H. TORNEHAVE

FORELÆSNINGSNOTER

I

MATEMATISK ANALYSE

Kursus matematik 1 for første års studerende under Københavns Universitets matematisk-naturvidenskabelige fakultet, samt for aktuar- og statistikstuderende.

København 1966.

Disse forelæsningsnoter er grundlaget for matematik 1, matematisk analyse. De første kapitler er omredigerede, således at de bygger på det matematikpensum, der forudsættes i gymnasiets nye læseplan. Matematikpensum fra gymnasiets biologiske linie er i omfang tilstrækkeligt som grundlag for dette kursus, men studenter fra denne linie må regne med at møde vanskeligheder, fordi de ikke har den samme matematiske træning som studenter fra den matematisk- fysiske linie.

Men hvad bringer Dig til at smile ?
Der er aldeles ikke noget Forlystende ved
Mathematik -- tvertimod ! -
Fra tekst til en tegning af
Fritz Jürgensen.

Matematik er en deduktiv videnskab. Det betyder, at matematiske udsagn kun anses for sande, når der er ført et bevis for dem. Matematiske beviser bygger på udsagn, som tidligere er bevist. Beviste (og derfor sande) udsagn kaldes sætninger eller formler.

Børn opdager tidligt, at man kan stille spørgsmålet "hvorfor". Derfor kan man ikke bevise alle udsagn. De fundamentale udsagn, der uden bevis anerkendes som sande, kaldes aksiomer.

De matematiske begreber må defineres ud fra tidligere indførte matematiske begreber, men de aller første matematiske begreber kan ikke defineres.

Ud over de udefinerede grundlæggende begreber og aksiomerne må vi også tro på de logiske slutningsregler, vi benytter i beviserne.

Den matematiske logik, begrebet "lig med", læren om mængder, afbildninger og relationer, teorien for ordnede mængder, samt de naturlige tal udgør tilsammen matematikkens grundlag. Disse tilsyneladende forskelligartede emner lader sig kun meget ufuldstændigt behandle hver for sig.

Matematikkens udvikling fører både opad og nedad. I toppen udledes stadig nye resultater på basis af vor aktuelle viden. I bunden arbejdes der videre mod en stedse klarere forståelse af grundlagets natur. Desuden gøres der et stort arbejde for at afkorte vejen fra bunden til toppen. Uden dette revisionsarbejde ville toppen hurtigt blive reserveret for et meget lille antal store genier.

I princippet er hele grundlaget udskifteligt, således at enhver har mulighed for at opbygge sin egen matematik på sit eget grundlag, men det er netop det fælles grundlag, der giver mulighed for matematikkens høje udvikling.

Selvfølgelig inddeles matematikken i mange discipliner, og det kan godt somme tider se ud, som om disse hviler på hver sit grundlag og i det store og hele virker uafhængigt af hinanden. De virkelig store fremskridt nås imidlertid netop ved kombination af forskelligartede discipliner.

For den unge som lærer matematik er det vigtigt at han ikke bliver hængende i matematikkens grundlag, men får en chance for også at få kendskab til arbejdet med de aktuelle problemer i "toppen". Derfor vil vi i dette kursus bygge på det grundlag, der kendes fra undervisningen i gymnasiet. Endvidere udbygning af dette grundlag vil finde sted, efterhånden som det bliver nødvendigt.

Vi vil i det store og hele benytte de fra gymnasiet kendte betegnelser. Den mest iøjnefaldende forskel er, at vi ikke benytter den buede afbildningspil. En afbildning f af en mængde A ind i en mængde B skrives

$$f:A \text{ ind i } B \quad \text{eller} \quad f:A \to B \ .$$

Afbildningen kaldes injektiv, hvis originalmængden $f^{-1}(b)$ til et vilkårligt element $b \in B$ består af højst ét element. Den kaldes surjektiv, hvis billedmængden $f(A)$ er identisk med B. Den kaldes bijektiv, hvis den er både injektiv og surjektiv.

Vi vil anvende de logiske symboler

$\vee$ (eller)

$\wedge$ (og)

$\Rightarrow$ (medfører)

$\Longleftrightarrow$ (ækvivalent med)

$\neg$ (ikke) .

De fire første er binære relationstegn. De må kun sættes mellem relationer - det er således ukorrekt at skrive $5 \wedge 7$, grøn $\vee$ rød. Derimod er det korrekt at skrive

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = 3 .$$

Tegnet $\neg$ kan sættes foran en relation, f.eks.

$$\neg(x^2 - 4x + 3 = 0) \Longleftrightarrow \neg(x = 1) \wedge \neg(x = 3) ,$$

men det er selvfølgelig rimeligere at skrive dette på formen

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 3.$$

Negation af et relationstegn betegnes oftest ved gennemstregning af tegnet, dog aldrig ved ulighedstegn og inklusionstegn.

I mængdelæren benytter vi de sædvanlige tegn $\in, \subset, \subsetneq, \supset, \supsetneq, \cup, \cap$, samt tegnet $\setminus$ for overskudsmængden $A \setminus B$ (mængden af elementer, der tilhører A, men ikke B) og tegnet $\complement$ for komplementærmængde, altså

$$A \setminus B = A \cap \complement B.$$

De mængdeteoretiske tegn, de algebraiske tegn +,-,.,:, ordningstegnene $<, \leq, >, \geq$, lighedstegnet, funktionssymbolerne cos, sin, log etc, differentiationstegn, integraltegn o.s.v. anvendes altid i forbindelse med udtryk og aldrig i forbindelse med relationer.

Tegnene $\in, \subset, \subseteq, \supset, \supseteq, =, \leqq, <, \geqq, >$ er relationstegn, idet de udtrykker en relation mellem to udtryk. De andre tegn er funktionelle, idet de benyttes til fremstilling af mere sammensatte udtryk.

Visse bogstaver reserveres som betegnelse for konstanter, således at disse specielle bogstaver altid har samme betydning. Det samme gælder selvfølgelig taltegnene, herunder også grundtallet e for de naturlige logaritmer samt tallet π. Vi vil dog tillade os, at anvende bogstaverne e og π i anden betydning, hvor det ikke kan bevirke misforståelser. Særlig betydning har nogle konstanter, der betegner mængder:

$\grave{\mathrm{N}}$ (de naturlige tal, d.v.s. de positive,hele tal)

$\grave{\mathrm{Z}}$ (de hele tal)

$\grave{\mathrm{Q}}$ (de rationale tal)

$\grave{\mathrm{R}}$ (de reelle tal)

$\grave{\mathrm{C}}$ (de komplekse tal) .

I disse tilfælde har vi foretrukket at sætte en accent over bogstavet, når det anvendes i den faste betydning. Derved bliver N,Z,Q,R og C frie til anden brug. En anden vigtig konstant er

$\emptyset$ (den tomme mængde).

Ellers benyttes de fleste bogstaver som betegnelse for variable, hvilket betyder, at der indenfor visse grænser kan substitueres andre symboler for dem, eventuelt konstanter, eventuelt sammensatte udtryk, hvori der indgår flere variable. Det skal selvfølgelig altid være præciseret (f.eks. ved at det fremgår af sammenhængen), hvilke symboler der kan substitueres for hver enkelt variabel.

Kvantorerne $\forall$ og $\exists$ er matematiske tegn, som anvendes på relationer, der indeholder variable. Kvantorer er oftest betingede, idet den pågældende variabel er bundet til en eller anden mængde. $\exists_{\mathbb{Q}} x(x^2+2<3x)$ betyder, at der eksisterer et rationalt tal x, således at $x^2+2<3x$. Nu er det upraktisk at tumle med for mange indices, så vi vil i reglen foretrække at skrive

$$\exists x \in \mathbb{Q}\ (x^2 + 2 < 3x). \tag{1}$$

Tilsvarende

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 + 2 > x)\ . \tag{2}$$

Her er (1) og (2) relationer, som ikke mere afhænger af en variabel, idet kvantorerne bevirker, at x får ophævet sin status som variabel. Relationen (1) berettiger os til at vælge et rationalt tal p, således at $p^2 + 2 < 3p$. Symbolet

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 2 < x\}$$

betegner mængden af rationale tal x, for hvilke $x^2 + 2 < x$. Symbolet er en konstant, og vi bemærker, at det ændrer en relation til et udtryk.

Der kan gives mange andre eksempler på udtryk og relationer, der indeholder betegnelser for en variabel, hvoraf udtrykket eller relationen ikke afhænger:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{afhænger ikke af } x\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{afhænger ikke af } k\ .$$

Det er uden betydning om vi udskifter betegnelsen for en sådan "passiv" variabel med et andet bogstav. Det er altid sikrest at betegne en "passiv" variabel med et bogstav, der ikke forekommer udenfor det symbol, i hvis betegnelse den passive variable indgår.

Hvis dette symbol "dumper ned fra himlen" med den "passive" variable betegnet med et bogstav, der også forekommer udenfor tegnet, er det sikrest at skifte betegnelse, da man ellers fristes til at begå fejl. Således er

$$\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n}(n-k) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

forkert. Derimod er

$$\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} j(n-j) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} nj - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} j^2 =$$

$$\frac{n}{2k}\cdot n(n+1) - \frac{n}{6k}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6k}n(n^2-1) .$$

Vi skal ikke opholde os mere ved spørgsmålet om den matematiske symbolik. Det vil være forkert at slutte indledningen uden et forsøg på at forklare, hvad matematisk analyse er. Det er imidlertid ikke så let, som man skulle tro. Lad os nøjes med at sige, at matematisk analyse beskæftiger sig med kontinuitet og grænseovergang.

Nu skal vi imidlertid ikke udelukkende beskæftige os med matematisk analyse. Al moderne matematik beskæftiger sig med mængder, som på en eller anden måde er organiserede. Algebra beskæftiger sig med mængder, der er organiserede ved regneoperationer. Topologi beskæftiger sig med mængder, der er organiserede, således at begrebet "kontinuert afbildning" får mening. En topologisk organisation består i, at visse særlig udmærkede delmængder fremhæves, f.eks. omegne af et element af mængden. Matematisk analyse handler om mængder, som har både algebraisk og topologisk struktur. Derfor er det naturligt, at vi også taler om topologi.

For den, som skal lære matematik, er det vigtigt at forsøge selv at skabe matematik. Matematikken udvikler rutinemetoder til løsning af specielle typeopgaver. Anvendelsen af sådanne rutinemetoder er ikke matematik. Udviklingen af rutinemetoderne er matematik.

Ikke al matematik er svær. Derfor er det muligt at supplere et kursus som det foreliggende med et meget stort antal lette øvelsesopgaver. Kun få af disse er øvelse i brug af rutinemetoder. Derfor skaber man matematik, når man løser opgaverne og finder frem til en pæn formulering af løsningerne.

Det hører med til spillereglerne i matematikken, at man kun præsenterer det færdige produkt. Overvejelser, ideer, foreløbige bevisskitser, redaktionsarbejde foregår i dølgsmål, og kun det færdige bevis publiceres. I disse forelæsningsnoter vil vi ikke altid overholde disse regler, men lejlighedsvis følge den meget upædagogiske metode, der tillader eleven at opdage, hvordan læreren selv fumler med problemerne.

Matematikken bliver aldrig færdig. Også dette kursus efterlader utallige løse ender. Der vil blive spundet videre på nogle af disse i de følgende kurser. Blandt de løse ender findes også virkelige uløste problemer. De ældste af disse stammer fra oldtiden. Arbejdet på den matematiske bygnings top giver os stadig nye opdagelser, og disse virker tilbage og inspirerer ændringer både i matematikundervisningen og i de metoder, med hvilke man angriber de klassiske uløste problemer. Således er matematikken altid levende og foranderlig .

Nous croyons que la mathématique
est destinée à survivre.

N.Bourbaki

Kapitel 1.

Tal.

De reelle tal blev indført i gymnasieundervisningen, og vi vil her indskrænke os til en skitsemæssig gennemgang af de fra gymnasiet kendte ting og en mere grundig behandling af nogle tilføjelser. Vi vil dog først omtale begreberne kompositionsregel og gruppe, samt lidt mere udførligt begreberne ring og legeme, som kun behandles i gymnasiets matematisk-fysiske linie.

Definition 1.1. Ved en kompositionsregel på en mængde M forstås en afbildning $\varphi: M \times M$ ind i M.

Vi foretrækker at udtrykke kompositionsreglen ved et tegn, f.eks. $\hat{+}$, altså skrive $\varphi(x,y) = x \hat{+} y$.

Definition 1.2. Kompositionsreglen $\hat{+}$ kaldes associativ, hvis

$$\forall x,y,z \in M((x \hat{+} y) \hat{+} z) = x \hat{+} (y \hat{+} z)).$$

Hvis $\hat{+}$ er associativ har $x_1 \hat{+} \dots \hat{+} x_n$ en ganske bestemt betydning, således at parenteser slet ingen rolle spiller. Derimod afhænger udtrykket af leddenes rækkefølge.

Definition 1.3. Et element $u \in M$ kaldes neutralelement for kompositionsreglen $\hat{+}$, såfremt

$$\forall x \in M \ (x \hat{+} u = u \hat{+} x = x) \ .$$

Det kan vises, at en kompositionsregel har højst ét neutralelement.

Definition 1.4. Lad $\hat{f}$ være en kompositionsregel på M med neutralelement u. To elementer $x, x_1 \in M$ kaldes hinandens inverse med hensyn til $\hat{f}$, såfremt

$$x \hat{f} x_1 = x_1 \hat{f} x = u.$$

Lad os antage, at $\hat{f}$ tillige er associativ. Det kan da vises, at hvert element har højst ét inverst. Hvis $a, b \in M$ og a har et inverst element a_1, kan det vises, at ligningen $a \hat{f} x = b$ har $a_1 \hat{f} b$ som sin eneste løsning, og at $x \hat{f} a = b$ har $b \hat{f} a_1$ som sin eneste løsning.

Definition 1.5. En mængde G med en kompositionsregel $\hat{f}$ kaldes en gruppe, hvis $\hat{f}$ er associativ og med neutralelement, og endvidere hvert element af G har et inverst element.

Eksempel. Mængden $\hat{F}(A,A)$ af alle bijektive af bildninger f:A ind i A, idet A er en vilkårlig mængde, udgør en gruppe med sammensætningen $f \circ g$ som kompositionsregel. Den identiske afbildning er neutralelement, og den inverse afbildning bliver også det inverse element af gruppen.

Definition 1.6. En kompositionsregel $\hat{f}$ på en mængde M kaldes kommutativ, såfremt

$$\forall x, y \in M \; (x \hat{f} y = y \hat{f} x).$$

Hvis $\hat{f}$ er både associativ og kommutativ, afhænger $x_1 \hat{f} \ldots \hat{f} x_n$ ikke af elementernes rækkefølge. En gruppe G, hvis kompositionsregel er kommutativ, kaldes en kommutativ gruppe eller en abelsk gruppe.

I det følgende beskæftiger vi os med en abelsk gruppe G med kompositionsregel + og neutralelement 0 (nulelementet). Det inverse element til a betegnes $-a$, og $b + (-a)$ skrives $b - a$.

Vi kalder $-a$ det modsatte element. Vi vil tænke os, at der på G er endnu en kompositionsregel $\cdot$. Vi vil ofte udelade det andet kompositionstegn.

Definition 1.7. Vi siger, at $\cdot$ er distributiv med hensyn til $+$, såfremt

$$\forall x,y,z \in G\ ((x+y)z = xz+yz \wedge x(y+z) = xy+xz)\ .$$

Sætning 1.8. Hvis $\cdot$ er distributiv med hensyn til $+$, gælder

$$\forall x,y \in G(0\cdot x = x\cdot 0 = 0 \wedge -x\cdot y = x\cdot -y = -(xy) \wedge -x\cdot -y = xy).$$

Bevis. Af $0\cdot x + 0\cdot x = (0+0)x = 0\cdot x$ følger, at $0\cdot x = 0$, idet $0\cdot x + y = 0\cdot x$ ikke har andre løsninger end $y = 0$. Analogt vises $x\cdot 0 = 0$. Af $-x\cdot y + x\cdot y = (-x+x)y = 0\cdot y = 0$ følger, at $-x\cdot y$ og xy er modsatte elementer, altså $-x\cdot y = -(xy)$. Analogt vises, at $x\cdot -y = -(xy)$. Heraf følger endelig $-x\cdot -y = -(x\cdot -y) = -(-xy) = xy$, idet $-(xy)$ kun har et modsat element, nemlig xy.

Vi skal ikke opholde os ved beviset for, at $(x-y)z = xz-yz$ og $z(x-y) = zx-zy$. Den distributive lov giver os mulighed for at multiplicere summer efter reglen

$$(x+y)(z+v) = xz+xv+yz+yv.$$

Rækkefølgen af de fire led er uden indflydelse på summen, men ombytning af faktorerne i de enkelte led kan tænkes at ændre denne.

Mere generelt har vi for flerleddede summer

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k\ .$$

Læg mærke til, at vi først sørger for at bruge forskellige summationsindices i de to summer. Det sidste udtryk angiver summen af alle produkter $x_j y_k$, hvor j er et af tallene $1,\ldots,m$, medens k er et af tallene $1,\ldots,n$.

Definition 1.9. Den abelske gruppe G med den ekstra kompositionsregel $\cdot$ kaldes en ring, hvis $\cdot$ er distributiv med hensyn til + samt associativ.

Eksempel. En gruppe G bliver til en ring ved definitionen $\forall x,y \in G(xy = 0)$. En ring med denne trivielle produktdefinition kaldes en nulring.

Eksempel. Mængden af polynomier med hele tal (rationale tal, reelle tal) som koefficienter og med operationsreglerne + og $\cdot$ udgør en ring.

Definition 1.10. En ring G kaldes et legeme, hvis $\cdot$ er kommutativ, har et neutralelement, og hvis yderligere ethvert element undtagen 0 har et inverst. Neutralelementet betegnes 1 (ételement) og inverse elementer kaldes reciproke. Det inverse element til x betegnes x^{-1}.

For $a \neq 0$ har $ax = b$ altså netop én løsning, og den betegnes $\frac{b}{a}$ eller b/a eller $b:a$.

Sætning 1.11. Lad G være et legeme. Vi har da

$$\forall x,y \in G\ (xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \ .$$

Bevis. Af $xy = 0$ og $x \neq 0$ følger $y = 1\cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}\cdot 0 = 0$.

Eksempel. Et legeme indeholder i hvert fald de to elementer 0 og 1, og med disse to elementer regnes altid efter reglerne

$$0+0 = 0; \quad 0+1 = 1+0 = 1 \ .$$

$$0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0; \quad 1\cdot 1 = 1 \ .$$

Tilbage er blot 1+1. Det må gælde, at $1+1 \neq 1+0 = 1$, men det forhindrer ikke, at $1+1 = 0$. Ved dette valg organiseres $\{0,1\}$ som et legeme.

Hvis M er en mængde med en kompositionsregel $\varphi : M \times M$ ind i M, som skrives $\varphi(x,y) = x \hat{+} y$, og A og B er delmængder af M, er det naturligt at betegne billedmængden $\varphi(A \times B)$ med $A \hat{+} B$. I overensstemmelse hermed definerer vi

Definition 1.12. Lad G være et legeme, og lad A og B være delmængder af G. Vi definerer da

$$A+B = \{x+y \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

$$-A = \{-x \mid x \in A\}; \quad A-B = A+(-B);$$

$$AB = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\},$$

og for $0 \notin A$ endvidere

$$A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\} .$$

For $a \in M$ skriver vi $a+B$ og aB istedet for $\{a\} + B$ og $\{a\}B$.

Eksempler: $\emptyset + A = \emptyset A = \emptyset^{-1} = \emptyset$.

$$0+A = A; \quad 0 \cdot A = \{0\}; \quad 1 \cdot A = A; \quad -1 \cdot A = -A .$$

$$\{1,2,3\} - \{1,2,3\} = \{-2,-1,0,1,2\}.$$

$$\{5,9,13\} - \{1,2,3\} = \{2,3,4,6,7,8,10,11,12\}.$$

Definition 1.13. Et legeme G kaldes et ordnet legeme, hvis der foreligger en klasseinddeling af $G \setminus \{0\}$ i to klasser G_+ og G_-, således at følgende 2 betingelser er opfyldt:

1) $\forall x \in G_- (-x \in G_+)$

2) $\forall x, y \in G_+ (x+y \in G_+ \wedge xy \in G_+)$.

Elementerne i G_+ kaldes positive og elementerne i G_- kaldes negative.

<u>Sætning 1.14.</u> Hvis G er et ordnet legeme, gælder
$\forall x \in G_+(-x \in G_-)$; $\forall x \in G_+ \forall y \in G_-(xy \in G_-)$
$\forall x,y \in G_-(x+y \in G_- \wedge xy \in G_+)$; $\forall x \in G(x=0 \vee x^2 \in G_+)$; $1 \in G_+$.

Bevis. Af $x \in G_+$ følger $x \neq 0$, altså $-x \neq 0$, altså $-x \in G_+$ eller $-x \in G_-$. Men $-x \in G_+$ ville medføre $0 = (-x+x) \in G_+$, hvilket ikke er rigtigt. Altså gælder $-x \in G_-$. Af $x \in G_+$, $y \in G_-$ følger $-y \in G_+$, altså $-xy = x \cdot -y \in G_+$, altså $xy \in G_-$. Af $x,y \in G_-$ følger $-x,-y \in G_+$, altså $-x-y \in G_+$, altså $x+y \in G_-$. Endvidere $xy = -x \cdot -y \in G_+$. For $x \in G_+$ eller $x \in G_-$ har vi altså $x^2 \in G_+$, og specielt gælder $1 = 1^2 \in G_+$. Dermed er alle påstandene bevist.

<u>Definition 1.15.</u> For $x,y \in G$, hvor G er et ordnet legeme, defineres relationen $x < y$ ved

$$x < y \iff y-x \in G_+.$$

Vi skriver $x \leqq y$ i stedet for $x<y \vee x=y$. Relationen $x < y$ skrives også $y > x$ og $x \leqq y$ skrives også $y \geqq x$.

<u>Sætning 1.16.</u> For et ordnet legeme G gælder

$$\forall x,y,z \in G(x < y \iff x + z < y + z)$$

$$\forall x,y,z \in G((x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z)$$

$$\forall x,y \in G\ \forall z \in G_+(x < y \iff xz < yz).$$

Bevis. Den første påstand følger af, at $y-x = (y+z)-(x+z)$. Af $x < y$, $y < z$ følger $y-x \in G_+$, $z-y \in G_+$, altså $z-x = (z-y)+(y-x) \in G_+$, altså $x < z$. Af $x < y$ og $z \in G_+$ følger tilsvarende $zy-zx = z(y-x) \in G_+$. Af sætning 1.14 følger nu, da $z^{-1} \cdot z = 1 \in G_+$, at $z^{-1} \in G_+$, altså at $xz<yz$ medfører $xzz^{-1} < yzz^{-1}$ eller $x < y$. Dermed er sætningen bevist.

Dermed har vi vist, at de fra gymnasiet kendte regler for regning med uligheder er gyldige. Vi skal senere berige disse regler ved at bevise nogle mere dybtliggende uligheder.

Definition 1.17. Lad x være et element fra et ordnet legeme G. Elementet

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ hvis } x \in G_+ \\ 0, \text{ hvis } x = 0 \\ -x, \text{ hvis } x \in G_- \end{cases}$$

kaldes den numeriske værdi af x.

Sætning 1.18. For et ordnet legeme gælder

$$\forall x \in G \; (x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0)$$

$$\forall x,y \in G \; (\big| |x| - |y| \big| \leqq |x+y| \leqq |x| + |y|)$$

$$\forall x,y \in G \; (|xy| = |x| \; |y|).$$

Bevis. Den første påstand følger umiddelbart af definitionen. Den sidste følger af sætning 1.8. Af $x \leqq |x|$, $y \leqq |y|$ følger $x+y \leqq |x|+|y|$. Af $-x \leqq |x|$, $-y \leqq |y|$ følger $-(x+y) \leqq |x|+|y|$. Dermed har vi vist, at $|x+y| \leqq |x|+|y|$. Heraf følger $|x| = |x+y+(-y)| \leqq |x+y| + |y|$, altså $|x|-|y| \leqq |x+y|$. Analogt fås $|y| - |x| \leqq |x+y|$. Dermed er sætningen bevist.

Vi svindlede ved at indføre betegnelserne 0 og 1 for de to neutralelementer i en ring og dermed i et legeme. Der er selvfølgelig intet i vejen for, at forskellige ringe (eller legemer) kan have forskellige neutralelementer, og så er det forkert at anvende samme betegnelse. Den slags unøjagtigheder i matematik hævner sig ved, at der senere i teorien optræder resultater, som er indbyrdes modstridende, og dermed bliver hele teorien ganske nytteløs. Forsyndelser som den her omtalte optræder imidlertid meget hyppigt i matematik - i det foreliggende tilfælde kan vi nå langt, uden at forsyndelsen vil virke generende, og så længe det går godt, vil forsyndelsen spare os en del skriveri.

Vi noterer os, at også elementerne 1+1, 1+1+1,... bliver fælles for alle ringe og legemer. I et ordnet legeme bliver disse elementer alle indbyrdes forskellige (eksemplet efter sætning 1.11 viser, at dette ikke behøver at gælde for ikke ordnede legemer, og dermed tillige, at vort ensartede valg af betegnelser var uberettiget). Elementerne 1, 1+1, 1+1+1,... udgør mængden $\grave{N}$ af naturlige tal. Vi understreger, at $\grave{N}$ er en ganske bestemt mængde, og den her omtalte delmængde af et ordnet legeme er strengt taget ikke mængden $\grave{N}$, men en "kopi" af denne mængde. Mængden $\grave{Z} = \grave{N} \cup \{0\} \cup -\grave{N}$ er mængden af hele tal, og det ordnede legeme indeholder også en kopi af denne mængde. Med regneoperationen + er $\grave{Z}$ en gruppe. Produktet af to elementer fra $\grave{N}$ er igen et element fra $\grave{N}$, og heraf følger, at det tilsvarende gælder for elementer fra $\grave{Z}$. Altså er $\grave{Z}$ en ring.

Ovenstående er selvfølgelig ikke en tilfredsstillende indførelse af $\grave{N}$ og $\grave{Z}$. Vi kan ikke behandle summerne 1+1+...+1 uden at kunne tælle, hvor mange éttaller der er, og dertil behøver vi netop de naturlige tal. Indførelsen af $\grave{N}$ hører med til matematikkens grundlag, men vi vil her gå ud fra, at vi kan stole på vor intuitive forståelse af de naturlige tal.

For det ordnede legeme G har vi nu

$$\grave{N} \subset \grave{Z} \subset G.$$

For $a \in \grave{N}$, $b \in \grave{Z}$ har ligningen $ax = b$ en løsning i G. Hvis $a_1x = b_1$ og $a_2x = b_2$ har den samme løsning x, får vi $a_2b_1 = a_1a_2x = a_1b_2$. På den anden side har $a_1x = b_1$ den samme løsning som $a_1a_2x = a_2b_1$ og $a_2x = b_2$ har den samme løsning som $a_1a_2x = a_1b_2$, og af $a_2b_1 = a_1b_2$ følger derfor, at de to ligninger har den samme løsning. Hermed begrunder man let brøkregningen

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_2b_1}{a_1a_2} + \frac{a_1b_2}{a_1a_2} = \frac{a_2b_1+a_1b_2}{a_1a_2}$$

og

$$\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2} \quad .$$

Mængden af brøker med tæller fra $\dot{Z}$ og nævner fra $\dot{N}$ udgør legemet $\dot{Q}$ af de rationale tal. Det er indeholdt i ethvert ordnet legeme.

Det er meget let at vise, at en brøk kan bringes på uforkortelig form. Det er ret vanskeligt at vise, at dette kun kan gøres på en måde, men det er bevist i gymnasiet, og spørgsmålet vil blive diskuteret mere grundigt i matematik 2.

Definition 1.19. Ved en følge på G forstår vi en afbildning $f:\dot{N}$ ind i G. Vi skriver $f(n) = a_n \in G$ og betegner følgen (a_n).

Definition 1.20. Følgen (a_n) siges at konvergere mod $a \in G$, hvis følgende betingelse er opfyldt

$$\forall \varepsilon \in G_+ \ \exists N \in \dot{N} \ \forall n \geq N(|a-a_n| \leq \varepsilon),$$

og vi skriver da $(a_n) \to a$(mindre korrekt $a_n \to a$). Følgen (a_n) kaldes konvergent, hvis der eksisterer et $a \in G$, således at $(a_n) \to a$. Hvis dette ikke er tilfældet, kaldes følgen divergent.

Eksempel. Hvis $a_n = a$ for alle $n \in \dot{N}$, gælder $(a_n) \to a$. På visse ordnede legemer har enhver følge $(a_n) \to a$ alle elementer fra et vist trin lig a.

Af $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ og $1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ sluttes $0 < \frac{1}{2} < 1$ og for $\varepsilon > 0$ altså $0 < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

Sætning 1.21. Lad (a_n) være en følge på G. Af $(a_n) \to a$ og $(a_n) \to b$ følger $a = b$.

Bevis. For $\varepsilon \in G_+$ kan vi vælge n, således at $|a-a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ og $|b-a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Heraf følger imidlertid $|b-a| \leq |b-a_n|+|a-a_n| \leq \varepsilon$. Dermed har vi bevist, at $|b-a|$ er $\leq$ ethvert element i G_+. Af $|b-a| \in G_+$ ville følge $\frac{1}{2}|b-a| \in G_+$ og $\frac{1}{2}|b-a| < |b-a|$. Altså er $|b-a| = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 1.22. En følge (a_n) på G kaldes voksende, hvis $\forall n \in \dot{N}(a_n \leq a_{n+1})$, strengt voksende, hvis $\forall n \in \dot{N}(a_n < a_{n-1})$. Analogt defineres aftagende og strengt aftagende.

Eksempel. (n) og$(\frac{n}{n+1})$ er strengt voksende følger. Hvis (a_n) er (strengt)voksende, er $(-a_n)$(strengt)aftagende.

Definition 1.23. Lad $A \subseteq G$ være en delmængde. Et element $a \in G$ kaldes majorant for A, hvis $\forall x \in A(a \geq x)$. Hvis $A \subset G$ har en majorant, kaldes A opad begrænset. Analogt defineres minorant og nedad begrænset. Hvis A er både opad og nedad begrænset, kaldes A begrænset. Ved en majorant (minorant) for en følge (a_n) på G forstås en majorant (minorant) for mængden $\{a_n | n \in \dot{N}\}$. Følgen (a_n) kaldes begrænset (opad, nedad), hvis mængden $\{a_n | n \in \dot{N}\}$ er begrænset (opad, nedad).

Eksempel. Følgen $(\frac{n}{n+1})$ har 1 som majorant og 0 som minorant, og er således begrænset. Følgen (n) har 0 som minorant og er således nedad begrænset. Intet element af $\dot{Q}$ er majorant for (n), men det kan tænkes, at (n) har en majorant i G. Mængden G er hverken opad eller nedad begrænset.

Sætning 1.24. Enhver konvergent følge er begrænset.

Bevis. Af $(a_n) \to a$ følger, at der eksisterer tal $N \in \dot{N}$, således at $\forall n \geqq N(|a-a_n| \leqq 1)$. For $n \geqq N$ gælder da, at $a-1 \leqq a_n \leqq a+1$. Heraf følger, at det mindste af elementerne $a-1, a_1, \ldots, a_{N-1}$ er en minorant, og at det største af elementerne $a+1, a_1, \ldots, a_{N-1}$ er en majorant .

Definition 1.25. Et element $b \in G$ kaldes supremum for mængden $A \subseteq G$, og vi skriver $b = \sup A$, hvis b er den mindste majorant for A. Et element $a \in G$ kaldes infimum for $A \subseteq G$, og vi skriver $a = \inf A$, hvis a er den største minorant for A.

Det fremgår heraf, at en mængde, som har et supremum (infimum) er opad (nedad) begrænset. Det er endvidere klart, at $\inf A$ og $\sup A$ er entydigt fastlagte ved de foreskrevne egenskaber, hvis de overhovedet eksisterer.

Eksempel. I legemet $\dot{Q}$ har mængden $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \dot{N}\}$ supremum 1 og infimum $\frac{1}{2}$. Mængden $\dot{N}$ har infimum 1 men intet supremum. Mængden $\{x \in \dot{Q} | x^2 < 2\}$ har hverken infimum eller supremum.

Sætning 1.26. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $b \in G$ er supremum for $A \subseteq G$ er, at følgende betingelser er opfyldt

$$\forall x \in A(b \geqq x),$$

$$\forall \varepsilon \in G_+ \ \exists x \in A \ (x > b - \varepsilon).$$

Analogt for infimum.

Bevis. Den første betingelse udtrykker, at b er majorant for A, og den anden betingelse udtrykker, at intet mindre tal er majorant for A. Deraf følger påstanden umiddelbart.

Vi bemærker, at lighedstegnet i den første betingelse er væsentligt, idet $b = \sup A$ kan være et element af A. Derimod er det uden betydning, om der i den sidste betingelse kræves $>$ eller $\geqq$. Tilsvarende er det uvæsentligt, om der de to steder i definition 1.20 skrives $>(<)$ eller $\geq(\leq)$.

Definition 1.27. Et par (A,B) af delmængder $A \subsetneq G$, $B \subsetneq G$ kaldes et snit i G, såfremt følgende betingelser er opfyldt:

$$A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset, \quad A \cup B = G$$

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B(x < y).$$

Snittet (A,B) siges at være bestemt af elementet $c \in G$, såfremt c er det største element i A eller det mindste element i B.

Hvis c er det største element i A, består B netop af alle elementer, som er større end c, og B har da intet mindste element. Hvis B har et mindste element, ses analogt, at A ikke har et største element. Et snit er derfor bestemt af højst ét element af G, og ét element af G bestemmer nøjagtigt 2 snit. Der kan eventuelt eksistere snit i G, som ikke er bestemt af noget element af G.

Sætning 1.28. Hvis et ordnet legeme G har én af følgende tre egenskaber, har G alle tre egenskaber:

1). Enhver opad begrænset ikke tom delmængde af G har et supremum.

2). Ethvert snit i G er bestemt af et element af G.

3). Enhver voksende, opad begrænset følge på G er konvergent.

Bevis. Sætningen udtaler, at påstandene 1),2) og 3) er logisk ækvivalente, altså at enhver af dem medfører de to andre. Dette vil være bevist, hvis det lykkes at vise implikationerne 1) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 3) og 3) $\Rightarrow$ 1). Vi angriber én ad gangen.

1) $\Rightarrow$ 2). Vi antager at 1) gælder. Lad (A,B) være et snit i G. Ethvert element i B er en majorant for A. Af 1) følger derfor eksistensen af et element $c = \sup A$. Da c er majorant for A, er $c \geq$ ethvert element i A. Da c er den mindste majorant for A, er $c \leq$ ethvert element i B. Da c tilhører A eller B, er c det største element i A eller det mindste element i B. Dermed har vi vist påstanden.

2) $\Rightarrow$ 3). Vi antager, at 2) gælder. Lad (a_n) være en voksende, opad begrænset følge på G. Lad B være mængden af majoranter for (a_n), og lad A være overskudsmængden $G \setminus B$ (mængden af elementer af G, som ikke er elementer af B). Vi har åbenbart $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ og $A \cup B = G$. Af $a \in A$ følger, at a ikke er majorant for (a_n). Der findes altså et n, så $a < a_n$. Men for $b \in B$ er $a_n < b$. Altså er $a < b$. Dermed har vi vist, at (A,B) er et snit. Af 2) følger nu, at der findes et element c, som er størst i A eller mindst i B. Vi vil vise, at $(a_n) \to c$. Lad ε være et element af G_+. Vi har da $c-\varepsilon \in A$, $c+\varepsilon \in B$. Altså er $c+\varepsilon$ majorant for a_n, og vi har $\forall n \in \dot{N}(a_n \leq c+\varepsilon)$. Da $c-\varepsilon$ ikke er majorant for a_n, eksisterer $N \in \dot{N}$, så $a_N > c-\varepsilon$. Men da (a_n) er voksende, medfører dette $\forall n \geq N(a_n > c-\varepsilon)$. Dermed har vi vist, at $\forall n \geq N(|a-a_n| \leq \varepsilon)$. Dermed har vi vist påstanden.

3) $\Rightarrow$ 1). Dette bevis er en hel del mere subtilt end de to foregående. Vi bemærker først, at følgen (n) ikke er konvergent. Af $(n) \to c \in G$ følger nemlig, at vi kan vælge n, således at

$$|n-c| \leq \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad |n+1-c| \leq \frac{1}{4},$$

men det ville medføre, at

$$1 = |(n+1-c) + (c-n)| \leq |n+1-c|+|c-n| \leq \frac{1}{2},$$

hvilket ikke er rigtigt. Lad os nu antage, at 3) gælder. Vi kan da slutte, at følgen (n) ikke er opad begrænset. Lad nu $A \subseteq G$ være opad begrænset. Der eksisterer da en majorant b for A. Men b er ikke majorant for (n). Altså kan vi vælge $N \in \mathring{N}$, således at $b < N$, og så er N en majorant for A. Da (n) ikke er opad begrænset, er $(-n)$ ikke nedad begrænset, og vi får derfor analogt, at vi kan vælge $N_1 \in \mathring{N}$, så $-N_1$ ikke er majorant for A. For ethvert $j \in \mathring{N}$ betragter vi alle tallene $\frac{p}{2^j}$, hvor $p \in Z$. For $p \leq -2^j N_1$ er $\frac{p}{2^j}$ ikke majorant for A, men for $p \geq 2^j N$ er $\frac{p}{2^j}$ majorant for A. Heraf følger, at vi for hvert $j \in \mathring{N}$ kan vælge det største tal $p_j \in \mathring{Z}$, for hvilket $\frac{p_j}{2^j}$ ikke er majorant for A. Nu er $\frac{p_j}{2^j} = \frac{2 p_j}{2^{j+1}}$, og det medfører, at $p_{j+1} \geq 2 p_j$ eller $\frac{p_{j+1}}{2^{j+1}} \geq \frac{p_j}{2^j}$. Altså er $(\frac{p_j}{2^j})$ en voksende følge på G, og da intet af dens elementer er majorant for A, er den opad begrænset og derfor konvergent mod en grænseværdi a. For $b > a$ er $\frac{1}{b-a}$ ikke majorant for (n), og vi kan derfor vælge $n \in \mathring{N}$, så $n > \frac{1}{b-a}$, altså $\frac{1}{n} < b-a$. Men så kan vi også vælge $j \in \mathring{N}$, så $\frac{1}{2^j} < b-a$. Så får vi, idet vi udnytter, at $\frac{p_j}{2^j} \leq a$, at

$$\frac{p_j+1}{2^j} = \frac{p_j}{2^j} + \frac{1}{2^j} \leq a + \frac{1}{2^j} < b ,$$

og da $\frac{p_j+1}{2^j}$ er en majorant for A, er b en majorant for A. Altså er intet element af A større end a. Dermed har vi vist, at a er en majorant for A. For $b < a$ ser vi ganske analogt, at vi kan vælge $j \in \mathring{N}$, således at $\frac{1}{2^j} < a - b$, og vi får da, idet vi udnytter, at $\frac{p_j+1}{2^j}$ er majorant for A, og derfor $\geq a$, at

$$\frac{p_j}{2^j} = \frac{p_j+1}{2^j} - \frac{1}{2^j} \geq a - \frac{1}{2^j} > b ,$$

hvilket viser, at b ikke er majorant for A. Dermed har vi vist, at a er den mindste majorant for A, altså, at a = sup A, og dermed er sætningen bevist.

Af bevisets sidste afsnit fremgår nu, at de ordnede legemer, der har de i sætning 1.28 omtalte egenskaber, tillige har den i følgende definition omtalte egenskab.

Definition 1.29. Et ordnet legeme G kaldes Archimedesk, hvis delmængden $\grave{N} \subset G$ ikke er opad begrænset.

Det kommer ud på det samme at forlange, at følgen (n) ikke er begrænset, og det er igen ensbetydende med, at der til ethvert element af G svarer et naturligt tal som er større. Dette er igen ensbetydende med, at $(\frac{1}{n}) \to 0$.

Aksiom 1.30. Mængden $\grave{R}$ af reelle tal er et ordnet legeme, som har de i sætning 1.28 omtalte egenskaber.

Dette er ikke en definition. For det første, er det ikke på forhånd klart, at der eksisterer ordnede legemer med de omtalte egenskaber. På den anden side er det klart, at der findes mange, hvis der findes ét. Den første vanskelighed kunne overvindes ved konstruktivt at opbygge et legeme med de ønskede egenskaber som en udvidelse af $\grave{Q}$, der igen kunne opbygges som en udvidelse af $\grave{N}$. Dette er virkelig gennemførligt, men ret tidskrævende. Det ville også klare den anden vanskelighed, idet konstruktionen ville give ét ganske bestemt ordnet legeme. Det er imidlertid også rigtigt, at alle legemer, der har de i sætning 1.28 omtalte egenskaber, i en vis forstand er ens, så det ikke spiller nogen rolle, hvilket af dem vi udnævner til $\grave{R}$.

Elementerne af $\grave{R}$ kaldes (reelle) tal. Vi siger reel talfølge i stedet for følge på $\grave{R}$. Når en talfølge (a_n) konvergerer mod $a \in \grave{R}$ kaldes a grænseværdi for (a_n). Vi siger overtal og undertal i stedet for majorant og minorant. Lejlighedsvis benytter vi topologisk inspirerede betegnelser og kalder $\mathring{R}$ den reelle tallinie eller talakse, og et tal $a \in \mathring{R}$ kaldes da også et punkt af den reelle talakse.

Sætning 1.31. Hvis en mængde $A \subseteq \mathring{R}$ er nedad begrænset, eksisterer $\inf A$ og $\inf A = -\sup(-A)$. Enhver aftagende, nedad begrænset følge på $\mathring{R}$ er konvergent.

Bevis. Hvis $a \in \mathring{R}$ er undertal for A er $-a$ overtal for $-A$. Heraf følger den første påstand umiddelbart. Hvis (a_n) er aftagende og nedad begrænset, er $(-a_n)$ voksende og opad begrænset, altså konvergent. Heraf følger den anden påstand.

Definition 1.32. Ved den udvidede reelle talakse $\mathring{R}^*$ forstår vi mængden $\mathring{R}^* = \mathring{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ ordnet, således at ordningen stemmer med ordningen på $\mathring{R}$, og således at ∞ er det største og $-\infty$ det mindste element. Regneoperationerne på $\mathring{R}$ udvides delvis til $\mathring{R}^*$, idet vi sætter $a + \infty = \infty + \infty = \infty$ for $a \in \mathring{R}$ og $a - \infty = -\infty - \infty = -\infty$ for $a \in \mathring{R}$ samt $a \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$, $-a \cdot \infty = -\infty \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot -\infty = \infty \cdot -\infty = -\infty$ og $-a \cdot -\infty = -\infty \cdot -\infty = \infty$ for $a \in \mathring{R}_+$.

Nu er ∞ majorant og $-\infty$ minorant for enhver delmængde af $\mathring{R}^*$, og det bevirker, at $\sup A$ og $\inf A$ bliver definerede for enhver ikke tom mængde $A \subseteq \mathring{R}^*$. Hvis A har et overtal, der tilhører $\mathring{R}$, bliver $\sup A$ det samme som før. I modsat fald bliver $\sup A = \infty$. Analogt for infimum. Vi bemærker, at den tomme mængde $\emptyset$ får ethvert tal i $\mathring{R}^*$ som både overtal og undertal, og derfor får den $-\infty$ som supremum og ∞ som infimum. Vi vil foretrække kun at definere $\inf A$ og $\sup A$ for $A \neq \emptyset$, så vi altid har $\inf A \leq \sup A$.

Vi understreger, at $\dot{R}^*$ er en ordnet mængde, men $\dot{R}^*$ er hverken gruppe, ring eller legeme. De anførte udvidelser at $+$ og $\cdot$ til $\dot{R}^*$ er ikke definerede på hele $\dot{R}^* \times \dot{R}^*$, og de opfylder ikke alle de regler, vi har krævet opfyldt for en ring (eller blot for en gruppe).

Definition 1.33. For $a,b \in \dot{R}^*$ og $a < b$ kaldes mængderne

$$[a,b] = \{x \in \dot{R}^* \mid a \leqq x \leqq b\}, \quad [a,b[\; = \{x \in \dot{R}^* \mid a \leqq x < b\},$$

$$]a,b] = \{x \in \dot{R}^* \mid a < x \leqq b\}, \quad]a,b[\; = \{x \in \dot{R}^* \mid a < x < b\}$$

intervaller. For $a,b \in \dot{R}$ kaldes $[a,b]$ afsluttet, $]a,b[$ åbent og $]a,b]$ og $[a,b[$ halvåbne. For $a \in \dot{R}$ kaldes $]-\infty,a]$ og $[a,\infty[$ afsluttede halvlinier og $]-\infty,a[$ og $]a,\infty[$ kaldes åbne halvlinier. Endvidere kaldes $[a,a] = \{a\}$ et udartet interval, og $\emptyset$ kaldes det tomme interval.

Somme tider tillader vi os stiltiende at forudsætte, at intervaller ikke er udartede eller tomme. Punkterne a og b kaldes selvfølgelig endepunkterne af $[a,b]$, $[a,b[$ etc. Et interval er begrænset, hvis og kun hvis endepunkterne tilhører $\dot{R}$. En delmængde af $\dot{R}$ er begrænset, hvis og kun hvis den er indeholdt i et begrænset interval.

De følgende sætninger om intervaller er undertiden nyttige, men de må dog nærmest opfattes som øvelse i at udnytte infimum og supremum.

<u>Sætning</u> 1.34. En mængde $A \subset \dot{R}^*$ er et interval, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall x,y \in A(x < y \Rightarrow [x,y] \subseteq A).$$

Bevis. Det er klart, at betingelsen er nødvendig. Lad nu A være en mængde, som opfylder betingelsen. Hvis A ikke indeholder mindst to punkter, er A et tomt eller et udartet interval. Hvis A indeholder to punkter, er $\inf A < \sup A$. For $z \in \,]\inf A, \sup A[$ gælder nu, at z hverken er undertal eller overtal for A. Vi kan derfor vælge $x \in A$ og $y \in A$, således at $x < z < y$, altså $z \in [x,y]$, men så giver vor betingelse, at $z \in A$. Dermed har vi vist, at $]\inf A, \sup A[\subseteq A$. På den anden side er $A \subseteq [\inf A, \sup A]$. Altså er A et af de fire intervaller med endepunkter $\inf A$ og $\sup A$.

Sætning 1.35. For en vilkårlig mængde af intervaller gælder, at fællesmængden er et interval, og hvis dette ikke er tomt, er foreningsmængden tillige et interval.

Bevis. Hvis x og y med $x < y$ tilhører fællesmængden, tilhører x og y hvert af intervallerne, men så er $[x,y]$ delmængde af hvert af intervallerne og dermed af fællesmængden. Derefter følger den første påstand umiddelbart af sætning 1.34. Hvis fællesmængden ikke er tom, kan vi vælge c i fællesmængden. Hvis x,y tilhører foreningsmængden vil intervallerne med x og y som det ene endepunkt og c som det andet tilhøre foreningsmængden, og ved at gå de mulige tilfælde ($x \leqq c \leqq y$, $c \leqq x \leqq y$, $x \leqq y \leqq c$) igennem, får vi, at $[x,y]$ tilhører foreningsmængden. Dermed er den sidste påstand bevist.

Vi skal nu vise nogle sætninger om infimum og supremum. Vi vil kun bevise sætningerne om supremum, idet sætningerne om infimum vises helt analogt.

Sætning 1.36. Af $A \subseteq B \subseteq \dot{R}$ og $A \neq \emptyset$ følger

$$\sup A \leqq \sup B, \quad \inf A \geqq \inf B.$$

Bevis. Påstanden følger umiddelbart af, at sup B er overtal for B og dermed for A, medens sup A er det mindste overtal for A.

<u>Sætning</u> 1.37. Af $A \subsetneq \dot{R}$, $B \subsetneq \dot{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ og

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B (a \leqq b)$$

følger

$$\sup A \leqq \inf B.$$

Bevis. Lad b være et element af B. Så er b et overtal for A, altså $\sup A \leqq b$. Da dette gælder for ethvert element $b \in B$, er sup A et undertal for B, altså $\sup A \leqq \inf B$.

Kommentar: Vi beviste først $\forall b \in B(\sup A \leqq b)$. Læg mærke til at beviset for denne påstand indledes med: Lad b være et element af B. Vi må så passe på ikke at benytte andre egenskaber ved b end $b \in B$ og hvad deraf følger. Resultatet vil da åbenbart være gyldigt for ethvert b i mængden B. (Et "lad-være-bevis").

<u>Sætning</u> 1.38. Af $A \subsetneq \dot{R}$, $B \subsetneq \dot{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ følger

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Bevis. For $a \in A$, $b \in B$ gælder $a + b \leqq \sup A + \sup B$. Altså er $\sup A + \sup B$ et overtal for $A + B$, altså $\sup(A + B) \leqq \sup A + \sup B$. Lad a være et element af A. For $b \in B$ er $a + b \leqq \sup(A + B)$, altså $b \leqq \sup(A + B) - a$. Dermed har vi vist, at $\sup(A + B) - a$ er et overtal for B, altså $\sup B \leqq \sup(A+B) - a$, hvilket også kan skrives $a \leqq \sup(A+B) - \sup B$. Dermed har vi vist, at $\sup(A+B) - \sup B$ er et overtal for A, altså $\sup A \leqq \sup(A+B) - \sup B$, hvilket er ensbetydende med

$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$. Derved har vi stiltiende forudsat, at $\sup B$ og $\sup(A+B)$ ikke begge er ∞, men i dette specielle tilfælde er relationen åbenbart rigtig. Dermed er sætningen bevist.

Hvis M er en vilkårlig mængde, og f,g: M ind i $\grave{R}$ er to afbildninger, defineres summen $f + g$: M ind i $\grave{R}$ som bekendt ved $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Vi vil nu vise sætningen:

<u>Sætning</u> 1.39. Lad M være en vilkårlig mængde. For vilkårlige afbildninger f,g: M ind i $\grave{R}$ gælder

$$\inf f(A) + \inf g(A) \leq \inf(f+g)(A) \leq \left\{ \begin{array}{l} \inf f(A) + \sup g(A) \\ \\ \sup f(A) + \inf g(A) \end{array} \right\} \leq$$

$$\sup(f+g)(A) \leq \quad \sup f(A) + \sup g(A) \; .$$

Bevis. Da vi har

$$(f+g)(A) = \{f(x) + g(x) \mid x \in A\} \subseteq \{f(x) + g(y) \mid x,y \in A\} =$$
$$f(A) + g(A),$$

følger gyldigheden af det første og det sidste ulighedstegn af sætning 1.36 og sætning 1.38. Heraf følger nu

$$\sup g(A) \leq \sup(f+g)(A) + \sup(-f(A)) =$$
$$\sup(f+g)(A) - \inf f(A),$$

hvilket giver

$$\inf f(A) + \sup g(A) \leq \sup(f+g)(A).$$

De tre resterende uligheder vises ganske analogt.

Hvis en voksende talfølge (a_n) og en aftagende talfølge

(b_n) tilfredsstiller betingelsen $\forall n(a_n \leq b_n)$, får vi en "intervalindsnævring"

$$[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \dots ,$$

og det vil da gælde, at intervallerne har mindst et fælles punkt, idet $\sup\{a_n\}$ er større eller lig ethvert a_n, men mindre eller lig ethvert b_n, idet b_n er overtal for følgen (a_n). Uden bevis skal vi nævne, at denne egenskab (og endda kun for intervalfølger, hvor intervallængden går mod 0) for Archimedesk ordnede legemer medfører de i sætning 1.28 omhandlede egenskaber.

Vi vil nu gå over til en mere indgående behandling af talfølger. Sætningerne om regning med talfølger er behandlet i gymnasieundervisningen og vil ikke blive gentaget her. I stedet for $(a_n) \to a$ vil vi også skrive $\lim(a_n) = a$ eller $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

<u>Definition</u> 1.40. Vi siger at (a_n) går mod ∞ (eller divergerer mod ∞), når følgende betingelse er opfyldt

$$\forall b \in \grave{R}\ \exists N \in \grave{N}\ \forall n \geq N(a_n \geq b),$$

og vi skriver $(a_n) \to \infty$ eller $\lim(a_n) = \infty$. Analogt defineres $(a_n) \to -\infty$.

Vi bemærker, at definitionen giver mening også for følger på $\grave{R}^*$, altså følger, hvor visse led er $-\infty$ eller ∞. Dette vil vi lejlighedsvis udnytte.

<u>Sætning</u> 1.41. For en voksende følge (a_n) gælder

$$(a_n) \to \sup\{a_n | n \in \grave{N}\} .$$

Bevis. Hvis $\sup\{a_n|n \in \grave{N}\}$ tilhører $\grave{R}$, er (a_n) konvergent mod et tal $a \in \dot{R}$. Da elementerne $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ er $\geq a_n$ er $a \geq a_n$. Altså er a overtal. På den anden side er det klart, at (a_n) ikke kan konvergerer mod noget andet overtal end det mindste. For $\sup\{a_n\} = \infty$ og $b \in \dot{R}$ findes et N med $a_N \geq b$, og så er $a_n \geq b$ for ethvert $n \geq N$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 1.42. Lad (a_n) være en talfølge. Et tal $b \in \dot{R}^*$ kaldes et næsten-overtal, hvis mængden $\{n | a_n > b\}$ er endelig. Analogt defineres et næsten-undertal. Infimum for mængden af næsten-overtal kaldes limes superior af (a_n) og betegnes $\lim\sup(a_n)$. Supremum for mængden af næsten-undertal kaldes limes inferior af (a_n) og betegnes $\lim\inf(a_n)$.

<u>Sætning</u> 1.43. For en talfølge (a_n) gælder

$$\lim\inf(a_n) \leq \lim\sup(a_n).$$

Bevis. Idet ethvert næsten-undertal er $\leq$ ethvert næsten-overtal, følger påstanden af sætning 1.37.

<u>Sætning</u> 1.44. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $(a_n) \to a$, er, at

$$\lim\inf(a_n) = \lim\sup(a_n) = a.$$

Bevis. Lad os først antage, at $(a_n) \to a$, og lad ε være et positivt tal. Så ligger a_n i intervallet $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ undtagen for endelig mange værdier af n. Altså er $a - \varepsilon$ næsten-undertal og $a + \varepsilon$ er næsten-overtal, og derfor er $a - \varepsilon \leq \lim\inf(a_n) \leq \lim\sup(a_n) \leq a + \varepsilon$ og da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, kan vi slutte, at $\lim\inf(a_n) = \lim\sup(a_n) = a$. Dermed har vi vist, at betingelsen er nødvendig. Lad os dernæst antage, at

$\lim\inf(a_n) = \lim\sup(a_n) = a$, og lad ε være et positivt tal. Så er $a - \varepsilon$ næsten-undertal og $a + \varepsilon$ næsten-overtal, men det medfører netop, at $a_n \in\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ undtagen for endelig mange værdier af n, altså at $(a_n) \to a$. Dermed er sætningen bevist, når a har en endelig værdi. Nu er $(a_n) \to \infty$ ensbetydende med, at ethvert $b \in \dot{R}$ er næsten-undertal, altså med $\lim\inf(a_n) = \infty$ og påstanden følger af sætning 1.43. Analogt for $(a_n) \to -\infty$. Dermed er sætningen bevist.

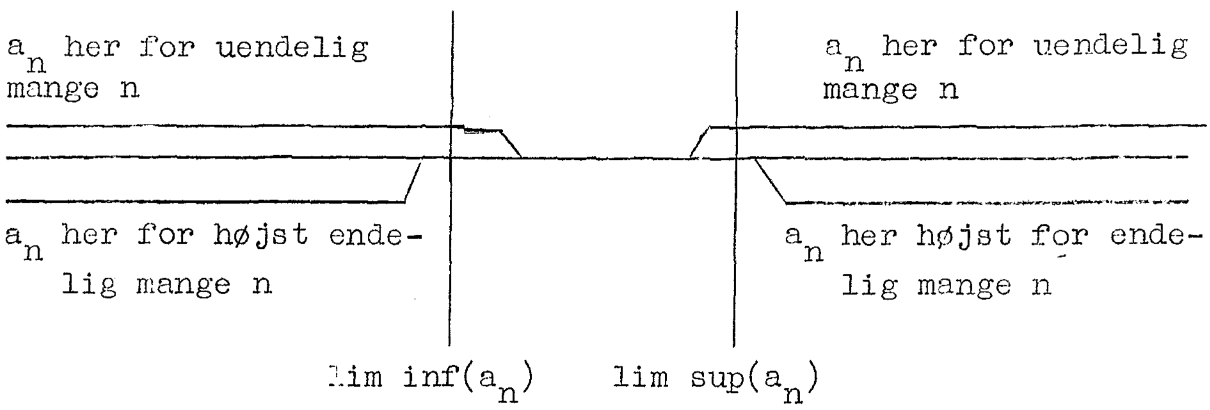
<u>Sætning</u> 1.45. For enhver talfølge (a_n) gælder

$$\lim\inf(a_n) = \lim(\inf\{a_k | k \geq n\})$$

$$\lim\sup(a_n) = \lim(\sup\{a_k | k \geq n\}).$$

Bevis. Følgen $(\sup\{a_k | k \geq n\})$ er aftagende. At b er næsten-overtal er ensbetydende med, at b er $\geq$ et eller andet element i denne følge. Altså konvergerer følgen mod infimum for mængden af næsten-overtal, og dermed er den sidste relation bevist. Den første vises analogt.

Det fremgår umiddelbart af definitionerne, at $\lim\inf(a_n)$ og $\lim\sup(a_n)$, hvis de er endelige, er karakteriserede ved de egenskaber , der er antydet på følgende skitse.



Det anbefales i stærkest mulig grad at illustrere beviserne med skitser som denne. De er navnlig en værdifuld støtte ved arbejde med løsning af opgaver. De er mindre velegnede til anbringelse i en færdig tekst, og det er derfor nødvendigt i forelæsningsnoter, som de foreliggende at benytte en formulering, der kun i ringe grad støtter sig til illustrationer.

Hvis (a_n) er en talfølge og (p_n) er en strengt voksende følge af naturlige tal, er (a_{p_n}) en delfølge af (a_n). Begrebet delfølge skal altid opfattes på denne måde. For nemheds skyld vil vi dog ofte skrive "delfølgen (b_n) af følgen (a_n)".

<u>Sætning</u> 1.46. Lad (a_n) være en vilkårlig talfølge. Den har da en delfølge, som går mod $\lim\inf(a_n)$ og en delfølge, som går mod $\lim\sup(a_n)$. Enhver konvergent delfølge af (a_n) har sin grænseværdi i intervallet $[\lim\inf(a_n), \lim\sup(a_n)]$.

Bevis. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes der uendelig mange $p \in \mathbb{N}$, således at $|\lim\sup(a_n) - a_p| \leqq \varepsilon$. Vi kan derfor vælge p_1, således at $|\lim\sup(a_n) - a_{p_1}| \leqq 1$, dernæst $p_2 > p_1$, således at $|\lim\sup(a_n) - a_{p_2}| \leqq \frac{1}{2}$, o.s.v. Derved får vi konstrueret en delfølge (a_{p_n}), således at $(a_{p_n}) \to \lim\sup(a_n)$. Analogt for $\lim\inf(a_n)$. For $\varepsilon > 0$ findes kun endelig mange p, for hvilke $a_p \geqq \lim\sup(a_n) + \varepsilon$. Men så vil ingen konvergent delfølge have grænseværdi $> \lim\sup(a_n) + \varepsilon$, altså heller ikke $> \lim\sup(a_n)$. Analogt ses, at ingen delfølge har grænseværdi $< \lim\inf(a_n)$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 1.47. Enhver begrænset følge har en konvergent delfølge.

Dette følger umiddelbart af sætning 1.46. Sætningen kaldes

Weierstrass-Bolzano's sætning. Den udtrykkes ofte på den mere suggestive form: En begrænset talfølge kan udtyndes, så den bliver konvergent.

<u>Sætning</u> 1.48. Hvis $(a_n) \to a$, konvergerer enhver delfølge af (a_n) mod a.

Dette følger umiddelbart af sætning 1.44 og sætning 1.46.

<u>Definition</u> 1.49. Talfølgen (a_n) kaldes en fundamentalfølge, hvis den opfylder følgende betingelse:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \dot{N} \; \forall m,n \geqq N(|a_m - a_n| \leqq \varepsilon).$$

<u>Sætning</u> 1.50. En talfølge er konvergent, hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge.

Bevis. Lad os først antage, at $(a_n) \to a \in \dot{R}$, og lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall n \geqq N(|a - a_n| \leqq \tfrac{\varepsilon}{2}).$$

For $m,n \geqq N$ har vi da

$$|a_m - a_n| \leqq |a - a_n| + |a - a_m| \leqq \varepsilon .$$

Altså er en konvergent følge en fundamentalfølge. Lad dernæst (a_n) være en fundamentalfølge, og lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall m,n \geqq N(|a_m - a_n| \leqq \tfrac{\varepsilon}{2}),$$

og alle a_n med $n \geqq N$ vil da tilhøre intervallet $[a_N - \frac{\varepsilon}{2}, a_N + \frac{\varepsilon}{2}]$. Så vil $\lim\inf(a_n)$ og $\lim\sup(a_n)$ tilhøre dette interval, og de er derfor begge endelige og $0 \leqq \lim\sup(a_n) - \lim\inf(a_n) \leqq \varepsilon$.

Da ε var et vilkårligt positivt tal, følger heraf, at $\lim\inf(a_n) = \lim\sup(a_n)$ og af sætning 1.44 følger derefter, at (a_n) er konvergent. Dermed er sætningen bevist.

Betydningen af sætning 1.50 er, at den giver os en mulighed for at undersøge om en følge er konvergent, uden at grænseværdien selv indgår i undersøgelsen. Sætningen kaldes det almindelige konvergensprincip eller Cauchy's konvergenskriterium.

Eksempel. For

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \cos k\,x \,,$$

hvor x er et vilkårligt reelt tal, får vi

$$a_{n+p} - a_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} \cos k\,x \,,$$

altså

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} |\cos k\,x| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} < 2^{-n} \,,$$

og for $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N, således at $2^{-n} \leq \varepsilon$ for $n \geq N$. Altså er (a_n) konvergent ifølge det almindelige konvergensprincip. Grænseværdien kommer til at afhænge af x, og den definerer en afbildning af $\grave{R}$ ind i $\grave{R}$, men vi får ikke nærmere oplysning om, hvad det bliver for en afbildning.

Hermed vil vi betragte gennemgangen af de reelle tals teori som afsluttet i første omgang. Vi vil fortsætte med en gennemgang af de komplekse tals teori, men det vil vi gøre på en helt anden måde, idet vi ud fra $\grave{R}$ konstruerer et nyt legeme $\grave{C}$, de komplekse tals legeme.

Definition 1.51. Ved et komplekst tal forstår vi et ordnet par (a_1, a_2) af reelle tal. Ved den numeriske værdi (modulus) af det komplekse tal $a = (a_1, a_2)$ forstår vi $|a| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}$. En vinkel θ (målt i radianer) kaldes et argument for det komplekse tal, såfremt $a = (|a|\cos\theta, |a|\sin\theta)$. For $a \neq 0$ kaldes det specielle argument, der ligger i intervallet $]-\pi, \pi]$ hovedargumentet for a. For $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ definerer vi

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$ab = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) .$$

Ved det konjugerede tal $\bar{a}$ til a forstår vi tallet $(a_1, - a_2)$. Mængden af komplekse tal betegnes $\mathcal{C}$.

Parret (a_1, a_2) er koordinater for en vektor $\underline{a}$ i planen, den til det komplekse tal a svarende vektor. Til a+b svarer netop vektoren $\underline{a}+\underline{b}$. Vi adderer altså komplekse tal som vektorer. Derfor er additionen associativ og kommutativ. Endvidere er $0 = (0,0)$ neutralelement, og vi får en til additionen svarende subtraktion defineret ved $a-b = (a_1-b_1, a_2-b_2)$. Dermed har vi vist, at $\mathcal{C}$ med kompositionsreglen + er en gruppe.

Det ses umiddelbart, at multiplikationen er kommutativ. Med $c = (c_1, c_2)$ har vi

$$a(b+c) = (a_1(b_1+c_1) - a_2(b_2+c_2), a_1(b_2+c_2) + a_2(b_1+c_1)) =$$

$$(a_1b_1-a_2b_2+a_1c_1-a_2c_2, \ a_1b_2+a_2b_1+a_1c_2+a_2c_1) =$$

$$(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1) + (a_1c_1-a_2c_2, a_1c_2+a_2c_1) = ab + ac .$$

Dermed har vi vist, at multiplikationen er distributiv.

For $a = (|a|\cos\theta_1, |a|\sin\theta_1)$ og $b = (|b|\cos\theta_2, |b|\sin\theta_2)$ får vi

$$ab = (|a|\ |b|(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2),$$
$$|a|\ |b|(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)) =$$
$$(|a|\ |b|\cos(\theta_1+\theta_2),\ |a|\ |b|\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

Vi kan altså multiplicere to komplekse tal ved at multiplicere de numeriske værdier og addere et argument for hvert tal. Dette medfører åbenbart, at multiplikationen er associativ. Endvidere fik vi vist reglen

$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Specielt får vi $(1,0)(a_1,a_2) = (a_1,a_2)$, hvilket viser, at $(1,0)$ er neutralelement for multiplikation. For $(a_1,a_2) \neq (0,0)$ er

$$(a_1,a_2)\cdot\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) = (1,0),$$

så vi har

$$a^{-1} = \left(\frac{a_1}{|a|^2}, \frac{-a_2}{|a|^2}\right).$$

Dermed har vi vist, at $\mathbb{C}$ er et legeme.

Da $|a|$ netop er længden af vektoren $\underline{a}$, har vi trekantsuligheden

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|.$$

For de specielle komplekse tal $(a_1,0)$ og $(b_1,0)$ får vi

$$(a_1,0)+(b_1,0) = (a_1+b_1,0),\quad (a_1,0)(a_2,0) = (a_1a_2,0),\quad |(a_1,0)| = |a_1|.$$

Vi vil derfor tillade os at identificere disse specielle komplekse tal med reelle tal, idet vi sætter $(a_1,0) = a_1$. For $k \in \mathbb{R}$ får vi da

$$k(a_1,a_2) = (k,0)(a_1,a_2) = (ka_1,ka_2).$$

Vi sætter nu $(0,1) = i$, og vi får da

$$(a_1,a_2) = (a_1,0) + (0,a_2) = a_1 + ia_2 .$$

Et komplekst tal kan således udtrykkes simpelt ved to reelle tal og det specielle komplekse tal i. Vi har

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 .$$

Det komplekse tal $(a_1,a_2) = a_1 + ia_2 = a$ siges at have realdel a_1 og imaginærdel a_2. Vi skriver $a_1 = \mathrm{Re}\, a$, $a_2 = \mathrm{Im}\, a$. Hvis $a_2 = 0$, er a reelt. Hvis a ikke er reelt, kaldes a imaginært. Hvis $a_1 = 0$, kaldes a rent imaginært. Med Arg a betegner vi hoved værdien af argumentet til a. Med arg a betegner vi mængden af argumenter til a. Tallet 0 har ethvert reelt tal som argument. Vi har mængderelationen

$$\arg(ab) = \arg a + \arg b.$$

Det konjugerede tal til $a = a_1 + ia_2$ er $\bar{a} = a_1 - ia_2$. De tilsvarende vektorer er symmetriske med hensyn til den første koordinatakse. Vi bemærker, at

$$a + \bar{a} = 2\,\mathrm{Re}\, a,\quad a - \bar{a} = 2\,i\,\mathrm{Im}\, a,\quad a\bar{a} = |a|^2.$$

Endvidere har vi regnereglerne

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b},\qquad \overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b} .$$

Dette betyder, at den ved $\varphi(x) = \bar{x}$ bestemte afbildning $\varphi:\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$ bevarer regneoperationerne. En sådan afbildning af et legeme på sig selv kaldes en automorfi.

Eksempel. Regning med komplekse tal foregår som regning med reelle tal, idet det udnyttes, at $i^2 = -1$:

$$(2 - i\,3)(4 - i) = 5 - i\,14$$

$$\frac{4-i}{2-i3} = \frac{(4-i)(2+i3)}{(2-i3)(2+i3)} = \frac{11 + i\,10}{13} = \frac{11}{13} + i\,\frac{10}{13}\,.$$

Af multiplikationsreglen får vi umiddelbart Moivres formel

$$(|a|\cos\theta + i|a|\sin\theta)^n = |a|^n\cos n\,\theta + i|a|^n\sin n\,\theta\,,$$

for $n \in \mathbb{N}$. For $a \neq 0$ gælder formlen endda for $n \in \mathbb{Z}$, hvilket også følger umiddelbart af multiplikationsreglen.

Vi betragter et polynomium P defineret ved

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0\,,$$

hvor koefficienterne $a_\nu = b_\nu + ic_\nu$, $\nu = 0,\ldots,n$, er komplekse tal, og hvor $z = x + iy$ er kompleks. For $\alpha \in \mathbb{C}$ kan vi dividere $P(z)$ med $z - \alpha$, og derved får vi en relation

$$\forall z \in \mathbb{C}(P(z) = (z - \alpha)\,Q(z) + r),$$

hvor divisionsresten r er et komplekst tal. Specielt giver relationen i parentesen, at

$$P(\alpha) = r,$$

og α er derfor rod i P, hvis og kun hvis $z - \alpha$ er divisor i P.

Hvis α er rod i polynomiet P, som er af n^{te} grad, har vi derfor

$$P(z) = (z - \alpha)\, Q(z),$$

hvor Q er et polynomium, hvis grad er n - 1. Det kan tænkes, at Q ikke har α som rod, men under alle omstændigheder findes der et naturligt tal $p \leq n$, således at

$$P(z) = (z - \alpha)^p\, Q_1(z), \quad Q_1(\alpha) \neq 0,$$

og vi siger da, at roden α har multiplicitet p, eller, at α er en p-dobbelt (p-multipel)rod. Når vi tæller rødder i et polynomium, er det ofte hensigtsmæssigt at tælle en p-dobbelt rod som p rødder, og det fremgår da umiddelbart af overvejelserne, at et polynomium af grad n højst har n rødder.

Hvad vi indtil nu har sagt om polynomier, gælder for polynomier med koefficienter fra et vilkårligt legeme. Det særlige ved de komplekse tals legeme er gyldigheden af følgende sætning:

Algebraens fundamentalsætning. Et polynomium af n^{te} grad med komplekse koefficienter har netop n komplekse rødder.

De foregående overvejelser viser, at sætningen vil være gyldig, hvis det blot gælder, at et polynomium af grad ≥ 1 har mindst én rod, og vi får samtidig, at hvis P(z) har rødderne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ og højeste koefficient a_n, kan P(z) skrives som et produkt

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)\ldots(z - \alpha_n).$$

Det vil være lidt akavet at vise algebraens fundamentalsætning allerede nu, men vi skal bevise den, når vi har så mange hjælpemidler til rådighed, at beviset går nogenlunde let. Betegnelsen "algebra" blev i en lang periode anvendt om teorien for polynomier, men anvendes nu mere om kompositionsreglernes teori;

og det har bevirket, at algebraens fundamentalsætning nu hører hjemme i matematisk analyse.

Vi vil selvfølgelig ikke nedværdige os til at bygge noget op på algebraens fundamentalsætning, så længe vi ikke har bevist den. Den skal blot fortælle os, at visse metoder, som vi skal udvikle i det følgende, er generelt anvendelige.

Af Moivres formel følger, at ligningen

$$z^n = |a|\cos\theta + i|a|\sin\theta$$

har løsningsmængden

$$\left\{ \sqrt[n]{|a|}\cos\frac{\theta+2p\pi}{n} + i\sqrt[n]{|a|}\sin\frac{\theta+2p\pi}{n} \;\middle|\; p \in \grave{Z} \right\},$$

men værdierne $0,1,\ldots,n-1$ indsat for p vil give os hele løsningsmængden, idet andre værdier af p blot giver os de samme løsninger igen. Den specielle ligning $z^n = 0$ har 0 som n-dobbelt rod.

Eksempel. Vi vil søge at bestemme $z \in \grave{C}$, således at

$$z^2 = a + ib,$$

hvor $a,b \in \grave{R}$. Vi sætter $z = x + iy$, og finder derved ligningerne

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

til bestemmelse af x og y. Heraf fås

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 + b^2)}), \qquad y^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(a^2 + b^2)}-a),$$

og for $b \geq 0$ får vi derfor $z = c$ eller $z = -c$, hvor

$$c = \sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sqrt{(a^2+b^2)}+a))} + i\sqrt{(\tfrac{1}{2}(\sqrt{(a^2+b^2)}-a))}.$$

For $b < 0$ må $+i$ erstattes med $-i$.

Vi vil nu vise en nyttig sætning:

Sætning 1.52. Lad

$$P(z) = \sum_{j=0}^{p} a_j z^j \quad \text{og} \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{q} b_j z^j$$

være polynomier med komplekse koefficienter. Hvis den ene af de følgende tre betingelser er opfyldt, gælder de alle tre:

1). $p = q \wedge a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_p = b_p$.

2). $\forall z \in \mathbb{C}(P(z) = Q(z))$.

3). Antallet af elementer i mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = Q(z)\}$ er større end såvel p som q.

Bevis. Det er helt indlysende, at 1) ⇒ 2) og at 2) ⇒ 3. Vi skal altså blot vise, at 3) ⇒ 1). Antallet af elementer i $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = Q(z)\}$ er antallet af rødder i $P(z) - Q(z)$. Hvis $P(z) - Q(z)$ ikke er nulpolynomiet, er dette antal højst graden af $P(z) - Q(z)$. Hvis 3) er opfyldt, kan vi altså slutte, at $P(z) - Q(z)$ er nulpolynomiet, men det betyder netop, at 1) gælder. Dermed er sætningen bevist.

Af sætning 1.52 fremgår, at $P = Q$ efter behag kan fortolkes på følgende to måder:

1) Udtrykkene $P(z)$ og $Q(z)$ har samme udseende (stemmer overens koefficient for koefficient).

2) P og Q er den samme afbildning af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$.

Endvidere fremgår det, at $P = Q$, såfremt relationen $P(z) = Q(z)$ gælder for uendelig mange værdier af z. Hvis vi ønsker at vise en identitet mellem polynomier, spiller det altså overhovedet ingen rolle om beviset svigter for enkelte specielle værdier af den variable.

Sætning 1.53. Et polynomium $P(z)$ har alle sine koefficienter reelle, hvis og kun hvis $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

Bevis. For

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

får vi

$$\overline{P(z)} = \bar{a}_n \bar{z}^n + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 ,$$

og dette vil for alle z være identisk med $P(\bar{z})$, hvis og kun hvis alle a_ν er reelle. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 1.54. Hvis et polynomium $P(z)$ med alle koefficienter reelle har en rod α, er også $\bar{\alpha}$ en rod og med den samme multiplicitet.

Bevis. Hvis α er reel, er påstanden triviel. Vi antager altså, at α er imaginær. Af sætning 1.54 følger $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$. Endvidere er $\bar{\alpha} \neq \alpha$. Vi har derfor

$$P(z) = (z - \alpha)(z - \bar{\alpha})\, P_1(z),$$

hvor $P_1(z)$ er et polynomium. Nu er

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}$$

et andengradspolynomium med reelle koefficienter, og P_1 har derfor også alle sine koefficienter reelle. Hvis α igen er rod i P_1, er også $\bar{\alpha}$ rod (og omvendt), og vi kan da trække det samme andengradspolynomium ud som faktor endnu engang. Efter endelig mange skridt får vi

$$p(z) = (z - \alpha)^j (z - \bar{\alpha})^j \; P_j(z),$$

hvor hverken α eller $\bar{\alpha}$ er rod i $P_j(z)$. Dermed er sætningen bevist.

Ifølge algebraens fundamentalsætning har et polynomium af n^{te} grad og med lutter reelle koefficienter netop n komplekse rødder, og ifølge sætning 1.54 falder de imaginære i par af indbyrdes konjugerede, og det medfører igen, at polynomiet kan skrives som et produkt af første-og andengradspolynomier med lutter reelle koefficienter, og således at alle andengradspolynomierne har imaginære rødder.

Definition 1.55. Lad P(z) og Q(z) være polynomier af hvilke Q(z) ikke er nulpolynomiet. Lad M være mængden af rødder i Q(z). Den ved

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

definerede afbildning $f: \mathbb{C} \setminus M$ ind i $\mathbb{C}$ kaldes en bruden rational funktion.

Vi vil knytte nogle kommentarer til denne definition. Hvis vi forlænger brøken, d.v.s. multiplicerer P(z) og Q(z) med et og samme polynomium L(z), indskrænker vi definitionsmængden, idet vi nu må inkludere rødderne i L(z) i mængden M, men i den tilbageblevne del af definitionsmængden ændres intet. Omvendt kan forkortning af brøken udvide definitionsmængden. Hvis en relation

(1) $$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} ,$$

hvor $P_1(z)$ og $Q_1(z)$ er to nye polynomier, er opfyldt for uendelig mange værdier af z, gælder

$$P(z)\ Q_1(z) = P_1(z)\ Q(z)$$

for de samme værdier af z og dermed for alle $z \in \mathbb{C}$. Men så er

$$\frac{P(z)\ Q_1(z)}{Q(z)\ Q_1(z)} = \frac{P_1(z)\ Q(z)}{Q(z)\ Q_1(z)} ,$$

hvilket viser, at de to brøker kan fremkomme ved at forkorte én og samme brøk. Hvis P(z) og Q(z) har en rod α fælles, kan brøken $\frac{P(z)}{Q(z)}$ forkortes med $z - \alpha$. Er begge brøkerne i (1) uforkortelige, kan vi derfor slutte, at Q(z) og $Q_1(z)$ har nøjagtig de samme rødder og brøkerne derfor samme definitionsmængde. Ved algebraens fundamentalsætning vises let, at en bruden rational funktion i det væsentlige kun er lig med én uforkortelig bruden rational funktion, men det samme kan også vises rent algebraisk. Det vil vi dog ikke komme ind på. Vi vil regne brudne rationale funktioner ens, når de kan fremgå af hinanden ved at forlænge og forkorte brøkerne.

<u>Definition</u> 1.56. En bruden rational funktion af formen

$$\frac{a}{(z-\alpha)^p} \ ; \quad a,\alpha \in \mathbb{C}, \quad p \in \mathbb{N}$$

kaldes en partialbrøk. En sum af partialbrøker

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{(z-\alpha_j)^{p_j}}$$

kaldes reduceret, hvis alle de optrædende nævnere er indbyrdes forskellige.

Det er klart, at enhver sum af partialbrøker kan reduceres (d.v.s. gøres reduceret) ved at brøker med samme nævner samles til én brøk. Det er også klart, at en sum af den angivne form er en bruden rational funktion, idet alle brøkerne vil have en fællesnævner, som er et polynomium.

I den følgende sætning tænker vi os den brudne, rationale funktions nævner opløst i faktorer af første grad. Dette er altid muligt ifølge algebraens fundamentalsætning, men ved den valgte formulering undgår vi netop at anvende denne sætning.

<u>Sætning</u> 1.57. En bruden rational funktion

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha_1)^{p_1}\cdots(z-\alpha_n)^{p_n}}$$

kan på én og kun én måde fremstilles som en sum af et polynomium og en reduceret sum af partialbrøker. Fremstillingen vil have formen

$$f(z) = P_1(z) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{j_\nu=1}^{p_\nu}\frac{a_{\nu j_\nu}}{(z-\alpha_\nu)^{j_\nu}}\right),$$

idet vi har antaget, at $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ er indbyrdes forskellige.

Bevis. Vi viser først, at f(z) kan fremstilles på den angivne form. Beviset føres ved induktion efter nævnerens grad. Hvis denne er 0, er nævneren 1 og $f(z) = P(z)$, så sagen er klar. Vi antager dernæst at påstanden er vist for alle nævnere af grad $p_1 + \ldots + p_n - 1$. Vi sætter

$$Q(z) = (z-\alpha_2)^{p_2}\cdots(z-\alpha_n)^{p_n},$$

så vi har

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-\alpha_1)^{p_1}\,Q(z)},$$

og vi mærker os, at $Q(\alpha_1) \neq 0$, da vi har antaget, at rødderne $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ er indbyrdes forskellige. Vi har da

$$f(z) = \frac{P(\alpha_1)}{(z-\alpha_1)^{p_1}\, Q(\alpha_1)} + \frac{Q(\alpha_1)\, P(z) - P(\alpha_1)\, Q(z)}{(z-\alpha_1)^{p_1}\, Q(z)\, Q(\alpha_1)},$$

og ved indsættelse af $z = \alpha_1$ i den sidste brøks tæller ser vi, at polynomiet i tælleren har α_1 som rod. Den sidste brøk kan altså forkortes med $z-\alpha_1$. Efter forkortning med $Q(\alpha_1)(z-\alpha_1)$ får nævneren graden $p_1 +\ldots+ p_n-1$, og den sidste brøk har så ifølge induktionsantagelsen en fremstilling af den ønskede form. Den første brøk er en stambrøk. Dermed er påstanden bevist.

Lad os nu antage, at $f(z)$ er lig med to forskellige fremstillinger som sum af et polynomium og en reduceret sum af partialbrøker. Vi får da en relation af formen

$$P(z) = \frac{a_1}{(z-\alpha_1)^{p_1}} +\ldots+ \frac{a_m}{(z-\alpha_m)^{p_m}},$$

hvor $P(z)$ er forskellen mellem de to polynomier og udtrykket på højre side er forskellen mellem de to summer af partialbrøker. Her er konstanterne og $P(z)$ selvfølgelig ikke de samme som i første del af beviset, og $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ betyder ikke mere indbyrdes forskellige tal. Vi kan antage, at summen på højre side er reduceret. Vi fører nu beviset indirekte. Hvis de to fremstillinger virkelig var forskellige, ville summen på højre side ikke forsvinde, og vi kan da tænke os rækkefølgen af leddene valgt, således at p_1 er den højeste eksponent, hvormed $z_1 - \alpha_1$ forekommer på højre side, og dermed at a_1 ikke er nul. Vi ganger nu på begge sider med $(z-\alpha_1)^{p_1}$. Derved får vi

$$P(z)(z-\alpha_1)^{p_1} = a_1 + \frac{a_2(z-\alpha_1)^{p_1}}{(z-\alpha_2)^{p_2}} +\ldots+ \frac{a_m(z-\alpha_1)^{p_1}}{(z-\alpha_m)^{p_m}}.$$

Efter at vi har forkortet brøkerne så meget som muligt, forekommer $z-\alpha_1$ ikke mere i nogen nævner, men i hver tæller i mindst første potens. Da relationen er rigtig for uendelig mange værdier af z, er den også rigtig for $z = \alpha_1$, men indsættelse af $z = \alpha_1$ giver $a_1 = 0$, altså modstrid. Dermed er sætningen bevist.

Eksempler:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) .$$

I et mere kompliceret tilfælde, som f.eks.

$$f(z) = \frac{z^3-2z+3}{(z^2+1)^2} ,$$

benytter vi, at sætningen fortæller os, at fremstillingen har formen

$$\frac{z^3-2z+3}{(z+i)^2(z-i)^2} = P(z) + \frac{a}{(z+i)^2} + \frac{b}{z+i} + \frac{c}{(z-i)^2} + \frac{d}{z-i} .$$

Nu er det så heldigt, at P(z) forsvinder, når f(z) er en ægte brøk. Ved at trække alle brøkerne sammen får vi en ægte brøk. Det ses i det foreliggende tilfælde umiddelbart, at tælleren bliver af højst tredie grad og nævneren bliver af fjerde grad, og sådan en brøk kan selvfølgelig ikke være lig med noget andet polynomium en nulpolynomiet. Vi ganger nu over med nævneren og får

$$z^3-2z+3 = a(z-i)^2 + b(z-i)^2(z+i) + c(z+i)^2 + d(z-i)(z+i)^2.$$

Dette gælder for alle værdier af z. For $z = -i$ får vi specielt

$$i+2i+3 = -4a, \qquad \text{altså} \qquad a = -\tfrac{3}{4}(1+i),$$

og for $z = i$ får vi

$$-i-2i+3 = -4c, \quad \text{altså} \quad c = -\frac{3}{4}(1-i).$$

Altså er

$$a(z-i)^2 + c(z+i)^2 = -\frac{3}{4}\Big((1+i)(z^2-2iz-1) + (1-i)(z^2+2iz-1)\Big) =$$

$$-\frac{3}{4}(2z^2+4z-2) = -\frac{3}{2}z^2 - 3z + \frac{3}{2}.$$

Vi indsætter dette i ligningen, samler de kendte led på venstre side og får

$$z^3 + \frac{3}{2}z^2 + z + \frac{3}{2} = (b(z-i) + d(z+i))(z^2+1).$$

Nu skal ligningen helst kunne forkortes med z^2+1 - ellers har vi regnet fejl. Forkortningen giver

$$z + \frac{3}{2} = b(z-i) + d(z+i).$$

Denne relation gælder for alle værdier af z. For $z = -i$ får vi

$$-i + \frac{3}{2} = -2ib, \quad \text{altså} \quad b = \frac{1}{2} + i\frac{3}{4},$$

og for $z = i$ får vi

$$i + \frac{3}{2} = 2id, \quad \text{altså} \quad d = \frac{1}{2} - i\frac{3}{4}.$$

Dermed er opgaven løst. Resultatet blev

$$\frac{z^3-2z+3}{(z^2+1)^2} = -\frac{3(1+i)}{4(z+i)^2} + \frac{2+i3}{4(z+i)} - \frac{3(1-i)}{4(z-i)^2} + \frac{2-i3}{4(z-i)}.$$

For en uægte brøk som f.eks.

$$f(z) = \frac{z^4+2z^3+z^2+z-1}{z^3+z^2}$$

betaler det sig bedst først at spalte f(z) i et polynomium og en ægte brøk. Ved division af nævnerpolynomiet i tællerpolynomiet får man polynomiet som kvotient og den ægte brøks tæller som rest. I det foreliggende tilfælde får vi

$$f(z) = z+1+\frac{z-1}{z^3+z^2} ,$$

og vi behøver derefter blot at bestemme koefficienterne a,b,c i opspaltningen

$$\frac{z-1}{z^3+z^2} = \frac{z-1}{z^2(z+1)} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z+1} .$$

Ved multiplikation med $z^2(z+1)$ får vi den for alle $z \in \mathbb{C}$ gyldige relation

$$z - 1 = a(z+1) + bz(z+1) + cz^2 .$$

For $z = 0$ får vi $a = -1$. For $z = -1$ får vi $c = -2$. Da de to led med z^2 på højre side må hæve hinanden, kan vi slutte, at $b = 2$. Vi har dermed fundet den ønskede opspaltning

$$f(z) = z + 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} - \frac{2}{z+1} .$$

Hvis nævnerpolynomiet indeholder en faktor $(z-\alpha)^p$, og bestemmelsen af koefficienten a i den tilsvarende partialbrøk giver $a = 0$, betyder det, at den brudne rationale funktion kan forkortes med $z-\alpha$. Det er ikke nødvendigt på forhånd at sikre sig, at den brudne rationale funktion er uforkortelig.

Særlig interesse knytter sig til det tilfælde, hvor alle koefficienter i den brudne rationale funktion $f(z)$ er reelle. I dette specielle tilfælde tilfredsstiller $f(z)$ betingelsen

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z) .$$

De ikke reelle faktorer i nævnerpolynomiet falder i par $(z-\alpha)^p$ og $(z-\overline{\alpha})^p$, og leddene i partialbrøksudviklingen falder derfor også i par

$$\frac{a}{(z-\alpha)^q} + \frac{b}{(z-\bar{\alpha})^q} ,$$

og da der kun findes én udvikling af $f(\bar{z})$ i partislbrøker, må det konjugerede udtryk fremkomme ved at erstatte z med $\bar{z}$, altså

$$\frac{\bar{a}}{(\bar{z}-\bar{\alpha})^q} + \frac{\bar{b}}{(\bar{z}-\bar{\alpha})^q} = \frac{a}{(\bar{z}-\alpha)^q} + \frac{b}{(\bar{z}-\bar{\alpha})^q} ,$$

hvilket kun er opfyldt, hvis $b = \bar{a}$. Nu er

$$\frac{a}{(z-\alpha)^q} + \frac{\bar{a}}{(z-\bar{\alpha})^q} = \frac{a(z-\bar{\alpha})^q + \bar{a}(z-\alpha)^q}{((z-\alpha)(z-\bar{\alpha}))^q} .$$

Det konjugerede til polynomiet i tælleren er

$$\bar{a}(\bar{z}-\alpha)^q + a(\bar{z}-\bar{\alpha})^q ,$$

altså netop det polynomium, der fås af tællerpolynomiet ved at erstatte z med $\bar{z}$. Dette medfører, at tællerpolynomiet i summen af de to partialbrøker har reelle koefficienter. De to partialbrøker tilsammen giver således et udtryk af formen

$$\frac{S(z)}{(z^2+\beta z+\gamma)^q}$$

med reelle koefficienter, og tællerpolynomiet har graden q. For $q > 1$ kan vi dividere en faktor af nævneren op i tælleren, og derved få

$$S(z) = (z^2+\beta z+\gamma)S_1(z) + b_1 z + c_1 ,$$

så brøken kan skrives

$$\frac{b_1 z+c_1}{(z^2+\beta z+\gamma)^q} + \frac{S_1(z)}{(z^2+\beta z+\gamma)^{q-1}}$$

og her har $S_1(z)$ graden q-2. Ved at gentage denne proces får vi tilsidst en fremstilling af f(z) som en sum af et reelt polynomium, en sum af reelle partialbrøker og en sum af reelle brøker, hvis nævnere er potenser af reelle andengradspolynomier og hvis tællere er førstegradspolynomier. Dermed har vi vist følgende sætning.

<u>Sætning</u>. 1.58. En bruden rational funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{p_1}\cdots(x-\alpha_n)^{p_n}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{q_1}\cdots(x^2+\beta_mx+\gamma_m)^{q_m}}.$$

kan skrives på formen

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{j_\nu=1}^{p_\nu}\frac{a_{\nu j_\nu}}{(x-\alpha_\nu)^{j_\nu}}\right) + \sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{k_\mu=1}^{q_m}\frac{b_{\mu k_\mu}x+c_{\mu k_\mu}}{(x^2+\beta_\mu x+\gamma_\mu)^{k_\mu}}\right).$$

I det reelle tilfælde kan partialbrøkudviklingen selvfølgelig umiddelbart dannes på basis af den komplekse udvikling, men den kan ofte med fordel konstrueres direkte.

Eksempler.

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)}$$

har en udvikling af formen

$$f(x) = \frac{a_1x+b_1}{(x^2+1)^2} + \frac{a_2x+b_2}{x^2+1} + \frac{a_3x+b_3}{x^2-2x+2},$$

og efter multiplikation med fællesnævneren får vi

$$1 = (a_1x+b_1)(x^2-2x+2) + (a_2x+b_2)(x^2+1)(x^2-2x+2) +$$
$$(a_3x+b_3)(x^2+1)^2 .$$

For $x = i$ får vi specielt

$$1 = (a_1 i + b_1)(1 - i2) ,$$

hvoraf vi får

$$b_1 + ia_1 = \frac{1}{1-i2} = \frac{1}{5}(1+i2); \qquad a_1 = \frac{2}{5} , \; b_1 = \frac{1}{5} ;$$

for $x = 1+i$ får vi

$$1 = (a_3 + b_3 + ia_3)(1+i2)^2 = (a_3 + b_3 + ia_3)(-3+4i),$$

hvoraf

$$a_3 + b_3 = -\frac{3}{25}, \quad a_3 = -\frac{4}{25} , \quad b_3 = \frac{1}{25} .$$

Ved indsættelse får vi nu

$$(a_2 x + b_2)(x^2+1)(x^2-2x+2) =$$

$$1 - \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)(x^2-2x+2) + \left(\frac{4}{25}x - \frac{1}{25}\right)(x^4+2x^2+1) =$$

$$\frac{1}{25} (4x^5 - x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 6x + 14).$$

og forkortelse med x^2+1 giver

$$(a_2 x + b_2)(x^2-2x+2) = \frac{1}{25} (4x^3 - x^2 - 6x + 14),$$

og ved division med x^2-2x+2 får vi

$$a_2 x + b_2 = \frac{1}{25} (4x+7),$$

og dermed har vi fundet den reelle partialbrøksudvikling

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)} = \frac{2x+1}{5(x^2+1)^2} + \frac{4x+7}{25(x^2+1)} - \frac{4x-1}{25(x^2-2x+1)} .$$

Læg mærke til, at vi altid netop indsætter en rod i nævneren for at få ligninger, der kun har to ubekendte. Hvis rødderne i nævneren er meget "grimme", kan det eventuelt betale sig at opstille et ligningssystem med flere ubekendte, og det da bedst at udnytte, at polynomierne på de to sider af lighedstegnet har de samme koefficienter.

For at bestemme partialbrøksudviklingen

$$\frac{5x^2-4x}{(x^2-4x+9)(x^2-6x+12)} = \frac{ax+b}{x^2-4x+9} + \frac{cx+d}{x^2-6x+12} ,$$

skal vi bestemme a,b,c og d, således at

$$5x^2-4x = (ax+b)(x^2-6x+12) + (cx+d)(x^2-4x+9) .$$

Vi udtrykker, at koefficienterne til hver potens af x skal være ens på de to sider af lighedstegnet, og derved får vi følgende ligningssystem

$$\begin{array}{rrrrl} a & & +c & & = 0 \\ -6a & +b & -4c & +d & = 5 \\ 12a & -6b & +9c & -4d & = -4 \\ & 12b & & +9d & = 0 . \end{array}$$

Af den første og den sidste ligning får vi

$$c = -a , \quad d = -\frac{4}{3}b,$$

hvilket indsættes i de to midterste ligninger

$$\begin{aligned} -2a - \tfrac{1}{3}b &= 5 \\ 3a - \tfrac{2}{3}b &= -4 , \end{aligned}$$

som løses på sædvanlig vis. Vi får

$$a = -2 , \ b = -3 , \ c = 2 , \ d = 4 ,$$

så partialbrøksudviklingen bliver

$$\frac{5x^2-4x}{(x^2-4x+9)(x^2-6x+12)} = \frac{2x+4}{x^2-6x+12} - \frac{2x+3}{x^2-4x+9} .$$

Hvis nævneren simpelthen er en potens af et andengradspolynomium, fås partialbrøksudviklingen ved division.

Eksempel.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} .$$

Division af tælleren med x^2+x+1 giver

$$x^3 = (x-1)(x^2+x+1)+1,$$

så vi får

$$\frac{x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+1} .$$

Eksempel. Find den tredie differentialkvotient af

$$\frac{1}{x(x^2-1)} .$$

Ved direkte udregning bliver dette en hel del hårdt arbejde. Vi benytter partialbrøksudviklingen

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

og får let

$$\frac{d^3}{dx^3} \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{(x-1)^4} - \frac{3}{(x+1)^4} .$$

Dermed har vi i hvert fald vist, at partialbrøksudvikling kan være til nytte. Vi skal senere se, at der også er andre anvendelsesmuligheder.

Vi forlader nu polynomierne og de brudne rationale funktioner og vender tilbage til studiet af legemet $\mathbb{C}$ af de komplekse tal. Vi bemærker først, at det er umuligt at organisere $\mathbb{C}$ som et ordnet legeme. Vi har nemlig set, at i et ordnet legeme er alle kvadrater positive eller nul, og det medfører, at $x^2+y^2 = 0$ kun kan gælde for $x=y=0$. Men i $\mathbb{C}$ er $1^2+i^2=0$, og heraf følger altså, at de komplekse tal ikke kan organiseres som et ordnet tallegeme. Når vi siger at et komplekst tal er positivt (negativt), mener vi, at det er reelt og positivt (negativt).

<u>Definition</u> 1.59. En følge (a_n) af komplekse tal siges at konvergere mod $a \in \mathbb{C}$, og vi skriver $(a_n) \to a$, såfremt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqq N(|a-a_n| \leqq \varepsilon).$$

Vi siger, at (a_n) er en fundamentalfølge, såfremt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geqq N(|a_m-a_n| \leqq \varepsilon).$$

<u>Sætning</u> 1.59. Lad (b_n) og (c_n) være reelle talfølger, og lad b og c være reelle tal. Den komplekse talfølge (b_n+ic_n) vil da konvergere mod $b+ic$, hvis og kun hvis $(b_n) \to b$ og $(c_n) \to c$, og den vil være en fundamentalfølge, hvis og kun hvis (b_n) og (c_n) er fundamentalfølger.

Bevis. Hvis $(b_n+ic_n) \to b+ic$ og ε er et positivt tal, kan vi vælge N, således at vi for alle $n \geqq N$ har

$$|(b+ic) - (b_n+ic_n)| \leqq \varepsilon ,$$

men det medfører, at

$$|b-b_n| \leqq \varepsilon \quad \text{og} \quad |c-c_n| \leqq \varepsilon ,$$

og derfor gælder $(b_n) \to b$ og $(c_n) \to c$. Hvis $(b_n) \to b$ og $(c_n) \to c$ og ε er et positivt tal, kan vi vælge N, således at vi for alle

$n \geq N$ har

$$|b-b_n| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{og} \quad |c-c_n| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

men det medfører, at

$$|(b+ic) - (b_n+ic_n)| \leq \varepsilon ,$$

og derfor gælder $(b_n+ic_n) \to (b+ic)$. Påstanden om fundamentalfølger vises på ganske samme måde.

Sætning 1.60. En kompleks talfølge er konvergent, hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge.

Bevis. Den komplekse talfølge (b_n+ic_n) er konvergent, hvis og kun hvis (b_n) og (c_n) er konvergente (ifølge sætning 1.59), altså hvis og kun hvis (b_n) og (c_n) er fundamentalfølger (ifølge sætning 1.50), altså hvis og kun hvis (b_n+ic_n) er en fundamentalfølge (ifølge sætning 1.59). Dermed er sætningen bevist.

Til slut skal vi nævne, at sætning 1.59 medfører, at de fra gymnasiet kendte sætninger om regning med konvergente talfølger også gælder for komplekse talfølger. Beviserne udarter til den kedsommeligst tænkelige rutine, og vi skal blot vise, at $(b_n+ic_n) \to b+ic$ og $(b'_n+ic'_n) \to b'+ic'$ medfører, at $((b_n+ic_n)(b'_n+ic'_n)) \to (b+ic)(b'+ic')$. Udførligt betyder dette, at

$$(b_nb'_n-c_nc'_n + i(b_nc'_n+c_nb'_n)) \to (bb'-cc' + i(bc'+cb')).$$

Efter sætning 1.59 skal vi altså blot vise, at

$$(b_nb'_n-c_nc'_n) \to bb'-cc' \text{ og } (b_nc'_n+c_nb'_n) \to bc'+cb',$$

men ved regnereglerne for reelle talfølger, følger dette jo af, at

$$(b_n) \to b, \ (c_n) \to c, \ (b'_n) \to b', \ (c'_n) \to c' .$$

Hermed afslutter vi gennemgangen af de reelle og de komplekse tal.

Opgaver

The idea is the important thing.

Tom Lehrer.

Opgaver til kapitel 1.

Indledning.

For næsten alle matematiske opgaver gælder, at der spørges efter et ræsonnement. Dette indrømmes ofte ganske åbent i opgavens tekst, idet spørgsmålet stillet på formen: "Bevis,at...". I andre tilfælde spørger opgaven imidlertid efter en talværdi, en funktion, en relation e.l., men også i dette tilfælde er ræsonnementet , der begrunder det rigtige svar, vigtigere end svaret selv.

For at besvare en opgave må man først finde frem til de rigtige svar på de stillede spørgsmål og til en begrundelse af disse svar. Dernæst må man redigere besvarelsen af opgaven, idet denne i reglen kun bør omfatte selve svaret tillige med begrundelsen, men ikke de overvejelser, der har ført til opdagelsen af det rigtige svar.

Det lader sig ikke gøre at angive nogen metode, som med sikkerhed fører frem til en opgaves løsning. Visse muligheder kan man dog altid forsøge.

1. Man tænker over, om man har lært en rutinemetode, der vil føre til løsningen.

2. Man tænker over, om problemet minder så meget om et i teksten behandlet problem eller om et andet problem, hvis løsning man kender, at man kan løse opgaven ved at kopiere den der benyttede metode, eventuelt med visse ændringer.

Opgaver

3. Man gør sig klart, hvilket råmateriale man har at bygge på (det givne, samt kendte resultater, der har med sagen at gøre). Man pusler med dette materiale og ser, hvad der kommer ud af det - men under dette arbejde må man selvfølgelig ikke tabe målet af sigte.

4. Hvis studiet af råmaterialet ikke fører til målet, kan man tænke sig opgaven løst og studere den derved opståede situation. Derved får man mulighed for at finde frem til de relationer mellem det givne og det søgte, som eventuelt vil føre til opgavens løsning.

5. Somme tider kan man med større eller mindre sikkerhed gætte svaret på de stillede spørgsmål. Det gælder da om at begrunde, at man har gættet rigtigt. Gætteri er et helt nødvendigt led i løsningen af matematiske problemer.

6. Hvis man ønsker at bevise en påstand, er der også en mulighed at antage, at denne påstand er falsk og at studere den derved opståede situation i håb om at nå frem til et indirekte bevis.

Vi vil kort behandle løsningen af en simpel opgave vedrørende en gruppe. Vi skriver regneoperationen som sædvanlig multiplikation, og vi skriver a^2 for aa og a^{-1} for det inverse element til a. Neutralelementet betegnes e. Opgaven er at vise, at hvis det for ethvert element a i gruppen G gælder, at $a^2 = e$, da er G en kommutativ gruppe.

Dette er en opgave, hvor der ikke er ret meget råmateriale til rådighed. Vi ser lidt nærmere på det givne

$$a^2 = aa = e .$$

Dette viser (hvis vi da ellers får øje på det), at $a^{-1} = a$, altså at hvert element i gruppen er sit eget inverse.

For at vise den kommutative lov, må vi studere to elementer a og b. Da vi ved noget om inverst element, er det rimeligt at se på det inverse element til ab. Det er øjensynligt $b^{-1}a^{-1}$, altså ba, men det er jo også ab - men så er sagen jo klar.

Måske opdager vi ikke, at $a^{-1} = a$, før vi giver os til at pusle med to elementer. Vi ved jo, at

$$(ab)(ab) = e.$$

Det er nærliggende også at se på (ba)(ab), og vi får

$$(ba)(ab) = b(aa)b = bb = e.$$

Men af $(ab)(ab) = (ba)(ab)$ følger jo $ab = ba$.

Endelig kunne vi straks være gået i gang med at studere den relation, der ønskes bevist, altså $ab = ba$. Eventuelt finder vi da på, at

$$ab = ba \iff a\,b\,a^{-1}b^{-1} = e,$$

og hvis vi nu ser på det givne og opdager, at $a^{-1} = a$, når vi igen let til en løsning.

Det, vi først og fremmest vil fremhæve, er, at pusleriet med råmaterialet giver os chancen for at opdage den eller de finesser, der kan føre til opgavens løsning. Det er derfor vigtigt at man holder godt øje med, hvad der sker, mens man arbejder med disse ting. Lykkes det ikke i første omgang, kan det være nyttigt at studere råmaterialet så grundigt, at man har situationen i erindring, når man går fra arbejdet. Så er der en chance for, at man senere vil komme i tanke om, hvad løsningen er.

I mere komplicerede problemer må man være indstillet på, at gode idéer dukker op, mens man arbejder med noget andet. De gode idéer bør efterprøves med det samme, og derfor må man altid være indstillet på at lægge andet arbejde til side.

Visse øvelsesopgaver har en anden form for problemstilling. Det kan dreje sig om opgaver til indøvelse af rutinemetoder. Så må man selvfølgelig benytte rutinemetoden trin for trin, men undervejs bør man holde øjnene åbne- dels for at se, om der skulle være en genvej, dels for at se, om der er chance for en kontrol af regningerne.

Andre øvelsesopgaver forlanger blot et nærmere studium af en bestemt situation. Der kan være spurgt om udseendet af en figur eller en funktions grafiske billede. Opgaver af denne slags er illustrationer, som supplerer den gennemgåede tekst. De er medtaget, fordi de giver de studerende en mulighed for selv at gøre visse opdagelser, og det er både opmuntrende og lærerigt, når det lykkes. De vil blive brugt til gennemgang på tavlen i øvelseskurserne, men ikke til skriftlig aflevering.

Den skriftlige udformning af en opgavebesvarelse omfatter svar på de stillede spørgsmål og begrundelse af disse svar. Det ovenfor behandlede eksempel er en ren bevisopgave; og besvarelsen består derfor blot af selve beviset.

Man indleder redaktionen af beviset med en sortering af materialet, idet unyttige ting udskydes og resten ordnes i rigtig rækkefølge. Så skriver man det sammen udformet ganske som en tekst i en lærebog. Besvarelsen af opgaven ovenfor kan udformes på følgende måde:

For ethvert gruppeelement a er $aa = e$, altså $a = a^{-1}$. For vilkårlige gruppeelementer a og b gælder derfor

$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$

Dermed har vi bevist, at G er en kommutativ gruppe.

Besvarelsen kan også udformes på følgende måde:

Lad a og b være vilkårlige elementer af G, så er

$$(ab)(ab) = e ,$$

og

$$(ab)(ba) = a(bb)a = aa = e,$$

men af $(ab)(ab) = (ab)(ba)$ følger $ab = ba$, og dermed er påstanden bevist.

En meget kortfattet besvarelse:

For $a,b \in G$ er

$$ab = abaa = aba(bb)a = (ab)(ab)(ba) = ba ,$$

hvilket skulle bevises.

Det gælder for matematisk literatur som for al anden litteratur, at hver forfatter har sin personlige stil. Man bør tidligt søge at finde frem til en fremstillingsform, der falder naturligt.

Logisk og matematisk symbolsprog må selvfølgelig indgå i redaktionen af besvarelsen. Nogen anvendelse af sædvanligt sprog er helt uundgåeligt. Anvendelsen af rent symbolsprog kræver helt præcis formulering, og det er ikke praktisk gennemførligt, idet det giver alt for lange besvarelser.

Vi har en matematisk etikette, som giver regler for, hvilke former for svigtende præcision, der er tilladelige. Denne etikette er desværre aldrig blevet nedfældet på papiret, og derfor varierer den temmelig meget fra matematiker til matematiker.

Det er let at kæde led i beregninger sammen ved hjælp af sådanne standardvendinger som

"heraf følger" , "hvilket også kan skrives,"
"og ved indsættelse af (9) i (11) får vi".

Logiske tegn erstattes på naturlig måde med tilsvarende ord, som "eller", "og", "medfører" etc. Sproget tillader dog en væsentlig større frihed i brugen af disse ord. Først og fremmest henledes opmærksomheden på, at de logiske tegn kun kan stå mellem relationer. Dertil kommer, at ordene har andre betydninger (f.eks. "syv og ni er seksten").

Kvantoren $\forall$ erstattes i reglen bedst med "enhver". Ordet "alle" er ikke altid helt nemt at omgås. Tegnet $\Leftrightarrow$ erstattes med "ækvivalent med" eller "ensbetydende med", men vendingerne "hvilket også kan skrives" eller "anderledes udtrykt" kan også anvendes. I litteraturen møder man ofte formler knyttet sammen med "eller" eller "d.v.s.", men det er ikke altid klart, om de står for $\Leftrightarrow$ eller for $\Rightarrow$.

Visse selvfølgeligheder bør ikke udelades. Har man vist A og $A \Rightarrow B$, bør man fremhæve, at dermed er B også bevist. Har man vist en påstand, der begynder med $\exists x$, bør man ikke glemme at vælge et x i overensstemmelse med de anførte betingelser, før man arbejder videre med dette x. I en relation, der begynder med $\exists x$, optræder der nemlig slet ikke noget "rigtigt" x.

Efter disse almindelige betragtninger vil vi fumle os igennem løsningen af endnu en opgave:

For en kompleks talfølge (a_n) gælder

$$\exists \Lambda \in \,]0,\infty[\; \forall n \in \mathbb{N} \; (|a_{n+1}-a_n| \leqq \frac{\Lambda^n}{n!}) .$$

Vis, at talfølgen er konvergent.

Her er ikke spurgt om grænseværdien. Den stillede betingelse er slet ikke tilstrækkelig til at fastlægge følgen, og grænseværdien er vel heller ikke fastlagt ved det givne. Det er under disse omstændigheder nærliggende at forsøge at vise, at følgen er en fundamentalfølge. Vi forsøger derfor at vurdere $a_{n+p} - a_n$, hvilket kan skrives på formen

$$(a_{n+1}-a_n) + (a_{n+2}-a_{n+1}) +\ldots+ (a_{n+p}-a_{n+p-1}) ,$$

og dets numeriske værdi kan altså, når Λ er valgt, vurderes ved

$$\frac{\Lambda^n}{n!} + \frac{\Lambda^{n+1}}{(n+1)!} +\ldots+ \frac{\Lambda^{n+p-1}}{(n+p-1)!} .$$

Denne sum er desværre ikke alt for overskuelig. Lad os kalde den $S_{u,p}$ og forsøge at vurdere den nogenlunde forsigtigt:

$$S_{u,p} = \frac{\Lambda^n}{n!}\left(1 + \frac{\Lambda}{n+1} + \frac{\Lambda^2}{(n+1)(n+2)} +\ldots+ \frac{\Lambda^{p-1}}{(n+1)\ldots(n+p-1)}\right) \leqq$$

$$\frac{\Lambda^n}{n!}\left(1 + \frac{\Lambda}{n} + \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^2 +\ldots+ \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^{p-1}\right) .$$

Nu står der en kvotientrække i parentesen. Den sum er

$$\frac{1 - (\frac{\Lambda}{n})^p}{1 - \frac{\Lambda}{n}} .$$

Vi er jo kun interesserede i store værdier af n. Så er det rimeligt straks at antage $n > \Lambda$, og vi ser da, at det sidste udtryk kan vurderes ved

$$\frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{n}} = \frac{n}{n - \Lambda} .$$

Nu er p forsvundet. Vi har alt i alt fået vurderingen

$$S_{n,p} \leqq \frac{\Lambda^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-\Lambda} = \frac{\Lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{n}} .$$

Her går den sidste faktor mod 1. Vi må håbe, at den første faktor går mod 0. Den kan åbenbart skrives

$$\frac{\Lambda}{1} \cdot \frac{\Lambda}{2} \cdot \frac{\Lambda}{3} \cdots \frac{\Lambda}{n} .$$

Det ser jo ganske lovende ud - men det er vor opgave at bevise, at den går mod 0. Øjensynligt begynder $\frac{\Lambda^n}{n!}$ at aftage, så snart n bliver større end Λ. Vi vælger $n_o > \Lambda$, og for $n > n_o$ har vi da vurderingen

$$\frac{\Lambda^n}{n!} = \frac{\Lambda^{n_o}}{n_o!} \cdot \frac{\Lambda}{n_o+1} \cdots \frac{\Lambda}{n} \leqq \frac{\Lambda^{n_o}}{n_o!} \cdot \frac{\Lambda}{n} ,$$

hvilket faktisk går mod 0. Ialt får vi

$$S_{n,p} \leqq \frac{\Lambda^{n_o}}{n_o!} \quad \frac{\Lambda}{n} \quad \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{n}} ,$$

og vi behøver blot at vælge N, således at udtrykket på højre side

Opgaver

er $\leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$. Dermed er vi parate til at formulere en besvarelse. Det gør ikke noget, at besvarelsen ser ud, som om vi har været meget forudseende. Vi kan endda vælge Λ som et helt tal og vælge $n_o = \Lambda$. Altså:

Vi vælger $\Lambda \in \mathring{N}$, således at

$$\forall n \in \mathring{N} \left(|a_{n+1} - a_n| \leqq \frac{\Lambda^n}{n!}\right) .$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \mathring{N}$, således at $N > \Lambda$ og

$$\forall n \geqq N \left(\frac{\Lambda^{\Lambda+1}}{\Lambda! n} \cdot \frac{1}{1-\frac{\Lambda}{n}} \leqq \varepsilon\right) ,$$

og for $n \geqq N$, $p > 0$ har vi da

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k-1})\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| \leqq$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} \leqq \frac{\Lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{\Lambda}{n}\right)^k \leqq \frac{\Lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{n}} \leqq$$

$$\frac{\Lambda^\Lambda}{\Lambda!} \cdot \frac{\Lambda}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{n}} \leqq \varepsilon .$$

Altså er (a_n) en fundamentalfølge og derfor konvergent.

Lette opgaver.

1. Vi indfører en kompositionsregel på $\mathbb{N}$ ved en af følgende definitioner

$$\text{i). } p\hat{x}q \text{ er det største af tallene } p \text{ og } q.$$
$$\text{ii). } p\hat{x}q \text{ er største fælles mål for } p \text{ og } q.$$
$$\text{iii). } \forall p,q \in \mathbb{N}(p\hat{x}q = q).$$

Angiv i hvert af de tre tilfælde, om $\hat{x}$ er associativ og kommutativ, og om der findes et neutralelement.

2. Vis, at der findes et legeme med de fire elementer 0 (nulelement), 1(ételement), a og $a^2 = aa$, hvor $1+1 = a+a = a^2+a^2 = 0$.

3. Vis, at betingelsen 1) i definition 1.13 ikke kan udledes af de øvrige betingelser i definitionen, idet valget $G_+ = \emptyset$, $G_- = G \setminus \{0\}$ sikrer, at alle betingelserne pånær 1) er opfyldt.

4. Hvilke reelle talfølger (a_n) opfylder følgende betingelse:

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Rightarrow |a-a_n| \leq \varepsilon).$$

5. Angiv for ethvert $x \in \mathbb{R}$ infimum og supremum for talmængden

$$\left\{\frac{x^n}{n!} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

6. Vis, at talfølgen $(\frac{x^n}{n!})$ konvergerer mod 0 for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

7. En følge (a_n) af positive tal er bestemt ved, at

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\ (a_{n+1}^2 = a_n + 2).$$

Vis, at følgen er strengt voksende, og at 2 er et overtal for følgen.

Vis dernæst, at følgen konvergerer mod 2.

8. Vis, at $[a_1,b_1] + [a_2,b_2] = [a_1+a_2,b_1+b_2]$ og angiv tilsvarende relationer for andre typer af intervaller.

9. Varier den sidste og vanskeligere del af beviset for sætning 1.38 ved at udnytte den i sætning 1.26 omtalte karakterisering af supremum for en mængde.

10. Giv et indirekte bevis for sætning 1.37 ved at udnytte sætning 1.26.

11. Angiv infimum og supremum for $\{p^{-1}+q^{-1}+r^{-1} \mid p,q,r \in \grave{N}\}$.

12. Angiv infimum og supremum for $\{\sin x+(1+\mathrm{tg}\, y)^{-1} \mid x,y \in [0,\frac{\pi}{2}[\}$.

13. Angiv værdierne af de i sætning 1.39 optrædende størrelser for $M = [0,\frac{1}{2}\pi]$, $f = \cos$, $g = \sin$.

14. Bestem $\lim\inf(a_n)$ og $\lim\sup(a_n)$, idet

$$a_n = \frac{n}{n+1}\cos\tfrac{1}{2}n\pi + \frac{n+1}{n}\sin\tfrac{1}{2}n\pi \,.$$

15. Lad (a_n) og (b_n) være begrænsede, reelle talfølger. Vis, at

$$\lim\inf(a_n) + \lim\inf(b_n) \leqq \lim\inf(a_n+b_n) \leqq \left\{\begin{matrix} \lim\inf(a_n) + \lim\sup(a_n) \\ \\ \lim\sup(a_n) + \lim\inf(a_n) \end{matrix}\right\} \leqq$$

$$\lim\sup(a_n+b_n) \leqq \lim\sup(a_n) + \lim\sup(b_n).$$

16. Lad (a_n) være en reel talfølge, som konvergerer mod $a \in \grave{R}$. Lad (b_n) være en vilkårlig talfølge. Vis, at

$$\limsup(a_n+b_n) = a + \limsup b_n$$
$$\liminf(a_n+b_n) = a + \liminf b_n .$$

17. Lad (a_n) være en reel talfølge, og lad k være et positivt, reelt tal. Vis, at

$\liminf(ka_n) = k \liminf(a_n)$, $\limsup(ka_n) = k \limsup(a_n)$.

Hvad gælder for $k < 0$, og for $k = 0$?

18. Angiv to reelle talfølger (a_n) og (b_n), således at

$$\forall n(a_n < b_n) , \limsup(a_n) > \liminf(b_n).$$

19. Lad φ: $\dot{N}$ ind i $\dot{Q}$ være en surjektiv afbildning (d.v.s. $\varphi(\dot{N}) = \dot{Q}$). Vis, at følgen $(\varphi(n))$ for ethvert $a \in \dot{R}$ har en delfølge, som konvergerer mod a.

20. Lad (a_n) være en reel talfølge og a et reelt tal. Det er givet, at hver delfølge af (a_n) har en delfølge, som konvergerer mod a. Kan man deraf slutte, at $(a_n) \to a$?

21. En talfølge (a_n) er givet, ved at $a_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}p^{-1}$. Vis at

$$\forall n \in \dot{N}\ \forall p \geqq 0 \ (|a_{n+p}-a_n| \leqq \frac{1}{n+1}) ,$$

og udled deraf, at følgen er en fundamentalfølge og derfor konvergent. Vi skal senere se, at grænseværdien er log 2(naturlig logaritme).

22. Samme opgave for $a_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}(2p-1)^{-1}$. I dette tilfælde er grænseværdien $\frac{1}{4}\pi$, hvilket også vil blive vist senere.

23. Bestem $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, således at

$$2z_1 - (1+i)z_2 = 0$$
$$z_1 - z_2 = -1 .$$

24. Giv en kort beskrivelse (figur) af punktmængderne

$$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\} , \quad \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-2| = 3\} ,$$

$$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1|+|z+1| = 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-1|+|z+1| = 3\} .$$

25. Giv en kort beskrivelse af punktmængden

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 \vee z = 1 \vee \operatorname{Arg} \tfrac{z-1}{z+1} \in [\alpha,\beta]\} ,$$

hvor $[\alpha,\beta]$ er et delinterval af $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

26. Vis at punktmængden

$$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, a|z|^2 + pz + \overline{pz} + b = 0\},$$

hvor $a,b \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{C}$ er tom, hvis $ab > |p|^2$, består af et enkelt punkt, hvis $ab = |p|^2$ og $a^2 + b^2 \neq 0$, medens den for $ab < |p|^2$ er en cirkel, hvis $a \neq 0$ og en ret linie, hvis $a = 0$. Vis, at enhver cirkel og enhver ret linie i den komplekse plan kan fremstilles på den angivne form.

27. Vis, at den ved $f(z) = z^{-1}$ bestemte afbildning $f: \mathbb{C}\setminus\{0\}$ på $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ er bijektiv, og at billedet af en cirkel eller ret linie er en cirkel eller ret linie (med et rimeligt forbehold vedrørende rette linier og cirkler gennem 0). Hvilke rette linier afbildes i rette linier, og hvilke cirkler afbildes i cirkler ?

28. Lad $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ være fra nul forskellige komplekse tal. Vis, at vektorerne $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$ er vinkelrette på hinanden, hvis og kun hvis $a\bar{b} + \bar{a}b = 0$.

29. Find alle løsninger til hver af ligningerne

$$z^5 = -4 - i4 , \quad z^6 = -1 .$$

30. Løs ligningen

$$z^2 - (2+i4)z - 3+i2 = 0.$$

31. Vis, at polynomiet

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

har to dobbeltrødder, og angiv disse.

32. Angiv komplekse partialbrøksudviklinger af følgende brudne rationale funktioner

$$\frac{z-i}{(z+i)^2} , \quad \frac{1}{z^2+1} , \quad \frac{1}{z^2+2z+2} .$$

33. Angiv komplekse partialbrøksudviklinger af

$$\frac{z^3-4z+9}{z^2(z-1)(z+2)} , \quad \frac{1}{z^4-1} , \quad \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} ,$$

hvor $\alpha, \beta \in \check{C}$

34. Angiv for $n \in \check{N}$, $a, b \in \check{C}$ partialbrøksudviklinger af

$$\frac{1}{z^n(1-z)} , \quad \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} .$$

35. Angiv reelle partialbrøksudviklinger af

$$\frac{1}{x^4-1} , \quad \frac{1}{x^6-1} , \quad \frac{1}{x^8+1} .$$

36. Angiv reelle partialbrøksudviklinger af

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)(x^2+1)}\ ,\quad \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+2)^2}\ .$$

37. Udregn

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\ ,\quad \int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)^2}\,dx\ .$$

38. Udregn den tredie afledede (d.v.s. differentialkvotienten af tredie orden) af

$$\frac{x^6}{(x+1)^3}$$

39. Angiv den reelle partialbrøksudvikling af

$$\frac{2x^3}{x^4+4}\ .$$

40. Hvilke fejl er begået i følgende regning:

$$1 = \sqrt{(-1\cdot-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = -1\ .$$

41. Vis den for alle komplekse talfølger gældende logiske relation

$$(a_n) \to a \ \Rightarrow\ (|a_n|) \to |a|\ .$$

42. Undersøg om følgende talfølger er konvergente:

$$(i^n),\quad \left(\left(\frac{2+i3}{4}\right)^n\right),\quad \left(\frac{(n+1)^2+in^2}{n^2+i(n+1)^2}\right),\quad \left(\left(\frac{3+i4}{5}\right)^n\right)\ .$$

Vanskeligere opgaver.

43. På mængden af alle par (c,x), $c \in]0,\infty[$, $x \in \mathring{R}$ indfører vi kompositionsreglen

$$(c_1,x_1)\hat{x}(c_2,x_2) = \left(c_1+c_2,\ \frac{c_1x_1+c_2x_2}{c_1+c_2}\right)\ .$$

Er den associativ og findes der et neutralt element ?

44. Vi antager, at det er bevist, at enhver bruden rational funktion på én og kun på én måde kan skrives som en uforkortelig brøk
$$\frac{a_p x^p + \dots + a_1 x + a_o}{x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_o} .$$
Vis, at de således normerede funktioner ved sædvanlig addition og multiplikation udgør et legeme K. Vis, at K indeholder en kopi af $\mathring{R}$. Vi kalder den brudne rationale funktion positiv eller negativ, eftersom a_p er positiv eller negativ. Vis, at K derved bliver et ordnet legeme. Vis, at K ikke bliver Archimedesk ordnet.

45. Lad $[a_1,b_1]$ være et delinterval af $]0,\infty[$. Vi definerer reelle talfølger (a_n) og (b_n), idet vi for $n \in \mathring{N}$ sætter
$$a_{n+1} = \frac{a_n b_n}{2(a_n+b_n)} , \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n).$$
Vis, at (a_n) bliver voksende og (b_n) aftagende. Vis, at (a_n) og (b_n) begge konvergerer mod $\sqrt{(a_1 b_1)}$.

46. Lad p,p_1,p_2,q,q_1,q_2 være reelle tal, som tilfredsstiller
$$p_1+p_2 \leqq p \leqq \begin{Bmatrix} p_1+q_2 \\ p_2+q_1 \end{Bmatrix} \leqq q \leqq q_1+q_2 .$$
Vis, at der for enhver mængde M med ikke alt for få elementer eksisterer afbildninger f_1,f_2: M ind i $\mathring{R}$, således at
$$p_1 = \inf f_1(M), \quad p_2 = \inf f_2(M), \quad p = \inf(f_1+f_2)(M),$$
$$q_1 = \sup f_1(M), \quad q_2 = \sup f_2(M), \quad q = \sup(f_1+f_2)(M).$$
Heraf følger, at sætning 1.39 ikke kan skærpes væsentligt.

47. For en talfølge (a_n) gælder
$$\forall n \in \mathring{N} \; (a_n > 0 \land a_{n+2} = a_n+a_{n+1}).$$

Vis, at $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ er konvergent, og angiv grænseværdien.

48. Lad b være et positivt tal, og lad (a_n) være en følge af positive tal, som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall n \in \mathring{N}\ \left(a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)\right).$$

Vis, at $(a_n) \to \sqrt{b}$. Prøv at udnytte dette til en tilnærmet beregning af $\sqrt{5}$.

49. Tegn en skitse af punktmængden A+A, idet $A \subset \mathring{C}$ er givet ved

$$A = \{z=x+iy \in \mathring{C} \mid x \geq 0 \wedge |z| = 1\}.$$

Undersøg, om den ved $\varphi(z_1,z_2) = z_1+z_2$ definerede afbildning φ: A×A på A+A er bijektiv.

50. Prøv at bestemme partialbrøksudviklingen

$$\frac{1}{z^p(1-z)^q} = \frac{a_p}{z^p} + \dots + \frac{a_1}{z} + \frac{b_q}{(1-z)^q} + \dots + \frac{b_1}{1-z}.$$

Multiplicer med z^p, differentier k gange $(0 \leq k < p)$ og sæt $z = 0$. Undlad at udregne differentialkvotienterne af de led, for hvilke det kan forudses, at der kommer 0, når $z = 0$ indsættes. Derved bestemmes a_{p-k}. Resultatet bliver en binomialkoefficient

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad .$$

Opstil nu den tilsvarende (halvvejs kendte) udvikling for den funktion, der fås ved at bytte p og q. I denne erstattes z med 1-z. Derved fås de resterende koefficienter.

51. Vis, at et trediegradspolynomium $P(z) = z^3+az+b$ med komplekse koefficienter har en rod (f.eks. ved at løse de sammenhørende

ligninger $P(u+v) = 0$, $3uv = -a$). Gennemfør regningen for den specielle ligning med reelle rødder α, β og $-\alpha-\beta$, samt for ligningen med rødder -2α, $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$, hvor α og β er reelle. For hvilke reelle a,b har ligningen alle sine rødder reelle, og for hvilke har den en multipel rod ? Angiv en metode til løsning af en generel trediegradsligning.

52. Vis, at et fjerdegradspolynomium $P(z) = z^4+az^2+bz+c$ har en faktorisering af formen

$$P(z) = (z^2 + pz + q)(z^2 - pz + r),$$

hvor p kan vælges som en vilkårlig rod i polynomiet

$$z^6 + 2a\,z^4 + (a^2-4c)z^2 - b^2 = 0\ ,$$

og vis derved, at ethvert fjerdegradspolynomium med komplekse koefficienter har en rod. (Lad være at gennemføre regningerne).

Svære opgaver.

De "svære" opgaver, som bringes i tilslutning til de fleste kapitler i disse forelæsningsnoter, er så vanskelige, at de fleste studerende kun vil kunne regne ganske få af dem. De er ikke alle lige svære, men de kræver enten temmelig megen opfindsomhed eller en ret betydelig arbejdsindsats. De svære opgaver vil ikke blive anvendt ved øvelserne. De er først og fremmest ment som en udfordring til de dygtige studerende. Enhver student har ret til når som helst at aflevere besvarelser af de svære opgaver til sin professor eller instruktor, og sådanne besvarelser vil da altid blive rettet.

53. Med K betegner vi mængden af alle afbildninger φ: $\grave{Z}$ ind i $\grave{R}$, som tilfredsstiller betingelsen

$$(1) \qquad \exists p \in \grave{Z}\ \forall k < p(\varphi(k) = 0).$$

Mængden K er organiseret ved sædvanlig addition og ved en multiplikation, der defineres ved

$$\varphi\psi(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k)\ \psi(n-k),$$

idet (1) medfører, at denne sum kun indeholder endelig mange fra nul forskellige led, og summen fortolkes som summen af disse led. Vi kalder φ positiv (negativ), hvis $\varphi(p)$ er positiv (negativ) for den mindste værdi af p, for hvilken $\varphi(p) \neq 0$, hvis en sådan værdi eksisterer. Vis, at K er et ordnet legeme, men at K ikke er Archimedes^{k}ordnet. Vis, at det for en aftagende følge af afsluttede begrænsede intervaller på K gælder, at intervallerne vil have et fælles punkt, hvis intervallængden konvergerer mod 0, men ikke altid ellers.

54. Vis, at det for et ordnet legeme K gælder, at følgende to egenskaber er ækvivalente:

i). For enhver aftagende følge af afsluttede, begrænsede intervaller, hvis længder konvergerer mod 0, vil intervallerne have et fælles punkt.

ii). Det almindelige konvergensprincip gælder på K.

Kapitel 2.

Uendelige summer.

Souvent même on se servira du langage courant d'une manière bien plus libre encore, par des abus de langage volentaire, par l'omission pure et simple des passages qu'on présume pouvoir être restitués aisément par un lecteur tant soit peu exercé, par des indications intraduicibles en langage formalisé et destinées à faciliter cette restitution.

N. Bourbaki.

Lad J og M være vilkårlige mængder, og lad φ: J ind i M være en vilkårlig afbildning. For $j \in J$ vil vi betegne $\varphi(j)$ med a_j, og vi vil da også betegne afbildningen med symbolet $(a_j | j \in J)$ eller, mindre præcist, med (a_j), og vi vil kalde afbildningen en familie af elementer af M med indexmængden J. For $J = \grave{N}$ bliver familien specielt en følge.

Enhver mængde M kan opfattes som en familie med indexmængde $J = M$ og med φ som den identiske afbildning.

Vi vil specielt interessere os for tilfældet $M = \grave{C}$. I dette tilfælde er $(a_j | j \in J)$ altså en familie af komplekse tal. Hvis $\forall j \in J (a_j \in \grave{R})$, er $(a_j | j \in J)$ en familie af reelle tal. Lejlighedsvis vil vi også beskæftige os med familier af positive tal.

Hvis J er en endelig mængde, og $(a_j | j \in J)$ en familie af komplekse tal, eksisterer familiens sum $\sum_{j \in J} a_j$. I det følgende vil vi definere summer af visse familier med uendelig indexmængder.

<u>Definition</u> 2.1. Hvis J er en vilkårlig mængde, betegner vi med $\grave{D}(J)$ mængden af delmængder af J og med $\tilde{D}(J)$ mængden af endelige delmængder af J.

<u>Definition</u> 2.2. En familie $(a_j \mid j \in J)$ af komplekse tal siges at have summen $a \in \grave{C}$, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists J_0 \in \tilde{D}(J) \; \forall I \in \tilde{D}(J) \; (J \supseteq J_0 \Rightarrow \left| a - \sum_{j \in I} a_j \right| \leqq \varepsilon).$$

Vi skriver da $\sum_{j \in J} a_j = a$, og familien $(a_j \mid j \in J)$ kaldes summabel.

Skrivemåden $\sum_{j \in J} a_j = a$ ville selvfølgelig være ganske forkastelig, hvis det kunne tænkes, at en familie havde to forskellige summer. Derfor viser vi følgende sætning .

<u>Sætning</u> 2.3. Hvis en familie $(a_j \mid j \in J)$ af komplekse tal har summen a og summen b, er $a = b$.

Bevis. Vi antager, at $(a_j \mid j \in J)$ har både sum a og sum b. Lad ε være et positivt tal. Vi kan da vælge $J_1, J_2 \subsetneq \tilde{D}(J)$, således at

$$\forall I \in \tilde{D}(J) \; (I \supseteq J_1 \Rightarrow \left| a - \sum_{j \in J} a_j \right| \leqq \varepsilon)$$

$$\forall I \in \tilde{D}(J) \; (I \supseteq J_2 \Rightarrow \left| b - \sum_{j \in J} a_j \right| \leqq \varepsilon).$$

Vi vælger specielt $I = J_1 \cup J_2$, og vi har da

$$|a - b| \leqq \left| a - \sum_{j \in I} a_j \right| + \left| b - \sum_{j \in I} a_j \right| \leqq 2\varepsilon ,$$

og da dette således er vist for ethvert $\varepsilon > 0$, kan vi slutte, at $a = b$. Dermed er sætningen bevist.

Hvis J specielt er en endelig sum, kan vi i definition 2.2

for ethvert ε vælge $J_o = J$, og vi ser, at a i det tilfælde bliver den sædvanlige sum $\sum_{j\in J} a_j$. Der er således tale om en udvidet brug af det sædvanlige sumtegn. Strengt taget burde vi indføre et nyt tegn for det udvidede begreb, ligesom vi også burde anvende et nyt ord i stedet for sum, idet de kendte sætninger om summer ikke alle har gyldighed for familier af summer. Sproglige misbrug (abus de langage) som denne bidrager imidlertid i høj grad til at fremme overskueligheden, og de forekommer derfor meget hyppigt i matematikken.

Om en familie er summabel eller ikke kan afgøres ved følgende sætning, der nøje svarer til det almindelige konvergensprincip for en talfølge:

Sætning 2.4. En familie $(a_j | j\in J)$ af komplekse tal er summabel, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J_o \in \mathfrak{D}(J)\ \forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (I\cap J_o = \emptyset \Rightarrow |\sum_{j\in I} a_j| \leqq \varepsilon).$$

Bevis. Lad os først antage, at $\sum_{j\in J} a_n = a$, og lad ε være et positivt tal. Vi kan da vælge $J_o \in \mathfrak{D}(J)$, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (I \supseteq J_o \Rightarrow |a - \sum_{j\in I} a_j| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

For $I \in \mathfrak{D}(J)$ og $I \cap J_o \neq 0$ har vi da

$$\left|\sum_{j\in I} a_j\right| = \left|\sum_{j\in J_o\cup I} a_j - \sum_{j\in J_o} a_j\right| \leqq$$

$$\left|a - \sum_{j\in J_o\cup I} \varepsilon_j\right| + \left|a - \sum_{j\in J_o} a_j\right| \leqq \varepsilon \quad .$$

Dermed har vi vist, at betingelsen er nødvendig.

Lad os nu antage, at $(a_n | j \in J)$ er en familie af komplekse tal, for hvilken betingelsen er opfyldt. For $n \in \mathbb{N}$ vælger vi $J_n \in \mathfrak{D}(J)$, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J) \ (I \cap J_n = \emptyset \Rightarrow |\sum_{j \in I} a_j| \leqq \frac{1}{n}) ,$$

og vi sætter $J'_n = J_1 \cup \ldots \cup J_n$, og $\sum_{j \in J'_n} a_n = b_n$. For $p > 0$ har vi da

$$|b_{n+p} - b_n| = |\sum_{j \in J'_{n+p} \setminus J'_n} a_n| \leqq \frac{1}{n} ,$$

da $(J'_{n+p} \setminus J'_n) \cap J_n = \emptyset$. Heraf følger, at (b_n) er en fundamentalfølge, og der eksisterer derfor et komplekst tal a, således at $(b_n) \to a$. For $I \supseteq J'_n$ har vi

$$|a - \sum_{j \in I} a_n| \leqq |a - \sum_{j \in J'_n} a_n| + |\sum_{j \in I \setminus J'_n} a_n| \leqq \frac{2}{n} ,$$

hvilket netop viser, at $(a_j | j \in J)$ er summabel med sum a.

Det viser sig imidlertid, at der findes bekvemmere metoder til at afgøre om en forelagt familie af komplekse tal er summabel. Det viser sig nemlig, at det er både nødvendigt og tilstrækkeligt, at mængden af delsummer er begrænset, og det viser sig endvidere, at man ved undersøgelsen af dette forhold kan tillade sig at erstatte hvert tal i familien med sin numeriske værdi, så det bliver tilstrækkeligt at undersøge familier af positive tal. Dette er indholdet af den følgende sætning.

<u>Sætning</u> 2.5. Hvis en familie $(a_j | j \in J)$ af komplekse tal har én af følgende tre egenskaber, har den dem alle tre:

i). $(a_j \mid j\in J)$ er summabel.

ii). Mængden $\{|\sum_{j\in I} a_j| \mid I \in \mathfrak{D}(J)\}$ er begrænset

iii). Mængden $\{\sum_{j\in I} |a_j| \mid I \in \mathfrak{D}(J)\}$ er begrænset.

Bevis. Vi viser først, at i) ⇒ ii). Vi antager altså, at $(a_j \mid j\in J)$ er summabel. Af sætning 2.4 følger, at vi kan vælge $J_o \in \mathfrak{D}(J)$, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (I\cap J_o = \emptyset \Rightarrow |\sum_{j\in I} a_j| \leq 1).$$

For $I \in \mathfrak{D}(J)$ har vi da

$$|\sum_{j\in I} a_j| = |\sum_{j\in I\cap J_o} a_j + \sum_{j\in I\setminus J_o} a_j| \leq |\sum_{j\in I\cap J_o} a_j| + 1.$$

Da antallet af alle mulige forskellige mængder $I\cap J_o$ er endeligt, idet J_o er endelig, er $\{|\sum_{j\in I\setminus J_o} a_j| \mid I \in \mathfrak{D}(J)\}$ en endelig mængde og derfor begrænset, og dermed er påstanden bevist.

Vi vil nu vise, at ii) ⇒ iii). Vi antager altså, at ii) er opfyldt, og vi kan da vælge K, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (|\sum_{j\in I} a_j| \leq K),$$

men det medfører, at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (|\sum_{j\in I} \mathrm{Re}\ a_j| \leq K \wedge |\sum_{j\in I} \mathrm{Im}\ a_j| \leq K).$$

Vi betragter en fast valgt mængde $I \in \mathfrak{D}(J)$. Vi deler I i to mængder

$$I_1 = \{j\in I \mid \mathrm{Re} a_j > 0\},\ I_2 = \{j\in I \mid \mathrm{Re}\ a_j \leq 0\},$$

og vi har da

$$\sum_{j\in I} |\mathrm{Re}\, a_j| = \sum_{j\in I_1} \mathrm{Re}\, a_j - \sum_{j\in I_2} \mathrm{Re}\, a_j \leqq 2K .$$

Ganske analogt viser vi, at $\sum_{j\in I} |\mathrm{Im}\, a_j| \leqq 2K$. Men så er

$$\sum_{j\in I} |a_j| \leqq \sum_{j\in I} (|\mathrm{Re}\, a_j| + |\mathrm{Im}\, a_j|) \leqq 4K,$$

og da $I \in \mathfrak{D}(I)$ var vilkårligt valgt, er påstanden bevist.

Endelig skal vi vise, at iii) $\Rightarrow$ i). Hvis iii) er opfyldt, eksisterer tallet

$$K = \sup\{ \sum_{j\in I} |a_j| \mid I \in \mathfrak{D}(J)\}.$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger $J_o \in \mathfrak{D}(J)$, således at

$$\sum_{j\in J_o} |a_j| \geqq K - \varepsilon .$$

For $I \in \mathfrak{D}(J)$, $I \cap J_o = \emptyset$ har vi da

$$|\sum_{j\in I} a_j| \leqq \sum_{j\in I} |a_j| = \sum_{j\in J_o\cup I} |a_j| - \sum_{j\in J_o} |a_j| \leqq K -(K-\varepsilon) = \varepsilon,$$

og dermed har vi vist, at $(a_j | j\in J)$ tilfredsstiller den i sætning 2.4 anførte betingelse. Dermed er sætningen bevist.

Vi minder om, at en mængde J kaldes numerabel ("tællelig" har også været brugt), såfremt der findes en bijektiv afbildning φ: $\mathbb{N}$ på J. Dette er ensbetydende med, at der findes en følge, som netop består af elementerne i J, og således at hvert element forekommer netop én gang. At en mængde J er uendelig er ensbetydende med, at den har en numerabel delmængde.

Vi skal nu vise en sætning, som afslører, at studiet af summable familier i det væsentlige reduceres til studiet af summable følger.

<u>Sætning</u> 2.6. Hvis familien $(a_j | j \in J)$ er summabel, er mængden $\{j \in J | a_j \neq 0\}$ numerabel eller endelig.

Bevis. I overensstemmelse med iii) i sætning 2.5 vælger vi K, således at

$$\forall I \in \mathring{D}(J) \ (\sum_{j \in I} |a_j| \leqq K).$$

Lad n være et naturligt tal. Hvis $|a_j| \geqq \frac{1}{n}$ for ethvert $j \in I$, er antallet af elementer i I højst nK. Heraf følger, at hver af mængderne

$$\{j \in J \,\big|\, |a_j| \geqq 1\} \quad \text{og} \quad \{j \in J | \tfrac{1}{n+1} \leqq a_j < \tfrac{1}{n}\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

er endelig, men så er foreningsmængden $\{j \in J | a_j \neq 0\}$ numerabel.

Af sætning 2.6 fremgår, at en familie $(a_j | j \in J)$ ikke kan være summabel, uden at $a_j = 0$ for alle $j \in J$ bortset fra en numerabel mængde. Derfor vil vi nu nærmere studere tilfældet $J = \mathring{N}$, altså de summable følger (a_n). Af beviset for sætning 2.6 fremgår, at det for en summabel følge a_n gælder, at mængden $\{n \in \mathring{N} \,\big|\, |a_n| \geqq \varepsilon\}$ er endelig for ethvert $\varepsilon > 0$. Heraf følger sætningen.

<u>Sætning</u> 2.7. Hvis følgen (a_n) er summabel, gælder $(a_n) \to 0$.

<u>Sætning</u> 2.8. Lad (a_n) være en kompleks talfølge. For hvert $n \in \mathring{N}$ sætter vi $A_n = |a_1| + \ldots + |a_n|$. Da vil enhver af følgende fire betingelser medføre de tre andre:

i). (a_n) er summabel.

ii). $(|a_n|)$ er summabel.

iii). (A_n) er begrænset.

iv). (A_n) er konvergent.

Bevis. At i) $\Leftrightarrow$ ii) og at ii) $\Rightarrow$ iii) følger umiddelbart af sætning 2.5. Hvis iii) er opfyldt, er iii) i sætning 2.5 ligeledes opfyldt, og derfor vil ii) være opfyldt. At iii) $\Leftrightarrow$ iv) følger af sætning 1. , da (A_n) er voksende.

For en følge (a_n) skriver vi Σa_n i stedet for $\sum_{n\in\dot{N}} a_n$. Vi har nu sætningen:

<u>Sætning</u> 2.9. Lad (a_n) være en kompleks talfølge. For hvert $n \in \dot{N}$ sætter vi $S_n = a_1 +\ldots+ a_n$. Hvis (a_n) er summabel vil følgen (S_n) konvergere mod Σa_n.

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Hvis (a_n) er summabel, kan vi vælge en endelig delmængde J_o af $\dot{N}$, således at det for enhver endelig delmængde J af $\dot{N}$ med J_o som delmængde, gælder at

$$|\Sigma a_n - \sum_{n\in J} a_n| \leqq \varepsilon ,$$

og hvis $N \in \dot{N}$ vælges, således at $J_o \subseteq \{1,\ldots,N\}$, har vi da specielt for $p \geqq N$, at $|\Sigma a_n - S_p| \leqq \varepsilon$, men det betyder netop, at $(S_p) \to \Sigma a_n$. Dermed er sætningen bevist.

Vi ser af sætning 2.8 og 2.9, at en positiv talfølge (a_n) er summabel med sum a, hvis og kun hvis $(S_n) \to a$, hvor $S_n = a_1 +\ldots+ a_n$.

Eksempel. For følgen $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ får vi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} ,$$

hvilket viser, at $(S_n) \to 1$. Altså er $\Sigma \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

For følgen $\left(\frac{1}{n}\right)$ får vi

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} ,$$

og det almindelige konvergensprincip er således ikke opfyldt for (s_n). Altså er (s_n) ikke summabel.

<u>Sætning</u> 2.10. Lad (a_n) være en summabel talfølge. Lad p være et naturligt tal (eller 0), og lad c være et positivt tal. Da vil enhver talfølge (b_n), som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall n(|b_{n+p}| \leqq c\ |a_n|)$$

være summabel.

Bevis. Ifølge sætning 2.8, iii) kan vi vælge K, således at $|a_1| +\ldots+ |a_n| \leqq K$ for alle $n \in \mathring{N}$. Vi har da for alle $n \in \mathring{N}$, at

$$|b_1| +\ldots+ |b_n| \leqq |b_1| +\ldots+ |b_p| + c(|a_1|+\ldots+|a_{n-p}|\leqq$$

$$|b_1| +\ldots+ |b_p| + cK ,$$

hvor parentesen i den midterste sum udelades, hvis $n \leqq p$. Af sætning 2.8 følger nu, at (b_n) er summabel.

Sætning 2.10 kaldes sammenligningskriteriet. Den er vort vigtigste middel til at afgøre, om en følge er summabel.

Eksempel. Følgen $(\frac{1}{n^2})$ er summabel, idet

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} ,$$

så påstanden følger ved sammenligning med den i eksemplet ovenfor betragtede følge $(\frac{1}{n(n+1)})$, idet vi har valgt $p = c = 1$. Ved metoder, som vi endnu ikke har til rådighed, kan vi vise, at summen er $\frac{1}{6}\pi^2$.

<u>Definition</u> 2.11. For vilkårlige komplekse tal a og q kaldes følgen (aq^{n-1}) en kvotientrække med kvotient q.

Kvotientrækken er behandlet i gymnasiet. Vi minder om, at direkte udregning giver

$$(1-q)(a + aq +\dots+ aq^{n-1}) = a(1-g^n),$$

så vi får den for $q \neq 1$ gyldige formel

$$a + aq +\dots+ aq^{n-1} = a\,\frac{1-q^n}{1-q}\ .$$

<u>Sætning</u> 2.12. Kvotientrækken (aq^{n-1}) er summabel, hvis og kun hvis $a = 0$ eller $|q| < 1$. For $a = 0$ er summen 0. For $|q| < 1$ er summen $\frac{a}{1-q}$.

Bevis. For $q \neq 1$ er

$$|a| + |aq| +\dots+ |aq^{n-1}| = |a| + |a||q| +\dots+ |a||q|^{n-1} =$$

$$|a|\,\frac{1-|q|^n}{1-|q|}\ ,$$

og følgen $(|a|\frac{1-|q|^n}{1-|q|})$ går mod en grænseværdi, hvis $|q| < 1$ eller $a = 0$, og kvotientrækken er altså i dette tilfælde summabel ifølge sætning 2.8,iv). For $a \neq 0$ og $|q| \geq 1$ går $(|a||q|^{n-1})$ ikke mod 0, og sætning 2.7 siger da, at kvotientrækken ikke er summabel. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel: Xenons paradoks. Akilles kan aldrig indhente skildpadden, for, når Akilles er nået dertil, hvor skildpadden nu er, er skildpadden nået et lille stykke videre, og når Akilles er løbet det stykke, er skildpadden igen krøbet et lille stykke o.s.v.i det uendelige. Lad a være skildpaddens forspring og lad q være skildpaddens fart divideret med Akilles fart. Når Akilles har løbet strækningen a, har skildpadden krøbet stykket aq, når Akilles har løbet denne strækning, har skildpadden krøbet stykket

aq^2 o.s.v. Akilles må ialt gennemløbe strækningen $a + aq^2 + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}$, og skildpadden kryber strækningen $aq + aq^2 + \ldots = \frac{aq}{1-q}$. Forholdet mellem de to strækninger er q og forskellen er a. Regnestykket stemmer.

Ved at anvende sammenligningskriteriet og specielt sammenligne med kvotientrækker, får vi to kriterier, som er meget bekvemme at anvende, men ikke "kraftige" nok til at klare vanskeligere tilfælde.

Sætning 2.13. (Rodkriteriet). Talfølgen (a_n) er summabel, hvis

$$\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) < 1,$$

og den er ikke summabel, hvis

$$\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) > 1.$$

Bevis. Hvis den første betingelse er opfyldt, kan vi vælge $q \in]\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}), 1[$, og mængden $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt[n]{|a_n|} > q\}$ er da endelig. Vi kan derfor vælge p, således at

$$\forall n \geq p\ (\sqrt[n]{|a_n|} \leq q),$$

hvilket viser, at

$$\forall n(|a_{n+p}| \leq aq^n),\ a = q^p,$$

og sammenligningskriteriet giver, at (a_n) er summabel. Hvis $\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) > 1$, er $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, altså $|a_n| > 1$ for uendelig mange værdier af n, og deraf følger, at (a_n) ikke konvergerer mod 0, og sætning 2.7 giver, at (a_n) ikke er summabel. Dermed er sætningen bevist.

Hvis $\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) = 1$, afgør sætning 2.13 ikke, om

(a_n) er summabel eller ej. Det blev bevist i gymnasiet, at $(\sqrt[n]{n}) \to 1$, og derfor er sætning 2.13 ikke stærk nok til at afgøre, om følgerne $(\frac{1}{n})$ og $(\frac{1}{n^2})$ er summable.

Eksempel. For $p \in \dot{N}$, $z \in \dot{C}$, $a_n = n^p z^n$, er $\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^p |z|$, og vi får derfor $(\sqrt[n]{|a_n|}) \to |z|$. Altså er $(n^p z^n)$ summabel for $|z| < 1$, ikke summabel for $|z| > 1$, og sagen blev ikke afgjort for $|z| = 1$. Det ses dog umiddelbart, at $(a_n) \to \infty$ for $|z| = 1$, og følgen er altså heller ikke summabel for $|z| = 1$.

<u>Sætning</u> 2.14. (Kvotientkriteriet). Lad (a_n) være en talfølge, for hvilken $a_n \neq 0$ for alle n. Følgen (a_n) er da summabel, hvis

$$\lim\sup\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) < 1,$$

og den er ikke summabel, hvis

$$\lim\inf\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \geq 1.$$

Bevis. Hvis den første betingelse er opfyldt, kan vi vælge $k \in \left]\lim\sup\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right), 1\right[$, og vi kan da vælge p, således at $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq k$ for alle $n \geq p$, og vi har da for alle $n \geq p$, at

$$|a_{n+p}| \leq \frac{|a_{n+p}|}{|a_{n+p-1}|} \cdots \frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} \cdot |a_p| \leq |a_p| k^n,$$

og derefter følger det af sammenligningskriteriet, at følgen er summabel. Den anden betingelse medfører åbenbart, at $(|a_n|)$ vokser fra et vist trin, og derfor er (a_n) ikke summabel. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Med $a_n = n^p z^n$ ganske som i det foregående eksempel, får vi

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^p |z|^{n+1}}{n^p |z|^n} = (1+\frac{1}{n})^p |z|,$$

og dette viser, at $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) \to |z|$, så vi får samme resultat som ovenfor.

Den følgende sætning er kun anvendelig for meget specielle følger, men vi kan benytte den til at skaffe os en hel del summable følger, der så kan udnyttes ved brug af sammenligningskriteriet.

Sætning 2.15. (Integralkriteriet). Lad $f\colon [1,\infty[$ ind i $]0,\infty[$ være en aftagende funktion. Da er følgen $(f(n))$ summabel, hvis og kun hvis følgen $(\int_1^n f(x)dx)$ er konvergent.

Bevis. Vi inddeler intervallet $[1,n]$ i delintervaller af længde 1, og vurderer integralet ved den fremkomne under-og oversum. Derved får vi

$$f(2) + \ldots + f(n) \leqq \int_1^n f(x)dx \leqq f(1) + \ldots + f(n-1).$$

Hvis $(f(n))$ er summabel, er $f(1) + \ldots + f(n-1) \leqq \Sigma f(n)$, og vurderingen giver, at følgen $(\int_1^n f(x)dx)$ er begrænset, og da den tillige er voksende, er den konvergent. Hvis $(\int_1^n f(x)dx)$ er konvergent med grænseværdi a, får vi $f(2) + \ldots + f(n) \leqq a$, altså $f(1) + \ldots + f(n) \leqq a + f(1)$ og sætning 2.8, iii) medfører af $(f(n))$ er summabel. Dermed er sætningen bevist.

Vi vil nu udnytte logaritmefunktionen. Da logaritmer med grundtal 10 praktisk talt kun anvendes ved numerisk regning ved hjælp af logaritmetabeller, vil den naturlige logaritmefunktion i dette kursus være den vigtigste af alle logaritmefunktioner, og vi vil derfor foretrække at benytte betegnelsen log for den naturlige logaritmefunktion. Vi minder om, at

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \ , \quad \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \ ,$$

at log: $]0,\infty[$ på $\dot{R}$ er voksende, går mod ∞ for $x \to \infty$ og mod $-\infty$ for $x \to 0$, samt at $\log x$ er positiv for $x > 1$, men negativ for $x \in]0,1[$.

For at udnytte integralkriteriet betragter vi for $\alpha \in \dot{R}$ de ved

$$\varphi_1(x) = x^{1-\alpha}, \ \varphi_2(x) = (\log(x+1))^{1-\alpha}, \ \varphi_3(x) = (\log \log(x+2))^{1-\alpha}$$

definerede afbildninger $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$: $[1,\infty[$ ind i $[0,\infty]$. At vi har skrevet $x+1$ i $\varphi_2(x)$ og $x+2$ i $\varphi_3(x)$ sikrer netop, at funktionerne er positive på det betragtede interval. For $x \to \infty$ vil alle tre funktioner gå mod ∞, hvis $\alpha < 1$, men mod 0, hvis $\alpha > 1$. Vi udregner differentialkvotienterne

$$\frac{d}{dx} \varphi_1(x) = (1-\alpha) \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\frac{d}{dx} \varphi_2(x) = (1-\alpha) \frac{1}{(x+1)(\log(x+1))^\alpha}$$

$$\frac{d}{dx} \varphi_3(x) = (1-\alpha) \frac{1}{(x+2)\log(x+2)(\log \log(x+2))^\alpha} \ ,$$

og heraf fremgår umiddelbart, at

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \log n, \text{ hvis } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1), \text{ hvis } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

$$\int_1^n \frac{dx}{(x+1)(\log(x+1))^\alpha} = \begin{cases} \log\log(n+1)-\log\log 2, \text{ hvis } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left((\log(n+1))^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha}\right), \text{hvis } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^n \frac{dx}{(x+2)\log(x+2)(\log\log(x+2))^\alpha} =$$

$$\begin{cases} \log\log\log(n+2) - \log\log\log 3, \text{ hvis } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left((\log\log(n+2))^{1-\alpha} - (\log\log 3)^{1-\alpha}\right), \text{ hvis } \alpha \neq 1 . \end{cases}$$

Det ses at følgerne med disse udtryk som n^{te} led er konvergente for $\alpha > 1$, men divergente for $\alpha \leq 1$. Ved anvendelse af integralkriteriet får vi derfor følgende sætning:

Sætning 2.16. Følgerne

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \left(\frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^\alpha}\right) \text{ og } \left(\frac{1}{(n+2)\log(n+2)(\log\log(n+2))^\alpha}\right)$$

er summable, hvis $\alpha > 1$, men ikke summable, hvis $\alpha \leq 1$.

Eksempel. For $\alpha \in \,]1,\infty[$ og vilkårlige reelle følger (θ_n') og (θ_n') er følgerne $(n^{-\alpha}\cos\theta_n')$, $(n^{-\alpha}\sin\theta_n'')$ og $(n^{-\alpha}(\cos\theta_n' + i\sin\theta_n''))$ summable.

For at kunne udnytte sætning 2.16 må man have en forestilling om, hvor hurtigt funktionerne log og log log vokser. Populært forestiller man sig, at noget, som vokser eksponentielt, vokser meget hurtigt, og det er da også rigtigt, men vi har brug for et mere præsist udsagn:

Sætning 2.17. For vilkårlige positive værdier af α og β, vil de ved

$$\varphi_1(x) = \frac{e^{x^\alpha}}{x^\beta} \quad \text{og} \quad \varphi_2(x) = \frac{x^\alpha}{(\log x)^\beta}$$

definerede afbildninger φ_1: $]0,\infty[$ ind i $\dot{R}$ og φ_2: $]1,\infty[$ ind i $\dot{R}$ gå mod ∞ for $x \to \infty$.

Bevis. Funktionen $e^x - x$ har differentialkvotienten $e^x - 1$, og er derfor aftagende for $x < 0$, voksende for $x > 0$ og antager mindsteværdien 1 for $x = 0$. Altså er

$$\forall x(e^x > x),$$

og heraf følger umiddelbart for $n \in \dot{N}$

$$e^x = (e^{\frac{1}{n}x})^n > \frac{x^n}{n^n} ,$$

og for $\gamma \in]0,\infty[$ og $n > \gamma$ får vi derfor

$$\frac{e^x}{x^\gamma} > n^{-n} x^{n-\gamma} ,$$

hvilket viser, at

$$\frac{e^x}{x^\gamma} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty .$$

Hvis vi vælger $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ og erstatter x med x^α får vi sætningens første påstand. Hvis vi erstatter x med $\log x$, får vi

$$\frac{x}{(\log x)^\alpha} \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

og ved at vælge $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ og opløfte brøken til α^{te} potens får vi sætningens anden påstand. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. For $a_n = (\log(n+1))^{-\log\log(n+1)}$ får vi

$$-\log a_n = (\log\log(n+1))^2 \leq \log(n+p),$$

når p er stor nok, altså $a_n \geq \frac{1}{n+p}$, hvilket viser, at (a_n) ikke er summabel. For $a_n = (\log \log(n+1))^{-\log(n+1)}$ får vi derimod

$$\log a_n = -\log(n+1) \log \log \log(n+1) \leqq -2\log (n+1),$$

når n er stor nok. Altså $a_n \leqq \frac{1}{(n+1)^2}$, hvilket viser, at (a_n) er summabel.

De regneregler, der gælder for endelige summer, kan i det store og hele generaliseres til vilkårlige summable familier. Den associative lov gælder dog kun med visse forbehold. Vi vil nu vise de vigtigste regneregler for summable familier.

<u>Sætning</u> 2.18. Lad J være en mængde, $J_1 \subsetneq J$ en delmængde, $(a_j | j \in J_1)$ en summabel familie. Vi sætter $b_j = a_j$ for $j \in J_1$ og $b_j = 0$ for $j \in J \setminus J_1$. Da er $(b_j | j \in J)$ en summabel familie.

Bevis. Trivielt.

<u>Sætning</u> 2.19. Lad $(a_j | j \in J)$ være en summabel familie og k et komplekst tal. Da er $(ka_j | j \in J)$ en summabel familie og $\sum_{j\in J} ka_j = k \sum_{j\in J} a_j$.

Bevis. Vi sætter $a = \sum_{j\in J} a_j$. For $k = 0$ er påstanden triviel. Vi antager, at $k \neq 0$. Lad ε være et positivt tal. Efter definition 2.2 vælger vi J_0, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (I \supseteq J_0 \Rightarrow |a - \sum_{j\in I} a_j| \leqq \frac{\varepsilon}{|k|}),$$

og vi har da også

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J)\ (I \supseteq J_0 \Rightarrow |ka - \sum_{j\in I} ka_j| \leqq \varepsilon).$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.20. Lad $(a_j | j \in J)$ og $(b_j | j \in J)$ være summable familier med samme indeksmængde. Da er $(a_j + b_j | j \in J)$ en summabel familie, og $\sum_{j\in J} (a_j+b_j) = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{j\in J} b_j$.

Bevis. Vi sætter $a = \sum_{j\in J} a_j$, $b = \sum_{j\in J} b_j$. Lad ε være et positivt tal. Efter definition 2.2 vælger vi J_1 og J_2, således at

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J) \ (I \supseteq J_1 \Rightarrow |a - \sum_{j\in I} a_j| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$

$$\forall I \in \mathfrak{D}(J) \ (I \supseteq J_2 \Rightarrow |b - \sum_{j\in I} b_j| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

For $I \in \mathfrak{D}(J)$, $I \supseteq J_1 \cup J_2$ har vi da

$$|a+b - \sum_{j\in I} (a_j+b_j)| \leqq |a - \sum_{j\in I} a_j| + |b - \sum_{j\in I} b_j| \leqq \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.21. Lad $(a_j | j \in J)$ være en familie og $J_1 \subseteq J$ en delmængde af indexmængden. Hvis familierne $(a_j | j \in J_1)$ og $(a_j | j \in J \setminus J_1)$ summable, da er $(a_j | j \in J)$ summabel.

Bevis. Vi sætter

$$b_j = \begin{cases} a_j & \text{for } j \in J_1 \\ 0 & \text{for } j \in J \setminus J_1 \end{cases} \qquad c_j = \begin{cases} 0 & \text{for } j \in J_1 \\ a_j & \text{for } j \in J \setminus J_1 \end{cases} .$$

Så er $a_j = b_j + c_j$ for alle $j \in J$, og sætningen følger derefter af sætning 2.18 og sætning 2.20 .

Sætning 2.22. Lad $(a_j | j \in J)$ være en familie og $(J_k | k \in K)$ en klasseinddeling af indexmængden J. Hvis $(a_j | j \in J)$ er summabel, er $(a_j | j \in J_k)$ summabel for ethvert

$k \in K$, og $(\sum_{j\in J_k} a_j | k \in K)$ er summabel med $\sum_{k\in K}(\sum_{j\in J_k} a_j) = \sum_{j\in J} a_j$.

Hvis hvert a_j er positivt eller nul, og hver af familierne $(a_j | j \in J_k)$ samt familien $(\sum_{j\in J_k} a_j | k \in K)$ er summable, da er $(a_j | j\in J)$ summabel.

Bevis. Af sætning 2.5, iii) følger umiddelbart, at hver af familierne $(a_j | j \in J_k)$ er summabel, hvis $(a_j | j \in J)$ er summabel. Vi vil nu først behandle det tilfælde, hvor $\forall_j \in J(a_j \geq 0)$. Af sætningerne 2.6 og 2.9 følger da, at vi for enhver mængde $J' \subseteq J$ har

$$\sum_{j\in J'} a_j = \sup\{\sum_{j\in I} a_j | I \in \mathfrak{D}(J')\} ,$$

således at forstå, at $(a_j | j \in J')$ er summabel, hvis og kun hvis den supremum, der optræder på højre side, er endelig. Hvis den er uendelig, vil vi sætte $\sum_{j\in J'} a_j = \infty$. For vilkårlige delmængder $J' \subseteq J$, $J'' \subseteq J$ har vi da

(1) $$J' \subseteq J'' \Rightarrow \sum_{j\in J'} a_j \leq \sum_{j\in J''} a_j ,$$

og for $L \in \mathfrak{D}(K)$ har vi

$$\sum_{k\in L}(\sum_{j\in J_k} a_j) = \sum_{j \in \bigcup_{k\in L} J_k} a_j ,$$

ifølge sætning 2.21, når summerne på venstre side er endelige, og i modsat fald ifølge (1). Men fornyet anvendelse af (1) giver nu

$$\forall L \in \mathfrak{D}(K) \ (\sum_{k\in L}(\sum_{j\in J_k} a_j) \leq \sum_{j\in J} a_k),$$

og heraf følger

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right) \leqq \sum_{j\in J} a_k .$$

Lad nu J_o være en endelig delmængde af J. Vi vælger $L \in \mathfrak{D}(K)$, således at $J_o \subseteq \bigcup_{k\in L} J_k$, og vi har da

$$\sum_{j\in J_o} a_j \leqq \sum_{j=\bigcup_{k\in L} J_k} a_j = \sum_{k\in L}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right) \leqq \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right),$$

hvilket medfører, at

$$\sum_{j\in J} a_j \leqq \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right).$$

Dermed har vi vist sætningen i specialtilfældet $\forall j \in J(a_j \geqq 0)$. Vi vil dernæst behandle det knap så specielle tilfælde, hvor $\forall j \in J(a_j \in \mathring{R})$. Vi sætter

$$b_j = \begin{cases} a_j, & \text{hvis } a_j > 0 \\ 0, & \text{hvis } a_j \leqq 0 \end{cases} \qquad c_j = \begin{cases} -a_j, & \text{hvis } a_j < 0 \\ 0, & \text{hvis } a_j \geqq 0, \end{cases}$$

og vi har da for ethvert $j \in J$

$$a_j = b_j - c_j \quad \text{og} \quad |a_j| = b_j + c_j .$$

Heraf følger umiddelbart, at $(a_j | j \in J)$ er summabel, hvis og kun hvis $(b_j | j \in J)$ og $(c_j | j \in J)$ er summable, og vi har da

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} b_j - \sum_{j\in J} c_j = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} b_j\right) - \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} c_j\right) =$$

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} b_j - \sum_{j\in J_k} c_j\right) = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right),$$

og dermed er påstanden vist. Hvis vi blot havde vidst, at den sidste sum eksisterede, ville vi kunne slutte, at også den næstsidste sum eksisterede, men vi kunne ikke slutte noget om de to summer i det tredie udtryk. For $a_j = b_j + ic_j$, $b_j, c_j \in \mathring{R}$ får vi, at hvis $(a_j \mid j \in J)$ er summabel, er $(b_j \mid j \in J)$ og $(c_j \mid j \in J)$ summable, og vi får derfor

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{j\in J} b_j + i \sum_{j\in J} c_j = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J_k} b_j \Big) + i \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J_k} c_j \Big) =$$

$$\sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J_k} b_j + i \sum_{j\in J_k} c_j \Big) = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J_k} a_j \Big) .$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Familien $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} \,\middle|\, n \in \mathring{N} \right)$ er ikke summabel. Vi sætter $J_n = (2n+j \mid j = -1, 0)$, og $\{J_n \mid n \in \mathring{N}\}$ er da en klasseinddeling af $\mathring{N}$. I dette tilfælde er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k\in J_n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \Big) = \sum \frac{1}{2n(2n-1)}$$

og familien $\left(\frac{1}{2n(2n-1)} \,\middle|\, n \in \mathring{N} \right)$ er summabel.

<u>Sætning</u> 2.23. Lad J og J_1 være vilkårlige mængder og φ: J ind i J_1 en bijektiv afbildning. Da er en familie $(a_j \mid j \in J_1)$ summabel, hvis og kun hvis $(a_{\varphi(j)} \mid j \in J)$ er summabel, og i så fald er

$$\sum_{j\in J} a_{\varphi(j)} = \sum_{j\in J_1} a_j .$$

Bevis. Afbildningen $I \to \varphi(I)$ er en bijektiv afbildning af $\mathfrak{D}(J)$ på $\mathfrak{D}(J_1)$, og for $I \in \mathfrak{D}(J)$ er

$$\Big| a - \sum_{j\in\varphi(I)} a_j \Big| \leq \varepsilon \iff \Big| a - \sum_{j\in I} a_{\varphi(j)} \Big| \leq \varepsilon .$$

Heraf følger sætningen umiddelbart.

Sætningen viser, at den indførte addition af summable familier er kommutativ i en meget kraftig forstand. Vi skal nu også vise, at den distributive lov kan udvides til at gælde for produkter af summable familier.

Sætning 2.24. Lad $(a_j \mid j \in J_1)$ og $(b_j \mid j \in J_2)$ være summable familier. Da er $(a_j b_k \mid (j,k) \in J_1 \times J_2)$ en summabel familie, og

$$\sum_{(j,k) \in J_1 \times J_2} a_j b_k = \sum_{j \in J_1} a_j \sum_{k \in J_2} b_k \;.$$

Bevis. Af sætning 2.5 følger, at $(|a_j| \,\big|\, j \in J_1)$ og $(|b_j| \mid j \in J_2)$ er summable familier af tal, som er positive eller 0. Ifølge sætning 2.19 er $(|a_j||b_k| \,\big|\, j \in J_1)$ for ethvert $k \in J_2$ en summabel familie, og

$$|b_k| \sum_{j \in J_1} |a_j| = \sum_{j \in J_1} |a_j||b_k| = \sum_{j \in J_1} |a_j b_k| \;.$$

Fornyet anvendelse af den samme sætning giver, at $(|b_k| \sum_{j \in J_1} |a_j| \,\big|\, k \in J_2)$ er en summabel familie, og at

$$\sum_{j \in J_1} |a_j| \sum_{k \in J_2} |b_k| = \sum_{k \in J_2} \sum_{j \in J_1} |a_j b_k| \;,$$

og sætning 2.22 fortæller os nu, at $(|a_j b_k| \,\big|\, (j,k) \in J_1 \times J_2)$ er en summabel familie. Af sætning 2.5 følger da, at $(a_j b_k \mid (j,k) \in J_1 \times J_2)$ er en summabel familie, og sætning 2.22 og sætning 2.19 giver nu

$$\sum_{(j,k) \in J_1 \times J_2} a_j b_k = \sum_{k \in J_2} \Big(\sum_{j \in J_1} a_j b_k \Big) = \sum_{k \in J_2} \Big(b_k \sum_{j \in J_1} a_j \Big) =$$

$$\sum_{j \in J_1} a_j \sum_{k \in J_2} b_k \;,$$

og dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Familien $(z^{n-1} | n \in \dot{N})$ er summabel for $|z| < 1$, og ifølge sætning 2.12 er

$$\frac{1}{1-z} = \Sigma\, z^{n-1} \quad .$$

Sætning 2.24 giver nu

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{p \in \dot{N}} z^{p-1} \sum_{q \in \dot{N}} z^{q-1} = \sum_{p,q \in \dot{N}} z^{p+q-2} ,$$

og af sætning 2.22 følger derefter

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n \in \dot{N}} \Big(\sum_{p+q=n+1} z^{p+q-1} \Big) = \sum_{n \in \dot{N}} n\, z^{n-1} .$$

<u>Definition</u> 2.25. Lad (a_n) være en kompleks talfølge. For $n \in \dot{N}$ sætter vi $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Parret $((a_n),(s_n))$ kaldes da en uendelig række. Mindre korrekt taler vi om rækken (a_n). Følgen (s_n) kaldes den til rækken $((a_n),(s_n))$ (eller rækken (a_n)) svarende afsnitsfølge. Rækken siges at være konvergent med sum a, hvis $(s_n) \to a$, og vi skriver da $\Sigma a_n = a$.

Hvis følgen (a_n) er summabel med sum a, er rækken (a_n) konvergent med sum a, og ved definition 2.25 har vi således udvidet anvendelsen af symbolet Σa_n på en måde, der ikke kommer i konflikt med den tidligere brug. Hvis følgen (a_n) er summabel, vil vi også sige, at rækken (a_n) er summabel, men vi vil dog foretrække at sige, at rækken (a_n) er absolut konvergent. Hvis rækken (a_n) er konvergent uden at være absolut konvergent, vil vi sige, at rækken (a_n) er betinget konvergent. Hvis rækken $(|a_n|)$ er konvergent, er rækken (a_n) absolut konvergent.

Vore betegnelser i dette kapitel afviger ret væsentligt fra de i den matematiske litteratur sædvanligt benyttede. I den traditionelle litteratur knyttes til en talfølge (a_n) symbolet Σa_n, som kaldes en uendelig række. Summerne $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ kaldes rækkens afsnit, og hvis afsnitsfølgen (s_n) er konvergent med summen a, siges rækken at være konvergent med summen a, og man skriver $\Sigma a_n = a$.

Det mindre heldige ved de traditionelle betegnelser er, at Σa_n både betegner talværdien a og et symbol, der konvergerer mod a. I den strengere formulering, der præger den moderne matematik, er et lighedstegn forpligtende, og hvis vi skriver $\Sigma a_n = a$, skal vi også have lov til at sige "rækken a" i stedet for "rækken Σa_n", og det går åbenbart ikke.

Da det stadig vil være nødvendigt at kunne læse ældre matematisk litteratur uden alt for store vanskeligheder, er det hensigtsmæssigt at holde fremstillingen så tæt op ad den traditionelle som muligt, selv om det medfører visse sproglige midbrug. Derfor har vi indrettet os, så vi kan sige "rækken (a_n) er absolut konvergent" istedet for "følgen (a_n) er summabel", og vi har slet ikke indført vendingen "følgen (a_n) er betinget summabel", men kun "rækken (a_n) er betinget konvergent".

Regnereglerne for summable gælder kun i ringe udstrækning for betinget konvergente rækker. Vigtigst er det at bemærke, at sætningerne 2.22, 2.23 og 2.24 ikke gælder. Sætningerne 2.19 og 2.20 kan derimod umiddelbart overføres i følgende form:

Sætning 2.26. Hvis rækken (a_n) er konvergent, og k er et komplekst tal, er rækken (ka_n) konvergent, og $\Sigma ka_n = k\Sigma a_n$. Hvis rækkerne (a_n) og (b_n) er konvergente, er rækken (a_n+b_n) konvergent og $\Sigma(a_n+b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$.

Bevis. Hvis rækken (a_n) har afsnitsfølgen (s_n) og rækken

(b_n) har afsnitsfølgen (t_n), har rækken (ka_n) afsnitsfølgen (ks_n), som konvergerer mod $k\Sigma a_n$, og rækken (a_n+b_n) har afsnitsfølgen (s_n+t_n), som konvergerer mod $\Sigma a_n + \Sigma b_n$. Dermed er sætningen bevist.

For en reel række (a_n) sætter vi

$$p_n = \begin{cases} a_n, & \text{hvis } a_n>0 \\ 0, & \text{hvis } a_n\leqq 0 \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -a_n, & \text{hvis } a_n<0 \\ 0\;, & \text{hvis } a_n\geqq 0\;, \end{cases}$$

og vi har da $a_n = p_n - q_n$ og $|a_n| = p_n + q_n$. Hvis rækken (a_n) er betinget konvergent, er rækken $(|a_n|)$ ikke konvergent, og af sætning 2.26 følger da, at rækkerne (p_n) og (q_n) ikke begge er konvergente, og da rækken (p_n-q_n) er konvergent, kan vi slutte, at ingen af de to rækker (p_n) og (q_n) er konvergent.

Af disse overvejelser fremgår, at vi kan omordne leddene i følgen (a_n'), således at vi afvekslende tager så mange positive led, at deres sum er $\geqq 1$, og så mange negative led, at deres sum er $\leqq -1$. Ved omordningen får vi en følge (b_n), for hvilken rækken (b_n) ikke er konvergent. Altså kan sætning 2.23 ikke generaliseres til betinget konvergente rækker. En nærmere undersøgelse (ikke vanskelig) vil vise, at en betinget konvergent reel række kan omordnes, så den forbliver konvergent, medens summen ændres, og hvilket som helst tal kan fås som sum ved passende omordning af rækken. For betinget konvergente komplekse rækker er forholdene mere komplicerede og undersøgelsen væsentlig vanskeligere.

Det almindelige konvergensprincip for rækker kan umiddelformuleres; idet $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n$, får vi sætningen:

Sætning 2.27. Rækken (a_n) er konvergent, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \dot{N} \; \forall n \geqq N \; \forall p > 0 \quad \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n \right| \leqq \varepsilon \right).$$

Specielt ser vi, at hvis rækken (a_n) er konvergent, gælder $(a_n) \to 0$. Det er ikke helt let at vise, at en række er betinget konvergent, idet det vil være nødvendigt at udnytte, at leddene til en vis grad hæver hinanden, således at den numeriske værdi af summen bliver væsentlig mindre end summen af de numeriske værdier. Et vigtigt hjælpemiddel er følgende sætning (sætningen om Abelsk summation):

Sætning 2.27. Lad $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$ være vilkårlige komplekse tal. Idet vi sætter

$$A_k = a_1 + \ldots + a_k, \quad k = 1,\ldots,n \,,$$

er

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \,.$$

Bevis. Idet vi skriver $A_o = 0$, får vi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.28. Lad $a_1,\ldots,a_n$ være vilkårlige komplekse tal, og lad $b_1,\ldots,b_n$ samt K være positive tal. Hvis betingelserne

$$|a_1 +\dots+ a_k| \leqq K \quad \text{for} \quad k = 1,\dots,n,$$

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \dots \geqq b_n \geqq 0,$$

er opfyldt, gælder vurderingen

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqq K\, b_1 .$$

Bevis. Med betegnelserne fra sætning 2.27 giver denne sætning

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})\right| + |A_n b_n| \leqq$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k|\,(b_k - b_{k+1}) + |A_n| b_n \leqq K\left(\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + b_n\right) = Kb_1 ,$$

og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.29. (Abels kriterium). Lad (a_n) være en kompleks talfølge, som for et passende valgt positivt tal K tilfredsstiller

$$\forall n \in \dot{N}(|a_1 +\dots+ a_n| \leqq K).$$

Lad (b_n) være en aftagende reel talfølge, som går mod 0. Da er rækken $(a_n b_n)$ konvergent.

Bevis. For $n \in \dot{N}$, $p \in \dot{N}$ er

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqq K.$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger N, således at $b_N \leqq \frac{\varepsilon}{2K}$. For $n \geqq N$, $p > 0$ får vi da ved anvendelse af sætning 2.28

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqq 2K\, b_{n+1} \leqq 2K\, b_N \leqq \varepsilon ,$$

og påstanden følger nu af sætning 2.27.

Den første betingelse i sætning 2.27 udtrykker, at rækken (a_n) har begrænset afsnitsfølge.

Sætning 2.30 (Variant af Abels kriterium). Hvis rækken (a_n) er konvergent, og (b_n) er en monoton, begrænset, reel talfølge, er rækken $(a_n b_n)$ konvergent.

Bevis. Det er åbenbart nok at vise sætningen i det tilfælde, hvor (b_n) er afteagende. Da rækken (ca_n) er konvergent, vil sætningens påstand gælde for følgen (b_n+c), hvis den gælder for følgen b_n. Det er derfor nok at vise den i specialtilfældet $(b_n)\to 0$. Men da rækken (a_n) har begrænset afsnitsfølge, er sætningen nu reduceret til den foregående.

Sætning 2.31. Rækken (z^{n-1}) har begrænsede afsnit, hvis $|z| = 1$ og $z \neq 1$. Rækken $(\cos n\theta)$, $\theta \in \grave{R}$ har begrænsede afsnit, hvis $\theta \notin 2\pi\, \grave{Z}$. Rækken $(\sin n\theta)$ har begrænsede afsnit.

Bevis. For $|z| = 1$, $z \neq 1$ er

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^{k-1}\right| = \frac{|1-z^n|}{|1-z|} \leqq \frac{1+|z|^n}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|} .$$

Vi sætter $z = \cos\theta + i\sin\theta$ og får

$$\sum_{k=1}^{n} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\theta + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin k\theta ,$$

hvilket viser, at rækkerne $(\cos n\theta)$ og $(\sin n\theta)$ har begrænsede afsnit, hvis $z \neq 1$, altså hvis $\theta \notin 2\pi\, \grave{Z}$. For $\theta \in 2\pi\, \grave{Z}$ er $\sin n\theta = 0$ for alle $n \in \grave{Z}$, og rækken $(\sin n\theta)$ har derfor begrænsede afsnit også i dette tilfælde.

Sætning 2.32. Hvis (b_n) er en aftagende reel talfølge med grænseværdi 0, er rækken $(b_n z^{n-1})$ konvergent for $|z| = 1$, $z \neq 1$; rækken $(b_n \cos n\theta)$ er konvergent for alle $\theta \in \mathring{R} \setminus 2\pi\mathring{Z}$ og $(b_n \sin n\theta)$ for alle $\theta \in \mathring{R}$.

Eksempel. Rækken $((-1)^{n-1}n^{-\alpha})$ er konvergent for $\alpha > 0$. Den er absolut konvergent for $\alpha > 1$ og betinget konvergent for $\alpha \in]0,1]$. Mere generelt gælder, at rækken $((-1)^{n-1}b_n)$ er konvergent, hvis følgen (b_n) er aftagende og går mod 0.

Uendelige rækker anvendes ved tilnærmet beregning af irrationale tal (eller "ukendte" tal). Hvis $\Sigma a_n = a$ og $\varepsilon > 0$ er en given nøjagtighed, kan vi vælge n, således at $|a-s_n| \leq \varepsilon$, og ved at udregne $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ får vi a approksimeret med nøjagtighed ε.

Vore eksempler har allerede afsløret, at visse funktioner kan udtrykkes ved uendelige rækker:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$$

Hvis M er en vilkårlig mængde og (f_n) en følge af afbildninger f_n:M ind i $\mathring{C}$ siger vi, at følgen (f_n) konvergerer punktvis mod grænseafbildningen g:M ind i $\mathring{C}$, såfremt

$$\forall x \in M\ ((f_n(x) \to g(x)).$$

Tilsvarende siger vi, at rækken (f_n) er punktvis konvergent med sum g:M ind i $\mathring{C}$, såfremt det for hvert $x \in M$ gælder, at rækken $(f_n(x))$ er konvergent og $\Sigma f_n(x) = g(x)$.

Lad os antage, at følgen (f_n) konvergerer punktvis mod g. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. For ethvert $x \in M$ kan vi da vælge $N \in \mathring{N}$, således at $|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon$ for alle $n \geqq N$. Dette udtrykkes i følgende logiske relation:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists N \in \dot{N} \quad \forall n \geqq N(|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse, for at følgen (f_n) er punktvis konvergent, har vi i det almindelige konvergensprincip, altså

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists N \in \dot{N} \quad \forall m,n \geqq N(|f_n(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

Vi vil sige, at f_n approximerer f ligeligt på M med nøjagtighed ε, såfremt

$$\forall x \in M(|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

Eksempel: $M = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$. For $x \in [0,1[$ har vi $(x^n) \to 0$, og for $x = 1$ har vi $(x^n) \to 1$. Altså konvergerer (f_n) punktvis mod $g:[0,1]$ ind i $\dot{R}$, hvor

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } & x \in [0,1[\\ 1 \text{ for } & x = 1 \end{cases}.$$

Lad nu ε og x være faste, og $\varepsilon \in]0,1[$. Vi har da $c^n \leqq \varepsilon$ for ethvert $x \in [0, \sqrt[n]{\varepsilon}\,]$. Altså approksimerer for nulfunktionen ligeligt på intervallet $[0, \sqrt[n]{\varepsilon}\,]$ med nøjagtighed ε, men overalt udenfor dette interval er approksimationsnøjagtigheden ringere.

Vi minder om, at en funktion f: I ind i $\dot{R}$, hvor $I \subsetneq \dot{R}$ er et interval, siges at være kontinuert i punktet $x \in I$, såfremt følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in I(|y-x| \leqq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon).$$

Endvidere minder vi om, at $f:I$ ind i $\dot{R}$ kaldes kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $x \in \dot{R}$.

<u>Sætning</u> 2.33 Lad η være et positivt tal. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et interval, og lad x være et punkt af I. Lad $f,g:I$ ind i $\mathring{R}$ være funktioner. Hvis g approksimerer f ligeligt på I med nøjagtighed η, og g er kontinuert i x, er følgende betingelse opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 2\eta \; \exists \delta > o \; \forall y \in I(|y-x| \leqq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon).$$

Bevis. Lad ε være et positivt tal større end 2η. Da g er kontinuert i x, kan vi vælge $\delta > 0$, således at

$$\forall y \in I(|y-x| \leqq \delta \Rightarrow |g(y) - g(x)| \leqq \varepsilon - 2\eta).$$

For $y \in I$ og $|y-x| \leqq \delta$ får vi da

$$|f(y) - f(x)| \leqq |f(y) - g(y)| + |g(y)-g(x)|+|f(x)-g(x)| \leqq \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.34. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et interval og $f:I$ ind i $\mathring{R}$ en funktion. Hvis det for ethvert positivt tal η gælder, at f kan approximeres ligeligt på I med nøjagtighed η ved hjælp af en kontinuert funktion, er f selv kontinuert.

Bevis. Det følger umiddelbart af sætning 2.33.

<u>Definition</u> 2.35. Lad M være en vilkårlig mængde og (f_n) en følge af afbildninger $f_n:M$ ind i $\mathring{C}$. Følgen (f_n) siges at konvergere ligeligt på M mod en grænsefunktion $f:M$ ind i $\mathring{C}$, såfremt følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathring{N} \quad \forall n \geqq N \quad \forall x \in M(|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

Følgen (f_n) siges at være ligeligt fundamentalfølge på M, såfremt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathring{N} \quad \forall m,n \geqq N \quad \forall x \in M(|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

Disse definitioner er opstået af betingelserne for punktvis konvergens og punktvis fundamentalfølge ved at kvantoren $\forall x \in M$ er flyttet om bag kvantoren $\exists N \in \dot{N}$. Dette har altid den virkning, at udsagnet skærpes. En ligelig fundamentalfølge er derfor punktvis fundamentalfølge og derfor punktvis konvergent.

Sætning 2.36. Hvis (f_n) er ligeligt fundamentalfølge på M, er (f_n) ligelig konvergent på M.

Bevis. Vi ved, at (f_n) konvergerer punktvis på M mod en grænsefunktion f. Lad ε være et positivt tal. Vi kan da bestemme $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall m,n \geqq N \quad \forall x \in M(|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon).$$

Lad n være et naturligt tal $\geqq N$, og lad x være et punkt af M. For ethvert $m \geqq N$ gælder da

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon ,$$

og for $m \to \infty$ giver dette

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.37. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et interval og (f_n) en ligelig konvergent følge af kontinuerte afbildninger f_n:I ind i $\dot{R}$. Da er grænsefunktionen kontinuert.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 2.34.

På den anden side kan det indtræffe, at en følge af kontinuerte funktioner på et interval konvergerer punktvis mod en kontinuert funktion uden at konvergere ligeligt. Det spiller i denne forbindelse ingen rolle, om definitionsmængden er et afsluttet, begrænset interval.

Sætning 2.38. Lad $[a,b]$ være et afsluttet interval, og lad (f_n) være en ligelig konvergent følge af kontinuerte afbildninger $f_n:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ med grænsefunktionen $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$. Da gælder

$$\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) \to \int_a^b f(x)dx.$$

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Vi bestemmer $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in [a,b] \; \left(|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

For $n \geq N$ har vi da

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))dx\right| \leq$$

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq (b - a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon ,$$

og dermed er sætningen bevist.

Kravet om ligelig konvergens er også i dette tilfælde en hel del strengere end nødvendigt, men punktvis konvergens er i hvert fald ikke tilstrækkeligt til at sikre ombytteligheden af integration med grænseproces.

Definition 2.39. Lad M være en vilkårlig mængde og (f_n) en følge af funktioner $f_n:M$ ind i $\dot{C}$. For $n \in \dot{N}$ sætter vi $s_n = f_1 + \ldots + f_n$. Parret $((f_n),(s_n))$ kaldes da en uendelig række (af funktioner på M). Mindre korrekt taler vi om rækken (f_n). Rækken (f_n) siges at konvergere punktvis (ligeligt) mod grænsefunktionen $f:M$ ind i $\dot{C}$, hvis følgen (s_n) konvergerer punktvis (ligeligt) mod f, og vi skriver $\Sigma f_n = f$.

Hvis I er et interval, og hvert f_n er en kontinuert afbildning f_n:I ind i $\dot{R}$, er hver $s_n = f_1 +\ldots+ f_n$ en kontinuert afbildning s_n:I ind i $\dot{R}$. Hvis I specielt er et begrænset og afsluttet interval [a,b] er

$$\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx +\ldots+ \int_a^b f_n(x)dx.$$

<u>Sætning</u> 2.40. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et afsluttet interval, og lad (f_n) være en følge af kontinuerte funktioner f_n:I ind i $\dot{R}$. Hvis rækken (f_n) konvergerer ligeligt, er summen en kontinuert funktion. Dersom yderligere I = [a,b] er begrænset og afsluttet, og $\Sigma f_n = f$, er rækken $(\int_a^b f_n(x)dx)$ konvergent med sum $\int_a^b f(x)dx$.

Bevis. Følger umiddelbart af sætningerne 2.37 og 2.38.

Vi har ikke udtalt os om differentiabilitet i denne sammenhæng, og det er af gode grunde. Selv om en differentiabelfunktion på et interval er meget lille overalt, behøver dens differentialkvotient slet ikke at være lille overalt. F.eks. er $\frac{1}{n}\sin n^p x$; $n,p \in \dot{N}$, overalt numerisk mindre eller lig $\frac{1}{n}$, men differentialkvotienten $n^{p-1}\cos n^p x$ antager værdien n^{p-1} for uendelig mange værdier af x. Vi har imidlertid følgende sætning:

<u>Sætning</u> 2.41. Lad [a,b] være et afsluttet interval. Lad (f_n) være en følge af differentiable funktioner f_n:[a,b] ind i $\dot{R}$, hvis differentialkvotienter f'_n:[a,b] ind i $\dot{R}$ er kontinuerte. Hvis følgen (rækken) (f_n) er punktvis konvergent med grænsefunktion (sum) f:[a,b] ind i $\dot{R}$, medens følgen (rækken) (f'_n) er ligelig konvergent med grænsefunktion (sum) g:[a,b] ind i $\dot{R}$, da er f differentiabel på [a,b] med g som differentialkvotient.

Bevis. Af $(f'_n) \to g$ ligeligt på [a,b] følger, at g er kontinuert, og for $x \in [a,b]$ får vi af sætning 2.40, at

$$\left(\int_a^x f'(t)dt\right) \to \int_a^x g(t)dt,$$

altså, idet vi udregner integralet på venstre side

$$(f_n(x) - f_n(a)) \to \int_a^x g(t)dt ,$$

men ifølge det givne har følgen på venstre side grænseværdien $f(x) - f(a)$, så får vi

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt ,$$

hvilket netop viser, at f er differentiabel, og at $f' = g$. Resultatet vedrørende rækker udledes umiddelbart af resultatet vedrørende følger. Dermed er sætningen bevist.

Før vi for alvor kan drage nytte af begrebet ligelig konvergens, må vi have nogle simple kriterier til rådighed, som gør det muligt at undersøge, om en række konvergerer ligeligt.

<u>Sætning</u> 2.42. Lad M være en vilkårlig mængde og (f_n) en følge af afbildninger f_n:M ind i $\grave{C}$. Lad (a_n) være en følge af positive tal, således at $\forall n \in \grave{N} \quad \forall x \in M \; (|f_n(x)| \leqq a_n)$ (vi siger da, at rækken (a_n) er en majorantrække for rækken (f_n)). Hvis rækken (a_n) er konvergent, er rækken (f_n) absolut og ligelig konvergent.

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Da rækken (a_n) er konvergent, kan vi vælge $N \in \grave{N}$, således at

$$\forall n \geqq N \quad \forall p \in \grave{N} \; \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leqq \varepsilon \right).$$

For $n \geqq N$, $p \in \grave{N}$, $x \in M$ har vi da

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leqq \varepsilon ,$$

hvilket viser, at afsnitsfølgen for rækken (f_n) er ligeligt fundamentalfølge, altså ligelig konvergent ifølge sætning 2.36.

Eksempel. Hvis rækken (b_n) er absolut konvergent, og (λ_n) er en vilkårlig reel talfølge, er rækkerne $(b_n \sin \lambda_n x)$ og $(b_n \cos \lambda_n x)$ ligelig konvergente på hele $\grave{R}$. Ved $\varphi(x) = \Sigma b_n \sin \lambda_n x$ og $\psi(x) = \Sigma b_n \cos \lambda_n x$ defineres således kontinuerte funktioner $\varphi, \psi : \grave{R}$ ind i $\grave{R}$. Hvis talfølgen (λ_n) specielt er begrænset, er også rækken $\Sigma \lambda_n b_n$ absolut konvergent, og φ og ψ er da differentiable med $\varphi'(x) = \Sigma b_n \lambda_n \cos \lambda_n x$ og $\psi'_n(x) = -\Sigma b_n \lambda_n \sin \lambda_n x$.

<u>Sætning</u> 2.43. (Abels kriterium). Lad M være en vilkårlig mængde og lad (f_n) og (g_n) være følger af afbildninger f_n:M ind i $\grave{C}$, g_n:M ind i $[0,\infty[$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1). $$\exists K \in \grave{R} \quad \forall n \in \grave{N} \quad \forall x \in M \; (|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq K)$$

2). $$\forall n \in \grave{N} \quad \forall x \in M \; (g_{n+1}(x) \leq g_n(x))$$

3). $$(g_n) \to 0 \text{ , ligeligt.}$$

Da er rækken $(f_n g_n)$ ligelig konvergent.

Bevis. Lad ε være et positivt tal, Lad K være valgt i overensstemmelse med 1). Lad $N \in \grave{N}$ være valgt, således at

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in M \; (g_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2K}).$$

Nu har vi

$$\forall n \in \grave{N} \quad \forall p \in \grave{N} \quad \forall x \in M(|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| \leq 2K),$$

og for $n \geq N$, $p \in \grave{N}$, $x \in M$ har vi derfor ifølge sætning 2.28

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leq 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon ,$$

og sætningen følger derefter af sætning 2.26.

Eksempel. Lad δ være et positivt tal. Vi definerer $M \subset \dot{C}$ ved $M = \{z \mid |z| = 1 \text{ og } |z-1| \geq \delta\}$. Vi har da (se beviset for sætning 2.31)

$$\forall n \in \dot{N} \quad \forall z \in M(|1+z+\ldots+z^{n-1}| \leq 2\delta^{-1}).$$

Når (a_n) er en aftagende følge af positive tal og $(a_n) \to 0$, får vi derfor, at rækken $(a_n z^n)$ konvergerer ligeligt på M. Vi sætter $z = \cos\theta + i \sin\theta$, og betingelsen $|z-1| \geq \delta$ giver da

$$(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \geq \delta^2$$

hvilket er ensbetydende med

$$1 - \cos\theta \geq \tfrac{1}{2}\delta^2 .$$

På punktmængden $\{\theta \in \dot{R} \mid 1 - \cos\theta \geq \frac{1}{2}\delta^2\}$ vil rækken $(n^{-1} \sin n\theta)$ konvergere ligeligt, og derved $\varphi(\theta) = \Sigma n^{-1} \sin n\theta$ definerede afbildning er derfor kontinuert på den nævnte punktmængde, og da δ er et vilkårligt positivt tal, medfører det, at φ er kontinuert på $\dot{R} \setminus 2\pi\dot{Z}$. En nærmere undersøglese vil afsløre, at φ virkelig har diskontinuiteter i punkterne af $2\pi\dot{Z}$.

Sætning 2.44. (Abels kriterium). Lad M være en vilkårlig mængde og (g_n) en følge af afbildninger $g_n: M$ ind i $[0,\infty]$ således at følgen $(g_n(x))$ for ethvert $x \in M$ er aftagende. Hvis g_1 er begrænset, og (a_n) er en kompleks talfølge, for hvilken rækken (a_n) er konvergent, da er rækken $(a_n g_n(x))$ ligeligt konvergent.

Bevis. Vi vælger K, således at $|g_1(x)| \leq K$ for alle $x \in M$. Lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \mathring{N}$, således at

$$\forall n \geq N \quad \forall p \in \mathring{N} \; \left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{K}\right).$$

For $n \geq N$, $p \in \mathring{N}$, $x \in M$ får vi nu af sætning 2.28, at

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k g_k(x)\right| \leq \varepsilon ,$$

og sætningen følger af sætning 2.26.

I det følgende vil det være hensigtsmæssigt at ændre betegnelserne, således at index i en følge løber fra 0 i stedet for 1. Vi kunne betegne følgen (a_{n-1}), men vi vil tillade os at beholde betegnelsen (a_n) for følgen $(a_n | n \in \{0\} \cup \mathring{N})$.

Definition 2.45. Hvis (a_n) er en kompleks talfølge, kaldes rækken $(a_n z^n)$ en potensrække. Tallene a_n kaldes potensrækkens koefficienter.

Det er klart, at en potensrække altid er konvergent for $z = 0$ med sum a_o. Det kan indtræffe, at potensrækken ikke er konvergent for nogen anden værdi af z.

Eksempel. For rækken $(n^n z^n)$ har vi $\sqrt[n]{|n^n z^n|} = |nz|$, og for $z \neq 0$ gælder $(|nz|) \to \infty$. Af rodkriteriet følger, at rækken ikke er konvergent for $z \neq 0$.

Sætning 2.46. Hvis følgen $(a_n z_o^n)$ er begrænset for at $z_o \neq 0$, er potensrækken $(a_n z^n)$ absolut konvergent for $|z| < |z_o|$.

Bevis. Vi vælger $K \in \mathring{R}$, således at $|a_n z_o^n| \leq K$ for alle n. Heraf følger

$$|a_n z^n| = |a_n z_o^n| \left|\frac{z}{z_o}\right|^n \leq K \left|\frac{z}{z_o}\right|^n ,$$

og for $|z| < |z_o|$ er $(K\left|\frac{z}{z_o}\right|^n)$ en konvergent kvotientrække. Sammenligningskriteriet medfører derefter, at rækken $(|a_n z^n|)$ er konvergent, altså at $(a_n z^n)$ er absolut konvergent.

<u>Sætning</u> 2.47. Til enhver potensrække $(a_n z^n)$ svarer $R \in \dot{R}^*$, således at rækken $(a_n z^n)$ er absolut konvergent, hvis $|z| < R$, divergent, hvis $|z| > R$.

Bevis. Hvis rækken kun er konvergent for $z = 0$, passer påstanden for $R = 0$. Hvis rækken $(a_n z_o^n)$, hvor $z_o \neq 0$, er konvergent, er følgen $(a_n z_o^n)$ begrænset, og sætning 2,46 giver da, at rækken er absolut konvergent for alle z med $|z| < |z_o|$. Lad A være mængden af positive tal r med den egenskab, at rækken $(a_n z^n)$ er konvergent for alle z med $|z| < r$. Vi sætter $R = \sup A$. For et z_1 med $|z_1| < R$ kan vi vælge $r \in A \cap]|z_1|, R[$, og rækken er da absolut konvergent for alle z med $|z| < r$, altså er rækken $(a_n z_1^n)$ absolut konvergent. Hvis rækken $(a_n z_2^n)$ er konvergent, er (som vi så ovenfor) rækken $(a_n z^n)$ absolut konvergent for ethvert z med $|z| < |z_2|$. Det betyder, at $]0, |z_2|[\subset A$, altså $|z_2| \leq R$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 2.48. Tallet R i sætning 2.47 kaldes konvergensradius for potensrækken $(a_n z^n)$. Punktmængden $\{z \in \check{C} \mid |z| < R\}$ kaldes potensrækkens konvergenscirkelskive. Punktmængden $\{z \in \check{C} \mid |z| = R\}$ kaldes potensrækkens konvergenscirkel. Intervallet $]-R, R[$ kaldes potensrækkens konvergensinterval.

<u>Sætning</u> 2.49. Hvis potensrækken $(a_n z^n)$ har konvergensradius R, vil det for $R_1 \in]0, R[$ gælde, at potensrækken konvergerer ligeligt på cirkelskiven $\{z \in \check{C} \mid |z| \leq R_1\}$.

Bevis. Rækken $(a_n R_1^n)$ er absolut konvergent. Altså er rækken $(|a_n| R_1^n)$ konvergent. For alle $n \in \check{N} \cup \{0\}$ og alle $z \in \check{C}$ med $|z| \leq R_1$ er $|a_n z^n| \leq |a_n| R_1^n$. Påstanden følger derfor af sætning 2.42.

<u>Sætning</u> 2.50. Konvergensradius R for potensrækken $(a_n z^n)$ er bestemt ved, at

$$R^{-1} = \lim \sup \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right).$$

Hvis følgen$\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ er konvergent, er dens grænseværdi R^{-1}.

Bevis. Vi har $\lim \sup \left(\sqrt[n]{|a_n z^n|}\right) = |z| \lim \sup \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, og potensrækken er konvergent, hvis dette tal er < 1 og divergent, hvis det er > 1. Heraf følger den første påstand umiddelbart. Hvis $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \to c$, har vi $\left(\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|}\right) \to c|z|$, og potensrækken er konvergent, hvis denne grænseværdi er < 1 og divergent, hvis den er > 1. Dermed er sætningen bevist.

I stedet for at sige, at potensrækken $(a_n z^n)$ er konvergent, er det selvfølgelig fuldt korrekt at sige, at summen $\Sigma a_n z^n$ eksisterer. Fra nu af vil vi også tillade os at sige, at summen $\Sigma a_n z^n$ er konvergent, selv om dette strengt taget er ganske uden mening. Vi vil også tillade os at sige rækken $\Sigma a_n z^n$, selv om dette også er ukorrekt, idet symbolet er rækkens sum. Det svarer ret nøje til, at man tillader sig at sige funktionen f(z), selv om f(z) betegner funktionsværdien. Forsyndelsen giver os mulighed for mere bekvemt at opskrive potensrækker, hvor nogle af de første koefficienter er 0 eller hvor hver anden koefficient er 0, idet vi kan vælge indices på passende måde og skrive summationsgrænser på. F.eks.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Undertiden vil man foretrække at skrive nogle af de første led:

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

$$\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots$$

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$

(der skal altid være tre prikker). Det er nyttigt under visse omstændigheder at tillade tomme produkter at optræde, og et tomt produkt tillægges værdien 1, ligesom den tomme sum tillægges værdien 0. Velkendt er $a^0 = 1$ (for $a \neq 0$). Vi vil også benytte

$$0! = 1 \; ; \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \; ; \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 ,$$

så vi har

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots .$$

Eksempel. Lad os bestemme konvergensradius for de ovenfor anførte potensrækker. Rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

er begge betinget konvergente for $z = 1$. Det medfører, at begge rækker har konvergensradius 1. Af sætning 2.50 følger, at konvergensradius kun afhænger af koefficienternes numeriske værdi. Altså har

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

ligeledes konvergensradius 1. For

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!}$$

får $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ værdierne $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ og $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. I alle tre tilfælde får vi $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) \to 0$, og konvergensradius er derfor ∞. Rækkerne konvergerer derfor for alle komplekse værdier af z. Det samme vil fortsat gælde, efter at vi i de to sidste rækker har erstattet z med z^2, og det ødelægges heller ikke ved, at den sidste række multipliceres med z. Altså har

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

konvergensradius ∞. For rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

får vi $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = (\frac{n}{n+1})^2$, altså $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 1$, så denne række har konvergensradius 1. For $z = 1$ er rækken absolut konvergent, og det medfører, at den er absolut konvergent for alle z med $|z| \leq 1$ og ligelig konvergent på cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

<u>Sætning</u> 2.51. Potensrækkerne $(a_n z^n)$, $(na_n z^n)$ og $((n+1)a_{n+1}z^n)$ har samme konvergensradius.

Bevis. Vi har set, at $(\frac{\log n}{n}) \to 0$, og da $\log \sqrt[n]{n} = \frac{\log n}{n}$, og da eksponentialfunktionen er kontinuert, får vi heraf (hvad vi allerede tidligere har benyttet), at $(\sqrt[n]{n}) \to 1$. For et passende $k > 1$ har vi derfor

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq \sqrt[n]{n|a_n|} \leqq k\sqrt[n]{|a_n|} \quad ,$$

hvilket medfører, at

$$\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) \leqq \lim\sup(\sqrt[n]{n|a_n|}) \leqq k \lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}),$$

og da dette er rigtigt for ethvert $k > 1$, slutter vi, at

$$\lim\sup(\sqrt[n]{|a_n|}) = \lim\sup(\sqrt[n]{n|a_n|}),$$

og sætning 2.50 medfører derfor, at de to første potensrækker har samme konvergensradius. Det er klart, at rækkerne $(na_n z^n)$ og $((n+1)a_{n+1}z^{n+1})$ har samme konvergensradius, og det er også klart, at udeladelsen af en faktor z ikke vil ændre konvergensradius. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.52. Lad $(a_n z^n)$ være en potensrække, hvis koefficienter er reelle, og lad R være dens konvergensradius. Den ved $f(x) = \Sigma a_n x^n$ definerede funktion $f:]-R,R[$ ind i $\mathbf{R}$ er differentiabel, og $f'(x) = \Sigma(n+1)a_{n+1}x^n$.

Bevis. Ifølge sætning 2.51 har potensrækken $((n+1)a_{n+1}z^n)$ konvergensradius R. For $R_1 \in]0,R[$ er potensrækken $((n+1)a_{n+1}x^n)$ ifølge sætning 2.49 ligelig konvergent på intervallet $]-R_1,R_1[$, og af sætning 2.41 følger derefter for $x \in]-R_1,R_1[$, at

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)-a_o) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n .$$

Da dette gælder for ethvert $R_1 \in]0,R[$, er sætningen dermed bevist.

<u>Sætning</u> 2.53. For $x \in \,]-1,1]$ er

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} .$$

Bevis. Potensrækken $(\frac{z^n}{n})$ har konvergensradius 1. For $z = 1$ er rækken betinget konvergent. Altså definerer

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

en afbildning $\varphi:]-1,1]$ ind i $\mathring{R}$. For $x \in \,]-1,1[$ har vi ifølge sætning 2.52, at

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx} \log(1+x).$$

Altså er $\varphi(x) - \log(1+x)$ konstant på $]-1,1[$, og ved at sætte $x = 0$ ser vi, at konstanten er 0. Dermed har vi vist, at $\varphi(x) = \log(1+x)$ for $x \in \,]-1,1[$, og vi mangler blot at vise, at $\varphi(1) = \log 2$. Sætning 2.44 med $g_n(x) = x^n$ og $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ fortæller, at rækken $((-1)^{n-1} \frac{x^n}{n})$ er ligelig konvergent på intervallet $[0,1]$. Ifølge sætning 2.37 er φ altså kontinuert på intervallet $[0,1]$. Da den ved $\varphi(x) - \log(1+x)$ definerede funktion er kontinuert på $[0,1]$ og identisk 0 på $[0,1[$ er den 0 også for $x = 1$. Altså $\varphi(1) = \log 2$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Den fundne rækkeudvikling gør det muligt at beregne en tabel over naturlige logaritmer. På grund af funktionalligningen $\log(xy) = \log x + \log y$ er det fornuftigt først at udregne logaritmerne af de små primtal. Rækkeudviklingen

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

konvergerer så dårligt, at den er helt uanvendelig til numerisk beregning af log 2. En vis fordel opnår vi, ved at vi har

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{x^n}{n},$$

altså

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots) .$$

For $x = \frac{1}{3}$ fås log 2 af denne udvikling. Endnu hurtigere går det med $x = \frac{1}{9}$, som giver os $\log \frac{5}{4}$. For $x = \frac{3}{253}$ får vi $\log \frac{128}{125}$, og så har vi $\log 2 = \log \frac{128}{125} + 3 \log \frac{5}{4}$ og derefter $\log 5 = \log \frac{5}{4} + 2 \log 2$. Dernæst udregner vi $\log \frac{81}{80}$, og dermed har vi log 3. Vi fortsætter med $\log \frac{50}{49}$ og $\log \frac{121}{120}$, som giver os log 7 og log 11. Resten går let. De kendte logaritmer vil snart ligge tæt nok til, at de øvrige kan findes ved interpolation.
Vi skal vise en opstilling til udregning af $\log \frac{5}{4}$ med 8 decimaler.

n	x^n	$\frac{x^n}{n}$
1	0.11111 11111	0.11111 11111
2	0.01234 56790	
3	0.00137 17421	0.00045 72474
4	0.00015 24158	
5	0.00001 69351	0.00000 33870
6	0.00000 18817	
7	0.00000 02091	0.00000 00299
8	0.00000 00232	
9	0.00000 00026	0.00000 00003
		0.11157 17757

$$\log \frac{5}{4} = 0.22314\ 355 .$$

Afrundingsfejlenes virkning på summen er mindre end 3 i sidste decimal. De bortkastede led er langt under 1 i sidste decimal. Den samlede indflydelse på slutresultatet er således under 7 på tiende decimal, så de anførte 8 decimaler er alle sikre.

Eksempel. Følgende lille regning illustrerer, at summen af en betinget konvergent række kan ændres ved omordning af leddene:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots$$

$$\frac{3}{2}\log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

<u>Sætning</u> 2.54. Lad $(a_n z^n)$ være en potensrække med reelle koefficienter og med konvergensradius R. Den ved $f(x) = \Sigma a_n x^n$ definerede funktion $f:]-R,R[$ ind i $\dot{R}$ er vilkårlig ofte differentiabel, og dens p^{te} differentialkvotient er

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^p = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} x^p .$$

Bevis. Umiddelbart ved gentagen anvendelse af sætning 2.52 kontinuert med sætning 2.51.

<u>Sætning</u> 2.55. Lad α være et positivt tal, og lad $f:]-\alpha,\alpha[$ ind i $\dot{R}$ være en funktion, der kan udvikles i en konvergent potensrække, altså

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Da er f vilkårlig ofte differentiabel, og $f^{(p)}(0) = p!\, a_p$.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 2.54.

Sætningen viser, at en reel funktion højst på én måde kan udvikles i potensrække, og udviklingen er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

<u>Sætning</u> 2.56. For to vilkårlige potensrækker $(a_n z^n)$ og $(b_n z^n)$ gælder, at hvis der findes et positivt tal α, således at

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[\ (\Sigma\, a_n x^n = \Sigma\, b_n x^n) ,$$

da er $a_n = b_n$ for alle værdier af n.

Bevis. Vi sætter $c_n = b_n - a_n$ og for $x \in]-\alpha,\alpha[$ har vi da $\Sigma\, c_n x^n = 0$. For hvert n skriver vi $c_n = c'_n + ic''_n$; $c'_n, c''_n \in \mathbb{R}$, og vi har da $\Sigma\, c'_n x^n = \Sigma\, c''_n x^n = 0$ for alle $x \in]-\alpha,\alpha[$. Af sætning 2.55 følger nu, at $c'_n = c''_n = 0$ for alle n. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 2.57. Lad $(a_n z^n)$ og $(b_n z^n)$ være potensrækker, som begge har konvergensradius $\geq R > 0$. For $|z| < R$ gælder da

$$\Sigma\, a_n z^n + \Sigma\, b_n z^n = \Sigma (a_n + b_n) z^n$$

og

$$\Sigma\, a_n z^n \, \Sigma\, b_n z^n = \Sigma\, c_n z^n , \text{ hvor } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Bevis. Den første påstand er indlysende. Af sætning 2.24 følger

$$\Sigma\, a_n z^n \, \Sigma\, b_n z^n = \sum_{p,q=0}^{\infty} a_p b_q \, z^{p+q} ,$$

og ved sætning 2.22 får vi derefter

$$\Sigma\, a_n z^n\, \Sigma\, b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} z^n = \Sigma\, c_n z^n ,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætning 2.58. For $p \in \mathring{N}$ og $|z| < 1$ er

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n .$$

Bevis. For $x \in]-1,1[$ er

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n ,$$

og ved at differentiere p gange og dividere med p! får vi ifølge sætning 2.54

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n .$$

Af sætning 2.57 følger, at $(1-z)^{-p-1}$ kan udvikles i en potensrække med konvergensradius ≥ 1. Af sætning 2.56 følger dernæst, at denne potensrække er identisk med den allerede fundne. Dermed er sætningen bevist.

Ved at erstatte z med $\frac{z}{\alpha}$ får vi

$$\frac{1}{(\alpha-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} \alpha^{-n-p-1} z^n ,$$

hvor potensrækken har konvergensradius $|\alpha|$. Heraf fremgår, at enhver partialbrøk $\frac{a}{(z-\alpha)^p}$, hvor $\alpha \neq 0$, kan udvikles i en potensrække som får konvergensradius $|\alpha|$. Det medfører igen, at enhver bruden rational funktion, hvis nævner ikke har 0 som rod, kan udvikles i potensrække.

Definition 2.59. Hvis potensrækken $(a_n z^n)$ har konvergensradius $R > 0$ og summen $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$, definerer vi den p^{te} differentialkvotient af f ved

$$f^{(p)}(z) = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p}\, z^n .$$

Ved gentagen anvendelse af sætning 2.51 ser vi, at $f^{(p)}(z)$ virkelig er defineret for $|z| < R$, og af sætning 2.54 fremgår, at definitionen stemmer overens med den sædvanlige, når alle koefficienterne samt z er reelle.

Sætning 2.60. (Taylors formel for en potensrække). Hvis potensrækken $(a_n z^n)$ har konvergensradius $R > 0$ og summen $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$, har vi for $|z| + |h| < R$, at

$$f(z+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(z)}{p!} h^p .$$

Bevis. Rækken $(|a_n|(|z| + |h|)^n)$ er konvergent, og ved binomialformlen og sidste del af sætning 2.22 får vi derfor

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z| + |h|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} |a_n|\; |z|^{n-p} |h|^p =$$

$$\sum_{0 \leq p \leq n < \infty} \binom{n}{p} |a_n|\; |z|^{n-p} |h|^p ,$$

hvilket viser, at familien $\left(\binom{n}{p}|a_n|\; |z|^{n-p}|h|^p \,\middle|\, p,n \in \dot{N} \cup \{0\} \wedge p \leq n\right)$ er summabel. Det samme gælder, når vi sletter numerisk-tegnene, og regningen kan da gennemføres bagfra uden numerisk-tegnene, så vi får

$$f(z+h) = \sum_{0 \leq p \leq n < \infty} \binom{n}{p} a_n z^{n-p}\, h^p ,$$

og fornyet anvendelse af sætning 2.22 giver

$$f(z+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n z^{n-p} \right) h^p .$$

Her er

$$\sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} z^n = \frac{f^{(p)}(z)}{p!} ,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætningen udtrykker, at $f(z+h)$ for fast z kan udvikles i en potensrække med konvergensradius $\geq R - |z|$.

Opgaver.

Am besten ists auch hier, wenn Ihr
nur Einen hört,
Und af des Meisters Worte schwört.
Goethe.

Opgaver.

Indledning .

Det er ikke en egentlig rutineopgave at undersøge, om en række er konvergent. Dertil er der for mange konvergenskriterier at vælge imellem. Lad os forsøge at behandle et tilfældigt valgt eksempel:

For hvilke værdier af $p \in \grave{R}$ er den uendelige række

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{(\log(n+1))^p} \right)$$

konvergent ?

Rækken har positive led. Betinget konvergens kan altså lades ude af betragtning. Da $(\sqrt[n]{n}) \to 1$, vil ledene i den uendelige række gå mod 0, i hvert fald for $p > 0$. Der er altså håb om konvergens. Rodkriteriet virker ikke tillokkende, og kvotientkriteriet egentlig heller ikke. Det ser ud til, at vi må sammenligne med en passende række. Disse overvejelser leder os til erkendelse af, at det centrale spørgsmål er: hvor stor er egentlig $\sqrt[n]{n} - 1$.

Mere psykologisk betonede betragtninger kommer vel også ind i billedet. Størrelsen $(\log(n+1))^p$ er jo langsomt voksende for $p > 0$ og langsomt aftagende for $p < 0$. Derfor er der egentlig ikke særlig stor chance for, at værdien af p overhovedet har indflydelse på konvergensspørgsmålet. Disse overvejelser leder tankerne hen på sætning 2.16, som viser at værdien af p kan være udslagsgivende for konvergensspørgsmålet, hvis $\sqrt[n]{n} - 1$ er omtrent $\frac{1}{n+1}$ (eller $\frac{1}{n}$). Idet vi venter, at opgavestilleren har sørget for, at værdien af p spiller en rolle, tror vi, at $\sqrt[n]{n}-1$ er omtrent $\frac{1}{n}$ og vi stiler mod at vise dette. Denne slags overvejelser er selvfølgelig ikke sikre. Af og til møder man opgaver, hvor svaret er "for alle p" eller "for intet p" .

Størrelsen $\sqrt[n]{n}$ er i sig selv uhåndterlig, men dens logaritme er $\frac{1}{n}\log n$, hvilket ser mere overskueligt ud. Vi ved, at $(\frac{1}{n}\log n) \to 0$. Hvorfor ikke prøve at skrive det:

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\log n} - e^0 ,$$

hvor det sidste bare er en nærliggende indskydelse. Vi kan jo se på differenskvotienten

$$\frac{e^{\frac{1}{n}\log n} - e^o}{\frac{1}{n}\log n}$$

som går mod differentialkvotienten af e^x for $x = 0$. Vi har altså

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{1}{n}\log n}\right) \to e^o = 1 ,$$

og der eksisterer derfor positive konstanter k_1 og k_2, således at

$$k_1 \frac{\log n}{n} \leqq \sqrt[n]{n} - 1 \leqq k_2 \frac{\log n}{n} .$$

Sammenligningskriteriet giver nu, at rækken forholder sog som

Opgaver.

rækken $\left(\frac{\log n}{n(\log(n+1))^p}\right)$, og den forholder sig vel igen som

$\left(\frac{\log(n+1)}{(n+1)(\log(n+1))^p}\right)$. Altså konvergens for $p > 2$, divergens for $p \leqq 2$.

Vi må nu gå regningerne kritisk igennem. Så længe vi bare fumlede med opgaven tænkte vi på store værdier af n, og det er fornuftigt nu at se efter, om små værdier af n giver anledning til særlige problemer. Vi ser, at $n = 1$ giver 0 i nævneren flere steder, men det første led i den givne række er 0, så vi kan helt udelade værdien $n = 1$.

En mulig redaktion af besvarelsen:

Rækkens første led er 0. Alle de øvrige led er positive. Da funktionen e^x har differentialkvotient 1 for $x = 0$, har den ved $\frac{1}{h}(e^h-1)$ definerede funktion grænseværdien 1 for $h \to 1$. Idet vi udnytter, at $\left(\frac{\log n}{n}\right) \to 0$ følger heraf, idet vi sætter $h = \frac{\log n}{n}$, at

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{\log n}{n}}\right) \to 1 ,$$

hvor $n = 1$ tænkes udeladt. Idet følgen er begrænset og har positive led, kan vi vælge $k_1, k_2 \in \,]0,\infty[$, således at

$$k_1 \frac{\log n}{n} \leqq \sqrt[n]{n} - 1 \leqq k_2 \frac{\log n}{n}.$$

For $n > 1$ er

$$\frac{\sqrt[n]{n}-1}{(\log(n+1))^p} \leqq k_2 \frac{\log n}{n(\log(n+1))^p} \leqq 2k_2 \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^{p-1}} ,$$

Opgaver.

og sammenligningskriteriet kombineret med sætning 2.16 giver, at den givne række er konvergent for $p > 2$.

For $n > 1$ er $\log(n+1) < 2 \log n$, og derfor får vi for $p \geqq 0$, at

$$\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{(\log(n+1))^p} \geqq k_1 \frac{\log n}{n(\log(n+1))^p} \geqq 2^{-p} k_1 \frac{1}{n(\log n)^{p-1}}$$

og sammenligningskriteriet giver nu, at rækken er divergent for $0 \leqq p \leqq 2$.

For $p < 0$ er

$$\frac{\sqrt[n]{n} - 1}{(\log(n+1))^p} \geqq \sqrt[n]{n} - 1 \geqq k_1 \frac{\log n}{n},$$

og sammenligningskriteriet giver, at rækken er divergent.

En del af de følgende opgaver skal illustrere begrebet ligelig konvergens, og disse opgaver er ikke i egentlig forstand problemer, og "løsnihgen" af dem vil ikke volde vanskeligheder.

At udvikle en bruden rational funktion i potensrække er en rutineopgave i egentlig forstand: Den brudne rationale funktion skrives som en sum af partialbrøker, og hver af disse udvikles i potensrække, således som det er beskrevet efter sætning 2.58. Det er den komplekse partialbrøksudvikling, der kommer i brug, men for en bruden rational funktion med reelle koefficienter får potensrækken selvfølgelig reelle koefficienter. Dette er ikke meget bevendt som kontrol på, at man har regnet rigtigt.

Lette opgaver.

1. Undersøg, om rækkerne $((\sqrt[n]{n} - 1)^n)$ og $((\log 2 \log 3 \ldots \log(n+1))^{-1})$ er konvergente.

2. Undersøg, om rækkerne $\left(\frac{n!}{(2n)!}\right)$, $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$ og $\left(\frac{(n!)^3}{(2n)!}\right)$ er konvergente.

3. Undersøg, om rækkerne $\left(\frac{1}{(\log(n+1))^n}\right)$, $\left(\left(\log(1 + \frac{1}{n})\right)^n\right)$ og $\left(\left(\log n \log(1 + \frac{1}{n})\right)^n\right)$ er konvergente.

4. Undersøg, om rækkerne $\left(\frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}\right)$ og $\left(\left(\log(n+1)\right)^{-\log n}\right)$ er konvergente

5. Undersøg, om rækkerne

$$(\sqrt{(1+n^2)} - n) \quad \text{og} \quad (\sqrt{(n^2+1)} + \sqrt{(n^2-1)} - 2n)$$

er konvergente.

6. Udnyt de vurderinger, der benyttedes i beviset for integralkriteriet til at vurdere afsnittene i rækken (n^{-1}), og find derved frem til et skøn over, hvor mange led, der må medtages, før summen overstiger 100. Hvorledes kan et nøjagtigere skøn opnår ?

7. Udnyt vurderinger, der minder om de i beviset for integralkriteriet benyttede til at vise, at følgen

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n)$$

er konvergent. Grænseværdierne kaldes Eulers konstant. Man ved ikke om Eulers konstant er rational eller irrational.

8. For hvilke reelle p og q med $0 < q < p$ konvergerer rækkerne

$$\left(\frac{1}{n^p - n^q}\right) \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{p^n - q^n}\right) .$$

9. For hvilke reelle p konvergerer rækken $(e^{-(\log n)^p})$.

10. For hvilke reelle p konvergerer rækken $((\sqrt[n]{n} - 1)^p)$.

11. Vis, at familien $((p+iq)^{-3} \mid (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\})$ er summabel.

12. Undersøg om rækken $\left(\frac{n^2+i}{1+in^4}\right)$ er konvergent.

13. Vis den for $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ gyldige formel

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} z_1^p z_2^q = \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)} .$$

14. Vis, at familien $(\binom{p+q}{p} z_1^p z_2^q \mid (p+1,q+1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ er summabel, hvis og kun hvis $|z_1| + |z_2| < 1$.

15. Undersøg om rækkerne $(\sin \frac{1}{n})$, $(\sin \frac{1}{n^2})$ og $((\sin \frac{1}{n})^2)$ er konvergente.

16. Vis, at rækken $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2})\right)$ er konvergent.

17. Lad p være et positivt ulige tal. Med $\rho(n)$ betegner vi den numerisk mindste divisionsrest ved ufuldstændig division af p i det hele tal n, altså

$$n = pq + \rho(n), \quad q \in \mathbb{Z}, \quad |\rho(n)| < \tfrac{1}{2}p .$$

Vis, at rækken $\left(\frac{\rho(n)}{\log(n+1)}\right)$ er konvergent.

18. For hvilke $x \in \mathbb{R}$ er rækken $\left((1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \frac{\sin nx}{n}\right)$ konvergent.

19. Lad (a_n) være en følge, for hvilken rækken (a_n) ikke er konvergent. Vis, at rækken (na_n) heller ikke er konvergent.

20. For $p, q \in \mathbb{N}$ definerer vi

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{for } p = q \\ -1 & \text{for } p = q-1 \\ 0 & \text{for } p < q-1 \text{ og for } p > q \end{cases} .$$

Vis, at begge dobbeltsummerne

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \right) \quad \text{og} \quad \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} \right)$$

eksisterer, men at de har forskellig værdi.

21. Vis, at en betinget konvergent række (a_n) med reelle led kan omordnes, således at summen får en given værdi c (begynd med så mange positive led, at afsnitssummen overstiger c, dernæst så mange negative led, at afsnitssummen netop bliver mindre end c, o.s.v.).

22. Vis, at rækken $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{i}{n^2} \right)$ er betinget konvergent. Hvilke komplekse tal er sum af rækker, der fås ved omordning af den foreliggende.

23. Angiv en betinget konvergent række med den egenskab, at ethvert komplekst tal kan fremkomme som sum af en række der fås ved omordning af den først nævnte.

24. Vis følgende sætning: Hvis rækken (a_n) er konvergent og følgen (b_n) har den egenskab, at rækken $(b_n - b_{n+1})$ er absolut konvergent, da er rækken $(a_n b_n)$ konvergent.

25. Det antages, at rækken (a_n) er absolut konvergent, samt at

$\forall n(a_n^2 \neq 1)$. Vis, at rækkerne

$$(a_n^2) \quad , \quad \left(\frac{a_n^2}{a_n^2-1}\right) \quad , \quad \left(\frac{a_n}{a_n-1}\right)$$

er absolut konvergente.

26. En følge (f_n) af afbildninger $f_n:[0,\pi]$ ind i $[0,\infty]$ er defineret ved at

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin n x & \text{for} \quad x \in [0,\frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{for} \quad x \in [\frac{\pi}{n}, \pi]. \end{cases}$$

Vis, at (f_n) er punktvis, men ikke ligelig konvergent, og angiv grænsefunktion. Undersøg, om det samme gælder for følgen $(n^p f_n)$, idet p er et naturligt tal. Undersøg, om følgen $(\int_0^{\pi} f_n(x)dx)$ og følgerne $(\int_0^{\pi} n^p f_n(x)dx)$ er konvergente.

27. Lad m være et fast naturligt tal. Vis, at følgen (f_{mn}), hvor $f_{mn}:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er defineret ved $f_{mn}(x) = (\cos m!\pi x)^{2n}$ er punktvis konvergent mod en grænsefunktion f_m og angiv denne grænsefunktion. Vis dernæst, at følgen (f_m) er punktvis konvergent, og angiv grænsefunktionen.

28. Undersøg om følgen (f_n), hvor $f_n:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er defineret ved $f_n(x) = nx(1 + n^2x^2)^{-1}$, er punktvis konvergent. Er følgen ligelig konvergent ? Besvar de samme spørgsmål for $f_n(x) = n^3x^2(1 + n^4x^4)^{-1}$.

29. Vis, at følgen (f_n), hvor f_n i $\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er defineret ved $f_n(x) = \sqrt[2n-1]{x^{2n}}$ konvergerer punktvis. Er funktionerne differentiable ? Konvergerer følgen ligeligt ? Konvergerer følgen ligeligt på begrænsede intervaller $[-a,a]$? Besvar de samme spørgsmål for $y = \sqrt{(x^2 + n^{-2})}$.

30. Undersøg, om den ved $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ definerede følge (f_n) af afbildninger $f_n:[0,1]$ ind i $[0,1]$ er ligelig konvergent.

31. Undersøg om rækkerne $(e^{-n^2(1+x^2)})$ og $(2^{-n}\cos n^2x)$ er ligelig konvergente på $\mathring{R}$.

32. Undersøg om

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin 2^{-n}x \quad \text{og} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(x-n)}$$

definerer kontinuerte afbildninger $f,g:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$.

33. Undersøg om rækkerne

$$((-1)^n\, n^{-1}\sin^{2n}x) \quad \text{og} \quad (((-1)^n\, e^{-nx^2} \sin \tfrac{x}{n})$$

er ligelig konvergente på hele $\mathring{R}$.

34. Undersøg om rækken

$$(\sin \tfrac{x}{n} \sin n\, x)$$

er ligelig konvergent på intervallet $[-\pi,\pi]$.

35. Bestem konvergensradius for

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(n+1)^{-2}\, z^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(\log n)\, z^n .$$

Undersøg, om rækkerne konvergerer på konvergenscirklen.

36. Samme spørgsmål som, foregående opgave for

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} + 1)^n\, z^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n\, z^n .$$

37. Samme spørgsmål som i foregående opgave for

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 + i^n)^n z^n \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\cos \frac{n\pi}{6})^n\, z^n .$$

38. Hvis potensrækken $(a_n z^n)$ har konvergensradius $R \in \,]0,\infty[$, og k er et positivt helt tal, hvilken konvergensradius har da hver af rækkerne $(a_n^k z^n)$, $(a_n z^{kn})$ og $(a_n z^{n^k})$.

39. Find en potensrækkeudvikling for

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$$

og for

$$\frac{1}{(z^2-1)(z^2-2)(z^2-3)} \quad .$$

40. Find en potensrækkeudvikling for

$$\frac{1}{z^2+2z+2} \quad .$$

41. Find en potensrækkeudvikling for $(1+x)\log(1+x)$ dels ved direkte udregning, dels ved først at finde potensrækkeudviklingen for differentialkvotienten. Kontroller, at de således fundne potensrækker er identiske.

42. Samme spørgsmål som i opgave nr. 41 for $(\log(1-x))^2$. I dette tilfælde giver kontrollen anledning til en smule besvær.

43. Vis, at $((1+n^{-1})^n)$ konvergerer mod e (udnyt, at $\log((1+n)^n)$ konvergerer mod differentialkvotienten af log i punktet 1). Find derved konvergensradius for potensrækken $(n!n^{-n} z^n | n>0)$.

Vanskeligere opgaver.

44. Undersøg om rækken $((\log\log(n+2))^{-\log\log(n+2)}$ er konvergent.

45. For $x \in \dot{Q}$, sætter vi $\varphi(x) = q$, hvis $x = \frac{p}{q}$, hvor $q \in \dot{N}$, og brøken er uforkortelig. Undersøg, om familien $((\varphi(x))^{-3} \mid x \in \dot{Q} \cap [0,1])$ er summabel.

46. For $\nu = 0,1,\ldots,9$ betegner vi med A_ν mængden af de naturlige tal, som i 10-talssystemet skrives uden cifret ν. Vis, at det for $\nu = 0,1,\ldots,9$ gælder, at $(n^{-1} \mid n \in A_\nu)$ er en summabel familie, medens familien $(n^{-1} \mid n \in \dot{N} \setminus \cup A_\nu)$ ikke er summabel.

47. Vis formlen $e = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1}$ ved at udnytte, at $((1+n^{-1})^n) \to e$, idet $(1+n^{-1})^n$ udvikles efter binomialformlen og grænseovergangen $n \to \infty$ gennemføres. Det er nødvendigt at regne omhyggeligt!

48. Vis de for alle $n \in \dot{N}$ gyldige relationer

$$\forall x \in [n,n+1] \ \left(\frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}(n+1-x) + \frac{1}{n+1}(x-n)\right)$$

$$\forall x \in \left[n - \frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right] \ \left(\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}(x-n)\right).$$

Vis, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}\right) = \gamma ,$$

hvor γ er Eulers konstant (se opgave 7). Udregn en tilnærmet værdi for γ ved at benytte den nøjagtige sum af summens 10 første led, medens de øvrige led vurderes ved hjælp af de i opgavens indledning angivne uligheder.

49. Vis på grundlag af opgave 47, at e er et irrationalt tal (indirekte bevis.)

50. Vis, at der til hvert reelt tal $x \in [0,1[$ svarer en følge (a_n) af hele tal, således at

$$\forall n \in \dot{N}(0 \leq a_n \leq n-1) \quad \text{og} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} a_n .$$

Vis, at x er et rationalt tal, hvis og kun hvis

$$\exists N \in \dot{N}((\forall n \geq N(a_n = 0)) \vee (\forall n \geq N(a_n = n-1))).$$

Vis, at følgen (a_n) er éntydigt bestemt ved x, hvis x er et irrationalt tal.

51. Vis den for $p,q \in \dot{N}$ gyldige formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2np+2j-1} - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2nq+2j} \right) = \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q} .$$

52. Om en følge (f_n) af afbildninger $f_n:[0,1]$ ind i $[0,\infty[$ tænkes følgende at gælde for ethvert $n \in \dot{N}$:

1). $f_n(x) = 0$, hvis $x \leq \frac{1}{n+1}$ eller $x \geq \frac{1}{n}$.

2). f_n er kontinuert.

3). Maksimumsværdien af $f_n(x)$ er $\frac{1}{n}$.

Hvis, at rækken (f_n) er ligelig konvergent, men at rækken (f_n) ikke har nogen konvergent majorantrække (sml. sætning 2.42).

53. Vis, at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n x}{n \log n}$$

definerer en overalt differentiabel afbildning $f:\dot{R}\setminus 2\pi \dot{Z}$ ind i $\dot{R}$, og at differentialkvotienten er givet ved

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{\log n} .$$

Vis, at rækkeudviklingen for f er divergent i punkterne af $2\pi\mathbb{Z}$, medens rækkeudviklingen for f' er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$. Udled heraf, at den ved

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{\log n}$$

definerede afbildning $g:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er diskontinuert i punkterne $2\pi\mathbb{Z}$.

54. Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ har konvergensradius 1, samt at

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

ikke er begrænset på nogen radius

$$\{r(\cos \tfrac{p}{q}\pi + i \sin \tfrac{p}{q}\pi) \mid 0 \leq r < 1 \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}.$$

Vis, idet $|z| < 1$, at Taylorrækken

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^n$$

har konvergensradius $1 - |z|$.

55. Vis, at det for

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

og $|z| < 1$ gælder, at

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^n$$

har konvergensradius $|1-z|$. (Undersøg først $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)^{-1}$).

Svære opgaver.

56. Vis, at $\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n!)^{-1} = 1$, og vis derved, at

$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n!)^{-1}$. Udled heraf, at

$$(a,b,c \in \mathbb{Z} \wedge ae^2 + be + c = 0) \Rightarrow a=b=c=0.$$

Mere almindeligt gælder

$$(a_0,a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z} \wedge a_0+a_1e+\ldots+a_ne^n=0) \Rightarrow a_0=\ldots=a_n=0,$$

men det er meget vanskeligt at vise. Tal med denne egenskab kaldes transcendente, og alle andre tal kaldes algebraiske. Mængden af algebraiske tal er numerabel.

57. Lad (f_n) være en følge af kontinuerte funktioner $f_n:[0,1]$ ind i $[0,\infty[$. Det antages, at $(f_n(x))$ er aftagende og konvergerer mod 0 for ethvert $x \in [0,1]$. Vis, at (f_n) er ligelig konvergent (prøv indirekte).

58. Lad b være et positivt ulige tal, og lad a være et tal i intervallet $]0,1[$. Da definerer

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x$$

en kontinuert afbildning $W:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.

For $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ vælger vi $\beta_n \in \mathbb{Z}$, således at

$$-\frac{1}{2} < b^n x - \beta_n \leq \frac{1}{2},$$

og vi sætter

$$\gamma_n = b^n x - \beta_n,\; h_n = b^{-n}(1-\gamma_n),\; k_n = b^{-n}(-1-\gamma_n),$$

og danner differenskvotienterne

$$\frac{W(x+h_n) - W(x)}{h_n} \quad \text{og} \quad \frac{W(x+k_n) - W(x)}{k_n} .$$

Vi skriver disse som uendelige rækker. Vis at leddene fra og med det n^{te} alle får samme fortegn i hver af de to rækker, og vis, at summen af disse led, når b er tilstrækkelig stor, langt vil overveje summen af alle de forudgående led. Foretag grænseovergangen $n \to \infty$, og vis derved, at W ikke er differentiabel for nogen værdi af x. Omhyggelig vurdering vil vise, at dette indtræffer, hvis $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Eksemplet skyldes Weierstrass og er det første eksempel på en kontinuert, intet steds differentiabel funktion.

59. Van der Waerden har givet et meget enkelt eksempel på en kontinuert, intet steds differentiabel funktion. Han definerer

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{for} \quad |x| \leq \frac{1}{2} ,$$

og sætter $\varphi(x+n) = \varphi(x)$ for alle $n \in \dot{N}$ og alle x med $|x| \leq \frac{1}{2}$. Dernæst sætter han

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}\varphi(4^n x) .$$

For $x \in \dot{R}$ og $n \in \dot{N}$ vælges $h_n = 4^{-n}$ eller -4^{-n}. Ved for hvert n at vælge fortegnet rigtigt opnår han, at $h_n^{-1}(V(x+h_n)-V(x))$ bliver lige, hvis n er lige, og ulige hvis n er ulige, og det udelukker åbenbart, at følgen af differenskvotienter kan være konvergent.

Prøv, at gennemføre beviset.

60. På vor mange måder kan et beløb på n d (d=pence) veksles i mønter med pålydende 1d, 2d, og 3d ?

Antallet er åbenbart koefficienten til z^n i rækkeudviklingen

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} ,$$

og her kan venstre side udvikles i partialbrøker, som igen kan udvikles i potensrække.

Vis, at det søgte antal bliver det hele tal, der ligger nærmest ved $\frac{1}{12}(n+3)^2$.

Kapitel 3.

Elementære, specielle funktioner.

Ergo er I en Hane

Ludvig Holberg.

I dette kapitel vil vi studere de trigonometriske funktioner, logaritme- og eksponential funktionerne, samt nogle med disse beslægtede funktioner. Et væsentligt formål med dette kapitel er, at bestemme potensrækkeudviklinger for nogle af de nævnte funktioner. Vi vil derefter benytte potensrækkerne til at udvide funktionernes definitionsmængde til den komplekse plan.

De elementære funktioner er kommet til verden på meget forskelligvis, men i de fleste gymnasiebøger fødes logaritme- og eksponentialfunktionerne af den matematiske analyse, medens de trigonometriske funktioner er af geometrisk oprindelse og de hviler i væsentlig grad på det naive vinkelbegreb, der kendes fra mellemskolen. I det foregående har vi brugt det naive vinkelbegreb ved indførelsen af argumentet for et komplekst tal. Dette har vi igen brugt ved beviset for den associative lov for de komplekse tals multiplikation, men denne udledes let direkte af produktets definition. Desuden anvendtes vinkelbegrebet i beviset for reglen $|ab| = |a|\ |b|$, men den kan også let fås direkte af definitionen. Iøvrigt er teorien for potensrækker helt uafhængig af vinkelbegrebet. Der er derfor fornuft i at genindføre vinkelbegrebet forfra ved udnyttelse af potensrækker.

Et vigtigt hjælpemiddel er Taylors formel, som hører til gymnasiepensum. Vi minder kort om denne formel, og vi skal også give et bevis for det.

Sætning 3.1. Lad $f:[a,b]$ ind i $\grave{R}$ være n gange differentiabel med $f',\ldots,f^{(n)}$ kontinuerte. Da er

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}\,dt ,$$

hvor $f^{(0)}(a)$ betyder $f(a)$.

Bevis. Idet vi skriver $f^{(0)}$ istedet for f, har vi for $k = 1,\ldots,n-1$, at

$$\int_a^b f^{(k)}(t)\,\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt = f^{(k)}(a)\,\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\,\frac{(b-t)^k}{k!}dt,$$

og endvidere er (svarende til $k=0$).

$$f(b) = f^{(0)}(a) + \int_a^b f^{(1)}(t)\,dt .$$

Ved addition af alle disse ligninger får vi netop den i sætningen anførte formel.

Sætning 3.2. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval, som indeholder 0, og lad $f:I$ ind i $\grave{R}$ være en n gange differentiabel funktion, hvis n første differentialkvotienter er kontinuerte. For $x \in I$ gælder da

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Bevis. Vi bemærker først, at beviset for sætning 3.1 gælder uændret, hvis intervallet er $[b,a]$ istedet for $[a,b]$. Så anvender vi sætning 3.1 med $a = 0$ og $b = x$, og den ønskede formel fremkommer.

Sætning 3.3. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval, som indeholder 0, og lad $f:I$ ind i $\grave{R}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion. Hvis det for ethvert $x \in I$ gælder, at

$$\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt\right) \to 0 ,$$

da er

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

for $x \in I$. Potensrækken kaldes MacLaurin-rækken for f.

Bevis. Af sætning 3.2 fremgår, at forskellen mellem f(x) og det n^{te} afsnit af MacLaurin-rækken går mod 0, og deraf følger påstanden umiddelbart .

Den ved

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

definerede funktion $R_n: I$ ind i $\mathbf{R}$ kaldes MacLaurinrækkens (n^{te}) restled. At (R_n) går mod 0 punktvis på I er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at MacLaurin-rækken er konvergent med sum f(x) for $x \in I$. For et interval $[a,b] \subset I$, hvis endepunkter ikke er endepunkter for I, vil MacLaurin-rækken da, som vi så i kapitel 2, konvergere ligeligt, og restleddet vil altså gå ligeligt mod 0 på et sådan interval. Det skal tilføjes, at MacLaurin-rækken kan være konvergent, selv om restleddet ikke går mod 0, men dens sum vil da afvige fra f(x). Det kan selvfølgelig udmærket tænkes, at MacLaurin-rækken konvergerer på et interval, der har I som ægte delinterval, og vi minder om, at MacLaurinrækkens maksimale konvergensinterval under alle omstændigheder er symmetrisk om 0.

Eksempel. For

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

er

$$f(0) = a_0 \text{ , } f'(0) = 1!a_1,\dots,f^{(n)}(0) = n!a_n,\ f^{(p)}(0) = 0 \text{ for } p>n \text{ .}$$

I dette tilfælde er MacLaurin-rækken altså polynomiet selv.

For

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

hvor potensrækken har positiv konvergensradius, får vi ligeledes $f^{(n)}(0) = n!a_n$ for alle n, og potensrækken bliver derfor sin egen MacLaurinrække.

Sætning 3.4. For alle $x \in \mathbb{R}$ er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bevis. Funktionen e^x er sin egen differentialkvotient. Restleddet i denne funktions MacLaurin-række bliver derfor

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x e^t\ (x-t)^{n-1}\ dt.$$

Her er $0 \leqq e^t \leqq e^{|x|}$ i hele integrationsintervallet. Funktionen $(x-t)^{n-1}$ har konstant fortegn i integrationsintervallet. Vi får derfor

$$|R_n(x)| \leqq \frac{1}{(n-1)!}\ e^{|x|} \left| \int_0^x (x-t)^{n-1}\ dt \right| ,$$

hvor numerisktegnet om integraltegnet er nødvendigt for negative x. Vi udregner integralet og får

$$|R_n(x)| \leqq e^{|x|}\ \frac{|x|^n}{n!} .$$

Vi vælger $N \geqq |x|$ og for $n > N$ har vi da

$$|R_n(x)| \leqq e^{|x|}\ \frac{|x|^N}{N!}\ \frac{|x|}{n} ,$$

hvilket viser, at $(R_n(x)) \to 0$. MacLaurin-rækken er altså konvergent. For $x = 0$ bliver differentialkvotienten af enhver orden 1, og MacLaurin-rækken reduceres derfor til den anførte række. Dermed er sætningen bevist.

Potensrækkeudviklingen af e^x, eksponentialrækken, har konvergensradius ∞. Derfor har følgende definition mening:

Definition 3.5. For $z \in \mathbb{C}$ sætter vi

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Afbildningen $\exp: \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ kaldes eksponentialfunktionen.

Betegnelserne $\exp(z)$ og e^z anvendes i flæng. Det er klart, at den således definerede exponentialfunktion stemmer overens med den kendte, hvis z er reel. Vi skal nu vise, at eksponentialfunktionens funktionalligning bevarer sin gyldighed for den nye funktion.

Sætning 3.6. For $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ er

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} .$$

Bevis. Da eksponentialrækken er absolut konvergent, er

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_1^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z_2^q}{q!} = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{z_1^p z_2^q}{p!q!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n-q} \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} .$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3.7. For $z \in \mathbb{C}$ er

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$$

Bevis. Klart.

Sætning 3.8. For $y \in \grave{R}$ er

$$|e^{iy}| = 1.$$

Bevis.

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy-iy} = 1.$$

Vi indfører nu de to nye funktioner

$$c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Potensrækkerne har konvergensradius ∞, og derfor definerer disse rækkeudviklinger afbildninger $c, s : \grave{C}$ ind i $\grave{C}$. Da koefficienterne er reelle, definerer de tillige afbildninger $c, s : \grave{R}$ ind i $\grave{R}$. Disse afbildninger er vilkårlig ofte differentiable, og ved ledvis differentiation får vi

$$c'(x) = -s(x), \quad s'(x) = c(x) .$$

Sætning 3.9. For $x \in \grave{R}$ er

$$e^{ix} = c(x) + is(x) , \qquad (c(x))^2 + (s(x))^2 = 1 .$$

Afbildningen $c + is : \grave{R}$ ind i $\grave{C}$ er en afbildning af den reelle akse ind i enhedscirklen i den komplekse plan. Afbildningerne $c, s : \grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er kontinuerte.

Bevis. Ved anvendelse af eksponentialfunktionen får vi

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$c(x) + is(x) .$$

Den anden påstand følger umiddelbart af sætning 3.8, og den er netop ensbetydende med, at billedmængden ved c + is er en delmængde af enhedscirklen. At c og s er kontinuerte følger af, at potensrækkerne konvergerer ligeligt på ethvert begrænset delinterval af $\grave{R}$.

<u>Sætning</u> 3.10. Der eksisterer et positivt tal π med den egenskab, at c + is afbilder intervallet $[0, \frac{1}{2}\pi]$ bijektivt på den ved $\{z \in \grave{C} \mid |z| = 1 \wedge \mathrm{Re} z \geq 0 \wedge \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ bestemte cirkelkvadrant.

Bevis. Da c er kontinuert, og $c(0) = 1$, eksisterer der et tal $h > 0$, således at $c(x) > 0$ for alle $x \in [0,h]$. Da $s'(x)=c(x)$, er s strengt voksende på $[0,h]$, altså $s(h) > 0$. Lad os nu betragte et tal $k > h$, således at $c(x) > 0$ for alle $x \in [0,k]$. Så er s strengt voksende på $[0,k]$, altså $s(x) \geq s(h)$ for alle $x \in [h,k]$. Da vi har $c'(x) = -s(x)$, får vi heraf

$$c(h) \geq c(h) - c(k) = -\int_h^k (-s(x))dx = \int_h^k s(x)dx \geq (k-h)\, s(h),$$

hvilket medfører, at

$$k \leq h + \frac{c(h)}{s(h)} .$$

Foreningsmængden af alle de halvåbne intervaller $[0.k[$, på hvilke $c(x)$ er positiv, bliver nu et interval $[0,\frac{1}{2}\pi[$, hvor $\frac{1}{2}\pi \leq h + \frac{c(h)}{s(h)}$. Da c er kontinuert, er $c(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$, og da intervallet $[0,\frac{1}{2}\pi[$ er det maximale halvåbne interval, på hvilket $c(x)$ er positiv, er $c(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Da s er strengt voksende på $[0,\frac{1}{2}\pi]$ er c + is injektiv på dette interval, og både c og s er positive på $]0,\frac{1}{2}\pi[$. Af sætning 3.9 fremgår nu, at billedet af intervallet $[0,\frac{1}{2}\pi]$ netop er den bue af enhedscirklen, der ligger i første kvadrant inklusive buens endepunkter. Dermed er sætningen bevist.

Det fremgår af beviset, at

$$c(\tfrac{1}{2}\pi) = 0 \ , \quad s(\tfrac{1}{2}\pi) = 1 \ ,$$

altså

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \text{og} \quad e^{in\frac{\pi}{2}} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = i^n \ .$$

<u>Sætning</u> 3.10. Den ved

$$\varphi(x) = e^{ix} = c(x) + i\ s(x)$$

definerede afbildning $\varphi : \grave{R}$ ind i $\grave{C}$ har periode 2π (d.v.s. $\forall x \in \grave{R}(\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x))$. Billedmængden $\varphi(\grave{R})$ er netop enhedscirklen i den komplekse plan. Ethvert interval $]a,a+2\pi]$ afbildes bijektivt ved φ på hele enhedscirklen. Hvis z er et punkt af enhedscirklen og $x \in \grave{R}$ tilfredsstiller $\varphi(x) = z$, da er $\varphi^{-1}(z) = x + 2\pi\ \grave{Z}$.

Bevis. Den første påstand følger af, at

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{2i\pi} \cdot e^{ix} = i^4 \cdot e^{ix} = e^{ix} \ .$$

Endvidere er $\varphi(-x) = e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \overline{\varphi(x)}$, og i forbindelse med sætning 3.9 medfører dette, at φ afbilder $[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$ bijektivt på den ved $\{z \in \grave{C} \mid |z| = 1 \wedge \mathrm{Re}z \geq 0\}$ bestemte halvcirkel. Endvidere er

$$e^{i(x+\pi)} = e^{ix}e^{i\pi} = e^{ix}i^2 = -e^{ix} \ ,$$

og derfor vil φ afbilde $[\tfrac{1}{2}\pi,\pi]$ bijektivt på den bue af enhedscirklen, der ligger i tredie kvadrant (endepunkterne medregnes). Tilsvarende ses, at $e^{i(x-\pi)} = -e^{ix}$, og φ vil derfor afbilde

$[-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ bijektivt på den bue af enhedscirklen, der ligger i anden kvadrant. Ved at kombinere disse resultater finder vi, at $]-\pi,\pi]$ afbildes bijektivt på hele enhedscirklen. På grund af periodiciteten gælder det samme for ethvert interval $](2p-1)\pi,(2p+1)\pi]$. For $a \in \mathring{R}$ kan vi vælge $p \in \mathring{Z}$, således at $a \in](2p-1)\pi,(2p+1)\pi]$, og på grund af periodiciteten er billedet af $](2p-1)\pi,a]$ det samme som af $](2p+1)\pi,a+2\pi]$, og dette interval afbildes injektiv. Dette medfører, at $]a,a+2\pi]$ afbildes injektivt på hele enhedscirklen. Af $\varphi(x) = z$ følger på grund af periodiciteten, at $\varphi^{-1}(z) \supseteq x+2\pi\mathring{Z}$, og da ethvert interval $]a,a+2\pi]$ højst indeholder ét punkt af $\varphi^{-1}(z)$, er $\varphi^{-1}(z) = x+2\pi\mathring{Z}$.

Funktionerne $c(x)$ og $s(x)$ er identiske med de fra gymnasieundervisningen kendte funktioner cos x og sin x. Hvis vi fastholder, at cos x og sin x er indførte på grundlag af et vinkelbegreb, der ikke er eksakt, afskærer vi os selvfølgelig fra at bevise denne påstand, og vi må nøjes med at overbevise os om, at påstanden i en vis forstand er rigtig. Vi starter et "Erasmus - Montanus-bevis".

Funktionerne c og s er begrænsede. Endvidere er

$$c(x+\frac{\pi}{2}) = -s(x) \quad \text{og} \quad s(x+\frac{\pi}{2}) = c(x)$$

og for $a \in \mathring{R}$ er

$$\frac{d}{dx}c(x+a) = -s(x+a) = c(x+a+\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dx}s(x+a) = c(x+a) = s(x+a+\frac{\pi}{2}),$$

så gentagen anvendelse giver

$$c^{(n)}(x) = c(x+n\frac{\pi}{2}), \quad s^{(n)}(x) = s(x+n\frac{\pi}{2}).$$

Endvidere er

$$c(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{Re}\ e^{in\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Re}\ i^n,\ s(n\tfrac{\pi}{2}) = \mathrm{Im}\ e^{in\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Im}\ i^n .$$

Funktionerne cos og sin har de samme egenskaber. Ergo .... .

Som bevis er denne overvejelse selvfølgelig ikke meget værd. Det er imidlertid så heldigt, at vi kan vise, at c og s er de eneste funktioner, som har de anførte egenskaber. Dette fremgår af følgende sætning.

Sætning 3.11. Lad $\gamma:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ og $\sigma:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ være vilkårlig ofte differentiable funktioner, og lad K være et positivt tal. Hvis

$$\forall n \in \grave{N} \quad \forall x \in \grave{R}(|\gamma^{(n)}(x)| \leqq K \wedge |\sigma^{(n)}(x)| \leqq K) ,$$

og

$$\forall n \in \grave{N} \cup \{0\} \ (\gamma^{(n)}(0) = \mathrm{Re}\ i^n \wedge \sigma^{(n)}(0) = \mathrm{Im}\ i^n) ,$$

da er

$$\forall x \in \grave{R} \ (\gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\ i^n}{n!} x^n \wedge \sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\ i^n}{n!} x^n) .$$

Bevis. De anførte rækker er netop MacLaurinrækkerne, og vi behøver derfor blot at vise, at Restleddene går mod 0. For funktionen γ bliver restleddet

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \gamma^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt ,$$

så vi får vurderingen

$$|R_n(x)| \leqq \frac{K}{(n-1)!} \left|\int_0^x (x-t)^{n-1} dt\right| = K \frac{|x|^n}{n!} ,$$

og vi har jo set, at $(\frac{|x|^n}{n!}) \to 0$. Det hele bliver ved at være rigtigt, hvis vi skriver σ i stedet for γ. Dermed er sætningen bevist.

Vi vil nu anvende betegnelserne cos og sin i stedet for c og s. Ethvert $|z| \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$ kan på en og kun en måde fremstilles på formen

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) , -\pi < \theta \leqq 2\pi ,$$

og vi sætter $\theta = \mathrm{Arg}z$; $\arg z = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$. Her er θ altså bestemt på grundlag af sætning 3.10. For vektorer $\underline{a}$ og $\underline{b}$ i planen og med koordinater (a_1,a_2) og (b_1,b_2) definerer vi målet for vinklen fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$ som $\arg \dfrac{b_1+ib_2}{a_1+ia_2}$ for $\underline{a} \neq 0$, $\underline{b} \neq 0$. Målet for en vinkel er således en mængde af reelle tal, der indbyrdes afviger ved heltallige multipla af 2π.

<u>Definition</u> 3.12. For $z \in \mathbb{C}$ sætter vi

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, i^n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Im}\, i^n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Derved har vi udstrakt definitionerne af cosinus og sinus til alle komplekse værdier af z. Definitionerne stemmer åbenbart overens med de sædvanlige, hvis z er reel.

<u>Sætning</u> 3.13. For alle $z \in \mathbb{C}$ er

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z , \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) , \quad \sin z = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 .$$

Bevis. Direkte regning giver

$$\cos z + i\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Re}\, i^n + i\,\mathrm{Im}\, i^n)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz} .$$

Den sidste rækkeudvikling i definition 3.12 viser, at $\sin(-z) = -\sin z$, og den anden formel fås derfor af den første ved at erstatte z med $-z$. Addition og subtraktion af de to første formler giver de to næste. Den sidste formel fås ved multiplikation af de to første.

Eksempel:

$$\cos(i\log 2) = \frac{1}{2}(e^{-\log 2} + e^{\log 2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) = \frac{5}{4} .$$

$$\sin(i\log 2) = \frac{1}{2i}(e^{-\log 2} - e^{\log 2}) = \frac{i}{2}(2 - \frac{1}{2}) = i\frac{3}{4} .$$

De fire første formler i sætning 3.13 kaldes Eulers formler. De gør det muligt at omforme problemer vedrørende trigonometriske funktioner til problemer vedrørende eksponentialfunktionen. Ad denne vej udledes de fra gymnasiet kendte regneregler for de trigonometriske formler, og disse er således alle gyldige i den komplekse plan. Det vil også fremgå af det følgende, at cosinus og sinus kun har reelle nulpunkter, så der vil ikke optræde nye undtagelsestilfælde hidrørende fra nulpunkter i nævnere. Formler, i hvilke der indgår kvadratrødder må generaliseres på kvadreret form og fortegnsdiskussionerne kan selvfølgelig ikke overføres.

Eksempelvis giver Eulers formler og eksponentialfunktionens funktionalligning

$$2\sin z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_2})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) =$$

$$\frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}) =$$

$$\sin(z_1+z_2) + \sin(z_1-z_2).$$

Ved ombytning af z_1 og z_2 får vi, idet vi udnytter, at $\sin(-z) = -\sin z$

$$2\cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1+z_2) - \sin(z_1-z_2) .$$

Ved addition og subtraktion af de to fundne formler får vi efter multiplikation med $\frac{1}{2}$, at

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1-z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 .$$

Eksempel. Et integral af formen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \cos 3x \sin 5x \, dx$$

udregnes ved at integranden omskrives til en sum. Dette kan vi nu rutinemæssigt gennemføre direkte ved Eulers formler, hvilket fører til følgende regning:

$$\cos x \cos 3x \sin 5x = \frac{1}{8i}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{3ix}+e^{-3ix})(e^{5ix}-e^{-5ix}) =$$

$$\frac{1}{8i}(e^{9ix}+e^{7ix}+e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}-e^{-7ix}-e^{-9ix}) =$$

$$\frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x + \sin 7x + \sin 9x) ,$$

så vi får

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \cos 3x \sin 5x \, dx = -\frac{1}{4}\Big[\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}) = \frac{25}{63} .$$

<u>Definition</u> 3.14. For alle $z \in \mathring{C}$ sætter vi

$$\cosh z = \cos iz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh z = \frac{1}{i}\sin iz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Funktionerne cosh og sinh kaldes hyperbolsk cosinus og hyperbolsk sinus.

Det fremgår umiddelbart af definition 3.12 og sætning 3.13, at de to sidste lighedstegn i hver af formellinierne i definition 3.14 virkelig gælder.

Det er klart, at de trigonometriske formler overføres på cosh og sinh i let ændret skikkelse. Således er

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$$

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 .$$

Ved restriktion af cosh og sinh får vi afbildninger cosh, sinh: $\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$.

Det fremgår direkte af definitionen, at $\cosh(-x) = \cosh x$, men $\sinh(-x) = -\sinh x$. Det fremgår af potensrækkeudviklingerne, at cosh og sinh er strengt voksende for $x \geq 0$, samt at $\cosh x$ for små værdier af x kan approksimeres godt ved $1 + \frac{1}{2}x^2$, medens $\sinh x$ approximeres godt ved $x + \frac{1}{6}x^3$. For større værdier af x bliver $\cosh x$ og $\sinh x$ hurtigt langt større end de anførte tilnærmelsesværdier, og de midterste udtryk i 3.14 viser, at $\cosh x$ og $\sinh x$ for store værdier af x begge omtrent er lig med $\frac{1}{2}e^x$.

Som et kuriosum skal vi uden bevis nævne, at det grafiske billede af cosh netop er ligevægtsfiguren for en tung, homogen kæde uden bøjningsmodstand, når kæden ophænges ved sine endepunkter, således at disse ikke er lodret over hinanden.

Sætning 3.15. For $x,y \in \mathbb{R}$ er

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ .$$

Bevis. Den første påstand følger umiddelbart af eksponentialfunktionens funktionalligning og sætning 3.13. De to sidste ligninger kan vises ved at udtrykke alle de indgående størrelse ved eksponentialfunktioner, men de følger også umiddelbart af additionsformlerne for cos og sin kombineret med definition 3.14.

Sætning 3.16. Eksponentialfunktionen antager ikke værdien 0. Funktionerne cos og sin har kun reelle nulpunkter. Nulpunktmængden for cos er $\{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, og nulpunktsmængden for sin er $\{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Nulpunktsmængden for cosh er $\{i(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ og nulpunktsmængden for sinh er $\{in\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Bevis. Af sætning 3.15 fremgår, at

$$|e^{x+iy}| = e^x \neq 0 \ .$$

Af rækkeudviklingen for cosh fremgår, at cosh y er positiv for alle reelle y. Af $\cos(x+iy) = 0$ følger derfor $\cos x = 0$, altså $\sin x \neq 0$, altså $\sinh y = 0$, altså $y = 0$. Dermed har vi vist, at cos kun har de allerede kendte reelle nulpunkter. Tilsvarende for sin. Påstandene vedrørende cosh og sinh fremgår umiddelbart af af disses udtryk ved cos og sin. Dermed er sætningen bevist.

Definition 3.17. Afbildningerne

$$\mathrm{tg}\colon \mathbb{C} \setminus \{(n+\tfrac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ ind i } \mathbb{C}$$

$$\mathrm{cot}\colon \mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ ind i } \mathbb{C}$$

$$\mathrm{tgh}\colon \mathbb{C} \setminus \{i(n+\tfrac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ ind i } \mathbb{C}$$

$$\mathrm{coth}\colon \mathbb{C} \setminus \{in\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ ind i } \mathbb{C}$$

defineres ved

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \mathrm{tgh}z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

I den anvendte rækkefølge benævnes de således definerede afbildninger tangens, cotangens, hyperbolsktangens og hyperbolsk cotangens.

I udenlandsk litteratur anvendes ofte tang og cotang istedet for tg og cot. Lejlighedsvis møder man betegnelserne

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad \text{og} \quad \mathrm{cosec}z = \frac{1}{\sin z}.$$

Disse afbildninger betegnes secans og cosecans.

Vi bemærker at

$$\mathrm{tg}z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \frac{1}{i}\,\frac{1-e^{-2iz}}{1+e^{-2iz}},$$

hvilket viser, at tg har periode π, altså $\mathrm{tg}(z+\pi) = \mathrm{tg}z$. Endvidere er

$$\mathrm{tgh}z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}},$$

og vi har

$$\mathrm{tgh}z = \frac{1}{i}\,\mathrm{tg}\, iz \;.$$

Ved restriktion af tg og cot får vi afbildninger

$$\mathrm{tg}\colon \mathring{R} \setminus \{(n+\tfrac{1}{2})\pi \mid n \in \mathring{Z}\} \text{ ind i } \mathring{R}$$

$$\cot\colon \mathring{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathring{Z}\} \text{ ind i } \mathring{R}\;,$$

som netop er de fra gymnasiet kendte. Formlerne vedrørende tg og cot udledes af formlerne, der gælder for cos og sin ganske som i gymnasiet. For tgh og coth fås et lignende formelsystem. Ved restriktion får vi afbildninger

$$\mathrm{tgh}\colon \mathring{R} \text{ ind i }]-1,1[$$

$$\mathrm{coth}\colon \begin{cases}]-\infty,0[\text{ ind i }]-\infty,-1[\\ ]\,0,\infty[\text{ ind i }]\,1,\,\infty[\end{cases}$$

Differentialkvotienterne af cosh og sinh fås af kvotientrækkerne eller af de to funktioners udtryk ved eksponentialfunktionen. For reelle værdier af x får vi

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x,\quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x\;,$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{tgh}\, x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \mathrm{tgh}^2 x\;,$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x\;,\quad x \neq 0.$$

Funktionerne cos, sin, tg, cot kaldes trigonometriske funktioner, og cosh, sinh, tgh, coth kaldes hyperbelfunktioner.

<u>Definition</u> 3.18. For $z \in \mathring{C} \setminus \{0\}$ kaldes

$$\mathrm{Log}z = \{w \in \mathring{C} \mid e^w = z\}$$

mængden af logaritmer til z.

<u>Sætning</u> 3.19. For $z \in \check{C} \setminus \{0\}$ er

$$\mathrm{Log}z = \log|z| + i\arg z .$$

Bevis. At $w \in \mathrm{Log}z$, $w = u + iv$, $u,v \in \check{R}$ er ensbetydende med, at $e^w = z$, og ifølge sætning 3.15 er dette ensbetydende med, at $e^u = |z|$ og $v \in \arg z$. Heraf følger sætningen umiddelbart.

<u>Definition</u> 3.20. For $z \in \check{C} \setminus \{0\}$ kaldes

$$\log z = \log|z| + i\mathrm{Arg}z$$

hovedlogaritmen til z.

For $z = x > 0$ er $|x| = x$ og $\mathrm{Arg}\, x = 0$, så ligningen reduceres til $\log x = \log x$. Dette undskylder brugen af betegnelsen log.

Eksempler: $\log i = i\frac{\pi}{2}$, $\log(-e) = 1 + i\pi$, $\log\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = i\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Log}(1+i) = \{\frac{1}{2}\log 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)\}$.

Logaritmefunktionens funktionalligning overføres til det komplekse tilfælde som en relation mellem mængder, idet

$$\mathrm{Log}(z_1z_2) = \mathrm{Log}z_1 + \mathrm{Log}z_2 \text{ for } z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0,$$

men for hovedlogaritmerne gælder kun det svagere resultat

$$\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 + i\varepsilon 2\pi,\ z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0 ,$$

hvor ε har en af værdierne 0, +1 og -1 afhængigt af z_1 og z_2.

<u>Definition</u> 3.21. For $a > 0$, $z \in \check{C}$ sætter vi

$$a^z = e^{z\log a} .$$

Hermed har vi indført potenser med vilkårligt positivt grundtal og vilkårlig kompleks eksponent. Det ses umiddelbart, at de sædvanlige regneregler

$$a^{z_1+z_2} = a^{z_1}a^{z_2}, \quad (ab)^z = a^z b^z$$

bevarer gyldigheden.

For $z,w \in \mathbb{C}$, hvor z er negativ eller ikke reel, vil vi ved z^w forstå en mængde, nemlig

$$z^w = e^{w\mathrm{Log}z},$$

eller mere udførligt for $w = u+iv$, $u,v \in \mathbb{R}$

$$z^w = e^{(u+iv)(\log|z|+i\arg z)} =$$

$$\{e^{u\log|z|-v\mathrm{Arg}z - 2n\pi v+i(v\log|z|+u\mathrm{Arg}z+2n\pi u)} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

For $w \in \mathbb{Q}$ bliver mængden endelig, ellers altid uendelig. Hvis w er rent imaginær og $|z| = 1$ bliver alle elementer i mængden reelle tal.

Eksempler:

$$(-2)^3 = \{-8\},$$

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = \{4, -2(1+i\sqrt{3}), -2(1-i\sqrt{3})\},$$

$$(-2)^{3i} = \{e^{-3(2n+1)\pi}(\cos(3\log 2)+i\sin(3\log 2)) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$i^i = \{e^{\frac{1}{2}(4n-1)\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

<u>Definition</u> 3.22. For $z \in \mathbb{C}$ sætter vi

$$\arccos z = \{w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z\}, \quad \arcsin z = \{w \in \mathbb{C} \mid \sin w = z\}.$$

Ligningen $\cos w = z$ giver, idet cos udtrykkes ved eksponentialfunktionen

$$\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) = z ,$$

hvilket omformes til andengradsligningen

$$(e^{iw})^2 - 2z\, e^{iw} + 1 = 0 ,$$

som har løsningsmængden

$$e^{iw} \in z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} .$$

Altså er

$$\arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}) .$$

Analogt får vi

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) .$$

Vi bemærker, at vi i begge tilfælde fik andengradsligninger, der ikke har 0 som rod. Derfor eksisterer Log altid, og vi har dermed vist, at cos og sin afbilder $\check{C}$ surjektivt på $\check{C}$.

For $\gamma \in (z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ har vi $(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = \{\gamma, -\gamma\}$. Desuden bliver $(z+\gamma)(z-\gamma) = z^2-\gamma^2 = 1$, så vi får $\operatorname{Log}(z-\gamma) = -\operatorname{Log}(z+\gamma)$. For $w \in \arccos z$ vil iw tilhøre $\operatorname{Log}(z+\gamma)$ eller $\operatorname{Log}(z-\gamma)$, og vi får derfor

$$\arccos z = \{w+2n\pi \mid n \in \check{Z}\} \cup \{-w+2n\pi \mid n \in \check{Z}\} ,$$

hvilket er i overensstemmelse med, hvad vi kender fra gymnasieundervisningen i det reelle tilfælde. For $w \in \arcsin z$ får vi på tilsvarende måde

$$\arcsin z = \{w+2n\pi \mid n \in \check{Z}\} \cup \{-w+(2n+1)\pi \mid n \in \check{Z}\} .$$

Ligningen tgw = z giver, idet tg udtrykkes ved eksponentialfunktionen

$$\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = iz ,$$

men brøken på venstre side vil ikke for nogen værdi af w blive 1 eller -1. Altså har ligningen ingen løsninger for z = i eller z = -i . I andre tilfælde får vi løsningsmængden

$$\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz} .$$

<u>Definition</u> 3.23. For $z \in \mathring{C} \setminus \{i,-i\}$ sætter vi

$$\operatorname{arctg} z = \{w \in \mathring{C} \mid \operatorname{tg} w = z\} = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz} ,$$

$$\operatorname{arccot} z = \{w \in \mathring{C} \mid \cot w = z\} = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{z + i}{z - i} .$$

I det reelle tilfælde indfører vi omvendte funktioner til de trigonometriske funktioners restriktionern til passende monotonitetsintervaller.

<u>Definition</u> 3.24. De omvendte afbildninger til de strengt monotone, kontinuerte afbildninger

$\sin\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ på $[-1,1]$, $\quad \cos\colon [0,\pi]$ på $[-1,1]$,

$\operatorname{tg}\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ på $\mathring{R}$, $\quad \cot\colon]0,\pi[$ på $\mathring{R}$,

betegnes i den samme rækkefølge

$\operatorname{Arcsin}\colon [-1,1]$ på $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\quad \operatorname{Arccos}\colon [-1,1]$ på $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\operatorname{Arctg}\colon \mathring{R}$ på $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\quad \operatorname{Arccot}\colon \mathring{R}$ på $]0,\pi[$.

Af den fra gymnasieundervisningen kendte sætning om omvendt funktion fremgår, at de 4 nye funktioner bliver kontinuerte, samt at Arcsin og Arctg bliver strengt voksende, medens Arccos og Arccot bliver strengt aftagende. Endvidere bliver de 4 nye funktioner differentiable, når sin, cos, tg og cot er det og har fra 0 forskellig differentialkvotient.

Sætning 3.25. Funktionerne Arcsin og Arccos er differentiable på $]-1,1[$, og Arctg og Arccot er differentiable på $\mathring{R}$ med

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccos}x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Arctg}x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{Arccot}x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Bevis. Af $y = \operatorname{Arcsin}x$, $x \in]-1,1[$ følger $x = \sin y$, $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, altså $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{(1-\sin^2 y)} = \sqrt{(1-x^2)}$, altså $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Af $y = \operatorname{Arctg}x$ følger $x = \operatorname{tg}y, y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, altså $\frac{dx}{dy} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, altså $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. Regningerne går ganske tilsvarende for Arccos og Arccot.

Funktionerne Arcsin, Arccos, Arcty og Arccot kaldes arcusfunktionerne eller de cirkulære funktioner. I udenlandsk matematisk litteratur møder man betegnelserne $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1}, $\cot^{-1}$, og man møder aelvfølgelig også Arcsec og Arccosec (eller $\sec^{-1}$ og $\operatorname{cosec}^{-1}$). Forstavelsen arcus refererer til, at funktionsværdien er et vinkelmål, altså også et mål for en cirkelbue.

Ved oversættelse af de trigonometriske formler fremkommer formler for arcus-funktionerne. Vi skal vise fremgangsmåden ved et par eksempler, som vi dog vil give status som sætninger.

<u>Sætning</u> 3.26.

$$\forall x \in [-1,1]\ (\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = \tfrac{\pi}{2})$$

$$\forall x \in \grave{R}(\mathrm{Arctg}x + \mathrm{Arccot}x = \tfrac{\pi}{2}) \ .$$

Bevis. For $x \in [-1,1]$, $u = \mathrm{Arcsin}x$ er $-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$, altså $0 \leqq \frac{\pi}{2} - u \leqq \pi$. Endvidere er $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u = x$. Men det medfører netop, at $\mathrm{Arccos}x = \frac{\pi}{2} - u$. Dermed er den første påstand bevist. Den anden vises ganske analogt.

<u>Sætning</u> 3.27. For $x,y \in \grave{R}$ og $xy \neq 1$ er

$$\mathrm{Arctg}x+\mathrm{Arctg}y-\mathrm{Arctg}\,\frac{x+y}{1-xy} = \begin{cases} 0, & \text{hvis } xy < 1 \\ \pi, & \text{hvis } xy > 1 \text{ og } x > 0 \\ -\pi, & \text{hvis } xy < 1 \text{ og } x < 0 \ . \end{cases}$$

Bevis. For $u = \mathrm{Artg}x$, $v = \mathrm{Arctg}y$ er

$$\mathrm{tg}(u+v) = \frac{\mathrm{tg}u+\mathrm{tg}v}{1-\mathrm{tg}u\,\mathrm{tg}v} = \frac{x+y}{1-xy} \ ,$$

hvilket viser, at

$$u + v = \mathrm{Arctg}\,\frac{x+y}{1-xy} + n\pi \ , \quad n \in \grave{Z} \ .$$

For $xy \leqq 0$ medfører $u,v \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, at $u+v \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, altså $n = 0$. Lad os dernæst antage, at $x > 0$ og $y > 0$. Vi har da umiddelbart $n = 0$ for $u+v < \frac{\pi}{2}$ og $n = 1$ for $u+v > \frac{\pi}{2}$. Nu er $u+v < \frac{\pi}{2}$ ensbetydende med $v < \frac{\pi}{2} - u$, altså med $y = \mathrm{tg}v < \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-u) = \cot u = \frac{1}{x}$.

Analogt vises, at $u+v > \frac{\pi}{2}$ er ensbetydende med $y > \frac{1}{x}$. Dermed er sætningen vist for $x > 0$ og $y > 0$. Ved at skifte fortegn på x og y får vi umiddelbart sætningen for $x < 0$ og $y < 0$. Dermed er beviset fuldført.

Sætning 3.28. For $x \in [-1,1]$ er

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

og potensrækken er ligelig konvergent på hele intervallet $[-1,1]$.

Bevis. Rækken $((-1)^n(2n+1)^{-1})$ er konvergent, og for $x \in [0,1]$ er følgen (x^n) monotont aftagende og tilhører intervallet $[0,1]$. Altså er rækken $((-1)^n(2n+1)^{-1}x^{2n+1})$ ligelig konvergent på $[0,1]$ ifølge sætning 2. . Fortegnsskifte for x bevirker blot, at alle rækkens led skifter fortegn. Altså er rækken ligelig konvergent på $[-1,1]$, og dens sum er derfor en kontinuert funktion på $[-1,1]$. Derfor er det tilstrækkeligt at vise, at summen er Arctgx for $x \in\,]-1,1[$. Men i dette interval er rækkens sum en funktion med differentialkvotienten $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = (1+x^2)^{-1}$, altså samme differentialkvotient som Arctg x. Dermed har vi vist, at forskellen mellem rækkens sum og Arctg x er konstant. For $x = 0$ er forskellen imidlertid 0. Dermed er sætningen bevist.

For $x = 1$ fremkommer Leibniz' række

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Den konvergerer yderst langsomt og er ikke særlig velegnet til beregning af π. En bedre metode til beregning af π beror på følgende trick:

Ved at anvende sætning 3.27 to gange får vi

$$2 \text{ Arctg } \frac{1}{5} = \text{Arctg } \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \text{Arctg } \frac{10}{24} = \text{Arctg } \frac{5}{12}$$

$$4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} = \text{Arctg } \frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \text{Arctg } \frac{120}{119}$$

og fornyet anvendelse af samme sætning giver

$$4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = \text{Arctg } \frac{120}{119} + \text{Arctg}(-1) =$$

$$\text{Arctg } \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \text{Arctg } \frac{1}{239} ,$$

så vi har formlen

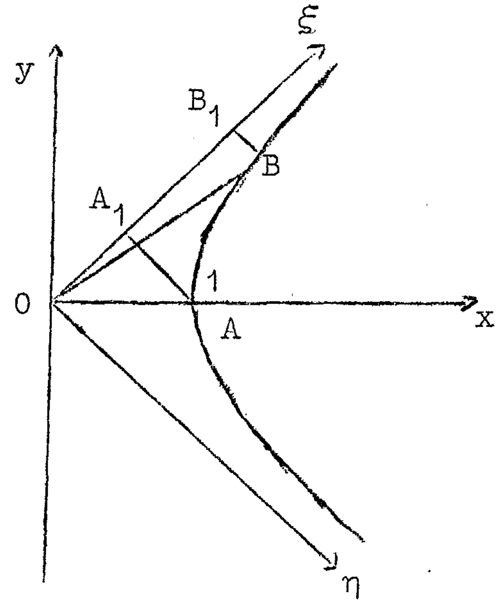
$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239} .$$

Nu kan både Arctg $\frac{1}{5}$ og Arctg $\frac{1}{239}$ bekvemt beregnes ved hjælp af rækkeudviklingen i sætning 3.28, og dermed har vi en praktisk anvendelig metode til beregning af π .

Punktmængden

$\{(\cosh\theta\ ,\ \sinh\theta) | \theta \in \mathbb{R}\}$

er en gren af hyperblen med ligning $x^2-y^2 = 1$. På figuren har vi tegnet hyperbelgrenen med asymptoter og afmærket punktet $A(1,0)$ og punktet $B(\cosh\theta, \sinh\theta)$, samt disse punkters projektioner A_1 og B_1 på den ene asymptote. Vi vil udregne arealet af sektoren OAB.



Fra gymnasieundervisningen ved vi, at hyperblens ligning i $\xi\eta$-systemet (d.v.s. med asymptoterne som koordinatakser) er $\xi\eta = \frac{1}{2}$, og "firkanten" $A_1\ A\ B\ B_1$ får derfor arealet $\frac{1}{2}\log\frac{OB_1}{OA_1}$.
Nu er

$$OB_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\cosh\theta + \sinh\theta) = OA_1 e^{\theta},$$

så "firkanten" får arealet $\frac{1}{2}\theta$. Af hyperblens ligning i $\xi\eta$-systemet fremgår, at trekanterne $OA\,A_1$ og $OB\,B_1$ har samme areal. Altså har sektoren OAB arealet $\frac{1}{2}\theta$.

Dette viser, at det er muligt at give en geometrisk definition af cosh og sinh analog med gymnasieundervisningens definition af cos og sin. Vi vælger B på den ligesidede hyperbel med ligningen $x^2-y^2 = 1$, således at sektoren OAB får arealet $\frac{1}{2}\theta$, idet arealet regnes positivt i første kvadrant, negativt i fjerde kvadrant. Punktet B har da koordinaterne $(\cosh\theta, \sinh\theta)$. Hvis vi her erstatter hyperblen med enhedscirklen, får vi en definition af cos og sin, som blot afviger fra den i gymnasieundervisningen benyttede ved at benytte sektorarealet i stedet for buelængden. Det kan vises (ikke let), at længden af hyperbelbuen AB ikke på simpel måde kan udtrykkes ved parameteren θ eller ved koordinaterne til B, og derfor er det helt udelukket at benytte buelængden i definitionen af hyperbelfunktionerne.

Ganske som for de trigonometriske funktioner indfører vi originalmængderne

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arcosh} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \cosh w = z\} \\ \operatorname{arsinh} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \sinh w = z\} \end{array}\right\} \text{ for } z \in \mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{artgh} Z = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{tgh} w = z\} \\ \operatorname{arcoth} z = \{w \in \mathbb{C} \mid \coth w = z\} \end{array}\right\} \text{ for } z \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1\}.$$

Forstavelsen ar læses area.

Endvidere indfører vi omvendte funktioner til de strengt monotone afbildninger

$$\cosh\colon [0,\infty[\text{ på } [1,\infty[\quad , \quad \sinh\colon \mathbb{R} \text{ på } \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \text{ på }]-1,1[\quad , \quad \coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ på } \mathbb{R}\setminus[-1,1] \ ,$$

og de omvendte funktioner betegnes i den omvendte rækkefølge

$$\operatorname{Arcosh}\colon [1,\infty[\text{ på } [0,\infty[\quad , \quad \operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \text{ på } \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Artgh}\colon]-1,1[\text{ på } \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{Arcoth}\colon \mathbb{R}\setminus[-1,1] \text{ på } \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Disse funktioner kaldes areafunktionerne.

Da de hyperbolske funktioner kan udtrykkes reelt ved eksponentialfunktionerne, kan areafunktionerne bestemmes ved løsning af eksponentiellle ligninger. Således er $y = \text{Arcosh}\, x$, $x \geq 1$ ensbetydende med $x = \cosh y$, $y \geq 0$, altså med

$$e^y + e^{-y} = 2x \ , \ y \geq 0 .$$

Ved løsning af andengradsligningen i e^y får vi

$$e^y = x + \sqrt{(x^2-1)} \quad \text{eller} \quad e^y = x - \sqrt{(x^2-1)} \ .$$

Da de to rødder har produkt 1, giver de y-værdier med sum 0. Den første rod giver den positive værdi for y. Altså er

$$\text{Arcosh}\, x = \log(x + \sqrt{(x^2-1)}), \quad x > 1 .$$

Ved den tilsvarende regning for Arsinh fremkommer en andengradsligning med en positiv og en negativ rod. Kun den positive rod giver en løsning. Resultatet bliver

$$\text{Arsinh}\, x = \log(x + \sqrt{(x^2+1)}) \ .$$

For $y = \text{Artgh}\, x$, $|x| < 1$ får vi $x = \text{tgh}\, y$, altså

$$\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \ ,$$

som har løsningen

$$\text{Artgh}\, x = \frac{1}{2}\log \frac{1+x}{1-x} \ , \quad |x| < 1 \ .$$

Tilsvarende fås

$$\text{Arcoth}\, x = \frac{1}{2}\log \frac{x+1}{x-1} \ , \quad |x| > 1 \ .$$

Differentialkvotienterne af areafunktionerne kan fås ved reglen for differentiation af omvendt funktion eller ved at differentiere de netop fundne udtryk. Vi skal blot anføre resultaterne:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Arcosh}\,x = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}} \quad , \quad \frac{d}{dx}\,\mathrm{Arsinh}\,x = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Artgh}\,x = \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad \frac{d}{dx}\,\mathrm{Arcoth}\,x = \frac{1}{1-x^2} \,.$$

Det vil være forkert at sige, at Artgh og Arcoth har den samme differentialkvotient. De to funktioners definitionsmængder er nemlig disjunkte.

Vi vil nu udlede nogle flere nyttige potensrækkeudviklinger for elementære funktioner. Dertil får vi brug for følgende hjælpesætning:

Sætning 3.29. Lad (a_n) være en følge af reelle tal, som konvergerer mod et tal $a \in]-1,1[$. For $b_n = a_1 \dots a_n$ gælder da $(b_n) \to 0$.

Bevis. Vi vælger $k \in]\,|a|,1[$ og dernæst $N \in \dot{N}$, således at $|a_n| \leq k$ for alle $n \geq N$. For $n \geq N$ har vi da

$$|b_n| \leq |b_1 \dots b_N|\; k^{n-N} \,,$$

og påstanden følger nu af, at $(k^{n-N}) \to 0$.

Definition 3.30. For $\nu \in \dot{R}$, $n \in \dot{N} \cup \{0\}$ sætter vi

$$\binom{\nu}{n} = \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-n+1)}{n!} \,.$$

Udtrykkene $\binom{\nu}{n}$ kaldes (generaliserede) binomialkoefficienter.

Vi minder om, at det tomme produkt regnes lig 1. Vi har altså

$$\binom{\nu}{0} = 1 \, , \, \binom{\nu}{1} = \nu \, .$$

For $\nu \in \dot{N}$ og $n \leq \nu$ bliver $\binom{\nu}{n}$ den sædvanlige binomialkoefficient. For $\nu \in \dot{N}$ og $n > \nu$ bliver $\binom{\nu}{n} = 0$. For $\nu = 0$ har vi $\binom{0}{0}=1$ og $\binom{0}{n} = 0$ for $n \in \dot{N}$. For $p \in \dot{N}$ er

$$\binom{-p}{n} = (-1)^n \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{p-1+n}{p-1} \, .$$

<u>Sætning</u> 3.31. For $x \in \,]-1,1[$ er

$$(1+x)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} x^n \, .$$

Bevis. Da

$$\frac{d^n}{dx^n} (1+x)^{\nu} = n!\binom{\nu}{n} (1+x)^{\nu-n}$$

er den anførte række netop MacLaurinrækken for $(1+x)^{\nu}$, så vi behøver blot at vise, at restledfølgen går mod 0. Det n^{te} restled er

$$R_n(x) = n\binom{\nu}{n} \int_o^x (1+t)^{\nu-n} (x-t)^n dt =$$

$$n\binom{\nu}{n} \int_o^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\nu} dt \, .$$

Nu er

$$x - \frac{x-t}{1+t} = t \, \frac{1+x}{1+t} \, ,$$

og for $x \in \,]-1,1[$ og t mellem o og x følger heraf, at differensen på venstre side har samme fortegn som x, altså at

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqq |x| .$$

Derfor får vi vurderingen

$$|R_n(x)| \leqq n|\binom{\nu}{n}|\ |x|^n \left|\int_0^x (1+t)^{\nu}dt\right| .$$

Her er integralet uafhængigt af n. Vi skal altså blot vise, at

$$(n|\binom{\nu}{n}|\ |x|^n) \to 0 .$$

Vi har imidlertid

$$n|\binom{\nu}{n}|\ |x|^n = |\nu x|\frac{|1-\nu||x|}{1} \cdot \frac{|2-\nu||x|}{2} \cdots \frac{|n-1-\nu||x|}{n-1} ,$$

og påstanden følger derefter af sætning 3.29, idet

$$\left(\frac{|n-1-\nu||x|}{n-1}\right) \to |x|.$$

Potensrækken i sætning 3.31 kaldes binomialrækken. For $\nu \in \dot{N}$ reduceres den til binomialformlen.

Eksempler. For $\nu = -p$, $p \in \dot{N}$ får vi

$$\frac{1}{(1+x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-p}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{p-1+n}{p-1}x^n$$

i overensstemmelse med, hvad vi fandt i kapitel 2. For $\nu = \frac{1}{2}$ får vi

$$\binom{\nu}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{\nu}{2} = -\frac{1}{2\cdot 4},\ldots,\ \binom{\nu}{n} = (-1)^{n-1}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} ,$$

så får vi

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\ x^n .$$

For $\nu = -\frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} x^n .$$

Ved at erstatte x med $-x^2$ får vi

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} x^{2n} .$$

Ved integration mellem 0 og x får vi heraf

$$\mathrm{Arcsin}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

For $x = \frac{1}{2}$ fås heraf en række til beregning af $\frac{\pi}{6}$. Den er dog mindre bekvem end den tidligere omtalte metode til beregning af π.

Det er ofte bekvemt at inddrage komplekse variable i regning med elementære funktioner, og for bedre at kunne udnytte dette vil vi indføre differentiation og integration af funktioner, der afbilder et interval ind i den komplekse plan.

<u>Definition</u> 3.32. Lad $g,h:[a,b]$ ind i $\grave{R}$ være vilkårlige funktioner. Funktionen $f = g+ih:[a,b]$ ind i $\grave{C}$ kaldes kontinuert, hvis g og h er kontinuerte, og differentiabel, hvis g og h er differentiable, og i så fald definerer vi $f(x) = g'(x) + ih'(x)$. Hvis f er kontinuert, definerer vi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + i \int_a^b h(x)dx.$$

Det fremgår umiddelbart af denne definition, at

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

og at $f'(x) = f(x)$ medfører, at

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

De elementære regneregler for differentiation og integration bevises let. For $f_1 = g_1 + ih_1$, $f_2 = g_2 + ih_2$ får vi således

$$\frac{d}{dx}(f_1(x)f_2(x)) = \frac{d}{dx}(g_1(x)g_2(x)-h_1(x)h_2(x)+i(g_1(x)h_2(x)+ g_2(x)h_1(x))\ ) =$$

$$\frac{d}{dx}(g_1(x)g_2(x)-h_1(x)h_2(x)\ ) + i\ \frac{d}{dx}(g_1(x)h_2(x)+g_2(x)h_1(x)\ ) =$$

$$g_1'(x)g_2(x)-h_1'(x)h_2(x) + i(g_1'(x)h_2(x) + g_2(x)h_1'(x)\ ) +$$

$$g_1(x)g_2'(x)-h_1(x)h_2'(x) + i(g_1(x)h_2'(x) + g_2'(x)h_1(x)\ ) =$$

$$(g_1'(x)+ih_1'(x))(g_2(x)+ih_2(x)) + (g_1(x)+ih_1(x))(g_2'(x)+ih_2'(x)\ )=$$

$$f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x).$$

Tilsvarende for addition, subtraktion og division. Heraf følger nu reglerne for lineære operationer med integraler samt reglen om delt integration. For $n \in \grave{N}$ får vi reglen

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}f'(x)\ .$$

For en differentiabel afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ ind i $[a,b]$ og en differentiabel afbildning $f:[a,b]$ ind i $\grave{C}$ gælder kædereglen

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)\ .$$

Beviset er umiddelbart.

Vi har imidlertid en mere dybtliggende kæderegel:

Sætning 3.33. Lad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

være summen af en potensrække med konvergensradius R, og lad $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ være konvergenscirkelskiven. Lad $\varphi:[a,b]$ ind i E være en differentiabel afbildning med kontinuert differentialkvotient. Da er $f \circ \varphi:[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ differentiabel og

$$\frac{d}{dx} f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Bevis. Den ved $\psi(x) = |\varphi(x)|$ definerede funktion $\psi:[a,b]$ ind i $[0,\infty[$ er kontinuert, og da $[a,b]$ er begrænset og afsluttet har ψ en størsteværdi $R_1 = \psi(x_o)$. Af $\psi(x_o) \in E$ følger $R_1 < R$. Potensrækken $\Sigma(n+1)a_{n+1}z^n$ konvergerer ligeligt for $|z| \leq R_1$. Altså er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(\varphi(x))^n$$

ligelig konvergent på $[a,b]$. Da φ' er begrænset på $[a,b]$, er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(\varphi(x))^n \varphi'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

ligelig konvergent på $[a,b]$. Men denne række fås netop ved ledvis differentiation af $f(\varphi(x)) = \Sigma a_n(\varphi(x))^n$, og dens sum er derfor differentialkvotienten af $f(\varphi(x))$. Dermed er sætningen bevist.

Specielt har vi altså

$$\frac{d}{dx} e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)}\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos \varphi(x) = -\varphi'(x)\sin \varphi(x) \ , \ \frac{d}{dx}\sin \varphi(x) = \varphi'(x)\cos \varphi(x) \ ,$$

og ved regnereglerne får vi

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\ \varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)} = (1+\mathrm{tg}^2\varphi(x))\varphi'(x) \ .$$

Tilsvarende gælder for de hyperbolske funktioner.

Sætning 3.34. Med $H \subset \mathbb{C}$ betegner vi halvplanen $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}z > 0\}$. Lad $\varphi:[a,b]$ ind i H være en differentiabel afbildning. Da er $\log\varphi:[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ differentiabel, og

$$\frac{d}{dx}\log\ \varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ .$$

Bevis. Idet φ_1 og φ_2 er real- og imaginærdel af φ, er

$$\log(\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)) = \frac{1}{2}\log((\varphi_1(x))^2+(\varphi_2(x))^2)+i\mathrm{Arctg}\ \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \ ,$$

så vi får

$$\frac{d}{dx}\log\ \varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1'(x)+\varphi_2(x)\varphi_2'(x)}{(\varphi_1(x))^2+(\varphi_2(x))^2} + i\ \frac{\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_2(x)\varphi_1'(x)}{\left(1 + \left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right)^2\right)(\varphi_1(x))^2} =$$

$$\frac{(\varphi_1(x)-i\varphi_2(x))(\varphi_1'(x)+i\varphi_2'(x))}{(\varphi_1(x)-i\varphi_2(x))(\varphi_1(x)+i\varphi_2(x))} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ ,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætning 3.35. For $|z| < 1$ er

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\ \frac{z^n}{n} \ .$$

Bevis. Lad θ være et reelt tal. Vi sætter $\varphi(r) = re^{i\theta}$ for $r \in\ ]-1,1[$. Ifølge sætningerne 3.34 og 3.33 er

$$\frac{d}{dr}\left(\log(1+\varphi(r)) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\varphi(r))^n}{n}\right) =$$

$$\frac{\varphi'(r)}{1+\varphi(r)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\varphi(r))^n\varphi'(r) = 0 .$$

Altså er

$$\log(1+\varphi(r)) - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\varphi(r))^n}{n}$$

uafhængigt af r. Men for $r = 0$ er værdien 0. Dermed har vi bevist, at sætning 3.35 gælder for $z = re^{i\theta}$, $r \in]-1,1[$, $\theta \in \mathring{R}$, og dermed er sætningen bevist.

Af sætning 3.35 får vi umiddelbart for $|z| < 1$

$$\frac{1}{2i}(\log(1+iz) - \log(1-iz)) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1} ,$$

og her er størrelsen på venstre side et element af arctgz. Det er rimeligt, at kalde dette element hovedværdien af arctgz og betegne det med Arctgz, idet dette netop kommer til at stemme med den allerede indførte funktion Arctg, hvis z er reel.

Også binomialrækken bevarer sin gyldighed for alle komplekse z med $|z| < 1$. Beviset for Taylors formel kan nemlig gennemføres uændret for en kompleks funktion, og resultatet fås derefter ved hjælp af McLaurin-rækken for

$$\exp(\nu \log(1+xe^{i\theta})) \in (1+xe^{i\theta})^{\nu} .$$

Rækken giver altså også i dette tilfælde en hovedværdi for potensen. Ved restledsvurderingen anvendes følgende sætning:

<u>Sætning</u> 3.36. For en kontinuert afbildning $f:[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ gælder vurderingen

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Bevis. Vi vælger θ, således at $e^{i\theta}\int_a^b f(x)dx$ er et reelt tal ≥ 0. Idet vi udnytter, at sætningen allerede er vist, hvis f afbildes ind i $\mathbb{R}$, får vi

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = e^{i\theta}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b e^{i\theta}f(x)dx =$$

$$\int_a^b \mathrm{Re}(e^{i\theta}f(x))dx \leq \int_a^b |\mathrm{Re}(e^{i\theta}f(x))|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Dermed er sætningen bevist.

Formler og grafiske billeder.

Simsalabimbambasaladusaladim

J.L.Heiberg.

Udenadslæren dyrkes måske med størst held, før man kommer i skole. Det er måske ikke alt for klart, hvilken metode man benytter på det tidspunkt, men den synes væsentligt mere effektiv end de metoder, der benyttes ved indlæring af salmevers og små og store tabeller. Senere følger grammatik og matematiske formler og samtidig hermed den erfaring, at hvad man har lært udenad, glemmer man hurtigt igen.

På de følgende sider bringes en oversigt over de vigtigste formler vedrørende de specielle funktioner. Ved at bruge den kan man spare at lære dem udenad. I det lange løb er det dog for tidskrævende at se efter her, hvergang man har brug for en formel. Nu er det så heldigt, at kendsgerninger, man udnytter meget hyppigt i en længere periode, efterhånden bliver en del af ens viden, og så behøver man ikke længere at se efter i formelsamlingen. Denne proces kan fremskyndes en smule, hvis man retter sig efter de følgende regler:

1). Når man har brug for en formel prøver man først, om man kan huske den.

2). Hvis man ikke føler sig helt sikker, ser man efter, om man har husket rigtigt.

Det betaler sig ikke at udelade punkt 1)!

Eksponentialfunktionens og logaritmefunktionens funktionalligninger.

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}\quad , \log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 .$$

Sammenhæng mellem eksponentialfunktionen, de trigonometriske funktioner og de hyperbolske funktioner.

$$e^{iz} = \cos z+i\sin z,\quad e^{-iz} = \cos z-i\sin z$$

$$e^{z} = \cosh z+\sinh z,\quad e^{-z} = \cosh z-\sinh z$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

$$\cosh z= \frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}),\quad \sinh z= \frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$$

$$\operatorname{tg} z= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\ ,\quad \cot z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$$

$$\operatorname{tgh} z= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}\quad ,\ \coth z = \frac{1}{\operatorname{tgh} z}$$

$$\cosh z = \cos iz,\ \sinh z = i\sin iz,\ \operatorname{tgh} z = i\operatorname{tg} iz,$$
$$\coth z = \frac{1}{i}\cot iz\ .$$

Overgangsformler

$$\cos(z+\tfrac{1}{2}\pi) = -\sin z,\quad \sin(z+\tfrac{1}{2}\pi) = \cos z,\quad \operatorname{tg}(z+\tfrac{1}{2}\pi) = -\operatorname{tg} z$$
$$\cos(z+\pi) = -\cos z,\quad \sin(z+\pi) = -\sin z,\quad \operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi-z)= \sin z\ ,\quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi-z)= \cos z,\quad \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi-z) = \cot z$$
$$\cos(\pi-z) = -\cos z,\quad \sin(\pi-z) = \sin z,\quad \operatorname{tg}(\pi-z) = -\operatorname{tg} z$$
$$\cos(-z) = \cos z\ ,\quad \sin(-z) = -\sin z,\quad \operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$$
$$\cosh(-z) = \cosh z,\quad \sinh(-z)= -\sinh z,\quad \operatorname{tgh}(-z)= -\operatorname{tgh} z\ .$$

Trigonometriske formler. Ved tilføjelse af h overalt og ændring af fortegn mærket med * fås formlerne for de hyperbolske funktioner.

$$\cos^2 z \overset{*}{+} \sin^2 z = 1, \quad \frac{1}{\cos^2 z} = 1 \overset{*}{+} \mathrm{tg}^2 z, \quad \frac{1}{\sin^2 z} = \cot^2 z \overset{*}{+} 1$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w \overset{*}{-} \sin z \sin w$$

$$\cos(z-w) = \cos z \cos w \overset{*}{+} \sin z \sin w$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

$$\sin(z-w) = \sin z \cos w - \cos z \sin w$$

$$\mathrm{tg}(z+w) = \frac{\mathrm{tg}\, z + \mathrm{tg}\, w}{1 \overset{*}{-} \mathrm{tg}\, z\ \mathrm{tg}\, w}, \quad \mathrm{tg}(z-w) = \frac{\mathrm{tg}\, z - \mathrm{tg}\, w}{1 \overset{*}{+} \mathrm{tg}\, z\ \mathrm{tg}\, w}$$

$$\cot(z+w) = \frac{\cot z \cot w \overset{*}{-} 1}{\cot z + \cot w}, \quad \cot(z-w) = \frac{\cot z \cot w \overset{*}{+} 1}{\cot w - \cot z}$$

$$\cos 2z = \cos^2 z \overset{*}{-} \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 \overset{*}{-} 2\sin^2 z$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

$$\cos 2z = \frac{1 \overset{*}{-} \mathrm{tg}^2 z}{1 \overset{*}{+} \mathrm{tg}^2 z}, \quad \sin 2z = \frac{2\,\mathrm{tg} z}{1 \overset{*}{+} \mathrm{tg}^2 z}, \quad \mathrm{tg}\, 2z = \frac{2\,\mathrm{tg} z}{1 \overset{*}{-} \mathrm{tg}^2 z}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} z = \tfrac{1}{2}(1+\cos z), \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} z = {}^{*}\ \tfrac{1}{2}(1-\cos z)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2} z = {}^{*}\ \frac{1-\cos z}{\sin z} = \frac{\sin z}{1+\cos z}$$

$$\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z, \quad \sin 3z = 3\sin z \overset{*}{-} 4\sin^3 z$$

$$\cos z \cos w = \tfrac{1}{2}(\cos(z+w) + \cos(z-w))$$

$$\sin z \sin w = \overset{*}{-} \tfrac{1}{2}(\cos(z+w) - \cos(z-w))$$

$$\sin z \cos w = \tfrac{1}{2}(\sin(z+w) + \sin(z-w))$$

$$\cos z+\cos w = 2\ \cos\tfrac{1}{2}(z+w)\cos\tfrac{1}{2}(z-w)$$

$$\cos z-\cos w = \overset{*}{-}2\ \sin\tfrac{1}{2}(z+w)\sin\tfrac{1}{2}(z-w)$$

$$\sin z+\sin w = 2\ \sin\tfrac{1}{2}(z+w)\cos\tfrac{1}{2}(z-w)$$

$$\sin z-\sin w = 2\ \cos\tfrac{1}{2}(z+w)\sin\tfrac{1}{2}(z-w)$$

$$\mathrm{tg}z+\mathrm{tg}w = \frac{\sin(z+w)}{\cos z\ \cos w}\ , \quad \cot z+\cot w = \frac{\sin(z+w)}{\sin z\ \sin w}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = \overset{*}{-}\sin x\ , \qquad \frac{d}{dx}\ \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1\ \overset{*}{+}\ \mathrm{tg}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x} = \overset{*}{-}1 - \cot^2 x\ .$$

Arcus- og areafunktionerne.

$$\mathrm{arccos}z = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}})\ , \quad \mathrm{arcsin}x = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(iz+(1-2^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$\mathrm{arctg}z = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}\ , \qquad \mathrm{arccot}z = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{z+i}{z-i}$$

Arccos:$[-1,1]$ på $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, Arcsin:$[-1,1]$ på $[0,\pi]$

Arctg:$\grave{R}$ på $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, Arccot:$\grave{R}$ på $]0,\pi[$

$$\mathrm{Arccos}\ x + \mathrm{Arcsin}\ x = \mathrm{Arctg}\ x + \mathrm{Arccot}\ x = \tfrac{1}{2}\pi\ .$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arccos}x = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}\ , \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctg}x = \frac{1}{1+x^2}\ , \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Arccot}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

Arcosh:$]1,\infty[$ på $[0,\infty[$, Arsinh:$\grave{R}$ på R

Artgh: $]-1,1[$ på $\mathbb{R}$, Arcoth: $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ på $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\text{Arcosh}x = \log(x+\sqrt{(x^2-1)}),\quad \text{Arsinh}x = \log(x+\sqrt{(x^2-1)})$$

$$\text{Artgh}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\qquad \text{Arcoth}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Arcosh}x = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}},\qquad \frac{d}{dx}\text{Arsinh}x = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Artgh}x = \frac{1}{1-x^2},\qquad \frac{d}{dx}\text{Arcoth}x = \frac{1}{1-x^2}$$

Udtryk ved real- og imaginærdel

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\log z = \log|z| + i\text{Arg}z,\qquad \text{Log}z = \log|z| + i\arg z$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Rækkeudviklinger

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,\qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,\qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,\qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots,\qquad z \in \mathbb{C}$$

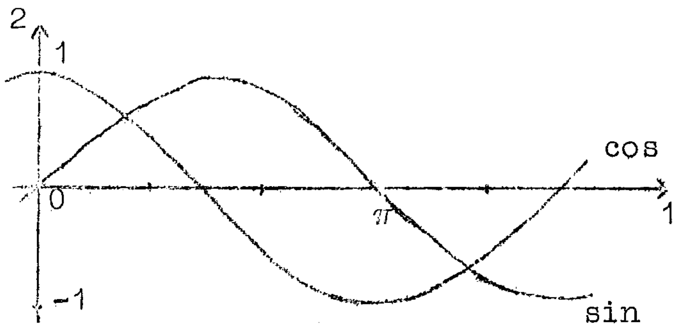
$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,\qquad z \in \mathbb{C}$$

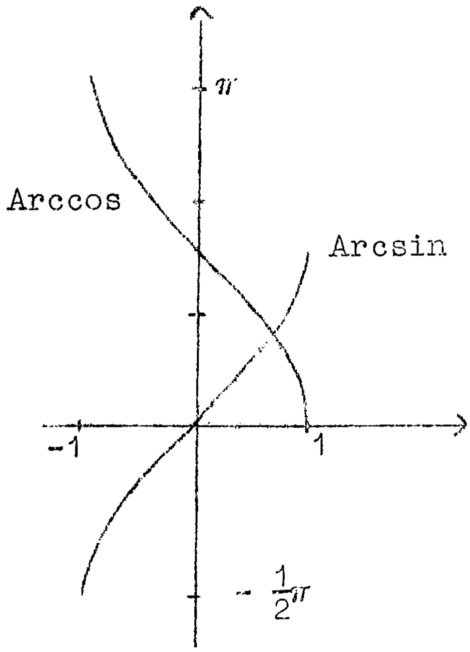
$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots, \quad |z| < 1 \text{ (og } z=1)$$

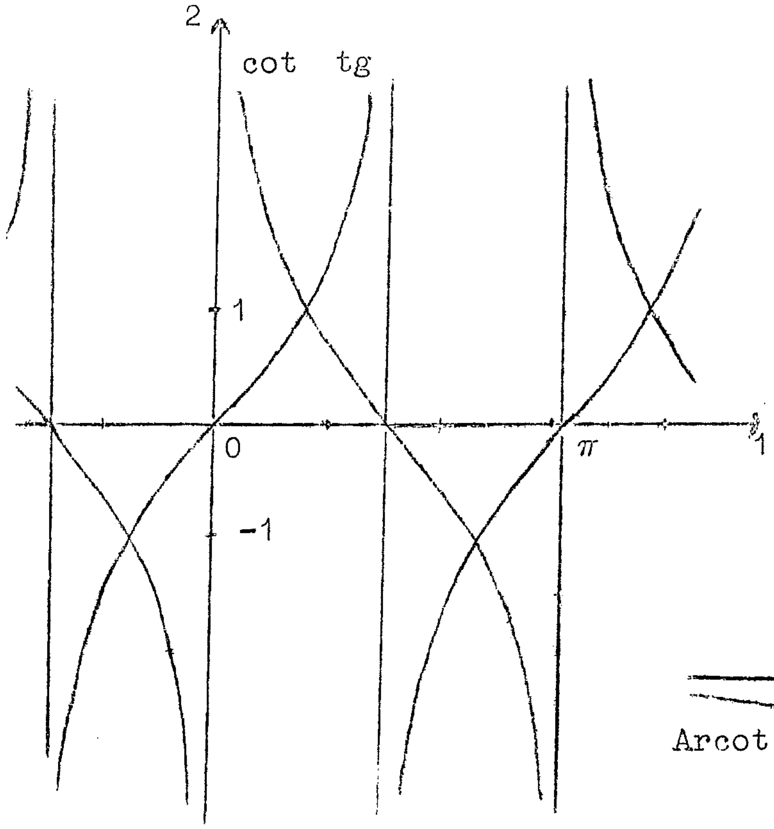
$$\mathrm{Arctg}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots, |z|<1 \text{ (og } z=1,-1)$$

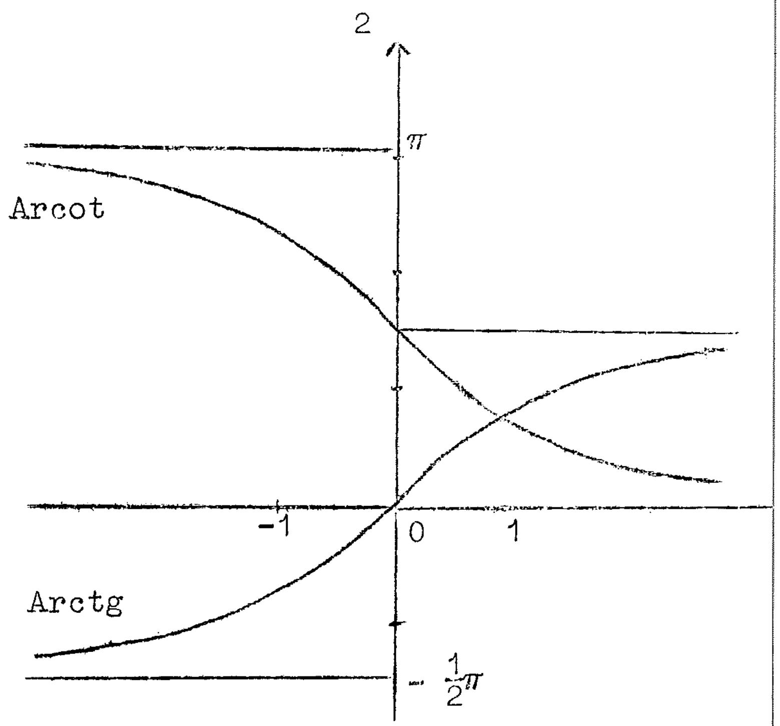
$$\mathrm{Arctgh}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots, \quad |z| < 1$$

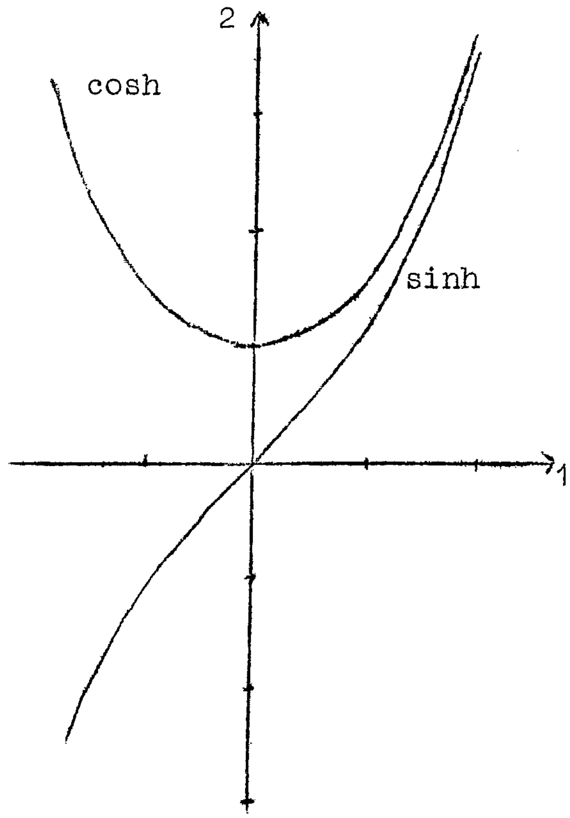
$$(1+x)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\nu}{n} x^n = 1+\nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots, \quad x \in \,]-1,1[$$

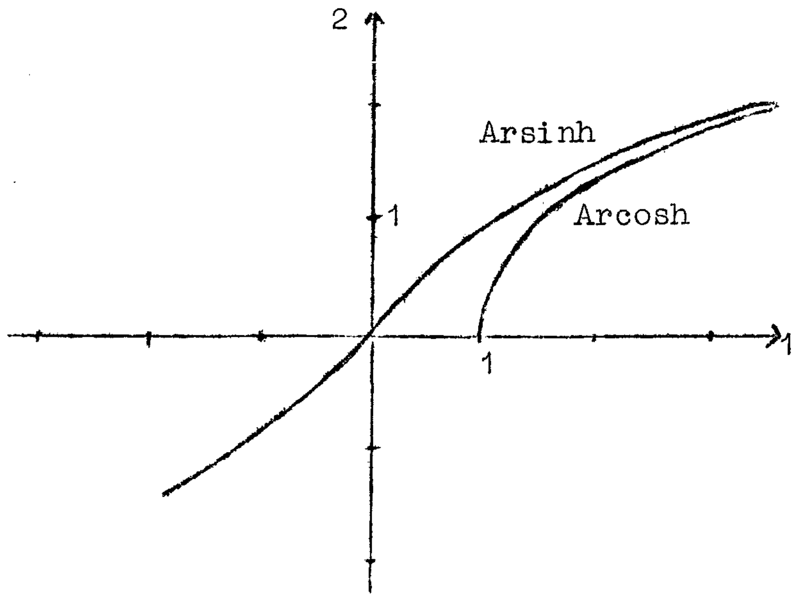

2
1
cos
0
π
1
-1
sin

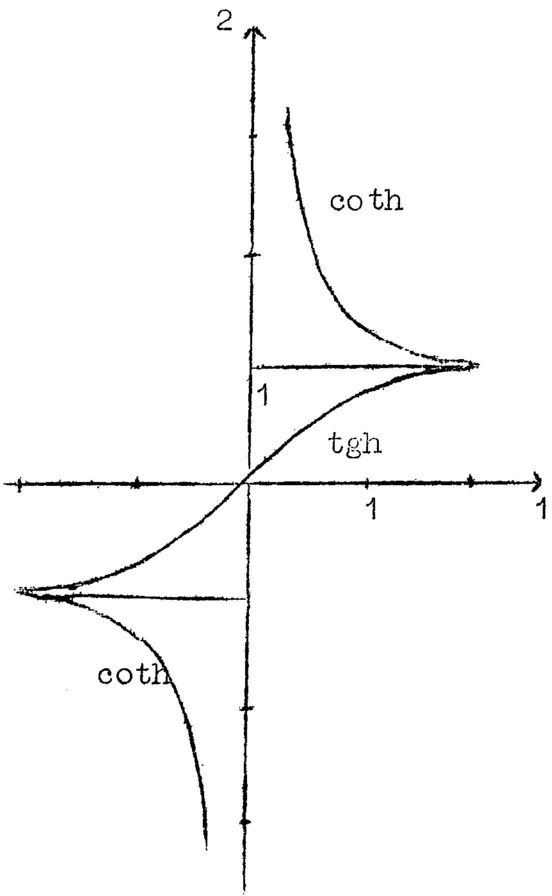

π
Arccos
Arcsin
-1
1
$-\frac{1}{2}\pi$

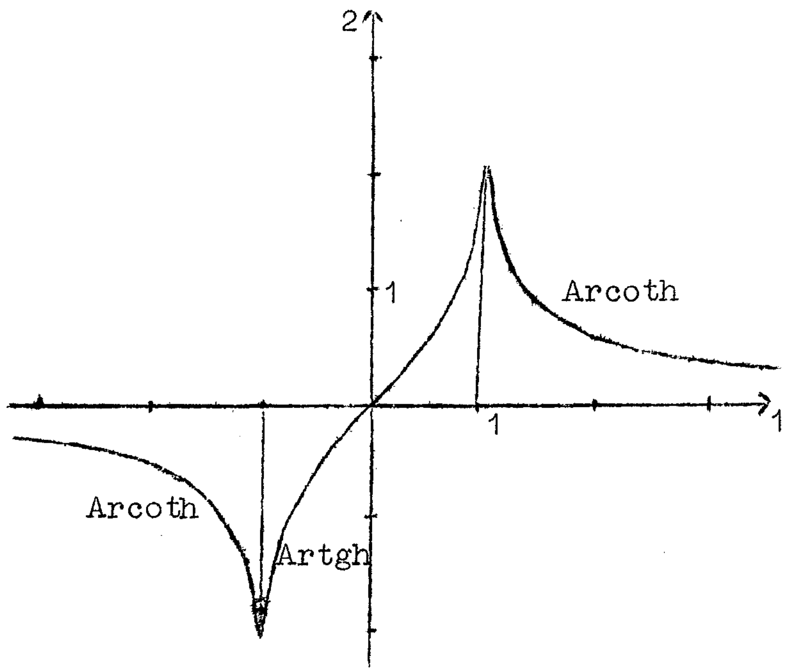

2
cot
tg
1
0
π
1
-1


2
π
Arcot
-1
0
1
Arctg
$-\frac{1}{2}\pi$


2
cosh
sinh
1


2
Arsinh
1
Arcosh
1
1


2
coth
1
tgh
1
1
coth


2
1
Arcoth
1
1
Arcoth
Artgh

Opgaver til kapitel 3

Indledning

Jack, be nimble,
Jack, be quick,
Jack, jump over the candlestick.
Børnerim.

Opgaverne til dette kapitel er for største delen rutineprægede. Formålet med øvelsesopgaverne er at opnå en ret høj grad af fortrolighed med de elementære funktioner. Af de i dette kapitel benyttede metoder er potensrækkeudvikling ved hjælp af Taylors formel mest iøjnefaldende. Anvendelsen af denne metode i opgaver strander på, at det kun for yderst få funktioner lader sig gøre at finde et tilstrækkeligt simpelt eksplicit udtryk for den n^{te} differentialkvotient. De få eksempler, vi kender, findes blandt opgaverne, og disse opgaver løses ved rutinemetoder.

Til gengæld vil vi i denne indledning omtale en opgave, som man må være både "nimble" og "quick" for at kunne løse.

Om $f:[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ vides at f er vilkårlig ofte differentiabel, og at f og alle differentialkvotienter af f kun antager værdier, der er ≥ 0. Vis, at

$$\forall x \in [a,b]\ (f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n).$$

Det er nærliggende at anvende Taylors formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \ .$$

Her er alle led positive. Heraf kan vi i hvert fald slutte, at

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \leq f(x) \quad \text{alle } n \in \mathbb{N} \text{ og alle } x \in [a,b] .$$

Det medfører i hvert fald, at

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \leq f(x) .$$

Opgaven er imidlertid at vise, at lighedstegnet gælder.

Nu er det ikke helt let at se en vej frem. Vi står ved en skillevej, idet vi for at gennemføre opgaven må vise enten, at $f(x) - \varphi(x) = 0$, eller, at $(R_n(x)) \to 0$, idet

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

De fleste vil vel finde den sidste plan mest lovende. Men så gælder det om at få oplysninger om, hvor stor $f^{(n)}(t)$ er – det er vor eneste mulighed for at komme igang med en vurdering.

Vort råmateriale: Taylors formel, vurderingen (1), vor viden om, at alle differentialkvotienter er positive. Af (1) kan vi i hvert fald slutte, at

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \leq f(x) ,$$

altså

$$f^{(n)}(a) \leq n! \frac{f(x)}{(x-a)^n} .$$

Dette er tilsyneladende meget groft, og det er nærliggende at kassere det og forsøge noget helt andet. Her har vi måske forklaringen på, at det ikke lykkes for særlig mange studerende at løse opgaven. Den dygtige studerende vil netop være stærkt tilskyndet til at kassere de foreliggende grove resultater. Enkelte vil dog arbejde videre med ideen. Det er dog også ganske fornuftigt først at prøve, hvor langt man kommer ved hjælp af vurderingerne - så ved man lidt om, hvad man skal stile efter.

Det er nu klart, at formlen (1) også kan bruges med et andet punkt af intervallet i stedet for a. For $a \leqq t \leqq x \leqq b$ har vi derfor også

$$f^{(n)}(t) \leqq n! \frac{f(x)}{(x-t)^n} .$$

Her er det nok bedst at vælge $x = b$, altså

$$f^{(n)}(t) \leqq n! \frac{f(b)}{(b-t)^n} ,$$

som fører til restledsvurderingen

$$R_n(x) \leqq nf(b) \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(b-t)^n} dt .$$

Faktoren n er ubehagelig, men integranden er "næsten" den n^{te} potens af en ægte brøk. Integralet kan måske endda regnes ud, men vi kan jo også forsøge at vurdere integranden. Det er rimeligt at forsøge at studere brøken $\frac{x-t}{b-t}$. Den er 0 for $t=x$. Men den er en aftagende funktion af t? I så fald kan den vurderes ved $\frac{x-a}{b-a}$. Vi kan forsøge direkte:

$$\frac{x-a}{b-a} - \frac{x-t}{b-t} = \frac{(x-a)(b-t) - (b-a)(x-t)}{(b-a)(b-t)} = \frac{-tx-ab+bt+ax}{(b-a)(b-t)} =$$

$$\frac{(t-a)(b-x)}{(b-a)(b-t)} \geqq 0 .$$

Men så får vi jo vurderingen

$$R_n(x) \leqq nf(b) \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} \int_a^x \frac{dt}{b-t} =$$

$$nf(b) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} \log \frac{b-a}{b-x} \text{ .}$$

For $x \in \,]a,b[$ går dette faktisk mod 0 for $n \to \infty$, men for $x = b$ er vurderingen ikke god nok. Den første restledsvurdering er heller ikke god nok.

Betyder dette nu, at metoden må kasseres ? Nej! Vi har jo klaret det meste af opgaven. Det er rimeligere at behandle forholdene i b som et problem for sig selv.

Vi ved jo, at Taylorrækken konvergerer for alle $x \in [a,b]$, og at summen netop er $f(x)$ for $x \in [a,b[$, samt at summen i punktet b er $\leqq f(b)$.

Vi mangler altså at vise at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n \geqq f(b) \text{ .}$$

Men vi ved jo, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

er voksende for $x \in [a,b]$. Men så får vi jo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(x)$$

for ethvert $x \in [a,b[$. Men heraf følger påstanden jo umiddelbart.

Nu mangler vi at finde finde frem til den endelige redaktion af besvarelsen. I det foreliggende tilfælde er det ikke særligt vanskeligt - i hvert fald langt lettere end at finde frem til løsningen. Da det er en god øvelse at prøve at formulere et matematisk bevis, der ikke er trivielt vil vi overlade den endelige formulering til læseren.

1. Udform en endelig redaktion af besvarelsen af den i indledningen til disse opgaveøvelser omtalte opgave .

Lette opgaver

2. Angiv værdien af

$$e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad e^{\log 5 + 3i\pi}, \quad e^{\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}} .$$

3. Lad n være et positivt helt tal. Vis, at

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2kp\pi}{n}} = \begin{cases} n \text{ for } p \in n\mathbb{Z} \\ 0 \text{ for } p \notin n\mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Lad n være et positivt helt tal. Lad $a_0, \ldots, a_{n-1}$ være komplekse tal. Find $x_0, \ldots, x_{n-1}$ af ligningerne

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{i\frac{2kp\pi}{n}} = a_p, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

(Benyt resultatet fra opgave nr.3).

5. Angiv værdien af

$$\cos(i\log(2+\sqrt{3})) \quad \text{og} \quad \sin(i\log(2+\sqrt{3}))$$

6. Vis formlen

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2kp\pi}{n} = 0 \right) .$$

7. Angiv værdien af

$$\cos(\tfrac{\pi}{3}+i\log 2) , \quad \sin(\tfrac{\pi}{2}-i) , \quad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}+i\log \tfrac{4}{3}) .$$

8. Udled formlerne

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z = \frac{1-\cos z}{\sin z} = \frac{\sin z}{1+\cos z} .$$

9. Udregn

$$\int_0^{\pi} \cos x dx \,,\ \int_0^{\pi} \cos x \cos 2x dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\pi} \cos x \cos 2x \cos 3x dx .$$

10. Angiv værdien af

$$\cosh \log n \,,\ \sinh \log n \,,\ \operatorname{tgh} \log n \text{ og } \coth \log n .$$

11. Bevis de formler, der udtrykker cos2z og sin2z ved tgz, samt de tilsvarende formler for hyperbelfunktionerne.

12. Angiv udførligt

$$\operatorname{Log}(-1+i\sqrt{3}) \,,\ \operatorname{Log}(1-i\sqrt{3}) \text{ og } \operatorname{Log}(\sqrt{3}+i) .$$

Angiv også i hvert tilfælde hovedlogaritmen.

13. Angiv udførligt

$$(1+i)^{\frac{2}{3}} \,,\ (1+i)^{1+i} \,,\ \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{6i} .$$

14. Undersøg, om

$$\left(\frac{1+i}{-\sqrt{2}}\right)^{2+3i} (-\sqrt{2})^{2+3i} = (1+i)^{2+3i} .$$

15. Angiv værdien af

$$\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} \,,\ \operatorname{Arcsin}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \,,\ \operatorname{Arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} .$$

16. Angiv udførligt

$$\operatorname{arctg} 1 \,,\ \operatorname{arctg} i \,,\ \arccos \frac{5}{3} \,,\ \arcsin i\sqrt{3} .$$

17. Reducer følgende udtryk

$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) \,,\ \sin(2\operatorname{Arctg} x) \,,\ \operatorname{Arcsin}(\cos x) .$$

18. Reducer om muligt følgende udtryk

$$\mathrm{Arcsin}(\mathrm{tg}x) \quad , \quad \mathrm{tg}(2\mathrm{Arctg}x) \quad , \quad \mathrm{Arctg}(2\mathrm{tg}x).$$

19. Angiv metoder til løsning af ligninger af formen

$$a\cos x + b\sin x = c$$

eller

$$a\cosh x + b\sinh x = c.$$

20. Løs ligningen

$$\cosh^4 x + \sinh^4 x = a, \quad a \geq 1 \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

21. Angiv samtlige løsninger til ligningen

$$\cosh^4 z + \sinh^4 z = 0 \ .$$

22. Udregn

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctg}(2\mathrm{tg}x) \quad \text{og} \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Arctg}\sinh x \ .$$

23. Forsøg at udregne π med 8 rigtige decimaler.

24. Bevis relationen

$$\forall x \in [-1,1] \ (\mathrm{Arccos}\sqrt{1-x^2}) = |\mathrm{Arcsin}x| \ ).$$

Prøv at vise en lignende relation med cos og sin byttet om.

25. Udled de formler for arcus- og area-funktionerne, som modsvarer

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 \ .$$

26. Angiv en metode til løsning af en trediegradsligning ved hjælp af tabeller over trigonometriske funktioner og hyperbelfunktioner samt anvendelse af formlerne for cos 3z og cosh 3z (eller sin 3z og sinh 3z).

27. Vis at det grafiske billede i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem af funktionen cosh har følgende egenskab: Afstanden mellem tangenten til det grafiske billede i punktet (x, cosh x) til punktet (x,0) afhænger ikke af x. Afstanden regnes ikke med fortegn.

28. Vis, at

$$\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \; (\mathrm{Arctg}(x+y) < \mathrm{Arctg}\, x + \mathrm{Arctg}\, y)$$

Gælder tilsvarende relationer for sinh og tgh ?

29. Tegn en figur, som illustrerer afbildningen exp: $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Dette kan gøres ved at tegne den komplekse plan to gange. I den ene plan tegnes et system af røde linier parallelle med den reelle akse og et system af grønne linier parallelle med den imaginære akse. I den anden plan tegnes billederne af de røde linier med rødt og billederne af de grønne linier med grønt. Det er fornuftigt tillige at give linier og billeder tilsvarende numre eller mærker, eventuelt pile, der markerer tilsvarende gennemløbsretninger.

30. Som opgave 28, men for sin: $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Billederne af rette linier parallelle med akserne bliver i dette tilfælde ellipser og hyperbler (enkelte udarter), som alle har fælles brændpunkter.

31. Vis, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{for} \quad x \geq 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{for} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

32. Udregn en tilnærmet værdi for

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

ved at udnytte eksponentialrækken.

33. Udregn en tilnærmet værdi for $\sqrt[5]{35}$ ved hjælp af binomialrækken (skriv $\sqrt[5]{35} = \sqrt[5]{32+3} = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{32})^{\frac{1}{5}}$).

34. Angiv en potensrækkeudvikling for Arsinh x.

35. Find et eksplicit udtryk for den n^{te} differentialkvotient af Artgh x, og derefter analogt for Arctg x.

Vanskeligere opgaver.

36. Bevis, at

$$\frac{d}{dx}(e^x\cos(x+a)) = \sqrt{2}\, e^x\cos(x+a+\frac{\pi}{4}).$$

Find derved explicite udtryk for de n^{te} differentialkvotienter af $e^x\cos x$ og $e^x\sin x$. Vis, at udviklingerne i MacLaurin-række af disse funktioner er gyldige for alle $x \in R$ og angiv rækkeudviklingerne.

37. Find potensrækkeudviklinger for $e^{ax}\cos bx$ og $e^{ax}\sin bx$, $a,b \in R$, ved at udtrykke cos og sin ved eksponentialfunktioner og benytte eksponentialrækken. Sammenlign med resultatet i opgave 36.

38. Opstil MacLaurin-rækker for Artghx og Arctgx og vis deres konvergens for $x \in]-1,1[$. (Benyt opgave 35).

39. Undersøg, om

$$\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arcsin}y = \mathrm{Arcsin}(x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)})$$

for $x,y \in [-1,1]$. Prøv eventuelt at modificere relationen, så den bliver gyldig. Tilsvarende for Arccos.

40. Vis, at

$$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + R_5(x),$$

hvor

$$|R_5(x)| \leqq \frac{64}{15}|x^5|$$

for ethvert $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

41. Et tov lægges stramt omkring jorden langs ækvator. Dernæst forlænges tovet med 1 meter, og det strammes ud igen, idet et punkt af tovet fastgøres til toppen af en passende høj mast, som er rejst lodret i et punkt af ækvator. Hvor høj er masten ?
Jordens diameter sættes til 12757 km. (benyt opgave 40 som grundlag for fremstilling af en tabel over tgx - x i det relevante interval).

42. Udled potensrækkeudviklingen for log(1+x) ved hjælp af MacLaurin-rækken.

43. Undersøg om rækkerne

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{n}), \quad (\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{n^2}), \quad ((\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{n})^2)$$

er konvergente.

44. Vis, at rækken (n^{-x-iy}), $x \in \dot{R}$ er konvergent, hvis $x > 1$, og ligelig konvergent for $x \geq a$, hvis $a > 1$. Summen $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ kaldes Riemann's zetafunktion.

45. Find konvergensradius for hver af potensrækkerne

$$((\cosh n)z^n) \ , \quad ((1-\operatorname{tgh} n)z^n) \ .$$

46. To afbildninger $f,g:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}(2\operatorname{tg}x)+n\pi & \text{for } x \in](n-\frac{1}{2})\pi,(n+\frac{1}{2})\pi[, \ n \in \dot{Z} \\ (n+\frac{1}{2})\pi & \text{for } x = (n+\frac{1}{2})\pi \ , \ n \in \dot{Z} \ . \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{Arccot}(\frac{1}{2}\cot x)+n\pi & \text{for } x \in]n\pi,(n+1)\pi[, \ n \in \dot{Z} \\ n\pi & \text{for } x = n\pi, \ n \in \dot{Z}. \end{cases}$$

Vis, at f og g er indbyrdes identiske. Vis, at f er overalt differentiabel, og angiv differentialkvotienten. Vis, at f er vilkårlig ofte differentiabel. Vis, at $f(x)-x$ er periodisk med periode π .

47. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}(3\operatorname{tg}x)-\operatorname{Arctg}(2\operatorname{tg}x) & \text{for } x \in \dot{R}\setminus(\frac{\pi}{2} + \pi\dot{Z}) \\ 0 & \text{for } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\dot{Z} \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er vilkårlig ofte differentiabel på hele $\dot{R}$ (sml. opgave 46).

Svære opgaver.

48. Vis, at rækken $((-1)^n n^{-x-iy})$, $x,y \in \dot{R}$ er betinget konvergent for $x \in]0,1]$, medens rækken (n^{-x-iy}) er divergent for $x \in]0,1]$.

49. Lad (a_n) være en følge af komplekse tal. Vis, at der eksisterer to tal $a,b \in \grave{R}^*$, således at rækken $(a_n n^{-x-iy})$ er absolut konvergent for $x \in]a,\infty[$, betinget konvergent for $x \in]b,a[$ og divergent for $x \in]-\infty,b[$, samt at $a \in [b,b+1]$. Det kan indtræffe at et eller to af de omtalte intervaller er tomme.

50. Lad (p_n) være følgen af primtal i den naturlige rækkefølge (altså $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11,\ldots$) . Vis relationen (se opgave 44)

$$\left((1 - \frac{1}{p_1^z})(1 - \frac{1}{p_2^z})\ldots(1-\frac{1}{p_n^z}) \right) \to \frac{1}{\zeta(z)} \text{ for } z=x+iy,\ x > 1 \ .$$

51. Vis, at rækken $(\frac{1}{p_n})$ (se opgave 50) er divergent. (Benyt opgave 50. Vælg $z = x \in \grave{R}$ og undersøg forholdene, når x går mod 1).

Kapitel 4.

Beregning af stamfunktioner.

- "Hvor har Du fra ?"
- "Der fra: Imidlertid..."
- "Naa: Imidlertid..."
- "Imidlertid gjorde Svend Tveskiæg idelige Indfald i Norge, hærgede Landet, og ..."
- "Hærgede Landet ... hvorpaa var det han hærgede Landet?"
- "På det Grusomste, og forledet af den ærgjerrige Jarl Hakon, lod han Hagen Adelsteen myrde ved snedige Drabsmænd ..."-

Tekst til en tegning af
Fritz Jürgensen.

Hvis $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval betegner vi med $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ mængden af funktioner $f:I$ ind i $\mathbb{R}$ og med $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ mængden af funktioner $f:I$ ind i $\mathbb{C}$. Hvis vi i disse betegnelser skriver $\mathcal{C}$ i stedet for $\mathcal{F}$, skal de betegne delmængderne af kontinuerte funktioner, og hvis vi skriver $\mathcal{D}$ i stedet for $\mathcal{F}$, skal de betegne delmængderne af differentiable funktioner. Skriver vi $\mathcal{D}^n$, mener vi delmængderne af n gange differentiable funktioner, og skriver vi $\mathcal{C}^n$, mener vi delmængderne af n gange differentiable funktioner med kontinuert differentialkvotient af orden n. Hvis vi i stedet for I skriver (I), betyder det, at vi inkluderer afbildningen $f:I_1$ ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, hvor I_1 er et vilkårligt delinterval af I.

Eksempel. $\mathbb{C}^3(\,([1,\infty[),\mathbb{C})$ er mængden af alle tre gange differentiable afbildninger $f:I$ ind i $\mathbb{C}$, hvor I er et delinterval af $[1,\infty[$ og f''' er kontinuert på I.

Med $D:\mathbb{D}((\mathbb{R}),\mathbb{C})$ ind i $\mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{C})$ vil vi betegne den ved $Df = f'$ definerede afbildning. Vi kunne også betegne denne afbildning med $\frac{d}{dx}$, og det vil vi lejlighedsvis gøre, men det har den ulempe, at det forpligter os med hensyn til valg af betegnelser for de variable. Afbildningen D har restriktionerne $D:\mathbb{D}((\mathbb{R}),\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{C})$ samt $D:\mathbb{D}(I,\mathbb{C})$ ind i $\mathbb{F}(I,\mathbb{C})$ og $D:\mathbb{D}(I,\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{F}(I,\mathbb{R})$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval. Det er selvfølgelig ikke korrekt at bruge samme betegnelse for alle disse afbildninger, og vi skal da også straks se, at det giver anledning til en hel del forvirring.

Hvis $f:I$ ind i $\mathbb{R}$ er et element af $\mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{R})$, betegner vi med $\int f$ originalmængden $D^{-1}(f:I \text{ ind i } \mathbb{R})$ ved afbildningen $D:\mathbb{D}((\mathbb{R}),\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{R})$. Ethvert element af $\int f$ er en afbildning $g:I$ ind i $\mathbb{R}$. For de fleste valg af f er $\int f$ den tomme mængde. Hvis der findes en funktion $g \in \int f$ omfatter $\int f$ netop alle funktioner $f + c$, hvor c er en konstant reel funktion. Vi kan da skrive $\int f = g + \hat{c}$, hvor $\hat{c}$ betegner mængden af konstante funktioner. Hvis $f:I$ ind i $\mathbb{C}$ er et element af $\mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{C})$ har vi på tilsvarende måde en originalmængde $D^{-1}(f:I \text{ ind i } \mathbb{C})$, som vi også betegner $\int f$. For $g \in \int f$ bliver $\int f = g + \hat{c}$, hvor $\hat{c}$ er mængden af konstante komplekse funktioner. Desværre kan $f \in \mathbb{F}((\mathbb{R}),\mathbb{R})$ også opfattes som et element af $\mathbb{F}((\mathbb{R},\mathbb{C})$ og derved får $\int f$ to forskellige betydninger. Heldigvis regner vi i de fleste praktiske tilfælde hele tiden med reelle eller hele tiden med komplekse funktioner, og derfor giver de ufuldstændige betegnelser ikke anledning til misforståelser. Mængden $\int f$ kaldes mængden af stamfunktioner til f.

Hvis f:I ind i $\mathring{R}$ (eller $\mathring{C}$) er en kontinuert afbildning, og $a \in I$ er et vilkårligt punkt, er den ved $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ definerede afbildning g:I ind i $\mathring{R}$ (eller $\mathring{C}$) en stamfunktion til f. I dette tilfælde eksisterer en stamfunktion således altid. Imidlertid eksisterer der også stamfunktioner til mange diskontinuerte funktioner, men det er en vanskelig opgave generelt at afgøre, om stamfunktioner eksisterer. Vi bemærker, at den ved $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ definerede afbildning naturligt kan betegnes $g = \int_a f(t)dt$. Her er g den stamfunktion til f, som antager værdien 0 i punktet a.

I litteraturen har man almindeligt benyttet symbolet $\int f(x)dx$ i betydningen "en eller anden stamfunktion til f". Betegnelsen forpligter med hensyn til valg af betegnelse for den variable, men det kan eventuelt være en fordel. Betegnelsen er unaturlig, fordi x ikke kan erstattes med en konstant. Den er upraktisk, fordi den betegner flere forskellige funktioner. Symbolet $\int f(x)dx$ kaldes det ubestemte integral af f.

Vi vil også her benytte ubestemte integraler, men når vi regner med ubestemte integraler, vil vi aldrig benytte lighedstegn, idet lighedstegn kun giver mening i forbindelse med ganske bestemte symboler. I stedet for vil vi bruge ækvivalenstegnet $\underset{S}{\sim}$ i betydningen

$$f \underset{S}{\sim} g \iff g - f \text{ er konstant.}$$

Det er klart, at denne relation er en ækvivalensrelation. I ligninger, i hvilke der indgår ubestemte integraler, betyder $\underset{S}{\sim}$ mellem to udtryk, at disse har konstant forskel, ligegyldigt hvordan de indgående ubestemte integraler fortolkes.

Eksempel.

$$\sin^2 x \underset{S}{\sim} 2\int \sin x \cos x dx \underset{S}{\sim} \int \sin 2x dx \underset{S}{\sim} -\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Tegnet $\underset{S}{\sim}$ læses "subtraktionsækvivalent med". Vi vil i reglen simplificere det til $\sim$ og sige "ækvivalent med", når der ikke er risiko for forveksling med andre ækvivalensrelationer.

Mængderne $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$, $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{C})$ kaldes funktionsrum, fordi de er organiserede som vektorrum, nemlig ved regneoperationen + samt ved multiplikation med reelle eller komplekse tal. De tre første er vektorrum over de reelle tals legeme og de tre sidste er vektorrum over de komplekse tals legeme.

Således kan vi for $f,g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ og $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ danne $\alpha f + \beta g$. Afbildningen D har egenskaben

$$D(\alpha f+\beta g) = \alpha Df + \beta Dg.$$

På grund af denne egenskab siges D at være lineær. For $a \in I$ er den ved

$$I_a f = \int_a f(x)dx$$

bestemte afbildning $I_a : \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ind i $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ ligeledes lineær, idet

$$\int_a (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a f(x)dx + \beta\int_a g(x)dx.$$

Lineære afbildninger af funktionsrum ind i funktionsrum kaldes ofte operatorer, og man taler om differentialoperatorer og om integraloperatorer.

Den ved

$$I_{a,b}f = \int_a^b f(x)dx$$

definerede afbildning $I_{a,b}:\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{R}$ er en lineær afbildning. En lineær afbildning af et funktionsrum ind i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ kaldes ofte en funktional. Et andet eksempel på en funktional er den ved

$$D_a f = f'(a)$$

bestemte afbildning $D_a:\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ ind i $\mathbb{R}$.

Vort kendskab til en hel del elementære specielle funktioners differentialkvotienter giver os umiddelbart en hel del stamfunktioner. Vi anfører de vigtigste:

$\int x^a dx \sim \frac{x^{a+1}}{a+1}$ for $x \in]0,\infty[$ og $a \in \mathbb{C}$, $a \neq -1$.

For $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, q ulige, $a \neq -1$ gyldig for alle $x \in \mathbb{R}$.

$\int \frac{dx}{x} \sim \log|x|$ for $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\int a^x dx \sim \frac{a^x}{\log a}$ for $x \in \mathbb{R}$, $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$.

$\int \cos x dx \sim \sin x$ for $x \in \mathbb{R}$

$\int \sin x dx \sim -\cos x$ for $x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \sim \int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx \sim \operatorname{tg} x$ for $x \in](p-\frac{1}{2})\pi,(p+\frac{1}{2}\pi)[$, $p \in \mathbb{Z}$.

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \sim \int (1+\cot^2 x)dx \sim -\cot x$ for $x \in]p\pi,(p+1)\pi[$, $p \in \mathbb{Z}$

$\int \cosh x dx \sim \sinh x$ for $x \in \mathbb{R}$

$\int \sinh x dx \sim \cosh x$ for $x \in \mathbb{R}$

$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} \sim \int (1-\operatorname{tgh}^2 x)dx \sim \operatorname{tgh} x$ for $x \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} \sim \int (\coth^2 x-1)dx \sim \coth x \quad \text{for } x \in]-\infty,0[\cup]0,\infty[.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \sim \text{Arcsin}x \sim -\text{Arccos}x \quad \text{for } x \in]-1,1[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}} \sim \text{Arcosh}x = \log(x+\sqrt{(x^2-1)}) \quad \text{for } x \in]1,\infty[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}} \sim -\text{Arcosh}(-x) = \log(-x+\sqrt{(x^2-1)}) \quad \text{for } x \in]-\infty,-1[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} \sim \text{Arsinh}x = \log(x+\sqrt{(x^2+1)}) \quad \text{for } x \in \dot{R}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \sim \text{Arctg}x \quad \text{for } x \in \dot{R}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} \sim \text{Artgh}x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad \text{for } x \in]-1,1[$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} \sim \text{Arcoth}x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad \text{for } x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[.$$

Hvis det for $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ gælder, at $\int f(x)dx \sim F(x)$, og $\varphi:[a_1,b_1]$ ind i $[a,b]$ er en differentiabel afbildning, er

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \sim F(\varphi(x))$$

ifølge reglen om differentiation af en sammensat funktion. Dette er reglen om substitution. Man skriver sædvanligvis

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \sim \int f(\varphi(x))d\varphi(x) \sim F(\varphi(x))$$

i overensstemmelse med definitionen af $d\varphi(x)$.

Eksempler.

$$\int \cos 5x dx \sim \frac{1}{5}\int \cos 5x d5x \sim \sin 5x \quad \text{for } x \in \dot{R}$$

$$\int \cot x dx \sim \int \frac{d\sin x}{\sin x} \sim \log|\sin x| \quad \text{for } x \in \dot{R}\setminus\pi\dot{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \sim \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \sim \int \frac{d\text{tg}\frac{x}{2}}{\text{tg}\frac{x}{2}} \quad \log|\text{tg}\frac{x}{2}| \quad \text{for } x \in \dot{R}\setminus\pi\dot{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} \sim \int \frac{d(x+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(x+\frac{1}{2}\pi)} \sim \log|\operatorname{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| \text{ for } x \in \dot{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\dot{Z})$$

Udregningen af $\int \frac{dx}{\sin x}$ overføres umiddelbart til hyperbelfunktionerne, men vi har den alternative metode:

$$\int \frac{dx}{\sinh x} \sim 2\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \sim 2\int \frac{de^x}{(e^x)^2-1} \sim$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}+e^{\frac{1}{2}x}}\right| = \frac{1}{2}\log|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}| \text{ for } x \in \dot{R}\setminus\{0\}.$$

Tilsvarende fås

$$\int \frac{dx}{\cosh x} \sim 2\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \sim \int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} \sim \operatorname{Arctg} e^x \quad \text{for} \quad x \in \dot{R}.$$

Endvidere er

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} \sim \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{(1+(\frac{x}{a})^2)}} \sim \operatorname{Artgh} \frac{x}{a} \sim \log(x+\sqrt{(a^2+x^2)})), \; x \in \dot{R}.$$

og

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \sim \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2} \sim \frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a}, \; x \in \dot{R}.$$

Der er grund til at henlede opmærksomheden på en række integraler, der meget let udregnes takket være særligt heldige omstændigheder, men som dog optræder ganske hyppigt:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} \sim \int \frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2+x^2) \sim \sqrt{(a^2+x^2)}, \; x \in \dot{R}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^2} \sim \int -(1-x^2)^2 d(1-x^2) \sim \frac{1}{1-x^2}, \; x \in \dot{R}\setminus\{-1,1\}.$$

Somme tider er det hensigtsmæssigt at anvende metoden flere gange:

$$\int \frac{x \log(1+x^2)}{1+x^2}dx \sim \int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}d(1+x^2) \sim$$

$$\int \log(1+x^2)d \log(1+x^2) \sim \frac{1}{2}(\log(1+x^2))^2, \quad x \in \grave{R} .$$

Kædereglen for differentiation af en sammensat funktion $F(g(x))$ gælder også, når F er en funktion, som kan udvikles i potensrække, medens g er en differentiabel afbildning ind i konvergenscirkelskiven. Derfor har vi f.eks. for $a,b \in \grave{R}$

$$\int e^{(a+ib)x}dx \sim \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin(x)}{a+ib} =$$

$$\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}((a\cos bx+b\sin bx) + i(a\sin bx-b\cos bx)).$$

Ved at spalte i realdel og imaginærdel får vi

$$\int e^{ax}\cos bx dx \sim \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx \sim \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$$

Den anden vigtige integrationsmetode er delt integration, som bygger på formlen

$$\int f(x)dg(x) \sim f(x)g(x) - \int g(x)df(x),$$

der er en følge af reglen for differentiation af et produkt. Reglen kan også skrives

$$\int f(x)g'(x)dx \sim f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Ved delt integration af et produkt $f(x)g'(x)$ får man altså den ene faktor integreret og den anden differentieret.

Eksempler. Vi vil finde en stamfunktion til $x^{\nu}\log x$. Her simpliceres $\log x$ væsentligt ved differentiation. Derfor regner vi på følgende måde:

$$\int x^{\nu}\log x dx \sim \frac{1}{\nu+1}\int \log x dx^{\nu+1} \sim$$

$$\frac{1}{\nu+1}x^{\nu+1}\log x - \frac{1}{\nu+1}\int x^{\nu+1}\cdot \frac{1}{x}dx \sim \frac{1}{\nu+1}x^{\nu+1}(\log x - \frac{1}{\nu+1})$$

for $x \in]0,\infty[$ og $\nu \neq -1$. For $\nu = -1$ klares integralet ved substitution:

$$\int \frac{\log x}{x}dx \sim \int \log x d\log x \sim \frac{1}{2}(\log x)^2, \qquad x \in]0,\infty[.$$

Vi vil dernæst finde en stamfunktion til $x^p e^{ax}$, $p \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. I dette tilfælde bliver e^{ax} ikke væsentlig værre eller bedre ved differentiation eller integration, men x^p simplificeres lidt ved differentiation.

$$\int x^p e^{ax}dx \sim \frac{1}{a}\int x^p de^{ax} \sim \frac{1}{a}x^p e^{ax} - \frac{p}{a}\int x^{p-1}e^{ax}dx .$$

Dette er en rekursionsformel til beregning af den ønskede stamfunktion. I det foreliggende tilfælde får vi let ved gentagen anvendelse

$$\int x^p e^{ax}dx \sim \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{p^{\underline{k}}}{a^{k+1}}x^{p-k}e^{ax}.$$

Ved at sætte $a = i$ og spalte i real og imaginærdel kan vi få stamfunktioner til $x^p\cos x$ og $x^p\sin x$.

Som vi så i kapitel 1 kan en bruden rational funktion skrives som en sum af stambrøker. Vi kan derfor finde en stamfunktion til den brudne rationale funktion ved at finde en stamfunktion til partialbrøkerne. Hvis det drejer sig om en reel bruden rational funktion, er det mest fordelagtigt at benytte opspaltningen i reelle partialbrøker. Vi skal nu vise, hvorledes vi finder stamfunktioner til partialbrøkerne.

De partialbrøker, der svarer til reelle rødder, volder ingen vanskeligheder, idet vi har

$$\int \frac{1}{(x-a)^p}dx \sim \begin{cases} \log|x-a| & \text{for } p = 1 \\ \dfrac{-1}{(p+1)(x-a)^{p-1}} & \text{for } p > 1 \end{cases}$$

For en partialbrøk, der svarer til to indbyrdes konjugerede rødder, benytter vi først opspaltningen

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^p} = \frac{\alpha(x+\frac{a}{2})}{(x^2+ax+b)^p} + (\beta-\tfrac{1}{2}a\alpha)\,\frac{1}{(x^2+ax+b)^p},$$

og vi har nu

$$\int \frac{\alpha(x+\frac{a}{2})}{(x^2+ax+b)^p}dx \sim \frac{1}{2}\alpha \int \frac{d(x^2+ax+b)}{(x^2+ax+b)^p} \sim$$

$$\begin{cases} \log|x^2+ax+b| & \text{for } p = 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(x^2+ax+b)^{p-1}} & \text{for } p > 1, \end{cases}$$

og

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^p} \sim \int \frac{d(x+\frac{1}{2}a)}{((x+\frac{1}{2}a)^2+b-\frac{1}{4}a^2)^p}.$$

Her er $b - \frac{1}{4}a^2 > 0$, da andengradspolynomiet ikke har reelle rødder. Opgaven er nu reduceret til bestemmelse af en stamfunktion til en partialbrøk af den specielle form

$$\frac{1}{(x^2 + c)^p},$$

hvor $c > 0$. For $p = 1$ har vi ovenfor fundet stamfunktionen

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{Arctg}\frac{x}{\sqrt{c}} .$$

For $p > 1$ skaffer vi os en rekursionsformel ved at benytte delt integration en lille smule snedigt:

$$\int \frac{dx}{(x^2+c)^p} \sim \frac{1}{c}\int \frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}} - \frac{1}{c}\int \frac{x^2dx}{(x^2+c)^p} \sim$$

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}} - \frac{1}{2c}\int x\,\frac{d(x^2+c)}{(x^2+c)^p} \sim$$

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}} + \frac{1}{2c(p-1)}\int x d\,\frac{1}{(x^2+c)^{p-1}} \sim$$

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}} + \frac{1}{2c(p-1)}\,\frac{x}{(x^2+c)^{p-1}} - \frac{1}{2c(p-1)}\int\frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}}.$$

Dermed har vi fundet rekursionsformlen

$$\int\frac{dx}{(x^2+c)^p} \sim \frac{x}{2c(p-1)(x^2+c)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2c(p-1)}\int \frac{dx}{(x^2+c)^{p-1}} .$$

I udledelsen har vi ikke benyttet, at $c > 0$, og den gælder således for $c \neq 0$, $p > 1$. For $c > o$ får vi ved gentagen anvendelse den ikke særlig kønne formel

$$\int \frac{dx}{(x^2+c)^p} \sim \frac{x}{2c(p-1)(x^2+c)^{p-1}} + \frac{(2p-3)x}{4c^2(p-1)(p-2)(x^2+c)^{p-2}} + \ldots$$

$$+ \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots 3\cdot 1\cdot x}{2^{p-1}c^{p-1}(p-1)!(x^2+c)} + \frac{(2p-3)(2p-5)\cdots 3\cdot 1\cdot x}{2^pc^p(p-1)!\sqrt{c}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{\sqrt{c}} .$$

Så er rekursionsformlen dog mere tiltalende. Dertil kommer, at det efter anvendelse af rekursionsformlen på leddet med højeste værdi af p vil være naturligt at trække det resterende ubestemte integral sammen med den næste partialbrøk.

Eksempler.

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} \sim \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx \sim$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \sim$$

$$-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Arctg}x \,.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} \sim \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)dx \sim \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| .$$

Det er selvfølgelig vigtigt at benytte enhver lille genvej, der letter regnearbejdet.

$$\int \frac{dx}{x(x^2-1)^3} \sim \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2(x^2-1)^3} \sim$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(x^2-1)^3} - \frac{1}{(x^2-1)^2} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2}\right)d(x^2) \sim$$

$$\frac{-1}{4(x^2-1)^2} + \frac{1}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2}\log|x^2-1| - \frac{1}{2}\log x^2 =$$

$$\frac{2x^2-3}{4(x^2-1)^2} + \frac{1}{2}\log\frac{|x^2-1|}{x^2} .$$

Hvis vi skal finde en stamfunktion til $\frac{1}{(x^2-1)^p}$, kan vi benytte rekursionsformlen ovenfor og derved helt spare at udvikle i partialbrøker. For $p = 4$ får vi således

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^4} \sim \frac{-x}{6(x^2-1)^3} - \frac{5}{6}\int \frac{dx}{(x^2-1)^3} \sim$$

$$-\frac{x}{6(x^2-1)^3} + \frac{5x}{24(x^2-1)^2} + \frac{5}{8}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \sim$$

$$-\frac{x}{6(x^2-1)^3} + \frac{5x}{24(x^2-1)^2} - \frac{5x}{16(x^2-1)} - \frac{5}{16}\int \frac{dx}{x^2-1} \sim$$

$$-\frac{x}{6(x^2-1)^3} + \frac{5x}{24(x^2-1)^2} - \frac{5x}{16(x^2-1)} + \frac{5}{32}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| .$$

Vi kan således altid bestemme en stamfunktion til en bruden rational funktion $R(x)$, og en sådan stamfunktion er en linearkombination af en bruden rational funktion og funktioner af formen $\log|x-a|$ eller $\mathrm{Arctg}ax$.

Vi kan også, hvis $R(x)$ er en bruden rational funktion, bestemme stamfunktioner til $R(e^x)$ og $R(\mathrm{tg}x)$, idet vi benytter omskrivningerne

$$\int R(e^x)dx \sim \int \frac{R(e^x)}{e^x}\,de^x,$$

$$\int R(\mathrm{tg}x)dx \sim \int \frac{R(\mathrm{tg}x)}{1+\mathrm{tg}^2x}\,d\mathrm{tg}x ,$$

samt eventuelt

$$\int R(\mathrm{tgh}x)dx \sim \int \frac{R(\mathrm{tgh}x)}{1-\mathrm{tgh}^2x}\,d\mathrm{tgh}x .$$

Eksempler.

$$\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}dx \sim \int \frac{e^{3x}}{e^x-1}de^x \sim \int (e^{2x} + e^x + 1 + \frac{1}{e^x-1})de^x \sim$$

$$\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + \log(e^x-1).$$

Man benytter sig selvfølgelig af eventuelle genveje. F.eks. kan man ofte med fordel benytte e^{2x} som variabel.

$$\int \frac{dx}{e^{4x}+3e^{2x}+2} \sim \frac{1}{2}\int \frac{de^{2x}}{e^{2x}(e^{2x}+1)(e^{2x}+2)} \sim$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}+1} + \frac{1}{2(e^{2x}+2)}\right)de^{2x} \sim$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) + \frac{1}{4}\log(e^{2x}+2).$$

Hvis vi ønsker at finde en stamfunktion til $\frac{1}{1+tgh^2x}$, kan vi selvfølgelig udtrykke tghx ved eksponentialfunktioner og gå frem som i de to foregående eksempler. Hvis vi foretrækker at gennemføre regningen i hyperbelfunktioner, får vi

$$\int \frac{dx}{1+tgh^2x} \sim \int \frac{dtghx}{(1+tgh^2x)(1-tgh^2x)} \sim$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+tgh^2x} + \frac{1}{1-tgh^2x}\right)dtghx \sim$$

$$\frac{1}{2}(\text{Arctg tghx} + \text{Artgh tghx}) = \frac{1}{2}(\text{Arctg tghx} + x).$$

Analogt får vi

$$\int\frac{dx}{1-tg^2x} \sim \int \frac{dtgx}{(1-tg^2x)(1+tg^2x)} \sim$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+tg^2x} + \frac{1}{2(1+tgx)} + \frac{1}{2(1-tgx)}\right)dtgx \sim$$

$$\frac{1}{2}\left(\text{Arctgtgx} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right|\right) \sim \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right| .$$

Vi bemærker, at integranden $\frac{1}{1-tg^2x}$ er defineret for $x \neq (2p+1)\frac{\pi}{2}$ og $x \neq (2p+1)\frac{\pi}{4}$, $p \in \mathbb{Z}$. Integranden kan imidlertid også skrives $\frac{\cos^2x}{\cos^2x-\sin^2x}$, og derved udvides definitionsmængden til $\mathbb{R}\setminus\{(2p+1)\frac{\pi}{4} | p \in \mathbb{Z}\}$. Dette stemmer med, at det sidste resultat er en funktion, som er defineret på den samme mængde. Derimod er det næstsidste udtryk kun defineret, hvor $\frac{1}{1-tg^2x}$ er defineret, og de to sidste udtryk er ikke identiske, men kun ækvivalente.

Et rationalt udtryk i sinx og cosx kan omformes til en bruden rational funktion af $tg\frac{x}{2}$, og derefter kan en stamfunktion bestemmes ved de ovenfor omtalte metoder. Deter vigtigt at huske, at metoden svigter for $x = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, fordi $tg\frac{x}{2}$ ikke er defineret for disse værdier af x .

Eksempel.

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} \sim \int \frac{dx}{2+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}} \sim \int \frac{(1+tg^2\frac{x}{2})dx}{3+tg^2\frac{x}{2}} \sim$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\,\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} \sim \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right) .$$

I punktet $(2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ har den fundne stamfunktion grænseværdien $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra venstre og grænseværdien $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fra højre. Vi kan udtrykke det ved at sige, at den fundne funktion "springer" $-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, når x passerer en af værdierne $(2p+1)\pi$. Vi ved imidlertid, at den ved $\frac{1}{2+\cos x}$ definerede funktion har en kontinuert stamfunktion $F:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, og vi ved, at forskellen mellem F og den ovenfor fundne stamfunktion er konstant på hvert af intervallerne $](2p-1)\pi,(2p+1)\pi[$, og F er derfor ækvivalent med den ved

$$G(x)=\begin{cases}\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right), & \text{for} \quad x\in\,](2n-1)\pi,(2n+1)\pi[\\[2ex] \frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{for} \quad x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, & n\in\mathbb{Z}\,.\end{cases}$$

definerede funktion $G:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$.

Eksempel.

$$\int\frac{dx}{1-\sin x}\sim\int\frac{dx}{1-\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}}\sim\int\frac{(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})dx}{(1-\mathrm{tg}\frac{x}{2})^2}\sim$$

$$2\int\frac{d\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{(1-\mathrm{tg}\frac{x}{2})^2}\sim\frac{2}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{4\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{2(1+\cos x)}{1+\cos x-\sin x}\sim\frac{2\sin x}{1+\cos x-\sin x}\,.$$

I dette tilfælde er integranden defineret og kontinuert for $x \neq \frac{1}{2}\pi+2p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$. Vi har benyttet $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, og vi kan derfor ikke umiddelbart støle på vore regninger for $x=(2p+1)\pi$, $p\in\mathbb{Z}$, men vort resultat, skrevet på den anden af de anførte former, er en funktion, som er kontinuert, hvor integranden er kontinuert, og dette udtryk er således en korrekt løsning. Derefter har vi forlænget brøken med $\cos\frac{x}{2}$, og derved har vi fået et udtryk, der ikke er defineret for $x=(2p+1)\pi$, $p\in\mathbb{Z}$. De sidste omskrivninger er dog ikke uden interesse, idet vi viser, at resultatet "i det store og hele" kan udtrykkes rationalt ved sinx og cosx.

Det er selvfølgelig ofte muligt at udregne integralen af trigonometriske udtryk ved helt andre metoder. Især lønner det sig ofte at indføre tgx eller tg2x i stedet for $tg\frac{x}{2}$. Dette vil i reglen give et simplere udtryk, men flere undtagelsespunkter. Vi skal vise et par eksempler, men vi vil dog ikke gennemføre en helt detailleret diskussion.

Eksempel.

$$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x} \sim \int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x} \sim \int \frac{dtgx}{1+(2tgx)^2} \sim$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Arctg}(2tgx).$$

Undtagelsespunkter: $x = \frac{1}{2}\pi+p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

Overalt defineret stamfunktion:

$$f(x)= \begin{cases} \mathrm{Arctg}(2tgx)+n\frac{\pi}{2} \text{ for } x \in \,](n-\frac{1}{2})\pi,(n+\frac{1}{2})\pi)[\\ (n+1)\frac{\pi}{2} \text{ for } x = (n+\frac{1}{2})\pi \ . \end{cases}$$

Eksempel.

$$\int\left(\frac{\sin x\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}\right)^2 dx \sim \int \frac{tg^2 x\, dtgx}{(1+tg^3 x)^2} \sim$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dtg^3 x}{(1+tg^3 x)^2} \sim \frac{-1}{3(1+tg^3 x)} = \frac{-\cos^3 x}{3(\cos^3 x+\sin^3 x)} \ .$$

På den sidst anførte form er det fundne resultat en stamfunktion overalt, hvor integranden er defineret.

Vi skal i denne forbindelse anføre rekursionsformlen

$$\int tg^n x dx \sim \int tg^{n-2}x(1+tg^2 x)dx - \int tg^{n-2}x dx \sim$$

$$\int tg^{n-2}x dtgx - \int tg^{n-2}x dx \sim \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x dx,$$

som er gyldig for $n \neq 1$. For $n \in \mathring{N}$ får vi ved gentagen anvendelse, at

$$\int tg^{2n}x dx \sim \frac{tg^{2n-1}x}{2n-1} - \frac{tg^{2n-3}x}{2n-3} + \dots + (-1)^n \frac{tg^3 x}{3} + (-1)^{n+1} tgx,$$

og

$$\int tg^{2n+1}x dx \sim \frac{tg^{2n}x}{2n} - \frac{tg^{2n-2}x}{2n-2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{tg^2 x}{2} + (-1)^{n+1} \log|\cos x| .$$

Substitutionsmetoden kan ofte med fordel udnyttes "omvendt". Vi ønsker at bestemme en stamfunktion F til en afbildning $f:I$ ind i $\mathring{R}$. Hvis $\varphi : I_1$ ind i I er bijektiv og differentiabel, er $F \circ \varphi$ stamfunktion til $(f \circ \varphi)\varphi'$. Vi bestemmer derved $F \circ \varphi = G$ og derefter $F = G \circ \varphi^{-1}$. Når vi anvender denne metode vil vi antyde det i vendinger som de følgende:

Ved at substituere $x = \varphi(u)$, $u \in I_1$, får vi

$$\int f(x)dx \sim \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du .$$

Eksempel. Ved at substituere $x = \sin u$, $u \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, får vi

$$\int (\mathrm{Arcsin}x)^2 dx \sim \int u^2 d\sin u \sim u^2 \sin u - 2\int u \sin u du \sim$$
$$u^2 \sin u + 2u\cos u - 2\sin u =$$
$$x(\mathrm{Arcsin}x)^2 + 2\sqrt{(1-x^2)}\mathrm{Arcsin}x - 2x .$$

Eksempel. Ved at substituere $x = t^2$, $t \in [0,\infty[$ får vi for $x \in [0,\infty[$, at

$$\int \cos\sqrt{x} dx \sim 2\int t\cos t dt \sim 2t\sin t + 2\cos t =$$
$$2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} .$$

Disse to eksempler illustrerer, hvorledes substitution udnyttes til bortskaffelse af "ubehagelige" funktioner, der indgår i integranden. Særlig interesse knytter sig til bortskaffelse af rodstørrelser. I det følgende skal vi angive en række metoder til dette formål og derved skal vi specielt vise, at stamfunktionsbestemmelsen altid kan reduceres til bestemmelse af en stamfunktion til en bruden rational funktion, såfremt integranden afhænger rationalt af x samt enten

1) en rodstørrelse $\sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $p \in \mathbb{N}$ eller

2) en kvadratrod af et endengradspolynomium i x, eller

3) to kvadratrødder af førstegradspolynomier i x.

Vi vil først beskæftige os med $\sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, hvor vi vil antage, at determinanten

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

ikke er nul, idet rodstørrelsen ellers reduceres til en konstant. Da vi har

$$\frac{d}{dx}\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2},$$

varierer rodstørrelsen monotont i sit (sine) definitionsinterval(-ler). Vi sætter nu

$$\sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} = u, \quad \text{altså} \quad x = \frac{\delta u^p-\beta}{-\gamma u^p+\alpha},$$

og afbildningen $x \to u$ vil da altid være monoton på ethvert definitionsinterval for rodstørrelsen. Endvidere bliver

$$dx = \frac{p\delta u^{p-1}}{(-\gamma u^p+\alpha)^2}\,du .$$

Når de anførte udtryk for x, rodstørrelsen og dx indsættes i integranden, reduceres denne til en bruden rational funktion af u.

Eksempel. For $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < \beta$, ønsker vi at udregne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{((x-\alpha)(\beta-x))}}\ , \quad x \in \,]\alpha,\beta[\ .$$

Idet nævneren i integranden kan skrives

$$(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}\ ,$$

kan den netop beskrevne metode benyttes. Vi sætter

$$\frac{\beta-x}{x-\alpha} = u,\quad x = \frac{\alpha u^2+\beta}{u^2+1},\quad x-\alpha = \frac{\beta-\alpha}{u^2+1},\quad dx = -\frac{2(\beta-\alpha)u}{(u^2+1)^2}du\ ,$$

hvilket giver

$$\int \frac{dx}{\sqrt{((x-\alpha)(\beta-x))}} \sim \int \frac{-2(\beta-\alpha)udu}{(\beta-\alpha)u(u^2+1)} \sim -2\int \frac{du}{u^2+1} \sim$$

$$-2\text{Arctg}u = -2\ \text{Arctg}\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}} \sim 2\ \text{Arctg}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\ .$$

I første omgang fik vi et ret kejtet udtryk for stamfunktionen. Det skyldes, at vi substituerede med en aftagende funktion. Det havde været bedre at trække β-x udenfor rodtegnet i stedet for x-α. Vi har ikke angivet meget interval for u, og vi har heller ikke haft brug for det.

Eksempel. Vi ønsker at udregne

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}\ , \qquad x \in \,]1,\infty[\ .$$

Vi sætter

$$\sqrt[4]{(x-1)} = u,\quad x = 1+u^4,\quad dx = 4u^3du,$$

og derved får vi

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}} \sim 4\int (1+u^4)du \sim 4u(1+\tfrac{1}{5}u^4) =$$

$$\tfrac{4}{5}(x+4)\sqrt[4]{(x-1)}.$$

Hvis integranden afhænger rationalt af x og $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$, anvender vi først substitutionen $x = t - \frac{b}{2a}$, som bortskaffer førstegradsleddet i polynomiet. Dernæst sætter vi faktoren $\sqrt{|a|}$ udenfor rodtegnet. Derefter er problemet reduceret til at bortskaffe en kvadratrod af en af formerne $\sqrt{(a^2-x^2)}$, $\sqrt{(a^2+x^2)}$ og $\sqrt{(x^2-a^2)}$.

Lad os først betragte $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Den nærliggende substitution

$$x = a\sin u,\ \sqrt{(a^2-x^2)} = a\cos u,\ dx = a\cos u\,du,\ u \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

fører til en integrand, som afhænger rationalt af sinu og cosu, og den kan behandles ved de ovenfor omtalte metoder. Vi kan imidlertid også benytte følgende substitution

$$x = \frac{2at}{1+t^2},\ \sqrt{(a^2-x^2)} = a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = 2a\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt,\ t \in [-1,1],$$

eller følgende variant af den samme:

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{2at}{1+t^2},\ dx = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}dt,\ t \in [0,\infty[\ .$$

Den sidste udgave er en aftagende substitution, og den "glemmer" endepunktet -a, hvilket dog ikke er en væsentlig ulempe. Vi anbefaler den trigonometriske substitution frem for den rationale, fordi det ofte er muligt at finde en genvej ved behandlingen af den trigonometriske integrand. Som et kuriosum skal vi nævne substitutionen

$$x = a\,\mathrm{tgh}\,u,\ \sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{a}{\cosh u},\ dx = \frac{a\,du}{\cosh^2 u},\ u \in\ ]-\infty,\infty[\ .$$

Den "glemmer" begge intervalendepunkter. Den er undertiden ganske praktisk, men i de fleste tilfælde vil hyperbelfunktionerne være et fremmedelement, der let giver anledning til en del ekstra besvær. Endelig skal vi nævne, at den ovenfor omtalte metode til behandling af $\sqrt{((x-\alpha)(\beta-x))}$ selvfølgelig også kan anvendes.

Eksempel. Vi vil udregne

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} .$$

Substitutionen $x = \sin u$ giver for $x \in \,]0,1[$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} \sim \int \frac{\cos u\,du}{\sin^2 u\cos u} \sim -\cot u = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} ,$$

hvilket iøvrigt også er rigtigt for $x \in \,]-1,0[$. Den første af de rationale substitutioner giver

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} \sim \int \frac{(1+t^2)^2(1+t^2)2(1-t^2)}{4t^2(1-t^2)(1+t^2)^2}dt \sim \frac{1}{2}\int(1+\frac{1}{t^2})dt \sim$$

$$\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) = \frac{1-t^2}{2t} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} .$$

Den hyperbolske substitution giver

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} \sim \int \frac{\cosh u\,du}{\operatorname{tgh}^2 u\cosh^2 u} \sim \int \frac{d\sinh u}{\sinh^2 u} \sim$$

$$\frac{-1}{\sinh u} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} .$$

Til bortskaffelse af $\sqrt{(x^2+a^2)}$ er det mest naturligt at benytte substitutionen

$$x = \frac{a}{2}(t-\frac{1}{t}),\ \sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{a}{2}(t+\frac{1}{t}),\ dx = \frac{a}{2t}(t+\frac{1}{t})dt,\ t \in \,]0,\infty[,$$

Ved her at sætte $t = e^u$ får vi substitutionen

$$x = a\sinh u,\ \sqrt{(x^2+a^2)} = a\cosh u,\ dx = a\cosh u\,du,\ u \in]-\infty,\infty[.$$

Endvidere har vi den trigonometriske substitution

$$x = a\,\mathrm{tg}\,u,\ \sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{a}{\cos u},\ dx = \frac{a\,du}{\cos^2 u},\ u \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,$$

men de to førstnævnte vil oftest være at foretrække.

Eksempel. Vi vil udregne

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2+1)}}.$$

Den første af de anførte substitutioner giver

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2+1)}} \sim \int \frac{\frac{1}{2t}(t+\frac{1}{t})dt}{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}+2)\cdot\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})} \sim$$

$$2\int \frac{dt}{t^2+2t-1} \sim 2\int \frac{dt}{(t+1+\sqrt{2})(t+1-\sqrt{2})} \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{t+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+1+\sqrt{2}}\right)dt \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(t+1-\sqrt{2})^2}{t^2+2t-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{2-2\sqrt{2}+t+(3-2\sqrt{2})\frac{1}{t}}{} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{(2(x^2+1))}+x-1)}{x+1} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{(2(x^2+1))}+x-1}{x+1}$$

Vi har ikke sat numerisk-tegn om størrelsen under logaritmetegnet. Den er nemlig altid positiv for $x \in]-1,\infty[$, fordi vi har passet på undervejs. Det er nemmere at anvende numerisk-tegn og til gengæld være lidt mindre omhyggelige. Vi bemærker, at selve integrationen gik ganske let, men det kostede ikke så lidt besvær at bringe resultatet på en pæn form.

Ved at substituere med hyperbelfunktioner får vi

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2+1)}} \sim \int \frac{du}{1+\sinh u} .$$

Hvis vi nu indfører $\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, får vi integralet af en rational funktion af eksponentialfunktionen, og anvendelse af den tidligere omtalte rutinemetode fører ind i den først omtalte regning igen. Vi kan imidlertid også indføre $\mathrm{tgh}\frac{u}{2}$, og derved får vi

$$\int \frac{du}{1+\sinh u} \sim \int \frac{(1-\mathrm{tgh}^2\frac{u}{2}}{1+2\mathrm{tgh}\frac{u}{2}-\mathrm{tgh}^2\frac{u}{2}} \sim$$

$$-2\int \frac{d\mathrm{tgh}\frac{u}{2}}{(\mathrm{tgh}\frac{u}{2}-1-\sqrt{2})(\mathrm{tgh}\frac{u}{2}-1+\sqrt{2})} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-1+\mathrm{tgh}\frac{u}{2}}{\sqrt{2}+1-\mathrm{tgh}\frac{u}{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{(\sqrt{2}-1)\cosh\frac{u}{2}+\sinh\frac{u}{2}}{(\sqrt{2}+1)\cosh\frac{u}{2}-\sinh\frac{u}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}\ e^{\frac{1}{2}u}+(\sqrt{2}-2)e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{2}\ e^{\frac{1}{2}u}+(\sqrt{2}+2)e^{-\frac{1}{2}u}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{e^u+1-\sqrt{2}}{e^u+1+\sqrt{2}} ,$$

og dermed er vi igen kommet tilbage til et mellemresultat fra den foregående metode, idet $t = e^u$.

Den trigonometriske substitution giver

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2+1)}} \sim \int \frac{du}{(1+\mathrm{tg}u)\cos u} \sim \int \frac{du}{\cos u+\sin u} \sim$$

$$\int \frac{(1+\mathrm{tg}^2\frac{u}{2})du}{1+2\mathrm{tg}\frac{u}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}} \sim 2\int \frac{d\mathrm{tg}\frac{u}{2}}{1+2\mathrm{tg}\frac{u}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}} ,$$

altså næsten samme integral som de foregående substitutioner gav anledning til, men den endelige reduktion af resultatet bliver besværligere i dette tilfælde, og vi vil ikke udføre resten af regningerne.

Rodstørrelsen $\sqrt{(x^2-a^2)}$, $a > 0$ er defineret i hvert af de to intervaller $]-\infty,-a]$ og $[a,\infty[$. Vi vil kun beskæftige os med $[1,\infty[$, idet substitutionen $x = -u$ vil overføre det andet interval i dette. Vi kan anvende substitutionen

$$x = \frac{a}{2}(t+\frac{1}{t}),\ \sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{a}{2}(t-\frac{1}{t}),\ dx = \frac{a}{2t}(t-\frac{1}{t})dt,\ t \in [0,\infty[$$

eller den hyperbolske substitution

$$x = a\cosh u,\ \sqrt{(x^2-a^2)} = a\sinh u,\ dx = a\sinh u\,du,\ u \in [0,\infty[$$

eller den trigonometriske substitution

$$x = \frac{a}{\cos u},\ \sqrt{(x^2-a^2)} = a\,\mathrm{tg}\,u,\ dx = \frac{a\sin u}{\cos^2 u}du,\ u \in [0,\frac{\pi}{2}[.$$

Den første substitution vil i reglen være at foretrække.

Eksempel. Den første substitution giver

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2-1)}} \sim \int \frac{\frac{1}{2t}(t-\frac{1}{t})dt}{\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}+2)\cdot\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})} \sim$$

$$2\int \frac{dt}{t^2+2t+1} \sim \frac{-2}{t+1} = \frac{-2}{x+1+\sqrt{(x^2-1)}} =$$

$$\frac{-2(x+1-\sqrt{(x^2-1)})}{(x+1)^2-x^2+1} = -\frac{x+1-\sqrt{(x^2-1)}}{x+1} \sim \frac{x-1}{x+1}.$$

Resultatet bliver altså meget simplere end i det foregående eksempel. Dette hænger sammen med, at faktoren $x+1$ foran rodtegnet er divisor i polynomiet under rodtegnet. Vi skal i dette tilfælde ikke forsøge at anvende de andre substitutioner.

Undertiden vil man foretrække at bortskaffe en kvadratrod uden først at bringe den på en af de ovenfor omtalte former. Vi kan bortskaffe $\sqrt{(x^2+ax+b)}$ ved at substituere en ny variabel t, idet vi sætter

$$\sqrt{(x^2+ax+b)} = x+t ,$$

altså

$$ax+b = 2xt+t^2, \qquad x = \frac{t^2-b}{a-2t} ,$$

$$\sqrt{(x^2+ax+b)} = \frac{-t^2+at-b}{a-2t}, \quad dx = 2\frac{-t^2+at-b}{(a-2t)^2}dt .$$

Tilsvarende kan vi bortskaffe $\sqrt{(1+ax+bx^2)}$, idet vi sætter

$$\sqrt{(1+ax+bx^2)} = 1+xt,$$

altså

$$a+bx = 2t+xt^2, \qquad x = \frac{2t-a}{b-t^2} ,$$

$$\sqrt{(1+ax+bx^2)} = \frac{t^2-at+b}{b-t^2} , \quad dx = 2\,\frac{t^2-at+b}{(b-t^2)^2}\,dt.$$

Vi skal ikke gå nærmere ind på disse substitutioner.

Hvis integranden afhænger rationalt af x samt $\sqrt{(a_1x + b_1)}$ og $\sqrt{(a_2x+b_2)}$ afskaffes den første kvadratrod ved substitutionen $x = \dfrac{u^2-b_1}{a_1}$, og integranden kommer derefter til at afhænge rationalt af u og $\sqrt{\left(\dfrac{a_2}{a_1}u^2 + \dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1}\right)}$ og de venfor omtalte metoder kan anvendes.

Det lønner sig, inden de ovenfor omtalte metoder til bortskaffelse af kvadratrødder bringes i anvendelse, at forenkle problemet ved at reducere og spalte integranden. Lad os betragte en integrand, der afhænger rationalt af x og en kvadratrod af et polynomium i x. Den vil da altid kunne reduceres til formen

$$\frac{P_1(x) + P_2(x)\sqrt{p(x)}}{Q_1(x) + Q_2(x)\sqrt{p(x)}},$$

hvor $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ og $p(x)$ er polynomier. Vi kan nu skaffe rational nævner ved at forlænge med $Q_1(x)-Q_2(x)\sqrt{p(x)}$, og integranden får derved formen

$$\frac{P_1(x)Q_1(x) - P_2(x)Q_2(x)p(x)}{(Q_1(x))^2 - (Q_2(x))^2p(x)} + \frac{(Q_1(x)P_2(x) - P_1(x)Q_2(x))\sqrt{p(x)}}{(Q_1(x))^2 - (Q_2(x))^2p(x)}.$$

Her er det første led en bruden rational funktion, som kan integreres for sig ved den tidligere omtalte rutinemetode.

I det sidste led kan vi forlænge med $\sqrt{p(x)}$. Derved får vi et udtryk af formen

$$\frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{p(x)}},$$

hvor $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomier. Vi skriver nu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ som en sum af partialbrøker. Derved får vi leddet skrevet som en sum af led af formerne

$$\frac{a}{(x-\alpha)^q\sqrt{p(x)}} \quad \text{og} \quad \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^q\sqrt{p(x)}}.$$

Hvis $p(x)$ er et andengradspolynomium, vil stamfunktioner til disse udtryk kunne findes i integraltavler.

Det skal tilføjes, at det kan være hensigtsmæssigt at beholde $\sqrt{p(x)}$ i tælleren, men eksemplerne ovenfor viser, at man altid vil kunne forkorte en faktor væk efter substitutionen, hvis kvadratroden er i nævneren.

En stamfunktion af formen

$$\int \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{p(x)}} ,$$

hvor p(x) er et polynomium af grad ≥ 3, medens P(x) og Q(x) er vilkårlige polynomier kan sædvanligvis ikke udtrykkes ved de elementære funktioner. Hvis p(x) har grad 3 eller 4 kaldes stamfunktionen et elliptisk integral. I elementære fysisk-tekniske problemer møder man ofte det specielle elliptiske integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}} ,$$

og forskellige beslægtede integraler. Her er k en reel parameter. For k = 0,+1 eller -1 kan stamfunktionen udtrykkes ved de elementære funktionstegn, ellers ikke. Ved substitutionen x = sinu får vi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}} \sim \int \frac{du}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 u)}} ,$$

og dermed har vi fået et nyt integral, der heller ikke kan udtrykkes ved elementære funktionstegn. Det nye integral kaldes ligeledes et elliptisk integral, Vi bemærker, at

$$\int \frac{du}{\sqrt{\cos u}} \sim \int \frac{du}{\sqrt{(1-2\sin^2 \frac{u}{2})}} ,$$

og det første integral er derfor også et elliptisk integral.

Det er selvfølgelig ikke nogen simpel sag at bevise, at en stamfunktion ikke kan udtrykkes ved elementære funktionstegn, og vi skal ikke i noget tilfælde gennemføre et sådan bevis. Det er imidlertid nyttigt at have kendskab til de simpleste eksempler på stamfunktioner, der ikke kun udtrykkes elementært, idet man dervcd sparer en del overflødigt arbejde.

$$\int x^\alpha e^x dx\ , \qquad \int x^\alpha \cos x dx, \qquad \int x^\alpha \sin x dx$$

kan udtrykkes ved elementære funktionstegn, hvis α er 0 eller et naturligt tal, men ellers ikke. Ved delt integration kan α ændres til $\alpha+1$ eller $\alpha-1$ efter behag, dog kan -1 ikke ændres til 0 (elleromvendt). Vi bemærker at substitutionen $x = \log u$ giver

$$\int \frac{e^x}{x} dx \sim \int \frac{du}{\log u}\ .$$

Derimod kan

$$\int x^\alpha \operatorname{tg} x dx \quad \text{og} \quad \int x^\alpha \cot x dx$$

for $\alpha \neq 0$ ikke udtrykkes ved elementære funktionstegn. Af omskrivningen

$$\int \log\cos x dx \sim x \log\cos x - \int x \operatorname{tg} x dx$$

fremgår, at $\int \log\cos x dx$ heller ikke kan udtrykkes ved elementære funktionstegn. Analogt for $\int \log\sin x dx$. Stamfunktionen til produktet af en trigonometrisk funktion og en bruden rational funktion, som ikke er et polynomium, kan ikke udtrykkes ved elementære funktionstegn.

Stamfunktionerne

$$\int (\cos x)^\alpha dx \quad \text{og} \quad \int (\sin x)^\alpha dx$$

kan udtrykkes ved elementære funktionstegn, hvis $\alpha \in \mathbb{Z}$ og ellers ikke, men

$$\int e^{x^{\alpha}}dx, \quad \int \cos x^{\alpha}dx \quad \text{og} \quad \int \sin x^{\alpha}dx$$

kan udtrykkes ved elementære funktionstegn, hvis $\alpha = 0$ eller $\frac{1}{\alpha} \in \mathring{N}$ og ellers ikke.

Bestemte integraler udregnes sædvanligvis ved beregning af en stamfunktion til integranden. Det lønner sig imidlertid ofte at benytte substitution eller delt integration direkte i det bestemte integral.

Eksempel. Hvis p og q er hele, ikke negative tal og $q > 1$, er

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^q x dx = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^{q-1} x d\sin x = \frac{1}{p+1}\int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{q-1} x d\sin^{p+1} x =$$

$$\frac{1}{p+1}\left(\left[\cos^{q-1} x\sin^{p+1} x\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} - \int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{p+1} x d\cos^{q-1} x\right) =$$

$$\frac{q-1}{p+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{p+2} x\cos^{q-2} x dx = \frac{q-1}{p+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\cos^2 x)\sin^p x\cos^{q-2} x dx =$$

$$\frac{q-1}{p+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^{q-2} x dx - \frac{q-1}{p+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^q x dx ,$$

og heraf får vi rekursionsformlen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^q x dx = \frac{q-1}{p+q}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^{q-2} x dx .$$

Læg mærke til, at vi i de integraler, hvor der står et mere kompliceret udtryk efter d, skriver $x = 0$ i nedre grænse for at hindre misforståelse. Ved substitutionen $x = \frac{\pi}{2} - u$ svarer $x = 0$ til $u = \frac{\pi}{2}$ og omvendt, og vi får derfor

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^p x\cos^q x dx = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \cos^p u\sin^q u du = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^q x\cos^p x dx,$$

hvilket medfører, at p og q kan bytte roller i rekursionsformlen ovenfor.

Det hænder, at et bestemt integral kan udregnes eksplicit, selv om den relevante stamfunktion ikke kan udtrykkes ved de elementære funktionstegn. I det enkleste tilfælde beror dette på en symmetriegenskab: Hvis en kontinuert funktion $f:[a,b]$ ind i $\grave{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall u \in [0,b-a](f(a+u) = -f(b-u)),$$

da er

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \;.$$

Substitutionen $x = b+a-t$ giver nemlig

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(b-(t-a))dt = \int_b^a f(a+(t-a))dt = -\int_a^b f(x)dx \;,$$

og dermed er påstanden bevist.

Det er hensigtmæssigt at udvide integralbegrebet til at omfatte åbne og ubegrænsede intervaller, således at også visse ubegrænsede funktioner bliver integrable. For mere bekvemt at kunne gennemføre denne vil vi indføre en vis generalisation af kontinuitets begrebet.

<u>Definition 4.1.</u> Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et vilkårligt interval. En mængde $A \subseteq I$ siges at være en omegn af $a \in I$ relativt til I, såfremt der eksisterer et tal $\delta > 0$, således at $I \cap\,]a-\delta, a+\delta[\, \subseteq A$. Mængden af omegne af a relativt til I betegnes $\grave{U}_I(a)$. For $I = \grave{R}$ udelades ordene "relativt til I" og index I. Det samme gøres også i andre tilfælde, når der ikke er fare for misforståelse.

Eksempel. For $I = [a,b]$ er en omegn af a altså en vilkårlig delmængde af I, som indeholder et interval $[a,a+\delta[$, $\delta > 0$.

<u>Sætning</u> 4.2. Lad I_1 og I_2 være intervaller, a et punkt af I_1 og $f:I_1$ ind i I_2 en afbildning. Afbildningen f er da kontinuert i a, hvis og kun hvis det for enhver omegn $U \in \dot{U}_{I_2}(f(a))$ af f(a) relativt til I_2 gælder, at originalmængden $f^{-1}(U)$ er en omegn af a relativt til I_1.

Bevis: At $f:I_1$ ind i I_2 er kontinuert i punktet a udtrykkes ved relationen

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in I_1\cap]a-\delta,a+\delta[(f(x) \in I_2\cap]f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon[).$$

Tilføjelsen "$I_2\cap$" i parentesen har ikke noget med kontinuitetsbetingelsen at gøre, men er berettiget, da f afbilder ind i I_2. Betingelsen kan også skrives på formen

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ f^{-1}(I_2\cap]f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon[) \supseteq I_1\cap]a-\delta,a+\delta[,$$

men på grund af definition 4.1 er dette ensbetydende med, at

$$\forall\varepsilon > 0\ (f^{-1}(I_2\cap]f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon[) \in \dot{U}_{I_1}(a),$$

og endnu en anvendelse af definition 4.1 viser, at denne betingelse medfører den stærkere betingelse

$$\forall\ U \in \dot{U}_{I_2}(f(a))\ (f^{-1}(U) \in \dot{U}_{I_1}(a)).$$

Dermed er sætningen bevist.

Kort og upræcist siger sætning 4.2, at kontinuitet betyder, at originalmængden til en omegn altid er en omegn.

<u>Definition</u> 4.2. Ved en omegn af ∞ relativt til et interval $I \subseteq \dot{R}^*$ med $\infty \in I$ forstås en mængde $U \in I$, som indeholder et interval $]a,\infty]$, hvor $a \in \dot{R}$. Analogt defineres en omegn af $-\infty$. Iøvrigt anvendes definition 4.1 også for omegne af punkter af

$\grave{R}$ relativt til intervaller på $\grave{R}^*$. Mængden af omegne af $a \in I$ relativt til I betegnes $\grave{U}_I(a)$.

Vi bemærker, at $\grave{U}_I$: I ind i $\grave{D}(\grave{D}(I))$, hvor $\grave{D}(A)$ betegner mængden af delmængder af A, er en afbildning, som til hvert punkt $a \in I$ tilordner et system af delmængder af I, systemet af omegne af I. Helt generelt kan vi definere:

Definition 4.3. Et par $(M,\grave{U})$ bestående af en mængde M og en afbildning $\grave{U}$:M ind i $\grave{D}(\grave{D}(M))$ kaldes et omegnsrum. For $a \in M$ kaldes enhver mængde $U \in \grave{U}(a)$ en omegn af a.

Vi understreger, at omegnsrum i almindelighed har overordentlig ringe interesse. Begrebet er alt for generelt, men ved tilføjelse af passende supplerende forudsætninger vil vi senere udvikle det til noget mere nyttigt. Teorien for det helt almindelige begreb er på det nærmeste udtømt ved følgende definition og den derefter følgende sætning:

Definition 4.4. Lad $(M_1,\grave{U}_1)$ og $(M_2,\grave{U}_2)$ være omegnsrum, og lad $a \in M_1$ være et vilkårligt element. En afbildning $f:M_1$ ind i M_2 siges at være kontinuert i punktet a med hensyn til $\grave{U}_1$ og $\grave{U}_2$, såfremt

$$\forall\, U \in \grave{U}_2(f(a))\ (f^{-1}(U) \in \grave{U}_1(a)).$$

Sætning 4.5. Lad $(M_1,\grave{U}_1)$, $(M_2,\grave{U}_2)$ og (M_3,U_3') være omegnsrum, og lad $f_1:M_1$ ind i M_2 og $f_2:M_2$ ind i M_3 være afbildninger. Hvis f_1 er kontinuert i $a_1 \in M_1$ og f_2 er kontinuert i $f_1(a_1) = a_2 \in M_2$, er $f_2 \circ f_1:M_1$ ind i M_2 kontinuert i a_1.

Bevis. Vi sætter $a_3 = (f_2 \circ f_1)(a_1) = f_2(a_2)$. For $U \in \grave{U}_3(a_3)$ har vi da

$$(f_2 \circ f_1)^{-1}(U) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(U)),$$

og da f_2 er kontinuert i a_2, er $f_2^{-1}(U) \in \grave{U}_2(a_2)$, og da f_1 er kontinuert i a_1, følger heraf, at $f_1^{-1}(f_2^{-1}(U) \in \grave{U}_1(a_1)$. Dermed er sætningen bevist.

En afbildning $f:M_1$ ind i M_2, hvor $(M_1,\grave{U}_1)$ og $(M_2,\grave{U}_2)$ er omegnsrum, kaldes kontinuert (med hensyn til $\grave{U}_1$ og $\grave{U}_2$), hvis den er kontinuert i ethvert punkt af M_1 (med hensyn til $\grave{U}_1$ og $\grave{U}_2$).

Hvis I_1 og I_2 er intervaller på $\grave{R}^*$ har det nu en mening at tale om kontinuitet af en afbildning $f:I_1$ ind i I_2, idet vi benytter de i definition 4.2 indførte omegne. I denne sammenhæng er det ikke nødvendigt at skelne mellem $f:I_1$ ind i I_2 og $f:I_1$ ind i $\grave{R}^*$.

Af sætning 4.5 følger umiddelbart, at sammensætning af kontinuerte afbildninger af intervaller på $\grave{R}^*$ ind i Intervaller på $\grave{R}^*$ igen giver kontinuerte afbildninger.

<u>Definition</u> 4.6. Lad $I \subseteq \grave{R}^*$ være et interval, lad $A \subset I$ være en endelig punktmængde, lad $F:I$ ind i $\grave{R}^*$ være en kontinuert afbildning, og lad $f:I\setminus A$ ind i $\grave{R}$ være en vilkårlig afbildning. Vi siger, at F er en uegentlig stamfunktion til f på intervallet I (med undtagelsesmængden A), såfremt følgende to betingelser er opfyldt:

1) Værdierne ∞ og $-\infty$ antages hver højst én gang af F og højst i endepunkterne af I.

2) I ethvert punkt $x \in I\setminus A$ er F differentiabel med differentialkvotienten $f(x)$.

Hvis B er en endelig delmængde af I og $B \supseteq A$, er F åbenbart også uegentlig stamfunktion til f på I med undtagelsesmængden B. Der er altså ikke en ganske bestemt undtagelsesmængde. Et punkt kan for eksempel regnes til undtagelsesmængden, hvis vi ikke ved, om F er differentiabel i punktet. Der findes en ganske bestemt mindste undtagelsesmængde, som omfatter netop de punkter af I, hvor F ikke er differentiabel med f som differentialkvotient.

Eksempler. På $[-1,1]$ er Arcsin x uegentlig stamfunktion til $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Den ved

$$\mathrm{Arctg}^* x = \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi & \text{for } x = -\infty \\ \mathrm{Arctg}\, x & \text{for } x \in \grave{R} \\ \frac{1}{2}\pi & \text{for } x = \infty \end{cases}$$

definerede funktion $\mathrm{Arctg}^* : \grave{R}^* $ ind i $\grave{R}$ er uegentlig stamfunktion til $(1+x^2)^{-1}$ med undtagelsesmængden $\{-\infty,\infty\}$.

Hvis F er uegentlig stamfunktion til f på intervallet I, og c er et reelt tal, er F+c ligeledes en uegentlig stamfunktion til f på intervallet I, og med den samme undtagelsesmængde som F.

Hvis F er uegentlig stamfunktion til f på intervallet I med undtagelsesmængden A, og I_1 er et delinterval af I, er restriktionen af F til I_1 uegentlig stamfunktion til restriktionen af f til $I_1 \setminus A$ på intervallet I_1 og med undtagelsesmængden $I_1 \setminus A$.

Lad a være et punkt af I. Det deler I i to delintervaller I_1 og I_2. Vi regner punktet a selv med til begge delintervaller. Lad $A \subseteq I$ være en endelig mængde, og $f: I \setminus A$ ind i $\grave{R}$ en funktion. Hvis restriktionen af f til $I_1 \setminus A$ har uegentlig stamfunktion F_1 og restriktionen af f til $I_2 \setminus A$ har en uegentlig stamfunktion F_2, og begge disse antager en endelig værdi i punktet a, kan vi vælge $c \in \grave{R}$, således at $F_1(a) = F_2(a)+c$, og den ved

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{for } x \in I_1 \\ F_2(x)+c & \text{for } x \in I_2 \end{cases}$$

definerede kontinuerte afbildning vil da være en uegentlig stamfunktion til f på I.

Når vi søger en uegentlig stamfunktion til en funktion f på et interval I, kan vi i kraft af den foregående bemærkning først opdele I i delintervaller, der hver kun indeholder et enkelt undtagelsespunkt, og opgaven kan da løses for hvert delinterval for sig.

Sætning 4.7. Hvis F_1 og F_2 er uegentlige stamfunktioner for f på intervallet I, eksisterer der et reelt tal c, således at $F_2 = F_1+c$.

Bevis. Lad $I_1 \subsetneq I$ være det interval, som omfatter netop de punkter $x \in I$, hvor $F_1(x) \in \mathring{R}$, $F_2(x) \in \mathring{R}$. Ifølge 1) i definition 4.6 kan det højst være endepunkterne af I, der ikke tilhører I_1. Med A vil vi betegne en endelig mængde, der indeholder undtagelsesmængderne for F_1 og F_2. Afbildningen $G = F_2 - F_1 : I_1$ ind i $\mathring{R}$ er kontinuert, og i alle punkter af $I_1 \setminus A$ er G differentiabel med differentialkvotient 0. Heraf følger, at G er konstant på hvert af de intervaller, hvori A deler I_1, og da G er kontinuert på hele I_1, vil G have den samme konstante værdi på to sådanne intervaller med et fælles endepunkt. Dette medfører, at G har en konstant værdi c, altså at F_1+c og F_2 har samme restriktion til I_1. Vi mangler nu blot at vise, at $F_1(a)+c = F_2(a)$ også, når a er et punkt af I, hvor F_1 og F_2 ikke begge antager en endelig værdi. Vi vil nøjes med at undersøge tilfældet $F_1(a) = \infty$, idet de øvrige tilfælde går analogt. Vi fører beviset indirekte, idet vi antager, at $F_2(a) < \infty$. Vi vælger k, således at $F_2(a) < k < \infty$. Da F_2 er kontinuert er $F_2^{-1}(]-\infty,k[)$ en omegn af a. Da F_1+c er identisk med F_2 på I_1, følger heraf, at $F_1(x) < k-c$ for alle $x \in F_2^{-1}(]-\infty,k[) \setminus \{a\}$ i modstrid med, at $F_1^{-1}(]k-c,\infty])$ er en omegn af a. Dermed er sætningen bevist.

Definition 4.8. Lad F være en uegentlig stamfunktion til f på intervallet I. For a,b $\in$ I sætter vi da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

og dette udtryk kaldes det uegentlige integral af f fra a til b, og hvis det har en endelig værdi, siger vi, at f er integrabel på intervallet med endepunkter a og b.

Af sætning 4.7 følger, at det uegentlige integral ikke afhænger af valget af den uegentlige stamfunktion. Hvis f er kontinuert på hele I, bliver F en stamfunktion til f i den sædvanlige forstand og integralet reduceres til det fra gymnasieundervisningen kendte.

Eksempler.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \pi \quad ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ .$$

Det er klart, at de regneregler, der gælder for sædvanlige stamfunktioner og integraler, uden videre kan overføres til uegentlige stamfunktioner og uegentlige integraler. Kun regelen om substitution følger ikke helt umiddelbart, idet den bygger på sætning 4.5 om sammensætning af kontinuerte funktioner.

I stedet for at sige, at f er integrabel på intervallet med endepunkter a og b, siger vi også, at $\int_a^b f(x)dx$ er konvergent, og i modsat fald siger vi, at $\int_a^b f(x)dx$ er divergent. Derved tillader vi os at se bort fra, at $\int_a^b f(x)dx$ i det sidste tilfælde muligvis er et meningsløst symbol.

Eksempel. Funktionen $\frac{1}{x}$ har på $[0,\infty]$ en uegentlig stamfunktion $\log^*$ defineret ved

$$\log^* x = \begin{cases} -\infty & \text{for } x = 0 \\ \log x & \text{for } x \in \,]0,\infty[\\ \infty & \text{for } x = \infty\,. \end{cases}$$

Altså er

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty\,,$$

og disse tre integraler siges derfor at være divergente. Symbolet

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

er overhovedet ikke defineret, men vi tillader os altså alligevel at sige, at det er divergent

Eksempel. Vi vil undersøge, om

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x)}}\,dx$$

er konvergent. Vi benytter substitutionen $x = 1-t^2$, $t \in [0,1]$, og derved får vi

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x)}}\,dx = -\int_1^0 \frac{2t(1-t^2)}{t}\,dt\,.$$

Her er det væsentligt, at den benyttede substitution er bijektiv. Når vi nu forkorter med t i den sidste integrand, bliver det sidste udtryk et sædvanligt integral. Først nu ved vi, at det givne integral er defineret, og dermed, at det vi allerede har skrevet er rigtigt. Vi får altså

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x)}}dx = 2\int_0^1 (1-t^2)dt = 2[t-\tfrac{1}{3}t^3]_0^1 = \tfrac{4}{3}\,.$$

Eksemplet viser, at en substitution somme tider fører et uegentligt integral over i et sædvanligt integral.

<u>Sætning</u> 4.9. Hvis $F:]a,b[$ ind i $\dot{R}$ være en monotont voksende, kontinuert funktion. Da er den ved

$$F^*(x) = \begin{cases} \inf F(]a,b[) & \text{for } x = a \\ F(x) & \text{for } x \in]a,b[\\ \sup F(]a,b[) & \text{for } x = b \end{cases}$$

definerede afbildning $F^*: [a,b]$ ind i $\dot{R}^*$ ligeledes kontinuert. Analogt for monotont aftagende F. Sætningen gælder også for $a = -\infty \vee b = \infty$.

Bevis. Det er klart, at F^* er kontinuert i ethvert punkt af $]a,b[$. Vi behøver altså blot at vise kontinuiteten af F^* i endepunktet b. For $k < \sup F(]a,b[)$ sætter vi $A = F^{*-1}(k, \sup F'(]a,b[))$. Ifølge definitionen af supremum eksisterer $\xi \in]a,b[\cap A$, og da F er voksende, følger heraf, at $]\xi,b] \subsetneq A$, altså at A er en omegn af b. Dermed er sætningen vist.

Lad $f:]a,b[$ ind i $\dot{R}$ være kontinuert og positiv (d.v.s. $\forall x \in]a,b[(f(x) \geqq 0)$). Så eksisterer $\int_a^b f(x)dx$ altid ifølge sætning 4.9.

<u>Sætning</u> 4.10. Lad $f,g:]a,b[$ ind i $\dot{R}$ være kontinuerte funktioner, som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x \in]a,b[\; (|g(x)| \leqq f(x)).$$

Da vil g være integrabel på $]a,b[$, hvis f er det.

Bevis. For ethvert $x \in]a,b[$ er

$$0 \leqq f(x) + g(x) \leqq 2f(x), \quad 0 \leqq f(x) - g(x) \leqq 2f(x).$$

Da $\int_a^b 2f(x)dx$ har en endelig værdi, følger heraf, at f+g og f-g begge er integrable på [a,b]. Altså er den halve differens g integrabel på [a,b]. Dermed er sætningen bevist.

Definition 4.11. En afbildning f:]a,b[ind i $\dot{R}$ siges at være absolut integrabel på [a,b], hvis $\int_a^b |f(x)|dx$ er konvergent.

Begrebet "absolut integrabel" er analogt med begrebet "absolut konvergent" for en uendelig række. Sætning 4.10 er et sammenligningskriterium for absolut integrabilitet.

Eksempler. Af

$$\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \sim \begin{cases} \log |x-a| & \text{for } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)(x-\alpha)^{\alpha-1}} & \text{ellers} \end{cases}$$

fremgår umiddelbart, at $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ har en stamfunktion på $[a,\infty]$, og at denne stamfunktion har en endelig værdi i a, såfremt $\alpha < 1$, og en endelig værdi i ∞, såfremt $\alpha > 1$. Altså har vi for $a<b<\infty$, at $\int_a^b (x-a)^{-\alpha}dx$ er konvergent, hvis og kun hvis $\alpha < 1$, medens $\int_b^\infty (x-a)^{-\alpha}dx$ er konvergent, hvis og kun hvis $\alpha > 1$. For $0<x\leqq \pi$ er

$$0 \leqq \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad .$$

Altså er $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent. For $\pi\leqq x<\infty$ er

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leqq x^{-\frac{3}{2}} .$$

Altså er $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent. Dermed har vi bevist, at $\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ er absolut integrabel på $[0,\infty]$. Den benyttede metode viser iøvrigt, at $x^{-\alpha}\sin x$ er absolut integrabel på $[0,\infty]$ for $\alpha \in]1,2[$.

For $\alpha \in]0,1]$ er $x^{-\alpha}\sin x$ selvfølgelig integrabel på $[0,\pi]$, idet den kan udvides til en funktion, der er kontinuert på $[0,1]$. For at undersøge den samme funktion på $[\pi,\infty]$ benytter vi delt integration og får

$$\int x^{-\alpha}\sin x dx \sim -x^{-\alpha}\cos x - \alpha\int x^{-\alpha-1}\cos x dx.$$

Hvis vi tillægger $-x^{-\alpha}\cos x$ værdien 0 i pumktet ∞, bliver den kontinuert på $[\pi,\infty]$. På grund af vurderingen $|x^{-\alpha-1}\cos x| \leqq x^{-\alpha-1}$ har $x^{-\alpha-1}\cos x$ en uegentlig stamfunktion på $[\pi,\infty]$. Altså er $x^{-\alpha}\sin x$ absolut integrabel på $[0,\infty]$ for $\alpha \in]0,2[$. Stamfunktionerne kan ikke udtrykkes ved elementære funktionstegn, men videregående metoder gør det muligt at vise, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\pi \ .$$

<u>Sætning</u> 4.12. Det uegentlige integral $\int_0^\infty e^{-t}t^{x-t}dt$ er konvergent for $x > 0$.

Bevis. Integralet $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ er konvergent for ethvert $x \in \mathring{R}$, da $e^{-t}t^{x-1} \leqq e^{-\frac{1}{2}t}$ for tilstrækkelig store værdier af t. Integralet $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ er konvergent for $x > 0$ på grund af vurderingen $e^{-t}t^{x-1} \leqq t^{x-1}$. Dermed er sætningen vist.

<u>Sætning</u> 4.13. For $x > 0$ er

$$\int_0^\infty e^{-t}t^x dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Bevis. Ved delt integration fås

$$\int e^{-t}t^x dt \sim -e^{-t}t^x + x\int e^{-t}t^{x-1}dt ,$$

og her bliver det første led på højre side kontinuert på $[0,\infty]$, hvis det tillægges værdien 0 i begge endepunkter. Heraf følger sætningen umiddelbart.

<u>Sætning</u> 4.14. Hvis $x \in \dot{R}$ ikke er et helt, negativt tal eller nul, og $n \in \dot{N} \cup \{0\}$ vælges således at $n+x>0$, vil

$$(x(x+1)\ldots(x+n-1))^{-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+n-1} dt$$

være uafhængigt af n. Produktet i parentesen er tomt for $n = 0$, og det tillægges da værdien 1.

Bevis. Følger umiddelbart af sætningerne 4.13 og 4.14.

<u>Definition</u> 4.15. Værdien af det i sætning 4.14 omtalte udtryk betegnes (x), og den derved definerede afbildning $\Gamma : \dot{R}\setminus(-\dot{N})\setminus\{0\}$ ind i $\dot{R}$ kaldes gammafunktionen.

<u>Sætning</u> 4.16. Gammafunktionen tilfredsstiller funktionalligningen

$$\Gamma(x+1) = x \;\; (x),$$

og endvidere er $\Gamma(n) = (n-1)!$ for ethvert naturligt tal n.

Bevis. Den første påstand fås umiddelbart af sætning 4.14. Den anden påstand fås umiddelbart heraf, idet

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 .$$

Dermed er sætningen bevist.

Gammafunktionen er således en generalisation af $n!$ til ikke heltallige værdier af n. Den viser sig på mange måder nyttig i den videregående matematiske analyse.

Opgaver.

Indledning.

Udregning af integraler er til en vis grad en rutinesag, men også i høj grad en træningssag. Det kræver en vis erfaring at afgøre om en stamfunktion til en given funktion kan udtrykkes ved elementære funktionstegn.

Ved stamfunktions bestemmelse har man kun et ret begrænset antal metoder til rådighed, og det vil i reglen ikke være særlig svært at pusle sig frem til en metode, der hjælper hvis en sådan overhovedet findes.

Etiketten kræver, at integraler, der forlanges udregnet i eksamens-og øvelsesopgaver, kan udregnes ved rimelige metoder. Ligeledes vil optrædende stamfunktionsproblemer kunne løses ved elementære funktionstegn, med mindre der udtrykkeligt er gjort opmærksom på det modsatte.

Det må dog bemærkes, at regnefejl eller ubehændige metoder i mere sammensatte opgaver kan bevirke, at der opstår integrationer, der ikke kan gennemføres ved hjælp af de elementære funktionstegn.

Det tilrådes at udnytte alle muligheder for at kontrollere mellemregningerne. En sidste kontrol, som består i at differentiere den fundne stamfunktion, er ofte besværlig. Den hjælper kun til at opdage en eventuel fejl, ikke til at lokalisere fejlen. Endelig må man ikke overse den mulighed, at fejlen kan ligge i kontrolregningen.

Angående fejl i løsningen af eksamensopgaver: Det er en formildende omstændighed, hvis eksaminanden gør opmærksom på at han har begået en fejl, navnlig, hvis han også anfører, hvoraf han slutter dette. Det er en yderligere formildende omstændighed, hvis fejlen også lokaliseres.

Som et eksempel vil vi forsøge at bestemme en stamfunktion til

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\text{Arctg}x.$$

Vor første indskydelse er, Arctgx har differentialkvotienten $\frac{1}{1+x^2}$. Det vil derfor være en fordel at få denne faktor differentieret. Anvendelse af delt integration kræver imidlertid bestemmelse af en stamfunktion til den første faktor. Det ser ikke så rart ud, men denne gang er det dumt at opgive på forhånd. Lad os forsøge at omskrive den første faktor.

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2} = x^{2n-2} - x^{2n-4} + x^{2n-6} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-2}x^2 + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{1+x^2}.$$

Derved får vi vor funktion spaltet i en sum, hvis led kan integreres rutinemæssigt.

Lad os prøve at regne løs rutinemæssigt og samtidigt formulere besvarelsen på en rimelig måde.

Ved opspaltning af den første faktor får vi

$$\int \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\text{Arctg}x\,dx \sim \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \int x^{2n-2p}\text{Arctg}x\,dx$$

$$+(-1)^n \int \frac{\text{Arctg}x}{1+x^2}\,dx \sim$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{2n-2p+1} \int \text{Arctg}x\,dx^{2n-2p+1} + (-1)^n \int \text{Arctg}x\,d\text{Arctg}x \sim$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}x^{2n-2p+1}}{2n-2p+1} \operatorname{Arctg}x + \frac{(-1)^n}{2} (\operatorname{Arctg}x)^2 +$$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{2n-2p+1} \int \frac{x^{2n-2p+1}}{1+x^2} dx.$$

Vi sætter $n-p = k$ og udregner det vilkårlige integral i den sidste sum ved partialbrøksudvikling.

$$\int \frac{x^{2k+1}}{1+x^2} dx \sim$$

$$\sum_{q=1}^{k} (-1)^{q-1} \int x^{2k-2q+1} dx + (-1)^k \int \frac{xdx}{1+x^2} \sim$$

$$\sum_{q=1}^{k} \frac{(-1)^{q-1} x^{2k-2q+2}}{2k-2q+2} + \frac{(-1)^k}{2} \log (1+x^2).$$

Vi indsætter nu dette resultat i det foregående og får

$$\int \frac{x^{2n}}{1+x^2} \operatorname{Arctg}x dx \sim$$

$$\frac{(-1)^n}{2} \left((\operatorname{Arctg}x)^2 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \log (1+x^2)\right) +$$

$$(-1)^{n-1}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \operatorname{Arctg}x +$$

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p+q-1} x^{2n-2p-2q+2}}{(2n-2p+1)(2n-2p-2q+2)}.$$

Det lykkedes i det store og hele. Det må dog indrømmes, at dobbeltsummen trænger til forskønnelse. Summen er jo et polynomium, og den bør derfor ordnes efter potenser af x. Vi sætter $p + q = j$. så skal j i den inderste sum løbe fra $p + 1$ til n.

Når vi derefter ombytter summationerne, kommer j til at løbe fra 2 til n, medens p kommer til at løbe fra 1 til j - 1. Summen bliver derfor

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{p=1}^{j-1} \frac{(-1)^{j-1} x^{2n-2(j-1)}}{(2n-2(j-1))(2n-2p+1)}.$$

Vi erstatter j med j + 1, og derved får vi

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j}{2(n-j)} \left(\frac{1}{2n-2j+1} + \frac{1}{2n-2j+3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) x^{2(n-j)}.$$

Det vil pynte på opgavebesvarelsen at få denne sidste omskrivning med.

I opgavebesvarelser vil det sædvanligvis ikke være rimeligt at omtale udregningen af eventuelle optrædende integraler særlig udførligt. Hvis opgaveteksten ikke direkte kræver fremgangsmåden ved beregningen udførligt omtalt, kan resultatet hentes fra en integraltabel, men det bør da altid suppleres med en henvisning til den benyttede tabel. Udgave og sidetal bør anføres.

Ved udregning af uegentlige integraler bør man være opmærksom på, at opspaltning af et konvergent integral kan føre til divergente enkeltintegraler. Hvis det sker, må man enten først gennemføre en stamfunktionsbestemmelse (altså udelade grænserne i første omgang) eller man må fortsætte regningerne med summens led under samme integraltegn. Den her omtalte fejl vil ikke altid umiddelbart kunne spares i det endelige resultat - derfor er det nødvendigt at være ganske særlig forsigtig.

Endelig skal vi tilråde, at man indøver opgaverne til dette kapital både ved hjælp af integraltabel og ved direkte udregning.

Lette opgaver.

1. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{x^2}{1 + x^3}, \quad \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{og} \quad \frac{x}{\sqrt{(1 - x^4)}}.$$

2. Udregn stamfunktioner til

$$x \sin x^2, \quad \frac{\operatorname{tg} \log x}{x} \quad \text{og} \quad \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

3. Udregn stamfunktioner til

$$\cos x \cot^2 x \quad \text{og} \quad \operatorname{tg}^5 x + 2\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x.$$

4. Udregn stamfunktion til

$$\cos \alpha x \cos \beta x \cos \gamma x$$

for vilkårlige reelle værdier af α, β og γ. Undtagelsestilfælde undersøges for sig.

5. Den ved x^γ definerede funktion har stamfunktionen $\frac{x^{\gamma+1}-1}{\gamma+1}$. Undersøg, hvorledes denne forholder sig, når γ konvergerer mod -1.

6. Udregn stamfunktioner til

$$x^2 \sin^2 x \quad \text{og} \quad \frac{x}{\sin^2 x}.$$

7. Udregn stamfunktioner til

$$x \operatorname{tg}^4 x, \quad x \operatorname{tgh}^4 x \quad \text{og} \quad x \log^4 x.$$

8. Udregn stamfunktioner til

$$\cos \sqrt{x}, \quad \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \quad \text{og} \quad \log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

9. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)} - \sqrt{x}} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{(x+1)} - 1}.$$

10. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} \quad \text{og} \quad \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

11. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{x^4}{x + 2} \quad \text{og} \quad \frac{x^4}{x^2 + 4}$$

12. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{x^3 + 4x - 3}{x^2 + x - 2} \quad \text{og} \quad \frac{x^3 - 6x + 6}{x^3 - 7x + 6}.$$

13. Udregn en stamfunktion til

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

14. Udregn en stamfunktion til

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

for vilkårlige reelle værdier af α og β. Prøv, om stamfunktionen kan vælges således, at den konvergerer mod en stamfunktion til $\frac{-1}{x - \alpha}$, når β går mod α.

15. Samme opgave for

$$\frac{1}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}.$$

16. Udregn

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2(1+x^2)} \quad \text{og} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^3(1+x^2)}.$$

17. Udregn

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3(1+x)} \quad \text{og} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^3(1+x^3)}.$$

18. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}, \quad \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)} \quad \text{og} \quad \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

19. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{x+1}{x^4+4x^2+3} \quad \text{og} \quad \frac{x+1}{x^4+3x^2+4}.$$

20. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{1}{4+e^x+3e^{-x}} \quad \text{og} \quad \frac{e^x}{(e^x+e^{-x})(e^x+2e^{-x})}.$$

21. Udregn stamfunktion til

$$\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x} \quad \text{og} \quad \frac{\cos x - \sin x}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$$

22. Udregn en stamfunktion til

$$\frac{1}{1+\alpha\cos x}.$$

23. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}, \quad \frac{\cos 4x}{\cos x} \quad \text{og} \quad \frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

24. Udregn stamfunktioner til

$$\cos x \operatorname{Arctg}(2\operatorname{tg}x) \text{ og } \cos x \log(1 + \cos x).$$

25. Udregn

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\,dx.$$

26. Udregn

$$\int_0^{p\pi} \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

for enhver værdi af $p \in \check{Z}$.

27. Udregn

$$\int_0^1 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + \cosh x}.$$

28. Udregn

$$\int_0^1 \frac{x}{x + 1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}.$$

29. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{\sqrt{(2x - 1)}}{\sqrt[3]{(2x - 1)} - 1} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

30. Udregn en stamfunktion til

$$\frac{1}{(1 + 2x)\sqrt{(1 + 2x - 4x^2)}}.$$

31. Udregn en stamfunktion til

$$\frac{1}{(x + 1)\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

32. Udregn

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{(1 - x^2)}} \quad \text{og} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{(1 + x^2)}} .$$

33. Udregn stamfunktioner til

$$\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}}, \quad \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}, \quad \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)}},$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)}}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)}} \quad \text{og} \quad \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)}} .$$

34. Som opgave 33, men med kvadratrødderne som faktor i stedet for divisor.

35. Som opgave 33, men for de reciprokke funktioner.

36. Udregn

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\, dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} x \cot\frac{x}{2}\, dx.$$

37. Vis, at

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{(x + 1)}}$$

har en uegentlig stamfunktion på $[0, \infty]$, og angiv denne.

38. Vis at de uegentlige integraler

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}, \quad \int_0^1 \log x\, dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cos x\, dx$$

en konvergente, og udregn deres værdi.

39. Vis, at de uegentlige integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{((x - 1)^2 (x - 2)^2 (x - 3)^2)}}$$

er konvergente. Stamfunktionerne kan ikke udtrykkes ved de elementære funktionstegn.

40. Udregn

$$\int_0^\infty (1 - \operatorname{tgh} x)\, dx \quad \text{og} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\cosh x} .$$

41. "Udregn"

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2 + 1}\, dx \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{1 + \cos^2 x}{\sqrt{(1 + x^2)}}\, dx.$$

42. Udregn for $\alpha \neq \beta$ værdien af

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{((\beta - x)(x - \alpha))}} .$$

Læg mærke til at værdien kun "i ringe grad" afhænger af α og β.

Vanskeligere opgaver.

43. Lad f : $[a,b]$ ind i $\hat{R}$ være en kontinuert. En følge (f_n) af afbildninger $f_n : [a,b]$ ind i $\hat{R}$ defineres ved

$$f_o = f \text{ og } f_n(x) = \int_a^t f_{n-1}(x)dx \text{ for } n = 1,2,3,\dots .$$

Find ved delt integration f_n udtrykt ved f, således at udtrykket kun indeholder et enkelt integraltegn.

44. Udregn for $n \in \hat{N}$ en stamfunktion til $x \operatorname{tg}^{2n} x$.

45. Udregn

$$\int_o^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

46. For $n \in \hat{N}$ sætter vi

$$a_n = \int_o^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x \, dx.$$

Udregn a_n ved delt integration. Vis, at

$$(a_n) \to 0, \ \left(\frac{a_{n+2}}{a_n}\right) \to 1, \ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1.$$

Find derved en følge af rationale tal, der konvergerer med $\frac{1}{2}\pi$.

47. Udregn

$$\int_o^{2\pi} \cos x \operatorname{Arctg}(2\operatorname{tg} x)\, dx.$$

48. Udregn

$$\int_o^\infty x^{-\frac{2}{3}} \operatorname{Arctg} x \, dx.$$

49. "Udregn"

$$\int_o^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$$

50. For hvilke reelle værdier af p er

$$\int_0^\infty (x^p - (x + 1)^p)\, dx$$

konvergent. Anvendelse af middelværdisætningen samt en passende vurdering kan hjælpe.

51. For $\lambda \in]0,\infty[$, $y \in]0,\infty[$ sætter vi

$$F_\lambda(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin yx}{x} dx.$$

Vis, at integralet er konvergent. Vis, at den således definerede funktion $F_\lambda :]0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ er differentiabel med

$$F_\lambda'(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos y x \, dx.$$

(Vejledning: Dan differenskvotienten og vis, at grænseovergangen kan foretages under integraltegnet. For et endeligt integrationsinteval følger dette af en sætning om ligelig konvergens, ogbidraget fra det uendelige rest interval kan vises at være lille.)

Udregn $F_\lambda'(y)$ og bestem derved $F_\lambda(y)$, idet det udnyttes, at $F_\lambda(y)$ har grænseværdi 0 i punktet 0. Foretag grænseovergangen $\lambda \to 0$ og find derved

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Den sidste grænseovergang kræver en omhyggelig vurdering.

Trykfejlsliste til

forelæsningsnoter MA kapitel 1-8.

Kun trykfejl, som er i høj grad meningsforstyrrende, er medtaget.

MA 2.2. I formellinien i definition 2.2 rettes det sidste J til I.

MA 2.3. Linie 4 f.n.: der skulle have stået $I \cap J_o = \emptyset$.

MA 2.4. Linie 1.: $(a_j | j \in J)$.

MA 2.9. Linie 2.: Altså er $(\frac{1}{n})$ ikke summabel.

MA 2.12. I sidste formellinie i sætning 2.14 rettes $\geq$ til $>$.

MA 2.28. I første linie i sætning 2.31 rettes Z til z.

MA 2.30. I linie 9 f.n. rettes c til x og i den følgende linie rettes "for" til $f_n(x)$.

MA 3.31a. I linie 4 i definition 3.32 rettes f(x) til f'(x).
I linie 2 f.n. rettes f'(x) til F'(x).

MA 3. Formler og grafer 2: De to sidste formellinier før overgangsformlerne skal være:

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = \frac{1}{i} \sin iz, \quad \mathrm{tgh}\, z = \frac{1}{i} \mathrm{tg}\, iz,$$
$$\coth z = i \cot iz.$$

Den sidste overgangsformel i første linie skal være:

$$\mathrm{tg}(z + \tfrac{1}{2}\pi) = - \cot z.$$

MA 3. Formler og grafer 4. Linie 6 f.n. rettes til :
Arccos:$[-1,1]$ på $[0,\pi]$, Arcsin:$[-1,1]$ på $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Sidste linies første halvdel rettes til

Arcosh:$[1,\infty[$ på $[0,\infty[$.

MA 3. Formler og grafer 5. Sidste halvdel af anden linie rettes til:

$$\mathrm{Arsinh}\, x = \log(x + \sqrt{(x^2+1)}).$$

MA 4.5. Linie 10 f.n. Der skal selvfølgelig stå $a \neq -1$. I linie 4 f.n. rettes cot x til -cot x.

MA 4.6. I første linie rettes coth x til -coth x.

MA 4. Opgaver 4. Den første integrand skal være $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

MA 5.6. Linie 4 f.n.: $X' + aX = b$.

MA 5.30. Formel (27) skal rettes til

$$(1+t^2)^2 X'' + (a+2t)(1+t^2)X' + bX = f(\mathrm{Arctg}\ t).$$

MA 5.31. Linie 7 rettes til

$$(1+t^2)^2 X'' + 2t(1+t^2)X' + X = 0.$$

MA 5. Opgaver 1. Den sidste differentialligning i opgave 2 skal rettes til

$$X' + \frac{1}{x(x-1)} X = 0.$$

MA 5. Opgaver 7. Opgave 37 udgår.

MA 7.7. I linierne 10 og 8 f.n. rettes I_2 til I_1.

MA 7.10. I næst nederste linie rettes åbent til afsluttet.

MA 7.12. I linie 7 f.n. rettes $\dot{O}$ til $\dot{Q}$.

MA 7.17. Linie 7 f.n. rettes til:

Heraf følger, at der findes en omegn $U \in \dot{U}_1(x_1)$, således at $U \cap B = \emptyset$. Altså er x_1 et ydre punkt for B.

Sidste linie: det første = skal være $\subsetneq$.

MA 7.18. I linierne 13, 10 og 9 f.n. skal M alle 5 steder rettes til T.

MA 7.21. I de to sidste linier skal T_1 og T_2 ombyttes.

MA 7.44. Denne side skulle have været startet således:

Eksempler. Et diskret rum er et T_1-rum. Et trivielt rum, der indeholder mere end ét punkt, er ikke et T_1-rum.

I sætning 7.55 rettes betingelsen 2) til

2) $\forall U \in \dot{U}(a)\ \exists b \in U \cap A (b \neq a)$.

fejlliste

MA 7.46. Det sidste a i sidste linie rettes til c.

MA 7.49. Denne side skulle have været startet således:

Regnereglerne for grænsepunkter for afbildninger af et topologisk rum ...

I sætning 7.64 er det selvfølgelig f(og ikke A), der skal påstås at være konstant.

MA 8.5. I definition 8.10 må A og B forudsættes ikke tomme.

MA 8.23. Sidste linie rettes til

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{(\underline{a} \cdot \underline{a})}.$$

MA 8.28. Linierne 6-17 erstattes med:

Heraf følger, at $(\varphi \circ \varphi^{n}(y)) = (\varphi^{(n+1)}(y))$ konvergerer mod såvel $\varphi(a)$ som a. Altså er $\varphi(a) = a$ og a er altså fixpunkt. Dermed er sætningen bevist.

MA 8. Opgaver 4. Ny tekst til opgave 16:

Vis, at afstandsfunktionerne φ og $\varphi \circ$dist i opgave 3 er indbyrdes ækvivalente, såfremt φ er kontinuert i 0.

The dominating rûle of the exponential and trigonometrical functions in mathematical analysis and its applications to physical problems is rooted in the fact that these functions solve the simplest "differential equations".

Richard Courant.

Kapitel 5.

Lineære differentialligninger.

En differentialligning er en relation mellem en funktion af en reel variabel og nogle af dens differentialkvotienter.

Eksempler: Funktionen $f :]0,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^{-1}$ tilfredsstiller differentialligningen

$$x f'(x) + f(x) = 0.$$

Den ved $f(x) = e^{ix}$ definerede funktion $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$ tilfredsstiller differentialligningen

$$f'(x) = i f(x).$$

Den ved $f(x) = \sin x$ definerede funktion $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller hver af følgende to differentialligninger

$$f''(x) + f(x) = 0$$
$$(f'(x))^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Da en differentialligning er en relation mellem funktioner, vil man foretrække at skrive ovenstående ligninger på formen

$$xf' + f = 0, \quad f' = if, \quad f'' + f = 0 \quad \text{og} \quad f'^2 + f^2 = 1.$$

Det er klart, at hver af de ovenfor anførte differentialligninger hver for sig giver udtryk for en mere eller mindre væsentlig egenskab ved den pågældende funktion. Det er også klart, at enhver differentiabel funktion tilfredsstiller en mængde forskellige differentialligninger.

I dette kapitel skal vi beskæftige os med differentialligninger fra den modsatte synsvinkel, idet vi tænker os differentialligningen givet og ønsker at bestemme den eller de funktioner, der tilfredsstiller den.

Betragtet fra dette synspunkt, vil vi skrive de ovenfor betragtede ligninger

$$xX' + X = 0, \quad X' = iX, \; X'' + X = 0 \quad \text{og} \quad X'^2 + X^2 = 1.$$

Idet vi med D^n betegner den afbildning, der til hver n gange differentiabel funktioner $f : I$ ind i $\mathring{C}$ (eller $\mathring{R}$), hvor I er et interval, tilordner funktionen $D^n f : I$ ind i $\mathring{C}$ (eller $\mathring{R}$), og specielt med D° betegner den identiske afbildning, skriver vi også de tre første ligninger

$$(1) \quad (xD + D^\circ)X = 0, \; (D - iD^\circ)X = 0, \; (D^2 + D^\circ)X = 0.$$

Her er $xD + D^\circ$ den afbildning, som til enhver differentiabel funktion $f : I$ ind i $\mathring{C}$ (eller $\mathring{R}$) tilordner funktionen $xf' + f : I$ ind i $\mathring{C}$ (eller $\mathring{R}$).

Brugen af faktoren x i den første ligning er strengt taget ukorrekt, men en korrekt skrivemåde vil blive for besværlig. Det har visse fordele, at benytte faste betegnelser for de variable, altså skrive $y = X(x)$ for den ubekendte funktion, og ligningerne kan da skrives

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = iy, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{og} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1,$$

og svarende til formen (1) ovenfor skriver man så også

$$(x\frac{d}{dx} + 1)y = 0, \quad (\frac{d}{dx} - i)y = 0, \text{ og } (\frac{d^2}{dx^2} + 1)y = 0.$$

Denne meget ukorrekte skrivemåde benyttes stadig meget i den matematiske litteratur.

Afbildningen $xD + D^{\circ}$ har som definitionsmængde alle differentiable funktioner med alle mulige definitions intervaller. Hvis $a, b : I$ ind i $\check{C}$ er kontinuerte afbildninger af intervallet I, er $aD + bD^{\circ}$ en afbildning, hvis definitionsmængde er alle differentiable funktioner med delintervaller af I som definitionsmængde. Vi vil kalde $aD + bD^{\circ}$ en differentialoperator på intervallet I. Analogt kan vi betragte differentialoperatorer, i hvilke der optræder differentialkvotienter af flere forskellige ordener.

Ved ordenen af en differentialligning eller differentialoperator, vil vi forstå ordenen af den højeste differentialkvotient, der optræder i ligningen eller operatoren, når denne er reduceret så meget som muligt.

En differentialligning kaldes lineær, når den er af første grad i den ubekendte funktion og dens differentialkvotienter. En lineær differentialligning har således formen

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D^1 + a_o D^{\circ})X = b,$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_o, b : I$ ind i $\check{C}$(eller $\check{R}$) er kontinuerte funktioner. Hvis b er nulfunktionen, kaldes ligningen homogen. Hvis a_n ikke er nulfunktionen, er ligningens orden n.

Mere generelt kan vi betragte differentialligningssystemer med flere ubekendte funktioner, f.eks.

$$X' = a_1X + b_1Y$$
$$Y' = a_2X + b_2Y,$$

hvor a_1, b_1, a_2, b_2 : I ind i Č (eller Ř) er kontinuerte funktioner.

Problemet at løse en differentialligning er en generalisation af stamfunktion problemet, der netop er ensbetydende med løsning af en differentialligning af formen $X' = f$. Derfor er det ikke overraskende, at løsning af visse simple differentialligninger kan gennemføres ved stamfunktionsbestemmelser. Således har vi følgende sætning:

<u>Sætning</u> 5.1. Lad $I \subsetneqq Ř$ være et interval og lad a, b : I ind i Č være kontinuerte afbildninger. Lad A være en stamfunktion til a, og lad B være en stamfunktion til $e^A b$. Da er $\{e^{-A}B + ce^{-A} | c \in Č\}$ netop mængden af løsninger til differentialligningen $X' + aX = b$. Hvis a og b afbilder ind i Ř, og A og B vælges, så de ligeledes afbilder ind i Ř, fås de reelle løsninger netop for reelle værdier af c.

Bevis. Lad I_1 være et delinterval af I, og lad f : I_1 ind i Č være en differentiabel afbildning. Vi vil prøve, om f passer i differentialligningen $X' + aX = b$. For at gennemføre det, sætter vi $g = e^A f$, altså $f = e^{-A}g$. Så er g : I_1 ind i Č en differentiabel afbildning, og vi får

$$\begin{aligned}(D + aD^\circ)f &= D(e^{-A}g) + ae^{-A}g = \\ &-e^{-A}g\,DA + e^{-A}Dg + ae^{-A}g = e^{-A}Dg,\end{aligned}$$

idet $DA = a$. Vi ser således, at f tilfredsstiller differentialligningen, hvis og kun hvis $Dg = e^{A}b$, altså $g = B + c$, hvor c er en kompleks konstant. Løsningerne er således netop funktionerne $(B + c)e^{-A}$. Dermed er sætningens første påstand bevist. Den anden følger helt umiddelbart.

Specielt får vi for $b = 0$, at den homogene differentialligning $X' + aX = 0$ har løsningsmængden $\{ce^{-A} | c \in \mathbb{C}\}$, hvor A er en stamfunktion til a. Dette ville vi få ved følgende række af ikke helt korrekte omformninger

$$X' + aX = 0,$$

$$\frac{X'}{X} = -a,$$

$$(\log|X|)' = -a$$

$$\log|X| = -A + c_1$$

$$X = \pm e^{-A+c_1} = ce^{-A}.$$

Sætning 5.1 har således legaliseret denne regnemetode - men det går selvfølgelig ikke an at sætte logiske ækvivalenstegn mellem ligningerne.

Efter at den homogene ligning $X' + aX = 0$ er løst, kan vi løse den inhomogene ligning $X' + aX = b$ ved at prøve med ue^{-A}, hvor u er en ubekendt funktion. Derved fås netop ligningen $Du = e^{+A}b$ til bestemmelse af u.

Eksempler. Ligningen

$$X' - X = 0$$

har løsningsmængden $\{c\ e^{x} | c \in \mathbb{C}\}$ og den reelle løsningsmængde $\{c\ e^{x} | c \in \mathbb{R}\}$. For at løse ligningen

$$X' - X = e^{x}$$

prøver vi med $u\ e^{x}$ og får $Du = 1$, $u = x + c$, så løsningsmængden bliver $\{(x + c)e^x \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Det er ofte let at gætte en løsning til en differentialligning, og hvis vi kan gætte en løsning, kan vi udnytte vort kendskab til løsningsmængdens form ved bestemmelse af denne.

Eksempler

$$X' - X = x.$$

Vi prøver at indsætte funktionen $-x$ på venstre side, og vi får da resultatet $x - 1$. Derved kommer vi på sporet af løsningen $-x - 1$, og løsningsmængden bliver $\{- x - 1 + ce^x \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Vi lægger mærke til, at alle løsningerne til de betragtede differentialligninger eksisterer på hele det interval, hvor a og b er kontinuerte. Det er klart, at enhver restriktion af en løsning til et delinterval igen bliver en løsning, men det er rimeligt ikke at tage sådanne restriktioner med, når vi angiver løsningsmængden.

Af sætning 5.1 fås helt umiddelbart følgende sætning:

<u>Sætning</u> 5.2. Den homogene differentialligning $X' + aX = 0$, hvor $a : I$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert har nulfunktionen som løsning (nulløsning), og for alle andre løsninger gælder det, at de ikke antager værdien 0 på intervallet I.

Endvidere har vi følgende sætning:

<u>Sætning</u> 5.3. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og lad $a,b:I$ ind i $\mathbb{C}$ være kontinuerte afbildninger. Lad $x_0 \in I$ og $y_0 \in \mathbb{C}$ være vilkårlig valgt. Da har differentialligningen $X' + aX$ netop én løsningsfunktion f, der tilfredsstiller betingelsen $f(x_0) = y_0$.

Bevis. Løsningen

$$f = e^{-A}B + ce^{-A}, \quad c \in \mathbb{C}$$

tilfredsstiller den stillede betingelse, hvis og kun hvis

$$e^{-A(x_o)}B(x_o) + ce^{-A(x_o)} = y_o,$$

altså hvis og kun hvis den komplekse konstant c har værdien

$$y_o e^{A(x_o)} - B(x_o).$$

Dermed er sætningen bevist.

Den i sætning 5.3 omtalte løsning kaldes den ved begyndelsesværdierne (x_o, y_o) bestemte partikulære løsning.

I matematikkens anvendelser i fysik, kemi, teknik etc. får man ofte brug for at bestemme en partikulær løsning til en differentialligning på grundlag af givne begyndelsesværdier.

Eksempel. Et radioaktivt stof sønderdeles med en hastighed, der er propertional med den forhåndenværende stofmængde. Er denne m gram er ændringshastigheden $\frac{dm}{dt}$ gram/sekund således lig med $-km$ gram/sekund, hvor k er en positiv konstant. Lad os antage, at stofmængden er m_o gram på tidspunktet $t = 0$. Opgaven er da, at finde den løsning til differentialligningen $\frac{dm}{dt} + km = o$, som for $t = 0$ har værdien m_o. Løsningsmængden bliver $\{ce^{-kt} | c \in \mathring{R}\}$, og den søgte løsning bliver derfor $m = m_o e^{-kt}$.

Af sætning 5.1 får vi også følgende sætning, der i øvrigt ikke vedkommer differentialligningsteorien, men som har en vis selvstændig interesse:

<u>Sætning</u> 5.4. Lad $I \subsetneqq \mathring{R}$ være et interval, og lad $f : I$ ind i $\mathring{C} \setminus \{0\}$ være en differentiabel funktion. Der findes da en differentiabel funktion $g : I$ ind i $\mathring{C}$, således at $f = e^g$.

Bevis. Funktionen f er en løsning til differentialligningen

$$X' - \frac{f'}{f} X = 0,$$

og den kan derfor skrives på formen $c\,e^A$, hvor A er en stamfunktion til $\frac{f'}{f}$. Men da $c \neq 0$, kan c skrives på formen e^{c_1}, og vi får derfor $f = e^{A+c_1}$. Dermed er sætningen bevist.

Funktionen g i sætning 5.4 kaldes en kontinuert logaritme til f. Der findes uendelig mange forskellige kontinuerte logaritmer til f, nemlig alle funktionerne $g + 2p\pi i$, hvor $p \in \mathbb{Z}$. Sætning 5.4 bevarer sin gyldighed, hvis vi begge steder ændrer "differentiabel" til "kontinuert", men denne mere generelle påstand må vises ved helt andre metoder.

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $a_1, a_0, b : I$ ind i $\mathbb{C}$ kontinuerte afbildninger. Differentialligningen

$$a_1 X' + a_0 X = b$$

kan da løses ved hjælp af sætning 5.1, efter at vi har divideret igennem med a_1. Hvis a_1 har nulpunkter, vil sætning 5.1 og dermed sætning 5.3 kunne anvendes på hvert af de intervaller, i hvilke nulpunkterne for a_1 deler I. Sætning 5.3 vil sædvanligvis ikke gælde, hvis x_o er et nulpunkt for a_1

Eksempler. Differentialligningen

$$x^2 X' + X = 1$$

har løsningsmængden

$$\{1 + ce^{\frac{1}{x}} \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

Kun for $c = 0$ fås en løsning, der er defineret for $x = 0$. Alle andre løsninger har grænseværdien 0 fra venstre i punktet 0, medens dens numeriske værdier går mod ∞, når x går med 0 fra højre. Differentialligningen

$$\cos x\, X' + \sin x\, X = 1$$

har løsningsmængden

$$\{\sin x + c \cos x \mid c \in \mathring{C}\}.$$

Her er samtlige løsninger differentiable afbildninger af $\mathring{R}$ ind i $\mathring{C}$, men hvis x er et ulige multiplum af $\frac{1}{2}\pi$, antager samtlige løsninger samme værdi, og begyndelsesværdier (x_o, y_o), hvor x_o er et ulige multiplum af $\frac{1}{2}\pi$, vil derfor ikke bestemme en partikulær løsning.

Vi vil nu gå over til at studere to sammenhørende lineære homogene differentialligninger med to ubekendte funktioner, altså et system

$$(2) \qquad \begin{aligned} X' &= a_1X + b_1Y \\ Y' &= a_2X + b_2Y \ , \end{aligned}$$

hvor a_1, b_1, a_2 og b_2 er kontinuerte afbildninger af et interval $I \subseteq \mathring{R}$ ind i de komplekse tal.

At et funktionspar (f,g), hvor f og g er differentiable afbildninger af et interval $I_1 \subseteq I$ ind i de komplekse tal er et løsningspar til (2) betyder at

$$(3) \qquad f' = a_1f + b_1g \quad \text{og} \quad g' = a_2f + b_2g.$$

Intervallet I_1 kaldes definitionsintervallet for løsningsparret (f,g).

For to løsningspar (f_1, g_1) og (f_2, g_2) med samme definitionsinterval $I_1 \subseteq I$ indfører vi løsningsparrenes determinant

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = f_1g_2 - f_2g_1.$$

Løsningsparrenes determinant afhænger af parrenes rækkefølge, idet den skifter fortegn, når parrene byttes.

Sætning 5.5. Hvis determinanten for to løsningspar ikke er identisk 0, vil den overhovedet ikke antage værdien 0.

Bevis. Ved differentiation af determinanten (4) får vi, idet (3) gælder for begge løsningspar, at

$$\begin{aligned}\Delta' = {} & f'_1 g_2 + f_1 g'_2 - f'_2 g_1 - f_2 g'_1 = \\ & (a_1 f_1 + b_1 g_1) g_2 + f_1(a_2 f_2 + b_2 g_2) - \\ & (a_1 f_2 + b_1 g_2) g_1 - f_2(a_2 f_1 + b_2 g_1) = \\ & a_1(f_1 g_2 - f_2 g_1) + b_2(f_1 g_2 - f_2 g_1) = (a_1 + b_2)\Delta.\end{aligned}$$

Løsningsparrenes determinant er således en løsning til differentialligningen

$$X' - (a_1 + b_2)X = 0,$$

og påstanden følger derfor af sætning 5.2. Dermed er sætningen bevist.

Det lader sig ikke gøre at opskrive løsningsmængden til (2) på lignende måde som for den enkelte lineære differentialligning af første orden. Det kan faktisk vises, at løsning af systemet (2) ikke kan reduceres til endelig mange stamfunktionsbestemmelser. Vi kan imidlertid bevise, at der findes løsninger til (2), idet vi har følgende sætning:

Sætning 5.6. Ligningssystemet (2) har to løsningspar med I som definitionsinterval og med determinant forskellig fra nul.

Bevis. Vi vælger $x_o \in I$ vilkårligt. Vi definerer to følger (φ_n) og (ψ_n) af afbildninger φ_n, ψ_n : I ind i $\check{C}$, idet vi sætter $\varphi_o = 1$, $\psi_o = 0$ og rekursivt for $n \in \check{N}$

$$(5)\quad \begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= \int_{x_o}^{x} (a_1(t)\varphi_n(t) + b_1(t)\psi_n(t))dt \\ \psi_{n+1}(x) &= \int_{x_o}^{x} (a_2(t)\varphi_n(t) + b_2(t)\psi_n(t))dt. \end{aligned}$$

For $n \in \mathring{N}$ har vi da relationerne

$$(6)\quad \varphi'_n = a_1\varphi_{n-1} + b_1\psi_{n-1} \text{ og } \psi'_n = a_2\varphi_{n-1} + b_2\psi_{n-1}.$$

Lan nu $[\alpha,\beta] \subseteq I$ være et begrænset, afsluttet delinterval, som indeholder x_o. Ifølge en sætning fra gymnasiematematikken er de kontinuerte funktioner a_1, b_1, a_2 og b_2 begrænsede på $[\alpha,\beta]$, og vi kan derfor vælge et positivt tal M, således at

$$\forall t \in [\alpha,\beta]\ (|a_1(t)| \leqq M,\ |b_1(t)| \leqq M,\ |b_2(t)| \leqq M).$$

Vi påstår nu, at dette medfører, at vi for $n = 0 \vee n \in \mathring{N}$ og for alle $x \in [\alpha,\beta]$ har vurderingerne

$$(7)\quad |\varphi_n(x)| \leqq \frac{(2M|x-x_o|)^n}{n!},\ |\psi_n(x)| \leqq \frac{(2M|x-x_o|)^n}{n!}.$$

Denne påstand vises ved induktion efter n. For $n = 0$ er vurderingerne åbenbart rigtige, og hvis (7) antages opfyldt, får vi ved hjælp af (5), at

$$|\varphi_{n+1}(x)| \leqq \left|\int_{x_o}^{x} |a_1(t)\varphi_n(t) + b_1(t)\psi_n(t)|dt\right| \leqq$$

$$\frac{(2M)^n}{n!}\cdot 2M\cdot\left|\int_{x_o}^{x} |t - x_o|^n dt\right| = \frac{(2M|x - x_o|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

og analogt for $|\psi_{n+1}(x)|$. Dermed er induktionsbeviset gennemført. Af (6) og (7) følger nu, at vi for $n \in \mathring{N}$ og $x \in [\alpha,\beta]$ har vurderingerne

$$(8)\quad |\varphi'_n(x)| \leqq 2M\frac{(2M|x-x_o|)^{n-1}}{(n-1)!},\ |\psi'_n(x)| \leqq 2M\frac{(2M|x-x_o|)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Af sætning 2.42 følger nu, idet vurderingerne (7) viser, at den konvergente række $(\frac{(2M(\beta-\alpha))^n}{n!})$ er majoranträkke for rækkerne (φ_n) og (ψ_n), og at den konvergente række $(2M\frac{(2M(\beta-\alpha))^{n-1}}{(n-1)!})$ er majorantrække for rækkerne (φ'_n) og (ψ'_n), at rækkerne (φ_n), (ψ_n), (φ'_n) og (ψ'_n) alle er ligelig konvergente på $[\alpha,\beta]$. Intervallet $[\alpha,\beta]$ var et vilkårligt afsluttet, begrænset delinterval af I, som indeholdt x_o, og vi har derfor vist, at de fire rækker konvergerer ligeligt på ethvert afsluttet begrænset delinterval af I. Dermed har vi specielt vist, at de fire rækker konvergerer i ethvert punkt af I. Vi sætter

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n, \quad g_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n .$$

idet φ_o og ψ_o er konstante, får vi ifølge sætning 2.42 og (6), at

$$f'_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1} + b_1 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n-1} = a_1 f_1 + b_1 g_1$$

$$g'_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \psi'_n = a_2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1} + b_2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n-1} = a_2 f_1 + b_2 g_1,$$

hvilket viser, at f_1 og g_1 er løsninger til (2). Af (5) følger, at $\varphi_n(x_o) = \psi_n(x_o) = 0$ for $n \in \mathring{N}$, og vi har derfor

$$f_1(x_o) = \varphi_o(x_o) = 1, g_1(x_o) = \psi_o(x_o) = 0.$$

Vi gennemfører nu ordret den samme konstruktion med den ene ændring, at vi begynder med $\varphi_o = 0$, $\psi_o = 1$, og vi får derved et andet løsningspar (f_2,g_2) med $f_2(x_o) = 0$, $g_2(x_o) = 1$. Så bliver $\Delta(x_o) = f_1(x_o)g_2(x_o) - f_2(x_o)g_1(x_o) = 1$, og løsningsparrets determinant er derfor ikke identisk 0. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5.7. Hvis (f_1,g_1) og (f_2,g_2) er løsningspar til (2) og c_1, c_2 er vilkårlige komplekse tal, er

$$(c_1f_1 + c_2f_2, \quad c_1g_1 + c_2g_2)$$

et løsningspar til (2).

Bevis. Det ses umiddelbart ved indsættelse i ligningerne.

Det er nu heldigt, at sætningerne 5.6 og 5.7 i virkeligheden giver os all løsningspar til ligningsystemet (2). Dette fremgår af den følgende sætning:

Sætning 5.8. Lad (f_1, g_1) og (f_2, g_2) være løsningspar med fra nul forskellig determinant Δ til ligningssystemet (2). Lad F, G : I ind i $\mathbb{C}$ være kontinuerte funktioner. Lad A_1 og A_2 være stamfunktioner til $\frac{1}{\Delta}(Fg_2 - Gf_2)$ og $\frac{1}{\Delta}(Gf_1 - Fg_1)$. Det inhomogene lineære differentialligningssystem

$$(9) \qquad \begin{aligned} X_1' &= a_1X + b_1Y + F \\ X_2' &= a_2X + b_2Y + G \end{aligned}$$

har da løsningsmængden

$$\{(A_1f_1 + A_2f_2 + c_1f_1 + c_2f_2, \ A_1g_1 + A_2g_2 + c_1g_1 + c_2g_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Bevis. Funktionerne f_1, g_1, f_2, g_2 og derfor tillige $\Delta = f_1g_2 - f_2g_1$ er differentiable på I og værdimængden $\Delta(I)$ indeholder ikke 0. Lad f, g : I ind i $\mathbb{C}$ være differentiable funktioner. Der eksisterer da differentiable funktioner u_1, u_2 : I ind i $\mathbb{C}$, således at vi har

$$(10) \qquad \begin{aligned} u_1f_1 + u_2f_2 &= f \\ u_1g_1 + u_2g_2 &= g. \end{aligned}$$

Løsning af ligningerne med hensyn til u_1 og u_2 giver nemlig

$$u_1 = \frac{1}{\Delta}(fg_2 - gf_2), \quad u_2 = \frac{1}{\Delta}(gf_1 - fg_1),$$

og da Δ ikke antager værdien 0, er disse udtryk virkelig differentiable funktioner på I. Vi indsætter nu f og g i ligningerne (9), idet vi udnytter (10) og benytter, at (f_1,g_1) og (f_2,g_2) er løsningspar til (2). Derved får vi

$$(11)\qquad \begin{aligned} u_1'f_1 + u_2'f_2 &= F \\ u_1'g_1 + u_2'g_2 &= G. \end{aligned}$$

Altså er (f,g) et løsningspar til (9), hvis og kun hvis u_1 og u_2 tilfredsstiller (11), altså hvis og kun hvis

$$u_1' = \frac{1}{\Delta}(Fg_2 - Gf_2),\quad u_2' = \frac{1}{\Delta}(Gf_1 - Fg_1),$$

hvilket er ensbetydende med, at der eksisterer komplekse konstanter c_1,c_2, således at $u_1 = A_1 + c_1$, $U_2 = A_2 + c_2$.
Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5.9. Determinanten Δ til to løsningspar (f_1,g_1) og (f_2,g_2) til (2) bliver 0, hvis og kun hvis et af løsningsparrene fås ved at multiplicere det andet med en passende konstant.

Bevis. Af sætning 5.6 følger, at (2) har løsningspar (f_1,g_1) og (f_2,g_2) med fra 0 forskellig determinant. Af sætning 5.8 følger dernæst, at to vilkårlige løsningspar til (2) har formen

$$(c_1f_1 + c_2f_2,\ c_1g_1 + c_2g_2) \text{ og } (c_1'f_1 + c_2'f_2,\ c_1'g_1 + c_2'g_2),$$

så determinanten bliver

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(c_1'g_1 + c_2'g_2) - (c_1g_1 + c_2g_2)(c_1'f_1 + c_2'f_2) =$$
$$(c_1c_2' - c_2c_1')(f_1g_2 - f_2g_1).$$

Løsningsparret har altså determinant 0, hvis og kun hvis $c_1c_2' - c_2c_1' = 0$, altså hvis og kun hvis talparrene (c_1,c_2) og (c_1',c_2') er propertionale. Dermed har vi bevist "kun hvis". Vi bemærker, at "hvis" er helt trivielt, idet det erklart, at proportionale løsningspar har determinanten 0.

Den væsentligste vanskelighed ved udvidelsen af de foregående resultater til n differentialligninger med n ubekendte er, at vi ikke endnu har determinanter med n søjler og rækker til rådighed. Dette vil der imidlertid i årets løb blive rådet bod på i forelæsningen over algebra og geometri. Derefter vil selve udvidelsen af sætningerne til n ligninger med n ubekendte ikke frembyde nævneværdige vanskeligheder. Det er endda så heldigt, at netop det lange bevis for sætning 5.6 helt umiddelbart lader sig generalisere, hvorimod generalisationerne af sætningerne 5.5 og 5.8 kræver enkelte hjælpemidler.

I forskellige specielle tilfælde kan løsning af to lineære differentialligninger med to ubekendte reduceres til løsning af to lineære differentialligninger af første orden med hver én ubekendt. Vi vil blot omtale ligningssystemet

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\ \varphi(t) + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\ \varphi(t) + f_2(t), \end{aligned}$$

hvor a_{jk} er komplekse tal, medens φ, f_1, f_2 : I ind i $\mathbf{C}$ er kontinuerte funktioner på et interval I.

Vi indfører en ny ubekendt funktion

$$(12)\qquad y = p_1x_1 + p_2x_2,$$

hvor p_1 og p_2 er komplekse tal, som vi senere vil vælge på en passende måde. Vi får da af (12) og (11), at

$$\frac{dy}{dt} = p_1\frac{dx_1}{dt} + p_2\frac{dx_2}{dt} =$$

$$((a_{11}p_1 + a_{21}p_2)x_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2)x_2)\varphi(t) + p_1f_1(t) + p_2f_2(t).$$

Vælger vi nu specielt p_1 og p_2, således at

$$(13) \qquad \begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 &= \lambda p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 &= \lambda p_2, \end{aligned}$$

hvor λ er et komplekst tal, får ligningen formen

$$(14) \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda\,\varphi(t)y + p_1 f_1(t) + p_2 f(t),$$

og bliver således en lineær differentialligning af første orden med én ubekendt.

Forudsat, at $p_1 \neq 0$ og $p_2 \neq 0$ er ligningssystemet (11) ensbetydende med det system, der består af én af ligningerne (11) samt ligningen (14) kombineret med definitionen (12) af y. Det er klart, at valget $p_1 = p_2 = 0$ er uanvendeligt og $p_1 = 0$ eller $p_2 = 0$ bevirker, at ligningen (14) bliver identisk med en af de oprindelige ligninger. Disse muligheder har derfor ingen interesse.

Af (13) fremgår, at p_1 og p_2 er løsninger til ligningssystemet

$$(15) \qquad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)p_1 + a_{21}p_2 &= 0 \\ a_{12}p_1 + (a_{22} - \lambda)p_2 &= 0, \end{aligned}$$

og det er derfor nødvendigt at vælge λ, således at dette ligningssystem har andre løsninger end (0,0). Dette indtræffer, hvis og kun hvis ligningssystemets determinant er 0. Vi må altså vælge λ, således at

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

hvilket giver andengradsligningen

$$(16) \qquad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Når λ er valgt, så (16) er opfyldt, tilfredsstilles (15) af $(p_1, p_2) = (a_{21}, \lambda - a_{11})$ samt af ethvert talsæt, der fås ved multiplikation af dette med vilkårlige komplekse tal.

Når λ og (p_1, p_2) er valgt, kan (14) opskrives og ved løsning af (14) fås en vis løsningsmængde. For hver løsning $y = \eta(t)$ får vi en relation $p_1x_1 + p_2x_2 = \eta(t)$. Denne giver $x_2 = -p_2^{-1}p_1x_1 + p_2^{-1}\,\eta(t)$, hvilket indsættes i den første af ligningerne (11), og dermed bestemmes x_1, og derefter fås x_2 af det udtryk, vi netop benyttede.

Hvis (16) har to forskellige løsninger, får vi to sæt værdier (λ, p_1, p_2) og (λ', p_1', p_2'). Ved løsning af de to dertil svarende forskellige udgaver af (14) bestemmer vi $p_1x_1 + p_2x_2$ og $p_1'x_1 + p_2'x_2$, og x_1 og x_2 fås derefter ved løsning af to sædvanlige lineære ligninger med to ubekendte. Det ses umiddelbart, at talsættene (p_1, p_2) og (p_1', p_2') aldrig vil kunne blive indbyrdes propotionale.

En ulempe ved den her beskrevne metode er det, at ligningen (16) kan have imaginære løsninger, selv om ligningerne (11) er reelle, og løsningerne fås da på kompleks form, og det vil eventuelt kræve en del ekstra ulejlighed at sortere de reelle løsninger fra.

Eksempler. Vi forsøger først med ligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = (x_1 + 2x_2)\cot t + \cos^2 t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (3x_1 + 2x_2)\cot t + \sin^2 t.$$

I dette tilfælde bestemmes λ af ligningen

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

med rødderne 4 og -1 svarende til $(p_1, p_2) = (1,1)$ og $(p_1', p_2') = (3,-2)$. I overensstemmelse hermed adderer vi ligningerne og får

$$\frac{d(x_1+x_2)}{dt} = 4 \cot t\ (x_1 + x_2) + 1,$$

som giver løsningerne

$$(17) \quad x_1+x_2 = -\sin^3 t \cos t - \tfrac{1}{3}\sin t \cos^3 t + c_1 \sin^4 t, \quad c_1 \in \mathbb{C}$$

og analogt fås ved at multiplicere den første ligning med 3, den anden med -2 og addere

$$\frac{d(3x_1-2x_2)}{dt} = -\cot t(3x_1-2x_2) + 3\cos^2 t - 2\sin^2 t,$$

som giver løsningerne

$$(18) \quad 3x_1 - 2x_2 = 2\cot t - \frac{5\cos^3 t}{3\sin t} + \frac{c_2}{\sin t}.$$

Ved at løse (17) og (18) finder vi

$$x_1 = \tfrac{2}{5}\cot t - \frac{\cos^3 t}{3\sin t} - \tfrac{2}{5}\sin^3 t \cos t - \tfrac{2}{15}\sin t \cos^3 t + \tfrac{2}{5}c_1 \sin^4 t + \frac{c_2}{5\sin t}$$

$$x_2 = \frac{\cos^3 t}{3\sin t} - \tfrac{2}{5}\cos t - \tfrac{3}{5}\sin^3 t \cos t - \tfrac{1}{5}\sin t \cos^3 t + \tfrac{3}{5}c_1 \sin^4 t - \frac{c_2}{5\sin t},$$

og dermed har vi fundet samtlige løsninger til differentialligningssystemet. De reelle løsninger fremkommer netop, når c_1 og c_2 er reelle.

Lad os dernæst forsøge at løse det homogene ligningssystem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3x-y}{\sin t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{4x-y}{\sin t}.$$

I dette tilfælde bestemmes λ af ligningen

$$\lambda^2 - 2x + 1 = 0,$$

som kun har den ene rod $\lambda = 1$ svarende til $(p_1, p_2) = (2, -1)$. Vi får således ligningen

$$\frac{d}{dt}(2x-y) = \frac{1}{\sin t}(2x-y)$$

med løsningsmængden

$$\{c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

Indsættelse af en løsning $2x - y = c_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$ i den første af de oprindelige ligninger giver

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sin t} + \frac{c_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}t}{\sin t},$$

som har løsningerne

$$x = c_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \log \left| \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \right| + c_2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t.$$

Endvidere får vi

$$y = 2x - (2x - y) = 2c_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \log \left| \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t \right| + (2c_2 - c_1) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}t.$$

Vi har således fundet de to løsningspar

$$(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t, \ 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t)$$

og

$$(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \log |\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t|, \ 2\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t \log |\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t| - \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t).$$

Som et sidste eksempel på to lineære ligninger med to ubekendte betragter vi systemet

$$\frac{dx}{dt} = x - y + t - 1$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y + t + 1.$$

I dette tilfælde bestemmes λ af ligningen

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

med rødderne $1 + i$ og $1 - i$ svarende til (p_1, p_2) lig med $(1, i)$ eller $(1, -i)$. Vi får således de to ligninger

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(x+iy) &= (1+i)(x+iy) + (1+i)t - 1 + i \\ \frac{d}{dt}(x-iy) &= (1-i)(x-iy) + (1-i)t - 1 - i, \end{aligned}$$

som har løsningerne

$$(20) \quad \begin{aligned} x + iy &= -t - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i + c_1 e^{(1+i)t} \qquad & c_1 \in \mathbb{C} \\ x - iy &= -t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i + c_2 e^{(1-i)t}. \qquad & c_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Vi indsætter

$$e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t), \quad e^{(1-i)t} = e^t(\cos t - i \sin t)$$

og får ved løsning af de sidste ligninger

$$x = -t - \frac{1}{2} + e^t\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\cos t + i\,\frac{c_1 - c_2}{2}\sin t\right)$$

$$y = \quad - \frac{1}{2} + e^t\left(\frac{c_1 - c_2}{2i}\cos t + \frac{c_1 + c_2}{2}\sin t\right).$$

Vi indfører nu de nye konstanter

$$c_1' = \frac{c_1 + c_2}{2}, \qquad c_2' = \frac{c_1 - c_2}{2i},$$

og løsningerne kan skrives

$$\begin{aligned} x &= -t - \tfrac{1}{2} + e^t(c_1' \cos t - c_2' \sin t) \\ y &= \quad - \tfrac{1}{2} + e^t(c_2' \cos t + c_1' \sin t). \end{aligned}$$

Vi skal knytte et par kommentarer til regningerne. Ligningerne (19) er hinandens konjugerede. De tilsvarende homogene ligninger er løst rutinemæssigt, men bidragene $-t - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}i$ er fundne ved at prøve, om et førstegradspolynomium tilfældigvis passer i ligningerne. Da ligningerne er hinandens konjugerede, kan løsningen til den sidste umiddelbart skrives op, når den første ligning er løst. Hvis vi ønsker at opskrive en tilfældig valgt løsning til hver ligning, må vi selvfølgelig indføre to forskellige integrationskonstanter. Indførelsen af de nye konstanter c_1' og c_2' bevirker netop, at de reelle løsninger til ligningssystemet fremkommer, når konstanterne vælges reelle.

Vi vil nu gå over til at omtale lineære differentialligninger af anden orden. Teorien for disse ligninger reduceres umiddelbart til den ovenfor udførligt behandlede teori på grund af følgende sætning:

Sætning 5.10. Lad $a_1, a_2, f : I$ ind i $\mathbb{C}$ være kontinuerte på intervallet I, og lad $I_1 \subseteq I$ være et vilkårligt delinterval. En to gange differentiabel funktion $\varphi : I_1$ ind i $\mathbb{C}$ vil da være en løsning til den lineære differentialligning

$$(21) \qquad X'' + a_1 X' + a_2 X = f,$$

hvis og kun hvis (φ, φ') er et løsningpar til differentialligningssystemet

$$(22) \qquad \begin{aligned} X' &= Y \\ Y' &= -a_2 X - a_1 Y + f. \end{aligned}$$

Hvis (φ, ψ) er et løsningspar til dette ligningssystem, er $\psi = \varphi'$ og φ er en løsning til (21).

Bevis. Lad φ være en løsning til (21). Ved indsættelse af af (φ,φ') i (22) ses umiddelbart, at (φ,φ') er et løsningspar. Lad dernæst (φ,ψ) være et løsningspar til (22). Den første af ligningerne (22) giver da, at $\varphi' = \psi$, og derefter viser den sidste ligning, at φ er en løsning til (21). Der med er sætningen bevist.

Ved hjælp af sætning 5.10 kan vi overføre sætningerne om sammenhørende lineære differentialligninger af anden orden til differentialligninger af anden orden.

Hvis φ_1 og φ_2 er løsninger til den homogene ligning

$$(23) \qquad X'' + a_1X' + a_2X = 0,$$

er (φ_1, φ_1') og (φ_2, φ_2') løsningspar til det homogene ligningssystem

$$(24) \qquad \begin{aligned} X' &= Y \\ Y' &= -a_2X - a_1Y, \end{aligned}$$

og løsningsparrets determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$$

kaldes i dette tilfælde Wronski-determinanten for φ_1 og φ_2.

Af sætningerne 5.5 og 5.9 får vi nu umiddelbart følgende sætning.

<u>Sætning</u> 5.11. Wronski-determinanten for to løsninger φ_1 og φ_2 til (23) er identisk nul, hvis og kun hvis en af løsningerne er en konstant gange den anden løsning. Hvis Wronski-determinanten ikke er identisk nul, antager den overhovedet ikke værdien nul.

Yderligere fremgår det af beviset for sætning 5.5, at Wronski- determinanten er en løsning til differentialligningen

$$X' + a_1X = 0.$$

Af sætning 5.6 får vi eksistenssætningen:

<u>Sætning</u> 5.12. Ligningen (23) har to løsninger med definitionsinterval I og med fra nul forskellig Wronski-determinant.

Af sætning 5.8 får vi endelig følgende sætning om løsningsmængden til (21):

<u>Sætning</u> 5.13. Lad φ_1 og φ_2 være løsninger med fra nul forskellig Wronski-determinant Δ til ligningen (23). Lad A_1 og A_2 være stamfunktioner til $-\frac{f\,\varphi_2}{\Delta}$ og $\frac{f\,\varphi_1}{\Delta}$. Ligningen (21) har da løsningsmængden

$$\{A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Da vi ikke har en rutinemæssig løsningsmetode til rådighed, er vi for det meste henvist til at bestemme løsningsmængden ved lidt systematisk gætteri. Vi vil dog først se på et par specielle tilfælde, hvor gætteriet kan undgås. Først bemærker vi, at vi i det specielle tilfælde, hvor ligningen har konstante koefficienter, kan løse det tilsvarende system af to ligninger med to ubekendte, og gætteri bliver således overflødigt. Det er imidlertid lettere at benytte de følgende to sætninger.

<u>Sætning</u> 5.14. Lad $x^2 + ax + b$ være et andengradspolynomium med rødder α og β. Hvis $\alpha \neq \beta$ har den homogene differentialligning $X'' + aX' + bX = 0$ løsningsmængden

$$\{c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Hvis $\alpha = \beta$, har differentialligningen løsningsmængden

$$\{(c_1 x + c_2)e^{\alpha x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Bevis. Det ses direkte ved indsættelse, at $e^{\alpha x}$ og $e^{\beta x}$ er løsninger. For $\alpha \neq \beta$ er ingen af disse løsninger en konstant gange den anden, og det følger derfor af sætning 5.13, at løsningsmængden netop er den anførte. I tilfældet $\alpha = \beta$ er $a = -2\alpha$, $b = \alpha^2$, og direkte indsættelse viser, at $x \cdot e^{\alpha x}$ i dette tilfælde er løsning, og vi kan derefter ræsonnere som i det foregående tilfælde.

<u>Sætning</u> 5.15. Lad $x^2 + ax + b$ være et andengradspolynomium med reelle koefficienter. Hvis polynomiet har to forskellige reelle rødder α og β, har differentialligningen $X'' + aX' + bX = 0$ den reelle løsningsmængde

$$\{c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \mid c_1, c_2 \in \mathring{R}\}.$$

Hvis polynomiet har en reel dobbeltrad α, har differentialligningen den reelle løsningsmængde

$$\{(c_1 x + c_2)e^{\alpha x} \mid c_1, c_2 \in \mathring{R}\}.$$

Hvis polynomiet har de indbyrdes forskellige komplekse rødder $-\frac{1}{2}a + i\gamma$ og $-\frac{1}{2}a - i\gamma$, har differentialligningen den reelle løsningsmængde

$$\{e^{-\frac{1}{2}ax}(c_1 \cos \gamma x + c_2 \sin \gamma x) \mid c_1, c_2 \in \mathring{R}\}.$$

Bevis. I de to første tilfælde fremgår resultatet umiddelbart af sætning 5.14. I det sidste tilfælde giver sætning 5.14, at en vilkårlig kompleks løsning har formen

$$c_1 e^{(-\frac{1}{2}a+i\gamma)x} + c_2 e^{(-\frac{1}{2}a-i\gamma)x} =$$

$$e^{-\frac{1}{2}ax}(c_1(\cos \gamma x + i \sin \gamma x) + c_2(\cos \gamma x - i \sin \gamma x)) =$$

$$e^{-\frac{1}{2}ax}((c_1 + c_2)\cos \gamma x + i(c_1 - c_2)\sin \gamma x),$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige komplekse tal. Resultatet bliver en reel løsning, hvis og kun hvis

$$c_1 + c_2 = c_1'$$
$$ic_1 - ic_2 = c_2'$$

er reelle tal. Hvis c_1' og c_2' er vilkårlige reelle tal, kan c_1 og c_2 bestemmes, så disse ligninger gælder. Dermed er sætningen bevist.

Eksempler. Da polynomiet $x^2 - 1$ har rødderne 1 og -1, har differentialligningen $X'' - X = 0$ løsningsmængden $\{c_1e^x + c_2e^{-x} | c_1, c_2 \in \mathring{C}\}$. Da $x^2 - 2x + 1$ har 1 som dobbeltrod, har differentialligningen $X'' - 2X' + X = 0$ løsningsmængden $\{(c_1x + c_2)e^x | c_1, c_2 \in \mathring{C}\}$. Da polynomiet $x^2 + 1$ har rødderne i og -i, har differentialligningen $X'' + X = 0$ den reelle løsningsmængde $\{c_1\cos x + c_2\sin x | c_1, c_2 \in \mathring{R}\}$.

Hvis c_1 og c_2 er reelle tal, som ikke begge er 0, eksisterer der altid et positivt tal c og et reelt tal φ, således at $c_1 = c\cos\varphi$, $c_2 = c\sin\varphi$, og vi får da omskrivningen

$$c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x = c\cos(\gamma x - \varphi).$$

Den sidste af de i sætning 5.15 anførte løsningsmængder kan derfor også skrives på formen

$$\{c\ e^{-\frac{1}{2}ax}\cos(\gamma x - \varphi) | c \in [0,\infty[, \varphi \in \mathring{R}\}.$$

Denne skrivemåde foretrækkes ofte i de fysiske og tekniske anvendelser. En løsning af den anførte form kaldes en dæmpet svingning, og $\frac{1}{2}a$ kaldes dæmpningen (man taler eventuelt om negativ dæmpning). Størrelsen $\gamma x - \varphi$ kaldes fasen, og φ kaldes fasekonstanten.

Hvis a og b er konstanter, og f : I ind i $\mathring{C}$ er en funktion på et interval I, løses differentialligningen

$$X'' + aX' + bX = f$$

ved, at den tilsvarende homogene ligning først løses ved hjælp af sætning 5.14 eller 5.15, og den inhomogene ligning løses derefter ved hjælp af sætning 5.13. I mange tilfælde er det dog lettere at bruge lidt systematisk gætteri. De følgende bemærkninger er ment som en vejledning i dette gætteri.

Hvis f er et polynomium, har den inhomogene differentialligning en løsning, som er et polynomium af samme grad.

Eksempel. Vi vil løse ligningen

$$X'' + X' - 2X = 4x^2 + 2x - 7.$$

Polynomiet $x^2 + x - 2 = 0$ har rødderne 1 og -2, og den homogene ligning har derfor løsningsmængden

$$\{c_1e^x + c_2e^{-2x} \mid c_1, c_2 \in \mathring{C}\}.$$

Vi indsætter $-2x^2$ i ligningens venstre side og får $4x^2 - 4x - 4$. Det er $6x - 3$ "for lidt". Vi indsætter $-3x$ og får $6x - 3$. Altså er $-2x^2 - 3x$ en løsning, og løsningsmængden er

$$\{-2x^2 - 3x + c_1e^x + c_2e^{-2x} \mid c_1, c_2 \in \mathring{C}\}.$$

Den reelle løsningsmængde fås ved at skrive $\mathring{R}$ istedet for $\mathring{C}$.

Hvis f(x) har formen $P(x)e^{\alpha x}$, hvor P(x) er et polynomium har den inhomogene differentialligning en løsning af den samme form Hvis $e^{\alpha x}$ ikke er løsning til den homogene differentialligning, har det polynomium, der indgår i løsningen have samme grad som P(x). Hvis $e^{\alpha x}$ er løsning til den homogene differentialligning må polynomiets grad vælges 1 højere, og hvis $xe^{\alpha x}$ også er løsning til den homogene differentialligning må polynomiets grad yderligere forhøjes med 1.

Eksempel. Vi vil løse differentialligningen

$$X'' - 4X' + 4X = (x + 1)e^{2x}.$$

Den homogene ligning har løsningerne e^{2x} og xe^{2x}. Vi prøver derfor at indsætte x^3e^{2x} i venstre side og får

$$4x^3e^{2x} + 12x^2e^{2x} + 6x\ e^{2x} - 8x^3e^{2x} - 12x^2e^{2x} + 4x^3e^{2x} = 6x\ e^{2x}.$$

Vi indsætter x^2e^{2x} i venstre side og får

$$4x^2e^{2x} + 8x\ e^{2x} + 2\ e^{2x} - 8x^2e^{2x} - 8x\ e^{2x} + 4x^2e^{2x} = 2e^{2x}.$$

Det fremgår heraf, at den inhomogene differentialligning har løsningen $(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$, og løsningsmængden bliver

$$\{(\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2)e^{2x} | c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Hvis f(x) har formen $e^{\alpha x}(P(x)\cos x + Q(x)\sin x)$, hvor P og Q er polynomier, har den inhomogene differentialligning en løsning af samme form, men med polynomier hvis grad er lig med den højeste af graderne for P og Q og endda 1 højere, hvis $e^{\alpha x}\cos x$ og $e^{\alpha x}\sin x$ er løsninger til den homogene differentialligning. Det vil eventuelt være fordelagtigst at udtrykke cos og sin ved eksponentialfunktioner først.

Eksempel. Vi vil løse differentialligningen

$$X'' + X = e^x\cos x.$$

Den homogene differentialligning har løsningsmængden $\{c_1\cos x + c_2\sin x |\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$, og $e^x\cos x$ er således ikke løsning til den homogene ligning. Vi indsætter $e^x\cos x$ i ligningens venstre side og får

$$e^x\cos x - 2e^x\sin x - e^x\cos x + e^x\cos x =$$
$$e^x\cos x - 2e^x\sin x.$$

Vi indsætter $e^x\sin x$ i ligningens venstre side og får

$$e^x\sin x + 2e^x\cos x - e^x\sin x + e^x\sin x =$$
$$2e^x\cos x + e^x\sin x.$$

Det fremgår heraf, at $\frac{1}{5}e^x(\cos x + 2\sin x)$ er en løsning til den homogene differentialligning, og løsningsmængden bliver derfor

$$\{\tfrac{1}{5}e^x(\cos x + 2\sin x) + c_1\cos x + c_2\sin x \mid c_1, c_2 \in \mathring{C}\}.$$

Hvis f(x) er en sum af flere led, kan gætteriet bekvemt gennemføres for hvert led for sig.

Følgende sætning giver os mulighed for at finde frem til flere differentialligningstyper, der kan løses eksplicit.

Sætning 5.16. Lad $g : I$ ind i $\mathring{R}$, hvor I er et interval, være en løsning til differentialligningen

$$X'' + aX' + bX = f,$$

hvor $a,b : I$ ind i $\mathring{R}$ er kontinuerte afbildninger. Lad $\varphi : I_1$ ind i I, hvor I_1 er et interval, være en to gange differentiabel funktion. Hvis differentialkvotienten φ' ikke antager værdien 0 på intervallet I, og hvis φ'' er kontinuert, vil den sammensatte funktion $g \circ \varphi : I_1$ ind i $\mathring{R}$ være en løsning til differentialligningen

$$X'' + AX' + BX = F,$$

hvor A, B, F : I_1 ind i $\dot{R}$ er de ved

$$A(t) = a(\varphi(t))\varphi'(t) - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}$$
$$B(t) = b(\varphi(t)(\varphi'(t))^2$$
$$F(t) = f(\varphi(t))(\varphi'(t))^2$$

definerede afbildninger.

Bevis. Vi sætter $x = \varphi(t)$, altså $g(x) = g(\varphi(t)) = h(t)$. Kædereglen for differentiation af en sammensat funktion giver da

$$h'(t) = g'(x)\ \varphi'(t)$$

og ved fornyet anvendelse får vi, at $g'(x)$ har differentialkvotienten $g''(x)\ \varphi'(t)$ med hensyn til t, og ved reglen om differentiation af et produkt får vi derfor

$$h''(t) = g''(x)\ (\varphi'(t))^2 + g'(x)\ \varphi''(t).$$

Ved løsning af de to ligninger får vi

$$g'(x) = \frac{h'(t)}{\varphi'(t)}$$
$$g''(x) = \frac{h''(t)}{(\varphi'(t))^2} - \frac{\varphi''(t)\ h'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Da g er en løsning til den oprindelige ligning, er

$$g''(x) + a(x)\ g'(x) + b(x)g(x) = f(x).$$

Ved indsættelse af $x = \varphi(t)$ samt de fundne udtryk fås

$$\frac{h''(t)}{(\varphi'(t))^2} + \frac{a(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 - \varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}h'(t) + b(\varphi(t))h(t) = f(\varphi(t)),$$

hvilket netop viser, at h tilfredsstiller den i sætningen anførte ligning. Dermed er sætningen bevist.

For $\varphi(t) = \log|\alpha t + \beta|$ fås specielt.

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha}{\alpha t + \beta}, \quad \varphi''(t) = \frac{-\alpha^2}{(\alpha t + \beta)^2}.$$

Hvis g er løsning til differentialligningen

$$(25) \qquad X'' + aX' + bX = f,$$

er $g \circ \varphi$ således en løsning til

$$X'' + \frac{(a+1)\alpha}{\alpha t+\beta} X' + \frac{b\,\alpha^2}{(\alpha t+\beta)^2} X = \frac{\alpha^2 f(\log|\alpha t+\beta|)}{(\alpha t+\beta)^2}$$

eller pænere skrevet

$$(26) \quad (\alpha t+\beta)^2 X'' + (a+1)\alpha(\alpha t+\beta)X' + b\alpha^2 X = \alpha^2 f(\log|\alpha t+\beta|).$$

Her er differentiationerne med hensyn til t. Ligningen (26) løses ved at løse (25) og sætte $x = \log|\alpha t + \beta|$ i resultatet.

For $\varphi(t) = \text{Arctg} t$ fås

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \varphi''(t) = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2},$$

og hvis g er en løsning til (25), er $g \circ \varphi$ en løsning til

$$X'' + \frac{a + 2t}{1 + t^2} X' + \frac{b}{(1 + t^2)^2} X = \frac{f(\text{Arctg}\ t)}{(1 + t^2)^2},$$

hvilket også kan skrives

$$(27) \quad (1 + t^2)^2 X'' + (a + 2t)X' + bX = f(\text{Arctg}\ t).$$

Denne ligning løses altså ved at løse (25) og sætte $x = \text{Arctg}\ t$.

For $\varphi(t) = \text{Arc sin}\ t$ fås

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}, \quad \varphi''(t) = \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)^3}},$$

og (25) går i dette tilfælde over i ligningen

$$(28)\quad (1-t^2)X'' + (a\surd(1-t^2)-t)X' + bX = f(\text{Arc sin } t),$$

der altså løses ved at løse 25 og sætte x = Arc sin t. Det skal dog bemærkes, at selv i tilfældet a = 0, f = 0, kan metoden kun forventes at give en løsning i intervallet]-1,1[.

Eksempler. Ligningen

$$(1 + t^2)X'' + 2tX' + X = 0$$

er ligningen (27) med a = 0, b = 1. Ligningen

$$X'' + X = 0$$

har løsningerne cos x og sin x, så den givne ligning har løsningerne cos(Arctg t) og sin(Arctg t), hvilket reduceres til

$$\frac{1}{\surd(1 + t^2)} \quad \text{og} \quad \frac{t}{\surd(1 + t^2)} .$$

Løsningsmængden bliver derfor

$$\left\{ \frac{c_1 + c_2 t}{\surd(1 + t^2)} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\} .$$

Ligningen

$$(1 - t^2)X'' - tX' + X = 0$$

er ligningen (28) med a = 0, b = 1, og den har derfor løsningerne sin(Arc sin t) og cos(Arc sin t) eller t og $\surd(1 - t^2)$, og løsningsmængden bliver derfor

$$\{c_1 t + c_2\surd(1 - t^2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

på intervallet]-1,1[. Det er nu nærliggende at gætte på, at løsningsmængden på $]-\infty,-1[$ og $]1,\infty[$ bliver

$$\{c_1 t + c_2/(t^2-1) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

og en prøve vil vise, at dette faktisk slår til.

Enkelte andre valg af $\varphi(t)$ vil også føre til ganske pæne differentialligningstyper, men i det store og hele har metoden ringe betydning. Differentialligningen (26) kaldes Euler's differentialligning. I litteraturen omtales i reglen kun det specialtilfælde, der svarer til $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Det indtræffer ret ofte, at man kan gætte en løsning til en lineær homogen differentialligning af anden orden. Vi skal derfor omtale en fremgangsmåde, der kan benyttes til bestemmelse af løsningsmængden, når en løsning er kendt.

Vi vil altså antage, at differentialligningen

$$X'' + aX' + bX = 0,$$

hvor $a, b : I$ ind i $\mathbb{C}$ har en løsning $\varphi : I$ ind i $\mathbb{C}$ forskellig fra nulløsningen. Vi vil da forsøge at bestemme en funktion $u : I$ ind i $\mathbb{C}$, således at $u\,\varphi$ er løsning til differentialligningen. Indsættelse giver

$$\varphi u'' + 2\varphi' u' + u\varphi'' + a\varphi u' + au\varphi' + bu\varphi = 0.$$

Da φ er løsning til differentialligningen, reduceres dette til

$$\varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' = 0,$$

hvilket viser, at u' er løsning til

$$\varphi X' + (2\varphi' + a\varphi)X = 0.$$

Løsning af denne ligning giver

$$u' = c \cdot \frac{e^{-A}}{\varphi^2},$$

hvor c er en vilkårlig kompleks konstant og A er en stamfunktion til a. Vi bemærker, at den fundne funktion kun er defineret i de delintervallet af I, hvor φ ikke har nulpunkter. På hvert af disse intervaller får vi således løsningsmængden

$$\left\{c\varphi \int \frac{e^{-A}}{\varphi^2} + c_1\varphi \;\middle|\; c, c_1 \in C\right\}.$$

Metodens ufuldkommenhed er ikke særlig generende i praksis. Vi ved jo, at løsningerne er funktioner, definerede og to gange differentiable på hele I. Desuden ved vi, at φ og $\psi = u\varphi$ har fra 0 forskellig Wranski-determinant, så φ og ψ har ikke fælles nulpunkter, og så kan $u = \frac{\psi}{\varphi}$ ikke være defineret, hvor φ antager værdien 0.

Eksempel. Den i vort nærmest foregående eksempel betragtede ligning

$$(1 - x^2)X'' - xX' + X = 0$$

har løsningen x, der let findes ved gætteri. Indsættelse af ux giver ligningen

$$x(1 - x^2)\, u'' + (2(1 - x^2) - x^2)\, u' = 0,$$

så u' er løsning til ligningen

$$X' + \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{1 - x^2}\right)X = 0,$$

som har løsningen

$$\frac{1}{x^2\sqrt{|1 - x^2|}}.$$

Vi får altså u som en stamfunktion til dette udtryk. PÅ intervallerne $]-1,0[$ og $]0,1[$ får vi

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}} \sim \int \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}\,dx + \int \frac{xdx}{x\sqrt{(1-x^2)}} \sim$$

$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}\,dx - \int \frac{d\,\sqrt{(1-x^2)}}{x} \sim$$

$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}\,dx - \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} - \int \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x^2}\,dx \sim -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x},$$

og i dette interval har differentialligningen derfor løsningen $\sqrt{(1-x^2)}$, og løsningsmængden $\{c_1 x + c_2\sqrt{(1-x^2)}\,|\,c_1,c_2 \in \mathbb{C}\}$. På intervallerne $]-\infty, -1[$ og $]1, \infty[$ går integrationen ganske analogt. Det må indrømmes, at den metode, der her er benyttet til bestemmelse af stamfunktionen til $x^{-2}\sqrt{|1-x^2|}$ i nogen grad er inspireret af vor forhåndsviden om resultatet.

For et ligningssystem

$$X' = a_1X + b_1Y$$
$$Y' = a_2X + b_2Y$$

findes der en ganske tilsvarende metode til bestemmelse af løsningsmængden, når en løsning er kendt. Det er imidlertid sværere at gætte et løsningspar til systemet end at gætte en løsning til en differentialligning af anden orden. Det vil derfor ofte være fordelagtigt at eliminere en af de ubekendte. Det kan vi gøre ved at løse den første ligning på formen

$$(29)\qquad Y = \frac{1}{b_1}X' - \frac{a_1}{b_1}X,$$

hvilket ved differentiation giver

$$(30)\qquad Y' = \frac{1}{b_1}X'' - \left(\frac{b_1'}{b_1^2} + \frac{a_1}{b_1}\right)X' - \frac{a_1'b_1 - a_1b_1'}{b_1^2}X.$$

Når disse udtryk indsættes i den anden ligning i systemet, fremkommer en lineær differentialligning af anden orden med X som den eneste ubekendte funktion. Derefter bestemmes Y af (29). Det ses, at nulpunkterne for funktionen b_1 vil være generende, men i intervallerne mellem nulpunkterne giver metoden netop løsningsmængden for systemet. Vi har nemlig sørget for, at de fundne løsningspar tilfredsstiller (30), som er ækvivalent med den første ligning i systemet, og af (29) følger (30), hvilket medfører, at den anden ligning i systemet er opfyldt, da indsættelse af (29) og (30) netop giver den anden ordens differentialligning, der tilfredsstilles af X.

Vi minder om, at løsningsmængden til et system

$$X' = a_1X + b_1Y + F$$
$$Y' = a_2X + b_2Y + G$$

ifølge sætning 5.8 har formen

$$\{f + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,\ g + c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \mid c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}\},$$

hvor determinanten $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ ikke antager værdien 0. Heraf følger, at der til et givet talsæt (t_o, x_o, y_o), hvor t_o tilhører definitionsintervallet for a_1, b_1, a_2, b_2, F og G, svarer netop ét løsningspar (φ, ψ) med $\varphi(t_o) = x_o$, $\psi(t_o) = y_o$, nemlig det løsningspar, der fås ved at vælge c_1 og c_2 som løsninger til

$$f(t_o) + c_1\varphi_1(t_o) + c_2\varphi_2(t_o) = x_o$$
$$g(t_o) + c_1\psi_1(t_o) + c_2\psi_2(t_o) = y_o,$$

og disse ligninger har fra nul forskellig determinant. Dette er begyndelsesværdiproblemet for et system af to lineære differentialligninger af første orden.

Resultatet overføres umiddelbart til den lineære ligning af anden orden

$$X'' + aX' + bX = f,$$

hvor a,b, f : I ind i $\mathring{C}$ er kontinuerte. Hvis (x_o, y_o, z_o) med $x_o \in I$ er et givet talsæt, findes der netop én løsning φ til differentialligningen, som opfylder betingelserne $\varphi(x_o) = y_o$ og $\varphi'(x_o) = z_o$.

I en fysisk fortolkning kan $x = \varphi(t)$ opfattes som en fremstilling af en partikels bevægelse på en ret linie, og differentialligningen udtrykker da, at den kraft, der frembringer partiklens bevægelse er $- av - bx + f$ multipliceret med partiklens masse og med en enhedsvektor $\underline{e}$ i den rette linies retning, idet $v\,\underline{e}$ er partiklens hastighed. At begyndelsesværdiproblemet har netop én løsning betyder, at partiklens bevægelse er bestemt i al fremtid, når det er givet, hvor den starter, med hvilken hastighed og til hvilket tidspunkt. Kraften afhænger af sted, tid og hastighed.

Det er nærliggende at forsøge at fastlægge en løsning φ til differentialligning ved et sæt af krav af formen $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi(x_2) = y_2$. Dette vil også føre til bestemmelse af konstanterne ved løsning af to ligninger med to ubekendte, men i dette tilfælde har vi ingen garanti for, at ligningerne får fra nul forskellig determinant. Determinanten bliver nul, hvis og kun hvis den homogene ligning har en løsning φ, som ikke er nulløsningen, og som tilfredsstiller betingelsen $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Flere af de behandlede eksempler afslører, at dette virkelig kan finde sted. En mere indgående diskussion af disse spørgsmål har betydelig interesse, men vil føre for vidt her.

Lad $I \subsetneq \mathring{R}$ være et interval, og lad a, b : I ind i $\mathring{R}$ være kontinuerte afbildninger. Ved

$$\Phi g = g'' + ag' + bg$$

defineres en afbildning $\Phi : \hat{C}^2(I,\check{C})$ ind i $\hat{C}(I,\check{C})$. (Se kapitel 4, de første tre sider). Afbildningen Φ kaldes en lineær differentialoperator af anden orden. Vi skriver også

$$\Phi = D^2 + aD + bD^\circ$$

eller

$$\Phi = D^2 + aD + b,$$

hvilket dog ofte vil kunne misforstås. Lineære differentialoperatorer af første orden og af højere ordener defineres analogt.

Hvis $q : I$ ind i $\check{C}$ har kontinuert differentialkvotient, er den lineære differentialoperator af første orden

$$\Phi = D + qD^\circ$$

en afbildning af $\hat{C}^1(I,\check{C})$ ind i $\hat{C}(I,\check{C})$ med den egenskab, at delmængden $\hat{C}^2(I,\check{C})$ afbildes ind i $\hat{C}^1(I,\check{C})$. Hvis $p : I$ ind i $\check{C}$ er kontinuert og Ψ betegner differentialoperatoren

$$\Psi = D + pD^\circ$$

har det derfor mening at betragte den sammensatte afbildning $\Psi \circ \Phi : \hat{C}^2(I,\check{C})$ ind i $\hat{C}(I,\check{C})$. For $f \in \hat{C}^2(I,\check{C})$ får vi

$$\Phi f = f' + qf,$$

altså

$$(\Psi \circ \Phi)f = f'' + q'f + qf' + pf' + pqf =$$
$$f'' + (p + q)f' + (pq + q')f,$$

hvilket viser, at

$$(31)\quad (D+pD^\circ)\circ(D+qD^\circ) = D^2 + (p+q)D + (pq+q')D^\circ .$$

Sammensætning af to differentialoperatorer af første orden giver således en differentialoperator af anden orden.

Sætning 5.17. Lad φ : I ind i $\check{C}$, hvor I er et interval, være en løsning til differentialligningen

$$(32)\qquad X'' + aX' + bX = 0,$$

hvor a,b : I ind i $\check{C}$ er kontinuerte afbildninger. Hvis φ ikke antager værdien 0 på intervallet I, er

$$D^2 + aD + bD^\circ = (D + (a + \frac{\varphi'}{\varphi})D^\circ)\circ(D - \frac{\varphi'}{\varphi}D^\circ).$$

Bevis. Vi sætter $p = a + \frac{\varphi'}{\varphi}$, $q = -\frac{\varphi'}{\varphi}$. I følge (31) vil påstanden være vist, hvis det lykkes os at vise, at $pq + q' = b$. Udregning giver

$$pq + q' = -(a + \frac{\varphi'}{\varphi})\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2} =$$

$$-\frac{\varphi'' + a\varphi'}{\varphi} = b - \frac{\varphi'' + a\varphi' + b\varphi}{\varphi} = b.$$

Dermed er sætningen bevist.

Det fremgår af sætning 5.17, at ψ er en løsning til differentialligningen

$$X'' + aX' + bX = f,$$

hvor den tilsvarende homogene ligning har løsningen φ, som ikke antager værdien 0, hvis og kun hvis $\psi' - \frac{\varphi'}{\varphi}\psi$ er en løsning til

$$X' + (a + \frac{\varphi'}{\varphi})X = f.$$

Idet A er en stamfunktion til a, får vi heraf

$$\psi' - \frac{\varphi'}{\varphi}\psi \in \frac{e^{-A}}{\varphi}\int f\,\varphi\, e^{A} + c_1\frac{e^{-A}}{\varphi},$$

altså

$$\psi \in \varphi\int\left(\frac{e^{-A}}{\varphi^2}\int f\,\varphi\, e^{A}\right) + c_1\varphi\int\frac{e^{-A}}{\varphi^2} + c_2\varphi.$$

Her er leddene med c_1 og c_2 overflødige, men ved for hver mængde af stamfunktioner at vælge en speciel, indsætte komplekse konstanter får man netop alle differentialligningen løsningsfunktioner.

Vi vil her tilføje nogle bemærkninger med det formål at skabe en nærmere kontakt mellem ovenstående undersøgelser over lineære differentialligninger og et kommende afsnit af kursus over algebra og geometri vedrørende lineære afbildninger.

En lineær differentialoperator $\Phi = D^2 + aD + bD^\circ$ afbilder et vektorrum $V_1 = \hat{C}^2(I,\check{C})$ ind i et vektorrum $V_2 = \hat{C}(I,\check{C})$, idet a og b forudsættes at være kontinuerte afbildninger af I ind i $\check{C}$. For $\varphi_1, \varphi_2 \in V_1$ og $\alpha_1, \alpha_2 \in \check{C}$ gælder altid

$$(33) \qquad \Phi(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1\Phi\,\varphi_1 + \alpha_2\Phi\,\varphi_2,$$

og det er netop på grund af denne egenskab, at Φ siges at være lineær. Løsningsmængden til $\Phi X = 0$, altså mængden $\Phi^{-1}(0)$, kaldes nulrummet for Φ eller kernen for Φ. Af $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^{-1}(0)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \check{C}$ fås ved (33), at $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in \Phi^{-1}(0)$. Dette viser, at $\Phi^{-1}(0)$ selv er et vektorrum, et underrum i vektorrummet V_1. Vore undersøgelser viste, at der eksisterer funktioner $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi^{-1}(0)$, således at

$$\Phi^{-1}(0) = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \check{C}\},$$

og at to sådanne funktioner φ_1 og φ_2 ikke har konstant forhold. Dette udtrykkes vedat sige, at kernen $\Phi^{-1}(0)$ er et 2-dimensionalt vektorrum.

Lad os nu betragte $f \in V_2$ og løsningsmængden $\Phi^{-1}(f)$ til $\Phi X = f$ samt et element $\psi_o \in \Phi^{-1}(f)$. At et element $\psi \in V_1$ tilhører $\Phi^{-1}(f)$ er da ensbetydende med, at

$$\Phi(\psi - \psi_o) = \Phi\,\psi - \Phi\,\psi_o = f - f = 0.$$

Altså er $\Phi^{-1}(f) = \psi_o + \Phi^{-1}(0)$. En sådan mængde kaldes en 2-dimensional mangfoldighed i V_1.

En del af vore resultater vedrørende løsningsmængdernes struktur kan altså udledes ved rent algebraiske metoder, men resultaterne vedrørende eksistens af løsninger kræver metoder fra matematisk analyse, og det samme gælder beviset for, at løsningsmængden netop er 2-dimensional.

Differentialligninger af højere orden kan behandles på lignende måde som differentialligninger af højere orden. Vi skal indskrænke os til en kort beskrivelse af forholdene.

En lineær differentialligning af n^{te} orden har formen

$$(34) \qquad X^{(n)} + a_{n-1}X^{(n-1)} + \dots + a_2X'' + a_1X' + a_oX = f,$$

hvor $a_{n-1},\dots,a_o, f : I$ ind i $\mathbf{C}$ er kontinuerte funktioner. Den tilsvarende homogene ligning fås ved at erstatte f med nulfunktionen.

Hvis φ er en løsning til den homogene ligning, der svarer til (34), og u er ubekendt funktion, giver indsættelse af $u\varphi$ i (34) en lineær differentialligning af $n-1^{te}$ orden til bestemmelse af u', men denne nye differentiallignings koefficienter vil have diskontinuiteter i nulpunkterne for φ. Differentialligningens orden reduceres derfor med 1, hvis man kan gærre en løsning.

Den homogene ligning har løsninger $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, således at løsningsmængden til den homogene ligning netop har formen

$$\{c_1\varphi_1+\dots+c_n\varphi_n \mid c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}\}.$$

Nødvendigt og tilstrækkeligt for at løsningerne $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ har denne egenskab er det, at ligningssystemet

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x)u_1+\dots+\varphi_n(x)u_n &= b_1\\
\varphi_1'(x)u_1+\dots+\varphi_n'(x)u_n &= b_2\\
&\dots\\
\varphi_1^{(n-1)}(x)u_1+\dots+\varphi_n^{(n-1)}(x)u_n &= b_n
\end{aligned}$$

for ethvert $x \in I$ og ethvert komplekst talsæt $(b_1,\dots,b_n)$ har én og kun én løsning. I kursus over algebra og geometri vil det blive bevist, at denne betingelse er ensbetydende med, at en vis determinant, Wronski-determinanten, er forskellig fra 0. Som for ligninger af én variabel gælder det, at dette vil være opfyldt for alle $x \in I$, hvis det blot gælder for ét $x \in I$.

Hvis den nævnte betingelse er opfyldt, og φ : I ind i $\mathbb{C}$ er en vilkårlig funktion for $C^n(I,\mathbb{C})$, kan differentiable funktioner $u_1,\dots,u_n$ bestemmes, således at

$$\begin{aligned}
u_1(x)\varphi_1(x) +\dots+ u_n(x)\varphi_n(x) &= \varphi(x)\\
u_1(x)\varphi_1'(x) +\dots+ u_n(x)\varphi_n'(x) &= \varphi'(x)\\
&\dots\\
u_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) +\dots+ u_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) &= \varphi^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

Ved differentiation af hver af de n-1 første af disse ligninger og hensyntagen til nærmestfølgende får vi ligningerne

$$u_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + u_n'(x)\varphi_n(x) = 0$$
$$u_1'(x)\varphi_1'(x) + \cdots + u_n'(x)\varphi_n'(x) = 0$$
$$\text{-------------------------------}$$
$$u_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + u_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0$$

Ved at differentiere den sidste ligning i det foregående system og indsætte det fundne $\varphi^{(n)}$ tillige med udtrykkene for $\varphi^{(n-1)},\ldots,\varphi'$ og φ i ligningen 34 får vi under hensyntagen til, at $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ er løsninger i det tilsvarende homogene ligningssystem, at

$$u_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x)+\cdots+u_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Vi har dermed n ligninger til bestemmelse af $u_1',\ldots,u_n'$, og ifølge vore forudsætninger har dette ligningssystem netop én løsning. Dernæst fås $u_1,\ldots,u_n$ som stamfunktioner, og dermed er løsningsmængden bestemt.

Differentialoperatorer med konstante koefficienter sammensættes efter reglen

$$\sum_{j=0}^{p} a_j D^j \circ \sum_{k=0}^{q} b_k D^k = \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{q} a_j b_k D^{j+k} =$$

$$\sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) D^n,$$

altså ganske som polynomier. Deraf følger, at en differentialoperator må konstante koefficienter også kan spaltes i faktorer som et polynomium.

Eksempler.

$$D^3 - 3D^2 + 3D - D^\circ = (D - D^\circ) \circ (D - D^\circ) \circ (D - D^\circ).$$

Differentialligningen

$$X''' - 3X'' + 3X' - X = 0$$

har derfor løsningsmængden

$$\{(c_0 + c_1x + c_2x^2)e^x \mid c_0, c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Differentialoperatoren

$$D^4 - D^0$$

har opløsningen

$$(D^2 + D^\circ) \circ (D + D^\circ) \circ (D - D^\circ),$$

og differentialligningen

$$X^{IV} - X = 0$$

har derfor løsningsmængden

$$\{c_1\cos x + c_2\sin x + c_3e^x + c_4e^{-x} \mid c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{C}\},$$

hvor reelle værdier af $c_1, \dots, c_4$ netop giver alle reelle løsninger.

Vejledningen, som vi ovenfor har givet, vedrørende gætning af løsninger til inhomogene lineære differentialligninger af anden orden med konstante koefficienter bevarer stort set sin gyldighed for differentialligninger af højere orden.

Don't panic!

Tom Lehrer

Opgaver til kapitel 5.

Indledning.

Gætteri er ofte den eneste fremkommelige udvej, og det må varmt anbefales enhver studerende at øve sig i at gætte løsninger til differentialligninger, hvad enten en rutinemetode foreligger eller ikke.

Det er let at komme til at regne fejl under anvendelse af rutinemetoderne. Derfor er det dumt at undlade at gøre prøve. Hvis prøven viser sig ikke at stemme må det ikke glemmes, at man også kan lave regnefejl i prøven. Hvis den virkelig ikke stemmer, er det muligt at man kan gætte, hvordan resultatet skal modificeres for at komme til at stemme, og hvis det lykkes, sparer man jo at søge efter regnefejl i rutineregningerne.

Det beror på et skøn, om man i opgavens redaktion vil røbe, hvordan man er kommet på sporet af en gættet løsning. Man vil jo næppe røbe det, hvis den gættede løsning er resultatet af usystematisk fumleri, hvilket formodentlig ofte er tilfældet.

Lad os f.eks. forsøge at finde løsningsmængden til differentialligningen

$$\cos x \, X'' + 2\sin x \, X' - \cos x \, X = 1. \tag{1}$$

Det er nærliggende at gætte på, at den homogene ligning

$$\cos x \, X'' + 2\sin x \, X' - \cos x \, X = 0 \tag{2}$$

har en trigonometrisk funktion som løsning, og forsøg med nogle af de simpleste afslører, at sinx passer i ligningen. Ved indsættelse af cosx i ligningens venstre side får vi $-2\cos^2 x -2\sin^2 x = -2$. Altså er $-\frac{1}{2}\cos x$ en løsning til (1). Da sinx passer i (2) vil indsættelse af xsinx i venstre side af (2) give noget af x uafhængigt. Vi prøver at indsætte

$$\begin{aligned} g(x) &= x\sin x \\ g'(x) &= x\cos x + \sin x \\ g''(x) &= x\sin x + 2\cos x \ , \end{aligned}$$

og venstre side bliver $2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2$. Idet vi husker vore tidligere forsøg, finder vi, at xsinx + cosx er løsning til (2). Det er klart, at de fundne løsninger sinx og xsinx + cosx til (2) ikke har konstant forhold. Vi kan derfor bruge sætning 5.13, som fortæller os, at løsningsmængden er

$$\{-\tfrac{1}{2}\cos x + c_1\sin x + c_2(x\sin x + \cos x) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Redaktionen af besvarelsen kan udformes meget kort, men en henvisning til sætning 5.13 bør ikke undlades. Meget kort kan besvarelsen udformes på følgende måde:

Ved indsættelse i ligningens venstre side ser vi, at $-\frac{1}{2}\cos x$ er en løsning til ligningen, og at sinx og xsinx + cosx er løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Ifølge sætning 5.13 er løsningsmængden derfor

$$\{-\tfrac{1}{2}\cos x + c_1\sin x + c_2(x\sin x + \cos x) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Det synes at fremgå af denne besvarelse, at differentialligninger som eksamensopgaver er af ret tvivlsom værdi. Imidlertid indgår differentialligninger som et led i mangfoldige mere komplicerede problemstillinger ikke alene i det foreliggende, men også i flere af de følgende kurser i matematik, ligesom differentialligninger også indgår i mange fysiske problemer. Dette berettiger det store antal øvelsesopgaver, som blot består i at bestemme løsningsmængden til en differentialligning.

Lette opgaver.

1. Angiv løsningsmængden for hver af differentialligningerne

$X' - 2xX = 0$; $\sqrt[3]{x}X' - X = 0$; $xX' + aX = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Angiv løsningsmængden for hver af differentialligningerne

$$X' + \alpha\frac{\log x}{x}X = 0,\ \alpha \in \mathbb{R};\quad x \in \left]0,\infty\right[.$$

$$X' + (a+ib)X = 0,\quad a,b \in \mathbb{R};$$

$$X' + \frac{1}{x(x+1)}X = 0,\quad x \in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,1\right[\cup\left]1,\infty\right[.$$

3. Løs differentialligningerne

$X' - X = x^2 + 1$, $X' - X = \cos x$, $X' - X = e^{-x}$, $X' - X = e^{x}$.

4. Løs differentialligningen

$$X' + 2X = x^3 + 5\cos x + 3\sinh x + 8\cosh 2x.$$

5. Løs differentialligningerne

$xX' - X = x^3$, $xX' - X = \log^3 x$, $xX' - X = x$
for $x \in \left]0,\infty\right[$.

6. Løs differentialligningerne

$$xX' - aX = \cos\log|x|$$
$$xX' - aX = \sin\log|x|$$

for $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a \in \mathbb{C}$. Læg mærke til, at tilfældet $a = i$ kræver en særskilt behandling.

7. Vis, at der findes en genvej til løsning af differentialligninger af formen

$$aX' + a'X = f \quad \text{og} \quad aX' - a'X = f .$$

Formuler resultatet som en sætning.

8. Løs differentialligningerne

$$xX' + X = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}, \quad \sin x X' + \cos x X = \frac{1}{1+x^2}$$

(benyt opgave 7).

9. Løs differentialligningerne

$$xX' - X = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}, \quad \sin x X' - \cos x X = \frac{\sin^2 x}{1+x^2}$$

(benyt opgave 7).

10. Generaliser opgave 7 til differentialligninger af formen

$$aX' + \alpha a'X = f, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

og konstruer et illustrerende eksempel, der ikke falder ind under opgave nr.7.

11. Angiv en lineær differentialligning af første orden, der har de ved x^5 og $x^5 + \operatorname{tg} x$ definerede funktioner som løsninger på $\mathbb{R}\setminus\{(p+\frac{1}{2})\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}$ som løsninger. Undersøg, om den fundne differentialligning har en løsning $\varphi:]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ ind i $\mathbb{R}$ med $\varphi(0) = 1$.

12. En funktion φ:]a,b[ind i [0,∞[har som grafisk billede i et retvinklet koordinatsystem en kurve Γ. Vi antager, at φ er differentiabel, således at Γ i hvert punkt P har en tangent og en normal. Længderne af projektionerne på den første koordinatakse af de liniestykker på tangent og normal, der afskæres mellem kurvepunktet og den første koordinatakse, kaldes subtangent og subnormal til Γ i punktet P. For hvilke funktioner φ har subtangenten konstant længde ? Samme spørgsmål for subnormalen. Prøv selv, om det er fornuftigt i denne forbindelse at regne subtangent og subnormal med fortegn på passende måde.

13. En kugle falder lodret ned gennem en sej væske. Derved er dens nedadrettede akceleration tyngdeakcelerationen g minus en fra bevægelsesmodstanden stammende akceleration kv, hvor k er en konstant og v er kuglens fart. Idet bevægelsen sættes i gang til tiden t = 0 med hastigheden 0, ønskes hastigheden bestemt som funktion af tiden. Skitser det grafiske billede af den fundne funktion.

14. Ved bestråling af en større mængde stof fremstilles fra tidspunktet t = 0 at regne g gram pr.sekund af en radioaktiv isotop, af hvilken kx gram igen sønderdeles pr.sekund, idet k er konstant, og x er det øjeblikkelige forhåndenværende antal gram af den radioaktive isotop. Udregn mængden af radioaktiv isotop som funktion af tiden. (Dette er fra matematisk synspunkt bare opgave 13 i en ny udgave).

15. Til tidspunktet $t = 0$ foreligger Mgram af et radioaktivt stof renfremstillet. Af stoffet sønderdeles $k_1 x_1$gram pr. minut, idet k_1 er konstant og x_1 er det forhåndenværende antal gram pr. sekund. Derved opstår pr.sekund $\lambda_1 k_1 x_1$gram af et nyt radioaktivt stof, idet k_1 og x_1 har samme betydning før, medens $\lambda_1 \in]0,1[$ er en ny konstant. Af det nye stof sønderdeles $k_2 x_2$gram pr.sekund, og derved opstår $\lambda_2 k_2 x_2$ gram pr.sekund af et nyt radioaktivt stof o.s.v. Bestem stofmængderne som funktion af tiden. I praksis ligger $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ oftest tæt ved 1, medens $k_1, k_2, \ldots$ kan have vidt forskellige positive værdier. Kæden har kun endelig mange trin, idet $k_n = 0$ for en værdi af n.

16. Bestem en kontinuert funktion $\varphi:\grave{R}$ ind i $\grave{C}$, således at

$$\forall t \in \grave{R}(e^{\varphi(t)} = 5e^{3it} + 2e^{it} - e^{-it}).$$

Vink: Vi sætter

$$f(t) = 5e^{3it} + 2e^{it} - e^{-it} = e^{3it}(5 + 2e^{-2it} - e^{-4it}).$$

Her definerer den sidste faktor en afbildning ind i højre halvplan af den komplekse plan, og hovedværdien af logaritmen til den vil være kontinuert. En løsning er derfor $\varphi(t) = 3it$ + den nævnte hovedlogaritme, der umiddelbart kan opskrives.

17. Bestem en kontinuert funktion $\varphi:\grave{R}$ ind i $\grave{C}$, således at

$$\forall t \in \grave{R}\ (e^{\varphi(t)} = 2e^{it^2} - e^{it}).$$

18. Undersøg, om der eksisterer en kontinuert funktion φ:$\grave{R}$ ind i $\grave{R}$, således at

$$|-2t^2 + it(1-t^2)|e^{i\varphi(t)} = -2t^2 + it(1-t^2).$$

Vink: Vi ved, at en sådan funktion findes på $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$, så det er nok at undersøge situationen for $t = 0$.

19. Bestem løsningsmængderne til differentialligningssystemerne

$$\begin{matrix} X' = Y \\ Y' = X \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} X' = Y \\ Y' = -X. \end{matrix}$$

20. Bestem løsningsmængden til differentialligningssystemerne

$$\begin{matrix} X' = X + Y \\ Y' = X + Y \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} X' = 2X - 3Y \\ Y' = 4X - 6Y . \end{matrix}$$

21. Løs differentialligningssystemerne

$$\begin{matrix} X' = X + 2Y \\ Y' = 2X + Y \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} X' = X - 2Y \\ Y' = X + 4Y . \end{matrix}$$

22. Løs differentialligningssystemerne

$$\begin{matrix} t\frac{dx}{dt} = y \\ t\frac{dy}{dt} = x \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} t\frac{dx}{dt} = y \\ t\frac{dy}{dt} = -x . \end{matrix}$$

23. Løs differentialligningssystemerne

$$\begin{matrix} X' = Y + e^t \\ Y' = X + e^t \end{matrix} \quad \text{og} \quad \begin{matrix} X' = Y + e^t \\ Y' = -X + e^t . \end{matrix}$$

24. Løs differentialligningssystemet

$$X' = -\frac{2}{3\sin 2t}(2X-Y) + \frac{4}{3} + 2\cos 2t$$

$$Y' = -\frac{2}{3\sin 2t}(X+4Y) + \frac{2}{3}.$$

25. Løs differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x - 3y + t.$$

26. Løs differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -10x - 3y + t.$$

27. Angiv løsningsmængderne for differentialligningerne

$$X'' - 5X' + 6X = 0,\quad X'' + X' - 2X = 0,\quad X'' + 7X' + 12X = 0.$$

28. Angiv løsningsmængderne for differentialligningerne

$$X'' - 4X' + 4X = 0,\quad X'' + 4X' + 4X = 0.$$

29. Angiv løsningsmængderne for differentialligningerne

$$X'' - 6X' + 10X = 0,\quad X'' + 2X' + 2X = 0,\quad X'' + X' + X = 0.$$

30. Angiv løsningsmængden for differentialligningen

$$X'' - 4X' + 3X = e^{2x} + 2\cos x + 4\sin x + 3x^2 - 5x + 1.$$

31. Angiv løsningsmængden for differentialligningen

$$X'' + 3X' + 2X = 3\cosh x \ .$$

32. Angiv løsningsmængden for differentialligningen

$$X'' - 6X' + 9X = \sinh 3x \ .$$

33. Angiv løsningsmængden for differentialligningen

$$X'' - 4X' + 8X = 65\cosh x + 8x^2 - 2 \ .$$

34. Løs differentialligningerne

$$x^2X'' - 3xX' + 3X = 0, \quad x^2X'' - 3xX' + 4X = 0, \quad x^2X'' - 3xX' + 5X = 0$$

35. Løs differentialligningen

$$x^2X'' - 2X = 4 - 6x + x^2 \ .$$

36. Løs differentialligningen

$$(x-2)^2X'' - 5(x-2)X' + 9X = x^3 \ .$$

37. Løs differentialligningen

$$(1+x^2)X'' + 2xX' + 4X = 10x^2 + \operatorname{Arctg} x.$$

38. Løs differentialligningen

$$(1-x^2)X'' - xX' + 4X = x^2 \ .$$

39. Formuler det specialtilfælde af sætning 5.16, der fås for $\varphi(t) = \log \cos t$.

40. Løs differentialligningen

$$(\sin x - x\cos x)X'' - x\sin x\, X' + \sin x\, X = 0.$$

41. Løs differentialligningen

$$\sin^2 x\cos x\, X'' - (2\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x\, X' + 2\cos^3 x\, X = \cos^3 x\,.$$

42. Løs differentialligningen

$$(x^2+4x+1)X'' - 2(x+2)X' + 2X = 0.$$

43. Løs differentialligningssystemet

$$(1+x^3)X' = x^2X - Y + x + 1$$

$$(1+x^3)Y' = 2xX + 2x^2Y - x^3 - 2x^2 + 1\,.$$

44. Løs differentialligningssystemet (genvej!)

$$x(1-x^2)X' = (1-2x^2)X + xY$$

$$x(1-x^2)Y' = xX + (1-2x^2)Y\,.$$

Hvilke løsningssæt antager for $x = 2$ værdien $(1,5)$. Hvilke antager for $x = 1$ værdien $(1,1)$. Hvilke antager for $x = 0$ værdien $(0,0)$.

45. Løs differentialligningssystemet

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}(-2x\sin\theta + y)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta}(x - y\sin\theta)$$

46. Løs differentialligningen

$$(\text{tghx} + \text{tgx}) \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + (\text{tghx} - \text{tgx})y = 0.$$

Hvilke af løsningerne φ tilfredsstiller betingelserne $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

47. Find en løsning φ til differentialligningen

$$X'' + X = 2e^{3x} + 5\cos x + 2x^2 + 3 ,$$

således at $\varphi(0) = 0$ og $\varphi'(0) = 1$.

48. Bestem $\varphi:]0,\pi[$ ind i $\mathbb{R}$, således at

$$\varphi(\tfrac{1}{2}\pi) = \log 2 \wedge \varphi'(\tfrac{1}{2}\pi) = 0 \text{ og } \forall x \in]0,\pi[(\varphi''(x) + \varphi(x) = \frac{1}{\sin x}).$$

49. Spalt differentialoperatorerne

$$D^2 + D - 2D^0,\ D^2 + D + D^0,\ D^2 - 6D + 9D^0$$

i differentialoperatorer af første orden.

50. Spalt differentialoperatorerne

$$x^2D^2 - 3xD + 3D^0,\ x^2D^2 - 3xD + 4D^0,\ x^2D^2 - 3xD + 5D^0$$

i differentialoperatorer af første orden.

51. Løs opgaverne 40, 41 og 42 ved at spalte de optrædende differentialoperatorer i differentialoperatorer af første orden.

52. Løs differentialligningerne

$$X''' + X = e^x,\quad X''' - 7X' + 6X = \cos x.$$

53. Løs differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cosh x .$$

54. Løs differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x .$$

55. Løs differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4x^4 .$$

56. For $k > 0$, $h > 0$ kaldes enhver løsningsfunktion til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + h^2x = 0$$

en dæmpet svingning. Den kaldes aperiodisk, hvis $k \geq h$, periodisk, hvis $k < h$. Vis, at det for en periodisk løsning gælder, at intervallængden mellem to på hinanden følgende nulpunkter er lig med intervallængden fra et maksimumspunkt til det nærmest følgende minimumspunkt og fra et minimumspunkt til det nærmest følgende maksimumspunkt.

57. Under forudsætningerne fra opgave 56 kaldes en løsning til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + h^2x = p\cos qt$$

en tvungen svingning. Vis at det for $k > 0$ gælder, at der findes en løsning g med den egenskab, at det for enhver anden

57. løsning f gælder, at f - g går mod 0 for $t \to \infty$. Vis, at $g(t)$ har formen $a \cos(qt-\tau)$ og udtryk a ved k,h,p og q. Fremstil grafisk, hvorledes a afhænger af q (og derefter af h) for faste værdi af de tre øvrige konstanter. For $h = q$ bliver a særlig stor (resonanstilfældet). Undersøg også løsningerne for $k = 0$ og specielt for $k = 0$, $q = h$.

58. For $k < 0$ kaldes løsningerne til differentialligningen i opgave 56 svingninger med nagativ dæmpning. Leddet $2k\frac{dx}{dt} = 2kv$ repræsenterer en modstand, og i praksis vil den aldrig være negativ. Der findes imidlertid mange eksempler i fysikken på modstande, der aftager med hastigheden. De fører til en differentialligning af formen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (m - 2k\frac{dx}{dt}) + h^2x = 0,$$

hvor m,k og h er positive. Vis, at løsningerne bliver svingninger med negativ dæmpning, men omkring et andet punkt end 0.

59. Løsningerne til et ligningssystem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h^2x = k(y - x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = k(x - y)$$

kaldes koblede svingninger. Find en løsning (φ,ψ) med $\varphi(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$. Skitser en grafisk fremstilling, idet h og k antages positiv og k meget mindre end h. Det svingningsfænomen, der beskrives ved disse ligninger illustreres ved to ens penduler, som er ophængt nær hinanden, og hvis ophængningssnore ret nær ved ophængningspunkterne er forbundne indbyrdes med en elastik.

60. Løs differentialligningssystemet

$$X' = Z - Y,\ Y' = X - Z,\ Z' = Y - X.$$

Vanskeligere opgaver.

61. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}e^{\mathrm{Arctg}x} .$$

62. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - y\log x = (ex)^x\cos x$$

på intervallet $]0,\infty[$.

63. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}(1+3\sin^2 x)^{-1} .$$

64. Løs differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (1+2\mathrm{tg}^2x)y$$

på intervallet $]-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi[$.

65. Løs differentialligningen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

på intervallerne $]-\infty,0[$ og $]0,\infty[$.

66. Løs differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}\sin^2 2x + 2\frac{dy}{dx}\sin 2x\cos 2x - 4y = 0.$$

67. Løs differentialligningen

$$(x^3+6x^2-6x)\frac{d^2y}{dx^2} - (4x^2+18x-12)\frac{dy}{dx} + (6x+18)y = 0.$$

68. Løs differentialligningen

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = \alpha y,$$

og indsæt derefter i ligningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, idet det antages at potensrækken har positiv konvergensradius. Bestem rækkens koefficienter, således at rækken tilfredsstiller ligningen. Vis, at de således bestemte potensrækker virkelig får positiv konvergensradius. Udled derved binomialrækken på en ny måde.

69. Løs differentialligningen

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 1-x^2$$

dels direkte, dels ved som beskrevet i opgave 68 at indsætte en potensrække for y. Udled derved en potensrækkeudvikling af en elementær funktion.

70. Vis, at differentialligningen

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

har en løsning, der kan udvikles i en potensrække (se opgave 68). Den fundne potensrække fremstiller en kendt funktion. Udnyt dette til bestemmelse af differentialligningens løsningsmængde.

71. Samme opgave som 70 for differentialligningen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3y = 0 .$$

Svær opgave.

72. Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0,$$

hvor $a:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert. Vis, at hvis $\forall x \in \grave{R}(a(x) \leqq 0)$, kan ingen løsning til differentialligningen antage værdien 0 for mere end 1 værdi af x. Vis, at hvis k er et positivt tal, og hvis $\forall x \in \grave{R}(a(x) \geqq k^2)$, vil enhver løsning til differentialligningen antage værdien 0 mindst en gang i ethvert interval af længde $\frac{2\pi}{k}$.

I livet som i huset:
betænkeligt at blænde en dør.
Frithiof Brandt.

6. Kapitel.
Ikke lineære differentialligninger.

Mange problemer fra geometri, mekanisk fysik, teknik etc. fører til differentialligninger, der ikke er lineære. Mange af disse kan løses eksplicit ved elementære metoder, og i dette kapitel vil vi gennemgå nogle af de vigtigste af disse.

Det her behandlede skal betragtes som en samling nyttige metoder, der stilles til rådighed for læseren. Det er ikke hensigten at gennemgå disse metoder i forelæsningerne, og de vil ikke blive krævet til eksamen, men de vil eventuelt vise sig nyttige ved løsning af visse opgaver, ikke mindst i nogle af de følgende matematikkurser og i fysik.

Vi vil først behandle differentialligninger af formen

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y) \ .$$

Her er f en funktion, som afbilder en vis punktmængde O, i planen ind i $\mathring{R}$. En funktion φ:I ind i $\mathring{R}$, hvor I er et interval, er en løsning til (1), såfremt

1). $\forall x \in I \ ((x,\varphi(x)) \in O)$.

2). φ er differentiabel.

3). $\forall x \in I \ (\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)))$.

Eksempel. For differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

er O punktmængden $\{(x,y) \mid x \in \mathring{R}\setminus\{0\} \wedge y \in \mathring{R}\}$. Den ved

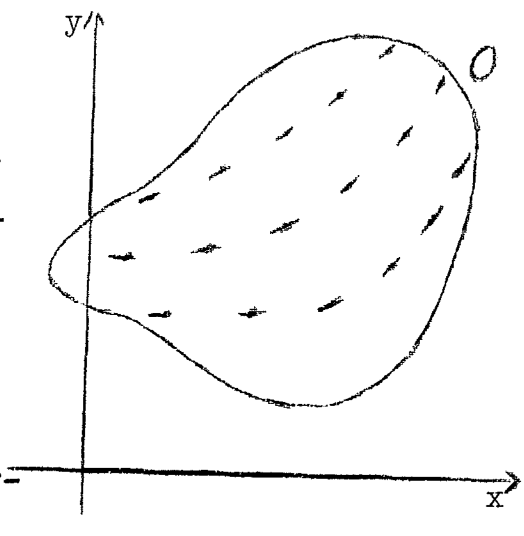
$$\varphi(x) = x - \frac{2x}{\log x}$$

definerede afbildning $\varphi:]0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ er en løsning til ligningen. Det er nemlig klart, at 1) og 2) er opfyldt. Endvidere er

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{\log x} + \frac{2}{(\log x)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{4}{\log x} + \frac{4}{(\log x)^2}) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{\log x})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{\varphi(x)}{x})^2 = \frac{x^2 + (\varphi(x))^2}{2x^2} .$$

Differentialligningen (1) knytter ril hvert punkt af O en værdi af $\frac{dy}{dx}$. For en løsning, hvis grafiske billede går gennem (x,y), er $f(x,y)$ netop hældningen af tangenten til det grafiske billede i (x,y). Det er derfor rimeligt at anskueliggøre differentialligningen ved gennem punkter af O at tegne små liniestykker, hvis hældning angives ved værdien $f(x,y)$ for det pågældende punkt. Hvis en sådan figur udføres tilstrækkeligt omhyggeligt, vil den ofte anskueliggøre forløbet af de grafiske billeder af løsningerne. Anskueliggørelsen af magnetiske feltlinier ved hjælp af jernspåner er et eksempel på dette fænomen.



Hvis φ: I ind i $\mathring{R}$ er en løsning til (1), kaldes punktmængden $\{(x,\varphi(x)) | x \in I\}$, altså løsningens grafiske billede, en løsningskurve. Løsningskurverne er altså kurver, der forløber i 0 og i hvert punkt af 0 har en tangent med den til punktet knyttede hældning $f(x,y)$.

Vi vil bruge ordet "kurve" temmelig ukritisk i overensstemmelse med vor anskuelse. Grafiske billeder af funktioner $y = \varphi(x)$ eller $x = \psi(y)$ er kurver. En kurve kan også være givet ved en afbildning φ: I ind i 0, hvor I er et interval, og $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t))$. Men hvis der foreligger en afbildning F:0 ind i $\grave{R}$, vil vi også kalde løsningsmængden til $F(x,y) = c$ en kurve, når $c \in F(0)$. Omregning fra den ene til den anden af disse mulige fremstillinger for en k ve er for det meste muligt lokalt. Således er det velkendt, at buer af enhedscirklen kan fremstilles på alle de her anførte måder, men hele enhedscirklen er ikke grafisk billede af nogen funktion.

Løsningskurven til (1) har aldrig tangenter i y-aksens retning. Når vi ønsker at bruge differentialligninger til at beskrive vilkårlige kurver er dette ikke helt rimeligt, og vi foretrækker derfor ofte at have en differentialligning skrevet på formen

$$(2) \qquad L(x,y)dx + M(x,y)dy,$$

hvor L,M: 0 ind i $\grave{R}$ er funktioner. Differentialligningen (2) fortolkes efter behag som

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{L(x,y)}{M(x,y)} \quad \text{eller} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{M(x,y)}{L(x,y)} \quad ,$$

hvor $L(x,y) \neq 0$ og $M(x,y) \neq 0$ kan begge fortolkninger anvendes.

Hvor $L(x,y) = 0$ og $M(x,y) \neq 0$, kan kun den første fortolkning bruges, og hvor $L(x,y) \neq 0$ og $M(x,y) = 0$, kan kun den anden bruges. De punkter, hvor $L(x,y) = M(x,y) = 0$ er singulære punkter, hvor ingen af de to fortolkninger kan bruges.

For en kurve, der er givet ved $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, hvor φ_1 og φ_2 har kontinuerte differentialkvotienter, får vi, hvis $\varphi'_1(t) \neq 0$, at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)},$$

og at kurven er en løsningskurve til (2) kommer derfor til at betyde, at

$$\frac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)} = -\frac{L(\varphi_1(t),\varphi_2(t))}{M(\varphi_1(t),\varphi_2(t))},$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$L(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1'(t) + M(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_2'(t) = 0.$$

Dette er netop, hvad vi får ved at indsætte $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ i (2). Det går analogt, hvis $\varphi_2'(t) \neq 0$, idet den anden fortolkning af differentialligningen benyttes.

En punktmængde U i planen siges at være en omegn af et punkt a i planen, hvis U indeholder en cirkelskive med centrum a og positiv radius. Med denne definition bliver planen et omegnsrum. En punktmængde O i planen kaldes åben, hvis det for ethvert punkt $a \in O$ gælder, at O er en omegn af a. Vi vil i dette kapitel altid antage, at definitionsmængden O, hvor vi betragter differentialligningen, er en åben mængde. Vi kan derefter benytte definitionerne i slutningen af kapitel 4, og det har fornuftig mening at tale om kontinuitet af afbildningen f i (1).

Hvis funktionen f i (1) er kontinuert, kan det vises, at der går en løsningskurve gennem ethvert punkt af O. Denne eksistenssætning er ikke særlig vanskelig, men den kræver hjælpemidler, vi endnu ikke har til rådighed. En lidt svagere eksistenssætning vil blive vist i et senere afsnit, og spørgsmålet vil blive taget op igen i matematik 2. Det må dog understreges, at eksistenssætningen har lokal karakter, så den siger intet om, hvor langt en integralkurve gennem et punkt af O fortsætter.

På den anden side kan det udmærket indtræffe, at der går flere integralkurven gennem samme punkt. Men hvis der eksisterer en konstant K, således at det for $(x,y_1) \in O$ og $(x,y_2) \in O$ gælder, at

$$(3) \qquad |f(x,y_2)-f(x,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|,$$

da går der kun én integralkurve gennem hvert punkt af O. Lad os nemlig antage, at

$$\varphi_1,\varphi_2\colon [x_o-h,\ x_2+h] \text{ ind i } \dot{R}$$

er løsninger, at $\varphi_1(x_o) = \varphi_2(x_o)$, samt at $h \in]0,K^{-1}[$. Vi sætter $\varphi(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$, og vi får da

$$\varphi'(x) = \varphi_2'(x) - \varphi_1'(x) = f(x,\varphi_2(x)) - f(x,\varphi_1(x)),$$

altså

$$|\varphi'(x)| \leq K|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = K|\varphi(x)|.$$

Idet vi bruger middelværdisætningen, får vi heraf

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x)-\varphi(0)| = |x\varphi'(\xi)| \leq K|x||\varphi(\xi)| \leq Kh|\varphi(\xi)|,$$

hvor ξ er et passende valgt punkt af intervallet med endepunkter 0 og x. Nu vælger vi specielt x, således at $|\varphi(x)|$ antager sin største værdi, og vurderingen giver da

$$|\varphi(x)| \leqq Kh|\varphi(x)|,$$

men det medfører, at

$$(1 - Kh)\ |\varphi(x)| \leqq 0.$$

Her er den første faktor imidlertid positiv, og uligheden medfører derfor $|\varphi(x)| = 0$. Men dette medfører $\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$ $(\varphi(x) = 0)$, og dermed er påstanden bevist.

En betingelse af formen (3) kaldes en Lipschitz-betingelse. En sådan er altså tilstrækkelig betingelse for, at en éntydighedssætning gælder for differentialligningen (1).

Vi vil nu gå over til at behandle en række specielle typer af differentialligninger. Disse typer bærer ofte traditionelle navne, i visse tilfælde efter kendte matematikere. Vi vil underdele det følgende i afsnit svarende til de forskellige typer.

1. Differentialligning med adskilte variable.

Således betegnes en differentialligning af formen

$$L(x)dx + M(y)dy = 0,$$

hvor $L:]a_1,b_1[$ ind i $\dot{R}$ og $M:]a_2,b_2[$ ind i $\dot{R}$ er kontinuerte funktioner. Punktmængden O er rektanglet $]a_1,b_1[\times]a_2\ b_2[$. Vi vælger en stamfunktion A til L og en stamfunktion B til M. For vilkårlige differentiable afbildninger

$$\varphi_1 : I \text{ ind i }]a_1,b_1[,\ \varphi_2 : I \text{ ind i }]a_2,b_2[$$

får vi da

$$\frac{d}{dt}(A(\varphi_1(t)) + B(\varphi_2(t))) = L(\varphi_1(t))\varphi_1'(t) + M(\varphi_2(t))\varphi_2(t).$$

Vi så ovenfor, at φ_1 og φ_2 definerer en løsningskurve, hvis og kun hvis dette udtryk bliver 0, altså hvis og kun hvis $A(\varphi_1(t)) + B(\varphi_2(t))$ er konstant. Dette er netop, hvad vi mener, når vi siger, at løsningskurverne fremstilles ved

$$A(x) + B(y) = c, \quad c \in \mathring{R} .$$

Det er dog ikke sikkert, at ethvert valg af c giver en løsningskurve.

Eksempler. For

$$xdx + ydy = 0$$

får vi løsningskurverne givet ved

$$x^2 + y^2 = c.$$

Kun positive værdier af c giver løsningskurver, og de bliver cirkler med centrum i begyndelsespunktet. For $c = 0$ udarter kurven til punktet $(0,0)$, men dette er jo netop et singulært punkt.

For

$$xdx - ydy = 0$$

er løsningskurverne givet ved

$$x^2 - y^2 = c.$$

I dette tilfælde kommer alle værdier af c i betragtning. For $c = 0$ får x-aksen og y-aksen. Der går altså to integralkurver gennem det singulære punkt.

Differentialligningen

$$ydx - xdy = 0$$

har ikke adskilte variable, men får det efter division med xy, og derved får vi løsningskurverne givet ved $\log|x| - \log|y| = c_1$, men det ses let, at være ensbetydende med $y = cx$, $c \neq 0$. Endvidere er x-aksen og y-aksen løsningskurver, men vi "tabte" dem ved divisionen med xy. Løsningskurverne er således netop de rette linier gennem det singulære punkt $(0,0)$.

Differentialligningen

$$(x^2 - 1)y^2dx + x^2(y^2 - 1)dy$$

har singulære punkter $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ og $(-1,-1)$. Vi ser, at x-aksen og y-aksen er løsningskurver. Division med x^2y^2 giver

$$(1 - \frac{1}{x^2})dx + (1 - \frac{1}{y^2})dy = 0,$$

og denne lignings løsningskurver er givet ved

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = c.$$

Multiplikation med xy giver

$$xy(x + y) + x+y = cxy .$$

Koordinatakserne er ikke kommet med igen. For $c = 0$ får vi løsningskurverne $xy = -1$ og $x + y = 0$. Der går altså 3 løsningskurver gennem $(0,0)$. Gennem $(-1,1)$ og $(1,-1)$ går hyperblen $xy = -1$ og linien $x + y = 0$. Eventuelle løsningskurver gennem $(1,1)$ er givet ved

$$xy(x + y) + x+y = 4xy.$$

Vi indfører et koordinatsystem med begyndelsespunkt i $(1,1)$.

Idet (ξ,η) er de nye koordinater benytter vi transformationen $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$, og ved indsættelse af dette i ligningen får vi

$$\xi\eta(\xi+\eta) + \xi^2 + \eta^2 = 0.$$

For $r \in]0,1[$ og $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ er $|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}r^2$ og $|\xi+\eta| \leq 2r$, altså $|\xi\eta(\xi+\eta)| \leq r^3$, så udtrykket på venstre side af ligningen er $\geq r^2 - r^3$, altså positivt. Dette viser, at løsningen $\xi = \eta = 0$ ligger isoleret fra alle andre løsninger. Der går altså ingen integralkurve gennem $(1,1)$. Det går ganske analogt i $(-1,-1)$.

2. Homogene differentialligninger.

Lad l_1 og l_2 være to rette linier gennem $(0,0)$, og lad O være den åbne mængde, som består af punkterne i to modstående af de vinkelrum, hvori l_1 og l_2 deler planen. Vi tillader O at udarte til hele planen, eventuelt med punktet $(0,0)$ eller en ret linie gennem $(0,0)$ skåret væk. For $p \in \dot{Z}$ siges en afbildning g: O ind i $\dot{R}$ at være homogen af grad p, såfremt

$$\forall t \in \dot{R}\ \forall x,y \in O\ (g(tx,ty) = t^p g(x,y)).$$

Hvis L,M:O ind i $\dot{R}$ er homogene af grad p, kaldes

$$(4) \qquad L(x,y)dx + M(x,y)dy = 0$$

en homogen differentialligning af grad p.

Vi foretrækker først at behandle ligningen på formen

$$L(x,y) + M(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Vi sætter $y = ux$, hvor u er en ny variabel, og idet vi udnytter, at L og M er homogene, får vi

$$x^pL(1,u) + x^pM(1,u)(u + x\,\frac{du}{dx}) = 0,$$

hvilket reduceres til differentialligningen

$$(5) \quad (L(1,u) + uM(1,u))dx + xM(1,u)du = 0$$

og her kan de variable adskilles.

Løsningerne til

$$L(1,u) + uM(1,u)$$

er hældningen for rette linier, der er løsningskurver til (4). Dertil kommer eventuelt y-aksen, som kræver en særlig undersøgelse. Hvis A er en stamfunktion til den ved $M(1,u)(L(1,u) + uM(1,u))^{-1}$ definerede funktion, har (5) løsningsmængden $\{ce^{-A} \mid c \in \dot{R}\}$, og vi får løsningskurverne til (4) givet ved parameterfremstillingen $x = ce^{-A(u)}$, $y = cue^{-A(u)}$. Dertil må altså endnu føjes de løsninger, der er rette linier gennem (0,0).

Fremgangsmåden kan varieres, idet x og y kan bytte rolle. Det kan godt tænkes, at de to fremgangsmåder ikke er lige besværlige, men forskellen vil aldrig blive særlig stor.

Eksempel. Differentialligningen

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

er homogen af grad 1 i hele planen. Koordinatakserne er ikke løsningskurver. Ligningen (5) bliver i dette tilfælde

$$(1 + 2u - u^2)dx + (1 - u)xdu = 0.$$

Da vi har

$$\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+2u-u^2)}{1+2u-u^2} = \frac{1}{2}\log|1+2u-u^2| \;.$$

Er løsningerne givet ved

$$x^2(1+2u-u^2) = c,$$

hvilket giver

$$x^2+2xy-y^2 = c.$$

Løsningerne bliver hyperbler. For $c = 0$ fås asymptoterne, hvis hældninger er løsningerne til $1+2u-u^2 = 0$. De har været "tabt" undervejs, men de sidste omformninger har bragt dem ind igen.

Differentialligningen (4) kan med fordel behandles ved indførelse af polære koordinater (r,θ), idet vi sætter

$$(6) \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta .$$

Vi søger derefter at finde løsningskurverne på formen $r = \rho(t)$, $\theta = V(t)$. Af (6) følger

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta .$$

At $x = \varphi(t) = \rho(t)\cos V(t)$, $y = \psi(t) = \rho(t)\sin V(t)$ er en løsningskurve, betyder at φ og ψ tilfredsstiller

$$L(x,y)\frac{dx}{dt} + M(x,y)\frac{dy}{dt} = 0 ,$$

altså, at ρ og ϑ tilfredsstiller

$$L(r\cos\theta,r\sin\theta)\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right) +$$

$$M(r\cos\theta,r\sin\theta)\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right) = 0 .$$

Idet vi udnytter, at L og M er homogene, kan denne ligning omformes til

$$(L(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta + M(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta)\frac{dr}{dt} -$$

$$r(L(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta - M(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Vi indfører betegnelserne

$$\tilde{L}(\theta) = L(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + M(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

$$\tilde{M}(\theta) = L(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta + M(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta,$$

og vi ser, at φ og ψ er parameterfremstilling for en løsningskurve til (4), hvis og kun hvis ρ og ϑ er parameterfremstilling for en løsningskurve til

$$\tilde{L}(\theta)dr + r\tilde{M}(\theta)d\theta .$$

I denne ligning kan de variable adskilles.

Eksempel. For $k \in \mathbb{R}$ betragter vi differentialligningen

$$(x - ky)dx + (kx + y)dy = 0.$$

I dette tilfælde får vi

$$\tilde{L}(\theta) = (\cos\theta - k\sin\theta)\cos\theta + (k\cos\theta + \sin\theta)\sin\theta$$

$$\tilde{M}(\theta) = -(\cos\theta - k\sin\theta)\sin\theta + (k\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta ,$$

altså

$$\tilde{L}(\theta) = 1, \quad \tilde{M}(\theta) = k,$$

så vi får differentialligningen

$$dr + krd\theta = 0.$$

Dette er den lineære differentialligning

$$\frac{dr}{d\theta} + kr = 0,$$

og den har løsningsmængden $\{r = ce^{-k\theta} \mid c \in]0,\infty[\}$, idet vi kun benytter positive værdier af r. Løsningskurverne kaldes logaritmiske spiraler. En logaritmisk spiral skærer alle linier gennem (0,0) under samme vinkel. En ligedannethed med (0,0) som lighedspunkt har på en logaritmisk spiral samme virkning som en drejning om (0,0).

Dette giver anledning til den paradoxalt klingende bemærkning, at et forstørrelsesglas ikke kan forstørre en logaritmisk spiral, men også til den optiske illusion, at en logaritmisk spiral synes at vokse eller krympe, når den drejes.

De her omtalte metoder kan også anvendes, når punktmængden O er et vinkelrum og betingelserne $L(tx,ty) = t^{\alpha}L(x,y)$, $M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$ er opfyldt for alle positive værdier af t. Under disse omstændigheder kan α være et vilkårligt reelt tal.

3. Bernoualli's differentialligning.

Lad a,b:I ind i $\mathring{R}$ være kontinuerte afbildninger, og lad α være et reelt tal. Differentialligningen

$$X' + aX = bX^{\alpha} \tag{7}$$

kaldes da Bernoulli's differentialligning. For $\alpha = 1$ reduceres den til en homogen lineær differentialligning $X' + (a-b)X = 0$, og for $\alpha = 0$ er den en lineær differentialligning. Vi vil derfor antage $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$.

Hvis α er et rationalt tal med ulige nævner, er punktmængden O strimlen $\{(x,y) | x \in I, y \in \mathring{R}\}$. For andre værdier af α kan ligningen ikke have negative løsninger, og O er da halvstrimlen $\{(x,y) | x \in I, y \in]0,\infty[\}$.

At φ er løsning til (7) betyder, at

$$\varphi' + a\varphi = b\varphi^{\alpha} .$$

For $\varphi(x) \neq 0$ er dette ensbetydende med

$$(1-\alpha)\varphi^{-\alpha}\varphi' + (1-\alpha)a\varphi^{1-\alpha} = (1-\alpha)b ,$$

hvilket også kan skrives

$$(\varphi^{1-\alpha})' + (1-\alpha)a\varphi^{1-\alpha} = (1-\alpha)b.$$

Bortset fra de punkter, hvor løsningen er 0, ser vi, at φ er løsning til (7), hvis og kun hvis $\varphi^{1-\alpha}$ er løsning til den lineære differentialligning

$$(8) \qquad X' + (1-\alpha)aX = (1-\alpha)b.$$

Desuden vil nulfunktionen være løsning til (7), hvis $\alpha > 0$.

Eksempel. Vi vil løse differentialligningen

$$xX' + X = X^{\alpha}.$$

Ligningen (8) bliver i dette tilfælde

$$xX' + (1-\alpha)X = (1-\alpha),$$

og den har løsningsmængden

$$\{1 + c\, x^{\alpha-1} \mid c \in \mathring{R}\}.$$

Den oprindelige ligning får således løsningerne

$$(1 + c\, x^{\alpha-1})^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad c \in \mathring{R}.$$

Dertil kommer eventuelt nulløsningen, samt de løsninger, der fås ved at skifte fortegn på de allerede fundne.

For $\alpha = 2$ fås nulfunktionen samt funktionerne

$$\frac{1}{1+cx}, \quad c \in \mathring{R}.$$

For $c \neq 0$ fås en løsning med definitionsmængde $]-\infty, -\frac{1}{c}[\cup]-\frac{1}{c} \infty[$. Der passerer netop én løsningskurve gennem hvert punkt af planen bortset fra punkterne af y-aksen.

For $\alpha = \frac{2}{3}$ fås nulfunktionen samt funktionerne

$$(1 + \frac{c}{\sqrt[3]{x}})^3, \quad c \in \mathbb{R}.$$

For $c \neq 0$ fås løsningskurver, der skærer x-aksen. Der går således to løsningskurver gennem et punkt af x-aksen. Det skyldes, at Lipschitz-betingelsen ikke er opfyldt i en omegn af et sådan punkt.

4. Riccati's differentialligning.

Lad $p, q, r : I$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuerte afbildninger. Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

kaldes da Riccati's differentialligning.

Ligningen kan ikke løses ved elementære metoder, men hvis det lykkes at gætte en løsning, kan løsningsmængden bestemmes ved elementære metoder.

Hvis φ er en løsning til ligningen, er

$$(9) \qquad \varphi'(x) = p(x) + q(x)\varphi(x) + r(x)\varphi(x)^2.$$

Lad u være en differentiabel funktion. Så er $\varphi + u$ løsning til ligningen, hvis og kun hvis

$$\varphi'(x) + u'(x) = p(x) + q(x)\varphi(x) + r(x)\varphi(x)^2 + q(x)u(x) + 2r(x)\varphi(x)u(x) + r(x)u(x)^2,$$

men da (9) er opfyldt, er dette ensbetydende med

$$u'(x) = (q(x) + 2r(x)\varphi(x))u(x) + r(x)u(x)^2,$$

altså med, at u er en løsning til

$$X' - (q+2r\varphi)X = rX^2,$$

hvilket er Bernoulli's differentialligning.

Eksempel. Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}y^2$$

har løsningen y = x. Vi indsætter y = x + u og får efter reduktion

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}u^2,$$

og denne ligning er bortset fra nulløsningen ensbetydende med

$$\frac{d\frac{1}{u}}{dx} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{x^2},$$

som har løsningsmængden

$$\left\{\frac{1}{u} = \frac{1}{2x} + cx \;\middle|\; c \in \grave{R}\right\},$$

så vi får

$$\left\{u = \frac{2x}{1+2cx^2} \;\middle|\; c \in \grave{R}\right\},$$

hvortil kommer nulfunktionen. Riccatiligningen har således løsningerne

$$y = x \quad \text{samt} \quad y = x\,\frac{3+2cx^2}{1+2cx^2}, \quad c \in \grave{R}.$$

Der er en interessant sammenhæng mellem Riccati's ligning og differentialoperatorer af anden orden. Lad

$$D^2 + aD + bD^\circ$$

være en lineær differentialoperator af anden orden. Vi vil spalte den i to differentialoperatorer af første orden, altså skrive den på formen

$$(D + pD^\circ) \circ (D + qD^\circ).$$

Dertil må vi vælge p og q, således at

$$p + q = a, \quad q' + pq = b,$$

hvilket er ensbetydende med

$$p = a - q, \quad q' = b - aq + q^2.$$

Problemet reduceres således til løsning af en Riccatiligning.

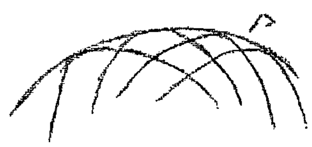
5. Differentialligninger, som ikke er lineære i differentialkvotienten.

Hvis en differentialligning er givet på formen

$$F(x,y,\frac{dy}{dx}) = 0,$$

vil man søge at finde $\frac{dy}{dx}$ udtrykt ved x og y ved at løse ligningen $F(x,y,p) = 0$ med hensyn til p. Derved må man vente, at man finder et af x og y afhængigt antal løsninger for p. Hvis ligningen er nogenlunde pæn, vil et antal kurver dele (x,y)-planen i delmængder, således at løsningsantallet er konstant i hver af disse. Endvidere kan man, eventuelt efter yderligere opdeling, i reglen opnå, at $F(x,y,p) = 0$ i hver af delmængderne som løsning har et fast antal kontinuerte funktioner $p_\nu = \varphi_\nu(x,y)$. Ligningen vil derefter kunne behandles ved de ovenfor omtalte metoder. Hvis funktionerne φ_ν tilfredsstiller Lipsschitz-betingelsen, vil der gennem hvert punkt gå en integralkurve for hver værdi af v.

Når differentialligningen har forskelligt antal løsninger på de to sider af en kurve Γ, må man forvente, at mange integralkurver, som antydet på figuren, går ud til randen af Γ og vender om. Sædvanligvis vil der til



hvert punkt af Γ svare en integralkurve, der rører Γ i punktet, men i så fald er Γ selv en integralkurve. Kurven Γ passer ikke på naturlig måde ind i familien af integralkurver, og den kaldes derfor en singulær integralkurve (en singulær løsning).

Eksempel. Vi vil søge at besvare følgende spørgsmål: Hvilke kurve i halvplanen bestemt ved $y > 0$ har den egenskab, at kurvenormalen regnet fra kurvepunktet til skæringspunktet med x-aksen har den konstante længde a?

Den omtalte egenskab udtrykkes ved differentialligningen

$$y^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = a^2.$$

Vi løser ligningen med hensyn til $\frac{dy}{dx}$ og får

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{y} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$$

for $y \leq a$. For $y > a$ får vi ingen løsninger. Skillelinjen $y = a$ er en løsningskurve til differentialligningen, og det er umiddelbart klart, at den har den forlangte geometriske egenskab. Den er differentialligningens singulære løsning.

I de fundne differentialligninger kan de variable adskilles - eller vi kan løse ligningerne på formen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}} \quad \text{eller} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{(a^2-y^2)}},$$

hvorved problemet er reduceret til et stamfunktionproblem. Integration giver

$$x - c = -\sqrt{(a^2-y^2)} \text{ eller } x - c = \sqrt{(a^2-y^2)},\ c \in \mathbb{R}.$$

De to anførte kurvebuer er kvartcirkler, og de udgør tilsammen denved

$$y = \sqrt{(a^2 - (x - c)^2)}$$

bestemte halvcirkel. De øvrige løsninger til problemet bliver altså alle halvcirkelbuer, som "står på" x-aksen og har radius a. De rører alle den singulære løsningskurve.

Vi vil her dvæle et øjeblik ved differentialligningsteoriens omvendte problem, nemlig at finde en differentialligning med en given familie af kurver som løsninger. Vi vil vise ved et par eksempler, hvorledes dette kan gennemføres.

Eksempel. Vi søger en differentialligning, der som løsning har alle cirkler gennem punkterne $(a,0)$ og $(-a,0)$. Gennem hvilket som helst tredie punkt i planen går netop én af cirklerne. Vi skal derfor vente at finde en differentialligning med $(a,0)$ og $(-a,0)$ som de eneste singulære punkter. En cirkel med centrum $(0,c)$ og gennem $(a,0)$ og $(-a,0)$ har radius $c^2 + a^2$, og den er derfor løsningsmængden til ligningen

$$x^2 + (y - c)^2 = c^2 + a^2,$$

hvilket reduceres til

$$x^2 + y^2 - 2cy = a^2. \tag{10}$$

Dermed har vi fået mængden af cirkler gennem $(a,0)$ og $(-a,0)$ organiseret som en familie, idet der til hver værdi af c svarer én ganske bestemt af cirklerne.

Hvis $y = \varphi(x)$ er en differentiabel løsning til (10), vil x,y og $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ tilfreddtille den ligning, der fås ved differentiation af (10), efter at $y = \varphi(x)$ er indsat på venstre side, altså ligningen

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2c\frac{dy}{dx} = 0,$$

hvilket vi også kan skrive

$$(11) \qquad x\,dx + (y - c)\,dy = 0.$$

Dette er en differentialligning med (10) som løsningskurve. Det tilsvarende ræsonnement for en differentiabel løsning $x = \psi(y)$ til (10) fører selvfølgelig også til ligningen (11). Ligningen (11) giver os en differentialligning for hver cirkel i familien, men vi ønsker jo én differentialligning med alle cirklerne som løsningskurver. For cirklen med ligningen (10) gælder nu, at x, y og $\frac{dy}{dx}$ vil tilfredsstille både 10 og 11, og dermed også den ligning vi får ved at eliminere c mellem (10) og (11) ved at finde $y - c$ af (10) og indsætte i (11). Af (10) får vi

$$y - c = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{2y}$$

og dette indsættes i (11). Dermed får vi cirkelfamiliens differentialligning

$$x\,dx + \frac{a^2 - x^2 + y^2}{2y}\,dy = 0.$$

Det er naturligere at skrive denne ligning på formen

$$(12) \qquad 2xy\,dx + (a^2 - x^2 + y^2)\,dy = 0,$$

men derved inkluderes x-aksen blandt løsningskurverne.
Det er ikke umiddelbart indlysende, at ligningen (12) falder ind under en af de ovenfor omtalte typer af differentialligningen. Skrevet på formen

$$2y\frac{dy}{dx} - x = -(a^2 + y^2) \cdot \frac{1}{x}$$

afslører den sig som Bernoulli's differentialligning.

6. Differentialligninger, hvori x og y ikke begge optræder.

En differentialligning af formen

$$F(x,\frac{dy}{dx}) = 0$$

reduceres til et stamfunktion problem, hvis det er muligt at løse den på formen $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Hvis dette ikke kan gennemføres, kan man muligvis løse ligningen på formen

$$x = \varphi(t), \ \frac{dy}{dx} = \psi(t),$$

hvor φ er en differentiabel funktion. Vi får da

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \psi(t)\varphi'(t)$$

og bestemmelsen af y som funktion af t er reduceret til et stamfunktionproblem.

Eksempel. Differentialligningen

$$x^3 + (\frac{dy}{dx})^3 = 3x\,\frac{dy}{dx}$$

Kan ikke uden urimeligt besvær løses på formen $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Ved at indsætte $\frac{dy}{dx} = tx$ får vi imidlertid parameterfremstillingen

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Vi får i dette tilfælde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2}{1+t^3}\left(\frac{3}{1+t^3} - \frac{9t^3}{(1+t^3)^2}\right) =$$

$$\frac{3t^2}{1+t^3}\left(\frac{3}{1+t^3} - \frac{9}{1+t^3} + \frac{9}{(1+t^3)^2}\right) =$$

$$\frac{-18t^2}{(1+t^3)^2} + \frac{27t^2}{(1+t^3)^3},$$

og stamfunktion bestemmelsen giver

$$y = \frac{6}{1+t^3} - \frac{9}{2(1+t^3)^2} + c, \qquad c \in \mathring{C}.$$

Dermed har vi fundet løsningskurverne på parameterform. For $t \to \infty$ fås et punkt, der hører med til løsningskurven. Det er muligt at eliminere t og derved få en algebraisk ligning i x og y, men det vil vi ikke gennemføre.

En differentialligning af formen

$$F(y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$

som kan løses på formen

$$y = \varphi(t), \qquad \frac{dy}{dx} = \psi(t)$$

giver

$$\varphi'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \psi(t)\,\frac{dx}{dt},$$

altså

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)},$$

og x fås som funktion af t efter en stamfunktionsbestemmelse.

7. Differentialligninger, som er lineære i x og y.

Vi vil studere en differentialligning

$$(13) \qquad y = a(\frac{dy}{dx})x + b(\frac{dy}{dx}),$$

hvor $a,b : I$ ind i $\mathring{R}$ er differentiable afbildninger. Ligningen er åbenbart ækvivalent med ligningsparret

$$(14) \qquad y = a(p)x + b(p), \qquad \frac{dy}{dx} = p.$$

Vi vil forsøge at finde løsningskurverne givet ved parameterfremstillinger på formen $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, hvor φ og p er differentiable. Så giver den sidste af ligningerne (14)

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dp} = p\frac{dx}{dp} ,$$

og det er på den anden side klart, at ligningen

$$(15) \qquad \frac{dy}{dp} = p\frac{dx}{dp}$$

for $\frac{dx}{dp} \neq 0$ medfører den sidste af ligningerne (14). Ved differentiation giver den første af ligningerne (14) under hensyntagen til (15)

$$p\frac{dx}{dp} = a(p)\frac{dx}{dp} + a'(p)x + b'(p) = 0,$$

hvilket reduceres til den lineære differentialligning

$$(16) \qquad (a(p) - p)\frac{dx}{dp} + a'(p)x + b'(p) = 0.$$

Når $x = \varphi(p)$ er løsning til denne ligning, fås $y = \psi(p)$ umiddelbart af den første af ligningerne (14).

Det er klart, at de således bestemte funktioner φ og ψ tilfredsstiller den første af ligningerne (14), og derfor også den ligning, der fås ved differentiation af denne, altså

$$(17) \qquad \frac{dy}{dx} = a(p)\frac{dx}{dp} + a'(p)x + b'(p).$$

Da φ tilfredsstiller (16), vil φ og ψ også tilfredsstille den ligning, der fås ved at indsætte (17) i (16), altså ligningen (15), som medfører den sidste af ligningerne (14), hvis $\frac{dx}{dp} \neq 0$.

Som opgaven er formuleret er der ikke mening i at spørge om løsninger af formen $x = c$. Situationen $\frac{dx}{dp} = 0$ giver derfor ikke anledning til løsninger.

To andre forhold bør imidlertid give anledning til bekymring. For det første svigter metoden helt, hvis $a(p)$ er identisk lig med p, idet (16) degenererer helt. Dernæst går alle løsninger af formen $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$ tabt, da disse løsninger giver $p = \alpha$ og derfor ikke kan fremstilles på parameterformen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Vi må derfor undersøge, om $y = \alpha x + \beta$, $p = \alpha$ tilfredsstiller (14). Indsættelse giver betingelsen

$$\alpha x + \beta = a(\alpha)x + b(\alpha),$$

hvilket er opfyldt for $\beta = b(\alpha)$, hvis og kun hvis α er en løsning til ligningen $a(p) = p$. Hver løsning til denne ligning giver derfor anledning til en løsning af formen $y = \alpha x + \beta$.

Eksempel. Vi vil løse differentialligningen

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Vi skal altså betragte systemet

$$y = p^2 x + p^3, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Ligningen $p^2 = p$ har løsningerne $p = 0$ og $p = 1$, som giver os løsningerne

$$y = 0 \quad \text{og} \quad y = x + 1.$$

Ligningen (16) bliver i det foreliggende tilfælde

$$(p^2 - p)\frac{dx}{dp} + 2px + 3p^2 = 0.$$

Vi forkorter med p og får

$$(p - 1)\frac{dx}{dp} + 2x + 3p = 0,$$

som har løsningerne

$$x = -p - \frac{1}{2} - \frac{c}{(p-1)^2}, \qquad c \in \mathring{R}$$

hvilket giver

$$\left.\begin{aligned} x &= -p - \frac{1}{2} - \frac{c}{(p-1)^2} \\ y &= -\frac{1}{2}p^2 - \frac{cp^2}{(p-1)^2} \end{aligned}\right\} c \in \mathring{R}.$$

8. Clairaut's differentialligning.

Differentialligningen

$$y = \frac{dy}{dx}x + b\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

hvor $b : I$ ind i $\mathring{R}$ er en differentiabel afbildning, kaldes Clairaut's differentialligning. Den er et specielt tilfælde af de i foregående afsnit behandlede differentialligninger. Vi erstatter den derfor med systemet

$$y = px + b(p) \ , \qquad p = \frac{dy}{dx},$$

og den svarer netop til det undtagelsestilfælde, vi ikke omtalte nærmere. De rette linier med ligninger

$$y = cx + b(c), \qquad c \in \mathring{R}$$

er alle løsninger til ligningen. Til gengæld degenererer ligningen (16) til

$$x = -b'(p),$$

som giver os én eneste løsningskurve, nemlig kurven med parameterfremstillingen

$$x = -b'(p), \qquad y = -pb'(p) + b(p).$$

Hvis b er to gange differentiabel og $b''(p) \neq 0$, fås heraf

$$\frac{dx}{dp} = - b''(p) , \quad \frac{dy}{dp} = - pb''(p),$$

altså

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

hvilket viser, at parameterfremstillingen virkelig giver en løsningskurve. Kurvetangentens ligning i det samme punkt bliver

$$y + pb'(p) - b(p) = p(x + b'(p)),$$

hvilket reduceres til

$$y = px + b(p).$$

Det først fundne system af rette linier er altså netop systemet af tangenter til kurven. Clairautligningen er altså netop differentialligning for en kurve og alle dens tangenter.

Eksempel. Løsningsmængden til differentialligningen

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

omfatter kurven med parameterfremstillingen

$$x = p^2, \quad y = \frac{2}{3}p^3.$$

Denne kurve ligger helt i den ved $x \geq 0$ bestemte halvplan. Den har en gren i hver af de kvartplaner, hvori x-aksen deler halvplanen, og begge grene rører x-aksen i (0,0), således at kurven får en spids i begyndelsespunktet. Begge grene bliver ved at krumme bort fra x-aksen, og tangenthældningen går mod ∞, når et punkt fjerner sig fra kurven. Gennem et punkt på den side af kurven, hvor den positive x-akse ligger, går der altid 3 tangenter til kurven, og i denne del af planen får man tre løsninger, når man løser differentialligningen med hensyn til $\frac{dy}{dx}$. På den anden side af kurven fås kun 1 tangent og 1 løsning.

9. Differentialligninger af anden orden, som ikke indeholder y.

En differentialligning af formen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

er ækvivalent med systemet

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = f(x,p),$$

og den løses derfor ved løsning af en differentialligning af første orden i p, hvorefter y fås ved en stamfunktionbestemmelse. Ligninger af denne slags optræder ret hyppigt i anvendelserne, men da de ikke fører til nye problemer, skal vi ikke opholde os ved dem.

10. Differentialligninger af anden orden, som ikke indeholder x.

En differentialligning af formen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y,\frac{dy}{dx})$$

er ækvivalent med systemet

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = f(y,p).$$

Vi vil forsøge at finde løsninger af formen $x = \varphi(y)$. Først søger vi at bestemme p som funktion af y. Vi bemærker at

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} = f(y,p).$$

Dette er en differentialligning af første orden til bestemmelse af p som funktion af y. Når en løsning indsættes i $\frac{dy}{dx} = p$, fremkommer en differentialligning, i hvilken de variable kan adskilles.

Metoden svigter fuldstændigt for de konstante løsninger. De går tabt ved at x betragtes som en funktion af y. Værre er det, at ligningen $\frac{dy}{dx} = p$ efter indsættelsen af det fundne p kan have konstante løsninger, som viser sig at være forkerte.

Eksempler. Fra fysikken henter vi differentialligningen for det frie fald

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

hvor g er konstant. Den er ækvivalent med systemet

$$\frac{dx}{dt} = v \, , \qquad \frac{dv}{dt} = -g,$$

og vi får ligningen

$$v\frac{dv}{dx} = -g$$

til bestemmelse af v som funktion af x. Den har adskilte variable. Integration giver

$$v^2 = c - 2gx,$$

hvor c er en integrationskonstant. I fysik fås dette direkte af energisætningen. Vi får nu x som funktion af t ved at løse

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(c-2gx)}$$

eller

$$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{(c-2gx)}$$

eftersom bevægelsen går opad eller nedad. Begge ligninger har den konstante løsning $x = \frac{c}{2g}$, som ikke passer i den oprindelige ligning. Vi skal ikke fuldføre regningerne, idet det er klart, at metoden er yderst upraktisk i det foreliggende tilfælde.

Eksempel. Lad os endnu engang betragte det frie fald, men tage hensyn til, at tyngdeakcelerationen aftager, når vi fjerner os fra jordens centrum. Bevægelsesligningen bliver da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R^2g}{x^2},$$

idet vi har lagt begyndelsespunktet i jordens centrum og betegnet jordens radius med R. Vi vil antage, at bevægelsen starter for $t = 0$ ved jordens overflade og med en hastighed af størrelsen v_0 rettet lodret opad. Vi skal først integrere ligningen

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{R^2g}{x^2},$$

som giver

$$v^2 - \frac{2R^2g}{x} = c,$$

hvor c er en integrationskonstant. For $t = 0$ giver ligningen

$$c = v_0^2 - 2Rg,$$

så vi får

$$v^2 = v_0^2 - 2Rg + \frac{2R^2g}{x}.$$

Sammenhængen mellem x og t er således givet ved ligningen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{((v_0^2 - 3RG)x^2 + 2R^2gx)}}{x},$$

så længe hastigheden er opadrettet. Ved integration får vi

$$t = \int_R^x \frac{u\,du}{\sqrt{((v_0^2 - 2Rg)u^2 + 2R^2gu)}} .$$

For $v_0^2 - 2Rg < 0$ fås $v = 0$ for $x = \frac{2R^2g}{2Rg-v_0^2}$, og dette er den største afstand fra jordens centrum, partiklen vil nå. Dette indtræffer efter endelig lang tid, og derefter vil partiklen begynde at falde. Fra dette tidspunkt må kvadratroden regnes med modsat fortegn. Vi vil ikke gennemføre udregningen, som er rent rutinearbejde. For $v_0^2 \geq 2Rg$ vil bevægelsen stadig fortsætte i samme retning, og partiklen vil fjerne sig vilkårlig langt fra jorden. For $v_0^2 = 2Rg$ bliver integrationen meget simpel. En udregning giver, at dette grænsetilfælde svarer til en hastighed på lidt over 11 km/sek.

Det som går ind gennem det ene øre
og ud gennem det andet, gør ofte den
nytte, at det renser hjernen.

Piet Hein.

Opgaver til kapitel 6.

Indledning.

Det er en vanskelig kunst at løse ikke lineære differentialligninger. Først og fremmest gælder det om at opnå en god fortrolighed med de omtalte differentialligningstyper, så man kender dem, når man møder dem. Eventuelt må de omformes, før de kan genkendes.

Her er jo ikke tale om en klasse inddeling i typer, og en differentialligning kan udmærket være af flere af de behandlede typer på én gang. Differentialligningen

$$(x - y)dx + xdy = 0$$

er den homogene differentialligning, som vi har behandlet i afsnit 2. Den kan imidlertid omformes til

$$x\frac{dy}{dx} - y = x$$

og afslører sig således som en lineær differentialligning. Det er selvfølgelig enklest at løse den som en lineær differentialligning, men i andre tilfælde kan det være ret vanskeligt at træffe et valg mellem de foreliggende metoder.

En særlig kunst er det at få øje på variabelsubstitutioner, der forenkler en differentialligning eller fører den over i en differentialligning, for hvilken man kender en løsningsmetode. Det er jo nærliggende nok i differentialligningen

$$(x + y + 2)^2dx + (x - y)^2dy = 0$$

at benytte $x + 1 = x_1$ og $y + 1 = y_1$ som nye variable. Derved omformes ligningen til

$$(x_1 + y_1)^2dx_1 + (x_1 - y_1)^2dy_1 = 0$$

som er homogen af anden grad.

Vanskeligere er det at udnytte muligheden for at bruge et udtryk i begge variable som ny variabel. Det er nyttigt at tænke sig ligningen løst på formen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ og udnytte relationerne

$$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx , \quad d \log x = \frac{dx}{x},$$
$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy)$$
$$d\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \quad d \log \sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$
$$d\,\frac{y}{x} = \frac{-ydx + xdy}{x^2}, \quad d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$
$$d \log \frac{y}{x} = \frac{-ydx + xdy}{xy}, \quad d \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} .$$

Enhver kan selv udvide denne tabel ved at udnytte andre af de elementære differentiationsregler. Ved hjælp af tabellen opdager man, om en eller anden af de funktioner, hvis differentialer er anført, på naturlig måde kan indføres i differentialligningen.

I den ovenfor anførte differentialligning

$$(x - y)dx + xdy = 0$$

optræder udtrykket $-ydx + xdy$ samt udtrykket xdx. Det er derfor nærliggende at omforme ligningen til

$$\frac{dx}{x} + \frac{-ydx + xdy}{x^2} = 0,$$

hvilket også kan skrives

$$d \log x + d \frac{y}{x} = 0.$$

Når vi bruger $\log x$ og $\frac{y}{x}$ som nye variable, er det en ligning med adskilte variable, og vi får ved integration

$$\log x + \frac{y}{x} = c, \quad c \in \mathring{C},$$

hvilket ved reduktion giver

$$y = cx - x \log x, \quad c \in \mathring{C}.$$

Desuden er y-aksen en løsningskurve, som er gået tabt ved løsningsprocessen.

Tilsvarende omskrives differentialligningen

$$(x-y)dx + (x + y)dy = 0$$

til

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0,$$

hvilket også kan skrives

$$d \log \sqrt{(x^2 + y^2)} + d \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = 0$$

og integration giver

$$\log \sqrt{(x^2 + y^2)} + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = c, \quad c \in \mathring{C}$$

Det er nu meget nærliggende at indføre polære koordinater. Vi har divideret med x, og derfor får vi ikke punkterne af y-aksen med. Det bevirker, at løsningskurverne bliver delt op i flere buer, men overgang til polære koordinater vil afsløre, hvordan de skal bygges sammen.

Et råd: Regn rent formelt uden at skele til undtagelsestilfældene ved de indledende forsøg. Ellers risikerer De at spilde Deres kræfter til ingen nytte. Det er jo ikke sikkert, Deres første forsøg fører til målet. Når målet er nået, bør De gå detaljerne efter. Ved den endelige redaktion placeres detajerne selvfølgelig ind, hvor det er mest naturligt at omtale dem.

Lette opgaver.

1. Løs differentialligningerne

$$x^3dx + y^3dy = 0, \qquad xdx + e^y dy = 0.$$

Angiv de singulære punkter og løsningskurverne gennem disse punkter.

2. Løs differentialligningen

$$(x^3 - x)dx + (y^2 - y)dy = 0$$

og undersøg løsningskurverne gennem de singulære punkter.

3. Løs differentialligningerne

$$ydx + xdy = 0, \qquad dx + xydy = 0$$

og undersøg løsningskurverne gennem de singulære punkter.

4. Bestem alle kurver, hvis tangenter regnet fra røringspunkt til skæringspunkt med x-aksen alle har længde a, hvor a er et givet positivt tal.

5. Lad a være et positivt tal. En kurve gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt har følgende egenskab: For ethvert kurvepunkt vil den ene af de ligebenede trekanter med ben af længde a, der som grundlinie har det liniestykke på kurvenormalen, som afskæres mellem kurvepunktet og x-aksen, have det ene ben vinkelret på x-aksen. Find en parameterfremstilling for kurven.

6. Løs differentialligningen

$$xydx + (y^2 - x^2)dy = 0.$$

7. Løs differentialligningen

$$(x^2 + 3y^2)dx + (3x^2 + y^2)dy = 0.$$

8. Løs differentialligningen

$$\sqrt{(x^2 + y^2)}dx + xdy = 0.$$

9. Løs differentialligningen

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

10. Løs for $xy > 0$ differentialligningen

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) \log \frac{y}{x} = 1.$$

11. Løs for $\alpha \in \mathbb{R}$ differentialligningen

$$x' + x = x^{\alpha}.$$

12. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tgh}\,x = \frac{1}{y} \sinh 2x.$$

13. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = a^2 - y^2,$$

idet a er et positivt tal.

14. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (y - \alpha)(y - \beta),$$

idet α og β er reelle tal.

15. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = a^2 + y^2.$$

16. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 + 1.$$

(I løsningen indgår et integral, der ikke kan udtrykkes ved elementære funktioner, og det forlanges selvfølgelig ikke udregnet).

17. Løs differentialligningen

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2(1 - y^2).$$

18. Løs differentialligningen

$$\left(x + y\,\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - x^2 - y^2.$$

19. Løs differentialligningen

$$x^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

20. Løs differentialligningen

$$x^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

21. Angiv de kurver, for hvilke enhver tangents afstand fra (0,0) er lig med røringspunktets abscisse.

22. Løs differentialligningen

$$y^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

23. Løs differentialligningen

$$x\,\frac{dy}{dx} + y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

24. Løs differentialligningen

$$y = x\,\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

25. Løs differentialligningen

$$(x^2 - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\,\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 = 0.$$

Vink: Bemærk, at kvadratet på $y - x\,\frac{dy}{dx}$ indgår. Ved løsning med hensyn til denne størrelse fås en Clairaut-ligning.

26. Løs differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{dy}{dx}\,.$$

27. Find en løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(y^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right),$$

som for $x = 0$ antager værdien $y = 0$ og har differentialkvotienten 2.

Kapitel 7.

Topologisk rum. Kontinuitet.

I slutningen af kapitel 5 indførte vi begrebet omegnsrum. En mængde M med en afbildning $\mathfrak{U}$:M ind i $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}(M))$ (altså ind i mængden af mængder af delmængder af M), kaldes et omegnsrum. Vi betegner det $T = (M,\mathfrak{U})$. Vi kalder M den underliggende mængde for rummet T. Et element $x \in M$ kaldes også et punkt i rummet T og vi skriver $x \in T$. En delmængde $A \subseteq M$ kaldes en punktmængde i rummet T og vi skriver $A \subseteq T$. Hvis P er en vilkårlig mængde og f:M ind i P er en afbildning, kalder vi i overensstemmelse hermed f en afbildning af T ind i P og skriver f:T ind i P. Tilsvarende skriver vi g:P ind i T i stedet for g:P ind i M.

I kapitel 5 benyttede vi omegnsbegrebet til at give en mere generel definition af begrebet kontinuitet idet en afbildning $f:T_1$ ind i T_2, hvor $T_1 = (M_1,\mathfrak{U}_1)$ og $T_2 = (M_2,\mathfrak{U}_2)$ er omegnsrum, kaldes kontinuert i et punkt $x \in T_1$, hvis det for enhver omegn $U \in \mathfrak{U}_2(f(x))$ gælder, at originalmængde $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}_1(x)$. Afbildningen f kaldes kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert punkt $x \in T_1$. Det vil da, som vi beviste i kapitel 5, være rigtigt, at sammensætning af kontinuerte afbildninger giver kontinuerte afbildninger.

Begrebet omegnsrum er alt for generelt som emne for en matematisk teori. Bortset fra den omtalte sætning om sammensætning af kontinuerte afbildninger fører teorien ikke til noget som helst. Vi vil derfor i det følgende forlannge, at afbildningen $\mathfrak{U}$ opfylder en række betingelser, som sikrer, at et omegnsrum dog i nogen grad minder om det tredimensionale rum, den komplekse plan og den reelle akse.

Definition 7.1. Et omegnsrum $T = (M, \dot{U})$ kaldes et topologisk rum, når følgende betingelser er opfyldt:

u1). $\forall x \in T(\dot{U}(x) \neq \emptyset)$

u2). $\forall x \in T \forall U \in \dot{U}(x)\ (x \in U)$

u3). $\forall x \in T \forall U \in \dot{U}(x)\ \forall V \subseteq T\ (V \supseteq U \Rightarrow V \in \dot{U}(x))$

u4). $\forall x \in T \forall U, V \in \dot{U}(x)\ (U \cap V \in \dot{U}(x))$

u5). $\forall x \in T \forall U \in \dot{U}(x)\ \exists V \in \dot{U}(x)\ \forall y \in V\ (U \in \dot{U}(y))$.

Vi vil dvæle et øjeblik ved disse betingelser. De 4 første betingelser vedrører blot mængden af omegne af et punkt $x \in T$. De to første betingelser udtrykker, at ethvert punkt har omegne og at punktet ligger i enhver af disse. Den næste betingelse siger, at en mængde, der indeholder en omegn af x selv er en omegn af x. Den fjerde betingelse siger, at fællesmængden for to omegne af x er en omegn af x. Dette medfører umiddelbart, at fællesmængden for endelig mange omegne af x igen er en omegn af x.

I det tredimensionale rum ønsker vi, at en kugle med centrum i et punkt x og en positiv radius r skal være en omegn af x. Kuglerne med centrum x og radius $\frac{1}{n}$, $n \in \dot{N}$ har imidlertid kun punktet x fælles. Det ville derfor være et fejlgreb at udvide betingelsen u4) til fællesmængden for uendelig mange omegne.

Den mere komplicerede betingelse u5) udtrykker, at en omegn af x tillige er omegn af alle punkter i en vis omegn af x. Det er den eneste af de fem betingelser, der vedrører omegne af forskellige punkter.

Eksempler. I det sædvanlige tredimensionale rum er en mængde en omegn af x, hvis og kun hvis den indeholder en kugle med centrum x og positiv radius. De fem betingelser ses umiddelbart at være opfyldte. I en plan bruges den samme definition, idet dog "kugle" erstattes med "cirkel". På den reelle akse er en omegn af x en mængde, der indeholder et åbent ikke tomt interval med midtpunkt i x.

Idet M er en vilkårlig mængde kan vi for $x \in M$ lade $\mathfrak{U}(x)$ være mængden af alle delmængder $U \in M$ for hvilke $x \in U$. Specielt bliver så $\{x\}$ en omegn af x. Med denne definition bliver $(M,\mathfrak{U})$ et topologisk rum. Det kaldes et diskret rum.

På den anden side kunne vi også for ethvert $x \in M$ have sat $\mathfrak{U}(x) = \{M\}$. Igen bliver $(M,\mathfrak{U})$ et topologisk rum. Dette rum kaldes trivielt.

Lidt mindre trivielt kunne vi for en vilkårlig mængde M definere: En omegn U af $x \in M$ er en delmængde af M, som indeholder x og har endelig komplementærmængde. Det er igen helt klart, at $(M,\mathfrak{U})$ bliver et topologisk rum. Hvis M er en endelig mængde bliver $(M,\mathfrak{U})$ et diskret rum.

Lad nu M være en mængde, på hvilken der er defineret en ordningsrelation. Ved en omegn U af x forstår vi en delmængde af M, som indeholder x og alle elementer af M, som følger efter x. Det er igen klart, at betingelserne u1)...u5) er opfyldt.

På mængden $\mathbb{Z}$ af hele tal indfører vi for $x \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ delmængderne

$$B_k(x) = \{x + nk \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Hvis vi nu definerer en omegn af $x \in \mathbb{Z}$ som en delmængde $U \subseteq \mathbb{Z}$, der for et passende $k \in \mathring{N}$ indeholder mængden $B_k(x)$. Det er ikke vanskeligt at vise, at betegnelserne u1),...,u5) er opfyldt ved denne definition. Kun betingelsen u4 kræver en ganske lille smule omtanke.

Definition 7.2. Lad $T = (M, \mathring{U})$ være et topologisk rum, og lad $A \subseteq T$ være en punktmængde i T. Et punkt $x \in T$ kaldes et indre punkt i A, hvis og kun hvis $A \in \mathring{U}(x)$. Mængden af indre punkter i A kaldes det indre af A og betegner $\mathring{A}$ eller A°.

De indre punkter i A er altså netop de punkter, der har A som omegn. For $T = \mathring{R}$ og $A = I$, hvor I er et interval, er de indre punkter af I netop de punkter af I, der ikke er endepunkter. For $T = \mathring{C}$ og $A = \{z \in \mathring{C} \mid |z| \leq R\}$, er de indre punkter af A netop de $z \in \mathring{C}$, der tilfredsstiller betingelsen $|z| < R$, medens de punkter, for hvilke $|z| = R$ tilhører A men ikke $\mathring{A}$. Altså

$$\mathring{A} = \{z \in \mathring{C} \mid |z| < R\} \; ; \; A \setminus \mathring{A} = \{z \in \mathring{C} \mid |z| = R\}.$$

Vi bemærker, at betingelsen u2) medfører, at det altid gælder, at $\mathring{A} \subseteq A$. Vi kan selvfølgelig igen danne det indre af A°, altså $A^{\circ\circ}$, men derved fremkommer intet nyt, idet vi har sætningen:

Sætning 7.3. $A^{\circ\circ} = A^{\circ}$.

Bevis. Sætningen udtrykker, at alle punkter i $\mathring{A}$ er indre punkter i $\mathring{A}$, altså

$$\forall x \in \mathring{A} \; (\mathring{A} \in \mathring{U}(x)).$$

Vi vil vise, at dette virkelig er opfyldt. Lad x være et vilkårligt punkt af $\mathring{A}$. Vi har da ifølge definition 7.2, at

$A \in \grave{U}(x)$. Af u5) følger nu, at vi kan vælge $V \in \grave{U}(x)$, således at $\forall y \in V(A \in \grave{U}(y))$, men denne relation udtrykker netop, at $V \subseteq \mathring{A}$, og u3) giver derfor, at $\mathring{A} \in \grave{U}(x)$. Dermed er sætningen bevist.

Af sætning 7.3 følger, at systemet af de 5 betingelser u1)...u5) er ækvivalent med det system af betingelser, der fås ved at erstatte u5) med

$$u5^{*}) \ \forall x \in M \quad \forall U \in \grave{U}(x) \quad \exists V \in \grave{U}(x)$$

$$(V \subseteq U \wedge \forall y \in V(V \in \grave{U}(y))).$$

Det er nemlig umiddelbart klart, at u3) og $u5^{*}$) medfører u5), og sætning 7.3 siger, at vi i betingelsen u5) kan vælge $V = \mathring{U}$ og derved sikre, at $u5^{*}$) bliver opfyldt.

Betingelserne u1) og u2) vil ofte blive stiltiende benyttet. Når man har opnået lidt mere øvelse, vil man også ofte benytte u3) uden nærmere kommentarer. Betingelsen u5) benyttes overordentlig meget, men ofte i formen $u5^{*}$ eller som sætning 7.3. Betingelsen u4) har en særstilling, idet den forholdsvis sjældent kommer til anvendelse i de indledende undersøgelser, og det er ret let at frasortere de resultater, der hviler på u4).

<u>Definition</u> 7.4. $T = (M, \grave{U})$ være et topologisk rum. En punktmængde $A \subseteq T$ kaldes åben, hvis $\mathring{A} = A$.

En åben mængde er altså en mængde, hvis punkter alle er indre. Sætning 7.3 udtrykker, at det indre af en mængde er en åben mængde, og betingelsen $u5^{*}$) udtrykker, at enhver omegn af et punkt $x \in T$ indeholder en åben omegn af x.

Sætning 7.5. Lad $T = (M,\grave{U})$ være et topologisk rum, og lad $\grave{O}$ være mængden af åbne delmængder af T. For ethvert punkt $a \in T$ gælder da

$$\grave{U}(a) = \{U \subseteq T \mid \exists O \in \grave{O}(a \in O \wedge O \subseteq U)\}.$$

Bevis. Påstanden er ensbetydende med, at relationen

$$U \in \grave{U}(a) \iff \exists O \in \grave{O}(a \in O \wedge O \subseteq U)$$

gælder for alle delmængder $U \subseteq T$. Nu følger $\Rightarrow$ umiddelbart af, at $\mathring{U}$ for $U \in \grave{U}(a)$ er en åben mængde ifølge sætning 7.3, og $\Leftarrow$ følger af u3), idet vi vælger $O \in \grave{O}$, så $O \subseteq U$ og $a \in O$, og O er da en omegn af a ifølge definitionen af åben mængde.

Sætning 7.6. Systemet $\grave{O}$ af åbne mængder på det topologiske rum $T = (M,\grave{U})$ tilfredsstiller følgende betingelser:

O1). $\emptyset \in \grave{O}$, $T \in \grave{O}$

O2). For enhver familie $(O_j \mid j \in J)$ af åbne mængder gælder, at foreningsmængden $\bigcup_{j\in J} O_j$ er åben

O3). Af $O_1, O_2 \in \grave{O}$ følger $O_1 \cap O_2 \in \grave{O}$.

Bevis. Det er trivielt, at $\emptyset$ er åben, og det følger af u1) og u3), at T er åben. Hvis $\{O_j \mid j \in J\}$ er en familie af åbne mængder og $a \in O = \bigcup O_j$, findes der en index $j \in J$, så $a \in O_j$. Da O_j er åben, gælder $O_j \in \grave{U}(a)$, altså ifølge u3), at $O \in \grave{U}(a)$. Dermed har vi vist at O er åben. Af $O_1, O_2 \in \grave{O}$ og $a \in O_1 \cap O_2$ følger $O_1 \in \grave{U}(a)$, $O_2 \in \grave{U}(a)$ og af u4) følger derefter, at $O_1 \cap O_2 \in \grave{U}(a)$, altså at $O_1 \cap O_2$ er åben. Dermed er sætningen bevist.

Bemærk, at u4) kan i brug, men kun ved beviset for O3).

Eksempel. Et interval på $\dot{R}$ er en åben mængde, hvis og kun hvis det er et åbent interval. Enhver foreningsmængde af åbne intervaller på $\dot{R}$ er en åben mængde ifølge 02).

Den udvidede reelle akse $\dot{R}^*$ er et topologisk rum. Intervaller $]-\infty,a[$ og $]a,\infty[$ er selvfølgelig åbne, men også $[-\infty,a[$ og $]a,\infty]$ er åbne mængder.

<u>Sætning</u> 7.7. En punktmængde $0 \subseteq \dot{R}$ er åben, hvis og kun hvis den er foreningsmængde af højst numerabelt mange disjunkte åbne intervaller.

Bevis. Ifølge 02) er en mængde med den anførte egenskab åben. Lad nu på den anden side $0 \subseteq \dot{R}$ være åben, og lad $a \in 0$ være et vilkårligt punkt. Da $0 \in \dot{U}(a)$, findes der et åbent interval I, så $a \in I$ og $I \subseteq 0$. Lad I_1 være foreningsmængden af alle åbne intervaller med disse to egenskaber. Vi viste i kapitel 1), at I_1 er et interval, og af sætning 7.6 følger, at I_1 er åbent. Hvis b er et endepunkt af I_1 vil b ikke tilhøre 0. I modsat fald kunne vi nemlig vælge et åbent intervall I_2, så $b \in I_2$ og $I_2 \subseteq 0_1$ og så ville $I_3 = I_1 \cup I_2$ være et åbent interval, og $b \in I_3$, $I_3 \subseteq 0$ i modstrid med, at I_2 var foreningsmængde af alle intervaller med denne egenskab. Vi vil udtrykke disse forhold ved at sige, at I_2 er et maksimalt, åbent delinterval af 0. Vi har således vist, at ethvert punkt af 0 er indeholdt i et maksimalt, åbent delinterval af 0. Heraf følger, at 0 er foreningsmængde af sine maksimale, åbne delintervaller. Det er klart, at de maksimale, åbne delintervaller af 0 er indbyrdes disjunkte. I hvert af dem kan vi vælge et rationalt tal, og de således valgte rationale tal bliver indbyrdes forskellige. Derved får vi en injektiv afbildning af mængden af maksimale, åbne delintervaller ind i mængden af rationale tal, som er numerabel. Altså er mængden af maksimale, åbne delintervaller numerabel, endelig eller tom. Dermed er sætningen bevist.

Allerede i planen kan åbne mængder være overmåde komplicerede. Det er ganske vist let at vise, at enhver åben mængde i planen er foreningsmængde af åbne cirkelskiver (men måske ikke indbyrdes disjunkte). Det er heller ikke svært at vise, at den er foreningsmængde af højst numerabelt mange åbne cirkelskiver. Disse resultater er imidlertid ikke til stor hjælp.

Eksempel. I et diskret rum er alle punktmængder åbne. I et trivielt rum er hele rummet og den tomme mængde de eneste åbne mængder. I det ovenfor omtalte rum, hvor omegnene er mængder med endelig komplementærmængde, er de åbne mængder den tomme mængde, samt de mængder, der har endelig komplementærmængde. I mængden $\grave{Z}$ med den særlige topologi, der er baseret på mængderne $B_k(x)$, vil enhver foreningsmængde af mængder $B_k(x)$ være åben, og der vil ikke være andre åbne mængder.

<u>Sætning</u> 7.8. Lad M være en mængde og $\grave{S}$ et system af delmængder af M med følgende egenskaber:

1). $\emptyset \in \grave{S}$, $M \in \grave{S}$.

2). For enhver familie $\{S_j | j \in J\}$ af delmængder af M gælder

$$(\forall j \in J (S_j \in \grave{S})) \Rightarrow \bigcup_{j \in J} S_j \in S.$$

3). Af $S_1, S_2 \in \grave{S}$ følger $S_1 \cap S_2 \in \grave{S}$.

Der findes da en og kun én afbildning $\grave{U}: M$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(M))$, således at $T = (M, \grave{U})$ er et topologisk rum, og således at $\grave{S}$ netop er systemet af åbne mængder i T.

Bevis. Lad os først antage, at $\grave{S}$ er systemet af åbne mængder i det topologiske rum $T = (M,\grave{U})$. Af sætning 7.5 får vi da for ethvert $x \in M$

$$\grave{U}(x) = \{U \subseteq M | \exists S \in \grave{S}(x \in S \wedge S \subseteq U)\}.$$

Dermed har vi vist, at der højst findes én afbildning $\grave{U}$ med den ønskede egenskab. Vi går derefter over til at vise, at der virkelig eksisterer en afbildning $\grave{U}$ med den ønskede egenskab. Vi ved allerede, at $\grave{U}(x)$ for ethvert $x \in M$ må være defineret som ovenfor, og vi mangler altså blot at vise, at $T = (M,\grave{U})$ er et topologisk rum og at $\grave{S}$ netop er systemet af åbne mængder i T. Det er imidlertid indlysende, at $\grave{U}$ får egenskaberne u1), u2) og u3). At $\grave{U}$ har egenskaben u4) følger af, at $\grave{S}$ har egenskaben 3). Definitionen $\grave{U}$ medfører, at alle mængderne $S \in \grave{S}$ får egenskaben $\forall x \in S(S \in U(x))$, og derfor har $\grave{U}$ egenskaben u5*), som sammen med u3) medfører u5). Dermed har vi vist, at $T = (M,\grave{U})$ er et topologisk rum, og vi fik desuden vist, at enhver mængde $S \in \grave{S}$ har egenskaben $\forall x \in S(S \in U(x))$, altså at enhver mængde $S \in \grave{S}$ er åben. Vi mangler blot at vise, at enhver åben mængde O tilhører $\ddot{S}$. Lad O være en åben mængde. Lad x være et vilkårligt punkt af O. Da $O \in \grave{U}(x)$, kan vi vælge en mængde $S_x \in S$, således at $x \in S_x$ og $S_x \subseteq O$. Vi har da $O = \bigcup_{x \in O} S_x$ og 3) medfører, at $O \in \grave{S}$. Dermed er sætningen bevist.

Betingelsen 3) kan i beviset kun i brug ved beviset for u4). Sætning 7.8 vil faktisk bevare sin gyldighed, hvis betingelserne u4) samt 3) begge udelades.

Sætning 7.8 viser, at en mængde M kan organiseres som et topologisk rum ved at systemet $\grave{O}$ af åbne mængder fastlægges, således at de tre betingelser i sætning 7.6 er opfyldt. Det således definerede topologiske rum T betegner da også $(M,\mathring{O})$. Vi vil eventuelt skrive $T = (M,\mathring{U},\mathring{O})$, således at både $\mathring{U}$ og $\mathring{O}$ indgår i betegnelsen.

Definition 7.9. Lad $T = (M,\mathring{O})$ være et topologisk rum. En mængde $A \subseteq T$ kaldes afsluttet, hvis og kun hvis komplementærmængden $CA = T \setminus A$ er åben.

Eksempel. Et interval $I \subseteq \mathring{R}$ er en afsluttet mængde, hvis det er et afsluttet interval. Vi bemærker, at intervallerne $]-\infty,a]$ og $[a,\infty[$ er afsluttede delmængder af $\mathring{R}$, men de er ikke afsluttede delmængder af den udvidede tallinie $\mathring{R}^*$.

Sætning 7.10. Systemet $\mathring{A}$ af afsluttede mængder i et topologisk rum T har følgende egenskaber

a1). $\emptyset \in \mathring{A}$, $T \in \mathring{A}$

a2). For enhver familie af afsluttede mængder i T gælder, at fællesmængden er afsluttet.

a3). Af $A_1, A_2 \in \mathring{A}$ følger $A_1 \cup A_2 \in \mathring{A}$.

Bevis. Hver af de tre egenskaber fås umiddelbart af den tilsvarende egenskab i sætning 7.6 ved overgang til komplementærmængderne.

Eksempel. På $\mathring{R}$ er $(]-n^{-1},1[\mid n \in \mathring{N})$ en familie af åbne intervaller, hvis fællesmængde er intervallet $[0,1[$, som ikke er en åben mængde. På den anden side er $([n^{-1},\infty[\mid n \in \mathring{N})$ en familie af afsluttede intervaller, hvis foreningsmængde er intervallet $]0,\infty[$, som ikke er åbent. Betingelserne O3) og a3), som umiddelbart generaliseres til endelige familier, gælder således ikke for numerable familier.

Eksempel. I et diskret rum er alle mængder samtidigt åbne og afsluttede.

<u>Sætning</u> 7.11. De eneste delmængder af $\grave{R}$, som er både åbne og afsluttede, er $\emptyset$ og $\grave{R}$.

Bevis. Af sætning 7.7 følger, at enhver anden åben delmængde af $\grave{R}$ end $\emptyset$ og $\grave{R}$ har et maksimalt delinterval med et endepunkt a, der tilhører komplementærmængden. Denne er altså ikke åben, da a ikke er indre punkt i den. Dermed er sætningen bevist.

En mængde M kan organiseres som et topologisk rum ved fastlæggelse af systemet $\grave{A}$ af afsluttede mængder, således at de tre betingelser i sætning 7.10 er opfyldt. Systemet $\grave{O}$ af åbne mængder bliver netop systemet af kompelmentærmængder til mængderne i $\grave{A}$, og det følger umiddelbart, at de tre betingelser i sætning 7.6 er opfyldt for $\grave{O}$, således at sætning 7.8 kan anvendes. Det fremkomne topologiske rum betegnes $T = (M,\grave{A})$, eventuelt $T = (M,\grave{U},\grave{O},\grave{A})$ etc.

<u>Sætning</u> 7.12. Lad T være et topologisk rum. Lad $O \subseteq T$ være en åben mængde, og lad $A \subseteq T$ være en afsluttet mængde. Da er $O\setminus A$ åben og $A\setminus O$ afsluttet.

Bevis. Da CO er afsluttet og CA åben følger påstandene umiddelbart af, at $O\setminus A = O\cap CA$ og $A\setminus O = A\cap CO$.

Vi skal indføre nogle flere vigtige begreber.

<u>Definition</u> 7.13. Lad T være et topologisk rum og $B \subseteq T$ en vilkårlig punktmængde. Et indre punkt i CB kaldes et ydre punkt for B. Mængden af ydre punkter for B kaldes det ydre for

B og betegnes $\mathring{C}B$. De punkter af T, som ikke er ydre punkter for B, kaldes kontaktpunkter af B, og mængden af sådanne kaldes afslutningen af B og betegnes $\bar{B}$. De punkter af T, som hverken er indre punkter af B eller ydre punkter for B kaldes randpunkter for B, og mængden af sådanne punkter kaldes randen af B og betegnes ∂B.

Vi har således relationerne

$$\bar{B} = C\mathring{C}B, \quad C\bar{B} = \mathring{C}B, \quad \mathring{B} = C\overline{CB}, \quad C\mathring{B} = \overline{CB}$$

$$\partial B = C(\mathring{B} \cup \mathring{C}B) = \bar{B} \cap \overline{CB} = \bar{B} \setminus \mathring{B} \ .$$

<u>Sætning</u> 7.14. Afslutningen og randen er afsluttede mængder.

Bevis. De netop anførte relationer afslører, at $\bar{B}$ og ∂B har åbne komplementærmængder.

Eksempler. I et diskret rum er enhver mængde identisk med sit indre og med sin afslutning, og dens ydre er netop komplementærmængden. Randen er den tomme mængde. For ét interval på den reelle akse udgøres det indre af intervallets punkter undtagen endepunkter og afslutningen udgøres af intervallets punkter samt endepunkterne. Randen består blot af intervalendepunkterne. Delmængden $\grave{O}$ af $\grave{R}$ har ingen indrepunkter og $\grave{R}$ er både dens afslutning og dens rand. Vi ved fra sætning 7.7, at en åben mængde på $\grave{R}$ er foreningsmængde af disjunkte, åbne intervaller. Det er klart, at alle intevalendepunkterne hører til mængdens rand, men randen kan omfatte mere end intervalendepunkterne. Således vil randen for $O = \bigcup_{n \in \grave{N}}](n+1)^{-1}, n^{-1}[$ bestå af punktet 0, samt punkterne n^{-1}, $n \in \grave{N}$.

<u>Sætning</u> 7.15. Lad B være en punktmængde i et topologisk rum T. Da vil enhver åben delmængde af B være delmængde af $\mathring{B}$, og enhver afsluttet mængde med B som delmængde vil have $\overline{B}$ som delmængde.

Bevis. Lad $O \subseteq B$ være en åben mængde. Da O er omegn af ethvert punkt af O, er B omegn af ethvert punkt af O, altså $O \subseteq \mathring{B}$. Lad $A \supseteq B$ være en afsluttet mængde. Så gælder $CA \subseteq CB$, men da CA er åben, følger heraf $CA \subseteq \mathring{CB}$ og overgang til komplementærmængde giver $A \supseteq \overline{B}$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.16. Hvis B og C er punktmængder i et topologisk rum T, og $B \subseteq C$, gælder $\mathring{B} \subseteq \mathring{C}$ og $\overline{B} \subseteq \overline{C}$.

Bevis. Da $\mathring{B}$ er åben og $\mathring{B} \subseteq C$ gælder $\mathring{B} \subseteq \mathring{C}$ ifølge sætning 7.15. Da $\overline{C}$ er afsluttet, og $B \subseteq \overline{C}$, gælder $\overline{B} \subseteq \overline{C}$ ifølge sætning 7.15.

<u>Sætning</u> 7.17. Et punkt a i et topologisk rum T er kontaktpunkt for en mængde $B \subseteq T$, hvis og kun hvis enhver omegn af a indeholder et punkt af B. Punktet a er randpunkt for B, hvis og kun hvis enhver omegn af a indeholder et punkt af B og et punkt af CB.

Bevis. Den første af de anførte betingelser udtrykker netop, at a ikke er ydre punkt for B, og den anden, at a hverken er indre punkt i B eller ydre punkt for B.

Eksempel. Lad (a_n) være en reel talfølge. Hvis $(a_n) \to a$ er a kontaktpunkt for punktmængden $\{a_n | n \in \grave{N}\}$ på $\grave{R}$. For enhver punktmængde $B \subseteq \grave{R}^*$ gælder, at inf B og sup B er kontaktpunkter for B. Hvis de tilhører $\grave{R}$, er de tillige randpunkter.

<u>Sætning</u> 7.18. Lad T være et topologisk rum. Den afbildning af $\dot{D}(T)$ ind i $\dot{D}(T)$, hvor $\dot{D}(T)$ er mængden af punktmængder

i T, som defineres ved at billedet af enhver punktmængde er dens afslutning, tilfredsstiller følgende 4 betingelser:

s1). $\overline{\emptyset} = \emptyset$

s2). $\forall B \subseteq T(B \subseteq \overline{B})$

s3). $\forall B \subseteq T(\overline{\overline{B}} = \overline{B})$

s4). $\forall B \subseteq T\ \forall C \subseteq T(\overline{B \cup C} = \overline{B} \cup \overline{C})$.

Bevis. Da $\emptyset$ er afsluttet, følger s1) umiddelbart af sætning 7.15. Påstanden s2) følger umiddelbart af definitionen af $\overline{B}$, og s3) følger af sætning 7.15, idet $\overline{B}$ er afsluttet og derfor indeholder $\overline{B}$. Lad nu B og C være punktmængder i T. Da $B \cup C$ er en delmængde af $\overline{B} \cup \overline{C}$, som er afsluttet ifølge a3) i sætning 7.10, gælder $\overline{B \cup C} \subseteq \overline{B} \cup \overline{C}$ ifølge sætning 7.15. Denne sætning giver også, at $\overline{B} \subseteq \overline{B \cup C}$ og $\overline{C} \subseteq \overline{B \cup C}$, hvilket medfører, at $\overline{B} \cup \overline{C} \subseteq \overline{B \cup C}$. Dermed er sætningen bevist.

Vi bemærker, at betingelsen a3) kan i brug ved beviset for, at $\overline{B \cup C} \subseteq \overline{B} \cup \overline{C}$, medens den omvendte ulighed $\overline{B \cup C} \supseteq \overline{B} \cup \overline{C}$ samt s1), s2) og s3) er uafhængige af denne betingelse.

Det er interessant, at begrebet "afslutning" kan benyttes som grundlag for indførelse af en topologi, idet følgende sætning gælder:

<u>Sætning</u> 7.19. Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $\varphi : \dot{D}(M)$ ind i $\dot{D}(M)$ være en afbildning, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

2) $\forall B \subseteq M(\varphi(B) \supseteq B)$

$$3)\ \forall B \subseteq M(\varphi(\varphi(B)) = \varphi(B))$$

$$4)\ \forall B \subseteq M \forall C \subseteq M(\varphi(B \cup C) = \varphi(B) \cup \varphi(C)).$$

Det er da muligt på en og kun én måde at organisere M som et topologisk rum, således at det for enhver mængde $B \subseteq M$ gælder, at $\varphi(B)$ netop er afslutningen af B.

Bevis. I en topologi med den ønskede egenskab gælder $\forall B \subseteq M(\overline{B} = \varphi(B))$, og det medfører, at systemet $\mathfrak{A}$ af afsluttede mængder er givet ved

$$\mathfrak{A} = \{B \subseteq M \mid \varphi(B) = B\}.$$

Heraf følger, at der højst findes én topologi med den ønskede egenskab. Vi definerer nu $\mathfrak{A}$ som angivet. Af 1) følger da $\emptyset \in \mathfrak{A}$ og af 2) følger $M \in \mathfrak{A}$. Lad nu $(B_j \mid j \in J)$ være en familie af mængder, der alle tilhører $\mathfrak{A}$, og lad B være fællesmængden $\bigcap B_j$. Af 4) fås da $B_j = \varphi(B_j) = \varphi(B) \cup \varphi(B_j \setminus B) \supseteq \varphi(B)$, altså $\varphi(B) \subseteq \bigcap B_j = B$. Af 2) følger nu $\varphi(B) = B$, altså $B \in \mathfrak{A}$. Lad nu B og C være elementer af $\mathfrak{A}$. Vi har da ifølge 4), at $\varphi(B \cup C) = \varphi(B) \cup \varphi(C) = B \cup C$, altså $B \cup C \in \mathfrak{A}$. Dermed har vi vist, at M kan organiseres som et topologisk rum, således at $\mathfrak{A}$ netop bliver systemet af afsluttede mængder. Lad nu $B \subseteq M$ være en vilkårlig punktmængde. Vi skal vise, at $\overline{B} = \varphi(B)$. Af 3) følger, at $\varphi(B) \in \mathfrak{A}$. Altså er $\varphi(B)$ afsluttet, og af sætning 7.15 følger, at $\overline{B} \subseteq \varphi(B)$. På den anden side giver 4), at $\overline{B} = \varphi(\overline{B}) = \varphi(B) \cup \varphi(\overline{B} \setminus B) \supseteq \varphi(B)$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 7.20. Lad T være et topologisk rum. Et punkt a siges at være et isoleret punkt af en punktmængde $B \subseteq T$, såfremt der findes en åben mængde O, således at $\{a\} = B \cap O$.

Betingelsen er ensbetydende med, at $a \in B$ uden at være kontaktpunkt for $B \setminus \{a\}$. Punktet $a \in T$ er et isoleret punkt af T, hvis og kun hvis $\{a\} \in \grave{U}(a)$.

Eksempel. Alle punkter i et diskret rum er isolerede. Planen og den reelle talakse og den udvidede reelle talakse indeholder ingen isolerede punkter. Delmængden $\grave{Q}$ af den reelle talakse har ingen isolerede punkter, men alle punkter af delmængden $\grave{Z}$ er isolerede.

<u>Definition</u> 7.21. Lad $T_1 = (M_1, \grave{U}_1)$ og $T_2 = (M_2, \grave{U}_2)$ være topologiske rum, og lad $x \in T_1$ være et vilkårligt punkt. En afbildning $f: T_1$ ind i T_2 siges at være kontinuert i x, hvis og kun hvis

$$\forall U \in \grave{U}_2(f(x))(f^{-1}(U) \in \grave{U}_1(x)).$$

Afbildningen f kaldes kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert punkt af T_1.

Dette er blot en kopi af den definition, vi indførte i slutningen af kapitel 5.

Eksempler. Hvis T_1 er et diskret rum eller T_2 et trivielt rum, er f altid kontinuert. I et isoleret punkt af T_1 vil f altid være kontinuert.

Følgende sætning blev bevist i kapitel 5, men vi gentager sætningen og beviset her, hvor den mere naturligt hører hjemme:

<u>Sætning</u> 7.22. Lad $T_1 = (M_1, \grave{U}_1)$, $T_2 = (M_2, \grave{U}_2)$ og $T_3 = (M_3, \grave{U}_3)$ være topologiske rum. Hvis en afbildning $f_1: T_1$ ind i T_2 er kontinuert i et punkt $x_1 \in T_1$ og en afbildning $f_2: T_2$ ind i T_3 er kontinuert i billedpunktet $x_2 = f_1(x_1)$, er den sammensatte af-

bildning $f = f_2 \circ f_1 : T_1$ ind i T_3 kontinuert i punktet x_1. Hvis f_1 og f_2 er kontinuerte, er f kontinuert.

Bevis. Lad U være en omegn af $f(x_1)$. Så er $f^{-1}(U) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(U))$. Da f_2 er kontinuert i x_2 er $f_2^{-1}(U)$ en omegn af x_2, og da f_1 er kontinuert i x_1, er $f_1^{-1}(f_2^{-1}(U))$ en omegn af x_1. Dermed er den første påstand bevist, og den anden følger umiddelbart.

Sætning 7.23. Lad $T_1 = (M_1, \grave{U}_1, \grave{O}_1, \grave{A}_1)$ og $T_2 = (M_2, \grave{U}_2, \grave{O}_2, \grave{A}_2)$ være topologiske rum, og lad $f : T_1$ ind i T_2 være en afbildning. Følgende 4 betingelser er da indbyrdes ækvivalente:

1). f er kontinuert

2). $\forall O \in \grave{O}_2 (f^{-1}(O) \in \grave{O}_1)$

3). $\forall A \in \grave{A}_2 (f^{-1}(A) \in \grave{A}_1)$

4). $\forall B \subseteq M_1 (f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)})$.

Bevis. Vi viser først, at 1) $\Rightarrow$ 4). Vi antager altså, at $f : T_1$ ind i T_2 er kontinuert, og vi betragter en vilkårlig mængde $B \subseteq M$. Lad $x_1 \in T_1$ være et punkt med den egenskab, at $f(x_1)$ er et ydre punkt for $f(B)$. Så gælder $T_2 \setminus \overline{f(B)} \in \grave{U}_2(f(x_1))$, altså på grund af kontinuiteten af f, at $f^{-1}(T_2 \setminus \overline{f(B)}) \in \grave{U}_1(x_1)$. Heraf følger $\grave{U}_1(x_1) \cap B = \emptyset$. Altså er x_1 et ydre punkt for B. Vi har således set, at kun ydre punkter for B afbildes ved f i ydre punkter for $f(B)$. Men det medfører, at punkter af $\overline{B}$ afbildes i punkter af $\overline{f(B)}$, og dermed er påstanden bevist.

Vi viser dernæst, at 4) $\Rightarrow$ 3). Vi antager altså, at 4) er opfyldt. For $A \in \grave{A}_2$ får vi da

$$f(\overline{f^{-1}(A)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(A))} = \overline{A} = A,$$

hvilket medfører, at $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(A)$, altså, at $f^{-1}(A)$ er afsluttet.

Vi vil nu vise, at 3) $\Rightarrow$ 2). Vi antager altså 3) opfyldt. For $O \in \grave{O}_2$ får vi da

$$f^{-1}(O) = T_1 \backslash f^{-1}(T_2 \backslash O),$$

og da $T_2 \backslash O$ er afsluttet, er dette en åben mængde ifølge 3).

Endelig viser vi, at 2) $\Rightarrow$ 1). Vi antager altså, at 2) er opfyldt. Lad x_1 være et punkt af T_1, og lad U være en omegn af $f(x_1)$. Vi kan da vælge $O \in \grave{O}_2$, således at $f(x_1) \in O$ og $O \subseteq U$. Så er $f^{-1}(O)$ åben og indeholder x_1, og da $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(O)$, slutter vi, at $f^{-1}(U) \in \grave{U}_1(x_1)$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempler. Lad os betragte et topologisk rum $T = (M, \grave{U}, \grave{O}, \grave{A})$, hvor M er en uendelig mængde, og, hvor elementerne af $\grave{A}$ er M og de endelige delmængder af M. Det ses da umiddelbart ved hjælp af betingelsen 3), at en afbildning $f: M$ ind i M er kontinuert, hvis den enten er konstant eller har den egenskab, at ethvert punkt har endelig originalmængde. Specielt vil enhver injektiv afbildning $f: M$ ind i M være kontinuert. Lad os betragte en afbildning $f: M$ ind i $\grave{R}$, og lad os antage, at billedmængden indeholder to punkter a og b med $a < b$. Vi kan da vælge $c \in]a,b[$, og da $f^{-1}(]-\infty, c]) \cup f^{-1}([c, \infty[) = M$, er den ene af disse mængder uendelig, og da den ikke indeholder både a og b, er den ikke hele M, altså ikke afsluttet. Altså er f ikke kontinuert. Der findes altså ikke andre kontinuerte afbildninger $f: M$ ind i $\grave{R}$ end de konstante.

<u>Definition</u> 7.24. Lad $T = (M, \grave{U})$ være et topologisk rum, og lad x være et punkt af T. En delmængde $\grave{V} \subseteq \grave{U}(x)$ kaldes en basis

for $\grave{U}(x)$ eller en omegnsbasis for punktet x, såfremt enhver omegn $U \in \grave{U}(x)$ har en delmængde, der er et element af $\grave{V}$. En afbildning $\grave{B}:M$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(M))$, kaldes en omegnsbasis for rummet T, såfremt det for ethvert $x \in T$ gælder, at $\grave{B}(x)$ er en basis for $\grave{U}(x)$.

Det er klart, at topologien på T er fastlagt ved en omegnsbasis for T, idet en omegn af $x \in T$ simpelthen er en mængde, der har en basisomegn af x som delmængde. At en og samme topologi giver anledning til mange forskellige omegnsbaser kan være en ulempe, og denne omstændighed indskrænker i nogen grad anvendeligheden af basisomegnene. Deres fordel ligger i, at det ved undersøgelsen af, om en afbildning er kontinuert, er nok at vise betingelsen for enhver basisomegn i stedet for enhver omegn.

For enhver omegn U af x gælder, at $\overset{\circ}{U}$ er en åben omegn af x. De åbne omegne af x udgør derfor altid en omegnsbasis for punktet x.

Eksempler: For $x \in \grave{R}$ udgør intervallerne $]x-h, x+h[$ med $h > 0$ en omegnsbasis. En anden omegnsbasis udgøres af intervallerne $]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$, $n \in \grave{N}$ og endnu én udgøres af intervallerne $[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]$, $n \in \grave{N}$. Et punkt x i planen har en omegnsbasis, der består af cirkelskiverne (åbne eller afsluttede) med centrum x og radius $\frac{1}{n}$, $n \in \grave{N}$. Hvis M er et diskret rum, er $\{\{x\}\}$ en omegnsbasis for $x \in M$. Hvis M er et trivielt rum, er $\{M\}$ en omegnsbasis for $x \in M$.

<u>Sætning</u> 7.25. Lad M være en vilkårlig mængde og $\grave{B}:M$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(M))$ en afbildning. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at der findes et topologisk rum $T = (M, \grave{U})$ med $\grave{B}$ som omegnsbasis, er,

at $\grave{B}$ tilfredsstiller betingelserne

b1). $\forall x \in M(\grave{B}(x) \neq \emptyset)$

b2). $\forall x \in M \forall U \in \grave{B}(x)\ (x \in U)$

b4). $\forall x \in M \forall U,V \in \grave{B}(x)\ \exists W \in \grave{B}(x)\ (W \subseteq U \cap V)$

b5). $\forall x \in M \forall U \in \grave{B}(x)\ \exists V \in \grave{B}(x)\ \forall y \in V$
$\exists W \in \grave{B}(y)\ (W \subseteq U)$.

Bevis. Hvis der findes et topologisk rum $T = (M, \grave{U})$ med $\grave{B}$ som basis, er $\grave{U}$ fastlagt ved, at det for ethvert $x \in M$ gælder, at

(1) $$U \in \grave{U}(x) \iff \exists V \in \grave{B}(x)\ (V \subseteq U).$$

Vi kan derfor tænke os $\grave{U}$ defineret ved denne relation, og vi skal da vise, at $\grave{U}$ vil tilfredsstille betingelserne u1),...,u5), hvis og kun hvis $\grave{B}$ tilfredsstiller de i sætningen anførte 4 betingelser. Nu medfører (1) umiddelbart, at u3) er opfyldt. Det er helt trivielt, at u1) er ensbetydende med b1) og u2) med b2). Den i b4) indgående relation $\exists W \in \grave{B}(x)\ (W \subseteq U \cap V)$ udtrykker netop, at $W \in \grave{U}(x)$, og derfor bliver u4) ensbetydende med b4). Ganske tilsvarende ses, at u5) er ensbetydende med b5), og dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 7.26. Lad $T_1 = (M, \grave{U}_1)$ og $T_2 = (M, \grave{U}_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde M. Hvis det for ethvert $x \in M$ gælder, at $\grave{U}_1(x) \subseteq \grave{U}_2(x)$, siges topologien på T_2 at være finere end topologien på T_1, og topologien på T_1 siges at være grovere end topologien på T_2.

Det er klart, at "finere end" er en reflexiv ordningsrelation, og at "grovere end" er den omvendte ordningsrelation.

Bortset fra det trivielle tilfælde, hvor M er en mængde med kun ét element, bliver ordningsrelationerne selvfølgelig ikke totale på mængden af topologiske rum med M som underliggende mængde.

I litteraturen møder man også "stærkere" med samme betydning som "finere" og "svagere" med samme betydning som "grovere".

Eksempel. Den diskrete topologi er den fineste af alle topologier på M, og den trivielle topologi er den groveste af alle topologier på M.

<u>Sætning</u> 7.26. Lad $T_1 = (M,\grave{U}_1,\grave{O}_1,\grave{A}_1)$ og $T_2 = (M,\grave{U}_2,\grave{O}_2,\grave{A}_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde. Følgende fire egenskaber er da ensbetydende:

1). Topologien på T_2 er finere end topologien på T_1.

2). $\grave{O}_1 \subseteq \grave{O}_2$

3). $\grave{A}_1 \subseteq \grave{A}_2$

4). For enhver mængde $B \subseteq M$ er afslutningen af B i rummet T_2 en delmængde af afslutningen af B i rummet T_1.

Bevis. Vi har 1) $\Rightarrow$ 2), da en åben mængde $O \in \grave{O}_1$ er omegn af ethvert af sine punkter som mængde i T_1 og derfor også i T_2. Vi har 2) $\Rightarrow$ 1), da en omegn $U \in \grave{U}_1(x)$ indeholder en mængde $O \in \grave{O}_1$ med $x \in O$, og så gælder jo også $O \in \grave{O}_2$. At 2) $\Longleftrightarrow$ 3) følger umiddelbart af, at $\grave{A}_1$ netop omfatter alle komplementærmængder til mængderne i $\grave{O}_1$ og analogt for $\grave{A}_2$ og $\grave{O}_2$. At 3) $\Rightarrow$ 4) følger af, at afslutningen af ~~B i~~ rummet T_2 er afsluttet i T_2 og derfor i T_1, og den har derfor afslutningen i T_1 som delmængde ifølge sætning 7.16. At 4) ⇒ 3) følger af, at en mængde, der er afsluttet i T_1 er identisk med sin afslutning i T_1 og derfor ifølge 4) samt s2) med sin afslutning i T_2. Dermed er sætningen bevist.

Vi har således en forklaring på, at "finere" og "stærkere" er blevet synonymer, idet "finere" betyder "rigere på detaljer", og "stærkere" betyder "mere materiel til rådighed".

<u>Sætning</u> 7.27. Lad $T_1 = (M,\grave{O}_1)$ og $T_2 = (M,\grave{O}_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde. Den identiske afbildning $I:M$ ind i M opfattet som en afbildning $I:T_2$ ind i T_1 er kontinuert, hvis og kun hvis topologien på T_2 er finere end topologien på T_1.

Bevis. At I er kontinuert betyder

$$\forall O \in \grave{O}_1 \quad (I^{-1}(O) \in O_2),$$

og da $I^{-1}(O) = O$, er dette netop ensbetydende med, at $\grave{O}_1 \subsetneq \grave{O}_2$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.28. Lad M være en vilkårlig mængde. Lad $(T_j = (M_j,\grave{U}_j) \mid j \in J)$ være en familie af topologiske rum, og lad $(fj:M$ ind i $T_j \mid j\in J)$ være en familie af afbildninger. Blandt de topologiske rum $T = (M,\grave{U})$ med M som underliggende mængde, og for hvilke alle afbildningerne fj er kontinuerte, findes der et, som har grovere topologi end alle de andre.

Bevis. Lad x være et element af M, og lad $j_1,\ldots,j_p$ være vilkårlige elementer af J. Lad $U_k \in \grave{U}_{jk}(f_{jk}(x))$ være åben for $k = 1,\ldots,p$. Hvis $\grave{U}$ er valgt, således at $f_{j_1},\ldots,f_{j_p}:T$ ind i T_j er kontinuerte, er

(2) $$f_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_{j_p}^{-1}(U_p) \in \grave{U}(x).$$

Hvis dette er opfyldt for alle valg af $x, j_1, \ldots, j_p$ og $U_1, \ldots, U_p$ vil det på den anden side sikre, at alle afbildningerne f_j er kontinuerte. Nu definerer vi $\grave{B}(x)$ som mængden af de mængder der fås ved på venstre side i (2) at vælge $p, j_1, \ldots, j_p$, $U_1, \ldots, U_p$ på alle mulige måder. Det er da umiddelbart, at $\grave{B}: M$ ind i $\grave{D}(\grave{D}(M))$ tilfredsstiller b1),b2),b4),b5) i sætning 7.25, og $\grave{B}$ er derfor en omegnsbasis for et topologisk rum $T = (M, \grave{U})$, som åbenbart har den egenskab, at alle afbildningerne $f_j : T$ ind i T_j er kontinuerte. For ethvert andet topologisk rum $T^* = (M, \grave{U}^*)$ gælder det, at de ved $\grave{B}$ definerede basisomegne alle er omegne, og dets topologi er derfor finere end topologien på T. Dermed er sætningen bevist.

Læg mærke til, at vi i beviset ikke forudsatte, at $j_1, \ldots, j_p$ var indbyrdes forskellige. Det har den virkning, at b4) bliver helt triviel. Betingelsen b5) er iøvrigt opfyldt på den trivielle form, at enhver basisomegn er omegn af ethvert af sine punkter.

Ved hjælp af relationen $f_j^{-1}(U') \cap f_j^{-1}(U'') = f_j^{-1}(U' \cap U'')$ kan udtrykket på venstre side i (2) selvfølgelig altid reduceres, således at de optrædende indices bliver indbyrdes forskellige. Hvis J er en endelig mængde, f.eks. mængden $\{1, \ldots, p\}$, er det derfor nok i (2) at benytte udtryk af formen

$$f_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_p^{-1}(U_p).$$

<u>Definition</u> 7.29. Det i sætning 7.28 omtalte topologiske rum $T = (M, \grave{U})$ kaldes det ved afbildningerne f_j definerede topologiske originalrum (eller initialrum).

<u>Sætning</u> 7.30. Med betegnelserne fra sætning 7.28 og med

endnu et topologisk rum $T' = (M', \mathring{U}')$ vil en afbildning $f: T'$ ind i T være kontinuert, hvis og kun hvis alle afbildningerne $f_j \circ f: T'$ ind i T_j er kontinuerte.

Bevis. Hvis f er kontinuert, er afbildningerne $f_j \circ f$ kontinuerte ifølge sætning 7.22. Lad os nu på den anden side antage, at alle afbildningerne $f_j \circ f$ er kontinuerte. Lad $x \in M'$ være vilkårligt valgt, og lad U være en omegn af x. Så vil U indeholde en basisomegn

$$f_{j_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_{j_p}^{-1}(U_p),$$

hvor hvert U_k er en omegn af $f_{j_k}(f(x))$ i T_{j_k}. Originalmængden til denne omegn er imidlertid

$$f^{-1}(f_{j_1}^{-1}(U_1)) \cap \ldots \cap f^{-1}(f_{j_p}^{-1}(U_p)) =$$

$$(f_{j_1} \circ f)^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap (f_{j_p} \circ f)^{-1}(U_p),$$

og dette er ifølge u4) en omegn af x. Dermed er sætningen bevist.

Begrebet "topologisk originalrum" er heldigvis en hel del nyttigere end det ved første blik ser ud til. I dette kursus skal vi bruge det til indførelse af topologi på delmængder og på produktrum. Anvendelsen på delrum er dog ganske triviel.

<u>Definition</u> 7.31. Lad $T = (M, \mathring{U})$ være et topologisk rum og $A \subseteq T$ en vilkårlig delmængde. Ved delrummet A af T forstås det topologiske originalrum for injektionsafbildningen $j: A$ ind i T defineret ved $j(x) = x$ for ethvert $x \in A$.

En mængde $B \subseteq A$ kaldes åben relativt til A, hvis den er en åben mængde i delrummet A. Dens afslutning i delrummet A kaldes dens relative afslutning. Tilsvarende for andre topologiske begreber. Når ordet "relativt" udelades, skal de topologiske begreber altid forstås i relation til T. Hvis der optræder flere delmængder på en gang kan det være nødvendigt at bruge vendinger som "åben relativt til A" for at undgå misforståelser.

<u>Sætning</u> 7.32. Lad $T = (M,\grave{U},\grave{O},\grave{A})$ være et topologisk rum, og $A \subseteq T$ et delrum. For et punkt $x \in A$ og en punktmængde $B \subseteq A$ gælder da relationerne

$$1)\ B \text{ relativ omegn af } x \iff \exists U \in \grave{U}(x)\ (B = A \cap U)$$

$$2)\ B \text{ relativt åben} \iff \exists O \in \grave{O}\ (B = A \cap O)$$

$$3)\ B \text{ relativt afsluttet} \iff \exists F \in \grave{A}\ (B = A \cap F)\ .$$

Den relative afslutning af B er $\bar{\bar{B}} \cap A$. Det indre af B er en delmængde af det relative indre af B.

Bevis. Lad $j:A$ ind i T være injektionsafbildningen. For $U \in \grave{U}(x)$ er $j^{-1}(U) = A \cap U$ en relativ omegn af x. De omegne, der fås på denne måde, udgør ifølge beviset for sætning 7.28 en omegnsbasis for delrummet A. Af $A \supseteq V \supseteq A \cap U$ følger imidlertid $V = A \cap (U \cup V)$, og da $U \cup V \in \grave{U}(x)$, viser dette, at u3) gælder for systemet af mængderne $A \cap U$. Men det betyder, at systemerne af mængderne $A \cap U$ netop omfatter alle de relative omegne, og dermed er 1) bevist.

2). For $O \in \grave{O}$ er $A \cap O = j^{-1}(O)$ relativt åben. Hvis $B \subseteq A$ er relativt åben, har hvert punkt x en relativ omegn $U_x \cap A \subseteq B$, hvor $U_x \in \grave{U}(x)$. Men så findes der en åben mængde O_x med $x \in O_x$ og $O_x \subseteq U_x$, altså $O_x \cap A \subseteq B$. Men så er $B = A \cap O$, hvor $O = \bigcup_{x \in B} O_x$ er åben, og dermed er 2) bevist.

3). At b er relativt afsluttet er ensbetydende med, at $A \setminus B$ er relativt åben, altså, at der eksisterer $O \in \grave{O}$, således at $A \setminus B = A \cap O$. Men dette er ensbetydende med, at $B = A \cap CO$. Dermed er 3) bevist.

Vi ved nu fra 3), at $\bar{B} \cap A$ er relativt afsluttet. Hvis $F \subseteq A$ er relativt afsluttet og $F \supseteq B$, gælder $F = F_1 \cap A$, hvor $F_1 \in \grave{A}$ og $F_1 \supseteq B$, altså $F_1 \supseteq \bar{B}$, men det medfører, at $F = F_1 \cap A \supseteq \bar{B} \cap A$. Den sidste påstand er triviel.

Eksempler. Den reelle talakse $\grave{R}$ er et topologisk delrum af den udvidede talakse $\grave{R}^*$. En delmængde af $\grave{R}$ er relativt åben, hvis og kun hvis den er åben i $\grave{R}^*$, og den er relativt afsluttet, hvis og kun hvis dens foreningsmængde med $\{-\infty, \infty\}$ er afsluttet i $\grave{R}^*$. Tallegemet $\grave{Q}$ er et topologisk delrum af $\grave{R}$. Det relative indre af $\grave{Q}$ er hele $\grave{Q}$ og det absolutte indre af $\grave{Q}$ er tomt. Med $\grave{N}^*$ betegner vi det topologiske delrum $\grave{N} \cup \{\infty\}$ af $\grave{R}^*$. At en kompleks talfølge (a_n) er konvergent med grænseværdi a er ensbetydende med, at den ved $\varphi(\infty) = a$, $\varphi(n) = a_n$ definerede afbildning $\varphi : \grave{N}^*$ ind i $\grave{C}$ er kontinuert.

Et særligt vigtigt eksempel på et delrum er et interval på den reelle akse. Cirkelskiver eller rektangler i planen er også eksempler på delrum. Den reelle akse er et delrum af $\grave{C}$. For en ret linie i planen stemmer delrumstopologien overens med topologien på den rette linie opfattet som talakse.

For topologisk delrum giver sætning 7.30 blot udtryk for den trivielle kendsgerning, at kontinuitet af en afbildning ind i delrummet er ensbetydende med kontinuitet af afbildningen opfattet som afbildning ind i hele rummet.

Hvis T og T_1 er topologiske rum, $A \subseteq T$ et delrum og $f:T$ ind i T_1 en afbildning, da er restriktionen $f|A:A$ ind i T_1 identisk med den sammensatte afbildning $f \circ j:A$ ind i T_1. Heraf følger umiddelbart sætningen:

<u>Sætning</u> 7.33. Enhver restriktion af en kontinuert afbildning er kontinuert.

Det er selvfølgelig ikke rigtigt, at enhver kontinuert afbildning $g:A$ ind i T_1 er restriktion af en eller anden afbildning $f:T$ ind i T_1. Således er $\mathrm{tg}:]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ ind i $\dot{R}$ kontinuert, men ikke restriktion af nogen kontinuert afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$.

Det er dumt (men undertiden ganske tillokkende) at forveksle de 2 udsagn

1). Afbildningen $f:T$ ind i T_1 er kontinuert i ethvert punkt af A.

2). Restriktionen af afbildningen $f:T$ ind i T_1 til mængden A er kontinuert.

Det er imidlertid klart, at udsagnet 1) er væsentligt stærkere end 2). Udsagnet 2) stiller overhovedet intet krav til restriktionen af f til $T \setminus A$.

Eksempel. Den ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \in \dot{Q} \\ 0 & \text{for} \quad x \in \dot{R} \setminus \dot{Q} \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er ikke kontinuert i noget punkt af $\dot{R}$, men dens restriktion til $\dot{Q}$ er kontinuert.

Lad $(M_j | j \in J)$ være en familie af mængder. Produktmængden

$M = \prod_{j\in J} M_j$ er mængden af afbildninger $x:J$ ind i $\bigcup_{j\in J} M_j$, som tilfredsstiller betingelsen $\forall j \in J(x(j) \in M_j)$. Sædvanligvis vil vi skrive x_j i stedet for $x(j)$. Til hvert $j \in J$ svarer en projektion, som er en afbildning $p_j:M$ ind i M_j defineret ved $p_j(x) = x_j$. Projektionerne er surjektive afbildninger. For en følge $(M_n | n \in \grave{N})$ anvender vi også skrivemåden $M = M_1 \times M_2 \times \ldots$ og analogt for endelig mange. Projektionen $p_j(x) = x_j$ kaldes også j-koordinaten af x eller den j^{te} koordinat af x.

Definition 7.34. Lad $(T_j = (M_j, \grave{U}_j) | j \in J)$ være en familie af topologiske rum. Ved produktrummet $T = \prod_{j\in J} T_j$ forstås det topologiske rum $T = (M, \grave{U})$, $M = \prod_{j\in J} T_j$, som er topologisk originalrum for projektionerne p_j. For $J = \grave{N}$ skriver vi $T = T_1 \times T_2 \times \ldots$ og analogt, hvis J er endelig.

Lad nu $S = (M', \grave{U}')$ være et vilkårligt topologisk rum. Til en afbildning $f:S$ ind i $T = \prod_{j\in J} T_j$ svarer koordinatafbildninger $f_j = p_j \circ f:S$ ind i T_j. Omvendt definerer en familie af koordinatafbildninger $(f_j:S$ ind i $T | j \in J)$ en afbildning $f:S$ ind i T, idet vi for $t \in S$ sætter $f(t) = x$, hvor $x_j = f_j(t)$ for ethvert $j \in J$. Sætning 7.30 giver nu ganske umiddelbart følgende sætning:

Sætning 7.35. En afbildning ind i et produktrum er kontinuert hvis og kun hvis enhver af dens koordinatafbildninger er kontinuerte.

Lad nu $x \in T$ være et vilkårligt punkt af produktrummet $T = \prod_{j\in J} T_j$. Af beviset for sætning 7.28 fremgår, at vi får et system af basisomegne af x ved på alle mulige måder at vælge $q \in \grave{N}$, $j_1, \ldots, j_q \in J$ og omegne U_k af x_{j_k} i T_{j_k}. Så vil mængderne

$$p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \ldots \cap p_{j_q}^{-1}(U_{j_q})$$

udgøre en omegnsbasis for x. Disse mængder kan imidlertid også udtrykkes på formen

$$\{x \in T \mid x_{j_1} \in U_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_q} \in U_{j_q}\}.$$

Vælger vi nu $U_j = T_j$ for alle andre $j \in J$, kan dette åbenbart skrives

$$U = \prod_{j \in J} U_j.$$

En omegnsbasis består altså af alle sådanne "produktomegne", hvor $U_j = T_j$ undtagen for endelig mange $j \in J$. Vi bemærker, at

$$p_j(U) = U_j.$$

Vi får selvfølgelig en omegnsbasis, selv om vi kun medtager de basisomegne, hvor alle U_j er åbne mængder.

I det specielle tilfælde $J = \grave{N}$ kan vi nøjes med at betragte basisomegne af formen

$$U_1 \times \ldots \times U_p \times T_{p+1} \times T_{p+2} \times \ldots ,$$

og i det tilfælde, hvor $T = T_1 \times \ldots \times T_m$ kan vi nøjes med basisomegne af formen

$$U_1 \times \ldots \times U_m.$$

Eksempel. $\grave{R} \times \grave{R} = \grave{R}^2$ får som basisomegne af $x = (x_1, x_2)$ f.eks. mængden af kvadrater

$$]x_1 - \tfrac{1}{n}, x_1 + \tfrac{1}{n}[\times]x_2 - \tfrac{1}{n}, x_2 + \tfrac{1}{n}[,$$

og da hvert af disse kvadrater indeholder den åbne cirkelskive med centrum x og radius $\frac{1}{n}$, men er indeholdt i den åbne cirkelskive med centrum x og radius $\frac{2}{n}$, bliver produktrummet $\mathbb{R}^2$ netop den sædvanlige plan.

<u>Definition</u> 7.36. Lad $S = (M_1, \mathcal{O}_1)$ og $T = (M_2, \mathcal{O}_2)$ være topologiske rum. En afbildning $f:S$ ind i T kaldes åben, hvis og kun hvis

$$\forall O \in \mathcal{O}_1 (f(O) \in \mathcal{O}_2).$$

Ganske analogt kan vi definere en afsluttet afbildning. De to begreber er ikke ækvivalente. En konstant afbildning $f:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er afsluttet, men ikke åben.

Begrebet "åben afbildning" afhænger på væsentlig måde af det rum, vi afbilder ind i. Injektionsafbildningen $j:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$ defineret ved $j(x) = x$ er ikke åben, da $j(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ikke er åben, men $j:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er selvfølgelig åben.

<u>Sætning</u> 7.37. Projektionerne p_j er åbne afbildninger.

Bevis. I produktrummet $T = \prod_{j \in J} T_j$ betragter vi en åben mængde O og et vilkårligt punkt $x_j \in p_j(O)$. Vi skal vise, at $p_j(O) \in \mathcal{U}_j(x_j)$. Nu eksisterer der et punkt $x \in O$ med $p_j(x) = x_j$, og O indeholder en basisomegn $\prod_{j \in J} U_j$ af x. Altså har vi

$$p_j(O) \supseteq p_j\Big(\prod_{j \in J} U_j\Big) = U_j,$$

og af u3) følger så, at $p_j(O)$ er en omegn af x_j. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Mængden $\{(x,y) \mid x > 0 \wedge xy = 1\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$ (en hyperbelgren). Dens projektion på x-aksen er intervallet $]0,\infty[$. Projektioner behøver altså ikke at være afsluttede afbildninger.

Definition 7.38. Lad S og T være topologiske rum. En afbildning f:S ind i T, som er bijektiv, kontinuert og åben, kaldes en homøomorfi. Hvis der eksisterer en sådan afbildning, kaldes S og T homøomorfe.

At f er bijektiv medfører, at f har en omvendt afbildning f^{-1}:T ind i S. At f er åben er ensbetydende med, at f^{-1} er kontinuert (og omvendt). Det er klart, at sammensætning af homøomorfier giver homøomorfier. Heraf fås umiddelbart følgende sætning:

Sætning 7.39. Relationen S homøomorf med T er en ækvivalensrelation på klassen af topologiske rum.

I tilslutning hertil skal vi nævne, at en homøomorf afbildning f:S ind i T kopierer S over på T, således at alle topologiske egenskaber bevares. Billedet af en åben mængde er en åben mængde og billedet af en afsluttet mængde er en afsluttet mængde. Af $A \subseteq S$ og $B = f(A)$ følger $f(\mathring{A}) = \mathring{B}$, $f(\partial A) = \partial B$, $f(\mathring{C}A) = \mathring{C}B$ og $f(\overline{A}) = \overline{B}$. Endvidere er det klart, at restriktionen af f til A er en homøomorfi fra A ind i B.

De af ækvivalensrelationen "homøomorf med" frembragte klasser består af rum, som fra topologisk synspunkt kan betragtes som indbyrdes ens. Egenskaber som altid er fælles for alle topologiske rum i en ækvivalensklasse kaldes topologiske egenskaber.

Vi betragter nu igen familien $(T_j = (M_j, \grave{U}_j) \mid j \in J)$ af topologiske rum og produktrummet $T = \prod_{j \in J} T_j = (M, \grave{U})$. Lad $a = (a_j)$ være et punkt af T, og lad k være et element af j. Mængden

$$F_k = \{x \in T \mid \forall j \neq k (x_j = a_j)\}$$

kaldes en k-fiber af rummet T. Det er klart, at k-fibrene netop udgør en klasseinddeling af T.

<u>Sætning</u> 7.40. Restriktionen af projektionen p_k til fiberen F_k er en homøomorfi $p_k:F_k$ ind i T_k.

Bevis. Af definitionen $p_k(x) = x_k$ følger umiddelbart, at restriktionen af p_k til F_k er en bijektiv afbildning. Vi ved allerede, at p_k er kontinuert, og dens restriktion til F_k er da også kontinuert. Lad nu $\varphi:T_k$ ind i F_k være den omvendte afbildning til $p_k:F_k$ ind i T_k. Vi kan opfatte φ som en afbildning $\varphi:T_k$ ind i T. Nu er $p_j\circ\varphi$ den identiske afbildning, hvis $j = k$, og en konstant afbildning, hvis $j \neq k$. Af sætning 7.35 følger derfor, at φ er kontinuert. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen viser, at rummet T for hvert $k \in J$ er foreningsmængde af fibre, som alle er homøomorfe med T_k.

Lad T_1, T_2 og T_3 være topologiske rum. Der findes naturlige afbildninger af rummene $T_1\times T_2\times T_3$, $(T_1\times T_2)\times T_3$ og $T_1\times(T_2\times T_3)$ på hinanden, idet (x_1,x_2,x_3), $((x_1,x_2),x_3)$ og $(x_1,(x_2,x_3))$ svarer til hinanden. Hvis U_1,U_2 og U_3 er omegne af x_1,x_2 og x_3, vil $U_1\times U_2\times U_3$, $(U_1\times U_2)\times U_3$ og $U_1\times(U_2\times U_3)$ svare til hinanden ved de naturlige afbildninger, og disse vil derfor være homøomorfier. I praksis er det sjældent nødvendigt at skelne mellem de tre her omtalte rum.

Eksempel. Lad $T = (M,\grave{U})$ være et topologisk rum. I produktrummet $S = T \times\ldots\times T$, hvor der er m faktorer, betragtes diagonalen $D = \{(x,\ldots,x)\,|\,x \in T\}$. Projektionen p:D ind i T defineret ved $p(x,\ldots,x) = x$ er kontinuert, og den ved $\varphi(x) = (x,\ldots,x)$ definerede omvendte afbildning $\varphi:T$ ind i D er ligeledes kontinuert, da hver af dens koordinatafbildninger er den identiske afbildning. Altså er D og T homøomorfe.

Sætning 7.41. Lad S_1, S_2, T_1 og T_2 være topologiske rum, og lad $f_1: S_1$ ind i T_1 og $f_2: S_2$ ind i T_2 være kontinuerte afbildninger. Den ved $f(x_1,x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ definerede produktafbildning $f = f_1 \times f_2 : S_1 \times S_2$ ind i $T_1 \times T_2$ er da kontinuert.

Bevis. Vi får brug for projektionerne

$p_1 : S_1 \times S_2$ ind i S_1 , $p_2 : S_1 \times S_2$ ind i S_2

$p_1' : T_1 \times T_2$ ind i T_1 , $p_2' : T_1 \times T_2$ ind i T_2 .

Ifølge sætning 7.35 er det nok at vise, at koordinatafbildningerne $p_1' \circ (f_1 \times f_2)$ og $p_2' \circ (f_1 \times f_2)$ er kontinuerte. Nu er $p_1' \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \circ p_1$ og følgelig kontinuert. Analogt for den anden afbildning. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7.42. Den ved $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ definerede afbildning $\varphi : \dot{R} \times \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ og den for $k \in \dot{R}$ ved $\psi(x) = kx$ definerede afbildning $\psi : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er kontinuerte.

Bevis. Vi betragter $(a_1,a_2) \in \dot{R}$ samt $\varepsilon > 0$, og vi har da

$$\varphi^{-1}(\,]a_1+a_2-\varepsilon,\ a_1+a_2+\varepsilon[\,) \supseteq\ ]a_1-\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ a_1+\tfrac{1}{2}\varepsilon[\ \times\ ]a_2-\tfrac{1}{2}\varepsilon,\ a_2+\tfrac{1}{2}\varepsilon[,$$

hvilket viser, at φ er kontinuert. For $a \in \dot{R}$ og $\varepsilon > 0$ er

$$\psi^{-1}(\,]ka-\varepsilon,\ ka+\varepsilon[\,) = \begin{cases}]a+\frac{\varepsilon}{k},\ a-\frac{\varepsilon}{k}[, & \text{hvis } k < 0 \\ \dot{R}, & \text{hvis } k = 0 \\ ]a-\frac{\varepsilon}{k},\ a+\frac{\varepsilon}{k}[, & \text{hvis } k > 0, \end{cases}$$

hvilket viser, at ψ er kontinuert.

Sætning 7.43. Lad T være et topologisk rum, og lad $f_1, f_2 : T$ ind i $\dot{R}$ være kontinuerte afbildninger. Da er $f_1 + f_2 : T$ ind i $\dot{R}$ en kontinuert afbildning.

Bevis. Den ved $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ definerede afbildning $f = (f_1, f_2): T$ ind i $\grave{R}^2$ er kontinuert, da dens koordinatafbildninger er kontinuerte. Nu er $f_1 + f_2 = \varphi \circ f$, hvor φ har den samme betydning som i sætning 7.42, og denne sætning medfører altså, at $f_1 + f_2$ fås ved at sammensætte kontinuerte funktioner og derfor selv er kontinuert.

Sætning 7.44. Lad T være et topologisk rum, lad $f:T$ ind i $\grave{R}$ være en kontinuert afbildning, og lad k være et reelt tal. Da er $kf:T$ ind i $\grave{R}$ være kontinuert.

Bevis. Følger umiddelbart af, at $kf = \psi \circ f$, hvor ψ har samme betydning som i sætning 7.42.

Vi har dermed bevist, at mængden af kontinuerte afbildninger $f:T$ ind i $\grave{R}$ udgør et vektorrum. Dette vektorrum betegnes $\hat{C}(T, \grave{R})$.

Sætning 7.45. For $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \grave{R}$ er den ved $\varphi(x_1, x_2) = (a_1x_1+b_1,\ a_2x_2+b_2)$ definerede afbildning $\varphi: \grave{R}^2$ ind i $\grave{R}^2$ kontinuert.

Bevis. De ved $\varphi_1(x_1) = a_1x_1+b_1$, $\varphi_2(x_2) = a_2x_2+b_2$ definerede afbildninger $\varphi_1, \varphi_2: \grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er kontinuerte ifølge sætningerne 7.42 og 7.43. Påstanden følger derefter af sætning 7.41, idet $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$.

For $a_1 = a_2$ viser sætningen specielt, at en parallelforskydning af planen er en kontinuert afbildning.

Det er selvfølgelig en ulempe, at vi udleder regnereglerne for kontinuerte afbildninger, og ikke mere generelt for afbildninger, som er kontinuerte i et punkt. Modsvarende sætningerne 7.35 og 7.43 kunne vi således ønske os at have følgende sætninger til rådighed:

<u>Sætning</u> 7.35a. En afbildning af et topologisk rum S ind i et produktrum $T = \prod_{j \in J} T_j$ er kontinuert i et punkt $a \in S$ hvis og kun hvis enhver af dens koordinatafbildninger er kontinuerte i a.

<u>Sætning</u> 7.43. Lad S være et topologisk rum, og lad $f_1, f_2 : S$ ind i $\grave{R}$ være afbildninger, som er kontinuerte i et punkt $a \in S$. Da er $f_1 + f_2 : S$ ind i $\grave{R}$ kontinuert i a.

Disse sætninger kan udledes af de tilsvarende sætninger om kontinuerte afbildninger ved hjælp af et simpelt trick, der også kan anvendes på alle de følgende sætninger om regneregler for afbildninger af ét topologisk rum. Sammen med rummet $S = (M, \grave{U})$ betragter vi et andet topologisk rum $\tilde{S} = (M, \grave{U}')$, hvor

$$\grave{U}'(a) = \grave{U}(a)$$

$$\grave{U}'(x) = \{U \in \grave{D}(M) \mid x \in U\} \quad \text{for} \quad x \neq a.$$

Det er klart, at $\grave{U}'$ tilfredsstiller u1) - u4). En omegn $U \in \grave{U}'(a)$ er omegn af ethvert af sine punkter. For $x \neq a$ og $U \in \grave{U}(x)$ er $U \setminus \{a\}$ omegn af ethvert af sine punkter. Altså er også u5) opfyldt. Det er klart, at topologien på $\tilde{S}$ er finere end topologien på S. Den identiske afbildning I:M ind i M opfattet som en afbildning $I : \tilde{S}$ ind i S er derfor kontinuert. Den omvendte afbildning $I^{-1} : S$ ind i $\tilde{S}$ er kontinuert i a, da $\grave{U}'(a) = \grave{U}(a)$.

Beviserne for sætningerne 7.35a og 7.43a beror på, at vi i stedet for afbildningen f:S ind i T betragter $f \circ I : \tilde{S}$ ind i T og i stedet for $f_1, f_2, f_1 + f_2 : S$ ind i $\grave{R}$ betragter vi $f_1 \circ I, f_2 \circ I, (f_1 + f_2) \circ I : \tilde{S}$ ind i $\grave{R}$.

Hvis $f:S$ ind i T er kontinuert i a, er $f \circ I:\tilde{S}$ ind i T også kontinuert i a, men så er $f \circ I$ åbenbart kontinuert, da kontinuitetsbetingelsen er trivielt opfyldt i alle andre punkter af $\tilde{S}$. Hvis $f \circ I:\tilde{S}$ ind i T er kontinuert, er $f = (f \circ I) \circ I^{-1}$ kontinuert i a. Analogt for de tre afbildninger ind i $\grave{R}$ og for koordinatafbildningerne $p_j \circ f$. Sætning 7.35a følger nu umiddelbart af, at $p_j \circ (f \circ I) = (p_j \circ f) \circ I$, og sætning 7.43a følger af, at $(f_1+f_2) \circ I = f_1 \circ I + f_2 \circ I$. Disse relationer har generel gyldighed, men de er selvfølgelig helt trivielle, når I er den identiske afbildning.

Det skal tilføjes, at bevismetoden glipper for sætning 7.41, idet denne sætning handler om afbildninger af tre forskellige vektorrum. Vi kan imidlertid i beviset udnytte sætning 7.35a i stedet for sætning 7.35 og derved få en sætning om punktvis kontinuitet. Gennemførelsen af dette vil vi dog overlade til læseren.

I det følgende vil vi indskrænke os til at udlede regneregler for punktvis kontinuitet eller for kontinuerte afbildninger, og det overlades til læseren at formulere og vise sætningerne for det ikke behandlede tilfælde.

Vi går nu over til at behandle kontinuitet af produkt og kvotient.

<u>Sætning</u> 7.46. Den ved $\varphi(x_1,x_2) = x_1x_2$ bestemte afbildning $\varphi:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert.

Bevis. For $\varepsilon \in\ ]0,1]$ gælder

$$\varphi^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \supseteq\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\times]-\varepsilon,\varepsilon[.$$

Heraf følger, at φ er kontinuert i $(0,0)$. For $a_1,a_2 \in \grave{R}$ er den ved

$$\psi(x_1,x_2) = (a_1+x_1)(a_2+x_2) =$$
$$a_1a_2+a_2x_1+a_1x_2+x_1x_2$$

definerede afbildning $\psi:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ altså kontinuert i $(0,0)$ ifølge sætningerne 7.42 og 7.43. Den ved $\chi(x_1,x_2) = (x_1-a_1,x_2-a_2)$ definerede afbildning $\chi:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}^2$ er kontinuert ifølge sætning 7.45, og den afbilder punktet (a_1,a_2) i $(0,0)$. Altså er $\varphi = \psi \circ \chi$ kontinuert i (a_1,a_2). Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.47. Lad T være et topologisk rum, og lad f_1,f_2:T ind i $\dot{R}$ være kontinuerte afbildninger. Da er f_1f_2:T ind i $\dot{R}$ en kontinuert afbildning.

Bevis. Ganske som sætning 7.43, idet sætning 7.46 anvendes i stedet for sætning 7.42.

<u>Sætning</u> 7.48. Den ved $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ definerede afbildning $\varphi:\dot{R}\setminus\{0\}$ ind i $\dot{R}\setminus\{0\}$ er kontinuert.

Bevis. ab > 0 og $x \in]a,b[$, er

$$\varphi^{-1}(]a,b[) =]\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{a}[.$$

Dermed er sætningen bevist.

<u>Sætning</u> 7.49. Hvis T er et topologisk rum og f:T ind i $\dot{R}\setminus\{0\}$ en kontinuert afbildning, da er $\frac{1}{f}$:T ind i $\dot{R}\setminus\{0\}$ en kontinuert afbildning.

Bevis. Følger umiddelbart af, at $\frac{1}{j} = \varphi\circ f$, hvor φ er den i sætning 7.48 omtalte afbildning.

Eksempel: Den ved

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert. De ved $p_j(x_1,x_2,x_3) = x_j$ definerede projektionsafbildninger er nemlig kontinuerte, og påstanden følger derfor af regnereglerne. Hvis $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ er reelle tal, som ikke alle er nul, er $\{(\lambda_1 t,\lambda_2 t,\lambda_3 t)\,|\,t\in\dot{R}\}$ en ret linie i $\dot{R}^3$ gennem $(0,0,0)$. I alle punkter af denne rette linie antager f værdien

$$\frac{\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}\ .$$

Anderledes udtrykt: Restriktionen af f til en vilkårlig ret linie gennem $(0,0,0)$ er konstant. For enhver omegn U af $(0,0,0)$ gælder derfor

$$f(\dot{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}) = f(U\setminus\{(0,0,0)\}).$$

For en ægte delmængde V af værdimængden gælder derfor, at $f(U\setminus\{(0,0,0)\})$ ikke for noget valg af U vil være indeholdt i V. Heraf følger, at der ikke findes nogen kontinuert afbildning $\tilde{f}:\dot{R}^3$ ind i $\dot{R}$, således at f er restriktionen af $\tilde{f}$ til $\dot{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Vi skal for fuldstændighedsskyld anføre et par helt trivielle sætninger om kontinuerte funktioner.

Sætning 7.50. Lad S og T være topologiske rum, a et punkt af S og U en omegn af a. Så er en afbildning $f:S$ ind i T kontinuert i a, hvis og kun hvis dens restriktion til U er kontinuert i a.

Bevis. Følger umiddelbart af definitionen på kontinuitet, samt omegnsaksiomerne u3) og u4).

Sætning 7.51. Lad S og T være topologiske rum og lad

$\Delta = (O_j \mid j \in J)$ være en familie af åbne mængder, som udgør en overdækning af S. Så er en afbildning f:S ind i T kontinuert, hvis og kun hvis det for hvert $j \in J$ gælder, at restriktionen af f til O_j er kontinuert.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 7.50.

Den følgende sætning er ikke så triviel, og den er ofte ganske nyttig.

Sætning 7.52. Lad S og T være topologiske rum, og lad $A_1, \ldots, A_n$ være endelig mange afsluttede mængder, som overdækker S. Så er en afbildning f:S ind i T kontinuert i et punkt $a \in S$, hvis og kun hvis det for de værdier af $j \in \{1, \ldots, n\}$, for hvilke $a \in A_j$, gælder, at restriktionen af f til A_j er kontinuert i a.

Bevis. Vi bemærker først, at "kun hvis" følger af, at kontinuitet bevares ved restriktion. Vi skal nu vise "hvis". Vi kan antage rækkefølgen af $A_1, \ldots, A_n$ valgt, således at a tilhører $A_1, \ldots, A_p$, men ikke $A_{p+1}, \ldots, A_n$ (for p = n bliver der ingen mængder af den sidste slags, men det vil ikke genere beviset). Lad nu $U \subseteq T$ være en omegn af f(a). Vi har da

$$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap A_1) \cup \ldots \cup (f^{-1}(U) \cap A_n) \supseteq$$

$$(f^{-1}(U) \cap A_1) \cup \ldots \cup (f^{-1}(U) \cap A_p).$$

Da restriktionen af f til A_j for $j = 1, \ldots, p$ er kontinuert, er $f^{-1}(U) \cap A_j$ en omegn af a relativt til A_j, og vi kan derfor vælge omegne $V_1, \ldots, V_p$ af a, således at

$$f^{-1}(U) \cap A_j = V_j \cap A_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Ifølge u4) er $V = V_1 \cap \ldots \cap V_p$ en omegn af a, og vi har

$$f^{-1}(U) \supset (V_1 \cap A_1) \cup \ldots \cup (V_p \cap A_p) \supset$$

$$(V \cap A_1) \cup \ldots \cup (V \cap A_p) = V \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_p).$$

Da $S = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, har vi

$$A_1 \cup \ldots \cup A_p \supseteq CA_{p+1} \cap \ldots \cap CA_n,$$

så vi får

$$f^{-1}(U) \supset V \cap CA_{p+1} \cap \ldots \cap CA_n.$$

For $j = p+1,\ldots,n$ er CA_j åben og $a \in CA_j$. Vi har altså bevist, at $f^{-1}(U)$ indeholder en omegn af a og dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^3, & \text{hvis } x^2 + y^3 \leqq 1 \\ 0, & \text{hvis } x^2 + y^3 > 1 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert. Den ved $g(x,y) = 1 - x^2 - y^3$ definerede afbildning $g:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ er nemlig kontinuert ifølge regnereglerne. Altså er

$$A_1 = \{(x,y) | x^2+y^3 \leqq 1\} = g^{-1}([0,\infty[)$$

$$A_2 = \{(x,y) | x^2+y^3 \geqq 1\} = g^{-1}(]-\infty,0])$$

afsluttede, da $[0,\infty[$ og $]-\infty,0]$ er afsluttede. Restriktionen af f til A_1 er identisk med restriktionen af g til A_1 og derfor kontinuert. Restriktionen af f til A_2 er identisk 0 og derfor kontinuert. Altså er f kontinuert ifølge sætning 7.52.

Det er helt klart, at sætning 7.52 ikke kan generaliseres til en vilkårlig overdækning af a med afsluttede mængder. I det specielle tilfælde (som omfatter alle sædvanligt benyttede rum), hvor alle delmængder af S, som kun indeholder ét punkt, er afsluttede, vil betingelsen i sætningen være opfyldt for enhver afbildning overhovedet, hvis vi benytter overdækningen af S med afsluttede mængder, som hver kun indeholder ét punkt, og sætningen ville da sige, at enhver afbildning f:S ind i T var kontinuert. Vi skal nu ved et eksempel vise, at en afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ kan være diskontinuert i 0, selv om dens restriktion til enhver ret linie i $\dot{R}^2$ er kontinuert.

Eksempel. Den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er ifølge regnereglerne kontinuert for $(x,y) \neq (0,0)$. På parablen $\{(x,y) | y = x^2\}$ antager f værdien 0 for $x = 0$, men i alle andre punkter værdien $\frac{1}{2}$. Altså er f diskontinuert i (0,0). Det følger nu, at restriktionen af f til en ret linie, der ikke indeholder (0,0) er kontinuert. For θ indeholdt i $\dot{R}$ definerer

$$x = t\cos\theta \,,\; y = t\sin\theta$$

en afbildning $\varphi_\theta:\dot{R}$ ind i $\dot{R}^2$, og φ_θ er en homøomorf afbildning af $\dot{R}$ på en ret linie gennem (0,0). Enhver ret linie gennem (0,0) fås for passende valgt θ. Idet f^* er restriktionen af f til den rette linie $\varphi_\theta(\dot{R})$, får vi

$$(f^* \circ \varphi_\theta)(t) = \frac{t\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta + \sin^4\theta} \text{ for } \sin\theta \neq 0$$

$$(f^* \circ \varphi_\theta)(t) = 0 \quad \text{for } \sin\theta = 0 \,.$$

Heraf ses, at $f^*\circ\varphi_\theta$ er kontinuert. Altså er $f^* = (f^*\circ\varphi_\theta)\circ\varphi_\theta^{-1}$ ligeledes kontinuert.

Det er klart, at den ved $\varphi(x,y) = x+iy$ definerede afbildning $\varphi:\grave{R}^2$ ind i $\grave{C}$ er en homøomorfi. Heraf følger, at en afbildning ind i $\grave{C}$ er kontinuert, hvis og kun hvis dens reelle og imaginære del (altså koordinatafbildningerne for den tilsvarende afbildning ind i $\grave{R}^2$) er kontinuerte. Heraf udledes umiddelbart regnereglerne for en afbildning ind i $\grave{C}$. For at undersøge, om en afbildning fra $\grave{C}$ er kontinuert, kan man blot gå over til at betragte den tilsvarende afbildning fra $\grave{R}^2$.

Eksempel. De ved

$$\varphi_1(z) = \text{Re}z,\ \varphi_2(z) = \text{Im}z,\ \varphi_3(z) = |z|,\ \varphi_4(z) = \bar{z}$$

definerede afbildninger $\varphi_j:\grave{C}$ ind i $\grave{C}$ er kontinuerte, idet vi får

$$\varphi_1(x+iy) = x,\ \varphi_2(x+iy) = y,\ \varphi_3(x+iy) = \sqrt{(x^2+y^2)},$$

$$\varphi_4(x+iy) = x - iy.$$

Den ved

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

definerede afbildning $\varphi:\grave{C}\setminus\{0\}$ ind i $\grave{C}\setminus\{0\}$ er kontinuert. Den ved

$$\psi(z) = \text{Arg } z$$

definerede afbildning $\psi:\grave{C}\setminus\{0\}$ ind i $\grave{R}$ er diskontinuert i alle punkter af den negative reelle akse, men ellers kontinuert. Den resterende del af den komplekse plan kan nemlig dækkes med de åbne mængder

$$O_1 = \{x+iy\,|\,x>0\}\ ,\ O_2 = \{x+iy\,|\,y>0\}\ ,\ O_3 = \{x+iy\,|\,y<0\},$$

og vi har

$$\psi(z) = \begin{cases} \text{Arctg}\,\frac{y}{x} & \text{for} \quad x+iy \in O_1 \\ \text{Arccot}\,\frac{x}{y} & \text{for} \quad x+iy \in O_2 \\ \text{Arccot}\,\frac{x}{y} - \pi & \text{for} \quad x+iy \in O_3. \end{cases}$$

Vi skal nu vende tilbage til den generelle teori for topologiske rum, idet vi dog i det følgende vil supplere betingelserne u1),...,u5) med yderligere betingelser.

Sætning 7.53. Lad $T = (M, \grave{U})$ være et topologisk rum. Følgende egenskaber er da indbyrdes ækvivalente:

1). For $a, b \in T$ og $a \neq b$ eksisterer $U \in \grave{U}(a)$, således at $b \notin U$.

2). Enhver punktmængde på T, som kun indeholder ét punkt, er afsluttet.

3). Enhver endelig punktmængde på T er afsluttet.

Bevis. Det er trivielt at 3) $\Rightarrow$ 2). Da foreningsmængden af endelig mange afsluttede punktmængder er afsluttet, har vi også 2) $\Rightarrow$ 3). Vi vil nu vise 2) $\Rightarrow$ 1). Lad $a, b \in T$ være to forskellige punkter. Ifølge 2) er $T \setminus \{b\}$ åben, altså en omegn af a. Dermed er påstanden bevist. Vi mangler nu blot at vise 1) $\Rightarrow$ 2). Lad a være et punkt af T og $b \neq a$. Ifølge 1) findes $U \in \grave{U}(b)$ med $a \notin U$. Altså er b et ydre punkt for $\{a\}$. Altså er $\{a\}$ afsluttet. Dermed er sætningen bevist.

Definition 7.54. Et topologisk rum T kaldes et T_1-rum, hvis det opfylder de tre ækvivalente betingelser i sætning 7.53. Vi siger også, at T tilfredsstiller første adskillelsesaksiom.

Eksempler. Et diskret rum, der indeholder mere end ét punkt, er ikke et T_1-rum. Enhver mængde M kan organiseres som T_1-rum, ved at M og alle endelige delmængder af M benyttes som afsluttede mængder. Det er klart, at $\grave{R}$, $\grave{R}^n$ og $\grave{C}$ alle er T_1-rum.

Det er helt trivielt, at et delrum af et T_1-rum er et T_1-rum. Det er også næsten trivielt at et produktrum er et T_1-rum, hvis og kun hvis enhver af faktorerne er det. Hvis S og T er topologiske rum og f:S ind i T er en kontinuert, surjektiv afbildning kan man derimod ikke slutte, at det ene af rummene S og T er et T_1-rum, hvis det andet er det.

Sætning 7.55. Lad S være et T_1-rum, lad a være et punkt af S, og lad $A \subseteq S$ være en punktmængde. Følgende tre betingelser er da ækvivalente:

1) $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

2) $\forall U \in \grave{U}(a)\ \exists b \in U \quad (b \neq a)$.

3) $\forall U \in \grave{U}(a) \quad (U \cap A$ er en uendelig mængde$)$.

Bevis. Det er klart, at 1) $\Leftrightarrow$ 2) og at 3) $\Rightarrow$ 2) og derved benyttes endda ikke, at S er et T_1-rum. Lad os nu antage, at 2) er opfyldt. Hvis 3) ikke er opfyldt, findes der en omegn U af a, således at mængden $U \cap A$ er endelig, altså

$$(3) \qquad U \cap A \setminus \{a\} = \{b_1, \ldots, b_n\}.$$

Så er $U \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} = V$ en omegn af a og ifølge 2) findes der et punkt $b_{n+1} \in V \setminus \{a\}$, men det strider mod(3). Dermed er sætningen bevist.

Definition 7.56. Lad S være et T_1-rum. Et punkt $a \in S$

kaldes et fortætningspunkt for en punktmængde $A \subseteq S$, såfremt betingelserne 1), 2) og 3) i sætning 7.55 er opfyldt. Mængden A' af fortætningspunkter for A kaldes fortætningsmængden for A.

Eksempler. I T_1-rummet $\dot{R}$ har mængden $\{\frac{1}{n} | n \in \dot{N}\}$ punktet 0 som det eneste fortætningspunkt. Mængden $\dot{Q}$ har ethvert punkt af $\dot{R}$ som fortætningspunkt.

Sætning 7.57. En mængde i et T_1-rum er afsluttet, hvis og kun hvis den indeholder alle sine fortætningspunkter.

Bevis. Følger umiddelbart af definitionerne.

Sætning 7.58. En mængdes fortætningsmængde er afsluttet.

Bevis. Lad a være kontaktpunkt for fortætningsmængden A' for A, og lad U være en vilkårlig åben omegn af a. Så indeholder U et punkt af A' og er derfor en omegn af dette punkt. Men ifølge 3) i sætning 7.55 medfører dette, at U indeholder uendelig mange punkter af A, altså, at a er fortætningspunkt for a. Dermed er sætningen bevist.

Lad A være en punktmængde i et T_1-rum. Afslutningen $\bar{A}$ kan deles i to klasser A_1' og A_1^*, således at A_1' omfatter fortætningspunkterne, medens A_1^* omfatter de isolerede punkter. Mængden A_1' er afsluttet ifølge sætning 7.58, medens A_1^* ikke behøver at være afsluttet. Det kan udmærket tænkes, at A_1' har isolerede punkter, og den vil da igen kunne spaltes i to klasser.

En afsluttet mængde uden isolerede punkter er identisk med sin fortætningsmængde. En sådan mængde kaldes perfekt. Ret linie, interval, cirkelskive og cirkelbue er eksempler på perfekte mængder på $\dot{R}$ eller $\dot{R}^2$. Det kan vises, at der på $\dot{R}$ findes perfekte mængder uden indre punkter, og det kan vises, at perfekte mængder på $\mathring{R}$ ikke er numerable. Vi skal ikke opholde os ved disse spørgsmål.

Definition 7.59. Lad S være et T_1-rum og T et topologisk rum. Lad $A \subseteq S$ være en punktmængde og $a \in S$ et fortætningspunkt for A. Lad f:A ind i T være en afbildning og lad b være et punkt af T. Hvis den ved

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad x \in A\setminus\{a\} \\ b & \text{for} \quad x = a \end{cases}$$

definerede afbildning $g: A \cup \{a\}$ ind i T er kontinuert i a, siges f at have grænsepunktet b (eller at konvergere mod b) i punktet a (eller for x gående mod a) på mængden A, og vi skriver

$$f(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to a \quad \text{på} \quad A$$

eller

$$\lim_a f = b \quad \text{på} \quad A.$$

Hvis a ikke er fortætningspunkt for A vil g blive kontinuert i a for ethvert valg af $b \in T$. Det vil derfor være uinteressant at indføre grænseværdi i andre punkter end fortætningspunkterne for A. Læg mærke til, at det er helt uvæsentligt, om a selv er element af A, og hvis $a \in A$, er billedet f(a) uden indflydelse på grænsepunktet b.

Grænsepunktet b er et specielt valg af g(a), som netop sikrer, at g bliver kontinuert i a, altså i en vis forstand et "rigtigt" valg af g(a). I denne sammenhæng er det interessant, at hvis afbildningen f i definition 7.59. er kontinuert i et punkt $c \in A$, hvor $c \neq a$, vil g også være kontinuert i a. Hvis

U er en omegn af $f(c) = g(c)$, vil $f^{-1}(U)$ nemlig være en omegn af c, og da S er et T_1-rum, er $\{a\}$ afsluttet, altså $f^{-1}(U)\setminus\{a\}$ en omegn af c, men da $g^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(U)\setminus\{a\}$, medfører dette netop, at $g^{-1}(U)$ er en omegn af c. Læg mærke til, at dette ræsonnement bygger på, at S er et T_1-rum.

Sætning 7.60. Lad S,T,f,A,a og b have samme betydning som i definition 7.59, og lad f have grænsepunktet b i punktet a på mængden A. Lad T^* være endnu et topologisk rum og $h:T$ ind i T^* en kontinuert afbildning. Da har $h \circ f:A$ ind i T^* grænsepunktet h(b) i punktet a på mængden A.

Bevis. Følger umiddelbart af sætningen om sammensætning af analytiske funktioner.

Eksempler. For afbildninger af et interval ind i $\grave{R}$ er det her indførte grænsepunktbegreb identisk med det i gymnasiet behandlede. Grænsepunktet for f i a på et interval $[a,b]$, $]a,b[$ eller $]a,b]$ kaldtes i gymnasiet grænseværdien fra højre. Ved at inddrage intervaller på $\grave{R}^*$ og afbildninger ind i $\grave{R}^*$ får vi også uendelige grænseværdier og grænseværdier i ∞ og $-\infty$ med. Grænsepunktet i ∞ for en afbildning $\varphi:\grave{N}$ ind i $\grave{R}^*$ er grænseværdien for talfølgen $(\varphi(n))$.

Definition 7.61. Et topologisk rum $S = (M,\grave{U})$ kaldes et T_2-rum, hvis det opfylder følgende betingelse:

$$\forall x,y \in S(x \neq y \Rightarrow \exists U \in \grave{U}(x)\ \exists V \in \grave{U}(y)\ (U \cap V = \emptyset)).$$

Vi siger også, at S tilfredsstiller det andet adskillelsesaksiom eller (hyppigt), at S er et Hausdorff-rum.

Eksempler. Hvis M er uendelig, og M samt de endelige delmængder af M er de eneste afsluttede punktmængder i S, er S et T_1-rum, men ikke et Hausdorff-rum. Det er klart, at $\grave{R}, \grave{R}^2, \grave{C}$ er Hausdorff-rum.

Et delrum af et Hausdorff-rum er et Hausdorff-rum, og et produkt af Hausdorff-rum er et Hausdorff-rum. Hvis S og T er topologiske rum og f:S ind i T en kontinuert og surjektiv afbildning, kan det ene af rummene S og T være et Hausdorff-rum, uden at det andet er det. Det er klart, at et Hausdorff-rum tillige er et T_1-rum.

<u>Sætning</u> 7.62. Hvis rummet T i sætning 7.59 er et Hausdorff-rum, er grænsepunktet b éntydigt bestemt.

Bevis. Hvis $b, b_1 \in T$ begge er grænsepunkter for f i punktet a på mængden A, er begge de ved

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \setminus \{a\} \\ b & \text{for } x = a \end{cases} \qquad g_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \setminus \{a\} \\ b_1 & \text{for } x = a \end{cases}$$

definerede afbildninger $g: A \cup \{a\}$ ind i T kontinuerte i a. Lad os antage, at $b \neq b_1$. Vi kan da finde $U \in \grave{U}(b)$ og $V \in \grave{U}(b_1)$, således at $U \cap V = \emptyset$. Men $g^{-1}(U) \cap g_1^{-1}(V)$ er en omegn af a, og da a er fortætningspunkt for A, findes der et punkt $x \neq a$, således at $x \in A \cap g^{-1}(U) \cap g_1^{-1}(V)$, men så er $g(x) = g_1(x) = f(x) \in U \cap V$ i modstrid med, at $U \cap V = \emptyset$. Dermed har vi vist indirekte, at $b_1 = b$, og dermed er sætningen bevist.

Betydningen af begrebet Hausdorff-rum er, at det netop for Hausdorff-rum gælder, at grænsepunkter er éntydigt bestemt. Det er imidlertid ikke helt let at vise, at et topologisk rum med denne egenskab er et Hausdorff-rum.

Regnereglerne for afbildninger af et topologisk rum ind i $\grave{R}$ eller $\grave{C}$ udledes umiddelbart af regnereglerne for kontinuerte funktioner.

Definition 7.63. En punktmængde A i et topologisk rum T kaldes overalt tæt, hvis $\bar{A} = T$.

Eksempler. Hvis T er diskret, er T den eneste overalt tætte punktmængde på T. Hvis T er trivielt, er enhver ikke tom punktmængde på T overalt tæt. Endvidere er $\grave{Q}$ overalt tæt på $\grave{R}$, og det samme gælder mængden af rationale tal, der kan skrives som brøker med en potens af 2 i nævneren. I planen er mængden af punkter med rationale koordinater overalt tæt.

Sætning 7.64. Lad A være en overalt tæt punktmængde i et topologisk rum S, og lad f:S ind i T, hvor T er et T_1-rum, være en kontinuert afbildning. Hvis restriktionen af f til A er konstant, er A konstant.

Bevis. Af $f(A) = \{c\} \subseteq T$ følger $f(S) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{\{c\}} = \{c\}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7.65. Lad A være en overalt tæt punktmængde i et T_1-rum S, og lad f,g:S ind i T, hvor T er et Hausdorff-rum være kontinuerte afbildninger. Hvis restriktionerne af f og g til A er identiske, er $f = g$.

Bevis. Et vilkårligt punkt $b \in S \setminus A$ er fortætningspunkt for A, og da f og g er kontinuerte, er både f(b) og g(b) grænsepunkt for f og g i punktet b på punktmængden A, men da f og g har samme restriktion til A, giver sætning 7.62., at $f(b) = g(b)$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Lad a være et positivt tal. Vi ønsker at bestemme en kontinuert afbildning $\varphi:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$, således at $\varphi(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$ for alle hele p og alle $q \in \grave{N}$. Vi ved, at den ved $\varphi(x) = a^x$ definerede afbildning løser dette problem. Af sætning 7.65 følger, at problemet ikke har andre løsninger.

Udover adskillelsesaksiomerne T_1 og T_2 har man studeret et svagere og tre stærkere adskillelsesaksiomer, således at man alt i alt har en kæde $T_0,\dots,T_5$. Navnlig studiet af de stærke adskillelsesaksiomer fører til interessante resultater, men disse undersøgelser falder helt udenfor denne forelæsnings rammer.

En afbildning $\varphi:\grave{N}$ ind i S, hvor S er et topologisk rum, kaldes en punktfølge på S. Vi foretrækker, at behandle en følge som en familie af punkter og i overensstemmelse hermed bruger vi en notation $(a_n | n\in\grave{N})$, hvor $a_n = \varphi(n)$, og denne betegnelse vil vi altid afkorte til (a_n).

Definition 7.66. En følge (a_n) i et topologisk rum $S=(M,\grave{U})$ siges at konvergere mod grænsepunktet $a \in S$, såfremt

$$\forall U \in \grave{U}(a)\ \exists N \in \grave{N}\ \forall n \geqq N(a_n \in U).$$

Det er klart, at denne definition stemmer overnes med vore tidligere definitioner af konvergente følger i $\grave{R},\grave{R}^2,\grave{C},\grave{R}^*$ etc.

I generelle topologiske rum er punktfølgerne for specielle til at gøre større nytte. Vi skal imidlertid indføre en speciel klasse af topologiske rum, hvor punktfølger virkelig er til stor nytte.

Definition 7.67. Et topologisk rum $S = (M,\grave{U})$ siges at tilfredsstille første numerabilitetsaksiom, såfremt der eksisterer en omegnsbasis $\grave{B}$ med den egenskab, at $\grave{B}(a)$ for ethvert $a \in S$ er en højst numerabel mængde.

Hvis $\dot{B}(a) = \{U_n | n \in \dot{N}\}$, kan vi sætte $V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ og $\dot{B}_1(a) = \{V_n | n \in \dot{N}\}$ kan da også benyttes som omegnsbasis i punktet a. Vi kan derfor for hvert punkt i S vælge en omegnsbasis, der består af en aftagende følge af omegne.

<u>Sætning</u> 7.68. En afbildning $f: S$ ind i T hvor S og T er topologiske rum, og S tilfredsstiller første numerabilitetsaksiom, er kontinuert i et punkt $a \in S$, hvis og kun hvis det for enhver punktfølge (a_n) på S med grænsepunkt a gælder, at $(f(a_n))$ er konvergent med grænsepunkt $f(a)$.

Bevis. Lad os antage, at f er kontinuert i a, og at $(a_n) \to a$. Så er restriktionen af f til mængden $\{a\} \cup \{a_n | n \in \dot{N}\}$ ligeledes kontinuert, men det betyder netop, at $(f(a_n)) \to f(a)$. Lad os dernæst antage, at f ikke er kontinuert i a. Der findes da en omegn U af $f(a)$, således at $f^{-1}(U)$ ikke er en omegn af a. Lad nu (V_n) være en aftagende følge af omegne af a, som udgør en basis for omegnene af a. Da $f^{-1}(U)$ ikke har nogen omegn V_n som delmængde, kan vi for hvert $n \in \dot{N}$ vælge $a_n \in V_n \setminus \{f^{-1}(U)\}$. Så gælder $(a_n) \to a$, men ikke $(f(a_n)) \to f(a)$. Dermed er sætningen bevist.

Opgaver til kapitel 7.

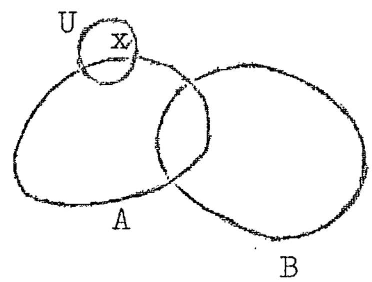
Indledning.

Hovedformålet med opgaverne til dette kapitel er at indøve de mange definitioner og begreber. Det er vigtigt at opnå en høj grad af fortrolighed med disse ting, så det ikke er nødvendigt at se efter i teksten, hver gang man møder et af begreberne.

Derfor er de fleste øvelsesopgaver til dette kapitel da også meget lette. Trods dette anbefales det at udarbejde besvarelserne af disse opgaver ganske ekstra omhyggeligt. Opgaverne vil være mere præget af ræsonnementer end af regneri, og derfor giver de en sund øvelse i at formulere matematik.

Det er fornuftigt ved den foreløbige behandling af disse opgaver at støtte sig til illustrationer. Demonstrer ved hjælp af "boller", hvordan mængder er "placeret" i forhold til hinanden. Lav diagrammer med pile, som illustrerer afbildninger, når der forekommer mere komplicerede systemer af sådanne.

Som eksempel vil vi bevise, at det for to punktmængder A og B i et topologisk rum S gælder, at randene for foreningsmængden $A \cup B$ og fællesmængden $A \cap B$ er delmængder af foreningsmængden af randene for A og B.



Vi tegner en skitse som vist. Den fås i hvert fald påstanden til at se sandsynlig ud. Men vi skulle jo gerne nå til et bevis.

Lad os først analysere, hvad det er, vi skal vise. Der er åbenbart to ting, idet påstanden naturligt deles i en påstand om randen af $A \cup B$ og en påstand om randen af $A \cap B$. Lad os da først studere randen af $A \cup B$. Det er vor opgave at vise, at ethvert randpunkt for $A \cup B$ er randpunkt for enten A eller B.

Lad os da se på et randpunkt x af $A \cup B$ og en omegn U af x. At x er randpunkt for $A \cup B$ betyder (for ethvert valg af U), at U indeholder punkter (mindst ét) af $C(A \cup B)$ og af $A \cup B$. Men et punkt af $C(A \cup B)$ tilhører både CA og CB. Et punkt af $A \cup B$ tilhører enten A eller B. Men så vil U enten indeholde punkter af A og CA eller af B og CB. Men dette gælder for enhver omegn U af x.

Vi prøver at skrive ræsonnementet omhyggeligt skridt for skridt. Vi bruger betegnelsen ∂A for randen af A.

Lad x være et punkt af $\partial(A \cup B)$.

Lad U være en omegn af x.

$\exists y \in U \cap C(A \cup B) = U \cap CA \cap CB$.

$\exists z \in U \cap (A \cup B) = (U \cap A) \cap (U \cap B)$.

$\exists y, z \in U((y \in CA \wedge z \in A) \vee (y \in CB \wedge z \in B))$.

Hvad var det, vi skulle vise?

$\forall x \in \partial(A \cup B)(z \in \partial A \vee x \in \partial B)$.

Hvis vi indfører definitionen af randpunkt, får vi

$$\forall x \in \partial(A \cup B)$$

$$((\forall U \in \grave{U}(x)\ \exists y, z \in U(y \in CA \wedge z \in A)) \vee$$

$$(\forall U \in \grave{U}(x)\ \exists y, z \in U(y \in CB \wedge z \in B)).$$

Vi har vist, at

$$\forall x \in \partial(A \cup B)$$

$$\forall U \in \dot{U}(x)((\exists y,z \in U(y \in CA \wedge z \in A)) \vee (\exists y,z \in U(y \in CB \wedge z \in B))).$$

Vi konstaterer altså, at vi ikke netop har bevist, hvad vi skulle. Men hvilket af de to udsagn er mon det stærkeste? Vi drømmer os tilbage til første gymnasieklasses undervisning i logik og henter et par analoge eksempler frem fra erindringen:

> Enten har alle pigerne i klassen lyst hår eller alle pigerne i klassen har brune øjne.
>
> Alle pigerne i klassen har enten lyst hår eller brune øjne.

Nu kan vi godt se, at det første udsagn er stærkere end det andet. Vi har altså bevist for lidt.

Vi har vist, at for enhver omegn U af x indeholder U et punkt af $CA \cap CB$ samt et punkt af enten A eller B. Vi skulle vise, at enten A eller B kan forekomme for alle valg af U på engang. Altså, at der ikke findes en omegn U_1, for hvilken A ikke kan bruges og en omegn U_2, for hvilken B ikke kan bruges, Hvis A ikke kan bruges for U_1, er $A \cap U_1 = \emptyset$, og hvis B ikke kan bruges for U_2 er $B \cap U_2 = \emptyset$. Men for $U = U_1 \cap U_2$ får vi så $A \cap U = B \cap U = \emptyset$, og det strider mod, hvad vi allerede har bevist.

Den stærkere påstand følger altså alligevel af den svagere-men ikke helt umiddelbart. Vi benyttede u4).

At sætte rettelsen på som en tilføjelse til vort oprindelige mislykkede bevis virker kejtet. Det er imidlertid nærliggende fra starten at betragte et punkt, der er randpunkt for $A \cup B$ men ikke for B. Vi prøver igen.

Lad x være et punkt af $\partial(A \cup B) \setminus \partial B$.

Enhver omegn af x indeholder punkter af $C(A \cup B) = CA \cap CB$, altså punkter af CB.

Da x ikke er randpunkt for B kan vi vælge en omegn U_o af x, så $U_o \cap B = \emptyset$.

Lad U være en omegn af x.

Ifølge u4) er $U \cap U_o$ en omegn af x.

Da x er randpunkt for $A \cup B$ indeholder $U \cap U_o$ punkter af $A \cup B$ og af $C(A \cup B) = CA \cap CB$.

Da U_o ikke indeholder punkter af B, medfører dette, at U indeholder punkter af A og af CA.

Dermed har vi vist, at $x \in \partial A$.

Nu har vi et rigtigt bevis for påstanden. Den anden påstand kan fås af den første ved overgang til komplementærmængden. Derved benyttes, at en mængde og dens komplementærmængde har samme rand.

Hvis vi var startet på en lidt anden måde var vi eventuelt kommet ind på et helt andet spor. Følgende idé er nærliggende:

Punkterne i S er dels indre, dels ydre, dels randpunkter for A og tilsvarende for B. Hvilke punkter kan nu være randpunkter for $A \cup B$. Et punkt, der er indre i A eller B, er åbenbart indre i $A \cup B$. Et punkt, der er ydre for både A og B, er er åbenbart ydre for $A \cup B$. Men alle de punkter, vi ikke har gjort rede for, er randpunkter for A eller B, og randpunkterne for $A \cup B$ må jo findes mellem disse resterende punkter. Dette er et helt rigtigt ræsonnement.

Læg mærke til, at den lumske fælde, vi faldt i ved det første ræsonnement, slet ikke komme til at genere os, hvis vi bruger det andet ræsonnement.

These are the times that
try men's souls.

Tom Payne.

Lette opgaver.

1. På en mængde M er givet en klasseinddeling. For $a \in M$ betegner vi med $\grave{U}(a)$ systemet af delmængder af M, som indeholder den klasse, der har a som element. Vis, at M derved organiseres som et topologisk rum.

2. En mængde $U \subseteq \grave{R}^2$ kaldes en omegn af $(a,b) \in \grave{R}^2$, såfremt der findes et positivt tal h, således at
$$U \supseteq \{(x,b) \in \grave{R}^2 \mid |x-a| < h\}.$$
Vis, at $\grave{R}^2$ derved organiseres som et topologisk rum.

3. Mængden $\grave{N}$ af naturlige tal organiseres som et omegnsrum, idet en delmængde af $\grave{N}$ kaldes en omegn af $a \in \grave{N}$, hvis den indeholder alle divisorer i a. Vis, at $\grave{N}$ derved organiseres som et topologisk rum.

4. Som opgave 3, idet dog "alle divisorer i a" ændres til "alle tal med a som divisor".

5. En mængde U i planen kaldes en omegn af et punkt a i planen, såfremt den indeholder et liniestykke med positiv længde og midtpunkt i a. Vis, at de således definerede omegne tilfrdsstiller betingelserne u1),...,u5) med undtagelse af u4).

6. Konstruer et omegnsrum, der tilfredsstiller u1),...,u5) med undtagelse af u3). (Det er meget let, men gør det nu ikke så indviklet. Det skal være enklere end eksemplet i opgave 5).

7. Samme opgave som nr.6, men for u5).

8. Lad M være en mængde med 2 elementer. Angiv alle topologiske rum med M som underliggende mængde.

9. Samme opgave for en mængde med 3 elementer.

10. Lad T være et topologisk rum, som kun omfatter endelig mange punkter. Lad $A \subseteq T$ være den delmængde, der omfatter de punkter, der ikke har T som eneste omegn. Vis, at A kan deles i klasser, således at hvert klasse X indeholder et punkt x, der har X som sin mindste omegn, og således at X ikke er ægte delmængde af nogen mængde med samme egenskab.

11. Lad M være en mængde, som ikke er endelig eller numerabel. Ved en omegn af $a \in M$ forstår vi en delmængde af M, som indeholder a, og hvis komplementærmængde er højst numerabel. Vis, at u1),...,u5) er opfyldt.

12. Vis, at en mængde i det i opgave 1 indførte topologiske rum er åben (afsluttet), hvis og kun hvis den netop er en foreningsmængde af klasser.

13. Vis, at i det i opgave 2 indførte topologiske rum er enhver foreningsmængde af rette linier parallelle med den første

koordinatakse både åben og afsluttet. Findes der andre åbne (afsluttede) mængder.

14. I det i opgave 3 indførte topologiske rum betragtes mængden af ulige tal. Angiv dens indre og dens afslutning. Fjern punktet 1 fra mængden og angiv, hvad dens indre og dens afslutning derefter bliver.

15. Angiv det indre og afslutningen, samt randen af følgende delmængder af $\mathbb{R}$ med den sædvanlige topologi: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $]0,1]$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

16. Som opgave 15, men for $\mathbb{R}^*$.

17. Angiv det indre, afslutningen og randen af følgende delmængde af $\mathbb{C}$ med den sædvanlige topologi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid \frac{2n-1}{2n} \leqq |z| < \frac{2n}{2n+1}\}.$$

18. Vis, at en åben mængde i et topologisk rum er delmængde af det indre af sin afslutning, og vis ved et eksempel, at der kan blive tale om en ægte delmængde.

19. Vis, at en afsluttet mængde i et topologisk rum indeholder afslutningen af sit indre, og vis ved et eksempel, at denne kan være en ægte delmængde.

20. Vis, at afslutningen af det indre af afslutningen af det indre af en punktmængde i et topologisk rum er identisk med

afslutningen af det indre.

21. Vis, at det indre af fællesmængden for to mængder i et topologisk rum er fællesmængden for de to mængders indre.

22. Vis, at det indre af foreningsmængden af to mængder i et topologisk rum indeholder foreningsmængden af de to mængders indre og vis ved et eksempel, at der kan blive tale om ægte delmængde.

23. Vis, at to mængder A og B i et topologisk rum tilfredsstiller relationerne

$$\overline{A \cup B} = \overline{A \cup \overline{B}} \quad \text{og} \quad \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup \overline{B}}.$$

24. Vis, at to mængder A og B i et topologisk rum tilfredsstiller relationerne

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cap \overline{B}} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Vis, at der findes mængder A og B på $\dot{R}$ med den sædvanlige topologi, for hvilke intet af lighedstegnene gælder.

25. En afbildning $f: J_1$ ind i J_2, hvor J_1 og J_2 er intervaller på $\dot{R}^*$, er monoton og surjektiv. Vis, at f er kontinuert.

26. Vis, at den ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x \text{ er irrational} \\ \frac{1}{q}, & \text{hvis } x = \frac{p}{q}, \text{ hvor } p \in \dot{Z},\ q \in \dot{N} \text{ og } \frac{p}{q} \text{ er uforkortelig} \end{cases}$$

definerede funktion $\varphi: \dot{R}$ ind i $\dot{Q}$ er diskontinuert i ethvert punkt af $\mathbb{Q}$, men kontinuert i ethvert punkt af $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

27. Lad $f:S$ ind i T være en kontinuert afbildning af det topologiske rum S ind i det topologiske rum T. Endvidere betragter vi en punktmængde $A \subseteq S$ og billedmængden $B = f(A)$. Vis, at ingen af følgende påstande gælder for alle valg af S, T, f og A:

$$f(\mathring{A}) \supseteq \mathring{B} \ , \ f(\mathring{A}) \subseteq \mathring{B}$$

$$f(\partial A) \supseteq \partial B \ , \ f(\partial A) \subseteq \partial B \ .$$

28. Vis, at ingen af følgende påstande gælder for enhver kontinuert afbildning $f:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$:

1). Billedet af en åben mængde er åben.

2). Billedet af en afsluttet mængde er afsluttet.

Derimod fremgår det af de fra gymnasiet kendte sætninger om kontinuerte funktioner på afsluttede intervaller, at billedet af en begrænset, afsluttet mængde er en begrænset afsluttet mængde.

29. Vis, at $f:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert, hvis og kun hvis $\{(x,f(x)) \mid x\in[a,b]\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$.

30. Vis, at $tg:\mathbb{Q}$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert. Udnyt, at π er et irrationalt tal.

31. Vis, at en delmængde af $\mathbb{R}$, som er både åben og afsluttet, er enten $\mathbb{R}$ eller $\emptyset$.

32. Angiv en delmængde af $\dot{Q}$, som er både åben og afsluttet, og som er forskellig fra $\emptyset$ og $\dot{Q}$.

33. Vis, at en afbildning af det i opgave 2 omtalte topologiske rum ind i et andet topologisk rum er kontinuert, hvis og kun hvis enhver af dens restriktioner til rette linier parallelle med den første koordinatakse er kontinuert.

34. Lad n være et naturligt tal. Med S_1 betegner vi mængden af divisorer i n! (inklusive 1 og n!) som delrum af det i opgave 3 betragtede topologiske rum og med S_2 den samme mængde som delrum af det i opgave 4 betragtede topologiske rum. Er den ved $\varphi(x) = \frac{n!}{x}$ definerede afbildning af S_1 ind i S_2 kontinuert, og er dens omvendte afbildning kontinuert ?

35. Vis, at den ved $\psi(x) = e^{ix}$ bestemte afbildning $\psi:[-\pi,\pi[$ ind i γ, hvor γ er enhedscirklen i den komplekse plan, er kontinuert og bijektiv. Vis, at den omvendte afbildning ikke er kontinuert.

36. Er de i opgaverne 2-4 indførte topologier finere eller grovere end de sædvanlige topologier på $\dot{R}^2$ og $\dot{N}$. Angiv den groveste (fineste) topologi på $\dot{N}$, som er finere (grovere) end begge de i opgave 3 og 4 indførte topologier.

37. Lad M være en mængde, $(S_j \mid j \in J)$ en familie af topologiske rum og $\varphi_j : S_j$ ind i M en familie af afbildninger. Vis, at der findes en fineste topologi på M, for hvilken alle af-

bildningerne φ_j er kontinuerte. Denne topologi kaldes den til afbildningerne φ_j svarende final-topologi på M.

38. Vis, at final-topologien (se opgave 37) på γ (se opgave 35) ved den ved $\psi(x) = e^{ix}$ bestemte afbildning $\psi:\mathring{R}$ ind i γ netop er delrumstopologien på γ.

39. Vis, idet vi benytter betegnelserne fra opgave 35, at en afbildning f:M ind i T, hvor T er et topologisk rum, og topologien på M er final-topologien bestemt ved afbildningerne φ_j, er kontinuert, hvis og kun hvis hver af de sammensatte afbildninger $f\circ\varphi_j:S_j$ ind i T er kontinuert.

40. Lad $(S_j \mid j\in J)$ være en familie af topologiske rum med den egenskab at for $j_1 \neq j_2$ er de underliggende mængder for S_{j_1} og S_{j_2} disjunkte. Vi sætter $S = \bigcup_{j\in J} S_j$ og med $\varphi_j:S_j$ ind i S betegner vi den ved $\varphi_j(x) = x$ definerede injektion. Vis, at finaltopologien på S ved afbildningerne φ_j er karakteriseret ved, at en delmængde af S er åben, hvis og kun hvis enhver af dens fællesmængder med et S_j er åben. Vis, at hvert S_j bliver en åben og afsluttet punktmængde på S. Rummet S kaldes det disjunkte foreningsrum af rummene S_j.

41. Vis, at den ved

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \text{ Arctg } \frac{x_2+x_3}{1+x_1^2}$$

definerede afbildning $\varphi:\mathring{R}^3$ ind i $\mathring{R}$ er kontinuert.

42. Vis, at den ved

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1}\operatorname{Arctg}\frac{1+x_3^2}{1+x_2^2} + \sin(x_1+x_3)$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1^3-x_2x_3+x_3^2}{1+x_1^4-2x_1^2x_2^2+x_2^4}$$

definerede afbildning $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2);\grave{R}^3$ ind i $\grave{R}^2$ er kontinuert.

43. Vis, at den ved

$$\varphi(x_1,x_2) = \begin{cases} \sqrt{(x_1^2+x_2^2)}\operatorname{Arctg}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{for } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{for} \quad (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

definerede afbildning $\varphi:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert.

44. Vis, at den ved $\varphi(z) = z^2$ definerede afbildning $\varphi:\grave{C}$ ind i $\grave{C}$ er kontinuert. Vis endvidere, at ethvert punkt af $\grave{C}\setminus\{0\}$ har en omegn, der afbildes homøomorft ved φ, medens ingen omegn af 0 afbildes homøomorft ved φ.

45. Undersøg, om de i opgaverne 2-4 indførte rum er T_1-rum, og om de er Hausdorff-rum.

46. Vis at mængden $\{x\in\grave{Z} \mid \frac{x-a}{n!} \in \grave{Z}\} = U_n(a)$ udgør en omegnsbasis for en topologi på $\grave{Z}$. Vis, at det således definerede rum er et Hausdorff-rum. Er følgen $(n!)$ konvergent?

47. Vi betragter delmængden

$$A = \{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{q_1}} +\dots+ \frac{1}{2^{q_p}} \,\Big|\, 0 < p < q_1 <\dots< q_p\}$$

af $\grave{R}$. Bestem fortætningsmængden A', dennes fortætningsmængde A'' o.s.v. . Det vil nok være nyttigt at forsøge at skitsere mængden på en talakse.

48. Lad I være et interval. Vis, at en voksende funktion $f\colon I$ ind i $\grave{R}$ har en grænseværdi fra venstre og en grænseværdi fra højre i hvert punkt af I. Vis, at mængden af diskontinuitetspunkter er højst numerabel.

49. Lad (a_n) være en følge af positive tal, for hvilken $\Sigma a_n < \infty$. Lad (b_n) være en følge af indbyrdes forskellige reelle tal. Vi sætter

$$f(x) = \sum_{b_n \leqq x} a_n.$$

Vis, at $f\colon\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er en monoton funktion, som er diskontinuert netop i punkterne b_n.

50. Et topologisk rum $T = (M, \grave{U})$ kaldes et T_o-rum, hvis følgende betingelse er opfyldt for ethvert par $x, y \in T$ af indbyrdes forskellige punkter:

$$(\exists U \in \grave{U}(x)(y \notin U)) \vee (\exists U \in \grave{U}(y)(x \notin U)).$$

Vis, at dette er ensbetydende med, at betingelsen

$$x \in \overline{\{y\}} \wedge y \in \overline{\{x\}}$$

ikke er opfyldt for noget par af forskellige punkter på T. Vis, at den ved

$$x \prec y \iff x \in \overline{\{y\}}$$

definerede relation $<$ på T er en ordningsrelation. Hvad kan yderligere siges om denne ordningsrelation, hvis T specielt er et T_1-rum.

51. Lad $T = (M, \grave{U})$ være et T_0-rum (se opgave 50) med den egenskab; at enhver fællesmængde af åbne mængder på T selv er åben. Vis, at en mængde $0 \subseteq T$ er åben, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall x \in 0 \quad \forall y \in T \; (x \prec y \Rightarrow y \in 0).$$

52. Lad M være en ordnet mængde. Ordningsrelationen skrives $\prec$. Vis, at der findes et topologiskrum $T = (M, \grave{O})$, hvor $\grave{O}$ er defineret ved

$$0 \in \grave{O} \Longleftrightarrow \forall x \in 0 \; \forall y \in M(x \prec y \Rightarrow y \in 0).$$

Vis dernæst, at

$$x \prec y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\}},$$

samt at $T = (M, \grave{O})$ er et T_0-rum med den egenskab, at enhver fællesmængde af åbne mængder er åben (sml. opgaverne 50 og 51).

53. Vis, at et T_1-rum, i hvilket enhver fællesmængde af åbne mængder er åben, er et diskret rum.

54. Lad T være et topologisk rum, der tilfredsstiller følgende betingelse: Til hvert punktpar (a,b), hvor $a, b \in T$ og $a \neq b$ findes en kontinuert funktion $\varphi_{a,b}$:T ind i $\grave{R}$, som tilfredsstiller betingelsen $\varphi_{a,b}(a) \neq \varphi_{a,b}(b)$. Vis, at T er et Hausdorff-rum.

55. Vis at restriktionerne af $\mathrm{Arg}:\mathring{C}\setminus\{0\}$ ind i $\mathring{R}$ til hver af de åbne halvplaner, hvori $\mathring{C}$ deles af den reelle akse, har grænseværdier i ethvert punkt af den reelle akse undtagen 0.

56. Undersøg, om den ved

$$f(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+(x^2+y^2)^2}$$

definerede afbildning $f:\mathring{R}^2\setminus\{0,0\}$ ind i $\mathring{R}$ har en grænseværdi i (0,0).

57. Samme spørgsmål som i opgave 56 for

$$f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+(x^2+y^2)^2} .$$

58. Et åbent interval af længde $k \in]0,1[$ anbringes som delinterval af $[0,1]$, så de to intervaller får fælles midtpunkt. På hvert af de to delintervaller, der bliver tilovers (altså $[0,\frac{1-k}{2}]$ og $[\frac{1+k}{2},1]$ anbringes åbne intervaller af længde $\frac{1}{3}k$, og igen således, at midtpunkt falder i midtpunkt. Hvis k er lille nok, vil der nu være 4 afsluttede delintervaller af $[0,1]$ tilovers, og midt på hvert af disse anbringes da delintervaller af længde $\frac{1}{9}k$ o.s.v. . Vis, at denne proces kan fortsættes i det uendelige, hvis og kun hvis $k \in]0,\frac{1}{3}]$. I dette tilfælde får vi en numerabel mængde af åbne intervaller anbragt som delintervaller af $[0,1]$, og disse udgør tilsammen en åben mængde, som vi vil betegne $O(k)$. Komplementærmængden $C(k) = [0,1]\setminus O(k)$ kaldes Cantors mængde. Her er altså $k \in]0,\frac{1}{3}]$.

Vis, at $O(k)$ er overalt tæt. Vis, at $C(k)$ ikke har indre punkter. Vis, at $C(k)$ heller ikke har isolerede punkter, altså at $C(k)$ er identisk med sin fortætningsmængde. Udregn den samlede længde af de delintervaller, hvoraf $O(k)$ er opbygget, udtryk ved k. Læg mærke til, at denne længde bliver 1 for $k = \frac{1}{3}$.

59. Vi benytter betegnelser fra opgave 58. Vis at der findes en voksende afbildning $\tilde{\varphi}: O(k)$ ind i $\dot{Q} \cap [0,1]$ med følgende egenskaber:

1). $\tilde{\varphi}$ er konstant på hvert delinterval.

2). For $n = 0,1,2,\ldots$ antager $\tilde{\varphi}$ på delintervallerne af længde $3^{-n}k$ netop værdierne $2^{-n-1}, 2^{-n-1}\cdot 3, 2^{-n-1}\cdot 5, \ldots, 2^{-n-1}\cdot(2^{n+1}-1)$.

Vi definerer nu for $x \in [0,1]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ \sup \tilde{\varphi}([0,x] \cap O(k)) & \text{for } x \in \,]0,1]. \end{cases}$$

Vis, at $\tilde{\varphi}$ er restriktionen af $\varphi: [0,1]$ ind i $\dot{R}$ til $O(k)$. Vis, at φ er voksende . Vis, at $\varphi([0,1]) = [0,1]$. Vis, at φ er kontinuert. Vis, at $\varphi(C(k)) = [0,1]$. Udled heraf, at $C(k)$ ikke er numerabel.

For $k = \frac{1}{3}$ ser vi specielt at en kontinuert funktion kan vokse fra 0 til 1 på intervallet $[0,1]$ og dog være konstant på intervaller med samlet længde 1.

60. Lad S være et topologisk rum, for hvilket første numerabilitetsaksiom gælder. Lad T være et Hausdorff-rum. Vis, at en afbildning f:S ind i T er kontinuert, hvis og kun hvis enhver restriktion af f til en numerabel delmængde af S er kontinuert.

61. Lad M være en vilkårlig mængde. Vis, at en afbildning f:M ind i $\grave{R}$ er begrænset, hvis og kun hvis enhver restriktion af f til en numerabel delmængde af M er begrænset.

Vanskeligere opgaver.

62. Lad $T = (M,\grave{U})$ være et topologisk rum og $(A_j \mid j \in J)$ en familie af afsluttede mængder. Det antages, at hvert $x \in T$ har en omegn U, således at $\{j \in J \mid U \cap A_j \neq \emptyset\}$ højst er endelig. Vis, at $\bigcup_{j \in J} A_j$ er en afsluttet mængde.

63. Lad T være det i opgave 3 indførte topologiske rum. Vi sætter

$$\varphi_1(p,q) = pq$$

$$\varphi_2(p,q) = \text{største fælles divisor for } p \text{ og } q.$$

$$\varphi_3(p,q) = \text{mindste fælles multiplum af } p \text{ og } q.$$

Hvilke af afbildningerne $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : T \times T$ ind i T er kontinuerte ?

64. Lad A og B være punktmængder i et topologisk rum T. Vis, at afslutningen af $A \cap B$ relativt til delrummet A er en

delmængde af $A \cap \overline{B}$, og vis ved et eksempel, at det kan være en ægte delmængde, selv om A er afsluttet.

65. En punktmængde A i et topologisk rum $T = (M, \grave{U})$ kaldes lokalt afsluttet, hvis hvert punkt $x \in T$ har en omegn U, således at $U \cap A$ er afsluttet relativt til U. Vis, at en mængde er lokalt afsluttet, hvis og kun hvis den er fællesmængde for en afsluttet og en åben mængde. Vis ved eksempler, at komplementærmængden til en lokalt afsluttet mængde ikke altid er lokalt afsluttet, og at foreningsmængden af to lokalt afsluttede mængder ikke altid er lokalt afsluttet. Hvad gælder om fællesmængden ?

66. Lad T_1 og T_2 være topologiske rum og $A_1 \subseteq T_1$, $A_2 \subseteq T_2$ vilkårlige punktmængder. Vis relationen

$$\partial(A_1 \times A_2) = \partial A_1 \times A_2 + A_1 \times \partial A_2,$$

idet $A_1 \times A_2$ betragtes som punktmængde i $T_1 \times T_2$.

67. Vis for et vilkårligt produktrum, at afslutningen af et produkt af en mængde fra hvert koordinatrum er produktet af afslutningerne .

68. En ækvivalensrelation på et topologisk rum T kaldes afsluttet (åben), hvis det for enhver afsluttet (åben) punktmængde $A \subseteq T$ gælder, at foreningsmængden af de ækvivalensklasser, der har punkter fælles med A, er afsluttet (åben). Undersøg om den ved $x \sim y \iff y-x \in \grave{Z}$ definerede ækvivalensrelation på $\grave{R}$ er afsluttet (åben). Samme spørgsmål for dens restriktion til $[0,1]$.

69. Vis, at enhver mængde i et T_1-rum er fællesmængde af åbne mængder og foreningsmængde af afsluttede mængder. Vis på den anden side, at et topologisk rum T er et T_1-rum, hvis enhver mængde, der består af kun ét punkt, er fællesmængde for åbne mængder. Vis, at et topologisk rum er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis enhver mængde, der består af kun ét punkt, er fællesmængden af de afsluttede omegne af dette punkt.

70. Vis, at et topologisk rum T er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis diagonalen $\{(x,x) \mid x \in T\}$ er en afsluttet punktmængde i $T \times T$.

71. Vi organiserer $\dot{N}^* = \dot{N} \cup \{\infty\}$ som et omegnsrum S ved følgende definitioner: Omegn af et lige tal er enhver mængde, der indeholder tallet; omegn af et ulige tal x er enhver mængde, der indeholder x samt en delmængde af formen $\{2^{p+k}x \mid k \in \dot{N}\}$ for en passende værdi af p; omegn af ∞ er enhver mængde der indeholder ∞ samt en delmængde af formen $\{2^{p+k}(2p+2j+1) \mid j,k \in \dot{N}\}$ for en passende værdi af p. Vis, at S er et Hausdorff-rum. Vis, at mængden af ulige tal er afsluttet. Vis, at enhver åben mængde, der har mængden af ulige tal som delmængde, har punkter fælles med enhver omegn af ∞.

Et topologisk rum, i hvilken en afsluttet mængde A og et punkt $a \notin A$ altid kan indesluttes i hver sin åbne mængde, så de åbne mængder har tom fællesmængde, kaldes et T_3-rum. Opgaven giver et eksempel på et Hausdorff-rum, der ikke er T_3-rum. Et rum, der er både T_1-rum og T_3-rum, er Hausdorff-rum (bevis det!) og kaldes regulært. Det er ikke svært at finde et eksempel på et T_3-rum, der ikke er T_1-rum (prøv!).

72. Vis, at et topologisk rum er et T_3-rum (se opgave 71), hvis og kun hvis de afsluttede omegne udgør en omegnsbasis.

73. Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $\grave{\Sigma}$ være et system af delmængder af M. Lad $\grave{U}$ være systemet af åbne omegne af 0 i $\grave{C}$. Med $\hat{F}(M,\grave{C})$ betegner vi mængden af afbildninger f:M ind i $\grave{C}$. For $A \in \grave{\Sigma}$, $0 \in \grave{U}$ og $f \in \hat{F}(M,C)$ sætter vi

$$U_{A0}(f) = \{g \in \hat{F}(M,\grave{C}) \mid \forall x \in A(g(x) - f(x) \in 0)\}$$

og for $f \in \hat{F}(M,\grave{C})$ sætter vi

$$\grave{B}(f) = \{U_{A0}(f) \mid A \in \grave{\Sigma} \wedge 0 \in \grave{0}\}.$$

Vis, at $\grave{B}$ er omegnsbasis for en topologi på $\hat{F}(M,\grave{C})$. Vis, at $\hat{F}(M,\grave{C})$ med denne topologi bliver et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis $\grave{\Sigma}$ er en overdækning af M.

Den her indførte topologi på $\hat{F}(M,\grave{C})$ kaldes ofte $\grave{\Sigma}$- åben-topologien. Hvis $\grave{\Sigma}$er systemet af alle endelige delmængder, kaldes den endelig-åben-topologien. At $(f_n) \to f$ i endelig-åben-topologien er ensbetydende med, at (f_n) konvergerer punktvis mod f(bevis det!). For $M \in \grave{\Sigma}$ bliver $\grave{\Sigma}$-åben-topologien finest mulig (bevis det!) og det tilsvarende konvergensbegreb bliver ligelig konvergens på M (bevis det, når M er et interval på $\grave{R}$).

Svære opgaver.

74. Vis, at en afsluttet delmængde af $\grave{R}$ uden isolerede punkter ikke er numerabel. Anderledes udtrykt: Enhver numerabel, afsluttet delmængde af $\grave{R}$ har et isoleret punkt.

75. Vis, at den sædvanlige topologi på $\grave{R}^2$ er den eneste topologi på $\grave{R}^2$, som sikrer, at følgende tre betingelser alle er opfyldt:

    1) Vektoraddition er en kontinuert afbildning af $\grave{R}^2 \times \grave{R}^2$ ind i $\grave{R}^2$.

    2) Multiplikation af vektor med reelt tal er en kontinuert afbildning af $\grave{R}^2 \times \grave{R}$ ind i $\grave{R}$.

    3) $\grave{R}^2$ er et Hausdorff-rum.

Es ist etwas Ähnliches, sich in einer Stadt und in einem Wissensgebiet auszukennen: Man muss von jedem gegebenen Punkt zu jedem anderen gelangen können. Man kennt sich noch besser aus, wenn man sofort den bequemsten oder den schnellsten Weg von einem Punkt zum anderen einzuschlagen vermag.

G. Polya. G. Szegö .

Kapitel 8.

Metriske rum.

Et metrisk rum har en mere specialiseret struktur end et topologisk rum. Den metriske struktur frembringer en topologi på rummet, og det bliver en topologi med særlig kønne egenskaber. Eksempelvis gælder alle adskillelsesaksiomerne samt første tællelighedsaksiom. Vi går straks i gang med de første definitioner.

<u>Definition</u> 8.1. Lad M være en vilkårlig mængde. En afbildning dist: $M \times M$ ind i $\mathring{R}$ kaldes en afstandsfunktion på M, når følgende betingelser er opfyldt.

d1). $\forall x \in M \ (\mathrm{dist}(x,x) = 0)$

d2). $\forall x,y \in M(x \neq y \Rightarrow \mathrm{dist}(x,y) > 0)$

d3). $\forall x,y \in M(\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{dist}(y,x))$

d4). $\forall x,y,z \in M(\mathrm{dist}(x,z) \leqq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z))$.

Parret $T = (M,\mathrm{dist})$ kaldes da et metrisk rum.

Betingelsen d4) kaldes trekantuligheden.

Sætning 8.2. Afstandsfunktionen dist opfylder betingelserne

$$\forall x,y,z \in M(\mathrm{dist}(x,z) \geqq |\mathrm{dist}(x,y) - \mathrm{dist}(y,z)|)$$

$$\forall x_1,\ldots,x_n \in M(\mathrm{dist}(x_1,x_n) \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{dist}(x_k,x_{k+1}).$$

Bevis. Lad x,y,z være punkter af M. Af d3) og d4) følger da umiddelbart

$$\mathrm{dist}(x,y) - \mathrm{dist}(y,z) \leqq \mathrm{dist}(x,z)$$

$$\mathrm{dist}(y,z) - \mathrm{dist}(x,y) \leqq \mathrm{dist}(x,z),$$

og dermed er den første påstand bevist. Den anden fås ved at summere ulighederne

$$\mathrm{dist}(x_1,x_{k+1}) \leqq \mathrm{dist}(x_1,x_k) + \mathrm{dist}(x_k,x_{k+1})$$

for $k = 1,\ldots,n-1$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempler. $\grave{R}, \grave{R}^2, \grave{R}^3$ og $\grave{C}$ er metriske rum med den sædvanlige afstand som afstandsfunktion. Enhver mængde M kan organiseres som et metrisk rum med afstandsfunktionen defineret ved

$$\mathrm{dist}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x \neq y \\ 0 & \text{for} \quad x = y \,. \end{cases}$$

Et metrisk rum med denne afstandsfunktion kaldes et diskret metrisk rum.

Mængden M kaldes den underliggende mængde for det metriske rum T = (M,dist). Vi siger punkt af T i stedet for element i M. Vi siger punktmængde i T i stedet for delmængde af M. Tilsvarende vil vi også bruge de andre geometrisk prægede vendinger, som vi brugte for de topologiske rum.

<u>Definition</u> 8.3. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum, $a \in T$ et vilkårligt punkt og r et positivt tal. Punktmængden

$$K(a,r) = \{x \in T \mid \mathrm{dist}(a,x) < r\}$$

kaldes kugleomegnen af a med radius r.

Eksempler. I $\grave{R}$ bliver $K(a,r)$ det åbne interval med midtpunkt a og længde 2r. I $\grave{R}^2$ og $\grave{C}$ bliver det cirkelskiven med centrum a og radius r, medens det i $\grave{R}^3$ bliver kuglen med centrum a og radius r. I det diskrete rum indeholder $K(a,r)$ for $r \leq 1$ kun punktet a, medens $K(a,r)$ for $r > 1$ omfatter hele rummet.

<u>Sætning</u> 8.4. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum. Hvis kugleomegnene $K(a_1, r_1)$ og $K(a_2, r_2)$ har en ikke tom fællesmængde, er $\mathrm{dist}(a_1, a_2) < r_1 + r_2$.

Bevis. For $x \in K(a_1, r_1) \cap K(a_2, r_2)$ får vi

$$\mathrm{dist}(a_1, a_2) \leq \mathrm{dist}(a_1, x) + \mathrm{dist}(a_2, x) < r_1 + r_2 .$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. I de velkendte rum $\grave{R}, \grave{R}^2, \grave{R}^3$ og $\grave{C}$ gælder den omvendte implikation. På den anden side vil to kugleomegne med forskelligt centrum i et diskret metrisk rum og med radius 1 åbenbart tilfredsstille uligheden uden at have punkter fælles.

<u>Sætning</u> 8.5. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum, $K(a,r)$ en kugleomegn i T, og b et punkt af denne kugleomegn. Da gælder

$$K(b, r - \mathrm{dist}(a,b)) \subseteq K(a,r).$$

Bevis. Under de anførte betingelser er $\mathrm{dist}(a,b) < r$, så $K(b, r - \mathrm{dist}(a,b))$ eksisterer. For $x \in K(b, r - \mathrm{dist}(a,b))$ er

$$\mathrm{dist}(a,x) \leq \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,x) < r.$$

Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. I rummene $\grave{R}, \grave{R}^2, \grave{R}^3$ og $\grave{C}$ er r - dist(a,b) radius i den største kugle med centrum b, som helt er indeholdt i K(a,r). I et diskret metrisk rum vil en kugleomegn med radius > 1 omfatte hele rummet og dermed helt indeholde alle andre kugler.

Sætning 8.6. Kugleomegnene i et metrisk rum er omegnsbasis for en topologi.

Bevis. Lad T = (M,dist) være et metrisk rum. For $a \in T$ findes kugleomegnen K(a,r) for ethvert $r > 0$, og alle disse kugleomegne indeholder a. For $r_1 \leq r_2$ er $K(a,r_1) \cap K(a,r_2) = K(a,r_1)$. Dermed har vi vist, at betingelserne b1), b2) og b4) er opfyldt. For $b \in K(a,r)$ eksisterer der ifølge sætning 8.5 en kugleomegn $K(b,r_1) \subseteq K(a,r)$. Altså er også b5) opfyldt.

Definition 8.7. Lad T = (M,dist) være et metrisk rum. Den topologi på M, der har kugleomegnene som omegnsbasis, kaldes den af afstandsfunktionen dist indicerede topologi på M. Mængden M med denne topologi kaldes for kortheds skyld det topologiske rum T = (M,dist) eller(mere korrekt) det underliggende topologiske rum til T = (M,dist).

Ved at gå over til det topologiske rum T = (M,dist) ser vi bort fra en væsentlig del af strukturen på det metriske rum T = (M,dist). Vi vil imidlertid alligevel have samtlige resultater fra kapitel 7 til rådighed. I det følgende skal vi derfor i det væsentlige beskæftige os med de resultater vi kan opnå ved at udnytte den yderligere struktur, der foreligger på det metriske rum. Først vil vi dog vise, at T = (M,dist) er et særlig "pænt" topologisk rum.

Sætning 8.8. Det topologiske rum $T = (M,\mathrm{dist})$ er et Hausdorff-rum, for hvilket det første numerabilitetsaksiom gælder.

Bevis. Hvis a_1 og a_2 er forskellige punkter af T og r_1, r_2 er positive tal, som tilfredsstiller $r_1+r_2 < \mathrm{dist}(a_1,a_2)$, vil $K(a_1,r_1)$ og $K(a_2,r_2)$ ifølge sætning 8.4 have tom fællesmængde. Altså er T er Hausdorff-rum. Enhver kugleomegn $K(a,r)$ indeholder $K(a,\frac{1}{n})$ for $n \in \mathbb{N}$, $n > r^{-1}$. Altså udgør kuglerne $K(a,\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ en omegnsbasis for punktet a. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8.9. Enhver kugleomegn i et metrisk rum $T = (M,\mathrm{dist})$ er en åben mængde i det topologiske rum $T = (M,\mathrm{dist})$, og enhver åben mængde er foreningsmængde af kugleomegne.

Bevis. Sætning 8.5 viser, at ethvert punkt i kugleemegnen $K(a,r)$ er et indre punkt, altså, at $K(a,r)$ er en åben mængde. Hvis O er en åben mængde, kan vi for hvert $x \in O$ vælge $r(x) > 0$, således at $K(x,r(x)) \subseteq O$, og så får vi åbenbart $O = \bigcup_{x \in O} K(x,r(x))$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 8.10. Lad A og B være punktmængder i et metrisk rum $T = (M,\mathrm{dist})$. Tallet

$$\inf\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

kaldes afstanden mellem A og B og betegnes $\mathrm{dist}(A,B)$. For $A = \{a\}$ kaldes $\mathrm{dist}(\{a\},B)$ også afstanden mellem punktet a og mængden B, og den betegnes $\mathrm{dist}(a,B)$ eller $\mathrm{dist}(B,a)$.

Eksempel. I $\mathbb{R}^2$ har punktmængderne

$$\{(x,y) \mid xy = 0\} \quad \text{og} \quad \{(x,y) \mid xy = 1\}$$

(tegn dem!) afstanden 0. De er begge afsluttede, og de har ingen fællespunkter.

Det er klart, at den således indførte afstand mellem mængder altid vil opfylde betingelserne $\mathrm{dist}(A,B) \geq 0$ og $\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}(B,A)$. For $A \cap B \neq \emptyset$ er $\mathrm{dist}(A,B) = 0$. For $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ er $\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}(a,b)$. For afstand mellem mængder gælder der ikke nogen relation, som svarer til trekantsuligheden.

<u>Sætning</u> 8.11. For et metrisk rum $T = (M,\mathrm{dist})$ gælder

$$\forall a \in T\ \forall A \subseteq T(\mathrm{dist}(a,A) = 0 \iff a \in \overline{A}).$$

Bevis. Lad a være et punkt af T og A en delmængde af T. At $\mathrm{dist}(a,A) > 0$ er ensbetydende med, at der findes et positivt tal r, således at $K(a,r) \cap A = \emptyset$. Men det er ensbetydende med, at a er et ydre punkt for A. Altså er $\mathrm{dist}(a,A) = 0$ ensbetydende med, at a ikke er et ydre punkt for A, altså med $a \in \overline{A}$. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 8.12. Lad $T = (M,\mathrm{dist})$ være et metrisk rum og $A \subseteq M$ en vilkårlig delmængde. Det metriske rum, hvis underliggende mængde er A, og hvis afstandsfunktion er restriktionen af dist til $A\times A$, kaldes det metriske delrum A af T (eller blot delrummet A af T).

Det er helt indlysende, at betingelserne d1),...,d4) bevares ved restriktion til $A\times A$, således at restriktionen af dist virkelig er en afstandsfunktion.

<u>Sætning</u> 8.13. Topologien på det metriske delrum $A \subseteq T = (M,\mathrm{dist})$ er identisk med delrumstopologien på A opfattet som delrum af det topologiske rum T.

Bevis. En kugleomegn med centrum a og radius $r > 0$ i det metriske delrum A er netop $A \cap K(a,r)$, altså en omegn i det topologiske delrum A. En omegn U af a i det topologiske delrum A har formen $U = A \cap V$, hvor V er en omegn af a i rummet T. Men så indeholder V en kugleomegn $K(a,r)$, og deraf følger, at U indeholder $A \cap K(a,r)$, hvilket er en omegn i det metriske delrum A. Altså er U en omegn af a i det metriske delrum A. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Afstandsfunktionen på $\grave{R}$ er givet ved $\mathrm{dist}(x,y) = |y-x|$. Den samme definition kan altså bruges på enhver delmængde af $\grave{R}$, f.eks. på ethvert interval og på $\grave{Q}, \grave{Z}, \grave{N}$ etc. Vi bemærker, at $\grave{Z}$ ikke er et diskret metrisk rum, selv om $\grave{Z}$ er et diskret topologisk rum.

<u>Sætning</u> 8.14. Lad $T_1 = (M_1, \mathrm{dist}_1)$ og $T_2 = (M_2, \mathrm{dist}_2)$ være metriske rum. En afbildning $f: T_1$ ind i T_2 er kontinuert i $a \in T_1$, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in T_1 (\mathrm{dist}_1(a,x) < \delta \Rightarrow \mathrm{dist}_2(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

Bevis. Den sidste del af betingelsen, startende med $\forall x$, udtrykker, at kuglen $K_1(a,\delta)$ i rummet T_1 afbildes ind i kuglen $K_2(f(a),\varepsilon)$ i rummet T_2, altså at $f^{-1}(K_2(f(a),\varepsilon)) \supseteq K_1(a,\delta)$. Hele betingelsen udtrykker derfor, at enhver omegn af $f(a)$ som originalmængde har en omegn af a. Dermed er sætningen bevist.

Betingelsen for, at $f: T_1$ ind i T_2 er kontinuert, fås altså ved helt til venstre i betingelsen i sætning 8.14 at tilføje $\forall a \in T_1$.

<u>Definition</u> 8.15. To metriske rum $T_1 = (M, \mathrm{dist}_1)$ og $T_2 = (M, \mathrm{dist}_2)$ kaldes ækvivalente, hvis de underliggende topologiske rum er identiske, og afstandsfunktionerne dist_1 og dist_2 kaldes da også ækvivalente.

Det er klart, at "ækvivalent med" virkelig bliver en ækvivalensrelation i begge tilfælde. Det er selvfølgelig væsentligt, at T_1 og T_2 har samme underliggende mængder.

<u>Sætning</u> 8.16. Lad $T_1 = (M, dist_1)$ og $T_2 = (M, dist_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde. Nødvendigt og tilstrækkeligt, for at topologien på T_2 er finere end topologien på T_1, er, at følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall a \in M \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0(K_1(a,r) \supsetneq K_2(a,s)),$$

idet $K_1(a,r)$ er en kugle i T_1, medens $K_2(a,s)$ er en kugle i T_2. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at T_1 og T_2 er ækvivalente, er, at ovenstående betingelse er opfyldt tillige med betingelsen

$$\forall a \in M \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0(K_2(a,r) \supsetneq K_1(a,s)).$$

Bevis. Den første betingelse udtrykker, at enhver kugleomegn (og dermed enhver omegn) i T_1 er en omegn i T_2, altså, at T_2 er finere end T_1. At begge betingelser er opfyldt er derfor ensbetydende med at topologien på T_2 er finere end topologien på T_1, og at topologien på T_1 er finere end topologien på T_2, altså, at de to topologiske rum er helt identiske.

Eksempel. Det metriske rum $\grave{Z}$ er ækvivalent med $\grave{Z}$ med den diskrete metrik.

Vi skal nu beskæftige os med spørgsmålet om produkt af to metriske rum $T_1 = (M_1, dist_1)$, $T_2 = (M_2, dist_2)$. For elementerne i $M_1 \times M_2$ vil vi benytte de afkortede betegnelser $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{y} = (y_1, y_2)$ etc.

<u>Sætning</u> 8.17. Lad $T_1 = (M_1, dist_1)$, $T_2 = (M_2, dist_2)$ være metriske rum. Vi sætter

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{((\mathrm{dist}_1(x_1,y_1))^2 + (\mathrm{dist}_2(x_2,y_2))^2)}$$

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{\mathrm{dist}_1(x_1,y_1),\ \mathrm{dist}_2(x_2,y_2)\}$$

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{dist}_1(x_1,y_1) + \mathrm{dist}_2(x_2,y_2).$$

Så er dist, dist' og dist" indbyrdes ækvivalente afstandsfunktioner på $M_1 \times M_2$ og den fælles topologi på $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist})$, $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist}')$ og $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist}'')$ er topologien på det topologiske produktrum $T_1 \times T_2$.

Bevis. Det er klart, at dist, dist' og dist" tilfredsstiller d1), d2) og d3). Vi skal vise, at dist tilfredsstiller d4). Det bliver et kedsommeligt regnestykke, men her er det altså:

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{z}) = \sqrt{((\mathrm{dist}_1(x_1,z_1))^2 + (\mathrm{dist}_2(x_2,z_2))^2)} \leq$$

$$\sqrt{((\mathrm{dist}_1(x_1,y_1) + \mathrm{dist}_1(y_1,z_1))^2 + (\mathrm{dist}_2(x_2,y_2) + \mathrm{dist}_2(y_2,z_2))^2)} =$$

$$\sqrt{((\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}))^2 + (\mathrm{dist}(\underline{y},\underline{z}))^2 +}$$

$$2(\mathrm{dist}_1(x_1,y_1)\mathrm{dist}_1(y_1,z_1) + \mathrm{dist}_2(x_2,y_2)\mathrm{dist}_2(y_2,z_2))).$$

Nu sætter vi for kortheds skyld

$$a_1 = \mathrm{dist}_1(x_1,y_1),\ b_1 = \mathrm{dist}_1(y_1,z_1),\ a_2 = \mathrm{dist}_2(x_2,y_2),$$

$$b_2 = \mathrm{dist}_2(y_2,z_2),$$

og benytter vurderingen

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2)} =$$

$$\sqrt{((a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_2-a_2b_1)^2)} \leq \sqrt{((a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}.$$

Derved får vi

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{z}) \leqq$$

$$\sqrt{((\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}))^2 + (\mathrm{dist}(\underline{y},\underline{z}))^2 + 2\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y})\mathrm{dist}(\underline{y},\underline{z}))} =$$

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) + \mathrm{dist}(\underline{y},\underline{z}),$$

og dermed har vi vist, at dist tilfredsstiller trekantsuligheden.

Det går lettere at vise, at dist' tilfredsstiller trekantsuligheden:

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{z}) = \sup\{\mathrm{dist}_1(x_1,z_1),\ \mathrm{dist}_2(x_2,z_2)\} \leqq$$

$$\sup\{\mathrm{dist}_1(x_1,y_1) + \mathrm{dist}_1(y_1,z_1),\ \mathrm{dist}_2(x_2,y_2) + \mathrm{dist}_2(y_2,z_2)\} \leqq$$

$$\sup(\{\mathrm{dist}_1(x_1,y_1),\mathrm{dist}_2(x_2,y_3)\} + \{\mathrm{dist}_1(y_1,z_1),\mathrm{dist}_2(y_2,z_2)\}) =$$

$$\sup\{\mathrm{dist}_1(x_1,y_1),\mathrm{dist}_2(x_2,y_2)\} + \sup\{\mathrm{dist}_1(y_1,z_1),\mathrm{dist}_2(y_2,z_2)\} =$$

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) + \mathrm{dist}'(\underline{y},\underline{z}).$$

At trekantsuligheden gælder for dist" er helt trivielt. Vi har således vist, at dist, dist' og dist" er afstandsfunktioner på $M_1 \times M_2$. Vi bemærker nu, at de tre afstandsfunktioner tilfredsstiller ulighederne

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) \leqq \mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) \leqq \mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) \leqq 2\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}).$$

Heraf følger at en kugle med centrum $\underline{a}$ og radius r svarende til en af afstandsfunktionerne vil indeholde kuglen med centrum $\underline{a}$ og radius $\frac{1}{2}r$ svarende til enhver af de andre afstandsfunktioner. Af sætning 8.16 følger derfor, at de tre afstandsfunktioner er indbyrdes ækvivalente. De svarer altså til den samme topologi på $M_1 \times M_2$. Vi mangler derfor blot at vise, at dist' svarer til produktrumstopologien.

En kugleomegn $K'(\underline{a},r)$ svarende til dist' er åbenbart netop givet ved

$$K'(\underline{a},r) = K_1(a_1,r_1) \times K_2(a_2,r_2),$$

og er derfor en omegn af $\underline{a}$ i produktrumstopologien. En omegn U af $\underline{a}$ i produktrumstopologien indeholder en basisomegn af formen $U_1 \times U_2$, hvor U_1 er en omegn af a_1 i T_1 og U_2 er en omegn U_2 af a_2 i T_2. Men så findes der et tal $r > 0$, således at $K_1(a_1,r) \subsetneq U_1$ og $K_2(a_2,r) \subsetneq U_2$, og vi får

$$U \supsetneq K_1(a_1,r) \times K_2(a_2,r) = K'(\underline{a},r).$$

Altså er U en omegn af $\underline{a}$ i den topologi, der svarer til dist'. Dermed er sætningen bevist.

Idet vi udnytter den naturlige homøomorfi mellem produktrummene $T_1 \times \ldots \times T_n$ og $(T_1 \times \ldots \times T_{n-1}) \times T_n$, udvides sætningen umiddelbart ved induktion til produkter af n metriske rum

$$T_j = (M_j, \mathrm{dist}_j), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Vi får i dette tilfælde, at topologien i produktrummet svarer til tre indbyrdes ækvivalente afstandsfunktioner dist, dist' og dist" som for $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ defineres ved

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{dist}_j(x_j,y_j))^2}$$

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{\mathrm{dist}_j(x_j,y_j) \mid j \in \{1,\ldots,n\}\}$$

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{dist}_j(x_j,y_j).$$

Produktrummet $T = (M_1 x \ldots x M_n, \mathrm{dist})$ kaldes det Euklidiske produkt af $T_1,\ldots,T_n$.

Det n-dimensionale talrum er produktrummet $\grave{R}^n = \grave{R}\times\ldots\times\grave{R}$ (n faktorer). Som metrisk rum er det organiseret ved afstandsfunktionen dist, defineret ved

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{((y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2)},$$

men det er ækvivalent med de metriske rum, der fås ved at benytte afstandsfunktionerne

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{|y_1-x_1|,\ldots,|y_n-x_n|\}$$

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) = |y_1-x_1|+\ldots+|y_n-x_n|.$$

Ved kontinuitetsundersøgelser for afbildninger fra eller ind i $\grave{R}^n$ kan man altså frit vælge den af de tre afstandsfunktioner, det i det foreliggende tilfælde er mest bekvemt at arbejde med.

<u>Definition</u> 8.18. Lad $T_1 = (M_1,\mathrm{dist}_1)$ og $T_2 = (M_2,\mathrm{dist}_2)$ være metriske rum. En afbildning $f:T_1$ ind i T_2 kaldes afstandsformindskende, hvis den tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x,y \in T_1(\mathrm{dist}_2(f(x),f(y)) \leqq \mathrm{dist}_1(x,y)).$$

Hvis lighedstegnet gælder for alle x og y, kaldes afbildningen isometrisk.

Vigtige eksempler på afstandsformindskende afbildninger er projektionerne af det n-dimensionale talrum på et koordinatunderrum, f.eks. den ved

$$p(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_q), \quad q < n$$

definerede afbildning $p:\grave{R}^n$ på $\grave{R}^q$. Særligt vigtige er projektionerne $p_j:\grave{R}^n$ på $\grave{R}$, som defineres ved

$$p_j(x_1,\ldots,x_n) = x_j$$

for $j = 1,\ldots,n$.

Sætning 8.19. Enhver afstandsformindskende afbildning er kontinuert. Enhver isometrisk afbildning er kontinuert og injektiv. Hvis en isometrisk afbildning er surjektiv, er den en homøomorfi.

Bevis. Hvis $f: T_1$ ind i T_2 er afstandsformindskende, opfyldes kontinuitetsbetingelsen i sætning 8.14 ved valget $\delta = \varepsilon$. En isometrisk afbildning er afstandsformindskende og derfor kontinuert. Hvis f er isometrisk og $f(x) = f(y)$ er $\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{dist}(f(x),f(y)) = 0$, altså $x = y$. Altså er f injektiv. Hvis f tillige er surjektiv, findes der en omvendt afbildning f^{-1}, og det er klart, at f^{-1} også er isometrisk og dermed kontinuert. Altså er f en homøomorfi. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8.20. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum. Da er $\mathrm{dist}: T\times T$ ind i $\dot{R}$ en kontinuert afbildning.

Ifølge sætning 8.17 svarer topologien på $T\times T$ til afstandsfunktionen dist" defineret ved

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) = \mathrm{dist}(x_1,y_1) + \mathrm{dist}(x_2,y_2)$$

for $\underline{x} = (x_1,x_2)$, $\underline{y} = (y_1,y_2)$. Vor sætning vil følge af sætning 8.19, hvis det lykkes os at vise, at dist er afstandsformindskende, når dist" benyttes som afstandsfunktion på $T\times T$. Nu er

$$\mathrm{dist}(x_1,x_2) \leqq \mathrm{dist}(x_1,y_1) + \mathrm{dist}(y_1,y_2) + \mathrm{dist}(x_2,y_2) =$$

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) + \mathrm{dist}(y_1,y_2),$$

så får vi

$$\mathrm{dist}(x_1,x_2) - \mathrm{dist}(y_1,y_2) \leqq \mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) .$$

Hvis vi foretager den samme regning med rollerne byttet for x og y, får vi

$$\mathrm{dist}(y_1,y_2) - \mathrm{dist}(x_1,x_2) \leqq \mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}),$$

og de to uligheder er netop ensbetydende med, at

$$|\mathrm{dist}(y_1,y_2) - \mathrm{dist}(x_1,x_2)| \leqq \mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}),$$

hvilket netop viser, at det er afstandsformindskende. Dermed er sætningen bevist.

Det er klart, at sætning 8.20 er en meget naturlig sætning, og at man på forhånd måtte håbe på dens gyldighed. Den vil også senere vise sig meget nyttig.

<u>Sætning</u> 8.21. Lad $T = (M,\mathrm{dist})$ være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Da er den ved $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x,A)$ definerede afbildning φ:T ind i $\grave{R}$ kontinuert.

Bevis. Lad x og y være vilkårlige punkter af T. Lad r være et positivt tal $> \mathrm{dist}(x,A)$. Så er $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$. Ifølge sætning 8.5 er

$$K(x,r) \subseteq K(y,\mathrm{dist}(x,y)+r),$$

og derfor er $A \cap K(y,\mathrm{dist}(x,y)+r) \neq \emptyset$, altså

$$\mathrm{dist}(y,A) \leqq \mathrm{dist}(x,y)+r .$$

Da dette gælder for ethvert tal $r > \mathrm{dist}(x,A)$, kan vi slutte, at

$$\mathrm{dist}(y,A) \leqq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(x,A),$$

altså

$$\mathrm{dist}(y,A) - \mathrm{dist}(x,A) \leqq \mathrm{dist}(x,y).$$

Ved at lade x og y bytte roller i regningerne får vi den tilsvarende ulighed med x og y byttet om, og de to uligheder er ensbetydende med, at

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \mathrm{dist}(x,y),$$

altså at φ er afstandsformindskende og dermed kontinuert. Dermed er sætningen bevist.

<u>Definition</u> 8.22. Lad $T = (M, \mathrm{dist}\ )$ være et metrisk rum, og lad $A \subseteq T$ være en punktmængde. Da kaldes

$$\sup\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x,y \in A\}$$

diameteren af A og betegnes diamA. Hvis diamA $< \infty$, kaldes A en begrænset punktmængde. Hvis diamT $< \infty$, kaldes T et begrænset metrisk rum, og afstandsfunktionen dist kaldes begrænset. En punktfølge (a_n) på T kaldes begrænset, hvis punktmængden $\{a_n \mid n \in \dot{N}\}$ er begrænset.

Begrænsethed er en metrisk og ikke en topologisk egenskab. Enhver afstandsfunktion er nemlig ækvivalent med en begrænset afstandsfunktion. Lad dist:$M\times M$ ind i $\grave{R}$ være en afstandsfunktion. For $x,y \in M$ sætter vi

$$\mathrm{dist}_1(x,y) = \inf\{1, \mathrm{dist}(x,y)\}.$$

Det er da klart, at dist_1 tilfredsstiller d1), d2) og d3). For $\mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z) \geq 1$ er $\mathrm{dist}_1(x,y) + \mathrm{dist}_1(y,z) \geq 1$ og dist_1 opfylder trekantsuligheden. For $\mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z) < 1$ er $\mathrm{dist}(x,z) < 1$, og trekantsuligheden for dist_1 følger derfor umiddelbart af trekantsuligheden for dist. Altså er dist_1 en afstandsfunktion. Det er klart, at dist_1 er begrænset og ækvivalent med dist.

Eksempel. En kugleomegn er en begrænset mængde. En kugleomegns diameter er højst det dobbelte af dens radius, men den kan være meget mindre.

Sætning. 8.23. En mængde A i et metrisk rum $T = (M, \mathrm{dist})$ er begrænset, hvis og kun hvis den kan overdækkes med endelig mange kugleomegne.

Bevis. Hvis A er begrænset, $a \in A$ og $r > \mathrm{diam} A$, er $A \subseteq K(a,r)$. Dermed har vi bevist "kun hvis". Lad os nu antage, at

$$A \subseteq K_1(a_1,r_1) \cup \ldots \cup K_n(a_n,r_n).$$

Vi vælger $P \in \mathring{R}$, således at $\mathrm{dist}(a_j,a_k) \leqq P$ for $j,k = 1,\ldots,n$, og således at $r_j \leqq P$ for $j = 1,\ldots,n$. For $x,y \in A$, kan vi vælge j og k, således at $x \in K(a_j,r_j)$ og $y \in K(a_k,r_k)$ og vi får da

$$\mathrm{dist}(x,y) \leqq \mathrm{dist}(a_j,x) + \mathrm{dist}(a_j,a_k) + \mathrm{dist}(a_k,y) \leqq 3P.$$

Dermed er sætningen bevist.

En punktfølge (a_n) på et metrisk rum $T = (M, \mathrm{dist})$ konvergerer mod $a \in T$, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathring{N} \quad \forall n \geqq N(\mathrm{dist}(a,a_n) \leqq \varepsilon).$$

Det ses umiddelbart, at denne betingelse virkelig stemmer overens med den betingelse, vi benyttede i et topologisk rum. Det er selvfølgelig uvæsentligt, om vi skriver $\geqq N$, $\leqq \varepsilon$ eller udelader det ene eller begge lighedstegn.

Definition 8.24. En punktfølge (a_n) på et metrisk rum $T = (M, \mathrm{dist})$ kaldes en fundamentalfølge, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathring{N} \quad \forall n \geqq N(\mathrm{dist}(a,a_n) \leqq \varepsilon).$$

Det ses umiddelbart, at denne betingelse virkelig stemmer overens med den betingelse, vi benyttede i et topologisk rum. Det er selvfølgelig uvæsentligt, om vi skriver $\geqq N$, $\leqq \varepsilon$ eller udelader det ene eller begge lighedstegn.

Definition 8.24. En punktfølge (a_n) på et metrisk rum $T = (M,\text{dist})$ kaldes en fundamentalfølge, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \dot{N} \quad \forall m,n \geq N(\text{dist}(a_m,a_n) \leq \varepsilon).$$

Begrebet fundamentalfølge er knyttet til metriske rum, og det kan ikke generaliseres til helt generelle topologiske rum. Det afgørende er, at rummet har så megen struktur, at det har en mening at tale om "ens" eller "lige store" omegne af forskellige punkter.

Sætning 8.25. Enhver fundamentalfølge er begrænset.

Bevis. Lad (a_n) være en fundamentalfølge på et metrisk rum $T = (M,\text{dist})$. Vi vælger N, således at

$$\forall m,n \geq N(\text{dist}(a_m,a_n) \leq 1).$$

Udenfor kuglen $K(a_N,1)$ findes kun endelig mange af punkterne a_n. Altså kan mængden $\{a_n | n \in \dot{N}\}$ dækkes med endelig mange kugler. Sætningen følger derefter af sætning 8.23.

Sætning 8.26. En konvergent følge er en fundamentalfølge.

Bevis. Lad (a_n) være en følge på $T = (M,\text{dist})$, konvergent mod $a \in T$, og lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall n \geq N(\text{dist}(a,a_n) \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

For $m,n \geq N$ får vi da

$$\text{dist}(a_m,a_n) \leq \text{dist}(a,a_m) + \text{dist}(a,a_n) \leq \varepsilon.$$

Altså er (a_n) en fundamentalfølge. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8.27. En fundamentalfølge, som har en konvergent delfølge, er selv konvergent.

Bevis. Lad (a_n) være en fundamentalfølge på $T = (M, \mathrm{dist})$ og lad $(a_{p_n}) \to a \in T$ være en delfølge af (a_n), og lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \dot{N}$, således at

$$\forall m, n \geqq N(\mathrm{dist}(a_m, a_n) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Da $(a_{p_n}) \to a$, kan vi vælge $m \in \dot{N}$, således at $p_m \geqq N$ og $\mathrm{dist}(a, a_{p_m}) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. For $n \geqq N$ har vi da

$$\mathrm{dist}(a, a_n) \leqq \mathrm{dist}(a, a_{p_m}) + \mathrm{dist}(a_{p_m}, a_n) \leqq \varepsilon.$$

Dermed har vi vist, at $(a_n) \to a$, og dermed er sætningen bevist.

Definition 8.28. Et metrisk rum $T = (M, \mathrm{dist})$ kaldes fuldstændigt, hvis enhver fundamentalfølge på T er konvergent.

Eksempel. De metriske rum $\dot{R}$ og $\dot{C}$ er fuldstændige. Delrummet $\dot{Q}$ af $\dot{R}$ er ikke fuldstændigt. En følge på et diskret metrisk rum er en fundamentalfølge, hvis og kun hvis dens elementer fra et vist nummer at regne er indbyrdes identiske, og følgen vil derfor være konvergent. Altså er et diskret metrisk rum fuldstændigt.

Hvis $T_1 = (M, \mathrm{dist}_1)$ og $T_2 = (M, \mathrm{dist}_2)$ er ækvivalente metriske rum, og T_1 er fuldstændigt, kan vi ikke slutte, at T_2 er fuldstændigt. Fuldstændighed er derfor en metrisk og ikke en topologisk egenskab ved et metrisk rum.

Eksempel. Vi vælger $T_1 = \dot{R}$ med den sædvanlige afstandsfunktion $\mathrm{dist}_1(x,y) = |y-x|$. Vi vælger $T_2 = (\dot{R}, \mathrm{dist}_2)$, hvor $\mathrm{dist}_2(x,y) = |\mathrm{Arctg}\ y - \mathrm{Arctg}\ x|$. Så er T_1 og T_2 ækvivalente metriske rum. Rummet T_1 er fuldstændigt. Følgen (n) er en fundamentalfølge på T_2, men ikke konvergent.

<u>Sætning</u> 8.29. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Hvis det metriske delrum A af T er et fuldstændigt metrisk rum, er A en afsluttet delmængde af T. Hvis T er fuldstændigt og A afsluttet, er det metriske delrum A fuldstændigt.

Bevis. Lad os først antage at det metriske delrum A er fuldstændigt, og lad a være et punkt af $\bar{A}$. For ethvert $n \in \grave{N}$ kan vi da vælge $a_n \in A \cap K(a, \frac{1}{n})$. Lad ε være et positivt tal. Vi vælger $N \geqq \frac{2}{\varepsilon}$. For $m, n \geqq N$ har vi da $a_m, a_n \in K(a, \frac{\varepsilon}{2})$, altså $\mathrm{dist}(a_m, a_n) \leqq \varepsilon$. Dermed har vi vist, at (a_n) er en fundamentalfølge på A, altså konvergent mod et grænsepunkt $b \in A$. På den anden side har vi også for $n \geqq N$, at $\mathrm{dist}(a, a_n) \leqq \varepsilon$. Altså gælder $(a_n) \to a$. Men da (a_n) højst konvergerer mod ét punkt af T, får vi $a = b$, altså $a \in A$. Dermed har vi vist, at A er afsluttet. Lad os dernæst antage, at T er fuldstændigt, og at A er afsluttet. Lad (a_n) være en fundamentalfølge på A. Så er (a_n) også en fundamentalfølge på T, altså konvergent mod $a \in T$. Men så kan a ikke være et ydre punkt for a, og da A er afsluttet, kan vi slutte, at $a \in A$. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. Et interval på $\grave{R}$ er et fuldstændigt metrisk rum, hvis og kun hvis det er afsluttet.

<u>Sætning</u> 8.30. Lad $T_1 = (M_1, \mathrm{dist}_1)$ og $T_2 = (M_2, \mathrm{dist}_2)$ være fuldstændige metriske rum. Da vil de i sætning 8.17 omtalte produktrum $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist})$, $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist}')$ og $(M_1 \times M_2, \mathrm{dist}'')$ alle være fuldstændige.

Bevis. Lad $(\underline{a}_n)$, hvor $\underline{a}_n = (a_n', a_n'')$ være en fundamentalfølge i et af de tre produktrum. På grund af ulighederne

$$\text{dist}'(\underline{a}_m,\underline{a}_n) \leqq \text{dist}(\underline{a}_m,\underline{a}_n) \leqq \text{dist}''(\underline{a}_m,\underline{a}_n) \leqq 2\text{dist}'(\underline{a}_m,\underline{a}_n)$$

til en sådan følge være fundamentalfølge i alle tre produktrum. På grund af ulighederne

$$\text{dist}_1(a'_m,a'_n) \leqq \text{dist}'(\underline{a}_m,\underline{a}_n);\ \text{dist}_2(a''_m,a''_n) \leqq \text{dist}'(\underline{a}_m,\underline{a}_n),$$

vil koordinatfølgerne (a'_n) og (a''_n) være fundamentalfølger og derfor konvergente. Men af $(a'_n) \to a'$ og $(a''_n) \to a''$ følger $(\underline{a}_n) \to (a',a'')$ i det topologiske produktrum og dermed i hvert af de tre metriske produktrum. Dermed er sætningen bevist.

Ved induktion udvides sætningen umiddelbart til produkter af flere metriske rum.

Sætning 8.31. Det metriske rum $\grave{R}^n$ er fuldstændigt.

Bevis. Følger umiddelbart af sætning 8.30.

Vi skal i denne forbindelse ganske kort minde om den mere detaljerede geometriske struktur på $\grave{R}^n$. For punkter i $\grave{R}^n$ vil vi anvende betegnelser $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\underline{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ etc. Vi har vektoradditionen

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n)$$

og for $\lambda \in \grave{R}$ har vi produktet

$$\lambda\underline{x} = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

Vi minder om nulsættet (nulvektoren)

$$\underline{0} = (0,\ldots,0).$$

For $\underline{a} \in \grave{R}^n$ og $\underline{b} \in \grave{R}^n$, hvor $\underline{a} \neq \underline{b}$, er

$$\{(1-t)\underline{a} + t\,\underline{b} \mid t \in \grave{R}\}$$

den rette linie gennem $\underline{a}$ og $\underline{b}$ og

$$\{(1-t)\underline{a} + t\,\underline{b} \mid t \in [0,1]\}$$

er det afsluttede liniestykke med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$.

Vi indfører det indre produkt

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$

for hvilket vi har regnereglerne

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{x}$$

$$\underline{x} \cdot (\underline{y} + \underline{z}) = \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{z}$$

$$\lambda(\underline{x} \cdot \underline{y}) = \lambda\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \lambda\underline{y} .$$

Det reelle tal

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x} \cdot \underline{x})} = \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

kaldes normen af $\underline{x}$. Det er ikke negativt. For $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ er

$$\|\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}\|^2 = (\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) \cdot (\lambda\underline{x} + \mu\underline{y}) =$$

$$\|\underline{x}\|^2\lambda^2 + 2(\underline{x} \cdot \underline{y})\lambda\mu + \|\underline{y}\|^2\mu^2,$$

og da dette andengradspolynomium i λ og μ således ikke antager negative værdier, kan vi slutte, at

$$|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq \|\underline{x}\|\|\underline{y}\|.$$

Dette er Cauchy-Schwarz's ulighed.

For $\lambda = \mu = 1$ giver relationen ovenfor

(1) $$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + 2(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \|\underline{y}\|^2,$$

og vurdering ved Cauchy-Schwarz' ulighed giver

$$\big|\|\underline{x}\| - \|\underline{y}\|\big| \leq \|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

Normen har således egenskaberne

n1) $\|\underline{0}\| = 0$

n2) $\forall \underline{x} \in \grave{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \; (\|\underline{x}\| > 0)$

n3) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \grave{R}^n (\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)$

n4) $\forall \underline{x} \in \grave{R}^n \; \forall \lambda \in \grave{R} (\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|)$.

Her medfører n1), n2) og n3), at dist$(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{y}-\underline{x}\|$ er en afstandsfunktion på $\grave{R}^n$, og dette er netop den ovenfor benyttede afstand i $\grave{R}^n$ opfattet som Euklidisk produktrum. På grund af n4) kaldes $\grave{R}^n$ et normeret vektorrum.

Af Cauchy-Schwarz's ulighed følger, at der for $\underline{x}, \underline{y} \in \grave{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{y} \neq \underline{0}$ findes netop ét tal $\angle(\underline{x},\underline{y}) \in [0,\pi]$, således at

$$\cos \angle(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|} .$$

Tallet $\angle(\underline{x},\underline{y})$ kaldes vinklen mellem $\underline{x}$ og $\underline{y}$. Af (1) får vi ved at erstatte $\underline{y}$ med $-\underline{y}$ relationen

$$\|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 - 2\|\underline{x}\|\|\underline{y}\| \cos \angle(\underline{x},\underline{y}),$$

som er cosimusrelationen for trekanten med vinkelspidsen $\underline{0}$, $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Vi har forsøgt at antyde, hvorledes organisationerne af $\grave{R}^n$ som vektorrum og som metrisk rum kan sammenbygges og udbygges til den komplicerede organisation vi plejer af kalde en Euklidisk geometri.

Det kan også lade sig gøre at konstruere uendeligdimensionale rum med mange af de endelige rums geometriske egenskaber i behold. Vi vil kort omtale et vigtigt eksempel.

Med M betegner vi mængden af reelle talfølger $\underline{a} = (a_n)$, for hvilke rækken (a_n^2) er konvergent. For $\underline{a}, \underline{b} \in M$, har vi

$$(a_n+b_n)^2 \leqq 2a_n^2 + 2b_n^2 ,$$

og sammenligningskriteriet giver, at rækken $((a_n+b_n)^2)$ er konvergent. Altså definerer

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_n + b_n)$$

en addition på M. For $\lambda \in \mathbb{R}$ og $\underline{a} \in M$ er rækken (λa_n) konvergent, og derfor er produktet

$$\lambda \underline{a} = (\lambda a_n)$$

defineret. Dermed er M organiseret som vektorrum.

På grund af vurderingen

$$|a_n b_n| \leqq \tfrac{1}{2} a_n^2 + \tfrac{1}{2} b_n^2$$

er rækken $(a_n b_n)$ absolut konvergent, og vi kan derfor definere det indre produkt

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n .$$

Vi indser umiddelbart gyldigheden af regnereglerne

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$$

$$\lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \lambda \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \lambda \underline{b} , \ \lambda \in \mathbb{R} .$$

Vi sætter nu

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})} .$$

Af Cauchy-Schwarz's ulighed følger

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n||b_n| \leq$$

$$\sqrt{(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \sum_{n=1}^{N} b_n^2)} \leq \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|,$$

og for $N \to \infty$ får vi

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq \|\underline{a}\|\|\underline{b}\| .$$

Dette er Cauchy-Schwarz' ulighed for følgen.

Vi kan nu umiddelbart kopiere resten af de regninger, vi udførte for $\dot{R}^n$. Vi har således organiseret en mængde af talfølger med en geometrisk struktur, der i mange henseender minder om geometrien på $\dot{R}^n$.

Definition 8.32. Det ovenfor omtalte normerede vektorrum, hvis punkter er talfølger $\underline{a} = (a_n)$, for hvilke rækken (a_n) er konvergent, kaldes Hilberts talfølgerum og betegnes $\dot{R}^\infty$.

For kortheds skyld vil vi oftest blot kalde $\dot{R}^\infty$ Hilbert rummet, men det er ukorrekt, idet betegnelsen Hilbertrum anvendes om en meget mere omfattende klasse af normerede vektorrum.

Sætning 8.33. Hilberts talfølgerum er fuldstændigt.

Bevis. Lad $(\underline{a}_n)$, hvor $\underline{a}_n = (a_{nk} | k \in \dot{N})$ være en fundamentalfølge i Hilbertrummet. Dette betyder, at følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \dot{N} \quad \forall m,n \geq N(\|\underline{a}_m - \underline{a}_n\| \leq \varepsilon).$$

På grund af uligheden

$$|a_{mk} - a_{nk}| \leq \|\underline{a}_m - \underline{a}_n\|$$

får vi for ethvert $k \in \dot{N}$, at

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \dot{N} \quad \forall m,n \geq N(|a_{mk} - a_{nk}| \leq \varepsilon),$$

hvilket viser, at $(a_{nk} | n \in N)$ er en fundamentalfølge, og derfor konvergent med en grænseværdi a_k.

Lad nu ε være et positivt tal. Vi vælger $N \in \dot{N}$ således at

$$\forall m,n \geq N(\|\underline{a}_m - \underline{a}_n\| \leq \varepsilon),$$

hvilket mere udførligt skrives

$$\forall m,n \geq N(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{mk} - a_{nk})^2 \leq \varepsilon^2) .$$

Lad p være et naturligt tal. Vi har da

$$\forall m,n \geq N(\sum_{k=1}^{p} (a_{mk} - a_{nk})^2 \leq \varepsilon^2).$$

Lad n være et naturligt tal. Uligheden i parentesen er da gyldig for ethver $m \in \dot{N}$ og vi kan foretage grænseovergangen $m \to \infty$, som giver

$$\forall n \geq N \; (\sum_{k=1}^{p} (a_k - a_{nk})^2 \leq \varepsilon^2).$$

Da dette gælder for alle $p \in \dot{N}$, kan vi nu lade p gå mod ∞, hvilket giver

$$\forall n \geq N(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{nk})^2 \leq \varepsilon^2) .$$

Heraf følger, at for $n \geq N$ er $(a_k - a_{nk} | k \in \dot{N})$ et punkt i Hilbertrummet. Da $(a_{nk} | k \in \dot{N})$ også er et punkt i Hilbertrummet, er summen $\underline{a} = (a_k)$ et punkt i Hilbertrummet, og den sidste relation kan skrives

$$\forall n \geq N(\|\underline{a} - a_n\| \leq \varepsilon).$$

Dermed har vi vist, at $(\underline{a}_n) \to \underline{a}$, altså at $\dot{R}^{\infty}$ er et fuldstændigt rum.

Eksempel. Hvis $\underline{a} = (a_n)$ er et punkt i $\grave{R}^\infty$ går følgen $(|a_n|)$ mod 0, og den har derfor et største element $||\underline{a}||'$. Det er let at vise, at $||\underline{a}||'$ er en norm på vektorrummet $\grave{R}^\infty$, og den svarer åbenbart til en afstandsfunktion analog med dist' for $\grave{R}^n$. Da $||\underline{a}||' \leq ||\underline{a}||$ giver $||a||''$ en grovere topologi på $\grave{R}^\infty$ end $||\underline{a}||$. Da en ved $||\underline{x}|| < \varepsilon$ defineret kugle åbenbart ikke indeholder nogen kugle defineret ved en ulighed af formen $||\underline{x}||' < \varepsilon_1$, er den ved $||\underline{a}||'$ definerede topologi effektivt grovere end den ved $||\underline{a}||$ definerede. De to afstandsfunktioner er altså ikke ækvivalente. Det skal tilføjes, at $||\underline{a}||'$ er defineret på hele vektorrummet af begrænsede reelle talfølger, og det vektorrum har jo åbenbart $\grave{R}^\infty$ som ægte underrum. En norm defineret ved $||\underline{a}||'' = \Sigma|a_n|$ eksisterer kun på det ægte underrum af $\grave{R}^\infty$, der omfatter de absolut konvergente følger, og på dette underrum definerer $||\underline{a}||''$ en topologi, der er effektivt finere end delrumstopologien. Udarbejdelsen af beviser for de i dette eksempel fremsatte påstande vil blive stillet som øvelsesopgaver.

Definition 8.34. Lad $T = (M,\mathrm{dist})$ være et metrisk rum. En afbildning φ:T ind i T kaldes stærkt afstandsformindskende, hvis der findes et tal $k \in]0,1[$, således at

$$\forall x,y \in T(\mathrm{dist}(\varphi(x),\varphi(y)) \leq k\ \mathrm{dist}(x,y)) .$$

Eksempel. De tidligere omtalte projektioner er afstandsformindskende uden at være stærkt afstandsformindskende.

Vi er interesserede i at bestemme løsningerne til ligningen $\varphi(x) = x$, hvor φ er den i definition 8.34 omtalte afbildning. Enhver løsning til $\varphi(x) = x$ kaldes et fixpunkt for afbildningen φ.

Sammen med φ vil vi også betragte de itererede afbildninger $\varphi^2 = \varphi\circ\varphi$, $\varphi^3 = \varphi\circ\varphi\circ\varphi,\ldots$, Det er klart, at et fixpunkt for φ også er fixpunkt for enhver af de itererede afbildninger.

<u>Sætning</u> 8.35. En stærkt afstandsformindskende afbildning φ:T ind i T, hvor T er et fuldstændigt metrisk rum, har netop ét fixpunkt, og for $y \in T$ konvergerer følgen $(\varphi^n(y))$ mod dette fixpunkt.

Bevis. Vi benytter betegnelserne fra definition 8.34, og $k \in]0,1[$ tænkes valgt i overensstemmelse hermed. Lad nu a og b være fixpunkter for φ. Så er

$$\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(\varphi(a),\varphi(b)) \leqq k\ \mathrm{dist}(a,b)\ ,$$

altså

$$(1-k)\mathrm{dist}(a,b) \leqq 0.$$

Heraf følger imidlertid $\mathrm{dist}(a,b) \leqq 0$, altså $a = b$. Dermed har vi bevist, at φ højst har ét fixpunkt.

Lad nu y være et vilkårligt punkt af T. For $n \in \dot{N}$ har vi da

$$\mathrm{dist}(\varphi^{n+1}(y),\varphi^{n+2}(y)) = \mathrm{dist}(\varphi(\varphi^n(y)),\varphi(\varphi^{n+1}(y))) \leqq$$
$$k\ \mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi^{n+1}(y)).$$

Ved gentagen anvendelse af dette resultat får vi

$$\forall n \in \dot{N}(\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi^{n+1}(y)) \leqq k^n \mathrm{dist}(y,\varphi(y))).$$

For $n \in \dot{N}$, $p \in \dot{N}$ får vi heraf efter gentagen anvendelse af trekantsuligheden

$$\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi^{n+p}(y)) \leqq \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{dist}(\varphi^{n+j}(y),\varphi^{n+j+1}(y)) \leqq$$
$$\sum_{k=0}^{p-1} k^{n+j}\mathrm{dist}(y,\varphi(y)) \leqq k^n \mathrm{dist}(y,\varphi(y)) \sum_{k=0}^{\infty} k^j =$$
$$k^n\ \frac{\mathrm{dist}(y,\varphi(y))}{1-k}\ .$$

Det sidste udtryk konvergerer mod 0 for $n \to \infty$. Vi har således vist, at

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathring{N} \quad \forall n \geqq N \quad \forall p \in \mathring{N}(\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi^{n+1}(y)) \leqq \varepsilon).$$

Vi har dermed vist, at $(\varphi^{(n)}(y))$ er en fundamentalfølge. Da T er fuldstændigt, konvergerer $(\varphi^{(n)}(y))$ mod et grænsepunkt $a \in T$. For $n \in \mathring{N}$ fandt vi ovenfor

$$\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi^{n+1}(y)) \leqq k^n \mathrm{dist}(y,\varphi(y)),$$

hvilket også kan skrives

(2) $$\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi(\varphi^n(y))) \leqq k^n \mathrm{dist}(y,\varphi(y)).$$

Da φ er afstandsformindskende, er φ kontinuert. På $T\times T$ gælder derfor

$$((\varphi^n(y),\varphi(\varphi^n(y)))) \to (a,\varphi(a)),$$

og da dist er kontinuert, gælder

$$(\mathrm{dist}(\varphi^n(y),\varphi(\varphi^n(y)))) \to \mathrm{dist}(a,\varphi(a)).$$

Ved grænseovergangen $n \to \infty$ giver (2) derfor

$$\mathrm{dist}(a,\varphi(a)) = 0,$$

hvilket viser, at a er fixpunkt. Dermed er sætningen bevist.

Eksempel. For $e \in]0,1[$ betragter vi den ved

$$\varphi(x) = a - e \sin x$$

definerede afbildning $\varphi:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$. Vi har for $x,y \in \mathring{R}$, at

$$\varphi(y) - \varphi(x) = e(\sin x - \sin y) =$$

$$2e \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2},$$

altså

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqq e|y - x|.$$

Altså er $\varphi:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ stærkt afstandsformindskende. Af sætning 8.36 følger derfor, at ligningen

$$x + e \sin x = a$$

har en og kun én løsning, og at $(\varphi^n(x))$ konvergerer mod denne løsning. Det er i dette tilfælde let at vise, at ligningen har netop én løsning, da funktionen på venstre side er strengt voksende og kontinuert og voksen fra $-\infty$ til ∞. Det interessante er, at vi også får at vide, hvorledes vi kan danne en talfølge, der konvergerer mod løsningen.

Lette opgaver.

1. Lad $\varphi:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ være en strengt voksende funktion. Vis, at den ved $\mathrm{dist}(x,y) = |\varphi(y) - \varphi(x)|$ definerede afbildning er en afstandsfunktion på $\grave{R}$.

2. Tegn skitser af kugleomegne i $\grave{R}^2$ svarende til hver af de tre afstandsdefinitioner (hvor $\underline{x} = (x_1,x_2)$, $\underline{y} = (y_1,y_2)$):

$$\mathrm{dist}(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2)}$$

$$\mathrm{dist}'(\underline{x},\underline{y}) = \sup\{|y_1-x_1|, |y_2-x_2|\}$$

$$\mathrm{dist}''(\underline{x},\underline{y}) = |y_1-x_1| + |y_2-x_2| \ .$$

3. Lad $\varphi:[0,\infty[$ ind i $[0,\infty[$ være en voksende funktion, som tilfredsstiller betingelserne

   1). $\varphi(0) = 0$

   2). $\forall x > 0 \ (\varphi(x) > 0)$

   3). $\forall x,y \in [0,\infty] \ (\varphi(x+y) \leqq \varphi(x) + \varphi(y))$.

   Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $\mathrm{dist}:M\times M$ ind i $\grave{R}$ være en afstandsfunktion på M. Vis, at $\varphi\circ\mathrm{dist}:M\times M$ ind i $\grave{R}$ er en afstandsfunktion på M.

4. Undersøg, hvilke af betingelserne d1),...,d4) der tilfredsstilles af den ved $\mathrm{dist}(x,y) = |y-x| + \frac{1}{2}(y-x)$ definerede afbildning $\mathrm{dist}:\grave{R}\times\grave{R}$ ind i $\grave{R}$.

5. Vis, at det for hvilket som helst valg af 3 blandt betingelserne d1),...,d4) er muligt at finde en mængde M og en af-

bildning dist:M×M ind i $\dot{R}$, således at de 3 valgte betingelser er opfyldt, medens den fjerde ikke gælder (opgave 4 giver en løsning i det vanskeligste tilfælde).

6. Lad dist', dist":M×M ind i $\dot{R}$ være afstandsfunktioner på samme mængde M. Vis, at den ved

$$dist(x,y) = \sup\{dist'(x,y),\ dist''(x,y)\}$$

definerede afbildning dist:M×M ind i $\dot{R}$ er en afstandsfunktion. Prøv at erstatte sup med inf og undersøg, om den derved fremkomne påstand er rigtig.

7. Lad dist':M×M ind i $\dot{R}$ være en afbildning, som tilfredsstiller d1), d2) og d4). Vis, at den ved

$$dist(x,y) = \sup\{dist'(x,y),\ dist'(y,x)\}$$

definerede afbildning er en afstandsfunktion.

8. En afbildning dist:M×M ind i $\dot{R}$, som tilfredsstiller d1), d3) og d4), kaldes en præ-afstand. Vis, at betingelsen dist(x,y) = 0 er en ækvivalensrelation, og at det for ækvivalensklasser A og B gælder at dist(x,y) for $x \in A$, $y \in B$ ikke afhænger af valget af x og y. Benyt dette til på naturlig måde at indføre en afstandsfunktion på mængden af ækvivalensklasser. En mængde med en præ-afstand kaldes et præmetrisk rum. Et sådant frembringer altså altid et metrisk rum på klasserne i en passende klasseinddeling.

9. En afbildning dist':M×M ind i $\dot{R}^*$, som tilfredsstiller d1),...,d4) kaldes en uegentlig afstandsfunktion, og

$T = (M, \mathrm{dist}')$ kaldes et uegentligt metrisk rum. Vis, at $\mathrm{dist}'(x,y) < \infty$ er en ækvivalensrelation, at en restriktion af dist' til en ækvivalensklasse er en afstandsfunktion på denne, og at punkter fra forskellige ækvivalensklasser har uendelig stor afstand.

10. Lad $\varphi : [0,\infty]$ ind i $[0,\infty[$ være en voksende funktion, som tilfredsstiller betingelserne 1), 2) og 3) i opgave 3. Lad $\mathrm{dist}' : M \times M$ ind i $\grave{R}^*$ være en uegentlig afstandsfunktion (se opgave 9). Vis, at $\varphi \circ \mathrm{dist}' : M \times M$ ind i $\grave{R}$ er en afstandsfunktion.

11. Lad $T = (M, \mathrm{dist})$ være et metrisk rum, hvis afstandsfunktion tilfredsstiller den skærpede trekantsulighed

$$\forall x,y,z \in T(\mathrm{dist}(x,z) \leq \mathrm{dist}(x,y) \vee \mathrm{dist}(x,z) \leq \mathrm{dist}(y,z)).$$

Vis, at (lidt upræcist formuleret) alle trekanter i rummet er ligebenede med benene mindst så lange som grundlinien. Vis, at det for ethvert $r \in \,]0,\infty[$ gælder, at kugleomegnene med radius r udgør en klasseinddeling af T. Vis også, at den klasseinddeling, der svarer til $r_1 \in \,]0,r[$, er en videredeling af den, der svarer til r.

12. For $n \in \grave{N}$ betegner vi med $\lambda(n)$ det største naturlige tal p, for hvilket p! er divisor i n. For $x,y \in \grave{Z}$ sætter vi

$$\mathrm{dist}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x = y \\ \dfrac{1}{\lambda(|y-x|)}, & \text{hvis } x \neq y \end{cases} .$$

Vis, at dist er en afstandsfunktion, som tilfredsstiller den skærpede ulighed (se opgave 11).

13. Lad p være et primtal. Ethvert tal $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ kan på en og kun én måde skrives på formen $q = p^{\lambda} \cdot \frac{a}{b}$, hvor $\lambda \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, og hvor p hverken går op i a eller i b. Vi sætter $|q|_p = p^{-\lambda}$ og $|0|_p = 0$. Vis relationerne

$$|q_1 q_2|_p = |q_1|_p |q_2|_p$$

$$|q_1+q_2|_p \leq \sup\{|q_1|_p, |q_2|_p\},$$

og vis dernæst, at $\operatorname{dist}(x,y) = |y-x|_p$ definerer en afstandsfunktion på $\mathbb{Q}$, og at denne afstandsfunktion tilfredsstiller den skærpede trekantsulighed (se opgave 11).

14. Lad M være en mængde og $\varphi: M\times M$ ind i $[0,\infty[$ en afbildning, som tilfredsstiller betingelserne

1) $\forall x \in M(\varphi(x,x) = 0)$

2) $\forall x,y \in M(\varphi(x,y) = \varphi(y,x))$.

For $x,y \in M$ sætter vi

$$\operatorname{dist}(x,y) = \inf\{\sum_{k=1}^{n} \varphi(z_{k-1},z_k) \mid n\in\mathbb{N};\ z_0,\dots,z_n\in M;\ z_0=x;\ z_n=y\}.$$

Vis, at dist er en præafstand på M (se opgave 8).

15. Det antages, at dist' og dist" i opgave 6 er indbyrdes ækvivalente. Vis, at dist er ækvivalent med dem.

16. Vis, at afstandsfunktionerne og $\varphi\circ\operatorname{dist}$ i opgave 3 er indbyrdes ækvivalente.

17. Med $\operatorname{arctg}^*:\grave{R}^*$ ind i $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ betegner vi den ved

$$\operatorname{arctg}^* x = \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi \text{ for } x = -\infty \\ \operatorname{arctg} x \text{ for } x \in \grave{R} \\ \frac{1}{2}\pi \text{ for } x = \infty \end{cases}$$

definerede afbildning. Vis, at $\operatorname{dist}(x,y) = |\operatorname{arctg}^* y - \operatorname{arctg}^* x|$ er en afstandsfunktion på $\grave{R}^*$, og at den frembringer den sædvanlige topologi på $\grave{R}^*$. Udled heraf, at restriktionen af dist til $\grave{R}$ er en afstandsfunktion ækvivalent med den sædvanlige afstandsfunktion på $\grave{R}$.

18. Lad $T = (M,\operatorname{dist})$ være et metrisk rum. Vis at afslutningen af kugleomegnen $K(a,r)$ er en delmængde af $\{x \in T \mid \operatorname{dist}(a,x) \leq r\}$. Vis, at det kan være en ægte delmængde for passende valg af T. Vis, at ethvert punkt i T har en omegnsbasis, der består af afsluttede mængder. Vis, at det for $a \in T$, $A \subseteq T$, $a \notin A$ og A afsluttet gælder, at der findes åbne mængder O_1 og O_2, således at $a \in O_1$, $A \subseteq O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ (adskillelsesaksiom T_3).

19. Vis, at en mængde A i et metrisk rum T er begrænset, hvis og kun hvis enhver numerabel delmængde af A er begrænset.

21. Er det rigtigt, at en følge (a_n) i et metrisk rum T er begrænset, hvis og kun hvis enhver delfølge af (a_n) har en begrænset delfølge?

22. Vis, at enhver punktfølge på $\grave{R}^*$ har en konvergent følge.

23. Undersøg, om følgende punktfølger i det i opgave 12 omtalte rum er konvergente:

$$(2n+3), \quad (n!), \quad (2^n) .$$

24. Er det rigtigt, at et metrisk rum er fuldstændigt, hvis og kun hvis enhver afsluttet delmængde er et fuldstændigt rum.

25. I det i opgave 13 omtalte rum betragter vi følgen (a_n), hvor

$$a_n = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} .$$

Vis, at (a_n) er en fundamentalfølge. Er den konvergent ?

26. Som opgave 25 for det i opgave 12 omtalte rum og med

$$a_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n! .$$

27. Vis, at ligningssystemet

$$x = \tfrac{1}{2}(\sin x + \sin y) + p$$

$$y = \tfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) + q ,$$

hvor p og q er reelle tal, har netop én reel løsning. (Vis, at den ved

$$\varphi(x,y) = (\tfrac{1}{2}(\sin x + \sin y)+p, \ \tfrac{1}{2}(\cos x + \cos y)+q)$$

definerede afbildning $\varphi : \grave{R}^2$ ind i $\grave{R}^2$ er stærk afstandsformindskende.

Vanskeligere opgaver.

28. Generaliser resultatet i opgave nr. 6 til en vilkårlig mængde af afstandsfunktioner.

29. For $\varphi,\psi \in \hat{C}([0,1],\grave{R})$ sætter vi

$$\text{dist}(\varphi,\psi) = \sup\{|\varphi(x) - \psi(x)| \mid x \in \grave{R}\}.$$

Vis, at dist er en afstandsfunktion, og at $\hat{C}([0,1],\grave{R})$ derved bliver et fuldstændigt, metrisk rum. Vis, at en punktfølge (φ_n) på $\hat{C}([0,1],\grave{R})$ er konvergent, hvis og kun hvis funktionsfølgen (φ_n) er ligelig konvergent på intervallet $[0,1]$.

30. Vis, at der findes en numerabel, overalt tæt punktmængde i $\grave{R}^\infty$.

31. Lad θ være et reelt tal. Vis, at den ved

$$C_\theta = \{(\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos y, \sin\theta \sin\varphi) \mid \varphi \in \grave{R}\}$$

bestemte punktmængde i $\grave{R}^4$ er en cirkel med centrum i $\underline{0}$ (d.v.s. den ligger i et 2-dimensionalt underrum, og alle dens punkter har samme afstand fra θ). For hvilke $\theta_1, \theta_2 \in \grave{R}$ har C_{θ_1} og C_{θ_2} punkter fælles ? Hvad er $\bigcup_{\theta\in\grave{R}} C_\theta$?

32. Vis, at enhedskuglen i $\grave{R}^\infty$ ikke kan dækkes med endelig mange kugler med radius $\frac{1}{2}$.

33. For $\underline{a} \in \grave{R}^\infty$ og $x \in]-1,1[$ sætter vi

$$f(\underline{a},x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n .$$

Vis, at vi derved definerer en kontinuert afbildning $f:\grave{R}^\infty \times]-1,1[$ ind i $\grave{R}$.

34. Vis, at der findes en og kun én reel talfølge (x_n), som tilfredsstiller betingelserne

1) $\Sigma x_n^2 < \infty$

2) $\forall n \in \mathbb{N}(x_n = 2^{-n-1} x_n e^{-\Sigma x_n^2} + \frac{1}{n})$.

35. Lad A_1 og A_2 være disjunkte, afsluttede mængder i et metrisk rum T. Vis, at der findes disjunkte, åbne mængder O_1 og O_2, således at $A_1 \subseteq O_1$, $A_2 \subseteq O_2$ (adskillelsesaksiom T4).

36. Lad T = (M,dist) være et metrisk rum. Lad F være mængden af fundamentalfølger på T. Lad (x_n) og (y_n) være elementer af F. Vis, at følgen $(\mathrm{dist}(x_n,y_n))$ er konvergent. Vi betegner grænseværdien med $\mathrm{Dist}((x_n),(y_n))$. Vis, at Dist er en præ-afstand (se opgave 8) på F. Som i opgave 8 vælger vi på F en klasseinddeling, således at Dist bliver en afstandsfunktion på mængden $\tilde{M}$ af klasser. Derved defineres et metrisk rum $\tilde{T} = (\tilde{M},\mathrm{Dist})$. Vis, at der findes en isometrisk afbildning $j:T$ ind i $\tilde{T}$, således at $\tilde{T}$ kan opfattes som en udvidelse af T. Vis, at $\tilde{T}$ er et fuldstændigt rum. Vis, at ethvert fuldstændigt metrisk rum, der har et delrum, som er isometrisk med T også indeholder et delrum, der er isometrisk med $\tilde{T}$. Rummet $\tilde{T}$ kaldes fuldstændiggørelsen af T.

37. Lad T = (M,dist) være et metrisk rum, og lad A og B være disjunkte, afsluttede punktmængder i T. Vis, at

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A) + \mathrm{dist}(x,B)}$$

definerer en kontinuert afbildning $\varphi:T$ ind i $[0,1]$, og at

$$\forall x \in A(\varphi(x) = 0) \quad \text{og} \quad \forall x \in B(\varphi(x) = 1).$$

38. Lad T være et fuldstændigt metrisk rum, og lad $(K(a_n, r_n))$ være en følge af kugleomegne på T. Det antages, at

$$\forall n \in \mathbb{N}(a_{n+1} \in K(a_n, r_n) \wedge r_{n+1} < r_n - \operatorname{dist}(a_n, a_{n+1})).$$

Endvidere antages det, at $(r_n) \to 0$. Vis, at kugleomegnene har netop ét fælles punkt.

39. Lad (O_n) være en følge af åbne mængder på et fuldstændigt metrisk rum T. Det antages, at $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \emptyset$. Vis, at der findes en kugleomegn $K(a,r)$ i T samt et tal $n \in \mathbb{N}$, således at

$$K(a,r) \cap O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n = \emptyset.$$

(Forsøg at gennemføre et indirekte bevis, idet opgave 38 benyttes). Resultatet kan også udtrykkes på følgende måde: Hvis en aftagende følge af åbne mængder i et fuldstændigt metrisk rum har tomt gennemsnit, er mængderne fra et vist trin ikke overalt tætte i rummet. Oversæt dette resultat til en sætning om afsluttede mængder (Baires sætning).

Svære opgaver.

40. Lad T være et fuldstændigt metrisk rum uden isolerede punkter. Lad (O_n) være en aftagende følge af åbne mængder på T med en fællesmængde, som er overalt tæt i T. Vis, at denne fællesmængde ikke er numerabel (indirekte bevis, baseret på opgave 38).

41. Vis, at mængden af irrationale tal i et interval ikke er identisk med mængden af diskontinuitetspunkter for nogen reel funktion på dette interval.