FORORD 1981

Den hermed foreliggende udgave af forelæsningsnoterne til matematik 224 er et uændret optryk af de i forårssemestrene 1980 og 1981 benyttede noter bortset fra, at de opdagede trykfejl er blevet rettede, samt at der er vedlagt en side med korte kommentarer til 2 beviser.

FORORD.

Efter at den foreløbige udgave af mine forelæsningsnoter til mat 224 har været brugt i foråret 79 og fungeret tilfredsstillende, fremkommer de hermed i en mere permanent udgave.

Kapitel 3, som jeg var utilfreds med, er ret stærkt omarbejdet. Desuden er nogle kortere mislykkede afsnit skrevet om, og en del fejl er rettede. Forhåbentlig er der ikke opstået alt for mange nye.

En tak til mine instruktorer J.P.R. Christensen og K.B. Laursen fra foråret 79 for nyttige diskussioner og påvisning af nogle fejl. En særdeles varm tak til Lektor Leif Mejlbro, DTH, som har foræret mig indholdsfortegnelse og stikordsregister, samt megen opmuntring, uanset, at han er forfatter til et konkurrerende arbejde.

H. Tornehave

Erfaringer fra øvelserne har afsløret, at et par beviser hen mod slutningen af forelæsningsnoterne er lovligt kortfattede. Derfor følgende kommentarer:

Side 106 linie 3 f.n.: Det er klart nok, at $\log|f(z)|$ er konstant i a. Så er $\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$ lokalt veldefineret i Ω, og da den har konstant realdel, giver Cauchy-Riemann's ligninger at dens imaginærdel har begge partielle differentialkvotienter 0, så imaginærdelen er lokalt konstant. Så er $\log f(z)$ lokalt konstant, og dermed er $f(z) = e \log f(z)$ lokalt konstant, altså konstant.

Side 107. Anden og tredie linie i beviset for sætning 16.3 erstattes med følgende:

og for $R_1 \in]0,R[$ har vi for $|z-a| = R_1$ vurderingen $|g(z)| \leqq \frac{M}{R_1}$, og af sætning 15.2 følger, at den også gælder for $|z-a| \leqq R_1$, og da R_1 kan vælges vilkårlig tæt ved R, har vi $|g(z)| \leqq \frac{M}{R}$ for alle

INDHOLD

INDHOLD AF OPGAVEAFSNITTET

ØVELSER ORDNEDE EFTER KAPITLER

0. Indledning.

Oldtidens matematikere kunne løse andengradsligninger, og de var selvfølgelig klar over, at ikke alle andengradsligninger har løsninger. I renæssancetiden fandt matematikerne metoder til løsning af trediegradsligninger, men det viste sig, at løsning af en trediegradsligning med 3 forskellige reelle rødder krævede løsning af en andengradsligning uden løsninger. Først da blev det vigtigt at kunne regne med negative tal og med kvadratrødder af negative tal. I det attende århundrede regnede matematikerne i betydeligt omfang formelt med $\sqrt{-1}$ og Euler kendte eksponentialfunktionen og de trigonometriske funktioner af komplekse variable.

I 1746 gav d'Alembert et geometrisk-heuristisk "bevis" for algebraens fundamentalsætning. Gauss skrev sin doktordisputats i 1797, men den blev først udgivet i 1799. Den var et forsøg på at udfylde hullerne i d'Alemberts bevis.

Alt dette foregik uden at en bare nogenlunde præcis indførelse af de komplekse tal var til rådighed. En sådan gennemførtes af C. Wessel i 1798, men hans afhandling forblev upåagtet i et århundrede. Et lignende arbejde af Argand (1806) og det vakte først ingen interesse, men syv år senere blev det opdaget og i tyverne gav det anledning til en hidsig diskussion, i hvilken dog ingen af den tids betydeligere matematikere tog del. Endelig udgav Gauss sin indførelse af de komplekse tal i 1831, men inden da var mange nye funktioner af komplekse variable blevet grundigt undersøgt af Abel, Gauss, Jacobi m.fl.

I 1813 skrev Gauss en afhandling om Gravitationsfelter, og den giver flere eksempler på, at et rumintegral over et område kan skrives som et fladeintegral over områdets rand, men den generelle sætning, vi nu kalder Gauss' integralsætning, findes ikke her. I Green's afhandling fra 1828 findes den heller ikke, men til gengæld Green's formel, som er noget mere subtil. Den vigtigste form af sætningen blev vist af Stokes i 1854. Cauchy beskæftiger sig med lignende problemer i en afhandling fra 1825, men først en snes år senere formulerer han resultatet som Cauchy's integralsætning.

På grund af disse resultater er der en intim forbindelse mellem funktioner af komplekse variable og fundamentale potentialteoretiske spørgsmål, og det betinger en hel del vigtige fysisk-tekniske anvendelser. Mere generelt finder teorien anvendelse ved behandling af partielle differentialligninger, som igen har mange anvendelser.

At teorien for funktioner af komplekse variable fremtræder som særdeles forskellig fra teorien for funktioner af reelle variable beror først og fremmest på, at differentiabilitet i det komplekse tilfælde er en eksklusiv egenskab, så differentiable funktioner bliver nødt til at være vældig pæne. Som følge deraf kan man vise utroligt præcise generelle sætning om dem, og resultater af denne slags indtager en meget stor plads i den matematiske litteratur siden 1850. Siden 1920 er udviklingen dog gået hurtigere på andre områder end funktioner af en kompleks variabel. Teorien for funktioner af flere komplekse variable udviklede sig yderst langsomt indtil 1920. Så begyndte det at gå hurtigere og omkring anden verdenskrig var udviklingen eksplosiv.

Allerede Cauchy beviste, at de differentiable funktioner af komplekse variable er netop de funktioner, der kan udvikles i en konvergent Taylorrække i en omegn af ethvert punkt af definitionsområdet. På den tid var der nogen tvivl om den rigtige definition af funktionsbegrebet. Man forestillede sig, at en "rigtig" funktion var givet ved et "analytisk" udtryk som

$$f(z) = e^z(\sin z - z)\operatorname{arc\,tg}(1 - z^2),$$

medens mere kunstige udtryk som $|z|$, $\max(|z|, |1-z|)$ ikke anerkendtes som "rigtige" funktioner. Det førte til, at differentiable funktioner af komplekse variable blev kaldt "analytiske", men de fik også efterhånden mange andre pæne navne som "regulære", "monogene" eller "holomorfe". Den sidste betegnelse er nu den mest benyttede.

En mere systematisk generel teori for funktioner af en kompleks variabel udvikledes i århundredets sidste halvdel først og fremmest af Weierstrass, som formulerede en eksakt teori baseret på potensrækker, og af Riemann, der opstillede en mere anskuelig geometrisk teori, som ikke var helt eksakt, men den udrettede mere. Efter udviklingen omkring århundredeskiftet, især Jordans kurvesætning og aksiomatiseringer af geometrien, blev også Riemann's teori eksakt formuleret, og det er den vor fremstilling bygger på.

Udover den allerede omtalte fysisk-tekniske sammenhæng finder holomorfe funktioner anvendelse på mangfoldige områder, og det beror på, at man kan regne med dem. Hvis et problems løsning kan udtrykkes ved holomorfe funktioner, kan man også programmere en numerisk beregning af løsningen, så man ikke er henvist til tabeller.

Det centrale emne for dette kursus er residueregning, en metode til eksplicit udregning af bestemte integraler. Metoden er et nyttigt supplement til anvendelser af integraltransformationer og lidt mere indirekte kan den bruges til bevis for identiteter (summationsformler), som finder anvendelse i kombinatorik og sandsynlighedsregning. Dertil kommer interessante anvendelser i talteori.

I øvrigt indgår holomorfe funktioner som en bestanddel af funktionalanalyse, som et fundamentalt element i Liegruppeteori, samt i nogle fysiske teorier.

Et væsentligt formål med dette kursus er at lære deltagerne at forstå emnet, således som det indgår i litteraturen indenfor diverse anvendelser. Derfor har vi bevaret brugen af en del gammeldags udtryksformer, som stadig finder udstrakt anvendelse, selv om de fra moderne formelt matematisk synspunkt er ukorrekte. Når vi introducerer den slags, vil vi selvfølgelig som gode matematikere hæve pegefingeren og sige, at sådan noget kan man ikke tillade sig - og så er det jo ikke så farligt.

1. $\mathbb{C}$. Repetition.

Med $\mathbb{C}$ betegner vi den komplekse plan. Egentlig er det planen, altså det 2-dimensionale vektorrum $\mathbb{R}^2$ udstyret med en multiplikation. Basisvektoren $(1,0)$ er neutralelement for multiplikationen og betegnes derfor 1. Den første koordinatakse omfattende alle punkter $(x,0)$ kaldes den reelle akse, og vi skriver x for $(x,0) = (1,0)x = 1\cdot x$. Vi skriver i for den anden basisvektor $(0,1)$, og mængden af punkter $i\cdot y = (0,y)$ udgør den anden koordinatakse, den imaginære. Det generelle komplekse tal er $(x,y) = x+iy$, og multiplikationen defineres ved

$$(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy'+yx')$$

svarende til, at $i^2 = -1$, samt at den associative, den kommutative og de distributive love gælder. Man dividerer ved at "skaffe reel nævner".

$$\frac{x+iy}{a+ib} = \frac{(x+iy)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} + i\,\frac{ay-bx}{a^2+b^2} \; .$$

Vi bruger også polære koordinater (r,θ), så vi har

$$x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

og $r = |x+iy|$ er tallets numeriske værdi (også kaldet modul eller modulus), medens θ, som ikke er fastlagt for $z = 0$ og for $z \neq 0$ kun er fastlagt på nær et helt tal gange 2π, er tallets argument (tidligere kaldet amplitude). Med $\operatorname{Arg}(x+iy)$ betegner vi det argument, der ligger i $]-\pi,\pi]$. Vi bruger $\arg(x+iy)$ som betegnelse for et ikke nærmere specificeret argument (og husker den nødvendige korrektion, når det optræder flere gange i samme ligning). Multiplikation sker ved at multiplicere de numeriske værdier og addere argumenterne. Derfor gælder Moivres formel

$$(r(\cos\theta + i \sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

og ligningen $z^n = a = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ har de n løsninger

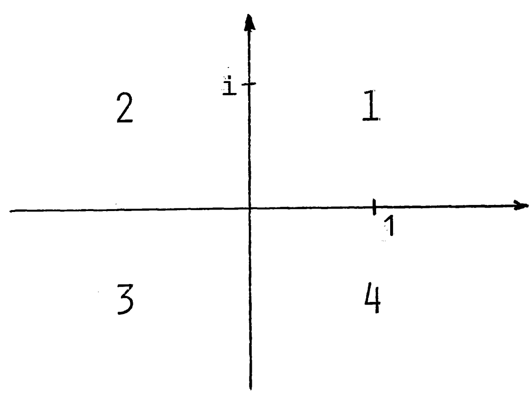
$$z = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\theta+2p\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2p\pi}{n}), \quad p = 0,\dots,n-1,$$

og de er netop vinkelspidser i en regulær n-kant indskrevet i cirklen med centrum 0 og radius $\sqrt[n]{r}$.

Det komplekse tal $z = x+iy$ har det konjugerede tal $\bar{z} = x-iy$. Den ved $\varphi(z) = \bar{z}$ definerede afbildning $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er en automorfi, idet $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$ og $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$. Fra geometrisk synspunkt er φ en spejling i den reelle akse. Spejling i den imaginære akse er givet ved $\psi(z) = -\bar{z}$.

For $x,y \in \mathbb{R}$ og $z = x+iy$ kalder vi x den reelle og y den imaginære del af z, og vi skriver $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Vi har

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}), \quad |z|^2 = z\,\bar{z}.$$



Vi vil ofte tale anskueligt om den komplekse plan $\mathbb{C}$, og vi vil så forestille os $\mathbb{C}$ som papirets eller tavlens plan med den imaginære akse rettet lodret opad og den relle akse rettet mod højre. Vi lader derfor den reelle akse dele $\mathbb{C}$ i den øvre og den nedre halvplan, medens den imaginære deler $\mathbb{C}$ i venstre og højre halvplan. Begge akser på engang deler $\mathbb{C}$ i 4 kvadranter, der nummereres som vist på figuren.

Vi minder om, at en punktmængde i $\mathbb{C}$ er omegn af et punkt $a \in \mathbb{C}$, hvis den indeholder en cirkelskive med centrum a og positiv radius. En punktmængde i $\mathbb{C}$ er åben, hvis den er omegn af hvert af sine punkter. Hvis $O \subseteq \mathbb{C}$ er åben og $f: O \to \mathbb{C}$ en afbildning, er f kontinuert, hvis og kun hvis enhver åben mængde i $\mathbb{C}$ har åben originalmængde ved f. Analogt kan vi tale om kontinuitet af afbildninger $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ og $g: O \to \mathbb{R}$. Vi har de velkendte regneregler for kontinuerte afbildninger.

Ved en bevægelse (kurve) i en mængde $O \subseteq \mathbb{C}$ forstår vi en kontinuert afbildning $\gamma: [a,b] \to O$. Billedet $\gamma([a,b])$ er bevægelsens bane. Hvis $\varphi: [a_1,b_1] \to [a,b]$ er kontinuert, strengt voksende og bijektiv, er $\gamma \circ \varphi: [a_1,b_1] \to O$ en bevægelse med samme bane som γ. Vi siger, at $\gamma \circ \varphi$ fås af γ ved transformation med φ. At bevægelser fås af hinanden på denne måde for passende φ er en ækvivalensrelation på mængden af bevægelser, og hver ækvivalensklasse kaldes en vej. En sådan angives ved en repræsenterende bevægelse (parameterfremstilling). Vi siger, at den ved $\gamma: [a,b] \to O$ repræsenterede vej begynder i $\gamma(a)$ og ender i $\gamma(b)$, eller, at den går fra $\gamma(a)$ til $\gamma(b)$. En bevægelse (vej) $\gamma: [a,b] \to O$ kaldes simpel, hvis γ er injektiv, lukket, hvis $\gamma(a) = \gamma(b)$, og simpel lukket, hvis $\gamma | [a,b[$ er injektiv og $\gamma(b) = \gamma(a)$. Hvis $\gamma: [a,b] \to O$ er en bevægelse, og $\varphi: [a_1,b_1] \to [a,b]$ er kontinuert, strengt aftagende og bijektiv, siger vi, at $\gamma \circ \varphi: [a_1,b_1] \to O$ repræsenterer en vej, som er modsat til den ved γ repræsenterede. Det er oplagt, at dette giver mening, og at en vej har netop 1 modsat.

Hvis $\gamma_1: [a_1,b_1] \to O$ og $\gamma_2: [a_2,b_2] \to O$ repræsenterer simple veje med samme bane, er $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1: [a_1,b_1] \gamma \to [a_2,b_2]$ en kontinuert bijektiv afbildning. Hvis den er voksende, er vejene identiske, og hvis den er aftagende, er de modsatte.

Hvis $\gamma_1: [a_1,b_1] \to O$ og $\gamma_2: [a_2,b_2] \to O$ repræsenterer veje, og $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, kan man finde en kontinuert, strengt voksende, bijektiv afbildning $\varphi: [b_1,b_2'] \to [a_2,b_2]$, og så vil γ_1 og $\gamma_2 \circ \varphi$ tilsammen definere en bevægelse $\gamma: [a_1,b_2'] \to O$. Det er klart, at den ved γ repræsenterede vej ikke afhænger af valget af de repræsenterende veje γ_1 og γ_2 eller af φ. Vi siger, at den er fremkommet ved at sætte den ved γ_2 repræsenterede vej efter den ved γ_1 repræsenterede.

Lad nu $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde, og $A,B \in O$ vilkårlige punkter. Hvis der findes en vej i O fra A til B, altså en vej repræsenteret ved en bevægelse $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ med $\gamma(a) = A$ og $\gamma(b) = B$, siger vi, at A og B kan forbindes i O. Dette er en ækvivalensrelation på O, og ækvivalensklasserne kaldes kurvekomponenterne af O. Det er oplagt, at kurvekomponenterne er åbne mængder.

En åben mængde $O \subseteq \mathbb{C}$ kaldes (kurve-)sammenhængende, hvis den kun har 1 kurvekomponent. Åbne sammenhængende mængder spiller en stor rolle (har spillet en for stor rolle) i teorien for funktioner af komplekse variable. Derfor har de fået den særlige betegnelse område (eng. region, tysk (das) Gebiet).

Vi skal jo i gang med at bevise en lille smule, men vi vil ikke overdrive, så vi begynder med noget yderst simpelt.

Definition 1.1. Lad $M \subseteq \mathbb{C}$ være en vilkårlig mængde. En funktion $f: M \to \mathbb{C}$ kaldes lokalt konstant, hvis hvert punkt $a \in M$ har en omegn $U \subseteq \mathbb{C}$, således at f er konstant på $U \cap M$.

Det er klart, at en lokalt konstant funktion er kontinuert. Vi er interesserede i følgende nemme sætning:

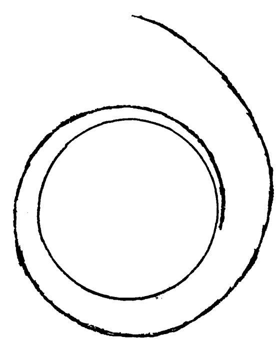
<u>Sætning</u> 1.2. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben. En funktion $f: O \to \mathbb{C}$ er da lokalt konstant, hvis og kun hvis f er konstant på hver kurvekomponent af O.

Bevis. Det er klart, at "hvis" gælder, da kurvekomponenterne af O er åbne. Lad nu $f: O \to \mathbb{C}$ være lokalt konstant, og lad $\gamma: [a,b] \to O$ være en bevægelse. Vi definerer

$$\tau = \sup \{t \in [a,b] \mid f(\gamma([a,t])) = \{f(\gamma(a))\}\}.$$

Så har $\gamma(\tau)$ en omegn $U \subseteq O$, så f er konstant på U, altså $f(U) = \{f(\gamma(\tau))\}$. Men da γ afbilder en omegn af τ ind i U, medfører dette, at $f(\gamma(\tau)) = f(\gamma(a))$, og så vil vi få modstrid med definitionen af τ, hvis ikke $\tau = b$. Altså har f samme værdi i $\gamma(a)$ og $\gamma(b)$ og generelt samme værdi i alle punkter af kurvekomponenten. Dermed er sætningen bevist.

Det er naturligt at definere en vilkårlig mængde $M \subseteq \mathbb{C}$ som sammenhængende, hvis enhver lokalt konstant funktion $f: M \to \mathbb{C}$ er konstant. Af sætning 1.2 følger, at dette begreb er ensbetydende med kurvesammenhæng, hvis M er åben. På den anden side vil foreningsmængden af en cirkel med en kurve, der går asymtotisk mod den (se figuren) være sammenhængende, men ikke kurvesammenhængende. Dette vises ret let, men vi vil ikke ofre tid på det.



Lad $S \subset \mathbb{C}$ være enhedscirklen. En afbildning $\varphi: [a,b] \to S$ er givet ved

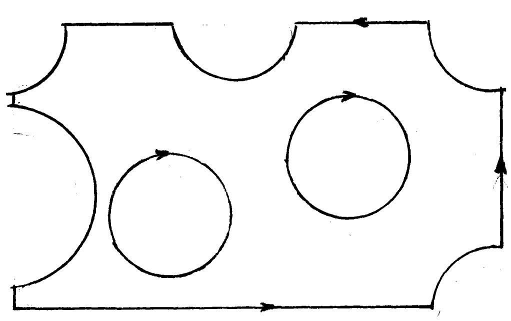
$$\varphi(t) = \cos\left(\frac{2\pi(t-a)}{b-a} + d\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(t-a)}{b-a} + d\right).$$

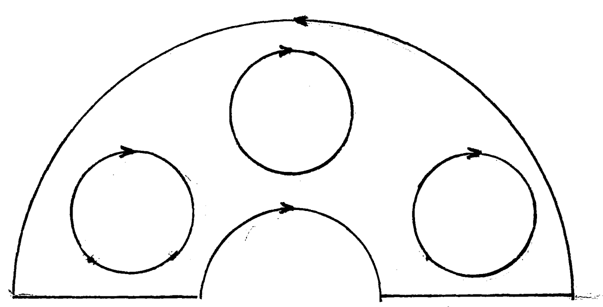
Den afbilder $[a,b[$ bijektivt på S, og desuden er $\varphi(a) = \varphi(b) = \cos d + i \sin d$. Hvis $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ er en simpel, lukket kurve, kan vi derfor definere $\tilde{\gamma}\colon S \to \mathbb{C}$, således at $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, og så bliver $\tilde{\gamma}$ kontinuert og afbilder S bijektivt (endda homøomorft) på $\tilde{\gamma}(S) = \gamma([a,b])$.

Hvis $\psi\colon S \to S$ er en bijektiv afbildning, kan vi vælge et vilkårligt punkt $\cos d + i \sin d \in S$ og sætte $\psi(\cos d + i \sin d) = \cos\beta + i \sin\beta$. For $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ har vi da $\tilde{\psi}(t) \in [\beta, \beta + 2\pi[$, således at $\psi(\cos t + i \sin t) = \cos\tilde{\psi}(t) + i \sin\tilde{\psi}(t)$, og derved får vi åbenbart en afbildning $\tilde{\psi}\colon [\alpha,\alpha + 2\pi[\to [\beta,\beta + 2\pi[$, som er kontinuert og bijektiv, samt enten strengt voksende eller strengt aftagende. Hvis den er voksende, siger vi, at ψ bevarer orientering, og hvis den er aftagende, siger vi, at ψ skifter orienteringen.

En simpel, lukket vej kaldes også en Jordan-kurve på grund af Jordan's sætning, om at den deler planen. Denne sætning vil ikke få betydning for vor gennemgang af funktionsteorien, men den er essentiel for visse videregående undersøgelser.

Vi kommer til at beskæftige os en hel del med områder i $\mathbb{C}$, begrænsede af Jordankurver, men disse vil altid være så ukomplicerede, at deres deling af $\mathbb{C}$ vil være helt indlysende. De vil i reglen være opbyggede af liniestykker og cirkelbuer. Vi illustrerer ved et par figurer, hvordan de f.eks. kan se ud.





Vore helt konkrete vedtægter om den geometriske placering af $\mathbb{C}$ muliggør en konvention om orientering af et områdes rand. Retningen mod urviserne regnes positiv, og vi benytter den for ydre rande, medens vi benytter den modsatte orientering for de indre rande, som vi har markeret ved pile på figurerne. Vi kan give det en anden anskuelig drejning ved at sige, at randen skal gennemløbes, så man har området på venstre hånd.

2. Differentiation.

Vi definerer differentiabilitet og differentialkvotient for funktioner af en kompleks variabel ganske som vi gjorde det for funktioner af en reel variabel.

Definition 2.1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde af $f: O \to \mathbb{C}$ en funktion. Vi siger da, at f er differentiabel i punktet $z \in O$, såfremt differenskvotienten $h^{-1}(f(z+h) - f(z))$ har en grænseværdi for $h \to 0$. Denne grænseværdi kaldes differentialkvotienten af f i punktet z. Hvis f er differentiabel i ethvert punkt $z \in O$, kaldes f differentiabel i O. Differentialkvotienten af f i punktet z betegnes $f'(z)$, og den derved definerede funktion $f': O \to \mathbb{C}$ kaldes differentialkvotienten (eller den afledede) af f.

Vi skriver også $w = f(z)$ og $\frac{dw}{dz} = f'(z) = \frac{d}{dz} f(z)$ som for funktioner af reelle variable.

Størrelsen h i differenskvotienten $h^{-1}(f(z+h) - f(z))$ må vælges så $z + h \in O$, men dette vil være opfyldt for $|h| < r$, hvor r er et positivt tal, så h kan antage alle komplekse værdier i en vis åben cirkelskive med centrum 0.

Definitionen af differentiabilitet er en tro kopi af definitionen for differentiabilitet af afbildninger $f: I \to \mathbb{R}$ eller $f: I \to \mathbb{C}$, hvor I er et interval. Vi kan derfor kopiere en hel del af teorien fra reelle variable. Først og fremmest har vi den anden form for betingelsen for differentiabilitet.

<u>Sætning</u> 2.2. At $f: O \to \mathbb{C}$ er differentiabel i et punkt $a \in O$ er ensbetydende med, at der gælder en relation

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \varepsilon(h)h,$$

hvor ε er en funktion, som er defineret i en omegn af 0, er kontinuert i 0 og tilfredsstiller, at $\varepsilon(0) = 0$.

Bevis. Det er bare en helt simpel omskrivning af definitionen.

Vi er kun interesserede i differentiabilitet i åbne mængder. Derfor formulerer vi kun de næste sætninger for dette særlige tilfælde. De er kopier af tilsvarende sætninger for reelle variable, og det er beviserne også. Vi anfører alle sætningerne, men udfører kun et af beviserne.

<u>Sætning</u> 2.3. En differentiabel funktion $f: O \to \mathbb{C}$ er kontinuert.

<u>Sætning</u> 2.4. Lad $f,g: O \to \mathbb{C}$ være differentiable funktioner. Da er $f+g: O \to \mathbb{C}$ differentiabel med differentialkvotient $f' + g'$, og $fg: O \to \mathbb{C}$ er differentiabel med differentialkvotient $f'g + fg'$. Hvis g ikke er 0-funktionen, og O_1 er den åbne mængde $O \setminus g^{-1}(0)$, er $\frac{f}{g}: O_1 \to \mathbb{C}$ differentiabel med differentialkvotient $\frac{f'g - fg'}{g^2}$.

<u>Sætning 2.5</u>. Lad O og O_1 være åbne mængder i $\mathbb{C}$ og lad $f: O \to \mathbb{C}$ og $g: O_1 \to \mathbb{C}$ være differentiable funktioner med $f(O) \subseteq O_1$. Da er $g \circ f: O \to \mathbb{C}$ differentiabel, og dens differentialkvotient i $z \in O$ er $g'(f(z))f'(z)$.

<u>Sætning</u> 2.6. Lad O og O_1 være åbne mængder i $\mathbb{C}$. Lad $f: O \to O_1$ være en bijektiv differentiabel afbildning med den inverse afbildning $g: O_1 \to O$. Så er g differentiabel i $w = f(z) \in O$, hvis og kun hvis $f'(z) \neq 0$, og så er $f'(z)g'(w) = 1$. (Betingelsen $f'(z) \neq 0$ viser sig senere at være opfyldt automatisk, se sætning 17.2).

At sætning 2.3 gælder følger umiddelbart af sætning 2.2. Beviserne for de 3 andre sætninger går også som i det reelle. Lad os nøjes med at vise sætning 2.5. Vi betragter $a \in O$, $a+h \in O$, $b = f(a) \in O_1$ og $b+k = f(a+h) \in O_1$. Da f er differentiabel, vil $\frac{k}{h} \to f'(a)$ for $h \to 0$. Da g er differentiabel, giver sætning 2.2 relationen

$$h^{-1}\Big(g(f(a+h)) - g(f(a))\Big) = h^{-1}\Big(g(b+k) - g(b)\Big) = g'(b)\frac{k}{h} + \varepsilon(k)\frac{k}{h} ,$$

og for $h \to 0$ gælder $k \to 0$ og $\varepsilon(k) \to 0$. Heraf følger sætningen umiddelbart.

Et polynomium

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 , \quad a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$$

definerer en differentiabel afbildning $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, og differentialkvotienten er givet ved

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1 .$$

Hvis $P(z)$ og $Q(z)$ er polynomier, giver $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en differentiabel funktion på komplementærmængden til mængden af rødder i $Q(z)$.

Eksempel. Hvis $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ definerer

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

en differentiabel funktion $\varphi\colon \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\delta}{\gamma}\} \to \mathbb{C}$. Den afbilder bijektivt på billedmængden $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\alpha}{\gamma}\}$, og den er differentiabel med

$$\varphi'(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} .$$

Hvis $O \subseteq \mathbb{C}$ er en åben mængde, har vi en tilsvarende åben mængde $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ defineret ved

$$\tilde{O} = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in O\},$$

og hvis $f\colon O \to \mathbb{C}$ er en funktion, har vi tilsvarende funktioner $f_r, f_i\colon \tilde{O} \to \mathbb{R}$, så vi har

$$f(x+iy) = f_r(x,y) + if_i(x,y).$$

Omvendt vil denne relation for vilkårlige $f_r, f_i\colon \tilde{O} \to \mathbb{R}$ definere en funktion $f\colon O \to \mathbb{C}$. Det er klart, at f er kontinuert, hvis og kun hvis f_r og f_i er det.

Vi minder om, at en funktion $g\colon \tilde{O} \to \mathbb{R}$ kan være mere eller mindre differentiabel. Den svageste form for differentiabilitet er eksistens af partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = g'_x(x,y)$ og $\frac{\partial}{\partial y}g(x,y) = g'_y(x,y)$, som er differentialkvotienterne af de funktioner, der fås ved at give en af de variable en fast værdi. Den næste grad er den, der benævnes differentiabilitet, og den kræver eksistens af en relation

$$g(x+h,y+k) - g(x,y) = A(x,y)h + B(x,y)k + \alpha_{x,y}(h,k)\sqrt{h^2+k^2} ,$$

hvor $\alpha_{x,y}$ er kontinuert i $(0,0)$ og $\alpha_{x,y}(0,0) = 0$. Funktionerne A og B er netop de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x}g$ og $\frac{\partial}{\partial y}g$. En differentiabel funktion er kontinuert. Den stærkeste form for differentiabilitet er eksistens af kontinuerte partielle afledede, og hvis g opfylder det, kaldes g en C^1-funktion. En C^1-funktion er differentiabel. Hvis dens partielle afledede igen har kontinuerte partielle afledede, kaldes den en C^2-funktion o.s.v. Vi minder om, at vi i dette tilfælde har $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)$, så vi bare har 3 anden ordens afledede

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,y) = g''_{x^2}(x,y), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}g(x,y) = g''_{xy}(x,y) \text{ og } \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x,y) = g''_{y^2}(x,y).$$

Vi skal nu vise den sætning, der fortæller at differentiabiliteten af funktioner af en kompleks variabel er en eksklusiv egenskab. Vi inddrager differentiabilitet af funktioner af to reelle variable, og det er virkelig den "mellemste" slags differentiabilitet fra redegørelsen ovenfor, der er tale om.

Sætning 2.7. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ en funktion. Vi anvender skrivemåden

$$u + iv = w = f(z) = f(x+iy) = f_r(x,y) + if_i(x,y).$$

Lad $z_0 = x_0 + iy_0 \in O$ være et vilkårligt punkt. Så er f differentiabel i z_0, hvis og kun hvis f_r og f_i begge er differentiable i (x_0,y_0) med partielle differentialkvotienter, som tilfredsstiller betingelserne

$$\frac{\partial}{\partial x}f_r(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}f_i(x_0,y_0); \quad \frac{\partial}{\partial y}f_r(x_0,y_0) = -\frac{\partial}{\partial x}f_i(x_0,y_0) ,$$

og differentialkvotienten af f er så givet ved

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x}f_r(x_0,y_0) + i\frac{\partial}{\partial x}f_i(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}f_r(x_0,y_0) - i\frac{\partial}{\partial y}f_r(x_0,y_0).$$

Bevis. Lad f være differentiabel i z_0. Vi skriver

$$f'(z_0) = A + iB ,$$

og der findes så en funktion $\alpha(h+ik) = \beta(h,k) + i\gamma(h,k)$, som er kontinuert i 0 med værdi 0, så vi har relationen

$$f(z_0+h+ik) - f(z_0) = (A+iB)(h+ik) + (\beta(h,k)+i\gamma(h,k))(h+ik).$$

her er

$$f(z_0+h+ik)-f(z_0) = f_r(x_0+h,y_0+k)-f_r(x_0,y_0)+i(f_i(x_0+h,y_0+k)-f_i(x_0,y_0)) ,$$

og ved at indsætte dette og opløse i real- og imaginærdel får vi

$$f_r(x_0+h,y_0+k) - f_r(x_0,y_0) = Ah - Bk + \beta(h,k)h - \gamma(h,k)k$$
$$f_i(x_0+h,y_0+k) - f_i(x_0,y_0) = Bh + Ak + \gamma(h,k)h + \beta(h,k)k.$$

Idet vi skriver $r = \sqrt{h^2+k^2}$ og bruger omskrivningen

$$\beta(h,k)h - \gamma(h,k)k = (\beta(h,k)\frac{h}{r} - \gamma(h,k)\frac{k}{r})\ \sqrt{h^2+k^2}$$

og den analoge for $\gamma(h,k)h + \beta(h,k)k$, ser vi, at f_r og f_i virkelig er differentiable i (x_0,y_0) med

$$(1) \qquad A = \frac{\partial}{\partial x}f_r(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}f_i(x_0,y_0); \quad B = -\frac{\partial}{\partial y}f_r(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}f_i(x_0,y_0).$$

Dermed har vi vist "kun hvis", og samtidig har vi fundet de i sætningen angivne udtryk for $f'(z_0)$.

Lad nu f_r og f_i opfylde de i sætningen anførte betingelser. Vi definerer A og B ved (1), og der vil så findes funktioner $\beta(h,k)$ og $\gamma(h,k)$, som er kontinuerte i $(0,0)$ med værdi 0, så vi har relationerne

$$f_r(x_0+h,y_0+k) - f_r(x_0,y_0) = Ah - Bk + \beta(h,k)\ \sqrt{h^2+k^2}$$
$$f_i(x_0+h,y_0+k) - f_i(x_0,y_0) = Bh + Ak + \gamma(h,k)\ \sqrt{h^2+k^2}\ .$$

Ved at multiplicere den sidste relation med i og derefter addere dem, får vi

$$f(z_0+h+ik) - f(z_0) = (A+iB)(h+ik) + (\beta(h,k) + i\gamma(h,k))\ \sqrt{h^2+k^2}\ .$$

Vi definerer $\alpha(h+ik) = (\beta(h,k) + i\gamma(h,k))\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{h+ik}$, og så er α kontinuert i 0 med værdi 0, og derved får vi netop den relation, der viser, at f er differentiabel i z_0. Dermed er sætningen bevist.

Hvis $w = u+iv = f(z) = f(x+iy) = f_r(x,y) + if_i(x,y)$ skal definere en differentiabel funktion, må $u = f_r(x,y)$, $v = f_i(x,y)$ således være et sæt løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Disse ligninger kaldes Cauchy-Riemann's differentialligninger.

Det fremgår heraf, at de ved $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ og $\bar{z}$ definerede funktioner alle er intet steds differentiable. Den ved $|z|^2$ definerede funktion har 0 som eneste differentiabilitetspunkt, og $(\operatorname{Re} z)^2$ er differentiabel i punkterne af den imaginære akse og kun der. Det er kun differentiabilitet i alle punkter af en åben mængde, der har interesse for os.

Vi minder om den komplekse eksponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Vi ser, at de ved $e^x\cos y$ og $e^x\sin y$ definerede funktioner er løsninger til Cauchy-Riemann's differentialligninger, så e^z definerer en differentiabel funktion. Differentialkvotienten bliver e^z. Endvidere har vi

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

og regnereglerne giver, at $\cos z$ er differentiabel med differentialkvotient $-\sin z$, og $\sin z$ med differentialkvotient $\cos z$.

Eksempel. Udtryk som $e^{z\sin z}$, $\cos(z+e^z)$ og $\sin(e^z\cos z)$ definerer differentiable funktioner på $\mathbb{C}$. Ligeledes $\frac{e^z}{1+z^2}$ på $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ og $\frac{1}{\sin z}$ på $\mathbb{C}\setminus\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Udtryk som $e^{\bar{z}}$, $\sin(\operatorname{Im} z)$, $\cos|z|$ og $(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 + 2ik \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$ giver sædvanligvis ikke differentiable funktioner. Det sker dog i undtagelsestilfælde, f.eks. det sidste udtryk for $k = 1$.

En afbildning $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ spaltes i realdel og imaginærdel $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Det er velkendt (indlysende), at γ er differentiabel, hvis og kun hvis γ_1 og γ_2 er det, og så er $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$. Vi har en reel-kompleks kæderegel, der er emnet for den næste sætning.

<u>Sætning 2.8</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f: O \to \mathbb{C}$ differentiabel og $\gamma:[a,b] \to O$ en differentiabel afbildning. Da er $f\circ\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ differentiabel og $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

Bevis. Ganske som det ovenfor udførte bevis for sætning 2.5.

3. Integration.

Vi repeterer begrebet kurveintegral og benytter lejligheden til at ændre lidt på formuleringen. Først en hjælpesætning.

<u>Sætning 3.1</u>. Lad $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben, $L,M: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ kontinuerte og Γ en vej repræsenteret ved $\gamma:[a,b] \to \tilde{O}$. Lad D være en inddeling $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ med indskudte punkter $\tau_j \in [t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,n$. Svarende til D indfører vi inddelingsfinheden $\max\{t_j - t_{j-1} \mid j = 1,\ldots,n\} = \kappa(D)$, og idet $\gamma(t) = (\alpha(t),\beta(t))$, tillige middelsummen $S_\gamma(D) = \sum_{j=1}^{n} ((\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))L(\gamma(\tau_j))+(\beta(t_j)-\beta(t_{j-1}))M(\gamma(\tau_j)))$. Hvis der nu findes et tal $A \in \mathbb{R}$, således at $S_\gamma(D) \to A$, når $\kappa(D) \to 0$, og hvis $\gamma':[a',b'] \to \tilde{O}$ er en anden repræsentant for Γ og D' betegner en inddeling af $[a',b']$ med indskudte punkter, da vil også $S_{\gamma'}(D') \to A$ for $\kappa(D') \to 0$.

Bevis. Da γ' repræsenterer γ, findes der en kontinuert, strengt voksende afbildning $\varphi:[a',b'] \to [a,b]$, således at $\gamma' = \gamma\circ\varphi$. Lad ε være et positivt tal. Vi vælger $\delta > 0$, således at $|A-S_\gamma(D)| \leq \varepsilon$, når $\kappa(D) \leq \delta$, og idet φ er ligelig kontinuert, vælger vi dernæst $\delta' > 0$, således at $|\varphi(t'')-\varphi(t')| \leq \delta$, når $t',t'' \in [a',b']$ og $|t''-t'| \leq \delta'$. Lad nu D' betegne en inddeling $a' = t_0' < t_1' <\ldots< t_n' = b'$ med indskudte punkter $\tau_j' \in [t_{j-1}',t_j']$ og med $\kappa(D') \leq \delta'$. Vi definerer $t_j = \varphi(t_j')$, $j = 0,\ldots,n$ og $\tau_j = \varphi(\tau_j')$, $j = 1,\ldots,n$, og derved får vi en inddeling D af $[a,b]$ givet ved $a = t_0 < t_1 < \ldots< t_n = b$ og med de indskudte punkter $\tau_j \in [t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,n$. Vort valg af δ' sikrer, at $\kappa(D) \leq \delta$, og da definitionen af $S_\gamma(D')$ netop giver, at $S_{\gamma'}(D') = S_\gamma(D)$, har vi $|A-S_{\gamma'}(D')| \leq \varepsilon$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition 3.2</u>. Lad $\mho \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben og $L,M: \mho \to \mathbb{R}$ afbildninger. Den ved

$$\omega(x,y;h,k) = L(x,y)h + M(x,y)k$$

definerede afbildning $\omega: \mho\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaldes en differentialform. Vi vil antage, at den er kontinuert, altså at L og M er kontinuerte. Lad Γ være en vej repræsenteret ved $\gamma:[a,b] \to \mho$. Hvis den i sætning 3.1 omtalte grænseværdi A eksisterer, kaldes A (kurve=) integralet langs Γ af differentialformen ω, og det betegnes med

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma L(x,y)dx + M(x,y)dy .$$

De variable h og k, som indgår i differentialformen, betegnes ofte dx og dy i overensstemmelse med den sidste betegnelse for integralet, men det er jo kun en formalitet. Betegnelsen for kurveintegralet er berettiget, idet integralet ifølge sætning 3 kun afhænger af Γ, ikke af repræsentanten γ.

Det er selvfølgelig ikke oplagt, at kurveintegralet virkelig eksisterer, og det gør det heller ikke altid. Vi har imidlertid følgende sætning om eksistens.

Sætning 3.3. Lad $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben og $L,M: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ kontinuerte. Lad Γ være en vej som har en C^1 repræsentant $\gamma:[a,b] \to \tilde{O}$, hvor $\gamma(t) = \alpha(t)+i\beta(t)$; $\alpha(t),\beta(t) \in \mathbb{R}$. Lad ω være differentialformen givet ved $\omega(x,y;\, dx,dy) = L(x,y)dx + M(x,y)dy$. Da eksisterer $\int_\Gamma \omega$, og dets værdi er

$$A = \int_a^b (L(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + M(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t))dt \;.$$

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Da de ved $L(\alpha(t),\beta(t))$ og $M(\alpha(t),\beta(t))$ definerede funktioner er kontinuerte på det kompakte interval $[a,b]$, kan vi vælge et tal $K > 0$, således at $|L(\alpha(t),\beta(t))| \leqq K$ og $|M(\alpha(t),\beta(t))| \leqq K$ for alle $t \in [a,b]$. Da α' og β' er kontinuerte på $[a,b]$, er de ligeligt kontinuerte, og vi kan vælge $\delta_1 > 0$, således at $|\alpha'(t")-\alpha'(t')| \leqq \frac{\varepsilon}{4K(b-a)}$ og $|\beta'(t")-\beta'(t')| \leqq \frac{\varepsilon}{4K(b-a)}$ for $t',t" \in [a,b]$ og $|t"-t'| \leqq \delta_1$. Dernæst kan vi vælge $\delta \in \,]0,\delta_1]$, således at det for enhver inddeling D med delepunkter $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, indskudte punkter $\tau_j \in [t_{j-1},t_j]$, $j = 1,\ldots,n$ og finhed $\kappa(D) \leqq \delta$ gælder, at

$$|A - \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(L(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))\alpha'(\tau_j) + M(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))\beta'(\tau_j))| \leqq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Nu giver differentialregningens middelværdisætning, at der findes indskudte punkter $\tau_j', \tau_j'' \in]t_{j-1}, t_j[$, således at

$$\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})\alpha'(\tau_j') \; ; \; \beta(t_j) - \beta(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})\beta'(\tau_j'') .$$

Det medfører, at

$$S_\gamma(D) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(L(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))\alpha'(\tau_j') + M(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))\beta'(\tau_j'') ,$$

og ved sammenligning med vurderingen ovenfor får vi

$$|A - S_\gamma(D)| \leqq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + |\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(L(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))(\alpha'(\tau_j) - \alpha'(\tau_j')) + M(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))(\beta'(\tau_j) - \beta'(\tau_j'')))|$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(|L(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))||\alpha'(\tau_j) - \alpha'(\tau_j')| + |M(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))||\beta'(\tau_j) - \beta'(\tau_j'')|)$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \cdot 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon .$$

Dermed er sætningen bevist.

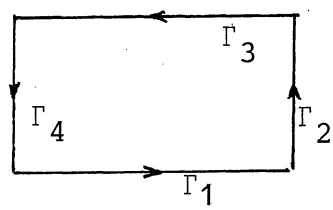
Sætning 3.4. Lad $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben, lad ω, ω_1 og ω_2 være kontinuerte differentialformer på $\tilde{O}$, og lad c_1 og c_2 være reelle tal. Lad Γ være en vej i $\tilde{O}$ fremkommet ved, at en vej Γ_2 er sat efter en vej Γ_1. Det antages, at Γ har en C_1 repræsentant. Lad Γ^{-1} betegne den modsatte vej til Γ. Da gælder regnereglerne

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega \; ; \; \int_{\Gamma^{-1}} \omega = -\int_\Gamma \omega \; ; \; \int_\Gamma (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1\int_\Gamma \omega_1 + c_2\int_\Gamma \omega_2 .$$

Bevis. I kraft af udtrykket for integralet givet i sætning 3.3 følger det hele af regnereglerne for sædvanlige integraler.

Definition 3.5. Lad $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ være åben. En endelig mængde $\Gamma = \{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_q\}$ af veje i $\tilde{O}$ kaldes en integrationsvej (eller blot en vej, når det ikke misforstås) i $\tilde{O}$. Hvis ω er en differentialform på $\tilde{O}$, og ω har integraler langs hver af vejene Γ_j, $j = 1,\ldots,q$, siger vi, at ω har et integral langs Γ, og vi definerer $\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1}\omega+\ldots+\int_{\Gamma_q}\omega$.

Der er nu mening i at tale om et kurveintegral langs en stykkevis differentiabel vej, idet den deles i differentiable stykker. Det følger af den første regel i sætning 3.4, at yderligere inddeling ikke får indflydelse på integralets værdi.



Eksempel. Lad Γ være randen af et rektangel $[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$. For at finde $\int_\Gamma\omega$, hvor $\omega(x,y;\,dx,dy) = L(x,y)dx+M(x,y)dy$ deler vi randen op i de 4 sider $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_4$. For Γ_1 kan vi bruge parameterfremstillingen $(x,y) = (t,b_1)$, $x \in [a_1,a_2]$. Analogt for de andre sider, men for Γ_3 og Γ_4 er det bedst at bruge den midterste regel fra sætning 3.4, så vi kommer til at integrere modsat vej. Derved får vi

$$\int_\Gamma \omega = \int_{a_1}^{a_2} L(x,b_1)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} M(a_2,y)\,dy - \int_{a_1}^{a_2} L(x,b_2)\,dx - \int_{b_1}^{b_2} M(a_1,y)\,dy.$$

Hvis Γ havde været randen af en cirkelskive med centrum (a,b) og radius R, ville vi have brugt parameterfremstillingen $(x,y) = (a+R\cos\theta,\ b+R\sin\theta)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, og vi ville få

$$\int_\Gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} R(-L(a+R\cos\theta,\ b+R\sin\theta)\sin\theta+M(a+R\cos\theta,\ b+R\sin\theta)\cos\theta)\,d\theta\ .$$

Randen af et område af den slags, vi kommer til at arbejde med, vil bestå af endelig mange lukkede kurver. Det fremgår umiddelbart af reglen i sætning 3.4, at kurveintegralet langs en sådan lukket kurve heller ikke afhænger af valget af udgangspunkt på kurven.

Hvis $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ er åben, kan et par af kontinuerte funktioner $L,M: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ også fortolkes som et vektorfelt (L,M) på $\tilde{O}$, f.eks. et hastighedsfelt for en strømning eller et kraftfelt. Det er rimeligt at betragte parameteren t i bevægelsen, der repræsenterer vejen Γ, som tiden, og formlen i sætning 3.3 fortæller så, at kurveintegralet i det første tilfælde udtrykker det af kraftfeltet udførte arbejde under bevægelsen. I det andet tilfælde er integralet et udtryk for, hvor megen medvind man har haft under bevægelsen. For en lukket vej kaldes kurveintegralet også cirkulationen, og hvis en strømning har fra 0 forskellig cirkulation langs en lukket vej, er det udtryk for, at der er hvirvler i strømningen.

Ud fra vektorfeltet (L,M) kan vi også danne kurveintegralet $\int_\Gamma -M(x,y)dx+L(x,y)dy$. Hvis Γ er randen af et pænt område orienteret så områdets indre er til venstre, er dette kurveintegral cirkulationen af vektorfeltet $(-M,L)$ langs randen. Da det oprindelige vektorfelt (L,M) fås af $(-M,L)$ ved at dreje hver feltvektor $\frac{\pi}{2}$ med uret, kommer det nye kurveintegral til at udtrykke hastighedsfeltets strøm ud gennem randen.

Vi fortsætter nu med at indføre kurveintegraler for funktioner af komplekse variable.

Sætning 3.6. Lad $O \subseteq C$ være åben og lad $\tilde{O}$ være den tilsvarende åbne mængde i $\mathbb{R}^2$. Lad $f: O \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion med real- og imaginærdel $f_r, f_i: \tilde{O} \to \mathbb{R}$. Lad Γ være en vej i O med en C^1 repræsentant $\gamma:[a,b] \to O$ med $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}$. Lad D være en inddeling $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ med indskudte punkter $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\ldots,n$. Da vil summen

$$S(D) = \sum_{j=1}^{n} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))f(\gamma(\tau_j))$$

for $\kappa(D) \to 0$ konvergere mod

$$\int_\Gamma f_r(x,y)dx - f_i(x,y)dy + i\int_\Gamma f_i(x,y)dx + f_r(x,y)dy ,$$

hvor vi har brugt betegnelsen Γ også for den til Γ svarende vej i $\mathbb{R}^2$.

Bevis. Vi indfører real- og imaginærdelene af γ og f i udtrykket for $S(D)$, og derved får vi

$$\begin{aligned} S(D) = & \sum_{j=1}^{n} ((\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))+i(\beta(t_j)-\beta(t_{j-1}))(f_r(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))+if_i(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j)))= \\ & \sum_{j=1}^{n} ((\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))f_r(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))-(\beta(t_j)-\beta(t_{j-1}))f_i(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))) + \\ & i\sum_{j=1}^{n} ((\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))f_i(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j)) + (\beta(t_j)-\beta(t_{j-1}))f_r(\alpha(\tau_j),\beta(\tau_j))), \end{aligned}$$

og påstanden følger nu umiddelbart af sætning 3.3.

Definition 3.7. Den i sætning 3.6 omtalte grænseværdi kaldes integralet af f langs Γ, og den betegnes $\int_\Gamma f(z)dz$. For en vilkårlig integrationsvej $\Gamma = \{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_q\}$, hvor $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_q$ har C^1 repræsentanter, sætter vi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \ldots + \int_{\Gamma_q} f(z)dz \ .$$

Vi bemærker, at udtrykket for integralet i sætning 3.6 fremkommer ved den formelle regning

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (f_r(x,y) + if_i(x,y))(dx+idy) =$$

$$\int_\Gamma f_r(x,y)dx - f_i(x,y)dy + i\int_\Gamma f_i(x,y)dx + f_r(x,y)dy \ ,$$

hvilket ikke beviser noget, men det er nemmere at bruge den formelle regning end at huske formlen.

Det er klart, at sætning 3.4 overføres uændret.

<u>Sætning 3.8</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, lad $f, f_1, f_2 : O \to \mathbb{C}$ være kontinuerte, og lad Γ være en vej i O med en C^1 repræsentant og fremkommet ved at sætte en vej Γ_2 efter en vej Γ_1. Lad c_1 og c_2 være komplekse tal, og lad Γ^{-1} være den modsatte vej til Γ. Da gælder reglerne

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz, \quad \int_{\Gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz \ ,$$

$$\int_\Gamma (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))dz = c_1\int_\Gamma f_1(z)dz + c_2\int_\Gamma f_2(z)dz \ .$$

Beviset er helt trivielt. Vi har også et mere bekvemt udtryk for integralet, som det ses af følgende sætning.

<u>Sætning 3.9</u>. Med betegnelserne fra sætning 3.6 er

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ .$$

Bevis. Direkte udregning giver

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma f_r(x,y)dx - f_i(x,y)dy + i\int_\Gamma f_i(x,y)dx + f_r(x,y)dy =$$

$$\int_a^b (f_r(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) - f_i(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t))dt +$$

$$i\int_a^b (f_i(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + f_r(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t))dt =$$

$$\int_a^b (f_r(\alpha(t),\beta(t)) + if_i(\alpha(t),\beta(t)))(\alpha'(t)+i\beta'(t)dt =$$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ .$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Hvis $f(z) = \overline{z}$, medens Γ er den elliptiske vej givet ved $z = a\cos\theta + ib\sin\theta$, $\theta \in [0,2\pi]$ med $a > 0$, $b > 0$, får vi

$$\int_\Gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} (a\cos\theta - ib\sin\theta)(-a\sin\theta + ib\cos\theta)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} (b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta d\theta + i\int_0^{2\pi} ab d\theta = i\cdot 2\pi ab \ .$$

Ganske som for reelle funktioner siger vi, at $F: O \to \mathbb{C}$ er en stamfunktion til $f: O \to \mathbb{C}$, hvis f er differentialkvotienten af F. Hvis ω er en differentialform på O, siger vi, at $G: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ er en stamfunktion til ω, hvis ω er det totale differential af G, altså $\omega(x,y; dx,dy) = G'_x(x,y)dx + G'_y(x,y)dy$. Ganske som for funktioner af en reel variabel går integration helt umiddelbart, når en stamfunktion er kendt.

Sætning 3.10. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $\tilde{O}$ den tilsvarende åbne mængde i $\mathbb{R}^2$. Lad $f: O \to \mathbb{C}$ være kontinuert, og lad $F: O \to \mathbb{C}$ være en stamfunktion til f. Lad ω givet ved $\omega(x,y;dx,dy) = L(x,y)dx + M(x,y)dy$ være en kontinuert differentialform på $\tilde{O}$, og lad $G: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ være en stamfunktion til ω. Lad Γ være en vej i O og dermed i $\tilde{O}$ med en stykkevis C^1 repræsentant $\gamma:[a,b] \to O$ med $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Da er

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)); \quad \int_\Gamma \omega = G(\alpha(b),\beta(b)) - G(\alpha(a),\beta(a)).$$

Bevis. Hvis γ er C^1 på hele $[a,b]$, får vi

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b))-F(\gamma(a)) .$$

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b (L(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + M(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t))dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} G(\alpha(t),\beta(t))dt = G(\alpha(b),\beta(b)) - G(\alpha(a),\beta(a)).$$

Her har vi i det første tilfælde benyttet kæderegler fra sætning 2.8, og i det andet tilfælde kædereglen for funktioner af flere variable. Hvis γ kun er stykkevis C^1 fås resultatet ved deling af $[a,b]$ i delintervaller, hvor γ er C^1. Dermed er sætningen bevist.

Når f eller ω har en stamfunktion, er kurveintegralet således fastlagt ved dennes værdi i vejens endepunkter. Vi udtrykker dette kort og fyndigt ved at sige, at integralet er uafhængigt af vejen.

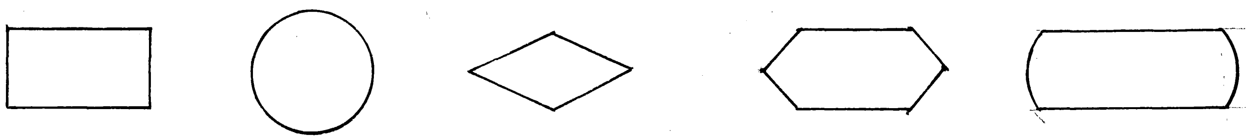
Vi indskyder nu en ret triviel hjælpesætning.

Sætning 3.11. At integralet af en kontinuert funktion af en kompleks variabel i en åben mængde O eller af en differentialform i $\tilde{O}$ er uafhængigt af vejen, er ensbetydende med, at integralet langs enhver lukket vej i O eller $\tilde{O}$ er 0.

Bevis. Hvis integralet er uafhængigt af vejen, er integralet langs en lukket vej lig integralet langs en "stationær" vej (vej med punktformet bane), altså nul. Hvis integralet langs enhver lukket vej er 0, og Γ_1 og Γ_2 er 2 veje fra A til B, danner Γ_2 modsat sat efter Γ_1 en lukket vej Γ, og vi har $\int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma} = 0$. Dermed er sætningen bevist.

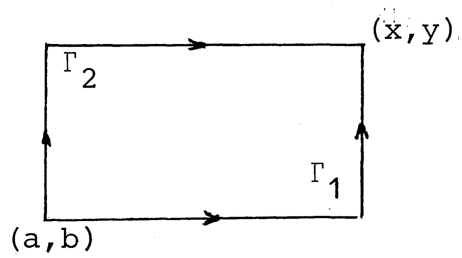
Definition 3.12. Ved et S-område i $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}^2$ vil vi forstå et konvekst område med en vandret og en lodret symmetriakse.

Vi tegner nogle eksempler på S-områder.



Sætning 3.13. Lad O være et S-område i $\mathbb{C}$ og $\tilde{O}$ det tilsvarende i $\mathbb{R}^2$. Lad $f: O \to \mathbb{C}$ være kontinuert og $\omega(x,y,dx,dy) = L(x,y)dx+M(x,y)dy$ en kontinuert differentialform i $\tilde{O}$. Det antages at både f og ω har integral 0 langs randen af ethvert akseparallelt rektangel i O (for f) eller $\tilde{O}$ (for ω). Så har f en stamfunktion i O og ω en stamfunktion i $\tilde{O}$.

Bevis. Vi ser først på differentialformen. Lad $a+ib \in O$ og $(a,b) \in \tilde{O}$ være symmetriaksernes skæringspunkt (symmetricenteret). Hvis $(a+\xi, b+\eta) \in \tilde{O}$, da giver symmetrien, at $(a\pm\xi, b\pm\eta) \in \tilde{O}$ for alle 4 valg af fortegn, og dernæst giver konveksiteten, at rektanglet med disse 4 vinkelspidser ligger helt i $\tilde{\Omega}$. For $(x,y) \in \tilde{\Omega}$ har vi derfor veje fra (a,b) til (x,y) langs randen af det akseparallelle rektangel med (a,b) og (x,y) som modstående vinkelspidser. Da integralet af ω langs randen af rektanglet er 0, kan vi med figurens betegnelser definere



$$F(x,y) = \int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega \,,$$

og udførligt giver det

$$F(x,y) = \int_a^x L(t,b)\,dt + \int_b^y M(x,u)\,du = \int_b^y M(a,u)\,du + \int_a^x L(t,y)\,dt \,.$$

Det sidste udtryk viser, at $F'_x(x,y) = L(x,y)$, og det første, at $F'_y(x,y) = M(x,y)$. Dermed har vi vist, at F er stamfunktion til ω i $\tilde{\Omega}$.

For f får vi, når Γ er rand af et rektangel i Ω, at

$$0 = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma f_r(x,y)\,dx - f_i(x,y)\,dy + i\int_\Gamma f_i(x,y)\,dx + f_r(x,y)\,dy \,.$$

Spaltning i real- og imaginærdel giver, at begge kurveintegraler på højre side er 0, og den allerede viste del af sætningen fortæller, at $f_r(x,y)\,dx - f_i(x,y)\,dy$ har en stamfunktion $F_r(x,y)$ og $f_i(x,y)\,dx + f_r(x,y)\,dy$ en stamfunktion $F_i(x,y)$. Vi definerer $F(z) = F(x+iy) = F_r(x,y) + iF_i(x,y)$ og får så

$$\frac{\partial}{\partial x} F_r(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F_i(x,y) = f_r(x,y) \,, \quad \frac{\partial}{\partial y} F_r(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x} F_i(x,y) = -f_i(x,y)$$

så sætning 2.7 giver, at F er stamfunktion til f i Ω. Dermed er sætningen bevist.

Definition 3.14. Ved en trappelinie i O eller $\tilde{O}$ forstås en vej, hvis bane er sammensat af akseparallelle liniestykker.

Randen af et rektangel som vej er således en trappelinie. Vi viser en "forstærket" omvendt sætning til sætning 3.10.

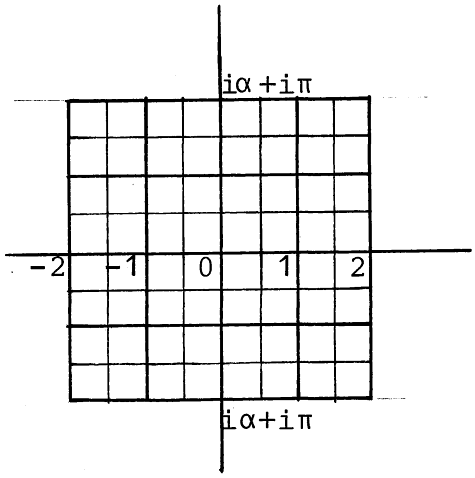
Sætning 3.15. En kontinuert funktion eller differentialform i et område i $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}^2$ med den egenskab, at integralet langs enhver lukket trappelinie er 0, har en stamfunktion.

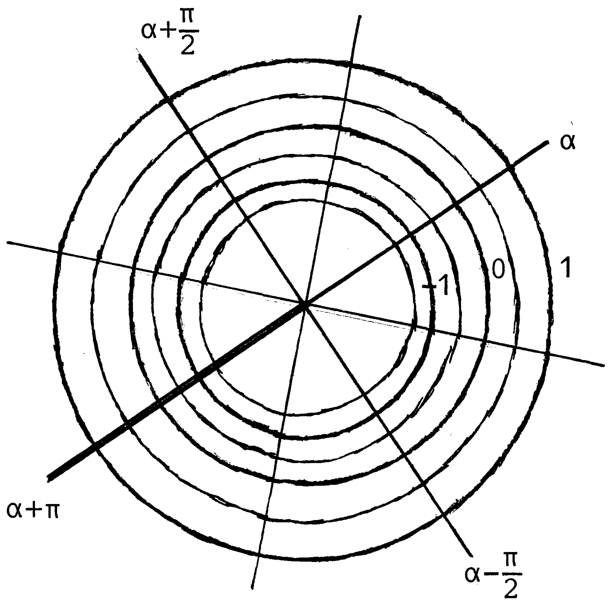
Bevis. Vi vælger et fast punkt A, området. For et punkt B i området definerer vi $F(B) = \int_\Gamma f(z)dz$ (eller $\int_\Gamma \omega$), hvor Γ er en trappelinie fra A til B. Forudsætningen i sætningen er netop, at $F(B)$ ikke kommer til at afhænge af Γ. Nu har et vilkårligt punkt B en omegn, der er et S-område indeholdt i det givne område, og i dette S-område har funktionen (formen) en stamfunktion G. Nu kan vi få $F(X)$ for X i S-området ved at bruge en trappelinie fra A til B fulgt af en trappelinie i S-området fra B til X, og derfor en $F(X) = F(B)-G(B) + G(X)$, så F og G afviger kun med en konstant på S-området. Dermed er sætningen bevist.

Det er klart, at en lukket trappelinie kan deles op i simple, lukkede trappelinier, og derfor er det nok at have antagelsen i sætning 3.15 for simple, lukkede trappelinier. Det følger af vore sætninger, at integralet langs enhver lukket vej, der blot er stykkevis C^1, er 0, hvis det bare er 0 langs simple lukkede trappelinier.

Vi ser på et eksempel, som er alt for vigtigt til at blive deklasseret med betegnelsen "eksempel", og som illustrerer resultaternes trods alt en smule begrænsede rækkevidde.

Vi begynder med at studere afbildningen $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ved $\exp z = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Funktionen har periode $2\pi i$. I første omgang studerer vi derfor restriktionen til en strimmel $S_\alpha = \{z \mid \alpha-\pi < y \leq \alpha+\pi\}$. En traditionel grafisk fremstilling ville kræve 4 dimensioner, så vi må nøjes med en erstatning. En nogenlunde brugbar fremstillingsform fås ved at tegne en z-plan med et kurvesystem og en expz-plan med billedet af kurvesystemet.





Vi har valgt nettet af vandrette og lodrette linier i S_α. Hver vandret linie afbildes på en halv linie ud fra 0, og hver lodret linie krummes sammen til en cirkel. Disses radier varierer eksponentielt med x (vi har tegnet dem en hel del for tæt). Vi har en bijektiv afbildning af S_α på hele $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Vi får en omvendt afbildning, en logaritmefunktion $\operatorname{logar}_\alpha: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S_\alpha$. Vi ser, at $\operatorname{logar}_\alpha$ er diskontinuert i alle punkter af halvlinien svarende til argumentværdien $\alpha+\pi$, men på resten $\mathbb{C}_\alpha$ af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ er $\operatorname{logar}_\alpha$ en differentiabel funktion, invers funktion til exp, idet $\exp' = \exp$, som ikke antager værdien 0. For $w = e^z$ har vi ifølge sætning 2.6, at $\frac{d}{dw} \operatorname{logar}_\alpha w = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$. Altså er $\operatorname{logar}_\alpha$ en stamfunktion til $\frac{1}{w}$ på $\mathbb{C}$.

Vi har stamfunktionen $\operatorname{logar}_\alpha$ for enhver værdi af α. Den viser, at $\int_\Gamma \frac{dw}{w}$ for en halvcirkel Γ med centrum i 0 og orienteret mod uret er $i\pi$, og så følger umiddelbart, at integralet langs en cirkel om 0 i retning mod uret er $2\pi i$. Dette fås også ved direkte udregning, idet vi bruger parameterfremstillingen $w = r \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$, $dw = ire^{i\theta}$, hvilket giver $\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$.

Vi har en flertydig logaritme af et komplekst tal

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

med lige netop den ubestemthed, der ligger i $\arg z$. For hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ kan vi fiksere argumentet, så vi netop får den differentiable logaritmefunktion $\operatorname{logar}_\alpha : \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}$. For hvert fast α afbildes $\mathbb{C}_\alpha$ bijektivt på den ved $y \in]\alpha-\pi, \alpha+\pi[$ bestemte strimmel. Med Logz betegnes den logaritme, der svarer til $\arg z \in]-\pi,\pi]$, hovedværdien af logaritmen.

Funktionen $\frac{1}{w}$ har ikke en stamfunktion i hele $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, men den har en logaritmefunktion som stamfunktion i enhver "opslidset" plan $\mathbb{C}_\alpha$. Læg også mærke til, at $\frac{1}{w}$ ikke har en stamfunktion i en cirkelring med centrum 0, men at $\frac{1}{w}$ alligevel har integral 0 langs randen af ethvert rektangel i cirkelringen, hvis denne er smal nok (den største radius mindre end $\sqrt{2}$ gange den mindste).

Vi slutter kapitlet med et par sætninger, der følger umiddelbart af sætning 3.10.

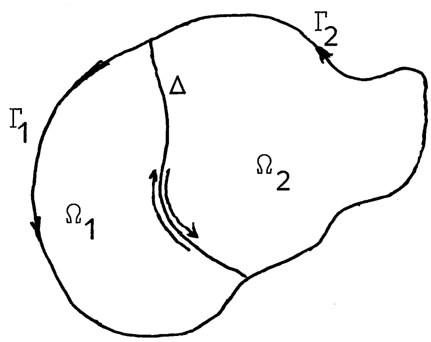
<u>Sætning 3.16</u>. Funktioner på en åben mængde $O \subseteq \mathbb{C}$ eller $\tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^2$, som er stamfunktioner til samme kontinuerte funktion $f: O \to \mathbb{C}$ eller samme kontinuerte differentialform ω på $\tilde{O}$ vil på hver komponent af O eller $\tilde{O}$ have konstant forskel.

Bevis. Forskellen er en stamfunktion til 0, men så giver sætning 3.10, at forskellen har samme værdi i endepunkterne af en vilkårlig differentiabel vej, og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 3. 7</u>. Hvis $O \subseteq \mathbb{C}$ er åben og $f,g: O \to \mathbb{C}$ differentiable funktioner med samme realdel (eller samme imaginærdel), er $g-f$ konstant på hver komponent af O.

Bevis. Af Cauchy-Riemann's differentialligninger følger, at $g-f = \operatorname{Im}(g-f)$ er en stamfunktion til 0-differentialformen, så påstanden følger af sætning 3.16.

4. Cauchy's Integralsætning.



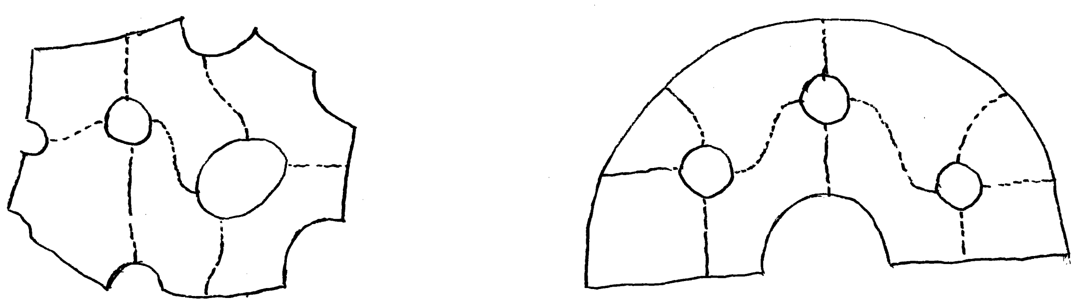
Lad os tænke os, at vi i en åben mængde i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{C}$ har et område Ω med orienteret rand Γ sammensat af kontinuert differentiable veje. Lad os yderligere antage, at Ω som vist på figuren skæres i 2 dele af en vej Δ, som er stykkevis C^1. Lad delene være Ω_1 med rand Γ_1 og Ω_2 med rand Γ_2. Hvis vi nu har en kontinuert differentialform ω eller funktion f i den åbne mængde, får vi $\int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega = \int_{\Gamma}\omega$ for en differentialform og det analoge for en funktion. Det kommer af, at alle tre integraler er sum af bidrag fra alle de C^1-stykker, hvoraf randene er sammensat, og de stykker, der hører til Δ, indgår i Γ_1 og Γ_2 med modsat gennemløb, medens de slet ikke er med i Γ.

"Randintegralerne" giver således "additive områdefunktioner" - næsten som planintegraler gør det - altså noget der minder om areal-mål, sandsynlighedsmål, masse, elektricitetsmængde og mange andre fysiske størrelser. Hvis vektorfeltet, der indgår i differentialformen er hastighedsfelt for et strømmende stof, kan differentialformen, som vi tidligere har set, være valgt, så randintegralet giver det rumfang, der pr. tidsenhed strømmer ud gennem randen. Det væskerumfang, der strømmer ud, må forklares ved, at der inde i området enten sker udvidelse af væsken eller tilføres væske - altså at der er en fordeling af "kilder" til væskerumfang fordelt over området. Så kan man forestille sig en "kildetæthed", og randintegralet burde være et fladeintegral af denne "kildetæthed". Tidligt i det 19. århundrede forstod forskerne, at det forholdt sig på lignende måde med gravitationsfelter, elektrostatiske og magnetostatiske felter. Den feltstyrke der "strømmer" ud gennem overfladen af et område er helt bestemt ved den masse, elektricitetsmængde eller magnetismemængde, der er inde i området. Green, Stokes og Gauss fandt deres berømte integralformler, som viser, at der ligger en simpel matematisk relation til grund for denne filosofi.

Vi går nu i gang med at vise Gauss' integralsætning. Det er egentlig let - det sværeste er at finde en klasse af områder, den bekvemt kan vises at gælde for.

Definition 4.1. Ved et elementarområde i $\mathbb{R}^2$ forstår vi et område, for hvilket der findes reelle tal a_1, a_2, b_1, b_2 og kontinuerte stykkevis C^1-funktioner $f_1, f_2: [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ og $g_1, g_2: [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$ med $f_1(x) < f_2(x)$ for alle $x \in]a_1, a_2[$ og $g_1(y) < g_2(y)$ for alle $y \in]b_1, b_2[$, således at området er $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]a_1, a_2[,\ y \in]f_1(x), f_2(x)[\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in]b_1, b_2[\mid x \in]g_1(y), g_2(y)[\}$. Ved et Gauss-område i $\mathbb{R}^2$ forstår vi et område, der kan deles i endelig mange elementarområder ved endelig mange C^1-veje.

Netop områder som de i slutningen af kapitel 1 omtalte er Gauss-områder. Vi viser en opdeling (blandt mange mulige) i elementarområder af et par områder, der ligner de nævnte.



Vi formulerer nu Gauss' sætning.

Sætning 4.2. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben mængde, og lad $L, M: O \to \mathbb{R}$ være C^1-funktioner. Lad $\Omega \subset O$ være et Gauss-område med orienteret rand $\Gamma \subset O$. Da er

$$\int_\Gamma L(x,y)dx + M(x,y)dy = \int_\Omega (M'_x(x,y) - L'_y(x,y))dxdy .$$

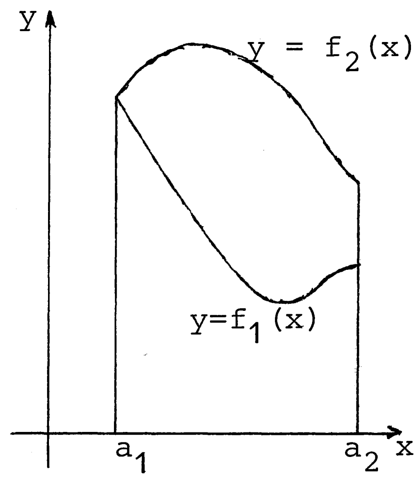
Bevis. Vi deler Ω i elementarområder. Hvis formlen gælder for hvert af disse, får vi den for hele Ω ved addition af formlerne, for delområderne. Altså kan vi antage, at Ω er et elementarområde. Det er nok at vise, at

$$\int_\Gamma L(x,y)\,dx = -\int_\Omega L'_y(x,y)\,dxdy \ ; \qquad \int_\Gamma M(x,y)\,dy = \int_\Omega M'_x(x,y)\,dxdy \ .$$

Beviserne for disse 2 relationer afviger kun ved, at fortegnene falder lidt forskelligt ud. Vi nøjes med at vise den første. Dertil benytter vi, at Ω kan tænkes givet ved $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1,a_2],$ $y \in [f_1(x),f_2(x)]\}$, så vi får, idet planintegralet omskrives til et dobbeltintegral

$$-\int_\Omega L'_y(x,y)\,dxdy = -\int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} L'_y(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$-\int_{a_1}^{a_2}[L(x,y)]_{y=f_1(x)}^{f_2(x)}\,dx = \int_{a_1}^{a_2} L(x,f_1(x))\,dx - \int_{a_1}^{a_2} L(x,f_2(x))\,dx \ ,$$



men dette sidste udtryk er netop $\int_\Gamma L(x,y)\,dx$.

Dermed er sætningen bevist.

Som et vigtigt specialtilfælde har vi følgende sætning:

<u>Sætning 4.3.</u> Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben mængde og $L,M\colon O \to \mathbb{R}$ C^1-funktioner, som tilfredsstiller, at $M'_x = L'_y$. Da har differentialformen $\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dy$ integral 0 langs randen af ethvert Gauss-område, der inklusive randen er indeholdt i O. Endvidere har ω en stamfunktion i ethvert S-område, som er indeholdt i O.

Bevis. Den første påstand følger helt umiddelbart af Gauss' integralsætning. Da et rektangel er et elementarområde, følger den sidste påstand dernæst af sætning 3.13.

Cauchy's integralsætning er nært beslægtet med Gauss' integralformel. Vi går i gang med sætningen.

<u>Sætning 4.4</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde og $f\colon O \to \mathbb{C}$ en differentiabel funktion med kontinuert differentialkvotient. Lad Ω med orienteret rand Γ være et Gauss-område med $\Omega \cup \Gamma \subset O$. Da er $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Bevis. Vi skriver $f(z) = f_r(x,y) + if_i(x,y)$ og får

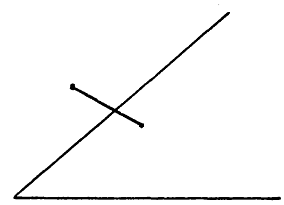
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma f_r(x,y)dx - f_i(x,y)dy + i\int_\Gamma f_i(x,y)dx + f_r(x,y)dy \ .$$

Nu giver Cauchy-Riemann's differentialligninger (sætning 2.7), at differentialformerne under integraltegnene opfylder betingelsen i sætning 4.3, som fortæller, at begge integraler er 0. Dermed er sætningen bevist.

Vi indskyder et bevis for Jordan's sætning for polygoner. De ikke alt for teoretisk interesserede kan uden skade springe det over.

<u>Sætning 4.5</u>. Lad $\Gamma \subset \mathbb{C}$ være en polygon (en simpel lukket brudt linie). Da har $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ netop 2 komponenter, af hvilke netop 1 er begrænset. Der kan vælges en orientering på Γ, så den begrænsede komponent overalt er til venstre og den anden til højre. Hvis Γ specielt tillige er en trappelinie, kan den begrænsede komponent af $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ deles i endelig mange rektangler.

Bevis. Hvert ben af en vinkel ligger på en ret linie, der deler planen i 2 halvplaner. Vinklens indre er fællesmængden for de to

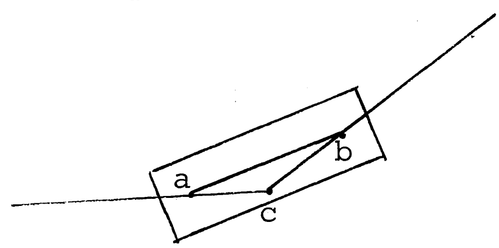


åbne halvplaner, der indeholder vinkelbenene. Heraf følger, at et liniestykke, der skærer netop 1 vinkelben, vil have et endepunkt indenfor vinklen og det andet udenfor. Et liniestykke, der skærer begge vinkelben og ikke går gennem toppunktet vil have begge endepunkter udenfor vinklen. Et liniestykke, der slet ikke har punkter fælles med vinklen, vil have begge endepunkter indenfor eller begge endepunkter udenfor.

Lad os nu antage, at vinklen er således placeret i $\mathbb{C}$, at den ikke har toppunktet på Γ og ingen vinkelspids i Γ ligger på et vinkelben. Hvis vi så går rundt langs Γ, vil vi ved hvert skæringspunkt med et vinkelben passere ind i eller ud af vinklens indre. Altså er antallet af skæringspunkter mellem polygonen og vinklen altid lige.

Lad nu a være et punkt af $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Der findes uendelig mange halvlinier med endepunkt a, som ikke går gennem vinkelspidser af Γ. Af betragtningerne ovenfor følger, at antallet af skæringspunkter med Γ vil være lige for alle sådanne halvlinier eller ulige for alle sådanne halvlinier. Vi siger, at a ligger indenfor Γ, hvis antallet af skæringspunkter er ulige, medens a ligger udenfor Γ, hvis antallet af skæringspunkter er lige. Vi betegner mængden af punkter indenfor Γ med $I(\Gamma)$ og mængden af punkter udenfor Γ med $Y(\Gamma)$.

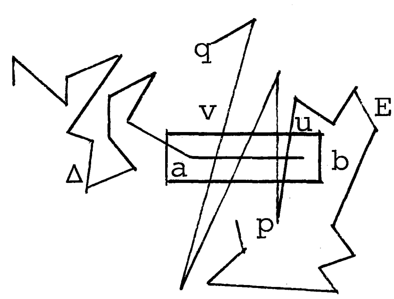
Et liniestykke i $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ med endepunkter a og b kan som antydet på figuren "omhegnes" med et rektangel i



$\mathbb{C}\setminus\Gamma$, og inde i dette kan vi vælge et punkt c, så halvlinierne fra c gennem a og b ikke går gennem vinkelspidser i Γ. Heraf følger, at a og b begge er i $I(\Gamma)$ eller begge i $Y(\Gamma)$. Ved gentagen anvendelse ser vi, at en brudt linie i $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ har begge endepunkter i $I(\Gamma)$ eller begge i $Y(\Gamma)$. Enhver brudt linie, der forbinder et punkt i $I(\Gamma)$ med et punkt i $Y(\Gamma)$ må således skære Γ.

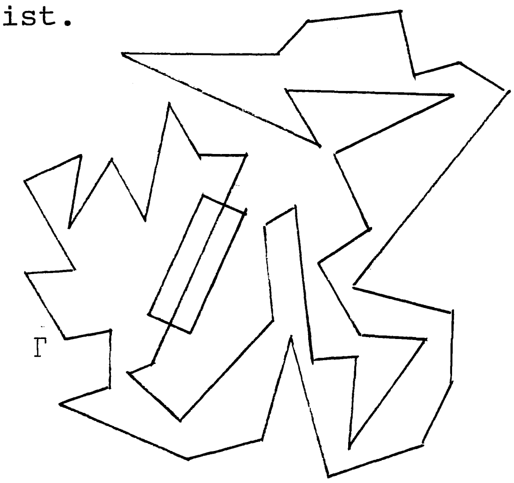
Da $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ er åben, og det for enhver bevægelse $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\Gamma$ gælder, at banen er kompakt, vil banen have positiv afstand fra Γ, og da γ er ligelig kontinuert, kan γ erstattes med en bevægelse i $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ med en brudt linie som bane. Altså kan et punkt af $I(\Gamma)$ og et punkt af $Y(\Gamma)$ ikke ligge i samme kurvekomponent af $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Dermed har vi bevist, at Γ har mindst 2 komponenter.

Lad nu $\Delta \subset \mathbb{C}$ være en simpel brudt linie, sammensat af n liniestykker. Vi vil vise, at $\mathbb{C}\setminus\Delta$ er sammenhængende. Det er nok at vise, at 2 punkter $p,q \in \mathbb{C}\setminus\Delta$ kan forbindes med en brudt linie i $\mathbb{C}\setminus\Delta$. Det vises ved induktion efter n. Vi antager derfor, at der findes en simpel brudt linie $E \subset \mathbb{C}\setminus\Delta$ fra p til q, og vi skal blot vise, at hvis vi føjer endnu et liniestykke ab til Δ og derved får en ny simpel brudt linie Δ', kan p og q også forbindes med en simpel brudt linie, der ikke skærer Δ'. For at vise det indrammer vi ab med et rektangel, der skærer Δ i kun et punkt på den side, der støder op til ab.



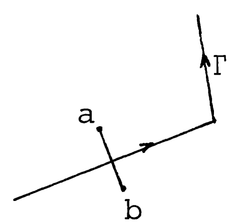
Så vil E gennemløbet fra p til q eventuelt træffe rektanglets rand en første gang i u og sidste gang i

v, og så får vi en ny brudt linie ved at erstatte stykket fra u til v med det af de to stykker, hvori u og v deler rektanglets omkreds, som ikke skærer Δ. Derved får vi en brudt linie i $\mathbb{C}\setminus\Delta'$ fra p til q, og dermed er påstanden vist.

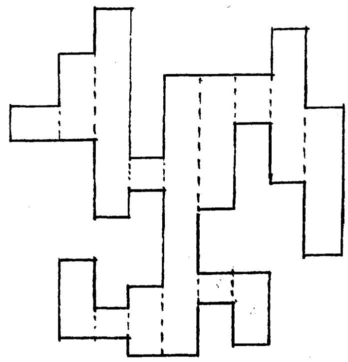


Som antydet på figuren vælger vi et rektangel, således at en side af Γ skærer det midt igennem, medens det ikke når ud til nogen anden side i Γ. Ved at fjerne den del af Γ, der ligger inde i rektanglet, får vi en simpel brudt linie $\tilde{\Gamma}$. Hvis nu $a \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ er et vilkårligt punkt, har vi netop vist, at der findes en simpel brudt linie i $\mathbb{C}\setminus\Gamma'$ fra a til rektanglets midtpunkt, og hvis vi kun følger den til dens første skæringspunkt med rektanglet, ser vi, at a kan forbindes i $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ med et punkt af en af de to dele, hvori rektanglet deles af siden af Γ. Dermed har vi vist, at $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ har højst 2 komponenter.

Der findes en stor cirkel, som helt omslutter Γ. Alle punkter udenfor denne cirkel tilhører samme komponent af $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, så denne komponent er ikke begrænset, men den anden ligger helt indenfor Γ og er således begrænset.



Efter det foregående er det klart, at punkter, som ligger umiddelbart på hver side af en side af Γ tilhører hver sin komponent af $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, og siden kan derfor orienteres, så $I(\Gamma)$ kommer til venstre. Som det ses af en figur vil sammenstødende sider derved blive overensstemmende orienteret.



Hvis Γ specielt er en trappelinie tegner vi i $I(\Gamma)$ alle forlængelser af lodrette sider så langt, at de netop møder Γ igen. Derved deles $I(\Gamma)$ i delmængder. Lad a være et indre punkt af en sådan. En lodret linie gennem a møder Γ første gang ovenfor a i et punkt x af en vandret side S og analogt nedenfor a i et punkt y af en vandret side T. Lad nu M og N være de sider eller delelinier, der udgår fra S nærmest ved x på hver side af x. De fortsætter helt igennem til T og afgrænser delrektanglet, hvori S ligger. Ellers måtte der nemlig ligge punkter af Γ mellem de to lodrette linier, og så vil der være en lodret linie nærmest ved a, som indeholder punkter af Γ. Denne vil indeholde et antal lodrette sider af Γ, og den øverste giver ved forlængelse opad en delelinie, der skærer S mellem M og N, hvilket er umuligt.

Dermed er sætningen vist.

Definition 4.6. Et område $O \subseteq \mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}^2$) kaldes et Cauchy-område eller et enkelt sammenhængende område, hvis det for enhver simpel lukket trappelinie $\Gamma \subset O$ gælder, at den begrænsede komponent af $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ (eller $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$) er indeholdt i O.

Groft sagt betyder det, at der ikke er huller i området. Det er ikke den traditionelle definition af "enkeltsammenhængende", men så længe vi holder os til områder i $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}^2$ er der overensstemmelse. For områder på flader gælder Jordan's sætning ikke, og så kan vor definition ikke bruges.

Sætning 4.7. Hvis $O \subseteq \mathbb{C}$ er et Cauchy-område, og $f: O \to \mathbb{C}$ differentiabel med kontinuert differentialkvotient, da har f en stamfunktion i O.

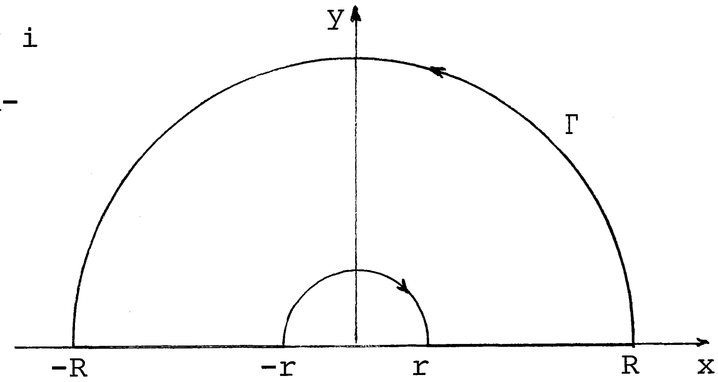
Bevis. Det følger af definition 4.6 kombineret med sætning 4.5, at en simpel lukket trappelinie $\Gamma \subseteq O$ er rand for et område $I(\Gamma) \subset O$. Det følger af sætning 4.5, at $I(\Gamma)$ kan deles i endelig mange rektangler, så $I(\Gamma)$ er et Gauss-område. Så giver Cauchy's integralsætning (4.4), at $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Dernæst giver sætning 3.15 kombineret med bemærkningen efter beviset, at f har en stamfunktion. Dermed er sætningen bevist.

5. Nogle bestemte Integraler.

Cauchy's integralsætning kan udnyttes til explicit udregning af bestemte integraler. Senere får vi mere varierede metoder til rådighed. Det går kun med visse helt specielle integraler, men mulighederne er uoverskuelige. Det er svært af afgøre, om et givet integral kan udregnes ved disse metoder, men man kan lære at genkende visse typer, der kan. Vi kunne lade de følgende regninger stå som eksempler, men da resultaterne har anvendelser, har vi fundet det rimeligere at formulere dem som sætninger.

Sætning 5.1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Bevis. Den ved $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ definerede funktion har kontinuert differentialkvotient i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Den del af en cirkelring med centrum



0 og radier r og R, som ligger i den øvre halvplan, er et Gauss-område, hvis rand vi betegner Γ. Cauchy's integralsætning giver $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Vi bemærker, at Γ er sammensat af 2 liniestykker og en stor og en lille halvcirkel. Liniestykkerne bidrager til integralet med

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_R^r \frac{e^{-ix}}{x}\,dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx =$$

$$\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

I integralet langs den store halvcirkel bruger vi parameterfremstillingen $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$, $dz = iRe^{i\theta}$, og bidraget bliver

$$I_R = i\int_0^\pi e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta .$$

Her er $|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}| = e^{-R\sin\theta}$, så vi får vurderingen

$$|I_R| \leqq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta .$$

For $\varepsilon > 0$ kan vi vælge R_0, så $e^{-R\sin\frac{\varepsilon}{4}} \leqq \frac{\varepsilon}{2\pi}$ for $R \geqq R_0$, og for $R \geqq R_0$ får vi så vurderingen

$$|I_R| \leqq 2\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} 1\cdot d\theta + 2\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\frac{\varepsilon}{4}}d\theta \leqq 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon.$$

Dermed har vi vist, at $I_R \to 0$ for $R \to \infty$.

Bidraget fra den lille cirkel (den er orienteret modsat) er

$$-I_r = -i\int_0^\pi e^{-ir(\cos\theta+i\sin\theta)}d\theta .$$

Integranden går ligeligt mod 1, så $-I_r \to -i\pi$ for $r \to 0$.

Nu havde vi jo $\int_\Gamma f(z)dz = 0$, altså

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + I_R - I_r = 0.$$

Ved grænseovergangene $R \to \infty$ og $r \to 0$ får vi

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0,$$

og dermed er sætningen bevist.

Vurdering af bestemte integraler spiller næsten altid en rolle i denne slags regninger, men for det meste er de lette. I eksemplet førte vi problemet tilbage til et sædvanligt integral ved at bruge en parameterfremstilling. Den velkendte vurdering $|\int_a^b f(x)dx| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$, som er nem at vise for $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, er lidt mindre oplagt for $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Den er dog nem nok, når vi bemærker, at der findes et $\theta \in \mathbb{R}$, så vi har

$$|\int_a^b f(x)dx| = e^{i\theta}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{i\theta}f(x)dx = \int_a^b (\operatorname{Re} e^{i\theta}f(x))dx \leqq$$
$$\int_a^b |\operatorname{Re} e^{i\theta}f(x)|dx \leqq \int_a^b |e^{i\theta}f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx .$$

Sommetider klarer følgende sætning sagen:

<u>Sætning 5.2</u>. Lad $O \subseteq C$ være åben, $f\colon O \to \mathbb{C}$ kontinuert, og Γ en stykkevis C^1 vej i O. Hvis Γ har længde L, og $|f(z)| \leqq M$ for alle z på Γ, da er $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqq LM$.

Bevis. Lad Γ være repræsenteret ved $\gamma\colon [a,b] \to O$ hvor $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Så er $L = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2+(\beta'(t))^2}dt = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$, så vi får

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq$$
$$M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = LM.$$

Dermed er sætningen bevist.

I kursus over mål - og integralteori vises en sætning, som kan være arbejdsbesparende her. Vi tillader os at bruge den, men vi henviser til det andet kursus eller gængse lærebøger for så vidt angår bevis.

Sætning 5.3. Lad (f_n) være en følge af funktioner $f_n: [a,b] \to \mathbb{C}$, og lad $F: [a,b] \to [0,\infty]$ være en funktion med $\int_a^b F(x)dx < \infty$. Hvis der findes en funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$, og $(f_n(t)) \to f(t)$ for hvert $t \in [a,b]$, og f_n er integrabel for hvert $n \in \mathbb{N}$, og endelig $|f_n(t)| \leq F(t)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $t \in [a,b]$, da konvergerer $(\int_a^b f_n(t)dt)$ mod $\int_a^b f(t)dt$.

Med "integrabel" menes Lebesgue-integrabel. I vore anvendelser er funktionerne f_n kontinuerte, men det hænder, at f kun er stykkevis kontinuert. For integralet I_R ovenfor gælder, at integranden er numerisk ≤ 1 for alle R, og den konvergerer mod 0 for hver $\theta \in]0,\pi[$, men mod 1 i intervalendepunkterne. Det følger så af sætning 5.3, at $I_R \to 0$, når R gennemløber en vilkårlig følge, der går mod ∞, og det er netop, hvad vi behøver.

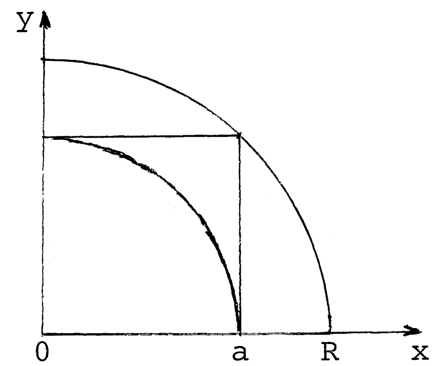
Eksempel. Vi kan slutte, at $(\int_0^1 \frac{dx}{2n\sqrt{1-x^2}}) \to 1$ for $n \to \infty$, idet integranden går mod 1 undtagen for $x = 1$, hvor den går mod ∞, og integranden er positiv og aftager mod n, og for $n = 1$ har integralet værdien $\frac{\pi}{2} < \infty$.

Vi vil slutte med at omtale nogle integraler, hvor e^{-x^2} optræder i integranden. En metode til udregning af $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ved brug af komplekse variable er omtalt i Jameson's bog. Traditionelt udregnes integralet ved udnyttelse af et reelt planintegral, men en nærmere analyse vil vise, at det, der foregår i virkeligheden er udregning af en værdi af gammafunktionen $\Gamma(\frac{1}{2})$.

<u>Sætning 5.4</u>. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Bevis. Vi definerer $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved $F(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$, idet (r,θ) er polære koordinater. Planintegralet af F over den ved $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq R^2$ fastlagte cirkelkvadrant udregnes i polære koordinater til

$$I_R = \int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} dt\right) r dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}),$$



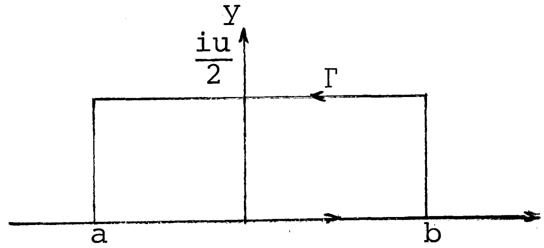
så vi ser, at $I_R \to \frac{\pi}{4}$ for $R \to \infty$. Dernæst ser vi på integralet over kvadratet $[0,a]\times[0,a]$. Det er givet ved

$$\tilde{I}_a = \int_0^a \left(\int_0^a e^{-x^2-y^2} dy\right) dx = \int_0^a e^{-x^2} \left(\int_0^a e^{-y^2} dy\right) dx =$$

$$\int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2 .$$

Da vi har $I_a < \tilde{I}_a < I_{a\sqrt{2}}$ (se figuren), kan vi slutte, at $\tilde{I}_a \to \frac{\pi}{4}$ for $a \to \infty$, og det medfører, at $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, altså $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 5.5</u>. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ux\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{u^2}{4}}$ for $u \in \mathbb{R}$.



Bevis. Idet Θ er randen af det på figuren viste rektangel, er $\int_\Gamma e^{-z^2}dz = 0$. For $z = b+iy$, $y \in [0,\frac{u}{2}]$ (eller $[\frac{u}{2},0]$ hvis $u < 0$) er $|e^{-z^2}| = e^{y^2-b^2} \leqq e^{\frac{1}{4}u^2-b^2}$, så integralet langs den højre lodrette side er højst $\frac{1}{2}|u|e^{\frac{1}{4}u^2-b^2}$, og det går mod 0 for $b \to \infty$. Det går på samme måde med bidraget fra den venstre lodrette side. Vi ved, at integralet langs siden på den reelle akse går mod $\sqrt{\pi}$ for $a,b \to \infty$, og det samme vil så gælde for integralet langs rektanglets øverste side orienteret mod højre, så vi får

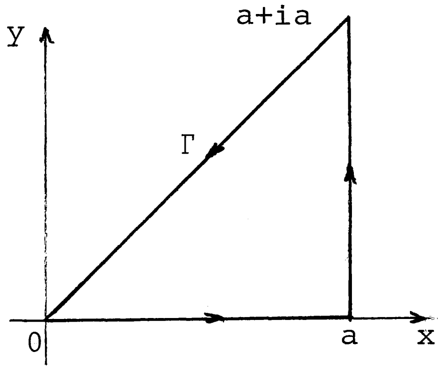
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\frac{u}{2})^2}dx = \sqrt{\pi},$$

altså

$$e^{\frac{u^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos ux + i\sin ux)dx = \sqrt{\pi}.$$

Ved at tage realdelen på begge sider får vi sætningen. Det tilsvarende integral med sinus er selvfølgelig 0. Dermed er sætningen bevist.

Lad os også udregne Fresnel's integraler, som måske kan være nyttige i en bizar situation.



Sætning 5.6. $\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Bevis. Idet Γ er randen af den på figuren viste trekant, er $\int_\Gamma e^{-z^2}dz = 0$. Bidraget fra den lodrette side er

$$\int_0^a e^{-(a+iy)^2}idy = ia\int_0^1 e^{-a^2(1+it)^2}dt = ia\int_0^1 e^{-a^2(1-t^2)}e^{-2ia^2t}dt .$$

Her er det ikke nok at vise, at integralet går mod 0, da faktoren a foran integraltegnet må tages i betragtning. Vi vurderer

$$|a\, e^{-a^2(1-t^2)} e^{-2ia^2 t}| = e^{-a^2(1-t^2)+\log a}.$$

For $\varphi_t(a) = a^2(1-t^2) - \log a$ har vi $\varphi_t'(a) = 2a(1-t^2) - \frac{1}{a}$, og det er 0 for $a = \frac{1}{\sqrt{2(1-t^2)}}$, negativt for mindre værdier af a og positivt for større værdier af a, så vi får vurderingen

$$|a\, e^{-a^2(1-t^2)} e^{-2ia^2 t}| \leq e^{-\frac{1}{2(1-t^2)}(1-t^2) + \log\frac{1}{\sqrt{2(1-t^2)}}} = \frac{1}{\sqrt{2e(1-t^2)}}.$$

Dette er integrabelt på $[0,1]$, og da integranden selv efter at a er sat indenfor tegnet går mod 0 for $a \to \infty$ for hver fast værdi af t på nær $t = 1$, giver sætning 5.3, at integralet langs den lodrette side går mod 0.

I grænsen bidrager siden på den reelle akse med $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, så vi får resultatet

$$\int_0^\infty e^{-(1+i)^2 t^2}(1+i)t\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Vi dividerer med $1+i$ og reducerer lidt

$$\int_0^\infty (\cos 2t^2 - i \sin 2t^2)dt = \frac{1}{4}(1-i)\sqrt{\pi}.$$

Vi splitter i real- og imaginærdel og får

$$\int_0^\infty \cos 2t^2 dt = \int_0^\infty \sin 2t^2 dt = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

Substitutionen $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ klarer resten. Dermed er sætningen bevist.

Vi tager denne særlige regnekunst op igen senere. De integraler, der kan udregnes ved brug af komplekse variable, kan ofte også beregnes ved hjælp af Fouriertransformationer o.l.

6. Cauchy's integralformel.

Vi viser først, at visse integraler definerer differentiable funktioner af komplekse variable, og dernæst viser vi, at sådanne funktioner altid kan udtrykkes ved sådanne integraler.

Sætning 6.1. Lad $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være stykkevis C^1, og lad $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ være stykkevis kontinuert. Vi skriver $O = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Så definerer

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z} \gamma'(t)dt$$

en vilkårligt ofte differentiabel funktion $f\colon O \to \mathbb{C}$, og dens n^{te} differentialkvotient er givet ved

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(\gamma(t)-z)^{n+1}} \gamma'(t)dt .$$

Bevis. Det er nok at vise sætningen for integralet over hvert delinterval, hvor γ' og φ er kontinuert, så vi kan tillade os at antage, at γ' og φ er kontinuerte på hele $[a,b]$. Så er integranden i udtrykket for $f^{(n)}$ kontinuert for

$z \in O$, $t \in [a,b]$, og en kendt sætning fra første års matematik fortæller os, at $f^{(n)}$ defineret ved dette udtryk, bliver kontinuert i O for alle n, specielt også $f = f^{(0)}$.

Lad nu Γ_1 repræsenteret ved $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to O$ være en stykkevis differentiabel vej. For $n \geqq 1$ har vi da

$$\int_{\Gamma_1} f^{(n)}(z)\,dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_a^b \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-\gamma_1(u))^{n+1}}\,dt \right) \gamma_1'(u)\,du ,$$

og her kan integrationerne byttes, så vi får

$$\int_{\Gamma_1} f^{(n)}(z)\,dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_a^b \varphi(t)\gamma'(t) \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\gamma_1'(u)\,du}{(\gamma(t)-\gamma_1(u))^{n+1}} \right) dt =$$

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-\gamma_1(b_1))^n}\,dt - \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-\gamma_1(a_1))^n}\,dt =$$

$$f^{(n-1)}(\gamma_1(b_1)) - f^{(n-1)}(\gamma_1(a_1)) .$$

Vi ser, at integralet af $f^{(n)}$ er uafhængigt af vejen, så sætning 15 fortæller os, at $f^{(n)}$ har en stamfunktion. Sammenligning med sætning 10 giver dernæst, at $f^{(n-1)}$ er en stamfunktion til $f^{(n)}$, idet en stamfunktion er bestemt på nær addition af en konstant. Da $f = f^{(0)}$, er sætningen dermed bevist.

Vi har ikke forbudt, at banen for γ krydser sig selv, så mængden O kan have mange komponenter.

Eksempel. For $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$ og $\varphi(\theta) = \cos\theta$ får vi specielt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Theta}{e^{i\Theta}-z}\, ie^{i\Theta}d\Theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\Theta}+1}{e^{i\Theta}-z}\, d\Theta =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{i\Theta} + \frac{ze^{i\Theta}+1}{e^{i\Theta}-z}\right)d\Theta = \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{ze^{i\Theta}+1}{e^{i\Theta}(e^{i\Theta}-z)}\, ie^{i\Theta}d\Theta.$$

Dette er værdien af integralet

$$f(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{zw+1}{w(w-z)}\, dw,$$

hvor Γ er enhedscirklen. Ved dekomposition får vi

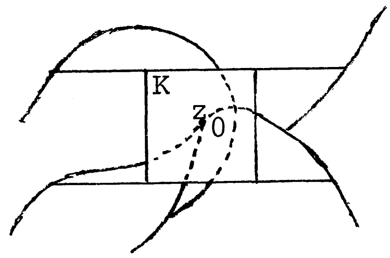
$$f(z) = \frac{1}{4\pi i}\cdot\frac{z^2+1}{z}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} - \frac{1}{4\pi i}\cdot\frac{1}{z}\cdot\int_\Gamma \frac{dw}{w}\, .$$

Vi ved, at $\int\frac{dw}{w} = 2\pi i$, og det samme gælder for $\int\frac{dw}{w-z}$, hvis $|z| < 1$, medens dette integral bliver 0 ifølge Cauchy's integralsætning, hvis $|z| > 1$. Altså er

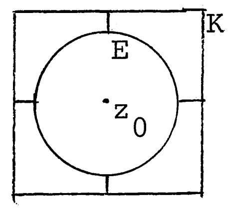
$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, z & \text{for } |z| < 1 \\ -\frac{1}{2z} & \text{for } |z| > 1. \end{cases}$$

<u>Sætning 6.2.</u> Lad Ω være et Gauss-område og $z_0 \in \Omega$ et vilkårligt punkt. Lad $E \subset \Omega$ være en afsluttet cirkelskive med centrum z_0. Hvis E er lille nok, er $\Omega \setminus E$ et Gauss-område.

Bevis. En akseparallel ret linie, der skærer gennem et elementarområde, vil åbenbart dele dette i 2 elementarområder. Der findes et akseparallelt kvadrat $K \subset \Omega$ med centrum z_0.



Vi tænker os, at der foreligger en inddeling af Ω i elementarområder. Vi forlænger de vandrette sider i K, til de møder randen af Ω eller en delelinie. Så vil disse kvadratsider med deres forlængelser blot gøre inddelingen finere, og de 2 lodrette kvadratsider vil yderligere forfine inddelingen. Vi gør nu denne lidt grovere igen, idet vi udelader alle delelinier i det indre af K, idet K er et elementarområde. Dernæst vælger vi $E \subset K$ og inddeler $K \setminus E$ i 4 elementarområder som vist på figuren. Så har vi fået $\Omega \setminus E$ delt i elementarområder, og dernæst er sætningen bevist.



Denne hjælpesætning bruges i beviset for vor næste sætning, der handler om Cauchy's integralformel, et vigtigt resultat, der viser, at en C^1-funktion af en kompleks variabel i et område Ω med kompakt afslutning kan beregnes, hvis man blot kender den på randen af Ω.

<u>Sætning</u> 6.3. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ differentiabel med kontinuert differentialkvotient. Lad Ω med orienteret rand Γ være et Gauss-område indeholdt i O. For $z \in \Omega$ har vi da Cauchy's integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ .$$

Bevis. Lad $z \in \mathbb{C}$ være et fast punkt og $E \subset \Omega$ en afsluttet cirkelskive med centrum z og radius r lille nok, til at $\Omega \setminus E$ er et Gauss-område. Hvis Γ_1 er randen af E vil randen af $\Omega \setminus E$ bestå af Γ, samt Γ_1 med modsat orientering, og da $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ er en C^1-funktion i $\Omega \setminus E$, giver Cauchy's integralsætning, at

$$(1) \qquad \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \; .$$

For Γ_1 har vi parameterfremstillingen $\zeta = z + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, altså $d\zeta = ire^{i\theta} d\theta$, så det sidste integral bliver

$$\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, i d\theta \; .$$

Af (1) følger, at dette er uafhængigt af r, når r blot er lille nok. Dets værdi er derfor lig med grænseværdien for $r \to 0$, altså $2\pi i f(z)$, og dermed er sætningen bevist.

Vi har umiddelbart et interessant korollar.

<u>Sætning 6.4</u>. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og lad $f\colon O \to \mathbb{C}$ være C^1. Da er f vilkårligt ofte differentiabel.

Bevis. Et vilkårligt punkt $z_0 \in O$ er centrum for en afsluttet cirkelskive $E \subset O$ med rand Γ_1 og da E er et Gauss-område giver sætning 6.3 for $z \in \overset{\circ}{E}$

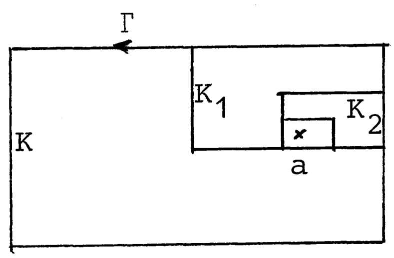
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \; ,$$

og det følger af sætning 6.1, at f er vilkårlig ofte differentiabel i $\overset{\circ}{E}$. Dermed er sætningen bevist.

I begyndelsen af vort århundrede rundede Goursat teorien af ved at vise, at kravet om kontinuitet af differentialkvotienten i sætning 6.4 er overflødigt. Vi gengiver hans bevis, som ikke er særligt svært.

Sætning 6.5. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ differentiabel. Da er f vilkårligt ofte differentiabel.

Bevis. Det er nok at vise, at f er vilkårligt ofte differentiabel i det indre af ethvert rektangel, som er indeholdt i O.



Lad $K \subseteq O$ være et afsluttet rektangel med rand Γ, og lad $2L$ være længden af Γ. Vi deler K i 4 ens rektangler, og blandt disse vælger vi K_1 med rand Γ_1, så $|\int_{\Gamma_1} f(z)dz|$ bliver størst (flere blandt de 4 kan stå lige, og det gør de jo faktisk, hvis sætningen er rigtig - idet de alle er 0). Vi deler K_1 i 4 ens dele og vælger blandt disse K_2 med rand Γ_2, så $|\int_{\Gamma_2} f(z)dz|$ bliver størst mulig. Vi fortsætter processen og får en følge $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$ af rektangler. De har et fælles punkt a. Idet Γ_n er randen af K_n, har vi vurderingen

$$|\int_{\Gamma} f(z)dz| \leqq 4|\int_{\Gamma_1} f(z)dz| \leqq 4^2|\int_{\Gamma_2} f(z)dz| \leqq \dots \leqq 4^n|\int_{\Gamma_n} f(z)dz| .$$

Da f er differentiabel i a, har vi

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a) ,$$

hvor $\alpha(z) \to 0$ for $z \to a$. Nu er $f(a) + f'(a)(z-a)$ et polynomium, som har en stamfunktion, f.eks. $f(a)(z-a) + \frac{1}{2}f'(a)(z-a)^2$, så $\int_{\Gamma_n}(f(a)+f'(a)(z-a))dz = 0$ for alle n. For $n \in \mathbb{N}$ har vi derfor

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leqq 4^n \left|\int_{\Gamma_n} \alpha(z)(z-a)dz\right| .$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan da vælge $n \in \mathbb{N}$, så $|\alpha(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2L^2}$ for alle $z \in K_n$. Længden af Γ_n er $2L\cdot 2^{-n}$, og for $z \in \Gamma_n$ er $|z-a| \leqq L\cdot 2^{-n}$, så vi ender med vurderingen

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \leqq 4^n\cdot 2L\cdot 2^{-n}\cdot\frac{\varepsilon}{2L^2}\cdot L\cdot 2^{-n} = \varepsilon .$$

Vi har dermed bevist, at $\int_\Gamma f(z)dz = 0$, når Γ er randen af et vilkårligt afsluttet rektangel i O, og sætning 3.6 giver, at f har en stamfunktion i ethvert S-område, der er indeholdt i O, altså i hvert fald i en omegn af ethvert punkt af O. Men en stamfunktion til f har den kontinuerte differentialkvotient f, så sætning 6.4 giver, at stamfunktionen, og dermed f, er vilkårligt ofte differentiabel. Dermed er sætningen bevist.

For en funktion $f: O \to \mathbb{C}$, hvor $O \subseteq \mathbb{C}$ er åben, kommer det således ud på et, om vi antager, at f er differentiabel, C^1 eller vilkårligt ofte differentiabel.

Fra nu af vil vi foretrække at bruge betegnelsen holomorf om en sådan funktion. Lejlighedsvis vil vi bruge ordet analytisk, som skal betyde ganske det samme som holomorf. I ældre litteratur møder man "regulær" med samme betydning. Det tyske ord "schlicht" anvendes endnu i betydningen "injektiv og holomorf" - det har også været brugt i engelsk.

Cauchy's integralsætning giver direkte oplysning om et integrals værdi, og man får reelle integraler ved at bruge en parameterfremstilling og splitte i real- og imaginærdel. Det er desværre ikke nemt at arbejde målrettet med denne metode.

Eksempel. Funktionen $\frac{1}{2-z}$ er holomorf for $z \neq 2$, og hvis Γ er enhedscirklen, giver Cauchy's integralformel for punktet $\frac{1}{2}$, at

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(2-z)(2z-1)} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi i \ .$$

Den sædvanlige parameterfremstilling giver

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(2-z)(2z-1)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{(2-e^{i\theta})(2e^{i\theta}-1)} = i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2-e^{i\theta})(2-e^{-i\theta})} = i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta},$$

så vi har fundet formlen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = \frac{2}{3}\pi \ .$$

Det kunne godt regnes ud ved elementære metoder.

Eksempel. Cauchy's integralformel for enhedscirklen og 0 giver

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i \ .$$

Ved indsættelse af den sædvanlige parameterfremstilling, får vi

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}(\cos\sin\theta + i\sin\sin\theta)\,d\theta = 2\pi,$$

og det spaltes i

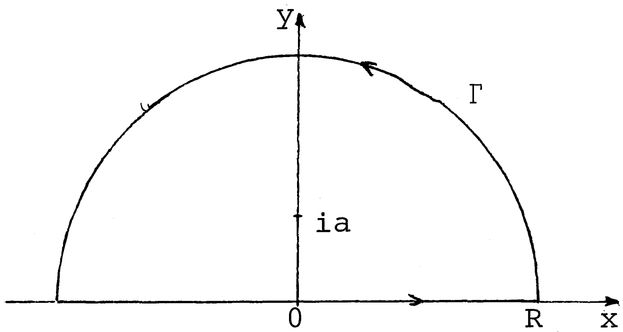
$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\sin\theta\, d\theta = 2\pi \ , \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin\sin\theta\, d\theta = 0.$$

Den sidste formel er triviel, idet substitutionen $\theta = 2\pi - t$ viser, at værdien forbliver uændret ved fortegnsskift. Det er ikke let at se, om den første formel kan fås ved elementære metoder.

Vi kan få en mere målrettet metode ved at kombinere anvendelsen af Cauchy's integralformel med en grænseovergang, som i vore anvendelser af Cauchy's integralsætning. Det bliver dog kun til et specielt tilfælde af den såkaldte residueregning, som vi vil indføre senere. Her ser vi på et enkelt eksempel.

Eksempel. Vi vil udregne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^2+a^2}dx$. Lighedstegnet gælder, da $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{x^2+a^2}dx = 0$, fordi integranden er en ulige funktion. Bortset fra en konstant faktor, er det den karakteristiske funktion for en sandsynlighedsfordeling, vi regner ud.

Funktionen $\frac{e^{iuz}}{z+ia}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{-ia\}$, og Cauchy's integralformel anvendt for den tegnede halvcirkel og punktet ia giver derfor



$$\int_\Gamma \frac{e^{iuz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-au}}{2ia} = \frac{\pi}{a}\, e^{-au}\,.$$

For $u > 0$ er $e^{iuz} = e^{iu(x+iy)} = e^{-uy+iux}$ numerisk $\leqq 1$ i den øvre halvplan, så integranden er numerisk $\leqq \frac{1}{R^2-a^2}$ på halvcirklen. Bidraget fra halvcirklen bliver således vurderet ved $\frac{\pi R}{R^2-a^2}$, som går mod 0 for $R \to \infty$, så vi kan slutte, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-au}$$

for $u > 0$ og $a > 0$. For $a > 0$ og $u \in \mathbb{R}$ får vi generelt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ux}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|u|}\,.$$

7. Funktionsfølger og beslægtede emner.

Før vi går i gang viser vi en omvendt sætning til Cauchy's integralsætning. Den kaldes Morera's sætning.

<u>Sætning 7.1</u>. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ kontinuert. Hvis hvert punkt af O har en omegn U, så det for hvert afsluttet rektangel i U gælder, at integralet af f langs randen af rektanglet er 0, da er f holomorf i O.

Bevis. Omegnen U kan åbenbart vælges som et S-område. Så giver sætning 3.13, at f har en stamfunktion F_U på hvert U, og dernæst giver sætning 6.5, at F_U og dermed f er vilkårligt ofte differentiabel på U, altså holomorf. Dermed er sætningen bevist.

Et fornuftigt konvergensbegreb for funktioner, som er holomorfe på en åben mængde O, er ligelig konvergens på enhver kompakt delmængde af O. For en følge (f_n) af holomorfe funktioner $f_n: O \to \mathbb{C}$ betyder det, at der findes en grænsefunktion $f: O \to \mathbb{C}$, således at der til ethvert $\varepsilon > 0$ og enhver kompakt mængde $K \subset O$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at $|f(z)-f_n(z)| \leqq z$ for alle $n \geqq N$ og alle $z \in K$.

Fra første års matematikkurser ved vi, at dette sikrer, at grænsefunktionen f bliver kontinuert på enhver kompakt mængde $K \subset O$ og dermed på O. Vi ønsker en hel del mere, og det får vi med den næste sætning.

<u>Sætning 7.2</u>. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og (f_n) en følge af holomorfe funktioner $f_n: O \to \mathbb{C}$ ligelig konvergent på enhver kompakt delmængde af O mod en funktion $f: O \to \mathbb{C}$. Da er f holomorf, og for

hvert $q \in \mathbb{N}$ vil følgen $(f_n^{(q)})$ af q^{te} differentialkvotienter konvergere mod $f^{(q)}$ ligeligt på enhver kompakt delmængde af O.

Bevis. Lad $K \subset O$ være et afsluttet rektangel med rand Γ. Ifølge Cauchy's integralsætning er $\int_\Gamma f_n(z)dz = 0$ for hvert n. Men da $(f_n) \to f$ ligeligt på Γ, er også $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Dette vises således: For $\varepsilon > 0$ findes $n \in \mathbb{N}$, så $|f(z)-f_n(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{L}$ for alle $z \in \Gamma$, idet L er længden af Γ. Derfor er

$$|\int_\Gamma f(z)dz - \int_\Gamma f_n(z)dz| \leqq |\int_\Gamma (f(z)-f_n(z))dz| \leqq L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon .$$

Altså er $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqq \varepsilon$, og da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, er $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Da dette gælder for ethvert rektangel $K \subset O$, er betingelsen i sætning 7.1 rigeligt opfyldt, og vi får, at f er holomorf.

Lad nu $K \subset O$ være en vilkårlig kompakt mængde. Så har K positiv (uendelig, hvis $O = \mathbb{C}$) afstand til $\mathbb{C} \setminus O$. Vi vælger $r > 0$ under halvdelen af denne afstand (vilkårligt, hvis $O = \mathbb{C}$). Med K_r betegner vi mængden af punkter med afstand $\leqq r$ fra K. Så er K_r begrænset og afsluttet, altså kompakt, og $K_r \subseteqq O$. Lad ε være et positivt tal og q et naturligt tal. Vi vælger $N \in \mathbb{N}$, således at $|f(z)-f_n(z)| \leqq \frac{1}{q!} r^q \varepsilon$ for alle $n \geqq N$ og alle $z \in K_r$. For $z \in K$ betegner vi med Γ cirklen med centrum z og radius r. Ifølge sætning 6.3 og sætning 6.1 er

$$f^{(q)}(z) = \frac{q!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{q+1}}d\zeta \quad ; \quad f_n^{(q)}(z) = \frac{q!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{q+1}}d\zeta ,$$

så vi får

$$|f^{(q)}(z) - f_n^{(q)}(z)| = \frac{q!}{2\pi}|\int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{q+1}}d\zeta| .$$

Her er $|f(\zeta)-f_n(\zeta)| \leqq \frac{1}{q!} r^q \varepsilon$ og $|\zeta - z| = r$, så vi får vurderingen

$$|f^{(q)}(z)-f_n^{(q)}(z)| \leqq \frac{q!}{2\pi} \cdot 2\, r\, \frac{1}{q!} r^q \varepsilon \cdot \frac{1}{r^{q+1}} = \varepsilon .$$

Dermed har vi vist, at $(f_n^{(q)}) \to f^q$ ligeligt på K, og dermed er sætningen bevist.

Sætningen kan selvfølgelig umiddelbart oversættes til en sætning om uendelige rækker, og det er i den form, den mest bruges. At en uendelig række konvergerer ligeligt betyder selvfølgelig, at dens afsnitsfølge gør det.

Sætning 7.3. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og (f_n) en følge af holomorfe funktioner $f_n\colon O \to \mathbb{C}$, og lad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$, idet rækken konvergerer ligeligt på enhver kompakt delmængde af O. Da er f holomorf og $f^{(q)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(q)}(z)$, hvor rækken konvergerer ligeligt på enhver kompakt delmængde af K. Hvis Γ er en stykkevis differentiabel vej i O, er $\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz$.

Bevis. Det er altsammen helt oplagt.

Ligelig konvergens på kompakte mængder kan for det meste vises ved hjælp af Weierstrass' sætning om majoriseret konvergens. Den er behandlet i første års undervisning, og den følger umiddelbart af det almindelige konvergensprincip. Her nøjes vi med at citere den uden bevis.

Sætning 7.4. Lad (f_n) være en følge af funktioner $f_n\colon K \to \mathbb{C}$, hvor K er en vilkårlig mængde. Lad (A_n) være en følge af tal

$A_n \geqq 0$, for hvilken rækken $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ er konvergent. Hvis $|f_n(x)| \leqq A_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $x \in K$, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ligelig konvergent på K.

Vi kalder $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ en majorantrække for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Vi får selvfølgelig den gunstigste majorantrække ved at vælge $A_n = \sup\{|f_n(x)|\,|\,x \in K\}$, men en mindre gunstig klarer ofte sagen med mindre regnearbejde.

Eksempel. Lad O være halvplanen $\{z = x+iy \in \mathbb{C}\,|\,x > 1,\ y \in \mathbb{R}\}$. Da definerer $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ en holomorf funktion $\zeta\colon O \to \mathbb{C}$. Her er $\frac{1}{n^z} = e^{-z\log n} = n^{-x}(\cos y\log n + i\sin y\log n)$ med den reelle logaritme. Altså er $|\frac{1}{n^z}| = \frac{1}{n^x}$ og for $x_0 > 1$ er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ en konvergent majorantrække for $\Sigma\frac{1}{n^z}$ i den ved $x \geqq x_0$ bestemte halvplan. Da enhver kompakt delmængde af O er indeholdt i en sådan halvplan, giver sætning 7.3, at $\zeta\colon O \to \mathbb{C}$ er holomorf.

At $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ er konvergent for $x_0 > 1$ følger af integralkriteriet.

Det er muligt at give bedre definition af ζ, så den bliver holomorf på hele $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Den kaldes Riemann's ζ-funktion, og den er berømt for velkendte anvendelser i talteori.

Beslægtet med sætningerne om følger og rækker er den følgende sætning, der handler om integration af en holomorf funktion med hensyn til en parameter.

<u>Sætning 7.5</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og lad $f\colon O\times[a,b] \to \mathbb{C}$ være en kontinuert afbildning. For hvert $t \in [a,b]$ antages det, at den ved $f_t(z) = f(z,t)$ definerede funktion $f_t\colon O \to \mathbb{C}$ er holomorf. Så

er den ved $g(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ definerede funktion $f: O \to \mathbb{C}$ holomorf, og $g^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t)dt$.

Bevis. Hvis Γ er en vej i O repræsenteret ved en C^1-afbildning $\gamma: [a_1,b_1] \to O$, er

$$\int_\Gamma g(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} g(\gamma(u))\gamma'(u)du = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_a^b f(\gamma(u),t)dt\right)\gamma'(u)du =$$
$$\int_a^b\left(\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(u),t)\gamma'(u)du\right)dt = \int_a^b\left(\int_\Gamma f(z,t)dz\right)dt.$$

Dette vil selvfølgelig også være rigtigt, hvis blot Γ er stykkevis C^1. Hvis Γ er rand af et afsluttet rektangel i O, giver Cauchy's integralsætning, at $\int_\Gamma f(z,t)dz = 0$ for hvert $t \in [a,b]$, så vi får $\int_\Gamma g(z)dz = 0$, og Morera's sætning fortæller så, at g er holomorf.

For $z \in O$ kan vi vælge Γ som rand af en afsluttet cirkelskive i O med centrum z, og idet vi anvender sætningerne 6.3 og 6.1 kombineret med den ovenfor viste ombyttelighed af integraler anvendt på en anden funktion, får vi

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\int_a^b \frac{f(\zeta,t)dt}{(\zeta-z)^{n+1}}\right)d\zeta =$$
$$\int_a^b\left(\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta,t)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\right)dt = \int_a^b \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,t)dt .$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Ved $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ defineres en holomorf funktion i den højre halvplan. Det følger nemlig umiddelbart af sætning 7.5, at $\Gamma_{p,q}(z) = \int_{\frac{1}{p}}^q e^{-t}t^{z-1}dt$, hvor $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$, og $p,q \in \mathbb{N}$, er holomorf i hele $\mathbb{C}$. For $\operatorname{Re} z \leqq a$ er $|t^{z-1}| \leqq t^{|a|-1}$, og for $q_1 > q$ får vi

$$\left|\int_q^{q_1} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leqq \int_q^{q_1} e^{-t}t^{|a|-1}dt \leqq \int_q^{\infty} e^{-t}t^{|a|-1}dt \ .$$

Når q overstiger en kun af a afhængig værdi, er $e^{-t}t^{|a|-1} \leqq e^{-\frac{t}{2}}$, så vi får

$$\left|\int_q^{q_1} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leqq \int_q^{\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt = 2e^{-\frac{q}{2}} \ .$$

Dette viser, at $\Gamma_{p,q}(z)$ for fast p, og $q \to \infty$ går ligeligt for $\text{Re}z \leqq a$ mod grænsefunktionen $\Gamma_p(z) = \int_{\frac{1}{p}}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$. For $\text{Re}z \geqq b > 0$ og $p_1 > p$ får vi

$$\left|\int_{\frac{1}{p_1}}^{\frac{1}{p}} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leqq \int_{\frac{1}{p_1}}^{\frac{1}{p}} t^{b-1}dt = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{p^b} - \frac{1}{p_1^b}\right) \leqq \frac{1}{bp^b} \ ;$$

hvilket viser, at Γ_p konvergerer ligeligt med Γ for $\text{Re}z \geqq b > 0$. Altså er Γ holomorf i højre halvplan.

Ved delt integration får vi Γ-funktionens funktionalligning

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \left[-e^{-t}t^{z-1}\right]_{t=0}^{\infty} + (z-1)\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-2}dt = (z-1)\Gamma(z-1).$$

Ved gentagen anvendelse heraf får vi

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) = \dots = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}\Gamma(z+n+1).$$

Denne relation gælder for $\text{Re}z > 0$, men den kan åbenbart bruges til at udvide Γ-funktionens definition til mere omfattende halvplaner, idet det sidste udtryk definerer en funktion, der bortset fra punkterne $0, -1, \dots, -n$ er holomorf for $\text{Re}z > -n-1$. Alt i alt er Γ holomorf i hele $\mathbb{C}$ på nær i 0 og i de negative hele tal.

For $z = x+iy$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ har vi vurderingen

$$|\Gamma(z)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leqq \int_0^{\infty} e^{-t}|t^{z-1}|dt = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

Det fremgår af vore sætninger, at Γ kan differentieres ved differentiation under integraltegnet, så vi får for $\operatorname{Re} z > 0$, at

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}(\log t)^n t^{z-1}\,dt \,.$$

8. Potensrækker.

Potensrækker er velkendte fra første års undervisning. Det drejer sig om rækker $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, hvor c, samt koefficienterne a_n, $n = 0,1,\ldots$ er komplekse tal. Vi repeterer hovedsætningen om konvergens af potensrækker.

<u>Sætning 8.1</u>. Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ være en potensrække. Vi definerer

$$M = \{\rho \in [0,\infty[\,\mid \sup\{|a_n|\rho^n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty\}; \quad R = \sup M.$$

Potensrækken er divergent for $|z-c| > R$ og absolut konvergent for $|z-c| < R$. Den er ligelig konvergent på enhver kompakt mængde K, som er indeholdt i den åbne cirkelskive med centrum og radius R. Denne cirkelskive kaldes potensrækkens konvergenscirkel og R dens konvergensradius. Eventuelt er $R = 0$ og konvergenscirklen tom eller $R = \infty$ og konvergenscirklen hele $\mathbb{C}$. For $z = c$ er potensrækken altid konvergent.

Bevis. Hvis $|z-c| > R$, går $(a_n(z-c)^n)$ ikke mod 0 for $n \to \infty$, så rækken må divergere. Hvis $|z-c| < R$, kan vi vælge $\rho \in \,]|z-c|,R[$, så der findes et tal $A \in \,]0,\infty[$, for hvilket $|a_n|\rho^n \leqq A$ for alle n. Så er $|a_n(z-c)^n| \leqq A\left(\frac{|z-c|}{\rho}\right)^n$, og da $\sum_{n=0}^{\infty} A\left(\frac{|z-c|}{\rho}\right)^n$ er en konvergent kvotientrække, er $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-c)^n|$ konvergent, altså potensrækken absolut konvergent.

Når K er en kompakt delmængde af konvergenscirklen, er $\sup\{|z-c| \mid z \in K\} = r < R$, og den konvergente række $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ bliver en majorantrække for potensrækken på K, så potensrækken konvergerer ligeligt på K. Dermed er sætningen bevist.

På konvergenscirklens rand er potensrækken enten overalt absolut konvergent eller intetsteds absolut konvergent, men så betinget konvergent på en delmængde af randen. Denne kan være tom eller hele randen eller en mellemting. Problemerne omkring disse forhold er interessante, og der foreligger mange resultater, men hele emnekredsen falder udenfor rammen af dette kursus.

Eksempler. $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ konvergerer kun for $z = 0$, medens $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergerer i hele $\mathbb{C}$. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ har for alle $p \in \mathbb{R}$ konvergensradius 1. For $p > 1$ er den absolut og ligelig konvergent i hele den afsluttede enhedscirkelskive. For $p \leq 0$ er den divergent overalt på randen. For $p \in]0,1]$ er den konvergent i -1 og divergent i 1, og det kan vises, at den er konvergent i de øvrige punkter af randen.

<u>Sætning 8.2.</u> Summen af en potensrække er en i konvergenscirklens indre holomorf funktion.

Bevis. De enkelte led er holomorfe, så det følger af sætning 8.1.

Sætning 8.3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ holomorf. For $c \in O$ findes der da 1 og kun 1 følge $(a_n | n = 0,1,\dots)$ af komplekse tal, for hvilken potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ konvergerer i en omegn U af c og i hvert $z \in U$ har sum $f(z)$. Den vil så være konvergent med sum $f(z)$ i enhver åben cirkelskive med centrum c og indeholdt i O. Hvis Γ er rand af en afsluttet cirkelskive med centrum c og indeholdt i O, og Γ er orienteret mod uret, er

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} .$$

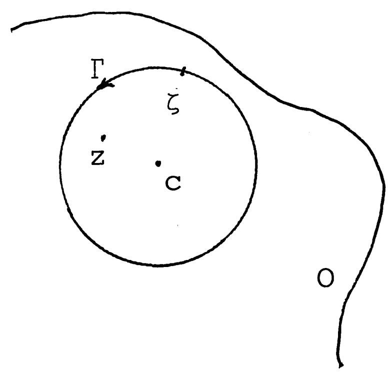
Bevis. Hvis potensrækken konvergerer med sum $f(z)$ i en omegn U af c, er den ligelig konvergent i en vis kompakt omegn af c ifølge sætning 8.1, og sætning 7.3 giver

$$f^{(n)}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(q+n)!}{q!} a_{n+q}(z-c)^q \ ; \qquad f^{(n)}(c) = n! a_q .$$

Dette viser, at hvis f overhovedet kan skrives som sum af en potensrække i en omegn af c, er dennes koefficienter givet ved det sidste af de i sætningen anførte udtryk. Det viser entydigheden.

Lad nu Γ være rand for en åben cirkelskive U med centrum c og med $U \cup \Gamma \subset O$. For $z \in U$ giver Cauchy's integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} .$$



For $\zeta \in \Gamma$, $z \in U$ er $|z-c| < |\zeta - c|$, så vi har en konvergent kvotientrække

$$\frac{1}{\zeta-c} + \frac{z-c}{(\zeta-c)^2} + \frac{(z-c)^2}{(\zeta-c)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{\zeta-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}} = \frac{1}{\zeta-z} .$$

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}$, er for fast z ligelig konvergent i $O\setminus E$, hvor E er afsluttet cirkelskive i U og med z i sit indre. Så kan rækken integreres ledvis ifølge sætning 7.3, og hvis vi definerer

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c)^{n+1}},$$

får vi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n .$$

Da Γ blot var rand af en vilkårlig afsluttet cirkelskive i O med centrum c, har vi hermed bevist, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ har sum $f(z)$ i hvert punkt af den største åbne cirkelskive med centrum c og indeholdt i O. Af sætning 8.1 følger nu, at denne maksimale åbne cirkelskive er indeholdt i potensrækkens konvergenscirkel. Den allerede viste entydighed sikrer, at de 2 udtryk for koefficienterne er identiske, men det følger også af sætning 6.1. Dermed er sætningen bevist.

Potensrækkeudviklingen er identisk med Taylorrækken, som vi kender den fra reelle variable, men i komplekse variable er den automatisk konvergent.

Regneregler for potensrækker er behandlede i første års kursus, og vi vil nøjes med en kort repetition. Af

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$$

følger

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-c)^n.$$

Konvergenscirklen for summen bliver den mindste af konvergenscirklerne for de oprindelige rækker, dog eventuelt større, hvis de har samme konvergensradius. Endvidere er

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z-c)^n \; ; \quad A_n = a_0b_n+\ldots+a_nb_0 \; .$$

Konvergenscirklen bliver mindst så stor som den mindste af de to oprindelige, men ofte større. Hvis $a_0 \neq 0$ har vi også en potensrække

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z-c)^n \; ,$$

hvor koefficienterne B_n fås rekursivt af ligningerne

$$a_0B_0 = 1$$

$$a_0B_1 + a_1B_0 = 0$$

$$a_0B_2 + a_1B_1 + a_2B_0 = 0$$

$$- - -$$

Desuden kan nye rækker fås ved ledvis integration og division.

Da e^z er holomorf i hele $\mathbb{C}$, er rækkeudviklingen $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergent i hele $\mathbb{C}$. Af $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ og $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$ fås rækkeudviklingerne $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ og $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, som er konvergente i hele $\mathbb{C}$.

Funktionen $\frac{1}{1-z}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, og rækkeudviklingen $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gælder for $|z| < 1$. Ved ledvis differentiation fås $\frac{q!}{(1-z)^{q+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+q)!}{n!} z^n$. altså $\frac{1}{(1-z)^{q+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q}{q} z^n$ konvergent for $|z| < 1$. I den ved $\mathrm{Re}\, z < 1$ bestemte halvplan har $\frac{1}{1-z}$ hovedværdien $-\mathrm{Log}(1-z)$ som stamfunktion, og ved at erstatte z med $-z$ får vi logaritmerækken $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, konvergent for $|z| < 1$. I halvplanen $\mathrm{Re}z > -1$ har $(1+z)^\alpha$ en hovedværdi $e^{\alpha \mathrm{Log}(1+z)}$, som er holomorf, så dens Taylorrække i 0 konvergerer for $|z| < 1$. Da dens n^{te} differentialkvotient i 0 er $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$, får vi binomialrækken $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, hvor $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$. Her er α et vilkårligt komplekst tal. For $\alpha \in \mathbb{N}$ er $(1+z)^\alpha$ holomorf i $\mathbb{C}$, nemlig et polynomium, og binomialrækken degenererer til den elementære binomialformel.

Funktionen $\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{(2p+1)\frac{\pi}{2} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. En eventuel omvendt funktion fås ved at bestemme w af ligningen

$$\mathrm{tg}w = \frac{1}{i}\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} = z,$$

og den er helt ensbetydende med

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz},$$

så vi får en hovedværdi

$$w = \mathrm{Arctg}z = \frac{1}{2i}(\mathrm{Log}(1+iz)-\mathrm{Log}(1-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Funktionen er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{iy \mid |y| \geq 1\}$. Ubehagelighederne i $\pm i$ er således årsag til, at rækkeudviklingen for Arctgz kun konvergerer for $|z| < 1$, selv om Arctg er analytisk i et område, der indeholder hele $\mathbb{R}$.

Vi understreger hovedresultatet: De holomorfe funktioner på en åben mængde $O \subseteq \mathbb{C}$ er netop de funktioner, der i en omegn af ethvert punkt af O har en konvergent potensrækkeudvikling.

Det var egentlig en udmærket mulighed at definere holomorfe funktioner ved denne egenskab, og det gjorde Weierstrass, fordi han derved bedre kunne opfylde tidens strengere krav til analysens grundlag. Man taler stadig om Weierstrass'sk funktionsteori, når fremstillingen i det væsentlige er baseret på potensrækker. De fleste tekster bruger en mere geometrisk fremstilling, som også vi har gjort det, og så taler man om Riemann'sk funktionsteori. En interessant ældre håndbog af Hurwitz og Courant stiller de to synspunkter skarpt op mod hinanden. Mange tekster bruger "holomorf" om det Riemann'ske begreb og "analytisk" om det Weierstrass'ske, men de når alle dertil, hvor vi er nu, og så kan det jo være lige meget.

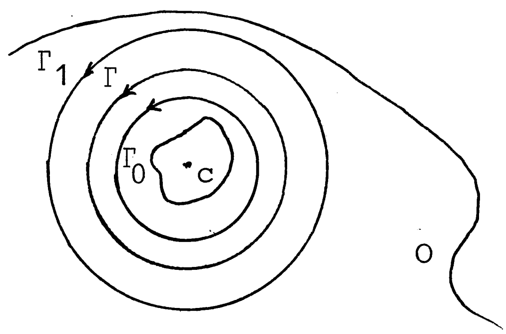
Mens vi alligevel er i gang med rækkeudviklingen, viser vi den vigtige sætning om udvikling i Laurentrække.

<u>Sætning 8.4</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f\colon O \to \mathbb{C}$ holomorf og $c \in \mathbb{C}$ et punkt, for hvilket der findes en ring $\{z \in \mathbb{C} \mid R_0 \leq |z-c| \leq R_1\}$, som er indeholdt i O. Der findes da 1 og kun 1 følge $(a_n \mid n \in \mathbb{Z})$ af komplekse tal, for hvilken rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ konvergerer i ringen, og for hvert z i ringen har sum $f(z)$. Hvis Γ er en cirkel med centrum c og indeholdt i ringen, gælder relationen

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}} .$$

Rækkeudviklingen kaldes Laurentrækken.

Bevis. Lad Γ_0 og Γ_1 være cirklerne med centrum c og radius R_0 og R_1 orienterede mod uret. Så består cirkelringens rand af Γ_0 med modsat gennemløb, samt Γ_1, og for z i ringens indre giver Cauchy's in-



tegralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta .$$

For $\zeta \in \Gamma_1$ er $|\zeta-c| > |z-c|$, og regningerne i beviset for sætning 8.3 kopieres uændret for det første integral, og de giver det samme resultat. I det andet integral er $|\zeta-c| < |z-c|$, og vi benytter den konvergente kvotientrække

$$\frac{1}{z-c} + \frac{\zeta-c}{(z-c)^2} + \frac{(\zeta-c)^2}{(z-c)^3} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} = \frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{\zeta-z} .$$

Vi multiplicerer med $f(\zeta)$ og integrerer, og derved får vi udviklingen af det andet integral. Det giver i alt den i sætningen omtalte rækkeudvikling, og med de angivne koefficienter, bortset fra, at vi har fået udtrykket med integrationsvej Γ_1 for $n \geq 0$ og Γ_0 for $n < 0$. Imidlertid giver Cauchy's integralsætning, at integralet er uafhængigt af Γ, når blot Γ er i ringen og omslutter c.

Entydigheden følger af, at vi for $f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ har

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-c)^{q+n}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_\Gamma (z-c)^{n-q-1}dz = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R^{n-q-1}\int_0^{2\pi} e^{i(n-q-1)\Theta}Re^{i\Theta}d\Theta =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^{n-q}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-q)\Theta}d\Theta = a_q .$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Ved $f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$ defineres en holomorf funktion $f: \mathbb{C}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{C}$. Sådanne funktioner rækkeudvikles lettest, efter at de er dekomponerede, så vi omskriver funktionen til

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} .$$

I cirkelskiven $|z| < 1$ får vi heraf rækkeudviklingen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n .$$

I cirkelringen $1 < |z| < 2$ får vi

$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} .$$

For $|z| > 2$ får vi

$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n .$$

Laurentrækken falder i en positiv del omfattende led med eksponenter $\geqq 0$, og summen af denne del af rækken er en funktion, som er holomorf indenfor ringens ydre rand. Laurentrækkens negative del omfatter led med index < 0, og deres sum er holomorf udenfor ringens indre rand.

9. Analytisk fortsættelse.

Vi får brug for et helt elementært begreb fra mængdeteoretisk topologi.

<u>Definition</u> 9.1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde. Ved en diskret delmængde af O forstås en mængde $A \subseteq O$, som har endelig fællesmængde med enhver kompakt delmængde af O.

Det vil følgelig være opfyldt, hvis og kun hvis hvert punkt af O har en omegn, der indeholder højst endelig mange punkter af A.

Her kan vi også sige "højst et" i stedet for endelig mange. Det er også helt ensbetydende med, at ingen følge af indbyrdes forskellige punkter af A konvergerer mod et punkt af O.

Eksempel. I den åbne enhedscirkelskive vil mængden af punkter $\frac{p_1+ip_2}{q}$, hvor $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, og $\frac{1}{q}$ er større end punktets afstand til enhedscirklen, være en diskret delmængde af cirkelskiven. En kompakt delmængde vil nemlig altid være indeholdt i cirkelskiven med radius $1-\frac{1}{n}$ for et $n \in \mathbb{N}$, og så kan den kun indeholde punkter med $q < n$, og da det også må gælde, at $|p_1| < q$ og $|p_2| < q$, bliver der kun endelig mange. På den anden side vil enhver omegn af et punkt på cirklens rand indeholde uendelig mange punkter af mængden.

<u>Sætning</u> 9.2. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være et område (sammenhængende, åben mængde), og lad $f\colon O \to \mathbb{C}$ være holomorf. Så er $f^{-1}(0)$ enten hele O (altså f nulfunktionen) eller en diskret delmængde af O.

Bevis. Lad $c \in O$ være et vilkårligt punkt. Hvis $f(c) \neq 0$, er $f(z)$ på grund af kontinuiteten $\neq 0$ for alle z i en vis omegn af c. Hvis $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{n}(c) = \ldots = 0$, har potensrækken $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ alle sine koefficienter 0, og vi har $f(z) = 0$ for alle z i en omegn af c. Hvis ingen af disse muligheder indtræffer, har potensrækken en første koefficient $a_p \neq 0$, og så er $f(z) = (z-c)^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p+n}(z-c)^n = (z-c)^p g(z)$, hvor g er holomorf og $g(c) \neq 0$. Altså har c i dette tilfælde en omegn, i hvilken c er det eneste nulpunkt.

Heraf følger, at mængden af punkter $c \in O$ med $f(c) = f'(c) = f''(c) = \cdots = 0$ er åben, men også at resten af O er åben, og da O er sammenhængende, er den ene af mængderne tom.

Altså er f identisk 0 i O eller hvert punkt af O har en omegn, der indeholder højst 1 nulpunkt for f. Dermed er sætningen bevist.

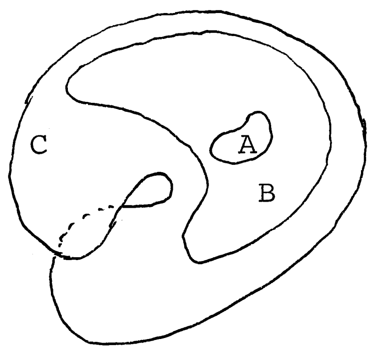
Hvis O blot er åben, kan f være 0 på visse komponenter af O, men så vil nulpunkterne i de øvrige komponenter udgøre en diskret mængde.

Vi er ganske særligt interesserede i den næste sætning, som er sætningen om entydig analytisk fortsættelse.

<u>Sætning</u> 9.3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være et område og $f,g: O \to \mathbb{C}$ holomorfe funktioner. Hvis der findes en afsluttet cirkelskive i O, der indeholder uendelig mange punkter z med $f(z) = g(z)$, da er $f = g$.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 9.2 anvendt på $g - f$.

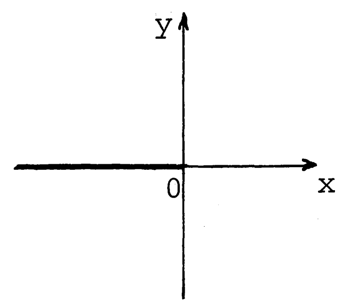
Sætningen fortæller os, at en holomorf funktion er helt fastlagt, så snart man kender dens restriktion til en yderst beskeden del af dens definitionsområde. Har man givet en holomorf funktion i det lille område A, kan den måske udvides til det større område B, og vi kalder udvidelsen en analytisk fortsættelse. Vi kan godt forestille os, at funktionens definitionsområde ganske gradvist udvider sig, som en fremadskridende bølge. Men som antydet ved



C kan to afsnit af bølgefronten gå mod hinanden, og så må man regne med, at udvidelserne fra de to sider eventuelt ikke bliver ens.

Det er nok bedre, at forestille sig definitionsområdet som et blad, der vokser langs randen. Så kan det jo sagtens vokse ind over sig selv, så det kommer til at ligge i flere lag. Sådanne definitionsområder, der ligger i flere lag over den komplekse plan, kaldes Riemann-flader.

Således er $\operatorname{Log} z$ holomorf i $\mathbb{C}$ opslidset langs den negative reelle akse. Fra oven fortsætter den ned over "slidsen" og går over i $\operatorname{Log} z + 2\pi i$, medens den ved fortsættelse fra neden går over i $\operatorname{Log} z - 2\pi i$. Ved fortsat analytisk fortsættelse vokser alle grenene $\operatorname{Log} z + 2n\pi i$ sammen til en holomorf funktion på en Riemann-flade, der snor sig som en vindeltrappe om punktet 0.



I den ældre litteratur talte man om $\log z$ som en flertydig funktion, der blev gjort entydig ved at man brugte en Riemann-flade som definitionsområde. I moderne matematik benyttes en abstrakt definition af begrebet Riemann-flade, men det her anskueligt beskrevne begreb virker udmærket til praktiske formål.

En flertydig funktion som $\sqrt[n]{z}$ betragtes ligeledes på en Riemann-flade, og den danner igen en "vindeltrappe" om 0, men den vindeltrappe er sådan, at man ved at gå n etager op når tilbage til udgangspunktet. Vil man forestille sig denne Riemann-flade håndfast i vort tredimensionale rum, må man finde sig i, at den skærer gennem sig selv.

Analytisk fortsættelse har spillet en rolle i fysiske anvendelser. Det må dog understreges, at en fysisk betydning af analytisk fortsættelse må være fysisk begrundet. Hvis man bare bruger en holomorf funktion som en approksimation af et eller andet fysisk, er der ingen grund til at vente, at eventuelle analytiske fortsættelser approksimerer noget som helst.

En fysisk situation, hvor stof i hvile og i ligevægt fra et vist tidspunkt at regne begynder at reagere på impulser udefra, er ikke egnet til beskrivelse ved holomorfe funktioner, idet hviletilstanden beskrives ved konstante funktioner af tiden, og så giver sætningen om éntydig analytisk fortsættelse, at de må vedblive at være konstanter. Det betyder faktisk, at en global beskrivelse ved holomorfe funktioner ikke kan leve op til et mindstekrav om kausalitet. For kvantemekanikkens vedkommende kan det jo tænkes, at denne indvending ikke er så væsentlig.

10. Nulpunkter og Poler I.

Det hænder - og på elementært plan og i anvendelser er det sædvanligt - at en funktion af en kompleks variabel er holomorf undtagen i visse isolerede punkter. Det gælder for de ved $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2+1}$, $\operatorname{tg} z$ definerede funktioner og i knap så behagelig form for de ved $e^{1/z}$, $\sin \frac{1}{z^2+1}$, $\operatorname{tg}\operatorname{tg} z$ definerede. Dette er vanskeligheder af en helt anden art end "flertydighedsfænomenerne" vi har mødt hos $\log z$ og $\sqrt[n]{z}$ for $z = 0$. En ret enkel beskrivelse af forholdene i sådanne isolerede undtagelsespunkter er givet i sætninger af Weierstrass og Riemann, men de må have været kendt før. Vi sammenfatter det hele i en 3-punktssætning

<u>Sætning</u> 10.1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $c \in O$ et punkt og $f: O\setminus\{c\} \to \mathbb{C}$ holomorf. Da indtræffer en af følgende 3 muligheder:

1) f er restriktion af en holomorf funktion $\tilde{f}: O \to \mathbb{C}$.

2) $|f(z)| \to \infty$ for $z \to c$. Der findes en holomorf funktion $g: U \to \mathbb{C}$, hvor U er en åben omegn af c med $g(c) = 0$, så $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ for $z \in U \setminus \{c\}$, og i $U \setminus \{c\}$ gælder en rækkeudvikling $f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n (z-c)^n$, hvor p er et negativt tal.

3) For enhver omegn U af c er $f(U \setminus \{c\})$ overalt tæt i $\mathbb{C}$.

Bevis. Vi skal vise, at mulighed 1) eller 2) indtræder, hvis det ikke går helt så galt som beskrevet i mulighed 3). Hvis 3) ikke indtræder, findes der en afsluttet cirkelskive $E \subseteq O$ med centrum c, samt et tal $b \in \mathbb{C}$ og et tal $k > 0$, således at $|f(z)-b| \geq k$ for $z \in E \setminus \{c\}$. Vi definerer $h: E \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ ved $h(z) = \frac{1}{f(z)-b}$. Så er h holomorf i $\overset{\circ}{E} \setminus \{c\}$ og tilfredsstiller vurderingen $|h(z)| \leq \frac{1}{k}$. I følge sætning 8.4 har vi en udvikling i Laurentrække $h(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$, konvergent i $\overset{\circ}{E} \setminus \{c\}$. Koefficienten er givet ved

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(z)\,dz}{(z-c)^{n+1}},$$

hvor Γ er en cirkel med centrum og radius ρ lille nok, til at Γ ligger i $\overset{\circ}{E}$. Så får vi vurderingen

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{1}{k} \cdot \rho^{-n-1} = \frac{1}{k}\rho^{-n},$$

og da ρ kan være vilkårlig lille, kan vi slutte, at $a_n = 0$ for $n < 0$, så vi har $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, men så er h analytisk i hele E_0.

Hvis nu $h(c) = a_0 \neq 0$, er $f(z) = \frac{1}{h(z)} + b$ en funktion, som er holomorf i en omegn U af c og identisk med f på $U \setminus \{c\}$, så tilfælde 1) indtræder.

Hvis $h(c) = a_0 = 0$, kan h ikke være identisk 0 i nogen omegn af c, da vi har $(f(z)-b)h(z) = 1$ for $z \in \overset{\circ}{E} \setminus \{c\}$. Vi har så for et $p \in \mathbb{N}$, at $h(z) = \sum_{n=p}^{\infty} b_n (z-c)^n = (z-c)^p \, h_1(z)$, hvor h_1 er holomorf i $\overset{\circ}{E}$ og forskellig fra 0. Så er $\frac{1}{h_1(z)}$ holomorf i $\overset{\circ}{E}$, og vi får $f(z) = b + \frac{1}{(z-c)^p} \cdot \frac{1}{h_1(z)}$, hvilket viser, at $f(z) \to \infty$ for $z \to c$. Endvidere er $g(z) = \frac{(z-c)^p h_1(z)}{b+(z-c)^p h_1(z)}$ holomorf i en omegn af c, og vi har $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ for $z \in \overset{\circ}{E} \setminus \{c\}$. Endelig har vi en potensrækkeudvikling $\frac{1}{h_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-p} (z-c)^n$ i en omegn af c, og deraf følger umiddelbart, at $f(z) = b + \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-c)^n$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 10.2. Med betegnelserne fra sætning 10.1 siger vi, at f har en isoleret singularitet i c, hvis tilfælde 2) eller 3) indtræder. Vi siger, at f har en pol i c, hvis tilfælde 2) indtræder, og at f har en (isoleret) væsentlig singularitet i c, hvis tilfælde 3) indtræder.

Hvis tilfælde 1) indtræder, siger vi somme tider, at f har en hævelig singularitet i c, men så er c altså bare en eventuel singularitet, der viser sig ikke at være det.

<u>Definition</u> 10.3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $c \in O$ et punkt og $f: O \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ en holomorf funktion. Hvis der findes en omegn U af c og en holomorf funktion $g: U \to C$ med $g(c) \neq 0$, således at $f(z) = (z-c)^p \, g(z)$ for alle $z \in U \setminus \{c\}$, siger vi, at f har et p-dobbelt nulpunkt i c, hvis $p > 0$, og at f har en -p-dob-

belt pol i c, hvis $p < 0$.

Det følger af Taylor-udviklingen, at p eksisterer for et nulpunkt, hvis f ikke er identisk 0 i en omegn af nulpunktet og dermed identisk 0 i hele den komponent, der indeholder nulpunktet. Ligeledes viser sætning 10.1, at en pol har en multiplicitet.

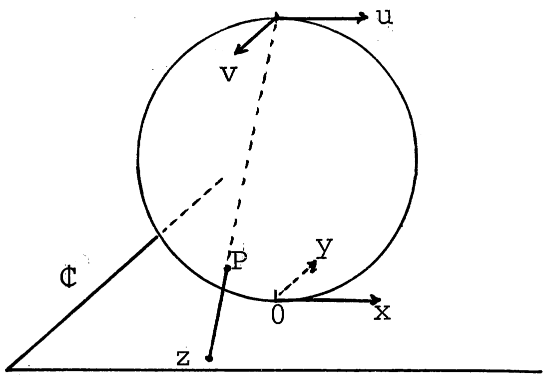
Definition 10.4. Mængden $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}^*$ kaldes den komplekse talkugle. Når en funktion eller en følge divergerer mod ∞, siges den at konvergere mod ∞ på $\mathbb{C}^*$. Værdien ∞ inddrages delvis i regnereglerne, idet $\pm a \pm \infty = \infty$ for $a \neq \infty$ og $a \cdot \infty = \infty$ for $a \neq 0$. Endvidere er $\frac{a}{\infty} = 0$ for $a \neq \infty$, og $\frac{a}{0} = \infty$ for $a \neq 0$.

Definition 10.5. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben. En funktion $f\colon O \to \mathbb{C}^*$ kaldes meromorf, hvis hvert punkt af O har en omegn U på hvilken enten f eller $\frac{1}{f}$ er en holomorf funktion.

En meromorf funktion på O er på hver komponent af O enten identisk ∞ eller holomorf på nær en diskret mængde af poler. Dette følger af, at poler for f er helt det samme som nulpunkter for $\frac{1}{f}$.

Eksempler. En rational funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ er meromorf på hele $\mathbb{C}$. Vi kan antage at brøken er uforkortelig, og så vil $P(z)$ og $Q(z)$ ikke have fælles nulpunkter. Så vil polerne for f netop være nulpunkterne for $Q(z)$. Funktionen $\operatorname{tg} z$ er meromorf med $\{(2n+1)\frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ som mængden af poler. Den ved $e^{1/z}$ definerede funktion er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ med en væsentlig singularitet i 0. En vilkårlig omegn af 0 vil af $\frac{1}{z}$ afbildes over i en mængde, der indeholder uendelig mange vandrette strimler af bredde 2π, og eksponentialfunktionen afbilder enhver sådan afsluttet strimmel på hele $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Tidligt i dette århundrede skærpede Picard punkt 3) i sætning 10.1 til at $f(\mathbb{C}\setminus\{c\})$ er hele $\mathbb{C}$ på nær højst 1 punkt.



En 2-sfære, altså en kugleflade stilles på $\mathbb{C}$, så den støtter med sydpolen S i punktet 0. Vi antager, at 2-sfæren har diameter 1. Vi indfører nu komplekse koordinater på 2-sfæren, idet et punkt P som koordinat får sin centralprojektion på $\mathbb{C}$ fra nordpolen N som vist på figuren. På den måde får hvert punkt af 2-sfæren undtagen N et komplekst tal som koordinat. Den vandrette storcirkel omfatter punkterne, hvis koordinater har numerisk værdi 1. Hvis vi havde lagt 2-sfæren, så den støttede mod nordpolen i stedet for sydpolen, ville vi på samme måde få komplekse koordinater for hvert punkt af 2-sfæren undtagen S. På figuren har vi ved akserne u og v antydet, at vi flytter $\mathbb{C}$ i stedet for at vende 2-sfæren. Vi må huske, at $\mathbb{C}$ skal vende rigtigt, set fra sfærens centrum. Hvis vi som antydet, vælger de reelle akser ensrettede, bliver de 2 koordinater for samme punkt netop hinandens reciproke.

Et punkt af 2-sfæren har således i det ene koordinatsystem en koordinat z og i det andet en koordinat $w = \frac{1}{z}$. Hvis O er en åben mængde på 2-sfæren og $f\colon O \to \mathbb{C}$ en afbildning, kan f betragtes som funktion af den ene koordinat z eller af den anden w, idet dog kun den ene koordinat er anvendelig for punkterne N og S.

Nu er det klart, at f er holomorf med z som variabel, hvis og kun hvis f er holomorf med w som variabel, stadig bortset fra N og S, hvor kun den ene mulighed foreligger. Vi vil derfor sige, at $f\colon O \to \mathbb{C}$ er holomorf, hvis den er det lokalt ved brug af en anvendelig koordinat.

Vi regner nu $z = \infty$ i punktet N og $w = \infty$ i punktet S, og derved identificeres 2-sfæren med talkuglen $\mathbb{C}^*$. Der er nu mening i at tale om, at en funktion er holomorf i en omegn af ∞. Det går selvfølgelig analogt med begrebet meromorf.

Eksempel. Ved $\varphi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{C}$, $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$ defineres en meromorf bijektiv afbildning $\varphi\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. For $\gamma \neq 0$ er $\varphi(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$, $\varphi(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$. For $\gamma = 0$ er $\varphi(\infty) = \infty$, og ∞ er en pol for φ. Ved $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ defineres en meromorf funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ med poler i $\pm i$ og med et dobbelt nulpunkt i ∞. Ved $f(z) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ defineres en meromorf funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ med poler i $\pm i$, nulpunkter i ± 1 og $f(\infty) = -1$. Endelig definerer $g(z) = \frac{z^3}{1+z^2}$ en meromorf funktion $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ med 3-dobbelt nulpunkt i 0 og poler $\pm i$ og ∞.

Hvis $O \subseteq \mathbb{C}$ er åben og f er holomorf i O bortset fra isolerede singulariteter, vil integralet af f langs en tilstrækkelig lille cirkel Γ om en af de isolerede singulariteter, i hvis omegn f er givet ved Laurentrækken $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$, hvor c er singulariteten i følge sætning 8.4 være givet ved

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\, a_{-1}.$$

Hvis $O \subseteq \mathbb{C}^*$ er åben og f holomorf i O bortset fra isolerede singulariteter, kan det tænkes, at ∞ er en isoleret singularitet. Så har f en Laurentrække $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ i en omegn af ∞, d.v.s. for $|z| > R$, hvor R er et reelt tal. Her må vi huske, at vi egentlig skal bruge $w = \frac{1}{z}$ som variabel, så det er leddene mod $n > 0$, der er rækkens singulære del. En cirkelskive med centrum ∞ har som rand en stor cirkel Γ, der skal gennemløbes højre om, så i dette tilfælde får vi

$$\int_\Gamma f(z)dz = -2\pi i\ a_{-1}\ .$$

Den indgående Laurentrækkekoefficient hører ikke til rækkens singulære del. Det hænger sammen med, at integrationsvejen i dette tilfælde ikke er vilkårlig kort, men vilkårlig lang.

Vi kunne tænke os, at udregne integralerne ved brug af en lokal stamfunktion $F(z) = F(\frac{1}{w}) = G(w)$. Vi har så $dF(z) = f(z)dz = -F'(\frac{1}{w})\frac{dw}{w^2} = dG(w)$. Det er altså differentialet og ikke differentialkvotienten, der er invariant overfor koordinatskiftet.

<u>Definition 10.6.</u> Hvis $O \subseteq \mathbb{C}^*$ er åben og f holomorf på O bortset fra isolerede singulariteter, og $c \in O \setminus \{\infty\}$ er en isoleret singularitet, da kaldes koefficienten a_{-1} i Laurentrækken $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ i en omegn af c, residuet for f i punktet c, og betegnes $a_{-1} = \mathrm{res}_f(c)$. Hvis ∞ er en isoleret singularitet, er $\mathrm{res}_f(\infty) = -b_{-1}$, hvor b_{-1} er koefficienten i den for $|z| > R$ konvergente Laurentrække $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$. Hvis $c \in O$ og f ikke har nogen singularitet i c, vil vi eventuelt skrive $\mathrm{res}_f(c) = 0$.

11. Residueregning.

Overvejelserne i kapitel 10 kan udnyttes til en væsentlig forbedring af vore tidligere omtalte metoder til udregning af bestemte integraler, idet vi nu kan benytte integrationsveje, der omkredser singulariteter.

Sætning 11.1. Lad Ω være et Gauss-område med orienteret rand Γ, og lad $c_1,\ldots,c_q \in \Omega$. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde, der indeholder $\Omega \cup \Gamma$, og lad $f\colon O\setminus\{c_1,\ldots,c_q\} \to \mathbb{C}$ være holomorf (altså med isolerede singulariteter i $c_1,\ldots,c_q$). Da er

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\ (\mathrm{res}_f(c_1)+\ldots+\mathrm{res}_f(c_q)) \ .$$

Bevis. For $j = 1,\ldots,q$ lægger vi en cirkelperiferi Γ_j med centrum c_j, idet vi vælger radierne så små, at de af cirklerne begrænsede afsluttede cirkelskiver ligger i Ω og er disjunkte. Så siger sætning 6.2, at den del Ω' af Ω, der ligger udenfor alle Γ_j, er et Gauss-område, når radierne vælges små nok. Randen af Ω' består af Γ, samt $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_q$ gennemløbet modsat, og Cauchy's integralsætning giver derfor

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz+\ldots+\int_{\Gamma_q} f(z)dz \ .$$

Nu fremgår det af definition 10.6 og de forudgående bemærkninger, at $\int_{\Gamma_j} f(z)dz = 2\pi i\ \mathrm{res}_f(c_j)$ for $j = 1,\ldots,q$, og dermed er sætningen bevist.

For at udnytte dette, må vi kunne udregne en funktions residuum i en isoleret singularitet. Residuet er en koefficient i en Laurentrække. Integraludtrykket for koefficienterne er nytteløst, da det netop er det integral vi ville slippe for at regne ud. Heldigvis kan Laurentrækken ofte fås ved regning med potensrækker. I praksis bør man regne økonomisk, idet man udnytter, at det bare er en eneste koefficient i rækken, der skal bestemmes.

Eksempel. Vi definerer $f: \mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\} \to \mathbb{C}$ ved

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1} .$$

Her er en væsentlig singularitet i 0 og poler i ± 1. I omegnen af 0 er $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Da rækkerne er absolut konvergente, bliver produktrækken absolut konvergent, og koefficienten til z^{-1} bliver $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots = \sin 1$. Altså er $\operatorname{res}_f(0) = \sin 1$.

Der er en simpel pol i i. Vi har $f(z)(z-i) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+i}$, og $\operatorname{res}_f(i)$ bliver blot det konstante led i potensrækken for $f(z)(z-i)$ i omegnen af i, og det fås ved at indsætte i for z i det andet udtryk, altså $\operatorname{res}_f(i) = \frac{e^{-i}}{2i} = \frac{\cos 1 - i\sin 1}{2i} = -\frac{1}{2}\sin 1 - \frac{i}{2}\cos 1$.
Analogt fås $\operatorname{res}_f(-i) = -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{i}{2}\cos 1$.

Hvis vi vil finde residuet i ∞, er det enklest at betragte

$$g(w) = f(\tfrac{1}{w}) = \frac{w^2 e^w}{1+w^2} ,$$

og den har et dobbelt nulpunkt i 0, så Laurentrækken for f omkring ∞ indeholder kun led med eksponent ≤ -2. Altså er $\operatorname{res}_f(\infty) = 0$.

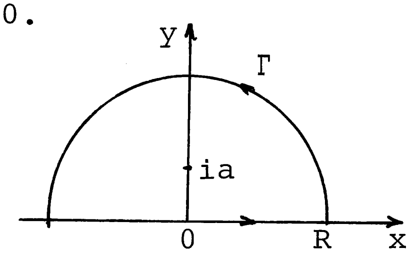
Regning med potensrækker er ofte det eneste middel til bestemmelse af et residuum i en væsentlig singularitet.

Hvis f har en enkelt pol i c, er $g(z) = (z-c)f(z)$ holomorf i c, og $\mathrm{res}_f(c) = g(c)$. For det meste vil g være tilstrækkelig godt kendt, til at dette går uden vanskeligheder.

Hvis f har en pol i c af orden $p > 1$, er arbejdet tungere. Vi indfører igen $g(z) = (z-c)^p f(z)$, som er holomorf i c, men $\mathrm{res}_f(c)$ er nu koefficienten til $(z-c)^{p-1}$ i potensrækken for $g(z)$. Vi har således $\mathrm{res}_f(c) = \frac{1}{(p-1)!}\, g^{(p-1)}(c)$. Ofte er udregningen af denne differentialkvotient besværlig, og så er det bedre at forsøge at regne med potensrækker.

Eksempel. Idet a er et positivt tal, vil vi udregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)^4}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(a^2+x^2)^4}dx, \quad a > 0.$$



For $z = x+iy$ er $|e^{iz}| = e^{-y\cos x}$, så det synes fornuftigt at integrere funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^4}$$

langs randen Γ af et halvcirkelformet område som vist på figuren. Integralet langs halvcirkelbuen vurderes ved $2\pi R \cdot \frac{1}{(R^2-a^2)^4}$, så det går mod 0 for $R \to \infty$ og sætning 11.1 giver derfor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(a^2+x^2)^4} = 2\pi i\ \mathrm{res}_f(ia),$$

idet polen ia er den eneste singularitet indenfor halvcirklen. Residuet er koefficienten b_3 i potensrækkeudviklingen

$$(z-ia)^4 f(z) = \frac{e^{iz}}{(ia+z)^4} = b_0 + b_1(z-ia) + b_2(z-ia)^2 + b_3(z-ia)^3 + \dots \; .$$

Det er nu nemmest at regne med potensrækker. Først har vi

$$e^{iz} = e^{-a}.e^{i(z-ia)} = e^{-a}(1+i(z-ia) - \tfrac{1}{2}(z-ia)^2 - \tfrac{i}{6}(z-ia)^3 + \dots)$$

og dernæst ved binomialformlen

$$\frac{1}{(ia+z)^4} = \frac{1}{(2ia+(z-ia))^4} = \frac{1}{16a^4}\left(1 + \frac{1}{2ia}(z-ia)\right)^{-4} =$$

$$\frac{1}{16a^4}\left(1 - \binom{-4}{1}\frac{i}{2a}(z-ia) - \binom{-4}{2}\frac{1}{4a^2}(z-ia)^2 + \binom{-4}{3}\frac{i}{8a^3}(z-ia)^3 + \dots\right) =$$

$$\frac{1}{16a^4}\left(1 + \frac{2i}{a}(z-ia) - \frac{5}{2a^2}(z-ia)^2 - \frac{5i}{2a^3}(z-ia)^3 + \dots\right) .$$

Nu er $\operatorname{res}_f(ia)$ koefficienten til $(z-ia)^3$ i produktet af de to rækker, altså

$$\operatorname{res}_f(ia) = \frac{e^{-a}}{16a^4}\left(-\frac{i}{6} - \frac{i}{a} - \frac{5i}{2a^2} - \frac{5i}{2a^3}\right) = -i\,\frac{e^{-a}}{96a^7}(a^3+6a^2+15a+15),$$

så vi ender med resultatet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{\pi e^{-a}}{48a^7}(a^3+6a^2+15a+15) .$$

Fornuftigt tilrettelagt bliver regnearbejdet ikke slemt. Det er væsentligt at forudse, hvor mange koefficienter i potensrækkerne det er nødvendigt at bestemme helt præcist. I tvivlstilfælde er det måske bedst, at udregne for få koefficienter, og så fylde ud med eventuelle manglende, når man har overblik over, hvad man behøver.

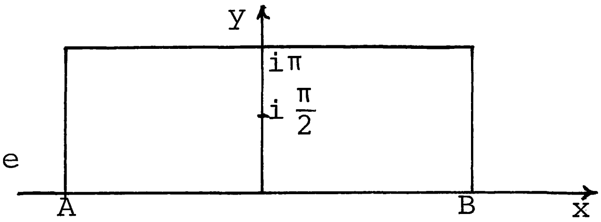
Eksempel. Vi vil udregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx .$$

Dertil betragter vi funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z} .$$

Den har poler, hvor $e^{2z} = -1$, altså i punkterne $\pm i\frac{\pi}{2}, \pm i\frac{3\pi}{2}, \ldots$. Desuden er $f(z+i\pi) = -e^{-\pi} f(z)$. Det er derfor en god ide at integrere $f(z)$ langs randen af det på figuren viste rektangel. Vi får



$$|f(B+iy)| = \left|\frac{2e^{-y}e^{iB}}{e^{B}e^{iy}+e^{-B}e^{-iy}}\right| \leqq \frac{2}{e^{B}-e^{-B}}$$

på den lodrette side til højre, så dette bidrag går mod 0 for $B \to \infty$. Det går analogt med integralet langs siden til venstre for $A \to -\infty$. Derfor får vi

$$(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = 2\pi i \, \mathrm{res}_f(i\tfrac{\pi}{2}) .$$

Residuet er $g(i\frac{\pi}{2})$ for $g(z) = \frac{(z-i\frac{\pi}{2})}{\cosh z}e^{iz}$. Da $\cosh(i\frac{\pi}{2}) = 0$, giver nævneren blot det første led i Taylorrækken i $i\frac{\pi}{2}$ for $\cosh z$, så vi får

$$\mathrm{res}_f(i\tfrac{\pi}{2}) = g(i\tfrac{\pi}{2}) = \frac{e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}}}{\sinh(i\frac{\pi}{2})} = \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{i} ,$$

så vi ender med resultatet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx = 2\pi \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi}{\cosh\frac{\pi}{2}} .$$

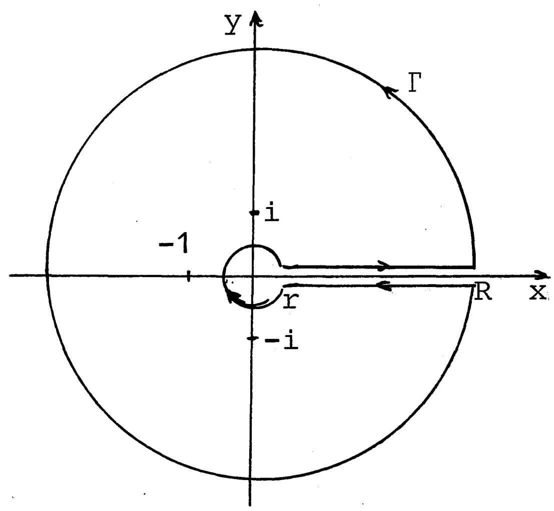
Eksempel. For $\alpha \in\,]-1,2[$ vil vi udregne

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+1)(x^2+1)}\, dx .$$

Vi må have $\alpha > -1$ for at sikre konvergens i grænsen 0, og vi må have $\alpha < 2$ for at sikre konvergens i grænsen ∞. Vi betragter funktionen

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{(z+1)(z^2+1)} \,.$$

Hvis α ikke er 0 eller 1, er det en "flertydig" funktion, men ved at vælge $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ med $\log z = \log|z| + i \arg z$, hvor $0 < \arg z < 2\pi$, får vi f defineret som en meromorf funktion i $\mathbb{C}\setminus[0,\infty[$. Nu har den således definerede funktion analytisk fortsættelse ind over $]0,\infty[$ fra begge sider, så vi kan godt lade en integrationsvej følge en del af den positive reelle akse. Det inspirerer os til at bruge en integrationsvej som vist, dog med de to retlinede stykker lagt helt ind på den reelle akse. Vi har $|z^\alpha| = |e^{\alpha \log z}| = e^{\alpha \log|z|} = |z|^\alpha$, og på den store cirkel kan integralet derfor vurderes ved $2\pi R \dfrac{R^\alpha}{(R-1)(R^2-1)}$, og



det går mod 0 for $R \to \infty$, hvis $\alpha < 2$. På den lille cirkel kan vi vurdere ved $2\pi r \dfrac{r^\alpha}{(1-r)(1-r^2)}$, og det går mod 0 for $r \to 0$, hvis $\alpha > -1$.

Integralet langs det øverste liniestykke går mod det søgte integral. På vej rundt til det nederste liniestykke ændres z^α med en faktor $e^{2\pi i\alpha}$, og da integralet her går den forkerte vej, får vi alt i alt

$$(1-e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(x+1)(x^2+1)} = 2\pi i(\mathrm{res}_f(-1) + \mathrm{res}_f(i) + \mathrm{res}_f(-i)) \,.$$

Vi har $(-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha}$, $i^\alpha = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$ og $(-i)^\alpha = e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}$, så vi får

$$\mathrm{res}_f(-1) = \frac{1}{2}e^{i\pi\alpha}, \quad \mathrm{res}_f(i) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}}{(1+i)\cdot 2i} = -\frac{1}{4}(1+i)e^{i\frac{\pi}{2}\alpha},$$

$$\mathrm{res}_f(-i) = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{(1-i)\cdot -2i} = -\frac{1}{4}(1-i)e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}.$$

Resultatet bliver derfor for $\alpha \in]-1,2[$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(x+1)(x^2+1)} = 2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{2}e^{i\pi\alpha} - \frac{1}{4}(1+i)e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} - \frac{1}{4}(1-i)e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} =$$

$$2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} + e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}\right) + \frac{i}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} - e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha}\right)}{e^{-\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} = \pi \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{-\sin \pi\alpha},$$

Altså

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{\pi}{2\sin \pi\alpha}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} + \sin\frac{\pi\alpha}{2} - 1\right).$$

I undtagelsestilfældene $\alpha = 0$ og $\alpha = 1$ er det let at udregne integralet elementært.

Det er klart, at integralet konvergerer ligeligt, når α er en vis omegn i $\mathbb{C}$ af 0 eller 1, så resultatet skal være en analytisk funktion af α. Den kan derfor kun have hævelige singulariteter for $\alpha = 0,1$, og da tæller og nævner har enkelte nulpunkter, får vi værdien ved blot at sætte $\alpha = 0,1$ i det udtryk, der fås ved at differentiere tæller og nævner hver for sig. Det giver udtrykket $\frac{1}{2\cos\pi\alpha}\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)$, og det giver værdi $\frac{\pi}{4}$ i begge tilfældene $\alpha = 0,1$.

Hvis det gælder om at udregne et integral langs en given lukket vej, kan man udnytte, at hvert punkt af vejen har et Cauchy-område som omegn, og deraf følger, at integralet ikke ændres, når vejen flyttes en smule lokalt. Der vil i hvert fald være frihed nok til at omforme vejen til en trappelinie, og den kan deles i simple, lukkede trappelinier, der hver indeslutter et Gauss-område. Det betyder, at sætning 11.1 gælder mere generelt og i hvert fald for områder, hvis rand er sammensat af differentiable kurvestykker.

Det er klart, at residuesætningen virker også for et Gauss-område omkring ∞. Hvis f er holomorf på hele Ω^* bortset fra isolerede singulariteter, vil en tilstrækkelig pæn lukket vej være rand for 2 områder, og sætning 11.1 gælder for dem begge. Derfor vil en lille cirkel, der slet ikke omkredser singulariteter også være nødt til at omkredse dem alle, og sætning 11.1 giver, at summen af residuerne i samtlige singulariteter samt ∞ (som kan have et residuum uden at være singularitet) er 0.

12. Funktioner på hele $\mathbb{C}^*$.

Vi viser nu Liouville's sætning, et eksempel på, at præcise krav til en holomorf funktion kan præcisere den endnu mere end de direkte udtrykker

Sætning 12.1. Hvis $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf, og der findes positive tal A, B og α, således at $|f(z)| \leqq A + B|z|^\alpha$ for alle $z \in \mathbb{C}$, da er f et polynomium af grad $\leqq \alpha$. Specielt er f konstant, hvis $\alpha < 1$.

Bevis. Vi har den i hele $\mathbb{C}$ konvergente potensrække $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, hvor

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} ,$$

idet Γ er en cirkel med centrum 0 og vilkårlig radius R. Vi får vurderingen

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \, \frac{A+BR^\alpha}{R^{n+1}} = \frac{A+BR^\alpha}{R^n} = \frac{A}{R^n} + \frac{B}{R^{n-\alpha}} .$$

For $n > \alpha$ går dette mod 0 for $R \to \infty$, så potensrækken degenererer til et polynomium af grad $\leqq \alpha$. Dermed er sætningen bevist.

En holomorf funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kaldes en hel funktion (hel på tysk ganze, på engelsk entire (sjældent "integral"), på fransk entière), og sådanne funktioner er behandlede særdeles indgående i litteraturen, især i første halvdel af vort århundrede.

Sætning 12.2. En hel funktion er konstant, hvis den har en hævelig singularitet i ∞, og et polynomium, hvis den har en pol i ∞.

Bevis. Da potensrækken $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tillige er Laurentrækken i omegnen af ∞, følger påstanden umiddelbart af resultaterne i kapitel 10.

Hvis f specielt er et nulpunktsfrit polynomium, er $\frac{1}{f}$, således en hel funktion med en hævelig singularitet i ∞, altså konstant. Så let er det nu blevet at vise algebraens fundamentalsætning!

Sætning 12.3. En meromorf funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ er en bruden rational funktion.

Bevis. Da mængden af poler er diskret og $\mathbb{C}^*$ kompakt, har f højst endelig mange poler. Summen af de singulære dele i Laurentrækkerne for f i omegne af disse poler giver en bruden rational funktion g, og da $g-f$ er holomorf på hele $\mathbb{C}^*$, er $g-f$ konstant. Dermed er sætningen bevist.

En meromorf funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, som ikke er bruden rational, kaldes transcendent. En hel transcendent funktion har en væsentlig singularitet i ∞.

13. De elementære transcendente funktioner.

De elementære transcendente funktioner er eksponentialfunktionen, sinus og cosinus, som er hele, samt tangens, cotangens, $\frac{1}{\sin}$ og $\frac{1}{\cos}$, som er meromorfe. En formel som

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

vises i skolens trigonometrikursus for reelle u og v. For fast reelt u står der en hel funktion på hver side, og vi ved, at de er identiske på den reelle akse, så sætningen om entydig analytisk fortsættelse giver, at de er identiske på hele $\mathbb{C}$. Altså gælder ligningen for $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$. For en fast kompleks værdi af v, står der på begge sider en hel funktion af u, og disse funktioner er identiske på den reelle akse, og derfor på hele $\mathbb{C}$. Altså gælder formlen for alle $u,v \in \mathbb{C}$. De øvrige trigonometriske formler kan generaliseres til komplekse variable ved analoge ræsonnementer.

Ud over de elementære trigonometriske formler omfatter vor viden fra skolen og første års matematik potensrækkerne for eksponentialfunktionen, cosinus og sinus, lidt oplysninger om de omvendte funktioner, samt om differentiation og integration. Vi vil supplere dette materiale med nogle flere række- og produktudviklinger.

<u>Sætning 13.1.</u> $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Bevis. Vi skriver $z = x+iy$. Lad A være et positivt tal, og lad os antage, at $|x| \leq A$. For $|n| \geq 2A$ har vi så

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| = \frac{1}{|z-n|^2} \leqq \frac{1}{(|n|-|x|)^2} \leqq \frac{1}{(|n|-A)^2} \leqq \frac{1}{(|n|-\frac{1}{2}|n|)^2} = \frac{4}{n^2}$$

Nu er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en velkendt konvergent række, så $\sum_{|n|\geqq 2A} \frac{4}{n^2}$ er en konvergent majorantrække for $\sum_{|n|\geqq 2A} \frac{1}{(z-n)^2}$, så

$g_A(z) = \sum_{|n|\geqq 2A} \frac{1}{(z-n)^2}$ er holomorf for $|x| < A$. Endvidere er

$f_A(z) = \sum_{|n|<2A} \frac{1}{(2-n)^2}$ en bruden rational funktion, hvis poler netop er de hele tal i $]-2A,2A[$, og dens Laurentrækkes singulære del i polen i n er netop $\frac{1}{(z-n)^2}$. Dermed har vi vist, at

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ er meromorf i $\mathbb{C}$ med poler netop i de hele tal og med $\frac{1}{(z-n)^2}$ som singulær del af Laurentrækken i polen n.

Vi har således 2 meromorfe funktioner $h(z) = \left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$ og $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$, og vi skal vise, at de er identiske. Vi går frem som Erasmus Montanus i beviset for, at "morlille er en sten". Vi ser, at $h(z)$ har periode 1, og det har $f(z)$ også. I en omegn af 0 er

$$h(z) = \frac{1}{(z-\frac{1}{6}\pi^2 z^3+\dots)^2} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{3}\pi^2 z^2+\dots)} = \frac{1}{z^2}\,(1+\tfrac{1}{3}\pi^2 z^2+\dots),$$

så $h(z)$ har en pol i 0 med $\frac{1}{z^2}$ som singulær del af Laurentrækken, ganske som $f(z)$, og da begge funktioner har periode 1, stemmer de overens på tilsvarende måde i polerne i de andre hele tal.

Vi har vurderingen $|\sin\pi z| = \frac{1}{2}|e^{iz}-e^{-iz}| \geqq \frac{1}{2}(e^{|y|}-e^{-|y|})$, hvilket viser, at $h(z) \to 0$ for $y \to \infty$ ligeligt i x. Ligeledes er

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\right| \leqq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leqq 2\left(\frac{1}{y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2}\right) \leqq 2\left(\frac{1}{y^2}+\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+y^2}\right) = 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{\pi}{2y}\right).$$

Det andet ulighedstegn beror på, at $|x-n|$ for højst 2 værdier af x er < 1, og eller falder $|x-n|$ for netop 2 værdier af n mellem hvert par af på hinanden følgende naturlige tal. Det tredie ulighedstegn er læst bagfra vurdering af integralet ved en undersum. Vi har således vist, at både $f(z)$ og $g(z)$ går mod 0 ligeligt i x for $|y| \to \infty$.

Vi kan nu slutte, at $\varphi(z) = f(z)-h(z)$ er holomorf i hele $\mathbb{C}$, og begrænset i den ved $|x| \leqq 1$ definerede strimmel, og dernæst på grund af periodiciteten begrænset i hele $\mathbb{C}$. Så giver sætning 12.1, at φ er konstant, og da $\varphi(z)$ går mod 0 for $y \to -\infty$ er dens konstante værdi 0, altså $f = h$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 13.2.

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) .$$

Bevis. Vi skriver $z = x+iy$ og antager $|z| \leqq A$. For $|n| \geqq 2A$ får vi så

$$\left|\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right| \leqq \frac{|z|}{|n|(|n|-|x|)} \leqq \frac{A}{(|n|-|x|)^2} ,$$

så vi har bortset fra faktoren A samme vurdering som i beviset for sætning 13.1. Altså konvergerer rækken i midten ligeligt på enhver cirkelskive. Vi har fået summen til højre ved at slå leddene med indices $\pm n$ sammen i den midterste sum, så det er klart, at de 2 summer er ens.

Vi regner efter, at $\frac{d}{dz}(\pi\cot\pi z) = -\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$, og af sætning 7.3 følger, at den midterste sums differentialkvotient kan fås ved ledvis differentiation, så dens differentialkvotient bliver $-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$. Da summen af rækken således ifølge sætning 13.1 har samme differentialkvotient som $\pi\cot\pi z$, er forskellen konstant. Nu skifter både $\pi\cot\pi z$ og summen af rækken fortegn, når z erstattes med $-z$, og da denne egenskab ødelægges ved addition af en fra 0 forskellig konstant, er de identiske. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 13.3.</u> $\frac{\sin\pi z}{\pi} = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{z^2}{n^2})$.

Bevis. For $|z| \leqq A$ og $|n| \geqq 2A$ er

$$(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = e^{\frac{z}{n}+\mathrm{Log}(1-\frac{z}{n})} = e^{-(\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}+\dots)}$$

og her er

$$\left|\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}+\dots\right| \leqq \frac{|z|^2}{2n^2}\left(1+\frac{|z|}{|n|}+\left(\frac{|z|}{|n|}\right)^2+\dots\right) \leqq \frac{|z|^2}{2n^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right) = \frac{|z|^2}{n^2}$$

I produktet

$$\prod_{|n|\geqq 2A} (1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} = e^{\sum_{|n|\geqq 2A}(\frac{z}{n}+\mathrm{Log}(1-\frac{z}{n}))} = e^{-\sum_{|n|\geqq 2A}(\frac{z^2}{2n^2}+\frac{z^3}{3n^3}+\dots)}$$

har rækken i eksponenten $\sum_{|n|\geqq 2A} \frac{A^2}{n^2}$ som konvergent majorantrække, så den er ligelig konvergent. Heraf følger, at det midterste produkt i sætningen er en hel funktion med $\mathbb{Z}$ som mængden af nulpunkter. Det sidste produkt fås af det midterste ved at slå faktorer sammen.

Lokalt i $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ har funktionerne overalt lokalt kontinuerte logaritmer, og disse har veldefinerede differentialkvotienter, som bliver meromorfe på hele $\mathbb{C}$. Sætning 13.2 giver, at differentialkvotienterne er identiske, så funktionerne afviger højst med en konstant faktor. Efter division med z får de samme værdi i 0. Altså er de identiske. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 13.4. $\frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$.

Bevis. Af sætning 13.3 følger

$$(1) \qquad \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2} = \frac{1}{2}z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{2n}\right)e^{\frac{z}{2n}} .$$

Heraf fås

$$\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi z}{2} = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(z+1)}{2} = \frac{1}{2}(1+z) \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{1}{2n}-\frac{z}{2n}\right)e^{\frac{z+1}{2n}} =$$

$$\frac{1}{2}(1+z) \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{2n-1}\right)\frac{2n-1}{2n}\, e^{\frac{z+1}{2n}} .$$

Formel (1) med $z = 1$ indsat giver (Wallis' produkt)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{2n-1}{2n}\, e^{\frac{1}{2n}} ,$$

og når dette divideres i den foregående formel, får vi

$$\cos\frac{\pi z}{2} = (1+z) \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n}} .$$

Ved at splitte produktet efter positive og negative indices får vi

$$\cos\frac{\pi z}{2} = \left(1-\frac{z}{-1}\right) \prod_{n=-\infty}^{-1} \left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{2n-1}\right)e^{\frac{z}{2n}} ,$$

og ved multiplikation med den helt trivielle relation

$$1 = e^{-z} \prod_{n=-1}^{-1} e^{\frac{z}{2n-1}-\frac{z}{2n}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{2n-1}-\frac{z}{2n}}$$

får vi efter en triviel ændring formlen

$$\cos\frac{\pi z}{2} = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n+1}\right)e^{\frac{z}{2n+1}} .$$

Ved kombination med (1) får vi

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} = \frac{1}{2}\, z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right)^{(-1)^n} .$$

Ved at tage logaritmen og differentiere får vi netop den i sætningen anførte formel. Dermed er sætningen bevist.

Regning med potensrækker og identifikation af tilsvarende koefficienter i henhold til rækkeudviklingens entydighed giver mulighed for at udlede kombinatoriske relationer. Vi viser et særlig berømt eksempel på denne teknik.

Der er et beskedent antal elementære funktioner med helt pæne potensrækkeudviklinger, men ellers er man for det meste henvist til at udregne koefficienterne rekursivt. For klasser af beslægtede funktioner kan det tænkes, at alle funktionernes potensrækker har koefficienter, der kan udtrykkes ved en standardfølge, så man behersker hele funktionsklassen ved en enkelt rekursivt bestemt talfølge. En sådan følge er følgen af Bernoulli-tal, som vi nu vil definere.

Definition 13.5. Lad $\beta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ være den meromorfe funktion defineret ved $\beta(z) = \frac{z}{e^z-1}$. Idet den er holomorf i en omegn af 0, definerer vi $B_n = \beta^{(n)}(0)$, $n = 0,1,2,\ldots$, og (B_n) er så følgen af Bernoulli-tal.

Af $\displaystyle\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$ får vi potensrækkerelationen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z, \quad \text{som giver relationerne}$$

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_n}{n!1!} + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \ldots + \frac{B_1}{1!n!} + \frac{B_0}{(n+1)!} = 0, \quad n = 1,2,\ldots,$$

til rekursiv udregning af Bernoulli-tallene. Den sidste formel skrives pænere

$$\binom{n+1}{1} B_n + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + \ldots + \binom{n+1}{n} B_1 + B_0 = 0.$$

Som eksempel på potensrækkeudvikling ved Bernoulli-tallene har vi

$$\pi \cot \pi z = i\pi \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = i\pi \left(1 + \frac{2}{e^{2\pi i z} - 1}\right) = i\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i)^n B_n}{n!} z^{n-1} .$$

Af sætning 13.2 fås

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-z} - \frac{1}{n+z}\right) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{n^{p+1}} - \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^p}{n^{p+1}}\right) = \frac{1}{z} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{n^{2(p+1)}}$$

Ifølge sætning 7.3 får vi Taylorrækken ved ledvis summation af leddenes Taylorrække, altså

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} s_{2p} z^{2p-1}, \quad s_{2p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \zeta(2p) .$$

Sammenligning af koefficienterne i de to rækkeudviklinger giver nu

$$B_0 = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad B_{2p+1} = 0, \quad s_{2p} = (-1)^p \frac{2^{2p-1} B_{2p}}{(2p)!} \pi^{2p} .$$

Rekursivformlen viser, at Bernoulli-tallene er rationale, så s_{2p} er et rationalt multiplum af π^{2p}. Summerne s_{2p} er trivielt > 1, og det ses let, at de går mod 1 for $p \to \infty$. Derfor er værdien af B_{2p} ikke så langt fra $(-1)^p\, 2\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}}$. Den numeriske værdi går hurtigt mod ∞, men aftager dog først. Tabellen ved siden af viser de første fra 0 forskellige Bernoulli-tal.

n	B_n
0	1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$
4	$-\frac{1}{30}$
6	$\frac{1}{42}$
8	$-\frac{1}{30}$
10	$\frac{5}{66}$
12	$-\frac{691}{2730}$
14	$\frac{7}{6}$
16	$-\frac{3617}{510}$

Valget af Bernoulli-tallene virker noget tilfældigt, men von Staudt har vist, at $B_{2n} = N - \Sigma\frac{1}{p}$, hvor N er et helt tal, og summen udstrækkes over de primtal p, for hvilke $p-1$ går op i $2n$. Det går således let at udregne, hvor meget B_{2n} afviger fra et nærmeste større hele tal. Bortset fra helt små værdier af n er nævneren i B_{2n} delelig med 6, og den antager værdien 6 for uendelig mange værdier af n.

14. Harmonisk funktion.

<u>Definition 14.1</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben. En C^2-funktion $g: O \to \mathbb{R}$ kaldes harmonisk, hvis den overalt i O tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Tilfældet $n = 3$ har fysisk interesse, idet elektrostatiske, magnetostatiske og gravitations-felter netop har harmoniske potentialer. Ligningen, som kaldes Laplace's ligning, har også betydning for adskillige strømnings- og elasticitetsproblemer.

For $n = 1$ er førstegradspolynomier de eneste harmoniske funktioner, så det specialtilfælde er uden betydning.

For $n = 2$ identificerer vi $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}$. De 2 næste sætninger giver den fuldstændige løsning til Laplace's ligning i dette tilfælde.

Sætning 14.2. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f\colon O \to O$ holomorf. Da er $\operatorname{Re} f\colon O \to \mathbb{R}$ harmonisk.

Bevis. Som i kapitel 2 skriver vi

$$u + iv = w = f(z) = f(x+iy) = f_r(x,y) + if_i(x,y),$$

så vi har $u = f_r(x,y)$, $v = f_i(x,y)$, og Cauchy-Riemann's differentialligninger giver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14.3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $g\colon O \to \mathbb{R}$ harmonisk. Da eksisterer for ethvert S-område $U \subseteq O$ en holomorf funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} f = g|U$.

Bevis. Differentialformen $-g'_y(x,y)dx + g'_x(x,y)dy$ tilfredsstiller ifølge Laplace's ligning betingelsen i sætning 4.3. Hvis vi derfor blot vælger U som et S-område, findes der en C^1-funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ med $h'_x(x,y) = -g'_y(x,y)$ og $h'_y(x,y) = g'_x(x,y)$, men det betyder netop, at $f(z) = f(x+iy) = g(x,y) + ih(x,y)$ er holomorf i U. Dermed er sætningen bevist.

Den fuldstændige løsning til Laplace's ligning er således karakteriseret ved rent kvalitative egenskaber. For partielle differentialligninger er dette ikke usædvanligt. Det betyder, at det egentlige problem bliver valg af en løsning svarende til givne rand - eller begyndelsesværdibetingelsen.

Eksempel. Hvis $f: O \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er holomorf, er $\log|f(z)|$ harmonisk, idet den lokalt er realdel af en holomorf funktion, men det er ikke sikkert, at der findes en global logaritme til f.

<u>Sætning</u> 14.4. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}$ være åben og $g: O \to \mathbb{R}$ være harmonisk. Lad $E \subset O$ være en afsluttet cirkelskive med centrum a og radius N. Så er

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Bevis. Vi vælger et S-område, f.eks. en åben cirkelskive U med $E \subset U \subseteqq O$. Så findes der en holomorf funktion $f: U \to \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} f = g|U$, og med parameterfremstilling $z = a+r\,e^{i\theta}$ for randen Γ af E giver Cauchy's integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta,$$

og formlen i sætningen fås ved at tage realdel. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen kaldes middelværdisætningen for harmoniske funktioner. Den kan generaliseres, så den også giver funktionsværdien i andre punkter af cirkelskiven. Det er Poisson's formel, som er emnet for den næste sætning

<u>Sætning</u> 14.5. Lad $E \subset \mathbb{C}$ være en afsluttet cirkelskive med centrum a, radius R og indre $\overset{\circ}{E}$. Lad $g\colon E \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion med $g|\overset{\circ}{E}$ harmonisk. For $r \in [0,R[\ , \varphi \in \mathbb{R}$ gælder da

$$g(a+re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\theta .$$

Bevis. Hvis vi har vist formlen for $r \in [0,R_1[$ med $R_1 \in\ ]0,R[$ i stedet for R, fås sætningen ved grænseovergangen $R_1 \to R$. Vi kan derfor antage, at g er realdel af en funktion $f\colon E \to \mathbb{C}$, som er restriktion af en holomorf funktion på en åben mængde, og så har vi Cauchy's integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

for $z \in \overset{\circ}{E}$, idet Γ er randen af E.

For at spare skriveri antager vi, at $a = 0$. Så er $\frac{R^2}{\bar z}$ et punkt udenfor E, og Cauchy's sætning giver

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\,\frac{\bar z}{\zeta\bar z-R^2}\,d\zeta.$$

Da vi har $\zeta\bar\zeta = R^2$, er $\frac{\bar z\, d\zeta}{\zeta\bar z-R^2} = \frac{\bar z}{\bar z-\bar\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta} = (1-\frac{\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar z})\frac{d\zeta}{\zeta}$, så subtraktion af de to integralformler giver

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar z} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Vi skriver $\zeta = Re^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$ og får

$$\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar z} - 1 = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{2}\right) = \mathrm{Re}\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z} =$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{(\zeta+z)(\bar\zeta-\bar z)}{|\zeta-z|^2} = \frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta|^2+|z|^2-2\mathrm{Re}\bar\zeta z} = \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)} ,$$

så integralformlen ovenfor omskrives til

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta,$$

og ved at tage realdel får vi Poisson's formel i tilfældet $a=0$. Det almindelige tilfælde følger umiddelbart. Dermed er sætningen bevist.

Som vi har set ovenfor, er f fastlagt ved g på nær en rent imaginær konstant, idet imaginærdelens differential udtrykkes ved g. En holomorf funktion f på en cirkelskive er således fastlagt på nær en rent imaginær konstant, når realdelen kendes på randen. Med vor næste sætning viser vi, at der virkelig findes en holomorf funktion med givne værdier af realdelen på randen.

Sætning 14.6. Lad $E \subset \mathbb{C}$ være en afsluttet cirkelskive med centrum a, radius R, rand Γ og indre $\overset{\circ}{E}$. Lad $\xi\colon \Gamma \to R$ være kontinuert. Så definerer

$$g(a+re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(a+Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta$$

en harmonisk funktion $g\colon \overset{\circ}{E} \to \mathbb{R}$, og for $r \to R$ vil $g(a+re^{i\varphi})$ konvergere mod $\xi(a+Re^{i\varphi})$ ligeligt i φ.

Bevis. Vi antager $a = 0$. Udregningerne i beviset for sætning 14.5 viser, at for $z \in \overset{\circ}{E}$ er

$$g(z) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta,$$

hvilket viser, at g er realdel af en i $\overset{\circ}{E}$ holomorf funktion, altså harmonisk.

Poisson's formel anvendt på $g(z) = 1$ giver

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\Theta-\varphi)}\, d\Theta = 1, \tag{1}$$

så vi får

$$|g(re^{i\varphi}) - \xi(Re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (\xi(Re^{i\Theta}) - \xi(Re^{i\varphi}))\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\Theta-\varphi)} d\Theta\right| \leqq$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\xi(Re^{i\Theta}) - \xi(Re^{i\varphi})|\, \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\Theta-\varphi)}\, d\Theta.$$

Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Vi vælger $\delta > 0$, således at $|\xi(Re^{i\Theta}) - \xi(Re^{i\varphi}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, når $|\Theta-\varphi| \leqq \delta$ regnet modulo 2π. Så giver (1), at integralet over buen svarende til $[\varphi-\delta,\varphi+\delta]$ højst er $\frac{\varepsilon}{2}$. På resten af cirklen er

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\Theta-\varphi)} \leqq \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\delta} \leqq \frac{R^2-r^2}{2Rr(1-\cos\delta)},$$

så integralet over denne del vurderes ved

$$\frac{R^2-r^2}{4\pi Rr(1-\cos\delta)}\int_0^{2\pi} |\xi(Re^{i\Theta}) - \xi(Re^{i\varphi})|d\Theta,$$

og det er $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$, når blot r er nær nok ved R. Dermed er sætningen bevist.

Vi har dermed vist, at et specielt randværdiproblem for Laplace's ligning har 1 og kun 1 løsning. Kendere af integralteori vil nemt kunne overbevise sig om, at sætningen har rimelige generalisationer til de tilfælde, hvor ξ ikke forudsættes kontinuert.

15. Maksimumprincippet.

Maksimumprincipper gælder for løsninger til ret generelle klasser af partielle differentialligninger, og Laplace's ligning er et typisk eksempel

<u>Sætning</u> 15.1. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ være et område og $g: \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisk. Hvis der findes et punkt $a \in \Omega$ med $g(a) = \sup g(\Omega)$ eller $g(a) = \inf g(\Omega)$, er g konstant.

Bevis. Lad os antage, at $a \in \Omega$ og $g(a) = \sup g(\Omega)$. Det andet tilfælde går analogt. Lad $E \subset \Omega$ være en afsluttet cirkelskive med centrum og radius R. Så er

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+Re^{i\theta})\,d\theta,$$

og da $g(a+re^{i\theta}) \leqq g(a)$, medfører dette, at $g(a+Re^{i\theta}) = g(a)$ for alle θ. Ved at variere E ser vi, at g er konstant i en omegn af a. Vi har dermed vist, at $g^{-1}(g(a))$ er en åben mængde, og da den er afsluttet på grund af kontinuitet, er $g^{-1}(a)) = \Omega$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 15.2. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ være et område og $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorf. Hvis f ikke er konstant, har $|f(z)|$ intet lokalt maksimum i Ω, og den er 0 i ethvert lokalt minimum.

Bevis. Hvis $|f(z)|$ har et lokalt maksimum i $a \in \Omega$, er $f(z) \neq 0$ i en omegn af a, når f ikke er konstant. Så er $\log|f(z)|$ harmonisk i en cirkelskive E med centrum a og med absolut maksimum i a, men så er $\log|f(z)|$ og dermed $f(z)$ konstant i E, og sætningen om entydig analytisk fortsættelse giver så, at f er konstant i Ω i strid med forudsætningerne. Så giver sætning 15.1, at $\log|f(z)|$ kun kan have lokalt minimum i de punkter af Ω, hvor f har nulpunkt, og dermed er sætningen bevist.

Disse sætninger har et korollar, der ikke bare er nyttigt, men også har principiel betydning. Ved skæbnens ironi er det kommet til at hedde Schwarz's lemma.

Sætning 15.3. Lad $E \subseteqq \mathbb{C}$ være en afsluttet cirkelskive med centrum a, radius R og indre $\overset{\circ}{E}$. Lad $f: \overset{\circ}{E} \to \mathbb{C}$ være holomorf med $f(a) = 0$ og $|f(z)| \leqq M$ for alle $z \in \overset{\circ}{E}$. Så er $|f(z)| \leqq \frac{M}{R}|z-a|$ for alle $z \in \overset{\circ}{E}$, og hvis lighedstegnet gælder i blot 1 punkt af $\overset{\circ}{E}\setminus\{a\}$ har f formen $f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R}(z-a)$.

Bevis. Ved $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ defineres en holomorf funktion $g: \overset{\circ}{E} \to \mathbb{C}$, og for $R_1 \in]0,R[$ har vi vurderingen $|g(z)| \leqq \frac{M}{R_1}$ og da R_1 kan vælges vilkårligt tæt ved R, har vi $|g(z)| \leqq \frac{M}{R}$ for alle $z \in \overset{\circ}{E}$, altså $|f(z)| \leqq \frac{M}{R}|z-a|$. Hvis lighedstegnet gælder i et punkt af $\overset{\circ}{E}\setminus\{a\}$, antager $|g(z)|$ sit maksimum i dette punkt, og så er $g(z)$ konstant ifølge sætning 15.2, altså $g(z) = e^{i\theta}\cdot\frac{M}{R}$. Dermed er sætningen bevist.

16. Nulpunkter og Poler II.

Den logaritmiske differentialkvotient $\frac{f'}{f}$ af en holomorf funktion f indeholder væsentlig information om nulpunkter og poler for f. Dette beror på vor næste sætning.

Sætning 16.1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f: O \to \mathbb{C}^*$ meromorf, og $\varphi: O \to \mathbb{C}$ holomorf. Hvis a er nulpunkt eller pol for f, er a en enkelt pol for $\frac{f'}{f}$ med residuet $\pm p$, hvor p er multipliciteten af a, og fortegnet er $+$ for nulpunkt og $-$ for pol. Endvidere har $\varphi\frac{f'}{f}$ residuet $\pm p\varphi(a)$ i samme punkt og med samme fortegnsregel. Specielt har $\varphi\frac{f'}{f}$ en hævelig singularitet i a, hvis $\varphi(a) = 0$.

Bevis. Vi har $f(z) = (z-a)^q g(z)$, hvor g er holomorf i en omegn af a og $g(a) \neq 0$, idet $q = p$, hvis a er et nulpunkt, og $q = -p$, hvis a er en pol. Direkte udregning giver

$$(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} = q + (z-a)\frac{g'(z)}{g(z)}, \quad (z-a)\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = q\varphi(z)+(z-a)\varphi(z)\frac{g'(z)}{g(z)}$$

De omtalte residuer er netop værdierne af disse funktioner for $z = a$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 16.2. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f: O \to \mathbb{C}^*$ meromorf og $\varphi: O \to \mathbb{C}$ holomorf. Lad $\Omega \subset O$ være et Gauss-område med orienteret rand $\Gamma \subset O$. Det antages, at f ikke har nulpunkter eller poler på Γ. Lad $a_1,\dots,a_p$ være nulpunkterne og $b_1,\dots,b_q$ polerne for f i Ω hver anført et antal gange svarende til multipliciteten. Da er

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \varphi(a_1)+\dots+\varphi(a_p) - (\varphi(b_1)+\dots+\varphi(b_q)) ,$$

og specielt (for $\varphi = 1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = p-q .$$

Bevis. Følger umiddelbart af sætningerne 11.1 og 16.1.

Hvis f har Laurentrækken $\sum_{n=-\infty}^{p} a_n z^n$ i en omegn af ∞, giver regning med potensrækker, at $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z} + \ldots$, så $\frac{f'}{f}$ bliver holomorf i ∞, men med residuet $-p$, så sætning 16.2 kan anvendes, også hvis $\infty \in \Omega$.

Specielt har en bruden rational funktion lige mange nulpunkter og poler (begge talt med multiplicitet) i hele $\mathbb{C}^*$. Et polynomium af grad p har en pol af orden p i ∞ - derfor netop p nulpunkter. Det var algebraens fundamentalsætning endnu engang.

Et vigtigt korollar er Rouché's sætning.

<u>Sætning 16.3</u>. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f,h: O \to \mathbb{C}$ holomorfe, og $\Omega \subset O$ et Gauss-område med rand $\Gamma \subset O$. Hvis $|h(z)| < |f(z)|$ for alle $z \in \Gamma$, har f og $f+h$ lige mange nulpunkter i Ω.

Bevis. For $t \in [0,1]$ definerer vi $f_t: O \to \mathbb{C}$ ved $f_t(z) = f(z)+th(z)$. Af $|h(z)| < |f(z)|$ for alle z på Γ følger, at f_t ikke har nulpunkter på Γ, og så giver sætning 16.2, at

$$n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)+th'(z)}{f(t)+th(z)} \, dz$$

er antallet af nulpunkter i Γ for f_t . Integraludtrykket viser, at $n(t)$ definerer en kontinuert afbildning $n: [0,1] \to \mathbb{Z}$, men en sådan er konstant, altså specielt $n(0) = n(1)$, så $f_0 = f$ og $f_1 = f+h$ har lige mange nulpunkter i Ω. Dermed er sætningen bevist.

17. Konform afbildning.

Definition 17.1. Lad O_1, $O_2 \subseteq \mathbb{C}^*$ være åbne. En bijektiv afbildning $f\colon O_1 \to O_2$ kaldes konform (eller biholomorf), hvis f er holomorf på O_1 og f^{-1} er holomorf på O_2.

Som holomorfi er defineret på $\mathbb{C}^*$ indebærer det, at et punkt, der ved f eller f^{-1} afbildes i ∞, er en pol.

I virkeligheden bliver f^{-1} automatisk holomorf, når afbildningen er bijektiv. Det fremgår af vor næste sætning.

Sætning 17.2. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f\colon O \to \mathbb{C}$ holomorf, men ikke konstant på nogen komponent af O. Hvis $a \in O$ er et punkt, hvor $f'(a) \neq 0$, har a en omegn U, som ved $f|U$ afbildes konformt på en omegn V af $f(a)$. Hvis $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0$, men $f^{(p)}(a) \neq 0$, har a en omegn U_0, så det for enhver omegn $U \subseteq U_0$ af a gælder, at $f(a)$ har en omegn V, således at hvert punkt $w \in V \setminus \{f(a)\}$ er billede af netop p punkter af U. Billedet $f(O)$ af hele O er en åben mængde.

Bevis. For $a \in O$ har $f(z)-f(a)$ et nulpunkt i a, og vi har $f(z)-f(a) = (z-a)^p g(z)$, hvor g er holomorf i O, $p \in \mathbb{N}$ og $g(a) \neq 0$. Så er $f'(z) = (z-a)^{p-1} g_1(z)$, hvor $g_1(z) = pg(z)+(z-a)g'(z)$, altså $g_1(a) = pg(a) \neq 0$. Betingelsen $f'(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0$, $f^{(p)}(a) \neq 0$ er således ensbetydende med, at nulpunktet a for $f(z)-f(a)$ har multiplicitet p.

Vi vælger en afsluttet cirkelskive $E \subset O$ med centrum a, rand Γ og indre $\mathring{E} = U_0$, således at $f(z)-f(a) \neq 0$ og $f'(z) \neq 0$

for alle $z \in E\setminus\{a\}$. Dette er muligt, da mængden af nulpunkter for $f(z)-f(a)$ og for $f'(z)$ er diskret. Vi definerer V_0 som den åbne cirkelskive med centrum $f(a)$ og radius $\inf\{|f(z)-f(a)| \mid z \in \Gamma\}$. Dette tal er positivt, da Γ er kompakt og $f(z)-f(a)$ kontinuert. Nu giver Rouché's sætning 16.3, at for $w \in V_0$ har $f(z)-f(a)$ og $f(z)-w = (f(z)-f(a)) + (f(a)-w)$ lige mange nulpunkter i V_0, altså netop p nulpunkter talt med multiplicitet.

For $p = 1$ er $U = f^{-1}(V_0)$ en omegn af a, der af $f(U)$ afbildes bijektivt på V_0, og ifølge sætning 2.6 er $f^{-1}: V_0 \to U$ holomorf. Det viser sætningens første påstand.

For $p > 1$ og en omegn $U \subseteq U_0$ af a kan ræsonnementet ovenfor gennemføres for en cirkelskive $E_1 \subset U$ med centrum a, så $f(a)$ har en omegn $V \subseteq V_0$, således at hvert punkt i $V\setminus\{f(a)\}$ har netop p originalpunkter i U. Da $f'(z) \neq 0$ i hvert af disse punkter, har de alle multiplicitet 1, så vi virkelig får p forskellige originalpunkter. Dermed er den anden påstand bevist.

Samtidig har vi fået vist, at $f(a)$ under alle omstændigheder er et indre punkt i $f(O)$, altså $f(O)$ åben. Dermed er sætningen bevist.

Hvis $w = f(z)$ definerer en konform afbildning, altså $f'(z) \neq 0$, er afbildningen $dw = f'(z)dz$ sammensat af en ligedannethed med forholdet $|f'(z)|$ og omdrejning med vinkel $\arg f'(z)$ om 0. Derfor vil en konform afbildning bevare vinkler mellem differentiable kurver og det med uændret drejningsretning, og det lokale forstørrelsesforhold er ens i alle retninger. Lokalt vil den konforme afbildning bevare figurens form, men med en forstørrelse, der varierer fra sted til sted.

Den i kapitel 10 omtalte såkaldte stereografiske projektion af 2-sfæren på planen er ligeledes en konform afbildning. Det samme gælder for Mercators velkendte kortprojektion. På konforme kort er det nemt at bestemme retninger, men vanskeligt at bedømme arealer. Lokalt ser et konformt kort "rigtigt" ud, medens et arealtro kort ser forvrænget ud.

I et nulpunkt for $f'(z)$ får vi en første triviel approksimation af formen $d^p w = f^{(p)}(z)dz^p$, så vinkler mellem differentiable kurver multiplicieres med p og afstande formindskes som p^{te} potens. En lille omegn afbildes viklet p gange rundt om billedpunktet. Man kan få afbildningen bijektiv ved at lade billedet af en omegn være en Riemann-flade med p lag. Punktet, som Riemann-fladen vikler sig rundt om, kaldes et forgreningspunkt. Forgreningspunkter er en slags isolerede singulariteter for flertydige funktioner, og i ældre litteratur omtales de i overensstemmelse hermed.

Hvis O er åben, $a \in O$ et punkt og $f: O \to \mathbb{C}^*$ meromorf undtagen i punktet a, kalder vi a en isoleret singularitet for f. Hvis a hverken er pol eller hævelig singularitet, kaldes a en væsentlig singularitet.

Dette er en yderst beskeden udvidelse af det tidligere indførte begreb. Den eneste nye mulighed er, at a kan være grænsepunkt for en følge af poler.

<u>Sætning 17.3.</u> Lad $O \subseteq \mathbb{C}^*$ være åben, $a \in O$ et punkt og $f: O \setminus \{a\} \to \mathbb{C}^*$ meromorf. Hvis f har en væsentlig singularitet i

a, har a ingen omegn U, for hvilken $U \setminus \{a\}$ afbildes injektivt ved f.

Bevis. Hvis a er grænsepunkt for en følge af poler af f, er det klart, at ingen omegn af a afbildes injektivt. I modsat fald er der en omegn U_0 af a, så $f|U_0 \setminus \{a\}$ er holomorf. Lad U være en vilkårlig omegn af a, og lad $E \subset U \setminus \{a\}$ være en åben cirkelskive, hvis rand ikke indeholder a. Så er $f(E)$ en åben mængde. Lad V være en omegn af a med $U \cap V = \emptyset$. Da $f(V)$ er overalt tæt i $\mathbb{C}$, indeholder $f(V)$ punkter af $f(E)$, og så kan f ikke være injektiv i U. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 17.4. Hvis $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ er meromorf og injektiv, findes der tal $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ med $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, således at $f(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

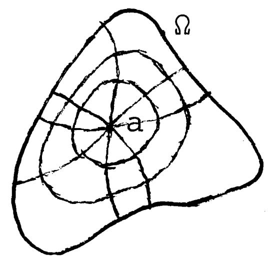
Bevis. Af sætning 17.3 følger, at f ikke har en væsentlig singularitet i ∞. Altså er f en bruden rational funktion. Da f har højst 1 pol og 1 nulpunkt, er tæller og nævner af grad $\leqq 1$. Deffor har f den angivne form, og da f ikke må være konstant, er $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Dermed er sætningen bevist.

Det er klart, at "området Ω_1 kan afbildes konformt på Ω_2" er en ækvivalensrelation på mængden af områder i $\mathbb{C}^*$, og det er nærliggende at spørge om, hvad ækvivalensklasserne er. Dette er et omfattende problem, og det er ingenlunde nemt, men det er næsten fuldstændigt besvaret.

Vi ser, at sætning 17.4 medfører, at $\mathbb{C}^*$ er det eneste område i sin ækvivalensklasse, samt at områderne $\mathbb{C}^* \setminus \{a\}$ for alle $a \in C^*$

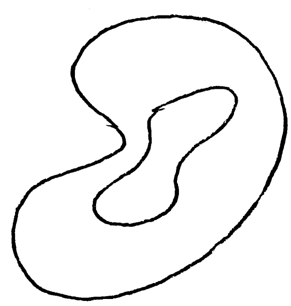
udgør endnu en ækvivalensklasse.

Riemann's afbildningssætning siger, at alle andre enkelt sammenhængende områder (Cauchy-områder) udgør 1 ækvivalensklasse. Dette er svært at vise, og Riemann gav ikke et tilfredsstillende bevis. For en fysiker er sætningen ikke overraskende.



Vi laver et kobberrør med Ω som profil, og lægger en uendelig tynd ledning på langs gennem det. En spændingsforskel giver et potential, som er en harmonisk funktion på tværsnittet. Hvis vi skærer tværsnittet op langs en feltlinie, bliver den harmoniske funktion realdel af en holomorf funktion g, som har et konstant spring langs snittet. Vi normerer, så springet bliver $2\pi i$, og så bliver $e^g = f$ holomorf med nulpunkt i a og konstant numerisk værdi på randen, så f vil afbilde Ω på en cirkelskive.

Det er ikke svært at fylde hullerne i "beviset" ud. Til gengæld er det svært, at give et matematisk bevis for, at det benyttede felt virkelig eksisterer, og en nærmere overvejelse fører til, at den fysiske side af ræsonnementet også er en smule tvivlsomt - men når bare resultatet er rigtigt - og det er det faktisk.



Et ringformet område som det afbildede kan afbildes konformt på en cirkelring, men med tvunget forhold mellem radierne. Det samme fysiske ræsonnement som før gør det sandsynligt. Forholdet mellem radierne har selvfølgelig relation til "kondensatorens" kapacitet, så man må se lidt dybere i fysikken for at nå et resultat.

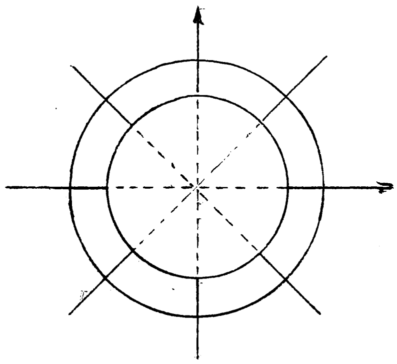
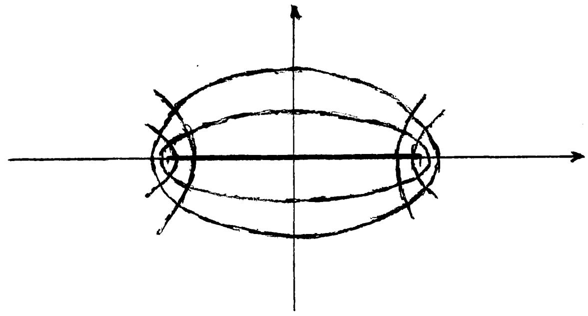
Hvis $f: \Omega \to \Omega_1$ er en konform afbildning, og $g: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ en harmonisk funktion, bliver $g \circ f: \Omega \to \mathbb{R}$ selvfølgelig harmonisk. Derfor kan konform afbildning bruges til at flytte et randværdiproblem til et andet område, hvor det eventuelt er lettere at løse. Dette er en standardmetode i 2-dimensional potentialteori, og derfor er det nyttigt at kunne udføre konform afbildning numerisk eller explicit.

Eksempler. Ved $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ afbildes øvre halvplan konformt på enhedscirkelskiven. For $z = x+iy$ vil z nemlig være nærmere i end $-i$ for $y > 0$, men omvendt for $y < 0$. Den imaginære akse afbildes over i den reelle akse, og anden kvadrant afbildes på den øvre halvcirkelskive. Den omvendte afbildning $z \to -i\frac{z+1}{z-1}$ afbilder den øvre halvcirkelskive på anden kvadrant, så $z \to \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ afbilder den øvre halvcirkelskive på den øvre halvplan. Ved sammensætning med f får vi

$$\varphi(z) = \frac{(z+1)^2-i(z-1)^2}{(z+1)^2+i(z-1)^2} = \frac{(1-i)(z^2+1)+2(1+i)z}{(1+i)(z^2+1)+2(1-i)z} = \frac{z^2+1+2iz}{i(z^2+1)+2z},$$

og φ afbilder den øvre halvcirkelskive på hele cirkelskiven.

Funktionen $f(z) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ afbilder området udenfor enhedscirkelskiven konform på $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Vi får nemlig $f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\theta + i\,\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta$. For fast $r > 1$ afbildes cirklerne med radier r og $\frac{1}{r}$ og centrum 0 på en og samme ellipse med centrum 0, storakse på den reelle akse og halvakser $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ og $\frac{1}{2}|r-\frac{1}{r}|$. For fast θ fås en halv hyperbelgren af en hyperbel med centrum 0 og første akse på den reelle akse. Alle disse keglesnit har brændpunkter ± 1. Funktionen

f afbilder det trivielle elektrostatiske felt om en lang leder med cirkulært tværsnit over i det knap så trivielle felt om en lang leder med elliptisk tværsnit. Læg mærke til, at f afbilder en cirkelring på en ring mellem to confokale ellipser.

Vi har her antydet, hvordan man kan studere konforme afbildninger ved kendte elementære funktioner, og når man så er opmærksom når man finder noget, der kunne være nyttigt, kan man efterhånden udarbejde et katalog over nyttige konforme afbildninger. Adskillige kataloger af denne slags er blevet publiceret.

18. Implicit given funktion.

Sætningen om implicit given funktion kan udledes af sætninger vedrørende reelle variable, men et direkte bevis er lettere.

<u>Definition 18.1.</u> Lad $O \subseteq \mathbb{C}^2$ være åben. En funktion $f: O \to \mathbb{C}$ kaldes holomorf, hvis den er kontinuert og for hver fastholdt værdi af en variabel er en holomorf funktion af den anden.

Det er jo helt ensbetydende med, at f er kontinuert og har partielle differentialkvotienter. En nem anvendelse af sætning 7.2 giver, at disse partielle differentialkvotienter er kontinuerte. Dernæst giver sætning 7.5, at de partielle differentialkvotienter endda igen bliver holomorfe funktioner af 2 variable, så en holomorf funktion af to variable er C^∞. Det er let at vise, at en holomorf funktion af 2 variable lokalt kan udvikles i en konvergent Taylorrække.

Kontinuiteten, der forudsættes i definitionen, er faktisk automatisk til stede, når den anden betingelse er opfyldt, men det er svært at vise.

Sætning 18.2. Lad $O \subseteqq \mathbb{C}^2$ være åben og $f: O \to \mathbb{C}$ holomorf. Lad $(a,b) \in O$ være et punkt med $f(a,b) = 0$, $\frac{\partial}{\partial w} f(a,b) \neq 0$, idet z er den første og w den anden variabel. Da findes omegne U af a og V af b, så $U \times V \subseteqq O$ samt en holomorf funktion $\varphi: U \to V$, således at $((z,\varphi(z)) \mid z \in U)$ netop er mængden af nulpunkter i $U \times V$ for f. Endvidere er $\varphi'(z) = -\dfrac{f'_z(z,w)}{f'_w(z,w)}$, $w = \varphi(z)$.

Bevis. Funktionen $f(a,w)$ har et enkelt nulpunkt i b. Vi kan vælge en afsluttet cirkelskive E med centrum b, rand Γ og indre $\dot{E}$, så $\{a\} \times E \subset O$, og således at $f(a,w) \neq 0$ for alle $w \in E \setminus \{b\}$, og således at $f'_w(a,w) \neq 0$ for alle $w \in E$. Vi vælger $k > 0$, således at $|f'_w(a,w)| \geqq k$ for alle $w \in E$, og $|f(a,w)| \geqq k$ for alle $w \in \Gamma$. Vi vælger en åben cirkelskive U med centrum a, således at $|f'_w(a,w) - f'_w(z,w)| < k$ og $|f(a,w) - f(z,w)| < k$ for alle $z \in U$, $w \in E$. Så giver Rouche's sætning for hvert fast $z \in U$, at $f(a,w)$ og $f(z,w) = f(a,w) + (f(z,w) - f(a,w))$ har lige mange nulpunkter i $\dot{E} = V$. For hvert $z \in U$ har f således netop 1 nulpunkt $(z,\varphi(z))$ i $U\times V$. Derved defineres $\varphi\colon U \to V$.

Af sætning 16.2 med $\varphi(z) = z$ følger nu

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma w\,\frac{f'_w(z,w)}{f(z,w)}\,dw\ ,$$

og derfor er φ holomorf ifølge sætning 7.5.

Da f har kontinuerte partielle differentialkvotienter, kan vi kopiere beviset for kædereglen for funktioner af 2 reelle variable, og da $f(z,\varphi(z))$ er 0-funktionen på U, giver differentiation

$$0 = f'_z(z,\varphi(z)) + f'_w(z,\varphi(z))\varphi'(z)$$

til bestemmelse af $\varphi'(z)$. Dermed er sætningen bevist.

Et tilfældigt polynomium i 2 variable, f.eks.

$$P(z;w) = z^5 + zw^4 + w^5 - w^4$$

giver en algebraisk ligning $P(z;w) = 0$, der bestemmer w som en flertydig funktion af z, i det foreliggende tilfælde 5-tydig. Normalt er de 5 værdier forskellige. Hvis for en værdi af z to rødder har samme værdi w, er $P(z,w) = P'_w(z,w) = 0$. Det giver ligningerne

$$\begin{aligned} z^5 + zw^4 + w^5 - w^4 &= 0 \\ 4zw^3 + 5w^4 - 4w^3 &= 0\ . \end{aligned}$$

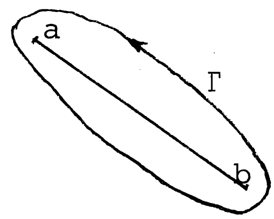
Det giver $z = w = 0$ som en multipel løsning. Resten af løsningerne fås ved at sætte $w = \frac{4}{5}(1-z)$ ind i den første ligning, og det giver en femtegradsligning, så der er yderligere 5 undtagelsesværdier for z.

Lad nu $\mathbb{C}'$ være $\mathbb{C}$ med de 6 undtagelsespuniter prikket ud. Så giver sætning 18.2, at den 5-tydige funktion i omegnen af hvert punkt af $\mathbb{C}'$ faktisk falder i 5 forskellige holomorfe funktioner. Ved analytisk fortsættelse hænger disse lokale løsninger sammen, og de giver i alt en løsning på en Riemann-flade der dækker $\mathbb{C}'$ med 5 lag - og nogle af lagene vil antagelig kunne fortsættes hen over undtagelsespunkterne. Det gælder f.eks. i 0, hvor 4 rødder falder sammen i 0, medens den femte er pænt adskilt og holomorf. For hvert af undtagelsespunkterne gælder, at mindst 2 af bladene er sat sammen som vindeltrappe om punktet.

En flertydig funktion, som den her omtalte, kaldes algebraisk. Niels Henrik Abel studerede algebraiske funktioner ved at se på $\int_\Gamma \frac{dz}{w}$ for forskellige veje på Riemann-fladen. En lukket vej der omkredser et enkelt undtagelsespunkt, giver for det meste integral 0, men det spændende er, at der for det meste er lukkede veje på Riemann-fladen, som ikke deler den, og så bliver integralet i regen ikke 0, og det kan ikke bestemmes ved residueregning.

Eksempel. Ved

$$w^2 = (z-a)(z-b)$$



defineres w som en algebraisk funktion af z. Riemann-fladen har 2 lag, og den fås ved sammenklæbning af 2 eksemplarer af $\mathbb{C}^*$ krydsvis langs liniestykket fra a til b. I en omegn af ∞ er

$$w = \pm z\left(1 - \frac{a+b}{z} + \frac{ab}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z\left(1 - \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{z} + \dots\right),$$

altså

$$\frac{1}{w} = \frac{\pm 1}{z}\left(1 + \frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{z} + \ldots\right),$$

så $\frac{1}{w}$ er holomorf i ∞ i begge blade. Konturen Γ på figuren omkredser ∞ i et af bladene, så vi har $\int_\Gamma \frac{dz}{w} = \pm 2\pi i$. Lader vi Γ konvergere ind mod liniestykket, vil grænseværdierne fra de to sider få modsat fortegn, så vi kan slutte at

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} = \pm \pi i\ .$$

Vi må finde udvej for at præcisere, hvilket blad Γ ligger i, for at bestemme fortegnet. I andre situationer går det let. For $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, kan vi umiddelbart specialisere til

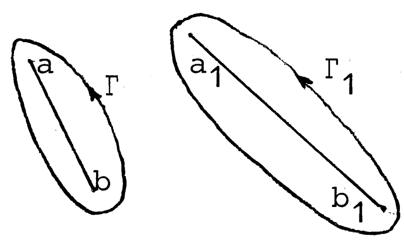
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi,$$

hvilket også kunne udregnes elementært.

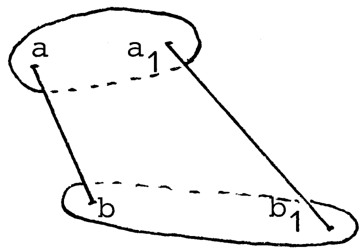
Eksempel. Lad a,b,a_1,b_1 være indbyrdes forskellige komplekse tal. Ved

$$w^2 = (z-a)(z-b)(z-a_1)(z-b_1)$$

bestemmes en 2-tydig algebraisk funktion på en Riemann'sk flade, der fås ved at lime 2 eksemplarer af $\mathbb{C}$ sammen langs veje fra a til b og fra a_1 til b_1, som vist på figuren. I dette tilfælde deler Γ ikke Riemann-fladen, men Γ og Γ_1 er tilsammen rand for et område, der indeholder ∞ i det ene blad.



Det er let at se, at funktionens grene i dette tilfælde har residuum 0 i ∞, og derfor er $\int_\Gamma \frac{dz}{w} = -\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{w}$. Vi kunne også have valgt vejene som på den anden figur, og med et lignende resultat.



Hvis nu ω_1 og ω_2 er værdien af integralerne langs en lukket vej af den første slags og en lukket vej af den anden slags, viser det sig, at enhver anden lukket vej på Riemann-fladen giver et integral med en værdi $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$, hvor $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Der sker nu det mirakuløse, at de mange forskellige omvendte funktioner til $\int_\Gamma \frac{dz}{w}$, hvor Γ er en vej fra et fast punkt a til et variabelt punkt z, netop smelter sammen til en funktion, som er meromorf på hele $\mathbb{C}$ og periodisk med perioderne ω_1 og ω_2 . En sådan funktion kaldes elliptisk.

Hvis vi går videre til kvadratroden af et polynomium af endnu højere grad, går det ikke så pænt mere. Der er plads til 2 perioder i $\mathbb{C}$ - flere end 2 perioder kræver en ubehagelig Riemann-flade med uendelig mange lag.

MAT 224

Ø V E L S E R

ordnede efter kapitler

I

1. Omskriv følgende komplekse tal til formen $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{3+4i} \ , \ \left(\frac{2+i3}{1+i}\right)^2 \ , \ \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \ , \ (1+i\sqrt{3})^4 \ , \ (1+i\sqrt{3})^6 \ .$$

2. Udregn $P(1+i)$, idet $P(z) = z^5 + 2iz^3 - z$.

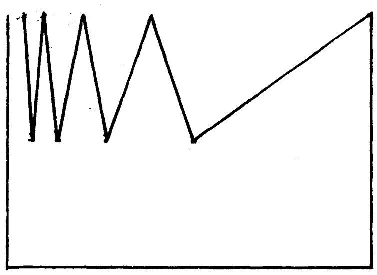
3. Angiv for $a,b \in \mathbb{R}$ løsningen til $z^2 = a + ib$ på formen $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

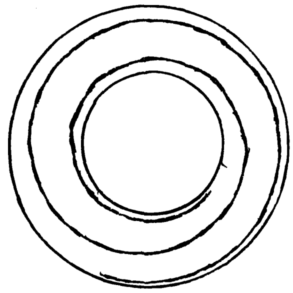
4. Vis ved Moivres formel, at der for hvert $n \in \mathbb{N}$ findes polynomier $P_n(z)$, $Q_n(z)$, således at $\cos nx = P_n(\cos x)$ og $\sin nx = Q_n(\cos x)\sin x$. Angiv (lille fidus) rødderne i disse polynomier.

5. For hvilke positive tal k er $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a|\,|z-b| < k\}$ et område, idet a og b er givne, indbyrdes forskellige komplekse tal.

6. Formuler et bevis for, at den på side 9 tegnede afsluttede mængde ikke er kurvesammenhængende.

7. Her er tegnet 2 eksempler på afsluttede mængder, som går asymptotisk mod et liniestykke hhv. to cirkler.





Angiv antallet af komponenter og af kurvekomponenter for disse mængder og for deres komplementærmængder. Eksakt bevis forlanges ikke, blot en anskuelig forklaring.

8. Bevis formlen $\sum_{k=1}^{n} (a+ (k-1)d)q^{k-1} = a \frac{1-q^n}{1-q} + d \frac{q-nq^n+(n-1)q^{n+1}}{(1-q)^2}$,

og benyt den til reduktion af $\sum_{k=-n}^{n} (1-\frac{|k|}{n})\cos kx =$

$\sum_{k=-n}^{n} (1-\frac{|k|}{n})e^{ikx}$.

II

1. Angiv differentialkvotienten af de differentiable funktioner, der defineres ved

$$\frac{1+z^2}{1-z}, \quad \frac{1}{1+z^2}, \quad 1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} .$$

2. Angiv følgen af differentialkvotienter af den ved $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ definerede vilkårligt ofte differentiable funktion $f: \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{C}$.

3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f,g\colon O \to \mathbb{C}$ differentiable funktioner med $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ for alle $z \in O$. Vis, at $g-f\colon O \to \mathbb{C}$ er lokalt konstant.

4. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f\colon O \to \mathbb{C}$ defineret ved et polynomium. Vi skriver $f(z) = f_r(x,y) + if_i(x,y)$. Vis, at f_r er en løsning til den partielle differentialligning $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. For $f(z) = z^n$ med $n \in \mathbb{N}$ har vi specielt

$$f_r(x,y) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4} x^{n-4}y^4 - \dots$$

$$f_i(x,y) = \binom{n}{1} x^{n-1}y - \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5} x^{n-5}y^5 - \dots$$

hvor summerne i virkeligheden er endelige, altså homogene (d.v.s. alle led har samme totale grad i x og y) polynomier. Vis, at et homogent polynomium i x og y af grad n, som er realdel af et polynomium $P(z)$, er realdel af $A\,z^n$ for et eller andet $A \in \mathbb{C}$.

5. Find real- og imaginærdel af de ved $\cos z$ og $\sin z$ definerede differentiable funktioner og kontroller, at de tilfredstiller Cauchy-Riemann's differentialligninger.

6. Angiv differentialkvotienterne af de i eksempel nederst på side 18 anførte differentiable funktioner.

7. Angiv en kontinuert funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, som er differentiabel i punkterne af enhedscirklen og kun der.

III

1. Udregn $\int_{(a_1,a_2)}^{(b_1,b_2)} ydx + xdy$.

2. Et vektorfelt på $\mathbb{R}^2$ er givet ved $(L(x,y),M(x,y)) = (x,y)$ og et andet ved $(L(x,y),M(x,y)) = (-y,x)$. Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ været et begrænset område med rand Γ , som er stykkevis C^1 . Vis, at strømningen gennem Γ for det første felt er lig med cirkulationen langs Γ for det andet felt. I virkeligheden er disse størrelser proportionale med arealet af Ω . Vis dette, når Ω er et eller andet simpelt som rektangel, cirkel, ellipse etc. - gerne med bekvem beliggenhed. Vis dernæst, at det første felt har cirkulation 0 langs enhver lukket vej, medens det andet har gennemstrømning 0 gennem randen af ethvert begrænset område. Sammenlign med resultatet i eksemplet på side 27.

3. Udregn $\int_0^i \frac{dz}{(1-z)^2}$, $\int_i^{2i} \cos z \, dz$ og $\int_0^{i\pi} e^z \, dz$.

4. Udregn $\int_\Gamma \frac{dz}{\sin z}$, idet Γ er den øvre halvbue af enhedscirklen fra 1 til -1 .
Prøv dernæst at lægge vejen fra 1 til -1 langs den nedre halvbue i stedet.

5. Udregn $\int_\Gamma (x^2-y^2)dx \pm 2xy\,dy$, idet Γ er randen af enhedscirklen orienteret mod uret. Brug først det ene og dernæst det andet fortegn.

6. Udregn $\int_\Gamma \frac{x}{z}\,dz$, idet $z = x + iy$, og Γ er den orienterede rand af det ved $|x| < 1$, $|y| < 1$ definerede kvadrat.

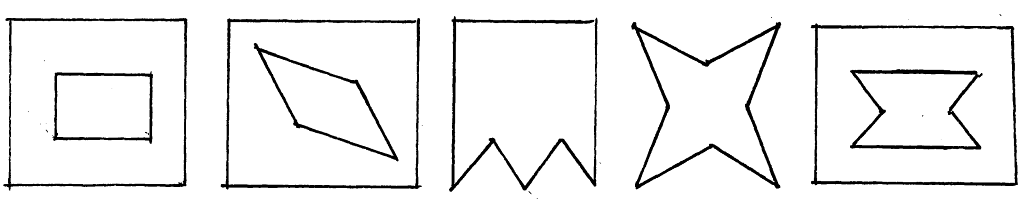
7. Tegn en grafisk afbildning af den ved $f(z) = z^2$ definerede afbildning $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ på den måde, der er beskrevet på side 32.

8. Ved $z^w = e^{w \log z}$ defineres "flertydige" potenser i det komplekse. Vis, at i^i har alle sine værdier reelle og find et par andre komplekse tal ζ og χ , for hvilke ζ^χ har netop den samme mængde af værdier som i^i .

9. Beregn $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$, idet vejen Γ repræsenteres ved $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, hvor $\gamma(t) = (1-t+t^2)e^{6\pi it}$. Skitser vejen.

IV

1. Del en cirkelring i så få elementærområder som muligt. Samme opgave for de nedenfor tegnede områder.



2. Vis, at den i opgave III, 2 omtalte strømning gennem et områdes rand og den samme sted omtalte cirkulation af en anden strømning virkelig som påstået er proportional med

områdets areal for vilkårlige Gauss-områder.

3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $a \in O$ et punkt, og $f\colon O \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ en funktion med kontinuert differentialkvotient. Lad Γ være randen af en trekant, som ligger helt i O og har a i sit indre. Vis, at $\int_\Gamma f(z)dz$ har samme værdi for alle sådanne trekanter, idet Γ orienteres mod uret.

4. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, og lad $f\colon O \to \mathbb{C}$ være en funktion med kontinuert differentialkvotient. Lad $\gamma\colon [a,b] \to O$ repræsentere en vej Γ. Udnyt sætning 4.7 til formulering af en definition af $\int_\Gamma f(z)dz$ uden yderligere antagelser vedrørende differentiabilitet af γ.

5. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være et S-område med symmetricentret a, og lad $f\colon O \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ være en begrænset funktion med kontinuert differentialkvotient. Vis, at f har en stamfunktion i $O \setminus \{a\}$.

6. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være et S-område og $A \subset O$ en afsluttet delmængde. Lad $f\colon O \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion, hvis restriktion til $O \setminus A$ har kontinuert differentialkvotient. Vis, at f har en stamfunktion på hele O, hvis A er et liniestykke på en af symmetriakserne (endda gerne med et endepunkt eller begge på randen af O). Prøv at vise det samme, hvis A er graf for en differentiabel funktion $y = \varphi(x)$, idet $z = x + iy$.

7. Opgave for teori-interesserede. Lad $L, M: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være C^1-funktioner med den egenskab, at det for ethvert kvadrat $[a,b] \times [a,b]$ gælder, at $\int_\Gamma L(x,y)dx + M(x,y)dy = (b-a)^2$, hvor Γ er kvadratets rand gennemløbet mod uret. Vis, at integralet af den samme differentialform langs randen af et vilkårligt Gauss-område er lig med områdets areal. (Hvis man er godt inde i mål- og integralteori, er det ganske let).

8. Prøv at angive alle par $L, M: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ af C^1-funktioner med den egenskab, at både $L(x,y)dx + M(x,y)dy$ og $-M(x,y)dx + L(x,y)dy$ ved integration langs randen af et vilkårligt Gauss-område giver områdets areal. Prøv det samme uden minustegnet i den anden differentialform. (Opgaven er for teoretisk interesserede, og hvis den er for svær, er det en god idé at se på den igen efter kapitel 14.)

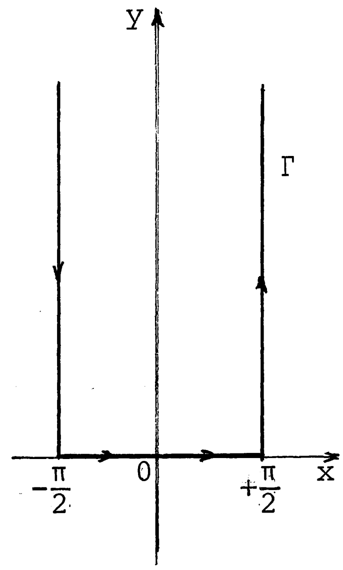
V

1. Udled af sætning 5.1, at $\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ux}{x} dx$ definerer en funktion, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er konstant på $]0,\infty[$ og på $]-\infty,0[$, men diskontinuert i 0.

2. Find $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ og $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \sin ux\, dx$ ved delt integration kombineret med sætningen 5.4 og 5.5. Find dernæst $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \cos ux\, dx$ ved at kopiere beviset for sætning 5.5 med $z^2 e^{-z^2}$ i stedet for e^{-z^2}.

3. Prøv, om $\int_0^{\infty} e^{-ut^2} \cos vt^2\, dt$ og $\int_0^{\infty} e^{-ut^2} \sin vt^2\, dt$ kan bestemmes for positive u og v ved metoden fra beviset for sætning 5.5, idet $a + ia$ erstattes med $a + ia\lambda$ med et $\lambda \in]0,1[$.

4. Lad Γ være integrationsvejen på figuren. Vis, at $\int_{\Gamma} z(\cot z + i)dz = 0$, og udnyt det til udregning af $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$. Find dernæst ved delt integration $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$. Kan en lignende metode bruges til beregning af $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 dx}{\sin^2 x}$?



5. Prøv om det kan lykkes at udregne $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ ved at indtegne $\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)^2$ langs samme vej, som ved udregningen af $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$. Her er $\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + 2i\,\frac{\sin x \cos x}{x^2}$, og bidraget fra den imaginære del er 0, men fra $\frac{1}{x^2}$ kommer et divergent bidrag, og hvis regnestykket skal lykkes må det netop ophæves af et tilsvarende bidrag fra grænseovergangen med den lille halvcirkel. Prøv, om det går.

VI

1. Undersøg, i hvilket omfang relationen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a-ib} = \begin{cases} a+ib\ , & \text{hvis} \quad a^2+b^2<1 \\ 0 & \text{hvis} \quad a^2+b^2>1 \end{cases}$$

ved anvendelse af parameterfremstillingen $z = e^{i\Theta}$, $\Theta \in [0,2\pi]$ for Γ kan bidrage til beregning af integraler af formen

$$\int_0^{2\pi} \frac{A_1+B_1\cos\Theta + C_1\sin\Theta}{A_2+B_2\cos\Theta + C_2\sin\Theta}\, d\Theta\ .$$

2. Lad $a,b \in \mathbb{R}$ og $a < b$. Udregn for $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$ integralerne

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{t^n dt}{t-z} \quad ; \ n = 0,1,2,\ldots\ .$$

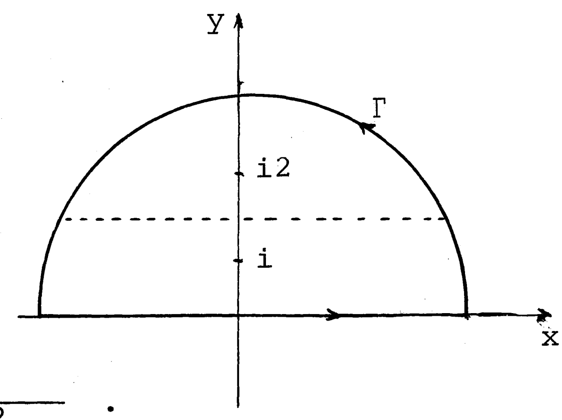
Vis, at de fundne funktioner $f_n\colon \mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}$ har grænseværdier fra oven og fra neden i alle punkter af $]a,b[$ og angiv disse grænseværdier som funktioner af x .

3. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ være et område og Γ en simpel vej i Ω fra et punkt a til et punkt b , og lad $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ være holomorf. Så er $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{1-z}$ en holomorf funktion $F\colon \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$. Cauchy's integralsætning fortæller os, at integralet for fast z forbliver uændret, når vejen flyttes

lidt, blot den stadig går fra a til b. Derved ændres definitionsmængden for F, og det følger umiddelbart, at F har grænseværdien fra begge sider af Γ i punkterne af Γ på nær a og b. Find forskellen mellem grænseværdierne i samme punkt fra de to sider. Prøv at udstrække definitionen af F til en så omfattende Riemann-flade som muligt.

Vis, at $F(z) \to 0$ for $|z| \to \infty$.

4. Ved at "dele" Γ på figuren i to lukkede veje ved den punkterede linie, kan Cauchy's integralformel bruges som i eksemplet side til udregning af

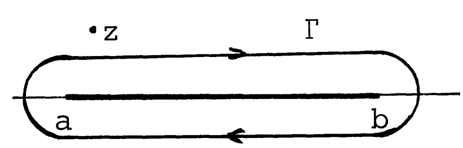


$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z^2+4)} .$$

Udnyt det til udregning af

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} .$$

5. For et interval $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ findes en holomorf funktion $\varphi: \mathbb{C} \setminus I \to \mathbb{C}$ defineret som en kvadratrod $\varphi(z) = \sqrt{(z-a)(b-z)}$, således valgt, at $\varphi(z)$ konvergerer mod den positive $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ for $z \to x \in [a,b]$ fra oven. Lad nu Γ være integrationsvejen på figuren. Vis, at



$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{(\zeta-z)\varphi(\zeta)} = 2\int_a^b \frac{dt}{(t-z)\sqrt{(t-a)(b-t)}} .$$

Udregn det første integral ved Cauchy's integralsætning anvendt på et ringformet område mellem Γ og en cirkel, hvis radius går mod Γ , og bestem derved funktionen

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dt}{(t-z)\sqrt{(t-a)(b-t)}} .$$

6. Lad φ: $[a,b] \to \mathbb{C}$ være kontinuert, og definer en holomorf funktion f: $\mathbb{C} \setminus [a,b] \to \mathbb{C}$ ved

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} .$$

Bevis, at $f(x-iy) - f(x+iy) \to \varphi(x)$ for $x \in\,]a,b[$, når $y \to 0$ fra højre. Det kræver metoder, som kendes fra reel analyse. Vis først påstanden, når $\varphi(t)$ i integralet erstattes med $\varphi(x)$ - så kan det regnes eksplicit. Vurder dernæst det korrektionsled, der fås ved at erstatte $\varphi(t)$ i integralet med $\varphi(t) - \varphi(x)$. Split derved $[a,b]$ i et lille interval om x , hvor kontinuiteten af φ giver en vurdering, samt resten.

VII

1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og φ: $O \to \mathbb{C}$ holomorf. Vis, at $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\varphi(z)}{n!}$ definerer en holomorf funktion f: $O \to \mathbb{C}$.

2. Vis, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\frac{z^n}{n!}} - 1\right)$ definerer en holomorf funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

3. Lad $U \subset \mathbb{C}$ være den åbne enhedscirkelskive. Vis, at en holomorf funktion $f: U \to \mathbb{C}$ defineres ved
$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+\frac{1}{n}z^n}$.

4. For $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $x > 1$, $\xi \in]-1,1[$ definerer vi $(n+\zeta)^z = e^{z \log(n+\zeta)}$ med logaritmens hovedværdi.
Vi definerer $\varphi_\zeta(z) = \varphi_z(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\zeta)^z}$. Vis, at φ_ζ og φ_z bliver holomorfe, og at den ved $\varphi(z,\zeta) = \varphi_\zeta(z) = \varphi_z(\zeta)$ definerede funktion er kontinuert i definitionsområdet. Vis, at vi for $\xi \in]-1,1[$, $1 + \xi \in]-1,1[$ har relationen $\varphi(z,\zeta+1) + \frac{1}{(1+\zeta)^z} = \varphi(z,\zeta)$. Kan dette bruges til at udvide definitionsområdet? Kunne den oprindelige definition generaliseres?

5. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $f: O \to \mathbb{C}$ holomorf, og $\Omega \subset O$ et Gaussområde med rand $\Gamma \subset O$, således at intet $z \in \mathbb{C}$ samtidig tilfredsstiller, at $z \in \Omega$, $-z \in \Gamma$. Så definerer $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta^2-z^2}$ en holomorf funktion $g: \Omega \to \mathbb{C}$.
Hvad er det for en funktion?

6. Lad A være en vilkårlig mængde og (φ_n) en følge af funktioner $\varphi_n: A \to \mathbb{C}$ med den egenskab, at der findes et tal $M > 0$, således at $|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(z)| \leq M$ for alle

$n \in \mathbb{N}$ og alle $z \in A$. For enhver aftagende følge $(b_n) \to 0$ gælder da, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n$ konvergerer ligeligt på A . (Sæt $\sum_{k=1}^{q} \varphi_k(z) = \Phi_q(z)$ og $\Phi_0(z) = 0$. Skriv $\varphi_k(z) = \Phi_k(z) - \Phi_{k-1}(z)$, sorter summen efter faktorerne Φ_k og vurder. Denne metode kaldes Abelsk summation, og den er nyttig, når man skal vise ligelig, men ikke absolut, konvergens.)

7. Vis, at $\tilde{\zeta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^z}$ definerer en for $\operatorname{Re} z > 0$ holomorf funktion, og at $\zeta(z) - 2 \cdot \frac{1}{2^z}\zeta(z) = \tilde{\zeta}(z)$ for $\operatorname{Re} z > 1$. Udvid derved definitionen af $\zeta(z)$. (Vis, at rækken konvergerer ligeligt i $\{z = x + iy \mid x \geqq x_0 > 0 , |x+iy| \leqq A\}$ for alle $x_0 > 0$, $A \in]0,\infty[$. Det går enklest ved at vurdere summen af 2 på hinanden følgende led, altså $\frac{1}{(2n-1)^z} - \frac{1}{(2n)^z} = e^{-z\log(2n-1)} - e^{-z\log(2n)} = e^{-z\log(2n-1)}\left(1 - e^{-z\log(1+\frac{1}{2n-1})}\right)$, idet den numeriske værdi af den sidste faktor for n stor nok kan vurderes ved $\frac{2A}{n}$, og det giver netop en konvergent majorantrække sammen med et bidrag fra den første faktor.)

VIII

1. Vis, at der for hvert $q \in \mathbb{N}$ findes et polynomium $P_q(z)$ af grad q , således at

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^q z^n = \frac{P_q(z)}{(1-z)^{n+1}} ,$$

og angiv en rekursionsformel til udregning af $P_q(z)$.

2. Vis, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ definerer en holomorf funktion $f: U \to \mathbb{C}$, hvor U er den åbne enhedscirkelskive. Vis for $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, at $|f\left(re^{i\frac{p}{q}\pi}\right)| \to \infty$ for $n \to 1$. Udled, at f ikke er restriktion af nogen holomorf funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$, hvor U er ægte delmængde af Ω .
Vis, at $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!+1}}{n!+1}$ definerer en begrænset holomorf funktion $g: U \to \mathbb{C}$, som heller ikke kan udvides til nogen større åben mængde.
Vis, at $b(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n!+1)}}{(n!+1)(n!+2)}$ giver en funktion med de samme egenskaber, og så afbilder den endda injektivt.

3. Vis ved hjælp af opgave VII, 6, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ konvergerer ligeligt på enhver afsluttet bue af konvergenscirklens rand, når den blot ikke indeholder 1.
Hvordan er det med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} z^{4n}$?

4. Når potensrækken for $(1+z)^{\alpha}$ multipliceres med potensrækken for $(1+z)^{\beta}$ fås potensrækken for $(1+z)^{\alpha+\beta}$. Deraf udledes identititen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} .$$

Find en potensrække for $e^{\alpha x}\cos \beta x$ og prøv, om den på lignende måde giver en kombinatorisk relation. Selv $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ giver en kombinatorisk relation, men som man kunne vente, bliver den ikke interessant.

5. Find koefficienterne $a_0, \ldots, a_5$ i potensrækken $e^{\sin z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alle rækkens koefficienter er rationale. Gælder det tilsvarende for $e^{\cos z}$? Funktionen $e^{\sin z}$ er en løsning til differentialligningen $\frac{du}{dz} = u \cos z$. Indsæt potensrækken for $e^{\sin z}$ og find derved en rekursionsformel for koefficienterne. Vis, ved den analoge differentialligning for $e^{\cos x}$, at hvert led i dens potensrække er et rationalt tal gange e. Det kunne nu også ses mere direkte. Hvordan?

6. Laurentrækkerne $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ og $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ antages konvergente for $|z| \in]R_0, R_1[$. Vis, at $f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ er konvergent for $|z| \in]R_0, R_1[$ med $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$, hvor rækken er absolut konvergent.

7. Funktionerne i eksemplet side 72 giver diverse identiteter, når Laurentrækkerne sammenlignes med de relevante produkter af rækkerne for $\frac{1}{1-z}$ og $\frac{1}{2-z}$. Prøv det. En anden mulighed er sammenligning med

$$f(z) = \frac{1}{2-3z+z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(3z-z^2) + \frac{1}{8}(3z-z^2)^2 + \frac{1}{16}(3z-z^2)^3 + \ldots ,$$

hvor de enkelte led udvikles efter binomialformlen.

8. Prøv at forbedre metoden i eksemplet side 72 så den også virker på kvadratet på funktionen. Det er ikke så svært.

9. For et åbent (gerne ubegrænset) interval $]a,b[$ betragter vi strimlen $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]a,b[\}$, samt en holomorf funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ med periode $2\pi i$ (d.v.s. $f(z+2\pi i) = f(z)$ for alle $z \in \Omega$). Vi indfører cirkelringen $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in]e^a,e^b[\}$. Vis, at der findes en holomorf funktion $g\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}_1$, således at $f(z) = g(e^z)$. Laurentrækken for g giver derved en Fourierrække for f. Dan denne og find et integraludtryk for koefficienterne. Lav det analoge for en vandret strimmel og periode 2π. Generaliser til vilkårlig rent imaginær eller reel periode.

10. Lad $\omega \in \mathbb{C}$ have positiv imaginærdel. Vis, at der findes komplekse tal σ,τ, samt en på enhver kompakt delmængde af $\mathbb{C}$ ligelig konvergente række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} = f(z)$, som tilfredsstiller identiteten $f(z+\omega) = e^{\sigma z} f(z)$, Vis, at det for givet ω er muligt at vælge σ, så der både findes løsninger med $f(0) \neq 0$ og løsninger, hvor f har et isoleret nulpunkt i 0. De således konstruerede funktioner kaldes elliptiske theta-funktioner. Sådanne hørende til samme ω og σ giver ved division dobbelt periodiske funktioner, der dog kun er definerede, hvor nævneren ikke er 0.

IX

1. Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, og lad ζ være på konvergenscirklens rand. Lad L betegne radius fra c til ζ eksklusive endepunkterne. Hvis $c_1 \in L$ og ζ er et indre punkt af konvergenscirklen for $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c_1)^n$, da vil dette gælde for ethvert $c_1 \in L$, og vi kalder ζ et regulært randpunkt for konvergenscirklen. I modsat fald kaldes ζ et singulært randpunkt.
Så langt har det været næsten helt indlysende. Vis, at randen af en potensrække konvergenscirkel indeholder mindst 1 singulært punkt. Angiv simple eksempler, der viser, at en potensrække kan konvergere i et singulært punkt på randen af konvergenscirklen, og at den kan divergere i et regulært punkt.

2. Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, og lad c_1 være et punkt i konvergenscirklens indre. Vi siger, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z-c_1)^n$ er opstået ved direkte analytisk fortsættelse af f. Lad $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c')^n$ være en konvergenscirkel, der overlapper den første rækkes. Hvis desuden $f(z) = g(z)$ for alle z i konvergenscirklernes fællesmængde, siger vi, at de to potensrækker er hinandens naboer.
Vis, at der mellem 2 potensrækker, der er hinandens naboer, kan indskydes en endelig sekvens af potensrækker med de oprindelige rækker på første og sidste plads, således at hver række i sekvensen fås ved direkte analytisk fortsættelse af den foregående.

3. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ være et område. Så er $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \Omega\}$ ligeledes et område. Lad $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ være holomorf. Vis, at $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ definerer en holomorf funktion $\overline{f}\colon \Omega^* \to \mathbb{C}$. Lad nu L være et liniestykke på den reelle akse indeholdt i randen af Ω. Vi antager nu, at $f\colon \Omega \cup L \to \mathbb{C}$ er kontinuert med $f(L) \subseteq \mathbb{R}$ og $f|\Omega$ holomorf. Så er $\overline{f}\colon \Omega^* \cup L$ (defineret som før) ligeledes kontinuert og $\overline{f}|\Omega^*$ er holomorf. Opgave IV, 6 giver nu, at f og $\overline{f}$ tilsammen definerer en holomorf funktion i en omegn af L. Eventuelt kan Ω og Ω^* overlappe uden at f og $\overline{f}$ stemmer overens på fællesmængden. Denne metode til konstruktion af en analytisk fortsættelse kaldes Schwarz's spejlingsprincip.

4. For $u \in \mathbb{R}$ bruger vi $[u]$ som betegnelse for det største hele tal $\leq u$. For Riemann's zeta funktion har vi da relationen

$$\zeta(z) = z \int_1^\infty \frac{u-\frac{1}{2}}{u^{z+1}}\, du - z \int_1^\infty \frac{u-[u]-\frac{1}{2}}{u^{z+1}}\, du \quad .$$

Vis denne ved direkte udregning, og vis, at $\zeta(z)$ derved fortsættes analytisk i hele den højre halvplan på nær punktet 1.

Ved gentagen delt integration i det sidste integral kan eksponenten i nævneren øges, og ved strategisk valg af integrationskonstanten ved integration af tælleren, kan periodiciteten af tælleren bevares. Herved bliver det bevist, at $\zeta(z)$ fortsættes analytisk i hele $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Euler-Maclaurin's sumformel ligger bag dette regnestykke. De periodiske funktioner i tælleren er bygget sammen af polynomier, og på $[0,1]$ er det netop følgen af Bernoulli-polynomier.

X

1. Vis i fortsættelse af opgave IX, 4. at $\zeta(z)$ er meromorf i $\mathbb{C}$ med 1 som eneste pol, og find residuet.

2. Angiv nulpunkter, poler, orden singulære dele af Laurent-rækken for

$$\frac{z(z+2)(z+4)\ \dots\ (z+2n)}{(z+1)(z+3)\ \dots\ (z+2n+1)}\ ,\ \frac{1}{z^2+2az+b}\ ,\ \operatorname{tg} z\ ,\ \operatorname{tg} h\ z\ .$$

3. Klassificer singulariteterne for

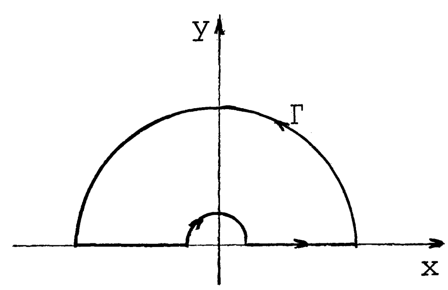
$$e^{1/z},\ \operatorname{tg}\frac{1-z}{1+z}\ ,\ \sin(\operatorname{tg} z)\ ,\ \operatorname{tg}(\pi \sin z)\ .$$

4. Vis, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(qn)!}$ for hvert $q \in \mathbb{N}$ definerer en holomorf funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, som tilfredstiller vurderingen $|f(z)| \leqq e^{\sqrt[q]{|z|}}$, samt at $f(x) > \frac{1}{2q} e^{\sqrt[q]{x}}$, når x er reel og positiv. Vis, at f har en væsentlig singularitet i ∞.

5. På baggrund af opgave 1 er der mening i at spørge, om $\zeta(z)$ har en væsentlig singularitet i ∞. Det er let at se, at $\zeta(x) \to 1$ for $x \to \infty$ langs den positive reelle akse. Lad os betragte $\zeta(2+iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-iy \log n}$. Vis, at $\left|\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-iy \log n}\right| \leqq \frac{1}{3}$. Det medfører, at $|\zeta(2+iy)| \geqq \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cos(y \log 2) + \frac{1}{9}\cos(y \log 3)$. For $y_n = n \cdot \frac{2\pi}{\log 2}$ fås specielt $|\zeta(2+iy_n)| \geqq \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\cos\left(2\pi n \cdot \frac{\log 3}{\log 2}\right)$. Slut heraf (ikke helt let), at $\zeta(2+iy_n)$ ikke kan konvergere med 1 for $n \to \infty$. Det viser, at $\zeta(z)$ har en væsentlig singularitet i ∞. Harald Bohr udnyttede denne ide til et bevis for, at $\zeta(z)$ ikke er begrænset på mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1, |z| > 2\}$.

XI

1. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx$. Råd: Integrer $\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)}$ langs den skitserede vej.



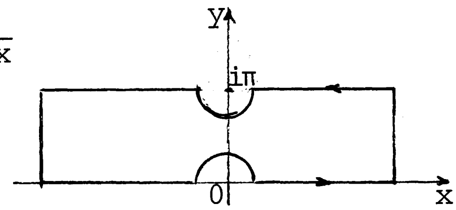
2. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$. Råd: Integrer $\frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ langs vejen fra opgave 1.

3. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\right)^2 dx$.

4. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh x}$. Råd: Integrer $\frac{\varphi(z)}{\cosh z}$, hvor φ er et polynomium, som i eksemplet på side 88, og vælg dernæst φ hensigtsmæssigt.

5. Udregn $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} \cos x \, dx$.

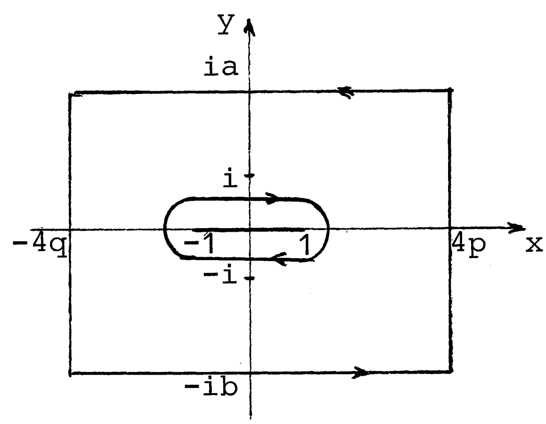
6. Prøv, om det lykkes at udregne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{\sinh x}$ ved at integrere $\frac{z}{\sinh z}$ langs vejen, som er vist på figuren.



7. Forsøg at udregne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\sinh x} dx$.

8. Udregn $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha} dx}{(1+x)^q}$ for $q \in \mathbb{N}$, $q \geqq 2$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ valgt, så integralet konvergerer: Råd: efterlign eksemplet på side 89 .

9. Omskriv $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x \, dx}{x(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ til en konvergent række ved at integrere langs en vej som vist på figuren og derefter lade a,b,p og q gå mod ∞ , idet $p,q \in \mathbb{N}$.



XII

1. Lad $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være en holomorf funktion og α, β reelle tal med $\alpha < \beta$. Det antages, at der findes en følge $(z_n) \to \infty$, således at $|f(z_n)| \leqq |z_n|^{\alpha}$ for n ulige, men

$|f(z_n)| \geqq |z_n|^\beta$ for n lige. Vis, at ∞ er en væsentlig singularitet for f .

2. Lad $O \subseteq C$ være åben, $c \in O$ et punkt og $f\colon O \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ holomorf. Vi antager, at der findes et tal $\alpha \in \mathbb{R}$, således at en af vurderingerne $|f(z)| \geqq |z-c|^\alpha$ eller $|f(z)| \leqq |z-c|^\alpha$ gælder i en omegn af c (og den samme i hele omegnen). Vis, at c er en hævelig singularitet eller en pol for f .

3. Lad $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ være meromorf. Det kan tænkes, at ∞ hverken er hævelig singularitet, pol, eller væsentlig singularitet for f , nemlig, hvis en følge af poler for f går mod ∞ . Vi vil dog kalde ∞ en væsentlig singularitet også i dette tilfælde. Vis, at det i dette tilfælde gælder uændret, at enhver omegn U af ∞ har billedet $f(U \setminus \{\infty\})$ overalt tæt i $\mathbb{C}$. Eksempel er $\operatorname{tg} z$.

4. Vi ved fra kapitel 9, at de i opgave 10 til kapitel 9 omtalte thetafunktioner kun har isolerede nulpunkter, men det fremgår af de i opgaven omtalte egenskab, at der findes et helt gitter af nulpunkter, hvis der overhovedet er nogen. Vis nu, at de ved division konstruerede dobbeltperiodiske meromorfe funktioner virkelig har et gitter af poler, og slut deraf, at thetafunktionerne alle har et gitter af nulpunkter.

XIII

1. Af sætning 13.4 fås ved differentiation en rækkeudvikling af $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \cos \pi z$. Mon det er gennemførligt at vise denne ved et "Erasmus-Montanus-bevis", i lighed med sætning 12.1 og derved få et nemmere bevis for sætning 13.4? Måske er det aller lettest at udnytte omskrivningen

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 \cos \pi z = \frac{2\pi^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} z}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2} z}\right)^2 .$$

2. Udled sætning 13.4 ved at udregne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\pi d}{(\zeta - z) \sin \pi\zeta} ,$$

idet Γ er randen af rektanglet $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid -p-\frac{1}{2} < x < q+\frac{1}{2} , y \in]-A,B[\}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $A,B \in]0,\infty[$, og derefter foretage grænseovergang $A \to \infty$, $B \to \infty$ fulgt af $p \to \infty$, $q \to \infty$.

3. Prøv, om det er muligt at finde rækkeudviklingen på samme måde som i sætningerne 13, 1, 2,4 af $\frac{1}{e^z - 1}$. Det viser sig, at det støder på principielle vanskeligheder. Vis, at det går bedre med $\frac{1}{z^2+1}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Kan rækkeudviklingen i dette tilfælde også fås ved at multiplicere den kendte udvikling af $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ med $\frac{1}{z^2+1}$ og derefter dekomponere hvert led?

4. Prøv at kopiere regnestykket på nederste trediedel af side 99 for $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)$. Derved bringes nogle andre uendelige rækker i forbindelse med potenser af π .

XIV

1. Lav lidt om på beviset for sætning 14.5 og udled derved for $f(z) = g(z) + ih(z)$, at

$$h(a+re^{i\varphi}) = h(a) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+Re^{i\theta}) \frac{2Rr\sin(\theta-\varphi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta ,$$

altså

$$f(a+re^{i\varphi}) = ih(a) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(a+Re^{i\theta}) \frac{R^2-r^2-i\cdot 2Rr\sin(\theta-\varphi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta .$$

Antag nu, at $|g(a+Re^{i\theta})| \leqq M$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$ og vis vurderingen

(1) $$|f(a+re^{i\varphi})| \leqq |h(a)| + M\frac{R^2+r^2}{(R-r)^2} .$$

Det er selvfølgelig interessant, at en vurdering af realdelen "næsten" giver en vurdering af hele f , men det er endnu mere interessant, at det går næsten lige godt på basis af en ensidig vurdering $g(a+Re^{i\theta}) \leqq M$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$, idet middelværdisætningen ret let giver vurderingen $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(a+Re^{i\theta})|\,d\theta \leqq 2M - f(a)$, og så fås en modificeret form af (1). Dette er i det væsentlige Caratheodory's ulighed - den rigtige er en anelse skarpere.

Udnyt den til et bevis for, at en hel funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, som tilfredsstiller en vurdering $\mathrm{Re}\, f(z) \leq A + B|z|^{\alpha}$ for faste positive A, B, α, må være et polynomium.
En hel funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siges at have endelig orden, hvis den tilfredsstiller en vurdering $|f(z)| \leq Ae^{B|z|^{\alpha}}$.
Vis, at en nulpunktsfri hel funktion af endelig orden har formen e^P, hvor P er et polynomium.
Vis, at hvis $g(a+Re^{i\theta}) = 0$ for alle θ i et vist åbent interval, kan f fortsættes analytisk ud over den tilsvarende bue af cirkelperiferien.

2. Vis (f.eks. geometrisk), at $\log(R+Re^{i\theta})$ for $\theta \in]-\pi,\pi[$ har imaginærdel $\frac{1}{2}\theta$, og udnyt dette til at udlede bestemte integraler ved hjælp af Poisson's formel. Brug opgave 1 - og husk, at det er nemt at få real- og imaginærdel til at bytte roller.

3. Givet en bue I på randen Γ af vor cirkelskive U. Angiv en i det indre af U harmonisk funktion, som går mod 1 i alle punkter af I og mod 0 i alle punkter af $\Gamma \setminus I$. Råd: Funktionen må jo have singulariteter i endepunkterne af I. Prøv med imaginærdelen af logaritmen til en funktion med simpel pol i det ene og simpelt nulpunkt i det andet endepunkt.
Udnyt dette til generalisation af sætning 14.6 til det tilfælde, hvor ξ har isolerede singulariteter, der er simple spring.

XV

1. Lad Ω være et begrænset område og $g,h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmoniske funktioner med den egenskab, at $h-g$ har grænseværdi 0 i ethvert randpunkt. Vis, at $g = h$ ved hjælp af maksimumspricippet. I teorien for partielle differentialligninger hænder det ikke så sjældent, at der gælder et maksimumsprincip for løsningerne, så man på samme måde kan slutte, at et randværdiproblem har højst 1 løsning.

2. Lad $V \subset \mathbb{C}$ være en vinkel givet ved $V = \{|z| \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg} z| \} \leqq \alpha$, $\alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. Lad $f\colon V \to \mathbb{C}$ være kontinuert, og $f|V$ holomorf. Det antages, at $|f(z)| \leqq M$ for alle z på randen af V (0 regnes med). Vis, at hvis f er begrænset i hele V , er $|f(z)| \leqq M$ i hele V . Råd: Studer $\frac{f(z)}{1+\varepsilon z}$ for en passende lille, positiv værdi af ε .
Forsøg nu at forbedre metoden og dermed resultatet. Går det for $\alpha > \frac{\pi}{2}$? Går det at erstatte kravet om, at f skal være begrænset i V med et krav om gyldighed af en vurdering $|f(z)| \leqq A + B|z|^{\beta}$? Går det endda med en vurdering $|f(z)| \leqq A\, e^{|z|^{\beta}}$?
Hvis disse forsøg er gået nogenlunde godt, kan det nu vises, at $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(qn)!}$ for $q \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ ikke er begrænset på nogen halvlinie med endepunkt 0.
Prøv at finde lignende resultater, hvor V er erstattet

med en strimmel.

De stærkest opnåelige sætninger af den her omtalte slags kaldes Phragmen-Lindelöf-sætninger.

3. Lad $f: \mathbb{C} \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ være defineret ved $f(z) = \sum_{n=-p}^{-1} a_n(z-c)^n$. For $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$, $R > |c_1-c|$ findes der en funktion $g: \mathbb{C} \setminus \{c_1\} \to \mathbb{C}$ givet ved $g(z) = \sum_{n=-q}^{-1} b_n(z-c_1)^n$, således at $|f(z)-g(z)| \leqq \varepsilon$ for alle $z \in \mathbb{C}$ med $|z-c_1| \geqq R$, idet $\varepsilon > 0$ er forud opgivet. Dette er Runges polforskydningsmetode. Polen flyttes et lille stykke, og bortset fra den nærmeste omegn af polen ændres funktionen derved meget lidt.

Lad nu $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ være et område med ∞ som randpunkt, og lad $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}^*$ være en kurve, der ligger i Ω bortset fra $\gamma(1) = \infty$. Vælg $f(z) = (z-\gamma(0))^{-1}$ og flyt polen i små skridt langs kurven, idet Runges polforskydningsmetode benyttes. Vis, at det på denne måde lader sig gøre at konstruere en følge af meromorfe funktionen, som konvergerer mod en ikke konstant, hel funktion, der er begrænset på $C \setminus \Omega$.

Her kan Ω være et særdeles smalt bånd, der strækker sig i det uendelige. Det fremgår af opgave 2, at den konstruerede hele funktion i så fald må blive meget stor i båndet. Hvad sker der med funktionen, hvis Ω er et sådant bånd, som krydser sig selv, så der bliver en løkke på γ ?

XVI

1. Opskriv den første formel i sætning 16.2 i specialtilfældet $f(z) = z-a$.

2. Udregn $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2}\,dx$ ved sætning 16.2 med $f(z) = 1+z^2$, $\varphi(z) = e^{iz}$, idet Γ er en halvcirkel med diameter $[-a,a]$.

3. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben og $f,g: O \to \mathbb{C}^*$ meromorfe. Lad $\Omega \subset O$ være et Gauss-område med orienteret rand $\Gamma \subset O$. Det antages, at hverken f eller g har nulpunkter eller poler på Γ , samt at intet punkt af Ω samtidigt er nulpunkt eller pol for f og nulpunkt eller pol for g . Lad nu $a_1,\dots,a_p$ være nulpunkterne og $b_1,\dots,b_q$ polerne for f i Ω , og lad $u_1,\dots,u_m$ være nulpunkterne og $v_1,\dots,v_n$ polerne for g i Ω . Vis formlen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)g'(z)}{f(z)g(z)}\,dz =$$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g'(a_j)}{g(a_j)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{f'(u_k)}{f(u_k)} - \left(\sum_{j=1}^{q} \frac{g'(b_j)}{g(b_j)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f'(v_k)}{f(v_k)} \right).$$

Vis en analog sætning om integraler af formerne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\frac{f'(z)g'(z)}{f(z)g(z)}\,dz \quad \text{og} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)g'(z)h'(z)}{f(z)g(z)h(z)}\,dz .$$

Benyt disse resultater til udregning af

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)(x+2)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+4x+5)} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)(x+2)\cos x}{(x^2+2x+2)(x^2+4x+5)} dx$$

4. Hvor mange af rødderne i polynomiet $1 + 4z^2 + z^5$ ligger indenfor enhedscirklen? Er de reelle? Har polynomiet reelle rødder?

5. Vis, at $f(z) = a - 8z^2 + z^4 + e^{-z}$ for $a \in [1,\infty[$ har netop 2 nulpunkter i højre halvplan.

6. Find antallet af nulpunkter i højre halvplan for polynomiet $1 + z^2 - z^3$. Råd: Skitser billedet af den imaginære akse ved afbildningen $z \to 1 + z^2 - z^3$, og vis derved, at et kontinuert argument af $1 + z^2 - z^3$ ved gennemløb af den imaginære akse med orienteringen ændrer sig med $-\pi$. Den imaginære akse "lukkes af" med en stor halvcirkel, og det er let at se, at et kontinuert argument af $1 + z^2 - z^3$ ved gennemløb af denne vil ændre sig med en størrelse, der går mod 3π, når radien går mod ∞. Den totale ændring bliver således 2π svarende til 1 nulpunkt.
Det kunne selvfølgelig klares nemt ved elementære midler, idet polynomiet med de reciproke rødder er $1 - z - z^3$, og det har åbenbart en positiv reel rod, og så er de to andre enten komplekst konjugerede eller reelle med samme fortegn, så det hele følger af, at rødderne i denne ligning har sum 0.

7. Find $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin 2\pi x \operatorname{tgh} x \, dx$ ved at anvende sætning 16.2 på $f(z) = \sinh z$, $\varphi(z) = e^{-z^2}$, idet Γ vælges som rektanglet med hjørner $\pm a$ og $\pm a + i\pi$.

8. Der findes en sammenhængende, åben omegn $V \subset \mathbb{C}$ af 0, således at $\sin z$ i cirkelskiven $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{3}{2}\pi\}$ for hvert $w \in V$ antager værdien w netop 3 gange. Anvend sætning 16.2 med $f(z) = \sin z - w$, $\varphi(z) = z^p$, $p \in \mathbb{N}$, $\Omega = U$, og vis derved, at summen af de p^{te} potenser af de 3 tal i U, hvor værdien w antages, er en holomorf funktion af w. Heraf udledes ved hjælp af lidt elementær algebra, at der findes holomorfe funktioner $a_1, a_2, a_3\colon V \to \mathbb{C}$, således at polynomiet $z^3 + a_1(w)z^2 + a_2(w)z + a_3(w)$ for hvert $w \in V$ som rødder har netop de løsninger til $\sin z = w$, som ligger i U. Dette er interessantere, hvis U forskydes lidt mod venstre eller højre, idet V da kan vælges, så polynomiet får multiple rødder i et punkt af V, og så er de 3 løsninger ikke "hver for sig" holomorfe i hele V.

XVII

1. En strimmel i $\mathbb{C}$ defineres ved $\Omega = \{z = x+iy \mid |y-\alpha x| < \pi\}$, idet α er et positivt tal. Bestem $f(\Omega)$, idet $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er $f(z) = e^z$.

2. Vis, at den ved $f(z) = z^2$ definerede afbildning $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ afbilder en halvplan, som ikke indeholder 0 eller har 0 som randpunkt, på området udenfor en parabel, og at den afbilder området indenfor en gren af en ligesidet hyperbel med centrum 0 på en halvplan. Konstruer derefter konforme afbild-

ninger af områderne udenfor en parabel eller indenfor en gren af en ligesidet hyperbel på enhedscirkelskiven.

3. Konstruer en konform afbildning af en cirkelbuetokant på enhedscirkelskiven. Læg mærke til, at cirkelbuetokanten fastlægger et par af ortogonale cirkelbundter, som ved afbildningen overføres i et par af ortogonale cirkelbundter.

4. Vis, at de ved $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^2-a^2| = k^2\}$, $k > 0$, $a > 0$ af den ved $f(z) = z^2$ definerede afbildning føres over i cirkler. For hver fast værdi af a fås et bundt af koncentriske cirkler. Vis, at de kurver, der afbilder i de rette linier gennem det fælles centrum, er de ligesidede hyperbler, der går gennem a og $-a$ og har centrum 0. Tegn for en fast værdi af n en skitse af de to kurvesystemer. Det går ikke uden en del regnearbejde.

5. Denne opgave ligner et helt projekt, men den er nu ikke så svær. Lad a og b være positive tal og $a < b$. Vi definerer $f(z)$ i den øvre halvplan som den holomorfe gren af $\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}$, der fastlægges ved, at $f(0) = ab$. Der findes så en stamfunktion F til $\frac{1}{f}$ i hele den øvre halvplan. Vi fastlægger den, således at $F(0) = 0$.
Vis nu først, at F har en kontinuert udvidelse til den afsluttede øvre halvplan, og vis, at F har en endelig grænseværdi for $z \to \infty$ i den øvre halvplan.
Vis, at $F|\mathbb{R}$ kan bestemmes ved integration langs $\mathbb{R}$, og udled deraf, at $F(\mathbb{R})$ er rand af et rektangel $\Omega \subseteqq \mathbb{C}$.

Vis, at et nærmere studium af et kontinuert argument af F, at F afbildes den øvre halvplan konformt på Ω.
Nu giver opgave 9.3, at $F^{-1}: \Omega \to \mathbb{C}$ har en analytisk fortsættelse $s: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, som er meromorf i hele planen.
Hvor er dens poler, og hvad er deres multiplicitet?
Vis, at s er periodisk med to perioder, der er lineært uafhængige over $\mathbb{R}$. Meromorfe funktioner, der udviser en sådan dobbelt periodicitet, kaldes elliptiske: Det kan vises, at der for hvert valg af et periodegitter udspændt af 2 lineært uafhængige perioder findes elliptiske funktioner. En sådan funktion behøver man blot at undersøge i et enkelt periodeparallellogram fra gitret, idet den blot vedbliver at gentage sig selv.
Det er klart, at mængden af elliptiske funktioner hørende til et givet periodegitter udgør et legeme af funktioner, afsluttet med hensyn til differentiation. En hel, elliptisk funktion er konstant.
Vis, at polerne for en elliptisk funktion i et periodeparallellogram har residuer med sum 0. Talt med multiplicitet er der således mindst 2 poler. Vis ved hjælp af sætning 16.2, at en elliptisk funktion antager hver værdi i $\mathbb{C}^*$ det samme antal gange pr. periodeparallelogram. Vis dernæst, at summen af de punkter i periodeparallellogram, hvor en værdi a antages, kun ændres med en periode ved ændring af a.
De elliptiske funktioner er blevet særdeles grundigt undersøgt, og de er nok de bedst kendte blandt alle ikke elementære funktioner. De optræder i mange fysisk-tekniske anven-

delser, dels fordi de kan afbilde et rektangel konformt på en halvplan, dels fordi de er løsninger til visse ikke lineære differentialligninger, hvis lineære approksimation har løsninger, der udtrykkes ved trigonometriske funktioner.

6. Vis, at $\psi(z) = \frac{R^2(z-a)}{R^2-\bar{a}z}$ for $|a| < R$ definerer en afbildning $\psi: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, som afbilder cirkelskiven med centrum 0 og radius R bijektivt på sig selv. Hvis nu f er harmonisk i cirkelskiven (kontinuert i den afsluttede cirkelskive), gælder det samme for $f \circ \psi^{-1}$, og middelværdisætningen giver, at $f(z) = f(\psi^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi^{-1}(Re^{i\Theta}))d\Theta$. Prøv i dette integral at substituere den af ψ ved restriktion til randen definerede afbildning udtrykt i vinkelmål, og find derved et nyt bevis for Poisson's formel.

7. Lad E være cirkelskiven med centrum 0 og radius R, og lad $f: E \to \mathbb{C}$ være holomorf og $\operatorname{Re} f(z) < M$ for alle $z \in E$. Lad $\varphi: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ være en homografi, der afbilder den ved $\operatorname{Re} z < M$ definerede halvplan bijektivt på enhedscirkelskiven, således at $f(a)$ afbildes i 0. Angiv en sådan homografi eksplicit. Nu kan $\varphi \circ f$ vurderes ved hjælp af Schwarz's lemma. Oversæt denne vurdering til en vurdering af $f(z)$ ved M, $F(a)$ og $|z|$. Dette giver den stærkeste form af Caratheodory's ulighed.

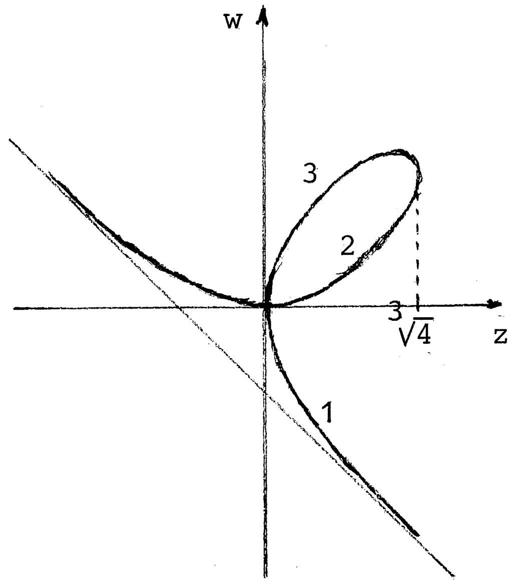
XVIII

1. Vis, at polynomiet $w^4 - zw - 1$ for z i en omegn af 0 har 4 rødder, som er holomorfe funktioner af z. Find begyndelsen af potensrække udviklingen for den rod $w = \varphi(z)$, der tilfredsstiller, at $\varphi(0) = 1$. Læg mærke til, at polynomiet kan skrives $(iw)^4 - (-iz) \cdot iw - 1$, og udnyt det til at finde begyndelsen af potensrækkeudviklingerne for de andre rødder. Angiv konvergensradius.
   Polynomiets reelle nulpunkter udgør en reel algebraisk kurve sammensat af 2 grene, som strækker sig i det uendelige. Skitser denne kurve, og vis, at polynomiet har 2 reelle rødder $w = \psi_1(z)$ og $w = \psi_2(z)$, som er holomorfe på hele $\mathbb{R}$.
   Vis også, at polynomiet i en omegn af ∞ har 1 holomorf rod, som har nulpunkt i ∞, medens de øvrige rødder giver en 3-tydig forgrenet løsningsfunktion.

2. Vis, at ligningen $(w^2+z^2)^2 - 2(z^2-w^2) = 0$ for z i en omegn af 0 har 4 løsninger, der er holomorfe funktioner af z. Angiv de værdier af z, for hvilke polynomiet ikke har 4 forskellige rødder.
   Den reelle løsningsmængde for ligningen er den velkendte lemmiskat, en kurve af form som et liggende ottetal med selvgennemskæring i $(0,0)$. Diskussionen ovenfor viser, at selvgennemskæringen i dette tilfælde er en meget uskyldig singularitet.
   I virkeligheden er lemmiskaten en såkaldt unikursal kurve,

d.v.s. den har en parameterfremstilling $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, hvor φ og ψ er rationale funktioner. Eftervis dette ved for hvert fast t at bestemme lemniskatens skæringspunkt med den cirkel, som har ligningen $x^2 + y^2 = t(x+y)$. Der bliver selvfølgelig mange skæringspunkter, men fidusen er, at de alle på 1 nær falder sammen i $(0,0)$.

3. Den reelle løsningsmængde til ligningen $w^3 - 3zw + z^3 = 0$ kaldes Descartes' blad. En rational parameterfremstilling fås ved for hvert $t \in \mathbb{C}$ at udtrykke koordinaterne til skæringspunktet med den ved $w = tz$ bestemte rette linie ved t . Descartes' blad ser ud som skitseret på figuren. De nummererede dele af kurven giver holomorfe reelle løsningsfunktioner 1 på $]0,\infty[$, 2 på $]-\infty,\sqrt[3]{4}[$ og 3 på $]0,\sqrt[3]{4}[$. Der er ialt 4 værdier af z , i hvis omegn ligningen ikke har 3 holomorfe løsninger. Angiv disse værdier, og vis, at der findes 1 holomorf løsning i en omegn af hvert af de 4 punkter, medens de 2 andre løsninger er definerede på en Riemann-flade med 2 blade over omegnen. (Udnyt, at ligningen er invariant ved transformation $z = \varepsilon z_1$, $w = \varepsilon^{-1} z_1$, når ε er en kubikrod af 1.)



Undersøg, hvordan ligningens Riemann-flade er opbygget globalt, idet bladene identificeres med de på figuren med 1, 2 og 3 betegnede løsninger. Undersøg også, om Riemann-fladen er forgrenet i ∞ .

FORELÆSNINGSPLAN

1. forelæsning når til side 14, idet indledningen behandles kursorisk.
2. forelæsning når til side 24.
3. forelæsning når til side 34.
4. forelæsning når til side 46. Beviset for sætning 4.5 udelades.
5. forelæsning når til side 55.
6. forelæsning når til side 65.
7. forelæsning når til side 75.
8. forelæsning når til side 84.
9. forelæsning når til side 93.
10. forelæsning når til side 103.
11. forelæsning når til side 112.
12. forelæsning når resten.

I forårssemestre med kun 11 forelæsninger følges planen for de 9 første forelæsninger, medens det resterende stof afkortes, så det kan nås på 2 forelæsninger.

Eksamen

Eksamen i matematik 224 er en 2 timers skriftlig prøve. Opgavesættet vil bestå af nogle spørgsmål, som kan besvares kort, samt en residueregningsopgave. Der vil blive angivet et minimumskrav, f.eks. rigtig besvarelse af 80% af spørgsmålene og halvdelen af residueopgaven. Der vil være sørget for, at spørgsmål og opgaver kan besvares af enhver eksaminand, som har sat sig godt ind i de første 11 kapitler af forelæsningsnoterne, som i øvrigt må medbringes til eksamen ligesom andre sædvanlige hjælpemidler. Lommeregnere vil ikke være til megen nytte.

Opgavesættet vil være suppleret med nogle alternative spørgsmål og alternative opgaver. Disse vil kunne erstatte de regulære spørgsmål og opgaver efter regler, der vil være anført. Det kan tænkes, at løsning af de alternative spørgsmål og opgaver kræver kendskab til de sidste kapitler i noterne, så det giver en ekstra chance for at klare eksamen, at man også interesserer sig for dette stof.

Disse pensumregler vil være gældende ved kommende eksamener, indtil der i god tid gives meddelelse om, at ændrede regler kan ventes.

H. Tornehave

Prototype på et sæt eksamensopgaver i Mat 224.

Alle hjælpemidler er tilladt, også lommeregnere.

For at bestå eksamen kræves 80 % af spørgsmålene og 50 % af residueregningsopgaven korrekt besvaret. Heri er de alternative spørgsmål og opgaver ikke medregnet, men besvarelsen af disse kan opveje mangler i besvarelsen af de egentlige spørgsmpl og de egentlige opgaver.

Spørgsmål til kort besvarelse.

1. Angiv nulpunkterne for $\sin z^2$ og angiv deres multipliciteter.

2. Hvad er residuet af $\cot(z-\sin z)$ i punktet $z = 0$.

3. Hvilke singulariteter har $\frac{1+z^2}{1+z^4}$, og hvad er residuerne i disse singulariteter.

4. Lad Γ være liniestykket fra $a^2 - ia$ til $a^2 + ia$. Er det rigtigt, at $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$ går mod 0, når a går mod ∞ .

5. Find værdien af $\int_\Gamma e^z z^{-1}\,dz$, idet Γ er en cirkel med centrum 0 gennemløbet mod uret.

Alternative spørgsmål.

A1. Find værdien af $\int_\Gamma \frac{1+z^2}{1+z^4}\,dz$, idet Γ er en cirkel med centrum 0, og radius > 1 gennemløbet mod uret.

A2. Find $\int_\Gamma \cos\frac{1}{z}\sin z\, dz$, idet Γ er en cirkel med centrum 0 gennemløbet mod uret.

Residueregningsopgave.

Find $\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}\, dz$, idet Γ er en uendelig ret linie parallel med den imaginære akse, skærende den reelle akse et positivt tal og gennemløbet i den retning, hvor imaginærdelen vokser. Råd: Benyt en integrationsvej sammensat af et segment af Γ og en cirkelbue med centrum 0, således at vejen omslutter polerne.

Alternative opgaver.

AI. Vis, at $(\cot z)^4$ har en stamfunktion, som er meromorf i hele $\mathbb{C}$.

AII. Vis, at en i hele planen meromorf funktion kan defineres ved $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}\,\sin\sqrt{z}}$. Lad Γ_n være cirklen med centrum 0 og radius $(n+\frac{1}{2})^2$. Vis, at $\int_{\Gamma_n} f(z)dz$ konvergerer mod en endelig grænseværdi, når $n \to \infty$.

Lidt bibliografisk vejledning

Af hensyn til utilfredse læsere, der ønsker at se teorien fra en anden synsvinkel, videbegærlige læsere, der gerne vil fortsætte længere med teorien, og uheldige forhenværende læsere, der af omstændighederne tvinges til at skaffe sig nærmere oplysninger om specielle sider af teorien, anfører vi her lidt oplysninger om den omfattende litteratur om funktoner af komplekse variable.

Vi begynder med at nævne nogle af de andre små lærebøger. Der findes en forfærdelig masse.

C. J. O. Jameson. A first course on complex functions. London 1970. Den har tidligere været grundlag for mat. 224. Den er af lignende omfang som forelæsningsnoterne, nærmest lidt mere teoretisk.

Lars V. Ahlfors. Complex Analysis. New York 1953.
Den indeholder omtrent dobbelt så meget stof som forelæsningsnoterne. Traditionel.

Henri Cartan. Théorie élémentarie des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Paris 1861. Der findes en engelsk oversættelse.
Omfang som den foregående. Den er et interessant forsøg på en mere moderne fremstilling.

Leif Mejlbro. Kompleks Funktionsteori. Matematisk Institut, Danmarks tekniske Højskole.
Forelæsningsnoter til et dobbelt så stort kursus som mat. 224. De indeholder en del anvendelsesorienteret stof.

Vi fortsætter nu med egentlige håndbøger i hele teorien.

W. F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie. 1906, 3. udgave næsten uændret, Springer 1920.
Gammeldags, men udmærket. Lærebogens andet bind om flere variable og om abelske funktioner virker til gengæld ret forældet. Nyere lærebøger af samme forfatter er mindre interessante.

L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie. Leipzig. I, 1921. II, 1927.
Solid, men ikke særlig spændende. Afsnittene om gamma- og zeta-funktionen kan anbefales.

A. Hurwitz, R. Courant. Vorlesung über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Springer 1922, 4. udgave 1964.
Interessant.

E. C. Titchmarsh. Theory of Functions. Oxford 1932, 2. udgave 1939.
Den har et usædvanligt udvalg af emner, så det anbefales at se i den, hvis man ikke finder, hvad man søger, hos de andre.

C. Caratheodory. Funktionentheorie. Basel 1950.
Solid, men hænger måske lidt for meget i et specielt synspunkt.

S. Saks, A. Zygmund. Analytic Functions. Warszawa 1952.
Trods ringe størrelse er den let læselig og ganske indholdsrig.

A. I. Markuševič. Teorija analitičeskih funkziĭ. Moskva 1956.
Oversættelse. Theory of functions of a complex variable. N. Y. 1967.
Det er en stor og indholdsrig håndbog. På vort bibliotek findes kun bd. III af oversættelsen, men det er heldigvis det interessanteste - og så har vi da heldigvis originalteksten.

E. Hille. Analytic Function Theory. Boston I, 1959. II, 1962.
Det skal være en god bog. Jeg har ikke selv læst den.

H. Bennke, F. Sommer. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer 1962.
Denne, samt bogen af Markuševič, er nok de mest indholdsrige blandt de eksisterende håndbøger i emnet.

Der er efterhånden skrevet adskillige bøger om funktioner af flere komplekse variable. Her skal blot anføres 2 eksempler, men i dem kan man finde mere udførlige bibliografier.

H. Crauert, K. Fritzsche. Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Springer 1974.
En moderne fremstilling af begyndelsesgrundene.

H. Behnke, P. Thullen. Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Springer 1934. Helt omarbejdet udgave ved R. Remmert 1970.
En righoldig oversigt over teoriens udvikling, men uden detaljerede beviser. Omfattende bibliografi.

Vi slutter denne oversigt med nogle håndbøger af mere speciel karakter.

W. von Koppenfels, F. Stahlmann. Praxis der konformen Abbildung. Springer 1959.
Righoldigt katalog over konforme afbildninger. I bogens første del ordnede efter afbildende funktioner, i den sidste del efter områder at afbilde. Mellem de to afsnit et indskud om numeriske metoder.

C. Caratheodory. Conformal Representation. Cambridge 1932.
Teoretisk behandling. En lille, klassisk bog.

J. A. Jenkins. Univalent functions and conformal mappings. Springer 1958.
Hvilke potensrækker fremstiller funktioner, der afbilder enhedscirkelskiven injektivt? Dette er et vanskeligt problem, som har beskæftiget mange matematikere, men som langt fra er løst. Bogen giver en oversigt over udviklingen og en grundig bibliografi.

E. Landau. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Springer 1929.
En lille klassiker. Mest om potensrækker. Noget, men ikke katastrofalt forældet. Overkommelig for den, der ønsker at prøve at læse Landau.

H. Weyl. Die Idee der Riemannschen Fläche. Leipzig 1913.
Berømt klassiker.

R. Nevanlinna. Uniformisierung. Springer 1953.
Beviset for at en Riemann-flade har en parameterfremstilling. Bogen er ret gammeldags og noget tung at læse.

L. V. Ahlfors, L. Sario. Riemann Surfaces. Princeton 1960.
En behagelig og udførlig fremstilling.

R. Nevanlinna. Eindeutige analytische Funktionen. Springer 1953.
Det er Nevanlinnas klassiske teori om meromorfe funktioners værdifordeling. Spændende, men svært.

M. L. Cartwright. Integral Functions. Cambridge 1956.
En lille, mere let læselig introduktion til Nevanlinnas teori.

H. Wittich. Neuere Untersuchungen über eindentige analytische Funktionen. Springer 1955.
En kortfattet oversigt over den seneste udvikling af Nevanlinnas teori med en udførlig bibliografi.

Blandede opgaver.

Meningen med dette endnu ikke eksisterende afsnit er, at det ved iderige menneskers hjælp skal vokse sig stort og uoverkommeligt. Imidlertid starter vi det på overkommelig vis med en enkelt let opgave.

1. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være åben, $c \in O$ et punkt, $f\colon O \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ en holomorf funktion med en enkelt pol i c, og $\gamma\colon]-1,1[\to O$ en C^1 bevægelse med $\gamma(0) = c$ og $\gamma'(0) \neq 0$. Vis, at

$$\int_{-1}^{-\delta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_{\delta}^{1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ ,$$

hvor $\delta > 0$, går mod en grænseværdi A for $\delta \to 0$. Vis, at en tilstrækkelig lille cirkel Γ med centrum c skærer banen for γ i netop 2 punkter, og vis, at A er aritmetisk middelværdi af integralerne af f langs de to veje, der repræsenteres af γ med stykket indenfor Γ erstattet med det ene eller det andet af de to stykker, hvori Γ deles af banen for γ.

2. Konstruer en Riemann-flade, på hvilken det flertydige udtryk $\sqrt{1+\sqrt{z}}$ definerer en éntydig holomorf funktion.

3. Udregn $\int_0^\infty \frac{x^\alpha \log x}{(x+1)^2} dx$ for $\alpha \in]-1,1[$. Samme metode som i XI,8 kan bruges, men så bliver der også brug for resultatet af XI,8 i det specielle tilfælde $q = 2$.

4. Udregn $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \beta x} dx$ for $0 < \alpha < \beta$. For hvilke komplekse værdier af α og β er integralet konvergent. Idet $\alpha \in]0,\infty[$ er fast valgt, er den fundne værdi for integralet en funktion af β, som er holomorf i $\mathbb{C}$ på nær isolerede singulariteter. Angiv disse singulariteter, deres art og deres eventuelle multiplicitet. For hvilke komplekse værdier af α og β er den fundne holomorfe funktion lig med integralets værdi?

5. Samme spørgsmål som i opgave 4 for $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \beta x} dx$.

6. Udregn $\int_0^{2\pi} \frac{x dx}{\cosh a + \cos x}$ for $a \in]0,\infty[$. Metoden fra opgave V,4 kan bruges, men integralet langs den angivne vej bliver ikke nul, da nævneren har et nulpunkt i halvstrimlen.

7. Bestem koefficienterne i potensrækkeudviklingen

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n .$$

Vis dernæst, at a_n er antallet af løsningssæt (u_1,u_2,u_3,u_4) til ligningen $u_1+2u_2+3u_3+4u_4 = n$, for hvilke $u_1,\ldots,u_4$ er hele tal ≥ 0. (Selve bestemmelsen af potensrækken sker lettest efter dekomposition af venstre side. Det fremgår ikke umiddelbart af resultatet, at koefficienterne bliver hele tal. Opgaven er en såkaldt pengevekslingsopgave).

<u>Stikordsregister</u>

Henvisning til øvelsesopgaver ved opg.-sidetal.

E

F

G

H

M

N

O

P

R