M A T E M A T I K

1 0 1

A L G E B R A O G G E O M E T R I

ANDEN DEL
FRA LINEÆRE LIGNINGER
TIL KVADRIKKER

FORELÆSNINGSNOTER
UDARBEJDET 1976

Indholdsfortegnelse

Kapitel	Titel	Sideantal Tekst	Øvelser
18	Lineære ligninger	22	8
19	Basisskift	13	6
20	Skift af legemet	5	5
21	Egenværdier	25	10
22	Beregningsmetoder	14	2
23	Jordans normalform	20	5
24	Reelle vektorrum	21	10
25	Komplekse vektorrum	14	6
26	Lineære afbildninger af reelle og komplekse vektorrum	18	6
27	Normale endomorfier	16	5
28	Affine rum	24	7
29	Reelle og komplekse affine rum	20	9
30	Kvadrikker	17	7
31	Keglesnit	16	7
32	Keglesnitsflader	15	8
33	Kvadrikker i et 4-dimensionalt rum	4	2
34	Kvadrikkers affine egenskaber	31	7
35	Tangenter til keglesnit	5	3

Stikordsregister

KAPITEL 18

Lineære ligninger.

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{jk} | j = 1,\ldots,m;\ k = 1,\ldots,n)$ være en matrix af elementer af K. Lad $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_m) \in K^m$ være givet. Vi søger at bestemme $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in K^n$, således at relationen

$$\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$$

er opfyldt. Skrevet udførligt drejer det sig om at løse ligningssystemet

$$a_{j_1} x_1 + \ldots + a_{j_n} x_n = b_j \ ,\ j = 1,\ldots,m.$$

Definition 18.1. Matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes koefficientmatrix for det lineære ligningssystem $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$. Matricen $(\underline{\underline{A}},\underline{b})$, der fås af $\underline{\underline{A}}$ ved at tilføje $\underline{b}$ som søjle til højre, kaldes totalmatrix for ligningssystemet. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{0}$ kaldes det til $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ svarende homogene ligningssystem. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ kaldes homogent, hvis $\underline{b} = \underline{0}$.

Et ligningssystem, som ikke er homogent, kaldes inhomogent. Vi kalder også et ligningssystem inhomogent, hvis vi ikke ved, om det er homogent, f.eks. når $b_1,\ldots,b_m$ afhænger af variable, så ligningssystemet er homogent for visse specielle værdier af disse variable.

Sætning 18.2. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har løsninger for ethvert valg af $\underline{b}$, hvis og kun hvis rangen af $\underline{\underline{A}}$ er lig med antallet m af rækker. Ligningssystemet har for ethvert valg af $\underline{b}$ højst 1 løsning, hvis og kun hvis rangen af $\underline{\underline{A}}$ er lig med antallet n af søjler. Ligningssystemet har for ethvert valg af $\underline{b}$ netop 1 løsning, hvis og kun hvis matricen $\underline{\underline{A}}$ er regulær.

Bevis. Ved $f(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}$ defineres en lineær afbildning $f: K^n \to K^m$, og f har samme rang som $\underline{\underline{A}}$. Sætningen følger af, at f er surjektiv, hvis og kun hvis den har rang m, og injektiv, hvis og kun hvis den har rang n. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 18.3. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har mindst én løsning, hvis og kun hvis totalmatricen $(\underline{\underline{A}},\underline{b})$ har samme rang som $\underline{\underline{A}}$.

Bevis. Rangen r af $\underline{\underline{A}}$ er rangen af mængden M af søjlevektorer i $\underline{\underline{A}}$. At $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har mindst én løsning er ensbetydende med, at $\underline{b} \in \operatorname{span} M$, men det er opfyldt, hvis og kun hvis $(\underline{\underline{A}},\underline{b})$ ikke har større rang end $\underline{\underline{A}}$, og da den ikke kan have mindre rang end dens delmatrix $\underline{\underline{A}}$ er sætningen dermed bevist.

<u>Sætning 18.4</u>. Ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har mindst én løsning, hvis og kun hvis det for enhver løsning $\underline{y} = (y_1,\dots,y_m) \in K^m$ til det homogene transponerede system $\underline{\underline{A}}'\underline{y} = \underline{0}$ gælder, at $b_1y_1+\dots+b_my_m = 0$.

Bevis. Vi betragter den lineære afbildning $f:K^n \to K^m$ defineret ved $f(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}$. At ligningssystemet har mindst én løsning, er ensbetydende med, at $\underline{b} \in f(K^n)$. Af sætning 13.21 følger, at dette er ensbetydende med, at det for enhver linearform $\alpha:K^m \to K$ med $f^*(\alpha) = 0$ gælder, at $\alpha(\underline{b}) = 0$. Enhver linearform $\alpha:K^m \to K$ kan defineres på formen $\alpha(\underline{x}) = y_1x_1+\dots+y_mx_m$, så betingelsen $\alpha(\underline{b}) = 0$ bliver netop $b_1y_1+\dots+b_my_m = 0$. Dette skal altså være opfyldt, hvis $f^*(\alpha):K^n \to K$ er 0-formen. Nu er $f^*(\alpha) = \alpha\circ f$, så $f^*(\alpha)$ bliver netop den linearform, man får frem ved at gange venstresiderne i ligningssystemet med $y_1,\dots,y_m$ og derefter addere dem. Det giver 0-formen til resultat, hvis og kun hvis $\underline{\underline{A}}'\underline{y} = \underline{0}$. Dermed er sætningen bevist.

Den ene halvdel af sætningen er næsten helt triviel. At $\underline{\underline{A}}'\underline{y} = \underline{0}$ har en løsning $\underline{y} = (y_1,\dots,y_m)$, som ikke tilfredsstiller $b_1y_1+\dots+b_my_m = 0$ betyder nemlig, at ligningerne ved multiplikation med $y_1,\ldots,y_m$ og påfølgende addition giver en relation $0 = k$, hvor $k \in K$ ikke er 0, og så kan ligningssystemet selvfølgelig ikke have løsninger. Den anden halvdel af sætningen er dybtliggende, og vi inddrog da også mere kraftigt værktøj for at få den bevist.

Efter at vi nu har diskuteret eksistens og entydighed af løsninger til lineære ligningssystemer, vil vi gå over til en nærmere undersøgelse af løsningsmængdens natur og dens afhængighed af vektoren $\underline{b}$. Vi begynder med at se på det særlig vigtige tilfælde, hvor $\underline{\underline{A}}$ er en regulær n×n-matrix. I dette tilfælde er $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{y}$ helt ensbetydende med $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{y}$, så løsningen kommer til at afhænge lineært af søjlevektoren på højre side. Hvis vi indfører komplementerne A_{jk}, får vi løsningen helt eksplicit på formen

$$x_k = \frac{A_{1k}b_1+\ldots+A_{nk}b_n}{\det\underline{\underline{A}}}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Her kan udtrykket i tælleren fortolkes som determinanten af en matrix. Derved får vi Cramers sætning om løsning af kvadratiske lineære ligningssystemer med determinant, som ikke er 0.

<u>Sætning 18.5</u>. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en regulær n×n-matrix, og lad $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ være en vektor fra K^n. Lad $\underline{\underline{B}}_k$

være den matrix, der fås af $\underline{\underline{A}}$ ved at erstatte den k^{te} søjle med $\underline{b}$ som søjle. Da er løsningen til det lineære ligningssystem $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ givet ved $x_k = \frac{\det \underline{\underline{B}}_k}{\det \underline{\underline{A}}}$, $k = 1,\dots,n$.

Sætningen er allerede bevist. Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en m×n-matrix, og dens rang r er $= n$, men $r < m$, har ligningssystemet kun løsning, hvis totalmatricen $(\underline{\underline{A}},\underline{b})$ har samme rang som $\underline{\underline{A}}$. Vi kan da vælge en regulær kvadratisk delmatrix $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ af $\underline{\underline{A}}$, og de tilsvarende ligninger giver da et delsystem $\tilde{\underline{\underline{A}}}\ \underline{x} = \tilde{\underline{b}}$ af det givne system. De øvrige ligninger vil være opfyldt, hvis blot ligningerne i delsystemet er det. Opgaven er dermed reduceret til løsning af et ligningssystem med regulær matrix.

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en m×n-matrix med rang $r < m$, og ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har mindst én løsning, har $\underline{\underline{A}}$ en regulær r×r-delmatrix $\underline{\underline{A}}$, og de tilsvarende ligninger giver et delligningssystem $\underline{\underline{C}}\ \underline{x} = \tilde{\underline{b}}$, hvor $\underline{\underline{C}}$ er en r×n-delmatrix af $\underline{\underline{A}}$ med $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ som delmatrix. De øvrige ligninger i systemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ er linearkombinationer af ligningerne i $\underline{\underline{C}}\ \underline{x} = \tilde{\underline{b}}$. Altså har $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ samme løsningsmængde som $\underline{\underline{C}}\ \underline{x} = \tilde{\underline{b}}$.

Vi kan nu omordne rækkefølgen af de ubekendte, og derved opnå, at matricen $\underline{\underline{C}}$ får formen $(\tilde{\underline{\underline{A}}},\underline{\underline{B}})$, hvor $\underline{\underline{B}}$ er en r×n-r-matrix. Vi kan da ligeledes skrive $\underline{x} = (\tilde{\underline{x}},\underline{t})$ med

$\underline{\tilde{x}} = (x_1,\ldots,x_r)$ og $\underline{t} = (t_1,\ldots,t_{n-r})$, og ligningssystemet får da formen

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}\ \underline{\tilde{x}} + \underline{\underline{B}}\ \underline{t} = \underline{\tilde{b}}\ ,$$

og deraf slutter vi, at vi for hvert valg af $\underline{t} \in K^{n-r}$ får netop 1 løsning til $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ givet ved $\underline{x} = (\underline{\tilde{x}},\underline{t})$, hvor

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{\underline{\tilde{A}}}^{-1}\underline{\tilde{b}} - \underline{\underline{\tilde{A}}}^{-1}\underline{\underline{B}}\ \underline{t}.$$

Hvis vi vil have et helt direkte udtryk for $\underline{x}$ må vi åbenbart skrive

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{A}}}^{-1} \\ \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \underline{\tilde{b}} + \begin{pmatrix} -\underline{\underline{\tilde{A}}}^{-1}\underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{E}} \end{pmatrix} \underline{t}\ ,$$

hvor $\underline{\underline{0}}$ er en n-r×r-matrix med alle elementer 0, medens $\underline{\underline{E}}$ er en n-r×n-r-enhedsmatrix. Vi formulerer resultatet som en sætning.

<u>Sætning 18.6</u>. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en m×n-matrix med rang r, og lad $\underline{b} \in K^m$ være en vektor for hvilken ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{\underline{B}}$ har mindst én løsning. Der findes da en vektor $\underline{c} \in K^n$, samt en n×n-r-matrix $\underline{\underline{D}}$, således at ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ har løsningsmængden $\{\underline{c}+\underline{\underline{D}}\ \underline{t} \mid \underline{t} \in K^{n-r}\}$. Mængden $V = \{\underline{\underline{D}}\ \underline{t} \mid \underline{t} \in K^{n-r}\}$ er løsningsmængden til det tilsvarende homogene ligningssystem, og V er også et underrum i K^n. Løsningsmængden $\underline{c} + V$ til $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$ er et siderum til

V, og $\underline{c}$ er en vilkårlig løsning til $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$.

Det kan have en vis interesse at se på nogle specielle tilfælde, hvor løsningsmængden kan udtrykkes særlig pænt. Et særlig pænt eksempel omtales i den næste sætning.

<u>Sætning 18.7</u>. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $n-1 \times n$-matrix. For $j = 1,\dots,n$ betegner vi med $\underline{\underline{A}}_j$ den delmatrix, der fås af $\underline{\underline{A}}$ ved at slette søjle nummer j. For $c_j = (-1)^j \det \underline{\underline{A}}_j$, $j = 1,\dots,n$ er $\underline{c} = (c_1,\dots,c_n)$ en løsning til ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{0}$.

Bevis. Når vi tilføjer en helt vilkårlig n^{te} ligning til ligningssystemet, følger sætningen umiddelbart af relationerne i sætning 17.3 anvendt på komplementerne til elementerne i sidste række af det udvidede systems matrix. Dermed er sætningen bevist.

Hvis $\underline{c} \neq 0$, kan vi slutte, at $\underline{\underline{A}}$ har rang $n-1$, så løsningsrummet er 1-dimensionalt, altså $\{t\underline{c} \mid t \in K\}$. Hvis $\underline{c} = \underline{0}$, er rangen af $\underline{\underline{A}}$ højst $n-2$, så løsningsrummet er mindst 2-dimensionalt.

En relation af formen

$$\underline{x} = \underline{c} + \underline{\underline{D}}\ \underline{t},$$

hvor $\underline{x} \in K^n$, $\underline{c} \in K^n$, $\underline{t} \in K^r$, og $\underline{\underline{D}}$ er en $n \times r$-matrix, kan for $r < n$ og $\underline{\underline{D}}$ med rang r opfattes som parameterfremstilling af løsningsmængden til et system af $n-r$ lineært uafhængige lineære ligninger med n ubekendte. Det er selvfølgelig ikke oplagt på forhånd, at der virkelig for ethvert valg af $\underline{c}$ og $\underline{\underline{D}}$, så betingelserne er opfyldt, findes et ligningssystem, hvis løsning har den givne parameterfremstilling. Vi skal dog vise, at dette virkelig er tilfældet. Det er til gengæld klart, at vi ikke kan håbe på, at sådan et ligningssystem er éntydigt bestemt.

Det er nyttigt at betragte et mere generelt problem, nemlig et ligningssystem

$$(1) \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c} + \underline{\underline{D}}\,\underline{t}\ ,$$

hvor $\underline{x} \in K^p$, $\underline{c} \in K^n$, $\underline{t} \in K^r$, og hvor $\underline{\underline{A}}$ er en $n \times p$-matrix, medens $\underline{\underline{D}}$ er en $n \times r$-matrix. Opgaven er at danne et ligningssystem $\underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{c}'$, hvis løsningsmængde netop er de $\underline{x} \in K^p$, for hvilke der findes en vektor $\underline{t} \in K^r$, som sammen med $\underline{x}$ tilfredsstiller (1). At løse denne opgave kaldes at eliminere $t_1,\dots,t_r$ mellem ligningerne (1).

Vi kan finde den omtalte mængde af vektorer $\underline{x} \in K^p$ ved at løse (1) for hvert fast valgt $\underline{t} \in K^r$ og så danne foreningsmængden af de opnåede løsningsmængder. Heraf følger at vi kan tillade os at antage, at $\underline{\underline{D}}$ har rang r. Ellers vil en søjle i $\underline{\underline{D}}$ være lineært afhængig af de øvrige, og så kan vi udelade denne søjle og den tilsvarende variabel t_i, uden at ændre mængden af vektorer af formen $\underline{c} + \underline{\underline{D}}\ \underline{t}$. Når $\underline{\underline{D}}$ har rang r, kan vi dernæst dele ligningssystemet op i to systemer

$$\underline{\underline{A}}_1\underline{x} = \underline{c}_1 + \underline{\underline{D}}_1\underline{t}$$
$$\underline{\underline{A}}_2\underline{x} = \underline{c}_2 + \underline{\underline{D}}_2\underline{t},$$

hvor $\underline{\underline{D}}_1$ er en regulær r×r-matrix, $\underline{\underline{A}}_1$ en r×p-matrix, $\underline{\underline{D}}_2$ en n-r×r-matrix, $\underline{\underline{A}}_2$ en n-r×p-matrix, $\underline{c}_1 \in K^2$ og $\underline{c}_2 \in K^{n-r}$. I det sidste system er den første ligning ensbetydende med ligningen $\underline{t} = \underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{\underline{A}}_1\underline{x} - \underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{c}_1$, og ligningssystemet bliver derfor ækvivalent med det system, der består af det fundne udtryk for $\underline{t}$, samt den ligning, der fås ved at indsætte dette i systemets anden ligning, altså

$$t = \underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{\underline{A}}_1\underline{x} - \underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{c}_1$$
$$(\underline{\underline{A}}_2 - \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{\underline{A}}_1)\underline{x} = \underline{c}_2 - \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{D}}_1^{-1}\underline{c}_1 .$$

Den anden ligning her er netop et ligningssystem, der løser det stillede problem.

Der er et specielt tilfælde, hvor løsningen er særlig smuk, og det vil vi omtale i den næste sætning.

<u>Sætning 18.8</u>. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en n×p-matrix, $\underline{\underline{D}}$ en m×n-1-matrix med rang n-1 og $b \in K^n$. Mængden af vektorer $\underline{x} \in K^p$ for hvilke der findes en vektor $\underline{t} \in K^{n-1}$, som

tilfredsstiller ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b} + \underline{\underline{D}}\ \underline{t}$, er da identisk med løsningsmængden til den lineære ligning $\det(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b}) = 0$.

Bevis. Vi bemærker først, at $(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b})$ er en $n \times n$-matrix med elementer fra ringen af polynomier over K. Vi kan udregne den ved at udvikle efter den sidste søjle, og da alle elementerne i de andre søjler er konstante polynomier, får vi en linearkombination af elementer fra den sidste søjle, altså et polynomium af højst første grad. Dermed har vi sikret os, at påstanden i sætningen i hvert fald har mening. For hver vektor $\underline{x} \in K^p$ betragter vi nu ligningssystemet

$$(2) \qquad (\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b})\begin{pmatrix} \underline{t} \\ u \end{pmatrix} = 0 .$$

Matricen for dette ligningssystem har rang n eller $n-1$. Hvis $\underline{x}$ er valgt, så $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b} + \underline{\underline{D}}\ \underline{t}$ er tilfredsstillet for $\underline{t} = \underline{t} \in K^{n-1}$, er (2) tilfredsstillet af $(\underline{t}, 1) \in K^n$, og så har matricens rang $n-1$, idet 0-løsningen ellers ville være den eneste løsning. Under alle omstændigheder har (2) ikke andre løsninger end 0-løsningen med $n = 0$, da $\underline{\underline{D}}$ har rang $n-1$. Hvis $(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b})$ har rang $n+1$, kan vi derfor slutte, at (2) tilfredsstilles af en vektor $(\underline{t}^1, u)$ med $u \neq 0$, altså også af $(u^{-1}\underline{t}^1, 1)$, og det betyder netop, at $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b} + \underline{\underline{D}}\ u^{-1}\underline{t}^1$. Dermed har vi vist, at ligningssystemet $\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b} + \underline{\underline{D}}\ \underline{t}$ for et $\underline{x} \in K^p$, har en løsning $\underline{t} \in K^{n-1}$, hvis og kun hvis $(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b})$ har rang $n-1$, men det er netop ensbetydende med, at $\det(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{A}}\ \underline{x} - \underline{b}) = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Vi vil illustrere vore resultater med eksempler fra 3-dimensional geometri. Vi tænker os, at vi har valgt et begyndelsespunkt O og 3 lineært uafhængige basisvektorer $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ for $\mathbb{E}^3$, så punkterne i $\mathbb{R}^3$ angives ved stedvektorer ud fra O, og ved at udtrykke stedvektorerne som linearkombinationer $x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$, får vi et koordinatsæt (x_1, x_2, x_3) for hvert punkt i rummet, og derfor vil vi identificere rummet med $\mathbb{R}^3$. Vi taler om en plan med ligningen

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = c$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ ikke alle er 0, men $c \in \mathbb{R}$ er vilkårligt. Dermed mener vi, at løsningsmængden til ligningen netop er mængden af koordinatsæt for punkter i planen. Vi ved nu, at løsningsmængden har en parameterfremstilling

$$x_j = b_{j1} + a_{j2} t_1 + a_{j1} t_2, \quad j = 1,2,3,$$

hvor matricen $\underline{\underline{A}} = (a_{jk})$ har rang 2. Det er netop planens parameterfremstilling. Ved elimination af t_1 og t_2 genfinder vi planens ligning på formen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1-b_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2-b_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3-b_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ligningerne for to planer

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \alpha_{j3}x_3 = c_j \quad , \quad j = 1, 2$$

udgør et ligningssystem med en matrix (α_{jk}). Hvis (α_{jk}) har rang 2, har løsningsmængden en parameterfremstilling

$$x_k = b_k + a_k t \quad , \; k = 1, 2, 3,$$

hvor $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \underline{0}$. Dermed har vi fundet en parameterfremstilling for skæringslinien. Omvendt kan vi ved elimination af t finde et ligningssystem med liniens punkter som løsningsmængde, og derved finder vi 2 planer med linien som skæringslinie, men der bliver selvfølgelig mange løsninger.

Hvis (α_{jk}) har rang 1, er talsættene $(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3})$, $j = 1, 2$ proportionale. Hvis endda talsættene $(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3}, b_j)$, $j = 1,2$ er proportionale, er planerne sammenfaldende. Ellers har de slet ingen skæringspunkter, svarende til, at de er parallelle.

Lad os nu se på ligningerne for 3 planer

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \alpha_{j3}x_3 = c_j, \; j = 1,2,3.$$

Hvis matricen (α_{jk}) er regulær, har ligningssystemet netop 1 løsning, svarende til, at planerne har netop 1 punkt fælles. Så har planerne to og to en linie fælles, og de 3 skæringslinier mellem 2 ud af de 3 planer går alle gennem planernes skæringspunkt.

Hvis matricen (α_{jk}) har rang 1, er planerne parallelle, eventuelt er to af dem sammenfaldende (hvis totalmatrix har rang 2), medens én af dens 2×4-delmatricer har rang 1) eller alle tre sammenfaldende (hvis totalmatrix har rang 1).

Tilfældet, hvor matricen (α_{jk}) har rang 2 er mere interessant. Hvis også totalmatrix har rang 2, er en af de tre ligninger en linearkombination af de to andre og således overflødig. Skæringsmængden bliver derfor den samme som for disse to planer. Da disses matrix har rang 2, har de en skæringslinie, og den tredie plan må da også gå gennem denne skæringslinie. Det drejer sig derfor om tre planer gennem samme rette linie.

Hvis (α_{jk}) har rang 2, medens totalmatrix har rang 3, har planerne intet fælles punkt, og den sidste plan må da være parallel med skæringslinien mellem de to første. Det drejer sig i dette tilfælde om tre planer, der er parallelle med samme rette linie. De vil da sædvanligvis skære hinanden to og to i 3 parallelle rette linier, men det kan også tænkes, at to af planerne er parallelle eller sammenfaldende.

En plan med ligningen

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 = 0$$

er karakteriseret ved talsættet $(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)$, dog således at proportionale talsæt bortset fra $(0,\ldots,0)$, bestemmer den samme plan. Mængden af alle sådanne talsæt inklusive $(0,0,0,0)$ udgør netop et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^4$. Lad nu $(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)$ og $(\beta_1,\ldots,\beta_4)$ frembringe to forskellige 1-dimensionale underrum $S_\alpha, S_\beta \subset \mathbb{R}^4$. Til de 2 underrum svarer 2 planer, der kan være parallelle, men ikke sammenfaldende.

Vektorerne $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_4)$ og $\underline{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_4)$ frembringer et 2-dimensionalt underrum $(\lambda\underline{\alpha} + \mu\underline{\beta} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}) = U \quad \mathbb{R}^4$. Til hvert 1-dimensionalt underrum $V \subseteqq U$ svarer nu en plan, som har en ligning af formen

$$(3) \qquad (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)x_1+(\lambda\alpha_2+\mu\beta_2)x_2+(\lambda\alpha_3+\mu\beta_3)x_3+(\lambda\alpha_4+\mu\beta_4) = 0$$

og det er nu klart, at denne plan går gennem skæringslinien mellem de to oprindelige planer, hvis disse skærer hinanden, medens den er parallel med de to oprindelige planer, hvis disse er parallelle.

Mængden af planer, der er givet ved ligninger af formen (3) med $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ udgør det ved planerne med ligningerne

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4 = \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_4 = 0$$

bestemte planbundt.

Hvis de to planer skærer hinanden, omfatter planbundtet netop alle planer gennem skæringslinien. Hvis nemlig (x_1^0,x_2^0,x_3^0) ikke ligger på skæringslinien, giver (3) ved indsættelse af $x_j = x_j^0$, $j = 1,2,3$ en ligning til bestemmelse af værdier af λ og μ, som netop giver ligningen for en plan gennem punktet, og vi ser, at denne ligning har løsninger $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. Dette er iøvrigt en bekvem metode til bestemmelse af en ligning for en plan gennem et givet punkt og skæringslinien mellem to givne planer.

Hvis de to planer er parallelle, men ikke sammenfaldende, ser vi ved et lignende ræsonnement, at planbundtet netop omfatter alle planer, parallelle med de oprindelige.

For et system af 3 planer med ligninger

$$\alpha_{j1}x_1+\alpha_{j2}x_2+\alpha_{j3}x_3+\alpha_{j4} = 0, \quad j = 1,2,3$$

hvor matricen (α_{jk}) har rang 3, bestemmer vektorerne $\underline{\alpha}_j = (\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{j4})$ tre 1-dimensionale underrum V_1, $V_2, V_3 \subseteqq K^4$, og de udspænder et 3-dimensionalt underrum $V \subseteqq K^4$ omfattende alle vektorer $\underline{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_4)$, hvor

$$\beta_k = \lambda_1\alpha_{1k}+\lambda_2\alpha_{2k}+\lambda_3\alpha_{3k},\ k = 1,\ldots,4;\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in K.$$

Mængden af de således bestemte planer kaldes det ved de 3 givne planer bestemte planknippe.

Hvis de 3 givne planer har et skæringspunkt, omfatter planknippet netop alle planer gennem dette punkt. Det er nemlig klart, at alle planerne i knippet går gennem dette punkt. Det er derfor nok at vise, at det for punkter P_1 og P_2 som er indbyrdes forskellige og forskellige fra skæringspunktet gælder, at knippet indeholder en plan gennem P_1 og P_2. Hvis P_1 og P_2 har koordinater $(x_1^{\ 1},x_2^{\ 1},x_3^{\ 1})$ og $(x_1^{\ 2},x_2^{\ 2},x_3^{\ 2})$, og vi sætter

$$\gamma_j^{\ i} = \alpha_{j1}x_1^{\ i}+\alpha_{j2}x_2^{\ i}+\alpha_{j3}x_3^{\ i}+\alpha_{j4},\ j = 1,2,3;\ i = 1,2,$$

ser vi, at den plan i knippet, der fås for et valg af λ_1, λ_2, λ_3, vil gå gennem P_1 og P_2, hvis og kun hvis

$$\gamma_1^{\ i}\lambda_1+\gamma_2^{\ i}\lambda_2+\gamma_3^{\ i}\lambda_3 = 0,\quad i = 1,\ 2,$$

og dette ligningssystem har altid løsninger.

Hvis de tre givne planer ikke har et skæringspunkt, er de parallelle med 1 ret linie, men ikke alle tre indbyrdes parallelle. Det indtræffer, hvis og kun hvis vektorerne $\alpha_j = (\alpha_{j1},\alpha_{j2},\alpha_{j3})$, $j = 1,2,3$ udgør en mængde med rang 2, så de blot udspænder et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$. Så vil $\underline{\beta}' = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ for alle valg af λ_1,λ_2 og λ_3 ligge i det samme 2-dimensionale underrum, og det medfører, at alle planer i knippet er parallelle med den samme rette linie. Vi får så ganske som før, at knippet for hvilket som helst valg af P_1 og P_2 indeholder en plan gennem P_1 og P_2, og derfor får vi, at knippet i dette tilfælde netop omfatter alle planer parallelle med en fast ret linie.

Lad os nu se på fremgangsmåden ved numerisk løsning af et ligningssystem. Som ved udregning af determinanter kan der tænkes forskellige situationer. Det kan tænkes, at alle de kendte størrelser er givne som eksakte tal eller udtryk. Den anden mulighed er, at de kendte størrelser er reelle tal, der kun kendes fra målinger, altså kun ved tilnærmede værdier. Det hænder ofte, at koefficienterne til de ubekendte er givne eksakt, medens konstanterne på højre side kun kendes med tilnærmelse. Det skal dog bemærkes, at fremgangsmåden ikke bliver særlig forskellig i de tre tilfælde.

Vi skriver ligningssystemet eksplicit op.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$- - - - - -$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m .$$

Ved at bytte om på rækkefølgen af ligningerne og af de ubekendte sørger vi for, at $a_{11} \neq 0$. Hvis optrædende tal kun er kendt med tilnærmelse, bør det tilstræbes, at a_{11} er stort i sammenligning med de øvrige elementer i første søjle - og helst også i forhold til de øvrige koefficienter i første række. Vi dividerer den første ligning med a_{11}. Den fremkomne ligning multipliceres med a_{21} og trækkes fra den anden ligning, med a_{31} og trækkes fra den tredie ligning o.s.v. Derved får vi et ligningssystem ækvivalent med det oprindelige af formen

$$x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1$$
$$a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$
$$- - - - - -$$
$$a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m$$

Dette system løses selvfølgelig ved, at vi løser delsystemet af de $m-1$ sidste ligninger og finder x_1 af den første. Dermed har vi reduceret problemet til den situation, hvor der er en ligning færre og en ubekendt færre.

Vi behandler det nye system på samme måde, og efter endelig mange trin ender vi med et system af formen

$$\begin{aligned}
x_1 + a^1_{12}x_2+a^1_{13}x_3+\dots+a^1_{1r}x_r+a^1_{1r+1}x_{r+1}+\dots+a^1_{1n}x_n &= b^1_1 \\
x_2+a^2_{23}x_3+\dots+a^2_{2r}x_r+a^2_{2r+1}x_{r+1}+\dots+a^2_{2n}x_n &= b^2_2 \\
- - - - - - & \\
x_r+a^r_{rr+1}x_{r+1}+\dots+a^r_{rn}x_n &= b^r_r \\
0 &= b^r_{r+1} \\
- - - - - - & \\
0 &= b^r_m
\end{aligned}$$

Så er det afsløret, at koefficientmatricen har rang r. Hvis $m > r$ og et af tallene b^r_q med $q > r$ er forskelligt fra 0, har systemet ingen løsninger. Hvis $r = m$ eller $b^r_q = 0$ for alle $q > r$, kan vi vælge $(x_{r+1},\dots,x_n) \in K^{n-r}$ vilkårligt, og derefter supplere dette sæt op til en løsning $(x_1,\dots,x_n)$, idet vi finder x_r af den sidste ligning, x_{r-1} af den næstsidste osv. Vi får således løsningsmængden opskrevet eksplicit med $x_{r+1},\dots,x_n$ som parametre.

Ved arbejde med eksakt kendte koefficienter kan man selvfølgelig opnå fordele ved at forkorte fælles faktorer i ligningen væk undervejs, ligesom man kan kombinere ligninger på en sådan måde, at man undgår at regne med brøker. Vi viser et taleksempel.

$$\begin{aligned}
u + v - 3x + 3y + z &= 2\\
2u + v + 3x - y - z &= 3\\
u - v - x - y + z &= -4\\
3u - v + 4x + 2y + z &= 4\\
u - 3v + x + 2y + 3z &= -4
\end{aligned}$$

Her er det åbenbart mest behagelig at eliminere z. Vi beholder den første ligning uændret, og vi får så

$$\begin{aligned}
&\boxed{u + v - 3x + 3y + z = 2}\\
&3u + 2v + 0x + 2y = 5\\
&0u - 2v + 2x - 4y = -6\\
&2u - 2v + 7x - y = 2\\
&-2u - 6v + 10x - 7y = -10.
\end{aligned}$$

Vi har sat en ramme om den første ligning, fordi den skal gemmes uændret og til allersidst bruges til bestemmelse af z. Vi går videre med de fire sidste ligninger. Den anden af disse kan forkortes med -2, og derefter bliver den velegnet til elimination af v. Dermed får vi systemet

$$\begin{aligned}
&3u + 2v + 0x + 2y = 5\\
&\boxed{0u - v + x - 2y = -3}\\
&2u - 2v + 7x - y = 2\\
&-2u - 6v + 10x - 7y = -10
\end{aligned}$$

Efter eliminationen får vi systemet

$$\begin{aligned} 3u + 2x - 2y &= -1 \\ 2u + 5x + 3y &= 8 \\ -2u + 4x + 5y &= 8 \\ \boxed{u + 6x + 3y = 7} \end{aligned}$$

Vi opdagede her, at addition af den første og den tredie ligning giver et behageligt resultat, som vi har omrammet for at gemme den til beregning af u. Vi udelader den første ligning og benytter den omrammede til elimination af u i den anden og tredie. Det giver systemet

$$\begin{aligned} -7x - 3y &= -6 \\ 16x + 11y &= 22 \\ \boxed{2x + 5y = 10} \end{aligned}$$

Her har vi lavet den tredie ligning ved at gange den første med 2 og lægge den anden til. Den gemmes til beregning af x og vi bruger den til elimination af x i den anden ligning. Det giver

$$\boxed{-29y = -58}$$

Nu er ligningssystemet omformet til systemet af de indrammede ligninger. Vi bruger nu disse i omvendt rækkefølge og finder efterhånden

$$y = 2,\ x = 0,\ u = 1,\ v = -1,\ z = -4.$$

Vi ved nu, at ligningssystemet har netop 1 løsning, den fundne. Vi ved derfor også, at dets koefficientmatrix er regulær. Vore regninger kan ses som omformninger under udregning af determinanten af koefficientmatrix, og den kan derfor let udregnes nu.

Selvfølgelig kan man komme til at regne fejl. Derfor er det alligevel fornuftigst at prøve efter, om den fundne løsning nu også passer i ligningerne.

KAPITEL 19

Basisskift.

Lad U være et n-dimensionalt og V et m-dimensionalt vektorrum. Lad $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ være en basis for U og lad $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)$ være en basis for V. Til hver lineær afbildning $f: U \to V$ svarer da en $m \times n$-matrix $\underline{\underline{A}} \in \hat{M}(K;\ m,n)$ bestemt ved, at vi har

$$(f(\underline{b}_1), \ldots, f(\underline{b}_n)) = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m)\underline{\underline{A}}.$$

For $\underline{u} = x_1\underline{b}_1 + \ldots + x_n\underline{b}_n$ og $f(\underline{u}) = y_1\underline{e}_1 + \ldots + y_m\underline{e}_m$ har vi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Omvendt vil enhver matrix $\underline{\underline{A}} \in \hat{M}(K;\ m,n)$ ved disse relationer fastlægge en lineær afbildning.

Lad dernæst $(\underline{b}'_1, \ldots, \underline{b}'_n)$ være en anden basis for U og $(\underline{e}'_1, \ldots, \underline{e}'_m)$ en anden basis for V. Med disse nye baser svarer f til en anden matrix $\underline{\underline{B}}$. Nu bestemmer $\underline{\underline{A}}$ entydigt f, som igen fastlægger $\underline{\underline{B}}$, og derfor får vi ved $\tau(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{B}}$ fastlagt en afbildning $\tau: \hat{M}(K;m,n) \to \hat{M}(K;m,n)$.

Vi kalder τ den til skiftet af basis svarende transformation af $\hat{M}(K;m,n)$.

<u>Sætning 19.1.</u> Ved et skift af baser for det n-dimensionale vektorrum U og det m-dimensionale vektorrum V induceres en vektorrumsautomorfi $\tau:\hat{M}(K;m,n) \to \hat{M}(K;m,n)$ bestemt ved, at en matrix $\underline{\underline{A}}$ svarer til samme lineære afbildning $f:U \to V$ ved brug af de oprindelige baser som $\tau(\underline{\underline{A}})$ ved brug af de nye baser.

Bevis. Eksistensen af en afbildning $\tau:\hat{M}(K;m,n) \to \hat{M}(K;m,n)$, fastlagt som beskrevet i sætningen fremgår af bemærkningerne ovenfor. Det er også klart, at det "omvendte" basisskift vil svare til en afbildning, som er invers til τ, så τ er bijektiv. Vi mangler så blot at vise, at τ er lineær. Lad $\underline{\underline{A}}_1$ og $\underline{\underline{A}}_2$ være vilkårlige $m\times n$-matricer, og lad f_1 og f_2 være de tilsvarende lineære afbildninger, når de oprindelige baser benyttes.

Når de nye baser benyttes, har f_1 og f_2 matricerne $\tau(\underline{\underline{A}}_1)$ og $\tau(\underline{\underline{A}}_2)$, og f_1+f_2 får matricen $\tau(\underline{\underline{A}}_1) + \tau(\underline{\underline{A}}_2)$. Da f_1+f_2 med brug af de oprindelige baser havde matrix $\underline{\underline{A}}_1+\underline{\underline{A}}_2$, får vi, at $\tau(\underline{\underline{A}}_1+\underline{\underline{A}}_2) = \tau(\underline{\underline{A}}_1)+\tau(\underline{\underline{A}}_2)$. At $\tau(\lambda\underline{\underline{A}}) = \lambda\tau(\underline{\underline{A}})$ vises på lignende måde, men en smule lettere.

Nu vil vi fortsætte med at finde et eksplicit udtryk for afbildningen τ. Vi begynder med at studere virkningen af et basisskift i et vektorrum.

Sætning 19.2. Lad U være et vektorrum og lad $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ og $(\underline{b}'_1,\ldots,\underline{b}'_n)$ være to baser for U. Der findes da en regulær $n\times n$-matrix $\underline{\underline{S}}$ fastlagt ved betingelsen

$$(\underline{b}'_1,\ldots,\underline{b}'_n) = (\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)\underline{\underline{S}} ,$$

og for en vilkårlig vektor $\underline{u} \in U$ med $\underline{u} = x_1\underline{b}_1+\ldots+x_n\underline{b}_n = x'_1\underline{b}'_1+\ldots+x'_n\underline{b}'_n$ er koordinatsættene $(x_1,\ldots,x_n)$ og $(x'_1,\ldots,x'_n)$ forbundne ved ligningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Bevis. Den lineære afbildning $\varphi: U \to U$ bestemt ved $\varphi(\underline{b}_j) = \underline{b}'_j$, $j = 1,\ldots,n$ svarer ved brug af basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ til en matrix $\underline{\underline{S}}$ givet ved den første relation. Da φ har rang n, er $\underline{\underline{S}}$ regulær. Af $x_1b_1+\ldots$ $\ldots+x_n\underline{b}_n = x'_1\underline{b}'_1+\ldots+x'_n\underline{b}'_n$ følger

$$(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\underline{b}'_1,\ldots,\underline{b}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)\ \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} ,$$

og heraf følger den sidste relation i sætningen. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 19.3</u>. Lad $\underline{\underline{S}}$ være en regulær n×n-matrix, og lad U være et n-dimensionalt vektorrum. Til hver basis $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ for U svarer da en anden basis $(\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n)$ for U, således at $\underline{\underline{S}}$ er den matrix, der svarer til skiftet fra den første basis til den anden.

Bevis. Vi definerer $(\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n) = (\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)\underline{\underline{S}}$. Da $\underline{\underline{S}}$ har rang n, får $\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n$ også rang n, og bliver således en basis. Derefter følger påstanden af den foregående sætning.

Vi ser, at en regulær n×n-matrix svarer til mange forskellige basisskift i ethvert n-dimensionalt vektorrum U.

<u>Sætning 19.4</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum, og lad $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$, $(\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n)$ og $(\underline{b}''_1,\dots,\underline{b}''_n)$ være baser for U. Hvis $\underline{\underline{S}}$ er den matrix, der svarer til skiftet fra $(\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n)$, til $(\underline{b}''_1,\dots,\underline{b}''_n)$ er $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{T}}$ den matrix, der svarer til skiftet fra $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ til $(\underline{b}''_1,\dots,\underline{b}''_n)$.

Bevis. Vi har jo

$$(\underline{b}''_1,\dots,\underline{b}''_n) = (\underline{b}'_1,\dots,\underline{b}'_n)\underline{\underline{T}} = (\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{T}},$$

og dermed er sætningen bevist.

Vi går nu over til at undersøge, hvordan basisskift virker på matricen for en lineær afbildning.

Sætning 19.5. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum, og lad $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ være en basis. Lad $\underline{\underline{S}}$ være en regulær $n \times n$-matrix svarende til basisskift til $(\underline{b}'_1,\ldots,\underline{b}'_n)$. Lad V være et m-dimensionalt vektorrum, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m)$ være en basis. Lad $\underline{\underline{T}}$ være en regulær $m \times m$-matrix svarende til skift til basis $(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n)$. Lad $f: U \to V$ være en lineær afbildning, og lad $\underline{\underline{A}}$ være dens matrix ved anvendelse af baserne $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m)$. Ved anvendelse af baserne $(\underline{b}'_1,\ldots,\underline{b}'_n)$ og $(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_m)$ får f da matricen $\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$.

Bevis. For $\underline{u} = x_1\underline{b}_1+\ldots+x_n\underline{b}_n = x'_1\underline{b}'_1+\ldots+x'_n\underline{b}'_n$ med billedpunktet $\underline{v} = f(\underline{u}) = y_1\underline{e}_1+\ldots+y_m\underline{e}_m = y'_1\underline{e}'_1+\ldots+y'_m\underline{e}'_m$ har vi matrixfremstillingen af f på formen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Skiftet til de nye koordinater sker ved relationerne

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Vi indsætter dette og får

$$\underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Da $\underline{\underline{T}}$ er regulær, kan vi gange fra venstre med $\underline{\underline{T}}^{-1}$, og vi får

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Dermed er sætningen bevist.

Der er en meget rig algebraisk struktur på mængden af matricer. Vi har tidligere set, at $\hat{M}(K;m,n)$ er et vektorrum over K, medens $\hat{M}(K;n,n)$ endda er en algebra over K og specielt en ring. For $\underline{\underline{A}} \in \hat{M}(K;m,n)$ og $\underline{\underline{S}} \in \hat{M}(K,n,n)$ har vi produktet $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}$, og med dette ydre produkt er $\hat{M}(K;m,n)$ en højre $\hat{M}(K;n,n)$-modul. Dertil kræves blot at reglerne

$$(\underline{\underline{A}}_1+\underline{\underline{A}}_2)\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}}_1\underline{\underline{S}}+\underline{\underline{A}}_2\underline{\underline{S}},\quad \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{S}}_1+\underline{\underline{S}}_2) = \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}_1+\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}_2,$$

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{S}}_1\underline{\underline{S}}_2) = (\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}_1)\underline{\underline{S}}_2,$$

er opfyldt, og de er jo alle vist tidligere. Endvidere er $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}}$. For $\underline{\underline{A}} \in \hat{M}(K;m,n)$ og $\underline{\underline{T}} \in \hat{M}(K;m,m)$ har vi produktet $\underline{\underline{T}}\ \underline{\underline{A}}$, og med dette produkt er $\hat{M}(K;m,n)$ en venstre $\hat{M}(K;m,m)$-modul. De to modulstrukturer kommuterer, idet vi har $(\underline{\underline{T}}\ \underline{\underline{A}})\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}})$.

Ved koordinattransformationer udnytter vi kun den ydre multiplikation med regulære matricer. De regulære matricer i $\hat{M}(K;n,n)$ udgør en mængde, der med den nedarvede multiplikation er en gruppe.

Lad U, V og W være endeligdimensionale vektorrum med baser $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_o)$, $(\underline{c}_1,\ldots,\underline{c}_n)$ og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m)$. Lad $f:U \to V$ være en lineær afbildning med matrix $\underline{\underline{A}}$, og lad $g:V \to W$ være en lineær afbildning med matrix $\underline{\underline{B}}$. Så har $g \circ f$ matrix $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$. Hvis vi nu foretager basisskift i de tre rum svarende til matricer $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{T}}$, får f den nye matrix $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}$, og g får den nye matrix $\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}}$. Ligeledes kan vi slutte, at $g \circ f$ får matricen $\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}$, men vi har jo også denne matrix på formen $(\underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{S}})(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}})$. Det ses helt umiddelbart, at de to udtryk for matricen for $g \circ f$ med de nye baser stemmer overens.

Sætning 19.6. Lad U være et n-dimensionalt og V et m-dimensionalt rum. Lad $f:U \to V$ være en lineær afbildning, og lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$-matrix. Da har $\underline{\underline{A}}$ og f samme rang, hvis og kun hvis det er muligt at vælge baser for U og V, så f ved brug af disse baser får $\underline{\underline{A}}$ som matrix.

Bevis. Vi ved allerede, at en afbildning og dens matrix har samme rang. Derfor gælder "hvis". Lad os nu antage, at f og $\underline{\underline{A}}$ begge har rang r. Så er $\dim f(\underline{u}) = r$, og vi kan vælge en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_r)$ for $f(U)$ og udvide den til en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ for V. For $j = 1,\dots,r$ vælger vi $\underline{b}_j \in U$, således at $f(\underline{b}_j) = \underline{e}_j$. Så er $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r$ lineært uafhængige, og f afbilder $\mathrm{span}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$ bijektivt på $f(U)$. Heraf følger, at $\mathrm{kern}f \cap \mathrm{span}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r) = \{\underline{0}\}$, og vi har $U = \mathrm{kern}f \oplus \mathrm{span}(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_r)$. Vi vælger en basis $(\underline{b}_{r+1},\dots,\underline{b}_n)$ for kernf, og så er $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ en basis for U. Vi har nu

$$(f(\underline{b}_1),\dots,f(\underline{b}_n)) = (\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_r,\underline{0},\dots,\underline{0}) = (\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)\underline{\underline{E}}^r,$$

hvor matricen $\underline{\underline{E}}^r$ har 1 på de r faste pladser i diagonaler og ellers 0 overalt, altså $e^r_{jj} = 1$ for $j = 1,\dots,r$, men $e^r_{ij} = 0$ ellers.

Vi fik vist, at vi for enhver lineær afbildning $f:U \to V$ med rang r kan vælge baser for U og V, så f får matricen $\underline{\underline{E}}^r$. Det føles måske ikke som noget stort fremskridt mod vort egentlige mål, men alligevel er vi næsten færdige. Der findes nemlig en lineær afbildning $g: U \to V$, samt baser for U og V, så g får matricen $\underline{\underline{A}}$. Men så har g rang r, og der findes baser for U og V, så g får matrix $\underline{\underline{E}}^r$. Men så findes der basisskift der fører $\underline{\underline{E}}^r$ over i $\underline{\underline{A}}$, altså $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\underline{E}}^r\underline{\underline{S}}$, hvor $\underline{\underline{T}} \in \hat{M}(K;m,m)$ og $\underline{\underline{S}} \in \hat{M}(K;n,n)$ er regulære. Det samme basisskift får vi så $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ og $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m)$ over i baser, for hvilke f får $\underline{\underline{A}}$ som matrix. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen fortæller at matricen for en afbildning $f:U \to V$ giver information om rangen af f, men ellers indeholder den slet ingen information om f. Hvis baserne for U og V er kendt, giver matricens fuld information om f. Hvis kun basis for U er kendt, fastlægger matricen kernen for f. Hvis kun basis for V er kendt, fastlægger matricen billedet $f(U)$. Vi vil ikke diskutere disse forhold nærmere, men i stedet diskutere nogle mere specielle situationen. Først vil vi se på en endomorfi $f:U \to U$. Her er der kun ét vektorrum, hvis basis vi kan vælge, og derfor kommer vi ikke så langt i retning af at simplificere matricen for f ved at vælge en hensigtsmæssig basis for U. Det viser sig, at dette problem er kompliceret, og det vil blive behandlet i nogle senere kapitler. Lige nu nøjes vi med at formulere en sætning om, hvordan et basisskift influerer på matricen for en endomorfi.

Sætning 19.7. Lad U være et vektorrum med basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi, som svarende til denne basis har matrix $\underline{\underline{A}}$. Lad $\underline{\underline{S}}$ være en regulær $n \times n$-matrix svarende til basisskift fra $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ til $(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n)$. Svarende til de nye koordinater vil f da have matricen $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{S}}$.

Bevis. Det er bare et specialtilfælde af den tidligere viste sætning om basisskift.

Hvis en matrix står for noget andet end en lineær afbildning, må man regne med den mulighed, at den også transformeres på en anden måde. Det vigtigste eksempel er matricen for en bilinearform.

<u>Sætning 19.8</u>. Lad U være et vektorrum med basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, og lad $f:U\times U \to K$ være en bilinearform med matrix $\underline{\underline{A}}$. Lad $\underline{\underline{S}}$ være en regulær $n\times n$-matrix, som svarer til basisskift fra $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ til $(\underline{e}_1',\dots,\underline{e}_n')$. Ved anvendelse af basis $(\underline{e}_1',\dots,\underline{e}_n')$ vil f da have matricen $\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}$.

Bevis. For $\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\dots+x_n\underline{e}_n = x_1'\underline{e}_1'+\dots+x_n'\underline{e}_n'$ og $\underline{v} = y_1\underline{e}_1+\dots+y_n\underline{e}_n = y_1'\underline{e}_1'+\dots+y_n'\underline{e}_n'$ er $f(\underline{u},\underline{v})$ givet ved

$$(f(\underline{u},\underline{v})) = (x_1,\dots,x_n)\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

og vi foretager koordinatskiftet ved at indsætte

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}\begin{pmatrix} x_1'\\ \vdots \\ x_n'\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}\begin{pmatrix} y_1'\\ \vdots \\ y_n'\end{pmatrix}$$

og derved får vi ligningen i de nye koordinater

$$(f(\underline{u},\underline{v}) = (x_1',\dots,x_n')\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}\begin{pmatrix} y_1'\\ \vdots \\ y_n'\end{pmatrix}$$

Dermed er sætningen bevist.

Den ved $\Phi_{\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}$ definerede afbildning $\Phi_{\underline{\underline{S}}}$: $\hat{M}(K;n,n) \to \hat{M}(K;n,n)$ er en vektorrumsisomorfi, men den er ikke en algebraisomorfi. Til gengæld afbilder den transponerede matricer på transponerede matricer, idet $(\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}})' = \underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{S}}$. Den bevarer også egenskaber som "symmetrisk" og "skævsymmetrisk".

Det er ikke vanskeligt at udføre koordinattransformationer i mere komplicerede tilfælde, men det bliver selvfølgelig nødvendigt at opgive matrixnotationen, når vi kommer udenfor det område, der kan beskrives ved matricer.

Som et eksempel vil vi se på en bilineær afbildning $f: U \times U \to V$. Lad $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ være en basis for U og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_m)$ en basis for V. For $\underline{u}_1 = x_1\underline{b}_1+\ldots+x_n\underline{b}_n$ og $\underline{u}_2 = y_1\underline{b}_1+\ldots+y_n\underline{b}_n$ har vi et billede $f(\underline{u}_1,\underline{u}_2) = z_1\underline{e}_1+\ldots+z_m\underline{e}_m$, og afbildningen er givet ved et sæt ligninger

$$z_i = \sum_{j,k=1}^{n} a^i_{jk}\, x_j\, y_k\ ,\quad i = 1,\ldots,m.$$

Vi ønsker at indføre nye baser, så vi får $\underline{u}_1 = x'_1\underline{b}'_1+\ldots+x'_n\underline{b}'_n$, $\underline{u}_2 = y_1\underline{b}'_1+\ldots+y_n\underline{b}'_n$ og $f(\underline{u}_1\underline{u}_2) = z'_1\underline{e}'_1+\ldots+z'_n\underline{e}'_m$. Koordinatskiftet er givet ved matricen

$\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$, således at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_m \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Læg mærke til, at den sidste går modsat vej. Vi får nu ved direkte udregning

$$z'_i = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} z_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} t_{ij}\, a^j_{kl}\, x_k\, y_l =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l,\alpha,\beta=1}^{n} t_{ij}\, a^j_{kl}\, s_{k\alpha}\, s_{l\beta}\, x'_\alpha\, y'_\beta ,$$

så f defineres ved de nye ligninger

$$z'_i = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}^i_{\alpha,\beta}\, x'_\alpha\, y'_\beta ,$$

hvor

$$\tilde{a}^i_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} t_{ij}\, a^j_{kl}\, s_{k\alpha}\, s_{l\beta}$$

Det ses, at a^j_{kl}, som afhænger af 3 indices, transformeres efter en regel for så vidt angår index i, men efter en anden regel, for så vidt angår indices j og k. For en matrix (a_{jk}), der svarer til en bilinearform, er det transformationsreglen for j og k, der anvendes på begge indices, men for en matrix (a_{ij}), der svarer til en endomorfi, anvendes forskellig transformationsmetode for i og j. Det viser sig, at de to her omtalte former for transformationer dække så godt som alt, hvad man møder i praksis. Den nærmere redegørelse for brugen af de to typer af transformationer ved koordinatskift er et væsentligt led i tensorregningen, som netop i første omgang er et middel til at bringe koordinattransformationernes teori på en overskuelig form.

Tensorregning har været et vigtigt hjælpemiddel til behandling af mere komplicerede geometriske problemer, og derved kom den til at spille en rolle i den almindelige relativitetsteori. Den har også fundet mange andre anvendelser i fysik og teknik, medens dens rolle i moderne matematik er mere beskeden.

KAPITEL 20

Skift af legemet.

Lad L være et legeme og $K \subseteq L$ et dellegeme. Et vektorrum V over L er da et vektorrum over K, idet det ydre produkt $L \times V \to V$ har en restriktion $K \times V \to V$. Hvis $B \subseteq V$ er en basis for vektorrummet V om L, er B et lineært uafhængigt sæt i V som vektorrum over K, men bortset fra trivielle tilfælde ikke en basis. Til gengæld er spanB i V som vektorrum over K selvfølgelig et delrum med B som basis.

Lad nu U være et vektorrum over K, og lad B være en basis for U. Så er U mængden af linearkombinationer $x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n$ med $n \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n \in K$, $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n \in B$. En linearkombination af denne art er egentlig en afbildning $\varphi : B \to K$ med $\varphi(e_j) = x_j$ for $j = 1,\ldots,n$ og $(\underline{u}) = 0$ ellers. Hvis vi stadig har $K \subseteq L$, kan vi selvfølgelig lige så godt betragte linearkombinationen $\varphi : B \to L$, og derved får vi en udvidelse $V \supseteq U$, som er et vektorrum over L. Det er klart, at V også har en struktur som et vektorrum over K, og med denne struktur på V bliver $U = \text{spanB}$.

Vi kan således altid ændre strukturen på et vektorrum U over K ved at erstatte K med et dellegeme eller et udvidelseslegeme. Som vi har beskrevet det ovenfor er skift til et legeme $L \supset K$ afhængig af vort valg af basis. Vi kan imidlertid bære os anderledes ad, og derved kan vi opnå en udvidelsesmetode, der er uafhængig af basis.

Lad igen U være et vektorrum over K og lad $B \subseteqq U$ være en basis for U. For $K \subseteqq L$ konstruerer vi $V \supseteqq U$ som ovenfor. Med W betegner vi vektorrummet af afbildningen $\Phi: U \to L$ med $\Phi(\underline{u}) = 0$ undtagen for endelig mange $\underline{u} \in U$. Vi kan da igen fortolke $\Phi \in W$ som en linearkombination $\lambda_1\underline{u}_1 + \ldots + \lambda_n\underline{u}_n$, hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ og $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n \in U$, men da $U \subseteqq V$ bliver en sådan linearkombination et element af V, og derved får vi åbenbart defineret en lineær surjektiv afbildning $\kappa: W \to V$, og κ inducerer en isomorfi mellem $\frac{W}{\mathrm{kern}\kappa}$ og V. Vi kan således bruge $\frac{W}{\mathrm{kern}\kappa}$ i stedet for V. Hvis vi kan vise, at $\mathrm{kern}\kappa$ er uafhængig af basis B har vi netop fået V erstattet med et vektorrum, som er uafhængigt af basen B.

Vi vil skrive et element $\Phi \in W$ på formen $(\lambda_1, \underline{u}_1) + \ldots + (\lambda_n, \underline{u}_n)$, og dermed angiver vi, at $\Phi(\underline{u}_\nu) = \lambda_\nu$ for $\nu = 1, \ldots, n$ og $\Phi(\underline{u}) = 0$ for alle andre $\underline{u} \in U$. Vi adderer udtryk af denne slags ved blot at skrive dem sammen til én sum uden hensyntagen til rækkefølge, og så må vi eventuelt udnytte regnereglen $(\lambda_1,\underline{u})+(\lambda_2,\underline{u}) = (\lambda_1+\lambda_2,\underline{u})$, så vi kan opnå, at intet $\underline{u}$ forekommer mere end én gang. Vi multiplicerer et udtryk med λ ved blot at gange hvert λ_ν med λ.

Med $M \subseteq W$ betegner vi mængden af elementer $\Phi \in W$ af en af formerne $(\lambda,\underline{u}_1) + (\lambda,\underline{u}_2) + (\lambda,-(\underline{u}_1+\underline{u}_2))$ eller $(\lambda,\mu\underline{u}) + (\lambda\mu, -\underline{u})$, hvor $\mu \in K$. Så er M uafhængig af B, og det er klart, at $M \subseteq \mathrm{kern}\kappa$, altså at $\mathrm{span}M \subseteq \mathrm{kern}\kappa$. Vi vil vise, at $\mathrm{span}M = \mathrm{kern}\kappa$, og dermed har vi vist, at $\mathrm{kern}\kappa$ ikke afhænger af B.

Vi mangler at vise, at $\mathrm{kern}\kappa \subseteq \mathrm{span}M$, så vi betragter $\Phi = (\lambda_1,\underline{u}_1)+\dots+(\lambda_n\underline{u}_n) \in \mathrm{kern}\kappa$. Dette er ensbetydende med, at $\lambda_1\underline{u}_1+\dots+\lambda_n\underline{u}_n = \underline{0}$. Nu kan vi vælge $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_p \in B$ samt en $p{\times}n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ med elementer fra K, så vi har

$$(\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n) = (\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_p)\underline{\underline{A}},$$

og relationen $\lambda_1\underline{u}_1+\dots+\lambda_n\underline{u}_n = 0$ bliver ensbetydende med relationerne

$$(1) \qquad a_{k1}\lambda_1+\dots+a_{kn}\lambda_n = 0, \quad k = 1,\dots,p.$$

Vi definerer

$$\Phi_k = (\lambda_1,a_{k1}\underline{e}_k)+\dots+(\lambda_n,a_{kn}\underline{e}_k), \ k = 1,\dots,p,$$

og vi har så $\Phi = \Phi_1+\ldots+\Phi_p$. Det er således nok at vise, at $\Phi_k \in \mathrm{span}M$. Nu medfører (1) imidlertid, at

$$0 = (a_{k1}\lambda_1, -\underline{e}_k)+\ldots+(a_{kn}\lambda_n, -\underline{e}_k),$$

så vi får

$$\Phi_k = ((\lambda_1, a_{k1}\underline{e}_k)+(a_{k1}\lambda_1, -\underline{e}_k))+\ldots+((\lambda_n, a_{kn}\underline{e}_k)-(a_{kn}\lambda_n, -e_k)),$$

og dermed er Φ_k skrevet som en sum af elementer fra M.

Definition 20.1. Lad U være et vektorrum over et legeme K, og lad L være en udvidelse af K. Ved en tilsvarende udvidelse V af U forstår vi det ovenfor definerede vektorrum V over L med den egenskab, at $U \subseteq V$ og der findes en mængde $B \subseteq U$, som er basis for U over K og samtidig også for V over L.

Sætning 20.2. Lad U være et vektorrum over et legeme K med en udvidelse L, og lad V være den tilsvarende udvidelse af U. Enhver endomorfi $\varphi: U \to U$ kan da på netop én måde udvides til en endomorfi $\overline{\varphi}: V \to V$.

Bevis. Lad B være fælles basis for U og V. Betingelsen $\overline{\varphi}|B = \varphi|B$ fastlægger netop en endomorfi $\overline{\varphi}: V \to V$, og det ses umiddelbart, at $\overline{\varphi}|U = \varphi|U$. Dermed er sætningen bevist.

Hvis vi i stedet for V bruger den invariante udvidelse $\frac{W}{\ker K}$, som vi omtalte ovenfor, er U indlejret i $\frac{W}{\ker K}$, ved at $\underline{u}$ svarer til det kanoniske billede af $(1,\underline{u}) \in W$. Det er næsten helt indlysende, at mængden af sådanne billeder udspænder $\frac{W}{\ker K}$, og derfor får vi i virkeligheden, at enhver basis for U bliver en basis for V. Derfor er afhængigheden af basis B kun tilsyneladende. Et basisskift i U er bare et specielt tilfælde af et basisskift i V.

ØVELSER TIL KAPITEL 20

Stikord.

Overgang til dellegeme, til udvidelseslegeme, dertil svarende udvidelse af vektorrum og af endomorfi af vektorrum.

20.1. Lad K være et legeme med et udvidelseslegeme L. For hvert naturligt tal n har vi da en naturlig inklusion $K^n \subseteq L^n$. Lad $j_n: K^n \to L^n$ være inklusionsafbildningen. Lad U være et vektorrum over K, og lad V være en udvidelse af V over L. Lad $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ være en fælles basis for U og V, og lad $\varphi_U: U \to K^n$ og $\varphi_V: V \to L^n$ være de ved den fælles basis fastlagte isomorfier. Vis, at $\varphi_V^{-1} \circ j_n \circ \varphi_U: U \to V$ er inklusionsafbildningen.

20.1.1. Udvidelseslegemet L er et vektorrum over K med de sædvanlige regneoperationer. Lad $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ være en basis for vektorrummet L over K. Nu er også V et vektorrum over K. Vis, at

$\{\beta_\mu \underline{b}_\nu \mid \mu = 1,\dots,m;\ \nu = 1,\dots,n$ er en basis for vektorrummet V over K.

For $\mu = 1,\dots,m$ er mængden $\beta_\mu U = \{\beta_\mu \underline{u} \mid \underline{u} \in U\}$ et underrum af vektorrummet V over K, og V er den direkte sum af underrummene $\beta_\mu U$.

Basen $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ kan vælges med $\beta_1 = 1$, så den første direkte summand $\beta_1 U$ er selve rummet U.

20.2. Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$, og lad B være en basis for V. Lad U være det af B udspændte underrum i vektorrummet V over $\mathbb{R}$. At vælge U på denne måde kaldes at vælge et reelt underrum i V. Svarende til resultatet i opgave 20.1.1 har vi nu $V = U \oplus iU$, når vi benytter vektorrumsstrukturen over $\mathbb{R}$. Vi får da hver vektor $\underline{v} \in V$ skrevet som $\underline{v} = \underline{u} + i\underline{u}'$ med $\underline{u},\underline{u}' \in U$. Regning med disse udtryk foregår efter regler, der ganske ligner regnereglerne for komplekse tal.

20.2.1. Valget af det reelle underrum $\underline{u}$ giver os mulighed for at tale om den konjugerede vektor til en vektor $\underline{v}$, idet vi for $\underline{v} = \underline{u}+i\underline{u}'$ med $\underline{u},\underline{u}' \in U$ definerer $\overline{\underline{v}} = \underline{u}-i\underline{u}'$. Ved $\kappa(\underline{v}) = \overline{\underline{v}}$

defineres en vektorrumsisomorfi $\kappa: V \to V$ med hensyn til den reelle vektorrumsstruktur. Desuden er $\kappa(i\underline{v}) = -i\kappa(\underline{v})$, så κ er ikke en vektorrumsisomorfi med hensyn til den komplekse vektorrumsstruktur. Endelig er κ involutorisk, dvs. $\kappa \circ \kappa = \mathrm{id}_V$.

20.2.2. Lad $\kappa: V \to V$ være en vektorrumsisomorfi med hensyn til den reelle vektorrumsstruktur og desuden tilfredsstille betingelserne $\kappa(i\underline{v}) = -i\kappa(\underline{v})$ og $\kappa \circ \kappa = \mathrm{id}_V$. Vis, at mængden af fixpunkter for er et underrum $U \subseteq V$ med hensyn til den reelle vektorrumsstruktur, samt at U kan vælges som reelt underrum i V, og at κ så netop bliver den til dette valg svarende "konjugeret-afbildning".

20.2.3. "konjugeret-afbildningen" på $\mathbb{C}$ inducerer en "konjugeret-afbildning" κ_0 på C^B. Lad φ_B: $V \to C^B$ være den ved basen B fastlagte isomorfi, og lad $\kappa: V \to V$ være den ved det af B udspændte underrum bestemte "konjugeret-afbildning". Vis, at $\kappa = \varphi_B^{-1} \circ \kappa_0 \circ \varphi_B$.

20.3. Lad K være et legeme med et udvidelseslegeme L. Lad V være et vektorrum over L, og lad

$\tilde{V}$ betegne V som vektorrum over K. Vis, at der er en naturlig isomorfi mellem dualrummet $\tilde{V}^*$ til $\tilde{V}^*$ og dualrummet V^* med struktur som vektorrum over K.

20.3.1. Lad U være et vektorrum over K, og lad V være en udvidelse af U over L. Vis, at der er en naturlig isomorfi mellem V^* og en udvidelse af U^* over L.

20.4. Lad V være et vektorrum over $\mathbb{C}$, og lad $U \subseteq V$ være et fast valgt reelt underrum. Lad $\tilde{U} \subseteq V^*$ være underrummet af de linearformer på V, som er reelle på U. Vis, at der er en naturlig isomorfi $\varphi : \tilde{U} \to U^*$. Vis, at $\tilde{U}$ kan vælges som reelt underrum i V^*. Lad $j^* : V^* \to U^*$ være den duale afbildning til inklusionsafbildningen $j : U \to V$. Vis, at $\varphi^{-1} \circ j^* : V^* \to \tilde{V}$ er projektionen på $\tilde{V}$ svarende til fremstillingen $V^* = \tilde{V} \oplus i\tilde{V}$. Valget af det reelle underrum U fastlægger en konjugeret-afbildning $\kappa : V \to V$. Hvad bliver dens duale afbildning $\kappa^* : V^* \to V^*$.

20.5. Ved $\varphi_\nu(z_\nu) = \varphi_\nu(x_\nu + iy_\nu) = (x_\nu, y_\nu)$ defineres en isomorfi $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, idet $\varphi(z_1, \ldots, z_n) =$

$(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)$. Analogt har vi ψ: $\mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m}$, hvor $\psi(w_\mu) = \psi(u_\mu+iv_\mu) = (u_\mu v_\mu)$. En lineær afbildning $f:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2m}$ er givet ved

$$u_\mu = a_{\mu 1}x_1+b_{\mu 1}y_1+\ldots+a_{\mu n}x_n+b_{\mu n}y_n,$$

$$v_\mu = c_{\mu 1}x_1+d_{\mu 1}y_1+\ldots+c_{\mu n}x_n+d_{\mu n}y_n,$$

$$\mu = 1,\ldots,m.$$

Angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser som afbildningens $2m\times 2n$-matrix må tilfredsstille, for at sikre, at den sammensatte afbildning $\psi^{-1}\circ f\circ\varphi:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ bliver lineær. Vis også, at enhver lineær afbildning $g:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ kan fås på denne måde.

KAPITEL 21

Egenværdier.

Lad U være et vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Hvis B er en basis for U og $\underline{e} \in B$ et vilkårligt basiselement, er $f(\underline{e})$ en linearkombination af basiselementer, altså $f(\underline{e}) = \lambda_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda_p\underline{e}_p$. Hvis vi kan vælge B, således at alle sådanne fremstillinger bliver meget korte, kan vi påstå, at B er en basis, der er velegnet til beskrivelsen af f. Det højeste, man kan håbe at nå i denne retning, er, at $f(\underline{e})$ slet ikke afhænger af andre basiselementer end $\underline{e}$ selv. Dette leder os til følgende definition.

Definition 21.1. Lad U være et vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Hvis det for et element $\lambda \in K$ og en vektor $\underline{e} \in U \setminus \{\underline{0}\}$ gælder, at $f(\underline{e}) = \lambda\underline{e}$, siger vi, at λ er en egenværdi for f, og at $\underline{e}$ er en egenvektor for f svarende til egenværdien λ.

Idet vi bruger betegnelsen id for den identiske endomorfi $id: U \to U$, er $\lambda id: U \to U$ en ligedannetheds-afbildning, og vi får en endomorfi $f - \lambda id: U \to U$. At λ er egenværdi er ensbetydende med, at $\ker(f-\lambda id)$ har dimension > 0, og at $\underline{e}$ er en til λ svarende egenvektor, er ensbetydende med, at $\underline{e}$ tilhører $\ker(f-\lambda id)$, og at $\underline{e} \neq \underline{0}$.

Definition 21.2. Mængden af elementer $\lambda \in K$, for hvilke endomorfien $f-\lambda id: U \to U$ ikke er invertibel, kaldes spektret for f.

I det følgende vil vi antage, at vektorrummet U er endeligdimensionalt. Det uendeligdimensionale tilfælde, som er langt mere kompliceret, er emnet for funktionalanalysen.

Sætning 21.3. Hvis U er et endeligdimensionalt vektorrum, og $f: U \to U$ en endomorfi, er spektret for f identisk med mængden af egenværdier for f.

Bevis. Hvis λ er egenværdi for f, er $f-\lambda id$ ikke engang injektiv, så $f-\lambda id$ er ikke invertibel. Det gælder også, hvis U er uendeligdimensionalt. Hvis λ ikke er egenværdi for f, er $f-\lambda id: U \to U$ injektiv, og hvis U er endeligdimensionalt, medfører det, at f er bijektiv, altså invertibel, så λ hører ikke til spektret for f. Dermed er sætningen bevist.

$f - \lambda id$

Sætning 21.4. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum, og $f:U \to U$ en endomorfi. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for U og $\underline{\underline{A}}$ matricen for f ved brug af denne basis. Da er $\det\underline{\underline{A}}$ uafhængig af valget af basis.

Bevis. Ved brug af en anden basis får f en matrix $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$, hvor $\underline{\underline{S}}$ er regulær, så vi får

$$\det(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}) = (\det\underline{\underline{S}})^{-1}(\det\underline{\underline{A}})(\det\underline{\underline{S}}) = \det\underline{\underline{A}}.$$

Dermed er sætningen bevist.

Definition 21.5. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum, og $f:U \to U$ en endomorfi. Determinanten for en matrix for f svarende til et valg af basis for U kaldes da også determinanten for f og betegnet $\det f$.

Det er berettiget på grund af den foregående sætning. Vi har $\det(g\circ f) = \det g \det f$, og $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$. Desuden er f invertibel, hvis og kun hvis $\det f \neq 0$.

Sætning 21.6. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Lad $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ være en basis for U, og lad $\underline{\underline{A}}$ være den tilsvarende matrix for U. Da er mængden af egenværdier for f netop mængden af løsninger til ligningen

$$\det(f-\lambda\,\mathrm{id}) = \det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = 0$$

med λ som ubekendt.

Bevis. Efter definitionen er $\det(f-\lambda id)$ netop det samme som $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$, og denne størrelse er 0, hvis og kun hvis $f-\lambda id$ ikke er invertibel. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 21.7.</u> Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi, hvis matrix svarende til basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ for U er $\underline{\underline{A}}$. Så er $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = P_{f,\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n}(\lambda)$, hvor $P_{f,\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n}(x)$ er et polynomium af grad n med den højeste koefficient $(-1)^n$. Hvis $L \supseteq K$ er et udvidelseslegeme, og V den tilsvarende udvidelse af U for basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ og $\hat{f}:V \to V$ den tilsvarende udvidelse af $\hat{f}$, da er $P_{\hat{f},\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n}(x) = P_{f,\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n}(x)$.

Bevis. Vi opskriver $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ mere eksplicit

$$\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}, & \ldots & , a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda, & \ldots & , a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & , \ldots & , a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Vi anvender selve definitionen af $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$ som en sum af produkter. Hvert produkt indeholder en faktor fra hver række og en faktor fra hver søjle, altså r faktorer af formen $a_{jj}-\lambda$ og $n-r$ faktorer af formen a_{jk}, $k \neq j$

for et r mellem 0 og n. Altså er hvert led et polynomium af grad $\leqq n$. Kun leddet $(a_{11}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$ bliver af grad n og de øvrige får grad $< n$, så leddet $(-\lambda)^n$ ophæves ikke af de øvrige led. Heraf følger, at $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$ bliver et polynomium i λ, og at dets øverste koefficient bliver $(-1)^n$.

Vi fastholder basis $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$, men betragter udvidelsen $\hat{f}:V \to V$. Da også f har matrix $\underline{\underline{A}}$, ændrer dette ikke $\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})$. Altså er $P_{\hat{f},\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}(x) = P_{f,\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}(x)$. Dermed er sætningen bevist.

Det er upraktisk, at polynomiet $P_{f,\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}(x)$ kan tænkes at afhænge af valget af basis. I virkeligheden er det nu uafhængigt af basis og det er let at vise uafhængigheden, når legemet bare ikke har karakteristik 2.

<u>Sætning 21.8</u>. Det i den foregående sætning omtalte polynomium $P_{f,\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}$ er uafhængigt af valget af basiselementerne $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n$.

Bevis. Da vi har

$$P_{f,\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = \det(f-\lambda \mathrm{id}),$$

er funktionen $P_{f,\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n}:L \to L$ for ethvert udvidelseslegeme $L \supseteqq K$ uafhængig af valget af basis $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$. Nu kan vi slutte, at to polynomier over et legeme L er identiske, hvis de som funktioner er identiske på en delmængde $M \subseteqq L$, når bare begge polynomiers grad er mindre end antallet af elementer i M. Derfor er vor sætning bevist, så snart vi har fundet et udvidelseslegeme $L \supseteqq K$ med flere end n elementer. Så er det kun situationen, hvor K er endeligt, der kan give anledning til tvivl. Hvis K ikke har karakteristik 2, vil den ved $\varphi(x) = x^2$ definerede afbildning $\varphi: K \to K$ ikke være injektiv, da $\varphi(-x) = \varphi(x)$, og hvis K er endeligt, kan φ så heller ikke være surjektiv. Så findes der et irreducibelt polynomium x^2+a, og ved at adjungere en rod i dette polynomium til K, får vi en ægte udvidelse af K. Vi kan derfor udvide, indtil vi får et udvidelseslegeme, der er stort nok.

Hvis K er et vilkårligt legeme, har vi et legeme af "brudne rationale funktioner"

$$\frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0}{x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0}, \quad p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ a_0, \dots, a_p, \ b_0, \dots, b_{q-1} \in K.$$

Vi ved, at der er god mening i at forkorte, så vi kan antage dem uforkortelige. Regneoperationer defineres ved sædvanlig brøkregning, og det vises uden vanskeligheder, at vi får et legeme af brudne rationale funktioner. Det omfatter specielt alle polynomier over K, og dermed også en kopi af K selv. Det er således en udvidelse af K, og da den omfatter alle polynomier, er det en uendelig udvidelse. Derfor gælder sætningen for ethvert legeme K.

Kommentar. Vi kunne have regnet i ringen af polynomier over K. Så kommer det hele ud på at vise, at $\det(\underline{\underline{A}}-X\underline{\underline{E}})$ er uafhængig af basis, og for et basisskift svarende til matricen S får vi det nye polynomium

$$\det(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}-X\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}-X\ \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{E}}\ \underline{\underline{S}}) =$$
$$\det(\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}^{-1}X\underline{\underline{E}}\ \underline{\underline{S}}) = \det\underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{A}}-X\underline{\underline{E}})\underline{\underline{S}} = \det(\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{E}}X).$$

Det går bare ikke, da vi ikke har indført determinanter af matricer med elementer fra en ring, og vi har ikke udformet beviserne for sætningerne om determinanter, så de umiddelbart overføres til sådanne matricer. Vi kunne imidlertid redde situationen ved at regne i legemet af brudne rationale funktioner, men det var netop det samme trick som det, der reddede det vanskeligste punkt i ovenstående bevis, så vi ville ikke opnå større fordele ved den her foreslåede bevismetode.

Definition 21.9. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen for f svarende til basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ for U. Polynomiet

$$P_f(x) = \det(f\text{-}xid) = \det(\underline{\underline{A}}-x\underline{\underline{E}})$$

kaldes det karakteristiske polynomium for f. For et element $\lambda \in K$ kaldes multipliciteten af λ som rod i $P_f(x)$, den algebraiske egenværdimultiplicitet af λ (denne er således > 0, hvis og kun hvis λ er egenværdi). Løsningsrummet til det homogene lineære ligningssystem $f(\underline{u}) - \lambda\underline{u} = \underline{0}$ kaldes det til λ hørende egenrum og dettes dimension kaldes den geometriske egenværdimultiplicitet af λ.

Her er $f\text{-}xid$ en endomorfi $f\text{-}xid:M \to M$, hvor M er den modul, der fås ved at udvide U til en modul over ringen $K(x)$ af polynomier over K. Denne udvidelse kan gennemføres på samme måde, som vi har gjort det for et udvidelseslegeme. Det andet udtryk $\det(\underline{\underline{A}}-x\underline{\underline{E}})$ er blot determinanten af en matrix med elementer fra $K(x)$, og det har selvfølgelig udmærket mening. Vi har skrevet $P_f(x)$ her i stedet for $P_{f,\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n}(x)$ idet vi nu ved, at polynomiet slet ikke afhænger af $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n$.

Der er en vigtig sammenhæng mellem eksistensen af egenværdier for en endomorfi $f:U \to U$ og muligheden for at vælge basis for U, således at matricen for U får en særlig bekvem form.

I første omgang vil vi interessere os for matricer af den specielle form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & a_{3r} & a_{3,r+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{r-1,r} & a_{r-\ r+1} & \cdots & a_{r-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & a_{r\ r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$r-1,$

Definition 21.10. En matrix af den her angivne form siges at have nuller under diagonalen i de r første søjler. En matrix, som har nuller under diagonalen i alle søjlerne (man burde vel egentlig undtage den sidste), kaldes en øvre trekantmatrix.

Vi viser straks en hovedsætning.

Sætning 21.11. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Hvis det er muligt at vælge basis for U, således at matricen for f får nuller under diagonalen i de r første søjler, da er elementerne i diagonalen i de r første søjler egenværdier for f, og det antal gange, en egenværdi forekommer blandt disse diagonalelementer, kan ikke overstige dens algebraiske multiplicitet. Hvis

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ er et sæt af egenværdier for f, således at det antal gange, hver egenværdi for f optræder i sættet, netop er dens algebraiske multiplicitet, da er det muligt at vælge basis for U, således at matricen for f får nuller under diagonalen i de r første søjler, medens diagonalelementerne i de r første søjler netop er $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ i den givne rækkefølge.

Bevis. Hvis matricen for f svarende til en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ ser ud som den matrix, der er anført lige før definition 21.10, bliver det karakteristiske polynomium

$$P_j(\ )=\det\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_r-\lambda & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & & 0 & a_{r+1r+1}-\lambda & \cdots & a_{r+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{nr+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$(\lambda_1-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_r-\lambda)\ \det(\underline{\underline{B}}-\lambda\underline{\underline{E}})\ ,$$

hvor $\underline{\underline{B}}$ er delmatricen $(a_{jk}\,|\,j,k=r+1,\ldots,n)$. Vi sætter $V=\operatorname{span}\{\underline{e}_{r+1},\ldots,\underline{e}_n\}$, og så bliver $\underline{\underline{B}}$ matrix for en afbildning $g:V\to V$, og vi får

$$P_f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\ \ldots\ (\lambda_r-\lambda)\ P_g(\lambda).$$

Altså har f netop egenværdierne $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ samt eventuelle rødder i $P_g(\lambda)$. Dermed er den første del af sætningen bevist.

Lad os nu antage, at $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ er et sæt af egenværdier for f, således at det antal gange, hver egenværdi optræder i sættet, netop er dens algebraiske multiplicitet. Vi vil da (tilsyneladende) vise lidt mere end påstået i sætningen, nemlig, at det for $q = 0,1,\ldots,r$ gælder, at vi kan vælge en basis for U, således at matricen for f får nuller under diagonalen i de q første søjler, medens diagonalelementerne i disse søjler netop er $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ i den angivne rækkefølge. Fordelen ved denne formulering er, at vi kan vise påstanden ved induktion efter q. For $q = 0$ er påstanden helt triviel. Lad os nu antage, at påstanden er rigtig for en værdi af $q < r$, og vi skal så vise, at den også gælder i tilfældet $q + 1$. Vi har således en basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ for U, for hvilken f har en matrix med nuller under diagonalen i de q første søjler og med $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ som de første diagonalelementer. For $V = \text{span}(\underline{b}_{q+1},\ldots,\underline{b}_n)$ bestemmer delmatricen af de $n-q$ sidste rækker og søjler en endomorfi $g:V \to V$, og som i bevisets første del får vi

$$P_f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda) \ldots (\lambda_q-\lambda)\ P_g(\lambda),$$

hvilket viser, at λ_{q+1} er rod i $P_g(x)$, altså egenværdi for $g:V \to V$. Lad $\underline{e}_{q+1}$ være en tilsvarende egenvektor for g. Da $\underline{e}_{q+1} \in \operatorname{span}(\underline{b}_{q+1},\dots,\underline{b}_n)$, er $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q, \underline{e}_{q+1})$ lineært uafhængigt, og vi kan udvide dette sæt til en basis $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q, \underline{e}_{q+1},\dots,\underline{e}_n)$ for U.

Vi mangler nu at bestemme matricen for f svarende til den nye basis. Vi betegner matricen for f svarende til basen $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n)$ med $\underline{\underline{A}} = (a_{jk})$, hvor vi skriver λ_j for a_{jj}, $j = 1,\dots,q$ og husker, at $a_{jk} = 0$ for $k = 1,\dots,q$, $j > k$. Derfor er

$$f(\underline{b}_1) = \lambda_1\underline{b}_1$$
$$f(\underline{b}_2) = a_{12}\underline{b}_1 + \lambda_2\underline{b}_2$$
$$- - - - - - - - -$$
$$f(\underline{b}_q) = a_{1q}\underline{b}_1+\dots+a_{q-1,q}\underline{b}_{q-1} + \lambda_q\underline{b}_q.$$

Nu rører koordinatskiftet slet ikke ved $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q$, så disse relationer gælder fortsat efter koordinatskiftet, og derfor må de q første søjler i matricen forblive uændrede. Vi mangler at studere $f(\underline{e}_{q+1})$, som i hvert fald er givet ved et udtryk af formen

c c
c

$$f(\underline{e}_{q+1}) = \cancel{a}_{1,q+1}\,\underline{b}_1+\dots+\cancel{a}_{qq+1}\underline{b}_q+c_{q+1,q+1}\underline{e}_{q+1}+\dots+\cancel{a}_{n,q+1}\underline{e}_n.$$

Heraf følger, at

$$g(\underline{e}_{q+1}) = c_{q+1,q+1}\underline{e}_{q+1}+\dots+c_{n,q+1}\underline{e}_n,$$

men vi ved, at $g(\underline{e}_{q+1}) = \lambda_{q+1}\, \underline{e}_{q+1}$, og derfor kan vi slutte, at

q+1 $$c_{q+1,q+1} = \lambda_{\cancel{q}} \; ; \; c_{q+2,q+1} = \dots = c_{n,q+1} = 0,$$

og dermed har vi vist, at matricen for f svarende til basen $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q, \underline{e}_{q+1},\dots,\underline{e}_{q+n})$ har nuller under diagonalen også i den $q+1$-ste søjle, og at den har λ_{q+1} som diagonalelement i den $q+1$-ste søjle. Dermed er induktionsbeviset fuldført, og dermed er sætningen bevist.

Vi skal omtale en interessant følgesætning.

<u>Sætning 21.12</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Der findes da et udvidelseslegeme $L \supseteq K$, for hvilket følgende gælder: Lad $V \supseteq U$ være en tilsvarende udvidelse af U, og lad $\hat{f}:V \to V$ være den tilsvarende udvidelse af f. Der findes da en basis for V, for hvilken den tilsvarende matrix for $\hat{f}$ er en øvre trekantsmatrix.

Bevis. Hvordan vi end vælger L, vil f og $\hat{f}$ have det samme karakteristiske polynomium. Det er derfor nok at vælge L, således at det karakteristiske polynomium fortolket som polynomium over L kan opløses helt i faktorer af første grad. Vi har tidligere set, at dette er muligt. Dermed er sætningen bevist.

Vi formulerer endnu to specialtilfælde af følgesætningen. Det første følger helt umiddelbart, medens det andet også bygger på algebraens fundamentalsætning.

Sætning 21.13. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Da er det muligt at vælge basis for U, så matricen for f bliver en øvre trekantsmatrix, hvis og kun hvis det karakteristiske polynomium for f kan opløses helt i førstegradsfaktorer.

Sætning 21.14. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Der findes da en basis for U, for hvilken matricen for f er en øvre trekantsmatrix.

Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Vi minder om at mængden af endomorfier udgør ringen $\mathrm{End}U$ med sædvanlig addition og med sammensætning som multiplikation. Det er derfor rimeligt at skrive $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ osv. Dertil kommer f^1 som ensbetydende med f og $f^0 = \mathrm{id} = \mathrm{id}_U$. Hvis f for et valg af basis har matrix $\underline{\underline{A}}$ vil f^q have matrix $\underline{\underline{A}}^q$. Det karakteristiske polynomium er givet ved et udtryk

$$P_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_{n-1} x^{n-1} + \ldots + C_0,$$

hvor $C_0, \ldots, C_{n-1}$ er elementer af K. Da EndU også er et vektorrum over K, har vi en endomorfi

$$P_f(f) = (-1)^n f^n + (-1)^{n-1} C_{n-1} f^{n-1} + \ldots + C_2 f^2 - C_1 f + C_0 \mathrm{id},$$

og hvis f for et valg af basis har matrix $\underline{\underline{A}}$, vil $P_f(f)$ have matrix

$$P_f(\underline{\underline{A}}) = (-1)^n \underline{\underline{A}}^n + (-1)^{n-1} C_{n-1} \underline{\underline{A}}^{n-1} + \ldots + C_2 \underline{\underline{A}}^2 - C_1 \underline{\underline{A}} + C_0 \underline{\underline{E}}.$$

Om disse begreber gælder Hamilton-Cayley's sætning.

<u>Sætning 21.15</u>. $P_f(f)$ er 0-endomorfien, og $P_f(\underline{\underline{A}})$ er $\underline{\underline{0}}$-matricen.

Bevis. Da $P_f(\underline{\underline{A}})$ er matricen for $P_f(f)$ for passende valg af basis, er de to påstande i sætningen ensbetydende, og det er nok at vise en af dem. Vi vælger et udvidelseslegeme $L \supseteq K$, således at $P_f(x)$ opløses helt i førstegradsfaktorer over L. Lad $V \supseteq U$ være en tilsvarende udvidelse af U, og lad $f: V \to V$ være den tilsvarende udvidelse af f. Så har $\hat{f}$ for passende valg af basis også matricen $\underline{\underline{A}}$, og derfor er det nok at vise, at $P_f(\hat{f})$ er 0-endomorfien.

Nu kan vi vælge en basis $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ for V, således at matricen for $\hat{f}$ bliver en øvre trekantsmatrix, og det betyder, at $\hat{f}$ er fastlagt ved relationen

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\underline{e}_1) &= \lambda_1\underline{e}_1 \\
\hat{f}(\underline{e}_2) &= a_{12}\underline{e}_1+\lambda_2\underline{e}_2 \\
&- - - - - - - - \\
\hat{f}(\underline{e}_n) &= a_{1n}\underline{e}_1+\ldots+a_{1\,n-1}\underline{e}_{n-1}+\lambda_n\underline{e}_n,
\end{aligned}
$$

$a_{n-1,\,n}$

medens det karakteristiske polynomium er

$\hat{f}$

$$P_f(x) = P_{f}(x) = (-1)^n(x-\lambda_n)\ \ldots\ (x-\lambda_1),$$

så vi får

$\hat{f}$

$$P_f(\hat{f}) = (-1)^n(f-\lambda_n\mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id}).$$

Læg mærke til, at sammensætningen $\circ$ af disse specielle endomorfier faktisk bliver kommutativ. Nu får vi

$$(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id})(\underline{e}_1) = \hat{f}(\underline{e}_1) - \lambda_1\underline{e}_1 = \lambda_1\underline{e}_1 - \lambda_1\underline{e}_1 = \underline{0}\ ,$$

og det medfører, at $P_f(\hat{f})(\underline{e}_1) = \underline{0}$. Dernæst får vi

$$((\hat{f}-\lambda_2\mathrm{id})\circ(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id}))(\underline{e}_2) = ((\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id})\circ(\hat{f}-\lambda_2\mathrm{id}))(\underline{e}_2) =$$

$$(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id})\ (a_{12}\underline{e}_1+\lambda_2\underline{e}_2-\lambda_2\underline{e}_2) = a_{12}(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id})(\underline{e}_1) = \underline{0}.$$

Lad os nu antage, at vi for et eller andet $q \leqq n$ har vist, at

$$((\hat{f}-\lambda_{q-1}\mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1\mathrm{id}))(\underline{e}_j) = \underline{0} \text{ for } j = 1,\ldots, q-1.$$

Vi får så

$$((\hat{f}-\lambda_q \mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1 \mathrm{id}))(\underline{e}_q) =$$

stryg væk

$$(((\hat{f}-\lambda_{q-1} \mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1 \mathrm{id}))\circ(\hat{f}-\lambda_q \mathrm{id}))(\underline{e}_q) =$$

$a_{q-1,q}$

$$((\hat{f}-\lambda_{q-1} \mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1 \mathrm{id}))(a_{1q}\underline{e}_1+\ldots+a_{1,q-1}\underline{e}_{q-1}+\lambda_q\underline{e}_q-\lambda_q\underline{e}_q) =$$

a_{jq}

$$\sum_{j=1}^{q-1} a_{1j}((\hat{f}-\lambda_{q-1} \mathrm{id})\circ\ldots\circ(\hat{f}-\lambda_1 \mathrm{id}))(\underline{e}_j) = \underline{0}.$$

Dermed har vi vist ved induktion, at $P_f(\hat{f})(\underline{e}_q) = \underline{0}$ for $q = 1,\ldots,n$, men det medfører, at $P_f(\hat{f})$ er 0-endomorfien, og dermed er sætningen vist.

Nu vil vi gå over til at studere betydningen af egenværdiernes geometriske multipliciteter. Dertil får vi brug for følgende vigtige hjælpesætning.

Sætning 21.16. Egenvektorer, som svarer til indbyrdes forskellige egenværdier, er lineært uafhængige.

Bevis. Lad U være et vektorrum over K. Lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Lad $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_q$ være egenvektorer for f, og lad $\underline{e}_j$ svare til egenværdien λ_j, således at $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ er indbyrdes forskellige. Vi skal vise, at $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_q$ er lineært uafhængige, og vi vil benytte induktion efter q. For $q = 1$ er påstanden rigtig, da vi ikke tillader en egenvektor for f at være $\underline{0}$. Vi

$\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{q-1}$ indfører induktionsantagelsen, at $\lambda_1,\ldots,\lambda_{q-1}$ er lineært uafhængige, og vi antager, at $\mu_1,\ldots,\mu_q \in K$ tilfredsstiller relationen

$$\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_q\underline{e}_q = \underline{0}.$$

Det medfører, at

$$\underline{0} = f(\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_q\underline{e}_q)=\mu_1 f(\underline{e}_1)+\ldots+\mu_q f(\underline{e}_q)=\lambda_1\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda_q\mu_q\underline{e}_q.$$

Af de to relationer

$$\lambda_1\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\lambda_q\mu_q\underline{e}_q = \underline{0}$$

$$\mu_1\underline{e}_1+\ldots+\mu_q\underline{e}_q = \underline{0}$$

får vi elimination af $\underline{e}_q$, at

$$(\lambda_1-\lambda_q)\mu_1\underline{e}_1+\ldots+(\lambda_{q-1}-\lambda_q)\mu_{q-1}\underline{e}_{q-1} = \underline{0}\ ,$$

og da $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{q-1}$ er lineært uafhængige, kan vi slutte, at

$$(\lambda_1-\lambda_q)\mu_1 = \ldots = (\lambda_{q-1}-\lambda_q)\mu_{q-1} = 0.$$

Da $\lambda_1,\ldots,\lambda_q$ er indbyrdes forskellige, er faktorerne $\lambda_1-\lambda_q,\ldots,\lambda_{q-1}-\lambda_q$ alle $\neq 0$, og da der ikke er 0-divisorer i legemet K, får vi $\mu_1 = \ldots = \mu_{q-1} = 0$. Så har vi også $\mu_q\underline{e}_q = \underline{0}$, altså $\mu_q = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Vi fortsætter nu med et par definitioner, som i det væsentlige bare går ud på at indføre lidt mere jargon.

<u>Definition 21.17</u>. Lad U være et vektorrum over et legeme K, lad $f:U \to U$ være en endomorfi, og lad $\lambda \in K$ være et vilkårligt element. Underrummet $\ker(f-\lambda \mathrm{id}) \subseteq U$ kaldes da det til λ svarende egenrum for f.

Egenrummet for λ har positiv dimension, hvis og kun hvis λ er egenværdi, og egenrummets dimension er så netop den geometriske multiplicitet af λ. Af sætning 21.17 følger umiddelbart, at summen af egenrum hørende til forskellige egenværdier er en direkte sum.

<u>Definition 21.18</u>. En $n \times n$-matrix $\underline{\underline{A}}$ siges at være på diagonalform i de r første søjler, hvis alle elementer i disse søjler udenfor diagonalen er 0. Vi kalder $\underline{\underline{A}}$ en diagonalmatrix, hvis alle elementer udenfor diagonalen er 0.

Vi viser en hovedsætning.

<u>Sætning 21.19</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Hvis det er muligt at vælge basis for U, således at matricen for f bliver på diagonalform i de r første søjler, da er elementerne i diagonalen i de r første søj-

ler egenværdier for f, og det antal gange, en egenværdi forekommer blandt disse diagonalelementer, kan ikke overstige dens geometriske multiplicitet. Hvis $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ er et sæt af egenværdier for f, således at det antal gange, hver egenværdi optræder i sættet, netop er dens geometriske multiplicitet, da er det muligt at vælge basis for U, således at matricen for f bliver på diagonalform i de r første søjler, medens diagonalelementerne i disse søjler netop bliver $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ i den givne rækkefølge.

Bevis. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for U, for hvilken matricen for U er på diagonalform i de r første søjler. Hvis de r diagonalementer er $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, har vi $f(\underline{e}_j) = \lambda_j\underline{e}_j$ for $j = 1,\ldots,r$, og det viser, at $\underline{e}_j$ er egenvektor svarende til egenværdien λ_j. Hvis en egenværdi λ forekommer s gange blandt $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$, indeholder egenrummet for λ et underrum udspændt af s basisvektorer, så den geometriske multiplicitet af λ er mindst s.

Lad os dernæst antage, at $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ er et sæt af egenværdier for f, og at det antal gange, hver egenværdi optræder i sættet, netop er dens geometriske multiplicitet. Lad $\kappa_1,\ldots,\kappa_s$ være de indbyrdes forskellige egenværdier, der optræder i sættet, og lad $p_1,\ldots,p_s$ være deres geometriske multipliciteter. For $j = 1,\ldots,s$ kan vi da vælge p_j vektorer $\underline{b}_{j,1},\ldots,\underline{b}_{j,p_j}$, som udgør en basis for egenrummet der svarer til κ_j. Vi påstår, at vektorerne $\underline{b}_{j,k}$; $j=1,\ldots,s$; $k=1,\ldots,p_j$ er lineært uafhængige, og for at vise det betragter vi en relation

$\underline{b}_{11}$

$$(\mu_{11}\underline{b}_{1}+\ldots+\mu_{1p_1}\underline{b}_{1p_1})+(\mu_{21}\underline{b}_{21}+\ldots\mu_{2p_2}\underline{b}_{2p_2})+\ldots$$

$$(\mu_{s1}\underline{b}_{s1}+\ldots+\mu_{sp_s}\underline{b}_{sp_s}) = \underline{0} ,$$

hvor koefficienterne $\mu_{j,k}$ er elementer af K. I den j^{te} parentes står $\underline{0}$ eller en egenvektor hørende til κ_j. Af den foregående hjælpesætning følger derfor, at relationen kun kan være opfyldt, hvis hver parentes er $\underline{0}$. Nu er vektorerne i den j^{te} parentes en basis for egenrummet for κ_j og linearkombinationen kan derfor kun blive $\underline{0}$, når samtlige koefficienter er 0. Vi har således vist, at vektorerne $\underline{b}_{j,k}$ er lineært uafhængige.

Nu forekommer hvert κ_j netop p_j gange i sættet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, og vi kan derfor netop knytte basisvektorerne $\underline{b}_{j,1},\ldots,\underline{b}_{j,p_j}$ til hver sin af de vektorer i sættet, der er lig med κ_j. Når vi gør dette for $j=1,\ldots,r$ får vi til hvert λ_i knyttet en tilsvarende egenvektor $\underline{e}_i$, så $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r)$ bliver lineært uafhængigt. Vi udvider $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_i)$ til en basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U, og med denne basis gælder så

$\underline{e}_r$

$$f(\underline{e}_j) = \lambda_j \underline{e}_j \;\; ; \quad j = 1,\ldots,r,$$

og det er ensbetydende med, at matricen for f ved benyttelse af basen $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U er på diagonalform i de r første søjler, og at de r første diagonalelementer nævnt i rækkefølge er $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$. Dermed er sætningen bevist.

Vi får også i dette tilfælde nogle følgesætninger. Den første, vi omtaler, er dog en følge af begge sætningerne om egenværdier og valg af basis.

<u>Sætning 21.20</u>. Den geometriske multiplicitet af en egenværdi er højst lig med den algebraiske.

Bevis. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over K, lad $f:U \to U$ være en endomorfi, og lad λ være egenværdi for f med geometrisk multiplicitet p. Den sidste sætning fortæller så, at vi kan vælge en basis B for U, så matricen for f kommer på diagonalform i de p første søjler med de p første diagonalelementer lig med λ. Så har matricen nuller under diagonalen i de p første søjler, og i følge den første af vore hovedsætninger medfører det, at den algebraiske multiplicitet af λ er $\geqq p$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 21.21. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Da findes der en basis for U, for hvilken matricen for f er en diagonalmatrix, hvis og kun hvis følgende 2 betingelser begge er opfyldt:

1). Det karakteristiske polynomium for f opløses helt i førstegradsfaktorer over K.

2). For hver egenværdi for f er den geometriske multiplicitet lig med den algebraiske.

Bevis. Det følger helt umiddelbart af sætningerne 21.19 og 21.20.

Eksempel. En endomorfi $f:U \to U$, hvor U er 2-dimensionalt, antages for et eller andet valg af basis at have matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Det karakteristiske polynomium for f bliver $(1-\lambda)^2$, så λ bliver egenværdi med algebraisk multiplicitet 2, og den første betingelse i sætningen er opfyldt. Det til λ svarende egenrum bliver kernen for den lineære afbildning, der med det samme valg af basis har matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og egenrummet er derfor 1-dimensionalt, så den anden betingelse i sætningen er ikke opfyldt. Der findes således ikke nogen basis, for hvilken matricen for f er en diagonalmatrix.

Det viser sig senere, at sætningerne om muligheden for at vælge basis for et vektorrum, så en given endomorfi får en matrix, der er bekvem at regne med, kan skærpes en hel del, og derved blive anvendelige i flere situationer, end det lige nu ser ud til.

Det er blevet understreget, at man kan opnå, at betingelse 1) i den foregående sætning er opfyldt, ved at udvide til et legeme $L \supseteq K$. På den anden side vil en sådan udvidelse slet ikke have nogen virkning med hensyn til sætningens betingelse 2). Dette fremgår af den næste sætning.

<u>Sætning 21.22</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, lad $f:U \to U$ være en endomorfi, lad $\lambda \in K$ være en egenværdi for K, og lad $B \subseteq U$ være en basis for egenrummet for λ. Lad $L \supseteq K$ være et udvidelseslegeme, $V \supseteq U$ en tilsvarende udvidelse af U og $\hat{f}:V \to V$ den tilsvarende udvidelse af f. Da vil B være en basis for det til egenværdien λ hørende egenrum for $\hat{f}$.

Bevis. Lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for U, således at $B = \{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r\}$. Så vil matricen $\underline{\underline{A}}$ for f være på diagonalform i de r første søjler og med diagonalelement λ i disse søjler. Da r er den geometriske multiplicitet af λ, vil delmatricen af $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$ bestående af de $n-r$ sidste søjler have rang $n-r$. Nu har $\hat{f}$ også matrix $\underline{\underline{A}}$, og vi får derfor det samme ligningssystem til bestemmelse af egenrummet for egenværdien λ for $\hat{f}$. Det ses derefter umiddelbart at $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_r$ udspænder egenrummet. Dermed er sætningen bevist.

$\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}$

KAPITEL 23

Jordans Normalform.

Vore undersøgelser har vist, at matricen for en endomorfi af et endeligdimensionalt vektorrum ved passende valg af basis kan bringes på diagonalform i så mange søjler, som antallet af egenværdier tillader, når de tælles med geometrisk multiplicitet. Endvidere kan vi opnå, at matricen har nuller under diagonalen i så mange søjler, som antallet af egenværdier tillader, når de tælles med algebraisk multiplicitet.

Ved at gå over til et passende udvidelseslegeme, kan vi opnå, at antallet af egenværdier talt med algebraisk multiplicitet bliver lig med rummets dimension, og vi kan da vælge basis for rummet, så endomorfiens matrix bliver en øvre trekantsmatrix.

Overgangen til et udvidelseslegeme ændrer, som vi har set hverken den geometriske eller den algebraiske multiplicitet af de allerede eksisterende egenværdier, og hvis de to multipliciteter er forskellige for en af egenværdierne, kan man således kun opnå at få en øvre trekantsmatrix, men ikke en diagonalmatrix.

Hvis vi har givet to $n \times n$-diagonalmatricer, er det nemt at se, om de kan være matricer for samme endomorfi for forskelligt valg af basis. Det vil nemlig være tilfældet, hvis og kun hvis de to matricer kan fås af hinanden ved permutation af diagonalelementerne.

Hvis de to matricer er øvre trekantsmatricer, der ikke kan bringes på diagonalform, er spørgsmålet langt vanskeligere at besvare. Hvis de to matricer hører til samme endomorfi for forskellige baser, er det stadig rigtigt, at deres diagonaler kan fås af hinanden ved permutation, men denne betingelse sikrer ikke, at matricerne svarer til samme endomorfi. Vi behøver derfor en mere speciel standardform for øvre trekantsmatricer, før vi kan besvare problemet. Et vigtigt hjælpemiddel til opnåelsen af en sådan standardform er begrebet nilpotens, som vi nu vil definere.

Definition 23.1. Et element x af en ring λ kaldes nilpotent, hvis der findes et naturligt tal n, for hvilket $x^n = 0$.

Det er klart, at 0 er nilpotent. Hvis $x^n = 0$, er også $x^q = 0$ for alle $q \geqq n$, så der findes en mindste eksponent p, for hvilken $x^p = 0$.

Vi er især interesseret i nilpotens af endomorfier $f:U \to U$, hvor U er et endeligdimensionalt vektorrum. Det er klart, at f er nilpotent, hvis en tilsvarende matrix er nilpotent, og at enhver matrix, der svarer til en nilpotent endomorfi, selv er nilpotent.

Vi går igang med at vise en sætning, der karakteriserer de nilpotente endomorfier.

<u>Sætning 23.2</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Da er følgende 3 egenskaber ækvivalente:

1). f er nilpotent.

2). f har 0 som egenværdi med algebraisk multiplicitet n.

3). Der findes en basis for U, for hvilken matricen for U er en øvre trekantsmatrix med nuller overalt i diagonalen.

Bevis. Lad λ være en egenværdi for f, og lad $\underline{e}$ være en tilsvarende egenvektor. Så er $f(\underline{e}) = \lambda\underline{e}$, $f^2(\underline{e}) = \lambda^2\underline{e},\dots,f^n(\underline{e}) = \lambda^n(\underline{e})$, så vi ser, at for $\lambda \neq 0$ er $f^n(\underline{e}) \neq \underline{0}$ for alle n. Altså har en nilpotent endomorfi ingen fra 0 forskellige egenværdier. Lad $L \supseteq K$ være en udvidelse og $V \supseteq U$ en tilsvarende udvidelse, samt $\hat{f}:V \to V$ den tilsvarende udvidelse af f. Da en matrix for f også er en matrix for $\hat{f}$, er $\hat{f}$ nilpotent, hvis f er det. Men vi kan vælge L, så det karakteristiske polynomium for f og $\hat{f}$ helt falder i førstegradsfaktorer over L. Men da f ikke har andre egenværdier end 0, medfører det, at det karakteristiske polynomium blot er $(-x)^n$. Dermed har vi bevist, at 1) $\Rightarrow$ 2).

Vi har allerede tidligere vist, at 2) $\Rightarrow$ 3).

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ være en matrix for U, som opfylder betingelsen $a_{ij} = 0$ for alle (i,j) med $j-i < 1$. Vi viser ved induktion, at $\underline{\underline{A}}^q = (a_{ij}^{(q)})$, hvor $a_{ij}^{(q)} = 0$ for alle (i,j) med $j-i < q$. Vi har allerede antaget, at det er rigtigt for $q = 1$. Endvidere er

$$a_{ij}^{(q+\ )} = a_{i}^{(q)}\, a_{ij} + \dots + a_{i,i+q-1}^{(q)} a_{i+q-1,j} + a_{i,i+q}^{(q)}, a_{i+q,j} + \dots + a_{i,n}^{(q)}\, a_{n,j},$$

og i de $i+q-1$ første led er den første faktor 0. I alle de sidste led er den sidste faktor 0, hvis ikke $j > i+q$. Dermed er induktionsbeviset fuldført. For $q = n$ får vi $\underline{\underline{A}}^n = 0$. Dermed har vi vist, at 3) $\Rightarrow$ 1), og dermed er sætningen bevist.

Den næste sætning er en hjælpesætning, der dog har en vis interesse i sig selv.

<u>Sætning 23.3</u>. Lad U og V være vektorrum over K, og lad $f: U \to V$ være en lineær afbildning. Lad $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_p)$ være en basis for $f(U) \subseteq V$, og lad $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p \in U$ være valgt, således at $f(\underline{b}_j) = \underline{e}_j$, $j = 1, \ldots, p$. Lad $(\underline{b}_{p+1}, \ldots, \underline{b}_n)$ være en basis for kernf. Da er $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ en basis for U.

Bevis. For $\underline{u} \in U$ kan vi vælge $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$, således at

$$f(\underline{u}) = \lambda_1\underline{e}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{e}_p = f(\lambda_1\underline{b}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{b}_p).$$

Altså har vi $\underline{u} - (\lambda_1\underline{b}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{b}_p) \in \mathrm{kern}f$, og dermed har vi vist, at $U = \mathrm{kern}f + \mathrm{span}(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p)$. For $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ kan $\lambda_1\underline{b}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{b}_p \in \mathrm{kern}f$ kun indtræffe, hvis $\lambda_1\underline{e}_1 + \ldots + \lambda_p\underline{e}_p = \underline{0}$, altså kun hvis $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. Dermed har vi vist, at

$$U = \mathrm{kern}\, f \oplus \mathrm{span}\, (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_p).$$

Vi kan derfor danne en basis for U ved at tage foreningsmængden af en basis for kernf og en basis for span($\underline{b}_1$, ...,$\underline{b}_p$). Nu er $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_p$ lineært uafhængige, da deres billeder ved f er det, og derfor er $(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_p)$ en basis for span$(\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_p)$. Dermed er hjælpesætningen bevist.

Nu udnyttes hjælpesætningen til valg af en særlig bekvem basis svarende til en given nilpotent endomorfi.

<u>Sætning 23.4</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en nilpotent endomorfi. Da har U en basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, for hvilken vi har $f(\underline{e}_n) = \underline{0}$, medens der for hver index $j = 1,\dots,n-1$ gælder enten $f(\underline{e}_j) = \underline{0}$ eller $f(\underline{e}_j) = \underline{e}_{j+1}$ (ikke nødvendigvis den samme af de to relationerfor alle disse indices).

Bevis. Af den første sætning i kapitlet fremgår, at $f^n(U) = \underline{0}$. Lad q være det mindste tal, for hvilket vi har $f^{q+1}(U) = \{\underline{0}\}$. Vi har da

$$U = f^0(U) \supseteqq f(U) \supseteqq f^2(U) \supseteqq \dots \supseteqq f^q(U) \supseteqq f^{q+1}(U) = \{\underline{0}\}.$$

Vi vil vise, at der for hvert af de hele tal $k = 0,1,\dots,q$ findes en basis $(\underline{e}_1^{(k)},\dots,\underline{e}_{p_k}^{(k)})$ for $f^k(U)$, samt en voksende følge af indices $\nu_{k1} < \nu_{k2} < \dots < \nu_{kj_k} = p_k$ med $\nu_{k,j+1} - \nu_{k,j} \leqq q-k+1$ for $j = 2,3,\dots,f_k$, og således at vi har $f(\underline{e}^{(k)}_{\nu_{kj}}) = \underline{0}$ for $j = 1,\dots,j_k$, og $f(\underline{e}_\nu) = \underline{e}_{\nu+1}$ for alle øvrige basisvektorer. For $k = 0$ er dette netop den i sætningen fremsatte påstand, og vi får således sætningen vist netop ved at gennemføre det her foreslåede bevis.

Nu viser det sig, at det er bekvemmere, at vise en lille smule mere. Ud over de anførte egenskaber, vil vi opnå, at basiselementerne $\underline{e}_{\nu_{k,j}}$, $j = 1,\dots,j_k$ netop udgør en basis for $\operatorname{kern}(f|f^k(U)) = f^k(U) \cap \operatorname{kern} f$.

Vi vælger først en vilkårlig basis $(\underline{e}_1^{(q)},\dots,\underline{e}_{p_q}^{(q)})$ for $f^{(q)}(U)$, og desuden vælger vi $\nu_{q,j} = j$ for $j = 1,\dots,j_q = p_q$. Da vi har $\operatorname{kern}(f|f^q(U)) = f^q(U)$ er de krævede betingelser dermed opfyldt for $k = q$. Ved "nedadgående induktion" vælger vi efterhånden basis for $q-1$, $q-2,\dots,k$. Lad os antage, at det er lykkedes i hvert fald så langt at vælge basis og indexfølge, så alle betingelserne er opfyldt. Vi skal så gennemføre valget for $f^{k-1}(U)$. Vi opskriver den valgte basis for $f^k(U)$ i et diagram med pile, der viser, hvordan f afbilder basiselementerne:

$$\underline{e}_1^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_2^{(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k1}-1}^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k1}}^{(k)} \longrightarrow \underline{0}$$

$$\underline{e}_{\nu_{k1}+1}^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k1}+2}^{(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k2}-1}^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k2}}^{(k)} \longrightarrow \underline{0}$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$\underline{e}_{\nu_{k,f_k-1}+1}^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k,f_k-1}+2}^{(k)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k,f_k}-1}^{(k)} \longrightarrow \underline{e}_{\nu_{k,f_k}}^{(k)} \longrightarrow \underline{0}$$

Vektorerne i kolonnen til højre, altså $e^{(k)}_{\nu_{k,j}}$, $j = 1,\dots,j_k$ udgør i følge induktionsantagelsen en basis for $\operatorname{kern}(f\,|\,f^k(U)) = f^{(k)}(U) \cap \operatorname{kern} f$.

Da vi har $\operatorname{kern}(f\,|\,f^k(U)) \subseteqq \operatorname{kern}(f\,|\,f^{k-1}(U))$, kan vi udvide basen $(\underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,1}},\dots,\underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j_k}})$ for $\operatorname{kern}(f\,|\,f^k(U))$ til en basis

(1) $$(\underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,1}},\dots,\underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j_k}},\ \underline{e}^{(k-1)}_{p_{k+j_k+1}},\dots,\underline{e}^{(k-1)}_{p_{k-1}})$$

for $\operatorname{kern}(f\,|\,f^{k-1}(U))$. Dermed har vi valgt tallet p_{k-1}. Vi definerer dernæst

$$\nu_{k-1,j} = \begin{cases} \nu_{k,j} + j, & j = 1,\dots,j_k \\ \\ p_k+j, & j = j_k+1,\dots p_{k-1} - p_k = j_{k-1} \end{cases}$$

Dermed har vi valgt j_{k+1}. Vi får umiddelbart et

$$\nu_{k-1,j+1}-\nu_{k-1,j} = \begin{cases} \nu_{k,j+}+(j+1)-(\nu_{k,j}+j) = \nu_{k,j+1}-\nu_{k,j}+1 \subseteqq \\ q-k+1 \quad \text{for } j=1,\dots,j_k-1 \\ \\ 1 \quad \text{for } j = j_k,\dots,j_{k-1}-1. \end{cases}$$

Indexfølgen opfylder således den forlangte betingelse.

Vi mangler at vælge basiselementerne $\underline{e}^{(k-1)}_{\nu}$ for $\nu = 1,2,\dots,p_k+j_k = \nu_{k-1,j_k}$. Vi begynder med at vælge

$\underline{e}^{(k-1)} \in f^{(k-1)}(U)$ således at $f(\underline{e}^{(k-1)}) = \underline{e}^{(k)}$. For $j = 1,\ldots,j_k-1$ vælger vi dernæst $\underline{e}^{(k-1)}_{k-1,j^{+1}} \in f^{(k-1)}(U)$, således at $f(\underline{e}^{k-1}_{k-1,j^{+1}}) = \underline{e}^{(k)}_{k,j^{+1}}$. Endvidere definerer vi

$$\underline{e}_\iota^{(k-1)} = \underline{e}_{\iota-1}^{(k)} \; ; \; \iota = 2,\ldots, \nu_{k,1}+1 = \nu_{k-1,2}$$

og

$$\underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k-1,j}+\iota} = \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j}+\iota-1} \; ; \; j=1,\ldots,j_k-1; \; \iota = 2,\ldots,$$

$$\nu_{k,j+1}-\nu_{k,j}+1 = \nu_{k-1,j+1}-\nu_{k-1,j}.$$

Dette her er ikke særlig overskueligt. For at fremme overskueligheden, skriver vi den første linie af diagrammet, vi lavede ovenfor af basen for $f^k(U)$ og nedenunder skriver vi det tilsvarende diagram for $f^{k-1}(U)$, således at vektorer, der står lige under hinanden er identiske.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \underline{e}_1^{(k)} & \longrightarrow & \underline{e}_2^{(k)} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k1}-1} & \longrightarrow & \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k1}} & \longrightarrow & \underline{0} \\
\underline{e}_1^{(k-1)} & \longrightarrow & \underline{e}_2^{(k-1)} & \longrightarrow & \underline{e}_3^{(k-1)} & \rightarrow \cdots \longrightarrow & \underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k-1,1}-1} & \rightarrow & \underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k-1,1}} & \longrightarrow & \underline{0}.
\end{array}$$

På tilsvarende måde opskriver vi den j^{te} række af diagrammerne

$$\begin{array}{cccccccc}
\underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j-1}+1} & \longrightarrow & \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j-1}+2} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j}-1} & \longrightarrow & \underline{e}^{(k)}_{\nu_{k,j}} & \longrightarrow \underline{0}
\end{array}$$

$$\underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k-1,j-1}+1} \longrightarrow \underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k-1,j-1}+2} \longrightarrow e^{(k-1)}_{\nu_{k-1,j-1}+3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{e}^{(k-1)}_{\nu_{k,j-1}-1} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underline{e}^{(k-1)}_{k,j-1} \longrightarrow \underline{0}$$

Den j_k^{te} række i det nye system ender med index p_k+j_k. Der bliver så tilføjet $j_{k-1}-j_k$ nye rækker, der hver bare indeholder en vektor, som afbildes i $\underline{0}$ ved f. Vi mangler nu blot at vise, at $(\underline{e}_1^{(k-1)},\ldots,\underline{e}_{p_{k-1}}^{(k-1)})$ er en basis for $f^{k-1}(U)$, idet de andre egenskaber allerede er eftervist. Vi har imidlertid sørget for, at sættet (1), som er identisk med $(\underline{e}_{\nu_{k-1,1}}^{(k-1)},\ldots,\underline{e}_{\nu_{k-1,j_{k-1}}}^{(k-1)})$ er en basis for $\operatorname{kern}(f|f^{k-1}(U))$, og da de resterende vektorer i sættet $(\underline{e}_1^{(k-1)},\ldots,\underline{e}_{p_{k-1}}^{(k-1)})$ ved $f|f^{(k-1)}(U)$, følger det umiddelbart af hjælpesætningen, at sættet virkelig er en basis for $f^{(k-1)}(U)$, og dermed er sætningen bevist.

Nu må vi have indført vore standard-matricer.

Definition 23.5. En (λ,r)-blok er en $r\times r$-matrix, i hvilken alle diagonalelementerne har værdien λ, medens alle elementerne umiddelbart over (= til højre for) diagonalelementerne er 1, og alle øvrige elementer er 0. En λ-Jordan-matrix er en matrix, i hvilken alle diagonalelementerne er λ, medens nogle af elementerne umiddelbart over (= til højre for) diagonalen er 1 og alle øvrige elementer er 0.

For $r = 1,2,3,4$ har vi (λ,r)-blokkene

$$(\lambda),\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En λ-Jordan-matrix kan på entydig måde opdeles i et antal (λ,r)-blokke svarende til forskellige værdier af r og placerede langs diagonalen, og så er iøvrigt alle andre elementer 0. Vi illustrerer dette med et eksempel.

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{pmatrix}$$

<u>Definition 23.6</u>. Vi siger, at en λ-Jordan-matrix er af typen $(r_1,\dots,r_s)$, hvis de langs diagonalen forekommende (λ,r)-blokke nævnt i rækkefølge har r lig med $r_1,\dots,r_s$.

Matricen ovenfor er således en λ-Jordan-matrix af type $(5,1,1,2,3,1)$.

Vi kan nu vise hovedsætningen om nilpotente endomorfier.

Sætning 23.7. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en nilpotent endomorfi. Det er da muligt at vælge basis for U, således at matricen for f bliver en 0-Jordan-matrix. De tal, der indgår i det talsæt, der er typen for denne 0-Jordan-matrix, er fastlagt ved f, men den rækkefølge, i hvilken de optræder i sættet, kan vælges vilkårligt.

Bevis. Vi vælger basis i overensstemmelse med den foregående sætning, og det ses da umiddelbart, at matricen for f bliver en 0-Jordan-matrix. Lad os dernæst antage, at matricen for f ved et eller andet valg af basis bliver en 0-Jordan-matrix af typen $(r_1,\dots,r_s)$. Vi har da $r_1+\dots+r_s = n$. For $\nu = 1,2,\dots,n$ betegner vi med $\varphi(\nu)$ det antal gange tallet ν optræder i sættet $(r_1,\dots,r_s)$. Lad $R(k)$ betegne rangen af f^k, altså dimensionen af $f^k(U)$. Vi har så $R(1) \geqq R(2) \geqq R(3) \geqq \dots$. Vi sætter $R(0) = n \geqq R(1)$. Antallet s af $(0,r_\sigma)$-blokke er $s = \varphi(1) + \varphi(2)+\dots+\varphi(n)$. Ved afbildningen $f:U \to f(U)$ dør s basisvektorer, så vi har

$$s = \varphi(1) + \varphi(2)+\dots+\varphi(n) = R(1) - R(0).$$

Ved afbildningen $f|f(U):f(U) \to f^2(U)$ er de basisvektorer, der svarer til $(0,1)$-blokke allerede døde, og derfor er

$$\varphi(2)+\ldots+\varphi(n) = R(2) - R(1).$$

Således fortsætter det, og vi ser, at følgen $R(0)$, $R(1),\ldots$ bestemmer antallene $\varphi(1)$, $\varphi(2),\ldots,$ og dermed de i typen forekommende antal. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. En endomorfi $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ved anvendelse af de sædvanlige basisvektorer $\underline{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),\ldots\underline{e}_n = (0,\ldots,0,1)$. Vi ser, at f er nilpotent, så vi kan vælge en basis, for hvilken matricen bliver en $\underline{0}$-Jordan-matrix. Da vi har

$$f(\underline{e}_1) = \underline{0};\ f(\underline{e}_2) = \ldots = f(\underline{e}_{n-1}) = \underline{e}_1;\ f(\underline{e}_n) = \underline{e}_1+\ldots+\underline{e}_{n-1},$$

er $f(\mathbb{R}^n) = \mathrm{span}(\underline{e}_1,\underline{e}_1+\ldots+\underline{e}_{n-1}) = \mathrm{span}(\underline{e}_1,\underline{e}_2+\ldots+\underline{e}_{n-1})$.
Vi får dernæst

$$f^2(\underline{e}_j) = \underline{0}\ ,\ j = 1,\ldots,n-1;\ f^2(\underline{e}_n) = (n-2)\underline{e}_1;$$

så vi har $f^2(\mathbb{R}^n) = \mathrm{span}((n-2)\underline{e}_1)$, og $f^3(\mathbb{R}^n) = \{\underline{0}\}$.

Som basis for $f^2(\mathbb{R}^n)$ er det bekvemt at vælge

$(\underline{\tilde{e}}_3)$, hvor $\underline{\tilde{e}}_3 = (n-2)\underline{e}_1$. Basis for $f(\mathbb{R}^n)$ skal indeholde et originalelement til $\underline{\tilde{e}}_3$, og dertil kan vi bruge $\tilde{e}_2 = \underline{e}_1 + \ldots + \underline{e}_n$. Nu er $(\underline{\tilde{e}}_2, \underline{\tilde{e}}_3)$ en basis for $f(U)$, som er 2-dimensionalt. Basis for U skal indeholde et originalelement til $\tilde{e}_2$, og dertil kan vi bruge $\underline{\tilde{e}}_1 = \underline{e}_n$. Så vil $\mathrm{span}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ ved f afbildes bijektivt på $f(\mathbb{R}^n)$. Kernen for f er altså n-2-dimensional og indeholder $\tilde{e}_3 = (n-2)\underline{e}_1$. Vi får en basis $(\tilde{e}_3, \ldots, \tilde{e}_n)$ for kernen ved at vælge $\underline{\tilde{e}}_\nu = \underline{e}_{\nu-1} - \underline{e}_{\nu-2}$; $\nu = 4, \ldots, n$. Dermed har vi fundet en basis $(\underline{\tilde{e}}_1, \ldots, \underline{\tilde{e}}_n)$, for hvilken matricen for f bliver en 0-Jordan-matrix. Den får typen $(3,1,\ldots,1)$, hvor der er $n-3$ 1-taller. Matricen får således blot 1-taller på pladserne $(1,2)$ og $(2,3)$, medens der ellers kommer 0 overalt.

Efter denne udførlige behandling af de nilpotente endomorfier, går vi over til selve hovedproblemet, nemlig at angive en standardform for matricen for en vilkårlig endomorfi. Det kunne se ud, som om vi har lang vej igen, men det viser sig, at det generelle problem løses ret let, ved hjælp af den løsning, vi nu har til rådighed i det nilpotente tilfælde. Det beror på den næste sætning.

Sætning 23.8. Lad U være et endeligdimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f: U \to U$ være en endomorfi. Der findes da underrum $V \subseteqq U$ og $W \subseteqq U$, således at

1). $V \oplus W = U$.

2). V og W er invariante ved f, altså $f(V) \subseteqq V$ og $f(W) \subseteqq W$.

3). $f|V$ er nilpotent og $f|W$ afbilder W bijektivt på sig selv.

Bevis. Vi har $U = f^0(U) \geqq f(U) \geqq f^2(U) \geqq \ldots$. Hver gang, der gælder streng inklusion, falder dimensionen, og da U er endeligdimensionalt, kan det kun ske endelig mange gange. Men så gælder et lighedstegn $f^p(U) = f^{p+1}(U)$, og det betyder, at f afbilder $f^p(U)$ surjektivt og dermed også bijektivt på sig selv, og det medfører, at alle rummene $f^k(U)$ med $k \geqq p$ bliver identiske.

Vi har nu

$$U = \text{kern } f^p \oplus f^p(U).$$

Det er nemlig klart, at $\underline{0} \in f^p(U)$ er det eneste element, der også tilhører kernf^p, så summen af de to underrum er direkte. Da summen af de to underrumsdimensioner er lig med dimensionen af U (sætning 13.11), bliver den direkte sum hele U. Dermed er 1) bevist.

Det er klart, at $f^p(\underline{u}) = \underline{0}$ medfører $f^p(f(\underline{u})) = \underline{0}$, så f afbilder kernf^p i sig selv. Det er også oplagt, at den derved definerede afbildning af $\ker f^p$ i sig selv er nilpotent. Endelig så vi allerede i starten af beviset, at f afbilder $f^p(U)$ bijektivt på sig selv. Dermed er sætningen bevist.

Den næste sætning er bare en ret triviel bemærkning.

Sætning 23.9. Lad U være et vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi. Lad $V \subseteq U$ være et underrum. Hvis det for et element $\lambda_0 \in K$ gælder, at $f - \lambda_0 \mathrm{id}$ lader V invariant, altså $(f-\lambda_0\mathrm{id})(V) \subseteq V$, da vil $f-\lambda\mathrm{id}$ lade V invariant, for ethvert element $\lambda \in K$.

Bevis. Det følger umiddelbart af, at vi for $\underline{u} \in V$ med $(f-\lambda_0\mathrm{id})(\underline{u}) \in V$ har

$$(f-\lambda\mathrm{id})(\underline{u}) = (f-\lambda_0\mathrm{id})(\underline{u}) + (\lambda-\lambda_0)\underline{u} \in V.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 23.10. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over et legeme K, lad $f:U \to U$ være en endomorfi, og lad $\lambda \in K$ være en egenværdi for f med algebraisk multiplicitet r. Der findes da en basis for U, for hvilken matricen for f har formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{J}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{J}}$ er en λ-Jordan-matrix med r rækker og søjler, medens $\underline{\underline{B}}$ er en kvadratisk matrix med $n-r$ rækker og søjler, og uden λ som egenværdi. Egenværdierne for $\underline{\underline{B}}$ er netop de fra λ forskellige egenværdier for f og med de samme algebraiske og geometriske multipliciteter som for f.

Bevis. Ifølge en sætning ovenfor har U underrum V og W, som er invariante for $f-\lambda\mathrm{id}:U \to U$, således at $U = V \oplus W$, og således at $f-\lambda\mathrm{id}$ afbilder W bijektivt på sig selv og V nilpotent ind i sig selv. Da $f-\lambda\mathrm{id}$ ikke afbilder U bijektivt, har V positiv dimension. Vi kan vælge basis for V, således at matricen for den nilpotente endomorfi $f-\lambda\mathrm{id}|V$ bliver en 0-Jordan-matrix J. Ifølge den sidste sætning er V invariant overfor f, og endomorfien $f:V \to V$ får matricen $J + \lambda\underline{\underline{E}}$, som er en λ-Jordan-matrix. Lad $\underline{\underline{B}}$ være matricen for $f|W$. Så for f matricen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{J}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix}.$$

Da $f-\lambda\mathrm{id}$ afbilder W bijektivt på sig selv, har $\underline{\underline{B}}$ ikke λ som egenværdi. Heraf følger, at den algebraiske multiplicitet af λ er lig med antallet af søjler i $\underline{\underline{J}}$, så $\underline{\underline{J}}$ har r rækker og søjler. Resten er klart. Dermed er sætningen bevist.

Vi kan nu gentage ræsonnementet på den endomorfi $W \to W$, som har matricen $\underline{\underline{B}}$, og hvis λ' er en egenværdi for denne endomorfi og med algebraisk multiplicitet r', før vi fraspalter endnu en λ'-Jordan-matrix med r' rækker og søjler. Dermed når vi frem til den stærkeste sætning om reduktion af matricer.

<u>Sætning 23.11</u>. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over K, og lad $f: U \to U$ være en endomorfi med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$, som har de algebraiske multipliciteter $r_1, \ldots, r_s$. Der findes da en basis for U, for hvilken f har en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_1 & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}_2 & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{J}}_s & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{J}}_\sigma$ for $\sigma = 1, \ldots, s$ er en λ_σ-Jordan-matrix med r_σ rækker og søjler, medens $\underline{\underline{B}}$ er en kvadratisk matrix, som er uden egenværdier, hvis f kun har egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

For endomorfier, hvis karakteristiske polynomium opløses helt i førstegradsfaktorer, kan resultatet formuleres pænere.

Definition 23.12. Ved en Jordan-matrix med elementer fra legemet K forstår vi en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_1 & \underline{\underline{0}} & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{J}}_2 & \cdots & \underline{\underline{0}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & & \underline{\underline{J}}_s \end{pmatrix},$$

hvor hvert $\underline{\underline{J}}_\sigma$ er en λ_σ-Jordan-matrix, for et eller andet $\lambda_\sigma \in K$.

Der er ikke sagt noget om, at elementerne $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ skal være indbyrdes forskellige.

Sætning 23.13. Lad U være et endeligdimensionalt vektorrum over et legeme K, og lad $f:U \to U$ være en endomorfi, hvis karakteristiske polynomium opløses helt i førstegradsfaktorer. Der findes da en basis for U, for hvilken matrixen for f er en Jordan-matrix.

Det er bare et specielt tilfælde af den foregående sætning. Vi kan spalte Jordan-matricen op i mindre blokke, så der kommer til at optræde et antal (λ,r)-blokke langs diagonalen for forskellige værdier af λ og r. Det er klart, at man kan permutere disse blokke helt vilkårligt ved blot at ændre på rækkefølgen af basiselementerne. Det er til gengæld den eneste frihed vi har. Vi kan nemlig samle blokke, der hører til samme egenværdi, i større blokke, og derved får vi bare en λ_σ-Jordan-matrix for hver egenværdi λ_σ. Antallet af rækker og søjler er givet ved den algebraiske multiplicitet af λ_σ, og de tal, der indgår i typen, bestemmes som beskrevet ovenfor ud fra rangene af $(f-\lambda_\sigma \mathrm{id})^k$, $k = 1,2,\ldots$. Jordan-matricen er således entydigt bestemt på nær permutation af blokkene langs diagonalen.

KAPITEL 24

Reelle vektorrum.

Et vektorrum over $\mathbb{R}$ kaldes også et reelt vektorrum. I kapitel 3 indførte vi rummene $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^2$ og $\mathbb{E}^3$, som netop er reelle vektorrum. I kapitel 4 indførte vi skalarproduktet, som vi udnyttede til løsning af en række geometriske opgaver.

Ved brug af et ortonormalt koordinatsystem blev skalarporduktet udtrykt simpelt i koordinater. Vi vil generalisere skalarproduktet til vore abstrakte vektorrum, og det er vor hensigt at bruge det som hjælpemiddel ved definition af sådanne fundamentale begreber som en vektors længde og vinklen mellem vektorer. Først, når vi er nået så langt, bliver der mening i at tale om et ortonormalt koordinatsystem.

Vi begynder med at definere skalarproduktet, som vi iøvrigt vil kalde det indre produkt, for det gør de fleste matematikere. I definitionen bruger vi lidt ny jargon, som vi vil forklare nærmere bagefter.

<u>Definition 24.1</u>. Lad U være et reelt vektorrum. En symmetrisk positiv definit bilinearform $\varphi: U \times U \to \mathbb{R}$ kaldes et indre produkt på U, og vi skriver $\varphi(\underline{u},\underline{v}) = \langle\underline{u},\underline{v}\rangle$. Når en sådan form er valgt, kaldes U et reelt vektorrum med indre produkt.

At φ er en bilinearform betyder, at vi har regnereglerne

$$\langle\lambda_1\underline{u}_1 + \lambda_2\underline{u}_2,\underline{v}\rangle = \lambda_1\langle\underline{u}_1,\underline{v}\rangle + \lambda_2\langle\underline{u}_2,\underline{v}\rangle ,$$

$$\langle\underline{u},\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2\rangle = \lambda_1\langle\underline{u},\underline{v}_1\rangle + \lambda_2\langle\underline{u},\underline{v}_2\rangle .$$

Den sidste regel følger egentlig af den første, samt kravet om, at φ skal være symmetrisk, altså tilfredsstille betingelsen

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \langle\underline{v},\underline{u}\rangle .$$

At φ er positivt definit betyder, at for $\underline{u} \neq 0$ er $\langle\underline{u},\underline{u}\rangle > 0$. Det er klart, at $\langle\underline{0},\underline{0}\rangle = 0$, og mere generelt er $\langle\underline{0},\underline{v}\rangle = \langle\underline{u},\underline{0}\rangle = 0$.

<u>Sætning 24.2</u>. For $\underline{u},\underline{v} \in U$ og $x,y \in \mathbb{R}$ er

$$\langle x\underline{u}+y\underline{v},\ x\underline{u}+y\underline{v}\rangle = \langle\underline{u},\underline{u}\rangle x^2 + 2\langle\underline{u},\underline{v}\rangle xy + \langle\underline{v},\underline{v}\rangle y^2 .$$

Bevis. Bilineariteten giver

$$\langle x\underline{u}+y\underline{v}, x\underline{u}+y\underline{v}\rangle = x\langle\underline{u}, x\underline{u}+y\underline{v}\rangle + y\langle\underline{v}, x\underline{u}+y\underline{v}\rangle =$$

$$x^2\langle\underline{u},\underline{u}\rangle + xy\langle\underline{u},\underline{v}\rangle + yx\langle\underline{v},\underline{u}\rangle + y^2\langle\underline{v},\underline{v}\rangle,$$

og formlen følger umiddelbart, da de to midterste led er lige store på grund af symmetrien.

Den næste sætning er en fundamental ulighed, der optræder i flere situationer og i flere formuleringer. Den kaldes Cauchy-Schwarz's ulighed.

Sætning 24.3. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt. Vilkårlige vektorer $\underline{u},\underline{v} \in U$ vil da tilfredsstille uligheden

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle^2 \leqq \langle\underline{u},\underline{u}\rangle\langle\underline{v},\underline{v}\rangle,$$

og lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige.

Bevis. Af relationen i sætningen ovenfor slutter vi, at

$$\langle\underline{u},\underline{u}\rangle x^2 + 2\langle\underline{u},\underline{v}\rangle xy + \langle\underline{v},\underline{v}\rangle y^2 \geqq 0$$

for alle $x,y \in \mathbb{R}$. For $x = 1$ eller $y = 1$ er det et sædvanligt andengradspolynomium, og hvis det altid er positivt tilfredsstiller koefficienterne uligheden

$$4\langle \underline{u},\underline{v}\rangle^2 < 4\langle \underline{u},\underline{u}\rangle\langle \underline{v},\underline{v}\rangle,$$

og det er netop Cauchy-Schwarz's ulighed. Hvis den skal gælde med lighedstegn, må andengradspolynomiet kunne blive 0, uden at både x og y er 0, og det kræver, at der findes $x,y \in \mathbb{R}$ og ikke begge 0, så $x\underline{u} + y\underline{v} = \underline{0}$, og det betyder netop, at $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært uafhængige. Dermed er sætningen bevist.

Vi får brug for endnu et vigtigt begreb.

Definition 24.4. Lad U være et reelt vektorrum eller et vektorrum over $\mathbb{C}$ (et komplekst vektorrum). Ved en norm på U forstås en afbildning $\rho: U \to \mathbb{R}$, som tilfredsstiller følgende 4 betingelser:

1) $\rho(\underline{0}) = 0$
2) $\rho(\underline{u}) > 0$ for $\underline{u} \in U$, $\underline{u} \neq \underline{0}$.
3) $\rho(x\underline{u}) = |x|\rho(\underline{u})$ for $\underline{u} \in U$ og x i legemet.
4) $\rho(\underline{u}+\underline{v}) \leq \rho(\underline{u}) + \rho(\underline{v})$ for $\underline{u},\underline{v} \in U$.

For $\underline{u} \in U$ kaldes $\rho(\underline{u})$ normen af $\underline{u}$, og den betegnes ofte med lodrette streger over $\underline{u}$, eventuelt tillige med en index. Et reelt eller komplekst vektorrum, på hvilket der er indført en norm, kaldes normeret.

Betydningen af en norm på et vektorrum er, at det bliver et metrisk rum med afstanden $\mathrm{dist}(\underline{u},\underline{v}) = \rho(\underline{v}-\underline{u})$. Betingelserne 1) og 2) giver nemlig, at $\text{dist}(\underline{u},\underline{v}) \geq 0$ og $= 0$ kun, hvis $\underline{u} = \underline{v}$. Betingelsen 3) giver, at $\text{dist}(\underline{u},\underline{v}) = \text{dist}(\underline{v},\underline{u})$, og endelig giver 4) trenkantsuligheden $\text{dist}(\underline{u},\underline{w}) \leq \text{dist}(\underline{u},\underline{v}) + \text{dist}(\underline{v},\underline{w})$. En metrik, der på denne måde er defineret ud fra en norm, kaldes invariant, nemlig invariant overfor "parallelforskydning", da vi har $\text{dist}(\underline{a}+\underline{u},\underline{a}+\underline{v}) = \text{dist}(\underline{u},\underline{v})$ for $\underline{a},\underline{u},\underline{v} \in U$.

Sætning 24.5. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt. Ved $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle\underline{u},\underline{u}\rangle}$ defineres en norm på U.

Bevis. Med $\rho(\underline{u}) = \|\underline{u}\|$ ses det umiddelbart, at betingelserne 1), 2) og 3) i definitionen ovenfor er opfyldt, så vi mangler at vise 4). Ved formlen i den første sætning i kapitlet, samt Cauchy-Schwarz's ulighed får vi

$$\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle\underline{u}+\underline{v},\underline{u}+\underline{v}\rangle = \langle\underline{u},\underline{u}\rangle + 2\langle\underline{u},\underline{v}\rangle + \langle\underline{v},\underline{v}\rangle =$$

$$\|\underline{u}\|^2 + 2\langle\underline{u},\underline{v}\rangle + \|\underline{v}\|^2 \leq \|\underline{u}\|^2+2\|\underline{u}\|\|\underline{v}\|+\|\underline{v}\|^2 = (\|\underline{u}\|+\|\underline{v}\|)^2,$$

og heraf følger 4) umiddelbart. Dermed er sætningen bevist.

Som et simpelt eksempel kan vi betragte $U = \mathbb{R}^n$. For $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_n)$ kan vi definere det indre produkt

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = u_1v_1+\ldots+u_nv_n .$$

Det er klart, at det er en symmetrisk, positiv definit bilinearform, og den tilsvarende norm bliver

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^{\,2}+\ldots+u_n^{\,2}}.$$

Dette er den nærliggende generalisation af de velbekendte begreber fra planen og det tredimensionale rum. I denne sammenhæng fremtræder Cauchy-Schwarz's ulighed som en ulighed for vilkårlige reelle talsæt $(u_1,\ldots,u_n)$ og $(v_1,\ldots,v_n)$. Uligheden siger, at

$$(u_1v_1+\ldots+u_nv_n)^2 \leqq (u_1^{\,2}+\ldots+u_n^{\,2})(v_1^{\,2}+\ldots+v_n)^2,$$

og lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis talsættene er propertionale. I denne form skyldes uligheden Cauchy.

Et mere subtilt eksempel er Hilberts talrum $\mathbb{H}$, som er mængden af talfølger $\underline{u} = (u_1,u_2,\ldots)$, for hvilke rækken $u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+\ldots$ er konvergent. For $\underline{u} = (u_1,\underline{u}_2,\ldots)$ og $\underline{v} = (\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots)$ definerer vi $\underline{u}+\underline{v} = (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ldots)$. Dette giver mening, da $2(u_1^{\,2}+v_1^{\,2}) + 2(u_2^{\,2}+v_2^{\,2})+\ldots$ er konvergent, og $(u_n+v_n)^2 \leqq 2(u_n^{\,2}+v_n^{\,2})$, så $(u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2+\ldots$ konvergerer ifølge sammenligningskriteriet. Det er klart, at det giver mening at definere $\lambda\underline{u} = (\lambda u_1,\lambda u_2,\ldots)$. Dermed er $\mathbb{H}$ blevet et vektorrum. Da $|u_nv_n| \leqq u_n^{\,2}+v_n^{\,2}$, giver sammenligningskriteriet, at rækken $u_1v_1+u_2v_2+\ldots$ er absolut konvergent, så vi kan definere $<\underline{u},\underline{v}> = u_1v_1+u_2v_2+\ldots$. Det ses umiddelbart, at dette er en symmetrisk, positiv definit linearform, altså et indre produkt. Dermed er $\mathbb{H}$

blevet et rum med indre produkt. Vi ved nu, at Cauchy-Schwarz's ulighed også gælder for uendelige talsæt på formen

$$(u_1v_1+u_2v_2+\dots)^2 \leqq (u_1{}^2+u_2{}^2+\dots)(v_1{}^2+v_2{}^2+\dots).$$

Lad $C[a,b]$ betegne mængden af kontinuerte funktioner $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, idet $[a,b]$ er et interval på den reelle akse. Vi har tidligere organiseret $C[a,b]$ som et vektorrum over $\mathbb{R}$. For $f,g \in C[a,b]$ definerer vi nu

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \ ,$$

og dermed har vi defineret et indre produkt på $C[a,b]$. Det ses helt umiddelbart, at betingelserne er opfyldt. I dette tilfælde siger Cauchy-Schwarz's ulighed, at

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx \ .$$

Det er i denne form, uligheden er vist af Schwarz.

Et indre produkt på et vektorrum er helt fastlagt ved den norm, det definerer. Hvis to indre produkter på samme vektorrum definerer identiske normer, er de således selv identiske. Dette fremgår af den næste sætning.

<u>Sætning 24.6.</u> Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt. Da er

$$\langle \underline{u},\underline{v}\rangle = \tfrac{1}{4}(\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 - \|\underline{u}-\underline{v}\|^2).$$

Bevis. Det er bare et regnestykke.

$$\|\underline{u}+\underline{v}\|^2-\|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = \langle \underline{u}+\underline{v},\underline{u}+\underline{v}\rangle - \langle \underline{u}-\underline{v},\underline{u}-\underline{v}\rangle =$$

$$(\|\underline{u}\|^2 + 2\langle \underline{u},\underline{v}\rangle + \|\underline{v}\|^2) - (\|\underline{u}\|^2-2\langle \underline{u},\underline{v}\rangle + \|\underline{v}\|^2) = 4\langle \underline{u},\underline{v}\rangle.$$

Dermed er sætningen bevist.

I rummet $\mathbb{R}^n$ kan vi definere normer ved for $\underline{u} = (u_1,\dots,u_n)$ at sætte

$$\|\underline{u}\|_1 = |\underline{u}_1|+\dots+|u_n| \ ; \ \|\underline{u}\|_\infty = \max\{|u_1|,\dots,|u_n|\}.$$

I rummet $C[a,b]$ kan vi ligeledes definere normer ved for $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ at sætte

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \ ; \ \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

Det er let at vise, at de betingelser, vi kræver af en norm, virkelig bliver opfyldt. De her anførte 4 normer kan ikke defineres ved hjælp af indre produkter. Derfor er "normeret vektorrum" et mere generelt begreb end "vektorrum med indre produkt". Vi giver et bevis for denne påstand.

Lad os nu se lidt nærmere på beviset ovenfor for uligheden $\|\underline{u}+\underline{v}\| \leqq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$. Det skete ved en lille regning, og i den er der bare et sted, hvor der optræder et ulighedstegn, og det beror på Cauchy-Schwarz's ulighed $|\langle\underline{u},\underline{v}\rangle| \leqq \|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|$, så der gælder skarpt ulighedstegn, hvis ikke $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige. For normen $\|\underline{u}\|_1 = |u_1|+\ldots+|u_n|$ ser vi imidlertid, at uligheden $\|\underline{u}+\underline{v}\|_1 \leqq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|_1$ gælder med lighedstegn, hvis bare $\underline{u}$ og $\underline{v}$ har alle koordinater positive. For $\|f\|_1$-normen sker det samme for to positive funktioner. For $\underline{u}$ gælder uligheden med lighedstegn, hvis den numerisk største koordinat i $\underline{u}$ og $\underline{v}$ har samme index og samme fortegn. For $\|f\|_\infty$ gælder uligheden med lighedstegn, hvis f og g antager den numerisk største værdi i samme punkt og har samme fortegn i dette punkt. I alle 4 tilfælde viser dette, at uligheden kan gælde med lighedstegn for to lineært uafhængige vektorer, og sådan kan det ikke gå med en norm, der er defineret ved hjælp af et indre produkt.

Den afgørende interesse ved normerede vektorrum er, at de bliver metriske rum, så analysens fundamentale begreber, konvergeres og kontinuitet kommer i anvendelse. En følge (u_n) af vektorer i et normeret vektorrum U konvergerer mod grænsevektoren $\underline{a} \in U$, hvis talfølgen

$(\|\underline{a}-\underline{u}_n\|)$ konvergerer mod 0. Følgen $(\underline{u}_n)$ er en fundamentalfølge, hvis der til ethvert positivt ε svarer et naturligt tal N, således at det for alle indices $m,n \geqq N$ gælder, at $\|\underline{u}_n-\underline{u}_n\| \leqq \varepsilon$. For $\mathbb{R}$ som vektorrum over $\mathbb{R}$ har vi den numeriske værdi som norm, og så gælder det almindelige konvergensprincip, som siger, at enhver fundamentalfølge konvergerer. Metriske rum, i hvilke enhver fundamentalfølge er konvergent, kaldes fuldstændige. Et normeret vektorrum, som er fuldsætndigt, kaldes et Banachrum. Hvis det endda er et vektorrum med et indre produkt, der definerer normen, kaldes det et Hilbertrum. Disse blev indført af David Hilbert ca. 1912, og anvendt på opgaver fra analysen. Banach-rummene indførtes af S. Banach en halv snes år senere.

Takket være metrikken er der mening i at tale om kontinuitet af afbildninger af Banachrum i hinanden. For endeligdimensionale vektorrum er det ikke svært at vise, at spørgsmålet om en afbildning er kontinuert eller ikke slet ikke afhænger af, hvilken norm vi vælger på rummet. Lineære afbildninger af endeligdimensionale Banachrum i hinanden er altid kontinuerte. For uendeligdimensionale Banachrum vil kontinuitet af en afbildning ofte bero væsentligt på valget af norm, og lineære afbildninger vil ikke altid være kontinuerte.

Svarende til et Banachrum har vi et dualt vektorrum, der består af mængden af kontinuerte linearformer, og der kan på naturlig måde indføres en norm på dette duale rum, så det bliver et Banachrum. Det således definerede duale Banachrum omfatter sædvanligvis ikke alle vektorerne i det "algebraisk duale vektorrum", vi har studeret.

Definition 24.7. Lad U være et vektorrum med indre produkt. Ved vinklen mellem vektorerne $\underline{u},\underline{v} \in U \setminus \{\underline{0}\}$ forstår vi det tal $\angle(\underline{u},\underline{v})$, der er løsning til ligningen

$$\cos \angle(\underline{u},\underline{v}) = \frac{\langle \underline{u},\underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|} .$$

Hvis $\angle(\underline{u},\underline{v}) = \frac{\pi}{2}$, siges $\underline{u}$ og $\underline{v}$ at være ortogonale (vinkelrette). En mængde $M \subseteq U$ kaldes et ortogonalsystem, hvis vektorerne i M er parvis ortogonale. Den kaldes et ortonormalsystem, hvis desuden alle vektorer i M har norm 1.

Hvis M er et ortogonalsystem, der ikke indeholder $\underline{0}$, kan vi ændre M til et ortonormalsystem ved at dividere hver vektor i M med dens norm.

Sætning 24.8. Et ortonormalsystem M er lineært uafhængigt.

Bevis. Lad $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ være indbyrdes forskellige vektorer fra M, og lad $x_1,\ldots,x_n$ være reelle tal, for hvilke vi har relationen $x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n = \underline{0}$. Så er

$$x_j = x_1<\underline{e}_1,\underline{e}_j>+\ldots+x_n<\underline{e}_n,\underline{e}_j> = <x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n,\underline{e}_j> = <\underline{a},\underline{e}_j> = 0.$$

Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 24.9</u>. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt, og lad $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots)$ være et endelig eller numerabelt sæt af lineært uafhængige vektorer fra U. Der findes da et ortonormalt sæt $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ af lige så mange vektorer fra U, således at $\operatorname{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\} = \operatorname{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k\}$ for hvert antal k, som højst er lig med antallet af vektorer i sættene. (Vi kalder $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ en Gram-Schmidt-ortogonalisering af $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots)$.

Bevis. Vi har $\underline{u}_1 \neq \underline{0}$ og ved at vælge $\underline{e}_1 = \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||}$ får vi $\operatorname{span}\{\underline{e}_1\} = \operatorname{span}\{\underline{u}_1\}$. Lad os antage, at vi allerede har valgt et ortonormalt sæt $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, således at $\operatorname{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\} = \operatorname{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k\}$ for $k = 1,\ldots,n$. Hvis det givne sæt omfatter mere end n vektorer, har vi $\operatorname{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n,\underline{u}_{n+1}\} = \operatorname{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_{n+1}\}$. Vi vælger nu

$$\underline{e}_{n+1} = \frac{\underline{u}_{n+1} - (<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_1>\underline{e}_1+\ldots+<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_n>\underline{e}_n)}{||\underline{u}_{n+1} - (<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_1>\underline{e}_1+\ldots+<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_n>\underline{e}_n)||}$$

For $j = 1,\ldots,n$ har vi da

$$\langle\underline{e}_{n+1},\underline{e}_j\rangle = \frac{\underline{u}_{n+1},\underline{e}_j - \langle\underline{u}_{n+1},\underline{e}_j\rangle\langle\underline{e}_j,\underline{e}_j\rangle}{\|\underline{u}_{n+1}-(\langle\underline{u}_{n+1},\underline{e}_1\rangle\underline{e}_1+\ldots+\langle\underline{u}_{n+1},\underline{e}_n\rangle e_n)\|} = 0 ,$$

så $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n+1})$ er et ortonormalt sæt. Vi har $\underline{e}_{n+1}$ givet som en linearkombination af $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ og $\underline{u}_{n+1}$, men vi kan løse ligningen og få $\underline{u}_{n+1}$ som en linearkombination af $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n+1}$. Dermed har vi vist, at
$\text{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n-1}\} = \text{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n,\underline{u}_{n+1}\} = \text{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_{n+1}\}$.
Dermed er sætningen bevist.

Sætning 24.10. Ethvert reelt vektorrum, som har en endelig eller numerabel basis, har en ortonormal basis.

Bevis. Det følger umiddelbart af de to foregående sætninger.

Eksempel. For rummet $\mathbb{R}^n$ udgør de sædvanlige basisvektorer $(1,0,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)$ en ortonormal basis, når vi bruger det ovenfor definerede indre produkt.

I det ovenfor omtalte rum $\mathbb{H}$ indfører vi vektorerne $\underline{e}_1 = (1,0,0,\ldots)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0,\ldots),\ldots$. Så er $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ et ortonormalsystem. Dette system er ikke en basis for rummet, da $\underline{u} = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\ldots)$ ikke kan skrives som linearkombination af endelig mange $\underline{e}_j$. Hvis $\underline{u} \in \mathbb{H}$ er ortogonal på alle $\underline{e}_j$, får vi på den anden side, at $\underline{u} = \underline{0}$. Vi ser heraf, at $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ er et maksimalt ortonormalsystem. Vi har således fundet et ortonormalsystem, der ikke kan udvides til en ornotormal basis.

I rummet $C[-\pi,\pi]$ udgør funktionerne

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx; \; n=1,2,\ldots$$

et numerabelt ortonormalsystem. For eksempel er

$$\langle\varphi_p,\psi_q\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin qx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(p+q)x-\sin(p-q)x)dx=0,$$

medens vi for $n \geqq 0$ har

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} ((\cos nx)^2+(\sin nx)^2)dx = \pi,$$

hvoraf vi får $\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle = \langle\psi_n,\psi_n\rangle = 1$ for $n > 0$. Der er endnu nogle muligheder, der skal regnes efter, men da de går på samme melodi, og vi iøvrigt ikke skal lave analyse i dette kursus, vil vi glemme at regne dem efter. Eksemplet viser, at $C[-\pi,\pi]$ er uendeligdimensionalt. Det viser endda, at delrummet af vilkårlig ofte differentiable funktioner er uendeligdimensionalt, idet alle funktionerne φ_j og ψ_j ligger i dette underrum.

<u>Sætning 24.11</u>. Lad U være et reelt vektorrum med en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. For vektorer

$$\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n, \quad \underline{v} = y_1\underline{e}_1+\ldots+y_n\underline{e}_n$$

har vi da

$$<\underline{u},\underline{v}> = x_1y_1+\ldots+x_ny_n \ ; \ ||\underline{u}|| = \sqrt{x_1^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}},$$

og hvis $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ endvidere

$$\cos \sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) = \frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}}\sqrt{y_1^{\,2}+\ldots+y_n^{\,2}}}$$

Bevis. Det indre produkt $<\underline{u},\underline{v}>$ bliver på grund af bilineariteten sum af alle led $x_jy_k\ \underline{e}_j,\underline{e}_k$, men leddene med $j \neq k$ er ortogonale, så vi får blot leddene $x_jy_j\ \underline{e}_j,\underline{e}_j\ = x_jy_j$. De andre to påstande fås umiddelbart af definitionerne.

Sætningen viser, at vi for $n = 1,2$ og 3 har længder af liniestykker, skalarprodukt af vektorer og vinkel mellem vektorer udtrykt på nøjagtig samme måde som i den sædvanlige geometri. Det betyder, at 2- og 3-dimensionale underrum i et vektorrum med indre produkt, er nøjagtige kopier af planen og rummet, som vi kender dem fra skolen, og vi kan derfor udmærket anvende sædvanlige geometriske metoder.

Som specialtilfælde af kapitlets første sætning får vi cosinusrelationen for en trekant med vinkelspidser i $\underline{0},\underline{u}$ og $\underline{v}$, nemlig

$$||\underline{v}-\underline{u}||^2 = ||\underline{u}||^2 + ||\underline{v}||^2 - 2||\underline{u}||\,||\underline{v}|| \cos\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})\,.$$

Hvis vinklen ved $\underline{0}$ er ret, altså $\underline{u}$ og $\underline{v}$ ortogonale, får vi den pytagoræiske sætning

$$\|\underline{v}-\underline{u}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2.$$

Sætning 24.12. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt. Lad $V \subseteq U$ være et endeligdimensionalt vektorrum, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en ortonormal basis for V. For $\underline{u} \in U$ sætter vi $a_j = \langle\underline{u},\underline{e}_j\rangle$, $j = 1,\ldots,n$. Da er $\underline{v} = a_1\underline{e}_1+\ldots+a_n\underline{e}_n$ det punkt i V, der har mindste afstand fra $\underline{u}$, og $\underline{u}-\underline{v}$ er ortogonal på enhver vektor i V. Endvidere gælder Bessel's ligning

$$a_1{}^2+\ldots+a_n{}^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2.$$

Bevis. Vi har

$$(\underline{u}-\underline{v})\cdot\underline{e}_j = \underline{u}\cdot\underline{e}_j - a_j = 0, \quad \text{for} \quad j = 1,\ldots,n.$$

Altså er $\underline{u}-\underline{v}$ ortogonal på vektorerne $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, og dermed på enhver linearkombination af disse vektorer, altså på enhver vektor i V. For $\underline{w} \in V$ er specielt $\underline{u}-\underline{v}$ ortogonal på $\underline{v}-\underline{w}$ og den pytagoræiske sætning giver

$$\|\underline{u}-\underline{w}\|^2 = \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}-\underline{v}\|^2,$$

og det viser, at ethvert punkt i $V\setminus\{\underline{v}\}$ har større afstand fra $\underline{u}$, end $\underline{v}$ har. For $\underline{w}-\underline{0}$ giver den sidste ligning specielt

$$\|\underline{u}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2,$$

og da $\|\underline{v}\|^2 = \langle\underline{v},\underline{v}\rangle = a_1{}^2+\ldots+a_n{}^2$, er dette netop Bessels ligning. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 24.13. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt, og lad $B \subseteq U$ være et ortonormalt system. For $\underline{u} \in U$ sætter vi $a(\underline{e}) = \langle\underline{u},\underline{e}\rangle$ for hvert $\underline{e} \in B$. Da er $a(\underline{e}) = 0$ undtagen for højst numerabelt mange elementer af B, og vi ordner disse i en følge $(\underline{e}_n)$ og sætter $a(\underline{e}_n) = a_n$, da er $a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots$ konvergent og dens sum overstiger ikke $\|\underline{u}\|^2$ (Bessels ulighed).

Bevis. For vilkårlige $\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_q \in B$ har vi ifølge den foregående sætning, at $(a(\underline{b}_1))^2+\ldots+(a(\underline{b}_q))^2 \leqq \|\underline{u}\|^2$. Altså findes der for hvert naturligt tal p højst endelig mange $\underline{e} \in B$ med $|a(\underline{e})| \geqq \frac{1}{p}$. Mængden af elementer $\underline{e} \in B$ med $|a(\underline{e})| > 0$ er således foreningsmængde af en følge af endelige mængder, altså højst numerabel. Dermed har vi vist den første påstand, og da vi også har set, at $a_1{}^2+\ldots+a_n{}^2 \leqq u^2$ for ethvert n, følger den sidste påstand umiddelbart.

Eksempel. I rummet $C[-\pi,\pi]$ har vi det ovenfor omtalte ortonormalsystem bestående af funktionerne

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\ldots\ .$$

For $f \in C[-\pi,\pi]$ har vi tal

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,\ldots\ ,$$

og vi definerer

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x)\right).$$

Så vil $s_n(x)$ approksimere $f(x)$ bedre end alle andre summer

$$\tilde{s}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{a}_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(\tilde{a}_\nu\cos\nu x + \tilde{b}_\nu\sin\nu x)\right)$$

i den forstand, at

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx < \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\tilde{s}_n(x))^2dx$$

for alle valg af koefficienterne $\tilde{a}_\nu$, $\tilde{b}_\nu$ afvigende fra a_ν, b_ν. Bessels ligning giver

$$a_0^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+\ldots+b_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx - \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))^2dx,$$

og Bessels ulighed giver

$$a_0^2+(a_1^2+b_1^2) + (a_2^2+b_2^2)+\ldots \leqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx\ .$$

Nu viser en nærmere undersøgelse, at lighedstegnet i virkeligheden gælder (Parsevals ligning), og det betyder, at det underrum, der udspændes af ortonormalsystemet, kommer vilkårligt nær til enhver vektor $f \in C[-\pi,\pi]$, og f er således fastlagt ved den uendelige række

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} (\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)).$$

Alligevel er rækken ikke altid konvergent. Den er dog konvergent i punkter, hvor f er differentiabel. Den kaldes Fourier-rækken for f, og den spiller en stor rolle for anvendelserne, idet den spalter f i funktioner, som er pæne harmoniske svingninger og derfor fra fysisk synspunkt særlig simple.

Definition 24.14. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt. Underrum $V \subseteq U$ og $W \subseteq U$ kaldes indbyrdes ortogonale, hvis enhver vektor i V er ortogonal på enhver vektor i W. Vi siger, at hvert af rummene V og W er ortogonalt komplement til det andet, hvis de er såvel indbyrdes ortogonale som indbyrdes komplementære.

Hvis V og W er indbyrdes ortogonale, har de kun vektoren $\underline{0}$ fælles, da det er den eneste vektor, som er ortogonal på sig selv. Derfor er $V+W$ direkte sum af V og W.

<u>Sætning 24.15</u>. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt, og lad $V \subseteq U$ være et endeligdimensionalt underrum. Da har V et ortogonalt komplement.

Bevis. Mængden W af vektorer ortogonale på V (dvs. på enhver vektor i V) er et underrum, og det er ortogonalt på V, så V og W har kun $\underline{0}$ fælles. Nu har V en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, og vi viste ovenfor, at enhver vektor $\underline{u} \in U$ har en fremstilling på formen

$$\underline{u} = a_1\underline{e}_1+\ldots+a_n\underline{e}_n + \underline{w},$$

hvor $\underline{w}$ er ortogonal på V, altså $\underline{w} \in W$. Men dermed har vi vist, at $U = V+W = V\oplus W$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Det fremgår af behandlingen ovenfor af rummet $\mathbb{H}$, at underrummet $\mathrm{span}\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots\}$ ikke har noget ortogonalt komplement. Hvis vi sætter $\underline{e}_0 = (1,\frac{1}{2},\ldots)$ er $\mathrm{span}\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots\}$ et underrum i $\mathrm{span}\{\underline{e}_0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots\}$, og i dette rum har $\mathrm{span}\{\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots\}$ et 1-dimensionalt komplementært underrum udspændt af $\underline{e}_0$, men ikke noget ortogonalt komplement.

<u>Sætning 24.16</u>. Lad U være et endeligdimensionalt reelt vektorrum med indre produkt, og lad U^* være det duale vektorrum. En isomorfi $\varphi: U \to U^*$ defineres da ved,

at vi for $\underline{u} \in U$ definerer $\varphi(\underline{u}):U \to \mathbb{R}$ ved $\varphi(\underline{u})(\underline{v}) = \langle\underline{u},\underline{v}\rangle$.

Bevis. Bilinearformen $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$ definerer en dualitet af U med sig selv. Da U er endeligdimensionalt, medfører det, at enhver linearform $\underline{u}^*:U \to \mathbb{R}$ kan defineres på formen $\underline{u}^*(\underline{v}) = \langle\underline{u},\underline{v}<$ for et $\underline{u} \in U$. Dermed er sætningen bevist.

For rummet $\mathbb{H}$ har vi en dualitet af $\mathbb{H}$ med sig selv defineret ved det indre produkt $\langle\underline{u},\underline{v}< = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots$. I dette tilfælde er der imidlertid også linearformer, der ikke kan udtrykkes ved hjælp af det indre produkt. Det viser sig imidlertid, at det netop er de kontinuerte linearformer, der kan udtrykkes ved de indre produkter, og derfor foretrækker man i funktionalanalysen at indføre et dualrum, som blot omfatter de kontinuerte linearformer. Så bliver også $\mathbb{H}$ isomorft med sit duale rum.

KAPITEL 25

Komplekse vektorrum.

Et vektorrum U over $\mathbb{C}$ kaldes også et komplekst vektorrum. Et komplekst vektorrum er også et vektorrum over $\mathbb{R}$. Hvis vi har valgt en basis B for U udspænder B et underrum $\tilde{U} \subseteq U$ i vektorrummet U over $\mathbb{R}$. Så er B samtidig basis for $\tilde{U}$ over $\mathbb{R}$ og for U over $\mathbb{C}$. Enhver anden basis for $\tilde{U}$ over $\mathbb{R}$ vil også være basis for U over $\mathbb{C}$. Omvendt har et reelt vektorrum $\tilde{U}$ en kompleks udvidelse U. Nu er $\tilde{U} \subseteq U$ ikke et delrum af det komplekse vektorrum U, for $i\tilde{U}$ har kun $\underline{0}$ fælles med $\tilde{U}$. Vi har åbenbart $U = \tilde{U} \oplus i\tilde{U}$, idet vi for $\underline{u} \in U$ har $\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_n \in B$ og $\lambda_1+i\mu_1,\dots,\lambda_n+i\mu_n \in \mathbb{C}$, således at

$$\underline{u}=(\lambda_1+i\mu_1)\underline{b}_1+\dots+(\lambda_n+i\mu_n)\underline{b}_n=(\lambda_1\underline{b}_1+\dots+\lambda_n\underline{b}_n)+i(\mu_1\underline{b}_1+\dots+\mu_n\underline{b}_n).$$

Vi kan derfor skrive $\underline{u} \in U$ som $\underline{u} = \tilde{\underline{u}}_1 + i\tilde{\underline{u}}_2$ med $\tilde{\underline{u}}_1$, $\tilde{\underline{u}}_2 \in \tilde{U}$, og vi regner med sådanne udtryk på den helt naturlige måde. Specielt kan vi danne konjugerede vektorer, således at $\underline{u} = \tilde{\underline{u}}_1 + i\tilde{\underline{u}}_2$ har den konjugerede vektor $\overline{\underline{u}} = \tilde{\underline{u}}_1 - i\tilde{\underline{u}}_2$.

Vi får således en afbildning $\varphi: U \to U$ defineret ved $\varphi(\underline{u}) = \overline{\underline{u}}$. Det er imidlertid vigtigt at huske, at der ikke for et komplekst vektorrum U findes en ganske bestemt sådan afbildning. Den er først fastlagt, når vi har valgt det reelle rum $\tilde{U} \subseteqq U$ udspændt af en basis for U. Når dette er sket, har φ egenskaberne

$$\overline{\underline{u}+\underline{v}} = \overline{\underline{u}} + \overline{\underline{v}} \ ; \quad \overline{\lambda\underline{u}} = \overline{\lambda}\overline{\underline{u}} \ ; \quad \underline{u},\underline{v} \in U, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Endvidere er φ involutorisk, altså $\varphi(\varphi(\underline{u})) = \overline{\overline{\underline{u}}} = \underline{u}$.

Lad os nu antage, at U er et komplekst vektorrum, og at $\varphi: U \to U$ er en afbildning, som for alle $\underline{u},\underline{v} \in U$ og alle $\lambda \in \mathbb{C}$ opfylder betingelserne

$$\varphi(\varphi(\underline{u})) = \underline{u}, \ \varphi(\underline{u}+\underline{v}) = \varphi(\underline{u}) + \varphi(\underline{v}), \ \varphi(\lambda\underline{u}) = \overline{\lambda}\varphi(\underline{u}).$$

Så er $\varphi: U \to U$ en lineær afbildning af vektorrummet U over $\mathbb{R}$, men ikke over $\mathbb{C}$. Vi definerer

$$\tilde{U} = \{\tilde{\underline{u}} \in U \,|\, \varphi(\tilde{\underline{u}}) = \tilde{\underline{u}}\} ,$$

og $\tilde{U}$ er et underrum i vektorrummet $\tilde{U}$ over $\mathbb{R}$. En projektion $p_1: U \to \tilde{U}$ defineres ved

$$p_1(\underline{u}) = \tfrac{1}{2}(\underline{u} + \varphi(\underline{u})).$$

Det ses umiddelbart, at $p_1(\underline{u}) = \tilde{\underline{u}}$, hvis $\underline{u} \in \tilde{U}$, og deraf følger, at p_1 er idempotent. Betingelsen $\varphi(\underline{u}) = \underline{u}$ er ensbetydende med $\varphi(i\underline{u}) = -i\underline{u}$, og derfor har vi

$$\tilde{\tilde{U}} = \{\underline{v} \in U | \varphi(\underline{v}) = -\underline{v}\} .$$

Det fremgår umiddelbart, at $\tilde{U}$ og $\tilde{\tilde{U}}$ kun har $\underline{0}$ fælles. Vi har en projektion $p_2 : U \to \tilde{\tilde{U}}$ defineret ved

$$p_2(u) = \tfrac{1}{2}(\underline{u} - \varphi(\underline{u})).$$

Det er klart, at $p_2(\underline{u}) = \underline{u}$, hvis $\underline{u} \in \tilde{\tilde{U}}$, og deraf følger, at p_2 er idempotent. Da vi har $\underline{u} = p_1(u) + p_2(u)$, er $U = \tilde{U} \oplus \tilde{\tilde{U}}$, og $\tilde{U}$ opfylder de betingelser, der opfyldes af et reelt underrum. En "konjugation" på U, som opfylder de tre stillede betingelser, udspringer således altid af et passende valg af et reelt delrum.

<u>Definition 25.1</u>. Lad U være et komplekst vektorrum. En afbildning $\varphi : U \times U \to \mathbb{C}$ kaldes en sesquilinearform, hvis den for alle $\underline{u}, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in U$ og alle $\lambda \in \mathbb{C}$ opfylder betingelserne

$$\varphi(\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}) = \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}_2, \underline{v}) \; ; \; \varphi(\lambda\underline{u}, \underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{u}, \underline{v}) .$$
$$\varphi(\underline{u}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \varphi(\underline{u}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{u}, \underline{v}_2) \; ; \; \varphi(\underline{u}, \lambda\underline{v}) = \overline{\lambda}\varphi(\underline{u}, \underline{v}) .$$

En sesquilinearform kaldes Hermite'sk, hvis den for alle $\underline{u}, \underline{v} \in U$ tilfredsstiller betingelsen

$$\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} .$$

En Hermite'sk sesquilinearform kaldes positiv semidefinit, hvis $\varphi(\underline{u}, \underline{u}) \geqq 0$ for alle $\underline{u} \in U$, og den kaldes positiv definit, hvis $\varphi(\underline{u}, \underline{u}) > 0$ for alle $\underline{u} \in U \setminus \{\underline{0}\}$.

En sesquilinearform er således lineær i den første variabel, men "konjugeret lineær" i den anden variabel. Tilsvarende er Hermite'sk det samme som "symmetrisk på nær konjugation". Denne egenskab sikrer, at sesquilinearformen er reel, når de variable er ens.

Definition 25.2. Lad U være et komplekst vektorrum. En Hermite'sk, positiv definit sesquilinearform $\varphi : U \times U \to \mathbb{C}$ kaldes et indre produkt på U, og vi skriver $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$. Når en sådan bilinearform er valgt, kaldes U et komplekst vektorrum med indre produkt.

Vi går nu frem som for reelle vektorrum, men regningerne går ikke helt på samme måde. Således er for $\underline{u}, \underline{v} \in U$; $x, y \in \mathbb{C}$

$$\langle x\underline{u}+y\underline{v}, x\underline{u}+y\underline{v} \rangle = x\bar{x}\langle \underline{u},\underline{u}\rangle + x\bar{y}\langle \underline{u},\underline{v}\rangle + \bar{x}y\langle \underline{v},\underline{u}\rangle + y\bar{y}\langle \underline{v},\underline{v}\rangle .$$

Da vi har $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}$, er de to midterste led indbyrdes konjugerede, så vi har vist følgende sætning.

Sætning 25.3. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. For $\underline{u}, \underline{v} \in U$ og $x, y \in \mathbb{C}$ har vi da

$$\langle x\underline{u}+y\underline{v}, x\underline{u}+y\underline{v} \rangle = \langle \underline{u},\underline{u}\rangle |x|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle \underline{u},\underline{v}\rangle x\bar{y}) + \langle \underline{v},\underline{v}\rangle |y|^2 .$$

Her er venstre side positiv undtagen hvis $x\underline{u}+y\underline{v} = 0$. Højre side er derfor ≥ 0 altid og $= 0$ kun hvis $x=y=0$

eller $\underline{u}$ og $\underline{v}$ lineært afhængige. Vi vælger et reelt tal θ, således at $<\underline{u},\underline{v}>e^{i\theta} \geqq 0$, altså $|<\underline{u},\underline{v}>| = <\underline{u},\underline{v}>e^{i\theta}$. Vi sætter $x = se^{i\theta}$, $s \geqq 0$ og $y = s$, som antages reel. Vi får da at andengradspolynomiet

$$<\underline{u},\underline{u}>r^2 + 2|<\underline{u},\underline{v}>|rs + <\underline{v},\underline{v}>s^2$$

er $\geqq 0$ for alle r og s, og derfor får vi igen uligheden $|<\underline{u},\underline{v}>|^2 \leqq <\underline{u},\underline{u}><\underline{v},\underline{v}>$, hvor lighedstegnet højst gælder, hvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært uafhængige. Dermed har vi vist Cauchy-Schwarz's ulighed i det komplekse tilfælde, og det formulerer vi som en sætning.

Sætning 25.4. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. For vilkårlige $\underline{u},\underline{v} \in U$ har vi da uligheden

$$|<\underline{u},\underline{v}>|^2 \leqq <\underline{u},\underline{u}><\underline{v},\underline{v}>,$$

og lighedstegnet gælder kun, hvis $\underline{u}$ og $\underline{v}$ er lineært afhængige.

Definitionen af norm i sidste kapitel var formuleret for reelle og komplekse vektorrum under et.

Sætning 25.5. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. Ved $||\underline{u}|| = \sqrt{<\underline{u},\underline{u}>}$ defineres en norm på U.

Som i det reelle tilfælde er det trivielt at de tre første betingelser i definitionen af normen er fastlagt. For den fjerde betingelse bliver der kun ganske små ændringer i regningerne:

$$\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle\underline{u}+\underline{v},\underline{u}+\underline{v}\rangle = \langle\underline{u},\underline{u}\rangle + 2\mathrm{Re}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle + \langle\underline{v},\underline{v}\rangle =$$
$$\|\underline{u}\|^2+2\mathrm{Re}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle+\|\underline{v}\|^2 \leqq \|\underline{u}\|^2+2\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\| + \|\underline{v}\|^2 = (\|\underline{u}\|+\|\underline{v}\|)^2.$$

Dermed er sætningen bevist.

Som et simpelt eksempel kan vi betragte $U = \mathbb{C}^n$. For $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_n)$ kan vi definere det indre produkt

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = u_1\bar{v}_1+\ldots+u_n\bar{v}_n.$$

Det er klart, at dette er en Hermite'sk positiv definit sesquilinearform.

Hilberts komplekse talrum $\mathbb{H}(C)$ er mængden af talfølger $\underline{u} = (u_1,u_2,\ldots)$, for hvilke $|u_1|^2+|u_2|^2+\ldots$ er konvergent. Sum og multiplikation med komplekst tal defineres som i det reelle tilfælde, men det indre produkt af $\underline{u} = (u_1,u_2,\ldots)$ og $\underline{v} = (v_1,v_2,\ldots)$ defineres ved

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2+\ldots .$$

På mængden af kontinuerte komplekse funktioner $f,g:[a,b] \to \mathbb{C}$ defineres et indre produkt ved

$$<f,g> = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \ .$$

Lad os antage, at vi har udvalgt et reelt underrum $\tilde{U} \subseteq U$, hvor U er et komplekst vektorrum. Så er en basis B for $\tilde{U}$ også en basis for U, og vi har $U = \tilde{U} + i\tilde{U}$. En linearform $\tilde{\varphi}:\tilde{U} \to \mathbb{R}$ udvides til en linearform $\varphi:U \to \mathbb{C}$ ved, at vi for $\underline{u},\underline{v} \in \tilde{U}$ definerer $\varphi(\underline{u}+i\underline{v}) = \tilde{\varphi}(\underline{u}) + i\tilde{\varphi}(\underline{v})$. En bilinearform $\tilde{\varphi}:\tilde{U}\times\tilde{U} \to \mathbb{R}$ kan på én og kun én måde udvides til en sesquilinearform $\varphi:U\times U \to \mathbb{C}$, idet vi tvungent definerer

$$\varphi(\underline{u}_1+ \underline{u}_2,\underline{v}_1+ \underline{v}_2) = \varphi(\underline{u}_1,\underline{v}_1)+i\varphi(\underline{u}_2,\underline{v}_1)-i\varphi(\underline{u}_1,\underline{v}_2)+\varphi(\underline{u}_2,\underline{v}_2)=$$

$$\tilde{\varphi}(\underline{u}_1,\underline{v}_1)+\tilde{\varphi}(\underline{u}_2,\underline{v}_2) + i(\tilde{\varphi}(\underline{u}_2,\underline{v}_1) - \tilde{\varphi}(\underline{u}_1,\underline{v}_2)).$$

Det ses umiddelbart, at vi virkelig får en sesquilinearform defineret. Ligeledes ser vi, at $\tilde{\varphi}$ bliver Hermite'sk hvis φ er symmetrisk, og at $\tilde{\varphi}$ bliver positiv definit, hvis $\tilde{\varphi}$ er det. Et indre produkt på det reelle underrum definerer således éntydigt et indre produkt på hele rummet.

I de tre eksempler ovenfor findes der et naturligt reelt underrum bestående af reelle talsæt eller reelle funktioner, og de indre produkter, vi har defineret, er netop udvidelser af de indre produkter på disse reelle underrum.

Sætningen om, at et indre produkt helt er fastlagt ved den norm, det definerer, er mere kompliceret i det komplekse tilfælde. Vi får nemlig blot

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 - \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle,$$

og det er jo ikke nok til at bestemme $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle$. Nu får vi også

$$\|\underline{u}+i\underline{v}\|^2-\|\underline{u}-i\underline{v}\|^2 = 2\cdot -i\langle\underline{u},\underline{v}\rangle + 2i\langle\underline{v},\underline{u}\rangle = 4\,\mathrm{Im}\langle\underline{u},\underline{v}\rangle.$$

Vi får således sætningen

<u>Sætning 25.6</u>. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. Da er

$$\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 - \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 + i(\|\underline{u}+i\underline{v}\|^2 - \|\underline{u}-i\underline{v}\|^2) \Big).$$

De afvigende normer, vi i det reelle tilfælde indførte for vore tre omtalte eksempler på vektorrum, kan umiddelbart kopieres i det komplekse tilfælde.

Komplekse Hilbertrum og Banachrum indføres helt på linie med de reelle. Det viser sig, at problemer, der egentlig handler om reelle Banachrum, bedst behandles ved hjælp af rummenes komplekse udvidelser. De moderne udformninger af matematisk kvantemekanik bygger også på teorien for komplekse Banach-rum.

Vor definition af vinklen mellem to vektorer, vil i det komplekse tilfælde give en kompleks værdi af vinklens cosinus. Det kan der godt blive mening i, men i de fleste tilfælde vil man foretrække at bruge den reelle vektorrumsstruktur på det komplekse rum ved vinkeldefinitionen. En vektor får samme norm i de to strukturer, så det vil bare betyde, at man bruger 2n-dimensional reel geometri på det n-dimensionale komplekse vektorrum.

<u>Definition 25.7</u>. To vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i et komplekst vektorrum U kaldes ortogonale, hvis $\langle \underline{u},\underline{v} \rangle = 0$. En mængde $M \subseteq U$ kaldes et ortogonalsystem, hvis vektorerne i M er parvis ortogonale. Det kaldes et ortonormalsystem, når desuden alle vektorer i M har norm 1.

<u>Sætning 25.8</u>. Et ortonormalsystem er lineært uafhængigt.

Beviset er helt som i det reelle tilfælde.

<u>Sætning 25.9</u>. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots)$ være et endeligt

eller numerabelt system af lineært uafhængige vektorer. Der findes da et ortonormalt sæt $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ af lige så mange vektorer fra U, således at $\operatorname{span}\{\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k\} = \operatorname{span}\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_k\}$ for hvert antal k, der højst er lig med antallet af vektorer i sættene. (Vi kalder $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\ldots)$ en Gram-Schmidt-ortogonalisering af $(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots)$).

Bevis. For $k = 1$ klares sagen ved at vælge $\underline{e}_1 = \frac{\underline{u}_1}{\|\underline{u}_1\|}$. Hvis vi allerede har valgt $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, så betingelserne er opfyldt, vælger vi

$$\underline{e}_{n+1} = \frac{\underline{u}_{n+1} - (<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_1>\underline{e}_1+\ldots+<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_n>\underline{e}_n)}{\|\underline{u}_{n+1} - (<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_1>\underline{e}_1+\ldots+<\underline{u}_{n+1},\underline{e}_n>\underline{e}_n)\|},$$

og dermed får vi betingelserne opfyldt, helt som i det reelle tilfælde. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 25.10. Ethvert komplekst vektorrum, som har en endelig eller numerabel basis, har en ortonormal basis.

Bevis. Umiddelbart.

Eksempel. I rummet C af kontinuerte, komplekse funktioner $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ udgør funktionerne $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ et ortonormalsystem, idet vi får

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx}\,\overline{e^{iqx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-q)x}dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi}dx = 2\pi \text{ for } q = p \\ \left[\frac{e^{i(p-q)x}}{i(p-q)}\right]_{x=-\pi}^{\pi} = 0 \text{ for } q \neq p. \end{cases}$$

Vi har selvfølgelig også det ortonormalsystem, vi anførte i det reelle tilfælde. Da vi har

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}e^{inx} + \tfrac{1}{2}e^{-inx} \; ; \; \sin nx = \frac{1}{2i} e^{inx} - \frac{1}{2i} e^{-inx} \; ,$$

er de to systemer helt ækvivalente. Det komplekse system er imidlertid langt bekvemmere at regne med end det reelle.

Sætning 25.11. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. Lad $V \subseteq U$ være et endeligdimensionalt underrum, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en ortonormal basis for V. For $\underline{u} \in U$ sætter vi $a_j = \langle \underline{u},\underline{e}_j \rangle$, $j = 1,\ldots,n$. Da er $\underline{v} = a_1\underline{e}_1+\ldots+a_n\underline{e}_n$ det punkt i V, der har mindst afstand fra $\underline{u}$, og $\underline{u}-\underline{v}$ er ortogonal på enhver vektor i V. Endvidere gælder Bessel's ligning

$$|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2.$$

Bevis. Den eneste forskel fra det bevis, vi brugte i det reelle tilfælde, er at vi nu har

$$\|\underline{v}\|^2 = \langle \underline{v},\underline{v} \rangle = a_1\bar{a}_1+\ldots+a_n\bar{a}_n = |a_1|^2+\ldots+|a_n|^2.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 25.12. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $B \subseteq U$ være et ortonormalt system. For $\underline{u} \in U$ sætter vi $a(\underline{e}) = \langle \underline{u}, \underline{e} \rangle$ for hvert $\underline{e} \in B$. Da er $a(\underline{e}) = 0$, undtagen for højst numerabelt mange $\underline{e} \in B$, og hvis $a(\underline{e}) \neq 0$ for numerabelt mange elementer af B, og vi ordner disse i en følge $(\underline{e}_n)$ og sætter $a(\underline{e}_n) = a_n$, da er $|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots$ konvergent, og dens sum overstiger ikke $\|\underline{u}\|^2$. (Bessel's ulighed).

Beviset kopieres fra det reelle tilfælde, idet det dog bliver nødvendigt at tilføje en hel del numeriske tegn.

Eksempel. I vektorrummet C, som vi betragtede ovenfor har vi ortonormalsystemet $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} | n \in \mathbb{Z})$. Vi skriver $\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, og vi har så Fourierkoefficienterne

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{\Phi_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og approksimerende summer

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=-n}^{n} A_n e^{inx}.$$

Vi kunne imidlertid også kopiere den approksimerende sum fra det reelle tilfælde, altså

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

hvor

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A_0.$$

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_n + A_{-n})$$

$$b_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{i\sqrt{2}} (A_n - A_{-n}).$$

Ved at indsætte dette i $s_n(x)$ sammen med

$$\cos \nu x = \tfrac{1}{2}e^{i\nu x} + \tfrac{1}{2}e^{-i\nu x}, \quad \sin \nu x = \frac{1}{2i}\, e^{i\nu x} - \frac{1}{2i}\, e^{-i\nu x}.$$

<u>Definition 25.13</u>. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt. Underrum $V \subseteq U$ og $W \subseteq U$ kaldes indbyrdes ortogonale, hvis enhver vektor i V er ortogonal på enhver vektor i W. Vi siger, at hvert af rummene V og W er ortogonalt komplement til det andet, hvis de er såvel indbyrdes ortogonale som indbyrdes komplementære.

Som i det reelle tilfælde gælder, at $V+W$ er direkte sum, hvis V og W er indbyrdes ortogonale.

<u>Sætning 25.14</u>. Lad U være et komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $V \subseteq U$ være et endeligdimensionalt underrum. Da har V et ortogonalt komplement.

Beviset er helt som i det reelle tilfælde.

<u>Sætning 25.15</u>. Lad U være et endeligdimensionalt komplekst vektorrum med indre produkt, og lad U^* være det duale vektorrum. En bijektiv afbildning $\varphi: U \to U^*$ defineres da ved, at vi for $\underline{u} \in U$ definerer $\varphi(\underline{u}): U \to \mathbb{R}$ ved $\varphi(\underline{u})(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \overline{\underline{u}} \rangle$. Afbildningen φ er ikke lineær, idet den nok tilfredsstiller betingelsen $\varphi(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \varphi(\underline{u}_1) + \varphi(\underline{u}_2)$, men $\varphi(\lambda \underline{u}) = \overline{\lambda} \varphi(\underline{u})$.

Bevis. Når vi har valgt et reelt underrum og dermed en konjugation på U, definerer $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \langle \underline{v}, \overline{\underline{u}} \rangle$ en dualitet af U med sig selv. Heraf følger, at $\psi(\underline{u})(\underline{v}) = \langle \underline{v}, \overline{\underline{u}} \rangle$ definerer en isomorfi $\psi: U \to U^*$. Da φ fås ved sammensætning af ψ med konjugationen, følger sætningen nu umiddelbart.

KAPITEL 26

Lineære afbildninger af reelle og komplekse vektorrum.

Ved behandlingen af lineære afbildninger $f:U \to V$, hvor U og V begge er reelle eller begge komplekse vektorrum, har vi selvfølgelig hele den tidligere behandlede generelle teori til rådighed. Noget nyt kommer først ind i billedet, hvis U og V er rum med indre produkt. Det er da nærliggende at studere afbildninger $f:U \to V$, som bevarer indre produkt, altså tilfredsstiller betingelsen $\langle f(\underline{u}_1), f(\underline{u}_2)\rangle = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2\rangle$ for alle $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$. Her bruger vi samme betegnelse for det indre produkt på U og det indre produkt på V, men det er ikke særlig farligt. Det viser sig imidlertid, at afbildninger, som bevarer indre produkt, er af ganske overordentlig speciel karakter.

For at lette formuleringen underforstår vi hele tiden, at de betragtede vektorrum er reelle alle sammen eller komplekse alle sammen, og at der er defineret et indre produkt på dem alle, og at de også er normerede med den norm, der defineres ud fra det indre produkt.

Sætning 26.1. Lad U og V være vektorrum og $f:U \to V$ en (ikke nødvendigvis lineær) afbildning, som bevarer afstand, altså tilfredsstiller betingelsen $\|f(\underline{v})-f(\underline{u})\| = \|\underline{v}-\underline{u}\|$ for alle $\underline{u},\underline{v} \in U$. Da er f injektiv.

Bevis. Af $f(\underline{v}) = f(\underline{u})$ følger $\|\underline{v}-\underline{u}\| = \|f(\underline{v})-f(\underline{u})\| = 0$ altså $\underline{v} = \underline{u}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 26.2. En lineær afbildning $f:U \to V$ bevarer norm, hvis og kun hvis den bevarer indre produkt.

Bevis. Hvis f bevarer indre produkt, får vi

$$\|f(\underline{u})\|^2 = \langle f(\underline{u}),f(\underline{u})\rangle = \langle \underline{u},\underline{u}\rangle = \|\underline{u}\|^2 ,$$

hvilket viser, at f bevarer norm.

Hvis f bevarer norm og U og V er komplekse, får vi ved hjælp af en sætning fra det foregående kapitel

$$<f(\underline{u}),\ f(\underline{v})> =$$

$$\tfrac{1}{4}(\|f(\underline{u})+f(\underline{v})\|^2-\|f(\underline{u})-f(\underline{v})\|^2+i(\|f(\underline{u})+if(\underline{v})\|^2-\|f(\underline{u})-if(\underline{v})\|^2) =$$

$$\tfrac{1}{4}(\|f(\underline{u}+\underline{v})\|^2-\|f(\underline{u}-\underline{v})\|^2+i(\|f(\underline{u}+i\underline{v})\|^2-\|f(\underline{u}-i\underline{v})\|^2) =$$

$$\tfrac{1}{4}(\|\underline{u}+\underline{v}\|^2-\|\underline{u}-\underline{v}\|^2 + i(\|\underline{u}+i\underline{v}\|^2-\|\underline{u}-i\underline{v}\|^2) = <\underline{u},\underline{v}>.$$

Den tilsvarende regning i det reelle tilfælde bliver meget enklere. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 26.3. Ved en lineær, normbevarende afbildning $f:U \to V$ afbildes en ortonormal basis for U bijektivt på en ortonormal basis for $f(U) \subseteq V$.

Bevis. Det følger umiddelbart af de foregående sætninger.

Sætning 26.4. En normbevarende endomorfi $f:U \to U$, hvor U er endeligdimensionalt, er bijektiv, altså en automorfi.

Bevis. Det følger af de foregående sætninger, at f er injektiv, og når U er endeligdimensionalt, medfører det, at f er bijektiv. Dermed er sætningen bevist.

Definition 26.5. Lad $\underline{\underline{A}}$ være en kompleks matrix. Matricen $A^* = \overline{A}'$, som fås ved at transponere $\underline{\underline{A}}$ og konjugere alle elementerne, kaldes den til $\underline{\underline{A}}$ adjungerede matrix. Vi kalder en kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}}$ unitær, hvis $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$. En reel unitær matrix kaldes en ortogonal matrix.

Sætning 26.6. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum og $f:U \to U$ en endomorfi. Da er følgende egenskaber indbyrdes ækvivalente.

1) f er normbevarende.

2) Der findes en ortonormal basis for U, hvis billede ved f er en ortonormal basis for U.

3) Ved brug af en ortonormal basis udgør søjlerne i matricen for f en ortonormal basis for $\mathbb{C}^n$.

4) Ved brug af en ortonormal basis udgør rækkerne i matricen for f en ortonormal basis for $\mathbb{C}^n$.

5) Ved brug af en ortonormal basis er matricen for f unitær.

Bevis. Da en normbevarende endomorfi bevarer indre produkt, er det klart, at 1) $\Rightarrow$ 2). Hvis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er en ortonormal basis for U og $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n))$ ligeledes en ortonormal basis for U, har vi

$\|x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n\|^2 = |x_1|^2+\ldots+|x_n|^2$ og ligeledes $\|f(x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n)\|^2 = \|x_1 f(\underline{e}_1)+\ldots+x_n f(\underline{e}_n)\|^2 = |x_1|^2+\ldots+|x_n|^2$. Altså er f normbevarende. Dermed har vi vist, at 1) $\Rightarrow$ 2).

Hvis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er en ortonormal basis for U, har vi

$$(f_1(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n)) = (\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)\underline{\underline{A}} ,$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er den til f hørende matrix, altså

$$f(\underline{e}_j) = a_{1j}\underline{e}_1+\ldots+a_{nj}\underline{e}_j.$$

At $(f(\underline{e}_1),\ldots,f(\underline{e}_n))$ er ortonormal, bliver således ensbetydende med, at

$$(1) \qquad a_{1j}\bar{a}_{1k}+\ldots+a_{nj}\bar{a}_{nk} = \delta_{jk},$$

og det er netop betingelsen 3). Dermed har vi vist, at 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3).

Vi ser nu, at (1) er ensbetydende med, at $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{E}}$, men vi har tidligere set, at det med fører, at $\underline{\underline{A}}^*$ og $\underline{\underline{A}}$ er hinandens reciproke. Derfor er $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ helt ensbetydende med, at $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$. Altså er betingelsen 3) ensbetydende med, at $\underline{\underline{A}}$ er unitær. Samtidig ser vi, at 4) på formen $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^* = \underline{\underline{E}}$ er ensbetydende med 5), og dermed er sætningen bevist.

Sætning 26.7. Lad U være et vektorrum, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ og $(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n)$ være ortonormale baser for U. Der findes da en unitær (i det reelle tilfælde ortogonal) matrix $\underline{\underline{A}}$, som tilfredsstiller

$$(\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n) = (\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)\underline{\underline{A}} .$$

Så er $\underline{\underline{A}}$ ved valg af basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ matrix for den normbevarende endomorfi, der defineres ved $f(x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n) = x_1\underline{e}'_1+\ldots+x_n\underline{e}'_n$. For en vektor

$$\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n = y_1\underline{e}'_1+\ldots+y_n\underline{e}'_n$$

har vi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Bevis. Den første påstand følger af den foregående sætning, som også giver, at f er afstandsbevarende. Resten er bare en kopi af sætning 19.2.

Sætning 26.8. Mængden af unitære n×n-matricer er en gruppe med multiplikation som komposition, og mængden af ortogonale matricer udgør en undergruppe.

Bevis. Det følger umiddelbart af den foregående sætning.

Sesquilinearformer kan som alle andre linearformer beskrives ved hjælp af matricer.

<u>Sætning 26.9.</u> Lad $\varphi: U \times U$ være en sesquilinear form, og lad $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være en basis for U. Der findes da en matrix $\underline{\underline{A}}$, således at vi for $\underline{u} = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$ og $\underline{v} = y_1\underline{e}_1 + \ldots + y_n\underline{e}_n$ har

$$\varphi(\underline{u},\underline{v}) = (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n)\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ved et skift til basis $(\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n')$, hvor

$$(\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n') = (\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)\underline{\underline{S}}$$

bliver matricen for φ i de nye koordinater $\underline{\underline{S}}^*\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{S}}$.

Bevis. Ved direkte udregning får vi

$$\varphi(\underline{u},\underline{v}) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{y}_j x_k\ \varphi(\underline{e}_k,\underline{e}_j),$$

så vi får den angivne matrixfremstilling med $a_{jk} = \varphi(\underline{e}_k,\underline{e}_j)$. Den omtalte koordinattransformation udføres ved at indsætte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{S}}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_n) = (\overline{y}_1',\ldots,\overline{y}_n')\underline{\underline{S}}^*,$$

hvor $(x_1',\ldots,x_n')$ og $(y_1',\ldots,y_n')$ er koordinatsættene for $\underline{u}$ og $\underline{v}$ ved brug af basis $(\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n')$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 26.10. Lad U være et endeligdimensionalt vektorrum. Ved skift fra en ortonormal basis til en anden ortonormal basis transformeres en matrix $\underline{\underline{A}}$ på samme måde, hvad enten den er matrix for en endomorfi eller en bilinearform.

Bevis. Koordinatskiftet sker ved en unitær matrix $\underline{\underline{S}}$, og endomorfien får den ny matrix $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$, medens bilinearformen får den nye matrix $\underline{\underline{S}}^{*}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}$. Da $\underline{\underline{S}}$ er unitær er $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^{*}$. Dermed er sætningen bevist.

Lad nu U og V være endeligdimensionale komplekse vektorrum, og lad $f:U \to V$ være en lineær afbildning. Vi har da den duale afbildning $f':V^{*} \to U^{*}$ defineret ved $f'(\underline{v}^{*}) = v^{*}\circ f$. En linearform $\underline{v}^{*}:V \to \mathbb{C}$ kan tænkes givet på formen $\underline{v}^{*}(\underline{w}) = \langle\underline{w},\underline{v}\rangle$. Så er $f'(\underline{v}^{*}) = \underline{u}^{*}:U \to \mathbb{C}$, hvor $\underline{u}^{*}$ er defineret ved $\underline{u}^{*}(\underline{w}) = \langle\underline{w},\underline{u}\rangle$. Derved inducerer $f':V^{*} \to U^{*}$ en afbildning $f^{*}:V \to U$ ved $f^{*}(\underline{v}) = \underline{u}$, når $f'(\underline{v}^{*}) = \underline{u}^{*}$. Det kommer ud på, at f^{*} fastlægges ved betingelsen

(2) $\langle\underline{w}, f^{*}(\underline{v})\rangle = \langle f(\underline{w}),\underline{v}\rangle$ for alle $\underline{w} \in U$.

Det er klart, at udtrykket $\langle f(\underline{w}),\underline{v}\rangle$ for fast $\underline{v} \in V$ er en linearform på U, og så findes der netop ét element $f^{*}(\underline{v}) \in U$, for hvilket (2) gælder. Dette viser berettigelsen af følgende definition:

Definition 26.11. Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum med indre produkt, og $f:U \to V$ en lineær afbildning. Ved den til f adjungerede afbildning $f^*:V \to U$ forstår vi den afbildning, der fastlægges ved betingelsen (2) ovenfor.

Hvis U og V er reelle, har vi en naturlig identifikation af U og V med dualrummene U^* og V^*, og ved disse identifikationer bliver f^* netop den til f duale afbildning. Hvis U og V er komplekse, har vi også en slags identifikation med dualrummene, men det er ikke en rigtig isomorfi, kun en isomorfi på nær konjugation. Nu viser det sig, at konjugationerne i U og V i en vis forstand hæver hinanden, så vi får trods alt følgende sætning.

Sætning 26.12. Den adjungerede afbildning $f^*:V \to U$ er lineær.

Bevis. Vi skal bare udregne $f^*(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2)$ for $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$ og $\underline{v}_1,\underline{v}_2 \in V$. Vi bruger definitionen af f^*, lineariteten af f og sesquilineariteten af det indre produkt og får

$$<\underline{w}, f^*(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2)> = <f(\underline{w}), \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2> =$$

$$\overline{\lambda}_1<f(\underline{w}),\underline{v}_1>+\overline{\lambda}_2<f(\underline{w}),\underline{v}_2> = \overline{\lambda}_1<\underline{w},f^*(\underline{v}_1)>+\overline{\lambda}_2<\underline{w},f^*(\underline{v}_2)> =$$

$$<\underline{w},\lambda_1 f^*(\underline{v}_1) + \lambda_2 f^*(\underline{v}_2)>$$

for alle $\underline{w} \in U$, og det viser netop, at

$$f^*(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2) = \lambda_1 f^*(\underline{v}_1) + \lambda_2 f^*(\underline{v}_2).$$

<u>Sætning 26.13</u>. Den ved $\Phi(f) = f^*$ definerede afbildning $\Phi:\mathrm{Hom}(U,V) \to \mathrm{Hom}(V,U)$ er bijektiv, og for $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $f_1,f_2:U \to V$ er $(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)^* = \overline{\lambda}_1 f_1+\overline{\lambda}_2 f_2$. Endvidere er $f^{**} = f$.

Bevis. Vi har

$$<f^{**}(\underline{u}),\underline{v} = \overline{<\underline{v},f^{**}(\underline{u})>} = \overline{<f^*(\underline{v}),\underline{u}>} = <\underline{u},f^*(\underline{v})>=<f(\underline{u}),\underline{v}>,$$

for alle $\underline{v} \in V$, og det sikrer netop, at $f^{**}(\underline{u}) = f(\underline{u})$ for alle $\underline{u} \in U$. Heraf følger $f^{**} = f$, og det medfører, at Φ er sin egen inverse, og derfor bijektiv. Endvidere er

$$<\underline{u},(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)^*(\underline{v})> = <(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(\underline{u}),\underline{v}> = <\lambda_1 f_1(\underline{u})+\lambda_2 f_2(\underline{u}),\underline{v}> =$$

$$\lambda_1<f_1(\underline{u}),\underline{v}>+\lambda_2<f_2(\underline{u}),\underline{v}> = \lambda_1<\underline{u},f_1^*(\underline{v})>+\lambda_2<\underline{u},f_2^*(\underline{v})> =$$

$$<\underline{u},\overline{\lambda}_1 f_1^*(\underline{v}) + \overline{\lambda}_2 f_2^*(\underline{v})> = <\underline{u},(\overline{\lambda}_1 f_1^*+\overline{\lambda}_2 f_2^*)(\underline{v})> ,$$

og dermed har vi bevist den sidste påstand.

<u>Sætning 26.14</u>. Lad U, V og W være vektorrum med indre produkt, og lad $f:U \to V$ og $g:V \to W$ være lineære afbildninger. Da er $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Bevis. Påstanden følger af, at

$$\langle \underline{u},(g\ f)^*(\underline{v})\rangle = \langle g(f(\underline{u}),\underline{v}\rangle = \langle f(\underline{u}),g^*(\underline{v})\rangle = \langle \underline{u},f^*(g^*(\underline{v}))\rangle .$$

<u>Sætning 26.15</u>. Lad U være et vektorrum med en ortonormal basis $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_n)$ og V et vektorrum med en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Lad $f:U \to V$ være en lineær afbildning, som ved brug af de anførte baser har matricen $\underline{\underline{A}}$. Da vil den adjungerede afbildning $f:V \to U$ ved brug af de samme baser have den adjungerede matrix $\underline{\underline{A}}^*$.

Bevis. At f har matrix $\underline{\underline{A}}$ betyder, at $\langle f(\underline{b}_j),\underline{e}_j\rangle = a_{jk}$. Men så er $\langle f^*(\underline{e}_k),\underline{b}_j\rangle = \langle \underline{e}_k,f(b_j)\rangle = \overline{a_{kj}}$. Dermed er sætningen bevist.

En selvadjungeret endomorfi, altså en endomorfi, der er sin egen adjungerede, har selvadjungeret matrix ved brug af en ortonormal basis. Derfor er "selvadjungeret" som egenskab ved matricer invariant overfor basisskift med unitære matricer.

Ved brug af en vilkårlig basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ er en sesquilinearform $\varphi: U\times U \to \mathbb{C}$ givet ved, at vi for $\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\dots+x_n\underline{e}_n$, $\underline{v} = y_1\underline{e}_1+\dots+y_n\underline{e}_n$ har

$$\varphi(\underline{u},\underline{v}) = (\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)\underline{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Nu har vi en "adjungeret" sesquilinearform $\varphi^*: U\times U \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$\varphi^*(\underline{u},\underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v},\underline{u})} = (x_1,\dots,x_n)\overline{\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = (\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)\underline{\underline{A}}^*\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Heraf fremgår, at "selvadjungeret" bilinearform er det samme som en bilinearform, der for ethvert valg af basis har "selvadjungeret" matrix.

Nu har vi tidligere vedtaget at sige Hermite'sk i stedet for "selvadjungeret" om sesquilinearformer, og det vil vi fortsat gøre, da det er i overensstemmelse med sædvanlig sprogbrug. Vi siger også Hermite'sk om en matrix, der er "selvadjungeret", men vi holder fast ved "selvadjungeret endomorfi", stadig i overensstemmelse med matematisk sædvane. Funktionalanalytikere plejer at sige "operator" i stedet for endomorfi, men de bruger "operator" i en noget mere generel betydning, så vi vil fortsætte med at kalde en endomorfi en endomorfi.

I det reelle tilfælde er konjugation uden virkning, så Hermite'sk bliver til "symmetrisk", og i dette tilfælde bliver den adjungerede matrix også blot den transponerede.

For matricer er det at være "Hermite'sk" (i det reelle tilfælde "symmetrisk") således en egenskab, der er invariant overfor koordinatskifte, når matricen er matrix for en sesquilinearform (i det reelle tilfælde en bilinearform), men kun overfor koordinatskifte med unitær (i det reelle tilfælde ortogonal) matrix, når matricen er matrix for en endomorfi.

Vi går nu over til at vise hovedsætningen om "selvadjungerede" endomorfier.

Sætning 26.16. Lad U være et endeligdimensionalt vektorrum med indre produkt, og lad $f:U \to U$ være en selvadjungeret endomorfi. Da er alle egenværdier for f reelle, egenrum hørende til forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale, hver egenværdi har den geometriske multiplicitet lig med den algebraiske, og der findes en ortonormal basis for U, for hvilken matricen for f er en reel diagonalmatrix.

Bevis. Da f er selvadjungeret, har vi

$$<f(\underline{u}),\underline{v}> = <\underline{u},f^*(\underline{v})> = <\underline{u},f(\underline{v})>$$

for alle $\underline{u},\underline{v} \in U$. Hvis specielt $\underline{e}$ er en egenvektor hørende til egenværdien λ, får vi

$$\lambda<\underline{e},\underline{e}> = <\lambda\underline{e},\underline{e}> = <f(\underline{e}),\underline{e}> = <\underline{e},f(\underline{e})> = <\underline{e},\lambda\underline{e}> = \bar{\lambda}<\underline{e},\underline{e}>.$$

Da $\underline{e} \neq \underline{0}$, er $<\underline{e},\underline{e}> \neq 0$, så vi får $\lambda = \bar{\lambda}$, altså $\lambda \in \mathbb{R}$. Dermed er den første påstand bevist.

Lad nu $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ være egenvektorer hørende til indbyrdes forskellige egenværdier λ_1 og λ_2. Da disse er reelle, får vi

$$\lambda_1<\underline{e}_1,\underline{e}_2> =<\lambda_1\underline{e}_1,\underline{e}_2> = <f(\underline{e}_1),\underline{e}_2> = <\underline{e}_1,f(\underline{e}_2)> =<\underline{e}_1,\lambda_2\underline{e}_2> =$$

$$\lambda_2<\underline{e}_1,\underline{e}_2 ,$$

hvilket viser, at $<\underline{e}_1,\underline{e}_2> = 0$. Dermed er den anden påstand bevist.

Ortonormale baser for egenrummene for alle de forskellige egenværdier for f udgør tilsammen et ortonormalt system $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_p)$, som udvides til en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U. Med denne basis vil matricen for f være på diagonalform i de p første søjler, men da den er Hermite'sk, har den formen

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ således er på diagonalform. Nu er $\underline{\underline{B}}$ Hermite'sk, og $\underline{\underline{B}}$ er med brug af basis $(\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n)$ matrix for en selvadjungeret endomorfi af det af disse vektorer udspændte underrum. En egenværdi for $\underline{\underline{B}}$ er en egenværdi for f. Hvis en sådan findes, har den geometrisk multiplicitet ≥ 1, og vi kan gentage processen på $\underline{\underline{B}}$. Det ville imidlertid betyde, at egenrummet for en af egenværdierne for f indeholder en vektor i $\mathrm{span}(\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n)$, men vi har netop valgt $\underline{e}_1$, $\ldots,\underline{e}_p$, så dette ikke kan være tilfældet. Altså har $\underline{\underline{B}}$ ingen egenværdier. Det betyder, at dets karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{B}}$ ikke har rødder. Nu siger algebraens fundamentalsætning, at et polynomium af positiv grad med komplekse koefficienter altid har en kompleks rod. Derfor kan $\underline{\underline{B}}$ kun være en 0×0-matrix. Dermed er de to sidste påstande i sætningen vist.

Vi mangler strengt taget at gennemføre beviset i det reelle tilfælde. Hvis U er et reelt vektorrum, indfører vi en kompleks udvidelse W af U, samt udvidelsen $g:W \to W$ af f. Så er også g selvadjungeret. Egenværdierne for f bliver således reelle, og vi får reelle egenrum. Disse fås som løsningsrum til homogene reelle lineære ligningssystemer, og disse rum har en reel ortogonal basis, som også er basis for det komplekse løsningsrum. Derfor kan basen $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ i dette tilfælde vælges i U, og så fungerer resten af beviset uændret. Dermed er sætningen bevist.

Vi har et par umiddelbare følgesætninger.

Sætning 26.17. Lad U være et n-dimensionalt komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $f: U \times U \to \mathbb{C}$ være en Hermite'sk sesquilinearform. Der findes da en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ for U, således at vi for $\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\dots+x_n\underline{e}_n$ og $\underline{v} = y_1\underline{e}_1+\dots+y_n\underline{e}_n$ har

$$f(\underline{u},\underline{v}) = \lambda_1 x_1 \overline{y}_1+\dots+\lambda_n x_n \overline{y}_n,$$

hvor $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ er reelle. Hvis vi erstatter kravet om, at basen skal være ortonormal, med at den blot skal være ortogonal, kan vi til gengæld opnå, at hvert λ_j får en af værdierne $0, 1$ eller -1. Sesquilinearformen er positiv definit, hvis og kun hvis alle λ_j er > 0 og positiv semidefinit, hvis og kun hvis alle λ_j er $\geqq 0$.

Bevis. Ved en unitær koordinattransformation transformeres matricen for f ganske som om den var matrix for en endomorfi. Derfor kan vi vælge $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$, så matricen bliver en reel diagonalmatrix, og så får f den anførte form. Vi får $f(\underline{u},\underline{u}) = \lambda_1|x_1|^2+\ldots+\lambda_n|x_n|^2$, og deraf får vi umiddelbart de anførte betingelser, for at f er definit eller semidefinit. Endelig vil en basistransformation af formen $\underline{e}_j = s_j\underline{e}_j'$, $j = 1,\ldots,n$, hvor alle $s_j \neq 0$, bevirke, at hvert λ_j erstattes med $\dfrac{\lambda_j}{|s_j|^2}$, og ved at vælge $s_j = \sqrt{|\lambda_j|}$ for $\lambda_j \neq 0$ og $s_j = 1$ for $\lambda_j = 0$, får vi alle λ_j erstattet med 0,1 eller -1. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning 26.18</u>. Lad U være et reelt vektorrum med indre produkt og $f:U \to \mathbb{R}$ en kvadratisk form. Der findes da en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ for U, for hvilken f for $\underline{u} = x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n$ er givet ved

$$f(\underline{u}) = \lambda_1 x_1^2+\ldots+\lambda_n x_n^2.$$

Hvis vi blot forlanger, at basen skal være ortogonal, kan vi endda opnå, at hvert λ_j er 0,1 eller -1. Den kvadratiske form er positiv definit, hvis og kun hvis alle λ_j er > 0, og positiv semidefinit, hvis og kun hvis alle λ_j er ≥ 0.

Bevis. Det er bare den foregående sætning, specialiseret til det reelle tilfælde, idet en kvadratisk form fås ved restriktion af en bilinearform med symmetrisk matrix.

Vi bemærker, at det fremgår af vore resultater, at det karakteristiske polynomium for en reel, symmetrisk $n \times n$-matrix har alle sine rødder reelle.

KAPITEL 27

Normale endomorfier.

En del af de kønne resultater, vi har fundet vedrørende selvadjungerede endomorfier, gælder for en mere omfattende klasse af morfier, som også omfatter de unitære automorfier. Vi indfører denne klasse af endomorfier i følgende definition.

Definition 27.1. Lad U være et reelt eller komplekst vektorrum. En endomorfi $f:U \to U$ kaldes normal, hvis den kommuterer med sin adjungerede, altså hvis $f^* \circ f = f \circ f^*$.

At f er selvadjungeret betyder, at $f^* = f$, og så er f selvfølgelig normal. At f er unitær betyder, at f og f^* er hinandens reciproke, og det medfører selvfølgelig også, at f er normal.

Lad nu $f:U \to U$ være en vilkårlig endomorfi og $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ en ortonormal basis for U. Så har f en matrix $\underline{\underline{A}}$ og et karakteristisk polynomium

$$P_f(x) = \det(\underline{\underline{A}}-x\underline{\underline{E}}) = (-x)^n+C_{n-1}(-x)^{n-1}+\ldots+C_2x^2-C_1x+C_0.$$

Nu har f^* matricen $\underline{\underline{A}}^* = \overline{\underline{\underline{A}}}'$. Koefficienterne C_j er summer af determinanter af undermatricer, og disse determinanter ændres ikke ved overgang til den transponerede matrix. Altså er

$$P_{f^*}(x) = (-x)^n+\overline{C}_{n-1}(-x)^{n-1}+\ldots+\overline{C}_2x^2-\overline{C}_1x + \overline{C}_0.$$

Hvis $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ er egenværdierne for f, hver skrevet det antal gange, der svarer til multipliciteten, har vi opløsningen

$$P_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1) \ \ldots \ (x-\lambda_n),$$

og ved at konjugere, får vi

$$P_{f^*}(x) = (-1)^n(x-\overline{\lambda}_1) \ \ldots \ (x-\overline{\lambda}_n).$$

Derved har vi selvfølgelig benyttet, at f har n egenværdier, fordi $P_f(x)$ ifølge algebraens fundamentalsætning har n rødder. Vi har således vist, at egenværdierne for f^*, netop er de konjugerede til egenværdierne for f, således at den algebraiske multiplicitet af en egenværdi for f er lig med den algebraiske multiplicitet af den konjugerede egenværdi for f^*. Det giver et nyt bevis for, at en selvadjungeret endomorfi har reelle egenværdier. Vi udtrykker resultatet i en sætning.

Sætning 27.2. Egenværdierne for den adjungerede f^* til en endomorfi f er netop de konjugerede til egenværdierne for f.

Dernæst må vi have opklaret, hvilke relationer der er mellem egenrummene for f og f^*. Det er heldigvis de enklest mulige.

Sætning 27.3. Egenrummet svarende til en egenværdi λ for f er identisk med egenrummet svarende til egenværdien $\overline{\lambda}$ for f^*.

Bevis. For vilkårlige $\underline{u},\underline{v} \in U$ får vi

$$<f(\underline{u}),\ f(\underline{v})> = <\underline{u},f^*(f(\underline{v}))> = <\underline{u},f(f^*(\underline{v}))> = <f^*(\underline{u}),f^*(\underline{v})>.$$

Specielt er $<f(\underline{u}),f(\underline{u})> = <f^*(\underline{u}),f^*(\underline{u})>$, så vi kan slutte, at $f(\underline{u})$ er $\underline{0}$, hvis og kun hvis $f^*(\underline{u})$ er det. Dermed har vi bevist, at en normal endomorfi og dens adjungerede har samme kerne. Nu har $f-\lambda id$ den adjungerede $f^* - \overline{\lambda}id$, og vi får

$$(f^*-\overline{\lambda}id)\circ(f-\lambda id) = f^*\circ f - \overline{\lambda}f - \lambda f^* + \lambda\overline{\lambda}id,$$

og da $f^*\circ f = f\circ f^*$ ændres dette udtryk ikke ved samtidig ombytning af f med f^* og λ med $\overline{\lambda}$. Altså er $f-\lambda id$ normal. Men så er $kern(f-\lambda id) = kern(f^*-\overline{\lambda}id)$, og det er netop de to egenrum, der skulle vises at være identiske. Dermed er sætningen bevist.

Nu afsløres det, at den hjælpesætning, vi havde så stor nytte af ved behandlingen af selvadjungerede endomorfier, også gælder for normale endomorfier.

Sætning 27.4. Egenrum svarende til forskellige egenværdier for en normal endomorfi er indbyrdes ortogonale.

Bevis. Lad $\underline{e}_1$ være en egenvektor svarende til egenværdien λ_1 for f, og lad $\underline{e}_2$ være en egenvektor svarende til egenværdien λ_2 for f, og dermed ifølge sætningerne 27.2 og 27.3 også til egenværdien $\bar{\lambda}_2$ for f^*. Vi får da

$$\lambda_1\langle\underline{e}_1,\underline{e}_2\rangle = \langle\lambda_1\underline{e}_1,\underline{e}_2\rangle = \langle f(\underline{e}_1),\underline{e}_2\rangle = \langle\underline{e}_1,f^*(\underline{e}_2)\rangle =$$

$$\langle\underline{e}_1,\bar{\lambda}_2\underline{e}_2\rangle = \lambda_2\langle\underline{e}_1,\underline{e}_2\rangle,$$

og deraf følger, at $\langle\underline{e}_1,\underline{e}_2\rangle = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Nu er det ikke svært at vise hovedsætningen om standardform af matricer for normale endomorfier ved at kopiere det ræsonnement, vi benyttede for selvadjungerede automorfier. Den væsentligste forskel er, at egenværdierne for en normal endomorfi ikke behøver at være reelle, og da en reel diagonalmatrix er selvadjungeret, er det da også på forhånd klart, at reduktion til en diagonalmatric i det reelle tilfælde kun er mulig for selvadjungerede (= symmetriske) endomorfier.

Sætning 27.5. Lad U være et n-dimensionalt komplekst vektorrum med indre produkt, og lad $f:U \to U$ være en normal endomorfi. Da har egenværdierne for f den geometriske multiplicitet lig med den algebraiske og samlet multiplicitet n, og der findes en ortonormal basis for U, for hvilken matricen for f er en diagonalmatrix.

Bevis. Det følger af algebraens fundamentalsætning, at egenværdierne for f har samlet algebraisk multiplicitet n. Foreningsmængden af ortonormale baser for egenrummene for f udgør et ortonormalt sæt $(\underline{e}_1,\dots \underline{e}_p)$, som vi udvider til en ortonormal basis $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ for U. Ved brug af denne basis får f en matrix $\underline{\underline{A}}$, som er på diagonalform i de p første søjler, og elementerne $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ i diagonalen er egenværdierne for f, således at antallet af gange, hver egenværdi optræder, er dens geometriske multiplicitet.

Nu er $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^*$. I $\underline{\underline{A}}^*\underline{\underline{A}}$ bliver diagonalled nummer j for $j = 1,\dots,p$ lig med $|\lambda_j|^2$, og i $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^*$ bliver det tilsvarende led $|\lambda_j|^2 + |a_{j,p+1}|^2+\dots+|a_{j,n}|^2$. Vi kan derfor slutte, at $a_{jk} = 0$ for $j = 1,\dots,p$; $k = p+1,\dots,n$, så vi har

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}} \end{pmatrix},$$

hvor $\underline{\underline{D}}$ er diagonalmatricen med $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ i diagonalen, medens $\underline{\underline{B}}$ er en matrix uden egenværdier. Hvis $\underline{\underline{B}}$ havde en egenværdi, ville $\underline{\underline{A}}$ have en egenvektor i $\mathrm{span}(\underline{e}_{p+1},\ldots,\underline{e}_n)$, og så ville et af de udvalgte egenrum få sin dimension forøget. Altså er $\underline{\underline{B}}$ uden egenværdier, men det kræver, at den er tom, så $\underline{\underline{A}}$ er en diagonalmatrix. Dermed er sætningen bevist.

I det reelle tilfælde kan resultatet altså ikke blive helt så kønt. Det viser sig dog, at vi også i det reelle tilfælde kan bringe matricen for en normal endomorfi på en ganske pæn standardform ved at inddrage det karakteristiske polynomiums komplekse rødder i regningerne. Vi minder om, at disse rødder falder i par af indbyrdes konjugerede.

<u>Sætning 27.6</u>. Lad U være et n-dimensionalt reelt vektorrum med indre produkt, og lad $f:U \to U$ være en normal endomorfi, hvis karakteristiske polynomium har de ikke reelle rødder $\alpha_1 \pm i\beta_1,\ldots,\alpha_p \pm i\beta_p$, samt de reelle rødder $\lambda_{2p+1},\ldots,\lambda_n$, hvor det antal gange, hver rod er anført, er lig med dens multiplicitet. Der findes da en ortonormal basis for U, for hvilken matricen $\underline{\underline{A}}$ for U

har blokke $\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j' \\ -\beta_j'' & \alpha_j \end{pmatrix}$, $j = 1,\dots,p$ med $\beta_j'\beta_j'' = \beta_j^2$ langs de 2p første pladser i hoveddiagonalen, og $\lambda_{2p+1},\dots,\lambda_n$ på de resterende pladser, og ellers 0 overalt, altså

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1' & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1'' & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2' & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2'' & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_p & \beta_p' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_p'' & \alpha_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{2p+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bevis. Vi benytter den komplekse udvidelse $V = U \oplus iU$ af U. Udvidelsen $\hat{f}:V \to V$ af f er defineret ved $\hat{f}(\underline{u}+i\underline{v}) = f(\underline{u}) + if(\underline{v})$. Af $\hat{f}(\underline{e}+i\underline{e}') = (\alpha+i\beta)(\underline{e}+i\underline{e}')$ følger da umiddelbart $\hat{f}(\underline{e}-i\underline{e}') = (\alpha-i\beta)(\underline{e}-i\underline{e}')$. Det indre produkt på $U \oplus iU$ defineres ved $<\underline{u}_1+i\underline{v}_1,\underline{u}_2+i\underline{v}_2> = <\underline{u}_1,\underline{u}_2>+<\underline{v}_1,\underline{v}_2> + i(<\underline{v}_1,\underline{u}_2>-<\underline{u}_1,\underline{v}_2>)$, idet dette definerer en positiv definit Hermite'sk sesquilinearform, hvis restriktion til U er det indre produkt på U. Vi ser, at $<\underline{u}_1+i\underline{v}_1,\underline{u}_2+i\underline{v}_2> = 0$ bliver ensbetydende med $<\underline{u}_1 - \underline{v}_1, \underline{u}_2 - \underline{v}_2> = 0$.

Af de således opnåede resultater følger, at egenrummet til $\alpha_j - i\beta_j$ består af vektorerne, som er konjugerede med vektorerne i egenrummet for $\alpha_j + i\beta_j$, og at vi får en ortonormal basis for egenrummet til $\alpha_j - i\beta_j$ ved at konjugere vektorerne i en basis for egenrummet til $\alpha_j + i\beta_j$.

Vi kan derfor vælge ortonormale baser for egenrummene så foreningsmængden udgør en ortonormal basis

$$(\mu_1\underline{e}_1 + i\mu'_1\underline{e}'_1, \mu_1\underline{e}_1 - i\mu'_1\underline{e}'_1, \ldots, \mu_p\underline{e}_p + i\mu'_p\underline{e}'_p, \mu_p\underline{e}_p - i\mu'_p\underline{e}'_p, \underline{e}_{2p+1}, \ldots, \underline{e}_n),$$

hvor vi har $\|\mu_j\underline{e}_j \pm \mu'_j\underline{e}'_j\| = 1$, $j = 1,\ldots,p$ og $\|\underline{e}_j\| = 1$, $j = 1,\ldots,p$. Vi har trukket faktorerne μ_j, μ'_j ud og derved opnået, at vi også har $\|\underline{e}_j\| = \|\underline{e}'_j\| = 1$, $j = 1,\ldots,p$. Faktorerne $\mu'_1,\ldots,\mu'_p$ kan ikke være 0, da det ville give to ens egenvektorer for to forskellige egenværdier. Faktorerne $\mu_1,\ldots,\mu_p$ kan heller ikke være 0, for det ville give to modsatte egenvektorer for to forskellige egenværdier. På den anden side er

$$0 = <\mu_j\underline{e}_j + i\mu'_j\underline{e}'_j, \mu_j\underline{e}_j - i\mu'_j\underline{e}'_j> = (\mu_j^2 + \mu_j'^2)<\underline{e}_j, \underline{e}'_j>,$$

hvilket viser, at $\underline{e}_j$ og $\underline{e}'_j$ er ortogonale for $j = 1,\ldots,p$. Endvidere er de p 2-dimensionale underrum, der udspændes af $\underline{e}_j$ og $\underline{e}'_j$ for $j = 1,\ldots,p$, samt de

1-dimensionale underrum, der udspændes af $\underline{e}_{2p+1},\dots,\underline{e}_n$ indbyrdes ortogonale, og derfor er

$$(\underline{e}_1,\underline{e}_1',\dots,\underline{e}_p,\underline{e}_p',\ \underline{e}_{2p+1},\dots,\underline{e}_n)$$

en ortonormal basis for U (og for V).

Nu er $\hat{f}$ givet ved

$$\hat{f}(\mu_j\underline{e}_j \pm i\mu_j'\underline{e}_j') = (\alpha_j \pm i\beta_j)(\mu_j\underline{e}_j \pm i\mu_j'\underline{e}_j'),\quad j = 1,\dots,p$$
$$\hat{f}(\underline{e}_j) = \lambda_j\underline{e}_j \qquad j = 2p+1,\dots,n.$$

Ved spaltning i real- og imaginærdel får vi heraf

$$f(\underline{e}_j) = \alpha_j\underline{e}_j - \frac{\mu_j'}{\mu_j}\beta_j\underline{e}_j',\ f(\underline{e}_j') = \frac{\mu_j}{\mu_j'}\beta_j\underline{e}_j+\alpha_j\underline{e}_j',\ j = 1,\dots,p$$
$$f(\underline{e}_j) = \lambda_j\underline{e}_j,\qquad j = 2p+1,\dots,n.$$

Det betyder netop, at matricen for f har den angivne form, og dermed er sætningen vist.

Nu er det uhyre let også at finde en standardform for matricen for en normbevarende endomorfi, altså for en unitær matrix.

<u>Sætning 27.7.</u> Lad U være et n-dimensionalt komplekst vektorrum, og lad $f:U \to U$ være en normbevarende endomorfi, altså en endomorfi, hvis matrix svarende til en ortonormal basis er unitær. Der findes da en ortonor-

mal basis for U, for hvilken matricen for f er en diagonalmatrix. I diagonalen forekommer hver egenværdi for f et antal gange lig med dens algebraiske multiplicitet (som er lig med den geometriske), og alle egenværdierne for f har numerisk værdi 1.

Bevis. En normbevarende endomorfi er normal, fordi dens matrix ved valg af en ortonormal basis er unitær og derfor normal. Så følger hele sætningen på nær den sidste påstand umiddelbart af sætning 27.5. Den sidste påstand følger umiddelbart af, at diagonalmatricen også er unitær, idet det betyder, at hvert element λ_j i diagonalen må tilfredsstille betingelsen $|\lambda_j|^2 = 1$. Dermed er sætningen bevist.

Vi kan udtrykke resultatet på den måde, at den mest generelle normbevarende endomorfi af et komplekst vektorrum ved passende valg af basis blot sker ved en drejning i hver basis plan. De aller simpleste unitære transformationer består i, at en basisvektor $\underline{e}_j$ går over i $e^{i\theta}\underline{e}_j$ for et $\theta \in \mathbb{R}$, medens alle andre basisvektorer afbildes på sig selv. En sådan flytning kan man passende kalde en drejning om en kompleks hyperplan. Sætningen viser, at den mest generelle normbevarende endomorfi af et n-dimensionalt komplekst rum er sammensat af n drejninger om komplekse hyperplaner, der kan vælges, så deres ortogonale komplementer er indbyrdes ortogonale. Gruppen $U(n)$ af alle normbevarende endomorfier af et n-dimensionalt komplekst rum frembringes derfor af sådanne drejninger.

Forholdene i reelle rum er ikke så meget anderledes, som man skulle tro. Den standardform for matricer for normale endomorfier af reelle rum, som vi fandt i sætningen ovenfor, er ortognal, hvis og kun hvis hver af de interessante 2×2 blokke er ortogonale. Nu kan en række i en ortogonal 2×2-matrix altid bringes på formen $(\cos\theta,\sin\theta)$ for et $\theta \in \mathbb{R}$, og da rækkerne skal være indbyrdes ortogonale, må den anden række være $(-\sin\theta,\cos\theta)$ eller $(\sin\theta,-\cos\theta)$. Nu ser vi imidlertid, at matricen $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta\end{pmatrix}$ har det karakteristiske polynomium x^2-1, svarende til egenværdierne $+1$ og -1, så kun matricer af den anden form må forekomme. Matricen kan således bringes på standardformen

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & \cos\theta_p & \sin\theta_p & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_p & \cos\theta_p & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_{2p+1} & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{pmatrix},$$

hvor hver af egenværdierne $\lambda_{2p+1},\ldots,\lambda_n$ er 1 eller -1.

Der er således et 2p-dimensionalt underrum, der er invariant, og i dette underrum kan man vælge basis, så endomorfien er sammensat af en drejning om hver af p indbyrdes ortogonale basisplaner. Det ortogonale komplement er også invariant, og det transformeres blot ved, at nogle af koordinaterne skifter fortegn, altså ved nogle symmetrier i hyperplaner.

Samtidig symmetri om to hyperplaner svarende til fortegnsskift på $\underline{e}_j$ og $\underline{e}_k$ giver samme resultat som en drejning med $\theta = \pi$ i $\text{span}(\underline{e}_j,\underline{e}_k)$. Hvis vi tillader sådanne drejninger, kan vi reducere antallet af symmetrier til højst 1.

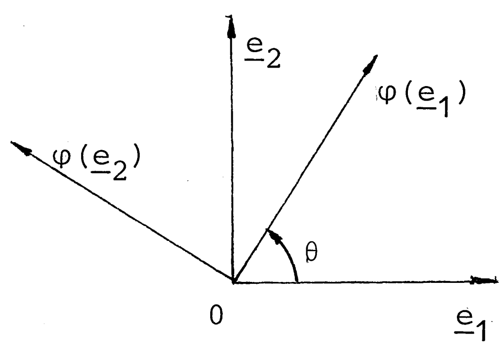
De normbevarende endomorfier af $\mathbb{R}^n$ udgør gruppen $O(n)$ af ortogonale transformationer. De har alle determinant 1 eller -1. Afbildningen $\det: O(n) \to \{1,-1\} = \mathbb{Z}_2$ er en homomorfi med hensyn til multiplikation. Dens kerne er gruppen $SO(n)$ af ortogonale transformationer med determinant 1. Det er en normal undergruppe. Vi kan vælge en fast symmetri i en hyperplan, og enhver ortogonaltransformation med determinant -1 fås derfor som sammensætning af denne spejling med et element af $SO(n)$.

Elementerne af $SO(n)$ kaldes egentlige ortogonale transformationer, og $SO(n)$ kaldes den specielle ortogonale gruppe. Hvis rummet er ligedimensionalt, kan et element af $SO(n)$ være sammensat af virkelige drejninger i et fuldstændigt sæt af ortogonale 2-dimensionale underrum, og så findes der slet ikke andre fixpunkter end $\underline{0}$. Hvis rummet er uligedimensionalt, har en egentlig ortogonal transformation altid 1 som egenværdi, og så er der i det mindste et 1-dimensionalt underrum, hvis punkter alle er fixpunkter, en drejningsakse.

Vi vil se på situationen i de lave dimensioner. I et todimensionalt rum med ortogonal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ er en egentlig ortogonal transformation givet ved

$$(\varphi(\underline{e}_1), \varphi(\underline{e}_2)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

For $\theta=\pi$ er det den identiske afbildning. I øvrigt er situationen som antydet på figuren. Transformationen er en drejning med drejningsvinkel θ. For $\theta = \pi$ udarter drejningen til en symmetri om punktet $\underline{0}$.



Gruppen SO(2) er kommutativ. Det ses geometrisk og efterregnes i øvrigt let, at

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Vi får således det inverse element ved at skifte fortegn på θ. Elementerne i SO(2) kommuterer ikke med de øvrige elementer af O(2). En ikke egentlig ortogonal transformation har jo en hel linie af fixpunkter, så det må være en symmetri. Vi har faktisk

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

På den anden side er

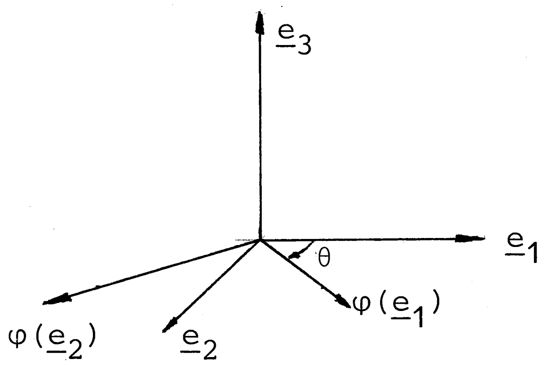
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Det stemmer med, at drejningsvinklen θ får modsat fortegn, når vi vender orienteringen af koordinatsystemet.

De betragtede drejninger fra SO(2) har $\underline{0}$ som eneste fixpunkt, og det stemmer med, at dimensionen er lige.

Et element af SO(3) har for passende valg af basis formen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



svarende til en drejning med drejningsvinkel θ om den tredie akse.

Ved brug af en tilfældig ortonormal basis har matricen for en egentlig ortogonal transformation formen

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

hvor såvel søjlerne som rækkerne er ortonormale baser i $\mathbb{R}^3$, og determinanten er 1. Vi finder da vektorer $x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2+x_3\underline{e}_3$ på drejningsaksen ved at løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}-1)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22}-1)x_2 + \alpha_{23}x_3 &= 0 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + (\alpha_{33}-1)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Blandt løsningerne vælger vi en normeret vektor $\underline{e}_3'$, og så supplerer vi til et ortonormalsystem $(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$. Med dette som basis får vi matricen på den simple form.

Elementerne af $SO(4)$ har for passende valg af basis den specielle form

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

For $\theta_1 = 0$ eller $\theta_2 = 0$ er der et 2-dimensionalt underrum, hvis punkter alle ligger fast, altså en 2-dimensional "drejningsakse". Når hverken θ_1 eller θ_2 er et helt tal gange π, er $\underline{0}$ det eneste punkt, der får lov at blive liggende.

KAPITEL 28

Affine rum.

Ved flere lejligheder har vi fremhævet, at de abstrakte vektorrum er naturlige generalisationer af de i kapitlerne 3 og 4 omtalte rum $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^2$ og $\mathbb{E}^3$. Disse fremkom ved at vi lod klasser af liniestykker i de sædvanlige Euklidiske rum E^1, E^2 og E^3 spille rollen som vektorer. Ved at vælge et begyndelsespunkt O kunne vi fastlægge punkter i rummet ved stedvektorer, og de Euklidiske rum med et fast valgt begyndelsespunkt blev således kopier af vektorrummene.

Nu er det en fundamental egenskab ved de Euklidiske rum, at de er ens over det hele. Der er altså slet ikke særlig udmærkede punkter og alle punkter i et Euklidisk rum har samme ret til at være begyndelsespunkt.

I dette kapitel vil vi indføre nogle nye mængder med geometrisk struktur, affine rum. De skal stå i samme relation til de abstrakte vektorrum som de Euklidiske rum til vektorrummene $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^3$.

Lad A være en mængde, hvis elementer vi vil kalde punkter. Vi betragter mængden $A \times A$ af ordnede par (P,Q) af punkter. Vi tænker os givet en ækvivalensrelation $\equiv$ på $A \times A$. Lad U være mængden af ækvivalensklasser. Vi tænker os nu U udstyret med en struktur som vektorrum over et legeme K.

Definition 28.1. Den således organiserede mængde A kaldes et affint rum over legemet K, hvis følgende to aksiomer er opfyldt.

1). For hver ækvivalensklasse $\underline{u} \in U$ og hvert punkt $P \in A$ findes et og kun et punkt $Q \in A$ med $(P,Q) \in \underline{u}$.

2). Lad $P_1, P_2, P_3 \in A$ være vilkårlige punkter. Hvis $\underline{u} \in U$ er den ækvivalensklasse, der indeholder (P_1,P_2), og $\underline{v} \in U$ er den ækvivalensklasse, der indeholder (P_2,P_3), da er $\underline{u}+\underline{v}$ den ækvivalensklasse, der indeholder (P_1,P_3).

Det virker måske en smule kryptisk, men vi går straks i gang med at oversætte det til menneskesprog. Vi indfører en jargon, der minder om den fra kapitel 3 kendte.

For $P,Q \in A$ vil vi med $\underline{PQ} \in U$ betegne den ækvivalensklasse, der indeholder (P,Q), og vi vil sige, at $\underline{PQ}$ er vektorer fra P til Q. Hvis vi vælger et begyndelsespunkt $O \in A$ bliver hver vektor $\underline{u} \in U$ ifølge 1) stedvektor for netop et punkt $P \in A$, altså $\underline{OP} = \underline{u}$ for netop 1 punkt P.

(Ækvivalensrelationen $(P_1,Q_1) \equiv (P_2,Q_2)$ bliver nu ganske enkelt ensbetydende med relationen $\underline{P_1Q_1} = \underline{P_2Q_2}$.

Aksiomet 2) udtrykker blot, at vi for vilkårlige punkter $P_1,P_2,P_3 \in A$ har relationen $\underline{P_1P_2} + \underline{P_2P_3} = \underline{P_1P_3}$, altså at vektorer adderes ved at "sættes efter hinanden". Lad $P_4 \in A$ være det entydigt bestemte punkt, for hvilket $\underline{P_1P_4} = \underline{P_2P_3}$. Vi har da også $\underline{P_1P_4} + \underline{P_4P_3} = \underline{P_1P_3}$, men så kan vi slutte, at $\underline{P_1P_2} = \underline{P_3P_4}$. Vi siger, at $P_1P_2P_3P_4$ er et parallelogram.

Vi vælger et begyndelsespunkt $O \in A$. Ved $\varphi(P) = \underline{OP}$ defineres en bijektiv afbildning $\varphi: A \to U$, og for $P,Q \in A$ får vi åbenbart $\underline{PQ} = \varphi(Q) - \varphi(P)$.

Vektorrummet U er selv et affint rum ved definitionen $\underline{\underline{u\ v}} = \underline{v}-\underline{u}$, og $\varphi: A \to U$ bliver en ækvivalens, der bevarer strukturen, så A er en kopi af U med denne struktur.

Et affint underrum $B \subseteq A$ er en delmængde, som med den fra A inducerede struktur er et affint rum.

Dette er åbenbart ensbetydende med, at mængden $V = \{\underline{PQ} \mid P,Q \in B\}$ er et underrum af U.

Lad nu $O \in A$ være et begyndelsespunkt og φ: $A \to U$ den ved $\varphi(P) = \underline{OP}$ definerede ækvivalens. Lad $O_1 \in B$ være vilkårligt valg. Så er $P \in B$ ensbetydende med, at $\underline{O_1P} \in V$, altså med $\underline{OP} - \underline{OO_1} \in V$. Dette er igen ensbetydende med, at $\varphi(P) \in \varphi(O_1) + V$. Altså er $\varphi(B)$ et siderum til V. De affine underrum i A er derfor de delmængder af A, som φ afbilder i siderum til underrum i U.

Heraf følger umiddelbart, at fællesmængden for en mængde af affine underrum er et affint underrum.

<u>Definition 28.2</u>. Lad A og B være affine rum over samme legeme K. Lad U være rummet af vektorer i A og lad V være rummet af vektorer i B. Lad $f: A \to B$ være en afbildning, og lad $N \in A$ være vilkårligt valgt. Med N som begyndelsespunkt for A har vi den bijektive afbildning $\varphi: A \to U$ defineret ved $\varphi(P) = \underline{NP}$. Vi

vælger $O = f(N)$ som begyndelsespunkt for B og får derved den bijektive afbildning $\psi: B \to V$ defineret ved $\psi(Q) = \underline{OQ}$. Afbildningen $\tilde{f}_N = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \to V$ kaldes den for begyndelsespunktet $N \in A$ af f inducerede vektorafbildning. Hvis $\tilde{f}_N$ bliver den samme afbildning for alle valg af $N \in A$, og den desuden er lineær, kaldes f en affin afbildning.

Hvis A, B og C er affine rum over K, og $f: A \to B$ og $g: B \to C$ er affine afbildninger, er $g \circ f: A \to C$ en affin afbildning. Beviset for denne påstand er meget let. Det er ligeledes næsten helt indlysende, at den inverse afbildning til en affin bijektiv afbildning er affin.

Lad A være et affint rum over et legeme K, og lad U være rummet af vektorer i A. For $\underline{u}, \underline{v} \in U$ definerer vi $\underline{\underline{u}\ \underline{v}} = \underline{v} - \underline{u}$, og derved bliver U et affint vektorrum. For et vilkårligt begyndelsespunkt $N \in A$ er $\varphi: A \to U$ defineret ved $\varphi(P) = \underline{NP}$ en bijektiv affin afbildning. For begyndelsespunkt $N_1 \in A$ får vi $\varphi_1: A \to U$ defineret $\varphi_1(P) = \underline{N_1P}$ og $\psi: U \to U$ defineret ved $\psi(\underline{u}) = \underline{\varphi(N_1)\underline{u}} = \underline{N\,N_1\underline{u}} = \underline{u} - \underline{NN_1}$. For $P \in A$ får vi så $(\psi \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1})(\underline{N_1P}) = \psi(\varphi(P)) = \psi(\underline{NP}) = \underline{NP} - \underline{NN_1} = \underline{N_1P}$, så $\psi \circ \varphi \circ \varphi_1^{-1}: U \to U$ bliver den identiske afbildning for alle valg af begyndelsespunktet.

Lad os nu igen betragte affine rum A og B over et legeme K, med rum U og V af vektorer, med begyndelsespunkter N og O og med de bijektive affine afbildninger $\varphi: A \to U$ og $\psi: B \to V$. For en affin afbildning $f: A \to B$ definerer vi $\gamma(f): U \to V$ ved $\gamma(f) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Derved får vi en bijektiv afbildning af mængden $\mathrm{Aff}(A,B)$ af affine afbildninger af A ind i B på mængden $\mathrm{Aff}(U,V)$ af affine afbildninger af U ind i V.

Det er således nok at studere affine afbildninger af vektorrum i vektorrum. Lad $f: U \to V$ være en affin afbildning. Så er $\tilde{f}: U \to V$ defineret ved $\tilde{f}(\underline{u}) = f(\underline{u}) - f(\underline{0})$ lineær, og vi får $f(\underline{u}) = f(\underline{0}) + \tilde{f}(\underline{u})$.

Vi kan skrive $f = \tau \circ \tilde{f}$, hvor $\tau: V \to V$ er givet ved $\tau(\underline{v}) = \underline{a} + \underline{v}$, hvor $\underline{a} = f(\underline{0})$. En sådan afbildning kaldes en parallelforskydning.

En parallelforskydning $f: B \to B$ er en affin afbildning, for hvilken $\gamma(f): V \to V$ er den identiske afbildning, altså en afbildning, der lader enhver vektor invariant, altså tilfredsstiller $\underline{f(P)f(Q)} = \underline{PQ}$ for alle $P, Q \in B$.

En parallelforskydning, som har et fixpunkt, er den identiske afbildning. En parallelforskydning er bijektiv.

Det er klart, at en parallelforskydning overfører et affint underrum i et affint underrum, og derfor gælder det også for en K-affin afbildning $f: A \to B$, at billedet af et affint underrum er et affint underrum, og at originalmængden til et affint underrum er et affint underrum.

Lad A være et affint rum over et legeme K, og lad U være rummet af vektorer i A. Ved dimensionen af A forstår vi dimensionen af U. Et koordinatsystem i A er et begyndelsespunkt $O \in A$ og en basis for U. Vi vil holde os til det endeligdimensionale tilfælde og lade basis for U være ordnet, altså $(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Koordinatsystemet betegnes så $(O;\ \underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. For et punkt $P \in A$ har vi et koordinatsæt $(x_1,\ldots,x_n)$, nemlig koefficienterne i den entydigt bestemte fremstilling $\underline{OP} = x_1\underline{e}_1+\ldots+x_n\underline{e}_n$. Derved får vi en bijektiv afbildning Φ: $A \to K^n$.

Lad nu $(O_1,\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n')$ være et andet koordinatsystem i A. Hvis det ovenfor betragtede punkt P har koordinaterne $(x_1',\ldots,x_n')$ i det nye system, er $\underline{O\ P} =$

$x_1'\underline{e}_1'+\ldots+x_n'\underline{e}_n'$. Nu har vi en invertibel matrix $\underline{\underline{S}}$, for hvilken

$$(\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n') = (\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)\underline{\underline{S}},$$

og med $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ og $\underline{x}' = (x_1',\ldots,x_n')$ som søjlematricer får vi

$$\underline{x} = \underline{a} + \underline{\underline{S}}\ \underline{x}',$$

hvor $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ er koordinatsættet for O i det gamle system. Det er bare relationen $\underline{OP} = \underline{OO_1} + O_1P$ omsat i koordinater.

Ved den praktiske udførelse af koordinatskiftet vil det næsten altid være hensigtsmæssigt at udføre regningerne i to omgange, idet vi skriver

$$\underline{x} = \underline{a} + \underline{x}'' \ ; \ \underline{x}'' = \underline{\underline{S}}\ \underline{x}',$$

hvor vi har indført et koordinatsæt $\underline{x}''$ svarende til koordinatsystemet $(O_1;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Vi siger, at dette koordinatsystem fås af systemet $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ ved parallelforskydning. Koordinatskiftet er således sammensat af en parallelforskydning efterfulgt af et lineært koordinatskifte.

Det kan godt lade sig gøre, at udføre parallelforskydningen først (og det er sommetider mest praktisk). Vi sætter $\underline{b} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{a}$, og så kan koordinatskiftet skrives

$$\underline{x} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\tilde{x}}\ ;\ \underline{\tilde{x}} = \underline{b} + \underline{x}'.$$

Her er $-\underline{b}$ koordinatsæt for O i det nye koordinatsystem.

Lad nu A og B være affine rum. Lad $(O_1\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ være et koordinatsystem i A, og lad $(N;\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m)$ være et koordinatsystem for B. Lad $f:A \to B$ være en affin afbildning. Punktet $f(O) \in B$ har et koordinatsæt $\underline{a} = (a_1,\dots,a_n)$. For den tilsvarende lineære vektorrumsafbildning $\tilde{f}$ har vi en matrixfremstilling

$$(\tilde{f}(\underline{e}_1),\dots,\tilde{f}(\underline{e}_n)) = (\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_m)\underline{\underline{A}}'.$$

Et punkt $P \in A$ med koordinatsæt $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ har et billede $Q \in P$ med koordinatsæt $y = (y_1,\dots,y_m)$. Vi har nu $\underline{NQ} = \underline{Nf(O)} + \underline{f(O)Q} = \underline{Nf(O)} + \tilde{f}(\underline{OP})$, så vi får

$$\underline{y} = \underline{a} + \underline{\underline{A}}\,\underline{x}.$$

Hvis $N \in f(A)$, kan vi vælge $\tilde{N} \in A$ med $f(\tilde{N}) = N$. Lad $\underline{\tilde{a}} = (\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_n)$ være koordinatsættet for $\tilde{N}$. Vi har så $\underline{0} = \underline{a} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\tilde{a}}$ altså $-\underline{a} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\tilde{a}}$, og koordinatligningen kan derfor også skrives

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}}(\underline{x} - \underline{\tilde{a}}).$$

Lad A være et affint rum og $(O;\underline{e}_1,\ldots,e_n)$ et koordinatsystem. En endomorfi $f:A \to A$ er da givet ved en ligning

$$\underline{y} = \underline{a} + \underline{\underline{A}}\,\underline{x},$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er den kvadratiske matrix for den tilsvarende vektorrumsendomorfi, medens $\underline{a}$ er koordinatsættet for $f(O)$.

Vi kan få f som sammensætningen af de to afbildninger, der er givet ved matrixligningerne

$$\underline{z} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\ ;\ \underline{y} = \underline{a} + \underline{z}.$$

Den første afbildning afbilder O på sig selv. Vi vil sige, at det er den lineære del af f, medens $\underline{y} = \underline{a}+\underline{z}$ er matrixligningen for den i f indeholdt parallelforskydning.

<u>Definition 28.3.</u> Lad A være et affint rum. En afbildning $f:A \to A$ kaldes en parallelforskydning, hvis $\underline{Pf(P)}$ er den samme vektor for alle $P \in A$.

Det er klart, at der findes netop én parallelforskydning med $\underline{Pf(P)} = \underline{a}$, hvor $\underline{a}$ er en given vektor, og i et koordinatsystem $(O,\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ er den givet ved $\underline{y} = \underline{a} + \underline{x}$, idet $\underline{y} = \underline{Of(P)} = \underline{OP} + \underline{Pf(P)} = \underline{x} + \underline{a}$. Det fremgår heraf, at en parallelforskydning er helt det samme som en affin endomorfi, hvis tilsvarende vektorrumsendomorfi er den identiske afbildning. Det er ligeledes klart, at en parallelforskydning er en bijektiv afbildning.

Vi ser, at også den ovenfor omtalte affine afbildning $f:A \to B$ er sammensat af en lineær del, som afbilder begyndelsespunktet N i begyndelsespunktet O, og en parallelforskydning af B, som fører O over i $f(N)$.

De dimensionssætninger, der gælder for vektorrum, kan overføres til affine rum. Således er dimensionen af $f(A)$ netop rangen af matricen $\underline{\underline{A}}$, og dimensionen af A er summen af dimensionen af $f(A)$ og dimensionen af kernen for f.

Lad A være et affint rum over et legeme K, og lad $M \subseteqq A$ være en vilkårlig delmængde. Vi betragter mængden af affine underrum $U \subseteqq A$, som indeholder M. Fællesmængden af disse affine underrum er det mindste affine underrum, som indeholder M, og den kaldes det af M udspændte affine underrum.

Definition 28.4. Lad A være et affint rum over et legeme K, og lad $M \subseteq A$ være en delmængde. Et punkt $P \in A$ siges at være affint afhængigt af M, hvis det tilhører det af M udspændte affine underrum. Mængden M kaldes affint uafhængig, hvis ingen ægte delmængde af M udspænder det samme affine underrum som M. En affint uafhængig mængde, som udspænder hele A, kaldes en affin basis for A.

De her indførte begreber svarer åbenbart til velkendte begreber fra vektorrumsteorien, så vi skal ikke vente os noget særlig nyt. Det viser sig imidlertid, at begreberne er særdeles bekvemme at regne med i mange situationer. Vi viser nogle simple, men nyttige sætninger.

Sætning 28.5. Punktet $P \in A$ er affint afhængigt af M, hvis og kun hvis der findes punkter $Q_a,\ldots,Q_k \in M$ og elementer $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \in K$, som tilfredsstiller ligningen $\lambda_a+\ldots+\lambda_k = 1$, samt et punkt $O \in A$, så vi har ligningen

$$\underline{OP} = \lambda_0\underline{OQ}_0+\ldots+\lambda_k\underline{OQ}_k,$$

og denne ligning vil så gælde for ethvert punkt $O \in A$.

Bevis. Vi vælger $Q_0 \in M$ vilkårligt. Så vil vektorerne $\underline{Q_0Q}$ med $Q \in M$ udspænde et underrum V af rummet af vektorer i A, og at P tilhører det af M udspændte underrum er ensbetydende med, at $\underline{Q_0P} \in V$, altså med at der findes punkter $Q_1,\ldots,Q_k \in M$ og elementer $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in K$, således at

$$\underline{Q_0P} = \lambda_1\underline{Q_0Q_1}+\ldots+\lambda_k\underline{Q_0Q_k}\ .$$

Lad nu $O \in A$ være et vilkårlig punkt, og lad λ_0 betyde $1-(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)$. Den fundne relation er da helt ensbetydende med, at

$$\underline{OP} = \underline{OQ}_0 + \underline{Q_0P} =$$

$$\lambda_0\underline{OQ}_0 + \lambda_1(\underline{OQ}_0+\underline{Q_0Q_1})+\ldots+\lambda_k(\underline{OQ}_0+\underline{Q_0Q_k}) =$$

$$\lambda_0\underline{OQ}_0+\ldots+\lambda_k\underline{OQ}_k.$$

Dermed er sætningen bevist.

Da relationen i sætning 28.5 gælder uafhængigt af valget af O, tillader vi os rent formelt at skrive den på formen

$$P = \lambda_0Q_0+\ldots+\lambda_kQ_k.$$

Dette udtryk har kun mening, når $\lambda_0+\ldots+\lambda_k = 1$. Det er en slags ydre kompositionsregel på A, men ikke en helt rigtig kompositionsregel, da den må involvere mindst 2 elementer af A og 2 af K for ikke at være helt triviel. Vi kan reducere sådanne linearkombinationer på normal vis, hvis $Q_0,\ldots,Q_k$ ikke alle er indbyrdes forskellige. Hvis vi har linearkombinationer

$$P_i = \lambda_{i0}Q_{i0}+\ldots+\lambda_{ik_i}Q_{ik_i},\ \lambda_{i0}+\ldots+\lambda_{ik_i} = 1,\ i=0,\ldots,j$$

og elementer $\mu_0,\ldots,\mu_j \in K$ med $\mu_0+\ldots+\mu_j = 1$, kan vi danne

$$\mu_0P_0+\ldots+\mu_jP_j = \sum_{i=0}^{j}\sum_{k=0}^{k_i} \mu_i\lambda_{ik}Q_{ik}.$$

Dette er helt indlysende, når relationen fortolkes som relation mellem stedvektorerne for et begyndelsespunkt O.

<u>Sætning 28.6.</u> At mængden M er affint afhængig (dvs. ikke affint uafhængig) er ensbetydende med, at der findes et element $P \in M$, som er affint afhængigt af $M\setminus\{P\}$, og det er ligeledes ensbetydende med, at der findes punkter $Q_0,\ldots,Q_k \in M$ og fra 0 forskellige elementer $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \in K$, som tilfredsstiller at $\lambda_0+\ldots+\lambda_k = 0$, samt et punkt $O \in A$, så vi har relationen

$$\lambda_0\underline{OQ}_0+\ldots+\lambda_k\underline{OQ}_k = \underline{0},$$

og denne relation er så tilfredsstillet for ethvert $O \in A$.

Bevis. Hvis M er affint afhængigt vil M udspænde det samme affine underrum som en ægte delmængde $M_1 \subsetneqq M$, og deraf følger, at $P \in M \setminus M_1$ er affint afhængigt af M_1 og derfor også af $M \setminus \{P\}$. Hvis $P \in M$ er affint afhængigt af $M \setminus \{P\}$ udspænder $M \setminus \{P\}$ samme affine underrum som M. Dermed er den første påstand bevist. Hvis M er lineært afhængigt, kan vi finde $Q_0 \in M$, som er affint afhængigt af $M \setminus \{Q_0\}$, så vi kan finde $Q_1, \ldots, Q_k \in M$ og $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ med $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, så vi har

$$-1 \cdot \underline{OQ}_0 + \lambda_1 \underline{OQ}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{OQ}_k = \underline{0}$$

for ethvert valg af $O \in A$. Ved at udelade eventuelle led med koefficient 0, får vi en relation som påstået. På den anden side giver relationen i sætningen

$$\underline{OQ}_0 = - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \underline{OQ}_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \underline{OQ}_k,$$

og her er

$$- \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = \frac{-\lambda_1 - \ldots - \lambda_k}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1.$$

Dermed er sætningen bevist.

Vi vil også i dette tilfælde skrive relationen

$$\lambda_0 Q_0 + \ldots + \lambda_k Q_k = 0,$$

og en sådan relation har altså mening, når koefficienterne har sum 0. Sådanne relationer kan adderes og de kan multipliceres med elementer fra K. Endvidere kan de adderes til relationer af den tidligere omtalte slags. I øvrigt kan de to slags relationer omskrives til hinanden ved formelle regninger.

Sætning 28.7. At M er affint uafhængig er ensbetydende med, at et (og ethvert) punkt P af det af M udspændte underrum kun har 1 fremstilling som linearkombination

$$P = \lambda_0 Q_0 + \ldots + \lambda_k Q_k,$$

med $Q_0,\ldots,Q_k \in M$, $\lambda_0,\ldots,\lambda_k \in K$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1,\ldots,k$, $\lambda_0+\ldots+\lambda_k = 1$.

En affint uafhængig mængde med $n+1$ elementer udspænder et n-dimensionalt affint underrum, og et n-dimensionalt affint rum udspændes af en mængde med $n+1$ elementer.

Bevis. Den første påstand følger af vore resultater for vektorrum, idet relationen betyder, at

$$\underline{Q_0P} = \lambda_1 \underline{Q_0Q} + \ldots + \lambda_k \underline{Q_0Q_k}.$$

Heraf følger den anden påstand umiddelbart, og den sidste fås, idet vi vælger Q_0 som begyndelsespunkt og

$\underline{Q_0Q_1},\ldots,\underline{Q_0Q_n}$ som basisvektorer. Dermed er sætningen bevist.

Den følgende hjælpesætning er samtidig et eksempel på relationer mellem affint afhængige punkter.

Sætning 28.8. Lad $P_0,\ldots,P_3$ og Q_0,Q_1,Q_2 være punkter af et affint rum A. Nødvendigt og tilstrækkeligt for at $\underline{P_0P_1} = \underline{P_3P_2}$, altså at $P_0P_1P_2P_3$ er et parallelogram, er det, at

$$P_0 - P_1 + P_2 - P_3 = 0.$$

Nødvendigt og tilstrækkeligt for at $\underline{Q_0Q_2} = \lambda\underline{Q_3Q_1}$, er det, at

$$(\lambda-1)\,Q_0 - \lambda Q_1 + Q_2 = 0.$$

Bevis. Vi vælger et begyndelsespunkt O. Så er $\underline{P_0P_1} = \underline{OP}_1 - \underline{OP}_0$ og $\underline{P_3P_2} = \underline{OP}_2 - \underline{OP}_3$. Heraf følger den første påstand. Den anden vises lige så enkelt.

Af hjælpesætningen udleder vi en hovedsætning.

Sætning 28.9. Lad A og B være affine rum over et legeme K, og lad $f: A \to B$ være en afbildning. Da er f affin, hvis og kun hvis det for vilkårlige punkter $P_0,\dots,P_k \in A$ og vilkårlige elementer $\lambda_0,\dots,\lambda_k \in K$ med $\lambda_0+\dots+\lambda_k = 1$ gælder, at

$$f(\lambda_0P_0+\dots+\lambda_kP_k) = \lambda_0f(P_0)+\dots+\lambda_kf(P_k).$$

Bevis. Hvis f er affin, inducerer f en vektorrumsafbildning $\tilde{f}$ og for et vilkårligt begyndelsespunkt $O \in A$ får vi

$$\underline{f(O)f(\lambda_0P_0+\dots+\lambda_kP_k)} = \tilde{f}(\underline{O(\lambda_0P_0+\dots+\lambda_kP_k)}) = \tilde{f}(\lambda_0\underline{OP}_0+\dots$$
$$+\lambda_k\underline{OP}_k) = \lambda_0\tilde{f}(\underline{OP}_0)+\dots+\lambda_k\tilde{f}(\underline{OP}_k) = \lambda_0\underline{f(O)f(P_0)}+\dots$$
$$+\lambda_k\underline{f(O)f(P_k)},$$

og det er netop den i sætningen anførte relation.

Lad nu $f:A \to B$ være en afbildning, der tilfredsstiller den anførte relation. Hvis nu $\underline{P_0P_1} = \underline{P_3P_2}$, har vi i følge sætning 28.8, at $P_3 = P_0-P_1+P_2$, altså $f(P_3) = f(P_0)-f(P_1)+f(P_2)$, så vi får $\underline{f(P_0)f(P_1)} = \underline{f(P_0)f(P_2)}$. Heraf følger, at f inducerer en afbildning $\tilde{f}$ af rummet af vektorer i A ind i rummet af vektorer i B. For vektorer $\underline{u}$ og $\underline{v}$ i A kan vi vælge P_0, P_1 og P_2 så $\underline{P_0P_1} = \underline{u}$ og $\underline{P_1P_2} = \underline{v}$. Så er

$$\tilde{f}(\underline{u}+\underline{v}) = \tilde{f}(\underline{P_0P_2}) = \underline{f(P_0)f(P_2)} = \underline{f(P_0)f(P_1)} + \underline{f(P_1)f(P_2)} =$$
$$\tilde{f}(\underline{P_0P_1}) + \tilde{f}(\underline{P_1P_2}) = \tilde{f}(\underline{u}) + \tilde{f}(\underline{v})$$

Hvis $\underline{u}$ er en vektor i A og $\lambda \in K$, kan vi vælge P_0, P_1 og P_2, så $\overline{P_0P_1} = \underline{u}$ og $\overline{P_0P_2} = \lambda\underline{u}$. Ifølge hjælpesætningen har vi så $P_2 = (1-\lambda)P_0+\lambda P_1$, altså $f(P_2) = (1-\lambda)f(P_0) + \lambda f(P_1)$, men så giver hjælpesætningen, at $\tilde{f}(\lambda\underline{u}) = \lambda\tilde{f}(\underline{u})$. Dermed har vi vist, at $\tilde{f}$ er lineær, og dermed er sætningen vist.

Lad A være et affint rum over et legeme K, og lad $(O;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ være et koordinatsystem. Et p-dimensionalt affint underrum $B \subseteq A$ kan tænkes givet ved en parameterfremstilling

(1) $\quad \underline{x} = \underline{a} + \underline{\underline{P}}\ \underline{t}\ ,\ \underline{t} \in K^p,$

hvor $\underline{a}$ er et punkt af B, og $\underline{\underline{P}}$ er en $n{\times}p$-matrix med rang p. Underrummet kan ligeledes tænkes givet ved et ligningssystem

(2) $\quad \underline{\underline{Q}}\ \underline{x} = \underline{b},$

hvor $\underline{\underline{Q}}$ er en $n-p{\times}n$-matrix med rang $n-p$. Parameterfremstillingen (1) er løsning til ligningssystemet (2), og (2) fås ved elimination af $t_1,\ldots,t_p$ mellem ligningerne (1).

I rummet af vektorer i A svarer B til et lineært underrum med parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{\underline{P}}\ t$ og ligningssystem $\underline{\underline{Q}}\ \underline{x} = \underline{0}$.

To underrum B_1 og B_2 i det affine rum A kaldes parallelle, hvis de svarer til lineære underrum, af hvilke det ene indeholder det andet. Det er klart, at "parallel med" ikke er en ækvivalensrelation. Dog bliver "parallel med og af samme dimension som" en ækvivalensrelation, medens "parallel med og af højst samme dimension som" bliver en transitiv relation (en præordning). Parallelle underrum vil enten slet ikke have punkter fælles eller et af dem vil indeholde det andet.

Skæringspunkterne mellem B_1 og B_2 bestemmes ved løsning af lineære ligninger. Hvis begge de affine underrum er givne ved lineære ligningssystemer, kombineres disse til et ligningssystem, hvis løsningsmængde er mængden af skæringspunkter. Er det ene underrum givet ved et ligningssystem, og det andet ved en parameterfremstilling, kan man indsætte parameterfremstillingen i ligningssystemet. Derved fås et ligningssystem med skæringspunkternes parameterværdier som løsninger. Hvis de to underrum har parameterfremstillingerne $\underline{x} = \underline{a} + \underline{\underline{P}}\,\underline{t}$ og $\underline{x} = \underline{b} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{u}$, er

$$\underline{a} + \underline{\underline{P}}\,\underline{t} = \underline{b} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{u}$$

et lineært ligningssystem til bestemmelse af parameterværdierne for skæringspunkterne.

Hvis B_1 er p-dimensionalt og B_2 er q-dimensionalt, fås skæringspunkternes koordinater af $2n-p-q$ ligninger med n ubekendte. Hvis $p+q \geq n$ kan ligningssystemets koefficientmatrix have rang $2n-p-q$, og så findes der altid skæringspunkter. Hvis $p+q \geq n$, og det er muligt at parallelforskyde et af underrummene til det ikke mere skærer det andet, er ligningssystemets rang $2n-p-q-1$, og det medfører, at underrummene skærer hinanden i et $p+q-n+1$-dimensionalt underrum, hvis de overhovedet har skæringspunkter.

Eksempel. I et 5-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$ har vi givet 2 3-dimensionale underrum, af hvilke det ene har ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\
x_1 + x_2 + ax_5 &= b,
\end{aligned}
$$

medens det andet ved brug af det samme koordinatsystem har parameterfremstillingen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -1 + t_1 + t_2 \\
x_2 &= 1 + t_1 + ct_2 \\
x_3 &= t_2 - t_3 \\
x_4 &= 2 - t_1 + t_2 + t_3 \\
x_5 &= -2 + t_3
\end{aligned}
$$

Opgaven går ud på for alle reelle værdier af a,b og c at bestemme mængden af skæringspunkter for de to underrum.

Inden vi går igang med opgaven bør vi forvisse os om, at koefficientmatricen for ligningssystemet, altså

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har rang 2, samt at koefficientmatricen for parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har rang 3 for alle reelle værdier af a,b og c. Det volder nu ingen vanskeligheder.

Ved at indsætte parameterfremstillingen i ligningssystemet får vi ligningerne

$$\begin{aligned} t_1 + (3+c)t_2 \phantom{{}+at_3} &= 1 \\ 2t_1 + (1+c)t_2 + at_3 &= 2a + b \end{aligned}$$

Hvis ikke både $a = 0$ og $c = -5$, har koefficientmatricen rang 2, og vi får en 1-dimensional mængde af skæringspunkter for alle værdier af b.

For $a \neq 0$ får vi parametrene på formen

$$(t_1,t_2,t_3) = (1-(3+c)t,\ t,\ 2+\frac{1}{a}(b-2+(5+c)t)).$$

For $c \neq -5$ får vi parametrene på formen

$$(t_1,t_2,t_3) = \left(\frac{(2a+b)(3+c)-c-1}{5+c} - \frac{3+c}{5+c}u,\ \frac{2-2a-b+u}{5+c},u\right).$$

For $a \neq 0$ og $c \neq -5$ går det første løsningssæt over i det andet ved transformationen

$$t = \frac{2-2a-b+u}{5+c}.$$

Udtrykkene for t_1,t_2 og t_3 indsættes i parameterfremstillingen ovenfor, og derved fås en parameterfremstilling for skæringslinien. Den fås på to former, af hvilke den ene er anvendelig for $a \neq 0$, medens den anden er anvendelig for $c \neq -5$.

For $a = 0,\ c = -5$ reduceres vort ligningssystem til

$$t_1 - 2t_2 = 1,\quad 2t_1 - 4t_2 = b.$$

For $a = 0,\ c = -5,\ b \neq 2$, er der slet ingen skæringspunkter. For $a = 0,\ c = -5,\ b = 2$ får vi en 2-dimensional løsningsmængde

$$(t_1,t_2,t_3) = (1+2t,t,u)$$

svarende til skæringsplanen med parameterfremstilling

$$(x_1,\dots,x_5) = (3t,2-3t,t-u,-1-t+u, -2+u).$$

KAPITEL 29

Reelle og komplekse affine rum.

I definition 28.4 indførte vi begrebet affin basis. Af sætning 28.7 fremgår berettigelsen af følgende definition.

Definition 29.1. Lad A være et affint rum over et legeme K. En affin basis $(P_0,\ldots,P_n)$ for A kan tænkes ordnet, og så kaldes den også et barycentrisk koordinatsystem i A. Et punkt $P \in A$ har som barycentrisk koordinatsæt det entydigt bestemte talsæt $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$, som tilfredsstiller relationen

$$P = \lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n .$$

Det barycentriske koordinatsæt må på grund af definitionen af linearkombinationer af punkter tilfredsstille ligningen $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$. Ethvert talsæt, som tilfredsstiller denne ligning er barycentrisk koordinatsæt for et punkt.

Specielt for E^2 har vi tidligere omtalt barycentriske koordinater, som i det tilfælde også kaldtes trekantskoordinater.

Et affint uafhængigt sæt af punkter i A udspænder et underrum $B \subseteq A$ og er et barycentrisk koordinatsystem i B. Vi vil derfor også tale om barycentriske koordinater med hensyn til et vilkårligt ordnet, lineært uafhængigt sæt, og det bliver altså bare et barycentrisk koordinatsystem for et affint underrum.

Vi vil nu specielt studere affine rum over $\mathbb{R}$. Det er klart, at alt hvad vi tidligere har udledt gælder også i dette specielle tilfælde. Det nye, der kommer til, beror på, at $\mathbb{R}$ er et ordnet legeme.

<u>Definition 29.2</u>. Lad A være et affint rum over $\mathbb{R}$, og lad $(P_0,\dots,P_n)$ være et ordnet affint uafhængigt sæt af punkter i A. Mængden af punkter, hvis barycentriske koordinater med hensyn til $(P_0,\dots,P_n)$ alle er $\geqq 0$ kaldes det af $(P_0,\dots,P_n)$ udspændte (afsluttede) simplex og betegnes $s(P_0,\dots,P_n)$. Delmængden af punkter med alle barycentriske koordinater > 0 kaldes det åbne simplex $\mathring{s}(P_0,\dots,P_m)$. Randen $\dot{s}(P_0,\dots,P_m)$ defineres som $s(P_0,\dots,P_m) \setminus \mathring{s}(P_0,\dots,P_m)$. De af delsæt af $(P_0,\dots,P_m)$ udspændte simplices kaldes sider i

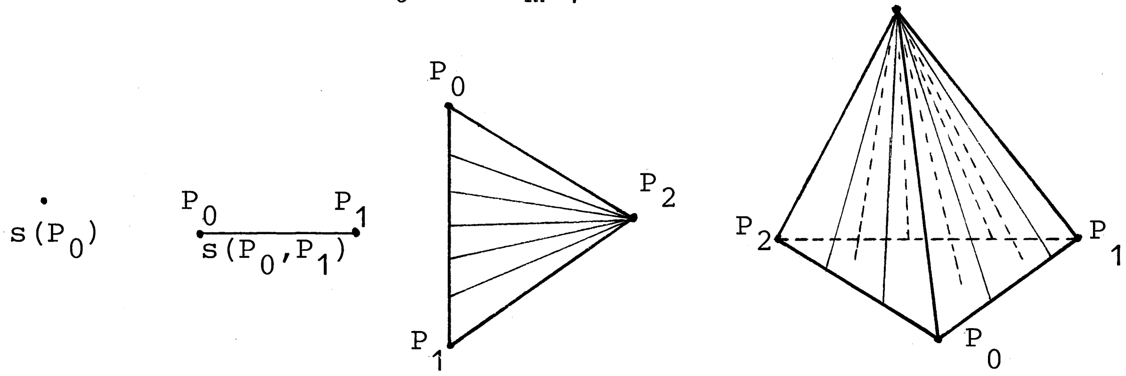
$s(P_0,\ldots,P_m)$ og de kaldes ægte, når delsættene er ægte. Et simplex kaldes et m-simplex, når det udspændes af m+1 punkter. Hvis $(P_0,\ldots,P_m)$ er et affint afhængigt sæt, kaldes mængden af punkter $\lambda_0 P_0+\ldots +\lambda_m P_m$ med $\lambda_j \geq 0$, $j = 0,\ldots,m$ et udartet simplex og betegnelsen $s(P_0,\ldots,P_m)$ bruges også i dette tilfælde.

Begreberne "afsluttet" og "åben" stemmer ikke overens med de gængse begreber fra mængdeteoretisk topologi, således som de er indført i analysen. Et 0-simplex $s(P_0) = s(P_0)$ består blot af punktet P_0, og dets rand er $\emptyset$. Et k-simplex $s(P_0,P_1)$ er et liniestykke med endepunkterne medregnet, og dets rand består af endepunkterne. Et 2-simplex er en trekant og et 3-simplex er et tetraeder. Randene bliver henholdsvis omkredsen og overfladen.

Vi betragter et simplex $s(P_0,\ldots,P_m)$. Vi kan opbygge det successivt ved en følge $s(P_0)$, $s(P_0,P_1),\ldots$ $s(P_0,\ldots,P_m)$ af simplices, således at hvert af dem er side i alle de følgende. Bortset fra punktet P_m kan ethvert punkt i $s(P_0,\ldots,P_m)$ fremstilles på formen

$$\lambda_0 P_0+\ldots+\lambda_m P_m = (1-\lambda_m)(\lambda_0' P_0+\ldots+\lambda_{m-1}' P_{m-1})+\lambda_m P_m,$$

hvor $\lambda_j' = \lambda_j/(1-\lambda_m)$, $j = 0,\ldots,m-1$, så vi har $\lambda_0'+\ldots+\lambda_{m-1}' = 1$. På den anden side vil ethvert sådan udtryk med alle $\lambda_j' \geqq 0$ og $\lambda_m \in [0,1]$ give et punkt af $s(P_0,\ldots,P_m)$. Udtrykket viser, at $s(P_0,\ldots,P_m)$ netop er foreningsmængde af alle liniestykker med P_m som det ene endepunkt og det andet endepunkt i $s(P_0,\ldots,P_{m-1})$.



$s(P_0)$ $s(P_0,P_1)$ $s(P_0,P_1,P_2)$ $s(P_0,P_1,P_2,P_3)$

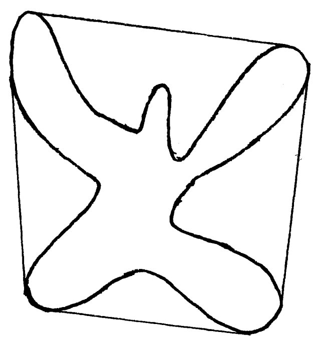
På figurerne har vi skitseret fænomenet i de lavere dimensioner. Konstruktionen virker også for et udartet simplex. For et ikke udartet simplex gælder, at de liniestykker, der i hvert trin indgår i konstruktionen to bare har det endepunkt fælles, der falder i det sidste hjørne. For et udartet simplex vil det derimod indtræffe, at nogle af liniestykkerne kan indeholde nogle andre af liniestykkerne.

<u>Definition 29.3.</u> En punktmængde C i et affint rum $\mathbb{R}$ kaldes konveks, når det for ethvert par

P_0, P_1 af punkter af C gælder, at liniestykket $s(P_0, P_1)$ er en delmængde af C.

Det fremgår umiddelbart af bemærkningen forud for definitionen, at det for ethvert sæt $(P_0, \ldots, P_m)$ af punkter af C gælder, at simplexet $s(P_0, \ldots, P_n)$ er en delmængde af C.

Det fremgår ligeledes af definitionen, at en vilkårlig mængde af konvekse mængder har konveks fællesmængde. For en vilkårlig mængde $M \subseteq A$ eksisterer der derfor en mindste konveks mængde, der indeholder M, nemlig fællesmængden af alle konvekse mængder, der indeholder M (der findes altid sådanne, i hvert fald mængden A). Den således definerede mængde kaldes det konvekse hylster af M og betegnes M.



Som illustreret på figuren er en mængde "pakket stramt ind" i sit konvekse hylster.

Vi beviser en hjælpesætning.

<u>Sætning 29.4</u>. Lad $(P_0, \ldots, P_m)$ være et ordnet sæt af punkter i et affint rum A over $\mathbb{R}$, og lad

P være et punkt af det eventuelt udartede simplex $s(P_0,\dots,P_m)$. Der findes da et delsæt $(P_{j_0},\dots,P_{j_q})$, så P tilhører $s(P_{j_0},\dots,P_{j_q})$ og $s(P_{j_0},\dots,P_{j_q})$ ikke er udartet.

Bevis. Hvis $(P_0,\dots,P_m)$ er afhængigt, har vi en relation

$$\mu_0 P_0+\dots+\mu_j P_j = \mu_{j+1} P_{j+1} + \dots + \mu_m P_m,$$

hvor koefficienterne har sum 0. Der er ikke noget specielt i, at vi har antaget, at de første $j+1$ koefficienter er positive og de sidste $m-j$ negative. Vi ved, at der virkelig findes både positive og negative koefficienter. Nu har vi en fremstilling

$$P = \lambda_0 P_0+\dots+\lambda_j P_j + \lambda_{j+1} P_{j+1}+\dots+\lambda_m P_m,$$

hvor koefficienterne er $\geqq 0$ og har sum 1. Lad $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ være det mindste af tallene $\frac{\lambda_0}{\mu_0},\dots,\frac{\lambda_j}{\mu_j}$ (hvis der er 0 i nævneren regnes kvotienten som $+\infty$). Fra P subtraherer vi nu

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i}(\mu_0 P_0+\dots+\mu_j P_j - \mu_{j+1} P_{j+1}-\dots-\mu_m P_m).$$

Her er $\mu_i \neq 0$, da $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ ellers ikke kan være mindst. Vi får

$$P = (\lambda_0 - \frac{\lambda_i \mu_0}{\mu_i}) P_0 + \ldots + (\lambda_j - \frac{\lambda_i \mu_j}{\mu_i}) P_j + (\lambda_{j+1} + \frac{\lambda_i \mu_{j+1}}{\mu_i}) P_{j+1} + \ldots$$
$$+ (\lambda_m + \frac{\lambda_i \mu_m}{\mu_i}) P_m .$$

Det ses umiddelbart, at P_i får koefficient 0, medens alle øvrige koefficienter bliver $\geqq 0$. Vi har dermed vist, at P ligger i et m-1-delsimplex af $s(P_0,\ldots,P_m)$. Hvis dette delsimplex er udartet, gentager vi processen. Efter endelig mange trin får vi et ikke udartet simplex, der indeholder P. Endelig vælger vi i dette simplex, den mindste side, som indeholder P, og derved får vi et åbent simplex, der indeholder P. Dermed er hjælpesætningen bevist.

Sætning 29.5. Lad M være en mængde i et affint rum A over $\mathbb{R}$, og lad B være det af M udspændte affine underrum. Hvis B har dimension m, er det konvekse hylster $\hat{M}$ af M foreningsmængden af alle m-simplices $s(P_0,\ldots,P_m)$ med hjørnerne $P_0,\ldots,P_m$ indeholdt i M.

Bevis. Da B er en konveks mængde, som indeholder M, er $\hat{M} \subseteqq B$. Det er klart, at ethvert simplex $s(P_0,\ldots,P_m)$ med hjørnerne $P_0,\ldots,P_m$ i M er indeholdt i $\hat{M}$, så $\hat{M}$ indeholder foreningsmængden $\hat{M}$ af alle sådanne simplices. Vi skal således blot vise, at $\hat{M}$ er en konveks mængde. Lad X og Y være punkter af $\tilde{M}$ og lad ε være et tal i $[0,1]$. Vi skal vise, at $(1-\varepsilon)X + \varepsilon Y \in \tilde{M}$. Nu har vi ikke udartede m-simplices $s(P_0,\ldots,P_m)$ og $s(Q_0,\ldots,Q_m)$ af hvilke det første indeholder X og det andet Y. Så er $(1-\varepsilon)X + \varepsilon Y$ et punkt af det udartede simplex $s(P_0,\ldots,P_m; Q_0,\ldots,Q_m)$, og ifølge den foregående sætning er $(1-\varepsilon)X + \varepsilon Y$ indeholdt i en ikke udartet side af dette simplex. Denne side kan selvfølgelig udvides til en ikke udartet m-side, idet vi blot supplerer op med passende valgte punkter blandt $P_0,\ldots,P_m; Q_0,\ldots,Q_m$. Dermed er sætningen bevist.

Vi har i sinde at vise en noget mere subtil sætning om konvekse mængder. Dertil behøver vi de følgende 2 hjælpesætninger.

<u>Sætning 29.6</u>. Lad $s(P_0,\ldots,P_m)$ være et udartet m-simplex i et affint rum A over $\mathbb{R}$. Da har dets m-1-sider et fælles punkt.

Bevis. Da $s(P_0,\ldots,P_m)$ er udartet, har vi en relation

$$\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_m P_m = 0,$$

hvor $\lambda_1+\ldots+\lambda_m = 0$ og ikke alle $\lambda_j = 0$. Vi kan endda vælge denne relation, således at $|\lambda_0|+\ldots+|\lambda_m| = 1$, og vi har da et punkt

$$P = |\lambda_0|P_0+\ldots+|\lambda_m|P_m.$$

Vi har imidlertid også

$$\begin{aligned} P &= (|\lambda_0|+\lambda_0)P_0+\ldots+(|\lambda_m|+\lambda_m)P_m = \\ &\quad (|\lambda_0|-\lambda_0)P_0+\ldots+(|\lambda_m|-\lambda_m)P_m, \end{aligned}$$

hvilket viser, at P tilhører den side, der som hjørne har de P_j, for hvilke λ_j er positiv, og ligeledes den side, der som hjørner har de P_j, for hvilke λ_j er negativ. Da der findes mindst et positivt og mindst et negativt λ_j, vil enhver m-1-side indeholde en af de to sider, som vi har set, at P er indeholdt i. Altså ligger P i alle m-1-sider. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 29.7. Lad A være et n-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$, og lad der for et $m > n$ være givet $m+1$ konvekse mængder $C_0,\ldots,C_m$ i A. Det antages, at det for hvert $k = 0,\ldots,m$ gælder, at der findes et punkt P_k, som ligger i alle C_j med $j \neq k$. Da har mængderne $C_0,\ldots,C_m$ et fællespunkt.

Bevis. Hvert C_j indeholder en m-1-side af det udartede simplex $s(P_0,\ldots,P_m)$. Ifølge sætning 29.6 findes der et punkt P, der ligger i alle disse m-1-sider, og derfor også i alle P_k. Dermed er sætningen bevist.

Nu går vi over til den lovede sætning, som først blev vist af Helly i 1923.

<u>Sætning 29.8</u>. Lad A være et n-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$. Lad $C_0,\ldots,C_m$ være endelig mange konvekse mængder. Det antages, at enhver mængde omfattende $n+1$ af disse mængder har et fælles punkt. Da har alle mængderne et fælles punkt.

Bevis. Vi viser påstanden ved induktion efter m. For $m \leqq n+1$ er påstanden helt triviel. Gælder påstanden for en værdi af $m \geqq n+1$, giver sætning 29.7 umiddelbart, at påstanden også gælder for $m+1$ konvekse mængder. Dermed er Hellys sætning vist.

I et n-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$ kan man altid finde $n+1$ konvekse mængder, således at hvilke som helst n af disse mængder har fælles punkter, medens fællesmængden af alle mængderne er tom. Vi vælger blot et uafhængigt punktsæt $(P_0,\ldots,P_n)$. Simplexet $s(P_0,\ldots,P_n)$

har $n+1$ n-sider. Skal vi udvælge n af disse $n+1$-sider, kommer vi nødvendigvis til at vælge de $n+1$-sider, der har et hjørne P_j fælles, men intet punkt er fælles for alle siderne.

Hellys sætning giver en alternativ karakterisering af n-dimensionalitet, dog stadig blot for affine rum. Det er slet ikke let at finde en generel karakterisering af n-dimensionale mængder - på forhånd er det jo slet ikke klart, hvad vi mener med, at en mængde er n-dimensional. Hvad skal vi f.eks. mene om $\mathbb{Q}$ som delmængde af $\mathbb{R}$. Vi skal ikke komme nærmere ind på dette subtile problem, men vi skal dog nævne, at det er en god ide at studere overdækninger med vilkårlig "små" åbne mængder. Vi spørger om mængden kan overdækkes med sådanne, således at intet punkt falder i mere end q af de overdækkende mængder. Det mindste q, for hvilket dette lader sig gøre, er 1 plus dimensionen. Ud fra denne definition bliver $\mathbb{Q}$ 0-dimensional.

Lad A være et affint rum over $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ selv er et affint rum over $\mathbb{R}$, er der god mening i at tale om en affin afbildning $\varphi : A \to \mathbb{R}$. Hvis vi har valgt et koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ i A er φ givet ved et udtryk af formen

$$\varphi_1(\underline{x}) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + a,$$

hvor $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ og a er reelle tal og $a = \varphi(0)$. Hvis vi har valgt et ikke udartet simplex, og $(x_0,\ldots,x_n)$ er de tilsvarende barycentriske koordinater, er φ givet ved et udtryk af formen

$$\varphi_2(\underline{x}) = \lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

hvor $\lambda_j = \varphi(P_j)$, $j = 0,\ldots,n$. Mængden $\varphi^{-1}(0)$ er under alle omstændigheder et n-1-dimensionalt affint underrum. Et sådan kaldes en hyperplan.

Det meste af teorien for konvekse mængder bygger på matematisk analyse. Vi vil medtage nogle få sætninger, som kun i beskedent omfang udnytter analysen.

Sætning 29.9. De konvekse mængder i $\mathbb{R}$ er netop alle intervaller og halvlinier, samt hele $\mathbb{R}$.

Bevis. Det er umiddelbart indlysende, at de nævnte mængder er konvekse. For en konveks mængde $C \subseteq \mathbb{R}$ kan vi tale om $\inf C$, som eventuelt er $-\infty$, og $\sup C$, som eventuelt er $+\infty$. Vi skal blot vise, at ethvert reelt tal $x \in]\inf C, \sup C[$ tilhører C. Af definitionen af infimum og supremum følger, at vi kan finde tal $a,b \in C$, som tilfredsstiller, at $a < x < b$. Nu er liniestykket med endepunkter a og b en delmængde af

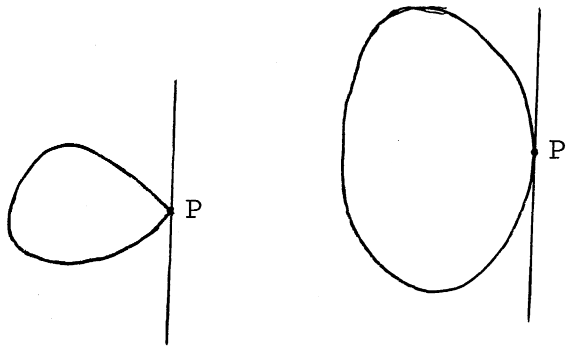
C, og derfor har vi $x \in C$. Dermed er sætningen bevist.

En ret linie i et affint rum A over $\mathbb{R}$ er en kopi af $\mathbb{R}$. Da den rette linies fællesmængde med en konveks mængde er konveks, er den et liniestykke taget i generel betydning. Hvert endepunkt kan høre med eller ikke og liniestykket kan udarte til en halvlinie, hele linien, den tomme mængde eller et enkelt punkt, der i så fald betragtes som et endepunkt.

Definition 29.10. Lad C være en konveks mængde i et affint rum A over $\mathbb{R}$. Et punkt $P \in A$ kaldes et randpunkt for C, hvis der findes en ret linie L, som skærer C i et liniestykke med endepunkt P. Et punkt, der ikke er randpunkt for C kaldes et indre punkt, hvis det tilhører C, og et ydre punkt, hvis det tilhører $A \setminus C$.

Definition 29.11. Lad A være et n-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$, og lad $C \subset A$ være en konveks mængde, Lad $P \in A$ være et randpunkt for C, og lad $\varphi: A \to \mathbb{R}$ være en affin afbildning. Hyperplanen $\varphi^{-1}(0)$ kaldes da en støttehyperplan for C i punktet P, hvis $\varphi(P) = 0$, medens $\varphi(Q) \geqq 0$ for alle punkter $Q \in C$.

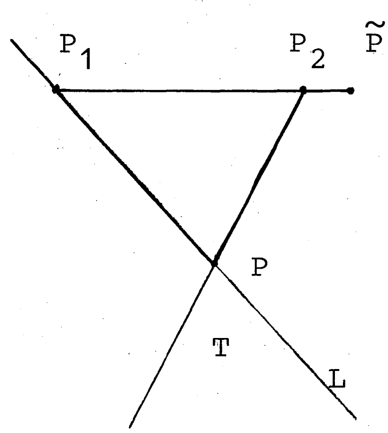
En støttehyperplan for C i punktet P er således en hyperplan, som går gennem P og har C helt på den ene side.
For $n = 2$ bliver en hyperplan en ret linie, og vi taler da om en støttelinie. Figuren viser et par eksempler på, hvordan støttelinier kan se ud. Vi skal nu vise en hovedsætning.



Sætning 29.12. Lad A være et n-dimensionalt affint rum over $\mathbb{R}$, lad $C \subseteq A$ være en konveks mængde, og lad $P \in A$ være et randpunkt for C. Da har C en støttehyperplan i punktet P.

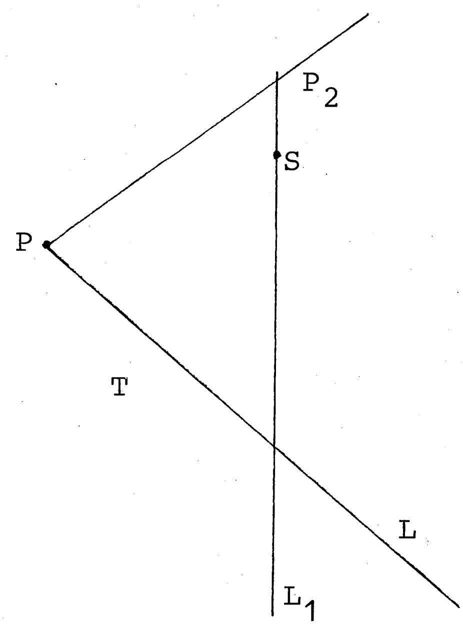
Bevis. For $n = 1$ er C et liniestykke med P som endepunkt, og P er selv støttehyperplan. For $n \geq 2$ er beviset meget vanskeligere, og det gennemføres ved induktion efter n. Det er nødvendigt først at udføre et bevis i tilfældet $n = 2$, og det kræver hjælpemidler fra matematisk analyse. Tilfældet $n = 2$ bliver benyttet i den egentlige induktionsslutning fra n til $n+1$, men resten af induktionsslutningen gennemføres ved geometriske og algebraiske metoder.

Vi ser således først på tilfældet $n = 2$, svarende til, at A er vor sædvanlige plan, så vi kan støtte os til en figur. Vi ved, at der findes en linie L gennem P, som skærer C i et liniestykke PP_1. Hvis C blot er liniestykket PP_1, er det let nok at finde en støttelinie gennem P. Hvis liniestykket udarter til punktet P, og C har punkter på begge sider af L,

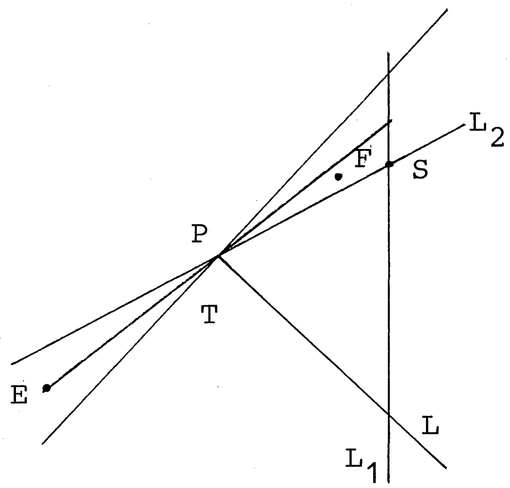


er C indeholdt i en ret linie. Hvis C ellers omfatter mere end liniestykket, findes der et punkt $\tilde{P} \in C$ udenfor L, og så indeholder C hele trekanten $PP_1\tilde{P}$ på nær eventuelt en del af randen. For P_2 valgt på $P_1\tilde{P}$ som vist, vil liniestykket PP_2 tilhøre C. Til gengæld vil vinklen T på figuren ikke indeholde punkter af C, da liniestykker fra et sådan punkt til P_2 vil skære L udenfor liniestykket PP_1.

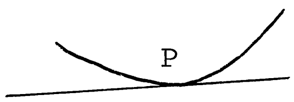
Vi lægger nu en ret linie L_1 gennem P_2 og et punkt af den halvlinie af L, der udgør et ben af vinklen T. Lad M være mængden af punkter Q på L_1, for hvil-

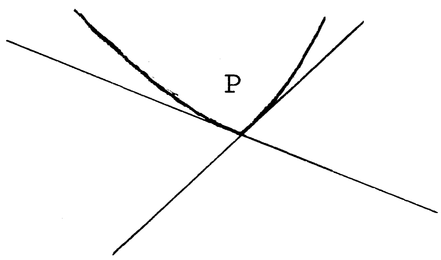


ke halvlinien fra P til Q indeholder punkter af C ud over P. Denne mængde er konveks, åbenbart en halvlinie med et endepunkt S i det vinkelrum vi har antydet på figuren. Hvis C omfatter et punkt E på samme side af linien L_2 gennem P og S som vinklen T, da vil C også indeholde et liniestykke EF, hvor F ligger som antydet mellem L_2 og linien gennem E og P. Men EF skærer gennem T i modstrid med, at T ikke indeholder punkter af C. Altså er L_2 en støttelinie.



Vi kunne have ladet P_1 og P_2 bytte roller. Vi får derfor egentlig en støttelinie fra hver side, men de kan selvfølgelig falde sammen. På den næste figur viser vi til venstre situationen, hvor der kun er 1

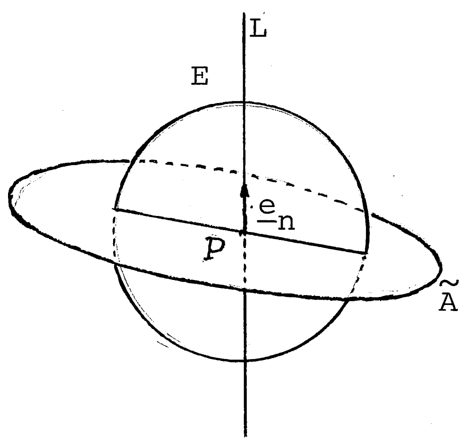




støttelinie gennem P, og til højre viser vi situationen med 2 støttelinier. Som det fremgår af figuren er der da i virkeligheden uendelig mange støttelinier gennem P, og de udfylder vinkelrummet mellem de to direkte konstruerede støttelinier.

Vi antager nu, at sætningen gælder for rum af dimensionen $n-1$, og vi vil så på det grundlag vise sætningen. Vi kan antage, at $n \geqq 3$, da sætningen er vist for $n \leqq 2$. Da P er randpunkt, har vi en ret linie L, der skærer C i et liniestykke med P som endepunkt. Hvis $C \subseteq L$ er det klart, at der findes en støttehyperplan. I modsat fald kan vi vælge en plan E gennem L og et punkt af $C \setminus L$. Så vil E skære C i en konveks mængde med P som randpunkt, og denne konvekse mængde har så en støttelinie $L \subsetneq E$ gennem P.

Vi vælger nu et koordinatsystem $(P;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ med $\underline{e}_n$ på L. Så er $(P;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_{n-1})$ et koordinatsystem i et $n-1$-dimensionalt affint underrum A, og vi har en projektion $p:A \to \tilde{A}$ defineret ved $p(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{n-1})$. Det er klart, at $p(C) = \tilde{C} \subseteqq \tilde{A}$ er en konveks mængde. Da E indehol-



der punkter på den ene, men ikke på den anden side af L, skærer den rette linie $E \cap \tilde{A}$ den konvekse mængde C i et liniestykke med endepunkt P, så P er randpunkt for $\tilde{A}$. Ifølge induktionsantagelsen findes der så en affin afbildning $\tilde{\varphi}:\tilde{C} \to \mathbb{R}$ med $\tilde{\varphi}(P) = 0$ og $\tilde{\varphi}(Q) \geqq 0$ for alle $Q \in \tilde{C}$. Så er $\varphi = \tilde{\varphi}\circ p:C \to \mathbb{R}$ en affin afbildning med $\varphi(P) = 0$ og $\varphi(Q) \geqq 0$ for alle $Q \in C$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 29.13. Et reelt Euklidisk rum er et affint rum over $\mathbb{R}$ med et indre produkt defineret på dets rum af vektorer.

I et Euklidisk rum E er normen $\|\underline{PQ}\|$ afstanden mellem punkterne P og Q. En vinkel PQR tillægges en værdi θ i $[0,\pi]$ defineret ved $\cos\theta = \dfrac{<\underline{QP}\cdot\underline{QR}>}{\|\underline{QP}\|\,\|\underline{QR}\|}$. Derved kommer den pytagoræiske sætning og endda cosinusrelationen til at gælde, så vi får en naturlig generalisation af rummets analytiske geometri til rum af enhver endelig dimension.

Vi kan selvfølgelig forvandle et Euklidisk rum til et affint rum ved at glemme det indre produkt. Derved ser vi på rummet med dårligere briller, så der er en masse ting, vi ikke kan se. Men der er opgaver, hvor det der ikke kan ses med "de affine briller" er irrelevant, og den slags opgaver løses bedst i affin geometri.

De affine egenskaber ved et rum er egenskaber, der bevares ved affine afbildninger. Vi nævner en række af de vigtigste affine egenskaber og begreber:

Parallel, midtpunkt, delingsforhold, ligestorhed af liniestykker på parallelle linier, forhold mellem liniestykker på parallelle linier, barycentriske koordinater, konveksitet.

Nogle eksempler på egenskaber og begreber, der ikke er affine:

Vinkelret, vinkelhalveringslinie, ligestorhed af liniestykker på ikke parallelle linier, ligebenet trekant, højde i trekant etc.

Punktet $P = \lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n$, hvor $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1$, er massemidtpunkt for masser af størrelse m_j anbragt i P_j for $j = 0,\ldots,n$. Det er interessant, at dette fysiske begreb er affint.

Begreber som dimension, skæring eller ikke skæring mellem underrum, at ligge på ret linie, at ligge på samme side af en hyperplan er ligeledes affine. Støtte-hyperplan er et affint begreb. "Cirkel" er ikke et affint begreb.

Et komplekst Euklidisk rum defineres ordret som et reelt Euklidisk rum. Da $\mathbb{C}$ ikke er ordnet har "konveksitet" ikke mening i et affint rum over $\mathbb{C}$. Der er imidlertid en struktur som affint rum over $\mathbb{R}$ på et affint rum over $\mathbb{C}$, og man kan derfor bruge det reelle konveksitetsbegreb. Et indre produkt i den komplekse struktur giver en norm, der også fås af et indre produkt i den reelle struktur. Derfor har et komplekst Euklidisk rum også en struktur som reelt Euklidisk rum, og i mange situationer er det at foretrække at anvende denne struktur.

KAPITEL 33

Kvadrikker i et 4-dimensionalt rum.

Vi vil ikke give en detaljeret gennemgang af kvadrikker i et 4-dimensionalt Euklidisk rum, men vi vil fremhæve nogle interessante enkeltheder.

Hver keglesnitsflade giver selvfølgelig en cylinderkvadrik i det 4-dimensionale rum. Med den hyperbolske paraboloide eller den elliptiske hyperboloide, som ledekeglesnitsflade får vi cylinderkvadrikker, der på to måder spalter i en familie af planer, selv om deres frembringerrum kun er 1-dimensionalt. Med en keglesnitskegle som lede-keglesnitsflade fås en kvadrik, der beskrives af en plan, som drejer om en ret linie, medens den hele tiden skærer keglesnitsfladens ledekeglesnit. En sådan kvadrik kunne man passende kalde en kilekvadrik.

Af keglekvadrikker bliver der to typer svarende til ligningerne

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 0$$
$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 0$$
$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 0.$$

Den første er bare et punkt. Den anden har en ellipsoide som ledekeglesnitsflade, men også en hyperbolsk hyperboloide. Den sidste har en elliptisk hyperboloide som lede-keglesnitsflade, og den kan derfor på to måder opfattes som forening af en familie af plane fibre, som to og to kun har keglens toppunkt fælles. En keglekvadrik med en elliptisk paraboloide som lede-keglesnitsflade bliver af den anden slags og med en hyperbolsk paraboloide som ledekeglesnitsflade bliver den af den tredie slags.

Det er let at se, at en keglekvadrik med en keglesnitskegle som lede-keglesnitsflade i virkeligheden bliver en cylinderkvadrik med den samme ledekeglesnitsflade. Det er den ovenfor omtalte kilekvadrik.

Vi får 2 slags paraboloider

$$y = p\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}\right)$$
$$y = p\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2}\right),$$

som naturligt svarer til de to paraboloider i det tredimensionale tilfælde. Den sidste indeholder en kompliceret familie af rette linier, således at hvert punkt af kvadrikken er toppunkt for en keglesnitskeg-le, der er indeholdt i kvadrikken.

Der bliver 4 slags egentlige centrumskvadrikker

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$
$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$$
$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1$$
$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Den første svarer til ellipsoiden og den sidste til den hyperbolske hyperboloide. De indeholder ikke rette linier. Den anden og den tredie indeholder rette linier. Den anden og fjerde har en asymptotekegle af den anden slags, medens den tredie har en asymptotekegle af den tredie slags.

Særlig interessant er den tredie slags keglekvadrik. Specielt er der et "ligesidet" eksemplar af den med ligning

$$u^2 - v^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

Dens komplementærmængde falder i to dele eftersom udtrykket på venstre side er positivt eller negativt. Endomorfien med matricen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er en isometri. Den afbilder keglekvadrikken i sig selv, men bytter de to dele af komplementærmængden. Keglekvadrikken deler således det 4-dimensionale rum i to helt ens dele.

Keglekvadrikken af tredie slags udmærker sig også ved at indeholde planer. En egentlig kvadrik, der indeholder planer, findes ikke i det 4-dimensionale rum, men i det 5-dimensionale rum bliver der plads nok til sådan en.

ØVELSER TIL KAPITEL 33

Stikord.

Kvadrikker i 4-dimensionalt rum, kilekvadrik, ledekeglesnitsflade, planer og keglekvadrikker indeholdt i kvadrikker.

33.1. Der bliver 3 slags omdrejningshyperflader i et 4-dimensionalt rum. Den ene slags fås ved at dreje en flade om en plan, så hvert punkt beskriver en cirkel. Den anden fås ved at dreje en kurve om en ret linie, så hvert punkt beskriver en kegleflade. Den tredie slags fås ved at dreje en kurve, således at dens projektioner på hver af to planer uafhængigt af hinanden drejer om et punkt. Derved beskriver hvert punkt af kurven en krus. Fordel følgende eksempler på de tre klasser:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

$$y = p\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = p\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

33.1.1. Hvilke kvadrikker i $\mathbb{R}^4$ kan fås ved at lade en ret linie i $\mathbb{R}^4$ deltage i en drejning af første eller tredie slags. Prøv at bestemme ligningen, idet drejningen foregår om y-aksen eller i (u,v)- og (x,y)-planen. Hvilke kvadrikker kan fås ved at dreje en plan om (x,y)-planen.

33.2. I $\mathbb{R}^5$ drejes en plan, der ikke skærer (u,v)-planen, om denne, så hvert punkt af planen beskriver en kugleflade. Hvilken kvadrik beskrives derved?

33.3. En kvadrik i $\mathbb{R}^5$ har ligningen

$$z = p\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2}\right).$$

Hvilke planer er indeholdt i den?

KAPITEL 34

Kvadrikkers affine egenskaber.

Lad $P(\underline{x}) = P(x_1,\dots,x_n)$ være et andengradspolynomium på et Euklidisk rum E med et koordinatsystem $(O;\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ i hvilket hvert punkt har et koordinatsæt $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$. Vi kan "glemme" det indre produkt på E og således betragte E som et affint rum. Hvis φ: $E \to E$ er en bijektiv affin afbildning, hvis tilsvarende koordinatafbildning vi også betegner med φ, er $P(\varphi(\underline{x}))$ også et andengradspolynomium, hvis nulpunkter er en ny kvadrik.

Det er klart, at en hel masse egenskaber er affine, dvs. bevares ved affin afbildning. Vi nævner nogle affine egenskaber ved kvadrikker:

At være en cylinder, en kegle, to affine underrum, et affint underrum, at indeholde rette linier, planer etc., at være begrænset, at ligge helt på den ene side af en plan, at skære enhver hyperplan etc.

Der kan også være tale om affine egenskaber, der vedrører en kvadrik og et affint underrum. Det kræves da, at egenskaben bevares, når både kvadrikken og underrum transformeres ved samme transformation. Det vigtigste i denne sammenhæng er, at alle affine egenskaber ved skæringskvadrikken bevares ved den affine afbildning. Men også en egenskab som det at være centrum eller være et affint underrum bestående af centre er affin.

Nu er det let at slutte, at vor klassifikation af keglesnit og keglesnitsflader i virkeligheden er affin. Vi gør ræsonnementet helt færdigt for keglesnittene:

Det er klart, at det er en affin egenskab at være tom, et punkt, en ret linie, to parallelle rette linier eller to skærende rette linier, og dermed har vi gjort rede for de udartede keglesnit. Blandt de egentlige keglesnit er ellipsen den eneste, som er begrænset, parablen den eneste, som ligger helt på den ene side af en plan, medens hyperblen er den eneste, for hvilken vi kan dele planen i to halvplaner, der begge indeholder punkter af hyperblen, medens den rette linie selv ikke indeholder punkter af hyperblen.

En elliptisk hyperboloide indeholder to rette linier, der ikke ligger i samme plan, og der findes en plan, som skærer den i en ellipse. Ingen af de andre keglesnitsflader har begge disse egenskaber. Altså er det en affin egenskab at være en elliptisk hyperboloide. Vi vil ikke gennemføre et bevis for, at vor klassifikation af keglesnitsfladerne er affint invariant.

Vi vil nu betragte en kvadrik, som i et n-dimensionalt affint rum med et koordinatsystem er nulpunktsmængde for polynomiet

$$P(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} + c,$$

hvor $\underline{x}$ og $\underline{b}$ er talsæt benyttede som søjlevektorer, og mærket betyder transponering. Til polynomiet svarer en relation mellem punkter af det affine rum givet ved, at deres koordinatsæt $\underline{\xi}$ og $\underline{x}$ skal tilfredsstille

$$\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}'\underline{\xi} + \underline{b}'\underline{x} + c = 0.$$

Da $\underline{\underline{A}}$ er symmetrisk er dette en symmetrisk relation mellem koordinatsæt for punkter i det affine rum. Ved et lineært koordinatskifte givet ved $\underline{x} = \underline{\underline{S}}\,\underline{y}$ bliver $\underline{\xi} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\eta}$, hvor $\underline{\eta}$ er det nye koordinatsæt for punktet med gammelt koordinatsæt $\underline{\xi}$, og polynomiet og relationen bliver i de nye koordinater

$$\underline{y}'\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y} + 2\underline{b}'\underline{\underline{S}}\,\underline{y} + c$$

$$\underline{\eta}'\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{y} + \underline{b}'\underline{\underline{S}}\,\underline{\eta} + \underline{b}'\underline{\underline{S}}\,\underline{y} + c = 0.$$

Relationen fås derfor af polynomiet i de nye koordinater ganske som vi fik den i de gamle koordinater. Lad os se, hvad der sker ved en translation af koordinatsystemet, altså ved at sætte $\underline{x} = \underline{y} + \underline{a}$, $\underline{\xi} = \underline{\eta} + \underline{a}$. Det giver

$$\underline{y}'\underline{\underline{A}}\ \underline{y} + 2(\underline{a}'\underline{\underline{A}} + \underline{b}')\underline{y} + \underline{a}'\underline{\underline{A}}\ \underline{a} + 2\underline{b}'a + c$$
$$\eta'\underline{\underline{A}}\ \underline{y} + (\underline{a}'\underline{\underline{A}}+\underline{b}')\underline{\eta} + (\underline{a}'\underline{\underline{A}}+\underline{b}')\underline{y}+\underline{a}'\underline{\underline{A}}\ \underline{a}+2\underline{b}'\underline{a} + c = 0.$$

Af disse overvejelser følger, at relationen ikke bare er en relation mellem koordinatsæt, men virkelig en relation mellem punkter af det affine rum.

Definition 34.1. Lad E være et affint rum med et koordinatsystem. Lad $P(\underline{x})$ være et andengradspolynomium på E. Den ovenfor definerede relation skrives da $\underline{\xi}P\underline{x}$. Hvis det for et valg af $\underline{\xi}$ gælder at mængden af koordinatsæt $\underline{x}$, der tilfredsstiller relationen, udgør en affin hyperplan, kaldes denne hyperplan en polar til punktet med koordinatsæt $\underline{\xi}$ og dette punkt kaldes en pol til hyperplanen.

Det fremgår af bemærkningerne foran definitionen, at relationen mellem pol og polar ikke afhænger af valget af koordinatsystemet. En egentlig centrumskvadrik kan vi derfor tænke os hørende til et polynomium

$$\pm \frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \ldots \pm \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1,$$

med en eller anden fortegnskombination. Relationen bliver

$$\pm \frac{\xi_1 x_1}{a^2} \pm \dots \pm \frac{\xi_n x_n}{a_n^2} = 1,$$

og vi ser, at $\underline{0}$ bliver det eneste talsæt, der ikke giver ligningen for en hyperplan. Ethvert punkt undtagen centrum har således en polar. Vi ser også, at enhver hyperplan, der ikke går gennem centrum har netop en pol.

For en parabolsk kvadrik har vi et polynomium

$$\pm \frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \dots \pm \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + 2x_n = 0,$$

og vi får relationen

$$\pm \frac{\xi_1 x_1}{a_1^2} \pm \dots \pm \frac{\xi_{n-1} x_{n-1}}{a_{n-1}^2} + \xi_n + x_n = 0.$$

Den fremstiller altid en hyperplan, så ethvert punkt har en polar. Til gengæld er det ikke alle hyperplaner, der har en pol, da det kræver, at x_n har koefficient $\neq 0$ i hyperplanens ligning. Altså har hyperplaner en pol, hvis og kun hvis de ikke er parallelle med x_n-aksen (den parabolske kvadriks akse), og polen er entydig bestemt.

Vi formulerer resultatet i en sætning.

Sætning 34.2. Hvis kvadrikken i definition 34.1 er en egentlig centrumskvadrik, har hvert punkt undtagen centrum en polar, og enhver hyperplan, der ikke går gennem centrum har en pol. Hvis kvadrikken er parabolsk, har ethvert punkt en polar, og enhver hyperplan, der ikke er parallel med aksen, har en pol.

Af vore overvejelser aflæser vi endvidere følgende sætning:

Sætning 34.3. Relationen $\underline{\xi}P\underline{x}$ udtrykker, at punkterne med koordinater $\underline{\xi}$ og $\underline{x}$ ligger på hinandens polar.

Den næste definition vil måske i første omgang virke lidt overraskende.

Definition 34.4. Hvis et punkt af en kvadrik har en entydig bestemt polar, kaldes denne kvadrikkens tangenthyperplan i punktet.

Det at være tangenthyperplan til en kvadrik er efter denne definition en affin egenskab.

Så længe vi kun studerer affine egenskaber, kan vi tillade os at benytte et hensigtsmæssigt koordinatsystem. Når vi nu skal studere tangenthyperplanens egenskaber bemærker vi først, at tangenthyperplanen i et punkt går gennem dette punkt. Hvis $\underline{\xi}$ er et punkt af kvadrikken, har vi nemlig

$$\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\xi} + 2\underline{b}'\underline{\xi} + c = 0,$$

og deraf følger, at tangentplanens ligning

$$\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}'\underline{\xi} + \underline{b}'\underline{x} + c = 0$$

tilfredsstilles af $\underline{x} = \underline{\xi}$. Vi vælger nu punktet med koordinater $\underline{\xi}$ som begyndelsespunkt, vælger $(\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_{n-1})$ som en basis i tangenthyperplanen og supplerer med $\underline{e}_n$ til en basis for hele rummet. Så er tangentplanen givet ved ligningen $x_n = 0$, og vi har $\underline{\xi} = \underline{0}$. Heraf følger, at vi har $\underline{b} = k\,\underline{e}_n$, hvor $k \neq 0$, samt $c = 0$, så keglesnittets ligning har formen

$$\underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2k\,x_n = 0.$$

Vi sætter $\underline{\tilde{x}} = (x_1,\dots,x_{n-1})$, og med $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ betegner vi den matrix, der fås af $\underline{\underline{A}}$ ved at udelade den sidste række og den sidste søjle. Ved at sætte $x_n = 0$ i ligningen får vi ligningen for skæringskvadrikken mellem kvadrikken og tangenthyperplanen

$$\underline{\tilde{x}}'\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}} = 0,$$

men det er jo en (eventuelt udartet) keglekvadrik med toppunkt i tangenthyperplanens røringspunkt.

Vi formulerer resultatet i en sætning.

Sætning 34.5. Tangenthyperplanen i et punkt Q af en kvadrik skærer kvadrikken i en keglekvadrik med toppunkt i Q.

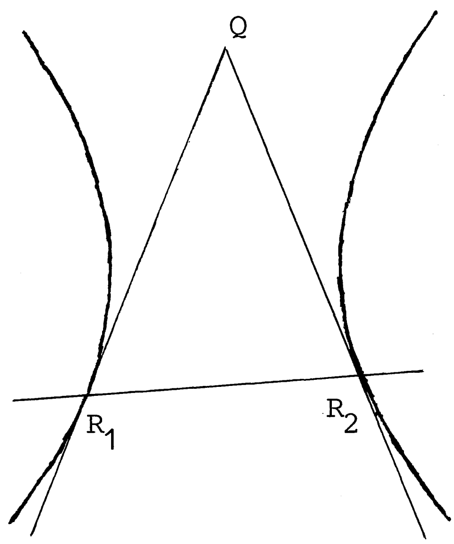
En egentlig kvadrik har en tangenthyperplan i ethvert af sine punkter. En keglekvadrik har ingen tangentplan i toppunktet. Det er centrum for keglekvadrikken og har ikke en entydig bestemt polar.

For et keglesnit bliver tangenthyperplanen en ret linie og benævnes tangent. For en keglesnitsflade bliver tangenthyperplanen en plan og benævnes tangentplan.

Et keglesnit må skære sin tangent i en keglesnitskegle i et 1-dimensionalt rum, altså i et enkelt punkt. En tangent til et keglesnit bliver således en ret linie, der har et og kun et punkt fælles med keglesnittet. Det stemmer med vor sædvanlige forestilling om tangenter. For en parabel kunne det dog være en ret linie parallel med aksen, men vi ved, at en sådan overhovedet ikke kan være polar. For en hyperbel kunne det være en ret linie parallel med en asymptote, men en polar har ligningen

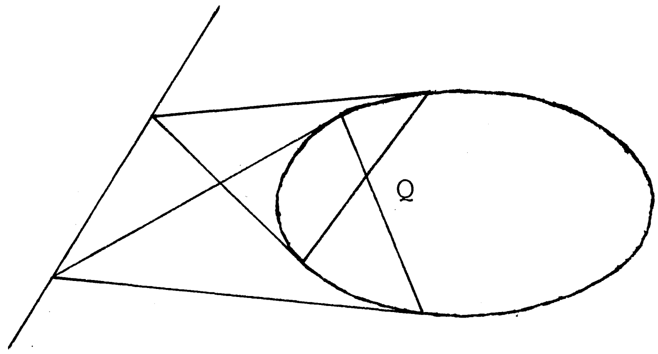
$$\frac{\xi_1 x_1}{a^2} - \frac{\xi_2 x_2}{b^2} = 1,$$

og skal dette være en ret linie parallel med en asymptote, må $\underline{\xi}$ selv ligge på en asymptote, men $\underline{\xi}$ skulle ligge på hyperblen. For egentlige keglesnit er vort tangentbegreb således det sædvanlige.



På figuren er P et punkt, hvorfra der kan trækkes to tangenter til et keglesnit, som i dette tilfælde er en hyperbel. Om Q og et røringspunkt gælder så, at de ligger på hinandens polar, og polaren til Q bliver derfor linien gennem røringspunkterne. Vi kunne også gå ud fra polaren, og vi aflæser af figuren, at en ret linie, der skærer et keglesnit i to punkter, har sin polar i skæringspunktet mellem tangenterne i de to punkter. For en linie gennem centrum bliver tangenterne parallelle, og vi får ingen polar.

På den næste figur findes der ingen tangenter gennem Q. Til gengæld vil linier gennem Q skære keglesnittet i to punkter, så dens pol kan konstrueres. Polaren til Q fås som den rette linie gennem disse poler. Polaren kan selvfølgelig ikke skære keg-



lesnittet i dette tilfælde - for polen i et skæringspunkt skal jo både være tangent og gå gennem Q, og der var jo netop ingen tangenter gennem Q.

Vi går nu videre med undersøgelsen af generelle kvadrikker. Først viser vi, at tangenthyperplanen til en kvadrik i et punkt af en ret linie, der er indeholdt i kvadrikken, indeholder den rette linie.

<u>Sætning 34.6</u>. Lad Q være et punkt af en kvadrik, som indeholder en ret linie L gennem Q. Kvadrikkens tangenthyperplan i Q vil da indeholde L.

Bevis. Vi vælger et koordinatsystem $(Q;\ \underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n)$ med Q som begyndelsespunkt og $\underline{e}_1$ på L. Kvadrikkens ligning

$$\underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} + c = 0$$

tilfredsstilles af $\underline{0}$, så vi har $c = 0$, og den tilfredsstilles af $\pm \underline{e}_1$, så vi har $a_{11} \pm 2b_1 = 0$, altså $a_{11} = b_1 = 0$. Tangenthyperplanen i O med koordinatsæt $\underline{0}$ har ligningen

$$\underline{b}'\underline{x} = 0,$$

og tilfredsstilles af $\pm \underline{e}_1$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. For den elliptiske hyperboloide og den hyperbolske paraboloide gælder specielt, at enhver tangentplan skærer fladen i 2 rette linier, og de to rette linier på fladen fastlægger således tangentplanen. Heraf fremgår, at tangentplanerne i forskellige punkter af samme rette linie ikke kan være sammenfaldende. For kegler og cylindre gælder derimod, at en tangentplan i et punkt af en frembringer er tangentplan i alle punkter af frembringeren på en gang på nær eventuelt keglens toppunkt, hvor der ikke er en tangentplan.

Sætning 34.7. Lad M være en affin mangfoldighed i et affint rum E. Lad K være en egentlig kvadrik, for hvilken $K \cap M$ også er en egentlig kvadrik. Tangenthyperplanen til K i et punkt $Q \in K \cap M$ vil da skære M i tangenthyperplanen til $K \cap M$ i punktet Q.

Bevis. Vi benytter et koordinatsystem $(Q;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$, hvor $(Q;\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_q)$ er et koordinatsystem i M. Hvis kvadrikken K har ligningen

$$\underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} = 0$$

og $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ er delmatricen af $\underline{\underline{A}}$ bestående af de q første rækker og søjler, har $K \cap M$ ligningen

$$\underline{\tilde{x}}'\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\tilde{x}} + 2\underline{\tilde{b}}'\underline{\tilde{x}} = 0$$

hvor $\underline{\tilde{x}} = (x_1,\ldots,x_q)$ og $\underline{\tilde{b}} = (b_1,\ldots,b_q)$. Tangentplanen til K i punktet Q har ligningen $\underline{b}'\underline{x} = 0$, da røringspunktet har koordinatsæt 0. Dets skæringshyperplan med M har ligningen $\underline{\tilde{b}}'\underline{\tilde{x}} = 0$, men det er netop ligningen for tangenthyperplanen til $K \cap M$ i Q. Dermed er sætningen bevist.

Hvis E specielt er en plan, fortæller sætningen os, at tangenthyperplanen til en kvadrik i et punkt Q, indeholder tangenterne i Q til alle de ikke udartede keglesnit, der fås som plane snit gennem Q i kvadrikken. Dertil kommer altså, at det for de plane snit, der er udartede keglesnit, gælder, at tangenthyperplanen indeholder de rette linier gennem Q, der indgår i sådanne udartede keglesnit. Disse egenskaber retfærdiggør vor definition af tangenthyperplan.

Det sorterer under matematisk analyse at give en mere generel definition af begrebet "tangenthyperplan". Når analysen når så langt, vil det være yderst let at eftervise, at en ikke udartet kvadrik har en tangentplan i ethvert punkt, og at tangentplanen har de her anførte egenskaber. Det er på den anden side klart, at de i de tre sætninger omtalte egenskaber fastlægger tangenthyperplanen, så vort begreb stemmer med analysens.

Sætning 34.8. Lad E være et n-dimensionalt affint rum og $K \subseteq E$ en egentlig kvadrik. Lad Q_1 og Q_2 være vilkårlige punkter af K. Der findes da en bijektiv afbildning $f:E \to E$, som afbilder K på sig selv og Q_1 på Q_2.

Bevis. Vi ser først på det tilfælde, hvor K er en egentlig centrumskvadrik. Vi kan da vælge koordinatsystemet, så K har en ligning af formen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_q^2}{a_q^2} - \frac{x_{q+1}^2}{a_{q+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 .$$

Da $K \neq \emptyset$ er $q \geqq 1$, men det kan tænkes, at $q = n$, så der slet ikke forekommer minustegn. Nu har vi en bijektiv affin afbildning af E på sig selv givet ved, at

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1}{a_1},\dots,\frac{x_n}{a_n}\right) ,$$

og billedet af K ved denne afbildning får ligningen

$$x_1^2+\ldots+x_q^2 - x_{q+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1.$$

Hvis vi kan vise sætningen for denne kvadrik, vil vi umiddelbart kunne slutte, at den også gælder for K.

Lad nu $\underline{\xi}$ være et vilkårligt koordinatsæt på den nye kvadrik, altså

$$\xi_1^2+\ldots+\xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \ldots - \xi_n^2 = 1.$$

Det er nok at vise, at der findes en bijektiv affin afbildning $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, som lader udtrykket $x_1^2+\ldots+x_q^2 - x_{q+1}^2 - \ldots - x_n^2$ invariant og tilfredsstiller, at $f(\underline{\xi}) = (1,0,\ldots,0)$.

Nu ved vi, at der findes en ortonormal afbildning $f_1:\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ med $f(\xi_1,\ldots,\xi_q) = (\lambda,0,\ldots,0)$, hvor $\lambda = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_q^2}$. Ved $\tilde{f}(\underline{x}) = (f_1(x_1,\ldots,x_q), x_{q+1},\ldots, x_n)$ får vi en ortonormal afbildning $\tilde{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, som lader $x_1^2+\ldots+x_q^2-x_{q+1}^2-\ldots-x_n^2$ invariant, og med $\tilde{f}(\underline{\xi}) = (\lambda,0,\ldots,0, \xi_{q+1},\ldots,\xi_n)$. Hvis $q = n$, er $\lambda = 1$, og sætningen er vist. For $q < n$ kan vi kopiere processen på de negative led, og derved får vi $\underline{\xi}$ afbildet over i $(\lambda,0,\ldots,0,\mu,0,\ldots,0)$, hvor $\lambda^2-\mu^2 = 1$. Til sidst benytter vi den affine afbildning $f':\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ defineret ved

$$f'(\underline{x}) = (\lambda x_1-\mu x_{q+1}, x_2,\ldots,x_q, -\mu x_1+\lambda x_{q+1}, x_{q+2},\ldots,x_n).$$

Direkte udregning viser, at f' lader $x_1^2+\ldots+x_q^2 - x_{q+1}^2 -\ldots- x_n^2$ invariant og afbilder $(\lambda,0,\ldots,0,\mu,0,\ldots,0)$

på $(1,0,\dots,0)$. Dermed har vi vist sætningen for egentlige centrumskvadrikker.

Vi går over til det tilfælde, hvor K er en egentlig parabolsk kvadrik. Ganske som for centrumskvadrikken kan vi udnytte en passende bijektiv affin afbildning, og derved kan vi antage, at den har en ligning af formen

$$x_1^2+\dots+x_q^2 - x_{q+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 - x_n = 0$$

hvor $1 \leqq q \leqq n-1$. Lad $\underline{\xi}$ være et vilkårligt koordinatsæt på K. Vi skal vise, at vi kan finde en bijektiv affin afbildning $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, som lader K invariant og desuden tilfredsstiller, at $f(\underline{\xi}) = (1,0,\dots,0,1)$. Vi definerer $\tilde{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ved

$$\tilde{f}(\underline{x}) = (x_1-\xi_1+1, x_2, \dots, x_{n-1}, 2(1-\xi_1)x_1+x_n+(1-\xi_1)^2).$$

Ved direkte regning ses, at $\tilde{f}$ lader K invariant, samt at $\tilde{f}(\underline{\xi}) = (1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},1)$. Fra tilfældet, hvor K er en egentlig centrumskvadrik ved vi nu, at vi kan finde $f':\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, som lader udtrykket $x_1^2+\dots+x_q^2 - x_{q+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2$ invariant og med $f(1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1}) = (1,0,\dots,0)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen fortæller, at egentlige kvadrikker med hensyn til affine egenskaber forholder sig helt ens i alle punkter. Med affine briller kan man således slet ikke finde ud af, hvor man er henne, når man bevæger sig i en egentlig kvadrik. Det er ganske som situationen på en kugleflade, når man kun har dens metriske egenskaber til rådighed. På en keglekvadrik kan man derimod skelne toppunktet fra andre punkter.

Sætning 34.9. Lad K være en egentlig centrumskvadrik, som i et passende koordinatsystem har ligningen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_q^2}{a_q^2} - \frac{x_{q+1}^2}{a_{q+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 .$$

For $q = 1$ og for $q = n$ har tangenthyperplanen i et vilkårligt punkt kun røringspunktet fælles med K. For $1 < q < n$ skærer tangenthyperplanen i et vilkårligt punkt kvadrikken i en keglekvadrik, som udspænder hele tangenthyperplanen.

Bevis. Det er nok at vise påstanden for punktet $(a_1, 0, \dots, 0)$. Tangenthyperplanen i dette punkt har ligningen $x_1 = a$, så vi kan bruge $(x_2, \dots, x_n)$ som koordinater i tangenthyperplanen. For $q = 1$ og for $q = n$ får skæringskvadrikken ligningen

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0,$$

som kun tilfredsstilles af $\underline{0}$.

For $2 \leqq q \leqq n-1$ får skæringskvadrikken ligningen

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_q^2}{a_q^2} - \frac{x_{q+1}^2}{a_{q+1}^2} - \ldots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0.$$

Da den tilfredsstilles af $\underline{0}$ er det nok at vise, at basisvektorerne $\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ hører til det udspændte rum. Lad j være et af tallene $2, \ldots, q$ og k et af tallene $q+1, \ldots, n$. Så vil $a_j \underline{e}_j \pm a_k \underline{e}_k$ tilhøre skæringskvadrikken, og deraf følger, at $\underline{e}_j$ og $\underline{e}_k$ hører til det udspændte rum. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 34.10. Lad K være en egentlig parabolsk kvadrik, som i et passende koordinatsystem har ligningen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_q^2}{a_q^2} - \frac{x_{q+1}^2}{a_{q+1}^2} - \ldots - \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - x_n = 0.$$

For $q = n-1$ vil enhver tangenthyperplan kun have et punkt fælles med kvadrikken, og for $q < n-1$ vil enhver tangenthyperplan skære kvadrikken i en keglekvadrik, der udspænder tangenthyperplanen.

Bevis. Det er nok at vise påstanden for tangenthyperplanen i $\underline{0}$ og den har ligningen $x_n = 0$. Resten af beviset er helt som beviset for sætning 34.9.

Definition 34.11. Lad U være et n-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$, og lad $\sigma: U \times U \to \mathbb{R}$ være en symmetrisk bilinearform. To vektorer $\underline{u}, \underline{v} \in U$ kaldes σ-konjugerede, hvis $\sigma(\underline{u}, \underline{v}) = 0$. Lad $V \subseteq U$ være et underrum. Ved det σ-konjugerede underrum $W \subseteq U$ til V forstår vi mængden af vektorer $\underline{w} \in U$, som for alle $\underline{v} \in V$ tilfredsstiller betingelsen $\sigma(\underline{w}, \underline{v}) = 0$. To underrum $V \subseteq U$ og $W \subseteq U$ kaldes indbyrdes σ-konjugerede, hvis de er hinandens σ-konjugerede underrum.

Da σ er en symmetrisk bilinearform, er σ-konjugeret også en symmetrisk relation mellem vektorer. Hvis V er et underrum og W dets σ-konjugerede, er enhver vektor i V σ-konjugeret til enhver vektor i W, og om det σ-konjugerede underrum $\overline{V}$ til W gælder derfor $\overline{V} \supseteq V$. Det er klart, at W og $\overline{V}$ så er indbyrdes σ-konjugerede.

I koordinater svarende til en basis for U er σ givet på formen $\sigma(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}' \underline{\underline{A}}\, \underline{v}$, hvor A er en $n \times n$-matrix, hvis rang r er uafhængig af valget af basis. Vi kan vælge basis, således at $\underline{\underline{A}}$, som altid er symmetrisk, får formen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\underline{A}}} & \underline{\underline{0}} \\ & \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} ,$$

hvor $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ er en invertibel $r\times r$-matrix, der svarer til en bilinearform $\tilde{\sigma}:\tilde{U}\times\tilde{U} \to \mathbb{R}$, hvor $\tilde{U}$ er underrummet, der udspændes af de r første basisvektorer og $\tilde{\sigma}$ er restriktionen af σ. Hvis U' er underrummet, der udspændes af de r sidste basisvektorer, er $U = \tilde{U} \oplus U'$, og hver vektor $\underline{u} \in U$ spaltes entydigt i $\underline{u} = \tilde{\underline{u}} + \underline{u}'$. At $\underline{v} = \tilde{\underline{v}} + \underline{v}'$ og $\underline{w} = \tilde{\underline{w}} + \underline{w}'$ er σ-konjugerede, ses nu at være helt ensbetydende med, at $\tilde{\underline{v}}$ og $\tilde{\underline{w}}$ er $\tilde{\sigma}$-konjugerede.

For et underrum $V \subseteq U$ har $\tilde{V} = \tilde{U} \cap V$ et $\tilde{\sigma}$-konjugeret underrum $\tilde{W}$, og $\tilde{W} \oplus U' = W$ er så det σ-konjugerede underrum til V, medens W har det σ-konjugerede underrum $\tilde{V} \oplus U' = V + U'$.

Hvis V er k-dimensionalt har vi en $r\times k$-matrix $\underline{\underline{S}}$ med rang k, hvis søjler er koordinatsæt for vektorer, der udgør en basis for V. Koordinatsættene til vektorer i det konjugerede underrum W er derfor netop løsningerne til det lineære ligningssystem

$$\tilde{\underline{\underline{S}}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{0},$$

og vi har derfor en $r\times(r-k)$-matrix $\tilde{T}$, hvis søjler er koordinatsæt for vektorer, der udgør en basis for $\tilde{W}$, og som tilfredsstiller ligningen

$$\tilde{\underline{\underline{S}}}'\ \underline{\underline{A}}\ \tilde{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{0}}\ ,$$

hvor $\underline{\underline{0}}$ er en $k\times(r-k)$-matrix. Heraf fremgår, at dimV+ dimW = r, altså dimV + dimW = 2n-r.

Så har vi selvfølgelig også generelt en $n\times(n+k-r)$-matrix $\underline{\underline{S}}$, hvis søjler er koordinatsæt for vektorer, der udgør en basis for V, og vi har en $n\times(n-k)$-matrix T, hvis søjler er koordinatsæt for vektorer, der udgør en basis for W, og sådanne matricer vil opfylde betingelsen

$$\underline{\underline{S}}'\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}\ .$$

Det skal bemærkes, at en egentlig vektor $\underline{u} \in U$ kan være konjugeret med sig selv. Dertil kræves, at $\sigma(\underline{u},\underline{u}) = 0$, altså at $\underline{u}$ er rod i den til σ hørende kvadratiske form. Fænomenet indtræder for visse $\underline{u} \neq 0$, hvis og kun hvis den kvadratiske form hverken er positiv eller negativ definit.

Lad nu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være andengradspolynomiet defineret ved

$$f(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} + c.$$

Til f svarer da den symmetriske bilinearform $\sigma:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defineret ved $\sigma(\underline{u},\underline{v}) = \underline{u}'\underline{\underline{A}}\,\underline{v}$. Hvert underrum i $\mathbb{R}^n$

har et σ-konjugeret underrum. Hvert underrum i vektorrummet $\mathbb{R}^n$ har en mængde af affine siderum i det affine rum $\mathbb{R}^n$.

Definition 34.12. Lad en kvadrik K i $\mathbb{R}^n$ være bestemt ved andengradspolynomiet

$$f(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} + c,$$

og lad $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være den tilsvarende bilinearform. Hvis K har et centrum eller centre, siges indbyrdes σ-konjugerede affine underrum gennem centrum at være konjugerede diametralrum med hensyn til K.

Konjugerede diametralrum med hensyn til en kvadrik har interessante egenskaber, men det er svært at formulere disse både præcist og udtømmende. Den næste sætning tilstræber at være præcis, men er altså ikke udtømmende.

Sætning 34.13. Lad $K \subset \mathbb{R}^n$ være en kvadrik bestemt ved andengradspolynomiet

$$f(\underline{x}) = \underline{x}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + 2\underline{b}'\underline{x} + c,$$

og lad σ være den tilsvarende bilinearform. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være et underrum, og lad V være dets σ-konjugerede underrum. Hvis et siderum til U skærer K i en egentlig centrumskvadrik, vil alle siderum til U skære K i egentlige eller udartede centrumskvadrikker, og disses centre vil alle ligge i et siderum $\tilde{V}$ til V. Hvis K har et centrum, vil $\tilde{V}$ indeholde dette. Hvis $\tilde{V}$ skærer kvadrikken, vil det for hvert skæringspunkt P mellem V og K gælder, at siderummet til U gennem P er indeholdt i tangenthyperplanen til K i punktet P.

Bevis. Siderummet til U gennem et punkt $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$ har en parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\ \underline{t},$$

hvor $\underline{t} = (t_1,\ldots,t_p)$, $p = \dim U$, medens $\underline{\underline{T}}$ er en $n{\times}p$-matrix med rang P. Ved indsættelse i $f(\underline{x})$ får vi en ligning for skæringskvadrikken

$$\underline{t}'\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}}\ \underline{t} + 2(\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}} + \underline{b}'\underline{\underline{T}})\underline{t} + \underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\xi} + c = 0.$$

Hvis dette for et valg af $\underline{\xi}$ er ligning for en egentlig centrumskvadrik, har $\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}}$ rang p, og så bliver udtrykket ligning for en (eventuelt udartet) centrumskvadrik for ethvert valg af $\underline{\xi}$. Centrum er det punkt $\underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\ \underline{t}$, der tilfredsstiller betingelsen $(\underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\ \underline{t})'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}} + \underline{b}'\underline{\underline{T}} = \underline{0}'$, hvilket efter transponering giver ligningen

$$\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}}\ \underline{t} = \underline{\underline{T}}'(\underline{\underline{A}}\ \underline{\xi} + \underline{b}),$$

som har netop 1 løsning, da matricen $\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}}$ er invertibel. Dermed er den første påstand bevist.

De punkter $\underline{\xi}$, der er centre for den tilsvarende skæringskvadrik, tilfredsstiller ligningen $\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\xi} = \underline{\underline{T}}'\underline{b}$, og de ligger derfor i et sideunderrum $\tilde{V}$ til V. Hvis $\underline{\xi}$ kan vælges, så $\underline{\underline{A}}\ \underline{\xi} = \underline{b}$, er K en centrumskvadrik med dette $\underline{\xi}$ som centrum, dog eventuelt udartet. Dermed er de to næste påstande bevist.

Lad nu $\underline{\xi}$ være et punkt af $\tilde{V}$, og lad

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}$$

være en parameterfremstilling for $\tilde{V}$. Vi har da $\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$. Lad $\underline{u}$ være valgt, så $\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}$ ligger på kvadrikken, altså således at

$$(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u})'\underline{\underline{A}}(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}) + 2\underline{b}'(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}) + c = 0.$$

Kvadrikkens tangenthyperplan i $\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}$ er givet ved ligningen

$$(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u})'\underline{\underline{A}}\ \underline{x} + \underline{b}'(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u}) + \underline{b}'\underline{x} + c = 0.$$

Vi indsætter $\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\ \underline{u} + \underline{\underline{T}}\ \underline{t}$ i denne ligning, og under hensyntagen til den foregående ligning, bliver venstre side

$$(\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\,\underline{u})'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{t} + \underline{b}'\underline{\underline{T}}\,\underline{t},$$

og da $\underline{\underline{S}}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{0}$ reduceres dette til

$$(\underline{\xi}'\underline{\underline{A}} + \underline{b}')\underline{\underline{T}}\,\underline{t}.$$

Da $\underline{\xi}$ er et punkt af $\tilde{V}$, er $\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} + \underline{b}'\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$, så ligningen er tilfredsstillet. Det viser, at siderummet til U gennem $\underline{\xi} + \underline{\underline{S}}\,\underline{u}$ ligger i tangenthyperrummet, og dermed er den sidste påstand bevist. Dermed er sætningen bevist.

Vi supplerer resultatet med en mere speicel sætning.

Sætning 34.14. Lad $K \subseteq \mathbb{R}^n$ være en kvadrik. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ være et $n-1$-dimensionalt underrum, som har affine siderum, der skærer K i egentlige centrumskvadrikker, og lad L være den rette linie, der indeholder disse kvadrikkers centre. Da vil polarerne til punkterne på L (på nær centrum for K, hvis det findes) netop være alle de affine siderum til U (på nær det, der går gennem centrum, hvis K har et centrum).

Bevis. Vi bruger de samme betegnelser som i sætning 34.13, og i beviset for den, idet vi dog nu har $p = n-1$ og $q = 1$. Linien L består af de punkter $\underline{\xi}$, der tilfredsstiller ligningen

$$\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}} = \underline{b}'\underline{\underline{T}},$$

og polaren til $\underline{\xi}$ er hyperplanen med ligningen

$$\underline{\xi}'\underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}'\underline{\xi} + \underline{b}'\underline{x} + c = 0.$$

Vi ser, at søjlerne i $\underline{\underline{T}}$ er rødder i det tilsvarende homogene ligningssystem, så polaren til $\underline{\xi}$ er et affint siderum til U. Et vilkårligt affint siderum til U har en parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\,\underline{t},$$

og det vil være polaren til $\underline{\xi}$, såfremt $\underline{\xi}$ tilfredsstiller

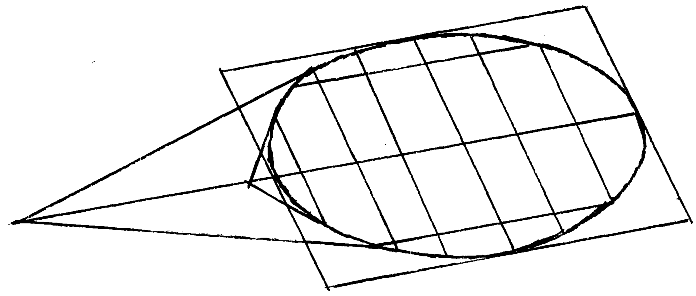
$$(\underline{\xi}'\underline{\underline{A}} + \underline{b}')\underline{\xi} = -(\underline{b}'\xi + c).$$

Altså fremstiller $\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\,\underline{t}$ polaren til $\underline{\xi}$, hvis $\underline{\xi}$ er løsning til ligningssystemet

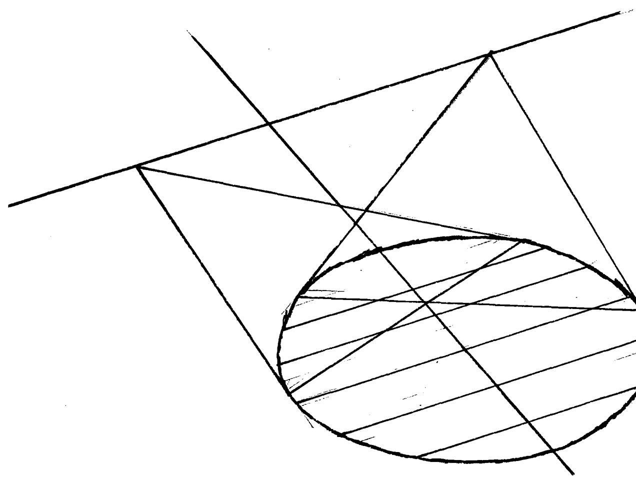
$$(\underline{\xi}'\underline{\underline{A}} + \underline{b}')\underline{\xi} = -\underline{b}'\underline{\xi} - c$$
$$\underline{\underline{T}}'\underline{\underline{A}}\,\underline{\xi} = \underline{\underline{T}}'\underline{b}.$$

Dette ligningssystem har netop en løsning, hvis der ikke gælder en relation $(\underline{t}'\underline{\underline{T}}'+\underline{\xi}')\underline{\underline{A}} + \underline{b}' = \underline{0}$, og denne relation er ensbetydende med, at hyperplanen med parameterfremstillingen $\underline{x} = \underline{\xi} + \underline{\underline{T}}\,\underline{t}$ går gennem centrum for K. Dermed er sætningen bevist.

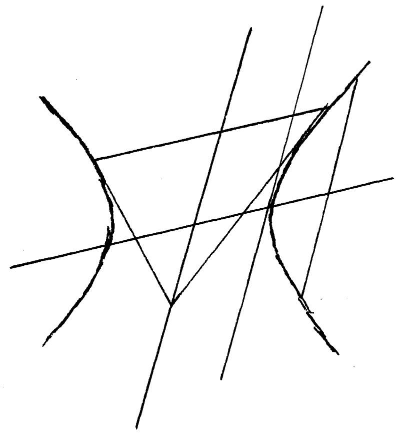
Vi vil ikke gå videre med de generelle undersøgelser, men vi vil se, hvad sætningerne fortæller om keglesnitsfladerne.



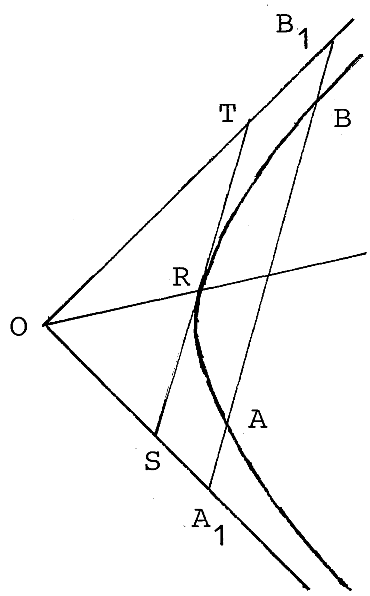
Vi ser først på en ellipse. Dens diametre falder i par af indbyrdes konjugerede. Korder, som er parallelle med en diameter, har deres midtpunkter på den konjugerede diameter. Tangenter fra et punkt på forlængelsen af en diameter rører ellipsen i endepunkterne af en korde parallel med den konjugerede diameter. For korder gennem et punkt af en diameter gælder, at tangenterne i deres endepunkter vil have skæringspunkterne liggende på en linie parallel med den konjugerede diameter.



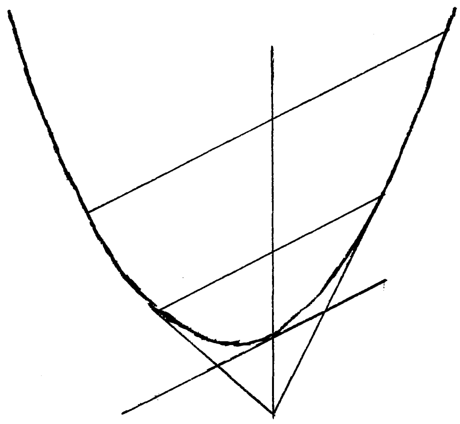
For hyperblen får vi ligeledes par af konjugerede diametre, som hver halverer korder parallelle med den anden. Kun den ene af de konjugerede diametre skærer hyperblen.



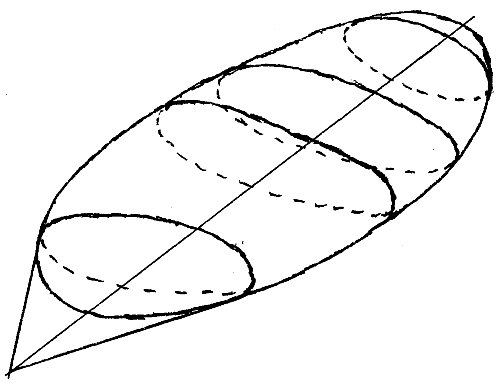
Asymptoteretningen er konjugeret med sig selv. Rette linier parallelle med asymptoterne, skærer hyperblen i et enkelt punkt. Det andet skæringspunkt mangler, idet ligningen, der bestemmer skæringspunkterne udarter til en førstegradsligning.



I ligningerne til bestemmelse af skæringskvadrikkernes centre indgik det konstante led slet ikke. Derfor har korden AB samme midtpunkt som korden A_1B_1 mellem asymptoterne, og vi kan slutte, at liniestykkerne AA_1 og BB_1 er lige lange. Det kan man udnytte til hurtigt at finde en masse punkter af en hyperbel, når man skal tegne en. Specielt ligger røringspunktet for tangenten i R midt mellem dens skæringspunkter S og T med asymptoterne. En linie gennem R parallel med OS går gennem midtpunktet af OT. Det kan udnyttes til geometrisk konstruktion af tangenten i R.



For parablen gælder, at parallelle korders midtpunkter ligger på en linie parallel med aksen, og på den samme linie ligger også skæringspunkterne mellem tangenterne i kordernes endepunkter.

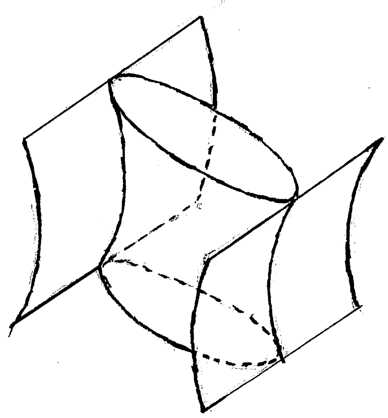


En ellipsoide vil skære en familie af parallelle planer i ellipser, hvis centre ligger på en ret linie, og planen gennem centrum halverer alle korder parallelle med denne rette linie. De rette linier parallelle med denne gennem punkterne af skæringsellipsen med planen gennem centrum danner en cylinder, som omslutter ellipsoiden og rører denne langs skæringsellipsen. For de andre skæringsellipser gælder, at ellipsoidens tangentplaner i deres punkter skærer hinanden i et punkt af den rette linie gennem centrene for skæringsellipserne. Tangenterne til ellipsoiden fra et punkt af denne rette linie vil danne en keglesnitskegle, som rører ellipsoiden, langs en af skæringsellipserne.

For hyperboloiderne fås helt analoge resultater. Dog vil planer parallelle med tangentplaner til asymptotekeglen skære i parabler. Den konjugerede retning bliver i dette tilfælde retningen af den frembringer, hvor tangentplanen rører asymptotekeglen, så det hele bryder sammen. Det går på lignende måde med rette linier parallelle med en frembringer i asymptotekeglen.

Andre familier af parallelle planer kan skære i ellipser, og for den hyperbolske hyperboloides vedkommende vil to af dem så være tangentplaner og de mellemliggende vil slet ikke skære. Ellers er der kun den mulighed, at skæringskurverne er hyperbler. For den elliptiske hyperboloides vedkommende kan skæringsmængden ikke være tom.

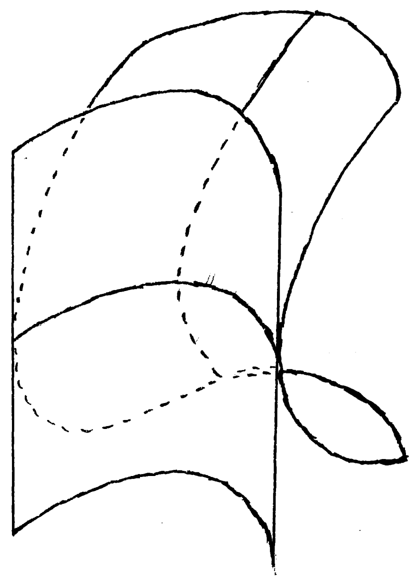
Langs et hyperbolsk eller elliptisk plant snit gennem centrum er der en rørende



cylinder. For den elliptiske hyperboloides vedkommende giver det to forskellige situationer. Hvis skæringskurven er en hyperbel, fås en hyperbolsk cylinder, der omslutter hyperboloiden som vist på figuren. Hvis skæringskurven er en ellipse fås en elliptisk cylinder, der omsluttes af hyperboloiden. For den hyperbolske hyperboloide gælder, at snitplaner gennem centrum kun kan skære i hyperbler.

For paraboloiderne gælder, at en familie af parallelle planer, som ikke er parallelle med akseretningen vil skære i ellipser, der kan udarte til punkt eller den tomme mængde, eller i hyperbler, der kan udarte til par af skærende rette linier. Centrene vil ligge på en ret linie parallel med akseretningen. Tangentplanerne i punkterne af et af skæringskeglesnittene vil skære hinanden i et punkt af den rette linie, så vi får en rørende keglesnitskegle med toppunkt i dette punkt.

Et system af parallelle korder vil have midtpunkterne i en plan parallel med akseretningen, og i dennes skæringspunkter med paraboloiden vil der være tangenter parallelle med korderne, så der fremkommer en parabolsk cylinder, som er omskreven om paraboloiden. På figuren har vi forsøgt at illustrere dette for en hyperbolsk paraboloide.



ØVELSER TIL KAPITEL 34

Stikord.

Kvadrikkers affine egenskaber, pol og polar, tangenthyperplan, tangent, tangentplan, skæring mellem kvadrik og tangenthyperplan, parallelle snit i kvadrikker, σ-konjugerede retninger, affine afbildninger, der lader en kvadrik invariant, konjugerede diametre i keglesnit, parallelle snit i keglesnitsflader, omskrevne kegler og cylindre.

34.1. Et system af parallelle linier skærer en parabel. Linien gennem brændpunktet vinkelret på linierne skærer ledelinien i et punkt S. Vis at linien gennem S parallel med aksen halverer de korder, der afskæres af systemets linier.

34.2. Find polen for den rette linie med ligningen $y = x-p$ med hensyn til parablen med ligning $py = x^2$.

34.3. Vis, at brændpunkt og tilsvarende ledelinie for et keglesnit er hinandens pol og polar.

34.4. Lad K være en kvadrik. Lad P være et punkt og H dets polar med hensyn til K. Et affint underrum U gennem P skærer K i en ikke udartet kvadrik K_1 og H i en affin hyperplan H' i U. Vis, at H' er polaren til P med hensyn til K_1 i rummet U.

34.4.1. Lad K være en kvadrik og P et punkt med polar H. En ret linie gennem P skærer K i punkterne R og S og H i punktet Q. Vis, at der findes et tal $\lambda \in \mathbb{R}$, for hvilket P, Q,R og S tilfredsstiller de affine relationer

$$(1+\lambda)P - \lambda R - S = 0$$
$$(\lambda-1)Q - \lambda R + S = 0.$$

Relationerne udtrykker, at de forhold, hvori P og Q deler liniestykket RS er λ og $-\lambda$, altså lige store på nær fortegn. Man siger så, at parret (P,Q) er harmonisk forbundet med (R,S), og dette er en symmetrisk relation mellem par af punkter på en ret linie.

Resultatet fra opgave 34.4 kan udnyttes til reduktion af opgaven til et lavere dimensionalt specialtilfælde, endog til et 1-dimensionalt tilfælde.

34.5. En kvadrik i $\mathbb{R}^4$ har ligningen

$$u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Find røringspunkterne for tangenthyperplanerne gennem $(1,1,1,1)$ og angiv en ligning for den keglesnitskegle, der har toppunkt i $(1,1,1,1)$ og indeholder røringspunkterne.

34.6. Vis, at der om en ellipse kan omskrives parallelogrammer, hvis sider er parallelle med et par konjugerede diametre. Vis, at alle sådanne parallelogrammer omskrevne om en given ellipse har samme areal.

34.7. En hyperbeltangent vil skære en trekant af den vinkel mellem asymptoterne, i hvilken røringspunktet ligger. Vis, at trekanten får samme areal for alle tangenter til samme hyperbel.

34.8. Lad A,B og C være vinkelspidser i en ikke udarter trekant i en affin plan, og lad (x,y,z) betegne barycentriske koordinater (trekantskoordinater) med hensyn til A,B og C. Vis, at

$yz + zx + xy = 0$ er ligning for en ellipse gennem A,B, og C, og at denne ellipses tangent i hver at trekantens vinkelspidser er parallel med den modstående side.

34.9. Afdelingerne af denne opgave går ud på i en række trin, at bevise to klassiske sætninger om keglesnit. Vi vil straks formulere sætningerne:

<u>Pascals sætning</u>. Lad $P_1,\dots,P_6$ være punkter på et ikke udartet keglesnit K. Da vil skæringspunkterne mellem P_1P_2 og P_4P_5, mellem P_2P_3 og P_5P_6 og mellem P_3P_4 og P_6P_1 ligge på ret linie. Hvis et af skæringspunkterne ikke eksisterer, fordi de pågældende linier er parallelle, vil forbindelseslinien mellem de to andre skæringspunkter være parallel med dem eller de to andre skæringspunkter vil heller ikke eksistere.

<u>Brianchon's sætning</u>. Lad $Q_1,\dots,Q_6$ være punkter, for hvilke de rette linier Q_1Q_2, $Q_2Q_3,\dots,$ Q_6Q_1 alle rører et ikke udartet keglesnit K. Da vil de rette linier Q_1Q_4, Q_2Q_5 og Q_3Q_6 gå gennem samme punkt.

34.9.1. Vi viser først, at sætningerne medfører hinanden.

Begge sætninger handler om et keglesnit K og en konfiguration af rette linier og punkter. Vi kan erstatte hvert punkt i konfigurationen med dets polar med hensyn til K og hver ret linie med dens pol med hensyn til K. Så viser sætningerne 34.2 og 34.3 i forbindelse med definition 34.4, at sætningerne medfører hinanden.

34.9.2. Lad os antage, at K er ellipsen med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vi betragter den elliptiske hyperboloide med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Så er 6-kanten $Q_1 \dots Q_6$ projektion af en ikke plan polygon $Q_1' \dots Q_6'$, hvis sider ligger på ellipsoidens frembringere, således at frembringere fra de to systemer veksler med hinanden. Det er nu let at vise Brianchon's sætning for for den ikke plane polygon ved rent geometriske betragtninger, idet det benyttes, at to frembringere, der ikke hører til samme system, ligger i en plan. Så fås Brianchon's sætning ved projektion.

34.9.3. For hyperblen med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

vises Brianchon's sætning på lignende vis ved at inddrage den elliptiske hyperboloide med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

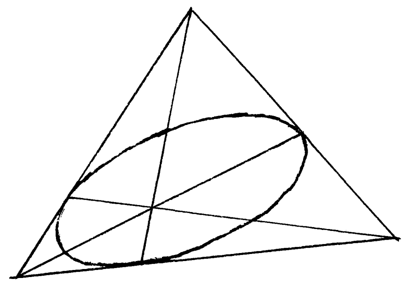
34.9.4. For parablen med ligning

$$pz = x^2$$

går beviset ved at inddrage den hyperbolske paraboloide med ligninger

$$pz = x^2 - y^2.$$

34.9.5. Beviserne for Pascals og Brianchon's sætninger virker også i de udartede situationer, hvor to på hinanden følgende af de 6 punkter falder sammen. I Pascals sætning skal den udartede polygonside da forstås som tangenten og ved Brianchon's sætning går to sider i hinandens forlængelse og røringspunktet fortolkes som skæringspunkt. Ved tre sådanne sammenfald fås trekantssætninger.

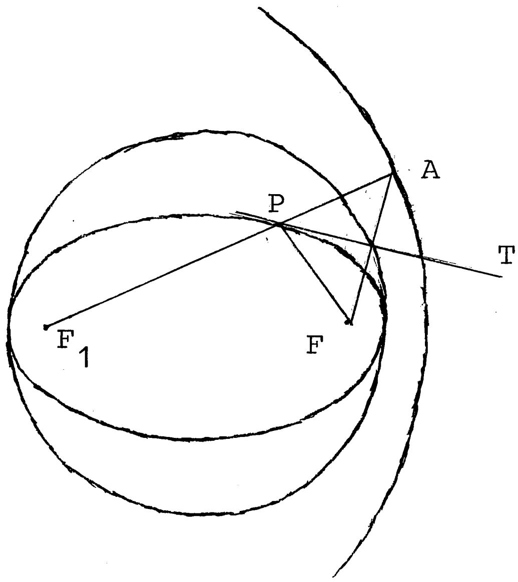


F.eks. som antydet på figuren. Når en ellipse er indskrevet i en trekant, vil de tre linier, der forbinder vinkelspidserne med røringspunktet på den modsatte side, gå gennem samme punkt.

KAPITEL 35

Tangenter til keglesnit.

De sætninger, som omtales i dette kapitel, er omtalt i nogle af de i skolen benyttede lærebøger, men når ikke altid at blive omtalt. De omhandler rent geometriske forhold vedrørende tangenter til keglesnit, og det er nyttigt at kende dem.



Lad (ξ,η) være et punkt af ellipsen med ligning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tangenten i (ξ,η) har ligningen

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

En ret linie vinkelret på tangenten gennem brændpunktet F med koordinater $(ae,0)$ har ligningen

$$\frac{\eta}{b^2}x - \frac{\xi}{a^2}y = \frac{\eta ae}{b^2} .$$

Denne linies skæringspunkt med tangenten får koordinaterne

$$(u,v) = \left(\frac{a^2b^2\xi+a^5e\eta^2}{b^4\xi^2+a^4\eta^2} , \frac{a^4b^2\eta-a^3b^2e\xi\eta}{b^4\xi^2+a^4\eta^2}\right) .$$

Vi udregner kvadratsummen af tællerne (læg mærke til, at de dobbelte produkter hæver hinanden).

$$(a^2b^4\xi+a^5e\eta^2)^2 + (a^4b^2\eta-a^3b^2e\xi\eta)^2 =$$

$$a^4(b^8\xi^2+a^4b^4\eta^2 + a^6e^2\eta^4+a^2b^4e^2\xi^2\eta^2) =$$

$$a^4(b^4\xi^2+a^4\eta^2)(b^4+a^2e^2\eta^2) .$$

Vi udnytter nu, at $a^2e^2 = a^2-b^2$ og dernæst, at $-a^2b^2\eta^2 = -a^2b^4+b^4\xi^2$, idet (ξ,η) passer i ellipsens ligning. Derved bliver udtrykket

$$a^4(b^4\xi^2+a^4\eta^2)(b^4+a^2\eta^2-b^2\eta^2) =$$

$$a^2(b^4\xi^2+a^4\eta^2)^2 .$$

Dermed har vi vist, at $u^2 + v^2 = a^2$. Det er følgende sætning:

<u>Sætning 35.1</u>. For en ellipse eller hyperbel gælder, at et brændpunkts projektion på en tangent ligger på cirklen med storaksen eller førsteaksen som diameter.

<u>Sætning 35.3.</u> Tangenten i et punkt af en hyperbel halverer vinklen mellem brændstrålerne til punktet. Tangenten i et punkt af en ellipse halverer nabovinklen til vinklen mellem brændstrålerne til punktet.

Vi mangler at undersøge, hvad der gælder for parablen. Det er heldigvis ganske let. Vi samler det i en enkelt sætning.

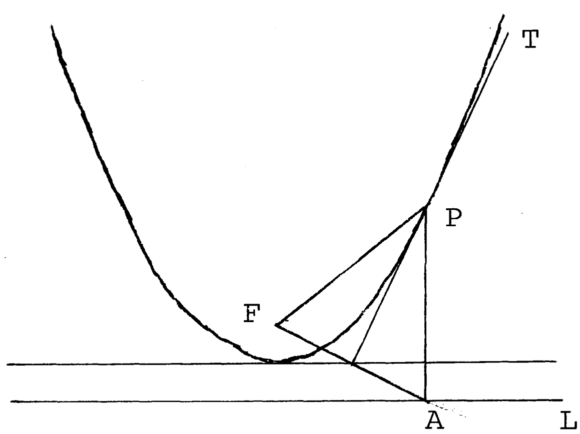
<u>Sætning 35.4.</u> Brændpunktets projektion på en parabeltangent ligger på parablens toppunktstangent. Brændpunktets symmetriske punkt med hensyn til en parabel tangent ligger på ledelinien. Tangenten i et punkt af en parabel halverer vinklen mellem brændstrålerne til punktet.

Bevis. Vi betragter parablen med ligning

$$py = x^2.$$

Tangenten i punktet P med koordinater (ξ,η) har ligningen

$$p(\eta+y) = 2\xi x,$$



og den skærer toppunktstangenten i punktet med koordinater $(\frac{p\eta}{2\xi},0) = (\frac{1}{2}\xi,0)$. Det ligger midt mellem brændpunktet F og punktet A med koordinater $(\xi, -\frac{p}{4})$ på ledelinien. Da P har samme afstand fra brændpunktet og ledelinien, får vi en ligebenet trekant FPA med tangenten som median fra toppunktet, men derfor tillige højde og vinkelhalveringslinie, og dermed er alle tre påstande bevist.

ØVELSER TIL KAPITEL 35

Stikord.

Tangent til keglesnit, brændpunkts projektion på tangent og dets symmetriske punkt med hensyn til tangent, sætninger om tangent og brændstråler, ellipse, hyperbel, parabel.

35.1. I et rektangel, hvis sider har længder a og b, projiceres en vinkelspids på den diagonal, den ikke ligger på. Vis, at længderne af de to stykker, hvori projektionen deler diagonalen, netop er koordinaterne til et punkt af ellipsen med ligning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

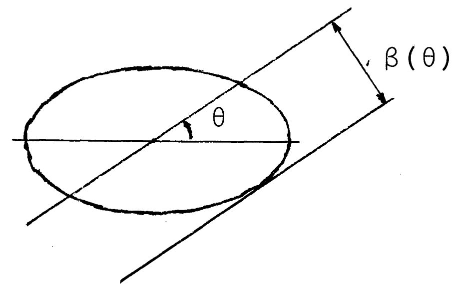
hvor tangentens vinkel med x-aksen er $\frac{3}{4}\pi$.

35.2. En ellipse er indskrevet i et kvadrat med side r, således at den rører alle 4 sider, og dens akser falder i diagonalerne. Hvor ligger brændpunkterne, når røringspunktet med en side har afstand d fra sidens nærmeste endepunkt.

35.3. På et stykke papir er indtegnet centrum, et brændpunkt og storaksens endepunkter for en ellipse. Desuden er der givet en ret linie L samt et punkt P. Find en nem metode til konstruktion af ellipsetangenterne parallelle med L og ellipsetangenterne gennem P ved hjælp af sædvanlige tegneremedier som lineal, passer og tegnetrekant. Punktet P må ligge udenfor ellipsen, hvis tangenterne gennem P eksisterer. Konstruktionen må sikre dette. Konstruer også tangenternes røringspunkter. Løs den tilsvarende opgave for en hyperbel og for en parabel.

35.4. Vis, at der blandt de cirkler, som ligger indeni en ellipse og rører den i et af storaksens endepunkter, er en, som er størst og angiv dennes radius. Blandt de cirkler, som omslutter ellipsen og rører den i et endepunkt af lilleaksen, findes der en, som er mindst. Angiv også dens radius. Mon der gælder noget lignende for hyperbel og parabel?

35.5. Med $\beta(\theta)$ betegner vi en ellipses halve bredde vinkelret på retningen bestemt ved vinklen θ, som vist på figuren. Udtryk $\beta(\theta)$ ved θ og længderne af ellipsens halvakser. Løs en tilsvarende opgave for en hyperbel.



35.6. Ligningerne

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-c^2} = 1$$

fremstiller for $k > 0$, $k \neq c^2$ en familie af ellipser og hyperbler med brændpunkter i $(\pm c, 0)$. Vi så i øvelse 31.7 , at der gennem hvert punkt udenfor koordinatakserne går netop 1 ellipse og 1 hyperbel. Vis, at disses tangenter i skæringspunkterne er vinkelrette på hinanden.

35.7. Angiv ligninger for de parabler i xy-planen, der har y-aksen som akse og skærer cirklen med ligningen $x^2 + y^2 = a^2$, således at cirkeltangenten og parabeltangenten i hvert skæringspunkt er vinkelrette på hinanden.

Stikordsregister.

Adjungeret afbildning 26.9
adjungeret matrix 26.4
affin afbildning 28.5
affine afbildninger, som lader en kvadrik invariant 39.8
affine egenskaber 29.19
affine rum 28
affinitet øv. 28.3
affint afhængig 28.12
affint uafhængig 28.12
affint underrum 28.4
affint underrum udspændt af mængde 28.11
afsluttet simplex 29.2
afgebraisk egenværdimultiplicitet 21.8
anden akse 31.7
Apollonius 31.13
approksimation af rod i polynomium 22.9
Archimedes 31.13
asymptote 31.11
asymptotekegle 32.11

Banach-rum 24.10, 25.12
barycentriske koordinater 29.1
basisskift 19
basisskift ved bilinearform 19.10
basisskift ved bilineær afbildning 19.11
basisskift ved endomorfi 19.9
basisskift ved lineær afbildning 19.5
beregning af egenværdier og egenvektorer 22
Bessels ligning 24.16, 25.11
Bessels ulighed 24.17
bestemmelse af centrum for kvadrik 30.11

Brianchou's sætning øv. 34.4
brændpunkter for ellipse 31.3
brændpunkter for hyperbel 31.2
brændpunktsprojektion på tangent 35.2, 35.4
brændpunkts symmetriske punkt med hensyn til tangent 35.3, 35.4
brændstråle 31.3

Cauchy-Schwarz' ulighed 24.3, 25.5
centrum for kvadrik 30.7
cirkler på keglesnitsflader øv. 32.2, øv. 32.3
confokale keglesnit øv. 31.5
cosinusrelationen 24.15
Cramers sætning 18.4
cylinderkvadrik 30.9

den pythagoræiske sætning 24.16
determinant for endomorfi 21.3
diagonalform af matricen for en normal endomorfi 27.5
diagonalform af matricen for en selvadjungeret afbildning 25.13
diagonalform af matricen for en sesquilinearform 26.16
diagonalform af matrix 21.19
dimension af affint rum 28.7
dimension (karakterisering af n-dimensionalitet) 29.11
drejningsakse 27.15

egenrum 21.19
egenvektor 21.1
egenværdi 21.1
egenværdier og egenvektorer for normale endomorfier 27.3
egenværdimultiplicitet 21.8
ekcentricitet 31.4

eksempel på udregning af karakteristisk polynomium 22.3
elimination 18.8
ellipse 31.3
ellipsoide 32.9
elliptisk cylinder 32.2
elliptisk hyperboloide 32.10
elliptisk kvadrik 30.11
elliptisk paraboloide 32.4
endomorfiers transformation ved unitært koordinatskifte 26.8
endomorfi i affint rum 28.10
entydighed af Jordans normalform 23.19
Euklid 31.13

fladtrykt omdrejningsellipsoide 32.9
Fourierrække 24.19, 25.12
frembringerrum 30.10
fuldstændigt rum 24.10
fundamentalfølge 24.10
første akse 31.7

geometrisk egenværdimultiplicitet 21.8
Gibb's fænomen øv. 24.9
Gram-Schmidt-ortogonalisering 24.12, 25.10
gruppen af ortogonale transformationer 27.13

halvakse 31.3
Hamilton-Cayley's sætning 21.15
harmonisk forbundne punktpar øv. 34.2
harmonisk svingning 24.19
Helly's sætning 29.10
Hermite'sk matrix 26.12

Hermite'sk sesquilinearform 25.3
Hilbertrum 24.10
Hilberts komplekse talrum 25.7
Hilberts talrum 24.6
homogent ligningssystem 18.1
hyperbel 31.7
hyperbolsk cylinder 32.2
hyperbolsk hyperboloide 32.13
hyperbolsk kvadrik 30.11
hyperbolsk paraboloide 32.6
hyperplan 29.12

indre produkt 24.1
induceret vektorafbildning 28.5
inhomogent ligningssystem 18.1
invariant metrik 24.5

Jordan-matrix 23.19
Jordans normalform 23
Jordans normalform for nilpotente matricer 23.12

karakteristisk polynomium 21.8
keglekvadrik 30.11
keglesnit 31
keglesnitsflader 32
keglesnitskegle 32.3
keglesnits ligning i polære koordinater med pol i et brænd-
punkt 31.3, 31.6, 31.9
Kepler 31.13
kilekvadrik 33.1
koefficienterne i det karakteristiske polynomium 22.2
koefficientmatrix 18.1

komplekst Euklidisk rum 29.20
komplekst vektorrum 25
komplekst vektorrum med indre produkt 25.4
konjugeret vektor 25.1
konveks mængde 29.4
konvekst hylster 29.5
koordinatskifte 26.6, 28.8
koordinatsystem 28.7
koordinattransformation ved basisskift 19.3
kvadrik 30
kvadrikker i 4-dimensionalt rum 33
kvadrikker i 3-dimensionalt rum 32.1
kvadrikkers affine egenskaber 34
kvadrikker, som indeholder keglesnitskegler 33.3
kvadrikker, som indeholder planer 33.4, øv. 33.3

λ-Jordan-matrix 23.10
(λ,r)-blok 23.10
langstrakt omdrejningsellipsoide 32.9
lede-keglesnitsflade 33.1
lede-kvadrik 30.10
ledelinie for ellipse 31.5
ledelinie for hyperbel 31.9
ledelinie for parabel 31.2
ligesidet hyperbolsk paraboloide 32.6
ligninger for affint underrum 28.19
ligning for omdrejningsflade øv. 32.6
lilleakse 31.3
lineære afbildninger, som bevarer indre produkt eller norm 26.2
lineært ligningssystem 18
lineær uafhængighed af egenvektorer 21.17
Lissajoux-kurver øv. 31.3
lokalisering af rødder i polynomium 22.8

massemidtpunkt 29.19
massetiltrækningsloven 31.14
matrix med nuller under diagonalen 21.9
matrix på diagonalform 21.19
metrisk rum 24.4
modulstruktur på vektorrum af matricer 19.6

Newton 31.15
nilpotent element i ring 23.2
nilpotent endomorfi af vektorrum 23.3
nilpotent matrix 23.3
norm 24.4
normal endomorfi 27
normbevarende afbildning 26.2
normbevarende endomorfi 26.3
normeret vektorrum 24.4
normer i $\mathbb{R}^n$ 24.8
numerisk løsning af lineært ligningssystem 18.17
nuller under diagonalen i en matrix 21.9

omdrejningsellipsoide 32.9
omdrejningskegle 32.4
omdrejningsparaboloide 32.5
omskrevne keglesnitskegler og cylindre 34.28
ortogonal 24.11, 25.9
ortogonale underrum 25.13
ortogonal matrix 26.4
ortogonalsystem 24.11
ortogonalt komplement 24.20, 25.13
ortonormalsystem 24.11, 25.9

parabel 31.2
parabolsk cylinder 32.2
parabolsk kvadrik 30.11
parallelforskydning 28.6, 28.8, 28.10
parallelle affine underrum 28.20
parallelle snit i kvadrikker 34.21
parallelogram 28.3
parameter for ellipse 31.6
parameter for parabel 31.2
parameterfremstilling for affint underrum 28.19
Parsevals ligning 24.19
Pascals sætning øv. 34.4
planbundt 18.15
planetbevægelse 31.13
planknippe 18.16
planslignung og parameterfremstilling 18.11
Plückerske liniekoordinater øv. 18.18
pol 34.4
polar 34.4
positiv definit 24.2, 25.3
positiv semidefinit 25.3

rand af simplex 29.9
randpunkt for konveks mængde 29.13
rationale rødder i polynomier 22.5
reelt affint rum 29
reelt delrum 25.2
reelt Euklidisk rum 29.18
reelt vektorrum 24
regneregler for egenværdier og egenvektorer øv. 21.5
rette linier i keglesnitsflader 32.7, 32.11

Schwarz 24.7
selvadjungeret endomorfi 26.11
sesquilinearform 25.3
sesquilinearforms transformation ved koordinatskifte 26.7
side i simplex 29.2
σ-konjugeret 34.18
simplex 29.2
skalarprodukt 24.1
skift af legeme 20
skæring mellem planer 18.12
spaltning af endomorfi i nilpotent og bijektiv komponent 23.14
spektrum 21.2
standardform for reelle normale endomorfiers matricer 27.6
standardform for reelle ortogonale matricer 27.11
standardform for unitære matricer 27.9
stedvektor 28.3
storakse 31.3
strubeellipse 32.10
støttehyperplan 29.13
støttelinie 29.14
symmetri 30.7
symmetricentrum 30.7

tangent 34.8
tangenthyperplan 34.4
tangent og brændstråler 35.4
tangentplan 34.8
tangent til keglesnit 35
tensorregning 19.13
totalmatrix 18.11
transformation 19.2
trekantsmatrix 21.9
type af λ-Jordan-matrix 23.11

udartet simplex 29.3
udregning af egenvektorer 22.12
udregning af et polynomiums værdi 22.6
udvidelse af vektorrumsendomorfi ved udvidelse af legemet 20.4
udvidelse af vektorrum ved udvidelse af legemet 20.4
unitær endomorfi 27.1
unitær matrix 26.4

vektor fra punkt til punkt 28.3
vinkel 24.11

ægte side i simplex 29.3

øvre trekantsmatrix 21.9

åbent simplex 29.2