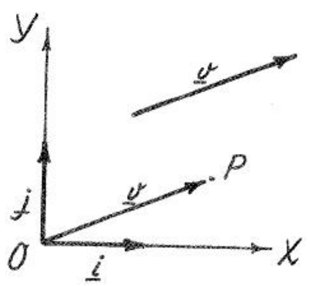
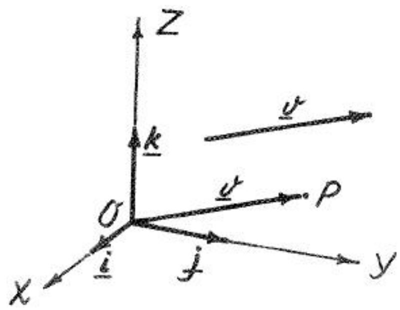
I. FUNKTIONER AF EN ELLER FLERE VARIABLE

§1. Talrummene $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$

Indføring

Ved et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i plan eller rum tilvejebringes jo en enentydig korrespondance mellem mængden af punkter P eller mængden af vektorer $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ i planen, resp. rummet, på den ene side og mængden $\mathbb{R}^2$ af par (x, y), resp. mængden $\mathbb{R}^3$ af tripler (x, y, z) af reelle tal på den anden side.





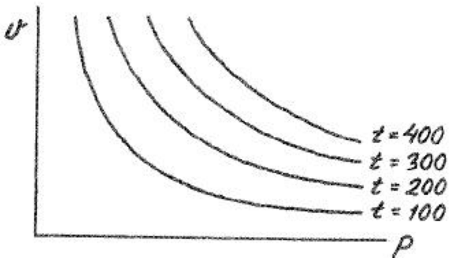
$$P \curvearrowright \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} \curvearrowright (x, y) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$P \curvearrowright \mathbf{v} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} \curvearrowright (x, y, z) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

I geometrien ligger interessen i denne korrespondance i muligheden af at løse geometriske problemer eller vise geometriske sætninger ved regning med koordinater. Det kaldes *analytisk geometri.*

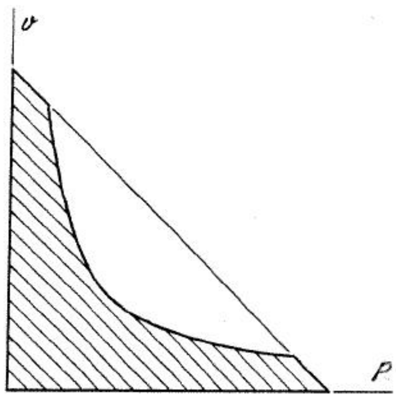
De såkaldte *talrum* $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ dukker imidlertid op i utallige, ikke geometriske sammenhænge, og så er det talparrene og taltriplerne, der er det primære, medens overgangen til punkter eller vektorer i plan og rum kun tjener til at give et bedre overblik over forhold vedrørende $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ ved hjælp af geometrisk anskuelse.

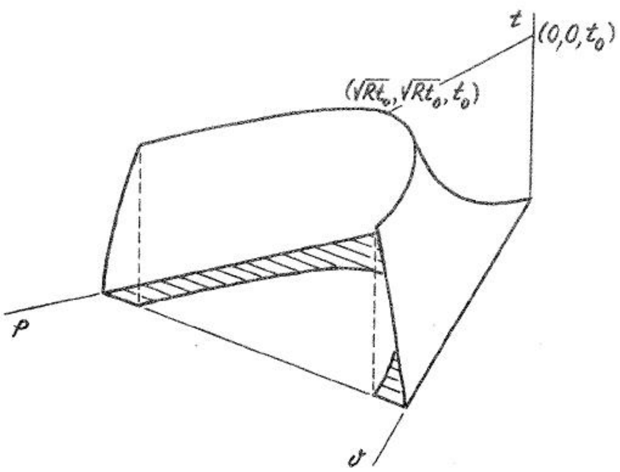
EKSEMPEL 1. For et afspærret grammolekyle (1 mol) af en ideal gas gælder som bekendt gasloven
$$pv = Rt \ ,$$
hvor p, v og t er henholdsvis tryk, rumfang og absolut temperatur, medens R er en konstant, der afhænger af de benyttede enheder. Tallene p, v og t er naturligvis positive, og gasloven udtrykker så, at blandt alle taltripler $(p, v, t) \in {\mathbb{R}_+}^3$ kan kun sådanne forekomme, hvor $pv = Rt$. De udgør en delmængde A af $\mathbb{R}^3$,
$$A = \{(p, v, t) \in {\mathbb{R}_+}^3 \mid pv = RT\} = \{p, v, t) \in \mathbb{R}^3 \mid p, v, t > 0 \wedge pv = Rt\} \,.$$
Ved at opfatte (p, v, t) som sædvanlige retvinklede koordinater kan man *anskueliggøre* A som en flade i rummet. Tænker vi os t-aksen lodret, vil et vandret snit i A, dvs. fællesmængden med en plan $t = t_0$, projiceres ned på (p, v)-planen i *niveaukurven*
$$\{(p, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (p, v, t_0) \in A\} = \{(p, v) \in {\mathbb{R}_+}^2 \mid pv = Rt_0\} \,.$$



For hvert $t_0 > 0$ er det en hyperbelgren. Den illustrerer, at tryk p og rumfang v for en afspærret mængde af en ideal gas er omvendt proportionale ved fastholdt temperatur t_0 (*Boyle/Mariottes lov*). Skaren af niveaukurver kan give et indtryk af fladen A på samme måde som højdekurverne på et landkort.

Rumskitsen nedenfor viser en del af fladen A, afskåret ved snit med en plan $t = t_0$ og en plan $p + v =$ konstant. Med andre ord den del, der ligger over det skraverede felt i pv-planen.





Betragter man ikke som ovenfor netop 1 mol, men en tilfældig afspærret mængde af en ideal gas, lyder gasloven

$$pv = nRt ,$$

hvor det nye bogstav $n \in \mathbb{R}_+$ står for antallet af grammolekyler. På denne form udtrykker gasloven, at for afspærrede mængder af ideale gasser forekommer blandt alle talsæt $(p, v, t, n) \in {\mathbb{R}_+}^4$ kun sådanne, der tilfredsstiller ligningen. Dette nævner vi som illustration af, at $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, osv. lige så vel dukker op ved anvendelser som $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Talrummene $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$

For vilkårligt $k \in \mathbb{N}$ er *talrummet* $\mathbb{R}^k$ mængden af ordnede talsæt $(x_1, \ldots, x_k)$ med $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$.

Skønt vi for $k > 3$ ikke som i tilfældene $k = 2$ og $k = 3$ kan oversætte til anskuelig plan- eller rumgeometri, har det dog vist sig at være en god støtte at benytte geometriske gloser, overført ved analogi fra tilfældene $k = 2$ og $k = 3$.

Det enkelte talsæt $(x_1, \ldots, x_k)$ kaldes et *punkt* i $\mathbb{R}^k$ eller - hvis man synes, det passer bedre i sammenhængen - en *vektor* i $\mathbb{R}^k$, og vi betegner det med et enkelt bogstav, f.eks. $x = (x_1, \ldots, x_k)$. De enkelte tal x_i, $i = 1, \ldots, k$, kaldes *koordinater*. Nulsættet $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$ kaldes *nulvektor*, de øvrige talsæt kaldes *egentlige vektorer*.

For $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ og $t \in \mathbb{R}$, sætter man

$$tx = (tx_1, \ldots, tx_k) \ , \quad x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$$

og

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k \ . \qquad \textit{(Skalarprodukt)}$$

Det er let at regne efter, at de sædvanlige regneregler for geometriske vektorer i plan og rum også gælder her. *Længden* eller *normen* $|x|$ af $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ sættes ikke overraskende til

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_k}^2} \ .$$

Vi definerer

$$x \perp y \ \Leftrightarrow \ x \cdot y = 0$$

og har straks

PYTHAGORAS' SÆTNING. *For $x, y \in \mathbb{R}^k$ gælder*

$$x \perp y \ \Leftrightarrow \ |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \ .$$

BEVIS. Påstanden følger af, at

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + y \cdot y + 2(x \cdot y) = |x|^2 + |y|^2 + 2(x \cdot y) \ .$$

Mindre ligetil er det generelt at indføre et *måltal φ for vinklen* mellem to egentlige vektorer x og y. Det simpleste er at definere φ som det tal i intervallet $[0, \pi]$, hvor

$$x \cdot y = |x||y| \cos \varphi \ .$$

Denne definition bygger på, at $\cos : [0, \pi] \curvearrowright [-1, 1]$ er bijektiv (herom nærmere s. III.2.6 og 9), og den forudsætter naturligvis, at $|x \cdot y| \leqq |x||y|$. Det er faktisk altid tilfældet:

CAUCHY/SCHWARZ' ULIGHED. *For vilkårlige $x, y \in \mathbb{R}^k$ gælder*

$$|x \cdot y| \leqq |x||y| .$$

Uligheden er ikke triviel, dens egentlige indhold er jo

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k)^2 \leqq (x_1^2 + \cdots + x_k^2)(y_1^2 + \cdots + y_k^2) .$$

Denne ulighed om summer findes i en note (s. 455) i *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821) af A.-L. CAUCHY (fransk matematiker, som vi skal høre mere om, 1789-1857). En tilsvarende ulighed om integraler findes hos H.A. SCHWARZ (tysk matematiker, 1843-1921). Den spiller også en tilsvarende rolle. Herom i Matematik 2 MA.

BEVIS. Vi kan antage, at x er egentlig - ellers er uligheden jo oplagt. For $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi så

$$\begin{aligned} y - \lambda x \perp x \;\Leftrightarrow\; & (y - \lambda x) \cdot x = 0 \\ \Leftrightarrow\; & y \cdot x - \lambda |x|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = (y \cdot x)/|x|^2 . \end{aligned}$$

Der findes altså netop et $\lambda \in \mathbb{R}$, således at $y - \lambda x \perp x$. Med dette λ er

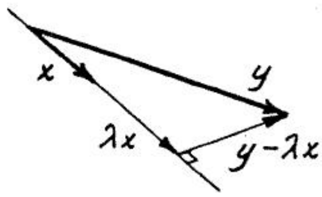
$$y = \lambda x + (y - \lambda x) \quad \text{og} \quad y - \lambda x \perp \lambda x ,$$

hvorfor vi ved brug af *Pythagoras' sætning* finder

$$|y|^2 = |\lambda x|^2 + |y - \lambda x|^2 \geqq |\lambda x|^2 = \lambda^2 |x|^2 .$$

Cauchy/Schwarz' ulighed fremgår nu ved at indsætte den fundne værdi for λ.

Ideen i beviset er at søge "den vinkelrette projektion λx af y på x" samt at udnytte, at denne har længde $|\lambda x| \leqq |y|$.



I Cauchy/Schwarz' ulighed gælder lighedstegnet, hvis og kun hvis en af de to vektorer x og y fremgår af den anden ved multiplikation med en talfaktor, dvs. hvis de "ligger på linie". (Øvelse. Prøv at vise det!)

Ved hjælp af *Cauchy/Schwarz' ulighed* er det nemt at vise

TREKANTSULIGHEDEN FOR VEKTORER. *For* $x, y \in \mathbb{R}^k$ *gælder*

$$|x + y| \leqq |x| + |y| .$$

BEVIS. Uligheden fremgår ved regningen

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) &= x\cdot x + 2(x\cdot y) + y\cdot y \\ &= |x|^2 + 2(x\cdot y) + |y|^2 \\ &\leqq |x|^2 + 2|x\cdot y| + |y|^2 \\ &\leqq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 . \end{aligned}$$

Afstanden $d(x, y)$ mellem to punkter $x = (x_1, \ldots, x_k)$ og $y = (y_1, \ldots, y_k)$ sættes til

$$d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_k - x_k)^2} .$$

For vilkårlige $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ gælder så

$$\begin{array}{rl} (i) & d(x,y) \geqq 0 , \quad d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \\ (ii) & d(x,y) = d(y,x) \\ (iii) & d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z) , \qquad \textit{(Trekantsuligheden)} \end{array}$$

idet (iii) fremgår af *Trekantsuligheden for vektorer* ved regningen

$$d(x, z) = |z - x| = |(z - y) + (y - x)| \leqq |y - x| + |z - y| = d(x, y) + d(y, z) .$$

Kuglen $K(a, \rho)$ i $\mathbb{R}^k$ med centrum $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ og radius $\rho \in \mathbb{R}_+$ defineres ved

$$K(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(a, x) < \rho\} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x - a| < \rho\} .$$

Vi siger, at $K(a, \rho)$ er en kugle *omkring* a . Sprogbrugen er lånt fra tilfældet $k = 3$.

Vi vil ikke fordybe os i "geometrien" i $\mathbb{R}^k$, men dog nævne, at man ved en *ret linie* i $\mathbb{R}^k$ forstår en mængde af form

$$\{a + tb \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a_1, \ldots, a_k) + t(b_1, \ldots, b_k) \mid t \in \mathbb{R}\} ,$$

hvor $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ og $b \neq (0, \ldots, 0)$, altså billedet af $\mathbb{R}$ ved en afbildning

$$t \curvearrowright a + tb , \quad t \in \mathbb{R} , \qquad \text{med } b \neq \mathbf{o} .$$

Her vil man være tilbøjelig til - for sin anskuelses skyld - at omtale a som et *punkt* og b som en egentlig *vektor* på linien. Afbildningen kaldes en *parameterfremstilling for linien.* En parameterværdi $t \in \mathbb{R}$ kan tolkes som *koordinat* eller *abscisse* til det tilsvarende punkt $a + tb$ på linien, svarende til *begyndelsespunkt* a og *basisvektor* b.

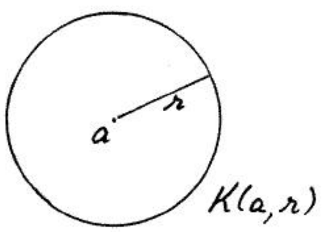
Mængden af løsninger $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ til en førstegradsligning

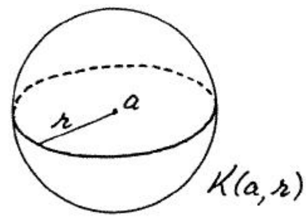
$$b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k = c\,,$$

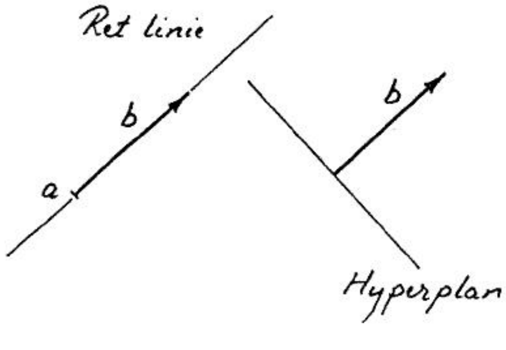
hvor $b_1, \ldots, b_k$, $c \in \mathbb{R}$ og $(b_1, \ldots, b_k) \neq (0, \ldots, 0)$, kaldes en *hyperplan* i $\mathbb{R}^k$.

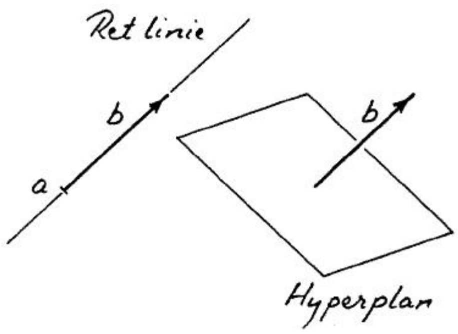
Når talen specielt er om $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, vil vi ofte underforstå, at der er valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i plan eller rum, og ikke altid skelne skarpt mellem punkt P og vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ på den ene side og koordinatparret $x = (x_1, x_2)$ eller koordinatsættet $x = (x_1, x_2, x_3)$ på den anden.

Man tegner ofte illustrationer vedrørende $\mathbb{R}^k$ ved på figuren at lade som om $k = 2$ eller $k = 3$. Sådanne figurer kan være en god støtte, men må naturligvis bruges med varsomhed.







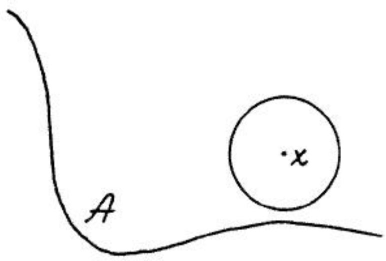


Punktmængder i plan og rum - og i $\mathbb{R}^k$

De begreber, der defineres i dette afsnit, er simple og naturlige, men de skal stå helt præcist for dig, efter ordlyden. Husk, at i matematik ligger der ikke mere i et begreb, end definitionen siger. Glosevalg og figurer kan tjene som inspiration og som hjælp til at fastholde en situation, men der må argumenteres ud fra definitioner og hvad der er udledt af dem.

For at lette dig i anskueliggørelsen formulerer vi det følgende for $k = 2$, men det gælder uændret for vilkårligt $k \in \mathbb{N}$.

Lad A være en *punktmængde* i $\mathbb{R}^2$, dvs. $A \subseteq \mathbb{R}^2$.



Et punkt $x \in \mathbb{R}^2$ siges at være et *indre punkt* i A, hvis der findes en kugle $K(x,\rho)$ omkring x, som er indeholdt i A, dvs. hvis

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+ : K(x,\rho) \subseteq A .$$

Mængden A° af indre punkter i A kaldes *det indre* af A.

Det er klart, at $A^\circ \subseteq A$. Hvis $A^\circ = A$, dvs. hvis ethvert punkt i A er et indre punkt i A, siges punktmængden A at være *åben.*

Et punkt $x \in \mathbb{R}^2$ siges at være et *kontaktpunkt* for A, hvis enhver kugle $K(x,\rho)$ omkring x indeholder mindst et punkt af A, dvs. hvis

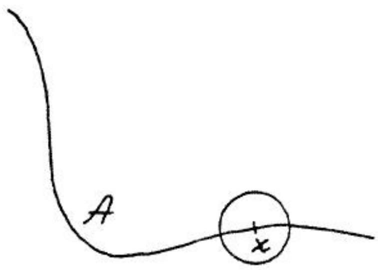
$$\forall \rho \in \mathbb{R}_+ : K(x,\rho) \cap A \neq \emptyset .$$

Mængden $\bar{A}$ af kontaktpunkter for A kaldes *afslutningen* for A.

Det er klart, at $A \subseteq \bar{A}$. Hvis $A = \bar{A}$, dvs. hvis ethvert kontaktpunkt for A tilhører A, siges punktmængden A at være *afsluttet.*

Ved *randen* ∂A for A forstås

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ .$$



Punkterne tilhørende randen ∂A kaldes *randpunkter* for A. Et punkt $x \in \mathbb{R}^2$ er åbenbart randpunkt for A, netop hvis enhver kugle $K(x,\rho)$ omkring x indeholder mindst et punkt af A og mindst et punkt af komplementærmængden $\complement A = \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Overvej det! Vink: For $x \in \mathbb{R}^2$ gælder $x \in \partial A \;\Leftrightarrow\; x \in \bar{A} \wedge x \notin A^\circ \Leftrightarrow \ldots$.

Idet $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$, kan randen $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ fremstilles

$$\partial A = (\bar{A} \setminus A) \cup (A \setminus A^\circ) ,$$

hvor $\bar{A} \setminus A$ består af de randpunkter for A, der *ikke* tilhører A, og $A \setminus A^\circ$ består af dem, der gør det. Vi noterer

$$\bar{A} \setminus A = \partial A \setminus A\,, \quad A \setminus A^\circ = \partial A \cap A\,.$$

Bemærk videre, at A er afsluttet, netop hvis A indeholder *alle* sine randpunkter, og at A er åben, netop hvis A *ikke* indeholder *nogen* af sine randpunkter. I symboler:

$$A \textit{ er afsluttet} \Leftrightarrow \partial A \subseteqq A\,, \qquad A \textit{ er åben} \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset\,.$$

Thi
$$\begin{aligned} A \text{ er afsluttet} &\Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow \bar{A} \subseteqq A \\ &\Leftrightarrow \bar{A} \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow \partial A \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow \partial A \subseteqq A\,. \end{aligned}$$

Og
$$\begin{aligned} A \text{ er åben} &\Leftrightarrow A = A^\circ \Leftrightarrow A \subseteqq A^\circ \\ &\Leftrightarrow A \setminus A^\circ = \emptyset \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset\,. \end{aligned}$$

En mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^2$ er i almindelighed hverken åben eller afsluttet: "Normalt" vil A indeholde nogle af sine randpunkter, men ikke dem alle.

Et punkt $x \in A$ kaldes et *isoleret punkt* af A, hvis der findes en kugle $K(x, \rho)$ omkring x, der ikke indeholder noget *andet* punkt af A, dvs. hvis

$$\exists \rho \in \mathbb{R}_+ : K(x, \rho) \cap A = \{x\}\,.$$

Definitioner og resultater ovenfor stemmer med den umiddelbare anskuelse, når punktmængden A er en tilpas simpel figur. Men de bruges, uanset hvor kompliceret A måtte være. - Tag f.eks. $A = \mathbb{Q}^2$. Her er $A^\circ = \emptyset$, $\bar{A} = \mathbb{R}^2$ og altså $\partial A = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2$, dvs. *randen af A er hele planen.* Der er ingen isolerede punkter. - Eller $A = \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Her er $A^\circ = \emptyset$ og $\partial A = \bar{A} = A \cup \{(0,0)\}$. Hvert punkt i A er et isoleret punkt.

Når man arbejder generelt med de indførte begreber, må man derfor bygge på de præcise definitioner eller allerede udledte resultater - og ikke blot på sin anskuelse. Er man først klar over, at alt hviler på definitioner og ræsonnement, er det på den anden side oplagt, at det hele kan gentages i $\mathbb{R}^k$.

EKSEMPEL 2. En punktmængde A i $\mathbb{R}^k$ og dens komplementærmængde $\complement A = \mathbb{R}^k \setminus A$ har samme rand,

$$\partial(\complement A) = \partial A\,.$$

Thi i karakteriseringen af randpunkt ovenfor (straks efter definitionen) indgår A og $\complement A$ ens.

Videre gælder:

$$A \textit{ er afsluttet} \Leftrightarrow \complement A \textit{ er åben}, \quad A \textit{ er åben} \Leftrightarrow \complement A \textit{ er afsluttet.}$$

Thi *hele* den fælles rand $\partial A = \partial(\complement A)$ er jo indeholdt i den ene af de to mængder A og $\complement A$, netop hvis *intet* af dens punkter tilhører den anden.

EKSEMPEL 3. Kuglen $K(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x-a| < \rho\}$ med centrum $a \in \mathbb{R}^k$ og radius $\rho \in \mathbb{R}_+$ er en åben mængde. Dens afslutning er

$$\bar{K}(a,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x-a| \leqq \rho\}\,,$$

og det er en afsluttet mængde. $K(x,\rho)$ og $\bar{K}(x,\rho)$ har samme rand, nemlig

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid |x-a| = \rho\}\,.$$

Påstandene er anskueligt oplagte for $k = 2$ og $k = 3$. Beviser kan (med lidt hjælp fra læreren) føres med de midler, vi har til rådighed (bl.a. *Trekantsuligheden*), men vi afstår.

En punktmængde A i $\mathbb{R}^k$ kaldes *begrænset*, hvis den er indeholdt i en kugle, dvs. hvis

$$\exists a \in \mathbb{R}^k\ \exists R \in \mathbb{R}_+ : A \subseteqq K(a,R)\,.$$

Man ser let, at en begrænset punktmængde endda er indeholdt i en *kugle med givet centrum* b, f.eks. $b = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^k$. Thi

$$K(a,R) \subseteqq K(b\,,\ d(b,a)+R)\,,$$

da der jo for hvert $x \in K(a,R)$ gælder

$$d(b,x) \leqq d(b,a) + d(a,x) < d(b,a) + R\,.$$

§2. Afbildninger fra $\mathbb{R}^k$ til $\mathbb{R}^m$

Indføring og eksempler

I gymnasiet beskæftiger man sig indgående med reelle funktioner af en reel variabel, dvs. afbildninger fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, sædvanligvis defineret på et interval. Sigtet er en rimelig indsigt og sikkerhed i differential- og integralregning.
I dette kursus vil vi forfølge samme sigte i en mere almen ramme: Vi vil studere reelle funktioner ikke blot af én, men også af flere variable, dvs. afbildninger fra et talrum $\mathbb{R}^k$ til $\mathbb{R}$. Ligeledes betragtes afbildninger fra $\mathbb{R}$ til et talrum $\mathbb{R}^m$ og mere generelt afbildninger fra et talrum $\mathbb{R}^k$ til et talrum $\mathbb{R}^m$.

Det ligger ikke helt fast, hvornår en *afbildning* f fra $\mathbb{R}^k$ til $\mathbb{R}^m$ kaldes en *funktion.* Vi vil gøre det, når m er sat til 1, - så har vi en *reel funktion.* - Desuden undertiden, når vi tænker på elementerne i $\mathbb{R}^m$ som vektorer, - så siger vi også *vektorfunktion.*

EKSEMPEL 1. Lufttrykket p i atmosfæren varierer med tiden t og stedet. Udtrykker vi stedet ved geografisk længde ℓ og bredde b samt højde h over havets overflade, får vi en funktion af fire variable

$$(t, \ell, b, h) \curvearrowright p$$

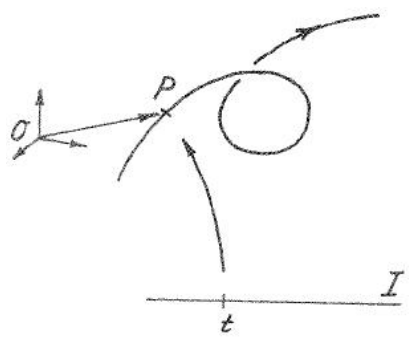
defineret på en delmængde A af $\mathbb{R}^4$ og med reelle værdier. Ved mere lokale fænomener - lydens udbredelse i luft f.eks. - vil man foretrække sædvanlige retvinklede koordinater og dermed få en funktion

$$(t, x, y, z) \curvearrowright p\,.$$

For fastholdt t fås en funktion af stedet alene (barometerstanden kl. 17). For fastholdt sted fås en funktion af t, som eventuelt kan opleves af øret (Beethovens 9. symfoni).

EKSEMPEL 2. *Bevægelsen af en partikel* i rummet i et tidsinterval $I \subseteqq \mathbb{R}$ kan beskrives ved afbildningen

$$t \curvearrowright P\,,\ t \in I\,,$$



der til hvert tidspunkt $t \in I$ tilordner det punkt P, hvor partiklen befinder sig til tiden t. Efter valg af et udgangspunkt O for stedvektorer kan man i stedet benytte vektorfunktionen

$$t \curvearrowright \mathbf{r} = \overrightarrow{OP}\,,\ t \in I\,,$$

som beskrivelse af bevægelsen. Efter valg af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ kan man endelig benytte afbildningen

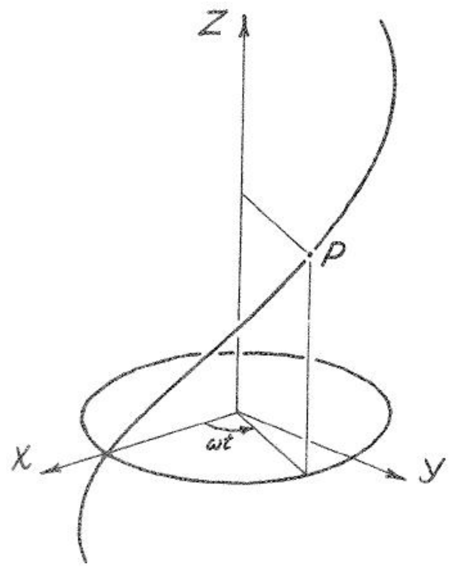
$$t \curvearrowright (x, y, z)\,,\ t \in I\,,$$

af I ind i $\mathbb{R}^3$, hvor x, y, z er koordinaterne til P eller, om man vil, til $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. Ofte angiver man hver af de tre koordinater som funktion af t, på formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned} \quad , \quad t \in I\,.$$

Eksempelvis beskriver

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t \quad , \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ z &= kt \end{aligned}$$



en *skruebevægelse* om Z-aksen, idet z-koordinaten vokser i takt med, at projektionen $(a\cos\omega t\,,\ a\sin\omega t)$ på XY-planen drejer rundt om $(0,0)$ i en jævn cirkelbevægelse. (Størrelserne $a > 0$, $\omega \neq 0$, $k \neq 0$ er konstanter, og $k2\pi/\omega$ kaldes *skruehøjden*.)

EKSEMPEL 3. Parameterfremstillingen for en plan i rummet

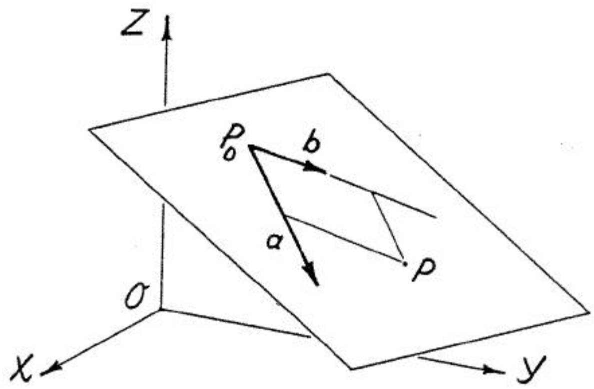
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}\ , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,,$$

eller

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1u + b_1v \\ y &= y_0 + a_2u + b_2v \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,, \\ z &= z_0 + a_3u + b_3v \end{aligned}$$

udtrykker en afbildning af $\mathbb{R}^2$ ind i rummet, i sidste form via $\mathbb{R}^3$ ved hjælp af et koordinatsystem XYZ,

$$(u,v) \curvearrowright (x,y,z)\ , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,.$$



Det forudsættes, at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ikke ligger på linie.

Parameterværdier $u, v \in \mathbb{R}$ kan tolkes som *parallelkoordinater* for det til (u,v) svarende punkt P med hensyn til *koordinatsystemet i planen* med *begyndelsespunkt* P_0 og *basisvektorer* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. (Sammenhængen mellem punkt P og (parallel) koordinater u, v er givet ved

$$\overrightarrow{P_o P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \text{ .)}$$

Affine og lineære afbildninger

En simpel type af afbildninger af $\mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R}^m$, der spiller en fundamental rolle i dette kursus (se om differentiabilitet i V, resp. VIII), er de *affine* og mere specielt de *lineære*.

Først tilfældet $m = 1$: En *affin funktion* på $\mathbb{R}^k$ kan karakteriseres som en funktion $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \curvearrowright y \in \mathbb{R}$ med fremstilling

$$y = b + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \, ,$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k$ og b er reelle konstanter. En *lineær funktion* på $\mathbb{R}^k$ kan karakteriseres på samme måde, blot skal b udelades:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \, .$$

Generelt: En *affin afbildning* af $\mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ kan karakteriseres som en afbildning $(x_1, \ldots, x_k) \curvearrowright (y_1, \ldots, y_m)$ med fremstilling

$$\begin{aligned}
y_1 &= b_1 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k \\
y_2 &= b_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k \\
&\vdots \\
y_m &= b_m + c_{m1}x_1 + c_{m2}x + \ldots + c_{mk}x_k
\end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_k \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{pmatrix} ,$$

hvor vi regner med talsøjlerne efter definitionerne i §1. Alle c_{ij} og b_i er reelle konstanter.

Betegner vi søjlerne med $y, b, c_1, c_2, \ldots, c_k$, fylder det ikke så meget:

$$y = b + x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_kc_k\,.$$

Indfører vi betegnelsen C for $m \times k$ - matricen med elementer c_{ij}, og lader vi x stå for $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ skrevet som søjle, får vi fremstillingen

$$y = b + Cx\,,$$

baseret på matrixmultiplikation. (Jf. Matematik 1 LA.)

En *lineær afbildning* af $\mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ kan karakteriseres på samme måde, blot skal b'erne udelades. Kort skrevet er fremstillingen altså

$$y = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_kc_k\,,$$

i matrixsprog

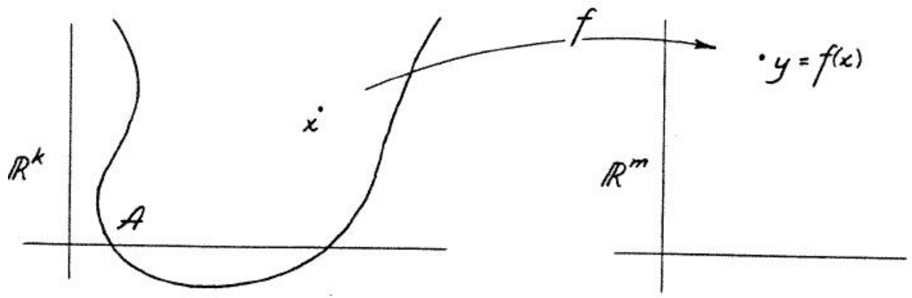
$$y = Cx\,.$$

Lineære afbildninger indføres og behandles i parallelkurset Matematik 1 LA fra §28.

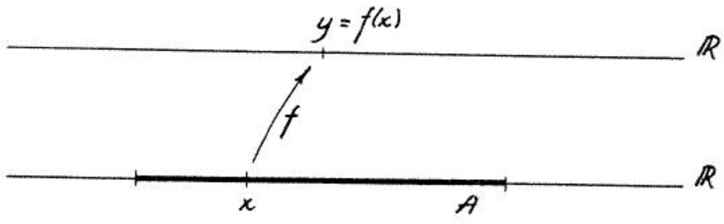
Vi har allerede mødt affine afbildninger, nemlig (for $k = 1$, $m = 2, 3, \ldots$ og $c = c_1 \neq \mathbf{o}$) under navn af parameterfremstilling for ret linie (s.I.1.5) og (for $k = 2$, $m = 3$ og c_1, c_2 ej på linie) parameterfremstilling for plan (I.2.Eksempel 3).

Illustration af afbildning. Graf

En tegning som nedenstående kan ofte være en hjælp til at fastholde simple begreber vedrørende en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}^k$.

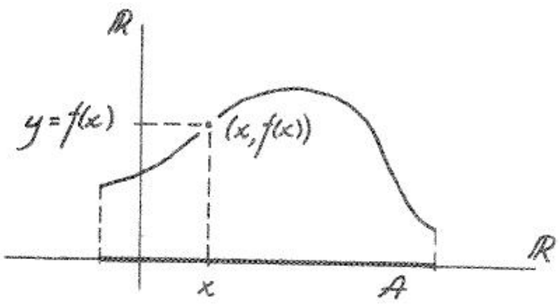


Her er ikke taget smålige hensyn til værdierne af k og m. Har de kendte og lave værdier, kan tegningen evt. gøres mere "realistisk", se f.eks. Eksempel 2. Også når $k = m$, står man sig gerne ved at tegne talrummet i to eksemplarer. For $k = m = 1$ får man da en illustration som



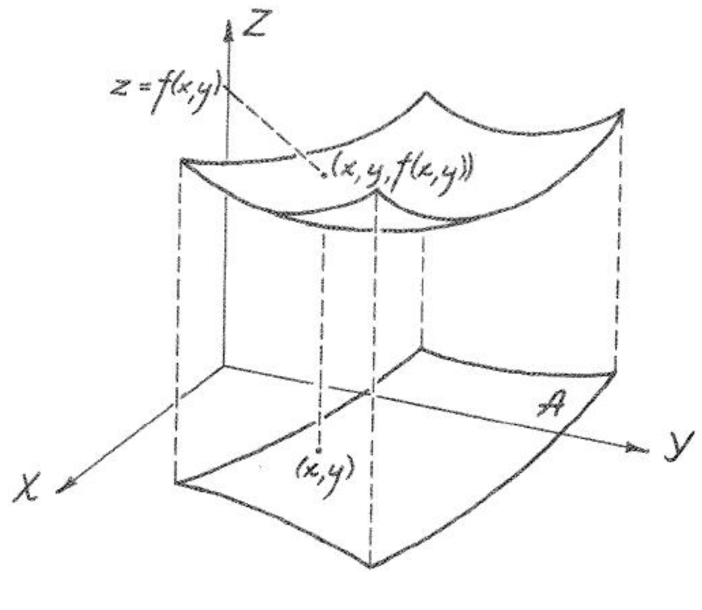
Det er velkendt, at man for $k = m = 1$ ofte tegner de to eksemplarer af $\mathbb{R}$ som akser i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem og knytter overvejelser om funktionen f til dens *graf*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A \wedge y = f(x)\}\,.$$



Tilsvarende taler man om grafen for en reel funktion f af to variable, $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ med $A \subseteq \mathbb{R}^2$, svarende til $k = 2$, $m = 1$. Her illustreres talplanen $\mathbb{R}^2$ ved XY-planen og tallinien $\mathbb{R}$ ved Z-aksen i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, hvorpå *grafen* for f er

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in A\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \ \wedge \ z = f(x, y)\}\,.$$



En niveaukurve for grafen,

$$\{(x, y) \in A \mid f(x, y) = z_0\}\,,$$

kaldes også en *niveaukurve for* f. En reel funktion f af tre variable, $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$, hvor $A \subsetneqq \mathbb{R}^3$, kan ikke illustreres geometrisk ved en graf, men nok ved *niveauflader*

$$\{(x, y, z) \in A \mid f(x, y, z) = t_0\}\,.$$

EKSEMPEL 4. I §1. Eksempel 1 er skitseret en del af grafen samt nogle niveaukurver for funktionen $(p, v) \curvearrowright t = pv/R$, $(p, v) \in {\mathbb{R}_+}^2$, hvor R er en positiv konstant.

Grafen for en affin funktion $(x, y) \curvearrowright ax + by + c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, er planen med ligning

$$z = ax + by + c \qquad \text{eller} \qquad -ax - by + z = c\,.$$

Den er vinkelret på vektoren $(-a, -b, 1)$. Niveaukurverne er parallelle rette linier med ligning

$$ax + by = \text{ konstant }\,.$$

Niveaufladerne for en affin funktion

$$(x, y, z) \curvearrowright ax + by + cz + d\,,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

er parallelle planer med ligning

$$ax + by + cz = \text{ konstant }\,.$$

BEMÆRKNING. Generelt kan man nok tale om *grafen*

$$\{(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{k+m} \mid (x_1, \ldots, x_k) \in A \ \wedge\ (y_1, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_k)\}\,,$$

kort

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \mid x \in A \ \wedge\ y = f(x)\}\,,$$

for en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ med $A \subsetneqq \mathbb{R}^k$, men for $k + m > 3$ uden geometrisk fortolkning.

II. GRÆNSEOVERGANG

Et særkende - og adelsmærke - for matematisk analyse fremfor andre matematiske discipliner er brugen af *grænseovergang*. Under differential- og integralregningens opblomstring fra sidst i 1600-tallet lod man sig nøje med temmelig løse forestillinger, men omkring 1820 lykkedes det Bernard BOLZANO (böhmisk teolog, 1781–1848) og Augustin-Louis CAUCHY (fransk matematiker, 1789–1857) at give begrebet en præcis mening. Nu havde man et solidt udgangspunkt for opbygning af den matematiske analyse, og her blev Cauchys lærebøger *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821) og *Leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) banebrydende.

§1. Grænseovergang med en, to eller flere variable

I denne § skal vi søge at få styr på begrebet *grænseovergang* i en situation (afbildninger fra $\mathbb{R}^k$), hvor det fremtræder særlig klart. Og hvor det skulle være nemt at imødegå en nærliggende fejlopfattelse: Glosen grænseovergang er malende, men egentlig misvisende. *Der er ikke noget, der går nogen steder hen.* - Typisk vil vi give præcis mening til spørgsmål som, hvorvidt y^x har en grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$.
Prøv at nå frem til en virkelig beherskelse af definitionen nedenfor, således at du ubesværet kan *bruge* den i beviser. Det vil lette dig umådeligt siden hen, også ved grænseovergange i mere komplicerede sammenhænge.

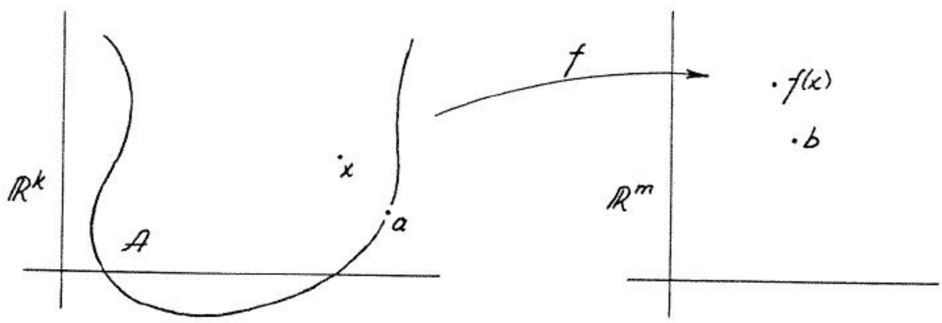
Definition og eksempler

Lad $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være en afbildning defineret på en delmængde A af et talrum $\mathbb{R}^k$ og med værdier i et talrum $\mathbb{R}^m$.

Lad videre $a = (a_1, \dots, a_k)$ være et punkt, der ikke tilhører A, men er *kontaktpunkt* for A, kort: $a \in \bar{A} \setminus A$. Med andre ord: $a \notin A$, men enhver kugle $K(a, \rho)$ omkring a indeholder punkter af A.

Da $\bar{A} \setminus A = \partial A \setminus A$ (s.I.1.6), kunne vi i stedet sige, at a er et *randpunkt* for A, som ikke tilhører A. Det appellerer måske mere til din anskuelse, men begrebsmæssigt er det lidt tungere at arbejde med.

Skitsen nedenfor svarer til tilfældet $k = m = 2$, og det tilrådes at tænke på dette tilfælde - eller måske på et af tilfældene $(k, m) = (2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$ - så kan du bagefter gøre dig klart, at det hele kan gentages ord til andet for vilkårlige $k, m \in \mathbb{N}$.



Afbildningen f har ikke nogen værdi i punktet a, men den har værdier $f(x)$ i visse punkter $x = (x_1, \ldots, x_k)$ vilkårlig tæt ved a. Det kan da tænkes, at billedpunktet $f(x)$ *ligger tæt ved* et punkt $b \in \mathbb{R}^m$, blot x tilhører A og *ligger tilstrækkelig tæt ved* a. Det er ideen i følgende

ε, δ-DEFINITION. Givet $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, og $a \in \bar{A} \setminus A$ (som beskrevet ovenfor) og lad $b \in \mathbb{R}^m$. Man siger da, at $f(x)$ - eller mere korrekt: afbildningen $x \curvearrowright f(x)$ - har b som *grænsepunkt* ved grænseovergangen $x \to a$, $x \in A$ (læs: *x gående mod a fra A*), og vi skriver

$$f(x) \to b \text{ for } x \to a\,,\ x \in A\,,$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - b| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ med } |x - a| < \delta\,.$$

Foretrækker man at tale om vektorer i stedet for om punkter, siger man naturligvis *grænsevektor*. Især for $m = 1$ siges også *grænseværdi*.

Du har naturligvis ikke opfattet definitionen, medmindre du er klar over, hvordan den *bruges* til at eftervise *konvergens* i en konkret situation: Man *tænker sig givet* et tal $\varepsilon > 0$: *Lad $\varepsilon > 0$ være givet.* Det gælder så om at godtgøre eksistensen af et tal $\delta > 0$, således at

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ blot } x \in A \text{ og } |x - a| < \delta\,.$$

Malende udtrykt: Fjenden vælger et positivt tal ε, som *ikke* oplyses (men det *er* valgt og opbevares i forseglet kuvert). Din opgave er så at klargøre, at det hemmelige ε kan afpareres med et $\delta > 0$. (I en konkret situation kunne måske $\varepsilon^7/2$ være et brugbart δ .)

EKSEMPEL 1. Som et simpelt eksempel viser vi, at

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \to 0 \text{ for } (x, y) \to (0, 0)\,.$$

Som definitionsmængde benyttes $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, og da $a = (0, 0) \in \bar{A} \setminus A = \{(0, 0)\}$, har påstanden mening.

BEVIS. *Lad* $\varepsilon \in]0,1[$ *være givet.*

For vilkårligt $(x,y) \in A$ gælder da:

$$|\exp(-\frac{1}{x^2+y^2}) - 0| = \exp(-\frac{1}{x^2+y^2}) < \varepsilon$$

$$\Leftarrow \; -\frac{1}{x^2+y^2} < \log\varepsilon \; \Leftarrow \; x^2+y^2 < \frac{1}{-\log\varepsilon} = \frac{1}{|\log\varepsilon|} \; .$$

Det ses, at $1/\sqrt{|\log\varepsilon|}$ er et brugbart δ: For hvert $(x,y) \in A$, hvis afstand $\sqrt{x^2+y^2}$ fra $(0,0)$ er $<$ dette δ, er jo $|\exp(-1/(x^2+y^2)) - 0| < \varepsilon$.

I Cauchys *Cours d'analyse* formuleres definitionen rent verbalt, uden ε og δ, men når han *bruger* den, går han frem præcis som vi. Således kan han starte et konvergensbevis med ord som (s. 48): *Désignons par* ε *un nombre positif aussi petit que l'on voudra.*

ADVARSEL. Læg godt mærke til, at "$x \to a$" eller "$x \to a\,,\, x \in A$" (i ord "x går mod a", "x går mod a fra A") er *uden mening,* og ligeså "$f(x) \to b$". *Det er kun helheden "*$f(x) \to b$ *for* $x \to a\,,\, x \in A$*", der har mening.*

Du må ikke lade dig narre af at møde linier som

$$f(x) \to b \;\Leftrightarrow\; |f(x) - b| \to 0\,.$$

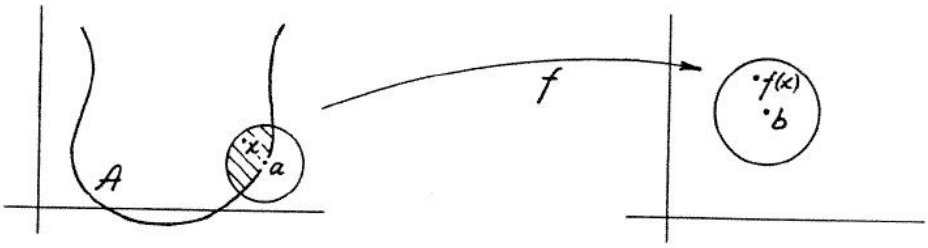
Så vil der nemlig et sted i teksten stå "*Vi betragter grænseovergangen* $x \to a\,,\, x \in A$" el. lign., og du kan vel gætte den korrekte formulering af biimplikationen ? Ellers se Bemærkning 5.1 nedenfor.

Man kan altså ikke tale om, at "$x \to a$ (fra A)", men man kan spørge, om "$f(x) \to b$ når $x \to a$ (fra A)", i ord "$f(x)$ går mod b, når x går mod a (fra A)". Og du må være klar over, at der faktisk ikke er noget, der går nogen steder hen. Meningen er løst sagt, at $f(x)$ *ligger tæt ved* b, *blot* $x \in A$ *ligger tilstrækkelig tæt ved* a. Husk på denne løse formulering af definitionen. Du må naturligvis kunne udmønte den i en præcis ε,δ-formulering, så snart der er brug for det.

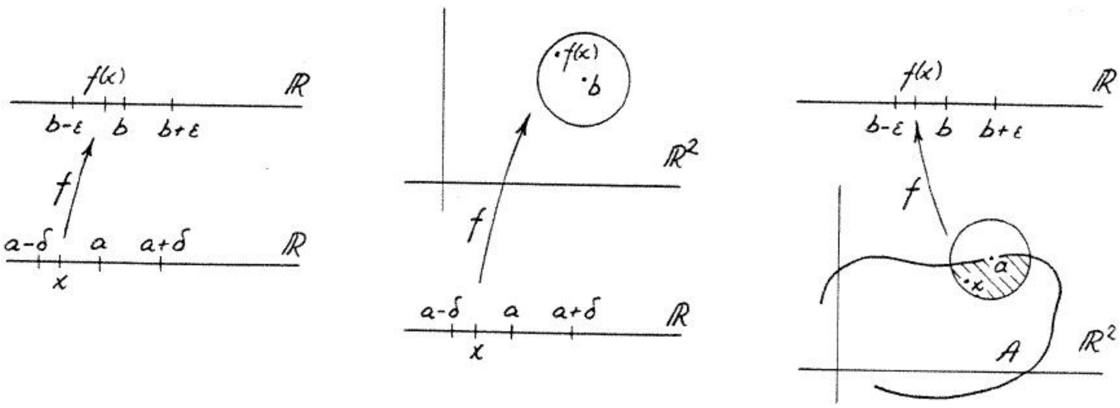
Undertiden kan det være en fordel at "tænke i kugler". Kravet i ε,δ-definitionen ovenfor er åbenbart: Til enhver kugle $K(b,\varepsilon)$ omkring b findes en kugle $K(a,\delta)$ omkring a, således at

$$f(x) \in K(b,\varepsilon) \;\text{ for alle }\; x \in A \cap K(a,\delta)\,,$$

dvs. således at $f(A \cap K(a,\delta)) \subseteq K(b,\varepsilon)$.



Illustrationer svarende til tilfældene $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ med $A \subseteqq \mathbb{R}$ ("gymnasiefunktion"), $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^2$ med $A \subseteqq \mathbb{R}$ og $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ med $A \subseteqq \mathbb{R}^2$ ser sådan ud:



BEMÆRKNING 1. Det er vigtigt, at du er fortrolig med ε, δ-definitionen, men i konkrete konvergensopgaver kommer man gerne langt nemmere igennem med Sætningerne i §2. Ellers kan du forsøge med følgende umiddelbare konsekvenser af ε, δ- definitionen (overvej !):

1. *Når* $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, $a \in \bar{A} \setminus A$ *og* $b \in \mathbb{R}^m$, *gælder*:
$$f(x) \to b \text{ for } x \to a \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - b| \to 0 \text{ for } x \to a\,.$$

2. *Når* $g, h : A \curvearrowright [0, \infty[$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, $a \in \bar{A} \setminus A$ *og* $g(x) \leqq h(x)$ for alle $x \in A$, *gælder*:
$$h(x) \to 0 \text{ for } x \to a \quad \Rightarrow \quad g(x) \to 0 \text{ for } x \to a\,.$$

Er $f(x)$ er givet ved et funktionsudtryk, og vil man vise, at $f(x) \to b$ for $x \to a$, prøver man da for vilkårligt $x \in A$ at vurdere $g(x) = |f(x) - b|$ opad ved et funktionsudtryk $h(x)$, hvorom man ved, at $h(x) \to 0$ for $x \to a$.

Eksempelvis finder vi ud fra resultatet i Eksempel 1, at
$$\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \to 0 \text{ for } (x,y) \to (0,0)\,,$$
idet $|\cos(\frac{x}{x^2+y^2}) \exp(-\frac{1}{x^2+y^2}) - 0| \leqq \exp(-\frac{1}{x^2+y^2})$.

BEMÆRKNING 2. Spørgsmålet om $f(x) \to b$ for $x \to a$, $x \in A$, er af *lokal* karakter: det gør ingen forskel, om A erstattes med $A \cap K(a, \rho)$ for et eller andet $\rho > 0$, altså om man kun interesserer sig for punkter $x \in A$ inden for en vis afstand $\rho > 0$ fra a.

BEMÆRKNING 3. Når $B \subseteqq A$ og $a \in \bar{B} \setminus B$, er det oplagt, hvad man mener med

$$f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,,\; x \in B\,.$$

Vi skal blot i definitionen s. 2 erstatte A med B. Det kommer ud på, at vi i stedet for afbildningen $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ betragter dens restriktion $f\big|_B$ til B. - Når $a \in \bar{B} \setminus A$, er det klart, at

$$f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,, x \in A \;\Rightarrow\; f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,, x \in B\,.$$

Løst sagt: *Konvergens bevares, når x bindes til en mindre mængde.*

BEMÆRKNING 4. I definitionen s. 2 har vi omhyggeligt forudsat, at a *ikke* tilhører definitionsmængden A for f. Alligevel vil vi, som det er gængs, tillade os at skrive

$$f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,,\; \text{evt. endda }\; f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,, x \in A\,,$$

også når $a \in A$. Men det skal så opfattes som en *sjusket* skrivemåde for

$$f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a\,, x \in A \setminus \{a\}\,.$$

Funktionsværdien $f(a)$ er altså ganske uden betydning. - Det forudsættes, at a er kontaktpunkt for $A \setminus \{a\}$, dvs. ikke er et isoleret punkt af A.

SÆTNING 1. ENTYDIGHED AF GRÆNSEPUNKT. *Givet $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, og $a \in \bar{A} \setminus A$. Da gælder:*

Afbildningen $x \curvearrowright f(x)$ kan højst have ét grænsepunkt ved grænseovergangen $x \to a\,,\, x \in A$.

KONSEKVENS. Et eventuelt grænsepunkt kan fremtidig omtales som grænsepunk*tet*, og vi kan indføre en betegnelse for det. Vi skriver

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x)\,.$$

Forkortelsen lim læses *limes* (latin: grænse).

BEVIS for Sætning 1: Antag, at $f(x) \to b'$ og $f(x) \to b''$ for $x \to a$, $x \in A$. Det gælder så om at bevise, at $b' = b''$. Eller lige så godt, at $d(b', b'') = |b'' - b'| = 0$. Og det vil følge af, at $d(b', b'') < \varepsilon$ for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

For at vise sidstnævnte påstand betragter vi et vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$: *Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet.* Vi kan da tænke os $\delta' \in \mathbb{R}_+$ valgt, således at

$$|f(x) - b'| < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ for alle }\; x \in A \;\text{ med }\; |x - a| < \delta'\,,$$

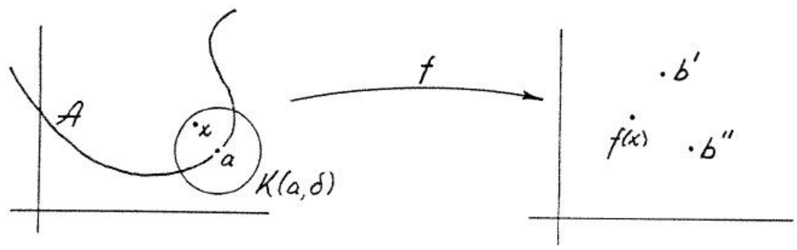
og ligeledes $\delta'' \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x) - b''| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x - a| < \delta''.$$

Sæt nu $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Idet a er kontaktpunkt for A, findes der et $x \in A$ tilhørende kuglen $K(a, \delta)$. Så er $|x - a| < \delta'$ og dermed $d(b', f(x)) = |f(x) - b'| < \frac{\varepsilon}{2}$, og analogt fås $d(b'', f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ifølge *Trekantsuligheden* er da

$$d(b', b'') \leqq d(b', f(x)) + d(f(x), b'') < \varepsilon.$$

Da uligheden $d(b', b'') < \varepsilon$ således gælder for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, følger, at $d(b', b'') = 0$, dvs. $b' = b''$.



Følg ræsonnementet på tegningen. Bemærk, at det - trods figuren - holdes åbent, om b' og b'' er ens eller forskellige, indtil det sluttelig viser sig, at $b' = b''$.

Advarsel. Betegnelsen

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$$

er uden mening og bør ikke benyttes, *før* eksistensen af grænsepunktet er bevist eller antaget.

Råd. Ved opgavebesvarelser og på en tavle tilrådes skrivemåden

$$f(x) \to b \;\; \textit{for} \;\; x \to a\,,\; x \in A\,, \quad \text{fremfor} \quad \lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b\,.$$

Den første skrivemåde tillader således en række omskrivninger af $f(x)$ gældende for alle $x \in A$, inden grænseovergang inddrages, som f.eks.

$$\frac{\sin 2x}{\tan x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x / \cos x} = 2\cos^2 x \to 2 \cdot 1^2 = 2 \quad \text{for} \quad x \to 0\,.$$

Skriver man derimod

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sin x / \cos x} = \lim_{x \to 0} 2\cos^2 x = 2(\lim_{x \to 0} \cos x)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2\,,$$

fremgår det jo ikke, at der i begyndelsen kun foretages omskrivninger *bag* limestegnet. Det fremgår heller ikke, hvornår *eksistensen* af grænseværdien sluttes, - og indtil da kunne de opskrevne udtryk jo være meningsløse. Skrivemåden forleder ofte studerende til helt at overse eksistensproblemet: de siger blot, at de vil “finde limes”.

BEMÆRKNING 5. I gymnasiet har du ofte mødt grænseovergang med funktioner af én variabel, dvs. funktioner $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$. Som bekendt taler man her ikke blot om grænseovergangen $x \to a$, men også om $x \to a_+$ (læs: *x gående mod a fra højre*) og $x \to a_-$. Det samme gælder i øvrigt for afbildninger $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$:

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to a_+$$

betyder

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to a\,,\ x \in A \cap \,]a, \infty\,[\,.$$

Det forudsættes, at $a \in \mathbb{R}$ er kontaktpunkt for $A \cap \,]a, \infty\,[$. Det er f.eks. tilfældet, hvis et helt interval $]a, a'\,[$ er indeholdt i definitionsmængden A for f. Tilsvarende:

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to a_-$$

betyder

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to a\ ,\ x \in A \cap \,]-\infty, a\,[\ ,$$

hvor det forudsættes, at $a \in \mathbb{R}$ er kontaktpunkt for $A \cap \,]-\infty, a\,[$.
Når a er kontaktpunkt både for $A \cap \,]a, \infty[$ og for $A \cap \,]-\infty, a\,[$, gælder, som man let ser:

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \to b & \text{for } \ x \to a_+ \\ f(x) \to b & \text{for } \ x \to a_- \ . \end{cases}$$

EKSEMPEL 2.

$$x^a \to 0 \ \text{ for } \ x \to 0_+\ , \quad \text{når } \ a \in \mathbb{R}_+\,.$$

BEVIS. For givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ har vi for alle $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|x^a - 0| = x^a < \varepsilon = \varepsilon^1 = (\varepsilon^{1/a})^a \ \Leftarrow\ |x - 0| = x < \varepsilon^{1/a}\,.$$

Følgelig kan ε afpareres med $\delta = \varepsilon^{1/a}$. Vi har brugt, at $t \curvearrowright t^a$, $t \in \mathbb{R}_+$, er (strengt) voksende, samt potensregler (s.IV.5.?).

EKSEMPEL 3.

$$x^a \log x \to 0 \ \text{ for } \ x \to 0_+\,, \quad \text{når } \ a \in \mathbb{R}_+\,.$$

BEVIS. Vi udnytter Eksempel 2 og Bemærkning 1. Først noteres, at

$$\log y < y \ \text{ for alle } \ y > 1\,.$$

Det kan vises af en gymnasieelev. Han finder endda:

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{t} dt \ < \int_1^y 1 dt = y - 1 \qquad \text{for} \ \ y > 1\,.$$

Idet vi vælger et fast tal $b \in \,]0, a\,[$ og sætter $y = x^{-b}$, har vi for alle $x \in \,]0, 1\,[$, at

$$-b \log x = \log x^{-b} < x^{-b}$$

altså

$$|\log x| = -\log x < x^{-b}/b$$

og dermed

$$|x^a \log x - 0| = x^a |\log x| < x^{a-b}/b\,.$$

For $x \to 0_+$ har vi imidlertid $x^{a-b} \to 0$ ifølge Eksempel 2 (husk på, at $a - b > 0$) og følgelig $x^{a-b}/b \to 0$. Men så må også $x^a \log x \to 0$ for $x \to 0_+$, ifølge Bemærkning 1.

Differentiabilitet i én variabel.

Et centralt eksempel på grænseovergang med én variabel er den velkendte definition på *differentiabilitet* i et punkt. Vi betragter først funktioner med værdier i $\mathbb{R}$ og derpå vektorfunktioner.

Lad $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ være defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ og lad $a \in I$. Idet vi indfører *tilvæksterne* (differenserne),

$$\Delta x = x - a \ \text{ og } \ \Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)\,,$$

hvor Δx tilhører intervallet $I - a = \{x - a \mid x \in I\}$, er *differenskvotienten*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

defineret for $x \in I \setminus \{a\}$, resp. for $\Delta x \in (I - a) \setminus \{0\}$. Som bekendt siges f at være *differentiabel* i a, hvis $\Delta f/\Delta x$ har en grænseværdi c for $x \to a$, resp. for $\Delta x \to 0$. Og i bekræftende fald kaldes c for *differentialkvotienten* af f i a. Den betegnes $f'(a)$ eller $Df\ (a)$, altså

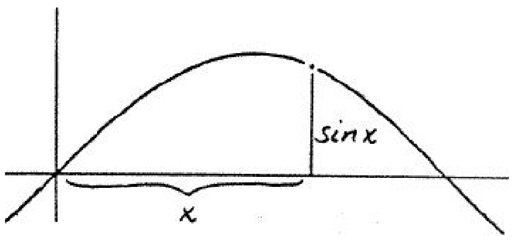
$$f'(a) = Df\ (a) = \lim_{x \to a} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\,.$$

Betydningen af differentiabilitet fra højre resp. venstre i et punkt a er oplagt. Tolkningen vedr. tangent til grafen i punktet $(a, f(a))$ er velkendt.

EKSEMPEL 4. Funktionen $\sin : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ er differentiabel i 0 med $\sin'(0) = 1$, idet

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0\,.$$

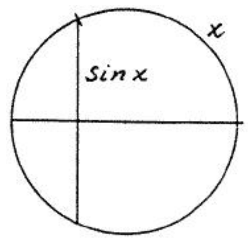
(Det er en nøgle til differentiation af alle de trigonometriske funktioner.)



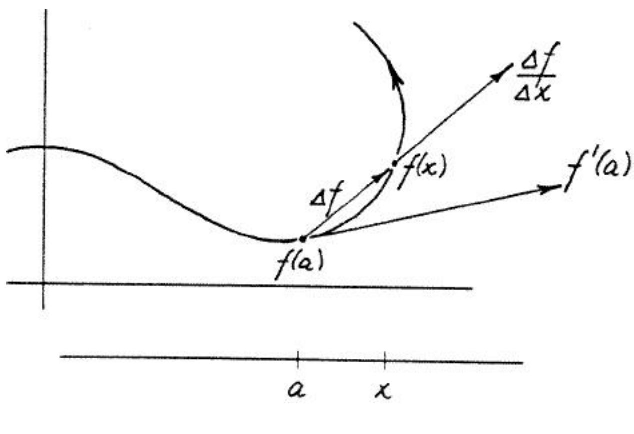
BEVIS. Det er nok at se på grænseovergangen $x \to 0_+$, da værdien af $\sin x\ /x$ ikke ændres ved fortegnsskift på x.
Påstandens rigtighed følger da af, at $2\sin x$ er længden af korden til en bue af længde $2x$ på enhedscirklen, når $0 < x < \pi$, idet vi senere (VI.§2.Bemærkning 1) skal se, at

$$\frac{\text{kordelængde}}{\text{buelængde}} \to 1$$

for buelængden $\to 0$ på en "pæn" kurve.



Definitionen på *differentiabilitet* og *differentialkvotient* i et punkt gentages ord til andet for en afbildning (vektorfunktion) $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$. - Læs definitionen ovenfor nøje igennem f.eks. med tanke på tilfældet $m = 2$ eller $m = 3$, hvor Δf, $\Delta f/\Delta x$ og $f'(a)$ naturligt opfattes som vektorer.



Man må naturligvis give afkald på den i tilfældet $m = 1$ så velkendte tolkning vedr. tangent til graf. Derimod kan man ofte med fordel opfatte f som beskrivelse af en bevægelse i $\mathbb{R}^m$, jf. I.§2. Eksempel 2, og anvende en kinematisk sprogbrug. (Græsk: *kinema* = bevægelse.) En eventuel differentialkvotient $f'(a) \in \mathbb{R}^m$ kaldes da *hastigheden* til tidspunktet a.

Ovenstående - fra gymnasiet så velkendte - formulering af definitionen på differentiabilitet for funktioner af én variabel kan *ikke* overføres til funktioner af flere variable: Her er $\Delta x = x - a$ en vektor, og man kan så *ikke* danne $\Delta f/\Delta x$. Vi skal senere (II.§4.Eksempel 1 og III.§1.Eksempel 6) se andre formuleringer, som *kan* overføres, men du kan nok ane, at differentiabilitet i flere variable er nyt land.

y^x *ved grænseovergangen* $(x,y) \to (0,0)$

Medens grænseovergang med funktioner af én variabel er velkendt fra gymnasiet, er der væsentlig nye træk ved grænseovergang med flere variable. Som konkret eksempel vi vi undersøge y^x ved grænseovergangen $(x,y) \to (0,0)$ fra "øvre halvplan"

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}\,,\, y \in \mathbb{R}_+\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}\,.$$

Potensen y^x har som bekendt mening for visse talpar (x,y) med $y \leqq 0$, men det er os her uvedkommende: Vi ser på funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = y^x = e^{x \log y}\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\,,$$

og bemærker, at $(0,0)$ ikke tilhører $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, men er kontakpunkt for halvplanen.

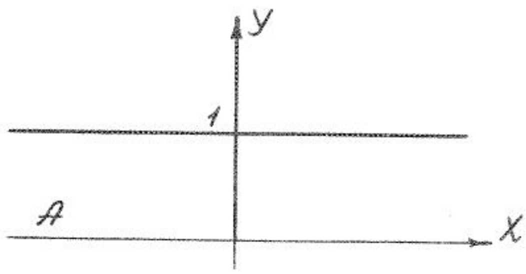
For at få et indtryk af funktionen vil vi først se på dens niveaukurver

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid y^x = c\}\,.$$

Kun $c \in \mathbb{R}_+$ har interesse (ellers er niveaukurven $= \emptyset$). Idet

$$y^x = e^{x \log y} = 1 \ \Leftrightarrow\ x \log y = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \vee y = 1\,,$$

ses, at niveaukurven svarende til $c = 1$ består af den positive del af Y-aksen og linien $y = 1$.

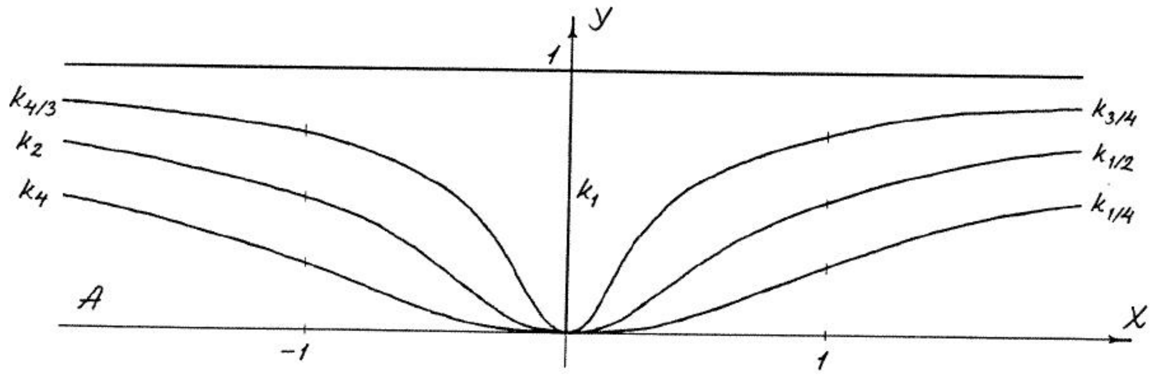


Da det er nabolaget af $(0,0)$, der interesserer, vil vi i det følgende indskrænke os til strimmelen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}\,.$$

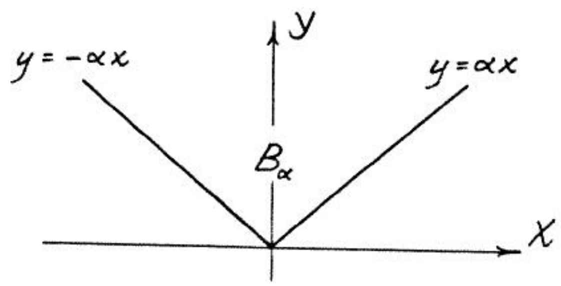
Her er $x \log y < 0$ og dermed $y^x = e^{x \log y} < 1$ til højre for Y-aksen, og $y^x > 1$ til venstre for Y-aksen.

Niveaukurven
$$k_c = \{(x,y) \in A \mid y^x = c\}$$
svarende til et $c \in]0,1[$ ligger således helt til højre for Y-aksen, og da
$$y^x = c \Leftrightarrow y = (y^x)^{1/x} = c^{1/x},$$
er k_c netop grafen for funktionen $x \curvearrowright c^{1/x}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Tilsvarende findes for $c \in]1,\infty[$, at niveaukurven k_c er graf for funktionen $x \curvearrowright c^{1/x}$, $x \in \mathbb{R}_-$. Man verificerer direkte ved ε, δ-definitionen (øvelse!), at
$$c^{1/x} \to 0 \text{ for } x \to 0_+, \text{ når } c \in]0,1[,$$
$$c^{1/x} \to 0 \text{ for } x \to 0_-, \text{ når } c \in]1,\infty[.$$
Alle niveaukurver løber altså ind mod $(0,0)$. (En nærmere undersøgelse viser endda, at føjer man $(0,0)$ til en niveaukurve k_c med $c \neq 1$, da får denne en vandret halvtangent i punktet.)



Tænker man på strimmelen A som et landkort og på niveaukurverne som højdekurver, kan man få en forestilling om grafen
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A \wedge z = y^x\}$$
for $(x,y) \curvearrowright y^x$, $(x,y) \in A$, opfattet som flade i rummet.

Bemærk, at y^x er overordentlig vild i *enhver* (selv nok så lille) halvcirkelskive $A \cap K((0,0),\delta)$: *alle* højdekurver k_c, $c \in]0,\infty[$, løber jo ind i halvcirkelskiven. Specielt er den tilsvarende værdimængde
$$\{y^x \mid y > 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} < \delta\}$$
altså *hele* $\mathbb{R}_+$ for *ethvert* $\delta > 0$. Det er hermed klart, at y^x *ikke* har nogen grænseværdi for $(x,y) \to (0,0)$ fra den øvre halvplan: der er ikke noget tal, som y^x ligger tæt ved, blot (x,y) ligger tæt ved $(0,0)$.



Helt anderledes fredeligt tager alt sig ud, hvis vi kun betragter punkter $(x, y) \neq (0,0)$ i et *vinkelrum* B_α mellem halvlinier $y = \alpha x$, $x \geqq 0$ og $y = -\alpha x$, $x \leqq 0$, hvor $\alpha \in]0, \infty[$ kan vælges så lille man vil. Det er kun i $A \setminus B_\alpha$ (og kun tæt ved $(0,0)$), at y^x er vild, jf. højdekurverne.

Faktisk gælder

$$y^x \to 1 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{fra} \quad B_\alpha\,,$$

uanset hvor lille α er valgt !

Når $(x, y) \in B_\alpha$, dvs. $y > \alpha|x|$, har vi nemlig

$$|x \log y| = |x|\,|\log y\,| \leqq \frac{1}{\alpha} y |\log y| = \frac{1}{\alpha}\,|y \log y|\,.$$

Og vi ved (Eksempel 3), at $y \log y \to 0$ for $y \to 0_+$. Det er da oplagt (Bemærkning 1), at

$$x \log y \to 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{fra} \quad B_\alpha\,,$$

og videre

$$y^x = e^{x \log y} \to e^0 = 1 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{fra} \quad B_\alpha\,.$$

(Ved den sidste slutning udnyttes, at $t \curvearrowright e^t$ er kontinuert i 0. (Jf. III.§1.Bemærkning 4.))

Ved grænseovergangen $(x, y) \to (0, 0)$ langs en halvlinie h med endepunkt $(0, 0)$, liggende i øvre halvplan, har vi straks

$$y^x \to 1 \quad \text{for} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{langs} \quad h\,,$$

idet $h \subset B_\alpha$ for et passende α.

Advarsel. Læg mærke til, at y^x *ikke* har nogen grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$ fra øvre halvplan, skønt $y^x \to 1$ for $(x, y) \to (0, 0)$ langs en hvilkensomhelst halvlinie h fra $(0, 0)$ ud i øvre halvplan, ja endda for $(x, y) \to (0, 0)$ fra et hvilketsomhelst vinkelrum B_α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$!

Successive grænseovergange

Vi skal ofte møde flere grænseovergange udført efter hinanden. Som en simpel illustration betragter vi grænseovergangene $y \to 0_+$ og $x \to 0_+$ "*udført efter hinanden*" på y^x betragtet i den åbne kvadrant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

For fastholdt $x \in \mathbb{R}_+$ ved vi, at $y^x \to 0$ for $y \to 0_+$; det blev vist i Eksempel 2, blot med andre betegnelser. Vi kan derfor tale om funktionen

$$x \curvearrowright \lim_{y \to 0_+} y^x \,, \; x \in \mathbb{R}_+ \,,$$

og da det er nulfunktionen, har vi selvfølgelig

$$\lim_{x \to 0_+} \lim_{y \to 0_+} y^x = 0 \,.$$

Advarsel. Læg mærke til, at y^x *ikke* har nogen grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$ fra $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, skønt grænseovergangene $y \to 0_+$ og $x \to 0_+$ kan udføres successivt.

For y^x i $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ kan de to grænseovergange $y \to 0_+$ og $x \to 0_+$ også udføres i den modsatte rækkefølge: For fastholdt $y \in \mathbb{R}_+$ vil $y^x = e^{x \log y} \to e^0 = 1$ for $x \to 0_+$, således at vi kan tale om funktionen

$$y \curvearrowright \lim_{x \to 0_+} y^x \,, \; y \in \mathbb{R}_+ \,,$$

og da denne funktion er konstant 1, har vi selvfølgelig

$$\lim_{y \to 0_+} \lim_{x \to 0_+} y^x = 1 \,.$$

Læg mærke til, at skønt de to grænseovergange $x \to 0_+$ og $y \to 0_+$ her kan udføres efter hinanden i både den ene og den anden rækkefølge, så er resultatet forskelligt.

Advarsel. En hyppig fejlslutning i matematisk analyse er en (ubemærket) ombytning af grænseovergange.

På den anden side er det væsentlige indhold i en lang række vigtige sætninger i analysen, at ombytning af grænseovergange er tilladelig under visse nærmere beskrevne forudsætninger.

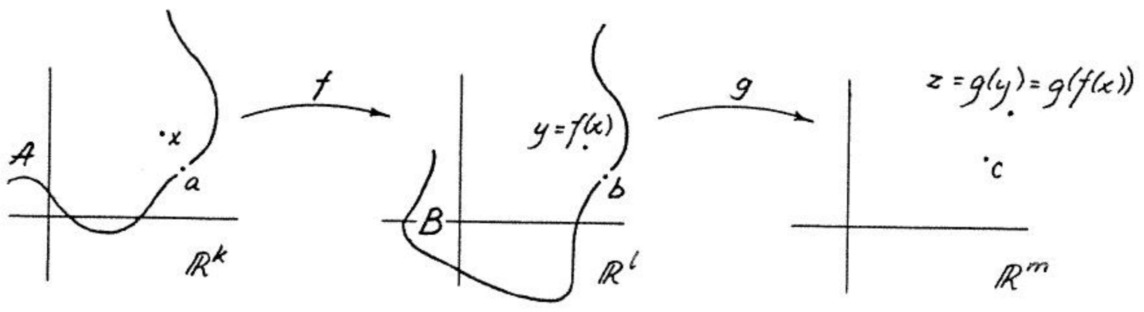
§2. Sætninger om grænseovergang

SÆTNING 1. GRÆNSEOVERGANG MED SAMMENSAT AFBILDNING. *Lad* $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, $B \subseteqq \mathbb{R}^l$, $f : A \curvearrowright B$, $g : B \curvearrowright \mathbb{R}^m$, *lad* $a \in \bar{A} \setminus A$, $b \in \bar{B} \setminus B$ *og antag, at*

$$f(x) \to b \;\; \textit{for} \;\; x \to a \;,\; x \in A \;, \quad \textit{og} \quad g(y) \to c \;\; \textit{for} \;\; y \to b \;,\; y \in B \;.$$

For den sammensatte afbildning $g \circ f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ *gælder da*

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \to c \;\; \textit{for} \;\; x \to a \;,\; x \in A \;.$$



Vi skal senere formulere varianter af sætningen (§3. Bemærkning 3 og III.§1. Sætning 2 + Bemærkning 6).

BEVIS. Påstanden er egentlig oplagt: $z = g(y)$ ligger jo tæt ved c, blot $y \in B$ ligger tilstrækkelig tæt ved b. Og det vil $y = f(x)$ jo gøre, blot $x \in A$ ligger tilstrækkelig tæt ved a. - Nøjagtigt:

Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan tænkes valgt et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|g(y) - c| < \varepsilon \;\; \text{for alle} \;\; y \in B \;\; \text{med} \;\; |y - b| < \delta \;.$$

Til det valgte $\delta \in \mathbb{R}_+$ kan nu findes et $\Upsilon \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x) - b| < \delta \;\; \text{for alle} \;\; x \in A \;\; \text{med} \;\; |x - a| < \Upsilon \;.$$

For ethvert $x \in A$ med $|x - a| < \Upsilon$ er så $f(x) \in B$ med $|f(x) - b| < \delta$, og dermed er

$$|g(f(x)) - c| < \varepsilon \;.$$

.

EKSEMPEL 1. Da $x \log x \to 0$ for $x \to 0_+$ og $\frac{\sin y}{y} \to 1$ for $y \to 0$, (§1. Eksempel 3 og 4), følger

$$\frac{\sin(x \log x)}{x \log x} \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0_+ \ .$$

(Eksemplet indpasses i sætningens situation, når man sætter

$$\begin{aligned} f(x) &= x \log x \ , \quad x \in]0,1[\ , \\ g(y) &= \sin y / y \ , \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .) \end{aligned}$$

SÆTNING 2. REGNING MED GRÆNSEVÆRDIER. *Lad $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $g : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ og $\alpha : A \curvearrowright \mathbb{R}$ være defineret på samme delmængde A af $\mathbb{R}^k$, og lad $a \in \bar{A} \setminus A = \partial A \setminus A$. Antag, at*

$$f(x) \to b \in \mathbb{R}^m \ , \ g(x) \to c \in \mathbb{R}^m \quad \textit{og} \quad \alpha(x) \to \alpha_0 \in \mathbb{R} \qquad \textit{for} \ \ x \to a \ , \ x \in A \ .$$

Da gælder for $x \to a$, $x \in A$, at

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &\to b \pm c \ , \qquad |f(x)| \to |b| \ , \\ f(x) \cdot g(x) &\to b \cdot c \ , \quad \alpha(x) f(x) \to \alpha_0 b \ . \end{aligned}$$

Hvis $\alpha_0 \neq 0$, gælder desuden

$$\frac{1}{\alpha(x)} \to \frac{1}{\alpha_0} \qquad \textit{og} \qquad \frac{f(x)}{\alpha(x)} \to \frac{b}{\alpha_0} \ .$$

BEVIS. Argumentationen består i direkte anvendelse af ε, δ-definitionen og lidt behændighed. Af hensyn til læsere, der gerne vil se udførelsen, anfører vi detaljer:

For hvert $x \in A$ er

$$(f(x) + g(x)) - (b + c) = (f(x) - b) + (g(x) - c)$$

og dermed

$$|(f(x) + g(x)) - (b + c)| \leqq |f(x) - b| + |g(x) - c| \ .$$

Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vælges $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ og $\delta_2 \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle} \ \ x \in A \ \ \text{med} \ \ |x - a| < \delta_1 \ ,$$

henh.

$$|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for alle} \ \ x \in A \ \ \text{med} \ \ |x - a| < \delta_2 \ .$$

Vi sætter $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ og har så

$$|(f(x) + g(x)) - (b + c)| < \varepsilon \ \ \text{for alle} \ \ x \in A \ \ \text{med} \ \ |x - a| < \delta \ .$$

Hermed er vist, at $f(x)+g(x) \to b+c$ for $x \to a$, $x \in A$.

For hvert $x \in A$ er

$$||f(x)|-|b|| \leqq |f(x)-b| ,$$

hvorfor $||f(x)|-|b|| \to 0$, dvs. $|f(x)| \to |b|$ for $x \to a$, $x \in A$. Notér desuden, at vi kan vælge $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x)| < |b|+1 \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \rho_1 .$$

Nu til skalarproduktet $f(x) \cdot g(x)$. For hvert $x \in A$ er

$$f(x) \cdot g(x) - b \cdot c = f(x) \cdot (g(x)-c) + (f(x)-b) \cdot c$$

og dermed

$$|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c| \leqq |f(x)||g(x)-c|| + |f(x)-b||c| ,$$

idet vi har vurderet skalarprodukterne på højre side ved hjælp af *Cauchy/Schwartz' ulighed.* Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges nu $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)} \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \delta_1$$

og

$$|g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \delta_2 .$$

Vi sætter $\delta = \min\{\rho_1, \delta_1, \delta_2\}$ og har da

$$|f(x) \cdot g(x) - b \cdot c| < (|b|+1)\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|c|+1)}|c| < \varepsilon$$

for alle $x \in A$ med $|x-a| < \delta$. Hermed er vist, at $f(x) \cdot g(x) \to b \cdot c$ for $x \to a$, $x \in A$.

Produktet $\alpha(x)f(x)$ af skalar og vektor klares ved en lignende omskrivning.

I det følgende antages $\alpha_0 \neq 0$. Vi kan da vælge $\rho_2 \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|\alpha(x)| > \frac{1}{2}|\alpha_0| \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \rho_2 .$$

Bemærk specielt, at $1/\alpha(x)$ er defineret "fra et vist trin af grænseovergangen". For hvert $x \in A$ med $|x-a| < \rho_2$ har vi

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{\alpha_0}\right| = \frac{|\alpha_0 - \alpha(x)|}{|\alpha(x)||\alpha_0|} \leqq \frac{2|\alpha(x)-\alpha_0|}{|\alpha_0|^2} .$$

Til vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges nu $\delta \leqq \rho_2$, således at

$$|\alpha(x)-\alpha_0| < \varepsilon|\alpha_0|^2/2 \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \delta .$$

Da er

$$\left|\frac{1}{\alpha(x)} - \frac{1}{\alpha_0}\right| < \varepsilon \quad \text{for alle} \quad x \in A \quad \text{med} \quad |x-a| < \delta .$$

Hermed er vist, at $1/\alpha(x) \to 1/\alpha_0$ for $x \to a$, $x \in A$. Og da $f(x) \to b$, sluttes, at

$$\frac{f(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{\alpha(x)} f(x) \to \frac{1}{\alpha_0} b \quad \text{for} \quad x \to a \ , \ x \in A \ .$$

BEMÆRKNING 1. Ved at lade nogle af de i Sætning 2 indgående funktioner være konstante får man regler som

$$f(x) \cdot c \to b \cdot c \ , \quad \alpha_0 f(x) \to \alpha_0 b \ .$$

Grænseovergang med $f(x)/\alpha(x)$, hvor både tæller og nævner går mod 0, er et intrikat problem, som vi ofte vil støde på. (Undertiden kan man, som ved $\sin 2x/\tan x$, smyge sig udenom ved omskrivning og forkortning, medens eksempler som $\sin x/x$ (§1.Eksempel 4) og $x^a \log x = x^a/(1/\log x)$, $a > 0$, (§1.Eksempel 3) for $x \to 0_+$ faktisk kræver en indsats.)

I definition og generelle overvejelser vedrørende grænseovergang har vi hidtil bygget alene på afstande mellem de forskellige punkter $a, x \in \mathbb{R}^k$, $b, y \in \mathbb{R}^m$, osv., men i øvrigt undgået at inddrage punkternes koordinater. Det vil vi gøre nu.
Nøglen er, at en vektorlængde $|x| = |(x_1, \ldots, x_k)|$ er "lille", hvis og kun hvis samtlige koordinater numerisk er "små". Der gælder nemlig

LEMMA. *For $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ er*

$$|x_i| \leqq |x| \ , \ i = 1, \ldots, k, \qquad \textit{og} \qquad |x| \leqq \sqrt{k} \max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\} \ .$$

BEVIS. Ulighederne følger af, at

$$x_i{}^2 \leqq x_1{}^2 + \cdots + x_i{}^2 + \cdots + x_k{}^2 = |x|^2$$

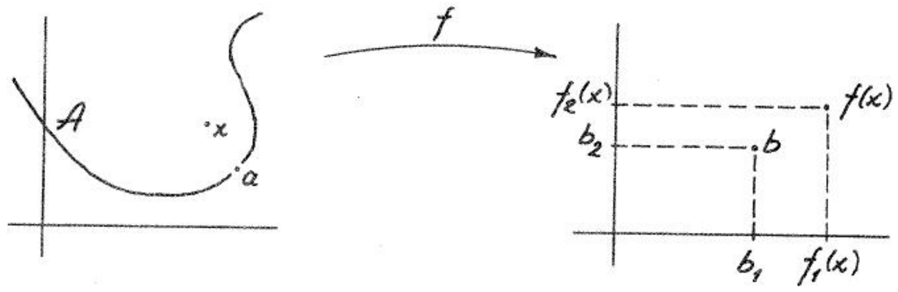
og

$$\begin{aligned} |x|^2 = x_1{}^2 + \cdots + x_k{}^2 &\leqq k \max\{x_1{}^2, \ldots, x_k{}^2\} \\ &= k(\max\{|x_1|, \ldots, |x_k|\})^2 \ . \end{aligned}$$

SÆTNING 3. KOORDINATVIS GRÆNSEOVERGANG. *Lad $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være en afbildning defineret på en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, lad $a \in \bar{A} \backslash A$ og $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Ved grænseovergangen $x \to a$, $x \in A$, gælder da*

$$f(x) \to b \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \to b_1 \ , \ \ldots \ , \ f_m(x) \to b_m \ .$$

Kort*: Grænseovergang med en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ kommer ud på grænseovergang med hver koordinatfunktion $f_i : A \curvearrowright \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$.*



BEVIS. Sætningen følger umiddelbart af ε, δ-definitionen på grænsepunkt/grænseværdi og ovenstående Lemma anvendt på $f(x) - b = (f_1(x) - b_1, \ \ldots \ , f_m(x) - b_m)$. Implikationspilen mod højre er triviel, da

$$|f_i(x) - b_i| \leqq |f(x) - b| \,, \quad i = 1, \ldots, m \,.$$

Den anden vej: Antag implikationens højre side. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan da tænkes valgt tal $\delta_1, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f_i(x) - b_i| < \varepsilon/\sqrt{m} \ \text{ blot } \ x \in A \,, \ |x - a| < \delta_i \,.$$

Vi sætter $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ og har så for $x \in A$, $|x - a| < \delta$:

$$|f(x) - b| \leqq \sqrt{m} \max\{|f_i(x) - b_i| \mid i = 1, \ldots, m\} < \varepsilon \,.$$

Alternativt bevis: Benyt Sætning 2, *Regning med grænseværdier*, på $f_i(x) = f(x) \cdot \mathbf{e}_i$, resp. $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) e_i$, hvor $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_m = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

EKSEMPEL 2. KOORDINATVIS DIFFERENTIATION. Lad $f = (f_1, \ldots, f_m) : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ og lad $a \in I$. Idet differenskvotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \,,$$

defineret for $\Delta x \in (I - a) \setminus \{0\}$, har koordinaterne

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x} = \frac{f_i(a + \Delta x) - f_i(a)}{\Delta x} \,, \quad i = 1, \ldots, m \,.$$

følger det af Sætning 3, at f er differentiabel i a, hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne er differentiable i a, og i bekræftende fald gælder

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a)) \,.$$

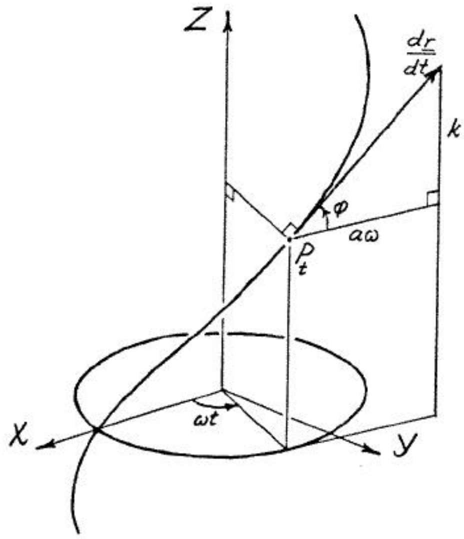
Eksempelvis finder man, at skruebevægelsen givet ved

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= a\sin\omega t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ , \\ z &= kt \end{aligned}$$

(se I.§2.Eksempel 2) til hvert tidspunkt t har en hastighed

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -a\,\omega\sin\omega t \\ a\,\omega\cos\omega t \\ k \end{pmatrix} .$$

Hastigheden har længden $\sqrt{a^2\omega^2 + k^2}$, den er vinkelret på normalen fra P_t på Z-aksen, og vinklen φ med XY-planen har $\tan\varphi = \frac{k}{a\omega}$.



§3. Grænseovergang mod uendelig

En mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ siges at være *opad begrænset*, hvis

$$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in A :\ x \leqq K\ .$$

At en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ ikke er opad begrænset, betyder altså, at

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists x \in A :\ x > K\ .$$

Simple eksempler er halvlinier $]c, \infty[$, resp. mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal.
Man kan selvfølgelig udskifte ordet *opad* med *nedad* mod at vende ulighedstegnene.

DEFINITION. Lad $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være defineret på en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$, som *ikke* er *opad begrænset*, og lad $b \in \mathbb{R}^m$. Man siger da, at

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to \infty\ ,\ x \in A\ .$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists K \in \mathbb{R} :\quad |f(x) - b|\ <\ \varepsilon\ \text{ for alle }\ x \in A\ \text{ med }\ x\ >\ K\ .$$

Kravet er løst sagt, at $f(x)$ *ligger tæt ved* b, *blot* $x \in A$ *er tilstrækkelig stor.*
Læseren vil kunne gætte betydningen af

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to -\infty\ ,\ x \in A\ ,$$

når $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er defineret på en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$, som *ikke* er *nedad begrænset.*
Egentlig burde vi skrive $x \to +\infty$ i stedet for $x \to \infty$, og vi vil da også bruge denne skrivemåde, bl.a. når der kan være mulighed for misforståelse: For en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på en *ubegrænset* (dvs. ikke begrænset) mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ (NB: $\mathbb{R}^k$!) siger man nemlig, at

$$f(x) \to b \ \text{ for } \ x \to \infty \quad \text{eller} \quad f(x) \to b \text{ for } |x| \to \infty\ ,\quad x \in A\ ,$$

hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists K \in \mathbb{R} :\ |f(x) - b| < \varepsilon\ \text{ for alle }\ x \in A\ \text{ med }\ |x| > K\ .$$

BEMÆRKNING 1. Sætninger om *Entydighed af grænsepunkt* (§1. Sætning 1), *Regning med grænseværdier* (§2. Sætning 2) og *Koordinatvis grænseovergang* (§2. Sætning 3) gælder også for $x \to +\infty$, for $x \to -\infty$ og for $|x| \to \infty$.

DEFINITION. Givet $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ og $a \in \bar{A} \setminus A$. Man siger da, at

$$f(x) \to \infty \ \text{ for } \ x \to a\ ,\ x \in A\ ,$$

hvis

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ :\ f(x) > M \ \text{ for alle }\ x \in A\ \text{ med }\ |x - a| < \delta\ .$$

Læseren vil kunne gætte betydningen af

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to a\,,\ x \in A\,.$$

Egentlig burde vi skrive $f(x) \to +\infty$ i stedet for $f(x) \to \infty$. For en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ (NB: $\mathbb{R}^m$!) siger man nemlig, at

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to a\,,\ x \in A\,,$$

hvis

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| > M \text{ for alle } x \in A \text{ med } |x - a| < \delta\,,$$

dvs. hvis

$$|f(x)| \to \infty \text{ for } x \to a\,,\ x \in A\,.$$

DEFINITION. Lad $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ være defineret på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}$, som ikke er opad begrænset. Man siger da, at

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to \infty\,,\ x \in A\,,$$

hvis

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R} : f(x) > M \text{ for alle } x \in A \text{ med } x > K\,.$$

Læseren vil kunne gætte betydningen af

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to \infty\,,\ x \in A\,.$$

Læseren vil ligeledes kunne gætte betydningen af

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to -\infty\,,\ x \in A\,.$$

og

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to -\infty\,,\ x \in A\,,$$

når f er defineret på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}$, som ikke er nedad begrænset. (Det er blot et spørgsmål om de rette ulighedstegn.)

Egentlig burde vi skrive $+\infty$ i stedet for ∞. Når $x \in A \subseteq \mathbb{R}^k$, skrives nemlig $x \to \infty$ i betydningen $|x| \to \infty$, og når $f(x) \in \mathbb{R}^m$, skrives $f(x) \to \infty$ for $|f(x)| \to \infty$.

BEMÆRKNING 2. For afbildninger $f : A \curvearrowright \mathbb{R}_+$ (NB: $\mathbb{R}_+$) gælder ved hver af de betragtede grænseovergange $x \to a \in \mathbb{R}^k$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ og $|x| \to \infty$:

$$f(x) \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad 1/f(x) \to 0\,.$$

Thi i definitionerne vedr. venstre side er det nok at betragte $M \in \mathbb{R}_+$, og så gælder med $\varepsilon = 1/M$:

$$f(x) > M \ \Leftrightarrow\ 1/|f(x)| < \varepsilon\,.$$

Konsekvens: For afbildninger $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{o}\}$ gælder for de nævnte grænseovergange:

$$f(x) \to \infty \ \Leftrightarrow\ |f(x)| \to \infty \ \Leftrightarrow\ 1/|f(x)| \to 0\,.$$

BEMÆRKNING 3. Om grænseovergang med sammensat afbildning gælder resultater svarende til §2. Sætning 1, når grænseovergang mod $+\infty, -\infty$ og ∞ inddrages.

EKSEMPEL 1.

$$\begin{array}{llll} \log x \to -\infty & \text{for } x \to 0_+ \,, & \log x \to +\infty & \text{for } x \to +\infty \,, \\ \exp x = e^x \to 0 & \text{for } x \to -\infty \,, & e^x \to +\infty & \text{for } x \to +\infty \,. \end{array}$$

Alle påstande indses nemt ud fra definitionerne, blot man ved, at $\log : \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ og $\exp : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}_+$ er strengt voksende og hinandens omvendte. For $x > 0$, $M \in \mathbb{R}$ gælder nemlig

$$\log x < M = \log(e^M) \iff x < e^M \,, \quad \log x > M \iff x > e^M \,,$$

og for $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, M > 0$ gælder

$$e^x < \varepsilon = e^{\log \varepsilon} \iff x < \log \varepsilon \,, \quad e^x > M \iff x > \log M \,.$$

EKSEMPEL 2.

$$\begin{array}{llllll} b^x \to 0 & \text{for } x \to -\infty \,, & b^x \to +\infty & \text{for } x \to +\infty \,, & \text{når } b > 1 \,, \\ b^x \to +\infty & \text{for } x \to -\infty \,, & b^x \to 0 & \text{for } x \to +\infty \,, & \text{når } 0 < b < 1 \,. \end{array}$$

Påstandene fremgår af Eksempel 1 i forbindelse med Sætning om *Grænseovergang med sammensat afbildning*, idet man benytter, at

$$b^x = e^{x \log b} \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \,, \; b \in \mathbb{R}_+ \,.$$

F.eks.: Når $b > 1$, har vi for $x \to +\infty$, at $x \log b \to +\infty$ og dermed $\exp(x \log b) \to +\infty$.

EKSEMPEL 3.

$$\begin{array}{lllll} x^a \to 0 & \text{for } x \to 0_+ \,, & x^a \to +\infty & \text{for } x \to +\infty \,, & \text{når } a > 0 \\ x^a \to +\infty & \text{for } x \to 0_+ \,, & x^a \to 0 & \text{for } x \to +\infty \,, & \text{når } a < 0 \,. \end{array}$$

Påstandene fremgår af Eksempel 1 i forbindelse med Sætning om *Grænseovergang med sammensat afbildning*, idet man benytter, at

$$x^a = e^{a \log x} \quad \text{for } a \in \mathbb{R} \,, \; x \in \mathbb{R}_+ \,.$$

F.eks.: Når $a < 0$, har vi for $x \to 0_+$, at $\log x \to -\infty$, dermed $a \log x \to +\infty$ og dermed $\exp(a \log x) \to +\infty$.

§4. Størrelsesorden. o- og O-notation

Vi vil diskutere indbyrdes størrelsesforhold mellem funktioner ved en given grænseovergang.

Hver funktion, der tages i betragtning, skal være defineret *fra et vist trin i grænseovergangen.* Ved grænseovergangen $x \to +\infty$ fra $\mathbb{R}$ vil det sige: i det mindste på en halvlinie $]c, \infty[$. Ved en grænseovergang $x \to a$ fra A, hvor $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ og $a \in \bar{A} \setminus A = \partial A \setminus A$, vil det sige: i det mindste på $A \cap K(a, \rho)$ for et tilpas lille $\rho \in \mathbb{R}_+$.

De betragtede funktioner $f, g, h, \ldots$ må gerne være vektorfunktioner med værdier i forskellige rum $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \ldots$, men det er kun $|f|, |g|, |h|, \ldots$, der kommer i spil, så alt handler i virkeligheden om reelle, aldrig-negative funktioner.

Størrelsesorden

I dette afsnit tages kun (vektor)funktioner f i betragtning, hvor $f(x)$ er defineret og *forskellig fra* $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$ fra et vist trin i en given grænseovergang. Herved opnås, at vi for to funktioner f og g kan danne *begge* brøker $|f(x)|/|g(x)|$ og $|g(x)|/|f(x)|$ fra et vist trin i grænseovergangen.

Vi formulerer begreber og notation for grænseovergangen $x \to +\infty$ fra $\mathbb{R}$, men terminologien finder analog anvendelse ved andre grænseovergange.

Lad f og g være (vektor)funktioner defineret og med $|f(x)| > 0$, $|g(x)| > 0$ på halvlinier $]a, \infty[$, henholdsvis $]b, \infty[$.

Man siger da, at $f(x)$ er af *lavere størrelsesorden* end $g(x)$ for $x \to +\infty$, eller at $g(x)$ er af *højere størrelsesorden* end $f(x)$, og skriver $f(x) = o(g(x))$, læs: $f(x)$ *er lille o af* $g(x)$, hvis $|f(x)|/|g(x)| \to 0$ for $x \to +\infty$, eller hvad der kommer ud på det samme, hvis $|g(x)|/|f(x)| \to +\infty$ for $x \to +\infty$.

Man siger, at $f(x)$ er af *højst samme størrelsesorden* som $g(x)$ for $x \to +\infty$, eller at $g(x)$ er af *mindst samme størrelsesorden* som $f(x)$, og skriver $f(x) = O(g(x))$, læs: $f(x)$ *er store O af* $g(x)$, hvis der findes et $c \in \mathbb{R}$ og et $K > 0$, således at $|f(x)|/|g(x)| \leqq K$ for $x > c$, eller hvad der kommer ud på det samme, hvis der findes et $c \in \mathbb{R}$ og et $k > 0$, således at $|g(x)|/|f(x)| \geqq k$ for $x > c$.

Hvis $f(x)$ er både af højst samme og mindst samme størrelsesorden som $g(x)$ for $x \to +\infty$, altså hvis $f(x) = O(g(x))$ og $g(x) = O(f(x))$, siger man, at $f(x)$ og $g(x)$ er af *samme størrelsesorden* for $x \to +\infty$. Det betyder åbenbart, at der findes et $c \in \mathbb{R}$ og $k, K > 0$, således at $k \leqq |f(x)|/|g(x)| \leqq K$ for $x > c$.

Det er ligetil at overbevise sig om, at sprogbrugen er valgt "fornuftigt", således at eksempelvis $f(x)$ vil være af samme størrelsesorden som $h(x)$, hvis $f(x)$ er af samme størrelsesorden som $g(x)$, og $g(x)$ af samme størrelsesorden som $h(x)$. Men man må *ikke* tro, at to funktioner altid kan "sammenlignes" m.h.t. størrelsesorden: det er let at give eksempler, hvor $|f(x)|/|g(x)|$ i ethvert interval $]c, \infty[$ antager både vilkårlig store værdier og værdier vilkårlig tæt ved 0.

De tilfælde, som især har interesse, er dem, hvor $|f(x)|$ og $|g(x)|$ begge går mod 0 for $x \to +\infty$, eller hvor $f(x)$ og $g(x)$ begge er reelle og går mod $+\infty$ for $x \to +\infty$.

I første tilfælde siger man, hvis $f(x)$ er af lavere størrelsesorden end $g(x)$, at $f(x)$ *går hurtigere mod* **o** *end* $g(x)$ for $x \to +\infty$, eller at $g(x)$ *går langsommere mod* **o** *end* $f(x)$. I andet tilfælde siger man, igen hvis $f(x)$ er af lavere størrelsesorden end $g(x)$, at $f(x)$ *går langsommere mod* $+\infty$ *end* $g(x)$ for $x \to +\infty$, eller at $g(x)$ *går hurtigere mod* $+\infty$ *end* $f(x)$.

Sikkerhed i at kunne bedømme funktioners størrelsesorden ved en given grænseovergang er af stor betydning: For funktioner givet ved komplicerede udtryk er det ofte kun størrelsesordenen, der betyder noget. Og et centralt problem i analysen er at udtrykke en funktion som sum af et simpelt hovedled og et restled af lav størrelsesorden (V.§2, VII, VIII).

Vi slutter afsnittet med at undersøge det indbyrdes størrelsesforhold for logaritme-, potens- og eksponentialfunktioner ved grænseovergangen $x \to +\infty$:

Alle logaritmefunktioner $\log_a x = \log x / \log a$ med forskellige grundtal $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$, er indbyrdes proportionale og dermed specielt af samme størrelsesorden.

Potensfunktionen x^a er af lavere størrelsesorden end x^b for $x \to +\infty$, når $a < b$. Thi $x^b/x^a = x^b x^{-a} = x^{b-a} \to +\infty$ for $x \to +\infty$, ifølge §3. Eksempel 3. (For potensregler, se s.IV.5.?.)

Eksponentialfunktionen a^x er af lavere størrelsesorden end b^x for $x \to +\infty$, når $0 < a < b$. Thi $b^x/a^x = (b/a)^x \to +\infty$ for $x \to +\infty$, ifølge §3. Eksempel 2.

Når vi nu skal sammenligne funktioner af forskellige af de tre typer, kan vi holde os til den naturlige logaritmefunktion, til potensfunktioner x^a med eksponent $a > 0$ og til eksponentialfunktioner b^x med grundtal $b > 1$, hvor jo $\log x \to +\infty$, $x^a \to +\infty$, og $b^x \to +\infty$ for $x \to +\infty$. (For $a < 0$ udnyttes $x^a = 1/x^{-a}$, og for $0 < b < 1$ udnyttes $b^x = 1/(1/b)^x$.)

SÆTNING 1. *Logaritmefunktionen er af lavere størrelsesorden for $x \to +\infty$ end enhver potensfunktion med positiv eksponent:*

$$\frac{\log x}{x^a} \to 0 \quad \textit{for} \quad x \to +\infty \ , \quad \textit{når} \quad a > 0 \ .$$

BEVIS. Påstanden kan føres tilbage til §1. Eksempel 3: Sætter vi $y = 1/x$, har vi for $x \to +\infty$, at $y \to 0_+$ og dermed

$$\frac{\log x}{x^a} = -y^a \log y \to 0 \ .$$

SÆTNING 2. *Enhver potensfunktion med positiv eksponent er af lavere størrelsesorden for $x \to +\infty$ end enhver eksponentialfunktion med grundtal > 1 :*

$$\frac{x^a}{b^x} \to 0 \quad \textit{for} \quad x \to +\infty \ , \quad \textit{når} \quad b > 1 \quad \textit{og} \quad a > 0 \ .$$

BEVIS. Sættes $b^x = y$, har vi $x \log b = \log y$ og dermed

$$\frac{x^a}{b^x} = \left(\frac{1}{\log b}\right)^a \frac{(\log y)^a}{y} = \left(\frac{1}{\log b}\right)^a \left(\frac{\log y}{y^{1/a}}\right)^a \quad \text{for} \quad x > 0 \ .$$

For $x \to +\infty$ har vi $y \to +\infty$ og dermed ifølge Sætning 1:

$$z = \frac{\log y}{y^{1/a}} \to 0_+ \ , \quad \text{altså} \quad \frac{x^a}{b^x} = \left(\frac{1}{\log b}\right)^a z^a \to 0 \ .$$

Af Sætning 1 og 2 følger naturligvis, at

$$\frac{\log x}{b^x} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to +\infty \ , \qquad \text{når} \quad b > 1 \ .$$

o- og O-notation.

I det foregående afsnit, hvor vi diskuterede indbyrdes størrelsesorden mellem funktioner ved en given grænseovergang, forudsatte vi, at de optrædende funktioner f og g fra et vist trin i grænseovergangen ikke blot var definerede, men også forskellige fra $\mathbf{o}$. *Notationerne* $f(x) = o(g(x))$ og $f(x) = O(g(x))$ bruges imidlertid, uanset om det sidste krav er opfyldt. Deres betydning må så fastlægges uden brug af brøker $|f(x)|/|g(x)|$ eller $|g(x)|/|f(x)|$. Sædvanligvis sammenholder man funktionerne f med visse standardfunktioner g, ved grænseovergangen $x \to \mathbf{o}$ således ofte med $g(x) = 1, |x|, |x|^2, \ldots$, og det er af interesse at vurdere $|f|$ opadtil, men ikke $|g|$ nedadtil.

Svarende til en given grænseovergang betragtes funktioner f og g defineret fra et vist trin i grænseovergangen og med værdier i $\mathbb{R}^m$, resp. $\mathbb{R}^n$.

At $f(x) = o(g(x))$ betyder da, at $f(x)$ kan skrives

$$f(x) = \varepsilon(x)|g(x)| \ ,$$

hvor $\varepsilon(x) \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$ ved den pågældende grænseovergang.

I tilfælde af, at $g(x) \neq \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ fra et vist trin, kommer kravet ud på, at $f(x)/|g(x)| \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$.

At $f(x) = O(g(x))$ betyder, at der findes et $K \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|f(x)| \leqq K|g(x)|$$

fra et vist trin af grænseovergangen.

NB. Når man ikke hæfter sig ved andet vedrørende funktionen f, end at $f(x)$ er o eller O af $g(x)$ ved den betragtede grænseovergang, bruger man ofte $o(g(x))$, henholdsvis $O(g(x))$ som *betegnelse* for $f(x)$.

EKSEMPEL 1. En funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ er differentiabel i punktet $a \in I$ med $f'(a) = c \in \mathbb{R}^m$, hvis og kun hvis

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = c\Delta x + o(\Delta x) \ \text{ for } \ \Delta x \to 0 .$$

BEVIS. Vi skriver Δf på formen

$$\Delta f = c\Delta x + R(\Delta x) ,$$

hvor $R(\Delta x) = \Delta f - c\Delta x$ er en rest, der afhænger af Δx. Da nu

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = c + \frac{R(\Delta x)}{\Delta x} ,$$

ser man, at $\Delta f/\Delta x \to c$ for $\Delta x \to 0$, hvis og kun hvis

$$\frac{R(\Delta x)}{\Delta x} \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m , \ \text{ dvs. hvis } \ R(\Delta x) = o(\Delta x) .$$

ADVARSEL. Det er ellers en gylden regel i matematik, at man ikke i et bevis bruger samme navn om forskellige ting. *Men denne regel brydes med o- og O-notationen*: Under arbejde med en given grænseovergang bruges de *samme* betegnelser $o(g(\cdot))$ og $O(g(\cdot))$ ofte om mange forskellige funktioner. Hver gang betegnelserne optræder, skal man altså blot tænke sig, at her står *en eller anden* funktion, som er o eller O af g.

EKSEMPEL 2. Vurdering af et funktionsudtryk ved en grænseovergang foretages ofte under brug af o- og O-notation. Eksempelvis kan man nå resultatet

$$x^3 \log x + \sin x \tan x = O(x^2) \ \text{ for } \ x \to 0_+ ,$$

ved følgende regning

$$\begin{aligned} x^3 \log x + \sin x \tan x &= x^2 x \log x + O(x)O(x) \\ &= x^2 o(1) + O(x^2) = o(x^2) + O(x^2) = O(x^2) . \end{aligned}$$

Prøv at følge tankegangen. Man *skal* læse fra venstre mod højre.

BEMÆRKNING 1. Ved grænseovergangen $x \to 0$ fra $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, respektive $x \to 0_+$ eller $x \to 0_-$, kan man - på tilsvarende måde som ved regningen i Eksempel 2 -

erstatte betegnelsen	$o(x^n)$	med	$O(x^n)$,		
" "	$O(x^n)$	med	$o(x^m)$,	når	$m < n$,
og følgelig	$o(x^n)$	med	$o(x^m)$,	når	$m < n$,

men ikke omvendt. Derimod kan man

erstatte	$x^m o(x^n)$	med	$o(x^{m+n})$	og omvendt ,
"	$x^m O(x^n)$	med	$O(x^{m+n})$	" " .

Endelig anføres, at man kan

erstatte betegnelsen	$O(x^m)o(x^n)$	med	$o(x^{m+n})$,
" "	$o(x^n) + o(x^n)$	med	$o(x^n)$,
" "	$O(x^n) + O(x^n)$	med	$O(x^n)$
og følgelig	$o(x^n) + O(x^n)$	med	$O(x^n)$.

Dette dækker over, at en funktion, der er $o(x^n)$ for $x \to 0$, også er $O(x^n)$, - at en funktion, der er $O(x^n)$, også er $o(x^m)$, når $m < n$, - osv.

BEVIS. Alle påstande fremgår ved brug af definitionen. Eksempelvis: Kan en funktion skrives $f(x) = O(x^n)$, har vi med passende $K, \delta \in \mathbb{R}_+$, at

$$|f(x)| \leqq K|x^n| = K|x|^{n-m}|x^m| \quad \text{for } 0 < |x| < \delta \ .$$

Når $m < n$, vil $K|x|^{n-m} \to 0$ for $x \to 0$, hvorfor $f(x) = o(x^m)$.

III. KONTINUITET

§1. Kontinuitet

Kontinuitetspunkter

ε, δ-DEFINITION AF KONTINUITETSPUNKT. En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ af en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ siges at have et punkt $a \in A$ som *kontinuitetspunkt*, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : d(f(a), f(x)) < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ med } d(a, x) < \delta ,$$

dvs. hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ med } |x - a| < \delta .$$

Man siger også, at f er *kontinuert i punktet* a .

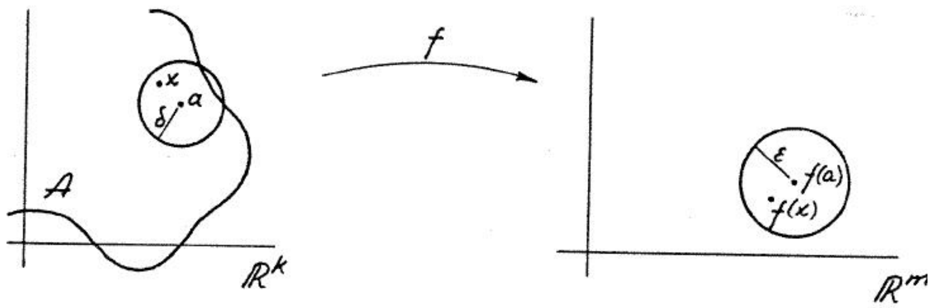
Løst sagt er betingelsen, at $f(x)$ *ligger tæt ved* $f(a)$, *blot* $x \in A$ *ligger tilstrækkelig tæt ved* a.

Udtrykt med kugler er kravet: Til enhver kugle $K(f(a), \varepsilon)$ omkring $f(a)$ findes en kugle $K(a, \delta)$ omkring a, således at

$$f(x) \in K(f(a), \varepsilon) \text{ for alle } x \in A \cap K(a, \delta) ,$$

dvs. således at

$$f(A \cap K(a, \delta)) \subseteqq K(f(a), \varepsilon) .$$



Når betingelsen *ikke* er opfyldt, siges a at være et *diskontinuitetspunkt* for f.

Begrebet kontinuitetspunkt hænger naturligvis nøje sammen med grænseovergang:

SÆTNING 1. *En afbildning* $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, *er kontinuert i et punkt* $a \in A$, *som ikke er et isoleret punkt af* A , *hvis og kun hvis*

$$f(x) \to f(a) \text{ for } x \to a , \ x \in A \setminus \{a\} .$$

BEVIS. At $a \in A$ ikke er et isoleret punkt af A, kommer ud på, at a er kontaktpunkt for $A \setminus \{a\}$. Vi kan så spørge, om $f(x) \to f(a)$ ved grænseovergangen $x \to a$ fra $A \setminus \{a\}$, dvs. om

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \setminus \{a\} \text{ med } |x - a| < \delta \ .$$

Den eneste forskel fra definitionen på kontinuitet i a er, at der står $A \setminus \{a\}$ i stedet for A. Men det er ligegyldigt, da $|f(a) - f(a)| = 0$.

EKSEMPEL 1. Da $\exp(-1/(x^2 + y^2)) \to 0$ for $(x, y) \to (0, 0)$, er $(0, 0)$ et kontinuitetspunkt for funktionen $f : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(-1/(x^2+y^2)) & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Det vil *senere* fremstå som trivielt, at alle øvrige punkter i $\mathbb{R}^2$ er kontinuitetspunkter for f. (Jf. Eksempel 4.)

EKSEMPEL 2. Da y^x ikke har nogen grænseværdi for $(x, y) \to (0, 0)$ fra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, se s. II.1.12, er det umuligt at tillægge 0^0 en værdi, således at

$$(x, y) \curvearrowright y^x \ , \ (x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cup \{(0, 0)\} \ ,$$

bliver kontinuert i $(0, 0)$. - Faktisk sætter man $0^0 = 1$, men $(0, 0)$ er så et diskontinuitetspunkt. Vi skal se i Eksempel 4 nedenfor, at y^x er kontinuert i hvert punkt af den øvre halvplan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

BEMÆRKNING 1. ε, δ-definitionen på kontinuitetspunkt for en afbildning er simpel og bekvem at arbejde med i bevisførelser. Men den indbefatter tilfælde, hvor ordet kontinuitet måske vil forekomme dig malplaceret, f.eks. følgende supplement til Sætning 1 :

En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, *er kontinuert i ethvert isoleret punkt af* A .

BEVIS. At $a \in A$ er et isoleret punkt af A, betyder, at der findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at $A \cap K(a, \delta)$ består af a alene. Og så afparerer dette δ jo ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

BEMÆRKNING 2. Ved undersøgelse af, om et punkt $a \in A$ er kontinuitetspunkt for en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, er det ofte bekvemt at arbejde med tilvæksterne

$$\Delta x = x - a \quad \text{og} \quad \Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) \ .$$

Betingelsen er da

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |\Delta f| < \varepsilon \text{ for alle } \Delta x \in \mathbb{R}^k \ , \text{ hvor } |\Delta x| < \delta \text{ og } a + \Delta x \in A \ .$$

Betingelsen er opfyldt, hvis a er et isoleret punkt af A , og kommer ellers ud på

$$\Delta f \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m \text{ for } \Delta x \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^k \ , \ a + \Delta x \in A \ .$$

BEMÆRKNING 3. Spørgsmålet, om $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er kontinuert i $a \in A$, er af *lokal* karakter: det gør ingen forskel, om $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ erstattes med restriktionen $f : A \cap K(a, \rho) \curvearrowright \mathbb{R}^m$ for et eller andet $\rho > 0$.

BEMÆRKNING 4. Når $a \in B \subseteqq A \subseteqq \mathbb{R}^k$ og $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, gælder:

$$f \text{ er kontinuert i } a \quad \Rightarrow \quad \text{restriktionen } f\big|_B \text{ er kontinuert i } a \; .$$

Kort: *Kontinuitet bevares ved restriktion.*

BEMÆRKNING 5. For en funktion af én variabel $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, med $A \subseteqq \mathbb{R}$, er det oplagt, hvad der menes med, at f er *kontinuert fra højre*, respektive *fra venstre*, i et punkt $a \in A$, nemlig at restriktionen af f til $A \cap [a, \infty[$, henholdsvis $A \cap]-\infty, a]$, er kontinuert i a. Man ser let, at

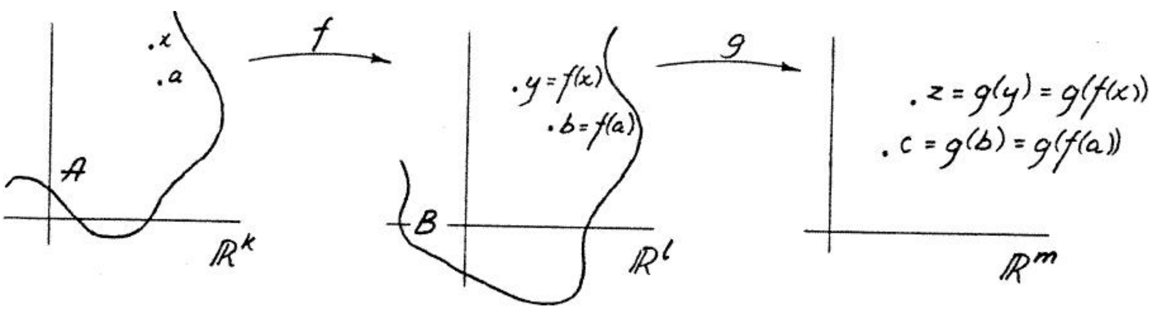
$$\begin{aligned} & f \text{ er kontinuert i } a \\ \Leftrightarrow \quad & f \text{ er kontinuert både fra højre og fra venstre i } a \; . \end{aligned}$$

Vi noterer en række sætninger om kontinuitet, svarende til kendte sætninger om grænseovergang :

SÆTNING 2. *Lad* $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, $B \subseteqq \mathbb{R}^l$, $f : A \curvearrowright B$, $g : B \curvearrowright \mathbb{R}^m$, *lad* $a \in A$ *og sæt* $b = f(a)$. *Da gælder :*

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \textit{er kontinuert i } \; a \\ g \;\; \textit{er kontinuert i } \; b = f(a) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \;\; \textit{er kontinuert i } \; a \; .$$

Kort*: Kontinuitet bevares ved sammensætning.*



BEVIS. Kopiér beviset for II.§2. Sætning 1.

BEMÆRKNING 6. Vi noterer også et mellemtrin, hvor $a \in \bar{A} \setminus A$ og $b \in B$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to b \;\text{ for }\; x \to a \;,\; x \in A \\ g \;\text{ er kontinuert i }\; b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) \to g(b) \;\text{ for }\; x \to a \;,\; x \in A \setminus \{a\} \; .$$

Sætning 3. Regning med kontinuerte funktioner. *Lad $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $g : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ og $\alpha : A \curvearrowright \mathbb{R}$ være defineret på samme mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ og antag, at f, g og α er kontinuerte i samme punkt $a \in A$. Da er*

$$f \pm g\,,\ |f|\,,\ f \cdot g\,,\ \alpha f$$

alle kontinuerte i a, og forudsat $\alpha(a) \neq 0$ gælder det samme for f/α .
Specielt kan f, g eller α være konstant.

Med $f \cdot g$ menes naturligvis funktionen $x \curvearrowright f(x) \cdot g(x)$ fra A til $\mathbb{R}$. (Når $m > 1$ står her et skalarprodukt.) Forudsætningen $\alpha(a) \neq 0$ sikrer, at $f(x)/\alpha(x)$ er defineret i $A \cap K(a, \rho)$ for et passende $\rho > 0$.

BEVIS. Påstandene er trivielt sande, hvis a er et isoleret punkt for A (Bemærkning 1), og ellers (Sætning 1) kan vi anvende II.§2. Sætning 2, *Regning med grænseværdier*, på grænseovergangen $x \to a$ fra $A \setminus \{a\}$: Idet

$$f(x) \to f(a)\,,\quad g(x) \to g(a) \quad \text{og} \quad \alpha(x) \to \alpha(a)\ ,$$

følger, at

$$f(x) \pm g(x) \to f(a) \pm g(a)\,,\ |f(x)| \to |f(a)|\,,$$
$$f(x) \cdot g(x) \to f(a) \cdot g(a)\,,\ \alpha(x)f(x) \to \alpha(a)f(a)\ ,$$

og, hvis $\alpha(a) \neq 0$,

$$f(x)/\alpha(x) \to f(a)/\alpha(a)\ ,$$

EKSEMPEL 3. En konstant funktion $x = (x_1, \ldots, x_k) \curvearrowright b \in \mathbb{R}$ er naturligvis kontinuert i hvert punkt $a \in \mathbb{R}^k$, idet $\Delta b = 0$. Og en projektion $x = (x_1, \ldots, x_k) \curvearrowright x_i$ ligeså, idet $|\Delta x_i| \leqq |\Delta x|$.
Et *polynomium* P i k variable er en funktion dannet ud fra de lige nævnte ved multiplikation og addition, som f.eks. (med $k = 3$)

$$P(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 + 4x_1x_3 - x_3 + 5 \ \text{ eller } \ P(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^5 + 7\ ,$$

medens en *rational funktion* er en kvotient P/Q mellem to polynomier, som f.eks.

$$\frac{{x_1}^2 x_2 + 4x_1x_3 - x_3 + 5}{{x_1}^5 + 7}\quad .$$

Ifølge Sætning 3, *Regning med kontinuerte funktioner*, er et polynomium i k variable kontinuert i hvert punkt af $\mathbb{R}^k$, og en rational funktion er kontinuert i hvert punkt af sin definitionsmængde.

BEMÆRKNING 7. I eksempler i det følgende (og ligeledes i opgaver) vil vi regne det for kendt, at de elementære funktioner af én variabel: logaritme-, eksponential- og potensfunktioner samt de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og dermed tangens og cotangens er kontinuerte i hvert punkt af definitionsmængden.

Med enkelte undtagelser, der må klares på anden vis (som f.eks. at 0 er kontinuitetspunkt for $x \curvearrowright \sqrt[3]{x}$), følger det af IV.§2. Sætning 1 i forbindelse med funktionernes differentiabilitetsforhold, som vi skal se på i IV.§5.

EKSEMPEL 4. Funktionen $(x,y) \curvearrowright y^x = e^{x \log y}$ er kontinuert i hvert punkt af øvre halvplan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, dvs. i hvert punkt (a,b) med $b > 0$.

Thi da projektionen $(x,y) \curvearrowright y$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, er kontinuert i (a,b), og $y \curvearrowright \log y$, $y \in \mathbb{R}_+$, er kontinuert i billedpunktet b, følger (Sætning 2), at den sammensatte funktion $(x,y) \curvearrowright \log y$ er kontinuert i (a,b). Da også $(x,y) \curvearrowright x$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, er kontinuert i (a,b), følger (Sætning 3), at produktfunktionen $(x,y) \curvearrowright z = x \log y$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ligeledes er det. Og da endelig $z \curvearrowright \exp z$, $z \in \mathbb{R}$, er kontinuert i billedpunktet $a \log b$, følger (Sætning 2), at den sammensatte funktion $(x,y) \curvearrowright \exp(x \log y) = y^x$, $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, er kontinuert i (a,b).

Normalt gennemfører man ikke et ræsonnement som dette i detaljer, men nøjes med at sige, at funktionen $(x,y) \curvearrowright \exp(x \log y)$ er kontinuert i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, da *den er bygget op af kontinuerte funktioner*. Dette skal antyde, at man kan komme igennem ved hjælp af Sætning 2 og 3 ovenfor.

SÆTNING 4. *En afbildning $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på en mængde $A \subsetneqq \mathbb{R}^k$ er kontinuert i et punkt $a \in A$, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne $f_i : A \curvearrowright \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, alle er kontinuerte i a .*

BEVIS. Hvis a er et isoleret punkt af a, er såvel f som koordinatfunktionerne f_i kontinuerte i a, og ellers kan vi anvende II.§2. Sætning 3, *Koordinatvis grænseovergang* :

$$f(x) \to f(a) \ \Leftrightarrow\ f_1(x) \to f_1(a)\,,\ \ldots\ ,\ f_m(x) \to f_m(a)\ .$$

Kontinuert afbildning

Vi har allerede (i de sidste linier i Eksempel 4) taget forskud på følgende

DEFINITION. En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ af en mængde $A \subsetneqq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ siges at være *kontinuert*, hvis hvert punkt $a \in A$ er et kontinuitetspunkt for f .

Vi noterer, at *sammensætning af og regning med kontinuerte afbildninger* pågny fører til kontinuerte afbildninger (Sætning 2 og 3). Og ligeledes, at en afbildning $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er kontinuert, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne $f_i : A \curvearrowright \mathbb{R}$ alle er kontinuerte (Sætning 4).

LIDT OM KONTINUITETSBEGREBET. Læseren er utvivlsomt mødt med en vis forhåndsfornemmelse af, hvad *kontinuitet* vil sige. Således ville du nok mene, at kontinuitet af en reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $I \subsetneqq \mathbb{R}$ bl.a. indebærer, at funktionen ikke kan "komme fra en værdi til en anden uden at passere alle mellemliggende værdier", kort: har *sammenhængende variation*. Du er så på linie med matematikere fra oldtiden og frem til vort århundrede.

I matematikken kan man imidlertid ikke blive stående ved vage fornemmelser af f.eks. kontinuitet.

Hvad ville du således mene om funktionerne $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0\,. \end{cases}$$

Graferne kan ikke "tegnes", de svinger jo op og ned uendelig mange gange i ethvert interval $]0, \delta\,[$. Hverken f eller g kan "komme fra en værdi til en anden uden at passere alle mellemliggende værdier", men er de kontinuerte?

Du ser, der er brug for klare og gerne simple kriterier til afgørelse af, om en funktion er kontinuert eller ej. Derfor opstilles skarpe og gerne simple definitioner, (s. 1.1 og 1.5). Ved hjælp af disse og de afledte sætninger er vi faktisk i stand til at afgøre spørgsmålet om kontinuitet i mange tilfælde. (Funktionen g ovenfor er således kontinuert, men f er det ikke.)

MEN: *Der ligger ikke mere i et begreb, end definitionen indebærer.* Vi har *tillagt* kontinuitet af eksempelvis en reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ en præcis mening, men vi ved endnu intet om, hvorvidt en sådan funktion nødvendigvis har sammenhængende variation.

Næste § handler om, at vor kontinuitetsdefinition viser sig vellykket derved, at den faktisk, trods sin simpelhed, sikrer sådanne egenskaber, som man ville ønske sig af begrebet kontinuitet. Vel at mærke, når definitionen anvendes i klassiske situationer som reel funktion defineret på interval.

Definitionen skyldes BOLZANO og CAUCHY (omkring 1820, jf. s. II.1.1), dog i verbal form. Det er deres fortjeneste at gennemskue, at de træk, man siden oldtiden havde forbundet med kontinuitet, alle er konsekvenser af (eller om man vil: ligger gemt i) en simpel egenskab, som de så tager som definition.

En anden historie (som er typisk for vort århundredes matematik) er opdagelsen af, at definitionen med stort udbytte kan kopieres til helt andre situationer end de klassiske. *Her er glosen kontinuitet så fulgt med, uanset om forbindelsen med sammenhæng etc. går tabt.* Herom mere i Matematik 2 MA. Udviklingen mærkes allerede i vores tekst derved, at vi ikke i definitionerne ovenfor har gjort nogen forudsætning om definitionsmængden $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Jf. Bemærkning 1.

ε-funktioner

DEFINITION. En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ vil vi kalde en *ε-afbildning* eller *ε-funktion*, hvis

(i) $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$ er et indre punkt af A

(ii) f er kontinuert i $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^k$ med $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$.

Vi vil almindeligvis betegne ε-funktioner med ε, om fornødent med mærke eller indeks, således at forskellige funktioner i samme undersøgelse har hver sit navn — i modsætning til praksis ved o- og O-notationen. Medens sidstnævnte notation er almindelig brugt i matematisk litteratur, er begrebet ε-funktion mere hjemmestrikket. Det tjener til at lette overskueligheden i en række definitioner og beviser.

BEMÆRKNING 8. Allerede i Eksempel 1 har vi mødt en ε-funktion. Ofte er situationen tilsvarende: Vi møder en afbildning f med værdier i $\mathbb{R}^m$, som oprindelig kun er fastlagt i $A \setminus \{\mathbf{o}\}$, hvor $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, og hvor

(i) $\quad \mathbf{o} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$ er et indre punkt af A.

Om vi nu får en ε-afbildning ved at sætte $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$, afhænger af, om

(ii') $\quad f(x) \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$ for $x \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^k$ fra $A \setminus \{\mathbf{o}\}$.

Når kravet (ii') er opfyldt, vil vi ofte uden at sige det tænke os foretaget den fornødne "plombering" $f(\mathbf{o}) = (\mathbf{o})$.

EKSEMPEL 5. En funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ er differentiabel i et indre punkt $a \in I$ med $f'(a) = c \in \mathbb{R}^m$, hvis og kun hvis

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = c\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \ ,$$

hvor ε er en ε-funktion.

BEVIS. Vi skriver Δf på formen

$$\Delta f = c\Delta x + h(\Delta x)\Delta x \ ,$$

hvor $h(\Delta x)$ er bestemt ved ligningen for $a + \Delta x \in I$, $\Delta x \neq 0$, medens vi sætter $h(0) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$. Betingelsen kommer så ud på, at

$$h(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - c \to \mathbf{o} \ \text{ for } \ \Delta x \to 0 \, , \ \ \text{dvs.} \ \ \frac{\Delta f}{\Delta x} \to c \ \text{ for } \ \Delta x \to 0 \, .$$

Sml. II.§4. Eksempel 1.

BEMÆRKNING 9. I tilfældet $k = 1$ har man undertiden behov for at erstatte kravet (i) i definitionen med, at A indeholder et interval $[0, \rho\,[$ til højre for 0 , og samtidig i (ii) kun kræve kontinuitet fra højre. - Herved kan man f.eks. behandle differentiabilitet fra højre efter modellen i Eksempel 5. - Tilsvarende kan man naturligvis nøjes med at "se til venstre".

BEMÆRKNING 10. Når ε_1 og ε_2 er ε-funktioner fra $\mathbb{R}^k$ til $\mathbb{R}^l$, henholdsvis fra $\mathbb{R}^l$ til $\mathbb{R}^m$, så er $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ en ε-funktion fra $\mathbb{R}^k$ til $\mathbb{R}^m$ (evt. med en mindre definitionsmængde end ε_1).

Lad ε_1 og ε_2 være ε-funktioner og h en begrænset funktion, alle defineret på samme mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$. Da er

$$\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \, , \ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ \text{ og } \ h \cdot \varepsilon_2$$

igen ε-funktioner, forudsat ε_1 , ε_2 og h afbilder A ind i samme talrum $\mathbb{R}^m$. Og $\varepsilon_1\varepsilon_2$ og $h\varepsilon_2$ er ε-funktioner, forudsat en af faktorerne er en reel funktion.

En funktion $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) : A \curvearrowright \mathbb{R}_m$ er en ε-funktion, netop hvis koordinatfunktionerne alle er det.

BEVIS. Bortset fra de påstande, der vedrører h, og som let eftervises, er der tale om specialtilfælde af Sætning 2, 3 og 4. At h er begrænset, vil sige, at $\exists K \in \mathbb{R}_+ : |h(x)| \leqq K$ for alle $x \in A$.

§2. Hovedsætninger om kontinuerte funktioner

De tre hovedsætninger om kontinuerte funktioner er konsekvenser af kontinuitetsdefinitionen anvendt på klassiske situationer som reel funktion *defineret på interval.* Specielt indfrier Anden hovedsætning forventningen om, at kontinuitet i *dette tilfælde* indebærer "*sammenhængende variation*".

Her er det helt afgørende, at de reelle tal lægges til grund. Ved definitionerne og den hidtil udviklede almene teori vedrørende grænseovergang og kontinuitet kunne vi lige så godt have arbejdet f.eks. med afbildninger $f : A \curvearrowright \mathbb{Q}^m$, $A \subseteq \mathbb{Q}^k$, hvor $\mathbb{Q}$ er mængden af rationale tal, dvs. tal, der kan skrives på formen p/q med $p \in \mathbb{Z}$ og $q \in \mathbb{N}$. Men hovedsætningerne om kontinuerte funktioner og med dem hele differential- og integralregningen bryder sammen, medmindre man lægger de reelle tal til grund.

EKSEMPEL 1. Tænk dig, at vi arbejdede med $\mathbb{Q}$ i stedet for $\mathbb{R}$. Vi kunne da definere differentiabilitet og udlede regneregler for differentiation på helt samme måde. Eksempelvis ville funktionen $f : \mathbb{Q} \curvearrowright \mathbb{Q}$ givet ved

$$f(x) = -(x^3 - 2)^{-1}\ ,\ x \in \mathbb{Q}\ ,$$

være differentiabel på *hele* $\mathbb{Q}$-aksen med

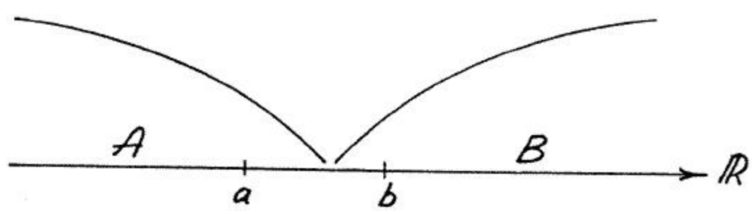
$$f'(x) = (x^3 - 2)^{-2}\, 3x^2\ ,\ x \in \mathbb{Q}\ .$$

Men: Skønt $f'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, er funktionen ikke voksende ! F.eks. er $f(1) > f(2)$.

Med al ære og respekt for BOLZANO og CAUCHY (s.III.1.6) byggede de på rent intuitive forestillinger om de reelle tal. Først med en egentlig teori for tallene fik man omkring 1860-70 et helt tilfredsstillende grundlag for den matematiske analyse.

De reelle tal. Supremumegenskaben

De reelle tals fortrin ligger løst sagt i, at $\mathbb{R}$ er "*uden huller*".Traditionelt taler man om den reelle talakses "*kontinuitet*", hvor ordet naturligvis er brugt i sin oprindelige betydning, "*sammenhæng*". Denne egenskab kan udtrykkes på forskellig vis, f.eks. ved, at man ikke kan undgå at "ramme" et reelt tal, når man med et hug eller *snit* vil dele $\mathbb{R}$ i to dele A og B , således at tallene i A ligger til venstre, tallene i B til højre, dvs. således at $\forall a \in A\ \forall b \in B : a < b$. (R. DEDEKIND 1858, tysk matematiker.)



Et snit, der deler $\mathbb{R}$ i

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\} \quad \text{og} \quad A = \mathbb{R} \setminus B \,,$$

"rammer" således $\sqrt{2}$. Havde vi arbejdet med $\mathbb{Q}$ i stedet for $\mathbb{R}$, ville kniven være "smuttet gennem et hul", da $\sqrt{2}$ er irrationalt, dvs. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Vi foretrækker at præcisere de reelle tals fortrin ved

SUPREMUMEGENSKABEN. Hvis en ikke tom mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ er *opad begrænset*, dvs. hvis der findes et $b \in \mathbb{R}$, således at $\forall a \in A : a \leqq b$, så findes der blandt alle sådanne *overtal* b for A et mindste.

Det er væsentligt, at der i kravet $\forall a \in A : a \leqq b$ til et *overtal* b for A står $\leqq$ og ikke $<$.

Under navn af *Kontinuitetsaksiomet* tager vi Supremumegenskaben som en af grundforudsætningerne om de reelle tal. (De øvrige er opregnet i X.§1. De gælder også for $\mathbb{Q}$!) Supremumegenskaben skal så *ikke* bevises. (Derimod skal det bevises, at den er forenelig med (eller ikke er i modstrid med) de øvrige grundforudsætninger. Det vil fremgå i Matematik 2 AL.)

Supremumegenskaben har naturligvis et modstykke. Det fremgår ved anvendelse af egenskaben på $-A = \{-a \mid a \in A\}$:

Enhver ikke tom, *nedad begrænset* mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ har et *største undertal*.

DEFINITION. Det mindste overtal for en ikke tom, opad begrænset mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ kaldes *supremum* eller *øvre grænse* for A og betegnes $\sup A$ (læs: supremum for A). Det største undertal for en ikke tom, nedad begrænset mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ kaldes *infimum* eller *nedre grænse* for A og betegnes $\inf A$ (læs: infimum for A).

EKSEMPEL 2. Mængden $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ er både opad og nedad begrænset, og åbenbart er $\sup A = \sqrt{2}$ og $\inf A = -\sqrt{2}$. Men havde vi holdt os til rationale tal alene, ville der hverken have været et mindste overtal eller et største undertal.

ADVARSEL. Studerende forveksler ofte *supremum* med *maksimum.*

Et eventuelt *maksimum* eller *største element* af en ikke tom mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ er et tal, $\max A$ (læs: maksimum for A), karakteriseret ved, at

$$\max A \in A \,, \quad \forall a \in A : a \leqq \max A \,.$$

Det er altså et element af A, som samtidig er et overtal for A.

En ikke tom, opad begrænset mængde $A \subseteqq \mathbb{R}$ har *altid* et supremum, $\sup A \in \mathbb{R}$ (Supremumegenskaben), men *ikke i almindelighed* et maksimum. Et eventuelt maksimum, $\max A$, vil naturligvis samtidig være supremum for A .

Ganske tilsvarende forholder det sig med *infimum*, $\inf A$, og *minimum* eller *mindste element*, $\min A$. Sagen belyses af ganske banale eksempler som $A =]0,1[$ eller $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

BEMÆRKNING 1. En *afsluttet, begrænset* mængde $C \subseteqq \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$, har både et mindste og et største element.

Thi $\sup C$ er åbenbart et kontaktpunkt for C (overvej !), følgelig er $\sup C \in C$, og så er tallet største element i C . Tilsvarende er $\inf C$ mindste element i C.

Første hovedsætning

En reel funktion $f : A \curvearrowright \mathbb{R}$ siges at være *begrænset*, henholdsvis *opad* eller *nedad begrænset*, hvis værdimængden $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ er det. Et eventuelt maksimum $\max F(A)$ for værdimængden kaldes *størsteværdi* eller *globalt maksimum* for funktionen, ligesom et eventuelt minumum $\min f(A)$ kaldes *mindsteværdi* eller *globalt minimum* for f .

Vi formulerer først hovedsætningen i det simpleste tilfælde, reel funktion af reel variabel betragtet på et interval.

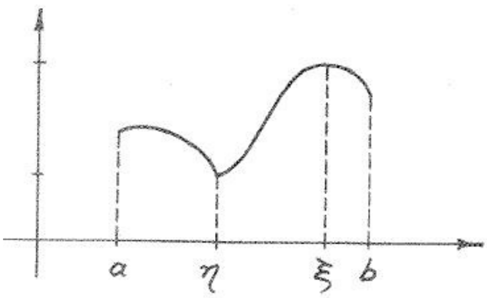
HOVEDSÆTNING 1.a. *Enhver kontinuert funktion $f : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et afsluttet, begrænset interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ er begrænset og har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi.*

Der findes altså et punkt $\xi \in [a,b]$, således at

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \leqq f(\xi) ,$$

og ligeledes et punkt $\eta \in [a,b]$, således at

$$\forall x \in [a,b] : f(\eta) \leqq f(x) .$$



Læseren bør gøre sig klart, at forudsætningen om intervaltype er væsentlig. Det fremgår af banale eksempler. F.eks. er $x \curvearrowright 1/x$, $x \in]0,1]$, kontinuert på et begrænset interval uden at være (opad) begrænset, medens $x \curvearrowright 1/x$, $x \in]1,2]$, nok er begrænset, men ikke har nogen størsteværdi.

For funktioner af flere variable er det ikke på forhånd oplagt, hvilken type definitionsmængde, der kan komme på tale i en tilsvarende sætning. Den relevante type fremgår af

HOVEDSÆTNING 1.b. *Enhver kontinuert funktion $f : C \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en afsluttet, begrænset mængde $C \subseteqq \mathbb{R}^k$ er begrænset og har både en størsteværdi og en mindsteværdi.*

Bemærk, at der allerede for $k = 1$ er tale om en generalisering af Hovedsætning 1.a: definitionsmængden kan nu være ganske vild.

Hovedsætning 1.c. *For enhver kontinuert afbildning $f : C \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på en afsluttet, begrænset mængde $C \subseteqq \mathbb{R}^k$ er billedmængden $f(C) \subseteqq \mathbb{R}^m$ igen afsluttet og begrænset.*

Hovedsætning 1.c indeholder Hovedsætning 1.b; thi når billedmængden $f(C)$ er en afsluttet og begrænset del af $\mathbb{R}$, ja så har $f(C)$ et maksimum og et minimum (Bemærkning 1), dvs. f har en størsteværdi og en mindsteværdi.

For at vise hovedsætningerne 1.a, 1.b og 1.c er det altså nok at vise 1.c. Dette bevis vil blive ført i Matematik 2 MA. Det kunne godt gøres nu, med "håndkraft" og stort besvær, men til den tid vil de rette forberedelser være gjort. Foruden kontinuitetsdefinitionen (§1) må beviset bygge på de reelle tals "sammenhæng", udtrykt ved Supremumegenskaben:

EKSEMPEL 3. Det er afgørende, at vi arbejder med alle *reelle* tal. Havde vi f.eks. holdt os til rationale tal, ville allerede en funktion som $x \curvearrowright x^3 - 6x$, $x \in [-2, 2]$, hverken have en største- eller en mindsteværdi.

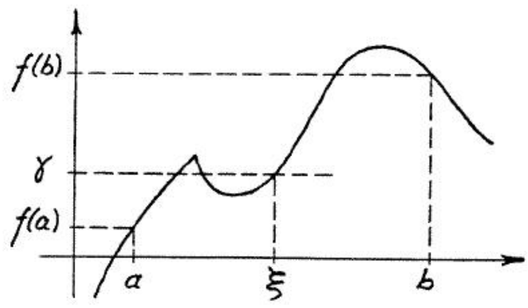
Som eksempel på den rolle, Første hovedsætning spiller ved opbygningen af analysen, vil vi nævne, at den er den afgørende ingrediens i beviset for Differentialregningens middelværdisætning, der så igen ligger til grund bl.a. for sætningerne om differentiable funktioners monotoniforhold. (IV.§2.)

Anden hovedsætning

Med *interval* mener vi interval på $\mathbb{R}$ i vid betydning, som f.eks. $]a, b]$, $]-\infty, b]$, $]a, \infty[$, $]-\infty, \infty[$, ... Et interval kan da karakteriseres som en delmængde af $\mathbb{R}$ med mere end et element, som med to tal indeholder alle mellemliggende. (X.§1. Bemærkning .)

Hovedsætning 2.a. Sammenhængende variation. *Når en kontinuert funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ har forskellige værdier $f(a)$ og $f(b)$ i to punkter $a, b \in I$, $a < b$, da antager f i intervallet $]a, b[$ enhver værdi Υ mellem $f(a)$ og $f(b)$.*

En kontinuert funktion på et interval "springer ikke værdier over". Hvis f.eks. $f(a) < \Upsilon < f(b)$, så findes et $\xi \in]a, b[$, således at $f(\xi) = \Upsilon$.



Sætningen kommer ud på, at *en kontinuert funktion afbilder interval på interval eller på et enkelt punkt.* (Overvej.)

Hovedsætning 1.a og 2.a. giver tilsammen, at en kontinuert funktion afbilder et afsluttet, begrænset interval $[a, b]$ på et afsluttet, begrænset interval eller evt. på et enkelt punkt. Men ellers kan "alt" ske, f.eks. afbilder sinusfunktionen det åbne interval $]0, 2\pi[$ på et afsluttet interval $[-1, 1]$.

BEVIS for Hovedsætning 2.a. Beviset udnytter direkte *Supremumegenskaben* ved $\mathbb{R}$ og *kontinuitetsdefinitionen.*

Vi antager, at $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er kontinuert, $a, b \in I$, $a < b$ og f.eks. $f(a) < f(b)$. Vi betragter et tal γ , $f(a) < \gamma < f(b)$, og søger så et $\xi \in]a, b[$, hvor $f(\xi) = \gamma$.

Hertil inddrager vi mængden

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < \gamma\} .$$

For anskuelighedens skyld kan vi kalde tallene i A for *røde* og tallene i $[a, b] \setminus A$ for *hvide.* Idet $a \in A$, er $A \neq \emptyset$. Da b er et overtal for A , er A opad begrænset og har så *(Supremumegenskaben)* et mindste overtal, $\sup A$. Vi forsøger os med $\xi = \sup A$.

For det første er $a < \xi$. Thi da $f(a) < \gamma$ og f er kontinuert i a , har vi for alle x i et vist interval $]a, a + \delta_1[$, at $f(x) < \gamma$, dvs. $x \in A$, "x er rødt", og dermed $a < x \leqq \xi$.

Videre er $\xi < b$. Thi da $\gamma < f(b)$ og f er kontinuert i b , har vi for *alle* x i et vist interval $]b - \delta_2, b]$, at $\gamma < f(x)$ og altså $x \notin A$, "x er hvidt". Men så er $A \subseteqq [a, b - \delta_2]$ og dermed $\xi \leqq b - \delta_2 < b$.

Vi mangler at vise, at $f(\xi) = \gamma$. Det gør vi ved at vise, at mulighederne $f(\xi) < \gamma$ og $f(\xi) > \gamma$ strider mod, at ξ *er et kontinuitetspunkt for* f , således at de må forkastes.

Husk på, at $\xi = \sup A$. Derfor er $f(x) \geqq \gamma$ for alle $x \in]\xi, b]$, medens der i ethvert interval $]\xi - \delta, \xi]$ findes mindst et x , hvor $f(x) < \gamma$.

Antages $f(\xi) < \gamma$, kommer vi i strid med, at f er kontinuert (fra højre) i ξ . Thi for hvert $x \in]\xi, b]$ havde vi så $f(x) - f(\xi) \geqq \gamma - f(\xi)$, hvorfor $\varepsilon = \gamma - f(\xi) > 0$ ikke kunne afpareres.

Antages $f(\xi) > \gamma$, kommer vi i strid med, at f er kontinuert (fra venstre) i ξ. Thi for hvert $\delta > 0$ fandtes så mindst et $x \in]\xi - \delta , \xi[$, hvor $f(\xi) - f(x) > f(\xi) - \gamma$, hvorfor $\varepsilon = f(\xi) - \gamma > 0$ ikke kunne afpareres.

EKSEMPEL 4. Det er afgørende, at vi arbejder med alle *reelle* tal. Havde vi f.eks. holdt os til rationale tal, ville allerede en funktion som $x \curvearrowright x^2$ springe værdier over, således bl.a. værdien 2 . Og funktionen f defineret på $\mathbb{Q}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x^2 < 2 \\ 1 & \text{når } x^2 > 2 \end{cases}$$

er faktisk kontinuert efter vor definition (den er kontinuert i hvert punkt i definitionsmængden $\mathbb{Q}$), men den overspringer hele intervallet $]0, 1[$.

BEMÆRKNING 2. Hovedsætning 2.a. kan generaliseres til funktioner af flere variable. Der er endda flere muligheder for den type definitionsmængde $S \subseteqq \mathbb{R}^k$, der erstatter intervallet $I \subseteqq \mathbb{R}$: Man kan forudsætte, at S er *sammenhængende*, eller at S er *kurvesammenhængende.* Det første begreb indføres først i Matematik 2 MA. Den anden mulighed tager vi op i sidste afsnit af VI.§1, hvor så de tilsvarende Hovedsætninger 2.b og 2.c findes.

Omvending af en monoton funktion

En reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ siges at være *voksende*, hvis der for $x_1, x_2 \in I$ gælder

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leqq f(x_2) \;.$$

Den siges at være *strengt voksende*, hvis der gælder

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \;.$$

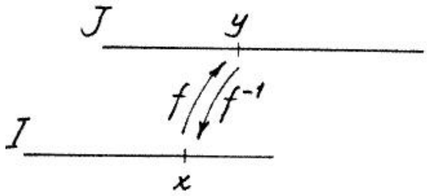
En strengt voksende funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er specielt injektiv og har dermed en omvendt $f^{-1} : f(I) \curvearrowright \mathbb{R}$, med værdimængde I .

Lad nu $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ være en kontinuert og strengt voksende funktion defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$.

Ifølge Anden hovedsætning er værdimængden $f(I)$ et interval J . Den omvendte funktion $f^{-1} : J \curvearrowright \mathbb{R}$, med værdimængde I , er givet ved, at der for $x \in I$ og $y \in J$ gælder

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y) \;.$$

Nedenfor vil vi overalt, hvor et tal x og et tal y optræder, underforstå, at de er partnere, dvs. $x \in I$, $y \in J$ og $y = f(x)$ eller, ensbetydende hermed, $x = f^{-1}(y)$.

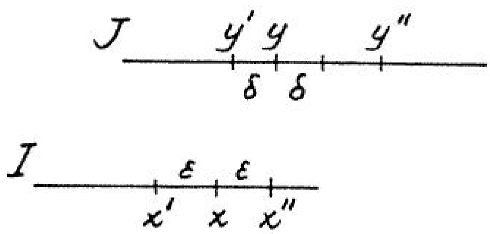


Det er klart, at $f^{-1} : J \curvearrowright I$ er strengt voksende. Er nemlig $y_1 < y_2$, så må $x_1 < x_2$. Mulighederne $x_1 = x_2$ og $x_1 > x_2$ kan jo udelukkes, idet

$$x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; y_1 = y_2 \quad \text{og} \quad x_2 < x_1 \;\Rightarrow\; y_2 < y_1 \;.$$

Desuden er f^{-1} kontinuert i hvert punkt $y \in J$. Thi lad os eksempelvis antage, at y ikke er et endepunkt for J . Så er $x = f^{-1}(y)$ heller ikke endepunkt for I . Ethvert interval $[x-\varepsilon\,,\,x+\varepsilon] = [x', x'']$ omkring x , hvor ε er så lille, at

$$[x', x''] \subseteqq I \;,$$



afbildes ved f på et interval (Hovedsætning 2), som i kraft af monotonien må være $[y', y'']$. Dette interval afbildes så ved f^{-1} på $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, og da $y' < y < y''$, opnår vi, at intervallet $[y-\delta, y+\delta] \subseteqq [y', y'']$ afbildes ind i $[x-\varepsilon\,,x+\varepsilon]$, når vi vælger $\delta = \min\{y-y', y''-y\}$. Vi noterer :

SÆTNING 1. OMVENDT FUNKTION. *En kontinuert og strengt voksende funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ har en omvendt funktion f^{-1} defineret på intervallet $J = f(I)$. Den omvendte funktion er igen kontinuert og strengt voksende.*

En tilsvarende sætning gælder naturligvis om *aftagende* funktioner. Voksende og aftagende funktioner kaldes under et for *monotone* funktioner.

Arcus funktionerne

De i dette afsnit indførte Arcus funktioner vil fremtidig blive betragtet som velkendte.

Vi går ud fra, at du ved, at de trigonometriske funktioner sinus, cosinus, tangens og cotangens er kontinuerte i de respektive definitionsmængder, og at du kender deres variation, herunder monotoniforhold.

I forhold til betragtningen i det foregående afsnit lader vi x og y bytte rolle, for at vi kan ende med sædvanlig variabelbetegnelse.

1. *Arcus tangens og Arcus cotangens*

Værdimængden for den kontinuerte funktion $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \curvearrowright \mathbb{R}$ er *hele* $\mathbb{R}$. Det følger af, at den er et interval *(Anden hovedsætning)*, og at

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \to +\infty \ \text{ for } \ y \to \frac{\pi}{2} \ \text{ fra venstre ,}$$

medens

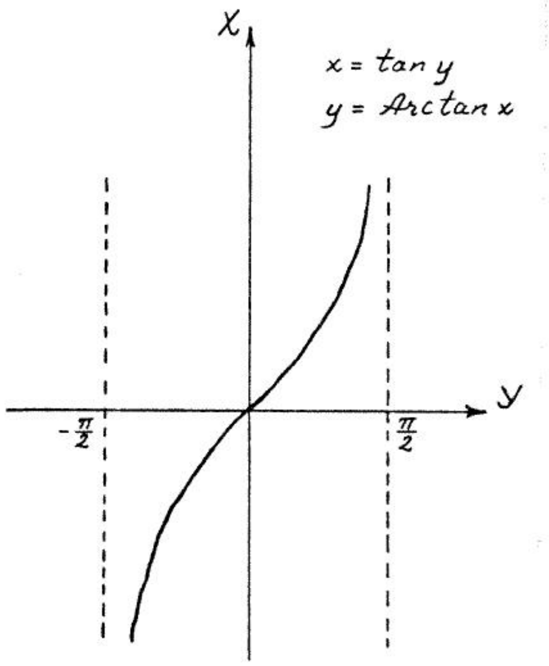
$$\tan y \to -\infty \ \text{ for } \ y \to -\frac{\pi}{2} \ \text{ fra højre .}$$

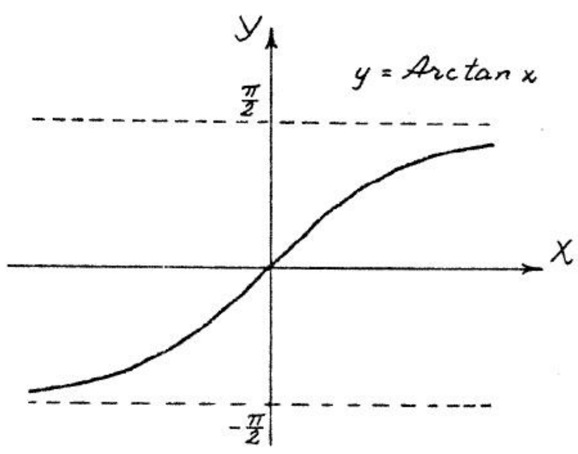
Da funktionen desuden er strengt voksende, har den en omvendt funktion $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \curvearrowright \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, kaldet *Arcus tangens*, således at der for $x \in \mathbb{R}$ og $y \in \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gælder

$$y = \mathrm{Arctan}\, x \ \Leftrightarrow \ x = \tan y \ .$$

Funktionen Arctan er kontinuert og strengt voksende med

$$\mathrm{Arctan}\, x \to \pm\frac{\pi}{2} \ \text{ for } \ x \to \pm\infty \ .$$





For givet $x \in \mathbb{R}$ er funktionsværdien $y = \operatorname{Arctan} x$ givet ved de to krav

$$\tan y = x\ , \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ,$$

medens $\arctan x$ betegner en hvilken som helst løsning til ligningen $\tan y = x$ (eller undertiden mængden af løsninger).

Analogt er $y = \operatorname{Arccot} x$ givet ved de to krav

$$\cot y = x\ , \quad y \in]0, \pi[\ ,$$

medens $\operatorname{arccot} x$ betegner en hvilken som helst løsning til ligningen $\cot y = x$. Funktionen $\operatorname{Arccot} : \mathbb{R} \curvearrowright]0, \pi[$ er således den omvendte til $\cot :]0, \pi[\curvearrowright \mathbb{R}$ og altså kontinuert og strengt aftagende.

Navnene kommer af latin: *arcus* = bue, således at arcus tangens x står for "en bue, hvis tangens er x".

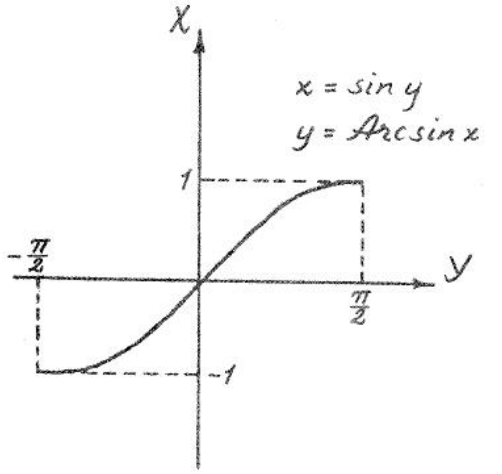
I stedet for betegnelserne Arctan og Arccot møder man også $\tan^{-1}$ og $\cot^{-1}$. Disse betegnelser er dog farlige, da der er tradition for at skrive $\tan^n x$, $\cot^n x$, $\sin^n x$, $\cos^n x$ for $(\tan x)^n$, $(\cot x)^n$, $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$.

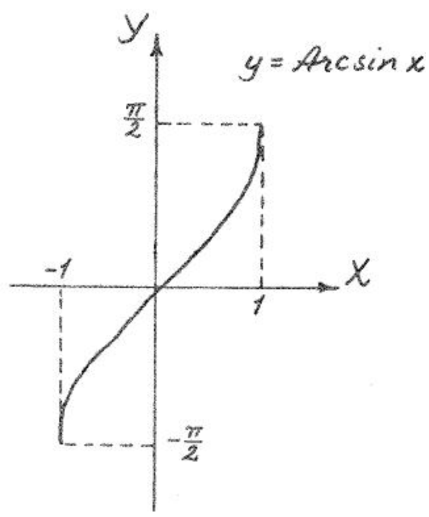
2. *Arcus sinus og Arcus cosinus*

Værdimængden for den kontinuerte og strengt voksende funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \curvearrowright \mathbb{R}$ er *hele* $[-1, 1]$. Det følger af, at den er et interval *(Anden hovedsætning)*, og at $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Der er da en omvendt funktion Arcsin: $[-1, 1] \curvearrowright [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kaldet *Arcus sinus*, således at der for $x \in [-1, 1]$ og $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gælder

$$y = \operatorname{Arcsin} x \iff x = \sin y\ .$$





Funktionen Arcsin x er kontinuert og strengt voksende med

$$\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}\ , \quad \operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}\ .$$

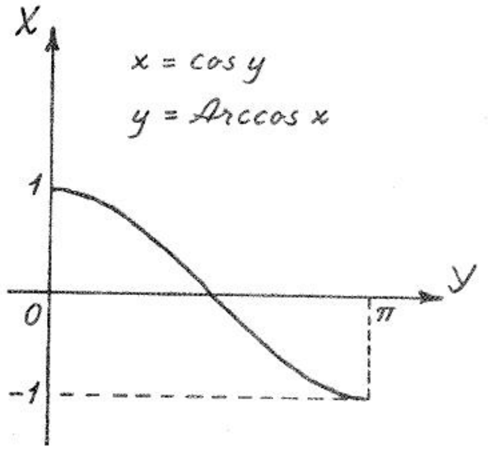
For givet $x \in [-1,1]$ er funktionsværdien $y = \operatorname{Arcsin} x$ givet ved de to krav

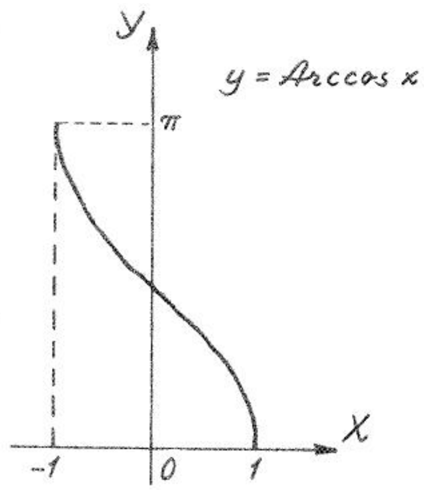
$$\sin y = x\ , \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ ,$$

medens arcsin x betegner en hvilken som helst løsning til ligningen $\sin y = x$.
Analogt er $y = \operatorname{Arccos} x$ givet ved

$$\cos y = x\ , \quad y \in [0, \pi]\ ,$$

medens arccos x betegner en hvilken som helst løsning til ligningen $\cos y = x$. Funktionen Arccos : $[-1,1] \curvearrowright [0,\pi]$ er således den omvendte til cos : $[0,\pi] \curvearrowright [-1,1]$ og altså kontinuert og strengt aftagende.





Ved geometriske anvendelser optræder ofte vinkeltal i intervallet $[0,\pi]$. Et sådant tal y kan karakteriseres ved funktionsværdien $x = \cos y \in [-1,1]$. Vi har så $y = \operatorname{Arccos} x$.
Vinklen φ mellem to egentlige vektorer $x = (x_1, \ldots, x_k)$ og $y = (y_1, \ldots, y_k)$ i $\mathbb{R}^k$ er, jf. s. I.1.3,

$$\varphi = \operatorname{Arccos} \frac{x \cdot y}{|x|\,|y|}\ .$$

Arcsin og Arccos mødes også under navnene *invers sinus* og *invers cosinus*, med betegnelserne $\sin^{-1}$ og $\cos^{-1}$, med fare for forveksling med $1/\sin$ og $1/\cos$.

Uniform kontinuitet. Tredje hovedsætning

DEFINITION. En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ af en mængde $A \subseteqq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^m$ siges at være *uniformt* eller *ligelig kontinuert*, hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \ |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ for alle } \ x, y \in A \ \text{ med } \ |y - x| < \delta \ .$$

Løst sagt er betingelsen, at $f(x)$ og $f(y)$ *ligger tæt ved hinanden*, blot x og y tilhørende A *ligger tilstrækkelig tæt ved hinanden.*

Definitionen er en ε, δ-*definition*, dvs. kravet har formen $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \ \dots$. Kravet kommer så ud på, at ethvert $\varepsilon > 0$ skal kunne afpareres med et $\delta > 0$. (Der må gerne bruges forskellige δ til forskellige ε .) Skal kravet eftervises i en konkret situation, tænker man sig givet et (hemmeligholdt) tal $\varepsilon > 0$: *lad* $\varepsilon > 0$ *være givet*, og det gælder så om at godtgøre eksistensen af et afparerende $\delta > 0$. Jf. s.II.1.2.

EKSEMPEL 5. Vil man eftervise uniform kontinuitet ud fra definitionen, er det naturligt at begynde med for *vilkårlige* $x, y \in A$ at forsøge at vurdere $|f(y) - f(x)|$ opad ved et udtryk, hvor $|y - x|$ indgår på passende vis.

Eksempelvis er funktionen $x \curvearrowright 1/x$ uniformt kontinuert i intervallet $[a, \infty[$ for vilkårligt $a \in \mathbb{R}_+$. Thi for $x, y \in [a, \infty[$ er

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x - y|}{xy} \leqq a^{-2}|y - x| \ .$$

Et givet $\varepsilon > 0$ kan følgelig afpareres med $\delta = a^2\varepsilon$.

At uniform kontinuitet er noget andet end kontinuitet, fremgår af banale eksempler:

EKSEMPEL 6. (1. udgave.) Funktionen $x \curvearrowright 1/x$, $x \in \mathbb{R}_+$, er som bekendt kontinuert, men den er *ikke uniformt kontinuert.* Der er endog *intet* $\varepsilon > 0$, der kan afpareres med et $\delta > 0$ i henhold til definitionen ! Det er nemlig klart, at tallet

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x - y|}{xy}$$

kan være stort, selv om $|x-y|$ er lille. Konkret: For vilkårligt $\delta > 0$ kan vi f.eks. bruge $y = x+\frac{1}{2}\delta$ og bemærke, at

$$\left|\frac{1}{x + \frac{1}{2}\delta} - \frac{1}{x}\right| = \frac{\frac{1}{2}\delta}{x(x + \frac{1}{2}\delta)} \to \infty \ \text{ for } \ x \to 0_+ \ .$$

Vi minder om, at et punkt $a \in A$ per definition er et kontinuitetspunkt for $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, netop hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \ |f(y) - f(a)| < \varepsilon \ \text{ for alle } \ y \in A \ \text{ med } \ |y - a| < \delta \ .$$

Hvis et tal $\varepsilon > 0$ afpareres af et $\delta > 0$ i henhold til definitionen på uniform kontinuitet, så er det åbenbart også tilfældet i henhold til den lige opskrevne betingelse, hvor a er fast.

Er f uniformt kontinuert i A, vil følgelig ethvert punkt $a \in A$ være et kontinuitets-punkt for f, dvs. f er kontinuert i A.
Vi noterer:

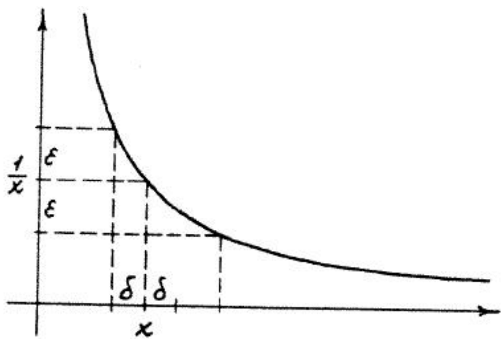
SÆTNING 2. *En uniformt kontinuert afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, er også kontinuert i A .*

BEMÆRKNING 2. At en afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, er *kontinuert*, betyder jo, at den er kontinuert i hvert punkt $x \in A$, dvs.

$$\forall x \in A \, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : |f(y) - f(x)| < \varepsilon \text{ for alle } y \in A \text{ med } |y - x| < \delta \, .$$

Forskellen fra begrebet uniform kontinuitet ligger i, at alkvantoren $\forall x \in A$ nu står *foran* eksistenskvantoren $\exists \delta \in \mathbb{R}_+$. Derfor må δ gerne afhænge både af x og ε : det er først, når x og ε er givet, at der skal eksistere et afparerende δ . Ved *uniform kontinuitet* derimod må δ *kun* afhænge af ε : når ε er givet, skal *det samme* afparerende δ kunne bruges for alle x. (Heraf ordet *uniform* eller *ligelig.*)

EKSEMPEL 6. (2.udgave). Funktionen $x \curvearrowright 1/x$, $x \in \mathbb{R}_+$, er kontinuert, men ikke uniformt kontinuert :
For givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes der til hvert $x \in \mathbb{R}_+$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at $|1/y - 1/x| < \varepsilon$ for alle $y \in \mathbb{R}_+$ med $|y - x| < \delta$. Men jo nærmere x er ved 0 , desto mindre spillerum er der for valget af δ . Man kan ikke bruge samme δ til afparering overalt.



ADVARSEL. OMBYTNING AF KVANTORER.
Ubemærket ændring af rækkefølgen af en eksistens- og en alkvantor er en hyppig årsag til fejlslutninger. Det sker naturligvis især, når udsagnene ikke er formuleret særlig præcist.

Generelt er der følgende sammenhæng:

$$(\exists a \, \forall b : \ \dots \ ) \quad \Rightarrow \quad (\forall b \, \exists a : \ \dots \ ) \, .$$

Rækkefølgen af to på hinanden følgende alkvantorer (som f.eks. $\forall x \in A \, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ i Bemærkning 1) er derimod ligegyldig. Man kan også "slå dem sammen" til $\forall (x, \varepsilon)$, $x \in A$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Tilsvarende gælder to eksistenskvantorer.

EKSEMPEL 7. En afbildning $f : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, siges at være

en *isometri* eller *afstandsbevarende*, hvis

$$\forall x, y \in A : \ |f(y) - f(x)| = |y - x| \, .$$

afstandsformindskende, hvis

$$\forall x, y \in A : \ |f(y) - f(x)| \leqq |y - x| \, .$$

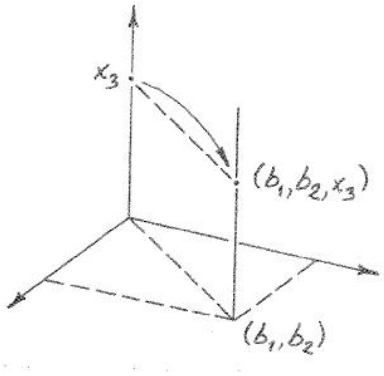
en *Lipschitz afbildning*, hvis

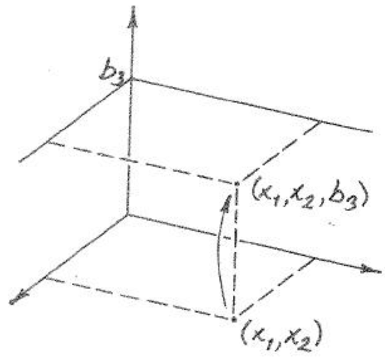
$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in A: \ |f(y) - f(x)| \leqq K|y - x| \ .$$

Det er klart, at en afbildning af en af disse typer er uniformt kontinuert. Den er nemlig en Lipschitz afbildning, og et givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan så afpareres med $\delta = \varepsilon / K$. (Navnet henviser til R. LIPSCHITZ, tysk matematiker, 1832-1903.)

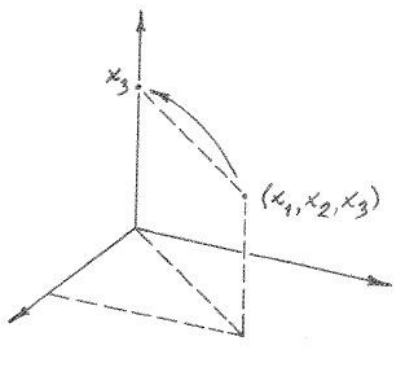
Simple eksempler:

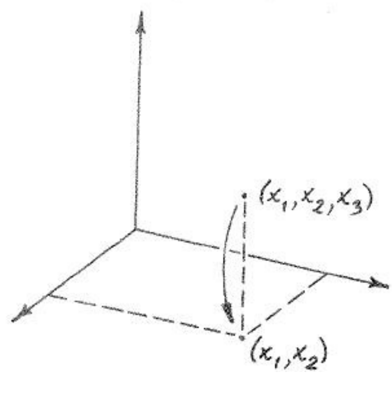
En *indlejring* som $x_3 \curvearrowright (b_1, b_2, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$, med faste $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, eller $(x_1, x_2) \curvearrowright (x_1, x_2, b_3)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, med fast $b_3 \in \mathbb{R}$, er afstandsbevarende.





En *projektion* $x = (x_1, \ldots, x_k) \curvearrowright x_i$, $x \in \mathbb{R}^k$, og ligeledes f.eks. $x = (x_1, x_2, x_3) \curvearrowright (x_1, x_2)$, $x \in \mathbb{R}^3$, er afstandsformindskende.





EKSEMPEL 8. En funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$, der er differentiabel i hvert punkt af et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, er jo altid kontinuert i I , (IV.§2. Sætning 1), men den er *ikke* i almindelighed uniformt kontinuert i I , (se f.eks. Eksempel 6). Dog vil f være uniformt kontinuert, hvis f' er *begrænset* på I , dvs. hvis $\exists K \in \mathbb{R}_+ \forall x \in I : |f'(x)| \leqq K$. Thi for vilkårlige $x, y \in I$, $x < y$, findes ifølge *Differentialregningens middelværdisætning* (se IV.§2) et $\xi \in \,]x, y[$, således at $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$, og så er

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \, |y - x| \leqq K|y - x| \ ,$$

altså er f en Lipschitz afbildning (Eksempel 7).

Eksempelvis er $\sin : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ og $\cos : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ uniformt kontinuerte.

EKSEMPEL 9. Afstanden $d(x, A) \in [0, \infty[$ *fra et punkt* $x \in \mathbb{R}^k$ *til en mængde* $A \subseteqq \mathbb{R}^k$, $A \neq \emptyset$, defineres ved

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} .$$

Vi skal se, at der for vilkårlige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^k$ gælder

$$|d(x_1, A) - d(x_2, A)\,| \leqq d(x_1, x_2) .$$

BEVIS. For hvert $y \in A$ er

$$d(x_1, A) \leqq d(x_1, y) \leqq d(x_1, x_2) + d(x_2, y) ,$$

altså

$$d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \leqq d(x_2, y) .$$

Men så er

$$d(x_1, A) - d(x_1, x_2) \leqq d(x_2, A) ,$$

dvs.

$$d(x_1, A) - d(x_2, A) \leqq d(x_1, x_2) .$$

Og da vi kan lade x_1 og x_2 bytte roller, gælder også

$$d(x_2, A) - d(x_1, A) \leqq d(x_1, x_2) .$$

Resultatet kan udtrykkes: For givet A er $x \curvearrowright d(x, A)$, $x \in \mathbb{R}^k$, en afstandsformindskende funktion. Specielt altså uniformt kontinuert (Eksempel 7).

Vor definition på *kontinuitet* går som nævnt (s. III.1.6) tilbage til BOLZANO og CAUCHY omkring 1820. Formuleringen var dog ikke så klar, at man blev opmærksom på *uniform kontinuitet* som et afvigende begreb før omkring 1870. Definitionen skyldes E.HEINE (tysk matematiker), som tillige viste Hovedsætning 3.a nedenfor.

At den manglende skelnen ikke førte til alvorlige fejl, beror nok på *Tredje hovedsætning:*

HOVEDSÆTNING 3.a. *Enhver kontinuert funktion* $f : [a, b\,] \curvearrowright \mathbb{R}$ *defineret på et afsluttet, begrænset interval* $[a, b\,]$ *er uniformt kontinuert.*

HOVEDSÆTNING 3.b. *Enhver kontinuert afbildning* $f : C \curvearrowright \mathbb{R}^m$ *defineret på en afsluttet, begrænset mængde* $C \subseteqq \mathbb{R}^k$ *er uniformt kontinuert.*

Hovedsætning 3.a er åbenbart indeholdt i Hovedsætning 3.b, der vil blive bevist i Matematik 2 MA. Sætningerne vil blive brugt på afgørende punkter i det følgende, således ved indførelsen af integralet $\int_a^b f(x)dx$ i næste kapitel.

IV. DIFFERENTIAL- OG INTEGRALREGNING I ÉN VARIABEL

Hovedindholdet af dette kapitel regnes kendt fra gymnasiet, men medtages for fuldstændigheds skyld. Der er derfor kun få illustrerende eksempler.

§1. Integralet $\int_a^b f(x)dx$

Vi indfører integralet $\int_a^b f(x)dx$ af en *kontinuert* (vektor)funktion $f : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$. Tilfældet $m = 1$ er det centrale.

Definition af integralet $\int_a^b f(x)dx$

Lad $f : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være en kontinuert (vektor)funktion defineret på et afsluttet, begrænset interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Ved en *middelsum* for f hørende til en inddeling D af $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b ,$$

forstås en vektor $M \in \mathbb{R}^m$, der kan skrives på formen

$$M = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

hvor $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, medens ξ_i er et tal i det i-te delinterval $[x_{i-1}, x_i]$. Ved *finheden* af inddelingen D forstås

$$\max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\} .$$

Vi skal se, at "*middelsummerne konvergerer mod en grænsevektor* $I \in \mathbb{R}^m$ *for finheden gående mod* 0." Den præcise mening fremgår af følgende *Hovedsætning*, hvor konvergensen fremstår som en ε, δ-egenskab:

Hovedsætning. *Lad $f : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være en kontinuert (vektor)funktion. Der findes da en og kun en vektor $I \in \mathbb{R}^m$, der opfylder følgende krav:*

"$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta \in \mathbb{R}_+ :$

$$|I - M| = |I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| < \varepsilon$$

for enhver middelsum $M = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ for f hørende til enhver inddeling D af $[a, b]$ med finhed $< \delta$ ".

Løst sagt: En middelsum for f ligger *tæt ved* I, blot den hører til en *tilstrækkelig fin* inddeling af $[a, b]$.

DEFINITION. Den ved Hovedsætningen bestemte vektor $I \in \mathbb{R}^m$ (grænsevektoren for middelsummerne) kaldes *integralet* (eller *det bestemte integral*) *af* f *over* $[a, b]$ og betegnes $\int_a^b f(x)dx$. (Bogstavet x kan udskiftes med et andet.)

EKSEMPEL 1. For en konstant funktion $x \curvearrowright c \in \mathbb{R}^m$, $x \in [a, b]$, er

$$M = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$$

for enhver inddeling D og ethvert valg af mellempunkter ξ_i . Følgelig er

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)\ .$$

NB. Definitionen, og i tilfældet $m = 1$ ligeledes Sætning 2 nedenfor, karakteriserer vektoren eller tallet $\int_a^b f(x)dx$, men kan kun undtagelsesvis bruges direkte til bestemmelse af den eksakte værdi. - Den vigtigste metode hertil beror på *Korollar til Differential- og integralregningens hovedsætning* i §3.
At integralet er grænse for summer, er derimod baggrunden for dets optræden i mangfoldige anvendelser.

Hovedsætningen føres let tilbage til tilfældet $m = 1$ (som er velkendt fra gymnasiet). Thi koordinaterne til en middelsum $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ for $f = (f_1, \dots, f_m)$ er middelsummer

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i\,, \quad \dots \quad , \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i$$

for koordinatfunktionerne $f_1, \dots, f_m$ for f , svarende til samme inddeling D og samme mellempunkter ξ_i . Middelsummerne for f vil derfor konvergere mod $I = (I_1, \dots, I_m) \in \mathbb{R}^m$, hvis og kun hvis middelsummerne for f_j konvergerer mod $I_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots m$. (Sml. II.§2. Sætning 3, *Koordinatvis grænseovergang*, med bevis.)

Af denne betragtning fremgår tillige

SÆTNING 1. KOORDINATVIS INTEGRATION. *For en kontinuert funktion* $f = (f_1, \dots, f_m)$: $[a, b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$ *gælder*

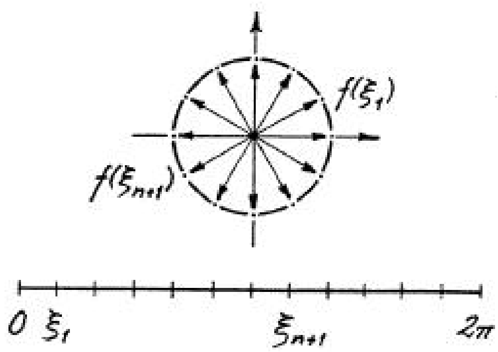
$$\int_a^b f(x)dx = \Big(\int_a^b f_1(x)dx\,, \quad \dots \quad , \int_a^b f_m(x)dx\Big)\ .$$

EKSEMPEL 2. Opfattes vektorfunktionen $f = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \curvearrowright \mathbb{R}^2$ geometrisk, er det klart, at nulvektoren $\mathbf{o} = (0,0)$ er en middelsum hørende til så fine inddelinger af $[0, 2\pi]$, man vil, f.eks. er

$$\sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathbf{o} \ ,$$

når $\xi_i = x_i = i\pi/n$, $i = 1, \ldots, 2n$, idet leddene hæver hinanden to og to (bemærk, at $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \pi/n$ for alle i). Men så må der gælde

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \mathbf{o} = (0,0) \ .$$



Da vektoren $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ har koordinaterne $\int_0^{2\pi} \cos x\ dx$ og $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx$, følger

$$\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0\ , \quad \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0\ .$$

I almindelighed bruges koordinatvis integration naturligvis den modsatte vej.

Vi vil gennemføre beviset for Hovedsætningen s. 1.

Entydigheden er oplagt: Der kan højst være én vektor $I \in \mathbb{R}^m$ som anført. Hvis I' og I'' begge har egenskaben, kan de nemlig for vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ approksimeres med en og samme middelsum $M \in \mathbb{R}^m$ med fejl $< \frac{\varepsilon}{2}$, hvorfor

$$|I'' - I'| \leqq |I'' - M| + |M - I'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Men så er $|I'' - I'| = 0$, altså $I' = I''$. (Sml. sætning og bevis om *Entydighed af grænsepunkt*, II.§1. Sætning 1.)

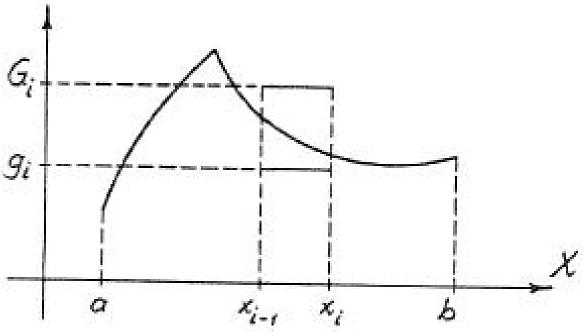
Eksistensdelen af Hovedsætningen bygger vi på bemærkningen ovenfor, at det er nok at se på tilfældet $m = 1$. Og her begynder vi med at fremskaffe en *kandidat* til tallet I. Bemærk, at vi direkte anvender *Supremumegenskaben*, og at vi afgørende trækker på *Tredje hovedsætning* om *uniform* kontinuitet (III.§2. Hovedsætning 3.a):

Lad $f : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}$ være en kontinuert *reel* funktion defineret på et afsluttet, begrænset interval $[a, b]$.

Da f er begrænset (III.§2. Hovedsætning 1.a), eksisterer der for enhver inddeling D af intervallet $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b\ ,$$

både oversummer og undersummer for f. En *oversum* S hørende til D er et tal, der



kan skrives på formen

$$S = \sum_{i=1}^{n} G_i \Delta x_i \ ,$$

hvor $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, og hvor G_i er et overtal for

$$\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ ,$$

dvs. $f(x) \leqq G_i$ for alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Og en *undersum* s hørende til D er et tal, der kan skrives på formen

$$s = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i \ ,$$

hvor $g_i \leqq f(x)$ for alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Bemærk, at en oversum S , der hører til D , også hører til enhver videredeling af D , dvs. en inddeling, der kan fås ved at indskyde flere delepunkter. Thi dette kan jo gøres successivt, og når der indskydes et nyt delepunkt x' mellem x_{i-1} og x_i , kan bidraget $G_i \Delta x_i = G_i(x_i - x_{i-1})$ spaltes

$$G_i(x_i - x_{i-1}) = G_i(x' - x_{i-1}) + G_i(x_i - x') \ .$$

Tilsvarende gælder naturligvis undersummer.

Det er klart, at $s \leqq S$, når s og S er henholdsvis en under- og en oversum for f hørende til samme inddeling D , thi skrives s og S på den angivne form, er jo $g_i \leqq G_i$, $i = 1, \ldots, n$. Men det gælder også, at

$$s \leqq S \ ,$$

når s er en hvilken som helst undersum for f og S en hvilken som helst oversum. Thi der findes jo inddelinger D' og D'', hvortil henholdsvis s og S hører. Men så hører s og S også til en og samme inddeling D , nemlig den der fremkommer ved at benytte samtlige i D' og D'' forekommende delepunkter. Det er jo en videredeling af begge.

Mængden $A \subseteqq \mathbb{R}$ af alle undersummer s for f er opad begrænset, idet endda enhver oversum S for f som lige vist er et overtal for A ,

$$\forall s \in A : s \leqq S \ .$$

Mængden A af undersummer har følgelig *(Supremumegenskaben)* en øvre grænse, dvs. et mindste overtal $\sup A \in \mathbb{R}$ (men ikke i almindelighed et største element $\max A$!), som vi vil betegne $\underline{I}(f)$. Da

$$\underline{I}(f) = \sup A \leqq S$$

for enhver oversum S, er $\underline{I}(f)$ et undertal for mængden $B \subsetneqq \mathbb{R}$ af oversummer for f og dermed mindre eller lig det største undertal $\inf B$ for B, som vi betegner $\bar{I}(f)$. Altså

$$\underline{I}(f) \leqq \bar{I}(f) .$$

Vi skal se, at $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$, dvs. $\bar{I}(f) - \underline{I}(f) = 0$. Det gør vi ved at vise

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \ \bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon .$$

Her benyttes afgørende, at f er *uniformt* kontinuert, ifølge III.§2. Hovedsætning 3.a.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet og vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$ i henhold til den uniforme kontinuitet af f, således at

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/(b-a) \ \text{ for alle } x', x'' \in [a,b] \text{ med } |x'' - x'| < \delta .$$

Betragt nu en inddeling D af intervallet $[a,b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < \ldots < x_n = b ,$$

valgt således, at inddelingens finhed $\max\{\Delta x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ er $< \delta$. I øvrigt kan D være vilkårlig.

Vi danner den mindst mulige oversum $S = \sum_{i=1}^n G_i \Delta x_i$ hørende til D ved som G_i at benytte størsteværdien (III.§2. Hovedsætning 1.a) for f i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$, altså

$$G_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} .$$

Og analogt den størst mulige undersum $s = \sum_{i=1}^n g_i \Delta x_i$ hørende til D, med

$$g_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} .$$

Da nu hvilke som helst to punkter i $[x_{i-1}, x_i]$ har afstand $< \delta$, slutter vi, at $G_i - g_i < \varepsilon/(b-a)$, $i = 1, \ldots, n$, og dermed, at

$$S - s = \sum_{i=1}^n (G_i - g_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon .$$

Og da $s \leqq \underline{I}(f) \leqq \bar{I}(f) \leqq S$, slutter vi, at $\bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leqq S - s < \varepsilon$.

Hermed er godtgjort, at $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Den fælles værdi I er så det eneste tal, der skiller undersummer fra oversummer.

Nu er målet i sigte. Vi skal se, at tallet $I = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ er, hvad vi søger.

Lad nemlig (påny!) et tal $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet og vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$ som før. Vi vil vise, at det afparerer ε som beskrevet i Hovedsætningen.

Til en vilkårlig inddeling D af $[a,b]$ med finhed $< \delta$ findes, som vi så ovenfor, en tilhørende undersum s og en tilhørende oversum S, således at $S - s < \varepsilon$. For enhver middelsum M for f hørende til D gælder naturligvis $s \leqq M \leqq S$, og da også $s \leqq I \leqq S$, slutter vi, at $|I - M| < \varepsilon$.

Hermed er Hovedsætningen bevist.

SÆTNING 2. *For en kontinuert reel funktion $f : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}$ gælder*

$$s \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq S$$

for enhver undersum s og enhver oversum S for f, og $\int_a^b f(x)dx$ er det eneste tal, der skiller undersummerne fra oversummerne.

BEVIS. $\int_a^b f(x)dx$ er defineret som det tal, der passer i Hovedsætningen, og det gør som lige vist tallet $I = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

BEMÆRKNING 1. Så længe man kun betragter funktioner f med værdier i $\mathbb{R}$, kunne man *definere* integralet $\int_a^b f(x)dx$ ved karakteriseringen i Sætning 2. Men for vektorfunktioner kan man ikke tale om over- og undersummer, og ved kurveintegraler $\int_\gamma \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$, som vi skal møde i VI.§3, har det heller ingen mening.

BEMÆRKNING 2. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ. (tysk filosof, matematiker m.m., 1646-1716), som ved siden af Isaac NEWTON (engelsk fysiker og matematiker, 1643-1727) står som differential- og integralregningens skaber, definerede integralet som en sum og indførte endog (29.10.1675) integraltegnet $\int$ som et stiliseret S for *summatio* (nylatin). I 1700-tallet opfattede man derimod integration som omvendt operation til differentiation (jf. §3. Bemærkning 2). CAUCHY definerer påny integral ud fra summer (*Calcul infinitésimal* 1823), og det har siden vist sig at være det frugtbare. (Helt konkret bruger Cauchy vore middelsummer, blot med ξ_i = venstre endepunkt x_i, og *beviser* eksistensen af en grænseværdi, som så betegnes $\int_a^b f(x)dx$.)
En nyudvikling af integralbegrebet, startet i 1902 af Henri LEBESGUE (fransk matematiker, 1875-1941), har fået umådelig betydning i vort århundredes matematik, især inden for funktionalanalyse, harmonisk analyse og sandsynlighedsregning. *Lebesgue integralet* lærer man om i Matematik 2 MA.

Sætninger om $\int_a^b f(x)dx$

SÆTNING 3. INTEGRALREGNINGENS MIDDELVÆRDISÆTNING. *For en kontinuert reel funktion $f : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}$ er*

$$g \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq G\,,$$

hvor g er mindsteværdien og G er størsteværdien for f i $[a,b]$.

Sætningens navn kommer af, at $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$ kaldes *middelværdien* for funktionen f i $[a,b]$.

BEVIS. Umiddelbart. Da $g(b-a)$ er en undersum for f i $[a,b]$, i øvrigt hørende til enhver inddeling D af $[a,b]$, og $G(b-a)$ er en oversum, har vi ifølge Sætning 2:

$$g(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq G(b-a) .$$

SÆTNING 4. *For en kontinuert funktion* $f : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$ *er*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx .$$

BEVIS. Idet $|f|$ er en kontinuert reel funktion, har højre side mening. - Uligheden følger af, at der for enhver inddeling D af $[a,b]$ og ethvert valg af mellempunkter $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gælder

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i .$$

Den samme ulighed må så også gælde “i grænsen”. (Antag nemlig “ $>$ ” i den ulighed, vi skal vise, og sæt $\varepsilon =$ den halve differens. Blot inddelingen D er tilstrækkelig fin, måtte der så gælde “ $>$ ” også i den nederste ulighed, idet venstre side afviger mindre end ε fra $|\int_a^b f(x)dx|$, og højre side mindre $< \varepsilon$ fra $\int_a^b |f(x)|dx$. Modstrid.)

BEMÆRKNING 3. For en kontinuert funktion $f : J \curvearrowright \mathbb{R}^m$ på et interval J er det bekvemt at tillægge $\int_a^b f(x)dx$ en mening for vilkårlige $a, b \in J$, nemlig integralet af restriktionen af f til $[a,b]$ når $a < b$, og videre

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} -\int_b^a f(x)dx & \text{når } a > b \\ 0 & \text{når } a = b . \end{cases}$$

SÆTNING 5. INDSKUDSREGLEN. *Når* $f : J \curvearrowright \mathbb{R}^m$ *er kontinuert på et interval* $J \subseteqq \mathbb{R}$ *og* $a, b, c \in J$, *gælder*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

BEVIS. Vi nøjes med tilfældet $a < b < c$. (I andre beliggenhedsmuligheder kan man herefter umiddelbart verificere ligningen.) For kortheds skyld betegnes de tre integraler I_{ac}, I_{ab} og I_{bc}. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges δ_{ac}, δ_{ab} og δ_{bc} i henhold til definitionen på I_{ac}, I_{ab} og I_{bc}. Vi sætter $\delta = \min\{\delta_{ac}, \delta_{ab}, \delta_{bc}\}$ og vælger en inddeling D af $[a,c]$ af finhed $< \delta$ og med b som et af delepunkterne. Idet vi nu vælger et mellempunkt ξ_i i hvert delinterval $[x_{i-1}, x_i]$, har vi med let forståelig symbolik

$$\sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_b^c f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

kort

$$M_{ac} \quad = \quad M_{ab} \quad + \quad M_{bc} ,$$

og dermed

$$I_{ac} - I_{ab} - I_{bc} = I_{ac} - M_{ac} + M_{ab} - I_{ab} + M_{bc} - I_{bc} \ ,$$

altså

$$|I_{ac} - I_{ab} - I_{bc}| \leqq |I_{ac} - M_{ac}| + |M_{ab} - I_{ab}| + |M_{bc} - I_{bc}| < 3\varepsilon \ .$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ var vilkårligt, følger $I_{ac} - I_{ab} - I_{bc} = 0$, dvs. $I_{ac} = I_{ab} + I_{bc}$.

BEMÆRKNING 4. Sætning 3 og 5 vil blive brugt i beviset for *Differential- og integralregningens hovedsætning* (§3). *Derefter* har vi to muligheder for at vise "sætninger om $\int_a^b f(x)dx$": Vi kan bruge karakterisering ud fra summer, eller vi kan udnytte sætninger om ubestemt integration (§4). Et resultat, der kan fås på begge måder er

LINEARITETSSÆTNING. Når $f, g : J \curvearrowright \mathbb{R}_m$ er kontinuerte på et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, og når $c \in \mathbb{R}$ og $a, b \in J$, gælder

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx \ = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

og

$$\int_a^b c\, f(x)dx \ = \ c \int_a^b f(x)dx \ .$$

BEVIS ud fra definition. Vi kan nøjes med tilfældet $a < b$. Da der for enhver inddeling D af $[a, b]$ og ethvert valg af mellempunkter $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gælder

$$\sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) + g(\xi_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

og

$$\sum_{i=1}^{n} c\, f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ ,$$

fås de ønskede ligninger ved "gå til grænsen". (Som i beviset for Sætning 4 vil antagelsen af en ulighed " $<$" eller " $>$" føre til modstrid.)

Tager man $c \in \mathbb{R}^m$ i stedet for $c \in \mathbb{R}$, finder man med ganske tilsvarende bevis, at

$$\int_a^b (c \cdot f(x))dx \ = \ c \cdot \int_a^b f(x)dx \ .$$

Vi nævner endelig:

For kontinuerte reelle funktioner $f, g : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}$, hvor $f(x) \leqq g(x)$ for alle $x \in [a, b]$, gælder

$$\int_a^b f(x)dx \ \leqq \int_a^b g(x)dx \ .$$

BEVIS. Da 0 er en undersum for $g - f$ i $[a, b]$, har vi

$$0 \ \leqq \int_a^b (g(x) - f(x))dx \ = \int_a^b g(x)dx \ - \int_a^b f(x)dx \ .$$

§2. Differentiabilitet i én variabel

Differentiabilitetspunkter. Differentialkvotient

Fra og med CAUCHYs *Leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) defineres og behandles differentiabilitet og differentialkvotient for funktioner af én reel variabel på grundlag af begrebet grænseværdi, således som vi har indført det i II.§1. (Første gang i historien, bogstaverne ε, δ bliver brugt, som vi gør det, er i et bevis i *Calcul infinitésimal* vedrørende differentialkvotienter! Oeuvres complètes II.4 s.44-45.)

Vi gentager definitionen fra II.§1 (dog en anelse mindre pertentligt):
Lad $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ og lad $a \in I$. Vi sætter

$$\Delta x = x - a \quad \text{og} \quad \Delta f = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) .$$

Differenskvotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

er så defineret for $x \in I \setminus \{a\}$, resp. for $\Delta x \in (I - a) \setminus \{0\}$.

DEFINITION. Funktionen $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ siges at være *differentiabel i punktet* $a \in I$ med *differentialkvotienten* $f'(a) = Df(a) = c \in \mathbb{R}^m$, hvis

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to c \ \text{ for } \ \Delta x \to 0 .$$

Vi minder om, at kravet (ifølge II.§4. Eksempel 1) er ensbetydende med, at

$$\Delta f = c\Delta x + o(\Delta x) \ \text{ for } \ \Delta x \to 0 .$$

Når a er et indre punkt af I , er kravet desuden (ifølge III.§1. Eksempel 5) ensbetydende med, at

$$\Delta f = c\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x ,$$

hvor ε er en ε-funktion.

DEFINITION. En funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, siges at være *differentiabel* (i I), hvis den er differentiabel i hvert punkt $a \in I$.

I bekræftende fald vil vi ved *den afledede* af f forstå funktionen $Df = f' : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, hvis værdi i hvert punkt $x \in I$ er differentialkvotienten $Df(x) = f'(x)$ af f i x .

For f' eller $f'(x)$ skrives også $\frac{df}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ samt tillige $\frac{dy}{dx}$, når tal x og y i en undersøgelse er koblet med betingelsen $y = f(x)$.

De sidste betegnelser afspejler LEIBNIZ' opfattelse af differentialkvotienten som en *kvotient* mellem to “uendelig små størrelser” (infinitesimaler). Denne opfattelse er forlængst forladt, men overlever i mere løse betragtninger.

SÆTNING 1. *Hvis $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er differentiabel i et punkt a i intervallet I, så er a et kontinuitetspunkt for f.*
Hvis f er differentiabel i I, så er f også kontinuert i I.

BEVIS. Det er nok at vise den første påstand. Antag da, at f er differentiabel i punktet $a \in I$. Vi skal så vise, at a er et kontinuitetspunkt for f, hvilket (ifølge III.§1. Bemærkning 2) kommer ud på, at

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) \to \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0 .$$

Men det er oplagt, idet

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + o(\Delta x) = f'(a)\Delta x + o(1) \to \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m \text{ for } \Delta x \to 0 .$$

SÆTNING 2. REGNING MED DIFFERENTIABLE FUNKTIONER. *Lad $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, $g : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ og $\alpha : I \curvearrowright \mathbb{R}$ være differentiable i samme punkt a i intervallet I. Da er*

$$f \pm g\,,\ f \cdot g\,,\ \alpha f$$

alle differentiable i a, og forudsat $\alpha(a) \neq 0$ gælder det samme for f/α.
For differentialkvotienterne gælder de velkendte formler

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \\
(\alpha f)'(a) &= \alpha'(a) f(a) + \alpha(a) f'(a) \\
\left(\frac{f}{\alpha}\right)'(a) &= \frac{\alpha(a) f'(a) - f(a)\alpha'(a)}{(\alpha(a))^2} .
\end{aligned}$$

Beviset rummer ingen overraskelser. Man kan kopiere fra gymnasiebøger.

EKSEMPEL 1. Det følger trivielt af definitionen, at en konstant funktion $x \curvearrowright c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}$, er differentiabel med $dc/dx = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$. Med kinematiske ord (jf. s.II. 1.10): Et punkt, der ligger stille, har hastigheden $\mathbf{o}$.
Det følger ligeledes trivielt af definitionen, at den identiske funktion $x \curvearrowright x$, $x \in \mathbb{R}$, er differentiabel med $dx/dx = 1$.
Af Sætning 2 fremgår så, at et polynomium P i én variabel er differentiabel i hele $\mathbb{R}$, medens en rational funktion P/Q i én variabel er differentiabel i hvert af sine definitionsintervaller. (Jf. III.§1. Eksempel 3.)

Sætning 3. KædeRegel. *(Differentiation af sammensat funktion.) Lad I og J være intervaller på $\mathbb{R}$ og lad $f : I \curvearrowright J$ og $g : J \curvearrowright \mathbb{R}^m$. Antag, at f er differentiabel i et punkt $t_0 \in I$, og at g er differentiabel i billedpunktet $x_0 = f(t_0)$. Så er $g \circ f$ differentabel i t_0 med*

$$(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0))\, f'(t_0) \; .$$

Formlen gengives ofte $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$, men det skal jo forstås på rette vis.

BEVIS. Da g er differentiabel i x_0 , har vi for alle $\Delta x \in \mathbb{R}$ med $x_0 + \Delta x \in J$, at

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \; ,$$

hvor ε er kontinuert i 0 med $\varepsilon(0) = o \in \mathbb{R}^m$.

For vilkårligt $\Delta t \neq 0$ med $t_0 + \Delta t \in I$ går vi ind i denne ligning med

$$\Delta x = \Delta f = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

og finder så

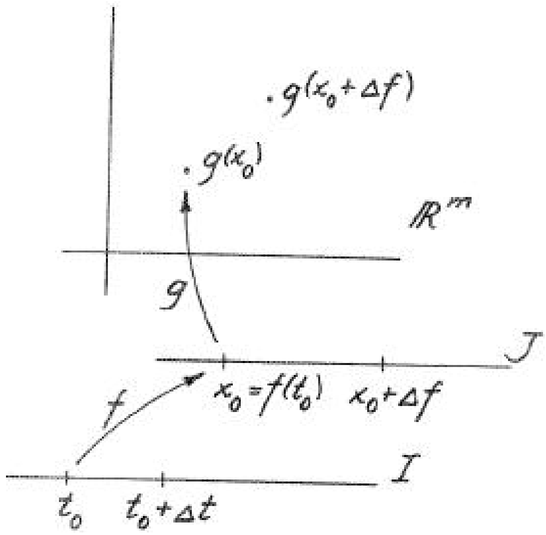
$$\begin{aligned}\Delta(g \circ f) &= g(f(t_0 + \Delta t)) - g(f(t_0)) \\ &= g(x_0 + \Delta f) - g(x_0) \\ &= g'(x_0)\Delta f + \varepsilon(\Delta f)\Delta f \; ,\end{aligned}$$

altså

$$\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta t} = (g'(x_0) + \varepsilon(\Delta f))\frac{\Delta f}{\Delta t} \; .$$

For $\Delta t \to 0$ har vi imidlertid $\Delta f \to 0$ (Sætning 1) og dermed $\varepsilon(\Delta f) \to o \in \mathbb{R}^m$ (III.§1. Bemærkning 6), således at

$$\frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta t} \to g'(x_0) f'(t_0) \; .$$



Sætning 4. Koordinatvis differentiation. *En vektorfunktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$: $I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på et interval $I \subsetneqq \mathbb{R}$ er differentiabel i et punkt $a \in I$, hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne f_i er det. I bekræftende fald gælder*

$$f'(a) = ({f_1}'(a), \ldots, {f_m}'(a)) \; .$$

BEVIS. Se II.§2. Eksempel 2, hvor sætningen er vist som eksempel på *Koordinatvis grænseovergang*, der her anvendes på differenskvotienten $\Delta f / \Delta x$.

Medens de foregående sætninger kun bygger på differentiabilitetsdefinitionen, trækker vi nu på III.§2. Sætning 1 om *Omvending af funktion* (og dermed på Anden hovedsætning om kontinuerte funktioner):

Lad $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ være en kontinuert og strengt voksende (resp. aftagende) funktion defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$. Værdimængden $f(I)$ er da et interval J, og den omvendte funktion $f^{-1} : J \curvearrowright \mathbb{R}$ er igen strengt voksende (resp. aftagende) og kontinuert.

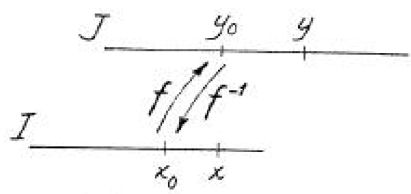
SÆTNING 5. DIFFERENTIATION AF OMVENDT FUNKTION. *I den netop anførte situation gælder:*

Hvis f er differentiabel i et punkt $x_0 \in I$ med $f'(x_0) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_0 = f(x_0)$ med

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0) \ .$$

Formlen gengives ofte $\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$, men det skal jo forstås på rette vis.

BEVIS. For hvert $y \in J \setminus \{y_0\}$ er



$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \quad \text{og} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

reciprokke, når vi sætter $x = f^{-1}(y)$.

Og for $y \to y_0$ fra $J \setminus \{y_0\}$ har vi jo $x \to x_0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$, idet f^{-1} er kontinuert i y_0. Så hvis f er differentiabel i x_0, har vi ifølge Sætning om grænseovergang med sammensat funktion (II.§2. Sætning 1), at

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \ \text{ for } \ y \to y_0 \ \text{ fra } \ J \setminus \{y_0\} \ ,$$

og dermed

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \to 1/f'(x_0) \ \text{ for } \ y \to y_0 \ \text{ fra } \ J \setminus \{y_0\} \ ,$$

forudsat $f'(x_0) \neq 0$.

EKSEMPEL 2. DIFFERENTIATION AF ARCUS FUNKTIONERNE. Vi minder om indførelsen af Arcus funktionerne i III.§2 og går endvidere ud fra, at de trigonometriske funktioners differentiabilitetsforhold er kendt.

I forhold til Sætning 5 lade vi x og y bytte rolle. Desuden udelades indeks 0, idet betegnelserne x_0 og y_0 kun blev indført af hensyn til beviset.

1. Sætning 5 kan anvendes med $f = \tan : \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ \curvearrowright \mathbb{R}$.

Da tan er differentiabel i det vilkårlige punkt $y \in \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ med

$$\tan'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y > 0 \ ,$$

er den omvendte funktion Arctan differentiabel i punktet $x = \tan y$ med

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

Her kan x være et hvilketsomhelst punkt i $\mathbb{R}$.
Tilsvarende ses, at Arccot er differentiabel i hvert punkt $x \in \mathbb{R}$ med

$$\operatorname{Arccot}'(x) = -\frac{1}{1 + x^2} \ .$$

2. Sætning 5 kan anvendes med $f = \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \curvearrowright \mathbb{R}$.
Da sin er differentiabel i det vilkårlige punkt $y \in \ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ med

$$\sin'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \ > 0 \ ,$$

er den omvendte funktion Arcsin differentiabel i punktet $x = \sin y$ med

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

Her kan x være et hvilketsomhelst punkt i $]-1, 1[$.
Tilsvarende ses, at Arccos er differentiabel i hvert punkt $x \in \ ]-1, 1[$ med

$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

NB. Arcsin og Arccos er *ikke* differentiable i endepunkterne -1 og 1. Her har graferne dog lodret (halv)tangent.

Differentialregningens middelværdisætning

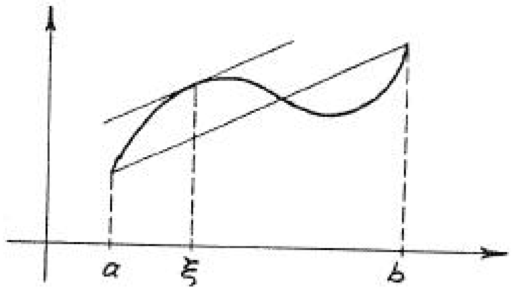
Ovenfor har vi beskæftiget os med differentiabilitet i enkelte punkter. Middelværdisætningen derimod forudsætter differentiabilitet i et *interval* $[a, b]$, dvs. differentiabilitet i *hvert* punkt af intervallet. (I endepunkterne kan man dog nøjes med kontinuitet.)

Den afgørende ingrediens i beviset er Hovedsætning 1.a om kontinuerte funktioner. (III.§2.)

SÆTNING 6. DIFFERENTIALREGNINGENS MIDDELVÆRDISÆTNING. *Når $f : [a, b] \curvearrowright \mathbb{R}$ er differentiabel i hvert $x \in \ ]a, b[$ og kontinuert i a og b, så findes der et punkt $\xi \in]a, b[$, således at*

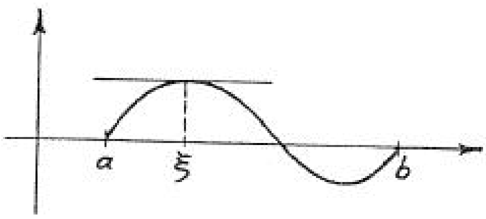
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Den geometriske tolkning vedrørende sekanthældning og tangenthældning for grafen er oplagt.



ADVARSEL. Middelværdisætningen omhandler en funktion med værdier i $\mathbb{R}$. For en funktion $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}^m$ kan sætningen anvendes på de enkelte koordinatfunktioner, men de fremkomne $\xi_1, \ldots, \xi_m \in]a,b[$ er normalt ikke sammenfaldende. - Banalt eksempel: $f = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \curvearrowright \mathbb{R}^2$.

BEVIS. 1° Vi betragter først specialtilfældet, hvor $f(a) = f(b) = 0$. Påstanden er her, at der findes et $\xi \in]a,b[$, hvor $f'(\xi) = 0$. (*Rolles sætning*, vist 1691 af Michel ROLLE, fransk matematiker.)



Ifølge Hovedsætning 1.a. har $f(x)$ i $[a,b]$ både en størsteværdi G og en mindsteværdi g. Er $g = G$, er funktionen konstant, og $f'(x) = 0$ i hvert punkt. Er $g < G$, kan g og G jo ikke begge være 0, og mindst en af værdierne antages da i det indre $]a,b[$; eksempelvis findes der et $\xi \in]a,b[$, hvor $f(\xi) = G$.

Man indser nu, at $f'(\xi) = 0$, ved at udelukke mulighederne $f'(\xi) > 0$ og $f'(\xi) < 0$. F.eks. medfører antagelsen

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0 ,$$

at $f(x) - f(\xi) > 0$, dvs. $f(x) > f(\xi)$, for alle x i et vist interval til højre for ξ, og det er umuligt, da $f(\xi) = G$.

2° Det almene tilfælde. Anvend 1° på hjælpefunktionen $g : [a,b] \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) , \quad x \in [a,b] .$$

En umiddelbar *konsekvens af Middelværdisætningen* er:

SÆTNING 7. *Hvis en reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ er differentiabel i hvert punkt $x \in I$ med $f'(x) = 0$, så er f konstant.*

BEVIS. Når forudsætningen er opfyldt, sluttes, at $f(a) = f(b)$ for vilkårlige $a, b \in I$, $a < b$, idet der jo for mindst et $\xi \in]a,b[$ gælder

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) .$$

Sætning 7 overføres til vektorfunktioner $f = (f_1, \ldots, f_m) : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ gennem anvendelse på de enkelte koordinatfunktioner.

Med kinematisk sprogbrug (jf. s. II.1.10): Hvis et punkt, der bevæger sig i $\mathbb{R}^m$ i et tidsinterval $I \subseteqq \mathbb{R}$, i hvert øjeblik har hastigheden $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$, så ligger punktet stille.

Det er ligeledes *Middelværdisætningen*, der ligger bag velkendte sætninger om *monotoniforhold* for differentiable reelle funktioner som f.eks.

SÆTNING 8. *Hvis en reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ er differentiabel i hvert punkt $x \in I$ med $f'(x) > 0$, så er f strengt voksende.*

BEVIS. At f er strengt voksende, betyder, at $f(a) < f(b)$ for vilkårlige $a, b \in I$, $a < b$. Og det er naturligvis tilfældet, når forudsætningen er opfyldt, idet der jo for mindst et $\xi \in]a, b[$ gælder

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) .$$

BEMÆRKNING 1. Da differentiabilitet jo medfører kontinuitet (Sætning 1), kan vi bruge Sætning 5 om *Omvendt funktion* på en funktion, der opfylder forudsætningen i Sætning 8. Det giver:

En reel funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, der er differentiabel i hvert $x \in I$ med $f'(x) > 0$, har en omvendt funktion f^{-1}, som er differentiabel på intervallet $J = f(I)$ med afledet

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} .$$

Formlen fremgår af, at

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(x) = 1/\, f'(f^{-1}(y)) ,$$

når $y = f(x)$. Når den gengives

$$\frac{dx}{dy} = 1/\, \frac{dy}{dx} ,$$

må man selv huske på, at de to afledede dy/dx og dx/dy skal tages i hver sit af sammenhørende x og y.

§3. Stamfunktionsproblemet for funktioner af én variabel

I denne § sammenknyttes integration og differentiation. Det vises, at enhver *kontinuert* funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ har en *stamfunktion* $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, dvs. $F' = f$, samt at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \;\text{ for }\; a, b \in I \,.$$

Det er differential- og integralregningens krondiamant, men de studerende har brugt den som værktøj så ofte, at kun få ænser dens glans.

DEFINITION. En funktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ siges at være en *stamfunktion* (eller et *ubestemt integral*) til en funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på samme interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, hvis F er differentiabel i I med afledet $F' = f$, dvs. hvis F er differentiabel i hvert punkt $x \in I$ med differentialkvotient $F'(x) = f(x)$.

En given funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ har ikke i almindelighed nogen stamfunktion. Det er dog altid tilfældet, hvis f er *kontinuert* — det er et hovedresultat i denne §. Inden vi går i lag med *eksistensproblemet*, vil vi imidlertid afklare *entydigheden* :

SÆTNING 1. *Hvis en funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ har en stamfunktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, så har den uendelig mange, og samtlige stamfunktioner til f er netop funktionerne af form F + konstant.*

Her står "*konstant*" for en funktion på I med kun én værdi, tilhørende $\mathbb{R}^m$.

BEVIS. Hvis F er en stamfunktion til f , så er F + *konstant* det også. Hvis F og G er stamfunktioner til f , så er $G - F$ differentiabel i I med $(G-F)' = G' - F' = f - f =$ **o**-*funktionen*, og følgelig er $G - F$ konstant (IV.§2. Sætning 7).

Antag nu, at $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er *kontinuert*, og vælg et punkt $a \in I$. Idet integralet $\int_a^x f(t)dt$ har mening for hvert $x \in I$, kan vi tale om funktionen $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ givet ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \,, \quad x \in I \,.$$

Vi skal se, at F er en stamfunktion til f :

DIFFERENTIAL- OG INTEGRALREGNINGENS HOVEDSÆTNING. *Enhver kontinuert funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ defineret på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ har en stamfunktion, nemlig funktionen $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ givet ved*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \,, \quad x \in I \,,$$

hvor a er et vilkårligt fast punkt i I .

I kraft af sætningerne om *Koordinatvis integration* (IV.§1. Sætning 1) og *Koordinatvis differentiation* (IV.§2. Sætning 4) kan vi nøjes med at føre beviset i tilfældet $m = 1$:

BEVIS. Idet x_0 er et vilkårligt punkt i I, skal vi vise, at F er differentiabel i x_0 med $F'(x_0) = f(x_0)$, dvs. at

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \to f(x_0) \qquad \text{for } x \to x_0 \text{ fra } I \setminus \{x_0\} \ .$$

For hvert $x \in I$ har vi imidlertid ifølge *Indskudsreglen* (IV.§1. Sætning 5)

$$\Delta F = \int_a^x f(t)dt \ - \int_a^{x_0} f(t)dt \ = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

og dermed, når $x \neq x_0$,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt \ .$$

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Da f er kontinuert i x_0, kan $\delta \in \mathbb{R}_+$ vælges, således at

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon \qquad \text{for alle } t \in I \text{ med } |t - x_0| < \delta \ .$$

For vilkårligt $x \in I$ med $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, er så også

$$f(x_0) - \varepsilon \ < \ \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt \ < \ f(x_0) + \varepsilon \ .$$

Det ses ved at anvende *Integralregningens middelværdisætning* (IV.§1. Sætning 3) på f i intervallet med endepunkter x_0 og x.

Vi har ikke blot overtaget CAUCHYs differentiations- og integralbegreber, men også hans bevis for Hovedsætningen, med de to ingredienser *Indskudsreglen* og *Integralregningens middelværdisætning.*

EKSEMPEL 1. *Den naturlige logaritmefunktion* kan *defineres* som funktionen log : $\mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \ , \quad x \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Ifølge *Differential- og integralregningens hovedsætning* har vi da, at $\log : \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ er differentiabel med

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \ , \quad x \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Det er klart, at $\log 1 = 0$, og dette karakteriserer så $\log : \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ blandt stamfunktionerne til $x \curvearrowright 1/x$, $x \in \mathbb{R}_+$, ifølge Sætning 1.

BEMÆRKNING 1. Så snart man kender de afledede nx^{n-1} af funktionerne $x \curvearrowright x^n$ med $n \in \mathbb{Z}$, - noget af det første man lærer i et begynderkursus i differentialregning, - kender man jo også en stamfunktion $x^{n+1}/(n+1)$ til x^n for hvert $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, men ikke for $n = -1$.

At $x \curvearrowright 1/x$, $x \in \mathbb{R}_+$, dog *har* en stamfunktion, må vi hente ud af Differential- og integralregningens hovedsætning. Indførelsen af den naturlige logaritmefunktion $\log : \mathbb{R}_+ \curvearrowright \mathbb{R}$ er så blot en nanvgivning af en bestemt af stamfunktionerne. (At log viser sig at være en overordentlig vigtig funktion, er en anden sag. Det beror især på egenskaben

$$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2 \ ,$$

som vi vil bevise og udnytte i §5.)

Hovedsætningen har - når man sammenholder med Sætning 1 - følgende fundamentale

KOROLLAR. *Lad $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være kontinuert på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, lad $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ være en stamfunktion til f og lad $a, b \in I$. Så er*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$

BEVIS. Den ved

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \ , \quad x \in I \ ,$$

givne funktion er en stamfunktion til f ifølge Hovedsætningen, og videre er $F = G + \mathit{konstant}$ ifølge Sætning 1. Men så er

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)dt \ .$$

Det er dette *Korollar til Differential- og integralregningens hovedsætning*, du har brugt, hver gang du i gymnasiet skulle finde den eksakte værdi af et integral $\int_a^b f(t)dt$. Og det er da også langt den vigtigste metode til formålet.

BEMÆRKNING 2. I denne § har vi set, at *differentiation og integration er omvendte operationer* i følgende forstand:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \ , \qquad \int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \ .$$

Det har lige fra NEWTON og LEIBNIZ været differential- og integralregningens nøgleresultat. Men virkelig indholdsrigt er det naturligvis kun, når de to operationer defineres uafhængigt af hinanden, som CAUCHY og vi gør det.

NB. For den første formel er det væsentligt, at f er *kontinuert*, for den anden at F er differentiabel med *kontinuert afledet*. I Matematik 2 MA lærer man om integral af vildt diskontinuerte funktioner (*Lebesgue integralet*), og så går det galt med de to formler.

§4. Regneregler for ubestemt integration

En stamfunktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ til en given funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ på et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ kaldes også et *ubestemt integral* til f, og man skriver $\int f(x)dx$ for $F(x)$.

Når $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ har en stamfunktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, er der jo uendelig mange, (§3. Sætning 1.) Brugen af betegnelsen $\int f(x)dx$ er derfor underkastet den konvention, at $\int f(x)dx$ i en og samme undersøgelse hele tiden står for *samme* stamfunktion F til f. Ligninger, hvori der indgår ubestemte integraler, kræver desuden en vis fortolkning, jf. NB længere nede.

At bestemme en stamfunktion til en given funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ kaldes også *ubestemt integration.* Det er en vigtig opgave i analysen: Kender man nemlig (et funktionsudtryk for) en stamfunktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ til en *kontinuert* funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$, kan man beregne *bestemte integraler* $\int_a^b f(x)dx$, $a, b \in I$, af f ved Korollaret til Differential- og integralregningens hovedsætning (§3):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Differentiation af funktioner bygget op af elementære funktioner kræver blot kendskab til de afledede af disse og anvendelse af differentiationsreglerne. *Ubestemt integration* derimod er noget af en kunst, ja i mange tilfælde kan stamfunktioner til funktioner givet ved ganske simple funktionsudtryk slet ikke udtrykkes ved hjælp af de gængse funktionstegn.

Ubestemt integration er naturligvis ligetil, når integranden er kendt som den afledede af en kendt funktion. I mere komplicerede tilfælde består kunsten i at føre opgaven tilbage til denne simple situation ved hjælp af nedenstående regneregler for ubestemt integration (Sætning 1, 2 og 3). De svarer til kendte differentationsregler.

NB. Ligningerne i Sætning 1, 2 og 3 nedenfor skal forstås således, at når man for hvert ubestemt integral på højre side *vælger* en bestemt af de mulige stamfunktioner, så udtrykker højre side *en eller anden* stamfunktion til integranden på venstre side.

Bemærk, at alle integrander er kontinuerte, således at de ubestemte integraler har mening.

SÆTNING 1. LINEARITET. *Når $f, g : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er kontinuerte i et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{R}$, gælder*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx ,$$
$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx .$$

BEVIS. Når F og G er stamfunktioner til f og g, altså differentiable i I med $F' = f$ og $G' = g$, så er $F + G$ og cF differentiable i I med $(F+G)' = f + g$ og $(cF)' = cF'$.

SÆTNING 2. DELVIS INTEGRATION. *Når $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er kontinuert med stamfunktion $F : I \curvearrowright \mathbb{R}$, og $G : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er differentiabel med kontinuert afledet $G' = g : I \curvearrowright \mathbb{R}$, gælder*

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx \ .$$

BEVIS. Højre side er differentiabel med afledet

$$f(x)G(x) + F(x)g(x) - F(x)g(x) = f(x)G(x) \ .$$

BEMÆRKNING 1. Sætning 2 gælder også, når $f, F : I \curvearrowright \mathbb{R}^m$ og $g, G : I \curvearrowright \mathbb{R}$ eller omvendt. Den gælder ligeledes, når samtlige funktioner har værdier i $\mathbb{R}^m$, og produkterne tolkes som skalarprodukter. Beviset kan bruges, som det står.

SÆTNING 3. INTEGRATION VED SUBSTITUTION.
a. Når $g : J \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er kontinuert i et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, medens $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er differentiabel i et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ med kontinuert afledet $f' : I \curvearrowright \mathbb{R}$ og har værdier i J, dvs. $f(I) \subseteqq J$, gælder

$$\int g(f(t))f'(t)dt = \left(\int g(x)dx\right)_{x=f(t)} \ .$$

Højre side står for $t \curvearrowright G(f(t))$, $t \in I$, dvs. for $G \circ f$, hvor G er en stamfunktion til g.
b. Når $g : J \curvearrowright \mathbb{R}^m$ er kontinuert i et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, og $f : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er strengt monoton og differentiabel i et interval $I \subseteqq \mathbb{R}$ med kontinuert afledet $f' : I \curvearrowright \mathbb{R}$ samt med $f(I) = J$, gælder

$$\int g(x)dx = \left(\int g(f(t))f'(t)dt\right)_{t=f^{-1}(x)} \ .$$

Højre side står for $x \curvearrowright H(f^{-1}(x))$, $x \in J$, dvs. for $H \circ f^{-1}$, hvor H er en stamfunktion til $t \curvearrowright g(f(t))f'(t)$, $t \in I$.

BEVIS. a. Højre side $G \circ f$ er efter *Kædereglen* (IV.§2. Sætning 3) differentiabel med

$$(G \circ f)'(t) = g(f(t))f'(t) \ .$$

b. De ekstra forudsætninger om f sikrer, at $f : I \curvearrowright J$ er bijektiv og altså har en omvendt funktion $f^{-1} : J \curvearrowright I$. Lader vi

$$G(x) = \int g(x)dx \quad \text{og} \quad H(t) = \int g(f(t))f'(t)dt$$

være vilkårlige stamfunktioner, ved vi ifølge a, at

$$G \circ f = H + \text{ konstant } .$$

Men så er

$$G = G \circ f \circ f^{-1} = H \circ f^{-1} + \text{ konstant } ,$$

altså $H \circ f^{-1}$ en stamfunktion til g.

BEMÆRKNING 2. Sammenkobler man $t \in I$ og $x \in J$ med betingelsen $x = f(t)$, kan ligningen i *Regel a* kort skrives

$$\int g(x) \frac{dx}{dt} dt = \int g(x) dx ,$$

og ligningen i *Regel b* ligeså, blot med venstre og højre side ombyttet.

Man siger, at

$$\int g(x) \frac{dx}{dt} dt = \int g(f(t)) f'(t) dt$$

fremgår af $\int g(x)dx$ ved *substitutionen* $x = f(t)$.

BEMÆRKNING 3. Under samme forudsætninger som i Sætning 3.a gælder for vilkårlige $t_1, t_2 \in I$:

$$\int_{f(t_1)}^{f(t_2)} g(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} g(f(t))f'(t)dt ,$$

kort

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} g(x) \frac{dx}{dt} dt .$$

Thi er G en stamfunktion til g, giver *Korollaret til Differential- og integralregningens hovedsætning* (§3) sammen med Sætning 3.a, at

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g(f(t))f'(t)dt &= (G \circ f)(t_2) - (G \circ f)(t_1) \\ &= G(f(t_2)) - G(f(t_1)) = \int_{f(t_1)}^{f(t_2)} g(x)dx . \end{aligned}$$

Sætning 2 om delvis integration giver på lignende måde

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

for vilkårlige $a, b \in I$.

Brug af disse regler omtales også som *substitution*, henholdsvis *delvis integration.*

NB. Det forudsættes, at du fra skolen har øvelse i at bruge integrationsreglerne.

EKSEMPEL 1. For at finde en stamfunktion $\int \frac{2t}{1+t^4}\,dt$, $t \in \mathbb{R}$, skriver vi integranden på formen

$$\frac{1}{1+(t^2)^2}\,2t \quad \text{eller} \quad \frac{1}{1+x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

med $x = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, og anvender *Regel a* i Sætning 3 :

$$\int \frac{2t}{1+t^4}\,dt = \int \frac{1}{1+x^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \left(\int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)_{x=t^2} = \operatorname{Arctan} t^2 \,, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

For at finde en stamfunktion $\int \sin\sqrt{x}\,dx$, $x \in [0,\infty[$, benytter vi den *strengt monotone* substitution $x = t^2$, $t \in [0,\infty[$, og får ved *Regel b* i Sætning 3 :

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left(\int \sin\sqrt{t^2}\,2t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = \left(2\int t\sin t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} \,.$$

Idet delvis integration giver

$$\int t\sin t\,dt = t(-\cos t) - \int 1\,(-\cos t)dt = -t\cos t + \sin t \,,$$

finder vi

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x}\,\cos\sqrt{x} \,+\, \sin\sqrt{x} \,, \quad x \in [0,\infty[\,.$$

PS. Intet af de to led på højre side er differentiabelt i 0 , men summen er det – ifølge vor regning – med differentialkvotient $\sin\sqrt{0} = 0$.

Ved substitution i *bestemt* integral (Bemærkning 3) er der intet krav om monotoni. Med $x = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, har vi således for vilkårlige $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_{a^2}^{b^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_a^b \sin\sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_a^b t\sin|t|\,dt \,,$$

f.eks.

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t\,dt = 2\int_{-\pi}^{2\pi} t\sin|t|\,dt \,.$$

Appendix. Lidt om kvadratiske former

En *kvadratisk form i to variable* er en funktion $\kappa : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$, der kan udtrykkes

$$\kappa : (x,y) \curvearrowright rx^2 + 2sxy + ty^2 \ , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

hvor r, s, t er reelle konstanter. Med andre ord: et homogent polynomium af 2. grad eller nulpolynomiet.

For en given kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$ er der kun et brugbart sæt af koefficienter r, s, t. De er jo fastlagt allerede ved ligningerne

$$\kappa(1,0) = r \ , \quad \kappa(0,1) = t \ , \quad \kappa(1,1) = r + 2s + t \ .$$

Med brug af matrixmultiplikation har vi

$$\kappa(x,y) = (xy) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

for vilkårlige $x, y \in \mathbb{R}$, når vi undlader at skelne mellem en 1×1-matrix og dens element. (Regn efter!)

En *kvadratisk form i k variable* er en funktion $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$, der kan udtrykkes

$$\kappa : (x) = (x_1, \ldots, x_k) \ \curvearrowright \ \sum_{j=1}^{k} b_{jj} {x_j}^2 \ + \sum_{1 \leqq i < j \leqq k} 2b_{ij} x_i x_j \ , \quad x \in \mathbb{R}^k,$$

hvor koefficienterne er reelle konstanter. Med andre ord: et homogent polynomium af 2. grad eller nulpolynomiet.

Koefficienterne er igen entydigt bestemt, endda allerede ved værdierne af κ på talsæt med et eller to 1-taller og 0 i øvrigt. Idet vi sætter $b_{ji} = b_{ij}$ for $1 \leqq i < j \leqq k$, kan den kvadratiske form udtrykkes

$$\begin{aligned} \kappa(x_1 \ldots x_k) &= \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j \\ &= (x_1 \ldots x_k) \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = x^t B\, x \ , \end{aligned}$$

hvor den *symmetriske* $k \times k$-matrix B kaldes den kvadratiske forms matrix. Bemærk, at et talsæt $x = (x_1, \ldots, x_k)$ ved matrixregningen opfattes som en tal*søjle*, og at vi har undladt at skelne mellem en 1×1-matrix og dens element.

En særlig simpel type er *kvadratiske former "uden blandede led"*. Hermed menes, at $b_{ij} = 0$ for $i \neq j$, således at funktionsudtrykket er reduceret til

$$\sum_{j=1}^{k} b_{jj} {x_j}^2 = b_{11} {x_1}^2 + \ \dots \ + b_{kk} {x_k}^2 \ .$$

Anderledes sagt: den tilsvarende matrix er en diagonalmatrix.

DEFINITION. En kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ og ligeledes dens symmetriske matrix B kaldes *positiv definit*, hvis

$$\kappa(x) = x^t B\, x > 0 \quad \text{for alle } \ x \in \mathbb{R}^k, \ \ x \neq \mathbf{o} \, .$$

Tilsvarende defineres *negativ definit.*

Det er oplagt, at en kvadratisk form uden blandede led,

$$\kappa(x) = \lambda_1 {x_1}^2 + \ \dots \ + \lambda_k {x_k}^2$$

er positiv, resp. negativ definit, hvis og kun hvis koefficienterne $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle er > 0 , resp. < 0 .

Reduktion af kvadratiske former

Studiet af kvadratiske former kan føres tilbage til den simple type uden blandede led. Det er et stykke Lineær algebra, der bygger på resultater vedrørende diagonalisering af symmetriske matricer (Mat 1 LA §25). Vi vil gøre rede for, at "reduktionen" kan opfattes som fremkommende ved et passende basisskift i et vektorrum.

Vi betragter en kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ med (symmetrisk) matrix $B = (b_{ij})$,

$$\kappa(x) = x^t B\, x \ , \quad x \in \mathbb{R}^k \, .$$

Opfatter vi et talsæt $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ som koordinatsæt for vektoren

$$v = \varphi(x) = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$$

med hensyn til en basis $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \dots, e_k)$ for et k-dimensionalt vektorrum V, svarer $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ til en funktion $\nu : V \curvearrowright \mathbb{R}$. Nemlig således, at en funktionsværdi $\kappa(x)$ knyttes til vektoren $\varphi(x)$ med koordinatsæt x, dvs.

$$\kappa(x) = \nu(\varphi(x)) = \nu(x_1 e_1 + \dots + x_k e_k) \, ,$$

kort $\kappa = \nu \circ \varphi$, $\nu = \kappa \circ \varphi^{-1}$. Den givne kvadratiske form $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ kan opfattes som et koordinatudtryk for funktionen $\nu : V \curvearrowright \mathbb{R}$, svarende til basen $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1, \dots, e_n)$.

Skifter vi til en ny basis $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ for V, udtrykkes $\nu : V \curvearrowright \mathbb{R}$ tilsvarende ved funktionen $\tilde{\kappa} : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$, hvor $\tilde{\kappa} = \nu \circ \tilde{\varphi}$, dvs.

$$\tilde{\kappa}(x) = \nu(\tilde{\varphi}(x)) = \nu(x_1\tilde{e}_1 + \ldots + x_k\tilde{e}_k) , \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Vi skal se, at $\tilde{\kappa}$ igen er en kvadratisk form, og bestemme dens matrix.

Overgangen fra basen $\boldsymbol{\varepsilon}$ til $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sker ved en invertibel $k\times k$-matrix T, kaldet $\boldsymbol{\varepsilon}$-koordinatmatricen for $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, i den forstand at

$$x = T\,\tilde{x} ,$$

når x og $\tilde{x}$ er koordinatsøjler for samme vektor v m.h.t. de to baser $\boldsymbol{\varepsilon}$ og $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, dvs. når $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$. (Jf. Mat 1 LA §29.)

For hvert $\tilde{x} \in \mathbb{R}^k$ finder vi så, med $x \in \mathbb{R}^k$ givet ved $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$, dvs. ved $x_1e_1 + \ldots + x_ke_k = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{e}_k$, at

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}(\tilde{x}) &= \nu(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) = \nu(\varphi(x)) = \kappa(x)\\ &= x^tBx = (T\tilde{x})^tB\,(T\tilde{x}) = \tilde{x}^t(T^tB\,T)\,\tilde{x} = \tilde{x}^t\,\tilde{B}\,\tilde{x} ,\end{aligned}$$

hvor $k\times k$-matricen $\tilde{B} = T^tBT$ er symmetrisk, idet

$$\tilde{B}^{\,t} = T^tB^t(T^t)^t = T^tB\,T = \tilde{B} .$$

Hermed er vist, at $\tilde{\kappa} : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ igen er en kvadratisk form, med matrix $\tilde{B} = T^tB\,T$.

Holder vi os til *ortonormale* baser $\boldsymbol{\varepsilon}$ og $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ i et k-dimensionalt euklidisk vektorrum V, er $\boldsymbol{\varepsilon}$-koordinatmatricen T for $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en *ortogonal* matrix, altså $T^t = T^{-1}$. (Mat 1 LA §§32 og 24.) Vi har så

$$\tilde{B} = T^tB\,T = T^{-1}B\,T .$$

Spørgsmålet om at disponere over den nye basis $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, således at $\tilde{\kappa}$ er uden blandede led, kommer derfor ud på at disponere over den ortogonale $k\times k$-matrix T, således at $T^{-1}B\,T$ er en diagonalmatrix, og vi kan anvende hovedsætningen, at enhver symmetrisk $k\times k$-matrix er ortogonalt diagonaliserbar (Mat 1 LA §25). Vi noterer:

Sætning 4. *For en given kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$, med symmetrisk matrix $B = (b_{ij})$, findes en ortogonal $k \times k$-matrix T og koefficienter $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, således at*

$$\kappa(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \lambda_1\tilde{x}_1{}^2 + \ldots + \lambda_k\tilde{x}_k{}^2 ,$$

når $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^k$ er sammenknyttet ved ligningen $x = T\,\tilde{x}$.

Koefficienterne $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ er entydigt bestemt pånær rækkefølgen. Det er nulpunkterne i det karakteristiske polynomium $p_B : \lambda \curvearrowright \det(B - \lambda E)$, idet hvert optræder så mange gange, som rodmultipliciteten angiver.

Sætningens sidste påstand følger af, at $\tilde{B} = T^{-1}B\,T$ her er diagonalmatricen med elementer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, og at $p_B = p_{\tilde{B}}$ (Mat 1 LA §23), således at

$$\det(B - \lambda E) = \det(\triangle(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) - \lambda E) = (-1)^k(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_k) .$$

Korollar. *En kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ og ligeledes dens symmetriske $k \times k$-matrix B er positiv, resp. negativ definit, hvis og kun hvis alle nulpunkter i det karakteristiske polynomium p_B er > 0, resp. < 0.*

I Lineær algebra beskrives, hvorledes en brugbar ortogonal $k \times k$-matrix T opbygges af egenvektorer hørende til de forskellige λ_i (Mat 1 LA §25). Samtidig bestemmes en tilsvarende ny basis $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$. Vi gennemgår tilfældet $k = 2$:

Vi betragter en kvadratisk form $\kappa : \mathbb{R}^2 \curvearrowright \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \curvearrowright rx^2 + 2sxy + ty^2 = (x\,y) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \qquad x, y \in \mathbb{R} ,$$

og fortolker (x, y) som koordinatpar til en vektor (eller et punkt) i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ i planen.

Vi antager $s \neq 0$ og søger et nyt sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}})$, hvor den kvadratiske form er "reduceret" til typen $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$.

Først bestemmes koefficienterne λ_1 og λ_2 som nulpunkterne i det karakteristiske polynomium

$$\lambda \curvearrowright \begin{vmatrix} r - \lambda & s \\ s & t - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (r + t)\lambda + rt - s^2 .$$

Der er to forskellige nulpunkter, idet vi efter en lille regning finder diskriminanten

$$D = (r - t)^2 + s^2 \geqq s^2 > 0 .$$

Vi døber et af nulpunkterne λ_1, det andet λ_2.

Egenrummet hørende til λ_1 omfatter løsningerne til

$$\begin{pmatrix} r - \lambda_1 & s \\ s & t - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Det består af alle multipla af én egenvektor, f.eks. $(s, \lambda_1 - r)$, og omfatter således to modsat rettede enhedsvektorer. Begge kan bruges som grundvektor $\tilde{\mathbf{i}}$.

Egenvektorerne hørende til λ_2 står vinkelret på $\tilde{\mathbf{i}}$. Det giver to muligheder for $\tilde{\mathbf{j}}$.

I alle fire tilfælde fås et nyt koordinatsystem $(O, \tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}})$, hvor den kvadratiske form er reduceret til

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \curvearrowright \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 = (\tilde{x}\ \tilde{y}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} .$$

I to af tilfældene fremgår det nye system af det gamle $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ ved en drejning v om O, hvor

$$\tan v = \frac{\lambda_1 - r}{s} .$$

Efter disse oversættelser slutter vi med et kriterium for uniform konvergens, som er meget enkelt, når det formuleres i rækkesprog. Det forsøger man sig derfor gerne med, når man skal eftervise uniform konvergens af en række med funktionsled.

En række $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ af positive led $b_n \in [0, \infty[$ siges at være en *majorantrække* for en række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, hvis led $f_n : A \curvearrowright \mathbb{C}$ er funktioner defineret på en ikke tom mængde A, dersom

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A : \; |f_n(x)| \leqq b_n \; .$$

SÆTNING 3. MAJORANTKRITERIET. *Hvis en række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ med funktionsled $f_n : A \curvearrowright \mathbb{C}$ har en konvergent majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut og uniformt konvergent på A.*

BEVIS. Antag, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er majorantrække i A for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ og tillige konvergent. For vilkårligt (fast) $x \in A$ giver *Sammenligningskriteriet* (X.§3.Sætning 6) straks, at $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ er konvergent, dvs. at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er absolut konvergent. For at vise, at konvergensen er uniform på A, sætter vi

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \; , \quad s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \; , \quad \sigma_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \; , \quad \sigma = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

for $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$, og har så

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| &\leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(x)| \\ &\leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j = \sigma - \sigma_n \; . \end{aligned}$$

Da nu $\sigma - \sigma_n \to 0$ for $n \to \infty$, følger (XI.§1. Bemærkning 1), at (s_n) konvergerer *uniformt* mod s, altså at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ er uniformt konvergent på A. – Uligheden

$$|\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| \leqq \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(x)|$$

midt i beviset fremgår af

$$|\sum_{j=n+1}^{p} f_j(x)| \leqq \sum_{j=n+1}^{p} |\, f_j(x) \,| \quad \text{for } p > n$$

ved grænseovergangen $p \to \infty$.

EKSEMPEL 1. Vi betragter rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad , \ x \in \mathbb{R} \, ,$$

hvor $a \in]0,1[$ og $b \in \mathbb{R}_+$ er konstanter. Da

$$|f_n(x)| = a^n |\cos b^n x| \leqq a^n \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N} \, , \ x \in \mathbb{R} \, ,$$

og da $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ er konvergent, er den givne række *uniformt* konvergent på $\mathbb{R}$ ifølge *Majorant-kriteriet.* Og da funktionerne

$$f_n : \ x \curvearrowright a^n \cos b^n x \, , \quad x \in \mathbb{R} \, ,$$

jo alle er kontinuerte (endda af klasse C^∞), er sumfunktionen derfor kontinuert på $\mathbb{R}$, ifølge Sætning $1'$.

Derimod viste Karl WEIERSTRASS (tysk matematiker, 1815-97) at sumfunktionen for passende valg af a og b (b et ulige naturligt tal og $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$) *ikke er differentiabel i noget punkt* ! (Se f.eks. E.C. Titchmarsh: The theory of functions, Oxford 1932, s. 350-353.)

BEMÆRKNING 1. Begreberne *punktvis* og *uniform konvergens* (XI.§1) overføres umiddelbart til følger (f_n), resp. rækker $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, af vektorfunktioner $f_n : A \curvearrowright \mathbb{R}^m$ eller $f_n : A \curvearrowright \mathbb{C}^m$. Alle sætninger i §2 gælder også her, med samme bevis.

Sætning 1 og $1'$ om besvarelse af kontinuitet ved uniform grænseovergang gælder også med $A \subsetneqq \mathbb{C}$, idet $\mathbb{C}$ her kan identificeres med $\mathbb{R}^2$.

Ved *uniform* konvergens med funktioner f_n defineret på en figur $E \subsetneqq \mathbb{R}^2$ eller et legeme $L \subsetneqq \mathbb{R}^3$ gælder resultater ganske svarende til Sætning 2 og $2'$, kun er integralerne nu planintegraler $\int_E f_n(x,y) d(x,y)$, resp. rumintegraler $\int_L f_n(x,y,z) d(x,y,z)$.

XII. POTENSRÆKKER

De elementære funktioner: eksponential– og logaritmefunktioner, potensfunktioner, trigonometriske og hyperbolske funktioner (se §2), såvel som funktioner opbygget ud fra disse ved sammensætning og ved de almindelige regneoperationer, kan alle fremstilles ved *potensrækker*, dvs. rækker af form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ \dots \ + a_n(x-x_0)^n + \ \dots \ ,$$

i hvert fald i et interval omkring ethvert indre punkt x_0 i definitionsmængden. Dette være sagt for at give en fornemmelse af rækkevidden af potensrækkernes teori.

Udviklingspunktet x_0 og *koefficienterne* $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ er reelle tal, medens bogstavet x er en "*reel variabel*". En potensrække er altså fastlagt ved udviklingspunkt og koefficienter, medens man forbeholder sig at indsætte vilkårlige reelle tal for x. Anderledes sagt: Talen er om en række med funktionsled, hvor den n'te funktion er $x \curvearrowright a_n(x-x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Som en uskyldig udvidelse vil vi tillade komplekse koefficienter a_n . Potensrækkerne kommer dog først rigtig til deres ret, når x opfattes som en "*kompleks variabel*", og x_0 kan være et komplekst tal. Det kan vi kun i beskedent omfang komme ind på i dette kursus – når vi gør det, vil vi markere det ved at skifte til betegnelserne z og z_0 – men det vil blive taget op til indgående behandling i Matematik 2 MA.

Vi begynder med at studere potensrækker i almindelighed, indledningsvis med "kompleks variabel".

§1. Almen potensrækketeori

DEFINITION. Ved en *potensrække* forstås en uendelig række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{eller} \quad a_0 + a_1(z-z_0) + \ \dots \ + a_n(z-z_0)^n + \ \dots \ ,$$

hvor $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ og z_0 er komplekse tal, medens bogstavet z skal opfattes som en "*kompleks variabel*". Tallene $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ kaldes potensrækkens *koefficienter*, og z_0 kaldes dens *udviklingspunkt*.

Sætter vi $z - z_0 = \tilde{z}$, går potensrækken over i

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\tilde{z}^n = a_0 + a_1\tilde{z} + \ \dots \ + a_n\tilde{z}^n + \ \dots \ .$$

Det er derfor ingen egentlig indskrænkning, at vi i de følgende betragtninger holder os til potensrækker med udviklingspunkt 0, dvs. potensrækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ \dots \ + a_n z^n + \ \dots \ .$$

Resultaterne kan umiddelbart overføres til det generelle tilfælde.

Punktvis konvergens. Konvergenscirkel

En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er naturligvis konvergent for $z = 0$, hvor rækken er $a_0 + 0 + \dots + 0 + \dots$. Men kan der ellers siges noget generelt om, i hvilke punkter den er konvergent, og i hvilke den er divergent? Vi begynder med følgende iagttagelse:

LEMMA. *Når z_1 og z_2 er komplekse tal, hvor $|z_1| < |z_2|$, gælder:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_2}^n \text{ er konvergent} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_1}^n \text{ er konvergent},$$

ja endog

$$\left(a_n {z_2}^n\right) \text{ er begrænset} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_1}^n \text{ er absolut konvergent}.$$

BEVIS. Vi antager, at talfølgen $\left(a_n {z_2}^n\right)$ er begrænset, og skal så vise, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n {z_1}^n|$ er konvergent. Vi vælger $K \in \mathbb{R}_+$, således at $|a_n {z_2}^n| \leqq K$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$, og vurderer

$$\left|a_n {z_1}^n\right| = \left|a_n {z_2}^n \frac{{z_1}^n}{{z_2}^n}\right| = \left|a_n {z_2}^n\right| \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^n \leqq K \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^n .$$

Da $|z_1/z_2| < 1$, er kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} K|z_1/z_2|^n$ konvergent, og det ønskede følger af *Sammenligningskriteriet.*

Det er nu et spørgsmål om en smule teknik at godtgøre, at der om punktvis konvergens af potensrækker gælder

SÆTNING 1. *For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ indtræffer ét af følgende tre tilfælde:*

(*i*) *Rækken er absolut konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$.*

(*ii*) *Der findes et tal ρ, $0 < \rho < \infty$, således at rækken er absolut konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \rho$, dvs. for hvert punkt z i den åbne cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$, og divergent for hvert z med $|z| > \rho$.*

(*iii*) *Rækken er kun konvergent for $z = 0$.*

DEFINITION. I tilfælde (*ii*) kaldes tallet ρ potensrækkens *konvergensradius*, og $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ kaldes *konvergenscirklen.* I tilfælde (*i*) taler man om konvergensradius $\rho = \infty$ og om hele $\mathbb{C}$ som konvergenscirkel. I tilfælde (*iii*) sætter man konvergensradius $\rho = 0$.

BEVIS for Sætning 1. Vi betragter mængden $B \subseteqq [0, \infty[$ givet ved

$$B = \{t \in [0, \infty[\mid \text{talfølgen } a_0, a_1 t, \ldots, a_n t^n, \ldots \text{ er begrænset}\}$$

og sætter $\rho = \sup B$. Bemærk, at $B \neq \emptyset$, idet jo $0 \in B$, samt at $\rho \in [0, \infty]$.
Antag først $\rho \in]0, \infty[$. For hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \rho$ findes et $t \in B$, hvor $|z| < t$. Da nu talfølgen $(a_n t^n)$ er begrænset, giver lemmaet, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er absolut konvergent. Og for hvert z med $|z| > \rho$ er $|z| \notin B$, dvs. talfølgen $(a_n |z|^n)$ og dermed $(|a_n z^n|)$ er ikke begrænset. Specielt er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent, da den nødvendige betingelse $a_n z^n \to 0$ for konvergens ikke er opfyldt.
I tilfældet $\rho = \infty$, kan det første argument anvendes for ethvert $z \in \mathbb{C}$, således at (*i*) foreligger. Og er $\rho = 0$, kan divergensargumentet anvendes for ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, således at (*iii*) foreligger.

Af disse overvejelser fremgår Sætning 1 tillige med følgende

TILFØJELSE TIL SÆTNING 1. *For konvergensradius ρ gælder*

$$\rho = \sup\{t \in [0, \infty[\mid \text{talfølgen } (a_n t^n) \text{ er begrænset}\}.$$

EKSEMPEL 1. Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

er for givet $z \in \mathbb{C}$ en kvotientrække med kvotient z, altså konvergent når $|z| < 1$, divergent når $|z| \geqq 1$. (X.§6. Eksempel 1.) Potensrækken har således konvergensradius $\rho = 1$. I konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ har den sumfunktionen $z \curvearrowright 1/(1-z)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots \quad = \frac{1}{1-z} \quad \text{for } |z| < 1.$$

Potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \ \ldots \ + \frac{1}{n!} z^n + \ \ldots$$

er (absolut) konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$. Det fremgår af Kvotientkriteriet (som allerede vist i X.§6. Eksempel 3.2), idet vi for vilkårligt $z \neq 0$ har

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Potensrækken har således konvergensradius $\rho = \infty$. Den kaldes *eksponentialrækken*, og dens sumfunktion kaldes eksponentialfunktionen i det komplekse. Herom i §2.

Som eksempel på en potensrække med konvergensradius $\rho = 0$ kan nævnes $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$. (Prøv Kvotientkriteriet for givet $z \neq 0$.)

BEMÆRKNING 1. Tilføjelsen til Sætning 1 kommer os til nytte i argumentationen for Sætning 6 nedenfor. Men skal man bestemme konvergensradius ρ for en forelagt potensrække, vil man normalt gå andre veje. Således er *Kvotient–* eller *Rodkriteriet* ofte nyttigt (Eksempel 1 og 2), ligesom man kan have glæde af Sætning 6.

EKSEMPEL 2. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n2^n z^{2n} = 2z^2 + 8z^4 + \dots + n2^n z^{2n} + \dots$ er strengt taget først en potensrække efter tilføjelse af de "manglende" 0-led, men det influerer naturligvis ikke på konvergensen. For givet $z \neq 0$ finder vi

$$\left|\frac{(n+1)2^{n+1}z^{2(n+1)}}{n2^n z^{2n}}\right| = (1+\frac{1}{n})2|z|^2 \to 2|z|^2 \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Ifølge *Kvotientkriteriet* er rækken da absolut konvergent for $2|z|^2 < 1$, dvs. $|z| < 1/\sqrt{2}$, og divergent for $2|z|^2 > 1$, dvs. $|z| > 1/\sqrt{2}$. Konvergensradius ρ er altså $1/\sqrt{2}$.

Vi kunne også have brugt *Rodkriteriet*: For givet $z \in \mathbb{C}$ har vi

$$\sqrt[n]{|n2^n z^{2n}|} = \sqrt[n]{n}\, 2|z|^2 \to 2|z|^2 \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Det viser ligeledes, at vor række er absolut konvergent for $2|z|^2 < 1$ og divergent for $2|z|^2 > 1$, og dermed at $\rho = 1/\sqrt{2}$.

Vi nævner, at Rodkriteriet i princippet kan anvendes på enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, med resultatet

$$\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\ ,$$

hvor vi regner $1/0 = \infty$ og $1/\infty = 0$.

BEMÆRKNING 2. Det er med god grund, at Sætning 1 i tilfældet $0 < \rho < \infty$ ikke udtaler sig om konvergensforholdene for punkter på konvergenscirklens rand. Betragt f.eks. potensrækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}\,,$$

som alle har konvergensradius $\rho = 1$. (Begrund det, jf. Bemærkning 1.) Den første række er divergent i hvert punkt z af konvergenscirklens rand (Eksempel 1). Den anden er divergent i $z = 1$ (X.§3, Eksempel 7.1) og konvergent i $z = -1$ (X.§6, Eksempel 2). Den tredje er (absolut) konvergent i hvert punkt af konvergenscirklens rand, ja den er endog absolut og uniformt konvergent i hele den afsluttede konvergenscirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}$, da den her har den konvergente majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

BEMÆRKNING 3. REGNING MED POTENSRÆKKER. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = a_0 z + a_1 z^2 + \ \dots\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$

er konvergent i præcis de samme punkter som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Thi for det enkelte $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er hvert rækkeled blot multipliceret med tallet z. Tilsvarende gælder rækken $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n z^n$ for vilkårligt $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Om summerne i et konvergenspunkt z gælder

$$z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n$$

og

$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n z^n \; .$$

Har potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergensradier ρ og σ, så er $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (absolut) konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \min\{\rho, \sigma\}$, med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \; .$$

NB. Er $\rho = \sigma$, kan konvergensradius τ for sumrækken meget vel være større end $\min\{\rho, \sigma\} = \rho = \sigma$. (Trivielt eksempel: $a_n = -b_n = 1$.)

Cauchy multiplikation (s.X.6.11) er som skabt til potensrækker:

SÆTNING 2. *Lad potensrækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ have konvergensradier $\rho > 0$ og $\sigma > 0$, og lad sumfunktionerne være f og g. Produktet $f(z)g(z)$ fremstilles da i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \min\{\rho, \sigma\}\}$ ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, hvor*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \; \ldots \; + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \; .$$

NB. Konvergensradius τ for produktrækken kan meget vel være større end $\min\{\rho, \sigma\}$. (Eksempel: $a_n = 1$ for alle n og $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_n = 0$ for $n \geqq 2$).

BEVIS for Sætning 2. For hvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < \min\{\rho, \sigma\}$ er rækkerne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut konvergente med summer $f(z)$ og $g(z)$. Ved *Cauchy multiplikation* (X.§6. Sætning 8) fås da

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n z^n + a_1 z \cdot b_{n-1} z^{n-1} + \; \ldots \; + a_{n-1} z^{n-1} \cdot b_1 z + a_n z^n \cdot b_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \; \ldots \; + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \; . \end{aligned}$$

Uniform konvergens.

Sætning 1 udtaler sig om den *punktvise* konvergens af en potensrække. Vi vil nu diskutere *uniform* konvergens. Det skal straks bemærkes, at en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ *ikke* i almindelighed er uniformt konvergent i hele konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$:

EKSEMPEL 3. Hvert afsnit $s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} z^j$ af potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ er begrænset i konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$$|s_n(z)| \leqq \sum_{j=0}^{n} |z^j| = \sum_{j=0}^{n} |z|^j < \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1 \quad \text{for } |z| < 1\,,$$

medens sumfunktionen $f(z) = 1/(1-z)$ ikke er det, idet jo $|f(z)| = 1/|1-z| \to \infty$ for $z \to 1$, $|z| < 1$. Altså er

$$\sup\{|f(z) - s_n(z)| \mid |z| < 1\} = \infty$$

for hvert n. Specielt er konvergensen $s_n(z) \to 1/(1-z)$ ikke uniform for $|z| < 1$. (XI.§1. Sætning 2.) Dvs. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ er ikke uniformt konvergent for $|z| < 1$. I øvrigt heller ikke for $|z| < 1$, $z \in \mathbb{R}$, som man ser ved at gå argumentet efter.

Der gælder imidlertid følgende

SÆTNING 3. *En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er uniformt konvergent i enhver afsluttet cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$, hvor $0 < r < \rho$.*

BEVIS. Da tallet r ligger i konvergenscirklen, er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ absolut konvergent. Idet

$$|a_n z^n| \leqq |a_n| r^n$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}_0$ og ethvert z med $|z| \leqq r$, har potensrækken således i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$ den konvergente majorantrække $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, og påstanden følger af *Majorantkriteriet* (XI.§2. Sætning 3).

BEMÆRKNING 4. Da vi har defineret *kontinuitet* for funktioner/afbildninger ud fra afstande mellem punkter (s.III.1.1), rummer begrebet intet nyt for funktioner $f : A \curvearrowright \mathbb{C}$, $A \subseteqq \mathbb{C}$: Hvad afstande angår, kan vi identificere $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}^2$.

Eksempelvis er funktionen $z \curvearrowright z^2$, $z \in \mathbb{C}$, kontinuert. Med $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, er jo $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, således at $z \curvearrowright z^2$ svarer til afbildningen $(x,y) \curvearrowright (x^2 - y^2, 2xy)$ fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, og den er kontinuert, da koordinatfunktionerne

$$(x,y) \curvearrowright x^2 - y^2 \quad \text{og} \quad (x,y) \curvearrowright 2xy\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

begge er det. Tilsvarende gælder $z \curvearrowright z^n$, $z \in \mathbb{C}$, for vilkårligt $n \in \mathbb{N}$.

SÆTNING 4. *Sumfunktionen for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ er kontinuert på konvergenscirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$.*

BEVIS. Da potensrækkens led er kontinuerte funktioner, giver Sætning 3 i forbindelse med XI.§2. Sætning 1' umiddelbart, at sumfunktionen er kontinuert i enhver afsluttet cirkelskive $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$ med $0 < r < \rho$. Men dette indebærer, at sumfunktionen er kontinuert i alle punkter ζ af konvergenscirklen: Til hvert punkt ζ i denne findes jo et r, således at $|\zeta| < r < \rho$. Tegn! Punktet ζ ligger da *i det indre* af $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq r\}$, og kontinuitet er jo en lokal egenskab.

Ledvis integration og differentiation.

Det nærmere studium af sumfunktionen for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ med konvergensradius $\rho > 0$ betragtet på konvergenscirklen hører hjemme i *kompleks analyse.* Det vil blive taget op i Matematik 2 MA. Her vil vi indskrænke os til at studere sumfunktionen på intervallet $]-\rho, \rho[\; \subseteqq \mathbb{R}$. For at dette skal springe i øjnene, vil vi betegne den variable med x.

For en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ betragtet med x som *reel* variabel, medens koefficienterne $a_1, a_2, \ldots$ fortsat kan være komplekse, kaldes konvergensradius ρ også *konvergenstallet*, og for $\rho > 0$ kaldes $]-\rho, \rho[$ for *konvergensintervallet.*

Sætning 5. Ledvis integration. *Lad $f :]-\rho, \rho[\curvearrowright \mathbb{C}$ være sumfunktion for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$. For hvert $x \in]-\rho, \rho[$ er da*

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

bevis. Vi kan antage $x \neq 0$. Da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ifølge Sætning 3 er uniformt konvergent i det afsluttede interval med endepunkter 0 og x, kan vi anvende XI.§2. Sætning 2' om ledvis integration.

eksempel 4. Af

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots , \quad x \in]-1, 1[,$$

følger

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots , \quad x \in]-1, 1[.$$

Vi vender os mod *ledvis differentiation.* En afgørende rolle spiller

Sætning 6. *En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og den ved ledvis differentiation dannede potensrække $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har samme konvergenstal.*

bevis. Lad ρ og ρ' være konvergenstallene for de to rækker. Ifølge Tilføjelsen til Sætning 1 er $\rho = \sup B$ og $\rho' = \sup B'$, hvor

$$B = \{t \in [0, \infty[\mid \text{talfølgen } (a_n t^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ er begrænset}\},$$

$$B' = \{t \in [0, \infty[\mid \text{talfølgen } (n a_n t^{n-1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ er begrænset}\},$$

$$= \{t \in [0, \infty[\mid \text{talfølgen } (n a_n t^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ er begrænset}\} .$$

Da $|a_n t^n| \leqq |n a_n t^n|$ for alle $n \in \mathbb{N}$, er det klart, at følgen $(a_n t^n)$ er begrænset, når $(n a_n t^n)$ er det. Det viser, at $B' \subseteqq B$ og dermed $\rho' \leqq \rho$.

Problemet er at vise $\rho \leqq \rho'$, hvor vi kan antage $\rho > 0$.

Kernepunktet er her, at følgen $(n a_n s^n)$ er begrænset, når $(a_n t^n)$ er det og $0 < s < t$.

For at indse dette antager vi, at $|a_n t^n| \leqq K$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Så har vi

$$|n a_n s^n| = \left| n a_n t^n \frac{s^n}{t^n} \right| = |a_n t^n| \frac{n}{(t/s)^n} \leqq K \frac{n}{(t/s)^n}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Og da $t/s > 1$, er eksponentialfølgen $((t/s)^n)$ af højere størrelsesorden for $n \to \infty$ end potensfølgen $(n^1) = (n)$, dvs.

$$\frac{n}{(t/s)^n} \to 0 \;\text{ for }\; n \to \infty\,, \quad \text{altså} \quad n a_n s^n \to 0 \;\text{ for }\; n \to \infty\,.$$

Specielt er følgen $(n a_n s^n)$ begrænset.

Herefter er det oplagt, at $]0, \rho[\; \subseteqq B'$. Thi for vilkårligt $s \in\,]0, \rho[$ er jo $0 < s < \rho = \sup B$, hvorfor der findes et $t \in B$, hvor $s < t$. Og da nu $(a_n t^n)$ er begrænset, gælder – som lige vist – det samme om $(n a_n s^n)$, dvs. $s \in B'$.

Men af $]0, \rho[\; \subseteqq B'$ følger

$$\rho = \sup(\,]0, \rho[\,) \leqq \sup B' = \rho'\,,$$

og vi konkluderer $\rho' = \rho$.

Vi kan nu vise, at *potensrækker* udmærker sig ved, at man ganske ubekymret kan differentiere ledvis. Det er ret enestående!

SÆTNING 7. LEDVIS DIFFERENTIATION. *Sumfunktionen f: $]-\rho, \rho[\; \curvearrowright \mathbb{C}$ for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$ er differentiabel i hvert punkt x af konvergensintervallet $]-\rho, \rho\,[$ med $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, kort:*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,, \;\; x \in\,]-\rho, \rho\,[\,.$$

BEVIS. Potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har ligeledes konvergenstallet ρ, som netop vist, og dens sumfunktion $g :]-\rho, \rho\,[\curvearrowright \mathbb{C}$ er kontinuert ifølge Sætning 4. For hvert $x \in\,]-\rho, \rho\,[$ finder vi ved *ledvis integration* (Sætning 5), at

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0\,.$$

Differential- og integralregningens hovedsætning fortæller os så, at f er en stamfunktion til g , dvs. at f er differentiabel i $]-\rho, \rho[$ med

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} .$$

EKSEMPEL 5. Af

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots , \quad x \in]-1, 1[,$$

følger

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + \ldots + n x^{n-1} + \ldots , \quad x \in]-1, 1[.$$

Sætning 7 "generaliserer sig selv". Den kan straks anvendes på den ved ledvis differentiation dannede potensrække $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Mere generelt findes ved induktion:

SÆTNING 8. *Sumfunktionen*

$$x \curvearrowright f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots , \quad x \in]-\rho, \rho[,$$

for en potensrække med konvergensradius $\rho > 0$ er en C^{∞}-funktion på konvergensintervallet $]-\rho, \rho[$. For ethvert $p \in \mathbb{N}$ er dens p'te afledede lig med sumfunktionen for den p gange ledvist differentierede række, altså

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= p!\, a_p + \frac{(p+1)!}{1!} a_{p+1} x + \ \ldots \ + \frac{(p+n)!}{n!} a_{p+n} x^n + \ \ldots \ , \ x \in]-\rho, \rho[. \end{aligned}$$

EKSEMPEL 6. Funktionen $f :]-1, \infty[\curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \log(1+x) & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

er af klasse C^{∞}. I intervallet $]-1, 1[$ er den nemlig sumfunktion for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n+1} + \ldots .$$

Værdien af funktionens afledede i 0 kan findes ved at sætte $x = 0$ i udtrykket for $f^{(p)}(x)$ i Sætning 8:

$$f^{(p)}(x) = p!(-1)^p/(p+1) , \quad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Taylor række

Medens vi hidtil er startet med en potensrække, vil vi nu tage udgangspunkt i en funktion.

DEFINITION. For en vilkårlig C^∞-funktion $f : I \curvearrowright \mathbb{C}$ defineret på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, der indeholder punktet x_0, kaldes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

for funktionens *Taylor række* med x_0 som udviklingspunkt. (Sml. s.VII.1.1.)

I det følgende holder vi os til tilfældet $x_0 = 0$, hvor Taylor rækken er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

ADVARSEL. Selv hvis Taylor rækken har konvergenstal $\rho > 0$, behøver den ikke at fremstille funktionen i noget interval omkring udviklingspunktet.

Eksempelvis er funktionen $f : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

af klasse C^∞ med $f^{(n)}(0) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Beviset er ikke ovenud vanskeligt.) Taylor rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ har konvergenstal ∞, men den har åbenbart ikke summen $f(x)$ i noget punkt $x \neq 0$.

Som den følgende sætning viser, er Taylor rækken imidlertid den eneste chance for potensrækkefremstilling af en C^∞-funktion i et interval, der indeholder udviklingspunktet:

SÆTNING 9. *En potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergenstal $\rho > 0$ er Taylor række med udviklingspunkt* 0 *for sin sumfunktion $f :]-\rho, \rho[\curvearrowright \mathbb{C}$, dvs.*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

BEVIS. Sæt $x = 0$ i udtrykket for $f^{(p)}(x)$ i Sætning 8.

I §2 skal vi se, at en række elementære funktioner, hvor 0 er indre punkt i definitionsmængden, faktisk kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i et større eller mindre interval omkring 0. Det må så være Taylor rækken.

§2. Potensrækkeudviklinger

I denne § skal vi se, hvorledes en række elementære funktioner kan fremstilles ved en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i et større eller mindre interval omkring 0. Samtidig illustreres en række metoder til at finde en sådan potensrækkefremstilling.

Logaritmerækken

Vi udnytter, at den afledede $\frac{d}{dx}\log(1+x) = 1/(1+x)$ har potensrækkefremstillingen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \dots\ + (-1)^n x^n + \ \dots\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in\,]-1,1\,[\,.$$

For givet $x \in \mathbb{R}$ er denne række jo en kvotientrække med kvotienten $-x$. Rækken er altså konvergent for $|x| < 1$ med sum $1/(1-(-x))$ og divergent for $|x| \geqq 1$ (X.§3. Eksempel 2), specielt er konvergenstallet 1.

Idet $\log(1+0) = 0$, således at $\log(1+x) = \int_0^x 1/(1+t)dt$, $x \in\,]-1,\infty\,[$, finder vi for hvert $x \in\,]-1,1\,[$ ved *ledvis integration* (XII.§1. Sætning 5):

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \dots\ + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\ , \quad x \in\,]-1,1\,[\,,\end{aligned}$$

som allerede udført i XII.§1. Eksempel 4.

Logaritmerækken har samme konvergenstal ρ som den ledvist differentierede række (XII.§1. Sætning 6), altså $\rho = 1$. Vi noterer:

Sætning 1. *For hvert* $x \in\,]-1,1\,[$ *er*

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \dots\ + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ \dots\ .$$

Potensrækken har konvergenstallet 1.

For $x = 1$ fås rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ \dots\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ \dots\ ,$$

som er konvergent ifølge *Leibniz' kriterium* (X.§6 Sætning 4). Men den er ikke absolut konvergent (X.§3 Eksempel 7.1). Summen er $\log 2$, som vi vil vise i en opgave.

For $x = -1$ fås den divergente række $\sum_{n=1}^{\infty}(-1/n)$.

Eksponentialrækken

Da $\exp^{(n)} = \exp\,,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$, er det nemt at opskrive Taylor rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ \ldots\ + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

for den naturlige eksponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}_+$. Det er også nemt at se, at *eksponentialrækken* er (absolut) konvergent for hvert $x \in \mathbb{R}$. Det fremgår af Kvotientkriteriet (se XII.§1. Eksempel 1). Men er summen den “rigtige” ?

Afsnittet $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ \ldots\ + \frac{x^n}{(n)!}$ er jo Taylor Polynomiet $P_n(x)$ af n'te orden for eksponentialfunktionen med udviklingspunkt 0. For *givet* $x \in \mathbb{R}$ er spørgsmålet så, om

$$P_n(x) \to e^x = \exp x \quad \text{for } n \to \infty\,,$$

dvs. om

$$R_n(x) = e^x - P_n(x) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Idet vi antager $x \neq 0$ (ellers er der intet problem), er det nærliggende at anvende *Taylors formel med restled* (VII.§1. Sætning 1):

For vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ findes et tal ξ_n mellem 0 og x, således at

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ \ldots\ + \frac{1}{n!}x^n + \frac{\exp \xi_n}{(n+1)!} x^{n+1}\,,$$

dvs. således at

$$R_n(x) = \frac{\exp \xi_n}{(n+1)!} x^{n+1}\,.$$

Vi benytter nu, at eksponentialfunktionen er voksende. I tilfældet $x < 0$ er $\xi_n < 0$ for hvert $n \in \mathbb{N}$ og dermed

$$|R_n(x)| = \frac{\exp \xi_n}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{\exp 0}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

I tilfældet $x > 0$ er $\xi_n < x$ for hvert $n \in \mathbb{N}$ og dermed

$$0 < R_n(x) = \frac{\exp \xi_n}{(n+1)!} x^{n+1} < \exp x \ \cdot\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Men da rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |x|^n$ er konvergent, som indledningsvis bemærket, følger (X.§3. Sætning 1), at

$$\frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty\,.$$

Vi slutter så i begge tilfælde, at $R_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$, og noterer:

SÆTNING 2. *For hvert $x \in \mathbb{R}$ er*

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Eulers formler

Eksponentialrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = 1 + z + z^2/2 + \ldots + z^n/n! + \ldots$ er (absolut) konvergent for hvert $z \in \mathbb{C}$, som vist i XI.§1. Eksempel 1 ved Kvotientkriteriet. Sumfunktionen, hvis definitionsmængde er hele $\mathbb{C}$, er ifølge Sætning 2 en *udvidelse* af den velkendte naturlige eksponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$. Den kaldes *den komplekse eksponentialfunktion* og betegnes ligeledes exp. Den er givet ved

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Som læseren – til sin formentlige overraskelse – skal se, skabes der med udvidelsen til det komplekse en nær forbindelse mellem eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner cosinus og sinus. (Eulers formler, Sætning 4 nedenfor.) Blandt de mangfoldige opdagelser, der skyldes Leonhard EULER (schweizisk matematiker, 1707–1783), er dette en af de mærkeligste.

Vor interesse i dette og de følgende kapitler er funktioner $x \curvearrowright f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, af *reel* variabel. Når vi alligevel inddrager den komplekse eksponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$, er det, fordi det giver os betydelige lettelser. Her spiller det en afgørende rolle, at den fra det reelle så velkendte funktionalligning også gælder efter udvidelsen til $\mathbb{C}$:

SÆTNING 3. *For vilkårlige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gælder*

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2) .$$

BEVIS. Da rækkerne $\sum_{p=0}^{\infty} {z_1}^p/p!$ og $\sum_{q=0}^{\infty} {z_2}^q/q!$ er absolut konvergente, får vi ved *Cauchy multiplikation* (X.§6. Sætning 8):

$$\begin{aligned}(\exp z_1)(\exp z_2) &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{{z_1}^p}{p!} \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{{z_2}^q}{q!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{{z_1}^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} \right) .\end{aligned}$$

Den fremkomne række er imidlertid identisk med eksponentialrækken i punktet $z_1 + z_2$,

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} ,$$

som det fremgår ved anvendelse af *binomialformlen* på det n'te led:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n &= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}{z_1}^p z_2^{n-p}\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}{z_1}^p z_2^{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\frac{{z_1}^p}{p!}\frac{{z_2}^{n-p}}{(n-p)!}\ .\end{aligned}$$

Tallene $\exp(z_1+z_2)$ og $(\exp z_1)(\exp z_2)$ er således sum af en og samme række.

For givet $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, er det komplekse tal e^z defineret som sum af eksponentialrækken. Men hvor i den komplekse plan ligger tallet? Det er et stykke detektivarbejde, som vi tager på os. Da vi har check på e^x , og da $e^z = e^x e^{iy}$ ifølge Sætning 3 , vil det være nok at forfølge e^{iy}. Det gør vi så:

For vilkårligt $t \in \mathbb{R}$ er e^{it} defineret ved en rækkesum,

$$\begin{aligned}e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \ \dots\ + \frac{(it)^n}{n!} + \ \dots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}t^n = 1 + it + \frac{i^2}{2!}t^2 + \ \dots\ + \frac{i^n}{n!}t^n + \ \dots\ .\end{aligned}$$

Funktionen $t \curvearrowright e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, en funktion af *reel* variabel, er altså sumfunktion for potensrækken med koefficienter $i^n/n!$. Ifølge XII.§1. Sætning 7 om *ledvis differentiation* af potensrækker med reel variabel, (hvor jo komplekse *koefficienter* er tilladt!) er funktionen da differentiabel på $\mathbb{R}$ med

$$\frac{de^{it}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{i^n}{n!}t^{n-1} = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1} = i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}t^n = ie^{it}\ .$$

Med en sprogbrug fra Kapitel XV er funktionen $t \curvearrowright z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, en løsning til differentialligningen

$$\frac{dz}{dt} = iz\,,\quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Som en hurtig regning viser, er også $t \curvearrowright z = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, en løsning til denne ligning:

$$\frac{d}{dt}(\cos t + i\sin t) = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t)\,.$$

Om to løsninger $f, g : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$, hvor $g(t) \neq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, gælder imidlertid $f = cg$, hvor c er konstant, thi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)f'(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2} = \frac{g(t)if(t) - f(t)ig(t)}{(g(t))^2} = 0\ .$$

Altså er

$$e^{it} = c(\cos t + i \sin t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

og da $e^{i0} = e^0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$, må konstanten c være 1.
For hvert $t \in \mathbb{R}$ gælder således

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\ .$$

Geometrisk sagt: $t \curvearrowright e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, er den sædvanlige parameterfremstilling for enhedscirklen.
Ud fra den fundne ligning og

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t\ ,$$

der fremgår ved at erstatte t med $-t$, finder vi endelig $\cos t$ og $\sin t$ udtrykt ved e^{it} og e^{-it}. Vi noterer:

Sætning 4. Eulers formler. *For hvert $t \in \mathbb{R}$ gælder*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\ , \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\ , \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\ .$$

Ved kombination med Sætning 3 fås så:

Sætning 5. *For vilkårligt $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gælder*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Tallet $e^z = e^{x+iy}$ er altså $\neq 0$, og det er karakteriseret ved

$$|e^{x+iy}| = e^x\ , \qquad y \text{ er et argument til } e^{x+iy}\,.$$

Man kan skaffe sig et overblik over den komplekse eksponentialfunktion opfattet som afbildning $z \curvearrowright w = e^z$ fra en "z-plan" til en "w-plan" ved at overveje afbildningen af linier $z = x + iy_0$, $x \in \mathbb{R}$, henholdsvis $z = x_0 + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Tegn! Bemærk, at $\exp : \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$ har *perioden* $2\pi i$, dvs.

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^{z+2\pi i} = e^z\,.$$

Eulers formler er overordentlig nyttige til tilbageføring af de trigonometriske funktioner til eksponentialfunktionen. Som et første eksempel sætter de os umiddelbart i stand til at udvikle cosinus og sinus i potensrækker på $\mathbb{R}$:

SÆTNING 6. *For hvert $t \in \mathbb{R}$ gælder*

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ \dots\ ,$$
$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ \dots\ .$$

BEVIS. Man kan benytte Eulers formler for $\cos t$ og $\sin t$ samt fremstillingerne

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \ \dots\ ,$$
$$e^{-it} = 1 - it - \frac{t^2}{2!} + i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - i\frac{t^5}{5!} - \ \dots\ .$$

Eller man kan splitte i reelt og imaginært (X.§6 Bemærkning 1) i fremstillingen

$$e^{it} = \cos t + i \sin t = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \ \dots\ .$$

EKSEMPEL 1. Eulers formler for $\cos t$ og $\sin t$ giver et simpelt middel til omskrivning af trigonometriske udtryk. Eksempel:

$$\begin{aligned}\sin^4 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}}{16} \\ &= \frac{1}{8}\frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\ .\end{aligned}$$

Omskrivningen kunne tjene til at finde en stamfunktion $\int \sin^4 t \, dt$. På tilsvarende måde kan produkter $\cos^m t \sin^n t$ omskrives til en linearkombination af funktioner 1, $\cos pt$, $\sin pt$.

Binomialrækken

For vilkårligt $a \in \mathbb{R}$ er funktionen $x \curvearrowright (1+x)^a$, $x \in \,]-1, \infty[$, vilkårligt ofte differentiabel med

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^a = a(a-1)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}\ .$$

Taylor rækken med udviklingspunkt 0 er altså

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ \ldots\ + \frac{a(a-1)\ldots(1-n+1)}{n!}x^n + \ \ldots$$

eller

$$\binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \ \ldots\ + \binom{a}{n}x^n + \ \ldots\ ,$$

hvor vi for at få bekvemme betegnelser har indført de *generaliserede binomialkoefficienter*

$$\binom{a}{0} = 1\ , \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \quad \text{for } n \in \mathbb{N}\,.$$

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ kaldes *binomialrækken.* Ifølge XII.§1. Sætning 9 er den den eneste chance for potensrækkefremstilling af funktionen $x \curvearrowright (1+x)^a$ i et interval omkring 0.

I tilfældet $a = p \in \mathbb{N}_0$ er $\binom{p}{n} = 0$ for $n \in \{p+1\,, p+2\,, \ldots\}$.
Konvergenstallet er naturligvis ∞, og rækken stemmer, når bortses fra halen af 0-led, med højre side i *binomialformlen* anvendt på $(1+x)^p$. For hvert $x \in \mathbb{R}$ gælder altså

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p}\binom{p}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n\,.$$

I tilfældet $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ er alle koefficienter $\binom{a}{n}$ i binomialrækken forskellige fra 0. For vilkårligt $x \neq 0$ har vi her

$$\Big|\binom{a}{n+1}x^{n+1}/\Big(\binom{a}{n}x^n\Big)\Big| = \Big|\frac{a-n}{n+1}\Big||x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty\,,$$

hvorfor rækken ifølge Kvotientkriteriet er absolut konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$, dvs. konvergenstallet er 1.

For hvert x tilhørende konvergensintervallet $]-1,1\,[$ har binomialrækken faktisk den "rigtige" sum:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n \quad \text{for } x \in\ ]-1,1\,[\,.$$

BEVIS. Funktionen $x \curvearrowright (1+x)^a$, $x \in\ ]-1,1\,[$, er en nulpunktsfri løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1+x}y\,.$$

Også binomialrækkens sumfunktion tilfredsstiller differentialligningen. Regningerne, som vi vil forbigå, benytter naturligvis ledvis differentiation (XII.§1. Sætning 7). Da de to funktioner desuden har samme værdi for $x = 0$, kan man på samme måde som ved differentialligningen $dz/dt = iz$ (s.4-5) slutte, at de er identiske.

EKSEMPEL 2. For hvert $x \in \,]-1, 1\,[$ er

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ \dots\ + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + \ \dots\ .$$

Rækkeudvikling af Arcus funktioner

Den afledede $\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan} x = 1/(1+x^2)$ har potensrækkefremstillingen

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \ \dots\ , \qquad x \in \,]-1, 1\,[\,,$$

thi for givet $x \in \mathbb{R}$ er rækken jo en kvotientrække med kvotienten $-x^2$. Konvergenstallet er 1. Ved ledvis integration (X.§1. Sætning 5) finder vi da

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots\ , \qquad x \in \,]-1, 1\,[\,.\end{aligned}$$

Den afledede $\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin} x = 1/\sqrt{1-x^2}$ har potensrækkefremstillingen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}\,, \quad x \in \,]-1, 1\,[\,,$$

som det fremgår ved for givet x at indsætte $t = -x^2$ i binomialudviklingen

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n\,.$$

Konvergenstallet er 1. Ved ledvis integration (X.§1. Sætning 5) finder vi da

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ \dots\ , \quad x \in \,]-1, 1\,[\,.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x &= \frac{\pi}{2} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}\,, \\ \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x &= \frac{\pi}{2} \quad \text{for } x \in \,]-1, 1\,[\,, \end{aligned}$$

er det nok at finde potensrækkefremstillinger for Arctan og Arcsin .

De hyperbolske funktioner

De *hyperbolske funktioner* cosh , sinh , tanh og coth , læs *hyperbolsk cosinus* etc., defineres ved

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}\,. \end{aligned}$$

De tre første funktioner defineres for alle $x \in \mathbb{R}$, medens udtrykket $\coth x$ kun har mening for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, idet $\sinh 0 = 0$ og $\sinh x$ i øvrigt har samme fortegn som x .

For de hyperbolske funktioner gælder en lang række formler, der bortset fra fortegn svarer nøje til tilsvarende formler for de trigonometriske funktioner. De kan bevises ved regning på grundlag af definitionerne. Vi fremhæver *additionsformlerne*

$$\begin{aligned} \cosh(x_1 + x_2) &= \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2\,, \\ \sinh(x_1 + x_2) &= \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2\,. \end{aligned}$$

Et specialtilfælde af den første (svarende til $x_1 = -x_2 = x$) er *grundrelationen*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Analogien til trigonometriske formler er mindre overraskende, når man betænker, at disse kan afledes af Eulers formler.

Af definitionerne på $\cosh x$ og $\sinh x$ i forbindelse med fremstillingerne

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

finder vi for hvert $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ .$$

Vi noterer en række egenskaber ved de hyperbolske funktioner:

1) Som nævnt er $\cosh$, $\sinh$ og $\tanh$ defineret på hele $\mathbb{R}$, $\coth$ på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) cosh er en lige funktion, de øvrige tre funktioner er ulige.

3) De hyperbolske funktioner er af klasse C^∞ på deres definitionsmængder, med

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \ ,$$
$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \ ,$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \ ,$$
$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x \ .$$

4) Da $\sinh x < 0\,,\ = 0$ og > 0, efter som $x < 0\,,\ = 0$ og > 0, følger det af 3), at cosh er strengt aftagende på $]-\infty, 0]$, strengt voksende på $[0, \infty[$, og således har mindsteværdien $\cosh 0 = 1$. Funktionerne sinh og tanh er strengt voksende på $\mathbb{R}$, og coth er strengt aftagende i hvert af intervallerne $\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}_-$.

S. XIV.1.3^1-5_{10} kan udskiftes med følgende:

Kerneproblemet i denne paragraf er at finde en stamfunktion til en *bruden rational funktion* $\frac{T}{N}$, dvs. et ubestemt integral $\int \frac{T(x)}{N(x)} dx$, hvor T og N er polynomier med reelle eller komplekse koefficienter, og N har grad $n \geqq 1$. Herved regnes i et interval på $\mathbb{R}$, hvor N ikke har nulpunkter.

Ved "polynomiers division" kan T skrives $T = NQ + R$, altså

$$\frac{T}{N} = Q + \frac{R}{N} ,$$

hvor "kvotienten" Q og "resten" R er polynomier, og R enten er 0 eller af lavere grad end N . Da udregning af $\int Q(x)dx$ er triviel, er problemet reduceret til *ægte brudne rationale funktioner*, hvor tællerpolynomiet er af lavere grad end nævnerpolynomiet.

Problemet kan løses ved *dekomposition* af den ægte brudne rationale funktion $\frac{T}{N}$, dvs. spaltning i en sum af led, som vi kan klare.

Undervejs er det praktisk at arbejde i $\mathbb{C}$. Lad

$$N(z) = a(z - \alpha_1)^{r_1} \dots (z - \alpha_m)^{r_m}$$

være faktoriseringen af N i $\mathbb{C}$ (X.§5. Sætning 2), hvor $r_1 + \ldots + r_m = n$ = graden af N . Der findes da en (og pånær ombytning af leddene kun en) dekomposition

$$\frac{T(z)}{N(z)} = \frac{b_{11}}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{b_{1r_1}}{(z - \alpha_1)^{r_1}} + \ \ldots \ + \frac{b_{m1}}{z - \alpha_m} + \ldots + \frac{b_{mr_m}}{(z - \alpha_m)^{r_m}} ,$$

gældende for $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, hvor hvert komplekst 0-punkt α_i for N giver anledning til så mange led (såkaldte *stambrøker*), som multipliciteten angiver, og hvor b'erne er komplekse tal.

S. XIV.1.3^1-4_{10} giver et elegant bevis, baseret på lineær algebra (lineær uafhængighed, basis, dimension). Det kan forbigås.

Ved integration benyttes dekompositionen kun for den variable tilhørende et interval I på $\mathbb{R}$ uden nulpunkter for N . Hvad enten $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I$ eller $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, har vi i I

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^2} dx = \frac{-1}{x - \alpha} , \ \int \frac{1}{(x - \alpha)^3} dx = \frac{-1}{2(x - \alpha)^2} , \ \ \ldots \ .$$

Og da $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \log |x - a|$, når $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I$, mangler vi kun $\int \frac{1}{x-\alpha} dx$, når $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dette tilfælde klares s. XIV.1.7 midtpå. Har polynomiet N lutter reelle koefficienter, er det dog nemmere at bemærke, at de ikke-reelle rødder optræder parvis, $\alpha = a + ib$ og $\bar{\alpha} = a - ib$, hvorfor de tilsvarende to led i dekompositionen med nævnere $x - \alpha$ og $x - \bar{\alpha}$ kan erstattes af ét led af form

$$\frac{cx + d}{(x - a)^2 + b^2} .$$

Integration sker ved omskrivning til $\frac{c}{2}\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{ac+d}{b^2+(x-a)^2}$. Det giver et led med $\log((x-a)^2+b^2)$ og et med Arctan $(\frac{x-a}{b})$.

Hvorledes man kan bestemme konstanterne i dekompositionen, fremgår af Eksempel 1 og 2 s. XIV.1.5-6. For at finde en konstant som b_{1r_1} kan man multiplicere igennem med $(z-\alpha_1)^{r_1}$ og forkorte. Den fremkomne ligning gælder for $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, men af kontinuitetsgrunde også for $z = \alpha_1$, og indsættelse af netop denne værdi giver på højre side b_{1r_1} . Det er tankegangen bag Eksempel 1. Når $b_{1r_1}, \ldots, b_{1r_m}$ er fundet, kan de pågældende stambrøker rykkes over på venstre side, som derpå trækkes sammen og forkortes med $(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_m)$ til formen $T_1(z)/N_1(z)$. Nu kan så legen gentages, om fornødent. Eksempel 2 illustrerer en variant.

§3. Eksistens og entydighed af løsninger til differentialligninger

Én differentialligning af 1. orden

For en given kontinuert funktion $f : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^2$ betragter vi differentialligningen af 1. orden

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x)\ .$$

Ved en *løsning* til (1) forstås en funktion $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

(i) φ er differentiabel på J.

(ii) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ for hvert $t \in J$.

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ for hvert $t \in J$.

Betingelse (iii) er naturligvis den centrale. Den udtrykker, at $x = \varphi(t),\ t \in J$, *tilfredsstiller* (1), dvs. at (1) er opfyldt, når man indsætter $x = \varphi(t)$.
(ii) kommer ud på, at grafen for $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ ligger i Ω. Betingelsen sikrer, at $f(t, \varphi(t))$ har mening, medens (i) sikrer, at $\varphi'(t)$ har mening, for hvert $t \in J$.
Enhver løsning $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ til (1) er af klasse C^1. Thi $t \curvearrowright f(t, \varphi(t)),\ t \in J$, er opbygget af kontinuerte funktioner og dermed kontinuert, og denne funktion er jo netop φ'.

Enhver restriktion $\varphi|_I$ af en løsning $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ til et delinterval $I \subseteqq J$ er naturligvis ligeledes en løsning. En *løsning* $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ *med maksimalt definitionsinterval*, kort en *maksimal løsning*, vil sige en løsning, som ikke har nogen udvidelse til en løsning på et interval $I \supset J$.

En funktion $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ siges at *gå gennem et punkt* $(a, b) \in \Omega$, hvis (a, b) ligger på grafen, dvs. hvis $\varphi(a) = b$. Man siger også, at φ opfylder *begyndelsesbetingelsen* $\varphi(a) = b$.

I Matematik 2 MA vil der blive vist følgende

Eksistens- og entydighedssætning for en differentialligning af 1. orden. *Lad $f : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ være kontinuert på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^2$ og antag, at f i Ω har en kontinuert partiel afledet $D_2 f$. For vilkårligt $(a, b) \in \Omega$ gælder da, at der findes løsninger til*

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

gennem punktet, og de er alle restriktioner af en og samme løsning.

Denne løsning, åbenbart en løsning med maksimalt definitionsinterval, kaldes ofte slet og ret *løsningen gennem* (a, b).

Bemærk, at enhver løsning til (1) har en og kun en udvidelse til en maksimal løsning, og at graferne for to forskellige maksimale løsninger ikke har noget punkt fælles.

Er x en størrelse, der varierer med tiden t og tilfredsstiller (1), og er værdien b af x givet til et tidspunkt a, ja så fortæller sætningen, at $x = x(t)$ er fastlagt ved (1) et vist stykke ud i fremtiden, måske til $+\infty$, og ligeledes et vist stykke tilbage i fortiden. Når $x(a) = b$ kaldes en *begyndelsesbetingelse*, er det nok, fordi man er mest spændt på fremtiden.

EKSEMPEL 1. En normeret lineær differentialligning af 1. orden

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)\,,$$

hvor p og q er kontinuerte funktioner på et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$, kan skrives

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)x + q(t)\,.$$

Da $(t,x) \curvearrowright f(t,x) = -p(t)x + q(t)$ er kontinuert i $\Omega = I \times \mathbb{R}$ med kontinuert partiel afledet

$$D_2 f(t,x) = -p(t)\,,$$

kan *Eksistens- og entydighedssætningen* anvendes. De maksimale løsninger er defineret på hele I (se s.XV.1.8), men det fortæller sætningen ikke noget om.

EKSEMPEL 2. Differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2\,,$$

falder åbenbart ind under *Eksistens- og entydighedssætningen*, med $f(t,x) = 1+x^2$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, da f og f'_x begge er kontinuerte på $\mathbb{R}^2$.

For hvert $c \in \mathbb{R}$ er funktionen $\varphi_c :]c - \frac{\pi}{2}\,, c + \frac{\pi}{2}[\curvearrowright \mathbb{R}$,

$$\varphi_c(t) = \tan(t - c)\,, \quad t \in]c - \tfrac{\pi}{2}\,, c + \tfrac{\pi}{2}[\,,$$

en løsning, idet $\varphi'_c(t) = 1 + \tan^2(t-c) = 1 + (\varphi_c(t))^2$. Og den er åbenbart maksimal: udvidelse til et større interval er jo ikke mulig, idet $\varphi_c(t) \to \pm\infty$ for $t \to c \pm \frac{\pi}{2}$.

Men er der andre løsninger end de fundne φ_c, $c \in \mathbb{R}$, og restriktioner af disse? Nej. Gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, går der jo en løsning φ_c, med c bestemt ved

$$t_0 \in]c - \tfrac{\pi}{2}\,, c + \tfrac{\pi}{2}[\,, \quad \varphi_c(t_0) = \tan(t_0 - c) = x_0\,,$$

dvs. $c = t_0 - \operatorname{Arctan} x_0$, og det er så *den* maksimale løsning gennem (t_0, x_0).

Bemærk, at de maksimale løsninger har begrænset definitionsinterval, skønt f er defineret på *hele* $\mathbb{R}^2$. Løsningen, som til tiden t_0 har værdien x_0, vil være "eksploderet" til tiden $t_0 + (\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x_0)$.

(Vi "gættede os" til nogle løsninger og benyttede så entydighedsdelen af sætningen til at slutte, at der ikke er andre. Den forelagte differentialligning kan også "løses" ved at adskille de variable, se s. XV.2.5. Prøv!)

BEMÆRKNING 1. Uden at udføre argumentationen nævner vi, at man af sætningen ovenfor kan udlede nedenstående resultat om løsningskurverne til en differentialligning

$$L(x,y)dx + M(x,y)dy = 0\,,$$

hvor L og M er reelle C^1-funktioner defineret på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^2$. (Se s. XV.2.1$_{10}$-2^6.)

Vi kalder et punkt $(x,y) \in \Omega$ for *singulært*, hvis $L(x,y) = M(x,y) = 0$.

Vi antager, at ikke alle punkter i Ω er singulære, og betegner med Ω^* den (åbenbart åbne) delmængde af Ω, der bliver tilbage, når eventuelle singulære punkter fjernes. Her gælder:

Gennem hvert punkt af Ω^* går der løsningskurver forløbende i Ω^*, og de er alle delkurver af en og samme løsningskurve i Ω^*.

En løsningskurve har altså en entydig og maksimal fortsættelse i begge ender, så længe vi holder os til Ω^*. Men i Ω kan den eventuelt fortsætte på flere (evt. uendelig mange måder) efter passage af et singulært punkt. Eksempel

$$2y\,dx - x\,dy = 0\ ,$$

hvor en halvparabel $(x,y) = (t, at^2)$, $t \in\,]-\infty, 0\,[$, nok er en maksimal løsningskurve i $\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, men i $\Omega = \mathbb{R}^2$ kan den fortsættes gennem det singulære punkt $(0,0)$ over i en vilkårlig halvparabel $(x,y) = (t, bt^2)$, $t \in\,]\,0, \infty\,[$.

Et singulært punkt *kan* altså være "forgreningspunkt". Men (mange) løsningskurver kan også gå entydigt igennem, eksempel:

$$-y\,dx + x\,dy = 0;.$$

Til den modsatte yderlighed kan det være, at et singulært punkt ikke ligger på nogen løsningskurve, eksempel

$$x\,dx + y\,dy = 0\ .$$

Et differentialligningssystem af 1. orden

Tænker man på t som tiden, vil ændringshastigheden dx/dt for en størrelse x i mange tilfælde afhænge ikke blot af den aktuelle værdi af x, men også af værdierne af andre størrelser $y, z, \dots$, foruden måske af t. Tilsvarende gælder om dy/dt, dz/dt, $\dots$. I stedet for en enkelt differentialligning får vi da et *system af differentialligninger*.

For et givet sæt $f_1, \dots, f_k$ af kontinuerte funktioner $f_i : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ betragter vi systemet af differentialligninger af 1. orden:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \ \dots\ , x_k) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= f_k(t, x_1, \ \dots\ , x_k) \quad . \end{aligned}$$

Ved en *løsning* til (2) forstås et sæt $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ af funktioner $\varphi_i : J \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ er alle differentiable på J.

(ii) $(t, \varphi_1(t), \ \ldots \ , \varphi_k(t)) \in \Omega$ for hvert $t \in J$.

(iii) $\varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \ \ldots \ , \varphi_k(t))$ for hvert $t \in J$

$\vdots$

$\varphi_k'(t) = f_k(t, \varphi_1(t), \ \ldots \ , \varphi_k(t))$ for hvert $t \in J$.

Sætter vi $f = (f_1, \ldots, f_k) : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}^k$ og $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : J \curvearrowright \mathbb{R}^k$, antager betingelserne (i), (ii), (iii) formelt samme udseende som tidligere for en enkelt ligning. Tilsvarende skriver man differentialligningssystemet (2) som en enkelt *vektoriel differentialligning* af 1. orden

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) ,$$

hvor x står for $(x_1, \ldots, x_k)$.

For vilkårligt $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_k) \in \Omega$ kan man tolke $f(t, x) = f(t, x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ som feltvektoren i punktet $x = (x_1, \ldots, x_k)$ til tiden t i et vektorfelt, der varierer med tiden. En differentiabel funktion $t \curvearrowright \varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t))$, $t \in J$, kan opfattes som beskrivelse af et punkts bevægelse og vil så være en løsning, netop hvis hastigheden $\varphi'(t)$ til hvert tidspunkt $t \in J$ er lig feltvektoren $f(t, \varphi(t))$ til tiden t i punktet $\varphi(t)$,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) .$$

I Matematik 2 MA vil der blive vist følgende

Eksistens- og entydighedssætning for et system af differentialligninger af 1. orden. *Lad $f = (f_1, \ldots, f_k) : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}^k$ være kontinuert på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ og antag, at hvert f_i i Ω har kontinuerte partielle afledede $\partial f_i/\partial x_1, \ \ldots \ , \partial f_i/\partial x_k$ efter de sidste k variable.*

For vilkårligt $(a, b) = (a, b_1, \ldots, b_k) \in \Omega$ findes der da løsninger $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ til differentialligningssystemet (2), dvs. til

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) ,$$

som opfylder begyndelsesbetingelsen $\varphi(a) = b$, dvs.

$$\varphi_1(a) = b_1 , \ \ \ldots , \ \ \varphi_k(a) = b_k ,$$

og de er alle restriktioner af en og samme løsning.

Denne løsning, åbenbart en løsning med maksimalt definitionsinterval, kaldes ofte slet og ret *løsningen svarende til begyndelsesbetingelsen $\varphi(a) = b$.*

Ud fra følgende løse betragtning kan man godt "forstå", at størrelser $x_1, \dots, x_k$, der varierer med tiden t og tilfredsstiller differentialligningssystemet (2), vil være fastlagt ved (2) et stykke ud i fremtiden, når deres værdier $b_1, \dots, b_k$ er givet til et tidspunkt $a = t_0$. Vi kan nemlig med en vis tilnærmelse følge udviklingen gennem tidspunkter $t_0 < t_1 < t_2 \ \dots$ med intervaller $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$:

Lad os opfatte $x_1, \dots, x_k$ som koordinater til et punkt P, der bevæger sig i $\mathbb{R}^k$ (*"faserummet")*.

Til tiden $t_0 = a$ er P i $P_0 = (b_1, \dots, b_k)$ og har hastigheden $f(t_0, P_0)$.

Til tiden t_1 er position og hastighed med tilnærmelse P_1 og $f(t_1, P_1)$, hvor

$$\overrightarrow{P_0P_1} = f(t_0, P_0)\Delta t_1 \ .$$

Til tiden t_2 er position og hastighed med tilnærmelse P_2 og $f(t_2, P_2)$, hvor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = f(t_1, P_1)\Delta t_2 \ .$$

Etc.

Eksistens- og entydighedssætningen kan specielt anvendes på et system af *lineære* differentialligninger af 1. orden:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + \ \dots \ + p_{1k}(t)x_k + q_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}(t)x_1 + \ \dots \ + p_{kk}(t)x_k + q_k(t) \quad , \end{aligned}$$

hvor alle p_{ij} og q_i er kontinuerte reelle funktioner defineret på samme (åbne) interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Her er $\Omega = I \times \mathbb{R}^k$, således at a og b i begyndelsesbetingelsen $\varphi(a) = b$ kun er underkastet kravet $a \in I$, $b \in \mathbb{R}^k$, og der gælder følgende vigtige

TILFØJELSE. *De maksimale løsninger til et system (3) af lineære differentialligninger af 1. orden, hvor alle p_{ij} og q_i er kontinuerte reelle funktioner på et (åbent) interval $I \subseteq \mathbb{R}$, er defineret på hele I.*

Der er sat parentes om ordet *åbent*, da det er en overflødig forudsætning. (Hvis intervallet I ikke er åbent, kan funktionerne p_{ij} og q_i jo udvides til kontinuerte funktioner på et åbent interval $J \supset I$, og alle løsninger kan så udvides til J.)

For at få tilføjelsen med starter man i øvrigt beviset forfra, og det går endda en anelse lettere, hvis I er afsluttet og begrænset. Men vi må fortsat henvise til Matematik 2 MA.

EKSEMPEL 3. Det lineære differentialligningssystem af 1. orden

$$\frac{dx}{dt} = -y$$
$$\frac{dy}{dt} = \ x$$

har de maksimale løsninger

$$x = a\cos(t-c)$$
$$y = a\sin(t-c)\ ,$$

$t \in \mathbb{R}$, hvor a og c er arbitrære reelle konstanter. (Den enkelte løsning fremkommer flere gange, endda uendelig mange gange, hvad vi dog kan undgå ved at tage nulløsningen for sig og ellers nøjes med $a \in \mathbb{R}_+$, $c \in]-\pi, \pi\,]$.)

Men er der andre løsninger end disse (og restriktioner af dem)? Nej. For hvert $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ findes nemlig a og c, således at

$$a\cos(t_0 - c) = x_0\ , \quad a\sin(t_0 - c) = y_0\ ,$$

og den tilsvarende løsning ovenfor er så *den* maksimale løsning gennem (t_0, x_0, y_0). At vi har fundet samtlige løsninger til differentialligningssystemet sluttes således af sætningens entydighedsdel.

To størrelser x og y, hvis ændringshastigheder dx/dt og dy/dt er bestemt ved værdierne af x og y som angivet i differentialligningssystemet, vil altså begge svinge harmonisk i al evighed med samme amplitude a, med periode 2π og således at y er $\frac{\pi}{2}$ bagud i tid.

Tolkes $f(t,x,y) = (-y,x)$ som feltvektor i et vektorfelt i $\mathbb{R}^2$, og opfatter vi en differentiabel funktion $t \curvearrowright \varphi(t) = (x(t), y(t))$ som beskrivelse af et punkts bevægelse, kommer differentialligningssystemet ud på, at hastigheden $\varphi'(t) = (x'(t), y'(t))$ til hvert tidspunkt er tværvektor til stedvektor $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Vort resultat er så, at dette gælder for cirkelbevægelser med centrum i $(0,0)$ og vinkelhastighed 1, og *kun for sådanne.*

BEMÆRKNING 2. I det *lineære* tilfælde gælder Eksistens- og entydighedssætningens påstand også, *med tilføjelse*, når man søger løsninger $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, hvor funktionerne φ_i har *komplekse* værdier. I begyndelsesbetingelsen kan $b_1, \dots, b_k$ så være vilkårlige *komplekse* tal, ligesom funktionerne p_{ij} og q_i kan have *komplekse* værdier.

Ved at splitte i reelt og imaginært i hver af de k ligninger og begyndelsesbetingelser kan man nemlig føre problemet tilbage til et system af $2k$ lineære differentialligninger af 1. orden inden for det reelle.

Én differentialligning af k'te orden

For en given kontinuert funktion $f : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ betragter vi differentialligningen af k'te orden

$$\frac{d^k x}{dt^k} = f\big(t, x, \frac{dx}{dt}, \ \dots\ , \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\big)\ . \tag{4}$$

Ved en *løsning* til (4) forstås en funktion $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, der opfylder betingelserne

(i) φ er k gange differentiabel på J.

(ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ \dots \ , \varphi^{(k-1)}(t)) \in \Omega$ for hvert $t \in J$.

(iii) $\varphi^{(k)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ \dots \ , \varphi^{(k-1)}(t))$ for hvert $t \in J$.

Tilfældet $k = 1$ har vi diskuteret s. XV.3.1-2. Under passende forudsætninger kan den enkelte maksimale løsning φ fastlægges ved en begyndelsesbetingelse $\varphi(a) = b$ eller, som vi siger, ved at φ går gennem punktet (a, b). For $k = 2$ bliver der tilsvarende tale om begyndelsesbetingelser $\varphi(a) = b, \ \varphi'(a) = b_1$ eller, som vi vil sige, om at φ indeholder *linieelementet* (a, b, b_1). Det kommer ud på, at grafen for φ går gennem (a, b) med tangenthældning b_1. Navnet svarer til tolkningen af talsættet (a, b, b_1) som et punkt (a, b) og en hældning b_1.

For vilkårligt k bliver der tale om k begyndelsesbetingelser, resp. om et "*linieelement*" af $(k-1)$'te orden:

En funktion $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$, der er $k-1$ gange differentiabel på et interval $J \subseteqq \mathbb{R}$, siges at indeholde talsættet $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1})$ som linieelement af $(k-1)$'te *orden*, hvis $a \in J$, og φ opfylder *begyndelsesbetingelserne*

$$\varphi(a) = b\,, \ \varphi'(a) = b_1, \ \dots \ , \ \varphi^{(k-1)}(a) = b_{k-1}\,.$$

For at aflede en Eksistens- og entydighedssætning for løsninger til en differentialligning (4) af k'te orden sammenholder vi med følgende differentialligningssystem (5) af første orden. Givet er en kontinuert funktion $f : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ defineret på en åben mængde $\Omega \subseteqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$.

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_{k-2}}{dt} &= x_{k-1} \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} &= f(t, x, x_1, \ \dots \ , x_{k-1}) \end{aligned}$$

Løst sagt er (5) fremkommet ved foruden x at tage $dx/dt, \ \dots \ , d^{k-1}x/dt^{k-1}$ som "ubekendte funktioner" $x_1, \dots, x_{k-1}$.

Systemet (5) er et specialtilfælde af (2), blot med en anden nummerering. Højresiderne er alle defineret på Ω:

$$\begin{aligned} f_j(t, x, x_1, \dots, x_{k-1}) &= x_{j+1}\,, \quad j = 0, \dots, k-2\,, \\ f_{k-1}(t, x, x_1, \dots, x_{k-1}) &= f(t, x, x_1, \dots, x_{k-1})\,. \end{aligned}$$

For enhver løsning $\varphi : J \curvearrowright \mathbb{R}$ til (4) vil sættet $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)})$ være løsning til (5), som man umiddelbart går efter. Forskellige løsninger φ og ψ til (4) giver naturligvis forskellige sæt. Og enhver løsning $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ til (5) kommer frem på denne måde: Af de $k-1$ første ligninger sluttes nemlig, at $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ er k gange differentiabel, og at

$$\varphi' = \varphi_1 \,, \ \varphi'' = \varphi_2, \ \dots \ , \ \varphi^{(k-1)} = \varphi_{k-1} \,.$$

Men så er det klart, at φ opfylder (ii), og den sidste ligning fortæller, at φ opfylder (iii), således at φ er en løsning til (4).

Vi noterer:

Afbildningen $\varphi \curvearrowright (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)})$ *er en bijektion fra mængden af løsninger til differentialligningen (4) af k'te orden til mængden af løsninger til systemet (5) af k differentialligninger af 1. orden.*

Den omvendte afbildning er $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) \curvearrowright \varphi$.

Restriktion, resp. udvidelse følges naturligvis ad i de to løsningsmængder. Og en løsning $(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)})$ til (5) opfylder en begyndelsesbetingelse

$$\varphi(a) = b \,, \ \varphi_1(a) = b_1, \ \dots \ , \ \varphi_{k-1}(a) = b_{k-1} \,,$$

netop hvis φ indeholder linieelementet $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1})$.

Det væsentlige udbytte af denne sammenhæng mellem (4) og (5) er, at vi hermed får overblik over løsningerne til (4):

Eksistens- og entydighedssætning for en differentialligning af k'te orden. *Lad $f : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}$ være kontinuert på en åben mængde $\Omega \subsetneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ og antag, at f i Ω har kontinuerte partielle afledede efter de sidste k variable.*

For vilkårligt $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1}) \in \Omega$ findes der da løsninger til differentialligningen

$$\text{(4)} \qquad \frac{d^k x}{dt^k} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}) \,,$$

som opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\varphi(a) = b \,, \ \ \varphi'(a) = b_1 \,, \ \dots \ , \ \varphi^{(k-1)}(a) = b_{k-1} \,,$$

og de er alle restriktioner af en og samme løsning.

bevis. Eksistens- og entydighedssætningen for et system af differentialligninger af 1. orden kan anvendes på systemet (5) ovenfor. Funktionerne $f_0, f_1, \dots, f_{k-2}, f$ på højre side er jo alle kontinuerte med kontinuerte partielle afledede efter de sidste k variable. Det er forudsat for f, og det er trivielt for de øvrige.

Påstanden følger da af sammenhængen mellem løsningerne til (4) og (5), som vi har diskuteret ovenfor.

Sætningen kan specielt anvendes på en normeret lineær differentialligning af k'te orden

$$\frac{d^k x}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \dots \ + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t)\,, \tag{6}$$

hvor $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ og q er kontinuerte reelle funktioner defineret på samme (åbne) interval $I \subseteqq \mathbb{R}$.

Her er $\Omega = I \times \mathbb{R}^k$, og $f : I \times \mathbb{R}^k \curvearrowright \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(t, x, x_1, \dots, x_{k-1}) = -p_0(t)x - p_1(t)x_1 - \ \dots \ - p_{k-1}(t)x_{k-1} + q(t)\,.$$

Linieelementet $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1})$ er således kun underkastet betingelsen $a \in I$, medens $b, b_1, \dots, b_{k-1}$ kan vælges frit.

For at få den vigtige oplysning med, at de maksimale løsninger er defineret på *hele* I, må vi imidlertid gribe tilbage til argumentationen ovenfor:

Differentialligningssystemet af 1. orden, som vi sammenholder med, er nu et system af *lineære* ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_{k-2}}{dt} &= x_{k-1} \\ \frac{dx_{k-1}}{dt} &= -p_0(t)x - p_1(t)x_1 - p_2(t)x_2 - \ \dots \ - p_{k-1}(t)x_{k-1} + q(t)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Den ønskede oplysning fremgår så af Tilføjelse s. 5.

Vi noterer:

Eksistens– og entydighedssætning for en normeret lineær differentialligning af k'te orden. *Lad $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ og q være kontinuerte reelle funktioner defineret på samme interval $I \subseteqq \mathbb{R}$.*

For vilkårligt $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1}) \in I \times \mathbb{R}^k$ har differentialligningen

$$\frac{d^k x}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \dots \ + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t) \tag{6}$$

da en og kun en løsning $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$, *som opfylder begyndelsesbetingelserne*

$$\varphi(a) = b\,, \quad \varphi'(a) = b_1, \quad \dots \quad , \; \varphi^{(k-1)}(a) = b_{k-1}\,.$$

Enhver løsning, der indeholder linieelementet $(a, b, b_1, \dots, b_{k-1})$, *er en restriktion af* φ.

Vi har undladt at forudsætte, at intervallet I er åbent, da det er uden betydning. (Sml. s.5.)

BEMÆRKNING 3. Sætningen gælder også, når man søger løsninger med *komplekse* funktionsværdier. I begyndelsesbetingelserne kan $b, b_1, \dots, b_{k-1}$ så være vilkårlige *komplekse* tal, ligesom funktionerne $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ og q kan have *komplekse* værdier.

Også her kan vi sammenholde (6) med systemet (7) af lineære differentialligninger af 1. orden, hvor så Bemærkning 2 kan anvendes,

§4. Mere om lineære differentialligninger

En lineær differentialligning af k'te orden

For en *normeret* lineær differentialligning af k'te orden

$$\frac{d^k x}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \ldots \ + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t) \ , \tag{1}$$

hvor $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ og q er kontinuerte reelle (eller komplekse) funktioner defineret på samme interval $I \subseteqq \mathbb{R}$, er enhver løsning restriktion af en løsning defineret på *hele* I (se s.XV.3.9). Når vi i det følgende taler om løsninger, vil vi underforstå, at talen er om løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{C}$).

Vi skal diskutere *strukturen af mængden af alle løsninger* (defineret på *hele* I).

Her viser det sig nyttigt at knytte an til afbildningen $F : C^k(I) \curvearrowright C(I)$, der til hver reel (eller kompleks) funktion $\varphi \in C^k(I)$ tilordner den funktion, der fås ved at indsætte φ i venstre side af differentialligningen (1):

$$F(\varphi) = \varphi^{(k)} + p_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \ \ldots \ + p_1\varphi' + p_0\varphi\,, \quad \varphi \in C^k(I)\,.$$

Både $C^k(I)$ og $C(I)$ er *vektorrum* over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$), nemlig underrum af vektorrummet af alle reelle (eller komplekse) funktioner med intervallet I som definitionsmængde (check underrumsbetingelserne!), og $F : C^k(I) \curvearrowright C(I)$ er *lineær*: for $\varphi, \psi \in C^k(I)$ og $c \in \mathbb{R}$ (eller $c \in \mathbb{C}$) er

$$F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi)\,, \quad F(c\varphi) + cF(\varphi)\,,$$

som man umiddelbart regner efter. Det er i øvrigt baggrunden for, at (1) kaldes en *lineær* differentialligning.

En lineær afbildning af et funktionsvektorrum ind i et funktionsvektorrum – som f.eks. F – kaldes ofte en lineær *operator*.

En løsning $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{C}$) til differentialligningen (1) kan nu karakteriseres som en funktion $\varphi \in C^k(I)$, hvor

$$F(\varphi) = q\,.$$

Løsningsmængden til (1) er altså originalmængden

$$F^{-1}(q) = \{\varphi \in \mathbb{C}^k \mid F(\varphi) = q\}\,.$$

Ved diskussionen af løsningsmængdens struktur kan vi holde os til tilfældet, hvor q er nulfunktionen. Differentialligningen kaldes så *homogen*:

Til en given ligning (1) svarer nemlig en homogen ligning

$$(2) \qquad \frac{d^k x}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \ldots \ + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0 \ ,$$

hvor højre side $q(t)$ er erstattet med 0. Og er φ en (vilkårlig) løsning til (1), medens x og y er C^k-funktioner på I, hvor $x = \varphi + y$, har vi

$$F(x) = F(\varphi) + F(y) = q + F(y) \ ,$$

altså

$$F(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad F(y) = 0 \ ,$$

dvs.

$$x \text{ er løsning til (1)} \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ er løsning til (2)}.$$

Mængden af løsninger til (1) er altså

$$\{\varphi + y \mid y \text{ er løsning til (2)}\}, \quad \text{kort: } \varphi + L \ ,$$

hvor L er mængden af løsninger til (2), jf. §1. Lemma 1.11.

Lad der nu være givet en normeret, homogen lineær differentialligning af k'te orden

$$(2) \qquad \frac{d^k x}{dt^k} + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \ldots \ p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = 0 \ ,$$

hvor $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ er kontinuerte reelle (eller komplekse) funktioner defineret på samme interval $I \subseteqq \mathbb{R}$.

Vi bemærker straks, at mængden L af løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{C}$) til (2) er et *vektorrum.* Det er jo *kernen*

$$L = F^{-1}(0) = \{\varphi \in C^k(I) \mid F(\varphi) = 0\}$$

for den lineære afbildning $F : C^k(I) \curvearrowright C(I)$ givet ved

$$F(\varphi) = \varphi^{(k)} + p_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \ \ldots \ + p_1\varphi' \ + p_0\varphi \ , \quad \varphi \in C^k(I) \,.$$

At L er et underrum af $C^k(I)$ er i øvrigt nemt at verificere: Når $c \in \mathbb{R}$ (eller $c \in \mathbb{C}$) og $\varphi, \psi \in C^k(I)$ tilhører L, dvs. $F(\varphi) = 0$ og $F(\psi) = 0$, har vi

$$\begin{aligned} F(\varphi + \psi) &= F(\varphi) + F(\psi) = 0 + 0 = 0 \,, && \text{altså } \varphi + \psi \in L \,, \\ F(c\varphi) &= cF(\varphi) = c\,0 = 0 \,, && \text{altså } c\varphi \in L \,. \end{aligned}$$

De sædvanlige underrumsbetingelser er således opfyldt.

Eksistens- og entydighedssætningen s. XV.3.9 giver os afgørende oplysning om vektorrummet L. (Sætning 1 nedenfor.) Dels i det reelle tilfælde, hvor koefficientfunktioner $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$: $I \curvearrowright \mathbb{R}$ og løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ har *reelle* værdier, men også, når *komplekse* værdier tillades (§3. Bemærkning 3). Når der er grund til det, vil vi skelne i betegnelsen mellem løsningsrum $L_{\mathbb{R}}$ og løsningsrum $L_{\mathbb{C}}$.

Sætning 1. *Rummet L af løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{C}$) til en normeret, homogen lineær differentialligning (2) af k'te orden med kontinuerte koefficienter $p_i : I \curvearrowright \mathbb{R}$ (eller $p_i : I \curvearrowright \mathbb{C}$), $i = 0, \ldots, k-1$, hvor I er et interval på $\mathbb{R}$, har dimension k.*

I det reelle tilfælde menes naturligvis, at $L = L_{\mathbb{R}}$ har dimensionen k betragtet som vektorrum over $\mathbb{R}$, dvs. multiplikationen i $L_{\mathbb{R}}$ er med reelle tal. For $L_{\mathbb{C}}$ menes $\dim L_{\mathbb{C}} = k$, hvor $L_{\mathbb{C}}$ betragtes som vektorrum over $\mathbb{C}$.

bevis. Vi tager eksempelvis det reelle tilfælde. Beviset føres ved at etablere en vektorrumsisomorfi fra $L = L_{\mathbb{R}}$ til $\mathbb{R}^k$. (For $L = L_{\mathbb{C}}$ ville det være til $\mathbb{C}^k$.)

For et vilkårligt (fast) $a \in I$ betragtes afbildningen

$$\varphi \curvearrowright (\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(k-1)}(a)), \quad \varphi \in L,$$

fra løsningsrummet $L = L_{\mathbb{R}}$ til talrummet $\mathbb{R}^k$. Ifølge *Eksistens- og entydighedssætningen* s. XV.3.9 er det en *bijektion*: For hvert $(b, b_1, \ldots, b_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ findes jo en og kun en løsning $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}$ til (2), der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\varphi(a) = b, \quad \varphi'(a) = b_1, \quad \ldots \quad, \quad \varphi^{(k-1)}(a) = b_{k-1},$$

dvs. et og kun et $\varphi \in L$ med billede

$$(\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(k-1)}(a)) = (b, b_1, \ldots, b_{k-1}).$$

Da afbildningen tillige er lineær (oplagt), er den en vektorrumsisomorfi af L på $\mathbb{R}^k$. De to vektorrum er altså isomorfe, og dermed er

$$\dim L = \dim \mathbb{R}^k = k \quad .$$

Beviset gav os følgende

Tilføjelse til Sætning 1. *For vilkårligt $a \in I$ er afbildningen*

$$\varphi \curvearrowright (\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(k-1)}(a)), \quad \varphi \in L,$$

en vektorrumsisomorfi af løsningsrummet $L = L_{\mathbb{R}}$ på $\mathbb{R}^k$ (henh. $L = L_{\mathbb{C}}$ på $\mathbb{C}^k$).

Sætning 1 fortæller os, at mængden L af løsninger til (2) er bestemt, så snart vi kender k *lineært uafhængige* løsninger $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. De vil nemlig udgøre en *basis* for løsningsrummet L, således at enhver løsning på en og kun en måde kan skrives

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_k\varphi_k$$

med koefficienter $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. (Henh. $c_j \in \mathbb{C}$.)

I praksis kommer man nemt i den situation, at man har fundet k *løsninger* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ til (2) og ønsker at afgøre, om de er lineært uafhængige. Vælger vi et punkt $a \in I$, kan vi udnytte vektorrumsisomorfien i *Tilføjelse til Sætning 1* og i stedet spørge, om billederne, dvs. søjlerne i matricen

$$W(a) = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) & \cdots & \varphi_k(a) \\ \varphi_1'(a) & \varphi_2'(a) & \cdots & \varphi_k'(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(a) & \varphi_2^{(k-1)}(a) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(a) \end{pmatrix}$$

er lineært uafhængige, dvs. om $W(a)$ er invertibel. Vi har altså:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \text{ er en basis for } L \quad \Leftrightarrow \quad \det W(a) \neq 0 .$$

Bemærk, at vi frit kan disponere over a. Den til et sæt $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ af k løsninger til (2) svarende såkaldte *Wronski determinant* $\det W(t)$ er derfor enten forskellig fra 0 for alle $t \in I$ eller lig 0 for alle $t \in I$. (HOËNÉ-WRONSKI, polsk matematiker, 1778–1853.)

En homogen lineær differentialligning af k'te orden med konstante koefficienter

Vi betragter den homogene lineære differentialligning af k'te orden

$$(3) \qquad \frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + \ \ldots \ + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \ ,$$

hvor koefficienterne $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ er givne reelle, henh. komplekse tal.

Som ovenfor bemærket (s. XV.4.1) er det nok at søge løsninger $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, henh. $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$, defineret på *hele* $\mathbb{R}$, og vi har vist, at disse udgør et funktionsvektorrum L over $\mathbb{R}$, henh. $\mathbb{C}$, af dimension k. (Sætning 1.) Vi søger derfor en basis, dvs. k lineært uafhængige løsninger.

Det er nemmest at begynde med at søge løsninger $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$, også når koefficienterne er reelle, og vi i den sidste ende kun er interesseret i løsninger $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$.

For vilkårligt $\lambda \in \mathbb{C}$ får vi ved at indsætte $x = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, i venstre side af (3):

$$(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ \ldots \ + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} .$$

Funktionen $t \curvearrowright e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, er altså løsning til (3), hvis og kun hvis λ er rod i *karakterligningen*

$$(4) \qquad \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ \ldots \ + a_1\lambda + a_0 = 0 \ .$$

Ifølge *Algebraens Fundamentalsætning* (eller rettere følgesætningen X.§5. Sætning 2) har karakterligningen k rødder i $\mathbb{C}$, når vi tæller med multiplicitet.

Vi betragter først tilfældet, hvor karakterligningen har *lutter enkeltrødder*, altså k forskellige rødder $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$. Som vi skal se, er løsningerne

$$t \curvearrowright e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ \ldots \ , e^{\lambda_k t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

da en basis for løsningsrummet $L_{\mathbb{C}}$ til (3), således at enhver løsning på en og kun en måde kan skrives

$$t \curvearrowright c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ \ldots \ + c_k e^{\lambda_k t}, \ \ t \in \mathbb{R}, \quad \text{med } c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}.$$

Til beviset benytter vi, at afbildningen

$$\varphi \curvearrowright (\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0), \ \ldots \ , \varphi^{(k-1)}(0))$$

fra $L_{\mathbb{C}}$ til $\mathbb{C}^k$ er en vektorrumsisomorfi. (Tilføjelse til Sætning 1.) Til en funktion $t \curvearrowright e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, svarer ved denne isomorfi talsættet $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{k-1})$. Vore løsninger går altså over i søjlerne i matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & \cdots & {\lambda_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Opgaven er så at vise, at søjlerne er en basis i $\mathbb{C}^k$, dvs. at matricen er invertibel. Det fremgår f.eks. af, at determinanten (VANDERMONDES *determinant*) kan vises at have værdien $\Pi(\lambda_p - \lambda_q)$, hvor p og q gennemløber tallene $1, \ldots, k$ med $p > q$, og Π står for produkt. En anden vej: *Rækkerne* er lineært uafhængige, thi i en linearkombination med koefficienter $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{C}$, som giver $(0, 0, \ldots, 0)$, må $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ alle være 0. I modsat fald ville

$$c_{k-1} z^{k-1} + \ \ldots \ + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

nemlig være et polynomium af højst $(k-1)$'te grad med mindst k nulpunkter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Vi noterer:

SÆTNING 2. *Hvis karakterligningen (4) har lutter enkeltrødder* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, *så er*

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ \ldots \ + c_k e^{\lambda_k t}, \ \ t \in \mathbb{R},$$

den fuldstændige løsning til differentialligningen (3). Her er $c_1, \ldots, c_k$ *arbitrære komplekse konstanter.*

Når der er multiple rødder i karakterligningen (4), har differentialligningen (3) ikke løsninger "nok" af typen $t \curvearrowright e^{\lambda t}$. Et fingerpeg om, hvorledes der kan suppleres, har vi s. XV.1.14$_{2-1}$. Vi nøjes med resultatet (der indbefatter Sætning 2) og undlader beviset:

SÆTNING 3. *Man får en basis for løsningsrummet $L_{\mathbb{C}}$ til differentialligningen (3) ved at lade hver rod $\lambda \in \mathbb{C}$ i karakterligningen (4) bidrage med så mange løsninger, som dens multiplicitet r angiver, nemlig*

$$t \curvearrowright e^{\lambda t},\ \ te^{\lambda t},\ \ \ldots\ ,\ t^{r-1}e^{\lambda t},\ \ t \in \mathbb{R}\,.$$

Til slut betragter vi en differentialligning (3) med *reelle* koefficienter, hvor vi søger de *reelle* løsninger.

For hver reel rod λ i karakterligningen (4) bevarer vi det i Sætning 3 anførte bidrag til en basis.

De ikke-reelle rødder i (4) optræder i par $\lambda = \alpha + i\beta$ og $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ af konjugerede med samme multiplicitet r (s. X.5.12$^{1-14}$), og

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t\,,\ \ e^{\overline{\lambda} t} = e^{\alpha t}\cos\beta t - ie^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$

Vi erstatter de $2r$ komplekse løsninger, hvormed λ og $\overline{\lambda}$ bidrog til en basis for $L_{\mathbb{C}}$, med de $2r$ reelle løsninger

$$t \curvearrowright e^{\alpha t}\cos\beta t\,,\ e^{\alpha t}\sin\beta t\,,\ te^{\alpha t}\cos\beta t\,,\ te^{\alpha t}\sin\beta\,,\ \ldots\ ,\ t^{r-1}e^{\alpha t}\cos\beta t\,,\ t^{r-1}e^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$

Det nye samlede sæt på i alt k reelle løsninger vil da ikke blot være en basis for $L_{\mathbb{C}}$, men også for rummet $L_{\mathbb{R}}$ af reelle løsninger $\varphi : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ til (3), hvor vi kun betragter linearkombinationer med reelle koefficienter.

BEVIS. Med $\lambda = \alpha + i\beta\,,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kan en linearkombination $ce^{\lambda t} + de^{\overline{\lambda} t}$ med $c, d \in \mathbb{C}$ også skrives som kompleks linearkombination af $e^{\alpha t}\cos\beta t$ og $e^{\alpha t}\sin\beta t$. Heraf fremgår, at det nye sæt på i alt k reelle løsninger fortsat frembringer det k-dimensionale komplekse rum $L_{\mathbb{C}}$ og dermed er lineært uafhængigt. Men så er det også lineært uafhængigt, når vi kun tillader reelle linearkombinationer. Og da det reelle løsningsrum $L_{\mathbb{R}}$ har dimension k, slutter vi, at sættet er en basis her.

Et lineært differentialligningssystem af 1. orden

Vi betragter et system af lineære differentialligninger af 1. orden

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + \ \dots \ + p_{1k}(t)x_k + q_1(t)\\
&\vdots\\
\frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}(t)x_1 + \ \dots \ + p_{kk}(t)x_k + q_k(t) \ ,
\end{aligned}
$$

hvor alle p_{ij} og q_i er kontinuerte reelle funktioner defineret på samme interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Når vi i det følgende taler om løsninger til (5), vil vi underforstå, at talen er om løsninger defineret på *hele* I. Andre løsninger er jo blot restriktioner af sådanne, ifølge Eksistens- og entydighedssætningen med tilføjelse s. XV.3.4-5.

En *løsning* er så et sæt $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ af differentiable funktioner $\varphi_i : I \curvearrowright \mathbb{R}$, eller om man vil, en differentiabel vektorfunktion $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$, der *tilfredsstiller* (5), dvs.

$$\varphi_i{}' = p_{i1}\varphi_1 + \ \dots \ + p_{ik}\varphi_k + q_i \ , \quad i = 1, \dots, k \, ,$$

eller, formuleret i matrixsprog,

$$\forall t \in I : \quad \varphi'(t) = P(t)\varphi(t) + q(t) \, ,$$

hvor $\varphi(t)$ og $\varphi'(t)$ er skrevet som søjler, og

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1k}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1}(t) & \cdots & p_{kk}(t) \end{pmatrix} \quad , \qquad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_k(t) \end{pmatrix} \quad .$$

Ligningssystemet (5) skrives tilsvarende

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt} = P(t)x + q(t) \ .$$

Ved diskussionen af strukturen af mængden af alle løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ kan vi holde os til tilfældet, hvor $q : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ er nulfunktionen. Ligningssystemet kaldes så *homogent*:

Til et givet ligningssystem (5) svarer nemlig et homogent

$$(6)\qquad \frac{dx}{dt} = P(t)x \quad ,$$

og er $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ en (vilkårlig) løsning til (5), medens $x : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ og $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ er differentiable (vektor)funktioner, hvor $x = \varphi + y$, har vi for hvert $t \in I$

$$x'(t) - P(t)x(t) = \varphi'(t) - P(t)\varphi(t) + y'(t) - P(t)y(t) = q(t) + y'(t) - P(t)y(t)$$

og dermed

$$x \text{ er løsning til (5)} \quad \Leftrightarrow \quad y \text{ er løsning til (6)} \, .$$

Vi noterer:

SÆTNING 4. *Mængden af løsninger til et lineært differentialligningssystem (5) kan skrives*

$$\{\varphi + y \mid y \text{ er løsning til (6)}\}\,, \quad \text{kort: } \varphi + L\,,$$

hvor $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ *er en vilkårlig løsning til (5), og* L *er mængden af løsninger til den tilsvarende homogene ligning (6).*

Vi holder os så til det homogene tilfælde, hvor $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$:

SÆTNING 5. *For et homogent system af* k *lineære differentialligninger af 1. orden*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + \ \ldots \ + p_{1k}(t)x_k \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= p_{k1}(t)x_1 + \ \ldots \ + p_{kk}(t)x_k\,,\end{aligned} \tag{6}$$

hvor alle p_{ij} *er kontinuerte reelle funktioner defineret på samme interval* $I \subseteqq \mathbb{R}$, *er mængden* L *af løsninger* $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ *et vektorrum af dimension* k.

BEVIS. Vi viser først, at L er et underrum af vektorrummet af alle (vektor)funktioner fra I til $\mathbb{R}^k$. Hertil checkes de sædvanlige underrumsbetingelser: Når $\varphi, \psi \in L$ og $c \in \mathbb{R}$, er $\varphi + \psi$ og $c\psi$ pååny differentiable vektorfunktioner, og da vi for hvert $t \in I$ med brug af matrixsprog (se ovenfor) har

$$\begin{gathered}(\varphi + \psi)'(t) = \varphi'(t) + \psi'(t) = P(t)\varphi(t) + P(t)\psi(t) = P(t)(\varphi(t) + \psi(t))\,, \\ (c\varphi)'(t) = c\varphi'(t) = c(P(t)\varphi(t)) = P(t)(c\varphi(t))\,,\end{gathered}$$

fremgår, at $\varphi + \psi \in L$ og $c\varphi \in L$.

At L har dimensionen k, viser vi ved at etablere en vektorrumsisomorfi fra L til $\mathbb{R}^k$: For et vilkårligt (fast) $a \in I$ betragtes afbildningen

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k\end{pmatrix} \curvearrowright \varphi(a) = \begin{pmatrix}\varphi_1(a) \\ \vdots \\ \varphi_k(a)\end{pmatrix} \quad , \quad \varphi \in L\,,$$

fra løsningsrummet L til talrummet $\mathbb{R}^k$. Ifølge *Eksistens- og entydighedssætningen* s. XV.3.3 med *Tilføjelse* s. XV.3.4 er det en *bijektion*: For hvert $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ findes jo en og kun en løsning $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ til (6), der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\varphi_1(a) = b_1\,, \quad \ldots \quad , \ \varphi_k(a) = b_k\,,$$

dvs. et og kun et $\varphi \in L$ med billede $\varphi(a) = b$. Da afbildningen tillige er lineær (oplagt), er den en vektorrumsisomorfi af L på $\mathbb{R}^k$. De to vektorrum er altså isomorfe, og dermed er

$$\dim L = \dim \mathbb{R}^k = k\,.$$

Beviset gav os følgende

Tilføjelse til Sætning 5. *For vilkårligt $a \in I$ er afbildningen*

$$\varphi \curvearrowright \varphi(a)\,, \quad \varphi \in L\,,$$

en vektorrumsisomorfi af løsningsrummet L på $\mathbb{R}^k$.

Sætning 5 fortæller os, at mængden L af løsninger til (6) er bestemt, så snart vi kender k *lineært uafhængige* løsninger $\varphi_1 : I \curvearrowright \mathbb{R}^k, \quad \ldots \quad, \varphi_k : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$. De vil nemlig udgøre en *basis* for løsningsrummet L, således at enhver løsning på en og kun en måde kan skrives

$$c_1\varphi_1 + \quad \ldots \quad + c_k\varphi_k$$

med koefficienter $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Mere udførligt:

$$c_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \vdots \\ \varphi_{k1} \end{pmatrix} + \quad \ldots \quad + c_k \begin{pmatrix} \varphi_{1k} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} .$$

I praksis kommer man nemt i den situation, at man har fundet k *løsninger* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ til (6) og ønsker at afgøre, om de er lineært uafhængige. Vælger vi et punkt $a \in I$, kan vi udnytte vektorrumsisomorfien i *Tilføjelse til Sætning* 5 og i stedet spørge, om billederne $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_k(a)$ er lineært uafhængige i $\mathbb{R}^k$, eller, idet vi skriver dem som søjler i en $k \times k$-matrix

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(a) & \cdots & \varphi_{1k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{k1}(a) & \cdots & \varphi_{kk}(a) \end{pmatrix} ,$$

om denne er invertibel. Vi har altså

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \text{ er en basis for } L \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(a) \text{ er invertibel} .$$

Bemærk, at vi frit kan disponere over a. Er $\Phi(t)$ invertibel for *ét* $t \in I$, gælder det samme altså for *hvert* $t \in I$. I så fald kaldes Φ en *fundamentalmatrix* for det homogene ligningssystem (6), og løsningerne til (6) er med matrixsprog

$$t \curvearrowright \Phi(t)\,c \;\;, \quad t \in I\,,$$

hvor sættet $c = (c_1, \ldots, c_k)$ af arbitrære konstanter tænkes skrevet som en søjle.

BEMÆRKNING 1. Er man startet med et inhomogent system (5) af k lineære differentialligninger, og er det lykkedes at finde k lineært uafhængige løsninger eller, om man vil, en fundamentalmatrix $\Phi = \Phi(t)$ for det tilsvarende homogene system (6), har man jo den *fuldstændige* løsning til det oprindelige system på formen

$$x(t) = \varphi(t) + \Phi(t)c \ , \quad t \in I\,,$$

blot man kender én løsning $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$. (Sætning 4.) Men det kan så være et problem.

Vi skal imidlertid se, hvordan man på grundlag af en fundamentalmatrix Φ kan opstille en formel

$$x(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} q(t)dt + \Phi(t)c \ , \quad t \in I\,,$$

for den fuldstændige løsning til (5) ganske svarende til tilfældet $k = 1$ (s. XV.1.7-8), blot er produkterne nu matrixprodukter, og for hvert $t \in I$ er $\Phi(t)^{-1}$ den inverse matrix til $\Phi(t)$. Integralet står som sædvanlig for en vilkårligt valgt stamfunktion, og c er en arbitrær konstant søjle. – I konkrete opgaver må formlen på grund af et omfattende regnearbejde betragtes som en sidste udvej.

Vi når frem til formlen ved samme teknik som i tilfældet $k = 1$ (s. XV.1.7): Vi søger "den ubekendte vektorfunktion" x på formen $x = \Phi y$.

Kort siger man: Sæt $x = \Phi y$. Meningen er:

Lad $x : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ og $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ være differentiable og sammenknyttet ved betingelsen

$$\forall t \in I : \quad x(t) = \Phi(t) y(t)\,,$$

hvor $x(t)$ og $y(t)$ opfattes som søjler. (Betingelsen kommer ud på

$$x_i = \varphi_{i1} y_1 + \ \ldots \ + \varphi_{ik} y_k\,, \quad i = 1, \ldots, k\,.)$$

Læg mærke til, at ikke blot har enhver *differentiabel* vektorfunktion $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ en *differentiabel* partner $x : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$, men også omvendt:

$$y(t) = \Phi(t)^{-1} x(t)\,.$$

Det beror på, at elementerne φ_{ij} i Φ og ligeledes elementerne i Φ^{-1} er differentiable funktioner. Det første er forudsat, og det andet følger af, at elementerne i Φ^{-1} fremgår af dem i Φ ved de fire regningsarter $+$, $-$, $\cdot$, $:$.

Idet

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} y(t)\,,$$

hvilket blot er en sammenfatning af

$$\begin{aligned} {x_i}' &= \varphi_{i1}{y_1}' + {\varphi_{i1}}' y_1 + \ \ldots \ + \varphi_{ik}{y_k}' + {\varphi_{ik}}' y_k \\ &= \varphi_{i1}{y_1}' + \ \ldots \ + \varphi_{ik}{y_k}' + {\varphi_{i1}}' y_1 + \ \ldots \ + {\varphi_{ik}}' y_k \ , \end{aligned}$$

og desuden

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = P(t)\Phi(t) \ ,$$

hvilket er et udtryk for, at hver søjle φ_j i Φ er en løsning til den homogene ligning (6), dvs. ${\varphi_j}' = P\varphi_j$, har vi:

$$\begin{aligned} & x \text{ er løsning til (5)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = P(t)x(t) + q(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} y(t) = P(t)\Phi(t)y(t) + q(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi(t)\frac{dy}{dt} = q(t) \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \Phi(t)^{-1} q(t) \ , \end{aligned}$$

hvor der burde stå "$\forall t \in I$:" umiddelbart efter hvert biimplikationstegn. De brugbare $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ er altså vektorfunktionerne

$$y(t) = \int \Phi(t)^{-1} q(t)dt + c \quad , \quad t \in I \,,$$

og de tilsvarende x fås ved multiplikation foran med $\Phi(t)$.

EKSEMPEL 1. Vi betragter differentialligningssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \quad + \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \quad + \cos t \end{aligned}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Man ser umiddelbart, at

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

er løsninger til det tilsvarende *homogene* system. De er åbenbart lineært uafhængige og dermed en basis for løsningsrummet. Den fuldstændige løsning til det *homogene* system er altså

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \,,$$

hvor c_1, c_2 er arbitrære konstanter.

Vi benytter fundamentalmatricen

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad ,$$

finder for hvert $t \in \mathbb{R}$ den inverse (Matematik 1 LA !)

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

og derefter

$$\Phi(t)^{-1} q(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \quad .$$

Med $x = \Phi y$ er $x : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ så løsning til det givne ligningssystem, netop hvis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Den fuldstændige løsning er altså

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \,, \end{aligned}$$

hvor c_1, c_2 er arbitrære konstanter.

BEMÆRKNING 2. I differentialligningssystemerne (5) og (6) kan vi lade p_{ij} og q_i være kontinuerte *komplekse* funktioner defineret på samme interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og interessere os for løsninger $\varphi : I \curvearrowright \mathbb{C}^k$. Alle betragtninger og resultater gælder da mutatis mutandis (dvs. med de oplagte ændringer). F.eks. er mængden $L = L_{\mathbb{C}}$ af løsninger til det homogene system (6) nu et vektorrum over $\mathbb{C}$ af dimension k, og isomorfien $\varphi \curvearrowright \varphi(a)$ går til $\mathbb{C}^k$. (Sætning 5 med tilføjelse.) De optrædende koefficienter/arbitrære konstanter $c_1, \ldots, c_k$ er nu komplekse tal.

Lineært system af 1. orden med konstante koefficienter

Vi betragter et system af lineære differentialligninger af 1. orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k + q_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_k}{dt} &= a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k + q_k(t) \quad , \end{aligned} \tag{7}$$

hvor alle $a_{ij} \in \mathbb{R}$, medens alle q_i er kontinuerte reelle funktioner defineret på samme interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Altså et specialtilfælde af (5), blot er koefficienterne a_{ij} nu konstanter. I matrixsprog skrives systemet kort

$$\frac{dx}{dt} = Ax + q(t)\,. \tag{7}$$

Idet S er en (foreløbig vilkårlig) invertibel $k\times k$-matrix, sætter vi $x = Sy$ og søger at "omskrive" (7) til en ligning i y. Mere præcist:

Lad $x : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ og $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ være differentiable og sammenknyttet ved betingelsen

$$\forall t \in I : x(t) = S\,y(t)\,.$$

Læg mærke til, at hver *differentiabel* vektorfunktion $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ har en *differentiabel* partner $x = Sy : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$, idet

$$x_i(t) = s_{i1}y_1(t) + \ldots + s_{ik}y_k(t)\,, \quad i = 1, \ldots, k\,.$$

Og tilsvarende omvendt: $y = S^{-1}x$.

Kinematisk kan $t \curvearrowright x(t)$ og $t \curvearrowright y(t)$ opfattes som beskrivelser af samme bevægelse i to koordinatsystemer (eller baser) i et k-dimensionalt rum. Jf. s. XV.3.4.

Vi søger at overføre spørgsmålet, om x er en løsning til (7), til et spørgsmål vedrørende partneren y. Idet

$$\frac{dx_i}{dt} = s_{i1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + s_{ik}\frac{dy_k}{dt} \quad , \quad i = 1, \ldots, k\,,$$

som sammenfattes til

$$\frac{dx}{dt} = S\,\frac{dy}{dt} \quad ,$$

har vi:

$$\begin{aligned} x \text{ er løsning til (7)} \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{dx}{dt} = A\,x(t) + q(t) \\ \Leftrightarrow \quad & S\frac{dy}{dt} = A\,S\,y(t) + q(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{dy}{dt} = S^{-1}AS\,y(t) + S^{-1}q(t) \quad , \end{aligned}$$

hvor der umiddelbart efter hvert biimplikationstegn burde stå "$\forall t \in I :$".

Vi noterer: En differentiabel vektorfunktion $x : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ er løsning til (7), netop hvis "partneren" $y : I \curvearrowright \mathbb{R}^k$ er løsning til

$$\frac{dy}{dt} = \big(S^{-1}AS\big)\,y + S^{-1}q(t) \quad ,$$

et ligningssystem af samme type som (7), men med koefficientmatrix $S^{-1}AS$.

Interessen i denne "omskrivning" ligger i, at det nye system kan være simplere end det oprindelige. Er $S^{-1}AS$ en diagonalmatrix,

$$S^{-1}AS = \Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \ ,$$

har vi således et system

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + r_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{dy_k}{dt} &= \lambda_k y_k + r_k(t) \quad , \end{aligned}$$

hvor hver koordinat y_i kun indgår i én ligning, af type som vi har behandlet s. XV.1.7. Vi løser så hver ligning for sig og vender tilbage til x ved $x = Sy$.

Spørgsmålet om "diagonalisering" af en given $k{\times}k$-matrix A behandles i Matematik 1 LA. Diagonalisering er mulig, når egenværdimultipliciteterne for rødderne i det karakteristiske polynomium $\det(A - \lambda E)$ for A har summen k, altså specielt hvis der er k forskellige rødder. Resultatet gælder også, hvis der er ikke-reelle rødder, men så må diagonaliseringen ske i $\mathbb{C}$. Herved bemærkes, at betragtningerne vedrørende omformning af differentialligningssystemet (7) gælder mutatis mutandis, når vi tillader $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $q_i : I \curvearrowright \mathbb{C}$ og spørger efter løsninger $x : I \curvearrowright \mathbb{C}^k$.

EKSEMPEL 2. Vi betragter det homogene system

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + 3x_2\end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Det karakteristiske polynomium

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

har rødderne 1 og 4 . Vi opnår så

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ved som 1. og 2. søjle i S at bruge en egt. løsning til det lineære ligningssystem

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

med henh. $\lambda = 1$ og $\lambda = 4$, dvs. til

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 0 \\ 2u_1 + 2u_2 &= 0 \end{aligned} \quad , \qquad \text{henh.} \qquad \begin{aligned} -2u_1 + u_2 &= 0 \\ 2u_1 - u_2 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Idet vi vælger

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

og "sætter $x = Sy$", føres vort differentialligningssystem over i

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= 4y_2 \quad .\end{aligned}$$

Det har løsningerne

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{4t} \end{pmatrix} \quad , \; t \in \mathbb{R}\,,$$

hvor c_1, c_2 er arbitrære konstanter. Det oprindelige system har derfor den fuldstændige løsning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^t + 2c_2 e^{4t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} \quad .$$

BEMÆRKNING 3. Diagonalisering er ikke altid mulig, selv i $\mathbb{C}$, men man kan faktisk altid *triagonalisere*, dvs. opnå at $S^{-1}PS$ har lutter 0'er *under* diagonalen, og så kan ligningssystemet i $y_1, \ldots, y_k$ rulles op nedefra, idet den k'te ligning kun vedrører y_k , den $(k-1)$'te kun y_k og y_{k-1} , etc.

BEMÆRKNING 4. Det vil ofte være nemmere at benytte andre metoder end dia- eller triagonalisering af koefficientmatricen. F.eks. kan man søge at "eliminere" nogle af de ubekendte funktioner ved differentiation: Lad os tage systemet i Eksempel 2 og foretage en analyse: vi *tænker os* differentiable funktioner $x_1, x_2 : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$, hvor

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + 3x_2 \quad . \end{aligned}$$

Åbenbart er x_1 (og x_2) 2 gange differentiable. Idet

$$x_2 = -2x_1 + \frac{dx_1}{dt} \quad ,$$

slutter vi så

$$\frac{dx_2}{dt} = -2\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2x_1}{dt^2} \quad ,$$

medens vi ved indsættelse i den anden ligning i systemet finder

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3\left(-2x_1\frac{dx_1}{dt}\right) = 4x_1 + 3\frac{dx_1}{dt} \quad .$$

Nu "elimineres" x_2. Vi finder

$$-2\frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2x_1}{dt^2} = -4x_1 + 3\frac{dx_1}{dt} \quad ,$$

dvs.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 5\frac{dx_1}{dt} + 4x_1 = 0 \, .$$

Da karakterligningen $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ har rødderne 1 og 4 , sluttes, at x_1 er af formen

$$x_1 = c_1e^t + c_2e^{4t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \, ,$$

og så er

$$\frac{dx_1}{dt} = c_1e^t + 4c_2e^{4t} \, ,$$

altså

$$x_2 = -2x_1 + \frac{dx_1}{dt} = -c_1e^t + 2c_2e^{4t} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \, .$$

Analyse slut. – Det fundne funktionspar er faktisk en løsning for ethvert valg af de arbitrære konstanter c_1 og c_2 , men det kræver argumentation. Man kan gøre prøve, men det er også muligt at foretage en "tilbageregning", hvor ligningerne fra analysen kommer til at indgå, omend i en ganske anden rækkefølge. Det overlades til læseren at forsøge.