

Mogens Esrom Larsen
Hovedgaden 38 A
Birkerød
813459

Københavns Universitets Matematiske Institut

2. DEL

1965-66.

H. Tornehave

Forelæsninger

over

D I S T R I B U T I O N E R

I N D H O L D

Indledning...	1.
Kapitel 1. Abstrakt mål- og integralteori...	6
- 2. Mål og integral i det m -dimensionale rum...	47
- 3. Om vilkårlig ofte differentiable funktioner med kompakt støtte...	62
- 4. Topologien på vektorrummet $\mathcal{D}_K$...	77
- 5. Topologisk vektorrum. Rummet $\mathcal{D}'_K$...	93
- 6. Konvergens af filtre. Fuldstændighed af $\mathcal{D}'_K$...	107
- 7. Svag topologi...	113
- 8. Rummet $\mathcal{E}_0$...	125
- 9. Rummet $\mathcal{D}_0$...	138
- 10. Udvalgsaksiomet, velordningssætningen, Zorns lemma...	147
- 11. Ultrafiltre. Kompakthed...	152
- 12. Lidt elementær vektorrumsteori...	160
- 13. Konvekse mængder i vektorrum...	169
- 14. Kompakte konvekse mængder. Refleksive vektorrum...	184
- 15. Forskydningsoperator, differentiation, stamdistribution...	192
- 16. Positive distributioner...	209
- 17. Distributioner på $\mathbb{R}^1$...	212
- 18. Distributioners lokale egenskaber...	218
- 19. Rummene $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}'$...	232
- 20. Naturlige kompakte mængder...	246
- 21. Tensorproduktet...	260
- 22. Sædvanlig multiplikation...	272
- 23. Division...	277
- 24. Sædvanlige differentialligninger...	284
- 25. Partielle differentialligninger. Forberedende undersøgelser...	295
- 26. Foldning...	307
- 27. Laplaces operator...	314

Indholdsfortegnelse.

- 1- 5 Indledning.
- 6- 46 1. kapitel: Abstrakt mål- og integralteori.
- 47- 61 2. kapitel: Mål og integral i det m -dimensionale rum.
- 62- 76 3. kapitel: Om vilkårligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte.
- 77- 92 4. kapitel: Topologien på vektorrummet $\mathcal{D}_K$.
- 93-106 5. kapitel: Topologiske vektorrum. Rummet $\mathcal{D}'_K$.
- 107-112 6. kapitel: Konvergens af filtre. Fuldstændighed af $\mathcal{D}'_K$.
- 113-124 7. kapitel: Svag topologi.
- 125-137 8. kapitel: Rummet $\mathcal{E}_0$.
- 138-146 9. kapitel: Rummet $\mathcal{D}_0$.
- 147-151 10. kapitel: Udvalgsaksiomet, velordningssætningen, Zorns lemma.
- 152-159 11. kapitel: Ultrafiltre. Kompakthed.
- 160-168 12. kapitel: Lidt elementær vektorrumsteori.
- 169-183 13. kapitel: Konvekse mængder i vektorrum.
- 184-191 14. kapitel: Kompakte konvekse mængder. Refleksive vektorrum.
- 192-208 15. kapitel: Forskydningsoperator, differentiation, stamdistribution.
- 209-211 16. kapitel: Positive distributioner.
- 212-217 17. kapitel: Distributioner på $\mathbb{R}$.
- 218-231 18. kapitel: Distributioners lokale egenskaber.
- 232-245 19. kapitel: Rummene $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}'$.
- 246-259 20. kapitel: Naturlige kompakte mængder.

260-271	21. kapitel:	Tensorproduktet
272-276	22. kapitel:	Sædvanlig multiplikation.
277-283	23. kapitel:	Division.
284-294	24. kapitel:	Sædvanlige differentialligninger.
295-306	25. kapitel:	Partielle differentialligninger. Forberedende undersøgelser.
307-313	26. kapitel:	Foldning.
314-327	27. kapitel:	Laplaces operator.

34	Absolut kontinuert mål
61	Absorberende mængde
176	Afsluttet konvekst hylster
89	Ascolis sætning
82	Baires sætning
84	Begrænset mængde
100	Begrænset mængde
83	Blokrum
47	Borelmængde
129	$\mathcal{E}_0$
162	Codimension
28	Daniell-integral
32	Daniell-målelighed
73	Differentialkvotient
56	Dinis sætning
102	Distribution
144	Distribution
210	Distribution, positiv
215	Distribution, totalt voksende
214	Distribution, voksende
113	Dualitet
101	Dualt vektorrum
138	$\mathcal{D}_0$
237	$\mathcal{D}_0^p$
236	$\mathcal{D}_K^p$
199	$\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_m'$
237	$\mathcal{D}^p$

129	Eksakt grænserum
12	$E_{\mathcal{P}}$
88	Equikontinuitet
232	$\mathcal{E}$
237	$\mathcal{E}^p$
160	Faktorum
94	Filter
107	Filter, konvergent
92	Fréchetrum
111	Fuldstændig mængde
108	Fundamentalfilter
24	Funktionsgitter
73	Generaliseret funktion
175	Hahn-Banachs sætning
176	Hahn-Banachs sætning
220	Hahn-Banachs sætning
50	Indhold
149	Induktivt ordnet mængde
156	Kompakthed
154	Kontaktpunkt
169	Konveks kegle
162	Mangfoldighed, lineær
91	Montelrum
48	Mål
6	Mål, endeligt
40	Mål, singulært

246	Naturlig kompakt mængde
288	Neumann-følge
72	Opspaltning af enhedsfunktionen
237	Orden af distribution
9	$\mathcal{P}$ -målelighed
20	$\mathcal{P}^*$ -målelighed
177	Polar
154	Prækompakthed
81	Pseudonorm
156	Quasikompakthed
39	Radon-Nikodyms sætning
166	Reel vektorrumstruktur
289	Resolventmatrix
48	Restriktion
58	Riesz' sætning
176	Rund, afsluttet, konvekst hylster
83	Rund mængde
236	Støtte for en distribution
175	Støttehyperplan
114	Svag topologi
247	Taylors formel
250	Taylorssystem
260	Tensorprodukt
267	Tensorprodukt af distributioner
135	Tietzes sætning

179	Topologi forenelig med dualiteten
164	Topologisk direkte sum
93	Topologisk vektorrum
109	Topologisk vektorrum, fuldstændigt
97	Topologisk vektorrum, lokalkonvekst
52	Trappefunktion
184	Tychonoffs sætning
149	Udvalgsaksiomet
149	Udvalgsfunktion
152	Ultrafilter
104	Uniform omegn
24	Valuation
31	Valuation, lineær
147	Velordnet mængde
147	Velordningsisomorfi
149	Velordningssætningen
149	Zorns lemma
44	μ -integrabel funktion
49	μ -integrabel funktion
14	μ -integral
48	μ -målelig mængde
24	σ -gitter
6	σ -legeme

Fra J. Garsoux: Espaces vectoriels topologiques et distributions, side 4-9, har vi følgende betegnelser:

- L^1 mængden af Lebesgue integrable funktioner på $\mathbb{R}^n$.
 L_K^1 mængden af Lebesgue integrable funktioner på K .
 $\mathcal{D}^m$ mængden af komplekse funktioner på $\mathbb{R}^n$, for hvilke alle partielle differentialkvotienter indtil orden m eksisterer og er kontinuerte i $\mathbb{R}^n$, og hvis støtte er kompakt i $\mathbb{R}^n$.
 $\mathcal{D}_K^m$ det samme; blot er støtten indeholdt i K .
 $\mathcal{E}$ $\mathcal{D}^0$, dvs. mængden af kontinuerte komplekse funktioner på $\mathbb{R}^n$, hvis støtte er kompakt.
 $\mathcal{E}_K$ $\mathcal{D}_K^0$
 $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}^\infty$
 $\mathcal{D}_K$ $\mathcal{D}_K^\infty$
 $\mathcal{F}$ mængden af vilkårlig ofte differentiable komplekse funktioner på $\mathbb{R}^n$ (der er her intet krav til støtten).

Der gælder følgende relationer mellem disse rum:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_K &\subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}^m \subset \mathcal{E} \subset L^1 \\
 \mathcal{D} &\subset \mathcal{E} \\
 \mathcal{D}_K^m &\subset \mathcal{D}^m \\
 \mathcal{E}_K &\subset \mathcal{E}
 \end{aligned}$$

Endvidere er

$$\bigcup_K \mathcal{D}_K^m = \mathcal{D}^m, \quad \bigcup_K \mathcal{D}_K = \mathcal{D}, \quad \bigcup_K \mathcal{E}_K = \mathcal{E}, \quad \bigcap_m \mathcal{D}^m = \mathcal{D}$$

- 1° En distribution er et element i $\mathcal{D}'$; en distribution er altså en kontinuert linearform på $\mathcal{D}$.
- 2° En distribution af orden $\leq m$ er et element i $(\mathcal{D}^m)'$; den er altså en kontinuert linearform på $\mathcal{D}^m$.
- 3° Et mål er et element i $\mathcal{E}'$; et mål er således en kontinuert linearform på $\mathcal{E}$.

Distributioner.

En gennemgang af den matematiske analyse afslører på et ret tidligt tidspunkt, at begrebet "differential" ikke er særlig tilfredsstillende. For det første er klassen af differentiable funktioner lovlig eksklusiv. For det andet viser det sig, at en funktions differentialkvotient ikke bestemmer funktionen på nær en konstant, men kun på nær en singular funktion, og diskontinuiteter beherskes slet ikke i denne sammenhæng.

Tidligt i dette århundrede viste Hadamard, at det var muligt at forbedre differentiationsbegrebet, således at stamfunktioner kunne fastlægges på nær en konstant også i omegnen af visse singulariteter. Hadamard gennemførte dette ved at benytte en særlig definition for differentialkvotienten af den uendelige del af funktionen, idet han trak den uendelige del ud som et additivt led. Et meget specielt tilfælde af denne ide kan endda føres tilbage til Cauchy.

Fysikeren Dirak indførte i sin lærebog i kvantemekanik den såkaldte δ -funktion. Han betragtede integraltransformationer: Vi betragter klassen af kontinuerte afbildninger $\varphi: [-1,1]$ ind i $\mathcal{C}$, samt integraltransformationen $\mathcal{K}$, hvor $K: [-1,1] \times [-1,1]$ ind i $\mathcal{B}$ er en kontinuert afbildning, idet

$$\mathcal{K}\varphi(x) = \int_{-1}^1 K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Disse integraltransformationer er organiserede ved sammensætning $\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$, og vi har

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2 \varphi(x) &= \int_{-1}^1 K_1(x,y) \int_{-1}^1 K_2(y,z)\varphi(z)dzdy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 K_1(x,y)K_2(y,z)dy \right) \varphi(z)dz, \end{aligned}$$

således at $\mathcal{K}_1 \circ \mathcal{K}_2$ modsvares $\int_{-1}^1 K_1(x,y)K_2(y,z)dy$. Derved organiseres klassen af afbildninger K åbenbart som en ikke kommutativ ring. Denne ring har ikke noget 1-element. Hvis $\Delta(x,y)$ var 1-element, havde vi

$$\forall K(x,y) : \int_{-1}^1 \Delta(x,y)K(y,z)dy = K(x,z),$$

altså specielt for $\delta(y) = \Delta(x,0)$, at

$$\forall K(x,y) : \int_{-1}^1 \delta(y)K(y,z)dy = K(0,z)$$

eller - endnu mere specielt:

$$\forall \varphi : \int_{-1}^1 \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

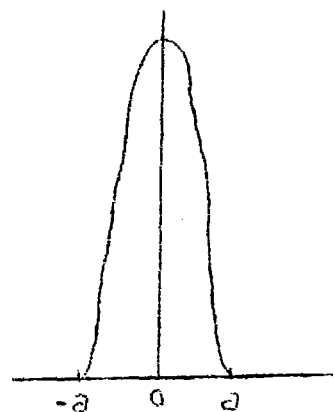
Vælger vi nu φ med et grafisk billede som antydnet på figuren, får vi åbenbart

$$\left| \int_{-1}^1 \delta(x)\varphi(x)dx \right| \leq 2a \sup |\delta(x)|,$$

og vælger vi $\varphi(0) > 2a \sup |\delta(x)|$, får vi

$$\left| \int_{-1}^1 \delta(x)\varphi(x)dx \right| < \varphi(0).$$

Heraf følger, at ringen ikke har 1-element.



Det er selvfølgelig en enkel sag at adjungere et 1-element til ringen, og dette 1-element har endda en konkret betydning - nemlig som den operator, der tilordner enhver funktion til sig selv. Dette svarer da også til, hvad man sædvanligvis gør i integralligningsteori.

Dirak indførte imidlertid en "ideal funktion" $\delta(x)$, som for ethvert φ tilfredsstiller betingelsen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

Bemærkning: Om $\delta(t)$, se H. Bremermann: Distributions,

Complex Variables, and Fourier Transforms, side 3₁ og 5₁₅

idet vi nu betragter afbildninger $\varphi: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{C}$. "Funktionen"

δ må have følgende egenskaber:

$$\delta(x) \geq 0 \text{ for alle } x$$

$$\delta(x) = 0 \text{ for } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Dirak antog brutalt disse egenskaber og han kunne da slutte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(0) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = \varphi(0),$$

idet den sidste integrand er 0 for alle x . Endvidere fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \varphi(x-u) du = \varphi(x),$$

så $\delta(x-y)$ giver den savnede enhedsoperator.

Sætter vi

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

da har vi Stieltjes-integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\Theta(x) = (1-0)\varphi(0) = \varphi(0).$$

Vi ser således, at $d\Theta(x) = \delta(x)dx$, så δ er en slags differentialkvotient af Θ . Ulykken er blot, at δ ikke eksisterer, og at dens postulerede egenskaber er indbyrdes modstridende.

Laplace's differentialligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

har som løsning netop enhver funktion $g(x,y)$, for hvilken der eksisterer $h(x,y)$, således at $f(z) = g(x,y) + i h(x,y)$ er en analytisk funktion af $z = x + iy$. Enhver løsning til differentialligningen er en vilkårlig ofte differentiabel funktion. Ved studiet af Laplace's differentialligning møder man derfor ikke

Bemærkning: Θ kaldes også Heavysidefunktionen (se H. Bremermann, side 1)

vanskeligheder med differentiabilitet.

Forholdene er ganske anderledes for den analoge differentialligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Enhver funktion af formen $\varphi(x+y) + \psi(x-y)$, hvor φ og ψ er vilkårlige to gange differentiable funktioner af 1 variabel, tilfredsstiller åbenbart ligningerne. Lad os prøve transformationen

$$\xi = x+y, \quad \eta = x-y.$$

Vi får åbenbart

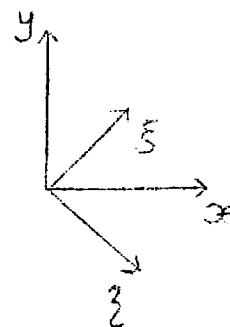
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

så ligningen bliver til

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Denne ligning har åbenbart den fuldstændige løsning $\varphi(\xi) + \psi(\eta)$, hvor φ og ψ er vilkårlige differentiable funktioner. Dermed har vi faktisk bevist, at den oprindelige differentialligning ikke har andre to gange differentiable løsninger end de allerede anførte.

Overgangen fra (x,y) til (ξ,η) er et uskyldigt koordinat-skifte i planen. Dette skifte overfører således differentialoperatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ i differentialoperatoren $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$. For en to gange differentiable funktion giver de to differentiationsprocesser altid samme resultat.



Det fremgår imidlertid også, at vi opnår en generalisation af operatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ved simpelthen at foretage koordinat-skiftet før differentiationen. Derved bliver operatorens definitions-
mængde udvidet ganske væsentligt.

Funktionen $|x-y|$ er ikke en løsning til den oprindelige differentialligning, men den transformerede løsning $|\eta|$ kan ud-mærket accepteres som løsning til den transformerede ligning. For $|x-y|^{\frac{2}{3}}$ eller $(x-y)^{4/3}$ gælder det endda, at de transfor-me-rede funktioner $|\eta|^{3/2}$ og $\eta^{4/3}$ har de relevante differential-kvotienter for begge valg af differentiationernes rækkefølge. Af hensyn til anvendelserne er det i høj grad ønskeligt, at ope-ratoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ er defineret for de her nævnte funktioner, og dette har man blandt andet netop opnået ved fortolkninger som de her antydede.

Materialet er langt fra udtømt. Siden 1880 er utallige ge-neralisationer af funktionsbegrebet blevet indført som hjælpe-middel ved snart en snart en anden opgave. De fleste af disse hentet fra differentialligningsteori. De af Laurent Schwarz indførte distributioner er en universel generalisation af funk-tionsbegrebet, omfattende størstedelen af de tidligere benyttede.

Inden vi går i gang med distributionerne, må vi dog indføre nogle hjælpemidler, og i første omgang vil vi kort omtale en me-re speciel generalisation af funktionsbegrebet.

1. kapitel.

Abstrakt mål- og integralteori.

Vi får brug for et afsnit af teorien for Lebesgue-Stieltjes-integraler, og vi vil udvikle denne teori i det omfang, der vil vise sig nødvendigt. Vi vil selvfølgelig lægge vægt på netop de egenskaber, der kan bidrage til at kaste lys over distributions-teorien. Det kommer til at dreje sig om flere forskellige afsnit af teorien.

Definition 1. Lad M være en mængde. Et system $\mathcal{P} \subseteq D(M)$ kaldes et σ -legeme på M , hvis

$$(A_j \in \mathcal{P}, j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{P}$$

$$A \in \mathcal{P} \Rightarrow M \setminus A \in \mathcal{P}.$$

Disse betingelser medfører umiddelbart, at foreningsmængden af endelig mange mængder fra $\mathcal{P}$ tilhører $\mathcal{P}$, idet

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = A_1 \cup \dots \cup A_k \cup A_k \cup \dots$$

Hvis $A \in \mathcal{P}$ vil altså også $A \cup (M \setminus A) = M$ tilhøre $\mathcal{P}$. Hvis $A_j \in \mathcal{P}$, $j = 1, 2, \dots$ følger umiddelbart, at $\bigcap A_j \in \mathcal{P}$.

Definition 2. Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{P}$ være et σ -legeme på M . En afbildning $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes et endeligt mål på M , såfremt

$$\begin{aligned} \forall \{A_j | j \in \mathbb{N}\} : (\forall j (A_j \in \mathcal{P}) \wedge \forall j, k \in \mathbb{N} : j \neq k \Rightarrow A_j \cap A_k = \emptyset) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right). \end{aligned}$$

Dette gælder for endelige summer, da $\emptyset \in \mathcal{P}$.

Vi har en triviel opspaltning i realdel og imaginærdel

$$\mu(A) = \mu_1(A) + i\mu_2(A),$$

Bemærkning: Det er implicit givet i formuleringen, at

summen $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ er konvergent.

og μ_1 og μ_2 er åbenbart reelle, endelige mål på M . Omvendt vil to reelle endelige mål definere et komplekst, endeligt mål.

Sætning 1. Et endeligt mål er begrænset.

Bevis: Vi betragter først $A \in \mathcal{P}$. Så gælder $M \setminus A \in \mathcal{P}$. For enhver mængde $B \in \mathcal{P}$ har vi en opspaltning

$$B = (A \cap B) \cup ((M \setminus A) \cap B),$$

hvilket viser, at enhver mængde $B \in \mathcal{P}$ har en opspaltning $B = B_1 \cup B_2$, hvor $B_1 \in \mathcal{P}$, $B_2 \in \mathcal{P}$ og $B_1 \subset A$, $B_2 \subset M \setminus A$. Heraf følger, at μ er begrænset, hvis μ blot er begrænset såvel for delmængder af A som for delmængder af $M \setminus A$.

Vi beviser nu sætning 1 indirekte. Vi antager altså, at μ ikke er begrænset. Vi kan da vælge $A \in \mathcal{P}$, således at

$$|\mu(A)| \geq |\mu(M)| + 1, \text{ og vi har da}$$

$$|\mu(M \setminus A)| = |\mu(M) - \mu(A)| \geq 1.$$

Vi har således spaltet M i mængderne A og $M \setminus A$, der begge har mål numerisk ≥ 1 . Endvidere er μ ikke begrænset på begge de to mængder. Med ændrede betegnelser har vi således en opspaltning

$$M = B_1 \cup M_1, B_1 \cap M_1 = \emptyset; B_1, M_1 \in \mathcal{P}$$

$$|\mu(B_1)| \geq 1, \mu \text{ ubegrænset på } M_1.$$

Vi vælger nu $A_1 \subseteq M_1$, $A_1 \in \mathcal{P}$, således at $|\mu(A_1)| \geq |\mu(M_1)| + 1$, og vi får da $|\mu(M \setminus A_1)| \geq 1$, så vi får en opspaltning

$$M = B_1 \cup B_2 \cup M_2, B_1 \cap B_2 = \emptyset; (B_1 \cup B_2) \cap M_2 = \emptyset; B_1, B_2, M_2 \in \mathcal{P}$$

$$|\mu(B_1)| \geq 1, |\mu(B_2)| \geq 1, \mu \text{ ubegrænset på } M_2.$$

Fortsættelse af processen giver en følge af disjunkte mængder $B_1, B_2, \dots$, som alle tilhører $\mathcal{P}$, og som alle har $|\mu(B_j)| \geq 1$. Dette strider mod ligningen

$$\mu(\cup B_j) = \sum \mu(B_j),$$

som kræver, at rækken på højre side er konvergent (endda absolut).

Det er klart, at summen af to endelige mål på M er et endeligt mål på M . Det er ligeledes klart, at et komplekst tal gange et endeligt mål giver et endeligt mål. Ved disse operationer er mængden af endelige mål på M organiseret som et vektorrum på M . Der er her tale om et vektorrum over de komplekse tal. Mængden af reelle, endelige mål på M er selvfølgelig et vektorrum over de reelle tal.

Mere specielt kan vi tale om positive, endelige mål på M . Det er klart, at et positivt tal gange et positivt endeligt mål giver et positivt mål. Det er også klart, at summen af to positive, endelige mål giver et positivt endeligt mål. Mængden af positive endelige mål er derfor en kegle i vektorrummet af reelle, endelige mål - den positive kegle.

Hvis μ_1 og μ_2 er reelle endelige mål på M , vil vi sige, at $\mu_1 \leq \mu_2$, hvis $\mu_2 - \mu_1$ er et positivt mål. Dette er en ordensrelation på vektorrummet af reelle, endelige mål på M . Den er invariant, og vektorrummet er derfor et ordnet vektorrum.

Sætning 2. Lad μ være et reelt, endeligt mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$ på en mængde M . For ethvert $A \subseteq M$ med $A \in \mathcal{F}$ sætter vi

$$\mu_0^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subseteq A \wedge B \in \mathcal{P}\}.$$

Da er μ_0^+ og $\mu_0^- = \mu_0^+ - \mu$ positive mål på $\mathcal{P}$. Målet μ kan skrives på formen $\mu = \mu^+ - \mu^-$, hvor μ^+ og μ^- er positive mål på $\mathcal{P}$, og for enhver sådan fremstilling gælder $\mu^+ \geq \mu_0^+$ og $\mu^- \geq \mu_0^-$.

Bevis: Af sætning 1 følger, at $\mu_0^+(A)$ har en endelig værdi for ethvert $A \in \mathcal{F}$. Lad os nu antage, at vi har en fremstilling

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{P},$$

hvor mængderne A_n er disjunkte. Vi har da for $B \in \mathcal{P}$, $B \subseteq A$, at

$$\mu(B) = \Sigma \mu(A_n \cap B) \leq \Sigma \mu_0^+(A_n).$$

På den anden side kan vi vælge $B_n \in \mathcal{P}$, $B_n \subseteq A_n$, således at

$$\mu(B_n) \geq \mu_0^+(A_n) - 2^{-n} \varepsilon, \text{ og vi får da}$$

$$\mu(\bigcup_n B_n) = \Sigma \mu(B_n) \geq \Sigma \mu_0^+(A_n) - \varepsilon,$$

og heraf følger nu, at

$$\mu_0^+(A) = \Sigma \mu_0^+(A_n),$$

så μ_0^+ er et positivt endeligt mål. Så er $\mu_0^+ - \mu = \mu_0^-$ også et positivt, endeligt mål, og vi har fremstillingen

$$\mu = \mu_0^+ - \mu_0^-.$$

Af

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

hvor μ^+ og μ^- er positive mål, følger generelt for $B \subseteq A$, $B, A \in \mathcal{P}$ at

$$\mu^+(A) \geq \mu^+(B) \geq \mu(B),$$

så vi har $\mu^+ \geq \mu_0^+$. Dermed er hele sætningen bevist.

Definition 3. Lad $\mathcal{P}$ være et σ -legeme på en mængde M . En afbildning $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ kaldes $\mathcal{P}$ -målelig, såfremt

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}^* : \{x | f(x) < a\} \in \mathcal{P} \wedge \{x | f(x) \leq a\} \in \mathcal{P} \wedge \\ \wedge \{x | f(x) > a\} \in \mathcal{P} \wedge \{x | f(x) \geq a\} \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Sætning 3. Funktionen i definition 3 er $\mathcal{P}$ -målelig, hvis blot en af de fire betingelser er opfyldt for alle rationale værdier af a .

Bevis: Lad os antage, at den første betingelse er opfyldt for rationale værdier af a . Da vi har

$$\{x|f(x) < a\} = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r < a}} \{x|f(x) < r\}$$

$$\{x|f(x) \leq a\} = \bigcap_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r > a}} \{x|f(x) < r\}$$

vil de to første betingelser være opfyldt. De andre to fås ved overgang til komplementærmængder.

Sætning 4. Lad f være $\mathcal{P}$ -målelig. For $a, b \in \mathbb{R}^*$ gælder

$$\{x|a \underset{(\leq)}{<} f(x) \underset{(\leq)}{<} b\} \in \mathcal{P}$$

Bevis. Klart.

Lemma 1. Lad f og g være $\mathcal{P}$ -målelige. Da gælder

$$\{x|f(x) \underset{(\leq)}{<} g(x)\} \in \mathcal{P}$$

Bevis. Vi har

$$\{x|f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x|f(x) < r\} \cap \{x|g(x) > r\})$$

og

$$\{x|f(x) \leq g(x)\} = M \setminus \{x|g(x) < f(x)\},$$

hvoraf sætningen umiddelbart følger.

Sætning 5. Lad f være $\mathcal{P}$ -målelig og lad k være et reelt tal. Vi sætter $0 \cdot \infty = c$, hvor $c \in \mathbb{R}^*$ er fast valgt. Med denne definition er kf $\mathcal{P}$ -målelig. $f+k$ er $\mathcal{P}$ -målelig.

Beviset er trivielt.

Sætning 6. Lad f og g være $\mathcal{P}$ -målelige. Vi sætter $\infty - \infty = c$, hvor $c \in \mathbb{R}^*$ er fast valgt. Da er $g - f$ $\mathcal{P}$ -målelig.

Bevis. Vi har

$$\{x | g(x) - f(x) > a\} = \{x | g(x) > f(x) + a\} \cup \{x | f(x) = g(x) = \pm\infty\}$$

hvor det sidste led kun medtages for $a < c$.

Sætning 7. Lad f være $\mathcal{P}$ -målelig. Da er f^2 $\mathcal{P}$ -målelig.

Bevis: For $a < 0$ er $\{x | (f(x))^2 > a\} = M$. For $a \geq 0$ er $\{x | (f(x))^2 > a\} = \{x | f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x | f(x) < -\sqrt{a}\}$.

Definition 4. Lad $\{f_j | j \in J\}$ være en familie af reelle funktioner på M . Lad f_1 og f_2 være reelle funktioner på M . Værdi $\pm \infty$ tilladt. Vi definerer funktioner $\bigvee_{j \in J} f_j$, $f_1 \vee f_2$, $\bigwedge_{j \in J} f_j$ og $f_1 \wedge f_2$ ved
$$\bigvee_{j \in J} f_j(x) = \sup\{f_j(x) | j \in J\}, \quad (f_1 \vee f_2)(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x)\},$$
 og de to sidste analogt med $\inf$ i stedet for $\sup$.

Sætning 8. Lad $\{f_j | j \in J\}$ være en højst numerabel familie af $\mathcal{P}$ -målelige funktioner. Da er $\bigvee_{j \in J} f_j$ og $\bigwedge_{j \in J} f_j$ ligeledes $\mathcal{P}$ -målelige.

Bevis:

$$\{x | \bigvee_{j \in J} f_j(x) > a\} = \bigcup_{j \in J} \{x | f_j(x) > a\}.$$

$$\{x | \bigwedge_{j \in J} f_j(x) \geq a\} = \bigcap_{j \in J} \{x | f_j(x) \geq a\}.$$

Heraf følger påstanden umiddelbart.

Hvis (f_j) er en følge af reelle funktioner, kan vi på na-

turlig måde indføre $\limsup f_j$ og $\liminf f_j$ definerede ved

$$(\limsup f_j)(x) = \limsup(f_j(x)),$$

$$(\liminf f_j)(x) = \liminf(f_j(x)).$$

Vi har da

$$\limsup f_j = \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \bigvee_{k \geq j} f_k, \quad \liminf f_j = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq j} f_k.$$

Altså har vi følgende sætning:

Sætning 9. Lad (f_j) være en følge af ^{reelle} $\mathcal{P}$ -målelige funktioner. Da er $\limsup f_j$ og $\liminf f_j$ ligeledes $\mathcal{P}$ -målelige.

Definition 5. Lad M være en mængde, og lad $\mathcal{P}$ være et σ -legeme på M . Med $E_{\mathcal{P}}$ vil vi betegne mængden af $\mathcal{P}$ -målelige funktioner, hvis værdimængde er en endelig delmængde af $\mathbb{R}$. Hvis $f \in E_{\mathcal{P}}$ har værdimængden $\{b_1, \dots, b_q\}$, mens μ er et mål på $\mathcal{P}$, kaldes udtrykket

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^q b_k \mu(f^{-1}(b_k))$$

for μ -integralet af f .

Hvis vi har en fremstilling

$$M = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

af M som foreningsmængde af disjunkte mængder, der tilhører σ -legemet $\mathcal{P}$, mens $c_1, \dots, c_n$ er vilkårlige reelle tal, da vil den ved

$$f(x) = c_\nu \text{ for } x \in A_\nu, \nu = 1, \dots, n$$

definerede funktion tilhøre $E_{\mathcal{P}}$, og vi har

$$\int f d\mu = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \mu(A_\nu)$$

Hvis $c_1, \dots, c_n$ er indbyrdes forskellige, er dette blot en anden

formulering af definition 5. Hvis nogle af tallene c_j er ens, følger det umiddelbart af målets additivitet, at det nye udtryk for integralet er identisk med det gamle.

Sætning 10. For $k \in \mathbb{R}$; $f, f_1, f_2 \in E_{\mathcal{P}}$ gælder

$$kf \in E_{\mathcal{P}}, \quad f_1 + f_2 \in E_{\mathcal{P}}, \quad f_1 f_2 \in E_{\mathcal{P}}, \quad f_1 \vee f_2 \in E_{\mathcal{P}}, \quad f_1 \wedge f_2 \in E_{\mathcal{P}}$$

$$\int k f d\mu = k \int f d\mu, \quad \int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Hvis μ, μ_1, μ_2 er mål på M , gælder endvidere

$$\int f d k \mu = k \int f d\mu, \quad \int f d(\mu_1 + \mu_2) = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Bevis: Næsten helt indlysende.

Sætning 11. Lad μ være et positivt mål på $\mathcal{P}$. Den ved

$$\tilde{\mu}(f) = \int f d\mu$$

definerede afbildning

$$\tilde{\mu}: E_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$$

er da monotont voksende.

Bevis: Næsten helt indlysende.

Vi vil nu indføre et generelt til $\mathcal{P}$ -målet svarende integral. Metoden er en kopi af den fra Riemann-målet kendte. Det vil vise sig, at alle $\mathcal{P}$ -målelige funktioner bliver integrable. Takket være, at målet er fuldstændigt additivt, bliver sammenhængen mellem mål og integral smukkere end for Riemann-integralet. Sædvanligvis vil også visse ikke $\mathcal{P}$ -målelige funktioner blive integrable således, og derved fører integralet til en vis udvidelse af målet μ . Det vil vise sig, at den fremkomne udvidelse

se er et engangs-fænomen, idet et integral indført på basis af det udvidede mål ikke giver anledning til yderligere udvidelse af målet. Dette giver anledning til indførelse af betegnelsen fuldstændigt mål for et mål, der ikke udvides ved overgang til det tilsvarende integralbegreb.

Definition 6. Lad $\mathcal{P}$ være et σ -legeme på en mængde M . Lad μ være et positivt, endeligt mål på M . Lad $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ være en begrænset funktion. Størrelserne

$$\underline{\int} f d\mu = \sup \{ \int \varphi d\mu \mid \varphi \in E_{\mathcal{P}} \wedge \varphi \leq f \}$$

$$\overline{\int} f d\mu = \inf \{ \int \varphi d\mu \mid \varphi \in E_{\mathcal{P}} \wedge \varphi \geq f \}$$

kaldes det nedre og øvre μ -integral af f . Hvis $\underline{\int} f d\mu = \overline{\int} f d\mu$ kaldes den fælles værdi μ -integralet af f og betegnes $\int f d\mu$, og funktionen f siges at være μ -integrabel.

Definitionen af μ -integralet og af μ -integrabilitet vil blive udvidet til også at omfatte visse ikke begrænsede funktioner.

Sætning 12. $\underline{\int} f d\mu \leq \overline{\int} f d\mu$.

Bevis: Det følger umiddelbart af sætning 11.

Sætning 13. For $k \geq 0$ gælder

$$\underline{\int} k f d\mu = k \underline{\int} f d\mu, \overline{\int} k f d\mu = k \overline{\int} f d\mu, \underline{\int} -k f d\mu = -k \overline{\int} f d\mu, \overline{\int} -k f d\mu = -k \underline{\int} f d\mu.$$

Hvis f er μ -integrabel, er kf ligeledes μ -integrabel, og

$$\int k f d\mu = k \int f d\mu$$

Beviset er umiddelbart.

Sætning 14. For vilkårlige begrænsede funktioner f_1 og f_2 gælder

$$\int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu \leq \int (f_1 + f_2) d\mu \leq \left\{ \begin{array}{l} \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu \\ \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu \end{array} \right\} \leq \int (f_1 + f_2) d\mu \leq \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$$

Hvis f_2 er μ -integrabel, fås specielt

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu; \quad \int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Hvis f_1 og f_2 begge er μ -integrable, er $f_1 + f_2$ ligeledes μ -integrabel, og

$$\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu.$$

Bevis: Vi har for $\varphi_1 \leq f_1$, $\varphi_2 \leq f_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}$, at

$$\int \varphi_1 d\mu + \int \varphi_2 d\mu \leq \int (\varphi_1 + \varphi_2) d\mu \leq \int (f_1 + f_2) d\mu,$$

altså

$$\sup\{\int \varphi_1 d\mu\} + \sup\{\int \varphi_2 d\mu\} \leq \int (f_1 + f_2) d\mu,$$

hvilket medfører, at

$$\int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu \leq \int (f_1 + f_2) d\mu.$$

Heraf følger igen

$$\int (f_1 + f_2) d\mu - \int f_2 d\mu = \int (f_1 + f_2) d\mu + \int (-f_2) d\mu \leq \int f_1 d\mu.$$

De øvrige uligheder vises analogt. De sidste dele af sætningen følger umiddelbart.

Mængden af μ -integrable, begrænsede funktioner udgør således et vektorrum I_μ over de reelle tal.

Sætning 15. Enhver begrænset $\mathcal{P}$ -målelig funktion f ; M ind i $\mathbb{R}$ er μ -målelig-integrabel.

Bevis: Vi vælger $a, b \in \mathbb{R}$, således at $f(\mathcal{P}) \subseteq [a, b]$. Lad nu ε være

et positivt tal. Vi vælger en inddeling

$$a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b,$$

således at

$$|y_k - y_{k-1}| \leq \frac{\varepsilon}{\mu(M)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Idet vi sætter

$$A_k = \{x \in M \mid y_{k-1} \leq f(x) < y_k\},$$

får vi en inddeling

$$M = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

af M i disjunkte delmængder. Vi definerer $\varphi_1, \varphi_2 \in E_\mu$ ved

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_{k-1} \\ \varphi_2(x) &= y_k \end{aligned} \right\} \text{ for } x \in A_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Vi har da

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x)$$

for ethvert $x \in M$. Altså har vi

$$\int f d\mu - \int f d\mu \leq \int \varphi_2 d\mu - \int \varphi_1 d\mu = \int (\varphi_2 - \varphi_1) d\mu \leq \int \frac{\varepsilon}{\mu(M)} d\mu = \frac{\varepsilon}{\mu(M)} \mu(M) = \varepsilon,$$

hvilket viser, at f er integrabel.

Sætning 16. For en begrænset $\mathcal{P}$ -målelig funktion gælder

$$[\forall x (f(x) \geq 0) \wedge \int f d\mu = 0] \Rightarrow \mu(\{x \in M \mid f(x) > 0\}) = 0.$$

Bevis: Lad os antage betingelserne på venstre side af pilen opfyldt. Vi har nu for ethvert $\varepsilon > 0$, at

$$0 = \int f d\mu \geq \varepsilon \mu(\{x \in M \mid f(x) \geq \varepsilon\}) \geq 0,$$

altså

$$\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{x \in M \mid f(x) \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Nu er

$$\mu(\{x \in M \mid f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M \mid \frac{1}{n} \leq f(x) < \frac{1}{n-1}\}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in M \mid \frac{1}{n} \leq f(x) < \frac{1}{n-1}\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in M \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}) = 0,$$

hvor $\frac{1}{0}$ skal læses som ∞ . Dermed er påstanden bevist. Vi understreger, at den fuldstændige additivitet af målet er væsentlig for beviset. Sætningen gælder da heller ikke for Riemann-integraler.

Sætning 17. Den ved $\tilde{\mu}(f) = \int f d\mu$ definerede afbildning $\tilde{\mu}: I_{\mu}$ ind i $\mathbb{R}$ er monoton.

Bevis: Af $f \leq g$ følger $\int (g-f) d\mu \geq 0$, altså $\int g d\mu \geq \int f d\mu$.

Sætning 18. For en begrænset funktion $f: M$ ind i $\mathbb{R}$ gælder $[\exists E \subseteq M : \mu(E) = 0 \wedge \{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \subseteq E] \Rightarrow \int f d\mu = 0$.

Bevis: Vi vælger a og b , således at $f(M) \subseteq [a, b]$. Så er $0 = \mu(E)a \leq \int f d\mu \leq \mu(E)b = 0$.

Sætning 19. En begrænset funktion $f: M$ ind i $\mathbb{R}$ er μ -integrabel, hvis og kun hvis der eksisterer en mængde $E \subseteq M$ med $\mu(E) = 0$ samt en begrænset $\mathcal{P}$ -målelig funktion $f_1: M$ ind i $\mathbb{R}$, således at $f(x) = f_1(x)$ for ethvert $x \in M \setminus E$. Hvis f er μ -integrabel kan f_1 med den nævnte egenskab endda vælges således at $\forall x \in M : f_1(x) \leq f(x)$ eller således at $\forall x \in M : f_1(x) \geq f(x)$.

Bevis: Vi beviser først "hvis". Vi tænker os f_1 og E valgt således at $\mu(E) = 0$ og $\forall x \in E : f_1(x) = f(x)$. Så er f_1 μ -integrabel ifølge sætning 15. Endvidere er $f - f_1$ μ -integrabel ifølge sætning 18; altså er $f = f_1 + (f - f_1)$ ligeledes μ -integrabel.

Lad os dernæst antage, at f er μ -integrabel. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ vælger vi $\varphi'_n, \varphi''_n \in E_\mu$, således at $\varphi'_n \leq f \leq \varphi''_n$ og $\int \varphi'_n d\mu \geq \int f d\mu - \frac{1}{n}$ og $\int \varphi''_n d\mu \leq \int f d\mu + \frac{1}{n}$.

Vi sætter

$$\varphi' = \bigvee_{n=1}^{\infty} \varphi'_n \text{ og } \varphi'' = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \varphi''_n,$$

og vi har da

$$(1) \quad \varphi' \leq f \leq \varphi''.$$

Af sætning 8 følger, at φ' og φ'' er $\mathcal{P}$ -målelige. Af $\varphi' \geq \varphi'_n$, $\varphi'' \leq \varphi''_n$ følger nu

$$\int \varphi' d\mu \geq \int f d\mu - \frac{1}{n}, \quad \int \varphi'' d\mu \leq \int f d\mu + \frac{1}{n} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ved udnyttelse af (1) og monotoniteten sluttes heraf

$$\int \varphi' d\mu = \int f d\mu = \int \varphi'' d\mu,$$

altså

$$\int (\varphi'' - \varphi') d\mu = 0, \quad \varphi'' - \varphi' \geq 0.$$

Af sætning 16 følger nu, at $E = \{x \in M \mid \varphi'(x) < \varphi''(x)\}$ tilfredsstiller $\mu(E) = 0$. For $x \notin E$ gælder $\varphi'(x) = f(x) = \varphi''(x)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 20. Lad $\{E_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ være mængder, der tilhører $\mathcal{P}$. Da gælder

$$[\forall k : \mu(E_k) = 0] \Rightarrow \mu(\bigcup E_k) = 0.$$

Bevis: Mængden $E'_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$ tilhører $\mathcal{P}$, og da $E'_k \subseteq E_k$, gælder $\mu(E'_k) = 0$. Da mængderne E'_k er disjunkte, får vi

$$\mu(\bigcup E_k) = \mu(\bigcup E'_k) = \sum \mu(E'_k) = 0.$$

Dermed er sætningen vist.

Sætning 21. Lad $E \in \mathcal{P}$ være en mængde med $\mu(E) = 0$. Lad (f_j) være en følge af $\mathcal{P}$ -målelige afbildninger $f_j: M \rightarrow [0, a]$, hvor a er et fast tal. Da gælder

$$[\forall x \in M \setminus E : (f_j(x)) \rightarrow 0] \Rightarrow (\int f_j d\mu) \rightarrow 0.$$

Bevis: Vi antager, at $(f_j(x)) \rightarrow 0$ for ethvert $x \in M \setminus E$. Lad ε være et positivt tal. Vi sætter

$$A_k = \{x | \exists j \geq k : f_j(x) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(M)}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vi har da

$$A_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} \{x | f_j(x) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(M)}\},$$

hvilket viser, at $A_k \in \mathcal{P}$. For $x \in M \setminus E$ gælder $(f_j(x)) \rightarrow 0$, hvilket viser, at der eksisterer et k , således at $x \notin A_k$. Endelig er

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

Da vi har $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq E$, er $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Af

$$A_1 = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j+1}) \right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right),$$

er

$$\mu(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j+1}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu(A_j) - \mu(A_{j+1})) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k))$$

så vi har $(\mu(A_k)) \rightarrow 0$. Vi vælger $N \in \mathbb{N}$, således at

$$\mu(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2a} \quad \text{for } k \geq N.$$

For $k \geq N$ får vi da

$$\int f_k d\mu \leq \mu(M \setminus (A_k \cup E)) \cdot \frac{\varepsilon}{2\mu(M)} + \mu(A_k \setminus E) \cdot a + \mu(E) \cdot a \leq \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

Af sætning 19 og 20 følger umiddelbart, at vektorrummet I_μ er afsluttet over for operationerne $\wedge$ og $\vee$ anvendt på højst numerable, ensartet begrænsede funktionsmængder. Derfor er I_μ ligeledes afsluttet over for grænseovergang med ensartet begræn-

sede funktionsfølger. Da vi har $|f| = f \vee (-f)$, vil $|f|$ være μ -integrabel, hvis f er det. Endvidere er f^2 μ -integrabel, hvis f er det. Heraf følger, at I_μ er afsluttet over for multiplikation. Af sætning 17 får vi umiddelbart vurderingsreglen

$$|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu.$$

Sætning 22. Lad (f_j) være en følge af μ -integrable afbildninger $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ i $[a, b]$, hvor a og b er faste tal. Hvis (f_j) konvergerer punktvis mod en grænsefunktion f , har vi

$$(\int f_j d\mu) \rightarrow \int f d\mu.$$

Bevis: Ifølge bemærkningen forud for sætning 22 i forbindelse med sætning 19 kan vi for hvert $j \in \mathbb{N}$ vælge en mængde $E_j \in \mathcal{P}$ med $\mu(E_j) = 0$ samt en $\mathcal{P}$ -målelig, begrænset funktion $g_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}$, således at $\forall x \in M \setminus E_j : g_j(x) = |f_j(x) - f(x)|$. For ethvert $x \notin \bigcup E_j = E$ har vi da $(g_j(x)) = (|f_j(x) - f(x)|) \rightarrow 0$, og da $\mu(E) = 0$ ifølge sætning 20, giver sætning 21, at $(\int g_j d\mu) \rightarrow 0$, altså at

$$(\int |f_j - f| d\mu) \rightarrow 0.$$

Dette medfører umiddelbart, at

$$(\int (f_j - f) d\mu) \rightarrow 0,$$

og resten kommer umiddelbart af lineariteten.

Definition 7. Lad M være en mængde, $\mathcal{P}$ et σ -legeme på M og μ et positivt mål på $\mathcal{P}$. Med $\mathcal{P}^*$ betegner vi mængden af delmængder $A \subseteq M$, hvis karakteristiske funktion χ_A er μ -integrabel. Disse mængder kaldes $\mathcal{P}^*$ -målelige, og for enhver sådan mængde sætter vi $\mu^*(A) = \int \chi_A d\mu$.

For $A \in \mathcal{P}$ ser vi umiddelbart, at $A \in \mathcal{P}^*$, og at $\mu^*(A) = \mu(A)$. Vi ser således, at målet μ er restriktionen til $\mathcal{P}$ af den på $\mathcal{P}^*$ definerede mængdefunktion μ^* .

Sætning 23. Mængden $\mathcal{P}^*$ er et σ -legeme.

Lad (A_j) være en følge af mængder, som tilhører $\mathcal{P}^*$. Af relationen

$$\chi_{\bigcup A_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{A_1} \vee \dots \vee \chi_{A_n})$$

følger umiddelbart, at $\chi_{\bigcup A_j}$ er integrabel, altså at $\bigcup A_j \in \mathcal{P}^*$.

For $A \in \mathcal{P}^*$ har vi endvidere $\chi_{M \setminus A} = \chi_M - \chi_A$, hvilket viser, at $\chi_{M \setminus A}$ er integrabel, altså $M \setminus A \in \mathcal{P}^*$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 24. Mængdefunktionen μ^* er et positivt mål.

Bevis: Vi skal blot vise, at μ^* er fuldstændig additiv. Lad (A_j) være en følge af disjunkte mængder, som tilhører $\mathcal{P}^*$. Vi har da

$$\begin{aligned} \mu^*(\bigcup A_j) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \chi_{A_1} d\mu + \dots + \int \chi_{A_n} d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^*(A_1) + \dots + \mu^*(A_n)) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \end{aligned}$$

Sætning 25. For en mængde $A \subseteq M$ gælder $A \in \mathcal{P}^*$ og $\mu^*(A) = 0$, hvis og kun hvis der eksisterer en mængde $B \in \mathcal{P}$, for hvilken $A \subseteq B$ og $\mu(B) = 0$.

Bevis: Lad os først antage, at $B \in \mathcal{P}$, $\mu(B) = 0$ og $A \subseteq B$. Da gælder

$$\int \chi_A d\mu \leq \int \chi_B d\mu = 0,$$

altså $\mu^*(A) = 0$.

Lad os dernæst antage, at $A \in \mathcal{P}^*$ og $\mu^*(A) = 0$. Vi har da $\int \chi_A d\mu = 0$. Ifølge sætning 19 eksisterer der da en $\mathcal{P}$ -målelig funktion f , som tilfredsstiller betingelserne

$$\forall x : f(x) \geq \chi_A(x) \text{ og } \int f d\mu = \int \chi_A d\mu = 0.$$

Vi sætter $B = \{x | f(x) > 0\}$, og vi har da $B \supseteq A$ og $B \in \mathcal{P}$. Af sætning 16 følger nu, at $\mu(B) = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Målet μ^* giver anledning til begreberne $\mathcal{P}^*$ -målelighed og μ^* -integrabilitet, som allerede er definerede. Det er nu interessant at sammenholde disse begreber med $\mathcal{P}$ -målelighed og μ -integrabilitet.

Sætning 26. En begrænset afbildning $f: M \text{ ind i } \mathbb{R}$ er μ^* -integrabel, hvis og kun hvis den er μ -integrabel.

Bevis: Lad os først antage, at f er μ -integrabel. Der eksisterer da en mængde $E \in \mathcal{P}$ med $\mu(E) = 0$, samt en $\mathcal{P}$ -målelig funktion g , således at $\forall x \in M \setminus E : f(x) = g(x)$. Nu gælder $E \in \mathcal{P}^*$ og $\mu^*(E) = 0$, og desuden er g åbenbart $\mathcal{P}^*$ -målelig. Altså er f også μ^* -integrabel. Lad os nu antage, at f er μ^* -integrabel, og lad ε være et positivt tal. Der findes da funktioner $g_1, g_2 \in \mathbb{E}_{\mathcal{P}^*}$, således at

$$g_1 \leq f \leq g_2 \text{ og } \int (g_2 - g_1) d\mu^* \leq \varepsilon.$$

Nu er en funktion i $\mathbb{E}_{\mathcal{P}^*}$ linearkombinationer af karakteristiske funktioner for mængder i $\mathcal{P}^*$ og som følge deraf μ -integrabel. Altså er

$$\int g_1 d\mu^* = \int g_1 d\mu \leq \int f d\mu \leq \int f d\mu \leq \int g_2 d\mu = \int g_2 d\mu^*,$$

hvilket viser, at

$$\int f d\mu - \int f d\mu \leq \varepsilon.$$

Altså er f en μ -integrabel funktion.

Sætning 27. En begrænset funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ er μ^* -integrabel, hvis og kun hvis den er μ^* -målelig.

Bevis: Vi har tidligere vist "hvis" for vilkårlige mål. Lad os antage, at f er μ^* -integrabel, og lad a være et reelt tal. Da

$$\chi_{\{x|f(x) > a\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((n(f-a) \wedge 1) \vee 0)$$

er $\chi_{\{x|f(x) > a\}}$ en μ^* -integrabel funktion, altså μ -integrabel. Altså gælder $\{x|f(x) > a\} \in \mathcal{P}^*$.

Af sætning 27 fremgår, at den proces, der førte os fra målet μ til målet μ^* , anvendt på målet μ^* ikke fører til yderligere udvidelse af systemet af målelige mængder. Målet μ^* kaldes derfor fuldstændigt. Et fuldstændigt mål er netop karakteriseret ved, at sætning 27 gælder. Men også den egenskab, at enhver delmængde af en mængde med målet nul selv er en mængde med målet 0, karakteriserer et fuldstændigt mål.

Det er nu vigtigt for os, at et positivt mål på et σ -legeme frembringes af en mængdefunktion, hvis definitions-mængde er langt mindre omfattende end et σ -legeme. Vi foretrækker imidlertid i stedet at undersøge, hvorledes et Lebesgue-Stieltjes integral frembringes af en funktional, der kun er defineret på en delmængde af de integrable funktioner.

Definition 8. En mængde S af afbildninger $f: M \text{ ind i } \mathbb{R}^*$ (den udvidede reelle akse) kaldes et funktionsgitter, hvis S er afsluttet over for operationerne $\wedge$ og $\vee$ anvendt på endeligt mange funktioner. Mængden S kaldes et σ -gitter, hvis den er afsluttet over for operationerne $\wedge$ og $\vee$ anvendt på følger af funktioner.

Vi vil i det følgende afsnit svarende til et funktionsgitter S betragte en mængde $\bar{S}$ bestående af mængden af overfunktioner til S , dvs. de funktioner, der er grænseværdi for voksende følger af funktioner fra S . Analogt indfører vi mængden $\underline{S}$ af underfunktioner til S .

Definition 9. Ved en valuation på et funktionsgitter S forstår vi en afbildning $I: S \text{ ind i } \mathbb{R}$, som opfylder betingelserne:

- 1) I er voksende
- 2) Hvis (g_n) er en voksende og (f_n) en aftagende følge fra S og $\lim(g_n) \geq \lim(f_n)$ gælder $\lim(I(g_n)) \geq \lim(I(f_n))$.
- 3) For $f, g \in S$ gælder

$$I(f \vee g) + I(f \wedge g) = I(f) + I(g)$$

Betingelsen 3) er inspireret af den trivielle relation

$$(f \vee g) + (f \wedge g) = f + g.$$

Betingelsen 2) implicerer en vis form for kontinuitet af afbildningen I , idet vi får:

Sætning 28. Hvis (f_n) er en voksende (aftagende) følge på S og $(f_n) \rightarrow f \in S$, gælder $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$

Bevis: Lad (f_n) være voksende. Af (1) følger $I(f_n) \leq I(f)$ for alle n , altså $\lim(I(f_n)) \leq I(f)$. Da (f) er aftagende og $\lim(f_n) \geq \lim(f)$, giver (2), at $\lim(I(f_n)) \geq \lim(I(f)) = I(f)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 29. Hvis 2 voksende følger (f_n) og (g_n) på S konvergerer mod grænsefunktioner $f, g \in \bar{S}$ og $f \leq g$, gælder $\lim(I(f_n)) \leq \lim(I(g_n))$. Analogt gælder for aftagende følger.

Bevis: Lad p være et fast, naturligt tal. Vi har åbenbart

$$(f_p \wedge g_n) \rightarrow f_p \text{ for } n \rightarrow \infty,$$

altså

$$\lim(I(g_n)) \geq \lim(I(f_p \wedge g_n)) = I(f_p),$$

og da dette gælder for ethvert $p \in \mathbb{N}$, følger påstanden umiddelbart.

Definition 10. For $f \in \bar{S}$ sættes $\bar{I}(f) = \lim(I(f_n))$, hvor (f_n) er en voksende følge på S og $(f_n) \rightarrow f$. Analogt indføres $\underline{I}(f)$ for $f \in \underline{S}$.

Definitionen har mening, da $\lim(I(f_n))$ ifølge sætning 29 får samme værdi for alle voksende følger på S , som går mod f .

Sætning 30. Afbildningerne $\bar{I}: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}^*$ og $\underline{I}: \underline{S} \rightarrow \mathbb{R}^*$ er voksende. Endvidere gælder $S \subseteq \underline{S} \cap \bar{S}$ og restriktionerne af $\underline{I}$ og $\bar{I}$ til $\underline{S} \cap \bar{S}$ er identiske. For $f \in \underline{S}$, $g \in \bar{S}$ gælder, at $f \leq g$ medfører $\underline{I}f \leq \bar{I}g$, og at $f \geq g$ medfører $\underline{I}f \geq \bar{I}g$.

Bevis: At $\bar{I}$ og $\underline{I}$ er voksende følger umiddelbart af sætning 29.

En funktion $f \in S$ er grænsefunktion for følgen (f) , som er både voksende og aftagende. For $f \in \underline{S}$ og $g \in \bar{S}$ har vi en aftagende følge (f_n) og en voksende følge (g_n) fra S , således at $(f_n) \rightarrow f$ og $(g_n) \rightarrow g$. Af $f \geq g$ følger da, at $f_n \geq g_n$ for ethvert n , altså $\underline{I}(f_n) \geq \underline{I}(g_n)$ for ethvert n . For $n \rightarrow \infty$ fås $\underline{I}(f) \geq \underline{I}(g)$. Er derimod $f \leq g$, har vi $\lim(f_n) \leq \lim(g_n)$ og betingelsen 2) i definition 9 giver $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(g)$. For $g = f \in \underline{S} \cap \bar{S}$ følger altså specielt $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 31. Mængderne $\underline{S}$ og $\bar{S}$ er funktionsgitre. Afbildningerne $\underline{I}$ og $\bar{I}$ tilfredsstiller betingelsen 3) fra definition 9.

Bevis: For $f, g \in \bar{S}$ har vi voksende følger $(f_n) \rightarrow f$ og $(g_n) \rightarrow g$ på mængden S . Vi har nu $(f_n \vee g_n) \rightarrow (f \vee g)$ og $(f_n \wedge g_n) \rightarrow (f \wedge g)$. Altså er $\bar{S}$ et funktionsgitter. Endvidere får vi

$$\begin{aligned} \bar{I}(f \vee g) + \bar{I}(f \wedge g) &= \lim(\underline{I}(f_n \vee g_n) + \underline{I}(f_n \wedge g_n)) = \lim(\underline{I}(f_n) + \underline{I}(g_n)) = \\ &= \underline{I}(f) + \underline{I}(g). \end{aligned}$$

Analogt for $\underline{S}$.

Sætning 32. Lad $(f_n) \rightarrow f$ være en voksende følge på $\bar{S}$. Da gælder $f \in \bar{S}$ og $(\bar{I}(f_n)) \rightarrow \bar{I}(f)$.

Bevis: For ethvert $n \in \mathbb{N}$ vælger vi en voksende følge $(f_{nk}) \rightarrow f_n$ på S . Vi sætter $g_n = (f_{1n} \vee \dots \vee f_{nn})$. Så er (g_n) en voksende følge på S . For $k = 1, \dots, n$ har vi $f_{kn} \leq f_k \leq f_n$, altså $g_n \leq f_n \leq f$.

Dermed har vi vist, at $\lim(g_n) \leq f$. På den anden side har vi for $k \geq n$, at $g_k \geq f_{nk}$, altså $\lim(g_k) \geq \lim(f_{nk}) = f_n$, og da dette gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$, får vi $\lim(g_k) \geq \lim(f_n) = f$. Dermed har vi vist, at $\lim(g_n) = f$. Altså gælder $f \in \bar{S}$. Vi så, at $g_n \leq f_n$. Altså gælder $\bar{I}(f) = \lim(I(g_n)) \leq \lim(\bar{I}(f_n))$. Dette viser, at $\bar{I}(f) \leq \lim(\bar{I}(f_n))$. På den anden side er $\bar{I}$ voksende, altså $\bar{I}(f_n) \leq \bar{I}(f)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed har vi vist, at $(\bar{I}(f_n)) \rightarrow \bar{I}(f)$.

Sætning 33. De delmængder af $\underline{S}$ og $\bar{S}$, som omfatter funktioner $g \in \bar{S}$ med $\bar{I}(g) < \infty$ og funktioner $f \in \underline{S}$ med $\underline{I}(f) > -\infty$, er funktionsgitre.

Bevis: Vi betragter $g_1, g_2 \in \bar{S}$. Vi har så voksende følger (g_n') og (g_n'') på S , således at $(g_n') \rightarrow g_1$ og $(g_n'') \rightarrow g_2$. Så gælder $(g_n' \vee g_n'') \rightarrow (g_1 \vee g_2)$. Nu er

$$I(g_n' \vee g_n'') + I(g_n' \wedge g_n'') = I(g_n') + I(g_n''),$$

og da $(g_n' \wedge g_n'') \leq (g_n' \wedge g_n'')$, følger heraf

$$I(g_n' \vee g_n'') \leq I(g_n') + I(g_n'') - I(g_n' \wedge g_n''),$$

så $n \rightarrow \infty$ giver vurderingen

$$\bar{I}(g_1 \vee g_2) \leq \bar{I}(g_1) + \bar{I}(g_2) - I(g_1 \wedge g_2).$$

Heraf fremgår, at $\bar{I}(g_1) < \infty$, $\bar{I}(g_2) < \infty$ medfører $\bar{I}(g_1 \vee g_2) < \infty$, og dermed er påstanden vist for $\bar{S}$. Beviset går analogt for $\underline{S}$.

Sætning 34. Vi betragter funktioner $f_1, f_2 \in \underline{S}$, $g_1, g_2 \in \bar{S}$, som tilfredsstiller $f_1 \leq g_1$, $f_2 \leq g_2$. Vi har da vurderingen

$$\bar{I}(g_1 \vee g_2) - \underline{I}(f_1 \vee f_2) \leq (\bar{I}(g_1) - \underline{I}(f_1)) + (\bar{I}(g_2) - \underline{I}(f_2))$$

$$\bar{I}(g_1 \wedge g_2) - \underline{I}(f_1 \wedge f_2) \leq (\bar{I}(g_1) - \underline{I}(f_1)) + (\bar{I}(g_2) - \underline{I}(f_2)).$$

Sætning 36. Mængden H af funktioner $f \in \mathcal{G}$, som er Daniell-integrable med hensyn til I udgør et funktionsgitter. Afbildningen $I: H \rightarrow \mathbb{R}$ er voksende.

Bevis: For $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$ og $\varepsilon > 0$ kan vi vælge $\varphi_1, \varphi_2 \in \underline{S}$ og $\psi_1, \psi_2 \in \overline{S}$, således at

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\leq f_1 \leq \psi_1, & \varphi_2 &\leq f_2 \leq \psi_2 \\ \overline{I}(\psi_1) - \underline{I}(\varphi_1) &\leq \frac{\varepsilon}{2}, & \overline{I}(\psi_2) - \underline{I}(\varphi_2) &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

Af sætning 34 følger nu, at

$$\overline{I}(\psi_1 \vee \psi_2) - \underline{I}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \leq \varepsilon, \quad \overline{I}(\psi_1 \wedge \psi_2) - \underline{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leq \varepsilon,$$

og da

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \leq f_1 \vee f_2 \leq \psi_1 \vee \psi_2, \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \leq f_1 \wedge f_2 \leq \psi_1 \wedge \psi_2$$

medfører dette, at

$$I^*(f_1 \vee f_2) - I_*(f_1 \vee f_2) \leq \varepsilon, \quad I^*(f_1 \wedge f_2) - I_*(f_1 \wedge f_2) \leq \varepsilon.$$

Da dette gælder for ethvert positivt ε , viser disse uligheder, at $f_1 \vee f_2$ og $f_1 \wedge f_2$ er Daniell-integrable med hensyn til I . Dermed er sætningens første påstand bevist. Den anden følger umiddelbart af sætning 35.

Af $I(f) = \infty$, $g \in \mathcal{G}$ kan slutes, at $I(f \vee g) = \infty$. Men $f \wedge g$ behøver ikke at være Daniell-integrabel med hensyn til I , selvom g er det. Analoge resultater gælder, hvis $I(f) = -\infty$.

Sætning 37. Lad $(f_n) \rightarrow f$ være en voksende følge på $\mathcal{G}$. Hvis $I(f_n)$ eksisterer og er $> -\infty$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, da gælder $f \in \mathcal{G}$. Endvidere eksisterer $I(f)$, og $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$. Analogt for aftagende følger.

Bevis: Da $f_n \in \mathcal{G}$ kan vi for hvert f_n vælge $\psi_n \geq f_n$ med $\psi_n \in \bar{S}$. Vi sætter $\psi'_n = \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$, og vi har da $\psi'_n \geq f_n$ og $\psi'_n \in \bar{S}$. Vi sætter $\psi = \lim(\psi_n)$, og vi har da $\psi \in \bar{S}$ ifølge sætning 32, og desuden $\psi \geq f$. Det er trivielt, at der eksisterer en funktion $\phi \in \underline{S}$ med $\phi \leq f$. Dermed har vi vist, at $f \in \mathcal{G}$. Af sætning 35 følger nu, at $I_*(f) \geq I_*(f_n) = I(f_n)$, altså

$$\lim I(f_n) \leq I_*(f).$$

Hvis $\lim I(f_n) = \infty$, viser dette resultat allerede, at $I(f) = \infty$, og sætningen gælder derfor i dette tilfælde. Vi kan derfor i resten af beviset antage, at

$$\lim I(f_n) = c < \infty.$$

I dette tilfælde er hver af funktionerne f_n Daniell-integrable med hensyn til I .

Lad ε være et positivt tal. Den i bevisets begyndelse indførte funktion ψ_n vælges specielt, således at

$$\bar{I}(\psi_n) - I(f_n) \leq 2^{-n}\varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vi vil vise, at vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ har

$$(2) \quad \bar{I}(\psi'_n) - I(f_n) \leq (1 - 2^{-n})\varepsilon.$$

Dette er øjensynlig opfyldt for $n = 1$, idet $\psi'_1 = \psi_1$. Vi viser påstanden ved induktion, idet vi forudsætter, at (2) er opfyldt for et fast n . Vi har nu, idet $\psi'_{n+1} = \psi'_n \vee \psi_{n+1}$, at

$$\bar{I}(\psi'_{n+1}) + \bar{I}(\psi'_n \wedge \psi_{n+1}) = \bar{I}(\psi'_n) + \bar{I}(\psi_{n+1}),$$

altså, idet $f_n \leq \psi'_n \wedge \psi_{n+1}$, at

$$\begin{aligned} \bar{I}(\psi'_{n+1}) - I(f_{n+1}) &= \bar{I}(\psi'_n) - \bar{I}(\psi'_n \wedge \psi_{n+1}) + \bar{I}(\psi_{n+1}) - I(f_{n+1}) \leq \\ &\bar{I}(\psi'_n) - I(f_n) + \bar{I}(\psi_{n+1}) - I(f_{n+1}) \leq (1 - 2^{-n})\varepsilon + 2^{-n-1}\varepsilon = (1 - 2^{-n-1})\varepsilon, \end{aligned}$$

og dermed er induktionsbeviset for (2) ført. Af sætning 32 følger nu, at

$$\bar{I}(\psi) = \lim \bar{I}(\psi'_n) \leq \lim I(f_n) + \lim (1 - 2^{-n})\varepsilon = c + \varepsilon.$$

Heraf får vi nu $I^*(f) \leq c + \varepsilon$. Da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, har vi $I^*(f) \leq c$. Ovenfor fandt vi $I_*(f) \geq c$. Ved sætning 35 fås nu, at f er Daniell-integrabel med hensyn til I , og at $I(f) = c$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 38. Lad $(f_n) \rightarrow f$ være en følge på H . Hvis der findes funktioner $F, G \in H$, således at $\forall n : F \leq f_n \leq G$, da gælder $f \in H$ og $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$.

Bevis: Funktionerne $f_{n,p} = f_n \wedge \dots \wedge f_{n+p}$ og $g_{n,p} = f_n \vee \dots \vee f_{n+p}$ tilhører H ifølge sætning 36. Ifølge sætning 37 vil $f_n^* = \lim_{p \rightarrow \infty} f_{n,p}$

og $g_n^* = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{n,p}$ ligeledes tilhøre H . Ifølge samme sætning vil

$\lim(f_n^*) = \lim \inf(f_n) = f$ tilhøre H , og endvidere gælder

$(I(f_n^*)) \rightarrow I(f)$ og $(I(g_n^*)) \rightarrow I(f)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er imidlertid

$f_n^* \leq f_n \leq g_n^*$, og derfor også $I(f_n^*) \leq I(f_n) \leq I(g_n^*)$. Altså gælder $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 12. Lad S være et funktionsgitter, som tillige er et vektorrum over de reelle tal. En lineær afbildning $I: S \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes en lineær valuation, hvis følgende betingelser er opfyldt:

- 1) I er voksende
- 2) Hvis en aftagende følge (f_n) på S konvergerer mod 0-funktionen, gælder $(I(f_n)) \rightarrow 0$.

Sætning 39. En lineær valuation er en valuation.

Bevis: Da $(f \vee g) + (f \wedge g) = f + g$ gælder 3) i definition 9, fordi I

er lineær. Lad nu (f_n) være en aftagende følge på S og lad (g_n) være en voksende følge på S , og lad os antage, at $\lim(f_n) \leq \lim(g_n)$. Vi har da $\lim(f_n - g_n) \leq 0$ og $(f_n - g_n)$ er aftagende. Altså gælder

$$\begin{aligned} \lim I(f_n) - \lim I(g_n) &= \lim(I(f_n) - I(g_n)) = \lim(I(f_n - g_n)) \leq \\ \lim(I((f_n - g_n)_+)) &= 0, \end{aligned}$$

ifølge 2) i definition 12, idet $((f_n - g_n)_+)_+ \rightarrow 0$ og er aftagende.

Sætning 40. Det til en lineær valuation $I: S$ ind i $\mathbb{R}$ svarende Daniell-integral er en lineær afbildning $I: H$ ind i $\mathbb{R}$.

Bevis: Det er klart, at I og $\bar{I}$ afbilder vektorrummene

$$\{f \in S \mid I(f) > -\infty\} \text{ og } \{f \in S \mid \bar{I}(f) < \infty\}$$

lineært. Dernæst vises for $\alpha > 0$ relationerne

$$\begin{aligned} I_*(\alpha f) &= \alpha I_*(f), \quad I^*(\alpha f) = \alpha I^*(f), \quad I_*(-\alpha f) = -\alpha I^*(f), \\ I^*(-\alpha f) &= -\alpha I_*(f) \end{aligned}$$

på samme måde som Riemann-integralet. Ligeledes kan man på samme måde som for Riemann-integralet bevise relationerne

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq \begin{cases} I_*(f) + I^*(g) \\ I^*(f) + I_*(g) \end{cases} \leq I^*(f+g) \leq \begin{cases} I^*(f) + I^*(g) \\ I^*(f) + I_*(g) \end{cases},$$

hvoraf resten af påstanden følger.

Definition 13. En mængde $A \subseteq M$ kaldes Daniell-målelig med hensyn til en lineær valuation I , hvis den karakteristiske funktion χ_A er Daniell-integrabel med hensyn til I , og ved Daniell-målet af A forstås da størrelsen $\int(A) = I(\chi_A)$.

Sætning 41. Hvis vektorrummet S indeholder de konstante funktioner, er Daniell-målet et positivt mål, og Daniell-integralet er for de begrænsede funktioner netop det til målet $\mathcal{J}$ svarende $\mathcal{J}$ -integral. Målet $\mathcal{J}$ er fuldstændigt.

Bevis. Lad (A_n) være en følge af $\mathcal{J}$ -målelige mængder. For $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ fås $\chi_{B_n} = \chi_{A_1} \vee \dots \vee \chi_{A_n}$, altså B_n er $\mathcal{J}$ -målelig. Da

$0 \leq \chi_{B_n} \leq 1$ giver sætning 38, at $\lim(\chi_{B_n}) = \chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots}$ er integrabel, altså at $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ er $\mathcal{J}$ -målelig.

Lad A være $\mathcal{J}$ -målelig. Af $\chi_{M \setminus A} = 1 - \chi_A$ følger da at $M \setminus A$ er $\mathcal{J}$ -målelig. Dermed har vi vist, at de $\mathcal{J}$ -målelige mængder udgør et σ -legeme. Lad nu (A_n) være en følge af disjunkte $\mathcal{J}$ -målelige mængder. Da er

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) &= I(\chi_{A_1 \cup A_2 \cup \dots}) = \lim(I(\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n})) = \\ \lim(I(\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n})) &= \lim(I(\chi_{A_1}) + \dots + I(\chi_{A_n})) = \\ \lim(\mathcal{J}(A_1) + \dots + \mathcal{J}(A_n)) &= \mathcal{J}(A_1) + \mathcal{J}(A_2) + \dots \end{aligned}$$

Dermed har vi vist, at $\mathcal{J}(A)$ er et mål. Det er klart, at $\mathcal{J}(A)$ er positivt.

Funktionerne i den i Definition 5 indførte klasse $E_{\mathcal{P}}$, hvor $\mathcal{P}$ er σ -legemet af $\mathcal{J}$ -målelige mængder, er åbenbart Daniell-integrable, idet de er linearkombinationer af karakteristiske funktioner for $\mathcal{J}$ -målelige mængder. For funktionerne fra $E_{\mathcal{P}}$ stemmer Daniell-integralet overens med $\mathcal{J}$ -integralet. Lad nu f være en $\mathcal{J}$ -integrabel funktion, og lad ε være et positivt tal. Vi vælger $\varphi, \psi \in E_{\mathcal{P}}$, således at $\varphi \leq f \leq \psi$ og således at $\int \psi d\mathcal{J} - \int \varphi d\mathcal{J} \leq \varepsilon$.

Da $\int \psi d\mathcal{F} = I(\psi)$ og $\int \varphi d\mathcal{F} = I(\varphi)$, følger heraf, at $I^*(f) - I_*(f) \leq \varepsilon$, altså at f er Daniell-integrabel. Samtidig så vi, at både $I(f)$ og $\int f d\mathcal{F}$ ligger mellem $I(\varphi)$ og $I(\psi)$, og da ε var et vilkårligt positivt tal, giver dette, at $I(f) = \int f d\mathcal{F}$. Vi har således vist, at enhver $\mathcal{F}$ -målelig funktion har et Daniell-integral, der stemmer overens med dens $\mathcal{F}$ -integral.

Lad nu f være en Daniell-integrabel funktion, og lad a være et reelt tal. For mængden

$$A = \{x \in M \mid f(x) > a\}$$

har vi

$$\chi_A = \lim_{n \rightarrow \infty} ((n(f-a) \vee 0) \wedge 1),$$

hvoraf følger, at χ_A er $\mathcal{F}$ -integrabel, altså at A er $\mathcal{F}$ -målelig. Vi har dermed vist, at enhver $\mathcal{F}$ -integrabel, begrænset funktion er $\mathcal{F}$ -målelig, altså at $\mathcal{F}$ -målet er fuldstændigt. Hvis f er Daniell-målelig og begrænset, er f også $\mathcal{F}$ -målelig og begrænset, altså $\mathcal{F}$ -integrabel, og det fremgår da af et tidligere afsnit af beviset, at $\int f d\mathcal{F} = I(f)$. Dermed er sætningen bevist.

Vi vender et øjeblik tilbage til studiet af generelle mål. Vi vil altså i det følgende studere en mængde M med et σ -legeme $\mathcal{P}_0$ og et positivt mål μ_0 på $\mathcal{P}_0$. Der eksisterer da netop et fuldstændigt mål μ_0^* på et σ -legeme $\mathcal{P}_0^*$, som er en udvidelse af μ_0 .

¹⁴
Definition 13. Et mål μ på et σ -legeme $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ kaldes absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , hvis

$$\forall A \in \mathcal{P}_0 \quad \forall B \in \mathcal{P} : B \subseteq A \wedge \mu_0(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0.$$

Sætning 42. Hvis μ er et endeligt mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , da er det i sætning 2 omtalte mål μ^+ defineret ved

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subseteq A \wedge B \in \mathcal{P}\}$$

ligeledes absolut kontinuert. Det samme gælder for målet μ^- defineret ved

$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) \mid B \subseteq A \wedge B \in \mathcal{P}\} = \mu^+(A) - \mu(A).$$

Et endeligt mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , kan således fremstilles som differens mellem positive mål, der er absolut kontinuerte med hensyn til μ_0 .

Beviset er helt trivielt.

Mængden af μ_0 -integrable funktioner er et gitter og tillige et vektorrum. Integralet er kun defineret for begrænsede funktioner, men ved overgang til Daniell-integralet får vi en udvidelse til visse ubegrænsede funktioner. En funktion f er åbenbart Daniell-integrabel, hvis og kun hvis $f \vee 0$ og $f \wedge 0$ begge er Daniell-integrable. En positiv funktion f er Daniell-integrabel, hvis og kun hvis den er grænsefunktion for en voksende følge (f_n) af integrable funktioner og $(\int f_n d\mu_0)$ konvergerer. At "hvis" gælder, følger umiddelbart af sætning 37. Hvis f er Daniell-integrabel, er $f_n = f \wedge n$ ligeledes Daniell-integrabel, altså μ_0 -integrabel, og $(\int f_n d\mu_0)$ konvergerer mod $\int f d\mu_0$. Dermed er "kun hvis" bevist.

I det følgende vil vi bruge ordet μ_0 -integrabel som ensbetydende med Daniell-integrabel, således som beskrevet ovenfor.

Om absolut kontinuert integral, se Loomis: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, side 40.

Sætning 43. Lad f være en μ_0 -integrabel funktion. For enhver μ_0^* -målelig mængde A sætter vi

$$\mu(A) = \int_A f d\mu_0 = \int \chi_A f d\mu_0.$$

Da er μ et endeligt, absolut kontinuert mål.

Bevis: Lad (A_n) være en følge af disjunkte μ_0 -målelige mængder.

Da er

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) &= \int (\chi_{A_1} f + \chi_{A_2} f + \dots) d\mu_0 = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\chi_{A_1} f + \dots + \chi_{A_n} f) d\mu_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\int \chi_{A_1} f d\mu_0 + \dots + \int \chi_{A_n} f d\mu_0) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)) &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots \end{aligned}$$

Dermed har vi vist, at μ er et endeligt mål. Hvis $\mu_0(A) = 0$, får vi

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int ((\chi_A f \wedge n) \vee -n) d\mu_0 = 0.$$

Altså er μ absolut kontinuert med hensyn til μ_0 .

Sætning 44. Lad μ være et positivt endeligt mål på et σ -legeme

$\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$. Blandt mængden af positive funktioner

$$\mathcal{F} = \{f: M \text{ ind i } [0, \infty] \mid f \text{ er } \mathcal{P}_0\text{-målelig} \wedge \forall A \in \mathcal{P}_0: \int_A f d\mu_0 \leq \mu(A)\}$$

findes der én (ikke entydigt bestemt), for hvilken $\int f d\mu_0$ er størst mulig.

Bevis: For to vilkårlige funktioner $f, g \in \mathcal{F}$ tilhører mængderne

$$M_1 = \{x \in M \mid g(x) - f(x) \geq 0\}, \quad M_2 = \{x \in M \mid f(x) - g(x) > 0\}$$

$\mathcal{P}_0$, og vi har for $A \in \mathcal{P}_0$, at

$$\int_A (f \vee g) d\mu_0 = \int_{A \cap M_1} g d\mu_0 + \int_{A \cap M_2} f d\mu_0 \leq \mu(A \cap M_1) + \mu(A \cap M_2) = \mu(A),$$

hvilket viser, at $f \vee g \in \mathcal{F}$. Vi kan nu vælge en følge (f_n) på $\mathcal{F}$,

således at

$$\int f_n d\mu_0 \rightarrow c = \sup\{\int f d\mu_0 \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Vi sætter $g_n = f_1 \vee \dots \vee f_n$. Da er (g_n) en voksende følge på $\mathcal{F}$, og går mod en grænsefunktion f . Vi har nu

$$\int f d\mu_0 = \lim \int g_n d\mu_0 = c.$$

Dermed er sætningen bevist.

Lemma 45. Lad μ være et mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$. Der findes da en mængde $A \in \mathcal{P}$, således at

$$\mu(A) = \mu^+(A) \geq \frac{1}{2}\mu^+(M).$$

Bevis: Hvis $\mu^+(M) = 0$, behøver vi blot at vælge $A = \emptyset$. Vi kan altså antage, at $\mu^+(M) > 0$. Vi vælger $A_1 \in \mathcal{P}$, således at $\mu(A_1) \geq \frac{1}{2}\mu^+(M)$. Hvis $\mu(A_1) = \mu^+(A_1)$, behøver vi blot at vælge $A = A_1$.

I modsat fald er

$$0 < \mu^+(A_1) - \mu(A_1) \leq \frac{1}{2}\mu^+(M).$$

Vi vælger da $A_2 \in \mathcal{P}$, $A_2 \subseteq A_1$, således at $\mu(A_2) \geq \frac{1}{2}(\mu(A_1) + \mu^+(A_1)) > \frac{1}{2}\mu^+(M)$. Er nu $\mu(A_2) = \mu^+(A_2)$, behøver vi blot at vælge $A = A_2$.

I modsat fald er

$$0 < \mu^+(A_2) - \mu(A_2) \leq \frac{1}{2}(\mu^+(A_1) - \mu(A_1)) \leq \frac{1}{4}\mu^+(M).$$

Ved at fortsætte denne proces vil vi enten efter endelig mange skridt få en mængde A_n , som opfylder de ønskede betingelser, eller vi vil få en aftagende følge (A_n) , der tilfredsstiller betingelserne:

$$(\mu(A_n)) \text{ voksende, } \mu(A_n) > \frac{1}{2}\mu^+(M), \quad 0 < \mu^+(A_n) - \mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu^+(M).$$

Vi har nu

$$\cap A_n = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1}) \right),$$

altså

$$\mu(\cap A_n) = \mu(A_1) - \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

og analogt for μ^+ . Heraf følger for $A = \cap A_n$:

$$\mu(A) = \mu^+(A) > \frac{1}{2} \mu^+(M).$$

Dermed er vort lemma bevist.

Lemma 46. Lad μ være et positivt mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , og som ikke er identisk 0. Der findes da en positiv, $\mathcal{P}_0$ -målelig funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, som tilfredsstiller betingelserne

$$\int f d\mu_0 > 0, \forall A \in \mathcal{P}_0 : \int_A f d\mu_0 \leq \mu(A).$$

Bevis: Et nyt mål μ_1 på $\mathcal{P}_0$ defineres ved

$$\mu_1(A) = \mu(A) - k\mu_0(A), \text{ hvor } k = \frac{\mu(M)}{2\mu_0(M)}.$$

Ifølge lemma 45 kan vi vælge $A \in \mathcal{P}_0$, således at

$$\mu_1(A) = \mu_1^+(A) \geq \frac{1}{2}\mu_1^+(M) \geq \frac{1}{2}\mu_1(M) = \frac{1}{2}\mu(M) > 0$$

For $B \in \mathcal{P}_0$, $B \subseteq A$ har vi

$$\mu_1(A) = \mu_1(B) + \mu_1(A \setminus B) = \mu_1^+(A) = \mu_1^+(B) + \mu_1^+(A \setminus B),$$

og da $\mu_1(B) \leq \mu_1^+(B)$ og $\mu_1(A \setminus B) \leq \mu_1^+(A \setminus B)$, finder vi, at

$$\mu_1(B) = \mu_1^+(B) \geq 0$$

for ethvert $B \in \mathcal{P}_0$ med $B \subseteq A$. For et sådan B har vi derfor

$$\mu(B) \geq k \mu_0(B).$$

Vi definerer nu

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in M \setminus A, \end{cases}$$

og vi har da for $C \in \mathcal{P}_0$, at

$$\int_C f d\mu_0 = k \mu_0(A \cap C) \leq \mu(A \cap C) \leq \mu(C).$$

Endvidere er $\mu(A) > 0$, altså $\mu_0(A) > 0$, da μ er absolut kontinuert.

Altså er

$$\int f d\mu_0 = k \mu_0(A) > 0.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 47. Lad μ være et positivt mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 . Der eksisterer da en $\mathcal{P}_0$ -målelig, positiv funktion $f: M \text{ ind i } \mathbb{R}^*$, således at

$$\forall A \in \mathcal{P}_0 : \mu(A) = \int_A f d\mu_0.$$

Bevis: Ifølge sætning 44 kan vi vælge en $\mathcal{P}_0$ -målelig positiv funktion $f: M \text{ ind i } \mathbb{R}^*$, således at

$$\forall A \in \mathcal{P}_0 : \int_A f d\mu_0 \leq \mu(A)$$

samtidig med, at $\int f d\mu_0$ er så stort som muligt. Med dette valg af f definerer

$$\mu_1(A) = \mu(A) - \int_A f d\mu_0$$

et positivt mål. Hvis $\mu_1(M)$ var positiv, kunne vi ifølge lemma 46 vælge en positiv funktion $f_1: M \text{ ind i } \mathbb{R}^*$, således at

$$\int f_1 d\mu_0 > 0, \forall A \in \mathcal{P}_0 : \int_A f_1 d\mu_0 \leq \mu_1(A),$$

og vi får da

$$\int (f+f_1) d\mu_0 > \int f d\mu_0, \forall A \in \mathcal{P}_0 : \int_A (f+f_1) d\mu_0 \leq \mu(A)$$

i strid med, at f var valgt, så $\int f d\mu_0$ var størst mulig. Dermed har vi bevist, at

$$\mu(M) = \int f d\mu_0.$$

For $A \in \mathcal{P}_0$ har vi nu

$$\mu(M) = \mu(A) + \mu(M \setminus A) = \int f d\mu_0 = \int_A f d\mu_0 + \int_{M \setminus A} f d\mu_0,$$

og da

$$\int_A f d\mu_0 \leq \mu(A), \int_{M \setminus A} f d\mu_0 \leq \mu(M \setminus A)$$

slutter vi, at $\int_A f d\mu_0 = \mu(A)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 48. Et mål μ er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , hvis og kun hvis der eksisterer en $\mathcal{P}_0$ -målelig og μ_0 -målelig funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^+$, således at μ er defineret ved $\mu(A) = \int_A f d\mu_0$.

Bevis: Sætning 43 implicerer "hvis". Af sætning 42 følger, at μ kan skrives på formen $\mu^+ - \mu^-$, hvor μ^+ og μ^- er positive og absolut kontinuerte. Sætning 47 implicerer derefter "kun hvis".

Sætning 49. Lad μ være et mål på $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$. Der findes en mængde $A \in \mathcal{P}_0$, for hvilken $\mu(A) = \mu^+(M)$. For enhver mængde B med $B \in \mathcal{P}_0$, $B \subseteq A$ er $\mu(B) \geq 0$.

Bevis: Et mål μ'_0 på $\mathcal{P}_0$ defineres ved

(se side 345)

$$\mu'_0(A) = \mu_0(A) + \mu^+(A) + \mu^-(A). \quad \text{Bemærkning: } \mu_0 \text{ er et positivt mål}$$

Det ses, at $\mu'_0(A) = 0$ medfører $\mu^+(A) = \mu^-(A) = 0$. Altså er μ absolut kontinuert med hensyn til μ'_0 , og μ kan derfor fremstilles på formen

$$\mu(A) = \int_A f d\mu'_0,$$

hvor f er $\mathcal{P}_0$ -målelig og μ'_0 -integrabel. Vi har åbenbart

$$\mu^+(A) = \int_A (f \vee 0) d\mu'_0, \quad \mu^-(A) = \int_A (-f \vee 0) d\mu'_0.$$

Vælger vi specielt $A = \{x | f(x) > 0\}$, har vi åbenbart $\mu(A) = \mu^+(A) = \mu^+(M)$ og $\mu(B) \geq 0$ for $B \in \mathcal{P}_0$, $B \subseteq A$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 15. Vi siger, at et mål μ på $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ er singulært med hensyn til μ_0 , hvis der eksisterer en mængde $E \in \mathcal{P}_0$ med $\mu_0(E) = 0$, således at $\mu(A) = 0$ for enhver mængde $A \in \mathcal{P}$, for hvilken $A \cap E = \emptyset$.

Betingelsen kan også udtrykkes på den måde, at M kan deles i to mængder $A, B \in \mathcal{P}_0$, således at μ^* forsvinder på alle delmængder af A og μ_0^* forsvinder på alle delmængder af B . Ud fra dette synspunkt var det bedre at sige, at μ og μ_0 er indbyrdes singulære.

Sætning 50. Et positivt mål på $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}_0$ har en éntydigt bestemt opspaltning $\mu = \mu_a + \mu_s$, hvor μ_a er et positivt mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ_0 , mens μ_s er et positivt mål, som er singulært med hensyn til μ_0 .

Bevis: Lad os først antage, at vi har to opspaltninger

$$\mu = \mu_a + \mu_s = \mu_a' + \mu_s',$$

som tilfredsstiller de anførte betingelser. Lad os antage, at $A \in \mathcal{P}_0$, og at $\mu_a'(A) > \mu_a(A)$. Vi har da $\mu_a'(A) > 0$, altså $\mu_0(A) > 0$, da μ_a' er absolut kontinuert. Endvidere vælger vi $E \in \mathcal{P}_0$, således at $\mu_0(E) = 0$ og $\mu_s(M \setminus E) = 0$ (definition ¹⁵~~14~~), Vi har da $\mu_a(A \setminus E) = \mu_a(A)$ og $\mu_a'(A \setminus E) = \mu_a'(A)$. Altså er $\mu_s(A \setminus E) = \mu_a'(A \setminus E) - \mu_a(A \setminus E) + \mu_s'(A \setminus E) > 0$, hvilket strider mod, at μ_s er singulær med hensyn til μ_0 . Altså kan antagelsen $\mu_a'(A) > \mu_a(A)$ ikke være rigtig. Heraf slutter vi, at $\mu_a'(A) = \mu_a(A)$, og dermed har vi vist, at der højst findes én spaltning af den omtalte art.

Sætning 44 kombineret med sætning 48 viser, at der blandt de positive mål, der er mindre end μ findes et mål μ_a , for hvilket $\mu_a(M)$ er størst mulig. Med dette valg af μ_a sætter vi $\mu_s = \mu - \mu_a$ og μ_s er da et positivt mål. Vi betragter nu for $n \in \mathbb{N}$ målet

$$\mu_n = \mu_s - \frac{1}{n} \mu_0.$$

Ifølge sætning 49 findes der en mængde $E_n \in \mathcal{P}_0$, for hvilken $\mu_n(E_n) = \mu_n^+(M)$. Endnu et mål μ_n' defineres ved

$$\mu_n'(A) = \mu_a(A) + \frac{1}{n} \mu_0(A \cap E_n).$$

Vi har nu

$$\mu(A) - \mu_n'(A) = \mu_s(A) - \frac{1}{n} \mu_0(A \cap E_n) \geq \mu_s(A \cap E_n) - \frac{1}{n} \mu_0(A \cap E_n) = \mu_n(A \cap E_n),$$

og den sidste påstand i sætning 49 viser nu, at $\mu_n(A \cap E_n) \geq 0$.

Altså er μ_n' et positivt, absolut kontinuert mål, som er mindre end μ . På grund af μ_a 's maksimalegenskab har vi nu $\mu_n'(M) \leq \mu_a(M)$, altså $0 \geq \mu_n'(M) - \mu_a(M) = \frac{1}{n} \mu_0(E_n)$. Altså er $\mu_0(E_n) = 0$. Vi sætter $E = \bigcup E_n$, og vi har da $\mu_0(E) = 0$. For $A \subseteq M \setminus E$ har vi for $n \in \mathbb{N}$, at $\mu_n(A) \leq 0$, altså $\mu_s(A) \leq \frac{1}{n} \mu_0(A)$, og da dette gælder for ethvert $n \in \mathbb{N}$, får vi $\mu_s(A) = 0$. Dermed har vi vist, at μ_s er singulær, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 51. Lad f være en positiv μ_0 -integrabel funktion og μ det ved $\mu(A) = \int_A f d\mu_0$ definerede mål. Lad $g: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ være en vilkårlig funktion. Da vil gf være μ_0 -integrabel, hvis og kun hvis g er μ -integrabel, og da gælder relationen $\int g d\mu = \int g f d\mu_0$.

Bevis: For $A \in \mathcal{P}_0$ har vi

$$\int \chi_A d\mu = \mu(A) = \int_A f d\mu_0 = \int \chi_A f d\mu_0.$$

For $\varphi \in E_{\mathcal{P}_0}$ (se definition 5) har vi derfor

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi f d\mu_0,$$

og da enhver $\mathcal{P}_0$ -målelig funktion er grænseværdi for en voksende følge af funktioner fra $E_{\mathcal{P}_0}$, har vi for en $\mathcal{P}_0$ -målelig funktion

g , at

$$\int g d\mu = \int g f d\mu_0.$$

Lad nu g være en begrænset, μ -integrabel funktion. Ifølge sætning 19 eksisterer $E \in \mathcal{P}_0$ med $\mu_0(E) = 0$ samt en $\mathcal{P}_0$ -målelig funktion $g_1: M \rightarrow \mathbb{R}$, således at $g(x) = g_1(x)$ for ethvert $x \in M \setminus E$. Vi har nu $\mu(E) = 0$, altså

$$\int g d\mu = \int g_1 d\mu = \int g_1 f d\mu_0 = \int_{M \setminus E} g_1 f d\mu_0 = \int_{M \setminus E} g f d\mu_0 = \int_M g f d\mu_0.$$

Dermed har vi bevist relationen for enhver begrænset μ -målelig funktion, og ved grænseovergang fås relationen for vilkårlige μ -integrable funktioner.

Lad os nu antage, at gf er μ_0 -integrabel. For $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ er da

$$((n(g-a) \vee 0) \wedge 1)f = (n(gf-af) \vee 0) \wedge f$$

en μ_0 -integrabel funktion. For $n \rightarrow \infty$ går venstre side monotont mod $\chi_A f$, hvor $A = \{x | g(x) > a\}$. Altså er $\chi_A f$ en μ_0 -integrabel funktion. Vi har nu

$$\int \chi_A f d\mu_0 = \int_A f d\mu_0 = \mu(A).$$

Dermed har vi vist, at A er μ -målelig, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 52. Lad μ_1 og μ_2 være positive mål på samme σ -legeme $\mathcal{P}$ på mængden M . En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ er integrabel med hensyn til $\mu_1 + \mu_2$, hvis og kun hvis f er integrabel med hensyn til μ_1 og med hensyn til μ_2 , og da er $\int f d(\mu_1 + \mu_2) = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2$.

Bevis: Hvis vi sætter $\tilde{\mu}_1(f) = \int f d\mu_1$, $\tilde{\mu}_2(f) = \int f d\mu_2$ og

$(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2)(f) = \int f d(\mu_1 + \mu_2)$, er $\tilde{\mu}_1$ og $\tilde{\mu}_2$ lineære operatorer,

for hvilke der gælder (se matematik 6, K III, M 1)

$$D(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2) = D(\tilde{\mu}_1) \cap D(\tilde{\mu}_2)$$

og for $f \in D(\tilde{\mu}_1) \cap D(\tilde{\mu}_2)$ gælder

$$(\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2)(f) = \tilde{\mu}_1(f) + \tilde{\mu}_2(f).$$

=
tså

$(\mu_1 + \mu_2)(E_1 \cap E_2) = 0$, og den ved

$$f_3(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{for } x \in M \setminus E_1 \\ f_2(x) & \text{for } x \in E_1 \end{cases}$$

definerede funktion er $\mathcal{P}$ -målelig, og vi har $f_3(x) = f(x)$ for ethvert $x \in M \setminus (E_1 \cap E_2)$. Altså er f en $\mu_1 + \mu_2$ -integrabel funktion.

Lad f være en begrænset funktion, som er integrabel med hensyn til $\mu_1 + \mu_2$. Da giver sætning 19 umiddelbart, at f er integrabel med hensyn til μ_1 og med hensyn til μ_2 . Relationen $\int f d(\mu_1 + \mu_2) = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2$ gælder trivielt for funktionerne i $E_{\mathcal{P}}$ og ved voksende grænseovergang fås relationen for $\mathcal{P}$ -målelige funktioner. Dernæst fås relationen for begrænsede $(\mu_1 + \mu_2)$ -integrable funktioner, idet en sådan funktion er identisk med en $\mathcal{P}$ -målelig funktion uden for en mængde E med $(\mu_1 + \mu_2)(E) = 0$, altså $\mu_1(E) = \mu_2(E) = 0$. Endelig fås sætningen i det almindelige tilfælde ved monoton grænseovergang.

Sætning 53. Lad μ_1 og μ_2 være positive mål på samme σ -legeme $\mathcal{P}$ på mængden M . Hvis $\mu_1 < \mu_2$, vil enhver μ_2 -integrabel funktion også være μ_1 -integrabel.

Bevis: Følger umiddelbart af sætning 19.

Definition 15.¹⁶ Lad μ være et mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$ på en mængde M . En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ kaldes μ -integrabel, hvis den er μ^- - og μ^+ -integrabel, og vi sætter da $\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$.

Vi kan også på naturlig måde definere $\int f d\mu = +\infty$ eller $\int f d\mu = -\infty$, men det får vi ikke brug for.

Sætning 54. Lad μ_1 og μ_2 være positive mål på samme σ -legeme $\mathcal{P}$ på en mængde M . En funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*$, som er μ_1^- og μ_2^- integrabel, er også integrabel med hensyn til $\mu = \mu_2 - \mu_1$, og $\int f d\mu = \int f d\mu_2 - \int f d\mu_1$.

Bevis: Da $\mu^+ \leq \mu_2$ og $\mu^- \leq \mu_1$, er f integrabel med hensyn til μ^+ og μ^- , altså med hensyn til μ . Ifølge sætning 52 er f også integrabel med hensyn til $\mu_2 + \mu^- = \mu_1 + \mu^+$, og vi har

$$\int f d\mu_2 + \int f d\mu^- = \int f d\mu_1 + \int f d\mu^+,$$

hvoraf påstanden følger.

Sætning 55. Lad μ_1 og μ_2 være mål på samme σ -legeme $\mathcal{P}$ på M . Hvis $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ er μ_1^- og μ_2^- integrabel, er f også $(\mu_1 + \mu_2)^-$ integrabel, og $\int f d(\mu_1 + \mu_2) = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2$.

Bevis: Da f er integrabel med hensyn til μ_1^+ , μ_1^- , μ_2^+ og μ_2^- , er f også integrabel med hensyn til $\mu_1^+ + \mu_2^+$ og $\mu_1^- + \mu_2^-$. Sætningen følger derefter af sætning 54.

Sætning 56. Lad μ være et mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$ på M , og lad k være et reelt tal. Hvis $f: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ er integrabel med hensyn til μ , er f også integrabel med hensyn til $k\mu$, og $\int f dk\mu = k \int f d\mu$.

Beviset er næsten helt trivielt.

Sætning 57. Lad μ være et mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$ på M . Hvis $f_1, f_2: M \rightarrow \mathbb{R}^*$ er integrable med hensyn til μ , og k_1 og k_2 er reelle tal, da er $k_1 f_1 + k_2 f_2$ integrabel med hensyn til μ , og

$$\int (k_1 f_1 + k_2 f_2) d\mu = k_1 \int f_1 d\mu + k_2 \int f_2 d\mu.$$

Beviset fås ved opspaltningen $\mu = \mu^+ - \mu^-$ af de tilsvarende sætninger for positive mål.

Definition 16¹⁷. Lad $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, hvor μ_1 og μ_2 er reelle mål på samme σ -legeme $\mathcal{P}$ på M . Hvis $f_1, f_2: M \rightarrow \mathbb{R}$ er integrable med hensyn til μ_1 og μ_2 , siges $f = f_1 + if_2: M \rightarrow \mathbb{C}$ at være integrabel med hensyn til μ , og vi sætter

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu_1 - \int f_2 d\mu_2 + i(\int f_2 d\mu_1 + \int f_1 d\mu_2)$$

Sætningerne 55, 56 og 57 ses umiddelbart at gælde uændret i det komplekse tilfælde.

Bevis: Lad $f: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert. Da er $\{\underline{x} | f(\underline{x}) > a\}$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$ en åben mængde. Altså er f en Borelfunktion.

Sætning 3. Enhver trappefunktion er en Borelfunktion.

Bevis. Trivielt.

Definition 2. Lad S være et system af mængder på $\mathbb{R}^m$. Lad $\varphi: S$ ind i $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) være en mængdefunktion, og lad $M \subseteq \mathbb{R}^m$ være en vilkårlig mængde. Ved restriktionen $\varphi|_M$ vil vi forstå $\varphi|(S \cap \mathcal{D}(M))$, hvor $\mathcal{D}(M)$ er mængden af delmængder af M .

Sætning 4. Hvis $\mathcal{P}$ er et σ -legeme på $\mathbb{R}^m$ og $M \in \mathcal{P}$, da er $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(M)$ et σ -legeme og $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}(M) = \{A \cap M | A \in \mathcal{P}\}$. Er $\mathcal{P}_1$ et σ -legeme på M , da er $\mathcal{P}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R}^m | A \cap M \in \mathcal{P}_1\}$ et σ -legeme på $\mathbb{R}^m$, og $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D}(M)$.

Beviset er helt trivielt.

Definition 3. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, og lad $\mathcal{P}$ være et σ -legeme på O omfattende alle Borelmængder på O . Lad $\mathcal{P}'$ være mængden af de mængder fra $\mathcal{P}$, som er delmængder af kompakte delmængder af O . En afbildning $\mu: \mathcal{P}'$ ind i $\mathbb{C}$ kaldes et mål på $\mathcal{P}$ (eller O), hvis det for enhver kompakt mængde $K \subseteq O$ gælder, at $\mu|_K$ er et endeligt mål.

Vi bemærker, at $\mathcal{P}'$ ikke er et σ -legeme, idet $\mathcal{P}'$ for eksempel indeholder en følge af kompakte delmængder K_n med O som

foreningsmængde. Vi behøver blot at vælge

$$K_n = \{\underline{x} \in O \mid \|\underline{x}\| \leq n \wedge K(\underline{x}, \frac{1}{n}) \subseteq O\},$$

hvor $K(\underline{x}, \frac{1}{n})$ er kuglen med centrum $\underline{x}$ og radius $\frac{1}{n}$.

For hver kompakt mængde $K \subset O$, har vi et endeligt mål $\mu|_K$, der giver anledning til et integralbegreb $\int f d\mu|_K$. Hvis målet μ specielt er positivt, defineres integralet ud fra et øvre og et nedre integral, der fås som beskrevet i definition 6 ud fra integralerne af funktionerne i $E_{\mathcal{P} \cap K}$. Er nu $K_1 \subset K$ en anden kompakt mængde, er funktionerne i $E_{\mathcal{P} \cap K_1}$ netop restriktionerne til K af funktionerne i $E_{\mathcal{P} \cap K}$. Heraf følger umiddelbart, at restriktionen $f|_{K_1}$ af en funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, som er integrabel med hensyn til $\mu|_K$, er integrabel med hensyn til $\mu|_{K_1}$, og at

$$\int f|_{K_1} d\mu|_{K_1} = \int_{K_1} f d\mu|_K.$$

Endvidere ses det umiddelbart, at en funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, hvis støtte er indeholdt i K_1 , vil være integrabel med hensyn til $\mu|_K$, hvis den er integrabel med hensyn til $\mu|_{K_1}$. Dette viser berettigheden af følgende definition.

Definition 4. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, og lad μ være et mål på et σ -legeme $\mathcal{P}$ på O . Det antages, $\mathcal{P}$ omfatter alle Borelmængder på O . En afbildning $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes μ -integrabel, hvis det for enhver kompakt mængde $K \subseteq O$ gælder, at $f|_K$ er integrabel med hensyn til $\mu|_K$. En mængde $A \subseteq O$ kaldes μ -målelig, hvis χ_A er μ -integrabel. Er A tillige indeholdt i en kompakt mængde $K \subseteq O$, sætter vi

og
$$\int_A f d\mu = \int_A f|_K d\mu|_K,$$

$$\mu^*(A) = \int \chi_A d\mu|_K.$$

Det er let at vise, at mængden af μ -målelige mængder er et σ -legeme $\mathcal{P}^*$. Af $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ følger nemlig $K \cap A = (K \cap A_1) \cup (K \cap A_2) \cup \dots$, og endvidere er $K \cap (O \setminus A) = K \setminus (K \cap A)$. Målet μ^* er defineret på de begrænsede μ^* -målelige mængder. Målet μ^* er det til målet μ svarende fuldstændige mål.

Definition 5. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde og lad T_O betegne mængden af trappemængder T med kompakt afslutning $\bar{T} \subseteq O$. En positiv funktion $\nu: T_O \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes et indhold på O , hvis den er additiv, altså, hvis det for $T_1, T_2 \in T_O$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ gælder, at $\nu(T_1) + \nu(T_2) = \nu(T_1 \cup T_2)$. Indholdet ν kaldes kontinuert, hvis det er fuldstændigt additivt, altså hvis det for $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$, hvor mængderne T_n er disjunkte, gælder at $\nu(T) = \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots$

Analogt indføres en intervalfunktion ν_1 på O defineret på mængden af begrænsede delintervaller, hvis afslutning er indeholdt i O . Den kaldes additiv, når det for et interval I , der er delt i to disjunkte delintervaller I_1 og I_2 , gælder at $\nu_1(I) = \nu_1(I_1) + \nu_1(I_2)$. Man kan da vise, at det for enhver inddeling $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$ af I i disjunkte delintervaller gælder, at $\nu_1(I) = \nu_1(I_1) + \dots + \nu_1(I_n)$. For en trappemængde $T = I_1 \cup \dots \cup I_n$, hvor $I_1, \dots, I_n$ er disjunkte delintervaller, definerer vi $\nu(T) = \nu_1(I_1) + \dots + \nu_1(I_n)$. derved udvides den additive intervalfunktion ν_1 til et indhold ν på O .

Vi skal ikke opholde os ved detaljerne i denne konstruktion, som er velkendt. Derimod vil vi et øjeblik dvæle ved spørgsmålet om tilstrækkelige betingelser vedrørende ν_1 for at det ved udvidelse fremkomne indhold bliver kontinuert. Dette problem er helt centralt i teorien for Lebesgue-Stieltjes integraler i $\mathbb{R}^m$.

Sætning 5. Det antages, at den positive, additive intervalfunktion ν_1 på O opfylder følgende betingelse : Til et $\varepsilon > 0$ og et begrænset interval I med $\bar{I} \subseteq O$ svarer et afsluttet interval I' og et åbent interval I'' , således at $I' \subseteq I \subseteq I'' \subseteq \bar{I} \subseteq O$ og $\nu_1(I'') - \nu_1(I') \leq \varepsilon$. Da er det ved udvidelse af ν_1 fremkomne indhold ν kontinuert.

Bevis: Lad os først betragte en trappemængde $T = I_1 \cup \dots \cup I_n$, hvor $I_1, \dots, I_n$ er disjunkte intervaller. Lad ε være et positivt tal. For $k = 1, \dots, n$ kan vi da vælge afsluttede mængder I'_k og åbne mængder I''_k , således at $I'_k \subseteq I_k \subseteq I''_k \subseteq \bar{I}_k \subseteq O$ og $\nu_1(I''_k) - \nu_1(I'_k) \leq \frac{1}{n}\varepsilon$. Så er $T' = I'_1 \cup \dots \cup I'_n$ en afsluttet trappemængde og $T'' = I''_1 \cup \dots \cup I''_n$ en åben trappemængde. Vi har $T' \subseteq T \subseteq T'' \subseteq \bar{T} \subseteq O$. Endvidere er

$$\nu(T'') - \nu(T') \leq \nu(T''_1) + \dots + \nu(T''_n) - (\nu(T'_1) + \dots + \nu(T'_n)) \leq \varepsilon.$$

Lad os nu betragte en begrænset trappemængde T med $\bar{T} \subseteq O$, $\bar{T}$ kompakt, samt en fremstilling $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$, hvor $T_1, T_2, \dots$ er disjunkte trappemængder. Vi har da $T \supseteq T_1 \cup \dots \cup T_m$, altså $\nu(T) \geq \nu(T_1) + \dots + \nu(T_m)$, altså $\nu(T) \geq \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots$. Ifølge den første del af beviset kan vi vælge en afsluttet trappemængde $T' \subseteq T$, således at $\nu(T) \leq \nu(T') + \varepsilon$. Af samme årsag kan vi for $k = 1, 2, \dots$ vælge en åben trappemængde T''_k med $T_k \subseteq T''_k \subseteq \bar{T}_k \subseteq O$, således at $\nu(T''_k) \leq \nu(T_k) + 2^{-k}\varepsilon$. Mængderne T''_k dækker den kompakte mængde T' , og ifølge Borels overdækningssætning kan vi derfor vælge n , således at $T' \subseteq T''_1 \cup \dots \cup T''_n$. Vi har da

$$\nu(T') \leq \nu(T''_1) + \dots + \nu(T''_n) \leq \nu(T''_1) + \nu(T''_2) + \dots \leq \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots + \varepsilon,$$

altså

$$\nu(T) \leq 2\varepsilon + \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots$$

Dette gælder for ethvert positivt ε . Sammenholdt med resultatet ovenfor giver uligheden derfor

$$\nu(T) = \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots$$

Dermed er sætningen bevist.

Definition 6. En funktion $f: O$ ind i $\mathbb{R}$ kaldes en trappefunktion, hvis værdimængden $f(O)$ er en endelig mængde, og hvis vi desuden for hvert $a \in f(O)$ med $a \neq 0$ har $f^{-1}(a) \in T_0$. Vi betegner mængden af sådanne trappefunktioner med $\hat{T}_0$. Hvis ν er et kontinuert indhold på O , sætter vi

$$\int f d\nu = \sum_{a \in f(O) \setminus \{0\}} a \nu(f^{-1}(a)).$$

Bemærkning til definition 6: Vi kan sætte

$f(O) = \{a_1, \dots, a_n\}$ (evt. $\{0, a_1, \dots, a_n\}$, hvis $0 \in f(O)$),
af in
I så fald får vi
ersta

$$\int f d\nu = \sum_{k=1}^n a_k \nu(f^{-1}(a_k))$$

Sætning 6. Mængden $\hat{T}_0$ er et funktionsgitter og et vektorrum over de reelle tal. Afbildningen $I: \hat{T}_0$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved $I(f) = \int f d\nu$ er en lineær valuation på $\hat{T}_0$.

Bevis: Den eneste betingelse, som ikke helt trivielt er opfyldt, er følgende: Hvis $(f_n) \rightarrow 0$ er en aftagende følge på T_0'' , da gælder $(\int f_n d\nu) \rightarrow 0$. Vi viser, at dette er opfyldt. Mængden $T = \{\underline{x} | f_1(\underline{x}) > 0\}$ er en trappemængde med $\bar{T} \subseteq O$. Hvis $\nu(T) = 0$ er påstanden trivielt opfyldt. Vi antager $\nu(T) > 0$. Vi sætter

$$T_1 = \{\underline{x} \in T | f_1(\underline{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2\nu(T)}\}, T_n = \{\underline{x} \in T | f_{n-1}(\underline{x}) > \frac{\varepsilon}{2\nu(T)} \wedge$$

$$f_n(\underline{x}) \leq \frac{\varepsilon}{2\nu(T)}\}, n = 2, 3, \dots$$

Da $(f_n(\underline{x})) \rightarrow 0$ for ethvert $\underline{x} \in T$ er $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$, altså

$$\nu(T) = \nu(T_1) + \nu(T_2) + \dots$$

Vi vælger n , således at

$$\nu(T \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n)) = \nu(T) - (\nu(T_1) + \dots + \nu(T_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2 \sup f_1(0)}.$$

Vi har da

$$\begin{aligned} \int f_n d\nu &\leq (\nu(T_1) + \dots + \nu(T_n)) \frac{\varepsilon}{2\nu(T)} + (\nu(T) - (\nu(T_1) + \dots + \nu(T_n))) \sup f_n \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

og dermed er sætningen bevist.

Lad nu $K \subseteq O$ være en kompakt trappemængde. I kapitel 1 så vi, at valuationen I på funktionsgitret $S = \hat{T}_O$ kan udvides til et integral med hensyn til et fuldstændigt mål, og det bliver netop det ovenfor indførte mål $\mu^*|K$. Hvis $K \subseteq O$ er en vilkårlig kompakt mængde, kan vi dække K med de i beviset for sætning 1 udnyttede åbne intervaller, altså med endelig mange af disse $I_1, \dots, I_n$. Vi kan vælge afsluttede intervaller $I'_k \subset I_k$, således at vi stadig har $K \subseteq \overset{\circ}{T}$, hvor $T = I'_1 \cup \dots \cup I'_n$. Vi har da $K \subseteq \overset{\circ}{T} \subseteq \bar{T} \subseteq O$. Vi får derfor integralet og målet på K som restriktion af målet og integralet på T . Vi bemærker, at mængden $C(T, \mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner på den kompakte trappemængde T bliver en delmængde af $\underline{S} \cap \bar{S}$, idet en kontinuert funktion på en kompakt trappemængde er grænsefunktion for såvel en aftagende som en voksende følge af trappefunktioner.

Sætning 7. En kontinuert funktion på en kompakt mængde K er integrabel med hensyn til ethvert mål på en åben mængde $O \supseteq K$.

Bevis: En kontinuert funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ er integrabel, fordi $\{\underline{x} | f(\underline{x}) \geq a\}$ er afsluttet for ethvert $a \in \mathbb{R}$, og derfor en Borelmængde.

Sætning 8. Mængden $\hat{C}(T, \mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner på en kompakt trappemængde T er et lineært funktionsgitter. Enhver voksende, lineær, kontinuert valuation på $\hat{C}(T, \mathbb{R})$ kan udvides til et integral svarende til et mål defineret på et σ -legeme, der omfatter alle Borel-mængder på T .

Bevis: Den eneste ikke trivielle påstand er, at σ -legemet omfatter alle Borelmængder. Dertil er det nok at vise, at σ -legemet omfatter alle intervaller. Nu er det imidlertid klart, at den karakteristiske funktion for et afsluttet interval er grænseværdi for en aftagende følge af kontinuerte funktioner mens den karakteristiske funktion for et åbent interval er grænseværdi for en voksende følge af kontinuerte funktioner. Andre intervaller kan fås ud fra de afsluttede og de åbne ved foreningsmængdedannelse.

På mængden $\hat{C}(T, \mathbb{C})$ (eller $\hat{C}(T, \mathbb{R})$) indføres den ligelige norm ved Bemærkning: Almindeligt gælder der, at

$$\begin{array}{ll} \|\cdot\| \text{ indre produkt} \Rightarrow \text{norm} & \|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}} \\ \text{og rumme} & \\ \text{norm} \Rightarrow \text{metrik} & \text{dist}(f, g) = \|g - f\| \\ \text{om normer} & \\ \text{metrik} \Rightarrow \text{topologi} & B(x) = \left\{ \{y | \text{dist}(x, y) \leq \frac{1}{n}\} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \\ \|\cdot\|_U = \|\cdot\|, \|\cdot\|_U & \end{array}$$

$$\|f+g\|_U \leq \|f\|_U + \|g\|_U.$$

Ved at benytte $\|g-f\|_U$ som afstand mellem f og g organiseres $\hat{C}(T, \mathbb{C})$ som et metrisk rum og derved som et topologisk rum. Det

metriske rum $\hat{C}(T, \hat{C})$ er fuldstændigt. Et Banachrum er netop et fuldstændigt normeret vektorrum.

Vi får ofte brug for at arbejde med flere forskellige topologier på samme vektorrum. Vi vil derfor foretrække at lade $\hat{C}(T, \hat{C})$ være betegnelse for det algebraiske vektorrum, og vi kan så tale om konvergens og om kontinuitet med hensyn til (eller "i") en bestemt topologi eller en bestemt norm.

Sætning 9. Lad $I: \hat{C}(T, \hat{R})$ ind i $\hat{R}$ være en lineær valuation på $\hat{C}(T, \hat{R})$. Følgende egenskaber er da ækvivalente:

- 1) I er voksende
- 2) I er voksende og kontinuert
- 3) Afbildningen I er voksende og kontinuert med hensyn til den ligelige norm.

Bemærkning: Ifølge definition 12 side 31 er en lineær valuation voksende, dvs. det første krav er overflødigt.

I (Endvidere er $\chi_T \in \hat{C}(T, \hat{R})$, dvs. $I(\chi_T) < \infty$)
kommer det ud på at vise, at det for enhver ligelig konvergensfølge $(f_n) \rightarrow f$ gælder, at $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$. På grund af lineariteten er det nok at vise dette for $f = 0$. For $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N , således at

$$\|f_n\|_U \leq \frac{\varepsilon}{I(\chi_T)} \text{ for alle } n \geq N. \text{ Vi har da}$$

$$\begin{aligned} |I(f_n)| &= |I((0 \vee f_n) - (0 \vee -f_n))| = |I(0 \vee f_n) - I(0 \vee -f_n)| \leq \\ &|I(0 \vee f_n)| + |I(0 \vee -f_n)| = I(0 \vee f_n) + I(0 \vee -f_n) = I(|f_n|) \leq \end{aligned}$$

$$I\left(\frac{\varepsilon}{I(\chi_T)} \chi_T\right) \equiv \frac{\varepsilon}{I(\chi_T)} I(\chi_T) = \varepsilon,$$

og dermed er påstanden bevist. Sætningen vil være fuldstændigt bevist, når det lykkes os at vise, at $3) \Rightarrow 2)$. Lad $(f_n) \rightarrow f$

være voksende. Vi skal vise, at $(I(f_n)) \rightarrow I(f)$. Dette følger umiddelbart af 3), hvis (f_n) er ligelig konvergent. Altså følger påstanden umiddelbart af følgende sætning:

Sætning 10. Lad T være et kompakt topologisk rum, og lad (f_n) være en monoton følge af funktioner $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis (f_n) konvergerer mod en kontinuert funktion $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, konvergerer (f_n) ligeligt. Sætning 10 kaldes også Dinis sætning.

Bevis: Vi sætter $g_n = |f - f_n|$. Så er (g_n) aftagende og går mod 0. Lad ε være et positivt tal. Vi sætter

$$A_n = \{x \in T \mid g_n(x) < \varepsilon\}.$$

Så er mængderne A_n åbne og $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$. Da $(g_n) \rightarrow 0$, vil mængderne A_n dække hele T . Altså vil endelig mange af disse mængder dække T . Den sidste af disse endelig mange mængder A_N er da identisk med T , og vi har $g_N(x) < \varepsilon$ for alle $x \in T$, og dermed $g_n(x) < \varepsilon$ for $n \geq N$, $x \in T$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 11. Enhver lineær afbildning $I: \hat{C}(T, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, som er kontinuert med hensyn til den ligelige norm, kan skrives som en differens $I = I^+ - I^-$ mellem to voksende, lineære afbildninger I^+ , $I^-: \hat{C}(T, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, som begge er kontinuerte med hensyn til den ligelige norm.

Bevis: Lad $\hat{C}^+(T, \mathbb{R})$ betegne mængden af positive (ikke strengt) funktioner i $\hat{C}(T, \mathbb{R})$. For $f \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R})$ sætter vi

$$I_1^+(f) = \sup\{I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\},$$

$$I_1^-(f) = \sup\{-I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\}.$$

Af den trivielle relation

$$\{g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \mid g \leq f\} = f + \{-g \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\}$$

fås først

$$\{I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\} = I(f) + \{-I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\}$$

altså Bemærkning: Da $\{I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\}$

$$(1) \quad I(f) = I(f) + \{-I(g) \mid g \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R}) \wedge g \leq f\},$$

For et

$$I_1^+(kf) \quad \text{gælder specielt } \sup\{I(g) \mid \dots\} = I(f) + \sup\{-I(g) \mid \dots\},$$

$$\text{For } f_1, f_2 \in \text{dvs.} \quad I_1^+(f) = I(f) + I_1^-(f).$$

måde)

$$\begin{aligned} I_1^+(f_1) + I_1^+(f_2) &= \sup\{I(g_1) \mid 0 \leq g_1 \leq f_1\} + \\ &\quad \sup\{I(g_2) \mid 0 \leq g_2 \leq f_2\} = \\ &= \sup\{I(g_1 + g_2) \mid 0 \leq g_1 \leq f_1 \wedge 0 \leq g_2 \leq f_2\} \leq \\ &\leq \sup\{I(g) \mid 0 \leq g \leq f_1 + f_2\} \leq I_1^+(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

På den anden side er

$$\begin{aligned} I_1^+(f_1 + f_2) &= \sup\{I(g) \mid 0 \leq g \leq f_1 + f_2\} = \sup\{I(g \wedge f_1) + I(g - (g \wedge f_1)) \mid 0 \leq g \leq f_1 + f_2\} \\ &\leq \sup\{I(g_1) + I(g_2) \mid 0 \leq g_1 \leq f_1 \wedge 0 \leq g_2 \leq f_2\} = I_1^+(f_1) + I_1^+(f_2). \end{aligned}$$

Altså er

$$I_1^+(f_1 + f_2) = I_1^+(f_1) + I_1^+(f_2) \text{ og } I_1^-(f_1 + f_2) = I_1^-(f_1) + I_1^-(f_2),$$

idet den sidste relation fås af den første ved hjælp af (1).

Lad der være givet

En vilkårlig funktion $f \in \hat{C}(T, \mathbb{R})$. For $f = f_1^+ - f_1^- = f_2^+ - f_2^-$,

hvor $f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R})$, har vi

$$I_1^+(f_1^+) + I_1^-(f_2^-) = I_1^+(f_1^+ + f_2^-) = I_1^+(f_2^+ + f_1^-) = I_1^+(f_2^+) + I_1^-(f_1^-),$$

altså

$$I_1^+(f_1^+) - I_1^-(f_1^-) = I_1^+(f_2^+) - I_1^-(f_2^-).$$

Analogt for I_1^- . For $f = f^+ - f^-$; $f^-, f^+ \in \hat{C}^+(T, \mathbb{R})$ kan vi derfor de-

finere

$$I^+(f) = I_1^+(f^+) - I_1^+(f^-) \text{ og } I^-(f) = I_1^-(f^+) - I_1^-(f^-).$$

Ved anvendelse af (1) får vi

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-) = I_1^+(f^+) - I_1^-(f^+) - I_1^+(f^-) + I_1^-(f^-) = I^+(f) - I^-(f).$$

Det ses umiddelbart, at $I^+(f_1 + f_2) = I^+(f_1) + I^+(f_2)$, at $I^+(-f) = -I^+(f)$, samt at $I^+(kf) = kI^+(f)$ for $k > 0$. Altså er I lineær.

Det fremgår umiddelbart, at $I^+(f) \geq 0$ for $f \geq 0$, altså, at I^+ er voksende. Dernæst viser sætning 9, at I^+ er kontinuert med hensyn til den ligelige norm. Analogt for I^- . Dermed er sætning 11 bevist.

$$\text{Idet } \left| \int_A (g-f) d\mu \right| \leq \left| \int_A \|g-f\|_U d\mu \right| = \|g-f\|_U \int_A \chi_A d\mu = \mu(A) \|g-f\|_U.$$

Hvis $\int_T f \cdot g d\mu$ opfattes som et indre produkt $(f|g)$, er dette blot Hölders ulighed, idet $\| \cdot \|_U = \| \cdot \|_\infty$ og $\mu(A) = \|\chi_A\|_1$:

$$|(g-f|\chi_A)| \leq \|g-f\|_\infty \|\chi_A\|_1 = \|g-f\|_U \mu(A).$$

for ethvert $f \in \hat{C}(T, \mathbb{R})$ (eller $\hat{C}(T, \mathbb{C})$). Målet μ er entydigt bestemt ved afbildningen I . Den derved definerede afbildning $I \rightarrow \mu$ er lineær.

Bevis: Lad μ være et reelt mål på T . Ifølge sætning 49 findes der en opspaltning $T = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, således at $\mu(A) = \mu^+(T)$. Så er μ positivt for enhver μ -målelig delmængde af A og negativ for enhver μ -målelig delmængde af B . Vi har da

$$\int_T g d\mu - \int_T f d\mu = \int_A (g-f) d\mu - \int_B (g-f) d(-\mu),$$

altså

$$\left| \int_T g d\mu - \int_T f d\mu \right| \leq (\mu(A) + \mu(B)) \|g-f\|_U,$$

hvoraf følger, at den ved $I(f) = \int_T f d\mu$ definerede afbildning I er kontinuert. Dermed har vi vist "tilstrækkeligt" i det reelle tilfælde. Det komplekse tilfælde følger umiddelbart.

Lad dernæst $I: \hat{C}(T, \mathbb{R})$ ind i $\mathbb{R}$ være en lineær afbildning, som er kontinuert i den uniforme norm. Af sætning 11 og 9 følger, at vi har en fremstilling $I = I^+ - I^-$, hvor I^+ og I^- er voksende og kontinuerte valuationer. Udvidelserne af I^+ og I^- til Daniellintegraler svarer til mål μ^+ og μ^- , således at $I^+(f) = \int_T f d\mu^+$ og $I^-(f) = \int_T f d\mu^-$ for enhver funktion $f \in \hat{C}(T, \mathbb{R})$. Vi sætter $\mu = \mu^+ - \mu^-$, og vi har da $I(f) = \int_T f d\mu$. Dermed er "nødvendigt" bevist i det reelle tilfælde, og det komplekse tilfælde følger umiddelbart ved opspaltning i realdel og imaginærdel.

Lad μ være et reelt mål, som ikke er identisk nul. Vi sætter $I(f) = \int_T f d\mu$ for ethvert $f \in \hat{C}(T, \mathbb{R})$. Der findes da et åbent interval $A \subseteq T$ med $\mu(A) \neq 0$, lad os antage > 0 . Så er $\int_T \chi_A d\mu > 0$. Der findes en voksende følge (f_n) af afbildninger $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ med $(f_n) \rightarrow \chi_A$, $f_n \geq 0$. Så gælder $(I(f_n)) \rightarrow I(\chi_A) = \int_T \chi_A d\mu$, altså $I(f_n) \neq 0$ for passende n . Altså er nul-målet det eneste mål, der giver nulafbildningen. Nu er afbildningen $\mu \rightarrow I$ lineær, og da vi har set, at dens kerne er 0, har vi, at den er injektiv, altså bijektiv, og deraf følger igen, at $I \rightarrow \mu$ er lineær. Udvidelsen til det komplekse tilfælde er triviel. Dermed er sætningen bevist.

Lad os nu med E betegne Banachrummet $\hat{C}(T, \mathbb{C})$ med den lige-lige norm. Med E' betegner vi mængden af kontinuerte lineære afbildninger $I: E \rightarrow \mathbb{C}$. For enhver sådan afbildning definerer vi en norm

$$\|I\| = \sup\{|I(f)| \mid f \in E \wedge \|f\|_U \leq 1\}.$$

For en vilkårlig lineær afbildning I gælder det, at den anførte størrelse bliver endelig, hvis og kun hvis f er kontinuert. Hvis f er kontinuert, kan vi nemlig vælge ρ , således at $|I(f)| \leq 1$, når blot $\|f\|_U \leq \rho$, men det giver umiddelbart, at $|I(f)| \leq \frac{1}{\rho}$ for $\|f\|_U \leq 1$, altså $\|I\| \leq \frac{1}{\rho}$. På den anden side har vi generelt

$$|I(f)| \leq \|f\|_U |I(\frac{f}{\|f\|_U})| \leq \|I\| \|f\|_U,$$

hvilket medfører, at I er kontinuert i 0, og på grund af lineariteten medfører dette, at I er kontinuert. Rummet E' med den angivne norm kaldes det til E duale normerede vektorrum. Rummet E' er fuldstændigt. For at vise dette betragter vi en fundamentalfølge (I_n) på E' . For $\varepsilon > 0$ kan vi altså vælge N , således at $\|I_p - I_q\| \leq \varepsilon$ for alle $p, q \geq N$. For ethvert f med $\|f\| \leq 1$ har vi da $|I_p(f) - I_q(f)| \leq \varepsilon$, og vi har derfor $(I_q(f)) \rightarrow I(f)$ for ethvert f , idet I er en vis grænseafbildning $I: E \text{ ind i } \hat{C}$. Grænseovergangen $q \rightarrow \infty$ giver nu $|I_p(f) - I(f)| \leq \varepsilon$ for $p \geq N$ og ethvert f med $\|f\|_U \leq 1$. Heraf følger nu, at $|I(f)| \leq \|I_p\| + \varepsilon$ for ethvert f med $\|f\|_U \leq 1$. Altså er $\|I\| \leq \|I_p\| + \varepsilon$, og vi har dermed set, at $I \in E'$. Endvidere har vi fundet, at $\|I_p - I\| \leq \varepsilon$. Dermed har vi vist, at (I_p) konvergerer, altså at E' er fuldstændigt.

Idet μ er et mål på T og $f \in \hat{C}(T, \hat{C})$ skriver vi også

$$\langle \mu, f \rangle = \int_T f d\mu = I(f) = \langle I, f \rangle.$$

På grund af isomorfien $\mu \leftrightarrow I$ er det ligegyldigt om elementet af det duale vektorrum betegnes μ eller I , og vi vil tillade os at anvende betegnelserne i flæng. Operationen $\langle \mu, f \rangle$ eller $\langle I, f \rangle$ kaldes det indre produkt. Den er en afbildning af $E' \times E$ ind i de komplekse tal. Den er lineær i hver variabel. Vi har

$$|\langle I, f \rangle| \leq \|I\| \|f\|_U$$

i analogi med Cauchy-Schwarz's ulighed. Vi får således vurderingen

$$|\langle I_2, f_2 \rangle - \langle I_1, f_1 \rangle| \leq |\langle I_2 - I_1, f_2 \rangle + \langle I_1, f_2 - f_1 \rangle| \leq$$

$$|\langle I_2 - I_1, f_2 \rangle| + |\langle I_1, f_2 - f_1 \rangle| \leq \|I_2 - I_1\| \|f_2\|_U + \|I_1\| \|f_2 - f_1\|_U,$$

hvilket viser, at det indre produkt er en kontinuert afbildning.

Hvert $f \in \hat{C}(T, \mathbb{C})$ definerer en lineær kontinuert afbildning $\tilde{f}: E' \rightarrow \mathbb{C}$, idet vi sætter $\tilde{f}(I) = \langle I, f \rangle$. Da E' for ethvert $a \in T$ indeholder den specielle afbildning $\delta_a(f) = \tilde{f}(a)$, vil forskellige f give forskellige $\tilde{f}$. Det duale rum E'' til E omfatter alle afbildninger $\tilde{f}$. Vi har således en naturlig indlejring af E i E'' . På den anden side er det let at se, at E'' omfatter flere afbildninger end afbildningerne $\tilde{f}$. Vi identificerer E med sin indlejring i E'' og skriver $E \subset E''$. Da E er et fuldstændigt vektorrum, er E et afsluttet underrum af E'' .

Til en Lebesgue-integrabel funktion $g: T \rightarrow \mathbb{C}$ svarer et absolut kontinuert mål μ defineret ved $\mu(A) = \int_A g d\underline{x}$. For $\tilde{f} \in \hat{C}(T, \mathbb{C})$ har vi

$$\langle \mu, \tilde{f} \rangle = \int_T \tilde{f} d\mu = \int_T \tilde{f} g d\underline{x}.$$

Ethvert absolut kontinuert mål kan fremkomme på denne måde. Målet μ bestemmer g bortset fra en nulfunktion. Til en klasse af funktioner, der indbyrdes kun afviger ved en nulfunktion, svarer således et mål og omvendt. Vi vil under disse omstændigheder også skrive

$$I(f) = \tilde{g}(f) = \tilde{\mu}(f) = \langle I, f \rangle = \langle g, f \rangle = \langle \mu, \tilde{f} \rangle.$$

Produktet $\langle g, f \rangle$ for alle $f \in \hat{C}(T, \mathbb{C})$ bestemmer g bortset fra en nulfunktion, altså g som punkt i L^1 -rummet. Vi vil i det følgende altid opfatte funktioner på denne måde.

Vi kan nu benytte afbildningen $\tilde{g}$ som en erstatning for selve funktionen g . Derved får vi mængden af Lebesgue-integrable

funktioner $g: T \text{ ind i } \mathcal{C} \text{ indlejret i } E'$, og elementerne i E' bliver således generaliserede funktioner.

For $a \in T$ vil den ved $\delta_a(f) = f(a)$ definerede afbildning $\delta_a: E \text{ ind i } \mathcal{C} \text{ tilhøre } E'$, og denne afbildning er således en generaliseret funktion. Den svarer til et mål Δ_a defineret ved

$$\Delta_a(A) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } a \in A \\ 0, & \text{hvis } a \notin A, \end{cases}$$

og dette mål er ikke absolut kontinuert. Vi ser således at δ_a er en generaliseret funktion.

Vi ønsker imidlertid et generaliseret funktionsbegreb, som sikrer, at alle generaliserede funktioner er differentiable. Til en sådan udvidelse synes udnyttelse af duale Banachrum ikke at være fyldestgørende. Derfor skal vi heller ikke gå nærmere ind på Banachrummenes teori. Vi skal dog fremhæve en vigtig egenskab ved topologien på et Banachrum i almindelighed, idet denne egenskab senere vil blive benyttet, når vi viser, at visse topologiske vektorrum ikke er Banachrum.

Definition 7. Lad A og B være punktmængder i et vektorrum E over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vi siger, at A absorberer B , hvis der findes et positivt tal k , således at $B \subseteq kA$. At A absorberer et punkt $b \in E$ betyder, at A absorberer mængden $\{b\}$. En mængde A kaldes absorberende, hvis den absorberer ethvert punkt af E .

Sætning 13. I et normeret vektorrum findes en omegn af $\underline{0}$, som absorberes af enhver omegn af $\underline{0}$.

Bevis: Enhedskuglen U er en omegn af nul. En vilkårlig omegn V indeholder en kugle med centrum $\underline{0}$ og en positiv radius r . Altså vil $\frac{1}{r}V$ indeholde enhedskuglen. Dermed er sætningen bevist.

3. kapitel.

Om vilkårlig ofte differentiable funktioner med kompakt støtte.

Lad E være et vektorrum af kontinuerte funktioner på en åben mængde O . Lad $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ være en integrabel funktion. Vi ønsker at indlejre mængden af sådanne funktioner i et vektorrum E^* dualt til E på lignende måde som omtalt i slutningen af foregående kapitel. Vi behøver hertil at danne

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_O f \varphi d\mathbf{x}$$

for ethvert $\varphi \in E$. Vi må først og fremmest sikre os, at integralet eksisterer. Hvis vi vil undgå at stille yderligere betingelser til f , bliver det nødvendigt at forlange, at funktionerne $\varphi \in E$ har kompakt støtte indeholdt i O . Ved udregningen af integralet kan vi tænke os f og φ definerede i hele $\mathbb{R}^m$, idet vi sætter funktionsværdierne til 0 uden for O .

Hvis f specielt har en partiel differentialkvotient $D_1 f$ med hensyn til x_1 , og denne differentialkvotient er integrabel, kan vi danne

$$\begin{aligned} \langle D_1 f, \varphi \rangle &= \int_O D_1 f \varphi d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_1 f \varphi dx_1 \right) dx_2 \dots dx_m = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left([f\varphi]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f D_1 \varphi dx_1 \right) dx_2 \dots dx_m = - \langle f, D_1 \varphi \rangle, \end{aligned}$$

idet vi har forudsat, at $D_1 \varphi$ eksisterer og er kontinuert. Vi har altså

$$\widetilde{D_1 f}(\varphi) = -\widetilde{f}(D_1 \varphi).$$

For et element $T: E \rightarrow \mathbb{C}$ fra dualrummet E^* kan vi da generelt definere en partiel differentialkvotient $D_1 T: E \rightarrow \mathbb{C}$ ved at sætte

$$D_1 T(\varphi) = -T(D_1 \varphi).$$

Denne definition af differentialkvotienten er den grundlæggende ide i distributionsteorien. Vi ser nu, at anvendeligheden af denne definition kræver, at ethvert $\varphi \in E$ har en kontinuert partiel differentialkvotient $D_1 \varphi \in E$, altså at $\varphi \in E$ er vilkårligt ofte differentiable med hensyn til x_1 , og at alle differentialkvotienterne er kontinuerte og tilhører E . Vi må selvfølgelig kræve tilsvarende for alle de variable $x_1, \dots, x_m$, og vi ender derfor med kravet om, at samtlige funktioner i E skal være vilkårligt ofte kontinuert differentiable med differentialkvotienter, som igen tilhører E . Det vil derfor være naturligt som E at benytte vektorrummet af vilkårligt ofte kontinuert differentiable funktioner med konstant støtte, som er indeholdt i 0. Det er klart, at E bliver et vektorrum.

Før vi kan tale om dualrummet til E må vi have indført en topologi på E . I første omgang vil vi imidlertid studere vektorrummets algebraiske struktur. Vi vil betegne det med $\mathcal{D}_0$, og hvis 0 specielt er hele rummet $\mathbb{R}^m$, vil vi betegne det med $\mathcal{D}$. Disse betegnelser skal benyttes for rummet med den topologi, som senere vil blive indført, men vi vil bruge dem allerede nu.

Kravet om kontinuert differentiability vilkårligt ofte leder tanken hen på analytiske funktioner. Sætningen om entydig analytisk fortsættelse giver imidlertid, at en analytisk funktion med kompakt støtte er identisk 0. Vektorrummet $\mathcal{D}_0$ indeholder altså slet ikke andre analytiske funktioner end nulfunktionen. Vi må derfor først vise, at $\mathcal{D}_0$ overhovedet indeholder ikke triviale funktioner.

Bemærkning: Se H. Bremermann: Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms, side 13.

64.

Sætning 1. Lad $[a, b]$ være et interval på $\mathbb{R}$. Den ved

$$\rho_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \notin [a, b] \\ e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}} & \text{for } x \in [a, b] \end{cases}$$

er strengt positiv på $]a, b[$ og vilkårlig ofte differentiabel på hele $\mathbb{R}$.

Bevis: Det ses umiddelbart ved induktion, at den n^{te} afledede af $\rho_{a,b}$ på $]a, b[$ har formen Bemærkning: $R(x)$ har formen $\frac{P(x)}{(x-a)^{2n}(b-x)^{2n}}$,

$$D^n \rho_{a,b}(x) = R(x) e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}}, \quad \text{hvor } P(x) \text{ er et eller andet polynomium.}$$

og på $]a, b[$ får vi derfor en vurdering af formen

$$|D^n \rho_{a,b}(x)| \leq \frac{A}{(x-a)^p(b-x)^p} e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}},$$

hvor p er et helt tal og A en konstant (begge afhænger af n).

Heraf ses umiddelbart, at $D^n \rho_{a,b}$ har grænseværdi 0 i punkterne a og b . Påstanden følger derefter af en kendt sætning.

Hermed har vi bevist, at rummet $\mathcal{D}$ indeholder ikke trivielle funktioner i det 1-dimensionale tilfælde. Vi understreger, at funktionerne i $\mathcal{D}$ ikke kan være alt for "pæne" uden at forsvinde identisk.

Sætning 2. Hvis $\phi \in \mathcal{D}$ (1-dimensionale tilfælde), og der findes et reelt tal r , således at $|D^n \phi(x)| \leq n! r^{-n}$ for alle x og n , da er $\phi = 0$.

Bevis: Vi kan antage, at ϕ er reel. Vi har da Taylors formel

$$\varphi(x+h) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{D^p \varphi(x)}{p!} h^p + \frac{1}{n!} D^n \varphi(x+\theta h) h^n,$$

og vi har vurderingen

$$\left| \frac{1}{n!} D^n \varphi(x+\theta h) h^n \right| \leq \left(\frac{|h|}{r} \right)^n,$$

som viser, at restleddet går mod 0 for $|h| < r$. Altså har vi potensrækkeudviklingen

$$\varphi(x+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p \varphi(x) h^p,$$

som viser, at φ er analytisk. Da φ yderligere har kompakt støtte, medfører dette, at φ forsvinder identisk.

Det fremgår af sætning 2, at $\sup |D^n \varphi(x)| = \|D^n \varphi\|_U$ må vokse meget hurtigt med n , når φ er en ikke trivial funktion fra $\mathcal{D}$.

Sætning 3. Hvis $\varphi \in \mathcal{D}$ (1-dimensionale tilfælde), og $D^n \varphi(x) \geq 0$ for alle x og n , da er $\varphi = 0$.

Bevis: Vi betragter et interval $[a, b]$. For $x \in [a, b[$ har vi

$$\varphi(b) = \sum_{p=0}^n \frac{D^p \varphi(x)}{p!} (b-x)^p + \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1} \varphi(\xi) (b-x)^{n+1}; \quad \xi \in]x, b[.$$

Her er alle led på højre side positive. Altså får vi vurderingen

$$0 \leq D^p \varphi(x) \leq p! \frac{\varphi(b)}{(b-x)^p}, \quad p = 0, 1, \dots, n.$$

Vi har nu Taylorrækken

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{D^p \varphi(a)}{p!} (x-a)^p + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x D^n \varphi(t) (x-t)^{n-1} dt,$$

hvor vi får restledsvurderingen

$$0 \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x D^n \varphi(t) (x-t)^{n-1} dt \leq \frac{n\varphi(b)}{b-x} \int_a^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{n-1} dt \leq n\varphi(b) \frac{x-a}{b-x} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{n-1}, \text{ idet}$$

der viser, at restleddet går mod 0 for $x \in [a, b[$. Funktionen φ er vi har vurderingen

$$\frac{n\varphi(b)}{b-x} \int_a^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{n-1} dt \leq \frac{n\varphi(b)}{b-x} \sup_{t \in [a, x]} \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^{n-1} \cdot (x-a)$$

altså analytisk i dette interval - men det var et ganske vilkårligt interval. Altså er φ analytisk og derfor identisk 0.

Sætning 4. Hvis $\varphi \in \mathcal{D}$ (1-dimensionale tilfælde) er reel, og der eksisterer et tal $r > 0$, således at $D^n \varphi(x) \geq -n!r^{-n}$ for alle x og n , da er φ identisk 0.

Bevis: Lad a være et reelt tal. På intervallet $[a, a+r[$ sætter vi

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{r} \right)^n = \frac{r}{a+r-x}.$$

Vi har $D^n g(a) = n!r^{-n}$, og g har åbenbart samtlige differentialkvotienter positive på $[a, a+r[$. Altså gælder $D^n g(x) \geq n!r^{-n}$ for alle n og alle $x \in [a, a+r[$. Funktionen g er analytisk på $[a, a+r[$. Vi sætter $h(x) = f(x) + g(x)$ for $x \in [a, a+r[$. Så er h en funktion, hvis differentialkvotienter alle er positive på $[a, a+r[$ og beviset for sætning 3 viser da, at h er analytisk. Altså er $f = h - g$ analytisk på $]a, a+r[$. Men da a var et vilkårligt reelt tal, giver dette, at f er analytisk på $\mathbb{R}$, altså identisk 0.

Det kan udmærket lade sig gøre at konstruere en funktion, der tilhører $\mathcal{D}$, og som ikke er analytisk i noget punkt af sin støtte. Dette vil vi dog ikke gennemføre. Det er en udmærket øvelse selv at gennemføre konstruktionen.

Sætning 5. Lad $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ være et interval i $\mathbb{R}^m$.

Den ved

$$\rho_I(\underline{x}) = \rho_{a_1 b_1}(x_1) \cdots \rho_{a_m b_m}(x_m) \quad (\text{sætning 1})$$

definerede afbildning $\rho_I: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er vilkårligt ofte differentiable, strengt positiv overalt i $\overset{\circ}{I}$ og identisk 0 uden for I .

Bevis: Da ρ_I er produkt af vilkårlig ofte differentiable funktioner, er ρ_I vilkårlig ofte differentiablel. For $\underline{x} \in \overset{\circ}{I}$, er $\rho_I(\underline{x})$ produkt af positive faktorer, altså positiv. For $\underline{x} \notin \overset{\circ}{I}$ er mindst en af faktorerne nul. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad $f: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ være en kontinuert funktion med kompakt støtte K . Lad K_1 være en kompakt mængde, således at $K \subseteq K_1$, og lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da en vilkårlig ofte differentiablel funktion f_1 med støtte indeholdt i K_1 , således at $\|f - f_1\|_U \leq \varepsilon$.

Bevis: Vi vælger $r > 0$, således at $r/\sqrt{m}$ er mindre end afstanden fra K til randen af K_1 . Vi sætter $I = [-r, r] \times \dots \times [-r, r]$ og $\rho(\underline{x}) = \lambda \rho_I(\underline{x})$, hvor λ er et positivt tal valgt således at $\int \rho = 1$. Vi sætter

$$f_1(\underline{x}) = \int \rho(\underline{y} - \underline{x}) f(\underline{y}) d\underline{y}.$$

Det er nok at udstrække integrationen over et fast interval, der indeholder K_1 . Integranden er da vilkårlig ofte differentiablel med hensyn til $x_1, \dots, x_m$, og samtlige differentialkvotienter bliver kontinuerte funktioner af $(\underline{x}, \underline{y})$. Altså er $f_1(\underline{x})$ vilkårlig ofte kontinuert differentiablel. Det er klart, at f_1 har sin støtte indeholdt i K_1 . Ved at erstatte $\underline{y}$ i integranden med $\underline{y} + \underline{x}$ får vi

$$f_1(\underline{x}) = \int f(\underline{x} + \underline{y}) \rho(\underline{y}) d\underline{y},$$

altså

$$|f(\underline{x}) - f_1(\underline{x})| = \left| \int (f(\underline{x} + \underline{y}) - f(\underline{x})) \rho(\underline{y}) d\underline{y} \right| \leq \int |f(\underline{x} + \underline{y}) - f(\underline{x})| \rho(\underline{y}) d\underline{y} \leq \sup_{\substack{|\underline{y}_\nu| \leq r \\ \nu=1, \dots, m}} |f(\underline{x} + \underline{y}) - f(\underline{x})|$$

Vi vælger nu yderligere r så lille, at $|f(\underline{x} + \underline{y}) - f(\underline{x})| \leq \varepsilon$ for

67¹⁷ Bemærkning: Se L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators, side 3, formel (1.2.2).

$|y_1| \leq r, \dots, |y_m| \leq r$ og alle $\underline{x}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætningen udtrykker, at mængden af vilkårlig ofte differentiable funktioner med kompakt støtte i en vis forstand er tæt i mængden af kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Det er ikke vanskeligt at karakterisere de kompakte mængder i $\mathbb{R}^m$, som kan være støtte for funktioner fra $\mathcal{D}$. Lad $K \subseteq \mathbb{R}^m$ være støtte for $\varphi \in \mathcal{D}$. Vi har da åbenbart $\{\underline{x} | \varphi(\underline{x}) \neq 0\} \subseteq \overset{\circ}{K}$. Endvidere har vi definitionsmæssigt $K = \overline{\{\underline{x} | \varphi(\underline{x}) \neq 0\}}$. Altså har vi $K \subseteq \overline{\overset{\circ}{K}}$. På den anden side har vi $\overset{\circ}{K} \subseteq K$, og da K er afsluttet, følger heraf $\overline{\overset{\circ}{K}} \subseteq K$. Altså gælder $K = \overline{\overset{\circ}{K}}$. Vi skal se, at enhver kompakt mængde med denne egenskab er støtte for en positiv funktion fra $\mathcal{D}$. Dertil behøver vi imidlertid nogle hjælpesætninger.

Sætning 7. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en ikke tom åben mængde. Der findes da en følge (K_n) af kompakte mængder med følgende egenskaber:

- 1) $K_1 \neq \emptyset$
- 2) $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1} \subseteq O, n=1, 2, \dots$
- 3) For enhver kompakt mængde $K \subseteq O$ eksisterer der et tal n , således at $K \subseteq \overset{\circ}{K}_n$.

Bevis: Vi vælger

$$K_n = \{\underline{x} \in O | \|\underline{x}\| \leq n \wedge \text{dist}(\underline{x}, \partial O) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Det er da klart, at mængderne K_n er kompakte, og at følgen (K_n) tilfredsstiller 2) og 3). Ved at udelade de eventuelle tomme mængder, der optræder i begyndelsen af følgen og ved at omnummere de tiloversblevne led opnår vi, at også 1) bliver opfyldt.

Sætning 8. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en ikke tom åben mængde. Der findes da en følge (I_n) af begrænsede, åbne intervaller, således at

1) $\bar{I}_n \subseteq O, n=1,2,\dots$

2) $\bigcup I_n = O.$

3) For enhver kompakt mængde $K \subseteq O$ gælder det, at kun endelig mange af intervallerne $\bar{I}_n$ har punkter fælles med K .

Bevis: Vi vælger følgen (K_n) i overensstemmelse med sætning 7.

For $n \geq 3$ betragter vi et punkt $\underline{a} \in K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$. Da $\underline{a} \notin K_{n-2}$, kan vi vælge et åbent interval $I_{\underline{a}}$, således at $\underline{a} \in I_{\underline{a}}, \bar{I}_{\underline{a}} \subseteq O$ og $\bar{I}_{\underline{a}} \cap K_{n-2} = \emptyset$. Da $K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ er kompakt, kan vi dække $K_n \setminus \overset{\circ}{K}_{n-1}$ med endelig mange sådanne intervaller. Vi dækker ligeledes K_2 med endelig mange intervaller, hvis afslutning er indeholdt i O . Derved får vi alt i alt en følge af intervaller, der tilfredsstiller 1) og 2). For en kompakt mængde $K \subseteq O$ gælder det, at vi kan vælge n , således at $K \subseteq K_n$. Men K_n kan højst have punkter fælles med de intervaller, der dækker $K_2, K_3 \setminus \overset{\circ}{K}_2, \dots, K_{n+1} \setminus \overset{\circ}{K}_n$, altså højst med endelig mange af intervallerne i følgen. Altså er 3) opfyldt, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 9. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en ikke tom åben mængde. Der findes da en vilkårlig ofte differentiabel funktion, som er strengt positiv overalt på O og identisk 0 uden for O .

Bemærkning: Se L.Hörmander, side 4, Theorem 1.2.2.

Bevis: Lad følgen (I_n) af intervaller være valgt i overensstemmelse med sætning 8. For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælger vi $\lambda_n > 0$, således at funktionen $\lambda_n \rho_{I_n}$ tillige med dens partielle differentialkvotienter af orden $\leq n$ numerisk ikke overstiger 2^{-n} . Vi sætter

$$(1) \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \rho_{I_n}.$$

Det er da klart, at vi får $\varphi(\underline{x}) > 0$ for $\underline{x} \in O$ og $\varphi(\underline{x}) = 0$ for $\underline{x} \notin O$. På intervallet I_n forsvinder leddene i summen på nær endelig mange og summen bliver derfor vilkårlig ofte differentiabel overalt i O . Det er endvidere klart, at φ bliver vilkårlig ofte differentiabel overalt uden for $\bar{O}$. Tilbage er spørgsmålet om differentiability i randpunkter af O . Vi viser dette ved induktion, idet vi antager, at det allerede er vist, at φ er overalt n gange kontinuert differentiabel, og at de partielle differentialkvotienter til og med orden n bestemmes ved ledvis differentiation af rækken. Lad D^* betegne en af de partielle differentialoperatorer af orden n . Vi har da

$$(2) \quad D^* \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D^* \rho_{I_n}.$$

Rækken

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p D_j D^* \rho_{I_p}$$

konvergerer ligeligt, da $|\lambda_p D_j D^* \rho_{I_p}(\underline{x})| \leq 2^{-p}$ for $p \geq n+1$ og alle $\underline{x}$. Idet vi giver alle $\underline{x}_k$ undtagen $\underline{x}_j$ faste værdier, giver en kendt sætning, at ledvis differentiation af rækken (2) er tilladt, og vi finder, at

$$D_j D^* \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D_j D^* \rho_{I_n}.$$

Dermed er induktionsbeviset fuldført, og sætning 9 er bevist.

Sætning 10. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, og lad $\Delta = \{O_j | j \in J\}$ være en overdækning af O med åbne mængder. Der eksisterer da en numerabel overdækning $\Delta' = \{O'_n | n \in \mathbb{N}\}$ af O med åbne mængder, således at følgende betingelser er opfyldt:

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists j \in J : \overline{O'_n} \subseteq O_j$
- 2) For enhver kompakt mængde $K \subseteq O$ vil højst endelig mange af mængderne O'_n have punkter fælles med K .

Bevis: Lad (K_n) være den i sætning 7 indførte følge af kompakte mængder. Mængden K_2 overdækkes med endelig mange mængder $O_{j_1}, \dots, O_{j_{k_1}}$ taget fra overdækningen Δ . Mængden O_{j_1} indeholder den kompakte mængde $K_2 \setminus (O_{j_2} \cup \dots \cup O_{j_{k_1}})$, og vi kan derfor vælge O'_1 således at $\checkmark^*$

$$K_2 \setminus (O'_1 \cup O_{j_3} \cup \dots \cup O_{j_{k_1}}) \subseteq O'_2 \subseteq \overline{O'_2} \subseteq O_{j_2}.$$

Efter endelig mange skridt får vi en overdækning af K_2 med $O'_1, \dots, O'_{k_1}$, hvor $\overline{O'_\nu} \subseteq O_{j_\nu}$, $\nu=1, \dots, k_1$.

Dernæst overdækker vi $K_3 \setminus \overset{\circ}{K}_2$ med mængder $O_{j_{k_1+1}}, \dots, O_{j_{k_2}}$ fra Δ .

Så er $K_3 \setminus \overset{\circ}{K}_2$ også overdækket med de åbne mængder

$$O''_{k_1+1} = O_{j_{k_1+1}} \setminus K_1, \dots, O''_{k_2} = O_{j_{k_2}} \setminus K_1.$$

På samme måde som i første trin reducerer vi denne overdækning til en overdækning med åbne mængder $O'_{k_1+1}, \dots, O'_{k_2}$, hvor $\overline{O'_\nu} \subseteq O''_\nu$, $\nu=k_1+1, \dots, k_2$. Dernæst overdækker vi på samme måde $K_4 \setminus \overset{\circ}{K}_3$ med åbne mængder $O'_{k_2+1}, \dots, O'_{k_3}$, hvor hver af mængderne ν er indeholdt i en af mængderne O_j og ligger helt uden for K_2 . Ved fortsættelse af denne proces får vi åbenbart en overdækning med de ønskede egenskaber.

Bemærkning: Se L. Hörmander, side 4, Theorem 1.2.3.

Sætning 11. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, og lad $\Delta = \{O_j | j \in J\}$ være en overdækning af O med åbne mængder. Der eksisterer da en følge (η_n) af positive, vilkårligt ofte differentiable funktioner $\eta_n: O \rightarrow [0, \infty[$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

$$\checkmark^* K_2 \setminus (O_{j_2} \cup \dots \cup O_{j_{k_1}}) \subseteq O'_1 \subseteq \overline{O'_1} \subseteq O_{j_1}. \text{ Tilsvarende vælges } O'_2, \text{ således at}$$

- 1) $\forall \underline{x} \in O : \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\underline{x}) = 1$ Bemærkning: Se H. Bremermann, side 23.
- 2) For ethvert $n \in \mathbb{N}$ er støtten for η_n delmængde af et $O_j \in \Delta$.
- 3) Lad $K \subseteq O$ være kompakt. Da antager højst endelig mange η_n positive værdier på K .

Bevis: Vi indfører overdækningen Δ' fra sætning 10, og vi vælger først $\eta'_n: O \rightarrow [0, \infty[$ i overensstemmelse med sætning 9, således at η'_n er vilkårlig ofte differentiabel overalt, strengt positiv overalt i O'_n og identisk 0 uden for O'_n . Dermed vil følgen (η'_n) tilfredsstille alle sætningens betingelser undtagen betingelse 1). Nu er imidlertid $\sum \eta'_n$ positiv overalt i O , og vi kan derfor sætte $\eta_n = \frac{\eta'_n}{\sum \eta'_n}$. Så vil (η_n) opfylde alle betingelserne.

Definition 1. Følgen (η_n) i sætning 11 kaldes en opspaltning af enhedsfunktionen svarende til overdækningen Δ .

Sætning 12. Idet vi benytter betegnelserne fra sætning 11 gælder det, at vektorrummene $\mathcal{D}_{O_j}$, $j \in J$ udspænder $\mathcal{D}_O$.

Bevis: En funktion $\varphi \in \mathcal{D}_O$ kan nemlig skrives

$$\varphi = \eta_1 \varphi + \eta_2 \varphi + \dots$$

og her vil hver af funktionerne $\eta_n \varphi_n$ tilhøre et af vektorrummene $\mathcal{D}_{O_j}$. Da kun endelige mange af funktionerne η_n antager fra 0 forskellige værdier på den kompakte støtte for φ , bliver summen endelig. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde. Ved en generaliseret funktion på 0 forstår vi en lineær afbildning $T: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{C}$. En L^1 -funktion $f: 0 \rightarrow \mathbb{R}$ identificeres med den generaliserede funktion $\tilde{f}$ defineret ved $\tilde{f}(\varphi) = \int_0 f\varphi$.

Denne identifikation bliver en injektiv indlejring af $\mathcal{D}_0$ funktionsklasserne, thi hvis $\tilde{f}(\varphi) = 0$ for ethvert $\varphi \in \mathcal{D}_0$, er $f(\underline{x}) = 0$ næsten overalt.

Bemærkning: L. Hörmander: Linear Partial Differential

Operators, side 8, definition 1.4.1., hvor der dog er in defineret

$$D_j \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$$

(sammenlign matematik 6, K III 10, 1964-65 eller M 1.35, så 1965-66). Se endvidere H. Bremermann: Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms, side 4 og 11.

$T: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ har derfor på naturlig måde en restriktion $T|_{\mathcal{D}_{0_1}}: \mathcal{D}_{0_1} \rightarrow \mathbb{C}$. En generaliseret funktion på 0 er i denne forstand også lokalt bestemt på delmængder af 0 . Det er imidlertid ikke helt oplagt, at en generaliseret funktion på 0 kan bestemmes ud fra sine restriktioner til delmængder, der dækker 0 . Vi viser derfor følgende sætning:

Sætning 13. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde. Lad $\Delta = \{0_j | j \in J\}$ være en overdækning af 0 med åbne mængder. Lad for hvert $j \in J$ en generaliseret funktion T_j på 0_j være givet. Hvis det for hvert par $j, k \in J$ med $0_j \cap 0_k \neq \emptyset$ gælder, at restriktionerne af T_j og T_k til $0_j \cap 0_k$ er identiske, da eksisterer der en og kun én generaliseret funktion T på 0 , hvis restriktion til 0_j er identisk med T_j for ethvert $j \in J$.

Bevis: Lad (η_n) være en opspaltning af enhedsfunktionen svarende til inddelingen Δ . Til hvert $n \in \mathbb{N}$ svarer et $j(n)$, således at støtten for η_n er indeholdt i $O_{j(n)}$. En generaliseret funktion T med de forlangte egenskaber tilfredsstiller de følgende for $\varphi \in \mathcal{D}_0$:

$$T(\varphi) = \sum T(\varphi \eta_n) = \sum T_{j(n)}(\varphi \eta_n),$$

hvilket viser, at T er éntydigt bestemt. Vi definerer T som anført. For $k \in \mathbb{C}$ får vi da

$$T(k\varphi) = \sum T_{j(n)}(k\varphi \eta_n) = k \sum T_{j(n)}(\varphi \eta_n) = kT(\varphi)$$

og for $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_0$:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 + \varphi_2) &= \sum T_{j(n)}(\varphi_1 \eta_n + \varphi_2 \eta_n) = \sum (T_{j(n)}(\varphi_1 \eta_n) + T_{j(n)}(\varphi_2 \eta_n)) = \\ &= \sum T_{j(n)}(\varphi_1 \eta_n) + \sum T_{j(n)}(\varphi_2 \eta_n) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2). \end{aligned}$$

Dermed har vi vist, at T defineret på den foreskrevne måde bliver en lineær afbildning, og dermed er sætningen bevist.

Vi vil slutte med nogle eksempler på differentiation af generaliserede funktioner i det 1-dimensionale tilfælde. Vi begynder med funktionen Δ_a defineret ved

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq a \\ 0 & \text{for } x < a \end{cases}$$

Vi får

$$\tilde{\Delta}_a(\varphi) = \int_a^\infty \varphi(x) dx; \quad D\tilde{\Delta}_a(\varphi) = -\int_a^\infty D\varphi(x) dx = \varphi(a) = \delta_a(\varphi)$$

$$D\delta_a(\varphi) = -\delta_a(D\varphi) = -D\varphi(a), \dots, D^n \delta_a(\varphi) = (-1)^n D^n \varphi(a), \dots$$

Vi betragter dernæst en funktion $f: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ x^{-\alpha} & \text{for } x > 0; \alpha \in]0, 1[. \end{cases}$$

Så er

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^\infty x^{-\alpha} \varphi(x) dx,$$

altså

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(\varphi) &= -\int_0^\infty x^{-\alpha} D\varphi(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} ([-x^{-\alpha} \varphi(x)]_\delta^\infty - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} \varphi(x) dx) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-\alpha} \varphi(\delta) - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} \varphi(x) dx). \end{aligned}$$

Funktionen $-\alpha x^{-\alpha-1}$ er ikke L^1 og bestemmer derfor ikke selv en generaliseret funktion. Derfor optræder tillægsleddet, og en grænseovergang bliver nødvendig. Vi kan pynte en smule på resultatet:

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(\varphi) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-\alpha} \varphi(\delta) - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} \varphi(0) dx - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-\alpha} \varphi(\delta) + \varphi(0) [x^{-\alpha}]_\delta^\infty - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-\alpha} (\varphi(\delta) - \varphi(0)) - \alpha \int_\delta^\infty x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx) = \\ &= -\alpha \int_0^\infty x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx. \end{aligned}$$

Hvis støtten for φ tilhører et interval $[a, b]$, får vi yderligere

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(\varphi) &= -\alpha \int_0^b x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \alpha \varphi(0) \int_b^\infty x^{-\alpha-1} dx = \\ &= \varphi(0) b^{-\alpha} - \alpha \int_0^b x^{-\alpha-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \end{aligned}$$

og her er afhængigheden af tallet b selvfølgelig kun tilsyneladende.

For

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ \log x & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

får vi ved tilsvarende regninger

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) \log x dx$$

og

$$\begin{aligned} D\tilde{f}(\varphi) &= -\int_0^\infty \log x D\varphi(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} ([-\varphi(x) \log x]_{-\delta}^\infty + \int_\delta^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\varphi(\delta) \log \delta + \int_\delta^\infty \frac{\varphi(x)}{x} dx). \end{aligned}$$

Hvis støtten for φ er indeholdt i $[a, b]$, får vi

$$D\tilde{f}(\varphi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\varphi(\delta) \log \delta + \int_{\delta}^b \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\delta}^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx) = \\ \varphi(0) \log b + \int_0^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

For $f(x) = \log|x|$ får vi

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log|x| dx$$

og

$$D\tilde{f}(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \log|x| D\varphi(x) dx = \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} (-[\varphi(x) \log|x|]_{-\infty}^{-\delta} - [\varphi(x) \log|x|]_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx) = \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} ((\varphi(\delta) - \varphi(-\delta)) \log \delta + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx) = \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} (\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx).$$

Funktionen $\frac{1}{x}$ er ikke L^1 , men for differentiabelt φ kan $\int \frac{1}{x} \varphi$ jo dannes som en Cauchy-hovedværdi, og derved fås en generaliseret funktion, der altså faktisk er differentialkvotient af $\log|x|$.

4. kapitel.

Topologien på vektorrummet $\mathcal{D}_K$.

Med $K \subseteq \mathbb{R}^m$ betegner vi en fast kompakt mængde. Vektorrummet $\mathcal{D}_K$ omfatter alle vilkårlig ofte differentiable funktioner $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{C}$ med kompakt støtte, som er en delmængde af K .

Topologien på $\mathcal{D}_K$ må vælges således, at de generaliserede funktioner, der fås ved differentiation af en målelig funktion f bliver kontinuerte på K . For $m = 1$ får vi specielt $D^n f(\varphi) = (-1)^n \int f(x) D^n \varphi(x) dx$, og vi ønsker altså, at denne lineære afbildning skal være kontinuert. Det er derfor naturligt at vælge topologien sådan, at konvergens af en følge (φ_n) betyder ligelig konvergens ikke blot af selve følgen (φ_n) , men også af enhver følge, der fås ved gentagen ledvis differentiation af følgen φ_n .

Vi indfører nogle afkortede betegnelser for at undgå skrivi:

$$\underline{p} = (p_1, \dots, p_m), D^{\underline{p}} = D_1^{p_1} \dots D_m^{p_m}, x^{\underline{p}} = x_1^{p_1} \dots x_m^{p_m}, |\underline{p}| = p_1 + \dots + p_m.$$

For $P \in \mathbb{N}$, $r > 0$ indfører vi en omegn $U_{P,r}$ af 0 defineret ved

$$U_{P,r} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|D^{\underline{p}} \varphi\|_U < r \text{ for ethvert } \underline{p} \text{ med } |\underline{p}| \leq P\}.$$

Her regner vi $D^0 \varphi = \varphi$. En omegn U af 0-funktionen er en mængde, der indeholder en af omegnene $U_{P,r}$. Mængden af sådanne omegne betegnes $\hat{U}$. For $\varphi \in \mathcal{D}_K$ er $\hat{U}(\varphi) = \{\varphi + U \mid U \in \hat{U}\}$ mængden af omegne af φ , altså specielt $\hat{U} = \hat{U}(0)$. Enhver omegn $U \in \hat{U}(\varphi)$ indeholder således en mængde af formen

$$\{\psi \in \mathcal{D}_K \mid \|D^{\underline{p}}(\psi - \varphi)\|_U < r \text{ for ethvert } \underline{p} \text{ med } |\underline{p}| \leq P\}.$$

De fire første omegnsbetingelser

- 1) $\hat{U}(\varphi) \neq \emptyset$
- 2) For $U \in \hat{U}(\varphi)$ er $\varphi \in U$
- 3) Af $U \in \hat{U}(\varphi)$ og $V \supseteq U$ følger $V \in \hat{U}(\varphi)$
- 4) Af $U, V \in \hat{U}(\varphi)$ følger $U \cap V \in \hat{U}(\varphi)$

77₁₂ Bemærkning: $U_{P,r} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \max_{|\underline{p}| \leq P} \|D^{\underline{p}} \varphi\|_U < r\}$

er trivielt opfyldte. Det er endvidere let at se, at omegnen $U_{P,r}$ er omegn af ethvert af sine punkter, og deraf følger, at den femte omegnsbetingelse også er opfyldt.

Af relationen $(\varphi + U_{P, \frac{1}{2}r}) + (\psi + U_{P, \frac{1}{2}r}) \subseteq \varphi + \psi + U_{P,r}$ følger, at additionen $\varphi + \psi$ er en kontinuert afbildning af $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_K$ ind i $\mathcal{D}_K$. Dermed har vi bevist, at $\mathcal{D}_K$ er en topologisk gruppe. For at vise, at $\mathcal{D}_K$ er et topologisk vektorrum, må vi endnu vise, at $(\lambda, \varphi) \rightarrow \lambda\varphi$ er en kontinuert afbildning af $\mathbb{C} \times \mathcal{D}_K$ ind i $\mathcal{D}_K$. For at vise kontinuiteten i punktet (λ_0, φ_0) skal vi se på

$$(\lambda_0 + \lambda)(\varphi_0 + \varphi) = \lambda_0\varphi_0 + \lambda_0\varphi + \lambda\varphi_0 + \lambda\varphi,$$

og det er derfor nok at vise, at afbildningerne $\varphi \rightarrow \lambda_0\varphi$, $\lambda \rightarrow \lambda\varphi_0$ er kontinuerte i 0, samt at $\lambda\varphi$ er kontinuert i $(0,0)$. Nu er $\lambda_0 U_{P,r} = U_{P, |\lambda_0|r}$, og derfor er $\varphi \rightarrow \lambda_0\varphi$ kontinuert i $0 \in \mathcal{D}_K$.

Hvis E er enhedscirklen i den komplekse plan, har vi åbenbart $E \cdot U_{P,r} = U_{P,r}$. Altså er $(\lambda, \varphi) \rightarrow \lambda\varphi$ kontinuert i $(0,0)$.

Vi mangler således at vise, at afbildningen $\lambda \rightarrow \lambda\varphi_0$ er kontinuert i $0 \in \mathbb{C}$. Dette kommer ud på at vise, at det for enhver omegn $U_{P,r}$ gælder, at $\lambda\varphi_0 \in U_{P,r}$ for $|\lambda| \leq \delta$, hvor δ er et passende tal. Dette er ensbetydende med, at $\varphi_0 \in \Lambda U_{P,r}$ for $|\Lambda| \geq \frac{1}{\delta}$, altså, at $U_{P,r}$ absorberer punktet φ_0 . Dette gælder imidlertid, idet vi blot behøver at vælge $\frac{1}{\delta}$ således at $\frac{1}{\delta} \cdot r$ overstiger $\|D^p \varphi_0\|_U$ for ethvert p med $|p| \leq P$. Dermed har vi bevist, at $\mathcal{D}_K$ er et topologisk vektorrum.

Vi understreger, at topologien på $\mathcal{D}_K$ ikke kan frembringes af en norm. Enhver omegn $U \in \hat{U}$ indeholder nemlig en omegn $U_{P,r}$, som igen indeholder omegnen $U_{P+1,r}$, der ikke absorberer $U_{P,r}$ og derfor heller ikke U . Sætning 13 i kapitel 2 viser nu, at $\mathcal{D}_K$ ikke er et normeret vektorrum.

Lad $r < 1$ være et positivt tal, og lad P være et positivt helt tal. For $\varphi \in K(o, 2^{-P}r)$ har vi for $|p_0| \leq P$, at

$$2^{-|p_0|} \inf\{1, \sup\{\|D^p \varphi\|_U \mid |p| = |p_0|\}\} < 2^{-P}r,$$

altså

$$\|D^{p_0} \varphi\|_U < r.$$

Altså gælder $U_{P,r} \supseteq K(o, 2^{-P}r)$. Dermed er påstanden bevist.

Sætning 1. Enhver af de partielle differentialoperatorer $D_j: \mathcal{D}_K$ ind i $\mathcal{D}_K$ er en kontinuert afbildning. Det samme gælder for de partielle differentialoperatorer af højere orden.

Bevis: Vi har $D_j(U_{P+1,r}) \subseteq U_{P,r}$. Dette viser, at D_j er kontinuert. Sætningens sidste påstand følger af, at en partiel differentialoperator af højere orden fås ved sammensætning af operatorer af første orden.

Sætning 2. At en følge (φ_n) på $\mathcal{D}_K$ konvergerer mod $\varphi \in \mathcal{D}_K$ betyder, at det for ethvert $p = (p_1, \dots, p_m)$ gælder, at funktionsfølgen $(D^p \varphi_n)$ konvergerer ligeligt mod $D^p \varphi$. At følgen φ_j er fundamentalfølge, betyder, at hver af følgerne $(D^p \varphi_n)$ er fundamentalfølge i den ligelige topologi.

Bevis: Umiddelbart.

Sætning 3. Rummet $\mathcal{D}_K$ er fuldstændigt.

Bevis: Lad (φ_n) være en fundamentalfølge på $\mathcal{D}_K$. For ethvert p er $(D^p \varphi_n)$ en fundamentalfølge på det ligelige funktionsrum, altså ligelig konvergent mod en grænsefunktion φ^p . Det er klart, at

$\varphi^{\mathbb{P}}$ har støtten indeholdt i K . Vi fastholder de variable undtagen x_j . Følgen $(D_j D^{\mathbb{P}} \varphi_n)$ konvergerer ligeligt, og ifølge en kendt sætning konvergerer den derfor mod $D_j \varphi^{\mathbb{P}}$. Ved gentagen anvendelse af dette resultat får vi, at $\varphi^{\mathbb{P}} = D^{\mathbb{P}} \varphi^0$. Dermed er sætningen bevist. Angående pseudonormer se endvidere opgaverne til T 3 i matematik 6.

Vi vil et kort øjeblik betragte et vilkårligt vektorrum E .

En afbildning $\rho: E \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes en pseudonorm, når den tilfredsstiller betingelserne

- 1) $\rho(0) = 0$
- 2) $\rho(x) \geq 0$
- 3) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$
- 4) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Hvis pseudonormen tillige tilfredsstiller betingelsen $\rho(x) > 0$ for ethvert $x \neq 0$, er den en norm. I det almindelige tilfælde er $\rho^{-1}(0)$ et underrum af E , nulrummet for ρ , og ρ kan på naturlig måde opfattes som en norm på restklasserummet $E/\rho^{-1}(0)$.

En pseudonorm definerer en pseudometrik og dermed en topologi på E ganske som en norm gør det, men E bliver ikke et Hausdorffrum.

Lad $\{\rho_j | j \in J\}$ være en familie af pseudonormer på vektorrummet E . Hver af pseudonormerne definerer en topologi på E . Den groveste topologi, som er finere end alle de ved pseudonormerne definerede topologier kaldes den ved familien $\{\rho_j | j \in J\}$ definerede topologi. Hvis betingelsen

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \exists j \in J : \rho_j(x) \neq 0$$

er opfyldt, bliver E et Hausdorffrum.

Som basis for omegnene af 0 kan vi bruge alle mængder, der kan fås som fællesmængder for højst endelig mange af de ved pseudonormerne definerede kugler, altså mængder af formen

$$\{\underline{x} | \rho_{j_1}(\underline{x}) < r_1 \wedge \dots \wedge \rho_{j_n}(\underline{x}) < r_n\}.$$

I rummet $\mathcal{D}_K$ har vi for hvert $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ en pseudonorm $\rho_{\underline{p}}: \mathcal{D}_K$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved

$$\rho_{\underline{p}}(\varphi) = \|D^{\underline{p}}\varphi\|_U.$$

I virkeligheden er $\rho_{\underline{p}}$ en norm i dette tilfælde, da $\rho_{\underline{p}}(\varphi) = 0$ vil kræve, at φ var et polynomium, altså en analytisk funktion, og vi ved jo, at $\mathcal{D}_K$ ikke indeholder andre analytiske funktioner end nulfunktionen. Det gælder alment, at til enhver kontinuert pseudonorm

$|\rho|$ svarer en og kun én konveks omegn U af 0, nemlig $U = \{\underline{x} | \rho(\underline{x}) \leq 1\}$.

Sætning 4. Basisomegnene $U_{\underline{p}, r}$ er konvekse.

Bevis: Hver basisomegn er fællesmængde for endelig mange kugler i topologier svarende til normerne $\rho_{\underline{p}}$. Sætningen følger derfor af, at en kugle i et normeret vektorrum er konveks. Dette vises på følgende måde: Af $\|x\| < r$, $\|y\| < r$, $\lambda \in [0, 1]$ følger

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < \\ &\lambda r + (1-\lambda)r = r. \end{aligned}$$

Ved de følgende undersøgelser af rummet $\mathcal{D}_K$ vil følgende sætning om generelle fuldstændige metriske rum vise sig nyttig.

Sætning 5 kaldes også Baires sætning.

Sætning 5. Lad E være et ikke tomt fuldstændigt metrisk rum, og lad (A_n) være en voksende følge af afsluttede delmængder af E . Hvis $\bigcup A_n = E$, har en af mængderne A_n et indre punkt.

Bevis: Lad os antage, at ingen af mængderne A_n har indre punkter. Vi vælger $a_1 \in E \setminus A_1$, og da $E \setminus A_1$ er åben, kan vi vælge $r_1 > 0$, således at $K(a_1, r_1) \subseteq E \setminus A_1$. Da a_1 ikke er et indre punkt i A_2 , kan

vi vælge $a_2 \in K(a_1, \frac{1}{2}r_1) \setminus A_2$, og da denne mængde er åben, kan vi vælge $r_2 \in]0, \frac{1}{2}r_1[$, således at $K(a_2, r_2) \subseteq K(a_1, \frac{1}{2}r_1) \setminus A_2$. Ved at fortsætte denne proces får vi en følge

$$K(a_1, r_1) \supseteq K(a_2, r_2) \supseteq K(a_3, r_3) \supseteq \dots,$$

således at $r_{n+1} \leq \frac{1}{2}r_n$, $n = 1, 2, \dots$ og $K(a_n, r_n) \cap A_n = \emptyset$. For $p > 0$ gælder $a_{n+p} \in K(a_n, r_n)$, altså $\text{dist}(a_n, a_{n+p}) \leq r_n = 2^{-n+1}r_1$. Altså er (a_n) en fundamentalfølge, og derfor konvergent mod et grænsepunkt a . For ethvert n er dette grænsepunkt indeholdt i afslutningen af $K(a_n, \frac{1}{2}r_n)$, altså i $K(a_n, r_n)$, som ikke har punkter fælles med A_n . Altså gælder $a \notin \bigcup A_n$ i modstrid med $\bigcup A_n = E$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 1. En mængde A i et vektorrum E over de komplekse tal kaldes rund, såfremt

$$\forall a \in A \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda a \in A.$$

En rund mængde kaldes hos Bourbaki *équilibré*; i matematik 6 kaldes mængden *stjerneformet*.

Basisomegnene $U_{P,r}$ er åbenbart runde.

Sætning 6. Hvis en punktmængde i $\mathcal{D}_K$ er rund, konveks, absorberende og afsluttet, er den en omegn af 0.

Bemærkning: En rund, konveks, absorberende og afsluttet mængde kaldes en blok (hos Bourbaki "tonneau"). $\mathcal{D}_K$ er et blokrum.

Bevis: Lad U være en punktmængde med de nævnte egenskaber. Da er absorberende, er $\bigcup_{n=1}^{\infty} nU = \mathcal{D}_K$. Da U er afsluttet, er hver af mængderne nU afsluttet. Af sætning 5 følger da, at en mængde nU indeholder et indre punkt $\psi \in \mathcal{D}_K$. Men så er $\varphi = \frac{1}{n}\psi$ et indre punkt i U . Da U er rund, er også $-\varphi$ et indre punkt i U . Vi har derfor et $r > 0$, således at kuglerne $K(-\varphi, r)$ og $K(\varphi, r)$ er indeholdt i U . Da U er konveks, følger heraf, at $K(0, r) \subseteq U$. Altså er U en omegn af

0. Dermed er sætningen bevist.

Den metrik, vi har indført på $\mathcal{D}_K$, er blot en af mange mulige, og det er således også en tilfældighed, at hele $\mathcal{D}_K$ er blevet begrænset ved denne metrik. Vi understreger, at det er yderst vigtigt for os, at rummet $\mathcal{D}_K$ er metriserbart, men at selve den indførte metrik er uden større betydning - og vi har da heller ikke brugt den til noget. Det er helt væsentligt, at vi glemmer den, når vi nu skal indføre begrebet "begrænset mængde" på $\mathcal{D}_K$.

Et Banach-rum er normeret og fuldstændigt.

Et Fréchet-rum er metrisabelt og fuldstændigt.

En mængde i et Banachrum er begrænset, hvis den er indeholdt

i en kugleomegn, og da enhver kugleomegn (om 0) i et Ba-

nachrum absorberes af enhver anden kugleomegn (om 0), er

en mængde i et Banachrum begrænset, hvis den absorberes

af en kugleomegn (om 0).

For P, r givne, lad $U_{P,r}$ betegne et positivt tal λ , således at $A \subseteq \lambda U_{P,r}$, og denne betingelse er ensbetydende med betingelsen

$$(1) \quad \forall \varphi \in A \quad \forall \underline{p} : |\underline{p}| \leq P \Rightarrow \|D^{\underline{p}}\varphi\|_U \leq \lambda r.$$

Heraf fremgår umiddelbart, at 1) $\Rightarrow$ 2). Er på den anden side 2)

opfyldt, kan vi vælge $\Lambda \in \mathbb{R}$, således at $\|D^{\underline{p}}\varphi\|_U \leq \Lambda$ for alle $\varphi \in A$ og alle $\underline{p}$ med $|\underline{p}| \leq P$. Så er (1) opfyldt med $\lambda = \frac{1}{r}$. Dermed har vi vist, at 2) $\Rightarrow$ 1).

Definition 2. En punktmængde $A \subseteq \mathcal{D}_K$ kaldes begrænset, hvis den tilfredsstiller betingelserne i sætning 7.

Vi bemærker, at ingen omegn af $0 \in \mathcal{D}_K$ er begrænset. Vi bemærker, yderligere, at betingelsen 1) anvendt på et Banachrum (eller blot et normeret vektorrum) giver begrænsethed i sædvanlig forstand.

Sætning 8. Enhver delmængde af en begrænset mængde $A \subseteq \mathcal{D}_K$ er begrænset. Mængden A er begrænset, hvis og kun hvis enhver numerabel delmængde af A er begrænset.

Bevis: Den første påstand er triviell, og dermed er også "kun hvis" i den anden påstand triviell. Lad os antage, at A ikke er begrænset. Der findes da en omegn U af 0 , som ikke absorberer A . For ethvert $n \in \mathbb{N}$ kan vi derfor vælge $\varphi_n \in A \setminus nU$. Punktmængden $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ absorberes ikke af U og er derfor ikke begrænset.

Hvis A og B er begrænsede, og U er en vilkårlig omegn, kan vi, da vi befinder os i et t.v.r., finde en omegn V , så at $V+V \subseteq U$. Vi kan derefter vælge $\Lambda_1, \Lambda_2 \in]0, \infty[$, så at $A \subseteq \lambda V$ for $|\lambda| \geq \Lambda_1$ og $B \subseteq \lambda V$ for $|\lambda| \geq \Lambda_2$. Hvis nu

$|\lambda| \geq \Lambda_1 \vee \Lambda_2$, gælder der

$$A+B \subseteq \lambda V + \lambda V = \lambda(V+V) \subseteq \lambda U \quad \text{Q.E.D.}$$

så at $A \in \lambda U$ for $\lambda \geq \Lambda_1$ og $B \in \lambda U$ for $\lambda \geq \Lambda_2$. Vi har da $A \cup B \subseteq \lambda U$ for $\lambda \geq \max(\Lambda_1, \Lambda_2)$ og $A+B \subseteq \lambda U$ for $\lambda \geq \Lambda_1 + \Lambda_2$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. Enhver endelig mængde er begrænset.

Bevis. Da enhver omegn er absorberende, er en mængde, der består af et enkelt punkt, begrænset. Sætningen følger derefter af sætning 9.

Sætning 11. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en følge (φ_n) går mod 0 på $\mathcal{D}_K$, er, at vi har en fremstilling $\varphi_n = \lambda_n \psi_n$, $n = 1, 2, \dots$, hvor (λ_n) er en følge af positive tal, som går mod 0, mens (ψ_n) er en begrænset følge på $\mathcal{D}_K$.

Bevis: Vi viser først tilstrækkelig. Lad $(\lambda_n) \rightarrow 0$ være en følge af positive tal, lad (ψ_n) være en begrænset følge på $\mathcal{D}_K$ og lad U være en omegn af 0 på $\mathcal{D}_K$. Vi kan da vælge $\rho \in]0, \infty[$, således at $\{\psi_n\} \subseteq \sigma U$ for ethvert $\sigma \geq \rho$. Vi har da $\lambda_n \psi_n \in U$ for $\lambda_n \leq \frac{1}{\rho}$, altså $\lambda_n \psi_n \in U$ fra et vist n at regne. Dermed er "tilstrækkelig" bevist. For at vise "nødvendigt" må vi udnytte, at der findes en numerabel basis for omegnene af 0. Som en sådan basis kan vi benytte omegnene $U_{q, \frac{1}{q}}$, $q = 1, 2, \dots$. Disse danner endda en monotont aftagende følge.

Lad (φ_n) være en følge, som går mod 0. For

$$\varphi_n \in U_{q^2, \frac{1}{q^2}} \setminus U_{(q+1)^2, \frac{1}{(q+1)^2}}$$

sætter vi

$$\lambda_n = \frac{1}{q}, \quad \psi_n = q\varphi_n \in U_{q, \frac{1}{q}}.$$

For $\varphi_n \notin U_{1,1}$ sætter vi $\lambda_n = 1$, $\psi_n = \varphi_n$. For $\varphi_n = 0$ sætter vi $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $\psi_n = 0$. Derved har vi åbenbart sikret os, at $(\lambda_n) \rightarrow 0$.

Men for ethvert q har vi $\psi_n \in U_{q, \frac{1}{q}}$ fra et vist trin, altså gælder

$(\psi_n) \rightarrow 0$ og følgen ψ_n er derfor begrænset. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 12. En lineær afbildning $T: \mathcal{D}_K \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert, hvis og kun hvis det for enhver begrænset mængde $A \subseteq \mathcal{D}_K$ gælder, at billedmængden $T(A)$ er begrænset.

Bevis: Vi antager først, at T er lineær og kontinuert, og at $A \subseteq \mathcal{D}_K$ er begrænset. Lad $E \subset \hat{C}$ være enhedscirkelskiven. Da er $T^{-1}(E)$ en omegn af 0 og absorberer derfor A . Vi kan altså vælge $\lambda \in]0, \infty[$, således at $A \subseteq \lambda T^{-1}(E)$, men dette medfører, at $T(A) \subseteq \lambda E$, altså at $T(A)$ er begrænset. Lad os dernæst omvendt antage, at billedet ved T af enhver begrænset mængde er begrænset, samt at T er lineær. Da $\mathcal{D}_K$ er et metrisabelt rum, kan vi vise kontinuiteten af T i punktet 0 ved at vise, at det for enhver følge $(\varphi_n) \rightarrow 0$ på $\mathcal{D}_K$ gælder, at $(T(\varphi_n)) \rightarrow 0$. Nu har vi ifølge sætning ¹¹12 en fremstilling $(\varphi_n) = (\lambda_n \psi_n)$, hvor (ψ_n) er begrænset og (λ_n) går mod 0 på $\mathbb{R}$. Så er $T(\varphi_n) = \lambda_n T(\psi_n)$, og ifølge antagelsen er $(T(\psi_n))$ en begrænset følge på $\hat{C}$. Men heraf følger netop, at $(T(\varphi_n)) \rightarrow 0$, og dermed er sætningen bevist.

De foregående resultater kan også udledes af visse generelle egenskaber ved metrisable topologiske vektorrum. Vi bemærker først at det gælder helt generelt, at enhver omegn af 0 er absorberende. Vi definerer generelt en begrænset mængde som en mængde, der absorberes af enhver omegn. Sætningerne 8, 9, 10 og 11 gælder da uændret. Vi har endvidere følgende sætning:

Sætning ¹³14. Lad E være et metrisabelt vektorrum over $\hat{C}$. Hvis en mængde A absorberer enhver punktfølge, som går mod nul, er A en omegn af 0 i E .

Bevis: Da E er metrisabelt, eksisterer der en numerabel basis $\{U_n\}$ for omegnene af 0 . Lad $A \subseteq E$ være en mængde, som ikke er en omegn af 0 . For ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder da, at nA heller ikke er en omegn

af $\underline{0}$, og derfor er $U_n \setminus nA \neq \emptyset$ for ethvert n . Vi vælger $x_n \in U_n \setminus nA$, og (x_n) er da en punktfølge, der går mod $\underline{0}$, men (x_n) absorberes ikke af A . Dermed er sætningen bevist.

Sætning ¹⁴ 15. I et metrisabelt vektorrum E over $\mathbb{C}$ vil en mængde være en omegn af $\underline{0}$, hvis og kun hvis den absorberer enhver begrænset mængde.

Bevis: "Kun hvis" følger umiddelbart af definitionen af begrænset mængde. "Hvis" følger umiddelbart af sætning ¹³ 14.

Af sætning ¹⁴ 15 kan "hvis" i sætning ¹² 13 umiddelbart udledes for generelle metrisable vektorrum. Lad U være en cirkelomegn af 0 i $\mathbb{C}$, og lad $A \subseteq E$ være begrænset. Hvis $T: E \rightarrow \mathbb{C}$ afbilder enhver begrænset mængde på en begrænset mængde, er $T(A)$ begrænset. Vi har derfor et positivt tal λ , således at $T(A) \subseteq \lambda U$. Dette medfører imidlertid, at $A \subseteq \lambda T^{-1}(U)$. Vi har således vist, at $T^{-1}(U)$ absorberer enhver begrænset mængde, og ifølge sætning ¹⁴ 15 medfører det, at $T^{-1}(U)$ er en omegn af $\underline{0}$. Altså er T kontinuert.

Vi vil vise, at de kompakte mængder på $\mathcal{D}_K$ netop er de begrænsede, afsluttede mængder. Dette bygger på Ascolis sætning, som vi derfor først vil formulere og bevise.

Definition ³ 16. Lad E_1 og E_2 være metriske rum. En familie $\{f_j | j \in J\}$ af afbildninger $f_j: E_1 \rightarrow E_2$ kaldes equikontinuert (ensartet ligelig kontinuert), hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall x, y \in E_1 \forall j \in J : \text{dist}_1(x, y) \leq \delta \Rightarrow \text{dist}_2(f_j(x), f_j(y)) \leq \varepsilon$$

¹⁵
Sætning 17. Lad E_1 være et prækompakt, metrisk rum og E_2 et metrisk rum og lad $A \subseteq E_1$ være en overalt tæt punktmængde. Lad $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ være en equikontinuert familie af afbildninger $f_n: E_1 \rightarrow E_2$. Hvis det for hvert $x \in A$ gælder, at følgen $(f_n(x))$ er en fundamentalfølge på E_2 , da er (f_n) en fundamentalfølge i det ligelige funktionsrum $\hat{C}(E_1, E_2)$.

Bevis: Lad ε være et positivt tal og lad x være et vilkårligt punkt af E_1 . Vi vælger $\delta > 0$, således at det for alle $x, y \in E_1$ og alle $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $\text{dist}_1(y, z) \leq \delta \Rightarrow \text{dist}_2(f_n(y), f_n(z)) \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Vi vælger $z \in A \cap K(x, \frac{1}{2}\delta)$. Da følgen $(f_n(z))$ er en fundamentalfølge, kan vi vælge $N(x)$, således at det for $p, q \geq N(x)$ gælder, at

$$\text{dist}_2(f_p(z), f_q(z)) \leq \frac{1}{3}\varepsilon. \text{ For et vilkårligt } y \in K(x, \frac{1}{2}\delta)$$

har vi da

$$\begin{aligned} \text{dist}_2(f_p(y), f_q(y)) &\leq \text{dist}_2(f_p(y), f_p(z)) + \text{dist}_2(f_p(z), f_q(z)) \\ &\quad + \text{dist}_2(f_q(z), f_q(y)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da E_1 er prækompakt, kan vi vælge $x_1, \dots, x_k$, således at kuglerne $K(x_1, \frac{1}{2}\delta), \dots, K(x_k, \frac{1}{2}\delta)$ dækker E_1 . Med $N = \max\{N(x_j) | j = 1, \dots, k\}$ har vi da, at $p, q \geq N$ medfører, at $\text{dist}_2(f_p(y), f_q(y)) \leq \varepsilon$ for ethvert $y \in E_1$, og dermed er sætningen bevist.

¹⁶
Sætning 18. (Ascoli). Lad E_1 og E_2 være prækompakte metriske rum, og lad $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ være en equikontinuert familie af afbildninger $f_n: E_1 \rightarrow E_2$. Da har følgen (f_n) en delfølge, som er en fundamentalfølge i det ligelige funktionsrum $\hat{C}(E_1, E_2)$.

Bevis: For ethvert n kan E_1 overdækkes med endelige mange kugler med radius 2^{-n} . For $n = 1, 2, \dots$ får vi en følge af kuglecentre,

som er overalt tæt i E_1 . Altså eksisterer der en numerabel mængde $A = \{x_1, x_2, \dots\}$, som er overalt tæt i E_1 . Ved successive fortyndinger af følgen f_n får vi funktionsfølger $(f_{n_1}), (f_{n_2}), \dots$, hvor $(f_{n_p}(x_j))$ er en fundamentalfølge for $j = 1, 2, \dots, p$. Diagonalfølgen (f_{nn}) opfylder da den betingelse, at $(f_{nn}(x))$ er en fundamentalfølge for ethvert $x \in A$, og ifølge sætning ¹⁵~~17~~ er (f_{nn}) så en fundamentalfølge i $\hat{C}(E_1, E_2)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning ¹⁷~~19~~. Hvis det for en familie $\{f_j | j \in J\}$ af funktioner $f_j: \mathbb{R}^m$ ind i $\hat{C}$ gælder, at der eksisterer en konstant Λ , således at

$$\forall \nu \in \{1, \dots, m\} \forall j \in J : \|D_\nu^* f_j\| \leq \Lambda,$$

da er familien equikontinuert.

Bevis: Det er nok at vise sætningen i det specielle tilfælde, hvor funktionerne f_j er reelle. Middelværdisætningen giver da en relation af formen

$$f_j(\underline{y}) - f_j(\underline{x}) = \sum_{\nu=1}^m D_\nu^* f_j(\xi_{j,\nu})(y_\nu - x_\nu),$$

og heraf fås vurderingen

$$|f_j(\underline{y}) - f_j(\underline{x})| \leq m\Lambda \|\underline{y} - \underline{x}\|,$$

hvilket medfører, at familien er equikontinuert. Dermed er sætningen bevist.

Sætning ¹⁸~~20~~. I rummet $\mathcal{D}_K$ er enhver begrænset mængde prækompakt.

Bevis: Det er nok at vise, at enhver begrænset følge på $\mathcal{D}_K$ har en delfølge, som er fundamentalfølge. Lad (φ_n) være en begrænset følge. For ethvert p tilfredsstiller følgen $(D_\varphi^p \varphi_n)$ betingelsen i sætning ¹⁷~~19~~ og ifølge Ascolis sætning har $(D_\varphi^p \varphi_n)$ således en delfølge, som

er en fundamentalfølge i det ligelige funktionsrum $\hat{C}(\hat{R}^m, \hat{C})$. Ved fortsatte fortyndinger får vi en følge $(\varphi_{n1}), (\varphi_{n2}), \dots$, således at det for (φ_{nP}) gælder, at $(D^p \varphi_{nP})$ er fundamentalfølge i det ligelige funktionsrum. Men så er (φ_{nn}) en fundamentalfølge i $\mathcal{D}_K$, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 19. I rummet $\mathcal{D}_K$ er enhver prækompakt mængde begrænset.

Bevis: Lad $A \subseteq \mathcal{D}_K$ være en prækompakt mængde. Lad $p = (p_1, \dots, p_m)$ være fast valgt. Vi betragter mængden $A^p = \{D^p \varphi \mid \varphi \in A\}$. Enhver følge (φ_n) på A har en delfølge (ψ_n) , som er fundamentalfølge i funktionsrummet A^p med den ligelige metrik. Dette viser, at A^p er prækompakt i den ligelige metrik, altså at A^p er begrænset i $\mathcal{D}_K$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 20. En mængde i $\mathcal{D}_K$ er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet og begrænset.

Bevis: Da $\mathcal{D}_K$ er et fuldstændigt rum, er en punktmængde i $\mathcal{D}_K$ kompakt, hvis og kun hvis den er prækompakt og afsluttet. Derefter følger sætningen umiddelbart af sætningerne 18 og 19.

De topologiske vektorrum, for hvilke det gælder, at kompakt er ensbetydende med afsluttet og begrænset, kaldes Montelrum. Rummet $\mathcal{D}_K$ er således et Montelrum. De endeligdimensionale, normerede vektorrum er ligeledes Montelrum. Et andet eksempel er rum af holomorfe funktioner i et område i den komplekse plan med en topologi, der svarer til ligelig konvergens på enhver kompakt delmængde af

Bemærkning: Et Montelrum skal også være et blokrum.

området. Dette resultat skyldes netop Montel og er begrundelsen for navnet Montelrum. I et uendelig dimensionalt Banachrum er den afsluttede enhedskugle aldrig kompakt, og da den altid er begrænset, er disse rum aldrig Montelrum.

Et metrisabelt vektorrum, som er fuldstændigt, kaldes et Fréchetrum. Rummene $\mathcal{D}_K$ er altså Fréchetrum.

5. kapitel.

Topologisk vektorrum. Rummet $\mathcal{D}'_K$.

I det følgende kommer vi til at beskæftige os med adskillige topologiske vektorrum, som ikke engang er metrisable. Vanskeligheden melder sig ved det duale vektorrum $\mathcal{D}'_K$ til rummet $\mathcal{D}_K$ og senere ved vektorrummet $\mathcal{D}$ af alle vilkårlig ofte differentiable funktioner med kompakt støtte. Vi vil derfor behandle teorien for generelle topologiske vektorrum i dette og de følgende kapitler, og vi vil så efterhånden illustrere teorien ved anvendelser på vektorrummene $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{D}'_K$, $\mathcal{D}$ og andre rum, der spiller en rolle i distributionsteorien.

Definition 1. Et topologisk vektorrum $(E, \mathcal{T})$ er et vektorrum E over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) med en topologi $\mathcal{T}$, således beskaffen, at afbildningerne $\alpha : E \times E \rightarrow E$ ind i E og $\mu : \mathbb{C} \times E \rightarrow E$ (eller $\mathbb{R} \times E$) ind i E definerede ved $\alpha(x, y) = x + y$ og $\mu(\lambda, x) = \lambda x$ er kontinuerte.

Af definitionen følger, at afbildningen $x \rightarrow a + x$ for ethvert $a \in E$ er en homeomorfi. Heraf følger, at mængden $\hat{U}(a)$ af omegne af a er givet ved $\hat{U}(a) = a + \hat{U}$, hvor $\hat{U}$ er mængden af omegne af 0 .

For $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ er $x \rightarrow \lambda x$ en homeomorfi. Altså gælder relationen $\lambda \hat{U} = \hat{U}$.

Da μ er kontinuert, kan vi for $U \in \hat{U}$ vælge $r > 0$ og $U_1 \subseteq U$, $U_1 \in \hat{U}$, således at $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq r\} \cdot U_1 = U_2 \subseteq U$. Her er $rU_1 \subseteq U_2$, altså er $U_2 \in \hat{U}$. Endvidere er U_2 en rund omegn. De runde omegne af 0 udgør således en basis for omegnene af 0 .

For ethvert $x \in E$ er den ved $\lambda \rightarrow \lambda x$ definerede afbildning $\mathbb{R} \rightarrow E$

kontinuert. For enhver omegn $U \in \hat{U}$ kan vi derfor vælge $r > 0$, således at $\lambda x \in U$ for $|\lambda| \leq r$. Dette er ensbetydende med, at $x \in \lambda U$ for $\lambda \geq \frac{1}{r}$. Altså er enhver omegn af 0 absorberende.

Da α er kontinuert i $\underline{0}$, vil der til enhver omegn $U \in \hat{U}$ svare en omegn $V \in \hat{U}$, således at $V+V \subseteq U$.

Hvis U er en rund omegn af 0, er λU også en rund omegn.

Vi vil sædvanligvis indføre topologien på E ved at angive en basis for mængden $\hat{U}$ af omegne af 0. En sådan basis må selvfølgelig opfylde en række betingelser for at kunne benyttes. Ovenstående overvejelser skal være vejledende med hensyn til valget af betingelser. Vi må imidlertid også kræve, at $\hat{U}$ tilfredsstiller de betingelser, som kræves opfyldt af omegnene af et punkt i et topologisk rum. Disse betingelser udtrykker i det væsentlige, at $\hat{U}$ er et filter:

Definition 2. Lad M være en vilkårlig mængde. Et system $\mathcal{F}$ af delmængder af M kaldes et filter på M , hvis følgende betingelser er opfyldt:

- 1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- 2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- 3) $\forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \supseteq A : B \in \mathcal{F}$
- 4) $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F}$

En delmængde $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ kaldes en basis for $\mathcal{F}$, såfremt

$$\forall A \in \mathcal{F} \ \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq A.$$

På den tomme mængde findes der ingen filtre. For $a \in M$ vil systemet af delmængder, der indeholder a , udgøre et filter på M . Hvis M er uendelig, vil systemet af delmængder med endelig komplementærmængde udgøre et filter. På enhver mængde M eksisterer et

trivielt filter med M som eneste element. Dette filter er delmængde af ethvert andet filter på M .

Sætning 1. Et system $\mathcal{B}$ af delmængder af M er en filterbasis, hvis og kun hvis følgende betingelser er opfyldt:

$$1) \mathcal{B} \neq \emptyset$$

$$2) \emptyset \notin \mathcal{B}$$

$$3) \forall A, B \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B} : C \subseteq A \cap B.$$

En filterbasis $\mathcal{B}$ på M er basis for netop 1 filter $\mathcal{F}$ på M og

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq M \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$$

Bevis: Det ses umiddelbart, at en basis $\mathcal{B}$ for et filter tilfredsstiller betingelserne 1), 2) og 3). Hvis $\mathcal{B}$ er basis for $\mathcal{F}$, vil enhver mængde, der indeholder en mængde fra $\mathcal{B}$ på grund af 3) i definition 2 tilhøre $\mathcal{F}$ og på den anden side skal enhver mængde fra $\mathcal{F}$ have en delmængde, der tilhører $\mathcal{B}$. Altså er $\mathcal{F}$ netop det i sætning 1 anførte mængdesystem. Tilbage er så blot at vise, at det nævnte mængdesystem virkelig er et filter, når $\mathcal{B}$ er en vilkårlig filterbasis, men det ses umiddelbart, at mængdesystemet tilfredsstiller betingelserne 1), 2), 3) og 4) i definition 2.

Sætning 2. I ethvert topologisk vektorrum $(E, \mathcal{T})$ har systemet $\hat{U}$ af omegne af 0 en basis $\hat{B}$, der er en filterbasis bestående af runde, absorberende mængder, der alle indeholder 0, og således at følgende betingelser er opfyldt:

$$1) \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall U \in \hat{B} : \lambda U \in \hat{B}$$

$$2) \forall U \in \hat{B} \exists V \in \hat{B} : V+V \subseteq U.$$

Hvis $\hat{B}$ er en filterbasis bestående af runde absorberende mængder,

der alle indeholder 0, og således at 1) og 2) er opfyldt, da vil det ved $\hat{B}$ bestemte filter $\hat{U}$ være systemet af omegne af 0 i en éntydig bestemt topologi på vektorrummet E .

Bevis: Bemærkningerne efter definition 1 viser netop, at systemet $\hat{B}$ af alle afrundede omegne er en basis for $\hat{U}$ og tilfredsstiller 1) og 2). Dermed er den første halvdel af sætningen bevist.

Lad os nu på den anden side forudsætte, at $\hat{B}$ er en filterbasis bestående af runde, absorberende mængder, der alle indeholder 0, samt at 1) og 2) er opfyldt. En topologi, for hvilken filtret af omegne af 0 har $\hat{B}$ som basis er da bestemt ved, at filtret $\hat{U}$ med $\hat{B}$ som basis er mængden af omegne af 0, og at $\hat{U}(a) = a + \hat{U}$ for ethvert $a \in E$. Sætningen vil være fuldstændig bevist, når vi har vist, at $\hat{U}(a)$ virkelig definerer en topologi på vektorrummet E . Det er foreløbig klart, at de 4 første omegnsbetingelser er opfyldt. Den femte betingelse siger, at

$$\forall a \in E \forall U \in \hat{U} \exists V \in \hat{U} \forall x \in a+V : a+U \in x+\hat{U}.$$

Vi vælger en basisomegn $U_1 \subseteq U$ og ifølge betingelsen 2) kan vi vælge $V \in \hat{U}$, således at $V+V \subseteq U_1 \subseteq U$. For $x \in a+V$ gælder da $x+V \in x+\hat{U}$ og $x+V \subseteq a+V+V \subseteq a+U$, altså $a+U \in x+\hat{U}$. Dermed har vi bevist, at omegnssystemet $\hat{U}(a)$ definerer en topologi på punktmængden E . Vi mangler endnu at vise, at regneoperationerne er kontinuerte. Betingelserne 2) sikrer, at additionen er kontinuert i $(0,0)$. Definitionen $\hat{U}(a) = a+\hat{U}$ sikrer derefter, at additionen er kontinuert. Betingelse 1) sikrer, at afbildningen $x \rightarrow \lambda x$ er kontinuert i 0 for ethvert λ . Da enhver omegn af 0 er absorberende, er den ved $\lambda \rightarrow \lambda x$ definerede afbildning $\hat{C} \rightarrow E$ kontinuert i 0 for ethvert fast $x \in E$. Hvis S er enhedscirkelskiven i $\hat{C}$ og U en rund omegn af 0 i E , da

gælder $SU \subseteq U$. Altså er den ved $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ definerede afbildning $\mathbb{C} \times E$ ind i E kontinuert i $(0, 0)$. På grund af relationen $(\lambda + \Delta\lambda)(x + \Delta x) = \lambda x + \lambda \Delta x + \Delta\lambda x + \Delta\lambda \Delta x$ kan vi nu slutte, at multiplikationen er kontinuert overalt. Dermed er sætningen bevist.

Definition 3. Et topologisk vektorrum kaldes lokalkonvekst, hvis mængden $\hat{U}$ af omegne af o har en basis bestående af konvekse mængder.

Sætning 3.4. I et lokalkonvekst vektorrum har mængden $\hat{U}$ af omegne af o en basis bestående af runde, konvekse mængder.

Bevis: En vilkårlig omegn af o indeholder en konveks omegn U af o , og denne indeholder en rund omegn W af o . Så gælder

$$V = \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} e^{i\gamma} U \supseteq \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}} e^{i\gamma} W = W,$$

så V er en omegn af o . For alle $\gamma \in \mathbb{R}$ er $e^{i\gamma} U = U$. Da U er fællesmængde af konvekse mængder, er U konveks, og derfor er $\lambda U \subseteq U$ for $\lambda \in [0, 1]$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3.5. Hvis den i sætning 2 omtalte filterbasis $\hat{B}$ består af konvekse mængder, er betingelsen 2) overflødig, idet $\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$.

Bevis: Fremgår umiddelbart af den følgende sætning.

Sætning 3.6. En mængde U i et vektorrum E er konveks, hvis og kun hvis det for ethvert $t \in [0, 1]$ gælder, at $tU + (1-t)U = U$.

Bevis: Trivielt gælder $tU + (1-t)U \supseteq U$. At U er konveks betyder

$$\forall x, y \in U \quad \forall t \in [0, 1] : tx + (1-t)y \in U$$

men det er netop ensbetydende med, at $tU + (1-t)U \subseteq U$. Dermed er sætningen bevist.

⁶
Sætning 7. Afslutningen af en konveks mængde U i et topologisk vektorrum E er en konveks mængde.

Bevis: Den ved $\varphi(x,y) = tx + (1-t)y$ definerede afbildning $\varphi: E \times E \rightarrow E$ er kontinuert. At U er konveks er ensbetydende med, at $\varphi(U \times U) \subseteq U$. Men så gælder $\varphi(\overline{U} \times \overline{U}) = \overline{\varphi(U \times U)} \subseteq \overline{U}$, hvilket viser, at $\overline{U}$ er konveks.

⁷
Sætning 8. Afslutningen af en rund omegn U af o i et topologisk vektorrum E er en rund omegn af o .

Bevis: Det er klart, at $\overline{U}$ er en omegn af o . Lad S være den afsluttede enhedscirkelskive i $\mathbb{C}$. At U er rund er ensbetydende med, at afbildningen $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ afbilder (S, U) ind i U . Men så vil den samme afbilde $(S, \overline{U})$ ind i $\overline{U}$. Altså er $\overline{U}$ rund.

⁸
Sætning 9. Lad B være en basis for omegne af o i det topologiske vektorrum E . Afslutningerne af mængderne i B vil da ligeledes udgøre en basis for E .

Bevis: Lad U være en omegn af o . Vi kan da vælge en rund omegn V af o , således at $V + V \subseteq U$. Lad $x \in E$ være et punkt uden for U . For et punkt $y \in V \cap (x + V)$ får vi nu $y - x \in V$, og da V er rund, altså også $x - y \in V$, altså $x = x - y + y \in V + V \subseteq U$. Dette er i modstrid med antagelsen om x . For ethvert $x \in E \setminus U$ har vi således $V \cap (x + V) = \emptyset$. Altså er x

ikke kontaktpunkt for V . Vi har derfor $\bar{V} \subseteq U$. Men V har en delmængde $W \in \mathcal{B}$, og så gælder $\bar{W} \subseteq U$. Dermed er sætningen bevist.

⁹
Sætning 10. I et topologisk vektorrum har systemet af omegne af o en basis, der består af runde, absorberende, afsluttede omegne. Hvis vektorrummet yderligere er lokalkonvekst, kan basisomegnene tillige vælges konvekse.

^{6 7 8}
Bevis: Følger umiddelbart af sætningerne 2, 7, 8 og 9.

¹⁰
Sætning 11. I et topologisk vektorrum er fællesmængden for alle omegne af o et afsluttet underrum.

Bevis: For ethvert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \lambda U$. Altså gælder, at

$x \in \bigcap U \Rightarrow \lambda x \in \bigcap U$. Hvis $x, y \in U$ for ethvert $U \in \mathcal{U}$, benytter vi, at der til hvert $U \in \mathcal{U}$ svarer $V \in \mathcal{U}$ med $V+V \subseteq U$. Da nu $x, y \in V$, har vi $x+y \in U$. Heraf følger, at $x, y \in \bigcap U \Rightarrow x+y \in \bigcap U$. Altså er fællesmængden af omegne af o et underrum. Da fællesmængden af alle omegne af o ifølge sætning ⁸ 9 er identisk med fællesmængden af afsluttede omegne af o , er fællesmængden afsluttet. Dermed er sætningen bevist.

Hvis det topologiske vektorrum E er et Hausdorff-rum, vil det i sætning ¹⁰ 11 omtalte underrum være reduceret til punktet o . Hvis det på den anden side for ethvert punkt $x \in E \setminus \{o\}$ gælder, at enten x har en omegn, der ikke indeholder o , eller at o har en ^{hv} omegn, der ikke indeholder x , får vi i det første tilfælde ved forskydningen $-x$, at o har en omegn, der ikke indeholder $-x$, og da denne omegn indeholder en symmetrisk omegn, har o altså altid en omegn, der ikke indeholder

Bemærkning: Hvis vi indfører adskillelsesaksiomet T_0

(se K Tilf):

100.

$\forall x, y : x \neq y \Rightarrow [\exists U \in \mathcal{U}(x) : y \notin U] \vee [\exists V \in \mathcal{U}(y) : x \notin V]$, og vi

ser vi, at T_0 , der er svagere end Hausdorffs adskillelsesaksiom (T_2), medfører T_2 , dvs. T_0 og T_2 er her ensbe-

tydende.

Et vektorrum, der har interesse i forbindelse med distributioner, vil være lokalkonvekse Hausdorffrum. Vi vil i det følgende bruge ordet vektorrum i denne mere specielle betydning. Det i kapitel 4 indførte rum $\mathcal{D}_K$ er et eksempel på et topologisk vektorrum i den her indførte forstand.

Definition 4. En mængde A i et topologisk vektorrum E kaldes begrænset, hvis den absorberes af enhver omegn af $\overset{0}{A}$.

Dette er i overensstemmelse med begrebet "begrænset", som vi indførte det på $\mathcal{D}_K$. Vi kan kopiere beviserne for, at en delmængde af en begrænset mængde er begrænset, og at sum og foreningsmængde af to begrænsede mængder igen er begrænset.

Definition 5. Et system $\mathcal{B}$ af begrænsede mængder på et vektorrum E kaldes en basis for de begrænsede mængder på E , hvis enhver begrænset mængde på E er delmængde af en af mængderne fra $\mathcal{B}$.

Dette begreb er i en vis forstand dualt til begrebet omegnsbasis.

Bemærkning: $B(\underline{\Lambda}) = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \forall \underline{p} : \|D^{\underline{p}}\varphi\|_U \leq \Lambda_{|\underline{p}|}\}$

Sætning 11.2. Lad $\hat{\Lambda}$ betegne mængden af alle voksende følger $\underline{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda_1, \dots)$ af positive tal. For hvert $\underline{\Lambda} \in \hat{\Lambda}$ betegner vi med $B(\underline{\Lambda})$ mængden af funktioner $\varphi \in \mathcal{D}_K$, som for $P = 0, 1, 2, \dots$ tilfredsstiller betingelsen $\|D^{\underline{p}}\varphi\|_U \leq \Lambda_P$ for ethvert $\underline{p}$ med $|\underline{p}| = P$. Mængdesystemet $\mathcal{B} = \{B(\underline{\Lambda}) \mid \underline{\Lambda} \in \hat{\Lambda}\}$ er en basis for de begrænsede mængder på $\mathcal{D}_K$. Hver af mængderne $B(\underline{\Lambda})$ er afsluttet i $\mathcal{D}_K$.

Bevis: De begrænsede mængder på $\mathcal{D}_K$ er karakteriserede ved betingelse 2 i sætning 7, kapitel 4 (side ⁸⁴~~60~~). Heraf følger, at B er en basis. Da $\varphi \rightarrow \|D^p \varphi\|_U$ er en kontinuert afbildning $\mathcal{D}_K \rightarrow \mathbb{R}$, er hvert $B(\underline{\Lambda})$ fællesmængde for afsluttede mængder, altså afsluttet. Dermed er sætningen bevist.

Lemma 12. Lad $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ samt $\Lambda > 1$ være givne. Der eksisterer da en funktion $\varphi \in \mathcal{D}_K$, som tilfredsstiller betingelserne

$$\|D^{\underline{p}} \varphi\|_U = \Lambda, \quad \|D^{\underline{q}} \varphi\|_U \leq 1 \text{ for ethvert } \underline{q} \text{ med } |\underline{q}| < |\underline{p}|.$$

Bevis: Uden at indskrænke almindeligheden kan vi antage, at $\underline{0} \in \mathbb{R}$. Der findes da en funktion $\psi \in \mathcal{D}_K$, hvis støtte er et interval med centrum i $\underline{0}$. For $k \in]0, \infty[$, $\lambda \in [1, \infty[$ vi definerer ved $\varphi(\underline{x}) = k\psi(\lambda\underline{x})$ tilhøre $\mathcal{D}_K$. For ethvert $\underline{q}$ er da $\|D^{\underline{q}} \varphi\|_U = k\lambda^{|\underline{q}|} \|D^{\underline{q}} \psi\|_U$. Betingelserne vil derefter være opfyldt, når k og λ vælges således at $\lambda \geq 1$, og

$$k\lambda^{|\underline{p}|} \|D^{\underline{p}} \psi\|_U = \Lambda, \quad k\lambda^{|\underline{p}|-1} \max\{\|D^{\underline{q}} \psi\|_U \mid |\underline{q}| < |\underline{p}|\} \leq 1,$$

og dette er øjensynligt muligt. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 13. Systemet af begrænsede mængder på $\mathcal{D}_K$ har ingen numerabel basis.

Bevis: Lad $(\underline{\Lambda}^{(n)})$ være en følge af talfølger $\underline{\Lambda}^{(n)} = (\Lambda_0^{(n)}, \Lambda_1^{(n)}, \dots)$. Vi vil vise, at $\{B(\underline{\Lambda}^{(n)}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ikke er basis for systemet af begrænsede mængder i $\mathcal{D}_K$. På grundlag af Lemma 12 vælger vi $\varphi_n \in \mathcal{D}_K$, således at $\|D^{\underline{p}} \varphi_n\|_U \leq 1$ for alle $\underline{p}$ med $|\underline{p}| < n$, mens der findes et $\underline{p}$ med $|\underline{p}| = n$, for hvilket

$\|D^p \varphi_n\|_U = \max\{\Lambda_n^{(1)}, \dots, \Lambda_n^{(n)}\} + 1$. Mængden $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ er da en begrænset mængde i $\mathcal{D}_K$, men ingen af mængderne $B(\underline{\Lambda}^{(n)})$ har denne mængde som delmængde. Dermed er påstanden bevist. Men så kan en vilkårlig følge $B^{(n)}$ af begrænsede mængder heller ikke være basis for de begrænsede mængder på $\mathcal{D}_K$. Vi kan nemlig vælge følgende $\underline{\Lambda}^{(n)}$ således at $B^{(n)} \subsetneq B(\underline{\Lambda}^{(n)})$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 6. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Ved det duale vektorrum E' til E forstår vi mængden af kontinuerlige *lineære* afbildninger $T : E \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ med operationerne $T_1 + T_2$ og αT , hvor $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, og hvor operationerne defineres på naturlig måde.

Definition 7. Elementerne i det duale vektorrum $\mathcal{D}'_K$ til $\mathcal{D}_K$ er mængden af distributioner på den kompakte mængde K .

Bemærkning: L. Hörmander, side 4, Definition 1.3.1; side 5, Theorem 1.3.1; side 6, Theorem 1.3.2.

Det duale vektorrum er et delrum af det algebraiske duale vektorrum. Det er i første omgang ikke et topologisk vektorrum. Vi kan imidlertid på naturlig måde indføre en topologi på $\mathcal{D}'_K$, nemlig den topologi, der svarer til ligelig konvergens på begrænsede mængder. Det er åbenbart nok at kræve ligelig konvergens på en basis for de begrænsede mængder, og da der findes en basis, som består af afsluttede mængder, bliver der tale om ligelig konvergens på begrænsede afsluttede mængder, altså på kompakte mængder.

Sætning 14.

Definition 8. For $B \in \mathcal{B}$ og $r > 0$, sætter vi

$$V(B, r) = \{T \in \mathcal{D}'_K \mid \forall \phi \in B : |T\phi| < r\}.$$

Mængden $\hat{V}' = \{V'(B, r) \mid B \in \mathcal{B} \text{ og } r \in]0, \infty[\}$ er basis for filtret $\hat{U}'$ af omegne af 0 i rummet $\mathcal{D}'_K$.

Vi skylder at vise, at $\hat{V}'$ virkelig er basis for et omegnsfilter, der definerer en topologi på $\mathcal{D}'_K$. Det er klart, at der findes mængder $V''(B, r)$, og at alle indeholder 0-distributionen. Endvidere er det klart, at

$$V'(B_1, r_1) \cap V'(B_2, r_2) \supseteq V'(B_1 \cup B_2, \min(r_1, r_2)).$$

Altså er $\hat{V}'$ en filterbasis. Mængderne V' er åbenbart runde og konvekse. Lad T_0 være en vilkårlig distribution og $V'(B, r)$ en vilkårlig basisomegn. Da T_0 ifølge sætning ¹²~~13~~ i kapitel 4 er (side 86) begrænset på begrænsede mængder, eksisterer der et $\Lambda \in \mathbb{R}$, så at $|T_0\phi| \leq \Lambda$ for ethvert $\phi \in B$. Vælger vi nu $\lambda \in \mathbb{R}$, så at $\lambda r > \Lambda$, har vi $T_0 \in \lambda V'(B, r) = V'(B, \lambda r)$. Dermed har vi bevist, at $\hat{V}'$ virkelig er omegnsbasis for en topologi på $\mathcal{D}'_K$.

¹⁴
Sætning 15. Filtret $\hat{U}'$ af omegne af 0 i vektorrummet $\mathcal{D}'_K$ har ingen numerabel basis, og $\mathcal{D}'_K$ er således ikke metrisabelt.

Bevis: Vi skal vise, at en følge (U_n) fra $\hat{U}'$ ikke kan udgøre en basis. Hvert U_n indeholder en basismængde $V'(B_n, r_n)$, og hvert B_n er indeholdt i en af de i sætning ¹¹~~12~~ omtalte basismængder $B(\underline{\Lambda}^{(n)})$, så vi har $V'(B(\underline{\Lambda}^{(n)}), r_n)$ ikke udgør en basis. Ifølge lemma 12 kan vi for $n = 1, 2, \dots$ vælge $\phi_n \in \mathcal{D}'_K$, så at $\|D^{\underline{p}} \phi_n\|_{U_n} < 1$ for ethvert $\underline{p}$ med $|\underline{p}| < n$, mens der eksisterer et $\underline{p} = \underline{p}(n)$ med $|\underline{p}(n)| = n$, samt et punkt $a_n \in K$, så at $|D^{\underline{p}(n)} \phi_n(a)| = \frac{1}{r_n} \Lambda_n^{(n)}$.

Mængden $B = \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ er da begrænset. Den ved $T_n(\varphi) = \frac{r_n}{2\Lambda_n^{(n)}} D^{p(n)} \varphi(a)$

definerede distribution tilhører åbenbart $V'(B(\underline{\Lambda}^{(n)}), r_n)$, men den tilhører ikke $V'(B, \frac{1}{2})$. Omegnen $V'(B, \frac{1}{2})$ indeholder altså ingen omegn $V'(B(\underline{\Lambda}^{(n)}), r_n)$ som delmængde, og disse mængder udgør derfor ikke en basis.

At filtret $\tilde{U}'$ ikke har numerabel basis giver anledning til forskellige vanskeligheder. Således vil et bevis for en afbildnings kontinuitet ikke kunne føres ved hjælp af følger. Ligelighed er ikke umiddelbart defineret og det samme gælder begrebet fundamentalfølge. Det er dog let at overvinde en del af disse vanskeligheder.

Definition 9. Lad E være et vektorrum, hvis topologi er bestemt ved omegnssystemet $\tilde{U}$. En omegn U_1 af $a_1 \in E$ siges at være uniform med en omegn U_2 af $a_2 \in E$, såfremt der findes en omegn $U \in \tilde{U}$, så at $U_1 = a_1 + U$ og $U_2 = a_2 + U$. Et system $\{a + U | a \in E\}$, hvor $U \in \tilde{U}$, kaldes et system af uniforme omegne.

Uniforme omegne er altså omegne, der fremgår af hinanden ved parallelforskydning. Uniformiteten vedrører blot omegnene. Da parallelforskydning er en homeomorfi, vil det for to uniforme omegne U_1 og U_2 også gælde, at $\overset{\circ}{U}_1$ og $\overset{\circ}{U}_2$ fremgår af hinanden ved den samme parallelforskydning. Det indre $\overset{\circ}{U}_1$ af U_1 er netop mængden af de punkter, der har U_1 som omegn. Det vil ofte være naturligt at tale om et system af uniforme åbne mængder, men det bliver selvfølgelig helt det samme begreb som et system af åbne omegne.

De forskellige "ligelighedsbegreber" kan nu uden videre overføres til vilkårlige vektorrum, idet systemer af uniforme omegne erstatter systemer af kugler med samme radius. Således vil det være naturligt at kalde en afbildning $f : E_1$ ind i E_2 ligelig kontinuert, hvis der til ethvert system $\{a+U_2 | a \in E_2\}$, hvor $U_2 \in \hat{U}_2$, svarer et system $\{b+U_1 | b \in E_1\}$, således at det for ethvert $x \in E_1$ gælder, at $f(x+U_1) \subseteq f(x) + U_2$, altså kort udtrykt:

$$\forall U_2 \in \hat{U}_2 \exists U_1 \in \hat{U}_1 \forall x \in E_1 : f(x+U_1) \subseteq f(x) + U_2.$$

Omegnssystemerne optræder altså ikke explicit i definitionen.

At en følge (x_n) på vektorrummet E er en fundamentalfølge, kommer til at betyde, at følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall U \in \hat{U} \exists N \in \hat{N} \exists a \in E \forall n \geq N : x_n \in a+U.$$

Dette er ækvivalent med følgende betingelse:

$$\forall U \in \hat{U} \exists N \in \hat{N} \forall m, n \geq N : x_n - x_m \in U,$$

og den minder jo mere om den sædvanlige definition af en fundamentalfølge.

En fundamentalfølge (T_n) på $\mathcal{D}'_K$ bliver altså specielt defineret ved:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall B \in \hat{B} \exists N \in \hat{N} \forall m, n \geq N \forall \varphi \in B : |T_n(\varphi) - T_m(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

For hvert $\varphi \in \mathcal{D}'_K$ har vi en begrænset mængde $B = \{\varphi\}$, og definitionen implicerer derfor, at $(T_n(\varphi))$ er en kompleks fundamentalfølge, og denne vil have en grænseværdi $T(\varphi)$. Derved defineres en afbildning $T : \mathcal{D}'_K$ ind i $\hat{C}$, og for hvert fast φ gælder $(T_n(\varphi)) \rightarrow T(\varphi)$. For fast ε og B vælger vi nu N , således at vi for hvert $\varphi \in B$ har

$$\forall m, n \geq N : |T_n(\varphi) - T_m(\varphi)| \leq \varepsilon,$$

og heraf følger for $m \rightarrow \infty$, at

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \forall B \in \hat{B} \exists N \in \hat{N} \forall n \geq N \forall \varphi \in B : |T(\varphi) - T_n(\varphi)| \leq \varepsilon.$$

Af relationen $T_n(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) = \lambda_1T_n(\varphi_1)+\lambda_2T_n(\varphi_2)$ fås ved grænseovergangen $n \rightarrow \infty$, at $T(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2) = \lambda_1T(\varphi_1)+\lambda_2T(\varphi_2)$. Altså er T en lineær afbildning. Da T_n er kontinuert, er T_n begrænset på enhver begrænset mængde, og (1) medfører derfor, at T er begrænset på enhver begrænset mængde, altså kontinuert. Dermed har vi vist, at T er en distribution, og (1) udtrykker netop, at $(T_n) \rightarrow T$ på rummet $\mathcal{D}'_K$. Dermed har vi vist, at enhver fundamentalfølge på $\mathcal{D}'_K$ er konvergent. Det er dog ikke rimeligt at kalde $\mathcal{D}'_K$ fuldstændigt under disse omstændigheder, da konvergensforhold på $\mathcal{D}'_K$ ikke generelt kan beskrives ved hjælp af følger.

6. Kapitel.Konvergens af filtre. Fuldstændighed af $\mathcal{O}'_K$.

Systemet af filtre på en mængde M er ordnet ved inklusion. Hvis $\mathcal{F}_1$ og $\mathcal{F}_2$ er filtre på M og $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, siger vi, at $\mathcal{F}_2$ er finere end $\mathcal{F}_1$, eller at $\mathcal{F}_1$ er grovere end $\mathcal{F}_2$. Denne sprogbrug er helt analog med den tilsvarende for topologier. At en topologi er finere end en anden betyder altså, at dens omegnfilter er finere end den andens.

Definition 1. Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum E siges at konvergere mod et punkt $a \in E$, hvis det er finere end omegnfilteret $\mathcal{U}(a)$. En filterbasis $\mathcal{B}$ på E siges at konvergere mod a , hvis det ved $\mathcal{B}$ bestemte filter konvergerer mod a .

Hvis (a_n) er en punktfølge på E , udgør mængderne $\{a_n | n \geq N\}$, $N \in \mathbb{N}$ en filterbasis på E . Det derved bestemte filter kaldes følgefilteret. Det konvergerer mod $a \in E$, hvis og kun hvis enhver omegn $U \in \mathcal{U}(a)$ indeholder en af mængderne $\{a_n | n \geq N\}$, altså hvis og kun hvis $(a_n) \rightarrow a$. Begrebet "konvergent filterbasis" er således en naturlig generalisation af begrebet "konvergent følge".

Sætning 1. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at et topologisk rum E er et Hausdorff-rum, er, at intet filter på E konvergerer mod mere end ét punkt.

Bevis: Lad E være et Hausdorff-rum og $\mathcal{F}$ et filter på E . For $a, b \in E$ kan vi vælge $U \in \mathcal{U}(a)$, $V \in \mathcal{U}(b)$, således at $U \cap V = \emptyset$. Heraf følger at højst én af mængderne U og V kan tilhøre $\mathcal{F}$. Filteret kan derfor

ikke være finere end både $\hat{U}(a)$ og $\hat{U}(b)$. Lad os dernæst antage, at E ikke er et Hausdorff-rum. Vi kan da vælge $a, b \in E$, således at

$$\forall U \in \hat{U}(a) \forall V \in \hat{U}(b) : U \cap V \neq \emptyset.$$

Men så er $\{U \cap V | U \in \hat{U}(a) \text{ og } V \in \hat{U}(b)\}$ en filterbasis, og det ved denne basis bestemte filter vil indeholde $\hat{U}(a)$ og $\hat{U}(b)$, og altså konvergere mod både a og b .

Definition 2. Et filter $\hat{F}$ på et metrisk rum E kaldes et fundamentalfilter, hvis der for hvert $r > 0$ findes en kugle med radius r , som tilhører $\hat{F}$.

En følge (a_n) på E er en fundamentalfølge, hvis og kun hvis der for hvert $r > 0$ eksisterer en kugle med radius r , som indeholder en mængde $\{a_n | n \geq N\}$. Dette er ensbetydende med, at kuglen hører til følgefiltret. Altså er (a_n) en fundamentalfølge, hvis og kun hvis det tilsvarende følgefilter er et fundamentalfilter.

Sætning 2: Et metrisk rum E er fuldstændigt, hvis og kun hvis ethvert fundamentalfilter på E er konvergent.

Bevis: Hvis ethvert fundamentalfilter på E er konvergent, er specielt enhver fundamentalfølge på E konvergent, og E er således fuldstændigt. Lad nu E være fuldstændigt, og lad $\hat{F}$ være et fundamentalfilter på E . For hvert $n \in \mathbb{N}$ eksisterer da et punkt $a_n \in E$, således at kuglen $K(a_n, \frac{1}{n})$ tilhører $\hat{F}$. For $p > 0$ gælder da $K(a_n, \frac{1}{n}) \cap K(a_{n+p}, \frac{1}{n+p}) \neq \emptyset$, altså $\text{dist}(a_n, a_{n+p}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n}$. Altså er (a_n) en fundamentalfølge. Da E er fuldstændigt, eksisterer

$a \in E$, således at $(a_n) \rightarrow a$. Lad r være et positivt tal. Der findes da et $n \in \mathbb{N}$, så at $a_n \in K(a, \frac{1}{2}r)$ og $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}r$. Så gælder $K(a_n, \frac{1}{n}) \subseteq K(a, r)$, altså $K(a, r) \in \hat{F}$. Dermed har vi vist, at $\hat{F}$ indeholder enhver kugle med centrum a , altså enhver omegn af a . Altså konvergerer $\hat{F}$ mod a . Dermed er sætningen bevist.

Vi vil nu i analogi med definition 2 indføre begrebet fundamentalfilter på et vilkårligt topologisk vektorrum.

Definition 3. Lad E være et topologisk vektorrum med filtret $\hat{U}$ af omegne af 0 . Et filter $\hat{F}$ på E kaldes et fundamentalfilter, når følgende betingelse er opfyldt

$$\forall U \in \hat{U} \exists a \in E : a+U \in \hat{F}.$$

Det ses umiddelbart, at denne definition stemmer overens med definition 2, hvis E specielt er metrisabelt.

Definition 4. Et topologisk vektorrum E kaldes fuldstændigt, hvis ethvert fundamentalfilter på E er konvergent.

Bemærkning: Vi ser, at denne betingelse er stærkere end den sædvanlige, nemlig: enhver fundamentalfølge er konvergent

Sætning 3. Vektorrummet $\mathcal{D}'_K$ er fuldstændigt.

Bevis: Lad $\hat{F}$ være et fundamentalfilter på $\mathcal{D}'_K$. Filtret $\hat{F}$ består af mængder $\{T_j | j \in J\}$ af distributioner. For hvert $\phi \in \mathcal{D}_K$ vil de tilsvarende mængder $\{T_j(\phi) | j \in J\}$ være basis for et filter $\hat{F}(\phi)$ på $\mathbb{C}$. At $\hat{F}$ er et fundamentalfilter betyder

$$\forall B \in \hat{B} \forall r > 0 \exists T \in \mathcal{D}'_K : T + U'(B, r) \in \hat{F}.$$

Bemærkning: $\hat{B}$ er systemet af begrænsede mængder i $\mathcal{D}_K$.

Lad $B \in \mathcal{B}$ være fast valgt, og lad $\varphi \in B$ være et vilkårligt element. Vi har da

$$(1) \quad \forall r > 0 \exists T_1 \in \mathcal{D}'_K : \{T_1\varphi + T\varphi \mid T \in U'(B, r)\} \in \hat{F}(\varphi).$$

For $T \in U'(B, r)$ er $|T(\varphi)| < r$. Altså siger relationen, at en delmængde af cirkelskiven $K(T_1\varphi, r)$ og dermed selve $K(T_1\varphi, r)$ tilhører $\hat{F}(\varphi)$. Altså er $\hat{F}(\varphi)$ et fundamentalfilter på $\hat{C}$, altså ifølge sætning 2 konvergent mod en grænseværdi $T_0\varphi$. Anvender vi dette på ethvert $\varphi \in B$ og derefter på ethvert $B \in \mathcal{B}$ får vi defineret en afbildning $T_0: \mathcal{D}'_K$ ind i $\hat{C}$. Vi tænker os nu igen, at B, r og T_1 er fast valgt. Filtret $\hat{F}(\varphi)$ er finere end omegnfilteret i $T_0\varphi \in \hat{C}$. Altså er enhver cirkel med centrum $T_0(\varphi)$ element af $\hat{F}(\varphi)$, og har derfor punkter fælles med $\{T_1\varphi + T\varphi \mid T \in U'(B, r)\}$. Dette kræver åbenbart, at $|T_0\varphi - T_1\varphi| \leq r$. Vi har således

$$(2) \quad \forall B \in \mathcal{B} \forall r > 0 \exists T_1 \in \mathcal{D}'_K : |T_0\varphi - T_1\varphi| \leq r.$$

For $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'_K$ udgør $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2$ en begrænset mængde, og da $T_1\varphi_1 + T_1\varphi_2 = T_1(\varphi_1 + \varphi_2)$, kan vi slutte, at

$$|T_0(\varphi_1 + \varphi_2) - T_0(\varphi_1) - T_0(\varphi_2)| \leq 3r.$$

Da dette gælder for ethvert $r > 0$, følger det, at T_0 er en lineær afbildning. Af (2) følger, at T_0 er begrænset på begrænsede mængder, da T_0 er det. Altså er T_0 en distribution. Endelig viser (2) og (1), at

$$\forall B \in \mathcal{B} \forall r > 0 : T_0 + U'(B, 2r) \in \hat{F}.$$

Altså konvergerer $\hat{F}$ mod T_0 . Dermed er sætningen bevist.

Ved overgang til en finere topologi bliver kravene større både til fundamentalfilter og til konvergent filter. Det er derfor ikke på forhånd indlysende, hvad der sker ved overgang til en finere topologi. Vi har imidlertid følgende sætning.

Bemærkning: sætning 4 er svagere end sætning 6 på side 112

Sætning 4: Lad E være et vektorrum med to forskellige topologier bestemt ved omegnssystemerne $\tilde{U}$ og $\tilde{U}_1$ af 0 . Vi antager, at $\tilde{U}_1$ er finere end $\tilde{U}$, men at $\tilde{U}_1$ har en basis $\tilde{B}_1$ bestående af mængder, der er afsluttede i den ved $\tilde{U}$ bestemte topologi. Hvis E er fuldstændigt i den ved $\tilde{U}$ bestemte topologi, er E også fuldstændigt i den ved $\tilde{U}_1$ bestemte topologi.

Bevis: Vi antager, at E er fuldstændigt i den ved $\tilde{U}$ bestemte topologi, og at et filter $\tilde{F}$ på E er fundamentalfilter i den ved $\tilde{U}_1$ bestemte topologi, altså også i den ved $\tilde{U}$ bestemte topologi, altså i denne topologi konvergent mod et punkt $a \in E$. Lad $V \in \tilde{B}_1$ og lad $W \in \tilde{B}_1$ være valgt, være vilkårligt valgt, så at $W-W \subseteq V$. Da $\tilde{F}$ er fundamentalfilter i $\tilde{U}_1$ -topologien, kan vi vælge $b \in E$, så at $b+W \in \tilde{F}$. Nu er $C(b+W)$ åben i $\tilde{U}$ -topologien og hører ikke til $\tilde{F}$. Altså har ethvert punkt $c \in C(b+W)$ en omegn i $\tilde{U}$ -topologien, der ikke tilhører $\tilde{F}$. Altså gælder $a \in b+W$ og derfor $b+W \subseteq a-W+W \subseteq a+V$. Vi har således vist, at $a+V \in \tilde{F}$, altså at $\tilde{F} \rightarrow a$ i den ved $\tilde{U}_1$ bestemte topologi. Dermed er sætningen bevist.

5

Definition 4: Lad E være et topologisk vektorrum, og lad A være en punktmængde på E . Et filter $\tilde{F}$ på A kaldes et fundamentalfilter, hvis

$$\forall U \in \tilde{U} \exists a \in E : (a+U) \cap A \in \tilde{F},$$

og punktmængden A kaldes fuldstændig, hvis ethvert fundamentalfilter på A er konvergent mod et grænsepunkt, der tilhører A .

Sætning 5: Hvis det topologiske vektorrum E er et Hausdorff-rum, er enhver fuldstændig delmængde af E afsluttet.

Bevis: Lad A være en fuldstændig delmængde af E , og lad a være et vilkårligt punkt af $\bar{A}$. Mængdesystemet $\mathcal{F} = \{U \cap A \mid \overset{U}{A} \in \mathcal{U}(a)\}$ er et filter på A , og da $\mathcal{U}(a) = \{a+U \mid U \in \mathcal{U}\}$, er $\mathcal{F}$ et fundamentalfilter på A , altså konvergent mod et grænsepunkt $b \in A$. Men $\mathcal{F}$ er basis for et filter på E finere end $\mathcal{U}(a)$, altså konvergent mod både a og b . Altså er $a = b$, altså $a \in A$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad E være et vektorrum med to forskellige topologier bestemt ved omegnssystemerne $\mathcal{U}$ og $\mathcal{U}_1$ af 0 . Vi antager, at $\mathcal{U}_1$ er finere end $\mathcal{U}$, men at $\mathcal{U}_1$ har en basis $\mathcal{B}_1$ bestående af mængder, som er afsluttede i den ved $\mathcal{U}$ bestemte topologi. Da vil enhver punktmængde $A \subseteq E$, som er fuldstændig i den ved $\mathcal{U}$ bestemte topologi også være fuldstændig i den ved $\mathcal{U}_1$ bestemte topologi.

Bevis: Vi antager, at $A \subseteq E$ er fuldstændig i den ved $\mathcal{U}$ bestemte topologi. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på A og fundamentalfilter i den ved $\mathcal{U}_1$ bestemte topologi. Da er $\mathcal{F}$ også fundamentalfilter i den ved $\mathcal{U}$ bestemte topologi, altså i denne topologi konvergent mod et punkt $a \in A$. Lad $V \in \mathcal{B}_1$ være vilkårligt valgt, og lad $W \in \mathcal{B}_1$ være valgt så at $W-W \subseteq V$. Da $\mathcal{F}$ er et filter i $\mathcal{U}_1$ -topologien, kan vi vælge $b \in E$, så at $(b+W) \cap A \in \mathcal{F}$. Nu er $b+W$ afsluttet i $\mathcal{U}$ -topologien, og da $A \setminus (b+W) \notin \mathcal{F}$, og er relativt åben på A i $\mathcal{U}$ -topologien, gælder $a \in b+W$, altså $b+W \subseteq a-W+W \subseteq a+V$, så vi har $(a+V) \cap A \in \mathcal{F}$. Da dette gælder for ethvert $V \in \mathcal{B}_1$, har vi $\mathcal{F} \rightarrow a$ også i den ved $\mathcal{U}_1$ bestemte topologi. Altså er A fuldstændig i denne topologi. Dermed er sætningen bevist.

7. Kapitel.Svag topologi. Bemærkning: L. Hörmander, side 66

Det er et foreløbigt mål for disse undersøgelser at vise, at $\mathcal{D}_K$ netop er det duale vektorrum til $\mathcal{D}'_K$, således at $\mathcal{D}_K$ og $\mathcal{D}'_K$ kan siges at være indbyrdes duale. Dette resultat er temmelig dybtliggende og kræver en del forberedelser. Det viser sig imidlertid, at den indbyrdes dualitet let opnås ved at indføre grovere topologier på $\mathcal{D}_K$ og $\mathcal{D}'_K$. En nærmere undersøgelse af sammenspillet mellem de grovere topologier og de oprindelige topologier vil senere afsløre, at den indbyrdes dualitet var til stede i forvejen. Vi vil indføre den gensidige dualitet under meget generelle forudsætninger, idet vi vil indføre denne for to vilkårlige vektorrum, som er knyttede sammen ved et indre produkt, der tilfredsstillers en simpel betingelse.

Bemærkning: Den svage topologi indføres, fordi der i distributionsteorien ikke er væsentlig forskel på den svage topologi og den stærke topologi, og de forskellige beviser forløber som regel lettest i den svage topologi.

Definier $\langle x, y \rangle$ som regel lettest i den svage topologi.

For enhver fast værdi $\neq 0$ af en af de variable kan den anden vælges, så det indre produkt bliver forskelligt fra 0.

Et element $x_2 \in E_2$ definerer en lineær afbildning $x_1 \rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle$ af E_1 ind i $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$). Den sidste betingelse i definitionen sikrer, at rummet E_2 derved indlejres i det algebraiske duale rum til E_1 . Analogt indlejres E_1 i det algebraisk duale rum til E_2 . Grovere udtrykt: et element i E_2 kan opfattes som en linearform på E_1 og omvendt.

Definition 2. Lad E_1 og E_2 være to vektorrum i dualitet ved det indre produkt $\langle x_1, x_2 \rangle$. Ved den svage topologi på E_1 forstås da den groveste topologi, som sikrer, at det for hvert $x_2 \in E_2$ gælder, at den ved $x_1 \rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle$ definerede afbildning er kontinuert. Analogt defineres den svage topologi på E_2 .

114⁸ Bemærkning: $U(x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(p)}; r) = \{x_1 \in E_1 \mid \sup_k |\langle x_1, x_2^{(k)} \rangle| < r\}$

For ethvert $r > 0$ og ethvert endeligt punktsæt $x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(p)} \in E_2$ får vi en omegn af 0 i E_1 defineret ved

$$(1) \quad U(x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(p)}; r) = \{x_1 \in E_1 \mid |\langle x_1, x_2^{(k)} \rangle| < r, k = 1, \dots, p\}.$$

Det er klart, at en sådan omegn er rund, absorberende og konveks. Det er også klart, at mængden af alle sådanne omegne udgør en filterbasis, samt at

$$\lambda U(x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(p)}; r) = U(x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(p)}; |\lambda|r).$$

Altså er mængden af omegnene (1) basis for et filter $\hat{U}_1$ af omegne af 0, som definerer en topologi på E_1 . For ethvert $x_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ kan vi vælge $x_2 \in E_2$, så at $\langle x_1, x_2 \rangle \neq 0$. Vi kan da vælge $r > 0$, så at $r < |\langle x_1, x_2 \rangle|$, og x_1 vil da ikke tilhøre $U(x_2, r)$. E_1 er altså et Hausdorff-rum med den svage topologi.

Hvis vi opfatter elementerne i E_2 som linearformer på E_1 , kommer den svage topologi i E_2 netop til at svare til punktvis konvergens af linearformerne.

Hvis E_1 er et topologisk vektorrum, som er et Hausdorff-rum og E_2 er det duale vektorrum, altså bestående af linearformer $x_2 : E_1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ (} \mathbb{R} \text{)}$, da er hvert x_2 en kontinuert afbildning. Nu er $\langle x_1, x_2 \rangle = x_2(x_1)$ et indre produkt. $x_2 \neq 0$ betyder netop, at der findes et x_1 med $\langle x_1, x_2 \rangle \neq 0$. Hvis E_1 tilfredsstiller den betingelse, at der for hvert $x_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ findes en kontinuert linearform, der antager en fra 0 forskellig værdi i x_1 , vil det indre produkt

definerer en dualitet mellem E_1 og E_2 og dermed tillige svage topologier på E_1 og E_2 . Den oprindelige topologi på E_1 kaldes nu initialtopologien, hvis der kan være risiko for forveksling. Da lineærformerne x_2 er kontinuerte i initialtopologien, er denne finere end den svage topologi. Hvis E_1 udstyres med en topologi, der er effektivt grovere end den svage topologi, vil der til det således fremkomne topologiske vektorrum svare et dualrum, der er et ægte delrum af E_2 .

For $\phi \in \mathcal{D}_K$ og $\phi \neq 0$ findes $a \in K$ med $\phi(a)$ forskellig fra 0 og distributionen δ_a afbilder altså ϕ på en fra 0 forskellig værdi. Altså er $\mathcal{D}_K$ og $\mathcal{D}'_K$ i dualitet ved det indre produkt $\langle \phi, T \rangle = T(\phi)$. Vi foretrækker dog at skrive $\langle T, \phi \rangle$ i stedet for $\langle \phi, T \rangle$. Vi har således en svag topologi på $\mathcal{D}_K$ og på $\mathcal{D}'_K$. På $\mathcal{D}'_K$ svarer den svage topologi til konvergens for hvert $\phi \in \mathcal{D}_K$. På $\mathcal{D}_K$ svarer den svage topologi til konvergens for hvert $T \in \mathcal{D}'_K$, altså specielt for hvert δ_a og for alle differentialkvotienter af hvert δ_a . Svag konvergens medfører altså punktvis konvergens på K ikke bare af funktionerne selv, men også af deres differentialkvotienter af vilkårlig orden.

Til et nærmere studium af den svage topologi får vi brug for følgende rent algebraiske hjælpesætning:

Sætning 1 er et lemma, der bruges præcis én gang.

Sætning 1: Lad E være et vilkårligt vektorrum over $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) og lad $T, T_1, \dots, T_p : E \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) være lineære afbildninger. Hvis betingelsen

$$(2) \quad \forall x \in E : T_1(x) = \dots = T_p(x) = 0 \Rightarrow T(x) = 0,$$

da eksisterer komplekse (reelle) konstanter $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, så at

$$T = \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_p T_p.$$

Bevis: Vi fører beviset for det komplekse tilfælde. Lad $\underline{T} : E$ ind i $\hat{\mathbb{C}}^p$ være defineret ved

$$\underline{T}(x) = (T_1(x), \dots, T_p(x)).$$

Så er $\underline{T}$ en lineær afbildning, og $\underline{T}(E)$ er derfor et underrum af $\hat{\mathbb{C}}^p$. For $\underline{y} \in \underline{T}(E)$ er $\underline{T}^{-1}(\underline{y})$ en punktmængde i E . For $x_1, x_2 \in \underline{T}^{-1}(\underline{y})$ er $\underline{T}(x_1) = \underline{T}(x_2) = \underline{y}$, altså $\underline{T}(x_2 - x_1) = 0$, men ifølge (2) gælder så $T(x_2 - x_1) = 0$, altså $T(x_1) = T(x_2)$. Heraf fremgår, at T afbilder hele $\underline{T}^{-1}(\underline{y})$ på et enkelt punkt $T(\underline{y}) \in \hat{\mathbb{C}}$. Derved defineres en afbildning $\tau : \underline{T}(E)$ ind i $\hat{\mathbb{C}}$, og vi har åbenbart $\tau \circ \underline{T} = T$. Det endeligdimensionale vektorrum $\underline{T}(E)$ har en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_q)$, der kan udvides til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p)$ for $\hat{\mathbb{C}}^p$. Den lineære afbildning τ har nu formen

$$\tau(z_1 \underline{e}_1 + \dots + z_q \underline{e}_q) = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_q z_q,$$

hvor $\mu_1, \dots, \mu_q$ er komplekse tal. Den udvides til en lineær afbildning $\tilde{\tau} : \hat{\mathbb{C}}^p$ ind i $\hat{\mathbb{C}}$ defineret ved

$$\tilde{\tau}(z_1 \underline{e}_1 + \dots + z_p \underline{e}_p) = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_q z_q,$$

og vi har nu stadig $T = \tilde{\tau} \circ \underline{T}$. Den lineære afbildning $\tilde{\tau}$ har imidlertid også formen

$$\tilde{\tau}(y_1, \dots, y_p) = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_p y_p,$$

og heraf følger nu, at $T = \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_p T_p$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Lad E_1 og E_2 være to vektorrum over $\hat{\mathbb{C}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$) i dualitet ved et indre produkt $\langle x_1, x_2 \rangle$. Enhver lineær afbildning $T : E_1$ ind i $\hat{\mathbb{C}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$), som er kontinuert i den svage topologi på E_1 , kan da fremstilles på formen $T(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle$ for et $x_2 \in E_2$.

Bemærkning: E_1 og E_2 er ikke nødvendigvis i dualitet.

Bevis: At T er kontinuert i den svage topologi betyder, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0 \exists y_1, \dots, y_p \in E_2 : (|\langle x, y_1 \rangle| \leq r \wedge \dots \wedge |\langle x, y_p \rangle| \leq r \Rightarrow |T(x)| \leq \varepsilon)$$

Idet vi erstatter y_k med $\frac{r}{\varepsilon} y_k$ for $k = 1, \dots, p$, ser vi, at betingelsen kan skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y_1, \dots, y_p \in E_2 : (|\langle x, y_1 \rangle| \leq \varepsilon \wedge \dots \wedge |\langle x, y_p \rangle| \leq \varepsilon \Rightarrow |T(x)| \leq \varepsilon).$$

Lad ε være fast valgt, og lad η være et vilkårligt positivt tal.

Vi har da

$$\begin{aligned} (|\langle x, y_1 \rangle| \leq \eta \wedge \dots \wedge |\langle x, y_p \rangle| \leq \eta) &\Rightarrow \\ (|\langle \frac{\varepsilon}{\eta} x, y_1 \rangle| \leq \varepsilon \wedge \dots \wedge |\langle \frac{\varepsilon}{\eta} x, y_p \rangle| \leq \varepsilon) &\Rightarrow \\ |T(\frac{\varepsilon}{\eta} x)| \leq \varepsilon &\Rightarrow |T(x)| \leq \eta. \end{aligned}$$

Vi har således at

$$\langle x, y_1 \rangle = \dots = \langle x, y_p \rangle = 0 \Rightarrow T(x) = 0,$$

og af sætning 1 følger derfor, at der eksisterer komplekse (reelle) tal $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, således at

$$T(x) = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \dots + \lambda_p \langle x, y_p \rangle = \langle x, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_p y_p \rangle.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. Hvis E_1 og E_2 er vektorrum i dualitet ved et indre produkt $\langle x_1, x_2 \rangle$, da har E_1 med den svage topologi netop E_2 som sit duale rum.

Bevis: Følger umiddelbart af sætning 2.

Sætning 4. Lad E_1 og E_2 være vektorrum i dualitet ved et indre produkt $\langle x_1, x_2 \rangle$, og lad $\tilde{E}_2 \subset E_2$ være et ægte delrum. Den svage topologi på E_1 svarende til restriktionen af det indre produkt til $E_1 \times \tilde{E}_2$ er effektivt grovere end den svage topologi svarende til dualiteten mellem E_1 og E_2 .

Bevis: De to topologier er forskellige, da mængderne af kontinuerlige lineære afbildninger for de to topologier er forskellige ifølge sætning 2. Dermed er sætningen bevist.

Bemærkning: En topologi på E_1 , der er forenelig med dualiteten, er en topologi, der er finere end den svage topologi på E_1 , men dog ikke finere end, at $E_2 = E_1$ stadig vil være det topologisk duale rum.

$\mathcal{D}_K$ og $\mathcal{D}_K^*$ praktisk sagt er sammenlignelige disse mængder. Vi forbereder dette temmelig omfattende projekt med nogle hjælpesætninger.

Sætning 5. Lad E være et fuldstændigt topologisk vektorrum, som antages lokalkonvekst og Hausdorff. Lad $W \subseteq E$ være en delmængde, som er rund, konveks, absorberende og afsluttet. Lad $A \subseteq E$ være en delmængde, som er rund, konveks, begrænset og afsluttet. Da vil W absorbere A . Bemærkning: W kaldes en blok. Sammenlign side 83 og 91.

Bevis: Vi danner $E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$. Da A er rund, er $\lambda E_1 \subseteq E_1$ for ethvert $\lambda \in \mathbb{C}$. Da A er konveks, er $E_1 + E_1 \subseteq E_1$. Altså er E_1 et underrum af E , og $A \subseteq E_1$ er absorberende. For $x \in E_1$ sætter vi

$$\|x\| = \inf\{\mu \in [0, \infty[\mid x \in \mu A\}.$$

Vi ser, at $\|0\| = 0$. For $x \neq 0$ findes en rund omegn V af 0 , som ikke indeholder x , og da A er begrænset, eksisterer $\Lambda \in]0, \infty[$, så at $A \not\subseteq \Lambda V$, altså $\frac{1}{\Lambda}A \not\subseteq V$, hvilket medfører $x \notin \mu A$ for $\mu \leq \frac{1}{\Lambda}$. Altså er

$\|x\| > 0$ for $x \in E_1$, $x \neq 0$. For $x \in E_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder trivielt $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

For $x_1, x_2 \in E_1$ fås at $x_1 \in \mu_1 A$, $x_2 \in \mu_2 A$ medfører $x_1 + x_2 \in \mu_1 A + \mu_2 A = (\mu_1 + \mu_2)A$, idet A er konveks. Altså er $\|x_1 + x_2\| \leq \mu_1 + \mu_2$, og heraf

sluttes rutinemæssigt, at $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$. Vi har således vist, at E_1 er et normeret vektorrum med normen $\|x\|$. Men E_1 har også en topologi som delrum af E . Lad V være en vilkårlig omegn af 0 i rummet E_1 . Vi har da et $\lambda \in]0, \infty[$, så at $\frac{1}{\lambda}A \subseteq V$. Af $x \in \frac{1}{\lambda}A$ følger umiddelbart $\|x\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Af $x \notin \frac{1}{\lambda}A$ følger $\|x\| \geq \frac{1}{\lambda}$. Altså indeholder V en kugleomegn i normtopologien. Normtopologien er således en finere topologi på E_1 end den inducerede topologi. Mængder λA , $\lambda \in]0, \infty[$ udgør en basis for omegnene af 0 i normtopologien, og de er afsluttede og fuldstændige i den inducerede topologi. Af sætning 6 fra kapitel 6 (side 112) følger nu, at mængder λA er fuldstændige i normtopologien. Nu vil en følge på E_1 , som er fundamentalfølge i normtopologien, være begrænset i norm, altså indeholdt i et λA , som vi des fuldstændigt, altså konvergent på E_1 . Altså er E_1 et Banach-rum. (Først nu kan vi slutte, at E_1 er afsluttet i E , og nu har vi ikke brug for det.) Mængden $E_1 \cap W$ er nu rund, konveks og absorberende i E_1 , og den er afsluttet i den inducerede topologi, altså også i normtopologien, som er finere. Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(W \cap E_1) = E_1$, giver sætning 5 i kapitel 4, at en af mængderne $n(W \cap E_1)$ indeholder indre punkter i henhold til normtopologien på E_1 . Men i denne topologi har $W \cap E_1$ så et indre punkt x , dermed også $-x$ og derfor på grund af konveksiteten tillige 0 . Men så er $W \cap E_1$ en omegn af 0 , og absorberer derfor enhver mængde, som er begrænset i normtopologien, specielt mængden A . Dermed er sætningen bevist.

I et topologisk vektorrum vil vi for kortheds skyld betegne enhver mængde, der er rund, konveks, absorberende og afsluttet, som en blok. Vi vil kalde et topologisk vektorrum et blok-rum, hvis enhver blok er en omegn af 0 . Rummet $\mathcal{D}_K$ er altså et blok-rum. Det samme gælder ethvert Fréchet-rum, altså specielt ethvert Banach-rum.

Sætning 6. Lad E være et fuldstændigt, topologisk vektorrum, som er lokalkonvekst og Hausdorff-rum. Lad E' være det duale vektorrum. Hvis E og E' er i dualitet, vil enhver svagt begrænset mængde på E' også være stærkt begrænset.

Vi minder om, at svag begrænsning blot betyder punktvis

Begrænsning, og stærk begrænsning betyder ensartet begræn-

For ning på en begrænset mængde.

$|\langle x, x'_j \rangle| \leq \Lambda(x)$ for ethvert $j \in J$. For hvert $x \in E$ skriver vi $T_j(x) = \langle x, x'_j \rangle$. Vi har da $\frac{1}{\Lambda(x)} \{T_j(x) | j \in J\} \subseteq \bar{S}$, hvor S er enhedscirkelskiven i den komplekse plan. Dette er ensbetydende med, at $x \in \Lambda(x) \bigcap_{j \in J} T_j^{-1}(\bar{S})$, altså, at $W = \bigcap_{j \in J} T_j^{-1}(\bar{S})$ er en absorberende mængde i E . Det er imidlertid klart, at W også er rund, konveks og afsluttet. Af sætning 5 følger nu, at det for enhver rund, konveks, begrænset og afsluttet mængde $A \subseteq E$ gælder, at W absorberer A , altså, at der eksisterer et $\lambda \in]0, \infty[$, således at $A \subseteq \lambda W$. For ethvert $x \in A$ og ethvert $j \in J$ har vi da $f_j(x) \in \Lambda f_j(W) \subseteq \Lambda S$. Dermed har vi vist, at $\{T_j | j \in J\}$ er ensartet begrænset på enhver rund, konveks, begrænset og afsluttet mængde. Sætningen følger derefter umiddelbart af følgende sætning:

Sætning 7: Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum og til-
lige et Hausdorff-rum. Systemet af runde, konvekse, afsluttede og
begrænsede mængder er en basis for de begrænsede mængder på E .

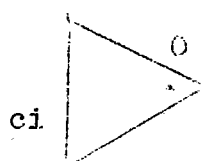
Bevis: Lad A være en begrænset mængde på E , lad S være enhedscirkelskiven i den komplekse plan, og lad U være en rund, konveks, afsluttet omegn af 0 . Vi har da et $\lambda \in]0, \infty[$, således at $A \subseteq \lambda U$.

Men da λU er rund, indeholder λU også den runde mængde $SA = A_1$, og denne mængde er altså begrænset. Da λU er konveks og afsluttet, indeholder den også det afsluttede, konvekse hylster $\hat{A}_1$ af A_1 . Altså er $\hat{A}_1$ begrænset. Da $e^{i\gamma}\hat{A}_1$ er konveks og afsluttet, har vi $e^{i\gamma}\hat{A}_1 \supseteq \widehat{e^{i\gamma}A_1} = \hat{A}_1$. Heraf følger umiddelbart, at $\hat{A}_1$ også er rund. Dermed er sætningen bevist.

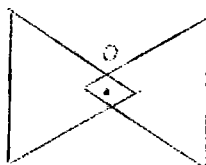
Bemærkning: Det er ikke ligegyldigt, i hvilken rækkefølge Sæ vi foretager processerne: I planen (vektorum over $\mathbb{R}$) har pu vi givet en konveks mængde som vist på figur 1. Når denne mæ rundes af (foreningsmængde af to trekanter), får vi ikke en konveks mængde.

Be

Figur 1



Figur 2



Sætning 9. Lad E være et blokrum, som tillige er Hausdorff-rum og fuldstændigt. Hvis en mængde $B' = \{T_j | j \in J\}$ af kontinuerte, lineære afbildninger $T_j: E \rightarrow \mathbb{C}$ er en begrænset mængde i dualrummet, er B' equikontinuert, og der findes en omegn U af 0 i E , på hvilken mængden B' er ensartet begrænset.

Bevis: At B' er equikontinuert betyder, at der til hvert $r > 0$ svarer en omegn U af 0 , så at $|T_j(x)| \leq r$ for alle $x \in U$ og alle $j \in J$. Altså er B' ensartet begrænset på omegnen U . Hvis på den anden side V er en omegn af 0 , og der findes et Λ , således at $|T_j(x)| \leq \Lambda$ for

alle $x \in V$ og alle $j \in J$, så er $|T_j(x)| \leq r$ for alle $x \in \frac{r}{\Lambda}V$ og alle $j \in J$. Lad nu B' være begrænset i dualrummet, og lad $S \subseteq \hat{C}$ være enhedscirkelskiven. Så er B' punktvis begrænset, og heraf følger ganske som i beviset for sætning 6, at $U = \bigcap_{j \in J} T_j^{-1}(\bar{S})$ er absorberende, rund, konveks og afsluttet, altså en blok, og følgelig en omegn af 0, og på denne omegn er B' ensartet begrænset. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. Enhver begrænset mængde af distributioner er ensartet begrænset på en eller anden omegn af 0 i $\mathcal{D}_K$.

Bevis: Specialtilfælde af sætning 9.

Et filter kaldes begrænset, hvis mindst én begrænset mængde hører med til det. Det til en følge svarende filter er efter denne definition begrænset, hvis og kun hvis følgen er det.

Sætning 11. Lad E være et blokrum, som tillige er Hausdorff-rum og fuldstændigt, og hvis duale rum E' er fuldstændigt. Hvis et begrænset filter eller en følge på E' er konvergent punktvis på en overalt tæt delmængde af E , er filtret eller følgen ligelig konvergent på enhver kompakt punkt mængde i E .

Bemærkning: Hvis E er et Hausdorffrum, er $A \subseteq E$ kompakt,

Bevis: Hvis enhver overdækning af A med åbne mængder indeholder en endelig overdækning. Hvis E ikke er et Hausdorffrum, siges A at være prækompakt, dvs. omegn U

$$\forall U \in \mathcal{U} \exists a_1, \dots, a_n \in E : A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n (a_\nu + U)$$

Se endvidere side 154

$$\forall x \in U \forall T \in \mathcal{B}^1: |T(x)| \leq \frac{1}{6}\epsilon.$$

På grund af lineariteten følger heraf umiddelbart

$$\forall a \in E \forall x, y \in a+U \forall T \in \mathcal{B}^1: |T(y)-T(x)| \leq \frac{1}{3}\epsilon.$$

Da A er kompakt, kan vi vælge $a_1, \dots, a_n$, så at $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n (a_\nu + U)$. For

$\nu = 1, \dots, n$ vælger vi $y_\nu \in a_\nu + U$, så at $\mathcal{F}$ konvergerer i $\mathcal{M}_\nu$. I filtret $\mathcal{F}$ findes da for hvert ν en mængde F_ν , så at

$$\forall T_1, T_2 \in F_\nu: |T_2(y_\nu) - T_1(y_\nu)| \leq \frac{1}{3}\epsilon.$$

Vi betragter nu mængden $F = F_1 \cap \dots \cap F_n \cap \mathcal{B}^1 \in \mathcal{F}$. For $T_1, T_2 \in F$ og $x \in A$ kan vi vælge ν , så $x \in a_\nu + U$, og vi har da

$$|T_2(x) - T_1(x)| \leq |T_2(x) - T_2(y_\nu)| + |T_2(y_\nu) - T_1(y_\nu)| + |T_1(y_\nu) - T_1(x)| \leq \epsilon,$$

altså

$$\forall T_1, T_2 \in F \forall x \in A: |T_2(x) - T_1(x)| \leq \epsilon.$$

Dette viser, at $\mathcal{F}$ er fundamentalfilter i den topologi, der svarer til ligelig konvergens på kompakte mængder, og da E' er fuldstændigt, medfører dette, at $\mathcal{F}$ er ligelig konvergent på enhver kompakt mængde.

En følge, der konvergerer punktvis på E , er punktvis begrænset på E og derfor ifølge sætning 9 ensartet begrænset på en omegn af 0 , og derfor ensartet begrænset på enhver kompakt mængde. Det samme gælder da for det tilsvarende filter, og resultatet for følger bliver derfor en umiddelbar konsekvens af resultatet for filtre. Dermed er sætningen bevist.

12

Sætning 13. Hvis et begrænset filter eller en følge af distributioner er konvergent for ethvert $\phi \in \mathcal{D}_K$, er filtret eller følgen ligelig konvergent på enhver begrænset mængde i $\mathcal{D}_K$, altså konvergent på $\mathcal{D}_K'$.

11

Bevis: Af sætning 12 fremgår, at filtret eller følgen konvergerer ligeligt på enhver kompakt mængde i $\mathcal{D}_K$. Men en begrænset mængde i $\mathcal{D}_K$ har kompakt afslutning. Dermed er sætningen bevist.

Det er nu vanskeligt at nå væsentligt videre med den almindelige teori for distributionerne uden kraftigere hjælpemidler, bl.a. udvalgsaksiomet. Inden vi skrider til udnyttelse af sådanne hjælpemidler, vil det dog være hensigtsmæssigt at vi frigør os fra den kompakte mængde K , der hidtil har været det fast definitionsområde for både funktioner og distributioner.

8. kapitel.Rummet $\mathcal{C}_0$.

Med $\mathcal{C}_K$ betegner vi vektorrummet af funktioner, som er kontinuerte på den kompakte mængde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ og har støtte indeholdt i K , udstyret med den ligelige topologi. Med $\mathcal{C}_0$ betegner vi vektorrummet af funktioner, som er kontinuerte i 0 og har ^{kompakt} støtten indeholdt i 0, udstyret med en topologi, som skal beskrives nærmere i det følgende.

Hvis K_1 og K_2 er kompakte mængder på $\mathbb{R}^m$ og $K_1 \subseteq K_2$, er $\mathcal{C}_{K_1}$ et delrum af $\mathcal{C}_{K_2}$, og topologien på $\mathcal{C}_{K_1}$ er netop delrumstopologien. Her er tale om normerede vektorrum, og normen på $\mathcal{C}_{K_1}$ er netop restriktionen af normen på $\mathcal{C}_{K_2}$. Hvis $\varphi \in \mathcal{C}_{K_2} \setminus \mathcal{C}_{K_1}$, findes der et $a \in K_2 \setminus K_1$, hvor $\varphi(a) \neq 0$, og φ har derfor en omegn, der intet har fælles med $\mathcal{C}_{K_1}$. Altså er $\mathcal{C}_{K_1}$ et afsluttet underrum af $\mathcal{C}_{K_2}$.

Vi ønsker at vælge topologien på $\mathcal{C}_0$, så at hvert $\mathcal{C}_K$ med $K \subseteq 0$ bliver et afsluttet delrum af $\mathcal{C}_0$ med delrumstopologien. Enhver kontinuert afbildning af $\mathcal{C}_0$ ind i et topologisk rum vil da have kontinuerte restriktioner til hvert $\mathcal{C}_K$.

Det vil på den anden side være en fordel, hvis det gælder, at en afbildning af $\mathcal{C}_0$ ind i et topologisk rum er kontinuert, hvis og kun hvis det for hvert $K \subseteq 0$ gælder, at restriktionen til $\mathcal{C}_K$ er kontinuert. Vi skal vise, at det er muligt at opnå dette i hvert fald for lineære afbildninger ind i et andet vektorrum. Vi vil vise dette under noget mere generelle forudsætninger, men først må vi udlede et par hjælpesætninger.

Sætning 1. Lad A og B være konvekse mængder i et vektorrum E . Det konvekse hylster for $A \cup B$ er da identisk med mængden

$$Q = \{tx + (1-t)y \mid x \in A \wedge y \in B \wedge t \in [0,1]\}.$$

Bevis: Det er på forhånd klart, at den angivne punktmængde er del af det konvekse hylster. Der er derfor nok at vise, at mængden selv er konveks. Dette fremgår af følgende udregning, hvor $x_1, x_2 \in A$; $y_1, y_2 \in B$; $t_1, t_2, u \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & u(t_1 x_1 + (1-t_1)y_1) + (1-u)(t_2 x_2 + (1-t_2)y_2) = \\ & (ut_1 + (1-u)t_2) \left(\frac{ut_1}{ut_1 + (1-u)t_2} x_1 + \frac{(1-u)t_2}{ut_1 + (1-u)t_2} x_2 \right) + \\ & (1-(ut_1 + (1-u)t_2)) \left(\frac{u(1-t_1)}{u(1-t_1) + (1-u)(1-t_2)} y_1 + \frac{(1-u)(1-t_2)}{u(1-t_1) + (1-u)(1-t_2)} y_2 \right) \end{aligned}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum, lad H være et afsluttet delrum, og lad a være et punkt af $E \setminus H$. For enhver konveks omegn V af 0 i delrummet H eksisterer der da en konveks omegn U af 0 i rummet E , så at $V = U \cap H$ og $a \notin U$.

Bevis: Da $x \rightarrow a+x$ er en homeomorfi af E på sig selv, er $a+H$ afsluttet i E . Af $a \notin H$ følger $0 \notin a+H$. Der findes derfor en konveks omegn W_1 af 0 i E , som ikke har punkter fælles med $a+H$. Da $V \subseteq H$ er en omegn af 0 i delrumstopologien, findes der en konveks omegn W_2 af 0 i E , så at $W_2 \cap H \subseteq V$. Vi sætter $W = W_1 \cap W_2$, og med U betegner vi det konvekse hylster af $W \cup V$. Lad os betragte et punkt $x \in U$. Ifølge sætning 1 kan vi da vælge $y \in V$, $z \in W$, $t \in [0,1]$, så at

$$x = ty + (1-t)z.$$

For $z \in H$ har vi $z \in V$, altså $x \in V$, da V er konveks. For $z \notin H$ og $t = 1$, er $x = y \in V$. For $z \notin H$, $t \neq 1$, har vi

$$\frac{t}{1-t} y \in H, \quad \frac{1}{1-t} x - \frac{t}{1-t} y \notin H$$

altså $\frac{1}{1-t} x \notin H$, hvilket medfører $x \notin H$. Dermed har vi vist, at $U \cap H = V$. Af $a \in U$ ville følge eksistensen af en fremstilling

$$a = ty + (1-t)z; \quad t \in [0,1], \quad y \in V, \quad z \in W,$$

altså $(1-t)z = a - ty \in a + H$. Nu er imidlertid $(1-t)z = t \cdot 0 + (1-t)z \in W$ og $W \cap (a + H) = \emptyset$. Vi er således kommet til en modstrid, og vi kan derfor slutte, at $a \notin U$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. Lad E være et vektorrum. Lad (E_n) være en voksende følge af delrum, alle organiserede som lokalkonvekse vektorrum, alle Hausdorff-rum, og således at det for $n \in \mathbb{N}$ gælder, at topologien på E_n netop er delrumstopologien svarende til, at E_n opfattes som delrum af E_{n+1} , samt at E_n er afsluttet i E_{n+1} . Det antages endvidere, at $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Der findes da en og kun en lokalkonveks topologi på E ,

for hvilken det gælder, at $U \subseteq E$ er omegn af 0, hvis og kun hvis $U \cap E_n$ er omegn af 0 i E_n for $n = 1, 2, \dots$

Bevis: Da den sidste betingelse giver et klart signalement af omegne af 0, er "kun en" klart. For hver voksende følge $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$, hvor det for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at U_n er konveks omegn af 0 i E_n , bruger vi $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots$ som omegn af 0 i E . Vi vil vise, at de således definerede omegne udgør en omegnsbasis $\hat{U}$ i E , og at E med den således definerede topologi bliver et topologisk vektorrum, og at

den sidst i sætningen anførte betingelse er opfyldt. Det er nu for det første klart, at $\hat{U}$ er en filterbasis. Det er også klart, at denne filterbasis er invariant over for multiplikation med et tal. En omegn $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots$ er absorberende, fordi hvert $x \in E$ tilhører et E_n , og som følge deraf absorberes af et U_n . Hver omegn U er konveks. Af $x, y \in U$ følger nemlig $x, y \in U_n$ for et passende n , og liniestykket med x og y som endepunkter vil derfor tilhøre U_n og dermed U . Vi har nu vist, at $\hat{U}$ definerer en topologi på E , og at E bliver et lokalkonvekst vektorrum. For en basisomegn $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots$ gælder $E_n \cap U \supseteq U_n$, så $E_n \cap U$ er omegn af 0 i E_n . Hvis en mængde $U \subseteq E$ tilfredsstiller den betingelse, at $U \cap E_n$ for hvert n er en omegn af 0 i E_n , da kan vi for hvert n vælge en konveks omegn $U_n \subseteq U \cap E_n$ af 0 i E_n , og U vil da indeholde basisomegnen $U_1 \cup U_2 \cup \dots$ og derfor selv være en omegn af 0 .

Sætning 4. Med de i sætning 3 benyttede betegnelser og betingelser vil yderligere følgende gælde: Hvis U_n er en konveks omegn af 0 i E_n , eksisterer der en konveks omegn U af 0 i E , så at $U \cap E_n = U_n$. Hvis hvert E_n er et Hausdorff-rum, er E et Hausdorff-rum.

Bevis: Ifølge sætning 2 kan vi for $k = n+1, n+2, \dots$ successivt vælge konvekse omegne U_k , så at $U_{k+1} \cap E_k = U_k$, $k = n, n+1, \dots$. Vi sætter $U_k = U_n \cap E_k$ for $k = 1, 2, \dots, n-1$ og $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots$. Vi har da $U \cap E_k = (U_1 \cap E_k) \cup (U_2 \cap E_k) \cup \dots = U_k$ i alle tilfælde. Lad nu hvert E_n være et Hausdorff-rum. For $a \in E$ eksisterer et n , således at $a \in E_n$, og da E_n er et Hausdorff-rum, kan vi vælge U_n , som omegn af 0 i E_n , så $a \notin U_n$. Den ovenfor beskrevne proces fører da til en omegn U , der ikke indeholder a . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5. Med de i sætning 3 benyttede betegnelser og betingelser vil hvert af rummene E_n være afsluttede delrum af E .

Bevis: Vi betragter $a \in E \setminus E_n$. Der findes da et $p > 0$, så at $a \in E_{n+p} \setminus E_{n+p-1}$. Da E_{n+p-1} er et afsluttet underrum af E_{n+p} , findes der en konveks omegn V af 0 i E_{n+p} , så at $(a+V) \cap E_{n+p-1} = \emptyset$. Der findes da en konveks omegn U af 0 i E , så at $U \cap E_{n+p} = V$. Så er $a+V = a+(U \cap E_{n+p}) = (a+U) \cap (a+E_{n+p}) = (a+U) \cap E_{n+p}$, altså $(a+U) \cap E_n = (a+U) \cap E_{n+p} \cap E_n = (a+V) \cap E_n \subseteq (a+V) \cap E_{n+p-1} = \emptyset$. Altså er E_n afsluttet i E .

Sætning 6. Med de i sætning 3 benyttede betegnelser og betingelser gælder følgende: Hvis hvert E_n er et blokrum, er E et blokrum.

Bevis: Lad $U \subseteq E$ være en blok. Da er $U \cap E_n$ for hvert $n \in \mathbb{N}$ en blok, altså en omegn af 0 i E_n . Men det medfører netop, at U er en omegn af 0 i E .

Definition 1. Under de i sætning 3 beskrevne omstændigheder siges rummet E at være eksakt grænserum for den voksende følge (E_n) .

Definition 2. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde. Lad $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ være en voksende følge af kompakte delmængder af O , så at der for enhver kompakt mængde $K \subset O$ findes et $n \in \mathbb{N}$ så $K \subseteq K_n$. Ved $\mathcal{C}_O$ forstås vektorrummet af kontinuerte funktioner med kompakt støtte inden for O med den topologi det får som eksakt grænserum for følgen $(\mathcal{C}_{K_n})$.

Vi har netop $\mathcal{C}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{K_n}$, og hvert $\mathcal{C}_{K_n}$ er et lokalkonvekst vektorrum og afsluttet i $\mathcal{C}_{K_{n+1}}$, så definitionen kan anvendes. Det er imidlertid også rigtigt, at topologien på $\mathcal{C}_0$ bliver uafhængig af valget af følgen (K_n) . Vi viser følgende sætning:

Sætning 7: Topologien på rummet $\mathcal{C}_0$ bliver uafhængig af valget af følgen (K_n) . For hver kompakt mængde $K \subseteq 0$ er $\mathcal{C}_K$ et afsluttet underrum af $\mathcal{C}_0$ og topologien på $\mathcal{C}_K$ er netop delrumstopologien.

Bevis: For hvert $K \subseteq 0$ findes et n , så $K \subseteq K_n$. Så er $\mathcal{C}_K$ et afsluttet underrum af $\mathcal{C}_{K_n}$ og topologien på $\mathcal{C}_K$ er netop den af $\mathcal{C}_{K_n}$ inducerede delrumstopologi. Endvidere er $\mathcal{C}_{K_n}$ et afsluttet delrum af $\mathcal{C}_0$ og topologien er delrumstopologien. Dermed er sætningens sidste påstand bevist. Hvis U er en omegn af 0 i $\mathcal{C}_0$, vil det ifølge det allerede viste for ethvert kompakt $K \subseteq 0$ gælde, at $U \cap \mathcal{C}_K$ er en omegn af 0 i $\mathcal{C}_K$. Hvis på den anden side $U \subseteq \mathcal{C}_0$ har den egenskab, at det for hvert kompakt $K \subseteq 0$ gælder, at $U \cap \mathcal{C}_K$ er en omegn af 0 i $\mathcal{C}_K$, da gælder dette specielt for hvert K_n , og deraf følger, at U er en omegn af 0 i $\mathcal{C}_0$. Vi har derved fået omegnene af 0 i $\mathcal{C}_0$ karakteriseret ved en egenskab, der er uafhængig af følgen $\mathcal{C}_K$, og dermed er sætningens første påstand bevist.

$$K_n = \{x \in O \mid \|x\| \leq n \wedge \text{dist}(x, O^c) \geq \frac{1}{n}\}$$

Sætning 8. Lad O være en åben mængde. Lad $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ være en voksende følge af kompakte delmængder af O , for hvilken det gælder $\forall n \in \mathbb{N} : K_n \subset K_{n+1}$, samt at der for hver kompakt delmængde $K \subseteq O$ findes et $n \in \mathbb{N}$, så $K \subseteq K_n$. Lad $\hat{\varepsilon}$ være mængden af aftagende reelle talfølger (ε_n) med grænseværdien 0. For $(\varepsilon_n) \in \hat{\varepsilon}$ sætter vi

$$U((\varepsilon_n)) = \{\varphi \in \mathcal{C}_O \mid \forall x \in K_n \setminus K_{n-1} : |\varphi(x)| \leq \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots\},$$

idet vi har sat $K_0 = \emptyset$. Mængden

$$\{U((\varepsilon_n)) \mid (\varepsilon_n) \in \hat{\varepsilon}\}$$

er da en basis for omegnene af O i $\mathcal{C}_O$.

$\{\varphi \in \mathcal{C}_O \mid \forall x \in K_n \setminus K_{n-1} : |\varphi(x)| \leq \varepsilon_n, n = 1, 2, \dots\}$ kan også skrives $\{\varphi \in \mathcal{C}_O \mid \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in K_n \setminus K_{n-1} : |\varphi(x)| \leq \varepsilon_n\}$

Bevis: Da $U((\varepsilon_n)) \cap \mathcal{C}_{K_n} \supseteq \{\varphi \in \mathcal{C}_{K_n} \mid \|\varphi\|_U \leq \varepsilon_n\}$, er

$U((\varepsilon_n))$ i hvert fald en omegn af O i $\mathcal{C}_O$. Lad nu U være en konveks omegn af O i $\mathcal{C}_O$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ er $U \cap \mathcal{C}_{K_n}$ en omegn af O i $\mathcal{C}_{K_n}$,

og der eksisterer derfor et $\eta_n > 0$, således at

$$U \cap \mathcal{C}_{K_n} \supseteq \{\varphi \in \mathcal{C}_{K_n} \mid \forall x \in K_n : |\varphi(x)| \leq \eta_n\},$$

og vi har derfor også

$$U \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi \in \mathcal{C}_{K_n} \mid \forall x \in K_n : |\varphi(x)| \leq \eta_n\}.$$

(side 69)

Ifølge sætning 9 i kapitel 3 eksisterer der for hvert $n \in \mathbb{N}$ en afbildning $\alpha_n : O \rightarrow \mathbb{R}$, som er strengt positiv overalt i $K_{n+2} \setminus K_n$ og 0 overalt i O uden for denne mængde. Endvidere eksisterer

$\alpha_0 : O \rightarrow \mathbb{R}$, som er strengt positiv i K_2 og 0 overalt i O uden for denne mængde. Så er $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ strengt positiv overalt i O , og $\beta_n = \frac{\alpha_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n}$

giver en opspaltning af enhedsfunktionen $1 = \beta_0 + \beta_1 + \dots$. Vi sætter nu for hvert $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n(n+1)} \min(1, \eta_1, \dots, \eta_{n+2}).$$

Lad φ være en vilkårlig funktion, der tilhører $U((\varepsilon_n))$. Lad os sætte $\varphi_n = n(n+1)\beta_n\varphi$. Vi har da øjensynligt $\varphi_n \in U \cap \mathcal{C}_{K_{n+2}} \subseteq U$. Men da U er konveks, følger heraf, at

$$\varphi = \sum \frac{1}{n(n+1)} \varphi_n$$

tilhører U . (Summen er i virkeligheden endelig, og $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$). Dermed har vi vist, at $U \supseteq U((\varepsilon_n))$, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 9. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og lad $K \subseteq O$ være en kompakt mængde. Der findes da en kontinuert afbildning $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0,1]$, som er konstant lig 1 på K , og som har kompakt støtte indeholdt i O .

Bevis: Lad r være et positivt tal, som er mindre end afstanden mellem K og randen af O . Da vil

$$\varphi(x) = 1 - \min\left\{1, \frac{2 \operatorname{dist}(x, K)}{r + \operatorname{dist}(x, K)}\right\}$$

have der Bemærkning: Hvis vi definerer $p_K(\varphi) = \sup_{x \in O} \frac{|\varphi(x)|}{\kappa(x)}$ for $\kappa \in \hat{\kappa}$, har vi

For dist 1° $p_K(0) = 0$

en delmængde 2° $p_K(\varphi) \geq 0$

Sætning 3° $p_K(\lambda\varphi) = \sup \frac{|\lambda\varphi(x)|}{\kappa(x)} = |\lambda| \sup \frac{|\varphi(x)|}{\kappa(x)} = |\lambda| p_K(\varphi)$ af

kontinu 4° $p_K(\varphi + \psi) = \sup \frac{|\varphi(x) + \psi(x)|}{\kappa(x)} \leq \sup \frac{|\varphi(x)|}{\kappa(x)} + \sup \frac{|\psi(x)|}{\kappa(x)} = p_K(\varphi) + p_K(\psi)$ e
overalt r vi

Da er $\hat{B}$ (side 81), dvs. p_K er en seminorm. Heraf følger, at

$$U(\kappa) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0 \mid \forall x \in O : |\varphi(x)| \leq \kappa(x)\}$$

$$\{\varphi \in \mathcal{C}_0 \mid p_K(\varphi) \leq 1\}$$

er konveks.

Bevis: Lad (K_n) være en følge af kompakte delmængder med de i sætning 8 forlangte egenskaber. For et $\kappa \in \hat{\mathcal{K}}$ sætter vi

$$\varepsilon_n = \inf\{\kappa(x) \mid x \in K_n\}.$$

Så er ε_n en aftagende følge af positive tal. Den behøver ikke at gå mod 0, men vi kan eventuelt erstatte ε_n med $\min\{\varepsilon_n, \frac{1}{n}\}$ og derved opnå, at $(\varepsilon_n) \rightarrow 0$. Så gælder $U(\kappa) \supseteq U((\varepsilon_n))$, og dermed har vi vist, at $U(\kappa)$ er en omegn af 0. Lad nu (ε_n) være en aftagende følge, som går mod 0. Ifølge sætning 9 eksisterer der en kontinuert afbildning $\kappa_n: \mathbb{R}^m$ ind i $[0, \varepsilon_n]$, som er konstant = ε_n på K_{n-1} og har kompakt støtte, som er indeholdt i $\overset{\circ}{K}_n$. Vi danner $\bigvee_{n=1}^{\infty} \kappa_n = \kappa$. For

restriktionen af κ til K_n har vi $\kappa|_{K_n} = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_{n+1}|_{K_n}$, idet κ_{n+1}

er konstant = ε_n på hele K_n og alle de følgende κ_p er overalt $\leq \varepsilon_{n+1}$.

Altså er κ kontinuert på hvert K_n og dermed på hele 0. For

$x \in K_n \setminus K_{n-1}$ er $\kappa(x) \leq \varepsilon_n$. Altså gælder $U(\kappa) \subseteq U((\varepsilon_n))$. Dermed har vi vist, at $\hat{U}$ er en omegnsbasis.

Bemærkning: Om talfølgen (a_n) gælder det, at $a_m \neq a_n$ for

Sætning 11. Lad $0 \subsetneq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, lad (a_n) være en punktfølge på 0 uden fortætningspunkter i 0, og lad (ε_n) være en aftagende følge af strengt positive tal. Der eksisterer da en kontinuert afbildning $\kappa: 0$ ind i $]0, \infty[$ (altså strengt positiv), som for hvert $n \in \mathbb{N}$ tilfredsstiller betingelsen $\kappa(a_n) \leq \varepsilon_n$.

Bevis: Vi sætter

$$\kappa_0(x) = \frac{1}{4} \text{dist}(x, \{0\}); \quad \kappa_n(x) = \varepsilon_n + \|x - a_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\kappa = \bigwedge_{n=0}^{\infty} \kappa_n.$$

Lad $x_0 \in 0$ være et vilkårligt punkt. Vi sætter $r = \frac{1}{3} \text{dist}(x_0, \{0\})$.

For $\|x-x_0\| < r$, $\|a_n-x_0\| > 2r$ har vi $\kappa_n(x) > \|x-a_n\| \geq \|a_n-x_0\| - \|x-x_0\| > r$ og vi har $\kappa_0(x) \leq \frac{1}{4} 4r = r$. Vi kan vælge N , så at a_n for $n > N$ ligger uden for den ved $\|a_n-x_0\| = 2r$ bestemte kugle, og for $\|x-x_0\| < r$ får vi da $\kappa = \kappa_0 \wedge \dots \wedge \kappa_N$. Altså er κ kontinuert og strengt positiv i en omegn af det vilkårlige punkt $x_0 \in O$. At betingelsen $\kappa(a_n) \leq \varepsilon_n$ bliver opfyldt, er klart. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 12. Rummet $\mathcal{C}_0$ er fuldstændigt.

Bevis: Lad $\hat{F}$ være et fundamentalfilter på $\mathcal{C}_0$. På $\mathcal{C}_0$ har vi den ligelige norm, og denne giver anledning til en topologi, som er grovere end topologien på $\mathcal{C}_0$. Derfor er $\hat{F}$ et fundamentalfilter i den ligelige norm, altså ligelig konvergent mod en kontinuert afbildning $\varphi_0: O \text{ ind i } \hat{C}$. Vi betragter nu et $\kappa \in \hat{K}$. Filtret $\hat{F}$ indeholder da en mængde $\varphi_1 + \frac{1}{3}U(\kappa)$ for et $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0$. Idet vi bruger omegnene fra $\hat{U}$ også i vektorrummet af alle på O kontinuerte funktioner (som dog ikke bliver et topologisk vektorrum med den derved indførte topologi), vil filtret $\varphi_0 + \frac{1}{3}U(\kappa)$ for hvert fast x tilhøre $\hat{F}(x)$, altså have punkter fælles med $\varphi_1 + \frac{1}{3}U(\kappa)$ så vi kan slutte, at $\varphi_0 + U(\kappa) \supseteq \varphi_1 + \frac{1}{3}U(\kappa)$, altså $\varphi_0 + U(\kappa) \in \hat{F}$. Vi mangler nu blot at vise, at $\varphi_0 \in \mathcal{C}_0$, ~~Annag,~~ at φ_0 ~~ikke~~ har kompakt støtte. Der findes ~~da~~ ^{ellers} en følge (a_n) af punkter i O uden fortætningspunkter i O , så at $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi_0(a_n) \neq 0$. Vi sætter $\varepsilon_n = \frac{1}{2} \min\{|\varphi_0(a_1)|, \dots, |\varphi_0(a_n)|\}$. Så er (ε_n) en aftagende følge af strengt positive tal. I henhold til sætning 11 vælges $\kappa \in \hat{K}$, så at $\forall n \in \mathbb{N} : \kappa(a_n) \leq \varepsilon_n$. Vi har nu $\varphi_0 + U(\kappa) \in \hat{F}$. Men for $\varphi \in \varphi_0 + U(\kappa)$ gælder da $\forall n \in \mathbb{N} : |\varphi(a_n)| \geq \varepsilon_n$. Altså har φ ikke kompakt støtte, men dette strider mod, at $\varphi \in \mathcal{C}_K$. Dermed er sætningen bevist.

Dette er Tietzes udvidelsessætning med visse modifikationer

Sætning 13. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og $K \subseteq O$ en kompakt mængde, og lad $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Der eksisterer da en kontinuert funktion $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ med kompakt støtte indeholdt i O og identisk med ψ på K . Endvidere er $\sup|\varphi| \leq \sqrt{2}\sup|\psi|$.

Bevis: Lad os først betragte det specielle tilfælde, hvor ψ er en positiv funktion. Vi sætter $\sup \psi = a$. Vi kan antage, at ψ ikke er identisk 0, altså at $a > 0$. Mængden $K_1 = \{x \in K | \psi(x) \geq \frac{2}{3}a\}$ er kompakt, og mængden $O_1 = \{x \in O | x \notin K \vee \psi(x) > \frac{1}{3}a\}$ er åben. Ifølge sætning 9 eksisterer der en kontinuert afbildning $\varphi_1 : \mathbb{R}^m$ ind i $[0, \frac{1}{3}a]$, som er konstant lig $\frac{1}{3}a$ på K_1 og som har støtten indeholdt i O_1 . Vi sætter $\psi_1 = \psi - \varphi_1|_K$, og vi har da $0 \leq \psi_1 \leq \frac{2}{3}a$ og $\sup \psi_1 = \frac{2}{3}a$. Vi anvender den samme proces på ψ_1 , og får derved en afbildning $\varphi_2 : \mathbb{R}^m$ ind i $[0, \frac{2}{3^2}a]$, således at $\psi_2 = \psi_1 - \varphi_2|_K$ tilfredsstiller $0 \leq \psi_2 \leq (\frac{2}{3})^2a$ og $\sup \psi_2 = (\frac{2}{3})^2a$. Ved at fortsætte denne proces får vi to funktionsfølger (φ_n) og (ψ_n) , hvor φ_n afbilder $\mathbb{R}^m$ ind i $[0, \frac{2^{n-1}}{3^n}a]$ og ψ_n afbilder K ind i $[0, (\frac{2}{3})^na]$ og $\psi_n = \psi_{n-1} - \varphi_n|_K$. Rækken $\sum \varphi_n$ er ligelig konvergent på hele $\mathbb{R}^m$ og $\varphi = \sum \varphi_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er derfor en kontinuert afbildning. Endvidere er $\sup \varphi \leq \sum \sup \varphi_n = \sum \frac{2^{n-1}}{3^n}a = \frac{1}{3}a \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = a$. Endvidere er $\psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k|_K = \psi - \sum_{k=1}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n$, idet vi har sat $\psi_0 = \psi$. Altså er $0 \leq \psi - \sum_{k=1}^n \varphi_k|_K \leq (\frac{2}{3})^na$. Heraf følger, at $\varphi|_K = \psi$. Dermed er sætningen vist i det specielle tilfælde, endda med $\varphi(O) \subseteq [0, \sup \psi]$. For $\psi : K \rightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, hvor $a < 0$, $b > 0$, sætter vi $\psi^+ = \psi \vee 0$, $\psi^- = -\psi \vee 0$. Vi kan da danne $\varphi^+ : O \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $[0, b]$ og $\varphi^- : O \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $[0, -a]$, således at φ^+ og φ^- er kontinuerte og har kompakt støtte og $\varphi^+|_K = \psi^+$; $\varphi^-|_K = \psi^-$. Så er $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.

en kontinuert afbildning af O ind i $[a, b]$ med kompakt støtte underholdt i O og $\varphi|_K = \psi$. Resultatet i det komplekse tilfælde følger nu umiddelbart ved spaltning i realdel og imaginærdel. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14. Hvis en monoton følge (φ_n) på $\mathcal{C}_0$ konvergerer punktvis mod $\varphi \in \mathcal{C}_0$, konvergerer (φ_n) mod φ i topologien på $\mathcal{C}_0$.

Bevis: På grund af lineariteten er det nok at se på det tilfælde, hvor (φ_n) går aftagende mod 0 . Lad K være støtten for φ_1 . Så er støtten for hvert φ_n indeholdt i K , og ifølge sætning 10 i kapitel 2 (side ⁵⁶~~38~~) går (φ_n) så ligeligt mod 0 på K , men det medfører umiddelbart, at $(\varphi_n) \rightarrow \varphi$ i topologien på $\mathcal{C}_0$.

Sætning 15. Sætningerne 9 og 10 i kapitel 2 (side ⁵⁶~~38, 39~~) gælder for kontinuert reelle valuationer på gitret af reelle funktioner på $\mathcal{C}_0$. En kontinuert lineær valuation på $\mathcal{C}_0$ kan udvides til et Daniell-integral. Enhver kontinuert funktion bliver integrabel over enhver kompakt mængde med hensyn til det fremkomne mål. Dualrummet $\mathcal{C}_0'$ til $\mathcal{C}_0$ består af alle (ikke blot de endelige) mål på $\mathcal{C}_0$.

Bevis: Beviserne for sætningerne 9 og 11 i kapitel 2 overføres uændret, og dermed har vi også vist, at enhver kontinuert, lineær valuation kan udvides til et Daniell-integral. Lad $K \subset O$ være kompakt. Med K_n betegner vi mængden af punkter af $\mathbb{R}^m$ med afstand $\leq \frac{1}{n}$ fra K . Hvert K_n bliver en kompakt mængde, og der findes et $N \in \mathbb{N}$, således at $K_n \subset O$ for $n \geq N$. Ifølge sætning 9 eksisterer der for

hvert $n \geq N$ en kontinuert afbildning $\varphi_n : O \text{ ind i } [0,1]$, som er identisk 1 på K og har sin støtte indeholdt i $\overset{\circ}{K}_n$. Følgen $(\varphi_N \wedge \varphi_{N+1} \wedge \dots \wedge \varphi_{N+p})$ bliver en aftagende følge på $\mathcal{C}_0$ og konvergerer punktvis mod den karakteristiske funktion χ_K for K . Altså bliver K målelig. En kontinuert afbildning $\varphi : K \text{ ind i } \mathbb{R}$ kan udvides til en kontinuert afbildning $\tilde{\varphi} : O \text{ ind i } \mathbb{R}$ med støtten indeholdt i O og $\tilde{\varphi}\chi_K$ bliver integrabel, men det betyder netop, at φ er integrabel. Lad nu $T : \mathcal{C}_0 \text{ ind i } \mathbb{C}$ være en kontinuert linearform. Den har en udvidelse til et Daniell-integral, som giver en kontinuert linearform defineret på alle kontinuerede funktioner på K , og heraf følger, at restriktionen af T til $\mathcal{C}_K$ er et integral med hensyn til et mål, som er entydigt bestemt ved T . Dette gælder for ethvert kompakt $K \subseteq O$, og T er derfor netop et integral med hensyn til et mål på hele O . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 16. Vektorrummet $\mathcal{D}_O$ af funktioner $\varphi : O \text{ ind i } \mathbb{C}$, som er vilkårlig ofte differentiabel i O , og som har kompakt støtte indeholdt i O , er som delmængde af det topologiske rum $\mathcal{C}_0$ overalt tæt.

Bevis: Følger umiddelbart af sætningerne 7 og 6 i kapitel 3 (side ~~48,47~~ ^{68,67}), Vi har endnu ikke indført en topologi på $\mathcal{D}_O$; det vil ske i næste kapitel, og topologien vil blive forskellig fra delrumstopologien induceret fra $\mathcal{C}_0$.

9. kapitel.

Rummet $\mathcal{D}_0$. Bemærkning: ~~M. Bremermann~~, side 13

Definition 1. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og lad $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ være en følge af kompakte delmængder af 0 , således at der for enhver kompakt mængde $K \subset 0$ findes et $n \in \mathbb{N}$, så $K \subseteq K_n$. Ved $\mathcal{D}_0$ forstås vektorrummet af vilkårlig ofte differentiable funktioner $\varphi : 0 \rightarrow \mathbb{C}$ med kompakt støtte inden for 0 med den topologi, det får som eksakt grænserum for følgen $(\mathcal{D}_{K_n})$.

Sætning 1. Topologien på $\mathcal{D}_0$ bliver uafhængig af valget af følgen (K_n) . For hver kompakt mængde $K \subseteq 0$ er $\mathcal{D}_K$ et afsluttet underrum af $\mathcal{D}_0$, og topologien på $\mathcal{D}_K$ er netop delrumstopologien.

Bevis: Definition 1 og sætning 1 er analoge med definition 2 og sætning 7 i kapitel 8 (side 129), og bemærkningerne til definitionen og beviset for sætningen gælder uændrede i det foreliggende tilfælde.

Sætning 2. Lad 0 være en åben mængde. Lad $K_0 = \emptyset \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ være en voksende følge af kompakte delmængder af 0 , for hvilken det gælder, at $\forall n \in \mathbb{N} : K_{n-1} \subset \overset{\circ}{K}_n$, samt at der for enhver kompakt mængde $K \subset 0$ findes et $n \in \mathbb{N}$, så at $K \subseteq K_n$. Lad $\hat{P}$ være mængden af voksende følger (P_n) af naturlige tal og divergerende mod ∞ , og lad $\hat{\varepsilon}$ være mængden af aftagende reelle tælfølger (ε_n) med grænseværdien 0 . For $(P_n) \in \hat{P}$, $(\varepsilon_n) \in \hat{\varepsilon}$ sætter vi

$$U((P_n), (\varepsilon_n)) = \{\varphi \in \mathcal{D}_0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ med } |p| \leq P_n \forall x \in K_n \setminus K_{n-1} : |D^p \varphi(x)| \leq \varepsilon_n\}$$

Mængden

$$\hat{B} = \{U((P_n), (\varepsilon_n)) \mid (P_n) \in \hat{P} \wedge (\varepsilon_n) \in \hat{\varepsilon}\}$$

er da en basis for omegnene af 0 i $\mathcal{D}_0$.

Bevis: Vi har

$$U((P_n), (\varepsilon_n)) \cap \mathcal{D}_{K_n} \supseteq \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_n} \mid \forall p \text{ med } |p| \leq P_n \ \forall x \in K_n : |D^p \varphi(x)| < \varepsilon_n\},$$

og ved sammenligning med indledningen til kapitel 4 (side 77) ser vi, at udtrykket på højre side af inklusionstegnet netop er omegnen U_{P_n, ε_n} af 0 i rummet $\mathcal{D}_{K_n}$. Dermed har vi bevist, at $\mathcal{B}$ virkelig er en mængde af omegne af 0 i $\mathcal{D}_0$. Lad nu U være en vilkårlig konveks omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$. Sætningen vil være vist, når det lykkes os at vælge følgen (P_n) og følgen (ε_n) , så at $U((P_n), (\varepsilon_n)) \subseteq U$. Vi ved om U , at det for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $U \cap \mathcal{D}_{K_n}$ er en omegn af 0 i $\mathcal{D}_{K_n}$, altså at vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ kan vælge $Q_n \in \mathbb{N}$ og $\eta_n > 0$, så at

$$U \supseteq \{\varphi \in \mathcal{D}_{K_n} \mid \forall p \text{ med } |p| \leq Q_n \ \forall x \in K_n : |D^p \varphi(x)| \leq \eta_n\}.$$

Ifølge sætning 11 i kapitel 3 (side 71) kan vi vælge en følge (α_n) af vilkårlig ofte differentiable funktioner $\alpha_n: 0$ ind i $[0, 1]$, så at det for hvert n gælder, at α_n har sin støtte indeholdt i $\overset{\circ}{K}_{n+1} \setminus K_{n-1}$, og så at $\forall x \in 0 : \sum \alpha_n(x) = 1$. Vi vælger følgen (α_n) fast en gang for alle. Vi betragter nu en vilkårlig funktion $\varphi \in \mathcal{D}_0$, og vi vil søge et sæt tilstrækkelige betingelser, for at $\varphi \in U$.

Vi sætter $P_n = \max(Q_1, \dots, Q_{n+1})$, og (P_n) er da en voksende følge. Vi vil nu søge at bestemme en følge (ε_n) , så at

$$\varphi \in U((P_n), (\varepsilon_n)) \Rightarrow \varphi \in U.$$

Vi vil da have vist, at $U((P_n), (\varepsilon_n)) \subseteq U$, altså at $\mathcal{U}$ er basis for omegnene af 0 i $\mathcal{D}_0$, og dermed vil sætningen være bevist.

Vi betragter altså følgen (ε_n) som en ubekendt, vi skal bestemme. For $\varphi \in U((P_n), (\varepsilon_n))$ sætter vi

$$\varphi_n = n(n+1)\alpha_n\varphi.$$

Vi har da

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \varphi_n.$$

Dæ φ har kompakt støtte, er $\varphi_n = 0$ fra et vist trin, og da U er konveks, vil $\varphi \in U$, hvis $\varphi_n \in U$ for ethvert n . Denne betingelse vil for et $n \in \mathbb{N}$ være opfyldt, såfremt

$$\forall \underline{p} \text{ med } |\underline{p}| \leq P_n \quad \forall x \in O : |D^{\underline{p}} \varphi_n(x)| \leq \eta_n.$$

Her har vi benyttet, at støtten for φ_n er indeholdt i $K_{n+1} \setminus K_{n-1}$.

Nu har vi imidlertid

$$\forall \underline{p} \text{ med } |\underline{p}| \leq P_n \quad \forall x \in K_{n+1} \setminus K_{n-1} : |D^{\underline{p}} \varphi(x)| \leq \varepsilon_n.$$

Nu giver formelen for differentiation af et produkt et udtryk af for-

men Bemærkning: $|D^{\underline{p}}(\alpha_n(\underline{x})\varphi(\underline{x}))| = |\sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} \gamma_{\underline{q}} D^{\underline{q}} \alpha_n(\underline{x}) D^{\underline{p}-\underline{q}} \varphi(\underline{x})|$

$$D^{\underline{p}} \varphi_n = n(n+1) \quad ! \quad \leq \varepsilon_{n-1} \sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} \gamma_{\underline{q}} |D^{\underline{q}} \alpha_n(\underline{x})| \leq L_n \varepsilon_{n-1}$$

hvor koefficienterne $\gamma_{\underline{p}, \underline{k}}$ er faste hele tal. Vi får derfor en vurdering af formen

$$|D^{\underline{p}} \varphi_n(x)| \leq \lambda_n \varepsilon_n,$$

hvor λ_n afhænger af n , α_n og P_n , altså i virkeligheden kun af n .

Vi behøver altså blot for hvert $n \in \mathbb{N}$ at vælge $\varepsilon_n = \frac{\eta_n}{\lambda_n}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. Lad (P_n) og (P'_n) være voksende følger af naturlige tal, og lad (ε_n) og (ε'_n) være aftagende følger, som går mod nul. For de i sætning 2 omtalte basisomegne gælder da

$$(\exists n \in \mathbb{N} : P_n < P'_n \vee \varepsilon_n > \varepsilon'_n) \Rightarrow U((P_n), (\varepsilon_n)) \setminus U((P'_n), (\varepsilon'_n)) \neq \emptyset.$$

Bevis: Lad $n \in \mathbb{N}$ være valgt, så at $P_n < P'_n$ eller $\varepsilon_n > \varepsilon'_n$. Vi vælger en kompakt mængde $K \subset \overset{\circ}{K}_n \setminus K_{n-1}$. Vi har da

$U((P_n), (\varepsilon_n)) \cap \mathcal{D}_K = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \forall p \text{ med } |p| \leq P_n \ \forall x \in K : |D^p \varphi(x)| \leq \varepsilon_n\}$,
og analogt for $U((P'_n), (\varepsilon'_n))$. Af lemma 12 i kapitel 5 (side 101)
følger nu, at der eksisterer en funktion $\varphi \in \mathcal{D}_K$, som tilfredsstil-
ler betingelserne

$$\max_{|p|=P'_n} \|D^p \varphi\|_U = \Lambda, \quad \|D^q \varphi\|_U \leq \varepsilon'_n \text{ for } |q| \leq P'_n,$$

hvor vi vælger $\Lambda = 1 + \varepsilon'_n$, hvis $P_n < P'_n$, og $\Lambda = \varepsilon_n$, hvis $P_n = P'_n$.

Vi har da i begge tilfælde $\varphi \in U((P_n), (\varepsilon_n)) \setminus U((P'_n), (\varepsilon'_n))$.

Groft udtrykt siger sætning 3, at de i sætning 2 indførte basisomegne virkelig alle er indbyrdes forskellige. Derefter er det let at vise følgende

Sætning 4. Mængden $\dot{U}$ af omegne af 0 i rummet $\mathcal{D}_0$ har ingen numerabel basis.

Bevis: Lad (U_k) være en vilkårlig følge af omegne af 0 i $\mathcal{D}_0$. For hvert $k \in \mathbb{N}$ indeholder U_k en basisomegn $U_k = U((P_n^k), (\varepsilon_n^k))$. Vi sætter

$$P_n = 1 + \max(P_n^1, \dots, P_n^n), \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2} \min(\varepsilon_n^1, \dots, \varepsilon_n^n).$$

Omegnen $U((P_n), (\varepsilon_n))$ vil da ifølge sætning 3 ikke være delmængde af $U((P_n^k), (\varepsilon_n^k))$ for nogen værdi af k . Dermed har vi vist, at $\{U_k\}$ ikke er basis for omegnene af 0, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 5. Rummet $\mathcal{D}_0$ er fuldstændigt.

Bevis: Lad $\mathbb{F}$ være et fundamentalfilter i $\mathcal{D}_0$. For hvert p er $\mathbb{F}^p = \{D^p \varphi \mid \varphi \in \mathbb{F}\}$ en filterbasis, og det tilsvarende filter er

fundamentalfilter på $\mathcal{D}_0$, altså konvergent på $\mathcal{D}_0$ med en grænsefunktion $\varphi^p \in \mathcal{D}_0$. Heraf følger nu, at hvert φ^p har kompakt støtte, som er indeholdt i 0 . Vi har nu for hvert p , at $\mathbb{F}^p \rightarrow \varphi^p$ i den ligelige topologi. Lad nu P være et naturligt tal. For $\psi \in \mathcal{D}_0$ sætter vi

$$\|\psi\|_P = \max_{|p| \leq P} \|D^p \psi\|_U.$$

Med denne norm er $\mathcal{D}_0$ et normeret vektorrum. For ethvert n findes der en kugle (i normen $\|\cdot\|_P$) med $\frac{1}{n}$ som radius, der tilhører $\mathbb{F}$. Centrerne af kuglerne giver en følge $(\varphi_n) \rightarrow \varphi$ og her bliver konvergensens ligelig i alle differentialkvotienter af ordener p med $|p| \leq P$. Heraf følger, at $(D^p \varphi_n) \rightarrow \varphi^p$ ligeligt i 0 , altså $\varphi^p = D^p \varphi$, hvor $\varphi = \varphi^0$. Lad nu U være en vilkårlig basisomegn af 0 i rummet $\mathcal{D}_0$. Der findes da et $\psi \in \mathcal{D}_0$, så at $\psi + \frac{1}{3}U \in \mathbb{F}$. Da $\mathbb{F}$ er punktvis konvergent tillige med alle $\mathbb{F}^{(p)}$, vil det gælde for hvert $x \in 0$, at $\psi + \frac{1}{3}U$ og $\varphi + \frac{1}{3}U$ har fælles elementer, altså gælder generelt $\varphi + U \supseteq \psi + \frac{1}{3}U$, altså $\varphi + U \in \mathbb{F}$. Dermed har vi vist, at $\mathbb{F} \rightarrow \varphi$ i topologien på $\mathcal{D}_K$, og dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad $A \subseteq \mathcal{D}_0$ være en begrænset mængde. Der eksisterer da en kompakt mængde $K \subset 0$, så at hvert $\varphi \in A$ har sin støtte indeholdt i K .

Bevis: Indirekte. Lad K_n være den i sætning 2 optrædende følge af kompakte mængder. Hvis en kompakt mængde K med den ønskede egenskab ikke eksisterer, kan vi for hvert n vælge $a_n \in 0 \setminus K_{n-1}$ og $\varphi \in A$ med $\varphi(a_n) \neq 0$; vælger vi nu en aftagende

i $\mathcal{D}_0$ på en begrænset mængde. Så er $f^{-1}(S)$ en konveks mængde. Lad $A \subseteq \mathcal{D}_0$ være begrænset. Så er $T(A)$ begrænset. Altså findes der et $\lambda \in]0, \infty[$, så $T(A) \subseteq \lambda S$, altså

$$A \subseteq T^{-1}(T(A)) = T^{-1}(\lambda S) = \lambda T^{-1}(S).$$

Altså absorberer $T^{-1}(S)$ enhver begrænset mængde, og deraf følger, at $T^{-1}(S)$ er en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$. Altså er T kontinuert. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. En lineær afbildning $T : \mathcal{D}_0$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert, hvis og kun hvis det for enhver kompakt mængde $K \subset 0$ gælder, at restriktionen $T|_{\mathcal{D}_K}$ er kontinuert.

Bevis: "Kun hvis" er trivielt. Lad os nu antage, at $T|_{\mathcal{D}_K}$ er kontinuert for ethvert kompakt $K \subseteq 0$. Vi har da for $K \subseteq 0$, at

$$T^{-1}(S) \cap \mathcal{D}_K = (T|_{\mathcal{D}_K})^{-1}(S),$$

altså at $T^{-1}(S) \cap \mathcal{D}_K$ er en omegn af 0. Da $T^{-1}(S)$ er konveks, medfører dette, at $T^{-1}(S)$ er en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Ved en distribution på den åbne mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ forstås en kontinuert lineær afbildning $T : \mathcal{D}_0$ ind i $\mathbb{C}$. Mængden af sådanne distributioner udstyret med den topologi, der svarer til ligelig konvergens på enhver begrænset mængde er det duale vektorrum $\mathcal{D}'_0$ til $\mathcal{D}_0$.

144₃ Bemærkning: Hvis vi sætter $p_B(T) = \sup_{\phi \in B} |T(\phi)|$ for $B \neq \emptyset$,

er p_B en seminorm, og

$$V(B, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{D}'_0 \mid p_B(T) \leq \varepsilon\} \text{ er konveks.}$$

Mængdesystemet $\{V(B, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \wedge B \in \mathcal{B}\}$ er da en basis for omegne af 0 i $\mathcal{D}'_0$.

følge (ε_n) , som konvergerer mod 0, så at $n\varepsilon_n < |\varphi(a_n)|$, vil en omegn $U((P_n), (\varepsilon_n))$ ikke absorbere A , og A er således ikke begrænset. Dermed er sætningen bevist.

Bemærkning: Punktvis begrænset $\iff$ ensartet begrænset på S
 begrænsede mængder $\iff$ ensartet begrænset på en eller anden
 omegn af $0 \iff$ equikontinuitet.

Punktvis begrænset på en overalt tæt mængde $\iff$ ligelig

Bkonvergens på enhver kompakt mængde

Sætning 8. En konveks mængde $U \subseteq \mathcal{D}_0$ er en omegn af 0, hvis og kun hvis den absorberer enhver begrænset delmængde af $\mathcal{D}_0$.

Bevis: "Kun hvis" er trivielt. Hvis U absorberer enhver begrænset delmængde af $\mathcal{D}_0$, vil $U \cap \mathcal{D}_K$ for kompakt $K \subset 0$ absorbere enhver begrænset delmængde af $\mathcal{D}_K$, altså ifølge sætning 14 i kapitel 4 (side 88) være en omegn af 0 i $\mathcal{D}_K$. Men da $\mathcal{D}_0$ er det eksakte grænserum for følgen $\mathcal{D}_{K_n}$, følger heraf, at U er en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9. En lineær afbildning $T : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert, hvis og kun hvis enhver begrænset mængde i $\mathcal{D}_0$ af T afbildes på en begrænset mængde.

Bevis: Lad T være kontinuert og $A \subseteq \mathcal{D}_0$ begrænset. Lad S være enhedscirkelskiven i $\mathbb{C}$. Så er $T^{-1}(S)$ en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$, og der findes et $\lambda \in]0, \infty[$, så at $A \subseteq \lambda T^{-1}(S)$, altså $T(A) \subseteq \lambda S$. Lad os dernæst antage, at T afbilder enhver begrænset mængde

Bevis: Indlysende.

Sætning 12. Rummet $\mathcal{D}'_0$ er fuldstændigt.

Bevis: Lad $\mathcal{F}$ være et fundamentalfilter på $\mathcal{D}'_0$. Lad $K \subseteq 0$ være en kompakt mængde. For hver mængde $A \in \mathcal{F}$ danner vi A_K bestående af restriktionerne af alle $T \in A$ til $\mathcal{D}_K$. Mængderne A_K udgør da en filterbasis på $\mathcal{D}_K$, og det er klart, at det tilsvarende filter bliver et fundamentalfilter på $\mathcal{D}_K$, altså konvergent, da $\mathcal{D}_K$ er fuldstændigt. Heraf følger, at $\mathcal{F}$ konvergerer ligeløst på begrænsede mængder i $\mathcal{D}_K$, men da enhver begrænset mængde i $\mathcal{D}'_0$ er indeholdt i et $\mathcal{D}'_K$ med kompakt $K \subset 0$, er sætningen bevist.

Sætning 13. Rummene $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}'_0$ er i dualitet ved det indre produkt $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$. Den svage topologi på $\mathcal{D}'_0$ svarer til punktvis konvergens, og svagt begrænset på $\mathcal{D}'_0$ bliver punktvis begrænset.

Bevis: Indlysende. Bemærkning: Om dualitet, se definition 1 i kapitel 7 (side 113).

Sætning 14. Begrænset på $\mathcal{D}'_0$ betyder ensartet begrænset på enhver begrænset mængde. En punktvis begrænset mængde på $\mathcal{D}'_0$ er begrænset, og der findes en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$, på hvilken den er ensartet begrænset.

Bevis: Den første påstand er indlysende. Den anden påstand gælder ifølge sætning 6 i kapitel 7 (side 120) for dualrummet

til et hvilket som helst fuldstændigt, lokalkonvekst topologisk vektorrum. Den tredje påstand gælder ifølge sætning 9 i kapitel 7 (side 121), da $\mathcal{D}_0$ tillige er et blokrum.

Sætning 15. Hvis et begrænset filter eller en følge af distributioner er konvergent for ethvert $\phi \in \mathcal{D}_0$, er filtret eller følgen ligelig konvergent på enhver kompakt mængde i $\mathcal{D}_0$.

Bevis: Specialtilfælde af sætning 12 i kapitel 7 (side 122).

En nærmere diskussion af kompakthed i vilkårlige topologiske vektorrum vil nu være nødvendig. Desuden får vi brug for mere dybtliggende egenskaber ved konvekse mængder. I begge tilfælde kommer velordningssætningen til at spille en væsentlig rolle. Vi vil ofre et kapitel på diskussion af velordningssætningen og Zorns lemma. Derefter går vi videre med den generelle teori for kompakthed.

10. kapitel.Udvalgsaksiomet, velordningssætningen, Zorns lemma.

Definition 1. En fuldstændig ordnet mængde kaldes velordnet, hvis enhver ikke tom delmængde har et første element. En delmængde, der med et element altid indeholder alle forudgående, kaldes et afsnit. Lad A og B være velordnede mængder. En ^{strengt} voksende afbildning $f : A \text{ ind i } B$ kaldes en velordningsisomorfi, hvis det for ethvert afsnit $A_1 \subset A$ gælder, at det første element af $A \setminus A_1$ afbildes på det første element af $B \setminus f(A_1)$.

Sætning 1. En velordningsisomorfi er en injektiv afbildning. For givne velordnede mængder A og B findes der højst ^{velord-} ~~en afbild-~~ ningsisomorfi, og ved denne bliver billedet $f(A)$ et afsnit af B . Den omvendte afbildning $f^{-1} : f(A)$ på A bliver også en velordningsisomorfi.

Bevis: Den første påstand følger af, at A og B er fuldstændig ordnede, og afbildningen er voksende. Lad $f, g : A \text{ ind i } B$ være velordningsisomorfier. Hvis f og g ikke er identiske, er mængden $\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ ikke tom og har derfor et første element x_1 . Elementerne forud for x_1 (eksklusive) udgør et afsnit A_1 af A , og vi har $f(A_1) = g(A_1)$. Men både $f(x_1)$ og $g(x_1)$ er det første element af $B \setminus f(A_1) = B \setminus g(A_1)$, altså $f(x_1) = g(x_1)$. Vi har således indirekte bevist, at f og g er identiske.

Sætning 2. Lad A være en velordnet mængde. Til ethvert afsnit $A_1 \subset A$ findes et element $x \in A$, så at A_1 netop er mængden af elementer, der kommer før x (eksklusive). En foreningsmængde af afsnit af A er et afsnit af A .

Bevis: Vi vælger x som det første element i $A \setminus A_1$. Ethvert element forud for x vil da tilhøre A_1 . Et element $y > x$ kan ikke tilhøre A_1 , da det ville medføre, at $x \in A_1$. Lad $\{A_j \mid j \in J\}$ være en mængde af afsnit af A . Af $x \in \bigcup A_j$ følger, at der eksisterer et $j \in J$, så at $x \in A_j$, men så vil alle elementer forud for x tilhøre A_j og dermed $\bigcup A_j$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. Lad A og B være velordnede mængder. Der findes da en velordningsisomorfi, som afbilder den ene af mængderne på et afsnit af den anden.

Bevis: For visse afsnit $A_j \subseteq A$ findes velordningsisomorfier $f_j: A_j \rightarrow B$. Vi sætter $A^* =$ foreningsmængden af alle sådanne A_j . For $x \in A^*$ har vi visse (mindst et) A_{j_1}, A_{j_2} , som indeholder x . Ved restriktioner af φ_{j_1} og φ_{j_2} til afsnittet bestående af elementerne før x (inklusive) får vi ifølge sætning 1 samme ordensisomorfi, altså $\varphi_{j_1}(x) = \varphi_{j_2}(x)$. Vi kan derfor definere en afbildning $f: A^* \rightarrow B$ ved for hvert $x \in A^*$ at vælge j , så $x \in A_j$ og sætte $f(x) = f_j(x)$, idet denne værdi ikke afhænger af valget af j . Det følger umiddelbart af denne definition, at f bliver en ordensisomorfi. Sætningen vil være bevist, når vi har vist, at $A^* = A$ eller $f(A^*) = B$. I modsat fald ville $A \setminus A^*$ have et første element x^* og $B \setminus f(A^*)$ et første element y^* , og

Vi kunne definere en velordningsisomorfi $f^*: A^* \cup \{x^*\}$ ind i B ved at sætte $f^*(x) = f(x)$ for $x \in A^*$ og $f^*(x^*) = y^*$. Det ville medføre, at $A^* \cup \{x^*\}$ var en af mængderne A_j , men det er i modstrid med definitionen af A^* . Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Lad A være en vilkårlig mængde. Ved en udvalgsfunktion på A forstås en afbildning $u: \mathcal{D}(A) \setminus \{\emptyset\}$ ind i A , som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall B \in \mathcal{D}(A) \setminus \{\emptyset\} : u(B) \in B.$$

Definition 3. Et element i en (partielt) ordnet mængde kaldes maksimalt, hvis det er sin eneste efterfølger.

Definition 4. En (partielt) ordnet mængde kaldes induktivt ordnet, hvis enhver fuldstændig ordnet delmængde har en majorant (dvs. et element, der følger efter ethvert element i delmængden)

Sætning 4. Følgende påstande er indbyrdes ækvivalente:

- 1) Udvalgsaksiomet. På enhver mængde findes en udvalgsfunktion.
- 2) Velordningssætningen. Enhver mængde kan velordnes.
- 3) Zorns lemma. I enhver ikke tom, induktivt ordnet mængde findes et maksimalt element.

Bevis: $2) \Rightarrow 1)$. Lad A være en vilkårlig mængde. Vi velordner A . For enhver ikke tom delmængde $B \subseteq A$ betegner vi med $u(B)$ det første element i B . Derved har vi defineret en udvalgsfunktion på A , og dermed er påstanden bevist.

3) $\Rightarrow$ 2). Lad A være en vilkårlig mængde. Med $\mathcal{M}$ betegner vi mængden af alle par $M = (B, <)$, hvor B er en delmængde af A og $<$ en velordning på B . Mængden $\mathcal{M}$ indeholder i det mindste $\emptyset$ og er således ikke tom. For $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ skriver vi $M_1 < M_2$, hvis M_1 er et afsnit af M_2 . Så er $<$ en ordningsrelation på $\mathcal{M}$, som derved bliver en partielt ordnet mængde. Lad $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ være fuldstændigt ordnet ved $<$, og lad M være foreningsmængden af alle mængder $M_j \in \mathcal{H}$. For $x, y \in M$ eksisterer $M_1, M_2 \in \mathcal{H}$, så $x \in M_1$, $y \in M_2$. Men så er den ene, lad os sige M_1 , afsnit af den anden M_2 , og vi har $x, y \in M_2 = (B_2, <_2)$, så vi får en relation $x <_2 y$. Har vi tillige $x, y \in M_3$, er M_2 afsnit af M_3 eller omvendt, og M_3 giver derfor samme rækkefølge af x og y . Også 3 punkter x, y, z vil tilhøre en mængde fra $\mathcal{H}$, og M vil derfor blive en ordnet mængde. Lad $M' \subseteq M$ være en delmængde. Der findes et $M_j \in \mathcal{H}$, så M_j indeholder elementer af M' og $M_j \cap M'$ har da et første element x . Hvis det for $M_k \in \mathcal{H}$ ligeledes gælder, at M_k indeholder elementer af M' , vil x også være første element i $M_k \cap M'$. Altså er M velordnet, og i ordningen $<$ er M majorant for $\mathcal{H}$. Så følger af Zorns lemma, at $\mathcal{M}$ har et maksimalt element $(B_0, <_0)$. Eksisterer $a \in A \setminus B_0$, kan vi tilføje a som et sidste element til B_0 med ordningen $<_0$, og derved fås en mere omfattende velordnet mængde i modstrid med, at $(B_0, <_0)$ var maksimal. Altså er $B_0 = A$, og A er således velordnet. Dermed er påstanden bevist.

1) $\Rightarrow$ 3). Lad A være en vilkårlig ikke tom, partielt ordnet mængde. Vi vælger en udvalgsfunktion u på A . Lad K være en velordnet delmængde af A . For $x \in K$ betegner vi med $K(x)$ det afsnit af K , som består af elementerne forud for x (eksklusive), og

$$K(x) = \{y \in K \mid y < x \wedge y \neq x\}$$

$$K(x) = \{y \in A \mid \forall z \in K(x) : z \leq y\}$$

med $K(x)$ betegner vi de elementer i A , som følger efter ethvert element i $K(x)$ uden at tilhøre $K(x)$. Den velordnede delmængde K kaldes nu en kæde, hvis $\forall_K x : x = u(K(x))$. Hvis x er det første element i K , er $K(x) = \emptyset$, $K(x) = A$, altså $x = u(A)$. Alle kæder begynder derfor med samme element. Hvis K_1 og K_2 er kæder, findes der en ordensisomorfi, som afbilder den ene, lad os sige K_1 på et afsnit af den anden, altså $f : K_1 \text{ ind i } K_2$. Hvis mængden $\{x \in K_1 \mid f(x) \neq x\}$ ikke er tom, har den et første element x_0 , men så er $x_0 = u(K(x_0))$ og $f(x_0) = u(K(x_0))$, så vi får en modstrid. Altså er K_1 et afsnit af K_2 . Lad K^* være foreningsmængden af alle kæder. For $x, y \in K^*$ har vi kæder K_1 og K_2 , så $x \in K_1$, $y \in K_2$, men da K_1 er et afsnit af K_2 , findes der en kæde, som indeholder både x og y . Altså er K^* fuldstændigt ordnet. For en ikke tom mængde $B \subseteq K^*$ findes der en kæde K , så $B \cap K \neq \emptyset$. Elementerne i $B \setminus K$ følger efter elementerne i $B \cap K$, og det første element i $B \cap K$ bliver derfor det første element i B . Altså er K^* velordnet. Det er nu klart, at K^* er en kæde, og at K^* har enhver anden kæde som afsnit. Antager vi nu, at ordningen på A er induktiv, har den fuldstændigt ordnede mængde K^* en majorant $a \in A$. Hvis der fandtes elementer, som fulgte efter hvert element i K^* uden at høre til K^* , ville man ved at føje det udvalgte element fra mængden af sådanne til K^* få en kæde med K^* som ægte delmængde i modstrid med, at K^* var foreningsmængden af alle kæder. Altså har a ingen efterfølger undtagen a selv, og a er således et maksimalt element. Dermed er påstanden bevist, og sætning 4 er fuldstændig bevist.

Vi antager nu udvalgsaksiomet, og dermed har vi tillige velordningssætningen og Zorns lemma til rådighed i det følgende.

11. kapitel.Ultrafiltre. Kompakthed.

Sætning 1. Mængden af filtre på en mængde M er induktivt ordnet ved inklusion.

$$\hat{F} = \bigcup_{j \in J} \hat{F}_j = \{F \mid \exists j \in J : F \in \hat{F}_j\}$$

Bevis: Lad $\{\hat{F}_j \mid j \in J\}$ være en mængde af filtre på M , som er fuldstændig ordnet ved inklusion. Om $\hat{F} = \bigcup_j \hat{F}_j$ gælder da trivielt, at $\hat{F} \neq \emptyset$ og $\emptyset \notin \hat{F}$. Af $A, B \in \hat{F}$ følger, at der findes et j , så $A, B \in \hat{F}_j$. Altså vil enhver mængde, der indeholder A tilhøre $\hat{F}$, og $A \cap B$ vil tilhøre $\hat{F}$. Altså er $\hat{F}$ et filter. Dermed er sætningen bevist.

Definition 1. Et maksimalt filter på en mængde M kaldes et ultrafilter.

For $a \in M$ vil systemet af alle delmængder, der indeholder a , udgøre et ultrafilter.

Sætning 2. Til ethvert filter $\hat{F}$ på en mængde M svarer et ultrafilter $\hat{F}_u$, som er finere end $\hat{F}$.

Bevis: Af sætning 1 følger umiddelbart, at mængden af filtre, som er finere end $\hat{F}$, er induktivt ordnet ved inklusion. Altså findes der ifølge Zorns lemma et maksimalt element, altså et ultrafilter i denne mængde.

Sætning 3. Nødvendigt og tilstrækkeligt for at et filter $\hat{F}$ på en mængde M er et ultrafilter, er det, at der for enhver mængde $A \subseteq M$ gælder $A \in \hat{F}$ eller $CA \in \hat{F}$.

Bevis: Først tilstrækkeligt. Lad os antage, at $\hat{F}$ opfylder den stillede betingelse, og at $\hat{F}$ er ægte delfilter af et filter $\hat{G}$. Så findes der en mængde $A \in \hat{G} \setminus \hat{F}$, men så gælder $CA \in \hat{F}$, altså $CA \in \hat{G}$ i modstrid med, at $A \cap CA = \emptyset$. Lad os nu på den anden side antage, at $\hat{F}$ er et filter, og at der findes en mængde $A \subseteq M$, for hvilken $A \notin \hat{F}$ og $CA \notin \hat{F}$. Vi danner nu $\hat{G} = \{B \subseteq M \mid BUCA \in \hat{F}\}$. Vi har da $\hat{G} \neq \emptyset$ og $\emptyset \notin \hat{G}$. Af $BUCA \in \hat{F}$ og $C \supseteq B$ følger $CUCA \in \hat{F}$. Af $BUCA \in \hat{F}$ og $CUCA \in \hat{F}$ følger $(B \cap C) \cup CA = (BUCA) \cap (CUCA) \in \hat{F}$. Altså er $\hat{G}$ et filter. Af $B \in \hat{F}$ følger åbenbart $BUCA \in \hat{F}$, altså $B \in \hat{G}$. Altså er $\hat{G}$ finere end $\hat{F}$. Endvidere ser vi, at $A \in \hat{G}$, men $A \notin \hat{F}$. Altså er $\hat{F}$ et ægte delfilter af $\hat{G}$, og $\hat{F}$ er altså ikke et ultrafilter. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4. For en mængde A i et topologisk vektorrum E over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) er følgende betingelser ensbetydende:

- 1) Til enhver omegn U af 0 i E svarer punkter $a_1, \dots, a_q \in E$, så at $A \subset \bigcup_{k=1}^q (a_k + U)$
- 2) Ethvert ultrafilter på A er et fundamentalfilter i E .

Bevis:

1) $\Rightarrow$ 2). Lad $\hat{F}$ være et ultrafilter på A , og lad U være en omegn af 0 i E . Vi vælger $a_1, \dots, a_q \in E$, så at mængderne $a_1 + U, \dots, a_q + U$ udgør en overdækning af A . Vi sætter $A_k = A \cap (a_k + U)$, $k = 1, \dots, q$. Lad os antage, at ingen af mængderne A_k tilhører $\hat{F}$. Af sætning 3 følger da, at hver af mængderne $A \setminus A_k$ tilhører $\hat{F}$, altså vil $\bigcap_{k=1}^q (A \setminus A_k) \in \hat{F}$, men det går ikke, da $\bigcap_{k=1}^q (A \setminus A_k) = \emptyset$. Altså vil en af mængderne $A_k \in \hat{F}$, men det betyder, at $\hat{F}$ er et fundamentalfilter.

2) $\Rightarrow$ 1). Lad os antage, at U er en omegn af 0 i E , og at der ikke findes punkter $a_1, \dots, a_n \in E$, så at $A \subseteq \bigcup (a_k + U)$. Vi indfører nu betegnelsen $A(x) = A \setminus (x + U)$, og vi har da

$$A(x_1) \cap \dots \cap A(x_n) = A \setminus \bigcup_{k=1}^n (x_k + U) \neq \emptyset.$$

Altså udgør mængderne $A(x_1) \cap \dots \cap A(x_n)$, hvor $x_1, \dots, x_n$ gennemløber alle endelige punktsæt fra E en basis for et filter, der kan udvikles til et ultrafilter $\hat{F}$. For $x \in E$ har vi $A(x) = A \setminus (x + U) \in \hat{F}$, altså $A \cap (x + U) \notin \hat{F}$. Altså er $\hat{F}$ ikke et fundamentalfilter. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. En mængde A i et topologisk vektorrum E over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) kaldes prækompakt, hvis den opfylder betingelserne 1) og 2) i sætning 4.

Definition 3. Lad E være et topologisk rum, og lad $\hat{F}$ være et filter på E . Et punkt $a \in E$ kaldes et kontaktpunkt for $\hat{F}$, hvis

$$\forall A \in \hat{F} : a \in \bar{A}.$$

Sætning 5. Lad E være et topologisk rum, og lad $\hat{U}(a)$ betegne omegnfilteret for punktet a i E . Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $a \in E$ er kontaktpunkt for et filter $\hat{F}$ på E , er det, at $\{U \cap A \mid U \in \hat{U}(a), A \in \hat{F}\} = \hat{G}$ er et filter på E .

Bevis: Hvis $\hat{G}$ er et filter og $A \in \hat{F}$, er $U \cap A \neq \emptyset$ for ethvert $U \in \hat{U}(a)$, altså $a \in \bar{A}$. Altså er a kontaktpunkt for $\hat{F}$. Lad os nu antage, at $\hat{F}$ er et filter, og at a er kontaktpunkt for $\hat{F}$. Det er da klart, at ingen af mængderne i $\hat{G}$ er tomme. Det er også klart, at fællesmængden af to mængder fra $\hat{G}$ igen tilhører $\hat{G}$. Af $M \supset U \cap A$ følger $M = (U \cup M) \cap (A \cup M)$, altså $M \in \hat{G}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Hvis $\mathcal{F}$ er et ultrafilter på et topologisk rum E , og a er et ~~fortætningspunkt~~ ^{Kontaktpunkt} for $\mathcal{F}$, da konvergerer $\mathcal{F}$ mod a .

Bevis: Det i sætning 5 indførte filter $\mathcal{G}$ er finere end $\mathcal{F}$, altså identisk med $\mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ er et ultrafilter. Men $\mathcal{G}$ er også finere end $\mathcal{U}(a)$, altså konvergent mod a . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7. For et topologisk rum E er følgende betingelser indbyrdes ækvivalente:

- 1) Enhver overdækning af E med åbne mængder indeholder en endelig overdækning.
- 2) Hvis det for et system af afsluttede mængder på E gælder, at intet endeligt delsystem har tom fællesmængde, da er fællesmængden for hele systemet heller ikke tom.
- 3) Ethvert filter på E har et kontaktpunkt.
- 4) Ethvert ultrafilter på E er konvergent.

Bevis: 1) $\Rightarrow$ 2). Lad H være et system af afsluttede mængder på E , og lad H_1 være systemet af komplementærmængder til mængderne i H . Hvis mængderne i H har tom fællesmængde, er H_1 en overdækning af E med åbne mængder, og hvis 1) gælder, vil en vis endelig delmængde $H_1^* \subset H_1$ udgøre en overdækning, og det endelige system H^* af komplementærmængder bliver et endeligt delsystem af H med tom fællesmængde. Dermed er påstanden bevist.

2) $\Rightarrow$ 1). Lad Δ være en overdækning af E med åbne mængder. Lad Δ_1 være systemet af komplementærmængder. Disse har tom fællesmængde. Hvis 2) gælder, kan vi deraf slutte, at der findes et endeligt delsystem Δ_1^* med tom fællesmængde, og systemet Δ_1 af komplementærmængder bliver da en endelig delmængde af Δ og en overdækning af E . Dermed er påstanden bevist.

3) $\Rightarrow$ 4). Dette følger umiddelbart af sætning 6.

4) $\Rightarrow$ 3). Et filter $\mathcal{F}$ på E kan udvides til et ultrafilter $\mathcal{G}$ konvergent mod et punkt a , som er kontaktpunkt for $\mathcal{G}$ og derfor også for $\mathcal{F}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Lad $\mathcal{F}$ være et filter på E . Afslutningerne af mængderne i $\mathcal{F}$ vil ifølge 2) have et fælles punkt, som åbenbart vil være kontaktpunkt for $\mathcal{F}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Lad $\mathcal{S}$ være et mængdesystem med den i 2) omtalte egenskab. Systemet af mængder, der fås som fællesmængde for vilkårlig endelige delsystemer af $\mathcal{S}$ er en filterbasis $\mathcal{B}$, der består af afsluttede mængder. Det tilsvarende filter har et kontaktpunkt, og dette vil være et fælles punkt for alle mængderne i $\mathcal{B}$ og derfor også for alle mængderne i $\mathcal{S}$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 4. Et topologisk rum kaldes quasikompakt, hvis det har egenskaberne 1)-4) i sætning 7. Hvis rummet tillige er et Hausdorff-rum, kaldes det kompakt. En punktmængde A i et topologisk rum E kaldes kompakt (quasikompakt), hvis A med delrumstopologien er et kompakt (quasikompakt) topologisk rum.

Sætning 8. Lad E og E_1 være topologiske rum og $f : E \rightarrow E_1$ en kontinuert afbildning. Hvis E er quasikompakt, er $f(E)$ quasikompakt. Hvis E_1 er et Hausdorff-rum og E quasikompakt, er $f(E)$ kompakt.

Bevis: Lad $\Delta = \{O_j \mid j \in J\}$ være en overdækning af $f(E)$ med åbne mængder. Så er $f^{-1}(\Delta) = \{f^{-1}(O_j) \mid j \in J\}$ en overdækning af E med åbne mængder, og der findes derfor en endelig overdækning $\{f^{-1}(O_1), \dots, f^{-1}(O_n)\}$ af E med nogle af disse mængder. For $y \in f(E)$

findes $x \in E$ med $f(x) = y$, og der findes et ν , så at $x \in f^{-1}(O_\nu)$, altså $y = f(x) \in O_\nu$. Altså er $\{O_1, \dots, O_n\}$ en overdækning af $f(E)$, og vi har således vist, at E er quasikompakt. Resten er klart.

Sætning 9. En reel funktion på en quasikompakt mængde antager en mindste og en største værdi.

Bevis: Følger umiddelbart af, at billedmængden ifølge sætning 8 er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}$.

Hausdorff-egenskaben kan opstå eller forsvinde ved kontinuert afbildning. Vi vil nok møde eksempler på dette.

Sætning 10. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$). En mængde $A \subseteq E$ er quasikompakt, hvis og kun hvis A er prækompakt og fuldstændig.

Bevis: Lad os antage, at $A \subseteq E$ er quasikompakt. Det er da klart, at A er prækompakt. Lad nu $\mathcal{F}$ være et fundamentalfilter på A . Da A er quasikompakt, har $\mathcal{F}$ et kontaktpunkt $a \in A$. Lad U være en omegn af 0 . Vi vælger en rund omegn V af 0 , så at $V+V+V \subseteq U$. Vi kan vælge $b \in E$, så at $(b+V) \cap A \in \mathcal{F}$, og vi har da $(a+V) \cap (b+V) \neq \emptyset$, så vi kan vælge $x \in (a+V) \cap (b+V)$. Vi har nu $b \in x+V$, $x \in (a+V)$, altså $b+V \subseteq a+V+V+V \subseteq a+U$, hvorefter vi kan slutte, at $(a+U) \cap A \in \mathcal{F}$, men dermed har vi vist, at $\mathcal{F} \rightarrow a$. Altså er A fuldstændig. Lad nu A være prækompakt og fuldstændig. Da er et ultrafilter på A et fundamentalfilter og derfor konvergent. Altså er A quasikompakt.

Sætning 11. En prækompakt mængde i et lokalkonvekst vektorrum er begrænset.

Bevis: Lad E være et lokalkonvekst vektorrum, lad $A \subseteq E$ være en prækompakt mængde og lad U være en konveks omegn af 0 . Vi vælger $a_1, \dots, a_n \in E$, så at $A \subseteq U(a_v + U)$. Da enhver endelig mængde er begrænset, kan vi vælge $\lambda \in]0, \infty[$, så at $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \lambda U$. Men da U er konveks, er $U(a_v + U) \subseteq \lambda U + U = (\lambda + 1)U$. Altså er A begrænset.

Sætning 12. En mængde i $\mathcal{D}_0$ er prækompakt, hvis og kun hvis den er begrænset, og kompakt, hvis og kun hvis den er begrænset og afsluttet.

Bevis: "Kun hvis" er klart for begge påstande. En begrænset mængde $A \subseteq \mathcal{D}_0$ er indeholdt i et afsluttet delrum $\mathcal{D}_K$, hvor $K \subset 0$ er kompakt. Men så er A prækompakt på $\mathcal{D}_K$, og det medfører umiddelbart, at A er prækompakt på $\mathcal{D}_0$. Hvis A tillige er afsluttet, bliver A kompakt i $\mathcal{D}_K$, men det medfører igen, at A er kompakt i $\mathcal{D}_0$, fx. på grund af sætning 8 anvendt på inklusionsafbildningen.

Sætning 13. Lad $f : M_1 \text{ ind i } M_2$ være en vilkårlig afbildning af en mængde M_1 ind i en mængde M_2 . Billedet af et filter $\mathcal{F}$ på M_1 vil være en filterbasis på M_2 . Det tilsvarende filter kaldes det til $\mathcal{F}$ svarende billedfilter. Hvis $\mathcal{F}$ er et ultrafilter, er billedet af $\mathcal{F}$ et ultrafilter på $f(M_1)$.

Bevis: Den første påstand følger umiddelbart af, at $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Hvis $\mathcal{F}$ er et ultrafilter, og A en vilkårlig delmængde af $f(M_1)$,

vil $f^{-1}(A)$ eller $f^{-1}(f(M_1) \setminus A)$ tilhøre $\mathcal{F}$ ifølge sætning 3, og derfor vil A eller $f(M_1) \setminus A$ tilhøre billedet af $\mathcal{F}$. Deraf følger umiddelbart ved sætning 3, at billedet af $\mathcal{F}$ er et ultrafilter på $f(M_1)$.

Sætning 14. Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $M_1 \subset M$ være en vilkårlig delmængde. Et ultrafilter på M_1 er da basis for et ultrafilter på M .

Bevis: Følger umiddelbart af sætning 3.

Sætning 15. En mængde i $\mathcal{D}'_0$ er prækompakt, hvis og kun hvis den er begrænset, og kompakt, hvis og kun hvis den er begrænset og afsluttet.

Bevis: I begge påstande er "kun hvis" trivielt. Lad $B \subseteq \mathcal{D}'_0$ være en begrænset mængde, og lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter på B . For $\varphi \in \mathcal{D}_0$ er $T \rightarrow T\varphi$ en afbildning af B ind i $\mathcal{C}$, og af sætning 13 og 14 følger nu, at $\{T\varphi | T \in \mathcal{F}\}$ er et ultrafilter på en begrænset delmængde af $\mathcal{C}$. Altså er $\mathcal{F}$ punktvis konvergent. Af sætning 15 i kapitel 9 (side 146) følger derefter, at $\mathcal{F}$ konvergerer ligeligt på enhver kompakt mængde mod et element af $\mathcal{D}'_0$. Altså er $\mathcal{F}$ et fundamentalfilter på B ifølge sætning 10. Den sidste påstand følger umiddelbart, da $\mathcal{D}'_0$ er fuldstændigt. Dermed er sætningen bevist.

12. kapitel.Lidt elementær vektorrumsteori.

Sætning 1. Lad M være en vilkårlig mængde, lad T være et topologisk rum, og lad $f : T \rightarrow M$ være en afbildning. En topologi på M bestemmes da ved, at $O \subseteq M$ skal være åben, hvis og kun hvis $f^{-1}(O)$ er åben.

Bevis: Påstanden følger umiddelbart af, at $f^{-1}(\bigcup_j O_j) = \bigcup_j f^{-1}(O_j)$ og $f^{-1}(O_1 \cap O_2) = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2)$.

Definition 1. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$, og lad $H \subset E$ være et underrum. Lad $k : E \rightarrow E/H$ være den kanoniske afbildning. Vi fastlægger da topologien på faktorummet E/H ved, at $O \subseteq E/H$ skal være åben, hvis og kun hvis $k^{-1}(O)$ er åben.

Det fremgår netop af sætning 1, at E/H bliver et topologisk rum ved denne definition. Vi ved endnu ikke, om E/H bliver et topologisk vektorrum.

Sætning 2. Afbildningen k i definition 1 er med den der indførte topologi på E/H en åben afbildning.

Bevis: Lad $O \subseteq E/H$ være åben. Vi får da $k^{-1}(k(O)) = \{x \in E \mid k(x) \in k(O)\} = \{x \in E \mid \exists a \in H : a+x \in O\} = \bigcup_{a \in H} (-a+O)$, og dette er en åben mængde.

Sætning 3. Med den i definition 1 indførte topologi bliver E/H et topologisk vektorrum.

Bevis: Lad U være en åben omegn af 0 i E/H . Da $k^{-1}(U)$ er absorberende, er U absorberende. Det er klart, at λU igen er en åben omegn af 0 . Vi kan vælge en åben omegn V af 0 i E , så at $V \cup V \subseteq k^{-1}(U)$. Så er $k(V)$ en åben omegn af 0 i E/H og $k(V) \cup k(V) \subseteq U$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4. Med den i definition 1 indførte topologi bliver E/H et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis underrummet H er afsluttet.

Bevis: At E/H er et Hausdorff-rum er ensbetydende med, at 0 er afsluttet i E/H , altså at $E/H \setminus \{0\}$ er åben, men på grund af sætning 2 og definition 1 er det ensbetydende med, at E/H er åben. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5. Hvis det topologiske vektorrum E over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$ er et Hausdorff-rum, er ethvert 1-dimensionalt underrum i E afsluttet.

Bevis: Vi minder om, at et 1-dimensionalt underrum i E er billedet af $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) ved en ikke konstant lineær afbildning $f : \mathbb{C} (\mathbb{R})$ ind i E . Vi sætter $f(1) = a$. Da E er et Hausdorff-rum, findes der en rund omegn U af 0 , som ikke indeholder a . Vi betragter et $x \in \mathbb{C} (\mathbb{R})$ med $f(x) \in U$. For $|\lambda| \leq 1$ har vi da $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in U$, idet U er rund. Heraf følger nu $f(y) \notin U$ for $|y| \geq 1$. Altså gælder $f^{-1}(U) \subseteq \{x \mid |x| < 1\}$. På grund af lineariteten følger heraf umiddelbart, at $f^{-1} : f(\mathbb{C})$ på $\mathbb{C}$ (eller $f(\mathbb{R})$ på $\mathbb{R}$) er en kontinuert afbildning. Altså er $f(\mathbb{C})$ (eller $f(\mathbb{R})$) vektorrumsisomorf med $\mathbb{C} (\mathbb{R})$, altså et fuldstændigt rum, altså afsluttet.

Definition 2. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, og lad $H \subseteq E$ være et underrum. Hvis E/H er n -dimensionalt, $n \in \mathbb{N}$, siges H at have codimensionen n (i E), og vi siger, at H har endelig codimension. Hvis H har codimensionen 1, kaldes sideklasserne $a+H$ hyperplaner.

Sætning 6. En hyperplan i et vektorrum E over $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ er nulpunktsmængden for en vis ligning $T(x) = a$, hvor $T : E \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ er en lineær afbildning og $a \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Omvendt gælder det også, at løsningsmængden for enhver sådan ligning er en hyperplan.

Bevis: En hyperplan har formen $a+H$, hvor $a \in E$, og H er et underrum med codimension 1. Vi kan identificere E/H med $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, og vi har således den kanoniske afbildning $k : E \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$, og $a+H$ er netop løsningsmængden for $k(x) = k(a)$. Dermed er den første påstand bevist.

Definition 3. En sideklasse til et lineært underrum i et vektorrum kaldes en lineær mangfoldighed. Denne tillægges samme dimension og codimension som underrummet. En lineær mangfoldighed af dimension 1 kaldes en plan i et vektorrum over $\mathbb{C}$ og en ret linie i et vektorrum over $\mathbb{R}$.

Hyperplanerne er maksimale ægte lineære delmangfoldigheder, idet en lineær mangfoldighed, der indeholder en hyperplan, må have codimension 1 eller 0, altså være hyperplanen selv eller hele rummet.

Sætning 7. En hyperplan i et topologisk vektorrum er afsluttet eller overalt tæt.

Bevis: Følger umiddelbart af den forudgående bemærkning, idet afslutningen af en lineær mangfoldighed er en lineær mangfoldighed.

Sætning 8. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$). En lineærform $T : E \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) er kontinuert, hvis og kun hvis $T^{-1}(0)$ er et afsluttet underrum.

Bevis: Hvis T er kontinuert, er $T^{-1}(0)$ afsluttet, altså gælder "kun hvis". Hvis $T^{-1}(0)$ er afsluttet, er $E/T^{-1}(0)$ et Hausdorff-rum. Endvidere er $T^{-1}(0)$ et underrum med codimensionen 1, altså $E/T^{-1}(0)$ et 1-dimensionalt topologisk vektorrum, og da det er et Hausdorff-rum, er det isomorft med $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) og enhver lineær afbildning $\phi : E/T^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) er kontinuert. Lad $k : E \rightarrow E/T^{-1}(0)$ være den kanoniske afbildning. Vi kan da vælge den lineære afbildning ϕ , så at $T = \phi \circ k$, og dermed er sætningen bevist.

Lad E_1 og E_2 være underrum af vektorrummet E . Underrummet $E_1 + E_2$ består af alle $x_1 + x_2$ med $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Hvis et element $x \in E_1 + E_2$ har to fremstillinger $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, er $y_1 - x_1 = x_2 - y_2 \in E_1 \cap E_2$. Fremstillingen bliver således entydig, hvis og kun hvis $E_1 \cap E_2$ er reduceret til 0-elementet. Når dette er tilfældet, siges som bekendt, $E_1 + E_2$ at være direkte sum af E_1 og E_2 . Hvis E er direkte sum af E_1 og E_2 , findes der således entydigt bestemte lineære afbildninger $p_1 : E \rightarrow E_1$ og $p_2 : E \rightarrow E_2$, så at $\forall x \in E : x = p_1(x) + p_2(x)$.

Definition 4. Lad E_1 og E_2 være underrum af et topologisk vektorrum E , så at E er direkte sum af E_1 og E_2 , og lad $\hat{U}_1$ og $\hat{U}_2$ være filtrene af omegne af 0 i E_1 og E_2 . Hvis mængdesystemet

$$\{U_1+U_2 \mid U_1 \in \hat{U}_1 \wedge U_2 \in \hat{U}_2\}$$

er en basis for omegne af 0 i E , siges E at være topologisk direkte sum af E_1 og E_2 .

Det bemærkes, at det angivne mængdesystem under alle omstændigheder er en filterbasis på E , og at mængderne i denne filterbasis alle indeholder 0.

Sætning 9. Lad E være et topologisk underrum, som er direkte sum af underrummene E_1 og E_2 , så at vi for hvert $x \in E$ har fremstillingen $x = p_1(x) + p_2(x)$ med $p_1(x) \in E_1$ og $p_2(x) \in E_2$. Nødvendigt og tilstrækkeligt for at E er topologisk direkte sum af E_1 og E_2 er, at afbildningerne $p_1: E$ på E_1 og $p_2: E$ på E_2 er kontinuerte.

Bevis: Inklusionsafbildningerne $j_1: E_1$ ind i E og $j_2: E_2$ ind i E er kontinuerte. Så er den ved $j(x_1, x_2) = j_1(x_1) + j_2(x_2)$ definerede afbildning $j: E_1 \times E_2$ ind i E kontinuert, idet E tænkes udstyret med produktrumstopologien. Hvis U er en omegn af 0 i E , findes der altså omegne U_1 og U_2 af 0 i E_1 og E_2 , så at $f^{-1}(U) \supseteq U_1 \times U_2$ eller $f(U_1 \times U_2) \subseteq U$. Nu er $f(U_1 \times U_2) = U_1 + U_2$, og vi har således vist, at enhver omegn af 0 i E indeholder en mængde af formen $U_1 + U_2$, $U_1 \in \hat{U}_1$, $U_2 \in \hat{U}_2$. Dette gælder endda uafhængigt af af antagelsen, at p_1 og p_2 er kontinuerte. Sætningen bliver derfor ensbetydende med, at enhver mængde $U_1 + U_2$, $U_1 \in \hat{U}_1$, $U_2 \in \hat{U}_2$

er en omegn af 0 i E , hvis og kun hvis p_1 og p_2 er kontinuerte. Dette følger imidlertid umiddelbart af, at $U_1 + U_2 = p_1^{-1}(U_1) \cap p_2^{-1}(U_2)$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. Lad E være et vektorrum og $E_1 \subset E$ et underrum med codimension 1. Der eksisterer da et 1-dimensionalt underrum E_2 , så at E er direkte sum af E_1 og E_2 .

Bevis: Ifølge sætning 6 eksisterer der en lineær afbildning $T: E \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$, så at $E_1 = T^{-1}(0)$. Vi vælger $a \in T^{-1}(1)$ vilkårligt, og vi sætter $p_2(x) = T(x)a$. Derved defineres en lineær afbildning $p_2: E \rightarrow E_2$, hvor E_2 er det 1-dimensionale underrum $\mathbb{C}a$ (eller $\mathbb{R}a$). Vi sætter $p_1(x) = x - p_2(x)$, og vi har da $T(p_1(x)) = T(x) - T(T(x)a) = T(x) - T(x)T(a) = 0$, altså $p_1(x) \in E_1$. Altså er $E = E_1 + E_2$. Af $x \in E_1 \cap E_2$ følger $p_2(x) \in p_2(E_1) = T(E_1)a = \{0\}$ og $p_1(x) \in p_1(E_2) = \{0\}$. Altså er $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, og derfor er E direkte sum af E_1 og E_2 .

Sætning 11. Lad E være et topologisk vektorrum, som er et Hausdorff-rum, og lad $E_1 \subset E$ være et underrum med codimension 1. Lad det 1-dimensionale underrum E_2 være valgt, så at E er direkte sum af E_1 og E_2 . Nødvendigt og tilstrækkeligt for at E er topologisk direkte sum af E_1 og E_2 er, at E_1 er afsluttet.

Bevis: Hvis E er topologisk direkte sum af E_1 og E_2 , er $p_2: E \rightarrow E_2$ kontinuert, og da E er et Hausdorff-rum, er $\{0\}$ afsluttet i E_2 , altså $E_1 = p_2^{-1}(0)$ afsluttet. Altså er betingelsen

nødvendig. Lad os nu antage, at E_1 er afsluttet. Så er E/E_1 isomorft med $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) altså med E_2 , og afbildningen p_2 kan sammensættes på formen $p_2 = \varphi \circ k$, hvor $k : E$ på E/E_1 er den kanoniske afbildning, som er kontinuert, mens $\varphi : E/E_1$ på $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) er en lineær afbildning, og derfor kontinuert. Altså er p_2 kontinuert. Da p_1 er defineret ved $p_1(x) = x - p_2(x)$, er p_1 også kontinuert.

Sætning 12. Hvis det n -dimensionale topologiske vektorrum E er et Hausdorff-rum, er det isomorft med $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$).

Bevis: Påstanden er bevist for $n = 1$. Lad os antage, at sætningen gælder for $(n-1)$ -dimensionale vektorrum. Da vil et $(n-1)$ -dimensionalt underum E_1 af E være isomorft med $\mathbb{C}^{n-1}$ ($\mathbb{R}^{n-1}$) altså et fuldstændigt rum, og derfor afsluttet i E . Men så har vi ifølge sætning 11 en fremstilling af E som topologisk direkte sum $E = E_1 + E_2$, hvilket medfører, at E er isomorft med $E_1 \times E_2$, altså med $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$). Dermed er sætningen bevist.

Sætning 13. Hvis et topologisk vektorrum er et Hausdorff-rum, er ethvert endelig-dimensionalt underum afsluttet.

Bevis: Fremgår af sætning 12.

Definition 5. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{C}$. Ved den reelle vektorrumsstruktur på E forstår vi den vektorrumsstruktur, der fremkommer, når produktafbildningen af $\mathbb{C} \times E$ ind i E erstattes med sin restriktion til $\mathbb{R} \times E$. Ved en ret linie på E forstås en ret linie i vektorrummet E med den reelle vektorrumsstruktur. Ved en reel hyperplan på E forstås en hyperplan i E med den reelle vektorrumsstruktur.

Sætning 14. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{C}$. Enhver ret linie i E er indeholdt i netop en plan i E . Enhver reel hyperplan i $\mathbb{C}$ indeholder netop én hyperplan gennem hvert punkt i den reelle hyperplan.

Bevis: En ret linie i E er en punktmængde af formen $a + \mathbb{R}b$, hvor $a \in E$ og $b \in E \setminus \{0\}$. Den er indeholdt i planen $a + \mathbb{C}b$, og det er klart, at den kun er indeholdt i denne eneplan. Der findes nemlig kun en plan gennem a og $a+b$. En reel hyperplan er givet en ligning $T(x) = a$, hvor $a \in \mathbb{R}$ og $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ er en afbildning, som er lineær i den reelle vektorrumsstruktur. En hyperplan er givet ved en ligning $T_1(x) = a + ib$, hvor T_1 er en lineær afbildning $T_1 : E \rightarrow \mathbb{C}$ og $a, b \in \mathbb{R}$. Den vil være indeholdt i den reelle hyperplan, hvis og kun hvis $T(x) = \operatorname{Re}(T_1(x))$, altså $T_1(x) = T(x) + iT'(x)$, hvor $T, T' : E \rightarrow \mathbb{R}$ er lineære i den reelle vektorrumsstruktur. Nu er

$$-T'(x) + iT(x) = iT_1(x) = T_1(ix) = T(ix) + iT'(ix).$$

Vi må således vælge $T'(x) = -T(ix)$, men så bliver

$T'(ix) = -T(-x) = T(x)$, og det ses nu let, at $T_1(x) = T(x) + iT'(x)$ med dette valg af T' bliver lineær. Kravet om, at hyperplanen skal indeholde et bestemt punkt af den reelle hyperplan, fastlægger netop konstanten b . Dermed er sætningen bevist.

En reel hyperplan, som er givet ved en ligning $T(x) = a$ bestemmer to halvrum $T^{-1}((-\infty, a])$ og $T^{-1}([a, \infty))$. De er konvekse mængder og følgelig sammenhængende. Er hyperplanen afsluttet, er T kontinuert, og halvrummene bliver åbne mængder. En afsluttet reel hyperplan deler således vektorrummet i to komponenter.

En hyperplan, der ikke er afsluttet, deler ikke rummet. De to komponenter sammen med et punkt af den afsluttede hyperplan udgør en sammenhængende mængde. Heraf følger, at en hyperplan i et vektorrum over de komplekse tal ikke deler rummet.

Begrebet "liniestykke" er helt det samme i et vektorrum E over $\mathbb{C}$ og i rummet E med den reelle vektorrumsstruktur. Derfor bliver begrebet "konveks" også helt det samme, og det er derfor berettiget, når vi i det følgende nærmere skal studere de konvekse mængder, at vi udelukkende beskæftiger os med vektorrum over $\mathbb{R}$.

13. kapitelKonvekse mængder i vektorrum.

I dette afsnit skal vi mere indgående beskæftige os med teorien for konvekse mængder i et vektorrum E over $\mathbb{R}$. En mængde $A \subseteq E$ kaldes som bekendt konveks, hvis den med punkterne a og b indeholder liniestykket med endepunkter a og b , altså hvis $\forall t \in [0,1] : tA + (1-t)A \subseteq A$. For en konveks mængde A gælder da generelt for $\lambda, \mu \in [0, \infty[$, at $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$. Vi minder også om, at en fællesmængde for konvekse mængder selv er konveks, og som følge deraf er enhver mængde B indeholdt i en mindste konveks mængde, der kaldes mængdens konvekse hylster, og er fællesmængden for alle konvekse mængder, der indeholder B . Enhver lineær mangfoldighed er en konveks mængde, og ethvert halvrum er en konveks mængde. En fællesmængde for halvrum er således konveks. En voksende følge af konvekse mængder vil have konveks foreningsmængde.

Definition 1. En konveks mængde A kaldes en konveks kegle, hvis

$$\forall \lambda \in]0, \infty[: \lambda A = A.$$

Bemærkning: Betingelsen $\forall \lambda \in]0, \infty[: \lambda A \subseteq A$ er tilstrækkelig, thi $\lambda \in]0, \infty[\Rightarrow \lambda A \subseteq A$, og $\lambda \in]0, \infty[\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in]0, \infty[$ så $A \Rightarrow \frac{1}{\lambda} A \subseteq A \Rightarrow A \subseteq \lambda A$. Man ser, at vi i definition 1 kræver

konveksitet af mængden A .

Bevis: Den sidste betingelse medfører $A = \bigcup_{\lambda \in]0, \infty[} \lambda A$, altså

$\lambda A = A$ for ethvert positivt λ . Den er således ækvivalent med betingelsen i definition 1. Hvis A er en konveks kegle, gælder $A+A = 2A = A$; altså er den første betingelse nødvendig. Hvis begge betingelser er opfyldt, fås for $t \in]0,1[$, at

$tA + (1-t)A = A \subseteq A$. For $t = 0$ eller 1 er den samme relation trivielt opfyldt. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Hvis A er en konveks kegle, er $A \cap -A$ et underrum.

Bevis: For $x, y \in A \cap -A$ har vi åbenbart $x+y \in A \cap -A$. Endvidere er $\lambda(A \cap -A) = A \cap -A$ for $\lambda > 0$ og $-(A \cap -A) = A \cap -A$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. Hvis A er en konveks kegle, og $0 \notin A$, er $A \cap -A = \emptyset$.

Bevis: Følger umiddelbart af sætning 2.

Sætning 4. Hvis A er en konveks kegle og $A \cap -A = \{0\}$, da er $A \setminus \{0\}$ en konveks kegle.

Bevis: Af $x, y \in A$ og $x+y = 0$ følger $x = -y$, altså $x \in -A$, altså $x \in A \cap -A$, hvilket medfører $x = y = 0$. Altså er $(A \setminus \{0\}) + (A \setminus \{0\}) \subseteq A \setminus \{0\}$. At $\lambda(A \setminus \{0\}) \subseteq A \setminus \{0\}$ for $\lambda \in]0, \infty[$, er klart. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5. Hvis A er en konveks mængde i et topologisk vektorrum E , da er $\overset{\circ}{A}$ og $\overline{A}$ konvekse mængder.

Bevis: For $a, b \in \overset{\circ}{A}$ kan vi vælge en omegn U af 0 , så at $a+U \subseteq \overset{\circ}{A}$, $b+U \subseteq \overset{\circ}{A}$. For $x \in U$ og $\lambda \in [0, 1]$ har vi da

$$\lambda a + (1-\lambda)b + x = \lambda(a+x) + (1-\lambda)(b+x) \in A,$$

altså $\lambda a + (1-\lambda)b + U \subseteq A$, hvilket viser, at $\lambda a + (1-\lambda)b \in \overset{\circ}{A}$. Dermed

er den første påstand bevist. Der ved $\varphi(x, y, \lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y$ definerede funktion afbilder mængden $M = A \times A \times [0, 1]$ ind i A , altså $\bar{M} = \bar{A} \times \bar{A} \times [0, 1]$ ind i $\bar{A}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad A være en konveks mængde i et topologisk vektorrum E . Af $a \in \bar{A}$, $b \in \overset{\circ}{A}$, $\lambda \in [0, 1[$ følger da $\lambda a + (1-\lambda)b \in \overset{\circ}{A}$.

Bevis: For $\lambda = 0$ er påstanden triviel. For $\lambda \neq 0$ er

$a + \frac{1-\lambda}{\lambda}b - \frac{1-\lambda}{\lambda}\overset{\circ}{A}$ en åben mængde, der indeholder a , og den vil da også indeholde et punkt c af A . Vi kan da vælge $x \in \overset{\circ}{A}$, så at $c = a + \frac{1-\lambda}{\lambda}(b-x)$. Så er den åbne mængde $O = \lambda c + (1-\lambda)\overset{\circ}{A}$ en delmængde af A , og den indeholder punktet $\lambda c + (1-\lambda)x = \lambda a + (1-\lambda)b$. Dette punkt tilhører altså $\overset{\circ}{A}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7. Hvis en konveks mængde A i et topologisk vektorrum E har indre punkter, gælder $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ og $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Bevis: Sætning 6 viser, at ethvert kontaktpunkt for A også er kontaktpunkt for $\overset{\circ}{A}$, altså $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{\overset{\circ}{A}}$. Den omvendte inklusion er triviel. Endvidere viser sætning 6, at intet punkt af $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ er et indre punkt af $\bar{A}$. Dermed er sætningen bevist.

Fællesmængden for en ret linie og en konveks mængde A er et liniestykke. Hvis dér foreligger en topologi på vektorrummet, vil liniestykkets eventuelle endepunkter altid være randpunkter for A . Sætning 6 viser, at hvis A har indre punkter, vil randpunkterne for A netop være de punkter, der er endepunkter for sådanne liniestykker. Derved får vi en rent

algebraisk karakterisering af randpunktter for A . Hvis topologien blot vælges, så A har indre punkter, er randen af A altså uafhængig af topologien.

Sætning 8. Hvis A er en konveks kegle i et topologisk vektorrum E , da er $\overset{\circ}{A}$ og $\overline{A}$ konvekse kegler.

Bevis: For $\lambda \neq 0$ er $x \rightarrow \lambda x$ en homeomorfi af E på sig selv. Altså er $\overset{\circ}{\lambda A} = \lambda \overset{\circ}{A}$ og $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$, og sætningen følger derfor umiddelbart af sætning 5.

Sætning 9. Lad A og B være afsluttede, konvekse mængder i et topologisk vektorrum E . Hvis $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = E$, $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$, da er $A \cap B$ en afsluttet hyperplan, og A og B er de ved denne hyperplan bestemte afsluttede halvrum.

Bevis: Da E er sammenhængende, er $A \cap B \neq \emptyset$. Da en translation i E ikke ændrer forudsætningerne eller påstanden, kan vi uden at indskrænke almindeligheden antage, at $0 \in A \cap B$. Dette medfører, at 0 er et randpunkt for A . Hvis $x \in A$ og $-x \in A$, vil ifølge sætning 6 både x og $-x$ være randpunkter for A . Hvis x er indre punkt for A , vil $-x$ være ydre punkt for A , altså indre punkt for B . En ret linie gennem 0 og et indre punkt for A skærer A og B hver i et liniestykke. De to liniestykker udgør tilsammen hele linien, og de har 0 som endepunkt. Dette viser, at $\overset{\circ}{A}$ og $\overset{\circ}{B}$ er konvekse kegler. Af sætning 7 følger nu, at A og B er afsluttede konvekse kegler. Da $\overset{\circ}{A} \cap B = \emptyset$, er 0 randpunkt for både A og B . Vi kan derfor slutte, at hvis x er et indre punkt i B , er $-x$ et indre punkt i A . Altså er $\overset{\circ}{B} = -\overset{\circ}{A}$,

men det medfører $B = -A$, og af sætning 2 følger nu, at $A \cap B$ er et afsluttet underrum. Lad nu $H \subseteq E$ være det underrum, der udspændes af $A \cap B$ samt et indre punkt $x \in A$. Lad os antage, at $H \subset E$. Vi har $-x \in B$, og der findes derfor et punkt $y \in B \setminus H$. Lad l være den rette linie gennem x og y . Vi har da $l \cap H = \{x\}$. Nu har l et afsluttet interval fælles med A og et afsluttet interval fælles med B , og de to intervaller udgør tilsammen hele l og har følgelig fælles punkter. Altså indeholder l et punkt af $A \cap B$ i modstrid med, at $A \cap B \subseteq H$. Altså er $H = E$. Dermed har vi vist, at E er direkte sum af $A \cap B$ og det 1-dimensionale underrum $\{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Altså er $A \cap B$ en hyperplan. Vi vidste i forvejen, at $A \cap B$ var afsluttet. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Et par (A, B) af konvekse mængder i et vektorrum E kaldes maksimalt, hvis $A \cap B = \emptyset$, og hvis det for ethvert par (A_1, B_1) af konvekse mængder i E , som tilfredsstiller, at $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \supseteq A$, $B_1 \supseteq B$ gælder, at $A_1 = A$ og $B_1 = B$.

Sætning 10. Hvis det for et maksimalt par (A, B) af konvekse mængder på et topologisk vektorrum E gælder, at A er åben og ikke tom, B er afsluttet og ikke tom, da er $\overline{A \cap B}$ en afsluttet hyperplan og $\overline{A}$ og B er de ved denne hyperplan bestemte afsluttede halvrum.

Bevis: Sætningen følger umiddelbart af sætning 9, hvis $\overline{A \cap B} = E$. Vi kan derfor nøjes med at betragte tilfældet $\overline{A \cap B} \subset E$, og da en parallelforskydning af E er uden indflydelse på de i sæt-

ningen omtalte forhold, kan vi antage, at $0 \notin \bar{A} \cup B$. For $a \in E$ vil halvlinien $\{\lambda a \mid \lambda \in [0, \infty[\}$ eventuelt skære både A og B, og den vil da skære A og B i disjunkte intervaller. Hvis det er tilfældet, bevirker konveksiteten, at den modsatte halvlinie $\{-\lambda a \mid \lambda \in [0, \infty[\}$ hverken skærer A eller B. For hver halvlinie $\{\lambda a\}$ kan vi nu afgøre, hvilket af de to skæringsintervaller, der ligger nærmest ved 0. Lad os tænke os, at dette spørgsmål besvares modsat for $\{\lambda a\}$ og $\{\lambda b\}$, altså at vi har $\lambda_1 a \in A$, $\lambda_2 a \in B$, $\lambda_1 < \lambda_2$, men $\lambda_3 b \in B$, $\lambda_4 b \in A$, $\lambda_3 < \lambda_4$. Nu udspænder $\{\lambda a\}$ og $\{\lambda b\}$ en plan, der er isomorf med $\mathbb{R}^2$, og deraf følger, at liniestykket fra $\lambda_1 a$ til $\lambda_4 b$ vil skære liniestykket fra $\lambda_2 a$ til $\lambda_3 b$, og dette skæringspunkt vil tilhøre $A \cap B$. Altså vil det for halvlinierne $\{\lambda a\}$ gælde, at de enten alle skærer A først, eller at de alle skærer B først. I det første tilfælde kan vi udvide A til det indre af det konvekse hylster for $A \cup \{0\}$, som ikke kan have punkter fælles med B, og det strider mod, at parret (A, B) var et maksimalt par. I det andet tilfælde kan vi erstatte B med det konvekse hylster af $B \cup \{0\}$ med samme virkning. Antagelsen $0 \notin \bar{A} \cup B$ fører altså i alle tilfælde til en modstrid. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 11. Lad A og B være konvekse, ikke tomme mængder i et topologisk vektorrum E. Hvis A er åben og $A \cap B = \emptyset$, eksisterer der en afsluttet hyperplan $H \subseteq E$, så at A og B er indeholdt i hvert sit af de ved H bestemte halvrum.

Bevis: Vi betragter mængde M af par (A', B') af konvekse mængder på E, som tilfredsstiller betingelserne $A' \supseteq A$, $B' \supseteq B$,

$A' \cap B' = \emptyset$, A' åben, B' afsluttet. Mængden M er ordnet ved inklusionen $(A', B') \subseteq (A'', B'')$, som defineres ved $A' \subseteq A''$ og $B' \subseteq B''$. Lad $\{(A_j, B_j) \mid j \in J\}$ være en fuldstændig ordnet delmængde af M . Vi sætter $A^* = \bigcup A_j$, $B^* = \overline{\bigcup B_j}$. Det er da klart, at A^* bliver en åben konveks mængde, og at B^* bliver en afsluttet konveks mængde, samt at $A^* \supseteq A$ og $B^* \supseteq B$. Det er endvidere klart, at $A^* \cap \bigcup B_j = \emptyset$, og det medfører, at $C A^* \supseteq \overline{\bigcup B_j} = B^*$, altså $A^* \cap B^* = \emptyset$. Mængden M er således induktivt ordnet, og af Zorns lemma følger nu, at M har et maksimalt element. Derefter følger sætningen umiddelbart af sætning 10.

Sætning 12. Lad E være et topologisk vektorrum, og lad A være en konveks mængde, som har indre punkter. Hvis a er et vilkårligt punkt af $E \setminus A$, eksisterer der en afsluttet hyperplan, som skiller a fra A .

Bevis: Specielt tilfælde af sætning 11.

Definition 3. En hyperplan H i et topologisk vektorrum E kaldes støttehyperplan til en mængde $A \subseteq E$, hvis $A \cap H \neq \emptyset$, og A er indeholdt i et af de ved H bestemte halvrum.

Sætning 13 er Hahn-Banachs sætning.

Sætning 13. Lad E være et topologisk vektorrum og $A \subseteq E$ en afsluttet konveks mængde med indre punkter. For ethvert randpunkt a for A eksisterer der da en afsluttet støttehyperplan H gennem a . For ethvert punkt $b \notin A$ eksisterer der en støttehyperplan H , så at b er indre punkt i det ved H bestemte halvrum, som ikke indeholder A . En afsluttet konveks mængde med indre punkter er fællesmængde for de afsluttede halvrum, den er indeholdt i.

Bevis: Den første påstand er et specielt tilfælde af sætning 12. For $b \notin A$ vælger vi vilkårligt $c \in A$ og liniestykket med endepunkter b og c vil da indeholde et randpunkt a af A . Lad H være en støttehyperplan til A i punktet a . Da c tilhører det ene af de ved H bestemte åbne halvrum, vil b tilhøre det andet. Dermed er den anden påstand bevist, og den medfører umiddelbart, at intet punkt uden for A tilhører fællesmængden af de afsluttede halvrum, der indeholder A . Dermed er sætningen bevist.

Variant af Hahn-Banachs sætning: Lad E være et lokalkonvekst t.v.r., og lad $A \subseteq E$ være en afsluttet konveks mængde og $b \notin A$. Der findes så en hyperplan (der eventuelt indeholder A , da A ikke behøver at have indre punkter), der skiller b og A (dvs. b ligger i det åbne halvrum).

Bevis: Der findes nemlig en konveks omegn af b , der ikke har fælles punkter med A .
ningen af det konvekse hylster. Derimod er det konvekse hylster af en afsluttet mængde ikke altid afsluttet, ikke engang i et 2-dimensionalt vektorrum. I et uendelig dimensionalt vektorrum kan det endda indtræffe, at det konvekse hylster for en kompakt mængde ikke er afsluttet, og dette fænomen kan endda indtræffe i et fuldstændigt rum.

Definition 5. Ved det runde, afsluttede, konvekse hylster for en mængde A forstås fællesmængden af alle runde, afsluttede, konvekse mængder, der indeholder A , altså den mindste runde, konvekse, afsluttede mængde, der indeholder A .

Det (afsluttede) konvekse hylster af en rund mængde er en rund mængde. Derimod vil den mindste runde mængde, som indeholder en konveks mængde, sædvanligvis ikke være konveks, og det gør ikke sagen bedre, hvis den konvekse mængde tillige er afsluttet. Man kan altså danne det runde, afsluttede, konvekse hylster af A i tre trin ved først at danne den mindste runde mængde $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$, som indeholder A , dernæst danne det konvekse hylster af den fremkomne mængde og til sidst danne afslutningen, men det går altså ikke, at bytte om på rækkefølgen af disse processer.

Vi får ikke brug for yderligere finesser fra teorien for konveksitet i vektorrum. Vi gør opmærksom på, at den videregående teori byder på mange fælder og overraskelser.

Som en anvendelse af ovenstående teori vil vi vise nogle sætninger om punktmængder i et par vektorrum, som er i dualitet.

Definition 6. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{R}$, som er i dualitet ved et indre produkt $\langle x, y \rangle$. Ved polaren til en mængde $A \subseteq E$ forstås punktmængden $A^\circ = \{y \in E' \mid \forall x \in A : \langle x, y \rangle \leq 1\}$. Hvis E og E' er vektorrum over $\mathbb{C}$, defineres polaren til A ved $A^\circ = \{y \in E' \mid \forall x \in A : \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq 1\}$.

Hvis E og E' er vektorrum over $\mathbb{C}$, vil E og E' med deres reelle vektorrumsstruktur være i dualitet ved det indre produkt $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle$. Det ses umiddelbart, at dette indre produkt giver anledning til den samme topologi på E (og på E') som det indre produkt $\langle x, y \rangle$, idet $\langle x, y \rangle$ er kontinuert for fast y , hvis

og kun hvis $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$ og $\operatorname{Im}\langle x, y \rangle$ er kontinuerte for fast y , men da $\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = -\operatorname{Re}\langle x, iy \rangle$, er kravet om kontinuitet af imaginærdelen overflødigt.

Sætning 14. Polaren A° til A indeholder 0 , og er konveks, og afsluttet i den svage topologi på E' . Hvis A er rund, er A° rund, og $A^\circ = \{y \in E' \mid \forall x \in A : |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$. Af $A \subseteq B$ følger $A^\circ \supseteq B^\circ$. Polaren til A er identisk med polaren til det (svagt) afsluttede konvekse hylster af A .

Bevis: Definitionen af A° kan også skrives på formen

$$A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{y \in E' \mid \langle x, y \rangle \leq 1\},$$

hvilket viser, at A° er fællesmængde for et system af afsluttede halvrum, der alle indeholder 0 . Heraf følger den første påstand umiddelbart i det reelle tilfælde. Det komplekse tilfælde går på samme måde med $\langle x, y \rangle$ erstattet med $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle$. Hvis A er rund, kan betingelsen i definitionen erstattes med

$$\forall x \in A : \langle \pm x, y \rangle \leq 1 \quad \text{i det reelle tilfælde}$$

$\forall x \in A \forall \gamma \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}\langle e^{i\gamma} x, y \rangle \leq 1$ i det komplekse tilfælde, og i begge tilfælde bliver betingelsen ækvivalent med den i sætning 14 anførte, og den viser umiddelbart, at A° er rund. Den tredje påstand er indlysende. Den sidste påstand følger umiddelbart af, at den ved $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ definerede afbildning er kontinuert og lineær, så den afbilder det afsluttede, konvekse hylster af A over i det afsluttede konvekse hylster af billedmængden, som for $y \in A^\circ$ er indeholdt i $]-\infty, 1]$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 7. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$), som er i dualitet ved et indre produkt $\langle x, y \rangle$. Hvis E er et topologisk vektorrum, siges topologien på E at være forenelig med dualiteten mellem de to vektorrum, såfremt de ved $T(x) = \langle x, y \rangle$, $y \in E'$ definerede linearformer netop er alle i den nævnte topologi kontinuerte linearformer på E . Analogt for en topologi på E' .

Den svage topologi er netop defineret som den groveste topologi, der er forenelig med dualiteten mellem E og E' . Hvis E er et topologisk vektorrum og E' det duale rum, er initialtopologien på E selvfølgelig forenelig med dualiteten mellem E og E' .

Sætning 15. Lad E og E' være to vektorrum i dualitet. Alle topologier på E (eller E'), som er forenelig med dualiteten, vil da give anledning til de samme systemer af afsluttede hyperplaner, af afsluttede halvrum og af afsluttede konvekse mængder. En mængde $A \subseteq E$ vil i de nævnte topologier få det samme afsluttede konvekse hylster.

Bevis: Påstanden vedrørende hyperplaner og halvrum følger umiddelbart af definition 7. Påstanden om de afsluttede konvekse mængder følger umiddelbart af den sidste påstand i sætning 13, og beror således på den dybtliggende sætning 11. Den sidste påstand følger umiddelbart.

Sætning 16. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{R}$ i dualitet, og lad $H \subseteq E$ være et underrum. Da er H° et underrum, og $H^{\circ\circ} = \bar{H}$. Hvis H er et afsluttet underrum med codimension 1, er H° et 1-dimensionalt underrum.

Bevis: Et underrum er en rund mængde, og vi har derfor $H^\circ = \{y \in E' \mid \forall x \in H : |\langle x, y \rangle| \leq 1\}$, men betingelsen medfører umiddelbart

$$\forall x \in H \forall \lambda \in]0, \infty[: |\langle \lambda x, y \rangle| \leq 1,$$

så vi får $H^\circ = \{y \in E' \mid \forall x \in H : \langle x, y \rangle = 0\}$. Heraf ses, at H° bliver fællesmængde for afsluttede underrum med codimension 1, altså et afsluttet underrum. Så bliver $H^{\circ\circ}$ ligeledes et afsluttet underrum, og da $H \subseteq H^{\circ\circ}$, får vi $H^{\circ\circ} \supseteq \bar{H}$. Hvis H er et afsluttet underrum med codimension 1, har H en ligning $T(x) = 0$, hvor $T(x) = \langle x, b \rangle$ for et $b \in E'$. Hvis nu $y \in H^\circ$, er $\langle x, y \rangle = 0$ for ethvert $x \in H$, og der eksisterer derfor et reelt tal λ , så at $\langle x, y \rangle = \lambda T(x) = \langle x, \lambda b \rangle$ for ethvert $x \in E$, men det medfører, at $y = \lambda b$. Altså er $H^\circ = \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}b$. Heraf følger nu umiddelbart, at $H^{\circ\circ} = \{x \in E \mid \langle x, b \rangle = 0\} = H$. Lad nu H være et afsluttet underrum i E , og lad $k : E \rightarrow E/H$ være den kanoniske afbildning. Lad $a \notin H$ være et punkt af E . Vi har $k(a) \neq 0$, og da E/H er et Hausdorff-rum, eksisterer der en kontinuert linearform $g : E/H \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ med $g(k(a)) \neq 0$. Så er $T = g \circ k : E \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert linearform med $T(a) \neq 0$, og hyperplanen H_1 med ligningen $T(x) = 0$ indeholder H , men ikke a . Vi har derfor $H^{\circ\circ} \subseteq H_1^{\circ\circ} = H_1$, altså $a \notin H^{\circ\circ}$. Vi har

der 180 6 $g(k(a)) \neq 0 : E/H$ er lokalkonveks, dvs. vi kan finde en $H^{\circ\circ}$ konveks omegn af $k(a)$, der ikke indeholder 0. Hvis vi derefter bruger Hahn-Banachs sætning, finder vi, at $g(k(a)) > 0$.

Sætning 17. Lad E og E^h være to vektorrum over $\mathbb{R}$ i dualitet.

Lad $A \subseteq E$ være et afsluttet halvrum, som indeholder 0 . Da er $A^{\circ\circ} = A$.

Bevis: Vi ved allerede, at $A \subseteq A^{\circ\circ}$. Hvis $0 \in A$, findes der en kontinuert linearform $T(x) = \langle x, b \rangle$, så at $A = \{x \in E \mid T(x) \leq 1\}$, idet vi har valgt b passende. Så gælder $b \in A^\circ$, og $A^{\circ\circ}$ er derfor indeholdt i det ved $T(x) \leq 1$ bestemte halvrum, men det medfører netop, at $A^{\circ\circ} \subseteq A$. Hvis 0 er randpunkt for A , er A bestemt ved en ulighed af formen $\langle x, b \rangle \leq 0$, og A° vil da indeholde ethvert punkt λb med $\lambda > 0$. Altså er $A^{\circ\circ}$ indeholdt i ethvert halvrum $\langle x, b \rangle \leq \frac{1}{\lambda}$, hvor $\lambda > 0$, men fællesmængden for disse halvrum er netop A . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 18. Lad E og E^h være to vektorrum i dualitet. Lad $A \subseteq E$ være en punktmængde, som indeholder 0 . Da er $A^{\circ\circ}$ netop det afsluttede konvekse hylster af A .

Bevis: Da påstanden kun vedrører den reelle vektorrumstruktur, kan vi antage, at E og E^h er vektorrum over $\mathbb{R}$. Da $A^{\circ\circ}$ ikke ændres, når A erstattes med sit afsluttede konvekse hylster, kan vi antage, at A er afsluttet og konveks. Vi ved, at $A \subseteq A^{\circ\circ}$. For $a \notin A$ eksisterer der ifølge sætning 13 et afsluttet halvrum B , så at $A \subseteq B$ og $a \notin B$. Da $0 \in B$, giver sætning 17, at $A^{\circ\circ} \subseteq B^{\circ\circ} = B$, altså $a \notin A^{\circ\circ}$. Dermed er sætningen bevist.

Vi vil til sidst se på forholdene i det specielle par $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}'_0$ af vektorrum i dualitet. Her er $\mathcal{D}'_0$ netop det duale

vektorrum til $\mathcal{D}_0$, og initialtopologien på $\mathcal{D}_0$ er derfor forenelig med dualiteten. I rummet $\mathcal{D}_0$ bliver de afsluttede konvekse mængder de samme i den svage topologi og initialtopologien. Derimod ved vi ikke på indeværende tidspunkt, om den indførte stærke topologi på $\mathcal{D}_0'$ er forenelig med dualiteten. Den kunne tænkes at være for stærk, og i så fald vil dualrummet til $\mathcal{D}_0'$ være mere omfattende end $\mathcal{D}_0$.

Hvis U er en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$, er U° en mængde af funktioner, som er ensartet begrænset på U , og dermed på enhver begrænset mængde, idet en sådan absorberes af U . Altså er U° en begrænset mængde. Hvis $B \subseteq \mathcal{D}_0$ er rund og begrænset, omfatter B° alle distributioner, som er numerisk ≤ 1 på B . Altså er B° rund, konveks, afsluttet omegn af 0 i $\mathcal{D}_0'$. Hvis B' er en begrænset mængde i $\mathcal{D}_0'$, findes der en omegn U af 0, på hvilken distributionerne i B' er ensartet begrænsede, altså en omegn $\lambda U \subseteq B'^\circ$. Altså er B'° en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$.

Sætning 19. Lad $\hat{B}'$ være systemet af begrænsede mængder i $\mathcal{D}_0'$. For $B \in \hat{B}'$ og $\varepsilon > 0$ sætter vi

$$U(B, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{D}_0 \mid \forall T \in B : |T(\varphi)| \leq \varepsilon\}.$$

Da er $\{U(B, \varepsilon) \mid B \in \hat{B}' \wedge \varepsilon > 0\}$ en basis for omegnene af 0 i $\mathcal{D}_0$.

Hvis vi sætter $p_B'(\varphi) = \sup_{T \in B} |T(\varphi)|$ (sammenlign bemærkningen

Bevis til 144₃), er p_B' en seminorm, og artet

er et $U(B, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{D}_0 \mid p_B'(\varphi) \leq \varepsilon\}$ er konveks. $\bigwedge U \subseteq U(B, \varepsilon)$, altså at $U(B, \varepsilon)$

er en omegn af 0. Lad dernæst U være en rund, afsluttet, konveks omegn af 0 i $\mathcal{D}_0$. Vi har da $U = U^{\circ\circ}$, og $U^\circ \subseteq \mathcal{D}_0'$ er begrænset. Men nu er $U^{\circ\circ} = U(U^\circ, 1)$, idet U° er rund. Dermed er sætningen bevist.

Hvis vi ville udnytte dualiteten mellem $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}'_0$ til at indføre en stærk topologi på $\mathcal{D}_0$, skulle vi netop benytte den i sætning 19 omtalte omegnsbasis. Sætning 19 viser derfor, at vor initialtopologi på $\mathcal{D}_0$ netop er den stærke topologi. Hvis det også lykkes os at vise, at $\mathcal{D}_0$ netop omfatter alle kontinuerte linearformer på $\mathcal{D}'_0$, vil vi have vist, at $\mathcal{D}_0$ er det duale rum til $\mathcal{D}'_0$ med den stærke topologi. Dertil behøver vi lidt flere hjælpemidler, og vi vil derfor udskyde sagen til et nyt kapitel.

14. kapitel.Kompakte konvekse mængder. Refleksive vektorrum.

Tychonov's sætning siger, at et produktrum af kompakte rum selv er kompakt. Sætningen kan vises ret elementært for et produkt af endelig mange rum, men den kræver udvalgsaksiomet i det generelle tilfælde. Det er let at vise sætningen i dette tilfælde ved at udnytte ultrafiltre, og vi vil benytte denne metode her.

Lad $\{E_j | j \in J\}$ være en familie af topologiske rum, og lad $E = \prod_{j \in J} E_j$ være produktrummet. Lad $\hat{U}_j(a_j)$ for $a_j \in E_j$ være systemet af omegne af a_j . Et punkt $x \in E$ er en afbildning $x : J \rightarrow \bigcup E_j$, men vi foretrækker at skrive x_j i stedet for $x(j)$ for koordinaten med index j . Af x kræves yderligere, at $x_j \in E_j$ for ethvert j . Vi har projektionsafbildninger $p_j : E$ på E_j , givne ved $p_j(x) = x_j$ for ethvert j . Topologien på E er den svageste topologi, der sikrer, at alle p_j er kontinuerte. Systemet af mængder af formen $p_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap p_{j_n}^{-1}(U_{j_n})$, $n \in \mathbb{N}$, $U_{j_\nu} \in \hat{U}_{j_\nu}(x_{j_\nu})$ er basis for omegnene af x i E . Vi viser nu

Tychonov's sætning:

Sætning 1. Hvis $\{E_j | j \in J\}$ er en familie af quasikompakte (kompakte) topologiske rum, er produktrummet E quasikompakt (kompakt).

Bevis: Lad $\hat{F}$ være et ultrafilter på E . For hvert $j \in J$ er projektionen $\hat{F}_j$ af $\hat{F}$ på E_j et ultrafilter (kap. 11, sætn. 13, s. 407),

altså konvergent mod et grænsepunkt $a_j \in E_j$. Lad $a \in E$ være punktet med koordinaterne a_j . For $U_j \in \mathcal{U}_j(a_j)$ gælder $U_j \in \mathcal{F}_j$. Heraf fremgår, at $\mathcal{F}$ indeholder en mængde, der projiceres på U_j , men deraf følger, at $p_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F}$. Men så indeholder $\mathcal{F}$ også enhver mængde, som er fællesmængde for endelig mange mængder af formen $p_j^{-1}(U_j)$, altså en basis for omegne af a . Altså gælder $\mathcal{F} \rightarrow a$. Dermed har vi vist, at E er quasikompakt. Det ses umiddelbart, at E er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis hvert E_j er et Hausdorff-rum. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Hvis $A_1, \dots, A_n$ er kompakte konvekse mængder i et topologisk vektorrum E , som er et Hausdorff-rum, da er det konvekse hylster $\hat{A}$ af foreningsmængden $A_1 \cup \dots \cup A_n$ en kompakt mængde.

Bevis: Vi kan danne det konvekse hylster af $A_1 \cup \dots \cup A_n$ ved successivt at danne det konvekse hylster $\hat{A}_2$ af $A_1 \cup A_2$, det konvekse hylster $\hat{A}_3$ af $\hat{A}_2 \cup A_3, \dots$ osv. Det er derfor nok at vise sætningen for $n = 2$. Af sætning 1 følger, at $B = A_1 \times A_2 \times [0, 1]$ er en kompakt mængde. Vi sætter

$$\varphi(x, y, t) = tx + (1-t)y,$$

og definerer derved en kontinuert afbildning $\varphi : B \rightarrow E$. Billedmængden $\varphi(B)$ er netop det konvekse hylster af $A_1 \cup A_2$, og den er derfor kompakt.

Sætning 3. I et lokalkonvekst, fuldstændigt vektorrum, som er et Hausdorff-rum, er det afsluttede konvekse hylster af en kompakt mængde kompakt.

Bevis: Lad E være et lokalkonvekst, fuldstændigt Hausdorff-rum, der også er et vektorrum, og lad $A \subseteq E$ være en kompakt mængde med det afsluttede konvekse hylster $\hat{A}$. Lad U være en omegn af 0 i E , og lad V være en konveks omegn af 0 i E , så at $V + V \subseteq U$. Der findes da en endelig mængde $A_1 = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$, så at $A_1 + V \supseteq A$, da A er prækompakt. Da A_1 er kompakt, er det konvekse hylster $\hat{A}_1$ af A_1 kompakt, og da $\hat{A}_1 + V$ er konveks, har vi $\hat{A}_1 + V \supseteq \hat{A}$. Da $\hat{A}_1$ er kompakt, kan vi finde en endelig mængde $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, så at $\hat{A}_1 \subseteq B + V$, og vi har da $\hat{A} \subseteq B + V + V \subseteq B + U$, hvilket viser, at $\hat{A}$ er prækompakt. Da rummet E er et fuldstændigt rum og et Hausdorff-rum, og da $\hat{A}$ er afsluttet, følger det umiddelbart, at $\hat{A}$ er kompakt.

Sætning 4. I et lokalkonvekst, fuldstændigt vektorrum, som er et Hausdorff-rum, er det runde afsluttede, konvekse hylster af en kompakt mængde kompakt.

Bevis: Lad S være enhedscirkelskiven i den komplekse plan, og lad A være en kompakt mængde i vektorrummet E . Vi sætter $A_1 = SA$, og A_1 er da den mindste runde mængde, der indeholder A . Produktrummet $S \times A$ er kompakt, og da den ved $\varphi(\lambda, x) = \lambda x$ definerede afbildning $\varphi : S \times A$ ind i E er kontinuert, er billedmængden $SA = A_1$ kompakt. Sætningen følger nu af sætning 3, idet det runde afsluttede konvekse hylster af A er det afsluttede konvekse hylster af A_1 .

Sætning 5. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{C}$ i dualitet. Den topologi på E' , som svarer til ligelig konvergens på svagt kompakte delmængder i E , er forenelig med dualiteten mellem E og E' .

Bevis: På grund af sætning 4 er den omtalte topologi på E'' identisk med den, som svarer til ligelig konvergens på runde, konvekse, svagt kompakte delmængder af E . Lad $\mathcal{P}$ betegne systemet af alle sådanne mængder. For $K \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$ sætter vi $U'(K, \varepsilon) = \{T \in E' \mid \forall \varphi \in K : |\langle T, \varphi \rangle| \leq \varepsilon\}$. Så er $\{U'(K, \varepsilon) \mid K \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ en basis for omegne af 0 i E' i den nævnte topologi. Dualrummet E'' til E' består af alle lineære afbildninger $\Phi : E' \rightarrow \mathbb{C}$, som er kontinuerte i den omtalte topologi. Rummet E er på naturlig måde indlejret i E'' , idet $\varphi \in E$ identificeres med den ved $\varphi(T) = \langle \varphi, T \rangle$ definerede afbildning $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{C}$. For en afbildning $\Phi \in E''$ gælder nu, hvis S betegner enhedscirkelskiven i $\mathbb{C}$, at $\Phi^{-1}(S)$ er en omegn af 0, altså, at der findes et $K_1 \in \mathcal{P}$ og et $\varepsilon > 0$, så at

$$\Phi^{-1}(S) \supseteq \{T \in E' \mid \forall \varphi \in K_1 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq \varepsilon\}.$$

Sætter vi $K = \frac{1}{\varepsilon} K_1$, kan dette også skrives

$$\Phi^{-1}(S) \supseteq \{T \in E' \mid \forall \varphi \in K : |\langle T, \varphi \rangle| \leq 1\},$$

eller ganske kort

$$\Phi^{-1}(S) \supseteq K^\circ,$$

hvilket er ensbetydende med, at $\Phi(K^\circ) \subseteq S$, hvilket medfører, at Φ tilhører polaren til K° i rummet E'' , og det medfører igen, at $\Phi \in \bar{K}$, hvor afslutningen skal tages i den svage topologi på E'' . Den svage topologi på E er efter sin definition netop delrumstopologien, idet E opfattes som delrum af E'' med den svage topologi. Men K er kompakt i E og da også kompakt i E'' og derfor afsluttet, altså $\bar{K} = K$. Dermed har vi vist, at $\Phi \in K$, altså $\Phi \in E$, og dermed at $E'' = E$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{C}$ i dualitet.

Lad U være en rund omegn af 0 i E . Da er U° en kompakt mængde i E' .

Bevis: Et element $T \in U^\circ$ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall \varphi \in U : |\langle \varphi, T \rangle| \leq 1,$$

eller $|T(\varphi)| \leq 1$ for $\varphi \in U$. Heraf følger, at U° er begrænset og equikontinuert. Da U° ligeledes er afsluttet, giver Ascolis sætning, at U° er kompakt.

Sætning 7. Lad E og E' være to vektorrum over $\mathbb{C}$ i dualitet.

Enhver lokalkonveks topologi på E' , som er forenelig med dualiteten mellem E og E' , er en topologi, som svarer til ligelig konvergens på et system af kompakte mængder, som udgør en overdækning af E .

Bevis: Lad $\hat{U}'$ være en basis for omegnene af 0 på E' , bestående af runde, konvekse afsluttede mængder. For $U \in \hat{U}'$ bliver U° kompakt i den stærke topologi på E og derfor prækompakt i den svage topologi. Da U° er svagt afsluttet, bliver U° også svagt kompakt. Da afslutningen af en konveks mængde er ens for alle topologier, som er forenelig med dualiteten, er $U^{\circ\circ} = U$. Altså består vor omegnsbasis af omegne af formen

$\{T \in E' \mid \forall \varphi \in U^\circ : |\langle T, \varphi \rangle| \leq 1\}$, og det medfører igen, at enhver mængde $V(U^\circ, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ defineret ved

$$V(U^\circ, \varepsilon) = \{T \in E' \mid \forall \varphi \in U^\circ : |\langle T, \varphi \rangle| \leq \varepsilon\}$$

er en omegn af 0 i E' . Dermed har vi vist, at topologien på E' stemmer overens med ligelig konvergens på systemet af de

de kompakte mængder U° . For $a \in E'$ er $\{a\}^\circ$ en omegn af 0 i E (endda i den svage topologi), og for U indeholdt i denne omegn vil U° indeholde a . Altså udgør mængderne U° en overdækning af E' . Dermed er sætningen bevist.

Sætningerne 5 og 7 udgør tilsammen Mackey's sætning, som har en central stilling i den generelle teori for topologiske vektorrum. Vi ved nu, at begrebet "begrænset" i duale vektorrum er helt uafhængigt af topologien, så længe vi holder os til topologier, der er forenelige med dualiteten.

I rummene $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}'_0$ er begrænset og afsluttet ensbetydende med kompakt i den stærke topologi. For konvekse mængder er "afsluttet" uafhængigt af topologien og "prækompakt" i den stærke topologi medfører "svagt prækompakt". Af sætning 5 følger derfor, at den stærke topologi på $\mathcal{D}'_0$ er forenelig med dualiteten mellem $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}'_0$. Dette indebærer, at det duale rum til $\mathcal{D}'_0$ med den stærke topologi netop er rummet $\mathcal{D}_0$. Vi har tidligere set, at topologien på $\mathcal{D}_0$ netop er den stærke topologi, der svarer til dualiteten med $\mathcal{D}'_0$. Altså har vi

Sætning 8. Rummene $\mathcal{D}_0$ og $\mathcal{D}'_0$ med stærk topologi er indbyrdes duale.

Alle sædvanlige Lebesgue-integrable funktioner er på naturlig måde elementer af $\mathcal{D}'_0$. Specielt er $\mathcal{D}_0$ en delmængde af $\mathcal{D}'_0$, men $\mathcal{D}_0$ er selvfølgelig ikke et topologisk delrum af $\mathcal{D}'_0$, idet topologien på $\mathcal{D}_0$ er meget finere end delrums-topologien.

Sætning 9. Delmængden $\mathcal{D}_0$ er overalt tæt i $\mathcal{D}'_0$.

Bevis: Med $A \subseteq \mathcal{D}'_0$ betegner vi afslutningen af $\mathcal{D}_0$. Vi skal da vise, at $A = \mathcal{D}'_0$. Vi fører beviset indirekte, idet vi antager, at der findes et element $T_0 \in \mathcal{D}'_0 \setminus A$. Lad k være den kanoniske afbildning $k : \mathcal{D}'_0$ på $\mathcal{D}'_0/A$. Da $\mathcal{D}'_0/A$ er et lokal-konvekst Hausdorff-rum, findes der en lineær afbildning $g : \mathcal{D}'_0/A$ ind i $\mathbb{C}$ med $g(k(T_0)) \neq 0$. Vi har således en kontinueret linearform $\varphi_0 = g \circ k : \mathcal{D}'_0$ ind i $\mathbb{C}$ med $\varphi_0(T_0) \neq 0$. Ifølge sætning 8 er φ_0 et element af $\mathcal{D}_0$, og vi har da $T_0(\varphi_0) \neq 0$. For $\varphi \in \mathcal{D}_0$ kan vi også opfatte φ som element af $\mathcal{D}'_0$, og med denne opfattelse får vi

$$\varphi(\varphi_0) = \int \varphi_0 \varphi = 0,$$

fordi φ_0 afbilder A på 0. Nu er $\overline{\varphi_0}$ et specielt element af $\mathcal{D}_0$, så vi får specielt $\int |\varphi_0|^2 = 0$, men det medfører, at φ_0 er 0-elementet i $\mathcal{D}_0$ i modstrid med, at $T_0(\varphi_0) \neq 0$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. En mængde $A \subseteq \mathcal{D}_0$ er begrænset, hvis og kun hvis det for enhver distribution $T \in \mathcal{D}'_0$ gælder, at $T(A) \subseteq \mathbb{C}$ er begrænset.

Bevis: Vi ved allerede, at "kun hvis" gælder. At $T(A)$ er begrænset for enhver distribution T betyder, at A er begrænset i den svage topologi, og det medfører igen, at A er begrænset. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 11. Rummet $\mathcal{D}'_0$ er et blokrum.

Bevis: Lad U være en blok i $\mathcal{D}'_0$. Så er U en blok også i den svage topologi, og det medfører, at $U^{\circ\circ} = U$. Lad $V \subseteq \mathcal{D}_0$ være

en basisomegn af 0 i den svage topologi, altså

$$V = \{\varphi \in \mathcal{D}_0 \mid |T_1(\varphi)| \leq 1, \dots, |T_n(\varphi)| \leq 1\},$$

så vi har $V = \{T_1, \dots, T_n\}^\circ$. Denne endelige mængde absorberes af U , da U er absorberende. Heraf følger umiddelbart, at U° absorberes af V , og da dette gælder for ethvert V , er U° svagt begrænset, altså begrænset og derfor også kompakt. Men så er $U^{\circ\circ} = U$ en omegn af 0 i $\mathcal{D}_0'$, og dermed er sætningen bevist.

15. kapitel.Forskydningsoperator, differentiation, stamdistribution.

Vi vil i dette kapitel beskæftige os med rummet $\mathcal{D}$ af vilkårlig ofte differentiable funktioner på $\mathbb{R}^m$ med kompakt støtte og med det duale vektorrum $\mathcal{D}'$ af distributioner på $\mathbb{R}^m$. Med $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ betegner vi enhedsvektorerne $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ i $\mathbb{R}^m$.

For $\underline{h} \in \mathbb{R}^m$ har vi en forskydningsoperator $\tau_{\underline{h}} : \mathcal{D}$ på $\mathcal{D}$ defineret ved $\tau_{\underline{h}}\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x} + \underline{h})$. For en funktion f opfattet som element af $\mathcal{D}'$ har vi

$$f(\varphi) = \int f(\underline{x})\varphi(\underline{x})d\underline{x} = \int f(\underline{x} + \underline{h})\varphi(\underline{x} + \underline{h})d\underline{x}.$$

Det er derfor rimeligt at definere forskydningsoperatoren

$\tau_{\underline{h}}' : \mathcal{D}'$ på $\mathcal{D}'$ ved

$$\langle \tau_{\underline{h}}' T, \tau_{\underline{h}} \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

eller

$$\langle \tau_{\underline{h}}' T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-\underline{h}} \varphi \rangle,$$

så vi altså generelt definerer

$$\tau_{\underline{h}}' T(\varphi) = T(\tau_{-\underline{h}} \varphi).$$

Vi har $\tau_{\underline{h}_1} \circ \tau_{\underline{h}_2} = \tau_{\underline{h}_1 + \underline{h}_2}$ og $\tau_{\underline{h}_1}' \circ \tau_{\underline{h}_2}' = \tau_{\underline{h}_1 + \underline{h}_2}'$, så forskydningsvektorerne for hvert rum udgør en abelsk gruppe. Vi kan også indføre tilvækstoperatorerne $\Delta_{\underline{h}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ og $\Delta_{\underline{h}}' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ ind i $\mathcal{D}'$ definerede ved

$$\Delta_{\underline{h}} \varphi = \tau_{\underline{h}} \varphi - \varphi ; \quad \Delta_{\underline{h}}' T = \tau_{\underline{h}}' T - T,$$

altså

$$\Delta_{\underline{h}}' T(\varphi) = T(\tau_{-\underline{h}} \varphi) - T(\varphi) = T(\tau_{-\underline{h}} \varphi - \varphi) = T(\Delta_{-\underline{h}} \varphi).$$

Vi bemærker, at

$$\Delta_{\underline{h}} \Delta_{\underline{k}} \varphi = \Delta_{\underline{h}} \tau_{\underline{k}} \varphi - \Delta_{\underline{h}} \varphi = \tau_{\underline{h}} \tau_{\underline{k}} \varphi - \tau_{\underline{k}} \varphi - \tau_{\underline{h}} \varphi + \varphi = \Delta_{\underline{k}} \Delta_{\underline{h}} \varphi,$$

hvilket viser, at tilvækstoperatorer på $\mathcal{D}$ og derfor også på $\mathcal{D}'$ er ombyttelige.

Lad $\mu_1, \dots, \mu_n$ være hele tal mellem 1 og m og lad $h_1, \dots, h_n$ være reelle tal, som alle er forskellige fra 0. Vi vil betragte udtrykket

$$\Delta(h_1, \dots, h_n) = \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} \varphi.$$

Sætning 1. For $(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)$ vil $\frac{\Delta(h_1, \dots, h_n)}{h_1 \dots h_n}$

konvergere mod $D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \varphi$ i topologien på $\mathcal{D}$.

Bevis: Lad $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ være et talsæt. På grund af lineariteten er

$$D^{\underline{p}} \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} \varphi = \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} D^{\underline{p}} \varphi.$$

For et vilkårligt $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ giver middelværdissætning

$$\begin{aligned} D^{\underline{p}} \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} \varphi(\underline{x}) &= \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x}) = \\ \Delta_{h_2 \frac{e}{\mu_2}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x} + h_1 \frac{e}{\mu_1}) &- \Delta_{h_2 \frac{e}{\mu_2}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x}) = \\ h_1 \Delta_{h_2 \frac{e}{\mu_2}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} D_{\mu_1} D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x} + \Theta_1 h_1 \frac{e}{\mu_1}), \end{aligned}$$

hvor Θ_1 er et tal i $]0, 1[$. Ved gentagen anvendelse af det samme ræsonnement fås

$$\begin{aligned} D^{\underline{p}} \Delta_{h_1 \frac{e}{\mu_1}} \dots \Delta_{h_n \frac{e}{\mu_n}} \varphi(\underline{x}) &= \\ h_1 \dots h_n D_{\mu_n} D_{\mu_{n-1}} \dots D_{\mu_1} D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x} + \Theta_1 h_1 \frac{e}{\mu_1} + \dots + \Theta_n h_n \frac{e}{\mu_n}), \end{aligned}$$

hvor $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ tilhører intervallet $]0,1[$. Da alle differentialkvotienter er ligelig kontinuerte, er rækkefølgen af differentiationerne uden betydning, og vi ser, at $D^p \frac{\Delta(h_1, \dots, h_n)}{h_1 \dots h_n}$ konvergerer ligeligt mod $D_{\mu_1}^p \dots D_{\mu_n}^p \varphi$, og da alle differentialkvotienterne har samme støtte som φ , foregår grænseovergangen på et $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}_0$, og vi ser således, at $\frac{\Delta(h_1, \dots, h_n)}{h_1 \dots h_n}$ konvergerer mod $D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \varphi$ i topologien på $\mathcal{D}_K$ og dermed også i topologien på $\mathcal{D}_0$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Lad $T \in \mathcal{D}'$ være en vilkårlig distribution. Lad $\mu_1, \dots, \mu_n$ være hele tal mellem 0 og m , og lad $h_1, \dots, h_n$ være fra 0 forskellige reelle tal. Så er i den stærke topologi på $\mathcal{D}'$

$$\lim_{h_1, \dots, h_n \rightarrow 0} h_1^{-1} \dots h_n^{-1} \Delta_{h_1 e_{\mu_1}}^1 \dots \Delta_{h_n e_{\mu_n}}^1 T = D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} T.$$

Bevis: For et vilkårligt $\varphi \in \mathcal{D}$ er

$$\begin{aligned} h_1^{-1} \dots h_n^{-1} \Delta_{h_1 e_{\mu_1}}^1 \dots \Delta_{h_n e_{\mu_n}}^1 T(\varphi) = \\ (-1)^n T((-h_1)^{-1} \dots (-h_n)^{-1} \Delta_{-h_1 e_{\mu_1}}^1 \dots \Delta_{-h_n e_{\mu_n}}^1 \varphi), \end{aligned}$$

og da $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert, giver sætning 1, at

$$\begin{aligned} \lim_{h_1, \dots, h_n \rightarrow 0} h_1^{-1} \dots h_n^{-1} \Delta_{h_1 e_{\mu_1}}^1 \dots \Delta_{h_n e_{\mu_n}}^1 T(\varphi) = \\ (-1)^n T(D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} \varphi) = D_{\mu_1} \dots D_{\mu_n} T(\varphi), \end{aligned}$$

og dermed har vi vist, at den påståede relation gælder i den svage topologi på $\mathcal{D}'$. Indskrænker vi $h_1, \dots, h_n$ til intervallet $[-1,1]$, følger det heraf, at værdimængden af den funktion af $h_1, \dots, h_n$, der optræder under lim-tegnet, er begrænset.

Der er derfor tale om konvergens af et svagt begrænset filter. Men svagt begrænset er ensbetydende med stærkt begrænset, og et stærkt begrænset filter på $\mathcal{D}'$ konvergerer stærkt, hvis det konvergerer svagt. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. For $\varphi \in \mathcal{D}$, $T \in \mathcal{D}'$ vil den ved

$$F(\underline{h}) = \tau_{\underline{h}}' T(\varphi) = T(\tau_{-\underline{h}} \varphi)$$

definerede afbildning $F : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ være vilkårligt ofte differentiable, og

$$D_j F(\underline{h}) = D_j \tau_{\underline{h}}' T(\varphi) = \tau_{\underline{h}}' D_j T(\varphi).$$

Bevis: For $k \neq 0$ er

$$\begin{aligned} k^{-1}(F(\underline{h} + k\underline{e}_j) - F(\underline{h})) &= k^{-1}T(\tau_{-\underline{h}-k\underline{e}_j} \varphi - \tau_{-\underline{h}} \varphi) = \\ T(k^{-1}(\tau_{-\underline{h}}(\tau_{-k\underline{e}_j} \varphi - \varphi))) &= T(\tau_{-\underline{h}}(k^{-1}(\tau_{-k\underline{e}_j} \varphi - \varphi))) = \\ \tau_{\underline{h}}' T(k^{-1}(\tau_{-k\underline{e}_j} \varphi - \varphi)) &\rightarrow -\tau_{\underline{h}}' T(D_j \varphi) = D_j \tau_{\underline{h}}' T(\varphi) = \tau_{\underline{h}}' D_j T(\varphi). \end{aligned}$$

Definition 1. En distribution $T \in \mathcal{D}'$ siges at være uafhængig af x_j , hvis $\tau_{h\underline{e}_j}' T = T$ for ethvert reelt h . En distribution, som er uafhængig af enhver af de variable, kaldes konstant.

Sætning 4. En distribution $T \in \mathcal{D}'$ er uafhængig af x_j , hvis og kun hvis $D_j T = 0$, og den er konstant, hvis og kun hvis $D_j T = 0$ for $j = 1, \dots, m$.

Bevis: At T er uafhængig af x_j er ensbetydende med, at funktionen F i sætning 3 tilfredsstiller $D_j F = 0$ for ethvert $\varphi \in \mathcal{D}$, altså ifølge sætning 3, at $D_j T(\varphi) = 0$ for ethvert $\varphi \in \mathcal{D}$. Dermed er den første påstand bevist, og den anden følger umiddelbart.

Sætning 5. Lad $\varphi_0 : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{C}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion med kompakt støtte og med $\int \varphi_0 = 1$. Ethvert $\varphi \in \mathcal{D}$ kan da på én og kun én måde spaltes på formen

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \varphi^*(x_1, \dots, x_m) + \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2, \dots, x_m),$$

hvor alle de optrædende funktioner er vilkårlig ofte differentiable, og har kompakt støtte (φ_0 i det 1-dimensionale og φ_1 i det $(m-1)$ -dimensionale rum), og hvor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x_1, \dots, x_m) dx_1 = 0$$

for alle værdier af $x_2, \dots, x_m$.

Bevis: Betingelsen vil åbenbart være opfyldt, hvis vi vælger

$$\varphi_1(x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1,$$

og dette valg er på den anden side også nødvendigt. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Lad $\varphi \in \mathcal{D}$ være en funktion, som for alle $x_2, \dots, x_m$ tilfredsstiller betingelsen

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1 = 0.$$

Der eksisterer da én og kun én funktion $\psi \in \mathcal{D}$, som tilfredsstiller betingelsen $D_1\psi = \varphi$, og denne funktion ψ er defineret ved

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(t, x_2, \dots, x_m) dt.$$

Bevis: Betingelsen (1) sikrer, at ψ får kompakt støtte. Det følger af kendte sætninger om differentiation af bestemte integraler, at ψ bliver vilkårlig ofte differentiabel, og at $D_1\psi = \varphi$. Hvis ψ_1 er en anden funktion med de samme egenskaber, vil $\chi = \psi - \psi_1$ tilfredsstille betingelsen $D_1\chi = 0$, altså være

uafhængig af x_1 . Men for $|x_1|$ tilstrækkelig stor er $\chi(\underline{x}) = 0$, da χ har ^{netop} ~~konstant~~ støtte. Altså er $\chi = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7. For $j = 1, \dots, m$ betegner vi med H_j underrummet af funktioner $\varphi \in \mathcal{D}$ med

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_j = 0$$

for alle $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$. Summen $H_1 + \dots + H_m$ er netop underrummet H af funktioner $\varphi \in \mathcal{D}$, for hvilke $\int \varphi = 0$. Underrummet H er afsluttet og har codimension 1.

Bevis: Det er klart, at $H_1 + \dots + H_m \subseteq H$. For $\varphi \in H$ er $\int \varphi = 0$. Vi vælger φ_0 fast i overensstemmelse med sætning 5, og vi sætter

$$\varphi_1(x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1,$$

så vi har opspaltningen

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \varphi^*(x_1, \dots, x_m) + \varphi_0(x_1) \varphi_1(x_2, \dots, x_m),$$

hvor $\varphi^* \in H_1$. Nu er $\int \varphi_1 = 0$. Antager vi nu, at sætningen gælder for $(m-1)$ -dimensionale rum, har vi en opspaltning

$\varphi_1 = \varphi_2 + \dots + \varphi_m$, hvor $\varphi_j \in H_j$, $j = 2, \dots, m$. Nu gælder også $\varphi_j^* = \varphi_0 \varphi_j \in H_j$, $j = 2, \dots, m$, og vi får således opspaltningen $\varphi = \varphi^* + \varphi_2^* + \dots + \varphi_m^*$. Da den første påstand i sætningen er triviel for $m = 1$, er denne påstand nu bevist ved induktion.

De sidste påstande følger umiddelbart af, at $\int : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$

er en distribution. Vi har med en tidligere indført notation $\int = \tau$.

Sætning 8. De konstante distributioner er netop distributionerne $c\delta : \mathcal{D}$ ind i $\mathcal{C}$, hvor $c \in \mathbb{C}$, altså netop de konstante funktioner. Det er netop de distributioner, der har det i sætning 7 indførte underrum H (eller hele $\mathcal{D}$) som nulrum.

Bevis: Lad T være en konstant distribution. For $\varphi \in H_j$ har vi ifølge sætning 6 en funktion $\psi \in \mathcal{D}$, så at $\varphi = D_j\psi$, og ifølge sætning 4 får vi så

$$0 = D_j T(\psi) = -T(D_j\psi) = -T(\varphi),$$

så H_j er indeholdt i nulrummet for T . Altså forsvinder T på H , og hvis T ikke forsvinder identisk, har T altså netop H som nulrum. Nu er $\int : \mathcal{D}$ ind i $\mathcal{C}$ en distribution med H som nulrum, og enhver anden distribution med H som nulrum har derfor formen $c\delta$ med $c \in \mathbb{C}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9. For ethvert $T \in \mathcal{D}'$ vil differentiaalligningen $D_j X = T$ have løsninger, og hvis X_0 er en vilkårlig løsning, vil mængden af løsninger netop omfatte alle $X_0 + Y$, hvor $Y \in \mathcal{D}'$ er uafhængig af x_j .

Bevis: Den i sætning 5 omtalte opspaltning definerer en operator $\varphi \rightarrow \varphi^*$, som afbilder $\mathcal{D}$ ind i $\mathcal{D}$. Da $\int_{-\infty}^{\infty} \dots dx_1$ er en kontinuert afbildning af $\mathcal{D}$ (på $\mathbb{R}^m$) ind i $\mathcal{D}$ (på $\mathbb{R}^{m-1}$), er $\varphi \rightarrow \varphi^*$ kontinuert. Afbildningen $\varphi \rightarrow \varphi^*$ afbilder $\mathcal{D}$ på H_1 . For $\varphi^* \in H_1$ har vi netop ét $\psi \in \mathcal{D}$ med $D_1\psi = \varphi^*$, og vi sætter nu $X(\varphi) = -T(\psi)$. Så bliver X en distribution, da den er sammensat af kontinuerte lineære afbildninger. For $\psi \in \mathcal{D}$ har vi $D_1\psi = \varphi^* \in H_1$, altså $D_1 X(\psi) = -X(D_1\psi) = -X(\varphi^*) = T\psi$. Dermed er eksistensen af en løsning bevist for $j = 1$. For $j \neq 1$ går beviset på samme måde. Den sidste påstand følger umiddelbart af sætning 4.

Bemærkning: H. Bremermann, side 29

Definition 2. Med $\mathcal{D}_m$ og $\mathcal{D}'_m$ vil vi betegne rummet af vilkårlig ofte differentiable funktioner med kompakt støtte på $\mathbb{R}^m$ og det duale rum af distributioner på $\mathbb{R}^m$. Vi vil benytte disse betegnelser i stedet for $\mathcal{D}$ og $\mathcal{D}'$, når vi samtidigt betragter forskellige værdier af m . Med $p_{m,j}$ vil vi betegne den afbildning $p_{m,j} : \mathcal{D}_m$ på $\mathcal{D}_{m-1}$, som bestemmes ved

$$p_{m,j}\varphi(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\underline{x}) dx_j,$$

og med $p'_{m,j}$ vil vi betegne den ved $p'_{m,j}{}^T = T \circ p_{m,j}$ definerede afbildning $p'_{m,j} : \mathcal{D}'_{m-1}$ ind i $\mathcal{D}'_m$. Vi vil tillade os at udelade index j , hvis j er den laveste af de benyttede indices.

Hvis punkter i $\mathbb{R}^m$ betegnes $(x_1, \dots, x_m)$, og vi anvender $p_{m,j}$ på $\mathcal{D}_m$, "forsvinder" x_j ved integrationen, og punkterne i $\mathbb{R}^{m-1}$ betegnes derefter $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$. Det har således mening at danne $p_{m-1,k} \circ p_{m,j}$, men kun for $k \neq j$.

Sætning 10. Afbildningerne $p_{m,j}$ er kontinuerte og surjektive. Afbildningerne $p'_{m,j}$ er kontinuerte og injektive.

Bevis: Lad K_n^m være den ved $|x_k| \leq n$, $k = 1, \dots, m$ bestemte mængde. For en voksende følge (q_n) af naturlige tal og en aftagende følge (ε_n) af positive tal har vi basisomgørelse

$$U((q_n), (\varepsilon_n)) = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid |D^p \varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon_n \text{ for } |p| \leq q_n \text{ og } \underline{x} \notin K_n^m\}.$$

Vi har da åbenbart

$$p_{m,j}^{-1}(U((q_n), (\varepsilon_n))) \supseteq U((q_n), (\frac{\varepsilon_n}{2n})),$$

hvilket viser, at $p_{m,j}$ er kontinuert. Som basis for begrænsede mængder kan benyttes mængderne

$$B(N, (q_n)) = \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \|D^p \varphi(\underline{x})\|_U \leq q_n \text{ for } |p| = n \text{ og støtten for } \varphi \subseteq K_N^m\}$$

Vi har da

$$p_{m,j}(B(N, (q_n))) \subseteq B(N, (2nq_n)).$$

Altså afbilder $p_{m,j}$ begrænset mængde på begrænset mængde. Lad $\varphi_0 \in \mathcal{D}_1$ være valgt, så at $\int \varphi_0 = 1$. For $\varphi \in \mathcal{D}_{m-1}$ definerer vi $\psi \in \mathcal{D}_m$ ved $\psi(\underline{x}) = \varphi_0(x_j) \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$, og vi har da $p_{m,j}(\psi) = \varphi$. Altså er $p_{m,j}$ surjektiv. Som basisomegn i $\mathcal{D}'$ kan vi benytte omegnen $U(B, \varepsilon) = \{T \in \mathcal{D}' \mid \forall \varphi \in B : |T(\varphi)| \leq \varepsilon\}$, hvor B er en begrænset mængde i $\mathcal{D}$ og ε er et positivt tal. Vi har nu

$$p'_{m,j}(U(p_{m,j}(B), \varepsilon)) \subseteq U(B, \varepsilon),$$

og da $p_{m,j}(B)$ er begrænset, hvis B er begrænset, følger heraf, at $p'_{m,j}$ er kontinuert. Hvis $p'_{m,j}T$ er nuldistributionen, forsvinder T på værdimængden for $p_{m,j}$, og da $p_{m,j}$ er surjektiv, kan vi heraf slutte, at $p'_{m,j}$ er injektiv. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 11. Billedmængden $p'_{m,j}(\mathcal{D}'_{m-1})$ er netop mængden af distributioner i $\mathcal{D}'_m$, som er uafhængige af x_j , og $p'_{m,j}$ er en indlejring af $\mathcal{D}'_{m-1}$ i $\mathcal{D}'_m$. Bemærkning: $p'_{m,j}T(\varphi) = T(p_{m,j}\varphi) = T(p_{m,j}\tau_{he_j}\varphi)$ dvs. $\tau'_{he_j}(p'_{m,j}T) = p'_{m,j}T$ (uafhængig af e_j).

Bevis: Da $p_{m,j}\varphi(\underline{x} + he_j) = p_{m,j}\varphi(\underline{x})$, er $p'_{m,j}T$ for ethvert $T \in \mathcal{D}'_{m-1}$ uafhængig af x_j . Hvis $T_1 \in \mathcal{D}'_m$ er uafhængig af x_j , er $\frac{\partial}{\partial x_j} T_1 = 0$,

hvilket igen medfører, at T_1 forsvinder på underrummet H_1 , og det betyder netop, at T_1 kun afhænger af $p_{m,j}\varphi$. Dermed er den første påstand bevist. Lad $\varphi_0 \in \mathcal{D}_1$ være en ~~distribution~~ ^{sk} med

$\int \varphi_0 = 1$. For $\varphi \in \mathcal{D}_{m-1}$ indfører vi ψ_φ ved

$\psi_\varphi(\underline{x}) = \varphi_0(\underline{x}) \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$. For $T \in \mathcal{D}'_m$ indfører vi $\kappa T \in \mathcal{D}'_m$ ved $\kappa T(\varphi) = T(\psi_\varphi)$. Det er klart, at $\kappa : \mathcal{D}'_m$ ind i

$\mathcal{D}'_{m-1}$ er en kontinuert ~~afspaltning~~ ^{afbildning}. På grund af den i sætning 5

omtalte opspaltning, bliver κ en surjektiv afbildning. Vi betragter nu $T \in \mathcal{D}'_{m-1}$, og vi har da

$$\kappa p'_{m,j} T(\varphi) = p'_{m,j} T(\psi_\varphi) = T(p_{m,j} \psi_\varphi) = T(\varphi).$$

Altså er restriktionen af κ til $p'_{m,j}(\mathcal{D}'_{m-1})$ netop den omvendte afbildning til $p'_{m,j}$, og da den er kontinuert, har vi vist, at $p'_{m,j}$ indlejrer $\mathcal{D}'_{m-1}$ i $\mathcal{D}'_m$.

Sætning 12. De partielle differentialkvotienter af $p'_{m,j} T$ er givet ved

$$D_j p'_{m,j} T = 0, \quad D_k p'_{m,j} T = p'_{m,j} D_k T \text{ for } k \neq j.$$

Bevis: Den første påstand følger af sætning 11, og den anden får vi ved direkte udregning:

$$\begin{aligned} D_k p'_{m,j} T(\varphi) &= -p'_{m,j} T(D_k \varphi) = -T(p_{m,j} D_k \varphi) = -T(D_k p_{m,j} \varphi) = \\ &= D_k T(p_{m,j} \varphi) = p'_{m,j} D_k T(\varphi), \end{aligned}$$

hvor det tredje lighedstegn beror på sætningen om ombytning af differentiation og integration:

$$D_k p_{m,j} \varphi(\underline{x}) = D_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\underline{x}) dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} D_k \varphi(\underline{x}) dx_j = p_{m,j} D_k \varphi(\underline{x}).$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætningerne 10, 11 og 12 viser, at en distribution i $\mathcal{D}'_m$, som er uafhængig af x_j , kan behandles fuldstændig som en distribution i $\mathcal{D}'_{m-1}$.

Sætning 13. Lad $j_1, \dots, j_\nu$ være indbyrdes forskellige elementer af mængden $\{1, \dots, m\}$. Så er $p' = p'_{m,j_1} \circ p'_{m-1,j_2} \circ \dots \circ p'_{m-\nu+1,j_\nu}$ uafhængig af rækkefølgen af $j_1, \dots, j_\nu$. Endvidere er $p'(\mathcal{D}'_{m-\nu})$ netop mængden af distributioner i $\mathcal{D}'_m$, som er uafhængig af

$x_{j_1}, \dots, x_{j_\nu}$, og det er netop de distributioner, som kun afhænger af $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\underline{x}) dx_{j_1} \dots dx_{j_\nu}$.

Bevis: Uafhængigheden af rækkefølgen følger umiddelbart af, at

$$p'_{m,j_1} p'_{m-1,j_2} \dots p'_{m-\nu+1,j_\nu} T(\phi) = T(p_{m-\nu+1,j_\nu} \circ \dots \circ p_{m-1,j_2} \circ p_{m,j_1} \phi)$$

hvor

$$p_{m,j_1} p_{m-1,j_2} \dots p_{m-\nu+1,j_\nu} \phi(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\underline{x}) dx_{j_1} \dots dx_{j_\nu}.$$

For $T \in p'(\mathcal{D}'_{m-\nu})$ giver sætning 12 umiddelbart, at

$$D_{j_1} T = \dots = D_{j_\nu} T = 0, \text{ altså, at } T \text{ er uafhængig af } x_{j_1}, \dots, x_{j_\nu}.$$

Hvis T er uafhængig af $x_{j_1}, \dots, x_{j_\nu}$, kan vi finde $T_1 \in \mathcal{D}'_{m-1}$, så

at $T = p_{m,j_1} T_1$, og sætning 12 kombineret med sætning 10 giver, at

T_1 er uafhængig af $x_{j_2}, \dots, x_{j_\nu}$, hvorefter fortsat anvendelse af

det samme ræsonnement giver, at T har formen $p^{\nu} T_j$. Vi har allerede set, at $T \in p'(\mathcal{D}'_{m-\nu})$ kun afhænger af

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\underline{x}) dx_{j_1} \dots dx_{j_\nu}$, og det er klart, at dette omvendt medfører, at $D_{j_1} T = \dots = D_{j_\nu} T = 0$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 14. Lad $j_1, \dots, j_\nu$ være indbyrdes forskellige elementer af mængden $\{1, \dots, m\}$. Lad $T_1, \dots, T_\nu$ være distributioner fra $\mathcal{D}'_m$. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at ligningssystemet

$$D_{j_1} X = T_1, \dots, D_{j_\nu} X = T_\nu$$

har en løsning, er, at $D_{j_\alpha} T_\beta = D_{j_\beta} T_\alpha$ for $\alpha, \beta = 1, \dots, \nu$. Hvis

X_0 er en løsning, vil mængden af løsninger netop omfatte alle distributioner $X_0 + Y$, hvor Y er en vilkårlig distribution, som er uafhængig af $x_{j_1}, \dots, x_{j_\nu}$.

Bevis: Uden at indskrænke almindeligheden kan vi antage, at

$j_\alpha = \alpha$, $\alpha = 1, \dots, \nu$. For $\nu = 1$ reduceres sætningen til sætning 9.

Lad os antage, at sætning 14 allerede er bevist for et ~~sy~~tem af $\nu-1$ ligninger. Vi ved, at ligningen $D_1 X = T_1$ har en løsning X_1 , og at mængden af løsninger omfatter alle distributioner $X_1 + Y$, hvor Y er en distribution, som er uafhængig af x_1 . Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $X_1 + Y$ er løsning til alle ligningerne er det nu, at

$$(1) \quad D_2 Y = T_2 - D_2 X_1, \dots, D_\nu Y = T_\nu - D_\nu X_1.$$

Nu er

$$D_1(T_\alpha - D_\alpha X_1) = D_1 T_\alpha - D_1 D_\alpha X_1 = D_1 T_\alpha - D_\alpha D_1 X_1 = D_1 T_\alpha - D_\alpha T_1 = 0$$

$\alpha = 2, \dots, \nu$.

Altså er funktionerne på højre side i (1) uafhængige af x_1 . Vi kan derfor behandle systemet (1) som et system på $\mathcal{D}'_{m-1}$, og det vil ifølge induktionsantagelsen have løsninger, da betingelsen

$$D_\alpha(T_\beta - D_\beta X_1) = D_\beta(T_\alpha - D_\alpha X_1)$$

ses at være opfyldt. Dermed er påstanden om eksistens af løsninger bevist. Resten er indlysende.

Sætning 15. Lad $f, g : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathcal{C}$ være Lebesgue-integrable funktioner, så at det for næsten alle $(x_2, \dots, x_m)$ gælder, at

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : g(b, x_2, \dots, x_m) - g(a, x_2, \dots, x_m) = \int_a^b f(\underline{x}) dx_1.$$

Da vil de ved $\tilde{f}(\varphi) = \int f\varphi$, $\tilde{g}(\varphi) = \int g\varphi$ definerede distributioner $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ tilfredsstille betingelsen $D_1 \tilde{g} = \tilde{f}$.

Bevis: Vi får ved direkte udregning

$$D_1 \tilde{g}(\varphi) = -\tilde{g}(D_1 \varphi) = -\int g(\underline{x}) D_1 \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = -\int (g(a, x_2, \dots, x_m) - g(b, x_2, \dots, x_m)) D_1 \varphi(\underline{x}) d\underline{x} \\ = -\int (g(a, x_2, \dots, x_m) + \int_a^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_m) dt) D_1 \varphi(\underline{x}) d\underline{x}.$$

NU er

$$\begin{aligned} \int g(a, x_2, \dots, x_m) D_1 \varphi(\underline{x}) d\underline{x} &= \int \dots \int (g(a, x_2, \dots, x_m) \int D_1 \varphi(\underline{x}) dx_1) dx_2 \dots dx_m \\ &= \int \dots \int (g(a, x_2, \dots, x_m) [\varphi(\underline{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty}) dx_2 \dots dx_m = 0. \end{aligned}$$

Vi tænker os nu ved den fortsatte udregning a valgt, så at $\varphi(\underline{x})$ er 0 for alle $\underline{x}$ med $x_1 \leq a$. Vi får da

$$\begin{aligned} D_1 \tilde{g}(\varphi) &= - \int \dots \int \left(\int_a^{\infty} \left(\int_a^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_m) D_1 \varphi(\underline{x}) dt \right) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_m = \\ &= - \int \dots \int \left(\int_a^{\infty} \left(\int_t^{\infty} f(t, x_2, \dots, x_m) D_1 \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1 \right) dt \right) dx_2 \dots dx_m = \\ &= \int \dots \int \left(\int_a^{\infty} f(t, x_2, \dots, x_m) \varphi(t, x_2, \dots, x_m) dt \right) dx_2 \dots dx_m = \tilde{f}(\varphi). \end{aligned}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 15 viser stort set, at distributionsteorien benytter de klassiske differentialkvotienter, når disse overhovedet kan bruges. Der gælder også en slags omvendt sætning:

Sætning 16. Lad $f, g : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathcal{C}$ være Lebesgue-integrable funktioner, og lad $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ være de tilsvarende distributioner. Hvis $D_1 \tilde{g} = \tilde{f}$, eksisterer der en funktion $g_1 : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathcal{C}$, som er næsten identisk med g , så at det for næsten alle $x_2, \dots, x_m$ gælder, at

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : g_1(b, x_2, \dots, x_m) - g_1(a, x_2, \dots, x_m) = \int_a^b f(\underline{x}) dx_1.$$

Bevis: For næsten alle $x_2, \dots, x_m$ eksisterer

$$g'(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_m) dt,$$

og ifølge sætning 15 er $D_1 \tilde{g}' = \tilde{f}$. For $h = g - g'$ gælder altså $D_1 \tilde{h} = 0$, så distributionen $\tilde{h}$ er uafhængig af x_1 . Vi vælger $\varphi_0 \in \mathcal{D}_1$ med $\int \varphi_0 = 1$, og vi sætter

$$h_1(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1 + t) h(t, x_2, \dots, x_m) dt.$$

Vi har nu for $\varphi \in \mathcal{D}_m$, at

$$\tilde{h}_1(\varphi) = \int \cdots \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1+t) h(t, x_2, \dots, x_m) \overbrace{\varphi(x_1, \dots, x_m)}^{dt} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_m$$

$$\int \cdots \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t, x_2, \dots, x_m) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1+t) \varphi(x_1, \dots, x_m) dx_1 \right) dt \right) dx_2 \cdots dx_m =$$

$\tilde{h}(\varphi_1)$, Ved ombytning af x_1 og t får vi

hvor
$$\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(\underline{x}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1+t) \varphi(t, x_2, \dots, x_m) dt \right] d\underline{x} = \tilde{h}(\varphi_1)$$

$$\varphi_1(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1+t) \varphi(t, x_2, \dots, x_m) dt.$$

Nu er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\underline{x}) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1+t) dx_1 \varphi(t, x_2, \dots, x_m) \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\underline{x}) dx_1,$$

og da $\tilde{h}$ er uafhængig af x_1 , afhænger $\tilde{h}(\varphi)$ kun af $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\underline{x}) dx_1$,^{*} så vi får $\tilde{h}_1(\varphi) = \tilde{h}(\varphi)$ for ethvert $\varphi \in \mathcal{D}$, altså $\tilde{h} = \tilde{h}_1$. Vi sætter

$g_1 = g' + h_1$, og vi har da for $b, a \in \mathbb{R}$ og næsten alle $x_2, \dots, x_m$, at

$$g_1(b, x_2, \dots, x_m) - g_1(a, x_2, \dots, x_m) - \int_a^b f(\underline{x}) dx_1 =$$

$$h_1(b, x_2, \dots, x_m) - h_1(a, x_2, \dots, x_m).$$

Funktionen h_1 har overalt en partiel differentialkvotient

$$D_1 h_1(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} D \varphi_0(x_1+t) h(t, x_2, \dots, x_m) dt,$$

og af sætning 15 følger, at $D_1^{\#} h_1$ er den partielle differentialkvotient af $\tilde{h}_1 = \tilde{h}$, altså nuldistributionen. Vi skal straks vise et lemma, der siger, at en funktion, der svarer til nuldistributionen, er nul næsten overalt. Da $D_1 h_1(\underline{x})$ er nul næsten overalt og h_1 for næsten alle $x_2, \dots, x_m$ er differentiabel for alle $x_1 \in \mathbb{R}$, kan vi slutte, at $h_1(x_1, \dots, x_m)$ er konstant som funktion af x_1 for næsten alle $x_2, \dots, x_m$. For $\varphi \in \mathcal{D}$ gælder nu endvidere

$$\tilde{g}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi) + \tilde{g}'(\varphi) = \tilde{g}_1(\varphi), \text{ altså ifølge det endnu ikke bevi-}$$

ste lemma, at g_1 er næsten identisk med g . Dermed er sætningen bevist.

^{*}) thi $\tilde{h}$ er uafhængig af x_1 , dvs. $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\varphi_1) = \tilde{h}_1(\varphi)$

Lemma 17. Lad $f : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathcal{C}$ være en Lebesgue-integrabel funktion. Hvis $\tilde{f}$ er nuldistributionen, er $\tilde{f}$ næsten identisk 0.

Bevis: Afbildningen $\tilde{f}(\varphi)$ defineret ved $\tilde{f}(\varphi) = \int f\varphi$ er kontinuert på rummet $\mathcal{C}$ af kontinuerte funktioner med kompakt støtte. Nu er $\mathcal{D}$ overalt tæt i $\mathcal{C}$, og hvis distributionen $\tilde{f}$ er nuldistributionen, kan vi således slutte, at $\tilde{f} : \mathcal{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er nulafbildningen. Nu er den karakteristiske funktion for et afsluttet interval I grænsefunktion for en aftagende følge af funktioner fra $\mathcal{C}$. Sætningen om majoriseret grænseovergang giver derfor, at $\int_I f(\underline{x}) d\underline{x} = 0$. Så er $\mu(A) = \int_A f(\underline{x}) d\underline{x}$ et mål, der forsvinder på ethvert afsluttet interval, altså nul-målet. Dermed er lemma 17 bevist.

Sætning 18. Hvis alle partielle differentiaalkvotienter af første orden af en distribution $T \in \mathcal{D}'_m$ er kontinuerte funktioner, er T selv en kontinuert differentiable funktion.

Bevis: Vi benytter induktion efter m . For $m = 1$ følger sætningen umiddelbart af sætning 15. Vi antager, at sætningen gælder for enhver distribution i $\mathcal{D}'_{m-1}$. Lad nu $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathcal{C}$ være kontinuerte funktioner, og lad $T \in \mathcal{D}'_m$ være en distribution, som tilfredsstiller

$$D_\nu T = f_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Funktionen

$$g_1(\underline{x}) = \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_m) dt$$

er kontinuert og tilfredsstiller betingelsen $D_1 g_1 = f_1$, og derfor er $T - \tilde{g}_1$ en distribution, som er uafhængig af x_1 . Endvidere gælder for $\nu = 2, \dots, m$, at

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1) = \tilde{f}_\nu - D_\nu \tilde{g}_1.$$

For $\varphi \in \mathcal{D}_m$ får vi ~~$\nu=1$~~

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi) = \tilde{f}_\nu(\varphi) - D_\nu \tilde{g}_1(\varphi) = \tilde{f}_\nu(\varphi) + \tilde{g}_1(D_\nu \varphi).$$

Vi sætter specielt $\varphi(\underline{x}) = \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_2, \dots, x_m)$, og idet vi sætter

$$h_\nu(x_1) = \int \dots \int (f_\nu(\underline{x})\varphi_1(x_2, \dots, x_m) + g_1(\underline{x})D_\nu \varphi_1(x_2, \dots, x_m)) dx_2 \dots dx_m$$

får vi, at

$$(1) \quad D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi) = \int h_\nu(x_1) \varphi_0(x_1) dx_1 = \tilde{h}_\nu(\varphi_0)$$

Nu er Vi har $D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi) = \tilde{h}_\nu(\varphi_0)$, hvor $D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi)$ er uafhængig

$D_\nu(T-$ af x_1 , og $\tilde{h}_\nu(\varphi_0)$ kun afhænger af x_1 . Heraf slutter vi, at

for ethvert $\tilde{h}_\nu(\varphi_0)$ er konstant:

følger, at $\tilde{h}_\nu h_\nu = h_\nu(0) = \int \dots \int f_\nu(0, x_2, \dots, x_m) \varphi_1(x_2, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m$

valgt. For $x_1 = 0$ finder vi, at den konstante værdi af h_ν er (idet

$$g_1(0, x_2, \dots, x_m) = 0)$$

$$\int \dots \int f_\nu(0, x_2, \dots, x_m) \varphi_1(x_2, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m,$$

og (1) giver derfor

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi) = \int \dots \int f_\nu(0, x_2, \dots, x_m) \varphi_0(x_1) \varphi_1(x_2, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Vi vælger nu specielt φ_0 , så at $\int \varphi_0 = 1$, og $D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi)$ afhænger derefter kun af φ_1 . Vi får

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1)(\varphi_1) = \int \dots \int f_\nu(0, x_2, \dots, x_m) \varphi_1(x_2, \dots, x_m) dx_2 \dots dx_m,$$

altså

Strengt taget har vi $f'_\nu(x_2, \dots, x_m) = f_\nu(0, x_2, \dots, x_m)$ og

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1) = \tilde{f}_\nu, \quad \nu = 2, \dots, m,$$

$$D_\nu(T-\tilde{g}_1) = \tilde{f}'_\nu$$

idet $D_\nu(T-\tilde{g}_1)$ opfattes som en distribution fra $\mathcal{D}'_{m-1}$, og af induk-

tionsantagelsen følger nu, at $T-\tilde{g}_1$ er en differentiabel funktion.

Det medfører, at T er en kontinuert funktion. Da T har kontinuerte partielle differentialkvotienter, er T en differentiabel funktion.

Dermed er sætningen bevist.

En differentialform

$$f_1 dx_1 + \dots + f_m dx_m,$$

hvor $f_1, \dots, f_m$ er kontinuerte funktioner, er altså et totalt differential, hvis og kun hvis distributionerne $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ tilfredsstiller integrabilitetsbetingelserne $D_j \tilde{f}_k = D_k \tilde{f}_j$ for alle j og k , og hvis dette er opfyldt vil et kurveintegral af differentialformen kun afhænge af vejens begyndelses- og endepunkt, og kurveintegralet kan benyttes til bestemmelse af en stamfunktion til differentialformet.

16. kapitel.Positive distributioner.

Vi indleder med en generel sætning om topologiske vektorrum.

Sætning 1. Lad E_1 være et topologisk vektorrum, $H \subseteq E_1$ et overalt tæt underrum, E_2 et fuldstændigt topologisk Hausdorff-vektorrum og $f : H \rightarrow E_2$ en kontinuert, lineær afbildning. Der eksisterer da en og kun én kontinuert lineær afbildning $g : E_1 \rightarrow E_2$, så at f er restriktionen af g til H .

Bevis: Hvis $g_1, g_2 : E_1 \rightarrow E_2$ er kontinuerte afbildninger og $g_1|_H = g_2|_H$, bliver $g_2 - g_1 : E_1 \rightarrow E_2$ en kontinuert afbildning, som afbilder H på $\{0\}$, altså $\overline{H} \subseteq \overline{\{0\}} = \{0\}$. Dermed har vi vist "kun én". Hvis $g : E_1 \rightarrow E_2$ er kontinuert og $g|_H = f$, har vi for $a \in H$, at den ved $h(x) = g(x) + g(a) - g(x+a)$ definerede afbildning $h : E_1 \rightarrow E_2$ afbilder H på $\{0\}$ og dermed hele E_1 på $\{0\}$. Deraf følger igen, at det også for $a \notin H$ vil gælde, at h afbilder H på $\{0\}$ og dermed hele E_1 på $\{0\}$. Dermed har vi vist, at $g(x+y) = g(x) + g(y)$ for vilkårlige $x, y \in E_1$. For $\lambda \in \mathbb{C}$ er den ved $h(x) = g(\lambda x) - \lambda g(x)$ definerede afbildning $h : E_1 \rightarrow E_2$ kontinuert, og den afbilder H på $\{0\}$ og dermed hele E_1 på $\{0\}$. Altså er $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ for $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E_1$. En eventuel kontinuert udvidelse af f til hele E_1 vil således automatisk blive lineær, og vi mangler således blot at vise eksistensen af en kontinuert udvidelse.

Lad $\hat{U}_1$ og $\hat{U}_2$ være filtrene af omegne af 0 på E_1 og E_2 . Lad x være et vilkårligt punkt af E_1 . For $U \in \hat{U}_1$ er $(x+U) \cap H \neq \emptyset$, da H er overalt tæt. Altså er $\{f((x+U) \cap H) \mid U \in \hat{U}_1\}$ basis for et filter $\hat{F}_x$ på E_2 . For $V \in \hat{U}_2$ er $f^{-1}(V)$ en omegn af 0 i H , og der findes derfor en rund omegn W af 0 i E_1 , så at $(W+W) \cap H \subseteq f^{-1}(V)$.

210² $(x+W) \cap H \subseteq (y+W+W) \cap H \subseteq y+(W+W) \cap H$, thi hvis $x \in (y+W+W) \cap H$,

findes der $w_1, w_2 \in W$, så at $x = y + w_1 + w_2 \in H$; men da H er

et underrum, og da $y \in H$, gælder $w_1 + w_2 \in H$, dvs.

$w_1 + w_2 \in (W+W) \cap H$. Men så er $x \in y + (W+W) \cap H$. Q.E.D.

Vi har nu

$$f((x+W) \cap H) \subseteq f((y+W+W) \cap H) \subseteq f(y + (W+W) \cap H) \subseteq f(y + f^{-1}(V))$$

$$\subseteq f(y) + V.$$

lad $V \in \mathcal{U}_2$ være en rund, afsluttet omegn af 0 i E_2 valgt, så at $V+V \subseteq U$. Vi vælger en rund, åben omegn W af 0 i E_1 , så at $(W+W) \cap H \subseteq f^{-1}(V)$, og endelig vælger vi $y \in (x+W) \cap H$. Vi har da som ovenfor, at $f((x+W) \cap H) \subseteq f(y) + V$. Da $f(y) + V$ er en afsluttet mængde og tilhører $\mathcal{F}_x$, har vi $g(x) \in f(y) + V$, altså $f(y) + V \subseteq g(x) + U$. For $z \in x+W$ er $x+W$ en omegn af z , og vi har derfor $f(y) + V \in \mathcal{F}_z$; men da $f(y)+V$ er afsluttet, medfører dette, at $g(z) \in f(y)+V \subseteq g(x)+U$. Altså har vi bevist, at $g^{-1}(g(x)+U) \supseteq x+W$, altså at g er kontinuert i x , og dermed er sætningen bevist.

Definition 1. En distribution $T \in \mathcal{D}'_0$ kaldes positiv, såfremt

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_0 : \varphi \geq 0 \Rightarrow T(\varphi) \geq 0.$$

Sætning 2. Mængden af positive distributioner udgør en afsluttet konveks kegle i $\mathcal{D}'_0$.

Bevis: Det er klart, at mængden af positive distributioner udgør en konveks kegle, og det ses umiddelbart, at denne er svagt afsluttet, altså også stærkt afsluttet.

Sætning 3. Mængden af positive distributioner er identisk med mængden af positive mål.

Bevis: Lad $T \in \mathcal{D}'_0$ være en positiv distribution. Lad $K \subseteq O$ være en kompakt mængde. Der eksisterer en positiv funktion $\varphi_0 \in \mathcal{D}_0$, som overalt på K har den konstante værdi 1. For en vilkårlig reel funktion $\varphi \in \mathcal{D}_0$ har vi

$$|T(\varphi)| = \pm T(\varphi) \leq T(|\varphi|),$$

og for vilkårligt $\varphi \in \mathcal{D}_0$ kan vi vælge $\gamma \in \mathbb{R}$, så at

$$|T(\varphi)| = e^{i\gamma} T(\varphi) = T(e^{i\gamma} \varphi) = \operatorname{Re} T(e^{i\gamma} \varphi) = T(\operatorname{Re} e^{i\gamma} \varphi) \leq T(|\varphi|).$$

For $\varphi \in \mathcal{D}_K$, $|\varphi| \leq 1$, har vi således $|T(\varphi)| \leq T(\varphi_0)$. Dette betyder, at T er kontinuert på $\mathcal{D}_K$ med den fra $\mathcal{C}_K$ stammende delrumstopologi, og dette gælder for ethvert kompakt $K \subseteq O$. Heraf følger, at T er kontinuert på $\mathcal{D}_0$ med delrumstopologien fra $\mathcal{C}_0$. Nu er $\mathcal{D}_0$ overalt tæt i $\mathcal{C}_0$ og ifølge sætning 1 har vi derfor en kontinuert lineær afbildning $\tilde{T} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, så at T netop er restriktionen af $\tilde{T}$ til $\mathcal{D}_0$. Nu har vi tidligere vist, at dualrummet $\mathcal{C}'_0$ netop omfatter alle mål, på O . Der eksisterer altså et mål μ på O , således at

$$\tilde{T}(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

for ethvert $\varphi \in \mathcal{C}_0$. Specielt er så $T(\varphi) = \int \varphi d\mu$ for ethvert $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Mængden af positive funktioner i $\mathcal{D}_0$ er overalt tæt i mængden af positive funktioner i $\mathcal{C}_0$. Heraf følger, at $\tilde{T}(\varphi)$ er positiv, når $\varphi \in \mathcal{C}_0$ er positiv. Vi kan nu slutte, at $\mu(I)$ er positiv for ethvert interval $I \subset O$, og det medfører, at målet μ er positivt. Dermed er sætningen bevist.

17. kapitel.Distributioner på $\mathbb{R}$.

En voksende funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har som bekendt højst en numerabel mængde af diskontinuitetspunkter. I hvert diskontinuitetspunkt $x \in \mathbb{R}$ har f grænseværdier $f(x-0)$ og $f(x+0)$ fra venstre og højre. Selve funktionsværdien er uden betydning for den til f svarende distribution μ_f . I et kontinuitetspunkt er begge grænseværdierne lig med funktionsværdien. Til funktionen f svarer et indhold defineret på alle begrænsede intervaller ved

$$I(]a, b[) = f(b-0) - f(a+0), \quad I(]a, b]) = f(b+0) - f(a+0)$$

$$I([a, b[) = f(b-0) - f(a-0), \quad I([a, b]) = f(b+0) - f(a-0).$$

Dette indhold er kontinuert, og det udvides derfor på naturlig måde til et positivt mål μ_f . To voksende funktioner svarer til samme mål, hvis og kun hvis de har bortset fra diskontinuitetspunkterne konstant differens. For en mængde $\{x\}$ bestående af et enkelt punkt, er $\mu_f(\{x\}) > 0$, hvis x er diskontinuitetspunkt for f , men $\mu_f(\{x\}) = 0$, hvis x er kontinuitetspunkt for f . Et positivt mål μ på $\mathbb{R}$ vil højst for en numerabel mængde af punkter $x \in \mathbb{R}$ tilfredsstille $\mu(\{x\}) > 0$. Vælger vi a , så at $\mu(\{a\}) = 0$ og sætter vi

$$f(x) = \int_a^x 1 \cdot d\mu = \mu([a, x]),$$

da er $\mu = \mu_f$.

Et vilkårligt reelt mål kan skrives som differens mellem to positive mål. Disse svarer hver til en familie af voksende funktioner, der bortset fra diskontinuitetspunkterne afviger indbyrdes ved konstanter. Det oprindelige mål svarer således til en familie af differenser mellem voksende funktioner altså til en familie af funktioner med begrænset variation, som to og to har næsten konstant differens. Omvendt er en funktion med begrænset variation differens

mellem to voksende funktioner og svarer således til et mål. En kompleks funktion har begrænset variation, hvis og kun hvis dens realdel og dens imaginærdel har begrænset variation. Vi har således en generel tilordningslov, som til en funktion f med begrænset variation tilordner et mål μ_f . Ethvert mål på $\mathbb{R}$ kan fremkomme på denne måde, og μ_f bestemmer f næsten entydigt bortset fra en additiv konstant.

Sætning 1. Lad f være en funktion med begrænset variation, og lad μ_f være det tilsvarende mål. Lad g være en Lebesgue-integrabel funktion, og $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. For et vilkårligt interval $[a, b]$ gælder da

$$(1) \quad \int_a^b G(x) d\mu_f = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

hvis f er kontinuert i a og b . Hvis f er ^{dis-}kontinuert i b , skrives $f(b+0)$, når b medregnes til integrationsintervallet, og $f(b-0)$, når b ikke medregnes. Analogt for a .

Bevis: For $g = 0$ og G konstant er sætningen triviell. For $g(x) = 1$, $G(x) = x$ er påstanden

$$\int_a^b x d\mu_f = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx.$$

For at have noget bestemt at holde os til vil vi antage, at integrationsintervallet er $[a, b[$, og vi vil indføre en inddeling

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

hvor delintervallerne $[x_{j-1}, x_j[$ er lige lange. Vi får da

$$\begin{aligned} \int_a^b x d\mu_f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j (f(x_j-0) - f(x_{j-1}-0)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n x_j f(x_j-0) - \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1} f(x_j-0) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n f(x_n-0) - x_1 f(x_0-0) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j-0)(x_{j+1} - x_j)) = \\ &= bf(b-0) - af(a-0) - \int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

idet vi benytter, at en voksende funktion er Riemann-integrabel. Lad os dernæst antage, at g er karakteristisk funktion for et interval $[a_1, b_1[\subseteq [a, b[$, og at $G(x) = x$ for $x \in [a_1, b_1[$, altså konstant $= a_1$ på $[a, a_1[$ og konstant $= b_1$ på $[b_1, b[$, så påstanden får formen

$$a_1 \int_a^{a_1} d\mu_f + \int_{a_1}^{b_1} x d\mu_f + b_1 \int_{b_1}^b d\mu_f = b_1 f(b-0) - a_1 f(a-0) - \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx,$$

og det ses umiddelbart at være opfyldt. Mængden af funktioner g , for hvilke (1) gælder, er et lineært vektorrum, og vi kan derfor slutte, at (1) gælder, når g er en trappefunktion. Nu svarer majoriseret grænseovergang for g til ligelig grænseovergang for G , og den omtalte mængde af funktioner er derfor afsluttet overfor majoriseret grænseovergang. Formel (1) gælder derfor for alle begrænsede Baire-funktioner. Ændring af g på en mængde med Lebesguemålet nul er uden virkning på leddene i (1). Heraf følger, at (1) er opfyldt for Lebesgue-integrable funktioner.

Sætning 2. Lad $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{C}$ være en funktion med begrænset variation. Differentialkvotienten af den til f svarende distribution er den til målet μ_f svarende distribution. En distribution, som svarer til et mål er differentialkvotient af en distribution, som svarer til en funktion med begrænset variation.

Bevis: For $\varphi \in \mathcal{D}$ fås ifølge sætning 1

$$D\tilde{f}(\varphi) = -\tilde{f}(D\varphi) = -\int f D\varphi = \int \varphi d\mu_f = \tilde{\mu}_f(\varphi).$$

Dermed er den første påstand bevist. Den anden påstand følger umiddelbart.

Definition 1. En distribution T på $\mathbb{R}$ kaldes voksende, hvis det for ethvert $h > 0$ gælder, at $\frac{\tau_h T}{h} = \Delta_h^+ T$ er en positiv distribution.

Sætning 3. En distribution er voksende, hvis og kun hvis den svarer til en voksende funktion, og hvis og kun hvis dens differential-kvotient er en positiv distribution.

Bevis: Det er klart, at en distribution T er voksende, hvis den svarer til en voksende funktion. Hvis T er voksende, er det klart, at DT er en positiv distribution, da $DT = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(\tau_h T - T)$. Men så er DT et positivt mål ifølge sætning 2. Der findes så en voksende funktion $\tilde{f}$, så at $D\tilde{f} = DT$. Så er $T - \tilde{f}$ en konstant distribution, og dermed har vi vist, at T svarer til en voksende funktion. Vi fik samtidig bevist, at T er en voksende distribution, hvis DT er en positiv distribution. Dermed er sætningen bevist.

Analogt med definition 1 kan vi definere en konveks distribution T ved, at det for alle $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ gælder, at $\Delta_{h_2} \Delta_{h_1} T$ er en positiv distribution. Selv om denne betingelse kun kræves opfyldt for $h_1 = h_2$, vil den medføre, at $D^2 T = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} \Delta_h \Delta_h T$ er en positiv distribution, altså et positivt mål, altså, at DT er en voksende funktion, og vi får således, at T selv er en konveks funktion.

Definition 2. En distribution T på $\mathbb{R}$ kaldes totalt voksende, hvis det for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $h > 0$ gælder, at $\Delta_h^n T$ er en positiv distribution.

Sætning 4. En totalt voksende distribution er en analytisk funktion.

Bevis: Af bemærkningen forud for definition 2 ses, at $D^n T$ er en positiv konveks funktion for ethvert n . Altså er T en funktion, som er vilkårligt ofte differentiable, og hvis differentialkvotienter alle er positive. I kapitel 3 viste vi, at dette medfører, at T er en analytisk funktion. Dermed er sætningen bevist.

Det fremgår af beviset for sætning 3 i kapitel 3, at potensrækken for T endda får konvergensradius ∞ , altså at T er en hel funktion.

Vi vil nu ved et eksempel vise, at ikke enhver distribution på en åben mængde $0 < \mathbb{R}$ fremkommer som restriktion af en distribution på $\mathbb{R}$. Dertil betragter vi den ved

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

definerede afbildning $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ og den tilsvarende distribution $\tilde{f}$ på den åbne mængde $]0, \infty[$. Vi sætter

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2x(1-x)}} & \text{for } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{for } x \notin]0, 1[. \end{cases}$$

For $h > 0$ har vi da $\tau_{-h}\varphi \in \mathcal{D}_{]0, \infty[}$. Hvis $\tilde{f}$ var restriktion af en distribution T på $\mathbb{R}$, ville vi få

$$T(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} T(\tau_{-h}\varphi) = \lim_{h \rightarrow \infty} \tilde{f}(\tau_{-h}\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{\frac{1}{x}} \varphi(x-h) dx =$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{x}} \varphi(x) dx = \int_0^1 e^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}} dx \geq \int_0^1 e^{\frac{1}{2x}} dx = \infty,$$

hvilket er umuligt. Distributionen T kan altså ikke eksistere.

For $O \subset \mathbb{R}^m$ kan vi på den anden side vælge O_1 med $\overline{O_1} \subset O$, og der vil eksistere en vilkårlig ofte differentiabel funktion ρ , som er identisk 1 på O_1 , og som har sin støtte indeholdt i O . Hvis O_1 er valgt, så den har positiv afstand fra randen af O , kan ρ konstrueres ved den i kapitel 3 sætning 6 benyttede metode. Hvis T er en distribution på O , kan vi definere en distribution T_1 på $\mathbb{R}^m$ ved at sætte $T_1(\varphi) = T(\rho\varphi)$, og T_1 og T er da indbyrdes identiske på O_1 . Dette giver os mulighed for at udnytte sætningen om lokale egenskaber, selv om disse kun er bevist for distributioner på hele rummet.

219⁷⁻⁸Bemærkning: Ifølge Radon-Nikodyms sætning: Hvis det be-

grænsede integral J er absolut kontinuert med hensyn til
 det begrænsede integral I , så findes der en og kun én I -
 summabel funktion f_0 , så at ff_0 er I -summabel, og

$J(f) = I(ff_0)$ for ethvert $f \in L^1(J)$. (Se Loomis: Abstract

Harmonic Analysis, side 41, eller 1. kapitel, Abstrakt

mål- og integralteori, sætning 47, HT 39)
 integrabel funktion f , så at $\mu(A) = \int_A f$ for enhver Lebesgue-målelig
 mængde A . For ethvert $\gamma \in \mathbb{R}$ er $\int_A (\|T\| - \operatorname{Re}(e^{i\gamma}f)) = \|T\|\mu_0(A) - \operatorname{Re}(e^{i\gamma}\mu(A))$
 ≥ 0 for enhver Lebesgue-målelig mængde A , altså $\operatorname{Re}(e^{i\gamma}f(\underline{x})) \leq \|T\|$
 for næsten alle $\underline{x} \in 0$. Lad Γ være en numerabel mængde af reelle tal,
 så at $\{e^{i\gamma} \mid \gamma \in \Gamma\}$ er en overalt tæt mængde på enhedscirklen. Så er
 betingelsen $\forall \gamma \in \Gamma : \operatorname{Re}(e^{i\gamma}f(\underline{x})) \leq \|T\|$
 opfyldt for næsten alle $\underline{x} \in 0$. Vi ser således, at hvert element i
 det duale rum til L^1 er en begrænset, Lebesgue-integrabel funktion.
 Er omvendt f begrænset og Lebesgue-integrabel på 0 , er $\mathfrak{F}(\varphi) = \int f\varphi$
 åbenbart en kontinuert linearform på L^1 .

Vi minder om, at det mindste positive tal, som $|f(\underline{x})|$ højst
 overstiger på en nulmængde, kaldes det essentielle supremum for $|f|$.
 Vi har vist ovenfor, at restriktionerne til $\mathcal{C}_0$ af de kontinuerte
 linearformer på L^1 er begrænsede Lebesgue-integrable funktioner på 0 .
 Nu er $\mathcal{C}_0$ en overalt tæt delmængde af L^1 , og derfor er en kontinuert
 linearform på L^1 bestemt ved sin restriktion til $\mathcal{C}_0$. Altså omfatter
 dualrummet til L^1 netop de begrænsede, Lebesgue-integrable funktioner,
 og det fremgår yderligere af overvejelserne ovenfor, at normen af en
 funktion f i dualrummet er $\geq$ det essentielle supremum af $|f|$. Er på
 den anden side $\|\varphi\|_1 \leq 1$, får vi

$$|\mathfrak{F}(\varphi)| \leq \int |f| |\varphi| \leq \int |\varphi| \sup. \text{ess.} |f| = \|\varphi\|_1 \sup. \text{ess.} |f|,$$

og dermed har vi vist, at normen af f som element af dualrummet til L^1 netop er $\sup_{\|g\|=1} |f(g)|$. Vi vil betegne denne norm med $\|f\|_\infty$ og dualrummet til L^1 med L^∞ . Det ses umiddelbart, at L^∞ er et Banachrum.

Vi har således følgende række af vektorrum

$$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset L^\infty \subset L^1 \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{D}'.$$

Da $\mathcal{D}$ er overalt tæt i $\mathcal{D}'$, er L^1 overalt tæt i $\mathcal{D}'$. For $K \subset \mathbb{R}$ kompakt er topologien på $\mathcal{C}_K$ den fra L^∞ inducerede delrumstopologi. Tilsvarende gælder for L^1 og $\mathcal{C}'$, men i alle de andre tilfælde er delrumstopologien forskellig fra den inducerede. Alle vektorrummene er nemlig fuldstændige, og bortset fra de to anførte tilfælde er ethvert af vektorrummene overalt tæt i det følgende. Specielt understreger vi, at både $\mathcal{C}_0$ og L^∞ er overalt tætte i L^1 , mens $\mathcal{C}_0$ er et afsluttet delrum af L^∞ .

De "klassiske" Banachrum, L^p -rummene, hører hjemme mellem L^∞ og L^1 i vor kæde af rum med Hilbertrummet L^2 i den centrale position. Konvergens i et L^p -rum implicerer konvergens som distributioner.

Vi får brug for en klassisk sætning om Banachrum, Hahn-Banachs sætning. Vi har tidligere vist den i en geometrisk formulering: En åben konveks mængde O og en vilkårlig konveks mængde A uden punkter fælles med O kan skilles ved hjælp af en hyperplan.

Bemærkning: Angående sætning 1 med bevis. Se fx Loomis,

Sætning 1. Lad E være et Banachrum over $\mathbb{C}$, og lad H være et vilkårligt underrum. Lad $T_0: H \rightarrow \mathbb{C}$ være en kontinuert linearform (i delrumstopologien på H). Der eksisterer da en kontinuert linearform $T: E \rightarrow \mathbb{C}$, så at $T|_H = T_0$ og $\|T\| = \|T_0\|$.

Bevis: Hvis T_0 er nulafbildningen, er påstanden triviel. Vi antager derfor, at T_0 ikke er identisk 0, altså $\|T_0\| > 0$. Med 0 be-

tegner vi den åbne kugleomegn $\{x \in E \mid \|x\| < \frac{1}{\|T_0\|}\}$, og med A betegner vi den ved $T_0(x) = 1$ bestemte lineære mangfoldighed i H . Ifølge den geometriske formulering af Hahn-Banachs sætning (side 175₈) findes der en reel hyperplan, som skiller 0 og A . Vi parallelforskyder denne hyperplan, så den kommer til at indeholde et punkt af A . Derved får den ikke punkter fælles med 0 , da 0 og A lå i modsatte halvplaner. Efter parallelforskydningen indeholder den reelle hyperplan hele A , og den vil indeholde en kompleks hyperplan B , som indeholder A , og som i øvrigt er afsluttet. Der findes nu netop én kontinuert linearform $T: E \rightarrow \mathbb{C}$, som er identisk 1 på hele B , og denne linearform vil tilfredsstille $T|_H = T_0$. Endvidere er $|T(x)| \leq 1$ for alle $x \in 0$, og derfor er $\|T\| \leq \|T_0\|$. Da T er en forlængelse af T_0 , er $\|T\| \geq \|T_0\|$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. Til en distribution T på $\mathbb{R}^m$ og en begrænset åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ svarer en differentiationsorden $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$, så at restriktionen af T til $\mathcal{D}_0$ er kontinuert på vektorrummet $\mathcal{D}_0$ med den ved $\|\varphi\| = \|D^{\underline{p}}\varphi\|_U$ definerede norm.

Bemærkning: Hvis $\rho(\varphi) = \max_{|\underline{q}| \leq \underline{q}} \|D^{\underline{q}}\varphi\|_U$, er ρ klart en semi-

Bevis:

indeholder norm, og endda en norm, og

$$U(Q, r) \quad U(Q, r) = \{\varphi \in \mathcal{D}_0 \mid \rho(\varphi) \leq r\}$$

Vi vil vise, at $U(Q, r)$ er konveks. Rummet er fuldstændigt, altså et Banachrum. Ønskede egenskaber.

Vi minder om:

indeholdt i

$\Lambda \geq 1$. Lad $\mathcal{F}$ Fréchetrum: metrisabelt, fuldstændigt rum,

tilfredsstiller Banachrum: normeret, fuldstændigt rum

Hilbertrum: fuldstændigt rum med et indre produkt,

dvs. et Hilbertrum er et Banachrum, der altid er et

Fréchetrum.

Bemærkning: Sætning 2 går ud på at vise, at restriktionen af en distribution til en begrænset åben mængde. For ψ de ligger i $\mathcal{D}^{p'}$. Da topologien i $\mathcal{D}$ er finere end topologien i $\mathcal{D}^p$, vil det være sværere at være kontinuert i $\mathcal{D}^{p'}$ (kræver flere omegne ved originalmængde-så vi afbildningen) end i $\mathcal{D}'$.

Lad $T \in \mathcal{D}'$. Hvis T er kontinuert i delrumstopologien fra $\mathcal{D}^p$, er $T \in \mathcal{D}^{p'}$. Her er $\mathcal{D}^p$ mængden af p gange kontinuerte differentiable funktioner, og $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^p$, hvor $\mathcal{D}$'s topologi er finere end delrumstopologien. En sådan distribution siges at have orden p . En basisomegn i $\mathcal{D}^p$ er givet ved

$$U((\varepsilon_n)) = \{\varphi \in \mathcal{D}^p \mid |D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon_n \text{ for } |\underline{k}| \leq p \text{ og } \underline{x} \in K_n \setminus K_{n-1}\} \\ = \{\varphi \in \mathcal{D}^p \mid \max_{|\underline{k}| \leq p} |D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon_n \text{ for } \underline{x} \in K_n \setminus K_{n-1}\}.$$

Sætning: Til sammenligning kan nævnes, at en basisomegn i $\mathcal{D}$ er givet ved

$$U((\varepsilon_n), (q_n)) =$$

$$\{\varphi \in \mathcal{D} \mid |D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon_n \text{ for } |\underline{k}| \leq q_n \text{ og } \underline{x} \in K_n \setminus K_{n-1}\}.$$

Bevis: Ifølge sætning 2 eksisterer der en differentiationsorden

$\underline{p}' = (p'_1, \dots, p'_m)$, så at $T|_0$ er kontinuert på $\mathcal{D}_0$ med den ved $\|\varphi\| = \|D^{\underline{p}'}\varphi\|_U$ definerede norm. For $\underline{p}'' = (p'_1+1, \dots, p'_m+1)$ er $D^{\underline{p}''}: \mathcal{D}_0$ ind i $\mathcal{D}_0$ en kontinuert afbildning, og billedmængden H er et lineært underrum af $\mathcal{D}_0$. Nu er $D^{\underline{p}''}$ injektiv, og den omvendte afbildning $(D^{\underline{p}''})^{-1}: H$ ind i $\mathcal{D}_0$ er en lineær afbildning. Vi har således en lineær afbildning $T \circ (D^{\underline{p}''})^{-1}: H$ ind i $\mathbb{C}$. Lad ε være et positivt tal. Vi kan bestemme $\delta > 0$, så at $|T(\varphi)| \leq \varepsilon$ for enhver funktion $\varphi \in \mathcal{D}_0$, som tilfredsstiller betingelsen $\|D^{\underline{p}'}\varphi\|_U \leq \delta$.

Lad nu $\psi \in H$ være en funktion, som tilfredsstiller betingelsen $\|\psi\|_1 \leq \delta$ eller udføreligt $\int |\psi| \leq \delta$. Lad φ være den funktion i $\mathcal{D}_0$, for hvilken $D^{\underline{p}''} \varphi = \psi$. Vi har da

$$D^{\underline{p}'} \varphi(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} \psi(t_1, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m,$$

hvilket implicerer, at

$$\|D^{\underline{p}'} \varphi\|_U \leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t_1, \dots, t_m)| dt_1 \dots dt_m \leq \delta,$$

altså at $|T \circ (D^{\underline{p}''})^{-1}(\psi)| = |T(\varphi)| \leq \varepsilon$. Vi har således vist, at $T \circ (D^{\underline{p}''})^{-1}$ er kontinuert på H med L^1 -normen, altså på H som underrum af L^1 . Men så følger af Hahn-Banachs sætning, at der findes en kontinuert linearmorfisme $T_1: L^1 \rightarrow \mathbb{C}$, så at $T \circ (D^{\underline{p}''})^{-1} = T_1|_H$. Da T_1 er et element af dualrummet L^∞ til L^1 , findes der en begrænset Lebesgue-integrabel funktion $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, så at $T_1 = \tilde{g}$, altså $T = \tilde{g} \circ D^{\underline{p}''}$. Vi har således $T(\varphi) = \tilde{g}(D^{\underline{p}''} \varphi) = (-1)^{|\underline{p}''|} D^{\underline{p}''} \tilde{g}(\varphi)$. Vi sætter

$$f(\underline{x}) = (-1)^{|\underline{p}''|} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} g(t_1, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m,$$

og f er da en kontinuert funktion, som næsten overalt tilfredsstiller $D_1 \dots D_m f = (-1)^{|\underline{p}''|} g$, og med differentiationsordenen $\underline{p} = (p_1'+2, \dots, p_m'+2)$ har vi derfor $T = D^{\underline{p}} f$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4. Til en begrænset mængde $A \subset \mathcal{D}'$ og en begrænset åben mængde $0 \in \mathbb{R}^m$ svarer en differentiationsorden $\underline{p}$ samt en ensartet begrænset mængde B af kontinuerte afbildninger $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, så at hver distribution $T \in A$ er differentialkvotient af orden $\underline{p}$ af en funktion $f \in B$.

Bevis: Da mængden A er begrænset, findes der en omegn af 0 i $\mathcal{D}'$ så at distributionerne i A er ensartet begrænsede på denne omegn. Heraf følger, at omegnen $U(Q, r)$ i beviset for sætning 2 kan vælges,

så at $T^{-1}(S) \supseteq U(Q,r)$ for alle $T \in A$. Tallet δ i beviset for sætning 2 kan da også vælges fælles for alle $T \in A$. Men distributionen $T_1 = \tilde{g}$ har L^1 -norm $\leq \frac{\varepsilon}{\delta}$, og f i sætning 4 tilfredsstiller derfor $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ for alle $x \in O$. Dermed er sætningen bevist.

Ovenstående resultater kan forbedres yderligere, men dertil bliver det nødvendigt at inddrage Hilbertrummet i undersøgelserne. Et Hilbertrum er et Banachrum E over $\mathbb{C}$ med et indre produkt $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ (vi vil skrive $[x,y] = \varphi(x,y)$), som tilfredsstiller betingelserne:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y, z \in E : [\alpha x + \beta y, z] &= \alpha[x, z] + \beta[y, z] \\ \forall x, y \in E : [y, x] &= \overline{[x, y]} \\ \forall x \in E : [x, x] &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Det følger af de to første betingelser, at

$$[z, \alpha x + \beta y] = \overline{\alpha}[z, x] + \overline{\beta}[z, y],$$

og det indre produkt er således ikke lineært i den sidste faktor.

Hvis vi et øjeblik glemmer, at E er et Banachrum og erstatter den tredje betingelse med $[x, x] > 0$ for $x \neq 0$, har vi for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, at

$$0 \leq [\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y] = [x, x]\alpha^2 + 2\operatorname{Re}[x, y]\alpha\beta + [y, y]\beta^2,$$

hvilket viser, at $(\operatorname{Re}[x, y])^2 \leq [x, x][y, y]$, og da dette gælder uændret, når x erstattes med $e^{i\gamma}x$, $\gamma \in \mathbb{R}$, kan vi slutte, at Cauchy-Schwarz's ulighed $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$ er opfyldt. Den medfører umiddelbart, at

$$[x+y, x+y] = [x, x] + 2\operatorname{Re}[x, y] + [y, y] \leq (\sqrt{[x, x]} + \sqrt{[y, y]})^2,$$

så at $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$ bliver en norm. Et vektorrum med et indre produkt, der opfylder de to første betingelser samt $\forall x \neq 0 : [x, x] > 0$ tillader således altid en organisation som normeret vektorrum, et såkaldt præ-Hilbertrum. Bliver rummet tillige fuldstændigt, er det et Hilbertrum.

En familie $\{e_j | j \in J\}$ af punkter af E kaldes et ortonormalsystem på E , såfremt

$$[e_j, e_k] = \begin{cases} 0 & \text{for } j \neq k \\ 1 & \text{for } j = k. \end{cases}$$

Lad $\{e_1, \dots, e_n\}$ være et endeligt ortonormalsystem. For $x \in E$ og $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ har vi den velkendte relation

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} e_{\nu}\|^2 &= \\ \|x - \sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n ([x, e_{\nu}] - c_{\nu}) e_{\nu}, x - \sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n ([x, e_{\nu}] - c_{\nu}) e_{\nu}\| &= \\ \|x - \sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu}\|^2 + \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^n (\overline{[x, e_{\nu}] - c_{\nu}}) [x - \sum_{\mu=1}^n [x, e_{\mu}] e_{\mu}, e_{\nu}] + & \\ \sum_{\mu, \nu=1}^n ([x, e_{\nu}] - c_{\nu}) (\overline{[x, e_{\mu}] - c_{\mu}}) [e_{\nu}, e_{\mu}] &= \\ \|x - \sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu}\|^2 + \sum_{\nu=1}^n |[x, e_{\nu}] - c_{\nu}|^2. \end{aligned}$$

Heraf fremgår, at det af $e_1, \dots, e_n$ udspændte underrum indeholder netop ét punkt, nemlig $\sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu}$, der ligger nærmest ved x . For $c_1 = \dots = c_n = 0$ giver relationen Bessels ligning

$$\|x\|^2 - \sum_{\nu=1}^n |[x, e_{\nu}]|^2 = \|x - \sum_{\nu=1}^n [x, e_{\nu}] e_{\nu}\|^2.$$

Heraf følger, at $\sum_{\nu=1}^n |[x, e_{\nu}]|^2 \leq \|x\|^2$ for ethvert sæt $e_1, \dots, e_n$ taget fra et ortonormalsystem $\{e_j\}$, altså at mængden $\{j \in J | [x, e_j] \neq 0\}$ er endelig eller numerabel, samt at $\sum_{j \in J} |[x, e_j]|^2$ eksisterer for ethvert $x \in E$ og er $\leq \|x\|^2$.

Lad nu $\{c_j | j \in J\}$ være en familie af komplekse tal, for hvilken $\{j \in J | a_j \neq 0\}$ er endelig eller numerabel og $\sum_{j \in J} |a_j|^2 < \infty$. Lad (j_n) være en følge af forskellige elementer fra J omfattende alle elementer med $a_j \neq 0$. Vi vil vise, at $\sum_{j_n} a_{j_n} e_{j_n}$ konvergerer på E . Dette følger

umiddelbart af, at

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_{j_k} e_{j_k} \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{j_k}|^2.$$

Ortonormalsystemet $\{e_j\}$ bestemmer således et underrum $H \subseteq E$ bestående af alle summer $\sum a_j e_j$ med $\sum |a_j|^2$ konvergent. For en sådan sum $\sum a_j e_j$ og et punkt $x \in E$ har vi den umiddelbare generalisation af relationen ovenfor

$$\|x - \sum a_j e_j\|^2 = \|x - \sum [x, e_j] e_j\|^2 + \sum |[x, e_j] - a_j|^2,$$

hvilket viser, at punktet $\sum [x, e_j] e_j$ er det punkt af H , der ligger nærmest ved x , og det medfører, at $x \in H$, eller x er ydre punkt for H . Altså er H et afsluttet underrum, og da ethvert punkt i H er grænsepunkt for en følge af endelige linearkombinationer af elementerne e_j , er H det mindste afsluttede underrum, der indeholder $\{e_j\}$. Vi siger, at H er det af $\{e_j\}$ udspændte afsluttede underrum. For $H = E$ siger vi, at ortonormalsystemet $\{e_j\}$ er et fuldstændigt ortonormalsystem i E . I dette tilfælde vil $x \in E$ og $\forall j : [x, e_j] = 0$ medføre $x = \sum [x, e_j] e_j = 0$, og et fuldstændigt ortonormalsystem er derfor maksimalt. For $x \in H$ vil på den anden side $y = x - \sum [x, e_j] e_j$ være $\neq 0$ og $[y, e_j] = 0$ for alle j , og ortonormalsystemet kan da udvides ved tilføjelse af $e = \|y\|^{-1} y$. Heraf følger, at et maksimalt ortonormalsystem er fuldstændigt.

For en mængde af ortonormalsystemer, som er fuldstændigt ordnet ved inklusion, gælder det åbenbart, at foreningsmængden igen er et ortonormalsystem.

Lad nu $\{e_j | j \in J\}$ være et fuldstændigt ortonormalsystem på E . Med E_1 betegner vi mængden af familier $\underline{a} = \{a_j | j \in J\}$, for hvilke $\sum |a_j|^2$ er konvergent. For $\underline{a} = \{a_j | j \in J\}$, $\underline{b} = \{b_j | j \in J\}$ eksisterer $[\underline{a}, \underline{b}] = \sum a_j \overline{b_j}$ ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed, og $\underline{a} + \underline{b} = \{a_j + b_j | j \in J\}$ vil igen tilhøre E_1 . Det fremgår heraf, at E_1 er et vektorrum med et indre produkt $[\underline{a}, \underline{b}]$, som giver anledning til en norm på E_1 . Til $x \in E$ tilordner vi nu $I(x) = \underline{a} = \{[x, e_j] | j \in J\}$, og $I: E$ på E_1 er da en

isomorfi og åbenbart tillige en isometri. Endvidere er

$$[x, y] = [\sum [x, e_j] e_j, y] = \sum [x, e_j] [e_j, y] = \sum [x, e_j] \overline{[y, e_j]} = [I(x), I(y)]$$

Afbildningen bevarer således det indre produkt. Talrummet E_1 er således en nøjagtig kopi af E . Vi siger, at E_1 er en fremstilling af E i retvinklede koordinater.

Et afsluttet underrum $H \subseteq E$ er fuldstændigt og derfor et Hilbertrum. Der findes derfor et fuldstændigt ortonormalsystem $\{\tilde{e}_j | j \in J_1\}$ på H . Ifølge Zorns lemma eksisterer en udvidelse $\{e_j | j \in J\}$ med $J_1 \subseteq J$ og $e_j = \tilde{e}_j$ for $j \in J_1$, som er et fuldstændigt ortonormalsystem på E . Et punkt af E har en fremstilling $x = \sum_{j \in J} a_j e_j$, og $p(x) = \sum_{j \in J_1} a_j e_j$ er

projektioner af x på H . Ortonormalsystemet $\{e_j | j \in J \setminus J_1\}$ udspænder et afsluttet underrum H_1 , som netop omfatter alle vektorer, der er ortogonale på H . Endvidere fremgår det af koordinatfremstillingen, at E er topologisk direkte sum af H og H_1 .

Når vi har valgt et fuldstændigt ortonormalsystem $\{e_j\}$ på Hilbertrummet E , har hvert punkt x et koordinatsæt $\{a_j\}$, og vi kan derfor indføre det konjugerede punkt $\bar{x}$ med koordinatsæt $\{\overline{a_j}\}$. Vi må dog notere os, at dette begreb på væsentlig måde afhænger af det valgte ortonormalsystem. Ved det indre produkt

$$\langle x, y \rangle = [x, \bar{y}]$$

etableres en dualitet mellem E og E . Svarende til denne dualitet kan vi indføre den svage topologi på E .

Sætning 5. De afsluttede kugleomegne af 0 i normtopologien på E er svagt afsluttede.

Bevis: Lad $\{e_j\}$ være et fuldstændigt ortonormalsystem på E . Den afsluttede kugleomegn med radius r omfatter netop de punkter $x \in E$,

for hvilke $\sum |x, e_j|^2 \leq r^2$. At $x \notin E$ er derfor ensbetydende med, at der findes et endeligt ortonormalsystem $\{e_1, \dots, e_n\}$, samt et tal $\epsilon > 0$, så at

$$\sum_{\nu=1}^n |x, e_\nu|^2 > (r+\epsilon)^2.$$

Nu er

$$U = \{y \in E \mid |y, e_\nu| \leq n^{-\frac{1}{2}}\epsilon, \nu = 1, \dots, n\}$$

en svag omegn af 0, og for $y \in U$ er

$$\left(\sum_{\nu=1}^n |x+y, e_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{\nu=1}^n |x, e_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{\nu=1}^n |y, e_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} > r,$$

hvilket viser, at x også i den svage topologi er et ydre punkt for kugleomegningen. Dermed er sætningen bevist.

Vi bemærker, at det for enhver fuldstændigt ortonormalsystem på E gælder, at den derved definerede afbildning $y \rightarrow \bar{y}$ af E på sig selv er isometrisk og derfor kontinuert i norm. Vi kan derfor uden videre direkte benytte $[x, y]$ i stedet for $\langle x, y \rangle$ ved definition af den svage topologi. Den omstændighed, at $[x, y]$ er konjugeret lineær i y bevirker trivielle ændringer i visse sætninger.

Lad $\hat{F}$ være et filter på E , og lad a være et punkt af E . Af $\hat{F} \rightarrow a$ i den svage topologi følger nu for enhver $y \in E$, at afbildningen $x \rightarrow [x, y]$ afbilder $\hat{F}$ på et filter $\hat{F}_y$, som konvergerer mod $[a, y]$. Hvis det omvendt gælder, at enhver afbildning $x \rightarrow [x, y]$ afbilder $\hat{F}$ på et filter, som konvergerer mod $[a, y]$, kan vi slutte, at enhver mængde $\{x \mid [x, y] < r\}$ tilhører $\hat{F}$ for $r > 0$, og det samme gælder da for enhver fællesmængde af endelig mange sådanne mængder, men det betyder netop, at $\hat{F} \rightarrow a$ i den svage topologi.

Sætning 6. De afsluttede kugleomegne i normtopologien på E er svagt kompakte.

Hvis $x \in K$, er $x = \sum \xi_j e_j$, hvor $\xi_j = [x, e_j]$ og $\sum |\xi_j|^2 \leq 1$.

Vi betragter nu projektionsafbildningerne $p_j : K \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved $p_j(x) = \xi_j$. Så vil billedfiltret konvergere, idet det er (basis for) et ultrafilter på enhedscirklen, dvs. ξ_j vil konvergere mod γ_j .

Vi betragter nu en afbildning $q : K \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$x \rightarrow |\xi_{j_1}|^2 + \dots + |\xi_{j_n}|^2 \leq 1,$$

hvor $j_1, \dots, j_n \in J$ er fast valgt. Billedfiltret bliver atter et ultrafilter, denne gang på $[0, 1]$.

Men så slutter vi, at $|\gamma_{j_1}|^2 + \dots + |\gamma_{j_n}|^2 \leq 1$ for

alle $j_1, \dots, j_n \in J$, dvs. $\sum |\gamma_j|^2 \leq 1$.

Vor påstand er nu, at $\hat{F} \rightarrow \sum \gamma_j e_j = z$.

Vi vælger et vilkårligt $y \in E$ og skal så vise, at $[x, y] \rightarrow [z, y]$, hvilket berettiger os til at betragte afbildningen $x \rightarrow [x, y]$.

Nu er $y = \sum \eta_j e_j$, hvor $\sum |\eta_j|^2$ er konvergent, dvs. vi kan vælge $j_1, \dots, j_n$, så at $\sum_{j \neq j_1, \dots, j_n} |\eta_j|^2 \leq (\frac{1}{3} \varepsilon)^2$,

for $\varepsilon > 0$.

Restsummen vurderes nu ved

$$\left| \sum_{j \neq j_1, \dots, j_n} \xi_j \overline{\eta_j} \right| \leq (\sum |\xi_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j \neq j_1, \dots, j_n} |\eta_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3} \varepsilon,$$

altså er

$$\left| \sum_{j \neq j_1, \dots, j_n} \gamma_j \overline{\eta_j} \right| \leq \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Nu vi $\xi_j \rightarrow \gamma_j$ for ethvert $j \in J$, dvs. billedfiltret indeholder en omegn defineret ved

Bevis: Lad $\hat{F}$ være et ultrafilter på kugleomegningen

$$K = \{x \in E \mid \|x\| \leq r\},$$

hvor r er et positivt tal. For ethvert $y \in E$ vil $x \rightarrow [x, y]$ afbilde $\hat{F}$ på et ultrafilter $\hat{F}_y$ på billedet af K , og da dette er en begrænset mængde i den komplekse plan, vil $\hat{F}_y$ konvergere mod et grænsepunkt $T(y) \in \hat{\mathbb{C}}$. Derved defineres en afbildning $T : E \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Af $[x, \alpha y_1 + \beta y_2] - \alpha [x, y_1] - \beta [x, y_2] = 0$ følger ved grænseovergangen, at $T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T(y_1) + \beta T(y_2)$, altså at T er en konjugeret lineær afbildning. Af $\|y\| \leq 1$ følger for $x \in K$, at $|[x, y]| \leq \|x\| \|y\| \leq r$, altså $|T(y)| \leq r$. Heraf følger, at $T(y)$ er kontinuert i normtopologien og dermed svagt kontinuert. Dette medfører, at T har formen $T(y) = [a, y]$ for et $a \in E$, og af bemærkningen forud for sætningen fremgår derefter, at $\hat{F} \rightarrow a$ i den svage topologi. Af sætning 5 følger nu, at $a \in K$. Dermed er sætningen bevist.

Den stærkeste topologi, der er forenelig med dualiteten mellem E og E' er den, der svarer til ligelig konvergens på svagt kompakte mængder. Heraf følger umiddelbart, at normtopologien er forenelig med dualiteten. Men det medfører igen, at en svagt begrænset mængde er begrænset i norm, altså at normtopologien er den stærke topologi. Dermed har vi også bevist, at E er stærkt dual med sig selv.

Hvis E ikke er endeligdimensionalt, vil den afsluttede enhedskugleomegn indeholde en følge (e_n) af vektorer, som udgør et ortonormalsystem, og denne har åbenbart ingen delfølge, der er konvergent i norm. Kugleomegningen er altså ikke kompakt i normtopologien. Vi ser også, at der i Hilbertrummet med uendelig mange dimensioner er væsentlig forskel på stærkt og svagt konvergente følger. Forholdene er således i flere henseender mere komplicerede end for rummene $\mathcal{D}$ og $\mathcal{D}'$.

Bemærkning: Hvis $H \subseteq E$ er et afsluttet underrum, er H selv et Hilbertrum.

Det fremgår af ovenstående, at ethvert Hilbertrum er isomorft med et tal-Hilbertrum. Strukturen på et tal-Hilbertrum afhænger selvfølgelig kun af kardinaltallet for indexmængden J . Der findes altså i det væsentlige for hvert kardinaltal netop et Hilbertrum med dette kardinaltal som dimension. Et endeligt dimensionalt Hilbertrum er et sædvanligt endeligdimensionalt rum.

Rummet L^2 bestående af klasser af funktioner $f : 0 \text{ ind i } \mathbb{C}$ for hvilke $\int |f|^2 < \infty$, organiseres som Hilbertrum ved det indre produkt

$$[f, g] = \int f(\underline{x}) \overline{g(\underline{x})} d\underline{x},$$

hvor integralet konvergerer ifølge Cauchy-Schwarz's ulighed. Riesz-Fischer's sætning siger netop, at L^2 er fuldstændigt. Det fremgår af ovenstående, at L^2 er dualt med sig selv.

Vi vender nu tilbage til vore undersøgelser af distributionernes lokale egenskaber. Vi vil udnytte Hilbertrumsteorien i beviset for følgende sætning.

Sætning 7. Lad $\mathcal{F}$ være et begrænset filter, som konvergerer mod 0 på $\mathcal{D}'$, og lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en begrænset åben mængde. Der eksisterer da en differentiationsorden $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ og et begrænset filter $\mathcal{G}$, som konvergerer mod 0 på $\mathcal{C}$, så at $D^{\underline{p}}$ afbilder $\mathcal{G}$ på et filter, der stemmer overens med $\mathcal{F}$ på mængden O .

Bevis: Lad $B \in \mathcal{F}$ være et begrænset filtermængde på $\mathcal{D}'$. Svarende til denne mængde vælger vi tallet Q i overensstemmelse med sætning 4. For $\underline{p}' = (Q, \dots, Q)$ gælder da, at ethvert $T \in B$ er kontinuert i den ved $\|D^{\underline{p}'} \phi\|_U$ definerede norm på $\mathcal{D}_0$ ifølge sætning 2. Som i sætning 3 indfører vi $\underline{p}'' = (Q+1, \dots, Q+1)$ og billedet H af $\mathcal{D}_0$ ved afbildningen $D^{\underline{p}''} : \mathcal{D}_0 \text{ ind i } \mathcal{D}_0$. For $T \in B$ bliver $T \circ (D^{\underline{p}''})^{-1} : H \text{ ind i } \mathbb{C}$ en lineær

afbildning, som bliver kontinuert på H i den topologi, der induceres på H som delrum af L^1 , men nu vil vi benytte den svagere påstand, at $T_0(D^{\mathbb{P}''})^{-1}$ bliver kontinuert på H med den topologi, der induceres på H som delrum af L^2 . Lad nu $\bar{H}$ være afslutningen af H i rummet L^2 . For ethvert $T \in B$ udvider vi $T_0(D^{\mathbb{P}''})^{-1}$ til en kontinuert lineær afbildning $T_1: \bar{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Afslutningen af værdimængden ændres ikke ved en sådan udvidelse. Ethver punkt $\varphi \in L^2$ har en ortogonal projektion $\pi(\varphi)$ på $\bar{H}$, og $\pi: L^2 \rightarrow \bar{H}$ er en lineær, kontinuert afbildning. Så er $T_1 \circ \pi$ en kontinuert lineær udvidelse af $T_0(D^{\mathbb{P}''})^{-1}$ til hele L^2 , og $T_1 \circ \pi$ tilhører dualrummet til L^2 , altså L^2 . Heller ikke den nye udvidelse ændrer værdimængdens afslutning. Ved at foretage denne udvidelse for alle $T \in B$ får vi til filtrets restriktion til B knyttet en filterbasis på L^2 , og da det for hver enkelt distribution gælder, at afslutningen af værdimængden ikke er mere omfattende for den tilordnede distribution, vil den således opståede filterbasis være basis for et filter $\hat{G}_1$, som går mod 0. Som i beviset for sætning 4 ser vi, at $D^{\mathbb{P}''}$ overfører $\hat{G}_1$ i $\hat{F}$. Der står nu blot tilbage at udføre en integration efter hver variabel for at komme til et filter af kontinuerte funktioner. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8. Lad (T_n) være en følge, som går mod 0 på $\mathcal{D}'$, og lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en begrænset åben mængde. Der findes da en differentiationsorden $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ og en følge (f_n) af kontinuerte funktioner, som går ligeligt mod 0, så at det for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at restriktionen til 0 af T_n er identisk med restriktionen til 0 af $D^{\underline{p}} f_n$.

Bevis: Da en konvergent følge er begrænset, er sætningen et specialtilfælde af sætning 7.

19. kapitel.Rummene $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}'$.

Definition 1: Med $\mathcal{E}$ vil vi betegne vektorrummet af vilkårlig ofte differentiable funktioner $\varphi: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ med den topologi, der defineres ved at mængden $\tilde{U}$ af omegne af 0 som basis har

$$\tilde{B} = \{U(\varepsilon, q, K) \mid \varepsilon > 0, q \in \mathbb{N}, K \subseteq \mathbb{R}^m \text{ kompakt}\},$$

$$\text{hvor } U(\varepsilon, q, K) = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \sup_{\underline{x} \in K} \sup_{|\underline{p}| \leq q} |D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon\} = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid p_{K,q}(\varphi) \leq \varepsilon\},$$

$$U(\varepsilon, q, K) = \{\varphi \in \mathcal{E} \mid \forall \underline{x} \in K \forall \underline{p} : |\underline{p}| \leq q \Rightarrow |D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon\}.$$

hvor $p_{K,q}$ er en seminorm. Altså er $U(\varepsilon, q, K)$ konveks.

Vi ser, at konvergens på $\mathcal{E}$ betyder ligelig konvergens på enhver kompakt mængde af samtlige partielle differentialkvotienter.

Sætning 1. $\mathcal{E}$ er et lokalkonvekst topologisk vektorrum, et Fréchet-rum, et blokrum og et Montelrum.

Bemærkning: Da $\mathcal{E}$ er et Fréchetrum, er det specielt et Hausdorffrum.

Bevis: Det er klart, at $\tilde{B}$ er en filterbasis, at $U(\varepsilon, q, K)$ er rund, afsluttet og konveks, samt at $\lambda U(\varepsilon, q, K) = U(\lambda \varepsilon, q, K)$ for $\lambda > 0$. Det ses umiddelbart, at $U(\varepsilon, q, K)$ er absorberende. Dermed har vi vist, at $\mathcal{E}$ er et topologisk vektorrum. Idet vi vælger $K_n = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\underline{x}\| \leq n\}$, udgør mængderne $U(\varepsilon, q, K_n)$ en basis for $\tilde{U}$, og for ethvert n og q er

$$\|\varphi\|_{n,q} = \sup\{|D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})| \mid |\underline{p}| \leq q, \underline{x} \in K_n\}$$

en pseudonorm. De til alle disse pseudonormer svarende kugleomegne udgør en basis for $\tilde{U}$, men det samme gælder for de speciellere pseudonormer $\|\varphi\|_{n,n}$, og udtrykket $[\varphi] = \sum 2^{-n} \min\{1, \|\varphi\|_{n,n}\}$ er en længde, der giver anledning til en invariant metrik defineret ved $\text{dist}(\varphi_1, \varphi_2) = [\varphi_2 - \varphi_1]$. Ganske som for $\mathcal{D}_K$ kan vi nu vise, at dette er en metrisering af det topologiske vektorrum $\mathcal{E}$. Lad α_n være en vilkårligt ofte differentiable funktion, som er identisk 1 på K_n og har sin støtte indeholdt i K_{n+1} . Lad (φ_n) være en fundamentalfølge

232¹⁷ Bemærkning: Vi kunne specielt vælge $U(\varepsilon, q, K_n) = U(\frac{1}{n}, n, K_n)$

på $\mathcal{E}$. For ethvert $p \in \mathbb{N}$ er $(\alpha_p \varphi_n)$ en fundamentalfølge på $\mathcal{D}_{K_{n+1}}$, altså konvergent. Heraf følger, at der findes en vilkårlig ofte differentiabel funktion φ , så at det for ethvert p og q gælder, at $(D^p \varphi_n) \rightarrow D^p \varphi$ ligeligt på K_n . Dermed har vi vist, at $\mathcal{E}$ er fuldstændigt, altså et Fréchet-rum. Dette medfører, at $\mathcal{E}$ er et blokrum. For at vise, at $\mathcal{E}$ er et Montel-rum, skal vi vise, at enhver begrænset følge (φ_n) på $\mathcal{E}$ har en konvergent delfølge. At (φ_n) er begrænset, betyder, at (φ_n) absorberes af enhver af omegnene $U(\varepsilon, q, K)$, og det medfører, at $D^p \varphi_n$ for ethvert p og n er begrænset på enhver kompakt mængde. For ethvert fast q medfører dette, at $(\alpha_q \varphi_n)$ er en begrænset følge på $\mathcal{D}_{K_{n+1}}$, og den har derfor en konvergent delfølge. Dette viser, at (φ_n) for ethvert q har en delfølge, der konvergerer ligeligt på K_q mod en grænsefunktion φ , og således at $(D^p \varphi_n) \rightarrow D^p \varphi$ ligeligt på K_q for ethvert p . Ved gentagne fortyndinger får vi dette opfyldt efterhånden på $K_1, K_2, \dots$, og diagonalfølgen vil da have den nævnte egenskab for ethvert K_q , men det betyder netop, at den konvergerer på $\mathcal{E}$. Dermed er sætningen bevist.

Vi indfører nu dualrummet $\mathcal{E}'$ til $\mathcal{E}$. Et element $T \in \mathcal{E}'$ er en kontinuert linearform $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$. At T er kontinuert er ensbetydende med, at T er begrænset på enhver begrænset mængde (se kap. 4, sætning 14 og den efterfølgende bemærkning side 88). Beviset for sætning 3 i kapitel 6 (side 109) kan da umiddelbart kopieres, og vi finder, at $\mathcal{E}'$ er fuldstændigt. Det ses umiddelbart, at $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}'$ er i dualitet ved $\langle \varphi, T \rangle = T(\varphi)$, idet $\delta_{\underline{a}}$ defineret ved $\delta_{\underline{a}}(\varphi) = \varphi(\underline{a})$ åbenbart tilhører $\mathcal{E}'$. Initialtopologien på $\mathcal{E}$ er forenelig med dualiteten mellem $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}'$ og derfor vil begreberne svagt begrænset, stærkt begrænset og equikontinuert stemme overens på $\mathcal{E}'$ og for føl-

ger og begrænsede filtre på $\mathcal{E}^*$ bliver der ingen forskel mellem stærk og svag konvergens. Da en svagt kompakt mængde på $\mathcal{E}$ er svagt begrænset, er den begrænset i initialtopologien og derfor prækompakt. Men den er også svagt afsluttet, altså tillige afsluttet i initialtopologien. Heraf følger, at den stærke topologi på $\mathcal{E}^*$ netop svarer til ligelig konvergens på svagt kompakte mængder i $\mathcal{E}$, og den er derfor forenelig med dualiteten. Endvidere ser vi, at en begrænset og afsluttet mængde i $\mathcal{E}^*$ er kompakt ved ganske samme ræsonnement som for $\mathcal{D}^*$. Heraf følger igen, at $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}$. At initialtopologien på $\mathcal{E}$ netop svarer til ligelig konvergens på begrænsede mængder på $\mathcal{E}^*$ følger derefter på samme måde som for $\mathcal{D}$, og samtidig fås, at $\mathcal{E}^*$ er et blokrum, altså et Montelrum. Vi har dermed vist følgende sætning:

Sætning 2. Rummet $\mathcal{E}^*$ er lokalkonvekst, fuldstændigt, blokrum og Montelrum. Endvidere er $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}^*$ hinandens stærke dualrum.

Vi skal nu nærmere studere den indre struktur af rummene $\mathcal{E}$ og $\mathcal{E}^*$, og vi indleder med følgende sætning:

Sætning 3. Nødvendigt og tilstrækkeligt for at en mængde $\{\varphi_j | j \in J\} \subseteq \mathcal{E}$ er begrænset, er, at for enhver kompakt mængde $K \subset \mathbb{R}^m$ og enhver differentiationsorden $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ er mængden $\{\varphi_j(\underline{x}) | \underline{x} \in K, j \in J\}$ en begrænset mængde i $\mathbb{C}$.

Bevis: Det ses umiddelbart, at den anførte betingelse netop er ensbetydende med, at mængden af enhver af mængderne i $\mathcal{B}$ i definition 1, absorberes

Sætning 4. $\mathcal{D}$ er en overalt tæt delmængde af $\mathcal{E}$ og topologien på $\mathcal{D}$ er effektivt finere end den fra $\mathcal{E}$ inducerede delrumstopologi.

Bevis: Lad α_p være de i beviset for sætning 1 benyttede hjælpefunktioner, og lad $\varphi \in \mathcal{E}$ være vilkårlig. Da gælder $\alpha_p \varphi \in \mathcal{D}$ og i topologien på $\mathcal{E}$ gælder trivielt $(\alpha_p \varphi) \rightarrow \varphi$. Altså er $\mathcal{D}$ overalt tæt i $\mathcal{E}$. Det er klart, at enhver af de i definition 1 indførte basisomegne indeholder en omegn af 0 i $\mathcal{D}$. Altså er topologien på $\mathcal{D}$ finere end delrumstopologien. Hvis topologien på $\mathcal{D}$ var identisk med delrumstopologien, ville $\mathcal{D}$ være et fuldstændigt delrum i $\mathcal{E}$ og derfor afsluttet, men det er umuligt, da $\mathcal{D}$ er et ægte delrum og overalt tæt i $\mathcal{E}$. Dermed er sætningen bevist.

Lemma 5. Lad T være en distribution på $\mathbb{R}^m$. Der eksisterer da en maksimal åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ med den egenskab, at $T(\varphi) = 0$ for enhver funktion $\varphi \in \mathcal{D}$ med støtte indeholdt i O .

Bevis: Lad $\{O_j | j \in J\}$ være systemet af alle åbne mængder med den egenskab, at $T\varphi = 0$, når φ har sin støtte indeholdt i et O_j . Vi sætter $O = \bigcup O_j$, og mængderne O_j udgør da en overdækning af O . Der eksisterer da en følge (η_n) af funktioner fra $\mathcal{D}$, så at hvert η_n har sin støtte indeholdt i et O_j , og på hvert kompakt $K \subset O$ antager højst endelig mange η_n fra O forskellige værdier, og så at $\sum \eta_n(\underline{x}) = 1$ for ethvert $\underline{x} \in O$. Lad nu $\varphi \in \mathcal{D}$ have sin støtte indeholdt i O . Vi har da $\varphi = \sum \eta_n \varphi$, og da højst endelig mange led på højre side ikke forsvinder identisk, er $T(\varphi) = \sum T(\eta_n \varphi) = 0$. Altså hører O selv med til systemet $\{O_j\}$ og er således den maksimale åbne mængde med den omtalte egenskab.

Definition 2. Komplementærmængden til den i lemma 5 omtalte mængde O kaldes støtten for distributionen T .

Sætning 6. Rummet $\mathcal{E}'$ omfatter netop alle distributioner med kompakt støtte.

Bevis: Lad T være en distribution med den kompakte støtte K . Med betegnelserne fra beviset for sætning 1 vælger vi n , så $K \subset K_n^\circ$. Ved $\varphi \rightarrow \alpha_n \varphi$ defineres åbenbart en kontinuert afbildning: $\mathcal{E}$ ind i $\mathcal{D}$, og ved $T_1(\varphi) = T(\alpha_n \varphi)$ defineres derfor en kontinuert linearform på $\mathcal{E}$. For $\varphi \in \mathcal{D}$ får vi $T_1(\varphi) = T(\alpha_n \varphi) = T(\alpha_n \varphi) + T((1-\alpha_n)\varphi) = T(\alpha_n \varphi + (1-\alpha_n)\varphi) = T(\varphi)$, idet $(1-\alpha_n)\varphi$ har sin støtte indeholdt i K . Altså stemmer T og T_1 overens på $\mathcal{D}$, så at T_1 er en kontinuert fortsættelse af T . Da $\mathcal{D}$ er overalt tæt i $\mathcal{E}$, er T_1 entydigt fastlagt ved T . På den anden side har en kontinuert linearform T_1 på $\mathcal{E}$ en restriktion til $\mathcal{D}$, som er en kontinuert linearform, idet topologien på $\mathcal{D}$ er finere end delrumstopologien. Altså er $T = T_1|_{\mathcal{D}}$ en distribution, og T_1 er entydigt bestemt ved T . Da T_1 er kontinuert, findes der en omegn $U(\varepsilon, q, K)$, så at $|T_1(\varphi)| \leq 1$, hvis $|D^p \varphi(\underline{x})| \leq \varepsilon$ for alle $\underline{x} \in K$ og alle $\underline{p}$ med $|\underline{p}| \leq q$. Specielt er $|T_1(\varphi)| \leq 1$, hvis støtten for φ ikke indeholder punkter af K . Men da $n\varphi$ har samme støtte som φ , medfører dette, at $|T_1(\varphi)| \leq \frac{1}{n}$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, altså at $T_1(\varphi) = 0$. Altså er T_1 en distribution med støtten indeholdt i K . Dermed er sætningen bevist.

Definition 3. Ved $\mathcal{D}_K^p$, hvor p er et helt tal og $K \subset \mathbb{R}^m$ en kompakt mængde, forstås vektorrummet af p gange kontinuert differentiable funktioner med støtte indeholdt i K og med normen $\|\cdot\|_K^p$ defineret ved

$$\|\varphi\|_K^p = \sup\{|D^p \varphi(\underline{x})| \mid \underline{x} \in K, |p| \leq p\}.$$

Ved $\mathcal{D}_0^p$ forstår vi vektorrummet af p gange kontinuert differentiable funktioner med støtte indeholdt i den åbne mængde O og med den topologi, der fremkommer ved, at $\mathcal{D}_0^p$ opfattes som eksakt grænserum for en følge $(\mathcal{D}_{K_n}^p)$ svarende til en voksende følge (K_n) af kompakte mængder, der udtømmer O . Ved $\mathcal{D}^p$ forstås $\mathcal{D}_0^p$ med $O = \mathbb{R}^m$. Ved $\mathcal{E}^p$ forstås vektorrummet af p gange differentiable funktioner på $\mathbb{R}^m$ med en topologi bestemt ved den omegnsbasis, der består af mængderne $\{\varphi \mid \|\varphi\|_K^p \leq r\}$ for $r > 0$ og $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.

Topologien på $\mathcal{D}_K^p$ svarer til ligelig konvergens af alle differentialkvotienter af orden $\leq p$. Det er klart, at $\|\cdot\|_K^p$ er en norm på $\mathcal{D}_K^p$. For en fundamentalfølge på $\mathcal{D}_K^p$ gælder, at følgen selv og enhver differentieret følge indtil orden p er fundamentalfølge i den ligelige norm og derfor ligelig konvergent. Sætningen om ledvis differentiation af en funktionsfølge giver derefter, at fundamentalfølgen er konvergent i topologien på $\mathcal{D}_K^p$. Altså er $\mathcal{D}_K^p$ et Banachrum. Rummet $\mathcal{D}_K$ er et underrum i $\mathcal{D}_K^p$, og dets topologi er effektivt finere end delrumstopologien. Topologien på $\mathcal{D}_0^p$ bliver uafhængig af valget af følgen (K_n) . Rummet bliver ikke metrisabelt. Ved "det sædvanlige ræsonnement" får vi, at $\mathcal{E}^p$ er et Fréchet-rum, men vi vil ikke opholde os ved det.

Definition 4. En distribution T på en åben mængde O siges at have orden p , hvis den er kontinuert på $\mathcal{D}_0$ med delrumstopologien fra $\mathcal{D}_0^p$. Den siges at have orden p på den åbne mængde $O_1 \subset O$, hvis dens restriktion til O_1 har orden p .

Hvis $\overline{O_1}$ er kompakt og $c < 0$, viser sætning 2 i kapitel 18, at T har endelig orden på O_1 , og sætning 3 i kapitel 18 viser, at T er differentialkvotient af en eller anden orden af en kontinuert funktion på O_1 .

Hvis T specielt har kompakt støtte K , og $O \supset K$ er en åben mængde, følger heraf, at T har endelig orden på $\mathbb{R}^m$, og at T er differentialkvotient af en eller anden orden af en kontinuert funktion $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. Vælger vi nu en åben mængde O_1 , så at $K \subset O_1$ og $\overline{O_1} \subset O$, eksisterer der en kontinuert funktion α , som er identisk 1 på $\overline{O_1}$ og har sin støtte indeholdt i O , og på K vil T da være en differentialkvotient af αf . Vi kan endda vælge α som en vilkårlig ofte differentiable funktion.

Vi bemærker imidlertid, at den således dannede funktion αf sædvanligvis vil have den omhandlede differentialkvotient afvigende fra T på mængden $O \setminus K$. Vi skal nu forbedre det fundne resultat, så at vi opnår lighedstegn på hele $\mathbb{R}^m$, men på bekostning af, at T bliver fremstillet som en endelig sum af differentialkvotienter i stedet for som en enkelt differentialkvotient. Dernæst skal vi vise, at vi kan nøjes med differentiationsordener mindre eller lig ordenen af T , hvis vi vil lade os nøje med at betragte differentialkvotienter af mål.

Sætning 7. Lad T være en distribution med den kompakte støtte K , og lad $O \supset K$ være en åben mængde. Da kan T på hele $\mathbb{R}^m$ skrives som en endelig sum af differentialkvotienter af kontinuerte funktioner, der alle har kompakt støtte indeholdt i O .

Bevis: Vi kan antage, at $\overline{O}$ er kompakt. Der findes da en differentiationsorden p og en kontinuert funktion $f : O \rightarrow \mathbb{C}$, så at

$T|_0 = D^p f$. Endvidere findes der en vilkårlig ofte differentiabel funktion $\alpha: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, som er identisk 1 på en åben mængde, der indeholder K , og som har sin støtte indeholdt i O . Vi kan opfatte αf som en afbildning $\alpha f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, idet vi sætter $\alpha f(\underline{x}) = 0$ for $\underline{x} \notin O$. For $\varphi \in \mathcal{G}$ har vi nu

$$T(\varphi) = T(\alpha\varphi) = D^p f(\alpha\varphi) = (-1)^{|p|} \tilde{f}(D^p(\alpha\varphi)),$$

og formelen for differentiation af et produkt giver os en udvikling

$$D^p(\alpha\varphi) = \sum_{q \leq p} \gamma_q D^{p-q} \alpha D^q \varphi,$$

hvor koefficienterne γ_q er positive hele tal. Altså er

$$T(\varphi) = (-1)^{|p|} \sum_{q \leq p} \gamma_q \tilde{f}(D^{p-q} \alpha D^q \varphi),$$

og her er

$$\tilde{f}(D^{p-q} \alpha D^q \varphi) = \int f(\underline{x}) D^{p-q} \alpha(\underline{x}) D^q \varphi(\underline{x}) d\underline{x},$$

og med $g_q = f D^{p-q} \alpha$ bliver dette netop $\tilde{g}_q(D^q \varphi)$, så vi får

$$T(\varphi) = (-1)^{|p|} \sum_{q \leq p} \gamma_q \tilde{g}_q(D^q \varphi) = \sum_{q \leq p} (-1)^{|p-q|} \gamma_q D^q \tilde{g}_q(\varphi),$$

hvilket viser, at

$$T = \sum_{q \leq p} (-1)^{|p-q|} \gamma_q D^q \tilde{g}_q.$$

Hver af funktionerne g_q har støtten indeholdt i O . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 8. Lad T være en distribution med orden p og med den kompakte støtte K , og lad $O \supset K$ være en åben mængde. Da kan T på hele $\mathbb{R}^m$ skrives som en endelig sum af differentialkvotienter af orden $\leq p$ af mål, der alle har kompakt støtte indeholdt i O .

Bevis: Lad Λ være en kompakt trappemængde, der er valgt således,

at $K \subset \mathring{A}$ og $A \subset O$. Lad $p_1, \dots, p_N$ være alle differentiationsordener med $|p_j| \leq p$ ordnet i en eller anden vilkårlig rækkefølge. Lad $\mathcal{E}^N$ være produktrummet $\mathcal{E}_A \times \dots \times \mathcal{E}_A$ af N eksemplarer af $\mathcal{E}_A$, normeret således at $\underline{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ har normen

$$\|\underline{\psi}\| = \max\{\|\psi_j\|_U \mid j = 1, \dots, N\}.$$

Så er $\mathcal{E}^N$ åbenbart et Banachrum. En afbildning $\kappa: \mathcal{E}$ ind i $\mathcal{E}^N$ defineres ved

$$\kappa(\varphi) = (D^{p_1}\varphi|_A, \dots, D^{p_N}\varphi|_A).$$

Det er klart, at κ er lineær og kontinuert, og billedmængden $\kappa(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}^N$ er et lineært underrum. Af $\kappa(\varphi) = \underline{0}$ følger, at φ har sin støtte i $\mathring{A}$, altså at $T(\varphi) = 0$. Da T således afbilder hele $\kappa^{-1}(\underline{0})$ over i 0 , eksisterer der en entydig bestemt lineær afbildning $T_1: \kappa(\mathcal{E})$ ind i $\mathring{C}$, så at $T = T_1 \circ \kappa$. Lad nu $(\underline{\psi}_n)$ være en følge på $\mathcal{E}^N$, som konvergerer mod 0 i normtopologien. Vi kan da vælge (φ_n) på $\mathcal{E}$, så at $\kappa(\varphi_n) = \underline{\psi}_n$. Vi vælger en vilkårlig ofte differentiabel funktion α , som er identisk 1 på en åben mængde, der indeholder K , og som har sin støtte indeholdt i $\mathring{A}$. Da gælder åbenbart $T_1(\underline{\psi}_n) = T(\varphi_n) = T(\alpha\varphi_n)$, og desuden $(D^{\underline{q}}(\alpha\varphi_n)) \rightarrow 0$ ligeligt på hele rummet for enhver differentiationsorden $\underline{q}$ med $|\underline{q}| \leq p$. Heraf følger, at $(T_1(\underline{\psi}_n)) \rightarrow 0$. Altså er T_1 kontinuert i den fra normtopologien på $\mathcal{E}^N$ inducerede topologi. Altså kan T_1 ifølge Hahn-Banachs sætning udvides til hele rummet, og det medfører, at T_1 kan fremstilles på formen

$$T_1(\underline{\psi}) = S_1(\psi_1) + \dots + S_N(\psi_N),$$

hvor hvert S_j er en kontinuert lineær afbildning $S_j: \mathcal{E}_A$ ind i $\mathring{C}$. Men så er hvert S_j et element af dualrummet $\mathcal{E}_A'$ og svarer således til et mål $\tilde{\mu}_j$ på trappemængden A , og dette kan opfattes som et mål på $\mathbb{R}^m$ med støtte indeholdt i A . Med denne opfattelse har vi da for

ethvert $\varphi \in \mathcal{E}$, at

$$T(\varphi) = T_1(\kappa(\varphi)) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mu}_j(D^{\underline{p}_j} \varphi) = \sum_{j=1}^N (-1)^{|\underline{p}_j|} D^{\underline{p}_j} \tilde{\mu}_j(\varphi),$$

og dermed er sætningen bevist.

Det er nærliggende at spørge, om ikke de i sætning 8 omtalte mål kunne vælges med støtte K . Det er ikke væsentligt for beviset, at A netop er en trappemængde, idet dualrummet til $\mathcal{D}_K$ for en vilkårlig kompakt mængde $K \subset \mathbb{R}^m$ netop er mængden af endelige mål på K . Hvis vi vælger $A = K$ i beviset ovenfor, svigter beviset for, at T afbilder $\kappa^{-1}(\underline{0})$ over i $\underline{0}$. Af $\kappa(\varphi) = 0$ følger nu blot, at φ har sin støtte i $\overset{\circ}{K}$, samt at $D^{\underline{q}}\varphi$ for $|\underline{q}| \leq p$ opfylder den samme betingelse, men det er ikke på forhånd indlysende, at dette medfører, at $T(\varphi) = 0$. Det er jo fx. ikke sikkert, at et randpunkt for K er kontaktpunkt for $\overset{\circ}{K}$. Det kan endda tænkes, at $\overset{\circ}{K} = \emptyset$. Vi skal imidlertid vise i sætning 9, at denne del af beviset kan repareres. Værre er det med beviset for, at T_1 er kontinuert i $\underline{0}$. Dette bevis holder, hvis enhver p gange kontinuert differentiabel funktion på K kan udvides til en p gange kontinuert differentiabel funktion på en åben mængde $O \supset K$, og så at $\mathcal{D}_O^p$ -normen ikke bliver alt for meget større end $\mathcal{D}_K^p$ -normen. Det viser sig imidlertid, at en sådan udvidelse ikke altid eksisterer. For en ret generel klasse af kompakte mængder er det dog muligt at gennemføre beviset. Vi skal vende tilbage til dette spørgsmål i næste kapitel.

Sætning 9. Lad T være en distribution med den kompakte støtte $K \subset \mathbb{R}^m$ og med den endelige orden p . Lad $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion, som tilfredsstiller betingelsen $D^{\underline{q}}\varphi(\underline{x}) = 0$ for alle $\underline{x} \in K$ og alle $\underline{q}$ med $|\underline{q}| \leq p$. Da er $T(\varphi) = 0$.

Bevis: For $r > 0$ betegner vi med K_r mængden af punkter, hvis afstand fra K er $< r$. For hvert r vil vi vælge en passende funktion $\alpha_r: \mathbb{R}^m$ ind i $[0, \infty[$, som er identisk 1 på K_r , er vilkårlig ofte differentiablel og har sin støtte indeholdt i K_{4r} . Hvis det yderligere lykkes os at vælge α_r , så at $D^{\underline{q}}(\alpha_r \varphi)$ går ligeligt mod 0 for $r \rightarrow 0$ for enhver differentiationsorden med $|\underline{q}| \leq p$, får vi umiddelbart $T(\varphi) = T(\alpha_r \varphi) \rightarrow 0$ for $r \rightarrow 0$, altså $T(\varphi) = 0$, og sætningen vil være bevist.

Lad os analysere, hvad der kræves af α_r . Vi har en differentiationsformel

$$(1) \quad D^{\underline{q}}(\alpha_r \varphi) = \sum_{|\underline{k}| \leq |\underline{q}|} \gamma_{\underline{q}, \underline{k}} D^{\underline{k}} \alpha_r D^{\underline{q}-\underline{k}} \varphi,$$

og her er koefficienterne $\gamma_{\underline{q}, \underline{k}}$ absolutte konstanter, og for $|\underline{q}| \leq p$ forekommer kun endelig mange af dem, så de vil ikke volde vanskeligheder. Vi sætter

$$(2) \quad \eta(r) = \sup\{|D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})| \mid |\underline{p}| = p \wedge \underline{x} \in K_{4r}\}.$$

Da $D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})$ er 0 for ethvert $\underline{x} \in K$ og $|\underline{p}| = p$, og da $D^{\underline{p}} \varphi$ yderligere er kontinuert, har vi $\eta(r) \rightarrow 0$ for $r \rightarrow 0$. Lad nu et øjeblik $\psi: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ være en kontinuert differentiablel funktion, som tilfredsstiller betingelserne

$$\forall \underline{x} \in K : \psi(\underline{x}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in K_{4r} : |D_j \psi(\underline{x})| \leq \eta \quad \text{for } j = 1, \dots, m.$$

Lad os for $\underline{x} \in K_{4r}$ med $l_{\underline{x}}$ betegne et liniestykke fra et punkt af K til punktet $\underline{x}$ og valgt således, at længden af $l_{\underline{x}}$ er $\leq 4r$. Vi får da

$$|\psi(\underline{x})| = \left| \int_{l_{\underline{x}}} D_1 \psi(\underline{x}) dx_1 + \dots + D_m \psi(\underline{x}) dx_m \right| \leq 4\sqrt{m} r \eta.$$

Ved gentagen anvendelse af denne vurdering giver (2), at

$$\|D^{\underline{p}} \varphi\|_U \leq (4\sqrt{m} r)^{p-|\underline{q}|} \eta(r),$$

så (1) giver vurderingen

$$\|D^{\underline{q}}(\alpha_r \varphi)\|_U \leq \left(\sum_{|\underline{k}| \leq |\underline{q}|} \gamma_{\underline{q}, \underline{k}} \|D^{\underline{k}} \alpha_r\|_U (4\sqrt{m} r)^{p-(|\underline{q}|-|\underline{k}|)} \right) \eta(r).$$

Hvis det nu lykkes os, at vælge α_r , så at $\|D^{\underline{k}}\alpha_r\|_U \leq Cr^{-|\underline{k}|}$ for alle $\underline{k}$ med $|\underline{k}| \leq p$ og med konstant C , får vi en vurdering af formen

$$\|D^{\underline{q}}(\alpha_r \varphi)\|_U \leq \left(\sum_{|\underline{k}| \leq |\underline{q}|} \gamma_{\underline{q}, \underline{k}} C(4\sqrt{m})^{|\underline{k}|} \right) (4\sqrt{m} r)^{p-|\underline{q}|} \eta(r) \leq C_1 r^{p-|\underline{q}|} \eta(r),$$

og dermed vil sætningen være bevist.

Vi mangler nu blot at vise, at vi kan vælge α_r , så at $\|D^{\underline{k}}\alpha_r\|_U \leq Cr^{-|\underline{k}|}$ for alle $\underline{k}$ med $|\underline{k}| \leq p$ og med konstant C . Vi vælger først en kontinuert funktion $\beta : \mathbb{R}^m$ ind i $[0,1]$, som er identisk 1 på K_{2r} og har sin støtte indeholdt i K_{3r} . Desuden vælger vi en vilkårlig ofte differentiabel funktion $\rho \in \mathcal{D}$, som er positiv, har sin støtte indeholdt i enhedskuglen og tilfredsstiller betingelsen $\int \rho = 1$. Vi sætter

$$\alpha(\underline{x}) = \frac{1}{r^m} \int \beta(\underline{y}) \rho\left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{r}\right) d\underline{y} = \frac{1}{r^m} \int_{\|\underline{x}-\underline{y}\| \leq r} \beta(\underline{y}) \rho\left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{r}\right) d\underline{y}$$

For $\underline{x} \in K_r$ bliver $\underline{y} \in K_{2r}$ for alle $\underline{y}$ i integrationsområdet, og vi får derfor $\alpha(\underline{x}) = 1$. For $\underline{x} \notin K_{4r}$ forsvinder $\beta(\underline{y})$ i integrationsområdet, og vi får $\alpha(\underline{x}) = 0$. Endvidere er α vilkårlig ofte integrabel, og

$$D^{\underline{k}}\alpha(\underline{x}) = r^{-m-|\underline{k}|} \int \beta(\underline{y}) D^{\underline{k}}\rho\left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{r}\right) d\underline{y}.$$

Vi får nu vurderingen

$$\begin{aligned} |D^{\underline{k}}\alpha(\underline{x})| &\leq r^{-m-|\underline{k}|} \int \beta(\underline{y}) |D^{\underline{k}}\rho\left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{r}\right)| d\underline{y} \leq r^{-m-|\underline{k}|} \int |D^{\underline{k}}\rho\left(\frac{\underline{x}-\underline{y}}{r}\right)| d\underline{y} \\ &= r^{-|\underline{k}|} \int |D^{\underline{k}}\rho(\underline{x}-\underline{y})| d\underline{y} = r^{-|\underline{k}|} \int |D^{\underline{k}}\rho(\underline{y})| d\underline{y}. \end{aligned}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 10. En distribution af den endelige orden p og med støtten reduceret til et enkelt punkt a er en endelig linearkombination af differentialkvotienter af orden $\leq p$ af distributionen δ_a .

Bevis: Lad T være en distribution med støtte $\{a\}$. Lad φ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion. Ifølge sætning 9 er $T(\varphi)$

entydigt bestemt ved differentialkvotienterne $D^{\underline{q}}\varphi(a)$, $|\underline{q}| \leq p$, og det er klart, at T er en lineær funktion af disse variable, som uafhængig af hinanden kan gennemløbe alle komplekse værdier. Heraf følger nu, at der findes komplekse konstanter $\lambda_{\underline{q}}$, $|\underline{q}| \leq p$, så at

$$T(\varphi) = \sum_{|\underline{q}| \leq p} \lambda_{\underline{q}} D^{\underline{q}}\varphi(a) = \sum_{|\underline{q}| \leq p} \lambda_{\underline{q}} \delta_a D^{\underline{q}}\varphi = \sum_{|\underline{q}| \leq p} (-1)^{|\underline{q}|} \lambda_{\underline{q}} D^{\underline{q}}\delta_a(\varphi),$$

og dermed er sætningen bevist.

Hvis det for en distribution T på $\mathbb{R}$ gælder, at en eller anden differentialkvotient af T har støtte $\{0\}$, er T åbenbart identisk med et polynomium på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hvis T har kompakt støtte, kan dette polynomium kun være nulpolynomiet. Sætning 10 viser derfor, at en linearkombination af differentialkvotienter af distributionen δ ikke har andre stamdistributioner med kompakt støtte end eventuelle linearkombinationer af differentialkvotienter af δ . Specielt er δ og linearkombinationer af differentialkvotienter af δ ikke differentialkvotient af nogen som helst funktion med kompakt støtte. En linearkombination af differentialkvotienter af forskellig orden af δ er heller ikke differentialkvotient af noget mål med kompakt støtte. Sætningerne 7 og 8 kan altså ikke skærpes, så at "en linearkombination af differentialkvotienter" erstattes med "en differentialkvotient".

Hvis T er en distribution af orden p og med kompakt støtte K , og (φ_n) er en følge på $\mathcal{E}$, for hvilken $D^{\underline{q}}\varphi$ går ligeligt mod 0 på K for ethvert $\underline{q}$ med $|\underline{q}| \leq p$, kan man ikke umiddelbart slutte, at $(T(\varphi_n)) \rightarrow 0$. Vi vil vise dette ved et eksempel.

Vi vælger $m = 1$ og $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$, samt

$$T(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \leq n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - (\log n)D\varphi(0) \right)$$

Vi må selvfølgelig først vise, at T er en distribution. Idet (φ_n) og

(Θ'_n) er passende af φ afhængige følger af tal fra $]0,1[$, har vi

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \leq n} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) \right) - (\log n) D\varphi(0) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} D\varphi\left(\frac{1}{k} \Theta_k\right) - (\log n) D\varphi(0) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} (D\varphi\left(\frac{1}{k} \Theta_k\right) - D\varphi(0)) + \left(\sum_{k \leq n} \frac{1}{k} - \log n \right) D\varphi(0) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Theta_n D^2 \varphi\left(\frac{1}{n} \Theta'_n\right) + \gamma D\varphi(0), \end{aligned}$$

hvor γ er Eulers konstant. Heraf fremgår, at T er en distribution af orden ≤ 2 . Vi lægger mærke til, at $\varphi(x) = 0$ for alle $x \in K$ medfører, at $D\varphi(0) = 0$, og derfor også, at $T(\varphi) = 0$ i overensstemmelse med sætning 9. Vi kan imidlertid vælge $\varphi_n \in \mathcal{E}$, så at $\varphi_n(x) = 0$ for alle $x \leq \frac{1}{n+1}$ og $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ for alle $x \geq \frac{1}{n}$. Vi har da $(\varphi_n) \rightarrow 0$ ligeligt på K , og desuden er $D^q \varphi_n(x) = 0$ for alle $q \in \mathbb{N}$ og alle $x \in K$. Ikke desto mindre er $T(\varphi_n) = \sqrt{n}$, så vi får $(T(\varphi_n)) \rightarrow \infty$.

Eksemplet viser, at en distribution T af orden p og med den kompakte støtte K ikke nødvendigvis er kontinuert på rummet $\mathcal{E}_K^p$ af restriktioner til K af funktioner fra $\mathcal{E}^p$ og med den topologi, der svarer til ligelig konvergens på K af hver differentialkvotient af orden $\leq p$.

20. kapitel.Naturlige kompakte mængder.

Definition 1. En kompakt mængde K kaldes naturlig, hvis det for alle $p \in \mathbb{N}$ gælder, at enhver distribution af orden $\leq p$ og med støtte indeholdt i K er en endelig sum af differentialkvotienter af mål med støtte indeholdt i K .

Det er vort mål i dette kapitel at vise, at alle "pæne" kompakte mængder er naturlige. Det vides at den ved

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [0, 1] \wedge (x_2 = 0 \vee (x_1 \neq 0 \wedge x_2 = e^{-\frac{1}{x_1}}))\}$$

definerede kompakte mængde i $\mathbb{R}^2$ ikke er naturlig. Vi skal se, at alle trappemængder og alle konvekse mængder er naturlige. Foreningsmængden af to naturlige mængder behøver ikke at være naturlig. Fællesmængden for en følge af naturlige mængder behøver ikke at være naturlig. Det er derfor ikke rimeligt at vente, at de naturlige kompakte mængder udgør et rimeligt afgrænset system. Vi vil lade os nøje med at give tilstrækkelige betingelser for, at en kompakt mængde er naturlig, idet vi vil vise følgende sætning:

Sætning 1. En kompakt mængde K er naturlig, hvis der findes to positive tal Δ og Λ , så at det for to vilkårlige punkter $\underline{x}, \underline{y} \in K$ med afstand $\leq \Delta$, gælder at de kan forbindes ved en rektifiabel vej, der forløber i K , og hvis længde højst er Λ gange afstanden mellem $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

Beviset for denne sætning er ret kompliceret, og vi vil forsøge at gøre det mere overskueligt ved at indskyde en række hjælpesætninger. Vi begynder med en udvidelse af Taylors formel. Vi vil benytte afkor-

tede betegnelser, idet vi for $\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ skriver $\underline{k}! = k_1! \dots k_m!$ og $\underline{x}^{\underline{k}} = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$.

Lemma 2. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og lad $\varphi: O \rightarrow \mathbb{R}$ være en p gange kontinuert differentiabel funktion. Lad $\underline{a}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu m})$, $\nu = 1, \dots, n$ være punkter af O , så at foreningsmængden Γ af de $n-1$ liniestykker med endepunkter $\underline{a}_\nu$ og $\underline{a}_{\nu+1}$ tilhører O . Vi sætter

$$M = \sup \{ |D^{\underline{p}} \varphi(\underline{x})| \mid |\underline{p}| = p \wedge \underline{x} \in \Gamma \}$$

$$\lambda = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^{n-1} |a_{\nu+1, \mu} - a_{\nu, \mu}|.$$

Da gælder Taylors formel

$$(1) \quad \varphi(\underline{a}_n) = \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) (\underline{a}_n - \underline{a}_1)^{\underline{k}} + R_p,$$

hvor

$$(2) \quad |R_p| \leq \frac{1}{p!} M \lambda^p.$$

Bevis: For $n = 2$ giver Taylors formel i den sædvanlige form, at

(1) gælder med

$$R_p = \sum_{|\underline{k}|=p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{\xi}) (\underline{a}_2 - \underline{a}_1)^{\underline{k}},$$

hvor $\underline{\xi}$ er et punkt af Γ . Heraf får vi vurderingen

$$\begin{aligned} |R_p| &\leq \frac{1}{p!} M \sum_{|\underline{k}|=p} \frac{p!}{\underline{k}!} |a_{21} - a_{11}|^{k_1} \dots |a_{2m} - a_{1m}|^{k_m} \\ &= \frac{1}{p!} M (|a_{21} - a_{11}| + \dots + |a_{2m} - a_{1m}|)^p, \end{aligned}$$

hvilket netop er vurderingen (2). Vi viser nu lemma ved induktion efter n , idet vi antager, at den i sætningen fremsatte påstand er opfyldt for en fast værdi af n og for enhver værdi af p , så at vi ikke blot har en formel (1), men tillige for enhver differentiationsorden $\underline{q}$ med $|\underline{q}| < p$ en tilsvarende udvikling

$$(3) \quad D^{\underline{q}} \varphi(\underline{a}_n) = \sum_{|\underline{k}| < p - |\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{q} + \underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) (\underline{a}_n - \underline{a}_1)^{\underline{k}} + R_p^{\underline{q}},$$

hvor

$$(4) \quad |R_p^q| \leq \frac{1}{(p-|q|)!} M \lambda^{p-|q|},$$

Vi tilføjer nu endnu et punkt $\underline{a}_{n+1} \in O$, og Γ udvides derved til $\Gamma' \subseteq O$, mens M , λ og R_p bliver til M' , λ' og R_p' . Vi har nu en "gameldags" Taylorudvikling

$$(5) \quad \varphi(\underline{a}_{n+1}) = \sum_{|q| < p} \frac{1}{q!} D^q \varphi(\underline{a}_n) (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^q + R_p''$$

med restledsvurderingen

$$|R_p''| \leq \frac{1}{p!} M' \lambda''^p,$$

hvor

$$\lambda'' = |a_{n+1,1} - a_{n,1}| + \dots + |a_{n+1,m} - a_{n,m}|,$$

altså

$$\lambda' = \lambda + \lambda''.$$

Vi indsætter (3) i (5) og får

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{a}_{n+1}) = & \sum_{|q| < p} \frac{1}{q!} \sum_{|k| < p-|q|} \frac{1}{k!} D^{q+k} \varphi(\underline{a}_1) (\underline{a}_n - \underline{a}_1)^k (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^q + \\ & \sum_{|q| < p} \frac{1}{q!} R_p^q (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^q + R_p''. \end{aligned}$$

I dobbeltsummen indfører vi $\underline{h} = \underline{q} + \underline{k}$ som summationsindex i stedet for $\underline{k}$, og derefter skriver vi igen $\underline{k}$ i stedet for $\underline{h}$. Derved ændres dobbeltsummen til

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\underline{q}| < p} \frac{1}{\underline{q}!} \sum_{\substack{\underline{k} > \underline{q} \\ |\underline{k}| < p}} \frac{1}{(\underline{k}-\underline{q})!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) (\underline{a}_n - \underline{a}_1)^{\underline{k}-\underline{q}} (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{q}} = \\
& \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) \sum_{\substack{\underline{q} \leq \underline{k} \\ |\underline{q}| < p}} \frac{\underline{k}!}{\underline{q}! (\underline{k}-\underline{q})!} (\underline{a}_n - \underline{a}_1)^{\underline{k}-\underline{q}} (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{q}} = \\
& \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) \prod_{\mu=1}^m \sum_{\substack{q_{\mu} \leq k_{\mu} \\ q_{\mu} = 0}}^k \frac{k_{\mu}!}{q_{\mu}! (k_{\mu} - q_{\mu})!} (a_{n\mu} - a_{1\mu})^{k_{\mu} - q_{\mu}} (a_{n+1,\mu} - a_{n\mu})^{q_{\mu}} = \\
& \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) \prod_{\mu=1}^m (a_{n+1,\mu} - a_{n\mu})^{k_{\mu}},
\end{aligned}$$

og dermed har vi fundet Taylorudviklingen

$$\varphi(\underline{a}_{n+1}) = \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}_1) (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{k}} + R'_p,$$

hvor

$$R'_p = \sum_{|\underline{q}| < p} \frac{1}{\underline{q}!} R_p^{\underline{q}} (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{q}} + R''_p,$$

så vi får vurderingen

$$|R'_p| \leq \frac{1}{p!} M \sum_{|\underline{q}| < p} \frac{p!}{\underline{q}! (p-|\underline{q}|)!} \lambda^{p-|\underline{q}|} |(\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{q}}| + |R''_p| =$$

$$\frac{1}{p!} M \sum_{q=0}^{p-1} \frac{p!}{q! (p-q)!} \lambda^{p-q} \sum_{|\underline{q}|=q} \frac{q!}{\underline{q}!} (\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)^{\underline{q}} + |R''_p| =$$

$$\frac{1}{p!} M \sum_{q=0}^{p-1} \frac{p!}{q! (p-q)!} \lambda^{p-q} \lambda^q + |R''_p| \leq \frac{1}{p!} M \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q! (p-q)!} \lambda^{p-q} \lambda^q = \frac{1}{p!} M \lambda^p.$$

Dermed er induktionsbeviset gennemført.

Lemma 3. Lad K være en kompakt mængde, der tilfredsstiller den i sætning 1 anførte betingelse, og lad Δ og Λ være valgt i overensstemmelse med denne betingelse. Lad $O \supseteq K$ være en åben mængde, og lad $\varphi: O \rightarrow \mathbb{R}$ være en p gange kontinuert differentiabel funktion. For

$$\underline{a}, \underline{b} \in K, \|\underline{b} - \underline{a}\| \leq \Delta$$

gælder Taylors formel

$$(5) \quad \varphi(\underline{b}) = \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} D^{\underline{k}} \varphi(\underline{a}) (\underline{b} - \underline{a})^{\underline{k}} + R_p,$$

hvor vi har restledsvurderingen

$$|R_p| \leq \frac{1}{p!} (\sqrt{m})^p \Lambda^p \|\underline{b} - \underline{a}\|^p \sup\{|D^{\underline{k}} \varphi(\underline{x})| \mid |\underline{k}| = p, \underline{x} \in K\}.$$

Bevis: Lad O_1 være en begrænset åben mængde, så at $K \subseteq O_1 \subseteq O$. Lad Γ være en vej, der fører fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$ inden for K , og hvis længde er $\leq \Lambda \|\underline{b} - \underline{a}\|$. I Γ indskrives vi en brudt linie $\underline{a}_1 \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n$ med $\underline{a}_1 = \underline{a}$, $\underline{a}_n = \underline{b}$. Vi har da Taylors formel (1), som er identisk med (5), og vi har tillige restledsvurderingen (2). Her er

$$\lambda = \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^m |a_{\nu+1, \mu} - a_{\nu, \mu}| \leq \sqrt{m} \sum_{\nu=1}^{n-1} \|\underline{a}_{\nu+1} - \underline{a}_{\nu}\| \leq \sqrt{m} \Lambda \|\underline{b} - \underline{a}\|$$

Dermed har vi den ønskede vurdering bortset fra, at vi har fået supremum over O_1 i stedet for K . Vi kan imidlertid vælge O_1 , så at supremum over O_1 er vilkårlig lidt større end supremum over K . Heraf følger sætningen umiddelbart.

Definition 2. Lad $K \subseteq \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde, og lad p være et naturligt tal. For hver differentiationsorden $\underline{k}$ med $|\underline{k}| < p$ tænk givet en afbildning $\varphi^{\underline{k}}: K \rightarrow \mathbb{R}$. Funktionssystemet $\{\varphi^{\underline{k}} \mid |\underline{k}| < p\}$ kaldes et Taylorsystem på K af orden p , såfremt der eksisterer positive tal Δ og M , så at vi for

$$\underline{a}, \underline{b} \in K, \|\underline{b}-\underline{a}\| \leq \Delta, |\underline{q}| < p$$

har udviklingen

$$(6) \quad \varphi^{\underline{q}}(\underline{b}) = \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{q}+\underline{k}}(\underline{a})(\underline{b}-\underline{a})^{\underline{k}} + R_p^{\underline{q}}$$

med restledsvurderingen

$$(7) \quad |R_p^{\underline{q}}| \leq \frac{1}{(p-|\underline{q}|)!} M \|\underline{b}-\underline{a}\|^{p-|\underline{q}|}.$$

Lemma 4. I ethvert indre punkt $\underline{x}$ af K tilfredsstiller det i definition 2 indførte Taylorsystem betingelserne $D^{\underline{k}}\varphi^{\underline{0}} = \varphi^{\underline{k}}$, $|\underline{k}| < p$. Alle $\varphi^{\underline{k}}$ er kontinuerte på K . Hvis K tilfredsstiller den i sætning 1 anførte betingelse, og $O \supseteq K$ er en åben mængde og $\varphi: O$ ind i $\mathbb{R}$ en p gange kontinuert differentiabel afbildning, er $\{D^{\underline{k}}\varphi \mid |\underline{k}| < p\}$ et Taylorsystem på K , og tallet Δ i definition 2 kan vælges lig med tallet Δ i sætning 1.

Bevis: Relationen (6) og vurderingen (7) giver umiddelbart, at $\varphi^{\underline{q}}$ er differentiabel for $|\underline{q}| \leq p-2$ med $D_j \varphi^{\underline{q}}(\underline{x}) = \varphi^{\underline{q}+\underline{e}_j}(\underline{x})$ for $\underline{x} \in K$, samt at hver afbildning $\varphi^{\underline{q}}$ er kontinuert på K . Den sidste påstand i sætningen følger umiddelbart af lemma 3.

Den kompakte mængde K behøver ikke at indeholde indre punkter, og det er derfor ikke oplagt, at et Taylorsystem er et system af differentialkvotienter af en funktion. Det viser sig imidlertid, at dette virkelig er tilfældet, endda således at funktionen er defineret i hele rummet og vilkårlig ofte differentiabel i hele komplementærmængden til K . Det er bemærkelsesværdigt, at dette gælder for enhver kompakt mængde i $\mathbb{R}^m$. Dette resultat er indholdet af den følgende sætning, som skyldes H. Whitney (1934).

Sætning 5. Lad $K \subseteq \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde, og lad p være et naturligt tal. Der findes da en åben mængde $O \supset K$ og et positivt tal P , så at følgende gælder:

Lad $\{\varphi^{\underline{k}} \mid |\underline{k}| < p\}$ være et Taylorsystem på K af orden p . Der eksisterer da en afbildning $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, som er $p-1$ gange kontinuert differentiable overalt og vilkårligt ofte differentiable på K , og som for enhver differentiationsorden $\underline{k}$ med $|\underline{k}| < p$ tilfredsstiller betingelserne

$D^{\underline{k}}\varphi|_K = \varphi^{\underline{k}}$ og $\sup\{|D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x})| \mid \underline{x} \in O\} \leq P(\sup\{|D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x})| \mid \underline{x} \in K\} + M)$, hvor M er den i definition 2 optrædende konstant.

Bevis: For ethvert $\underline{z} \in K$ vælger vi blandt de punkter af K , der ligger nærmest ved $\underline{z}$ et bestemt punkt $\pi(\underline{z})$. Derved bestemmes en (sædvanligvis diskontinuert) afbildning $\pi: K \rightarrow K$. Til hvert $\underline{z} \in K$ tilordner vi dernæst et polynomium

$$\Phi_{\underline{z}}(\underline{x}) = \sum_{|\underline{k}| < p} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{k}}(\pi(\underline{z})) (\underline{x} - \pi(\underline{z}))^{\underline{k}}.$$

For $|\underline{q}| < p$ er

$$D^{\underline{q}}\Phi_{\underline{z}}(\underline{x}) = \sum_{|\underline{k}| < p - |\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{k} + \underline{q}}(\pi(\underline{z})) (\underline{x} - \pi(\underline{z}))^{\underline{k}}$$

Vi vil benytte funktionerne $\Phi_{\underline{z}}$ som byggesten ved konstruktionen af funktionen φ . Sammenkitningen vil ske ved en opspaltning af enheden, men det vil være nødvendigt at vælge denne ganske særligt omhyggeligt. Vi indleder programmet med en vurdering af forskellen mellem differentialkvotienter af samme orden af to af funktionerne $\Phi_{\underline{z}}$ under anvendelse af (6) og (7). Vi får først ved (6), at

$$\begin{aligned}
D_{\underline{z}_2}^{\underline{q}}(\underline{x}) - D_{\underline{z}_1}^{\underline{q}}(\underline{x}) &= \\
&= \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{q}+\underline{k}}(\pi(\underline{z}_2))(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}} - \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{q}+\underline{k}}(\pi(\underline{z}_1))(\underline{x}-\pi(\underline{z}_1))^{\underline{k}} \\
&= \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \sum_{|\underline{v}| < p-|\underline{q}|-|\underline{k}|} \frac{1}{\underline{v}!} \varphi^{\underline{q}+\underline{k}+\underline{v}}(\pi(\underline{z}_1))(\pi(\underline{z}_2)-\pi(\underline{z}_1))^{\underline{v}}(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}} - \\
&= \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} \varphi^{\underline{q}+\underline{k}}(\pi(\underline{z}_1))(\underline{x}-\pi(\underline{z}_1))^{\underline{k}} + \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} R_p^{\underline{q}+\underline{k}}(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}} = \\
&= \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} D_{\underline{z}_1}^{\underline{q}+\underline{k}}(\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}} - D_{\underline{z}_1}^{\underline{q}}(\underline{x}) + \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} R_p^{\underline{q}+\underline{k}}(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}} \\
&= \sum_{|\underline{k}| < p-|\underline{q}|} \frac{1}{\underline{k}!} R_p^{\underline{q}+\underline{k}}(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}},
\end{aligned}$$

idet den første sum i det næstsidste udtryk netop er Taylorudviklingen af polynomiet $D_{\underline{z}_1}^{\underline{q}}$ ud fra punktet $\pi(\underline{z}_2)$. Ved hjælp af (7) får vi nu vurderingen

$$\begin{aligned}
|D_{\underline{z}_1}^{\underline{q}}(\underline{x}) - D_{\underline{z}_2}^{\underline{q}}(\underline{x})| &\leq \\
M \sum_{\nu=0}^{p-|\underline{q}|-1} \frac{1}{\nu!(p-|\underline{q}|-\nu)!} \|\pi(\underline{z}_2)-\pi(\underline{z}_1)\|^{p-|\underline{q}|-\nu} \sum_{|\underline{k}|=\nu} \frac{\nu!}{\underline{k}!} |(\underline{x}-\pi(\underline{z}_2))^{\underline{k}}| &\leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad M \sqrt{m}^p \sum_{\nu=0}^{p-|\underline{q}|-1} \frac{1}{\nu!(p-|\underline{q}|-\nu)!} \|\pi(\underline{z}_2)-\pi(\underline{z}_1)\|^{p-|\underline{q}|-\nu} \|\underline{x}-\pi(\underline{z}_2)\|^\nu &\leq \\
\frac{M(\sqrt{m})^p}{(p-|\underline{q}|)!} (\|\pi(\underline{z}_2)-\pi(\underline{z}_1)\| + \|\underline{x}-\pi(\underline{z}_2)\|)^{p-|\underline{q}|}. &
\end{aligned}$$

Det skyldes vore ubehændige regninger, at resultatet ikke er blevet symmetrisk i $\underline{z}_1$ og $\underline{z}_2$, men det vil ikke komme til at genere i anvendelserne.

Til brug ved konstruktionen af vor specielle opspaltning af enheden vælger vi en gang for alle en vilkårlig ofte differentiabel funktion $\sigma: \mathbb{R}^m$ ind i $[0,1]$, som er identisk 1 i den ved $|\underline{x}_\mu| \leq \frac{1}{2}$,

$\mu = 1, \dots, m$ bestemte kasse, strengt positiv overalt i den ved $|x_\mu| < \frac{5}{4}$,
 $\mu = 1, \dots, m$ bestemte kasse og 0 uden for denne kasse.

Dernæst får vi brug for et net på $\mathbb{R}^m$. Maskerne af første orden i dette net skal være de kasser med kantlængder 1, hvis hjørner har heltallige koordinater. Maskerne af n^{te} orden i nettet skal være de kasser med kantlængder 2^{-n+1} , som fås ved opdeling af maskerne af første orden. Vi brolægger (K) med en følge (I_n) af netmasker omfattende uendelig mange masker af første orden og endelig mange af hver følgende orden. Maskerne i (I_n) udvælges således, at vi for hver orden medtager alle masker, der ikke er delmængder af medtagne masker af lavere orden, og hvis centrum har afstand fra K større end 3 gange længden af maskens diagonal. For en maske af n^{te} orden, som tages med, vil det da gælde, at enhver nabomaske, som ikke tages med, deles i masker af $n+1$ -ste orden, som alle tages med. Brolægningen har derfor den egenskab, at enhver maske kun støder op til masker af samme størrelse samt til masker, der enten alle er halvt så store eller alle dobbelt så store. Heraf følger, at de konfigurationer bestående af en maske i brolægningen samt alle masker i brolægningen, som har randpunkter fælles med dem, falder i endelig mange klasser af indbyrdes ligedannede figurer.

Med I'_n og I''_n betegner vi de åbne intervaller, der fås af I_n ved ligedannethedstransformation ud fra centrum af I_n og med ligedannethedsforhold $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{4}$. Vi har altså $I''_n \supset I_n \supset I'_n$, og $\{I''_n\}$ er en overdækning af (K) . Denne overdækning er lokalt endelig, og for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er I'_n helt dækket af I''_n og for $\nu \neq n$ er $I'_n \cap I''_\nu = \emptyset$. Med z_n betegner vi centrum af I_n , og med κ_n betegner vi den halve kantlængde af I_n . Vi sætter

$$\sigma_n(\underline{x}) = \sigma(\kappa_n^{-1}(\underline{x} - \underline{z}_n)), \quad \rho(\underline{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(\underline{x}), \quad \rho_n(\underline{x}) = \frac{\sigma_n(\underline{x})}{\rho(\underline{x})},$$

og følgen (ρ_n) udgør da en opspaltning af enheden på (K) svarende til overdækningen $\{I_n''\}$. Vi bemærker, at $\rho_n(\underline{x}) = 1$ for alle $\underline{x} \in I_n'$.

Vi vil vurdere de p første differentialkvotienter af ρ_n . Vi vil først tænke os I_n tillige med alle sine nabomasker $I_{j_1}, \dots, I_{j_\nu}$ forskudt og forstørret op, så I_n får centrum i $\underline{0}$ og kantlængde 2. Da der bortset fra ligedannethed kun er endelig mange forskellige konfigurationer bestående af en maske og dens naboer, bliver der efter denne operation kun endelig mange forskellige muligheder for funktionen ρ_n , og vi kan derfor efter transformationen vurdere den numeriske værdi af differentialkvotienterne af ρ_n indtil orden p ved en og samme konstant, der kan bruges for alle n . Parallelforskydningen ødelægger ikke denne vurdering, men ved forstørrelsen multipliceres hver differentialkvotient af orden q med en faktor κ_n^q . Der eksisterer således et positivt tal M_1 , så at

$$(9) \quad |D_{\rho_n}^{\underline{k}}(\underline{x})| \leq \kappa_n^{-|\underline{k}|} M_1$$

for alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\underline{x} \in (K)$ og alle $\underline{k}$ med $|\underline{k}| \leq p$. Vi vælger endvidere $N \in \mathbb{N}$, så at det for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at højst N af funktionerne $\rho_\nu(\underline{x})$ antager fra 0 forskellige værdier på I_n .

Vi er nu i stand til at definere den afbildning $\varphi: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}$, hvis eksistens vi påstod i sætning 5. Vi sætter

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} \varphi^0(\underline{x}) & \text{for } \underline{x} \in K \\ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\underline{x}) \Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x}) & \text{for } \underline{x} \in (K) \end{cases}$$

Det er da klart, at φ bliver vilkårlig ofte differentiabel i hele (K) .

For $\underline{x} \in I_n$ har vi nu

$$\varphi(\underline{x}) - \Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho_\nu(\underline{x}) (\Phi_{\underline{z}_\nu}(\underline{x}) - \Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x})),$$

så vi får

$$(10) D^{\underline{q}}\varphi(\underline{x}) - D^{\underline{q}}\Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\underline{k} \leq \underline{q}} c_{\underline{q}, \underline{k}} D^{\underline{k}}\rho_{\nu}(\underline{x}) D^{\underline{q}-\underline{k}}(\Phi_{\underline{z}_{\nu}}(\underline{x}) - \Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x})).$$

Lad O være mængden af punkter med afstand $< \frac{1}{4} \Delta$ (Δ antages < 1) til K . Diagonalen i I_n har længden $2\sqrt{m} \kappa_n$, og da I_n ikke er indeholdt i en maske af dobbelt størrelse, som er taget med i brolægningen, er

$$\|\underline{z}_n - \pi(\underline{z}_n)\| \leq 12\sqrt{m} \kappa_n.$$

Det tilsvarende udtryk for en nabomaske er højst det dobbelte, og vurderingen (8) giver derfor en vurdering af formen

$$|D^{\underline{q}-\underline{k}}(\Phi_{\underline{z}_{\nu}}(\underline{x}) - \Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x}))| \leq M_2 M \kappa_n^{p-|\underline{q}|+|\underline{k}|},$$

hvor M_2 er en konstant, og vurderingen gælder ligeligt for $|\underline{q}-\underline{k}| < p$, $n \in \mathbb{N}$, $\underline{x} \in I_n$ og alle ν , for hvilke I_{ν} støder op til I_n . Dette i forbindelse med (9) og (10) fører til en vurdering

$$(11) |D^{\underline{q}}\varphi(\underline{x}) - D^{\underline{q}}\Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x})| \leq M_3 M \kappa_n^{p-|\underline{q}|}.$$

For $|\underline{q}| < p$ er eksponenten på højre side ≥ 1 . Udtrykket på højre side går derfor mod 0, når $\underline{x}$ konvergerer mod et randpunkt for K . Når $\underline{x}$ konvergerer mod et randpunkt $\underline{y}$ af K , vil masken I_n , der indeholder $\underline{x}$ konvergere mod randpunktet, og $\pi(\underline{z}_n)$ vil konvergere mod det samme randpunkt, men det medfører, at $D^{\underline{q}}\Phi_{\underline{z}_n}(\underline{x}) \rightarrow \varphi^{\underline{q}}(\underline{y})$. Dermed har vi for

enhver differentiationsorden $\underline{q}$ med $|\underline{q}| < p$ vist, at den ved

$$\Phi^{\underline{q}}(\underline{x}) = \begin{cases} D^{\underline{q}}\varphi(\underline{x}) & \text{for } \underline{x} \in CK \\ \varphi^{\underline{q}}(\underline{x}) & \text{for } \underline{x} \in K \end{cases}$$

definerede afbildning $\Phi^{\underline{q}}: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert. Vi har åbenbart $\Phi^{\underline{0}} = \varphi$.

Vi vil nu vise, at $D_j \Phi^{\underline{q}}(\underline{x}) = \Phi^{\underline{q}+\underline{e}_j}(\underline{x})$ for $|\underline{q}| \leq p-2$. Dette er imidlertid uden videre opfyldt for $\underline{x} \in CK \cup \mathring{K}$, og vi behøver kun at

gennemføre beviset, når $\underline{x}$ er et randpunkt af K . Påstanden vedrører kun en fast værdi af $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m$, og vi kan derfor ved beviset antage, at $m = 1$. For kortheds skyld vil vi skrive $\Phi^q = \psi$. Lad a være et randpunkt for den kompakte mængde K . For $x \in K$ har vi da (definition 2)

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{p-q-1} \frac{1}{k!} \varphi^{q+k}(a)(x-a)^k + R_p^q,$$

hvor

$$|R_p^q| \leq \frac{1}{(p-q)!} M |x-a|^{p-q},$$

og derfor gælder

$$\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} \rightarrow \varphi^{q+1}(a) \text{ for } x \rightarrow a \text{ på } K.$$

Vi vil nu antage, at $x > a$ og $x \in (K$. Den komponent af $(K$, som indeholder x , er et åbent interval $]y, z[$. Vi har nu

$$\frac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a} = \frac{y-a}{x-a} \cdot \frac{\psi(y) - \psi(a)}{y - a} + \frac{x-y}{x-a} \cdot \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y} =$$

$$\frac{y-a}{x-a} \cdot \frac{\psi(y) - \psi(a)}{y - a} + \frac{x-y}{x-a} D\psi(\xi), \quad \xi \in]x, y[$$

ifølge middelværdisætningen. Udtrykket på højre side er et vægtet aritmetisk middeltal mellem to størrelser, der begge konvergerer mod $\varphi^{q+1}(a)$ for $x \rightarrow a$ på $(K$.

Hermed har vi vist, at φ er overalt $p-1$ gange differentiable, og at $D^q \varphi = \Phi^q$ for $|q| < p$. For $\underline{x} \in O$ giver (11) endelig en vurdering af formen

$$|\Phi^q(\underline{x})| \leq M_4 \sup\{|\varphi^q(\underline{x})| \mid |q| < p \text{ og } \underline{x} \in K\} + M_3 M,$$

og dermed er sætningen fuldstændig bevist.

Lemma 6. Lad $K \subset \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde, som opfylder den i sætning 1 anførte betingelse, Der findes da en åben mængde $O \supset K$, for hvilken følgende betingelse er opfyldt: Lad (φ_n) være en følge af $p+1$ gange differentiable funktioner $\varphi_n: \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{C}$, som for $|\underline{q}| \leq p+1$ tilfredsstiller betingelsen $(D^{\underline{q}}\varphi_n) \rightarrow 0$ ligeligt på K . Der eksisterer da en følge (ψ_n) af p gange differentiable funktioner $\psi_n: \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{C}$, som for ethvert n tilfredsstiller betingelsen $\psi_n|_K = \varphi_n|_K$, og således at det for $|\underline{q}| \leq p$ gælder, at $(D^{\underline{q}}\psi_n) \rightarrow 0$ ligeligt på O .

Bevis: Følger umiddelbart af lemma 4 og sætning 5.

Bevis for sætning 1. Vi kopierer beviset for sætning 8 i kapitel 19 (side 239), idet vi vælger $A = K$. Distributionen T kan udvides til en kontinuert afbildning $\tilde{T}: \mathcal{D}^p \text{ ind i } \mathbb{C}$. Ved konstruktion af produkttrummet $\mathcal{E}^N$ benytter vi alle differentiationsordener med $|\underline{p}_j| \leq p+1$. Vi definerer afbildningen κ som i beviset for sætning 8. At $\tilde{T}(\varphi)$ kun afhænger af $\kappa(\varphi)$ følger af sætning 9 i kapitel 19 (side 241), idet beviset for denne sætning kun udnyttes p gange differentiability af φ . At en følge $(\underline{\varphi}_n)$ konvergerer mod 0 i normtopologien på $\mathcal{E}^N$ betyder, at $\underline{\varphi}_n = \alpha(\varphi_n)$, hvor $(D^{\underline{q}}\varphi_n) \rightarrow 0$ ligeligt på K for alle $\underline{q}$ med $|\underline{q}| \leq p+1$. Vi vælger (ψ_n) i overensstemmelse med lemma 6, og vi har da ved fornyet anvendelse af sætning 9 i kapitel 19, at $(\tilde{T}(\psi_n)) = (\tilde{T}(\varphi_n))$, altså $(\tilde{T}(\varphi_n)) \rightarrow 0$. Derefter går resten af beviset helt uden ændringer.

Vi fik brug for differentialkvotienter indtil orden $p+1$ i beviset. Dette kan skyldes, at vi et eller andet sted ikke har været helt økonomiske nok. Resultatet kan udvides på forskellig vis. Således

kan kravene til K slækkes en hel del, men så vil det blive nødvendigt at medtage differentialkvotienter af endnu højere orden. Det ser ikke ud til at resultatet kan bevises ret meget lettere for et interval eller for en konveks mængde.

21. kapitel.Tensorproduktet.

Vi skal beskæftige os med en regneoperation, der for sædvanlige funktioner er for trivial til at påkalde sig ret megen opmærksomhed. Lad os først definere begreberne for sædvanlige funktioner.

Definition 1. Lad M_1 og M_2 være vilkårlige mængder, og lad $f_1: M_1 \rightarrow \mathbb{C}$ og $f_2: M_2 \rightarrow \mathbb{C}$ være vilkårlige afbildninger. Vi definerer da tensorproduktet $f_1 \otimes f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ved

$$(f_1 \otimes f_2)(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Hvis E_1 er et vektorrum af afbildninger $f: M_1 \rightarrow \mathbb{C}$ og E_2 et vektorrum af afbildninger $g: M_2 \rightarrow \mathbb{C}$, da udgør mængden af alle afbildninger af formen

$$c_1(f_1 \otimes g_1) + \dots + c_n(f_n \otimes g_n): M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{C},$$

hvor $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in E_1$ og $g_1, \dots, g_n \in E_2$

tensorproduktet $E_1 \otimes E_2$ af E_1 og E_2 .

For rummene $\mathcal{D}_m$ og $\mathcal{D}_p$ af vilkårlige ofte differentiable funktioner på henholdsvis $\mathbb{R}^m$ og $\mathbb{R}^p$ bliver $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ åbenbart et underrum i $\mathcal{D}_{m+p}$. Analogt bliver $\mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_p$ et underrum i $\mathcal{E}_{m+p}$. Det er klart, at $\mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_p$ omfatter alle polynomier. Af $\varphi \in \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_p$, $\varphi_1 \in \mathcal{E}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{E}_p$ følger åbenbart $\varphi_1 \varphi_2 \in \mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_p$. Hvis φ_1 og φ_2 yderligere har kompakt støtte, gælder endda $\varphi_1 \varphi_2 \in \mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$. Specielt indeholder $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ alle funktioner $\varphi_1 P \varphi_2$, hvor $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$, mens P er et polynomium.

Vi vil nu vise, at $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ er overalt tæt i $\mathcal{D}_{m+p}$, og at $\mathcal{E}_m \otimes \mathcal{E}_p$ er overalt tæt i $\mathcal{E}_{m+p}$. Den første påstand vil blive afledt af den sidste, og for at vise den sidste påstand vil vi vise den stærkere påstand, at underrummet af polynomier er overalt tæt i $\mathcal{E}_{m+p}$. Dette

\det
er i væsentlige Weierstrass' approksimationssætning, og den kendes fra metematik 2 for en reel funktion af en reel variabel. Vi skal bruge den for en kompleks funktion af flere reelle variable. Da en kompleks funktion approksimeres ved at realdel og imaginærdel approksimeres hver for sig, behøver vi ikke at opholde os ved overgangen til komplekse funktioner. Vi vil derfor udnytte, at approksimationssætningen gælder for enhver kontinuert afbildning $f: [a,b]$ ind i $\mathbb{C}$.

Sætning 1. Lad $K \subset \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde, lad $f: K$ ind i $\mathbb{C}$ være en kontinuert afbildning, og lad ε være et positivt tal. Der findes da et polynomium $P: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$, så at

$$\forall \underline{x} \in K : |f(\underline{x}) - P(\underline{x})| \leq \varepsilon$$

Bevis: Lad δ være et positivt tal, hvis værdi vi senere vil fastsætte. En kontinuert afbildning $\alpha: \mathbb{R}$ ind i $[0,1]$ defineres ved, at $\alpha(x) = 0$ for $|x| \geq \delta$, $\alpha(0) = 1$, og at α er lineær på hvert af intervallerne $[-\delta, 0]$ og $[0, \delta]$. For $j \in \mathbb{N}$ sætter vi $\alpha_j(x) = \alpha(x - j\delta)$, og derved får vi

$$(1) \quad 1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j(x).$$

Dette er en opspaltning af enheden. For hver værdi af x er højst to led forskellige fra 0. Ved at multiplicere m eksemplarer af relationen (1) får vi en opspaltning af enheden på $\mathbb{R}^m$

$$1 = \sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{\infty} \alpha_{j_1}(x_1) \dots \alpha_{j_m}(x_m)$$

Leddene $\alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_m}$ har som støtte intervallet

$$I_{\underline{j}} = [(j_1 - 1)\delta, (j_1 + 1)\delta] \times \dots \times [(j_m - 1)\delta, (j_m + 1)\delta]$$

Da f er ligelig kontinuert, kan vi vælge δ så lille, at der til hvert

j svarer et komplekst tal c_j , så at $|f(\underline{x}) - c_j| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$ for alle $\underline{x} \in I_j \cap K$. Hvis $I_j \cap K = \emptyset$, sætter vi $c_j = 0$. Vi sætter

$$(2) \quad g(\underline{x}) = \sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{\infty} c_j \alpha_{j_1}(x_1) \dots \alpha_{j_m}(x_m),$$

og vi har da for $\underline{x} \in K$, at

$$\begin{aligned} |f(\underline{x}) - g(\underline{x})| &= \left| \sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{\infty} (f(\underline{x}) - c_j) \alpha_{j_1}(x_1) \dots \alpha_{j_m}(x_m) \right| \leq \\ &\sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{\infty} |f(\underline{x}) - c_j| \alpha_{j_1}(x_1) \dots \alpha_{j_m}(x_m) \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2} \sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{\infty} \alpha_{j_1}(x_1) \dots \alpha_{j_m}(x_m) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Vi vælger nu et kompakt interval $I^0 = I_1^0 \times \dots \times I_m^0 \supseteq K$. Summen (2) har kun endelig mange fra 0 forskellige led, og sætningen er vist, når det lykkes os at vise, at hver led i summen kan approksimeres i intervallet I^0 med vilkårlig given nøjagtighed ved hjælp af et polynomium. Dertil er det imidlertid tilstrækkeligt at approksimere hver faktor $\alpha_{j_\nu}(x_\nu)$ tilstrækkelig godt på I_ν^0 ved hjælp af et polynomium, men det er netop muligt ifølge Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af én variabel.

Sætning 2. Lad $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$ være et kompakt interval i $\mathbb{R}^m$. Lad $\varphi: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion med støtte indeholdt i I . Lad p være et naturligt tal, og lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da et polynomium $P: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$, som for enhver differentiationsorden $\underline{k}$ med $|\underline{k}| \leq p$ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall \underline{x} \in I : |D^{\underline{k}}\varphi(\underline{x}) - D^{\underline{k}}P(\underline{x})| \leq \varepsilon.$$

Bevis: Vi sætter

$$\Lambda = \max\{1, b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n\},$$

og vælger i henhold til sætning 1 et polynomium $Q: \mathbb{R}^m$ ind i $\hat{C}$, som for ethvert $\underline{x} \in I$ tilfredsstiller

$$(3) \quad |D_1^p \dots D_m^p \phi(\underline{x}) - Q(\underline{x})| \leq \Lambda^{-mp} \varepsilon.$$

Vi sætter

$$P(\underline{x}) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_1}^{x_{1,1}} \dots \int_{a_1}^{x_{1,p-1}} \dots \int_{a_m}^{x_m} \int_{a_m}^{x_{m,1}} \dots \int_{a_m}^{x_{m,p-1}} Q(x_{1p}, \dots, x_{mp}) \\ dx_{1,p} \dots dx_{1,1} \dots dx_{m,p} \dots dx_{m,1}.$$

For en vilkårlig differentiationsorden $\underline{q}$ med $|\underline{q}| \leq p$ har vi da (med en trivial ændring, hvis et $q_j = p$ og de øvrige = 0)

$$D^{\underline{q}} \phi(\underline{x}) - D^{\underline{q}} P(\underline{x}) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_1}^{x_{1,q_1+1}} \dots \int_{a_1}^{x_{1,p-1}} \dots \int_{a_m}^{x_m} \int_{a_m}^{x_{m,q_m+1}} \dots \int_{a_m}^{x_{m,p}} \\ D_1^p \dots D_m^p (x_{1p}, \dots, x_{mp}) - Q(x_{1p}, \dots, x_{mp}) \\ dx_{1,p} \dots dx_{1,q_1+1} \dots dx_{m,p} \dots dx_{m,q_m+1},$$

og vurderingen (3) fører til den ønskede vurdering for $\underline{x} \in I$. Dermed er sætningen vist.

Sætning 3. Polynomierne i $\mathcal{E}_m$ udgør et overalt tæt underrum.

Bevis: Lad $K \subset \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde, og lad $\phi: \mathbb{R}^m$ ind i $\hat{C}$ tilhøre $\mathcal{E}_m$. Vi skal vise, at der eksisterer et polynomium P , som approksimerer ϕ og differentialkvotienter af ϕ indtil orden p med vilkårlig given nøjagtighed. Vi vælger en vilkårlig ofte differentiabel funktion $\alpha: \mathbb{R}^m$ ind i $[0,1]$, identisk 1 på en åben mængde, der indeholder K , og med støtte indeholdt i et kompakt interval I . Vi behøver nu blot at vælge P i henhold til sætning 2, så at P approksimerer

$\alpha\phi$ og differentialkvotienterne indtil orden p med den ønskede nøjagtighed på I . Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4. Underrummet $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ er overalt tæt i $\mathcal{D}_{m+p}$.

Bevis: Vi betragter $\phi \in \mathcal{D}_{m+p}$. Vi vælger begrænsede åbne mængder $O_1 \subset \mathbb{R}^m$, $O_2 \subset \mathbb{R}^p$, så at $O_1 \times O_2$ indeholder støtten for ϕ . Vi vælger $\alpha_1 \in \mathcal{D}_m$ identisk 1 på O_1 og $\alpha_2 \in \mathcal{D}_p$ identisk 1 på O_2 . Vi har da $\phi(\underline{x}, \underline{y}) = \alpha_1(\underline{x})\phi(\underline{x}, \underline{y})\alpha_2(\underline{y})$. Vi vælger nu i henhold til sætning 3 en følge (P_n) af polynomier, som konvergerer mod ϕ på rummet $\mathcal{E}_{m+p}$. Men så vil også følgen $(\alpha_1 \otimes \alpha_2)P_n$ konvergere mod $(\alpha_1 \otimes \alpha_2)\phi$ på $\mathcal{E}_{m+p}$, og da funktionerne i den nye følge har støtten indeholdt i en fast, kompakt mængde, konvergerer den på $\mathcal{D}_{m+p}$. Dermed er sætningen bevist.

En funktion $\phi \in \mathcal{D}_{m+p}$ definerer for hvert $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ en afbildning $\phi_{\underline{x}} \in \mathcal{D}_p$ ved $\phi_{\underline{x}}(\underline{y}) = \phi(\underline{x}, \underline{y})$, og analogt for hvert $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$ en afbildning $\phi_{\underline{y}} \in \mathcal{D}_m$ ved $\phi_{\underline{y}}(\underline{x}) = \phi(\underline{x}, \underline{y})$. Disse betegnelser er ikke helt konsekvente, men de er gode nok til vort formål.

Sætning 5. For $\phi \in \mathcal{D}_{m+p}$, $T \in \mathcal{D}'_p$ vil den ved

$$\psi(\underline{x}) = T(\phi_{\underline{x}})$$

definerede funktion $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ tilhøre $\mathcal{D}_m$, og for enhver differentiationsorden $\underline{k} = (k_1, \dots, k_m)$ gælder med $\underline{k}^* = (\underline{k}, 0)$ og $\phi_{\underline{x}}^{\underline{k}}$ defineret ved $\phi_{\underline{x}}^{\underline{k}}(\underline{y}) = D^{\underline{k}^*} \phi(\underline{x}, \underline{y})$, at

$$D^{\underline{k}} \psi(\underline{x}) = T(\phi_{\underline{x}}^{\underline{k}}).$$

Bevis: Vi har for ethvert $\underline{k}$, at

$$(4) \quad \frac{1}{h} (T(\phi_{\underline{x} + h\mathbf{e}_j}^{\underline{k}}) - T(\phi_{\underline{x}}^{\underline{k}})) = T\left(\frac{\phi_{\underline{x} + h\mathbf{e}_j}^{\underline{k}} - \phi_{\underline{x}}^{\underline{k}}}{h}\right),$$

og her er

$$\frac{\varphi_{\underline{x}+h\underline{e}_j}^{\underline{k}} - \varphi_{\underline{x}}^{\underline{k}}}{h}(\underline{y}) = \frac{1}{h}(D_{\underline{x}}^{\underline{k}*} \varphi(\underline{x}+h\underline{e}_j, \underline{y}) - D_{\underline{x}}^{\underline{k}*} \varphi(\underline{x}, \underline{y})),$$

og dette udtryk konvergerer ligeligt mod $\varphi_{\underline{x}}^{\underline{k}+h\underline{e}_j}(\underline{y})$, og enhver differentialkvotient med hensyn til $\underline{y}$ udviser den samme ligelige konvergens. Da støtten er indeholdt i en kompakt mængde under grænseovergangen, betyder dette konvergens i $\mathcal{D}_p$ for hvert fast $\underline{x}$, og (4) giver derfor

$$D_j T(\varphi_{\underline{x}}^{\underline{k}}) = T(\varphi_{\underline{x}}^{\underline{k}+\underline{e}_j}),$$

hvilket medfører, at $\psi \in \mathcal{D}_m$, og at differentialkvotienterne har den påståede værdi. Det er klart, at ψ får kompakt støtte. Dermed er sætningen bevist.

Det vil være hensigtsmæssigt at skrive $T_{\underline{y}}(\varphi)$ i stedet for $T(\varphi_{\underline{x}})$. Dette forudsætter, at $\underline{x}$ og $\underline{y}$ anvendes konsekvent som betegnelse for de variable. Vi kan da også skrive den sidste relation i sætning 5 på formen

$$(5) \quad D_{\underline{y}}^{\underline{k}}(T_{\underline{y}}(\varphi)) = T_{\underline{y}}(D_{\underline{x}}^{\underline{k}}\varphi).$$

Sætning 6. Afbildningen $T_{\underline{y}}: \mathcal{D}_{m+p}$ ind i $\mathcal{D}_m$ er lineær og kontinuert.

Bevis: Det er klart, at $T_{\underline{y}}$ er lineær. Med K'_n , K''_n og $K_n = K'_n \times K''_n$ betegner vi de kompakte mængder i henholdsvis $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^{m+p}$, som bestemmes ved, at alle koordinater er numerisk mindre end n . Vi sætter

$$K'_0 = K''_0 = K_0 = \emptyset.$$

En basisomegn af 0 i $\mathcal{D}_m$ er da givet ved en voksende følge (q_n) af hele tal og en aftagende følge (ε_n) af positive tal, idet $\varphi \in \mathcal{D}_m$ tilhører omegnen, hvis og kun hvis det for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder for ethvert $\underline{x} \in K'_n \setminus K'_{n-1}$, at

$$|D_{\varphi}^k(\underline{x})| \leq \varepsilon_n \text{ for alle } \underline{k} \text{ med } |\underline{k}| \leq q_n.$$

For hvert n har vi da følger (q'_{nj}) og (ε'_{nj}) , så at den anførte betingelse er opfyldt for et fast $n \in \mathbb{N}$ og et fast $\underline{x} \in K'_n \setminus K'_{n-1}$ for $\varphi = T_{\underline{y}}(\psi)$ såfremt

$$\forall j \in \mathbb{N} \forall \underline{k} \forall \underline{y} \in K'_j \setminus K'_{j-1} : |\underline{k}| \leq q'_{nj} \Rightarrow |D_{\underline{y}}^k(\underline{x}, \underline{y})| \leq \varepsilon'_{nj}.$$

Nu betegner vi med q''_j det største af tallene q_j og $q'_{1j}, \dots, q'_{jj}$ og med ε''_j det mindste af tallene ε_j og $\varepsilon_{1j}, \dots, \varepsilon_{jj}$. Den ved følgerne (K_n) , (q''_n) og (ε''_n) bestemte omegn af 0 i $\mathcal{D}_{m+p}$ vil da ved $T_{\underline{y}}$ afbildes ind i den betragtede omegn af 0 i $\mathcal{D}_m$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7. For $S \in \mathcal{D}'_m$, $T \in \mathcal{D}'_p$ er den ved

$$U(\varphi) = S(T_{\underline{y}}(\varphi))$$

definerede afbildning $U: \mathcal{D}_{m+p}$ ind i $\mathcal{C}$ en distribution. For $\varphi \in \mathcal{D}_{m+p}$ gælder tillige

$$U(\varphi) = T(S_{\underline{x}}(\varphi)).$$

For $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$ gælder

$$U(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = S(\varphi_1)T(\varphi_2),$$

og U er den eneste distribution i $\mathcal{D}'_{m+p}$, som har denne egenskab for alle φ_1, φ_2 .

Bevis: Det følger umiddelbart af sætning 6, at U er lineær og kontinuert, altså en distribution. For $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$ er

$$T_{\underline{y}}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = T_{\underline{y}}(\varphi_1(\underline{x})\varphi_2(\underline{y})) = \varphi_1(\underline{x})T(\varphi_2),$$

altså

$$U(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = S(\varphi_1(\underline{x})T(\varphi_2)) = S(\varphi_1)T(\varphi_2).$$

På den anden side fastlægger denne egenskab U på $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$, og da dette underrum er overalt tæt i $\mathcal{D}_{m+p}$, altså i hele $\mathcal{D}_{m+p}$. Da den ved

$T(S_{\underline{x}}(\varphi))$ definerede distribution har den samme egenskab, er den identisk med U . Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Den i sætning 7 indførte distribution U kaldes tensorproduktet af S og T , og vi skriver $U = S \otimes T$. Det underrum af $\mathcal{D}'_{m+p}$, der udspændes af alle tensorprodukter $S \otimes T$, $S \in \mathcal{D}'_m$, $T \in \mathcal{D}'_p$, kaldes tensorproduktet af $\mathcal{D}'_m$ og $\mathcal{D}'_p$ og betegnes $\mathcal{D}'_m \otimes \mathcal{D}'_p$.

For Lebesgue-integrable funktioner $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ og $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ med tensorproduktet $h = f \otimes g: \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{C}$ får vi for $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$, at

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) &= \int h(\underline{x}, \underline{y}) \varphi_1(\underline{x}) \varphi_2(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} = \int f(\underline{x}) g(\underline{y}) \varphi_1(\underline{x}) \varphi_2(\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} \\ &= \int f(\underline{x}) \varphi_1(\underline{x}) d\underline{x} \int g(\underline{y}) \varphi_2(\underline{y}) d\underline{y} = \tilde{f}(\varphi_1) \tilde{g}(\varphi_2), \end{aligned}$$

hvilket viser, at tensorproduktet af distributioner er en generalisation af tensorproduktet af funktioner.

Sætning 8. Hvis $S \in \mathcal{D}'_m$ har støtte K_1 og $T \in \mathcal{D}'_p$ har støtte K_2 , har $S \otimes T$ støtte $K_1 \times K_2$.

Bevis: Vi betragter først $(\underline{x}, \underline{y}) \notin K_1 \times K_2$. Vi kan fx. antage, at $\underline{x} \notin K_1$. Så er $O = \mathbb{C}K_1$ en åben mængde, og for $\varphi \in \mathcal{D}_{m+p}$ med støtte i $O \times \mathbb{R}^p$ får vi da

$$(S \otimes T)\varphi = T(S_{\underline{x}}(\varphi)) = T(0) = 0.$$

Dermed har vi vist, at støtten for $S \otimes T$ er indeholdt i $K_1 \times K_2$. Vi betragter dernæst $(\underline{x}, \underline{y}) \in K_1 \times K_2$. En hver omegn af $(\underline{x}, \underline{y})$ indeholder en omegn $U_1 \times U_2$, hvor U_1 er en omegn af $\underline{x}$ i $\mathbb{R}^m$, og U_2 er en omegn af $\underline{y}$ i $\mathbb{R}^p$. Vi kan da vælge $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$ med støtte indeholdt i U_1 og $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$ med støtte indeholdt i U_2 , så at $S(\varphi_1) \neq 0$ og $T(\varphi_2) \neq 0$. Så er

$(S \otimes T)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = S(\varphi_1)T(\varphi_2) \neq 0$, hvilket viser, at $(\underline{x}, \underline{y})$ tilhører støtten for $S \otimes T$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 9. Tensorproduktet $\mathcal{D}'_m \otimes \mathcal{D}'_p$ er overalt tæt i $\mathcal{D}'_{m+p}$.

Bevis: Vi har tidligere set, at $\mathcal{D}_{m+p}$ er indlejret i $\mathcal{D}'_{m+p}$ som et overalt tæt underrum. Nu er $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ ifølge sætning 4 overalt tæt i $\mathcal{D}_{m+p}$, og det gælder så meget desto mere i den fra $\mathcal{D}'_{m+p}$ inducerede delrumstopologi på $\mathcal{D}_{m+p}$, idet denne er grovere end topologien på $\mathcal{D}_{m+p}$. Heraf følger, at $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ er indlejret overalt tæt i $\mathcal{D}'_{m+p}$, og sætningen følger derefter umiddelbart af, at $\mathcal{D}'_m \otimes \mathcal{D}'_p$ indeholder billedet ved indlejringen af $\mathcal{D}_m \otimes \mathcal{D}_p$ i $\mathcal{D}'_{m+p}$.

Vi beviser nu en hjælpesætning, der ikke direkte berører tensorproduktet.

Lemma 10. Lad (B_n) være en følge af begrænsede mængder på $\mathcal{D}_m$. Hvis der findes en kompakt mængde $K \subset \mathbb{R}^m$, som indeholder støtten for enhver funktion $\varphi \in \bigcup B_n$, findes der en begrænset mængde $B \subset \mathcal{D}_m$, som absorberer enhver af mængderne B_n .

Bevis: For hvert $n \in \mathbb{N}$ findes der en voksende talfølge (Λ_{nj}) , så at

$$\forall \varphi \in B_n \quad \forall \underline{k} : |\underline{k}| = j \Rightarrow \|D^{\underline{k}} \varphi\|_U \leq \Lambda_{nj}.$$

Vi sætter $\Lambda'_j = \max(\Lambda_{1j}, \dots, \Lambda_{jj})$ og

$$B = \{\varphi \in \mathcal{D}_m \mid \forall j \quad \forall \underline{k} : |\underline{k}| = j \Rightarrow \|D^{\underline{k}} \varphi\|_U \leq \Lambda'_j\}$$

er da en begrænset mængde. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ har vi da $\Lambda_{nj} \leq \Lambda'_j$ for $j \geq n$, og vi kan derfor vælge λ_n , så at $\Lambda_{nj} \leq \lambda_n \Lambda'_j$ for alle j , men det medfører netop, at $B_n \subseteq \lambda_n B$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 11. Den ved $\pi(S, T) = S \otimes T$ bestemte afbildning $\pi: \mathcal{D}'_m \times \mathcal{D}'_p$ ind i $\mathcal{D}'_{m+p}$ er bilinear og kontinuert.

Bevis: Det er indlysende, at π er en bilinear afbildning. Vi betragter nu først den lineære afbildning $\pi_1: \mathcal{D}'_m$ ind i $\mathcal{D}'_{m+p}$ bestemt ved $\pi_1(S) = S \otimes T$ for et fast $T \in \mathcal{D}'_p$. Den vil være kontinuert, hvis den blot er kontinuert i 0. En basisomegn i $\mathcal{D}'_{m+p}$ er givet ved

$$U = \{R \in \mathcal{D}'_{m+p} \mid \forall \varphi \in B : |R(\varphi)| \leq \varepsilon\},$$

idet $B \subseteq \mathcal{D}_{m+p}$ er begrænset og $\varepsilon > 0$. Nu er mængden

$$B_{\underline{k}} = \{D_{\underline{x}}^{\underline{k}} \varphi \mid \varphi \in B \wedge \underline{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

en begrænset mængde i $\mathcal{D}_p$ for enhver differentiationsorden $\underline{k}$, og det medfører, at billedmængden ved T bliver begrænset for ethvert $\underline{k}$, altså at

$$B_2 = \{T_{\underline{y}} \varphi \mid \varphi \in B\}$$

er en begrænset mængde i $\mathcal{D}_m$. Heraf følger, at

$$U_1 = \{S \in \mathcal{D}'_m \mid \forall \varphi \in B_2 : |S(\varphi)| \leq \varepsilon\}$$

er en omegn af 0 i $\mathcal{D}'_m$, og at π_1 åbenbart afbilder den ind i U . Dermed har vi vist, at π_1 er kontinuert, og det medfører, at π er kontinuert i hver variabel for sig. For at vise, at π er kontinuert, er det nu nok at vise, at π er kontinuert i $(0, 0)$. Vi betragter igen basisomegnen U og indfører mængderne $B_{\underline{k}}$ som ovenfor. Ifølge lemma 10 eksisterer der en begrænset mængde $A \subset \mathcal{D}_p$, som absorberer enhver af mængderne $B_{\underline{k}}$. Vi har da en talfølge $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, så at

$$B_{\underline{k}} \subseteq \lambda_q A \quad \text{for alle } \underline{k} \text{ med } |\underline{k}| = q.$$

Vi sætter nu

$$U'_2 = \{T \in \mathcal{D}'_p \mid \forall \varphi \in A : |T(\varphi)| \leq 1\}.$$

Vi har da

$$\forall \varphi \in B \forall T \in U_2' \forall \underline{k} : |D_{\underline{x}}^{\underline{k}} T(\varphi)| \leq \lambda_{|\underline{k}|},$$

hvilket viser, at

$$B_1 = \{T_{\underline{y}}(\varphi) | \varphi \in B \wedge T \in U_2'\}$$

er en begrænset mængde på $\mathcal{D}_m$. Så er

$$U_1' = \{S \in \mathcal{D}_m' | \forall \varphi \in B_1 : |S(\varphi)| \leq \varepsilon\}$$

en omegn af 0 i $\mathcal{D}_m'$. For $S \in U_1'$, $T \in U_2'$, $\varphi \in B$ har vi nu

$$|(S \otimes T)(\varphi)| = |S(T_{\underline{y}}(\varphi))| \leq \varepsilon,$$

hvilket viser, at $\pi(U_1' \times U_2') \subseteq U$. Dermed har vi bevist, at π er kontinuert i $(0,0)$, og dermed er sætning 11 bevist.

Vi understreger, at sætning 11 er bevist i den stærke topologi i overensstemmelse med vor sædvane. Sætningen er faktisk ikke rigtig i svag topologi.

Vore resultater vedrørende tensorproduktet på $\mathcal{D}'$ -rummene kan med ret trivielle ændringer overføres til $\mathcal{E}'$ -rummene. Det vil vi dog ikke opholde os ved.

Tensorprodukter med flere faktorer kan indføres analogt, men de kan også dannes successivt. Det er klart, at tensorproduktet bliver associativt.

Til slut skal vi udlede nogle speciellere resultater, der knytter forbindelse til de foregående kapitler.

Sætning 12. En distribution i $\mathcal{D}_{m+p}'$ er uafhængig af $\underline{y}$, hvis og kun hvis den kan skrives som et tensorprodukt af en distribution $S \in \mathcal{D}_m'$ med en konstant distribution.

Bevis: Lad $T \in \mathcal{D}_{m+p}'$ være uafhængig af $\underline{y}$. For $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$ vil $T(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ kun afhænge af $\int \varphi_1 \otimes \varphi_2 d\underline{y} = c\varphi_1$, hvor $c = \int \varphi_2$. Altså er $T = cS(\varphi_1)$, hvor $S \in \mathcal{D}_m'$. Dermed har vi bevist "kun hvis". Resten er trivielt.

Sætning 13. En distribution i $\mathcal{D}'_{m+p}$ har kompakt støtte indeholdt i underrummet $\hat{R}^m$, hvis og kun hvis den kan skrives som et tensorprodukt $S \otimes T$, hvor T er en endelig linearkombination af differentialkvotienter af δ -funktionen på $\hat{R}^p$, mens $S \in \mathcal{D}'_m$ har kompakt støtte.

Bevis: Også i dette tilfælde er "hvis" indlysende. Lad $U \in \mathcal{D}'_{m+p}$ være en distribution med sin støtte indeholdt i et interval $I \subset \hat{R}^m$. Vi ved da, at U har endelig orden p . Da I er en naturlig kompakt mængde, kan U skrives som en sum af differentialkvotienter af orden $\leq p+1$ af mål med støtte indeholdt i I . Men et sådant mål kan skrives som $\mu \otimes \delta$, hvor μ er et mål på $\hat{R}^m$. Nu er for $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$

$$\begin{aligned} D_{\underline{x}}^{\underline{j}} D_{\underline{y}}^{\underline{k}} (\mu \otimes \delta) (\varphi_1 \otimes \varphi_2) &= (-1)^{|\underline{j}|+|\underline{k}|} (\mu \otimes \delta) (D_{\underline{x}}^{\underline{j}} D_{\underline{y}}^{\underline{k}} (\varphi_1 \otimes \varphi_2)) = \\ &= (-1)^{|\underline{j}|+|\underline{k}|} (\mu \otimes \delta) (D_{\underline{x}}^{\underline{j}} \varphi_1 \otimes D_{\underline{y}}^{\underline{k}} \varphi_2) = (-1)^{|\underline{j}|+|\underline{k}|} \mu (D_{\underline{x}}^{\underline{j}} \varphi_1) \delta (D_{\underline{y}}^{\underline{k}} \varphi_2) = \\ &= D_{\underline{x}}^{\underline{j}} \mu (\varphi_1) D_{\underline{y}}^{\underline{k}} \delta (\varphi_2) = (D_{\underline{x}}^{\underline{j}} \mu \otimes D_{\underline{y}}^{\underline{k}} \delta) (\varphi_1 \otimes \varphi_2). \end{aligned}$$

Altså kan hvert led i summen skrives på formen

$$D_{\underline{x}}^{\underline{j}} \mu \otimes D_{\underline{y}}^{\underline{k}} \delta,$$

og dermed er sætningen bevist.

22. kapitel.Sædvanlig multiplikation.

Da rummet L^1 ikke er afsluttet overfor multiplikation, er det ikke rimeligt at vente, at det sædvanlige produkt af to funktioner kan generaliseres til distributioner. Vi kan imidlertid helt generelt definere sædvanlig multiplikation med en vilkårlig ofte differentiable funktion.

Lad $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ være Lebesgue-integrabel og lad $\alpha: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ være vilkårlig ofte differentiable. For $\varphi \in \mathcal{D}$ har vi da

$$\tilde{f}\alpha(\varphi) = \int f\alpha\varphi = \tilde{f}(\alpha\varphi).$$

Dette retfærdiggør følgende definition:

Definition 1. For $\alpha \in \mathcal{E}$, $T \in \mathcal{D}'$ defineres αT ved

$$\alpha T(\varphi) = T(\alpha\varphi).$$

Det er klart, at $\alpha T \in \mathcal{D}'$. Det således definerede sædvanlige produkt er åbenbart en bilinear afbildning af $\mathcal{E} \times \mathcal{D}'$ ind i $\mathcal{D}'$. Det kan vises, at den er kontinuert i hver variabel for sig og afbilder begrænsede mængder på begrænsede mængder, men det vil vi ikke opholde os ved, da beviset ikke er særlig interessant.

Sætning 1. $D_j(\alpha T) = (D_j\alpha)T + \alpha D_jT$.

Bevis: Vi får ved direkte udregning for $\varphi \in \mathcal{D}$, at

$$\begin{aligned} D_j(\alpha T)(\varphi) &= -\alpha T(D_j\varphi) = -T(\alpha D_j\varphi) = -T(D_j(\alpha\varphi) - (D_j\alpha)\varphi) = \\ &= -T(D_j(\alpha\varphi)) + T((D_j\alpha)\varphi) = D_jT(\alpha\varphi) + T((D_j\alpha)\varphi) = \\ &= \alpha D_jT(\varphi) + (D_j\alpha)T(\varphi), \end{aligned}$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætning 2. For $\alpha \in \mathcal{E}_m$, $\beta \in \mathcal{E}_p$, $S \in \mathcal{D}'_m$, $T \in \mathcal{D}'_p$ gælder relationen

$$(\alpha \otimes \beta)(S \otimes T) = \alpha S \otimes \beta T.$$

Bevis: For $\varphi_1 \in \mathcal{D}_m$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_p$ får vi ved direkte udregning

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)(S \otimes T)(\varphi_1 \otimes \varphi_2) &= (S \otimes T)((\alpha \otimes \beta)(\varphi_1 \otimes \varphi_2)) = \\ (S \otimes T)(\alpha\varphi_1 \otimes \beta\varphi_2) &= S(\alpha\varphi_1)T(\beta\varphi_2) = \alpha S(\varphi_1)\beta T(\varphi_2) = \\ (\alpha S \otimes \beta T)(\varphi_1 \otimes \varphi_2). \end{aligned}$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3. For $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$, $T \in \mathcal{D}'$ gælder

$$(\alpha\beta)T = \alpha(\beta T).$$

Bevis: $((\alpha\beta)T)(\varphi) = \beta T(\alpha\varphi) = \alpha T(\beta\varphi) = \alpha(\beta T)(\varphi).$

Det følgende eksempel illustrerer, at hvis vi blot forlanger, at associative lov ikke.

Produkter med flere faktorer kan være definerede, selv om mere end en faktor er en distribution, som ikke er en vilkårlig ofte differentiable funktion, men under disse omstændigheder kan det ske, at produktet ikke bliver associativt. Vi betegner med T den ved

$$T(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-h} + \int_h^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right)$$

definerede distribution. For funktionen x får vi da

$$xT(\varphi) = T(\varphi x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-h} + \int_h^{\infty} \varphi(x) dx \right) = \int \varphi,$$

altså $xT = 1$, så vi får

$$\delta(xT) = \delta.$$

På den anden side er

$$(\delta x)T = 0T = 0.$$

Sætning 4. For $\alpha \in \mathcal{E}_m$ og en vilkårlig differentiationsorden $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$ gælder formelen

$$\alpha D^{\underline{p}} \delta = \sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} (-1)^{|\underline{p}-\underline{q}|} \frac{\underline{p}!}{\underline{q}!(\underline{p}-\underline{q})!} D^{\underline{p}-\underline{q}} \alpha(0) D^{\underline{q}} \delta.$$

Bevis: For $\varphi \in \mathcal{D}_m$ fås

$$\begin{aligned} (\alpha D^{\underline{p}} \delta)(\varphi) &= D^{\underline{p}} \delta(\alpha \varphi) = (-1)^{|\underline{p}|} \delta(D^{\underline{p}}(\alpha \varphi)) = \\ &= (-1)^{|\underline{p}|} \delta\left(\sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} \frac{\underline{p}!}{\underline{q}!(\underline{p}-\underline{q})!} D^{\underline{p}-\underline{q}} \alpha D^{\underline{q}} \varphi\right) = \\ &= (-1)^{|\underline{p}|} \sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} \frac{\underline{p}!}{\underline{q}!(\underline{p}-\underline{q})!} D^{\underline{p}-\underline{q}} \alpha(0) D^{\underline{q}} \varphi(0) = \\ &= (-1)^{|\underline{p}|} \sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} \frac{\underline{p}!}{\underline{q}!(\underline{p}-\underline{q})!} D^{\underline{p}-\underline{q}} \alpha(0) \delta(D^{\underline{q}} \varphi) = \\ &= \sum_{\underline{q} \leq \underline{p}} (-1)^{|\underline{p}-\underline{q}|} \frac{\underline{p}!}{\underline{q}!(\underline{p}-\underline{q})!} D^{\underline{p}-\underline{q}} \alpha(0) D^{\underline{q}} \delta(\varphi), \end{aligned}$$

hvoraf sætningen umiddelbart følger.

Sætning 5. Lad $T \in \mathcal{D}'_m$ være en distribution og lad $\{O_j | j \in J\}$ være en overdækning af $\mathbb{R}^m$ med åbne mængder. Der eksisterer da en fremstilling

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n,$$

hvor hvert T_n er en distribution, hvis støtte er indeholdt i en af mængderne O_j .

Bevis: Der findes en opspaltning af enheden

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n,$$

hvor hvert α_n er en vilkårlig ofte differentiabel funktion med sin

støtte indeholdt i én af mængderne O_j . Vi sætter $T_n = \alpha_m T$, og T_n er da en distribution med støtte i O_j . Vi har nu for $\varphi \in \mathcal{D}_m$, at

$$T(\varphi) = T(\sum \alpha_n \varphi) = \sum T(\alpha_n \varphi) = \sum \alpha_n T(\varphi) = \sum T_n(\varphi),$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Enhver distribution $T \in \mathcal{D}'_m$ har en fremstilling af formen

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} D^{\frac{k}{n}} f_n,$$

hvor hvert f_n er en kontinuert funktion.

Bevis: Vi benytter sætning 5, idet vi specielt vælger en overdækning af $\mathbb{R}^m$ med begrænsede åbne mængder. Vi har tidligere set, at hvert T_n da bliver en differentialkvotient af en kontinuert funktion.

Sætning 7. Lad $\{A_j | j \in \mathbb{N}\}$ være en overdækning af $\mathbb{R}^m$ med en følge af afsluttede mængder. En distribution $T \in \mathcal{D}'_m$ kan da skrives som en sum

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} T_j,$$

hvor hvert T_j har sin støtte indeholdt i A_j .

Bevis: I den i sætning 6 angivne fremstilling af T har hver af funktionerne f_n en triviel opspaltning

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} f_{nj},$$

hvor f_{nj} er identisk med f_n på $A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$ og identisk 0 uden for denne mængde. Funktionerne er L^1 -integrable og rækken er L^1 -konvergent, og derfor er enhver differentieret række konvergent i $\mathcal{D}'_m$. Vi får således fremstillingen

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{n_j}^{\underline{k}}.$$

Den første sum er lokalt endelig, og summationsordenen kan derfor ombyttes, hvilket giver

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} T_j, \text{ hvor } T_j = \sum_{n=1}^{\infty} D_{n_j}^{\underline{k}}.$$

Dermed er sætningen bevist.

23. kapitel.Division.

Problemet at bestemme en distribution $X \in \mathcal{D}'_m$, som tilfredsstiller ligningen

$$\alpha X = T,$$

hvor $\alpha \in \mathcal{E}_m$ og $T \in \mathcal{D}'_m$, er umiddelbart løseligt, hvis α ikke antager værdien 0. I dette tilfælde gælder $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{E}_m$, og $X = \frac{1}{\alpha} T$ er ligningens eneste løsning.

Det er ikke så oplagt, hvordan det går, hvis α antager værdien 0, og dette spørgsmål synes ikke fuldt opklaret. Vi vil først undersøge det 1-dimensionale tilfælde, som er væsentligt lettere end det generelle.

Hvis $a \in \mathbb{R}$ er nulpunkt for $\alpha \in \mathcal{E}_1$, eksisterer der en kontinuert funktion $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, så at

$$\alpha(x) = (x - a)\beta(x),$$

og det er klart, at β er entydigt bestemt, og at β er vilkårlig ofte differentiabel for $x \neq a$. Det er ikke på forhånd klart, at β tilhører $\mathcal{E}_1$, men dette viser sig dog at gælde. Mere præcist har vi følgende "middelværdisætning":

Sætning 1: Af $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathcal{E}_1$, $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha(a) = 0$, $\alpha(x) = (x - a)\beta(x)$, følger, at $\beta \in \mathcal{E}_1$, og for hvert $n \in \mathbb{N}$ og hvert $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ findes et tal ξ i det åbne interval med endepunkter a og x , så at

$$D^n \beta(x) = \frac{1}{n+1} D^{n+1} \alpha(\xi).$$

Desuden er

$$D^n \beta(a) = \frac{1}{n+1} D^{n+1} \alpha(a).$$

Bevis: Da β er kontinuert på $\mathbb{R}$ og vilkårlig ofte differentiabel på $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, er

$$\beta(x) = \int_0^1 D\alpha(a+t(x-a))dt,$$

hvilket viser, at $\beta \in \mathcal{E}_1$, og at

$$D^n \beta(x) = \int_0^1 D^{n+1} \alpha(a+t(x-a)) t^n dt.$$

Da t^n er positiv i integrationsintervallet, og $D^{n+1} \alpha$ er kontinuert, findes der et tal $\theta \in]0, 1[$, så at

$$D^n \beta(x) = D^{n+1} \alpha(a+\theta(x-a)) \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} D^{n+1} \alpha(a+\theta(x-a)).$$

Dermed er den første af de i sætningen anførte relationer bevist. Den anden fås umiddelbart ved grænseovergangen $x \rightarrow a$.

Sætning 2: Af $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathcal{E}_1$, $\alpha(a) = 0$, $\alpha(x) = (x-a)\beta(x)$ følger, at $\beta \in \mathcal{E}_1$, og for ethvert interval $I \subseteq \mathbb{R}$ med $a \in I$ gælder

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sup_{x \in I} |D^n \beta(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{x \in I} |D^{n+1} \alpha(x)|.$$

Bevis: Af sætning 1 fås umiddelbart for ethvert $\gamma \in \mathbb{R}$, at

$$\sup_{x \in I} |\operatorname{Re} D^n e^{i\gamma} \beta(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{x \in I} |\operatorname{Re} D^{n+1} e^{i\gamma} \alpha(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{x \in I} |D^{n+1} \alpha(x)|,$$

og sætningen følger umiddelbart, idet γ vælges, så at $D^n e^{i\gamma} \beta(x)$ er positiv, i det punkt, hvor $|\beta(x)|$ antager sin maksimale værdi på $\bar{I}$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 3: Den ved $J(\varphi) = X\varphi$ bestemte afbildning $J : \mathcal{D}_1$ ind i $\mathcal{D}_1$ er en homeomorfi af $\mathcal{D}_1$ på underrummet $X\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_1$. Underrummet $X\mathcal{D}_1$ har codimension 1 i $\mathcal{D}_1$ og er afsluttet.

Bevis: Ved induktion får vi, at

$$D^n(X\varphi) = nD^{n-1}\varphi + XD^n\varphi,$$

Da J er en lineær afbildning medfører dette, at J er kontinuert. Vi har allerede set, at J er injektiv. Af sætning 2 følger dernæst umiddelbart, at J^{-1} er kontinuert. Vi vælger $\varphi_0 \in \mathcal{D}_1$, så at $\varphi_0(0) = 1$. Vi har da $\varphi_0(0) \in \mathcal{D}_1 \setminus X\mathcal{D}_1$, altså $X\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_1$. For $\varphi \in \mathcal{D}$ sætter vi $\varphi_1 = \varphi - \varphi(0)\varphi_0$, og vi har da $\varphi_1 \in X\mathcal{D}_1$ og $\varphi = \varphi(0)\varphi_0 + \varphi_1$, hvilket viser, at $\mathcal{D}$ er direkte sum af $X\mathcal{D}_1$ og det af φ_0 udspændte underrum af $\mathcal{D}_1$. Altså har $X\mathcal{D}_1$ codimension 1. Da J er en lineær homeomorfi mellem $\mathcal{D}_1$ og $X\mathcal{D}_1$, er $X\mathcal{D}_1$ fuldstændigt, og derfor afsluttet i $\mathcal{D}_1$. Dermed er sætningen bevist.

Sætning 4: Ligningen

$$(1) \quad xX = 0,$$

hvor $X \in \mathcal{D}'_1$ er en ubekendt distribution, har som løsninger netop alle distributioner $c\delta$, $c \in \mathbb{C}$.

Bevis: For $T \in \mathcal{D}'_1$, $\varphi \in \mathcal{D}_1$ gælder $xT(\varphi) = T(x\varphi)$, og heraf fremgår, at T er løsning til (1), hvis og kun hvis T afbilder hele $x\mathcal{D}_1$ ind i 0. Med den i beviset for sætning 3 benyttede spaltning $\varphi = \varphi(0)\varphi_0 + \varphi_1$, $\varphi_1 \in x\mathcal{D}_1$ får vi derfor

$$T(\varphi) = \varphi(0)T(\varphi_0) = T(\varphi_0)\delta(\varphi),$$

hvis T er løsning til (1). Dermed har vi vist, at enhver løsning til (1) har formen $c\delta$, $c \in \mathbb{C}$. Da $x\delta = 0$, er enhver sådan distribution løsning til (1). Dermed er sætningen bevist.

Sætning 5: Enhver ligning

$$(2) \quad xX = T,$$

hvor $T \in \mathcal{D}'_1$, og hvor $X \in \mathcal{D}'_1$ er en ubekendt distribution har løsninger. Hvis T_0 er løsning til (2), omfatter løsningsmængden netop alle distributioner $T_0 + c \delta$, $c \in \mathbb{C}$.

Bevis: En afbildning $S : x\mathcal{D}'_1$ ind i $\mathbb{C}$ defineres ved

$$S(\varphi) = T\left(\frac{1}{x} \varphi\right).$$

Så er S lineær, og af sætning 3 følger, at S er kontinuert på $x\mathcal{D}'_1$. Med den i de foregående sætninger anvendte spaltning af $\varphi = \varphi(0)\varphi_0 + \varphi_1$ definerer vi nu

$$T_0(\varphi) = S(\varphi_1),$$

og T_0 vil da tilfredsstille (2). Den sidste påstand fås umiddelbart af sætning 4, da ligningen er lineær.

Lad os fx. betragte ligningen

$$xX = D^n \delta.$$

Vi vælger $\varphi_0 \in \mathcal{D}_1$ med $\varphi_0(0) = 1$ og for $\varphi \in \mathcal{D}_1$ har vi da løsningen

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= D^n \delta \left(\frac{1}{x} (\varphi - \varphi(0)\varphi_0) \right) \\ &= (-1)^n \delta \left(D^n \left(\frac{1}{x} (\varphi - \varphi(0)\varphi_0) \right) \right). \end{aligned}$$

Den sidste formel i sætning 1 ses umiddelbart at gælde også for komplekse α og β . I det foreliggende tilfælde giver formelen

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \frac{(-1)^n}{n+1} \delta(D^{n+1}(\varphi - \varphi(0)\varphi_0)) = \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} (D^{n+1}\varphi(0) - \varphi(0)D^{n+1}\varphi_0(0)), \end{aligned}$$

hvilket viser, at

behandlede. I dette tilfælde får vi som kvotient en overalt lokalt defineret distribution. I omegnen af hvert nulpunkt får vi uendelig mange forskellige kvotienter, men disse afviger kun i nulpunktet. Vælger vi nu samtlige omegne sådan, at den valgte omegn af hvert $x \in \mathbb{R}$ er et åbent interval, som ikke indeholder noget fra x forskelligt nulpunkt for α , vil fast valgte kvotienter i omegne af to forskellige punkter altid stemme overens i de to omegnes fællesmængde, og de lokale kvotienter vil da definere en kvotient på hele rummet.

Division er således altid mulig, når divisor tilhører $\mathcal{E}_1$ og kun har nulpunkter af endelig orden. Det skader ikke, hvis divisor har uendelig mange nulpunkter.

Lad os nu på den anden side betragte en funktion $\alpha \in \mathcal{E}_1$ med et isoleret nulpunkt af uendelig høj orden i 0. For $S \in \mathcal{D}'$ er $\alpha S(\varphi) = S(\alpha\varphi)$, og her er $D^q(\alpha\varphi)(0) = 0$ for $q = 0, 1, 2, \dots$. Heraf følger, at $\alpha S(\varphi) = 0$ for ethvert φ , hvis S har støtte $\{0\}$. Men ligningen

$$\alpha X = \delta$$

kan som løsning kun have distributioner, hvis restriktioner til en passende omegn af 0 har støtte $\{0\}$, men for en sådan distribution S fås ifølge ovenstående, at αS forsvinder på en omegn af 0. Altså har ligningen $\alpha X = \delta$ ingen løsning.

For

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

har ligningen $\alpha X = 1$ ingen løsninger. På $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er den til $e^{x^{-2}}$ svarende distribution nemlig den eneste løsning, og den kan ikke udvides til en distribution på hele $\mathbb{R}$.

Vi skal ikke her omtale divisionsproblemet for $m > 1$, men blot nævne, at det giver anledning til væsentlige komplikationer, og at det ikke kan siges at være fuldt opklaret.

24. kapitel.Sædvanlige differentialligninger.

Vi vil indledningsvis studere en lineær differential-
ligning af formen

$$(1) \quad DX + \alpha X = T,$$

hvor $\alpha \in \mathcal{E}_1$, $T \in \mathcal{D}'_1$, mens X er en ubekendt distribution. Hvis T specielt er en kontinuert funktion, kender vi den fuldstændige løsning fra den klassiske teori, men vi må sikre os, at ligningen ikke også får andre distributioner som løsninger.

Ligningen (1) er ensbetydende med, at vi for alle $\varphi \in \mathcal{D}$ har

$$DX(\varphi) + \alpha X(\varphi) = T(\varphi)$$

eller

$$(2) \quad X(D\varphi - \alpha\varphi) = -T(\varphi).$$

Den ved $E(\varphi) = D\varphi - \alpha\varphi$ bestemte operator $E : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ ind i $\mathcal{D}_1$ er lineær og kontinuert. Ligningen (2) fastlægger fuldstændigt løsningen til (1) på underrummet $E(\mathcal{D}_1) \subseteq \mathcal{D}_1$.

At bestemme underrummet $E(\mathcal{D}_1)$ kommer ud på at bestemme de $\psi \in \mathcal{D}_1$, for hvilke der eksisterer $\varphi \in \mathcal{D}_1$, som tilfredsstiller ligningen

$$(3) \quad DX - \alpha X = \psi.$$

Vi ved fra den klassiske teori, at (3) har den fuldstændige løsning bestemt ved

$$\{e^{\beta(x)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x)} \psi(x) dx + ce^{\beta(x)} \mid c \in \mathbb{C}\},$$

hvor β er en stamfunktion til α . Nu kræver $\varphi \in \mathcal{D}_1$ imidlertid, at φ har kompakt støtte, og det sker højst for $c = 0$, så vi har

$$(4) \quad \varphi(x) = e^{\beta(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x)} \psi(x) dx,$$

som har kompakt støtte, hvis og kun hvis

$$(5) \quad \int e^{-\beta} \psi = 0.$$

Af (4) ses nu, at $E : \mathcal{D}_1$ ind i $\mathcal{D}_1$ er injektiv, samt at $E^{-1} : E(\mathcal{D}_1)$ på $\mathcal{D}_1$ er kontinuert. Altså er E en indlejring af $\mathcal{D}_1$ som ægte delrum af $\mathcal{D}_1$.

Af (5) fremgår, at $E(\mathcal{D}_1)$ er den mængde, som er polar til det 1-dimensionale underrum af $\mathcal{D}_1'$, som udspændes af den til $e^{-\beta}$ svarende distribution.

En løsning til den homogene ligning

$$(6) \quad DX + \alpha X = 0$$

er altså ifølge (2) en distribution der afbilder $E(\mathcal{D}_1)$ på 0, altså en distribution, der tilhører det polare underrum til $E(\mathcal{D}_1)$, men det er det af $e^{-\beta}$ udspændte underrum af $\mathcal{D}_1'$. Dermed har vi bevist, at (6) har den fuldstændige løsning $\{ce^{\beta} | c \in \mathbb{C}\}$, altså den samme som i det klassiske tilfælde.

Det er nu let at bestemme den fuldstændige løsning til (1). Vi vælger $\psi_0 \in \mathcal{D}_1$, således at

$$\int e^{-\beta} \psi_0 = 1.$$

For $\psi \in \mathcal{D}_1$ vil da

$$p(\psi) = \psi - \psi \int e^{-\beta} \psi$$

være et element af $E(\mathcal{D}_1)$, og den ved

$$(7) \quad S(\psi) = -T(E^{-1}(p(\psi)))$$

vil tilfredsstille (2) og dermed (1), idet

$$\begin{aligned} S(E(\psi)) &= -T(E^{-1}(p(E(\psi)))) \\ &= -T(E^{-1}(E(\psi) - \psi \int e^{-\beta} E(\psi))) \\ &= -T(E^{-1}(E(\psi))) \\ &= -T(\psi), \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at $\int e^{-\beta} E(\psi) = 0$, da $E(\psi) \in E(\mathcal{D}_1)$.

I udtrykket (7) er

$$E^{-1}(p(\psi))(x) = e^{\beta(x)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(t)} (\psi(t) - \psi_0(t)) \int e^{-\beta\psi} dt.$$

Vi sætter

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\beta(t)} (\psi(t) - \psi_0(t)) \int e^{-\beta\psi} dt,$$

og vi vælger en stamdistribution T_1 til $e^{\beta T}$. Derved får vi

$$\begin{aligned} S(\psi) &= -T(e^{\beta\Phi}) = -e^{\beta T}(\Phi) = -DT_1(\Phi) = T_1(D\Phi) = \\ &= T_1(e^{-\beta}(\psi - \psi_0) \int e^{-\beta\psi}) = e^{-\beta T_1}(\psi - \psi_0) \int e^{-\beta\psi} = \\ &= e^{-\beta T_1}(\psi) - e^{-\beta T_1}(\psi_0) \int e^{-\beta\psi} = \\ &= e^{-\beta T_1}(\psi) + c \tilde{u}(\psi), \end{aligned}$$

hvor c betegner konstanten $e^{-\beta T_1}(\psi_0)$, og u betegner $e^{-\beta}$.

Dermed har vi vist, at

$$(8) \quad S = e^{-\beta T_1} + c e^{-\beta},$$

hvor $DT_1 = e^{\beta T}$.

Udtrykket (8) stemmer helt overens med løsningen i det klassiske tilfælde. Ovenfor benyttede vi den udvej at gå over i dualrummet $\mathcal{D}_1$ i stedet for at løse ligningen i $\mathcal{D}_1'$. Det er i virkeligheden lettere at løse ligningen direkte i $\mathcal{D}_1'$ ved at kopiere de arbitrære koefficienters variationsmetode, altså sætte

$$X = e^{-\beta Y},$$

hvor Y er en ny ubekendt distribution. Ved at indsætte dette i (1) får vi

$$e^{-\beta DY} = T \quad \text{altså} \quad DY = e^{\beta T},$$

og opgaven er reduceret til bestemmelse af en stamdistribution.

Den i (1) optrædende differentialoperator $D + \alpha$ afbilder $\mathcal{D}_1^!$ ind i sig selv, og den i (2) og (3) optrædende operator $D - \alpha$ afbilder $\mathcal{D}_1$ på sig selv. De to operatorer kaldes indbyrdes adjungerede. Vi vil indføre begrebet adjungeret under mere generelle omstændigheder.

Lad (E, E') og (E_1, E_1') være to par af vektorrum i dualitet over $\mathbb{C}$, og lad $A : E \rightarrow E_1$ være en lineær afbildning. Et element $T_1 \in E_1'$ definerer en afbildning $T_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ved $T_1(\varphi_1) = \langle \varphi_1, T_1 \rangle$. Ved den til A adjungerede lineære afbildning $A^* : E_1' \rightarrow E'$ forstår vi den ved

$$A^*(T_1) = T_1 \circ A$$

definerede afbildning. Her er $T_1 \circ A : E \rightarrow \mathbb{C}$ virkelig en lineær afbildning, men vi må forlange, at $T_1 \circ A$ yderligere er et element af E' . Dette vil imidlertid være opfyldt, hvis blot det er muligt på E og E' at vælge topologier forenelige med dualiteten, så A bliver kontinuert. Det vil nemlig sikre at $T_1 \circ A$ bliver kontinuert i en topologi, der er forenelig med dualiteten, og det medfører netop, at $T_1 \circ A \in E'$.

Vi lægger mærke til, at de adjungerede afbildninger går hver sin vej:

$$A : E \rightarrow E_1, \text{ men } A^* : E_1' \rightarrow E'$$

Definitionen $A^*(T_1) = T_1 \circ A$ giver

$$A^*(T_1)(\varphi) = T_1(A(\varphi)),$$

eller udtrykt ved indre produkt

$$\langle \varphi, A^*(T_1) \rangle = \langle A(\varphi), T_1 \rangle.$$

Denne relation fastlægger fuldstændigt A^* . Den viser også, at A er den adjungerede til A^* , hvilket berettiger os til at sige, at A og A^* er indbyrdes adjungerede.

Relationen

$$-X(D\varphi - \alpha\varphi) = DX(\varphi) + \alpha X(\varphi)$$

viser netop, at differentialoperatorerne

$$-D + \alpha : \mathcal{D}_1 \text{ ind i } \mathcal{D}_1 \text{ og}$$

$$D + \alpha : \mathcal{D}_1' \text{ ind i } \mathcal{D}_1'$$

er indbyrdes adjungerede.

Den tilsvarende teori for simultane lineære differentiaalligninger får en bekvem form ved en passende anvendelse af matrixregning. Vi starter med nogle forberedelser.

Definition 1. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $a \in I$ et punkt.

Lad $\underline{\alpha} = (\alpha_{pq})$ være en n^2 -matrix, hvis elementer er kontinuerlige afbildninger $\alpha_{pq} : I \rightarrow \mathbb{C}$. Ved den til $\underline{\alpha}$ svarende Neumann-følge forstår vi følgen $(\underline{\alpha}_k)$, hvor $\underline{\alpha}_0$ er enhedsmatricen og

$$\underline{\alpha}_k(x) = \int_a^x (\underline{\alpha}(t_k)) \int_a^{t_k} (\underline{\alpha}(t_{k-1})) \int_a^{t_{k-1}} (\dots (\underline{\alpha}(t_2)) \int_a^{t_2} \underline{\alpha}(t_1) dt_1) \dots) dt_{k-1} dt_k$$

Vi integrerer og differentierer matricer ledvis. Vi bemærker, at

$$(9) \quad D\underline{\alpha}_k(x) = \underline{\alpha}(x)\underline{\alpha}_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Sætning 1. Hvis M er valgt således, at $\|\alpha_{pq}\|_U < M$ for alle p og q , da vil $\underline{\alpha}_k = \alpha_{pq}^k$ tilfredsstille betingelsen

$$\|\alpha_{pq}^k\|_U \leq \frac{1}{k!} (nM|x-a|)^k, \text{ for alle } p, q \text{ og } k.$$

Bevis Betingelsen er opfyldt for $k = 0$. Vi antager den opfyldt for en værdi af k . Vi har nu

$$\underline{\alpha}_{k+1}(x) = \int_a^x \underline{\alpha}(t) \underline{\alpha}_k(t) dt,$$

altså

$$\alpha_{pq}^{k+1}(x) = \int_a^x \sum_{r=1}^n \alpha_{pr}(t) \alpha_{rq}^k(t) dt,$$

hvilket medfører vurderingen

$$|\alpha_{pq}^{k+1}(x)| \leq nM \frac{1}{k!} (nM)^k \left| \int_a^x |t-a|^k dt \right| \leq \frac{1}{(k+1)!} (nM |x-a|)^{k+1},$$

og dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Med betegnelserne fra definition 1 kaldes

$$\tilde{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\alpha}_k(x)$$

den til $\underline{\alpha}$ svarende resolventmatrix.

Rækken konvergerer ifølge sætning 2. Vi erindrer om, at $\underline{\alpha}_k$ og $\tilde{\alpha}$ afhænger på væsentlig måde af punktet $a \in I$, men det har vi ikke givet udtryk for i betegnelserne.

Sætning 2. Resolventmatricen $\tilde{\alpha}$ tilfredsstiller betingelsen

$$D \tilde{\alpha} = \underline{\alpha} \tilde{\alpha}.$$

Bevis: Af (9) og sætning 1 følger først, at $\tilde{\alpha}$ kan differentieres ved ledvis differentiation af rækken, og derefter følger sætning 2 umiddelbart.

Sætning 3. Resolventmatricen $\tilde{\alpha}$ er regulær (dvs. har fra 0 forskellig determinant) for ethvert $x \in I$. Ligningen

$$D \xi = \underline{\alpha} \xi$$

har som løsning netop alle matricer $\tilde{\alpha} \underline{c}$, hvor $\underline{c}$ er en vilkårlig konstant matrix.

Bemærkning: Nulpunktsmængden er afsluttet, da funktionerne "det" og " $\tilde{\alpha}$ " er kontinuerte.

Bevis: Da $\tilde{\alpha}(a)$ er en enhedsmatrix, og $\tilde{\alpha}$ er kontinuert, er $|\tilde{\alpha}(x)| \neq 0$ for alle $x \in I_1$, hvor $I_1 \subset I$ er et åbent interval. Hvis nu ξ er en løsning på en omegn af a , kan ξ i et vist interval I_2 med a som indre punkt skrives på formen $\xi = \tilde{\alpha} \underline{c}$, hvor $\underline{c}$ er en eller anden differentiabel matrix. Vi skal vise, at $\underline{c}$ er konstant. Ved indsættelse i ligningen får vi nu

$$(D \tilde{\alpha}) \underline{c} + \tilde{\alpha} D \underline{c} = \underline{\alpha} \tilde{\alpha} \underline{c},$$

og da $D \tilde{\alpha} = \underline{\alpha} \tilde{\alpha}$, følger heraf, at $\tilde{\alpha} D \underline{c} = \underline{0}$, altså $D \underline{c} = \underline{0}$, hvilket medfører, at $\underline{c}$ er konstant. Nu vil $\xi = \tilde{\alpha} \underline{c}$ tilfredsstille ligningen på hele I . Vi har således også vist, at enhver løsning på et interval omkring a er restriktion af en løsning på hele I . Lad nu $b \in I$ være et vilkårligt punkt. I punktet b får vi en anden resolventmatrix $\tilde{\beta}$, hvor $\tilde{\beta}(b)$ er en enhedsmatrix. Da $\tilde{\beta}$ er løsning på hele I , findes der en konstant matrix $\underline{c}_1$, så at $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \underline{c}_1$ på intervallet I_1 . Lad nu I_1 være det maksimale interval om a , hvor $|\tilde{\alpha}(x)| \neq 0$. Hvis $I_1 \neq I$, kan vi specielt vælge b som et endepunkt af I_1 , der er et indre punkt af I . Vi får da $\underline{\beta}(b) = \tilde{\alpha}(b) \underline{c}$ på grund af kontinuiteten, altså $1 = |\underline{\beta}(b)| = |\tilde{\alpha}(b)| |\underline{c}|$, hvilket medfører, at $|\tilde{\alpha}(b)| \neq 0$. Men så er $|\tilde{\alpha}(x)| \neq 0$ i en omegn af b i modstrid med, at I_1 var maksimalt. Altså er $I_1 = I$. Dermed er sætningen bevist.

Det er nu let at behandle et system af differential-ligninger

$$DX_p - \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} X_q = T_p; \quad p = 1, \dots, n,$$

hvor $T_1, \dots, T_n$ er givne, og $X_1, \dots, X_n$ er ubekendte distributioner, mens α_{pq} er vilkårlig ofte differentiable funktioner. Vi benytter en vektornotation $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)$, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ og skriver ligningssystemet på formen

$$(10) \quad D\underline{X} - \underline{\alpha}\underline{X} = \underline{T}.$$

Vi bemærker først, at den til $\underline{\alpha}$ svarende resolventmatrix $\tilde{\underline{\alpha}}$ er vilkårlig ofte differentiablel, ifølge relationen i sætning 2. Vi kan derfor benytte de arbitrære koefficienters variationsmetode, idet vi prøver $\underline{X} = \tilde{\underline{\alpha}} \underline{Y}$ i ligningen. Indsættelse giver på grund af sætning 2, at $\tilde{\underline{\alpha}} \underline{Y}$ er en løsning, hvis og kun hvis

$$\tilde{\underline{\alpha}} D\underline{Y} = \underline{T}.$$

Da $\tilde{\underline{\alpha}}(x)$ er regulær for alle x , er $\tilde{\underline{\alpha}}^{-1}$ en vilkårlig ofte differentiablel matrix, og ligningen er ensbetydende med

$$D\underline{Y} = \tilde{\underline{\alpha}}^{-1} \underline{T}.$$

Hvis $\underline{S}$ er en stamdistribution til $\tilde{\underline{\alpha}}^{-1} \underline{T}$, har (10) den fuldstændige løsning

$$\tilde{\underline{\alpha}} \underline{S} + \tilde{\underline{\alpha}} \underline{C},$$

hvor $\underline{C} = (C_1, \dots, C_n)$ er konstant.

Rummene $\mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1^{(n)}$ og $\mathcal{D}_1' \times \dots \times \mathcal{D}_1' = \mathcal{D}_1'^n$ er i dualitet ved det indre produkt

$$\underline{T}(\varphi) = T_1(\varphi_1) + \dots + T_n(\varphi_n),$$

og vi får

$$(D\underline{X} - \underline{\alpha}\underline{X})(\varphi) = D\underline{X}(\varphi) - (\underline{\alpha}\underline{X})(\varphi).$$

Her er

$$\begin{aligned}
 (\underline{\alpha} \underline{X})(\underline{\varphi}) &= \sum_{p=1}^n (\underline{\alpha} \underline{X})_p (\varphi_p) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \alpha_{pq} X_q (\varphi_p) \\
 &= \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^n X_q (\alpha_{pq} \varphi_p) = \underline{X}(\underline{\alpha}^t \underline{\varphi}),
 \end{aligned}$$

hvor $\underline{\alpha}^t$ er den transponerede af $\underline{\alpha}$. Altså er

$$(\underline{D} \underline{X} - \underline{\alpha} \underline{X})(\underline{\varphi}) = -\underline{X}(\underline{D} \underline{\varphi} + \underline{\alpha}^t \underline{\varphi}),$$

hvilket viser, at $\underline{D} - \underline{\alpha}$ har en selvadjungeret operator $-\underline{D} - \underline{\alpha}^t$.

Differentialligningen

$$D^n X + \alpha_{n-1} D^{n-1} X + \dots + \alpha_1 DX + \alpha_0 X = T$$

er ækvivalent med systemet ($X = X_1$)

$$DX_1 - X_2 = 0$$

.....

$$DX_{n-1} - X_n = 0$$

$$DX_n + \alpha_{n-1} X_n + \dots + \alpha_1 X_2 + \alpha_0 X_1 = T,$$

og heraf følger umiddelbart, at den klassiske eksistenssætning gælder uændret også i dette tilfælde.

Af udregningen

$$\begin{aligned}
 (D^n X + \alpha_{n-1} D^{n-1} X + \dots + \alpha_1 DX + \alpha_0 X)(\varphi) &= \\
 D^n X(\varphi) + D^{n-1} X(\alpha_{n-1} \varphi) + \dots + DX(\alpha_1 \varphi) + X(\alpha_0 \varphi) &= \\
 X((-1)^n D^n \varphi + (-1)^{n-1} D^{n-1}(\alpha_{n-1} \varphi) + \dots - D(\alpha_1 \varphi) + \alpha_0 \varphi) &
 \end{aligned}$$

fremgår, at differentialoperatoren

$$X \rightarrow D^n X + \alpha_{n-1} D^{n-1} X + \dots + \alpha_1 DX + \alpha_0 X$$

har den adjungerede operator

$$\varphi \rightarrow (-1)^n D^n \varphi + (-1)^{n-1} D^{n-1}(\alpha_{n-1} \varphi) + \dots - D(\alpha_1 \varphi) + \alpha_0 \varphi.$$

Vi afslutter kapitlet med to meget simple eksempler, der illustrerer virkningen af singulariteter.

Ligningen

$$x^3 DX \pm 2X = 0$$

har på hvert af intervallerne $]-\infty, 0[$ og $]0, \infty[$ som fuldstændig løsning de sædvanlige funktioner $ce^{\pm x^{-2}}$. ~~og af disse løsninger kan kun nulløsningen udvides til en distribution på hele akse.~~ En sådan udvidelse kan kun blive en linearkombination af differentialkvotienter af δ -funktionen. Nu er

$$\begin{aligned} x^3 D^{n+1} \delta(\varphi) \pm 2 D^n \delta(\varphi) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \delta(D^{n+1-k}(x^3 \varphi) - 2 D^{n-k} \varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \delta(D^n(x^3 D \varphi + (3x^2 - 2)\varphi)). \end{aligned}$$

Vælger vi φ , så at $D^k \varphi(0) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$; $D^n \varphi(0) \neq 0$, bliver udtrykket $\neq 0$, men forsvinder for alle lavere værdier af n . Heraf følger, at ingen linearkombination af differentialkvotienter af δ er løsning til ligningen. Denne har altså de samme løsninger, som i det klassiske tilfælde.

Ligningen

$$x DX - X = 0$$

har funktionerne cx , $c \in \mathbb{C}$ som løsninger. Vi indsætter $X = xY$ og får

$$x^2 DY = 0,$$

som er ensbetydende med

$$DY = c_1 \delta + c_2 D\delta$$

eller

$$Y = c + c_1 X]_{0, \infty[+ c_2 \delta,$$

altså

$$X = cx + c_1 xX]_{0, \infty[,$$

Bemærkning: Da $x \delta = 0$, får vi, at

$$X = x Y = cx + c_1 x X]_{0, \infty[+ c_2 x \delta = cx + c_1 x X]_{0, \infty[.$$

I stedet for $X]_{0, \infty[$ kan man naturligvis skrive $1]_{0, \infty[.$

Fx. er

$$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ c_2 e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

en god løsning.

idet $x\delta$ er nuldistributionen. Som løsning får vi således udelukkende sædvanlige funktioner. Den almindelige løsning kan skrives $\{cx + c_1|x| \mid c, c_1 \in \mathbb{C}\}$. Singulariteten bevirker altså, at løsningerne ikke behøver at være differentiable i 0.

Ligningen

$$xDX + X = 0$$

har i klassisk forstand løsningen $\frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{C}$ på hvert af intervallerne $]-\infty, 0[$ og $]0, \infty[$. Ligningen er ensbetydende med

$$D(xX) = 0,$$

altså med

$$xX = c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Denne ligning har som løsning cT_0 , hvor T_0 er defineret ved

$$T_0(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-h} + \int_h^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx,$$

og den fuldstændige løsning bliver

$$cT_0 + c_1\delta, \quad c, c_1 \in \mathbb{C}.$$

Bortset fra nulløsningen er der ingen sædvanlige funktioner blandt løsningerne.

25. kapitel.Partielle differentialligninger.Forberedende undersøgelser.

Vi vil beskæftige os med partielle differentialoperatorer af formen

$$(1) \quad \Phi = \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}},$$

hvor hver koefficient $\alpha_{\underline{k}}$ tilhører $\mathcal{G}_m$. For $T \in \mathcal{D}'_m$, $\varphi \in \mathcal{D}_m$ er

$$\begin{aligned} \Phi T(\varphi) &= \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}} T(\varphi) = \sum_{|\underline{k}| \leq p} D^{\underline{k}} T(\alpha_{\underline{k}} \varphi) = \\ &= T\left(\sum_{|\underline{k}| \leq p} (-1)^{|\underline{k}|} D^{\underline{k}}(\alpha_{\underline{k}} \varphi)\right). \end{aligned}$$

Heraf følger, at den adjungerede operator Φ^* er givet ved

$$\Phi^*(\varphi) = \sum_{|\underline{k}| \leq p} (-1)^{|\underline{k}|} D^{\underline{k}}(\alpha_{\underline{k}} \varphi).$$

Det er klart, at Φ og Φ^* er kontinuerte afbildninger

$$\Phi : \mathcal{D}'_m \text{ ind i } \mathcal{D}'_m ; \quad \Phi^* : \mathcal{D}_m \text{ ind i } \mathcal{D}_m.$$

Løsningsmængden til den homogene differentialligning

$$\Phi X = 0$$

er netop polarrummet til billedrummet $\Phi^*(\mathcal{D}_m) \subseteq \mathcal{D}_m$. Løsningsmængden til en inhomogen differentialligning

$$\Phi X = T$$

er en lineær mangfoldighed parallel med dette polarrum forudsat, at der overhovedet findes løsninger.

Sætning 1. Løsningsmængden til $\Phi X = T$ er en afsluttet lineær mangfoldighed i $\mathcal{D}'_m$.

Bevis: Sætningen følger umiddelbart af, at Φ er lineær og kontinuert.

Sætning 2. De p gange kontinuert differentiable funktioner, som er løsninger til $\Phi X = T$ udgør en afsluttet lineær mangfoldighed i vektorrummet af p gange kontinuert differentiable funktioner udstyret med den topologi, der svarer til ligelig konvergens på kompakte mængder.

Vi har $\{X \in \mathcal{D}' \mid X \in \mathcal{E}^p \wedge \Phi X = T\} = \mathcal{E}^p \cap \Phi^{-1}(T) \subseteq \mathcal{E}^p$ med delrumstopologien fra $\mathcal{E}^0$.

Bevis: Sætningen følger umiddelbart af sætning 1, idet det nævnte vektorrum er et underrum i $\mathcal{D}'_m$, og den nævnte topologi er finere end delrumstopologien.

Selv om en følge af løsningsfunktioner til $\Phi X = T$ konvergerer ligeligt på enhver kompakt mængde mod en grænsefunktion f , behøver f ikke at være en løsning i klassisk forstand, da f ikke behøver at være differentiablel, men sætning 2 fortæller os netop, at en sådan grænsefunktion vil være en løsning, hvis den er p gange kontinuert differentiablel. Det mærkelige er, at det ikke er nødvendigt at forudsætte, at differentialkvotienterne konvergerer.

Lad $f : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ være en p gange kontinuert differentiable funktion. Vi indfører $g : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{C}$ defineret ved

$$g(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{hvis } x_m \geq 0 \\ 0, & \text{hvis } x_m < 0. \end{cases}$$

Vi vil forsøge at anvende differentialoperatoren (1) på distributionen $\check{g}$. Vi får for $\varphi \in \mathcal{D}$, at

296₅ Dette svarer til et begyndelsesværdiproblem på hyperfladen $z_m = 0$.

$$\begin{aligned}
\Phi \tilde{g}(\varphi) &= \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}} \tilde{g}(\varphi) = \sum_{|\underline{k}| \leq p} D^{\underline{k}} \tilde{g}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) \\
&= \sum_{|\underline{k}| \leq p} (-1)^{|\underline{k}|} \tilde{g}(D^{\underline{k}}(\alpha_{\underline{k}} \varphi)) \\
&= \sum_{|\underline{k}| \leq p} (-1)^{|\underline{k}|} \int g D^{\underline{k}}(\alpha_{\underline{k}} \varphi).
\end{aligned}$$

For et led med $k_m > 0$ har vi nu ved anvendelse af delt integration

$$\begin{aligned}
\int g D^{\underline{k}}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) &= - \int D_m g D^{\underline{k}-\underline{e}_m}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) - \\
&\int \dots \int g(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) D^{\underline{k}-\underline{e}_m}(\alpha_{\underline{k}}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)) \\
&\varphi(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) dx_1 \dots dx_{m-1}.
\end{aligned}$$

For at kunne skrive dette bekvemt indfører vi betegnelsen $\tilde{D}^{\underline{k}}g$ for den til $D^{\underline{k}}g$ svarende distribution, idet $D^{\underline{k}}g$ er restriktionen af $D^{\underline{k}}f$ til det ved $x_m \geq 0$ bestemte halvrum.

Endvidere vil vi for $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ sætte $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ og $d\underline{x}' = dx_1 \dots dx_{m-1}$. Formlen bliver da

$$D^{\underline{k}}\tilde{g}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) = D^{\underline{k}-\underline{e}_m} D_m g(\alpha_{\underline{k}} \varphi) + (-1)^{|\underline{k}|-1} \int g(\underline{x}') D^{\underline{k}-\underline{e}_m}(\alpha_{\underline{k}}(\underline{x}') \varphi(\underline{x}')) d\underline{x}'.$$

Vi indfører nu betegnelsen $\tilde{f}_j$ for den ved

$$\tilde{f}_j(\varphi) = \int D_m^j f(\underline{x}') \varphi(\underline{x}') d\underline{x}'$$

definerede distribution, og vi får da

$$D^{\underline{k}}\tilde{g}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) = D^{\underline{k}-\underline{e}_m} D_m g(\alpha_{\underline{k}} \varphi) + D^{\underline{k}-\underline{e}_m} \tilde{f}_0(\alpha_{\underline{k}} \varphi).$$

Nu kan det første led på højre side omskrives på tilsvarende måde. Ved gentagen anvendelse får vi med $\underline{k}' = (k_1, \dots, k_{m-1}, 0)$

$$D^{\underline{k}}\tilde{g}(\alpha_{\underline{k}} \varphi) = D^{\underline{k}'} D_m^{k_m} g(\alpha_{\underline{k}} \varphi) + \sum_{j=1}^{k_m} D^{\underline{k}-j\underline{e}_m} \tilde{f}_{j-1}(\alpha_{\underline{k}} \varphi).$$

Vi får således

$$(2) \quad \Phi \tilde{g} = \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} D_{\underline{k}}^{k'} D_m^{k_m} g + \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} \sum_{j=1}^{k_m} D_{\underline{k}-j\mathbf{e}_m}^{k-j\mathbf{e}_m} \tilde{f}_{j-1}$$

Det klassiske Cauchyproblem drejer sig om, at bestemme en p gange kontinuert differentiabel funktion f , så at

$$\Phi f = F,$$

hvor F er en given funktion, idet det samtidig kræves, at $D_m^j f$ for $j = 0, \dots, p-1$ stemmer overens med givne funktioner for $x_m = 0$. Dette betyder netop, at $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{p-1}$ er kendte distributioner. Idet vi nu søger at bestemme en løsning for $x_m \geq 0$, bemærker vi, at den første sum på højre side i (2) netop er restriktionen til $x_m \geq 0$ af den til Φf svarende distribution. I den sidste sum kender vi alle leddene. På distributionsform bliver Cauchyproblemet således:

Bestem en distribution T , så at

1° $\Phi T = H$, hvor H er summen af F og den sidste (kendte) sum i (2).

2° T har sin støtte i halvplanen ^{summed} $x_m \geq 0$.

3° T er en p gange kontinuert differentiabel funktion for $x_m > 0$, og differentialkvotienterne kan udvides kontinuert til halvrummet $x_m \geq 0$.

Det fremgår af vore overvejelser, at enhver funktion, der er løsning til det klassiske Cauchyproblem svarer til en distribution, der er løsning til Cauchyproblemet på distributionsform. Det omvendte er ikke ganske indlysende, og det er heller ikke helt rigtigt. Ved diskussionen vil vi antage, at det for $j = 0, \dots, p-1$ gælder, at de givne randværdier

$D_m^j f(\underline{x}')$ er $p-j$ gange differentiable. Vi har da, at

$D^{\underline{k}-j\underline{e}_m} \tilde{f}_{j-1}$ er en distribution, hvis orden er netop k_m-j .

Vi ordner den sidste sum i (2) efter leddenes orden og får

$$(3) \quad \sum_{|\underline{k}| \leq p} \sum_{\substack{\underline{k} \\ k_m > j}} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}-j\underline{e}_m} \tilde{f}_{k_m-j-1} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{|\underline{k}| \leq p} \sum_{\substack{\underline{k} \\ k_m > j}} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}-j\underline{e}_m} \tilde{f}_{k_m-j-1}.$$

Hvis g er en funktion, som er p gange kontinuert differentiablel for $x_m \geq 0$ og tilfredsstiller differentialligningen i distributionsforstand, vil g selvfølgelig have et sæt randværdier for $x_m = 0$, og disse randværdier vil da indsat i summen (3) give samme distribution som randværdierne for f . Hvis vi nu ved, at forskellige randværdier giver forskellige distributioner (3), kan vi slutte, at $g = f$, altså at det klassiske Cauchyproblem er ækvivalent med problemet på distributionsform. Da (3) afhænger lineært af randværdierne, er det netop nok at kunne slutte, at (3) er nuldistributionen, hvis og kun hvis $\tilde{f}_j = 0$, $j = 0, \dots, p-1$. Nu har leddene i den yderste sum på højre side af lighedstegnet indbyrdes forskellig orden, og det medfører, at summen kun forsvinder, såfremt

$$\sum_{|\underline{k}| \leq p} \sum_{\substack{\underline{k} \\ k_m > j}} \alpha_{\underline{k}} D^{\underline{k}-j\underline{e}_m} \tilde{f}_{k_m-j-1} = 0, j = 0, \dots, p-1.$$

I den anførte sum har leddet med højest index på $\tilde{f}$ formen

$$\alpha_{p\underline{e}_m} D^{j\underline{e}_m} \tilde{f}_{p-j-1}.$$

Hvis vi allerede ved, at alle $\tilde{f}$ med lavere index forsvinder, kan vi åbenbart slutte, at

$D_m^{j e} \tilde{f}_{p-j-1} = 0$, hvis $\alpha_{p e_m}(\underline{x}')$ ikke antager værdien 0. Men så er også $\tilde{f}_{p-j-1} = 0$. Vi ser således, at de to Cauchyproblemer er ækvivalente, hvis $\alpha_{p e_m}$ ikke har nulpunkter for $x_m = 0$. Dette vil specielt være opfyldt, hvis Φ har formen

$$\Phi = D_m^p + \sum_{\substack{|\underline{k}| \leq p \\ k_m < p}} \alpha_{\underline{k}} D_m^{\underline{k}}.$$

Almindeligere kan vi slutte, at de to problemer er ækvivalente i en omegn af ethvert punkt af $x_m = 0$, som ikke er nulpunkt for koefficienten til D_m^p .

Eksempel: For differentialligningen

$$D_x D_y f(x, y) = 0$$

får summen (3) formen

$$D_x \tilde{f}_0.$$

Summen bliver 0, hvis blot $\tilde{f}_0$ forsvinder, og $\tilde{f}_1$ influerer derfor slet ikke på ligningens løsning på distributionsform. Dette er nu slet ikke så trist, idet det klassiske Cauchyproblem netop ikke er løseligt for den pågældende ligning.

Et mere generelt Cauchyproblem fremkommer, når der er givet begyndelsesværdier på en krum flade i $\mathbb{R}^m$. Hvis denne flade er differentiabel, kan problemet omformes på distributionsform omtrent som beskrevet ovenfor. Vi skal nøjes med at vise dette for differentialoperatorer af første og anden orden.

Lad os først tænke os, at Φ er en differentialoperator

$$\Phi = \sum_{j=1}^m \alpha_j D_j,$$

hvor koefficienterne α_j er vilkårlig ofte differentiable funktioner i et område $O \subseteq \mathbb{R}^m$. Lad S være en differentiable flade, som deler O i O_1 og O_2 . Lad $f_0: S \text{ ind i } \mathbb{C}$ være en given kontinuert funktion, og lad $f: O \text{ ind i } \mathbb{C}$ være en løsning til differentiaalligningen

$$\Phi f + \alpha_0 f = \alpha,$$

hvor α_0 er en vilkårlig ofte differentiable funktion, og α er en kontinuert funktion, og hvor f tilfredsstiller randbetingelsen $f|_S = f_0$.

Vi definerer $g: O \text{ ind i } \mathbb{R}^m$ ved

$$g(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{for } \underline{x} \in \overline{O_1} \\ 0 & \text{for } \underline{x} \in O_2, \end{cases}$$

og vi vil udregne $\Phi \tilde{g}$. Vi vil først behandle et specielt tilfælde, idet vi antager, at f er en kontinuert differentiable afbildning $f: \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{C}$ med kompakt støtte indeholdt i en omegn U af et punkt $\underline{a} \in S$. Vi vil endvidere tænke os, at $U \cap S$ for hvert $j \in \{1, \dots, m\}$ kan fremstilles på formen

$$\{\underline{x} | \underline{x}'_j \in U_j \wedge x_j = \xi_j(\underline{x}'_j)\},$$

hvor $\underline{x}'_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$ og $\xi_j: U_j \text{ ind i } \mathbb{R}$ er kontinuert differentiable. Vi har da, hvis O_1 ligger på den side af S , hvor $x_j \rightarrow \xi_j(\underline{x}'_j)$, at

$$\begin{aligned} D_j \tilde{g}(\varphi) &= -\tilde{g}(D_j \varphi) = -\int \dots \int \left(\int_{\xi_j(\underline{x}'_j)}^{\infty} g D_j \varphi dx_j \right) d\underline{x}'_j \\ &= D_j g(\varphi) + \int_S g \varphi d\underline{x}'_j. \end{aligned}$$

Idet vi betegner grundvektorerne med $\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^m$, den mod O_1 rettede normalvektor til S med $\underline{v}$ og overfladeelementet med $d\sigma$, kan resultatet skrives

$$D_j \tilde{g}(\varphi) = \tilde{D}_j g(\varphi) + \int_S f\varphi(\underline{e}^j \cdot \underline{\nu}) d\sigma.$$

Idet vi har

$$\Phi \tilde{g}(\varphi) = \sum \alpha_j D_j \tilde{g}(\varphi) = \sum D_j \tilde{g}(\alpha_j \varphi),$$

får vi således

$$(3) \quad \Phi \tilde{g}(\varphi) = \tilde{\Phi} g(\varphi) + \int_S f\varphi(\underline{\nu} \cdot \sum \alpha_j \underline{e}^j) d\sigma.$$

Resultatet er udledt under forudsætning af, at $S \cap U$ opfylder en speciel betingelse. Vi bemærker, at vi for ethvert $\underline{a} \in S$ kan dreje koordinatsystemet i $\mathbb{R}^m$ om i en ny stilling, så betingelsen bliver opfyldt for passende valg af U . Hertil kræves blot, at ingen af koordinataksene er parallelle med tangentplanen til S i punktet $\underline{a}$. Hvis vi nu viser, at de enkelte led i (3) er invariante over for drejning i koordinatsystemet, kan vi derfor slutte, at (3) gælder lokalt uafhængigt af de anførte særlige betingelser.

For nemheds skyld vil vi benytte tensorregningens konvention, at der altid skal summeres fra 1 til m over indices, der forekommer to gange i et led. Et koordinatskifte er givet ved en ortogonal matrix (β_j^k) og dens inverse (γ_j^k) , hvor $\gamma_j^k = \beta_k^j$, og vi har de nye grundvektorer $\underline{e}_j^j$ og de nye koordinater x_j^j i følgende relationer til de gamle

$$\underline{e}_j^j = \beta_k^j \underline{e}_k^k, \quad \underline{e}_j^j = \gamma_k^j \underline{e}_k^k, \quad x_j^j = \gamma_j^k x_k^k, \quad x_j^j = \beta_j^k x_k^k.$$

Idet vi med D_j^j betegner differentiation med hensyn til de nye variable, får vi

$$D_j^j = \frac{\partial x_k^k}{\partial x_j^j} D_k^k = \beta_k^j D_k^k.$$

Da operatoren Φ er invariant over for koordinatskiftet, er

$$\alpha_j^j D_j^j = \alpha_j^j \beta_k^j D_k^k = \alpha_k^k D_k^k$$

har vi transformationen

$$\alpha_j = \beta_j^k \alpha_k', \quad \alpha_j' = \gamma_j^k \alpha_k.$$

Af omskrivningerne

$$\Phi \tilde{g}(\varphi) = - \tilde{g}(D_j(\alpha_j \varphi)) = - \int g(D_j(\alpha_j \varphi))$$

$$\Phi g(\varphi) = \dots \int_0^1 \varphi \alpha_j D_j g$$

fremgår nu umiddelbart invariansen af de to første led i

(3). Endvidere er

$$\alpha_{j-1}^j = \gamma_{j-1}^k \beta_{j-1}^j e^1 = \delta_{kl} \alpha_k e^1 = \alpha_k e^k,$$

og heraf følger invariansen af det sidste led i (3). Dermed har vi bevist, at (3) altid gælder lokalt.

Til sidst udnytter vi en spaltning af enheden for at vise, at (3) også gælder globalt. Hvert punkt af O har en omegn, i hvilken (3) gælder (trivielt, hvis omegnen ikke indeholder punkter af S). Vi kan da finde en følge $(\eta_n) : 0$ ind i $[0,1]$, så at hvert η_n har sin støtte i en af de valgte omegne, og så at $\sum \eta_n = 1$, og så at det for enhver kompakt mængde $K \subset O$ gælder, at højst endelig mange af funktionerne η_n antager fra O forskellige værdier på K . Lad $\varphi : O$ ind i $\mathbb{C}$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion med kompakt støtte. Så gælder (3) for hver af funktionerne $\varphi_n = \eta_n \varphi$ og dermed for summen φ . Altså gælder (3) globalt.

Vi ser, at det sidste led i (3) er en distribution med støtte indeholdt i S . Den svarer til et mål, som på S har tæthed $f(\underline{p} \cdot \sum \alpha_j e^j)$. Den er bestemt ved randværdierne for f . Det gælder altså også i dette tilfælde, at de givne randværdier kan indregnes i ligningens højre side, når ligningen skrives på distributionsform.

Det kan dog ske, at tillægsleddet forsvinder, selv om f ikke forsvinder på S , nemlig hvis faktoren $\underline{v} \cdot \sum \alpha_j \underline{e}^j$ forsvinder, hvor f ikke forsvinder.

Operatoren Φ kan fortolkes som en retningsdifferentialkvotient, og netop i den ved $\sum \alpha_j \underline{e}^j$ bestemte retning. At $\underline{v} \cdot \sum \alpha_j \underline{e}^j$ forsvinder, betyder, at $\sum \alpha_j \underline{e}^j$ er tangent til S . Retningen $\sum \alpha_j \underline{e}^j$ bestemmer et retningsfelt i 0 , og dette retningsfelt bestemmer et system af kurver, som overalt går i feltets retning. Disse kurver kaldes karakteristikkene for Φ , og en flade, der frembringes af en skare af karakteristikker, kaldes karakteristisk.

På klassisk vis løses differentiaalligningen ved, at man først bestemmer karakteristikkene ved at løse differentiaalligningssystemet

$$\frac{dx_j}{dt} = \alpha_j(\underline{x}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Differentiaalligningen bestemmer derefter variationen af løsningsfunktionen langs hver karakteristik, og løsningen fastlægges, hvis man har givet en begyndelsesværdi i ét punkt af hver karakteristik. Det er derfor klart, at Cauchyproblemet i almindelighed ikke har løsninger, hvis en karakteristik er indeholdt i S , og i dette tilfælde vil overgangen til distributionsform netop bevirke, at der ses bort fra sådanne begyndelsesværdier.

På den anden side kan Cauchyproblemet også være uden løsninger, hvis en karakteristik skærer S i mere end ét punkt, og vi må derfor regne med, at et Cauchyproblem på distributionsform ikke nødvendigvis har løsninger.

26. kapitel.Foldning.

Ved behandling af lineære partielle differential-ligninger er foldning et vigtigt hjælpemiddel. Dette er tilfældet i den klassiske behandling, og anvendelsen af distributioner understreger yderligere foldningens betydning. I dette kapitel skal vi indføre foldning af distributioner og diskutere dens grundlæggende egenskaber.

Definition 1. Lad f og g være kontinuerte funktioner, $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$. Det antages, at en af funktionerne har kompakt støtte. Foldningen $h = f * g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ er defineret ved

$$h(\underline{x}) = \int f(\underline{x} - \underline{y})g(\underline{y})d\underline{y}.$$

Vi præciserer ikke, hvilken af funktionerne, der skulle have kompakt støtte. Dette hænger sammen med følgende sætning:

Sætning 1: $f * g = g * f$.

Bevis: $\int f(\underline{x} - \underline{y})g(\underline{y})d\underline{y} = \int f(\underline{x} + \underline{y})g(-\underline{y})d\underline{y} = \int f(\underline{y})g(\underline{x} - \underline{y})d\underline{y}$.

Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Med Σ_p^m eller Σ_p vil vi betegne den ved

$$\Sigma_p(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p) = \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_p$$

definerede afbildning $\Sigma_p: \mathbb{R}^{mp}$ på $\mathbb{R}^m$. For $p = 2$ vil vi udelade index p .

Sætning 2. Hvis $h = f * g$ og $\varphi \in \mathcal{D}$, er

$$\tilde{h}(\varphi) = (f \otimes g)(\varphi \circ \Sigma).$$

$$\begin{aligned} \text{Bevis: } \tilde{h}(\varphi) &= \int h(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) d\underline{x} = \iint f(\underline{x}-\underline{y}) g(\underline{y}) \varphi(\underline{x}) d\underline{x} d\underline{y} \\ &= \iint f(\underline{x}) g(\underline{y}) \varphi(\underline{x}+\underline{y}) d\underline{x} d\underline{y} = (f \otimes g)(\varphi \circ \Sigma) \end{aligned}$$

Det fjerde udtryk fremkommer ved, at integrationen efter $\underline{x}$ tænkes udført først, og vi udfører translationen $\underline{x} \rightarrow \underline{x} + \underline{y}$, som ikke ændres resultatet af denne første integration. Dermed er sætningen vist.

Vi understreger, at funktionen $\varphi \circ \Sigma$ i sætning 2 selvfølgelig tilhører $\mathcal{E}$, men den tilhører ikke $\mathcal{D}$. Hvis $\underline{a}$ hører til støtten for φ , vil hele den ved $\underline{x} + \underline{y} = \underline{a}$ bestemte lineære mangfoldighed i $\mathbb{R}^{2m}$ høre til støtten for $\varphi \circ \Sigma$, og denne vil således ikke være kompakt.

Sætning 3. Lad $T_1 \in \mathcal{D}'$, $T_2 \in \mathcal{E}'$ være distributioner, af hvilke den sidste har den kompakte støtte K . Lad $\alpha \in \mathcal{D}$ have værdien 1 overalt på en åben mængde, der indeholder K . For $\varphi \in \mathcal{D}$ sætter vi

$$S(\varphi) = (T_1 \otimes T_2)((1 \otimes \alpha)(\varphi \circ \Sigma)).$$

Da er S en af α uafhængig distribution.

Bevis: Mere udførligt siger definitionen, at

$$(1) \quad S(\varphi) = T_{1x}(T_{2y}(\alpha(y)\varphi(x+y))).$$

Da α er identisk 1 på en åben mængde, der indeholder støtten for T_2 , er $T_{2y}(\alpha(y)\varphi(x+y))$ uafhængig af α , og dermed har vi vist, at S er uafhængig af α . Det er klart, at $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ ind i

$\hat{C}$ er en lineær afbildning, og vi mangler derfor kun at vise, at S er kontinuert. Dertil er det nok at vise, at det for enhver kompakt mængde $K_1 \subset \mathbb{R}^m$ gælder, at restriktionen af S til $\mathcal{D}_{K_1}$ er kontinuert. Nu er $\mathcal{D}_{K_1}$ et Fréchetrum, og det er derfor nok at vise, at $S(\varphi_n) \rightarrow 0$, når (φ_n) er en følge, der går mod 0 på $\mathcal{D}_{K_1}$. Lad K_2 være støtten for α . Vi ser da, at $\alpha(y)\varphi_n(x+y) \neq 0$ kræver, at $y \in K_2$, $x+y \in K_1$, altså $(x,y) \in (K_1 - K_2) \times K_2$, så $\alpha(y)\varphi_n(x+y)$ har sin støtte indeholdt i den kompakte mængde $(K_1 - K_2) \times K_2$. Endvidere går $\alpha(y)\varphi_n(x+y)$ samt alle dens partielle differentialkvotienter ligeligt mod 0. Da $T_1 \otimes T_2$ er en distribution, medfører dette, at $S(\varphi_n) \rightarrow 0$. Dermed er sætningen bevist.

Definition 2. Den i sætning 3 indførte distribution S kaldes foldningen af T_1 og T_2 , og vi skriver $S = T_1 * T_2$.

Sætning 4. Hvis $T_1, T_2 \in \mathcal{G}'$, er $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

Bevis: Det fremgår umiddelbart af definitionen.

På grund af sætning 4 vil vi også i den generelle tilfælde anvende skrivemåden $S = T_2 * T_1$ som ensbetydende med $S = T_1 * T_2$. Vi bemærker i øvrigt, at (1) giver mening, selv om faktoren $\alpha(y)$ udelades, og at vi har

$$(2) \quad S(\varphi) = T_{1x}(T_{2y}(\varphi(x+y))) = T_{2y}(T_{1x}(\varphi(x+y))).$$

Sætning 5. Hvis T_1 har støtte K_1 og T_2 har støtte K_2 og K_1 eller K_2 er kompakt, da har $T_1 * T_2$ støtte indeholdt i $K_1 + K_2$.

Bevis: Lad os antage, at K_1 er kompakt. Lad os antage, at ϕ er identisk 0 på en åben mængde $O \supset K_1 + K_2$. For $y \in K_2$ har $K_1 + y$ positiv afstand fra O , og vi kan derfor finde en åben omegn $U(y)$ af y , så at $K_1 + U(y) \subseteq O$. Vi sætter

$$O_2 = \bigcup_{y \in K_2} U(y),$$

og O_2 er da en åben mængde, som tilfredsstiller betingelserne $O_2 \supset K_2$ og $K_1 + O_2 \subseteq O$. Lad nu y være valgt, så at $T_{1x}(\phi(x+y)) \neq 0$. Det kræver, at der findes et x , så at $x \in K_1$, $x+y \in O$, men det medfører, at $y \in O_2$, altså at $T_{1x}(\phi(x+y))$ har sin støtte indeholdt i O_2 , men så er

$$S(\phi) = T_{2y}(T_{1x}(\phi(x+y))) = 0.$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 6. Hvis T_1 , T_2 og T_3 er distributioner, af hvilke mindst to har kompakt støtte, er $T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3$.

Bevis: Vi sætter $T_2 * T_3 = S_1$, $T_1 * T_2 = S_3$, og vi har da

$$(T_1 * S_1)(\phi) = T_{1x}(S_{1y}(\phi(x+y))) = T_{1x}(T_{2y}(T_{3z}(\phi(x+y+z))))),$$

$$(S_3 * T_3)(\phi) = S_{3x}(T_{3z}(\phi(x+z))) = T_{1x}(T_{2y}(T_{3z}(\phi(x+y+z))))).$$

Dermed er sætningen bevist.

Sætning 7. Lad $K \subset \mathbb{R}^m$ være en kompakt mængde. Det underrum af $\mathcal{G}' \times \mathcal{D}'$, som består af par (T_1, T_2) , hvor T_1 har støtte indeholdt i K , afbildes kontinuert ind i $\mathcal{D}'$ ved afbildningen $(T_1, T_2) \rightarrow T_1 * T_2$.

Bevis: Vi vælger $\alpha \in \mathcal{D}$ identisk 1 på en åben mængde, som indeholder K . Så er

$$(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_1 \otimes T_2)((\alpha \otimes 1)(\varphi \circ \Sigma)).$$

Afbildningen $\varphi \rightarrow (\alpha \otimes 1)(\varphi \circ \Sigma)$ afbilder begrænset mængde på begrænset mængde. At $(T_1, T_2) \rightarrow 0$, betyder, at T_1 og T_2 går ligeligt mod 0 på enhver begrænset mængde. Heraf følger sætningen umiddelbart.

På tilsvarende måde ses, at $(T_1, T_2) \rightarrow T_1 * T_2$ afbilder $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ kontinuert ind i $\mathcal{E}'$. Derimod bliver afbildningen af $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}'$ ind i $\mathcal{D}'$ i almindelighed kun kontinuert i hver variabel for sig.

Det er klart, at foldningen er en bilinear afbildning. Ved addition og foldning er $\mathcal{E}'$ organiseret som en ring. Vi har

$$(T * \delta)(\varphi) = T_{\underline{x}}(\delta_{\underline{y}}(\varphi(\underline{x} + \underline{y}))) = T_{\underline{x}}(\varphi(\underline{x})) = T(\varphi).$$

Altså er δ neutralt element for foldningen. Endvidere er

$$\begin{aligned} (T * \delta_{\underline{a}})(\varphi) &= T_{\underline{x}}(\delta_{\underline{a}}(\varphi(\underline{x} + \underline{y}))) = T_{\underline{x}}(\varphi(\underline{x} + \underline{a})) = T(\tau_{\underline{a}}\varphi) \\ &= \tau_{\underline{a}} T(\varphi), \end{aligned}$$

så vi har relationen

$$T * \delta_{\underline{a}} = \tau_{\underline{a}} T.$$

Endvidere er

$$\begin{aligned} (T * D^p \delta)\varphi &= T_{\underline{x}}((D^p \delta)_{\underline{y}}(\varphi(\underline{x} + \underline{y}))) = (-1)^{|\underline{p}|} T(D^p \varphi(\underline{x})) \\ &= D^p T(\varphi), \end{aligned}$$

så vi har relationen

$$T * D^p \delta = D^p T.$$

Heraf følger nu umiddelbart

*/ Dæ $\otimes$ er kontinuert, medfører dette, at $T_1 \otimes T_2$ går ligeligt mod 0 på enhver begrænset mængde.

$$D^p(T_1 * T_2) = (T_1 * T_2) * D^p \delta = T_1 * (T_2 * D^p \delta) = T_1 * D^p T_2,$$

så vi har

$$D^p(T_1 * T_2) = D^p T_1 * T_2 = T_1 * D^p T_2.$$

hvis en af distributionerne T_1 og T_2 har kompakt støtte.

På ordret samme måde får vi

$$\tau_{\underline{a}}(T_1 * T_2) = \tau_{\underline{a}} T_1 * T_2 = T_1 * \tau_{\underline{a}} T_2.$$

Hvis

$$\Phi = \sum_{|\underline{k}| \leq p} \alpha_{\underline{k}} D_{\underline{k}}$$

er en differentialoperator med konstante koefficienter, har vi relationerne

$$\Phi T = \Phi \delta * T$$

$$\Phi(T_1 * T_2) = \Phi T_1 * T_2 = T_1 * \Phi T_2.$$

Definition 3. Ved en fundamentalløsning til en differentialoperator Φ med konstante koefficienter forstår vi en distribution U , som tilfredsstiller betingelsen

$$\Phi U = \delta.$$

Sætning 8. Hvis en differentialoperator Φ med konstante koefficienter har en fundamentalløsning U , og T er en distribution med kompakt støtte, har differentialligningen $\Phi X = T$ løsningen $X = T * U$.

Bevis: Vi får

$$\Phi(T * U) = T * \Phi U = T * \delta = T.$$

Sætning 9. Hvis en differentialoperator Φ med konstante ko-
efficienter har en fundamentalløsning U , og T er en vilkå-
rlig distribution, har differentialligningen $\Phi X = T$ højst én
løsning med kompakt støtte.

Bevis: Hvis X har kompakt støtte, og $\Phi X = T$, får vi

$$X = X * \delta = X * \Phi U = \Phi(X * U) = \Phi X * U = T * U.$$

Her har $T = \Phi X$ selvfølgelig sin støtte indeholdt i støtten
for X .

27. kapitel.Laplaces operator.

Lad ε være et tal i intervallet $]0,1[$. Det træffer sig så uheldigt, at det bliver vigtigt for os at kende værdien af integralet

$$I_m(\nu, \underline{p}) = \int_{\varepsilon \leq \|\underline{x}\| \leq 1} \|\underline{x}\|^\nu \underline{x}^{\underline{p}} d\underline{x},$$

hvor $\nu \in \mathbb{C}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_m)$, og hvor p_μ er et ikke negativt helt tal.

Vi bemærker først, at

$$I_m(\nu, \underline{p}) = 0, \text{ hvis mindst ét } p_\mu \text{ er ulige.}$$

Det vil være en fordel at regne i polære koordinater.

Vi sætter altså

$$x_1 = r \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{m-3} \cos \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1}$$

$$x_2 = r \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{m-3} \cos \theta_{m-2} \sin \theta_{m-1}$$

$$x_3 = r \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{m-3} \sin \theta_{m-2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_m = r \sin \theta_1,$$

$$\varepsilon \leq r \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_\mu \leq \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 1, \dots, m-2, \quad -\pi \leq \theta_{m-1} \leq \pi.$$

Vi skal udregne funktionaldeterminanten for denne transformation. Hver af dens søjler på nær den første indeholder en faktor r , som vi sætter udenfor. Endvidere fremmer det overskueligheden, hvis vi i de to første rækker sætter

$$\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_{m-1} \text{ udenfor, og i den } \mu\text{-te række } \cos \theta_1 \cdots \cos \theta_{\mu-1}.$$

I alt har vi derefter trukket en faktor

$$r^{m-1} \cos^m \theta_1 \cos^{m-1} \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{m-1}$$

ud af funktionaldeterminanten. Det forudsætter, at ingen af

vinklerne er $-\frac{\pi}{2}$ eller $\pi\frac{1}{2}$, men vi ved på forhånd, at funktionaldeterminanten er en analytisk funktion af $r, \Theta_1, \dots, \Theta_{m-1}$, så undtagelsesværdierne får ingen betydning.

Den resterende faktor af funktionaldeterminanten bliver

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\Theta_1 & -\operatorname{tg}\Theta_2 & \dots & -\operatorname{tg}\Theta_{m-2} & -\operatorname{tg}\Theta_{m-1} \\ \operatorname{tg}\Theta_{m-1} & -\operatorname{tg}\Theta_1 \operatorname{tg}\Theta_{m-1} & -\operatorname{tg}\Theta_2 \operatorname{tg}\Theta_{m-1} & \dots & -\operatorname{tg}\Theta_{m-2} \operatorname{tg}\Theta_{m-1} & 1 \\ \operatorname{tg}\Theta_{m-2} & -\operatorname{tg}\Theta_1 \operatorname{tg}\Theta_{m-2} & -\operatorname{tg}\Theta_2 \operatorname{tg}\Theta_{m-2} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \operatorname{tg}\Theta_2 & -\operatorname{tg}\Theta_1 \operatorname{tg}\Theta_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \operatorname{tg}\Theta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ved at udvikle efter den sidste søjle får vi

$$\begin{aligned} \Delta_m &= (-1)^{m+1} (-\operatorname{tg}\Theta_{m-1} \cdot \operatorname{tg}\Theta_{m-1} \cdot \Delta_{m-1}) + (-1)^{m+2} \Delta_{m-1} \\ &= (-1)^m (1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_{m-1}) \Delta_{m-1} = (-1)^m \cos^{-2} \Theta_{m-1} \Delta_{m-1}, \end{aligned}$$

og denne rekursionsformel giver ved gentagen anvendelse

$$\Delta_m = -(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} (\cos \Theta_1 \dots \cos \Theta_{m-1})^{-2},$$

så funktionaldeterminantens værdi bliver

$$-(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} r^{m-1} \cos^{m-2} \Theta_1 \cos^{m-3} \Theta_2 \dots \cos \Theta_{m-2}.$$

Funktionaldeterminantens fortegn vedrører kun orienteringen af parameterområdet. Vi ved, at $I_m(\nu, \underline{p})$ er ≥ 0 , og vi kan derfor tillade os at glemme alt om fortegnet. Vi får således

$$I_m(\nu, \underline{p}) = \int_{\mathbb{E}}^1 r^{\nu+|\underline{p}|+m-1} dr.$$

$$\left(\prod_{\mu=1}^{m-2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p_1+\dots+p_{m-\mu}+m-\mu-1} \ominus \sin^{p_{m-\mu+1} \ominus} \ominus \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{p_1 \ominus} \sin^{p_2 \ominus} d\ominus.$$

Alle integralerne kan udregnes ved elementære metoder.

I det foreliggende tilfælde er det dog bekvemmere at skyde gråspurve med en lille kanon. Vi inddrager

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

og vi minder om dens helt elementære egenskaber

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Gammafunktionen er for $\operatorname{Re} x > 0$ en analytisk funktion, og vi kan derfor analytisk fortsættelse i vore beviser. Vi er interesserede i udtrykket

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+u)} t^{x-1} u^{y-1} dt du.$$

Vi benytter substitutionen

$$t = r \cos^2 \ominus, \quad u = r \sin^2 \ominus, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \ominus \leq \frac{1}{2}\pi,$$

som øjensynligt etablerer en bijektiv sammenhæng mellem den åbne halvstrimmel i $(r, \ominus)$ -planen og den positive kvadrant i (x, y) -planen. Funktionaldeterminanten bliver

$$\frac{\partial(t, u)}{\partial(r, \ominus)} = \begin{vmatrix} \cos^2 \ominus & -2r \sin \ominus \cos \ominus \\ \sin^2 \ominus & 2r \sin \ominus \cos \ominus \end{vmatrix} = 2r \sin \ominus \cos \ominus,$$

så substitutionen giver

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 2 \int_0^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r} r^{x+y-1} \cos^{2x-1} \ominus \sin^{2y-1} \ominus d\ominus dr \\ &= 2\Gamma(x+y) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2x-1} \ominus \sin^{2y-1} \ominus d\ominus, \end{aligned}$$

og vi har derfor

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2x-1} \ominus \sin^{2y-1} \ominus d\ominus = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}.$$

For $x = y = \frac{1}{2}$ får vi heraf det velkendte resultat

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Idet vi nu antager, at $p_1, \dots, p_m$ alle er lige, får vi

$$I_m(\nu, \underline{p}) = 2 \int_{\varepsilon}^1 r^{\nu+|\underline{p}|+m-1} dr.$$

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\mu=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p_1 + \dots + p_{m-\mu} + m - \mu)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(p_{m-\mu+1} + 1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p_1 + \dots + p_{m-\mu+1} + m - \mu + 1)\right)} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p_1 + 1)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}(p_2 + 1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p_1 + p_2 + 2)\right)} \\ &= 2 \int_{\varepsilon}^1 r^{\nu+|\underline{p}|+m-1} dr \frac{\prod_{\mu=1}^m \Gamma\left(\frac{1}{2}(p_{\mu} + 1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p_1 + \dots + p_m + m)\right)}. \end{aligned}$$

Efter at vi således har fundet et nogenlunde simpelt udtryk for integralet, kan det være rart med en kontrol. For $\nu = 0$ og $\underline{p} = \underline{0}$ får vi specielt

$$2 \frac{(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)} \frac{1 - \varepsilon^m}{m} = \frac{(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m+1\right)} (1 - \varepsilon^m)$$

For $\varepsilon = 0$ giver dette rumfanget af enhedskugleomegnen. For værdierne $m = 1, 2, 3, 4$ får vi efterhånden $2, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi^2$.

For ikke at glemme, at $p_1, \dots, p_m$ er lige tal, sætter vi

$$p_{\mu} = 2q_{\mu}, \mu = 1, \dots, m.$$

Så er

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}(p_{\mu} + 1)\right) &= \Gamma\left(q_{\mu} + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2q_{\mu} - 1)(2q_{\mu} - 3) \dots 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi}}{2^{q_{\mu}}} \\ &= \frac{(2q_{\mu})! \sqrt{\pi}}{2^{q_{\mu}} \cdot 2^{q_{\mu}} (2q_{\mu} - 2) \dots 4 \cdot 2} = \frac{(2q_{\mu})! \sqrt{\pi}}{2^{q_{\mu}} (q_{\mu})!}. \end{aligned}$$

Med $\Delta^{|\underline{q}|}$ vil vi betegne Laplaces operator itereret $|\underline{q}|$ gange. For $\varphi(\underline{x}) = \underline{x}^{\underline{p}}$ bliver $\Delta^{|\underline{q}|} \varphi$ en konstant. I udviklingen af $\Delta^{|\underline{q}|}$ efter polynomialformlen får vi brug for leddet

$$\frac{|\underline{q}|!}{q_1! \dots q_m!} D_{11}^{q_1} \dots D_{mm}^{q_m},$$

og vi får derfor

$$\Delta^{|\underline{q}|} \varphi(\underline{x}) = \frac{|\underline{q}|!}{q_1! \dots q_m!} (2q_1)! \dots (2q_m)!.$$

Idet vi indfører dette udtryk i vort resultat, får vi endelig

$$I_m(\nu, \underline{p}) = \int_{\epsilon}^1 r^{\nu+|\underline{p}|+m-1} dr \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{|\underline{p}|-1} |\underline{q}|! \Gamma(\frac{1}{2}m+|\underline{q}|)} \Delta^{|\underline{q}|} \varphi(\underline{x}).$$

Vi bemærker nu, at dette resultat kan skrives

$$I_m(\nu, \underline{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\epsilon}^1 r^{\nu+2k+m-1} dr \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{1}{2}m+k)} \Delta^k \varphi(\underline{0}) \right),$$

idet vi har $\Delta^k \varphi(\underline{0}) = 0$ for alle $k \neq |\underline{q}|$. Den fremkomne formel er lineær i $\varphi(\underline{x})$, og vi har derfor mere generelt, når $P(\underline{x})$ er et vilkårligt polynomium

$$\int_{\epsilon \leq \|\underline{x}\| \leq 1} \|\underline{x}\|^{\nu} P(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\epsilon}^1 r^{\nu+2k+m-1} dr \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{1}{2}m+k)} \Delta^k P(\underline{0}) \right).$$

Vi har nu

$$\int_{\epsilon}^1 r^{\nu+2k+m-1} dr = \begin{cases} (\nu+2k+m)^{-1} (1 - \epsilon^{\nu+2k+m}), & \nu+2k+m \neq 0 \\ -\log \epsilon, & \nu+2k+m = 0. \end{cases}$$

For bekvemmeligheds skyld vedtager vi, at $c^{-1} \epsilon^c$ skal fortolkes som $\log \epsilon$, hvis $c = 0$. Med denne vedtagelse viser resultatet, at

$$\int_{\epsilon \leq \|\underline{x}\| \leq 1} \|\underline{x}\|^{\nu} P(\underline{x}) d\underline{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\pi})^m \epsilon^{\nu+2k+m}}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{1}{2}m+k) (\nu+2k+m)} \Delta^k P(\underline{0})$$

har en endelig af ϵ uafhængig værdi.

Hvis P er enhedspolynomiet, får vi specielt

$$\int_{\varepsilon \leq \|\underline{x}\| \leq 1} \|\underline{x}\|^\nu d\underline{x} = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \int_{\varepsilon}^1 r^{\nu+m-1} dr,$$

og dette udtryk konvergerer for $\varepsilon \rightarrow 0$, hvis og kun hvis $\nu > -m$. For $\nu > -m$ er funktionen $\|\underline{x}\|^\nu$ således L^1 -integrabel over begrænsede målelige mængder og svarer således til en distribution. For $\nu \leq -m$ svarer funktionen ikke til nogen distribution, men vi vil skaffe os en erstatning for en sådan distribution. Vi kan svarende til $\varphi \in \mathcal{D}$ betragte polynomierne

$$P_n(\underline{x}) = \sum_{|\underline{j}| \leq n} \frac{1}{\underline{j}!} D^{\underline{j}} \varphi(\underline{0}) \underline{x}^{\underline{j}}.$$

For n tilstrækkelig stor eksisterer $\int \|\underline{x}\|^\nu (\varphi(\underline{x}) - P_n(\underline{x})) d\underline{x}$ udstrakt over enhedskugleomegningen. På den anden side eksisterer $\int \|\underline{x}\|^\nu \varphi(\underline{x}) d\underline{x}$ udstrakt over området uden for enhedskuglen altid. Hvis vi nu definerer $\int \|\underline{x}\|^\nu P_n(\underline{x}) d\underline{x}$ over enhedskugleomegningen ved det særlige udtryk, som vi ovenfor fandt var uafhængigt af ε , får vi alt i alt defineret en slags erstatning for $\int \|\underline{x}\|^\nu \varphi(\underline{x}) d\underline{x}$. For $2k \leq n$ har vi åbenbart $\Delta^k \varphi(\underline{0}) = \Delta^k P_n(\underline{0})$.

Vi betegner den fremkomne distribution med $(Pf\|\underline{x}\|^\nu)$ (Pf = partie finie), og den er altså defineret ved

$$(1) \quad (Pf\|\underline{x}\|^\nu)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\|\underline{x}\| \geq \varepsilon} \|\underline{x}\|^\nu \varphi(\underline{x}) d\underline{x} + \sum_{k=0}^q \frac{(\sqrt{\pi})^m \varepsilon^{\nu+m+2k}}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{1}{2}m+k) (\nu+m+2k)} \Delta^k \varphi(\underline{0}) \right),$$

hvor q må være valgt, så at $2q+2 > -\nu-m$. Alle led i summen med $2k > -\nu-m$ går mod 0, og de er derfor uden indflydelse på distributionens værdi. I det eventuelle led med $2k = -\nu-m$ udelades faktoren $\nu+m+2k$ i nævneren og ε -potensen i tælleren erstattes med $\log \varepsilon$.

Før vi kan slutte, at $(Pf||\underline{x}||^\nu)$ er en distribution, må vi vise, at $(Pf||\underline{x}||^\nu)(\varphi)$ afhænger kontinuert af φ . Dertil er det nok at vise, at $(Pf||\underline{x}||^\nu)(\varphi_j) \rightarrow 0$ for en følge φ_j på et $\mathcal{D}_K$, hvor K er en vilkårlig kompakt mængde. Det er nu for det første klart, at

$$\int_{||\underline{x}|| \geq 1} ||\underline{x}||^\nu \varphi_j(\underline{x}) d\underline{x} \rightarrow 0.$$

Det er derfor nok at vise, at udtrykket (1) går mod 0, når φ gennemløber en følge af vilkårligt ofte differentiable funktioner (φ_j) , som går mod 0 tillige med samtlige differentialkvotienter ligeligt på den afsluttede enhedskugle-omegn, idet integralet tænkes udstrakt over den ved $\varepsilon \leq ||\underline{x}|| \leq 1$ bestemte kugleskal. Dertil spalter vi φ_j på formen

$$\varphi_j(\underline{x}) = P_j(\underline{x}) + \varphi_j'(\underline{x}),$$

hvor $P_j(\underline{x})$ er et polynomium og $\varphi_j'(\underline{x})$ har sine differentialkvotienter lig 0 i punktet $\underline{0}$ indtil orden $2q$. Så vil (P_j) og (φ_j') hver for sig gå ligeligt mod 0 tillige med samtlige differentialkvotienter. For $\varphi_j'(\underline{x})$ gælder nu, at $||\underline{x}||^\nu \varphi_j'(\underline{x})$ bliver en L^1 -funktion på hele enhedskuglen, og integralet kan da udstrækkes over hele enhedskuglen og grænseovergang under integraltegnet vil være tilladt. For bidraget fra $P_j(\underline{x})$ så vi ovenfor, at det samlede bidrag bliver uafhængigt af ε , så vi kan foretage grænseovergangen for et fast positivt ε . Dermed har vi vist, at $(Pf||\underline{x}||^\nu)$ er en distribution.

Vi vil nu forsøge at anvende Laplaces operator på distributionen $(Pf||\underline{x}||^\nu)$. Vi får direkte af (1)

$$(2) \quad \Delta(\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu)(\varphi) = (\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu)(\Delta\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\|\underline{x}\| \geq \varepsilon} \|\underline{x}\|^\nu \Delta\varphi(\underline{x}) d\underline{x} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^q \frac{(\sqrt{\pi})^m \varepsilon^{\nu+m+2k}}{2^{2k-1} k! \Gamma(\frac{1}{2}m+k) (\nu+m+2k)} \Delta^{k+1} \varphi(\underline{0}) \right).$$

For $\nu > -m$ er $(\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu)$ den til funktionen $\|\underline{x}\|^\nu$ svarende distribution. For $\nu \geq 2$ er denne funktion overalt to gange differentiabel, og vi får

$$D_j \|\underline{x}\|^\nu = D_j (\|\underline{x}\|^2)^{\frac{1}{2}\nu} = \frac{1}{2}\nu (\|\underline{x}\|^2)^{\frac{1}{2}\nu-1} \cdot 2x_j = \nu x_j \|\underline{x}\|^{\nu-2},$$

og

$$D_{jj} \|\underline{x}\|^\nu = \nu \|\underline{x}\|^{\nu-2} + \nu(\nu-2)x_j^2 \|\underline{x}\|^{\nu-4},$$

altså

$$\Delta \|\underline{x}\|^\nu = m\nu \|\underline{x}\|^{\nu-2} + \nu(\nu-2) \|\underline{x}\|^{\nu-2} = \nu(m+\nu-2) \|\underline{x}\|^{\nu-2}.$$

For tilstrækkelig store værdier af ν har vi derfor

$$(3) \quad \Delta(\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu) = \nu(m+\nu-2)(\text{Pf}\|\underline{x}\|^{\nu-2})$$

For fast φ er den ved $g(\nu) = (\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu)(\varphi)$ definerede afbildning $g : \mathbb{C} \text{ ind i } \mathbb{C}$ analytisk undtagen i punkterne $-m, -m-2, -m-4, \dots$. Dette fremgår af (1) ved den tidligere benyttede fraspaltning af et polynomium fra φ inden for enhedskuglen, idet det fra polynomiet stammende bidrag bliver uafhængigt af ε . Af (2) ser vi, at $\Delta(\text{Pf}\|\underline{x}\|^\nu)$ under de samme betingelser er en analytisk funktion af ν . Ved analytisk fortsættelse får vi derfor, at (3) gælder, når både ν og $\nu-2$ tilfredsstiller betingelserne. Altså gælder (3) undtagen, når ν har en af værdierne

$$-m+2, -m, -m-2, -m-4, \dots$$

For et fast $\varepsilon > 0$ og $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vil brøken

$$(\nu+m+2p)^{-1} (\varepsilon^{\nu+m+2p-1})$$

have grænseværdien $\log \varepsilon$ for $\nu \rightarrow -m-2p$. Heraf følger, at

$$(\text{Pf} \|\underline{x}\|^\nu)(\varphi) = \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p-1} p! \Gamma(\frac{1}{2}m+p) (\nu+m+2p)} \Delta^p \varphi(0)$$

er en analytisk funktion af ν også for $\nu = -m-2p$. Af ligning (3) får vi nu

$$\begin{aligned} \Delta(\text{Pf} \|\underline{x}\|^\nu)(\varphi) &= \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p-1} p! \Gamma(\frac{1}{2}m+p) (\nu+m+2p)} \Delta^{p+1} \varphi(0) = \\ \nu(m+\nu-2)(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{\nu-2})_\varphi &= \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p-1} p! \Gamma(\frac{1}{2}m+p) (\nu+m+2p)} \Delta^{p+1} \varphi(0). \end{aligned}$$

På venstre side kan et Δ ombyttes med distributionerne, så vi får $\Delta\varphi$ ind i stedet for φ . Ved grænseovergangen $\nu \rightarrow -m-2p$ får vi derfor

$$\begin{aligned} \Delta(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{-m-2p})(\varphi) &= \lim_{\nu \rightarrow -m-2p} (\nu(m+\nu-2)(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{\nu-2})(\varphi) - \\ &\quad \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p-1} p! \Gamma(\frac{1}{2}m+p) (\nu+m+2p)} \Delta^{p+1} \varphi(0)). \end{aligned}$$

Leddene i parentesens på højre side vil sædvanligvis divergere hver for sig, idet $(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{\nu-2})(\varphi)$ indeholder et led, som går mod ∞ . Vi kan imidlertid også her trække den singulære del ud, og derved får vi

$$\Delta(\text{Pf}||\underline{x}||^{-m-2p})(\varphi) =$$

$$\lim_{\nu \rightarrow -m-2p} \nu(m+\nu-2)((\text{Pf}||\underline{x}||^{\nu-2})(\varphi) - \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p+1}(p+1)!\Gamma(\frac{1}{2}m+p+1)(\nu+m+2p)} \Delta^{p+1}\varphi(0))$$

$$+ \lim_{\nu \rightarrow -m-2p} \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p-1}p!\Gamma(\frac{1}{2}m+p)(\nu+m+2p)} \left(\frac{\nu(m+\nu-2)}{4(p+1)(\frac{1}{2}m+p)} - 1 \right) \Delta^{p+1}\varphi(0) =$$

$$(m+2p)(2p+2)(\text{Pf}||\underline{x}||^{-m-2p-2})(\varphi) + \frac{(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p+1}(p+1)!\Gamma(\frac{1}{2}m+p+1)} \lim_{\nu \rightarrow -m-2p} \frac{\nu(m+\nu-2) - 2(p+1)(m+2p)}{\nu+m+2p} \Delta^{p+1}\varphi(0) =$$

$$(m+2p)(2p+2)(\text{Pf}||\underline{x}||^{-m-2p-2})(\varphi) - \frac{(m+4p+2)(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p+1}(p+1)!\Gamma(\frac{1}{2}m+p+1)} \Delta^{p+1}\delta(\varphi),$$

hvilket viser, at

$$(4) \quad \Delta(\text{Pf}||\underline{x}||^{-m-2p}) = (m+2p)(2p+2)(\text{Pf}||\underline{x}||^{-m-2p-2}) - \frac{(m+4p+2)(\sqrt{\pi})^m}{2^{2p+1}(p+1)!\Gamma(\frac{1}{2}m+p+1)} \Delta^{p+1}\delta, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Vi mangler endnu at undersøge tilfældet $p = -1$, idet der i dette tilfælde optræder en pol på højre side, men ikke på venstre. Vi har i dette tilfælde

$$\begin{aligned} \Delta(\text{Pf}||\underline{x}||^{2-m})\varphi &= \lim_{\nu \rightarrow 2-m} \Delta(\text{Pf}||\underline{x}||^{\nu})\varphi \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 2-m} \nu(m+\nu-2)(\text{Pf}||\underline{x}||^{\nu-2})(\varphi) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 2-m} \nu(m+\nu-2)((\text{Pf}||\underline{x}||^{\nu-2})(\varphi) - \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)(\nu+m-2)} \varphi(0)) \\ &\quad + \lim_{\nu \rightarrow 2-m} \nu(m+\nu-2) \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)(\nu+m-2)} \varphi(0) \\ &= \frac{2(2-m)(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \varphi(0), \end{aligned}$$

altså

$$(5) \quad \Delta(\text{Pf}||\underline{x}||^{2-m}) = \frac{2(2-m)(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \delta.$$

Heraf fremgår, at Laplaceoperatoren Δ for $m > 2$ har fundamentalløsningen

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)}{2(2-m)(\sqrt{\pi})^m} ||\underline{x}||^{2-m},$$

idet $(\text{Pf}||\underline{x}||^{2-m})$ er den til funktionen $||\underline{x}||^{2-m}$ svarende distribution. Resultatet gælder også for $m = 1$. Planen ($m = 2$) udgør et virkeligt undtagelsestilfælde.

For alle m er $\log||\underline{x}||$ en funktion i L^1 . For $m > 1$ har $\log||\underline{x}||$ også sine partielle differentialkvotienter i L^1 , og vi har

$$D_j \log||\underline{x}|| = ||\underline{x}||^{-2} x_j.$$

For $m > 2$ vil også de partielle differentialkvotienter af anden orden tilhøre L^1 , og vi får

$$D_{jj} \log||\underline{x}|| = ||\underline{x}||^{-2} - 2||\underline{x}||^{-4} x_j^2,$$

så vi får

$$(6) \quad \Delta \log||\underline{x}|| = (m-2)||\underline{x}||^{-2}, \quad m > 2.$$

For $m = 2$ må $D_j \log||\underline{x}||$ differentieres som en distribution $D_j \tilde{\log}||\underline{x}||$, og vi får da

$$(\Delta \tilde{\log}||\underline{x}||)(\varphi) = -\int ||\underline{x}||^{-2} (x_1 D_1 \varphi + x_2 D_2 \varphi).$$

Vi indfører polære koordinater, idet vi sætter

$$x_1 = r \cos \Theta, \quad x_2 = r \sin \Theta, \quad ||\underline{x}||^{-2} = r^{-2},$$

$$x_1 D_1 \varphi + x_2 D_2 \varphi = r D_r \varphi, \quad dx_1 dx_2 = r dr d\Theta,$$

og vi får da

$$(\Delta \tilde{\log}||\underline{x}||)(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \int_0^\infty D_r \varphi dr d\Theta = 2\pi \varphi(\underline{0}),$$

og vi har derfor

$$\Delta \log \|\underline{x}\| = 2\pi\delta,$$

hvilket viser, at Δ for $m = 2$ har $\frac{1}{2\pi} \log \|\underline{x}\|$ som fundamental-løsning.

For $m \neq 4$ giver (3), at

$$\Delta(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{4-m}) = 2(4-m)(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{2-m}),$$

som for $m = 4$ ifølge (6) erstattes med

$$\Delta \log \|\underline{x}\| = 2 \|\underline{x}\|^{-2}.$$

For $m \neq 2, 4$ får vi ved (5), at

$$\Delta^2(\text{Pf} \|\underline{x}\|^{4-m}) = \frac{2^2(2-m)(4-m)(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{1}{2}m)} \delta,$$

og for $m = 4$

$$\Delta^2 \log \|\underline{x}\| = -8\pi^2 \delta.$$

Nu er

$$D_j(\|\underline{x}\|^2 \log \|\underline{x}\|) = 2x_j \log \|\underline{x}\| + x_j,$$

altså

$$D_{jj}(\|\underline{x}\|^2 \log \|\underline{x}\|) = 2x_j^2 \|\underline{x}\|^{-2} + 2 \log \|\underline{x}\| + 1,$$

hvilket for $m = 2$ giver

$$\Delta(\|\underline{x}\|^2 \log \|\underline{x}\|) = 4 + 4 \log \|\underline{x}\|,$$

så vi får

$$\Delta^2(\|\underline{x}\|^2 \log \|\underline{x}\|) = 8\pi\delta.$$

Operatoren Δ^2 har derfor fundamentalløsningen

$$\frac{1}{8\pi} \|\underline{x}\|^2 \log \|\underline{x}\| \quad \text{for } m = 2,$$

$$- \frac{1}{8\pi^2} \log \|\underline{x}\| \quad \text{for } m = 4,$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)}{2^2(2-m)(4-m)(\sqrt{\pi})^m} (\text{Pf} \|\underline{x}\|^{4-m}) \quad \text{for } m \neq 2, 4.$$

Vi kan uden vanskeligheder føre processen videre, og således finde fundamentalløsninger svarende til højere potenser af Δ .

Vi kan nu vise følgende sætning:

Sætning 1. Hvis $\Delta^n T$ i en åben mængde O er en vilkårlig ofte differentiabel (analytisk) funktion, er T en vilkårlig ofte differentiabel (analytisk) funktion på O .

Bevis: Det er åbenbart nok at vise sætningen for $n = 1$. Lad O_1 være en begrænset mængde, der er åben, med $\overline{O_1} \subset O$, og lad $r > 0$ være valgt, så at afstanden fra O_1 til O er større end $2r$. Vi vælger $\alpha \in \mathcal{D}$, så at $\alpha(\underline{x}) = 1$, hvis $\underline{x}$ har afstand $\leq r$ fra O_1 , og så at $\alpha(\underline{x}) = 0$, hvis $\underline{x}$ har afstand $\geq 2r$ fra O_1 . Så er αT og $\Delta(\alpha T)$ distributioner med kompakt støtte indeholdt i O , og på mængden af punkter med afstand $< r$ fra O_1 er $\Delta(\alpha T)$ identisk med ΔT . Idet vi sætter

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \|\underline{x}\| & \text{for } m = 2 \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)}{2(2-m)(\sqrt{\pi})^m} \|\underline{x}\|^{2-m} & \text{for } m > 2 \end{cases}$$

har vi ifølge beviset for sætning 9 i kapitel 26, at

$$(7) \quad \alpha T = f \Delta(\alpha T).$$

Lad nu η være en vilkårlig ofte differentiabel funktion, som er identisk 1 på O_1 og 0 i alle punkter med afstand $\geq r$ fra O_1 . Vi sætter $S_1 = \eta \Delta(\alpha T)$, og S_1 er da en distribution, som svarer til en vilkårlig ofte differentiabel funktion g . Vi sætter $S_2 = (1-\eta) \Delta(\alpha T)$, og S_2 er da en distribution, som har sin støtte indeholdt i mængden U af punkter, hvis afstand fra

0 er > 0 men $< 2r$. Vi har nu

$$\alpha T = f * g + f * S_2.$$

Her er $f * g$ en vilkårlig ofte differentiabel funktion, da g er det. Lad f_1 være overalt vilkårlig ofte differentiabel og identisk med f for $\|\underline{x}\| \geq r$. Vi har da

$$\begin{aligned} (S_2 * f_1)(\varphi) &= S_{2\underline{x}}(f_{1\underline{y}}(\varphi(\underline{x} + \underline{y}))) = S_{2\underline{x}}(\int f_1(\underline{y})\varphi(\underline{x} + \underline{y})d\underline{y}) \\ &= S_{2\underline{x}}(\int f_1(-\underline{x} + \underline{y})\varphi(\underline{y})d\underline{y}) \\ &= \int S_{2\underline{x}}(f_1(-\underline{x} + \underline{y}))\varphi(\underline{y})d\underline{y}, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $S_{2\underline{x}} * f_1$ er den vilkårlig ofte differentiable funktion $S_{2\underline{x}}(f_1(-\underline{x} + \underline{y}))$. Det resterende bidrag $(f - f_1) * S_2$ får ingen indflydelse for de punkter af O_1 , som har afstand $> r$ fra randen. Da r var et vilkårligt positivt tal, har vi således fået vist, at αT og dermed T er en vilkårlig ofte differentiabel funktion i O_1 , og da O_1 var en vilkårlig delmængde af O , følger det, at løsningen T er en funktion, som er vilkårlig ofte differentiabel i O . I det analytiske tilfælde udnytter vi ligeledes (7), men nu er $\Delta(\alpha T)$ en funktion og analytisk i O_1 . Erstatte vi f med $f \wedge n$ ($f \vee -n$ for $m = 2$), giver foldningen et integral af en analytisk funktion med hensyn til en parameter, og påstanden følger ved grænseovergangen $n \rightarrow \infty$.