Forelæsningsnoter

A L G E B R A I S K   T O P O L O G I

I

MÆNGDETEORETISK TOPOLOGI

HOMOTOPI

FUNDAMENTALGRUPPEN OG OVERLEJRING

Hans Tornehave

FORORD

Disse forelæsningsnoter er tænkt som grundlag for en undervisning i algebraisk topologi ved Københavns Universitets Matematiske Institut. Der er planlagt i alt tre hefter, som hver skal svare til tre eksamenspunkter.

Dette første hefte beskæftiger sig med de mest grundlæggende afsnit af den algebraiske topologi. Den mængdeteoretiske topologi er behandlet om end noget kortfattet i de første kapitler. Der er heller ikke forudsat kendskab til algebra ud over det mest elementære.

Selv om dette kursus i algebraisk topologi kun i beskedent omfang udnytter resultater fra andre matematikkurser, har det dog nær tilknytning til mange aspekter i matematikkurserne 1,2,3 og 6, og til mange 2. dels kurser. Den algebraiske topologi er især nært knyttet til homologisk algebra, differentiable mangfoldigheders teori, kompleks funktionsteori og algebraisk geometri.

I den algebraiske topologi varer det desværre ret længe at nå frem til virkelig interessante resultater. Det må derfor varmt anbefales læseren ikke at nøjes med det første hefte.

... es ist ein gross Ergetzen,
Sich in den Geist der Zeiten zu versetzen;
Zu schauen, wie vor uns ein weiser Mann gedacht,
Und wie wirs dann zuletzt so herrlich weit gebracht.

Wagner [1)]

---

1) Person i Goethes Faust. Han er Fausts amanuensis, nok nærmest en moderat student. Faust selv er vel nærmest beatnik, altså lidt for umoderne for et arbejde i algebraisk topologi.

Kapitel 1.

TOPOLOGI

Et topologisk rum er en mængde med en struktur, der sikrer, at det har en mening at tale om, at en afbildning af et topologisk rum på et andet er kontinuert. Topologiske rum A og B kaldes indbyrdes homøomorfe, når der findes en kontinuert, bijektiv afbildning $f: A \to B$, hvis inverse afbildning også er kontinuert. Topologien beskæftiger sig med de egenskaber ved topologiske rum, der er invariante overfor homøomorfier.

I dette kapitel skal vi kort gennemgå den generelle teori for topologiske rum og kontinuerte afbildninger samt omtale de første specielle eksempler på topologiske rum.

<u>Definition</u> 1.1. Ved en topologi på en mængde M forstås et system $\hat{O}$ af delmængder af M, således at $\emptyset, M \in \hat{O}$, og således at foreningsmængden af vilkårlige mængder fra $\hat{O}$ igen tilhører $\hat{O}$, og fællesmængden af endelig mange mængder fra $\hat{O}$ tilhører $\hat{O}$. Mængderne i $\hat{O}$ kaldes åbne, og $T = (M, \hat{O})$ kaldes et topologisk rum. Vi skriver $x \in T$, $A \subseteq T$ for $x \in M$, $A \subseteq M$, og vi taler om punkt, punktmængde i T. Ved en omegn af $x \in T$ forstår vi en punktmængde, der har en åben delmængde med x som element. Ved en afsluttet mængde i T forstår vi komplementærmængden til en afsluttet mængde.

Systemet $\hat{A}$ af afsluttede mængder indeholder $\emptyset$ og M. En vilkårlig fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet, og en foreningsmængde af endelig mange afsluttede mængder er afsluttet.

Foreningsmængden af alle åbne delmængder af en mængde B er den største åbne delmængde af B og omfatter netop de punkter, der har B som omegn. De kaldes indre punkter i B og mængden $\mathring{B}$ af sådanne kaldes det indre af B. En åben mængde er en mængde, der er identisk med sit indre. Afbildningen $B \to \mathring{B}$ er idempotent, $\mathring{\mathring{B}} = \mathring{B}$. De indre punkter i komplementærmængden $T \setminus B$ kaldes ydre punkter for B, og mængden af sådanne kaldes det ydre for B. Fællesmængden $\overline{B}$ for alle afsluttede mængder, der indeholder B, er den mindste afsluttede mængde, som indeholder B, og den kaldes afslutningen af B. Dens punkter kaldes kontaktpunkter for B, og det er netop de punkter, som ikke er ydre. At x er kontaktpunkt for B er ensbetydende med, at enhver omegn af x indeholder punkter af B.

Ved randen af B forstår vi mængden af punkter i B, som hverken er indre i B eller ydre for B, altså de kontaktpunkter, der ikke er indre punkter. At $x \in T$ er randpunkt for B er ensbetydende med, at enhver omegn af x indeholder et punkt af B og et punkt af komplementærmængden.

<u>Sætning 1.2.</u> For de ved $B \to \mathring{B}$ og $B \to \overline{B}$ definerede afbildninger gælder

$$\mathring{T} = T, \qquad \overline{\emptyset} = \emptyset,$$
$$\mathring{B} \subseteq B, \qquad \overline{B} \supseteq B,$$
$$\mathring{\mathring{B}} = \mathring{B}, \qquad \overline{\overline{B}} = \overline{B},$$
$$(B_1 \cap B_2)^\circ = \mathring{B}_1 \cap \mathring{B}_2, \qquad \overline{B_1 \cup B_2} = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2.$$

Enhver tilordningslov $B \to \mathring{B}$ eller $B \to \overline{B}$, som tilfredsstiller de fire betingelser, definerer en topologi på T, idet $B = \mathring{B}$ definerer de åbne og $B = \overline{B}$ de afsluttede mængder.

Bevis. Det er nok at se på $B \to \mathring{B}$, da den anden halvdel af sætningen fås ved overgang til komplementærmængder. De to første betingelser er trivielle, og den tredie er bevist ovenfor. Det er klart, at $(B_1 \cap B_2)^\circ$ er del af såvel $\mathring{B}_1$ som $\mathring{B}_2$. På den anden side er $\mathring{B}_1 \cap \mathring{B}_2$ åben og del af $B_1 \cap B_2$, altså del af $(B_1 \cap B_2)^\circ$. Dermed har vi vist de fire betingelser. Lad nu $B \to \mathring{B}$ opfylde de fire betingelser, og lad os definere, at O åben betyder $O = \mathring{O}$. Så giver den første betingelse, at T er åben, og den anden, at $\emptyset$ er åben. Den fjerde betingelse siger helt direkte, at foreningsmængden af 2 (og dermed n) åbne mængder er åben, og desuden at $A \subseteq B \Longrightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$, og deraf følger igen, at en vilkårlig foreningsmængde af åbne mængder er åben. Dermed har vi vist, at $B \to \mathring{B}$ definerer en topologi $\hat{O}$. Lad nu B^* være det indre af B i denne topologi. Da B^* er åben, er $\mathring{B}^* = B^*$, og af $B^* \subseteq B$ følger $B^* \subseteq \mathring{B}$. Den tredie betingelse giver, at $\mathring{B}$ er åben, så vi har $\mathring{B} \subseteq B^*$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 1.3. Mængden $\grave{\mathcal{U}}(x)$ af omegne af $x \in T = (M, \hat{O})$ tilfredsstiller følgende betingelser:

1). $\grave{\mathcal{U}}(x) \neq \emptyset$; $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x) \Longrightarrow x \in \mathcal{U}$; $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x) \wedge \mathcal{V} \supseteq \mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{V} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$.

2). $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \grave{\mathcal{U}}(x) \Longrightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$.

3). For $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$ findes $\mathcal{V} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$, så $\mathcal{U}$ er omegn af ethvert punkt i $\mathcal{V}$.

Hvis $\grave{\mathcal{U}}$ er en afbildning, der tilfredsstiller disse tre betingelser, og vi definerer en åben mængde O, som en mængde, der er omegn af ethvert punkt $x \in O$, vil følgende betingelse være opfyldt:

3'). Enhver omegn af x indeholder en åben omegn af x.

Endvidere vil de åbne mængder definere en topologi, således at $\grave{\mathcal{U}}(x)$ netop bliver mængden af omegne af x.

Bevis. Det ses umiddelbart, at $\grave{\mathcal{U}}$ tilfredsstiller 1), 2) og 3') og dermed 3). Hvis $\grave{\mathcal{U}}$ tilfredsstiller 1), 2), 3) og "åben" defineres som anført, er det klart, at en topologi bliver defineret, og $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$ vil medføre $x \in \mathring{\mathcal{U}}$, så 3') bliver opfyldt. Heraf følger umiddelbart, at $\grave{\mathcal{U}}(x)$ bliver mængden af omegne i den topologi, der defineres ved de åbne mængder.

<u>Definition</u> 1.4. Lad $\grave{\mathcal{U}}(x)$ være mængden af omegne af $x \in \mathcal{T}$. En delmængde $\grave{\mathcal{B}}(x) \subseteq \grave{\mathcal{U}}(x)$ kaldes en basis for $\grave{\mathcal{U}}(x)$, hvis hver omegn $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$ har en delmængde, der tilhører $\grave{\mathcal{B}}(x)$, og $\grave{\mathcal{B}}(x) \subseteq \grave{\mathcal{U}}(x)$ kaldes en subbasis for $\grave{\mathcal{U}}(x)$, hvis hver omegn $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{U}}(x)$ har en delmængde, der er fællesmængde for endelig mange omegne, som tilhører $\grave{\mathcal{B}}(x)$.

Hvis $\grave{\mathcal{B}}(x)$ er en basis for $\grave{\mathcal{U}}(x)$, bliver en omegn af x helt det samme som en mængde med en delmængde, der tilhører $\grave{\mathcal{B}}(x)$. Hvis $\grave{\mathcal{B}}(x)$ er en subbasis for $\grave{\mathcal{U}}(x)$, bliver en omegn af x det samme som en mængde med en delmængde, der er fællesmængde for endelig mange mængder, der tilhører $\grave{\mathcal{B}}(x)$. En basis eller subbasis for omegnene af hvert punkt fastlægger derfor topologien.

Vi kan altså definere topologien ved en afbildning $\grave{\mathcal{B}}$, som til hvert punkt x knytter en basis $\grave{\mathcal{B}}(x)$ for mængden af omegne. Derved er det nok at kræve følgende betingelser opfyldt:

1). $\grave{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset$; $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{B}}(x) \Longrightarrow x \in \mathcal{U}$.

2). For $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \grave{\mathcal{B}}(x)$ findes $\mathcal{W} \in \grave{\mathcal{B}}(x)$, så $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

3). For $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{B}}(x)$ findes $\mathcal{V} \in \grave{\mathcal{B}}(x)$, så hvert $y \in \mathcal{V}$ har et $\mathcal{W} \in \grave{\mathcal{B}}(y)$ med $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$.

Hvis $\grave{\mathcal{B}}(x)$ blot skal være subbasis, kan 2) undværes og 3) svækkes til:

3'). For $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{B}}(x)$ findes $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p \in \grave{\mathcal{B}}(x)$, så der for hvert $y \in \mathcal{V}_1 \cap \dots \cap \mathcal{V}_p$ findes $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_q \in \grave{\mathcal{B}}(y)$, så $\mathcal{W}_1 \cap \dots \cap \mathcal{W}_q \subseteq \mathcal{U}$.

<u>Definition</u> 1.5. Lad $\mathcal{T} = (M, \hat{\mathcal{O}})$ være et topologisk rum. Et system $\hat{\mathcal{O}}' \subseteq \hat{\mathcal{O}}$ kaldes en basis for $\hat{\mathcal{O}}$ (eller for $\mathcal{T}$), hvis enhver åben mængde er foreningsmængde af mængder fra $\hat{\mathcal{O}}'$, og $\hat{\mathcal{O}}'$ kaldes en subbasis for $\hat{\mathcal{O}}$ $(\mathcal{T})$, hvis alle fællesmængder af endelig mange mængder fra $\hat{\mathcal{O}}'$ udgør en basis for $\hat{\mathcal{O}}$.

Det er klart, at en basis eller en subbasis fastlægger topologien. Et system af mængder kan bruges som subbasis for en topologi, hvis de blot dækker hele rummet, og der findes et endeligt delsystem med tom fællesmængde. Skal systemet være en basis, kræves yderligere, at enhver fællesmængde for endelig mange mængder i systemet igen hører med.

<u>Definition</u> 1.6. Lad $\mathcal{S}$ og $\mathcal{T}$ være topologiske rum. En afbildning $f: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ kaldes kontinuert i et punkt $x \in \mathcal{S}$, hvis det for enhver omegn $\mathcal{U}$ af $f(x)$ gælder, at $f^{-1}(\mathcal{U})$ er en omegn af x. Den kaldes kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert punkt af $\mathcal{S}$.

Det er klart, at kontinuitet bevares ved sammensætning af afbildninger.

<u>Sætning</u> 1.7. Lad $\mathcal{S}$ og $\mathcal{T}$ være topologiske rum, og lad $f: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ være en afbildning. Da er følgende fire betingel-

ser ækvivalente:

1). f er kontinuert.

2). For enhver åben mængde $O \subseteq T$ er $f^{-1}(O)$ åben.

3). For enhver afsluttet mængde $A \subseteq T$ er $f^{-1}(A)$ afsluttet.

4). For enhver mængde $B \subseteq T$ gælder $f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.

Bevis. Det er klart, at 2) $\iff$ 3). Da det er nok, at kontinuitetsbetingelsen er opfyldt for åbne omegne, gælder 2) $\Rightarrow$ 1). Endvidere gælder 4) $\Rightarrow$ 3). For en afsluttet mængde $A \subseteq T$ giver 4) nemlig $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(A)})) \subseteq f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(A))}) = f^{-1}(\bar{A}) = f^{-1}(A)$. Vi mangler at vise, at 1) $\Rightarrow$ 4). Hvis 1) gælder, er $f^{-1}(T \setminus \overline{f(B)}) = S \setminus f^{-1}(\overline{f(B)})$ omegn af hvert af sine punkter, så $f^{-1}(\overline{f(B)})$ er afsluttet. Dette medfører, at $\bar{B} \subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$, og heraf følger 4) umiddelbart. Dermed er sætningen bevist.

Vi skal ikke beskæftige os med særlig patologiske rum i algebraisk topologi, men for at få metoderne til at fungere godt, må man tillade rum, der lige netop er så komplicerede, at vi ikke kan indføre en metrik, der frembringer topologien. For det meste kan vi dog arbejde med metriske rum. Vi minder om definitionen:

Definition 1.8. Ved en metrik på en mængde M forstås en afbildning dist: $M \times M \longrightarrow [0, \infty[$, som opfylder betingelserne dist $(x, x) = 0$, dist $(x, y) > 0$ for $x \neq y$, dist $(y, x) =$ dist (x, y) samt trekantuligheden dist $(x, z) \leq$ dist (x, y) + dist (y, z) . Vi kalder $T = (M, \text{dist})$ et metrisk rum. Mængden $K(x, r) = \{y \in T \mid \text{dist}(x, y) < r\}$, $r > 0$, kaldes kugleomegnen af x med radius r.

For $y \in K(x, r)$ giver trekantuligheden, at

$K(y, r - \text{dist}(x,y)) \subseteq K(x,r)$. Derfor kan kugleomegnene bruges som omegnsbasis i en topologi, den af metrikken dist inducerede topologi.

De euklidiske rum $\grave{R}^n$, samt Hilbert-rummet, er eksempler på metriske rum. Metrik nedarves ved restriktion til delrum, som derved igen bliver metriske rum.

For et vilkårligt topologisk rum T og delmængde $A \subseteq T$ indfører vi delrumstopologi på A, idet vi definerer systemet af åbne mængder ved $\hat{O}_A = \{ O \cap A | O \in \hat{O} \}$. En mængde på A bliver da afsluttet, hvis og kun hvis den er fællesmængde for A og en afsluttet mængde på T. For $x \in A$ er en omegn af x relativt til A det samme som fællesmængden for A og en omegn af x i T. For $B \subseteq A$ får vi en relativ afslutning $\tilde{B} = A \cap \bar{B}$, men der gælder ikke en analog relation for det indre af B.

Det ses let, at både kontinuitets- og delrumsbegrebet stemmer med det sædvanlige begreb for metriske rum.

Hvis en mængde M er forsynet med to topologier, så vi har $T_1 = (M, \hat{O}_1)$, $T_2 = (M, \hat{O}_2)$ og $\hat{O}_1 \supseteq \hat{O}_2$, siger vi, at $\hat{O}_1$ er finere end $\hat{O}_2$ (og $\hat{O}_2$ grovere end $\hat{O}_1$). Hvis de yderligere er forskellige, siger vi strengt finere (grovere). Derved bliver mængden af topologier på M en ordnet mængde. Den diskrete topologi, i hvilken alle mængder er åbne, er den fineste topologi på M, og den trivielle topologi, i hvilken $\emptyset$ og M er de eneste åbne mængder, er den groveste topologi på M. Skift til en finere topologi på M betyder flere åbne og afsluttede mængder, flere indre og ydre punkter, mindre rand og afslutning, flere kontinuerte afbildninger fra M og færre til M.

Lad M være en mængde, og lad $(\hat{O}_j \mid j \in J)$ være en hel familie af topologier på M. Så er $\bigcap_{j\in J} \hat{O}_j$ også en topologi på M, og det er den fineste topologi, som er grovere end alle topologierne i familien, familiens infimum. Derimod $\bigcup_{j\in J} \hat{O}_j$ ikke altid en topologi, men i hvert fald altid en subbasis for en topologi på M, den groveste topologi, som er finere end alle i familien, familiens supremum.

Sætning 1.9. Lad M være en mængde, $(T_j \mid j\in J)$ en familie af topologiske rum og $(f_j \mid j\in J)$ en familie af afbildninger $f_j : M \longrightarrow T_j$. Der findes da netop én topologi på M, for hvilken en afbildning $g : S \rightarrow M$ bliver kontinuert, hvis og kun hvis alle $f_j \circ g : S \rightarrow T_j$ er kontinuerte, og den derved definerede topologi er den groveste, for hvilken alle f_j bliver kontinuerte. Den kaldes den ved afbildningerne f_j bestemte initialtopologi på M.

Bevis. Lad $\hat{O}$ være en topologi på M og $T = (M, \hat{O})$. Så er $1_T : T \rightarrow T$ (den identiske afbildning) kontinuert, og hvis $\hat{O}$ skal opfylde sætningens betingelser, må alle $f_j = f_j \circ 1_T : T \rightarrow T_j$ være kontinuerte. Heraf følger, at $\hat{O}$ omfatter alle mængder $f_j^{-1}(O_j)$, hvor $O_j \subseteq T_j$ er åben, og $\hat{O}$ er derfor finere end topologien, der har alle sådanne mængder som subbasis. Lad $\hat{O}_0$ være denne topologi og $T_0 = (M, \hat{O}_0)$. For den identiske afbildning $1_M : T_0 \rightarrow T$ er alle sammensætninger $f_j \circ 1_M = f_j : T_0 \longrightarrow T_j$ kontinuerte, så 1_M er kontinuert, altså $\hat{O}_0$ finere end $\hat{O}$. Altså er $\hat{O} = \hat{O}_0$. Dermed har vi vist, at der højst findes én topologi med den omtalte egenskab, og at det er den groveste topologi, for hvilken alle f_j er kontinuerte.

Det er på forhånd klart, at $g : S \rightarrow T_0$ ikke kan være kontinuert, uden at enhver sammensætning $f_j \circ g : S \to T_j$ er det. Lad os nu antage, at alle disse sammensætninger er kontinuerte. For at vise, at g er kontinuert, er det nok at vise, at det for enhver mængde $f_j^{-1}(O_j)$ fra subbasis gælder, at $g^{-1}(f_j^{-1}(O_j)) = (f_j \circ g)^{-1}(O_j)$ er åben , men det gælder netop, da $f_j \circ g$ er kontinuert og $O_j \subseteq T_j$ åben. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 1.10. Lad M være en mængde, $(S_j \mid j \in J)$ en familie af topologiske rum og $(f_j \mid j \in J)$ en familie af afbildninger $f_j : S_j \to M$. Der findes da netop én topologi på M, for hvilken en afbildning $g : M \to T$ bliver kontinuert, hvis og kun hvis alle $g \circ f_j : S_j \to T$ er kontinuerte, og den derved definerede topologi er den fineste, for hvilken samtlige f_j bliver kontinuerte. Den kaldes den ved afbildningerne f_j bestemte finaltopologi på M.

Bevis. Lad $\hat{O}$ være en topologi på M og $S = (M, \hat{O})$. Så er $1_S : S \to S$ kontinuert, og hvis $\hat{O}$ skal opfylde sætningens betingelser, må alle $1_S \circ f_j = f_j : S_j \to S$ være kontinuerte. Heraf følger, at $\hat{O}$ højst kan omfatte de mængder O, for hvilke $f_j^{-1}(O) \subseteq S_j$ er åben for ethvert $j \in J$. Altså er $\hat{O}$ grovere end topologien $\hat{O}_0$, der omfatter netop disse mængder. Vi sætter $S_0 = (M, \hat{O}_0)$ og $1_M : S \to S_0$ er da kontinuert, da alle $f_j \circ 1_M$ er det, og deraf følger, at $\hat{O} = \hat{O}_0$. Dermed har vi bevist, at der højst findes én topologi med den omtalte egenskab, og at det er den fineste topologi, for hvilken alle f_j er kontinuerte.

Det er klart, at $g : S_0 \to T$ ikke kan være kontinuert, uden at alle $g \circ f_j$ er det. Hvis de er kontinuerte og $O \subseteq T$ åben, er alle $f_j^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_j)^{-1}(O)$ åbne, men det betyder netop, at $g^{-1}(O)$ er åben, altså g kontinuert. Dermed er sætningen bevist.

Den ikke helt fuldendte dualitet mellem sætningerne 1.9 og 1.10 er ganske typisk i topologien.

Hvis T er et topologisk rum og $A \subseteq T$ en delmængde, er delrumstopologien på A netop den ved inklusionsafbildningen $j: A \to T$ definerede initialtopologi.

Lad $(T_j \mid j \in J)$ være en familie af topologiske rum. Vi definerer da topologien på produktrummet $T = \prod_{j \in J} T_j$ som den ved projektionerne $p_j: T \to T_j$ bestemte initialtopologi. En basis for de åbne mængder på T kommer til at bestå af alle produkter $\prod_{j \in J} O_j$, hvor hver $O_j \subseteq T_j$ er åben, og hvor $O_j = T_j$ undtagen for endelig mange j.

Det duale begreb til et delrum er et klasserum. Hvis S er et topologisk rum, som er delt i klasser, har vi en kanonisk afbildning $k: S \to M$, hvor M er mængden af klasser, og klasserummet er M med den ved k bestemte finaltopologi.

Med S^1 betegner vi altid enhedscirklen i den komplekse plan. Vi har en indlejring $S^1 \subseteq \grave{C} = \grave{R}^2$, og topologien på S^1 er delrumstopologien. Vi har en kanonisk afbildning $k: \grave{R} \to S^1$ defineret ved $k(t) = e^{2\pi i t}$ svarende til en klasseinddeling af $\grave{R}$, hvor to punkter er i samme klasse, når forskellen er et helt tal. Det ses umiddelbart, at topologien på S^1 netop er den ved k bestemte finaltopologi, og desuden er k en homomorfi fra gruppen $\grave{R}$ med addition til gruppen S^1 med multiplikation.

Produktrummet $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n faktorer) kaldes den n-dimensionale torus. Den kanoniske afbildning $k: \grave{R} \to S^1$ inducerer en kanonisk afbildning $k^n: \grave{R}^n \to T^n$, og den ved k^n bestemte finaltopologi er identisk med produktrumstopologien. Den naturlige indlejring $S^1 \subseteq \grave{C}$ inducerer en naturlig indlejring $T^n \subseteq \grave{C}^n = \grave{R}^{n}$, og delrumstopologien bliver identisk med produktrumstopologien.

Med $I \subseteq \grave{R}$ betegner vi altid intervallet $[0,1]$, og $I^n = I \times \cdots \times I$ (n faktorer)er den n-dimensionale enhedsterning. Produkttopologien på I^n er identisk med delrumstopologien fra $\grave{R}^n$. Ved restriktion af $k^n: \grave{R}^n \to T^n$ får vi en kanonisk afbildning $k_0^n: I^n \to T^n$, og topologien på T^n er også finaltopologien bestemt ved k_0^n.

Topologien på $\grave{R}^n$ induceres af den metrik, der svarer til normen $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Den n-dimensionale sfære (n-sfæren) S^n er mængden af punkter $\underline{x} \in \grave{R}^{n+1}$ med $\|\underline{x}\| = 1$ med delrumstopologien. Mængden af punkter $\underline{x} \in \grave{R}^{n+1}$ med $\|\underline{x}\| \leq 1$ udgør $n+1$-cellen E^{n+1}, der har S^n som rand. Ved den naturlige indlejring $T^n \subseteq \grave{R}^{2n}$ efterfulgt af en multiplikation med $\frac{1}{\sqrt{n}}$ bliver T^n indlejret i $2n-1$-sfæren.

Ved

$$\varphi(\underline{x}) = \left(2x_1\sqrt{\frac{1-\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}}, \ldots, 2x_n\sqrt{\frac{1-\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}}, 1-2\|\underline{x}\|\right) \text{ for } \underline{x} \neq 0$$

og $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$ defineres en kanonisk afbildning $\varphi: E^n \to S^n$, som afbilder det indre af E^n bijektivt og hele S^{n-1} i et punkt. Det er let at se, at topologien på S^n er den ved φ inducerede finaltopologi.

Vi skal indføre et begreb, som er dualt til produktrummet.

Lad $(T_j \mid j \in J)$ være en familie af topologiske rum. Mængden T af alle par (j, x) med $j \in J$, $x \in T_j$ kaldes den disjunkte forening af rummene T_j, og den forsynes med finaltopologien bestemt ved de naturlige indlejringer $h_j : T_j \to T$, hvor $h_j(x) = (j, x)$. Det betyder, at billederne af de åbne mængder i rummene T_j er basis for de åbne mængder i T. Vi skriver $T = \bigvee_{j \in J} T_j$.

Lad X og Y være topologiske rum, $A \subseteq X$ en delmængde og $f: A \to Y$ en kontinuert afbildning. Med $X \cup_f Y$ betegner vi det rum, der fås af den disjunkte forening $X \vee Y$ ved den kanoniske afbildning, der slår et punkt af Y og alle punkter af A, der afbildes på det, sammen i en klasse. Rummet $X \cup_f Y$ forsynes med finaltopologien bestemt ved den kanoniske afbildning. Vi siger, at $X \cup_f Y$ fås ved at klæbe X til Y ved klæbeafbildningen $f: A \to Y$. Vi har naturlige afbildninger af X og Y ind i $X \cup_f Y$, og Y indlejres endda injektivt. En mængde i $X \cup_f Y$ er åben (afsluttet), hvis og kun hvis dens originalmængder i X og Y er åbne (afsluttede). Særlig interesse har påklæbning af en n-celle E^n på et rum X ved en klæbeafbildning $\varphi: S^{n-1} \to X$.

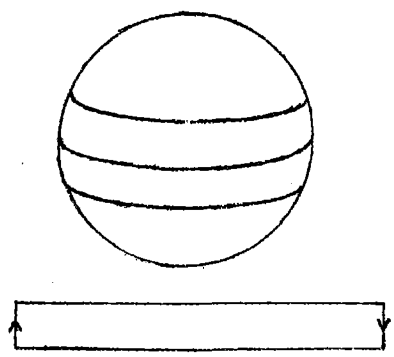
Et punkt $\underline{x} \in \grave{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ er helt fastlagt ved normen $\|\underline{x}\|$ og punktet $\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in S^n$, og det ses let at $\grave{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ er homøomorft med $S^n \times]0, \infty[$. Derved defineres en projektion $p' : \grave{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \to S^n$, og topologien på S^n er netop finaltopologien. Endvidere er p' kanonisk afbildning svarende til klasseinddelingen af $\grave{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ i halvlinier ud fra $\underline{0}$.

Vi får en anden klasseinddeling af $\grave{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ved at benytte hele linier gennem $\underline{0}$ i stedet for halvlinier. Derved får vi det

n -dimensionale projektive rum P^n, hvis topologi er finaltopologien bestemt ved den kanoniske afbildning $p'': \dot{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow P^n$ eller ved den kanoniske afbildning $p_0': S^n \longrightarrow P^n$, der afbilder antipodiske punkter x og $-x$ i samme punkt, og som i øvrigt er bestemt ved, at $p'' = p_0' \circ p'$.

Vi foretrækker at skrive $p_n: S^n \longrightarrow P^n$. Ved $y(x_1, \cdots x_{n-1}) = (x_1, \cdots x_{n-1}, 0)$ får vi S^{n-1} indlejret som ækvator i S^n og restriktionen af p_n giver netop $p_{n-1}: S^{n-1} \longrightarrow P^{n-1}$, så vi får også en naturlig indlejring $P^{n-1} \subseteq P^n$. Den "nordlige" halvsfære af S^n afbildes ved projektion homøomorft på n-cellen med ækvator som rand, og fra topologisk synspunkt er den nordlige halvsfære E_+^n derfor en n-celle. Ved restriktion af p_n til E_+^n får vi en kanonisk afbildning $p_n': E^n \longrightarrow P^n$, hvis restriktion til randen er p_{n-1}. Heraf ses, at P^n fås af P^{n-1} ved at klæbe E^n på P^{n-1} med $p_{n-1}: S^{n-1} \longrightarrow P^{n-1}$ som klæbeafbildning.

Vi bemærker, at $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \dot{R}$, medens P^0 er 1 punkt. Vi får P^1 ved at klæbe 1-cellen $E^1 = [-1, 1]$ til punktet, så både -1 og 1 identificeres med punktet, men det stemmer med, at P^1 er homøomorf med S^1, så P^1, S^1 og T^1 er i virkeligheden det samme rum.



Ved restriktion af $p_2: S^2 \longrightarrow P^2$ til et bælte omkring ækvator får vi en kanonisk afbildning af dette bælte på et delrum $M \subseteq P^2$, Möbius-båndet. Vi kan få M af et rektangel ved identifikation af et par modstående sider med modsat gennemløb. Möbiusbåndets rand er homøomorf med S^1, og P^2 kan også fås ved at klæbe E^2 på M ved en klæbeafbildning, der afbilder randen af E^2 homøomorft på randen af M.

I rummet $\grave{C}^n = \grave{R}^{2n}$ har vi enhedssfæren S^{2n-1} og $\grave{C}^n \setminus \{0\}$ er homøomorf med $S^{2n-1} \times]0,\infty[$ og vi har projektionen $p': \grave{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{2n-1}$. I $\grave{C}^n \setminus \{0\}$ kan vi også indføre en klasseinddeling ved, at punkter skal i samme klasse, hvis de fås af hinanden ved multiplikation med et komplekst tal $\neq 0$. Klasserne er "komplekse rette linier" gennem 0. Vi får derved en kanonisk afbildning $p'': \grave{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow CP^{n-1}$, hvor CP^{n-1} kaldes det n-1-dimensionale komplekse projektive rum. Vi får også en kanonisk afbildning $p: S^{2n-1} \longrightarrow CP^{n-1}$, og her kommer punkter i samme klasse, når de fås af hinanden ved multiplikation med et komplekst tal med numerisk værdi 1. For $x \in CP^{n-1}$ er $p^{-1}(x)$ altså homøomorf med S^1. Topologien på CP^{n-1} er finaltopologien bestemt ved p og den er identisk med finaltopologien bestemt ved p''.

Vi vil nu nærmere studere projektionerne $p_n: S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$. Et punkt af S^{2n+1} er et talsæt $(z_1, \cdots z_{n+1})$ med $|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1$. Punkterne $(z_1, \cdots z_n, x_{n+1})$ med $x_{n+1} \geq 0$ er den nordlige halvsfære af S^{2n}, altså en kopi af E^{2n}, og dens rand, som består af punkterne $(z_1, \cdots, z_n, 0)$, er S^{2n-1}. Restriktionen $p'_n: E^{2n} \longrightarrow CP^n$ af p_n er en kanonisk afbildning, der afbilder det indre af E^{2n} homøomorft, medens randen S^{2n-1} afbildes på CP^{n-1} ved p_{n-1}. Vi får altså CP^n ved at klæbe E^{2n} på CP^{n-1} ved klæbeafbildningen $p_{n-1}: S^{2n-1} \longrightarrow CP^{n-1}$.

Det er klart, at CP^0 består af et enkelt punkt, og vi får CP^1 ved at klæbe E^2 til punktet, så hele randen S^1 afbildes i punktet. Altså er $CP^1 = S^2$, og p_1 bliver en surjektiv afbildning $p_1 : S^3 \to S^2$, hvor originalmængden til hvert punkt af S^2 bliver en storcirkel på S^3.

Rummene $\grave{R}^n$ og $\grave{C}^n$ er vektorrum, og da vektoraddition og multiplikation med et tal er kontinuerte afbildninger, kaldes de topologiske vektorrum. S^1 er en gruppe med multiplikation, og da denne og inversafbildningen er kontinuerte, kaldes S^1 en topologisk gruppe. Gruppestrukturen på $S^1 = T^1$ inducerer en struktur på T^n som topologisk gruppe.

På $\grave{R}^4$ er der en struktur, som et ikke kommutativt legeme, idet $(x_0, \cdots, x_3)$ identificeres med kvaternionen $x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$. Vi minder om, at kvaternioner adderes som 4-vektorer, og multipliceres ved reglen

$$(x_0+ix_1+jx_2+kx_3)(y_0+iy_1+jy_2+ky_3) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 +$$

$$i(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)+j(x_0y_2+x_2y_0-x_1y_3+x_3y_1)+k(x_0y_3+x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)$$

Produktet udregnes således ved den distributive lov, idet

$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad jk=i,\quad kj=-i,\quad ki=j,\quad ik=-j,\quad ij=k,\quad ji=-k.$$

Det er klart, at $\grave{R}^4$ derved bliver en ring, og at et fra 0 forskelligt element har en reciprok følger umiddelbart af relationen

$$(x_0+ix_1+jx_2+kx_3)(x_0-ix_1-jx_2-kx_3) = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Vi sætter $|x_0+ix_1+jx_2+kx_3| = \|\underline{x}\|$, og for kvaternionmultiplikation gælder da $|\underline{x}\,\underline{y}| = |\underline{x}|\,|\underline{y}|$. Ved kvaternionmultiplikationen er $\grave{R}^4 \setminus \{\underline{0}\}$ organiseret som en topologisk gruppe, der dog ikke er kommutativ, og S^3 bliver netop en undergruppe. Det er svært at vise, at 1-sfæren og 3-sfæren er de eneste sfærer, der har en struktur som topologisk gruppe.

Rummet R^{4m+4} kan opfattes som det $m+1$-dimensionale kvaternion-rum K^{m+1}. Dets punkter $(k_1, \cdots k_{m+1})$ undtagen $\underline{0}$ falder i klasser af punkter, der afviger ved en positiv reel faktor, og det tilsvarende klasserum med finaltopologien bliver S^{4m+3}. Vi kan også betragte klasser af punkter, der fremgår af hinanden ved venstre-multiplikation med en kvaternion og derved får vi klasserummet KP^m, det m-dimensionale kvaternionære projektive rum. Vi får også en kanonisk afbildning $p_m: S^{4m+3} \to KP^m$, der slår punkter i samme klasse, hvis de fås af hinanden ved venstre multiplikation med en kvaternion med numerisk værdi 1. For $x \in KP^m$ er $p_m^{-1}(x)$ homøomorf med S^3. Som for komplekse projektive rum ser vi, at KP^m fås ved at klæbe E^{4m} på KP^{m-1} ved klæbeafbildningen $p_{m-1}: S^{4m-1} \to KP^{m-1}$. Endvidere er $KP^1 = S^4$, så vi har en kanonisk projektion $p_1: S^7 \to S^4$. Vi kunne have brugt højremultiplikation i stedet for venstre multiplikation, men fra topologisk synspunkt vil det ikke ændre noget videre.

De her omtalte projektioner af sfærer på projektive rum kaldes Hopf-fibreringer efter H. Hopf, som først gennemførte en detaljeret undersøgelse af $p_1: S^3 \to S^2$. Ud over de her omtalte findes der også en Hopf-fibrering $S^{15} \to S^8$.

Der er endnu en vigtig anvendelse af initial- og finaltopologi. Vi tager det finale tilfælde først, da det er det lettest forståelige.

Et direkte system af mængder er en familie $(M_j \mid j \in J)$ af mængder samt en mængde af afbildninger $\varphi_{jk}: M_j \to M_k$, således at følgende betingelser er opfyldt:

1) For $j \in J$ er $\varphi_{jj}: M_j \to M_j$ den identiske afbildning 1_{M_j}.

2) For $j \neq k$ findes højst én afbildning φ_{jk} eller φ_{kj}.

3) Hvis φ_{jk} og φ_{kl} eksisterer, eksisterer φ_{jl}, og $\varphi_{jl} = \varphi_{kl} \circ \varphi_{jk}$.

4) For $j, k \in J$ findes $l \in J$, så φ_{jl} og φ_{kl} eksisterer.

Vi vil betegne det direkte system med (M_j, φ_{jk}, J). I den disjunkte forening $\bigvee_{j \in J} M_j$ af mængderne M_j regner vi elementer $x \in M_j$, $y \in M_k$ for ækvivalente, hvis der findes et l med $\varphi_{jl}(x) = \varphi_{kl}(y)$. Det ses let, at dette virkelig er en ækvivalensrelation. Klassemængden kaldes den direkte limesmængde og betegnes $\lim_{\to}(M_j, \varphi_{jk}, J)$. Hver mængde M_j indlejres naturligt i $\bigvee_{j \in J} M_j$, og ved sammensætning af indlejringen med den kanoniske afbildning af $\bigvee_{j \in J} M_j$ på $\lim_{\to}(M_j, \varphi_{jk}, J)$ får vi de såkaldte kanoniske afbildninger $\varphi_j: M_j \to \lim_{\to}(M_j, \varphi_{jk}, J)$. Hvis φ_{jk} eksisterer, er $\varphi_j = \varphi_k \circ \varphi_{jk}$. Vi får mest brug for det specialtilfælde, hvor alle φ_{jk} er injektive. Så kan forskellige elementer fra samme M_j ikke være ækvivalente, og hvert φ_j vil indlejre M_j injektivt i den direkte limesmængde.

Hvis vi på hvert M_j har en topologi, så vi har $T_j = (M_j, \hat{O}_j)$, og alle φ_{jk} er kontinuerte, bestemmer afbildningerne φ_j en finaltopologi på $\lim_{\to}(M_j, \varphi_{jk}, J)$, og vi får derved et topologisk rum $T = \lim_{\to}(T_j, \varphi_{jk}, J)$. En mængde i T er åben, hvis og kun hvis alle dens originalmængder i rummene T_j er åbne. Hvis alle φ_{jk} er injektive, kan vi fortolke afbildningerne φ_j som indlejringer $T_j \subseteq T$, og $O \subseteq T$ bliver da åben, hvis og kun hvis $O \cap T_j$ er åben relativt til T_j for hvert $j \in J$.

Et disjunkt foreningsrum $T = \bigvee_{j \in J} T_j$ er direkte limes af de disjunkte foreninger svarende til endelige delmængder af J. Rum som $\mathring{R}^n, \mathring{C}^n$ er direkte limes af de begrænsede (åbne eller afsluttede) delrum med inklusionsafbildninger.

For sfærerne S^n har vi inklusionsafbildninger $S^n \subseteq S^q$, hvor $(x_1, \cdots, x_n)$ afbildes i $(x_1, \cdots x_n, 0, \cdots 0)$. Vi får et direkte limesrum S^∞, hvis punkter er alle følger (x_n) med $x_n = 0$ fra et vist trin og $\sum x_n^2 = 1$. Analogt defineres P^∞, og vi får også en projektion $p_\infty : S^\infty \to P^\infty$. Foreløbig får vi ikke brug for de her anførte eksempler.

Et inverst system af mængder og afbildninger defineres som et direkte system med den ene ændring, at 4) rettes til

4') Til $k, l \in J$ findes $j \in J$, så φ_{jk} og φ_{jl} eksisterer.

I $\prod_{j \in J} M_j$, som består af alle familier $(x_j \mid j \in J)$ med $x_j \in M_j$, betragter vi delmængden M af de familier $(x_j \mid j \in J)$, som for alle φ_{jk} tilfredsstiller betingelsen $x_k = \varphi_{jk}(x_j)$. Vi skriver $M = \lim_{\leftarrow} (M_j, \varphi_{jk}, J)$ og kalder M den inverse limesmængde af (M_j, φ_{jk}, J). Ved restriktion af projektionerne $\prod_{j \in J} M_j \longrightarrow M_j$ til M får vi afbildninger $\varphi_j : M \to M_j$, som for alle φ_{jk} tilfredsstiller betingelsen $\varphi_k = \varphi_{jk} \circ \varphi_j$. Hvis vi har en topologi på hvert M_j, så vi har $T_j = (M_j, \mathcal{O}_j)$, og alle φ_{jk} er kontinuerte, får vi et topologisk rum $T = \lim_{\leftarrow} (M_j, \varphi_{jk}, J)$ ved at forsyne M med den ved afbildningerne φ_j bestemte initialtopologi, og T kaldes det inverse limesrum for (T_j, φ_{jk}, J). Topologien på T bliver identisk med delrumstopologien fra $\prod_{j \in J} T_j$.

Vi kommer ikke til at bruge det inverse limesrum særlig meget. Et produktrum er invers limes af sine endelige delprodukter. For $T_n = [n, \infty[$ og $\varphi_{n,q}(x) = x + q - n$ for $q \geq n$ bliver $\lim_{\leftarrow}(T_n, \varphi_{nq}, Z)$ homøomorf med $[0, \infty[$. For $T_n = [0, \infty[$ og $\varphi_{nq}(x) = x + q - n$ for $q \geq n$ bliver $\lim_{\leftarrow}(T_n, \varphi_{nq}, Z) = \emptyset$.

Kapitel 2.

KOMPAKTE RUM.

Vi minder om velordningssætningen, der siger, at enhver mængde kan ordnes som en velordnet mængde. Sætningen er ækvivalent med udvalgsaksiomet og med Zorn's lemma, der siger, at en (ikke fuldstændigt) ordnet mængde med den egenskab, at elementerne i enhver fuldstændig ordnet delmængde har en fælles efterfølger, har et maksimalt element, d.v.s. et element. der har sig selv som eneste efterfølger.

Definition 2.1. Lad M være en mængde. Et ikke tomt system $\hat{F}$ af ikke tomme delmængder af M kaldes et filter, hvis enhver mængde, som har en delmængde i $\hat{F}$, selv tilhører $\hat{F}$, og hvis det for ethvert endeligt delsystem af $\hat{F}$ gælder, at fællesmængden tilhører $\hat{F}$. Et delsystem $\hat{B} \subseteq \hat{F}$ kaldes en basis for $\hat{F}$, hvis enhver mængde i $\hat{F}$ har en delmængde i $\hat{B}$, og $\hat{B} \subseteq \hat{F}$ kaldes en subbasis for $\hat{F}$, hvis enhver mængde i $\hat{F}$ har en delmængde, som er fællesmængde for endelig mange mængder fra $\hat{B}$.

Eksempler. Hvis $A \subsetneqq M$ ikke er tom, vil de delmængder af M, som indeholder A, udgøre et filter. Hvis M ikke er endelig (numerabel) vil de delmængder, som har endelig (numerabel) komplementærmængde, udgøre et filter. Et nærliggende eksempel på et filter er mængden af omegne af et punkt i et topologisk rum.

<u>Sætning</u> 2.2. Et system $\hat{B}$ af ikke tomme delmængder af M er basis for et filter, hvis og kun hvis enhver fællesmængde af endelig mange mængder fra $\hat{B}$ har en delmængde, der tilhører $\hat{B}$. Systemet $\hat{B}$ er subbasis for et filter, hvis og kun hvis ethvert endeligt delsystem af $\hat{B}$ har ikke tom fællesmængde. Hvis et filter på M har basis $\hat{B}$, består det af netop de delmængder af M, som har en delmængde fra $\hat{B}$. Hvis et filter på M har subbasis $\hat{B}$, består det af netop de delmængder af M, der indeholder en delmængde, som er fællesmængde for endelig mange mængder fra $\hat{B}$.

Bevis. Ganske trivielt.

<u>Sætning</u> 2.3. En vilkårlig afbildning $f: M_1 \to M_2$ overfører filter eller filterbasis i filterbasis og subbasis i subbasis.

Bevis. Lige så trivielt.

<u>Definition</u> 2.4. Hvis $\hat{F}_1$ og $\hat{F}_2$ er filtre på en mængde M og $\hat{F}_1 \subsetneqq \hat{F}_2$, siger vi, at $\hat{F}_1$ er grovere end $\hat{F}_2$, og at $\hat{F}_2$ er finere end $\hat{F}_1$.

Vi vil spare os for gentagelsen af de bemærkninger, vi anførte, da vi sidst omtalte begreberne "finere" og "grovere".

Definition 2.5. Et filter $\hat{F}$ på et topologisk rum X siges at konvergere mod $a \in X$, hvis det er finere end filtret af omegne af a.

Lad $\varphi : \dot{N} \longrightarrow X$ være en afbildning. Filtret af delmængder af $\dot{N}$ med endelig komplementærmængde afbildes ved φ i et filter, som konvergerer mod $x \in X$, hvis og kun hvis følgen (φ_n) konvergerer mod x.

Lad X og Y være topologiske rum, og lad $f : X \longrightarrow Y$ være en afbildning. At f er kontinuert i $a \in X$ betyder, at originalmængden til enhver omegn af $f(a)$ er en omegn af a, hvilket er ensbetydende med, at omegnsfiltret for $a \in X$ afbildes i en basis for et filter, der konvergerer mod $f(a)$. Dette er igen ensbetydende med, at ethvert filter, der konvergerer mod a, afbildes i en basis for et filter, der konvergerer mod $f(a)$.

Disse to bemærkninger viser, at "konvergent filter" er en fornuftig generalisation af "konvergent følge".

Et Hausdorff-rum er et topologisk rum med de tre egenskaber, der er ækvivalente i henhold til følgende sætning:

Sætning 2.6. Lad X være et topologisk rum. Følgende tre egenskaber er da ækvivalente:

1). For $a, b \in X, a \neq b$ findes åbne mængder O_1, O_2, så $a \in O_1$, $b \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

2). Diagonalen $\{(x,x) \mid x \in X\}$ er afsluttet i $X \times X$.

3). Intet filter i X konvergerer mod to forskellige punkter af X.

Bevis. At 2) gælder er ensbetydende med, at hvert $(a,b) \in X \times X$ med $a \neq b$ er ydre punkt for diagonalen, altså med, at der findes åbne mængder O_1, O_2, så $a \in O_1$, $b \in O_2$, og $O_1 \times O_2$ ikke indeholder punkter af diagonalen, men det er netop ensbetydende med, at 1) gælder. Dermed har vi vist, at 1) $\Leftrightarrow$ 2). At et filter $\hat{F}$ på X konvergerer mod to punkter $a, b \in X$ og $a \neq b$ er ensbetydende med, at der findes et filter $\hat{F}$, der omfatter begge omegnsfiltrene $\grave{U}(a)$, $\grave{U}(b)$, og det er igen ensbetydende med, at enhver omegn af a har punkter fælles med enhver omegn af b, altså med, at 1) ikke er opfyldt. Dermed har vi vist, at 1) $\Leftrightarrow$ 3), og dermed er sætningen bevist.

En mængde A i et topologisk rum S kaldes overalt tæt i S, hvis $\bar{A} = S$, altså hvis enhver åben, ikke tom delmængde af S indeholder punkter af A. Lad T være et Hausdorff-rum og $f, g: S \to T$ kontinuerte afbildninger, hvis restriktioner $f|A$, $g|A$ er identiske. Vi påstår, at så er f og g identiske. Ellers kunne vi finde $a \in S$ med $f(a) \neq g(a)$, og så ville der findes åbne mængder O_1, O_2 i T med $f(a) \in O_1$, $g(a) \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Vi ved imidlertid, at $a \in f^{-1}(O_1) \cap g^{-1}(O_2)$, og da denne mængde er åben, indeholder den et punkt $x \in A$, og da $f(x) = g(x)$, strider det mod, at $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Det er klart, at ethvert metrisabelt rum er et Hausdorff-rum. Hausdorff-egenskaben er selvfølgelig topologisk, og det er klart, at den bevares ved overgang til delrum eller produktrum. Den kan derimod opstå eller forsvinde ved kontinuerte afbildninger og specielt ved overgang til klasserum. Hvis X og Y er rigtig pæne rum, f.eks. intervaller, $A \subset X$ en ikke afsluttet mængde og $\varphi: A \to Y$ kontinuert, vil $X \cup_\varphi Y$ i reglen ikke blive et Hausdorff-rum.

<u>Definition</u> 2.7. Et filter $\hat{F}$ på en mængde M kaldes et ul-

trafilter, hvis det er maksimalt, altså hvis der ikke findes noget fra $\hat{F}$ forskelligt filter, der er finere end $\hat{F}$.

For $a \in M$ er systemet af delmængder, der indeholder a, et ultrafilter. Det er aldrig lykkedes eksplicit at angive et ultrafilter, der ikke er af denne specielle slags, men de findes, som det vil fremgå af sætning 2.10. Først viser vi en nyttig karakterisering af ultrafiltre.

<u>Sætning</u> 2.8. En subbasis $\hat{B}$ for et filter på en mængde M er et ultrafilter på M, hvis og kun hvis det for enhver mængde $A \subseteq M$ gælder, at A eller $M \setminus A$ tilhører $\hat{B}$.

Bevis. Da $A \cap (M \setminus A) = \emptyset$, kan højst en af mængderne indgå i en subbasis for et filter eller i filtret selv. Heraf følger "hvis". Lad os nu antage, at $M \setminus A$ ikke tilhører det af $\hat{B}$ frembragte filter $\hat{F}$. Vi definerer $\hat{G} = \{C \subseteq M \mid A \cup C \in \hat{F}\}$. For $C_1, C_2 \in \hat{G}$ får vi $A \cup (C_1 \cap C_2) = (A \cup C_1) \cap (A \cup C_2) \in \hat{F}$, så vi kan slutte, at $C_1 \cap C_2 \in \hat{G}$. Endvidere gælder $\hat{G} \supseteq \hat{F}$ og $M \setminus A \in \hat{G}$. Heraf fremgår, at $\hat{G}$ er en udvidelse af $\hat{F}$. Hvis $\hat{F}$ er et ultrafilter, kan $\hat{G}$ således ikke være et filter. Så må $\hat{G}$ indeholde $\emptyset$, og det medfører, at $A \in \hat{F}$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.9. For en surjektiv afbildning $f: M_1 \longrightarrow M_2$ gælder, at billedet af et ultrafilter på M_1 er et ultrafilter på M_2.

Bevis. Af sætning 2.3 følger, at billedet er en filterbasis, og deraf følger sætningen umiddelbart af sætning 2.8.

Ultrafiltrenes nytte beror især på sølgende sætning:

Sætning 2.10. Ethvert filter $\hat{F}$ på en mængde M kan udvides til et ultrafilter på M.

Bevis. De filtre, der indeholder $\hat{F}$, er ordnede ved inklusion. For en fuldstændig ordnet mængde af sådanne gælder åbenbart, at foreningsmængden er et filter, der følger efter dem alle i ordningen. Så siger Zorn's lemma, at der blandt filtrene, som er finere end $\hat{F}$ findes et maksimalt, altså et ultrafilter.

Definition 2.11. Et topologisk rum T kaldes kompakt, hvis følgende tre indbyrdes ækvivalente betingelser er opfyldt.

1). Ethvert ultrafilter på T konvergerer mod et punkt $a \in T$.

2). Hvis en subbasis for et filter på T består af afsluttede mængder, har disse ikke tom fællesmængde.

3). Enhver overdækning af T med åbne mængder indeholder en endelig overdækning.

Vi skylder at vise, at de tre betingelser virkelig er ækvivalente. Lad os antage, at 1) gælder, og at $\hat{B}$ er et system af afsluttede mængder, som er subbasis for et filter $\hat{F}$. Så kan $\hat{F}$ ifølge sætning 2.10 udvides til et ultrafilter $\hat{G}$, og det konvergerer mod et punkt $a \in T$. Da enhver omegn af a hører til $\hat{G}$, er a kontaktpunkt for enhver mængde i $\hat{G}$, og det medfører specielt, at a hører til alle mængderne i $\hat{B}$. Dermed har vi vist, at 1) $\Rightarrow$ 2).

Lad os nu antage, at 2) gælder, og at $\{O_\gamma \mid \gamma \in J\}$ er en overdækning af T med åbne mængder. Så har de afsluttede mængder $T \setminus O_\gamma$ tom fællesmængde, og så giver 2), at de ikke kan udgøre en subbasis for et filter. Det medfører, at der findes endelig mange af mængderne $T \setminus O_\gamma$ med tom fællesmængde, og de tilsvarende O_γ udgør så en overdækning af T. Dermed har vi vist, at 2) ⇒ 3).

Lad os nu antage, at 3) gælder, og lad foreløbig $\hat{F} = \{A_\gamma \mid \gamma \in J\}$ være et filter. Så udgør intet endeligt delsystem af mængder $T \setminus \bar{A}_\gamma$ en overdækning, og 3) implicerer da, at mængderne $T \setminus \bar{A}_\gamma$ ikke udgør en overdækning, altså at der findes et punkt $a \in T$ med $a \in \bar{A}_\gamma$ for alle $\gamma \in J$. Lad os antage, at a har en omegn $\mathcal{U}$, der ikke hører til $\hat{F}$. Vi kan vælge $\mathcal{U}$ åben. Så kan $T \setminus \mathcal{U}$ heller ikke høre til $\hat{F}$, da $T \setminus \mathcal{U}$ ikke har a som kontaktpunkt. Så kan $\hat{F}$ ikke være et ultrafilter. Dermed har vi vist, at 3) ⇒ 1), og dermed, at de tre betingelser er ækvivalente.

<u>Sætning</u> 2.12. En afsluttet delmængde af et kompakt rum er kompakt (d.v.s. et kompakt rum med delrumstopologien). En kompakt delmængde af et Hausdorff-rum er afsluttet.

Bevis. Hvis T er kompakt, $A \subseteq T$ afsluttet og $(O_\gamma \mid \gamma \in J)$ en overdækning af A med åbne mængder (det skulle egentlig være med de relativt åbne mængder $O_\gamma \cap A$) får vi ved at tilføje $T \setminus A$ en overdækning af T med åbne mængder. Den indeholder en endelig overdækning, og ved at udelade $T \setminus A$ fra denne får vi en endelig overdækning af A. Altså er A kompakt. Lad os nu antage, at T er et Hausdorff-rum, at $A \subseteq T$ er kompakt, og at a er et kontaktpunkt for A. Så er $\hat{F} = \{\mathcal{U} \cap A \mid \mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}}(a)\}$ et filter på A, og det kan udvides til et ultrafilter $\hat{G}_1$ på A, som igen kan udvides til et ultrafilter $\hat{G}_2$ på T. Da $\hat{G}_2$ er finere end både $\grave{\mathcal{U}}(a)$ og $\hat{G}_1$, vil $\hat{G}_2$ konvergere mod a og mod grænsepunktet $b \in A$ for $\hat{G}_1$. Da T er et Hausdorff-rum, medfører dette, at $a = b$, altså $a \in A$. Dermed har vi vist, at A er afsluttet, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.13. Hvis X er et kompakt rum, Y et topologisk rum og $f: X \longrightarrow Y$ kontinuert og surjektiv, er Y kompakt.

Bevis. Hvis $\{\mathcal{U}_j \mid j \in J\}$ er en overdækning af Y med åbne mængder, er $\{f^{-1}(\mathcal{U}_j) \mid j \in J\}$ en overdækning af X med åbne mængder, og endelig mange af disse $f^{-1}(\mathcal{U}_{j_1}), \dots, f^{-1}(\mathcal{U}_{j_m})$ vil da dække X, og så vil $\mathcal{U}_{j_1}, \dots, \mathcal{U}_{j_m}$ dække Y. Dermed er sætningen bevist.

Vi viser nu Tychonov's sætning:

Sætning 2.14. Lad $(T_j \mid j \in J)$ være en familie af topologiske rum. Så er produktrummet $\prod_{j \in J} T_j$ kompakt, hvis og kun hvis hvert af rummene T_j er kompakt.

Bevis. Sætning 2.13 anvendt på projektionerne giver "kun hvis". Lad os derfor antage, at hvert T_j er kompakt, og lad $\hat{F}$ være et ultrafilter på $\prod_{j \in J} T_j$. Så er hver projektion $p_j(\hat{F})$ et ultrafilter, som konvergerer mod et punkt a_j. Lad $a \in \prod_{j \in J} T_j$ være punktet med koordinater a_j. En omegn $\mathcal{U}$ af a indeholder en basisomegn af formen $p_{j_1}^{-1}(\mathcal{U}_{j_1}) \cap \dots \cap p_{j_m}^{-1}(\mathcal{U}_{j_m})$, og den vil høre til $\hat{F}$, da hver $p_{j_\nu}^{-1}(\mathcal{U}_{j_\nu})$ indeholder en mængde fra $\hat{F}$ med projektion $\mathcal{U}_{j_\nu}$. Altså hører $\mathcal{U}$ til $\hat{F}$, og $\hat{F}$ konvergerer mod a. Dermed er sætningen bevist.

Borels overdækningssætning siger, at et afsluttet liniestykke er kompakt, og sætningerne 2.12, 2.13 og 2.14 giver derefter umiddelbart, at en mængde i R^n er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset, samt at en reel kontinuert funktion på et kompakt rum har en største og en mindste værdi.

Den følgende sætning, der kaldes Lebesgue's overdækningssætning vil vise sig nyttig.

__Sætning__ 2.15. Lad T være et kompakt metrisk rum, og lad $\{U_j \mid j \in J\}$ være en overdækning af T med åbne mængder. Der findes da et tal $r > 0$, således at enhver kugleomegn på T med radius r er indeholdt i en af de overdækkende mængder.

Bevis. For $x \in T$ betegner vi med $r(x)$ supremum for radier i kugleomegne med centrum x, der er indeholdt i et U_j. For $y \in K(x, r(x))$ har vi $K(y, r(x) - dist(x,y)) \subseteq K(x, r(x)) \subseteq K(y, r(x) + dist(x,y))$, og det medfører åbenbart, at $|r(x) - r(y)| \leq dist(x,y)$, så $r: T \to]0, \infty[$ er kontinuert og har følgelig en mindste værdi. Dermed er sætningen bevist.

__Definition__ 2.16. Et Hausdorff-rum T kaldes regulært, hvis hvert punkt $x \in T$ har en omegnsbasis, der består af afsluttede omegne.

Det er næsten helt indlysende, at et delrum af et regulært rum er regulært, og at et produkt af regulære rum er regulært. At T er regulært, er åbenbart ensbetydende med, at der for en vilkårlig afsluttet mængde $A \subseteq T$ og et vilkårligt punkt $x \in T \setminus A$ findes åbne mængder O_1, O_2, således at $A \subseteq O_1$, $x \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, og så må det selvfølgelig yderligere kræves, at T er et Hausdorff-rum.

__Sætning__ 2.17. Et kompakt Hausdorff-rum er regulært.

Bevis. Lad T være et kompakt Hausdorff-rum, x et punkt af T og U en åben omegn af x. Lad $\{A_j \mid j \in J\}$ være mængden af afsluttede omegne af x. Hvis $A_j \setminus U \neq \emptyset$ for alle $j \in J$, er $\{A_j \setminus U \mid j \in J\}$ en filterbasis bestående af afsluttede mængder, og det medfører, at der findes et $b \in T \setminus U$, som er kontaktpunkt for alle omegne af x i modstrid med, at T er et Hausdorff-rum. Altså indeholder U en afsluttet omegn af x. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2.18. Et topologisk rum T kaldes lokalkompakt, hvis hvert punkt $x \in T$ har en omegnsbasis, der består af kompakte mængder.

Sætning 2.19. Et Hausdorff-rum T er lokalkompakt, hvis og kun hvis hvert punkt $x \in T$ har en kompakt omegn.

Bevis. "Kun hvis" er trivielt. Lad U være en kompakt omegn af x. Så er U et regulært rum, og x har en omegnsbasis bestående af afsluttede omegne i U, og de er kompakte ifølge sætning 2.12. Dermed er sætningen bevist.

Rummene $\dot{R}^n$, $\dot{C}^n$, $\dot{K}^n$ er lokalkompakte, og S^n, T^n, P^n, CP^n og KP^n er endda kompakte.

Definition 2.20. Et topologisk rum T kaldes kompakt frembragt, hvis det er direkte limes af systemet af kompakte delrum og inklusionsafbildninger.

At T er kompakt frembragt betyder således, at $A \subseteq T$ er afsluttet (åben), hvis og kun hvis det for enhver kompakt mængde $K \subseteq T$ gælder, at $A \cap K$ er afsluttet (åben) relativt til K. Her er "kun hvis" automatisk opfyldt. Hvis T er et Hausdorff-rum bliver "afsluttet relativt til K" det samme som "afsluttet".

Sætning 2.21. Et lokalkompakt Hausdorff-rum er kompakt frembragt.

Bevis. Lad T være et lokalkompakt Hausdorff-rum, og lad $A \subseteq T$ være en mængde med den egenskab, at $A \cap K$ er afsluttet for enhver kompakt mængde $K \subseteq T$. For $x \in T \setminus A$ kan vi vælge en kompakt omegn U, og $U \setminus (A \cap U)$ er da en omegn af x, så x er ydre punkt for A. Dermed er sætningen bevist.

Det er næsten helt indlysende, at et produkt af endelig mange lokalkompakte rum er lokalkompakt, medens et produkt af uendelig mange lokalkompakte rum er lokalkompakt, hvis og kun hvis rummene, undtagen endelig mange, er kompakte. Et produkt af to kompakt frembragte rum vil ikke altid være kompakt frembragt, men vi har i hvert fald følgende sætning:

Sætning 2.22. Hvis S er et lokalkompakt Hausdorff-rum og T et kompakt frembragt Hausdorff-rum, er $S \times T$ kompakt frembragt.

Bevis. Lad $A \subseteq S \times T$ være en mængde med den egenskab, at $A \cap K$ er afsluttet for enhver kompakt mængde $K \subseteq S \times T$, og lad (a, b) være et punkt af $S \times T \setminus A$. Lad $U \subseteq S$ være en kompakt omegn af a. Så er $U \times \{b\} \subseteq S \times T$ kompakt, og $A \cap (U \times \{b\})$ afsluttet. Altså kan vi vælge en kompakt omegn U_1 af a, så $U_1 \times \{b\}$ ikke indeholder punkter af A. Nu er det nok at vise, at (a, b) er ydre punkt for $A_1 = A \cap (U_1 \times T)$. Med A_2 betegner vi projektionen af A_1 på T. Lad $K \subseteq T$ være kompakt. Så er $A_1 \cap (U_1 \times K)$ afsluttet, og derfor kompakt, og så er projektionen $A_2 \cap K$ kompakt, og derfor afsluttet. Da T er kompakt frembragt, kan vi slutte, at A_2 er afsluttet. Så er $U_1 \times (T \setminus A_2)$ en omegn af (a, b), der ikke indeholder punkter af A, og dermed er sætningen bevist.

Hvis X, Y er topologiske rum, betegner Y^X mængden af kontinuerte afbildninger $f: X \to Y$.

<u>Definition</u> 2.23. Hvis $K \subseteq X$ er kompakt og $O \subseteq Y$ er åben, skriver vi $\langle K, O\rangle = \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq O\}$. Ved den kompakt åbne topologi på Y^X forstår vi topologien med alle mængderne $\langle K, O\rangle$ som subbasis.

Vi skal vise, at mængderne $\langle K, O\rangle$ virkelig kan bruges som en subbasis. For det første findes der altid kompakte delmængder af X, nemlig de endelige mængder. Så er $\langle K, Y\rangle = Y^X$, så mængderne dækker hele Y^X, og vi har $\langle K, \emptyset\rangle = \emptyset$, så den tomme mængde er med.

<u>Definition</u> 2.24. Lad X og Y være topologiske rum. Ved værdiafbildningen $\varphi: Y^X \times X \to Y$ forstår vi den ved $\varphi(f, x) = f(x)$ definerede afbildning. Lad S være et tredie topologisk rum. Om to afbildninger $g: S \to Y^X$ og $G: X \times S \to Y$ siger vi, at G er produktformen af g, og at g er potensformen af G, såfremt $G(x, s) = (g(s))(x)$ for alle $s \in S$, $x \in X$.

Værdiafbildningen behøver ikke at være kontinuert, og produkt- og potensform er ikke altid samtidigt kontinuerte. Vi har følgende sætning:

<u>Sætning</u> 2.25. Hvis X er lokalkompakt, gælder om de i definition 2.24 indførte begreber, at værdiafbildningen er kontinuert, samt at produktform og potensform af en afbildning er samtidigt kontinuerte.

Bevis. Lad (f,x) være et punkt af $Y^X \times X$, og lad $O \subseteq Y$ være en åben omegn af $f(x) \in Y$. Lad $K \subseteq f^{-1}(O)$ være en kompakt omegn af x. Så har vi åbenbart $\varphi^{-1}(O) \supseteq \langle K,O\rangle \times K$, som er en omegn af (f,x), Altså er φ kontinuert.

Lad os dernæst antage, at $g: S \to Y^X$ er kontinuert. Lad (x,s) være et punkt af $X \times S$, og lad $O \subseteq Y$ være en omegn af $G(x,s) = (g(s))(x) \in Y$. Lad $K \subseteq X$ være en kompakt omegn af x valgt, således at $(g(s))(K) \subseteq O$. Så er $\langle K,O\rangle$ en omegn af $g \in Y^X$, og vi kan vælge en omegn $\mathcal{U}$ af $s \in S$, så $g^{-1}(\langle K,O\rangle) \supseteq \mathcal{U}$. Så gælder $G(K \times \mathcal{U}) \subseteq O$, og dermed har vi vist, at G er kontinuert i (x,s).

Lad os til sidst antage, at $G: X \times S \to Y$ er kontinuert. Lad $K \subseteq X$ være kompakt og $O \subseteq Y$ åben. Vi skal vise, at $g^{-1}(\langle K,O\rangle) \subseteq S$ er åben. Vi behøver kun at se på det tilfælde, hvor $g^{-1}(\langle K,O\rangle) \neq \emptyset$, og vi kan da betragte et vilkårligt punkt $s \in S$ med $g(s) = f \in \langle K,O\rangle$. For hvert $x \in K$ vælger vi nu en omegn $\mathcal{U}(x)$ af $x \in X$ og en omegn $\mathcal{V}(x)$ af $s \in S$, således at $G(\mathcal{U}(x) \times \mathcal{V}(x)) \subseteq O$. Da K er kompakt, kan vi vælge $x_1, \cdots, x_n$, således at $K \subseteq \mathcal{U}(x_1) \cup \cdots \cup \mathcal{U}(x_n) = \mathcal{U}$, og $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_1) \cap \cdots \cap \mathcal{V}(x_n)$ er da omegn af $s \in S$. Vi har nu $G(K \times \mathcal{V}) \subseteq O$, hvilket betyder, at $g(\mathcal{V}) \subseteq \langle K,O\rangle$. Det viser, at s er et indre punkt i $g^{-1}(\langle K,O\rangle)$, og dermed er sætningen vist.

Det sidste punkt i beviset benyttede ikke, at X var lokalkompakt.

<u>Sætning</u> 2.26. Lad X være et lokalkompakt Hausdorff-rum, og lad Y og S være topologiske rum. Da er en homøomorfi $\psi: (Y^X)^S \to Y^{X \times S}$ defineret ved $(\psi(g))(x,s) = (g(s))(x)$.

Bevis. Vi slutter først af sætning 2.25, at $g : S \to Y^X$ er kontinuert, hvis og kun hvis $\psi(g) : X \times S \to Y$ er det. Altså er ψ bijektiv. Vi har allerede brugt, at X er lokalkompakt.

Vi skal vise, at ψ er kontinuert. Lad $C \subseteq X \times S$ være kompakt og $O \subseteq Y$ åben. Vi skal vise, at $\psi^{-1}(\langle C, O\rangle)$ er åben, altså at $f \in \psi^{-1}(\langle C, O\rangle)$ er et indre punkt. Her er f en afbildning $f : S \to Y^X$, som for hvert $(x, s) \in C$ tilfredsstiller $(f(s))(x) \in O$. Projektionen K af C på S er et kompakt Hausdorff-rum, og da $(f(s))(x)$ er kontinuert i begge variable, kan vi for $(x,s) \in C$ vælge en kompakt omegn $K_1(x,s)$ af $x \in X$ og en kompakt omegn $K_2(x,s)$ af $s \in K$, således at $(f(s))(x)$ afbilder $K_1(x,s) \times K_2(x,s)$ ind i O. Vi vælger nu $(x_1, s_1), \cdots, (x_m, s_m)$, således at $C \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{m} (K_1(x_\nu, s_\nu) \times K_2(x_\nu, s_\nu))$. Så er

$$\mathcal{U} = \bigcap_{\nu=1}^{m} \langle K_2(x_\nu, s_\nu), \langle K_1(x_\nu, s_\nu), O\rangle\rangle$$

en omegn af f med $\psi(\mathcal{U}) \subseteq \langle C, O\rangle$. Altså er ψ kontinuert.

Endelig bemærker vi, at vi med vore sædvanlige betegnelser har den næsten trivielle relation $\psi(\langle K_1, \langle K_2, O\rangle\rangle) = \langle K_1 \times K_2, O\rangle$, og da mængderne $\langle K_1, \langle K_2, O\rangle$ udgør en subbasis for de åbne mængder i $(Y^X)^S$, kan vi slutte, at enhver åben mængde ved ψ afbildes på en åben mængde (vi siger, at ψ er en åben afbildning). Det er ensbetydende med, at ψ^{-1} er kontinuert, og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.27. Lad X være et topologisk rum og Y et metrisk rum, og lad $f : X \to Y$ være kontinuert. Hvis ε er et positivt tal, findes der en åben mængde $O \subseteq X \times X$, som in-

deholder diagonalen $\{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid x_1 = x_2\}$, således at det for alle $(x_1, x_2) \in O$ gælder, at $\mathrm{dist}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Bevis. Den ved $\varphi(x_1, x_2) = \mathrm{dist}(f(x_1), f(x_2))$ definerede afbildning $\varphi : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$ er kontinuert, og derfor er $O = \varphi^{-1}([0, \varepsilon[)$ en åben mængde, der indeholder diagonalen i $X \times X$.

Hvis X nu specielt er et kompakt metrisk rum, er $X \times X \setminus O$ kompakt, og $\mathrm{dist}(x_1, x_2)$, som er kontinuert, har en positiv mindste værdi δ på denne mængde. Af $\mathrm{dist}(x_1, x_2) < \delta$ vil da følge $\mathrm{dist}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Vi fik således vist den velkendte sætning om ligelig kontinuitet.

Vi mangler endnu en hovedsætning, men den går nemt:

<u>Sætning</u> 2.28. Hvis X og Y er Hausdorff-rum, X kompakt og $f : X \to Y$ kontinuert og bijektiv, er f en homøomorfi.

Bevis. Hvis $O \subseteq X$ er åben, er $X \setminus O$ afsluttet, altså kompakt. Så er $f(X \setminus O) = f(X) - f(O)$ kompakt, altså afsluttet, da Y er et Hausdorff-rum. Så er $f(O)$ åben. Dermed er sætningen bevist.

Kapitel 3.

HOMOTOPI.

Indbyrdes homøomorfe rum er ens fra topologisk synspunkt. Vi vil nu indføre et begreb, der tillader os at anse afbildninger som ens fra topologisk synspunkt. Vi vil dog få brug for forskellige grader af "enshed".

Definition 3.1. Lad X og Y være topologiske rum og $f_0, f_1 : X \to Y$ kontinuerte afbildninger. En kontinuert afbildning $F : X \times I \to Y$, hvor $I = [0,1]$, kaldes en homotopi fra f_0 til f_1, såfremt $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ for ethvert $x \in X$. Vi siger, at f_0 er homotop med f_1, såfremt der findes en homotopi fra f_0 til f_1.

Sætning 3.2. "Homotop med" er en ækvivalensrelation.

Bevis. Ved at vælge $F(x,t) = f_0(x)$ for alle $x \in X$, $t \in I$ får vi den stationære homotopi, som viser, at relationen er reflexiv. Hvis vi definerer $G(x,t) = F(x, 1-t)$, og F er en homotopi fra f_0 til f_1, bliver G en homotopi fra f_1 til f_0, så relationen er symmetrisk. Hvis $F_1 : X \times I \to Y$ er en homotopi fra f_0 til f_1 og $F_2 : X \times I \to Y$ en homotopi fra f_1 til f_2, får vi en homotopi $F : X \times I \to Y$ fra f_0 til f_2 ved at definere

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x, 2t) & \text{for} \quad x \in X, \ t \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ F_2(x, 2t-1) & \text{for} \quad x \in X, \ t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Altså er relationen transitiv. Dermed er sætningen bevist.

Vi tav med spørgsmålet om kontinuiteten af F, og vi vil også i det følgende ofte snyde for tilsvarende beviser. Denne gang vil vi dog udføre det. Kontinuiteten følger af at de afsluttede mængder $X \times [0, \frac{1}{2}]$ og $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ tilsammen udgør hele definitionsmængden $X \times I$, og at restriktionen af F til hver af disse er kontinuert. Lad generelt X være foreningsmængde af afsluttede mængder $X_1, \cdots, X_n$, og lad $f : X \to Y$ være en afbildning, hvis restriktion til hver af mængderne X_ν er kontinuert. Så er f kontinuert. Hvis nemlig $A \subseteq Y$ er afsluttet, giver kontinuiteten af restriktionerne, at hver af mængderne $X_\nu \cap f^{-1}(A)$ er afsluttet, og så er disses foreningsmængde $f^{-1}(A)$ også afsluttet.

Vi vil systematisk bruge tegnet $\approx$ for homøomorfi, isomorfi, mængdeækvivalens og andre "stærke" ækvivalensrelationer. Vi anser "homotop med" som en noget svagere relation, og for denne og beslægtede relationer vil vi bruge tegnet $\simeq$, så $f_0 \simeq f_1$ betyder, at f_0 er homotop med f_1.

Sætning 3.2. Lad X, Y, Z være topologiske rum. Lad $f_0, f_1 : X \to Y$ og $g_0, g_1 : Y \to Z$ være afbildninger. Hvis $f_0 \simeq f_1$ og $g_0 \simeq g_1$, er $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Bevis. Vi viser det ved at vise, at $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$. Hvis $F: X \times I \to Y$ er en homotopi fra f_0 til f_1, er $g_0 \circ F: X \times I \to Z$ en homotopi fra $g_0 \circ f_0$ til $g_0 \circ f_1$. Hvis $G: Y \times I \to Z$ er en homotopi fra g_0 til g_1, bliver $G \circ (f_1 \times 1_I): X \times I \to Z$ en homotopi fra $g_0 \circ f_1$ til $g_1 \circ f_1$. Dermed er sætningen vist.

Mængden af afbildninger $f: X \to Y$ falder i homotopiklasser, d.v.s. ækvivalensklasser af indbyrdes homotope afbildninger. Medens Y^X betegner mængden af kontinuerte afbildninger, vil vi med $[X; Y]$ betegne mængden af homotopiklasser af kontinuerte afbildninger $f: X \to Y$, og den homotopiklasse, hvortil f hører, vil vi betegne $[f]$. Sætning 3.2 medfører, at sammensætning af afbildninger inducerer en sammensætning af homotopiklasser af kontinuerte afbildninger ved definitionen $[g] \circ [f] = [g \circ f]$.

I algebraisk topologi er vor interesse i så høj grad samlet om kontinuerte afbildninger, at vi i de fleste situationer kan tillade os at tage kontinuiteten som en stiltiende forudsætning. I det følgende vil vi fra nu af ofte glemme at omtale kontinuiteten.

Hvis $X = \{x_0\}$ er et 1-punktsrum, bliver $X \times I$ trivielt homøomorf med I. At angive en afbildning $\{x_0\} \longrightarrow Y$ (eller som vi oftest skriver $x_0 \longrightarrow Y$) betyder at angive billedpunktet. At afbildningerne $y_0, y_1 \in Y$ er homotope betyder så, at der findes en kontinuert afbildning $\varphi: I \longrightarrow Y$ med $\varphi(0) = y_0$, $\varphi(1) = y_1$, altså at der findes en bevægelse i Y fra y_0 til y_1. I denne fortolkning kaldes homotopiklasserne også kurvekomponenterne af Y, og Y kaldes kurvesammenhængende , hvis Y består af en eneste kurvekomponent.

Rummet Y kaldes lokalt kurvesammenhængende, hvis hvert punkt af Y har en omegnsbasis bestående af kurvesammenhængende mængder. Hvis Y er lokalt kurvesammenhængende er kurvekomponenterne åbne og derfor også afsluttede. Kurvesammenhæng (men ikke lokal kurvesammenhæng) bevares ved kontinuert afbildning.

Definition 3.3. Lad X og Y være topologiske rum, og lad $f: X \longrightarrow Y$ være kontinuert. Hvis vi kan vælge $g: Y \longrightarrow X$, så $g \circ f \simeq 1_X$ og $f \circ g \simeq 1_Y$, kaldes f en homotopiækvivalens, g en homotopiinvers til f, og X og Y kaldes homotopiækvivalente.

Sætning 3.4. "Homotopiækvivalent" er en ækvivalensrelation.

Bevis. Vi behøver kun at vise transitiviteten. Hvis $f: X \longrightarrow Y$ har $g: Y \longrightarrow X$ som homotopiinvers, og $f_1: Y \longrightarrow Z$ har

$g_1: Z \to Y$ som homotopiinvers, får vi $(g\circ g_1)\circ(f_1\circ f) \simeq$ $g\circ(g_1\circ f_1)\circ f \simeq g\circ 1_Y\circ f = g\circ f \simeq 1_X$ og analogt $(f_1\circ f)\circ(g\circ g_1) \simeq 1_Z$, så $g\circ g_1$ er homotopiinvers til $f_1\circ f$. Dermed er sætningen bevist. Det er klart, at homøomorfe rum er homotopiækvivalente. At det omvendte ikke behøver at gælde opdager vi, når vi undersøger, hvilke rum der er homotopiækvivalente med 1-punktsrum. Det er på forhånd klart, at 1-punktsrummene netop udgør en homøomorfiklasse.

Vi betragter 1-punktsrummet p og et rum X. En afbildning $f: p \to X$ er givet ved billedpunktet x, medens der findes en eneste afbildning $g: X \to p$, og vi har automatisk $g\circ f = 1_p$, medens $f\circ g: X \to X$ er afbildningen ind i $x \in X$. Vi ser, at g er homotopiinvers til f, hvis og kun hvis $f\circ g \simeq 1_X$, og g er således en homotopiækvivalens, hvis og kun hvis 1_X er homotop med en afbildning ind i et punkt. Vi formulerer resultatet i en definition og en sætning.

<u>Definition</u> 3.5. Et topologisk rum X kaldes sammentrækkeligt, hvis der findes en homotopi $F: X\times I \to X$ fra 1_X til en afbildning i et punkt.

<u>Sætning</u> 3.6. Et rum er homotopiækvivalent med et 1-punktsrum, hvis og kun hvis det er sammentrækkeligt.

Hvis $F: X\times I \to X$ er en sammentrækning af X til punktet x_0, giver restriktionen af F til $x\times I$ en bevægelse fra x til x_0, så vi har:

<u>Sætning</u> 3.7. Et sammentrækkeligt rum er kurvesammenhængende.

Et delrum X af et topologisk vektorrum over $\grave{R}$ kaldes stjerneformet, hvis det for $x \in X$, $\lambda \in [0,1]$ altid gælder, at $\lambda x \in X$. Hvis vi sætter $F(x,t) = (1-t)x$ får vi defineret en homotopi fra 1_X til afbildningen i 0. Altså er stjerneformede rum sammentrækkelige.

Sætning 3.8. Lad X og Y være topologiske rum, og lad $\pi_0(X)$ og $\pi_0(Y)$ betegne mængderne af kurvekomponenter i X og Y. En afbildning $f: X \to Y$ inducerer en afbildning $f_\#: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, så sammensætning $g \circ f$ inducerer $g_\# \circ f_\#$, og hvis f er en homotopiækvivalens, er $f_\#$ en mængdeækvivalens.

Bevis. Følger umiddelbart af, at f afbilder hver kurvekomponent af X ind i en kurvekomponent af Y.

Her kunne vi have benyttet det sædvanlige sammenhængsbegreb i stedet for kurvesammenhæng. Vi skal ganske kort omtale dette begreb.

Definition 3.9. Et rum kaldes sammenhængende, hvis det ikke kan deles i to disjunkte, ikke tomme åbne mængder, og det kaldes lokalt sammenhængende, hvis hvert punkt har en omegnsbasis bestående af sammenhængende mængder.

Et rum er sammenhængende, hvis og kun hvis, der ikke findes nogen reel kontinuert funktion på hele rummet, hvis værdimængde netop er $\{0,1\}$. Heraf følger, at sammenhængende mængder med et fælles punkt har sammenhængende foreningsmængde (det samme gælder selvfølgelig med kurvesammenhæng), og det medfører igen, at der for hvert punkt $x \in X$ findes en maksimal sammenhængende delmængde, der indeholder x, og disse maksimale sammenhængende delmængder udgør en inddeling af X i komponenter. Et rum er sammenhængende, hvis det indeholder en overalt tæt, sammenhængende mængde. Derfor er afslutningen af en sammenhængende mængde sammenhængende, og det medfører, at et rums komponenter er afsluttede. Et lokalt sammenhængende rum har åbne komponenter. Det er klart, at et interval er sammenhængende, og at sammenhæng bevares ved kontinuert afbildning. Derfor er en kurvesammenhængende mængde sammenhængende, og inddelingen i kurvekomponenter er en videre deling af inddelingen i komponenter.

<u>Sætning</u> 3.10. For et lokalt kurvesammenhængende rum X er komponenterne det samme som kurvekomponenterne.

Bevis. Hvis $K \subseteq X$ er en komponent og $L \subseteq K$ en kurvekomponent, er L og $K \setminus L$ både åbne og afsluttede relativt til K, og da K er sammenhængende, medfører det, at $K \setminus L = \emptyset$.

Den algebraiske topologi interesserer sig også for par (X,A) af topologiske rum med $A \subseteq X$ og for tripler (X,A,B) , $B \subseteq A \subseteq X$. For $a \in X$ skriver vi (X,a) for $(X,\{a\})$. Med en afbildning $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ mener vi et par af afbildninger $f'\colon X \to Y$; $f''\colon A \to B$, således at f'' er restriktionen af f'. Vi skriver $(X,A) \subseteq (Y,B)$, hvis $X \subseteq Y$, $A \subseteq B$, og vi har da en inklusionsafbildning $j\colon (X,A) \to (Y,B)$. Vi identificerer $(X,\emptyset)$ med X, og for hvert par (X,A) får vi da et kommutativt diagram af inklusionsafbildninger

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr] & & \\
\emptyset \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & (X,A) \arrow[r] & (X,X). \\
 & & (A,A) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

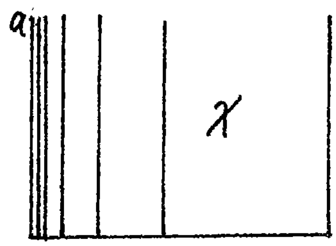
Vi kan da også sige, at $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ har restriktionen $f|X = f': X \rightarrow Y$. Sommetider kan vi godt tillade os at bruge samme bogstav for restriktionen. En afbildning $f: (X,A,B) \longrightarrow (Y,P,Q)$ defineres analogt som en tripel af afbildninger $f': X \rightarrow Y$; $f'': A \rightarrow P$; $f''': B \rightarrow Q$, hvor hver er restriktion af den foregående.

En homøomorfi $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ er selvfølgelig en afbildning, for hvilken $f|X: X \rightarrow Y$ er en homøomorfi og $f(A) = B$, idet det så er klart, at $f|A: A \longrightarrow B$ også bliver en homøomorfi. Det er klart, at "homøomorf med" bliver en ækvivalensrelation, og at det går analogt for tripler.

Vi skriver $(X,A) \times I = (X \times I, A \times I)$. En afbildning $F: (X,A) \times I \longrightarrow (Y,B)$ kaldes en homotopi, og $f_0, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ definerede ved $f_0(x) = F(x,0)$, $f_1(x) = F(x,1)$ kaldes homotope. Derved får vi en ækvivalensrelation "homotop med", der respekterer sammensætning af afbildninger.

Et par (X,a) kaldes et rum med basispunkt. Det kaldes sammentrækkeligt, hvis der findes en homotopi $F: (X,a) \times I \rightarrow (X,a)$ fra den identiske afbildning til afbildningen ind i a.

Eksempel. Hvis (X,a) er parret på figuren, hvor "tænderne" i kammen konvergerer mod "tanden" yderst til venstre, er X åbenbart sammentrækkeligt, men man kan bevise, at (X,a) ikke er det.



Vi bruger $(Y,B)^{(X,A)}$ som betegnelse for mængden af kontinuerte afbildninger $f: (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ og $[X,A;Y,B]$ for mængden af homotopiklasser af sådanne afbildninger.

Definition 3.11. Lad (X,A) og (Y,B) være par af topologiske rum, og lad $U \subseteq X$ være en delmængde. En homotopi $f: (X,A)\times I \longrightarrow (Y,B)$ kaldes en homotopi relativt til U, såfremt $F(x,t) = F(x,0)$ for alle $x \in U$, $t \in I$. For $f_0, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ definerede ved $f_0(x) = F(x,0)$, $f_1(x) = F(x,1)$ skriver vi $f_0 \simeq f_1$ (rel. U), og vi siger, at f_0 og f_1 er homotope relativt til U.

Det er klart, at "homotop rel. U" er en ækvivalensrelation. Af $f_0 \simeq f_1$ (rel. U) følger åbenbart $f_0 | U = f_1 | U$. Hvis nu yderligere $g_0, g_1 : (Y,B) \longrightarrow (Z,C)$ er homotope rel $f_0(U) = f_1(U)$, får vi åbenbart $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ (rel. U).

Lad $f_0, f_1 : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ være givne afbildninger og $U \subseteq X$ en mængde, for hvilken $f_0 | U = f_1 | U$. At undersøge, om $f_0 \simeq f_1$ (rel. U) kommer ud på at undersøge, om der findes en afbildning $F: (X\times I, A\times I) \longrightarrow (Y,B)$, hvis restriktion til $(Z,C) = (X\times 0 \cup X\times 1 \cup U\times I,\ A\times 0 \cup A\times 1 \cup (A\cap U)\times I)$ er den kontinuerte afbildning $g: (Z,C) \longrightarrow (Y,B)$ defineret ved, at $g(x,t) = f_0(x)$ for $t = 0$ og $= f_1(x)$ for $t = 1$ og desuden $= f_0(x) = f_1(x)$ for $x \in U$. Problemet kommer således ud på at udvide en kontinuert afbildning til en større definitionsmængde, således at kontinuiteten bevares. Vi kan foretage udvidelsen i to tempi, så vi først udvider til $A\times I \cup U\times I$, og dernæst til $X\times I$, men så kan muligheden af den sidste udvidelse afhænge af, hvordan vi vælger den første.

En sådan udvidelse af definitionsmængden for en kontinuert afbildning er selvfølgelig ikke altid mulig, og både rummet, vi afbilder fra, og rummet, vi afbilder ind i, kan have egenskaber, der hindrer udvidelsen. Det er hensigtsmæssigt først at studere de rum, for hvilke afbildninger af en afsluttet delmængde ind i $\dot{R}$ kan udvides til hele rummet.

Definition 3.12. Et Hausdorff-rum X kaldes normalt, hvis der for enhver afsluttet mængde $A \subseteq X$, ethvert interval $J \subseteq \dot{R}$ og enhver kontinuert funktion $f: A \to J$ findes en kontinuert udvidelse $\tilde{f}: X \to J$.

Det tilsvarende krav vil være helt urimeligt, hvis A ikke er afsluttet. Normale rum kan også karakteriseres på anden vis:

Sætning 3.13. Lad X være et Hausdorff-rum. Følgende tre betingelser er da indbyrdes ækvivalente:

1). X er normalt.
2). Hvis $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ er afsluttede og disjunkte, findes der en funktion $\tilde{f}: X \to [0,1]$, som er 0 på A og 1 på B.
3). Under de samme forudsætninger findes disjunkte åbne mængder O_1, O_2, således at $A \subseteq O_1$, $B \subseteq O_2$.

Bevis. Da $f: A \cup B \to [0,1]$ defineret ved $f(x) = 0$ for $x \in A$ og $f(x) = 1$ for $x \in B$, er kontinuert, når betingelserne i 2) er opfyldte, er 2) et specielt tilfælde af betingelsen i definition 3.12, og derfor gælder 1) ⇒ 2). Som O_1, O_2 i 3) kan vi vælge de ved $\tilde{f}(x) < \frac{1}{2}$ og $\tilde{f}(x) > \frac{1}{2}$ definerede mængder, når $\tilde{f}$ er funktionen fra 2). Altså gælder 2) ⇒ 3).

Lad os nu antage, at 3) gælder, og lad $A, B \subseteq X$ være disjunkte afsluttede mængder. Vi definerer $A_0 = A$, $O_1 = X \setminus B$. Af 3) følger så, at vi efterhånden kan vælge åbne og afsluttede mængder, så følgende gælder:

$$A_0 \subseteq O_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} \subseteq O_1,$$

$$A_0 \subseteq O_{\frac{1}{4}} \subseteq A_{\frac{1}{4}} \subseteq O_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} \subseteq O_{\frac{3}{4}} \subseteq A_{\frac{3}{4}} \subseteq O_1,$$

o.s.v.

Lad Λ være mængden af rationale tal med totalpotens som nævner. Vi har da A_λ og O_λ for hvert $\lambda \in \Lambda \cap]0,1[$, og desuden har vi A_0 og O_1. Vi definerer $f(x) = \inf\{\lambda \mid x \in O_\lambda\}$ og $f(x) = 1$ for $x \notin O_1$. Det ses let, at f bliver kontinuert og 0 på A_0 og 1 uden for O_1. Altså gælder 3) ⇒ 2).

Lad os nu antage, at 2) er opfyldt, og lad $A \subseteq X$ være afsluttet og $f: A \longrightarrow [0,1]$ kontinuert. Af 2) følger, at vi kan vælge $\varphi_0 : X \longrightarrow [0,1]$ kontinuert, således at $\varphi_0(x) = 0$, hvis $x \in A$ og $f(x) \leq \frac{1}{3}$, medens $\varphi_0(x) = 1$, hvis $x \in A$ og $f(x) \geq \frac{2}{3}$. Vi skriver $f = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}f_1$, og vi kan da gentage processen for $f_1: A \longrightarrow [0,1]$, så vi får $f_1 = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}f_2$, hvor $\varphi_1 : X \longrightarrow [0,1]$ er kontinuert. Efter n trin har vi

$$f = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3^2}\varphi_1 + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n}\varphi_{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n f_n .$$

Vi definerer $\tilde{f} = \frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3^2}\varphi_1 + \cdots$, og $\tilde{f} : X \longrightarrow [0,1]$ bliver kontinuert, da rækken er ligelig konvergent. Vi får åbenbart $\tilde{f}|A = f$, idet $\left(\frac{2}{3}\right)^n f_n \longrightarrow 0$, og dermed har vi vist, at betingelsen i definition 3.12 er opfyldt for $J = [0,1]$. For $f: A \longrightarrow [0,1[$ har vi i hvert fald en udvidelse $\tilde{g}: X \longrightarrow [0,1]$, og hvis vi ganger den med en funktion, som er 1 på A og 0, hvor $\tilde{g}$ er 1, får vi en udvidelse $\tilde{f}: X \longrightarrow [0,1[$. En funktion $f: A \longrightarrow]-1,1[$ er differens mellem en positiv og en negativ del, der kan udvides hver for sig. Endelig er det klart, at 3.12 er opfyldt, når J er et interval, der er homøomorft med $[0,1]$, $[0,1[$ eller $]-1,1[$. Tilovers er så kun udartede intervaller, og for dem er påstanden triviel. Dermed er sætningen bevist.

Sædvanligt forekommende rum er normale:

<u>Sætning</u> 3.14. Metrisable og kompakte Hausdorff-rum er normale.

Bevis. Hvis A og B er disjunkte afsluttede mængder i et metrisk rum X, definerer

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,B)}{\mathrm{dist}(x,A) + \mathrm{dist}(x,B)}$$

en kontinuert funktion, der viser, at 2) i sætning 3.13 er opfyldt. For kompakte Hausdorff-rum fås resultatet af sætning 2.17 ved gentagelse af ræsonnementet i beviset for denne sætning.

Et delrum af et normalt rum behøver ikke at være normalt, men det er svært at vise det ved et eksempel. Det er noget lettere at angive to normale rum, hvis produktrum ikke er normalt. Spørgsmålet om produktet af et normalt rum og I altid er normalt hænger sammen med komplicerede grundlagsspørgsmål. Vi kommer uden om vanskelighederne ved at indføre et nyt begreb.

<u>Definition</u> 3.15. Et topologisk rum X kaldes binormalt, hvis $X \times I$ er normalt.

Det er klart, at "binormal" $\Rightarrow$ "normal", og at både "normal" og "binormal" er topologiske egenskaber. Endvidere har vi:

<u>Sætning</u> 3.16. Lad X, Y være normale rum, $A \subseteq X$ afslut-

tet og $\varphi: A \to Y$ kontinuert. Da er $X \cup_\varphi Y$ et normalt rum.

Bevis. Lad $B \subseteq X \cup_\varphi Y$ være afsluttet og $f: B \to J$ kontinuert, idet $J \subseteq \dot{R}$ er et interval. Lad $k: X \vee Y \to X \cup_\varphi Y$ være den kanoniske afbildning. Så er $Y \cap k^{-1}(B)$ afsluttet, og $f \circ k: Y \cap k^{-1}(B) \to J$ kan udvides til $g_2: Y \to J$. Nu vil $g_2 \circ \varphi: A \to J$ og $f \circ k: X \cap k^{-1}(B) \to J$ tilsammen definere en kontinuert funktion på $A \cup (X \cap k^{-1}(B))$, som er afsluttet, og den kan derfor udvides til en kontinuert funktion $g_1: X \to J$. Funktionerne g_1 og g_2 danner tilsammen en kontinuert funktion $g: X \vee Y \to J$, og definitionen på A er, således at g kan fremstilles på formen $\tilde{f} \circ k$, hvor $\tilde{f}$ er en udvidelse af f, som er kontinuert, fordi topologien på $X \cup_\varphi Y$ er den ved k bestemte finaltopologi.

Sfærerne og alle de projektive rum er normale. De kan fås ved successiv påklæbning af celler. De er også metrisable og kompakte.

Sætning 3.16 gælder uændret for binormale rum, idet vi har $(X \cup_\varphi Y) \times I = (X \times I) \cup_{\varphi \times 1_I} (Y \times I)$ med klæbeafbildningen $\varphi \times 1_I: A \times I \to Y \times I$.

Vi indfører nu klassen af rum, der opfører sig som intervaller for så vidt angår afbildninger ind i dem.

<u>Definition 3.17</u>. Et topologisk rum Y kaldes massivt, hvis der for ethvert normalt rum X, enhver afsluttet delmængde $A \subseteq X$ og enhver kontinuert afbildning $f: A \to Y$ findes en udvidelse $\tilde{f}: X \to Y$.

Intervaller er således massive. Det er klart, at "massiv" er en topologisk egenskab, og at et produkt af massive rum er massivt. Det er også klart, at massive rum er sammenhængende, og derfor vil et delrum af et massivt rum ikke altid være massivt. Det vil senere vise sig, at sfærer ikke er massive, så sammenklæbning af massive rum giver ikke altid massive rum.

En afsluttet begrænset konveks mængde i $\grave{R}^m$ med indre punkter kaldes et konvekst legeme i $\grave{R}^m$.

<u>Sætning</u> 3.18. Konvekse legemer er massive.

Bevis. Lad $A \subseteq \grave{R}^m$ være et konvekst legeme med rand B. Vi kan antage, at $\underline{0} \in \mathring{A}$. Lad $U \subseteq A$ være en åben omegn af $\underline{0}$. For $\underline{b} \in B$ vil det konvekse hylster for U og $\underline{b}$ være indeholdt i A, og det viser, at hvert $\lambda\underline{b}$ med $\lambda \in [0,1[$ ligger i $\mathring{A}$. Heraf følger, at hver halv linie ud fra $\underline{0}$ indeholder netop 1 punkt af B. Hvert punkt af $\grave{R}^m \setminus \{\underline{0}\}$ kan således på netop 1 måde skrives $\lambda\underline{b}$, hvor $\lambda \in]0,\infty[$, $\underline{b} \in B$. Ved $\varphi(\lambda\underline{b}) = \lambda\frac{\underline{b}}{\|\underline{b}\|}$ defineres nu en afbildning $\varphi : (\grave{R}^m, A, B) \longrightarrow (\grave{R}^m, E^m, S^{m-1})$, hvis vi supplerer med $\varphi(\underline{0}) = \underline{0}$. Det er klart, at $\varphi|B$ er kontinuert, og afbilder bijektivt på S^{m-1}, men da B er kompakt, kan vi slutte, at $\varphi|B$ er en homøomorfi. Derefter er det ren rutine at eftervise, at φ og φ^{-1} er kontinuerte. Derefter er det nok at vise, at ét konvekst legeme i $\grave{R}^m$ er massivt, og ifølge bemærkningerne efter definition 3.17 er det umiddelbart for kassen $I^m = I \times \cdots \times I$. Dermed er sætningen bevist, og undervejs fik vi desuden følgende sætning.

<u>Sætning</u> 3.19. For hvert $m \in \grave{N}$ er alle tripler $(\grave{R}^m, A, B)$, hvor A er et konvekst legeme med rand B, indbyrdes homøomorfe.

Dette indebærer, at vi kan benytte et vilkårligt valg af

$(\dot{R}^m, A, B)$ som erstatning for $(\dot{R}^m, E^m, S^{m-1})$ ved topologiske undersøgelser.

Definition 3.20. Lad (X,A) være et par af topologiske rum. Hvis inklusionsafbildningen $j: A \to X$ har en venstre invers $\varphi: X \to A$ (d.v.s. $\varphi \circ j = 1_A$, kaldes A en retrakt af X og φ en retraktion af X ind i A.

At $\varphi: X \to A$ er en retraktion er ensbetydende med, at $\varphi|A = 1_A$, altså at φ er en udvidelse af $1_A: A \to A$. En projektion af et endelig dimensionalt vektorrum på et underrum er et nærliggende eksempel på en retraktion.

Sætning 3.21. Hvis $A \subseteq X$ er en retrakt af X, kan enhver afbildning $g: A \to Y$ udvides til en afbildning $\tilde{g}: X \to Y$.

Bevis. Hvis $\varphi: X \to A$ er en retraktion, er $\tilde{g} = g \circ \varphi$ en udvidelse af g.

Eksempel. Lad $\gamma: I \to \dot{R}^m$ være kontinuert og injektiv. Så er $\gamma(I)$ afsluttet og $\gamma^{-1}: \gamma(I) \to I$ kontinuert. Da $\dot{R}^m$ er normalt og I massivt, har γ^{-1} en udvidelse $g: \dot{R}^m \to I$, men så er $\gamma \circ g: \dot{R}^m \to \gamma(I)$ en retraktion af $\dot{R}^m$ ind i $\gamma(I)$. Vi minder om, at $\gamma(I)$ udmærket kan være noget i retning af den gordiske knude i $\dot{R}^3$.

Sætning 3.22. Følgende to påstande er ækvivalente:

1) Enhver afbildning $f: E^m \to E^m$ har et fixpunkt.

2) S^{m-1} er ikke en retrakt af E^m.

Bevis. Hvis $f: E^m \to E^m$ ikke har noget fixpunkt, vil halvlinien fra $f(x)$ gennem $\underline{x}$ skære S^{m-1} i et punkt $\varphi(\underline{x})$, så

$\varphi: E^n \to S^{n-1}$ bliver en retraktion. Hvis $\varphi: E^n \to S^{n-1}$ er en retraktion, er den sammensatte afbildning $E^n \xrightarrow[\varphi]{} S^{n-1} \xrightarrow[j]{} E^n$, hvor j er inklusionsafbildningen, fixpunkt fri. Dermed er sætningen bevist.

For $n=1$ er 2) trivielt opfyldt, da S^0 ikke er sammenhængende. Brouwer's fixpunktssætning siger, at 1) og 2) gælder for alle n. Den er dybtliggende, men der er givet mange beviser for den. Hvis der overhovedet eksisterer en retraktion $\varphi: E^n \to S^{n-1}$, er det let at vise, at der også findes en differentiabel (et passende antal gange) retraktion, og så kan sætningen vises ved metoder fra matematisk analyse. Vi vil vente, til den falder gratis ud, når vi har lært topologi nok.

En inklusionsafbildning $j: A \to X$ kan selvfølgelig ikke have en højre invers, hvis den ikke er en identisk afbildning. Den kan dog have en højre homotopi-invers.

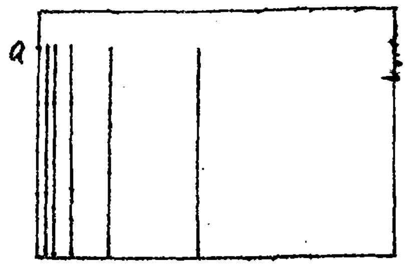
<u>Definition</u> 3.23. Vi siger, at X kan deformeres ind i $A \subseteq X$, hvis 1_X er homotop med en afbildning ind i A. Vi siger, at $A \subseteq X$ er en svag deformationsretrakt af X, hvis inklusionsafbildningen $j: A \to X$ er en homotopiækvivalens.

Det første begreb er undertiden nyttigt. I det andet begreb giver vi bare et nyt navn til noget, der har et bedre navn i forvejen.

<u>Definition</u> 3.24. Vi siger, at $A \subseteq X$ er en deformationsretrakt af X, hvis der findes en retraktion $\varphi: X \to A$, således at denne og inklusionsafbildningen $j: A \to X$ tilfredsstiller betingelsen $j \circ \varphi \simeq 1_X$. Hvis dette gælder relativt til A, siger vi, at A er en stærk deformationsretrakt af X.

At A er en stærk deformationsretrakt af X er ensbetydende med, at 1_X relativt til A er homotop med en afbildning ind i A.

Eksempler. E^1 kan deformeres ind i S^0, men inklusionsafbildningen $j: S^0 \to E^1$ er ikke en homotopiækvivalens. Kammen på figuren (med en følge af tænder) er en svag deformationsretrakt af rektanglet, men ikke en retrakt og derfor heller ikke en deformationsretrakt. Etpunktsrummet a er en deformationsretrakt af kammen, men ikke en stærk deformationsretrakt.



For pæne rum er deformationsretrakt, svag deformationsretrakt og stærk deformationsretrakt det samme.

Det sker ofte, at $A \subseteq X$ ganske vist ikke er (svag, stærk) deformationsretrakt i X, men at der findes en åben mængde O, således at $A \subseteq O \subseteq X$ og A er (svag, stærk) deformationsretrakt af O. Vi siger da, at A er (svag, stærk) omegnsretrakt af X.

Eksempel. S^{n-1} er stærk omegnsretrakt af E^n og af R^n.

Definition 3.25. Lad X, Y være topologiske rum, og lad $f: X \to Y$ være en afbildning. Vi definerer $A \subseteq X \times I$ som mængden af punkter $(x,1)$, $x \in X$, og $f': A \to Y$ ved $f'(x,1) = f(x)$. Rummet $Z_f = (X \times I) \cup_{f'} Y$ kaldes afbildningscylinderen for f.

Der er en naturlig inklusion $Y \subseteq Z_f$, og punkterne af Z_f kan betegnes dels med (x,t); $x \in X$, $t \in I$, og dels med y; $y \in Y$, og så må vi huske, at $(x,1)$ er det samme som $y = f(x)$. Vi har en naturlig inklusion $j: X \to Z_f$ defineret ved $j(x) = (x,0)$, og desuden har vi en naturlig projektion $p: Z_f \to Y$ defineret ved $p(x,t) = f(x)$. Dette er åbenbart en retraktion af Z_f ind i Y. En homotopi $F: Z_f \times I \to Z_f$ defineres ved $F(y,u) = y$, $F(x,t,u) = (x, t + (1-t)u)$. Det bliver en homotopi fra 1_{Z_f} til p relativt til Y. Altså er Y en stærk deformationsretrakt af Z_f. Afbildningen f er identisk med den sammensatte afbildning

$$X \xrightarrow{j} Z_f \xrightarrow{p} Y.$$

Fra topologisk synspunkt er p en ret triviel afbildning, nemlig en homotopiækvivalens. Derfor er alle afbildninger i en vis forstand ækvivalente med inklusionsafbildninger.

<u>Definition</u> 3.26. For $A \subseteq X$ betegner $\frac{X}{A}$ det rum, der fås af $X \vee \{a\}$, når hvert punkt af A identificeres med a. Vi siger, at $\frac{X}{A}$ fås af X ved kollaps af A.

Specielt fås $\frac{X}{\emptyset}$ ved at føje et isoleret punkt til X.

<u>Definition</u> 3.27. Lad X, Y være topologiske rum og $f: X \to Y$ en afbildning. Ved keglen på X forstår vi rummet $CX = \frac{X \times I}{X \times 0}$. Ved afbildningskeglen for f forstår vi rummet $C_f = \frac{Z_f}{X \times 0}$. Ved suspensionen SX af X forstår vi afbildningskeglen for afbildningen $\varphi: X \to p$ af X ind i et 1-punktsrum.

Vi bemærker, at CX er afbildningskeglen for 1_X, og at CX er homøomorf med Z_φ. Vi har en naturlig indlejring $X \subseteq CX$ idet x identificeres med $(x,1)$. Ved identifikation af de to eksemplarer af $(x,1)$ i $CX \vee CX$ for hvert $x \in X$ får vi et rum homøomorft med SX. Vi har i øvrigt $SX = \frac{X \times I}{X \times 0 \cup X \times 1}$.

Det ses umiddelbart, at $CS^{n-1} = E^n$, og det medfører, at

$SS^{n-1} = S^n$. Så kommer det også til at passe, at $S^p S^n = S^{n+p}$, idet S^p er p gange itereret suspension, medens S^n og S^{n+p} er sfærer. Der er ikke større fare for, at denne brug af S i to betydninger skal give anledning til misforståelser.

Det volder ingen vanskeligheder at definere afbildningscylinder, kegle, afbildningskegle og suspension for par og afbildninger af par. Det er ofte hensigtsmæssigt at betragte rum (X, a) med basispunkt eller endog par (X, A, a) med basispunkt. Når vi har et basispunkt, støder vi på den særlige vanskelighed, at kegle, afbildningskegle, suspension etc. ikke på naturlig måde får defineret et basispunkt. Vi minder om, at de betragtede afbildninger altid afbilder basispunkt i basispunkt. I afbildningskeglen, keglen og suspensionen får vi da en hel frembringer $a \times I$, hvis punkter er ret ligeberettigede til rollen som nyt basispunkt, og vi foretrækker så, at kollapse hele denne frembringer i det nye basispunkt. Derved får vi reduceret kegle, reduceret afbildningskegle og reduceret suspension. Vi vil bruge de samme betegnelser uændret. At $CS^{n-1} = E^n$ og $SS^{n-1} = S^n$ gælder uændret for reduceret kegle og reduceret suspension.

Kapitel 4.

$[X; Y]$

Det vigtigste værktøj i den algebraiske topologi er procedurer, som til hvert topologisk rum eller par af topologiske rum knytter en mængde med en eller anden algebraisk struktur, f.eks. en gruppe, og som til hver afbildning af rum på rum eller par af rum på par af rum knytter en monomorfi mellem de tilsvarende mængder med algebraisk struktur, altid samme vej eller altid modsat vej. Det vil også være sådan at sammensætning af kontinuerte afbildninger svarer til sammensætning af de tilsvarende homomorfier. Alle afbildningsfænomenerne for rummene vil da afspejle sig i tilsvarende fænomener for mængderne med algebraisk struktur, og hvad der ikke kan indtræffe med disse mængder, kan så heller ikke indtræffe med rummene. I dette kapitel skal vi se, hvordan grupper på naturlig vis kommer ind i teorien.

Lad Y være et fast valgt topologisk rum. For hvert topologisk rum X sætter vi $\pi^Y(X) = [X; Y]$. Dermed har vi en tilordningslov, som til hvert topologisk rum X knytter en mængde. Lad X' være endnu et topologisk rum og $f: X' \to X$ en afbildning. For hvert $[\varphi] \in [X; Y]$ vil $[\varphi \circ f] \in [X'; Y]$ være et element, som er uafhængigt af valget af repræsentanten φ for homotopiklassen $[\varphi]$, så vi får defineret en afbildning $\pi^Y(f): \pi^Y(X) \longrightarrow \pi^Y(X')$ ved $\pi^Y(f)[\varphi] = [\varphi \circ f]$. Vi foretrækker at skrive $f^{\#}$ for $\pi^Y(f)$, og situationen er altså, at $f: X' \to X$ inducerer en afbildning $f^{\#}: [X; Y] \to [X'; Y]$. Hvis vi nu også for hvert rum X har en kompositionsregel $*$ på $[X; Y]$, således at $f^{\#}([\varphi] * [\psi]) = f^{\#}[\varphi] * f^{\#}[\psi]$, har vi den i indlejringen til kapitlet beskrevne situation med de inducerede afbildninger modsat rettede. Sammensætningsreglen $(f \circ g)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#}$ er triviel. Vi vil nu prøve at finde ud af, hvilke egenskaber Y må have, for at disse fænomener skal kunne indtræffe.

Nu ved vi for det første, at vi har kompositionsreglen $*$ på $[Y \times Y; Y]$. Lad $p_1, p_2: Y \times Y \to Y$ være projektionerne. Vi kan da vælge $\mu : Y \times Y \to Y$, således at $[\mu] = [p_1] * [p_2]$. Derved har vi defineret en kontinuert kompositionsregel på Y. Lad os dernæst betragte $[\varphi], [\psi] \in [X; Y]$. Da vil $\varphi, \psi : X \to Y$ definere en afbildning $(\varphi, \psi) : X \to Y \times Y$. Vi har nu $\varphi = p_1 \circ (\varphi, \psi)$ og $\psi = p_2 \circ (\varphi, \psi)$, altså $[\varphi] = (\varphi, \psi)^\# [p_1]$ og $[\psi] = (\varphi, \psi)^\# [p_2]$, så vi får $[\varphi] * [\psi] = (\varphi, \psi)^\# ([p_1] * [p_2]) = (\varphi, \psi)^\# [\mu] = [\mu \circ (\varphi, \psi)]$. En repræsentant χ for $[\varphi] * [\psi]$ er således defineret ved

$$\chi(x) = \mu(\varphi(x), \psi(x)).$$

Lad Y være et topologisk rum. Som vi har set har vi da en tilordningslov, som til hvert topologisk rum X knytter en mængde $\pi^Y(X) = [X; Y]$, og som til hver afbildning $f : X' \to X$ knytter en (modsat rettet) afbildning $\pi^Y(f) = f^\# : [X; Y] \to [X'; Y]$, således at $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$ og $1_X{}^\# = 1_{[X;Y]}$. En tilordningslov med disse egenskaber kaldes en kontravariant funktor En generel definition af dette begreb bliver givet i næste kapitel, men vi ønsker at have et ikke trivielt eksempel til rådighed, når vi skal diskutere det nye begrebs fundamentale egenskaber.

<u>Definition</u> 4.1. Hvis det lykkes på enhver mængde $\pi^Y(X)$ at indføre en algebraisk struktur, således at $\pi^Y(f)$ for hver afbildning f bliver en homomorfi, siger vi, at π^Y er en (kontravariant) funktor fra kategorien af topologiske rum og kontinuerte afbildninger til kategorien af mængder med den pågældende algebraiske struktor og homomorfier.

Kategori bliver defineret i næste kapitel. Foreløbig er vi tilfredse med, at en kategori er et system af mængder og afbildninger. Resultatet ovenfor kan nu udtrykkes i følgende sætning:

Sætning 4.2. Enhver kompositionsregel $*$ på mængderne $\pi^Y(X) = [X; Y]$, for hvilken π^Y bliver en kontravariant funktor fra kategorien af topologiske rum og kontinuerte afbildninger til kategorien af mængder med den ved $*$ bestemte algebraiske struktur og homomorfier, induceres af en kontinuert kompositionsregel $\mu : Y \times Y \to Y$ ved definitionen $[\varphi] * [\psi] = [\chi]$, hvor $\chi(x) = \mu(\varphi(x), \psi(x))$.

Det ses umiddelbart, at enhver kontinuert afbildning $\mu : Y \times Y \to Y$ inducerer en kompositionsregel på $[X; Y]$ med de omtalte egenskaber. Kontinuerte afbildninger $\mu : Y \times Y \to Y$ findes selvfølgelig altid, f.eks. projektionerne, der inducerer de trivielle kompositionsregler: et produkt er lig sin venstre (højre) faktor (associativ, men ikke kommutativ, og uden neutralelement). Det er klart, at homotope $\mu_1, \mu_2 : Y \times Y \to Y$ inducerer samme kompositionsregel. Hvis Y er sammentrækkeligt, bliver der således kun én kompositionsregel, men da $[X; Y]$ i dette tilfælde har kun ét element, kunne vi ikke vente mere.

Der er en dual problemstilling vedrørende en funktor π_X, som til Y knytter $\pi_X(Y) = [X; Y]$ og til $f : Y \to Y'$ afbildningen $\pi_X(f) = f_\# : [X; Y] \to [X; Y']$ defineret ved $f_\#[\varphi] = [f \circ \varphi]$. Sammensætningsreglen bliver $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$, og π_X kaldes covariant. Lad os igen antage, at vi for hver topologisk rum Y har en kompositionsregel $*$ på $[X; Y]$, således at $f_\#$ altid bliver en homomorfi.

Den disjunkte forening $X \vee X$ er foreningsmængde af to kopier af X, som vi vil betegne X_v og X_h (venstre og højre).

Vi har de naturlige indlejringer $j_1, j_2 : X \longrightarrow X \vee X$ med $j_1(X) = X_v$, $j_2(X) = X_h$. Nu har $[j_1], [j_2] \in [X, X \vee X]$ et produkt $[j_1] * [j_2] = [\nu]$, hvor $\nu : X \longrightarrow X \vee X$ er en kontinuert afbildning. For $\varphi, \psi : X \longrightarrow Y$ har vi da en afbildning $(\varphi, \psi) : X \vee X \longrightarrow Y$ defineret ved, at den er φ på X_v og ψ på X_h. Så er $\varphi = (\varphi, \psi) \circ j_1$ og $\psi = (\varphi, \psi) \circ j_2$, så vi får $[\varphi] * [\psi] = (\varphi, \psi)_{\#} [j_1] * (\varphi, \psi)_{\#} [j_2] = (\varphi, \psi)_{\#} ([j_1] * [j_2]) = (\varphi, \psi)_{\#} [\nu] = (\varphi, \psi) \circ \nu$.

Vi har således fået et resultat, der er dualt til sætning 4.2. Dualiteten kommer bedst til udtryk ved i de to tilfælde at opfatte $[\varphi] * [\psi]$ repræsenteret ved de sammensatte afbildninger

$$(1) \qquad \begin{array}{l} X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\varphi \times \psi} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y \\ X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\varphi \vee \psi} Y \vee Y \xrightarrow{\nabla} Y \end{array}$$

Her er $(\varphi \times \psi)(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \psi(x_2))$, og $\varphi \vee \psi$ fås af $\varphi : X_v \longrightarrow Y_v$, $\psi : X_h \longrightarrow Y_h$. Diagonalafbildningen Δ defineres ved $\Delta(x) = (x, x)$, og sammenklapningen ∇ er invers til j_1 på Y_v og til j_2 på Y_h. Afbildningen ν kaldes en co-kompositionsregel.

Det er nu ikke alt for tilfredsstillende. Hvis X er sammenhængende, er en cokompositionsregel $\nu : X \longrightarrow X \vee X$ en afbildning ind i X_v eller X_h, så der bliver ikke så meget ved cokompositionsreglerne.

Vi går derfor over til at betragte rum (X, a), (Y, b) med basispunkt, og mængden af homotopiklasser $[X, a ; Y, b]$. Produktrummet $Y \times Y$ får (b, b) som basispunkt, og $X \vee X$ skal være 1-punktsforeningen, idet basispunkterne identificeres. Så bliver $X \vee X$ sammenhængende, hvis X er det. Afbildningerne

$\mu : (Y \times Y, (b,b)) \longrightarrow (Y, b)$ og $\nu : (X, a) \longrightarrow (X \vee X, a)$ skal nu være basispunktbevarende. I det følgende undlader vi at skrive basispunktet med, men det er underforstået hele tiden.

Det viser sig nu, at vore undersøgelser bliver interessante, hvis vi yderligere kræver at klassen $[e] \in [X; Y]$, hvor $e : X \longrightarrow Y$ er afbildningen i basispunktet, er neutralelement for kompositionsreglen $*$. Det kommer ud på, at de sammensatte afbildninger i (1) skal være homotope med φ, hvis $\psi = e$, og med ψ, hvis $\varphi = e$. Sammensætningen

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\varphi \times e} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

er helt det samme som

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y \xrightarrow{1_Y \times e} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

hvor $e : Y \longrightarrow Y$ er afbildningen ind i basispunktet. At denne afbildning for alle valg af $\varphi : X \longrightarrow Y$ er homotop med φ, er imidlertid ensbetydende med, at den sammensatte afbildning

$$Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y \xrightarrow{1_Y \times e} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

er homotop med 1_Y. Den sammensatte afbildning fører y over i $\mu(y,b)$. Analogt ser vi, at $[e]$ er venstre neutralelement for $*$, hvis og kun hvis

$$Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y \xrightarrow{e \times 1_Y} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

er homotop med 1_Y. For $*$ defineret ved $\nu : X \longrightarrow X \vee X$ får vi de duale betingelser, at sammensætningerne

$$X \xrightarrow{\nu} X \times X \overset{1_X \vee e}{\underset{e \vee 1_X}{\rightrightarrows}} X \times X \xrightarrow{\nabla} X$$

er homotope med 1_X. Dette giver anledning til følgende definition:

<u>Definition</u> 4.3. Et topologisk rum (Y, b) med basispunkt og med en kompositionsregel $\mu : (Y\times Y, (b,b)) \longrightarrow (Y, b)$ (kontinuert) kaldes et H-rum, hvis det for $e: Y \rightarrow Y$ konstant gælder, at sammensætningerne

$$Y \xrightarrow{\Delta} Y\times Y \underset{e\times 1_Y}{\overset{1_Y\times e}{\rightrightarrows}} Y\times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

er homotope med 1_Y. Et topologisk rum (X, a) med basispunkt og med en kontinuert cokompositionsregel $\nu: (X, a) \longrightarrow (X\vee X, a)$ kaldes et co-H-rum, hvis det for $e: X \rightarrow X$ konstant gælder, at sammensætningerne

$$X \xrightarrow{\nu} X\vee X \underset{e\vee 1_X}{\overset{1_X\vee e}{\rightrightarrows}} X\vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

er homotope med 1_X.

Vi har allerede vist følgende sætning:

<u>Sætning</u> 4.4. Såvel en H-rum-struktur på Y som en co-H-rumstruktur på X inducerer en kompositionsregel på $[X; Y]$ med den konstante afbildningsklasse som neutralelement, idet $[\chi] = [\varphi] * [\psi]$ defineres ved, at χ er givet ved en af sammensætningerne (1).

I H-rum tilfældet får vi ganske enkelt $\chi(x) = \mu(\varphi(x), \psi(x))$. Efter at vi har indført basispunkt, kan vi skrive $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$, hvor $\nu_1(x) = a$ eller $\nu_2(x) = a$, og vi får da

$$\chi(x) = \begin{cases} \varphi(\nu_1(x)), & \text{hvis } \nu_2(x) = a, \\ \psi(\nu_2(x)), & \text{hvis } \nu_1(x) = a. \end{cases}$$

Sætning 4.5. Hvis X er et co-H-rum og Y et H-rum, vil de inducerede kompositionsregler $\ast$ og $\mp$ på $[X;Y]$ tilfredsstille betingelsen

$$([\varphi_1] \mp [\psi_1]) \ast ([\varphi_2] \mp [\psi_2]) = ([\varphi_1] \ast [\varphi_2]) \mp ([\psi_1] \ast [\psi_2])$$

for alle $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in [X;Y]$.

Bevis. Ved direkte udregning ses, at begge sider repræsenteres af $\chi: X \longrightarrow Y$, hvor

$$\chi(x) = \begin{cases} \mu(\varphi_1(\nu_1(x)), \psi_1(\nu_1(x))), & \text{hvis} \quad \nu_2(x) = a, \\ \mu(\varphi_2(\nu_2(x)), \psi_2(\nu_2(x))), & \text{hvis} \quad \nu_1(x) = a. \end{cases}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4.6. Hvis en mængde M er organiseret ved 2 kompositionsregler $\ast$ og $\mp$, som har fælles neutralelement og tilfredsstiller betingelsen

$$(u_1 \mp u_2) \ast (v_1 \mp v_2) = (u_1 \ast v_1) \mp (u_2 \ast v_2)$$

for alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in M$, er $\ast$ identisk med $\mp$ og associativ og kommutativ.

Bevis. Idet e er det fælles neutralelement, er

$$u \ast v = (u \mp e) \ast (e \mp v) = (u \ast e) \mp (e \ast v) = u \mp v.$$

Vi skriver så $*$ for $\ast$ og $\mp$ i den i sætningen anførte betingelse, og så står der den associative lov, når $u_2 = e$, og den kommutative lov, når $u_1 = v_2 = e$. Dermed er sætningen bevist.

De to sidste sætninger har følgende korollar.

Sætning 4.7. Hvis X er et co-H-rum og Y et H-rum, vil de to strukturer inducere samme struktur på $[X, Y]$, og denne bliver associativ og kommutativ ($[X; Y]$ bliver således en kommutativ semigruppe med neutralelement).

Vi vil nu se på det tilfælde, hvor der blot foreligger en co-H-rumstruktur på X eller en H-rum-struktur på Y. Lad $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : X \longrightarrow Y$ være basispunktbevarende, og $[\psi] = ([\varphi_1] * [\varphi_2]) * [\varphi_3]$, $[\chi] = [\varphi_1] * ([\varphi_2] * [\varphi_3])$. Hvis $*$ stammer fra en H-rum-struktur på Y, kan ψ og χ defineres ved

$$\psi(x) = \mu(\mu(\varphi_1(x), \varphi_2(x)), \varphi_3(x)) , \quad \chi(x) = \mu(\varphi_1(x), \mu(\varphi_2(x), \varphi_3(x))).$$

Hvis $*$ stammer fra en co-H-rum struktur på X, kan ψ og χ defineres ved

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(\nu_1(\nu_1(x))), & \text{hvis} \quad \nu_2(x) = a , \ \nu_2(\nu_1(x)) = a, \\ \varphi_2(\nu_2(\nu_1(x))), & \text{hvis} \quad \nu_2(x) = a , \ \nu_1(\nu_1(x)) = a, \\ \varphi_3(\nu_2(x)), & \text{hvis} \quad \nu_1(x) = a. \end{cases}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \varphi_1(\nu_1(x)), & \text{hvis} \quad \nu_2(x) = a, \\ \varphi_2(\nu_1(\nu_2(x))), & \text{hvis} \quad \nu_1(x) = a , \ \nu_2(\nu_2(x)) = a, \\ \varphi_3(\nu_2(\nu_2(x))), & \text{hvis} \quad \nu_1(x) = a , \ \nu_1(\nu_2(x)) = a. \end{cases}$$

Det fremgår heraf, at $*$ vil være associativ, når de to mulige sammensætninger i det relevante af de to følgende diagrammer er homotope

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \times Y \arrow[r, "\mu \times 1"] \arrow[d, "1 \times \mu"] & Y \times Y \arrow[d, "\mu"] \\ Y \times Y \arrow[r, "\mu"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\nu"] & X \vee X \arrow[d, "\nu \vee 1"] \\ X \times X \arrow[r, "1 \vee \nu"] & X \times X \times X \end{tikzcd}$$

Vi siger da, at diagrammerne er homotopikommutative, og at H-rummet Y (co-H-rummet X) er homotopi-associativt.

Analogt ses, at $*$ vil være kommutativ, når det relevante af følgende to diagrammer er homotopi-kommutativt:

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"'] & & Y \times Y \arrow[dl, "\mu"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ X \times X \arrow[rr, "\sigma"] & & X \times X . \end{tikzcd}$$

Her er $\tau(y_1, y_2) = (y_2, y_1)$, $\sigma(x, a) = (a, x)$, $\sigma(a, x) = (x, a)$. Når diagrammerne er homotopikommutative, siger vi, at H-rummet Y (co-H-rummet X) er homotopi-kommutativt.

Hvis $*$ har en invers, må $x \longrightarrow x^{-1}$ induceres af en inversion $\Theta : Y \longrightarrow Y$ eller en co-inversion $\Theta : X \longrightarrow X$. Det ses let, at hver af disse afbildninger vil inducere en inversion, hvis og kun hvis de sammensatte afbildninger

$$Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y \;\frac{\xrightarrow{1 \times \Theta}}{\xrightarrow[\Theta \times 1]{}}\; Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \;\frac{1 \vee \Theta}{\Theta \vee 1}\; X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

er homotope med den konstante afbildning (0-homotope).

<u>Definition</u> 4.8. Et H-rum Y kaldes en (kommutativ) H-gruppe, hvis det er homotopiassociativt (-kommutativt) og har en inversion. Et co-H-rum kaldes en (kommutativ) co-H-gruppe, hvis det er homotopiassociativt (-kommutativt) og har en co-inversion.

<u>Sætning</u> 4.9. En (kommutativ) H-gruppe-struktur på Y inducerer en (kommutativ) gruppestruktur på $[X; Y]$. Det samme gælder for en (kommutativ) co-H-gruppe-struktur på X.

Som eksempler på H-grupper kender vi topologiske grupper som R^n, T^n, S^1, S^3 og diverse matrixgrupper.

Lad (X,a) være et rum med basispunkt. Suspensionen (SX,a) fås af mængden af par (x,t), $x \in X$, $t \in I$, idet alle $(x,0)$, $(x,1)$ og (a,t) identificeres med a.

Sætning 4.10. Suspensionen SX er en co-H-gruppe, idet cokompositionsreglen $\nu: SX \longrightarrow SX \vee SX$ defineres ved

$$\nu(x,t) = \begin{cases} ((x,2t),\ a) & \text{for} \quad t \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ (a,\ (x,2t-1)) & \text{for} \quad t \in [\tfrac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Bevis. Alle punkter $(x,\frac{1}{2})$ går over i a, og derfor er ν kontinuert. At vise, at SX er et co-H-rum kommer ud på at vise, at de ved

$$\nu_1(x,t) = \begin{cases} (x,2t) & \text{for} \quad t \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ a & \text{for} \quad t \in [\tfrac{1}{2},1] \end{cases} \qquad \nu_2(x,t) = \begin{cases} a & \text{for} \quad t \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ (x,2t-1) & \text{for} \quad t \in [\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

definerede afbildninger $\nu_1, \nu_2 : SX \longrightarrow SX$ er homotope med 1_{SX}. En homotopi $F: SX \times I \longrightarrow SX$, som viser det for den første afbildning, defineres ved

$$F(x,t) = \begin{cases} (x,\ (2-u)t) & \text{for} \quad x \in X,\ t \in \left[0, \frac{1}{2-u}\right],\ u \in [0,1] \\ a & \text{for} \quad x \in X,\ t \in \left[\frac{1}{2-u}, 1\right],\ u \in [0,1]. \end{cases}$$

Det andet tilfælde kan overlades til læseren. For at vise, at ν er homotopiassociativ, skal vi vise, at afbildningerne $f,g: SX \longrightarrow SX \vee SX \vee SX$ definerede ved

$$f(x,t)=\begin{cases}((x,4t),a,a) & \text{for } t\in[0,\frac{1}{4}],\\ (a,(x,4t-1),a) & \text{for } t\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\\ (a,a,(x,2t-1)) & \text{for } t\in[\frac{1}{2},1],\end{cases}\qquad g(x,t)=\begin{cases}((x,2t),a,a) & \text{for } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ (a,(x,4t-2),a) & \text{for } t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\\ (a,a,(x,4t-3)) & \text{for } t\in[\frac{3}{4},1]\end{cases}$$

er homotope. En homotopi $F: SX\times I \longrightarrow SX \vee SX \vee SX$, som viser det, er givet ved

$$F(x,t,u)=\begin{cases}((x,(4-2u)t),a,a) & \text{for } t\in[0,\frac{1}{4-2u}],\ u\in[0,1]\\ (a,(x,4t-\frac{4}{4-2u}),a) & \text{for } t\in[\frac{1}{4-2u},\frac{2-\frac{1}{2}u}{4-2u}],\ u\in[0,1]\\ (a,a,(x,\frac{4-2u}{2-\frac{3}{2}u}t-\frac{4-u}{4-3u})) & \text{for } t\in[\frac{2-\frac{1}{2}u}{4-2u},1],\ u\in[0,1]\end{cases}$$

Det er kedsommeligt at lave sådan en homotopi. Efterhånden kan man godt blive erfaren nok til at kunne se, at den findes, uden at konstruere den eksplicit.

En inversion $\theta: SX\longrightarrow SX$ er givet ved $\theta(x,t)=(x,1-t)$. At vise det kommer ud på at vise, at afbildningen $h: SX\longrightarrow SX$ defineret ved

$$h(x,t)=\begin{cases}(x,2t) & \text{for } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ (x,2(1-t)) & \text{for } t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

er 0-homotop. En homotopi $F: SX\times I\longrightarrow SX$ fra h til 0 er givet ved

$$F(x,t,u)=\begin{cases}(x,2(1-u)t) & \text{for } t\in[0,\frac{1}{2}]\\ (x,2(1-u)(1-t)) & \text{for } t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Dermed er sætningen bevist.

For $[\varphi], [\psi] \in [SX; Y]$ er $[\varphi] * [\psi] = [\chi]$, hvor χ er defineret ved

$$\chi(x,t) = \begin{cases} \varphi(x, 2t) & \text{for} \quad t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \psi(x, 2t-1) & \text{for} \quad t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Med denne kompositionsregel er $[SX; Y]$ en gruppe, men eventuelt ikke abelsk.

Definition 4.11. Lad (Y, b) være et rum med basispunkt. Mængden af alle afbildninger $\gamma : (I, \dot{I}) \longrightarrow (Y, b)$, hvor $\dot{I} = \{0, 1\}$ med delrumstopologien fra Y^I, kaldes løkkerummet over (Y, b) og betegnes $(\Omega Y, b)$, idet den konstante afbildning benyttes som basispunkt for ΩY.

Sætning 4.12. Løkkerummet ΩY er en H-gruppe, idet kompositionsreglen $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ defineres ved, at $\mu(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 * \gamma_2$, hvor

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{for} \quad t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{for} \quad t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Bevis. Vi skal først vise, at μ er kontinuert, men vi kan opfatte μ som en afbildning $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow Y^I$, og det er derfor nok at vise, at den tilsvarende afbildning på produktform $\bar{\mu} : \Omega Y \times \Omega Y \times I \longrightarrow Y$ er kontinuert, og her er $\bar{\mu}(\gamma_1, \gamma_2, t) = (\gamma_1 * \gamma_2)(t)$, og den er kontinuert, da dens restriktion til de ved $t \in [0, \tfrac{1}{2}]$ og $t \in [\tfrac{1}{2}, 1]$ bestemte afsluttede delmængder er det.

At vise, at ΩY er et H-rum, kommer ud på at vise, at

$\varphi: \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ defineret ved $\varphi(\gamma)(t) = \gamma(2t)$ for $t \in [0, \frac{1}{2}]$ og $= a$ for $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ er homotop med $1_{\Omega Y}$. En homotopi $F: \Omega Y \times I \longrightarrow \Omega Y$ er givet ved

$$F(\gamma, u)(t) = \begin{cases} \gamma((2-u)t) & \text{for } t \in [0, \frac{1}{2-u}] \\ a & \text{for } t \in [\frac{1}{2-u}, 1]. \end{cases}$$

Det er let at vise, at F er kontinuert. At vise, at μ er homotopiassociativ kommer ud på at vise, at ψ_1, ψ_2: $\Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ definerede ved

$$\psi_1(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & \text{for } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \gamma_2(4t-1) & \text{for } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma_3(2t-1) & \text{for } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad \psi_2(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{for } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(4t-2) & \text{for } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma_3(4t-3) & \text{for } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

er homotope. Det kan overlades til læseren at vise det ved at angive en homotopi. En inversion $\Theta: \Omega Y \longrightarrow \Omega Y$ er givet ved $\Theta(\gamma)(t) = \gamma(1-t)$. Beviset volder ingen vanskelighed.

Løkkerummet ΩY er således en H-gruppe, men ikke altid homotopikommutativ.

Hvis (X,a) og (Y,b) er vilkårlige rum med basispunkt, ved vi således nu, at $[SX; Y]$ og $[X; \Omega Y]$ er grupper. Det viser sig nu, at det bare er to fremstillinger af samme gruppe.

Sætning 4.13. En isomorfi $\varkappa: [SX; Y] \longrightarrow [X; \Omega Y]$ defineres ved, at vi for $\varphi: SX \longrightarrow Y$ sætter $\varkappa[\varphi] = [\psi]$, hvor $\psi: X \longrightarrow \Omega Y$ defineres ved, at $\psi(x)(t) = \varphi(x,t)$.

Bevis. Det følger af sætning 2.25, at $\psi(x): I \longrightarrow Y$ bliver kontinuert. Det ses umiddelbart, at $\psi(x)(0) = \psi(x)(1) = b$, og at $\varkappa$ er injektiv. Dernæst følger det af sætning 2.25, at $\varkappa$ er surjektiv. Det fremgår umiddelbart af definitionerne, at $\varkappa([\varphi]*[\psi]) = \varkappa[\varphi] * \varkappa[\psi]$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 4.14. Lad X, Y være rum med basispunkt. Så er $[S^m X; Y]$ en gruppe for $m \geq 1$ og abelsk for $m \geq 2$.

Bevis. Den første påstand er allerede bevist, og den anden fås af, at $[S^m X; Y]$, ifølge sætning 4.13, er isomorf med $[S^{m-1}X; \Omega Y]$, som er en abelsk gruppe ifølge sætningerne 4.10, 4.12, 4.7 og 4.9. Dermed er sætningen bevist.

For $X = S^0$ får vi specielt, at $[S^m; Y]$ er en gruppe for $m \geq 1$ og abelsk for $m \geq 2$.

<u>Definition</u> 4.15. Mængderne $[S^m; Y]$, $m \geq 0$ kaldes homotopimængderne for (Y, b), og grupperne $[S^m; Y]$, $m \geq 1$ kaldes homotopigrupperne for (Y, b), og de betegnes $\pi_m(Y, b) = [S^m; Y]$, $m \geq 0$.

Det er en tilgivelig forsyndelse at sige homotopigruppe også for $m = 0$. Homotopigrupperne afhænger væsentligt af basispunktet. Som basispunkt for S^m benyttes altid $(1, 0, \cdots, 0)$.

<u>Sætning</u> 4.16. $\pi_0(Y, b)$ er ækvivalent med mængden af kurvekomponenter i Y.

Bevis. S^0 består af punkterne 1 og -1, og 1 afbildes altid i b, så en afbildning $\gamma: S^0 \to Y$ er helt givet ved $\gamma(-1)$, og to sådanne er åbenbart homotope, hvis og kun hvis de afbilder -1 ind i samme kurvekomponent. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 4.17. $\pi_1(Y, b)$ kaldes også fundamentalgruppen.

Fundamentalgruppen afhænger væsentligt af basispunktet og er sædvanligvis ikke abelsk. Den er et af de få hjælpemidler i algebraisk topologi, der kan spores tilbage til det 19. århundrede.

Sætning 4.18. Hvis Y er en H-gruppe og $f: (X', a') \longrightarrow (X, a)$ en afbildning, er $f^{\#}: [X; Y] \longrightarrow [X'; Y]$ en gruppehomomorfi. Hvis X er en co-H-gruppe og $f: (Y, b) \longrightarrow (Y', b')$ en afbildning, er $f_{\#}: [X; Y] \longrightarrow [X; Y']$ en gruppehomomorfi.

Bevis. For $\varphi, \psi: X \longrightarrow Y$ er $f^{\#}([\varphi] * [\psi]) = f^{\#}[\mu \circ (\varphi \times \psi) \circ \Delta] = [\mu \circ (\varphi \times \psi) \circ (f \times f) \circ \Delta] = [\mu \circ ((\varphi \circ f) \times (\psi \circ f)) \circ \Delta] = f^{\#}[\varphi] * f^{\#}[\psi]$. Beviset for den anden påstand går analogt.

Sætning 4.19. En afbildning $f: (Y, b) \longrightarrow (Y', b')$ inducerer en følge af afbildninger $f_{\# n}: \pi_n(Y, b) \longrightarrow \pi_n(Y', b')$, som er homomorfier for $n \geq 1$, og som for $n = 0$ bevarer den konstante afbildnings klasse. Hvis $g: (Y', b') \longrightarrow (Y'', b'')$ er endnu en afbildning, er $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

Bevis. Allerede udført.

Sætning 4.20. Hvis $f, g: (Y, b) \longrightarrow (Y', b')$ er homotope, er $f_{\# n} = g_{\# n}$ for hvert n.

Bevis. $f_{\# n}[\gamma] = [f \circ \gamma] = [g \circ \gamma] = g_{\# n}[\gamma]$.

Sætning 4.21. Hvis $f: (Y, b) \longrightarrow (Y', b')$ er en homotopiækvivalens, er $f_{\# n}$ en isomorfi for hvert $n \geq 1$ og en mængdeækvivalens for $n = 0$.

Bevis. Hvis $g: (Y', b') \longrightarrow (Y, b)$ er en homotopiinvers til f, er $g \circ f \simeq 1_{(Y, b)}$, altså $g_{\# n} \circ f_{\# n} = 1_{\pi_n(Y, b)}$, og analogt $f_{\# n} \circ g_{\# n} = 1_{\pi_n(Y', b')}$. Heraf følger påstanden umiddelbart.

For et sammentrækkeligt rum (X, a) er $\pi_n(X, a)$ triviel for alle n, d.v.s. hvert $\pi_n(X, a)$ består af kun et element, neutralelementet. For et rum X er $\pi_n(X, a)$ for $n > 0$ identisk med $\pi_n(K, a)$, hvor $K \subseteq X$ er den kurvekomponent, der indeholder a. I almindelighed er det ikke en triviel sag at udregne homotopigrupperne for et rum, og vi må se i øjnene, at vi behøver mange flere hjælpemidler, før vi kan udrette noget som helst i den retning. Det har vist sig at være endog meget vanskeligt at bestemme sfærernes homotopigrupper, og S^0 og S^1 er stadig de eneste sfærer, for hvilke alle homotopigrupperne kendes.

I de følgende kapitler vil vi udvikle en del ret primitivt værktøj, som sætter os i stand til at udlede de første beskedne resultater om homotopigrupperne. Derefter vil vi gå over til på helt anden vis at knytte kommutative grupper, homologi- og cohomologigrupper til topologiske rum. Disse vil have den fordel, at de i hvert fald lader sig udregne, og senere vil det vise sig, at de også er et vigtigt hjælpemiddel ved udregning af homotopigrupper.

Kapitel 5.

KATEGORIER OG FUNKTORER.

Vi skal indføre den moderne jargon, der gør det lettere at tale om den algebraiske topologis fænomener.

Vi taler om klasser af individer i stedet for mængder af elementer. At et individ hører til en klasse betyder, at det besidder visse kvalifikationer, og det er disse kvalifikationer, der definerer klassen. Der er god mening i, at tale om klassen af mængder, for vi ved, hvad det betyder at være en mængde. På den anden side er det ikke klart, hvad det betyder, ikke at være en mængde. Vi kan tale om en afbildning af en klasse ind i en anden klasse, men en sådan afbildning må være en procedure, der kan anvendes på hvilket som helst individ fra den første klasse, og som resulterer i et individ fra den anden klasse. Vi kan udmærket tale om ordnede par af individer fra en klasse. Der er også mening i at tale om en ækvivalensrelation i en klasse, og en sådan giver anledning til en inddeling i ækvivalensklasser og vi får en klasse af ækvivalensklasser. Den sædvanlige mængdeækvivalens er en ækvivalensrelation på klassen af mængder, og ækvivalensklasserne bliver ikke mængder (bortset fra den klasse, der har den tomme mængde som eneste individ).

En kategori består af

1) en klasse $\mathfrak{A}$, hvis individer kaldes kategoriens objekter,

2) for hvert par (A, B) af objekter en mængde $\mathcal{F}(A, B)$, og

3) for hver tripel (A, B, C) af objekter en afbildning $\sigma : \mathcal{F}(B, C) \times \mathcal{F}(A, B) \to \mathcal{F}(A, C)$, og vi skriver $\sigma(g, f) = g \circ f$.

Elementerne i $\mathcal{F}(A, B)$ kaldes morfierne fra A til B. Det forlanges, at følgende betingelser er opfyldt:

4) hvis A, B, C, D er objekter, og $f \in \mathcal{F}(A, B)$,

$g \in \mathcal{F}(B, C)$, $h \in \mathcal{F}(C, D)$ er morfier, er $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

5) For hvert objekt A findes en morfi $1_A \in \mathcal{F}(A, A)$, således at det for objekter B, C og morfier $f \in \mathcal{F}(B, A)$, $g \in \mathcal{F}(A, C)$ gælder, at $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$.

På samme måde som i algebra udvides den associative lov til et vilkårligt antal morfier, og det vises, at 1_A er den eneste morfi i $\mathcal{F}(A, A)$ med den angivne egenskab.

En kategori $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathcal{F}, \sigma)$ har en modsat kategori, som vi får ved at omdøbe morfier fra A til B til morfier fra B til A.

Nærliggende eksempler:

Kategorien af mængder og vilkårlige afbildninger.

Kategorien af mængder og injektive (surjektive, bijektive) afbildninger.

Kategorien af endelige mængder og vilkårlige afbildninger.

Kategorien af topologiske rum og kontinuerte afbildninger.

Kategorien af kompakte Hausdorff-rum og kontinuerte afbildninger.

Kategorien af (abelske) grupper og homomorfier.

Det kan varieres i det uendelige. En kategori kaldes lille, hvis klassen af objekter er en mængde. Lad A være en ordnet mængde. Vi har da en kategori med elementerne i A som objekter og de gyldige relationer $a \leq b$ som morfier. Hvis A specielt er mængden af delmængder i en mængde M ordnet ved inklusion, kan vi også bruge inklusionsafbildningerne som morfier.

En kategori $\mathcal{K}' = (\mathfrak{A}', \mathcal{F}', \sigma')$ er en delkategori af $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathcal{F}, \sigma)$, såfremt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, og for vilkårlige objekter $A, B \in \mathfrak{A}'$ desuden $\mathcal{F}'(A, B) \subseteq \mathcal{F}(A, B)$, og hvis yderligere σ' er restriktionen af σ. Delkategorien kaldes fuld, hvis det for vilkårlige objekter $A, B \in \mathfrak{A}'$ gælder, at $\mathcal{F}'(A,B) = \mathcal{F}(A,B)$. En meget lille delkategori af $\mathcal{K}$ kan anskueliggøres ved et diagram som f.eks.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & A_2 \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "\alpha_3"] & & A_3 \arrow[dl, "\alpha_4"'] \arrow[dr, "\alpha_5"] & \\
& B_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & & B_2 \arrow[dl, "\beta_3"'] \arrow[dr, "\beta_4"] & & B_3 \arrow[dl, "\beta_5"'] \\
C_1 \arrow[rr, "h_1"] & & C_2 \arrow[rr, "h_2"] & & C_3 &
\end{tikzcd}$$

Alle afbildninger, der kan fås ved sammensætning af afbildningerne i diagrammet, hører med til den lille kategori. Derved fås en masse sammensatte afbildninger f.eks. fra A_1 til C_3. Vi kan nævne $\beta_4 \circ g \circ \alpha_2 \circ f_1$, men der er mange andre. Hvis det altid gælder, at alle afbildninger fra en bestemt plads i diagrammet til en anden er identiske kaldes diagrammet kommutativt. Diagrammet i figuren består af enkeltpolygoner, som ligger pænt ved siden af hinanden, og det er næsten indlysende, at det er kommutativt, hvis og kun hvis alle enkeltpolygonerne er det. I praksis er det ikke vanskeligt at afgøre, for hvilke deldiagrammer det er nødvendigt at vise kommutativitet for at slutte, at hele diagrammet er kommutativt.

En sekvens er et diagram af formen

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{m-2}} A_{m-1} \xrightarrow{\varphi_{m-1}} A_m \xrightarrow{\varphi_m} A_{m+1} \xrightarrow{\varphi_{m+1}} A_{m+2} \xrightarrow{\varphi_{m+2}} \cdots$$

Sekvenser kan være endelige eller uendelige i den ene eller i begge retninger.

En covariant funktor fra en kategori $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \sigma)$ til en kategori $\mathcal{K}' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{F}', \sigma')$ er en kombination af en afbildning $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ og for hvert par A, B af objekter fra $\mathfrak{A}$ endvidere en afbildning $\mathfrak{F}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{F}'(A',B')$, hvor A', B' er billederne af A og B, således at 1_A afbildes i $1_{A'}$, og hvis f, g afbildes i f', g', vil $g \circ f$ afbildes i $g' \circ f'$, når $g \circ f$ eksisterer. En funktor betegnes med $F : \mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}'$, og billedet af et objekt A betegnes $F(A)$ eller FA ligesom billedet af en morfi $f : A \to B$ betegnes $Ff : FA \to FB$ (med eller uden parenteser), og vi har så $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. En kontravariant funktor afviger kun ved, at $f : A \to B$ har billedet $Ff : FB \to FA$, og sammensætningsreglen er $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$.

Funktorer kan sammensættes som funktioner. Sammensætningen bliver covariant, hvis den omfatter et lige antal kontravariante funktorer, og kontravariant, hvis den omfatter et ulige antal kontravariante funktorer. Der er en identisk funktor (covariant) fra en kategori til sig selv, og der er en triviel kontravariant fra en kategori til den modsatte. Man kan ændre en covariant funktor til en kontravariant eller omvendt, ved at erstatte en af kategorierne med den modsatte.

En glemme-funktor er en funktor, der stiltiende anvendes ved at man ser bort fra struktur, f.eks. ved at behandle en topologisk gruppe som et topologisk rum eller som en gruppe og en kontinuert homomorfi som en kontinuert afbildning eller som en homomorfi.

Eksempel. Til enhver integritetsring A (d.v.s. kommutativ ring med 1-element og uden 0-divisorer) svarer et kvotientlegeme $K(A)$. En injektiv ringhomomorfi $f : A \to B$ kan udvides til en homomorfi $K(f) : K(A) \longrightarrow K(B)$ ved definitionen $K(f)\,\frac{x}{y} =$

$\frac{f(x)}{f(y)}$, idet $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$ medfører $xy' = yx'$, altså $f(x)f(y') = f(y)f(x')$, altså $\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(x')}{f(y')}$. Altså er K en funktor fra kategorien af integritetsringe og injektive homomorfier til kategorien af legemer og homomorfier.

For hvert objekt A i $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathcal{F}, \sigma)$ har vi to funktorer H_A og H^A definerede ved

$$H_A(X) = \mathcal{F}(A,X), \qquad H_A(f)(\varphi) = f\circ\varphi,$$

$$H^A(X) = \mathcal{F}(X,A), \qquad H^A(f)(\varphi) = \varphi\circ f.$$

Vi ser, at H_A er covariant og H^A kontravariant. Hvis $\mathcal{K}$ specielt er kategorien af topologiske rum og homotopiklasser af kontinuerte afbildninger, bliver H_A og H^A de tidligere omtalte funktorer π_A og π^A over i kategorien af mængder og afbildninger.

Vi vil ofte bruge kortere betegnelser for hyppigt forekommende kategorier. Vi siger kategorien af topologiske rum og underforstår, at morfierne er kontinuerte funktioner, og vi siger kategorien af (abelske) grupper og underforstår, at morfierne er homomorfier.

Der findes en covariant funktor S fra kategorien af topologiske rum til den selv, idet SX er suspensionen af X og for $f: X \to Y$ er $Sf: SX \to SY$ givet ved $Sf(x,t) = (f(x),t)$. Analogt har vi en funktor C, der til X knytter keglen CX. Vi har en kategori af rum (X,a) med basispunkt og basispunktbevarende kontinuerte afbildninger, og på denne har vi også funktorerne S og C, blot drejer det sig nu om reduceret suspension og kegle.

Hvis (A, a) specielt er en suspension, fører π_A over i kategorien af grupper, og hvis (A, a) endda er en dobbelt suspension, fører π_A over i kategorien af abelske grupper. Mere specielt er π_0 en funktor fra kategorien af rum med basispunkt til kategorien af mængder og afbildninger, π_1 en funktor fra kategorien af topologiske rum med basispunkt til kategorien af grupper, og for $n \geq 2$ er π_n en funktor fra kategorien af rum med basispunkt til kategorien af abelske grupper.

Der findes en covariant funktor Ω fra kategorien af rum med basispunkt til den selv, idet $\Omega(X, a) = (\Omega X, a)$ er løkkerummet på X, og for $f: (X, a) \longrightarrow (Y, b)$ defineres $\Omega f: (\Omega X, a) \longrightarrow (\Omega Y, b)$ ved $\Omega f(\gamma) = f \circ \gamma$. Sammensætningen $\pi_A \circ \Omega$, hvor A er et rum med basispunkt, er en covariant funktor fra kategorien af topologiske rum med basispunkt til kategorien af grupper. Det er klart, at $\pi^A \circ S$ er en analog kontravariant funktor.

En covariant funktor kopierer ethvert diagram, og det gør en kontravariant funktor næsten også, idet den blot skifter retning på morfierne. Vi minder om, at Brouwer's fixpunktssætning siger, at der ikke findes nogen retraktion $\varphi: E^n \longrightarrow S^{n-1}$, altså at der ikke findes noget kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "1_{S^{n-1}}"] & \\ E^n \arrow[r, "\varphi"'] & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

hvor j er inklusionsafbildningen. Ved anvendelse af π_q får vi et diagram

$$\begin{tikzcd} \pi_q(S^{n-1}) \arrow[d, "j_\#"'] \arrow[dr, "1_{\pi_q(S^{n-1})}"] & \\ \pi_q(E^n) \arrow[r, "\varphi_\#"'] & \pi_q(S^{n-1}). \end{tikzcd}$$

Nu er $\pi_q(E^n)$ triviel, da E^n er et sammentrækkeligt rum, og derfor er $j_\#$ og $\varphi_\#$ 0-afbildninger. Altså vil Brouwer's fixpunktssætning være bevist, så snart det lykkes os at vise, at q kan vælges, så $\pi_q(S^{n-1})$ ikke er triviel. Det er desværre ikke så let - men vi har da også vist, at det må være lige så svært som Brouwer's fixpunktssætning. Det bliver dog en anden funktor end π_q, der viser sætningen for os.

Lad $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \sigma)$ og $\mathcal{K}' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{F}', \sigma')$ være kategorier, og lad $F, G : \mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}'$ være covariante funktorer. Ved en naturlig transformation $\varphi : F \rightarrow G$ forstås en tilordningslov, der til hvert objekt A i $\mathcal{K}$ knytter en morfi $\varphi(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ fra $\mathcal{K}'$, således at det for enhver morfi $f : A \rightarrow B$ fra $\mathcal{K}$ gælder, at diagrammet

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi(A)"] & F(B) \arrow[d, "\varphi(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

er kommutativt. Hvis F og G er kontravariante funktorer, defineres naturlig transformation analogt. Den eneste ændring bliver, at morfierne $F(f)$ og $G(f)$ går modsat vej.

Hvis A og B er topologiske rum, er π_A og π_B funktorer fra kategorien af topologiske rum til kategorien af mængder. En afbildning $\varphi : B \rightarrow A$ giver anledning til en naturlig transformation $\bar{\varphi}: \pi_A \longrightarrow \pi_B$, idet vi for $[f] \in \pi_A(X) = [A;X]$ sætter $\bar{\varphi}(X)[f] = [f\circ\varphi] \in \pi_B(X) = [B;X]$. I dette tilfælde er det trivielt, at diagrammet ovenfor bliver kommutativt. Afbildningen φ giver også anledning til en dual transformation fra π^B til π^A.

Ud fra en kategori $\mathcal{K} = (\mathfrak{A}, \mathcal{F}, \sigma)$ kan vi konstruere nye kategorier, hvis objekter er diagrammer af fast udseende. Således får vi en kategori, hvis objekter er dobbelt uendelige sekvenser

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+2} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} \cdots$$

Vi kan kort betegne en sådan sekvens (A,φ) . Ved en morfi $f: (A,\varphi) \longrightarrow (B,\psi)$ forstår vi en følge af morfier $f_n: A_n \longrightarrow B_n$ fra $\mathcal{K}$, således at

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\varphi_{n-2}"] & A_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_{n+1} \arrow[r, "\varphi_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & A_{n+2} \arrow[r, "\varphi_{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\psi_{n-2}"] & B_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & B_n \arrow[r, "\psi_n"] & B_{n+1} \arrow[r, "\psi_{n+1}"] & B_{n+2} \arrow[r, "\psi_{n+2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

er et kommutativt diagram. Analogt er der en kategori, hvis objekter er kommutative firkanter

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
B_1 \arrow[r, "\psi"] & B_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f_1'"] & A_2' \arrow[d, "f_2'"] \\
B_1' \arrow[r, "\psi'"] & B_2'
\end{tikzcd} ,$$

og en morfi fra den første firkant til den anden består da af 4 morfier

$$\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A_1', \quad \alpha_2 : A_2 \longrightarrow A_2', \quad \beta_1 : B_1 \longrightarrow B_1', \quad \beta_2 : B_2 \longrightarrow B_2'$$

fra $\mathcal{K}$, så vi får en kommutativ terning

$$\begin{tikzcd}
& A_1' \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dd, "f_1'"] & & A_2' \arrow[dd, "f_2'"] \\
A_1 \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "f_1"] & & A_2 \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[dd, "f_2"] & \\
& B_1' \arrow[rr, "\psi'"] & & B_2' \\
B_1 \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[rr, "\psi"] & & B_2 \arrow[ur, "\beta_2"] &
\end{tikzcd}$$

Som et særligt simpelt eksempel har vi en kategori, hvis objekter er afbildninger $p : A \to X$, hvor A og X er rum. En morfi fra $p : A \to X$ til $q : B \to Y$ er et par af afbildninger $f : A \to B$, $g : X \to Y$, således at $q \circ f = g \circ p$. Vi har en funktor fra denne kategori til kategorien af topologiske rum, som til et objekt $p : A \to X$ knytter afbildningscylinderen Z_p , og til morfien (f, g) en afbildning $Z_{(f,g)}$ defineret ved $Z_{(f,g)}(a, t) = (f(a), t)$, $Z_{(f,g)}(x) = g(x)$. Afbildningskeglen giver os en analog funktor, og hvis vi går over til rum med basispunkt, får vi en tilsvarende funktor af den reducerede afbildningskegle.

En morfi $f : X \to Y$ i en kategori kaldes en ækvivalens, hvis der findes en morfi $g : Y \to X$, således at $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$, og vi siger da, at g er invers til f og skriver $g = f^{-1}$, og objekterne X og Y kaldes ækvivalente. Det er klart, at vi har en ækvivalensrelation, og kategoriens klasse af objekter bliver derved delt i ækvivalensklasser. Mængdeækvivalens, homøomorfi og isomorfi er kendte eksempler.

Vi har en kategori, hvis objekter er (par af) topologiske rum (med basispunkt), og hvis morfier er homotopiklasser af afbildninger. Ækvivalensbegrebet i denne kategori bliver homotopiækvivalens.

Et initialt objekt i en kategori er et objekt med netop 1 morfi til ethvert objekt i kategorien. Et finalt objekt er et objekt med netop 1 morfi fra ethvert objekt. Alle initiale (finale) objekter i en kategori er ækvivalente. Den tomme mængde og dettomme rum er initiale objekter. Et 1-punktsrum og en triviel gruppe er finale objekter.

Direkte systemer og inverse systemer er specielle kategorier. Hvis (M_j, φ_{ij}, J) er et direkte system, der er delkategori af en kategori $\mathcal{K}$, kan vi betragte objekter X fra $\mathcal{K}$, og for hvert X familier af morfier $f_j : M_j \to X$, således at det for alle φ_{jk} gælder, at $f_j = f_k \circ \varphi_{jk}$. Hvis Y er et andet objekt og $g_j : M_j \to Y$ en anden familie af morfier, som tilfredsstiller den samme betingelse, vil vi betragte morfier $h : X \to Y$ fra $\mathcal{K}$ for hvilke $g_j = h \circ f_j$ for alle j. Derved får vi en ny delkategori i $\mathcal{K}$. Vi ser, at $\lim_{\to} (M_j, \varphi_{ij}, J)$ netop er et initialt objekt i denne kategori, og det betyder, at de betragtede familier $f_j : M_j \to X$ af morfier netop er dem, der kan faktoriseres på formen $M_j \xrightarrow{g_j} \lim_{\to} (M_j, \varphi_{ij}, J) \xrightarrow{h} X$, hvor h er entydig fastlagt ved familien f_j. Vi har et slagord i denne situation, idet vi siger, at $\lim_{\to} (M_j, \varphi_{ij}, J)$ er et universelt objekt for de betragtede familier af morfier. Her er der tale om et initialt universelt objekt for en final situation. Hvis det drejer sig om ikke tomme mængder og afbildninger vil mængder med 1 element være finale universelle objekter i den samme situation. Hvis (M_j, φ_{ij}, J)

er et inverst system, kan vi betragte den duale situation, og $\lim_{\leftarrow}(M_j, \varphi_{ij}, J)$ er da et finalt universelt objekt for en initial situation, og hvis det specielt drejer sig om mængder og afbildninger, er den tomme mængde initialt universelt objekt for den samme situation.

Lad $(G_j \mid j \in J)$ være en familie af abelske grupper. Vi betragter alle mulige valg af en abelsk gruppe X og homomorfier $\varphi_j : X \longrightarrow G_j$. Ethvert sådan valg bestemmer netop en afbildning $\varphi : X \longrightarrow \prod_{j \in J} G_j$, og hvis vi indfører den nærliggende gruppestruktur $(x_j) + (y_j) = (x_j + y_j)$ på $\prod_{j \in J} G_j$, bliver φ en homomorfi. De mulige valg af X og $\varphi_j, j \in J$, er altså netop alle, der kan faktoriseres på formen

$$X \xrightarrow{\varphi} \prod_{j \in J} G_j \xrightarrow{p_j} G_j ,$$

hvor p_j er projektionen. Altså er gruppernes produkt $\prod_{j \in J} G_j$ finalt universelt element i den foreliggendeinitiale situation. Trivielle grupper er initiale universelle objekter i den samme situation.

Lad $(G_j \mid j \in J)$ være en familie af abelske grupper. Vi betragter alle mulige valg af en abelsk gruppe X og homomorfier $\varphi_j : G_j \longrightarrow X$. Med $\bigoplus_{j \in J} G_j \subseteq \prod_{j \in J} G_j$ betegner vi undergruppen af familier (x_j) med $x_j = 0$ undtagen for endelig mange j. Den kan opfattes som gruppen af endelige summer $x_{j_1} + \cdots + x_{j_n}$ med $x_{j_\nu} \in G_{j_\nu}$ med den naturlige komposition, og homomorfierne φ_j bestemmer da éntydigt en homomorfi $\varphi : \bigoplus_{j \in J} G_j \longrightarrow X$ ved $\varphi(x_{j_1} + \cdots + x_{j_n}) = \varphi_{j_1}(x_{j_1}) + \cdots + \varphi_{j_n}(x_{j_n})$. De betragtede valg af X og $\varphi_j, j \in J$ er altså netop alle, der giver faktoriseringer

$$G_j \xrightarrow{i_j} \bigoplus_{j \in J} G_j \xrightarrow{\varphi} X,$$

hvor i_j er den naturlige indlejring. Vi ser, at $\bigoplus_{j \in J} G_j$ er initialt universelt objekt i en final situation.

I kategorien af abelske grupper er mængden af homomorfier af A ind B selv en abelsk gruppe. For $\varphi, \psi : A \longrightarrow B$ har vi nemlig

$$(\varphi+\psi)(x+y) = \varphi(x+y) + \psi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) =$$

$$\varphi(x) + \psi(x) + \varphi(y) + \psi(y) = (\varphi+\psi)(x) + (\varphi+\psi)(y),$$

men overgangen fra første til anden linie beror på kommutativiteten.

Funktorer fra kategorien af abelske grupper til samme kategori er særlig interessante når mængderne af homomorfier afbildes homomorft. Sådanne funktorer kaldes additive.

Kapitel 6.

POLYEDRE

I den algebraiske topologi benyttes polyedre (meget mere generelle end de klassiske) som særlig simple modeller af topologiske rum. Nyere undersøgelser viser, at polyedrene er generelle nok til, at alle de fænomener, der kan skelnes ved den algebraiske topologis metoder, indtræffer for polyedrene. Vi indleder med nogle abstrakte begreber.

<u>Definition</u> 6.1. Et simplicielt kompleks K er en mængde af endelige ikke tomme delmængder af en mængde H, således at følgende betingelser er opfyldt:

1) $\forall h \in H \; (\{h\} \in K)$,

2) $\forall s,t \subseteq H \; ((s \in K \wedge t \subseteq s \wedge t \neq \emptyset) \Rightarrow t \in K)$.

Elementerne i K kaldes simplices og elementerne i H hjørner.

Vi ser, at H er foreningsmængden af alle simplices i K. Et simplex S er således en endelig, ikke tom delmængde af H. Et delsimplex i S kaldes en side i S. Vi kalder S et n-simplex, hvis det har $n+1$ hjørner. Det er klart, hvad vi mener med en q-side i S og med en ægte side i S. Antallet af q-sider i et n-simplex er $\binom{n+1}{q+1}$. Et simplicielt komplex kaldes endeligt, hvis antallet af simplices i det er endeligt, og det er ensbetydende med, at antallet af hjørner er endeligt.

For et simplex S betegner $\overline{S}$ det simplicielle komplex, der består af alle sider i S, og $\dot{S}$ betegner det simplicielle komplex, der består af alle ægte sider i S.

Et delkompleks af et simplicielt kompleks K er en delmængde af K, der selv er et simplicielt kompleks. Det kaldes fuldt, hvis ethvert simplex $S \in K$ for hvilket $\dot{S}$ er i delkomplekset, selv er i delkomplekset. Ethvert delkompleks i K har en mindste udvidelse til et fuldt delkompleks i K.

Vi vil ikke skelne omhyggeligt mellem hjørne og 1-simplex. For enhver mængde H har vi et simplicielt kompleks, der består af de endelige, ikke tomme delmængder af H. For $H = \dot{N}$ har vi et simplicielt kompleks bestående af alle simplices $(n, n+1, \cdots, 2n)$ og alle sider i disse. Det er let at lave flere eksempler.

Definition 6.2. Lad K_1 og K_2 være simplicielle komplekser, og lad H_1 være mængden af hjørner i K_1 og H_2 mængden af hjørner i K_2. Ved en simpliciel afbildning $f: K_1 \longrightarrow K_2$ forstås en afbildning, der er induceret af en afbildning $\varphi: H_1 \longrightarrow H_2$.

En afbildning $\varphi: H_1 \longrightarrow H_2$ vil åbenbart inducere en simpliciel afbildning $f: K_1 \longrightarrow K_2$, hvis og kun hvis den afbilder elementer, der er hjørner i et simplex, i elementer, der er hjørner i et simplex. Billedet af et m-simplex vil være et q-simplex med $q \leq m$.

Vi vil også interessere os for par (K_1, L_1), (K_2, L_2) af simplicielle komplekser, idet $L_1 \subseteq K_1$, $L_2 \subseteq K_2$. Ved en simpliciel afbildning $f: (K_1, L_1) \longrightarrow (K_2, L_2)$ forstår vi en afbildning $f_1: K_1 \rightarrow K_2$ med en restriktion $f_2: L_1 \longrightarrow L_2$. Der findes et tomt kompleks $\emptyset$, og vi sætter $(K, \emptyset) = K$, så vi har inklusionsafbildninger $L \longrightarrow K \longrightarrow (K, L)$.

Sætning 6.3. Der findes en kategori af simplicielle komplekser og simplicielle afbildninger, samt en kategori af simplicielle par og simplicielle afbildninger.

Bevis. Klart.

Vi kan selvfølgelig også indføre tripler. Vi skal nu skabe forbindelse mellem simplicielle komplekser og topologiske rum. Dertil benytter vi rummet I^H, hvor H er mængden af hjørner.

Definition 6.4. Lad K være et simplicielt kompleks og H mængden af hjørner. Med $P_m(K) \subseteq I^H$ betegner vi mængden af punkter $(x_h \mid h \in H)$, for hvilke det gælder, at mængden $(h \mid x_h > 0)$ er et simplex, samt at $\sum_{h \in H} x_h = 1$.

Den første betingelse bevirker, at summen i den anden betingelse er endelig. Vi bemærker, at K er bestemt ved $P_m(K)$, idet den første betingelse bevirker, at man kan se på $P_m(K)$, hvilke delmængder af H der er simplices.

Lad $s \in K$ være et m-simplex, og vi kan antage, at dets hjørner hedder $0, 1, \cdots, m$, så et punkt i $P_m(\bar{s})$ er givet ved et koordinatsæt $(x_0, \cdots, x_m)$, hvor $x_0 \geqq 0, \cdots, x_m \geqq 0$, $x_0 + \cdots + x_m = 1$. Som punkt i $P_m(K)$ har det alle øvrige koordinater = 0. Vi ser, at $P_m(\bar{s}) \subseteq R^{m+1}$ er det konvekse hylster for basisvektorernes endepunkter.

Vi siger, at $m+1$ punkter i et affint rum er i almindelig beliggenhed, hvis de ikke er indeholdt i noget affint $m-1$-dimensionalt underrum. I et rum med færre end m dimensioner kan $m+1$ punkter aldrig være i almindelig beliggenhed. I et m-dimensionalt rum kan en mængde af q punkter i almindelig beliggenhed altid udvides til en mængde af $m+1$ punkter i almindelig beliggenhed. Der findes netop 1 affin afbildning $f: R^m \longrightarrow R^m$, som fører $m+1$ givne punkter i almindelig beliggenhed over i $m+1$ vilkårlige givne punkter, og hvis også disse er i almindelig beliggenhed, vil f være en homøomorfi. En mængde bestående af $m+1$ punkter i almindelig beliggenhed i et affint rum er indeholdt i netop 1 m-dimensionalt underrum.

Det konvekse hylster for $m+1$ punkter i almindelig beliggenhed i et affint rum kaldes et reelt m-simplex. Alle sådanne er indbyrdes homøomorfe. Vi har set, at $P_m(\bar{s})$, hvor $s \in K$ er et m-simplex, er et reelt m-simplex.

Ved afbildningen P_m vil hvert m-simplex $s \in K$ svare til et reelt m-simplex i en $m+1$-dimensional delterning af I^H. En side i s svarer derved til en side i det reelle m-simplex. For $s,t \in K$ er $P_m(\bar{s}) \cap P_m(\bar{t}) = P_m(\overline{s \cap t})$.

Et hjørne h_j kan identificeres med billedet $P_m(h_j)$, hvor h_j fortolkes som et 0-simplex. Derved bliver hjørnerne identificeret med basisvektorerne for I^H, som alle ligger i $P_m(K)$, og hvert punkt af $P_m(K)$ bliver så en linearkombination $\sum x_j h_j$, hvor alle $x_j \geq 0$, og $x_j > 0$ indtræffer for hjørnerne i et simplex, og $\sum x_j = 1$.

For $s \in K$ er delrumstopologien fra I^H på $P_m(\bar{s})$ den sædvanlige topologi på det reelle simplex, men for hele $P_m(K)$ bliver delrumstopologien fra I^H grovere end ønskeligt. Vi foretrækker at indføre em metrik på $P_m(K)$, idet vi definerer afstanden mellem $\underline{x} = \sum x_j h_j$ og $y = \sum y_j h_j$ ved

$$dist(\underline{x}, y) = \sqrt{\sum (y_j - x_j)^2}.$$

Det har mening, fordi summen bliver endelig, og derfor er det også klart, at $dist$ bliver en metrik. Vi kalder $P_m(K)$ med denne metrik det ved K bestemte metriske polyeder, og vi betegner det $|K|_d$. På hvert reelt simplex bliver den ved metrikken inducerede topologi identisk med delrumstopologien fra I^H.

En simpliciel afbildning $f: K \to K'$ induceres af en afbildning $\varphi: H \to H'$ af de tilsvarende mængder af hjørner, og derved induceres $P_m(f): P_m(K) \longrightarrow P_m(K')$ defineret ved

$$P_m(f)\left(\sum x_j h_j\right) = \sum x_j \varphi(h_j),$$

hvor summen på højre side reduceres, hvis flere $\varphi(h_j)$ er identiske.

Vi skal ikke spilde tid på at undersøge, om $P_m(j)$ er kontinuert i den metriske topologi, men i stedet endnu en gang skifte topologi.

Vi betragter igen et simplicielt kompleks K med mængden H af hjørner. Ved m-skelettet $K^m \subseteq K$ forstås mængden af q-simplices i K med $q \leq m$. Så er $K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \cdots$ og $\bigcup_{m=0}^{\infty} K^m = K$, men vi har tillige $P_m(K^0) \subseteq P_m(K^1) \subseteq \cdots$ og $\bigcup_{m=0}^{\infty} P_m(K^m) = P_m(K)$, og det gælder endda også, at $|K^0|_d \subseteq |K_1|_d \subseteq \cdots$ og $\bigcup_{m=0}^{\infty} |K^m|_d = |K|_d$.

Vi kan betragte H, K^0 og $P_m(K^0)$ som samme mængde. Vi bemærker, at vi får $P_m(K^m)$ ud fra $P_m(K^{m-1})$ ved at tilføje bidragene til $P_m(K)$ fra alle m-simplices i K. For et m-simplex s gælder nu, at $P_m(\dot{s})$ allerede er bygget ind i $P_m(K^{m-1})$, og $P_m(\bar{s})$, som er en m-celle, klæbes derfor til $P_m(K^{m-1})$ med inklusionen $P_m(\dot{s}) \subseteq P_m(K^{m-1})$ som klæbeafbildning. Vi kan danne den disjunkte forening af alle $P_m(\bar{s})$ svarende til m-simplices $s \in K$, og klæbe denne til $P_m(K^{m-1})$ ved den klæbeafbildning, der er sammensat af randens inklusioner.

Det er nu naturligt, at definere topologien på $P_m(K)$ ved den her omtalte følge af sammenklæbninger. Det fører til, at en mængde i $P_m(K)$ bliver afsluttet, hvis og kun hvis dens fællesmængde med enhver mængde $P_m(\bar{s})$ for $s \in K$ bliver afsluttet. Derved bliver $P_m(K)$ netop direkte limes for $(P_m(K^m))$ med inklusionsafbildninger, og det er også klart, at topologien bliver kompakt frembragt.

Definition 6.5. Den topologi på $P_m(K)$, der er bestemt ved, at en mængde i $P_m(K)$ er afsluttet, hvis og kun hvis dens fællesmængde med ethvert afsluttet simplex i $P_m(K)$ er afsluttet, kaldes den koherente topologi på $P_m(K)$, og $P_m(K)$ med den koherente topologi kaldes det til K svarende polyeder og betegnes $|K|$.

Det er nu klart, at følgende sætning gælder:

Sætning 6.6. En afbildning $f: |K| \to Y$ er kontinuert, hvis og kun hvis dens restriktion til hvert afsluttet simplex i $|K|$ er kontinuert.

Specielt vil en simpliciel afbildning $f: K \to K'$ inducere en kontinuert afbildning $|f|: |K| \to |K'|$. Altså gælder følgende sætning:

Sætning 6.7. Der er en covariant funktor, som til hvert simplicielt par (K, L) knytter et topologisk par $(|K|, |L|)$, og som til enhver simpliciel afbildning $f: (K, L) \to (K', L')$ knytter en kontinuert afbildning $|f|: (|K|, |L|) \to (|K'|, |L'|)$.

Udvidelsen til par er triviel. Hvis f er en inklusionsafbildning, er $|f|$ en inklusionsafbildning. Afsluttede simplices i $|K|$ er afsluttede mængder. Den koherente topologi er finere end den af metriken inducerede.

Sætning 6.8. Et polyeder $|K|$ er et normalt rum.

Bevis. Da $|K^m|$ fås ved påklæbning af celler på $|K^{m-1}|$, er $|K^m|$ normalt, hvis $|K^{m-1}|$ er det. Men så giver induktion, at $|K^m|$ er normalt for ethvert m. Lad $A \subseteq K$ være afsluttet og $f: A \to [a, b]$ kontinuert. Det er nok at vise, at der findes en følge af afbildninger $f_m : A \cup |K^m| \longrightarrow [a,b]$, så enhver er udvidelse af den foregående. Hvis f_m er konstrueret, foreligger f_{m+1} allerede på $(A \cup |K^m|) \cap |K^{m+1}|$, som er afsluttet, og den kan udvides til $|K^{m+1}|$, da $|K^{m+1}|$ er normalt, men den derved opnåede funktion bliver kontinuert på $A \cup |K^{m+1}|$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 6.9. For ethvert simplex $s \in K$ kaldes $|\bar{s}| \setminus |\dot{s}| \subseteq |K|$ et åbent simplex i $|K|$ og betegnes $\langle s \rangle$.

Hvis s er et 0-simplex, er $\dot{s} = \emptyset$, altså $|\bar{s}| = \langle s \rangle$. Et åbent simplex $\langle s \rangle$ er en åben mængde i $|K|$, hvis og kun hvis s er et maksimalt simplex i K.

Sætning 6.10. De åbne simplices i $|K|$ udgør en klasseinddeling af $|K|$.

Bevis. Et punkt $\underline{x} \in |K|$ har en fremstilling $\underline{x} = \sum x_j h_j$, og de h_j , der har strengt positive koefficienter, er hjørner i et simplex s med $\underline{x} \in \langle s \rangle$. Så er $\underline{x}$ ikke i noget mindre simplex, og alle større har $\underline{x}$ i en ægte side. Dermed er sætningen bevist.

Definition 6.11. Det simplex $s \in K$, for hvilket $x \in |K|$ tilfredsstiller $x \in \langle s \rangle$, kaldes bæreren for x.

Definition 6.12. En mængde A i et topologisk rum X kaldes diskret, hvis enhver delmængde af A er afsluttet.

Sætning 6.13. En mængde i $|K|$ er diskret, hvis og kun hvis dens fællesmæmgde med hvert åbent simplex er endelig.

Bevis. Betingelsen medfører, at mængden har endelig fællesmængde med hvert afsluttet simplex i $|K|$, og det medfører åbenbart, at enhver endelig delmængde af den er afsluttet. Hvis betingelsen ikke er opfyldt, indeholder mængden uendelig mange punkter af et afsluttet simplex $|\bar{s}| \subseteq |K|$, og dermed en delmængde af $|\bar{s}|$, som ikke er afsluttet (man fjerner et fortætningspunkt). Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6.14. En mængde A i et polyeder $|K|$ er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet og dækket af endelig mange åbne simplices.

Bevis. Hvis betingelsen er opfyldt er mængden dækket af endelig mange afsluttede simplices, og dermed er den foreningsmængde af endelig mange kompakte mængder, altså kompakt. Vi ved, at A ikke er kompakt, hvis A ikke er afsluttet. Hvis A indeholder punkter af uendelig mange åbne simplices, har A ifølge sætning 6.13 en uendelig diskret delmængde, og så kan A ikke være kompakt. Dermed er sætningen bevist.

Definition 6.15. Lad K være et simplicielt kompleks og $s \in K$ et simplex. Foreningsmængden af $|\bar{s}|$ og de åbne simplices $\langle t \rangle$, for hvilke s er side i t, kaldes stjernen for s og betegnes $st\, s$.

Hvis h er et hjørne i K, er $st\, h$ således foreningsmængden af alle åbne simplices $\langle s \rangle$, for hvilke h er hjørne i s.

Sætning 6.16. Stjernerne $st\, h$ for hjørnerne i et simplicielt kompleks K udgør en overdækning af $|K|$ med åbne mængder.

Bevis. Da ethvert åbent simplex har hjørner, er det klart, at stjernerne dækker $|K|$. Lad h være et hjørne. Vi skal vise, at $A = |K| \setminus st\,h$ er afsluttet. Hvis $s \in K$ ikke har h som hjørne, er $|\bar{s}| \subsetneq A$. Hvis h er hjørne i s, er $A \cap |\bar{s}| = |\bar{s'}|$, hvor s' er siden overfor h. Dermed er sætningen bevist.

Definition 6.17. Et simplicielt kompleks K kaldes lokalt endeligt, hvis hvert hjørne i K er hjørne i højst endelig mange simplices i K.

Det er åbenbart ensbetydende med, at alle stjerner er endelige.

Sætning 6.18. For et simplicielt kompleks K er følgende 5 egenskaber indbyrdes ækvivalente:

1) $|K|$ er metrisabelt.
2) Der findes en numerabel omegnsbasis for hvert hjørne i $|K|$.
3) K er lokalt endeligt.
4) $|K|$ er lokalkompakt.
5) Den identiske afbildning giver en homøomorfi $|K| \to |K|_d$.

Bevis. Det er klart, at 1) $\Rightarrow$ 2). Lad h være et hjørne i K, og lad $U_1 \supsetneqq U_2 \supsetneqq U_3 \supsetneqq \cdots$ være en numerabel basis for omegne af $h \in |K|$. Lad os antage, at der findes en følge $\langle s_1\rangle, \langle s_2\rangle, \cdots$ af forskellige åbne simplices med h som hjørne. Vi kan da vælge $a_n \in U_n \cap \langle s_n\rangle$, og vi har da $(a_n) \to h$ i modstrid med, at $\{a_n\}$ er diskret ifølge sætning 6.13. Dermed har vi vist, at 2) $\Rightarrow$ 3). Det er klart, at 3) $\Rightarrow$ 4), da stjernerne for hjørnerne får kompakt afslutning. Af sætning 6.14 følger på den anden side, at 4) $\Rightarrow$ 3). Hvis både 3) og 4) gælder, har stjernerne kompakt afslutning, og så afbildes de homøomorft ind i $|K|_d$. Dermed har vi vist, at 4) $\Rightarrow$ 5), og det er trivielt, at 5) $\Rightarrow$ 1). Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 6.19. Ved en triangulering af et topologisk rum X forstås en homøomorfi $\varphi: |K| \longrightarrow X$, hvor K er et simpliciel kompleks.

Det er derefter klart, hvad vi mener med, at et rum kan trianguleres eller er triangulerbart. Bortset fra trivielle tilfælde vil et rum selvfølgelig have mange trianguleringer, hvis det overhovedet har nogen.

<u>Definition</u> 6.20. Ved en triangulering af et par (X, A) af topologiske rum forstås en homøomorfi $\varphi: (|K|, |L|) \longrightarrow (X, A)$, hvor (K, L) er et simplicielt par.

Det er klart efter det foregående, at triangulering af kompakte rum kun kan ske ved endelige simplicielle komplekser, medens ikke kompakte rum kræver uendelige simplicielle komplekser. Lokalkompakte rum kræver lokalt endelige simplicielle komplekser.

Vi har set, at (E^n, S^{n-1}) kan trianguleres ved $(\bar{s}, \dot{s})$, hvor s er et n-simplex. Det er let at vise, at $\dot{R}^n$, T^n, P^n, CP^n og RP^n kan trianguleres. Prøv at triangulere T^2 med så få 2-simplices som muligt.

Et simplicielt kompleks kaldes n-dimensionalt, hvis det omfatter mindst et n-simplex, men intet $n+1$-simplex. Derefter er det klart, hvad der menes med "endelig dimensionalt", "uendelig dimensionalt"og "højst n-dimensionalt". Et simplicielt kompleks kan være endelig-dimensionalt uden at være lokalt endeligt og omvendt.

Hvis K er et endeligt simplicielt kompleks, kan $|K|$ altid indlejres i et afsluttet N-simplex $|\bar{s}|$, hvis K har $N+1$ hjørner, og $|\bar{s}|$ kan indlejres i $\mathring{R}^N$, så $|K|$ kan indlejres i $\mathring{R}^N$.

Hvis $|K|$ skal kunne indlejres i $\mathring{R}^N$ for et passende N, må K have dimension $\leq N$, og være lokalkompakt, altså lokalt endeligt, og da mængden af hjørner skal afbildes på en diskret mængde, må mængden af hjørner være numerabel.

Lad os antage, at K opfylder de anførte betingelser, og har dimension m. Vi vil vise, at $|K|$ kan indlejres i $\mathring{R}^{2m+1}$. Lad (h_m), $m \geq 0$ være følgen af hjørner. Vi vil indlejre $|K|$ så h_q får sidste koordinat q. Lad os antage, at vi allerede har fået indlejret det delpolyeder af $|K|$, der omfatter alle simplices med hjørner blandt $h_0, \cdots, h_{q-1}$. Så skal h_q placeres, så det bliver hjørne i visse simplices. Lad s være et af dem, og lad t være et, vi har i forvejen. Så må indre punkter i $|\bar{s}|$ ikke tilhøre $|\bar{t}|$. Det vil være i orden, hvis alle hjørnerne i $|\bar{s}|$ og $|\bar{t}|$ er i almindelig beliggenhed. Det drejer sig om højst $2m+1$ hjørner udover h_q, og det betyder, at h_q skal vælges udenfor en højst $2m$-dimensional mangfoldighed i $\mathring{R}^{2m+1}$, altså udenfor en højst $2m-1$-dimensional mangfoldighed i det ved $x_{2m+1} = q$ bestemte affine underrum. Der bliver endelig mange betingelser af den slags, og valget af h_q er derfor muligt. Vi opnår, at hvert afsluttet simplex i $|K|$ bliver afbildet homøomorft, og det sikrer, at vi får en indlejring. Det er ikke svært at vise, at $2m+1$ er det bedste valg.

Kapital 7.

BARYCENTRISK VIDEREDELING OG SIMPLICIEL APPROKSIMATION.

En triangulering af et rum kan fortolkes som en opdeling af rummet i simplices. Vi skal nu forklare, hvorledes denne inddeling kan gøres finere ved systematisk videredeling, og hvorledes vi derved ofte kan approksimere afbildninger med simplicielle afbildninger, således at den approksimerende afbildning bliver homotop med den oprindelige.

<u>Definition</u> 7.1. I et reelt m-simplex $|\bar{s}|$ med hjørner $h_0, \dots, h_m$ kaldes punktet $\frac{1}{m+1}h_0 + \cdots + \frac{1}{m+1}h_m$ simplexets barycentrum.

For $x = x_0 h_0 + \cdots + x_m h_m$ kaldes sættet $(x_0, \cdots, x_m)$ også punktets barycentriske koordinater. For et 0-simplex h er h selvfølgelig også barycentrum. I et polyeder $|K|$ har hvert afsluttet simplex $|\bar{s}|$ et barycentrum, som vi (af sparsommelighedshensyn) betegner med s.

<u>Definition</u> 7.2. Lad K være et simplicielt kompleks. Ved den barycentriske videredeling $sd\,K$ af K forstår vi det simplicielle kompleks, der har mængden af simplices i K som mængde af hjørner, og hvis simplices er de endelige mængder af simplices i K, som er fuldstændig ordnet ved inklusion.

Det er klart, at $sd\,K$ er et simplicielt kompleks.

<u>Definition</u> 7.3. En afbildning $|sd| : |sd\,K| \longrightarrow |K|$ defineres ved at punktet $x = x_0 s_0 + \cdots + x_m s_m$, hvor $s_0 \subset s_1 \subset \cdots \subset s_m$, afbildes i det punkt $x_0 s_0 + \cdots + x_m s_m \in |K|$, der fås ved at fortol-

ke hvert s_ν som barycentret af $|S_\nu|$.

<u>Sætning</u> 7.4. $|sd|$ er en homøomorfi.

Bevis. Vi må først regne billedpunktet rigtigt ud. Lad os antage, at $s_0 = (h_0, \cdots, h_{\nu_0})$, $s_1 = (h_0, \cdots, h_{\nu_0}, \cdots, h_{\nu_1})$, $\cdots$, $s_m = (h_0, \cdots, h_{\nu_0}, \cdots, h_{\nu_1}, \cdots, h_{\nu_m})$. Vi får da

$$|sd|\,(x_0 s_0 + \cdots + x_m s_m) =$$

$$\left(\frac{x_0}{\nu_0+1} h_0 + \cdots + \frac{x_0}{\nu_0+1} h_{\nu_0}\right) + \cdots + \left(\frac{x_m}{\nu_m+1} h_0 + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1} h_{\nu_0} + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1} h_{\nu_m}\right) =$$

$$\left(\frac{x_0}{\nu_0+1} + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1}\right) h_0 + \cdots + \left(\frac{x_0}{\nu_0+1} + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1}\right) h_{\nu_0} + \left(\frac{x_1}{\nu_1+1} + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1}\right) h_{\nu_0+1} + \cdots$$

$$+ \left(\frac{x_1}{\nu_1+1} + \cdots + \frac{x_m}{\nu_m+1}\right) h_{\nu_1} + \cdots + \left(\frac{x_{m-1}}{\nu_{m-1}+1} + \frac{x_m}{\nu_m+1}\right) h_{\nu_{m-1}} + \frac{x_m}{\nu_m+1} h_{\nu_{m-1}+1} + \cdots \frac{x_m}{\nu_m+1} h_{\nu_m}.$$

Det er på forhånd klart, at koefficienterne får sum 1, men skeptikere kan regne det efter. Da $|sd|$ er lineær på hvert afsluttet simplex, er $|sd|$ kontinuert. Vi skal vise, at $|sd|$ er bijektiv. Et punkt af $|K|$ har formen $y_0 h_0 + \cdots + y_m h_m$. Vi kan tænke os, at vi har valgt rækkefølgen af indices, så $y_0 \geq y_1 \geq \cdots \geq y_m$, og vi skriver så punktet mere udførligt på formen

$$z_0 h_0 + \cdots + z_0 h_{\mu_0} + z_1 h_{\mu_0+1} + \cdots + z_1 h_{\mu_1} + z_2 h_{\mu_1+1} + \cdots + z_{q-1} h_{\mu_{q-1}} + z_q h_{\mu_{q-1}+1} + \cdots + z_q h_{\mu_q},$$

hvor vi blot har ombenævnt koefficienterne, så vi har $z_0 > z_1 > \cdots > z_q$. Vi sætter nu $s_0 = (h_0, \cdots, h_{\mu_0})$, $s_1 = (h_0, \cdots, h_{\mu_1})$, $\cdots$, $s_q = (h_0, \cdots, h_{\mu_q})$. Dernæst sætter vi $x_0 = (z_0 - z_1)(\mu_0 + 1)$, $x_1 = (z_1 - z_2)(\mu_1 + 1)$, $\cdots$, $x_{q-1} = (z_{q-1} - z_q)(\mu_{q-1}+1)$ og $x_q = z_q(\mu_q + 1)$. Så er $x_0 s_0 + \cdots + x_q s_q$ et punkt af $|sdK|$, som ved $|sd|$ afbildes i $y_0 h_0 + \cdots + y_m h_m$, og det er åbenbart det eneste punkt med denne egenskab. Altså er $|sd|$ bijektiv. Da originalmængden til hvert afsluttet simplex i $|K|$ er kompakt, er $|sd|$ en homøomorfi på enhver sådan originalmængde.

Altså er $|sd|^{-1}$ kontinuert på ethvert afsluttet simplex og dermed kontinuert. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7.5. Et reelt simplex har to hjørner, hvis afstand er simplexets diameter.

Bevis. Lad $S \subseteq R^n$ være et reelt simplex, og lad $a, b \in S$ være punkter. Lad S' være den side i S, der er den mindste side, som indeholder a og b. Den rette linie gennem a og b skærer randen af S' i punkter a', b' hvis afstand er $\geqq$ afstanden mellem a og b. Hvis f.eks. b' ikke er hjørne i S' vil b' ligge i en q-side af S' med $q \geqq 2$, og i denne side kan vi lægge et liniestykke gennem b'. Det vil skære randen af q-siden i punkter b'' og b''', og et af disse vil have større afstand fra a', end b' har. Ved at fortsætte processen ender vi med to hjørner, hvis afstand er $\geqq$ afstanden mellem a og b. Dermed er sætningen bevist.

Hvis S' er et reelt n-simplex og S et n-simplex, har vi altid en affin afbildning $\varphi : |\bar{S}| \longrightarrow S$, som er en homøomorfi, og den afbilder barycentret af hver side på barycentret af den tilsvarende side. Afbildningen

$$|sd\ \bar{S}| \xrightarrow{|sd|} |\bar{S}| \xrightarrow{\varphi} S'$$

fører den barycentriske videredeling over i S', som derved bliver delt i reelle simplices. Vi kan derfor tale om barycentrisk deling af S'.

Sætning 7.6. Lad S' være et reelt n-simplex. Så er diameteren i hvert delsimplex i en barycentrisk deling af S' højst

$\frac{m}{m+1}$ gange diameteren af S'.

Bevis. Af definitionen af den barycentriske videredeling af S' og af sætning 7.5 følger, at diameteren af et delsimplex er afstanden fra barycentret af en eller anden q-side i S' for et $q \leqq m$ til et hjørne i S', altså efter passende nummerering af hjørnerne i S', fra $\frac{1}{q+1}h_0 + \cdots + \frac{1}{q+1}h_q$ til h_0, og den er $\frac{q}{q+1}$ gange afstanden fra $\frac{1}{q}h_1 + \cdots + \frac{1}{q}h_q$ til h_0, og den er $\leq$ diameteren af S'. Dermed er sætningen bevist.

Det kunne se ud som en grov vurdering, men det er i virkeligheden den bedst mulige.

Et simplicielt kompleks K har en barycentrisk videredeling $sd\,K$, som igen har en barycentrisk videredeling $sd^2 K$ o.s.v. For hvert q findes der en itereret barycentrisk videredeling $sd^q K$ og en homøomorfi $|sd^q| : |sd^q K| \longrightarrow |K|$. Derved indlejres hvert simplex i $|sd^q K|$ som del af et simplex i $|K|$. Med $|K|_d$ i stedet for $|K|$ har vi følgende sætning:

<u>Sætning</u> 7.7. Hvis K er et m-dimensionalt simplicielt kompleks og ε et positivt tal, findes der et naturligt tal q, således at billedet i $|K|_d$ ved $|sd^q|$ af hvert simplex (stjernen for hvert hjørne) i $|sd^q K|$ har diameter $< \varepsilon$.

Bevis. Diameteren af et vilkårligt simplex i $|sd^q K|$ er ifølge sætning 7.6 højst $\left(\frac{m}{m+1}\right)^q$ (og af en stjerne højst det dobbelte). Heraf følger sætningen umiddelbart.

<u>Sætning</u> 7.8. Lad K være et endeligt simplicielt kompleks, X et rum, og $f: |K| \longrightarrow X$ kontinuert. Lad $(U_j \mid j \in J)$ være en overdækning af X med åbne mængder. Der findes da et naturligt

tal ς, således at

$$|sd^{\varsigma} K| \xrightarrow{|sd^{\varsigma}|} |K| \xrightarrow{f} X$$

afbilder hver afsluttet simplex (den afsluttede stjerne for hvert hjørne) i $|sd^{\varsigma}K|$ ind i en af mængderne U_j.

Bevis. Da K er endelig, er $|K| = |K|_d$ kompakt, og da $(f^{-1}(U_j) \mid j \in J)$ er en overdækning af $|K|_d$ med åbne mængder, giver Lebesgue's overdækningssætning, at der findes et $\varepsilon > 0$, så enhver mængde i $|K|$, hvis diameter målt i $|K|_d$ er $\leqq \varepsilon$, afbildes ind i en af mængderne U_j. Sætningen følger derefter umiddelbart af sætning 7.7.

Vi skifter til kapitlets andet hovedemne.

Definition 7.9. Lad K og K' være simplicielle komplekser, $\varphi: K \to K'$ en simpliciel afbildning og $f: |K| \to |K'|$ en kontinuert afbildning. Vi siger, at φ er en simpliciel approksimation af f, såfremt det for hvert punkt $x \in |K|$ gælder at ethvert afsluttet simplex i $|K'|$, som indeholder $f(x)$, også indeholder $|\varphi|(x)$.

Definitionen indebærer, at $|\varphi|(x) = f(x)$, hvis $f(x)$ er et hjørne i $|K'|$. Hvis $s' \in K'$ og $|\varphi|(x) \in \langle s' \rangle$, kan vi slutte, at $f(x) \in \langle s'' \rangle$, hvor s'' har s' som side. Hvis specielt $|\varphi|(x)$ ligger i et åbent simplex $\langle s' \rangle$, hvor s' er et maksimalt simplex i K', vil også $f(x)$ ligge i $\langle s' \rangle$. Vi giver nu en anden, ofte mere hensigtsmæssig karakterisering af simplicielle approksimationer.

Sætning 7.10. En simpliciel afbildning $\varphi: K \to K'$ er en simpliciel approksimation af $f: |K| \longrightarrow |K'|$, hvis og kun hvis det for hvert hjørne h i K gælder, at $f(st\, h) \subseteq st(|\varphi|(h))$.

Bevis. Lad φ være en simpliciel approksimation af f, og lad os betragte $\underline{x} \in \langle s \rangle \subseteq st\, h$. Af $\varphi(s) = s' \in K'$ følger $\varphi(\langle s \rangle) = \langle s' \rangle$, og af bemærkningen ovenfor følger, at $f(\underline{x})$ ligger i et åbent simplex $\langle s'' \rangle$, hvor s'' har s' som side, altså $\varphi(h'')$ som hjørne. Men så er $\langle s'' \rangle \subseteq st(|\varphi|(h))$, og dermed har vi vist "kun hvis".

Lad os nu antage, at $\varphi: K \longrightarrow K'$ og $f: |K| \longrightarrow |K'|$ for hvert hjørne h i K tilfredsstiller $f(st\, h) \subseteq st(|\varphi|(h))$. Lad $\underline{x} \in |K|$ være et vilkårligt punkt, og lad $s \in K$, $s' \in K'$ være valgt, så $\underline{x} \in \langle s \rangle$, $f(\underline{x}) \in |\bar{s}'|$. For hvert hjørne h i s har vi $\underline{x} \in st\, h$, altså $f(\underline{x}) \in st(|\varphi|(h))$, men det implicerer, at $|\varphi|(h)$ er et hjørne af $|\bar{s}'|$. Da dette gælder for hvert hjørne i s, kan vi slutte, at $\varphi(\underline{x}) \in |\bar{s}'|$. Dermed er sætningen bevist.

For så vidt angår "hvis" kan betingelsen svækkes:

<u>Sætning</u> 7.11. Lad K og K' være simplicielle komplekser, H og H' deres mængder af hjørner, $\varphi: H \rightarrow H'$ en afbildning og $f: |K| \longrightarrow |K'|$ en kontinuert afbildning. Hvis det for hvert $h \in H$ gælder, at $f(st\, h) \subseteq st(|\varphi|(h))$, da inducerer φ en simpliciel afbildning $\bar{\varphi}: K \rightarrow K'$, som er en simpliciel approksimation af f.

Bevis. Det hele følger af sætning 7.10, når vi for hvert $s \in K$ har vist, at $\varphi(s)$ er et simplex i K'. Lad $h_0, \cdots, h_m \in H$ være hjørnerne i s. Så er $\langle s \rangle \subseteq st\, h_\nu$ for $\nu = 0, \cdots, m$, og derfor også $f(\langle s \rangle) \subseteq f(st\, h_\nu) \subseteq st(|\varphi|(h_\nu))$. Hvis $\langle s' \rangle \subseteq |K'|$ har et punkt fælles med $f(\langle s \rangle)$, har vi $\langle s' \rangle \subseteq st(|\varphi|(h_\nu))$, hvilket medfører, at $|\varphi|(h_\nu)$ er hjørne i s' for $\nu = 0, \cdots, n$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.12. Lad K være et endeligt simplicielt kompleks, K' et simplicielt kompleks og $f: |K| \longrightarrow |K'|$ kontinuert. Der findes da et naturligt tal q , således at den sammensatte afbildning

$$|sd^q K| \xrightarrow{|sd^q|} |K| \xrightarrow{f} |K'|$$

har en simpliciel approksimation.

Bevis. Af sætning 7.8 følger, at vi kan vælge q , så hver stjerne i $|sd^q K|$ afbildes i en stjerne i $|K'|$, og derefter er det let at vælge en afbildning af mængden af hjørner i $sd^q K$ ind i mængden af hjørner i K' , så betingelsen i sætning 7.11 er opfyldt. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.13. Hvis K og K' er simplicielle komplekser, og $\varphi: K \to K'$ er en simpliciel approksimation af $f: |K| \to |K'|$, er $|\varphi|, f: |K| \longrightarrow |K'|$ homotope.

Bevis. Da der altid findes et simplex i $|K'|$, som indeholder både $f(\underline{x})$ og $|\varphi|(\underline{x})$, kan vi definere:

$$\Phi(\underline{x}, t) = (1-t) f(\underline{x}) + t\, |\varphi|(x),$$

og derved får vi en homotopi fra f til $|\varphi|$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7.14. $\pi_q(S^m) = 0$ for $0 \leq q < m$.

Bevis. For $0 \leq q < m$ skal vi vise, at enhver afbildning $f: S^q \longrightarrow S^m$ er 0-homotop relativt til et basispunkt. Vi kan triangulere sfærerne, så basispunkterne bliver hjørner, og derved kan vi betragte S^q som et q-dimensionalt og S^m som et m-dimensionalt simplicielt kompleks. Ifølge sætning 7.12 kan vi vælge trianguleringen af S^q så fin, at f får en simpliciel approksimation φ. Af sætning 7.13 følger nu, at f er homotop med $|\varphi|$, og det bliver åbenbart endda ved en homotopi modulo hjørnerne, altså med fast basispunkt. Nu afbilder $|\varphi|$ ind i q-skelettet, så $|\varphi|$ er ikke surjektiv. Men så er $|\varphi|$ en afbildning ind i $S^m \setminus \{b\}$, og da dette rum er sammentrækkeligt med basispunktet fastholdt, er $|\varphi|$ 0-homotop. Dermed er sætningen bevist.

Vi slutter med endnu et begreb:

Definition 7.15. Lad K og K' være simplicielle komplekser. To simplicielle afbildninger $\varphi, \psi: K \longrightarrow K'$ kaldes naboafbildninger, hvis der for hvert simplex $s \in K$ findes et simplex $s' \in K'$ som indeholder $\varphi(s) \cup \psi(s)$.

Relationen "er naboafbildning til" er refleksiv og symmetrisk, men ikke transitiv. Den kan udvides til en ækvivalensrelation, som bliver et rimeligt homotopibegreb for simplicielle afbildninger. Den følgende sætning bevises som sætning 7.13, og den næste er helt triviel:

Sætning 7.16. Hvis $\varphi, \psi: K \longrightarrow K'$ er naboafbildninger, er $|\varphi|, |\psi|: |K| \longrightarrow |K'|$ homotope.

Sætning 7.17. Hvis $\varphi, \psi : K \to K'$ er simplicielle approksimationer af samme afbildning $f: |K| \to |K'|$, er de naboafbildninger.

Kapitel 8.

CELLEKOMPLEKSER.

Definition 8.1. Et par (X, A) af topologiske rum kaldes et relativt CW-kompleks, hvis der findes en voksende følge af rum $A = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots$ med X som direkte limes, og således at hvert X_n for $n \geq 0$ fås ved påklæbning af en disjunkt forening af n-celler på X_{n-1} ved klæbeafbildninger, der afbilder den disjunkte forening af randene ind i X_{n-1}. Mængden X_n kaldes n-skelettet af (X, A) . Hvis A er tom, skriver vi $X = (X, \emptyset)$, og X kaldes da et CW-kompleks eller et cellekompleks. Et cellekompleks kaldes regulært, hvis klæbeafbildningerne afbilder randen af hver enkelt celle injektivt.

Et polyeder er åbenbart et cellekompleks, og det er let at vise, at et regulært cellekompleks kan trianguleres. Det er også rigtigt, men ikke helt så let at vise, at ethvert cellekompleks er homotopiækvivalent med et polyeder. Cellekomplekserne har ikke så behagelige egenskaber som polyedrene, men ved konkrete beregninger kan de være fordelagtige, fordi man ofte kan nøjes med ret få celler, hvor antallet af simplices i en triangulering bliver astronomisk. Relative CW-komplekser er indført med ret specielle formål for øje, og det er ikke sikkert, vi får brug for dem, men de udgør det rimelige område for de følgende undersøgelser.

Hvis X er et cellekompleks og $A \subseteq X$ et delkompleks, vil vi kalde (X, A) et cellulært par.

<u>Sætning</u> 8.2. Hvis (X, A) er et CW-kompleks, og A er kompakt frembragt, er $(X\times I, A\times I)$ et CW-kompleks.

Bevis. Vi definerer n-skelettet af $(X\times I, A\times I)$ ved $Y_n = X_n\times \dot{I} \cup X_{n-1}\times I$ for $n \geq 0$, og $Y_{-1} = A\times I$. For at få Y_n ud fra Y_{n-1} skal vi for hver påklæbet n-celle i X_n med klæbeafbildning $\varphi: S^{n-1} \longrightarrow X_{n-1}$ påklæbe to n-celler til Y_{n-1} ved klæbeafbildninger $\varphi_0, \varphi_1: S^{n-1} \longrightarrow X_{n-1}\times \dot{I} \cup X_{n-2}\times I$ definerede ved $\varphi_0(x) = (\varphi(x)\, 0)$, $\varphi_1(x) = (\varphi(x), 1)$, og desuden skal vi for hver påklæbet $n-1$-celle i X_{n-1} med klæbeafbildning $\psi: S^{n-2} \longrightarrow X^{n-2}$ med udvidelsen $\overline{\psi}: E^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ påklæbe en "cylinder" $E^{n-1}\times I$ ved klæbeafbildningen $\Psi: E^{n-1}\times\dot{I} \cup S^{n-2}\times I \longrightarrow Y_{n-1}$ defineret ved $\Psi(x,0) = (\overline{\psi}(x), 0)$, $\Psi(x,1) = (\overline{\psi}(x), 1)$ og $\Psi(x,t) = (\psi(x), t)$ for $x \in S^{n-2}$. Da (E^n, S^{n-1}) er homøomorf med $(E^{n-1}\times I, E^{n-1}\times \dot{I} \cup S^{n-2}\times I)$ kommer det sidste ud på det samme som påklæbning af en n-celle.

Vi mangler at vise, at produktrumstopologien på $X\times I$ er identisk med den topologi, der fås af CW-strukturen. Det er imidlertid umiddelbart, så snart vi har bevist, at topologien på et CW-kompleks (X, A) med A kompakt frembragt er helt fastlagt ved, at de afsluttede celler i X er kompakte og X er kompakt frembragt. At X er kompakt frembragt betyder, at en mængde i X er afsluttet, såfremt den fællesmængde med enhver kompakt mængde er afsluttet, men da en kompakt mængde kan dækkes med endelig mange celler samt en kompakt mængde i A, er dette helt ensbetydende med, at fællesmængden med A og med enhver afsluttet celle er afsluttet. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8.3. Hvis (X,A) er et CW-kompleks med A (bi-)normalt og kompakt frembragt, er X (bi-)normalt. Et polyeder er binormalt.

Bevis. At X er normalt vises ganske som for polyedre. Resten følger af sætning 8.2.

For et polyeder $|K|$ gælder det heldigvis, at $|K|\times I$ igen er et polyeder, men det er ikke helt let at bevise.

Vi kan opfatte $E^n\times I$ som en dåse med $E^n\times 0$ som bund og $E^n\times 1$ som låg, medens $S^{n-1}\times I$ er dens krumme yderside. Derved bliver den følgende sætning anskueligt nærliggende.

Sætning 8.4. $E^n\times 0\cup S^{n-1}\times I$ er en stærk deformationsretrakt af $E^n\times I$.

Bevis. Et punkt i $E^n\times I$ kan angives på formen $(r\underline{x},t)$ med $\underline{x}\in S^{n-1}$; $r,t\in[0,1]$. Dåsens bund svarer til $t=0$ og dens sider til $r=1$. En retraktion $\varphi: E^n\times I\longrightarrow E^n\times 0\cup S^{n-1}\times I$ defineres ved

$$\varphi(r\underline{x},t)=\begin{cases}((1+t)r\underline{x},\ 0) & \text{for} \quad 0\leqq r\leqq \frac{1}{1+t}\\ (\underline{x},\ r(1+t)-1) & \text{for} \quad \frac{1}{1+t}\leqq r\leqq 1.\end{cases}$$

Mange andre valg er mulige. For at vise sætningen skal vi angive en isomorfi fra φ opfattet som afbildning ind i $E^m \times I$ til $1_{E^m \times I}$, men det går efter den sædvanlige opskrift med $\Phi(y,u) = (1-u)\varphi(y) + uy$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 8.5. Lad (X, A) være et relativt CW-kompleks. For hvert m er $X_m \times 0 \cup X_{m-1} \times I$ en stærk deformationsretrakt af $X_m \times I$.

Bevis. Vi får $X_m \times I$ af $X_m \times 0 \cup X_{m-1} \times I$ ved påklæbning af et eksemplar af $E^m \times I$ for hver påklæbet m-celle i X, og det sker ved en klæbeafbildning $\varphi: E^m \times 0 \cup S^{m-1} \times I \longrightarrow X_m \times 0 \cup X_{m-1} \times I$. I beviset for sætning 8.4 fandt vi en homotopi $\Phi: E^m \times I \times I \longrightarrow E^m \times I$, og sammensætningen $k \circ \Phi: E^m \times I \times I \rightarrow X_m \times I$, hvor $k: E^m \times I \rightarrow X_m \times I$ er den kanoniske afbildning, definerer en homotopi på den påklæbede celle, som er stationær og identisk med k på randen. Vi bruger den således definerede homotopi på alle de påklæbede celler og den stationære homotopi på resten af $X_m \times I$. Derved opnår vi det ønskede og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 8.6. Lad (X, A) være et relativt CW-kompleks. Da er $X \times 0 \cup A \times I$ en stærk deformationsretrakt af $X \times I$.

Bevis. For hvert m har vi en homotopi $F_m: X_m \times I \times I \longrightarrow X_m \times I$ fra den identiske afbildning $1_{X_m \times I}$ til en retraktion $\varphi_m: X_m \times I \longrightarrow X_m \times 0 \cup X_{m-1} \times I$. Ved at udvide φ_m til resten af $X \times 0$ som den identiske afbildning og ved sammensætning med inklusionerne $X_m \times I \subseteq X \times I$, $X_m \times 0 \cup X_{m-1} \times I \subseteq X \times 0 \cup X_{m-1} \times I$ får vi en homotopi $G_m: X_m \times I \times I \longrightarrow X \times I$ og en afbildning $\psi_m: X \times 0 \cup X_m \times I \longrightarrow X \times 0 \cup X_{m-1} \times I$. For hvert $x \in X$ har vi et mindste m, for hvilket $x \in X_m$. Vi definerer

$$g_q(x,t) = \begin{cases} (x,t) & \text{for} \quad q \geq n, \\ (\psi_{q+1} \circ \psi_{q+2} \circ \cdots \circ \psi_n)(x,t) & \text{for} \quad q < n. \end{cases}$$

Vi har således $g_q(x,t) \in X \times 0 \cup X_q \times I$. Vi definerer nu $G: X \times I \times I \longrightarrow X \times I$ ved

$$G(x,t,u) = \begin{cases} (x,t) \text{ for } & u = 0 \\ G_n(g_n(x,t), 2^{n+1}u - 1) & \text{for} \quad u \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Her tænkes G_n udvidet til at være den identiske afbildning på $X \times 0 \times I$. Homotopien har den ejendommelighed, at hvert enkelt punkt (x,t) begynder med at ligge stille for små værdier af u. Hvis X er uendelig dimensionalt, er der dog punkter, der kommer i bevægelse vilkårligt tidligt. Det er klart, at G bliver kontinuert på $X_n \times I \times I$ for ethvert n og dermed på hele $X \times I \times I$.

<u>Definition</u> 8.7. En afbildning $j: A \to X$, hvor A og X er topologiske rum, kaldes en cofibrering, hvis det for ethvert topologisk rum Y, enhver afbildning $g: X \to Y$ og enhver homotopi $F: A \times I \to Y$, som tilfredsstiller betingelsen $F(a,0) = g(j(a))$ for ethvert $a \in A$, gælder, at der findes en homotopi $G: X \times I \longrightarrow Y$, således at $G(j(a),t) = F(a,t)$ for $a \in A$, $t \in I$ og $G(x,0) = g(x)$ for $x \in X$.

Vi illustrerer definitionen med et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd, "j"'] & & A\times I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dd, "j\times 1_I"] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & X\times I \arrow[ul, dashed, "G"']
\end{tikzcd}$$

Begge de vandrette afbildninger fører x over i $(x,0)$. Betingelsen i definitionen er, at afbildningen G skal kunne tilføjes uden at kommutativiteten går tabt.

Vi har nu følgende sætning:

Sætning 8.8. Hvis (X,A) er et relativt CW-kompleks, er inklusionsafbildningen $j: A \to X$ en cofibrering.

Bevis. Lad $g: X \to Y$ og $F: A\times I \to Y$ være givet, så diagrammet ovenfor er kommutativt. Vi har da en kontinuert afbildning $\bar{F}: X\times 0 \cup A\times I \to Y$ defineret ved $\bar{F}(x,0) = g(x)$ for $x \in X$ og $\bar{F}(x,t) = F(x,t)$ for $(x,t) \in A\times I$. Ifølge sætning 8.6 findes der en retraktion $\Phi: X\times I \to X\times 0 \cup A\times I$, og diagrammet bliver så kommutativt med $G = \bar{F}\circ\Phi$. Dermed er sætningen bevist.

I diagrammet ovenfor for en vilkårlig cofibrering $j: A \to X$ vælges Y som keglen CA , medens g vælges som afbildningen af hele X i toppunktet og F som en homotopi fra afbildningen af A i toppunktet til den naturlige indlejring af A i CA . Hvis vi så i trekanten til højre tager restriktion af F til $A\times 1$ og af G til $j(A)\times 1$, ser vi, at trekanten inducerer et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "j"] \\ A & j(A) \arrow[l, "G"] \end{tikzcd}$$

Her er F en homøomorfi, og det medfører, at j er injektiv, så alle afbildningerne i det lille diagram bliver homøomorfier. Heraf følger sætningen:

__Sætning__ 8.9. Cofibreringer er injektive.

Vi kan altså nøjes med at søge cofibreringer blandt inklusionsafbildninger.

__Definition__ 8.10. Lad (X, A) være et par af topologiske rum med inklusionsafbildningen $j: A \to X$, og lad Y være et topologisk rum. Hvis det for alle valg af $g: X \to Y$ og $F: A \times I \to Y$, for hvilke $F(a,0) = g(a)$ for alle $a \in A$, gælder, at der findes en udvidelse $G: X \times I \to Y$ af F med $G(x,0) = g(x)$ for alle $x \in X$, siger vi, at (X,A) har homotopiudvidelsesegenskaben med hensyn til Y.

At $j: A \to X$ er en cofibrering betyder således, at (X,A) har homotopiudvidelsesegenskaben med hensyn til ethvert rum Y. Som eksempel på en anvendelse af homotopiudvidelsesegenskaben har vi følgende sætning:

__Sætning__ 8.11. Lad (X,A) være et CW-kompleks. Da er enhver afbildning $f: (X,A) \to (S^m, b)$ homotop med en afbildning, der afbilder hele m-skelettet i b.

Bevis. Lad os antage, at f afbilder q-skelettet X_q ind i b. Så er $f | X_{q+1}$ identisk med den sammensatte afbildning

$$(X_{q+1}, X_q) \xrightarrow{k} \left(\frac{X_{q+1}}{X_q}, a\right) \xrightarrow{f'} (S^n, b),$$

hvor k er kollapsafbildningen. Nu er $\frac{X_{q+1}}{X_q}$ en 1-punktsforening af sfærer, og vi ved fra sætning 7.14, at restriktionen af f' til hver af disse for $q < n-1$ er homotop med fastholdt basispunkt med en afbildning ind i b, og det samme gælder da for f', og derefter giver homotopiudvidelsesegenskaben, at homotopien kan udvides til hele $X \times I$, så vi får en homotopi fra f til en afbildning, der fører $q+1$ -skelettet over i b. Derefter fås sætningen ved en simpel induktionsslutning.

Vi vil slutte kapitlet med endnu en generel sætning om homotopiudvidelse, men den beror på nogle hjælpesætninger, der også har interesse i sig selv, så vi tager dem først.

Sætning 8.12. Hvis L er et delkompleks af et simplicielt kompleks K, er $sd\,L$ et fuldt delkompleks af $sd\,K$.

Bevis. Et simplex σ fra $sd\,K$ har hjørner $s_0 \subset s_1 \subset \cdots \subset s_m$, hvor hvert $s_\nu \in K$, og hvis blot $s_m \in sd\,L$, kan vi slutte, at $\sigma \in sd\,L$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8.13. Hvis L er et delkompleks af et simplicielt kompleks K, er $|L|$ en stærk omegnsretrakt af $|K|$.

Bevis. At $|L|$ er en stærk omegnsretrakt af $|K|$ betyder, at $|L|$ har en åben omegn $O \subseteq |K|$, så $|L|$ er en stærk deformationsretrakt af O. Vi kan antage, at L er et fuldt delkompleks af K, idet vi ellers går over til $sd\,L$ og $sd\,K$. Lad

$L' \subsetneq K$ være mængden af simplices som ikke har noget hjørne i L. Så er L' et fuldt delkompleks af K. Vi definerer $O = |K| \setminus |L'|$. Et punkt $\underline{x} \in O \setminus |L|$ har som bærer et simplex s med hjørner $h_0, \cdots, h_p$ i L og $h_0', \cdots, h_q'$ i L', og vi har $p > 0, q > 0$. Vi har så en fremstilling

$$\underline{x} = x_0 h_0 + \cdots + x_p h_p + x_0' h_0' + \cdots + x_q' h_q',$$

hvor $x_0 + \cdots + x_p > 0$, så vi kan definere

$$\varphi(\underline{x}) = y_0 h_0 + \cdots + y_p h_p, \quad y_k = \frac{x_k}{x_0 + \cdots + x_p}, \quad k = 0, \cdots, p,$$

og desuden $\varphi(\underline{x}) = \underline{x}$ for $\underline{x} \in L$. Det er klart, at $\varphi : O \longrightarrow |L|$ er en retraktion, og da $\varphi(\underline{x})$ og $\underline{x}$ altid ligger i samme afsluttede simplex, er der også en homotopi rel $|L|$ fra φ til 1_O. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 8.14. Hvis X er et binormalt rum og $A \subsetneq X$ en afsluttet mængde, har (X, A) homotopiudvidelsesegenskaben med hensyn til ethvert kompakt polyeder $|K|$.

Bevis. Vi skal vise, at enhver kontinuert afbildning

$$F : X \times 0 \cup A \times I \longrightarrow |K|$$

kan udvides til hele $X \times I$. Da $|K|$ er kompakt, er K et endeligt simplicielt kompleks, og vi udvider K til et simplex $\bar{s}$, så vi har $|K| \subsetneq |\bar{s}|$. Nu er $|\bar{s}|$ massivt, og F har derfor en udvidelse $G : X \times I \longrightarrow |\bar{s}|$. Ifølge sætning 8.13 findes der en åben mængde $O \subsetneq |\bar{s}|$, så $|K| \subsetneq O$, og $|K|$ er en stærk deformationsretrakt af O. Da I er kompakt, findes der en åben mængde $W \supseteq A$, så $W \times I \subseteq f^{-1}(O)$. Da X er normalt, findes der en funktion $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$, som er 1 på A og 0 udenfor W. Så definerer $F'(x,t) = G(x, \varphi(x)t)$ en udvidelse af F, som afbilder ind i O, og ved sammensætning med en retraktion $O \longrightarrow |K|$ får vi den ønskede udvidelse. Dermed er sætningen bevist.

Kapitel 9.

LØFTNING

Løftning af en afbildning er det duale begreb til udvidelse af en afbildning. Det fremgår af følgende to diagrammer:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Y \\
X \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
.
$$

I diagrammet til venstre er $j: A \longrightarrow X$ en inklusionsafbildning, og $\bar{f}$ er da en udvidelse af f. I diagrammet til højre er p en projektion, d.v.s. en kanonisk afbildning, og $\tilde{f}$ kaldes da en løftning af f, hvis diagrammet er kommutativt.

<u>Definition</u> 9.1. En projektion $p: X \longrightarrow B$ siges at have homotopiløftningsegenskaben med hensyn til det topologiske rum Y, såfremt der for enhver homotopi $F: Y \times I \longrightarrow B$ og enhver afbildning $\tilde{f}: Y \longrightarrow X$, således at $F(y,0) = p(\tilde{f}(y))$ for ethvert $y \in Y$, findes en løftning $\tilde{F}: Y \times I \longrightarrow X$, som tilfredsstiller $p \circ \tilde{F} = F$, samt $\tilde{F}(y,0) = \tilde{f}(y)$ for ethvert $y \in Y$.

Situationen illustreres ved diagrammet

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

hvor $j(y) = (y, 0)$. Betingelsen kræver, at $\tilde{F}$ kan indføjes uden at ødelægge diagrammets kommutativitet.

<u>Definition</u> 9.2. En surjektiv afbildning $p: X \to B$ kaldes en fibrering, hvis den har homotopiløftningsegenskaben med hensyn til ethvert topologisk rum Y , og den kaldes en S-fibrering, hvis den for hvert m har homotopiløftningsegenskaben med hensyn til E^m.

Begrebet S-fibrering skyldes J.P. Serre, men måske er N. Steenrod også impliceret. I litteraturen møder man betegnelserne Serre-fibrering og svag fibrering, medens X i en fibrering $p: X \to B$ undertiden kaldes et Hurewicz-fiberrum. En fibrering er selvfølgelig en S-fibrering, men det omvendte gælder ikke altid. Det viser sig, at S-fibreringer er stærke nok til vore formål. Vi begynder med nogle hjælpesætninger.

<u>Sætning</u> 9.3. For hvert $m > 0$ findes der en homøomorfi φ: $E^m \times I \to E^m \times I$, som afbilder $E^m \times 0 \cup S^{m-1} \times I$ på $E^m \times 0$ og $E^m \times 1$ på $E^m \times 1 \cup S^{m-1} \times I$.

Bevis. En homøomorfi med de ønskede egenskaber defineres ved

$$\varphi(r\underline{x},t)=\begin{cases}(\tfrac{1}{2}r\underline{x},t) & \underline{x}\in S^{n-1},\ t\in[0,\tfrac{1}{2}],\ r\in[0,1-2t],\\ ((\tfrac{3}{4}r+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4})\underline{x},\tfrac{1}{2}(1-r)) & \underline{x}\in S^{n-1},\ t\in[0,1],\ r\in[|1-2t|,1],\\ ((2t-1)\underline{x},\ 3t-2r-1) & \underline{x}\in S^{n-1},\ t\in[\tfrac{1}{2},1],\ r\in[t-\tfrac{1}{2},2t-1],\\ (2r\underline{x},t) & \underline{x}\in S^{n-1},\ t\in[\tfrac{1}{2},1],\ r\in[0,t-\tfrac{1}{2}].\end{cases}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9.4. Lad $p: X \longrightarrow B$ være en S-fibrering. Lad $F: E^n \times I \longrightarrow B$ være en homotopi. Enhver løftning $\tilde{f}$: $E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I \longrightarrow X$ af restriktionen af F kan da udvides til en løftning af F.

Bevis. Idet φ er den i sætning 9.3 omtalte homøomorfi, har $F\circ\varphi^{-1}: E^n \times I \longrightarrow B$ en restriktion til $E^n \times 0$ med løftningen $\tilde{f}\circ\varphi^{-1}$, og da $p: X \longrightarrow B$ har homotopiløftningsegenskaben med hensyn til E^n, har $\tilde{f}\circ\varphi^{-1}$ en udvidelse $\tilde{G}$: $E^n \times I \longrightarrow X$, som er en løftning af $F\circ\varphi^{-1}$. Så er $\tilde{G}\circ\varphi$ en løftning af F med de ønskede egenskaber. Dermed er sætningen bevist.

Nu kan vi vise en generel løftningssætning for S-fibreringer:

Sætning 9.5. Lad $p: Y \longrightarrow B$ være en S-fibrering, og lad (X, A) være et relativt CW-kompleks. Lad $F: X\times I \longrightarrow B$ være en given homotopi, og lad $\tilde{f}: X\times 0 \cup A\times I \longrightarrow Y$ være en løftning af restriktionen af F. Da kan $\tilde{f}$ udvides til en løftning af F.

Bevis. Da vi kan foretage udvidelsen trinvis op gennem skeletterne, skal vi blot vise, at hvis $\tilde{f}_m : X\times 0 \cup X_m \times I \longrightarrow Y$ er en løftning af restriktionen af F, kan $\tilde{f}_m$ udvides til en løftning $\tilde{f}_{m+1} : X\times 0 \cup X_{m+1} \times I \longrightarrow Y$ af restriktionen af F. Det kommer ud på, at definere $\tilde{f}_{m+1}$ på $E^{m+1}\times I$ for hver påklæbet celle E^{m+1}, idet $\tilde{f}_{m+1}$ allerede er kendt på $E^{m+1}\times 0 \cup S^m \times I$. Det var netop, hvad vi udførte i sætning 9.4. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen implicerer, at en S-fibrering har homotopiløftningsegenskaben med hensyn til cellekomplekser. Nu skal vi indføre en klasse afbildninger, som er S-fibreringer.

Definition 9.6. En afbildning $p: Y \longrightarrow B$ kaldes en lokalt triviel projektion, hvis hvert punkt $b \in B$ har en omegn $\mathcal{U}$, til hvilken der svarer et topologisk rum F og en homøomorfi $\varphi: \mathcal{U}\times F \longrightarrow p^{-1}(\mathcal{U})$, som for $u \in \mathcal{U}$, $z \in F$ tilfredsstiller betingelsen $p(\varphi(u,z)) = u$.

Vi har ikke krævet, at p skulle være surjektiv. Vi vil heller ikke forlange, at S-fibreringer er surjektive. Det er dog kun tilfældet, hvor p er surjektiv og B kurvesammenhængende, der er interessant.

Sætning 9.7. En lokalt triviel projektion er en S-fibrering.

Bevis. Lad $p: Y \longrightarrow B$ være en lokalt triviel projektion, og lad $G: E^m\times I \longrightarrow B$ være en homotopi og $\tilde{f}: E^m \longrightarrow Y$ en afbildning med $p(\tilde{f}(x)) = G(x,0)$ for $x \in E^m$. Af sætning 7.7 og Lebesgue's overdækningssætning følger, at der findes en triangulering $\psi: |K| \longrightarrow E^m$ og en inddeling $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ af I, således at det for hvert $s \in K$ og hvert delinterval $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ gælder, at $G(\psi(|\bar{s}|) \times [t_{\nu-1}, t_\nu])$ er indeholdt i en åben mængde $\mathcal{U}$, for hvilken $p^{-1}(\mathcal{U})$ er homømorf med et produkt $\mathcal{U} \times F$, så p ved homøomorfien svarer til projektionen på $\mathcal{U}$. Vi bruger nu induktion efter ν, idet vi antager, at vi allerede har en udvidelse af $\tilde{f}$, som er en løftning af restriktionen af G til $E^m \times [0, t_{\nu-1}]$, og vi skal så vise, at denne udvidelse yderligere kan udvides til en løftning af restriktionen af G til $E^m \times [t_0, t_\nu]$. Det kommer imidlertid ud på at vise, at der findes en løftning af restriktionen af G til $E^m \times [t_{\nu-1}, t_\nu]$, som er en udvidelse af en kendt løftning af restriktionen af G til $E^m \times t_{\nu-1}$. Ved en lineær transformation overføres $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ i I, og dermed er vi igen tilbage i det oprindelige probelm med den ændring, at trianguleringen ψ nu er valgt, således at det for hvert $s \in K$ gælder at $G(\psi(|\bar{s}|) \times I)$ er indeholdt i en åben mængde $\mathcal{U}$, for hvilken $p^{-1}(\mathcal{U})$ er et produktrum som omtalt ovenfor. Vi kan nu erstatte E^m med $|K|$, og vi kan da forsøge at vise, at vi successivt kan udvide gennem $|K^0| \times I$, $|K^1| \times I, \cdots, |K^m| \times I$. Ved hvert skridt skal vi for hvert q-simplex s udvide definitionen af $\tilde{f}$ til $|\bar{s}| \times I$, idet $\tilde{f}$ allerede kendes på $|\bar{s}| \times 0 \cup |\dot{s}| \times I$. Da G afbilder $|\bar{s}| \times I$ ind i en åben mængde $\mathcal{U}$, for hvilken $p^{-1}(\mathcal{U})$ er et produktrum og p er projektionen på den ene faktor, er opgaven dermed reduceret til at vise, at projektionen $p: F \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ af et produktrum på den ene faktor er en S-fibrering, og det er selvfølgelig trivielt, når vi går helt tilbage til den oprindelige definition.

Et ikke trivielt eksempel på en lokal triviel projektion er projektionen af et Möbiusbånd på sin midtercirkel. Det er vigtigt, at de tidligere omtalte projektioner $p: S^n \longrightarrow P^n$, $p': S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, $p'': S^{4n+3} \longrightarrow KP^n$ alle er lokalt trivielle. Vi viser det for p'. Sfæren S^{2n+1} er mængden af komplekse talsæt $(z_1, \cdots, z_{n+1})$ med $|z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1$. Lad $\tilde{U} \subsetneqq S^{2n+1}$ være den åbne delmængde bestemt ved $z_{n+1} \neq 0$, og lad U være mængden af talsæt $(z_1, \cdots, z_n, r) \in S^{2n+1}$ med $r > 0$. Så er $U \times S^1$ homøomorf med mængden af talsæt $(z_1 e^{i\gamma}, \cdots, z_n e^{i\gamma}, r e^{i\gamma}) \in S^{2n+1}$ med $\gamma \in \mathring{R}$, men de udgør netop $\tilde{U}$, og p' er efter sin definition netop projektionen af $\tilde{U} \approx U \times S^1$ på U. Ved at bruge hver af de andre koordinater i stedet for den sidste får vi i alt $n+1$ åbne mængder analoge med U, som dækker CP^n, og dermed er påstanden bevist. I virkeligheden er p, p' og p'' endda fibreringer, men det vil vi ikke bevise.

Definition 9.8. Lad (B, b) være et rum med basispunkt. Mængden af bevægelser $\gamma: (I, 0) \longrightarrow (B, b)$ med delrumstopologien fra B^I kaldes bevægelsesrummet over (B, b). Det betegnes (PB, b), idet den stationære bevægelse er basispunkt, og en projektion $p: (PB, b) \longrightarrow (B, b)$ defineres ved $p(\gamma) = \gamma(1)$.

Det er klart, at p bliver surjektiv, hvis og kun hvis B er kurvesammenhængende.

Sætning 9.9. Hvis (B, b) er kurvesammenhængende, er $p: PB \longrightarrow B$ en fibrering.

Bevis. Lad $F: X \times I \longrightarrow B$ være en vilkårlig afbildning, og $\tilde{f}: X \to PB$ en løftning af restriktionen til $X \times 0$, så $\tilde{f}(x)(1) = F(x,0)$. Vi definerer

$$\tilde{F}(x,t)(u) = \begin{cases} \tilde{f}(x)((1+t)u) & \text{for} \quad u \in [0, \frac{1}{1+t}], \\ F(x, (1+t)u-1) & \text{for} \quad u \in [\frac{1}{1+t}, 1], \end{cases}$$

og $\tilde{F}: X \times I \to PB$ er da en løftning af F og samtidig en udvidelse af $\tilde{f}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9.10. For ethvert rum (B, b) med basispunkt, er bevægelsesrummet (PB, b) sammentrækkeligt.

Bevis. En homotopi $F: (PB \times I, b \times I) \to (PB, b)$ defineres ved $F(\gamma, t)(u) = \gamma((1-t)u)$, og dermed er sætningen bevist.

Når $p: X \to B$ er en fibrering, kaldes $p^{-1}(y)$ for $y \in B$ fiberen over y. For PB gælder, at fiberen over basispunktet b netop er løkkerummet ΩB, og det er sædvanligvis ikke sammentrækkeligt.

Definition 9.11. En afbildning $p: \tilde{X} \to X$ kaldes en overlejring, hvis hvert punkt $x \in X$ har en omegn U, for hvilken $p^{-1}(U)$ er disjunkt forening af delrum, der hvert afbildes homøomorft på hele U ved p.

Vi siger, at U er jævnt overlejret ved p. Det er ikke sikkert, at X er jævnt overlejret ved p. En overlejring er et specielt tilfælde af en lokalt triviel projektion, idet F kan vælges som et diskret rum.

Hvis $U \subseteq X$ vælges åben, bliver $p^{-1}(U)$ åben og disjunkt forening af mængder $\tilde{U}_j$, $j \in J$, som afbildes homøomorft ved p, og deraf følger, at mængderne $\tilde{\mathcal{U}}_j$ er åbne.

Sætning 9.12. En overlejring er en åben afbildning.

Bevis. Lad $p: \tilde{X} \to X$ være en overlejring og $\tilde{O} \subseteq \tilde{X}$ åben. Så har $x \in p(\tilde{O}) = O$ et originalpunkt $\tilde{x} \in \tilde{O}$ og en åben omegn $\mathcal{U}$, således at $p^{-1}(\mathcal{U})$ er forening af åbne mængder, der afbildes homøomorft ved p. En af disse $\tilde{\mathcal{U}}$ indeholder $\tilde{x}$, og $\tilde{\mathcal{U}} \cap \tilde{O}$ er åben i $\tilde{\mathcal{U}}$ og afbildes på en åben delmængde af $O \cap \mathcal{U}$. Altså er x indre punkt i O. Dermed er sætningen bevist.

Definition 9.13. En afbildning $p: \tilde{X} \to X$ siges at have den entydige kurveløftningsegenskab, hvis der til enhver bevægelse $\gamma: I \to X$ og ethvert $\tilde{a} \in \tilde{X}$ med $p(\tilde{a}) = \gamma(0)$ findes netop 1 bevægelse $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ med $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ og $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$.

Sætning 9.14. Enhver overlejring $p: \tilde{X} \to X$ har den entydige kurveløftningsegenskab.

Bevis. Lad $\gamma: I \to X$ være en bevægelse og $\tilde{a} \in \tilde{X}$ et punkt med $p(\tilde{a}) = \gamma(0)$. Lad os nu først antage, at der findes to løftninger $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2: I \to \tilde{X}$ med $p \circ \tilde{\gamma}_1 = p \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma$ og $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = \tilde{a}$. Hvis de virkelig er forskellige, har mængden $\{t \in I \mid \tilde{\gamma}_1(t) \neq \tilde{\gamma}_2(t)\}$ et infimum t_0, og $\gamma(t_0)$ har en omegn $\mathcal{U}$ for hvilken $p^{-1}(\mathcal{U})$ falder i disjunkte åbne mængder, der afbildes homøomorft, og en af disse, $\tilde{\mathcal{U}}$, er en omegn af $\tilde{\gamma}_1(t_0) = \tilde{\gamma}_2(t_0)$. Der findes et tal $h > 0$, således at $\tilde{\gamma}_1([t_0, t_0+h]) \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$ og $\tilde{\gamma}_2([t_0, t_0+h]) \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$, men da p afbilder $\tilde{\mathcal{U}}$ homøomorft på $\mathcal{U}$, kan vi slutte, at $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_2(t)$ for $t \in [t_0, t_0+h]$ i modstrid med definitionen af t_0. Altså har γ højst 1 løftning $\tilde{\gamma}$ med $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$.

Hvis $\gamma: I \to X$ ikke har en løftning $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ med $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$, kan vi betragte mængden M af tal $\tau \in I$, for hvilke restriktionen af γ til $[0,\tau]$ ikke har nogen løftning $\tilde{\gamma}_\tau$ med $\tilde{\gamma}_\tau(0) = \tilde{a}$, og vi sætter $\inf M = t_0$. Vi vælger en omegn U af $\gamma(t_0)$, således at $p^{-1}(U)$ er disjunkt forening af åbne mængder, der afbildes homøomorft ved p. Desuden vælger vi $h > 0$, så γ afbilder $[t_0 - h, t_0 + h]$ ind i U. Nu findes der en løftning $\tilde{\gamma}_1 : [0, t_0 - h] \to \tilde{X}$ af restriktionen af γ til $[0, t_0 - h]$ og med $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{a}$. Nu ligger $\tilde{\gamma}_1(t_0 - h)$ i en åben delmængde $\tilde{U} \subseteq p^{-1}(U)$, som ved p afbildes homøomorft på U, og den omvendte afbildning til denne homøomorfi sammensat med γ giver en afbildning $\tilde{\gamma}_2$, og når denne føjes til $\tilde{\gamma}_1$ fås en løftning $\tilde{\gamma}_3$ af $\gamma|[0, t_0 + h]$ med $\tilde{\gamma}_3(0) = \tilde{a}$ i modstrid med definitionen af t_0. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9.15. Enhver overlejring $p: \tilde{X} \to X$ er en fibrering.

Bevis. Lad $F: Y \times I \to X$ være en homotopi, og lad $\tilde{f}: Y \to \tilde{X}$ være en afbildning, der tilfredsstiller $p(\tilde{f}(y)) = F(y,0)$ for $y \in Y$. For $y \in Y$ definerer vi $\gamma_y : I \to X$ ved $\gamma_y(t) = F(y,t)$, og ifølge sætning 9.14 har vi da for hvert y netop 1 løftning $\tilde{\gamma}_y : I \to \tilde{X}$ med $p \circ \tilde{\gamma}_y = \gamma_y$ og $\tilde{\gamma}_y(0) = \tilde{f}(y)$. Vi definerer $\tilde{F}: Y \times I \to \tilde{X}$ ved $\tilde{F}(y,t) = \tilde{\gamma}_y(t)$, og vi har da $p \circ \tilde{F} = F$ og $\tilde{F}(y,0) = \tilde{f}(y)$ for $y \in Y$. Vi mangler blot at vise, at $\tilde{F}$ er kontinuert.

Det er nok at vise, at hvert $y \in Y$ har en omegn $\mathcal{U}$, så restriktionen af $\tilde{F}$ til $\mathcal{U} \times I$ er kontinuert. Lad os tænke os, at der findes et $y_0 \in Y$, for hvilket dette ikke gælder. Så betragter vi mængden M af punkter $\tau \in I$, for hvilke der ikke findes nogen omegn $\mathcal{U}$ af y_0, så restriktionen af $\tilde{F}$ til $\mathcal{U} \times [0,\tau]$ er kontinuert. Vi sætter $t_0 = \inf M$ og vælger en åben omegn $\mathcal{W}$ af $F(y_0,t_0)$, så $p^{-1}(\mathcal{W})$ er disjunkt forening af åbne mængder $\tilde{\mathcal{W}}_j, j \in J$, der hver afbildes homøomorft på $\mathcal{W}$ ved p. Vi vælger en omegn $\mathcal{V}$ af y_0 i Y og et positivt tal h, således at $F(\mathcal{V} \times [t_0-h, t_0+h]) \subseteq \mathcal{W}$. På grund af definitionen af t_0 kan vi vælge en anden omegn $\mathcal{V}'$ af $y_0 \in Y$, således at restriktionen af $\tilde{F}$ til $\mathcal{V}' \times [0, t_0-h]$ er kontinuert. Vi vælger $j \in J$, så $\tilde{F}(y_0, t_0-h) \in \tilde{\mathcal{W}}_j$. Endelig vælger vi en omegn $\mathcal{U}$ af $y_0 \in Y$, således at $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$, og således at $\tilde{F}(y, t_0-h) \in \tilde{\mathcal{W}}_j$ for $y \in \mathcal{U}$. Men så fås $\tilde{F}$ i $\mathcal{U} \times [t_0-h, t_0+h]$ ved at sammensætte F med $(p|\tilde{\mathcal{W}}_j)^{-1}$ og derfor er $\tilde{F}$ kontinuert i denne mængde. Men så er $\tilde{F}$ kontinuert i $\mathcal{U} \times [0, t_0+h]$ i modstrid med definitionen af t_0. Dermed er sætningen bevist.

Projektionen $p: S^n \to P^n$ er et eksempel på en overlejring. Fra kompleks funktionsteori kendes mange andre eksempler. Således er $\exp: \grave{C} \to \grave{C} \setminus \{0\}$ en overlejring, og $f(z) = z^m$, $m \in \grave{N}$ definerer en overlejring $F: \grave{C} \setminus \{0\} \to \grave{C} \setminus \{0\}$. Ved restriktion får vi overlejringen $\exp: \grave{R} \to S^1$, som ved produkt giver en overlejring $\grave{R}^n \to T^n$.

Anvendt på $\exp: \grave{C} \to \grave{C} \setminus \{0\}$ giver sætning 9.14, at enhver afbildning $f: I \to \grave{C} \setminus \{0\}$ har en løftning $g: I \to \grave{C}$, således at $f = e^g$, og g er entydig fastlagt ved valget af $g(0)$, hvilket indebærer, at g er fastlagt på nær addition af et helt tal gange $2\pi i$. Størrelsen $\operatorname{Im}(g(1)-g(0))$ kaldes argumentvariationen af f. Af sætning 9.15 følger, at argumentvariationen varierer kontinuert med f. For lukkede bevægelser i $\dot{C} \setminus \{0\}$, d.v.s. bevægelser $f: I \longrightarrow \dot{C} \setminus \{0\}$ med $f(0) = f(1)$, altså bevægelser $f: (I, \dot{I}) \longrightarrow (C \setminus \{0\}, a)$ kaldes $\frac{1}{2\pi i}(g(1)-g(0))$ omløbstallet om 0, og dette afhænger kun af bevægelsens homotopiklasse. Et af beviserne for algebraens fundamentalsætning bygger på disse overvejelser.

Når $p: X \longrightarrow B$ er "noget i retning af en fibrering" plejer man for $x \in B$ at kalde $p^{-1}(x)$ fiberen over x.

Kurveløftningsegenskaben er selvfølgelig et specialtilfælde af homotopiløftningsegenskaben svarende til at Y er et 1-punktsrum, og derfor vil ikke blot enhver fibrering, men også enhver S-fibrering have kurveløftningsegenskaben. Hvis det yderligere gælder, at en bevægelses løftning er fastlagt ved løftningen af startpunktet, siger vi, at $(S-)$ fibreringen har den entydige kurveløftningsegenskab.

<u>Sætning</u> 9.16. At en $(S-)$ fibrering har den entydige kurveløftningsegenskab er ensbetydende med, at ingen fiber har en kurvekomponent, der indeholder mere end et punkt.

Bevis. Hvis $\tilde{\gamma}: I \longrightarrow X$ ligger i fiberen over b vil $\tilde{\gamma}$ og den stationære bevægelse i $\tilde{\gamma}_0(a)$ være løftninger af den stationære bevægelse. Heraf følger "kun hvis". Lad os nu antage, at $\gamma: I \longrightarrow B$ har to forskellige løftninger $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2: I \longrightarrow X$ med $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$. Vi kan da vælge $\tau \in]0,1]$, så $\tilde{\gamma}_1(\tau) \neq \tilde{\gamma}_2(\tau)$.

Ved

$$\tilde{\beta}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(\tau(1-2t)) & \text{for } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \tilde{\gamma}_2(\tau(2t-1)) & \text{for } t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

defineres en bevægelse $\tilde{\beta}: I \longrightarrow X$, som er løftning af en O-homotop bevægelse fra $\gamma(\tau)$ til $\gamma(0)$ langs $\gamma(I)$ og tilbage igen. Homotopien, der trækker denne bevægelse ind i $\gamma(\tau)$ kan løftes, og ved den løftede homotopi beskriver bevægelsens begyndelsespunkt en bevægelse i $p^{-1}(\gamma(\tau))$ fra $\tilde{\gamma}_1(\tau)$ til et punkt x_1, medens det andet endepunkt beskriver en bevægelse i fiberen fra $\tilde{\gamma}_2(\tau)$ til et punkt x_2, og homotopien overfører bevægelsen $\tilde{\beta}$ i en bevægelse i fiberen fra x_1 til x_2. De tre bevægelser i fiberen er ikke alle stationære. Dermed er sætningen bevist.

For hvert rum X har vi en kategori af S-fibreringer over X. Den har en delkategori af fibreringer over X, og denne har igen en delkategori af fibreringer over X med konstant kurveløftning, og endelig har denne en delkategori af overlejringer over X. I alle tilfælde er en morfi fra $p_1: \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ til $p_2: \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ en afbildning $f: \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$, som giver et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Det er klart, at sammensætning af to S-fibreringer giver en S-fibrering, og at det tilsvarende gælder i de to andre kategorier af fibreringer. Det gælder imidlertid ikke for kategorien af overlejringsrum. Hvis vi har en familie $(p_j : \tilde{X}_j \longrightarrow X \mid j \in J)$ af fibreringer kan vi betragte $\tilde{X} \subseteq \prod_{j \in J} \tilde{X}_j$ omfattende de familier $(x_j \mid j \in J)$, hvor $p_j(x_j)$ er ens for alle j. Vi har da en nærliggende definition af en projektion $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. For de tre kategorier af fibreringer bliver dette produkt en fibrering af samme slags, men for overlejringsrum gælder det tilsvarende kun, når J er endelig.

Særlig interessant er tilfældet, hvor X er kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. De omegne, der indgår i definitionen af overlejring, kan da vælges åbne og sammenhængende. Derved får vi følgende sætning:

Sætning 9.17. Lad X være kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. Lad $p_1 : \tilde{X}_1 \longrightarrow X$ og $p_2 : \tilde{X}_2 \longrightarrow X$ være overlejringer, og lad $f : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ være en surjektiv afbildning, for hvilken diagrammet

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

er kommutativt. Da er f en overlejring.

Bevis. Vi betragter $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ samt en omegn $\tilde{U}_2$. Projektionen U indeholder en kurvesammenhængende åben omegn V, som er jævnt overlejret ved både p_1 og p_2. Så falder $p_1^{-1}(V)$ i åbne kurvekomponenter, der afbildes homøomorft, og f afbilder hver af dem homøomorft på en kurvekomponent af $p_2^{-1}(V)$. Heraf følger sætningen umiddelbart.

Kapitel 10.

FUNDAMENTALGRUPPEN.

Lad (X, a) være et rum med basispunkt. Fundamentalgruppen $\pi_1(X, a)$ er identisk med $[S^1, 1; X, a]$, og det er helt det samme som $[I, \dot{I}; X, a]$, og et element i fundamentalgruppen bliver derfor det samme som en kurvesammenhængende mængde i løkkerummet $(\Omega X, a)$. Kompositionsreglen består i at sætte løkker efter hinanden. En afbildning $f : (X, a) \longrightarrow (Y, b)$ inducerer en homomorfi $f_\# : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b)$ ved $f_\#[\gamma] = [f \circ \gamma]$.

<u>Definition</u> 10.1. Hvis $f, g : I \longrightarrow X$ er bevægelser, der tilfredsstiller betingelsen $f(1) = g(0)$ vil vi med $f * g : I \longrightarrow X$ betegne bevægelsen defineret ved

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{for} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1) & \text{for} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Kompositionsreglen i fundamentalgruppen er således givet ved $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2]$.

For enhver gruppe har vi en gruppe af automorfier, d.v.s. isomorfier af gruppen på sig selv. Hvert element g af en gruppe G frembringer en indre automorfi $\varphi_g : G \longrightarrow G$ defineret ved $\varphi_g(u) = g u g^{-1}$, og disse indre automorfier udgør en gruppe isomorf med en faktorgruppe af G , idet $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Gruppen af indre automorfier er triviel for en abelsk gruppe. De elementer i G , som kommuterer med ethvert element i G , udgør en undergruppe, der kaldes centrum i G , og den omfatter altså netop de elementer, der frembringer den trivielle indre automorfi. En undergruppe $A \subseteq G$ kaldes normal (eller invariant), hvis den afbildes på sig selv ved enhver indre automorfi. Det er ensbetydende med, at $gAg^{-1} = A$ for ethvert $g \in G$, og med, at $gA = Ag$, altså, at de venstre sideklasser er identiske med de højre. Det medfører igen, at sideklasserne danner en gruppe, faktorgruppen $\frac{G}{A}$ ved kompositionsreglen $g_1 A g_2 A = g_1 g_2 A$. Kernen for en homomorfi $\varphi: G \longrightarrow G'$ er en normal undergruppe A, og φ kan på netop en måde faktoriseres på formen $G \xrightarrow{k} \frac{G}{A} \xrightarrow{j} G'$, hvor k er den kanoniske afbildning, og j er injektiv. Efter denne kortfattede oversigt over den elementæreste gruppeteori, vender vi tilbage til fundamentalgruppen.

Sætning 10.2. Lad a, b være punkter af et kurvesammenhængende rum X. Enhver homotopiklasse $[\gamma]$ af bevægelser fra a til b inducerer en isomorfi $\varphi_{[\gamma]}: \pi_1(X, b) \longrightarrow \pi_1(X, a)$. Er γ specielt en løkke, idet $b = a$, er $\varphi_{[\gamma]}$ den ved $[\gamma] \in \pi_1(X, a)$ bestemte indre automorfi. For $b \neq a$ vil erstatning af $[\gamma]$ med en anden homotopiklasse bevirke, at $\varphi_{[\gamma]}$ ændres ved sammensætning med en indre automorfi (i $\pi_1(X, a)$ eller $\pi_1(X, b)$ efter frit valg).

Bevis. Ved $\varphi_{[\gamma]}[\beta] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$ defineres i hvert fald en homomorfi. Her er $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, og så er $\gamma * \gamma^{-1}$ og $\gamma^{-1} * \gamma$ begge 0-homotope. Da vi har $\varphi_{[\gamma^{-1}]}\varphi_{[\gamma]} = [\gamma^{-1} * \gamma * \beta * \gamma^{-1} * \gamma] = [\beta]$ og analogt $\varphi_{[\gamma]}\varphi_{[\gamma^{-1}]}[\beta] = [\beta]$, er $\varphi_{[\gamma]}$ en isomorfi. Det er klart, at $\varphi_{[\gamma]}$ bliver den af $[\gamma]$ frembragte indre automorfi, hvis $b = a$. Hvis γ og γ_1 er bevægelser fra a til b,

er $\gamma * \gamma_1^{-1}$ en løkke i a og $\gamma_1^{-1} * \gamma$ en løkke i b. Vi får nu
$\varphi_{[\gamma]}[\beta] = [\gamma * \beta * \gamma^{-1}] = [\gamma * \gamma_1^{-1}][\gamma_1 * \beta * \gamma_1^{-1}][\gamma * \gamma_1^{-1}]^{-1} =$
$[\gamma * \gamma_1^{-1}]\,\varphi_{[\gamma_1]}[\beta]\,[\gamma * \gamma_1^{-1}]^{-1}$, og $\varphi_{[\gamma]}[\beta] = [\gamma_1 * \gamma_1^{-1} * \gamma * \beta * \gamma^{-1} * \gamma_1 * \gamma_1^{-1}] =$
$\varphi_{[\gamma_1]}([\gamma_1^{-1} * \gamma][\beta][\gamma_1^{-1} * \gamma]^{-1})$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 10.3. Lad X og Y være kurvesammenhængende, og $f: X \to Y$ en homotopiækvivalens. For $a \in X$ og $b = f(a)$ er $f_\#: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b)$ da en isomorfi.

Bevis. Lad $F: X \times I \to X$ være en homotopi fra 1_X til en afbildning $g: X \to X$, og lad os sætte $a' = g(a)$. For hver løkke $\gamma: (I, \dot{I}) \longrightarrow (X, a)$ har vi da en homotopi $G: I \times I \to X$ defineret som $I \times I \xrightarrow{\gamma \times 1_I} X \times I \xrightarrow{F} X$. Nu er den ved $\beta(t) = (t, 0)$ definerede bevægelse $\beta: I \to I \times I$ modulo endepunkterne homotop med bevægelsen den lange vej rundt langs randen, og ved sammensætning med G får vi, at γ er homotop med en bevægelse af formen $\alpha * (g \circ \gamma) * \alpha^{-1}$, hvor α er en bevægelse fra a til a', og det viser, at $g_\#: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a')$ er en isomorfi. Lad nu $f: X \to Y$ være en homotopiækvivalens, og lad $g: Y \to X$ være en homotopiinvers. Men så har vi netop vist, at $g_\# \circ f_\#$ og $f_\# \circ g_\#$ er isomorfier, og derfor er $f_\#$ dels surjektiv, dels injektiv. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 10.4. Hvis $\tilde{X}$ er kurvesammenhængende og $p: \tilde{X} \to X$ en fibrering med entydig kurveløftning, er $p_\#: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}) \to \pi_1(X, a)$ en monomorfi, d.v.s. injektiv, idet $a = p(\tilde{a})$, men $a \in X$, $\tilde{a} \in \tilde{X}$ iøvrigt er vilkårlige.

Bevis. Vi betragter $[\tilde{\gamma}], [\tilde{\gamma}_1] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$. Hvis $p_\#[\tilde{\gamma}] = p_\#[\tilde{\gamma}_1]$, er $p \circ \tilde{\gamma} \simeq p \circ \tilde{\gamma}_1$ modulo endepunkterne. En homotopi fra

$p\circ\tilde{\gamma}$ til $p\circ\tilde{\gamma}_1$ kan løftes med start i $\tilde{\gamma}$, og den må ende i en løftning af $p\circ\tilde{\gamma}_1$ med samme startpunkt som $\tilde{\gamma}_1$, altså med $\tilde{\gamma}_1$, da vi har antaget entydig kurveløftning. Dermed er sætningen bevist.

Hvis $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \to (X, a)$ er en fibrering med entydig kurveløftning, har vi således $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}) \approx p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}) \subseteq \pi_1(X, a)$.

Hvis G er en gruppe og $A \subseteq G$ en undergruppe, siges enhver gruppe, der er billede af A ved en indre automorfi, at være konjugeret til A. Derved falder mængden af undergrupper i G i klasser af indbyrdes konjugerede undergrupper. Indbyrdes konjugerede undergrupper er indbyrdes isomorfe.

<u>Sætning</u> 10.5. Lad $\tilde{X}$ være kurvesammenhængende og $p: \tilde{X} \to X$ en fibrering med entydig kurveløftning. Lad $a \in X$ være et vilkårligt punkt og $(a_j \mid j \in J)$ de punkter i $\tilde{X}$, der projiceres i a. Da udgør grupperne $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, a_j)$, $j \in J$ netop en hel klasse af indbyrdes konjugerede undergrupper i $\pi_1(X, a)$.

Bevis. To punkter a_j, a_k, der projiceres i a, kan forbindes ved en bevægelse $\tilde{\beta}$ i $\tilde{X}$, og så vil $\tilde{\varphi}[\tilde{\gamma}] = [\tilde{\beta} * \tilde{\gamma} * \tilde{\beta}^{-1}]$ definere en isomorfi $\tilde{\varphi}: \pi_1(\tilde{X}, a_k) \to \pi_1(\tilde{X}, a_j)$. Ved projektionen afbildes $\tilde{\beta}$ i en løkke β, og $\tilde{\varphi}$ inducerer en afbildning $\varphi: p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, a_k)) \longrightarrow p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, a_j))$ givet ved $\varphi[\gamma] = [\beta][\gamma][\beta]^{-1}$, hvilket netop viser, at $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, a_k)$ og $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, a_j)$ er konjugerede. At hele klassen af konjugerede kommer med følger af, at enhver løkke β i X har en løftning, der er en bevægelse fra a_j til et eller andet a_k, og derfor vil den ved $[\beta]$ bestemte indre automorfi af $\pi_1(X, a)$ komme med. Dermed er sætningen bevist.

Det næste problem, vi skal beskæftige os med, er spørgsmålet om eksistens af løftninger af afbildninger. Vi begynder med en let sætning.

Sætning 10.6. Lad $p: \tilde{X} \to X$ være en fibrering. En afbildning $f: Y \to X$ kan løftes, hvis Y er sammentrækkeligt. Hvis $\tilde{a} \in \tilde{X}$ projiceres i $a \in X$, og f afbilder $b \in Y$ ind i a, kan f løftes, så b går i $\tilde{a}$, såfremt Y er sammentrækkeligt med fastholdt b.

Bevis. Umiddelbart, da sammentrækningen ind i et punkt kan løftes.

Sætning 10.7. Lad (B, b) være et sammenhængende, lokalt kurvesammenhængende rum med basispunkt, (PB, b) bevægelsesrummet og $p: (PB, b) \longrightarrow (B, b)$ den ved $p(\gamma) = \gamma(1)$ bestemte projektion. Da er p en fibrering og en åben afbildning, og topologien på B er den ved p definerede finaltopologi.

Bevis. Vi viste i sætning 9.9, at p er en fibrering. Da B er kurvesammenhængende er p surjektiv. Den sidste påstand følger af, at p er åben, så det er alt, hvad vi behøver at vise. Lad $O \subseteq PB$ være åben. For $\gamma \in O$ er O en omegn af γ og indeholder derfor en basisomegn, som er fællesmængde for endelig mange omegne $\langle K, U \rangle$, hvor $K \subseteq I$ er kompakt og $U \subseteq B$ er åben. Punktet 1 ligger i højst endelig mange K og fællesmængden for de tilsvarende U vil indeholde en kurvesammenhængende omegn W af $\gamma(1)$. For $x \in W$ vil O indeholde en bevægelse sammensat af γ og en bevægelse i W fra $\gamma(1)$ til x. Altså har vi $W \subseteq p(O)$, så $\gamma(1)$ er indre punkt i

$p(0)$. Dermed er sætningen bevist.

Vi skal nu fortsætte med en meget vigtig sætning:

<u>Sætning</u> 10.8. Lad $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \longrightarrow (X, a)$ være en fibrering med entydig kurveløftning, og lad Y være et kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende rum. En afbildning $f: (Y, b) \longrightarrow (X, a)$ vil da have en løftning $\tilde{f}: (Y, b) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{a})$, hvis og kun hvis $f_\# \pi_1(Y, b) \subseteq p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$.

Bevis. Hvis $\tilde{f}$ eksisterer, er $f = p \circ \tilde{f}$, altså $f_\# \pi_1(Y, b) = p_\# \tilde{f}_\# \pi_1(Y, b) \subseteq p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$. Dermed har vi bevist "kun hvis".

Vi betragter nu fibreringen $\varphi: (PY, b) \longrightarrow (Y, b)$. Ifølge sætning 9.10 er (PY, b) sammentrækkeligt, og af sætning 10.6 følger derfor, at $f \circ \varphi: (PY, b) \longrightarrow (X, a)$ har en løftning $\widetilde{f \circ \varphi}: (PY, b) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{a})$, og vi skal derfor blot vise, at vi i det følgende kommutative diagram kan vælge $\tilde{f}$, så kommutativiteten bevares

$$\begin{tikzcd}
(PY, b) \arrow[r, "\widetilde{f \circ \varphi}"] \arrow[d, "\varphi"] & (\tilde{X}, \tilde{a}) \arrow[d, "p"] \\
(Y, b) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & (X, a) .
\end{tikzcd}$$

Da topologien på (Y, b) er den af φ inducerede finaltopologi, bliver $\tilde{f}$ automatisk kontinuert, og da φ er surjektiv, bliver den nederste trekant kommutativ, hvis den øverste bliver det. Vi skal derfor blot vise, at elementer i PY , der afbildes ens ved φ , afbildes ens ved $\widetilde{f \circ \varphi}$. Lad $\gamma_1, \gamma_2 \in PY$ tilfredsstille $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Så har vi $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in \pi_1(Y, b)$, og

$f_\#[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in \pi_1(X,a)$ er repræsenteret ved løkken $(f\circ\gamma_1) * (f\circ\gamma_2^{-1})$. Betingelsen $f_\#\pi_1(Y,b) \subseteq p_\#\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})$ siger netop, at der findes et $[\alpha] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{a})$, så $[(f\circ\gamma_1) * (f\circ\gamma_2^{-1})] = p_\#[\alpha]$. Så er $p\circ\alpha \simeq (f\circ\gamma_1) * (f\circ\gamma_2^{-1})$, og homotopiløftningsegenskaben giver da, at den entydigt bestemte løftning af $(f\circ\gamma_1) * (f\circ\gamma_2^{-1})$ er en løkke, så vi kan slutte, at løftningerne af $f\circ\gamma_1$ og $f\circ\gamma_2$ har samme endepunkt i $\tilde{X}$. Vi danner $\widetilde{f\circ\varphi}(\gamma)$ ved at løfte homotopien, der trækker PY ind i b, og det betyder netop, at $\widetilde{f\circ\varphi}(\gamma)$ bliver endepunktet af løftningen af $f\circ\gamma$. Dermed er sætningen bevist.

Nu kan vi endelig bestemme en ikke triviel fundamentalgruppe:

<u>Sætning</u> 10.9. $\pi_1(S^1) \approx \dot{Z}$.

Bevis. Vi benytter overlejringen $exp: \dot{R} \to S^1$. Løftningen af en løkke γ i S^1 er en bevægelse i $\dot{R}$ fra 0 til $2\pi m$, hvor $m \in \dot{Z}$, og homotope løkker giver samme værdi af m, så vi kan definere en afbildning $\varphi: \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \dot{Z}$ ved $\varphi([\gamma]) = m$. Hvis vi løfter γ med start i $2\pi q$, får vi en bevægelse fra $2\pi q$ til $2\pi(q+m)$. Af $\varphi[\gamma_1] = m_1$, $\varphi[\gamma_2] = m_2$ følger derfor $\varphi[\gamma_1 * \gamma_2] = m_1 + m_2$, så $\varphi: \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \dot{Z}$ er en homomorfi. Det er klart, at φ er surjektiv. Af $\varphi[\gamma] = 0$ følger, at løftningen af γ er en løkke i $\dot{R}$, og det medfører, at γ er 0-homotop. Altså er φ injektiv. Dermed er sætningen bevist.

Det følger umiddelbart, at S^1 ikke er sammentrækkeligt, at 1_{S^1} ikke er 0-homotop, at S^1 ikke er en retrakt af E^2, at enhver afbildning $E^2 \longrightarrow E^2$ har et fixpunkt, og at S^1 ikke er et massivt rum.

Den ved $f(z) = z^m$ definerede afbildning $f\colon S^1 \to S^1$ er en overlejring, og $f_\#\colon \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(S^1, 1)$ er givet ved $f_\#(q) = mq$, altså injektiv.

Vi indfører endnu et hjælpemiddel, der kan være nyttigt ved bestemmelse af fundamentalgrupper:

Definition 10.10. Lad X være et topologisk rum. Ved den fundamentale kategori på X forstår vi kategorien, hvis objekter er punkterne af X, medens morfierne fra $x_0 \in X$ til $x_1 \in X$ er homotopiklasserne $[\gamma]$ af bevægelser fra x_0 til x_1 med sammensætningsreglen $[\gamma_2][\gamma_1] = [\gamma_1 * \gamma_2]$.

Den fundamentale kategori på X er en lille kategori. Mængden af morfier fra x til x er det samme som $\pi_1(X, x)$ og udgør således en gruppe. Enhver morfi i kategorien har en invers morfi, så alle morfierne er ækvivalenser. En lille kategori med disse egenskaber kaldes en grupoide, og den her betragtede kaldes derfor også den fundamentale grupoide på X.

Sætning 10.11. Lad X være et kurvesammenhængende rum og $p\colon \tilde{X} \to X$ en fibrering med entydig kurveløftning. Der findes en funktor h fra den fundamentale grupoide på X til kategorien af topologiske rum og homøomorfier defineret på følgende måde: For $x \in X$ er $h(x) = p^{-1}(x)$. For en bevægelse γ fra x_0 til x_1 vælges en løftning $\tilde{F}\colon p^{-1}(x_0) \times I \longrightarrow \tilde{X}$ af den ved $F(y,t) = \gamma(t)$ definerede homotopi $F\colon p^{-1}(x_0) \times I \longrightarrow X$ med start $\tilde{F}(y,0) = y$, og $h[\gamma]\colon p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_1)$ defineres derefter ved $h(\gamma)(y) = \tilde{F}(y,1)$.

Bevis. Vi ved, at løftningen $\tilde{F}$ eksisterer, og at $h(\gamma)$

bliver kontinuert. For $y \in p^{-1}(x_0)$ bliver $h[\gamma](y)$ endepunktet for en løftning af γ med start y, og kommer derfor kun til at afhænge af $[\gamma]$. Det er klart, at $h[\gamma_2 \circ \gamma_1] = h(\gamma_1 * \gamma_2) = h(\gamma_2) \circ h(\gamma_1)$. Altså er h en covariant funktor. Da morfierne i den fundamentale grupoide er ækvivalenser, vil de afbildes i ækvivalenser, altså homøomorfier. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 10.12. Hvis X er kurvesammenhængende og $p: \tilde{X} \to X$ en fibrering med entydig kurveløftning, er alle fibrene $p^{-1}(x)$ indbyrdes homøomorfe.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 10.11.

<u>Definition</u> 10.13. Lad X være kurvesammenhængende og $p: \tilde{X} \to X$ en fibrering med entydig kurveløftning. Kardinaltallet for en fiber kaldes da multipliciteten af p.

Det har mening ifølge sætning 10.12.

Vi minder om, at index for en undergruppe A i en gruppe G er antallet af sideklasser til A, altså antallet af elementer i faktorgruppen $\frac{G}{A}$, hvis A specielt er en normal undergruppe.

<u>Sætning</u> 10.14. Lad $p: \tilde{X} \to X$ være en fibrering med entydig kurveløftning og X, $\tilde{X}$ kurvesammenhængende. Så er multipliciteten af p lig med index for $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}) \subseteq \pi_1(X, a)$ for vilkårligt valg af $\tilde{a} \in \tilde{X}$ og $a = p(\tilde{a})$.

Bevis. For $\tilde{a}_j \in \tilde{X}$ med $p(\tilde{a}_j) = p(\tilde{a}) = a$ findes der en bevægelse $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ fra $\tilde{a}$ til $\tilde{a}_j$, og dens projektion γ repræsenterer et element i $\pi_1(X, a)$. Omvendt vil vi for $[\gamma] \in$

$\pi_1(X,a)$ have en løftning $\tilde{\gamma}$, som er en bevægelse fra $\tilde{a}$ til et $\tilde{a}_\gamma$, der kun afhænger af $[\gamma]$. At $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X,a)$ giver samme $\tilde{a}_\gamma$ er ensbetydende med, at løkken $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ løftes som en løkke, altså med, at $[\gamma_1][\gamma_2]^{-1} \in p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$. Det er igen ensbetydende med, at $[\gamma_1]$ og $[\gamma_2]$ ligger i samme højre sideklasse for $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$. Altså er multipliciteten af p lig med antallet af disse sideklasser. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 10.15. $\pi_1(P^n) \approx Z_2$ for $n \geq 2$.

Bevis. Overlejringen $p: S^n \to P^n$ har multiplicitet 2 og for $n \geq 2$ er $\pi_1(S^n) = 0$. Af sætning 10.14 følger derfor, at $\pi_1(P^n)$ er en gruppe med to elementer, altså $\approx Z_2$. Dermed er sætningen bevist.

For $n = 1$ er $P^1 = S^1$, altså $\pi_1(P^1) \approx Z$.

<u>Sætning</u> 10.16. Lad $(X_j \mid j \in J)$ være en familie af sammenhængende topologiske rum, og a_j et basispunkt for X_j. Lad $X = \prod_{j\in J} X_j$ have basispunktet $a = (a_j \mid j \in J)$. Da er $\pi_1(X,a) \approx \prod_{j\in J} \pi_1(X_j, a_j)$, og en isomorfi $\varphi: \pi_1(X,a) \longrightarrow \prod_{j\in J} \pi_1(X_j, a_j)$ defineres ved $\varphi[\gamma] = (p_{j\#}[\gamma] \mid j \in J)$, hvor $p_j : X \longrightarrow X_j$ er projektionen.

Bevis. Det er i hvert fald klart, at φ er en homomorfi. Endvidere er φ surjektiv, da enhver familie $(\gamma_j \mid j \in J)$ af løkker fås som projektion af netop en løkke. Da en tilsvarende familie af homotopier mellem løkker er projektion af en homotopi mellem produktløkkerne, er φ også injektiv.

<u>Sætning</u> 10.17. $\pi_1(T^n) \approx \dot{Z}^n$

Bevis. Følger umiddelbart af sætningerne 10.16 og 10.9.

<u>Sætning</u> 10.18. $\pi_1(CP^n)$ og $\pi_1(KP^n)$ er trivielle for alle n.

Bevis. For $n = 0, 1$ er resultatet allerede bevist. Beviserne for de to påstande er ganske ens. Afbildningen $p: S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$ er i hvert fald en S-fibrering. Lad $\tilde{a} \in S^{2n+1}$, $a = p(\tilde{a}) \in CP^n$ være basispunkter, og lad $\gamma: (I, \dot{I}) \longrightarrow (CP^n, a)$ være en løkke. Så har γ en løftning $\tilde{\gamma}: (I, 0) \longrightarrow (S^{2n+1}, \tilde{a})$, og da $p^{-1}(a)$ er homøomorf med S^1, kan vi vælge en bevægelse $\tilde{\gamma}_1: (I, 1) \longrightarrow (p^{-1}(a), \tilde{a})$, så $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}(1)$. Så er $\tilde{\gamma} * \tilde{\gamma}_1$ en løkke, hvis projektion er homotop med γ, og da $\pi_1(S^{2n+1})$ er triviel, er $\tilde{\gamma} * \tilde{\gamma}_1$ og dermed γ nulhomotop. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 10.19. Hvis (X, a) er et H-rum, er $\pi_1(X, a)$ kommutativ.

Bevis. Vi har $\pi_1(X, a) \approx [S^1, 1; X, a]$, og da $(S^1, 1)$ er et co-H-rum og (X, a) et H-rum, vil de to strukturer inducere samme kompositionsregel og den bliver kommutativ. Dermed er sætningen bevist.

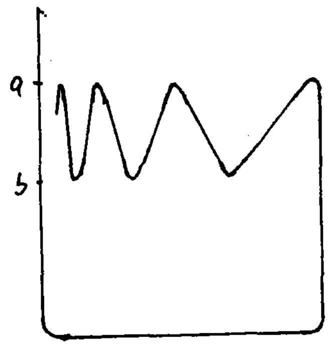
Kapitel 11.

OVERLEJRING

En hel del af resultaterne i kapitel 10 vedrører fibreringer med entydig kurveløftning. Bortset fra de sætninger, der udtaler, at en eller anden afbildning er en fibrering med entydig kurveløftning, gælder de tilsvarende resultater også for overlejringer. I dette kapitel vil vi dels angive betingelser for, at en fibrering med entydig kurveløftning er en overlejring, dels studere sammenhængen mellem fundamentalgruppen og overlejringerne.

Eksempel. Lad $X \subset \grave{R}^2$ være delrummet af punkter med anden koordinat rational. Den naturlige projektion $p: X \longrightarrow \grave{R}$ på første koordinat er en fibrering med entydig kurveløftning, men ikke en lokal homøomorfi og endnu mindre en overlejring.

Der findes en kontinuert, bijektiv afbildning $p: \grave{R} \longrightarrow A$, hvor A er den afbildede kurve, som går asymptotisk mod intervallet ab. Her er p lokalt homøomorf og tillige en fibrering med entydig kurveløftning, men ikke en overlejring.



<u>Definition</u> 11.1. Lad $p: E \longrightarrow B$ være en fibrering. Ved et tværsnit i p forstås en afbildning $s: B \longrightarrow E$, således at $p \circ s = 1_B$, altså således at s er en løftning af 1_B.

Af sætning 10.8. følger umiddelbart:

<u>Sætning</u> 11.2. Lad (X, a) være et kurvesammenhængende, lo-

kalt kurvesammenhængende rum med basispunkt. Da vil en fibrering $p:(\tilde{X},\tilde{a}) \longrightarrow (X,a)$ have et tværsnit $s:(X,a)\longrightarrow(\tilde{X},\tilde{a})$, hvis og kun hvis $p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}) = \pi_1(X,a)$.

Vi har også følgende sætning:

<u>Sætning</u> 11.3. Lad $p:\tilde{X}\to X$ være en fibrering med entydig kurveløftning, med $\tilde{X}$ og X kurvesammenhængende og X lokalt kurvesammenhængende. Da er p en homøomorfi, hvis og kun hvis $p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}) = \pi_1(X,a)$ for et eller andet valg af $a\in\tilde{X}$ og $a=p(\tilde{a})$.

Bevis. Hvis p er en homøomorfi, er betingelsen selvfølgelig opfyldt for ethvert valg af $\tilde{a}$. Hvis $\tilde{a}$ er valgt, så betingelsen er opfyldt, har vi et tværsnit $s:X\longrightarrow\tilde{X}$ med $s(a)=\tilde{a}$. For $\tilde{x}\in\tilde{X}$ har vi en bevægelse $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{X}$ fra $\tilde{a}$ til $\tilde{x}$. Så er $s\circ p\circ\tilde{\gamma}$ en løftning af $p\circ\tilde{\gamma}$, så vi har $s\circ p\circ\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}$, og for endepunktet får vi $s(p(\tilde{x}))=\tilde{x}$. Dermed har vi vist, at $s\circ p = 1_{\tilde{X}}$, og det indebærer, at p er en homøomorfi. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 11.4. Et topologisk rum X kaldes n-sammenhængende, hvis $\pi_0(X),\ \pi_1(X),\cdots,\pi_n(X)$ er trivielle.

Altså er 0-sammenhængende ensbetydende med kurve sammenhængende. Vi skal senere se, at det bevirker, at de højere homotopigrupper er uafhængige af basispunktet, så definitionen har mening. Indtil videre kan vi i øvrigt bruge definitionen med tilføjelsen "for ethvert basispunkt". For ethvert $n\geq 1$ er n-sfæren $n-1$-sammenhængende.

<u>Sætning 11.5</u>. Hvis $p:\tilde{X}\longrightarrow X$ er en overlejring, og X er

1-sammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, da vil p afbilde hver kurvekomponent af $\tilde{X}$ homøomorft på hele X.

Bevis. Det er klart, at $\tilde{X}$ er lokalt kurvesammenhængende. Da $\pi_1(X,a)$ er triviel, er betingelsen i sætning 11.2 trivielt opfyldt, og for hvert $\tilde{a} \in \tilde{X}$ med $p(\tilde{a}) = a$ har vi et tværsnit $s: (X,a) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{a})$, som afbilder X ind i en kurvekomponent af $\tilde{X}$. Af sætning 11.3 følger nu, at p afbilder denne kurvekomponent homøomorft, og dermed er sætningen bevist.

Sætningen kaldes monodromi-sætningen, og den spiller en rolle i matematisk analyse. Som en typisk anvendelse skal vi nævne, at den medfører, at enhver afbildning $f: O \to \grave{C} \setminus \{0\}$, hvor $O \subseteq \grave{C}$ har 1-sammenhængende komponenter og er åben, kan skrives $f = e^g$.

<u>Definition</u> 11.6. Et rum X kaldes semi-lokalt 1-sammenhængende, hvis hvert punkt $x \in X$ har en omegn U, således at det for inklusionsafbildningen $j: (U,x) \longrightarrow (X,x)$ gælder, at $j_\# \pi_1(U,x)$ er triviel.

Groft udtrykt: Tilstrækkelig små løkker i X er 0-homotope.

<u>Sætning</u> 11.7. Lad X være kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og semi-lokalt 1-sammenhængende, og lad $\tilde{X}$ være lokalt kurvesammenhængende. Lad $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ være en fibrering med entydig kurveløftning. Da er p en overlejring.

Bevis. Lad en omegn U af $x \in X$ være valgt, så inklusionsafbildningen $j: (U,x) \longrightarrow (X,x)$ tilfredsstiller $j_\# \pi_1(U,x) = 0$. Enhver omegn af x indeholdt i U har da samme egenskab. Derfor kan vi vælge $\mathcal{U}$ kurvesammenhængende. Lad $\tilde{\mathcal{U}}$ være en kurvekomponent af $p^{-1}(\mathcal{U})$. På grund af kurveløftningsegenskaben findes et $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}$ med $p(\tilde{x}) = x$. For $y \in \mathcal{U}$ vælger vi en bevægelse γ fra x til y, og ved løftning får vi en bevægelse $\tilde{\gamma}$ fra $\tilde{x}$ til et punkt $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{U}}$, og da løkker i $\mathcal{U}$ er 0-homotope, afhænger $\tilde{y}$ ikke af valget af γ. Vi sætter $\tilde{y} = s(y)$, og dermed har vi defineret en afbildning $s: \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ med $p \circ s = 1_{\mathcal{U}}$. For $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{U}}$ har vi en bevægelse $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\mathcal{U}}$ fra $\tilde{x}$ til $\tilde{z}$, og ved løftning af $p \circ \tilde{\gamma}$ ser vi, at $\tilde{z} = s(p(\tilde{z}))$. Dermed har vi bevist, at p afbilder $\tilde{\mathcal{U}}$ homøomorft, og dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 11.8. Lad X være kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. Med $O(X)$ betegner vi kategorien af overlejringer $p: \tilde{X} \to X$ med $\tilde{X}$ kurvesammenhængende.

I $O(X)$ er også morfierne overlejringer.

<u>Sætning</u> 11.9. Lad $p_1: \tilde{X}_1 \to X$ og $p_2: \tilde{X}_2 \to X$ være objekter i $O(X)$, og lad en morfi fra p_1 til p_2 være givet ved $f: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$. Da er f en overlejring.

Bevis. Ifølge sætning 9.17 er det nok at vise, at f er surjektiv. Vi vælger $\tilde{a}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{a}_2 = f(\tilde{a}_1) \in \tilde{X}_2$ og $a = p_1(\tilde{a}_1) = p_2(\tilde{a}_2) \in X$. For $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ har vi en bevægelse $\tilde{\gamma}_2$ i $\tilde{X}_2$ fra $\tilde{a}_2$ til $\tilde{x}_2$, og den projiceres i en bevægelse γ i X fra a til $x = p_2(\tilde{x}_2)$, og den løftes og giver en bevægelse $\tilde{\gamma}_1$ i $\tilde{X}_1$ fra $\tilde{a}_1$ til et punkt $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ med $p_1(\tilde{x}_1) = x$. Nu er $f \circ \tilde{\gamma}_1$ en løftning af γ, så vi kan slutte, at $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Dermed er sætningen bevist.

Når vi nu inddrager sætning 10.8, ser vi, at eksistensen af f bevirker, at $p_{1\#}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{a}_1) = p_{2\#}f_{\#}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{a}_1) \subseteq p_{2\#}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{a}_2)$. Hvis vi regner med rum med basispunkt, vil morfierne derfor give en ordning af klasserne af ækvivalente overlejringer, og på den anden side vil betingelsen $p_{1\#}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{a}_1) \subseteq p_{2\#}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{a}_2)$ sikre, at der findes en morfi fra p_1 til p_2, altså at der findes en overlejring $f:(X_1,\tilde{a}_1) \longrightarrow (\tilde{X}_2,\tilde{a}_2)$. Hvis $p_{1\#}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{a}_1) = p_{2\#}\pi_2(\tilde{X}_2,\tilde{a}_2)$, findes der morfier begge veje mellem p_1 og p_2, og det fremgår af beviset for sætning 11.9, at de kan vælges, så de bliver hinandens inverse. Overlejringer, der svarer til samme undergruppe af $\pi_1(X,a)$ er således ækvivalente.

Vi ser, at R^n, $S^n (n \geqq 2)$, CP^n og RP^n kun har trivielle overlejringer, og at P^n for $n \geqq 2$ kun har overlejringer ækvivalente med $p: S^n \longrightarrow P^n$. Derimod har S^1 og navnlig T^n mange ækvivalensklasser af overlejringer.

Det er nu nærliggende at spørge, om der findes en overlejring svarende til en forelagt undergruppe af fundamentalgruppen. Svaret er bekræftende for "pæne" rum, idet vi har følgende sætning:

<u>Sætning</u> 11.10. Lad (X,a) være kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, og lad $H \subseteq \pi_1(X,a)$ være en undergruppe. Nødvendigt og tilstrækkeligt, for at der findes en overlejring $p:(\tilde{X},\tilde{a}) \longrightarrow (X,a)$, således at $H = p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})$, er det, at der findes en overdækning $(U_j \mid j \in J)$ af X med åbne mængder, således at H omfatter enhver homotopiklasse af formen $[\gamma * \gamma_1 * \gamma^{-1}]$ hvor γ er en bevægelse fra a til et punkt $x_j \in U_j$, og γ_1 er en løkke i (U_j, x_j).

Bevis. Lad $p:(\tilde{X},\tilde{a}) \longrightarrow (X,a)$ være en overlejring. Der findes da en overdækning $(\mathcal{U}_j \mid j \in \mathcal{J})$ af X med åbne, kurvesammenhængende mængder, så det for $j \in \mathcal{J}$ gælder, at hver kurvekomponent af $p^{-1}(\mathcal{U}_j)$ afbildes homøomorft på $\mathcal{U}_j$ ved restriktionen af p. Så vil de i sætningen omtalte løkker $\gamma * \gamma_1 * \gamma^{-1}$ løftes som løkker og derfor repræsentere homotopiklasser i $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$. Altså er betingelsen nødvendig.

Lad os nu antage, at X har en overdækning $(\mathcal{U}_j \mid j \in \mathcal{J})$ med den i sætningen omtalte egenskab. Mængderne $\mathcal{U}_j$ har åbne kurvekomponenter, som også udgør en overdækning med de samme egenskaber. Vi kan derfor antage, at mængderne $\mathcal{U}_j$ er kurvesammenhængende. Vi går nu i gang med at konstruere en overlejring $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \to (X, a)$, så $p_\# \pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}) = H$.

På mængden af bevægelser $\gamma: (I, 0) \to (X, a)$ indfører vi en ækvivalensrelation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, som skal betyde, at $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, og $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H$. Vi har, at $\sim$ er refleksiv, da $\gamma * \gamma^{-1}$ er 0-homotop, symmetrisk, da $\gamma_2 * \gamma_1^{-1} = (\gamma_1 * \gamma_2^{-1})^{-1}$, og transitiv, da $\gamma_1 * \gamma_3^{-1} \simeq (\gamma_1 * \gamma_2^{-1}) * (\gamma_2 * \gamma_3^{-1})$. Rummet $\tilde{X}$ skal være mængden af ækvivalensklasser $\{\gamma\}$ med en topologi, vi vil indføre om lidt, $\tilde{a}$ skal være den stationære bevægelsesklasse og $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \to (X, a)$ defineres ved $p\{\gamma\} = \gamma(1)$.

For $\{\gamma\} \in \tilde{X}$ vælger vi $j \in \mathcal{J}$, så $\gamma(1) \in \mathcal{U}_j$ og en omegnsbasis $\grave{\mathcal{B}}(\gamma(1))$ bestående af åbne, kurvesammenhængende delmængder af $\mathcal{U}_j$. Med $\hat{\mathcal{U}}$ betegner vi for $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{B}}(\gamma(1))$ mængden af bevægelser γ' i X fra $\tilde{a}$ til et vilkårligt punkt af $\mathcal{U}$, for hvilke der findes en bevægelse γ'' i $\mathcal{U}$ fra $\gamma(1)$ til $\gamma'(1)$, således at $[\gamma * \gamma'' * \gamma'^{-1}] \in H$. Af $\gamma_1' \sim \gamma'$ følger så $[\gamma * \gamma'' * \gamma_1'^{-1}] \in H$, og af $\gamma_1 \sim \gamma$ følger $[\gamma_1 * \gamma * \gamma'^{-1}] \in H$. Heraf følger, at $\hat{\mathcal{U}}$ er en foreningsmængde af ækvivalensklasser og kun afhængig af ækvivalensklassen for γ. Vi definerer nu, at mængden af ækvivalensklasser i $\hat{\mathcal{U}}$ er den til $\mathcal{U}$ svarende omegn $\tilde{\mathcal{U}}$ af $\{\gamma\} \in \tilde{\mathcal{X}}$.

Inden vi undersøger, om vi virkelig har fået en topologi defineret, vil vi undersøge den rolle, valget af γ'' spiller. Hvis γ_1'' er en anden bevægelse i $\mathcal{U}$ fra $\gamma(1)$ til $\gamma'(1)$, har vi $[\gamma * (\gamma_1'' * \gamma''^{-1}) * \gamma^{-1}] \in H$ ifølge betingelsen i sætningen, og derfor er $[\gamma * \gamma_1'' * \gamma'^{-1}] \in H$ ensbetydende med $[\gamma * \gamma'' * \gamma'^{-1}] \in H$. Valget af γ'' er således helt uden betydning. For $x \in \mathcal{U}$ findes en bevægelse γ'' i $\mathcal{U}$ fra $\gamma(1)$ til x, og vi har $\{\gamma * \gamma''\} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Altså er $p(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$.

Vi vil nu vise, at basisomegnene $\tilde{\mathcal{U}}$ definerer en topologi på $\tilde{\mathcal{X}}$. Det er klart, at hvert $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ får basisomegne, og at $\tilde{x}$ tilhører enhver af disse. Hvis $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \grave{\mathcal{B}}(\gamma(1))$, findes $\mathcal{U} \in \grave{\mathcal{B}}(\gamma(1))$, så $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, og vi har så $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}_1 \cap \tilde{\mathcal{U}}_2$. Lad nu $\{\gamma_1\} \in \tilde{\mathcal{U}}$ være vilkårligt valgt, og lad γ_1'' være en vej i $\mathcal{U}$ fra $\gamma(1)$ til $\gamma_1(1)$. For $\{\gamma_2\} \in \tilde{\mathcal{U}}$ har vi en anden vej γ_2'' fra $\gamma_1(1)$ til $\gamma_2(1)$. Så er $\gamma_1''^{-1} * \gamma_2$ en vej i $\mathcal{U}$ fra $\gamma_1(1)$ til $\gamma_2(1)$, og vi får $[\gamma_1 * (\gamma_1''^{-1} * \gamma_2'') * \gamma_2^{-1}]$ = $[\gamma * \gamma_1'' * \gamma_1^{-1}]^{-1} * [\gamma * \gamma_2'' * \gamma_2^{-1}] \in H$. Deraf følger, at $\tilde{\mathcal{U}}$ er en omegn af $\{\gamma_1\}$, og dermed har vi bevist, at $\tilde{\mathcal{X}}$ er et topologisk rum, og at basisomegnene $\tilde{\mathcal{U}}$ er åbne.

Det er nu klart, at p afbilder $\tilde{\mathcal{U}}$ homøomorft på $\mathcal{U}$, idet det for hvert $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}$ gælder, at p afbilder de i $\tilde{\mathcal{U}}$ indeholdte basisomegne af $\tilde{x}$ på basisomegne af $p(\tilde{x})$. Det er klart, at $\tilde{\mathcal{U}}$ bliver kurvesammenhængende. Hvis $\tilde{\mathcal{U}}_1$ og $\tilde{\mathcal{U}}_2$ er forskellige basisomegne med samme projektion $\mathcal{U}$, er de åbenbart disjunkte. Dermed har vi bevist, at $p: \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ er en overlejring.

En bevægelse $\gamma : (I,0) \to (X,a)$ har en løftning $\tilde{\gamma} : (I,0) \to (\tilde{X},\tilde{a})$, hvor $\tilde{\gamma}(t)$ er klassen repræsenteret ved $\gamma_t : (I,0) \to (X,a)$ defineret ved $\gamma_t(u) = \gamma(tu)$. Vi bemærker, at $\tilde{\gamma}(1) = \{\gamma\}$. Altså er $\tilde{X}$ kurvesammenhængende.

Endelig kan vi slutte, at en løkke $\gamma : (I,\dot{I}) \to (X,a)$ har en løftning, der selv er en løkke, hvis og kun hvis $\{\gamma\} = \tilde{a}$, hvilket er ensbetydende med, at $[\gamma] \in H$. Det betyder, at $p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}) = H$, og dermed er sætningen bevist.

I kategorien $O(X)$, hvor X er kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, er en triviel overlejring et finalt objekt. Det har større interesse, om der findes et initialt objekt, og et sådan kaldes en universel overlejring af X. Af vore resultater får vi umiddelbart følgende sætninger.

<u>Sætning</u> 11.11. Hvis X er kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende, $\tilde{X}$ 1-sammenhængende, og $p : \tilde{X} \to X$ en overlejring, er p universel.

<u>Sætning</u> 11.12. Hvis X er kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og semi-lokalt 1-sammenhængende, findes der en universel overlejring $p : \tilde{X} \to X$, hvor $\tilde{X}$ er 1-sammenhængende.

Enhver 1-punktsforening $S^1 \vee X$ har en ikke triviel overlejring, idet S^1 med to eksemplarer af X påsat i diametralt modsatte punkter afbildes på $S^1 \vee X$ ved en nærliggende udvidelse af den ved z^2 definerede afbildning $S^1 \to S^1$.

Lad $X \subseteq R^2$ bestå af en følge af cirkler, der rører hinanden i $\underline{0}$, og hvis radier går mod 0. Af bemærkningen ovenfor følger, at X har en mængde overlejringer. Hvis $p : \tilde{X} \to X$ er en sådan, vil $\tilde{X}$ indeholde en kopi af en omegn af $o \in X$, og $\tilde{X}$ vil derfor være 1-punktsforening af S^1 og en mængde, så $\tilde{X}$ har en overlejring, der åbenbart igen giver en overlejring af X. Altså har X ingen universel overlejring.

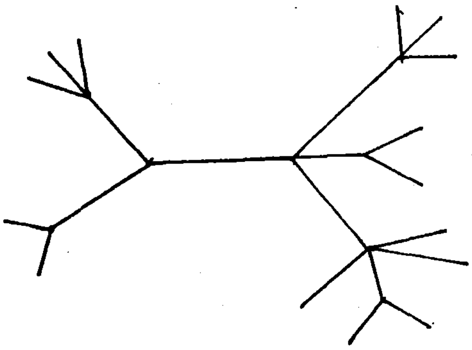
Med det samme rum X betragter vi keglen CX (ikke reduceret). Vi sætter $Y = CX \vee CX$ og betragter en overlejring $p: \tilde{Y} \to Y$. Vi har da en omegn $\tilde{U}$ af $\tilde{o} \in \tilde{Y}$, der afbildes homøomorft ved p på en omegn U af $o \in Y$. Da enhver løkke i Y er homotop med en løkke i U, må p være triviel. En løkke i Y kan imidlertid sammensættes af en følge af 8-taller i basis med radier, der går mod 0, og en sådan løkke er ikke 0-homotop. Vi har således, at den trivielle overlejring $1_Y: Y \to Y$ er universel, skønt Y ikke er 1-sammenhængende.

Kapitel 12.

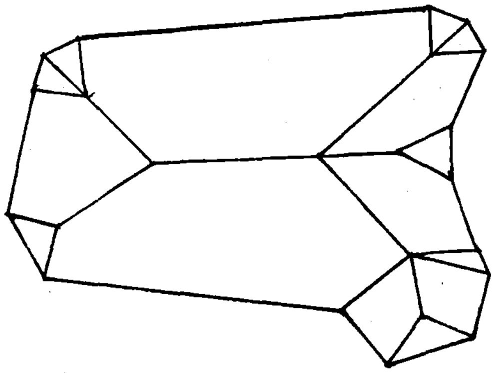
GRAF.

En graf er et 1-dimensionalt cellekompleks, der eventuelt er udstyret med ekstra struktur, f.eks. valg af orientering af hver 1-celle. Mange forskellige problemer kan bringes på grafteoretisk form. Således kan vore diagrammer udmærket opfattes som grafer. Vi vil holde os til en speciel simpel slags.

Definition 12.1. En graf er et polyeder $|K|$, hvor K er et 1-dimensionalt simplicielt kompleks. Et træ er en 1-sammenhængende graf.



Træ



Graf

<u>Sætning</u> 12.2. En graf er et træ, hvis og kun hvis den er sammentrækkelig.

Bevis. Det er klart, at "hvis" gælder. Lad $|K|$ være en 1-sammenhængende graf, og lad $a \in |K|$ være et fast valgt hjørne. Vi skal konstruere en homotopi $F: |K| \times I \longrightarrow |K|$ med $F(x,0) = x$, $F(x,1) = a$. Vi kender altså F på $|K| \times \dot{I}$, og da $|K|$ er kurvesammenhængende, kan vi udvide definitionen til $|K| \times \dot{I} \cup |K^0| \times I$. For hvert 1-simplex $s \in K$ har vi nu F defineret på randen af $|\overline{s}| \times I$, og vi skal blot vise, at afbildningen kan udvides til hele det indre. Det følger imidlertid umiddelbart af, at afbildningen af randen opfattet som løkke er 0-homotop, da $\pi_1(|K|, a)$ er triviel. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 12.3. Ethvert træ i en graf $|K|$ kan udvides til et maksimalt træ.

Bevis. Et træ $T \subseteq |K|$ er foreningsmængde af afsluttede 1-simplices i $|K|$. Lad $(T_j \mid j \in J)$ være en familie af træer, som er fuldstændig ordnet ved inklusion, og som alle indeholder T og er indeholdt i $|K|$. Det er da klart, at $\overline{T} = \bigcup_{j \in J} T_j$ er en graf, som indeholder T og er indeholdt i $|K|$. To vilkårlige punkter $x, y \in \overline{T}$ ligger i et eller andet T_j og kan forbindes med en kurve i $T_j \subseteq \overline{T}$. Altså er $\overline{T}$ kurvesammenhængende. En løkke γ i $\overline{T}$ er kompakt og kan derfor kun indeholde punkter af endelig mange 1-simplices. Disse er så alle indeholdt i et T_j og γ er 0-homotop i T_j og dermed i $\overline{T}$. Dermed har vi vist, at $\overline{T}$ er et træ. Nu følger det af Zorn's lemma, at der findes et maksimalt element i mængden af træer, der indeholder T og er indeholdt i $|K|$ og ordnede ved inklusion. Dermed er sætningen bevist.

I et polyeder $|K|$ findes nogle særlig simple bevægelser $\gamma: I \to |K|$, som afbilder I homøomorft på et 1-simplex $|S|$, så endepunkterne af I afbildes i hjørnerne.

Definition 12.4. En bevægelse, der fås ved at sætte sådanne simple bevægelser efter hinanden, kaldes en kantvej.

En kantvej er bortset fra meget simple homotopier helt fastlagt ved følgen $v_0, v_1, \cdots, v_m$ af hjørner, den passerer.

Sætning 12.5. Lad $|K|$ være et polyeder. Enhver bevægelse $\gamma: I \to |K|$, for hvilken $\gamma(0)$ og $\gamma(1)$ er hjørner, er rel $\dot{I}$ homotop med en kantvej.

Bevis. Vi kan opfatte I som et polyeder bestående af 1 afsluttet 1-simplex. Sætningen følger derefter umiddelbart af sætningerne om barycentrisk videredeling og barycentrisk approksimation.

Sætning 12.6. Et maksimalt træ i en sammenhængende graf indeholder alle grafens hjørner.

Bevis. Lad $|K|$ være en sammenhængende graf, og lad $T \subseteq |K|$ være et træ. Lad $a \in T$ være et hjørne, og lad $v \in |K| \setminus T$ være et hjørne. Af sætning 12.5 følger, at der findes en kantvej fra v til a. Lad v_0 være det første hjørne i denne kantvej, som hører til T, og lad $|\bar{s}|$ være det forudgående 1-simplex. Så er $T \cup |\bar{s}|$ en graf, men da $|s|$ kan trækkes ind i v_0, er T en stærk deformationsretrakt af $T \cup |\bar{s}|$, og det medfører, at $T \cup |\bar{s}|$ er sammentrækkeligt, altså et træ. Dermed er sætningen bevist.

Vi går i gang med at studere nogle "specielle" grupper som en forberedelse til studiet af grafernes fundamentalgrupper.

Definition 12.7. Lad $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ være en vilkårlig mængde. Ved et ord dannet af $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ forstår vi en endelig ordnet symbolkæde dannet af symbolerne α_j samt symbolerne α_j^{-1}, $j \in J$. Den tomme symbolkæde er det tomme ord. Et ord kaldes reduceret, hvis det ikke indeholder nogen delkæde af formen $\alpha_j \alpha_j^{-1}$ eller $\alpha_j^{-1}\alpha_j$. At reducere et givet ord betyder gentagne gange at fjerne delkæder af formen $\alpha_j \alpha_j^{-1}$ eller $\alpha_j^{-1}\alpha_j$, indtil sådanne ikke mere forekommer.

Det er klart, at den beskrevne reduktionsproces efter endelig mange trin ender med, at ordet bliver reduceret eller tomt, idet hvert trin i processen forkorter ordet med to symboler.

Sætning 12.8. Alle reduktioner af et givet ord fører til det samme reducerede ord.

Bevis. Vi fører beviset ved induktion, idet vi antager, at påstanden er rigtig for alle ord, der består af færre end n symboler. Vi skal så blot vise, at påstanden er rigtig for ord, der består af netop n symboler, så vi betragter sådan et ord. Hvis det er reduceret, er der ikke noget at vise. Hvis det kun indeholder et eneste symbolpar, der kan fjernes, følger påstanden umiddelbart af induktionsantagelsen. Hvis symbolkæden indeholder delkæder af formen $\alpha_j \alpha_j^{-1} \alpha_j$ eller $\alpha_j^{-1} \alpha_j \alpha_j^{-1}$ er det åbenbart ligegyldigt, om vi fjerner de to første eller de to sidste. Vi behøver derfor bare at se på det tilfælde, hvor vi har mulighed for at fjerne to symbolpar, der ikke har noget fælles. Ifølge induktionsantagelsen, er resultatet af reduktionen helt fastlagt, når vi har fjernet et symbolpar. I den foreliggende situation lader vi så de to symbolpar være de to første, vi fjerner, og så er det klart, at det er ligegyldigt, hvilket af dem, vi fjerner først. Dermed er sætningen bevist.

Definition 12.9. Ord dannet af samme symbolkæde kaldes ækvivalente, hvis de ved reduktion giver det samme reducerede ord.

Definitionen har mening på grund af sætning 12.8. Det er indlysende, at "ækvivalent" er en ækvivalensrelation.

Sætning 12.10. På mængden af ækvivalensklasser af ord dannede af en given mængde af symboler defineres en kompositionsregel ved at ækvivalensklasser repræsenterede ved symbolkæderne A og B som produkt har ækvivalensklassen repræsenteret ved symbolkæden AB, der fås ved at sætte B efter A. Ved denne kompositionsregel bliver mængden af ækvivalensklasser en gruppe, der kaldes den frie gruppe med den givne mængde af symboler som mængden af frembringere. Hvis der kun er en frembringer, bliver gruppen isomorf med $\mathbb{Z}$. Hvis der er mindst to frembringere, bliver gruppen ikke abelsk.

Bevis. Hvis A og B er symbolkæder, vil reduktion af AB ifølge sætning 12.8 resultere i netop den symbolkæde, der fås ved at reducere A og B til reducerede kæder A' og B' og dernæst reducere $A'B'$. Dette viser, at vi virkelig får en kompositionsregel for ækvivalensklasserne. Derefter er den associative lov triviel. Klassen med det tomme ord bliver åbenbart neutralelement. De ved α_j og α_j^{-1} repræsenterede elementer er hinandens inverse. Det inverse element til et element repræsenteret ved en symbolkæde A er repræsenteret ved en symbolkæde, der fås af A ved at erstatte hvert α_j med α_j^{-1} og hvert α_j^{-1} med α_j og derefter skrive elementerne i omvendt rækkefølge. Hvis α er eneste frembringere, findes der ikke andre reducerede ord end det tomme ord og ord af formen $\alpha\cdots\alpha$ eller $\alpha^{-1}\cdots\alpha^{-1}$. Derefter ses det umiddelbart, at gruppen i dette tilfælde bliver isomorf med $\mathbb{Z}$. Hvis α og β er forskellige frembringere, er $\alpha\beta$ og $\beta\alpha$ ikke ækvivalente, og den frie gruppe bliver så ikke kommutativ. Dermed er sætningen bevist.

I praksis identificeres 1-symbolordene α_j, α_j^{-1} med det gruppeelement, de repræsenterer, og man skriver 1 for det tomme ord. Så bliver det også naturligt at bruge potensnotationen $\alpha_j^{n_j}$, $n_j \in \mathbb{Z}$.

<u>Sætning</u> 12.11. Lad $|K|$ være en sammenhængende graf med et maksimalt træ T, og lad $a \in T$ være et hjørne. Da er $\pi_1(|K|, a)$ isomorf med den frie gruppe frembragt af mængden af 1-simplices i $|K|$, der ikke tilhører T.

Bevis. En løkke i $(|K|, a)$ er homotop med en kantvej fra a til a. Lad $\{s_j \mid j \in J\}$ være mængden af 1-simplices i $|K|$, som ikke tilhører T. På hvert af disse vælger vi gennemløbsretning, og vi bruger s_j som betegnelse for $|\bar{s}_j|$ gennemløbet i denne retning og s_j^{-1} for $|\bar{s}_j|$ gennemløbet i modsat retning. For hvert hjørne $v \in |K|$ (og ifølge sætning 12.6 også $\in |T|$) vælger vi en kantvej γ_v i T fra a til v. Lad G være den frie gruppe med $\{s_j \mid j \in J\}$ som mængden af frembringere. Vi definerer en homomorfi $\varphi : G \to \pi_1(|K|, a)$, idet vi for et simplex s_j med gennemløbsretning fra et hjørne v_0 til et hjørne v_1 sætter

$$\varphi(s_j) = \gamma_{v_0}\, s_j\, \gamma_{v_1}^{-1},$$

altså $\varphi(s_j^{-1}) = \gamma_{v_1}\, s_j\, \gamma_{v_0}^{-1}$. Vi skriver kantveje umiddelbart efter hinanden uden at bruge stjerner som for bevægelsen. Det er klart, at vi på denne måde får defineret en homomorfi. Vi skal vise, at φ endda er en isomorfi.

Vi viser først, at φ er surjektiv. Lad $v_0 v_1 \cdots v_n$ være en kantvej i $|K|$ med $v_0 = v_n = a$. Det er klart, at den er homotop med kantvejen

$$\widehat{v_0 v_1}\, \gamma_{v_1}^{-1}\, \gamma_{v_1}\, \widehat{v_1 v_2}\, \gamma_{v_2}^{-1}\, \gamma_{v_2}\, \widehat{v_2 v_3}\, \gamma_{v_3}^{-1} \cdots \gamma_{v_{n-1}}\, \widehat{v_{n-1} v_n},$$

som repræsenterer elementet

$$[\widehat{v_0 v_1}\, \gamma_{v_1}^{-1}][\gamma_{v_1}\, \widehat{v_1 v_2}\, \gamma_{v_2}^{-1}][\gamma_{v_2}\, \widehat{v_2 v_3}\, \gamma_{v_3}^{-1}] \cdots [\gamma_{v_{n-1}}\, \widehat{v_{n-1} v_n}]$$

af fundamentalgruppen. De faktorer, for hvilke $\widehat{v_{\nu-1} v_\nu}$ er i T, er 0-homotope, så de kan udelades. De resterende faktorer er billeder ved φ af frembringere i G eller inverse af sådanne. Dermed har vi bevist, at φ er surjektiv.

Vi mangler at vise, at φ er injektiv, og det går desværre ikke helt så let. Vi konstruerer en ny graf. Dertil opfatter vi G som diskret topologisk rum og danner produktrummet $T \times G$ der bliver disjunkt forening af så mange eksemplarer af T, som der er elementer i G. Et element i G er et reduceret ord A. Hvis A ender med s_k, får vi et nyt reduceret ord ved at tilføje endnu et s_k eller hvilket som helst s_j eller s_j^{-1} med $j \neq k$. Hvis A ender med s_k^{-1}, får vi et nyt reduceret ord ved at tilføje endnu et s_k^{-1} eller hvilket som helst s_j eller s_j^{-1} med $j \neq k$. Vi danner nu en ny graf $|\tilde{K}|$ ved at tilføje yderligere 1-simplices til $T \times G$ på følgende måde: Hvis et s_j med orientering går fra u til v, tilføjer vi for hvert reduceret ord A, for hvilket As_j igen er reduceret, et 1-simplex fra $u \times A$ til $v \times As_j$, og hvis As_j^{-1} er reduceret, et 1-simplex fra $v \times A$ til $u \times As_j^{-1}$. Efter denne proces vil to hjørner stadig tilhøre højst et 1-simplex, og denne egenskab sikrer, at $|\tilde{K}|$ er en graf. Der er en naturlig projektion $p: |\tilde{K}| \to |K|$, idet et $x \times A$ fra $T \times A$ projiceres på $x \in T$, og et punkt af et tilføjet s_j eller s_j^{-1} projiceres på det tilsvarende punkt af det oprindelige $|\bar{s}_j|$. For ethvert hjørne v er $p^{-1}(v)$ netop $v \times G$ og for hvert $v \times A$ vil stjernen $st(v \times A)$ afbildes homøomorft på $st\, v$. Da stjernerne $st\, v$ udgør en åben overdækning af $|K|$, har vi dermed vist, at $p: |\tilde{K}| \to |K|$ er en overlejring.

Lad os nu betragte et element af G givet ved et produkt $\alpha_1 \cdots \alpha_m$, hvor hvert α_ν er et s_ν eller et s_ν^{-1}, og lad γ være en kantvej fra a til a, som repræsenterer $\varphi(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$. Så vil γ i rækkefølge passere de s_j og s_j^{-1}, der svarer til

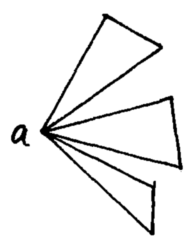
$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, og resten af γ vil iøvrigt forløbe i T. Vi ser på løftningen af γ med start i 0×1 . Løftningen vil forløbe i $T \times 1$, indtil vi passerer det simplex, der svarer til α_1 og derefter vil den forløbe i $T \times \alpha_1$, hvor den vil forblive, indtil den ved passage af den kantvej, der svarer til α_2 , kommer i $T \times \alpha_1\alpha_2$ o.s.v., så vi kan slutte, at løftningen $\tilde{\gamma}$ ender i $T \times \alpha_1 \cdots \alpha_m$. Dette medfører, at $\ker \varphi = 0$, og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 12.12. En sammenhængende graf er lokalt kurvesammenhængende og lokalt 1-sammenhængende.

Bevis. Det følger af, at stjernen for hvert hjørne er sammentrækkelig.

<u>Sætning</u> 12.13. Enhver fri gruppe er fundamentalgruppe for en graf.

Bevis. En 1-punktsforening af "trekantede" grafer, som antydet på figuren, er en graf med stjernen for a som maksimalt træ. Ved at benytte én trekant for hver frembringer i gruppen får vi netop den ønskede fundamentalgruppe.



<u>Sætning</u> 12.14. Hvis $p: X \longrightarrow |K|$ er en overlejring, og $|K|$ er en graf, er X en graf.

Bevis. Da hvert 1-simplex $|S| \subsetneqq |K|$ er 1-sammenhængende, er hver komponent af $p^{-1}(|S|)$ et afsluttet 1-simplex, der afbildes homøomorft. De punkter af X, der projiceres i hjørnerne af $|K|$ tages som hjørner i et simplicielt kompleks. To hjørner i dette kompleks udgør et 1-simplex, hvis de er endepunkter af en komponent af et $p^{-1}(|\bar{S}|)$, og i så fald er det klart, at de ikke har samme projektion, og at de er endepunkter af højst en sådan komponent. Dermed har vi vist, at X er en graf.

<u>Sætning</u> 12.15. Enhver undergruppe i en fri gruppe er fri.

Bevis. Følger af sætningerne 12.11-14, samt 11.12.

Sætningen kaldes Nielsen-Schreiers sætning. Det er en rent algebraisk sætning, men et rent algebraisk bevis går ikke lettere end vort topologiske. Schreier har bevist sætningen i 1927. Jacob Nielsen har givet mindst ét topologisk bevis for sætningen.

<u>Sætning</u> 12.16. Lad $|K|$ være en graf. Da er $\pi_n(|K|)$ triviel for $n \geq 2$.

Bevis. Lad $\varphi: S^n \to |K|$ være kontinuert, og lad $p: X \to |K|$ være en universel overlejring, som eksisterer ifølge sætningerne 11.12 og 12.12. Så er X et træ ifølge sætning 12.14, og da $\pi_1(S^n)$ er triviel, har φ en løftning $\tilde{\varphi}: S^n \to X$, som er 0-homotop, da X er et træ. Så er φ 0-homotop. Dermed er sætningen bevist.

De følgende sætninger vil gøre det klart, at de homotopiteoretiske problemer for grafer i det væsentlige er færdigbehandlede ved de ovenfor udledte sætninger.

<u>Sætning</u> 12.17. Lad (X, A) være et relativt CW-kompleks, for hvilket X er sammenhængende og A sammentrækkeligt. Da er den kanoniske afbildning $k: (X, A) \to (\frac{X}{A}, a)$ en homotopiækvivalens.

Bevis. Vi har en homotopi $F: A\times I \to A$ fra 1_A til afbildningen på a. Den har en udvidelse $G: (X\times I, A\times I) \to (X,A)$ fra 1_X til en afbildning $g: (X,A) \to (X,a)$. Så inducerer g en afbildning $\varphi: (\frac{X}{A}, a) \to (X,A)$, således at $g = \varphi\circ k$. Så er G en homotopi fra $1_{(X,A)}$ til $\varphi\circ k$, og $k\circ G$ er en homotopi fra $1_{(\frac{X}{A},a)}$ til $k\circ\varphi$. Altså er φ en homotopiinvers til k, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 12.18. Lad $|K|$ være en sammenhængende graf, og $T \subseteq |K|$ et maksimalt træ. Da er den kanoniske afbildning $k: |K| \to \frac{|K|}{T}$ en homotopiækvivalens.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 12.17.

Sætning 12.19. Enhver graf er homotopiækvivalent med en 1-punktsforening af cirkler (altså med en graf som i beviset for sætning 12.13).

Bevis. Følger af, at $\frac{|K|}{T}$ er en 1-punktsforening af cirkler.

Sætning 12.20. To sammenhængende grafer er homotopiækvivalente, hvis og kun hvis de har isomorfe fundamentalgrupper.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 12.19.

For sammenhængende grafer $|K|$ og $|K_1|$ er det også rigtigt, at to afbildninger $f, g: |K| \to |K_1|$ er homotope, hvis og kun vhis $f_\# = g_\#$. Det vil vi dog ikke ofre tid på at vise.

Kapitel 13.

NORMALE OVERLEJRINGER

Vi har set, at to overlejringer $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{a}_1) \longrightarrow (X, a)$ og $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{a}_2) \longrightarrow (X, a)$, hvor $\tilde{X}_1$ og $\tilde{X}_2$ er kurvesammenhængende, er ækvivalente, hvis og kun hvis $p_{1\#}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{a}_1) = p_{2\#}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{a}_2)$. Hvis vi erstatter $\tilde{a}_1$ og $\tilde{a}_2$ med $\tilde{a}_1'$ og $\tilde{a}_2'$, som projiceres i a, vil $p_{1\#}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{a}_1')$ og $p_{2\#}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{a}_2')$ være konjugerede undergrupper i $\pi_1(X, a)$. Hvis dette gælder for et valg af $\tilde{a}_1'$ og $\tilde{a}_2'$, vil det gælde for ethvert valg, og vi kan ændre ethvert af de to basispunkter, så overlejringerne bliver ækvivalente.

Definition 13.1. Lad $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ være en overlejring med X og $\tilde{X}$ kurvesammenhængende. En homøomorfi $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$, som tilfredsstiller betingelsen $p \circ \varphi = p$, kaldes en dæktransformation hørende til p.

Vi skal først have overstået nogle trivialiteter.

Sætning 13.2. Mængden af dæktransformationer hørende til p udgør en gruppe med sammensætning som komposition.

Bevis. Klart.

Sætning 13.3. Lad $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ være en overlejring med X og $\tilde{X}$ kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. Lad $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \tilde{X}$ være punkter med $p(\tilde{a}_1) = p(\tilde{a}_2) = a$. Hvis $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_1) = p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_2)$, findes der netop én dæktransformation φ hørende til p med $\varphi(\tilde{a}_1) = \tilde{a}_2$ (og den inverse med $\varphi^{-1}(\tilde{a}_2) = \tilde{a}_1$). I modsat fald findes der ingen sådan dæktransformation.

Bevis. Betingelsen $p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}_1) = p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}_2)$ sikrer, at p har løftninger φ og φ' med $\varphi(\tilde{a}_1) = \tilde{a}_2$ og $\varphi'(\tilde{a}_2) = \tilde{a}_1$, og da de er entydig bestemt, er de hinandens inverse, altså dæktransformationer. Betingelsen er nødvendig, da en dæktransformation er en løftning af p. Dermed er sætningen bevist.

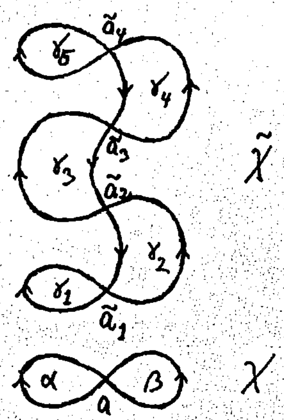
<u>Sætning</u> 13.4. Lad $p: \tilde{X} \to X$ være en overlejring med X og $\tilde{X}$ kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. Gruppen G af dæktransformationer $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}$ er en stærkt diskontinuert transformationsgruppe på $\tilde{X}$, d.v.s. hvert punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ har en omegn $\tilde{U}$, så mængderne $\varphi(\tilde{U})$, $\varphi \in G$ er indbyrdes disjunkte.

Bevis. Punktet $x = p(\tilde{x})$ har en kurvesammenhængende omegn U, for hvilken $p^{-1}(U)$ falder i komponenter, som er omegn af hver sit af de punkter, der projiceres i x. Deraf følger sætningen umiddelbart.

Lad G være en gruppe og $A \subseteq G$ en undergruppe. Ved normalisatoren N for A forstår vi mængden af elementer $x \in G$, for hvilke $xAx^{-1} = A$. Det er klart, at $N \supseteq A$, at N er foreningsmængde af de venstre sideklasser til A, som også er højre sideklasser, samt at N er den største undergruppe af G med A som normal undergruppe.

<u>Sætning</u> 13.5. Lad $p: \tilde{X} \to X$ være en overlejring med X og $\tilde{X}$ kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende. Lad $\tilde{a} \in \tilde{X}$ være vilkårligt, og $a = p(\tilde{a})$. Lad $N \subseteq \pi_1(X,a)$ være normalisatoren for $p_{\#}\pi_1(X,a)$. Da er $\dfrac{N}{p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})}$ isomorf med gruppen af dæktransformationer hørende til p.

Bevis. Til en dæktransformation $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}$ kan vi vælge en bevægelse $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{X}$ fra $\tilde{a}$ til $\tilde{a}_1 = \varphi(\tilde{a}) \in p^{-1}(a)$. For projektionen γ af $\tilde{\gamma}$ gælder da, at $[\gamma]\, p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}) = p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})\,[\gamma]$ er en af de sideklasser, der hører til N. For alle $[\gamma]$ i samme sideklasse ender $\tilde{\gamma}$ i samme $\tilde{a}_1$, og disse stammer derfor fra samme dæktransformation. Vi har således defineret en monomorfi af gruppen af dæktransformationer ind i $\dfrac{N}{p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})}$. På den anden side vil enhver sideklasse i $\dfrac{N}{p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})}$ være repræsenteret ved en bevægelse γ, der er projektion af en bevægelse $\tilde{\gamma}$ fra $\tilde{a}$ til et punkt $\tilde{a}_1$, med $\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}_1) = [\tilde{\gamma}]^{-1}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})[\tilde{\gamma}] = \pi_1(\tilde{X},\tilde{a})$, og det medfører, at der findes en dæktransformation, som fører $\tilde{a}$ over i $\tilde{a}_1$. Dermed er sætningen bevist.



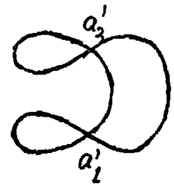
Eksempel. Figuren viser to grafer $\tilde{X}$ og X . En projektion $p: \tilde{X} \to X$ defineres ved, at $p(\tilde{a}_1) = \cdots = p(\tilde{a}_4) = a$, hver af de fire buer til venstre for a'erne afbildes injektivt på løkken α, så pilene stemmer, og analogt afbildes de fire buer til højre på β. Det er klart, at $\pi_1(X,a)$ er den frie gruppe med frembringere α og β, medens $\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}_1)$ er den frie gruppe med frembringere $\gamma_1,\dots,\gamma_5$. For $p_{\#}: \pi_1(\tilde{X},\tilde{a}_1) \to \pi_1(X,a)$ får vi

$$p_{\#}\gamma_1 = \alpha\,,\ p_{\#}\gamma_2 = \beta^2,\ p_{\#}\gamma_3 = \beta^{-1}\alpha^2\beta\,,\ p_{\#}\gamma_4 = \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^2\alpha\beta,\ p_{\#}\gamma_5 = \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\alpha\beta.$$

Disse elementer er således frembringere for en fri undergruppe i $\pi_1(X,a)$, hvilket ikke er på forhånd indlysende. Det er klart, at

$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_4)$ afbildes på den samme undergruppe, da vi har en dæktransformation, der bytter $\tilde{a}_1$ med $\tilde{a}_4$ og $\tilde{a}_2$ med $\tilde{a}_3$. Dette er den eneste dæktransformation. Grupperne $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_2)$ og $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_3)$ vil afbildes i en konjugeret undergruppe, og den har frembringerne $\beta\alpha\beta^{-1}, \beta^2, \alpha^2, \alpha^{-1}\beta^2\alpha, \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\alpha$.

Vi kan faktorisere $p: \tilde{X} \to X$ i to overlejringer $\tilde{X} \xrightarrow{p'} \tilde{X}_1 \xrightarrow{p''} X$, hvor $\tilde{X}_1$, der er vist på figuren, fås af $\tilde{X}$ ved at identificere punkter, der går over i hinanden ved dæktransformationer. Dens fundamentalgruppe afbildes ved $p''_{\#}$ i den frie undergruppe med frembringere $\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta^{-1}$. Denne undergruppe er den fælles normalisator for undergrupperne



$p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_\nu)$, og den er desuden undergruppen frembragt af disse undergrupper. Den er selv normal undergruppe i $\pi_1(X, a)$

Eksemplet antyder, at det ofte er lettere at studere fundamentalgrupperne ved hjælp af overlejringerne end omvendt.

Definition 13.6. En overlejring $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \longrightarrow (X, a)$ kaldes normal, hvis $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a})$ er en normal undergruppe i $\pi_1(X, a)$.

At overlejringen $p: (\tilde{X}, \tilde{a}) \longrightarrow (X, a)$ er normal, er ifølge de forudgående resultater ensbetydende med hver af følgende tre betingelser:

1) $p_{\#}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{a}_\nu)$ er samme undergruppe af $\pi_1(X, a)$ for alle $\tilde{a}_\nu$ med $p(\tilde{a}_\nu) = a$.

2) For hvert $\tilde{a}_\nu$ med $p(\tilde{a}_\nu) = a$ findes en dæktransformation φ med $\varphi(\tilde{a}) = \tilde{a}_\nu$.

3) Enhver løkke $\tilde{\gamma}$ i $(\tilde{X}, \tilde{a})$ vil ved projektion og påfølgende løftning med start i et $\tilde{a}_\nu$ med $p(\tilde{a}_\nu) = a$ igen give en løkke.

For en normal overlejring er gruppen af dæktransformationer isomorf med $\dfrac{\pi_1(X,a)}{p_{\#}\pi_1(\tilde{X},\tilde{a})}$. Hvis X er kurvesammenhængende, lokalt kurvesammenhængende og semilokalt 1-sammenhængende, findes der en universel overlejring $p: \tilde{X} \to X$, hvor $\tilde{X}$ er 1-sammenhængende, og for denne overlejring er gruppen af dæktransformationer isomorf med $\pi_1(X,a)$ for vilkårligt $a \in X$.

Definition 13.7. En topologisk gruppe G siges at virke som venstre transformationsgruppe på et topologisk rum X, hvis der er givet en kontinuert afbildning $\tau: G \times X \to X$, som tilfredsstiller betingelsen $\tau(g_2 g_1, x) = \tau(g_2, \tau(g_1, x))$, samt $\tau(e,x) = x$, når $e \in G$ er neutralelementet. At G virker som højre transformationsgruppe, defineres på samme måde bortset fra, at den første betingelse ændres til $\tau(g_1 g_2, x) = \tau(g_2, \tau(g_1, x))$. Hvis G er en gruppe uden topologi, benyttes de samme definitioner, idet G tænkes udstyret med den diskrete topologi.

Vi foretrækker at skrive $\tau(g,x) = gx$ for en venstre og $\tau(g,x) = xg$ for en højre transformationsgruppe.

Sætning 13.7. Hvis G er en transformationsgruppe på X og $g \in G$, er den ved $\varphi(x) = \tau(g,x)$ definerede afbildning $\varphi: X \to X$ en homøomorfi.

Bevis. Følger af, at $\psi(x) = \tau(g^{-1}, x)$ definerer en invers til φ.

Transformationsgruppen G på X kaldes transitiv, hvis der for ethvert $x, y \in X$ findes et $g \in G$, så $\tau(g,x) = y$. Den kaldes egentlig, hvis der for $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$ altid findes et $x \in X$, så $\tau(g_1,x) \neq \tau(g_2,x)$. Den ortogonale gruppe

O_{n+1} er en egentlig, men ikke transitiv transformationsgruppe på $\grave{R}^{n+1}$, medens den er egentlig og transitiv på S^n. Vi får nu ikke brug for disse egenskaber.

Definition 13.8. En transformationsgruppe G på et rum X kaldes stærkt diskontinuert, hvis hvert punkt $x \in X$ har en omegn U, så alle billederne $\tau(g, U)$ ved elementer $g \in G$ er indbyrdes disjunkte.

Så må G selvfølgelig være egentlig, og bortset fra trivielle tilfælde må G have den diskrete topologi, og den kan ikke være transitiv.

Eksempel. Gruppen af translationer $\underline{x} \to \underline{x} + \underline{m}$, $m \in \check{Z}^n$, er en stærkt diskontinuert transformationsgruppe på $\grave{R}^n$.

Hvis G er en transformationsgruppe på X og $x \in X$ et vilkårligt punkt, kaldes mængden af punkter $\tau(g, x)$, $g \in G$ banen for x. Alle punkterne $\tau(g, x)$ har samme bane, og banerne for alle punkterne i X giver en klasseinddeling af X.

Definition 13.9. Med $\frac{X}{G}$ betegnes rummet, hvis punkter er de netop omtalte baner, og hvis topologi er den ved den kanoniske afbildning $p: X \to \frac{X}{G}$ inducerede finaltopologi.

Sætning 13.10. Hvis G er en stærkt diskontinuert transformationsgruppe på et kurvesammenhængende og lokalt kurvesammenhængende rum X, er $p: X \to \frac{X}{G}$ en normal overlejring, og G er isomorf med gruppen af dæktransformationer.

Bevis. For hvert $x \in X$ har vi en omegn U, der kan vælges kurvesammenhængende, således at alle billederne $\tau(g, U)$, $g \in G$

er indbyrdes disjunkte. For det fælles billede $p(\mathcal{U})$ af alle $\tau(g, \mathcal{U})$ gælder da, at hver komponent af $p^{-1}(p(\mathcal{U}))$ afbildes homøomorft ved p på $p(\mathcal{U})$, som således er en omegn af $p(x)$. Altså er p en overlejring, og det er klart, at den ved $\varphi_g(x) = \tau(g, x)$ definerede afbildning $\varphi_g : X \to X$ tilfredsstiller $p = p \circ \varphi_g$, så φ_g er en dæktransformation. Hvis $p(a_1) = p(a_2)$, findes der et $g \in G$, så $\varphi_g(a_1) = a_2$. Det følger af sætning 13.3, at alle dæktransformationer fås på denne måde, og af bemærkningen efter definition 13.6, at p er en normal overlejring. At $g \to \varphi_g$ er en isomorfi er klart, hvis G er venstre transformationsgruppe. Hvis G er en højre transformationsgruppe, bliver $g \to \varphi_g$ en antiisomorfi, men så bliver $g \to \varphi_{g^{-1}}$ en isomorfi, så G bliver også i dette tilfælde isomorf med gruppen af dæktransformationer. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Den i eksemplet ovenfor omtalte gruppe af translationer $\underline{x} \to \underline{x} + \underline{m}$, hvor $\underline{m} \in \grave{Z}^n$, giver den normale overlejring $\grave{R}^n \to T^n$.

Eksempel. Vi tænker os S^{2n-1} indlejret i $\grave{C}^n$ for et $n \geq 2$. For $p > 1$ har vi for $m = 0, 1, \cdots, p-1$ en transformation $\varphi_m : S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ defineret ved $\varphi_m(\underline{z}) = e^{i\frac{m}{p}2\pi}\underline{z}$. Dermed har vi defineret en stærkt diskontinuert transformationsgruppe på S^{2n-1}, og den er isomorf med den cykliske gruppe $\grave{Z}_p$ med p elementer. Vi får således en normal overlejring $p : S^{2n-1} \to \dfrac{S^{2n-1}}{\grave{Z}_p}$, hvor $\dfrac{S^{2n-1}}{\grave{Z}_p}$ har fundamentalgruppe isomorf med $\grave{Z}_p$. De således definerede rum kaldes linserum. For $n = 2$ er de identiske med de uligedimensionale projektive rum, men for $n > 2$ er de nye. Det kan vises, at der ikke findes analoge transformationsgrupper på ligedimensionale sfærer.

Kapitel 14.

DEN LANGE HOMOTOPISEKVENS.

Vi vil gå over til at studere de højere homotopigrupper. Vi vil først generalisere dem til par. Vi arbejder altid med rum med basispunkt.

Definition 14.1. Lad (X,A,a) være et par af topologiske rum med basispunkt. I triplen (E^n, S^{n-1}, E^{n-1}) skal E^{n-1} betegne den sydlige halvkugle af S^{n-1}. Mængden $\pi_n(X,A,a) = [E^n, S^{n-1}, E^{n-1}; X, A, a]$ kaldes for $n \geq 1$ den n^{te} relative homotopimængde for parret (X,A,a).

Altså er $\pi_n(X,A,a)$ mængden af homotopiklasser af afbildninger $\varphi: (E^n, S^{n-1}, E^{n-1}) \longrightarrow (X,A,a)$. I specialtilfældet $A = a$ bliver det helt det samme som mængden af homotopiklasser af afbildninger $\varphi: (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X,a)$, og det er det samme som mængden af homotopiklasser af sammensatte afbildninger $(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{k} \left(\frac{E^n}{S^{n-1}}, 1\right) \xrightarrow{\varphi'} (X,a)$, hvor k er kollapsafbildningen. Det er igen det samme som $(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{k} (S^n, 1) \xrightarrow{\varphi'} (X,a)$. Nu er $[\varphi' \circ k] = [\varphi'] \circ k$. Dermed har vi vist følgende sætning:

Sætning 14.2. $\pi_n(X,a,a)$ og $\pi_n(X,a)$ er naturligt ækvivalente for $n \geq 1$.

Vi kan for $n \geq 2$ skrive (E^n, S^{n-1}, E^{n-1}) som $(CS^{n-1}, S^{n-1}, CS^{n-2})$, hvor C betegner reduceret kegle. For $n \geq 3$ kan det ved hjælp af reduceret suspension skrives som $(CSS^{n-2}, SS^{n-2}, CSS^{n-3})$. Nu har vi følgende lemma.

Lemma 14.3. $CSX = SCX$.

Bevis. Efter definitionerne er

$$SX = \frac{X \times I}{X \times \dot{I} \cup a \times I}, \quad CX = \frac{X \times I}{X \times 0 \cup a \times I}.$$

Heraf fremgår, at vi får $SX \times I$ af mængden af sæt (x, t, u), $x \in X$; $t, u \in I$, hvor vi for hvert fast u skal identificere alle $(x, 0, u)$, $(x, 1, u)$, (a, t, u) med (a', u), hvor a' er basispunktet i SX. For at få CSX skal vi yderligere identificere alle disse punkter indbyrdes, og desuden skal de identificeres med alle $(x, t, 0)$, så vi får

$$CSX = \frac{X \times I \times I}{X \times I \times 0 \cup X \times \dot{I} \times I \cup a \times I \times I}.$$

Når vi nu danner $CX \times I$, lader vi t og u bytte rolle, så u stammer fra CX. Så består $CX \times I$ af alle (x, t, u), $x \in X$; $t, u \in I$, hvor vi skal identificere alle $(x, t, 0)$ og alle (a, t, u) med (a', t), hvor a' er det nye basispunkt. For at danne SCX må vi yderligere identificere alle disse indbyrdes og med alle $(x, 0, u)$ og $(x, 1, u)$. Det fører netop til udtrykket for CSX. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14.4. For $n \geqq 2$ er $\pi_n(X, A, a)$ en gruppe, og den er abelsk for $n \geqq 3$.

Bevis. Det er klart, at den sædvanlige co-H-gruppe-struktur på suspensioner giver en co-H-gruppe-struktur

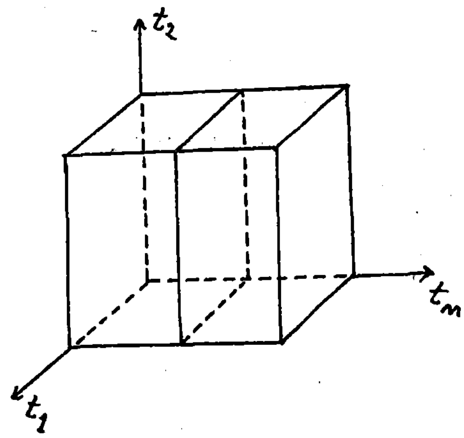
$$\nu : (SCS^{n-2}, SS^{n-2}, SCS^{n-3}) \longrightarrow$$

$$(SCS^{n-2} \vee SCS^{n-2}, SS^{n-2} \vee SS^{n-2}, SCS^{n-3} \vee SCS^{n-3}).$$

Det er nok rimeligere blot at skrive

$$\nu : (SE^{n-1}, SS^{n-2}, SE^{n-2}) \longrightarrow (SE^{n-1} \vee SE^{n-1}, SS^{n-2} \vee SS^{n-2}, SE^{n-2} \vee SE^{n-2}).$$

I denne form går det for $n \geqq 2$, og co-H-gruppe-strukturen inducerer en gruppestruktur på $\pi_n(X, A, a)$ for $n \geqq 2$. For $n \geqq 3$ kan vi skaffe os et S mere, og derved kan vi gå over til $(\Omega X, \Omega A)$, og gruppen bliver kommutativ. Dermed er sætningen bevist.



Som en model for (E^n, S^{n-1}, E^{n-1}) kan vi benytte $(I^n, \dot{I}^n, \dot{I}^n \setminus I^{n-1})$, hvor $\dot{I}^n$ er randen af enhedsterningen I^n, medens I^{n-1} er den ved $t_1 = 0$ bestemte side. Elementer af $\pi_n(X, A, a)$ er da repræsenterede ved afbildninger $\varphi, \psi : I^n \to X$, der fører randen $\dot{I}^n$ ind i A og randen pånær bagsiden, altså $\dot{I}^n \setminus I^{n-1}$ ind i a. Vi har $[\varphi][\psi] = [\chi]$, hvor

$$\chi(\underline{t}) = \begin{cases} \varphi(t_1, \cdots, t_{n-1}, 2t_n) & \text{for} \quad t_n \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \psi(t_1, \cdots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \text{for} \quad t_n \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

I det absolutte tilfælde kan den samme definition bruges, men $\dot{I}^n$ afbildes helt i a.

<u>Sætning</u> 14.5. Enhver afbildning $\varphi : (E^n, S^{n-1}, E^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a)$, for hvilken $\varphi(E^n) \subseteq A$, repræsenterer neutralelementet i $\pi_n(X, A, a)$.

Bevis. Da E^n er sammentrækkelig, er φ endda som afbildning ind i A 0-homotop med a fast. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 14.6. I enhver mængde $[X, A, a; Y, B, b]$ af homotopiklasser af afbildninger af (par af) topologiske rum med basispunkt, kaldes den konstante afbildnings klasse neutralelementet.

Definitionen er i overensstemmelse med de tilfælde, hvor $[X, A, a; Y, B, b]$ er en gruppe. Vi har således blot sikret os, at mængden altid har en ganske lille smule algebraisk struktur, nemlig et neutralelement, også når der ikke er en kompositionsregel, det kan holde sig til.

<u>Definition</u> 14.6.a. Hvis A og B er mængder med neutralelement, som vi vil betegne med 0, og $\varphi : A \to B$ er en afbildning med $\varphi(0) = 0$, kaldes $\varphi^{-1}(0) =$ kern φ, kernen for φ og im $\varphi = \varphi(A) \subseteq B$ billedet for φ. Hvis A, B, C er mængder med neutralelement og $\varphi : A \to B$ og $\psi : B \to C$ tilfredsstiller $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, kaldes sekvensen $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ eksakt, såfremt im φ = kern ψ. En længere sekvens

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} C_{n+2} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} \cdots$$

af mængder med neutralelement og afbildninger, der bevarer neutralelement, kaldes eksakt ved C_n, hvis im φ_{n-1} = kern ψ_n, og den kaldes eksakt, hvis den er eksakt ved ethvert C_n, der ikke er først eller sidst i sekvensen.

Dette er selvfølgelig mest interessant, når mængderne har gruppestruktur og afbildningerne er homomorfier. Hvis $\varphi: A \to B$ er en homomorfi mellem grupper, er $\ker\varphi \subseteq A$ en normal undergruppe, og $\operatorname{im}\varphi \subseteq B$ er en undergruppe. I dette tilfælde er $\ker\varphi = 0$ ensbetydende med, at φ er injektiv. Det tilsvarende gælder kun, når både A og B har gruppestruktur. Den følgende sætning er næsten helt triviel.

<u>Sætning</u> 14.7. I en eksakt sekvens gælder for to på hinanden følgende afbildninger, at den første er surjektiv, hvis og kun hvis den anden er 0, d.v.s. afbilder alt i neutralelementet. Hvis den sidste af de to afbildninger er en gruppehomomorfi, er den injektiv, hvis og kun hvis den første er 0. For tre påhinanden følgende afbildninger, af hvilke den midterste er en gruppehomomorfi, gælder, at denne er en isomorfi, hvis og kun hvis begge de andre er 0.

<u>Definition</u> 14.8. Lad (X, A, a), (X', A', a') og (X'', A'', a'') være par af topologiske rum med basispunkt. En sekvens

$$(X'', A'', a'') \xrightarrow{f} (X, A, a) \xrightarrow{g} (X', A', a')$$

kaldes coeksakt, hvis det for hvert par (Y, B, b) af topologiske rum med basispunkt gælder at den inducerede sekvens

$$[X', A', a'; Y, B, b] \xrightarrow{g^{\#}} [X, A, a; Y, B, b] \xrightarrow{f^{\#}} [X'', A'', a''; Y, B, b]$$

defineret ved $f^{\#}[\varphi] = [\varphi \circ f]$, $g^{\#}[\varphi] = [\varphi \circ g]$, er eksakt.

En afbildning $f: (X', A', a') \longrightarrow (X, A, a)$ har de to restriktioner $f': (X', a') \rightarrow (X, a)$ og $f'': (A', a') \rightarrow (A, a)$, og for disse har vi afbildningskegler $C_{f'}$ og $C_{f''}$. Da vi har en naturlig indlejring $C_{f''} \subseteq C_{f'}$, får vi et par $(C_{f'}, C_{f''}, \bar{a})$, hvor $\bar{a}$ er det nye basispunkt. Dette par kaldes afbildningskeglen for f og betegnes C_f. Vi har en naturlig indlejring $j: (X, A, a) \rightarrow C_f$. I det følgende snyder vi for at skrive basispunktet med.

<u>Sætning 14.9</u>. For enhver afbildning $f: (X', A') \rightarrow (X, A)$ er

$$(X', A') \longrightarrow (X, A) \longrightarrow C_f$$

en coeksakt sekvens.

Bevis. Lad (Y, B) være et par med basispunkt. Vi skal vise, at

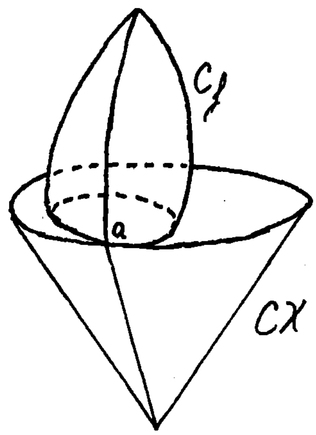
$$[C_f; Y, B] \xrightarrow{j^{\#}} [X, A; Y, B] \xrightarrow{f^{\#}} [X', A'; Y, B]$$

er eksakt. Lad $\varphi: C_f \rightarrow (Y, B)$ eller udførligt $\varphi: (C_{f'}, C_{f''}) \rightarrow (Y, B)$ være en vilkårlig afbildning. Så er $\varphi \circ j: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ restriktionen af φ til afbildningskeglens grundflade, og $\varphi \circ j \circ f: (X', A') \rightarrow (Y, B)$ kan fortolkes som restriktionen af φ til et snit i afbildningskeglen og eksistensen af udvidelsen φ til hele keglen beviser netop, at $\varphi \circ j \circ f$ er 0-homotop. Dermed har vi vist, at $f^{\#} j^{\#}[\varphi] = 0$. Hvis $\psi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tilfredsstiller betingelsen $f^{\#}[\psi] = 0$ altså $\psi \circ f$ 0-homotop, vil en homotopi fra 0-afbildningen til $\psi \circ f$ netop definere en udvidelse af ψ til hele C_f, og det medfører, at ψ hører til im $j^{\#}$. Dermed er sætningen bevist.

Det er klart, at den coeksakte sekvens i sætning 14.9 af sig selv vokser ud til en lang coeksakt sekvens

$$(X',A') \xrightarrow{f} (X,A) \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{j_1} C_j \xrightarrow{j_2} C_{j_1} \xrightarrow{j_3} \cdots$$

På figuren har vi skitseret $C_{f'}$, hvis $C_f = (C_{f'}, C_{f''})$. I C_f er X homøomorft indlejret, og vi kan opfatte C_j som sammensat af C_f og CX med X som fællesmængden. Vi har ikke på figuren kollapset frembringeren gennem a, men den er tegnet ind.



<u>Sætning</u> 14.10. $\dfrac{C_f}{X} = \dfrac{C_j}{CX} = S(X',A')$.

Bevis. Med $\dfrac{C_f}{X}$ mener vi selvfølgelig $\left(\dfrac{C_{f'}}{X}, \dfrac{C_{f''}}{X \cap C_{f''}}\right) = \left(\dfrac{C_{f'}}{X}, \dfrac{C_{f''}}{A}\right)$, og $S(X',A')$ er (SX', SA'). Nu består $C_{j'}$ af alle punkter (x',t) og (x,t) med $x' \in X'$, $x \in X$, $t \in I$, idet $(x',1)$ er identificeret med $(f(x'),1)$, og alle $(x',0)$, $(x,0)$ og (a,t), (a',t) er indbyrdes identificerede. Vi får $C_{f'}$ ved blot at udelade punkterne (x,t) med $t>1$. Derfor får vi det samme ved i $C_{f'}$ at kollapse alle $(x,1)$ og ved i $C_{j'}$ at kollapse alle (x,t), og i begge tilfælde ender vi netop med punkterne (x',t), hvor alle $(x',0)$, $(x',1)$ og (a',t) er identificerede. Dermed er sætningen bevist.

Vi har således et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} C_f \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dr, "k"'] & & C_j \arrow[dl, "\bar{k}"] \\ & S(X',A') & \end{tikzcd}$$

.

Sætning 14.11. $\bar{k}: C_f \longrightarrow S(X',A')$ er en homotopiækvivalens.

Bevis. En afbildning $\varkappa: S(X',A') \longrightarrow C_f$ defineres ved

$$\varkappa(x',t) = \begin{cases} (x', 2t), & \text{hvis } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ (f(x'), 2-2t), & \text{hvis } t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Så er

$$\bar{k}(\varkappa(x',t)) = \begin{cases} (x', 2t), & \text{hvis } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ a, & \text{hvis } t \in [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

og det ses umiddelbart, at $\bar{k} \circ \varkappa \simeq 1_{S(X',A')}$. Endvidere er

$$\varkappa(\bar{k}(x',t)) = \begin{cases} (x', 2t), & \text{hvis } x' \in X',\ t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ (f(x'), 2-2t), & \text{hvis } x' \in X',\ t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\varkappa(\bar{k}(x,t)) = a, \qquad \text{hvis } x \in X,\ t \in [0, 1].$$

En homotopi $F: C_f \times I \longrightarrow C_f$ fra 1_{C_f} til $\varkappa \circ \bar{k}$ defineres ved

$$F(x',t) = \begin{cases} (x', (1+u)t), & \text{hvis } x' \in X',\ u \in I,\ t \in [0, \tfrac{1}{1+u}] \\ (f(x'), 2-(1+u)t), & \text{hvis } x' \in X',\ u \in I,\ t \in [\tfrac{1}{1+u}, 1] \end{cases}$$

$$F(x,t) = (x, (1-u)t), \qquad \text{hvis } x \in X,\ u \in I,\ t \in I.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14.12. Sekvensen

$$(X',A') \xrightarrow{f} (X,A) \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{k} S(X',A') \xrightarrow{Sf} S(X,A)$$

er coeksakt.

Bevis. I dette bevis tænker vi os Sf defineret ved $Sf(x',t) = (f(x'), 1-t)$ Denne ændring er uden betydning for sætningens rigtighed. Vi har et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
(X',A') \arrow[r, "f"] & (X,A) \arrow[r, "j"] & C_f \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "k"] & C_j \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "\bar{k}"] \arrow[dr, "k_1"] & C_{j_1} \arrow[d, "\bar{k}_1"] \\
& & & S(X',A') \arrow[r, "Sf"] & S(X,A).
\end{tikzcd}$$

Afbildningerne $k, \bar{k}, k_1, \bar{k}_1$ er kollapsafbildninger. Vi så ovenfor, at trekanterne med spidsen nedad er kommutative. Trekanten med Sf er ikke kommutativ, men med den ændrede definition af Sf har vi $k_1 \simeq Sf \circ \bar{k}$. Vi får nu $j^{\#} \circ k^{\#} = (k \circ j)^{\#} = (\bar{k} \circ j_1 \circ j)^{\#} = j^{\#} \circ j_1^{\#} \circ \bar{k}^{\#} = 0$. Af $j^{\#}[\varphi] = 0$ følger, at der findes et ψ, så $\varphi \simeq \psi \circ j_1 \simeq \psi \circ \varkappa \circ \bar{k} \circ j_1 = (\psi \circ \varkappa) \circ k$, idet $\varkappa$ er en homotopiinvers til $\bar{k}$. Altså er sekvensen i sætning 14.12 coeksakt ved C_f. Endvidere er $k^{\#} \circ Sf^{\#} = j_1^{\#} \circ j_2^{\#} \circ k_1^{\#} = 0$. Af $k^{\#}[\varphi] = 0$ følger $j_1^{\#} k^{\#}[\varphi] = 0$, så vi kan finde et ψ med $j_2^{\#}[\psi] = \bar{k}^{\#}[\varphi]$. Hvis nu $\varkappa_1$ er en homotopiinvers til $\bar{k}_1$, får vi $Sf^{\#} \varkappa_1^{\#}[\psi] = \varkappa^{\#} j_2^{\#} \bar{k}_1^{\#} \varkappa_1^{\#}[\psi] = \varkappa^{\#} j_2^{\#}[\psi] = \varkappa^{\#} \bar{k}^{\#}[\varphi] = [\varphi]$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14.13. Hvis

$$(X',A') \xrightarrow{f} (X,A) \xrightarrow{g} (X'',A'')$$

er coeksakt, er

$$(SX',SA') \xrightarrow{Sf} (SX,SA) \xrightarrow{Sg} (SX'',SA'')$$

coeksakt, og hvis (Y,B) er et par af rum med basispunkt, er

$$[SX'',SA'';Y,B] \xrightarrow{Sg^{\#}} [SX,SA;Y,B] \xrightarrow{Sf^{\#}} [SX',SA';Y,B]$$

en eksakt sekvens af grupper og homomorfier.

Bevis. Vi ved allerede, at $Sg^\#$ og $Sf^\#$ er gruppehomomorfier. At den sidste sekvens er eksakt følger af, at sekvensen

$$[X'',A'';\Omega Y,\Omega B] \xrightarrow{g^\#} [X,A;\Omega Y,\Omega B] \xrightarrow{f^\#} [X',A';\Omega Y,\Omega B]$$

er eksakt, idet ækvivalensen $\varphi'' : [SX'',SA'';Y,B] \longrightarrow [X'',A'';\Omega Y,\Omega B]$ og de to analoge kommuterer med $g^\#, f^\#$ og $Sg^\#, Sf^\#$. Lad et element i $[SX'',SA'';Y,B]$ være repræsenteret ved $\gamma : (SX'',SA'') \longrightarrow (Y,B)$. Så er γ givet på formen $\gamma(x,t)$, og $\varphi''(\gamma)$ er potensformen $x \rightarrow \gamma_x(t)$, og såvel $(Sg^\# \circ \varphi'')(\gamma)$ som $(\varphi \circ g^\#)(\gamma)$ bliver potensformen af $(g\circ\gamma)(x,t)$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 14.14. For en ehver afbildning $f : (X',A') \longrightarrow (X,A)$ af topologiske rum med basispunktet findes der en coeksakt sekvens

$$(X',A') \xrightarrow{f} (X,A) \xrightarrow{j} C_f \xrightarrow{k} S(X',A') \xrightarrow{Sf} S(X,A) \xrightarrow{Sj} C_{Sf} \xrightarrow{Sk} S^2(X',A') \xrightarrow{S^2f}$$

Bevis. For de seks første led fås påstanden af sætningerne 14.12 og 14.13, dog med SC_f i stedet for C_{Sf}, men det ses som i lemma 14.3, at disse rum i virkeligheden er det samme. Derefter fortsætter sekvensen ved gentagen anvendelse af sætning 14.13 og erstatning af $SC_{S^q f}$ med $C_{S^{q+1} f}$. Dermed er sætningen bevist.

Sekvensen, samt nogle analoge, kaldes Puppesekvensen efter en tysk matematiker. Særlig vigtig er den specielle Puppe-sekvens,

der starter med inklusionsafbildningen $i:(S^0,1)\to(S^0,S^0)$.
Den bliver

$$(S^0,1)\xrightarrow{i}(S^0,S^0)\xrightarrow{j}(E^1,S^0)\xrightarrow{k}(S^1,1)\xrightarrow{i}(S^1,S^1)\xrightarrow{j}(E^2,S^1)\xrightarrow{k}(S^2,1)\xrightarrow{i}$$

og her er i, j inklusionsafbildninger og k kollapsafbildning.
For et vilkårligt par (X,A) med basispunkt har vi trivielt

$$[S^m,\underline{1};X,A]\approx\pi_m(X)\,,\quad [S^m,S^m;X,A]\approx\pi_m(A)\,,\quad [E^m,S^{m-1};X,A]\approx\pi_m(X,A),$$

så vi får en lang eksakt sekvens

$$\cdots\xrightarrow{\partial_\#}\pi_m(A)\xrightarrow{j_\#}\pi_m(X)\xrightarrow{k_\#}\pi_m(X,A)\xrightarrow{\partial_\#}\pi_{m-1}(A)\xrightarrow{j_\#}\cdots\xrightarrow{\partial_\#}\pi_0(A)\xrightarrow{j_\#}\pi_0(X).$$

Her har vi udskiftet tegnene for afbildningerne. Således er $j_\#$ egentlig $i^\#:[S^m,S^m;X,A]\longrightarrow[S^m,\underline{1};X,A]$ induceret af $(S^m,\underline{1})\subsetneqq(S^m,S^m)$. Det betyder, at $\gamma: S^m\longrightarrow A$ fortolkes som $\gamma:(S^m,S^m)\longrightarrow(X,A)$, der igen fortolkes som $\gamma: S^m\longrightarrow X$. Det betyder imidlertid, at $j_\#$ ganske enkelt er induceret af inklusionsfabildningen $j: A\to X$. Endvidere er $k_\#$ egentlig $k^\#:[S^m,\underline{1};X,A]\longrightarrow[E^m,S^{m-1};X,A]$. Vi starter altså med $\gamma: S^m\to X$, som via kollapsafbildningen udvides til $\gamma:(E^m,S^{m-1})\longrightarrow(X,A)$, men det er ensbetydende med, at $k_\#$ er induceret af inklusionen $k: X\longrightarrow(X,A)$. Endelig er $\partial_\#$ egentlig $j^\#:[E^m,S^{m-1};X,A]\longrightarrow[S^{m-1},S^{m-1};X,A]$, og vi ser således, at $\partial_\#$ fås ved restriktion til cellens rand, hvilket bevirker, at dimensionen falder med 1. Vi har således sætningen:

<u>Sætning</u> 14.15. For hvert par (X,A) med basispunkt danner homotopigrupperne en lang eksakt sekvens

$$\cdots \xrightarrow{\partial_\#} \pi_n(A) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(X) \xrightarrow{k_\#} \pi_n(X,A) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{j_\#} \cdots \xrightarrow{k_\#} \pi_1(X,A) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_0(A) \xrightarrow{j_\#} \pi_0(X).$$

hvor $j_\#, k_\#$ er inducerede af inklusionsafbildningerne, og $\partial_\#$ er restriktion til randen.

Hvis $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ bevarer basispunkt, induceres afbildninger $f_\#$ af samtlige homotopigrupper, så vi får et diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_\#"] & \pi_n(A) \arrow[r, "j_\#"] \arrow[d, "f_\#"] & \pi_n(X) \arrow[r, "k_\#"] \arrow[d, "f_\#"] & \pi_n(X,A) \arrow[r, "\partial_\#"] \arrow[d, "f_\#"] & \pi_{n-1}(A) \arrow[r, "j_\#"] \arrow[d, "f_\#"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_\#"] & \pi_n(B) \arrow[r, "j_\#"] & \pi_n(Y) \arrow[r, "k_\#"] & \pi_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_\#"] & \pi_{n-1}(B) \arrow[r, "j_\#"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Firkanterne med $j_\#$ og $k_\#$ er kommutative, fordi π_n er en funktor. Firkanterne med $\partial_\#$ er kommutative, da det er ligegyldigt om vi går over til restriktionen til randen før eller efter sammensætningen med f. Vi har således en funktor, der til hvert par med basispunkt knytter den lange, eksakte homotopisekvens og til hver afbildning $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ en afbildning af de lange eksakte homotopisekvenser. Vi formulerer det kort:

<u>Sætning 14.16</u>. Den lange eksakte homotopisekvens er funktoriel.

Dette ser lovende ud. Vi skal senere se, at lange eksakte sekvenser er et nyttigt hjælpemiddel. Der er imidlertid en meget væsentlig mangel: Vi savner stadig midler til udregning af homotopigrupperne.

Supplerende litteratur.

Som en let læselig indledning til algebraisk topologi med et andet udvalg af emner end nærværende noter kan anbefales:

W.S. Massey: Algebraic topology, an introduction. New York, 1967.

En mere omfattende fremstilling findes i:

E. Spanier: Algebraic topology, New York, 1966.

Nærværende noter svarer til kapitlerne 1, 2, 3 samt en del af kapitel 7.

Bøger til generel topologi:

N. Bourbaki: Élements de mathématiques III, Topologie générale. Paris 1960.

R. Engelking: Outline of general topology. Amsterdam 1968.

Det kan anbefales at læse artiklen i Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 231-294, hvor S. Eilenberg og S. MacLane indfører begreberne kategori og funktor.

Eksempler på anvendelse af elementær algebraisk topologi findes i:

R.H. Crowell og R.H. Fox: Introduction to knot theory. Boston 1963.

L. Ahlfors og L. Sario: Riemann Surfaces. Princeton 1960.