Matematik 1, MA, 1965–66

Hans Tornehave

Forelæsningsnoter i Matematisk Analyse

Kapitel 9–16

Mat. 1, MA. 1965-66

Indholdsfortegnelse til matematik 1, MA kap. 9-11.

Kap. 9. Mål og integral (37 sider)

A. Målet af en trappemængde i $\mathbb{R}^n$ og integralet af en trappefunktion $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, samt sammenhængen mellem disse to størrelser.

B. Riemann-integralet af en begrænset funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ med begrænset støtte, og

Riemann-målet af en begrænset mængde i $\mathbb{R}^n$.

(Herunder: Riemann'ske nulfunktioner, Riemann's integrabilitetskriterium, regneregler, sammenhæng mellem mål og integral, sætningen "enhver begrænset konveks mængde er Riemann-målelig", sætningen om undersummer, oversummer og middelsummer).

Kap. 10. Differentiabilitet (34 sider)

α-funktioner.

Reel funktion af én reel variabel.

Funktioner $f:O \to \mathbb{R}^p$, hvor $O \subseteq \mathbb{R}^n$ og åben.

(Totalt differential, partielle differentialkvotienter, lineær funktion, sætningen om sammensat funktion, regneregler, implicit differentiation, differentiation af Riemann-integral).

Funktioner $f: O \to \mathbb{C}^p$, hvor $O \subseteq \mathbb{C}^n$ og åben.

(differentiation af en funktion defineret ved en potensrække, Taylorrækken for en funktion, sætningen om differentiabilitet af $f = g_1 + ig_2$ og Cauchy-Riemann's differentialligninger).

Kap.11. <u>Kompakthedsteori</u> (17 sider)

A. Prækompakthed af metriske rum og delrum af disse, udtrykt dels ved overdækningsegenskab og dels ved punktfølgeegenskab.

Sammenhæng mellem prækompakthed og begrænsethed.

B. Kompakthed af metriske rum og delrum af disse, udtrykt dels ved overdækningsegenskab og dels ved punktfølgeegenskab.

Sammenhæng mellem kompakthed og henh. prækompakthed, fuldstændighed og afsluttethed.

Simplificeringer i R^m. Bolzano-Weierstrass's og Borels sætninger.

Hovedsætninger om kontinuerte afbildninger af kompakte metriske rum.

Indholdsfortegnelse til matematik 1, MA, kap. 12-16.

Kap.12. Ligelig konvergens (26 sider)

Eksempler. Uegentligt metrisk rum. Det ligelige funktionsrum.

Ligelig konvergent punktfølge $(f_n(x))$, $n \to \infty$ på $\hat{N}$.

Ligelig grænseovergang for $f(x,y)$, $y \to a$ på $A \subseteq T$ (T = topologisk rum)

Sætninger.

Specialisering til $T = \hat{C}$, og ligelig konvergente rækker.

Weierstrass' majorantkriterium, samt kriterier, der kan anvendes på betinget konvergente rækker.

Sætninger om ombytning af lim og $\int$, af $\int$ og $\sum_1^\infty$, og af lim og D.

Fixpunktsætning med anvendelse på differentialligninger af 2. orden (eksistenssætning).

Kap.13. Videregående differentialregning. (35 sider)

Middelværdisætninger for funktioner af én variabel.

l'Hospitals regel. Grænseværdibestemmelse ved forskellige metoder.

Funktioner af flere variable. Ombytning af differentiationsordenen. Differentialer af højere orden. Retningsdifferentialkvotient.

Taylors formel for funktioner af én og flere variable, samt middelværdisætningen for funktioner af flere variable. Taylors grænseformel.

Bestemmelse af maksima og minima for funktioner af flere variable.

Kap.14. Sammenhæng. (14 sider)

Det topologiske rum $T = \hat{R}$.

Vilkårligt topologisk rum T.

Kurvesammenhængende mængde i et metrisk rum.

Polygonalt sammenhængende mængde i $\hat{R}^n$.

Kap.15. Differentiation og integration. (14 sider)

Sætninger om differentiation af Riemann-integraler.

Simpsons formel.

Kap. 16. Kurveteori. (35 sider)

Bevægelse, simpel bevægelse, ækvivalens, simpel kurve. Vejlængde (buelængde). Tangent. Hastighed, fart og acceleration. Naturlig parameterfremstilling. Rotation. Oskulationsplan, krumning og torsion. Fresnet's formler. Afvikler og evolut.

Mål og integral.

9.1. I dette kapitel skal vi tage integralbegrebet op til en mere omfattende drøftelse. Vi har i et tidligere kapitel omtalt forskellige integrationsmetoder, og vi har ved flere andre lejligheder udnyttet det fra gymnasieundervisningen velkendte integralbegreb. Ved denne lejlighed vil vi beskæftige os med selve indførelsen af integralet, og samtidig benytte lejligheden til at indføre nogle nærliggende generalisationer. Disse går i to retninger, idet vi dels ønsker at kunne integere visse diskontinuerte funktioner, og dels ønsker at udvide integralbegrebet til funktioner af flere variable. Det velkendte integralbegreb kan selvfølgelig godt udnyttes for funktioner af flere variable, idet vi kan give de variable på nær én faste værdier. For at kunne udnytte integration på denne måde, må vi imidlertid skaffe os nærmere oplysninger om virkningerne af sådanne integrationer, og disse spørgsmål vil blive taget op i et følgende kapitel.

Det fremgår af gymnasieundervisningens behandling af integration, at integralbegrebet er nøje knyttet til begreberne areal og volumen. Det er mindre iøjnefaldende, at begrebet intervallængde er af grundlæggende betydning ved indførelsen af integralet. Dette skyldes, at begrebet intervallængde er så primitivt og så velkendt, at dets helt fundamentale rolle let overses. Det tilsvarende begreb i n-dimensionale rum er på tilsvarende måde af fundamental betydning, og vi skal derfor indledningsvis omtale dette simple begreb.

9.2. På den reelle akse har vi allerede indført et interval-begreb, og vi vil benytte det uændret, idet vi dog i det følgende også vil betragte intervaller af formen [a,a], altså intervaller, der består af et eneste punkt. Når vi taler om intervallet $[a,b]$, forudsætter vi altid, at $a \leq b$, og når vi taler om intervaller $[a,b[$, $]a,b]$ eller $]a,b[$, forudsætter vi, at $a < b$.

Et interval $I = [a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ eller $]a,b[$ har længden $b-a$, der også kaldes <u>målet</u> af I og betegnes $m(I)$. Derved defineres en afbildning $m: \dot{I}$ ind i $\dot{R}$, hvor $\dot{I}$ betegner mængden af begrænsede intervaller på $\dot{R}$.

Ved en endelig inddeling af et interval I forstår vi en fremstilling af I som en foreningsmængde $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ af endelig mange disjunkte delintervaller. Er I_μ og I_ν to forskellige af disse delintervaller, da vil ethvert element af et af dem, f.eks. I_μ være mindre end ethvert element af det andet, og vi vil da sige, at I_μ kommer før I_ν. Vi kan antage, at intervallerne $I_1, \ldots, I_q$ er ordnet, således at I_k kommer før I_{k+1} for $k = 1, \ldots, q-1$. På hinanden følgende intervaller vil da have et fælles endepunkt. Efter et interval, der er åbent til højre, følger et, der er afsluttet til venstre, og efter et interval, der er afsluttet til højre, følger et, der er åbent til venstre.

Hvis vi med x_k betegner det fælles endepunkt for I_k og I_{k+1}, $k = 1, \ldots, q-1$, medens vi sætter $a = x_o$, $b = x_n$, får vi

$$m(I_k) = x_k - x_{k-1}, \quad m(I) = b-a = x_q - x_o,$$

altså

$$m(I) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k).$$

På grund af denne egenskab, siger vi, at målet m er en <u>additiv intervalfunktion</u>.

9.3. Ved et interval i talrummet $\dot{R}^n$ forstår vi et kartesisk produkt

$$I = I_1 \times \ldots \times I_n,$$

hvor $I_1,\dots,I_n$ er intervaller på $\grave{R}$. For intervaller i $\grave{R}^n$ indfører vi <u>det n-dimensionale mål</u> ved definitionen

$$m^n(I) = \prod_{\nu=1}^{n} m(I_\nu).$$

Hvis vi for hvert ν har en inddeling

$$D_\nu \ : \ I_\nu = I_{\nu 1} \cup \dots \cup I_{\nu q_\nu} \quad ,$$

får vi deraf en fremstilling

$$D{:}I = \bigcup_{k_1=1}^{q_1} \dots \bigcup_{k_n=1}^{q_n} \ I_{1k_1} \times \dots \times I_{nk_n}$$

af I som foreningsmængde af disjunkte delintervaller, altså en inddeling af I. Vi siger, at inddelingen D er <u>produkt</u> af inddelingerne D_ν, og en inddeling af I, der således kan fremkomme som produkt af inddelinger af koordinatinddelinren kaldes en <u>simpel inddeling</u> af I.

Vi sætter

$$I_{k_1,\dots,k_n} = I_{1k_1} \times\dots\times I_{nk_n} \quad ,$$

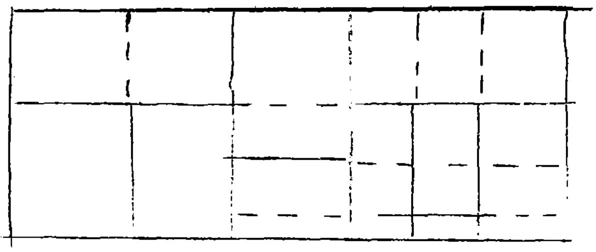
og vi har da

$$m^n(I) = \sum_{\nu=1}^{n} m(I_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k_\nu=1}^{q_\nu} m(I_{\nu k_\nu}) =$$

$$\sum_{k_1=1}^{q_1} \dots \sum_{k_n=1}^{q_n} m(I_{1k_1})\dots m(I_{nk_n}) = \sum_{k_n=1} m^n(I_{k_1,\dots,k_n}).$$

For en simpel inddeling af I har vi således bevist, at <u>det n-dimensionale mål af I er summen af de n-dimensionale mål af delintervallerne</u>.

9.4. Således som det er antydet med de fuldt optrukne linier på figuren, der svarer til det 2-dimensionale tilfælde, kan et interval $I = \prod I^{\nu} \subseteq \mathbb{R}^n$ være fremstillet som en foreningsmængde $I = \bigcup_{k=1}^{q} I_k$



af disjunkte delintervaller, uden at der foreligger en simpel inddeling. Vi taler da om inddelingen

$$(1) \qquad D: I = \bigcup_{k=1}^{q} I_k .$$

Hvert af intervallerne I_k er et produkt

$$I_k = \prod_{\nu=1}^{n} I_k^{\nu} ,$$

og hvis vi for hvert ν ordner endepunkterne af intervallerne I_k^{ν} efter størrelse, altså $x_{\nu 0} < x_{\nu 1} < \dots < x_{\nu p_\nu}$, får vi for hvert ν en inddeling

$$D'_{\nu}: I^{\nu} = [x_{\nu 0}, x_{\nu 0}] \cup]x_{\nu 0}, x_{\nu 1}[\cup [x_{\nu 1}, x_{\nu 1}] \cup$$
$$]x_{\nu 1}, x_{\nu 2}[\cup \dots \cup]x_{\nu p_\nu - 1}, x_{\nu p_\nu}[\cup [x_{\nu p_\nu}, x_{\nu p_\nu}],$$

hvor det første eller det sidste interval eventuelt skal udelades, hvis I^{ν} er åbent til vedkommende side.

Den simple inddeling D', der fremkommer som produkt af inddelingerne D'_{ν} er en videredeling af inddelingen (1), og de intervaller fra D', der er indeholdt i I_k udgør en simpel inddeling

$$(2) \qquad D_k: I_k = \bigcup_{j=1}^{s_k} I_{k,j} ,$$

medens den simple inddeling D' er givet ved

$$(3) \qquad D': I = \bigcup_{k=1}^{q} \bigcup_{j=1}^{s_k} I_{k,j} .$$

Vi kan nu let vise følgende sætning:

9.4.1. Sætning. Lad I være et interval i $\grave{R}^n$. For enhver inddeling

$$D: I = \bigcup_{k=1}^{q} I_k .$$

gælder relationen

$$mn(I) = \sum_{k=1}^{q} mn(I_k).$$

Bevis. Vi gennemfører den forud for sætningen omtalte konstruktion, og ifølge resultatet i slutningen af 9.3. har vi da

$$m^n(I_k) = \sum_{j=1}^{s_k} m^n(I_{k,j}); \quad m^n(I) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{s_k} m^n(I_{k,j}),$$

hvoraf sætningens rigtighed umiddelbart fremgår.

9.5. Efter ovenstående resultater er det nærliggende, at indføre et mål for enhver mængde i $\grave{R}^n$, som er foreningsmængde for endelig mange begrænsede intervaller.

9.5.1. Definition. Ved en trappemængde i $\grave{R}^n$ forstår vi en foreningsmængde af endelig mange disjunkte, begrænsede intervaller.

9.5.2. Sætning. Hvis A og B er trappemængder i $\grave{R}^n$, da er $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ og $B \setminus A$ trappemængder.

Bevis. Det er velkendt, at fællesmængden for 2 intervaller er et interval. For et interval I gælder det endvidere at komplementærmængden CI er foreningsmængde af endelig mange ubegrænsede intervaller, og relationen $I_1 \setminus I_2 = I_1 \cap CI_2$ viser derfor, at $I_1 \setminus I_2$ er foreningsmængde af disjunkte, begrænsede intervaller, altså en trappemængde. Er nu A en trappemængde og I et interval, da findes der en fremstilling $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor $I_1, \dots, I_q$ er disjunkte intervaller, og relationen $A \setminus I =$

$(I_1 \setminus I) \cup \ldots \cup (I_q \setminus I)$ viser, at $A \setminus I$ er en trappemængde. Af $A \cup I = (A \setminus I) \cup I$ fremgår derefter, at $A \cup I$ er en trappemængde. Heraf følger ved gentagen anvendelse, at foreningsmængden af 2 trappemængder er en trappemængde. Det ses umiddelbart, at fællesmængden for to trappemængder er en trappemængde. For $A = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, hvor $I_1, \ldots, I_q$ er disjunkte intervaller, får vi for $I \supseteq A$, hvor I er et interval, relationen $I \setminus A = (I \setminus I_1) \cap \ldots \cap (I \setminus I_q)$, som viser, at $I \setminus A$ er en trappemængde. Hvis A og B er trappemængder, kan vi vælge et interval $I \supseteq A$, og vi ser da, at $A \setminus B$ er en trappemængde. Dermed er sætningen fuldstændig bevist.

9.6. Som en forberedelse til indførelse af et mål for trappemængder viser vi følgende sætning:

9.6.1. Sætning. Lad A være en trappemængde i R^n, og lad

$$A = I_1 \cup \ldots \cup I_p = I'_1 \cup \ldots \cup I'_q$$

være fremstillinger af A som foreningsmængde af disjunkte intervaller. Da er

$$m^n(I_1) + \ldots + m^n(I_p) = m^n(I'_1) + \ldots + m^n(I'_q).$$

Bevis. Af bekvemmelighedshensyn vil vi skrive $m^n(\emptyset) = 0$. Vi har nu ved gentagne anvendelser af sætning 9.4.

$$\sum_{j=1}^{p} m^n(I_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} m^n(I_j \cap I'_k) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} m^n(I_j \cap I'_k) = \sum_{k=1}^{q} m^n(I'_k),$$

og dermed er sætningen bevist. Sætningen viser, at den følgende definition er entydig.

9.6.2. Definition. Lad A være en trappemængde og

$$A = I_1 \cup \ldots \cup I_p$$

en fremstilling af A som en sum af disjunkte intervaller. Tallet

$$m^n(A) = m^n(I_1) + \ldots + m^n(I_p)$$

kaldes det n-dimensionale mål af A.

Vi gør opmærksom på, at $m^n(A)$ afhænger væsentligt af n. En trappemængde $A \subseteq \dot{R}^n$ kan jo udmærket også være en trappemængde i $\dot{R}^{n+1}$. For eksempel kan A være indeholdt i et n-dimensionalt koordinatunderrum i $\dot{R}^{n+1}$. Vi har da $m^{n+1}(A) = 0$. Vi vil imidlertid oftest være i den situation, at tallet n er konstant gennem lange undersøgelser, og vi vil da udelade n som øvre index i m^n ligesom vi også oftest vil undlade ordet n-dimensional.

9.7. Vi minder om, at vi for $\underline{a} \in \dot{R}^n$ og en punktmængde $A \subseteq \dot{R}^n$ anvender betegnelsen

$$\underline{a}+A = \{\underline{a}+\underline{x} \mid \underline{x} \in A\}.$$

9.7.1. Sætning. Lad $\dot{T}^n$ være mængden af trappemængder på $\dot{R}^n$. Den ved målet $m(A)$ definerede afbildning $m+\dot{T}^n$ ind i $\dot{R}$ har følgende egenskaber:

m1) $\forall A \in \dot{T}^n(m(A) \geq 0)$

m2) $\forall A,B \in \dot{T}^n(A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A\cup B) = m(A)+(B))$

m3) $\forall \underline{a} \in \dot{R}^n \forall A \in \dot{T}^n(m(\underline{a}+A) = m(A))$

m4) $m([0,1[\times[0,1[\times\ldots\times[0,1[$, n faktorer$) = 1$.

Bevis. Påstandene m1) og m4) er umiddelbare, medens m2) fås ved fremstilling af A og B som foreningsmængder af disjunkte intervaller. For et interval I har vi direkte $m(\underline{a}+I) = m(I)$, og af $A = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, hvor $I_1,\ldots,I_q$ er disjunkte, fås fremstillingen

$$\underline{a}+A = \underline{a}+I_1) \cup \ldots \cup (\underline{a}+I_q),$$

hvor $\underline{a}+I_1,\ldots,\underline{a}+I_q$ er disjunkte intervaller. Derefter fås m3) umiddelbart.

9.8. Vi skal nu vise, at egenskaberne m1),...,m4) karakteriserer målet. Dette er indeholdt i følgende sætning

9.8.1. Sætning. Lad $\varphi:\dot{T}^n$ ind i $\dot{R}$ være en afbildning med følgende egenskaber:

1) $\forall A \in \dot{T}^n(\varphi(A) \geq 0)$

2) $\forall A,B \in \dot{T}^n(A \cap B = \emptyset \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A)+ \varphi(B))$

3) $\forall \underline{a} \in \dot{R}^n, \forall A \in \dot{T}^n(\varphi(\underline{a}+A) = \varphi(A))$

4) $\varphi([0,1[\times\ldots\times[0,1[$, n faktorer$) = 1$.

Da er φ identisk med m.

Bevis. Lad k være et helt tal. Vi deler intervallet $[0,1[$ i k lige store dele. Ved at danne produkt af n sådanne inddelinger, får vi enhedsterningen $E = [0,1[\times\ldots\times[0,1[$ inddelt i k^n terninger, der ifølge 3) alle afbildes ens ved φ. Terningen $[0,k^{-1}[\times\ldots\times[0,k^{-1}[$ afbildes derfor ifølge 2) på det reelle tal k^{-n}. Et interval $[a_1,b_1[\times\ldots\times[a_n,b_n[$, hvor vi for hvert ν har $b_\nu-a_\nu = p_\nu k^{-1}$, hvor $p_\nu \in \dot{N}$, kan på tilsvarende måde deles i $p_1\ldots p_n$ terninger, der hver afbildes i k^{-n}. Altså vil et interval $I = [a_1,b_1[\times\ldots\times[a_n,b_n[$, hvor hvert $b_\nu-a_\nu$ er rationalt, give $\varphi(I) = (b_1-a_1)\ldots(b_n-a_n)$. På grund af 1) er $\varphi(I)$ for et interval $\geq \varphi(I_1)$ for ethvert $I_1 \subseteq I$, men $\leq \varphi(I_2)$ for $I \subseteq I_2$. Vi kan vælge I_1 og I_2 med koordinatintervaller af rational længde vilkårlig tæt ved de tilsvarende længder for I. Det fremgår heraf, at $\varphi(I) = m(I)$ for ethvert interval. Men så gælder $\varphi(A) = m(A)$ for enhver trappemængde, idet en sådan skrives som foreningsmængde af disjunkte intervaller.

9.9. I mange anvendelser af matematikken optræder der afbildninger $\varphi:\dot{T}^n$ ind i $\dot{R}$, som er beslægtede med mål uden dog at have alle et måls egenskaber. I et fysisk rum, i hvilket der befinder sig stof, vil enhver trappemængde $A \in \dot{T}^n$ indeholde en vis masse $\mu(A)$ og en vis elektricitetsmængde $e(A)$. Afbildningerne μ og e tilfredsstiller betingelsen 2) fra sætning 9.8.1, og

μ tilfredsstiller også 1). Sædvanligvis vil 3) og 4) ikke være tilfredsstillede.

9.9.1. Definition: En afbildning $\varphi:\grave{T}^n$ ind i $\grave{R}$ kaldes en additiv intervalfunktion, hvis den tilfredsstiller betingelsen 2) fra sætning 9.8.1. En additiv intervalfunktion kaldes positiv, hvis den tillige tilfredsstiller 1).

Vi skal understrege, at det således definerede begreb er for generelt for de fleste praktiske anvendelser. De supplerende betingelser, der gør det praktisk anvendeligt, er imidlertid noget uanskuelige, og vi vil udskyde en nærmere omtale af dem til et senere tidspunkt. Vi skal foreløbig bemærke, at den ovenfor omtalte additive intervalfunktion e er differens mellem 2 positive, additive intervalfunktioner, af hvilke den ene hidrører fra den positive, medens den anden hidrører fra den negative elektricitet. I praksis er det kun differenser mellem positive intervalfunktioner, der finder anvendelse.

9.10. Med $\grave{I}$ vil vi betegne mængden af intervaller i $\grave{R}^n$. Vi vil da vise følgende sætning:

9.10.1. Sætning. Lad $\psi:\grave{I}$ ind i $\grave{R}$ være en afbildning, som tilfredsstiller betingelsen

2*). For ethvert interval I og enhver simpel inddeling

$$D:I = I_1\cup\ldots\cup I_q \text{ er } \psi(I) = \psi(I_1)+\ldots+\psi(I_q).$$

Der eksisterer da en additiv intervalfunktion $\varphi:\grave{T}^n$ ind i $\grave{R}$, således at ψ er restriktionen af φ til mængden $\grave{I}$ (vi siger, at ψ kan udvides til en additiv intervalfunktion).

Bevis. Vi kan erstatte m^n med ψ i beviset for sætning 15.4.1. og får derved bevist, at 2*) gælder for vilkårlige inddelinger. Vi kan derefter kopiere beviset for sætning 9.6.1 og derfor kan vi for $A = I_1 \cup \ldots \cup I_p$, hvor $I_1, \ldots, I_p$ er disjunkte intervaller, definere

$$\varphi(A) = \psi(I_1) + \ldots + \psi(I_p).$$

Det ses nu umiddelbart, at φ er en additiv intervalfunktion, og at $\varphi(I) = \psi(I)$ for ethvert interval I.

9.11. Lad $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ være en kontinuert afbildning. Hvis I er et af intervallerne $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ eller $[a,b]$ sætter vi

$$(I) = \int_a^b f(x)dx.$$

Vi ved da, at ψ tilfredsstiller $2^*)$ i sætning 9.10.1, og ψ kan derfor udvides til en additiv intervalfunktion.

Vi kunne også have defineret

$$\varphi(I) = f(b)-f(a),$$

og vi kunne da tilsvarende udvide φ til en additiv intervalfunktion.

Vi opgiver forudsætningen om, at f er kontinuert, og kræver i stedet, at f er voksende. For ethvert $x \in \dot{R}$ sætter vi

$$f(x-) = \sup f(]-\infty, x[), \quad f(x+) = \inf f(]x, \infty[),$$

og vi definerer

$$\chi(]a,b[) = f(b-) - f(a+), \quad \chi(]a,b]) = f(b+) - f(a+)$$

$$\chi([a,b[) = f(b-) - f(a-), \quad \chi([a,b]) = f(b+) - f(a-),$$

specielt

$$\chi([a,a]) = f(a+) - f(a-).$$

Det er let at vise, at χ er en positiv, additiv intervalfunktion. Vi bemærker, at χ undertiden knytter en positiv værdi til et interval, der kun indeholder et enkelt punkt.

En afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ giver på tilsvarende måde anledning til en additiv intervalfunktion, idet vi for $I = [a_1, b_1] \times$

$[a_2,b_2]$ eller ethvert af de intervaller, der fås ved udeladelse af et eller flere endepunkter definerer

$$\varphi(I) = f(b_1,b_2)-f(b_1,a_2)-f(a_1,b_2)+f(a_1,a_2).$$

På analog måde kan man definere additive intervalfunktioner i rum med flere dimensioner.

9.12. Vi skal nu udlede nogle yderst simple regneregler for additive intervalfunktioner.

9.12.1. Sætning. Lad $\varphi: \grave{T}^n$ ind i $\grave{R}$ være en additiv intervalfunktion. For $A,B \in \grave{T}^n$ har vi da regnereglen

$$\varphi(A \cup B)+\varphi(A \cap B) = \varphi(A)+\varphi(B),$$

og for $A \supseteq B$ gælder tillige

$$\varphi(A \setminus B) = \varphi(A)-\varphi(B).$$

Bevis. For $A \supseteq B$ er $A \setminus B$ og B disjunkte. På grund af additiviteten har vi derfor $\varphi(A) = \varphi(A \setminus B)+\varphi(B)$. For vilkårlige A og B er B og $A \setminus (A \cap B)$ disjunkte. Vi har derfor

$$\varphi(A \cup B) = \varphi((A\setminus(A \cap B)) \cup B) =$$
$$\varphi(A \setminus (A \cap B)+\varphi(B) = \varphi(A)-\varphi(A \cap B)+\varphi(B).$$

Dermed er sætningen bevist.

9.13. Vi vil endnu anføre et par sætninger om positive, additive intervalfunktioner.

9.13.1. Sætning. Lad φ være en positiv additiv intervalfunktion. For vilkårlige trappemængder $A_1,\dots,A_q$ gælder da

$$\varphi(A_1\cup\dots\cup A_q) \leq \varphi(A_1)+\dots+\varphi(A_q).$$

Bevis. For $q = 2$ følger påstanden af sætning 9.12.1. Det generelle resultat fås ved gentagen anvendelse af tilfældet $q = 2$.

9.13.2. Sætning. Lad φ være en positiv additiv mængdefunktion. Lad A være en trappemængde og $\{I_1,\dots,I_q\}$ en overdækning af A med intervaller. Da er

$$\varphi(A) \leqq \varphi(I_1)+\ldots+\varphi(I_q).$$

Bevis. Af sidste påstand i sætning 9.12.1 og af sætning 9.13.1 fås for $B = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, at

$$\varphi(A) = \varphi(B)-\varphi(B \setminus A) \leqq \varphi(B) \leqq \varphi(I_1)+\ldots+\varphi(I_q).$$

9.14. Lad nu $f,g:\grave{I}$ ind i $\grave{R}$ være additive intervalfunktioner på $\grave{R}^n$, og lad α og β være reelle tal. Da er $\alpha f+\beta g$ en additiv intervalfunktion. Mængden af additive intervalfunktioner på $\grave{R}^n$ udgør således et vektorrum over de reelle tal.

De specielle additive intervalfunktioner, der kan skrives som differens mellem positive, additive intervalfunktioner, udgør et underrum i rummet af alle additive intervalfunktioner på $\grave{R}^n$.

9.15. Efter ovenstående gennemgang af den meget elementære målteori vil vi nu gå over til integralteorien, idet vi først behandler et særligt simpelt tilfælde, der er nær knyttet til den elementære målteori. Bagefter vil vi så generalisere integralbegrebet, så det kommer til at omfatte alle kontinuerte og visse diskontinuerte funktioner.

For at spare en del skrivearbejde vil vi udelukkende beskæftige os med funktioner, der er definerede i hele rummet, altså afbildninger $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$. Dette er ingen væsentlig indskrænkning, idet en afbildning af en mængde $A \subseteq \grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ kan udvides til en afbildning af $\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$, idet vi lader alle punkter af $\complement A$ afbildes i 0.

Afslutningen af mængden $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) \neq 0\}$ kaldes <u>støtten</u> for funktionen f. En funktionsstøtte er således en afsluttet mængde og støttens komplementærmængde er det indre af $f^{-1}(0)$.

9.16. Den funktionsklasse, vi i første omgang vil beskæftige os med, indføres ved følgende definition:

9.16.1. Definition. En afbildning $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ kaldes en trappefunktion, hvis dens støtte er en trappemængde A med en fremstilling $A = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ som foreningsmængde af disjunkte intervaller, således at f er konstant på hvert af intervallerne I_k.

Det fremgår umiddelbart af definitionen, at f er en trappefunktion, hvis og kun hvis billedet $f(\dot{R}^n)$ er en endelig mængde, og det for hvert $y \in f(\dot{R}^n)$ gælder, at $f^{-1}(y)$ er en trappemængde. Heraf fremgår, at kravet i definition 15.16.1 om, at $I_1,\ldots,I_q$ skal være disjunkte, er overflødigt.

9.17. Lad $f,g:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være trappefunktioner, og lad α og β være reelle tal. Da er $\alpha f+\beta g$ åbenbart igen en trappefunktion.

For at vise denne påstand behøver vi blot at betragte fremstillinger $A = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, $B = I_1' \cup \ldots \cup I_q'$ af støtterne for f og g, således at f er konstant på hvert I_k, medens g er konstant på hvert $I_{k'}'$. Heraf følger, at $\alpha f+\beta g$ kun antager endelig mange værdier og er konstant på hver af mængderne $I_k \cap I_{k'}'$, og dermed er sætningen bevist.

Ganske det samme ræsonnement viser nu, at også produktet fg er en trappefunktion.

Med $f \vee g$ og $f \wedge g$ betegner vi de to afbildninger, som afbilder $\underline{x} \in \dot{R}^n$ på henholdsvis den største og den mindste af værdierne $f(\underline{x})$ og $g(\underline{x})$, altså

$$(f \vee g)(\underline{x}) = \sup\{f(\underline{x}),g(\underline{x})\}, \quad (f \wedge g)(\underline{x}) = \inf\{f(\underline{x}),g(\underline{x})\}.$$

Stadig ved hjælp af det samme ræsonnement ser vi, at $f \vee g$ og $f \wedge g$ igen bliver trappefunktioner.

Operationerne $\vee$ og $\wedge$ kan selvfølgelig udføres på vilkårlige afbildninger ind i $\dot{R}$. De to regneoperationer er associative og kommutative. For $\alpha > 0$ gælder endvidere

$$\alpha f \vee \alpha g = \alpha(f \vee g); \quad \alpha f \wedge \alpha g = \alpha(f \wedge g).$$

Det er selvfølgelig uheldigt, at de her indførte operationstegn er identiske med et par af de logiske tegn. Sagen kompliceres yderligere ved, at de samme tegn ofte anvendes for visse operationer med vektorer. Vi vil derfor indskrænke den her indførte specielle anvendelse af de to operationstegn til de kapitler, der behandler indførelsen af integration.

9.18. Vi indfører nu integralet af en trappefunktion $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$. Funktionen f antager kun endelig mange fra 0 forskellige værdier $y_1,\ldots,y_p$, og hver af mængderne $f^{-1}(y_k)$ er en trappemængde i $\dot{R}^n$ og har således et n-dimensionalt mål $m(f^{-1}(y_k))$.

9.18.1. <u>Definition</u>. Summen

$$\int f = \sum_{k=1}^{p} y_k m(f^{-1}(y_k)) \tag{1}$$

kaldes <u>integralet</u> af trappefunktionen f. Det betegnes også mere udførligt

$$\int_{\dot{R}^n} f = \int_{\dot{R}^n} f(\underline{x})d\underline{x} = \int f.$$

9.18.2. <u>Sætning</u>. Hvis A er en trappemængde, der indeholder støtten for f og har fremstillingen $A = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, hvor mængderne I_k er disjunkte, og f er konstant på hvert I_k, og hvis vi for hvert k vælger et vilkårligt $\underline{x}_k \in I_k$, da er

$$\int f = \sum_{k=1}^{q} m(I_k)f(\underline{x}_k). \tag{2}$$

Bevis. For hver værdi $y_j \neq 0$, der antages af f, bliver $f^{-1}(y_j)$ foreningsmængde af visse af intervallerne I_k, og $m(f^{-1}(y_j))$ bliver summen af disse intervallers mål, og for

$\underline{x}_k \in I_k$ bliver tillige $f(\underline{x}_k) = y_k$. Hvert led i (1) spaltes derved i en sum af led fra (2), og de tiloversblevne led i (2) har alle værdien 0. Altså har summerne i (1) og (2) samme værdi.

9.19. Vi skal nu udlede regneregler for integraler af trappefunktioner. For korthेds skyld vil vi skrive $f \leq g$ i betydningen $\forall \underline{x}\ (f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}))$.

9.19.1. Sætning. For trappefunktioner f,g på $\grave{R}^n$ og reelle tal α og β har vi

$$\int (\alpha f+\beta g) = \alpha\int f+\beta\int g.$$

Hvis $f \leq g$, da er også $\int f \leq \int g$.

Bevis. Foreningsmængden for støtterne for f og g kan fremstilles på formen $I_1\cup\ldots\cup I_q$, hvor $I_1,\ldots,I_q$ er disjunkte intervaller, således at f og g er konstante på hvert I_k. Sætningen fås nu umiddelbart, idet integralerne skrives på formen (2).

Den første påstand i sætning 9.19.1 udtrykker, at $\int$ er en lineær afbildning af mængden af trappefunktioner ind i de reelle tal. Den sidste egenskab udtrykker, at afbildningen $\int$ tillige er monoton.

9.20. Vi skal nu gøre rede for sammenhængen mellem integral af trappefunktioner og mål af trappemængder. Vi vil betragte $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$, og vi vil antage, at $f \geq 0$. Vi vil tænke os, at f har støtten $A = I_1\cup\ldots\cup I_q$, hvor $I_1,\ldots,I_q$ er disjunkte, og f er konstant på hvert I_k. Sammen med f vil vi betragte en punktmængde $B \subseteq \grave{R}^{n+1}$, defineret ved

$$B = \{(\underline{x},y) \mid \underline{x} \in A \wedge 0 \leq y < f(\underline{x})\}.$$

9.20.1. Sætning. Punktmængden B er en trappemængde i $\grave{R}^{n+1}$, og dens n+1-dimensionale mål er $\int f$.

Bevis. Idet vi vælger $\underline{x}_k \in I_k$, $k = 1,\ldots,q$, har vi fremstillingen

$$B = \bigcup_{k=1}^{q} (I_k \times [0, f(\underline{x}_k)[)$$

af B som foreningsmængde af disjunkte intervaller. Altså er B en trappemængde med det n+1-dimensionale mål

$$m(B) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k \times [0, f(\underline{x}_k)[) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k) f(\underline{x}_k) = \int f,$$

og dermed ersætningen bevist.

Lad nu igen $A \subseteq \dot{R}^n$ være en trappemængde, og χ_A være dens karakteristiske funktion, altså

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \underline{x} \in A \\ 0, & \text{hvis } x \notin A. \end{cases}$$

Da er χ_A en trappefunktion, og definitionen 9.18.1 viser, at

$$\int \chi A = m(A).$$

9.21. Vi vil et øjeblik betragte $\dot{R}^{n+p} = \dot{R}^n \times \dot{R}^p$, hvis punkter vi betegner $(\underline{x}, \underline{y})$, hvor $\underline{x} \in \dot{R}^n$, $\underline{y} \in \dot{R}^p$.

9.21.1. <u>Sætning</u>. Hvis $f: \dot{R}^{n+p}$ ind i $\dot{R}$ er en trappefunktion, da er for fast $\underline{x} \in \dot{R}^n$ den ved $f_{\underline{x}}(y) = f(\underline{x}, \underline{y})$ definerede afbildning $f_{\underline{x}}: \dot{R}^p$ ind i $\dot{R}$ en trappefunktion, og dens integral

$$F(\underline{x}) = \int f_{\underline{x}} = \int_{\dot{R}^p} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}$$

er en trappefunktion på $\dot{R}^n$. Endvidere gælder

$$\int f = \int_{\dot{R}^{n+p}} f(\underline{x}, \underline{y}) d(\underline{x}, \underline{y}) = \int F = \int_{\dot{R}^n} \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x}.$$

Bevis. Lad $I = I' \times I''$, $I' \subset \dot{R}^n$, $I'' \subset \dot{R}^p$ være et interval, som indeholder støtten for f. Ifølge definition 9.16.1 og konstruktionen i 9.4 eksisterer der en simpel inddeling af I i delintervaller $I_{jk} = I'_j \times I''_k$; $j = 1, \ldots, J$; $k = 1, \ldots, K$, således at f er konstant på hvert I_{jk} med en værdi, som vi betegner f_{jk}. Vi har da

$$\int f = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} m(I_j' \times I_k'')f_{jk} = \sum_{j=1}^{J} m(I_j') \sum_{k=1}^{K} m(I_k'')f_{jk}.$$

Vi vælger nu $\underline{x}_j \in I_j'$, og vi har da

$$F(\underline{x}_j) = \sum_{k=1}^{K} m(I_k'')f_{jk},$$

hvilket viser, at F er konstant på hvert I_j', altså en trappefunktion, samt at

$$\int f = \sum_{j=1}^{J} m(I_j')F(\underline{x}_j) = \int F,$$

og dermed er sætningen bevist.

9.22. Vi går nu over til den egentlige mål- og integralteori, idet vi udvider mål af trappemængder til mål af en mere omfattende klasse af mængder og integral af trappefunktioner til integral af en mere omfattende klasse af funktioner. Den teknik vi anvender er en slags approxomation ved trappefunktioner, og denne approximation lægges således til rette, at man kan tale om approximation fra 2 sider. Derved får enhver mængde et indre og et ydre mål, ligesom enhver funktion får et nedre og et øvre integral. Mængden har et mål, hvis det indre og det ydre mål er lige store, og funktionen har et integral, hvis det nedre og det øvre integral er lige store.

Selve approximationen med trappemængder eller trappefunktioner kan lægges til rette på forskellig vis, og derved bliver klasserne af målelige mængder eller integrable funktioner mere eller mindre omfattende. Vi skal i indeværende kursus i hovedsagen holde os til en simpel og nærliggende fremgangsmåde, der fører til Riemann-integralet (B. Riemann 1826-66) og Riemannmålet. En langt mere dybsindig metode leder til Lebesgue-integralet (H. Lebesgue 1875-1941) og Lebesguemålet. Matematik 2 vil omfatte en grundig indførelse i Lebesgue's mål- og integralteori.

9.23. Vi vil nu først definere nedre og øvre Riemann-integral.

9.23.1. Definition. Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Idet $\hat{T}^n$ er mængden af trappefunktioner $\varphi:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$, sætter vi

$$\underline{\int} f = \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \in \hat{T}^n \wedge \varphi \leqq f\right\}$$

$$\overline{\int} f = \inf\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \in \hat{T}^n \wedge \varphi \geqq f\right\}.$$

De to værdier kaldes henholdsvis nedre og øvre Riemann-integral af f. Hvis $\underline{\int} f = \overline{\int} f$, kaldes f Riemann-integrabel, og størrelsen $\int f = \underline{\int} = \overline{\int} f$ kaldes integralet af f.

Antagelserne, at f er begrænset og har begrænset støtte sikrer netop, at de to talmængder, der optræder i definitionen, ikke er tomme. For et $\varphi_1 \leqq f$ og et $\varphi_2 \geqq f$ gælder ifølge sætning 9.19.1, at $\varphi_1 \leqq \varphi_2$, og af sætning 4.9.1. følger derfor

$$\underline{\int} f \leqq \overline{\int} f,$$

for enhver begrænset funktion med begrænset støtte.

Ganske som for trappefunktionerne vil vi også lejlighedsvis benytte udførligere betegnelser, f.eks.

$$\underline{\int} f = \underline{\int}_{\dot{R}^n} f = \underline{\int}_{\dot{R}^n} f(\underline{x})d\underline{x}$$

og tilsvarende for øvre integral og for integralet.

9.24. Vi vil nu udlede de elementæreste regneregler for Riemann-integralet.

9.24.1. Sætning. Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte og lad α være et positivt tal. Da er $\underline{\int} \alpha f = \alpha\underline{\int} f$; $\overline{\int} \alpha f = \alpha\overline{\int} f$; $\underline{\int}(-\alpha f) = -\alpha\overline{\int} f$; $\overline{\int}(-\alpha f) = -\alpha\underline{\int} f$.

Bevis. Idet φ og ψ betegner trappefunktioner, er

$$\{\varphi \mid \varphi \leqq -\alpha f\} = \{-\alpha\psi \mid \psi \geqq f\},$$

hvilket medfører den tredie relation. De øvrige vises analogt.

9.24.2. <u>Sætning</u>. Lad $f,g:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være begrænsede funktioner med begrænset støtte. Da er

$$\underline{\int} f + \underline{\int} g \leqq \underline{\int}(f+g) \leqq \left\{\begin{matrix} \underline{\int} f + \overline{\int} g \\ \overline{\int} f + \underline{\int} g \end{matrix}\right\} \leqq \overline{\int}(f+g) \leqq \overline{\int} f + \overline{\int} g.$$

Bevis. Idet φ og ψ betegner trappefunktioner, er

$$\begin{aligned}\underline{\int} f + \underline{\int} g &= \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \leqq f\right\} + \sup\left\{\int\psi \,\middle|\, \psi \leqq g\right\} = \\ &\sup\left(\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \leqq f\right\} + \left\{\int\psi \,\middle|\, \psi \leqq g\right\}\right) = \\ &\sup\left\{\int(\varphi+\psi) \,\middle|\, \varphi \leqq f \wedge \psi \leqq g\right\} \leqq \underline{\int}(f+g).\end{aligned}$$

Ved at anvende dette resultat på f+g og -g får vi

$$\underline{\int} f = \underline{\int}((f+g)+(-g)) \geqq \underline{\int}(f+g)+\underline{\int}(-g) = \underline{\int}(f+g)-\overline{\int} g,$$

hvor vi benyttede sætning 9.24.1. Dermed har vi bevist uligheden

$$\underline{\int}(f+g) \leqq \underline{\int} f + \overline{\int} g.$$

De øvrige uligheder fås ved ombytning af betegnelser.

9.24.3. <u>Sætning</u>. Hvis $f,g:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ er Riemann-integrable og α er et reelt tal, er αf og $f+g$ Riemann-integrable, og

$$\int \alpha f = \alpha \int f; \quad \int(f+g) = \int f + \int g.$$

Sætningen følger umiddelbart af sætning 9.24.1 og 9.24.2. Den kan også formuleres på følgende måde.

9.24.4. Sætning. Mængden af Riemann-integrable funktioner $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ udgør et vektorrum over de reelle tal, og $\int$ er en lineær funktional på dette vektorrum.

9.25. Det er klart, at $f \geq 0$ medfører $\underline{\int} f \geq 0$. Mere generelt har vi resultatet.

9.25.1. Sætning. Hvis $f,g:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ er begrænsede og har begrænset støtte, vil $f \leq g$ medføre $\underline{\int} f \leq \underline{\int} g$ og $\overline{\int} f \leq \overline{\int} g$.

Bevis. For enhver trappefunktion $\varphi \leq f$ gælder $\varphi \leq g$, altså $\int\varphi \leq \underline{\int} g$, altså

$$\underline{\int} f = \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \leq f\right\} \leq \underline{\int} g.$$

Den anden relation vises analogt.

9.25.2. Definition. Ved en positiv Riemann'sk nulfunktion forstås en positiv, Riemann-integrabel funktion, hvis Riemann-integral er 0. Ved en Riemann'sk nulfunktion forstås en funktion, der kan skrives som differens mellem 2 positive Riemann'ske nulfunktioner.

Det er klart, at de Riemann'ske nulfunktioner udgør et vektorrum. Det er endvidere klart, at en funktion f er en Riemann'sk nulfunktion, hvis og kun hvis $\overline{\int} |f| = 0$.

9.25.2. Sætning. Hvis $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ er begrænset og har begrænset støtte, medens $h:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ er en Riemann'sk nulfunktion, da er

$$\underline{\int}(f+h) = \underline{\int} f; \quad \overline{\int}(f+h) = \overline{\int} f.$$

Bevis: Af sætning 9.24.1 fås

$$\underline{\int}(f+h) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} h = \underline{\int} f,$$

og

$$\underline{\int} f = \underline{\int}((f+h)-h) \geq \underline{\int}(f+h) + \underline{\int}(-h) = \underline{\int}(f+h) - \underline{\int} h = \underline{\int}(f+h),$$

hvormed den første påstand er bevist. Den anden vises tilsvarende.

9.26. For begrænsede funktioner $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ med begrænset støtte indfører vi en binær relation $\doteq$, som læses omtrent lig med, og som defineres ved, at $f \doteq g$ skal være ensbetydende med, at $g-f$ er en Riemann'sk nulfunktion. Det er klart, at $\doteq$ opfylder betingelserne

1) $\forall f(f \doteq f)$; relationen er altså refleksiv
2) $\forall f,g(f \doteq g \iff g \doteq f)$; relationen er altså symmetrisk
3) $\forall f,g,h((f \doteq g \wedge g \doteq h) \Rightarrow f \doteq h)$; relationen er altså transitiv.

Relationen $\doteq$ inducerer således en klasseinddeling på mængden af begrænsede funktioner med begrænset støtte. Funktioner i samme klasse er altså omtrent identiske, og ifølge sætning 9.25.2 har de alle samme nedre og samme øvre integral. Vi skal efterhånden se, at omtrent identiske funktioner også i andre henseender forholder sig ens med hensyn til Riemann-integration. Dette betyder også, at Riemann-integrationen er for grov til at skelne mellem funktioner, der er omtrent ens, et fænomen, som har en ikke ringe betydning, da man ofte ønsker at identificere en funktion f på basis af integraler, hvor f optræder i integranden.

Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være begrænset og lad h være en Riemann'sk nulfunktion. Da er $\alpha|h|$ en Riemann'sk nulfunktion for ethvert $\alpha \in \dot{R}$. Specielt er $|h|\sup|f|$ en nulfunktion og af $0 \leq |hf| \leq |h|\sup|f|$ følger ved sætning 9.19.1, at $|hf|$ er en nulfunktion. Altså er hf en Riemann'sk nulfunktion.

Med $\hat{0}$ vil vi betegne klassen af Riemann'ske nulfunktioner. Hver af de ved $\doteq$ inducerede klasser har da formen

$$f + \hat{0} = \{f+h \mid h \in \hat{0}\},$$

hvor f er begrænset og har begrænset støttemængde. Vi har nu åbenbart ifølge det foregående

$$\hat{0} + \hat{0} = \hat{0};\quad f\hat{0} = \hat{0},$$

og vi får derfor

$$(f+\hat{0}) + (g+\hat{0}) = (f+g) + (\hat{0}+\hat{0}) = (f+g)+\hat{0}$$

$$(f+\hat{0})(g+\hat{0}) = fg+(f\hat{0}+g\hat{0}+\hat{0}\hat{0}) = fg+\hat{0},$$

hvilket viser, at der er overensstemmelse mellem klasseinddelingen og regneopera

9.27. Vi vil nu ligesom i 9.21 betragte $\dot{R}^{n+p} = \dot{R}^n \times \dot{R}^p$, hvis punkter betegnes $(\underline{x},\underline{y})$, hvor $\underline{x} \in \dot{R}^n$, $\underline{y} \in \dot{R}^p$.

9.27.1. <u>Sætning</u>. For en begrænset funktion $f:\dot{R}^{n+p}$ ind i $\dot{R}$ med begrænset støttemængde gælder ulighederne

$$\underline{\int} f \leq \underline{\int}\left(\underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y}\right)d\underline{x} \leq \begin{Bmatrix} \underline{\int}(\overline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y})d\underline{x} \\ \overline{\int}(\underline{\int} f(\underline{x},\underline{y}))d\underline{y})d\underline{x} \end{Bmatrix} \leq \overline{\int}\left(\overline{\int} f(\underline{x},\underline{y})dy\right)dx \leq \overline{\int} f$$

Bevis. Vi sætter $F_1(\underline{x}) = \underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y}$, $F_2(\underline{x}) = \overline{\int} f(\underline{x},\underline{y})dy$ og vi har da $F_1 \leq F_2$, altså $\underline{\int} F_1 \leq \underline{\int} F_2$ og $\overline{\int} F_1 \leq \overline{\int} F_2$. Dermed har vi vist gyldigheden af de ikke trivielle blandt de 4 midterste uligheder. For en trappefunktion $\varphi \leq f$ gælder $\Phi(\underline{x}) = \int\varphi(\underline{x},\underline{y})d\underline{y} \leq \underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y} = F_1(\underline{x})$, hvor Φ er en trappefunktion. Altså er ifølge sætning 9.21.1

$$\int\varphi = \int\Phi \leq \underline{\int} F_1 = \underline{\int}(\underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y})d\underline{x},$$

og da dette gælder for alle valg af trappefunktionen $\varphi \leq f$, vil $\underline{\int} f = \sup\left\{\int\varphi \,\middle|\, \varphi \leq f\right\}$ tilfredsstille den samme ulighed. Dermed er gyldigheden af det venstre ulighedstegn bevist, og det højre vises tilsvarende.

9.27.2. <u>Sætning</u>. Lad $f:\dot{R}^{n+p}$ ind i $\dot{R}$ være en Riemann-integrabel funktion. De ved

$$F_1(\underline{x}) = \underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y},\quad F_2(x) = \overline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{y},$$
$$G_1(\underline{y}) = \underline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{x},\quad G_2(\underline{y}) = \overline{\int} f(\underline{x},\underline{y})d\underline{x}$$

definerede afbildninger $F_1,F_2:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ og $G_1,G_2:\dot{R}^p$ tilfredsstiller relationerne

$$F_1 \doteq F_2 \quad , \quad G_1 \doteq G_2.$$

Endvidere er disse funktioner Riemann-integrable, og

$$\int f = \int F_1 = \int F_2 = \int G_1 = \int G_2.$$

Bevis. Da f er Riemann-integrabel, er $\underline{\int} f = \overline{\int} f$, hvilket bevirker, at alle lighedstegnene i sætning 9.27.1 kommer til at gælde, og vi får derfor

$$\int f = \underline{\int} F_1 = \overline{\int} F_1 = \underline{\int} F_2 = \overline{\int} F_2,$$

hvilket viser, at F_1 og F_2 er Riemann-integrable, og at $\int(F_2-F_1) = 0$, altså $F_1 \doteq F_2$. Ved at lade $\underline{x}$ og $\underline{y}$ bytte rolle i sætning 9.27.1 fås et nyt sæt uligheder, der giver påstandene om G_1 og G_2.

Betydningen af sætning 9.27.2 er, at en integration i flere dimensioner **kan** udføres ved gentagne integrationer i 1 dimension.

9.28. Det viser sig, at klassen af Riemann-integrable funktioner på $\dot{R}^n$ også er organiseret ved multiplikation, samt operationerne $\vee$ og $\wedge$. Vi vil basere beviserne på det trivielle kriterium:

9.28.1. <u>Riemann's integrabilitetskriterium</u>. Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse, for at f er Riemann-integrabel, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer trappefunktioner $\varphi_1,\varphi_2:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

$$\inf f(\dot{R}^n) \leqq \varphi_1 \leqq f \leqq \varphi_2 \leqq \sup f(\dot{R}^n); \quad \int(\varphi_2-\varphi_1) \leqq \varepsilon.$$

Bevis. Hvis φ_1 og φ_2 opfylder de anførte betingelser, giver ulighederne $\int \varphi_1 \leqq \underline{\int} f \leqq \overline{\int} f \leqq \int \varphi_2$, at $\overline{\int} f - \underline{\int} f \leqq \varepsilon$. Heraf følger, at betingelsen er tilstrækkelig. Hvis f er Riemann-integrabel, kan vi ifølge definitionerne af nedre og øvre integral vælge trappefunktionerne ψ_1 og ψ_2, således at

$$\psi_1 \leqq f \leqq \psi_2 \quad , \quad \int\psi_1 \geqq \int f - \tfrac{1}{2}\varepsilon, \ \int\psi_2 \leqq \int f + \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Hvis vi derefter sætter $\varphi_1 = \psi_1 \vee \inf f(\dot{R}^n)$, $\varphi_2 = \psi_2 \wedge \sup f(\dot{R}^n)$, bliver alle ulighederne opfyldt.

9.28.2. <u>Sætning</u>. Hvis $f, g : \dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ er Riemann-integrable funktioner, er $f \vee g$, $f \wedge g$, $|f|$, fg Riemann-integrable.

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Vi kan vælge trappefunktioner $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, således at

$$\varphi_1 \leqq f \leqq \varphi_2, \ \psi_1 \leqq g \leqq \psi_2; \ \int(\varphi_2-\varphi_1) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \ \int(\psi_2-\psi_1) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Vi har da

$$\varphi_1 \vee \psi_1 \leqq f \vee g \leqq \varphi_2 \vee \psi_2,$$

og hvis vi for et $\underline{x} \in \dot{R}^n$ har $\varphi_2(\underline{x}) \geqq \psi_2(\underline{x})$, får vi

$$(\varphi_2 \vee \psi_2)(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_1)(\underline{x}) = \varphi_2(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_1)(\underline{x}) \leqq \varphi_2(\underline{x}) - \varphi_1(\underline{x}),$$

og helt generelt får vi derfor

$$(\varphi_2 \vee \psi_2)(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_1)(\underline{x}) \leqq (\varphi_2(\underline{x}) - \varphi_1(\underline{x})) + (\psi_2(\underline{x})-\psi_1(\underline{x}))$$

altså

$$\int((\varphi_2 \vee \psi_2)-(\varphi_1 \vee \psi_1)) \leqq \int(\varphi_1-\varphi_1) + \int(\psi_2-\psi_1) \leqq \varepsilon,$$

og dermed har vi vist, at $f \vee g$ er Riemann-integrabel. Analogt for $f \wedge g$. Af $|f| = f \vee -f$ følger dernæst, at $|f|$ er integrabel. Af relationen $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)$ fremgår, at vi kan vise, at fg er integrabel ved at vise, at kvadratet på en integrabel funktion f er integrabelt. Da $|f|$ er integrabel og $f^2 = |f|^2$, kan vi antage $f \geq 0$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan da bestemme trappe-funktioner φ_1 og φ_2, således at

$$0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2 \leq \sup f(\mathring{R}^n);\ \int(\varphi_2-\varphi_1) \leq \frac{\varepsilon}{2(\sup f(\mathring{R}^n)}\ ,$$

og vi har da

$$\varphi_1^2 \leq f^2 \leq \varphi_2^2$$

og

$$\int(\varphi_2^2-\varphi_1^2) = \int(\varphi_2+\varphi_1)(\varphi_2-\varphi_1) \leq 2\int(\varphi_2-\varphi_1)\sup f(\mathring{R}^n) \leq \varepsilon,$$

og da φ_1^2 og φ_2^2 er trappefunktioner, medfører dette, at f^2 er Riemann-integrabel, og dermed er beviset for sætning 9.28.2 fuldført.

9.29. Vi vil nu gå over til at omtale Riemann-målet. Vi vil især lægge vægt på sammenhængen mellem Riemann-integralet og Riemann-målet, og det vil da vise sig, at målets vigtigste egenskaber let udledes af integralets.

9.29.1. <u>Definition</u>. For enhver begrænset mængde $A \subseteq \mathring{R}^n$ sætter vi (idet vi underforstår, at T betegner en vilkårlig trappemængde)

$$\underline{m}(A) = \sup\left\{m(T)\,\middle|\,T \subseteq A\right\};\ \overline{m}(A) = \inf\left\{m(T)\,\middle|\,T \supseteq A\right\}.$$

Her kaldes $\underline{m}(A)$ det <u>indre</u> og $\overline{m}(A)$ det <u>ydre Riemann-mål</u> af A. Hvis $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) = m(A)$, siges A at være <u>Riemann-målelig</u>, og $m(A)$ kaldes <u>målet</u> af A.

9.29.2. <u>Sætning</u>. For enhver begrænset mængde $A \subseteq \mathring{R}^n$ gælder

$$\underline{m}(A) = \underline{m}(\mathring{A}),\ \overline{m}(A) = \overline{m}(\bar{A}).$$

Bevis. For enhver trappemængde $T \subseteq A$ gælder $m(T) = m(\mathring{T})$ og $\mathring{T} \subseteq \mathring{A}$. Heraf følger den første påstand, og den vises analogt.

9.30. Vi går nu over til sammenhængen mellem mål og integral. For $A \subseteq \mathring{R}^m$ betegner χ_A som sædvanlig den karakteristiske funktion defineret ved

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ for } \underline{x} \notin A \\ 1 \text{ for } \underline{x} \in A. \end{cases}$$

9.30.1. <u>Sætning</u>. For enhver begrænset punktmængde $A \subseteq \dot{R}^n$ gæld

$$\underline{m}(A) = \underline{\int}\chi_A \; ; \; \overline{m}(A) = \overline{\int}\chi_A.$$

Bevis. Hvis φ er en trappefunktion og $\varphi \leqq \chi_A$, da er $B = \varphi^{-1}(]0,1])$ en trappemængde og $B \subseteq A$. Endvidere er $\varphi \leqq \chi_B$. Af sætning 9.25.1 og definitionen 9.18.1 får vi da

$$\int\varphi \leqq \int\chi_B = m(B) \leqq \underline{m}(A),$$

hvilket viser, at $\underline{\int}\chi_A \leqq \underline{m}(A)$. Hvis $T \subseteq A$ er en trappemængde, får vi på den anden side

$$\underline{\int}\chi_A \geqq \underline{\int}\chi_T = \int\chi_T = m(T),$$

og da dette gælder for alle $T \subseteq A$, får vi $\underline{\int}\chi_A \geqq \underline{m}(A)$. Den sidste påstand fås analogt.

Vi inddrager nu $\dot{R}^{n+1}$ i undersøgelserne, og dets punkter betegnes $(\underline{x},y)$, hvor $\underline{x} \in \dot{R}^n$.

9.30.2. <u>Sætning</u>. Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være begrænset og positiv og have den begrænsede støtte A. Lad $B \subseteq \dot{R}^{n+1}$ betegne den begrænsede punktmængde

$$B = \left\{(\underline{x},y) \,\middle|\, \underline{x} \in A \wedge y \in [0,f(\underline{x})[\right\}.$$

Da er

$$\underline{m}(B) = \underline{\int} f \; ; \; \overline{m}(B) = \overline{\int} f.$$

Bevis. Lad χ_B være den karakteristiske funktion for B. Vi har da $\underline{m}(B) = \underline{\int}\chi_B$, hvor integralet udstrækkes over $\dot{R}^{n+1}$, altså ifølge sætning 9.27.1.

$$\underline{m}(B) \leq \underline{\int} \left(\underline{\int} \chi(\underline{x},y)dy\right)d\underline{x} = \underline{\int} f(\underline{x})d\underline{x} = \underline{\int} f,$$

hvor $\chi(\underline{x},y)$ for fast $\underline{x}$ er karakteristisk funktion for intervallet $[0,f(\underline{x})[$. For enhver positiv trappefunktion $\varphi \leq f$ vil B indeholde mængden

$$\{(\underline{x},y) \mid \underline{x} \in A \wedge y \in [0,\varphi(\underline{x})[\},$$

som ifølge sætning 9.20.1. har målet $\int \varphi$. Altså er $\underline{m}(B) > \int \varphi$, og da dette gælder for ethvert $\varphi \leq f$, får vi $\underline{m}(B) \geq \underline{\int} f$, og dermed er sætningen bevist.

9.31. I integralregningen, som den behandledes i gymnasiet, benyttedes et integral over et endeligt interval, og svarende dertil vil vi definere et integral over en Riemann- målelig mængde. Vi vil stadig "lade som om" integranderne er definerede i hele rummet, idet vi kan udvide definitionsmængden til hele rummet ved at sætte funktionsværdien lig 0 for alle punkter udenfor definitionsområdet.

9.31.1. Definition. Lad $A \subseteq \dot{R}^n$ være en Riemann-målelig mængde med den karakteristiske funktion χ_A, og lad $f: \dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være en vilkårelig funktion. Hvis $\chi_A f$ er begrænset og Riemann-integrabel, siges f at være Riemann-integrabel over A, og vi sætter

$$\int_A f(\underline{x})d\underline{x} = \int (\chi_A f).$$

Vi bemærker, at en Riemann-integrabel funktion ifølge sætning 9.28.2 er Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig mængde. Vi vil nu gå over til at anvende ordet Riemann-integrabel om enhver funktion, som er Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig mængde.

9.31.2 Definition. For en Riemann-målelig mængde $A \subseteq \dot{R}^n$ og en funktion $f: \dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$, som er begrænset på A, indfører vi et nedre og et øvre Riemann-integral over A ved definitionerne

$$\underline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} = \underline{\int}(\chi_A f); \quad \overline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} = \overline{\int}_A (\chi_A f).$$

9.32. Vi skal vise nogle flere sætninger om operationer med Riemann-integrable funktioner.

9.32.1. Sætning. Hvis A og B er Riemann-målelige mængder i $\dot{R}^n$, da er $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ Riemann-målelige.

Bevis. Påstanden følger umiddelbart af, at de karakteristiske funktioner

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A\chi_B; \ \chi_{A \cup B} = \chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B; \ \chi_{A\setminus B} = \chi_A-\chi_A\chi_B$$

er Riemann-integrable.

9.32.2. Sætning. Hvis en funktion f er Riemann-integrabel over en mængde A, er f også Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig delmængde af A. Hvis f er Riemann-integrabel over A og B, er f også Riemann-integrabel over $A \cup B$, $A \cap B$ samt $A \setminus B$.

Bevis. For $B \subseteq A$, hvor B er Riemann-målelig, og $\chi_A f$ er Riemann-integrabel, fås at $\chi_B f = \chi_B\chi_A f$ er Riemann-integrabel. Dermed er første påstand bevist. Da $A \cap B$ og $A \setminus B$ netop er Riemann-integrable delmængder af A, kan vi slutte, at f er Riemann-integrabel over disse mængder. Da $\chi_A, \chi_B, \chi_A f$ og $\chi_B f$ er Riemann-integrable, får vi endvidere, at $\chi_{A\cup B} f = \chi_A f+\chi_B f-\chi_A\chi_B f$ er Riemann-integrabel. Dermed er sætningen bevist.

9.32.3. Sætning. Hvis A og B er Riemann-målelige mængder i $\dot{R}^n$ gælder

$$m(A\cup B) = m(A)+m(B)-m(A\cap B).$$

Hvis A og B er disjunkte fås $m(A\cup B) = m(A)+m(B)$ og for $B \subseteq A$ fås $m(A\setminus B) = m(A)-m(B)$.

Bevis. Sætningen fås umiddelbart ved at skrive målene som integraler af de karakteristiske funktioner.

9.32.4 <u>Sætning.</u> Hvis A og B er Riemann-målelige disjunkte mængder i $\dot{R}^n$, og $f:\dot{R}^n$ ind i $\ddot{R}$ er begrænset på $A \cup B$, gælder relationerne

$$\underline{\int}_{A\cup B} f(\underline{x})d\underline{x} = \underline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} + \underline{\int}_B f(\underline{x})d\underline{x},$$

$$\overline{\int}_{A\cup B} f(\underline{x})d\underline{x} = \overline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} + \overline{\int}_B f(\underline{x})d\underline{x}.$$

Bevis. Af sætning 9.24.2 fås

$$\underline{\int}_{A\cup B} f(\underline{x})d\underline{x} = \underline{\int}(\chi_A+\chi_B)f \geqq \underline{\int}\chi_A f + \underline{\int}\chi_B f = \underline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} + \underline{\int}_B f(\underline{x})d\underline{x}.$$

Hvis $\varphi \leqq f$ er en trappefunktion, får vi

$$\int_{A\cup B}\varphi = \int_A \chi_A\varphi + \int_B \chi_B\varphi \leqq \underline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} + \underline{\int}_B f(\underline{x})d\underline{x},$$

og da dette gælder for enhver trappefunktion $\varphi \leqq f$, kan vi slutte, at

$$\underline{\int}_{A\cup B} f(x)d\underline{x} \leqq \underline{\int}_A f(\underline{x})d\underline{x} + \underline{\int}_B f(\underline{x})d\underline{x}.$$

9.33 Vi har tidligere bemærket, at målet for trappemængder var entydigt fastlagt ved betingelserne m1)-m4) i 15.7.1. Dette medfører åbenbart, at også målet af enhver Riemann-målelig mængde er fastlagt, hvis man kræver at målet skal tilfredsstille de 4 betingelser. Det er på den anden side klart, at målet virkelig tilfredsstiller alle 4 betingelser.

De 4 betingelser fastlægger altså målet fuldstændigt for alle Riemann-målelige mængder, men det er nødvendigt at supplere dem med en femte betingelse, hvis man ønsker målet fastlagt også for visse andre mængder.

Integralet kan ligesom målet fastlægges ved, at det skal tilfredsstille forholdsvis få, simple betingelser. F.eks. vil additionsreglen $\int(f+g) = \int f + \int g$ i forbindelse med sætningen om sammenhængen mellem mål og integral (9.30.2) fuldstændig fastlægge integralet.

Vi skal ikke gå nærmere ind på disse ènstydighedsspørgsmål, idet det her anførte vil være tilstrækkeligt for vort formål.

9.34. Betingelsen m3) i 9.7.1 viser, at Riemann-målet ikke ændres ved en forskydning af koordinatsystemet. Vi vil nu vise, at Riemann-målet og dermed Riema nn-integralet er helt uafhængigt af Koordinatsystemet. Dertil kræves dog nogle hjælpesætninger, som vi vil bevise i dette afsnit.

9.34.1 Sætning. Enhver begrænset konveks mængde er Riemann-integrabel.

Bevis (kopieret efter Poul Hansen, NMT 9,26-28,1961). Lad $I \subseteq R^n$ være et interval og $A \subseteq I$ en konveks mængde. Vi betragter en følge af simple inddelinger af I, således at den q-te inddeling fås ved, at hver projektion af I deles i 3^q lige store åbne intervaller samt et antal udartede intervaller. Alle ikke åbne delintervaller har da målet 0, så vi kan tillade os at ignorere dem. De åbne delintervaller indeholdt i A udgør en trappemængde S_q, medens de delintervallerm der indeholder punkter af A udgør en trappemængde T_q. De åbne delintervaller, der indeholder randpunkter af A, har målet $m(T_q \setminus S_q)$, og hvis vi kan vise,at $m(T_q \setminus S_q) \to 0$ for $q \to \infty$, vil sætningen være bevist. Lad $\mathring{I}$ fra den q-te inddeling være et åbent delinterval, som indeholder randpunkter af A. Ved overgangen til den q+1-te inddeling falder $\mathring{I}$ i 3^n åbne delintervaller, og hvis vi kan vise, at mindst et af disse altid vil være frit for randpunkter af A, får vi

$$m(T_{q+1} \setminus S_{q+1}) \leq 3^{-n}(3^n-1)m(T_q \setminus S_{q+1}),$$

og det vil netop medføre, at $m(T_q \setminus S_q) \to 0$ for $q \to \infty$. Sætning

9.34.1 er dermed ført tilbage til følgende hjælpesætning:

9.34.2. <u>Lemma.</u> Lad $I = I_1 \times \dots \times I_n$ være et interval, og lad $I_\vartheta = I_{\vartheta 1} \cup I_{\vartheta 2} \cup I_{\vartheta 3}$, $\vartheta = 1,\dots,n$ være en inddeling af hvert I_ϑ i disjunkte delintervaller. Derved fås en inddeling af I i delintervaller, blandt hvilke $I' = I_{12} \times \dots \times I_{n2}$ vil blive betegnet som det midterste delinterval. Lad $A \subseteq R^n$ være en konveks mængde. Hvis det indre af hvert delinterval undtagen I' indeholder randpunkter af A gælder $I' \subseteq A$.

Bevis. Vi benytter induktion efter n. For n = 1 er påstanden triviel. Vi antager nu lemmaet opfyldt for intervallet I og enhver konveks mængde, og vi betragter $I^* = I \times I_{m+1}$, samt en inddeling $I_{n+1} = I^1 \cup I^2 \cup I^3$ og en konveks mængde A, hvis rand indeholder indre punkter af alle delintervaller af I^* på nær $I' \times I^2$. Mængden $A \cap (I \times I^1)$ er konveks, og dens projektion på I er da også konveks, og da den indeholder punkter af alle delintervaller af I på nær I', vil $A \cap (I \times I^1)$ for hvert $\underline{x} \in I'$ indeholde et punkt $(\underline{x}, y')$ med $y \in I^1$. Derved benyttedes induktionsantagelsen. Tilsvarende ses, at $A \cap (I \times I^3)$ indeholder et $(\underline{x}, y'')$ med $y'' \in I^3$. Da $(\underline{x}, y')$ og $\underline{x}, y'')$ tilhører den konvekse mængde A, gælder $\underline{x} \times [y', y''] \subseteq A$, og ved at anvende dette for hvert $\underline{x} \in I'$ får vi $I' \times I^2 \subseteq A$, og dermed er lemmaet fuldstændigt bevist.

9.35. Vi betragter nu et n-dimensionalt rum, på hvilket der er indført to forskellige koordinatsystemer. Vi får da to forskellige slags intervaller, men da intervaller er konvekse, og konveksitet er en egenskab, som ikke er afhængig af koordinatsystemet, vil intervaller i det ene system ifølge sætning 9.34.1 være målelige mængder i det andet system. Da en foreningsmængde af målelige mængder igen er målelig, vil trappemængder i det ene system blive målelige mængder i det andet system.

På systemet af trappemængder i det ene system vil målet m^* fra det andet system tilfredsstille m1)-m3) fra 9.7 .1, men enhedsintervallet vil måske få et mål $k \neq 1$, men k bliver i hvert fald positivt, og $k^{-1}m^*$ bliver da netop det sædvanlige mål. Overgang til et andet koordinatsystem vil altså blot have til følge, at målet af enhver trappemængde multipliceres et og samme tal k.

Heraf fremgår, at også enhedskuglens mål vil blive multipliceret med k, men det er på den anden side klart, at netop enhedskuglens mål ikke kan ændres ved drejning af koordinatsystemet. Vi behøver blot at dreje alle indre og ydre trappemængder sammen med koordinatsystemet for at indse dette. Altså er $k = 1$, og vi har vist, at Riemann-målet er uafhængigt af koordinatsystemet.

9.36. Vi betragter et begrænset interval $I \subset \dot{R}^n$. Med $\dot{P}(I)$ (mængden af partitioner af I) vil vi forstå den mængde der omfatter følgende elementer:

1) Alle inddelinger $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ af I i disjunkte delintervaller med et særlig udvalgt punkt $\underline{u}_k \in I_k$ for hvert delinterval I_k.
2) Et yderligere element P_∞.

En inddeling med et særlig udvalgt punkt i hvert delinterval vil blive betegnet med P, eventuelt med en index. En sædvanlig inddeling betegnes D; vi kan skrive $P = (D,(\underline{u}))$, idet (u) betegner sættet af udvalgte punkter. Vi skriver $D_2 \supseteq D_1$, når D_2 fås som videredeling af D_1. For $P_1 = (D_1,(\underline{u}))$ og $P_2 = (D_2,\underline{v}))$ skriver vi $P_2 \supseteq P_1$ med helt samme betydning som $D_2 \supseteq D_1$.

Vi indfører en topologi på $\dot{P}(I)$, idet vi udnævnter følgende delmængder af $\dot{P}(I)$ til åbne mængder:

1) Alle delmængder, som ikke indeholder P_∞.

2) Alle delmængder, der indeholder en inddeling $P = (D,(\underline{u}))$ og alle videredelinger af denne.

Det er helt klart, at den således definerede mængde af inddelinger tilfredsstiller de tre betingelser, der kræves af mængden af åbne mængder. Vi vil benytte betegnelsen $\dot{P}(I)$ også for det således definerede topologiske rum.

Vi vil benytte betegnelsen $\dot{P}^*(I)$ for det topologiske rum, der fås, når mængden 2) erstattes med

2'). Alle delmængder, der for et tal $\varepsilon > 0$ indeholder alle inddelinger, hvis delintervaller har alle kantlængder $< \varepsilon$.

Det er klart, at topologien på $\dot{P}(I)$ er den fineste af de to topologier. En funktion, som er kontinuert på $\dot{P}^*(I)$ vil derfor også være kontinuert på $P(I)$. Vi skal nu se, at et integral kan defineres som en grænseværdi i punktet P_∞ for en afbildning $\sigma : \dot{P}(I) \setminus \{P_\infty\}$ ind i $\dot{R}$, idet èn af de her omtalte topologier benyttes.

Vi bemærker, at begge topologier er diskrete på $\dot{P}(I) \setminus \{P_\infty\}$, og at en funktion er kontinuert på $\dot{P}(I)$ er derfor ensbetydende med, at den er kontinuert i punktet $\dot{P}_\infty$.

15.37. Lad I være et begrænset interval og $f: I$ ind i $\dot{R}$ en begrænset funktion på I. Hvis $P \in \dot{P}(I)$ er givet ved $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, samt $\underline{u}_k \in I_k, k = 1,\ldots,q$, indfører vi den til P svarende <u>middelsum</u> for f ved definitionen

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k) f(\underline{u}_k),$$

og endvidere til inddelingen svarende undersum og oversum for f ved definitionerne

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k) \inf f(I_k), \quad S(f,P) = \sum_{k=1}^{q} m(I_k) \sup f(I_k).$$

Summerne s og S afhænger ikke af punkterne $\underline{u}_k$. De tre summer tilfredsstiller åbenbart ulighederne

$$s(f,P) \leqq \sigma(f,P) \leqq S(f,P).$$

Svarende til inddelingen P, konstruerer vi to trappefunktioner $\varphi_{P,f}$ og $\Phi_{P,f}$, idet vi sætter

$$\varphi_{P,f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ for } \underline{x} \notin I \\ \inf f(I_k) \text{ for } \underline{x} \in I_k \end{cases} \quad \Phi_{P,f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ for } \underline{x} \notin I \\ \sup f(I_k) \text{ for } \underline{x} \in I_k. \end{cases}$$

Vi har da

$$s(f,P) = \int \varphi_{P,f} \quad ; \quad S(f,P) = \int \Phi_{P,f}.$$

For en videredeling $P_1 \supseteqq P$ får vi åbenbart

$$\varphi_{P_1,f} \geqq \varphi_{P,f} \quad ; \quad \Phi_{P_1,f} \leqq \Phi_{P,f}.$$

Derfor bliver også

$$s(f,P_1) \geqq s(f,P); \quad S(f,P_1) \leqq S(f,P).$$

For $\varepsilon > 0$ kan vi vælge en trappefunktion $\varphi \leqq f$, således at $\int \varphi \geqq \underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x} - \varepsilon$. Vi kan vælge inddelingen P, således at φ er konstant på hvert I_q, og vi har da $\varphi_{P,f} \geqq \varphi$, altså

$$s(f,P) \geqq \underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x} - \varepsilon.$$

For enhver videredeling $P_1 \supseteqq P$ vil det samme da gælde, så vi har

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists P \in \dot{P}(I) \; \forall P_1 \supseteqq P \quad \left(\underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x} - \varepsilon \leqq s(f,P) \leqq \underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x}\right),$$

eller med andre ord

$$\lim_{P\to P_\infty} s(f,P) = \int_{-I} f(\underline{x})\, d\underline{x},$$

hvor grænseovergangen er foretaget på $\dot{P}(I)$. Analog fås

$$\lim_{P\to P_\infty} S(f,P) = \overline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x},$$

og for en Riemann-integrabel funktion f får vi derfor

$$\lim_{P\to P_\infty} \sigma(f,P) = \int_I f(\underline{x})d\underline{x}.$$

Lad os nu på den anden side antage, at $\sigma(f,P)$ går mod en grænseværdi A for $P\to P_\infty$. For ethvert $\varepsilon > 0$ har vi da en inddeling $P: I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, $\underline{x}_k \in I_k$, således at

$$\left| A - \sum_{k=1}^{q} m(I_k) f(\underline{x}_k) \right| \leq \varepsilon$$

for alle valg af punkterne $\underline{x}_k$. Nu er

$$\inf\left\{ \sum_{k=1}^{q} m(I_k) f(\underline{x}_k) \;\middle|\; \underline{x}_k \in I_k,\ k = 1,\ldots,q\right\} =$$

$$\inf\left(\left\{ m(I_1) f(\underline{x}_1) \;\middle|\; \underline{x}_1 \in I_1\right\} + \ldots + \left\{ m(I_q) f(\underline{x}_q) \;\middle|\; \underline{x}_q \in I_q\right\}\right) =$$

$$\inf\left\{ m(I_1) f(\underline{x}_1) \;\middle|\; x_1 \in I_1 \right\} + \ldots + \inf\left\{ m(I_q) f(\underline{x}_q) \;\middle|\; \underline{x}_q \in I_q\right\} =$$

$$\sum_{k=1}^{q} m(I_k) \inf f(I_k) = s(f,P).$$

Vi har derfor $|A-s(f,P)| \leq \varepsilon$ og analogt $|A-S(f,P)| \leq \varepsilon$, altså

$$S(f,P)-s(f,P) \leq 2\varepsilon,$$

hvilket på grund af (2) og sætning 9.28.1 medfører, at f er Riemann-integrabel, og det fremgår da af det foregående, at A netop er Riemann-integralet. Vi kan således definere Riemann-integralet som grænseværdi for middelsummer.

9.38. Lad I være et interval på R^n og lad $A \subseteq I$ være en vilkårlig mængde. Lad $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ være en inddeling af I i disjunkte intervaller. De af intervallerne I_k, som er delmængder af A, udgør en trappemængde T_1, og de intervaller I_k, som har punkter fælles med A, udgør en trappemængde T_2. Vi har da

$$m(T_1) \leqq \underline{m}(A) \leqq \overline{m}(A) \leqq m(T_2),$$

og vi vil nu vise sætningen:

9.38.1. <u>Sætning.</u> Til $\varepsilon > 0$ svarer $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$, hvor alle kantlængder i hvert I_k er $\leqq \delta$, gælder for de tilsvarende trappemængder T_1 og T_2, at

$$m(T_1) \geqq \underline{m}(A)-\varepsilon; \quad m(T_2) \leqq \overline{m}(A)+\varepsilon.$$

Bevis. Det er nok at vise, at δ kan vælger, således at den første ulighed gælder, idet $\overline{m}(A) = m(I)-\underline{m}(I\setminus A)$. Vi vælger en trappemængde $S = I_1' \cup\ldots\cup I_p'$, hvor $I_1',\ldots,I_p'$ er disjunkte, således at $S \subseteqq A$ og $m(S) \geqq \underline{m}(A)- \frac{1}{2}\varepsilon$. Dernæst erstatter vi hvert interval I_j' med et mindre interval I_j'', som er ligedannet med I_j' og har samme centrum, og således at

$$m(I_1'')+\ldots+m(I_p'') \geqq \underline{m}(S)- \tfrac{1}{2}\varepsilon \geqq \underline{m}(A) -\varepsilon.$$

Vi vælger nu δ mindre end den mindste afstand fra et I_j'' til randen af det tilsvarende I_j'. For enhver inddeling af I i intervaller, hvis kantlængder alle er $< \delta$, vil det da gælde, at ethvert delinterval, som har punkter fælles med et I_j'', hører med til T_1. Så vil T_1 dække alle intervallerne I_j'', og derfor bliver

$$m(T_1) \geqq m(T_1'')+\ldots+ m(I_p'') \geqq \underline{m}(A) - \varepsilon,$$

og dermed er påstanden bevist.

Vi understreger, at afstanden fra et I_j'' til randen af det tilsvarende I_j' bestemmes ganske elementært, som $\frac{1}{2}(1-\kappa)\lambda$, hvor κ er formindskelsesfaktoren og λ den mindste kantlængde i I_j'.

9.39. Til sætning 9.38.1 svarer følgende sætning om integraler:

9.39.1. <u>Sætning.</u> Lad $I \subseteq \dot{R}^n$ være et interval $f:I$ ind i $\dot{R}$ en begrænset funktion. Der eksisterer svarende til $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling P af I i delintervaller med kantlængder $\leq \delta$ gælder, at

$$s(f,P) \geq \underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x}-\varepsilon; \quad S(f,P) \leq \overline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x}+\varepsilon$$

Bevis. Det er nok at vise den første ulighed. Hvis vi adderer en konstant α til f, adderes $\alpha m(I)$ til $s(f,P)$ og til $\underline{\int} f(\underline{x})d\underline{x}$. Vi kan derfor antage, at $f \geq 0$. Vi vælger et reelt tal M, så $f \leq M$. Ifølge sætning 9.38.1 eksisterer der et $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling af $I \times [0,M]$ i delintervaller med kantlængde $< \delta$ gælder, at vi får $m(T_1) \geq m(\{\underline{x},y) | \underline{x} \in I \text{ og } y \in [0,f(\underline{x})[\}) - \varepsilon$. For en inddeling $I = I_1 \cup \ldots \cup I_q$ i delintervaller med kantlængde $\leq \delta$, kan vi dele hvert interval $I_k \times [0, \inf f(I_k)[$ i delintervaller med kantlængde $\leq \delta$, og det følger af sætning 9.30.2, at

$$\sum_{k=1}^{q} m(I_k) \inf f(I_k) \geq \underline{\int}_I f(\underline{x})d\underline{x} - \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætningen udtrykker, at definitionen af integralet som grænseværdi også vil være rigtig, når rummet $\dot{P}^*(I)$ lægges til grund. Dette er et smukt, klassisk resultat, men i praksis er det lige så bekvemt at benytte definitionen af integralet som grænseværdi i rummet $\dot{P}(I)$.

Lette opgaver.

1. Angiv en afbildning $\varphi : \grave{T}^n$ ind i $\grave{R}$ som opfylder 1), 3) og 4) i sætning 9.8.1, men ikke 2).

2. Samme problem, men således at det er 3), der ikke er opfyldt.

3. Vis, at sætning 9.8.1 gælder uændret, hvis betingelse 1) erstattes med følgende:

$$\exists K \in \grave{R} \ \forall A \in \grave{T}^n \ (|\varphi(A)| \leq K \ m(A)).$$

4. En intervalfunktion ψ på delintervallerne af $\grave{R}$ defineres ved

$\psi(I)=0$, hvis endepunkterne af I begge er rationale eller begge er irrationale.

$\psi(I)=1$, hvis venstre endepunkt af I er irrationalt, medens højre endepunkt er rationalt.

$\psi(I)=-1$, hvis venstre endepunkt er rationalt, medens højre endepunkt er irrationalt.

Vis, at ψ tilfredsstiller betingelsen 2^* i sætning 9.10.1 Undersøg, om ψ er et specielt tilfælde af et i 9.11 anført eksempel. Vis, at den additive intervalfunktion, der fås ved udvidelse af ψ, ikke er begrænset på trappemængder på $[0,1]$.

5. En additiv intervalfunktion φ tilfredsstiller $\varphi(I)=0$ for ethvert åbent interval I. Vis, at φ er indentisk 0.

6. Undersøg om der gælder distributive love for regneoperationerne $\vee$ og $\wedge$.

7. En funktion f: $[0,1]$ ind i $\grave{R}$ er defineret ved, at $f(x) = 0$, hvis x er irrational, men $f(x) = 1$, hvis x er rational. Vis, at f ikke er Riemann-integrabel, og bestem nedre og øvre integral af f.

8. En funktion $f:[0,1]$ ind i $\grave{R}$ er defineret ved $f(x) = 0$,

Hvis x er irrational, men $f(x) = q^{-1}$. hvis x er den uforkortelige brøk p/q.

Vis, at f er en Riemann'sk nulfunktion.

9. Lad $(\underline{x}_n$ være en punktfølge i $\grave{R}^m$ og lad Σa_n være en absolut konvergent række. For $A \in \grave{T}^n$ sætter vi

$$\varphi(A) = \sum_{\underline{x}_n \in A} a_n$$

Vis, at φ er en additiv mængdefunktion. Vis, at definitionen har en mening for enhver mængde $A \subseteq \grave{T}^n$ og at additiviteten også gælder for sådanne mængder.

10. Vis den for positive funktioner $f,g:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ gyldige relation

$$f \vee g = f+g - |f-g|.$$

11. Afbildningen $f:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ er defineret ved

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 + x_2) \text{ for } \underline{x} \in [0,\pi]\times[0,\pi]$$

$$f(\underline{x}) = 0 \text{ ellers.}$$

Udregn $\int f$ ved hjælp af sætning 9.27.1, idet funktioner på $\grave{R}$ integreres ved de i kapitel 6 omtalte metoder.

12. Afbildningen $f:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ defineret ved

$$f(\underline{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \text{ for } |x_1|+|x_2| \leq 1$$

$$f(\underline{x}) = 0 \text{ ellers.}$$

Udregn $\int f$, idet funktioner på $\grave{R}$ behandles ved de i kapitel 6 omtalte metoder.

13. Lad I være et interval med positivt mål, og lad $f:I$ ind i $\grave{R}$ være en kontinuert afbildning, som ikke er konstant på I.

Vis de skarpe uligheder

$$m(I) \inf f(I) < \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} < m(I) \cdot \sup f(I)$$

14. Bestem det 3-dimensionale mål af den konvekse punktmængde

$$A = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqq 1\right\},$$

hvor a, b og c er positive tal (udnyt, at et integral af en funktion på $\grave{R}^2$ eventuelt udtrykker et kendt areal).

15. Lad $A \subset \grave{R}^n$ og $B \subset \grave{R}^p$ være Riemann-målelige punktmængder. Vis, at $A \times B \subset \grave{R}^{n+p}$ er Riemann-målelig, og at

$$m^{n+p}(A \times B) = m^n(A)m^p(B).$$

16. Bevis direkte, at en monoton funktion på et interval på $\grave{R}$ er Riemann-integrabel over dette interval.

17. Bevis, at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p} = \log 2.$$

18. Vis, at

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty} \sin^{2q} p!\, x\right) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x \text{ er irrational} \\ 1, & \text{hvis } x \text{ er rational.} \end{cases}$$

Riemann-integrabilitet bevares altså ikke ved grænseovergang. Den første grænseovergang fører til en Riemann-integrabel grænsefunktion for ethvert p. Følgen af sådanne grænsefunktioner er voksende.

19. Lad $\varphi : \grave{T}^n$ ind i $\grave{R}$ være en additiv intervalfunktion, som vi antager er begrænset. Vi definerer nu 2 nye intervalfunktioner, idet vi for enhver trappemængde T sætter

$$\psi_1(T) = \sup\{\varphi(S) \mid S \in \grave{T}^n \wedge S \subseteq T\},$$

$$\psi_2(T) = \sup\{-\varphi(S) \mid S \in \grave{T}^n \wedge S \subseteq T\},$$

Vis, at ψ_1 og ψ_2 er additive og positive intervalfunktioner, og at $\varphi = \psi_1 - \psi_2$.

20. Lad $f:\dot{R}^n$ og $g:\dot{R}^p$ ind i $\ddot{R}$ være Riemann-integrable funktioner. Vis, at den ved

$$h(\underline{x};\underline{y}) = f(\underline{x})g(\underline{y})$$

definerede funktion $h:\dot{R}^{n+p}$ ind i $\ddot{R}$ er Riemann-integrabel, og at

$$\int h = \int f \int g.$$

21. For $\underline{x} \in \dot{R}^n$ vil vi benytte betegnelserne

$$A(\underline{x}) = \,]-\infty, x_1] \times \dots \times]-\infty, x_n] \; ; \; B(\underline{x}) = [x_1,\infty[\times \dots \times [x_n,\infty[$$

Lad $f,g:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være Riemann-integrable funktioner. Vis relationen

$$\int (f(\underline{x}) \int_{A(\underline{x})} g(\underline{y})d\underline{y}d\underline{x} = \int (g(\underline{x}) \int_{B(\underline{x})} f(\underline{y})d\underline{y})d\underline{x}.$$

Vis, at denne relation er en generalisation af reglen om delt integration.

22. Bestem det n-dimensionale mal af punktmængden

$$\{\underline{x} \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

23. Lad (I_n) være en følge af disjunkte delintervaller af et begrænset interval I. Vis, at

$$\underline{m}(\cup I_n) = \Sigma m(I_n)$$
$$\overline{m}(I \setminus \cup I_n) = m(I) - \Sigma m(I_n).$$

24. Vis ved et eksempel, at foreningsmængden af en følge (I_n) af disjunkte delintervalller af et interval I kan være overalt tæt på I selv om summen af længderne af intervallerne I_n er mindre end længden af I. Vis derved, at en begrænset, åben mængde ikke altid er Riemann-målelig.

25. Bevis, f.eks. ved hjælp af sætning 9.39.1, at uligheden

$$\left(\int |f|\right)^2 \leqq \int f^2$$

gælder for enhver Riemann-integrabel funktion f.

Vanskelige opgaver.

26. Udregn målet af enhedskuglen i $\grave{R}^n$.

27. Ved en stykkevis konstant funktion $\grave{R}^n$ vil vi forstå en funktion φ, som 1) har begrænset støtte, 2) kun antager endelig mange værdier $y_1,\ldots,y_n$, og 3) for hver af disse tilfredsstiller, at $\varphi^{-1}(y_k)$ er Riemann-målelig. Vis, at φ er Riemann-integrabel, og at

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{n} y_k \, m(\varphi^{-1}(y_k)).$$

Idet φ betegner mængden af stykkevis konstante funktioner, skal det vises, at det for enhver begrænset funktion $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ med begrænset støtte gælder, at

$$\underline{\int} f = \sup\{\int \varphi \mid \varphi \in \Phi \wedge \varphi \leqq f\},$$

samt en analog relation for det øvre integral.

28. Beregn det 2-dimensional mål af den begrænsede punktmængde, der som rand har kurven

$$\{(x,y) \mid \exists \Theta \in \grave{R}(x = \cos^3\Theta \wedge y = \sin^3\Theta)\}.$$

29. Lad $f,g:\grave{R}^n$ ind i $[0;\infty[$ være Riemann-integrable funktioner, Bevis Schwarz' ulighed

$$\left(\int fg\right)^2 \leqq \int f^2 \int g^2.$$

30. Udregn det 3-dimensionale mål af punktmængden

$$\{(x,y,z) \mid x^2+z^2 \leqq a^2 \wedge y^2+z^2 \leqq a^2\},$$

idet a er et positivt tal.

Differentiabilitet.

10.1. I dette kapitel skal vi udvide det fra gymnasiet kendte differentiabilitetsbegreb, så det bliver anvendeligt også i flerdimensionale rum. Vanskelighederne ved en sådan generalisation er væsentlig større end ved den tilsvarende generalisation af integralbegrebet, og vi kan i dette kapitel kun behandle begyndelsesgrundene.

10.2-5. Disse afsnit er ved bearbejdelsen af forelæsningsnoterne 1964-65 indlemmede i tillæg til kapitel 8. Dette bevirker tillige, at side 10.2-5 udgår.

10.6. I dette kapitel vil vi udelukkende beskæftige os med afbildninger af punktmængder i n-dimensionale reelle eller komplekse talrum. Vi vil anvende de samme betegnelser som i 8.4. Talrummet $\grave{R}^n$ består således af talsæt $\underline{x} = (x_1, \dots x_n)$ med de lineære regneoperationer, der tillader os at danne $\alpha\underline{x}+\beta\underline{y}$, hvor $\alpha, \beta \in \grave{R}$ og $\underline{x}, \underline{y} \in \grave{R}^n$, samt det indre produkt

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

Vi har normen

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}\cdot\underline{x})} = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$$

og afstanden $\|\underline{y} - \underline{x}\|$ mellem punkterne $\underline{x}$ og $\underline{y}$. Det komplekse talrum $\grave{C}^n$ består af talsættene $\underline{z} = (z_1,\ldots,z_n)$, hvor hver $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ er et komplekst tal. Vi har nu en nærliggende bijektiv afbildning

$$\varphi : \grave{C}^n \text{ på } \grave{R}^{2n}$$

defineret ved

$$\varphi(z_1,\ldots,z_n) = (x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_n);$$

og vi indretter nu en norm på $\grave{C}^n$, således at denne afbildning bliver isometrisk, idet vi definerer

$$\|\underline{z}\| = \|\varphi(\underline{z})\| = \sqrt{(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)}.$$

Alle sætninger om metrik og topologi for reelle talrum kan nu uden vanskelighed overføres til komplekse talrum. Både i $\grave{R}^n$ og i $\grave{C}^n$ har vi de n grundvektorer

$$\underline{e}_1 = (1,0,0,0,\ldots,0,0)$$
$$\underline{e}_2 = (0,1,0,0,\ldots,0,0)$$
$$- - - -$$
$$\underline{e}_n = (0,0,0,0,\ldots,0,1),$$

og vi har relationen

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n.$$

I $\grave{R}^n$ har vi desuden

$$x_\nu = \underline{x}\cdot\underline{e}_\nu.$$

10.7. I differentionsteorien får vi ofte brug for en afbildning $\underline{\alpha}$ af en punktmængde $A \subseteq \grave{R}^n$ med fortætningspunkt $\underline{0}$ ind i $\grave{R}^p$, således at $\underline{\alpha}$ har grænseværdi $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$. Vi vil reservere bogstavet $\underline{\alpha}$ med eller uden indices som betegnelse for sådanne afbildninger. Understregningen udelades for $p = 1$. Vi vil også for disse specielle afbildninger anvende betegnelsen α-afbildninger eller α-funktioner.

Vi vil lejlighedsvis få brug for α-afbildninger, der tillige afhænger af en parameter, f.eks. en afbildning $\underline{\alpha}$ af en punktmængde $B \subseteq \grave{R}^n \times \grave{R}^n$ ind i $\grave{R}^p$, således at følgende to betingelser er opfyldt:

1). For ethvert $\underline{x} \in \grave{R}^n$ vil mængden

$$A(\underline{x}) = \{\underline{h} \mid (\underline{x},\underline{h}) \in B\}$$

være tom eller have $\underline{0}$ som fortætningspunkt.

2). For ethvert $\underline{x} \in \grave{R}^n$, for hvilket $A(\underline{x}) \neq \emptyset$ har den $\underline{\alpha}_{\underline{x}}(\underline{h}) = \underline{\alpha}(\underline{x},\underline{h})$ definerede afbildning $\underline{\alpha}_{\underline{x}}:A(\underline{x})$ ind i $\grave{R}^p$ grænseværdien $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$.

Senere vil vi også møde andre former for α-funktioners afhængighed af en parameter, men vi vil foretrække at beskrive situationen i hvert enkelt tilfælde for sig.

10.8. Vi vil nu et øjeblik beskæftige os med kontinuitet og differentiabilitet af funktioner af én reel variabel, og samtidig omforme den fra gymnasiet kendte definition af differentiabilitet, så vi får den bragt på en form, der umiddelbart lader sig overføre til generellere afbildninger.

Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval, som har indre punkter, og lad $f:I$ ind i $\grave{R}$ være en på I defineret reel funktion. Lad a være et punkt af $\bar{I}$. Vi anvender som sædvanlig betegnelsen

$$I - a = \{x-a \mid x \in I\}.$$

Vi bemærker, at mængden $I-a$ for $a \in \bar{I}$ har 0 som fortætningspunkt. Funktionsvæksten

$$\Delta_a f(h) = f(a+h) - f(a)$$

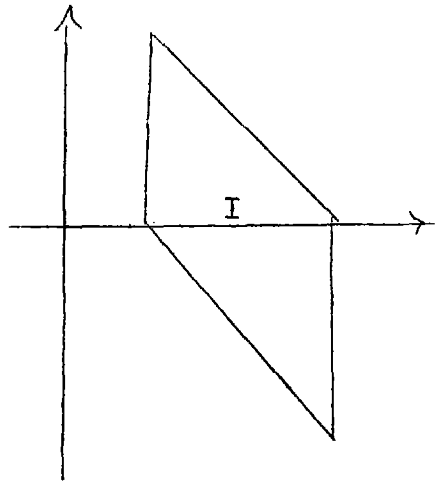
definerer en afbildning $\Delta_a f:I-a$ ind i $\grave{R}$. Vi bemærker, at Δ_a er en operator, som til enhver afbildning $f:I$ ind i $\grave{R}$ knytter en afbildning $\Delta_a f:I-a$ ind i $\grave{R}$. Vi ser nu, at f er kontinuert i a, hvis og kun hvis tilvæksten $\Delta_a f$ har grænseværdien 0 i punktet 0, altså hvis og kun hvis vi kan skrive

$$\Delta_a f(h) = \alpha(h).$$

Vi definerer en punktmængde $\Delta I \subsetneqq I \times \grave{R}$ ved

$$\Delta I = \{(x,h) \mid x \in I \wedge x+h \in I\}.$$

Figuren antyder, hvordan ΔI ser ud, når I er et endeligt interval. Det er indlysende ΔI opfylder betingelsen 1) i 10.7. Vi kan indføre en funktionstilvækst



$$\Delta f(x,h) = f(x+h)-f(x)$$

som en afbildning $\Delta f : \Delta I$ ind i $\grave{R}$. At afbildningen f er kontinuert, er ensbetydende med, at vi kan skrive

$$\Delta f(x,h) = \alpha(x,h)$$

hvor $\alpha(x,h)$ opfylder betingelsen 2) i 10.7. I virkeligheden gælder der en smule mere, idet $\alpha(x,h)$ er defineret også for $x \in I$, $h = 0$, og $\alpha(x,h)$ har værdien 0 i disse punkter og er kontinuert i hele definitionsmængden ΔI.

10.9. Vi bibeholder betegnelserne fra det foregående afsnit. At f er differentiabel i punktet a med differentialkvotienten b betyder, at den ved

$$\frac{1}{h}\,\Delta_a f(h)$$

definerede afbildning af $(I-a) \setminus \{0\}$ ind i $\grave{R}$ har grænseværdien b i punktet 0, men det er ensbetydende med, at

$$\frac{1}{h}\,\Delta_a f(h) = b + \alpha(h)$$

eller

$$\Delta_a f(h) = bh + \alpha(h)h.$$

At f er differentiabel i a er således ensbetydende med, at tilvæksten $\Delta_a f(h)$ kan spaltes i 2 bidrag, af hvilke det ene har formen bh, hvor b er uafhængig af h, medens det andet led har formen $\alpha(h)h$. Konstanten b er <u>differentialkvotienten</u> (<u>den afledede</u>) af f i punktet a.

Den lineære funktion $d_a f: \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ defineret ved

$$d_a f(h) = bh$$

kaldes <u>differentialet</u> af f i punktet a. For $b \neq 0$ er $d_a f$ ikke identisk 0, og differentialet vil da for numerisk tilstrækkelig små værdier af h være det overvejende led i opspaltningen af $\Delta_a f(h)$. Til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ svarer endda et $\delta > 0$, således at vi for $|h| < \delta$ har $|\alpha(h)h| < \varepsilon\ |d_a f(h)|$. Hvis vi for h skriver x-a, får vi heraf, at f(x) i en tilstrækkelig lille omegn af a omtrent har værdien

$$f(a) + b(x-a),$$

altså at f i en tilstrækkelig lille omegn "næsten" er en lineær funktion. Det er denne kendsgerning, man udnytter ved lineær interpolation i tabeller.

Vi kan udvide definitionen af afbildningen α ved at sætte

$$\alpha_1(h) = \begin{cases} 0 \text{ for } h = 0 \\ \alpha(h) \text{ for } h \neq 0 \wedge h \in I\text{-}a, \end{cases}$$

og opspaltningen

$$\Delta_a f(h) = bh + \alpha_1(h)h$$

vil da være gyldig for alle $h \in I\text{-}a$. Her er α_1 en afbildning $\alpha_1: I\text{-}a$ ind i $\dot{R}$ med $\alpha_1(0) = 0$ og kontinuert i 0. En α-funktion vil altid på denne måde kunne udvides til en funktion, der har værdien 0 i punktet 0 og er kontinuert i dette punkt. Vi vil i det følgende anvende betegnelsen α-funktion også om en sådan udvidet α-funktion. I de fleste tilfælde vil det være uvæsentligt, om ordet forstås i den ene eller i den anden betydning. For en α-funktion, der tillige afhænger af en parameter, kan vi foretage en lignende udvidelse for hver værdi af parameteren, og den resulterende funktion vil for hver fast værdi af parameteren have funktionsværdien 0 i punktet 0 og være kontinuert i dette punkt.

For tilvæksten Δf får vi opspaltningen

$$\Delta f(x,h) = b(x)h + \alpha(x,h)h,$$

og her er $\alpha:\Delta I$ ind i $\dot{R}$ en afbildning, som tilfredstiller betingelsen $\alpha(x,0) = 0$, og som er kontinuert for hver fast værdi af x. Den lineære funktion $df:I \times R$ ind i $\dot{R}$ defineret ved

$$(1) \qquad df(x,h) = b(x)h$$

kaldes differentialet af x.

For den ved $i(x) = x$ definerede identiske afbildning $i:\dot{R}$ på $\dot{R}$ får vi

$$\Delta i(x,h) = x + h - x = h$$

som giver os den trivielle opspaltning

$$\Delta i(x,h) = 1\cdot h + o\cdot h,$$

så vi har

$$di(x,h) = h.$$

Hvis vi nu anvender den ukorrekte betegnelse x for den identiske afbildning $i(x)$ (altså skriver funktionsværdien i stedet for funktionen), er det nærliggende også at skrive dx i stedet for di eller $di(x,h)$ og Δx i stedet for Δi eller $\Delta i(x,h)$, så får vi

$$\Delta x = dx = h.$$

I overensstemmelse hermed har det været almindelig praksis at betegne tilvæksten h med dx eller Δx. Samtidig har man skrevet $y = f(x)$, således at y betegner funktionsværdien, og (1) skrives da

$$dy = df(x,dx) = b(x)dx,$$

hvoraf følger

$$b(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x,dx)}{dx} .$$

Dette er begrundelsen for, at b kaldes differentialkvotienten af f. Vi vil systematisk anvende operatorbetegnelsen D, således at Df er differentialkvotienten af f. I stedet for D skrives $\frac{d}{dx}$, og dette er hensigtsmæssigt, når der anvendes et fast bogstav som betegnelse for punkter af definitionsmængden. Det er også almindeligt at anvende betegnelsen f' for differentialkvotienten. Vi har altså følgende betegnelser for differentialkvotienten af f:

$$Df = \frac{d}{dx}f = f' = \frac{dy}{dx} = y',$$

og for værdien af differentialkvotienten i et punkt a har vi betegnelserne

$$Df(a) = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=a} = f'(a) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a} = [y']_x .$$

Udtrykket $\frac{d}{dx}f(a)$ vil sædvanligvis blive opfattet som differentialkvotienten af konstanten f(a), og denne differentialkvotient har åbenbart værdien 0.

Det skal understreges, at det traditionelle betegnelsessystem med anvendelse af fast bogstavbetegnelse for den "variable", der gennemløber en bestemt mængde, endnu er det hyppigst anvendte i den matematiske litteratur. Det vil fremgå af det følgende, at det har visse meget væsentlige fordele, men at der samtidig er situationer, hvor det er meget upraktisk. Det må tilrådes den studerende at vænne sig til såvel det ældre som det nyere betegnelsessystem.

10.10. Vi vil ganske kort minde om beviserne for, at visse elementære funktioner er differentiable. Vi begynder med den ved $f(z) = z^{-1}$ definerede afbildning $f: \check{C}\setminus\{0\}$ ind i $\check{C}$. For $z \neq 0$, $z + h \neq 0$ har vi

$$\Delta f(z,h) = \frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} = \frac{-h}{z(z+h)} = \frac{-h(z+h-h)}{z^2(z+h)} = -\frac{1}{z^2}h + \frac{h}{z^2(z+h)}h.$$

Her er $\frac{h}{z^2(z+h)}$ kontinuert for $h = 0$, og vi har således fundet den ønskede opspaltning. Vi har altså bevist, at

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2} .$$

Vi minder endvidere om, at differentialkvotienterne af de trigonometriske funktioner sin og cos bestemmes på basis af en forudgående bestemmelse af differentialkvotienten af sin i punktet 0. Denne fås af den for $0 < h < \frac{\pi}{2}$ gyldige vurdering

$$\sin h < h < \operatorname{tg} h = \frac{\sin h}{\cos h} ,$$

som giver

$$1 > \frac{\sin h}{h} > \cos h.$$

Heraf følger

$$0 < 1 - \frac{\sin h}{h} = \alpha(h) < 1 - \cos h,$$

der viser, at den således definerede afbildning α virkelig er en α-afbildning af $]0,\frac{\pi}{2}[$ ind i $\dot{R}$. Nu er $\alpha(-h) = \alpha(h)$, og α er således en α-afbildning af $\dot{R} \setminus \{0\}$. Altså har vi vist, at

$$\Delta_0 \sin(h) = \sin h = 1 \cdot h - \alpha(h)h,$$

og sin er derfor differentiabel i 0 med $D\sin(0) = 1$. Derefter får vi

$$\Delta_0 \cos(h) = \cos h - 1 = -2\sin^2 \frac{h}{2} = \left(-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin \frac{h}{2}\right) h,$$

og her er størrelsen i parentesen en α-funktion. Altså er $D\cos(0) = 0$. Det generelle tilfælde går nu ganske enkelt, idet vi har

$$\Delta\sin(x,h) = \sin(x+h) - \sin x =$$

$$\cos x \sin h + \sin x (\cos h - 1) =$$

$$(\cos x)h + \left(\left(\frac{\sin h}{h} - 1\right) \cos x - \frac{1-\cos h}{h} \sin x\right) h,$$

hvor størrelsen i parentsen er en α-funktion. Vi har således bevist, at Dsinx = cosx. Beviset for, at Dcosx = -sinx går ganske tilsvarende.

10.11. Vi definerer nu differentiabilitet for en mere generel afbildning ganske analogt med differentiabilitet af en funktion af 1 variabel:

10.11.1. <u>Definition</u>. Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde og $\underline{f}$:O ind i $\grave{R}^p$ en afbildning. Lad $\underline{a} \in O$ være et vilkårligt punkt. Vi indfører da <u>tilvæksten</u>

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}).$$

Afbildningen $\underline{f}$ siges at være <u>differentiabel i punktet</u> $\underline{a}$, hvis der eksisisterer en opspaltning

$$(2) \qquad \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{A}_1 h_1 + \dots + \underline{A}_n h_n + \underline{\alpha}(\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

hvor $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n$ er talsæt, som ikke afhænger af $\underline{h}$, medens $\underline{\alpha}$ er en α-afbildning.

Vi bemærker, at tilvæksten definerer en afbildning $\Delta_{\underline{a}}\underline{f}$:O - $\underline{a}$ ind i $\grave{R}^p$, og med $\underline{\alpha}(\underline{0}) = \underline{0}$ er også $\underline{\alpha}$ en afbildning $\underline{\alpha}$:O - $\underline{a}$ ind i $\grave{R}^p$.

Det vil ofte være nyttigt at betragte de afbildninger, der fremkommer af $\underline{f}$, når de variable på 1 nær holdes konstante. Vi vil benytte betegnelsen

$$\underline{f}_{\underline{a},j}(x_k) = \underline{f}(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n),$$

og herved defineres en afbildning $\underline{f}_{\underline{a},j}$:I ind i $\grave{R}^p$, hvor $I \subseteq \grave{R}$ er et interval med a_j som indre punkt. Hertil kræves blot, at

$$\{a_1\}\times\dots\times\{a_{j-1}\} \times I \times \{a_{j+1}\}\times\dots\times\{a_h\} \subseteq O.$$

Idet vi udnytter grundvektorerne, kan vi skrive

$$\underline{f}_{\underline{a},j}(a_j+h_j) = \underline{f}(\underline{a}+h_j\underline{e}_j),$$

og vi får da

$$\Delta_{a_j}\underline{f}_{\underline{a},j}(h_j) = \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(h_j\underline{e}_j),$$

og opspaltningen (2) giver

$$(3) \quad \Delta_{a_j}\underline{f}_{\underline{a},j}(h_j) = \underline{A}_j h_j + \underline{\alpha}(h_j\underline{e}_j)h_j,$$

hvilket viser, at

$$\frac{1}{h_j}\Delta_{a_j}\underline{f}_{\underline{a},j}(h_j) = \underline{A}_j + \underline{\alpha}(h_j\underline{e}_j).$$

Dette viser, at $\underline{A}_j$ er grænsepunkt for $\frac{1}{h_j}\Delta_{a_j}\underline{f}_{\underline{a},j}$ i punktet 0. Altså er koefficienterne $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n$ i (2) éntydig bestemt. Heraf følger

10.11.2. <u>Sætning</u>. Opspaltningen (2) er éntydig bestemt.

Hermed har vi vist berettigelsen af følgende definition:

10.11.3. <u>Definition</u>. Idet $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n$ er de i opspaltningen (2) optrædende talsæt, kaldes den ved

$$(4) \qquad d_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{A}_1 h_1 + \dots + \underline{A}_n h_n$$

definerede **afbildning**

$$d_{\underline{a}}\underline{f}: \mathring{R}^n \text{ ind i } \mathring{R}^p,$$

det totale differential af $\underline{f}$ i punktet $\underline{a}$.

Vi bemærker, at $d_{\underline{a}}\underline{f}$ er en lineær afbildning. Endvidere ved vi fra kursus i algebra og geometri, at enhver lineær afbildning af $\mathring{R}^n$ ind i $\mathring{R}^p$ kan fremstilles på formen (4), idet $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n$ er billederne af grundvektorerne $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$.

10.11.3. <u>Sætning</u>. En afbildning, som er differentiabel i et punkt $\underline{a}$ af en åben mængde O, er kontinuert i punktet $\underline{a}$.

Bevis. Af (2) ses, at $\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})$ har grænseværdien $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$, men det betyder netop, at $\underline{f}$ er kontinuert i punktet $\underline{a}$.

Af (3) fremgår, at $\underline{f}_{\underline{a},j}(\underline{x})$ er differentiabel i punktet a_j med differentialet defineret ved $\underline{A}_j h_j$. Koefficienten $\underline{A}_j$ kaldes <u>den partielle differentialkvotient af $\underline{f}$ med hensyn til den j^{te} variabel</u>.

10.12. Svarende til en åben mængde $0 \subseteq \dot{R}^n$ indfører vi en mængde $\Delta\, 0 \subseteq 0 \times \dot{R}^n$, idet vi sætter

$$\Delta 0 = \{(\underline{x},\underline{h}) \mid \underline{x} \in 0 \wedge \underline{x}+\underline{h} \in 0\}.$$

Da de ved

$$\varphi(\underline{x},\underline{h}) = \underline{x}, \quad \psi(\underline{x},\underline{h}) = \underline{x}+\underline{h}$$

definerede afbildninger $\varphi, \psi \times \dot{R}^n$ ind i $\dot{R}^n$ begge er kontinuerte, er $\Delta 0 = \varphi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0)$ åben, og derfor vil den opfylde betingelsen 2) i 10.7. Vi har derfor en <u>tilvækst</u>

$$\Delta\underline{f}(\underline{x},\underline{h}) = \underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}),$$

som er en afbildning $\Delta f : \Delta 0$ ind i $\dot{R}^p$.

10.12.1. <u>Definition</u>. Hvis funktionen $\underline{f}$ i definition 10.11.1 er differentiabel i ethvert punkt af 0, siger vi, at $\underline{f}$ er differentiabel i 0.

Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i hvert punkt af 0, kan opspaltningen (2) anvendes på $\Delta\underline{f}(\underline{x},\underline{h})$, idet $\Delta_{\underline{x}}\underline{f}(\underline{h}) = \Delta\underline{f}(\underline{x},\underline{h})$, og vi får da en opspaltning af formen

$$(5)\quad \Delta\underline{f}(\underline{x},\underline{h}) = \underline{A}_1(\underline{x})h_1 + \dots + \underline{A}_n(\underline{x})h_n + \underline{\alpha}(\underline{x},\underline{h})\,\|\underline{h}\|,$$

hvor $\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n$ er afbildninger af 0 ind i $\dot{R}^p$, medens $\underline{\alpha}:\Delta 0$ ind i $\dot{R}^p$ er en α-funktion, som for hver fast værdi af $\underline{x}$ har grænseværdien $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$.

Hvert $\underline{A}_j$ er differentialkvotient af den funktion $\underline{f}_{\underline{a},j}$, der fås ved at give de variable med undtagelse af x_j faste værdier. Afbildningerne $\underline{A}_j$ kaldes de partielle differentialkvotienter af $\underline{f}$, og vi anvender betegnelserne

$$\underline{A}_j = D_j\underline{f} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\underline{f} = \underline{f}'_{x_\nu} \quad .$$

Vi skriver eventuelt

$$\underline{y} = \underline{f}(x),$$

og

$$\underline{A}_j(\underline{x}) = D_j\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial x_j} = \underline{f}'_{x_j}(\underline{x}) = \underline{y}'x_j \quad .$$

Bemærk det særlige tegn ∂ , som skal anvendes, når der er tale om partiel differentiation.

10.13. I specialtilfældet p = 1 bliver partiel differentiation let at udføre, idet alle de variable undtagen 1 skal holdes fast, så der blot bliver tale om differentiation af en funktion af 1 variabel. Vi illustrerer dette ved nogle simple eksempler:

$$D_2(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2) = x_3 + x_1.$$

$$D_2(e^{x_1+x_2}\sin(x_1-x_2)) = e^{x_1+x_2}(\sin(x_1-x_2)-\cos(x_1-x_2))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

Det skal imidlertid understreges, at eksistens af alle de partielle differentialkvotienter ikke garanterer os, at afbildningen er differentiabel. I et senere afsnit skal vi vise, at en afbildning er differentiabel i en åben mængde O, hvis alle dens partielle differentialkvotienter eksisterer og er kontinuerte i O. På den anden side kan en differentiabel afbildning udmærket have diskontinuerte partielle differentialkvotienter.

10.14. I tilslutning til opspaltningen (5) indfører vi det totale differential $d\underline{f}:O \times \dot{R}^n$ ind i $\dot{R}^p$ defineret ved

$$d\underline{f}(\underline{x},\underline{h}) = \underline{A}_1(\underline{x})h_1 +\dots+ \underline{A}_n(\underline{x})h_n.$$

For projektionsafbildningen $p_j:\dot{R}^n$ på $\dot{R}$ defineret ved $p_j(\underline{x}) = x_j$ bliver tilvæksten

$$\Delta_{p_j}(\underline{x}) = x_j + h_j - x_j = h_j,$$

så opspaltningen (5) får den trivielle form

$$\Delta_{p_j}(\underline{x},\underline{h}) = 1\cdot h_j + 0\cdot h_j.$$

Altså er

$$dp_j(\underline{x},\underline{h}) = h_j.$$

På grund af denne sammenhæng skrives ofte (men ukorrekt) dx_j i stedet for h_j. Det er da naturligt også at skrive $d\underline{x}$ i stedet for $d\underline{h}$. Skriver vi $\underline{y} = f(\underline{x})$ får vi da følgende skrivemåder for det totale differential:

$$d\underline{y} = d\underline{f}(\underline{x}, d\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_j \underline{f}(x) dx_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{f}'_{x_j}(x) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{y}}{\partial x_j} dx_j$$

I tilfældet $p = 1$ kan det totale differential umiddelbart opskrives, idet de partielle afledede skal benyttes som koefficienter. Det totale differential bliver sum af differentialerne af de n funktioner, der fås ved at holde alle de variable undtagen 1 konstante. Vi tydeliggør dette ved nogle eksempler:

$$d(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = (x_2+x_3)dx_1 + (x_3+x_1)dx_2 + (x_1+x_2)dx_3$$

$$d\,\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

10.15. Den i foregående afsnit beskrevne differentiationsproces er selvfølgelig først nyttig, når den kombineres med viden om, at den betragtede afbildning virkelig er differentiabel. Vi skal derfor vise, dels at visse fundamentale afbildninger er differentiable, dels at visse operationer med differentiable afbildninger igen fører til differentiable afbildninger. Vi begynder at vise, at en lineær afbildning er differentiabel og identisk med sit differential, hvilket udtrykkes mere præcist i følgende sætning:

10.15.1. Sætning. En lineær afbildning $\underline{L}: \grave{R}^n$ ind i $\grave{R}^p$ er differentiabel med differentialet $d\underline{L}(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{L}(\underline{h})$.

Bevis: Tilvæksten bliver

$$\Delta\underline{L}(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{L}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{L}(\underline{x}) = \underline{L}(\underline{h}),$$

og vi får derfor den trivielle opspaltning

$$\Delta \underline{L}(\underline{x},\underline{h}) = \underline{L}(\underline{h}) + \underline{0}\cdot\|\underline{h}\|,$$

hvoraf påstanden umiddelbart følger.

10.15.2. Sætning. En konstant afbildning er differentiabel, og dens differential er identisk $\underline{0}$.

Bevis. Påstanden følger umiddelbart af, at tilvæksten bliver identisk $\underline{0}$.

10.15.3. Sætning. Den ved $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ definerede afbildning $f:\grave{R}^2$ på $\grave{R}$ er differentiabel, og $df(\underline{x},\underline{h}) = x_2h_1 + x_1h_2$, altså med den ældre skrivemåde

$$d(x_1x_2) = x_2dx_1 + x_1dx_2.$$

Bevis: Tilvæksten bliver

$$\Delta f(\underline{x},\underline{h}) = (x_1+h_1)(x_2+h_2) - x_1x_2 =$$
$$x_2h_1 + x_1h_2 + \alpha(\underline{x},\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

hvor

$$\alpha(\underline{x},\underline{h}) = \frac{h_1h_2}{\|\underline{h}\|} .$$

Vi mangler at vise, at α virkelig er en α-afbildning. Af $0 \leqq (|h_1| - |h_2|)^2 = \|\underline{h}\|^2 - 2|h_1h_2|$ følger imidlertid, at $|h_1h_2| \leqq \frac{1}{2}\|\underline{h}\|^2$, altså $|\alpha(\underline{x},\underline{h}) \leqq \frac{1}{2}\|\underline{h}\|$, hvilket viser, at α virkelig har grænseværdi 0 i punktet $\underline{0}$.

10.16. I dette afsnit beviser vi nogle simple sætninger, som vil finde anvendelse i det følgende afsnit.

10.16.1. Lemma. Lad $\underline{L}:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}^p$ være en lineær afbildning. Der eksisterer da et positivt tal M, således at $\|\underline{L}(\underline{x})\| \leqq K\|\underline{x}\|$ for ethvert $\underline{x} \in \grave{R}^n$.

Bevis. Enhedskuglefladen $E = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}\| = 1\}$ er en afsluttet mængde. Altså har $M = \sup \underline{L}(E)$ en endelig værdi, som er positiv, hvis $\underline{L}$ ikke er identisk $\underline{0}$. For ethvert $\underline{x} \neq \underline{0}$ gælder $\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in E$. Vi får nu for $\underline{x} \neq \underline{0}$, at

$$\|\underline{L}(\underline{x})\| = \|\|\underline{x}\|L(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|})\| = \|L(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|})\|\|\underline{x}\| \leq M\ \|\underline{x}\|.$$

I resterende tilfælde, hvor $\underline{x} = \underline{0}$ eller $\underline{L}$ identisk $\underline{0}$ er påstanden rigtig for enhver positiv værdi af M.

10.16.2. Lemma. Lad $0 \subseteq \dot{R}^n$ være en åben mængde, $\underline{a} \in 0$ et vilkårligt punkt og $\underline{f}$:0 ind i $\dot{R}^p$ en differentiabel afbildning. Der eksisterer da en omegn U af $\underline{0}$ og et positivt tal M, således at

$$\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} \leq M \text{ for ethvert } \underline{h} \in U \setminus \{\underline{0}\}.$$

Bevis. Vi benytter opspaltningen (2), som vi skriver

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{L}(\underline{h}) + \alpha(\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

hvor $\underline{L}:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}^p$ er en differentiabel funktion. Heraf følger nu

$$\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\| \leq \|L(\underline{h})\| + \|\alpha(\underline{h})\|\ \|\underline{h}\|,$$

altså

$$\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} \leq \frac{\|\underline{L}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} + \|\underline{\alpha}(\underline{h})\|.$$

Ifølge lemma 10.16.1 eksisterer der et positivt tal M_1, således at det første led på højre side er $\leq M_1$ for alle $\underline{h} \neq \underline{0}$. Da $\underline{\alpha}$ er kontinuert i $\underline{0}$ og $\underline{\alpha}(\underline{0}) = \underline{0}$, er $\underline{\alpha}^{-1}(K(\underline{0};1)) = U$ en omegn af $\underline{0}$, og vi har da

$$\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} \leq M_1 + 1 \text{ for } \underline{h} \in U \setminus \{\underline{0}\}.$$

Dermed er påstanden bevist.

Hvis en afbildning β:0 ind i $\dot{R}$, hvor $0 \subseteq \dot{R}^n$ er åben og indeholder $\underline{0}$, har den egenskab, at der eksisterer en omegn U af $\underline{0}$ og et positivt tal M, således at $|\beta(\underline{h})| \leq M$ for ethvert $\underline{h} \in U \setminus \{\underline{0}\}$, vil vi kort, men ikke helt korrekt, sige, at β er <u>begrænset i en omegn af $\underline{0}$</u>. Lemma 10.16.2 udtrykker så, at det for en <u>afbildning $\underline{f}$, som er differentiabel i et punkt a gælder, at den ved $\beta(\underline{h}) = \frac{\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}$ definerede afbildning gælder, at den er begrænset i en omegn af 0</u>.

10.16.3. Lemma. Produktet af en α-afbildning og en afbildning der er begrænset i en omegn af $\underline{0}$ er en α-afbildning.

Bevis: Lad $\underline{\alpha}:0$ ind i $\dot{R}^p$, hvor $\underline{0} \in 0$ og $0 \subseteq \dot{R}^n$ være en α-afbildning og lad $\beta:0$ ind i $\dot{R}$ være begrænset i en omegn af $\underline{0}$. Vi kan da vælge en omegn U af $\underline{0}$, således at $U \subseteq 0$, og således at der eksisterer et positivt tal M, så $|\beta(\underline{h})| \leq M$ for alle $\underline{h} \in U \setminus \{0\}$. For $\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}\beta$ gælder da

$$||\alpha_1(\underline{h})|| = ||\alpha(\underline{h})\beta(\underline{h})|| = ||\alpha(\underline{h})||\cdot|\beta(\underline{h})| \leq K||\alpha(\underline{h})||,$$

hvilket viser, at $\underline{\alpha}_1$ har grænseværdi $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$.

10.17. Vi indleder dette afsnit med en hjælpesætning, der er ret triviel.

10.17.1. Lemma. Lad $0_1 \subseteq \dot{R}^n$ og $0_2 \subseteq \dot{R}^p$ være åbne mængder. Lad $\underline{f}:0_1$ ind i 0_2 og $\underline{g}:0_2$ ind i $\dot{R}$ være afbildninger. For $\underline{a} \in 0_1$ og $\underline{b} = f(\underline{a})$ gælder da

$$\Delta_{\underline{a}}(\underline{g}\circ\underline{f}) = \Delta_{\underline{b}}\underline{g}\circ\Delta_{\underline{a}}\underline{f}.$$

Bevis. Med $\underline{F} = \underline{g}\circ\underline{f}$ og

$$\underline{k} = \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})$$

har vi

$$\Delta_{\underline{a}}(\underline{g}\circ\underline{f})(\underline{h}) = \Delta_{\underline{a}}\underline{F}(\underline{h}) = \underline{F}(\underline{a}+\underline{h}) - F(\underline{a}) =$$
$$\underline{g}(\underline{f}(\underline{a}+\underline{h})) - g(\underline{f})a)) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{a})+\underline{k}) - g(\underline{f}(a)) =$$
$$\underline{g}(\underline{b}+\underline{k}) - \underline{g}(\underline{b}) = \Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\underline{k}) = \Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\Delta_g\underline{f}(\underline{h})),$$

og dermed er påstanden bevist.

Det er nu let at vise hovedsætning om differentiation af sammensat funktion:

10.17.2. Sætning. Lad $0_1 \subseteq \dot{R}^n$ og $0_2 \subseteq \dot{R}^p$ være åbne mængder. Lad $\underline{f}:0_1$ ind i 0_2 og $\underline{g}:0_2$ ind i $\dot{R}^q$ være afbildninger. Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i et punkt $\underline{a} \in 0_1$ og g er differentiabel i punktet $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$, da er $\underline{F} = \underline{g}\circ\underline{f}$ differentiabel i $\underline{a}$, og

$$d_{\underline{a}}(\underline{g}\circ\underline{f}) = d_{\underline{b}}g\circ d_{\underline{a}}\underline{f}.$$

Bevis. Idet vi har opspaltningerne

$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{L}_1(\underline{h}) + \underline{\alpha}_1(\underline{h})\|\underline{h}\|; \ \Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\underline{k}) = \underline{L}_2(\underline{k}) + \underline{\alpha}_2(\underline{k})\|\underline{k}\|,$

hvor $\underline{L}_1$ og $\underline{L}_2$ er lineære afbildninger, medens $\underline{\alpha}_1$ og $\underline{\alpha}_2$ er α-funktioner, får vi af lemma 10.17.1, at

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{F}(\underline{h}) = \Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})) =$$

$$\underline{L}_2(\underline{L}_1(\underline{h}) + \underline{\alpha}_1(\underline{h})\|\underline{h}\|) + \underline{\alpha}_2(\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}))\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\| =$$
$$\underline{L}_2(\underline{L}_1(\underline{h})) + \underline{L}_2(\underline{\alpha}_1(\underline{h}))\|\underline{h}\| + \underline{\alpha}_2(\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}))\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\| =$$

$$\underline{L}_2(\underline{L}_1(\underline{h})) + \left(\underline{L}_2(\underline{\alpha}_1(\underline{h})) + \underline{\alpha}_2(\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}))\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|}{\|\underline{h}\|}\right)\|\underline{h}\|.$$

Her er det første led en lineær afbildning. Det første led i parentesen er kontinuert i $\underline{0}$ og har værdien $\underline{0}$ i punktet $\underline{0}$, og er således en α-afbildning. Den første faktor i det sidste led i parentesen er sammensat af to α-afbildninger og er derfor en α-afbildning. Den sidste faktor i det samme led er ifølge lemma 10.16.2 begrænset i en omegn af $\underline{0}$, og produktet er derfor en α-afbildning. Dermed har vi vist, at udtrykket i parentesen er en α-afbildning, og $\underline{F}$ er altså differentiabel i $\underline{a}$. Endvidere fremgår det af resultatet, at

$$d_{\underline{a}}\underline{F} = \underline{L}_2\circ\underline{L}_1 = d_{\underline{b}}\underline{g}\circ d_{\underline{a}}\underline{f}.$$

Dermed er hovedsætningen fuldstændig bevist.

En afbildning $\underline{f}$:O ind i $\mathring{R}^q$, hvor O $\subseteq \mathring{R}^n$, er bestemt ved koordinatafbildninger $f_j = p_j\circ\underline{f}$, hvor projektionen p_j:$\mathring{R}^q$ på $\mathring{R}$ er bestemt ved $p_j(\underline{x}) = x_j$. På den anden side er $\underline{f} = f_1\underline{e}_1 + \ldots + f_q\underline{e}_q$, hvor $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_q$ er grundvektorerne i $\mathring{R}^q$. Ved siden af hovedsætningen ovenfor får vi brug for følgende langt simplere sætning:

10.17.3. <u>Sætning</u>. En afbildning $\underline{f}$:O ind i $\mathring{R}^q$, hvor O $\subseteq \mathring{R}^n$ er en åben mængde, er differentiabel i et punkt $\underline{a} \in$ O, hvis og kun hvis hver af koordinatafbildningerne $f_j = p_j\circ\underline{f}$ er differentiabel i $\underline{a}$. Endvidere har $d_{\underline{a}}\underline{f}$ koordinatafbildningerne $d_{\underline{a}}f_j$.

Bevis. Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i $\underline{a}$, giver sætning 10.17.2 og sætning 10.15.1 umiddelbart, at $f_j = p_j \circ \underline{f}$ er differentiabel i $\underline{a}$. På den anden side er

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \sum_{j=1}^{q} (f_j(\underline{a}+\underline{h}) - f_j(\underline{a}))\underline{e}_j = \sum_{j=1}^{q} \Delta_{\underline{a}} f_j(\underline{h}).$$

Hvis vi nu for hvert j har en opspaltning

$$\Delta_{\underline{a}} f_j(\underline{h}) = d_{\underline{a}} f_j(\underline{h}) + \alpha_j(\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

hvor $d_{\underline{a}}f_j$ er en lineær afbildning (differentialet i $\underline{a}$), og α_j er en α-funktion, får vi umiddelbart

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \sum_{j=1}^{q}(d_{\underline{a}} f_j(\underline{h}))\underline{e}_j + \left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j(\underline{h})\underline{e}_j\right) \|\underline{h}\|,$$

hvilket viser, at $\underline{f}$ er differentiabel i $\underline{a}$, og at $d_{\underline{a}}\underline{f}$ har koordinaterne $d_{\underline{a}}f_j$.

10.18. Det er nu let at vise, at elementære regneoperationer med differentiable funktioner bortset fra division med nul fører til differentiable funktioner.

10.18.1. <u>Sætning</u>. Hvis afbildningerne $f_1, f_2 : 0$ ind i $\dot{R}$, hvor 0 er en åben mængde, er differentiable i et punkt $\underline{a} \in 0$, da er f_1+f_2, f_1-f_2 og f_1f_2 differentiable i punktet $\underline{a}$. Hvis $f_1(\underline{a}) \neq 0$, er f_2 / f_1 ligeledes differentiabel i punktet $\underline{a}$.

Bevis. Vi indfører afbildningen $\underline{f} = (f_1, f_2) : 0$ ind i $\dot{R}^2$, defineret ved $\underline{f}(\underline{x}) = f_1(\underline{x})\underline{e}_1 + f_2(\underline{x})\underline{e}_2$, hvor $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ er grundvektorerne i $\dot{R}^2$. Ifølge sætning 10.17.3 er $\underline{f}$ differentiabel i punktet $\underline{a}$. De ved

$$\varphi_1(\underline{x}) = x_1 + x_2, \ \varphi_2(\underline{x}) = x_1 - x_2, \ \varphi_3(\underline{x}) = x_1x_2$$

definerede afbildninger $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \dot{R}^2$ på $\dot{R}$ er differentiable, idet de to første er lineære, og den tredie er differentiabel ifølge sætning 10.15.3. Derefter følger det af sætning 10.17.2, at $f_1+f_2 = \varphi_1\circ\underline{f}$, $f_1 - f_2 = \varphi_2\circ\underline{f}$ og $f_1f_2 = \varphi_3\circ\underline{f}$ er differentiable i punktet $\underline{a}$. I 10.10 viste vi, at den ved $f(x) = \frac{1}{x}$ definerede afbildning er differentiabel i $\dot{R} \setminus \{0\}$, og det følger derefter af sætning 10.17.1, at $1/f_1$ er differentiabel i $\underline{a}$, hvis $f_1(\underline{a}) \neq 0$. Derefter giver det netop beviste resultat, at $f_2/f_1 = f_2\cdot 1/f_1$ er differentiabel i $\underline{a}$.

10.19. Alle de foregående sætninger, der handler om operationer med funktioner, der er differentiable i et punkt, kan uden videre anvendes på funktioner, der er differentiable i en åben mængde. Vi vil ikke foretage de tilsvarende helt trivielle omformuleringer af sætningerne. Ved udregning af partielle differentialkvotienter holdes de variable fast med undtagelse af en eneste, og ved differentiation af givne funktioner kan man derfor klare sig med de fra gymnasieundervisningen kendte differentiationsregler, således som vi udførte det i eksemplerne i 10.13 og 10.14. Det kan imidlertid være nødvendigt, at differentiere ubekendte funktioner, og det vil derfor være hensigtsmæssigt at bringe resultaterne i 10.17 og 10.18 på en mere eksplicit form.

Vi bemærker først, at sætning 10.17.3 udtrykker, at vi for en afbildning $\underline{f} = (f_1,\dots,f_p):0$ ind i $\dot{R}^p$ har den simple differentiationsregel

$$d\underline{f} = (df_1,\dots,df_p),$$

altså

$$\begin{aligned} &D_1\underline{f}(\underline{x})dx_1 +\dots+ D\underline{f}(\underline{x})dx_1 = \\ &(D_1f_1(\underline{x})dx_1 +\dots+ D_nf_1(\underline{x})dx_n,\dots,D_1f_p(\underline{x})dx_1+\dots+D_nf_p(\underline{x})dx_n) \\ &= (D_1f_1(\underline{x}),\dots D_1f_p(\underline{x}))dx_1 +\dots+ (D_nf_1(\underline{x}),\dots,D_nf_p(\underline{x}))dx_n, \end{aligned}$$

så vi får differentiationsreglen

$$D_j\underline{f}(\underline{x}) = (D_jf_1(\underline{x}),\dots,D_jf_p(\underline{x})),$$

som udtrykker, at partiel differentiation af et sæt $(f_1,\dots,f_n)$ udføres ved partiel differentiation af hvert element i sættet for sig.

10.19.1. Sætning. Lad $O_1 \subseteq \dot{R}^n$ og $O_2 \subseteq \dot{R}^p$ være åbne mængder og $\underline{f}:O_1$ ind i O_2 og $\underline{g}:O_2$ ind i $\dot{R}^q$ være differentiable afbildninger. Da er de partielle differentialkvotienter af den sammensatte funktion $\underline{F} = \underline{g}\circ\underline{f}$ givet ved

$$D_j\underline{F}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{p} D_k\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))D_jf_k(\underline{x}).$$

Bevis. Af sætning 10.17.2 følger

$$d\underline{F}(\underline{x},d\underline{x}) = d_{\underline{x}}\underline{F}(d\underline{x}) = d_{\underline{f}(\underline{x})}\underline{g}(d_{\underline{x}}\underline{f}(d\underline{x}))$$

$$\sum_{k=1}^{p} D_k\, \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))d_{\underline{x}}\, f_k(d\underline{x}) = \sum_{k=1}^{p}\left(D_k\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))\sum_{k=1}^{n} D_jf_k(\underline{x})dx_j\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} D_k\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))D_jf_k(\underline{x})\right)dx_j\ ,$$

hvilket viser, at de partielle differentialkvotienter netop har den i sætningen anførte værdi.

10.20. Vi vil udtrykke resultaterne fra de foregående afsnit i det traditionelle betegnelsessystem. En afbildning $\underline{f}:O$ ind i $\dot{R}_p$, hvor $O \subseteq \dot{R}^n$, behandles da på den måde, at vi vælger et fast bogstav $\underline{x}$ for det variable punkt i O, og et andet fast bogstav $\underline{y}$ for det variable punkt i $\dot{R}^p$. Vi har da sammenhængen $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}),\dots,f_p(\underline{x}))$, hvilket er ensbetydende med

$$y_1 = f_1(\underline{x}),\dots,y_p = f_p(\underline{x}).$$

Koordinaterne $(x_1,\dots,x_n)$ kaldes de uafhængige variable, medens $(y_1,\dots,y_p)$ kaldes de afhængige variable. Vi har nu de totale differentialer.

$$
(6)\quad
\begin{array}{l}
dy_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n \\
\text{-------------------------------} \\
dy_p = \dfrac{\partial y_p}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial y_p}{\partial x_n} dx_n .
\end{array}
$$

Her er det talsæt, hvis elementer er tallene på venstre side netop talsættet $d\underline{y}$, idet vi tænker på $d\underline{y}$ som funktionsværdi. Søjlerne af koefficienter på højre side bliver, hvis de opfattes som talsæt, netop de partielle differentialkvotienter af $\underline{y}$. Skemaet (6) er $d\underline{f}$ opfattet som lineær afbildning og skrevet ud i koordinater. De variable $x_1,\dots,x_n$ optræder i koefficienterne, men dette er ikke udtrykt eksplicit. Selv om vi benytter de moderne betegnelser, vil det ved konkrete anvendelser være praktisk at skrive differentialet ud i koordinater på formen

$$
(7)\quad
\begin{array}{l}
df_1(\underline{x},d\underline{x}) = D_1f_1(\underline{x})dx_1 + \dots + D_nf_1(\underline{x})dx_n \\
\text{-------------------------------} \\
df_p(\underline{x},d\underline{x}) = D_1f_p(\underline{x})dx_1 + \dots + D_nf_p(\underline{x})dx_n .
\end{array}
$$

Når situationen er som i sætningerne 10.17.2 og 19.19.1 foreligger der altså to afbildninger definerede ved $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ og $\underline{z} = \underline{g}(\underline{y})$. Den sidste afbildnings differential skrevet i koordinater på moderne form er

$$
(8)\quad
\begin{array}{l}
dg_1(\underline{y},d\underline{y}) = D_1g_1(\underline{y})dy_1 + \dots + D_pg_1(\underline{y})dy_p \\
\text{-------------------------------} \\
dg_q(\underline{y},d\underline{y}) = D_1g_q(\underline{y})dy_1 + \dots + D_pg_q(\underline{y})dy_p .
\end{array}
$$

Sætning 10.17.2 udtrykker nu, at vi får differentialet (skrevet ud i koordinater) af den sammensatte funktion $\underline{z} = \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))$ ved i (8) på højre side at indsætte $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ og $dy_1 = df_1(\underline{x},d\underline{x}),\dots,dy_p = df_p(\underline{x},d\underline{x})$. I "gammeldags" betegnelser får

(8) udseendet

$$(9)\quad \begin{aligned} dz_1 &= \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\,dy_1 + \dots + \frac{\partial z_1}{\partial y_p}\,dy_p \\ &\text{-----------------------------} \\ dz_q &= \frac{\partial z_q}{\partial y_1}\,dy_1 + \dots + \frac{\partial z_q}{\partial y_p}\,dy_p, \end{aligned}$$

men nu er situationen den, at relationen $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ forpligter os til at tillægge differentialerne $dy_1,\dots,dy_p$ de ved (6) givne værdier, og nu har vi netop set, at vi ved at indsætte disse værdier og sætte $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ virkelig får differentialet af den sammensatte funktion. Sætning 10.17.2 siger altså netop, at <u>udtrykket</u> (9) <u>er anvendeligt, selv om</u> $y_1,\dots,y_p$ <u>er afhængige variable</u>.

Det i sætning 10.19.1 anførte udtryk bliver med de "gammeldags" betegnelser

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \frac{\partial z_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z_k}{\partial y_p}\;\frac{\partial y_p}{\partial x_j} .$$

Denne regneregel er let at huske. Partiel differentiation af den sammensatte funktion udføres altsåved, at man differentierer "gennem" hver af de variable y_s og adderer resultaterne. Vi noterer os, at det ikke går an at opfatte de partielle differentialkvotienter som "rigtige" kvotienter.

10.21. Det hænderselvfølgelig ofte,at man i en afbildning substituerer nye variable for visse, men ikke alle, optrædende uafhængige variable, men det betyder blot, at man udfører den identiske substitution for de øvrige variables vedkommende, og det er derfor ikke nødvendig at gennemføre en særlig undersøgelse i dette tilfælde. Hvis vi f.eks. ønsker at differentiere et sammensat udtryk af formen $g(x,f(x,y))$, sætter vi

$$z = g(u,v), \quad u = x, \quad v = g(x,y),$$

og vi får da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

eller med nye betegnelser $F(x,y) = g(x,f(x,y))$:

$$D_1F(x,y,dx,dy) = D_1g(x,f(x,y))dx + D_2g(x,f(x,y))D_1g(x,y)dx$$

$$D_2F(x,y,dx,dy) = D_2g(x,f(x,f(x,y))D_2f(x,y)dy.$$

Ligningssystemet (6) gælder altså, selv om de variable $x_1,\dots,x_n$ ikke alle er uafhængige. Hvis det specielt gælder, at ligningssystemet

$$(10) \qquad f_1(\underline{x}) = 0,\dots, f_p(\underline{x}) = 0,$$

hvor vi et øjeblik antager, at $n > p$, har en differentiabel løsning af formen

$$(11) \qquad x_1 = \varphi_1(x_{p+1},\dots,x_n),\dots,x_p = \varphi_p(x_{p+1},\dots,x_n),$$

da vil disse funktioner substituerede i (10) bevirke, at ligningerne gælder identisk, altså at vi med betegnelserne fra (6) får $dy_1 = \dots = dy_p = 0$ for differentialerne af de sammensatte funktioner. Nu gælder udtrykkene (6) imidlertid, selv om $x_1,\dots,x_p$ er afhængige variable, og differentialerne $dx_1,\dots,dx_p$ af løsningsfunktionerne (11) vil derfor tilfredsstille ligningerne

$$(12) \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_p}dx_p + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_{p+1}}dx_{p+1} + \dots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ \hline \dfrac{\partial y_p}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \dfrac{\partial y_p}{\partial x_p}dx_p + \dfrac{\partial y_p}{\partial x_{p+1}}dx_{p+1} + \dots + \dfrac{\partial y_p}{\partial x_n}dx_n = 0 \end{array}$$

Vi får således et system af lineære ligninger, hvoraf differentialerne $dx_1,\dots,dx_p$ eventuelt vil kunne beregnes. Mere dybtgående undersøgelser, som vi ikke kan gennemføre her, vil vise, at man endda kan slutte, at løsningsfunktionerne (11) er differentiable, hvis ligningssystemet (12), hvor $dx_1, \ldots, dx_p$ opfattes som ubekendte, har én og kun én løsning. Dette resultat kan yderligere skærpes, så det udtaler sig om eksistens og éntydighed af løsningsfunktionerne (11).

Hvis vi f.eks. har, at x, y og t tilfredsstiller ligningssystemet

$$(13) \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4t^2 &= 0 \\ xy + t^2 &= 0, \end{aligned}$$

kan vi forudse, at x og y lokalt kan udtrykkes ved t ved hjælp af elementære regneoperationer og kvadratrødder, så vi i et eller andet interval får 2 eller 4 differentiable løsningsfunktioner. Ved differentiation får vi nu

$$\begin{aligned} 2xdx + 2ydy - 8tdt &= 0 \\ ydx + xdy - 2tdt &= 0 \end{aligned}$$

som har løsningerne

$$dx = \frac{(4x + 2y)t}{y^2 - x^2}\,dt, \qquad dy = \frac{(2x - 4y)t}{x^2 - y^2}\,dt,$$

og koefficienterne til dt er således løsningsfunktionernes differentialkvotienter. Vi har fået dem udtrykt ved den uafhængige variabel t og de afhængige variable x og y. Denne ulempe opvejes af, at udtrykkene ikke bliver så komplicerede. Metoden kaldes <u>implicit differentiation</u>.

10.22. I gymnasiet vises en sætning om differentiation af et bestemt integral. For Riemann-integraler gælder denne sætning i følgende form:

10.22.1. <u>Sætning</u>. Lad $f:[a,b]$ ind i $\grave{R}$ være Riemann-integrabel, og lad $x_o \in [a,b]$ være et punkt, hvor f er kontinuert. Da er den ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

definerede afbildning $F:[a,b]$ ind i $\hat{R}$ differentiabel i punktet x_o med differentialkvotient $f(x_o)$.

Bevis. Det er tilstrækkeligt at vise, at den ved

$$\alpha(h) = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x_o)$$

definerede funktion er en α-afbildning. Nu er

$$\alpha(h) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) - f(x_o) =$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t) - f(x_o))\, dt,$$

så får vi vurderingen

$$|\alpha(h)| \leqq \sup\{|f(t) - f(x_o)|\,\big|\, t \in I\},$$

hvor I er det afsluttede interval med endepunkter x_o og $x_o + h$. Da f er kontinuert i x_o, vil udtrykket på højre side have grænseværdien 0 i punktet h = 0, og dermed er påstanden bevist.

10.23. De foregående undersøgelser med undtagelse af udledelsen af differentialkvotienterne af de trigonometriske funktioner, eksempler der udnytter differentialkvotienter af eksponentialeller logaritmefunktion, samt sætning 10.22.1, gælder uændret for afbildninger af åbne punktmængder i komplekse rum. Vi kan således anvende differentiationsreglerne uændret i det komplekse tilfælde. Polynomier og brudne rationale funktioner er således differentiable.

Det volder heller ingen vanskeligheder at anvende det foregående på afbildninger af en åben mængde i et reelt rum ind i et komplekst rum. En sådan afbildning kan spaltes i en realdel og en imaginærdel, og det er let at vise (omtrent som beviset for sætning 10.17.3), at afbildningen differentieres ved at realdel og imaginærdel differentieres hver for sig.

Differentiationsteorien kan selvfølgelig også anvendes på afbildninger af åbne mængder i komplekse rum ind i reelle rum, men en nærmere undersøgelse vil vise, at kun konstante afbildninger bliver differentiable, så hele teorien bliver triviel.

10.24. At de trigonometriske funktioner og eksponentialfunktionen er differentiable også som afbildninger af $\check{C}$ ind i $\check{C}$ kræver et særligt bevis. Vi vil imidlertid bevise, at summen af en potensrække er en i rækkens konvergenscirkel differentiabel funktion, og at differentialkvotienten fås ved ledvis differentiation af potensrækken. Vi viser først en hjælpesætning:

10.24.1. Lemma. Hvis potensrækken $\Sigma a_n z^n$ har konvergensradius $R > 0$, er

$$\Sigma a_n h^n = a_0 + a_1 h + \alpha(h)h,$$

hvor $\alpha(h)$ er en α-afbildning.

Bevis. Ved direkte udregning fås

$$\alpha(h) = \sum_{n=z}^{\infty} a_n h^{n-1} = h \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+z} h^n ,$$

og her har den sidste potensrække åbenbart konvergensradius R og er derfor begrænset i en omegn af 0. Dermed er påstanden bevist.

10.24.2. Sætning. Lad $O \subseteq \check{C}$ være den åbne cirkelskive med centrum 0 og radius R. Lad $f: O$ ind i $\check{C}$ være en afbildning defineret ved

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Da er f vilkårlig ofte differentiabel, og $D^p f$ er givet ved

$$D^p f(z) = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{n} a_{n+p} z^n,$$

hvor potensrækken er konvergent i O. For $z \in O$ og $|h| < R - |z|$ vil $f(z+h)$ kunne fremstilles ved absolut konvergente række

$$f(z+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{D^p f(z)}{p!} h^p,$$

der kaldes Taylorrækken for f.

Bevis. For dobbeltrækker med positive led har sætningen om ombytning af summationsordenen uindskrænket gyldighed, og vi har derfor $|z| + |h| < R$, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z|+|h|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} |a_n| |z|^{n-p} |h|^p =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n}{p} |a_n| |z|^{n-p} |h|^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{p} |a_n| |z|^{n-p} |h|^p =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} |a_n| |z|^{n-p} |h|^p = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} |a_{n+p}| |z|^n |h|^p =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} |a_{n+p}| |z|^n \right) |h|^p.$$

Det andet og det fjerde lighedstegn kommer af, at $\binom{n}{p} = 0$ for $p > n$. Det femte er fremkommet ved at sætte $n = p+k$ og derefter igen erstatte bogstavet k med n. Det fremgår, at vi kan sætte

$$A_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} z^n,$$

hvor rækken på højre side er absolut konvergent for $|z| < R$. Det fremgår endvidere af udtrykket efter det andet lighedstegn i udregningen ovenfor, at dobbeltrækken

$$\sum_{n,p=0}^{\infty} \binom{n}{p} a_n z^{n-p} h^p$$

er absolut konvergent, og ombytteligheden af summationerne med hensyn til n og p gælder derfor, selv om numerisktegnene slettes. Men så gælder hele udregningen uden numerisktegn, og den giver os resultatet

$$f(z+h) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(z)\, h^p.$$

Nu ser vi direkte, at $A_0(z) = f(z)$, og lemma 10.24.1 giver derefter, at

$$f(z+h) - f(z) = A_1(z)h + \alpha(z,h)h,$$

hvilket viser, at f er differentiabel og at

$$Df(z) = A_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\, z^n,$$

hvor potensrækken er konvergent for $|z| < R$. Dermed har vi vist, at f er differentiabel, og at differentialkvotienten fås ved ledvis differentiation af potensrækken. Vi kan nu anvende dette på $A_p(z)$, hvilket giver

$$DA_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{n+p+1}{p}a_{n+p+1}z^n =$$

$$(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+p+1}{p+1}a_{n+p+1}\, z^n = (p+1)A_{p+1}(z),$$

og en simpel induktionsslutning giver nu, at

$$A_p(z) = \frac{D^p(z)}{p!} .$$

Dermed er sætningen fuldstændig bevist.

10.25. Det ses nu umiddelbart, at differentiationsreglerne

$$\frac{d}{dz}\, e^z = e^z; \ \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z; \ \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

også gælder for komplekse variable. Udledelsen er uafhængig af de trigonometriske funktioner i det reelle område, og den giver os mulighed for at indføre de trigonometriske funktioner ved hjælp af potensrækkerne og således undgå den anvendelse af anskueligheden, der indgår i gymnasieundervisningens indførelse af de trigonometriske funktioner. Det er ikke svært på grundlag af de nye definitioner at vise, at $\varphi(x) = e^{ix}$ definerer en surjektiv afbildning $\varphi:\dot{R}$ på γ, hvor γ er enhedscirklen i den komplekse plan, og derved indføre argumentet for et komplekst tal. Derved kan også vinkelbegrebet indføres uafhængigt af overvejelser, der bygger på geometrisk anskuelse.

10.26. Lad $O \subsetneqq \grave{C}$ være en åben mængde. En afbildning $f:O$ ind i $\grave{C}$ er bestemt ved sin realdel og imaginærdel. Vi vil anvende betegnelserne

$$z = x+iy, \quad w = u+iv, \quad x,y,u,v \in \grave{R}$$

$$w = f(z) = f(x+iy) = g_1(x,y) + ig_2(x,y).$$

$$O_1 = \{(x,y) \mid x+iy \in O\}; \; O_1 \subsetneqq \grave{R}^2,$$

og g_1, g_2 er da afbildninger af O_1 ind i $\grave{R}$. Idet vi sætter $h = h_1+ih_2$, hvor $h_1, h_2 \in \grave{R}$ har vi tilvæksten

$$\Delta f(z,h) = f(z+h) - f(z) =$$

$$g_1(x+h_1,y+h_2) + ig_2(x+h_1,y+h_2) - g_1(x,y) - ig_2(x,y) =$$

$$\Delta g_1(x,y;h_1,h_2) + i\Delta g_2(x,y;h_1,h_2).$$

Hvis f er differentiabel, har vi en opspaltning

$$(14) \quad \Delta f(z,h) = Df(z)h + \alpha(z,h)h,$$

og her kan vi sætte

$$Df(z) = A_1(x,y) + iA_2(x,y)$$

$$\alpha(z,h) = \alpha_1(x,y;h_1,h_2) + i\alpha_2(x,y;h_1,h_2),$$

og ved spaltning af (14) i realdel og imaginærdel får vi nu

$$\Delta g_1(x,y;h_1,h_2) = A_1(x,y)h_1 - A_2(x,y)h_2 + \alpha_3(x,y;h_1,h_2)\|\underline{h}\|$$

(15)

$$\Delta g_2(x,y;h_1,h_2) = A_2(x,y)h_1 + A_1(x,y)h_2 + \alpha_y(x,y;h_1,h_2)\|\underline{h}\|,$$

hvor

$$\alpha_3 = \frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\alpha_1 - \frac{h_2}{\|\underline{h}\|}\alpha_2, \quad \alpha y = \frac{h_2}{\|\underline{h}\|}\alpha_1 + \frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\alpha_2$$

er α-funktioner, idet

$$-1 \leqq \frac{h_j}{\|\underline{h}\|} \leqq 1, \quad j = 1,2.$$

Det ses af (15), at g_1 og g_2 er differentiable, samt at

(16)

$$D_1g_1 = D_2g_2, \quad D_1g_2 = -D_2g_1.$$

Hvis g_1 og g_2 er differentiable og (16) er opfyldt, har vi opspaltningerne (15) med $A_1 = D_1g_1$, $A_2 = D_1g_2$. Ved multiplikation af den sidste af ligningerne (15) med i og påfølgende addition af ligningerne får vi

$$\Delta f(z,h) = (A_1(x,y)+iA_2(x,y))(h_1+ih_2)+ (\alpha_3(x,y;h_1,h_2)+i\alpha y(x,y;h_1,h_2))|h|,$$

hvilket viser, at f er differentiabel. Vi har således set, at f er differentiabel, hvis og kun hvis realdelen og imaginærdelen af f er differentiable som funktioner af 2 reelle variable med partielle differentialkvotienter, der tilfredsstiller (16).

Med gammeldags betegnelser får (16) følgende udseende

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} .$$

Dette differentialligningssystem kaldes Cauchy-Riemann's differentialligninger.

For den ved $w = \overline{z}$, altså $u = x$, $v = -y$ definerede afbildning gælder kun den sidste af de to ligninger, og afbildningen er derfor ikke differentiabel. Dette eksempel viser, at selv overordentlig pæne funktioner af en kompleks variabel ikke behøver at være differentiable. Et mere indgående studium af den eksklusive klasse af differentiable funktioner af en kompleks variabel er et både interessant og nyttigt led i den højere matematiske analyse.

1. Angiv mængden af fortætningspunkter for følgende mængder:

   1) En åben cirkelskive i $\dot{R}^2$

   2) En afsluttet cirkelskive i $\dot{R}^2$

   3) En cirkelperiferi i $\dot{R}^2$

   4) Mængden af punkter med rationale koordinater i $\dot{R}^2$

   5) Foreningsmængden af kugleomegnene $K(2^{-n}, 3^{-1} \cdot 2^{-n})$ i $\dot{R}^2$.

2. Er rigtigheden af udsagnet

   $a \in T$ er fortætningspunkt for $A \subseteq T$

   afhængig af det topologiske rum T i den forstand, at udsagnets sandhedsværdi kan ændres, når T erstattes med et delrum af T indeholdende punktet a og delmængden A?

3. Angiv mængden af fortætningspunkter for talmængden

   $$\{2^{-p} + 2^{-q} + 2^{-r} \mid p,q,r \in \dot{N} \wedge p < q < r\}.$$

   Angiv endvidere mængden af fortætningspunkter for mængden af fortætningspunkter o.s.v.

4. Samme opgave for mængden

   $$\{0\} \cup \{2^{-p_1} + \ldots + 2^{-p_n} \mid n, p_1, \ldots, p_n \in \dot{N} \wedge n \leqq p_1 < p_2 < \ldots < p_n\}.$$

   Omhu tilrådes! Det vil være fornuftigt at tegne en skitse af mængden.

5. En afbildning $f:]a,b[$ ind i $\dot{R}$ er monoton og begrænset. Vis, at f har grænseværdier i a og b.

6. Vis, at den ved $f(x) = x^x$ definerede afbildning $f:]0,\infty[$ ind i $]0,\infty[$ har grænseværdi 1 i punktet 0.

7. Vis, at de ved

   $$f_j(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad j = 1,2$$

   definerede afbildninger $f_1:]-\infty,0[$ ind i $\dot{R}^*$ og $f_2:]0,\infty[$ ind i

$\dot{R}^*$ har grænseværdier i punkterne $0, +_\infty$ og $-_\infty$ og angiv disse grænseværdier.

8. Samme opgave for de ved

$$f_j(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)^{-1}\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

definerede afbildninger.

9. Vis, at den ved $f(x) = (1+x)^{1/x}$ definerede afbildning $f:]-1,0[\cup]0,\omega[$ ind i $\dot{R}$ definerede afbildning har grænseværdien e i punktet 0. (Benyt den for $x \in]0,1[$ gyldige ulighed $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$, der let udledes af logaritmerækken).

10. Vis, at udtrykket $(1-\cosh)\sqrt[3]{h}$ kan bringes på formen $\alpha(h)h^2$, hvor α er en α-afbildning.

11. Bevis, at den ved $\alpha(\underline{h}) = \|\underline{h}\|^{-2}h_1h_2h_3$ definerede afbildning $\alpha: \dot{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ ind i $\dot{R}$ er en α-afbildning.

12. Vis, at udtrykket $e^{-h^{-2}}$ for ethvert $n \in \dot{N}$ kan skrives på formen $\alpha(h)h^n$, hvor α er en α-afbildning.

13. Vis,at den ved $\beta(\underline{h}) = |h|^{-2}(h_2h_3+h_3h_1+h_1h_2)$ definerede afbildning $\beta: \dot{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ ind i $\dot{R}$ er begrænset i en omegn af $\underline{0}$.

14. Sætning 8.36.1 kan omformes til en sætning, der giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for kontinuitet, således at betingelsen udelukkende vedrører konvergens af følger. Formuler denne sætning nøjagtigt. (Beviset for sætningen bliver åbenbart blot en del af beviset for sætning 8.36.1).

15. Vis direkte ud fra definitionen, at den ved $f(x) = \sqrt[3]{\ }$ definerede afbildning $f: \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er differentiabel for $x \neq 0$, men ikke for $x = 0$.

16. Bevis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x = 0 \\ x \sin x^{-1} \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert, men ikke differentiabel i punktet 0.

17. Bevis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } x = 0 \\ x^{-1} \sin x \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning er differentiabel i punktet 0.

18. Opskriv (ved anvendelse af de fra gymnasiet kendte differentiationsregler) differentialet af den i opgave 17 indførte funktion.

19. Vis direkte, at den ved $f(\underline{x}) = x_1{}^2 x_2{}^2$ definerede afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ er differentiabel og opskriv dens totale differential.

20. Vis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ for } \underline{x} = \underline{0} \\ (x_1{}^2 + x_2{}^2)^{-1} x_1{}^2 x_2{}^2 \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ er differentiabel i punktet $\underline{0}$ og angiv dens totale differential i dette punkt.

21. Angiv de partielle differentialkvotienter af

$$f(x,y) = \sin(xy), \quad g(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)},$$

$$h(x,y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$$

22. Vis, at den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ for } (x,y) = (0,0) \\ xy(x^2+y^2)^{-1} \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ har partielle differentialkvotienter i ethvert punkt af $\dot{R}^2$, skønt den ikke er kontinuert i (0,0).

23. Opskriv de totale differentialer af

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2), \quad g(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$h(x,y) = \mathrm{Arctg}(x \ \mathrm{tg}\ y),$$

idet de fra gymnasiet kendte differentiationsregler benyttes, og det antages, at afbildningerne f,g,h er differentiable i deres definitionsområder.

24. For $u = x\cos y$, $v = x\sin y$ ønskes udregnet

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$2. \quad (du)^2 + (dv)^2.$$

25. Hvilke funktioner $u = f(x,y)$ tilfredsstiller betingelsen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2-y^2?$$

Hvilke af de fundne løsningsfunktioner har en partiel differentialkvotient med hensyn til y? Undersøg, om der blandt disse funktioner, der tilfredsstiller en af følgende betingelser:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy-y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

26. Lad $O \subseteq \dot{R}^n$ være en åben mængde, $\underline{a} \in O$ et punkt og $f:O$ ind i $\dot{R}$ en differentiabel afbildning. Vis, at

$$f(\underline{a}) = \sup f(O) \Rightarrow \forall \underline{h}(df(\underline{a},\underline{h}) = 0).$$

27. Opskriv differentialet af den ved $u = x\cos y$, $v = x\sin y$ definerede afbildning af $\dot{R}^2$ på $\dot{R}^2$.

28. En afbildning $\underline{f}:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}^3$ er givet ved

$$y_1 = f_1(\underline{x}) = x_1 \cos x_2$$

$$y_2 = f_2(\underline{x}) = x_1 \sin x_2$$

$$y_3 = f_3(\underline{x}) = x_1 x_2.$$

En afbildning $g:\dot{R}^3$ ind i $\dot{R}$ er givet ved

$$z = g(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 .$$

Dan afbildningen $g\circ \underline{f}:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$, udregn $d\underline{f}$, dg og $d(g\circ\underline{f})$, således at det sidstnævnte differential udregnes dels direkte, dels ved hjælp af hovedsætningen.

29! Angiv det totale differential af den ved $f(x,y,z) = x^{y^z}$ definerede afbildning, og angiv differentialet af den ved $g(x) = x^{x^x}$ definerede afbildning.

30. Vis, at det for den ved

$$f_1(\underline{x}) = e^{x_1}\cos x_2, \quad f_2(\underline{x}) = e^{x_1}\sin x_2$$

definerede afbildning $\underline{f}:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}^2$ gælder, at udtrykket $\|\underline{h}\|^{-1}\|d\underline{f}(\underline{x},\underline{h})\|$ er uafhængigt af $\underline{h}$ (og af x_2).

31. I $\dot{R}^3$ betragter vi kuglefladen K med centrum i $(0,0,\frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$. En afbildning $\underline{f}:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}^3$ defineres ved, at $\underline{f}(\underline{x})$ er det fra $(0,0,1)$ forskellige skæringspunkt mellem K og den rette linie gennem $(0,0,1)$ og $(x_1,x_2,0)$ (stereografisk projektion). Vis, at udtrykket $\|h\|^{-1}\|d\underline{f},(\underline{x},\underline{h})\|$ er uafhængigt af $\underline{h}$.

32. Undersøg (metode som i opgave nr. 25), om der eksisterer differentiable afbildninger af $\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$ med følgende totale differentialer:

1). $xdx + ydy$. 2). $xdx - ydy$.

3). $ydx + xdy$. 4). $ydx - xdy$.

33. Samme opgave for udtrykkene

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}, \quad \frac{ydx-xdy}{y^2}, \quad \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

34. Samme opgave for udtrykkene

$$e^x(\cos y dx + \sin y dy), \quad e^x(\cos y dx - \sin y dy).$$

35. Udled ud fra rækkeudviklingen

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

nye rækkeudviklinger ved afvekslende at differentiere og at multiplicere med z(prøv 2 eller 3 gange).

36. Rækkeudviklingen af funktionen $(1-z)^{-1}$ ud fra punktet $\frac{1}{2}$, altså en rækkeudvikling af formen

$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\tfrac{1}{2})^n$$

får konvergensradius $\frac{1}{2}$. Hvorledes kan dette vises uden at rækkens koefficienter først udregnes?

37. Det i opgave 36 stillede spørgsmål kan ikke klares på samme simple måde for punktet $-\frac{1}{2}$. Hvor stor bliver konvergensradius i dette tilfælde.

38. Vis, at den ved

$$w = \log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$

definerede afbildning log er differentiabel i det indre af sin definitionsmængde i $\check{C}$.

39. Udregn differentialkvotienten af

$$w = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+iz}{1-iz} .$$

40. Lad $O \subseteq \check{C}$ være åben. En afbildning $f:O$ ind i $\check{C}$ definerer en afbildning $\underline{f}:\check{R}^2$ ind i $\check{R}^2$ på naturlig måde. Det antages, at f er differentiabel. Vis, at $\|\underline{h}\|^{-1}\|d\underline{f}(\underline{x},\underline{h})\|$ er uafhængig af $\underline{h}$.

Vanskeligere opgaver.

41. En afbildning $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ kaldes homogen af grad p, såfremt

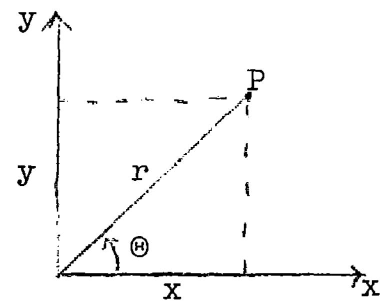
$$\forall \; k > 0 \; \forall \; \underline{x} \in \grave{R}^n (f(k\underline{x}) = k^p f(\underline{x})).$$

Bevis, at denne betingelse er ensbetydende med, at ligningen

$$x_1 D_1 f(\underline{x}) + \ldots + x_n D_n f(\underline{x}) = pf(\underline{x})$$

er opfyldt identisk.

42. En afbildning $z = f(x,y)$ af en åben mængde $O \subseteq \grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ kan også beskrives på grundlag af polære koordinater (r,Θ), idet



$$x = r\cos\Theta, \quad y = r\sin\Theta,$$

således at afbildningen også er defineret ved

$$z = g(r,\Theta) = f(r\cos\Theta, r\sin\Theta).$$

Find de partielle differentialkvotienter $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ udtrykt ved $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \Theta}$, og find dernæst en formel til udregning af $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ ved hjælp af polære koordinater.

43. Vis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ for } \underline{x} = 0 \\ (x_1^4 + x_2^2)^{-1} x_1^2 x_2 \text{ for } \underline{x} \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ er differentiabel i $\grave{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$, men diskontinuert i $\underline{0}$. Vis, at det for ethvert $\underline{\lambda} \in \grave{R}^2$ gælder, at den ved $f(\lambda_1 t, \lambda_2 t)$ definerede afbildning af $\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er differentiabel overalt.

44. En afbildning $f:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ er defineret ved

$$f(x,y) = (x^2 - y)^2 - x^5.$$

Vis, at den ved

$$g(t) = f(\lambda t, \mu t)$$

definerede afbildning $g:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ for ethvert $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ har et relativt minimum for $t = 0$, men at $f(x,y)$ ikke har relativt minimum (defineret på naturlig måde analogt med det tilsvarende begreb fra gymnasieundervisningen) i punktet $(0,0)$.

45. Vis, at der ved ledvis differentiation af en potensrække opstår en ny potensrække med samme konvergensradius. Bestem konvergensradius for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!} .$$

Vis, at summen $f(z)$ af den række, der fås af den givne ved ledvis differentiation antager numerisk vilkårligt store værdier indenfor enhver omegn af ethvert randpunkt. Vis dernæst at Taylorrækken i punktet z for den ved den givne række fremstillede funktion er en potensrække, hvis konvergensradius netop er $R - |z|$, hvor R er konvergensradius for den givne række.

46. Vis, at den ved

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{(n!)^2}$$

definerede funktion afbilder konvergenscirklen bijektivt på en begrænset delmængde af $\dot{C}^2$.

47. Undersøg, om der eksisterer en afbildning $g_2:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$, således at

$$f(x+iy) = e^x(\sin x\cos y\cosh y - \sin y\cos x\sinh y) + ig_2(x,y)$$

definerer en differentiabel afbildning $f:\dot{C}$ ind i $\dot{C}$.

Svære opgaver.

48. Lad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

være en potensrække med konvergenscirkel U (åben). Vis følgende påstand om den ved rækkens sum definerede afbildning $f:U$ ind i $\mathbb{C}$:

$$(\exists\, z \in U\ \forall\, n \in \mathbb{N}(D^n f(z) = 0)) \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}(a_n = 0).$$

49. Vi benytter betegnelserne fra opgave 48, og vi antager, at betingelsen

$$\exists\, n \in \mathbb{N}(a_n \neq 0)$$

er opfyldt. Vis følgende påstande:

$$\forall\, z \in U(|f(z)| < \sup\{|f(z)| \mid z \in U\}$$

$$\forall\, z \in U(|f(z)| = \inf\{|f(z)| \mid z \in U\} \Rightarrow f(z) = 0).$$

Udnyt dette til et bevis for, at ethvert ikke konstant polynomium har en rod i den komplekse plan (algebraens fundamentalsætning).

50. Vis, at en funktion $f:U$ ind i $\mathbb{C}$, der er defineret som sum af en potensrække med konvergenscirkel U, og som indeholder mindst ét ikke konstant led, har den egenskab, at billedet af en åben mængde i den komplekse plan er en åben mængde.

Mat. 1, 1965-66

MA 10.7	Linie 8 f.o.	Efter "har den" tilføjes "ved".
MA 10.8	Linie 13 f.o.	Efter "er kontinuert" tilføjes "på I".
MA 10.10	Linie 12 f.o.	x rettes til f.
MA 10.11	Linie 12 f.o.	$[y']_x$ rettes til $[y']_{x=a}$.
Ma 10.13	Linie 8 f.n.	$\underline{f}_{\underline{a},j}(x_k)$ rettes til $\underline{f}_{\underline{a},j}(x_j)$.
MA 10.15	Linie 6 f.o.	$\varphi,\psi \times \mathbb{R}^n$ rettes til $\varphi,\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
	Linie 8 f.o.	2) rettes til 1) og ordet "derfor" slettes.
	Linie 5 f.n.	x_ν rettes i begge tilfælde til x_j.
	Linie 3 f.n.	$\underline{J}$ rettes til $\underline{y}$.
	Linie 1 f.n.	$\underset{x_j}{\underline{f}'}(\underline{x})$ rettes til $\underline{f}'_{x_j}(\underline{x})$.
MA 10.16	Linie 5 f.n.	$\Delta_{p_j}(\underline{x})$ rettes til $\Delta p_j(\underline{x},\underline{h})$.
	Linie 3 f.n.	Δ_{p_j} rettes til Δp_j.
MA 10.17	Linie 3 f.o.	Her slettes d foran $\underline{h}$.
	Linie 8 f.n.	Efter "Vi begynder" tilføjes "med".
MA 10.18	Linie 5 f.n.	K rettes til M.
	Linie 4 f.n.	Efter "afsluttet" tilføjes "og begrænset".
	Linie 3 f.n.	sup $\underline{L}(E)$ rettes til $\sup_E \|L(\underline{x})\|$.
MA 10.19	Linie 10 f.o.	Ordet "differentiabel" rettes til lineær.
	Linie 7 f.n.	$\underline{0}$ rettes i begge tilfælde til $\underline{a}$. Ligeledes rettes det også i linie 6 og 4 f.n..
	Linie 2 f.n.	"gælder, at den" slettes.
MA 10.20	Linie 8 f.o.	K rettes til M.
	Linie 13 f.o.	$\mathbb{R}$ rettes til $\mathbb{R}^q$.
	Linie 10 f.n.	Der skal stå $g(\underline{f}(a))$ i stedet for $g(\underline{f})a))$
	Linie 9 f.n.	$\Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\Delta_{\underline{g}}\underline{f}(\underline{h}))$ rettes til $\Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}))$.
Ma 10.21	Linie 2 f.o.	$\|$ imellem $\underline{\alpha}_1$ og $(\underline{h})$ slettes.
	Linie 8 f.o.	Over brøkstregen rettes $\|\Delta \underline{a}^{\underline{f}(\underline{h})}\|$ til $\|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|$.
MA 10.22	Linie 6 f.o.	Der tilføjes $\underline{e}_j$ efter (h).

Mat. 1, 1965-66

MA 10.23 Linie 4 f.n. Det sidste $D\underline{f}(\underline{x})dx_1$ rettes til $D_n\underline{f}(\underline{x})dx_n$.

MA 10.24 Linie 12 f.o. Det sidste $\sum_{k=1}^{n}$ rettes til $\sum_{j=1}^{n}$.

MA 10.25 Linie 11 f.n. 19.19.1 rettes til 10.19.1.

MA 10.26 Linie 2 f.n. $v = g(x,y)$ rettes til $v = f(x,y)$.

MA 10.27 Linie 4 f.o. Linie 4-5-6-7 slettes;istedet skal stå følgende:

$$D_1F(x,y) = D_1g(x,f(x,y)) + D_2g(x,f(x,y))D_1f(x,y)$$

$$D_2F(x,y) = D_2g(x,f(x,y))D_2f(x,y).$$

Hvis det gælder, at .....

Linie 10 f.o. "et øjeblik" slettes.

Linie 14 f.o. "altså" rettes til "og derfor".

MA 10.28 Linie 14 f.o. - rettes til +.

Linie 16 f.o. Under den første brøkstreg rettes $y^2 - x^2$ til $x^2 - y^2$ og over den sidste brøkstreg skal stå $(-2x - 4y)t$.

Linie 3 f.n. Efter "Riemann-integrabel" tilføjes "over [a,b]".

Linie 1 f.n. Rettes til $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)dt$.

MA 10.29 Linie 3 f.o. "er tilstrækkeligt" rettes til "kommer ud på".

Linie 4 f.o. De to x'er rettes til x_o.

Linie 6 f.o. Linie 6-7 slettes;istedet skal stå følgende:

$$\alpha(h) = \frac{1}{h}\left(\int_{[a,x_o+h]} f(t)dt - \int_{[a,x_o]} f(t)dt\right) - f(x_o)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{h}\int_{[x_o,x_o+h]}(f(t)-f(x_o))dt & \text{for } h > 0 \\ -\frac{1}{h}\int_{[x_o+h,x_o]}(f(t)-f(x_o))dt & \text{for } h < 0 \end{cases}$$

MA 10.30 Linie 11 f.o. Der tilføjes "for $|h| < R$."

Mat. 1, 1965-66

MA 10.30	Linie 12	f.n.	z rettes til 2 begge gange.
MA 10.31	Linie 5	f.o.	Efter "har derfor" tilføjes "for".
MA 10.32	Linie 12	f.n.	Over brøkstregen skal stå $D^p f(z)$.
MA 10.33	Linie 7	f.n.	α_y rettes til α_4.
	Linie 5	f.n.	αy rettes til α_4.
MA 10.34	Linie 5	f.o.	αy rettes til α_4.

Kompakthedsteori.

11.1. De videregående undersøgelser af differentiable funktioners egenskaber bygger på de hovedsætninger om kontinuerte funktioner på afsluttede intervaller, som også spiller en rolle i gymnasieundervisningen. I det følgende skal vi diskutere, i hvilket omfang disse sætninger kan udvides til kontinuerte afbildninger af metriske rum ind i metriske rum. I virkeligheden kan sætningerne i et vist omfang overføres til kontinuerte afbildninger af topologiske rum ind i topologiske rum, men en sådan udvidelse vil ikke blive gennemført i dette kursus.

Det viser sig, at de omtalte hovedsætninger for så vidt angår afbildninger af mængder i R^m er gyldige, når man i stedet for afsluttet interval blot sætter afsluttet, begrænset mængde. Forholdene bliver imidlertid lidt mere komplicerede for afbildninger af vilkårlige metriske rum, og deres formulering nødvendiggør indførelsen af et vigtigt, nyt begreb, kompakthed.

11.2. Vi betragter et metrisk rum $T = (M, \mathrm{dist})$ og en delmængde $A \subseteq T$. Vi vil interessere os for muligheden af, at $A \subseteq T$ har følgende to egenskaber:

I. For ethvert $r > 0$ eksisterer der endelig mange punkter $a_1, \dots, a_n \in T$ (eventuelt $\in A$), således at $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} K(a_\nu, r)$. Kort udtrykt: for ethvert $r > 0$ kan A dækkes med endelig mange kugler med radius r.

II. Enhver punktfølge (b_n) på A har en delfølge, som er en fundamentalfølge.

11.3. Vi indleder vore undersøgelser med følgende hjælpesætning:

11.3.1. Lemma. Hvis $A \subseteq T$ har egenskaben I, medens (b_n) er en punktfølge på A, og r er et positivt tal, eksisterer der en delmængde $B \subseteq A$ med diam $B \leq 2r$, som indeholder en delfølge af (b_n).

Der eksisterer nemlig punkter $a_1,\ldots,a_n \in T$, således at $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} K(a_\nu,r)$, hvilket medfører $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu$, hvor $A_\nu = A \cap K(a_\nu,r)$. For hvert ν gælder diam $A_\nu \leq$ diam $K(a_\nu,r) \leq 2r$, og da b_n for hvert $n \in \mathbb{N}$ tilhører en af mængderne A_ν, vil en af disse indeholde en delfølge af (b_n).

11.3.2. Sætning. Egenskaberne I og II er ækvivalente.

Vi viser først, at egenskaben I implicerer egenskaben II, og vi antager derfor, at $A \subseteq T$ har egenskaben I. Vi benytter lemma 11.3.1. med $r = \frac{1}{2}$, og finder, at der eksisterer en mængde $A_1 \subseteq A$ med

$$\text{diam } A_1 \leq 1 \text{ og delfølge } (a_{1n}) \text{ af } (a_n) \text{ på } A_1.$$

Vi anvender nu lemma 11.3.1 med $r = \frac{1}{4}$ på $A_1 \subseteq T$ og følgen (a_{1n}), og vi får en mængde $A_2 \subseteq A_1$ med

$$\text{diam } A_2 \leq \tfrac{1}{2} \text{ og delfølge } (a_{2n}) \text{ af } (a_{1n}) \text{ på } A_2.$$

I næste trin vælger vi $r = \frac{1}{6}$ og anvender lemma 11.3.1 på A_2 og følgen (a_{2n}). Idet denne proces kan fortsættes i det uendelige (dette burde vises ved et induktionsbevis, som dog er helt trivielt) får vi en følge af delmængder

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

med diam $A_q \leq \frac{1}{q}$, samt en følge af følger

$$(a_{1n}), (a_{2n}), (a_{3n}), \ldots ,$$

hvor hver følge har alle de følgende som delfølger, og hvor (a_{qn}) for hvert q ligger i A_n. For følgen (a_{nn}) gælder da, at dens elementer fra index q ligger i A_q, som har diameter $\leq \frac{1}{q}$. Men det viser netop, at (a_{nn}) er en fundamentalfølge. Dermed har vi bevist, at I $\Rightarrow$ II.

Beviset for II $\Rightarrow$ I føres indirekte. Vi antager altså, at I ikke er opfyldt. Vi skriver betingelsen I et formelt sprog:

$$\forall r > 0 \; \exists \, a_1,\dots,a_n \in A \; (A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} K(a_\nu, r)).$$

Antagelsen, at I ikke er opfyldt, er negationen af denne relation, altså

$$\exists r > 0 \; \forall \, a_1,\dots,a_n \in A \; (A \not\subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} K(a_\nu, r)).$$

Betingelsen i parentesen siger, at A omfatter punkter, der falder udenfor alle kuglerne $K(a_\nu, r)$, og betingelsen kan derfor også skrives

$$\exists r > 0 \; \forall \, a_1,\dots,a_n \in A \; \exists a_{n+1} \in A \; (\mathrm{dist}(a_\nu, a_{n+1}) \geq r, \; \nu = 1,\dots,n).$$

Idet $r > 0$ vælges i overensstemmelse med denne betingelse, kan vi altså ét for ét vælge punkter $a_1, a_2, \dots$ i mængden A, således at hvert punkt har afstand $\geq r$ fra alle de foregående. Følgen (a_n) har den egenskab, at $\mathrm{dist}(a_p, a_q) \geq r$ for alle (p,q) med $p \neq q$. Enhver delfølge af (a_n) vil da have den samme egenskab og kan således ikke være en fundamentalfølge. Vor antagelse medfører således, at betingelsen II ikke er opfyldt.

11.4. Vi vil belyse det foregående med et par eksempler. Vi bemærker først, at sætning 8.7.2 viser, at de ifølge sætning 11.3.2 ækvivalente betingelser I og II højst kan være opfyldte for begrænsede mængder. På den anden side har vi

11.4.1. <u>Sætning</u>. En mængde $A \subseteq R^m$ har egenskaberne I og II, hvis og kun hvis den er begrænset.

Lad $r > 0$ være givet. For $\underline{p} \in Z^m$ indfører vi "kassen" $K(\underline{p})$ defineret ved

$$K(\underline{p}) = \left\{ \underline{x} \;\middle|\; \left| x_\nu - \frac{2p_\nu r}{\sqrt{(m+1)}} \right| \leq \frac{r}{\sqrt{(m+1)}}; \; \nu = 1,\dots,m \right\}.$$

Det er klart, at hvert $\underline{x} \in R^m$ tilhører mindst én af disse kasser. Vi behøver blot for hvert ν at vælge p_ν det (eller et af de) i definition 11.5.1 svarer overdækningen $\Delta' = \{O_j \cap A \mid j \in J\}$ med mængder, som er åbne relativt til A, og på den anden side kan enhver overdækning af A med mængder, som er åbne relativt til A, fås på denne måde. Vi kan derfor erstatte studiet af kompakte mængder i metriske rum med et studium af kompakte metriske rum.

11.6. Vi vil nu vise en sætning, der i virkeligheden blot er en oversættelse af definition 11.5.1 til et udsagn om afsluttede mængder i et kompakt rum.

11.6.1. Sætning. Et metrisk rum T er kompakt, hvis og kun hvis følgende påstand gælder for ethvert system $\hat{F} = \{F_j \mid j \in J\}$ af afsluttede delmængder af T:

Hvis det for enhver endelig delmængde $J_1 \subset J$ gælder, at

$$\bigcap_{j \in J_1} F_j \neq \emptyset,$$

da gælder også

$$\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset.$$

Bevis. Den i sætningen omtalte påstand er en implikation af formen $A \Rightarrow B$, og en sådan er jo ækvivalent med $\neg B \Rightarrow \neg A$, altså med følgende:

Hvis $\bigcap_J F_j = \emptyset$, eksisterer der endelig mange F_j med tom fællesmængde. Men at visse F_j har tom fællesmængde er ensbetydende med, at deres komplementærmængder udgør en overdækning af T, og deraf fremgår, at påstanden i sætning 11.6.1 blot er en anden formulering af betingelsen i definition 11.5.1.

11.6.2. Sætning. Enhver punktfølge (a_n) i et kompakt metrisk rum T har en konvergent delfølge. Et kompakt metrisk rum er et fuldstændigt rum.

Bevis. Lad (b_n) være en fundamentalfølge på T. Vi sætter $B_n = \{b_{n+p} \mid p \in \mathbb{N}\}$, $F_n = \bar{B}_n$, og $F = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er da et system af afsluttede punktmængder på A. Da hver F_n indeholder alle b_q med $q > n$, vil endelig mange F_n altid have punkter fælles. Af sætning 11.6.1 følger nu, at der eksisterer et punkt $b \in \bigcap_{n \in N} F_n$. Enhver af kuglerne $K(b,\frac{1}{n})$ indeholder derfor et element b_{q_n} af følgen og vi kan vælge disse punkter i nummerorden, således at indexfølgen (q_n) bliver strengt voksende. Så gælder $(b_{q_n}) \to b$ og af sætning 8.37.1 følger derefter, at $(b_n) \to b$. Altså er T fuldstændigt. Da T er prækompakt, har T egenskaben II, og (a_n) har derfor en delfølge, som er fundamentalfølge, men den er tillige konvergent, idet vi har vist, at T er fuldstændigt. Dermed er sætning 11.6.2 bevist.

11.7. Vi vil nu vise kompakthedsteoriens hovedsætning, som vi formulerer på følgende måde:

11.7.1 Sætning. Et metrisk rum T er kompakt, hvis og kun hvis enhver punktfølge på T har en konvergent delfølge.

Bevis. Af sætning 11.6.2 fremgår, at "kun hvis" gælder, og vi skal derfor blot vise "hvis". Da en konvergent følge tillige er en fundamentalfølge, har T egenskaben II (se 11.2), og er således prækompakt. Lad os antage, at T ikke er kompakt (vi vil altså føre et indirekte bevis). Der findes da en overdækning $\Delta = \{O_j | j \in J\}$ af T med åbne mængder, således at ingen endelig delmængde af Δ dækker T. Lad (ε_n) være en reel talfølge, som er aftagende og har grænseværdien 0. For hvert n findes der en overdækning af T med endelig mange kugler med radius ε_n, og det er da klart, at hvis Δ for bare en værdi af n indeholdt en endelig overdækning af hver af disse endelig mange kugler, ville disse endelig mange endelige overdækninger tilsammen udgøre en overdækning af T. Vi har imidlertid antaget, at en sådan ikke findes, og vi kan derfor slutte, at vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ har en kugle $K(a_n, \varepsilon_n)$, således at Δ ikke indeholder en endelig overdækning af $K(a_n, \varepsilon_n)$.

Nu har vi antaget, at enhver punktfølge på T har en konvergent delfølge, og følgen $(K(a_n, \varepsilon_n))$ af kugler på T har derfor en delfølge $(K(a_n', \varepsilon_n'))$, for hvilken (a_n') konvergerer mod et grænsepunkt $a \in T$. Da Δ er en overdækning af T, eksisterer $j \in J$, således at $a \in O_j$, og da O_j er åben, eksisterer der et $\varepsilon > 0$, således at $K(a,\varepsilon) \subseteq O_j$. Da $(a_n') \to a$ og $(\varepsilon_n') \to 0$, kan vi vælge n, således at

$$\operatorname{dist}(a, a_n') < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad \varepsilon_n' < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

og vi har da

$$K(a_n', \varepsilon_n') \subseteq K(a, \varepsilon) \subseteq O_j,$$

hvilket viser, at $\{O_j\}$ er en endelig overdækning af $K(a_n', \varepsilon_n')$ i modstrid med, at vi havde valgt $K(a_n', \varepsilon_n')$ således at en sådan endelig overdækning ikke eksisterede. Dermed er vi nået frem til en modstrid, og vor antagelse, at T ikke var kompakt, kan således ikke være rigtig.

11.7.2. Sætning. En punktmængde A i et metrisk rum T er kompakt, hvis og kun hvis enhver punktfølge på A har en delfølge, som konvergerer mod et grænsepunkt, der tilhører A.

Bevis. Sætningen fås umiddelbart ved anvendelse af sætning 11.7.1 på delrummet A.

11.8. Vi sammenfatter nogle vigtige egenskaber ved kompakte mængder i følgende sætning:

11.8.1. Sætning. Et kompakt rum er fuldstændigt. En kompakt mængde i et metrisk rum er begrænset og afsluttet. En punktmængde i et kompakt rum er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet.

Bevis. Den første påstand vistes i sætning 11.6.2. Som tidligere nævnt, vil en kompakt mængde have egenskaben I og følgelig være begrænset. Lad nu A være en kompakt mængde i et metrisk rum T. For $a \in \bar{A}$ kan vi for hvert $n \in \dot{N}$ vælge $a_n \in A \cap K(a,\frac{1}{n})$, og vi har da $(a_n) \to a$. Nu har (a_n) en delfølge (a_n'), som konvergerer mod et grænsepunkt $b \in A$. Men enhver delfølge af (a_n) har a som **eneste** grænsepunkt. Altså gælder $a = b \in A$. Dermed har vi vist, at A er afsluttet. Lad endelig A være en afsluttet mængde i et kompakt rum T, og lad Δ være en overdækning af A med åbne mængder. Så er $\Delta \cup \{\complement A\}$ en overdækning af T og indeholder derfor en endelig overdækning Δ_1 af T og $\Delta_1 \setminus \{\complement A\}$ er da en endelig overdækning af A. Altså er A kompakt.

11.9. For punktmængder i m-dimensionale rum har vi følgende sætning:

11.9.1. Sætning. En punktmængde $A \subseteq \dot{R}^m$ er kompakt, hvis og kun hvis den er begrænset og afsluttet.

Bevis. Sætning 10.8.1 medfører "kun hvis". Lad nu $A \subseteq \dot{R}^m$ være begrænset og afsluttet, og lad (a_n) være en punktfølge på A. Ifølge sætning 10.4.1 har (a_n) en delfølge (a_n'), som er en fundamentalfølge, og ifølge sætning 8.10.2 konvergerer (a_n') mod et punkt $a \in \dot{R}^n$. Da A er afsluttet gælder $a \in A$. Dermed er sætningen bevist.

Af sætningen fremgår, at en begrænset punktfølge i $\dot{R}^m$ har en konvergent delfølge. Dette er Bolzano-Weierstrass' sætning. Desuden ses det, at enhver overdækning af en begrænset, afsluttet punktmængde i $\dot{R}^m$ med åbne mængder indeholder en endelig overdækning. Dette er Borel's overdækningssætning. De to sætninger har en central betydning som grundlag for den matematiske analyse.

11.11. For produktrum har vi følgende fundamentale sætning:

11.11.1. Sætning. Lad T_1 og T_2 være metriske rum. Hvis T_1 og T_2 er kompakte, er produktrummet $T = T_1 \times T_2$ kompakt.

Mat. 1, 1961-62.

Begyndelsen af dette **kapitel** er omarbejdet, og derfor kortere end det tilsvarende stykke af forelæsningsnoterne 1961-62. Derfor mangler siderne 9-10.

En følge (x_n) i T, hvor $x_n = (x'_n, x''_n)$, $x'_n \in T_1$, $x''_n \in T_2$ har, da T_1 er kompakt, en delfølge (y_n), $y_n = (y'_n, y''_n)$, hvor (y'_n) er konvergent. Da T_2 er kompakt, har (y_n) en delfølge (z_n), $z_n = (z'_n, z''_n)$, hvor (z''_n) er konvergent. Da (z'_n) er en delfølge af (y'_n) er (z'_n) konvergent. Da både (z'_n) og (z''_n) konvergerer er (z_n) konvergent.

11.12. Vi skal nu studere kompakthed i forbindelse med afbildninger, og vi indleder med kompakthedsteoriens første hovedsætning:

11.12.1. Sætning. Lad S og T være metriske rum og f:S ind i T en kontinuert afbildning. Hvis S er kompakt, er billedmængden f(S) kompakt.

Lad $\Delta = \{O_j \mid j \in J\}$ være en overdækning af f(S) med åbne mængder. Da er $f^{-1}(\Delta) = \{f^{-1}(O_j) \mid j \in J\}$ en overdækning af S med åbne mængder, og vi kan derfor finde endelig mange O_j med $j \in J$, således at mængderne $f^{-1}(O_j)$ dækker S, og mængderne O_j vil da dække f(S).

Som eksempel kan vi nævne, at vi ved at anvende sætning 11.12.1 på projektionsafbildningerne får, at <u>en projektion af en kompakt mængde er kompakt</u>, altså begrænset og afsluttet. Det er derimod ikke rigtigt, at en projektion af en afsluttet mængde altid er afsluttet. I planen udgør en gren af hyperblen $x_1 x_2 = 1$ således en afsluttet mængde, men dens projektion på x_1-aksen er intervallet $]0,\infty[$, som ikke er afsluttet.

Sætning 11.12.1 er kompakthedsteoriens første hovedsætning. Dens forbindelse med gymnasieundervisningens hovedsætninger om kontinuerte funktioner ses klart af følgende specielle tilfælde:

11.12.2. Sætning. Lad S være et metrisk rum og f:S ind i $\dot{R}$

en kontinuert, reel funktion på S. Hvis S er kompakt, har mængden $f(S)$ et største element og et mindste element.

Ifølge sætning 11.12.1 er $f(S)$ kompakt, altså ifølge sætning 11.10.1 afsluttet og begrænset. Altså er $\sup f(S)$ endelig. Efter sin definition er $\sup f(S)$ ikke et ydre punkt for $f(S)$, og da $f(S)$ er afsluttet, har vi altså $\sup f(S) \in f(S)$. Analogt for $\inf f(S)$.

11.13. Kompakthedsteoriens anden hovedsætning udtaler sig om en egenskab, der kaldes <u>ligelig kontinuitet</u>. Vi møder her for første gang glosen ligelig, der benyttes i forbindelse med relationer, der indledes med $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0$ eller $\forall\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathring{N}$. Hvis der i en sådan relation indgår variable, kan det have betydning om $\delta > 0$ kan vælges, således at det på engang kan benyttes for alle værdier af de variable. Lad os betragte de metriske rum S og T, hvor vi i begge rum betegner afstandsfunktionen med dist, idet der ikke er fare for misforståelse. At $f:S$ ind i T er kontinuert i et bestemt punkt $x \in S$ udtrykkes ved relationen

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; \forall y \in K(x,\delta) \; (\text{dist}(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

At $f:S$ ind i T er kontinuert udtrykkes ved relationen

$$\forall x \in S \; \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; \forall y \in K(x,\delta) \; (\text{dist}(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

At $f:S$ ind i T er <u>ligelig kontinuert</u> betyder, at denne betingelse er opfyldt i den skarpere form, at det samme $\delta > 0$ kan benyttes for alle $x \in S$. For at udtrykke dette må vi flytte kvantoren $\forall x \in S$ hen bag den eksistentielle kvantor, og relationen bliver derfor

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta > 0 \; \forall x \in S \; \forall y \in K(x,\delta) \; (\text{dist}(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

Her udtrykker kvantorerne $\forall x \in S \quad \forall y \in K(x,\delta)$, at påstanden skal være opfyldt for alle x og y i S med $\mathrm{dist}(x,y) < \delta$, og vi foretrækker derfor at skrive relationen på den mere symmetriske form
(1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in S \; \forall y \in S(\mathrm{dist}(x,y) < \delta \Rightarrow \mathrm{dist}(f(x),f(y)) < \varepsilon)$. Vi definerer derfor:

11.13.1. Definition. En afbildning f:S ind i T, hvor S og T er metriske rum, kaldes liglig kontinuert, hvis og kun hvis den tilfredsstiller betingelsen (1).

Som en forberedelse til beviset for hovedsætningen vil vi dreje betingelsen (1) på den anden måde. På grund af den logiske relation

$$(A \Rightarrow B) \iff (\; B \Rightarrow \; A),$$

kan (1) også skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in S \; \forall y \in S(\mathrm{dist}(f(x),f(y)) \geq \varepsilon \Rightarrow \mathrm{dist}(x,y) \geq \delta).$$

Vi indfører nu en punktmængde $M(\varepsilon) \subseteq S \times S$ defineret ved

(2) $$M(\varepsilon) = \{(x,y) \mid \mathrm{dist}(f(x),f(y)) \geq \varepsilon\}$$

og betingelsen kan da skrives på den kortere form

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (x,y) \in M(\varepsilon) \; (\mathrm{dist}(x,y) \geq \delta).$$

Nu er dist jo en afbildning dist:$S \times S$ ind i $\dot{R}$, og vi kan derfor lige så godt skrive

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0(\inf \mathrm{dist}(M(\varepsilon)) \geq \delta),$$

og nu er δ blevet overflødig i betingelsen, som reduceres til

(3) $$\forall \varepsilon > 0(\inf \mathrm{dist}(M(\varepsilon)) > 0).$$

Vi skal nu vise kompakthedsteoriens anden hovedsætning.

11.13.2. Sætning. En kontinuert afbildning f:S ind i T af et kompakt metrisk rum S ind i et metrisk rum T er ligelig kontinuert.

Afbildningen dist $\circ$ $(f \times f)$:$S \times S$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert, da den er sammensat af kontinuerte afbildninger. Mængden $M(\varepsilon)$

(se (2)) er netop originalmængden ved denne afbildning til den afsluttede mængde $[\varepsilon,\infty]$. Af sætning 8.27.2 følger derfor, at $M(\varepsilon)$ er afsluttet. Ifølge sætning 11.11.1 er $S \times S$ kompakt, og derefter følger af sætning 11.9.3, at $M(\varepsilon) \subseteq S \times S$ er kompakt. Da dist er kontinuert på $S \times S$, er dens restriktion til $M(\varepsilon)$ ligeledes kontinuert, og ifølge sætning 11.12.2 har $\text{dist}(x,y)$ en mindste værdi $\inf \text{dist}(m(\varepsilon))$ på $M(\varepsilon)$. For $(x,y) \in M(\varepsilon)$ gælder nu $\text{dist}(f(x),f(y)) \geq \varepsilon > 0$, altså $f(x) \neq f(y)$, altså $x \neq y$, altså $\text{dist}(x,y) > 0$. Specielt gælder dette også for den mindste funktionsværdi, altså $\inf \text{dist}(M(\varepsilon)) > 0$. Dermed har vi vist, at betingelsen (3) er opfyldt.

Det specielle tilfælde af sætning 11.13.2, der handler om en reel funktion af en reel variabel på et interval, omtales i en del af de i gymnasiet benyttede lærebøger som en sætning om en funktions oscillation.

11.14. Vi skal vise endnu en tredie hovedsætning om kontinuerte afbildninger af kompakte rum. Vi indleder med en definition:

11.14.1. Definition. Lad S og T være topologiske rum. En afbildning $f:S$ ind i T kaldes en homeomorfi, hvis og kun hvis f er bijektiv og såvel f som f^{-1} er kontinuerte. Rummene S og T kaldes homeomorfe, hvis og kun hvis der eksisterer en homeomorfi $f:S$ ind i T.

Det fremgår umiddelbart af denne definition, at både f og f^{-1} afbilder åben mængde på åben mængde, afsluttet mængde på afsluttet mængde, kompakt mængde på kompakt mængde. Af $f(A) = B$ følger $f(\mathring{A}) = \mathring{B}$, $f(\overline{A}) = \overline{B}$ og $f(\delta A) = \delta B$, og analogt for f^{-1}. Det ses endvidere, at "homeomorf med" er en ækvivalensrelation. Topologien beskæftiger sig netop med de egenskaber og begreber, der bevares ved homeomorfe afbildninger.

Vi skal nu vise den tredie hovedsætning.

11.14.2. Sætning. Lad S og T være metriske rum, og $f:S$ ind i T en kontinuert, bijektiv afbildning. Hvis S er kompakt, er f en homeomorfi.

Lad $F \subseteq S$ være en afsluttet mængde. Da S er komapkt, er F kompakt ifølge sætning 11.9.3, og $f(F)$ er kompakt og dermed afsluttet ifølge sætning 11.12.1. Sætning 8.27.2 viser nu, at f^{-1} er kontinuert, og dermed er beviset fuldført.

Sætning 11.14.2. er ikke umiddelbart en generalisation af nogen af de fra gymnasiet kendte hovedsætninger om kontinuerte funktion. Hvis en funktion $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert, og afbilder $[a,b]$ bijektivt på mængden $M \subseteq \dot{R}$, giver sætningen, at f har en kontinuert, anvendt afbildning $f^{-1}:M$ på $\dot{R}$. Derimod får vi ikke umiddelbart, at M er et interval, og det er netop det væsentligste punkt i den i gymnasieundervisningen behandlede sætning. Vi skal vende tilbage til denne side af sagen i et senere kapitel.

11.15. Vi har nu afsluttet vor gennemgang af den generelle kompakthedsteori, og vi skal derefter gå over til nogle anvendelser af teorien. Først vil vi vise nogle sætninger om afsluttede mængders indbyrdes beliggenhed i metriske rum og specielt i m-dimensionale rum. Vi antager hele tiden, at de optrædende punktmængder ikke er tomme.

11.15.1. Definition. Ved afstanden mellem punktmængderne A og B i detmetriske rum T forstår vi talværdien

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{\operatorname{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Hvis specielt $A = \{a\}$ skriver vi $dist(a,B)$ i stedet for $dist(A,B)$, og talværdien kaldes da afstanden mellem punktet a og mængden B.

11.15.2. <u>Sætning</u>. $dist(a,A) = 0 \iff a \in \bar{A}$.

Af definitionen af ydre punkt ses umiddelbart, at

$$dist(a,A) > 0 \iff a \in \mathring{C}A,$$

og sætningen er blot den tilsvarende ækvivalens mellem negationerne.

11.15.3. <u>Sætning</u>. Hvis punktmængderne A og B i det metriske rum T er kompakte, har vi

$$\exists\, a \in A\ \exists\, b \in B(dist(a,b) = dist(A,B)).$$

Den ved $dist(x,y)$ definerede reelle funktion på den ifølge sætning 11.11.1 kompakte mængde $A \times B$ antager ifølge sætning 11.12.2 en mindste værdi $dist(a,b)$, som altså netop er $\inf\{dist(x,y) \mid (x,y) \in A \times B\}$.

11.15.4. <u>Sætning</u>. Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Den ved $\varphi(x) = dist(x,A)$ definerede afbildning φ:T ind i $\grave{R}$ er kontinuert.

For $x \in T$, $y \in T$, $\varepsilon > 0$, vil $K(x,\varphi(x)+\varepsilon)$ indeholde punkter af A, og af sætning 8.2.4 følger

$$K(x,\varphi(\ )+\varepsilon) \subseteq K(y,dist(x,y)+\varphi(x)+\varepsilon),$$

så vi kan slutte, at den sidste kugle indeholder punkter af A. Altså har vi

$$\varphi(y) \leq \varphi(x)+dist(x,y)+\varepsilon,$$

og da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, har vi

$$\varphi(y) \leq \varphi(x)+dist(x,y).$$

Det samme ræsonnement kan gennemføres med x og y ombyttede. Altså gælder almindeligt

$$|\ \varphi(y) - \varphi(x)\ | \leq dist(x,y).$$

Afbildningen er altså afstandsformindskende og dermed kontinuert (se 8.16).

11.15.5. Sætning. Lad A og B være punktmængder i et metrisk rum T. Hvis A er kompakt, eksisterer der et punkt $a \in A$, således at $\mathrm{dist}(a,B) = \mathrm{dist}(A,B)$.

Ifølge sætning 11.15.4 er den ved $\mathrm{dist}(x,B)$ definerede reelle funktion kontinuert på den kompakte mængde A, og den har derfor ifølge sætning 11.12.2 en mindste værdi $\mathrm{dist}(a,B)$, hvor $a \in A$. For $x \in A$, $y \in B$ har vi nu

$$\mathrm{dist}(a,B) \leq \mathrm{dist}(x,B) \leq \mathrm{dist}(x,y)$$

og på den anden side er

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\mathrm{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \leq$$
$$\inf\{\mathrm{dist}(a,y) \mid y \in B\} = \mathrm{dist}(a,B),$$

hvormed sætningen er bevist.

11.15.6. Sætning. Lad F være en afsluttet mængde i $\grave{R}^m$, og lad a være et punkt. Der eksisterer et punkt $b \in F$, således at $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(a,F)$.

Mængden $F_1 = F \cap \overline{K(a,r)}$ er for et passende $r > 0$ kompakt og ikke tom. Ifølge sætning 11.15.3 eksisterer $b \in F_1$, således at $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(a,F_1)$. På grund af definitionen af F_1 er $\mathrm{dist}(a,b) \leq r$, og for $y \in F \setminus F_1$ er $\mathrm{dist}(a,y) \geq r$. Dermed er sætningen bevist.

11.15.7. Sætning. Hvis $A \subseteq \grave{R}^m$ er kompakt, medens $B \subseteq \grave{R}^m$ er afsluttet, eksisterer $a \in A$ og $b \in B$, således at $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(A,B)$.

Ifølge sætning 11.15.5 eksisterer $a \in A$, således at $\mathrm{dist}(a,B) = \mathrm{dist}(A,B)$. Ifølge sætning 11.15.6 eksisterer $b \in B$, således at $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(a,B)$. Dermed er sætningen bevist.

Lette opgaver.

1. På $\overset{*}{R}$ benyttes den i MA 8 opgave 1 definerede afstandsfunktion. Vis, at det således definerede metriske rum bliver begrænset, men at der for $0 < \varepsilon < 1$ ikke eksisterer et endeligt ε-net på rummet.

2. Et diskret metrisk rum har egenskaben I (se 10.1), hvis og kun hvis det er endeligt.

3. Vis, at kugleomegnene med centrum $\underline{0}$ og radius 1 i de i 8.7 indførte metriske rum l_a og l_b ikke har egenskaberne I og II.

4. Vis, at det i MA 8 opgave 18 definerede rum (M,dist) er kompakt.

5. Vi sætter $tg(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$ og $tg\frac{\pi}{2} = \infty$. Vis, at afbildningen $tg : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ på $\overset{*}{R}$ er kontinuert. Benyt dette til en anden løsning af opgave nr. 4.

6. Vis, at det delrum, der fås af det i MA 8, opgave 18 definerede rum ved at udelade ∞ og $-\infty$, har egenskaberne I og II, skønt det er ækvivalent med rummet $\overset{*}{R}$, der ikke har disse egenskaber.

7. Vis, at den i opgave nr. 5 benyttede afbildning er en homeomorfi.

8. I Hilbertrummet betragter vi den afsluttede enhedskugle $K = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Vis påstanden
$$\forall \underline{a} \in \overset{*}{R} \quad \exists \underline{x} \in K(\|\underline{x}-\underline{a}\| = dist(\underline{a},K)),$$
hvor vi har brugt betegnelsen $dist(\underline{x},\underline{y})$ for afstanden $\|\underline{y}-\underline{x}\|$ (prøv at efterligne det ræsonnement, der benyttes i 3-dimensional geometri).

9. I Hilbertrummet betragtes punktmængden

$$P = \{\underline{x} \mid |x_n| \leqq \tfrac{1}{n},\ n = 1,2,\dots\}.$$

Vis, at P er kompakt.

10. For $\underline{x} \in K$ (se opgave 8) sætter vi

$$f(\underline{x}) = \sup\left\{(1 - \frac{n|x_n|}{n+1})^{-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Vis, at $f(\underline{x})$ er kontinuert i K, men ikke begrænset.

11. Skriv et omhyggeligt bevis for, at en kontinuert reel funktion på en kompakt mængde er begrænset på grundlag af følgende vejledning:

Af ε-definitionen for kontinuitet fremgår umiddelbart, at ethvert punkt x af den kompakte mængde M har en omegn U(x) på hvilken funktionen f er begrænset. Omegnene U(x), $x \in M$ udgør en overdækning af M, og hvis vi vælger dem åbne, indeholder overdækningen en endelig overdækning, etc.

12. Prøv at variere beviset fra opgave nr. 11, idet følgende bemærkning udnyttes:

$$\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists U(x) \in \mathfrak{U}(x)\ \forall z \in U(x)\ (f(z) \leqq f(y)).$$

Hvis f(x) er den største funktionsværdi, behøver vi nemlig blot at vælge y = x og U(x) vilkårligt, og hvis f(x) ikke er den største funktionsværdi, kan vi vælge y med $f(y) > f(x)$ og udnytte kontinuiteten. Ved at gå videre som i opgave nr. 11 fås et bevis for, at f antager en største funktionsværdi.

13. Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en kompakt delmængde. Vis påstanden

$$\exists x \in A\ \exists y \in A\ (\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{diam}\, A).$$

14. I Hilbertrummet betragtes punktmængden $\{\underline{a}_n \mid n \in \mathring{N}\}$, hvor

$\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots)$ og

$$a_{n,q} = \begin{cases} n(n+1)^{-1} & \text{for } q = n \\ 0 & \text{for } q \neq n. \end{cases}$$

Vis, at denne punktmængde er afsluttet, samt at den i opgave 13 anførte betingelse ikke gælder for den.

15. En afbildning $f :]a,b[$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig kontinuert. Vis, at f har grænseværdier i a og b.

16. En afbildning $f : \mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ har grænseværdier i $-\infty$ og i $+\infty$. Vis, at f er ligelig kontinuert.

17. Undersøg om de ved

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\ g(x) = x \text{ Arctg } x,\ h(x) = \sqrt{(1+x^2)}$$

definerede afbildninger $f,g,h:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig kontinuerte.

18. Undersøg, om de ved

$$f(x) = \sin x^2,\ g(x) = \sin^2 x$$

definerede afbildninger $f,g:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig kontinuerte.

19. Undersøg, om den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x = 0 \\ x^{-2} \sin x^{-2} \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig kontinuert.

20. Lad $f:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ være en ligelig kontinuert afbildning. Vis følgende påstand:

$$\exists\, a,b \in]0,\infty[\ \forall x,y \in \mathring{R}\ (|f(y)-f(x)| \leq a|y-x| + b).$$

Vis følgende skarpere påstand:

$$\forall\, b \in]0,\infty[\ \exists\, a \in]0,\infty[\ \forall\, x,y \in \mathring{R}\ (|f(y)-f(x)| \leq a|y-x| + b).$$

21. Land $f:\mathring{C}$ ind i $\mathring{C}$ være en differentiabel afbildning med be-

grænset differentialkvotient. Vis, at f er ligelig kontinuert.

22. Lad A betegne den ved

$$A = \{z \in \mathring{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

definerede strimmel i den komplekse plan. Vis, at $f(z) = e^z$ definerer en bijektiv, kontinuert afbildning $f:A$ på $\mathring{C} \setminus \{0\}$. Vis, at f^{-1} ikke er kontinuert. Angiv en relativt åben delmængde $O \subseteq A$, hvis billede ikke er en åben mængde. Tilsvarende for afsluttet mængde.

<u>Vanskeligere opgaver</u>.

23. En afbildning $\rho:\mathring{N}$ ind i $\mathring{N}$ defineres ved, at $\rho(n)!$ er divisor i n, medens $(\rho(n)+1)!$ ikke er divisor i $\mathring{N}$. Vi definerer nu en afstandsfunktion på $\mathring{Z}$, idet vi sætter

$$\operatorname{dist}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x = y \\ (\rho(n))^{-1}, & \text{hvis } x \neq y. \end{cases}$$

Vis, at $\mathring{Z}$ med denne afstandsdefinition er et metrisk rum, og vis, at dette rum ikke er kompakt.

24. Prøv at føre beviset for, at en kontinuert afbildning af et kompakt rum er ligelig kontinuert ved hjælp af Borels overdækningssætning. Vis først, at hvert punkt har en kugleomegn, i hvilken afbildningen er ligelig kontinuert, og overdæk med endelig mange af disse omegne. Beviset lykkes ikke helt på denne måde, men det kan reddes ved en ret enkel finesse.

25. Lad f,g:T ind i $\mathring{R}$ være ligelig kontinuerte afbildninger, idet T er et metrisk rum. Undersøg om f+g og fg er ligeligt kon-

tinuerte. Prøv, hvis svaret er benægtende, at finde passende ekstra betingelser, som bevirker, at svaret bliver bekræftende.

26. En afbildning $f:\grave{R}^{\infty}$ af Hilbertrummet ind i sig selv defineres ved

$$f(x_1,x_2,x_3,\dots) = (x_1,\tfrac{1}{2}x_2,\tfrac{1}{3}x_3,\dots).$$

Vis, at enhver begrænset mængde afbildes på en kompakt mængde. Er afbildningen bijektiv?

Opgaven 27, er kasseret af censuren.

27. På mængden $\grave{Z}$ af hele tal definerer vi en afstandsfunktion ved

$$\mathrm{dist}(x,y) = (\sup\{n \mid n!^{-1}(y-x) \in \grave{Z}\ )^{-1}.$$

Vis, at $\grave{Z}$ derved bliver en metrisk rum, og at topologien på $\grave{Z}$ netop bliver den i opgave 8.15 indførte. Vis, at dist har den i opgave 8.47 indførte egenskab. Bliver $\grave{Z}$ et kompakt rum med denne afstandsdefinition?

28. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval. En afbildning $f:I \subseteq \grave{R}$ siges at være voksende i et punkt $x \in I$, såfremt

$$\exists\, h > 0\ \forall\, y \in I \cap\ ]x-h[(y \neq x \Rightarrow (y-x)^{-1}(f(y)-f(x)) \geq 0).$$

Vis, at f er voksende på intervallet I, hvis f er voksende i ethvert punkt af I.

29. På $\grave{N}$ indføres afstanden

$$\mathrm{dist}(x,y) = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|;\ x \neq y.$$

Lad T være et metrisk rum. Hvilke afbildninger $f:\grave{N}$ ind i T bliver kontinuerte, og hvilke bliver ligelig kontinuerte?

30. Lad T være et kompakt, metrisk rum. Lad (A_n) være en voksende følge af afsluttede mængder på T, altså $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$. Det antages at $\cup A_n = T$. Vis, at der eksisterer en

åben mængde $O \subseteq T$ samt et tal $n \in N$, således at $O \subseteq A_n$ (Baire's sætning). Det anbefales, at vise påstanden indirekte, altså at antage, at enhver åben mængde $O \subseteq T$ for ethvert n indeholder et punkt (og dermed en kugleomegn) i $\complement A_n$.

31. Ved beviset for Baire's sætning (opgave 30) er forudsætningen, at T er kompakt, overflødig, når det til gengæld antages, at T er fuldstændigt. Vis dette. Vis tillige, at forudsætningen, at (A_n) er voksende, er overflødig. Omformuler endelig sætningen, idet forudsætningen, at A_n er afsluttet, udelades, medens $\cup A_n = T$ erstattes med $\overline{\cup \overline{A_n}} = T$ og $O \subseteq A_n$ med, at $O \subseteq A_n$ er overalt tæt i O.

Svær opgave.

32. Lad $M = \{f_j : [0,1] \text{ ind i } \dot{R} \mid j \in J\}$ være en familie af kontinuerte funktioner. Famili M kaldes ensartet ligelig kontinuert, såfremt følgende betingelse er opfyldt.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall j \in J \; \forall x \in [0,1] \; \forall y \in [0,1]$$
$$(|y-x| \leq \delta \Rightarrow |f_j(y) - f_j(x)| \leq \varepsilon).$$

Familien M kaldes ensartet begrænset, såfremt

$$\exists K \in \dot{R} \; \forall j \in J \; \forall x \in [0,1] \; (|f_j(x)| \leq K).$$

Vi indretter mængden M som et metrisk rum, idet vi sætter

$$\mathrm{dist}(f_j, f_k) = \sup\{|f_k(x) - f_j(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

Vis, at M virkelig bliver et metrisk rum ved denne afstands definition. Vis, at M (som delmængde af M) har egenskaberne I og II (se 10.2), hvis og kun hvis M er både ensartet ligelig kontinuert og ensartet begrænset.

33. Vis, at en numerabel, afsluttet punktmængde i et fuldstændigt, metrisk rum indeholder et isoleret punkt.

MA 11.2	Linie 5 f.n.	A_n rettes til A_q.
	Linie 1 f.n.	Ordet "indirekte" rettes til "ved kontraposition".
MA 11.4	Linie 7 f.n.	$\{O_{j1},\dots,O_{jn}\}$ rettes til $\{O_{j_1},\dots,O_{j_n}\}$.
MA 11.8	Linie 10 f.n.	$\mathbb{R}^n$ rettes til $\mathbb{R}^m$, endvidere tilføjes efter "$a \in A$" "iflg. sætn. 8.27.1".
MA 11.12	Linie 4 f.o.	11.10.1 rettes til 11.8.1.
	Linie 10 f.o.	Ordet "relationer" rettes til "udsagn".
MA 11.13	Linie 10 f.o.	"på den anden måde" rettes til "på en anden måde".
	Linie 12 f.o.	$(B \Rightarrow A)$ rettes til $(\neg B \Rightarrow \neg A)$.
	Linie 2 f.n.	dist rettes til dist_T.
MA 11.14	Linie 2 f.o.	$[\varepsilon,\infty]$ rettes til $[\varepsilon,\infty[$.
	Linie 4 f.o.	11.9.3. rettes til 11.8.1.
	Linie 5 f.o.	dist rettes til dist_S.
	Linie 6 f.o.	dist rettes til dist_S.
	Linie 7 f.o.	$\mathrm{dist}(m(\varepsilon))$ rettes til $\mathrm{dist}_S(M(\varepsilon))$.
	Linie 8 f.o.	dist rettes til dist_T.
	Linie 9 f.o.	dist rettes til dist_S.
MA 11.15	Linie 8 f.o.	11.9.3. rettes til 11.8.1.
	Linie 13 f.o.	Ordet "funktion" rettes i første tilfælde til "funktioner".
	Linie 15 f.o.	Ordet "anvendt" rettes til "omvendt". $\mathbb{R}$ rettes til $[a,b]$.
MA 11.16	Linie 9 f.n.	Der skal stå $K(x,\varphi(x)+\varepsilon)$ først.
MA 11.17	Linie 9 f.n.	$\mathrm{dist}(a_1F_1)$ rettes til $\mathrm{dist}(a,F_1)$.

Ligelig konvergens.

12.1. Vi skal i dette kapitel behandle begrebet ligelighed i forbindelse med konvergens. Vi har tidligere mødt begrebet ligelig kontinuitet, der kan opfattes som et specielt tilfælde af ligelig konvergens.

For at illustrere begrebet ligelig konvergens vil vi betragte en familie af reelle talfølger, altså (a_{jn}), $j \in J$, $n \in \mathring{N}$, hvor J er en indexmængde og

$$\forall\, j \in J \;\forall\, n \in \mathring{N}(a_{jn} \in \mathring{R}).$$

At følgen er konvergent for enhver fast index $j \in J$ mod en grænseværdi a_j, som afhænger af index $j \in J$, udtrykkes ved den logiske relation

$$\forall\, j \in J \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N \in \mathring{N} \;\forall\, n \geqq N(|a_j - a_{jn}| \leqq \varepsilon).$$

Tænkes $\varepsilon > 0$ opgivet kan vi altså for hvert $j \in J$ bestemme et naturligt tal N_j, således at uligheden i parentesen er opfyldt for ethvert $n \geqq N_j$. Vi vil sige, at konvergensen er ligelig (eller ensartet) med hensyn til j, hvis det for ethvert $\varepsilon > 0$ gælder at N kan vælges uafhængigt af j, således at uligheden i parentesen er opfyldt for ethvert $j \in J$ og ethvert $n \geqq N$. Dette udtrykkes ved den logiske relation

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N \in \mathring{N} \;\forall\, j \in J \;\forall\, n \geqq N(|a_j - a_{jn}| \leqq \varepsilon).$$

Vi minder i denne forbindelse om, at en relation med kvantorer i almindelighed skærpes, når en $\forall$-kvantor og en $\exists$-kvantor byttes, så $\forall$-kvantoren kommer på højre side af $\exists$-kvantoren.

12.2. Inden vi går over til at omtale de generelle definitioner af ligelig konvergens, vil vi betragte et specielt tilfælde.

Lad (f_n) være en følge af afbildninger f_n: I ind i $\mathring{R}$, hvor I er et fast interval. Hvis det for hvert enkelt $x \in I$ gælder, at følgen $(f_n(x))$ konvergerer mod en grænseværdi $f(x)$, siger vi, at følgen (f_n) konvergerer punktvis mod f. Hvis konvergensen er ligelig med hensyn til x, siger vi, at (f_n) konvergerer ligeligt mod f. Det anbefales, at illustrere de eftefølgende eksempler ved at skitsere graferne af grænsefunktionen og af de første funktioner i følgen.

Eksempel A. Vi betragter $I = [0,1]$ og afbildningerne f_n definerede ved $f_n(x) = x^n$. I dette tilfælde konvergerer (f_n) punktvis mod den ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \in [0,1[\\ 1 \text{ for } x = 1 \end{cases}$$

definerede afbildning. På den anden side vil uligheden

$$|f(x) - f_n(x)| > \tfrac{1}{2}$$

være opfyldt for ethvert x i det åbne interval $]2^{-1/n}, 1[$, og (f_n) er derfor ikke ligelig konvergent på intervallet $[0,1]$. For $k \in]0,1[$ gælder det imidlertid at følgen af restriktionerne af f_n til $[0,k]$ konvergerer ligeligt mod restriktionen af f til $[0,k]$ altså mod nulfunktionen på dette interval. For $\varepsilon > 0$ kan vi nemlig vælge $N \in \mathbb{N}$, således at $k^N < \varepsilon$, og for $x \in [0,k]$ og $n \geqq N$ gælder da

$$0 \leqq x^n \leqq k^n \leqq k^N < \varepsilon,$$

hvormed påstanden er bevist.

Eksempel B. Vi betragter $I = [0,\infty[$ og afbildningerne f_n definerede ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin nx & \text{for } x \in [0,\frac{\pi}{n}] \\ 0 & \text{for } x \in]\frac{\pi}{n},\infty[. \end{cases}$$

Vi har $f_n(0) = 0$ for enhver værdi af n og for $x > 0$ er $f_n(x) = 0$, når $n > \frac{\pi}{x}$. Altså konvergerer (f_n) punktvis mod nulfunktionen. For restriktionerne til et interval $[k,\infty[$, hvor $k > 0$, bliver konvergensen ligelig, men enhver af funktionerne $f_n(x)$ antager værdien 1, og konvergensen bliver derfor ikke ligelig på $[0,\infty[$. Vi ser således, at konvergensen ikke behøver at være ligelig, selv om alle funktionerne f_n og grænsefunktionen er kontinuerte og definitionsintervallet afsluttet.

I dette eksempel kan vi erstatte $\sin nx$ med $n \sin nx$ uden at de omtalte konvergensforhold ændres. Vi får da

$$\int_0^{\pi} f_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} n \sin nx\, dx = \Big[-\cos nx\Big]_0^{\frac{\pi}{n}} = 2,$$

medens det tilsvarende integral af grænsefunktionen bliver 0. Ombytning af integration og grænseovergang er altså ikke altid uden indvirkning på værdien af et udtryk.

Eksempel C. Vi betragter intervallet $I =]-\infty, \infty[$ samt funktionsfølgen (f_n), hvor $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$. Det er næsten trivielt, at (f_n) konvergerer ligeligt mod nulfunktionen. Følgen (Df_n) er ikke engang punktvis konvergent, da

$$Df_n(\pi) = \cos n\pi = (-1)^n.$$

12.3. Som et hjælpemiddel til brug i det følgende skal vi kort omtale en ikke særlig epokegørende generalisation af begrebet <u>metrisk rum</u>:

12.3.1. <u>Definition.</u> Lad M være en mængde, og lad dist: $M \times M$ ind i $\overset{*}{R}$ være en afbildning, som tilfredsstiller følgende betingelser

1) $\forall\, x \in M\, (\text{dist}(x,x) = 0)$.

2) $\forall\, x,y \in M (x \neq y \Rightarrow \text{dist}(x,y) > 0)$.

3) $\forall\, x,y \in M (\text{dist}(y,x) = \text{dist}(x,y))$.

4) $\forall\, x,y,z \in M (\text{dist}(x,z) \leq \text{dist}(x,y) + \text{dist}(y,z))$.

Afbildningen dist kaldes da en <u>uegentlig afstandsfunktion</u>, og $T = (M, \text{dist})$ kaldes et <u>uegentligt metrisk rum.</u>

Vor generalisation består altså blot i, at vi tillader dist at antage værdien ∞. I betingelsen 4) tillægger vi summen på højre side værdien ∞, hvis en af addenderne er ∞.

I et uegentligt metrisk rum indføres kugleomegnene $K(a;r)$ for positive værdier af r ganske som i sædvanlige metriske rum, og de får også de samme egenskaber. Kugleomegnene benyttes som omegnsbasis, og derved indføres en topologi på rummet T. Begrebet <u>fundamentalfølge</u> indføres på T ordret som for metriske rum, og begrebet <u>fuldstændigt rum</u> overføres derved ligeledes til uegentlige metriske rum.

Hvis vi definerer en ny afbildning dist': $M \times M$ ind i $\grave{R}$ ved

$$\text{dist}'(x,y) = \inf\{\text{dist}(x,y), 1\},$$

vil det let kunne vises, at dist' opfylder betingelserne 1) - 4), og dist' er således en afstandsfunktion på M, og det er klart, at dist og dist' giver anledning til den samme topologi på M og til det samme fundamentalfølgebegreb. Ud fra denne betragtning er vor generalisation faktisk overflødig og ikke bare som antydet ovenfor ikke særlig epokegørende .

12.4. Lad nu S være en vilkårlig mængde, og lad T være et metrisk rum med afstandsfunktionen dist. På mængden $\hat{F}(S,T)$ af afbildninger af S ind i T definerer vi en uegentlig afstandsfunktion dist_u, idet vi for vilkårlige afbildninger f_1, f_2: S ind i T sætter

$$\text{dist}_u(f_1,f_2) = \sup\left\{\text{dist}(f_1(x), f_2(x)) \;\middle|\; x \in S\right\}.$$

Det er klart, at dist_u tilfredsstiller betingelserne 1) og 3). Af $f_1 \neq f_2$ følger, at der eksisterer et $x \in S$, for hvilket $f_1(x) \neq f_2(x)$. Så er $\text{dist}_u(f_1,f_2) \geqq \text{dist}(f_1(x), f_2(x)) > 0$. Altså er 2) opfyldt. For vilkårlige afbildninger f_1, f_2, f_3: S ind i T har vi

$$\text{dist}_u(f_1,f_3) = \sup\left\{\text{dist}(f_1(x), f_3(x)) \;\middle|\; x \in S\right\} \leqq$$

$$\sup\{\text{dist}(f_1(x)), f_2(x)) + \text{dist}(f_2(x), f_3(x)) \mid x \in S\} \leqq$$

$$\sup\{\text{dist}(f_1(x),f_2(x)) \mid x \in S\} + \sup\{\text{dist}(f_2(x),f_3(x)) \mid x \in S\} =$$

$$\text{dist}_u(f_1,f_2) + \text{dist}_u(f_2,f_3).$$

Det første ulighedstegn gælder på grund af trekantsuligheden for afstandsfunktionen dist på rummet T, og det andet ulighedstegn følger af sætningen om supremum for en sum af to funktioner. Vi har dermed vist, at 4) gælder, altså, at dist_u virkelig er en uegentlig afstandsfunktion.

12.4.1. <u>Definition</u>: Det uegentlige metriske rum $\hat{F}(S,T)$ med den uegentlige afstandsdefinition dist_u kaldes <u>det ligelige funktionsrum</u> af afbildningerne af S ind i det metriske rum T.

Lad nu (f_n) være en følge af afbildninger f_n: S ind i T. Vi vil sige, at følgen (f_n) konvergerer ligeligt mod grænseafbildningen f: S ind i T, såfremt følgende betingelse er opfyldt

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \dot{N}\ \forall\ n \geqq N\ \forall\ x \in S\ (\text{dist}(f_n(x), f(x)) \leqq \varepsilon).$$

Dette er ensbetydende med følgende betingelse:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \dot{N}\ \forall\ n \geqq N(\sup\{\text{dist}(f_n(x), f(x)) \mid x \in S\} \leqq \varepsilon).$$

Den del af den første betingelse, som indledes med $\forall x \in S$ udtrykker nemlig, at ε er et overtal for mængden $\{\text{dist}\ (f_n(x), f(x)) \mid x \in S\}$. Den sidste betingelse kan skrives

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \dot{N}\ \forall\ n \geqq N(\text{dist}_u(f_n, f) \leqq \varepsilon),$$

og denne betingelse udtrykker, at punkt-følgen (f_n) i rummet $\hat{F}(S,T)$ med den uegentlige afstandsfunktion dist_u er konvergent med grænsepunktet f. Dette udtrykkes i følgende sætning:

12.4.2. <u>Sætning.</u> At følgen (f_n) af afbildninger f_n: S ind i T, hvor T er et metrisk rum, konvergerer ligeligt mod afbildningen f: S ind i T er ensbetydende med, at punktfølgen (f_n) i det ligelige funktionsrum $\hat{F}(S,T)$ konvergerer mod grænsepunktet f.

12.5. Vi skal nu vise den første (meget lette) hovedsætning om ligelig konvergens:

12.5.1. <u>Sætning.</u> Lad S være en punktmængde, og lad T være et fuldstændigt metrisk rum. Da er det ligelige funktionsrum af afbildninger af S ind i T ligeledes fuldstændigt.

Bevis. Lad (f_n) være en fundamentalfølge på rummet $\hat{F}(S,T)$. Dette betyder, at følgende betingelse er opfyldt.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \grave{N} \, \forall m,n \geqq N \, (\text{dist}_u(f_m, f_n) \leqq \varepsilon).$$

Denne betingelse medfører (er faktisk ensbetydende med), at

(1) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \grave{N} \, \forall m,n \geqq N \, \forall x \in S \, (\text{dist}\,(f_m(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon)$.

Heraf følger igen den svagere betingelse, som fås ved at flytte kvantoren $\forall x \in S$ helt hen til venstre, og som udtrykker at følgen $(f_n(x))$ for ethvert $x \in S$ er en fundamentalfølge på T. Da T er fuldstændigt, følger heraf, at $(f_n(x))$ for ethvert $x \in T$ konvergerer mod et grænsepunkt $f(x) \in T$. Derved defineres en afbildning f: S ind i T. Lad nu $\varepsilon > 0$ være givet. Vi vælger $N \in \grave{N}$, således at

$$\forall m,n \geqq N \, \forall x \in S \, (\text{dist}(f_m(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon),$$

For ethvert fast $x \in S$ og ethvert fast $n \geqq N$ har vi altså

$$\forall m \geqq N (\text{dist}(f_m(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon).$$

For $m \to \infty$ følger heraf, idet dist: $T \times T$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert, at

$$\text{dist}(f(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon$$

for de betragtede værdier af n og x. Dermed har vi alt ialt vist, at

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \grave{N} \, \forall n \geqq N \, \forall x \in S \, (\text{dist}\,(f(x), f_n(x)) \leqq \varepsilon),$$

altså at (f_n) konvergerer ligeligt mod f. Sætningen følger nu umiddelbart af sætning 12.4.2.

Det sædvanlige bevis for, at en konvergent punktfølge i et metrisk rum er en fundamentalfølge bevarer sin gyldighed i uegentlige metriske rum. Betingelsen (1) er således nødvendig og tilstrækkelig, for at afbildningsfølgen (f_n) er ligelig konvergent.

12.6. Vi vil nu tilføje den antagelse, at punktmænden S er et topologisk rum med en topologi $\grave{U}$. For $a \in S$ vil vi med $\hat{C}_a(S,T)$ betegne den delmængde af $\hat{F}(S,T)$, som omfatter netop de afbildninger f:S ind i T, som er kontinuerte i punktet a. Vi har med disse betegnelser sætningen:

12.6.1. Sætning. Mængden $\hat{C}_a(S,T)$ er afsluttet i rummet $\hat{F}(S,T)$. Hvis T er fuldstændigt, er delrummet $\hat{C}_a(S,T)$ fuldstændigt.

Bevis. Den sidste påstand følger umiddelbart af den første, så det er tilstrækkeligt at vise denne. Vi skal, altså vise, at et vilkårligt kontaktpunkt for $\hat{C}_a(S,T)$ tilhører $\hat{C}_a(S,T)$, altså, at f: S ind i T er kontinuert i punktet a. Lad nu ε være et vilkårligt, positivt tal. Vi behøver da blot at vise, at $f^{-1}(K(f(a),\varepsilon))$ er en omegn af a. Da f er kontaktpunkt for $\hat{C}_a(S,T)$, vil en kugleomegn i $\hat{F}(S,T)$ med centrum f og radius $\frac{1}{3}\varepsilon$ indeholde en afbildning $g \in \hat{C}_a(S,T)$, og vi har da

(1) $$\forall x \in S \; (\operatorname{dist}(f(x), g(x)) < \tfrac{1}{3}\varepsilon).$$

Da g er kontinuert i a, gælder

(2) $$U = g^{-1}(K(g(a), \tfrac{1}{3}\varepsilon)) \in \mathring{U}(a),$$

og sætningen vil være vist, når det lykkes os at vise, at $U \subseteq f^{-1}(K(f(a),\varepsilon))$, altså, at

$$\forall x \in U \; (\operatorname{dist}(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

For $x \in U$ har vi imidlertid vurderingen

$$\operatorname{dist}(f(a), f(x)) \leq$$
$$\operatorname{dist}(f(a), g(a)) + \operatorname{dist}(g(a), g(x)) + \operatorname{dist}(g(x), f(x)) < \varepsilon ,$$

idet (1) medfører, at summens første og sidste led, hver er $< \frac{1}{3}\varepsilon$, medens $x \in U$ i forbindelse med (2) medfører, at det midterste led er $< \frac{1}{3}\varepsilon$.

12.6.2. Sætning. Lad S være et topologisk rum, og lad T være et metrisk rum. Mængden $\hat{C}(S,T)$ af kontinuerte afbildninger af S ind i T er en afsluttet delmængde af $\hat{F}(S,T)$. Hvis T er fuldstændigt, er delrummet $\hat{C}(S,T)$ fuldstændigt.

Bevis. Idet

$$\hat{C}(S,T) = \bigcap_{a \in S} \hat{C}_a(S,T).$$

følger sætningens første påstand umiddelbart af sætning 12.6.1. Den anden påstand følger umiddelbart af den første.

Af de to sætninger følger, at grænseafbildningen for en ligelig konvergent følge af kontinuerte afbildninger selv er kontinuert. Vi kan således føje ligelig grænseovergang til den række af operationer, der vides at være kontinuitetsbevarende.

Eksemplerne i 12.2 viser, at en følge af kontinuerte afbildninger kan konvergere mod en kontinuert grænsefunktion uden at konvergere ligeligt. Det er i øvrigt helt klart, at grænsefunktionen for en konvergent følge (f_n) af kontinuerte afbildninger vil være kontinuert, såfremt (f_n) har en delfølge, der konvergerer ligeligt.

12.7. Lad S_1 være et topologisk rum, $A \subseteq S_1$ en punktmængde og $a \in S_1$ et fortætningspunkt for A. Lad S_2 være et topologisk rum, T et metrisk rum og $f\colon A \times S_2$ ind i T en afbildning. For $x \in A$ vil vi med $f_x\colon S_2$ ind i T betegne den ved $f_x(y) = f(x,y)$ definerede afbildning. Vi har nu en afbildning

$$\varphi\colon A \text{ ind i } \mathfrak{F}(S_2,T)$$

defineret ved $\varphi(x) = f_x$.

For fast $y \in S_2$ vil der eventuelt eksistere en grænseværdi

$$g(y) = \lim_{x \to a} f(x,y)$$

Hvis en sådan grænseværdi eksisterer for ethvert $y \in S_2$, defineres derved en afbildning $g\colon S_2$ ind i T.

Hvis afbildningen φ har g som grænsepunkt for $x \to a$ på A, vil vi sige, at afbildningerne f_x går ligeligt mod afbildningen g for $x \to a$ på A.

Hvis yderligere f_x er kontinuert for ethvert $x \in A$, vil billedmængden $\varphi(A)$ tilhøre den afsluttede mængde $\mathcal{C}(S_2,T)$, og g vil da også tilhøre denne mængde. Altså er også denne generelle form for ligelig grænseovergang kontinuitetsbevarende.

12.8. Vi vil nu yderligere specialisere, idet vi vil gå over til at undersøge det specielle tilfælde, hvor T også har en algebraisk organisation. Vi vil behandle tilfældet $T = \check{C}$, samt anføre enkelte resultater, der kun vedrører $T = \check{R}$. En del af undersøgelserne kan umiddelbart generaliseres til $T = \check{R}^n$, men det vil vi ikke opholde os ved.

For $f \in \hat{F}(S,\check{C})$ sætter vi

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \mid x \in S \},$$

og vi har da for $f,g \in \hat{F}(S,\check{C})$ relationen

$$\mathrm{dist}_u(f,g) = \|g - f\| . \tag{3}$$

Vi foretrækker at benytte det sidst anførte udtryk som betegnelse for den uegentlige afstand mellem f og g.

For fast $h \in \hat{F}(S,\check{C})$ har vi en afbildning

$$\tau_h : \hat{F}(S,\check{C}) \text{ på } \hat{F}(S,\check{C})$$

defineret ved

$$\tau_h(f) = f + h.$$

og udtrykket for dist_u viser nu, at τ_h er en isometrisk afbildning og derfor kontinuert.

Udtrykket $\|f\|$ kaldes <u>normen</u> af f. Et punkts norm er således dets afstand fra nulpunktet. De 4 betingelser, som afstandsfunktionen dist_u tilfredsstiller, er ensbetydense med følgende 3 betingelser, som normen tilfredsstiller

$$\|0\| = 0$$

$$\forall f \; (f \neq 0 \Rightarrow \|f\| > 0)$$

$$\forall f,g \; (\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|).$$

Desuden tilfredsstiller normen betingelsen:

$$\forall f \; \forall \alpha \in \check{C} \; (\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|).$$

Selve den omstændighed, af afstandsfuntionen dist_u er defineret ved normen ved (3), medfører at

$$\mathrm{dist}_u(f + h, g + h) = \mathrm{dist}_u(f, g),$$

og vi siger derfor, at afstandsfunktionen dist_u er invariant.

12.9. Vi skal udlede nogle fundamentale egenskaber ved rummet $\hat{F}(S,\dot{C})$, samt delrummet $\hat{B}(S,\dot{C})$, som netop omfatter alle begrænsede afbildninger f: S ind i $\dot{C}$. Vi viser først sætningen:

12.9.1. <u>Sætning.</u> Den ved

$$\varphi(f,g) = f + g$$

definerede afbildning

$$\varphi\colon \hat{F}(S,\dot{C}) \times \hat{F}(S,\dot{C}) \text{ ind i } \hat{F}(S,\dot{C})$$

er kontinuert.

Bevis. Vi har åbenbart for $\varepsilon > 0$, at

$$\varphi(K(f, \tfrac{1}{2}\varepsilon) \times K(g, \tfrac{1}{2}\varepsilon)) \subseteq K(f + g, \varepsilon),$$

hvoraf påstanden følger.

12.9.2. <u>Sætning.</u> Lad $h \in \hat{B}(S,\dot{C})$ være en begrænset funktion. Da er den ved

$$\varphi(f) = fh$$

definerede afbildning

$$\varphi\colon \hat{F}(S,\dot{C}) \text{ ind i } \hat{F}(S,\dot{C})$$

kontinuert.

Bevis. For $\varepsilon > 0$ sætter vi $\eta = \varepsilon(\sup\{|h(x)| \mid x \in S\})^{-1}$, og vi har da

$$\varphi(K(f, \eta)) \subseteq K(fh, \varepsilon),$$

hvoraf påstanden følger. For $h = 0$ fås $\eta = \infty$, men ræsonnementet bevarer sin gyldighed. Påstanden er iøvrigt triviel for $h = 0$, idet φ bliver konstant.

12.9.3. Sætning. Den ved

$$\varphi(f,g) = fg$$

definerede afbildning

$$\varphi\colon \hat{B}(S,\grave{C}) \times \hat{B}(S,C) \text{ ind i } \hat{B}(S,C)$$

er kontinuert.

Bevis. At φ er kontinuert i punktet $(0,0)$ følger umiddelbart af den for $\varepsilon \in \,]0,1[$ gyldige trivielle relation

$$\varphi(K(0,\varepsilon) \times K(0,\varepsilon)) \subseteq K(0,\varepsilon).$$

Lad nu f og g være vilkårlige begrænsede funktioner. At φ er kontinuert i (f,g) er ensbetydende med, at den ved

$$\psi(h,k) = \varphi(f+h, g+k)$$

definerede afbildning

$$\psi\colon \hat{B}(S,\grave{C}) \times \hat{B}(S,\grave{C}) \text{ ind i } \hat{B}(S,\grave{C})$$

er kontinuert i $(0,0)$. Dette følger imidlertid umiddelbart af de allerede viste sætninger, idet

$$\psi(h,k) = fg + gh + fk + hk.$$

12.9.4. Sætning. Mængden $\hat{B}(S,\grave{C})$ er både åben og afsluttet i rummet $\hat{F}(S,\grave{C})$.

Bevis. Hvis f er begrænset, er enhver funktion i $K(f,1)$ også begrænset. Altså er $\hat{B}(S,\grave{C})$ åben. Hvis g ikke er begrænset indeholder $K(g,1)$ slet ingen begrænsede funktioner. Altså er $\hat{B}(S,\grave{C})$ ligeledes åben og $\hat{B}(S,\grave{C})$ altså afsluttet.

12.10. Af sætningen 12.9.1 og 12.9.2 følger umiddelbart følgende to sætninger.

12.10.1. Sætning. Summen af to ligelig konvergente følger er en ligelig konvergent følge.

12.10.2. Sætning. Ved multiplikation af en ligelig konvergent følge med en begrænset funktion fås en ligelig konvergent følge.

Vi vil gennemføre beviset for den første sætning. Lad (f_n) og (g_n) være ligelig konvergente følger med grænsefunktionerne f og g.

Vi betragter delrummet $\grave{N}^* = \grave{N} \cup \{\infty\}$ af den udvidede reelle akse $\grave{R}^*$. De ved

$$\varphi(n) = f_n \qquad \psi(n) = g_n$$
$$\varphi(\infty) = f \qquad \psi(\infty) = g$$

definerede afbildning $\varphi, \psi: \grave{N}^*$ ind i $\hat{F}(S,\grave{C})$ er da kontinuerte. Så er afbildningen $(\varphi, \psi): \grave{N}^*$ ind i $\hat{F}(S,\grave{C}) \times \hat{F}(S,\grave{C})$ ligeledes kontinuert, og af sætning 12.9.1 og sætningen om sammensætning af kontinuerte afbildninger følger, at $\varphi + \psi: \grave{N}^*$ ind i $\hat{F}(S,\grave{C})$ er kontinuert. Dermed er påstanden bevist.

Sætning 12.9.4. viser, at grænsefunktionen for en ligelig konvergent følge af begrænsede funktioner selv er begrænset, og ovenstående ræsonnement i forbindelse med sætning 12.9.3 giver derfor følgende sætning:

12.10.3. <u>Sætning</u>: Produktet af to ligelig konvergente følger af begrænsede funktioner er ligelig konvergent.

12.11. Lad (f_n) være en følge af funktioner f_n: S ind i $\grave{C}$. Vi kan da danne en uendelig række Σf_n eller udførligt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Summen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

er rækkens n^{te} afsnit. Hvis følgen (S_n) er ligelig konvergent med grænseværdien S, siger vi at rækken Σf_n er ligelig konvergent med sum S.

Nødvendigt og tilstrækkeligt for at rækken Σf_n er ligelig konvergent er det, at følgen (S_n) er en fundamentalfølge på $\hat{F}(S, \grave{C})$, altså at følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \grave{N} \; \forall n \geq N \; \forall p > 0, \; \forall x \in S \left(\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right\| \leq \varepsilon \right).$$

Dette er det almindelige konvergensprincip for ligelig konvergens. Da det i praksis kan være ret tungt at arbejde med, skal vi angive nogle simplere kriterier, som dog ikke altid er kraftige nok til at fremtvinge en afgørelse.

12.12. Hvis der findes en række Σa_n med positive led, således at

$$\forall n \in \mathring{N} \ \forall x \in S \ (|f_n(x)| \leq a_n),$$

siger vi, at Σa_n <u>majoriserer</u> Σf_n, og vi siger at Σf_n er <u>majorisabel</u> (eller <u>majoriserbar</u>) hvis der eksisterer en konvergent række med positive led, som majoriserer Σf_n.

12.12.1. <u>Sætning</u>. En majorisabel række er ligelig konvergent.

Bevis. Lad Σa_n være konvergent og majorisere Σf_n, og lad ε være et positivt tal. Vi kan da vælge $N \in \mathring{N}$, således at vi for alle $n \geq N$ og alle $p > 0$ har

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \varepsilon,$$

altså for alle $x \in S$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n \leq \varepsilon ,$$

og påstanden følger af det almindelige konvergensprincip for ligelig konvergens.

Af sammenligningskriteriet følger, at en majorisabel række for enhver værdi af x er absolut konvergent.

12.13. Vi skal også angive to kriterier for ligelig konvergens, som kan anvendes på betinget konvergente rækker.

12.13.1 Sætning: Lad (a_n) og (b_n) være følger af afbildninger a_n: S ind i $\mathring{C}$ og b_n: S ind i $\mathring{R}$, således at følgende betingelser er opfyldt:

1). $\exists A \in R \; \forall n \in \dot{N} \; \forall x \in S \; (|a_1(x) + \ldots + a_n(x)| \leqq A)$.

2). $\forall n \in \dot{N} \; \forall x \in S \; (b_n(x) \geqq b_{n+1}(x))$

3). (b_n) konvergerer ligeligt mod 0.

Da er rækken $\Sigma a_n b_n$ ligelig konvergent.

Bevis. Vi indfører betingelserne

$$A_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x); \; A_{n,o}(x) = 0;$$

$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x),$$

og vi har da (Abelsk summation)

$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=1}^{p} (A_{n,k}(x) - A_{n,k-1}(x))\, b_{n+k}(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{p} A_{n,k}(x)\, b_{n+k}(x) - \sum_{k=o}^{p-1} A_{n,k}(x)\, b_{n+k+1}(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} A_{n,k}(x)\, (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) + A_{n,p}(x)\, b_{n+p}(x).$$

Lad nu ε være et positivt tal. Ifølge 3) kan vi vælge $N \in \dot{N}$, således at $b_n(x) \leqq (2A)^{-1} \varepsilon$ for ethvert $n \geqq N$ og ethvert $x \in S$. Nu har vi for ethvert $x \in S$, ethvert $n \in \dot{N}$ og et hvert $k \geqq 0$, at

$$|A_{n,k}(x)| = \left| \sum_{\gamma=0}^{n+k} a_\gamma(x) - \sum_{\gamma=0}^{n} a_\gamma(x) \right| \leqq 2A.$$

og vi får derfor ved udnyttelse af 2) vurderingen

$$|S_{n,p}(x)| \leqq 2A \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x)) + 2A\, b_{n+p}(x) =$$

$$2A \; b_{n+1}(x) \leqq \varepsilon$$

for ethvert $n \geqq N$, ethvert $p > 0$ og ethvert $x \in S$. Påstanden følger nu af det almindelige konvergensprincip for ligelig konvergens.

Sætning 12.13.1 har adskillige varianter, der fremkommer, ved at en af betingelserne 1), 2) eller 3) svækkes, medens en anden til-gengæld skærpes. Vi vil nøjes med at anføre følgende:

12.13.2. <u>Sætning.</u> Gyldigheden af sætning 12.13.1 bevares, når betingelserne 1) og 3) erstattes med følgende:

1'). Rækken Σa_n er ligelig konvergent.

3'). $\exists M \in \dot{R}\ \forall n \in \dot{N}\ \forall x \in S\ (\ |b_n(x)| \leqq M$.

Bevis. Vi benytter den samme anskrivning som i det foregående bevis. Lad ε være et positivt tal. Da Σa_n er ligelig konvergent, kan vi vælge $N \in \dot{N}$, således at vi for ethvert $n \geqq \dot{N}$, ethvert $k > 0$ og ethvert $x \in S$ har

$$|A_{n,k}(x)| \leqq (3M)^{-1}\,\varepsilon$$

og vi får derfor vurderingen

$$|S_{n,p}(x)| \leqq (3\,M)^{-1}\ \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k}(x) - b_{n+k+1}(x) + |b_{n+p}(x)| \right) = (3M)^{-1}\varepsilon\ (b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x) + |b_{n+p}(x)|) \leqq \varepsilon$$

for ethvert $n \geqq N$, ethvert $p > 0$ og ethvert $x \in S$, Påstanden følger nu af det almindelige konvergensprincip for ligelig konvergens.

12.14. Vi betragter en følge (a_n) af afbildninger $a_n : S$ ind i $\dot{C}$. Hvis følgen (a_n) (rækken Σa_n) konvergerer ligeligt, vil følgen (rækken), der dannes af restriktionerne af afbildningerne a_n til en delmængde $A \subseteq S$, ligeledes konvergerer ligeligt. Hvis følgen (rækken) ikke konvergerer ligeligt, eksisterer der visse delmængder $A \subseteq S$ med den egenskab, at den følge (række), der dannes af restriktionerne af afbildningerne a_n til A, konvergerer ligeligt, og for enhver sådan mængde A siger vi da, at følgen (a_n)(rækken Σa_n) konvergerer ligeligt på mængden A.

Hvis følgen (a_n) (rækken Σa_n) konvergerer ligeligt på hver af mængderne $A_1, \ldots, A_n$, gælder det samme på foreningsmængden $A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Et tilsvarende udsagn om foreningsmængden af uendelig mange mængder vil ikke være rigtigt. For en mængde, der består af ét punkt, er der ingen forskel på punktvis konvergens og ligelig konvergens, og det samme gælder altså for endelige mængder. Ligelig konvergens på en mængde bevarer, når endelig mange konvergenspunkter følges til mængden.

Specielt gælder altså, at en række Σa_n, der er ligelig konvergent på et åbent interval (α, β) og konvergent i punkterne α og β, er ligelig konvergent på $[\alpha, \beta]$.

12.15. Vi har tidligere set, at en potensrække $\Sigma a_n z^n$ har en konvergensradius R med den egenskab, at $|z| < R$ medfører, at rækken er absolut konvergent, medens $|z| > R$ medfører, at rækken er divergent. Punkterne med $|z| = R$ udgør konvergenscirklen, punkterne med $|z| < R$ udgør konvergenscirkelskiven, og punkterne med $|z| \leq R$ udgør den afsluttede konvergenscirkelskive. De udartede tilfælde $R = 0$ og $R = \infty$ kan forekomme. Vi skal nu vise en almindelig sætning om ligelig konvergens af potensrækker.

12.15.1. Sætning. En potensrække er ligelig konvergent på enhver kompakt delmængde af konvergenscirkelskiver. Hvis potensrækken er absolut konvergent i et punkt af konvergenscirklen, er den ligelig konvergent på den afsluttede konvergenscirkelskive og absolut konvergent i ethvert punkt af denne.

Bevis. Lad R være konvergensradius for $\Sigma a_n z^n$, og lad A være en kompakt delmængde af konvergenscirkelskiven. Vi kan da vælge $r < R$, således at den ved $|z| \leq r$ bestemte cirkelskive har A som delmængde. I punktet r er potensrækken absolut konvergent. Altså konvergerer $\Sigma |a_n| r^n$. Denne række majoriserer for $|z| \leq r$ rækken $\Sigma a_n z^n$ og denne række konvergerer derfor ligeligt på den ved $|z| \leq r$ bestemte cirkelskiver, og dermed også på mængden A, som er delmængde af cirkelskiven.

Hvis potensrækken konvergerer absolut i et punkt af konvergenscirklen, er $\Sigma|a_n|R^n$ konvergent, og denne række majoriserer potensrækken i hele den afsluttede konvergenscirkelskive. Altså er potensrækken ligelig konvergent i hele den afsluttede konvergenscirkelskive.

Eksempler: $\Sigma|z|^n$ konvergerer ligeligt på enhver cirkelskive $|z| \leq r$, hvor $r < 1$, men ikke på enhedscirkelskiven. Det samme gælder for $\Sigma_n z^n$ og for $\sum_{n-1} n^{-1}z^n$. Derimod er $\sum_{n-1}^{\infty} n^{-2}z^2$ ligelig konvergent på den afsluttede enhedscirkelskive, og dens konvergensradius er 1.

12.16. Lad $\Sigma a_n z^n$ være en potensrække med en positiv konvergensradius R, og lad $\Sigma\, a_n R^n$ være konvergent. For ethvert $x \in [\,0,R\,]$ vil $b_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$ opfylde betingelsen 2) i sætning 12.13.1 og betingelsen 3') i sætning 12.13.2. Af denne sidste sætning følger således, at $\Sigma\, a_n z^n$ er ligelig konvergent på det reelle interval $[\,0,R\,]$. Dette medfører igen, at den ved rækkens sum definerede afbildning $f : [\,0,R\,]$ ind i $\check{C}$ er kontinuert. Dermed har vi bevist følgende berømte sætning, der skyldes N.H. Abel:

12.16.1. <u>Sætning</u>:. Lad K være den ved $|z| < R$ bestemte cirkelskive i den komplekse plan. Lad

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

være en potensrække med konvergensradius R og konvergent for $z = R$ med sum b. Da har restriktionen $f : K \cap \check{R}$ ind i $\check{C}$ grænseværdien b i punktet R.

En nærmere undersøgelse viser, at f ikke behøver at have grænseværdien b for $z \to R$ på K.

Som eksempel på en (ganske vist ikke særlig nyttig) anvendelse af Abels sætning vil vi vise følgende:

12.16.2. <u>Sætning</u>. Hvis det for to konvergente uendelige rækker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \qquad ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$$

gælder, at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_n + a_{n-1} b_1 + a_o b_n)$$

er konvergent med sum u, da er u = st.

Bevis. Ved

$$u(x) = \Sigma a_n x^n, \qquad v(x) = \Sigma b_n x^n$$

$$w(x) = \Sigma (a_n b_o + a_{n-1} b_1 + \dots + a_o b_n) x^n$$

defineres ifølge sætning 12.16.1 kontinuerte afbildninger $u, v, W: [0,1]$ ind i $\grave{C}$. For $x \in [0,1[$ er rækkerne absolut konvergente, og vi har derfor $w(x) = u(x)\, v(x)$ for $x \in [0,1[$. På grund af kontinuiteten gælder denne ligning også for $x = 1$, og dermed er påstanden bevist.

12.17. Vi betragter nu et begrænset interval $I \subseteq \grave{R}^n$. Med $\hat{R}(I,\grave{R})$ betegner vi mængden af Riemann-integrable funktioner $f: I$ ind i $\grave{R}$. Riemann-integralet kan da opfattes som en afbildning $\int : R(I,\grave{R})$ ind i $\grave{R}$. Vi har nu følgende sætning:

12.17.1. <u>Sætning</u>. Mængden $\hat{R}(I,\grave{R})$ er en afsluttet delmængde af $\hat{F}(I,\grave{R})$. Afbildningen $\int : \hat{R}(I,\grave{R})$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert.

Bevis: Lad $f \in F(I,\grave{R})$ være kontaktpunkt for $\hat{R}(I,\grave{R})$, og lad være et positivt tal. Kuglen $K(f, \frac{\varepsilon}{m(I)})$ indeholder et punkt $g \in \hat{R}(I,\grave{R})$. Vi har da

$$\forall\, \underline{x} \in I \left(g(\underline{x}) - \frac{\varepsilon}{m(I)} \leq f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) + \frac{\varepsilon}{m(I)} \right),$$

og da $g: I$ ind i $\grave{R}$ er Riemann-integrabel, følger heraf

$$\int_I \left(g - \frac{\varepsilon}{m(I)}\right) \leq \underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f \leq \int_I \left(g + \frac{\varepsilon}{m(I)}\right)$$

eller

$$\int_I g - \varepsilon \leq \underline{\int}_I f \leq \overline{\int} f \leq \int_I g + \varepsilon .$$

heraf følger

$$\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f \leq 2\varepsilon .$$

Da dette gælder for enhver positiv værdi af ε, er f Riemann-integrabel. Dermed er den første del af sætningen bevist.

Lad nu $f,g \in \hat{R}(I,\mathring{R})$ være vilkårlige punkter. Vi har da

$$|\int_I g - \int_I f| = |\int_I (g-f)| \leq \int_I |g-f| \leq \int_I \|g-f\| \leq m(I)\, \|g-f\| .$$

Heraf fremgår, at afbildningen $\frac{1}{m(I)} \int$ er afstandsformindskende og dermed kontinuert. Det medfører igen, at afbildningen $\int$ er kontinuert, og dermed er sætningen bevist.

12.17.2. <u>Sætning.</u> Lad (f_n) være en følge af Riemann-integrable funktioner f_n: I ind i $\mathring{R}$. Hvis $(f_n) \to f$ ligeligt på I, da er f Riemann-integrabel og $(\int f_n) \to \int f$.

Dette følger umiddelbart af sætning 12.12.1.

12.17.3. <u>Sætning.</u> Lad (f_n) være en følge af Riemann-integrable funktioner f_n: I ind i $\mathring{R}$. Hvis Σf_n er ligelig konvergent med sum f, da er f Riemann-integrabel og $\int f = \Sigma \int f_n$.

Dette fås umiddelbart ved at anvende sætning 12.17.2 på rækkens afsnitsfølge.

Vi har set, at en følge af differentiable funktioner kan være ligelig konvergent mod en differentiabel funktion samtidig med at følgen af differentialkvotienter ikke konvergerer punktvis. På den anden side vil ligelig konvergens af følgen af differentialkvotienter sikre, at denne følge går mod differentialkvotienten af den oprindelige føljes grænsefunktion. Idet partielle differentialkvotienter er differentialkvotienter af restriktioner, som kun afhænger af én variabel, er det tilstrækkeligt af formulere resultatet for funktioner af én varialel.

12.17.4. <u>Sætning.</u> Lad $I \subseteqq \dot{R}$ være et interval, og lad (f_n) være en følge af differentialbe funktioner f_n I ind i $\dot{R}$. Hvis følgen (Df_n) er ligelig konvergent på ethvert kompakt delinterval af I, og hvis (f_n) konvergerer punktvis på I mod en grænsefunktion f, da konvergerer (f_n) ligeligt mod f. Endvidere er f differentiabel og $(Df_n) \to Df$.

Bevis. Lad $[a,b]$ være et vilkårligt kompakt delinterval af I. Af sætning 12.17.2 fås nu

$$(f_n(x)) = (f_n(a) + \int_a^x Df_n(t)dt) \to f(a) + \int_a^x g(t)dt,$$

hvor g er grænsefunktionen for (Df_n). Altså er

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt,$$

hvilket viser, at f er differentiabel med

$$Df(x) = g(x).$$

Dermed har vi bevist den sidste påstand i sætningen. Vi har nu

$$f(x) - f_n(x) = f(a) - f_n(a) + \int_a^x (g(t) - Df_n(t))dt.$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger N, således at vi for $n \geqq N$ har

$$|f(a) - f_n(a)| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon \wedge \forall x \in [a,b] \; (|g(x) - Df_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2(a-b)}),$$

og vi får da for $n \geqq N$ og $x \in [a,b]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon + (x-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqq \varepsilon,$$

hvilket viser, at $(f_n) \to f$ ligeligt på $[a,b]$. Dermed er sætningen bevist.

12.18. Vi vil slutte dette kapitel med nogle sætlig vigtige anvendelser af ligelig konvergens. Disse anvendelser bygges på en hjælpesætning, der ikke direkte handler om ligelig konvergens.

12.18.1. <u>Definition</u>. Lad T være en vilkårlig mængde. Et element $x \in T$ siges at være <u>fixelement</u> for en afbildning $\varphi : T$ ind i T, såfremt $\varphi(x) = x$. Hvis T er et topologisk eller metrisk rum siger vi <u>fixpunkt</u> istedet for fixelement.

12.18.2. <u>Definition</u>. Lad T være et metrisk rum. En afbildning $\varphi : T$ ind i T kaldes <u>stærkt afstandsformindskende,</u> hvis der eksisterer et tal $k \in]0,1[$, således at

$$(5) \qquad \forall x, y \in T \; (\text{dist}\,(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k \,\text{dist}\,(x,y)).$$

Samtidig med at φ vil vi betragte de itererede afbildninger $\varphi = \varphi = \varphi^2$, $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \varphi^3$, ... Nu kan vi formulere den omtalte hjælpesætning.

12.18.3. <u>Sætning.</u> Lad T være et fuldstændige metrisk rum. Lad $\varphi : T$ ind i T være en stærkt afstandsformindskende afbildning. Der eksisterer da et og kun et fixpunkt for T, og for ethvert punkt $x \in T$ vil følgen $(\varphi^n(x))$ konvergere med dette fixpunkt.

Bevis: Vi vælger $k \in]0,1[$, således at (5) gælder. For $x \in T$ sætter vi

$$\text{dist}\,(x, \varphi(x)) = a(x).$$

Vi har da ifølge (5)

$$\text{dist}\,(\varphi(x), \varphi^2(x)) \leq k \,\text{dist}\,(x, \varphi(x)) = k\, a(x).$$

Såfremt vi har

$$(6) \qquad \text{dist}\,(\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x)) \leq k^n a(x).$$

giver (5), at

$$\text{dist}\ (\varphi^{n+1}(x), \varphi^{n+2}(x) \leqq k\ \text{dist}(\varphi^{n}(x), \varphi^{n+1}(x)) \leqq k^{n+1}a(x).$$

Dermed har vi bevist(6) ved induktion.

For vilkårlige $n,p \in \mathring{N}$ får vi nu ved trekantsuligheden og (6)

$$\text{dist}\ (\varphi^{n}(x), \varphi^{n+p}(x)) \leqq \sum_{j=0}^{p=1} \text{dist}\ (\varphi^{n+j}(x), \varphi^{n+j+1}(x) \leqq$$

$$\sum_{p=0}^{p=1} k^{n+j}a(x) \leqq a(x) \sum_{j=0}^{\infty} k^{n+j} = \frac{a(x)}{1-k}\ k^{n}.$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger N, således at

$$k^{n} < \frac{(1-k)\varepsilon}{a(x)} \quad \text{for } n \geqq N.$$

og vi har da

$$\forall\, n \geqq N\ \forall\, p > 0\ (\text{dist}(\varphi^{n}(x), \varphi^{n+p}(x)) \leqq \varepsilon),$$

hvilket viser, at $(\varphi^{n}(x))$ er en fundamentalfølge. Da T er fuldstændigt, konvergerer $(\varphi^{n}(x))$ mod er grænsepunkt b.

Da φ er afstandsformindskende, er φ kontinuert. Den ved

$$\psi(x) = \text{dist}\ (x, \varphi(x))$$

definerede afbildning ψ: T ind i $\mathring{R}$ er således kontinuert, og vi har derfor

$$\text{dist}\ (b, \varphi(b)) = \psi(b) = \lim_{n\to\infty} \psi(\varphi^{n}(x)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{dist}\ (\varphi^{n}(x), \varphi^{n+1}(x)),$$

og ved (6) får vi derfor dist $(b, \varphi(b)) = 0$, altså $\varphi(b) = b$. Dermed har vi vist, at følgen $(\varphi^{n}(x))$ for ethvert $x \in T$ er konvergent mod et grænsepunkt, som er et fixpunkt. Sætningen vil være fuldstændigt vist, når vi har bevist, at φ ikke har flere fixpunkter.

Lad b og c være fixpunkter for φ. Vi har da ved (6)

$$\operatorname{dist}(b,c) = \operatorname{dist}(\varphi(b), \varphi(c)) \leq k \operatorname{dist}(b,c)$$

eller

$$(1 - k) \operatorname{dist}(b,c) = 0,$$

som giver dist $(b,c) = 0$, altså $b = c$. Dermed er sætningen bevist.

12.19. Vi vil nu vise følgende sætning:

12.19.1. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbf{R}^2$ være en åben mængde. Lad A og B være positive tal og lad $f: O$ ind i $\mathbf{R}$ være en kontinuert afbildning, som tilfredsstiller betingelserne

$$\forall (x,y) \in O \; (|f(x,y)| \leq A)$$

$$\forall (x,y_1) \in O \; \forall (x,y_2) \in O \; (|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq B|y_2 - y_1|) .$$

Lad (a,b) være et punkt af O, og lad h og k være positive tal, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1). $\{(x,y) \mid |x-a| \leq h \wedge |y-b| \leq k\} \subseteq O$.

2). $Ah < k$

3). $Bh < 1$

Der findes da én og kun én kontinuert funktion $g: [a-h, a+h]$ ind i $\mathbf{R}$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

i). $\forall x \in [a-h, a+h] \; ((x,g(x)) \in O)$.

ii). $\forall x \in [a-h, a+h] \; (g(x) = b + \int_a^x f(t,g(t)) \, dt)$.

Bevis. Med T vil vi betegne den delmængde af $\mathcal{C}([a-h, a+h],\mathbf{R})$, som omfatter alle afbildninger $\varphi : [a-h, a+h]$ ind i $\mathbf{R}$, der opfylder betingelserne

(7) $\forall x \in [a-h, a+h] \quad (|\varphi(x) - b| \leq k)$

(8) $\varphi(a) = b$.

Vi viser først, at T er en afsluttet mængde. Hvis ψ tilhører komplementærmængden til T vil ψ ikke opfylde både (7) og (8). Hvis ψ ikke opfylder (8), er $\psi(a) = b_1 \neq b$ og for $\varepsilon \in [0, |b_1 - b|]$ vil funktionerne $K(\psi, \varepsilon)$ heller ikke tilfredsstille (8). Hvis ψ ikke tilfredsstiller (7), kan vi vælge $x_0 \in [a-h, a+h]$ og $\varepsilon > 0$, således at $|\varphi(x_0) - b| \geq k + \varepsilon$, og funktionerne i $K(\psi, \varepsilon)$ vil da ikke tilfredsstille (7). Dermed har vi vist, at T er en afsluttet delmængde af $\mathcal{C}([a-h, a+h], \mathbf{R})$ og da dette rum er fuldstændigt, er delrummet T fuldstændigt.

Vi definerer nu en afbildning s : T ind i $\mathcal{C}([a-h, a+h], \mathbf{R})$, idet vi for $\varphi \in T$ definerer $s\varphi$ ved

$$s\varphi(x) = b + \int_a^x f(t,\varphi(t))\, dt.$$

Vi ser, at $s\varphi$ bliver kontinuert, at $s\varphi(a) = b$, og at (ifølge 2))

$$|s\varphi(x) - b| \leq |x - a| \cdot A \leq hA \leq k$$

for alle $x \in [a-h, a+h]$. Altså gælder $s\varphi \in T$ og s er i virkeligheden en afbildning s : T ind i T. For $\varphi_1, \varphi_2 \in T$ har vi ifølge den anden betingelse i sætningen

$$|s\varphi_2(x) - s\varphi_1(x)| \leq \left| \int_a^x (f(t,\varphi_2(t)) - f(t, \varphi_1(t)))dt \right| \leq$$

$$\left| \int_a^x |f(t,\varphi_2(t)) - f(t,\varphi_1(t))| dt \right| \leq \left| \int_a^x B|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| dt \right| \leq$$

$$\left| \int_a^x B\|\varphi_2 - \varphi_1\| \, dt \right| \leq Bh \, \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

for alle $x \in [a-h, a+h]$, altså

$$\|s\varphi_2 - s\varphi_1\| \leq Bh \, \|\varphi_2 - \varphi_1\|,$$

så 3) viser, at s er stærkt afstandsformindskende. Ifølge sætning 12.18.3 har s således et fikspunkt g, som altså tilfredsstiller sg = g eller

$$g(x) = b + \int_a^x f(t,g(t))dt.$$

Dermed har vi vist eksistensen af en løsning.

For at vise, at der ikke findes anden løsning, betragter vi en afbildning $\varphi : [a-h, a+h]$ ind i $\mathbf{R}$, som tilfredsstiller betingelsen

$(x, \varphi(x)) \in O$ for alle x. Vi definerer $s\varphi$ som ovenfor, og vi får da samme vurdering af $|s\varphi(x) - b|$ som ovenfor. Altså gælder $s\varphi \in T$, og skal betingelsen $s\varphi = \varphi$ være opfyldt, må vi i hvert fald have $\varphi \in T$. Men indenfor T findes ifølge sætning 12.18.3 kun èt fixpunkt, og dermed er entydigheden bevist.

12.20. Det er nu let at vise en grundlæggende sætning om eksistens af løsningen til en differentialligning af første orden.

12.20.1. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben mængde. Lad $f: O$ ind i $\mathbb{R}$ være en kontinuert afbildning, som har en kontinuert partiel differentialkvotient $D_2 f$ med hensyn til den anden variabel. Lad (a,b) være et punkt af O. Da eksisterer der et positivt tal h, således at der findes èn og kun én differentiabel funktion $g: [a-h, a+h]$ ind i $\mathbb{R}$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1). $\forall x \in [a-h, a+h] \; ((x, g(x)) \in O)$.

2). $g(a) = b$.

3). $\forall x \in [a-h, a+h] \; (Dg(x) = f(x, g(x)))$.

Bevis. Vi vælger en cirkelskive U med centrum i (a,b), således at $\bar{U} \subseteq O$. Med A og B betegner vi supremun på U af $|f|$ og $|D_2 f|$. Funktionen f vil da i U opfylde de i sætning 12.19.1 anførte betingelser. Vi kan da vælge h og k som anført i sætningen. Det ses helt umiddelbart, at betingelserne 2) og 3) i sætning 12.20.1 er ensbetydende med betingelse 11) i sætning 12.19.1. Derefter følger det af sætning 12.19.1, at funktionen g eksisterer, og at der ikke eksisterer andre funktioner, der tilfredsstiller 2) og 3) samt

$$1') \; \forall x \in [a-h, a+h] \; ((x, g(x)) \in U).$$

Lad nu g_1 være en anden afbildning, der tilfredsstiller 1), 2) og 3) i sætning 12.20.1. Vi sætter

$$h_1 = \sup \{\eta \in [a,h] \mid \forall x \in [a, a+\eta], (g_1(x) - g(x))\} .$$

Kontinuiteten giver straks $g_1(a+h_1) = g(a+h_1)$. Vi kan nu benytte det allerede beviste, idet $(a+h_1, g(a+h_1))$ indgår istedet for (a,b), og hvis $h_1 < h$ følger det, at $g_1(x) = g(x)$ i en omegn af $a+h_1$. Det strider imidlertid mod definitionen af h_1. Dermed har vi vist, at g_1 og g stemmer overens på $[a,a+h]$. Analogt for $[a-h,a]$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 12.20.1 viser, at en differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

hvor f er en tilstrækkelig "pæn" funktion lokalt tror løsninger, som fastlægges entydigt ved givne udgangsværdier. Vi bemærker, at dette altså specielt vil gælde for en Riccati-ligning

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

når blot a,b og c er kontinuerte. I differentialligningsteorien så vi, at dette igen medfører, at en differentialoperator

$$D^2 + a_1 D + a_2 D^0$$

kan spaltes i to lineære differentialoperatorer af første orden. Dette medfører igen eksistens af løsninger til lineære differentialligninger af anden orden, og det er let at se, at der blandt disse altid vil være løsninger, som ikke antager værdien 0 i et givet punkt. Dermed har vi bevist det eksistensudsagn, der lå til grund for vor diskussion af lineære differentialligninger af anden orden.

Lette opgaver.

1. En følge (f_n) af afbildninger $f_n:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ defineres ved
$$f_n(x) = \text{Arctg}\,(x+n).$$
Vis, at (f_n) ikke er ligelig konvergent, men ved restriktion til et interval $[a,\infty[$, $a \in \mathring{R}$, fås altid en ligelig konvergent følge.

2. En følge (f_n) af afbildninger $f_n:\mathring{R} \setminus \{p\pi\}$ ind i $\mathring{R}$ hvor $p \in \mathring{Z}$, defineres ved
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 .$$
Vis, at (f_n) ikke er ligelig konvergent, men ved restriktion til $\mathring{R} \setminus]a,a[$, $a > 0$, fås en ligelig konvergent følge.

3. Vis, at den ved
$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$
definerede følge (f_n) af afbildninger $f_n:[0,1]$ ind i $[0,1]$ er ligelig konvergent.

4. Vis, at den ved
$$f_n(x) = (\cos(2m!\pi x))^{2n}$$
definerede følge (f_n) af afbildninger $f_n:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ for ethvert fast $m \in \mathring{N}$ konvergerer ligeligt mod en Riemann-integrabel grænsefunktion $g_m:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$, og at følgen (g_m) konvergerer punktvis, men ikke ligeligt mod en ikke Riemann-integrabel grænsefunktion.

5. Vis, at de ved
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad ; \quad g_n(x) = \frac{n^3x}{1+n^4x^2}$$

afbildninger f_n, g_n:
definerede følger (f_n) og (g_n) af $[0,\infty[$ ind i $[0,\infty[$ er punktvis, men ikke ligeligt konvergente, medens restriktion til $[a,\infty[$, $a > 0$, giver ligeligt konvergente følger.

6. Lad S være en vilkårlig mængde. Vis, at rummet $\mathring{F}(S,\mathring{Z})$ er diskret.

7. I et uegentligt metrisk rum T kan man på naturlig måde indføre kugler $K(a,\infty)$ med uendelig radius. Vis, at mængden af sådanne kugler er en klasseinddeling af T. Angiv den tilsvarende ækvivalensrelation.

8. Vis, at en kugle $K(a,\infty)$ (se opgave 7) er både åben og afsluttet.

9. Lad S være et topologisk rum, $A \subseteq S$ en overalt tæt punktmængde og T et metrisk rum. Lad (f_n) være en følge af afbildninger f_n:S ind i T. Det antages, at restriktion af hvert f_n til A giver en ligelig konvergent følge. Vis, at (f_n) er ligelig konvergent på S.

10. En følge (f_n) af afbildninger $f_n:[a,b[$ ind i $\mathring{R}$ er ligelig konvergent, og hvert f_n har en grænseværdi c_n i punktet b. Vis, at følgen (c_n) er konvergent.

11. Lad S være en vilkårlig mængde. Til en følge $(\underline{f}_n)$ af afbildninger $\underline{f}_n$:S ind i $\mathring{R}^m$ svarer m koordinatfølger $(f_{1n}),\ldots,(f_{mn})$, hvor $f_{kn} = p_k \circ \underline{f}_n$, idet p_k er den ved $p_k(\underline{x}) = x_k$ definerede projektionsafbildning. Vis, at $(\underline{f}_n)$ er ligelig konvergent, hvis og kun hvis alle m koordinatfølger er ligelig konvergente.

12. Lad $(\underline{f}_n)$ og $(\underline{g}_n)$ være ligelig konvergente følger af afbildninger $\underline{f}_n, \underline{g}_n : S$ ind i $\dot{R}^m$ (sammenlign opgave 11). Lad α og β være reelle tal. Vis, at $(\alpha \underline{f}_n + \beta \underline{g}_n)$ er ligelig konvergent.

13. Funktionerne $\underline{f}_n$ og $\underline{g}_n$, der optræder i følgerne i opgave 12 antages begrænsede for ethvert $n \in \dot{N}$. Følgerne antages desuden ligelig konvergente. De indre produkter

$$\varphi_n(x) = \underline{f}_n(x) \cdot \underline{g}_n(x)$$

definerer en følge (φ_n) af afbildninger $\varphi_n : S$ ind i $\dot{R}$. Vis, at (φ_n) er ligelig konvergent.

14. Angiv de intervaller på hvilke hver af de ved

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-n^{-1}x^2}$$

definerede følger (f_n) og (g_n) af afbildninger $f_n, g_n : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er ligelig konvergente.

15. Angiv de intervaller, på hvilke den ved

$$f_n(x) = n \operatorname{Arctg} \frac{x}{n}$$

definerede følge (f_n) af afbildninger $f_n : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er ligelig konvergent.

16. Vis, at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(2^n x), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \sin nx$$

definerer kontinuerte afbildninger $f_n, g_n : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$.

17. Vis, at

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arctg} 2^{-n} x, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$$

definerer kontinuerte afbildninger $f\ , g\ : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$.

18. Vis, at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1} \sin^{2n} x, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\,\mathrm{Arctg}x}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x}{n}$$

definerer kontinuerte afbildninger $f,g:\grave{R}$ ind i $\grave{C}$.

19. Vis, at potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}z^n$ konvergerer ligeligt i enhver kompakt delmængde af mængden

$$\{z \mid |z| \leq 1 \wedge z \neq 1\}$$

af punkter, hvor rækken er konvergent.

20. Riemann's zetafunktion defineres ved

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\log n} .$$

Vis, at rækken er ligelig konvergent i enhver halvplan bestemt ved $\mathrm{Re}z \geq a$, hvor $a > 1$, men ikke i hele den åbne halvplan bestemt ved $\mathrm{Re}z > 1$.

21. Vis, at

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(n+1)}$$

definerer en afbildning $f:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$. Vis, at f er kontinuert i alle punkter af den åbne mængde $A = \grave{R} \setminus \{2n\pi \mid n \in \grave{N}\}$. Vis, at

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\log(n+1)}$$

definerer en kontinuert afbildning $g:A$ ind i $\grave{R}$, men at rækken er divergent i alle punkter af $\grave{R} \setminus A$. Vis, at $f(z) = -Dg(z)$ for alle $z \in A$. Vis, at g har grænseværdi ∞ i punkterne af $\grave{R} \setminus A$. Udled heraf, at f ikke er kontinuert i punkterne af $\grave{R} \setminus A$.

22. I udledelsen af eksistenssætningen for differentialligninger er indeholdt en metode til konstruktion af en funktionsfølge, der konvergerer ligeligt mod løsningsfunktionen. Udled rækkeudviklingen for eksponentialfunktionen ved at benytte den nævnte konstruktion på differentialligningen $\frac{dy}{dx} = y$ for udgangsværdierne $(0,1)$. Benyt en konstant funktion som første tilnærmelse.

23. Lad $K:[0,1] \times [0,1]$ ind i $\dot{R}$ og $f:[0,1]$ ind i $\dot{R}$ være kontinuerte afbildninger. Vis, at der for ethvert $\lambda \in \dot{R}$ eksisterer én og kun én afbildning $\varphi_\lambda:[0,1]$ ind i $\dot{R}$, som tilfredsstiller ligningen (Volterras integralligning)

$$\varphi_\lambda(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi_\lambda(y)dy = f(x).$$

Efterlign beviset for eksistenssætningen for differentialligninger. Konstruktionsmetoden giver løsningen i form af en potensrække i λ. Dens koefficienter bliver funktioner af x, men for enhver fast værdi af x får potensrækken konvergensradius ∞.

24. Opgave 23 med følgende modifikationer: integrationsgrænserne ændres til 0 og 1. Afbildningen φ_λ eksisterer for $\lambda \in [-h,h]$, hvor h er et passende, positivt tal. Potensrækken får sædvanligvis endelig konvergensradius (Fredholms integralligning). I virkeligheden eksisterer løsningen undtagen for højst numerabelt mange værdier af λ, men det kan først vises ved en ret dybtgående undersøgelse af integralligningen.

25. Forsøg eksplicit at løse integralligningen

$$\varphi_\lambda(x) + \lambda \int_0^1 (xy^2+x^2y)\varphi_\lambda(y)dy = 1.$$

Lidt vejledning: Man tænker sig opgaven løst, og ligningen viser da, at φ_λ er givet ved et udtryk af formen

$$\varphi_\lambda(x) = 1 - \lambda(ax+bx^2),$$

hvor $a = \int_0^1 y^2\varphi_\lambda(y)dy$ og $b = \int_0^1 y\varphi_\lambda(y)dy$ er konstanter. Man behøver altså blot at bestemme a og b ved indsættelse i integralligningen. Derved kommer man til at løse to lineære ligninger med to ubekendte. Det viser sig, at x kun optræder på højre side, medens determinanten afhænger af λ.

Vanskeligere opgaver.

26. Lad S være et kompakt metrisk rum. Lad (f_n) være en følge af kontinuerte afbildninger $f_n:S$ ind i $\dot{R}$. Det antages, at funktionsværdifølgen $(f_n(x))$ er monotont aftagende for ethvert $x \in S$, samt at (f_n) konvergerer punktvis mod en kontinuert afbildning $f:S$ ind i $\dot{R}$. Vis, at (f_n) er ligelig konvergent.

27. Angiv en følge (f_n) af kontinuerte afbildninger $f_n:[0,1]$ ind i $[0,1]$, således at rækken Σf_n er ligelig konvergent, men ikke majorisabel.

28. Omform udledelsen af potensrækkeudviklingerne for $\log(1+x)$, Arctgx og Arcsinx, idet sætninger om ligelig konvergens udnyttes.

29. Vis, at der eksisterer en kontinuert afbildning $\varphi:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$, som opfylder følgende to betingelser

1) $\forall\ x,y \in \dot{R}(x \neq y \Rightarrow |\varphi(y)-\varphi(x)| < |y-x|)$.

2) $\forall\ x \in \dot{R}(\varphi(x) \neq x)$.

30. Vis den for $x \in]0,2\pi[$ gyldige formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \pi - x$$

og tegn derefter det grafiske billede af den ved rækken definerede afbildning af $\grave{R}$ ind i $\grave{R}$. Vejledning: Ved differentiation af rækkens afsnit $A_n(x)$ og indsættelse af $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})$ med påfølgende summation af potensrækken (eller -rækkerne) fås

$$A_n(x) = \tfrac{1}{2}(\pi - x) + \tfrac{1}{2}\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

På integralet anvendes nu delt integration, således at $\sin(n+\frac{1}{2})t$ integreres og $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}$ differentieres, og det ses derefter let, at integralet konvergerer mod nul for $n \to \infty$.

31. Betragt den i opgave 30 omtalte række for en lille, positiv værdi af x; vælg for denne værdi af x det længst mulige afsnit med lutter positive led, og vis ved en omhyggelig vurdering, at summen af dette afsnit for tilstrækkelig lille x er væsentlig større end $\frac{1}{2}\pi$. Denne "skyden over målet" er typisk for trigonometriske rækker i omegnen af punkter, hvor summen er diskontinuert (Gibb's fænomen).

32. Vis, at den ved

$$W(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{n=0}^{\infty} \cos b^n \pi x,$$

hvor b er et positivt tal, definerede afbildning $W:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er kontinuert.

Funktionen W med b tilstrækkelig stor er det ældste kendte eksempel på en funktion, der er overalt kontinuert, uden at være differentiabel for nogen værdi af x. Eksemplet er givet af Weierstrass.

For at vise, at W ikke er differentiabel for et vilkårligt fast $x \in \mathbb{R}$, skal vi blot vælge to passende følger af tilvækster (h_n) og (h'_n), som begge konvergerer mod 0, og ikke således at de tilsvarende følger af differenskvotienter

$$\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n} \quad \text{og} \quad \frac{W(x+h'_n)-W(x)}{h'_n}$$

går mod ∞ og $-\infty$ (eller omvendt).

Hertil vælger vi $\beta_n \in \mathbb{Z}$, således at

$$-\tfrac{1}{2} < a^n x-\beta_n \leq \tfrac{1}{2} \,,$$

og vi sætter så

$$\gamma_n = a^n x-\beta_n, \quad h_n = \frac{1-\gamma_n}{a^n}, \; h'_n = \frac{-1-\gamma_n}{a^n} \,.$$

Hvis vi nu udregner differenskvotienterne ledvis af den uendelige række, ser vi, at differenskvotienterne svarende til h_n alle får samme fortegn fra det n^{te} led at regne (tegn bølgelinjerne og husk, at b er ulige), og en vurdering giver, at bidraget fra disse led for b tilstrækkelig stor langt overvejer bidraget fra de n-1 første led. Analogt for h'_n.

Hvis vurderingerne udføres omhyggeligt nok, lykkes beviset for $b > 2 + 3\pi$.

Svær opgave.

33. Udregn

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

dels direkte, dels ved at indsætte potensrækken for Arcsinx og integrere ledvis. Derved fås π^2 skrevet som sum af en uendelig række med simple, rationale led.

34. Van der Waerden har givet et meget simpelt eksempel på en funktion, som ikke er differentiabel for nogen værdi af x. Han definerer først $\varphi:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ ved
$\varphi(x) = \frac{1}{2}-|x|$ for $|x| \leq \frac{1}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}(\varphi(x+n) = \varphi(x))$.
Dernæst sætter han

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\varphi(4^n x),$$

og $V:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ har de ønskede egenskaber. Vælg $h_n = \pm\frac{1}{4^n}$ med bekvemt valg af fortegnet. Differenskvotienten bliver da et helt tal og lige eller ulige eftersom n er lige eller ulige.

Videregående differentialregning.

13.1. I dette kapitel skal vi fortsætte behandlingen af differentiationsteorien, og vi vil først og fremmest udnytte kompakthedsteorien og især hovedsætningerne om kontinuerte funktioner. For funktioner, hvis definitionsmængde er et interval på den reelle akse, vil resultaterne i det store og hele være kendte fra gymnasieundervisningen. For funktioner af flere variable vil resultaterne selvfølgelig være nye, og her viser det sig, at kompakthedsteorien spiller en afgørende rolle ved indførelsen af partielle differentialkvotienter og totale differentialer af højere orden.

De i kapitel 10 benyttede betegnelser vil blive anvendt også i dette kapitel. Dette gælder specielt betegnelsen α eller $\underline{\alpha}$ (eventuelt med en index) for en α-funktion, d.v.s. en funktion, der har grænseværdi 0 eller $\underline{0}$ i punktet 0 eller $\underline{0}$.

13.2. Vi indleder med et fra gymnasieundervisningen velkendt resultat:

13.2.1. Sætning. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval og $f:I$ ind i $\grave{R}$ en afbildning. Hvis $f(x)$ antager sin største eller mindste værdi i et punkt $x_0 \in \mathring{I}$, og f er differentiabel i dette punkt, er $Df(x_0) = 0$.

Bevis. Lad os antage, at f er differentiabel i $x_0 \in \mathring{I}$, og at $Df(x_0) \neq 0$. Vi har opspaltningen

$$(1) \qquad \Delta_{x_0} f(h) = (Df(x_0) + \alpha(h))h,$$

og da α har grænseværdien 0 i punktet 0, kan vi vælge et tal $\delta > 0$, således at

$$|\alpha(h)| < |Df(x_0)| \text{ for } |h| < \delta.$$

Det fremgår da af (1), at

$$\Delta_{x_0} f(h) = f(x_0+h) - f(x_0)$$

for $|h| < \delta$ skifter fortegn, når h skifter fortegn. Men så er $f(x_0)$ hverken den største eller den mindste funktionsværdi. Dermed er sætningen bevist.

Udnyttelsen af kompakthedsteorien sker nu gennem følgende sætning, der også er kendt fra gymnasieundervisningen:

13.2.2. Rolles sætning. Lad $[a,b]$ være et begrænset interval. Lad $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ være en kontinuert afbildning, for hvilken $f(a) = f(b) = 0$. Hvis restriktionen af f til $]a,b[$ er differentiabel, eksisterer der et punkt $c \in]a,b[$, således at $Df(c) = 0$.

Bevis. Da $[a,b]$ er en kompakt mængde, og f er kontinuert, findes der punkter $x_1, x_2 \in [a,b]$, således at $f(x_1)$ er den mindste og $f(x_2)$ den største funktionsværdi. Hvis x_1 eller x_2 tilhører $]a,b[$, bliver differentialkvotienten i vedkommende punkt 0 ifølge sætning 13.2.1. I modsat fald bliver både den største og den mindste funktionsværdi for f lig med $f(a) = f(b) = 0$, og f er da identisk 0 og Df er identisk 0. Dermed er sætningen bevist.

13.3. Den følgende sætning er en generalisation af den fra gymnasieundervisningen kendte middelværdisætning:

13.3.1. Den udvidede middelværdisætning. Lad $[a,b]$ være et endeligt interval, og lad $f,g:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ være kontinuerte afbildninger, hvis restriktioner til $]a,b[$ er differentiable. Der eksisterer da et punkt $c \in]a,b[$, således at

$$(f(b) - f(a))Dg(c) = (g(b) - g(a))Df(c).$$

Bevis. Den ved

$$\varphi(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

definerede afbildning $\varphi:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert og tilfredsstiller betingelsen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Endvidere er restriktionen af φ til $]a,b[$ differentiabel med

$$D\varphi(x) = (f(b)-f(a))Dg(x) - (g(b) - g(a))Df(x).$$

Ifølge Rolles sætning eksisterer da $c \in]a,b[$, således at $D\varphi(c) = 0$, og dermed er sætningen bevist.

13.3.2. <u>Differentialregningens middelværdisætning.</u> Lad $[a,b]$ være et endeligt interval, og lad $f:[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ være en kontinuert afbildning, hvis restriktion til $]a,b[$ er differentiabel. Der eksisterer da et punkt $c \in]a,b[$, således at

$$f(b) - f(a) = (b-a)Df(c).$$

Bevis. Sætningen er et specialtilfælde af sætning 13.3.1 svarende til, at g er den ved $g(x) = x$ definerede identiske afbildning.

13.4. Som en første anvendelse af middelværdisætningen udleder vi de velkendte resultater om sammenhængen mellem differentialkvotientens fortegn og funktionens monotonitet:

13.4.1. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et vilkårligt interval og $f:I$ ind i $\mathring{R}$ en differentiabel afbildning. Hvis $Df(x) = 0$ for ethvert $x \in I$, er f konstant. Hvis $Df(x) \geq 0$ for ethvert $x \in I$, er f voksende. Hvis det yderligere gælder, at mængden $\{x \in I \mid Df(x) = 0\}$ ikke har indre punkter, er f strengt voksende. Analogt for $Df(x) \leq 0$.

Bevis. For $[x_1,x_2] \subseteq I$ giver differentialregningens middelværdisætning, at der eksisterer et punkt $\xi \in]x_1,x_2[$, således at

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2-x_1)Df(\xi).$$

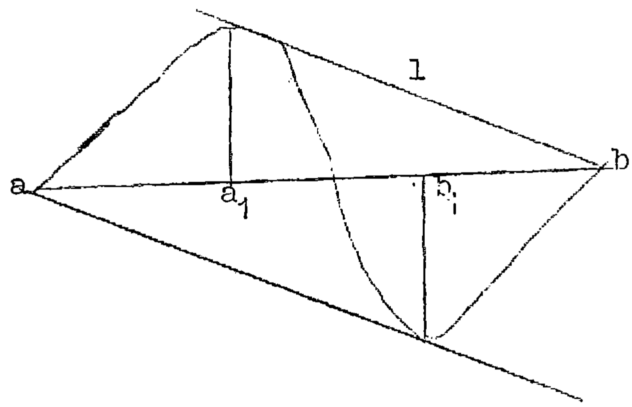
Heraf følger de to første påstande umiddelbart. Hvis f er voksende på I og $f(x_1) = f(x_2)$, er f konstant på $[x_1,x_2]$, og følgelig Df identisk 0 på $[x_1,x_2]$. Dermed er sætningen bevist.

13.5. Hvis $f:I$ ind i $\dot{R}$ er en differentiabel afbildning af et interval $I \subseteq \dot{R}$, giver middelværdisætningen for $x_1, x_2 \in I$ en relation

(1) $$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)Df(\xi(x_1, x_2)),$$

hvor $\xi(x_1, x_2)$ for alle $x_1, x_2 \in I$ tilhører det afsluttede interval med endepunkter x_1 og x_2, og hvis $x_1 \neq x_2$ endda det åbne interval. For $x_1 < x_2$ er dette selve middelværdisætningen. For $x_1 > x_2$ går relationen over i middelværdisætningen ved ombytning af x_1 og x_2. For $x_1 = x_2$ er relationen triviel. Punktet $\xi(x_1, x_2)$ vil sædvanligvis kunne vælges på flere måder, men vi kan tænke os, at vi for hvert par (x_1, x_2) har truffet et bestemt valg af $\xi(x_1, x_2)$, således at (1) gælder. Derved har vi defineret en afbildning $\xi: I \times I$ ind i I. Vi gentager, at denne afbildning sædvanligvis kan vælges på mange måder. Vi vil samtidig understrege, at det sædvanligvis ikke lader sig gøre at vælge ξ som en kontinuert afbildning. Vi viser dette ved et simpelt eksempel.

Vi tænker os, at I er et afsluttet interval $[a,b]$, og at det grafiske billede af f ser ud som antydet på figuren. Lad os antage, at (1) er opfyldt for alle $x_1, x_2 \in [a,b]$, og at ξ er kontinuert. Nu er altså $Df(\xi(a,b)) = 0$, så $\xi(a,b)$ er enten maksimums- eller



minimumspunktet, lad os antage maksimumspunktet (den anden mulighed kan behandles analogt). Nu er den ved $\varphi(x) = \xi(x,b)$ definerede afbildning $\varphi:[a,b]$ ind i $[a,b]$ kontinuert. Relationen (1) giver

$$Df(\varphi(x)) = \frac{-f(x)}{b - x} .$$

Størrelsen på højre side antager som sin mindste værdi hældningen af linien l for $x = a_1$. For $x \in]a_1,b_1[$ er $Df(x)$ mindre end denne værdi, og $\varphi(x)$ antager derfor ikke værdier i intervallet $]a_1,b_1[$. For $x > a_1$ gælder altså $\varphi(x) \in [b_1,b[$. Den kontinuerte funktion φ antager således værdier i $]a,a_1]$ og i $[b_1,b]$, men ikke i $]a_1,b_1[$. Dette strider mod en fra gymnasieundervisningen kendt sætning om kontinuerte funktioner.

13.6. I det følgende vil vi systematisk anvende betegnelsen $a + \Theta h$ for et punkt mellem a og a+h, idet Θ skal betyde et tal i intervallet $]0,1[$. Middelværdisætningen giver da for en differentiabel afbildning $f:I$ ind i $\dot{R}$, hvor I er et interval, en relation

$$\Delta f(x,h) = Df(x+\Theta h)h,$$

som er gyldig for et $(x,h) \in \Delta I$. Tallet Θ vil selvfølgelig afhænge af x og h, og vi kan antyde dette ved at skrive relationen på den præcisere form

$$\Delta f(x,h) = Df(x + \Theta(x,h)h)h,$$

og her er Θ altså en afbildning af ΔI ind i $]0,1[$. Det fremgår af overvejelserne i 13.5, at Θ ikke altid vil være kontinuert. På den anden side vil den ved $\Theta(x,h)h$ definerede afbildning være kontinuert i alle punkter $(x,0)$, $x \in I$.

Det vil ikke være hensigtsmæssigt fuldt ud at reservere bogstavet Θ til den her omtalte særlige brug. I de nærmest følgende afsnit vil bogstavet Θ dog ikke blive brugt til andet.

Som et eksempel vil vi vise sætningen:

13.6.1. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et interval og $f:I$ ind i $\dot{R}$ en kontinuert afbildning. Lad $a \in I$ være et vilkårligt punkt.

Hvis restriktionen af f til $I \setminus \{a\}$ er differentiabel, og Df har en grænseværdi b i punktet a, da er f differentiabel i punktet a med differentialkvotienten b.

Bevis. Middelværdisætningen giver for $h \neq 0$, at

$$\Delta f(a,h) = Df(a + \Theta(h)h)h.$$

For $h \to 0$ har $Df(a + \Theta(h)h)$ grænseværdien b, og vi kan derfor skrive

$$Df(a + \Theta(h)h) = b + \alpha(h),$$

hvor α er en α-funktion. Altså er

$$\Delta f(a,h) = bh + \alpha(h)h,$$

og denne opspaltning viser netop, at f er differentiabel i punktet a med differentialkvotienten b.

Vi har tidligere set, at differentialkvotienten af en funktion, som er differentiabel i et interval I, kan have diskontinuitetspunkter i I. Det fremgår af den netop viste sætning, at differentialkvotienten ikke vil have nogen grænseværdi i sine diskontinuitetspunkter.

13.7. Vi vil nu vise et eksempel på en ganske tilsvarende anvendelse af den udvidede middelværdisætning.

13.7.1. L'Hospital's regel. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et interval, $a \in I$ et punkt og $f,g{:}I$ ind i $\mathring{R}$ kontinuerte afbildninger. Vi antager, at f og g er differentiable på $I \setminus \{a\}$, at $f(a) = g(a) = 0$, og at $Dg(x) \neq 0$ for alle $x \in I \setminus \{a\}$. Da gælder

$$(2) \qquad \lim_{x \to a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = b \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Påstanden gælder, selvom $b = \infty$ eller $b = -\infty$.

Bevis. Ifølge den udvidede middelværdisætning kan $\Theta(h)$ vælges, således at

$$(f(a+h)-f(a))Dg(a+\Theta(h)h) = (g(a+h)-g(a))Df(a+\Theta(h)),$$

og da $f(a) = f(b) = 0$, medens $Dg(a + \Theta(h)h) \neq 0$ for $h \neq 0$, får vi for $h \neq 0$, $a + h \in I$, at

$$(3) \qquad \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{Df(a+\Theta(h)h)}{Dg(a+\Theta(h)h)} .$$

Lad os nu antage, at betingelsen på venstre side af medføringspilen i (2) er opfyldt. Udtrykket på højre side i (2) vil da have grænseværdien b i punktet 0, og det samme gælder da for udtrykket på venstre side. Dermed er påstanden bevist.

Eksempel. Vi vælger $I = \check{R}$, $a = 0$ og

$$f(x) = x\sin x + \cos x - 1, \qquad g(x) = \sin^2 x,$$

hvilket giver

$$Df(x) = x\cos x, \qquad Dg(x) = 2\sin x\cos x.$$

Vi bemærker, at betingelsen $Dg(x) \neq 0$ ikke er opfyldt på hele $\check{R} \setminus \{0\}$, men vi kan indskrænke I til $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, og betingelsen vil da være opfyldt. Vi kan da anvende l'Hospital's regel, og vi får

$$\frac{Df(x)}{Dg(x)} = \frac{x}{2\sin x} .$$

Den således definerede funktion har grænseværdien $\frac{1}{2}$ i punktet 0, og ifølge l'Hospital's regel har vi derfor

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

En alternativ behandlingsmetode af grænseværdibestemmelse består i udnyttelse af udviklingerne af f(x) og g(x) i potensrækker, hvis sådanne foreligger. Det vil da oftest være hensigtsmæssigt at foretage en transformation, således at problemet kommer til at vedrøre grænseværdien i punktet 0.

Eksempel. Vi vælger $I =]0,\infty[$, $a = 1$ og

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}e(x+1), \qquad g(x) = 2(\sqrt{x} - 1) - \log x.$$

Ved at sætte $x = 1+h$ og benytte potensrækkeudviklingerne, får vi

$$f(1+h) = e(e^h-1-h) = e(\frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \ldots)$$

$$g(1+h) = 2(\sqrt{1+h}-1) - \log(1+h) =$$

$$2\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 - \ldots\right) - \left(h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \ldots\right) =$$

$$\frac{1}{4}h^2 - \frac{5}{24}h^3 + \ldots .$$

Heraf følger

$$\frac{f(1+h)}{g(1+h)} = \frac{e(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}h + \ldots)}{\frac{1}{4} - \frac{5}{24}h + \ldots},$$

hvilket viser, at

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 2e.$$

Vi har her benyttet, at potensrækkerne er kontinuerte for $h = 0$. Det er åbenbart slet ikke nødvendigt at udregne det n^{te} led i potensrækken for vilkårligt n. Ovenfor har vi endda udregnet et led mere end nødvendigt. Ved "praktisk" anvendelse af metoden bør man selvfølgelig undgå at udregne flere potensrækkeled end strengt nødvendigt.

En række grænseværdiproblemer af helt anden type kan omformes til problemer af den omtalte slags. Vi betragter f.eks. $I =]0,\frac{\pi}{2}[$ og den ved $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ definerede afbildning $f: I$ ind i $\mathbf{R}$. Vi har da

$$\log f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{(\log \sin x)^{-1}},$$

og her har funktionerne i tælleren og nævneren begge grænseværdi 0 i punktet 0. Vi kan da forsøge at anvende l'Hospitals regel. Tællerens differentialkvotient er $\cos^{-2}x$ og har grænseværdien 1 i punktet 0. Nævnerens differentialkvotient er $-(\log\sin x)^{-2}$ $\cot x$, og her går den første faktor mod 0, medens den anden går mod ∞. Vi kunne forsøge at anvende l'Hospital's regel igen, men hver ny anvendelse vil bare gøre udtrykket mere kompliceret. Det er bedre i dette tilfælde at benytte omskrivningen

$$\log f(x) = \frac{-\log\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} \cdot \frac{1}{\cos x} ,$$

og den i kapitel 2 omtalte regel om at en potensfunktion sejrer over en logaritmefunktion giver da umiddelbart, at $\log f(x)$ har grænseværdien 0 i punktet 0,og det medfører, at $f(x)$ har grænseværdien 1 i punktet 0.

Ingen af de her omtalte metoder til grænseværdibestemmelse er universelt anvendelige, men en stor del af de mere dagligdags grænseværdiproblemer kan løses ved mindst 1 af de 3 metoder, vi her har peget på.

13.8. Vi går nu over til at anvende middelværdisætningen på funktioner af flere variable. Da vi i kapitel 10 omtalte differentiation af funktioner af flere variable for første gang, lovede vi at vise, at en funktion er differentiabel, hvis den har kontinuerte partielle differentialkvotienter. Vi vil nu holde dette løfte, idet vi beviser følgende sætning:

13.8.1. <u>Sætning</u>. Lad $0 \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde og $f:0$ ind i $\grave{R}$ en afbildning, hvis partielle differentialkvotienter $D_1f, \dots,$ D_nf eksisterer overalt i 0. Hvis $D_1f_1, \dots, D_nf$ alle er kontinuerte i et punkt $\underline{a} \in 0$, da er f differentiabel i punktet a.

Bevis. For $n = 1$ indeholder sætningen intet nyt. Vi vil føre beviset ved induktion efter n, og vi antager derfor, at den sætning, der fås af 13.8.1 ved at erstatte n med n-1 er rigtig for alle valg af O og f.

Vi vælger $\delta > 0$, således at

$$[a_1-\delta, a_1+\delta] \times \dots \times [a_n-\delta, a_n+\delta] \subseteq O.$$

Vi skal studere tilvækstfunktionen $\Delta_{\underline{a}} f$ defineret ved

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}),$$

og det er nok at undersøge den for

$$|h_1| \leq \delta, \dots, |h_n| \leq \delta.$$

Vi sætter

$$\underline{h}' = (h_1, \dots, h_{n-1}, 0), \quad \underline{h}'' = (0, \dots, 0, h_n),$$

og vi har da

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = (f(\underline{a}+\underline{h}') - f(\underline{a})) + (f(\underline{a}+\underline{h}'+\underline{h}'') - f(\underline{a}+\underline{h}')).$$

Restriktionen af f til den ved $x_n = a_n$ bestemte hyperplan kan på nærliggende måde opfattes som en funktion af n-1 og variable, og den er ifølge induktionsforudsætningen differentiabel i $(a_1, \dots, a_{n-1})$, så vi har opspaltningen

$$f(\underline{a}+\underline{h}') - f(\underline{a}) = D_1 f(\underline{a})h_1 + \dots + D_{n-1} f(\underline{a})h_{n-1} + \alpha_1(\underline{h}')\|\underline{h}\|,$$

hvor α_1 er en α-funktion.

Restriktionen af f til den ved

$$x_1 = a_1+h_1, \dots, \quad x_{n-1} = a_{n-1}$$

bestemte rette linie kan på nærliggende måde opfattes som en funktion af én variabel, og da den er differentiabel, kan vi anvende middelværdisætningen, som giver

$$f(\underline{a}+\underline{h}'+\underline{h}'') - f(\underline{a}+\underline{h}') = D_n f(\underline{a}+\underline{h}'+\Theta(\underline{h}', \underline{h}'')\underline{h}'')h_n.$$

Nu er $\underline{h}'$ og $\underline{h}''$ projektioner af $\underline{h}$ på 2 forskellige underrum af R^n. Endvidere er $D_n f$ kontinuert i punktet $\underline{a}$. Deraf følger, at

$$D_n f(\underline{a}+\underline{h}'+\Theta(\underline{h}', \underline{h}'')\underline{h}'') = D_n f(\underline{a}) + \alpha_2(\underline{h}),$$

hvor α_2 er en α-funktion.

Ved at sammenfatte de to opspaltninger får vi

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = D_1 f(\underline{a}) h_1 + \ldots + D_n f(\underline{a}) h_n + \alpha(\underline{h}) \|\underline{h}\|,$$

hvor

$$\alpha(\underline{h}) = \alpha_1(\underline{h}') \frac{\|\underline{h}'\|}{\|\underline{h}\|} \quad \alpha_2(\underline{h}) \frac{h_n}{\|\underline{h}\|} \quad .$$

Da projektion er afstandsformindskende er

$$\frac{\|\underline{h}'\|}{\|\underline{h}\|} \quad \text{og} \quad \frac{h_n}{\|\underline{h}\|}$$

numerisk mindre end 1, hvilket medfører, at α er en α-funktion. Dermed er sætningen bevist.

13.9. Ved gentagen partiel differentiation kan vi danne partielle differentialkvotienter af højere orden ligesom vi i gymnasiet har mødt sædvanlige differentialkvotienter af højere orden. Ved dannelsen af partielle differentialkvotienter af højere orden er det en væsentlig simplifikation, at differentiationernes rækkefølge ingen rolle spiller, så længe de optrædende differentialkvotienter er kontinuerte. Vi viser dette i det simpleste tilfælde, og vi skal bagefter se at det almindelige tilfælde udledes umiddelbart af det specielle.

13.9.1. Sætning. Lad $O \subseteq \grave{R}^2$ være en åben mængde og $f:O$ ind i $\grave{R}$ en afbildning. Hvis de partielle afledede $D_1 f$, $D_2 f$ og $D_2 D_1 f$ alle eksisterer i hele O, og $D_2 D_1 f$ er kontinuert i et punkt $\underline{a} \in O$, da eksisterer $D_1 D_2 f(\underline{a})$, og $D_1 D_2 f(\underline{a}) = D_2 D_1 f(\underline{a})$.

Bevis. Vi vælger $\delta > 0$, således at

$$[a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times [a_2 - \delta, a_2 + \delta] \subset O,$$

og for vilkårlige tal h_1, h_2 med $|h_1| \leqq \delta$, $|h_2| \leqq \delta$ indfører vi udtrykket

$$\Delta(h_1, h_2) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2).$$

Den ved

$$\varphi(\underline{x}) = f(x, a_2+h_2) - f(x, a_2)$$

definerede hjælpefunktion er differentiabel på intervallet $[a_1 - \delta, a_1 + \delta]$, og middelværdisætningen giver derfor

$$\Delta(h_1,h_2) = \varphi(a_1+h_1) - \varphi(a_1) = D\varphi(a_1+\Theta_1(h_1,h_2)h_1)h_1 =$$
$$h_1\Big(D_1f(a_1+\Theta_1(h_1,h_2)h_1, a_2+h_2) - D_1f(a_1+\Theta_1(h_1,h_2)h_1, a_2)\Big).$$

Indførelsen af hjælpefunktionen φ var en snedighed, der havde til formål at sikre, at den første variabel fik samme værdi i begge udtrykkene i den store parentes. Da D_1f er forudsat partielt differentiabel med hensyn til x_2, kan vi anvende middelværdisætningen igen, idet den første variabel tænkes fast. Derved får vi

$$\Delta(h_1,h_2) = h_1h_2\ D_2D_1f(a_1+\Theta_1(h_1,h_2)h_1, a_2+\Theta_2(h_1,h_2)h_2).$$

Da D_2D_1f er kontinuert i $\underline{a}$, kan dette skrives

$$\Delta(h_1,h_2) = D_2D_1f(\underline{a})h_1h_2 + \alpha_1(h_1,h_2)h_1h_2,$$

hvor α_1 er kontinuert i $(0,0)$ og $\alpha_1(0,0) = 0$.

Den ved

$\psi(x) = f(a_1+h_1, x) - f(a_1, x)$ definerede hjælpefunktion er differentiabel i punktet a_2. Altså har vi en opspaltning

$$\Delta(h_1,h_2) = \psi(a_2+h_2) - \psi(a_2) =$$
$$\Delta_{\underline{a}}\psi(h_2) = D\psi(a_2)h_2 + \alpha^1(h_1,h_2)h_2,$$

hvor α^1 for hver fast værdi af h_1 er en kontinuert funktion af h_2, og $\alpha^1(h_1,0) = 0$. Vi indsætter nu udtrykket for ψ, og relationen bliver

$$\Delta(h_1,h_2) = (D_2f(a_1+h_1,a_2) - D_2f(a_1,a_2))h_2 + \alpha^1(h_1,h_2)h_2.$$

For $h_1 \neq 0$, $|h_1| \leqq \delta$ kan vi vælge $\alpha(h_1)$, således at vi har

$$D_2f(a_1+h_1,a_2) - D_2f(a_1,a_2) = D_2D_1f(\underline{a})h_1 + \alpha(h_1)h_1,$$

og ved at sammenholde de to udtryk for $\Delta(h_1,h_2)$ får vi, at

$$\alpha(h_1) = \alpha_1(h_1,h_2) + h_1^{-1}\alpha^1(h_1,h_2),$$

når hverken h_1 eller h_2 er 0. Hvis vi holder h_1 fast og foretager grænseovergangen $h_2 \to 0$ vil det sidste led gå mod 0. Altså er

$$\alpha(h_1) = \lim_{h_2\to 0}\alpha_1(h_1,h_2).$$

Heraf følger umiddelbart, at α er en ε-funktion. Vi kan nemlig for $\varepsilon > 0$ vælge $\eta > 0$, således at

$$|\alpha_1(h_1,h_2)| \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad |h_1| \leqq \eta,\ |h_2| \leqq \eta,$$

og vi har da

$$|\alpha(h_1)| \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad |h_1| \leqq \eta.$$

Dermed er sætningen bevist.

13.10. Lad $O \subseteq \dot{R}^n$ være en åben mængde og $f:O$ ind i $\dot{R}$ en afbildning. Hvis det for et tal $p \in \dot{N}$ gælder, at alle partielle differentialkvotienter af f af orden $\leqq p$ eksisterer og er kontinuerte, kaldes f en p <u>gange kontinuert differentiabel</u> funktion. Af sætning 13.8.1 følger, at alle differentialkvotienter af f af orden $\leqq p-1$ er differentiable funktioner. Vi ser også, at det er tilstrækkeligt at forlange, at de partielle differentialkvotienter af orden p alle er kontinuerte, idet sætning 13.8.1 sikrer, at de partielle differentialkvotienter af orden $p-1$ er kontinuerte o.s.v.

Af sætning 13.9.1 følger nu, at en partiel differentialkvotient af orden $\leqq p$ forbliver uændret, når to på hinanden følgende differentiationer ombyttes. Fra permutationsteorien ved vi, at enhver rækkefølge kan fås ud fra den foreliggende ved successiv ombytning af umiddelbart efter hinanden følgende differentiationer. En vilkårlig permutation af differentiationerne vil altså ikke ændre den partielle differentialkvotient.

Ved opskrivning af symbolet for en partiel differentialkvotient kan man altså i det foreliggende tilfælde skrive alle differentiationerne med hensyn til samme variabel umiddelbart efter hinanden, f.eks.

$$D_n^{p_n} \cdots D_2^{p_2} D_1^{p_1} f,$$

hvor eksponenterne angiver antallet af differentiationer med hensyn til hver variabel, og hvor altså

$$p_1 + \cdots + p_n \leqq p.$$

Hvis man skal udregne en partiel differentialkvotient af højere orden, vil man selvfølgelig udføre differentiationerne i den gunstigste rækkefølge - altså den rækkefølge, der giver mindst arbejde. Ved differentiation af et flerleddet udtryk kan man differentiere ledvis og for hvert led for sig udføre differentiationerne i den gunstigste rækkefølge. Man må sikre sig, at resultatet virkelig er uafhængigt af rækkefølgen, men hvis det forelagte udtryk er opbygget af vilkårlig ofte differentiable funktioner, går dette ofte ret let.

Skal man udregne alle de partielle differentialkvotienter af orden $\leqq p$, er det mest hensigtsmæssigt først at udregne alle af første orden, dernæst alle af anden orden o.s.v. Mange af de højere differentialkvotienter vil kunne udregnes på flere måder, og man kan da i hvert tilfælde vælge den letteste metode, men det vil være hensigtsmæssigt at udregne nogle af differentialkvotienterne på flere måder for kontrollens skyld.

13.11. Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde og $f:O$ ind i $\grave{R}$ en p gange kontinuert differentiabel afbildning. Lad $\underline{a} \in O$ og $\underline{h} \in \grave{R}^n$ være vilkårligt valgt. Vi sætter da

$$f_{\underline{a},\underline{h}}(t) = f(\underline{a}+t\underline{h}).$$

Derved har vi defineret en afbildning $f_{\underline{a},\underline{h}}$ af et interval omkring punktet 0 ind i de reelle tal. For $\underline{h} \neq \underline{0}$ er $\{\underline{a} + t\underline{h} \mid t \in R\}$ en ret linie i R^n, og funktionen $f_{\underline{a},\underline{h}}$ siges derfor at fremkomme ved at man betragter f på den rette linie gennem $\underline{a}$, hvis retning er fastlagt ved $\underline{h}$.

Af sætningen om differentiation af en sammensat funktion fås umiddelbart

$$Df_{\underline{a},\underline{h}}(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\underline{a}+t\underline{h})\, h_k,$$

altså specielt

$$Df_{\underline{a},\underline{h}}(\underline{0}) = D_1 f(\underline{a})h_1 + \dots + D_n f(\underline{a})h_n = df(\underline{a},\underline{h}).$$

Det totale differential i et punkt kan således fortolkes som en differentialkvotient af en funktion af én variabel.

I det specielle tilfælde, hvor $\|\underline{h}\| = 0$, vil afstanden mellem punkterne $\underline{a} + t_1\underline{h}$ og $\underline{a} + t_2\underline{h}$ netop være $|t_2 - t_1|$. Funktionen $f_{\underline{a},\underline{h}}$ bliver da netop restriktionen af f til den rette linie gennem $\underline{a}$ bestemt ved retningen $\underline{h}$, og $df(\underline{a},\underline{h})$ bliver da den sædvanlige differentialkvotient af denne restriktion. Størrelsen $df(\underline{a},\underline{h})$ kaldes derfor <u>retningsdifferentialkvotienten</u> af f i punktet $\underline{a}$ i den ved $\underline{h}$ bestemte retning.

De højere differentialkvotienter af $f_{\underline{a},\underline{h}}$ for $\underline{h} = \underline{0}$ kaldes også i <u>differentialer</u> af f af højere orden, og vi skriver

$$D^p f_{\underline{a},\underline{h}}(\underline{0}) = d^p f(\underline{a},\underline{h}).$$

Det således definerede differential af orden p er et polynomium, som er homogent af grad p i de variable $h_1, \dots, h_n$.

Det skal understreges, at den bekvemme differentiationsregel for sammensatte funktioner ikke gælder for differentialer af højere orden. Disse er blot indført, fordi de optræder i forskellige formler.

Vi skal nu udregne et eksplicit udtryk for $d^p f$. Til det formål viser vi først formlen

$$D^q f_{\underline{a},\underline{h}}(t) = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_q=1}^{n} D_{k_q} D_{k_{q-1}} \cdots D_{k_1} f(\underline{a}+t\underline{h}) h_{k_1} \cdots h_{k_q} ,$$

som gælder for $q = 1,\ldots,p$. Vi benytter induktion efter q. Først bemærker vi, at formlen er rigtig for $q = 1$. Dernæst antager vi, at den anførte formel er rigtig, og vi skal da blot vise den formel, der fås ved at erstatte q med $q+1$. Vi differentierer med hensyn til t og får

$$D^{q+1} f_{\underline{a},\underline{h}}(t) = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_q=1}^{n} D(D_{k_q} \cdots D_{k_1} f(\underline{a}+t\underline{h})) h_{k_1} \cdots h_{k_q} =$$

$$\sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_q=1}^{n} \Big(\sum_{k_{q+1}=1}^{n} D_{k_{q+1}} D_{k_q} \cdots D_{k_1} f(\underline{a}+t\underline{h}) h_{k_{q+1}} \Big) h_{k_1} \cdots h_{k_q} ,$$

og resultatet fås ved ombytning af summationerne. Dermed er formlen bevist.

Den netop beviste formel lider af den mangel, at der ikke er taget hensyn til, at mange led på grund af ombytteligheden af differentiationerne er identiske. Derfor vil vi undersøge, hvor mange af summens led, der er identiske med

$$D_n^{q_n} \cdots D_1^{q_1} f(\underline{a}+t\underline{h}) h_1^{q_1} \cdots h_n^{q_n},$$

hvor

$$0 \leq q_1 \leq p, \ldots, 0 \leq q_n \leq p, \; q_1 + \ldots + q_n = q.$$

Dette er et kombinatorisk problem, idet vi skal udregne, på hvor mange måder q_1 differentiationer med hensyn til den første variabel, q_2 differentiationer med hensyn til den anden variabel o.s.v. kan ordnes i en rækkefølge med q pladser. Vi kan da først vælge pladserne for differentiationerne med hensyn til den første variabel, og dette kan gøres på ialt

$$\binom{q}{q_1} = \binom{q_1+\dots+q_n}{q_1} = \frac{(q_1+\dots+q_n)!}{q_1!(q_2+\dots+q_n)!}$$

måder. Svarende til hvert af disse valg kan vi derefter vælge pladserne for de q_2 differentiationer med hensyn til den anden variabel på ialt

$$\frac{(q_2+\dots+q_n)!}{q_2!(q_3+\dots+q_n)!}$$

måder. Når vi går videre på denne måde og til sidst multiplicerer alle de fundne antal, får vi, at der ialt er

$$\frac{q!}{q_1!\dots q_n!}$$

led, som er identisk med det anførte. Altså er

$$D^q f_{\underline{a},\underline{h}}(t) = \sum_{q_1=0}^{n} \sum_{q_2=0}^{n-1} \dots \sum_{q_{n-1}=0}^{q-(q_1+\dots+q_{n-2})} \frac{q!}{q_1!\dots q_{n-1}!(q-(q_1+\dots+q_{n-1}))!} \cdot$$

$$D_n^{q-(q_1+\dots+q_{n-1})} D_{n-1}^{q_{n-1}} f(\underline{a}+t\underline{h}) h_1^{q_1} \dots h_{n-1}^{q_{n-1}} h_n^{q-(q_1+\dots+q_{n-1})}. \tag{4}$$

For $t = 0$ er dette udtryk netop $d^q f(\underline{a},\underline{h})$, og vi har således fået differentialet af vilkårlig orden udtrykt eksplicit ved de partielle differentialkvotienter af samme orden.

I praksis kan følgende huskeregel anbefales: Differentialet af orden q dannes, idet det totale differential opløftes til q^{te} potens, hvorefter enhver potens $(D_k f(\underline{a}))^\nu$ erstattes med

$D_k^{\nu} f(\underline{a})$.

Differentialet af anden orden er således en kvadratisk form med koefficientmatrix $(A_{\mu\nu})_{n,n}$, hvor

$$A_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu f(\underline{a}) = D_\nu D_\mu f(\underline{a}).$$

For en funktion af 2 variable har vi generelt

$$d^p f(\underline{a},\underline{h}) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} D_2^{p-q} D_1^q f(\underline{a}) h_1^q h_2^{p-q}$$

svarende til binomialformlen.

For en funktion af 1 variabel har vi differentialet

$$d^p f(x,h) = D^p f(x) h^p.$$

I traditionel skrivemåde skrives

$$y = f(x),\ h = dx,\quad d^p y = D^p f(x) dx^p,$$

og i overensstemmelse hermed skrives

$$D^p f(x) = \frac{d^p y}{dx^p}.$$

Af andre almindeligt benyttede betegnelser skal nævnes

$$D^p f(x) = \frac{d^p}{dx^p} f(x) = f^{(p)}(x) = y^{(p)}.$$

I analogi hermed skrives for en funktion af flere variable med $q_1+\dots+q_n = q$:

$$D_n^{q_n} \dots D_1^{q_1} f(\underline{x}) = \frac{\partial^q y}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} f(\underline{x}) =$$

$$f^{(q)}_{x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}}(\underline{x}) = y^{(q)}_{x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}}.$$

Hvor eksponenten er 0, kan vedkommende faktor udelades. For en funktion $z = f(x,y)$ af 2 variable er således

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3.$$

13.12. Vi vil et øjeblik beskæftige os med funktioner af én variabel, idet vi vil vise Taylor's formel i en skikkelse, der afviger væsentligt fra den i kapitel 2 anførte, først og fremmest ved, at der ikke indgår integraler.

13.12.1. Taylor's formel. Lad $[a,b] \subseteq \dot{R}$ være et interval og $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ en n-1 gange kontinuert differentiabel afbildning. Det antages, at restriktionen af $D^{n-1}f$ til $]a,b[$ er differentiabel. Svarende til et vilkårligt tal $p \in \dot{N}$ eksisterer der da et punkt $\xi \in]a,b[$, således at

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{D^n f(\xi)}{(n-1)!p}(b-\xi)^{n-p}(b-a)^p.$$

Bevis. Der findes i hvert fald et reelt tal K, således at

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(b-a)^k + K(b-a)^p. \tag{5}$$

Med denne værdi af K betragter vi den ved

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(x)}{k!}(b-x)^k - K(b-x)^p$$

definerede hjælpefunktion $\varphi:[a,b]$ ind i $\dot{R}$. Ifølge det givne er φ kontinuert, og restriktionen af φ til $]a,b[$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$D\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D^k f(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{k+1} f(x)}{k!}(b-x)^k + pK(b-x)^{p-1} =$$

$$pK(b-x)^{p-1} - \frac{D^n f(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Ved indsættelse ses umiddelbart, at $\varphi(b) = 0$. Vort specielle valg af konstanten K sikrer, at $\varphi(a) = 0$. Så eksisterer ifølge

Rolles sætning $\xi \in]a,b[$, således at $D\varphi(\xi) = 0$, altså

$$pK(b-\xi)^{p-1} = \frac{D^n f(\xi)}{(n-1)!}(b-\xi)^{n-1}.$$

Heraf bestemmes K og resultatet indsættes i (5). Dermed er sætningen bevist.

I beviset har vi ikke benyttet, at a er venstre og b højre intervalendepunkt. Vi kan derfor uden videre lade a og b bytte rolle. Vi vil foretrække, at skrive x for a og x+h for b, og vi kan da skrive $x+\Theta h$ for b, hvor Θ eller præcisere $\Theta_p(x,h)$ tilhører intervallet $]0,1[$. Taylors formel får da følgende udseende:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(x)\frac{h^k}{k!} + \frac{D^n f(x+\Theta h)}{(n-1)!\;p}(1-\Theta)^{n-p}h^n,$$

hvor det altså må erindres, at Θ afhænger af funktionen f, samt af n,p,x og h.

Den simpleste form af restleddet fås for p = n, og den kaldes <u>Lagrange's</u> restled. For p = 1 fås en ligeledes ret bekvem form, der kaldes <u>Cauchy</u>'s restled. Vi opskriver disse to restled

$$D^n f(x+\Theta h)\frac{h^n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}D^n f(x+\Theta' h)(1-\Theta')^{n-1}h^n,$$

idet vi understreger, at Θ og Θ' er forskellige. Det er praktisk talt aldrig nødvendigt at inddrage restled svarende til andre værdier af p.

Ved en restledsvurdering har man normalt ikke anden viden om Θ, end at $\Theta \in]0,1[$, og derfor kan det meget vel indtræffe, at det ene restled giver skarpere resultat end det andet. Vi vil illustrere dette med det specielle eksempel

$$f(x) = \log x, \quad x = 1.$$

Her er

$$D^n f(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad n > 0.$$

Lagrange's restled antager derfor formen

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{h}{1+\Theta h}\right)^n .$$

Når vi ikke ved andet om Θ, end at $\Theta \in]0,1[$ må vi åbenbart antage, at $|1+\Theta h| \geqq |h|$ for at kunne slutte, at dette restled konvergerer mod 0. Det lykkes altså at gennemføre beviset for $h \in [-\frac{1}{2},1]$. Cauchy's restled antager formen

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{1+\Theta' h} \left(\frac{1-\Theta'}{1+\Theta' h}\right)^{n-1} h^n .$$

For $|h| < 1$ er $0 < 1-\Theta' < 1 + \Theta' h$, og det ses umiddelbart, at restleddet konvergerer mod 0. For $h = 1$ får restleddet den numeriske værdi

$$\frac{(1-\Theta')^{n-1}}{(1+\Theta')^n},$$

og når vi kun ved, at $\Theta' \in]0,1[$, kan f.eks. muligheden $\Theta' = \frac{1}{n}$ ikke udelukkes, og brøken vil med denne værdi af Θ' konvergere mod e^{-2}. Beviset lykkes således for $h \in]-1,1[$.

13.13. Differentialligningens middelværdisætning kan overføres til funktioner af flere variable i følgende formulering:

13.13.1. <u>Sætning</u>. Lad $O \subseteqq \mathring{R}^n$ være en åben mængde, $f:O$ ind i $\mathring{R}$ en differential afbildning, $\underline{a} \in O$ et punkt og $\underline{h} \in \mathring{R}^n$ et punkt for hvilket betingelsen

$$(6) \qquad \forall\, t \in [0,1](\underline{a} + t\underline{h} \in O)$$

er opfyldt. Da eksisterer der et tal $\Theta \in]0,1[$, således at

$$f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{j=0}^{n} D_j f(\underline{a}+\Theta\underline{h}) h_j .$$

Bevis. Hvis vi som i 13.11 indfører

$$f_{\underline{a},\underline{h}}(t) = f(\underline{a}+t\underline{h})$$

er relationen, vi skal vise, ensbetydende med

$$f_{\underline{a},\underline{h}}(1) - f_{\underline{a},\underline{h}}(0) = Df_{\underline{a},\underline{h}}(\Theta),$$

og da $f_{\underline{a},\underline{h}}$ er differentiabel på intervallet $[0,1]$ er dette blot et specielt tilfælde af differentialregningens middelværdisætning for funktioner af én variabel.

På ganske tilsvarende måde overføres Taylors formel til funktioner af flere variable. Vi vil kun gennemføre dette for rækken med Lagrange's restled.

13.13.2. Sætning. Lad $O \subseteq \mathring{R}^n$ være en åben mængde, $f:O$ ind i $\mathring{R}$ en p gange kontinuert differentiabel afbildning, $\underline{a} \in O$ et punkt og $\underline{h} \in \mathring{R}^n$ et punkt, for hvilket (6) gælder. Da eksisterer der et tal $\Theta \in \,]0,1[$, således at

$$(7) \qquad f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} d^k f(\underline{a},\underline{h}) + D^p f_{\underline{a},\underline{h}}(\Theta).$$

Bevis. Den anførte formel er ensbetydende med

$$f_{\underline{a},\underline{h}}(1) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} D^k f_{\underline{a},\underline{h}}(0) + D^p f_{\underline{a},\underline{h}}(\Theta),$$

men det er jo blot Taylors formel med Lagrange's restled anvendt på $f_{\underline{a},\underline{h}}$ på intervallet $[0,1]$.

Taylor's formel kan også fortolkes som en generalisation af den opspaltning af funktionstilvæksten, der indgår i definitionen af differentiabilitet. Dette kommer til udtryk i følgende sætning:

13.3.3. Taylor's grænseformel. Lad $O \subseteq \mathring{R}^n$ være en åben mængde, $f:O$ ind i $\mathring{R}$ en p gange kontinuert differentiabel funktion og $\underline{a} \in O$ et punkt. Vi har da en opspaltning

$$\Delta f_{\underline{a}}(\underline{h}) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^k f(\underline{a},\underline{h}) + \alpha(\underline{h})\|\underline{h}\|^p,$$

hvor α er en α-funktion.

Bevis. For restleddet i (7) har vi udtrykket (4) i 13.11, hvor t erstattes med Θ og q med p. For hvert $q_1,\ldots,q_n$ med $q_1 \geqq 0,\ldots,q_n \geqq 0$, $q_1 +\ldots+ q_n = p$ har vi en opspaltning

$$D_n^{q_n}\ldots D_1^{q_1} f(\underline{a}+\Theta\underline{h}) = D_m^{q_n}\ldots D_1^{q_1} f(\underline{a}) + \alpha_{q_1\ldots q_n}(\underline{h}),$$

hvor $\alpha_{q_1\ldots q_n}$ er en α-funktion. Da $|h_\nu| \leqq \|\underline{h}\|$ for $\nu = 1,\ldots,n$, følger heraf, at

$$D_n^{q_n}\ldots D_1^{q_1} f(\underline{a}+\Theta\underline{h})h_1^{q_1}\ldots h_n^{q_n} = D_n^{q_n}\ldots D_1^{q_1} f(\underline{a})h_1^{q_n}\ldots h_n^{q_n} + \alpha'_{q_1,\ldots,q_n}(\underline{h}) \|\underline{h}\|^p,$$

hvor

$$\alpha'_{q_1\ldots q_n}(\underline{h}) = \alpha_{q_1,\ldots,q_n}(\underline{h})\left(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{h_n}{\|\underline{h}\|}\right)^{q_n}$$

er en α-funktion. Ved at anvende den her angivne opspaltning på hvert led i den endelige sum i (4) får vi

$$D^p d_{\underline{a},\underline{h}}(\Theta) = D^p f_{\underline{a},\underline{h}}(0) + \alpha'(\underline{h})\|\underline{h}\|^p,$$

hvor α' er en α-funktion. Heraf følger umiddelbart den ønskede omskrivning af formel (7).

13.14. Taylor's grænseformel er et nyttigt hjælpemiddel ved studiet af en funktions forhold i omegnen af et punkt. Vi skal her kort omtale dens anvendelse ved bestemmelse af relative maksima og minima. Først må vi imidlertid kort diskutere homogene polynomier og deres egenskaber.

Vi minder om, at et udtryk af formen

$$a\, h_1^{p_1}\ldots h_n^{p_n},$$

hvor $p_1,\dots,p_n$ er ikke negative, hele tal, medens a er en reel konstant, kaldes et <u>monomium</u> af <u>grad</u> $p = p_1 +\dots+ p_n$ i de variable $h_1,\dots,h_n$. Et udtryk $P(\underline{h})$, der er en sum af endelig mange mononier af samme grad p kaldes et <u>homogent polynomium af grad</u> p. Udtrykket $P(\underline{h})$ kan altid reduceres, så der højst forekommer ét monomium med hvert eksponentsæt $(p_1,\dots,p_n)$, hvor $p_1 +\dots+ p_n = p$. Vi vil i dette afsnit skelne skarpt mellem det homogene polynomium og den ved det homogene polynomium definerede afbildning P.

Differentialerne $d^kf(\underline{a},\underline{h})$ er eksempler på homogene polynomier. Graden er lig med ordenen k.

Vi bemærker først, at et homogent polynomium P af grad p for alle $\underline{h} \in \mathring{R}^n$ og alle $t \in \mathring{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$P(t\underline{h}) = t^pP(\underline{h}).$$

Heraf følger umiddelbart:

Hvis $\underline{h}^\circ$ er et nulpunkt for P (d.v.s. $P(h^\circ) = 0$), da er ethvert punkt af den rette linie $\{t\underline{h}^\circ \mid t \in \mathring{R}\}$ nulpunkt for P.

Mængden af nulpunkter for P er således foreningsmængden af et system af rette linier gennem $\underline{0}$, og den kaldes derfor polynomiets <u>nulkegle</u>.

For et polynomium $P(\underline{h})$, der er reduceret så meget som muligt, gælder det almindeligt, at polynomiet ikke bliver 0 for alle $\underline{h}$ med mindre alle dets koefficienter er 0. For polynomier af 1 variabel følger dette af den fra gymnasieundervisningen kendte sætning om, at et polynomium højst har så mange rødder som graden angiver. For et polynomium af n variable vises påstanden ved induktion, idet polynomiet $P(\underline{h})$ kan skrives på formen

$$P(\underline{h}) = A_0(h_2,\dots,h_n)h_1^q + A_1(h_2,\dots,h_n)h_1^{q-1} +\dots+ A_q(h_2,\dots,h_n),$$

hvor koefficienterne $A_0,\dots,A_q$ er polynomier, blandt hvilke mindst 1 ikke har alle koefficienterne lig nul. Hvis påstanden er rigtig for n-1 variable, kan vi altså vælge $h_2,\dots,h_n$, således at mindst 1 af polynomierne $A_k(h_2,\dots,h_n)$ får en fra 0 forskellig værdi, og ifølge det allerede viste for polynomier af 1 variabel, kan vi derefter vælge h_1, således at $P(\underline{h})$ ikke bliver 0.

Et homogent polynomium $P(\underline{h})$ kaldes <u>positivt semidefinit</u>, hvis det kun antager værdier i $[0,\infty[$. Analogt defineres <u>negativt semidefinit</u>. Et positivt semidefinit homogent polynomium kaldes <u>positivt definit</u>, hvis værdien 0 kun antages i punktet $\underline{0}$. Analogt defineres <u>negativt definit</u>. Vi siger, at et homogent polynomium er <u>semidefinit</u> hvis det er positivt semidefinit eller negativt semidefinit. Tilsvarende for <u>definit</u>.

Det viser sig nu, at undersøgelsen af, om en funktion har et maksimum eller et minimum i et givet punkt, i det væsentlige reduceres til spørgsmålet, om et af dens differentialer i vedkommende punkt er definit eller eventuelt semidefinit. Gennemførelsen af en sådan diskussion kan være meget vanskelig, og vi må nøjes med at anføre nogle regler, der klarer problemet i de simpleste tilfælde.

1. Hvis et homogent polynomium af ulige grad ikke forsvinder identisk, er det ikke semidefinit.

Et homogent polynomium P af ulige grad tilfredsstiller nemlig relationen $P(-\underline{h}) = -P(\underline{h})$. Hvis det antager en værdi $c \neq 0$ vil det derfor også antage værdien $-c$.

2. Hvis et reduceret homogent polynomium indeholder led ah_μ^p og bh_ν^p, hvor $a > 0$ og $b < 0$, er det ikke semidefinit.

Dette følger af, at polynomiet for $h_\mu = 1$ og de øvrige variable lig 0 antager værdien a, medens det for $h_\nu = 1$ og de øvrige variable lig 0 antager værdien b.

3. Hvis et reduceret homogent polynomium af lige grad p er positivt (negativt) definit, indeholder det alle leddene $a_\nu h_\gamma^p$, $\nu = 1,\dots,n$, og de har alle positive (negative) koefficienter.

Hvis leddet $a_\gamma h_\gamma^p$ mangler, antager polynomiet værdien 0 for $h_\nu = 1$ og de øvrige variable lig 0, og det er således ikke definit. Derefter følger påstanden af regel nr. 2.

Mere almindeligt kan man slutte, at en homogent polynomium, der ikke forsvinder identisk, ikke er semidefinit, hvis fortegnsskifte for visse variable bevirker, at polynomiet skifter fortegn.

Hvis de her anførte regler ikke hindrer, at polynomiet er positivt definit (eller semidefinit), kan man forsøge at skrive polynomiet som en sum af kvadrater. Udfaldet af et sådant forsøg vil i visse tilfælde give svaret. For et polynomium af 2$^{\text{den}}$ grad kan undersøgelse altid gennemføres på denne måde. Vi illustrerer metoden ved et eksempel:

$$P(\underline{h}) = h_1^2+2h_2^2+6h_3^2+7h_4^2-2h_1h_2-2h_1h_3+2h_1h_4-2h_2h_3-8h_3h_4.$$

Da alle kvadratleddene har positive koefficienter, er der mulighed for, at P er positivt definit. Vi fraspalter nu et kvadrat, som indeholder alle de led i P, hvori h_1 forekommer. Til det formål må vi åbenbart vælge

$$(h_1 - h_2 - h_3 + h_4)^2 =$$

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2+h_4^2-2h_1h_2-2h_1h_3+2h_1h_4+2h_2h_3-2h_2h_4-2h_3h_4.$$

Vi får således

$$P(\underline{h}) = (h_1-h_2-h_3+h_4)^2+h_2^2+5h_3^2+6h_4^2-4h_2h_3+2h_2h_4-6h_3h_4.$$

Hvis restpolynomiet for passende valg af h_2, h_3 og h_4 kunne antage både positive og negative værdier, kunne vi supplere med et h_1, således at kvadratet forsvinder, og vi ville således kunne slutte, at P ikke kunne være semidefinit. Nu er der imidlertid mulighed for, at restpolynomiet er positivt definit, og vi fraspalter derfor et kvadrat, der indeholder alle led, i hvilke h_2 forekommer. Dertil må vi åbenbart vælge

$$(h_2-2h_3+h_4)^2 = h_2^2+4h_3^2+h_4^2-4h_2h_3+2h_2h_4-4h_3h_4,$$

så vi får

$$P(\underline{h}) = (h_1-h_2-h_3+h_4)^2 + (h_2-2h_3+h_4)^2+h_3^2+5h_4^2-2h_3h_4.$$

Nu afhænger restpolynomiet kun af 2 variable, og vi kan afgøre ved metoder, der er kendt fra gymnasiet, at det er positivt definit. Vi kan imidlertid også fuldføre opspaltningsprocessen, hvilket giver

$$P(\underline{h}) = (h_1-h_2-h_3+h_4)^2 + (h_2-2h_3+h_4)^2 + (h_3-h_4)^2 + 4h_4^2.$$

Dette viser umiddelbart, at P er positivt semidefinit. For at afgøre, om P er positivt definit, må vi finde nulpunkterne for P. Disse må åbenbart tilfredsstille ligningssystemet

$$h_1-h_2-h_3+h_4 = h_2-2h_2+h_4 = h_3-h_4 = h_4 = 0,$$

og dette system har kun løsningen $\underline{h} = \underline{0}$. Altså er P positivt definit.

Vi får endvidere brug for følgende hjælpesætning:

13.14.1. Lemma. Til et positivt definit homogent polynomium $P(\underline{h})$ af grad p svarer et reelt tal $\kappa > 0$, således at uligheden

$$P(\underline{h}) \geq \kappa \|\underline{h}\|^p$$

er opfyldt for enhver vektor $\underline{h}$.

Bevis. Kugleoverfladen

$$K = \{\underline{h} \mid \|\underline{h}\| = 1\}$$

er en kompakt mængde, og afbildningen P:K ind i $\grave{R}$ antager derfor en mindste funktionsværdi κ på K. Da P er positivt definit, er $\kappa > 0$. Nu fås

$$P(\underline{h}) = \|\underline{h}\|^p \, P\left(\frac{\underline{h}}{\|\underline{h}\|}\right) \geqq \kappa \, \|\underline{h}\|^p,$$

og dermed er sætningen bevist.

13.15. Vi går nu over til at omtale bestemmelse af maksimumspunkter og minimumspunkter for funktioner af én eller flere variable. Vi indleder med definitionen af begreberne.

13.15.1. <u>Definition</u>. Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde, og lad f:O ind i $\grave{R}$ være en vilkårlig funktion. Et punkt $\underline{a} \in O$ kaldes et <u>minimumspunkt</u> for f og funktionsværdien $f(\underline{a})$ en <u>minimumsværdi</u> for f, såfremt

$$\exists U \in \ddot{U}(\underline{a}) \; \forall \underline{x} \in U \setminus \{\underline{a}\} . (f(\underline{x}) > f(\underline{a})).$$

Hvis uligheden gælder med < i stedet for >, kaldes $\underline{a}$ et <u>maksimumspunkt</u> og $f(\underline{a})$ en <u>maksimumsværdi</u>. Hvis uligheden gælder med $\geqq$, kaldes $\underline{a}$ et svagt <u>minimumspunkt</u> og $f(\underline{a})$ en svag <u>minimumsværdi</u>. Analogt indføres <u>svagt maksimumspunkt og svag maksimumsværdi</u>.

Bestemmelsen af maksimums- og minimumspunkter kan i de fleste tilfælde baseres på følgende sætning:

13.5.2. <u>Sætning</u>. Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde, $\underline{a} \in O$ et punkt og f:O ind i $\grave{R}$ en p gange differentiabel funktion, der tilfredsstiller betingelserne

$$\forall \underline{h}(df(\underline{a},\underline{h}) = d^2f(\underline{a},\underline{h}) = \dots = d^{p-1}f(\underline{a},\underline{h}) = 0). \; \exists \underline{h}(d^pf(\underline{a},\underline{h}) \neq 0).$$

Hvis $\underline{a}$ er et svagt minimums- eller maksimumspunkt for f, er $d^pf(\underline{a},\underline{h})$ semidefinit (altså p er lige og alle $D_\nu^p f(\underline{a})$, $\nu = 1,\dots,n$

har samme fortegn eller er 0). Hvis $d^pf(\underline{a},\underline{h})$ er positivt (negativt) definit, er $\underline{a}$ et minimumspunkt (maksimumspunkt) for f.

Bevis. Ifølge Taylor's grænseformel har vi under de givne forudsætninger en opspaltning

$$\Delta_{\underline{a}}f(\underline{h}) = \frac{1}{p!}d^pf(\underline{a},\underline{h}) + \alpha(\underline{h})\|\underline{h}\|^p,$$

hvor α er en α-funktion. Lad os nu antage, at $d^pf(\underline{a},\underline{h})$ ikke er semidefinit. Vi kan da vælge $\underline{h}'$ og $\underline{h}''$, således at

$$d^pf(\underline{a},\underline{h}') > 0, \quad d^pf(\underline{a},\underline{h}'') < 0.$$

Vi kan nu vælge $\delta > 0$, således at vi for alle $t \in \,]0,\delta[$ har

$$|\alpha(t\underline{h}')| < \frac{\|\underline{h}'\|^{-p}}{p!}\, d^pf(\underline{a},\underline{h}'); \quad |\alpha(th'')| < \frac{\|\underline{h}''\|}{p!}\, d^pf(\underline{a},\underline{h}'').$$

Opspaltningen giver nu for $t \in \,]0,\delta[$, at

$$\Delta_{\underline{a}}f(t\underline{h}') = \left(\frac{1}{p!}\, d^pf(\underline{a},\underline{h}') + \alpha(t\underline{h}')\|\underline{h}'\|^p\right) t^p > 0$$

$$\Delta_{\underline{a}}f(t\underline{h}'') = \left(\frac{1}{p!}\, d^pf(\underline{a},\underline{h}'') + \alpha(t\underline{h}'')\|\underline{h}''\|^p\right) t^p < 0,$$

hvilket viser, at $\underline{a}$ hverken er svagt minimums- eller maksimumspunkt for f. Dermed er sætningens første påstand bevist.

Lad os nu antage, at $d^pf(\underline{a},\underline{h})$ er positivt definit. Ifølge lemma 13.14.1 kan vi vælge $\kappa > 0$, således at $d^pf(\underline{a},\underline{h}) \geq \kappa\|\underline{h}\|^p$ og dernæst kan vi vælge $\delta > 0$, således at vi for alle $\underline{h}$ med $\|\underline{h}\| < \delta$ har $|\alpha(\underline{h})| < \kappa$. Opspaltningen giver da

$$\Delta_{\underline{a}}f(\underline{h}) \geq (\kappa + \alpha(\underline{h})\|\underline{h}\|^p > 0$$

for $0 < \|\underline{h}\| < \delta$. Altså er $\underline{a}$ et maksimumspunkt for f. Tilfældet, hvor $d^pf(\underline{a},\underline{h})$ er negativt definit, behandles analogt. Dermed er sætningen bevist.

Vi lægger mærke til, at sætningen ikke giver svar på problemet, om der eventuelt er maksimum eller minimum i $\underline{a}$, hvis

$d^p(\underline{a},\underline{h})$ er semidefinit uden at være definit. I dette tilfælde kan det eventuelt hjælpe, at inddrage differentialer af højere orden i undersøgelsen, såfremt de eksisterer, men det må påregnes, at diskussionen kan frembyde ganske store vanskeligheder.

Vi lægger endvidere mærke til, at maksimum eller minimum kun kan forekomme, hvis p er ulige. En nødvendig betingelse for, at $\underline{a}$ er minimums- eller maksimumspunkt for f, er det derfor, at alle de partielle differentialkvotienter af første orden har værdien 0 i punktet $\underline{a}$. Hvis man ønsker at finde alle punkter, der er minimums- eller maksimumspunkter for $\underline{a}$, begynder man derfor med at sætte alle de partielle differentialkvotienter af f af første orden lig med 0. Det giver n ligninger med de n variable som ubekendte, og diskussionen skal derfor blot gennemføres for løsningerne til disse ligninger.

Eksempel. Vi betragter den ved

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

definerede funktion $f:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}$. Ved at sætte de partielle differentialkvotienter af første orden lig 0, får vi ligningerne

$$4x(x^2+y^2-1) = 0, \quad 4y(x^2+y^2+1) = 0,$$

som har løsningerne (0,0), (1,0) og (-1,0). Nu er

$$d^2f(x,y;h,k) = 4(3x^2+y^2-1)h^2+16xyhk+4(x^2+3y^2+1)k^2,$$

så vi får

$$d^2f(0,0;h,k) = 4(k^2-h^2)$$
$$d^2f(1,0;h,k) = 8(h^2+k^2)$$
$$d^2f(-1,0;h,k) = 8(h^2+k^2).$$

Heraf ses umiddelbart, at (1,0) og (-1,0) er minimumspunkter for f, medens (0,0) hverken er minimums- eller maksimumspunkt.

13.15. For funktioner af 1 variabel er bestemmelsen af minimums- og maksimumspunkter ret enkel, idet den i foregående afsnit beskrevne metode nu kan praktiseres på følgende måde:

Lad $f:I$ ind i $\dot{R}$ være en p gange differentiabel afbildning af et interval $I \subseteq \dot{R}$. Minimums- og maksimumspunkterne for f må søges blandt nulpunkterne for Df. Er $a \in \mathring{I}$ et sådant nulpunkt, undersøges differentialkvotienterne $D^q f(a)$, $q = 2,\ldots,p$. Hvis den første af disse, som er forskellig fra 0, har ulige orden, er a hverken minimums- eller maksimumspunkt. Hvis den første differentialkvotient, som er forskellig fra 0, er af lige orden, er a et minimumspunkt, hvis differentialkvotienten er positiv, og et maksimumspunkt, hvis differentialkvotienten er negativ. Kun hvis alle de eksisterende differentialkvotienter i punktet a har værdien 0, giver metoden intet svar. Vi har ikke gennemført noget bevis for, at kontinuitet af den sidste differentialkvotient ikke er væsentlig for sagen, men det er ikke vanskeligt at indse dette. Det skal tilføjes, at endepunkterne af I kræver en særlig undersøgelse, som dog i reglen ikke giver anledning til vanskelighed.

Det er ofte lettere at gennemføre diskussionen af minimums- og maksimumspunkter ved en fortegnsdiskussion for Df, idet en sådan viser, i hvilke intervaller f er strengt voksende eller strengt aftagende.

Opmærksomheden henledes på, at a kan være minimumspunkt for f, uden at f er aftagende i noget interval med a som højre endepunkt eller voksende i noget interval med a som venstre endepunkt.

13.16. Vi vil ganske kort diskutere begrebet konveksitet i forbindelse med funktioner af 1 variabel. Vi indleder med følgende sætning:

13.16.1. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et interval og $f:I$ ind i $\mathring{R}$ en 2 gange differentiabel afbildning. Da er følgende 4 påstande ækvivalente:

1) $\forall\, x \in I(D^2f(x) \geqq 0)$.

2) Df er voksende på I.

3) $\forall\, a,x \in I(f(x) \geqq f(a) + Df(a)(x-a))$.

4) $\forall\, x,y \in I\ \forall\, t \in\,]0,1[((f((1-t)x+ty) \leqq (1-t)f(x)+tf(y))$.

Bevis. At 2) $\Rightarrow$ 1) er trivielt. At 1) $\Rightarrow$ 2) følger af sætning 13.4.1 anvendt på Df. At 1) $\Rightarrow$ 3) følger umiddelbart af Taylors formel med Lagranges restled

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \tfrac{1}{2}D^2f(a+\Theta h)h^2 \geqq f(a) + Df(a)h$$

for $h = x-a$. Vi viser, at 3) $\Rightarrow$ 4) ved at vise, at $\neg$4) $\Rightarrow$ $\neg$3). At $\neg$4) gælder, betyder, at vi kan vælge $x,y \in I$, således at den ved

$$\varphi(t) = f((1-t)x+ty) - ((1-t)f(x)+tf(y))$$

definerede funktion antager positive værdier i intervallet $[0,1]$. Der eksisterer da et punkt $\tau \in\,]0,1[$, som er maksimumspunkt for φ, og vi har

$$\varphi(\tau) > 0, \quad D\varphi(\tau) = 0.$$

Nu er

$$D\varphi(\tau) = (y-x)Df((1-\tau)x+\tau y) - (f(y)-f(x)),$$

altså

$$Df((1-\tau)x+\tau y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Endvidere giver relationen $\varphi(\tau) > 0$, at

$$f((1-\tau)x+\tau y) > (1-\tau)f(x)+\tau f(y).$$

Vi sætter

$$a = (1-\tau)x + \tau y,$$

altså

$$\tau = \frac{a-x}{y-x} \quad , \quad 1-\tau = \frac{y-a}{y-x} \; ,$$

og vi får da

$$f(a) + Df(a)(x-a) >$$

$$\frac{y-a}{y-x} f(x) + \frac{a-x}{y-x} f(y) + \frac{x-a}{y-x} (f(y)-f(x)) = f(x),$$

hvilket viser, at $\neg 3)$ gælder.

Sætningen vil være fuldstændig, hvis det lykkes os at vise, at 4) $\Rightarrow$ 2). Hertil betragter vi $x,y \in I$ med $x < y$, og vi antager, at 4) gælder. For $h = t(y-x)$, $t \in \,]0,1[$ har vi

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) = \frac{1}{h}(f((1-t)x+ty) - f(x)) \leqq$$
$$\frac{1}{h}((1-t)f(x) + tf(y) - f(x)) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \; .$$

For $h \to 0$ følger heraf

$$Df(x) \leqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \; .$$

Den tilsvarende omregning af $\frac{1}{h}(f(y+h) - f(x))$ med $h = t(x-y)$, $t \in \,]0,1[$ giver (idet h nu er negativ)

$$Df(y) \geqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \; ,$$

og dermed er sætningen fuldstændig bevist.

13.16.2. Definition. En afbildning $f:I$ ind i $\mathring{R}$, hvor $I \subseteq \mathring{R}$ er et interval, kaldes konveks, hvis betingelsen 4) er opfyldt. Hvis $-f$ er konveks, kaldes f konkav.

Vi bemærker, at en konveks funktion ikke nødvendigvis er differentiabel. På den anden side er det ikke vanskeligt at vise, at en konveks funktion er kontinuert. For to gange differentiable funktioner giver sætning 13.16.1, at enhver af egenskaberne 1. - 4. implicerer konveksitet.

13.17. Vi vil afslutte dette kapitel med beviset for en klassisk sætning om middeltal, idet beviset udnytter konvekse funktioners egenskaber. Vi indleder med en sætning om konvekse funktioner.

13.17.1. <u>Sætning</u>. Lad $f:I$ ind i $\mathring{R}$, hvor I er et interval, være en konveks funktion. Lad $c_1,\ldots,c_n$ være reelle tal, som tilfredsstiller betingelserne

$$c_1 \geqq 0,\ldots,c_n \geqq 0;\ c_1 +\ldots+ c_n = 1.$$

Da gælder relationen

$$\forall\ x_1,\ldots,x_n \in I(f(c_1x_1 +\ldots+ c_nx_n) \leqq c_1f(x_1) +\ldots+ c_nf(x_n)).$$

Bevis. Vi bemærker først, at $x_1 > a,\ldots,x_n > a$ medfører $c_1x_1 +\ldots+ c_nx_n > (c_1 +\ldots+ c_n)a = a$. Tilsvarende fås når $>$ erstattes med $\geqq$, $<$ eller $\leqq$. Heraf slutter vi, at det for vilkårlige $x_1,\ldots,x_n \in I$ gælder, at $c_1x_1 +\ldots+ c_nx_n \in I$. Dermed har vi sikret os, at den påstand, vi skal vise, i hvert fald har mening.

Vi antager nu, at påstanden allerede er vist for ethvert talsæt $c_1',\ldots,c_{n-1}'$, samt ethvert sæt $x_1',\ldots,x_{n-1}'$, når disse sæt blot opfylder de i sætningen angivne betingelser.

Hvis $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, er $c_n = 1$ og påstanden triviel. Vi antager derfor, at $c = c_1 +\ldots+ c_{n-1} > 0$, og vi sætter $c_1' = c^{-1}c_1,\ldots,c_{n-1}' = c^{-1}c_n$. Talsættet $c_1',\ldots,c_{n-1}'$ vil da opfylde sætningens betingelser. Lad nu $x_1,\ldots,x_n \in I$ være givne. Vi har da for $c_1'x_1 +\ldots+ c_{n-1}'x_{n-1} = y$, at

$$f(y) \leqq c_1'f(x_1) +\ldots+ c_{n-1}'f(x_{n-1})$$

ifølge induktionsantagelsen. Desuden bevirker konveksisteten af f, at

$$f(cy+c_nx_n) = f((1-c_n)+c_nx_n) \leqq$$
$$(1-c_n)f(y) + c_nf(x_n) = cf(y) + c_nf(x_n).$$

Kombination af de to viste uligheder giver nu umiddelbart den påstand, vi skulle vise.

13.17.2. Definition. Lad $c_1, \dots, c_n$ være reelle tal, som tilfredsstiller betingelserne

$$c_1 \geqq 0, \dots, c_n \geqq 0; \; c_1 + \dots + c_n = 1,$$

og lad $y_1, \dots, y_n$ være positive tal. Størrelsen

$$A(\underline{c}, \underline{y}) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

kaldes det aritmetiske middeltal af $y_1, \dots, y_n$ svarende til vægtene $c_1, \dots, c_n$. Størrelsen

$$G(\underline{c}, \underline{y}) = y_1^{c_1} \dots y_n^{c_n}$$

kaldes det geometriske middeltal af $y_1, \dots, y_n$ svarende til vægtene $c_1, \dots, c_n$. De sædvanlige middeltal svarer til specialtilfældet $c_1 = \dots = c_n = \frac{1}{n}$.

13.17.3. Sætning. Med betegnelserne fra definition 13.17.2 er

$$A(\underline{c}, \underline{y}) \geqq G(\underline{c}, \underline{y}).$$

Bevis. Vi indfører

$$x_1 = \log y_1, \dots, x_n = \log y_n.$$

Af 1. i sætning 13.16.1 følger, at den ved $f(x) = e^x$ definerede funktion $f: \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er konveks. Sætning 13.17.1 giver derfor

$$e^{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n} \leqq c_1 e^{x_1} + \dots + c_n e^{x_n},$$

og heraf følger sætningen umiddelbart.

Lette opgaver.

1. Vis, at middelværdisætningen for et andengradspolynomium altid gælder med det specielle valg $\Theta = \frac{1}{2}$.

2. For en differentiabel afbildning f: $[0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ gælder $f(0) = 0$ og $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Vis, at der eksisterer et reelt tal $\xi \in]0,\infty[$, således at $Df(\xi) = 0$.

3. For en differentiabel afbildning f: $[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ gælder

   1. $Df(a) > 0$, $Df(b) < 0$.
   2. $\forall x \in]a,b[\; (Df(x) > 0)$.

   Vis, at der eksisterer et reelt tal $\xi \in]a,b[$, således at $Df(\xi) = 0$. (Konstruer en passende differentiabel hjælpefunktion g: $[a_1,b_1]$ ind i $\mathring{R}$, således at $[a,b] \subsetneq [a_1,b_1]$, medens f er restriktionen af g til $[a,b]$, og således at Rolles sætning kan anvendes på g).

4. Vis, at det for en differentiabel afbildning f: $[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ gælder, at Df antager enhver reel værdi mellem $Df(a)$ og $Df(b)$. (Udnyt resultatet fra opgave nr. 3).

5. Lad f,g,h: $[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ være kontinuerte afbildninger, hvis restriktioner til $]a,b[$ er differentiable. Vis, at der eksisterer et reelt tal $\xi \in]a,b[$, for hvilket

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(\xi) & f(b) \\ g(a) & g(\xi) & g(b) \\ h(a) & h(\xi) & h(b) \end{vmatrix} = 0.$$

   Vis, at den udvidede middelværdisætning er et specielt tilfælde af dette resultat.

6. Lad $f,g\colon]a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være differentiable afbildninger, der begge går mod ∞ eller $-\infty$ for $x \to a$. Det antages, at både $\frac{f}{g}$ og $\frac{Df}{Dg}$ har en grænseværdi i punktet a. Vis, at disse grænseværdier er identiske.

7. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to 3} \frac{6 \log \frac{x}{3} - (x-2)^2 + 1}{(x-3)(e^{x-3} - 1)} .$$

8. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctg}(5\ \mathrm{tg}\ x) - \mathrm{Arctg}(3\ \mathrm{tg}\ x)}{\cos x} .$$

9. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (3\mathrm{tg}\ 3x - \mathrm{tg}\ x).$$

10. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\mathrm{tg}\ 3x - \mathrm{tg}\ x}{\cos x} .$$

11. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} (1+x^2)(\pi - 2\ \mathrm{Arctg}\ x)^2.$$

12. Bestem grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log(a\ e^{\alpha x} + b e^{\beta x} + c\gamma^{\gamma x})$$

hvor $\alpha > \beta > \gamma$, medens a, b og c er positive tal.

13. Afbildningerne $f,g\colon]0,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^2 \sin x^{-2}; \quad g(x) = \log(1+x).$$

Vis, at $\frac{f}{g}$ har en grænseværdi i 0, medens $\frac{Df}{Dg}$ ikke har nogen grænseværdi i 0.

14. En afbildning $f\colon \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ for } (x,y) = (0,0) \\ (x^2)^{1+y^2} \sin x^{-1} \text{ for } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

Vis, at f er differentiabel, men at den ene af de partielle differentialkvotienter af f er diskontinuert i (0,0).

15. En afbildning $f\colon \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ for } (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^4)^{-1}\, y^6 \text{ for } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Vis, at f er differentiabel, at $D_y f$ er kontinuert, at $D_x f$ er kontinuert undtagen i (0,0), at restriktionen af $D_x f$ til den ved $y = 0$ bestemte linier er kontinuert i (0,0), samt at $D_x f$ er diskontinuert i (0,0).

16. Lad $O \subsetneq \mathbb{R}^2$ vær en åben mængde og $f\colon O$ ind i $\mathbb{R}$ en afbildning, som overalt har partielle differentialkvotienter $D_1 f$ og $D_2 f$. Det antages endvidere, at $D_2 f$ er kontinuert. Lad $\underline{a} \in O$ være et punkt, i hvilket den ved $D_1 f(x_1, a_2)$ definerede afbildning er kontinuert. Vis, at f er differentiabel i punktet $\underline{a}$.

17. Angiv samtlige partielle differentialkvotienter af vilkårlig orden af hver af funktionerne

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y + y^2,$$
$$g(x,y,z) = y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + x^2y + xy^2.$$

18. Vis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \log\|\underline{x}\|$$

definerede afbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ ind i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$D_1^2 f(\underline{x}) + D_2^2 f(\underline{x}) = 0.$$

19. Vis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^{2-n}$$

definerede afbildning $f\colon \grave{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ ind i $\grave{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$D_1^2 f(\underline{x}) + \ldots + D_n^2 f(\underline{x}) = 0.$$

Dette er selvfølgelig kun interessant for $n \geqq 3$.

20. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et åbent interval og $\varphi\colon I$ ind i $\grave{R}$ en vilkårlig ofte differentiabel afbildning. Vi indfører betegnelserne

$$O_1 = \{(x,y) \mid x+y \in I\},\ O_2 = \{(x,y) \mid x-y \in I\}.$$

Skitser punktmængderne O_1 og O_2 på en figur. Afbildninger $f\colon O_1$ ind i $\grave{R}$ og $g\colon O_2$ ind i $\grave{R}$ defineres ved

$$f(x,y) = \varphi(x+y),\ g(x,y) = \varphi(x-y).$$

Vis relationen

$$D_x^p D_y^q f(x,y) = D^{p+q}\varphi(x+y)$$

$$D_x^p D_y^q f(x,y) = (-1)^q D^{p+q}\varphi(x+y).$$

21. Vis, at en afbildning $f\colon \grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ tilfredsstiller differentialligningen

$$D_1 D_2 f = 0,$$

hvis og kun hvis f kan defineres ved

$$f(x_1,x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2),$$

hvor $g_1, g_2\colon \grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er differentiable funktioner.

22. Opskriv det n^{te} differential af den ved

$$f(x_1,x_2) = x_1^p x_2^q,$$

hvor $p \in \grave{N}$, $q \in \grave{N}$, definerede funktion.

23. Opskriv differentialet af anden orden af den ved $z = x^y$ definerede funktion.

24. Vis, at det i kapitel 2 fundne restled i Taylors formel kan omskrives til Lagrange's restled.

25. Opskriv Taylors formel for de i opgave nr. 17 anførte funktioner, idet der medtages så mange led, at restleddet forsvinder identisk.

26. Undersøg, om den ved

$$z = x^3 + y^3 - 3\,axy, \quad a > 0$$

definerede funktion har minimums- eller maksimumspunkter.

27. Undersøg, om den ved

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$$

definerede funktion har minimums- eller maksimumspunkter.

28. Vis, at den ved

$$y = \begin{cases} 0 \text{ for } x = 0 \\ x^2(2-\sin\frac{1}{x}) \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede funktion er differentiabel overalt og har et minimumspunkt i 0, men at den ikke er monoton i noget interval med endepunkt i 0.

29. Vis følgende sætning: Blandt alle retvinklede, parallelopipeder med givet rumfang er terningen det, der har den mindste overflade, og det, for hvilket summen af kantlængderne er mindst.

30. Bestem alle minimums- og maksimumspunkter for

$$z = (x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2.$$

31. Vis, at den ved $y = x^\nu$ definerede funktion φ: $]0,\infty[$ ind i $]0,\infty[$ er konveks for $\nu < 0$ og for $\nu > 1$, men konkav for $\nu \in]0,1[$.

32. Lad a og b være reelle tal, som tilfredsstiller betingelsen $b > a^2$. Vis, at der eksisterer tre reelle tal α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$, således at den ved

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2ax+b}$$

definerede funktion er konkav på intervallerne $]-\infty, \alpha[$ og $]\beta, \gamma[$ og konveks på intervallerne $]\alpha, \beta[$ og $]\gamma, \infty[$. Vi tænker os f afbildet grafisk i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Vis, at punkterne $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ og $(\gamma, f(\gamma))$ ligger på en ret linie.

Vanskeligere opgaver.

33. Lad $I \subseteq \mathring{R}$ være et interval, $a \in I$ et punkt og f: I ind i $\mathring{R}$ en to gange differentiabel afbildning med $D^2 f(a) \neq 0$. Ifølge middelværdisætningen kan vi vælge $\Theta(h)$, således at

$$f(a+h) - f(a) = Df(a + \Theta(h))h.$$

Vis, at Θ har grænseværdi $\frac{1}{2}$ i punktet 0.

34. Lad $x_1, \ldots, x_n$ være positive tal og $c_1, \ldots, c_n$ reelle tal, som tilfredsstiller betingelserne

$$c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0; \; c_1 + \ldots + c_n = 1.$$

Vis, at

$$\lim_{p \to 0} (c_1 x_1^p + \ldots + c_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} = x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}.$$

35. En afbildning $f: \mathring{R}^2$ ind i $\mathring{R}$ er givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \\ xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Vis, at f er kontinuert differentiabel i hele planen. Vis, at de partielle differentialkvotienter af anden orden alle eksisterer i hele planen. Vis, at restriktionen af $D_x f$ til en vilkårlig ret linie gennem (0,0) er differentiabel. Vis, at det samme gælder for $D_y f$. Vis, at $D_y D_x f(0,0) \neq D_x D_y f(0,0)$.

36. Vis, at der blandt løsningerne til differentialligningen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

findes netop én i hele planen defineret funktion f, som tilfredsstiller opgivne betingelser

$$f(x,0) = \varphi(x), \quad f(0,y) = \psi(y),$$

hvor $\varphi, \psi : \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er differentiable afbildninger, som tilfredsstiller $\varphi(0) = \psi(0)$.

Samme opgave, idet de opgivne betingelser erstattes med den ene betingelse

$$f(x,x) = \varphi(x), \quad D_1 f(x,x) + D_2 f(x,x) = \psi(x).$$

Vis, at differentialligningen sædvanligvis ikke vil have en løsning, som er defineret i den afsluttede enhedscirkelskive og som på randen af cirklen stemmer overens med en given funktion. Det hjælper ikke at tilføje krav om, at denne funktion skal tilfredsstille skarpere differentiabilitetsforudsætninger.

37. Lad $O \subseteq \dot{R}^2$ være en åben mængde. Lad $f:O$ ind i $\dot{R}$ være en to gange kontinuert differentiabel funktion, som tilfredsstiller differentialligningen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Vis, at hvert punkt $(a,b) \in 0$ har en omegn

$$\{(a+h,b+k) \mid |h|+|k| < \delta\},$$

i hvilken f kan fremstilles på formen

$$f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y),$$

hvor φ og ψ er to gange kontinuert differentiable funktioner. (Indfør nye uafhængige variable $u = x+y$, $v = x-y$).

38. Vis, at enhver partiel differentialligning

$$a \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

med konstante koefficienter ved en ikke singulær lineær transformation $x = \alpha u+\beta v$, $y = \gamma u+\delta v$ kan overføres i en af ligningerne

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

39. Idet (x,y) er retvinklede, og (r,Θ) polære koordinater til punkter i $\dot{R}^2$, således at $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$, og $z = f(x,y)$ er to gange kontinuert differentiabel i en åben mængde 0, ønskes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

udtrykt ved de partielle differentialkvotienter af z med hensyn til r og Θ.

40. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et interval og $\varphi: I$ ind i $\dot{R}$ en n-1 gange differentiabel afbildning. Lad $a \in I$ være et punkt, i hvilket $D^{n-1}\varphi$ er differentiabel, og hvor

$$\varphi(a) = D\varphi(a) = D^2\varphi(a) = \ldots = D^n\varphi(a) = 0.$$

Vis, at $\varphi(a+h) = \alpha(h)h^n$, hvor $\alpha(h)$ er en α-funktion.
Lad $f: I$ ind i $\dot{R}$ være en n-1 gange differentiabel afbildning,

for hvilken $D^{n-1}f$ er differentiabel i a. Anvend ovenstående resultat på den ved

$$(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a)(x-a)^k$$

definerede afbildning, og vis derved, at Taylor's grænseformel gælder under svagere forudsætninger end de i teksten benyttede.

41. Lad $0 \subseteq \grave{R}^2$ være en åben mængde og $f:\grave{R}^2$ ind i $\grave{R}$ en differentiabel afbildning. Lad $\underline{a} \in 0$ være et punkt, i hvilket $D_1 f$ og $D_2 f$ er differentiable. Omform udtrykket

$$\Delta(\underline{h}) = f(\underline{a}+\underline{h})-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(\underline{a})$$

ved først at anvende middelværdisætningen på

$$\varphi(y) = f(a_1+h_1,y)-f(a_1,y)$$

og derefter differentiabiliteten af $D_1 f$ og $D_2 f$ i punktet $\underline{a}$, og vis derved, at

$$\Delta\underline{h} = D_1 D_2 f(\underline{a}) h_1 h_2 + \alpha(\underline{h})\|\underline{h}\|^2,$$

hvor α er en α-funktion. Lad de variable bytte roller, og vis derved, at $D_1 D_2 f(\underline{a}) = D_2 D_1 f(\underline{a})$.

42. Lad $\varphi:[-a,a]$ ind i $\grave{R}$ være en n gange differentiabel afbildning og ψ den ved $\psi(x) = x^{-1}\varphi(x)$ definerede afbildning $\psi:[-a,a] \setminus \{0\}$ ind i $\grave{R}$. Vis formlen

$$D^n\psi(x) = x^{-n-1} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} D^{n-p}\varphi(x).$$

Det antages, at φ er n+1 gange kontinuert differentiabel, og at $\varphi(0)$. Vis, at ψ kan udvides til en n gange differentiabel afbildning $\psi_1:[-a,a]$ ind i $\grave{R}$, og at

$$D^n\psi_1(0) = \frac{1}{n+1} D^{n+1}\varphi(0).$$

Sammenhæng.

14.1. Når visse punktmængder i topologiske rum kaldes sammenhængende, appellerer betegnelsen umiddelbart til anskuelsen, idet interval, cirkelskive, cirkelperiferi og mange andre nærliggende eksempler på sammenhængende mængder straks tilbyder sig. Det er vel også oplagt, at foreningsmængden af to afsluttede cirkelskiver, der rører hinanden udvendigt, må anses som en afsluttet mængde. Hvis den ene eller begge cirkelskiver erstattes med en åben cirkelskive, bliver sagen straks mere tvivlsom. Vi vil i dette afsnit give en eksakt definition af begrebet sammenhæng. Det skal dog straks indrømmes, at vi også vil indføre sammenhængsbegreber af forskellig styrke og med henblik på forskellige anvendelser.

Vi vil indlede afsnittet med en diskussion af den reelle akse og intervaller på den reelle akse. Denne diskussion skal være vejledende for valget af vor definition af sammenhængsbegrebet.

14.2. Vi viser først en simpel sætning, der karakteriserer intervallerne blandt mængden af delmængder af $\grave{R}$:

14.2.1. <u>Sætning</u>. En mængde $A \subseteq \grave{R}$ er et interval, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall\, x,y \in \grave{R}((x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y) \Rightarrow [x,y] \subseteq A).$$

Bevis. At ethvert interval har den anførte egenskab, følger umiddelbart af intervallets definition ved uligheder. Lad nu A være en mængde, som har den nævnte egenskab. Hvis A er tom, er A et udartet interval. Hvis A ikke er tom, eksisterer $a = \inf A$, $b = \sup A$. Er $a = b$, har vi åbenbart $A = [a,a]$, altså igen et udartet interval. Er $a < b$, kan vi for ethvert $c \in\,]a,b[$ ifølge definitionen af inf og sup vælge x og y, således at $x < c < y$, $x \in A$, $y \in A$, og ifølge hver antagelse gælder da $[x,y] \subseteq A$, altså $c \in A$. Vi har således vist, at $]a,b[\subseteq A$, og dette medfører, at A er en af mængderne $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ eller $[a,b]$. For $a = -\infty$ eller $b = \infty$ må 2 eller 3 af disse muligheder selvfølgelig udelukkes, men i alle tilfælde gælder det altså, at A bliver et interval, der eventuelt kan være udartet eller ubegrænset.

14.2.2. <u>Sætning</u>. Lad $\{I_j \mid j \in J\}$ være en mængde af intervaller. Hvis $\bigcap_{j\in J} I_j \neq \emptyset$ er $\bigcup_{j\in J} I_j$ et interval.

Bevis. Af $x,y \in \bigcup_{j\in J} I_j$ og $x \leq y$ følger, at der findes indices $k,l \in J$, således at $x \in I_k$, $y \in I_l$. Da fællesmængden ikke er tom, har I_k og I_l mindst 1 punkt fælles, og $I_k \cup I_l$ er derfor et interval. Altså gælder $[x,y] \subseteq I_k \cup I_l$, og påstanden følger derefter af sætning 14.2.2.

14.2.3. <u>Struktursætning for åbne mængder på</u> $\dot{R}$. Lad $O \subseteq \dot{R}$ være en åben mængde. Der eksisterer da en følge (I_n) af åbne intervaller, således at

$$\forall\, j,k \in \dot{N}\ (j \neq k \Rightarrow I_j \cap I_k = \emptyset), \quad O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Bevis. For $x \in O$ er mængden
$M_x = \{I \mid I \text{ åbent interval} \wedge x \in I \wedge I \subseteq O\}$ ikke tom. Ifølge sætning 14.2.2. er

$$I_x = \bigcup_{I\in M_x} I$$

et interval, og da hvert $I \in M_x$ er åbent, er I_x et åbent interval. Lad a være et endepunkt af I_x. Af $a \in O$ ville følge eksistensen af et åbent interval I', således at $a \in I'$ og $I' \subset O$.

Da $I_x \subseteq O$, ville $I' \cup I_x \subseteq O$. Men $I' \cup I_x$ er et åbent interval, som indeholder x, og må derfor tilhøre M_x i modstrid med, at I_x er et ægte delinterval af $I' \cup I_x$. Vi kan altså slutte, at eventuelle endepunkter af I_x ikke tilhører O. Hvad vi indtil nu har bevist, kan udtrykkes ved, at I_x er et maksimalt delinterval af O. For $x,y \in O$ gælder eventuelt $I_x \cap I_y = \emptyset$. I modsat fald er $I_x \cup I_y$ selv et åbent interval, og da I_x og I_y er maksimale, bliver $I_x = I_x \cup I_y = I_y$. Alternativet til $I_x \cap I_y = \emptyset$ er altså $I_x = I_y$. Dermed har vi bevist, at de maksimale delintervaller af O udgør en klasseinddeling af O. Hvert maksimalt delinterval er åbent og indeholder derfor et rationalt tal. Vi vælger et rationalt tal fra hvert maksimalt delinterval. Disse bliver alle indbyrdes forskellige. Da mængden af rationale tal er numerabel, følger det heraf, at mængden af maksimale delintervaller er tom, endelig eller numerabel. Hvis den ikke er numerabel, så vi blot får de maksimale delintervaller $I_1,\ldots,I_p$, sætter vi $I_{p+1} = I_{p+2} = \ldots = \emptyset$. Følgen (I_n) vil da under alle betingelser havde de påståede egenskaber.

14.2.4. Sætning. Den i struktursætningen 14.2.3 omtalte fremstilling af en åben mængde som foreningsmængde af disjunkte, åbne intervaller er entydigt bestemt ved mængden O.

Bevis. Lad os tænke os, at O på 2 måder er fremstillet som foreningsmængde af disjunkte, åbne intervaller, altså

$$O = \bigcup I_j = \bigcup I'_j.$$

Endepunkterne af et interval I_j hører ikke til O, altså er hvert interval I'_k indeholdt i et interval I_j. Da endepunkterne af I'_k heller ikke hører til O, er I'_k identisk med I_j. Dermed er sætningen bevist.

14.2.5. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval og $O \subseteq I$ en åben mængde i delrummet I. Da er O foreningsmængde af højst numerabelt mange disjunkte intervaller, som er åbne i delrummet I.

Bevis. $\mathring{I} \cap O$ er en åben mængde, og derfor foreningsmængde af højst numerabelt mange disjunkte åbne intervaller, altså $\mathring{I} \cap O = \bigcup I_j$. Hvis $a \in I$ er et endepunkt, og $a \in O$, vil et af intervallerne I_j have a som endepunkt, og tilføjelse af a til dette interval giver et interval, der er åbent i delrummet I. Dermed er påstanden bevist.

14.2.6. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval og $O \subseteq I$ en åben mængde i delrummet I. Lad O_1 og O_2 være åbne mængder på delrummet I. Hvis $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ og $O_1 \cup O_2 = I$ er den ene af mængderne O_1, O_2 den tomme mængde.

Bevis. Ifølge sætning 14.2.5 er O_1 foreningsmængde af højst numerabelt mange disjunkte intervaller. Hvis O_1 hverken er hele I eller den tomme mængde vil et af disse intervaller I' have et endepunkt $a \in \mathring{I}$. Punktet a tilhører ikke O_1, og da O_2 er åben og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, kan det heller ikke tilhøre O_2. Dette strider mod, at $O_1 \cup O_2 = I$. Dermed er sætningen bevist.

14.2.7. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \grave{R}$ være et interval og $f: I$ ind i $\grave{R}$ en kontinuert afbildning. Da er $f(I)$ et interval.

Bevis. Hvis $f(I) = \grave{R}$ er påstanden rigtig. Lad os antage, at der findes et reelt tal $a \notin f(I)$. Vi sætter $O_1 = f^{-1}(]-\infty,a[)$, $O_2 = f^{-1}(]a,\infty[)$. Så er O_1 og O_2 åbne delmængder af delrummet I. Desuden er $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 = I$. Altså er $O_1 = \emptyset$ eller $O_2 = \emptyset$. Altså vil $f(I)$ helt tilhøre $]-\infty,a[$ eller helt tilhøre $]a,\infty[$. Heraf fremgår, at betingelsen i sætning 14.2.1 er opfyldt for $f(I)$, og $f(I)$ er således et interval.

netop intervallerne.

Bevis. Sætning 14.2.6 viser, at ethvert interval er sammenhængende. Hvis en mængde $A \subseteq \mathring{R}$ ikke er et interval, kan vi ifølge sætning 14.2.1 vælge $a \in \mathring{R}$, således at mængderne $O_1 =]-\infty,a[\cap A$ og $O_2 =]a,\infty[\cap A$ ikke er tomme. De er åbne relativt til A, disjunkte og har foreningsmængde A. Men det betyder netop, at A ikke er sammenhængende.

Sammenhængsteoriens hovedsætning er nu ganske let at vise. Den er en generalisation af sætning 14.2.7.

14.3.4. <u>Sætning</u>. Lad S og T være topologiske rum og $f:S$ på T en kontinuert, surjektiv afbildning. Hvis S er sammenhængende, er T sammenhængende.

Bevis. Lad $\varphi:T$ ind i $\{0,1\}$ være en kontinuert afbildning. Så er $\varphi\circ f:S$ ind i $\{0,1\}$ en kontinuert afbildning, og da S er sammenhængende, er $\varphi\circ f$ konstant. Det betyder, at mængden $\varphi(T) = \varphi(f(S))$ består af et eneste element, altså, at φ er konstant. Dermed er sætningen bevist.

14.4. Vi skal vise et par afgørende sætninger om operationer med sammenhængende mængder:

14.4.1. <u>Sætning</u>. Lad T være et topologisk rum og $\{A_j \mid j \in J\}$ en familie af sammenhængende mængder på T. Hvis $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$, er er $\bigcup_{j\in J} A_j$ sammenhængende.

14.4.2. <u>Sætning</u>. Lad S og T være sammenhængende topologiske rum. Produktrummet $S \times T$ er da sammenhængende.

Bevis. For at vise sætning 14.4.1. betragter vi et punkt $a \in \bigcap A_j$ og en kontinuert afbildning $f:\bigcup A_j$ ind i $\{0,1\}$. Hvis vi for et vilkårligt $x \in \bigcup A_j$ kan vise, at $f(x) = f(a)$, vil sætningen være vist. Nu kan vi vælge j, således at $x \in A_j$. Restriktionen af f til A_j er kontinuert, og da A_j er sammenhængende, er f konstant på A_j. Altså er $f(x) = f(a)$.

Vi vil dernæst vise sætning 14.4.2. For $a \in S$ og $b \in T$ gælder, at $\{a\} \times T$ er homeomorft med T og derfor sammenhængende. Tilsvarende er $S \times \{b\}$ sammenhængende. Da $\{a\} \times T$ og $S \times \{b\}$ har punktet (a,b) fælles, giver sætning 14.4.1, at $M_{a,b} = (\{a\} \times T) \cup (S \times \{b\}$ er sammenhængende. Nu er $\bigcap_{a\in S} M_{a,b} = S \times \{b\}$, og ny anvendelse af sætning 14.4.1 giver derfor, at $S \times T = \bigcup_{a\in S} M_{a,b}$ er sammenhængende.

Vi skal også vise nogle sætninger om topologiske operationer på sammenhængende mængder:

14.4.3. Sætning. Lad S være et topologisk rum og $A \subseteq S$ en overalt tæt mængde. Hvis A er sammenhængende, er S sammenhængende.

14.4.4. Sætning. Lad T være et topologisk rum og $A \subseteq T$ en sammenhængende mængde. Enhver mængde B, som tilfredsstiller $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ er da sammenhængende.

Bevis. Sætning 14.4.4. følger umiddelbart af sætning 14.4.3, idet A er overalt tæt i delrummet B. For at vise sætning 14.4.3 betragter vi en kontinuert afbildning $f:S$ ind i $\{0,1\}$. Restriktionen af f til den sammenhængende mængde A er kontinuert og derfor konstant. Af sætning 8.27.3 følger derefter, at f selv er konstant, og dermed er sætningen bevist.

14.5. På en punktmængde A i et topologisk rum T indfører vi en relation sam ved definitionen

$$x \operatorname{sam} y \iff \exists B \subseteq A \ (B \text{ sammenhængende} \wedge x \in B \wedge y \in B).$$

14.5.1. Lemma. Relationen sam er en ækvivalensrelation.

Bevis. Ved at vælge $B = \{x\}$ ser vi, at x sam x er opfyldt. Definitionen er åbenbart symmetrisk i x og y. Af x sam y og y sam z følger eksistensen af sammenhængende mængder B og C, som er delmængder af A, og således at B indeholder x og y, medens C indeholder y og z. Af sætning 14.4.1 følger, at $B \cup C$ indeholder x og z, og dermed har vi vist, at x sam z gælder.

14.5.2. <u>Definition</u>. Ækvivalensklasserne svarende til relationen sam kaldes komponenterne af A.

14.5.3. <u>Sætning</u>. Enhver komponent af A er en sammenhængende mængde, og enhver sammenhængende delmængde af A er delmængde af en komponent af A.

Bevis. To vilkårlige x og y af en sammenhængende delmængde af A tilfredsstiller x sam y og tilhører derfor samme komponent af A. Dermed er den sidste påstand bevist. Lad $K \subseteq A$ være en komponent og $a \in K$ et punkt. For hvert $x \in K$ gælder x sam a, og derfor kan vi for hvert $x \in K$ vælge en sammenhængende mængde $B_x \subseteq K$, således at $a \in B_x$ og $x \in B_x$. Men så er

$$K = \bigcup_{x \in K} B_x$$

og derfor sammenhængende ifølge sætning 14.4.1.

Sætning 14.5.3 udtrykker, at komponenterne af a er de mest omfattende sammenhængende delmængder af A.

14.5.4. <u>Sætning</u>. Komponenterne af A er afsluttede relativt til A.

Bevis. Lad K være en komponent af A. Ifølge sætning 14.5.3 og sætning 14.4.4 er $\overline{K}$ sammenhængende; altså $\overline{K} \subseteq K$. Dermed er sætningen bevist.

14.5.5. <u>Sætning</u>. Komponenterne af $\mathbb{Q}$ er de delmængder, der består af et eneste punkt.

Bevis. Da delmængderne af Q tillige er delmængder af R, følger sætningen umiddelbart af sætning 14.3.3.

Komponenterne af et topologisk rum er altså ikke altid åbne mængder.

14.6. Det er anskueligt nærliggende at søge en forbindelse mellem begrebet sammenhæng og begrebet kurve. Nu anvendes ordet "kurve" i matematikken i flere forskellige betydninger, og vi vil foretrække at undgå at binde brugen af dette ord alt for stærkt. Vi vil derfor i de følgende definitioner anvende andre benævnelser i stedet for ordet kurve, men vi vil også give eksempler på lidt mindre præcise formuleringer, hvor ordet "kurve" indgår.

14.6.1. Definition. Lad T være et metrisk rum, og $[\alpha,\beta]$ et interval, som ikke må være udartet. En kontinuert afbildning $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i T kaldes en bevægelse i T med parameterintervallet $[\alpha,\beta]$. Billedet $C = \gamma([\alpha,\beta])$ kaldes bevægelsens bane eller banekurve. Hvis γ er konstant (altså, hvis C består af et eneste punkt), kaldes γ en udartet bevægelse.

I mindre præcis formulering taler vi om kurven C med parameterfremstillingen γ.

Betegnelsen "bevægelse" kommer af den anskuelige forestilling, at $t \in [\alpha,\beta]$ er et tidspunkt (klokkeslæt), og $\gamma(t)$ er så det sted, hvor et "bevægeligt" punkt i T befinder sig til tidspunktet t.

14.6.2. Definition. Den i definition 14.6.1 indførte bevægelse γ siges at begynde i punktet $\gamma(\alpha)$ og at ende i punktet $\gamma(\beta)$. Svarende hertil kaldes $\gamma(\alpha)$ bevægelsens begyndelsespunkt eller udgangspunkt, og $\gamma(b)$ kaldes dens endepunkt.

Da en kontinuert afbildning afbilder kompakt mængde på kompakt mængde og sammenhængende mængde på sammenhængende mængde, gælder følgende sætning:

14.6.3. Sætning. En bevægelses bane er en kompakt og sammenhængende mængde.

14.7. Kurvebegrebets anvendelse i sammenhængsteorien beror på følgende definition:

14.7.1. Definition. Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Vi siger, at to punkter $a \in A$ og $b \in A$ kan forbindes i A, hvis der eksisterer en bevægelse $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i A, som begynder i a og ender i b, altså med $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. Vi skriver da a forb b (i mængden A).

14.7.2. Sætning. Relationen a forb (i mængden A) er en ækvivalensrelation.

(Når det ikke kan give anledning til misforståelse, vil vi blot skrive a forb b uden at anføre mængden A).

Bevis. For ethvert $a \in A$ og ethvert $[\alpha,\beta]$ eksisterer den udartede bevægelse $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i A defineret ved $\gamma(t) = a$ for ethvert $t \in [\alpha,\beta]$. Altså gælder a forb a. Hvis a forb b gælder, eksisterer $[\alpha,\beta]$ og en kontinuert afbildning $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i A med $\gamma(\alpha) = a$ og $\gamma(\beta) = b$. Den ved $\gamma'(t) = \gamma(-t)$ definerede afbildning $\gamma':[-\beta,-\alpha]$ ind i A vil da være kontinuert og tilfredsstille betingelserne $\gamma(-\beta) = b$, $\gamma(-\alpha) = a$. Altså gælder b forb a.

Lad os nu antage, at a forb b og b forb c gælder. Da eksisterer der intervaller $[\alpha_1,\beta_1]$ og $[\alpha_2,\beta_2]$ samt kontinuerte afbildninger $\gamma_1:[\alpha_1,\beta_1]$ ind i A, $\gamma_2:[\alpha_2,\beta_2]$ ind i A, som tilfredsstiller betingelserne

$$\gamma_1(\alpha_1) = a, \ \gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2) = b, \ \gamma_2(\beta_2) = c.$$

Nu er $\beta_1+\beta_2 > \alpha_1+\alpha_2$, så intervallet $[\alpha_1, \beta_1+\beta_2-\alpha_2]$ eksisterer og har indre punkter. Vi definerer en kontinuert afbildning $\gamma:[\alpha_1, \beta_1+\beta_2-\alpha_2]$ ved

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ for } t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \gamma_2(t+\beta_1-\alpha_2) \text{ for } t \in [\beta_1, \beta_1+\beta_2-\alpha_2]. \end{cases}$$

Kontinuiteten i β_1 ses umiddelbart, idet originalmængden til en omegn U af b vil indeholde et interval $]\beta_1-\delta, \beta_1]$ på grund af, at γ_1 er kontinuert i β_1, samt et interval $[\beta_1, \beta_1+\eta[$ på grund af, at γ_2 er kontinuert i α_2. Endvidere er $\gamma(\alpha_1) = a$ og $\gamma(\beta_1+\beta_2-\alpha_2) = c$. Altså gælder a forb b. Dermed er sætningen bevist.

14.7.3. <u>Sætning</u>. Lad A være en mængde i et metrisk rum. Så gælder påstanden:

$$\forall\ a,b \in A\ (a \text{ forb } b \Rightarrow a \text{ sam } b).$$

Bevis. Påstanden følger umiddelbart af sætning 14.6.3.

14.7.4. <u>Definition</u>. Lad A være en punktmængde i et metrisk rum. Klasserne, som svarer til ækvivalensrelationen forb, kaldes de <u>kurvesammenhængende komponenter</u> af A. Hvis $\forall$ a,b $\in$ A(a forb b), kaldes A <u>kurvesammenhængende</u>.

14.7.5. <u>Sætning</u>. Enhver kurvesammenhængende punktmængde er sammenhængende.

Bevis. Umiddelbar følge af sætning 14.7.3.

Det fremgår, at inddelingen af A i kurvesammenhængende komponenter er en videre inddeling af inddelingen af A i sammenhængende komponenter.

14.8. Vi vil vise ved et eksempel, at sammenhæng og kurvesammenhæng virkelig er indbyrdes forskellige begreber. Som metrisk rum vil vi benytte $\grave{R}^2$, og vi vil betragte en punktmængde A defineret ved

$$A = \{(x,y) \in \grave{R}^2 \mid x = 0 \vee (x > 0 \wedge y = \cos x^{-1}\pi)\}.$$

Vi vil nu først vise, at A består af de to kurvesammenhængende komponenter

$$A_1 = \{(0,y) \mid y \in \grave{R}\}$$
$$A_2 = \{(x,y) \mid x > 0,\ y = \cos x^{-1}\pi\}.$$

Det ses umiddelbart, at $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ og $A_1 \cup A_2 = A$. Desuden er det helt klart, at A_1, som er y-aksen, er kurvesammenhængende. For to punkter

$$a = (x_1,\ \cos x_1^{-1}\pi),\ b = (x_2,\ \cos x_2^{-1}\pi),\ x_1 < x_2$$

har vi den kontinuerte afbildning $\gamma:[x_1,x_2]$ ind i A_2 defineret ved

$$\gamma(x) = (x, \sin x^{-1}\pi),$$

som viser, at a forb b er opfyldt. Vi mangler altså blot at vise, at to punkter

$$a = (0,y_0),\ b = (x_0, \sin x_0^{-1}\pi)$$

ikke kan forbindes i mængden A. Vi viser dette indirekte, idet vi antager, at der eksisterer et interval $[\alpha,\beta]$ og en kontinuert afbildning $\gamma : [\alpha,\beta]$ ind i A, således at $\gamma(\alpha) = a$ og $\gamma(\beta) = b$. Mængden A_1 er åbenbart afsluttet, og $\gamma^{-1}(A_1)$ er derfor en afsluttet delmængde af $[\alpha,\beta]$, altså kompakt. Heraf følger, at $\gamma^{-1}(A_1)$ har et største element t_0. Vi kan nu finde $\delta > 0$, således at

$$(1) \qquad \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \leqq \tfrac{1}{2} \quad \text{for} \quad t_0 \leqq t \leqq t_0 + \delta.$$

For $t > t_0$ er γ imidlertid en afbildning ind i A_2, og for $t > t_0$ kan γ derfor fremstilles på formen

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \sin(\gamma_1(t))^{-1}\pi).$$

Lad os nu antage, at $\gamma(t_o) = (0,y_o)$, hvor $y_o > 0$. Vi kan da ifølge sætning 14.2.7 finde en værdi $t' \in]t_o,t_o+\delta[$, således at $\gamma_1(t') = \frac{1}{n}$, hvor n er et helt ulige tal. Så bliver

$$\gamma(t') = (\frac{1}{n}, -1)$$

i modstrid med (1). Tilfældet $y_o < 0$ behandles tilsvarende.

Vi har således vist, at A_1 og A_2 er de kurvesammentrængende komponenter af A. Nu er A_2 åbenbart ikke en afsluttet delmængde af A, og A_2 er derfor ifølge sætning 14.5.4 ikke en komponent af A. Heraf følger umiddelbart, at A er sammenhængende.

14.9. Vi vil nu specielt studere sammenhængsforhold i $\grave{R}^n$. Undersøgelserne vil også være gyldige for $n = \infty$.

14.9.1. Definition. En afbildning $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i $\grave{R}^n$ kaldes en jævn retlinet bevægelse, hvis γ er defineret ved en relation af formen $\gamma(t) = t\underline{a} + \underline{b}$, hvor $\underline{a}$, $\underline{b} \in \grave{R}^n$.

En bevægelse $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i $\grave{R}^n$ kaldes polygonal, hvis der findes en inddeling $\alpha = t_o < t_1 <\dots< t_q = \beta$, således at det for hvert delinterval $[t_{j-1},t_j]$ gælder, at restriktionen af γ til $[t_{j-1},t_j]$ er en jævn, retliniet bevægelse. Hvis $A \subseteq \grave{R}^n$ er en mængde, a, b $\in$ A to vilkårlige punkter, og der eksisterer en polygonal bevægelse $\gamma:[\alpha,\beta]$ ind i A med $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$, siger vi, at a og b kan forbindes med en brudt linie i A.

14.9.2. Sætning. Relationen a og b kan forbindes med en brudt linie i A" er en ækvivalensrelation på mængden A.

Bevis. Ganske som sætning 14.7.2.

14.9.3. Definition. Klasserne i den til den i sætning 14.9.2 omtalte ækvivalensrelation svarende klasseinddeling af A kaldes de polygonalt sammenhængende komponenter af A.

Det er klart, at polygonal sammenhæng er det stærkeste af de tre sammenhængsbegreber, vi har indført, idet vi har polygonal sammenhæng $\Rightarrow$ kurvesammenhæng $\Rightarrow$ sammenhæng.

En cirkelperiferi i $\grave{R}^2$ er øjensynligt kurvesammenhængende uden at være polygonalt sammenhængende. Dens polygonalt sammenhængende komponenter omfatter hver kun et enkelt punkt.

14.9.4. <u>Sætning</u>. Enhver kugleomegn i $\grave{R}^n$ er polygonalt sammenhængende.

Bevis. Lad

$$K(\underline{a},r) = \{\underline{b} \in \grave{R}^n \mid \|\underline{b}-a\| < r\}, \; r > 0$$

være en kugleomegn. For $\underline{b}$, $\underline{c} \in K(\underline{a},r)$ har vi da en jævn retlinet bevægelse fra $\underline{b}$ til $\underline{a}$ indenfor $K(\underline{a},r)$ og en jævn retlinet bevægelse fra $\underline{a}$ til $\underline{c}$ indenfor $K(\underline{a},r)$. Heraf følger, at $K(\underline{a},r)$ er polygonalt sammenhængende.

Vi skal nu vise en struktursætning for åbne mængder i $\grave{R}^n$:

14.9.5. <u>Sætning</u>. Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde. Komponenterne af O er da åbne og de er identiske med de polygonalt sammenhængende komponenter af O. Mængden af komponenter er endelig eller numerabel.

Bevis. Lad $C \subseteq O$ være en polygonalt sammenhængende komponent, og lad $\underline{a} \in C$ være et vilkårligt punkt. Der findes en kugleomegn $K(\underline{a},r) \subseteq O$, og den vil være polygonalt sammenhængende ifølge sætning 14.9.4. Heraf følger, at $K(\underline{a},r) \subseteq C$; altså er C åben. Vi har dermed bevist, at de polygonalt sammenhængende komponenter af en åben mængde er åbne.

Lad nu C være en polygonalt sammenhængende komponent af en sammenhængende, åben mængde O. Da er $C_1 = O \setminus C$ foreningsmængde af de øvrige polygonalt sammenhængende komponenter af C, og da disse alle er åbne, er C_1 åben. Men så har vi en opspaltning $O = C \cup C_1$ med $C \cap C_1 = \emptyset$, og da O er sammenhængende, og C er en komponent og derfor ikke tom, er $C_1 = \emptyset$, altså $O = C$. Dermed har vi bevist, at en åben sammenhængende mængde er polygonalt sammenhængende.

Lad nu C være en komponent af en åben mængde O og $\underline{a} \in C$ et vilkårligt punkt. Lad C_1 være den polygonalt sammenhængende komponent af O, som indeholder $\underline{a}$. Da gælder $C_1 \subseteq C$. Men $\underline{a}$ er indre punkt i C_1. Altså er $\underline{a}$ indre punkt i C. Altså er C åben.

Lad $O \subseteq \grave{R}^n$ være en åben mængde og $n < \infty$. For hver komponent $C \subseteq O$ kan vi vælge $\underline{r} \in C$, hvor $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ og $r_1, \ldots, r_n$ er rationale. Disse talsæt bliver indbyrdes forskellige, og da der overhovedet kun findes numerabelt mange sådanne talsæt, kan der højst være numerabelt mange komponenter.

I tilfældet $n = \infty$ kan vi i hver komponent vælge et punkt $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_q, 0, 0, \ldots)$, hvor $r_1, \ldots, r_q$ er rationale, og da antallet af sådanne talsæt også er numerabelt, går beviset på samme måde.

Lette opgaver.

1. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et interval, $F_1 \subseteq I$ og $F_2 \subseteq I$ afsluttede mængder, som tilfredsstiller $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = I$. Vis, at $F_1 = \emptyset \vee F_2 = \emptyset$.

2. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et interval og $f:I$ ind i $\dot{R}$ en kontinuert afbildning. For et punkt $a \in I$ gælder det, at $f(I) \setminus f(a)$ er et interval. Hvad følger heraf om afbildningen f.

3. Vis, at ethvert polynomium af ulige grad og med reelle koefficienter har en reel rod.

4. Hvilke delmængder af en cirkelperiferi er sammenhængende.

5. Overvej om påstanden "komplementærmængden til en sammenhængende mængde er sammenhængende" gælder for følgende topologiske rum: $\dot{R}, \dot{R}^2$, en cirkelperiferi, en kugleoverflade.

6. Lad M være en fuldstændigt ordnet mængde. Til hvert element $a \in M$ knyttes en omegnsbasis $\dot{B}(a)$ bestående af en eneste mængde, nemlig den mængde, der omfatter a og alle elementer, som følger efter a i ordningen. Derved fås et topologisk rum $T = (M, \dot{B})$. Hvilke delmængder af T er 1) åbne, 2) afsluttede, 3) sammenhængende.

7. Samme spørgsmål for det topologiske rum $T = (\dot{N}, \dot{B})$, hvor $\dot{B}(a)$ består af en eneste mængde, nemlig mængden af divisorer i a.

8. Samme spørgsmål for det topologiske rum $T = (\dot{N}, \dot{B}_1)$, hvor $\dot{B}_1(a)$ består af en eneste mængde, nemlig mængden af multipla af a.

9. Hvilke sammenhængende mængder findes i det topologiske rum

$T = (\dot{Z}, \dot{B})$, hvor $\dot{B}(a)$ er mængden af differensrækker, som indeholder a og er uendelige i begge retninger.

10. Lad A og B være afsluttede mængder i det topologiske rum T. Det antages, at $A \cup B$ og $A \cap B$ er sammenhængende. Vis, at A og B er sammenhængende.

11. Lad A og B være sammenhængende mængder i det topologiske rum T. Det antages, at $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Vis, at $A \cup B$ er sammenhængende. Hvis betingelsen $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ erstattes med $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$; vil påstanden ikke mere være rigtig.

12. Vis ved et eksempel, at fællesmængden for en aftagende følge af (åbne) sammenhængende punktmængder i $\dot{R}^2$ ikke behøver at være sammenhængende.

13. Lad X og Y være metriske rum og $A \subset X$, $B \subset Y$ ægte delmængder. Vis, at $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ er en sammenhængende delmængde af produktrummet $X \times Y$.

14. Lad T være et sammenhængende topologisk rum og f:T ind i $\dot{R}$ (eller $\dot{C}$) en kontinuert afbildning. Det antages, at hvert punkt $x \in T$ har en omegn, i hvilken f er konstant. Vis, at f er konstant på T.

15. Det er let at angive et eksempel på en sammenhængende mængde $A \subsetneq \dot{R}^2$, således at der eksisterer et punkt $a \in A$, for hvilket $A \setminus \{a\}$ falder i uendelig mange komponenter. Man kan for eksempel lade A være foreningsmængde af en følge af rette linier gennem a. Det er mere overraskende, at det yderligere kan indtræffe, at komponenterne af $A \setminus \{a\}$ ikke alle har a

som kontaktpunkt. Vis, at

$$A = \{(x,o) \mid x \in \grave{R}\} \cup \{(x,(n+1)^{-1}) \mid n \in \grave{N} \wedge x \in]-\infty,n]\} \cup$$

$$\{(nt,\ 1-(1-(n+1)^{-1})t \mid n \in \grave{N} \wedge t \in [0,1]\}$$

er et eksempel på dette.

16. Lad A være en cirkelskive med centrum a. Vis, at $A \setminus \{a\}$ er sammenhængende.

17. Lad $B \subseteq \grave{R}^2$ være en sammenhængende mængde og $b \in B$ et indre punkt. Vis, at $B \setminus \{b\}$ er sammenhængende. Benyt opgave 16.

18. Lad $A \subseteq \grave{R}^2$ være en punktmængde, som har et indre punkt. Vis, at A ikke er homeomorf med et liniestykke.

19. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x = 0 \\ \sin x^{-1} \text{ for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $f:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ har følgende egenskaber:

1. Billedet af et afsluttet interval er kompakt.

2. Billedet af en sammenhængende mængde er sammenhængende.

Disse to egenskaber tilsammen er altså ikke nok til at sikre, at afbildningen er kontinuert.

20. I $\grave{R}^2$ betragtes en afsluttet mængde T af form som en retvinklet, ligebenet trekant. Denne deles ved højden i 2 trekanter, der nummereres 1 og 2. Disse deles på samme måde, og de 4 deltrekanter numereres 1,2,3 og 4. Denne proces fortsættes og efter n trin er trekanten delt i 2^n deltrekanter, som er numereret fortløbende. Vis, at det er muligt at vælge deltrekanternes numerering, således at på hinanden følgende trekanter har en

side fælles, og således at en deltrekant, der har nummer q ved den følgende inddeling deles i trekanterne med numre 2q-1 og 2q.

Et kompakt interval I opdeles ved fortsat halvering, og efter hvert trin numereres delintervallerne fortløbende. Et delinterval i den n^{te} inddeling tilordnes derved en ganske bestemt trekant (den med det samme nummer) i den n^{te} opdeling af T.

Lad $t \in I$ være et vilkårligt punkt af I. Vi kan da vælge en følge (I_n) af delintervaller, således at I_n hidrører fra den n^{te} inddeling af I, og således at $t \in I_n$ for ethvert n. Hertil svarer en følge (T_n) af deltrekanter, idet T_n er den til I_n svarende trekant i den n^{te} inddeling. Vis, at

1. Fællesmængden $\bigcap T_n$ består af et eneste punkt.
2. Hvis følgen (I_n) kan vælges på flere måder, vil det i 1. omtalte punkt ikke afhænge af valget af af følgen.

Vi har således for hvert $t \in I$ fastlagt en metode til bestemmelse af et tilsvarende punkt $\varphi(t) \in T$. Vis for den således definerede bevægelse φ:I ind i T, at

1. φ er kontinuert.
2. φ er surjektiv.
3. φ er ikke injektiv (sml. opgave 18).

Eksemplet viser, at en bevægelse udmærket kan passerer gennem alle punkter af en plan mængde med indre punkter. En bevægelse med denne egenskab kaldes en <u>Peanokurve</u> efter den italienske matematiker Peano, som først opdagede fænomenet.

Vanskeligere opgaver.

21. Lad $A \subseteq \dot{R}^2$ være defineret ved

$$A = \{(0,y) \mid 0 < |y| \leqq 1\} \cup \{(\tfrac{1}{n},y) \mid n \in \dot{N} \wedge |y| \leqq 1\}.$$

Angiv komponenterne af A. Bestem fællesmængden for de delmængder af A, som indeholder (0,1), er åbne relativt til A og har komplementærmængde, som er åben relativt til A.

22. I $\dot{R}^\infty$ betegner vi med M mængden af punkter, som kun har endelig mange koordinater $\neq 0$. Bevis, at M og $\complement M$ er sammenhængende.

23. I $\dot{R}^4$ betragtes mængden A af punkter $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, for hvilke den ved

$$\underline{g}(\underline{x}) = (\alpha x_1+\beta x_2,\ \gamma x_1+\delta x_2)$$

definerede afbildning $\underline{g}:\dot{R}^2$ ind i $\dot{R}^2$ er bijektiv. Vis, at A er åben og overalt tæt, men ikke sammenhængende.

24. Lad F være en komponent af komplementærmængden til en åben mængde $O \subseteq \dot{R}^n$. Vis, at $\complement F$ og $O \cup F$ er sammenhængende.

25. Om en følge (O_n) af åbne mængder på $\dot{R}$ antages, at $O_1 \supseteqq O_2 \supseteqq \dots$, og at $\bigcap O_n$ er overalt tæt. Vis, at $\bigcap O_n$ ikke er numerabel.

Vis, at mængden af irrationale tal ikke kan fremstilles som foreningsmængde for en voksende følge af afsluttede delmængder af $\dot{R}$.

26. Lad $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ være en afbildning. For $x \in \dot{R}$ sættes

$$\omega_f(x) = \lim_{h\to 0} (\sup f([x-h,x+h]) - \inf f([x-h,x+h])),$$

hvor h gennemløber positive værdier. Vis, at $\omega_f(x)$ eksisterer (men $\omega_f(x)$ kan være ∞). Vis, at

1. $\omega_f(x) = 0$, hvis x er kontinuitetspunkt for f.
2. $\omega_f(x) > 0$, hvis x er diskontinuitetspunkt for f.
3. $\{x \mid \omega_f(x) \geqq \varepsilon\}$ er afsluttet, hvis $\varepsilon > 0$.

Udled heraf, at f ikke kan vælges sådan, at mængden af diskontinuitetspunkter for f netop er mængden af irrationale tal (benyt opgave 25).

Svær opgave.

27. Konstruktionen i opgave nr. 20 ændres, idet man i stedet for i hvert skridt at halvere trekanten ved højden fjerner en åben parallelstrimmel omkring højden fra trekanten og forbinder de fremkomne deltrekanter ved et linie
punkter er de vinkelspidser i deltrekanterne, som er nærmest ved den vinkelspids, der blev skåret væk. Ved den tilsvarende opdeling af intervallet I udskæres tilsvarende et interval omkring midtpunktet og på dette interval defineres φ som en jævn retlinet bevægelse, der gennemløber liniestykket, som forbinder deltrekanterne, startende ved den trekant, der har det laveste nummer.

Vis, at konstruktionen af φ lykkes som før, men at φ nu bliver en injektiv Vis, at φ bliver en homeomorfi af I på $\varphi(I)$. Vis, at de parallelstrimler, der skæres ud af trekanterne, kan vælges således, at det ydre Riemann-mål af $\varphi(I)$ bliver positivt.

Mængden $\varphi(I)$ kaldes Osgood-kurve. Eksemplet viser, at en plan punktmængde, som er homeomorf med et interval, ikke behøver at være en Riemann'sk nulmængde.

Differentiation og integration.

15.1. Vi skal i dette kapitel omtale forskellige resultater, som angår den indbyrdes sammenhæng mellem differentiation og integration samt forskellige mere praktisk betonede spørgsmål i forbindelse med anvendelsen af disse operationer.

Vi vil i denne sammenhæng forlade den meget omfattende klasse af Riemann-integrable funktioner og i stedet arbejde med en funktionsklasse, der blot er en forholdsvis beskeden udvidelse af de kontinuerte funktioners klasse. Det vil derfor gælde for de fleste sætninger i dette kapitel, at en del af de betingelser, der anføres i sætningerne, i virkeligheden ikke er nødvendige. Lejlighedsvis vil vi uden bevis fortælle, at en anført betingelse er overflødig eller stærkere end nødvendigt. En mere tilfredsstillende teori bygges bedst op på basis af Lebesgue's integrationsteori, men denne falder helt uden for rammerne af det foreliggende kursus.

15.2. Kompakthedsteorien sætter os i stand til at bevise følgende sætning:

15.2.1. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et begrænset interval og $f: I$ ind i $\dot{R}$ en begrænset og kontinuert funktion. Då er f Riemann-integrabel.

Bevis. Vi sætter

$$M = \sup\{\,|f(x)| \;\big|\; x \in I\}.$$

Lad ε være et positivt tal. Lad a være venstre og b højre endepunkt af I. Vi vælger $h > 0$, således at

$$h < \frac{1}{2}(b-a), \quad h \leqq \frac{1}{6} M^{-1}\varepsilon.$$

Restriktionen af f til $[a+h, b-h]$ er ligelig kontinuert (her benyttes, at $[a+h,b-h]$ er kompakt, og vi kan derfor vælge $\delta > 0$, således at

$$(1)\ \forall x',x'' \in [a+h,b-h] \left(|x''-x'| \leqq \delta \Rightarrow |f(x'')-f(x')| \leqq \tfrac{1}{3}(b-a)^{-1}\varepsilon\right).$$

Vi vælger nu en inddeling P af intervallet I i delintervallerne $[a,a+h]$ eller $]a,a+h]$, $[b-h,b]$ eller $[b-h,b[$ samt delintervaller af $]a+h,b-h[$ af længde $\leqq \delta$. Hvis I_k er et af de sidstnævnte delintervaller, gælder ifølge (1)

$$\sup f(I_k) - \inf f(I_k) \leqq \tfrac{1}{3}(b-a)^{-1}\varepsilon.$$

Hvis I_j er et af de førstnævnte delintervaller, gælder der helt trivielt, at

$$\sup f(I_j) - \inf f(I_j) \leqq 2M.$$

For de i 15.37 indførte summer s og S gælder derfor i dette tilfælde (de indskudte punkter i delintervallerne indgår slet ikke i disse summer)

$$S(f,P) - s(f,P) \leqq 2\cdot h\cdot 2M + \sum_{I_k \subseteqq]a+h,b-h[} m(I_k)\cdot\tfrac{1}{3}(b-a)^{-1}\varepsilon <$$

$$2\cdot\tfrac{1}{6}M^{-1}\varepsilon\cdot 2M + (b-a)\cdot\tfrac{1}{3}(b-a)^{-1}\varepsilon = \varepsilon.$$

Heraf følger

$$\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \leqq \varepsilon,$$

og da ε var et vilkårligt positivt tal, følger heraf, at f er Riemann-integrabel.

I det specielle tilfælde, hvor $I = [a,b]$ er afsluttet, vil enhver kontinuert funktion på I være begrænset, og den ene forudsætning i sætningen vil derfor være overflødig i dette tilfælde.

15.2.2. <u>Sætning</u>. Lad $f:\mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte og med højst endelig mange diskontinuitetspunkter. Da er f Riemann-integrabel. For enhver kontinuert funktion $F: \mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$, som tilfredsstiller betingelsen $DF(x) = f(x)$ i ethvert $x \in \mathring{R}$, som ikke er diskontinuitetspunkt for f, gælder relationen

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

for alle $a,b \in \mathring{R}$.

Bevis. Lad $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$ være diskontinuitetspunkterne for f. Lad $c_o < c_1$ og $c_n > c_{n-1}$ være valgt, således at $]c_o, c_n[$ indeholder støtten for f. Da er f Riemann-integrabel over hvert interval $]c_{k-1}, c_k[$ ifølge sætning 15.2.1. Endvidere er f Riemann-integrabel over de udartede intervaller $[c_k, c_k]$. Af sætning 9.32.1 følger nu, at f er Riemann-integrabel. Af sætning 10.22.1 følger dernæst, at den ved

$$(2) \qquad F_o(x) = \int_{c_o}^x f(t)dt$$

definerede funktion er differentiabel i alle kontinuitetspunkter for f med differentialkvotient f. Endvidere viser vurderingen

$$|F_o(x_2) - F_o(x_1)| \leq |x_2 - x_1| \sup_{t \in \mathring{R}} |f(t)|,$$

at F_o er kontinuert. Er nu $F: \mathring{R}$ ind i $\mathring{R}$ kontinuert og tilfredsstiller $DF(x) = f(x) = DF_o(x)$ i alle kontinuitetspunkter, da er $D(F(x) - F_o(x)) = 0$ og følgelig $F(x) - F(x_o)$ konstant på hvert interval $]c_{k-1}, c_k[$, samt på $]-\infty, c_o[$ og $]c_n, \infty[$. Da $F - F_o$ er kontinuert også i punkterne c_k, følger heraf, at $F - F_o$ er konstant. Af (2) følger nu umiddelbart

$$\int_{c_o}^x f(t)dt = F_o(x) = F_o(x) - F_o(c_o) = F(x) - F(c_o),$$

altså

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{c_0}^b f(t)dt - \int_{c_0}^a f(t)dt = F(b)-F(a).$$

Dermed er sætningen bevist.

15.3. Ved de følgende undersøgelser beskæftiger vi os med funktioner, der kan have diskontinuiteter i visse punkter. Når vi siger, at en funktion er diskontinuert i et eller andet punkt, skal dette i de fleste tilfælde forstås på den måde, at funktionen enten virkelig vides at være diskontinuert i punktet, eller at vi ikke ved, om funktionen er kontinuert i punktet. Derfor vil det heller ikke skade, hvis vi ved anvendelser af resultaterne bevidst "udnævner" visse kontinuitetspunkter til diskontinuitetspunkter for at få en sætnings formulering til at passe i et foreliggende tilfælde.

15.3.1. Sætning. Lad T være et kompakt metrisk rum, og lad $[a,b] \subseteq \dot{R}$ være et begrænset interval. Lad φ_k:T ind i $]a,b[$, $k = 1,\ldots,n$ være kontinuerte afbildninger. Lad f:T $\times \dot{R}$ ind i $\dot{R}$ være en afbildning, som er begrænset, identisk nul udenfor T $\times [a,b]$ og kontinuert undtagen på punktmængden

$$\{(u,x) \mid u \in T \wedge (x = \varphi_1(u) \vee \ldots \vee x = \varphi_n(u))\}.$$

Da er den ved

$$F(u) = \int f(u,x)dx$$

definerede afbildning F:T ind i $\dot{R}$ kontinuert.

Bevis. Lad c være et vilkårligt punkt af T. Vi behøver blot at vise, at F er kontinuert i c. Lad $M \in \dot{R}$ være valgt, således at

$$\forall\, u \in T\ \forall\, x \in \dot{R}(|f(u,x)| \leq M).$$

Lad ε være et positivt tal. For $k = 1,\ldots,n$ vælger vi åbne intervaller $I_k \subset [a,b]$, således at $\varphi_k(c) \in I_k$ og

$$m(I_1 \cup \ldots \cup I_n) \leqq \frac{\varepsilon}{4M} .$$

Da φ_k er kontinuert er c et indre punkt i $U = \varphi_1^{-1}(I_1) \cap \ldots \cap \varphi_n^{-1}(I_n)$, og vi kan derfor vælge en kugleomegn $K_o = K(c,\delta_o) \subseteq T$, således at $\overline{K}_o \subseteq U$. Da $\overline{K}_o$ er en afsluttet delmængde af det kompakte rum T er $\overline{K}_o$ kompakt. Da et produkt af kompakte rum igen er kompakt, er

$$\overline{K}_o \times ([a,b] \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_n))$$

en kompakt mængde. Funktionen f er kontinuert på denne mængde, følgelig ligelig kontinuert, og vi kan derfor vælge en kugleomegn $K = K(c,\delta) \subset K(c,\delta_o)$, således at

$$\forall\, u \in K(c,\delta)\ \forall\, x \in [a,b] \setminus (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$$
$$\left(|f(x,u) - f(x,c)| \leqq \tfrac{1}{2}(b-a)^{-1}\varepsilon\right).$$

Nu har vi omskrivningen

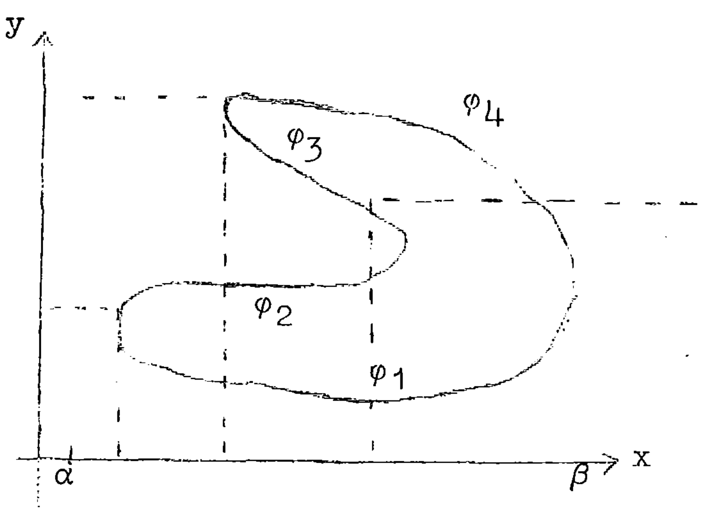
$$\int f(u,x)dx - \int f(c,x)dx = \int (f(u,x) - f(c,x))dx =$$
$$\int_{I_1 \cup \ldots \cup I_n} (f(u,x)-f(c,x))dx + \int_{[a,b]\setminus(I_1\cup\ldots\cup I_n)} (f(u,x)-f(c,x))dx.$$

Idet de sidste integraler vurderes i henhold til sætning 15.25.1, får vi

$$\left|\int f(u,x)dx - \int f(c,x)dx\right| \leqq$$
$$m(I_1 \cup \ldots \cup I_n)\cdot 2M + (b-a)\cdot\tfrac{1}{2}(b-a)^{-1}\varepsilon \leqq \varepsilon,$$

og da dette gælder for ethvert $u \in K$ er kontinuiteten af F dermed bevist.

Ved anvendelserne af sætning 15.3.1 er situationen ofte den, at en kontinuert funktion f(., .) er givet i en afsluttet punkt-



mængde, der er indesluttet af en "pæn" kurve, således som det er antydet på figuren. Vi tænker os definitionen af f udvidet, idet vi sætter $f(x,y) = 0$, når (x,y) ligger udenfor kurven. Vi får da diskontinuiteter langs de grafiske billeder af $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ på figuren. Vi kan nu udvide definitionen af disse funktioner til $[\alpha,\beta]$, idet vi holder dem konstante, hvor de ikke i forvejen er definerede, således som det er antydet på figuren. Sætningen kan da anvendes, og vi får, at $\int f(x,y)dy$ bliver en kontinuert funktion af x.

15.4. I dette afsnit skal vi vise nogle sætninger om Riemann-integrabilitet af funktioner af flere variable.

15.4.1. <u>Sætning.</u> Lad T være en kompakt trappemængde og $f: T$ ind i $\dot{R}$ en kontinuert funktion. Da er f Riemann-integrabel over T.

Bevis. Da f er ligelig kontinuert, kan vi for $\varepsilon > 0$ vælge $\delta > 0$, således at det for enhver punktmængde $A \subseteq T$ med diam $A \leqq \delta$ gælder, at

$$\sup f(A) - \inf f(A) \leqq \frac{\varepsilon}{m(T)} .$$

Hvis vi inddeler T i intervaller, som alle har diameter $\leqq \delta$, vil de i 9.37 indførte summer s og S tilfredsstille betingelsen $S - s \leqq \varepsilon$, så vi kan slutte, at

$$\overline{\int_T} f - \underline{\int_T} f \leqq \varepsilon .$$

Da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, er f Riemann-integrabel.

15.4.2. <u>Sætning</u>. Lad $A \subseteq \dot{R}^n$ være en Riemann-målelig mængde og $f: A$ ind i $\dot{R}$ en begrænset, kontinuert funktion. Da er f Riemann-integrabel over A.

Bevis. Vi sætter

$$M = \sup f(A) - \inf f(A).$$

Lad ε være et positivt tal. Vi vælger en trappemængde $T_1 \subseteq A$ med $m(T_1) \geqq m(A) - \varepsilon(2M)^{-1}$. Vi vælger en kompakt trappemængde $T \subseteq T_1$ med $m(T) \geqq m(A) - \varepsilon M^{-1}$. Så er

$$\overline{\int}_{A\setminus T} f - \underline{\int}_{A\setminus T} f \leqq \varepsilon.$$

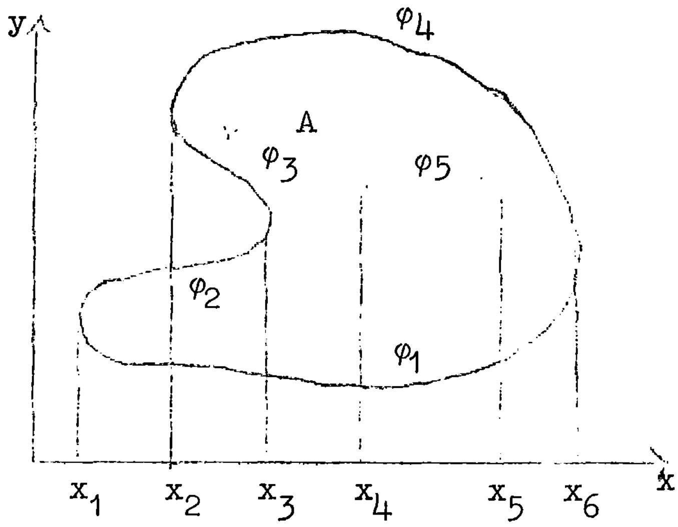
Af sætning 9.32.4 og sætning 15.4.1 følger nu

$$\overline{\int}_A f - \underline{\int}_A f =$$

$$\overline{\int}_T f - \underline{\int}_T f + \overline{\int}_{A\setminus T} - \underline{\int}_{A\setminus T} f =$$

$$\overline{\int}_{A\setminus T} f - \underline{\int}_{A\setminus T} f \leqq \varepsilon,$$

og da ε var et vilkårligt positivt tal, følger heraf, at f er Riemann-integrabel over A.



15.5. Vi vil illustrere anvendelsen af de foregående resultater i tilslutning til hosstående figur. Mængden A tænkes begrænset af de med $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ betegnede kurvestykker, der er definerede ved kontinuerte afbildninger $\varphi_1 : [x_1, x_6]$ ind i $\dot{R}$ etc. En afbildning $f : A$ ind i $\dot{R}$ tænkes begrænset i A og kontinuert i $\mathring{A}$ bortset fra diskontinuiteter langs det med φ_5 betegnede kurvestykke, og $\varphi_5 : [x_4, x_5]$ ind i $\dot{R}$ antages kontinuert. Ifølge sætning 9.30.2 er en punktmængde af formen

$$\{(x,y) \mid x \in [x_2,x_3] \wedge y \in [0,\varphi_3(x)]\}$$

en Riemann-målelig mængde. Ved sætning 9.32.1 fås nu let, at A er Riemann-målelig. Selve kurven φ_5 er en Riemann'sk nulmængde. Så er f Riemann-integrabel over A ifølge sætning 15.4.2. Vi kan udvide definitonen af f til hele $\mathring{R}^2$ ved at sætte $f(x,y) = 0$ for $(x,y) \notin A$. Vi kan så benytte sætning 9.27.2 til udregning af Riemann-integralet, idet vi først for hver fast værdi af x integrerer med hensyn til y, og derefter integrerer den fremkomne funktion af x. Nu har vi netop vist, at f(x,y) er Riemann-integrabel for hvert fast værdi af x, og at den fremkomne funktion af x bliver kontinuert.

Ved den praktiske udregning af integralet vil man dele integrationsintervallerne ved alle diskontinuitetspunkterne, og i første omgang vil man forsøge i hvert kontinuitetsinterval at bestemme en stamfunktion ved en af de i kapitel 6 omtalte metoder, idet sætning 15.2.2. anvendes. I det foreliggende tilfælde vil man således opspalte integralet på følgende måde:

$$\int_A f = \int_{x_1}^{x_2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx +$$
$$\int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{x_3}^{x_4} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dydx +$$
$$\int_{x_4}^{x_5} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_5(x)} f(x,y)dy + \int_{\varphi_5(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{x_5}^{x_6} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_4(x)} f(x,y)dydx.$$

Hvis udregning af integralerne ved hjælp af stamfunktionerne ikke lykkes, er der en spinkel mulighed for, at de bestemte integraler kan udregnes ved et eller andet trick. Det kan f.eks. tænkes, hvor der optræder en sum af to integraler, at en passende substitution får integrationsintervallerne til at falde sammen, og at summen af integralerne derefter viser sig at være simplere end de enkelte integraler. Kraftige metoder til udregning af bestemte integraler udvikles i den videregående matematik, men den eksplicite udførelse vil dog stadig kun være mulig i yderst specielle tilfælde. I numerisk analyse råder man over metoder til tilnærmest numerisk udregning af bestemte integraler. En nogenlunde brugbar metode vil blive omtalt i slutningen af dette kapitel.

De her omtalte metoder kan uden videre overføres til funktioner af flere end to variable. Skrivearbejdet bliver hurtigt meget omfattende, men der vil ikke opstå alvorligere principielle vanskeligheder.

15.6. Vi viser nu en vigtig sætning om ombytning af differentiation og integration.

15.6.1. <u>Sætning</u>. Lad $f:[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}$ være en kontinuert afbildning, for hvilken $D_1 f$ eksisterer og er kontinuert. Da er

$$D\int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} D_1 f(x_1,x_2)dx_2.$$

Bevis. Vi sætter

$$G(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1,x_2)dx_2,\quad g(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} D_1 f(x_1,x_2)dx_2.$$

På grund af antagelserne om kontinuitet, er g og G kontinuerte, og f og $D_1 f$ Riemann-integrable, så vi får

$$\int_{a_1}^{x_1} g(t)dt = \int_{a_1}^{x_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} D_1 f(t,x_2)dx_2\right)dt =$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_2}^{x_1} D_1 f(t,x_2)dt\right)dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} (f(x_1,x_2)-f(a_1,x_2))dx_2 =$$

$$G(x_1) - G(a_1),$$

hvilket netop viser, at $DG = g$.

15.7. I fortsættelse af sætning 15.6.1 viser vi følgende sætning:

15.7.1. Sætning. Lad $f:[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}$ være en kontinuert afbildning. Lad $F:[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}$ være den ved

$$F(x_1,x_2,x_3) = \int_{x_2}^{x_3} f(x_1,t)dt$$

definerede afbildning. Da er F kontinuert. Hvis $D_1 f$ eksisterer og er kontinuert, er F kontinuert differentiabel med det totale differential

$$dF(\underline{x},d\underline{x}) = \left(\int_{x_2}^{x_3} D_1 f(x_1,t)dt\right)dx_1 - f(x_1,x_2)dx_2 + f(x_1,x_2)dx_3.$$

Bevis. Vi sætter

$$M = \sup\{|f(\underline{x})| \mid \underline{x} \in [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\}.$$

Lad ε være et opgivet tal. Da f er ligelig kontinuert, kan vi vælge et tal

$$\delta \in \left]0, \frac{\varepsilon}{3M}\right[,$$

således at

$$\forall\, x_1,x_1' \in [a_1,b_1]\ \forall\, x_2 \in [a_2,b_2]\ \{|x_1' - x_1| \leq \delta \Rightarrow$$

$$|f(x_1',x_2) - f(x_1,x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b_2-a_2)}\}.$$

For ethvert $\underline{h} = (h_1,h_2,h_3)$ og $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$, som tilfredsstiller betingelserne

$$\left.\begin{matrix}|h_1|\\|h_2|\\|h_3|\end{matrix}\right\} \leqq \delta, \quad x_1 \in [a_1,b_1], \quad x_1+h_1 \in [a_1,b_1], \quad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\} \in [a_2,b_2], \quad \left.\begin{matrix}x_2+h_2\\x_3+h_3\end{matrix}\right\} \in [a_2,b_2]$$

får vi nu ved en grov vurdering

$$|F(\underline{x}+\underline{h})-F(\underline{x})| = \left|\int_{x_2+h_2}^{x_3+h_3} f(x_1+h_1,t)dt - \int_{x_2}^{x_3} f(x_1,t)dt\right| \leqq$$

$$\left|\int_{x_2+h_2}^{x_3+h_3} |f(x_1+h_1,t) - f(x_1,t)|dt\right| + \left|\int_{x_2}^{x_2+h_2} f(x_1,t)dt\right| +$$

$$\left|\int_{x_3}^{x_3+h_3} f(x_1,t)dt\right| \leqq (b_2-a_2)\frac{\varepsilon}{3(b_2-a_2)} + |h_2|M + |h_3|M \leqq \varepsilon.$$

Altså er f kontinuert.

Hvis $D_1 f$ eksisterer og er kontinuert har vi ifølge sætning 15.6.1

$$D_1F(\underline{x}) = \int_{x_2}^{x_3} D_1 f(x_1,t)dt,$$

og den allerede viste del af sætning 15.7.1 følger, at D_1F er kontinuert. Af omskrivningen

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x_1,t)dt = \int_a^{x_3} f(x_1,t)dt - \int_a^{x_2} f(x_1,t)dt$$

ses umiddelbart, at

$$D_2F(\underline{x}) = -f(x_1,x_2), \quad D_3F(\underline{x}) = f(x_1,x_3),$$

og disse funktioner var forudsat kontinuerte. Dermed er sætningen bevist.

15.8. Vi vil nu vise hovedsætningen om ombytning af integration og grænseovergang:

15.8.1. <u>Sætning</u>. Lad $I \subseteq \dot{R}^m$ være et interval, og lad (f_n) være en følge af Riemann-integrable afbildninger f_n:I ind i $\dot{R}$.

Hvis (f_n) konvergerer ligeligt mod en afbildning $f: I$ ind i $\dot{R}$, er f Riemann-integrabel, og

$$\lim_{n \to \infty} \int_I f_n = \int_I f .$$

Bevis. Lad ε være et positivt tal, og lad $N \in \dot{N}$ være således valgt, at

$$\forall_n \geqq N, \ \forall \underline{x} \in I \left(|f(\underline{x}) - f_n(\underline{x})| \leqq \frac{\varepsilon}{m(I)} \right) .$$

For ethvert $n \geqq N$ og ethvert $x \in I$ har vi således

$$f_n(\underline{x}) - \frac{\varepsilon}{m(I)} \leqq f(\underline{x}) \leqq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{m(I)} .$$

Heraf følger

$$\int_I \left(f_n - \frac{\varepsilon}{m(I)}\right) \leqq \underline{\int}_I f \leqq \overline{\int}_I f \leqq \int_I \left(f_n + \frac{\varepsilon}{m(I)}\right)$$

eller

$$\int_I f_n - \varepsilon \leqq \underline{\int}_I f \leqq \overline{\int} f \leqq \int_I f_n + \varepsilon .$$

Heraf følger nu først, at

$$\overline{\int}_I f - \underline{\int} f \leqq 2\varepsilon ,$$

og da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, kan vi slutte, at f er Riemann-integrabel. Dernæst følger det, at

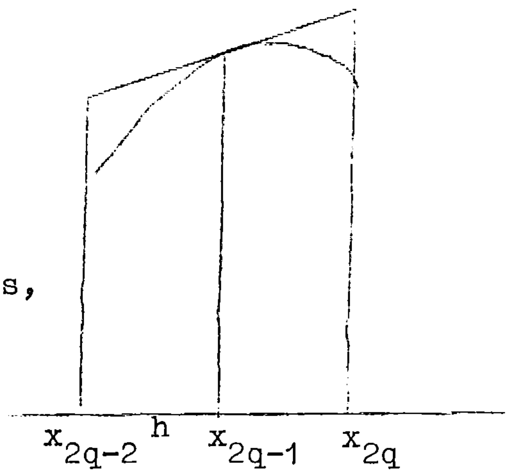
$$\left| \int_I f - \int_I f_n \right| \leqq \varepsilon$$

for ethvert $n \geqq N$, og dermed er sætningen bevist.

15.9. Vi vil slutte dette kapitel med en metode til tilnærmet beregning af et bestemt integral. Vi vil kun interesse os for det 1-dimensionale tilfælde, altså for udregning af et integral

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Metoden beror på, at intervallet $[a,b]$ deles i et lige antal $2p$ delintervaller af længde $h = \frac{1}{2p}(b-a)$. På hvert interval $[a + 2(q-1)h,\ a + 2qh]$ erstattes f med et andengradspolynomium, der antager samme værdi som f i de tre delepunkter, der falder i det nævnte interval.



På figuren har vi indtegnet en parabelbue, som er det grafiske billede af det omtalte andengradspolynomium. I gymnasiet vises, at arealet af et parabelsegment er $\frac{2}{3}$ af arealet af det omskrevne parallelogram. Dette har højde $2h$ og grundlinien bliver

$$f(x_{2q-1}) - \frac{1}{2}(f(x_{2q-2}) + f(x_{2q})),$$

og for integralet over intervallet $[x_{2q-2}, x_{2q}]$ får vi derfor tilnærmelsesværdien

$$h(f(x_{2q-2})+f(x_{2q}))+\frac{4}{3}h(f(x_{2q-1}) - \frac{1}{2}(f(x_{2q-2}) + f(x_{2q})) =$$

$$\frac{1}{3}\,h(f(x_{2q-2}) + 4f(x_{2q-1}) + f(x_{2q})).$$

Ved addition over alle delintervallerne får vi tilnærmelsesværdien

$$\frac{1}{3}\,h(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + f(x_{2p})) =$$

$$(b-a)\cdot\frac{1}{6p}\,(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + f(x_{2p})).$$

Dette kan fortolkes som intervallængden $b-a$ multipliceret med et vægtet middeltal af funktionsværdierne i delepunkterne, således at endepunkterne får vægt 1, de øvrige delepunkter med lige nummer får vægt 2 og delepunkterne med ulige nummer får vægt 4.

Det fundne resultat kaldes Simpsons formel. Den opnåede nøjagtighed afhænger stærkt af funktionen f. Indenfor rimelige grænser opnår man større nøjagtighed ved at inddele finere.

Ved i stedet for andengradspolynomier at approximere med polynomier af højere grad kan man udlede andre tilnærmelsesformler. Dertil kan man udnytte Lagrange's eller Newton's interpolationsformler. Eventuelt kan man opnå større nøjagtighed, hvis man i hvert delinterval approximerer med et polynomium, der er bestemt under hensyntagen også til funktionsværdier udenfor intervallet.

Lette opgaver.

1. Lad $I \subseteq \dot{R}$ være et begrænset interval. Lad $f:I$ ind i $\dot{R}$ være en begrænset funktion, som er kontinuert i alle punkter af I bortset fra punkterne af en mængde $A \subset I$. Det antages, at A ikke har noget fortætningspunkt i $\mathring{I}$. Vis, at f er Riemann-integrabel.

2. Om en afbildning $f:[a,b]$ ind i $\dot{R}$ antages, at den i hvert punkt har en grænseværdi fra venstre og en grænseværdi fra højre (dog kun fra højre i a og kun fra venstre i b). Vis, at f er begrænset og Riemann-integrabel.

3. Om en Riemann-integrabel afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ antages, at den i et punkt $a \in \dot{R}$ har en grænseværdi fra venstre og en grænseværdi fra højre. Vis, at den ved

$$F(x) = \int_c^x f(u)du$$

definerede afbildning $f:\dot{R}$ ind i $\dot{R}$ er differentiabel fra venstre og fra højre i a og med grænseværdierne af f som differentialkvotienter.

4. Udregn

$$\int_A xydxdy,$$

idet

$$A = \{(x,y) \mid x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge 1 \leqq x+y \leqq 2\}.$$

5. Udregn

$$\int_A x^2y^3dxdy,$$

idet

$$A = \{(x,y) \mid x^4 + y^4 \leqq 1\}.$$

6. Udregn

$$\int_A x^2y^{-2}(y^4+y-\sin y)\,dxdy,$$

idet

$$A = \{(x,y) \mid x \geqq 0 \wedge 1 \leqq x+|y| \leqq 2\}.$$

7. Udregn

$$\int_A \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy,$$

idet

$$A = \{(x,y) \mid x \leqq 1 \wedge y \leqq 1 \wedge x+y \geqq 1\}.$$

8. Lad $A \subseteqq \grave{R}^n$ være en Riemann-målelig mængde og $f:A$ ind i $\grave{R}$ en begrænset funktion, som har den egenskab, at mængden

$$\{\underline{x} \in A \mid f(\underline{x}) \leqq k\}$$

for ethvert $k \in \grave{R}$ er Riemann-målelig. Vis, at f er Riemann-integrabel (vurder forskellen mellem øvre og nedre integral ved at inddele A i disjunkte mængder, definerede ved betingelser af formen $k < f(\underline{x}) \leqq k + \varepsilon$).

9. Symmetrisk omkring midtpunktet af $[0,1]$ lægges et åbent interval I_1 af længde $\frac{1}{6}$. Symmetrisk omkring midtpunkterne af komponenterne af $[0,1] \setminus I_1$ lægges intervaller I_{21} og I_{22} af længde $\frac{1}{18}$. Der er nu 4 komponenter i komplementærmængden til foreningsmængden af de åbne intervaller, og om midtpunkterne af disse lægges intervaller af længde $\frac{1}{54}$. Således fortsættes i det uendelige. Med O betegner vi forenings-

mængden af alle disse åbne intervaller. Vis, at

$$\underline{m}(O) = \frac{1}{2}, \quad \overline{m}(O) = 1.$$

Vis, at der eksisterer en kontinuert funktion $f:[0,1]$ ind i $\mathring{R}$, som tilfredsstiller betingelserne

$$f(x) = 0 \text{ for } x \in [0,1] \setminus O,$$
$$f(x) > 0 \text{ for } x \in O.$$

Udled heraf, at den i opgave 8 anførte tilstrækkelige betingelse for Riemann-integrabilitet ikke er nødvendig.

10. Udregn

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\pi} \frac{\sin xy}{y}\, dy.$$

11. Udregn på to måder

$$\frac{d}{dx} \int_x^{2x} \frac{du}{x+u} .$$

12. Udregn

$$\lim_{x \to 0} x^{-3} \int_0^x \operatorname{Arctg}(xu)\,du,$$

f.eks. ved hjælp af l'Hospital's regel.

13. En afbildning $f:]0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ er defineret ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Vis, at $f(]0,\infty[)$ er et interval $]0,a]$, hvor $a > \frac{1}{2}\pi$. Vis, at ligningen $f(x) = a$ er tilfredsstillet for netop én værdi af x, og angiv denne værdi.

14. Udregn en tilnærmet værdi for

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\, dx$$

ved hjælp af Simsons formel.

Vanskeligere opgaver.

15. Lad $T \subseteqq \dot{R}^n$ være en kompakt trappemængde, $f:T$ ind i $\dot{R}$ en begrænset funktion, og $\hat{I}$ mængden af intervaller, som er delmængder af T. Vi sætter

$$\omega_f(\underline{x}) = \inf\left\{\sup f(I) - \inf f(I) \;\middle|\; I \in \hat{I} \wedge x \in \mathring{I}\right\}.$$

Det antages, at

$$\kappa = \sup \omega_f(\dot{R}^n)$$

har en endelig værdi. Lad ε være et positivt tal. Vis, at der eksisterer et positivt tal δ, således at

$$\forall\ I \in \hat{I}(\text{diam } I \leqq \delta \Rightarrow \sup f(I) - \inf f(I) \leqq \kappa + \varepsilon).$$

Vejledning: For $\underline{x} \in \dot{R}$ og $r > 0$ sætter vi

$$I(\underline{x},r) = \left\{\underline{y} \in \dot{R}^n \;\middle|\; |y_1-x_1| < r \wedge \ldots \wedge |y_n-x_n| < r\right\}.$$

For $\underline{x} \in T$ sætter vi

$$\rho(\underline{x}) = \inf\left\{r > 0 \;\middle|\; \sup f(I(\underline{x},r) \cap T) - \inf f(I\underline{x},r) \cap T) > \kappa + \varepsilon\right\}.$$

Vis, at $\rho:T$ ind i $\dot{R}$ er kontinuert. Studer den mindste værdi, som antages af ρ.

16. Lad $f:\dot{R}^n$ ind i $\dot{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Vis, at f er Riemann-integrabel, hvis og kun hvis

$$\forall\ \varepsilon > 0 \left(\overline{m}(\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geqq \varepsilon\}) = 0\right),$$

idet $\omega_f(\underline{x})$ er defineret som i opgave nr. 15. (Resultatet fra opgave nr. 15 anvendes ved beviset for "hvis").

17. Lad $f:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Vis, at f er Riemann-integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer en følge (I_n) af (ikke nødvendigvis disjunkte) intervaller, således at $\bigcup I_n$ indeholder alle diskontinuitetspunkter for f, og således at $\Sigma m(I_n) \leqq \varepsilon$. (Benyt opgave nr. 16).

18. Om en følge (A_n) af Riemann-målelige mængder i $\grave{R}^n$ antages, at

$$A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq A_3 \subseteqq \cdots,$$

samt at

$$A = \bigcup A_n$$

er begrænset. Vis, at $(m(A_n)) \to \underline{m}(A)$. (Benyt at en kompakt trappemængde $T \subseteqq \mathring{A}$ er overdækket af $\{\mathring{A}_n \mid n \in \grave{N}\}$ og derfor af endelig mange $\mathring{A}_n$).

19. Om en følge (f_n) af Riemann-integrable funktioner $f_n:\grave{R}^n$ ind i $\grave{R}$ antages at funktionernes støtter er indeholdt i et fast, begrænset interval I, at

$$\forall\, n\ \forall\, \underline{x}(f_n(\underline{x}) \leqq f_{n+1}(\underline{x})),$$

samt at f_n konvergerer punktvis mod en begrænset funktion f.

Vis, at

$$\left(\int f_n\right) \to \underline{\int} f.$$

20. For $0 < a < b$ sætter vi $I =]0,1] \times [a,b]$. Udregn

$$\int_I x^y dxdy$$

på to måder, og vis derved formlen

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, dx = \log \frac{b+1}{a+1} .$$

21. Udregn for $x > 0$

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\log(1+xy)}{1+y^2}\, dy$$

ved først at bestemme $D\varphi(x)$.

22. Bevis følgende for $0 < x < \pi$ gyldige relationer

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + \ldots + 2\cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} .$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin\frac{1}{2}} dx = \pi .$$

$$\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}\right) .$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_x^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{1}{2}u}\, du = 0 .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = \tfrac{1}{2}(\pi - x) .$$

Den næstsidste relation vises enklest ved en delt integration, således at $\sin(n+\frac{1}{2})u$ integreres. Derved kommer $n+\frac{1}{2}$ i nævneren og en grov vurdering vil give det ønskede resultat. Bestem endelig summen af rækken på venstre side i den sidste formel for alle $x \in]-\infty,\infty[$. Tegn en grafisk fremstilling af resultatet.

23. Integrer den i opgave 22 fundne række ledvis, f.eks. over $[x,\pi]$, og udled (ved at give x en passende speciel værdi) rækkeudviklingen

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{1}{8}\pi^2.$$

Udled heraf rækkeudviklingerne

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{6}\pi^2.$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{12}\pi^2.$$

Find dernæst summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx$$

og af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx.$$

Kurveteori.

16.1. I kapitel 14 indførte vi begrebet bevægelse, samt banen for en bevægelse. I dette afsnit skal vi videreføre teorien for bevægelser, især i det tilfælde, hvor bevægelsen opfylder differentiabilitetsbetingelser.

Bevægelser kan opfattes som bevægelser i fysisk forstand, og hovedvægten lægges da på afhængigheden af parameteren, der opfattes som tiden. Studiet af bevægelser ud fra dette synspunkt udgør den elementære kinematik.

På den anden side kan man også studere bevægelser ud fra det synspunkt, at man stræber efter at skaffe sig oplysninger om banens rent geometriske egenskaber. Nu kan vidt forskellige bevægelser have den samme bane, og det bliver derfor netop vigtigt i denne forbindelse at finde frem til egenskaber ved bevægelser, som bibeholdes ved ændringer af parameterfremstillingen. Det er studiet af bevægelser ud fra dette synspunkt, der er emnet for kurveteorien.

16.2. Vi vil først forklare, under hvilke omstændigheder vi vil opfatte to bevægelser som ens fra geometrisk synspunkt.

16.2.1. Definition. Lad T være et metrisk rum, og lad $\gamma_1:[a_1,b_1]$ ind i T og $\gamma_2:[a_2,b_2]$ ind i T være bevægelser (d.v.s. kontinuerte afbildninger). Bevægelserne γ_1 og γ_2 kaldes k-ækvivalente, og vi skriver $\gamma_1 \underset{k}{\sim} \gamma_2$, hvis der eksisterer en strengt voksende, kontinuert og bijektiv afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a_2,b_2]$, således at $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Vi skal vise, at $\underset{k}{\sim}$ er en ækvivalensrelation. Ved at vælge φ som den identiske afbildning, ser vi, at $\gamma_1 \underset{k}{\sim} \gamma_1$. Da $\varphi^{-1}:[a_2,b_2]$

på $[a_1, b_1]$ ligeledes er strengt voksende, kontinuert og bijektiv vil $\gamma_1 \underset{k}{\sim} \gamma_2$ medføre $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$, altså $\gamma_2 \underset{k}{\sim} \gamma_1$. Har vi en tredie bevægelse $\gamma_3 : [a_3, b_3]$ ind i T, og er $\gamma_2 \underset{k}{\sim} \gamma_3$, eksisterer der en strengt voksende, bijektiv og kontinuert afbildning $\psi : [a_2, b_2]$ på $[a_3, b_3]$, således at $\gamma_2 = \gamma_3 \circ \psi$. Vi har da den strengt voksende, bijektive og kontinuerte afbildning $\psi \circ \varphi : [a_1, b_1]$ på $[a_3, b_3]$, og vi har desuden

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi = (\gamma_3 \circ \psi) \circ \varphi = \gamma_3 \circ (\psi \circ \varphi),$$

hvoraf følger, at $\gamma_1 \underset{k}{\sim} \gamma_3$.

16.2.2. Definition. Hvis bevægelserne γ_1 og γ_2 i definition 16.2.1 opfylder de samme betingelser som i definition 16.2.1, bortset fra at φ er strengt aftagende, siges γ_1 og γ_2 at være modsatte.

To bevægelser, som er k-ækvivalente eller modsatte, har samme bane. For to bevægelser, som er modsatte, gælder det at den ene ender i det punkt, hvor den anden begynder og omvendt. Det ses let, at γ_1 modsat γ_2 og $\gamma_2 \underset{k}{\sim} \gamma_3$ medfører γ_1 modsat γ_3, og at γ_1 og γ_2 begge modsatte γ_3 medfører, at $\gamma_1 \underset{k}{\sim} \gamma_2$. Vi skal ikke opholde os ved beviserne for disse påstande.

16.3. Vi viser en hjælpesætning:

16.3.1. Lemma. Hvis I_1 og I_2 er intervaller på $\dot{R}$ og $\varphi : I_1$ på I_2 er en bijektiv, kontinuert afbildning, da er φ enten strengt voksende eller strengt aftagende.

Bevis. Det er åbenbart nok for 4 forskellige punkter $x_1, \ldots, x_4 \in I_1$ at vise, at

$$(x_1 < x_2 \wedge x_3 < x_4 \wedge \varphi(x_1) < \varphi(x_2)) \Rightarrow \varphi(x_3) < \varphi(x_4)$$
$$(x_1 < x_2 \wedge x_3 < x_4 \wedge \varphi(x_1) > \varphi(x_2)) \Rightarrow \varphi(x_3) > \varphi(x_4),$$

og det ses umiddelbart, at dette er ensbetydende med at vise, at det for 4 forskellige punkter $y_1,\dots,y_4 \in I_1$ gælder at

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 \Rightarrow (\varphi(y_1) < \varphi(y_2) < \varphi(y_3) < \varphi(y_4)) \vee$$
$$(\varphi(y_1) > \varphi(y_2) > \varphi(y_3) > \varphi(y_4)).$$

Nu er $[y_j,y_{j+1}]$ for $j = 1,2,3$ kompakt og sammenhængende. Da er $\varphi([y_j,y_{j+1}])$ kompakt og sammenhængende, altså et afsluttet interval $[a,b] \subseteqq I_2$. Endvidere er restriktionen $\varphi:[y_j,y_{j+1}]$ på $[a,b]$ en homeomorfi, og indre punkter vil derfor svare til indre punkter. Altså er enten $\varphi([y_j,y_{j+1}]) = [\varphi(y_j,\varphi(y_{j+1})]$ eller $\varphi([y_j,y_{j+1}]) = [\varphi(y_{j+1}),\varphi(y_j)]$. Sætningen følger nu umiddelbart af, at billederne af intervallerne $[y_j,y_{j+1}]$, $j = 1,2,3$ kun kan have endepunkter fælles.

16.3.2. <u>Definition</u>. Lad T være et metrisk rum. En bevægelse $\gamma:[a,b]$ ind i T kaldes simpel , hvis γ er injektiv.

16.3.3. Sætning. Lad $\gamma:[a,b]$ ind i T være en simpel bevægelse i det metriske rum T. Da er afbildningen $\gamma:[a,b]$ på $\gamma([a,b])$ en homeomorfi.

Bevis. Sætningen følger umiddelbart af, at γ er kontinuert og injektiv, og at $[a,b]$ er kompakt.

16.3.4. <u>Sætning</u>. Lad T være et metrisk rum. Hvis to simple bevægelser $\gamma_1:[a_1,b_1]$ ind i T og $\gamma_2:[a_2,b_2]$ ind i T har den samme bane $\Gamma = \gamma_1([a_1,b_1] = \gamma_2([a_2,b_2])$, da er γ_1 og γ_2 enten k-ækvivalente eller modsatte.

Bevis. Ifølge sætning 16.3.2 er afbildningen $\varphi = \gamma_2^{-1}\circ\gamma_1$: $[a_1,b_1]$ på $[a_2,b_2]$ bijektiv og kontinuert. Af lemma 16.3.1 følger, at den tillige er enten strengt voksende eller strengt aftagende. Desuden er $\gamma_1 = \gamma_2\circ\varphi$. Dermed er sætningen bevist.

16.3.3. <u>Definition</u>. Banen for en simpel bevægelse kaldes en <u>simpel kurve</u>.

En simpel kurve er således en punktmængde, altså et rent geometrisk begreb. To ganske bestemte punkter af den simple kurve vil svare til intervalendepunkterne, uafhængigt af valget af parameterfremstillingen. En simpel kurve har således to endepunkter. De simple bevægelser, der har den simple kurve som bane, falder i 2 klasser, således at bevægelserne i den ene klasse begynder i det ene af de to endepunkter og ender i det andet, medens endepunkternes roller er byttede for bevægelserne i den anden klasse.

16.4. Vi vil nu specielt betragte bevægelser i $\mathbf{R}^n$. Vi har da de polygonale bevægelser som et vigtigt hjælpemiddel. En jævn retlinet bevægelse er simpel, og da alle jævne retlinede bevægelser, der begynder i P_0 og ender i P_1, er indbyrdes ækvivalente, vil det ikke give anledning til misforståelser kort at sige "den retlinede bevægelse P_0P_1". Ved at sætte flere sådanne efter hinanden får vi en brudt linie, som vi kort kan betegne $P_0P_1P_2\dots P_n$. En brudt linie har en længde, som er summen af længderne af liniestykkerne $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$.

16.4.1. <u>Definition</u>. Ved en inddeling D af et interval $[a,b]$ vil vi forstå en konfiguration af punkter $t_0, \dots, t_q$, således at

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{q-1} < t_q = b.$$

Mængden af alle inddelinger af $[a,b]$ betegnes $\mathbf{D}[a,b]$.

Vi bemærker, at definitionen afviger en smule fra den i kapitel 9 benyttede.

16.4.2. <u>Definition</u>. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathbf{R}^n$ være en bevægelse. Hvis D er den i definition 16.4.1 indførte inddeling og P_j punktet $\underline{\gamma}(t_j)$, vil vi med $\lambda(\underline{\gamma};D)$ betegne længden af den brudte linie $P_0P_1\dots P_q$. Endvidere sætter vi

$$\lambda(\gamma;a,b) = \sup\{\lambda(\gamma;D) \mid D \in \dot{D}[a,b]\}.$$

For $[a_1,b_1] \subsetneq [a,b]$ anvender vi betegnelsen $\lambda(\gamma;a_1,b_1)$ for den tilsvarende størrelse for restriktionen af γ til $[a_1,b_1]$. Hvis $\lambda(\gamma;a,b) < \infty$, kaldes γ rektifiabel, og $\lambda(\gamma;a,b)$ kaldes vejlængden for bevægelsen γ. Hvis γ specielt er en simpel bevægelse og $\lambda(\gamma;a,b) < \infty$, kaldes $\lambda(\gamma;a,b)$ længden af γ eller længden af den simple kurve $\gamma([a,b])$.

Vi vil vise nogle simple sætninger vedrørende det således indførte vejlængdebegreb.

16.4.3. Sætning. Hvis to bevægelser er k-ækvivalente eller modsatte, har de samme vejlængde.

Bevis. Lad $\gamma_1:[a_1,b_1]$ ind i $\dot{R}^n$ og $\gamma_2:[a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}^n$ være k-ækvivalente bevægelser. Vi har da en strengt voksende, kontinuert, bijektiv afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a_2,b_2]$, således at $\gamma_1 = \gamma_2\circ\varphi$. Til en inddeling $D \in \dot{D}[a_1,b_1]$ bestående af punkterne

$$a_1 = t_0 < t_1 <\dots< t_q = b_1$$

tilordner vi en inddeling $\varphi^*(D) \in \dot{D}[a_2,b_2]$ bestående af punkterne

$$a_2 = \varphi(t_0) < \varphi(t_1) <\dots< \varphi(t_q) = b_2.$$

Derved defineres en bijektiv afbildning $\varphi^*:\dot{D}[a_1,b_1]$ på $\dot{D}[a_2,b_2]$. Endvidere gælder åbenbart

$$\lambda(\gamma_1;D) = \lambda(\gamma_2\circ\varphi;D) = \lambda(\gamma_2;\varphi^*(D)).$$

Da φ^* er bijektiv følger heraf, at

$$\{\lambda(\gamma_1;D) \mid D \in \dot{D}[a,b]\} = \{\lambda(\gamma_2;D) \mid D \in \dot{D}[a_2,b_2]\},$$

og heraf følger påstanden umiddelbart. Tilfældet, hvor bevægelserne er modsatte går på omtrent samme måde.

16.4.4. Sætning. Lad $\gamma:[a,b]$ ind i $\dot{R}^n$ være en bevægelse. For $c \in]a,b[$ gælder da

$$\lambda(\gamma;a,b) = \lambda(\gamma;a,c) + \lambda(\gamma;c,b).$$

Bevis. Lad først D være en vilkårlig inddeling af $[a,b]$. Lad D_1 være den inddeling, der fås af D ved tilføjelse af delpunktet c. På grund af trekantsuligheden gælder da

$$\lambda(\underline{\gamma};D) \leqq \lambda(\underline{\gamma};D_1).$$

Inddelingen D_1 kan tænkes sammensat af en inddeling D' af $[a,c]$ og en inddeling D'' af $[c,b]$, idet delepunktet c dog må medregnes i begge inddelinger. Vi har da

$$\lambda(\underline{\gamma};D_1) = \lambda(\underline{\gamma};D') + \lambda(\underline{\gamma};D'').$$

Vi får således vurderingen

$$\lambda(\underline{\gamma};D) \leqq \lambda(\underline{\gamma};a,c) + \lambda(\underline{\gamma};c,b).$$

Heraf følger, at $\lambda(\underline{\gamma};a,c) + \lambda(\underline{\gamma};c,b)$ er et overtal for mængden $\{\lambda(\underline{\gamma};D) \mid D \in \dot{D}[a,b]\}$, og da supremum for en mængde er defineret som dens mindste overtal, får vi

$$\lambda(\underline{\gamma};a,b) \leqq \lambda(\underline{\gamma};a,c) + \lambda(\underline{\gamma};c,b).$$

En vilkårlig inddeling $D' \in \dot{D}[a,c]$ og en vilkårlig inddeling $D'' \in \dot{D}[c,b]$ udgør tilsammen en inddeling $D \in \dot{D}[a,b]$, og vi har

$$\lambda(\underline{\gamma};D') + \lambda(\underline{\gamma};D'') = \lambda(\underline{\gamma};D) \leqq \lambda(\underline{\gamma};a,b).$$

Heraf følger, at $\lambda(\underline{\gamma};a,b) - \lambda(\underline{\gamma};D'')$ er et overtal for mængden $\{\lambda(\underline{\gamma};D') \mid D' \in \dot{D}[a,c]\}$, og vi har derfor

$$\lambda(\underline{\gamma};a,c) + \lambda(\underline{\gamma};D'') \leqq \lambda(\underline{\gamma};a,b).$$

Altså er $\lambda(\underline{\gamma};a,b) - \lambda(\underline{\gamma};a,c)$ et overtal for $\{\lambda(\underline{\gamma};D'') \mid D'' \in \dot{D}[c,b]\}$, og vi har derfor

$$\lambda(\underline{\gamma};a,c) + \lambda(\underline{\gamma};c,b) \leqq \lambda(\underline{\gamma};a,b).$$

Dermed er sætningen bevist.

16.4.5. Definition. Lad D være en inddeling af $[a,b]$. For $[a_1,b_1] \subseteqq D$ vil vi med $D_{[a_1,b_1]}$ betegne den inddeling af $[a_1,b_1]$

som ud over a_1 og b_1 omfatter de delepunkter fra D, som falder i $]a_1,b_1[$.

16.4.6. Lemma. Lad $\gamma:[a,b]$ ind i $\grave{R}^n$ være en bevægelse og ε et positivt tal. Der eksisterer da en inddeling $D \in \dot{D}[a,b]$, således at

$$\forall\ [a_1,b_1] \subseteq [a,b]\ (\lambda(\gamma;a_1,b_1) - \lambda(\gamma;D_{[a_1,b_1]}) \leqq \varepsilon).$$

Bevis. Vi vælger D, således at

$$\lambda(\gamma;a,b) - \lambda(\gamma;D) \leqq \varepsilon.$$

På grund af additiviteten er nu

$$\lambda(\gamma;a,b) - \lambda(\gamma;D) = (\lambda(\gamma;a,a_1) - \lambda(\gamma;D_{[a,a_1]})) +$$
$$(\lambda(\gamma;a_1,b_1) - \lambda(\gamma;D_{[a_1,b_1]})) + (\lambda(\gamma;b_1,b) - \lambda(\gamma;D_{[b_1,b]})),$$

hvor udtrykkene i en af parenteserne sættes til 0, hvis vedkommende interval udarter. Da størrelserne i hver parentes er $\geqq 0$, kan vi slutte, at

$$\lambda(\gamma;a_1,b_1) - \lambda(\gamma;D_{[a_1,b_1]}) \leqq \varepsilon.$$

Vi skal nu vise, at vejlængden har en vigtig kontinuitetsegenskab.

16.4.7. Sætning. Lad $\gamma:[a,b]$ ind i $\grave{R}^n$ være en bevægelse. Den ved

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 \text{ for } t = a \\ \lambda(\gamma;a,t) \text{ for } t \in\ ]a,b] \end{cases}$$

definerede funktion er monotont voksende og kontinuert.

Bevis. Vejlængden er ifølge sin definition altid $\geqq 0$. For $a \leqq t_1 < t_2 \leqq b$ gælder ifølge sætning 16.4.4, at

$$\lambda(t_2) = \lambda(t_1) + \lambda(\gamma;t_1,t_2),$$

altså, at

$$\lambda(t_2) \geqq \lambda(t_1).$$

Lad ε være et positivt tal og t et punkt af $[a,b]$.

For at vise kontinuiteten af λ skal vi, idet λ er monoton, blot vise, at vi kan finde $t_1 \in [a,t[$ og $t_2 \in]t,b]$, således at

$$\lambda(t) - \lambda(t_1) = \lambda(\underline{\gamma};t_1,t) \leqq \varepsilon$$
$$\lambda(t_2) - \lambda(t) = \lambda(\underline{\gamma};t,t_2) \leqq \varepsilon,$$

idet dog den ene ulighed falder væk for $t = a$ eller $t = b$. Vi vælger $D \in \mathring{D}[a,b]$, således at (lemma 16.4.6).

$$\forall [a_1,b_1] \subseteq [a,b]\ (\lambda(\underline{\gamma};a_1,b_1) - \lambda(\underline{\gamma};D_{[a_1,b_1]}) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Dernæst vælger vi $t_1 \in [a,t[$ og $t_2 \in]t,b]$, således at $]t_1,t[$ og $]t,t_2[$ ikke indeholder delepunkter fra D, og således at

$$\|\underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(t_1)\| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \|\underline{\gamma}(t_2) - \underline{\gamma}(t)\| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Da $]t_1,t[$ ikke indeholder delepunkterne fra D, er

$$\lambda(\underline{\gamma};t_1,t) \leqq \|\underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(t_1)\| + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leqq \varepsilon,$$

og analogt for $\lambda(\underline{\gamma};t,t_2)$. Dermed er sætningen bevist.

For en bevægelse $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ har vi for ethvert $t \in [a,b]$ en koordinatfremstilling $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))$. Derved defineres de til $\underline{\gamma}$ svarende <u>koordinatbevægelser</u> $\gamma_k:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$, $k = 1,\ldots,n$.

16.4.8. <u>Sætning</u>. En bevægelse $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ er rektifiabel, hvis og kun hvis hver af dens koordinatbevægelser er rektifiable.

Bevis. Vi betragter en inddeling D med delepunkterne $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = b$. For $j = 1,\ldots,q$ har vi nu

$$|\gamma_k(t_j)-\gamma_k(t_{j-1})| \leqq \|\underline{\gamma}(t_j)-\underline{\gamma}(t_{j-1})\| \leqq \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k(t_j)-\gamma_k(t_{j-1})|,$$

og ved summation over j følger heraf

$$\lambda(\gamma_k;D) \leqq \lambda(\underline{\gamma};D) \leqq \sum_{k=1}^{n} \lambda(\gamma_k;D).$$

Heraf følger påstanden umiddelbart. Desuden finder vi ulighederne

$$\lambda(\gamma_k;a,b) \leq \lambda(\underline{\gamma};a,b) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(\gamma_k;a,b).$$

16.5. Vi vil nu gå over til at studere det mere specielle tilfælde, hvor vi også gør antagelser om differentiabilitet af bevægelsen $\underline{\gamma}$. Det viser sig, at differentiabilitet af $\underline{\gamma}$ ikke i sig selv er en interessant egenskab, men for en kontinuert differentiabel bevægelse får man interessante resultater. Vi vil i første omgang interesse os for vejlængden for en kontinuert differentiabel bevægelse.

16.5.1. <u>Sætning</u>. En kontinuert differentiabel bevægelse er rektifiabel.

Bevis. Ifølge sætning 16.4.8 er det nok at bevise påstanden for n = 1. Vi betragter derfor en bevægelse $\gamma:[a,b]$ ind i $\mathring{R}$, og vi antager, at $D\gamma$ er kontinuert. Da $[a,b]$ er kompakt er $D\gamma$ begrænset, og vi kan derfor vælge $M \in \mathring{R}$, således at

$$\forall t \in [a,b](|D\gamma(t)| \leq M).$$

For en vilkårlig inddeling D bestående af punkterne

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = b$$

har vi nu ifølge differentialregningens middelværdisætning

$$\lambda(\gamma;D) = \sum_{k=1}^{q} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \quad \sum_{k=1}^{q} (t_k - t_{k-1})|D\gamma(\tau_k)|$$

for passende valg af punkterne $\tau_k \in\,]t_{k-1},t_k[$. Vi får således vurderingen

$$\lambda(\gamma;D) \leq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})M = (b-a)M,$$

hvilket viser, at

$$\lambda(\gamma;a,b) \leq (b-a)M.$$

Dermed er sætningen bevist.

16.5.2. Sætning. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være en kontinuert differentiabel bevægelse. Den ved

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 \text{ for } t = a \\ \lambda(\underline{\gamma};a,t) \text{ for } t \in]a,b] \end{cases}$$

definerede funktion $\lambda:[a,b]$ ind i $\mathring{R}$ er differentiabel, og

$$D\lambda(t) = \|D\underline{\gamma}(t)\|$$

for ethvert $t \in [a,b]$.

Bevis. Ifølge sætning 16.5.2 eksisterer funktionen λ. Ifølge sætning 16.4.7 er λ monotont voksende. For $a \leq x < y \leq b$ gælder endvidere

$$\lambda(y) - \lambda(x) = \lambda(\underline{\gamma};x,y).$$

For fast valg af x og y vil vi vurdere dette udtryk. Dertil betragter vi en vilkårlig inddeling $D \in \dot{D}[x,y]$ bestående af punkterne

$$x = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = y.$$

For $j \in \{1,\ldots,q\}$ har vi nu

$$\|\underline{\gamma}(t_j) - \underline{\gamma}(t_{j-1})\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu(t_j) - \gamma_\nu(t_{j-1}))^2}.$$

Ifølge middelværdisætningen kan vi vælge $\tau_{1j},\ldots,\tau_{nj} \in]t_{j-1},t_j[$, således at

$$\|\underline{\gamma}(t_j) - \underline{\gamma}(t_{j-1})\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}((t_j-t_{j-1})D\gamma_\nu(\tau_{\nu j}))^2} =$$

$$(t_j-t_{j-1})\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}(D\gamma_\nu(\tau_{\nu j}))^2}.$$

Idet vi indfører betegnelserne

$$g_\nu(x,y) = \inf\{|D\gamma_\nu(t)| \mid t \in [x,y]\}$$
$$G_\nu(x,y) = \sup\{|D\gamma_\nu(t)| \mid t \in [x,y]\}$$

får vi ved en grov vurdering

$$(t_j - t_{j-1}) \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (g_\nu(x,y))^2} \leq \|\underline{\gamma}(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \leq (t_j - t_{j-1}) \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (G_\nu(x,y))^2}.$$

Ved summation med hensyn til j fås heraf

$$(y-x) \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (g_\nu(x,y))^2} \leq \lambda(\underline{\gamma};D) \leq (y-x) \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (G_\nu(x,y))^2}.$$

Vi har således vist, at $\lambda(\underline{\gamma};D)$ for enhver inddeling $D \in \dot{D}[x,y]$ ligger i et bestemt afsluttet interval, som er uafhængigt af D. Så vil $\lambda(\underline{\gamma};x,y)$ ligge i det samme interval, og vi får derfor vurderingen

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (g_\nu(x,y))^2} \leq \frac{\lambda(y) - \lambda(x)}{y - x} \leq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (G_\nu(x,y))^2}.$$

Ved grænseovergangen $y \to x$ fra højre gælder

$$g_\nu(x,y) \to D\gamma_\nu(x), \quad G_\nu(x,y) \to D\gamma_\nu(x),$$

og derfor også ifølge vurderingen

$$\frac{\lambda(y) - \lambda(x)}{y - x} \to \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (D\gamma_\nu(x))^2} = \|D\underline{\gamma}(x)\|.$$

Tilsvarende fås for $x \to y$ fra venstre, at

$$\frac{\lambda(y) - \lambda(x)}{y - x} \to \|D\underline{\gamma}(y)\|.$$

Vi sætter nu for $t \in [a,b]$ og $h > 0$ dels $x = t$, $y = t+h$, dels $y = t$, $x = t-h$, og de fundne resultater viser da, at λ er differentiabel i punktet t med $D\lambda(t) = \|D\underline{\gamma}(t)\|$. For $t = a$ eller $t = b$ benyttes kun den første, henholdsvis den anden grænseovergang. Dermed er sætningen bevist.

16.5.3. <u>Sætning</u>. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\dot{R}^n$ være en kontinuert differentiabel bevægelse. For $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ gælder da

$$\lambda(\underline{\gamma};a_1,b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \|D\underline{\gamma}(t)\| dt.$$

Bevis. Af sætning 16.5.2 følger umiddelbart med betegnelserne fra denne sætning

$$\lambda(t) = \int_a^t \|D\gamma(u)\| du,$$

og påstanden følger nu umiddelbart af, at

$$\lambda(\gamma; a_1, b_1) = \lambda(b_1) - \lambda(a_1).$$

Vi har nu skaffet os en metode til beregning af vejlængde for kontinuert differentiable bevægelser. For vilkårlig differentiable bevægelser kan det indtræffe, at vejlængdefunktionen λ ikke bliver differentiabel.

16.6. Ved en tangent til en kurve i et punkt P forstås groft udtrykt grænsestillingen for den rette linie gennem P og et andet kurvepunkt Q, idet Q konvergerer mod P langs kurven. Det er naturligt, når kurven er bane for en bevægelse, at opfatte dette på den måde, at P svarer til et tidspunkt t_o, medens Q svarer til tidspunktet t, og at Q konvergerer mod P langs kurven, kommer da til at betyde $t \to t_o$. Nu er det ønskeligt, at tangentbegrebet bliver et rent geometrisk begreb, altså kun afhængigt af bevægelsens bane. Denne uafhængighed opnås naturligt, når kurven kan være bane for en simpel bevægelse, idet de mulige bevægelser da alle er indbyrdes ækvivalente, eller indbyrdes modsatte.

Lad nu $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\hat{R}^n$ være en bevægelse med de tilsvarende koordinatbevægelser $\gamma_1, \ldots \gamma_n$. Vi betragter et punkt $t_o \in [a,b]$, hvor $D\gamma(t_o) \neq \underline{0}$. Der vil da findes et γ_ν blandt koordinatbevægelserne med $D\gamma_\nu(t_o) \neq 0$, og der vil da findes et delinterval $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$ med t_o som et (relativt) indre punkt, således at $D\gamma_\nu(t) \neq 0$ overalt på $[a_1, b_1]$. Så har $D\gamma_\nu(t)$ konstant fortegn på $[a_1,b_1]$ og γ_ν er strengt monoton på dette interval. Dette medfører øjensynligt, at $\underline{\gamma}$ er en injektiv afbildning af $[a_1,b_1]$. Restriktionen af $\underline{\gamma}$ til $[a_1,b_1]$ er således en simpel bevægelse.

For $t \in [a_1,b_1] \setminus \{t_0\}$ fastlægger talsættet

$$\frac{1}{t - t_0}\,(\underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(t_0))$$

retningen af den rette linie gennem $\underline{\gamma}(t_0)$ og $\underline{\gamma}(t)$. For $t \to t_0$ konvergerer talsættet mod $D\underline{\gamma}(t_0)$. Der vil således eksistere en tangent i t_0 til den simple bue, der er bane for restriktionen af $\underline{\gamma}$ til $[a_1,b_1]$, og retningen af denne tangent er bestemt ved talsættet $D\underline{\gamma}(t_0)$.

Af sætning 16.5.3 fremgår, at

$$\frac{\lambda(\underline{\gamma};t,t_0)}{t_0 - t} \to \|D\gamma(t_0)\| \text{ for } t \to t_0 \text{ fra venstre}$$

$$\frac{\lambda(\underline{\gamma};t_0,t)}{t - t_0} \to \|D\gamma(t_0)\| \text{ for } t \to t_0 \text{ fra højre.}$$

De to forhold kan fortolkes som den gennemsnitlige fart i bevægelsen svarende til intervallet $[t,t_0]$ i det første tilfælde og til intervallet $[t_0 t]$ i det andet tilfælde. Det er derfor rimeligt at sige, at $\|\underline{\gamma}(t_0)\|$ er bevægelsens fart ved passage af punktet t_0. Talsættet $D\underline{\gamma}(t_0)$ fastlægger ikke alene bevægelsens fart, men også banens tangent i punktet t_0.

Hvis $D\underline{\gamma}(t_0) = \underline{0}$ er bevægelsens fart 0 i punktet t_0. Talsættet $D\underline{\gamma}(t_0)$ fastlægger i dette tilfælde ikke nogen retning, og bestemmer således ikke nogen kurvetangent. Dette udelukker ikke, at kurven eventuelt har en tangent i t_0.

Ovenstående betragtninger retfærdiggør følgende definition:

16.6.1. <u>Definition</u>. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være en kontinuert differentiabel bevægelse. Afbildningen $D\gamma$ kaldes <u>hastigheden</u> af γ og talsættet $D\gamma(t)$ kaldes hastigheden af γ til tidspunktet t. Tallet $\|D\gamma(t)\|$ kaldes <u>farten</u> af γ til tidspunktet t. Hvis $D\gamma(t) \neq 0$ kaldes talsættet

$$\underline{p}_1(t) = \frac{D\gamma(t)}{\|D\gamma(t)\|}$$

bevægelsens <u>tangentvektor</u> til tidspunktet t. Hvis $D\gamma(t) \neq \underline{0}$ for ethvert $t \in [a,b]$, kaldes bevægelsen en <u>parameterfremstilling for en differentiabel kurve</u>, og den bane kaldes en <u>differentiabel kurve</u>.

Tangenten i kurvepunktet $\gamma(t)$ har parameterfremstillingen

$$\underline{x} = \gamma(t) + \underline{p}_1(t)u;\ u \in \dot{R}.$$

Den fremtræder her med en orientering bestemt ved $\underline{p}_1(t)$.

Selv om γ er en kontinuert differentiabel bevægelse, er det ikke sikkert, at de med γ k-ækvivalente bevægelser er kontinuert differentiable. Vi indfører derfor et nyt ækvivalensbegreb ved følgende definition:

16.6.2. <u>Definition</u>. To kontinuert differentiable bevægelser $\gamma_1:[a_1,b_1]$ ind i $\dot{R}^n$ og $\gamma_2:[a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}^n$ kaldes d-ækvivalente (d-modsatte), hvis der eksisterer en bijektiv afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a_2,b_2]$, som er differentiabel med overalt positiv (negativ) differentialkvotient, således at $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

16.6.3. <u>Sætning</u>. Hvis to bevægelser $\gamma_1:[a_1,b_1]$ ind i $\dot{R}^n$ og $\gamma_2:[a_2,b_2]$ ind i $\dot{R}^n$, som er parameterfremstillinger for differentiable kurver, er k-ækvivalente (modsatte), er de tillige d-ækvivalente (d-modsatte).

Bevis. Vi betragter et $t \in [a_1,b_1]$. Der findes et $\nu \in \{1,\dots,n\}$, således at $D\gamma_{2\nu}(\varphi(t)) \neq 0$. Funktionen γ_ν er da strengt monoton i en omegn af t og både $\gamma_{2\nu}$ og $\gamma_{2\nu}^{-1}$ er differentiable i $\varphi(t)$ med fra 0 forskellige differentialkvotienter. Nu er $\gamma_{1\nu} = \gamma_{2\nu} \circ \varphi$, altså $\varphi = \gamma_{2\nu}^{-1} \circ \gamma_{1\nu}$. Heraf følger, at φ er kontinuert differentiabel. Ved at lade $\underline{\gamma}_1$ og $\underline{\gamma}_2$ bytte roller ses, at φ^{-1} er kontinuert differentiabel. Af $D\varphi D\varphi^{-1} = 1$ følger, at $D\varphi \neq 0$. Af kontinuiteten følger nu, at $D\varphi$ har konstant fortegn. Dermed er påstanden bevist.

16.6.4. Sætning. Indbyrdes d-ækvivalente (d-modsatte) parameterfremstillinger for en differentiabel kurve har identiske (modsatte) tangentvektorer.

Bevis. Påstanden fremgår umiddelbart af, at

$$\frac{D(\gamma_2 \circ \varphi)(t)}{\|D(\gamma_2 \circ \varphi)(t)\|} = \frac{D\gamma_2(\varphi(t))}{\|D\gamma_2(\varphi(t))\|} \cdot \frac{D\varphi(t)}{|D\varphi(t)|} .$$

Sætningen viser, at tangentvektoren i en vis forstand svarer til kurvens orientering.

For en p gange kontinuert differentiabel bevægelse kan vi tilsvarende indføre begreberne d^p-ækvivalent og d^p-modsat.

16.7. For differentiable kurver er det muligt at udpege en ganske bestemt parameterfremstilling, der i en vis forstand er simplere end alle andre. Dette beror på følgende sætning:

16.7.1. Sætning. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i R^n være en p gange kontinuert differentiabel bevægelse. Lad $\lambda:[a,b]$ på $[0,\lambda(\underline{\gamma};a,b)]$ være den ved

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 \text{ for } t = a \\ \lambda(\underline{\gamma};a,t) \text{ for } t \in\,]a,b] \end{cases}$$

definerede afbildning. Da er λ en p gange differentiabel funktion. Hvis $\underline{\gamma}$ er parameterfremstilling for en simpel kurve, er $D\lambda(t) > 0$ for alle $t \in [a,b]$, afbildningen λ er en homeomorfi

λ^{-1} er ligeledes p gange differentiabel.

Bevis. Ifølge sætning 16.5.2 er

$$D\lambda(t) = \|D\underline{\gamma}(t)\| =$$
$$\sqrt{((D\gamma_1(t))^2 + \ldots + (D\gamma_n(t))^2)}.$$

Den ved $t \to (D\gamma_1(t))^2 + \ldots + (D\gamma_n(t))^2$ af $[a,b]$ ind i $]0,\infty[$ er p-1 gange differentiabel, og den første påstand følger derfor af, at kvadratroden er en vilkårlig ofte differentiabel afbildning af $]0,\infty[$ på sig selv. Hvis $\underline{\gamma}$ er parameterfremstilling for en simpel kurve, er $D\underline{\gamma}(t) \neq \underline{0}$, altså $D\lambda(t) > 0$. Dette medfører, at λ bliver bijektiv, og da $[a,b]$ er kompakt, bliver λ en homeomorfi. Afbildningen λ^{-1} får differentialkvotienten $(D\lambda(t))^{-1}$, og denne bliver åbenbart p-1 gange differentiabel. Dermed er sætningen bevist.

16.7.2. Definition. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\dot{R}^n$ være en parameterfremstilling for en differentiabel kurve, og lad λ være defineret som i sætning 16.7.1. Den med γ ækvivalente bevægelse $\underline{\gamma}\circ\lambda^{-1}$: $[0,\lambda(\underline{\gamma};a,b)]$ ind i $\dot{R}^n$ kaldes den naturlige parameterfremstilling for den ved $\underline{\gamma}$ fremstillede differentiable kurve.

Vi vil sædvanligvis ikke holde strengt på, at parameterintervallet for den naturlige parameterfremstilling skal have 0 som venstre endepunkt. Dette svarer til, at funktionen λ erstattes med $\lambda+c$, hvor c er en reel konstant.

16.7.3. Sætning. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\dot{R}^n$ være en parameterfremstilling for en differentiabel kurve. Nødvendigt og tilstrækkeligt, for at $\underline{\gamma}$ netop er den naturlige parameterfremstilling, er det, at (a = 0, og at) $\|D\underline{\gamma}(t)\| = 1$ for alle værdier af t.

Bevis. At $\underline{\gamma}$ er den naturlige parameterfremstilling er åbenbart ensbetydende med, at λ er den identiske afbildning, altså med $D\lambda(t) = 1$ for alle værdier af t. Dermed er sætningen bevist.

I mere traditionel notation angives en bevægelse sædvanligvis på formen

$$\underline{r} = \underline{\gamma}(t); \quad t \in [a,b].$$

Vejlængden betegnes sædvanligvis med s, således at

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\underline{r}}{dt}\right\| .$$

Endvidere anvendes betegnelserne

$$v = \frac{ds}{dt}; \ \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}; \ w = \left\|\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right\|; \ \underline{w} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} .$$

Vektoren $\underline{w}$ kaldes bevægelsens akceleration. Det er dog kun i tilfældene $n \leqq 3$, at der er grund til særligt at fremhæve den anden differentialkvotient.

Hvis u er en af kurvepunktet afhængig størrelse, så vi har $u = \varphi(t) = \psi(s)$, har vi

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} = v\,\frac{du}{ds}; \ \frac{du}{ds} = \frac{1}{v}\,\frac{du}{dt} .$$

Hvis vi ønsker tilsvarende omregnsformer for de højere differentialkvotienter, får vi brug for differentialkvotienten af v. Ved differentiation af relationen

$$v^2 = \frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}$$

med hensyn til t får vi

$$2v\,\frac{dv}{dt} = 2\,\frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} ,$$

altså

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\,\frac{d\underline{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{v} .$$

Altså er

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\,\frac{du}{dt}\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v}\,\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{du}{dt}\right) =$$

Ved anvendelserne i fysik på virkelige bevægelser er det rimeligt at trække parameterfremstillingen med tiden som parameter helt frem i første række. Det er blevet almindeligt at understrege dette ved at betegne differentialkvotienten af en variabel med hensyn til tiden ved en prik, som sættes over den variable. Hvis t i den sidste formel ovenfor er tiden, vil man således skrive formlen

$$\frac{d^2u}{ds^2} = v^{-3}(v\ddot{u} - \dot{v}\dot{u}).$$

16.8. Vi skal nu vise et lemma, som nærmest hører hjemme i kursus i algebra og geometri og som muligvis optræder i dette kursus.

16.8.1. <u>Lemma</u>. Lad $(\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_q)$ være et ordnet sæt af lineært uafhængige vektorer i $\grave{R}^n$. Der eksisterer da et og kun et sæt $(\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_q)$ af vektorer i $\grave{R}^n$, som tilfredsstiller betingelserne:

1. Vektorerne $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_q$ er normerede og ortogonale, altså
$$\underline{p}_j\cdot\underline{p}_k = \begin{cases} 1 \text{ for } j = k \\ 0 \text{ for } j \neq k \end{cases} \quad ; \; j,k = 1,\ldots,q.$$
2. For ethvert $k \in \{1,\ldots,q\}$ udspænder vektorerne $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_k$ det samme underrum af $\grave{R}^n$ som vektorerne $\underline{r}_1,\ldots,\underline{r}_k$.
3. For ethvert $k \in \{1,\ldots,q\}$ er $\underline{r}_k\cdot\underline{p}_k > 0$.

Bevis. Ifølge 2 skal $\underline{p}_1$ tilhøre det af $\underline{r}_1$ udspændte underrum. Vi har derfor $\underline{p}_1 = \lambda\underline{r}_1$, $\lambda \in \grave{R}$. Ifølge 1 er $\lambda^2\|\underline{r}_1\|^2 = \underline{p}_1\,\underline{p}_1 = 1$ og ifølge 3 er $\lambda\|\underline{r}_1\|^2 = \underline{r}_1\cdot\underline{p}_1 > 0$. Altså er $\lambda = \|\underline{r}_1\|^{-1}$. På den anden side er det klart, at $\underline{p}_1 = \|\underline{r}_1\|^{-1}\underline{r}_1$ vil tilfredsstille de dele af betingelserne 1,2 og 3, som kun vedrører $\underline{p}_1$. Lad os nu antage, at det allerede er bevist, at vi på én og kun én måde kan vælge $\underline{p}_1,\ldots,\underline{p}_{k-1}$, således at den del af betingelserne 1,2,3, der kun vedrører disse vektorer, er opfyldt. Ifølge 2 skal $\underline{p}_k$ ligge i det underrum, der udspændes af $\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_k$, men dette underrum udspændes af $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_{k-1},\underline{r}_k$, og $\underline{p}_k$ må derfor kunne fremstilles på formen

$$\underline{p}_k = \lambda(\underline{r}_k - \lambda_1\underline{p}_1 - \dots - \lambda_{k-1}\underline{p}_{k-1}).$$

For $j = 1,\dots,k-1$ giver 1, at

$$0 = \underline{p}_j\,\underline{p}_k = \lambda(\underline{r}_k\,\underline{p}_j - \lambda_j).$$

Af 3 følger, at $\lambda \neq 0$. Vi kan altså slutte, at $\lambda_j = \underline{r}_k\cdot\underline{p}_j$. På den anden side vil dette valg sikre, at 1. er opfyldt for $j < k$. Med $\lambda \neq 0$ vil desuden 2 være opfyldt. Af 1 mangler vi blot at sikre os, at

$$1 = \underline{p}_k\cdot\underline{p}_k = \lambda^2 \|\underline{r}_k - \lambda_1\underline{p}_1 - \dots - \lambda_{k-1}\underline{p}_{k-1}\|^2.$$

Da $\underline{r}_k$ ikke tilhører det underrum, der udspændes af $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_{k-1}$, er den vektor, hvis længde optræder på højre side, ikke nulvektor, og det er derfor muligt at vælge λ, således at betingelsen er opfyldt. Bortset fra fortegnet er λ éntydigt bestemt. Det ses nu umiddelbart, at det ene valg af fortegnet λ vil sikre, at 3 er opfyldt. Derved er sætningen bevist.

16.8.2. <u>Definition</u>. Lad $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ være et ordnet sæt af lineært uafhængige vektorer i R^n. Det i lemma 16.8.1 indførte éntydigt bestemte sæt $(\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_q)$ kaldes det til $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ <u>svarende ortonormale sæt af vektorer</u>. Vi siger også, at $(\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_q)$ er opstået ved <u>ortonormalisering</u> af $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$.

16.8.3. <u>Lemma</u>. Lad $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ og $(\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q)$ være ordnede sæt af lineært uafhængige vektorer i R^n. Hvis der gælder et sæt af relationer

$$\underline{s}_k = \lambda_{k1}r_1 + \dots + \lambda_{kk}\underline{r}_k, \quad k = 1,\dots,q,$$

hvor $\lambda_{kk} > 0; k = 1,\dots,q$, er det til $(\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q)$ svarende ortonormale sæt af vektorer identisk med det til $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ svarende sæt.

Bevis. Lad $(\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_q)$ være det til $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ svarende ortonormale sæt af vektorer. Vi ved da, at betingelserne 1,2 og 3 i lemma 16.8.1 er opfyldt, og ifølge entydighedsudsagnet i det samme lemma vil påstanden være bevist, hvis det lykkes os at vise, at 1,2 og 3 bliver ved at være opfyldt, når $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_q)$ erstattes med $(\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_q)$. For 1 er dette trivielt. For 2 følger det af, at $(\underline{s}_1,\dots,\underline{s}_k)$ og $(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_k)$ takket være betingelsen $\lambda_{kk} > 0$ udspænder det samme underrum. Da $\underline{p}_k$ er ortogonal på det af $\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_{k-1}$, udspændte underrum er

$$\underline{s}_k \cdot \underline{p}_k = \lambda_{kk}\underline{r}_k \cdot \underline{p}_k,$$

og da $\lambda_{kk} > 0$, viser dette, at også 3 bevarer sin gyldighed. Dermed er hjælpesætningen bevist.

16.9. Ud over de i foregående afsnit beviste hjælpesætninger om systemer af vektorer, får vi også brug for en sætning om differentialkvotienter af variable ortonormale systemer af vektorer. Sætningen har stor interesse i sig selv, selv om den ikke ser særlig nyttig ud ved første blik. Vi vil dog udskyde de nærmere kommentarer, indtil beviset er fuldført.

16.9.1. <u>Sætning</u>. Lad $\underline{p}_k:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$, $k = 1,\dots,n$ være differentiable bevægelser, som tilfredsstiller betingelserne

$$\forall\ t \in [a,b] \quad \underline{p}_j(t)\cdot\underline{p}_k(t) = \begin{cases} 1 \text{ for } j = k \\ 0 \text{ for } j \neq k \end{cases} ; j,k = 1,\dots,n \quad .$$

Der eksisterer da for ethvert $t \in [a,b]$ en skævtsymmetrisk matrix $(\kappa_{jk}(t))$, således at

$$D\underline{p}_j(t) = \kappa_{j1}(t)\underline{p}_1(t) + \dots + \kappa_{jn}(t)\underline{p}_n(t);\ j = 1,\dots,n.$$

Bevis. For ethvert $t \in [a,b]$ danner vektorerne $\underline{p}_1(t),\ldots,$ $\underline{p}_n(t)$ et ortonormalsystem, og da deres antal er lig med rummets dimension, udspænder de hele rummet. Heraf følger eksistensen af en matrix $(\kappa_{jk}(t))$, således at $D\underline{p}_j$ kan udtrykkes som anført. Vi mangler at vise, at $(\kappa_{jk}(t))$ er skævsymmetrisk. Nu er

$$\underline{p}_k(t)\cdot D\underline{p}_j(t) = \kappa_{jk}(t).$$

Nu er

$$\underline{p}_j(t)\cdot\underline{p}_k(t)$$

konstant, og ved differentiation fås derfor

$$\underline{p}_k(t)\cdot D\underline{p}_j(t) + \underline{p}_j(t)\cdot D\underline{p}_k(t) = 0$$

eller

$$\kappa_{jk}(t) + \kappa_{kj}(t) = 0$$

hvilket netop viser, at $(\kappa_{jk}(t))$ er skævsymmetrisk.

Lad os et øjeblik tænke os hele $\mathring{R}^n$ opfyldt af et eller andet stof, som er i bevægelse. Et punkt af stoffet, som for $t = 0$ befinder sig i et punkt $\underline{a}$ vil til tidspunktet t befinde sig i et punkt $\underline{x} = f(\underline{a};t)$. For hvert $\underline{a} \in \mathring{R}^n$ har vi således en bevægelse $\underline{x} = f(\underline{a};t)$, hvor t gennemløber et af $\underline{a}$ uafhængigt interval. For hvert t_0 i dette interval definerer $\underline{y} = f(\underline{x};t_0)$ en afbildning af $\mathring{R}^n$ på sig selv, og det er rimeligt at kræve, at denne afbildning er injektiv.

Hvis den omtalte ved $\underline{y} = f(\underline{x};t_0)$ definerede afbildning for ethvert t_0 er isometrisk er det rimeligt at sige, at det stof, der opfylder $\mathring{R}^n$ bevæger sig som et stift legeme, og vi vil i dette tilfælde tale om en bevægelse af $\mathring{R}^n$ som et stift legeme.

Vi vil specielt interessere os for en bevægelse af $\mathring{R}^n$ som et stift legeme og med et fastholdt punkt O. De i sætning 16.9.1

betragtede bevægelser $\underline{p}_j$ definerer for ethvert $t \in [a,b]$ et sæt $(\underline{p}_1(t),\dots,\underline{p}_n(t))$ af indbyrdes ortogonale, normerede vektorer, og disse udgør en basis for $\grave{R}^n$. Vi kan således tale om en bevægelse af en ortonormal basis for $\grave{R}^n$. For fast valg af $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ er $x_1\underline{p}_1(t) +\dots+ x_n\underline{p}_n(t)$ et punkt, som er fast i forhold til den omtalte basis, og de for hvert $\underline{x} \in \grave{R}^n$ ved $x_1\underline{p}_1(t) +\dots+ x_n\underline{p}_n(t)$ definerede bevægelser udgør således netop en bevægelse af $\grave{R}^n$ som et stift legeme. Omvendt er det klart, at enhver bevægelse af $\grave{R}^n$ som et stift legeme kan fremkomme på den her omtalte måde.

Hastigheden i den ved $x_1\underline{p}_1(t) +\dots+ x_n\underline{p}_n(t)$ givne bevægelse er

$$x_1D\underline{p}_1(t) +\dots+ x_nD\underline{p}_n(t) = \sum_{j,k=1}^{n} \kappa_{jk}(t)x_j\underline{p}_k(t).$$

Eventuelle punkter med hastighed nul (punkter i øjeblikkelig hvile) til tidspunktet $t \in [a,b]$ bestemmes ved løsning af ligningerne

$$\kappa_{1k}(t)x_1 +\dots+ \kappa_{nk}(t)x_n = 0,\ k = 1,\dots,n.$$

En skævsymmetrisk matrix af ulige orden har determinant 0. Hvis dimensionen n er ulige, vil der altså altid findes andre punkter end $\underline{0}$, som er i øjeblikkelig hvile. En vis ret linie gennem $\underline{0}$ vil da være i øjeblikkelig hvile. For n = 3 vil eksistensen af 2 rette linier i øjeblikkelig hvile åbenbart medføre, at alle punkter har hastighed 0. Hvis dette ikke er tilfældet, findes nøjagtig én linie i øjeblikkelig hvile, den <u>øjeblikkelige drejningsakse</u>. For n = 2 vil eksistensen af en ret linie i øjeblikkelig hvile medføre, at alle punkter er i øjeblikkelig hvile. Det er jo også anskueligt klart, at en rotation om $\underline{0}$ for n = 2 har $\underline{0}$ som det eneste fikspunkt. For n = y kan der eksistere en plan i øjeblikkelig hvile, men sædvanligvis er $\underline{0}$ det eneste punkt, som er i øjeblikkelig hvile.

I det specielle tilfælde, hvor alle κ_{jk} er konstante er bevægelsen en <u>jævn rotation</u> af $\grave{R}^n$. For n = 2 kan vi tænke os den bevægelig basis $(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$ valgt således, at vinklen fra $\underline{p}_1$ til $\underline{p}_2$ er $+ \frac{1}{2}\pi$, og i et fast koordinatsystem kan $\underline{p}_1$ og $\underline{p}_2$ da fastlægges ved koordinater på formen

$$\underline{p}_1 = (\cos\Theta, \sin\Theta); \ \underline{p}_2 = (\cos(\Theta+\tfrac{1}{2}\pi), \ \sin(\Theta+\tfrac{1}{2}\pi)) = (-\sin\Theta, \cos\Theta).$$

Vi får da, idet vi benytter priknotationen for differentiation med hensyn til tiden

$$\dot{\overline{p}}_1 = (-\sin\Theta, \cos\Theta)\dot{\Theta}, \quad \dot{\underline{p}}_2 = (-\cos\Theta, -\sin\Theta)\dot{\Theta},$$

eller, idet vi sætter $\dot{\Theta} = \omega$, hvor ω er konstant (<u>vinkelhastigheden</u>)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}_1 &= \qquad \underline{p}_2 \\ \dot{\underline{p}}_2 &= -\omega \underline{p}_1 \end{aligned} \quad ,$$

og vi har således direkte fundet den skævsymmetriske matrix. Dette lader sig ikke så let gennemføre i rum af højere dimension.

For en jævn rotation af $\grave{R}^3$ afhænger den skævtsymmetriske matrix af 3 talstørrelser ω_1, ω_2 og ω_3, og det er da fristende at indføre vektoren $\underline{\omega} = \omega_1\underline{p}_1 + \omega_2\underline{p}_2 + \omega_3\underline{p}_3$. Vi vælger fortegnene, således at vi har

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}_1 &= \qquad\qquad - \omega_3\underline{p}_2 + \omega_2\underline{p}_3 \\ \dot{\underline{p}}_2 &= \omega_3\underline{p}_1 \qquad\qquad - \omega_1\underline{p}_3 \\ \underline{p}_3 &= \omega_2\underline{p}_1 + \omega_1\underline{p}_2 \end{aligned}$$

Disse ligninger kan skrives

$$\dot{\underline{p}}_j = \underline{\omega} \times \underline{p}_j, \ j = 1,2,3,$$

hvor x er vektorproduktet. På grund af lineariteten får vi umiddelbart for et vilkårligt $r \in \mathring{R}^3$, at

$$\dot{\underline{r}} = \underline{\omega} \times \underline{r}.$$

Vektoren $\underline{\omega}$ kaldes rotationens vinkelhastighed.

For en jævn rotation af $\mathring{R}^4$ afhænger den skævtsymmetriske matrix af 6 talstørrelser, og en simpel notation som i de to foregående tilfælde findes ikke. Det er dog ikke vanskeligt at finde en generel notation, som er bekvem for alle værdier af n. Det vil da vise sig, at den for n = 3 benyttede anskuelige fremstilling ikke passer ind i det generelle system. Tilfældet n = 3 er imidlertid så vigtigt, at en særskilt behandling af dette tilfælde må anses for berettiget.

Som et eksempel på en jævn rotation af $\mathring{R}^4$ med $\underline{0}$ som eneste fikspunkt skal nævnes den ved

$$\underline{p}_1(t) = (\cos \omega t,\ \sin \omega t,\ 0,\ 0)$$
$$\underline{p}_2(t) = (-\sin\omega t,\ \cos\omega t,\ 0,\ 0)$$
$$\underline{p}_3(t) = (0,\ 0,\ \cos\omega' t,\ \sin\omega' t)$$
$$\underline{p}_4(t) = (0,\ 0,\ -\sin\omega' t,\ \cos\omega' t),$$

hvor ω og ω' er fra 0 forskellige reelle tal. Den skævsymmetriske matrix bliveri dette tilfælde

$$\begin{matrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega' \\ 0 & 0 & -\omega' & 0 \end{matrix}$$

og den har øjensynlig fra 0 forskellig determinant.

16.10. Ved studiet af flere gange differentiable kurver vil vi udnytte en vektoriel form af Taylors grænseformel.

16.10.1. Sætning. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være parameterfremstilling for en k gange differentiabel kurve. Vi har da for $t \in [a,b]$, $t+h \in [a,b]$, at

$$\underline{\gamma}(t+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j\underline{\gamma}(t)}{j!} h^j + \underline{\alpha}(t,h)h^k,$$

hvor α er en α-funktion.

Bevis. Resultatet fås umiddelbart ved opskrivning af Taylor's grænsefunktion for hver af de til $\underline{\gamma}$ hørende koordinatbevægelser, multiplicere hver af disse formler med den tilsvarende basisvektor og addition af de fremkomne formler.

16.10.2. <u>Sætning</u>. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være parameterfremstilling for en k gange differentiabel kurve. Lad t_o være et punkt $[a,b]$. Lad $S \subseteq \mathring{R}^n$ være et underrum. Hvis $D^j\underline{\gamma}(t)$ for $j = 1,\dots,k-1$ tilhører S, medens $D^k\underline{\gamma}(t)$ ikke tilhører S, eksisterer der en omegn U af t_o, samt to positive tal η_1 og η_2, således at afstanden $\Delta(t)$ mellem S og punktet $\underline{\gamma}(t) - \underline{\gamma}(t_o)$ for $t \in U$ tilfredsstiller ulighederne

$$\eta_1|t-t_o|^k \leqq \Delta(t) \leqq \eta_2|t-t_o|^k.$$

Bevis. Vi skriver $t = t_o+h$. Af sætning 16.10.1 følger, at

$$\underline{\gamma}(t_o+h) - \underline{\gamma}(t_o) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{D^j\underline{\gamma}(t_o)}{j!} h^j + \frac{D^k\underline{\gamma}(t_o)}{k!} h^k + \alpha(t_o,h)h^k.$$

Summen på højre side tilhører S, og vi får derfor $\Delta(t)$ ved at spalte de to sidste led i bidrag, som ligger i S og bidrag vinkelret på S. Hvis η er afstanden mellem S og punktet $\frac{1}{k!} D^k\underline{\gamma}(t_o)$, får vi således

$$(\eta - \|\underline{\alpha}(t_o,h)\|)|h|^k \leqq \Delta(t) \leqq (\eta+\|\underline{\alpha}(t_o,h)\|)|h|^k.$$

Vi kan nu vælge U, således at

$$\|\underline{\alpha}(t_o,h)\| \leqq \tfrac{1}{2}\eta$$

for $t_o+h \in U$, og sætningen vil da være bevist med $\eta_1 = \frac{1}{2}\eta$ og $\eta_2 = \frac{3}{2}\eta$.

16.10.3. Definition. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være parameterfremstilling for en n gange differentiabel kurve. Hvis det for ethvert $t \in [a,b]$ gælder, at vektorerne $D\underline{\gamma}(t), D^2\underline{\gamma}(t),\dots,D^n\underline{\gamma}(t)$ er lineært uafhængige, kaldes $\underline{\gamma}$ en monoton parameterfremstilling, og banen for $\underline{\gamma}$ kaldes en monoton bue. For $k = 1,\dots,n-1$ kaldes den k-dimensionale lineære mangfoldighed, der indeholder punktet $\underline{\gamma}(t)$ og er parallel med det af $D\underline{\gamma}(t),\dots,D^k\underline{\gamma}(t)$, kaldes den <u>oskulerende</u> k-dimensionale lineære mangfoldighed svarende til parameterværdien t. For $k = 2$ kaldes den specielt <u>oskulationsplanen</u> og for $n > 3$, $k = n-1$ kaldes den <u>oskulationshyperplanen</u>.

Hvis $\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}\circ\varphi$ er en med $\underline{\gamma}$ d-ækvivalent parameterfremstilling for en n gange differentiabel kurve, har vi

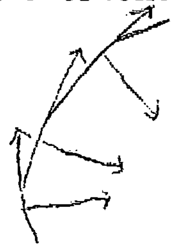
$$\begin{aligned}
D\underline{\gamma}_1(u) &= D\underline{\gamma}(\varphi(u))D\varphi(u)\\
D^2\underline{\gamma}_1(u) &= D\underline{\gamma}(\varphi(u))D^2\varphi(u) + D^2\underline{\gamma}(\varphi(u))(D\varphi(u))^2\\
D^3\underline{\gamma}_1(u) &= D\underline{\gamma}(\varphi(u))D^3\varphi(u) + 3D^2\underline{\gamma}(\varphi(u))D\varphi(u)D^2\varphi(u) +\\
&\qquad D^3\underline{\gamma}(\varphi(u))(D\varphi(u))^3
\end{aligned}$$

og således videre. Generelt gælder, at $D^k\underline{\gamma}_1(u)$ er en lineærkombination af $D\underline{\gamma}(\varphi(u)),\dots,D^k\underline{\gamma}(\varphi(u))$, og koefficienten til $D^k\underline{\gamma}(\varphi(u))$ er $(D\varphi(u))^k$. Dette vises let ved induktion. De øvrige koefficienter bliver mere komplicerede polynomier i $D\varphi(u),\dots,D^k\varphi(u)$. Resultatet viser, at d-ækvivalente parameterfremstillinger har identiske oskulerende lineære mangfoldigheder.

Af sætning 16.10.2 følger, at der til en parameterværdi t_0 svarer en omegn U, således at afstanden fra det til t_0+h svarende kurvepunkt til den k-dimensionale oskulerende lineære mangfoldighed i det til t_0 svarende kurvepunkt for $t_0+h \in U$ forholder sig som $|h|^{k+1}$, medens den tilsvarende afstand til en vilkårlig anden k-dimensional lineær mangfoldighed gennem det til t_0 svarende kurvepunkt forholder sig som $|h|^j$ med en værdi af $j < k$. Denne bemærkning giver os en rent geometrisk karakterisering af de oskulerende mangfoldigheder. Disse er således koordinatuafhængige.

16.10.4. Definition. Lad $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathring{R}^n$ være en monoton parameterfremstilling. Lad $(\underline{p}_1(t),\dots,\underline{p}_n(t))$ være det til $(D\underline{\gamma}(t),\dots,D^n\underline{\gamma}(t))$ svarende ortonormale sæt af vektorer. Sættet $(\underline{p}_1(t),\dots,\underline{p}_n(t))$ kaldes da den ledsagende ortonormale basis for bevægelsen $\underline{\gamma}$.

Lemma 16.8.3 i forbindelse med bemærkningen efter definition 16.10.3 viser, at det for d-ækvivalente monotone parameterfremstillinger gælder, at de ledsagende ortonormale baser er identiske for tilsvarende parameterværdier. Det er desuden klart, at den ledsagende ortonormale basis for $\underline{\gamma}$ er koordinatuafhængig. Anskueligt kan man forestille sig den ledsagende ortonormale basis anbragt ud fra selve kurvepunktet, så den følger med i bevægelsen, således som vi har antydet det på figuren i tilfældet $n = 2$.



16.10.5. Sætning. Med de i definition 16.10.4 benyttede betegnelser eksisterer der for hvert $t \in [a,b]$ et talsæt $(\lambda_1(t),\dots,\lambda_{n-1}(t))$, således at

$$\dot{\underline{p}}_1 = \lambda_1 \underline{p}_2.$$
$$\dot{\underline{p}}_k = -\lambda_{k-1}\underline{p}_{k-1} + \lambda_k \underline{p}_{k+1}; \quad k = 2,\dots,n-1.$$
$$\dot{p}_n = \lambda_{n-1}\underline{p}_{n-1}.$$

Bevis. Ifølge sætning 16.9.1 eksisterer der en skævsymmetrisk matrix $(\kappa_{jk}(t))$, således at

$$\underline{p}_j = \kappa_{j1}\underline{p}_1 + \dots + \kappa_{jn}\underline{p}_n.$$

Da $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_n$ er lineært uafhængige, er $(\kappa_{jk}(t))$ éntydig bestemt. Nu er $\underline{p}_k$ en linearkombination af $D\underline{\gamma},\dots,D^k\underline{\gamma}$ med koefficienter, der ligeledes er udtrykt ved disse differentialkvotienter. Heraf følger, at $\dot{\underline{p}}_k$ bliver en linearkombination af $D\underline{\gamma},\dots,D^{k+1}\underline{\gamma}$ med koefficient, som udtrykkes ved de samme differentialkvotienter. Dette medfører, at $\dot{\underline{p}}_k$ er en linearkombination af $\underline{p}_1,\dots,\underline{p}_{k+1}$, altså at $\kappa_{jk} = 0$ for $k > j+1$. Da (κ_{jk}) er skævsymmetrisk følger heraf, at $\kappa_{jk} = 0$ for $j < k-1$. Dermed har vi vist, at linearkombinationerne kommer til at se ud som påstået i sætningen, idet skævsymmetrien medfører, at diagonalleddene forsvinder.

For en monoton kurve $\underline{\gamma}_1 = \gamma\circ\varphi$, som er d-ækvivalent med $\underline{\gamma}$, får vi, idet vi skriver $t = \varphi(u)$, at

$$\frac{d\underline{p}_k}{du} = \frac{d\underline{p}_k}{dt}\frac{dt}{du} = \dot{\underline{p}}_k\, D\varphi(u),$$

og alle kofficienterne λ_k vil derfor blive multipliceret med $D\varphi(u)$ på grund af parameterskiftet. Et sæt koefficienter, der er uafhængige af parameterfremstillingen, får vi ved at vælge den naturlige parameterfremstilling, altså ved at benytte buelængden s som parameter. Derved får vi et talsæt $(\kappa_1(t),\dots,\kappa_{n-1}(t))$ definerede ved, at

$$\frac{d\underline{p}_1}{ds} = \kappa_1\underline{p}_2,$$

$$\frac{d\underline{p}_k}{ds} = -\kappa_{k-1}\underline{p}_{k-1} + \kappa_k\underline{p}_{k+1};\ k = 2,\dots,n-1.$$

$$\frac{d\underline{p}_n}{ds} = -\kappa_{n-1}\underline{p}_{n-1}.$$

16.10.6. Definition. De således definerede tal $\kappa_1(t),\dots,\kappa_{n-1}(t)$ kaldes kurvens <u>krumninger</u> i det til parameterværdien t svarende kurvepunkt.

16.11. Vi vil nu specielt studere tilfældet $n = 3$, altså de sædvanlige rumkuvers teori. Vi vil nøjes med at betragte monotone parameterfremstillinger. I overensstemmelse med den sædvanlige praksis definerer vi den ledsagende basis lidt anderledes end i det generelle tilfælde, idet vi definerer $\underline{p}_1$ og $\underline{p}_2$ som ovenfor men sætter $\underline{p}_3 = \underline{p}_1 \times \underline{p}_2$, således at $(\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3)$ bliver en højreorienteret ortonormal basis for $\grave{R}^3$. Vi får da et sæt differentiationsformler med følgende udseende:

$$\frac{d\underline{p}_1}{ds} = \kappa \underline{p}_2; \quad \frac{d\underline{p}_2}{ds} = -\kappa \underline{p}_1 + \tau \underline{p}_3; \quad \frac{d\underline{p}_3}{ds} = -\tau \underline{p}_2.$$

Disse relationer kaldes <u>Frenet</u>'s formler.

Lad nu $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\grave{R}^3$ være den monotone bevægelse. Vi har da hastigheden $\underline{v} = \dot{\underline{\gamma}}$ og akcelerationen $\underline{w} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{\gamma}}$. Endvidere er

$$\underline{p}_1 = \frac{\underline{v}}{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{v} = \frac{d\underline{\gamma}}{ds},$$

hvor $v = \|\underline{v}\|$ er farten. For akcelerationen $\underline{w}$ har vi en fremstilling

$$\underline{w} = w_t \underline{p}_1 + w_n \underline{p}_2,$$

hvor w_t er tangentialkomposanten og w_n normalkomposanten af akcelerationen. Ved skalær multiplikation med $\underline{p}_1$ får vi

$$w_t = \underline{w} \cdot \underline{p}_1 = \frac{1}{v}(\underline{v} \cdot \underline{w}).$$

Ved differentiation af ligningen $\underline{v} = v\underline{p}_1$ får vi

$$\underline{w} = \dot{v}\underline{p}_1 + v\dot{\underline{p}}_1.$$

Her er

$$\dot{\underline{p}}_1 = \frac{d\underline{p}_1}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\underline{p}_1}{ds} = \kappa v \underline{p}_2,$$

så vi får

$$\underline{w} = \dot{v}\underline{p}_1 + \kappa v^2 \underline{p}_2.$$

Udtrykket κv^2 er accelerationens normalkomposant, som også kaldes **centripetalaccelerationen**. På den anden side er nu

$$w_n\underline{p}_2 = \underline{w} - w_t\underline{p}_1 = \underline{w} - \frac{1}{v}(\underline{v}\cdot\underline{w})\underline{p}_1 =$$
$$\underline{w} - \frac{1}{v^2}(\underline{v}\cdot\underline{w})\underline{v},$$

og kvadratet på længden bliver

$$w_n^2 = \underline{w}^2 + \frac{1}{v^2}(\underline{v}\cdot\underline{w})^2 - \frac{2}{v^2}(\underline{v}\cdot\underline{w})^2 =$$
$$\frac{\underline{v}^2\underline{w}^2 - (\underline{v}\cdot\underline{w})^2}{v^2},$$

og dette er således værdien af $(\kappa v^2)^2$. Vi får derfor

$$\kappa^2 = \frac{\underline{v}^2\underline{w}^2 - (\underline{v}\cdot\underline{w})^2}{v^6}$$

Nu er $\underline{v}^2\underline{w}^2 - (\underline{v}\cdot\underline{w})^2 = (\underline{v} \times \underline{w})^2$, så vi får

$$\kappa = \frac{\|\underline{v} \times \underline{w}\|}{v^3} .$$

At κ er positiv følger af, at

$$\kappa v^2 = \underline{w}\cdot\underline{p}_2 > 0$$

ifølge definitionen af $\underline{p}_2$.

Anskueligt kan krumningen κ_2 fortolkes som vinkelhastigheden i tangentens drejning, når kurven gennemløbes med den konstante fart 1. Vektorerne $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ og $\underline{p}_3$ kaldes henholdsvis tangentvektor, hovednormalvektor og binormalvektor.

Betingelsen $\underline{w}\cdot\underline{p}_2 > 0$ sikrer, at $\underline{v} \times \underline{w}$ er ensrettet med $\underline{p}_1 \times \underline{p}_2 = \underline{p}_2$, og vi har derfor

$$\underline{p}_3 = \frac{\underline{v} \times \underline{w}}{\|\underline{v} \times \underline{w}\|} .$$

Vi indfører den afkortede betegnelse

$$q = \|\underline{v} \times \underline{w}\|,$$

så vi har

$$q\underline{p}_3 = \underline{v} \times \underline{w}.$$

Differentiation giver

$$\dot{q}\underline{p}_3 + q\dot{\underline{p}}_3 = \dot{\underline{v}} \times \underline{w} + \underline{v} \times \dot{\underline{w}} = \underline{v} \times \dot{\underline{w}}.$$

Nu er

$$\dot{\underline{p}}_3 = v \frac{d\underline{p}}{ds} = -\tau v \underline{p}_2,$$

så vi får

$$-\tau v \underline{p}_2 + \dot{q}\underline{p}_3 = \underline{v} \times \dot{\underline{w}}.$$

Ved skalar multiplikation med $\underline{p}_2$ får vi

$$\tau v = -\underline{v} \times \dot{\underline{w}} \cdot \underline{p}_2 = \underline{v} \times \underline{p}_2 \cdot \dot{\underline{w}}$$

Ved multiplikation med κv^2 får vi

$$\kappa v^3 \tau = \underline{v} \times \kappa v^2 \underline{p}_2 \cdot \dot{\underline{w}} = \underline{v} \times (\underline{w} - \dot{v}\underline{p}_1) \cdot \dot{\underline{w}}$$

Da $\underline{p}_1$ og $\underline{v}$ er ensrettede, får vi

$$\kappa v^3 \tau = \underline{v} \times \underline{w} \cdot \dot{\underline{w}},$$

hvoraf følger

$$\tau = \frac{\underline{v} \times \underline{w} \cdot \dot{\underline{w}}}{\|\underline{v} \times \underline{w}\|}.$$

Vi har dermed fundet en formel til beregning af rumkurvens anden krumning τ, som også kaldes kurvens torsion. Den angiver den fart, hvormed binormalvektor drejer, når kurven gennemløbes med farten 1. Dette er det samme som den fart, hvormed kurvens oskulationsplan drejer, og torsionen er således et mål for, hvor hurtig kurven "vrider" bort fra oskulationsplanen.

16.12. Vi vil nu til sidst studere tilfældet n = 3. Vi vil også i dette tilfælde betragte en monoton parameterfremstilling $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i R^2. Vi sætter som sædvanlig

$$\underline{v} = \dot{\underline{\gamma}}, \quad v = \|v\|, \quad \underline{p}_1 = \frac{1}{v}\underline{v}.$$

Vi definerer $\underline{p}_2$ som fremkommer af $\underline{p}_1$ ved en drejning på $+\frac{\pi}{2}$.

Ved differentiation af relationen

$$\underline{v} = v\underline{p}_1$$

får vi

$$\underline{w} = \dot{\underline{v}} = \dot{v}\underline{p}_1 + v\dot{\underline{p}}_1.$$

Vi definerer krumningen κ ved relationen

$$\frac{d\underline{p}_1}{ds} = \kappa\underline{p}_2,$$

og vi har da

$$\dot{\underline{p}}_1 = \kappa v\underline{p}_2,$$

så vi får fremstillingen af akcelerationen ved tangential- og normalkomposant som for rumkurverne:

$$\underline{w} = \dot{v}\underline{p}_1 + \kappa v^2\underline{p}_2.$$

For plane vektorer $\underline{r} = (r_1,r_2)$ og $\underline{s} = (s_1,s_2)$ vil vi benytte planproduktet

$$[\underline{r},\underline{s}] = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix},$$

og vi har da

$$[\underline{v}\ \underline{p}_2] = [\ \underline{p}_1,\underline{p}_2] = v[\underline{p}_1,\underline{p}_2] = v,$$

så vi får

$$[\underline{v}\ \underline{w}] = \kappa v^3,$$

altså

$$\kappa = \frac{[\underline{v}\ \underline{w}]}{v^3}$$

til beregning af krumning.

Vi har differentiationsformlerne

$$\frac{d\underline{p}_1}{ds} = \kappa\underline{p}_2\ ,\ \frac{d\underline{p}_2}{ds} = -\kappa\underline{p}_1,$$

som svarer til Frenet's formler for en rumkurve.

Kurven $\underline{\gamma}_1$ kaldes en afvikler af kurven $\underline{\gamma}$. Vi ser, at at afvikleren igen har en monoton parameterfremstilling bortset fra de eventuelle punkter, hvor s+c = 0.

For en cirkelbevægelse

$$\underline{\gamma}(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

får vi

$$D\underline{\gamma}(t) = (-r\sin t, r\cos t) = r\underline{p}_1$$

$$\frac{ds}{dt} = r$$

$$\frac{d\underline{p}_1}{ds} = (\cos t, \sin t) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}\,\underline{p}_2,$$

så vi får $\kappa = \frac{1}{r}$. I det generelle tilfælde er $\rho = \frac{1}{\kappa}$ således radius i en cirkel med samme krumning som kurven, og den betegnes derfor <u>krumningsradius</u>. Den er regnet med fortegn.

For bevægelsen $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^2$ indfører vi <u>evolutten</u> $\underline{\gamma}^*:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^2$ defineret ved

$$\underline{\gamma}^*(t) = \underline{\gamma}(t) + \rho\underline{p}_2.$$

Hvis vi nu antager, at $\kappa(t)$ og dermed $\rho(t)$ er differentiable, får vi

$$\frac{d\underline{\gamma}^*}{ds} = \frac{d\,\underline{\gamma}}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\,\underline{p}_2 + \rho\frac{d\underline{p}_2}{ds} =$$

$$\underline{p}_1 + \frac{d\rho}{ds}\,\underline{p}_2 - \rho\kappa\underline{p}_1 = \frac{d\rho}{ds}\,\underline{p}_2.$$

Idet vi benytter betegnelserne $\underline{p}_1^*$, $\underline{p}_2^*$, κ^* for de størrelser, der angår $\underline{\gamma}^*$, får vi for $\frac{d\rho}{ds} > 0$, at

$$\underline{p}_1^* = \underline{p}_2\ ,\ \underline{p}_2^* = -\underline{p}_1$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\rho}{ds}\ .$$

Ved integration af den sidste ligning får vi

$$s^* = \rho - \rho_0,$$

hvis ρ_0 er krumningsradius i det til a svarende kurvepunkt, og buelængden på evolutten regnes ud fra det tilsvarende punkt. Resultatet viser, at en kurve med voksende krumningsradius er afvikler af sin evolut. Ved overgang til en modsat kurve ses det samme at gælde, når krumningsradius er aftagende.

16.3. Vi vil også tale om en bevægelse $\underline{\gamma}$:I ind i $\grave{R}^n$, hvor I er et vilkårligt interval. Vi kan da regne buelængden s ud fra et vilkårligt punkt. Alle begreber, som ovenfor er indført, vil da eksistere, hvis $\underline{\gamma}$ opfylder de nødvendige differentiabilitetsbetingelser.

Lette opgaver.

1. Hvad er banen for den ved

$$x_1 = \text{Arctg } t$$
$$x_2 = \text{Arc cot } t$$
$$x_3 = \text{Arctg } \frac{2t}{1-t^2}$$

definerede bevægelse $\underline{\gamma}:]-1;1[$ ind i $\grave{R}^3$.

2. Lad Γ være en cirkelperiferi. Vi kan tænke os Γ givet ved en parameterfremstilling

$$x = a + r\cos\Theta, \quad y = b + r\sin\Theta; \ \Theta \in \grave{R},$$

idet Γ så gennemløbes uendelig mange gange. Lad $\varphi:\Gamma$ på Γ være bijektiv og kontinuert. Vis, at der eksisterer en strengt monoton, kontinuert afbildning $\psi:\grave{R}$ på $\grave{R}$, således at

$$\forall\ \Theta \in \grave{R}(\varphi(a+r\cos\Theta, b+r\sin\Theta) = (a+r\cos\psi(\Theta), b+r\sin\psi(\Theta)).$$

Vis, at denne betingelse éntydigt fastlægger ψ bortset fra en additiv konstant $2p\pi, p \in \grave{R}$. Vis, at ψ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall\ \Theta \in \grave{R}(\psi(\Theta+2\pi) = \psi(\Theta) \pm 2\pi),$$

hvor det øverste fortegn gælder, hvis ψ er voksende, medens det nederste fortegn gælder, hvis ψ er aftagende.

3. En bevægelse $\underline{\gamma}:[a,b]$ ind i $\grave{R}^n$ kaldes lukket, hvis $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$. Vi indfører en bevægelse $\underline{\gamma}_1:[a,b]$ ind i $\grave{R}^2$ ved

$$\gamma_1(t) = \left(\cos\frac{2\pi\Theta}{b-a}, \sin\frac{2\pi\Theta}{b-a}\right).$$

Banen $\Gamma = \underline{\gamma}_1([a,b])$ er en cirkelperiferi. Vis, at der eksisterer én og kun én kontinuert afbildning $\underline{\beta}:\Gamma$ ind i $\grave{R}^n$, således at $\underline{\gamma} = \underline{\beta}\circ\underline{\gamma}_1$.

4. Lad Γ være en cirkelperiferi. Det fremgår af opgave 3, at enhver lukket bevægelse **kan** tænkes givet ved en kontinuert afbildning $\underline{\beta}:\Gamma$ ind i $\grave{R}^n$. Lad nu $\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2:\Gamma$ ind i $\grave{R}^n$ være lukkede bevægelser. Vi skriver $\underline{\beta}_1 \underset{c}{\sim} \underline{\beta}_2$, hvis der eksisterer en kontinuert, bijektiv afbildning $\varphi:\Gamma$ ind i Γ , således at $\underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 \circ \varphi$, og den efter opgave 2 til φ svarende afbildning $\psi:\grave{R}$ ind i $\grave{R}$ er voksende. Vis, at $\underset{c}{\sim}$ er en ækvivalensrelation. Indfør også modsatte lukkede bevægelser i analogi hermed.

5. En lukket bevægelse $\underline{\beta}:\Gamma$ ind i $\grave{R}^n$ (se opgave 2,3 og 4) kaldes simpel, hvis $\underline{\beta}$ er injektiv. Vis, at to simple lukkede bevægelser $\underline{\beta}_1,\underline{\beta}_2:\Gamma$ ind i $\grave{R}^n$ enten tilfredsstiller $\underline{\beta}_1 \underset{c}{\sim} \underline{\beta}_2$ eller er modsat.

6. En bevægelse $\gamma:[0,2]$ ind i $\grave{R}$ er bestemt ved

$$\gamma(t) = t(t-1)(t-2).$$

Udregn vejlængden.

7. Bestem vejlængden ud fra det til $t = 0$ svarende punkt som funktion af t for den ved

$$\gamma_1(t) = t^2 , \quad \gamma_2(t) = t^3$$

definerede bevægelse: $\underline{\gamma}:\grave{R}$ ind i $\grave{R}^2$.

8. En plan kurve er givet i polære koordinater ved en ligning

$$r = f(\Theta), \quad \Theta \in [\alpha,\beta].$$

Vis, at kurven har længden

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\Theta))^2 + (Df(\Theta))^2}\, d\Theta.$$

9. Opstil en formel til bestemmelse af buelængden af en parabelbue.

10. En cirkel med radius a ruller uden at glide på en ret linie. Vis, at bevægelsen for et punkt på periferien (i et koordinatsystem med linien, hvorpå cirklen ruller, som x-akse, og med begyndelsespunkt et sted, hvor det bevægelige punkt er på x-aksen) er givet ved

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$$

idet cirklen under rulningen drejer med vinkelhastighed 1. Bestem buelængden som funktion af t. Kurven kaldes en (sædvanlig) cykloide.

11. Udregn vejlængden for den ved

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$$

definerede bevægelse $\underline{\gamma}:[0,2\pi]$ ind i $\mathbb{R}^2$.

12. Vis, at den ved

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht;\ a > 0,\ h \neq 0,$$

definerede bevægelse $\underline{\gamma}:\mathbb{R}$ ind i t er simpel. Banen kaldes en skruelinie. Udregn buelængde, krumning og torsion.

13. Udregn buelængde og krumninger for den ved

$$x_1 = a\cos\alpha t,\quad x_2 = a\sin\alpha t$$
$$x_3 = b\cos\beta t,\quad x_4 = b\sin\beta t$$

definerede bevægelse: $\underline{\gamma}:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}^4$. Vis, at bevægelsen er simpel, hvis og kun hvis $\alpha^{-1}\beta$ er irrationel, men at banen i dette tilfælde ikke er afsluttet.

14. Udregn buelængden og den ledsagende ortonormale basis for den ved

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ z = \frac{3}{2}a(t+\sin t\cos t)$$

definerede bevægelse $\gamma:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ind i $\mathbb{R}^3$.

15. Vis, at normalen i et vilkårligt punkt af en sædvanlig cykloide går gennem den rullende cirkels røringspunkt, og at krumningsradius er dobbelt så stor som afstanden til røringspunktet. Vis dernæst, at evolutten er en sædvanlig cykloide (se opgave nr. 10).

16. Opstil en formel til beregning af buelængden for en cirkelafvikler.

17. En <u>logaritmisk spiral</u> er en kurve, som i polære koordinater er givet ved en ligning af formen

$$r = e^{a\Theta+b},$$

hvor a og b er konstante. Opstil formel til beregning af buelængden for en logaritmisk spiral. Vis, at vinklen mellem radiusvektor og kurvetangent er konstant, og undersøg, om der findes andre kurver med denne egenskab. Vis, at en logaritmisk spiral er kongruent med sin evolut.