fra eksempel 2.31 havde vi, at grænseværdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

ikke eksisterer. Dermed siger definitionen af kontinuitet, at f ikke er kontinuert i $(0,0)$. ♣

Der findes også eksempler på funktioner, som ikke er kontinuerte i nogen punkter.

2.40 Eksempel
Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \text{ og } y \text{ begge er rationale} \\ 1 & \text{hvis } x \text{ er rational og } y \text{ er irrational} \\ 2 & \text{hvis } x \text{ er irrational og } y \text{ er rational} \\ 3 & \text{hvis både } x \text{ og } y \text{ er irrationale} \end{cases}$$

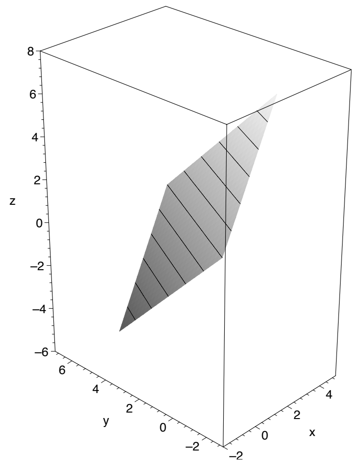
Vilkårligt tæt på et hvilket som helst punkt (x,y), findes der punkter af alle de fire ovennævnte typer. Derfor kan f ikke være kontinuert i noget punkt.
♣

2.3.1 Ekstremalværdisætningen

Senere i hæftet skal vi se hvordan vi kan finde største- og mindsteværdier for funktioner af flere variable. I dette afsnit skal vi se på betingelser, som sikrer, at største- og mindsteværdier eksisterer.

Vi begynder med definitionen.

2.41 Definition
Et punkt $\mathbf{a}$ *i definitionsmængden for* f *kaldes et* størsteværdipunkt *for funktionen* f *såfremt* $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x}$ *i definitionsmængden for* f*. Tilsvarende kaldes* $\mathbf{a}$ *et* mindsteværdipunkt *for* f *såfremt* $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ *for alle* $\mathbf{x}$ *i definitionsmængden for* f*.*



Figur 2.13: Grafen for $f(x, y) = 2x - y$ for $0 \leq x \leq 3$ og $-1 \leq y \leq 5$.

Nogle ofte brugte synonymer for *størsteværdipunkt* er *absolut* maksimumspunkt og *globalt* maksimumspunkt.

Ikke alle funktioner har største- og mindsteværdier – det kan hænde, at de har vilkårligt store eller små værdier, og det kan også hænde, at de nærmer sig en øvre eller nedre grænse uden nogensinde at nå den. Vores mål er at vise, at hvis f er en kontinuert funktion defineret på en lukket, begrænset mængde, så har den faktisk både en største- og en mindsteværdi. Husk, at en mængde $A \subset \mathbb{R}^n$ kaldes *begrænset*, såfremt der findes et tal M, således at $\|\mathbf{x}\| \leq M$ for alle $\mathbf{x} \in A$.

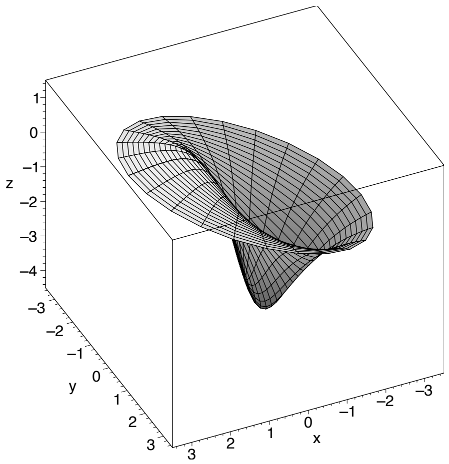
2.42 Sætning (Ekstremalværdisætningen)
Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ være en lukket, begrænset mængde, og antag at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Da har f både en største- og en mindsteværdi.

Lad os se på to eksempler, hvor ekstremalværdisætningen gælder.

2.43 Eksempel
Lad A være rektanglet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ og } -1 \leq y \leq 5\}$. Vi kan definere funktionen f på A ved formlen

$$f(x, y) = 2x - y$$

Udenfor A lader vi $f(x, y)$ være udefineret. Grafen er skitseret i figur 2.13. Eftersom A er en lukket og begrænset mængde, siger ekstremalværdisætningen, at f har både største- og mindsteværdi på A. At dette virkelig er sandt, kan vi se ved at bruge ulighederne $0 \leq x \leq 3$ og $-1 \leq y \leq 5$ til at vise, at $-5 \leq 2x - y \leq 7$. Derefter kan vi tjekke, at $f(0, 5) = -5$ og $f(3, -1) = 7$.



Figur 2.14: Grafen for $g(x,y) = \frac{4x-3}{x^2+y^2+1}$ for $x^2+y^2 \leq 9$.

Dette viser, at f antager sin størsteværdi 7 i punktet $(3,-1)$, og at f antager sin mindsteværdi -5 i punktet $(0,5)$. ♣

2.44 Eksempel
Definér funktionen g ved

$$g(x,y) = \frac{4x-3}{x^2+y^2+1}$$

og lad definitionsmængden for g være

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$$

Grafen for g har vi tegnet i figur 2.14. Eftersom D_g er en lukket og begrænset mængde, siger ekstremalværdisætningen igen, at der eksisterer største- og mindsteværdier for g. Af grafen kan vi se, at størsteværdien må være positiv, mens mindsteværdien må være negativ. Af funktionsudtrykket ser vi, at dersom den numeriske værdi af y, det vil sige $|y|$, øges, så må den numeriske værdi af $g(x,y)$ aftage. Dermed må $y=0$ for største- og mindsteværdipunkterne for g. Vi sætter

$$h(x) = g(x,0) = \frac{4x-3}{x^2+1}$$

Ved at differentiere h finder man ud af, at størsteværdien af h er 1, og at denne værdi antages i $x=2$. Videre er $h(-\frac{1}{2}) = -4$ mindsteværdien for h. Dette viser, at g har størsteværdi 1 i $(2,0)$ og mindsteværdi -4 i $(-\frac{1}{2},0)$. ♣

I disse to eksempler har vi set, at ekstremalværdisætningen er sand, ved at vi har tjekket, at funktionerne, som i begge tilfælde var kontinuerte og defineret på lukkede og begrænsede mængder, virkelig havde både største- og mindsteværdier. Men du lagde måske mærke til, at vi brugte andre argumenter end ekstremalværdisætningen til at finde disse punkter. Meget af dette hæfte skal handle om metoder til at finde ekstremumspunkter. Sådan som vi har formuleret ekstremalværdisætningen, er den *ikke* nogen metode til at lokalisere ekstremumspunkter, den er kun et redskab til at sige, at der findes sådanne punkter. Set fra den synsvinkel kan ekstremalværdisætningen virke som et kraftløst teorem, men hvis vi skifter fokus og tænker på spørgsmålet, vi stillede i indledningen, "Kan vi finde et anvendeligt kriterium for at en funktion skal have kvalitative egenskaber, der stemmer overens med vores intuition?", ser vi, at ekstremalværdisætningen er en tydelig bekræftelse af, at *kontinuitet* er en meget central egenskab i studiet af funktioner. Kontinuerte funktioner defineret på en lukket og begrænset mængde har netop en af de egenskaber, vi intuitivt håber, at den skal have, nemlig at der findes største- og mindsteværdier for funktionen.

Før vi ser på beviset for denne sætning, skal vi se på nogle eksempler, som viser, at det er nødvendigt at forudsætte, at definitionsmængden A er lukket og begrænset.

2.45 Eksempel

a) Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$. Da f er bygget op af kontinuerte funktioner ved hjælp af multiplikation og addition, er f kontinuert, men f har ingen størsteværdi, da vi kan få $f(R, 0) = R^2$ så stor vi vil bare ved at lade $R \to \infty$.

b) Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ ikke er begrænset. Definér $g : A \to \mathbb{R}$ ved $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$. Da er g kontinuert, men da A er ubegrænset, vil g have vilkårligt store værdier og kan følgelig ikke have nogen størsteværdi.

c) Se igen på $f(x, y) = x^2 + y^2$, men indskrænk definitionsmængden til de (x, y), der opfylder, at $x^2 + y^2 < 1$. f er stadig kontinuert, men har heller ikke nu nogen størsteværdi. Funktionsværdien 1 opnås nemlig ikke i noget punkt i definitionsmængden, men vi kan finde (x, y) med $x^2 + y^2 < 1$, således at $f(x, y)$ ligger vilkårligt nær 1.

d) Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ ikke er lukket. Da må A have mindst et randpunkt $\mathbf{a}$, som ikke er med i A. Definér $f : A \to \mathbb{R}$ ved

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$$

Da er f en kontinuert funktion, men da vi kan finde et punkt i A vilkårligt nær $\mathbf{a}$, er f ubegrænset og har følgelig ikke nogen størsteværdi.

Punkt a) og b) viser, at det er nødvendigt at antage, at definitionsmængden er begrænset for at ekstremalværdisætningen skal kunne være sand, mens punkt c) og d) viser, at lukkethed af definitionsmængden er en nødvendig betingelse. ♣

2.3.2 *Bevis for ekstremalværdisætningen

Bevis: For at notationen ikke skal blive for kompliceret, vil vi nøjes med at give beviset for funktioner af to variable. Vi antager altså, at $A \subset \mathbb{R}^2$ er en lukket, begrænset mængde, og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vi skal vise at f har en størsteværdi – beviset for eksistensen af en mindsteværdi er helt analogt.

Vi lader m være den mindste øvre grænse for f:

$$m = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$$

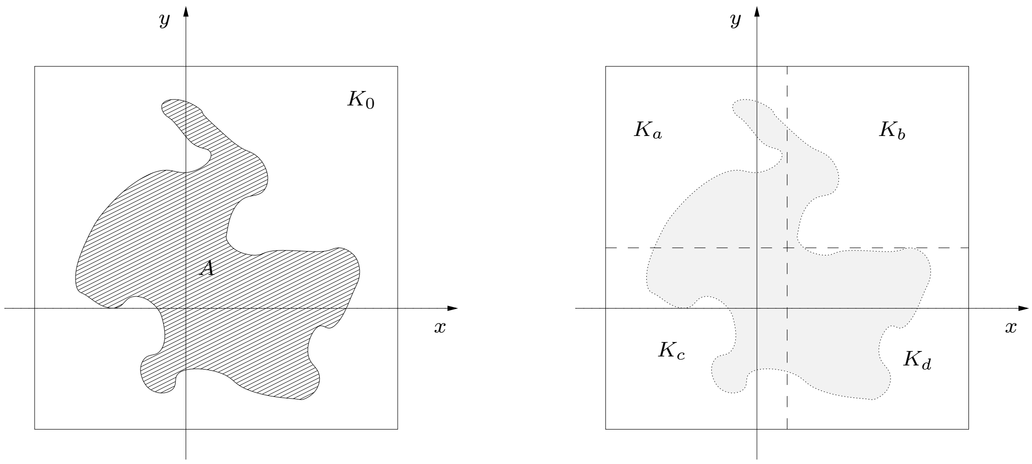
hvor vi sætter $m = \infty$, hvis funktionen f ikke er opad begrænset, og $m = -\infty$, hvis A er tom. Husk at en øvre grænse for en delmængde B af $\mathbb{R}$ er de tal b således at der for alle $x \in B$ gælder, at b er større end eller lig x. Den mindste øvre grænse er mindre end eller lig alle andre øvre grænser og den kaldes $\sup B$. Husk at fuldstændighedsprincippet siger, at alle ikke-tomme opad begrænsede delmængder B af de reelle tal har en veldefineret mindste øvre grænse.

Da definitionsmængden A er begrænset, kan vi finde et kvadrat K_0 med sidelængde R, som indeholder hele A, se figur 2.15(a). Vi kan dele dette kvadrat op i fire mindre kvadrater K_a, K_b, K_c, K_d med sidelængder $\frac{R}{2}$ som vist i figur 2.15(b). Lad m_a, m_b, m_c, m_d være supremum for f over de dele af A, som ligger indenfor henholdsvis K_a, K_b, K_c, K_d, det vil sige

$$m_a = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_a\}$$

og tilsvarende for m_b, m_c, m_d. Såfremt en af mængderne $A \cap K_a$, $A \cap K_b$, $A \cap K_c$, $A \cap K_d$ er tom, negligerer vi den og lader være at definere det tilsvarende m.

Eftersom $A \cap K_a$, $A \cap K_b$, $A \cap K_c$, $A \cap K_d$ tilsammen udgør hele A, må mindst én af værdierne m_a, m_b, m_c, m_d være lig m. Lad K_1 være et af rektanglerne K_a, K_b, K_c, K_d, således at den tilhørende m-supremumsværdi er lig m.



(a) Den begrænsede mængde A (b) Opdeling af K_0

Figur 2.15: Bevis for ekstremalværdisætningen

Vi kan nu gentage proceduren med K_1. Vi deler dette kvadrat op i fire mindre kvadrater og udtager et af disse kvadrater, K_2, så

$$\sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_2\} = m.$$

Fortsætter vi på denne måde, får vi en følge $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ af stadigt mindre kvadrater, så

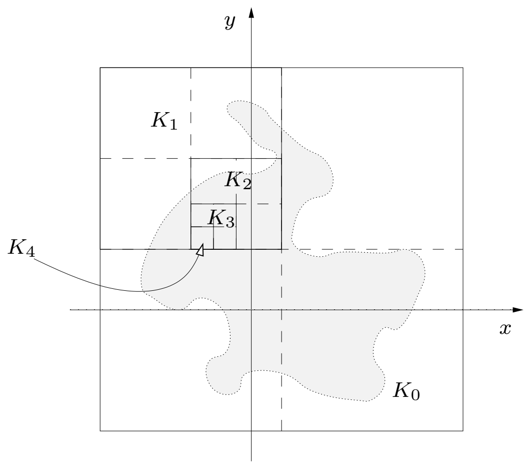
$$\sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A \cap K_n\} = m$$

for alle n. Figur 2.16 viser hvordan en sådan følge kan se ud. De fuldt optrukne kvadrater er dem som hører med til følgen $K_0, K_1, K_2, \ldots$. Sidelængden i hvert kvadrat er halvdelen af sidelængden i det foregående, og sidelængden i det n-te kvadrat K_n har derfor længden $\frac{R}{2^n}$ (husk at R er sidelængden i det oprindelige kvadrat K_0).

Lad (a_n, b_n) være koordinaterne til det nedre, venstre hjørne i K_n. Det er let at indse at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er voksende (ikke-aftagende) følger, og de må også være begrænsede, eftersom (a_n, b_n) ligger indenfor det første kvadrat K_0. Voksende, begrænsede følger konvergerer, og der må derfor findes tal a, b så $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Antag nu, at (x_n, y_n) er et andet punkt i K_n. Da størrelsen af K_n går mod nul, må (x_n, y_n) også gå mod (a, b).

Vi er nu klar til at afslutte beviset. Da m er supremum for f over hver af mængderne $A \cap K_n$, kan vi finde en følge af punkter $\{(x_n, y_n)\}$ så $(x_n, y_n) \in A \cap K_n$ og

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = m$$



Figur 2.16: Sekvensen $K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, \ldots$

Vi har allerede observeret, at $(x_n, y_n) \to (a, b)$. Da hvert punkt (x_n, y_n) er med i A og A er lukket, så må grænsen (a, b) også tilhøre A. Dermed er

$$f(a, b) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = m$$

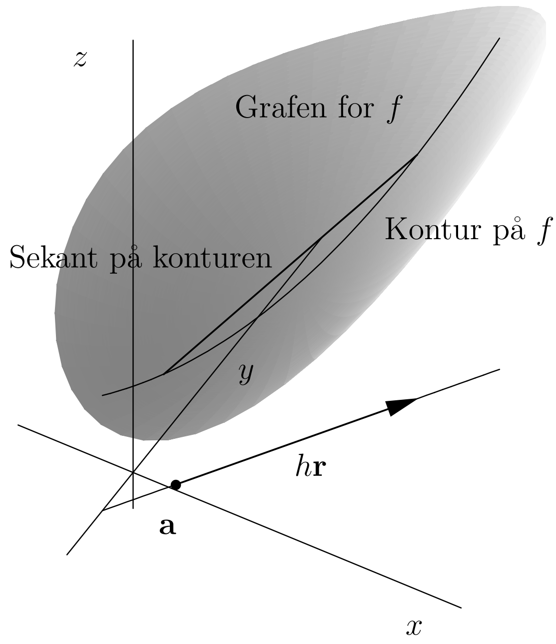
da f er kontinuert. Dette betyder, at (a, b) er et størsteværdipunkt for f, og beviset er fuldført. □

I beviset for ekstremalværdisætningen har vi på flere punkter brugt egenskaber ved følger i $\mathbb{R}^2$. Opgave 2.6 uddyber disse egenskaber. Referer derfor til denne opgave, når du læser beviset ovenfor.

Ekstremalværdisætningen garanterer, at visse funktioner har største- og mindsteværdier, men den giver ikke noget vink om, hvordan vi kan finde disse punkter i praksis. Dette er et problem, vi vil komme tilbage til senere i hæftet.

2.4 Differentiation

For en funktion $y = f(x)$ af én variabel fortæller den afledede $f'(x)$ os, hvor hurtigt funktionen vokser i punktet x – går vi et lille skridt med længde h langs x-aksen, vil funktionsværdien approksimalt ændres med $f'(x)h$. For funktioner af flere variable er situationen mere kompliceret; vi har flere akser at bevæge os langs, og vi kan ikke regne med, at funktionen ændres lige meget uanset hvilken retning, vi går i. Før vi udregner stigningstallet til funktionen, må vi derfor specificere, hvilken retning vi er interesserede i. Dette er idéen bag begrebet *retningsafledet*:



Figur 2.17: Idéen bag definitionen af retningsafledet.

2.4.1 Retningsafledede

2.46 Definition

Antag at funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ er defineret på en delmængde A af $\mathbb{R}^n$ og at $\mathbf{a}$ er et indre punkt i A. Tænk på $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ som en vektor. Den retningsafledede af f i punktet $\mathbf{a}$ og retningen $\mathbf{r}$ *er givet ved*

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

(forudsat selvfølgelig at denne grænse eksisterer).

Figur 2.17 viser idéen bag definitionen. Punkterne $\mathbf{a} + h\mathbf{r}$ er de punkter, vi kommer til, hvis vi starter i $\mathbf{a}$ og går i retning $\mathbf{r}$. Vi ser på konturen for f over denne linje. Differensen $f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})$ fortæller os, hvor meget funktionen øges, når vi bevæger os på denne kontur, og brøken

$$\frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

er forøgelsen per længdeenhed, når vi bruger $\|\mathbf{r}\|$ som længdeenhed.

2.47 Eksempel

Lad $f(x, y) = x^2 + xy$. Vi vil beregne den retningsafledede $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ når $\mathbf{a} =$

$(1,0)$, $\mathbf{r} = (2,1)$. Først observerer vi, at

$$\mathbf{a} + h\mathbf{r} = (1,0) + h(2,1) = (1+2h, h),$$

som giver $f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) = (1+2h)^2 + (1+2h)h = 1 + 5h + 6h^2$. Tilsvarende er $f(\mathbf{a}) = f(1,0) = 1^2 + 1 \cdot 0 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+5h+6h^2)-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5h+6h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(5+6h) = 5. \end{aligned}$$

Hvad betyder dette resultat? Læg mærke til, at længden af vektoren $\mathbf{r}$ er $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Såfremt vi går et stykke $h\sqrt{5}$ i retning af vektoren $\mathbf{r} = (2,1)$, vil funktionsværdien stige med (omtrent) $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) \cdot h = 5 \cdot h$. ♣

Det er lettest at forstå, hvad den retningsafledede er, når vektoren $\mathbf{r}$ har længde 1 – da er $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ simpelthen stigningstallet for grafen i retning $\mathbf{r}$, når vi måler med de sædvanlige enheder.

2.4.2 Partielt afledede

Indtil nu ser det ud som om, vi må opbygge en ny differentiationsteori helt fra bunden for at kunne beregne retningsafledede af funktioner af flere variable. Det er heldigvis ikke nødvendigt; ved hjælp af såkaldte partielle differentiationer kan vi føre meget af teorien tilbage til sædvanlig differentiation af funktioner af én variabel. Før vi definerer partielt afledede, er det bedst at blive enige om lidt notation.

Den *i-te enhedsvektor* $\mathbf{e}_i$ i $\mathbb{R}^n$ er vektoren

$$\mathbf{e}_i = (0,0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te plads}}}{1},0,\ldots,0)$$

parallel med den i-te koordinatakse.

2.48 Definition
Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable og lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt i A. Den i-te partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er den retningsafledede af f i retning af den i-te enhedsvektor $\mathbf{e}_i$; det vil sige

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a};\mathbf{e}_i)$$

forudsat at den retningsafledede eksisterer.

Andre notationer for $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ er $D_i f(\mathbf{a})$ og $f_i(\mathbf{a})$. De partielt afledede er altså stigningstallene for funktionen parallelt med koordinatakserne. Skriver vi definitionen ud i detaljer, ser vi at

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a};\mathbf{e}_i) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_i+h,\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_n)}{h}\end{aligned}$$

Det sidste udtryk har en slående lighed med definitionen af differentialkvotient for en funktion af én variabel. I definitionen af $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ indgår kun ændring af den i-te variabel. Vi danner den tilsvarende funktion af én variabel

$$g(t) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

og får

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a_i+h)-g(a_i)}{h} = g'(a_i).$$

Dette betyder, at vi kan finde den partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved at differentiere udtrykket $y = f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ med hensyn til x_i, mens vi lader som om alle de andre variable er konstanter.

2.49 Eksempel
Find de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ af funktionen

$$f(x,y) = x^2 + xy^3 + \sin(xy).$$

For at finde $\frac{\partial f}{\partial x}$ differentierer vi udtrykket med hensyn til x, mens vi lader som om y er en konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^3 + y\cos(xy)$$

For at finde $\frac{\partial f}{\partial y}$ differentierer vi med hensyn til y, mens vi holder x konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + 3xy^2 + \cos(xy)x = 3xy^2 + x\cos(xy)$$

♣

2.4.3 C^1-funktioner

Vi har brug for et godt kriterium for, om en funktion af flere variable har pæne egenskaber med hensyn til differentiation. Kriteriet, vi skal bruge, hedder C^1-funktioner. De fleste af de funktioner, vi støder på i dette kursus, vil opfylde dette kriterium. Og vi skal se, at det er let at tjekke, om en given funktion er C^1.

2.50 Definition
En funktion f defineret på en åben mængde A er C^1, såfremt de partielt afledede eksisterer på A og er kontinuerte.

I dette kursus vil vi ikke interessere os for differentiabilitetsegenskaber for en funktion i eventuelle randpunkter af dens definitionsmængde. For en vilkårlig reel funktion f er vi kun interesserede i at afgøre, om den er C^1 på det indre af D_f.

Vi skal se på nogle eksempler:

2.51 Eksempel
Afgør om f givet ved

$$f(x,y) = e^{x-\sin(y)} + 3xy^2$$

er en C^1-funktion.

Vi finder først de partielt afledede. Vi har:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^{x-\sin(y)} + 3y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\cos(y)e^{x-\sin(y)} + 6xy\end{aligned}$$

Da formlerne for de partielt afledede er bygget op ved hjælp af addition, subtraktion, multiplikation og indsætning i de kontinuerte funktioner sin, cos og e^x må $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ være kontinuerte funktioner. Dette viser at f er C^1.
♣

2.52 Eksempel
Undersøg hvorvidt funktionen g givet ved

$$g(x,y,z) = \sqrt{1-x^2} + \frac{y}{z}$$

er en C^1-funktion. Bemærk først, at $D_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1 \text{ og } z \neq 0\}$

Vi finder de partielt afledede:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{z}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{y}{z^2}$$

Disse er alle kontinuerte funktioner. Men læg mærke til, at $\frac{\partial g}{\partial x}$ ikke er defineret for $x = \pm 1$, selv om g er defineret her. Dette er ikke noget problem, fordi punkter med $x = \pm 1$ ikke ligger i det indre af definitionsmængden for g og så er det underforstået, at vi ser bort fra disse, når vi undersøger om g er C^1.

Vi ser derfor at g er C^1 på det indre af sin definitionsmængde. ♣

2.53 Eksempel
Se på $h(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dette er funktionen, som måler afstanden fra punktet (x,y) til origo. h er defineret på hele $\mathbb{R}$. Er h en C^1-funktion?

Vi finder de partielt afledede:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Her ser vi, at de partielt afledede eksisterer og er kontinuerte bortset fra i origo. Hvis vi undersøger grænseværdierne

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad \text{og} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

ser vi, at de ikke eksisterer. Derfor er h ikke en C^1-funktion. Hvis vi derimod fjerner $(0,0)$ fra definitionsmængden, vil de partielt afledede være defineret og kontinuerte. Derfor kan vi sige at h er C^1 på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ♣

2.4.4 Gradienten

I teorien for funktioner af en variabel har vi et begreb, *den afledede*, som vi flittigt benytter os af. For eksempel bruger vi den afledede til at finde tangenter eller til at finde lokale maksima og minima for funktionen. Indtil videre kan det virke som om, teorien for flere variable har et utal af forskellige former for afledede; de retningsafledede i alle forskellige retninger inklusive de partielt afledede, én for hver dimension. Fra denne samling af begreber træder gradienten frem som et centralt begreb. Nedenfor vil vi først definere gradienten, derefter skal vi se, at vi kan bruge den til at udregne retningsafledede for C^1-funktioner. Den bruges også, når vi vil finde tangentplanen for en funktion af to variable (eller tangenthyperplanen i højere dimensioner).

2.54 Definition
Gradienten for en funktion f af n variable i et indre punkt $\mathbf{a}$ i definitionsmængden er vektoren

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right).$$

Eksempelvis har vi for en funktion af to variable, at gradienten for f i (x, y) er givet ved

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

Vi ser på nogle enkelte eksempler:

2.55 Eksempel
Find gradienten for $f(x, y) = 3x^2 - 4\ln(y)$ i punktet $(-1, 2)$.

Vi finder først de partielt afledede:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{4}{y}.$$

Indsætter vi $(x, y) = (-1, 2)$, får vi $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -6$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -2$. Dette giver, at gradienten i $(-1, 2)$ er:

$$\nabla f(-1, 2) = (-6, -2).$$

♣

2.56 Eksempel
Lad funktionen g være givet ved

$$g(x, y, z) = 2xy + z^2.$$

Vi vil nu finde en formel for gradienten. Først finder vi de partielt afledede:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z.$$

Dermed er gradienten for g i (x, y, z) givet ved formlen

$$\nabla g = (2y, 2x, 2z).$$

♣

Vi vil nu studere en del egenskaber for gradienten for C^1-funktioner. Disse sætninger er svar på spørsmålet, vi stillede i indledningen til dette kapittel: "Kan vi finde et anvendeligt kriterium for, at en funktion skal have kvalitative egenskaber, der stemmer overens med vores intuition?" Svaret vi giver her er, at C^1-kriteriet gør, at funktionerne har retningsafledede, gradient, tangentplan/tangentrum, og så videre, og at disse størrelser forholder sig til hinanden på den naturlige måde.

Den første sætning relaterer gradienten og de retningsafledede til hinanden:

2.57 Sætning
Antag at f er C^1 og lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f. Da eksisterer den retningsafledede $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ og

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$$

Umiddelbart fra sætningen ovenfor kan vi udlede en nyttig, geometrisk tolkning af gradienten:

2.58 Sætning
Antag at f er C^1 og at $\mathbf{a}$ ligger i det indre af definitionsmængden. Da peger gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ i den retning, hvor f vokser hurtigst ud fra punktet $\mathbf{a}$.

Bevis: Lad $\mathbf{u}$ være en enhedsvektor. Funktionen f vokser hurtigst i den retning $\mathbf{u}$ hvor $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u})$ er størst. Eftersom $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ og det indre produkt $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$ har sin største værdi $\|\nabla f(\mathbf{a})\| \, \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$ når $\mathbf{u}$ og $\nabla f(\mathbf{a})$ peger parallelt i samme retning, er sætningen bevist. □

Fra envariabelfunktioner ved vi, at differentiabilitet medfører kontinuitet. Tilsvarende har vi følgende sætning i det flervariable tilfælde:

2.59 Sætning
En C^1-funktion f defineret på en åben delmængde A af $\mathbb{R}^n$ er kontinuert på A.

Før vi går videre med teorien, vil vi se på et eksempel, hvor vi bruger sætningerne, vi har udledt ovenfor.

2.60 Eksempel
Lad f være funktionen givet ved

$$f(x,y) = y^4 - 3x^2y + 5xy$$

Vi vil først forklare, hvorfor f er C^1, derefter finde gradienten, og til slut vil vi beregne de retningsafledede af f i $(0,1)$ i retningerne:

$$\text{a) } \mathbf{r} = (1,0), \quad \text{b) } \mathbf{r} = (-1,3) \quad \text{og} \quad \text{c) } \mathbf{r} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Vi begynder med at finde de partielt afledede:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xy + 5y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 3x^2 + 5x$$

Vi ser, at disse udtryk er kontinuerte. Dermed er f en C^1-funktion. Gradienten er givet ved

$$\nabla f(x,y) = (-6xy + 5y, 4y^3 - 3x^2 + 5x)$$

For at finde den retningsafledede i $(0,1)$ evaluerer vi gradienten i dette punkt:

$$\nabla f(0,1) = (5,4)$$

Dette giver:

a) $f'((0,1);(1,0)) = \nabla f(0,1) \cdot (1,0) = (5,4) \cdot (1,0) = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 5$

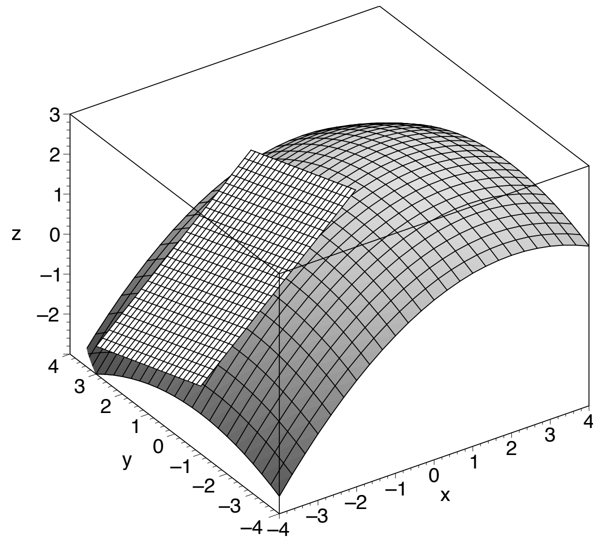
b) $f'((0,1);(-1,3)) = \nabla f(0,1) \cdot (-1,3) = (5,4) \cdot (-1,3) = 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 7$

c) $f'((0,1);(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})) = \nabla f(0,1) \cdot (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = (5,4) \cdot (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5}{2} + 2\sqrt{3}$

♣

2.4.5 Tangentplan for grafen

I teorien for funktioner af én variabel kunne vi bruge den afledede til at finde tangentlinjen for en funktion f i et punkt a. Vi skal se, at vi kan bruge gradienten til at finde tangentplanen for funktioner af to variable, og tangenthyperplanen for funktioner af tre eller flere variable. Men først må vi definere, hvad vi mener med tangentplan og tangenthyperplan. Figur 2.18 illustrerer, hvordan en tangentplan kan se ud for en funktion af to variable.



Figur 2.18: En graf med en tangentplan.

I kapitel 1 så vi et eksempel (1.12) på det, som kaldes en affin funktion. I to variable er dette en funktion, som kan skrives på formen:

$$h(x, y) = ax + by + d.$$

hvor a, b og d er konstanter. I tre variable har en affin funktion formen

$$h(x, y, z) = ax + by + cz + d.$$

igen er a, b, c og d konstanter. Dette kan generaliseres til n-dimensioner. En affin funktion i n variable har formen

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + d$$

hvor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og d er konstanter. Sådanne funktioner kan også skrives på vektorform: $h(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + d$, hvor $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

I eksempel 1.12 så vi, at for $n = 2$ blev grafen en plan. For $n \geq 3$ kaldes grafen en hyperplan. Når vi spørger efter tangenthyperplanen for en flervariabelfunktion f i et punkt $\mathbf{a}$, er vi ude efter at finde en affin funktion. Men dette er ikke hvilken som helst affin funktion.

Lad os tænke tilbage på funktioner af én variabel. Da kan tangentlinjen for f i a tolkes som den bedste approksimaton til f i nærheden af a ved hjælp af en ret linje. Denne tolkning forsøger vi at videreføre til flere variable. Vi har følgende definition:

2.61 Definition
Lad f være en reel funktion af n variable og $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en affin funktion. Lad endvidere $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f. Vi siger, at h tangerer *f i $\mathbf{a}$, hvis $f(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a})$ og*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0$$

Bemærk, at tangentplanen kun er defineret for indre punkter af D_f. Bemærk også, at sprogbrugen antyder, at en eventuel tangentplan er entydigt givet. Dette er også tilfældet:

2.62 Sætning
Hvis $\mathbf{a}$ er et indre punkt i D_f, er tangenthyperplanen for f i $\mathbf{a}$ entydig, forudsat at den eksisterer.

Hvordan finder man tangentplanen til en givet funktion f i et punkt $\mathbf{a}$? Såfremt f er C^1 i $\mathbf{a}$ kan man ved hjælp af gradienten opskrive en formel.

2.63 Sætning
Antag at f er C^1 og $\mathbf{a}$ et indre punkt i D_f. Da har f tangenthyperplan i $\mathbf{a}$ lig grafen for den affine funktion h givet ved

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

Lad os se på et par eksempler i to variable, hvor vi bestemmer ligningen for tangentplanen:

2.64 Eksempel
Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$$

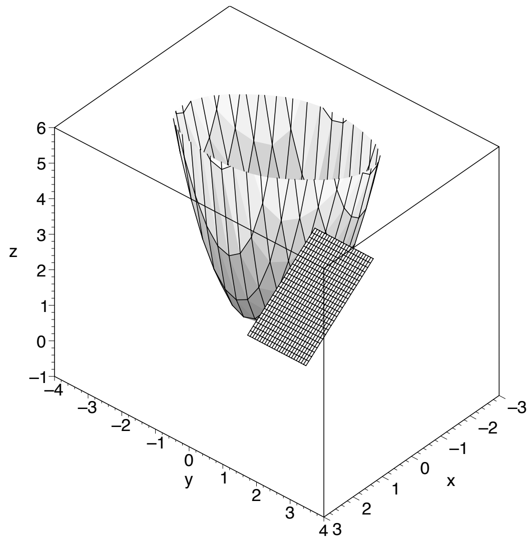
og lad h være den affine funktion, hvis graf er tangentplanen for f i punktet $(0,1)$. Vi ønsker at finde formlen for h.

Vi starter med at udregne de partielt afledede af f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + ye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^{xy}$$

Gradienten er derfor

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 + ye^{xy}, 2y + xe^{xy})$$



Figur 2.19: Grafen for $f(x, y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$ og tangentplanen i $(0, 1)$.

Vi indsætter $(x, y) = (0, 1)$ og finder at

$$\nabla f(0, 1) = (1, 2)$$

Sætning 2.63 siger, at formlen for h er

$$h(x, y) = f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \cdot ((x, y) - (0, 1))$$

Vi indsætter for f og ∇f og får

$$h(x, y) = 2 + (1, 2) \cdot (x, y - 1) = 2 + x + 2y - 2 = x + 2y$$

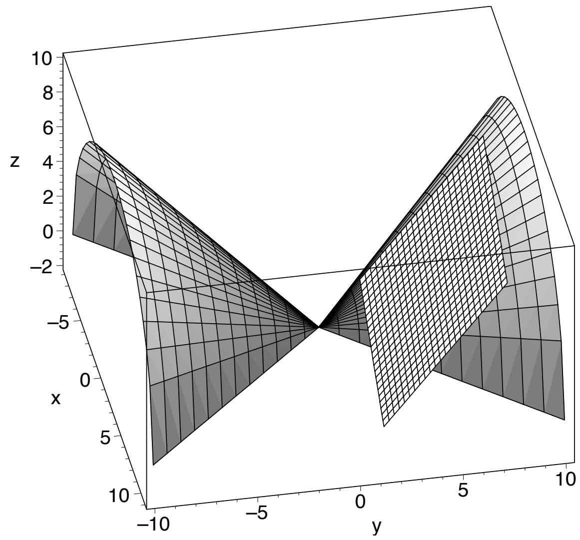
Tangentplanen for $f(x, y) = x^4 + y^2 + e^{xy}$ i punktet $(0, 1)$ er grafen for h, og denne plan er givet ved $x + 2y - z = 0$. Se figur 2.19 ♣

2.65 Eksempel
Lad os se på funktionen fra eksempel 1.8. f var givet ved formlen

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$$

Vi skal finde tangentplanen for f i $(4, 5)$. Vi begynder med at finde de partielt afledede:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 - x}{\sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}}$$



Figur 2.20: Grafen for $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 2x - 1}$ og tangentplanen i $(4,5)$.

Ved at indsætte $x = 4$ og $y = 5$ finder vi, at gradienten i $(4,5)$ er

$$\nabla f(4,5) = (-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$$

Tangentplanen er dermed grafen for funktionen h givet ved

$$h(x,y) = f(4,5) + \nabla f(4,5) \cdot ((x,y) - (4,5)) = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y + \frac{3}{4},$$

og ligningen for denne plan bliver $-\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y - z = -\frac{3}{4}$. Se figur 2.20. ♣

Vi afslutter med et eksempel, hvor vi finder tangenthyperplanen for en funktion af tre variable:

2.66 Eksempel
Lad g være funktionen givet ved

$$g(x,y,z) = \frac{xyz}{x+y+2z}$$

Find tangenthyperplanen for g i $(2,1,-1)$.

De partielt afledede er:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{y^2z + 2yz^2}{(x+y+2z)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2z + 2xz^2}{(x+y+2z)^2}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{x^2y + xy^2}{(x+y+2z)^2}$$

Gradienten i punktet $(2,1,-1)$ bliver da:

$$\nabla g(2,1,-1) = (1,0,6)$$

Fra formlen i sætning 2.63 ser vi, at tangenthyperplanen er grafen for funktionen

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= g(2,1,-1) + \nabla g(2,1,-1)\cdot((x,y,z)-(2,1,-1)) \\ &= -2 + (1,0,6)\cdot(x-2, y-1, z+1) = x + 6z + 2 \end{aligned}$$

Tangenthyperplanen er grafen for $h(x,y,z) = x + 6z + 2$, og i koordinatsystemet XYZV er den givet ved ligningen $x + 6z - v = -2$. ♣

2.4.6 Differentiabilitet

Vi har endnu ikke defineret differentiabilitet for en funktion af flere variable. Grunden til dette er, at vi har begrebet C^1-funktioner, som giver os de resultater, vi ønsker. Oven i købet er de fleste funktioner, vi har mødt, C^1 i næsten alle punkter. Men fra et teoretisk synspunkt er C^1 ikke det samme som differentiabel. Vi har følgende definition

2.67 Definition
Lad f være en reel funktion af n variable, og lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f. Funktionen f er differentiabel i $\mathbf{a}$, såfremt der findes en tangenthyperplan for f i $\mathbf{a}$.

Bemærk, at sætning 2.63 ovenfor viser, at alle C^1-funktioner er differentiable. I dette hæfte vil vi bruge begrebet C^1, selv om flere af resultaterne også ville gælde, hvis vi erstattede C^1 med differentiabel.

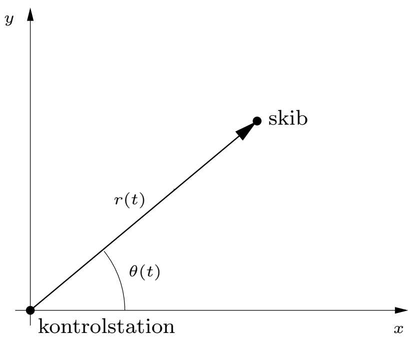
Bemærk også, at funktionen h, som giver tangentplanen, er kontinuert i $\mathbf{a}$. Da $f(\mathbf{a}) = h(\mathbf{a})$, følger det let, at også f er kontinuert i $\mathbf{a}$. Dvs. at i lighed med énvariabel-tilfældet, så er differentiable funktioner kontinuerte.

2.4.7 Kædereglen

En af de mest nyttige differentiationsregler, vi har for funktioner af én variabel, er kædereglen. Vi skal nu se på, hvordan kædereglen kan generaliseres til funktioner af flere variable. Da formlen har et ganske kompliceret udseende, vil vi først se på nogle konkrete tilfælde med ikke alt for mange variable.

Antag at $f(u,v)$ er en C^1-funktion i to variable og at $g(x)$ og $h(x)$ er differentiable funktioner af én variabel. Ved at sætte $u = g(x)$ og $v = h(x)$, danner vi en sammensat funktion

$$k(x) = f(g(x), h(x))$$



Figur 2.21: Måling af position til skibet.

Forestil dig, at du allerede har regnet lidt med funktionerne f, g og h, hver for sig. Sandsynligvis har du så fundet udtryk for de partielt afledede af f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, samt $\frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$. Hvis du derefter ønsker at studere den sammensatte funktion k og differentiere denne, kan kædereglen være til god hjælp. Den giver nemlig formlen

$$\frac{dk}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dh}{dx}$$

Så hvis $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$ allerede er kendte udtryk, kan man sætte disse ind i formlen ovenfor. Da finder man et udtryk for den afledede af k. I denne formel vil de partielt afledede af f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, selvfølgelig være funktioner af u og v. For at få en funktion af x, må vi substituere $u = g(x)$ og $v = h(x)$. Bemærk at ved denne fremgangsmåde til at finde $\frac{dk}{dx}$ er det ikke nødvendigt at skrive et formeludtryk for k.

Lad os se på et eksempel:

2.68 Eksempel

Positionen til et skib bestemmes ved, at man fra en kontrolstation måler afstanden r og vinklen θ til skibet. Se figur 2.21. Fra disse målinger kan vi bestemme de afledede $r'(t)$ og $\theta'(t)$, som fortæller os hvor hurtigt afstanden og vinklen ændrer sig. Signalerne fra en radiosender træffer skibet med en styrke $f(x, y)$. Afgør hvor meget signalstyrken ændrer sig per tidsenhed.

Positionen til tiden t er

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \qquad \text{og} \qquad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

Signalstyrken bliver dermed

$$S(t) = f(x(t), y(t))$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ er som ovenfor. Ifølge kædereglen er

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Eftersom

$$\frac{dx}{dt} = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\cdot\theta'(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\cdot\theta'(t),$$

får vi
$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(r'\cos\theta - t\cdot\theta'\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r'\sin\theta + r\cdot\theta'\cos\theta)$$

♣

Lad os se på et nyt tilfælde af kædereglen: Antag at $f(u,v)$ er en C^1-funktion af to variable og at $g(x,y,z)$ og $h(x,y,z)$ er to C^1-funktioner af tre variable. Vi kan da lave den sammensatte funktion

$$k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$$

ved at foretage substitutionerne $u = g(x,y,z)$, $v = h(x,y,z)$. Kædereglen fortæller os, hvordan vi kan udregne de partielt afledede af k, hvis vi kender de partielt afledede af f, g og h:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial y}$$
$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial h}{\partial z}$$

Igen er det sådan, at de partielt afledede af f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, vil være funktioner af u og v. For at få funktioner af x, y og z, må vi substituere $u = g(x,y,z)$ og $v = h(x,y,z)$. Lad os tage et konkret eksempel for at se, hvordan formlerne fungerer i praksis.

2.69 Eksempel

Vi vælger $f(u,v) = uv^2$, $g(x,y,z) = x + z + 2yz$, $h(x,y,z) = x^2yz$. Lad os først finde de partielt afledede af f:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v^2 = (x^2yz)^2 = x^4y^2z^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2uv = 2(x+z+2yz)(x^2yz) = 2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2$$

Her har vi brugt substitutionerne $u = x+z+2yz$ og $v = x^2yz$ for at udtrykke $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$ ved hjælp af x, y og z. Vi kan nu udregne de afledede af funktionen

$k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$ ved hjælp af kædereglen: Eftersom $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial h}{\partial x} = 2xyz$ får vi, at

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= (x^4y^2z^2) \cdot 1 + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2) \cdot 2xyz \\ &= 5x^4y^2z^2 + 4x^3y^2z^3 + 8x^3y^3z^3\end{aligned}$$

Den partielt afledede $\frac{\partial k}{\partial y}$ finder vi ved at indsætte $\frac{\partial g}{\partial y} = 2z$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = x^2z$ i formlen for $\frac{\partial k}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= (x^4y^2z^2) \cdot 2z + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2) \cdot x^2z \\ &= 6x^4y^2z^3 + 2x^5yz^2 + 2x^4yz^3\end{aligned}$$

Til slut finder vi $\frac{\partial k}{\partial z}$ ved at indsætte $\frac{\partial g}{\partial z} = 1 + 2y$ og $\frac{\partial h}{\partial z} = x^2y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= (x^4y^2z^2) \cdot (1 + 2y) + (2x^3yz + 2x^2yz^2 + 4x^2y^2z^2) \cdot x^2y \\ &= 3x^4y^2z^2 + 6x^4y^3z^2 + 2x^5y^2z\end{aligned}$$

♣

Vi er nu klar til at se på den fulde version af kædereglen.

2.70 Sætning (Kædereglen)
Lad $f(u_1, \ldots, u_m)$ være en reel C^1-funktion af m variable defineret på en åben mængde og lad $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$ være m reelle C^1-funktioner af n variable med åbne definitionsmængder. Da er den sammensatte funktion

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

en C^1-funktion, og dersom h er defineret i $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} = (g_1(\mathbf{a}), \ldots, g_m(\mathbf{a}))$ så er

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$$

Kædereglen kan virke kompliceret og vanskelig at huske, men egentlig er den ganske naturlig. Antag at vi giver variablen x_i en lille tilvækst k – da vil h øges med $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$. Eftersom h er en sammensat funktion, kan vi tænke os, at denne forøgelse foregår i to trin. I første trin fører forøgelsen af x_i til at funktionen g_j øges med $\ell_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot k$. Da denne forøgelse går ind i j-te variabel i f, medfører den en forøgelse på $\frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \ell_j = \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot k$ af hele funktionsudtrykket. Summerer vi bidragene fra alle komponenterne $j = 1, 2, \ldots, m$, får vi forøgelsen

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \cdot k + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \cdot k + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \cdot k$$

Dette udtryk skal altså være lig $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$, og dermed har vi kædereglen. Argumentet ovenfor er ikke et matematisk bevis for kædereglen (blandt andet fordi det bare er tilnærmelsesvis sandt, at når vi øger x_i med et lille tal k, så vil h vokse med $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot k$), men det giver os en god forståelse af, hvorfor formlen ser ud, som den gør.

Lad os se på et eksempel, hvor vi skriver kædereglen op i et tilfælde:

2.71 Eksempel
Lad $f(u, v, w)$ være en C^1-funktion af tre variable og lad $g(x, y)$, $h(x, y)$ og $k(x, y)$ være tre C^1-funktioner af to variable. Lad $F(x, y)$ være den sammensatte funktion

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y), k(x, y))$$

Nu vil vi opskrive formlen for den partielt afledede $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kædereglen giver

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial k}{\partial y}$$

♣

2.4.8 Niveaukurver, niveauflader og gradienten

I dette afsnit vil vi se på niveaukurvers tangentlinjer og niveaufladers tangentplaner. Vi har ingen ambitioner om at give disse resultater et solidt, teoretisk fundament her. I så fald måtte vi først se på *sætningen om differentiabilitet af implicit givne funktioner*. Dette er et fantastisk resultat og har mange betydningsfulde konsekvenser, men beviset involverer nye matematiske idéer, og det bliver for omstændeligt at komme ind på disse. Derfor vil vi nøjes med at sandsynliggøre resultaterne.

Vi vil først se på niveaukurverne for en funktion af to variable. Husk at niveaukurverne for $f(x, y)$ er løsningsmængder til

$$f(x, y) = c$$

for forskellige konstante tal c. Vi kan tænke på niveaukurven som skæringspunkterne mellem grafen for f og planen $z = c$.

Antag at f er C^1 så vi kan finde gradienten og tangentplanen for grafen. Lad (a, b) være et punkt i det indre af definitionsmængden for f og antag at

$$f(a, b) = c$$

Det er nu naturligt at tro, at hvis vi tager tangentplanen for grafen for f i (a, b) og snitter med planen $z = c$, så skulle resultatet være tangentlinjen for niveaukurven $f(x, y) = c$ i punktet (a, b). Lad os forsøge at regne på dette: Vi ved, at tangentplanen for grafen for f i (a, b) er grafen for den affine funktion

$$h(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b))$$

At snitte med planen $z = c$ betyder her, at vi kan sætte $h(x, y) = c$. Hvis vi også bruger, at $f(a, b) = c$ får vi:

$$c = c + \nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b))$$

Forenkler vi dette, finder vi, at tangentlinjen for niveaukurven $f(x, y) = c$ i punktet (a, b) skal være givet ved ligningen

$$\nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b)) = 0$$

Dette er linjen gennem (a, b) med normalvektor $\nabla f(a, b)$.

Læg mærke til, at hvis $\nabla f(a, b) = 0$, så bliver ligningen for niveaukurvens tangentlinie ikke en ligning for en ret linje, men kun $0 = 0$. Derfor vil vi konsekvent se bort fra dette tilfælde.

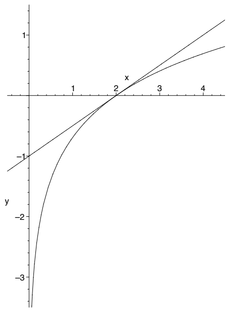
Argumentationen ovenfor leder os til følgende definition:

2.72 Definition
Lad f være en C^1-funktion i to variable, lad (a, b) være et indre punkt i D_f og lad $c = f(a, b)$. Såfremt $\nabla f(a, b) \neq 0$ definerer vi tangentlinjen for niveaukurven $f(x, y) = c$ i (a, b) til at være givet ved

$$\nabla f(a, b) \cdot ((x, y) - (a, b)) = 0$$

Umiddelbart fra denne definition kan vi udlede følgende sætning:

2.73 Sætning
Lad f være en C^1-funktion i to variable, lad (a, b) være et indre punkt i D_f og lad $c = f(a, b)$. Da står $\nabla f(a, b)$ vinkelret på tangentlinjen for niveaukurven $f(x, y) = c$ i (a, b).



Figur 2.22: Niveaukurven $f(x,y) = xe^{-y} = 2$ og tangenten i $(2,0)$.

Eftersom nulvektoren er vinkelret på alle linjer, behøver vi ikke at gøre nogen undtagelser for dette i sætningen ovenfor. Lad os se på et eksempel:

2.74 Eksempel
Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = xe^{-y}$$

Vi skal se på niveaukurven, som går gennem punktet $(2,0)$, og ønsker at finde tangenten i dette punkt.

Hvis vi indsætter $(x,y) = (2,0)$ får vi $f(2,0) = 2$. Dermed er det niveaukurven

$$f(x,y) = 2$$

vi undersøger i denne opgave. For at bruge formlen for niveaukurvens tangentlinje skal vi først udregne gradienten. Vi har:

$$\nabla f(x,y) = (e^{-y}, -xe^{-y})$$

I punktet $(2,0)$ giver dette:

$$\nabla f(2,0) = (1,-2)$$

Dermed er tangenten givet ved ligningen

$$0 = \nabla f(2,0) \cdot ((x,y) - (2,0)) = (1,-2) \cdot (x-2, y) = x - 2 - 2y$$

Tangenten for niveaukurven $f(x,y) = 2$ i $(2,0)$ er $x - 2y = 2$. Se figur 2.22.
♣

Argumentet ovenfor gælder også for funktioner af flere variable. Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion af n variable, defineret på en åben mængde A. Vi ser på en niveauhyperflade, det vil sige løsningsmængden til $f(\mathbf{x}) = c$.

Antag at $\mathbf{a} \in A$ opfylder $f(\mathbf{a}) = c$. Tangenthyperplanen for f i $\mathbf{a}$ er grafen for

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Vi finder snittet med niveauet c ved at løse $h(\mathbf{x}) = c$. Dette giver ligningen

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

For $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ kan vi bruge dette som en definition på niveauhyperfladens tangenthyperplan i $\mathbf{a}$:

2.75 Definition
Lad f være en C^1-funktion i n variable, lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f og lad $c = f(\mathbf{a})$. Såfremt $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ definerer vi tangenthyperplanen for niveauhyperfladen $f(\mathbf{x}) = c$ i $\mathbf{a}$ til at være givet ved

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

Igen kan vi udlede følgende sætning:

2.76 Sætning
Lad f være en C^1-funktion i n variable, lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f og lad $c = f(\mathbf{a})$. Da står $\nabla f(\mathbf{a})$ vinkelret på tangenthyperplanen for niveauhyperfladen $f(\mathbf{x}) = c$ i $\mathbf{a}$.

Lad os se på et eksempel med en funktion af tre variable:

2.77 Eksempel
Lad f være givet ved

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

Vi ønsker at finde tangentplanen for niveaufladen som går gennem punktet $(2, 2, 3)$.

Vi udregner gradienten:

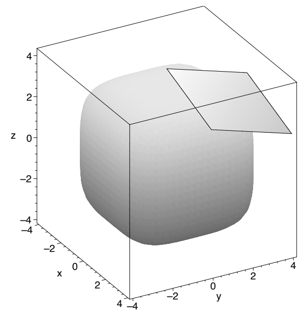
$$\nabla f(x, y, z) = \left(4x^3, 4y^3, 4z^3\right)$$

I punktet $(2, 2, 3)$ er den lig

$$\nabla f(2, 2, 3) = (32, 32, 108)$$

Dermed er tangentplanen i $(2, 2, 3)$ givet ved ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla f(2, 2, 3) \cdot ((x, y, z) - (2, 2, 3)) \\ &= 32(x - 2) + 32(y - 2) + 108(z - 3) = 32x + 32y + 108z - 452 \end{aligned}$$



Figur 2.23: Niveaufladen $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ gennem $(2, 2, 3)$ og tangentplanen.

som kan reduceres til

$$8x + 8y + 27z = 113$$

I figur 2.23 har vi skitseret niveaufladen og tangentplanen i samme koordinatsystem. ♣

Vi vil nu forsøge at illustrere definitionerne 2.72 og 2.75 på en ny måde. Idéen er at bruge kurver som ligger på niveauhyperfladerne. En *parametriseret kurve* i $\mathbb{R}^2$ er to funktioner $x(t)$ og $y(t)$ defineret for t i et interval. For hvert t_0 giver funktionerne et punkt i planen, nemlig $(x(t_0), y(t_0))$. Og når t_0 varierer, bliver kurven tegnet op. Ofte bruger vi notationen

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$$

Såfremt x og y er differentiable i t, kan vi finde den afledede

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

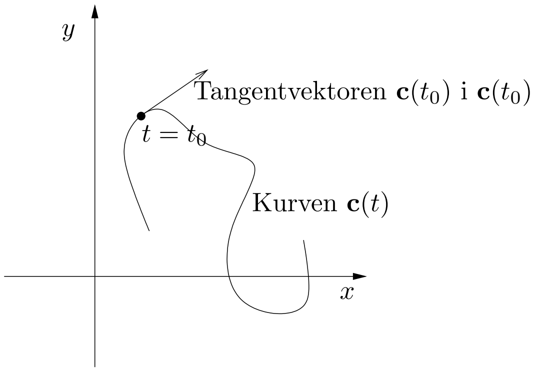
Den geometriske fortolkning af dette er, at $\mathbf{c}'(t_0)$ er tangentvektoren for den parametriserede kurve i punktet $\mathbf{c}(t_0)$. Se figur 2.24.

Vi kan også se på parametriserede kurver i $\mathbb{R}^n$. Da skal vi bruge n funktioner $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$. Og vi skriver

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Såfremt alle x_i'erne er differentiable, er tangentvektoren for den parametriserede kurve i punktet $\mathbf{c}(t_0)$ givet ved $\mathbf{c}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), \dots, x_n'(t_0))$.

Lad $f(x, y)$ være en C^1-funktion. Idéen til at bekræfte formlen for niveaukurvers tangentlinjer er at se, hvad der sker, hvis vi har en parametrisering af niveaukurven. Da bør tangentvektoren for parametriseringen, som defineret



Figur 2.24: En kurve $\mathbf{c}(t)$ og tangentvektoren i $t = t_0$.

ovenfor, også være parallel med retningsvektoren for niveaukurvens tangentlinje, som defineret i definition 2.72. Ved sætning 2.73 er det nok at tjekke at

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{c}'(t_0) = 0$$

hvis $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ er en parametrisering og $(a, b) = \mathbf{c}(t_0)$. Men hvad vil det sige, at $\mathbf{c}(t)$ parametriserer niveaukurven $f(x, y) = k$? Kravet vi stiller er, at for alle t skal punktet $\mathbf{c}(t)$ ligge på niveaukurven. Altså hvis vi indsætter $\mathbf{c}(t)$ i funktionen f så får vi:

$$f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t)) = k$$

Denne ligning kan vi differentiere med hensyn til t. Højre side bliver 0, mens vi på venstre side kan benytte kædereglen. Dette giver:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Indsætter vi $t = t_0$ og lader $(a, b) = \mathbf{c}(t_0)$ ser vi, at dette er det samme som:

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{c}'(t_0) = 0$$

Dermed bekræfter dette ræsonnement vores definition af niveaukurvens tangentlinje. For C^1-funktioner f af tre eller flere variable gælder tilsvarende argumenter. Men i stedet for at parametrisere hele niveauhyperfladen, kan vi klare os med at se på en parametriseret kurve $\mathbf{c}(t)$ som ligger på niveauhyperfladen $f(\mathbf{x}) = k$. Det overlades til den interesserede læser selv at uddybe dette.

Problemet med ovenstående ræsonnementer er, at vi a priori ikke ved, om niveaukurverne og niveaufladerne virkelig er kurver og flader. Det kan tænkes, at løsningsmængden for ligningen $f(\mathbf{x}) = c$ er så grim, at den ikke kan have nogen tangentlinje eller tangentplan. Det er det problem, *sætningen om differentiabilitet af implicit givne funktioner* løser. En konsekvens af denne sætning er, at hvis f er C^1 og $\nabla f(\mathbf{a})$ ikke forsvinder, så er niveaufladen som går gennem $\mathbf{a}$ virkelig en flade, den kan faktisk parametriseres. Dette er betryggende, og betyder at formlerne for niveaukurvers tangentlinjer og niveaufladers tangentplaner, som vi har udledt ovenfor, har den geometriske betydning, vi intuitivt lægger i dem.

2.5 Højere ordens afledede

Fra teorien for funktioner af en variabel ved vi, at det ofte er nyttigt eller nødvendigt at differentiere mere end én gang. Også i flervariabel-teori er det ofte nyttigt at arbejde med andenafledede, tredjeafledede osv. Den store forskel er, at vi har mange flere muligheder

2.78 Eksempel
Lad $f(x, y) = x^2y^3 + y^2$. Vi har to partielt afledede af første orden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y$$

Når vi vil udregne de afledede af anden orden, har vi mange valgmuligheder. Vi kan for eksempel differentiere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn til x en gang til

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3.$$

Vi kan også differentiere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn til y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2.$$

Vi kan også differentiere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til både x og y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + 2y) = 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 2y) = 6x^2y + 2\end{aligned}$$

♣

Den generelle notation skulle fremgå af eksemplet ovenfor –

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

er den funktion, vi får ved at differentiere funktionen f r gange, først med hensyn til variablen x_{i_1}, så med hensyn til variablen x_{i_2} osv.

Selv om en funktion f er C^1, det vil sige at alle de partielt afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eksisterer og er kontinuerte, kan vi ikke fra dette konkludere, at de andenordens partielt afledede $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ eksisterer. Alligevel vil vi se, at de andenordens partielt afledede både eksisterer og er kontinuerte for langt de fleste funktioner, vi støder på i praksis. Videre kan man spørge sig selv, om de tredjeordens partielt afledede eksisterer. Og er de i så fald kontinuerte?

For at håndtere denne situation, kan det svare sig at indføre terminologien, at en funktion er C^r. Vi har følgende definition:

2.79 Definition
En funktion f af n variable defineret på en åben mænge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er en C^2-funktion såfremt alle de partielt afledede af første- og anden orden eksisterer og er kontinuerte på A.

Mere generelt siger vi, at en funktion f af n variable som er defineret på en åben mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$, er C^r såfremt alle de partielt afledede af orden op til og med r eksisterer og er kontinuerte.

Observer at med denne definition er enhver C^r-funktion også en C^k-funktion for $k \leq r$.

2.5.1 Hessematricen

På samme måde som gradienten var en smart måde at opskrive de partielt afledede af første orden, er Hessematricen en måde at opskrive partielt afledede af anden orden. Mens gradienten var en vektor, det vil sige en liste af tal, vil Hessematricen være en matrix, det vil sige at tallene placeres i en tabel med rækker og søjler.

Lad os se på tilfældet med to variable. Vi skal da opskrive gradienten og Hessematricen for en funktion $f(x,y)$:

Gradienten er

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

mens Hessematricen er

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

I det generelle tilfælde, hvor f er en funktion af n variable er Hessematricen:

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Lad os se på nogle eksempler:

2.80 Eksempel

Find udtryk for gradienten og Hessematricen for $f(x, y) = x \cos y$ og udregn derefter $Hf(1, -\pi)$.

For at finde gradienten udregner vi de partielt afledede af første orden. Vi har:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x \sin y \end{aligned}$$

Dermed bliver gradienten lig

$$\nabla f(x, y) = (\cos y, -x \sin y)$$

For at finde Hessematricen finder vi de partielt afledede af anden orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) = -\sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x \sin y) = -\sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-x \sin y) = -x \cos y \end{aligned}$$

Dermed bliver Hessematricen lig

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x \cos y \end{bmatrix}$$

Til slut evaluerer vi Hessematricen i punktet $(1, -\pi)$ og får:

$$Hf(1, -\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

♣

Vi tager også et eksempel, hvor vi ser på en funktion af tre variable:

2.81 Eksempel
Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y, z) = \frac{2xy - 1}{1 + z^2}$$

I dette eksempel vil vi først finde gradienten, derefter vil vi finde de punkter i $\mathbb{R}^3$, hvor $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Vi finder dernæst Hessematricen og evaluerer denne i de punkter, hvor gradienten forsvandt.

Vi udregner gradienten ved at finde de partielt afledede af første orden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2y}{1 + z^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2x}{1 + z^2}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{2z - 4xyz}{(1 + z^2)^2}\end{aligned}$$

Gradienten er derfor givet ved formlen

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2y}{1 + z^2}, \frac{2x}{1 + z^2}, \frac{2z - 4xyz}{(1 + z^2)^2}\right)$$

Hvis $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ får vi, ved at se på første koordinat, at $\frac{2y}{1+z^2} = 0$. Dermed må $y = 0$. Ser vi på anden koordinat, har vi, at $\frac{2x}{1+z^2} = 0$, og derfor er også $x = 0$. Til sidst giver tredje koordinat ligningen

$$\frac{2z - 4xyz}{(1 + z^2)^2} = 0$$

Her kan vi nu indsætte $x = 0$ og $y = 0$. Dette giver

$$\frac{2z}{(1 + z^2)^2} = 0$$

og vi ser, at løsningen er $z = 0$. Dermed har vi fundet ud af, at den eneste løsning til $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ er punktet $(0, 0, 0)$. Nu fortsætter vi ved at udregne de partielt afledede af anden orden, så vi kan bestemme Hessematricen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = \frac{2}{1+z^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{1+z^2}\right) = -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = \frac{2}{1+z^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{1+z^2}\right) = -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z-4xyz}{(1+z^2)^2}\right) = \frac{2(2xy-1)(3z^2-1)}{(1+z^2)^3}
\end{aligned}
$$

Hessematricen bliver altså:

$$
Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{1+z^2} & -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} \\ \frac{2}{1+z^2} & 0 & -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} \\ -\frac{4yz}{(1+z^2)^2} & -\frac{4xz}{(1+z^2)^2} & \frac{2(2xy-1)(3z^2-1)}{(1+z^2)^3} \end{bmatrix}
$$

Vi indsætter punktet, hvor gradienten forsvandt, $(0,0,0)$, og får

$$
Hf(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

♣

2.5.2 Symmetri af blandede partielt afledede

Du har forhåbentligt lagt mærke til, at i eksemplerne ovenfor (2.78, 2.80, 2.81) er de blandede partielt afledede ens. Det vil sige, at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er lig $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ er lig $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ er lig $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$. Dette er ikke en universel regel; der findes funktioner f, således at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er forskellige, men for de fleste funktioner, vi støder på i praksis, vil de blandede partielt afledede være ens.

2.82 Sætning
Lad $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en C^2-funktion af n variable defineret på en åben mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og lad $\mathbf{a}$ være et punkt i definitionsmænden. Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$$

for alle i, j.

Denne sætning siger, at de blandede partielt afledede er ens, hvis blot funktionen er en C^2-funktion, altså såfremt de første- og andenordens partielt afledede eksisterer og er kontinuerte. Dette vil gælde de fleste funktioner, vi møder i dette hæfte.

At blandede partielt afledede af anden orden er ens, medfører også at blandede partielt afledede af r'te orden af en C^r-funktion er ens, når blot de indeholder lige mange differentiationer med hensyn til hver variabel. Hvis f er C^4, kan vi for eksempel vise, at

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

på følgende måde:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial x}$$

Overbevis dig selv om, at du kan begrunde disse overgange.

Sætning 2.82 siger, at hvis vi på forhånd kan overbevise os selv om, at en funktion er C^2, så er det unødvendigt at udregne både $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Det er nok at udregne en af disse, da de er ens. Dette kan spare os for en del regnearbejde. Vi afslutter med et eksempel på dette:

2.83 Eksempel
Lad $f(x, y, t)$ være givet ved

$$f(x, y, t) = e^t(x^3 + xy^2) - t^2.$$

Vi ønsker at beregne Hessematricen for f.

Når vi differentierer udtrykket $e^t(x^3 + xy^2) - t^2$ med hensyn til x, y eller t, siger differentiationsreglerne, at vi får et udtryk, som er bygget op af elementære funktioner ved de fire regnearter og indsætning. Udtrykket vil derfor være kontinuert. Og differentierer vi endnu en gang, vil vi igen få et udtryk opbygget af elementære funktioner, dette er igen kontinuert. Således kan vi fortsætte med at differentiere med hensyn til x, y eller t så mange gange, vi har lyst, og resultatet vil altid være kontinuert. Specielt vil alle de andenordens partielt afledede være kontinuerte. Derfor er f C^2.

Vi finder først de partielt afledede af første orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^t(3x^2 + y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^t$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^t(x^3 + xy^2) - 2t$$

For at finde Hessematricen udregner vi de partielt afledede af anden orden. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^t(3x^2 + y^2)) = 6xe^t$$

For at finde $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ kan vi enten differentiere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn til y, eller differentiere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til x, vi vælger det sidste alternativ, da udtrykket for $\frac{\partial f}{\partial y}$ er mest enkelt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^t) = 2ye^t$$

For at finde $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ vælger vi at differentiere $\frac{\partial f}{\partial x}$ med hensyn til t:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(e^t(3x^2 + y^2)) = e^t(3x^2 + y^2)$$

Videre er

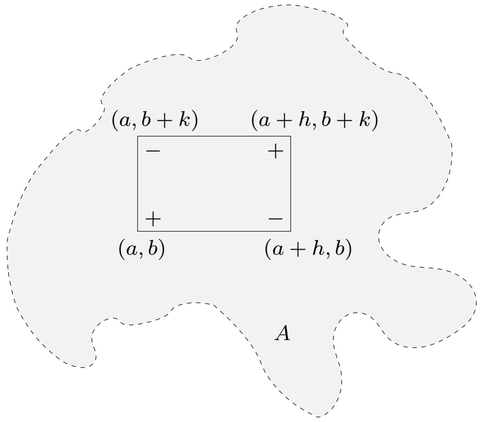
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2xye^t) = 2xe^t$$

Vi finder $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}$ ved at differentiere $\frac{\partial f}{\partial y}$ med hensyn til t:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}(2xye^t) = 2xye^t$$

Og til slut er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = e^t(x^3 + xy^2) - 2$$



Figur 2.25: Rektangel i A

Dette giver, at Hessematricen bliver

$$Hf(x,y,t) = \begin{bmatrix} 6xe^t & 2ye^t & e^t(3x^2+y^2) \\ 2ye^t & 2xe^t & 2xye^t \\ e^t(3x^2+y^2) & 2xye^t & e^t(x^3+xy^2)-2 \end{bmatrix}$$

Bemærk, at vi ved at benytte symmetrien af de blandede partielt afledede slap for at udføre differentiationerne $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ og $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$. ♣

2.5.3 *Bevis for sætning 2.82

Vi skal nu se, hvordan sætningen om lighed af de blandede partielt afledede kan bevises:

Bevis for sætning 2.82: For at forenkle notationen antager vi, at $f(x,y)$ er en funktion af to variable. Lad $\mathbf{a} = (a,b)$ være et punkt i definitionsmængden og antag at tallene h, k er så små at hele rektanglet i figur 2.25 ligger i den åbne mængde A. Lad

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b)$$

hvor vi har kombineret funktionsværdierne i hjørnerne på vores rektangel ved at bruge fortegnene vist på figuren. Vi vil nu vise, at grænseværdien

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk}$$

er lig både $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.

Første skridt er at anvende middelværdisætningen på funktionen

$$g(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Vi får

$$g(a+h) - g(a) = g'(c) \cdot h$$

for et c mellem a og $a+h$. Indsætter vi den oprindelige funktion, og bruger at $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$, ser vi at

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) \\ = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)\right] h \end{aligned}$$

Dette kan også skrives

$$\Delta(h,k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)\right] h$$

Næste skridt er at bruge middelværdisætningen på funktionen

$$G(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y).$$

Vi får

$$G(b+k) - G(b) = G'(d) \cdot k$$

for et d mellem b og $b+k$. Ved at bruge, at $G'(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, y)$, kan dette også skrives

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \cdot k.$$

Kombinerer vi vores formler, ser vi at

$$\Delta(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \cdot hk$$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er kontinuert, vil $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c, d) \to \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ når $(h,k) \to 0$. Følgelig er

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

For at vise, at også $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, bytter vi om på rollerne for de variable x og y i argumentet ovenfor. Vi starter med at bruge middelværdisætningen på funktionen

$$\gamma(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

og fortsætter på akkurat samme måde som ovenfor. Detaljerne overlades til læseren. □

2.6 Opgaver

Opgave 2.1
Afgør for hver af mængderne i eksempel 2.5 om de er åbne eller lukkede.

Opgave 2.2
Afgør for hver af mængderne i eksempel 2.4, om de er begrænsede eller ej.

Opgave 2.3
Afgør om mængden er åben eller lukket eller ingen af delene.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ og } |y| \leq 1\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ og } |y| < 1\}$
c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ og } |y| < 1\}$
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y < 1\}$
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$
g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ og } y \text{ er rationale}\}$
h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

Opgave 2.4
I denne opgave skal vi se lidt på egenskaberne for åbne mængder.

a) Vis at $A \subset \mathbb{R}^n$ er åben hvis og kun hvis følgende er opfyldt: For ethvert punkt $\mathbf{a} \in A$ findes der et positivt tal r således at der for alle $\mathbf{x}$ som opfylder $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ er $\mathbf{x} \in A$.

b) Antag at $A, B \subset \mathbb{R}^n$ er åbne mængder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er åbne mængder.

c) Hvis $A \subset \mathbb{R}^n$, så kaldes mængden

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$$

komplementærmængden for A. Vis at A og A^c har samme rand, det vil sige $\partial A = \partial(A^c)$.

d) Vis at en mængde $A \subset \mathbb{R}^n$ er åben hvis og kun hvis komplementærmængden A^c er lukket.

Opgave 2.5
I denne opgave skal vi se lidt på egenskaberne for lukkede mængder. Det er en fordel at løse opgave 2.4, før du begynder på denne.

a) Antag at $A, B \in \mathbb{R}^n$ er lukkede mængder. Vis at $A \cup B$ og $A \cap B$ er lukkede mængder.

b) Antag at $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket, og at $B \subset \mathbb{R}^n$ er åben. Vis at

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

er lukket.

Opgave 2.6
I denne opgave skal vi se lidt på konvergens af følger i $\mathbb{R}^n$.

a) Lad $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af punkter i $\mathbb{R}^n$. Forklar hvad det vil sige, at $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mod et punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

b) Lad $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af punkter i $\mathbb{R}^n$ som konvergerer mod $\mathbf{a}$. Antag at $\mathbf{x}_k \in A$ for alle k. Vis, at da er $\mathbf{a} \in \overline{A}$. Find et eksempel, som viser, at $\mathbf{a}$ ikke behøver at være med i A.

c) Bevis følgende påstand: En delmængde $A \subset \mathbb{R}^n$ er lukket hvis og kun hvis enhver konvergent følge af punkter i A konvergerer mod et punkt i A.

d) Antag at $\mathbf{a}$ er med i definitionsmængden for en funktion f. Vis at f er kontinuert i $\mathbf{a}$ hvis og kun hvis

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$$

for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mod $\mathbf{a}$ og hvor hvert $\mathbf{x}_k$ er med i definitionsmængden for f.

Opgave 2.7
Find grænseværdierne

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x^3 + 2xy)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} x^2 \sin(xy)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x+y}}{x^2+3y}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \cos(x+y)$

Opgave 2.8
Find grænseværdierne eller begrund hvorfor grænsen ikke eksisterer.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3x^2-3xy-2x+2y}{x-y}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \frac{\sin y+\tan x}{1+x+y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,4)} \frac{1+2x+3y+4xy}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x+y)(1+x+y)}{2x^2+xy}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^4+x^5y^6}{x^2+y^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{3x^2+4y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,\sqrt{3})} \frac{\arctan\frac{x}{y}}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^4+2x^2y^2+y^4}$

Opgave 2.9
Vis at funktionen f er kontinuert

a) $f(x,y)=x+y$

b) $f(x,y)=x^2y+y$

c) $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+y)$

e) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Opgave 2.10

a) Brug sætning 2.24 til at bevise sætning 2.33.

b) Bevis sætning 2.24.

Opgave 2.11
I denne opgave har du brug for trekantsuligheden, som siger, at hvis $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, så er $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$.

a) Vis at $|\,\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\,|\leq\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ for alle $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$.

b) Lad $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$. Vis at funktionen $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$ er kontinuert.

c) Vis at funktionen $g(\mathbf{x})=\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}$ er kontinuert, hvor den er defineret.

Opgave 2.12
Vis at funktionen f har en størsteværdi på mængden A.

a) $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$

b) $f(x,y,z) = x^2+xy+z^3$ $\qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \leq 1\}$

c) $f(x,y,z,u) = e^{-(x-u)^2}(z^2+y^2)$
$\qquad A = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq u \leq 1\}$

Opgave 2.13
Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion og antag at der findes et punkt $\mathbf{a}$, så $f(\mathbf{a}) > 0$. Antag videre at for hvert $\varepsilon > 0$ findes et $R > 0$ således at $|f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ når $\|\mathbf{x}\| > R$. For $\mathbf{x}$ tilstrækkelig langt borte fra origo er $f(\mathbf{x})$ altså vilkårligt lille. Vis at f har en størsteværdi.

Opgave 2.14
Find gradienten for f.

a) $f(x,y) = x^3y + 3xy^4$
b) $f(x,y) = \frac{x^2+x^3}{y}$
c) $f(x,y) = \cos(x+y^2)$
d) $f(x,y) = x^2\ln(xy^2)$
e) $f(x,y,z) = (x+y)e^{-z}$
f) $f(x,y,z) = \frac{z^2\tan x}{1+y^2}$
g) $f(x,y,z) = z\arctan(x+y)$
h) $f(x,y,z,u) = (z^2+u)e^{-x+3y}$

Opgave 2.15
Find den retningsafledede $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$:

a) $f(x,y) = 3xy + y^2$; $\quad \mathbf{a} = (1,2)$; $\quad \mathbf{r} = (3,-1)$

b) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$; $\quad \mathbf{a} = (1,0)$; $\quad \mathbf{r} = (-1,1)$

c) $f(x,y,z) = x^2y + z^2$; $\quad \mathbf{a} = (1,0,1)$; $\quad \mathbf{r} = (1,1,-1)$

d) $f(x,y,z) = z\sin(xy)$; $\quad \mathbf{a} = (\frac{\pi}{2},1,0)$; $\quad \mathbf{r} = (-1,0,2)$

Opgave 2.16
I hvilken retning vokser funktionen hurtigst i det givne punkt?

a) $f(x,y) = -x^2y + 7y^3$, $\quad \mathbf{a} = (4,-3)$

b) $f(x,y,z) = (x^2-y^2)e^z$; $\quad \mathbf{a} = (1,-1,3)$

Opgave 2.17
Find funktionens tangentplan i det givne punkt.

a) $f(x,y) = 1 - 2x + 3y - 4xy$ i $\mathbf{a} = (1,-1)$.

b) $g(x,y) = \frac{1}{3}x^2\cos y$ i $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$.

c) $h(x,y) = (x+y)e^{x-y^2}$ i $\mathbf{c} = (4,-2)$.

d) $k(x,y) = \frac{x \ln y}{\sqrt{1+x^2}}$ i $\mathbf{d} = (0,e)$.

Opgave 2.18
Find tangentplanen i $\mathbf{a}$ for den niveauflade for f, som går gennem punktet $\mathbf{a}$ når

a) $f(x,y,z) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$ og $\mathbf{a} = (0,0,0)$

b) $f(x,y,z) = \frac{x+2y+4xy}{5z^2+3}$ og $\mathbf{a} = (6,1,-1)$

c) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2} \sin z$ og $\mathbf{a} = (2,-3,\frac{\pi}{3})$

Opgave 2.19
Lad $f(u,v) = u^2 + v$, $g(x,y) = 2xy$, $h(x,y) = x + y^2$. Brug kædereglen til at finde de partielt afledede af $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$.

Opgave 2.20
Lad $f(u,v) = u \cdot e^{-v}$, $g(x,y,z) = 2xy + z$, $h(x,y,z) = 2y(z+x)$. Brug kædereglen til at finde de partielt afledede af $k(x,y,z) = f(g(x,y,z),\ h(x,y,z))$.

Opgave 2.21
I teorien for gasser er trykket ρ givet som en funktion af volumenet V og temperaturen T. Vi har altså $\rho = f(V,T)$, hvor funktionen f afhænger af hvilken type gas vi ser på. Antag, at vi ved hvordan volumenet $V = V(t)$ og temperaturen $T = T(t)$ forandrer sig med tiden t. Vis at

$$\rho'(t) = \frac{\partial f}{\partial V} V'(t) + \frac{\partial f}{\partial T} T'(t)$$

Hvad får du, hvis $\rho = c\frac{T}{V}$, hvor c er en konstant?

Opgave 2.22
To slags varer konkurrerer om det samme marked. Efterspørgselen E_1 efter den første type varer varierer med priserne p_1 og p_2 på de to varer.

Vi har altså en funktion $E_1 = E_1(p_1, p_2)$. Antag at vi ved hvordan priserne $p_1 = p_1(t)$ og $p_2 = p_2(t)$ varierer med tiden. Vis at efterspørselens variation med tiden kan udtrykkes ved

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{\partial E_1}{\partial p_1} p_1'(t) + \frac{\partial E_1}{\partial p_2} p_2'(t)$$

Opgave 2.23
Volumenet af en cylinder med radius r og højde h er som bekendt $V = \pi r^2 h$. Når højden og radien varierer, kan vi tænke på dette som en funktion i to variable $V(r,h) = \pi r^2 h$. Forklar at når radien ændrer sig fra r til $r + \Delta r$ og højden ændrer sig fra h til $h + \Delta h$, så er ændringen i V tilnærmet givet ved

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h = 2\pi r h\, \Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Antag at du har en cylinder, hvor du ved, at radien ligger mellem 2 m og 2.05 m og hvor højden ligger mellem 5 m og 5.05 m. Brug formlen ovenfor til at anslå usikkerheden i volumenet.

Opgave 2.24
Udregn Hessematricerne:

a) $f(x,y) = 3x^2y + 2y^2x$

b) $f(x,y) = x \sin y$

c) $f(x,y) = x^2 e^{x-y}$

d) $f(x,y,z) = x^2 z - y^2 z^2$

I de følgende opgaver ser vi på nogle funktioner som **ikke** er guds bedste børn. Pointen er at give eksempler på nogle funktioner, som ikke opfylder de betingelser, vi sædvanligvis stiller, og se nogle konsekvenser af dette.

Opgave 2.25
Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funktionen defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Find et udtryk for $f'(x)$ når $x \neq 0$.

b) Vis at f er differentiabel i 0 og at $f'(0) = 0$.

c) Afgør om $f'(x)$ er en kontinuert funktion.

d) Er f C^1? Er f differentiabel?

Opgave 2.26
Lad funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < y < x^2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

a) Find den retningsafledede af g i origo og i retningen $(1,0)$.

b) Lad $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ være en vektor i $\mathbb{R}^2$ med $r_2 \neq 0$. Find den retningsafledede af g i origo og i retningen $\mathbf{r}$.

c) Begrund hvorfor g ikke er kontinuert i origo.

d) Hvorfor er denne funktion ikke et modeksempel til sætning 2.59?

Opgave 2.27
Definér funktionen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y} & \text{for } x^2+y \neq 0, \\ 0 & \text{for } x^2+y = 0. \end{cases}$$

a) Udregn den retningsafledede af h i origo i retningen $(1,0)$.

b) Lad $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ være en vektor med $r_2 \neq 0$. Find $h'((0,0);\mathbf{r})$.

c) Begrund at $\nabla h(0,0) = (0,0)$.

d) Find en retning $\mathbf{r}$ således at $h'((0,0);\mathbf{r}) \neq \nabla h(0,0) \cdot \mathbf{r}$.

e) Hvorfor er denne funktion ikke et modeksempel på sætning 2.57?

Opgave 2.28
Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være defineret ved gaffel-forskriften

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuert.

b) Udregn de partielt afledede af f for $(x,y) \neq 0$.

c) Brug definitionen til at udregne $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) Er f C^1?

e) Udregn grænseværdierne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} \quad \text{og} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

f) Hvad er $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Strider dette mod sætning 2.82? Hvorfor/hvorfor ikke?

Kapitel 3

Største- og mindsteværdier

Vi starter med at genopfriske nogle kendte resultater for reelle funktioner af én variabel. Lad f være en kontinuert reel funktion af én variabel defineret på det lukkede (og begrænsede) interval $[a, b]$. Fra Ekstremalværdisætningen (sætning 2.42) ved vi, at f har både største- og mindsteværdi. Hvis f endvidere er C^1, ved vi, at største- og mindsteværdierne må findes blandt endepunkterne og de stationære punkter.

Hvordan finder vi så største- og mindsteværdipunkter for funktioner af flere variable? I dette kapitel skal vi se, at der i tilfældet med flere variable findes en teori som er meget analog til den ovenfor beskrevne for en variabel. Hovedidéerne er de samme som i envariabel-tilfældet, men da geometrien er udvidet, bliver problemerne noget vanskeligere.

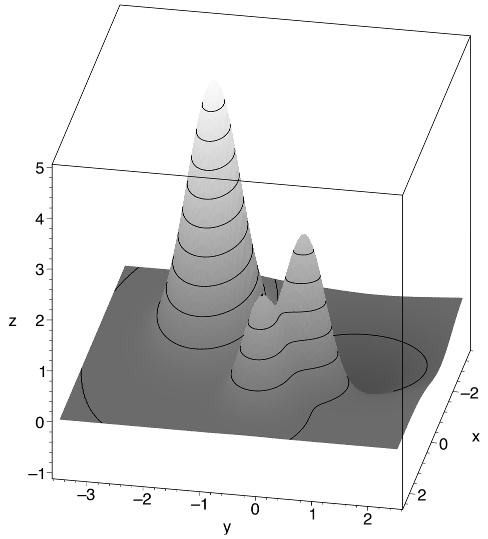
I kapitel 2 definerede vi største- og mindsteværdier for funktioner af flere variable. Vi kan imidlertid ikke regne med at finde de globale ekstremumspunkter direkte, men må gå vejen om lokale maksima og minima.

3.1 Definition
Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable. Vi siger, at f har et lokalt maksimum i punktet $\mathbf{a} \in A$, hvis der findes en radius $r > 0$ således at $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{y} \in A$ med afstand mindre end r til $\mathbf{a}$; det vil sige $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < r$.

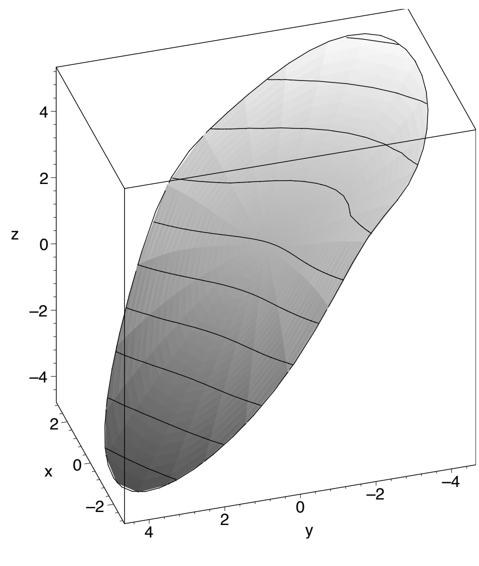
Tilsvarende kaldes $\mathbf{a}$ et lokalt minimum, såfremt der findes en radius $r > 0$ således at $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{y})$ for alle $y \in A$ med $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < r$.

Det er klart, at et globalt ekstremumspunkt også vil være et lokalt ekstremumspunkt.

Lokale maksimumspunkter ser lidt forskellige ud alt efter om $\mathbf{a}$ er et indre punkt eller er randpunkt. Er $\mathbf{a}$ et indre punkt, vil $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ være en "bakketop" på funktionsgrafen som vist i figur 3.1. Er derimod $\mathbf{a}$ et randpunkt, er det



Figur 3.1: Lokale ekstremumspunkter i det indre af D_f.



Figur 3.2: Lokale ekstremumspunkter på randen af D_f.

nok at $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ er det højeste punkt på en "skråning" som ville være blevet endnu højere, hvis den havde fået lov at fortsætte udenfor A. Se figur 3.2

3.1 Nødvendige betingelser

Når man undersøger en funktion af en variabel for at finde lokale ekstremumspunkter, starter man med at finde de kritiske punkter. Disse er de eneste, som **kan** være lokale ekstremumspunkter. Den samme fremgangsmåde kan benyttes til at lede efter lokale max- og min-punkter for en funktion af flere variable. Her benyttes så gradienten i stedet for den afledede. Dette er førsteafledet-kriteriet:

3.2 Sætning
Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable. Antag at f har et lokalt maksimum eller minimum i $\mathbf{a}$. Da er en af følgende 3 betingelser opfyldt.

i) $\mathbf{a}$ *et randpunkt for A eller*

ii) *gradienten ∇f eksisterer ikke i $\mathbf{a}$ eller*

iii) $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Bevis: Idéen i beviset er at antage, at $\mathbf{a}$ er et indre punkt, hvor gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ eksisterer, men er forskellige fra 0. Hvis vi kan vise, at et sådant punkt umuligt kan være et ekstremumspunkt, så er sætningen bevist. Når $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, må mindst en af de partielt afledede også være forskellig fra 0. Antag derfor, at $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \neq 0$. Lad $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{a}$ og se på konturen

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

Da $g'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \neq 0$, ved vi fra envariabelteorien, at g ikke har noget lokalt ekstremalpunkt i a_j. Men så følger det, at f heller ikke kan have et ekstremumspunkt i $\mathbf{a}$. $\square$

Lad os indføre lidt terminologi. Et punkt $\mathbf{a}$, hvor $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$ vil vi kalde et *stationært* punkt for funktionen f. Hvis $\mathbf{a}$ er et indre punkt, men $\nabla f(\mathbf{a})$ ikke eksisterer, kalder vi $\mathbf{a}$ et *singulært* punkt for f. *Kritiske* punkter er en fælles betegnelse, som omfatter stationære punkter, singulære punkter og randpunkter for definitionsmængden for f.

Et stationært punkt, som hverken er et lokalt maksimum eller et lokalt minimum, vil vi kalde et *sadelpunkt.* Det er ikke så svært at forstå, hvor det sidste navn kommer fra – det punkt, du sidder på, når du rider på en hest, er et typisk eksempel på et sadelpunkt; det er et minimum, når du bevæger dig i hestens længderetning og et maksimum, når du bevæger dig på tværs af hesten.

Ved hjælp af sætning 3.2 kan vi reducere jagten på mulige maksimums- og minimumspunkter betragteligt. Det er nok at lede blandt de kritiske punkter:

3.3 Eksempel
Lad os forsøge at lokalisere eventuelle maksimums- og minimumspunkter for funktionen

$$f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$$

Vi ser, at f er defineret på hele $\mathbb{R}^2$, derfor er der ingen randpunkter. Vi differentierer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3y - 3\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x + 9\end{aligned}$$

Disse eksisterer overalt, f er faktisk C^1, og ifølge sætningen ovenfor, bør vi da se efter punkter, hvor begge de partielt afledede er nul. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{aligned}3y - 3 &= 0\\ 3x + 9 &= 0\end{aligned}$$

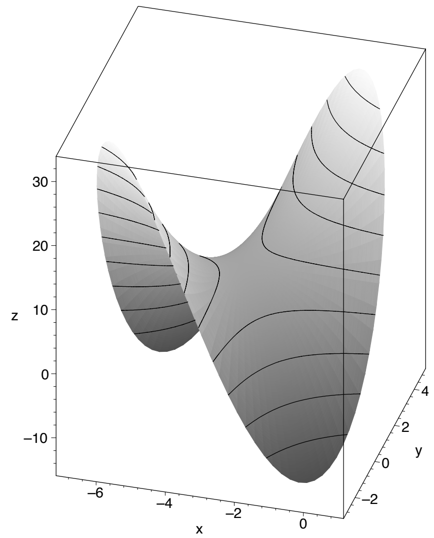
som har løsningen $x = -3$, $y = 1$. Dette betyder, at det eneste mulige maksimums- eller minimumspunkt for f er $(-3, 1)$.

Næste spørsmål er så, om $(-3, 1)$ virkelig er et lokalt maksimums- eller minimumspunkt. For at afgøre dette bruger vi et trick som af og til er nyttigt. Vi ser på konturer for f over linjer, som går gennem $(-3, 1)$. Prøver vi med $x = -3$ eller $y = 1$ får vi

$$\begin{aligned}f(-3, y) &= 3 \cdot (-3) \cdot y - 3 \cdot (-3) + 9y = 9\\ f(x, 1) &= 3x - 3x + 9 = 9\end{aligned}$$

Disse konturer er konstante funktioner, og vi kan derfor endnu ikke afgøre, om $(-3, 1)$ er et maxpunkt, et minpunkt eller et sadelpunkt. Men lad os se på de to linjer $y - 1 = x + 3$ og $y - 1 = -x - 3$. Vi har

$$\begin{aligned}f(x, x + 4) &= 3x(x + 4) - 3x + 9(x + 4) = 3x^2 + 18x + 36\\ f(x, -x - 2) &= -3x(x + 2) - 3x - 9(x + 2) = -3x^2 - 18x - 18\end{aligned}$$



Figur 3.3: Grafen for $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$.

Konturen over $y - 1 = x + 3$ er en parabel, som krummer opad. Derfor kan det stationære punkt $(-3, 1)$ ikke være et maksimum. Mens konturen over $y-1 = -x-3$ er en parabel, som krummer nedad. Derfor kan det stationære punkt heller ikke være et minimum. Den eneste mulighed som står tilbage er, at $(-3, 1)$ er et sadelpunkt.

Dette betyder, at f ikke har noget max- eller min-punkt på $\mathbb{R}^2$. Grafen for f finder du i figur 3.3. ♣

Eksemplet ovenfor peger på det, som bliver hovedproblemstillingen i resten af dette kapitel: Hvis $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, hvordan afgør vi så på en effektiv måde, om **a** er et lokalt maksimum, minimum eller ingen af delene? Teknikken med at se på konturer kan ofte bruges til at vise, at et stationært punkt er et sadelpunkt, men vi ønsker os en mere generel fremgangsmåde.

3.2 Tilstrækkelige betingelser

Lad f være en to gange differentiabel funktion af en variabel og antag at $f'(a) = 0$. Så fortæller *andenafledet-kriteriet* os, at a er et lokalt minimum hvis $f''(a) > 0$ og at a er et lokalt maksimum hvis $f''(a) < 0$. Vi vil nu begynde arbejdet med at lave et tilsvarende kriterium for funktioner af to variable. Det er også muligt at lave andenafledet-kriterier for tre og flere variable, men dette bliver ganske kompliceret, fordi en funktion af flere variable har så mange forskellige andenafledede, og de skal kombineres på rigtig vis for at få et kriterium, som virker. For at nå frem til dette for flere end to variable bruges lineær algebra. Man udregner det, som hedder egenværdierne for Hessematricen. Dette vil vi ikke komme videre ind på i dette hæfte, så vi vil nøjes med at se på funktioner af to variable. Andenafledet-kriteriet for to variable kaldes *ABC-kriteriet* .

3.4 Sætning (ABC-kriteriet)
Lad $f(x, y)$ være en C^2-funktion og antag at (a, b) er et stationært punkt for f. Lad

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \text{ og } \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

og lad D være givet ved $D = AC - B^2$. Da gælder:

i) Hvis $D < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt.

ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er (a, b) et lokalt minimum.

iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$, giver testen ingen konklusion.

Tallet D, som forekommer i sætningen ovenfor, er et eksempel på en determinant, det er determinanten for Hessematricen i (a, b). Dette kan skrives som følger:

$$D = \det(Hf(a, b)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Den generelle formel for en determinant for en 2×2-matrix er:

$$\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beviset for ABC-kriteriet udsætter vi lidt endnu, vi ser først på nogle eksempler på, hvordan det bruges i praksis:

3.5 Eksempel
Lad os gå tilbage til funktionen fra eksempel 3.3 og se hvordan ABC-kriteriet virker i dette tilfælde. Vi har set, at funktionen $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ har partielt afledede

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

Disse forsvandt samtidig hvis og kun hvis $x = -3$ og $y = 1$, derfor er $(-3, 1)$ et stationært punkt. For at bruge ABC-kriteriet udregner vi Hessematricen. Vi har

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

som giver

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

Ifølge ABC-kriteriet er $(-3, 1)$ et sadelpunkt, fordi $D < 0$. ♣

Lad os se på et lidt mere kompliceret eksempel:

3.6 Eksempel
Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$f(x, y) = xye^{x-y^2}$$

Vi ønsker at finde de stationære punkter og afgøre om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

Differentiation giver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot y \cdot e^{x-y^2} + x \cdot y \cdot e^{x-y^2} = y(1 + x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 1 \cdot e^{x-y^2} + xye^{x-y^2}(-2y) = x(1 - 2y^2)e^{x-y^2}$$

Da e^{x-y^2} ikke kan være nul, er det nok at løse ligningssystemet

$$y(1 + x) = 0$$
$$x(1 - 2y^2) = 0$$

for at finde de stationære punkter. Den første ligning har to løsninger $x = -1$ og $y = 0$. Sætter vi $x = -1$ i den anden ligning, får vi $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sætter vi $y = 0$ i den anden ligning, får vi $x = 0$. Vi har altså tre stationære punkter $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ og $(0, 0)$.

Næste skridt er at udregne de andenafledede:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2} = y(2+x)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1+x)e^{x-y^2} + y(1+x)e^{x-y^2}(-2y) = (1+x)(1-2y^2)e^{x-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(-4y)e^{x-y^2} + x(1-2y^2)e^{x-y^2}(-2y) = -2xy(3-2y^2)e^{x-y^2}$$

Vi må undersøge de stationære punkter hver for sig.

Det stationære punkt $(0,0)$**:** Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0(2+0)e^{0-0^2} = 0$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (1+0)(1-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 1$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2\cdot 0\cdot 0(3-2\cdot 0^2)e^{0-0^2} = 0.$$

Dette giver $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 - 1^2 = -1$. Altså er $(0,0)$ et sadelpunkt.

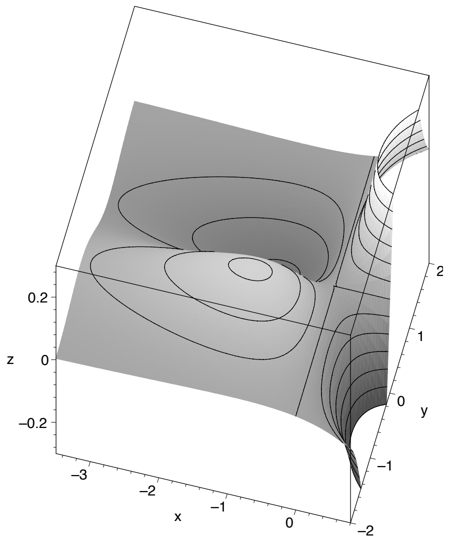
Det stationære punkt $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$**:** Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+(-1))e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = (1+(-1))\left(1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -2(-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)e^{-1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette giver

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Da $D > 0$, $A > 0$, fortæller ABC-kriteriet os, at $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ er et lokalt minimum.



Figur 3.4: Grafen for $f(x,y) = xye^{x-y^2}$.

Det stationære punkt $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$**:** Her er

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}}$$

Dette giver

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-3}$$

Fordi $D > 0$ og $A < 0$, må $(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ være et lokalt maksimum.

Grafen for f finder du i figur 3.4 ♣

Lad os nu se på to eksempler, hvor determinanten for Hessematricen forsvinder.

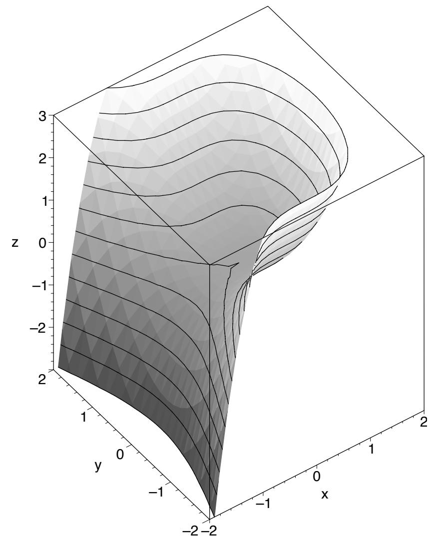
3.7 Eksempel

Lad f være givet ved

$$f(x,y) = x^3 + y^2$$

Vi udregner gradienten og Hessematricen. Vi får:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, 2y) \quad \text{og} \quad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Figur 3.5: Grafen for $f(x, y) = x^3 + y^2$.

Det eneste stationære punkt er origo, og her er Hessematricen lig $Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Dette giver $D = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0$. Dermed kan ABC-kriteriet ikke bruges. Alligevel kan vi sige, at $(0, 0)$ er et sadelpunkt. Se på konturen $f(x, 0) = x^3$. Denne er strengt voksende. Derfor kan $(0, 0)$ ikke være hverken max eller min. Se grafen i figur 3.5. ♣

3.8 Eksempel
Lad h være givet ved

$$h(x, y) = x^4 + y^4$$

Da er gradienten

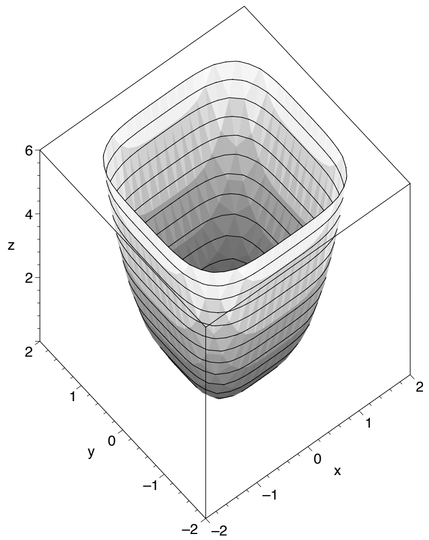
$$\nabla h(x, y) = (4x^3, 4y^3)$$

Derfor er origo det eneste stationære punkt. Hessematricen er

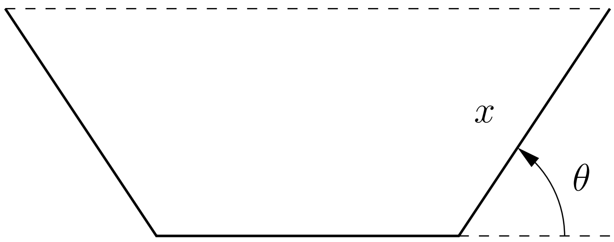
$$Hh(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Evalueret i origo er $Hh(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dermed er $D = 0$. Heller ikke for denne funktion kan ABC-kriteriet benyttes, men det er aligevel klart, at origo er et absolut minimum for h, fordi $x^4 \geq 0$ og $y^4 \geq 0$, hvor vi har lighedstegn hvis og kun hvis $x = 0$ og $y = 0$. Grafen finder du i figur 3.6. ♣

De to sidste eksempler viste, at hvis $D = 0$, så kan vi ikke afgøre om det kritiske punkt er et ekstremumspunkt eller et sadelpunkt.



Figur 3.6: Grafen for $h(x, y) = x^4 + y^4$.



Figur 3.7: Tværsnittet af en tagrende.

Lad os til sidst se på et praktisk eksempel.

3.9 Eksempel
Af et rektangulært stykke metal med stor længde og bredde L vil vi lave en tagrende, se figur 3.7. Vi ønsker at arealet af tværsnittet skal være så stort som muligt. Af naturlige årsager må x ligge mellem 0 og $\frac{1}{2}L$, og det er klart, at vi kan antage at θ ligger mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$. (Hvis θ overstiger $\frac{\pi}{2}$ er det klart, at arealet bliver mindre end for $\theta = \frac{\pi}{2}$.)

Tværsnittet er et trapez med højde $x \sin\theta$, og de to parallelle sider har længde $L - 2x$ og $L - 2x + 2x\cos\theta$. Arealet er derfor

$$A = \frac{1}{2}\left((L - 2x) + (L - 2x + 2x\cos\theta)\right) x \sin\theta$$

Vi tænker på A som en funktion af x og θ og forenkler udtrykket:

$$A(x, \theta) = Lx\sin\theta - 2x^2\sin\theta + x^2\sin\theta\cos\theta$$

Nu vil vi bruge førsteafledet-kriteriet til at finde kritiske punkter, når $0 < x < \frac{1}{2}L$ og $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Vi finder de partielt afledede:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = L\sin\theta - 4x\sin\theta + 2x\sin\theta\cos\theta$$
$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = Lx\cos\theta - 2x^2\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta$$

Ser vi på $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ har vi

$$L\sin\theta - 4x\sin\theta + 2x\sin\theta\cos\theta = 0$$

som giver

$$\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x}$$

fordi $x \neq 0$ og $\sin\theta \neq 0$ her. Videre ser vi på $\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0$:

$$Lx\cos\theta - 2x^2\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta = 0$$

hvor vi indsætter $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ og $\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x}$. Da får vi

$$Lx\left(2 - \frac{L}{2x}\right) - 2x^2\left(2 - \frac{L}{2x}\right) + 2x^2\left(2 - \frac{L}{2x}\right)^2 - x^2 = 0$$

Dette forenkles til

$$3x^2 - Lx = 0.$$

Altså må $x = \frac{1}{3}L$. Den tilsvarende værdi for θ finder vi ved at løse

$$\cos\theta = 2 - \frac{L}{2x} = 2 - \frac{L}{2\frac{1}{3}L} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Vi ser, at $\theta = \frac{\pi}{3}$. Arealet er da

$$A(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}) = L \cdot \frac{L}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{L^2}{9} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{L^2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2$$

Vores intuition siger os nu, at vi har fundet ud af, at det maksimale areal er $\frac{\sqrt{3}}{12}L^2$ og at dette opnås ved $x = \frac{1}{3}L$ og $\theta = \frac{\pi}{3}$. Lad os se, hvordan vi kan argumentere for dette matematisk. Førsteafledet-kriteriet hjælper os med at finde kritiske punkter for A i den åbne mængde givet ved $0 < x < \frac{L}{2}$ og $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Eventuelle max- eller minpunkter, som vi ikke har opfanget ved førsteafledet-kriteriet må derfor være endepunkts-tilfælde. Vi undersøger derfor $x = 0$, $x = \frac{1}{2}L$, $\theta = 0$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$ separat.

Hvis $x = 0$ er $A = 0$.

Hvis $\theta = 0$ er også $A = 0$.

Hvis $x = \frac{1}{2}L$ er $A = \frac{L^2}{8}\sin 2\theta$.

Hvis $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $A = Lx - 2x^2$.

Når $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ er $0 \leq \frac{L^2}{8}\sin 2\theta \leq \frac{1}{8}L^2$, og når $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$ er $0 \leq Lx - 2x^2 \leq \frac{1}{8}L^2$.

Ekstremalværdisætningen siger, at funktionen A har et maksimum på den lukkede og begrænsede mængde givet ved $0 \leq x \leq \frac{1}{2}L$ og $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. I endepunkts-tilfældene er $A \leq \frac{1}{8}L^2$, og det eneste kritiske punkt i det indre har kritisk værdi $A = \frac{\sqrt{3}}{12}L^2$. Da $\frac{\sqrt{3}}{12}L^2 > \frac{1}{8}L^2$, kan vi konkludere, at maksimum er i punktet $(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3})$.

Bemærk at vi ikke har brugt ABC-kriteriet. Lad os nu bruge dette til at bekræfte det, vi allerede ved; at $(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3})$ er et maksimum. Vi udregner Hessematricen for A:

$$HA(x,\theta) = \begin{bmatrix} \sin 2\theta - 4\sin\theta & L\cos\theta - 4x\cos\theta + 2x\cos 2\theta \\ L\cos\theta - 4x\cos\theta + 2x\cos 2\theta & -Lx\sin\theta + 2x^2\sin\theta - 2x^2\sin 2\theta \end{bmatrix}$$

Evaluerer vi Hessematricen i det kritiske punkt, får vi

$$HA(\frac{1}{3}L, \frac{\pi}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}L \\ -\frac{1}{2}L & -\frac{\sqrt{3}}{6}L^2 \end{bmatrix}$$

Dette giver $D = \frac{1}{2}L^2$. Derfor har vi et max- eller minpunkt. Da $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ er negativ, har vi et maksimum. ♣

3.2.1 *Største- og mindsteværdier for andengradspolynomier

En væsentlig ingrediens i beviset for ABC-kriteriet er at vise, at kriteriet fungerer for andengradspolynomier. Normalt bruges lineær algebra til at drøfte max og min for andengradspolynomier; man studerer kvadratiske former. I dette hæfte ønsker vi derimod at undgå udstrakt brug af lineær algebra. Derfor vil vi med mere elementære metoder drøfte de stationære punkter for et andengradspolynomium i to variable. Udledningerne nedenfor kan måske føles lange og uelegante, men det er prisen, vi må betale for at undgå lineær algebra. Alligevel er rammen for argumentationen den samme.

I eksempel 3.3 så vi, at andengradspolynomiet $f(x, y) = 3xy - 3x + 9y$ havde et sadelpunkt i $(-3, 1)$. Lad os nu se på et generelt andengradspolynomium og prøve at afgøre hvilket slags stationære punkter, det har.

Et andengradspolynomium i to variable har formen:

$$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

hvor a, b, c, d, e og f er konstanter. Gradienten for p er

$$\nabla p(x, y) = (b + 2dx + ey, c + ex + 2fy)$$

og Hessematricen er

$$Hp(x, y) = \begin{bmatrix} 2d & e \\ e & 2f \end{bmatrix}$$

De stationære punkter for p er dem, hvor $\nabla p(x, y) = 0$, det vil sige løsninger til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2dx + ey &= -b \\ ex + 2fy &= -c \end{aligned}$$

Tænk på en sådan løsning som et skæringspunkt i xy-planen mellem de to linjer $2dx + ey = -b$ og $ex + 2fy = -c$. Det kan imidlertid ske, at en eller begge af disse ligninger ikke beskriver en linje. Dette er kun tilfældet såfremt

i) $d = e = 0$ og $f \neq 0$,

ii) $d \neq 0$ og $e = f = 0$ eller

iii) $d = e = f = 0$

Oven i købet må vi tage højde for specialtilfældet, hvor de to linjer er parallelle. Dette sker hvis og kun hvis prikproduktet mellem normalvektoren for den første linje, $(2d, e)$, og en retningsvektor for den anden linje, f.eks. $(2f, -e)$, er nul. Det vil sige

$$(2d, e) \cdot (2f, -e) = 4df - e^2 = 0$$

Bemærk, at denne ligning også er opfyldt af tilfældene i), ii) og iii). Dermed har vi vist, at

3.10 Sætning
Dersom $4df - e^2 \neq 0$, så beskriver $2dx + ey = -b$ og $ex + 2fy = -c$ to ikke-parallelle linjer. Altså har ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2dx + ey &= -b \\ ex + 2fy &= -c \end{aligned}$$

nøjagtigt en løsning.

Bemærk, at $4df - e^2$ er determinanten af Hessematricen. Sætningen ovenfor siger, at hvis denne er forskellig fra 0, så har polynomiet $p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ nøjagtigt et stationært punkt. Vi vil herefter kun koncentrere os om de tilfælde, hvor $4df - e^2 \neq 0$. De andre tilfælde er degenererede og kan ikke bruges i beviset for ABC-kriteriet.

Lad (x_0, y_0) være det stationære punkt. For at forenkle beregningerne ville det vært fint, hvis vi kunne antage, at $(x_0, y_0) = (0,0)$. Vi kan indføre nye koordinater (x', y') for at opnå dette. Lad

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

Vi indsætter i polynomiet og får

$$\begin{aligned} p(x,y) &= a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \\ &= a + b(x' + x_0) + c(y' + y_0) \\ &\quad + d(x' + x_0)^2 + e(x' + x_0)(y' + y_0) + f(y' + y_0)^2 \\ &= a + bx' + bx_0 + cy' + cy_0 \\ &\quad + d(x')^2 + 2dx_0x' + dx_0^2 \\ &\quad + ex'y' + ex_0y' + ey_0x' + ex_0y_0 \\ &\quad + f(y')^2 + 2fy_0y' + fy_0^2 \\ &= a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ex_0y_0 + fy_0^2 \\ &\quad + (b + 2dx_0 + ey_0)x' + (c + ex_0 + 2fy_0)y' \\ &\quad + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2 \end{aligned}$$

Eftersom (x_0, y_0) er et stationært punkt, vil $b + 2dx_0 + ey_0 = 0$ og $c + ex_0 + 2fy_0 = 0$. Dermed er

$$p(x', y') = a' + d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2$$

hvor $a' = a + bx_0 + cy_0 + dx_0^2 + ex_0y_0 + fy_0^2 = p(x_0, y_0)$. Vi ser, at ved at skifte koordinater fra (x,y) til (x', y') får vi elimineret førstegradsleddene fra polynomiet; i det nye koordinatsystem er det stationære punkt origo.

Vi er interesserede i at afgøre, om origo er et max eller min for $p(x', y')$. Dette kan gøres ved at se på fortegnet for hvert af leddene, men $ex'y'$-leddet er besværligt.

Vi betragter andengradspolynomiet

$$q(x', y') = d(x')^2 + ex'y' + f(y')^2.$$

Ved overgang til polære koordinater

$$x' = r\cos\theta \qquad y' = r\sin\theta$$

fås
$$q(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2(d\cos^2\theta + e\cos\theta\sin\theta + f\sin^2\theta)$$
For $r > 0$ og $\theta \neq p\pi, p \in \mathbb{Z}$, er $\sin^2\theta > 0$ så for disse valg af θ gælder
$$q(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\sin^2\theta(d\cot^2\theta + e\cot\theta + f)$$
og $q(r\cos\theta, r\sin\theta)$ har dermed samme fortegn som udtrykket
$$d\cot^2\theta + e\cot\theta + f.$$
Dette giver anledning til at betragte andengradspolynomiet af en variabel
$$h(s) = ds^2 + es + f$$
Dette polynomium har diskriminant $e^2 - 4df$, men da Hessematricen har determinant $D = 4df - e^2$, vil vi i stedet bruge vores analyse på D fremfor på diskriminanten, som altså er $-D$.

Velkendte resultater om andengradspolynomier giver nu følgende:

i) Hvis $D < 0$ antager $h(s)$ både positive og negative værdier.

ii) Hvis $D > 0$ og $d > 0$ vil $h(s)$ kun antage positive værdier, dvs. værdier, der er større end nul.

iii) Hvis $D > 0$ og $d < 0$ vil $h(s)$ kun antage negative værdier, dvs. værdier, der er mindre end nul.

Vi vender nu tilbage til udtrykket
$$g(\theta) = d\cos^2\theta + e\cos\theta\sin\theta + f\sin^\theta$$
og vi ser, at for $p \in \mathbb{Z}$ er
$$g(p\pi) = d,$$
og derfor kan vi slutte

i) Hvis $D < 0$, antager $g(\theta)$ både positive og negative værdier.

ii) Hvis $D > 0$ og $d > 0$, vil $g(\theta)$ altid være positiv.

iii) Hvis $D > 0$ og $d < 0$, vil $g(\theta)$ altid være negativ.

Kigger vi på $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, vil $g(\theta)$ for θ fra dette interval gennemløbe hele værdimængden for g. Da g er kontinuert og $[0, 2\pi]$ er en lukket og begrænset delmængde af $\mathbb{R}$, vil g have både en største- og en mindsteværdi. For tilfældene (ii) og (iii) betyder dette

ii) Hvis $D > 0$ og $d > 0$, findes $m > 0$, så
for alle $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad g(\theta) \geq m$

iii) Hvis $D > 0$ og $d < 0$, findes $m > 0$, så
for alle $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad g(\theta) \leq -m$

Idet $q(x', y') = q(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 g(\theta) = \|(x', y')\|^2 g(\theta)$, ser vi, at vi har vist følgende sætning

3.11 Sætning
Lad $p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ og antag, at $D = 4df - e^2 \neq 0$. Da findes ét og kun ét stationært punkt (x_0, y_0) for p, og der gælder

i) Hvis $D < 0$, så er (x_0, y_0) et sadelpunkt.

ii) Hvis $D > 0$ og $d > 0$, så er (x_0, y_0) et mindsteværdipunkt, og der findes $m > 0$, således at der for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gælder

$$p(x, y) \geq p(x_0, y_0) + m\|(x - x_0, y - y_0)\|^2.$$

iii) Hvis $D > 0$ og $d < 0$, så er (x_0, y_0) et størsteværdipunkt, og der findes $m > 0$, således at der for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gælder

$$p(x, y) \leq p(x_0, y_0) - m\|(x - x_0, y - y_0)\|^2.$$

3.2.2 *Taylors formel

Lad f være en C^2-funktion af to variable og antag, at (a, b) er et indre punkt. Vi ønsker nu at finde det andengradspolynomium, p, som har samme funktionsværdi, gradient og Hessematrix som f i (a, b). Vi kalder p for *Taylorapproksimationen af f af anden grad i (a, b)*. Generelt kan vi skrive p på formen:

$$p(x, y) = c + d_1(x - a) + d_2(y - b) + e_1(x - a)^2 + e_2(x - a)(y - b) + e_3(y - b)^2$$

Her ønsker vi at bestemme konstanterne c, d_1, d_2, e_1, e_2 og e_3. Vi udregner gradienten og Hessematricen for p og får:

$$\nabla p(x, y) = (d_1 + 2e_1(x - a) + e_2(y - b), d_2 + e_2(x - a) + 2e_3(y - b))$$

og

$$Hp(x, y) = \begin{bmatrix} 2e_1 & e_2 \\ e_2 & 2e_3 \end{bmatrix}$$

Kravet $f(a,b) = p(a,b)$ giver:

$$f(a,b) = p(a,b) = c$$

Samme gradient i (a,b) giver, at

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)) = \nabla f(a,b) = \nabla p(a,b) = (d_1, d_2)$$

og samme Hessematrix giver

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix} = Hf(a,b) = Hp(a,b) = \begin{bmatrix} 2e_1 & e_2 \\ e_2 & 2e_3 \end{bmatrix}$$

Dermed er p givet ved:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \end{aligned}$$

Vi er nu parate til at vise Taylors formel for funktioner af to variable.

3.12 Sætning (Taylors formel)
Lad f være en C^2-funktion af to variable, lad $\mathbf{a}$ være et indre punkt og lad p være Taylorapproksimationen af f af anden grad i $\mathbf{a}$, og definer for $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\varepsilon(\mathbf{h}) = \big(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h})\big)/\|\mathbf{h}\|^2$ og $\varepsilon(0,0) = 0$.
Da gælder $\lim_{\mathbf{h} \to 0} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0$.

Bevis: I dette bevis vil det af notationsmæssige årsager være nyttigt at skrive (x_1, x_2) i stedet for (x, y).

Hold $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ fast. Definér en funktion g af en variabel ved

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Ved at bruge kædereglen for funktioner af flere variable finder vi, at

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\right] h_i$$

og ved at bruge kædereglen endnu en gang får vi

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})\right] h_i h_j$$

Lagranges restledsformel for Taylorpolynomier af en variabel siger, at der findes et tal c mellem 0 og 1 sådan at

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(c)$$

Bemærk, at $g(0) = 0$ da $f(\mathbf{a}) = p(\mathbf{a})$ og $g'(0) = 0$ da $\nabla f(\mathbf{a}) = \nabla p(\mathbf{a})$. Hvis vi indsætter for $g(1)$ og $g''(c)$ får vi

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h})\right] h_i h_j$$

Fra definitionen af p følger det, at $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$. Vi indsætter og får:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right] h_i h_j$$

Vi finder derfor

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right] h_i h_j}{\|\mathbf{h}\|^2} & \text{for } \mathbf{h} \neq 0 \\ 0 & \text{for } \mathbf{h} = 0 \end{cases}$$

Det er da klart at

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \varepsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2$$

Derfor står det kun tilbage at vise, at ε er kontinuert i origo, men dette er let:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h}\to 0} |\varepsilon(\mathbf{h})| &= \lim_{\mathbf{h}\to 0}\left|\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right]\frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_j}{\|\mathbf{h}\|}\right| \\ &\leq \lim_{\mathbf{h}\to 0}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})\right| = 0 \end{aligned}$$

Her har vi brugt, at $\frac{h_1}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$, $\frac{h_2}{\|\mathbf{h}\|} \leq 1$ og at $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}+c\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$ da f er C^2. □

3.2.3 *Bevis for ABC-kriteriet

For at bevise ABC-kriteriet vil vi sammenligne funktionen f med en polynomiumsfunktion. Antag at $\mathbf{a}$ er et stationært punkt for f. Vi ønsker at finde en polynomiumsfunktion, p, som er en god approksimation af f i nærheden af $\mathbf{a}$. Et polynomium af grad 0 er det samme som en konstant funktion. Og den bedste tilnærmelse til f i nærheden af $\mathbf{a}$ ved hjælp af 0'te gradspolynomier må derfor være givet ved $p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ Men den konstante funktion p siger ingenting om hvorvidt $\mathbf{a}$ er max-, min- eller sadelpunkt for f. Lad os derfor prøve med førstegradspolynomier. Dette er det samme som affine funktioner, og den bedste tilnærmelse til f med en affin funktion er det førstegradspolynomium som har samme funktionsværdi og samme gradient som f i punktet $\mathbf{a}$. Men i et stationært punkt er tangentplanen vandret, og vi kan derfor ikke bruge p til at sige noget om hvilket slags stationært punkt $\mathbf{a}$ er for f.

Vi ser derfor på andengradspolynomier. Den bedste tilnærmelse til f i nærheden af $\mathbf{a}$ ved hjælp af andengradspolynomier bør have samme funktionsværdi, gradient og Hessematrix som f i punktet $\mathbf{a}$. Dette er Taylorapproksimationen af f af anden grad i $\mathbf{a}$ og vi håber, at en sådan tilnærmelse p til f er så god, at f og p begge har et stationært punkt i $\mathbf{a}$ og at dette punkt er af samme type for begge funktioner.

Vi kombinerer sætning 3.11 med Taylors formel for at bevise ABC-kriteriet.

Bevis for ABC-kriteriet 3.4: Antag at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et stationært punkt for C^2-funktionen f, lad $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a})$, lad D være determinanten af Hessematricen i $\mathbf{a}$ og lad p være Taylorapproksimationen af f af anden grad i $\mathbf{a}$. Vi ser nu på tre forskellige tilfælde.

Tilfælde ii): Antag at $D > 0$ og $A > 0$. Da siger sætning 3.11 at der findes et $m > 0$ således at

$$p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \geq m\|\mathbf{h}\|^2$$

Lad ε være funktionen givet i Taylors formel. Eftersom $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0$ findes et $\delta > 0$ således, at der for alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ med $\|\mathbf{h}\| < \delta$ gælder, at $|\varepsilon(\mathbf{h})| < \frac{m}{2}$. Taylors formel giver, at

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) + p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \varepsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Vi bruger uligheden ovenfor for at få

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \varepsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + m\|\mathbf{h}\|^2 = (\varepsilon(\mathbf{h}) + m)\|\mathbf{h}\|^2$$

Såfremt $\|\mathbf{h}\| < \delta$ vil $\varepsilon(\mathbf{h}) + m \geq \frac{m}{2}$. Dette giver

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{h}\|^2$$

Det følger, at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et lokalt minimum for f.

Tilfælde iii): Antag at $D > 0$ og $A < 0$. Vi ræsonnerer på samme måde som tilfælde ii). Ved sætning 3.11 findes der et $m > 0$ således at

$$p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \leq -m\|\mathbf{h}\|^2$$

Vi har da at:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) + p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \varepsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &\leq \varepsilon(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 - m\|\mathbf{h}\|^2 \\ &= (\varepsilon(\mathbf{h}) - m)\|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

Eftersom $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0$ findes et $\delta > 0$ således, at for alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ med $\|\mathbf{h}\| < \delta$ gælder $|\varepsilon(\mathbf{h})| < \frac{m}{2}$. Da er $\varepsilon(\mathbf{h}) - m < -\frac{m}{2}$. Altså vil

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \leq -\frac{m}{2}\|\mathbf{h}\|^2$$

når $\|\mathbf{h}\| < \delta$, og det følger, at $\mathbf{a} = (a, b)$ er et lokalt maksimum for f.

Tilfælde i): Antag at $D < 0$. For andengradspolynomiet p ved vi, at der da findes en kontur $p(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ som krummer opad. Vi kan antage, at

$$p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = c + kt^2$$

hvor $c = p(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ og $k > 0$. Da er

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) + p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - p(\mathbf{a}) \\ &= \varepsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 t^2 + kt^2 \\ &= (\varepsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + k)t^2 \end{aligned}$$

Hvis vi bare vælger t lille nok vil $\varepsilon(t\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 + k > \frac{k}{2}$. Da vil

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geq \frac{k}{2}t^2$$

Følgelig kan $\mathbf{a}$ ikke være et lokalt maksimum for f.

Vi ved også, at der findes en anden kontur $p(\mathbf{a}+t\mathbf{h}')$, som krummer nedad. På samme måde som sidst findes da et $k' > 0$ således at

$$p(\mathbf{a} + t\mathbf{h}') = p(\mathbf{a}) - k't^2$$

Da kan vi vise, at for små t vil

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})-f(\mathbf{a})\leq-\frac{k'}{2}t^2$$

Dermed kan **a** heller ikke være et lokalt minimum. Den eneste mulighed, der står tilbage, er, at **a** er et sadelpunkt. $\square$

3.3 Opgaver

Opgave 3.1
Find de stationære punkter for funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$
c) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + x + 7y$
d) $f(x,y) = xe^{y^2+x}$
e) $f(x,y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

Opgave 3.2
Find de stationære punkter og afgør, om de er lokale maksimums-, minimums- eller sadelpunkter:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

b) $f(x,y) = x^2y^2 - 4xy + 6x - 6y$

c) $f(x,y) = e^{x^2+3y^2}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x + \ln(x^2 + y^2)$

Opgave 3.3
Find de stationære punkter for funktionen

$$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

og afgør om de er lokale maksima, minima eller sadelpunkter.

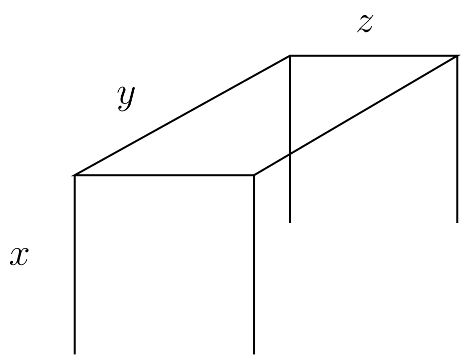
Opgave 3.4
Du skal lave en ramme af stålrør, som skal bruges som skelet for et telt. Rammen består af fire ben med længde x fæstnet til et rektangel med sider y og z, se figur 3.8. Længdene x, y og z måles i meter.

Volumenet $V = xyz$ af teltet skal være 50 m^3. Din opgave er at lave teltet sådan at den totale længde L af stålrør, som skal bruges, bliver mindst mulig.

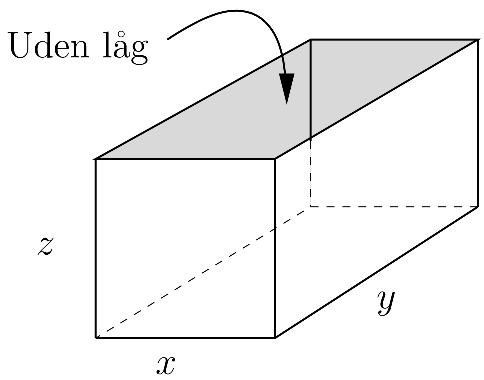
a) Begrund at længden L kan skrives som

$$L(x,y) = 4x + 2y + \frac{100}{xy}$$

og find de partielt afledede $\frac{\partial L}{\partial x}$ og $\frac{\partial L}{\partial y}$.



Figur 3.8: Skelet til telt.



Figur 3.9: Kasse uden låg.

b) Bestem de dimensioner af teltet, som gør totallængden af stålrør mindst mulig.

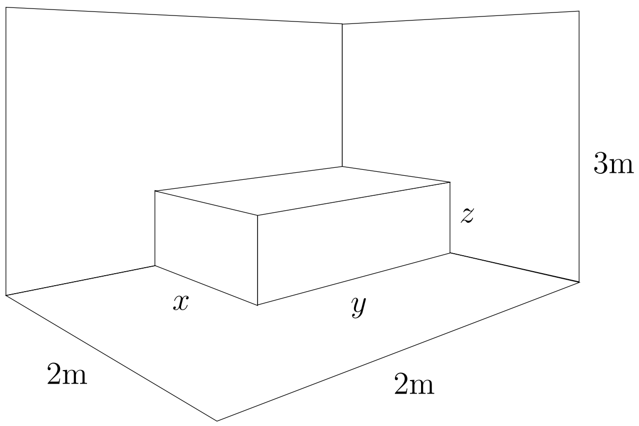
Opgave 3.5

Vi skal bygge en retvinklet kasse uden låg, se figur 3.9. Kassen skal have sidelængder x og y, og højde z. Selve "skelettet" til kassen skal laves af 12 tynde rør (markeret med streger på figuren). Den totale længde rør, vi har til rådighed, er 56 meter.

a) Begrund at arealet A af kassens yderside (de fire vægge samt bunden) som funktion af x og y kan skrives

$$A(x, y) = 28x + 28y - 2x^2 - 2y^2 - 3xy.$$

og find de partielt afledede af A. Bestem derefter eventuelle punkter (x, y), hvor begge de partielt afledede er nul, og afgør om disse punkter er lokale minimumspunkter for A, lokale maksimumspunkter for A eller ingen af delene.



Figur 3.10: Badeværelse med badekar.

b) Find maksimumsværdien for $A(x, y)$ på området i xy-planen givet ved $0 \leq x \leq 14$, $0 \leq y \leq 14$. (Begrund først hvorfor vi ved, at en sådan maksimumsværdi findes.)
Hvordan bør sidelængderne x og y vælges for at arealet af kassens yderside bliver størst muligt? (Begrund svaret.)

Opgave 3.6
Et badeværelse har taghøjde 3 m og et kvadratisk gulv som er 4 m^2. I dette rum skal vi placere et badekar af længde x, bredde y og højde z (målt i meter) og med volumen $xyz = \frac{2}{3}$ m^3. Badekarret skal placeres i det ene hjørne af badeværelset som vist på tegningen, figur 3.10.

Ud fra dimensionerne af rummet og karret får vi: $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 < z \leq 3$ (og derfor også $xy = \frac{2}{3z} \geq \frac{2}{9}$ (m)^2). Vi skal lægge fliser på de to vægge, badekarret berører, samt badegulvet, men vi nøjes med at lægge fliser på de dele af væggene og gulvet, som badekaret ikke dækker. Vi bruger to forskellige typer fliser til vægge og gulv. Prisen på vægfliserne er 90 kr/m^2 og på gulvfliserne 60 kr/m^2. Lad $P(x, y)$ betegne totalprisen på fliserne, angivet i kr, som funktion af x og y.

a) Vis at vi får $P(x, y) = 1320 - \frac{60}{x} - \frac{60}{y} - 60xy$, og beregn $\frac{\partial P}{\partial x}$ og $\frac{\partial P}{\partial y}$.

b) For at få et overblik over udgifterne til fliselægningen ønsker vi at finde den værdi af (x, y) sådan at $P(x, y)$ bliver størst mulig.
Find denne værdi af (x, y) og den tilsvarende værdi af P.

Opgave 3.7
En fabrik producerer to modeller af en vare. Det koster 400 kr at lave standardmodellen og 600 kr for luksusmodellen. Undersøgelser viser, at når salgs-

prisen for standardmodellen er x kr og y kr for luksusmodellen, så får fabrikken solgt $500(y-x)$ standardmodeller og $450000+500(x-2y)$ luksusmodeller. Hvordan skal prisen sættes for at maksimere fortjenesten?

Opgave 3.8

To virksomheder konkurrerer om at sælge næsten identiske varer på samme marked. En forøgelse i produktionen hos den ene virksomhed fører derfor til nedgang i indtægterne hos den anden. Hvis virksomhed A producerer x enheder pr måned og virksomhed B producerer y enheder pr måned, er de månedlige fortjenester givet ved

$$\begin{aligned} P &= 12000x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 \quad \text{for virksomhed } A, \\ Q &= 12000y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}x^2 \quad \text{for virksomhed } B. \end{aligned}$$

a) Hvis virksomhederne ikke samarbejder om at fastsætte produktionen er det naturligt at antage, at hver af virksomhederne uafhængigt af hinanden fastsætter sin produktion således, at egen fortjeneste bliver så stor som mulig. Desuden antager hver af virksomhederne, at den anden gør det samme. Forklar hvorfor produktionsniveauet (x, y) er løsningen til ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

og find fortjenesten for henholdsvis A og B i dette tilfælde.

b) Virksomhedsledelserne i A og B tror, at ved at samarbejde om produktionsniveauet, så kan den totale fortjeneste for virksomhederne samlet øges. Forklar hvorfor det optimale produktionsniveau, såfremt virksomhederne samarbejder, er løsningen til ligningssystemet

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

og find fortjenesten for henholdsvis A og B i dette tilfælde.

c) Antag at virksomhederne i hemmelighed har samarbejdet om fastsættelse af produktionsniveauet, og at dette har stået på en tid. Virksomhed B, som tidligere var den mest rentable, opdager at produktionssamarbejdet har ført til at virksomhed A nu er blevet markedsleder.

Virksomhed B bestemmer sig derfor for at bryde aftalen, uden at sige det til A. Givet at A fastholder produktionsniveauet fra delopgave b), hvordan skal B vælge sit produktionsniveau for selv at få størst mulig fortjeneste, og hvad bliver fortjenesten for A og B henholdsvis i dette tilfælde?

Opgave 3.9

a) Lad $f(x,y) = x^2 + y^4$. Vis at (0,0) er et stationært punkt, hvor Hesse-determinanten D er lig nul. Vis at (0,0) er et minimumspunkt for funktionen.

b) Lav en funktion $g(x,y)$ hvor (0,0) er et maksimumspunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lig nul.

c) Lav en funktion $h(x,y)$ således at (0,0) er et sadelpunkt, men hvor Hesse-determinanten i (0,0) er lig nul.

Opgave 3.10

a) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion af én variabel og antag, at det eneste stationære punkt for f er et lokalt maksimum i a. Vis, at da er a et globalt maksimum for f.

b) Lad
$$g(x,y) = 1 - x^2 - (1+x)^3 y^2.$$
Vis at $(0,0)$ er det eneste stationære punkt for g.

c) Vis at $(0,0)$ er et lokalt maksimum, men ikke et globalt maksimum for g. Tegn gerne grafen for g. Tænk på forskellen mellem én og flere dimensioner.

Opgave 3.11

a) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion af én variabel og antag at f har lokale maksima i a og b. Vis at der findes et lokalt minimum c, som ligger mellem a og b.

b) Lad
$$g(x,y) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y}$$
Vis at de kritiske punkter for g er $(-1,0)$ og $(1,0)$.

c) Vis at begge de kritiske punkter er lokale maksima. Tegn grafen for g og tænk på forskellene mellem én og flere dimensioner.

Kapitel 4

Lagranges multiplikatormetode

4.1 Max/min-problemer med bibetingelser

Førsteafledet- og ABC-kriteriet er metoder til at studere max/min-problemer for funktioner defineret på åbne mængder. Men for mange af de max/min-problemer, vi møder i praksis, vil der være betingelser som begrænser definitionsmængden. Vi ser på et eksempel:

4.1 Eksempel
Forestil dig, at du skal producere konservesdåser. Dåserne skal være cylinderformede med top og bund. Prisen per produceret dåse afhænger af, hvor meget metal der bruges, og dåsen er derfor billigst, når overfladen er mindst mulig. Givet at dåsernes volumen skal være V, hvordan skal højden, h, og diameteren, d, så vælges?

Vi ser, at overfladearealet A er givet ved

$$A(h, d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi hd$$

Bibetingelsen angående volumet giver

$$V = \frac{\pi hd^2}{4}$$

Opgaven bliver derfor at finde mindsteværdien for $A(h, d)$ på mængden

$$\{(h, d) \in \mathbb{R}^2 \mid V = \frac{\pi hd^2}{4}\}$$

En måde at gøre dette på er at løse ligningen $V = \frac{\pi hd^2}{4}$ med hensyn til for eksempel h, og derefter sætte dette ind i A. Dette giver en funktion af én variabel, som vi let kan finde mindsteværdien for. Vi har

$$h = \frac{4V}{\pi d^2}$$

Dette giver at

$$A(d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \frac{4V}{d}$$

Vi differentierer og får

$$A'(d) = \pi d - \frac{4V}{d^2}$$

Løser vi $A'(d) = 0$ får vi, at $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Dette må være et minimum og den tilsvarende værdi for h er $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. ♣

Lagranges multiplikatormetode er en anden måde at løse max/min-problemer med bibetingelser. Fordelen med denne metode er, at man ikke behøver at bortsubstituere en af variablene fra betingelsen.

4.2 Sætning
Lad f og g være C^1-funktioner af n variable defineret på en åben mængde A. Lad $\mathbf{a} \in A$ og $g(\mathbf{a}) = c$. Lad S være mængden givet ved

$$S = \{\mathbf{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = c\}$$

Hvis f har et lokalt ekstremumspunkt på S i $\mathbf{a}$, så er enten

i) $\nabla g(\mathbf{a}) = 0$ *eller*

ii) der findes et tal λ således at $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$.

Bemærk at S er en niveauhyperflade for g, og at $\nabla g(\mathbf{a})$ står vinkelret på S i punktet $\mathbf{a}$. Ligningen $g(\mathbf{x}) = c$ er en betingelse, og et lokalt max-punkt for f på S er det intuitivt oplagte; et punkt $\mathbf{a} \in S$, sådan at der findes en radius $r > 0$, således at der for alle $\mathbf{x} \in S$ med $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ gælder, at $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Lokale min-punkter for f på S er defineret tilsvarende. Dette er såmænd ikke andet end de lokale ekstremumspunkter for f, såfremt vi sætter definitionsmængden til at være S.

4.3 Definition
Givet situationen i sætning 4.2. Et punkt $\mathbf{a} \in A$, som opfylder $g(\mathbf{a}) = c$ og $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$ kaldes et kritisk punkt.

Lad os nu se, hvordan vi kan bruge Lagranges multiplikatormetode til at løse eksempel 4.1 på en anden måde:

4.4 Eksempel
Vi ønsker at bestemme minimum for $A(h,d) = \frac{\pi}{2}d^2 + \pi hd$ givet betingelsen $\frac{\pi hd^2}{4} = V$. Her er h og d positive tal.

Lad $g(h,d) = \frac{\pi hd^2}{4}$. Vi ser at både A og g er C^1-funktioner. Sætning 4.2 siger, at vi skal lede efter de punkter, hvor gradienten for A og gradienten for g er parallelle. Vi finder derfor gradienterne.

$$\nabla A(h,d) = (\pi d, \pi d + \pi h) \quad \text{og} \quad \nabla g(h,d) = (\frac{\pi}{4}d^2, \frac{\pi}{2}hd)$$

Disse vektorer er parallelle, hvis der findes et tal λ således at

$$\begin{aligned} \pi d &= \lambda \frac{\pi}{4} d^2 \\ \pi d + \pi h &= \lambda \frac{\pi}{2} hd \end{aligned}$$

Derudover må vi ikke glemme vores betingelse:

$$\frac{\pi hd^2}{4} = V$$

For at finde mindsteværdien forsøger vi nu at løse ligningssættet, som består af disse tre ligninger. Den første ligning kan forenkles til

$$4 = \lambda d$$

Den anden ligning giver så, at

$$d + h = \frac{1}{2} h\lambda d$$

Nu kan vi erstatte λd på højre side med 4. Da får vi

$$d + h = \frac{1}{2} h \cdot 4 = 2h$$

Hvoraf vi kan slutte $d = h$. Og sætter vi dette ind i betingelsen har vi

$$\frac{\pi}{4} d^3 = V$$

som giver, at $h = d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. Dette er samme svar, som vi fik i eksempel 4.1.

♣

4.5 Eksempel
I dette eksempel ønsker vi at finde de kritiske punkter for funktionen

$$f(x, y) = 3x - 5y$$

under betingelsen

$$x^2 + 16 = y^2$$

Vi starter med at omskrive betingelsen til formen

$$x^2 - y^2 + 16 = 0$$

og lader $g(x, y)$ være udtrykket på venstre side. For at bruge Lagranges multiplikatormetode skal vi bruge gradienterne for f og g. Vi har

$$\nabla f(x, y) = (3, -5) \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = (2x, -2y)$$

Derefter kan vi opskrive ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3 = 2\lambda x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -5 = -2\lambda y = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) &= x^2 - y^2 + 16 = 0. \end{aligned}$$

Løsningerne af dette system giver kritiske punkter for f givet $g(x, y) = 0$. Lad os se på den første ligning. Eftersom $3 = 2\lambda x$ kan x ikke være 0, og vi må derfor dividere med den. Dermed må $\lambda = \frac{3}{2x}$. På samme måde får vi fra den anden ligning, at $\lambda = \frac{5}{2y}$. Dette giver

$$\frac{3}{2x} = \lambda = \frac{5}{2y}.$$

Altså må

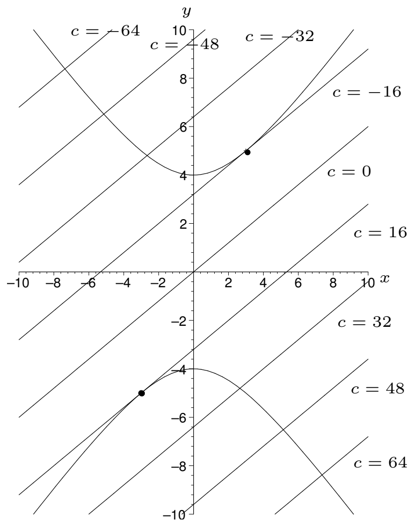
$$y = \frac{5}{3}x$$

Dette sætter vi ind i stedet for y i betingelsen, og vi får

$$0 = x^2 - y^2 + 16 = x^2 - \frac{25}{9}x^2 + 16 = 16 - \frac{16}{9}x^2$$

Altså må $x^2 = 9$. Dermed er $x = -3$ eller $x = 3$. Og de tilsvarende værdier for y er henholdsvis -5 og 5.

For at afgøre om de kritiske punkter $(-3, -5)$ og $(3, 5)$ er største-, mindsteværdipunkter eller ingen af delene, kan vi skitsere nogle niveaukurver for f



Figur 4.1: Niveaukurver $f(x, y) = c$ og kurven $x^2 + 16 = y^2$.

og kurven $x^2 + 16 = y^2$ i samme koordinatsystem. Se figur 4.1. (Bemærk at niveaukurverne for f tangerer $g(x, y) = 0$ i de kritiske punkter.) Vi ser at $(-3, -5)$ er et lokalt minimum, minimalværdien er $f(-3, -5) = 16$, og $(3, 5)$ er et lokalt maksimum, maksimalværdien er $f(3, 5) = -16$. Heraf sluttes, at der hverken findes en største- eller en mindsteværdi for denne opgave. ♣

Vi skal nu se på, hvordan Lagranges multiplikatormetode kan bruges til at finde de punkter på en ellipse, som ligger nærmest eller fjernest fra origo.

4.6 Eksempel
Ligningen

$$13x^2 + 12xy + y^2 = 80$$

beskriver en ellipse. Dette kan du tjekke ved at skitsere grafen. I dette eksempel ønsker vi at finde punkterne på ellipsen, som ligger nærmest eller fjernest fra origo. Vi ved, at udtrykket $\sqrt{x^2 + y^2}$ måler afstanden fra (x, y) til origo. Punkterne, vi ønsker at finde, er derfor min og max for $\sqrt{x^2 + y^2}$ under bibetingelsen $13x^2 + 12xy + y^2 = 80$.

Bemærk, at ellipsen er lukket og begrænset, og funktionen $\sqrt{x^2 + y^2}$ er kontinuert. Ifølge ekstremalværdisætningen findes der både en største- og en mindsteværdi. Dette er vigtigt, da vi så ved, at løsningen til Lagrangeligningen må indeholde løsningen til største- og mindsteværdiproblemet.

For at forenkle udregningerne kan det svare sig at se på funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ i stedet for at bruge udtrykket $\sqrt{x^2 + y^2}$. Det er klart, at max- og min-punkterne for det ene udtryk også er max- og min-punkter for det andet. Vi vil altså bruge Lagranges multiplikatormetode til at finne max- og min-punkterne for

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

under forudsætningen

$$g(x, y) = 13x^2 + 12xy + 4y^2 = 80$$

Vi starter med at udregne gradienterne for f og g. Disse er

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \quad \text{og} \quad \nabla g(x, y) = (26x + 12y, 12x + 8y)$$

Lagranges multiplikatormetode siger, at vi finder de kritiske punkter ved at løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(26x + 12y) \\ 2y &= \lambda(12x + 8y) \\ 13x^2 + 12xy + 4y^2 &= 80 \end{aligned}$$

De to første ligninger giver hver et udtryk for λ. Dermed har vi

$$\frac{2x}{26x + 12y} = \lambda = \frac{2y}{12x + 8y}$$

Vi ganger over kors og får:

$$\begin{aligned} 2x(12x + 8y) &= 2y(26x + 12y) \\ 24x^2 + 16xy &= 52xy + 24y^2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ved at dividere med y^2 får vi andengradsligningen

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} - 2 = 0$$

De to løsninger bliver

$$\frac{x}{y} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$$

Endnu har vi ikke brugt betingelsen $13x^2+12xy+4y^2 = 80$. Men det kommer vi til nu. Lad os se, hvad der sker, når vi indsætter løsningen $\frac{x}{y} = 2$. Dette er det samme som at sætte $x = 2y$. Da får vi

$$13x^2 + 12xy + 4y^2 = 52y^2 + 24y^2 + 4y^2 = 80y^2 = 80,$$

som har løsningene $y = 1$ og $y = -1$. Dette giver de kritiske punkter $(2, 1)$ og $(-2, -1)$.

Ser vi på tilfældet, hvor $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, finder vi ved at indsætte $y = -2x$ i $13x^2 + 12xy + 4y^2 = 80$ at

$$13x^2 + 12xy + 4y^2 = 13x^2 - 24x^2 + 16x^2 = 5x^2 = 80$$

Som giver $x = \pm 4$. Dermed får vi de kritiske punkter $(4, -8)$ og $(-4, 8)$.

Vi kan nu konkludere, at punkterne på ellipsen $13x^2 + 12xy + 4y^2 = 80$ som har størst afstand til origo er $(4, -8)$ og $(-4, 8)$, mens punkterne med mindst afstand til origo er $(2, 1)$ og $(-2, -1)$. ♣

Ekstremalværdisætningen 2.42 siger, at en funktion defineret på en lukket og begrænset mængde har største- og mindsteværdier. Vi skal nu se et eksempel på, hvordan vi kan kombinere førsteafledet-kriteriet med Lagranges multiplikatormetode for at finde ekstremumspunkterne for en sådan funktion.

4.7 Eksempel

Lad funktionen

$$f(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2$$

være defineret for de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som ligger på eller indenfor ellipsen

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

Vi ønsker at bestemme ekstremumspunkterne. Eftersom definitionsmængden for f er lukket og begrænset ved vi, at max- og minpunkter findes. Derfor laver vi en liste af kritiske punkter og undersøger funktionsværdierne i disse. For at finde kritiske punkter i det indre af ellipsen bruger vi førsteafledet-kriteriet. På randen af ellipsen bruger vi Lagranges multiplikatormetode. Lad os begynde.

Kritiske punkter i det indre: Vi leder efter kritiske punkter i mængden

$$\{(x, y) \mid y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x < 1\}.$$

Dette er punkterne hvor $\nabla f = 0$. For at finde disse, udregner vi gradienten. Den er

$$\nabla f(x, y) = (4y - 8x^3, 4x - 2y).$$

Sætter vi denne lig nulvektoren, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4y - 8x^3 &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Den anden ligning giver, at $y = 2x$. Dette sætter vi ind i den første og får:

$$8x - 8x^3 = 0$$

Løsningerne er $x = -1$, $x = 0$ og $x = 1$. Dermed er de mulige kritiske punkter $(-1, -2)$, $(0, 0)$ og $(1, 2)$. Det eneste, vi skal passe på med, er, om punkterne faktisk ligger indenfor ellipsen. Vi må altså tjekke, om de opfylder uligheden $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x < 1$.

- $(-1, -2)$ indsat i $y^2-4xy+28x^2-48x$ giver 72. Dermed ligger $(-1, -2)$ udenfor ellipsen.
- $(0, 0)$ indsat i $y^2-4xy+28x^2-48x$ giver 0. Dermed ligger $(0, 0)$ indenfor ellipsen.
- $(1, 2)$ indsat i $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$ giver -24. Dermed ligger $(1, 2)$ indenfor ellipsen.

De kritiske punkter i det indre af ellipsen er følgelig $(0, 0)$ og $(1, 2)$.

Kritiske punkter på randen: Vi leder efter kritiske punkter for f under bibetingelsen

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

Lad derfor g være funktionen givet ved

$$g(x, y) = y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x$$

Lagranges multiplikatormetode siger, at vi skal finde de punkter, hvor ∇f og ∇g er parallelle. Vi udregner derfor gradienten for g. Den er:

$$\nabla g(x, y) = (-4y + 56x - 48, 2y - 4x)$$

Kravet om, at gradienterne skal være parallelle, giver ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4y - 8x^3 &= \lambda(-4y + 56x - 48) \\ 4x - 2y &= \lambda(2y - 4x) \end{aligned}$$

Oven i har vi kravet

$$y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$$

Vi begynder med at se på den anden ligning. Den kan omskrives til

$$(1 + \lambda)(4x - 2y) = 0$$

Der er derfor to mulige løsninger. Enten er $\lambda = -1$ eller $y = 2x$.

- Hvis $\lambda = -1$ giver den første ligning, at

  $$4y - 8x^3 = 4y - 56x + 48$$

  Dette udtryk kan forenkles til

  $$x^3 - 7x + 6 = 0$$

  Her gætter man let, at $x = 1$ er en løsning. De to andre løsninger er $x = 2$ og $x = -3$. For at finde de tilsvarende y-værdier indsætter vi i ligningen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Vi har

  $x = 1$ giver $y^2 - 4y - 20 = 1$, som har løsningene $y = -3$ og $y = 7$.

  $x = 2$ giver $y^2 - 8y + 16 = 1$, som har løsningene $y = 3$ og $y = 5$.

  $x = -3$ giver $y^2 + 12y + 396 = 1$, som ikke har nogen reel løsning.

- Hvis $y = 2x$ kan det svare sig at sætte dette ind i ligningen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Da får man

  $$4x^2 - 8x^2 + 28x^2 - 48x = 1$$

  som kan forenkles til

  $$24x^2 - 48x - 1 = 0$$

  Løsningene er $x = 1 - \frac{5}{12}\sqrt{6}$ og $x = 1 + \frac{5}{12}\sqrt{6}$. De tilsvarende værdier for y er $y = 2 - \frac{5}{6}\sqrt{6}$ og $y = 2 + \frac{5}{6}\sqrt{6}$, henholdsvis. Det er muligt at sætte disse to løsninger ind i den første ligning for at finde λ, men værdien for λ skal vi ikke bruge til noget.

De kritiske punkter som ligger på randen af ellipsen er derfor

$$(1, -3), \quad (1, 7), \quad (2, 3), \quad (2, 5), \quad (1 - \frac{5}{12}\sqrt{6}, 2 - \frac{5}{6}\sqrt{6}) \text{ og } (1 + \frac{5}{12}\sqrt{6}, 2 + \frac{5}{6}\sqrt{6})$$

Største- og mindsteværdier: Vi har nu fundet en liste med 8 kritiske punkter for f på eller indenfor ellipsen $y^2 - 4xy + 28x^2 - 48x = 1$. Førsteafledet-kriteriet og Lagranges multiplikatormetode siger at disse punkter er de eneste kandidater til at være max- eller minpunkter. Ekstremalværdisætningen siger at max- og minpunkter findes. For at finde de globale ekstremumspunkter står blot tilbage at beregne funktionsværdierne i de kritiske punkter og derefter sammenligne. Vi får følgende tabel

kritisk punkt (x, y)	kritisk værdi $f(x, y)$
$(0, 0)$	0
$(1, 2)$	2
$(1, -3)$	-23
$(1, 7)$	-23
$(2, 3)$	-17
$(2, 5)$	-17
$(1 - \frac{5}{12}\sqrt{6}, 2 - \frac{5}{6}\sqrt{6})$	$-\frac{2449}{288} + \frac{125}{36}\sqrt{6} \approx 0,0017$
$(1 + \frac{5}{12}\sqrt{6}, 2 + \frac{5}{6}\sqrt{6})$	$-\frac{2449}{288} - \frac{125}{36}\sqrt{6} \approx -17,0086$

Vi ser, at maksimalværdien er 2, som opnås i punktet $(1, 2)$, mens minimalværdien er -23, der antages i $(1, -3)$ samt $(1, 7)$. ♣

4.2 *Bevis for Lagranges multiplikatormetode

Vi vil nu føre et bevis for Lagranges multiplikatormetode 4.2. For at gøre dette har vi brug for en hjælpesætning. Beviset for hjælpesætningen bygger på sætningen om differentiation af implicit givne funktioner, se sektion 2.4.8, og vi udelader det derfor. Derimod vil vi forklare, hvad hjælpesætningen indebærer.

4.8 Sætning
Lad g være en C^1-funktion i n variable og $\mathbf{a}$ et indre punkt i D_g. Hvis $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ og $\mathbf{v}$ er en vektor, således at $\mathbf{v} \cdot \nabla g(\mathbf{a}) = 0$, så findes der en kurve $\mathbf{c}(t)$, defineret for t i et åbent interval, som indeholder 0, sådan at

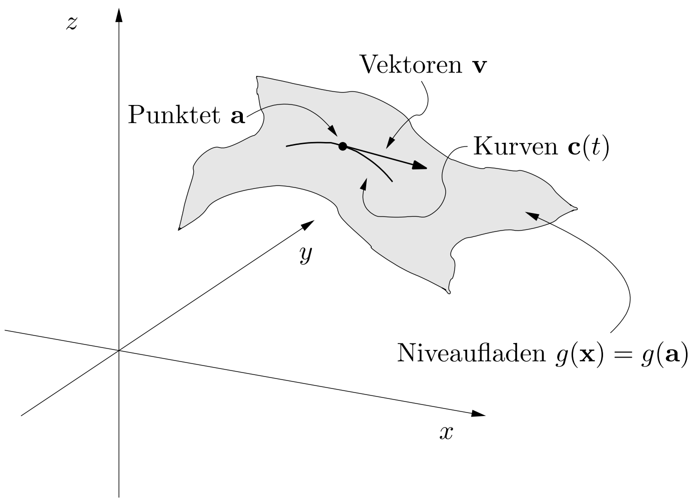
i) $\mathbf{c}(0) = \mathbf{a}$,

ii) $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$ *og*

iii) $g(\mathbf{c}(t))$ *er konstant.*

Denne sætning omhandler en niveau(hyper)flade for g. På denne flade ligger punktet $\mathbf{a}$. Eftersom $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$ ser niveaufladen virkelig ud som en flade i nærheden af $\mathbf{a}$, og $\nabla g(\mathbf{a})$ er normalvektoren. Vektoren $\mathbf{v}$ må være en tangentvektor for niveaufladen, eftersom $\mathbf{v} \cdot \nabla g(\mathbf{a}) = 0$.

I slutningen af sektion 2.4.8 så vi, at tangentvektoren for en kurve på niveaufladen også var en tangentvektor for niveaufladen. Men hvad med tangentvektoren $\mathbf{v}$ for niveaufladen, findes der en kurve, $\mathbf{c}(t)$, som ligger på



Figur 4.2: En kurve $\mathbf{c}(t)$ i niveaufladen som tangerer $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$.

niveaufladen og har $\mathbf{v}$ som tangentvektor? Sætning 4.8 siger, at en sådan kurve findes. Se figur 4.2.

Vi er nu parate til at vise sætning 4.2.

Bevis for Lagranges multiplikatormetode: Lad f og g være C^1-funktioner, $\mathbf{a}$ et indre punkt, $c = g(\mathbf{c})$ og S niveaufladen $g(\mathbf{x}) = c$. Antag, at $\nabla g(\mathbf{a}) \neq 0$. Vi ønsker at vise, at hvis $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle så kan $\mathbf{a}$ heller ikke være et ekstremumspunkt for f på S.

Lad $\mathbf{v}$ være projektionen af $\nabla f(\mathbf{a})$ ned på tangentplanen for S i $\mathbf{a}$. Man kan udlede følgende formel for $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{a}) - \frac{\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|^2}\nabla g(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) - \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta \frac{\nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|}$$

Her er θ vinklen mellem $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$. Eftersom $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle, må $\mathbf{v} \neq 0$. Sætning 4.8 siger, at der findes en kurve $\mathbf{c}(t)$, således at $g(\mathbf{c}(t)) = c = g(\mathbf{a})$, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{a}$ og $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. Lad h være funktionen af en variabel defineret ved

$$h(t) = f(\mathbf{c}(t))$$

Det er klart, at hvis h ikke har et lokalt ekstremumspunkt i 0, så kan f heller ikke have et lokalt ekstremumspunkt på S i $\mathbf{a}$. Vi er derfor interesserede i at vise, at $h'(0) \neq 0$. Vi bruger kædereglen til at differentiere h og får:

$$h'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$$

Lad nu $t = 0$. Dette giver:

$$h'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

Indsætter vi det andet udtryk for $\mathbf{v}$, får vi

$$\begin{aligned} h'(0) &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \left(\nabla f(\mathbf{a}) - \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta \frac{\nabla g(\mathbf{a})}{\|\nabla g(\mathbf{a})\|} \right) \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 - \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\nabla f(\mathbf{a})\|^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

Dermed er $h'(0) \neq 0$ når θ ikke er 0 eller π, altså når $\nabla f(\mathbf{a})$ og $\nabla g(\mathbf{a})$ ikke er parallelle. $\square$

4.3 Opgaver

Opgave 4.1
Brug Lagranges multiplikatormetode til at bestemme maksimums- og minimumspunkter for funktionen f under den givne bibetingelse.

a) $f(x, y) = 4y - 3x$ givet $x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x, y) = x + y$ givet $4x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$ givet $x - 5y = 52$

d) $f(x, y) = xy$ givet $x^2 + 9y^2 = 18$

e) $f(x, y) = 4x^3 + y^2$ givet $6x - y = 7$

f) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ givet $y^2 - 4x^2 = 1$

g) $f(x, y) = x$ givet $y^2 = x^3 + x - 2$

h) $f(x, y) = 200x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$ givet $x + 128y = 800$

Opgave 4.2
Brug Lagranges multiplikatormetode til at finde maksimums- og minimumspunkter for funktionen f under den givne bibetingelse.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ givet $2x - 3y + 2z = 17$

b) $f(x, y, z) = 2x - z$ givet $4x + y = z + 9$

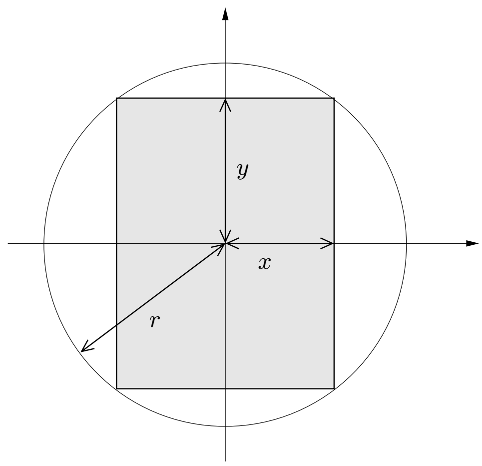
c) $f(x, y, z) = x + y + z$ givet $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

d) $f(x, y, z) = xyz$ givet $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$

e) $f(x, y, z) = 4x^2 + 3xz - 12y$ givet $x^2 + y^2 + z^2 = 84$

Opgave 4.3
Find den mindste afstand fra kurven $x^2 + x + \frac{3}{4} = y^2$ til origo.

Opgave 4.4
Du skal lave en kasse med volumen V. Kassen skal have bund og fire sideflader, men ingen top.
Hvordan skal du lave kassen for at overfladearealet bliver mindst muligt?



Figur 4.3: Bjælke skåret ud af stok.

Opgave 4.5
Af en cylinderformet stok med radius r skal der udskæres en bjælke med bredde $2x$ og højde $2y$. (Se figur 4.3). Bæreevnen for bjælken er proportional med x og med kvadratet af y, dvs. den er givet ved funktionen

$$f(x, y) = kxy^2$$

hvor k er en konstant.

Find de værdier af x og y, som giver størst værdi for $f(x, y)$.

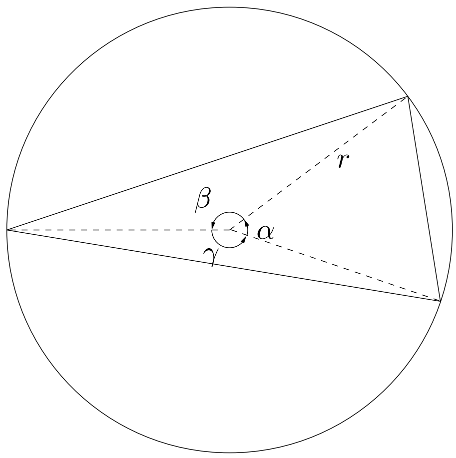
Opgave 4.6
Det amerikanske postvæsen ekspederer kun pakker, hvor summen af længde, bredde og højde er mindre end 108 tommer.
Hvad er det største volumen en kasseformet pakke kan have?

Opgave 4.7
En trekant med sidelængder x, y og z har omkreds $O = x + y + z$. Lad s være den halve omkreds. Arealet kan beregnes ved at bruge Herons formel

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

Antag at omkredsen er givet. Brug Lagranges multiplikatormetode til at finde den trekant, der har det største areal.

Opgave 4.8
Betragt en trekant indskrevet i en cirkel med radius r, figur 4.4. Find et udtryk for arealet af den indskrevne trekant givet ved radius r, og vinklerne α, β og γ. Brug Lagranges multiplikatormetode til at finde trekanten med det største areal.



Figur 4.4: En trekant indskrevet i en cirkel

Husk på, at arealet af en trekant er $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, hvor a og b er sidelængder og θ er den mellemliggende vinkel.

Opgave 4.9
En virksomhed producerer to slags varer. Disse hedder X og Y. Fortjenesten ved at sælge x enheder af X og y enheder af Y er givet ved formlen

$$P(x,y) = 10x + 20y - \frac{x^2 + y^2}{10}$$

Antag at det totale antal af X og Y, virksomheden producerer ikke kan overstige 100 enheder. Hvor mange af hver vare skal virksomheden producere for at opnå maksimal fortjeneste?

Kapitel 5

Multiple integraler

5.1 Plan- og rumintegraler

Ligesom for funktioner af en variabel kan man for kontinuerte funktioner af flere variable definere deres *integrale*. Vi vil her kun beskæftige os med funktioner af to og tre variable, hvor man taler om henholdsvis *plan-* og *rumintegraler*. Vi vil ikke her diskutere i detaljer, hvordan man definerer plan- og rumintegraler, men koncentrere os om hvordan man udregner dem.

Vi vil for planintegraler over en mængde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ enten benytte notationen $\int_D f(x,y)dA$, $\iint_D f(x,y)dA$, eller mere kortfattet blot $\int_D f$, hvor vi helt udelader integrationsvariablen. For rumintegraler over en mængde $R \subseteq \mathbb{R}^3$, skriver vi ligeledes enten $\int_R f(x,y,z)dV$, $\iiint_R f(x,y,z)dV$, eller igen blot $\int_R f$. Den kortfattede notation kan med fordel bruges, når vi samtidig vil udtale os om plan og rumintegraler.

Fortolkningen af planintegralet svarer i en vis forstand til fortolkningen i en-variabel tilfældet, hvor integralet fortolkes som arealet "under grafen". Mere præcist, hvis $f(x,y) \geq 0$, er

$$\int_D f(x,y)\,dA$$

rumfanget af den mængde i $\mathbb{R}^3$, der ligger under grafen for f og ovenover D i XY-planen. Mere fysisk kan man fortolke integralet som den samlede masse af en plade med facon D og massetætheden $f(x,y)$. Specielt gælder der, at

$$\text{Areal}(D) = \int_D 1\,dA,$$

i analogi med at $\int_a^b 1\,dx$ er længden $b-a$ af intervallet $[a,b]$. For funktioner af tre variable skal man ud i 4 dimensioner for at give en tilsvarende fortolkning af integralet ved hjælp af grafen. Det vil vi afholde os fra. Vi kan fortolke integralet som den samlede masse af en rumlig figur med faconen $R \subset \mathbb{R}^3$ og massetætheden $f(x, y, z)$, og igen i dette tilfælde fås

$$\text{Rumfang}(R) = \int_R 1\, dV$$

i analogi med det ovenstående.

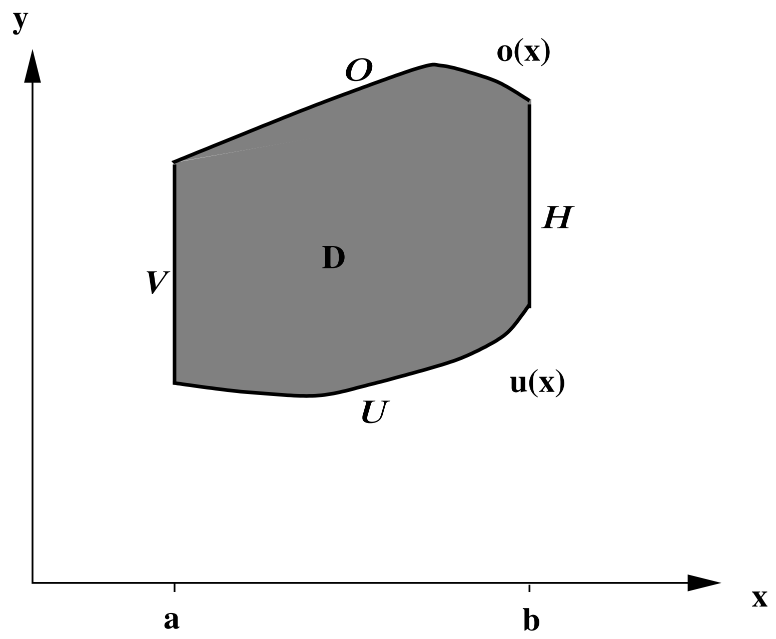
Planintegraler er specielt nemme at udregne, hvis der integreres over en mængde i $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der kan skrives på (mindst) en af de følgende to måder

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq o(x)\} \tag{5.1}$$

eller

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ v(y) \leq x \leq h(y)\} \tag{5.2}$$

hvor $u, o : [a, b] \to \mathbb{R}$ og $v, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, der opfylder $u \leq o$ og $v \leq h$ (her står v, h, u, o for henholdsvis venstre, højre, under og over).



Figur 5.1: En mængde af typen (5.1)

Det bemærkes, at nogle mængder $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kan skrives på begge måder (f.eks. et rektangel med akseparallelle sider), medens andre kun kan skrives på en eller ingen af de to måder.

På samme måde er rumintegraler specielt nemme at udregne, hvis der integreres over mængder, der kan skrives som

$$R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq o(x),\ b(x, y) \leq z \leq t(x, y)\}, \tag{5.3}$$

hvor u og o er som ovenfor og

$$t, b : \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq o(x)\} \to \mathbb{R}$$

er kontinuerte og opfylder $b(x, y) \leq t(x, y)$. Notationen t og b refererer til *top* og *bund*. Ligesom i to dimensioner kan man ombytte rollerne af x, y og z i (5.3).

5.1 Definition (Simple domæner)
Vi skal med en samlet betegnelse kalde mængder på formen (5.1-5.2) eller (5.3) (og de tilsvarende med rollerne af x, y og z ombyttet) for simple domæner.

Integration over simple domæner er beskrevet i følgende sætning, som vi ikke beviser her.

5.2 Sætning (Itereret integral)
Lad f være en kontinuert funktion defineret på et simpelt domæne.

1. Hvis f er en funktion af to variable og D er af formen (5.1), gælder

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=u(x)}^{y=o(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Hvis f er en funktion af to variable og D er af formen (5.2), gælder

$$\int_D f(x, y) dA = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=v(y)}^{x=h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Hvis f er en funktion af tre variable, og R er af formen (5.3) gælder

$$\int_R f(x, y, z) dV = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=u(x)}^{y=o(x)} \left(\int_{z=b(x,y)}^{z=t(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

(der gælder tilsvarende formler med rollerne af x, y og z ombyttet).

Denne sætning gør det muligt at udregne de fleste plan- eller rumintegraler ved at reducere dem til itererede en-dimensionale integraler. Desuden giver sætningen den vigtige konklusion, at hvis D kan skrives på begge former (5.1) og (5.2) kan begge formlerne fra sætningen benyttes. Man kan altså "bytte om" på rækkefølgen af integrationsvariablene x og y (men grænserne skal naturligvis tilpasses som i formlerne). Det tilsvarende gælder også i tre-variabel tilfældet.

5.3 Eksempel
Vi udregner ved brug af sætningen ovenfor integralet af funktionen $f(x,y) = xy$ over mængden $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2x\}$.

$$\int_D xy dA = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} xy dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{1}{2}((2x)^2 - x^2) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8}$$

♣

5.2 Transformation

Man kan ofte vælge nye variable, således at integraler over en givet mængde bliver lettere at udregne. Vi skal nu beskrive denne metode. Først giver vi, igen uden bevis, den sætning, der tillader os at skifte variable. Den svarer til integration ved substitution.

Et skift af variable vil være udtrykt ved en kontinuert funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, altså $T(\mathbf{x}) = (T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_n(\mathbf{x}))$, som kaldes en *transformation.* Sætningen fortæller os, hvordan vi kan udregne integralet af en funktion f over *billedmængden*

$$D' = T(D) = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

af $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ved i stedet at udregne integralet af den sammensatte funktion

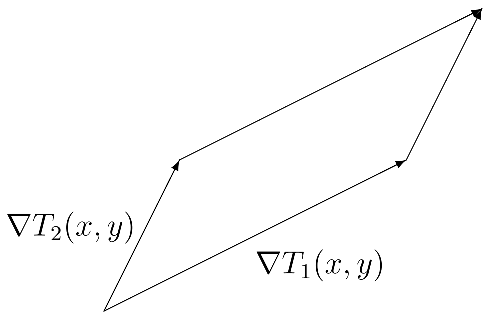
$$f \circ T(\mathbf{x}) = f(T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_n(\mathbf{x})),$$

over mængden D. Ideen er, at hvis D' ikke er et simpelt domæne, forsøger man at vælge et simpelt domæne D og en transformation T, sådan at $D' = T(D)$. Vi tænker på $f \circ T$ som funktionen f udtrykt i nye variable. Der bliver en ekstra faktor i det nye integral, der udtrykker areal- eller volumenforholdet ved transformationen T.

5.4 Sætning (Transformationssætningen)
Lad $n = 2$ eller $n = 3$, og lad $T : U \to \mathbb{R}^n$, være givet ved n C^1-funktioner $T_1 : U \to \mathbb{R}, \ldots, T_n : U \to \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Lad $D \subseteq U$ være et simpelt domæne, og antag at T er injektiv [1] på det indre af D. Hvis $f : T(D) \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion gælder

$$\int_{T(D)} f = \int_D (f \circ T)\, J(T).$$

Her er $J(T(\mathbf{x}))$ arealet for $n = 2$ og rumfanget for $n = 3$, af den figur, der udspændes af gradientvektorerne $\nabla T_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla T_n(\mathbf{x})$ (se Figur 5.2 nedenfor for tilfældet $n = 2$).



Figur 5.2: Arealet af parallellogrammet er $J(T(x,y)) = \left|\frac{\partial T_1}{\partial x}\frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|$.

Man beregner $J(T(\mathbf{x}))$ ud fra formlerne for arealet af et parallellogram udspændt af to vektorer $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ i planen, og rumfanget af et parallelepipedum (dvs en "skæv" tre-dimensional kasse) udspændt af tre vektorer $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ i rummet. Formlerne kan udtrykkes ved 2×2 og 3×3 determinanter

$$\begin{aligned}
\text{Areal}(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right| = |a_1b_2 - a_2b_1| \\
\text{Rumfang}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right| \\
&= |a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1|\,.
\end{aligned}$$

For $n=1$ gælder transformationssætningen også, og den er faktisk velkendt, idet den drejer sig om integration ved substitution

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(y)dy = \int_a^b f(T(x))T'(x)dx.$$

Da T er injektiv er T enten voksende eller aftagende. Hvis T er voksende og derfor $T' \geq 0$ vil $T([a,b]) = [T(a),T(b)]$ og

$$\int_{T([a,b])} f(y)dy = \int_{T(a)}^{T(b)} f(y)dy = \int_a^b f(T(x))T'(x)dx = \int_{[a,b]} f(T(x))|T'(x)|dx.$$

[1]Injektiv betyder, at man kun har $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$, hvis $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

På den anden side, hvis T er aftagende og derfor $T' \leq 0$, vil $T(a) \geq T(b)$ og derfor vil $T([a,b]) = [T(b), T(a)]$. Vi har så

$$\int_{T([a,b])} f(y)dy = \int_{T(b)}^{T(a)} f(y)dy = -\int_a^b f(T(x))T'(x)dx = \int_{[a,b]} f(T(x))|T'(x)|dx.$$

I begge tilfælde får vi altså

$$\int_{T([a,b])} f(y)dy = \int_{[a,b]} f(T(x))|T'(x)|dx,$$

hvilket svarer til udsagnet i transformationssætningen, hvis vi fortolker $|T'(x)|$ som længden af "den 1-dimensionale figur udspændt af" $T'(x)$ (dvs. intervallet mellem 0 og $T'(x)$).

5.3 Polære og sfæriske koordinater

Vi illustrerer nu brugen af transformationssætningen ved at udregne integraler i polære koordinater og i sfæriske(kugle-)koordinater. Lad os først minde om definitionerne af disse.

5.5 Definition (Polære koordinater i planen)
Polære koordinater i planen er givet ved transformationen

$$T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Den er injektiv på mængden af (r,θ) der opfylder

$$0 < r, \quad 0 < \theta \leq 2\pi.$$

Vi finder

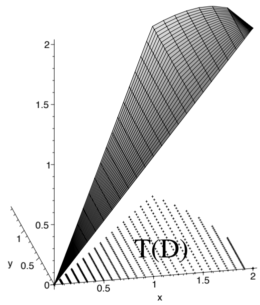
$$J(T)(r,\theta) = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = r.$$

5.6 Eksempel (Benyttelse af polære koordinater)

Vi vil udregne planintegralet af funktionen $f(x,y) = x$ over mængden D' i første kvadrant omgrænset af x-aksen, linien $x = y$ og cirklen $x^2 + y^2 = 4$. I polære koordinater kan denne mængde udtrykkes som

$$\{(r,\theta) \mid r \in [0,2],\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Mere præcist betyder det, at hvis T er transformationen i Definition 5.5, vil $D' = T(D)$, hvor D er mængden af par (r,θ) defineret herover. Udtrykt i



Figur 5.3: Domænet D' og grafen for f

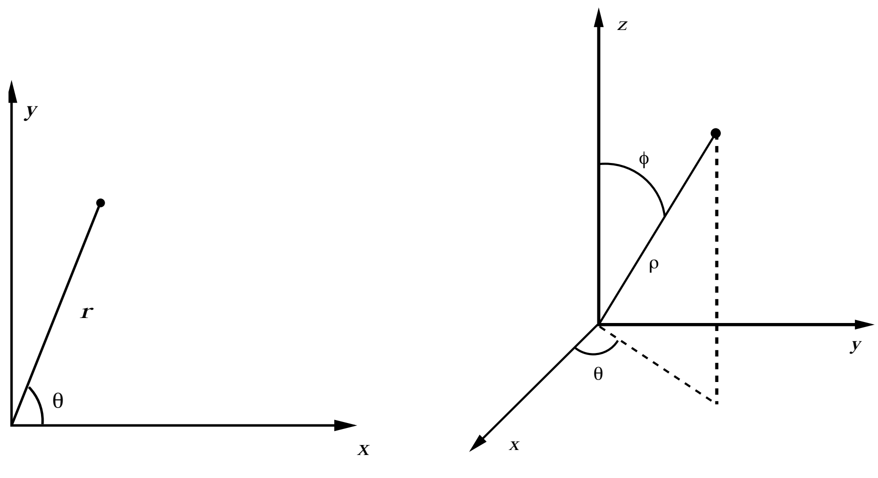
polære koordinater er funktionen f givet ved $f(T(r,\theta)) = r\cos\theta$. Det følger da fra transformationssætningen 5.4, at vi har

$$\int_{T(D)} f(x,y)dA = \int_D r\cos\theta\, r\, dA.$$

Ved at omskrive integralet til et itereret integral får vi

$$\int_{r=0}^{r=2}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} r^2\cos\theta d\theta dr = \int_{r=0}^{r=2} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\cos\theta d\theta = 4\sqrt{2}/3.$$

♣



Figur 5.4: (a)Polære koordinater (b) Sfæriske koordinater

5.7 Definition (Sfæriske (kugle-) koordinater i rummet)
Sfæriske koordinater i rummet er givet ved funktionen

$$T(\rho,\theta,\phi) = (x(\rho,\theta,\phi), y(\rho,\theta,\phi), z(\rho,\theta,\phi)),$$

hvor

$$x(\rho,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y(\rho,\theta,\phi) = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos\phi.$$

Funktionen er injektiv på mængden af (ρ,θ,ϕ) der opfylder

$$0 < \rho, \quad 0 < \theta \leq 2\pi \quad 0 < \phi < \pi.$$

Vi finder

$$J(T)(\rho,\theta,\phi) = \left|\det\begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}\right| = \rho^2\sin\phi.$$

5.8 Eksempel (Benyttelse af sfæriske koordinater)
Vi vil benytte sfæriske koordinater til at udregne rumfanget af en kugle med radius R i rummet. Kuglen er i sfæriske koordinater mængden

$$B = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

Vi finder derfor, at rumfanget af kuglen er

$$\int_{T(B)} 1\,dV = \int_{\rho=0}^{\rho=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=\pi} \rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho = 4\pi R^3/3.$$

♣

Facit

Opgave 1.1: a) $D_f = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$
b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \text{ og } x \neq -y\}$
c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$
d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{der ikke findes heltal } k \text{ så } x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$
e) $D_f = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\text{kuglen med centrum i origo og radius } 5\}$

Opgave 1.3: Du skal vælge passende tal c og derefter skitsere løsningsmængden til $f(x,y) = c$.

Opgave 1.6: I polære koordinater er funktionerne givet ved:
a) $f(r,\theta) = \frac{1}{r^2}$
b) $f(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r}$
c) $f(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
d) $f(r,\theta) = r^2(5\cos^2\theta - 4)$
e) $f(r,\theta) = e^{\frac{r^2\sin(2\theta)}{2}}$
f) $f(r,\theta) = r^3\cos(3\theta)$

Opgave 1.7: a) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = r^2e^{-z^2}$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho^2\sin^2\phi e^{-\rho^2\cos^2\phi}$.
b) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{1}{r^2+z^2}$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \frac{1}{\rho^2}$.
c) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{r^2}{z^2}$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \tan^2\phi$.
d) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = \frac{r^2\cos(2\theta)}{z}$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos(2\theta)\sin\phi\tan\phi$.
e) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = z(\theta - k\pi)$ når θ ligger i intervallet $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho\cos(\phi)(\theta - k\pi)$ når θ ligger i intervallet $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
f) I cylinderkoordinater: $f(r,\theta,z) = r^2 - 2z^2$, i kuglekoordinater: $f(\rho,\theta,\phi) = \rho^2(3\sin^2\phi - 2)$.

Opgave 1.8: I Maple kan graferne tegnes ved at give følgende kommandoer:
a) `plot3d(exp(x)/(1+y^2),x=-2..2,y=-2..2);`
b) `plot3d(5*x^2+y^3-4*y,x=-2..2,y=-3..3);`
c) `plot3d(x^5-10*x^3*y^2+5*x*y^4,x=-1..1,y=-1..1);`

Opgave 1.9: Tips: I Maple kan kommandoen `implicitplot3d` være nyttig. Husk at skrive kommandoen `with(plots):` til at begynde med.

Opgave 2.1: a) A er hverken åben eller lukket, b) B er åben, c) C er lukket, d) D er lukket, e) E er både åben og lukket

Opgave 2.2: a) A er ubegrænset, b) B er ubegrænset, c) C er begrænset, d) D er ubegrænset, e) E er ubegrænset, f) F er begrænset

Opgave 2.3: a) lukket, b) åben, c) hverken åben eller lukket, d) lukket, e) åben, f) lukket, g) hverken åben eller lukket, h) åben, i) lukket

Opgave 2.4: a) Vink: Brug de formelle definitioner.
b) Vink: Se på mængderne $A \cup B$ og $A \cap B$ en ad gangen. Lad $\mathbf{a}$ være et punkt i mængden og brug egenskaben fra a).
c) Vink: Brug den formelle definition for randen.
d) Vink: Brug delopgave c).

Opgave 2.5: a) Vink: De Morgans love siger, at $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ og $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Brug dette sammen med resultaterne fra opgave 2.4.
b) Vink: Brug at $A \setminus B = A \cap B^c$.

Opgave 2.6: a) Følgen $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergerer mod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ findes et tal N, således at $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ når $k \geq N$.
b) Vink: Hvis $\mathbf{a}$ ikke er med i $\overline{A}$, er $\mathbf{a}$ et indre punkt i A^c. Dermed findes et $r > 0$ således, at der for alle $\mathbf{x}$ med $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$ gælder $\mathbf{x} \notin A$. Brug dette til at udlede en modstrid. Eksempel på at $\mathbf{a}$ ikke behøver at ligge i A: Lad $A = (0, \infty)$ og $\mathbf{x}_k = \frac{1}{k}$.
c) Vink: Hvis A ikke er lukket, så findes et punkt $\mathbf{a}$ i ∂A som ikke er i A. Forsøg at vise, at der findes en følge af punkter i A, som konvergerer mod $\mathbf{a}$.
d) Vink: Hvis $\mathbf{a}$ er et isoleret punkt, må der findes et N så $\mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ for alle $k \geq N$ og derfor er det oplagt, at $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$. Hvis $\mathbf{a}$ ikke er isoleret, er der to ting som skal vises: Først at $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$ for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mod $\mathbf{a}$. Til at vise dette bruger man definitionerne. Det andet er

at vise, at hvis $f(\mathbf{a}) = \lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k)$ for alle følger $\{\mathbf{x}_k\}$ som konvergerer mod $\mathbf{a}$, så er f kontinuert i $\mathbf{a}$. For at vise dette, kan man antage, at f ikke er kontinuert i $\mathbf{a}$ og så forsøge at konstruere en følge som konvergerer mod $\mathbf{a}$, men hvor $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) \neq f(\mathbf{a})$. (Brug $\delta = \frac{1}{k}$.)

Opgave 2.7: a) 20, b) 1, c) e, d) 1

Opgave 2.8: a) Vink:$(x-y)$ er en faktor i tælleren. Grænseværdien er 1.
b) Eksisterer ikke, da $\tan x \to \pm\infty$.
c) Indsæt. Grænseværdien er $-\frac{5}{17}$.
d) Eksisterer ikke. Vink: Tæller og nævner har fælles faktor.
e) Eksisterer ikke. Vink: Undersøg konturerne $y = 0$ og $x = 0$.
f) Grænseværdien er 0. Vink: Skift til polære koordinater.
g) Grænseværdien er 0. Vink: Skift til polære koordinater.
h) Indsæt. Grænseværdien er $\frac{\pi}{24}$.
i) Eksisterer ikke. Sammenlign grænseværdien f.eks over linjerne $y = 0$ og $y = 2x$.

Opgave 2.9: Vink: Brug sætning 2.33 og sætning 2.34

Opgave 2.10: a) Vink: brug definitionen på kontinuitet

Opgave 2.11: a) Vink: Resultatet følger af de to uligheder $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ og $\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.
b) Vink: For at vise, at f er kontinuert i $\mathbf{b}$, må du se på størrelsen $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{b})| = |\,\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\,|$. Brug derefter uligheden fra delopgave a).
c) Vink: Brug delopgave b), sætning 2.33 og sætning 2.34.

Opgave 2.12: Vink: Brug ekstremalværdisætningen.

Opgave 2.13: Vink: Lad $\varepsilon = \frac{f(\mathbf{a})}{2}$. Brug da ekstremalværdisætningen på mængden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$ og at $f(\mathbf{x}) < \varepsilon = \frac{f(\mathbf{a})}{2}$ udenfor.

Opgave 2.14: a) $\nabla f(x, y) = (3x^2y + 3y^4, x^3 + 12xy^3)$.
b) $\nabla f(x, y) = (\frac{2x+3x^2}{y}, -\frac{x^2+x^3}{y^2})$.
c) $\nabla f(x, y) = (-\sin(x + y^2), -2y\sin(x + y^2))$.
d) $\nabla f(x, y) = (2x\ln(xy^2) + x, \frac{2x^2}{y})$.
e) $\nabla f(x, y, z) = (e^{-z}, e^{-z}, -(x + y)e^{-z})$.
f) $\nabla f(x, y, z) = (\frac{z^2}{(1+y^2)\cos^2 x}, -\frac{2yz^2\tan x}{(1+y^2)^2}, \frac{2z\tan x}{1+y^2})$.
g) $\nabla f(x, y, z) = (\frac{z}{1+(x+y)^2}, \frac{z}{1+(x+y)^2}, \arctan(x + y))$.

h) $\nabla f(x,y,z,u) = (-(z^2+u)e^{-x+3y}, 3(z^2+u)e^{-x+3y}, 2ze^{-x+3y}, e^{-x+3y})$.

Opgave 2.15: a) $f'((1,2);(3,-1)) = 11$
b) $f'((1,0);(-1,1)) = -1$
c) $f'((1,0,1);(1,1,-1)) = -1$
d) $f'((\frac{\pi}{2},1,0);(-1,0,2)) = 2$

Opgave 2.16: a) I retningen givet af vektoren $(24,173)$.
b) I retningen givet af vektoren $(2e^3, 2e^3, 0)$.

Opgave 2.17: a) $z = 2x-y-3$, b) $z = x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$, c) $z = 3x+9y+8$, d) $z = x$

Opgave 2.18: a) $x-2y+z=0$, b) $5x+26y+40z=16$, c) $12x-18y+\sqrt{3}z = 78+\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$

Opgave 2.19: $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} = 8xy^2+1$
$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} = 8x^2y+2y$

Opgave 2.20: $\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} = e^{-2y(z+x)}\cdot 2y - (2xy+z)e^{-2y(z+x)}\cdot 2y$
$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} = e^{-2y(z+x)}\cdot 2x - (2xy+z)e^{-2y(z+x)}\cdot 2(z+x)$
$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial z} = e^{-2y(z+x)} - (2xy+z)e^{-2y(z+x)}\cdot 2y$

Opgave 2.21: Vink: Brug kædereglen på den sammensatte funktion $\rho(t) = f(V(t),T(t))$. Hvis $\rho = c\frac{T}{V}$ bliver $\rho'(t) = c\frac{T'(t)V(t)-T(t)V'(t)}{(V(t))^2}$.

Opgave 2.22: Vink: Brug kædereglen på den sammensatte funktion $E_1(p_1(t),p_2(t))$.

Opgave 2.23: Vink: Brug at $\Delta V \approx V'((r,h);(\Delta r,\Delta h))$.
Anslået usikkerhed: $\Delta V \approx 3.8\ \mathrm{m}^3$

Opgave 2.24: a) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6y & 6x+4y \\ 6x+4y & 4x \end{bmatrix}$
b) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}$
c) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} (x^2+4x+2)e^{x-y} & -(x^2+2x)e^{x-y} \\ -(x^2+2x)e^{x-y} & x^2e^{x-y} \end{bmatrix}$

d) $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & -2z^2 & -4yz \\ 2x & -4yz & -2y^2 \end{bmatrix}$

Opgave 2.25: a) $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.
b) Vink: Brug definitionen af den afledede til at udregne $f'(0)$.
c) Vink: Grænseværdien $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ eksisterer ikke.
d) f er differentiabel, men ikke C^1.

Opgave 2.26: a) $g'(0,0;1,0) = 0$
b) $g'(0,0;\mathbf{r}) = 0$
c) Der findes punkter (x,y) vilkårligt nær origo med $g(x,y) = 1$.
d) g er ikke en C^1-funktion på trods af, at alle de retningsafledede eksisterer i origo.

Opgave 2.27: a) $h'(0,0;1,0) = 0$
b) $h'(0,0;r_1,r_2) = r_1$
c) De partielt afledede er defineret som $\frac{\partial h}{\partial x} = h'(0,0;1,0) = 0$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = h'(0,0;0,1) = 0$. Dette giver $\nabla h(0,0) = (0,0)$.
d) For eksempel er $h(0,0;1,1) = 1$ mens $\nabla h(0,0)\cdot(1,1) = 0$. e) Dette er ikke et modeksempel, da h ikke er C^1. (De partielt afledede eksisterer ikke i alle punkter nær origo.)

Opgave 2.28: a) Vink: Udregn grænseværdien $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ved at skifte til polære koordinater.
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$
c) Vink: For at finde f.eks. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ udregner du grænseværdien $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$. Dette giver $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
d) f er C^1, da $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ er kontinuerte også i origo.
e) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1$ og $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1$.
f) Definitionen af $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ er henholdsvis den første og den anden af grænseværdierne i delopgave e). Derfor er $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$. Sætning 2.82 siger, at for en C^2-funktion er $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, men f er ikke C^2.

Opgave 3.1: a) $(2,-1)$, b) $(0,0)$, c) $(-\frac{3}{2},1)$, d) $(-1,0)$, e) $(2^{-1/3},-2^{2/3})$

Opgave 3.2: a) Minimum i $(1,-2)$.

b) Sadelpunkt i $(-1, 1)$.
c) Minimum i $(0, 0)$.
d) Maksimum i $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
e) Sadelpunkt i $(-2, 0)$

Opgave 3.3: Lokalt maksimum i $(0, 0, 0)$, sadelpunkt i $(2, 2, 2)$, $(2, -2, -2)$, $(-2, 2, -2)$ og $(-2, -2, 2)$.

Opgave 3.4: a) $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{100}{x^2 y}$ og $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{100}{xy^2}$.
b) $x = \sqrt[3]{\frac{25}{2}}$ og $y = z = \sqrt[3]{100}$

Opgave 3.5: a) $\frac{\partial A}{\partial x} = 28 - 4x - 3y$ og $\frac{\partial A}{\partial y} = 28 - 4y - 3x$. A har lokalt maksimum for $x = y = 4$.
b) Maksimalt areal $A = 112$ når $x = y = 4$.

Opgave 3.6: a) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{60}{x^2} - 60y$ og $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{60}{y^2} - 60x$
b) P har maksimum lig 1140 når $x = y = 1$.

Opgave 3.7: Vink: Fortjenesten er givet ved $P(x, y) = 500(y-x)(x-400) + (450000 + 500(x - 2y))(y - 600)$.
Det kritiske punkt findes når $x = 650$ og $y = 750$. Dette er et maksimum.

Opgave 3.8: a) Produktionsniveauet bliver $x = 12.000$ og $y = 12.000$. Dette giver $P = 36.000.000$ og $Q = 48.000.000$.
b) Ved samarbejde bliver produktionsniveauet $x = 9.000$ og $y = 8.000$. Dette giver $P = 51.500.000$ og $Q = 50.500.000$.
c) Produktionsniveauet bliver $x = 9.000$ og $y = 12.000$. Dette giver $P = 31.500.000$ og $Q = 58.500.000$.

Opgave 3.9: b) Se eksempel 3.7, c) Vink: Skift fortegn på funktionen i a).

Opgave 3.10: a) Såfremt vi kan finde et punkt $b \neq a$ således at $f(a) = f(b)$, siger Rolles sætning, at for et c mellem a og b er $f'(c) = 0$. Men så ville a ikke være det eneste stationære punkt. Antag at a ikke er et globalt maksimum. Da findes der et punkt d således at $f(d) > f(a)$. I nærheden af a og på samme side af a som d findes der et punkt e med $f(e) \leq f(a)$, eftersom a er et lokalt maksimum. Vi har set, at hvis $f(e) = f(a)$ så får vi en modstrid mod, at a var det eneste stationære punkt. Derfor må $f(e) < f(a)$. Fordi $f(e) < f(a) < f(d)$ må der ved skæringssætningen findes et punkt b mellem e og d således at $f(b) = f(a)$, og $b \neq a$ eftersom d og e ligger på samme side

af a. Dermed får vi en modstrid mod at a er det eneste stationære punkt.
c) Vink: For at vise, at $(0,0)$ ikke er et globalt maksimum, kan du se på konturen $y = x$.

Opgave 3.11: a) Ekstremalværdisætningen siger, at f har et minimum på intervallet $[a, b]$. Lad c være dette minimumspunkt. Da a og b er lokale maksima er $c \neq a$ og $c \neq b$.
c) Vink: ABC-kriteriet fungerer.

Opgave 4.1: a) Max-punkt i $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Max-værdien er $f(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 5$. Min-punkt i $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Min-værdien er $f(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = -5$.
b) Max-punkt i $(\frac{1}{10}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$. Max-værdien er $f(\frac{1}{10}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Min-punkt i $(-\frac{1}{10}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5})$. Min-værdien er $f(-\frac{1}{10}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}) = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$.
c) Min-punkt i $(2, -10)$. Min-værdien er $f(2, -10) = 104$.
d) Min-punkter i $(3, -1)$ og $(-3, 1)$. Min-værdier $f(3, -1) = -3$ og $f(-3, 1) = -3$. Max-punkter i $(3, 1)$ og $(-3, -1)$. Max-værdier $f(3, 1) = 3$ og $f(-3, -1) = 3$.
e) Min-punkt i $(1, -1)$. Min-værdi $f(1, -1) = 5$. Max-punkt i $(7, 35)$. Max-værdi $f(7, 35) = 2597$.
f) Har ingen max- eller min-punkter.
g) Min-punkt i $(1, 0)$. Min-værdi $f(1, 0) = 1$.
h) Max-punkt i $(160, 5)$. Max-værdi $f(160, 5) = 2000$.

Opgave 4.2: a) Min-punkt i $(2, -3, 2)$. Minimalværdien er $f(2, -3, 2) = 17$.
b) Ingen kritiske punkter.
c) Kritiske punkter i $(-1, -1, 1)$ og $(1, 1, -1)$. Disse er hverken max eller min. De kritiske værdier er $f(-1, -1, 1) = -1$ og $f(1, 1, -1) = 1$.
d) Der er 14 kritiske punkter: $(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $(2\sqrt{3}, 0, 0)$ $(0, -\sqrt{6}, 0)$, $(0, \sqrt{6}, 0)$, $(0, 0, -2)$, $(0, 0, 2)$, $(-2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$. Det absolutte maksimum er $\frac{4}{3}\sqrt{6}$, hvilket opnås i punkterne $(-2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$. Det absolutte minimum er $-\frac{4}{3}\sqrt{6}$, hvilket antages i punkterne $(-2, -\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(-2, \sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{2}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$ og $(2, \sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{3})$. De resterende kritiske punkter er sadelpunkter og har kritisk værdi lig 0.
e) Max-punkter i $(-\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, -3\sqrt{74})$ og $(\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, 3\sqrt{74})$. Max-værdien er $f(-\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, -3\sqrt{74}) = f(\sqrt{74}, -\frac{4}{3}, 3\sqrt{74}) = 978$. Min-punkt i $(0, 2\sqrt{21}, 0)$. Min-værdien er $f(0, 2\sqrt{21}, 0) = -24\sqrt{21}$. Det kritiske punkt i $(0, -2\sqrt{21}, 0)$ er hverken max eller min og har kritisk værdi $f(0, 2\sqrt{21}, 0) = 24\sqrt{21}$.

Opgave 4.3: Den mindste afstand er $\frac{1}{4}\sqrt{10}$ og opnås af punkterne $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ og $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$.

Opgave 4.4: Bunden skal være kvadratisk med sidelængde $\sqrt[3]{2V}$ og højden skal være $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Opgave 4.5: f har maksimum når $x = \frac{1}{\sqrt{3}}r$ og $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$.

Opgave 4.6: Største volumen er 46656 kubiktommer.

Opgave 4.7: Vink: Betragt A som en funktion af x, y og z. Det kan betale sig at maksimere A^2 i stedet for A. Da forsvinder rodtegnet, og udregningerne bliver enklere.
Trekanten med det største areal er den ligesidede.

Opgave 4.8: Arealet er givet ved $A = \frac{1}{2}r^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Maksimerer man A som en funktion af α, β og γ under betingelsen $2\pi = \alpha + \beta + \gamma$, finder man, at den ligesidede trekant har størst areal.

Opgave 4.9: Den maksimale fortjeneste er $P = 1125$ og opnås ved $x = 25$ og $y = 75$. Husk at tjekke, at P ikke har noget maksimum når $x + y < 100$.

Indeks