

Matematik 6, 1963–64

Hans Tornehave

Forelæsningsnoter til Funktionalanalyse

- T1:** Mængdelære. (25s)
- T2:** Om topologi. (26s)
- T3:** Topologiske vektorrum. (22s)
- T4:** Singulariteter for reelle differentialligninger af første og anden orden. (32s)
- T5:** Relaxationssvingninger (Jordans sætning). (42s)
- T5A:** Sætninger om homogene, lineære differentialligninger af 2. orden. (8s)
- T5B:** Sturm–Liouville-problemet. (13s)
- T6:** Partielle differentialligninger af første orden. (22s)
- T7:** Klassifikation af partielle differentialligninger af anden orden. (14s)
- T8:** Hyperbolske differentialligninger. (26s)
- T9:** En eksistenssætning. (8s)
- T10:** Adskillelse af de variable. (11s)
- T11:** Varmeledningsligningen. (19s)

Kapitel 1.

Mængdelære.

1.1. Vi skal i dette afsnit beskæftige os med en idékreds, som har principiel betydning for udviklingen af den abstrakte mængdelære, og som har mange anvendelser i den videregående matematik. Vi begynder med at minde om begrebet ordensrelation på en mængde A .

En relation på A er som bekendt givet ved en mængde $R \subseteq A \times A$, og man benytter et relationstegn, f.eks. $-<$, således at $(a,b) \in R$ skrives $a -< b$. Relationen er en ordensrelation, når den har følgende egenskaber:

- 1) $\forall a \in A (a -< a)$. Reflexivitet.
- 2) $\forall a,b \in A ((a -< b \wedge b -< a) \Rightarrow a = b)$.
- 3) $\forall a,b,c \in A ((a -< b \wedge b -< c) \Rightarrow a -< c)$. Transitivitet.

Eksempler på ordensrelationer er relationen $\leq$ på $\mathbb{R}$ og relationen $\subseteq$ på mængden $\mathcal{D}(M)$ af delmængder af en mængde M . I stedet for $a -< b$ vil vi skrive $b >- a$ og derved defineres en ny ordensrelation $>-$, som er den omvendte til $-<$. Af 2) fremgår, at $a -< b$ samtidig med $a >- b$ kun finder sted for $a = b$. Relationen $a -< b$ læses "a kommer før b" eller "a minoriserer b". Tilsvarende siges også "b kommer efter a" eller "b majoriserer a". En mængde A med en ordensrelation kaldes en ordnet mængde. Den kaldes en fuldstændig ordnet mængde, når betingelsen

$$\forall a,b \in A (a -< b \vee b -< a)$$

er opfyldt. Hvis man vil understrege, at en mængde blot er ordnet, men ikke nødvendigvis fuldstændigt ordnet, kalder vi den partielt ordnet. F.eks. er $\mathbb{R}$ fuldstændig ordnet ved $\leq$, medens $\mathcal{D}(M)$ er partielt ordnet ved $\subseteq$.

1.2. Vi får brug for endnu en række begreber i tilslutning

til ordnede mængder. Vi betragter først en ordnet mængde A med ordensrelationen $-<$, og vi definerer da:

$a \in A$ kaldes det første element i A , såfremt

$$\forall b \in A (a -< b).$$

Det fremgår af betingelsen 2) i 1.1, at der virkelig højst findes 1 element af A , som tilfredsstiller denne betingelse.

Analogt definerer vi

$a \in A$ kaldes det sidste element i A , såfremt

$$\forall b \in A (b -< a).$$

Vi understreger, at det første element og det sidste element ifølge definitionerne står i relationen $-<$ eller $>-$ (er sammenlignelige med) alle elementerne i A . Det er let at angive ordensrelationer, hvor intet element er sammenligneligt med alle andre, og der vil da ikke findes første eller sidste element.

$a \in A$ kaldes et minimalt element i A , såfremt

$$\forall b \in A (b -< a \Rightarrow b = a).$$

$a \in A$ kaldes et maximalt element i A , såfremt

$$\forall b \in A (a -< b \Rightarrow b = a).$$

En mængde kan have mange maximale elementer, men 2 af disse vil aldrig være sammenlignelige. Et element, der ikke er sammenligneligt med noget andet element, er efter definitionerne på en gang minimalt og maximalt. Hvis det første element i A eksisterer, er det tillige det eneste minimale element i A , og tilsvarende for det sidste element. Hvis A er fuldstændigt ordnet og a et minimalt element i A , da er a det første element i A . Analogt for maximalt element.

1.3. Lad A være en fuldstændig ordnet mængde. Ethvert $x \in A$ definerer et venstre afsnit $V_A(x)$ bestående af de elementer, der er forskellige fra x og går forud for x . Analogt defineres et højre afsnit $H_A(x)$. Altså

$$V_A(x) = \{y \in A \mid y \neq x \wedge y \prec x\}.$$

Vi bemærker, at V_A er en afbildning af A ind i $\mathcal{D}(A)$.

1.3.1. Definition. En fuldstændig ordnet mængde A kaldes velordnet, hvis enhver ikke tom delmængde af A har et første element. Ved et venstre afsnit i A forstås et afsnit $V_A(x)$ som ovenfor defineret eller hele mængden A .

Mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal er velordnet ved relationen $\leq$, men $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er ikke velordnede ved denne relation.

1.3.2. Sætning. En foreningsmængde af venstre afsnit i en velordnet mængde er selv et venstre afsnit.

Bevis. Lad A være en velordnet mængde og $\{U_j \mid j \in J\}$ en mængde af venstre afsnit. Vi sætter $U = \bigcup_j U_j$. Hvis U ikke er hele A , har $A \setminus U$ et første element x , og vi har da $V_A(x) \subseteq U$. For et y med $x \prec y$ ville $y \in U_j$ medføre $x \in U_j$, hvilket ikke gælder. Altså er $U = V_A(x)$.

1.3.3. Sætning. Lad A være en velordnet mængde og $B \subseteq A$ en delmængde med følgende egenskab:

$$\forall x \in A \ (V_A(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B).$$

Da er $B = A$.

Bevis. Ellers fandtes der et første element $x \in A \setminus B$ og dette ville medføre $V_A(x) \subseteq B$, altså efter antagelsen i sætningen $x \in B$ i modstrid med $x \in A \setminus B$.

Sætning 1.3.3 er grundlaget for en bevismetode, der kaldes transfinit induktion. Vi skal se eksempler på denne bevismetode i det følgende.

1.4. Lad A og B være ordnede mængder med ordensrelationer, som vi vil betegne med $\prec$ for begge mængder. En afbildning $\varphi: A \rightarrow B$ kaldes voksende, såfremt

$$\forall x, y \in A \ (x \prec y \Rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(y)).$$

Hvis φ tillige er bijektiv og φ^{-1} voksende, kaldes φ en ordensisomorfi, og A og B kaldes ordensisomorfe. Det er klart, at ordensisomorfi med er en ækvivalensrelation.

En ordensisomorfi afbilder første element på første element, minimalt element på minimalt element, venstre afsnit på venstre afsnit, fuldstændig ordnet mængde på fuldstændig ordnet mængde, velordnet mængde på velordnet mængde o.s.v.

Hvis A er fuldstændig ordnet, medens B er ordnet og $\varphi: A$ ind i B er voksende og bijektiv, da er B åbenbart fuldstændig ordnet og φ en ordensisomorfi.

1.4.1. Sætning. Lad A og B være ordensisomorfe velordnede mængder. Der eksisterer da kun 1 ordensisomorfi $\varphi: A$ på B.

Bevis. Vi benytter transfinit induktion. Lad $\varphi: A$ på B og $\psi: A$ på B være ordensisomorfier. Vi betragter

$$E = \{x \in A \mid \varphi(x) = \psi(x)\}.$$

For $x \in A$ og $V_A(x) \subseteq E$ bliver x det første element i $A \setminus V_A(x)$, altså $\varphi(x)$ og $\psi(x)$ begge det første element i $B \setminus \varphi(V_A(x)) = B \setminus \psi(V_A(x))$. Af sætning 1.3.3 følger nu $E = A$ og sætningen er bevist.

1.4.2. Sætning. En velordnet mængde A er ikke ordensisomorf med noget venstre afsnit $V_A(x) \subset A$.

Bevis. Vi benytter atter transfinit induktion. Lad $\varphi: A$ på $V_A(x)$ være en ordensisomorfi. Vi sætter

$$E = \{y \in A \mid \varphi(y) = y\}.$$

For $y \in A$ og $V_A(y) \subseteq E$ bliver y det første element i $A \setminus V_A(y)$ og $\varphi(y)$ følgelig det første element i $\varphi(A \setminus V_A(y)) = \varphi(A) \setminus \varphi(V_A(y))$. Altså får vi $\varphi(y) = y$, hvilket medfører $y \in E$, og påstanden følger nu af sætning 1.3.3.

1.4.3. Sætning. Lad A og B være velordnede mængder og $\varphi: A$

ind i B og $\psi: A \text{ ind i B}$ ordensisomorfier, der begge afbilder A på et venstre afsnit af B. Da er φ og ψ identiske.

Bevis. I specialtilfældet $\varphi(A) = \psi(A)$ følger det af sætning 1.4.1, at φ og ψ er identiske. Af $x \in \psi(A)$, $x \notin \varphi(A)$ følger $\varphi(A) \subseteq V_A(x) \subset \psi(A)$, og afbildningen $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(A) \text{ på } \varphi(A)$ er en ordensisomorfi mellem den velordnede mængde $\psi(A)$ og afsnittet $\varphi(A)$ i modstrid med sætning 1.4.2.

1.4.4. Sætning. Af 2 velordnede mængder A og B vil en altid være ordensisomorf med et venstre afsnit af den anden.

Bevis. Lad $\{C_j \mid j \in J\}$ være mængden af venstre afsnit af A, for hvilke der eksisterer ordensisomorfier $\varphi_j: C_j \text{ ind i B}$, således at $\varphi_j(C_j)$ er et afsnit af B. For $x \in C_j \cap C_k$ gælder ifølge 1.4.3, da $C_j \cap C_k$ åbenbart er et afsnit af A, at $\varphi_j(x) = \varphi_k(x)$. For $C = \bigcup_j C_j$ kan vi derfor definere $\varphi: C \text{ ind i B}$, idet vi for $x \in C_j$ sætter $\varphi(x) = \varphi_j(x)$. Ifølge sætning 1.3.2 er C et venstre afsnit af A. Vi vil vise, at enten er $C = A$ eller $\varphi(C) = B$. I modsat fald eksisterede nemlig et første element $\xi \in A \setminus C$ og et første element $\eta \in B \setminus \varphi(C)$, og

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in C \\ \eta & \text{for } x = \xi \end{cases}$$

definerer da en ordensisomorfi af $C \cup \{\xi\}$ på afsnittet $\varphi(C) \cup \{\eta\}$ af B, men så er $C \cup \{\xi\}$ en af mængderne C_j i modstrid med definitionen af C.

1.5. Af sætning 1.4.4 fremgår, at de velordnede mængder er omtrent ens, således at afsnittene af en eneste velordnet "mødelmængde" vil være tilstrækkelige til alle formål, hvis blot "modellen" er lang nok. Det er nærliggende at starte med $\mathbb{N}$, dog plejer man at medtage 0, idet man derved opnår, at hvert tal i rækken netop er antallet af de forudgående. Hvis mængden har flere elementer, findes der blandt dem et første. Et sådant be-

tegner vi ω og de følgende med $\omega+1, \omega+2, \dots$. Hvis det stadig ikke er nok, fortsættes med $2\omega, 2\omega+1, \dots$ o.s.v. Når dette heller ikke er nok, fortsættes med $\omega^2, \omega^2+1, \dots, \omega^2+\omega, \dots, 2\omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots$. Når sammenbygning på denne måde ikke giver mere, kan vi gå videre med et ω_1 , derefter med et ω_2 o.s.v. Således kommer vi til den transfinite talrække

$$0, 1, 2, 3, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, \omega^2, \omega^2+1, \dots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \dots, \omega^2+2\omega, \dots, 2\omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega_1, \omega_1+1, \dots, \omega_1+\omega, \dots, \omega_1+\omega^\omega, \dots, \omega_2, \dots$$

Der er altid mulighed for at bygge videre på denne række, og den kan således bringes til at indeholde en kopi af enhver velordnet mængde, man møder. Afsnittet $V(q)$, hvor q er et symbol fra rækken, siges at have ordningstypen q . Enhver velordnet mængde får således tillagt en ordningstype, og velordnede mængder er ordensisomorfe, hvis og kun hvis de har samme ordningstype.

1.6. I de følgende undersøgelser får vi brug for det såkaldte udvalgsaksiom, som først blev fremsat af E. Zermelo i 1904.

1.6.1. Udvalgsaksiomet. Svarende til en mængde M findes der altid en afbildning $u: \mathcal{D}(M) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow M$, således at $u(A) \in A$ for ethvert $A \in \mathcal{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$. Afbildningen u kaldes en udvalgsfunktion.

Udvalgsfunktionen u knytter således til enhver ikke tom delmængde $A \subseteq M$ et element af denne mængde. At en sådan udvalgsfunktion virkelig eksisterer, forekommer i første omgang næsten indlysende. Zermelo benyttede sit udvalgsaksiom til beviset for følgende sætning.

1.6.2. Velordningssætningen. På enhver mængde M kan der indføres en ordningsrelation, således at M bliver velordnet.

Bevis. Lad $u: \dot{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$ ind i M være en udvalgsfunktion. Vi sætter $u(M) = a_0$. Ved en kæde vil vi forstå en delmængde $K \subseteq M$ med en velordningsrelation $-<$, således at ethvert $x \in K$ tilfredsstiller betingelsen

$$(1) \quad x = u(M \setminus V_K(x)),$$

hvor $V_K(x)$ er det ved x bestemte venstre afsnit af K . Lad nu K og L være to sådanne kæder. Vi ved da fra sætning 1.4.4 at 1 af dem, lad os sige K , er ordensisomorf med et venstre afsnit af den anden, og vi har således en ordensisomorfi $\phi: K$ ind i L , og $\phi(K)$ er et venstre afsnit af L . Vi indfører punktmængden

$$E = \{x \in K \mid \phi(x) = x\}.$$

Hvis $x \in K$ er et element, for hvilket $V_K(x) \subseteq E$, har vi ifølge definitionen af E , at $V_K(x) = \phi(V_K(x))$, og da $\phi(V_K(x))$ er et afsnit af L eksisterer $y \in L$, således at $\phi(V_K(x)) = V_K(x) = V_L(y)$. Af (1) følger da

$$y = u(M \setminus V_L(y)) = u(M \setminus V_K(x)) = x,$$

altså $x \in E$. Transfinit induktion giver altså $E = K$, så vi ser, at K er et afsnit af L .

Lad nu $\{K_j \mid j \in K\}$ være mængden af alle kæder i M . Vi sætter $K^* = \bigcup_j K_j$. For $x, y \in K^*$ har vi da kæder K_1 og K_2 som indeholder x og y , og da den ene kæde er et afsnit af den anden, findes der en kæde, der indeholder både x og y , og denne kæde giver os en relation $x -< y$. De foregående overvejelser viser, at denne relation er ens for alle kæder, der indeholder x og y . Heraf fremgår, at $x -< y$ og $y -< x$ medfører $x = y$. Af $x -< y$ og $y -< z$ fås, idet der findes en kæde, som indeholder x , y og z , at $x -< z$. Altså er K^* en fuldstændig ordnet mængde. En mængde K_j er eventuelt identisk med K^* . I modsat fald findes K_s , således at $K_j \subset K_s \subseteq K^*$, og K_j er da et venstre afsnit af K_s og dermed også et venstre afsnit af K^* . En delmængde $A \subseteq K^*$ har elementer

fælles med en mængde K_j , og det første element i $A \cap K_j$ bliver åbenbart det første element i A . Altså er K^* velordnet.

Vi har således fundet en kæde K^* , der indeholder alle andre kæder. Er nu $K^* \subset M$ en ægte delmængde, kan vi sætte $u(M \setminus K^*) = a$. Ved at tilføje a efter alle elementerne i K^* får vi en ny velordnet mængde, og den er åbenbart en kæde. Men det strider mod, at K^* indeholder alle andre kæder. Altså er $K^* = M$, og M er velordnet ved relationen $-\prec$.

1.7. Til enhver velordnet mængde svarer en ordningstype. I stedet for ordningstype siger man ofte ordenstal. En abstrakt mængde kan (hvis den er uendelig) organiseres på flere måder som velordnet mængde, og den har derfor ikke nogen bestemt ordningstype. Imidlertid falder de abstrakte mængder i ækvivalensklasser ved den sædvanlige mængdeækvivalens og hver sådan kategori tilordnes et kardinaltal. Af velordningssætningen følger, at det for to mængder A og B altid gælder, at 1 af dem kan afbildes på en delmængde af den anden. Hvis A kan afbildes på en delmængde af B , vil vi skrive $\text{kard } A \leq \text{kard } B$, hvor "kard" betyder kardinaltal for", og det er da klart, at relationen $\leq$ bliver reflexiv og transitiv. At $\leq$ er en ordningsrelation fremgår af følgende sætning, F. Bernsteins ækvivalenssætning (1897):

1.7.1. Sætning. Hvis 2 mængder A og B tilfredsstiller både $\text{kard } A \leq \text{kard } B$ og $\text{kard } B \leq \text{kard } A$, da er A og B ækvivalente.

Bevis. Beviset er helt elementært, og det benytter hverken udvalgsaksiomet eller velordning. Efter forudsætningerne har vi injektive afbildninger $f: A \rightarrow B$ og $g: B \rightarrow A$. Vi bemærker, at elementerne i A og B er ordnede i kæder, hvis elementer skiftevis tilhører A og B , og hvor ethvert element er billede af det foregående, altså

$$\dots \xrightarrow{g} a_{-1} \xrightarrow{f} b_{-1} \xrightarrow{g} a_0 \xrightarrow{f} b_0 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \dots$$

Kæden er éntydigt bestemt ved ethvert af sine elementer. Den kan bryde af til venstre, idet den kan have et første element, som ikke tilhører billedet af den anden mængde, og den vil da være uendelig og uden gentagelser. Kæden kan også være periodisk, og den kan strække sig i det uendelige i begge retninger uden gentagelser.

Ethvert element i A eller B tilhører præcis 1 kæde, og vi får således klasseinddelinger af A og B. Til hver klasse i A er knyttet en klasse i B (den, der stammer fra samme kæde), og klasser, der svarer til hinanden, har lige mange (evt. numerabelt mange) elementer. Vi kan altså for hver klasse i A vælge en bi-jektiv afbildning på den tilsvarende klasse i B, og disse bi-jektive afbildninger definerer da åbenbart en bi-jektiv afbildning af A på B. Dermed er Bernsteins sætning vist.

Imidlertid må vi indrømme, at vi ikke, som vi lovede i begyndelsen, har vist sætningen uden brug af udvalgsaksiomet. Vi har jo for hver af klasserne i A valgt 1 af de mulige afbildninger, og det synes at være en stiltiende anvendelse af udvalgsaksiomet. En nærmere undersøgelse afslører dog hurtigt, at vi kan angive en ganske bestemt afbildning for hver klasse, så det ikke bliver nødvendigt at vælge. Hvis klassen stammer fra en periodisk kæde eller en kæde, der er uendelig i begge retninger, er restriktionen af f selv bi-jektiv og således anvendelig. Det samme gælder, hvis kæden har et første element, som tilhører A. Hvis kæden derimod har et første element, som tilhører B, vil restriktionen af g^{-1} være bi-jektiv. Vi har således angivet et konkret valg af afbildning for hver enkelt klasse. Vi understreger endnu engang, at sammenligneligheden af vilkårlige kardinaltal

ikke har kunnet vises uden brug af velordning og dermed af udvalgsaksiomet.

Det her benyttede bevis for F. Bernsteins ækvivalenssætning stammer fra B. Jessens forelæsninger.

Vi bemærker, at enhver mængde af kardinaltal er velordnet ved relationen $\leq$. Hvis vi nemlig velordner mængder med de omtalte kardinaltal vil en af disse få mindst ordningstype, da en mængde af ordningstyper er velordnet, og den vil da også have det laveste kardinaltal.

1.8. De fleste anvendelser af velordningssætningen vedrører mængder med mere sammensat organisation. Det er oftest nødvendigt at kombinere velordningssætningen med transfinit induction, men anvendelserne har^{et} vist ensartet præg, og det er derfor muligt én gang for alle at udpræparere et lemma, som i de fleste tilfælde overflødiggør den længere bevisførelse. Det nævnte lemma kaldes sædvanligvis Zorn's lemma efter M. Zorn (A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 41(1935), 667-670), men det er omtalt af K. Kuratowski allerede i 1922.

1.8.1. Definition. Lad A være en ordnet mængde. Et element $a \in A$ kaldes en majorant for en delmængde $B \subseteq A$, såfremt

$$\forall x \in B (x \prec a).$$

Mængden A kaldes induktivt ordnet, såfremt enhver fuldstændig ordnet delmængde af A har en majorant.

1.8.2. Zorn's lemma. Enhver induktivt ordnet mængde har et maximalt element.

Bevis. Lad A være induktivt ordnet ved relationen $\prec$. For $B \subseteq A$ vil vi med $H(B)$ betegne mængden af "ægte" majoranter til B, altså

$$H(B) = \{x \in A \mid \forall y \in B (y \prec x \wedge y \neq x)\}.$$

Lad $u: \dot{D}(A) / \{\emptyset\}$ ind i A være en udvalgsfunktion. En velordnet delmængde $K \subseteq A$ kaldes en kæde, såfremt

$$\forall x \in K (x = u(H(V_K(x)))).$$

specielt er kædens første element $u(H(\emptyset)) = u(A)$, således at alle kæder begynder med samme element. For 2 kæder K og L gælder, at den ene, lad os sige K , er ordensisomorf med et afsnit af den anden. Der eksisterer altså en ordensisomorfi $\varphi: K$ ind i L , og vi kan betragte mængden

$$E = \{x \in K \mid \varphi(x) = x\}.$$

For $y \in K$, $V_K(y) \subseteq E$ får vi $V_K(y) = V_L(y)$, altså

$$\varphi(y) = u(H(V_L(y))) = u(H(V_K(y))) = y,$$

og transfinit induktion giver, at K er identisk med et afsnit af L . Ganske som i beviset for velordningssætningen ser vi, at foreningsmængden af alle kæder selv er en kæde, og det bliver den mest omfattende af alle kæder, idet den har enhver anden kæde som afsnit. Hvis denne kæde havde ægte majoranter, kunne vi danne en ny kæde ved tilføjelse af et element i modstrid med dens majorantegenskab. Da A er induktivt ordnet, har den maksimale kæde et sidste element, og det er et element uden ægte majoranter, altså netop et maximalt element. Dermed er beviset færdigt.

1.9. Vi vil illustrere Zorn's lemma med en vigtig anvendelse indenfor vektorrummenes teori. Vi minder om, at et vektorrum over et legeme K (med elementer $\alpha, \beta, \dots$) er en Abelsk gruppe E med K som operatorring, således at vi for $a, b, \dots \in E$ kan danne udtryk af formen αa , og således at

$$1 \cdot a = a, \quad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a.$$

En mængde $\{e_j \mid j \in J\}$ af elementer af E siges at være lineært afhængig, hvis der gælder en relation

$$\alpha_1 e_{j_1} + \dots + \alpha_m e_{j_m} = 0,$$

hvor koefficienterne $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ikke alle er $\underline{0}$. At $\{e_j \mid j \in J\}$ er lineært afhængig er således ensbetydende med, at et af elementerne e_j kan udtrykkes som en linearkombination af endelig mange andre.

Omvendt siges $\{e_j \mid j \in J\}$ at være lineært afhængigt (eller frit), såfremt systemet ikke er afhængigt. De lineært uafhængige systemer i E udgør en partielt ordnet mængde med ordensrelationen $\subseteq$. Hvis vi har en fuldstændig ordnet mængde $\{U_k \mid k \in K\}$ af lineært uafhængige systemer $U_k = \{e_j \mid j \in J_k\}$, hvor altså mængderne J_k er elementer af en mængde I , som er fuldstændig ordnet ved inklusion. Det er klart, at foreningsmængden

$$\bigcup_k U_k = \{e_j \mid j \in \bigcup_k J_k\}$$

er lineært uafhængig, da endelig mange elementer fra $\bigcup_k U_k$ er indeholdt i endelig mange U_k og derfor i den mest omfattende af disse, og derfor er lineært uafhængige. Men så er $\bigcup_k U_k$ en majorant for $\{U_k \mid k \in K\}$ og mængden af lineært uafhængige systemer er således fuldstændigt ordnet ved $\subseteq$. Altså giver Zorn's lemma, at der eksisterer et maksimalt uafhængigt system $\{e_j \mid j \in J\}$.

Det ses, at anvendelsen af Zorn's lemma i dette typiske tilfælde var næsten umiddelbar. Vi har beskrevet fremgangsmåden så bredt, fordi det var første gang, og i det følgende vil vi være mindre grundige.

Et maksimalt uafhængigt system $\{e_j \mid j \in J\}$ kaldes en basis for vektorrummet. For $a \in E$ gælder det altså, at a sammen med systemet $\{e_j \mid j \in J\}$ udgør et lineært uafhængigt system, og vi har derfor en relation

$$\beta a + \beta_1 e_{j_1} + \dots + \beta_m e_{j_m} \equiv \underline{0},$$

hvor ikke alle koefficienterne er $\underline{0}$. Da $e_{j_1}, \dots, e_{j_m}$ er lineært

uafhængige, medfører dette $\beta \neq 0$, og vi har derfor en fremstilling

$$a = \alpha_1 e_{j_1} + \dots + \alpha_m e_{j_m}.$$

To forskellige fremstillinger af denne form ville give en relation mellem endelig mange basiselementer. Altså er fremstillingen éntydig bestemt ved elementet a .

1.10. Ovenstående overvejelser afviger kun på et eneste punkt fra tilsvarende overvejelser i matematik 2, nemlig ved vort uindskrænkede bevis for eksistensen af en basis.

Lad os f.eks. vælge $K = \mathbb{Q}$ og $E = \mathbb{R}$ med de sædvanlige regneregler. Sætningen giver da, at der eksisterer en mængde $B = \{b_j \mid j \in J\}$ af reelle tal, således at ethvert reelt tal a på én og kun én måde kan skrives på formen

$$a = q_1 b_{j_1} + \dots + q_m b_{j_m}.$$

Eksistensen af en sådan basis for de reelle tal er først vist af Hamel.

Af den elementære teori for lineære operatorer følger nu, at enhver afbildning $\varphi: B \text{ ind i } \mathbb{R}$ giver anledning til en lineær afbildning $f: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$, idet vi for

$$x = x_1 b_{j_1} + \dots + x_m b_{j_m}$$

med rationale $x_1, \dots, x_m$ sætter

$$f(x) = x_1 \varphi(b_{j_1}) + \dots + x_m \varphi(b_{j_m}).$$

Funktionen f tilfredsstiller linearitetsbetingelsen

$$f(px+qy) = pf(x) + qf(y)$$

for rationale p og q .

Dette viser eksistensen af diskontinuerte løsninger til funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1.11. Det vil være urimeligt at slutte dette kapitel uden

at nævne den diskussion Zermelos resultater gav anledning til. Ved første blik synes ovenstående overvejelser vel meget uskyl-
dige, og selve udvalgsaksiomet må forekomme overordentlig rime-
ligt.

Ved nærmere eftertanke må man dog erkende, at f.eks. en udvalgsfunktion på $\mathbb{R}$ slet ikke er så omtalt et begreb. Intet menneske har kunnet angive nogen algoritme, som ved anvendelse på en vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}$ altid giver et element af $\mathbb{R}$ som resultat. Det har med andre ord ikke været muligt at angive et eksplicit udtryk for udvalgsfunktionen. Tilsvarende gælder det, at man ikke eksplicit kan angive en basis for de reelle tal, og man har heller ikke eksplicit kunnet angive andre løsninger til funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

end netop de trivielle kontinuerte løsninger $f(x) = kx$.

Vi bemærker, at det for en velordnet mængde er let at angive en udvalgsfunktion, idet man blot til enhver ikke tom delmængde knytter dens første element, hvis eksistens jo netop er sikret ved velordningen. Udvalgsaksiomet er således virkelig en nødvendig forudsætning for velordningssætningen.

Det er også klart, at Zorn's lemma medfører velordningssætningen og dermed udvalgsaksiomet. Lad nemlig A være en mængde. Vi kan betragte mængden $A^* = \{K_j \mid j \in J\}$ af alle mulige velordnede mængder, der er delmængder af A udstyrede med passende ordningsrelation. For disse har vi ordningsrelationen $K_{j_1} \prec K_{j_2}$, hvor $\prec$ betyder: "er et afsnit af". Denne ordning er åbenbart induktiv, og Zorn's lemma sikrer os, at der eksisterer et maksimalt element. Men det er klart, at et element kun kan blive maksimalt ved at omfatte hele A , og dermed er velordningssæt-

ningen bevist.

Vi må altså indrømme, at det kritiserede udvalgsaksiom er grundlæggende for alle de foregående undersøgelser. Den omstændighed, at udvalgsaksiomet giver eksistensbeviser for ting, der ikke kan konstrueres eksplicit, har ført til at eksistensbeviser på grundlag af udvalgsaksiomet i en vis forstand anses for mindre tilfredsstillende af mange matematikere. En nærmere gennemgang af den matematiske analyses grundlag har imidlertid vist, at stiltiende anvendelser af udvalgsaksiomerne forekommer ret hyppigt.

1.12. En medvirkende årsag til matematikernes skepsis overfor udvalgsaksiomet var en række paradoxer, som opstod ved ufor-sigtig omgang med mængdelæren. Her er det berømteste:

For mængden Ω af alle mængder gælder åbenbart

$$\Omega \in \Omega,$$

og der er derfor rimelighed i at definere en mængde af mængder på følgende måde:

$$M = \{A \mid A \notin A\}.$$

Det ses da, at

$$M \in M \iff M \notin M,$$

så vi er nået frem til en modstrid, skønt vi ikke har gjort nogen som helst antagelse.

Men vi har jo også ordenstyperne

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \dots, 2\omega, \dots, \omega^2, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega_1, \dots, \omega_2, \dots$$

Lad Ω være mængden af alle ordenstyper. Nu er hver ordenstype jo netop ordenstypen af det forudgående afsnit. Men efter afsnittet Ω skulle således stå ordenstypen for Ω . Det er klart, at det kan der ikke blive mening i.

1.13. Det har været kendt siden oldtiden, at også den rene logik støder på vanskeligheder af lignende art som de ovenfor

omtalte. En påstand, der udtaler sig om, hvorvidt den selv er sand eller falsk, kan sædvanligvis ikke tillægges en af sandhedsværdierne "sand" eller "falsk". Hvis matematikkens grundlag skal opbygges over en formel logik, må denne tage disse fænomener i betragtning, således at påstande af den nævnte art i en eller anden forstand "holdes udenfor".

1.14. Vi skal ikke her indlade os på en nærmere diskussion af de ovenfor omtalte problemer, men finder det dog rimeligt at sige lidt om den senere udvikling. Den matematiske grundlagsforskning, som har til formål at opstille et modsigelsesfrit grundlag for logik og matematik, har udviklet sig i flere retninger. Vi skal først nævne den intuitionistiske retning, som bestræber sig på at opbygge mest muligt af matematikken efter særlig strenge principper, således at der ikke skulle blive fare for modsigelser. Intuitionisterne anerkender kun strengt konstruktive eksistensbeviser. Lad os f.eks. antage, at vi ønsker at bevise, at uendelig mange hele tal har en vis egenskab A. Vi kunne da antage

$$\exists N \forall n \geq N (n \text{ har egenskaben non } A),$$

og hvis denne antagelse fører til en modstrid, ville vi have et indirekte bevis for påstanden om, at der eksisterer vilkårlig store hele tal med egenskaber A. Fra intuitionistisk synspunkt ville et bevis af den anførte form ikke blive godtaget. Derimod ville intuitionisterne godtage et bevis, som angiver et tal med egenskaben A og en metode til ud fra et tal med egenskaben A at konstruere et større tal med egenskaben A.

Det fremgår heraf, at store og centrale dele af matematisk analyse fra intuitionistisk synspunkt må forkastes og mange andre afsnit af matematikken bliver meget besværlige.

1.15. I modsætning til intuitionisterne har formaldisterne søgt at opbygge hele matematikken inklusive de ovenfor benyttede metoder på et solidt grundlag ved hjælp af en fælles aksiomatisk opbygning af logisk matematik. Det er dog ikke lykkedes at vise, at et sådant grundlag er modsigelsesfrit. Det har tværtimod vist sig, at et logisk system, der er kraftigt nok til at begrunde indførelsen af mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal, nødvendigvis må omfatte udsagn, der ikke kan karakteriseres som sande eller falske. Dette udelukker dog ikke, at det logiske grundlag kan være anvendeligt. Nyere undersøgelser tyder på, at vanskelighederne overhovedet indtræder ved indførelsen af $\mathbb{N}$, og at udvalgsaksiomet ikke derefter giver anledning til nye vanskeligheder.

1.16. I de sædvanlige fremstillinger undgår man de mængdeteoretiske paradokser ved kun at udvikle mængdelæren for delmængder af et fast valgt univers U . Som det vil være bekendt, kommer man dog til at betragte mængder af mængder af delmængder eller endnu mere komplicerede begreber. Man er derfor ikke fuldt sikret mod paradokser som det, der var baseret på ordenstyperne.

Endelig skal vi fremhæve, at man uden risiko kan fremsætte generelle udtalelser om alle mængder, enhver ordenstype etc. Det er således ikke farligt at benytte alkvantoren $\forall$, selvom den refererer til "alle mængder". Det er symbolet $\{x \mid \dots\}$, der giver anledning til paradokser, når man ikke nøjes med at anvende det i situationer, hvor x kun gennemløber et univers.

1. Vis, at der eksisterer en velordnet mængde A med den egenskab, at ethvert venstreafsnit $V_A(x)$ for $x \in A$ er en numerabel mængde, medens A selv ikke er nummerabel. Vis, at alle mængder med denne egenskab har samme ordningstype. (Kontinuumhypotesen udtaler, at den således indførte mængde A er ækvivalent med et interval. Nyere undersøgelser tyder på, at kontinuumhypotesen ikke strider mod logikkens og mængdelærens øvrige aksiomer, men at den heller ikke kan afledes af disse).
2. Lad $\{A_j \mid j \in J\}$ være en mængde af mængder blandt hvilke ingen er indbyrdes ækvivalente, og blandt hvilke ingen har større kardinaltal end alle de øvrige. Vis, at $\bigcup A_j$ har større kardinaltal end enhver af mængderne A_j .
3. Vis, at det for enhver mængde M gælder, at

$$\text{kard } M < \text{kard } \mathcal{P}(M).$$
 Indirekte. Antag, at $f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ er bijektiv og betragt

$$A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}.$$
 Der findes da et $a \in M$, således at $f(a) = A$. Undersøg, om $a \in A$. Læg mærke til, hvordan ræsonnementet minder påfaldende om et af paradokserne.
4. Vis ved hjælp af resultaterne fra opgaverne 2 og 3, at "mængden af alle kardinaltal" vil give anledning til et paradoks ganske som "mængden af alle ordenstyper".
5. Vis, at enhver lineært uafhængig mængde af vektorer fra et vektorrum kan udvides til en basis for vektorrummet.
6. Vis, at mængden af alle følger af reelle tal fra intervallet $]0,1[$ er ækvivalent med et interval. Benyt decimalfremstilling og konstruer afbildning efter skemaet

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots \leftrightarrow (0, a_1 a_3 a_5 \dots, 0, a_2 a_6 a_{10} \dots, 0, a_4 a_{12} a_{20} \dots, \dots).$$

Glem ikke, at visse tal på to måder kan fremstilles som decimalbrøk. Udnyt Bernsteins ækvivalenssætning.

7. Udvid resultatet fra opgave nr. 6 til vilkårlige reelle talfølger.
8. Vis, at mængden af kontinuerte afbildninger $f: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ er ækvivalent med $[0,1]$. Benyt, at f er helt bestemt ved sin restriktion til $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ og anvend derefter resultatet fra opgave nr. 7.
9. Vis, at mængden af afbildninger $f: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ har større kardinaltal end $[0,1]$. Benyt resultatet fra opgave nr. 3.
10. Vi betragter en vilkårlig afbildning $g: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$. Kan vi da altid konstruere en kontinuert afbildning $f: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$, således at $\forall x \in [0,1] (f(x) \neq g(x))$? Svaret er benægtende på grund af følgende konstruktion:

Lad $\hat{C}([0,1], \mathbb{R})$ være mængden af kontinuerte afbildninger $f: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$. Ifølge opgave nr. 8 eksisterer en bijektiv afbildning $\phi: [0,1]$ ind i $\hat{C}([0,1], \mathbb{R})$ og for $x \in [0,1]$ er $\phi(x): [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ en kontinuert afbildning, som til $y \in [0,1]$ lader svare $\phi(x)(y) \in \mathbb{R}$. Det er nu let at vise, at der til afbildningen $g: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved $g(x) = \phi(x)(x)$ ikke svarer noget kontinuert x med den ønskede egenskab.

Dette er et andet eksempel på et rent eksistensbevis, der ikke kan udformes til et konstruktivt bevis.

11. Vis, at enhver ordnet mængde kan fremstilles som foreningsmængde af 2 disjunkte mængder, således at den ene af disse er velordnet, og den anden ikke har et første element.

12. Lad M være en vilkårlig mængde, og lad $u: \mathcal{D}(M) \setminus \{\emptyset\}$ ind i M være en udvalgsfunktion. En mængde $\tilde{A} \subseteq \mathcal{D}(M)$ kaldes komplet, når følgende betingelser er opfyldt:

$$1. \emptyset \in \tilde{A}.$$

2. For enhver mængde $K \in \tilde{A}$ gælder, at

$$K \neq M \Rightarrow K \cup \{u(M \setminus K)\} \in \tilde{A}.$$

3. Af $K_j \in \tilde{A}$ for $j \in J$ følger $\bigcup_j K_j \in \tilde{A}$.

Vis, at der eksisterer en komplet mængde, og at fællesmængden for komplette mængder igen er komplet. Vis, at fællesmængden for alle komplette mængder er velordnet ved relationen $\subseteq$. Find derved et andet bevis for velordningssætningen.

Vi tænker os de reelle tal velordnet.

Om en vis mængde af elementer $M \subseteq \mathbb{R}$ må det nu gælde, at de har $\aleph_1$ num^merabel (eller endelige) venstreafsnit.

Antog man nu at M var $\aleph_1$ num^merabel (og dermed at $\mathbb{R} \setminus M \neq \emptyset$) ville det første element i $\mathbb{R} \setminus M$ have $\aleph_1$ num^merabelt venstre afsnit, og dermed selv tilhøre M , hvilket er umuligt.

Altså gælder, at M ikke er $\aleph_1$ num^merabel.

Lad A og B være to mængder med denne egenskab. Da er den ene, f.eks. A ordensisomorf med et venstre afsnit i B , men da alle ægte venstreafsnit i B er $\aleph_1$ num^merabelle og A ikke selv er nummerabel, må A være ordensisomorf med selve B q.e.d.

Vi antager at $\exists p \in J [\text{kt } \bigcup A_j = \text{kt } A_p]$
 det betyder at der findes en bij. afb. $\varphi: \bigcup A_j \rightarrow A_p$
 For ethvert $j \in J$ ~~er~~ gælder det at restrikti-
 onen af φ til A_j : $\varphi_j: A_j \rightarrow A_p$ er injektiv
 og derfor $\text{kt } A_j < \text{kt } A_p$ for $p \neq j$ i modstrid
 med forudsætningerne.

Altså gælder: $\forall p \in J [\text{kt } \bigcup A_j > \text{kt } A_p]$

Antagelse: $f: M \rightarrow \mathcal{D}(M)$ er surjektiv.

Vi sætter $A = \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$ (denne
 mængde er ikke tom da $\emptyset \in \mathcal{D}(M)$) Da f er
~~bijek~~ surjektiv findes der et $a \in M$ for hvil-
 ket $f(a) = A$. Vi har nu:

$$a \notin A \Leftrightarrow a \in A$$

hvilket er noget vâs

Lad V være den givne mængde af lin. uafh. vektorer og lad $\mathcal{B}$ være en basis for rummet.

Mængden $M = \{B \subseteq \mathcal{B} \mid V \cup B \text{ er lin. uafh.}\}$ er partielt ordnet ved $\subseteq$. Endvidere er M induktivt ordnet, thi er $\{B_j \mid j \in J\}$ en fuldstændig ordnet delmængde har man $\bigcup_j B_j \in M$. (Endeligt mange vektorer i $V \cup \bigcup_j B_j$ vi nemlig tilhøre en af mængderne $V \cup B_j$ og derfor være lin. uafh.). M har derfor et maximalt element B^* .

En vilkårlig vektor $b \in \mathcal{B} \setminus B^*$ vil kunne skrives som en linearkombination af vektorer fra $V \cup B^*$ (ellers ville B^* ikke være maximalt element). Da enhver vektor i vektorrummet kan skrives som en linearkombination af vektorer $\in \mathcal{B}$ kan den også skrives som linearkomb. af vektorer $\in V \cup B^*$ altså er $V \cup B^*$ en basis.

Lad $(A, \prec)$ være den givne mængde. En delmængde $K \subseteq A$ vil vi kalde en kæde hvis $\prec$ er en velordningsrelation på K og der gælder:

$$(1) \quad \forall x \in K \quad \forall y \in A \setminus \mathcal{V}_K(x) [x \prec y]$$

Lad K og L være to kæder. Vi ved da at den en, f.eks. K , er ordensisomorf med et venstreafsnit af den anden; der eksisterer altså en ordensisomorf afbilde $\varphi: K \rightarrow L$ hvor $\varphi(K)$ er et venstre afsnit af L , og vi betragter nu mængden

$$E = \{x \in K \mid \varphi(x) = x\}$$

For $x \in K$ og $\mathcal{V}_K(x) \subseteq E$ sætter vi $\varphi(x) = y$ og bemærker at $\varphi(\mathcal{V}_K(x)) = \mathcal{V}_K(x) = \mathcal{V}_L(y)$. Vi anvender nu (1) to gange og får $x \prec y$ og $y \prec x$ hvilket viser at $x = y$, d.v.s. $x \in E$; og transfinit induktion viser nu at $\varphi(K) = K$, d.v.s. at K er et venstre afsnit af L .

Lad $\{K_j \mid j \in J\}$ være mængden af kæder i A . og sæt $K^* = \bigcup_{j \in J} K_j$. Det ses nu let at K^* selv er en kæde.

Antag ~~nu~~ at b er det første element i $B = A \setminus K^*$ altså (2) $\forall z \in B [b \prec z]$. Er $x \in K^*$ har vi $x \in K_j$ og $b \in A \setminus K^* \subseteq A \setminus \mathcal{V}_{K_j}(x)$ og dermed $x \prec b$ hvilket viser at $L = K^* \cup \{b\}$ er velordnet. Da $\mathcal{V}_L(b) = K^*$ viser (2): $\forall y \in A \setminus \mathcal{V}_L(b) [b \prec y]$. Altså er L en kæde i modstrid med at K^* indeholder alle kæder. $A \setminus K^*$ har altså ikke noget første element.

T 1.4. Formlen i linie 4 f.n. rettes til $\varphi(A \setminus V_A(y)) = V_A(x) \setminus V_A(y)$. Det er klart, at y er det første element i denne mængde, så vi får $\varphi(y) = y$.

T 1.7. Midt på siden optræder afsnittet $\varphi(V_K(x))$ af L , og det benyttes på afgørende måde, at $\varphi(V_K(x)) \neq L$. Dette følger umiddelbart af, at $\varphi(x) \in L$ men $\varphi(x) \notin \varphi(V_K(x))$.

I linie 12 f.n. skal der stå $\{K_j \mid j \in J\}$.

Afsnittet fra det sidste punktum i linie 4 f.n. til side 1.8 linie 2 erstattes med følgende:

Lad A være en vilkårlig, ikke tom delmængde af K^* . Vi kan vælge $j \in J$, således at $A \cap K_j \neq \emptyset$. Da K_j er velordnet, har $A \cap K_j$ et første element w . Lad $v \in A$ være et fra w forskelligt element. Hvis $v \in K_j$ gælder $w < v$, fordi w er det første element i $A \cap K_j$. For $v \notin K_j$ kan vi vælge $s \in J$, således at $v \in K_s$. Men så er K_j et afsnit af K_s , og da w , men ikke v , tilhører K_j , kan vi igen slutte, at $w < v$. Altså er w det første element i A . Dermed har vi bevist, at K^* er velordnet ved $<$. For ethvert element $x \in K^*$ eksisterer $j \in J$, således at $x \in K_j$ og (1) gælder således for x , idet afsnittet $V_{K_j}(x)$ ikke afhænger af j . Altså er K^* en kæde.

T 1.14. Linie 6 f.o. "omtalt" rettes til "enkelt"

2. Om topologi.

2.1. Vi vil kort repetere de topologiske grundbegreber og indføre enkelte nye synspunkter. En udførlig omtale findes i noterne til matematik 1.

2.2. En mængde M organiseres som et topologisk rum $T = (M, \mathcal{O})$, ved hjælp af en mængde $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ af delmængder af M , idet følgende betingelser kræves opfyldt:

å1). $M \in \mathcal{O}$ og $\emptyset \in \mathcal{O}$.

å2). $O_j \in \mathcal{O}$ for $j \in J$ medfører $\bigcup_j O_j \in \mathcal{O}$.

å3). $(O_1 \in \mathcal{O} \wedge O_2 \in \mathcal{O}) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Mængderne, der tilhører $\mathcal{O}$ kaldes åbne mængder.

En mængde M kan også organiseres som et topologisk rum $T = (M, \mathcal{U})$ ved en afbildning $\mathcal{U}: M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, som til hvert $x \in M$ knytter en mængde $\mathcal{U}(x)$ af delmængder af M . Disse kaldes omegne af x , og følgende betingelser kræves opfyldt:

o1). $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$.

o2). For $U \in \mathcal{U}(x)$ gælder $x \in U$.

o3). Af $U \in \mathcal{U}(x)$ og $V \supseteq U$ følger $V \in \mathcal{U}(x)$.

o4). Af $U, V \in \mathcal{U}(x)$ følger $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

o5). Til $U \in \mathcal{U}(x)$ svarer $V \in \mathcal{U}(y)$, således at

$$\forall y \in V(U \in \mathcal{U}(y)).$$

Den sidste betingelse udtrykker, at en omegn af x også er omegn af ethvert punkt, der ligger tilstrækkelig nær ved x . Af o3) fremgår, at det ikke er nødvendigt at kende hele $\mathcal{U}(x)$, idet $\mathcal{U}(x)$ er helt bestemt ved en delmængde $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$, når blot enhver mængde i $\mathcal{U}(x)$ har en delmængde, der tilhører $\mathcal{B}(x)$. Mængden $\mathcal{B}(x)$ kaldes da en omegnsbasis for x , og når en sådan er givet for alle $x \in M$, har vi $T = (M, \mathcal{B})$, hvor $\mathcal{B}: M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ nu må

tilfredsstille betingelserne:

$$b_1). \dot{B}(x) \neq \emptyset.$$

$$b_2). \text{ For } U \in \dot{B}(x) \text{ gælder } x \in U.$$

$$b_3). \text{ Til } U, V \in \dot{B}(x) \text{ svarer } W \in \dot{B}(x), \text{ således at } W \in U \cap V.$$

$$b_4). \text{ Til } U \in \dot{B}(x) \text{ svarer } V \in \dot{B}(x), \text{ således at ethvert } y \in V \text{ har et } W \in \dot{B}(y) \text{ med } W \subseteq U.$$

Det er indlysende, at der ved

$$\dot{U}(x) = \{U \in \dot{D}(M) \mid \exists V \in \dot{B}(x) (U \supseteq V)\}$$

defineres en afbildning $\dot{U}$, som tilfredsstiller o1), ..., o5).

2.3. Vi vil kort vise, at overgangene mellem $T = (M, \dot{O})$ og $T = (M, \dot{U})$ sker ved definitionerne:

$$(1) \dot{O} = \{O \in \dot{D}(M) \mid \forall x \in O (O \in \dot{U}(x))\}$$

$$(2) \dot{U}(x) = \{U \in \dot{D}(M) \mid \exists O \in \dot{O} (x \in O \wedge O \subseteq U)\},$$

idet vi dog bemærker, at (2) kan erstattes med

$$(2') \dot{B}(x) = \{O \in \dot{O} \mid x \in O\}.$$

Lad os først antage, at $T = (M, \dot{U})$, og at $\dot{O}$ er defineret ved (1). Det er da klart, at $\dot{O}$ tilfredsstiller å1, ..., å3. Definerer vi nu $\dot{B}(x)$ ved (2'), ses det umiddelbart, at $\dot{B}(x) \subseteq \dot{U}(x)$. Lad os nu omvendt antage, at $U \in \dot{U}(x)$. Vi definerer

$$V = \{y \in U \mid U \in \dot{U}(y)\}.$$

Af o5) ses nu, at ethvert $y \in U$ har en omegn, som også tilhører V , altså $V \in \dot{O}$. Trivielt er $V \subseteq U$. Altså gælder $V \subseteq U$ og $V \in \dot{B}(x)$. Altså vil $\dot{U}(x)$ tilfredsstille (2).

Hvis omvendt $T = (M, \dot{O})$, definerer vi $\dot{B}(x)$ ved (2'), og det ses umiddelbart, at $b_1), \dots, b_4)$ er opfyldt. Det er da klart, at alle $O \in \dot{O}$ tilfredsstiller $\forall x \in O (O \in \dot{U}(x))$. Hvis omvendt O tilfredsstiller dette, har vi for ethvert $x \in O$ en basismængde $U(x) \in \dot{B}(x)$ med $U(x) \in \dot{O}$, og med $U(x) \subseteq O$. Vi får da $O = \bigcup_{x \in O} U(x)$, altså $O \in \dot{O}$ på grund af å2).

2.4. Et topologisk rum $T = (M, \bar{U}) = (M, \bar{\partial})$ betegnes også $T = (M, \bar{U}, \bar{\partial})$. Mængden M kaldes den underliggende mængde for T . Det er ofte overflødigt at have en særlig betegnelse for denne mængde. I stedet for $x \in M$, $A \subseteq M$ skrives $x \in T$, $A \subseteq T$ etc.

Vi betragter $S = (M, \bar{U}, \bar{\partial})$ og $T = (M_1, \bar{U}_1, \bar{\partial}_1)$. En afbildning $f: S \text{ ind i } T$ kaldes kontinuert i $a \in S$ med $f(a) = b \in T$, såfremt

$$\forall U \in \bar{U}_1(b) (f^{-1}(U) \in \bar{U}(a)).$$

Endvidere kaldes f kontinuert, hvis den er kontinuert i ethvert $a \in S$. Dette er ensbetydende med, at betingelsen

$$\forall O \in \bar{\partial}_1(f^{-1}(O) \in \bar{\partial}) \text{ er opfyldt}$$

2.5. For nemheds skyld vil vi ofte tale om et topologisk rum T uden at specificere mængden $\bar{\partial}$ af åbne mængder eller afbildningen $\bar{U}$. Vi vil også ofte bruge bogstaverne $\bar{\partial}$ og $\bar{U}$ i forbindelse med flere forskellige topologiske rum, når det ikke giver fare for misforståelse.

Det er dog undertiden nyttigt samtidigt at studere flere topologier på samme underliggende mængde, og vi må da skrive $T_1 = (M, \bar{\partial}_1, \bar{U}_1)$, $T_2 = (M, \bar{\partial}_2, \bar{U}_2)$ etc. Vi bemærker, at uligheden $\bar{\partial}_1 \subseteq \bar{\partial}_2$ er ensbetydende med $\forall x \in M (\bar{U}_1(x) \subseteq \bar{U}_2(x))$. Hvis disse uligheder er opfyldt, siger vi, at topologien $\bar{\partial}_2$ (eller $\bar{U}_2$) er finere end topologien $\bar{\partial}_1$ (eller $\bar{U}_1$). Den finere topologi har således flere omegne af ethvert punkt og flere åbne mængder end den grovere.

For $T_1 = (M, \bar{\partial}_1, \bar{U}_1)$, $T_2 = (M, \bar{\partial}_2, \bar{U}_2)$ er en afbildning $i: T_2 \text{ ind i } T_1$ givet ved $i(x) = x$ for alle $x \in M$ (den identiske afbildning). Det ses, at i er kontinuert, hvis og kun hvis T_2 er finere end T_1 .

2.6. Lad $\{T_j = (M_j, \bar{\partial}_j, \bar{U}_j) \mid j \in J\}$ være en mængde af topologiske rum. Lad S være en mængde og $f_j: S \text{ ind i } T_j$ være afbild-

ninger. Hvis vi nu ønsker at indføre en topologi på S , således at alle f_j bliver kontinuerte, må vi sørge for, at alle $f_j^{-1}(O_j)$, hvor $O_j \in \mathcal{O}_j$, kommer med blandt de åbne mængder. Vi er da også nød til at medtage alle fællesmængder

$$(1) \quad f_{j_1}^{-1}(O_{j_1}) \cap \dots \cap f_{j_m}^{-1}(O_{j_m}),$$

hvor $j_1, \dots, j_m$ er indbyrdes forskellige. På grund af relationen

$$f_j^{-1}(O'_j) \cap f_j^{-1}(O''_j) = f_j^{-1}(O'_j \cap O''_j)$$

vil fællesmængden af endelig mange mængder af formen (1) igen være en mængde af formen (1). Mellem de åbne mængder i S må vi i hvert fald inkludere alle foreningsmængder af mængder af formen (1) blandt de åbne mængder. Men derved bliver netop $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_3$ opfyldt. Vi har således fundet den groveste topologi på S , som sikrer, at alle f_j bliver kontinuerte. For alle finere topologier vil det ligeledes gælde, at alle f_j bliver kontinuerte.

2.7. Som et specielt eksempel på den i 2.6 omtalte metode til indførelse af topologi på en mængde vil vi betragte et produkt af uendelig mange topologiske rum.

Lad $T_j = (M_j, \mathcal{O}_j, \mathcal{U}_j)$, $j \in J$ være topologiske rum. Produktmængden $\prod M_j$ består af alle afbildninger $\alpha: J \rightarrow \bigcup M_j$ med $\alpha(j) \in M_j$ for alle j . Vi har afbildninger (projektioner) $p_k: \prod M_j$ på T_k definerede ved $p_k(\alpha) = \alpha(k)$. Produktrummet $T = \prod T_j$ fås ved at udstyre $\prod M_j$ med den groveste topologi, for hvilken alle projektionerne p_k bliver kontinuerte. Som åbne mængder må vi da indføre alle foreningsmængder af mængder af formen

$$(2) \quad \{\alpha \mid \alpha(j_1) \in O_{j_1}, \dots, \alpha(j_m) \in O_{j_m}\}.$$

Vi ser, at ethvert p_j afbilder mængden (2) i en åben mængde, og da foreningsmængde afbildes i foreningsmængde, vil hvert p_j afbilde åben mængde på åben mængde. Projektionerne p_j bliver

altså åbne afbildninger.

NB Bemærk at de ikke (nød-
vendigvis) afbilder afsluttet
mængde på afsluttet mængde.

Som basis for omegne af $\alpha \in T$ kan vi åbenbart benytte de
ved

$$\{\beta \mid \beta(j_1) \in U_{j_1}(\alpha(j_1)), \dots, \beta(j_m) \in U_{j_m}(\alpha(j_m))\}.$$

Heraf fremgår, at en følge (β_n) på T konvergerer mod $\alpha \in T$, så-
fremt der til $m; j_1, \dots, j_m; U_{j_1}(\alpha(j_1)), \dots, U_{j_m}(\alpha(j_m))$ altid svar-
rer et N , således at vi for alle $n \geq N$ har

$$\beta_n(j_\mu) \in U_{j_\mu}(\alpha(j_\mu)), \mu = 1, \dots, m.$$

Dette er imidlertid ensbetydende med, at $\beta_n(j) \rightarrow \alpha(j)$ for hvert
fast $j \in J$.

Produktrumstopologien, som vi netop har indført, er den
groveste topologi, for hvilken alle projektionerne bliver kon-
tinuerede, og den modsvarer altså koordinatvis konvergens for
følger. Det er ofte hensigtsmæssigt at udstyre mængdeprodukter
med en finere topologi end produktrumstopologien, men vi skal
dog senere se, at produktrumstopologien har meget bekvemme
egenskaber.

2.8. Begrebet filter indføres som et hjælpemiddel, der gi-
ver os mulighed for at samle en mængde forskellige konvergens-
begreber i en fælles generalisation.

Lad M være en mængde. En delmængde $\mathcal{F}$ af $\mathcal{D}(M)$ kaldes et
filter, når følgende betingelser er opfyldt.

f1). $M \in \mathcal{F}$.

f2). $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

f3). $\forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F} (A \cap B \in \mathcal{F})$.

f4). $\forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{D}(M) (B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F})$.

Hvis $T = (M, \mathcal{U})$ er et topologisk rum, er mængden $\mathcal{U}(x)$ for
ethvert $x \in M$ et filter ifølge betingelserne o1), ..., o4). Hvis

M er en uendelig mængde, vil de delmængder af M , som har endelig komplementærmængde, udgøre et filter. Hvis M er uendelig og ikke numerabel, vil de delmængder, som har numerabel komplementærmængde, udgøre et filter.

2.9. Hvis $\mathcal{F}_1$ og $\mathcal{F}_2$ er filtre på samme mængde M foretrækker man at lase relationen $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ som $\mathcal{F}_2$ er finere end $\mathcal{F}_1$ eller $\mathcal{F}_1$ er grovere end $\mathcal{F}_2$. Filtret, der blot består af mængden M , er det groveste filter på M . Hvis $a \in M$, er mængden af delmængder, der indeholder a , et filter, og vi bemærker, at der ikke kan eksistere noget finere filter. Dette filter er således et maksimalt element i mængden af filtre på M .

2.9.1. Definition. Et maksimalt filter kaldes et ultrafilter.

2.9.2. Sætning. Ethvert filter på M kan udvides til et ultrafilter på M .

Bevis. Lad $\{\mathcal{F}_j \mid j \in J\}$ være en mængde af filtre på M , fuldstændig ordnet ved $\subseteq$. Det er da umiddelbart, $\bigcup_j^{\text{at}} \mathcal{F}_j$ er et filter på M . Enhver fuldstændig ordnet mængde af filtre kan således majoriseres. Derfor vil mængden af filtre finere end et forelagt filter $\mathcal{F}$ være induktivt ordnet, og ifølge Zorn's lemma indeholder den således et maksimalt element, altså et ultrafilter.

Vi skal tilføje, at det ovenfor anførte eksempel på et maksimalt filter, nemlig filtret bestående af alle mængder, som indeholder et punkt $a \in M$ er det eneste kendte eksempel på et ultrafilter, der er givet eksplicit. Der findes dog andre ultrafiltre. På $\mathbb{N}$ vil således mængderne med endelig komplementærmængde udgøre et filter, men disse mængder har intet fælles punkt, og udvidelse af filtret til et ultrafilter må derfor give et ultrafilter, der ikke er af den ovenfor omtalte slags.

2.10. Vi skal angive et bekvemt kriterium for, om et forelagt filter et ultrafilter.

2.10.1. Lemma. Et filter F på en mængde M er et ultrafilter, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall A \subseteq M (A \in F \vee C A \in F).$$

Bevis. Vi antager først, at betingelsen ikke er opfyldt. Der findes da en mængde $A \subseteq M$, således at $A \notin F$ og $CA \notin F$. Vi danner

$$\tilde{G} = \{B \subseteq M \mid A \cup B \in F\}.$$

Det er klart, at $M \in \tilde{G}$. Af $A \notin F$ følger $\emptyset \notin \tilde{G}$. Relationen

$$(A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) = A \cup (B_1 \cap B_2)$$

viser, at $B_1, B_2 \in \tilde{G}$ medfører $B_1 \cap B_2 \in \tilde{G}$. Det ses heraf, at $\tilde{G}$ er et filter. Trivielt gælder $\tilde{G} \supseteq F$, men da CA åbenbart tilhører $\tilde{G}$, men ikke F , kan lighedstegnet ikke gælde. Altså er F ikke et ultrafilter.

Lad os dernæst antage, at betingelsen er opfyldt for filtret F . Vi ved, at F kan udvides til et ultrafilter $\tilde{G}$. For $A \in \tilde{G}$ gælder nu ifølge f2) og f3), at $CA \notin F$, men betingelsen viser så, at $A \in F$. Da dette gælder for ethvert $A \in \tilde{G}$, kan vi altså slutte, at $\tilde{G} \subseteq F$, altså $\tilde{G} = F$. Dermed er beviset fuldført.

2.11. En mængde $\tilde{B}$ af delmængder af en mængde M kaldes en filterbasis på M , når følgende betingelser er opfyldt.

$$\text{fb1). } \tilde{B} \neq \emptyset.$$

$$\text{fb2). } \emptyset \notin \tilde{B}.$$

$$\text{fb3). } \forall U, V \in \tilde{B} \exists W \in \tilde{B} (W \subseteq U \cap V).$$

Vi udvider filterbasis til en mængde $\tilde{B}^*$, idet vi sætter

$$\tilde{B}^* = \{U \subseteq M \mid \exists V \in \tilde{B} (V \subseteq U)\},$$

og vi ser da, at $\tilde{B}^*$ er et filter og åbenbart det groveste filter med $\tilde{B}$ som delmængde. Vi kalder $\tilde{B}^*$ det ved basis $\tilde{B}$ bestemte filter.

Vi vil kalde $\mathcal{B}$ en ultrafilterbasis, hvis $\mathcal{B}^*$ er et ultrafilter.

2.12. Vi betragter 2 mængder M_1 og M_2 , samt en afbildning $f: M_1 \rightarrow M_2$. Lad $\mathcal{B}$ være en filterbasis på M_1 . Da f inducerer en afbildning $f: \mathcal{B}(\mathcal{B}(M_1)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{B}(M_2))$, vil f afbilde $\mathcal{B}$ i en mængde $f(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{B}(M_2))$, og det er klart, at $f(\mathcal{B})$ tilfredsstiller $f\beta_1), \dots, f\beta_3)$, idet den sidstnævnte følger af relationen

$$f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V).$$

Da der sædvanligvis ikke gælder lighedstegn i denne relation, vil billedet af et filter sædvanligvis ikke være et filter, men kun en filterbasis.

Lad os antage, at $\mathcal{F}$ er et ultrafilter på M_1 . Vi betragter en mængde $A \subseteq M_2$. Da $f^{-1}(A)$ og $f^{-1}(CA)$ er komplementærmængder, vil én af dem ifølge lemmaet 2.10.1 tilhøre $\mathcal{F}$, og billedet af den, f.eks. $f(f^{-1}(A))$ vil tilhøre $f(\mathcal{F})$. Men da $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$, medføre dette, at A eller CA tilhører det ved filterbasis $f(\mathcal{F})$ bestemte filter. Vi har således bevist sætningen:

2.12.1. Sætning. Enhver afbildning vil afbilde filter eller filterbasis på filterbasis og ultrafilter på basis for ultrafilter.

2.13. Vi vender nu tilbage til studiet af topologiske rum, og vi indleder med følgende definition:

2.13.1. Definition. Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $T = (M, \mathcal{U})$ siges at have grænsepunktet $a \in T$ eller at konvergere mod a , såfremt det er finere end filtret $\mathcal{U}(a)$ af omegne af a . En filterbasis på T siges at konvergere mod a , hvis den bestemmer et filter, som konvergerer mod a .

Et filter eller en filterbasis kan eventuelt have flere grænsepunkter. Lad $T_1 = (M_1, \mathcal{U}_1)$ være et andet topologisk rum, og lad $f: T \rightarrow T_1$ være en afbildning, der er kontinuert i a .

Da vil $f^{-1}(\dot{U}_1(f(a))) \subseteq \dot{U}(a)$, altså $f(\dot{U}(a)) \supseteq \dot{U}_1(f(a))$. Af $\dot{F} \supseteq \dot{U}(a)$ følger således $f(\dot{F}) \supseteq \dot{U}_1(f(a))$. Det ses, at en kontinuert funktion afbilder et filter (eller en filterbasis) med grænsepunkt a i en filterbasis med grænsepunkt $f(a)$.

2.14. Inden vi går videre med studiet af filtre på topologiske rum, skal vi kort repetere endnu et par afsnit af den mængdeteoretiske topologi. Vi vil ved denne lejlighed give en ganske kortfattet indførelse af begreberne med udnyttelse af kraftige metoder.

2.14.1. Definition. En mængde A på et topologisk rum T kaldes afsluttet, hvis $O = CA$ er åbne.

Vi skal ikke indføre en særlig betegnelse for afsluttede mængder. Vi skal minde om, at en fællesmængde for afsluttede er afsluttet, og at en foreningsmængde af 2 afsluttede mængder er afsluttet. Rummet T samt den tomme mængde $\emptyset$ er afsluttede. En afbildning $f: S \rightarrow T$ er kontinuert, hvis og kun hvis enhver afsluttet mængde i T har afsluttet originalmængde.

2.14.2. Definition. Lad $T = (M, \mathcal{O})$ være et topologisk rum. For $A \in T$ indfører vi det indre

$$\dot{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}; O \subseteq A} O$$

samt afslutningen

$$\bar{A} = \bigcap_{O \in \mathcal{O}, CO \supseteq A} CO.$$

Vi ser, at $\dot{A}$ er den største åbne delmængde i A . Punkterne i $\dot{A}$ kaldes indre punkter i A . Det er netop de punkter, der har A som omegn. De indre punkter i CA kaldes ydre punkter for A . Afslutningen $\bar{A}$ er den mindste afsluttede mængde, der har A som delmængde. Den består af netop de punkter, der ikke er ydre punkter for A . Disse punkter kaldes kontaktpunkter for A . Hvis vi inddrager omegnene får vi følgende karakterisering af kontakt-

punkterne:

$$x \in \bar{A} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) (U \cap A \neq \emptyset).$$

2.15. Vi betragter nu igen et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk rum $T = (M, \mathcal{O}, \mathcal{U})$. Et punkt $x \in T$ kaldes kontaktpunkt for $\mathcal{F}$, hvis det er kontaktpunkt for ethvert $A \in \mathcal{F}$. Dette er udtrykt i relationen

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \forall U \in \mathcal{U}(x) (A \cap U \neq \emptyset),$$

som viser, at x er kontaktpunkt for $\mathcal{F}$, hvis og kun hvis

$$\mathcal{B} = \{A \cap U \mid A \in \mathcal{F} \wedge U \in \mathcal{U}(x)\}$$

er en filterbasis. Vi bemærker, at det filter, der svarer til $\mathcal{B}$ er finere end både $\mathcal{F}$ og $\mathcal{U}(x)$.

Af disse overvejelser ses, hvis $\mathcal{F}$ specielt er et ultrafilter, at $\mathcal{F}$ er finere end $\mathcal{U}(x)$, altså konvergent med x som grænsepunkt. Der med har vi vist følgende sætning:

2.15.1. Sætning. Hvis et ultrafilter har et kontaktpunkt er det konvergent med kontaktpunktet som grænsepunkt.

2.16. Vi behøver endnu en vigtig hjælpesætning om filtre. Formuleringen af denne sætning må desværre blive ret kompliceret, men beviset er ganske enkelt.

2.16.1. Lemma. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på et topologisk rum $T = (M, \mathcal{O}, \mathcal{U})$. Lad $\{T_j = (M_j, \mathcal{O}_j, \mathcal{U}_j) \mid j \in J\}$ være en mængde af topologiske rum, og lad for hvert $j \in J$ endvidere $f_j: T \rightarrow T_j$ være en afbildning. Lad a være et punkt af T . Hvis topologien på T netop er den groveste topologi, for hvilken alle f_j er kontinuerte, og det for hvert $j \in J$ gælder, at filterbasis $f_j(\mathcal{F})$ har $f_j(a)$ som grænsepunkt, da er $\mathcal{F}$ konvergent med a som grænsepunkt.

Bevis. Vi skriver $a_j = f_j(a)$. Vi betragter en vilkårlig omegn $U \in \mathcal{U}(a)$. På grund af kravet til topologien på T kan vi vælge $f_{j_1}, \dots, f_{j_m} \in J$; $U_{j_1} \in \mathcal{U}_{j_1}(a_{j_1}), \dots, U_{j_m} \in \mathcal{U}_{j_m}(a_{j_m})$, således at

$$f_{j_1}^{-1}(\dot{U}_{j_1}) \cap \dots \cap f_{j_m}^{-1}(\dot{U}_{j_m}) \subseteq U.$$

Da $f_j(\dot{F})$ har a_j som grænsepunkt, eksisterer der mængder $A_{j_\mu} \in \dot{F}$, således at $f_{j_\mu}(A_{j_\mu}) \subseteq \dot{U}_{j_\mu}$, $\mu = 1, \dots, m$, og vi har da

$$A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m} \subseteq U,$$

hvilket viser, at $U \in \dot{F}$. Dermed har vi vist, at $\dot{F} \supseteq \dot{U}(a)$, og beviset er fuldført.

Som et specielt tilfælde kan T være produktrummet ΠT_j , medens afbildningerne f_j er projektionerne p_j . Dermed får vi sætningen.

2.16.2. Lemma. Et filter på et produktrum konvergerer, hvis
og kun hvis alle dets projektioner konvergerer.

2.17. Vi understreger endnu engang, at de i de foregående afsnit omtalte grænsepunkter ikke behøver at være éntydigt bestemte. Vi skal nu omtale visse sider af kompakthedsteorien, men på grund af den omstændighed, at grænsepunkter ikke er éntydigt bestemte, vil vi i stedet for "kompakt" sige "quasikom-pakt".

2.17.1. Definition. Et topologisk rum T kaldes quasikom-pakt, hvis enhver overdækning af T med åbne mængder indeholder en endelig overdækning.

Vi kan også sige, at T er quasikom-pakt, hvis det gælder, at en samling af åbne mængder, som ikke indeholder nogen endelig overdækning af T , ikke kan dække T . Hvis vi oversætter dette til en udtalelse om komplementærmængderne, får vi sætningen:

2.17.2. Sætning. Et topologisk rum T er quasikom-pakt, hvis og kun hvis det for enhver filterbasis, der består af afsluttede delmængder af T , gælder, at den består af mængder, hvis fællesmængde ikke er tom.

Hvis $\mathcal{F}$ er et vilkårligt filter på T , vil afslutningerne af mængderne i $\mathcal{F}$ udgøre en filterbasis. Derved får vi sætningen:

2.17.3. Sætning. Et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og ^{kun}hvis ethvert filter på T har et kontaktpunkt.

Denne betingelse er imidlertid opfyldt for alle filtre på T , hvis den blot er opfyldt for alle ultrafiltre på T (derved benytter vi på afgørende måde, at ethvert filter på T kan udvides til et ultrafilter på T). Vi får derved sætningen:

2.17.4. Sætning. Et topologisk rum T er quasikompakt, hvis og kun hvis ethvert ultrafilter på T er konvergent.

2.18. Om forplantning af quasikompakthed ved afbildninger har vi hovedsætningen:

2.18.1. Sætning. Lad $f:S$ på T være en kontinuert, surjektiv afbildning af et quasikompakt, topologisk rum S på et topologisk rum T . Da er T quasikompakt.

Bevis. Lad $\Delta = \{O_j | j \in J\}$ være en overdækning af T med åbne mængder. Så er $\{f^{-1}(O_j) | j \in J\}$ en overdækning af S med åbne mængder, og da S er kompakt, indeholder den en endelig overdækning, der f.eks. kan bestå af $f^{-1}(O_1), \dots, f^{-1}(O_m)$. Men så vil $O_1, \dots, O_m$ dække T , og dermed er påstanden bevist.

2.19. Vi skal nu vise en hovedsætning, A. Tychonoff's sætning (1930) om kompakthed af produktrum.

2.19.1. Sætning. Et topologisk produktrum $T = \prod T_j$ er quasikompakt, hvis og kun hvis hvert af rummene T_j er quasikompakt.

Bevis. Lad os først antage, at T er quasikompakt. Da hver projektion $P_j:T$ på T_j er surjektiv og kontinuert, er hvert T_j quasikompakt ifølge sætning 2.18.1. Lad os dernæst antage, at hvert T_j er quasikompakt, og lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter på T .

2.12.1.

Ifølge sætning/er hver projektion $p_j(\mathbb{R})$ ultrafilterbasis, og vi kan derfor ifølge sætning 2.17.4. vælge $a_j \in T_j$, således at $p_j(\mathbb{R})$ konvergerer mod a_j . Af sætning 2.16.2 følger nu, at $\mathbb{R}$ er konvergent og ved fornyet anvendelse af sætning 2.17.4 får vi, at T er quasikompakt.

Vi gør opmærksom på, at Tychonoff's sætning på afgørende vis bygger på udvalgsaksiomet. Den kan sagtens vises ved mere direkte metoder, men sådanne beviser bliver ret tunge. Den her benyttede metode er udviklet af Henry Curton.

2.20. De ovenfor omtalte topologiske rum har en meget generel karakter, og det er rimeligt at tilføje flere forudsætninger for derved at nå til rum med behageligere egenskaber. Vi vil først og fremmest udelukke de groveste topologier, idet disse har særlig patologiske egenskaber. Vi prøver først med følgende forudsætning.

2.20.1. Adskillelsesaksiom T_1 . For vilkårlige punkter $a, b \in T$ eksisterer en omegn $U \in \mathcal{U}(b)$, således at $a \notin U$.

Aksiomet udtrykker, at komplementærmængden $C(\{a\})$ er åben, altså at en mængde som består af ét enkelt punkt er afsluttet. Dette er igen ensbetydende med, at alle endelige mængder på T er afsluttede. Aksiomet udtrykker også, at samtlige omegne af b har b som eneste fællespunkt.

2.21. Adskillelsesaksiomet 2.20.1 vil oftest vise sig ikke at være kraftigt nok til at have større interesse. Derimod er det følgende en meget væsentlig forbedring.

2.21.1. Adskillelsesaksiom T_2 . For vilkårlige punkter $a, b \in T$ eksisterer omegne $U \in \mathcal{U}(a)$, $V \in \mathcal{U}(b)$, således at $U \cap V = \emptyset$.

Et topologisk rum med dette adskillelsesaksiom kaldes et Hausdorff-rum. Vi bemærker, at et topologisk rum med uende-

lig mange punkter, og i hvilket netop mængder med endelig komplementærmængde er åbne, tilfredsstiller T_1 , men ikke T_2 . Heraf fremgår, at T_2 ikke følger af T_1 . Betydningen af T_2 ligger først og fremmest i følgende sætning:

2.21.2. Sætning. Et konvergent filter på et Hausdorff-rum har kun 1 grænsepunkt.

Bevis. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på et Hausdorff-rum T , lad a og b være punkter af T . Vi betragter filtrene $\mathcal{U}(a)$ og $\mathcal{U}(b)$. Da der findes omegne $U \in \mathcal{U}(a)$, $V \in \mathcal{U}(b)$ med $U \cap V = \emptyset$ vil U og V ikke begge tilhøre $\mathcal{F}$ og $\mathcal{F}$ er derfor ikke finere end begge filtrene $\mathcal{U}(a)$ og $\mathcal{U}(b)$.

2.22. Det er klart, at et produktrum $T = \prod T_j$ er et Hausdorff-rum, hvis og kun hvis hvert T_j er et Hausdorff-rum.

2.22.1. Definition. Ved et kompakt rum forstås et quasi-kompakt Hausdorff-rum.

Sætning 2.19.1 giver umiddelbart en anden udgave af Tychonoff's sætning.

2.22.2. Sætning. Et produktrum $T = \prod T_j$ er kompakt, hvis og kun hvis hvert af rummene T_j er kompakt.

Billedet af et Hausdorff-rum ved en kontinuert afbildning, behøver ikke igen at være et Hausdorff-rum, og et Hausdorff-rum kan være billede ved en kontinuert afbildning af et rum, der ikke er et Hausdorff-rum. Tilsvarende gælder for rum med egenskaben T_1 .

2.23. Inden vi går videre, skal vi kort omtale begrebet delrum. Lad T være et topologisk rum. Til en delmængde $A \subseteq T$ svarer "injektionen" $i: A \rightarrow T$ ind i T defineret ved $i(x) = x$ for alle $x \in A$. Vi forsyner nu A med den groveste topologi, for hvilken i bliver kontinuert, og (derved får) et topologisk rum, delrummet A af T . Det vil kun i sjældne tilfælde være nødven-

digte at skelne mellem delmængden A af T og delrummet A af T . For en delmængde $B \subseteq A$ gælder det, at den også er delmængde af T , og ved omtale af egenskaber ved A er det nødvendigt at præcisere, om disse skal opfattes i forhold til A eller T .

En mængde B på A er åben (afsluttet), hvis den er fællesmængde for A og en åben (afsluttet) mængde på T . Hvis vi med $\overset{\circ}{B}$ og $\bar{B}$ betegner det indre og afslutningen i forhold til T , bliver $\overset{\circ}{B} \cap A$ og $\bar{B} \cap A$ det indre og afslutningen i forhold til A . Hvis $\dot{U}(x)$ er mængden af omegne af x i T , får vi for $x \in A$, at

$$\{U \cap A \mid U \in \dot{U}(x)\}$$

er mængden af omegne af x på A .

Vi bemærker, at delrum af Hausdorff-rum (T_1 -rum) igen er Hausdorff-rum (T_1 -rum). Spørgsmålet om delrum af kompakte rum er ikke helt så enkelt. Vi vil sige, at en delmængde $A \subseteq T$ er kompakt, såfremt delrummet A er kompakt.

2.23.1. Sætning. En kompakt delmængde af et Hausdorff-rum er afsluttet.

Bevis. Lad T være et Hausdorff-rum og $A \subseteq T$ en kompakt delmængde. For $a \in \bar{A}$ og $U \in \dot{U}(a)$ gælder $A \cap U \neq \emptyset$. Altså er

$$\mathcal{F} = \{A \cap V \mid V \in \dot{U}(a)\}$$

et filter på delrummet A . På A eksisterer der da et ultrafilter $\mathcal{G}$, som er finere end $\mathcal{F}$. Da A er kompakt konvergerer $\mathcal{G}$ mod et grænsepunkt $b \in A$. Nu er $\mathcal{G}$ filterbasis på T og finere end både $\dot{U}(a)$ og $\dot{U}(b)$. Da T er et Hausdorff-rum medfører dette, at $a = b$. Dermed har vi vist, at $a \in A$, altså $\bar{A} \subseteq A$. Dette viser, at A er afsluttet.

2.23.2. Sætning. En delmængde A af et kompakt rum T er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet.

Bevis. Sætning 2.23.1 medfører "kun hvis". Lad nu A være afsluttet, og lad $\mathcal{F}$ være et ultrafilter på A . Vi udvider $\mathcal{F}$ til

et ultrafilter $\mathcal{G}$ på T . Dette konvergerer mod et grænsepunkt $a \in T$. Da a tilhører alle afsluttede mængder i $\mathcal{G}$ og nogle af disse er delmængder af A (da A er afsluttet), ligger a i A . Ethvert $U \in \mathcal{U}(a)$ tilhører $\mathcal{G}$, og $U \cap A$ vil da tilhøre $\mathcal{F}$. *da $\mathcal{F}$ er et ultrafilter* Heraf følger, at $\mathcal{F}$ konvergerer mod a . Dermed har vi vist, at A er quasikom-pakt, og vi ved allerede, at A er et Hausdorff-rum.

2.24. Vi skal endnu kort omtale nogle resultater, der understreger betydningen af Hausdorff's forudsætning T2. Vi betragter kontinuerte afbildninger $f, g: S \rightarrow T$, hvor S og T er topologiske rum. For $A \subseteq S$ gælder

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq f^{-1}(f(A)) \supseteq A,$$

og da $f^{-1}(\overline{f(A)})$ er afsluttet, indeholder den $\bar{A}$ og vi får den almenmengyldige sætning $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Vi antager nu, at T er et Hausdorff-rum. Lad os antage, at $a \in S$ er et punkt, for hvilket $f(a) \neq g(a)$. Vi kan da finde omegne U og V af $f(a)$ og $g(a)$, således at $U \cap V = \emptyset$. For $x \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ gælder da $f(x) \neq g(x)$. Dette viser, at $\{x \in S \mid f(x) = g(x)\}$ er en afsluttet delmængde af S . Hermed har vi vist, at hvis $f(x) = g(x)$ er opfyldt for alle $x \in A \subseteq S$, da gælder $f(x) = g(x)$ for alle $x \in \bar{A}$.

2.25. Vi indfører nu igen et adskillelsesaksiom stærkere end de foregående. En mængde $U \subseteq T$ kaldes en omegn af en mængde $A \subseteq T$, hvis der eksisterer en åben mængde $O \subseteq T$, således at $A \subseteq O \subseteq U$.

2.25.1. Adskillelsesaksiom T3. Et punkt $a \in T$ og en afsluttet mængde A , som ikke indeholder a , har omegne uden fælles punkter.

Vi forudsætter med andre ord, at der for $a \notin A$ og A afsluttet eksisterer åbne mængder O_1 og O_2 , således at $a \in O_1$, $O_2 \supseteq A$,

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Nu er $O = CA$ en vilkårlig åben mængde, der indeholder A , og T_3 er da ensbetydende med, at en sådan åben omegn O altid indeholder en afsluttet omegn CO_2 . Vi har derfor:

2.25.2. Sætning. Adskillelsesaksiomet T_3 er opfyldt, hvis og kun hvis der findes en omegnsbasis $\mathcal{B}$ i T ind i $\mathcal{D}(\mathcal{D}(T))$, for hvilken alle $B(x)$ er afsluttede.

Det er klart, at T_1 og T_3 i forening medfører T_2 , men T_3 kan godt være opfyldt uden at T_1 gælder. Hvis både T_2 (og dermed T_1) og T_3 gælder, kaldes T et regulært rum. Vi har sætningen

2.25.3. Sætning. Et kompakt rum er regulært.

Bevis. Lad $A \subseteq T$ være afsluttet og $a \notin A$ et punkt af T . For hvert $x \in A$ kan vi finde åbne mængder $O'(x)$ og $O''(x)$ med $a \in O'(x)$, $x \in O''(x)$, $O'(x) \cap O''(x) = \emptyset$. Da T er kompakt og A afsluttet er A kompakt, og overdækningen $\{O''(x) \mid x \in A\}$ af A med åbne mængder indeholder derfor en endelig overdækning, så vi har $A \subseteq O''(x_1) \cup \dots \cup O''(x_m) = O''$. Vi sætter $O'(x_1) \cap \dots \cap O'(x_m) = O'$, og O' og O'' er da åbne omegne af a og A uden fælles punkter.

2.26. Det er nærliggende at skærpe aksiomet T_3 endnu engang. Derved får vi følgende antagelse:

2.26.1. Adskillelsesaksiom T_4 . To disjunkte afsluttede mængder på T har altid disjunkte åbne omegne.

Et Hausdorff-rum på hvilket T_4 gælder, kaldes et normalt rum. Vi bemærker i øvrigt, at T_4 åbenbart er ensbetydende med, at følgende gælder i T_4 :

Til $A \subseteq O$, hvor A er afsluttet og O åben svarer altid en åben mængde O_1 , således at $A \subseteq O_1 \subseteq \bar{O}_1 \subseteq O$.

Vi ser, at denne proces med indskydning af åbne mængder kan fortsættes i det uendelige. Vi skriver $O_1 \subset\subset O_2$ i stedet for $\bar{O}_1 \subseteq O_2$. Vi skriver $O(1)$ i stedet for O og $O(0)$ i stedet for A og med særligt valg af betegnelser kan vi efterhånden få

$$O(0) \subset O(\frac{1}{2}) \subset O(1)$$

$$O(0) \subset O(\frac{1}{4}) \subset O(\frac{1}{2}) \subset O(\frac{3}{4}) \subset O(1)$$

$$O(0) \subset O(\frac{1}{8}) \subset O(\frac{1}{4}) \subset O(\frac{3}{8}) \subset \dots \subset O(\frac{7}{8}) \subset O(1).$$

Ved at fortsætte denne proces får vi svarende til hver ægte brøk q , hvis nævner er en totalspotens, knyttet en mængde $O(q)$, der vokser med q . Vi definerer nu en afbildning $f:T$ ind i $[0,1]$, idet vi sætter

$$f(x) = \sup \inf \{q \mid x \notin O(q)\}$$

for $x \notin O(0)$ og $f(x) = 0$ for $x \in O(0)$.

Et punkt $y \in [0,1]$ har en omegnsbasis bestående af omegne af formen $[q_1, q_2]$, hvor $y \in]q_1, q_2[$. Nu gælder

$$f^{-1}([q_1, q_2]) \supseteq O(q_2) \setminus \overline{O(q_1)},$$

og et x med $f(x) = y$ må tilhøre denne overskudsmængde. Der kommer modifikationer for $y = 0$ og for $y = 1$, men disse tilfælde overlades til læseren. Det ses, at f bliver kontinuert. Dermed har vi vist den vanskelige del af sætningen:

2.26.2. Sætning. Aksiomet T_4 gælder, hvis og kun hvis T har følgende egenskab: Hvis A og B er afsluttede, disjunkte mængder, eksisterer der en kontinuert afbildning $f:T$ ind i $[0,1]$, således at

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in A \\ 1 & \text{for } x \in B. \end{cases}$$

Vi mangler at vise, at den her anførte betingelse medfører T_4 . Vi behøver imidlertid blot benytte $f^{-1}([0, \frac{1}{3}[)$ og $f^{-1}(] \frac{2}{3}, 1])$ som de åbne mængder.

Det er klart, at intervallet $[0,1]$ i sætning 2.26.2 kan erstattes med et vilkårligt andet afsluttet interval.

2.26.3. Lemma. Lad T være et topologisk rum, for hvilket T_4 gælder, og lad $A \subseteq T$ være en afsluttet delmængde. Lad $f:A$ ind i $[-1,1]$ være en kontinuert afbildning. Der eksisterer en

kontinuert afbildning $g:T$ ind i $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, således at
 $|f(x)-g(x)| \leq \frac{2}{3}$ for alle $x \in A$.

Bevis: Vi behøver blot at vælge $g(x) = -\frac{1}{3}$ for $f(x) \leq -\frac{1}{3}$ og
 $g(x) = \frac{1}{3}$ for $f(x) \geq \frac{1}{3}$ og udvide $g(x)$ i henhold til sætning 2.26.2.

2.26.4. Sætning. Lad T være et topologisk rum, for hvilket T_4 gælder, og lad $A \subseteq T$ være en afsluttet delmængde. En kontinuert afbildning $f:A$ ind i $[-1,1]$ kan udvides til en kontinuert afbildning af T ind i $[-1,1]$.

Bevis. Ifølge lemma 2.26.3. kan vi vælge en kontinuert afbildning $g_1:T$ ind i $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, således at vi får den kontinuerte afbildning

$$h_1 = f - g_1 : A \text{ ind i } [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}].$$

Vi vælger nu $g_2:T$ ind i $[-\frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^2}]$, således at vi får den kontinuerte afbildning

$$h_2 = h_1 - g_2 : A \text{ ind i } [-\frac{2^2}{3^2}, \frac{2^2}{3^2}].$$

Således får vi en følge (g_n) af afbildninger $g_n:T$ ind i $[-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$, og en følge (h_n) af afbildninger A ind i

$[-\frac{2^n}{3^n}, \frac{2^n}{3^n}]$. Afbildningen $f_n = g_1 + \dots + g_n$ er en kontinuert afbildning

$$f_n:T \text{ ind i } [-1 + \frac{1}{3^n}, 1 - \frac{1}{3^n}],$$

og vi har $h_n = f - f_n$, samt $f_n - f_{n-1} = g_n$. Det ses, at følgen (f_n) konvergerer ligeligt på T , og grænsefunktionerne er derfor kontinuert. Det ses tillige, at grænsefunktionen afbilder på $[-1,1]$ og er identisk med f på A . Dermed er sætningen vist.

2.27. Et rum kan tilfredsstille T_4 uden at tilfredsstille T_1 , men dette tilfælde har ikke større interesse. Et Hausdorff-rum, for hvilket T_4 gælder, kaldes et normalt rum. Vi har sæt-

ningerne

2.27.1. Sætning. Et kompakt rum er normalt.

2.27.2. Sætning. Et metrisk rum er normalt.

Den første sætning bevises på ganske lignende måde som sætning 2.25.3, og vi behøver ikke at opholde os ved det. Lad A og B være disjunkte afsluttede mængder i et metrisk rum T . Ved

$$p(x) = \text{dist}(x, A); \quad q(x) = \text{dist}(x, B),$$

defineres kontinuerte afbildninger $p, q: T \rightarrow [0, \infty[$, og vi bemærker, at $p(x)$ og $q(x)$ ikke bliver 0 for samme værdi af x .

Den ved

$$f(x) = \frac{(p(x))^2}{(p(x))^2 + (q(x))^2}$$

definerede afbildning $f: T \rightarrow [0, 1]$ er kontinuert og afbilder hele A i 0 og hele B i 1. Dermed er sætningen vist.

De her omtalte sætninger om fortsættelse af kontinuerte funktioner skyldes P. Urysohn (1925). Han har også beskæftiget sig med muligheden af, at indføre en metrik på et topologisk rum. Det fremgår af det foregående, at dette i hvert fald kun er muligt, hvis rummet tillige med ethvert af dets delrum er normalt. Det er imidlertid også nødvendigt at kræve, at mængden af omegne af ethvert punkt har en numerabel basis, men selv dette er endnu ikke helt tilstrækkeligt. Urysohn beviste sætningen under den ekstra antagelse, at der for samtlige omegne var en basis bestående af numerabelt mange åbne mængder. Det er dog helt indlysende, at dette krav ikke er nødvendigt.

1. Om et filter $\mathcal{F}$ på en uendelig mængde M gælder, at fællesmængden for mængderne i $\mathcal{F}$ er tom. Vis, at $\mathcal{F}$ er finere end det filter, der består af alle mængder med endelig komplementmængde.
2. Vis, at fællesmængden for alle mængder i et ultrafilter højst indeholder 1 punkt, og at filtret i så fald består af alle mængder, som indeholder dette punkt.
3. En mængde A hører ikke til ultrafiltret $\mathcal{F}$. Vis, at

$$\{A \cap B \mid B \in \mathcal{F}\} = \dot{A}.$$
4. Lad $T_1 = (M, \mathcal{O}_1)$ og $T_2 = (M, \mathcal{O}_2)$ være topologiske rum med samme underliggende mængde. Vis, at T_1 er finere end T_2 , hvis og kun hvis ethvert filter på M , som konvergerer på T_1 , konvergerer på T_2 mod det samme punkt.
5. Et topologisk rum S består af intervallet $[0,1]$ samt et element 1^* . For punkterne på $[0,1]$ benyttes den sædvanlige omegnsgbasis, medens $\mathcal{B}(1^*)$ består af alle mængder $\{1^*\} \cup [h,1[$ med $h \in [0,1[$. Vis, at S tilfredsstiller T_1 , men ikke T_2 .
6. Konstruer et topologisk rum med 3 elementer, således at T_3 , men ikke T_1 er opfyldt.
7. (Vanskelig). Lad X være en mængde. Alle topologier, som gør X til et regulært rum uden isolerede punkter (d.v.s. uden åbne mængder, der kun indeholder 1 punkt) ordnes ved relationen grovere. Vis, at der i denne ordning findes maximale elementer. Disse kaldes ultraregulære topologier på X . Vis, at følgende gælder for ultraregulære topologier. Enhver

mængde uden isolerede punkter og med komplementærmængde uden isolerede punkter er både åben og afsluttet. En mængde uden isolerede punkter har åben afslutning. Det indre af en overalt tæt mængde er overalt tæt. Fællesmængden for 2 overalt tætte mængder er overalt tæt.

8. Vis, at et delrum af et regulært rum er regulært.
9. Lad S være et topologisk rum, og lad M være en mængde. Lad $f: S \rightarrow M$ være en afbildning. Gør rede for, at der eksisterer en fineste topologi ^{på M} , for hvilken f er kontinuert.
10. Lad S være et topologisk rum og $\sim$ en ækvivalensrelation på S . Benyt metoden fra opgave nr. 9 til at indføre en topologi på klassemængden.
11. På intervallet $]0,1[$ indføres den groveste topologi, for hvilken de åbne intervaller, mængden af rationale tal med potens af 2 i nævneren samt mængden af rationale tal med potens af 3 i nævneren er åbne. Vis, at det således definerede rum er et Hausdorff-rum, men ikke regulært.

Lad G være en mængde med den endelige komplementærmængde $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

At $\bigcap \{F \mid F \in \tilde{F}\} = \emptyset$ betyder:

$$\forall a \in M \exists F \in \tilde{F} [a \notin F].$$

Lad $F_1, F_2, \dots, F_m$ være mængder i filteret som ikke indeholder henholdsvis $a_1, \dots, a_m$. Da gælder:

$$a_1 \in C F_1, \dots, a_m \in C F_m \quad \text{d.v.s.}$$

$$\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq C F_1 \cup \dots \cup C F_m = C(F_1 \cap \dots \cap F_m)$$

og dermed

$$F_1 \cap \dots \cap F_m \subseteq C\{a_1, \dots, a_m\} = G$$

Men dette viser iflg §3) og §4) at $G \in \tilde{F}$

Antog man at $\bigcap \{F \mid F \in \tilde{F}\}$ indeholdt mere end ét punkt a ville $\{a\} \notin \tilde{F} \wedge C\{a\} \notin \tilde{F}$ i modstrid med at $\tilde{F}$ skulle være et ultrafilter.

Det er klart at $\tilde{F} \subseteq \tilde{D}_a(M) = \{A \in \tilde{D}(M) \mid a \in A\}$, men da $\tilde{D}_a(M)$ er et ultrafilter må lighedstegnet gælde.

Det er klart at $\{A \cap B \mid B \in \tilde{F}\} \subseteq \tilde{D}(A)$. Vi betragter nu en mængde $M \subseteq A$ (d.v.s. $A \cap M = M$). Da $\tilde{F}$ er ultrafilter og da $A \notin \tilde{F}$ gælder $CA \notin \tilde{F}$, og dermed $CA \cup M \in \tilde{F}$. Vi kan nu skrive

$$M = A \cap (CA \cup M) \quad \text{hvilket viser at } \tilde{D}(A) \subseteq \{A \cap B \mid B \in \tilde{F}\}$$

Altså gælder:

$$\{A \cap B \mid B \in \tilde{F}\} = \tilde{D}(A)$$

q.e.d.

Lad $\mathcal{T} = \{\tilde{O}_j \mid j \in J\}$ være en fuldstændig ordnet mængde af topologier på X med den angivne egenskab, og lad $\tilde{O}$ være den groveste topologi for hvilken det gælder, at alle de identiske afbildninger $i_j: X$ på $T_j = (X, \tilde{O}_j)$ er kontinuerte. $\tilde{O}$ består altså af mængder af formen:

(1) $O_{j_1} \cap \dots \cap O_{j_m}$; $O_{j_1} \in \tilde{O}_{j_1}, \dots, O_{j_m} \in \tilde{O}_{j_m}$ samt alle foreningsmængder af sådanne. Da $\mathcal{T}$ er fuldstændigt ordnet vil en mængde af formen (1) tilhøre en af mængderne $\tilde{O}_j$. Heraf ses, at $\tilde{O}$ består af samtlige mængder, der kan skrives på formen

$$(2) \bigcup_{j \in J^*} O_j \text{ hvor } J^* \subseteq J \text{ og } O_j \in \tilde{O}_j.$$

Vi vil nu vise at $\tilde{O}$ majorerer $\mathcal{T}$:

Bevis: Vi har trivielt, at $\tilde{O} \supseteq \tilde{O}_j$ for alle $j \in J$. Heraf følger umiddelbart, at $T = (X, \tilde{O})$ har egenskaben T2.

Lad nu $A \subseteq T$ være afsluttet, og $a \notin A$ et punkt i T . Da er $\complement A$ åben, og vi kan skrive:

$$\complement A = \bigcup_{j \in J^*} O_j, \text{ og dermed: } A = \bigcap_{j \in J^*} \complement O_j.$$

Der findes da et $j \in J^*$ således at $a \notin \complement O_j$, og da $\complement O_j$ er afsluttet findes der åbne mængder $O_1, O_2 \in \tilde{O}_j$ således at $a \in O_1$, $\complement O_j \not\subseteq O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Idet vi bemærker at $\tilde{O}_j \subseteq \tilde{O}$ og $A \subseteq \complement O_j$, viser dette, at T har egenskaben T3.

Endvidere viser (2) umiddelbart, at der ikke findes isolerede punkter i T . Hermed er bevist fuldført.

✶ Ved anvendelse af Zorn's lemma, ser vi nu, at der findes ultra-regulære topologier på X .

Lad $\tilde{O}$ være en sådan, og lad $A, CA \in T = (X, \tilde{O})$ være uden isolerede punkter. Vi betragter nu:

$$\tilde{O}^* = \{ (A \cap O_d) \cup (CA \cap O_k) \cup O_\ell \mid O_d, O_k, O_\ell \in \tilde{O} \},$$

og vi vil vise at $\tilde{O}^* = \tilde{O}$.

Bevis: Vi bemærker, at $\tilde{O} \subseteq \tilde{O}^*$ (3). Endvidere ses det let, at $\tilde{O}^*$ er en topologi på X , og (3) viser nu at $T^* = (X, \tilde{O}^*)$ har egenskaben T_2 .

Lad nu $B \in T^*$ være afsluttet, og lad $a \notin B$ være et punkt i T^* . Vi kan skrive:

$$B = (A \cup F_1) \cap (A \cup F_2) \cap F_3, \text{ hvor } F_1, F_2, F_3$$

er afsluttede punktmængder i $T = (X, \tilde{O})$.

(1) hvis $a \notin F_3$ kan vi - da T har egenskaben T_3 - finde åbne mængder $O_1, O_2 \in \tilde{O} \subseteq \tilde{O}^*$ så-

ledes at $a \in O_1$, $O_2 \supseteq F_2 \supseteq B$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

(2) hvis $a \in F_3$ vil vi antage, at $a \in A$ (tilfældet $a \in CA$ behandles analogt). Da $a \notin B$ medfører dette at $a \notin CA \cup F_1$ og dermed at $a \notin F_1$.

Vi kan derfor finde åbne mængder $O_1, O_2 \in \tilde{O} \subseteq \tilde{O}^*$

således at $a \notin O_1$, $F_1 \subseteq O_2$ og $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Vi bemærker nu at $CA, A \in \tilde{O}^*$. Hvis vi nu sætter $O_1^* = A \cap O_1$ og $O_2^* = CA \cup O_2$ har vi $O_1^*, O_2^* \in \tilde{O}^*$, $a \in O_1^*$, $O_2^* \supseteq CA \cup F_1 \supseteq B$ og $O_1^* \cap O_2^* = \emptyset$.

Betragtingerne i (1) og (2) viser altså at $T^* = (X, \tilde{O}^*)$ har egenskaben T3.

Af definitionen på O^* ser vi, at T^* er et rum uden isolerede punkter, men da T er et ultrareguleret rum, følger heraf at $\tilde{O}^* \subseteq \tilde{O}$, og dette i forbindelse med (3) giver $\tilde{O} = \tilde{O}^*$ q.e.d.

Da $A \in \tilde{O}^*$ og $CA \in \tilde{O}^*$ er hermed vist at A både er åben og afsluttet i $T = (X, \tilde{O})$.

3. Topologiske vektorrum.

3.1. Vi vil i dette afsnit beskæftige os med vektorrum over $\mathbb{R}$. Et sådant er en Abelsk gruppe E med de reelle tal som operatører, således at vi for $a, b, c, \dots \in E$ og $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{R}$ har regneoperationen αa med reglerne

$$1a = a, \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a.$$

Desuden gælder $0 \cdot a = \alpha 0 = 0$ og αa bliver kun 0 , hvis $\alpha = 0$ eller $a = 0$. Vi har tidligere omtalt lineært uafhængigt system. Vi minder om, at ethvert vektorrum har en basis med et ganske bestemt antal elementer, eventuelt uendelig mange. Hvis basis er endelig, kaldes antallet af elementer i den vektorrummets dimension. Ethvert lineært uafhængigt system af vektorer kan udvides til en basis.

Et underrum $S \subseteq E$ har således en basis, der ved tilføjelse af nye elementer kan udvides til en basis for E . De tilføjede elementer er basis for et underrum T og vi har $E = S+T$, hvor $S \cap T = \{0\}$, altså en fremstilling af E som direkte sum af 2 vektorrum. Vi siger, at vektorrummet T er algebraisk komplementært til S . Ethvert underrum har således mindst ét algebraisk komplementært underrum.

3.2. Hvis E og F er vektorrum over $\mathbb{R}$, kan vi tale om en lineær afbildning $f: E \rightarrow F$, d.v.s. en afbildning, der opfylder linearitetsbetingelserne

$$f(a+b) = f(a)+f(b); f(\alpha a) = \alpha f(a).$$

Hvis E har en basis (e_j) vil billederne $f(e_j)$ fuldstændig bestemme den lineære afbildning f , og vi kan konstruere en lineær afbildning, hvor alle $f(e_j)$ har givne værdier ved at udvide definitionen efter formlen

$$f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_m f(e_m).$$

En lineær afbildning $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes specielt en linearform eller en funktional.

3.3. Hvis $S \subseteq E$ er et underrum, bliver faktorgruppen $\frac{E}{S}$ på naturlig måde et vektorrum over $\mathbb{R}$. Hvis T er algebraisk komplementært til S , bliver sideklasserne til S netop mængderne $t+S$, hvor t gennemløber S , og $\frac{E}{S}$ bliver isomorft med T .

Et 1-dimensionalt underrum S , der indeholder $a \neq 0$, består netop af alle αa med $\alpha \in \mathbb{R}$.

Et underrum S , der har et algebraisk komplementært underrum med dimension m siges at have codimension m . Et underrum med codimensionen 1 eller en sideklasse til et sådant underrum kaldes en hyperplan.

3.4. Lad $H \subseteq E$ være en hyperplan. Den har et algebraisk komplementært underrum $S = \{\alpha e \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, hvor e er et vilkårligt element af $E \setminus H$. For ethvert $x \in E$ har vi da netop 1 fremsstilling $x = h + \alpha(x)e$, hvor $h \in H$ og $\alpha(x) \in \mathbb{R}$. Derved har vi defineret en linearform $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$, og vi ser, at ligningen $\alpha(x) = k$ for hvert $k \in \mathbb{R}$ bestemmer en sideklasse til H , og at $\alpha(x) = 0$ bestemmer selve H .

Lad nu omvendt $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$ være en linearform, der ikke er identisk 0. Det er klart at $\alpha^{-1}(0)$ er en lineær mangfoldighed. Vi vælger $e \in E \setminus \alpha^{-1}(0)$, og for $x \in E$ sætter vi

$$p_1(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(e)} e; \quad p_2(x) = x - \frac{\alpha(x)}{\alpha(e)} e.$$

Vi har da $x = p_1(x) + p_2(x)$. Det ses, at $p_1(E)$ er et 1-dimensionalt underrum, medens $p_2(E) \subseteq \alpha^{-1}(0)$. Da $p_2(E)$ har codimension 1, må lighedstegnet gælde. Vi ser således, at $\alpha(x) = 0$ er ligning for en hyperplan.

3.5. Vi vil nu antage, at vektorrummet E over $\mathbb{R}$ tillige er organiseret som et topologisk rum, så vi har $E = (E, \underline{0}, \dot{U})$. Vi vil ikke ofre en særskilt betegnelse på E som underliggende mængde. Hvis nu afbildningerne

$$\varphi: E \times E \text{ ind i } E, \quad \psi: \mathbb{R} \times E \text{ ind i } E,$$

som er definerede ved

$$\varphi(x, y) = x + y, \quad \psi(\lambda, x) = \lambda x$$

begge er kontinuerte overalt, siger vi, at E er et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$.

Specielt vil den ved $g(x) = a + x$ definerede afbildning $g: E$ på E for ethvert $a \in E$ være en homeomorfi. Idet $a = g(\underline{0})$, vil den afbilde mængden $\dot{U}(\underline{0})$ på $\dot{U}(\underline{a})$, så vi får

$$\dot{U}(a) = \{a + U \mid U \in \dot{U}(\underline{0})\}.$$

Heraf fremgår, at topologien på E er fuldstændig bestemt ved mængden af omegne af $\underline{0}$. Vi kan endda gå et skridt videre, idet topologien på E er bestemt ved en basis for mængden af omegne af $\underline{0}$.

3.6. Vi skal et øjeblik se nærmere på de betingelser, som mængden af omegne $\dot{U}(\underline{0})$ eller en basis $\dot{B}(\underline{0})$ for denne må tilfredsstille for at sikre, at E virkelig bliver et topologisk rum, og at regneoperationerne virkelig bliver kontinuerte. Samtidig har vi jo en stor frihed i valget af en omegnsbasis for en given topologi, og det er derfor ikke helt urimeligt at tilføje ekstra-betingelser, som sikrer, at vor omegnsbasis bliver hensigtsmæssigt valgt. Endelig er vi interesseret i topologiske vektorrum, hvis topologi tilfredsstiller noget mere specielle betingelser. Vi vil således altid kræve, at rummet E er et Hausdorff-rum.

I et vektorrum har begrebet liniestykke en fornuftig mening. Ved en lineær afbildning $\varphi: \mathbb{R}$ ind i E fås et 1-dimensio-

nalt underrum. Ved addition af et vilkårligt $a \in E$ til alle billederne fås en afbildning $\psi: \mathbb{R}$ ind i E givet ved en ligning af formen

$$\psi(\lambda) = a + \lambda e,$$

hvor e er et element af E . Billedet af et interval ved denne afbildning er et liniestykke. Et liniestykke med endepunkter $a, b \in E$ er specielt givet ved

$$\{(1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

En punktmængde i vektorrummet E kaldes som sædvanlig konveks, hvis den altid med 2 punkter indeholder liniestykket med a og b som endepunkter.

Vi vil nu forlange, at omegnsbasis $\hat{B}(\underline{0})$ kan vælges således, at den består af konvekse punktmængder. Et topologisk vektorrum med en omegnsbasis, der består af konvekse punktmængder, kaldes lokalkonvekst.

Vort foreløbige program vil omfatte en diskussion af omegnsbasers egenskaber på det her skitserede grundlag.

3.7. Vi tager først som udgangspunkt, at vektorrummet E over $\mathbb{R}$ har den egenskab, at regneoperationerne er kontinuerte. Dette kombineret med lokalkonveksiteten og kravet, at E skal være et Hausdorff-rum, gør det muligt for os at vise, at der eksisterer en omegnsbasis af $\underline{0}$ med visse nærmere angivne egenskaber. Bagefter skal vi godtgøre, at vi ved vilkårligt valg af en omegnsbasis, der tilfredsstiller alle betingelserne, organiserer E som topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$.

Efter det anførte er det på forhånd klart, at vor specielt valgte omegnsbasis $\hat{B}(\underline{0})$ skal være en filterbasis. Desuden skal den bestå af konvekse mængder.

Det fremgår umiddelbart af definitionen, at enhver fællesmængde af konvekse mængder selv er konveks. Da $\phi(x) = -x$ de-

finerer en kontinuert afbildning $\varphi: E$ på E , vil $V \in \dot{U}(\underline{o})$ medføre $-V \in \dot{U}(\underline{o})$ og derfor $V \cap -V \in \dot{U}(\underline{o})$. Hvis $V \in \dot{B}(\underline{o})$, kan vi altså erstatte V med delmængden $W = V \cap -V$ uden at ændre topologien. Derved opnår vi, at alle mængder i $\dot{B}(\underline{o})$ får $\underline{o}$ som symmetripunkt.

For $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ er den ved $\varphi(x) = \lambda x$ definerede afbildning $\varphi: E$ på E en homeomorfi, og $V \in \dot{U}(\underline{o})$ afbildes ved φ på $\lambda V \in \dot{U}(\underline{o})$. Det er endvidere klart, at φ afbilder liniestykke på liniestykke, således at endepunkter svarer til endepunkter. Derfor vil φ afbilde konveks mængde på konveks mængde. Heraf fremgår, at vi yderligere kan vælge $\dot{B}(\underline{o})$, således at den samtidig med V indeholder alle λV , $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

For ethvert $a \in E$ er den ved $\varphi(\lambda) = \lambda a$ definerede afbildning $\varphi: \mathbb{R}$ ind i E kontinuert i 0, og for enhver omegn U af $\underline{o}$ gælder det derfor, at $\lambda a \in U$, hvis λ er tilstrækkelig nær ved 0. Dette er ensbetydende med, at μU indeholder a , når $|\mu|$ er tilstrækkelig stor. For en konveks symmetrisk omegn V har vi derfor

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV.$$

Da den ved $\varphi(x, y) = x + y$ definerede afbildning $\varphi: E \times E$ ind i E er kontinuert, kan vi for enhver basisomegn V finde en basisomegn W , således at $W + W \subseteq V$. Da E er et Hausdorff-rum, vil fællesmængden for alle basisomegne af $\underline{o}$ bestå af punktet $\underline{o}$ alene.

Vi advarer mod et par nærliggende fejltagelser. Mængden $W + W$ er ikke det samme som $2W$, idet

$$W + W = \{x + y \mid x \in W \wedge y \in W\}$$

$$2W = \{2x \mid x \in W\},$$

altså $2W \subseteq W + W$. Hvis V er basisomegn, vil alle λV , hvor $\lambda \in \mathbb{R}$

være basisomegn, men det vil sædvanligvis ikke være muligt at vælge V , således at fællesmængden for alle disse omegne kun indeholder $\underline{0}$.

3.8. Idet vi resumerer ovenstående resultater, ser vi at basismængden $\dot{B}(\underline{0})$ for et topologisk vektorrum kan vælges, så den opfylder følgende betingelser:

v1). $\dot{B}(\underline{0})$ er en filterbasis.

v2). $\forall U \in \dot{B}(\underline{0})$ (U er konveks og symmetrisk om $\underline{0}$).

v3). $\forall U \in \dot{B}(\underline{0}) \forall \lambda \in \mathbb{R} (\lambda U \in \dot{B}(\underline{0}))$.

v4). $\forall U \in \dot{B}(\underline{0}) \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU = E \right)$.

v5). $\forall U \in \dot{B}(\underline{0}) \exists V \in \dot{B}(\underline{0}) (V+V \subseteq U)$.

v6). $\bigcap_{U \in \dot{B}(\underline{0})} U = \{\underline{0}\}$.

Vi vil nu vise, at disse betingelser omvendt sikrer os, at E bliver et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$, når vi i et vilkårligt punkt af E definerer en omegnsbasis ved

$$\dot{B}(x) = \{ x+U \mid U \in \dot{B}(\underline{0}) \}.$$

Idet vi for $U \in \dot{B}(\underline{0})$ i henhold til v5) vælger $V \in \dot{B}(\underline{0})$, således at $V+V \subseteq U$, får vi for $x \in E$, at $x+V \subseteq x+V+V \subseteq x+U$, og endvidere

$$\forall y \in x+V (y+V \subseteq x+V+V \subseteq x+U),$$

hvilket viser, at $x+U$ er omegn af ethvert $y \in x+V$. Dermed har vi vist at aksiomet b4 (fra 2.2.) er opfyldt, og dermed er E i hvert fald et topologisk rum.

Med den samme betydning af U og V har vi for vilkårlige punkter $x, y \in E$, at

$$(x+V)+(y+V) \subseteq (x+y)+U.$$

For den ved $\varphi(x, y) = x+y$ definerede afbildning $\varphi: E \times E \rightarrow E$ ind i E medfører dette, at

$$\varphi^{-1}(x+y+U) \supseteq (x+V) \times (y+V),$$

altså at φ er kontinuert. Af $-(x+U) = -x-U = -x+U$ følger endvidere, at den ved $\psi(x) = -x$ definerede afbildning er en homeomorfi. Vi har derved vist, at addition og subtraktion er kontinuerte på E .

For $|\lambda| \leq 1$ vil den ved $\varphi(x) = \lambda x$ definerede afbildning $\varphi: E \rightarrow E$ ind i E afbilde ethvert liniestykke med $\underline{0}$ som endepunkt ind i sig selv. På grund af v2) følger heraf

$$(1) \quad \forall \lambda \in [-1, 1] \quad \forall U \in \mathcal{B}(\underline{0}) \quad (\lambda U \subseteq U).$$

Lad nu $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$ og $U \in \mathcal{B}(\underline{0})$ være givet. Af v5) anvendt to gange får vi, at der eksisterer en basisomegn $V \in \mathcal{B}(\underline{0})$, således at $V+V+V \subseteq U$. Vi vælger $W = V$, hvis $\lambda = 0$, med $W = V \cap \lambda^{-1}V$, hvis $\lambda \neq 0$. Endelig vælger vi et positivt tal δ , således at $]-\delta, \delta[\cap x \subseteq V$, og $\delta \leq 1$. Vi får da

$$(\lambda +]-\delta, \delta[)(x+W) = \lambda x +]-\delta, \delta[(x + \lambda W) +]-\delta, \delta[W \subseteq \lambda x + V + V + V \subseteq \lambda x + U,$$

hvilket viser, at den ved $\varphi(\lambda, x) = \lambda x$ definerede afbildning $\varphi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ er kontinuert.

Lad $x, y \in E$ være 2 forskellige punkter. Ifølge v6) eksisterer $U \in \mathcal{B}(\underline{0})$ med $y-x \notin U$, altså ifølge v5) en omegn $V \in \mathcal{B}(\underline{0})$ med $y-x \notin V+V$; af $z \in (x+V) \cap (y+V)$ ville følge $z-x \in V$, $z-y \in V$, altså ifølge v2) tillige $y-z \in V$, så vi får $y-x = (y-z) + (z-x) \in V+V$. Altså gælder $(x+V) \cap (y+V) = \emptyset$. Dermed har vi bevist, at E er et Hausdorff-rum.

Vi har dermed tillige fuldendt beviset for, at betingelserne v1), ..., v6) sikrer, at E bliver et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$.

3.9. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. Et underrum $F \subseteq E$ kan også betragtes som et delrum af det topologiske rum E , og bliver derved et topologisk vektorrum. I det følgende skal

*) Et sådant δ eksisterer iflg. v4. og v2.

underrum af E altid opfattes på denne måde.

Hvis E_1 og E_2 er vektorrum over $\mathbb{R}$ vil vi ved en isomorfi $\varphi: E_1$ på E_2 forstå en bijektiv lineær afbildning, der tillige med sin omvendte afbildning er kontinuert, altså en lineær homeomorfi. Rummene E_1 og E_2 kaldes isomorfe, hvis der findes en isomorfi af E_1 på E_2 . Det er klart, at "isomorf med" er en ækvivalensrelation.

Vi bemærker, at $\mathbb{R}$ selv på indlysende måde kan opfattes som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Fra algebraisk synspunkt er $\mathbb{R}$ et 1-dimensionalt vektorrum. På den anden side vil et 1-dimensionalt vektorrum E med basis e bestå af alle λe , $\lambda \in \mathbb{R}$, og vi har derfor en lineær afbildning $\varphi: E$ på $\mathbb{R}$ defineret ved $\varphi(\lambda e) = \lambda$, og denne afbildning er åbenbart bijektiv.

3.9.1. Sætning. Et 1-dimensionalt vektorrum E over $\mathbb{R}$ er isomorft med $\mathbb{R}$.

Bevis: Vi ved allerede, at den ved $\varphi^{-1}(\lambda) = \lambda e$ definerede afbildning $\varphi^{-1}: \mathbb{R}$ ind i E er kontinuert. Af v2), v3) og v6) fremgår, at basisomegnene $B(\underline{0})$ for E netop er alle mængder $]-\delta, \delta[e$, hvor δ er positiv. Deraf følger umiddelbart, at også $\varphi: E$ på $\mathbb{R}$ er kontinuert.

3.10. Vi betragter igen det topologiske vektorrum E over $\mathbb{R}$ samt et underrum $F \subseteq E$. Fra algebraisk synspunkt har det en mening at tale om faktorummet $\frac{E}{F}$ som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Det består af alle sideklasserne $x+F$, $x \in E$, og vi har den såkaldte kanoniske afbildning $k: E$ på $\frac{E}{F}$ defineret ved $k(x) = x+F$. Underrummet F er nulelementet i $\frac{E}{F}$.

Vi vil nu indføre en topologi på faktorummet. Vi vil indrette denne topologi, således at den kanoniske afbildning k bliver kontinuert, og vi vil netop vælge den fineste topologi, for hvilken dette krav bliver opfyldt.

*) Af v6: $B(\underline{0})[0, \delta[e \cup]-\delta, 0]$ og af v2 følger nu $U \subseteq]-\delta, \delta[e$

En mængde $A \subseteq \frac{E}{F}$ kan kun være åben, hvis $k^{-1}(A)$ er åben.

På grund af relationerne

$$k^{-1}(\cup A_j) = \cup k^{-1}(A_j); \quad k^{-1}(A \cap B) = k^{-1}(A) \cap k^{-1}(B)$$

vil betingelserne å1), ..., å3) netop være opfyldt, hvis vi definerer, at $0 \subseteq \frac{E}{F}$ er åben, hvis og kun hvis $k^{-1}(0)$ er åben, altså hvis og kun hvis foreningsmængden af de sideklasser, der tilhører 0, er en åben mængde i E. Derved bliver $\frac{E}{F}$ altså et topologisk rum. Vi ved imidlertid ikke endnu, om $\frac{E}{F}$ også bliver et topologisk vektorrum. Dertil kræves, at regneoperationerne er kontinuerte. Vi beviser først sætningen:

3.10.1. Sætning. Afbildning k er åben (d.v.s. afbilder åben mængde på åben mængde).

Bevis. Lad $0 \subseteq E$ være åben. For ethvert $x \in E$ er $x+0$ en åben mængde. Altså er

$$\bigcup_{x \in F} (x+0) = 0_1$$

en åben mængde. Men 0_1 er netop $k^{-1}(k(0))$, og $k(0)$ er derfor åben i henhold til definitionen af åben mængde i $\frac{E}{F}$.

Vi kan nu let vise, at regneoperationerne på $\frac{E}{F}$ bliver kontinuerte. Vi betragter først $x, y \in \frac{E}{F}$ og en omegn U af $x+y$. Vi kan vælge $x_1, y_1 \in E$ med $k(x_1) = x$, $k(y_1) = y$, altså $k(x_1+y_1) = x+y$. Da k er kontinuert, er $k^{-1}(U)$ en omegn af $x_1+y_1 \in E$, og vi kan finde en åben mængde $0 \in \dot{U}(0)$, således at $(x_1+0)+(y_1+0) \subseteq k^{-1}(U)$. Da k er åben, bliver $k(x_1+0)$ og $k(y_1+0)$ omegne af x_1 og y_1 , og deres sum bliver indeholdt i U. Dermed har vi vist, at additionen på $\frac{E}{F}$ bliver kontinuert.

Vi betragter nu $\lambda \in \mathbb{R}$ og $x \in \frac{E}{F}$ samt en omegn U af x. Vi kan vælge $x_1 \in E$ med $k(x_1) = x$ og $k^{-1}(U)$ bliver en omegn af x_1 . Der eksisterer en omegn W af λ og en omegn V af x_1 , således at $WV \subseteq k^{-1}(U)$, altså $Wk(V) \subseteq U$. Da $k(V)$ er en omegn af x,

$$\begin{aligned} *) \quad a \in k^{-1}(k(0)) &\Leftrightarrow a \in k^{-1}(\{x+F | x \in 0\}) \Leftrightarrow k(a) \in \{x+F | x \in 0\} \Leftrightarrow \exists 0 \in 0 [k(a) = 0+F] \Leftrightarrow \\ &\exists 0 \in 0 \exists f \in F [a = 0+f] \Leftrightarrow \exists f [a \in 0+f] \Leftrightarrow a \in \bigcup_{f \in F} (0+f) \end{aligned}$$

har vi dermed vist, at multiplikationen er kontinuert.

Den lineære afbildning k afbilder liniestykke på liniestykke eller punkt, og i det første tilfælde afbildes endepunkt på endepunkt. Heraf følger umiddelbart, at konveks mængde afbildes på konveks mængde. Det gælder også, at midtpunkt af liniestykke afbildes på midtpunkt af liniestykke. Det er dermed godtgjort, at $\frac{E}{F}$ med den her indførte topologi vil tilfredsstille betingelserne $v1), \dots, v5)$ ovenfor. Derimod behøver $v6)$ ikke at være opfyldt.

Vi bemærker, at $v6)$ er opfyldt, hvis og kun hvis $\frac{E}{F}$ er et Hausdorff-rom. Hvis dette er tilfældet er $\{F\} \subseteq \frac{E}{F}$ afsluttet, altså F afsluttet. Hvis F er afsluttet, vil $T1$ gælde for $\frac{E}{F}$, og deraf følger $v6)$ umiddelbart.

Dermed har vi vist sætningen:

3.10.2. Sætning. Faktorrymmet $\frac{E}{F}$ bliver et topologisk vektorrum, hvis og kun hvis F er afsluttet.

3.11. Lad S og T være topologiske vektorrum over $\mathbb{R}$. Mængden $S \times T$ bliver et vektorrum over $\mathbb{R}$, hvis vi definerer

$$(s_1, t_1) + (s_2, t_2) = (s_1 + s_2, t_1 + t_2); \lambda(s, t) = (\lambda s, \lambda t).$$

Det ses umiddelbart, at det topologiske produktrum $S \times T$ med disse regneoperationer bliver et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$.

Lad nu E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$, og lad $g:S \rightarrow E$ ind i E og $h:T \rightarrow E$ være kontinuerte, lineære afbildninger. Vi kan da definere en lineær afbildning $f:S \times T \rightarrow E$, idet vi sætter

$$f(s, t) = g(s) + h(t).$$

Da denne afbildning er sum af to kontinuerte afbildninger, bliver den selv kontinuert.

Vi antager nu, at S og T specielt er underrum af E og at

$S \cap T = \{\underline{0}\}$. Som g og h kan vi da vælge inklusionsafbildninger af S og T ind i E , altså $g(s) = s$, $h(t) = t$. Vi får da den ved

$$f(s, t) = s + t$$

definerede lineære, injektive afbildning $f: S \times T$ ind i E , for hvilken billedmængden bliver summen $S+T$. Da f er kontinuert, kan vi slutte, at delrumstopologien på $S+T$ er grovere end produktrumstopologien, som overføres til $S+T$, idet vi identificerer $s+t$ med (s, t) . Hvis de to topologier stemmer overens, siger vi, at $S+T$ er topologisk direkte sum af S og T .

Nu er produktrumstopologien netop den groveste topologi, der sikrer, at projektionerne på S og T bliver kontinuerte. Heraf fremgår, at vi har sætningen

3.11.1. Sætning. En algebraisk direkte sum $S+T$ af 2 topologiske vektorrum S og T er en topologisk direkte sum, hvis og kun hvis projektionerne $p: S+T$ på S og $q: S+T$ på T er kontinuerte.

3.12. Lad E være et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. En afbildning $p: E$ ind i E kaldes idempotent, hvis $p^2 = p \circ p = p$. En idempotent lineærafbildning $p: E$ ind i E kaldes en projektionsafbildning eller en projektion (den korte betegnelse kan undertiden virke forvirrende, da den har været brugt også som betegnelse for billedet af et punkt eller en mængde ved en projektionsafbildning). Vi har nu sætningen:

3.12.1. Sætning. Hvis $p: E$ ind i E er en kontinuert projektionsafbildning, er E topologisk direkte sum af $p(E)$ og $p^{-1}(\underline{0})$.

Bevis: Lad $i: E$ på E være den identiske afbildning. Afbildningen $q = i - p: E$ er da kontinuert. For $x \in E$ har vi fremstillingen

$$(1) \quad x = p(x) + q(x).$$

Ved anvendelse af p får vi, idet $p^2 = p$, at

$$p(x) = p(x) + p(q(x)),$$

altså $p(q(x)) = \underline{0}$, hvilket viser, at $q(x) \in p^{-1}(\underline{0})$. Relationen (1) viser således, at ethvert $x \in E$ kan skrives som sum af et element fra $p(E)$ og et element fra $p^{-1}(\underline{0})$.

Hvis vi nu på den anden side har en fremstilling

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in p(E), \quad x_2 \in p^{-1}(\underline{0}),$$

da eksisterer $y \in E$, så $x_1 = p(y)$, altså $p(x_1) = p^2(y) = x_1$.

Vi får derfor

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = x_1,$$

hvilket viser, at x_1 netop er $p(x)$. Altså er x_1 og dermed

$x_2 = x - x_1$ éntydig bestemt ved x , og dermed er sætning 3.12.1 bevist.

3.13. Sætning 3.12.1 fortæller os, hvornår en lineær afbildning af E på et delrum giver anledning til en fremstilling af E som topologisk direkte sum. Sætningen kan også gives følgende interessante formulering.

3.13.1. Sætning. Et underrum S af et topologisk vektorrum E over $\mathbb{R}$ giver anledning til en fremstilling $E = S + T$ af E som en topologisk direkte sum, hvis og kun hvis den identiske afbildning $i: S \rightarrow E$ kan udvides til en kontinuert afbildning $p: E \rightarrow S$.

Bevis. Afbildningen $p: E \rightarrow S$ kan fortolkes som en afbildning $p: E \rightarrow E$ ind i E , og hvis den er en udvidelse af $i: S \rightarrow S$ på S , fås $p^2 = p$, og sætning 3.12.1 kan anvendes. Den anden halvdel af sætningen ses umiddelbart.

3.14. Vi indskyder en hjælpesætning, der ofte vil være os til nytte:

3.14.1. Sætning. Lad E og F være topologiske vektorrum over $\mathbb{R}$. En lineærafbildning $f: E \rightarrow F$ ind i F er kontinuert, hvis og kun hvis f er kontinuert i $\underline{0}$.

Bevis. Det er klart, at "kun hvis" gælder. Lad U være en omegn af $\underline{0} \in F$. Da f er kontinuert i $\underline{0}$, er $f^{-1}(U)$ en omegn af $\underline{0} \in E$, og for $a \in E$ får vi

$$f(a+f^{-1}(U)) = f(a)+f(f^{-1}(U)) \subseteq f(a) + U,$$

hvilket viser, at originalmængden til omegnen $f(a)+U$ er en omegn af a .

3.15. Lad E være et vektorrum over $\mathbb{R}$. Vi ønsker at studere hyperplaner $H \subseteq E$. Vi minder om, at enhver hyperplan $H \subseteq E$ er givet ved en ligning $\varphi(x) = 0$, hvor $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ er en lineær afbildning (linearform). Vi har nu sætningen

3.15.1. Sætning. Følgende påstande vedrørende en hyperplan $H \subseteq E$ og dens ligning $\varphi(x) = 0$ er ensbetydende:

- 1). H er ikke overalt tæt i E .
- 2). H er afsluttet.
- 3). φ er kontinuert.
- 4). H giver anledning til en spaltning af E i en direkte

sum. $H \subset \bar{H}$

Bevis. Af $H \subset \bar{H}$ følger, at der findes et punkt $e \neq \underline{0}$ i $\bar{H} \setminus H$, og da H har codimension 1, følger heraf, at $\bar{H} \supseteq H + \{\lambda e\} = E$, altså at H er overalt tæt. Dermed har vi vist $1) \Rightarrow 2)$.

Hvis H er afsluttet, bliver $\frac{E}{H}$ ifølge sætning 3.10.2 et topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$, og da det bliver 1-dimensionalt, bliver det ifølge sætning 3.9.1 isomorft med $\mathbb{R}$, og enhver ikke konstant, lineær afbildning $\varphi^*: \frac{E}{H} \rightarrow \mathbb{R}$ bliver en isomorfi. Nu kan φ sammensættes af to afbildninger

$$E \xrightarrow{k} \frac{E}{H} \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{R},$$

hvor k er den kanoniske afbildning, som vides at være kontinuert, medens φ^* er en algebraisk isomorfi og derfor kontinuert. Dermed har vi vist, at $2) \Rightarrow 3)$.

Hvis φ er kontinuert ligning for en hyperplan, kan vi vælge $e \in E$, således at $\varphi(e) = 1$; vi definerer en afbildning $p: E \rightarrow E$, idet vi sætter $p(x) = \varphi(x)e$. Det er da klart, at p bliver kontinuert og $p^2 = p$. Endvidere er $H = p^{-1}(0)$, og vi kan benytte sætning 3.12.1. Dermed har vi vist, at $3) \Rightarrow 4)$. Det er klart, at $4) \Rightarrow 1)$, og dermed er ækvivalensen af de 4 påstande fuldstændig bevist.

3.16. Vi skal nu betragte et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk vektorrum E over $\mathbb{R}$. Filtret $\mathcal{F}$ kaldes et fundamentalfilter, såfremt følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists a \in E (a+U \in \mathcal{F}).$$

Et topologisk vektorrum E på $\mathbb{R}$ kaldes fuldstændigt, såfremt ethvert fundamentalfilter på E er konvergent.

Det følger umiddelbart af definitionerne, at ethvert konvergent filter er et fundamentalfilter.

Vi har nu sætningen:

3.16.1. Sætning. Det topologiske vektorrum $\mathbb{R}^n$ er fuldstændigt.

Bevis. For afstanden mellem $x \in \mathbb{R}^n$ og $y \in \mathbb{R}^n$ benytter vi betegnelsen $\|y-x\|$. At $\mathcal{F}$ er et fundamentalfilter betyder nu, at det indeholder mængder med vilkårlig lille diameter. Vi kan derfor vælge en følge (A_n) af mængder $A_n \in \mathcal{F}$, således at diameteren af A_n er mindre end $\frac{1}{n}$. Sætter vi nu $B_n = A_1 \cap \dots \cap A_n$, da er B_n også element af $\mathcal{F}$ og har diameter mindre end $\frac{1}{n}$. Vi vælger for hvert n et element $a_n \in B_n$, og derved får vi en punktfølge (a_n) , som tilfredsstiller betingelsen

$$\|a_{n+p} - a_n\| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

Altså er (a_n) en fundamentalfølge og derfor konvergent mod et grænsepunkt $a \in \mathbb{R}^n$. Kuglen med centrum a og radius $\frac{1}{n}$ indeholder da hele A_n . Altså tilhører denne kugle $\mathcal{F}$. Men deraf følger, at

enhver omegn af a tilhører $\tilde{F}$, altså, at $\tilde{F}$ er konvergent med a som grænsepunkt.

3.16.2. Sætning. Hvis E er et lokalkonvekst topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$, og et delrum $S \subseteq E$ er isomorft med $\mathbb{R}^n$, da er S afsluttet.

Bevis. Vi betragter $a \in \bar{S}$ samt filtret $\tilde{U}(a)$. Da ethvert $U \in \tilde{U}(a)$ har ikke tom fællesmængde med S , er

$$\tilde{F} = \{U \cap S \mid U \in \tilde{U}(a)\}$$

et filter på S . I underrummet S betragter vi en konveks, symmetrisk omegn V af $\underline{0}$. Vi har $V = V_1 \cap S$, hvor $V_1 \in \tilde{U}(\underline{0})$. Ifølge v6) eksisterer der en konveks, symmetrisk omegn $W_1 \in \tilde{U}(\underline{0})$, således at $W_1 + W_1 \subseteq V_1$. Da $a \in \bar{S}$ og $a + W_1 \in \tilde{U}(a)$, kan vi vælge et punkt $b \in S \cap (a + W_1)$. Af $b - a \in W_1$ følger $a - b \in W_1$, altså $a \in b + W_1$. Altså gælder

$$a + W_1 \subseteq b + W_1 + W_1 \subseteq b + V_1,$$

hvilket viser, at $b + V_1 \in \tilde{U}(a)$. Altså gælder

$$(b + V_1) \cap S \in \tilde{F},$$

men dette er ensbetydende med, at

$$b + V \in \tilde{F}. \quad *) \text{ da } b \in S \text{ og da } S \text{ er et lineært underrum}$$

For enhver omegn V af $\underline{0}$ i rummet S eksisterer der altså et $b \in S$, således at $b + V \in \tilde{F}$. Det betyder netop, at $\tilde{F}$ er et fundamentalfilter på S . Da S er isomorft med $\mathbb{R}^n$, som er fuldstændigt, medfører dette, at $\tilde{F}$ konvergerer mod et grænsepunkt $a_1 \in S$. Filtret $\tilde{F}$ er filterbasis på E og bestemmer et filter $\tilde{G}$ på E . Dette filter er konvergent mod grænsepunktet a_1 . Det er desuden finere end $\tilde{U}(a)$ og derfor konvergent mod a . Altså gælder $a = a_1$, og dermed har vi vist, at $a \in S$; altså er S afsluttet.

3.17. På basis af de i foregående afsnit beviste sætninger skal vi nu udlede sætningen:

3.17.1. Sætning. Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. Et m -dimensionalt underrum $S \subseteq E$ er afsluttet og isomorft med $\mathbb{R}^m$.

Bevis. Vi benytter induktion. For $m = 1$ følger sætningen af sætningerne 3.9.1 og 3.16.2. Vi antager, at påstanden er rigtig for et $m-1$ -dimensionalt underrum, og vi betragter nu det m -dimensionale underrum S . Vi vælger en basis $\{e_1, \dots, e_m\}$ for S , og med $S_1 \subseteq S$ betragter vi det af $\{e_1, \dots, e_{m-1}\}$ frembragte underrum. Det er en hyperplan i S , og på grund af induktionsforudsætningen er den afsluttet. Men ifølge sætning 3.15.1. er S så topologisk direkte sum af S_1 , som er isomorft med $\mathbb{R}^{m-1}$, og $\{\lambda e_m\}$, som er isomorft med $\mathbb{R}$. Heraf følger, at S er isomorft med $\mathbb{R}^m$, altså fuldstændigt ifølge sætning 3.16.1 og afsluttet ifølge sætning 3.16.2.

3.17.2. Sætning. Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum, lad S være et afsluttet underrum og T et endelig dimensionalt underrum. Da er $S+T$ et endelig ^{afsluttet} dimensionalt underrum.

Bevis. Ifølge sætning 3.17.1 er T isomorft med $\mathbb{R}^m$, og derfor kan T skrives som en direkte sum $T = T_1 + T_2$, hvor $T_1 \subseteq S$ og $S \cap T_2 = \{0\}$. Vi har da $S+T = S+T_2$, hvor $S+T_2$ er en algebraisk direkte sum. Da S er et afsluttet underrum af E , bliver $\frac{E}{S}$ et topologisk vektorrum, og den kanoniske afbildning $k:E$ på $\frac{E}{S}$ bliver kontinuert. Nu bliver $k(S+T_2)$ isomorft med T_2 , altså et endelig dimensionalt underrum af $\frac{E}{S}$, altså afsluttet ifølge sætning 3.17.1. Men så er $S+T_2$ originalmængde ved k til $k(S+T_2)$ og derfor afsluttet.

3.17.3. Sætning. Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum og lad S være et afsluttet underrum med endelig codimension. Da eksisterer der en fremstilling af E som en topologisk direkte sum $E = S+T$.

Bevis. Lad T være det algebraiske komplement til S . Projektionen $p:E$ på T er sammensat af afbildningerne

$$E \xrightarrow{k} \frac{E}{S} \xrightarrow{\varphi} T,$$

hvor φ er en algebraisk isomorfi. Da $\frac{E}{S}$ og T er endelig dimensionale, bliver φ en ^{kont}isomorfi og p kontinuert. Sætningen følger nu af sætning 3.12.1.

3.18. Vi forlader et øjeblik de ∞ -dimensionale vektorrum for at vise en elementær sætning om konvekse mængder i $\mathbb{R}^2$.

3.18.1. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben, konveks mængde og $a \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ et punkt. Der eksisterer en ret linie gennem a , som ikke indeholder noget punkt af O .

Bevis. Uden at indskrænke almindeligheden, kan vi antage, at $a = \underline{0}$. Vi betragter punktmængden

$$P = \{\lambda x \mid 0 < \lambda < \infty \wedge x \in O\} = \bigcup_{0 < \lambda < \infty} \lambda O,$$

som er åben, da hver mængde λO er åben. Hvis $\lambda_1 x_1$ og $\lambda_2 x_2$ er punkter af P , får vi

$$(1-t)\lambda_1 x_1 + t\lambda_2 x_2 = ((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2)((1-u)x_1 + ux_2),$$

hvor

$$u = \frac{t\lambda_2}{(1-t)\lambda_1 + t\lambda_2},$$

hvilket viser, at P er konveks. Da ethvert punkt i P har formen λx , hvor $\lambda \neq 0$ og $x \neq \underline{0}$, gælder $\underline{0} \notin P$. Af $x \in P$, $-x \in P$ ville på grund af konveksiteten følge $\underline{0} \in P$. Vi kan derfor finde et punkt $b \in \mathbb{R}^2$ med $b \neq \underline{0}$, $b \notin P$. Da P er åben indeholder P et punkt c , der ikke ligger på den rette linie gennem $\underline{0}$ og b . Den rette linie gennem b og c indeholder punkter af P og af CP , og derfor tillige et randpunkt x for P . Punktmængden P har den egenskab, at den samtidig med y indeholder alle λy med $\lambda \in]0, \infty[$. Heraf følger, at den rette linie gennem x (som ikke tilhører P , da P

er åben) og $\underline{0}$ ikke kan indeholde punkter af P uden at $-x \in P$,
 og da vil en omegn U af $-x$ medføre, at $\underline{0} \in P$ i modstrid med det
 ovenfor viste. Altså kan den rette linie gennem x og $\underline{0}$ ikke inde-
 holde punkter af P og dermed heller ikke punkter af O , som er en
 delmængde af P .

3.18.2. Sætning. Lad E være et lokalkonvekst vektorrum over $\mathbb{R}$ og mindst 2-dimensional. Lad $\underline{0} \subset E$ være en åben, konveks
mængde og $a \in E$ et punkt, der ikke tilhører $\underline{0}$. Der eksisterer
da en ret linie gennem a , som ikke indeholder punkter af $\underline{0}$.

Bevis. Da E er mindst 2-dimensional, eksisterer der 2 li-
 nært uafhængige punkter $e_1, e_2 \in E$. Disse punkter bestemmer et
 2-dimensional underrum S , og vi ved, at dette er afsluttet og
 isomorft med $\mathbb{R}^2$. Fællesmængden $S \cap \underline{0}$ er åben relativt til S , og
 ifølge sætning 3.18.1 eksisterer der derfor en ret linie gennem
 $\underline{0}$ i S , som ikke indeholder punkter af $S \cap \underline{0}$ og derfor heller
 ikke af $\underline{0}$.

3.19. Hovedsætningen i dette kapitel er kendt under navnet
Hahn-Banach's sætning. Den kan formuleres på flere måder, og vi
 skal nu først vise den i en geometrisk formulering.

3.19.1. Hahn-Banach's sætning. Lad E være et lokalkonvekst
topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. Lad $\underline{0} \subset E$ være en åben, konveks
mængde, og lad S være et underrum. Hvis $\underline{0} \cap S = \emptyset$, eksisterer
der en afsluttet hyperplan H , således at $S \subset H$ og $\underline{0} \cap H = \emptyset$.

Bevis. Lad M være mængden af alle underrum af E , som inde-
 holder S og ikke har punkter fælles med $\underline{0}$. Denne mængde er
 ordnet ved relationen $\subset$. Hvis $\{T_j \mid j \in J\}$ er en fuldstændig ordnet
 delmængde af M , vil $\bigcup T_j$ åbenbart også tilhøre M . Der eksisterer
 derfor ifølge Zorn's lemma et maksimalt element $H \in M$. Det er
 klart, at $\bar{H} \in M$, altså $H = \bar{H}$ afsluttet. Vi betragter $F = \frac{E}{H}$ og
 den kanoniske afbildning $k: E$ på F . Da $k^{-1}(\underline{0}) = H$ og $H \cap \underline{0} = \emptyset$,

gælder $0 \notin k(0)$. Det er klart, at $k(0)$ er konveks. Lad os nu antage, at F er mindst 2-dimensionalt. Af sætning 3.18.2 følger da, at der eksisterer en ret linie $l \subseteq F$ gennem 0 og med $l \cap k(0) = \emptyset$. Heraf følger $k^{-1}(1) \cap 0 = \emptyset$, men $k^{-1}(1)$ er et underrum, der har H som ægte delmængde. Desuden gælder $k^{-1}(1) \in M$. Men så har vi fået et resultat, der strider mod definitionen af H som maksimalt element. Antagelsen om, at F er mindst 2-dimensionalt, kan således ikke være rigtig. Da F er 1-dimensionalt, er H en hyperplan. Vi ved allerede, at H er afsluttet, og beviset er således fuldført.

3.20. Vi betragter igen et lokalkonvekst topologisk vektorrum E over $\mathbb{R}$. En afsluttet ^{hyperplan} $H \subseteq E$ er defineret ved en ligning $\varphi(x) = 0$, hvor $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert funktional, som ikke er identisk 0. I det følgende vil vi bruge ordet "hyperplan", idet hver af sideklasserne $\varphi^{-1}(\lambda)$ også vil blive kaldt en hyperplan. Når vi vil præcisere, at vi mener en hyperplan i den tidligere betydning, vil vi kalde den en hyperplan gennem 0 .

Mere generelt kommer vi også til at betragte sideklasser til vilkårlige underrum. Vi vil kalde disse sideklasser lineære mangfoldigheder.

Lad H være en hyperplan, som ikke går gennem 0 . Den er givet ved ligningen $\varphi(x) = \alpha$. Lad $e \in H$ være vilkårlig valgt, og lad H^* være hyperplanen $\varphi^{-1}(0)$. For $x \in E$ har vi 1 og kun 1 fremsstilling $x = \lambda e + h$, hvor $h \in H^*$, og vi har da $\varphi(x) = \lambda \varphi(e) = \alpha \lambda$. Heraf fremgår, at φ er éntydig bestemt ved hyperplanen H og den konstante værdi α . Det ses tillige, at der til en hyperplan H og en reel konstant α altid svarer en funktional φ , således at $H = \varphi^{-1}(\alpha)$, og vi har tidligere set, at denne funktional bliver kontinuert, hvis og kun hvis H er afsluttet.

Vi bemærker, at Hahn-Banach's sætning også kan formuleres

på følgende måde:

3.20.1. Hahn-Banach's sætning. Lad E være et lokalkonvekst vektorrum over $\mathbb{R}$, lad M være et underrum og O en åben konveks mængde, som ikke har punkter fælles med M . Der eksisterer en kontinuert funktional $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$, som tilfredsstiller

$$\forall x \in M (\phi(x) = 0); \forall x \in O (\phi(x) > 0).$$

3.21. Til brug ved en ny formulering af Hahn-Banach's sætning indfører vi et særlig klasse af reelle funktioner på topologisk vektorrum.

3.21.1. Definition. En reel funktion p på et vektorrum E over $\mathbb{R}$ kaldes en semi-norm, når den tilfredsstiller:

$$1) \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in E (p(\lambda x) = |\lambda| p(x))$$

$$2) \forall x, y \in E (p(x+y) \leq p(x) + p(y)).$$

Vi udleder straks nogle simple resultater.

3.21.2. Sætning. En semi-norm p på et vektorrum E over $\mathbb{R}$ tilfredsstiller betingelserne

$$3) p(\underline{0}) = 0$$

$$4) \forall x \in E (p(x) \geq 0)$$

$$5) \forall x, y \in E \forall \lambda \in [0, 1] (p((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)p(x) + \lambda p(y)).$$

Bevis: Af 1) fås 3) ved at sætte $\lambda = 0$. Desuden fås $p(-x) = p(x)$, altså $p(x) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)) \geq \frac{1}{2} p(\underline{0}) = 0$ ifølge 2). Endvidere fås af 2) og 1), at

$$p((1-\lambda)x + \lambda y) \leq p((1-\lambda)x) + p(\lambda y) \leq$$

$$|1-\lambda| p(x) + |\lambda| p(y) = (1-\lambda)p(x) + \lambda p(y)$$

for $\lambda \in [0, 1]$.

Af 5) og 1) følger umiddelbart følgende sætning.

3.21.3. Sætning. Lad p være en semi-norm på et vektorrum E over $\mathbb{R}$. Punktmængden $\{x \in E \mid p(x) < 1\}$ er konveks og symmetrisk.

3.22. Vi skal nu studere semi-normer på lokal-konvekse, topologiske vektorrum. Vi vil vise sætningen:

3.22.1. Sætning. En semi-norm p på et lokalkonvekst topologisk vektorrum E over $\mathbb{R}$ er kontinuert, hvis den er begrænset i en omegn af $\underline{0}$.

Bevis. Af $p(x) \leq \alpha$ for alle $x \in U$, hvor $U \in \mathcal{U}(\underline{0})$, følger umiddelbart $p(x) \leq \varepsilon$, hvor $\varepsilon > 0$, for alle $x \in \alpha^{-1} \varepsilon U$. Altså er p kontinuert i $\underline{0}$. Af 1) og 2) fås

$$p(x+h) \leq p(x)+p(h)$$

og

$$p(x) = p((x+h)+(-h)) \leq p(x+h)+p(-h) = p(x+h)+p(h),$$

altså

$$|p(x+h)-p(x)| \leq p(h),$$

hvilket viser, at p er kontinuert overalt (endda ligeligt), hvis p er kontinuert i $\underline{0}$.

3.23. Vi vil nu vise endnu en form for Hahn-Banach's sætning.

3.23.1. Hahn-Banach's sætning. Lad p være en kontinuert semi-norm på et lokalkonvekst topologisk vektorrum E over $\mathbb{R}$. Lad $M \subseteq E$ være et underrum og $f:M$ ind i $\mathbb{R}$ kontinuert funktional, som tilfredsstiller $|f(x)| \leq p(x)$ på M . Der eksisterer da en kontinuert udvidelse $f_1:E$ ind i $\mathbb{R}$ af f , således $f_1(x) = f(x)$ for alle $x \in M$ og $|f_1(x)| \leq p(x)$ for alle $x \in E$.

Bevis. Hvis f er identisk nul behøver vi blot at vælge f_1 identisk nul. I modsat fald er $f(x) = 1$ ligning for en hyperplan L i underrummet M . Mængden $O = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$ er åben og konveks, og vi har $L \cap O = \emptyset$. Efter en forskydning af $\underline{0}$ -punktet til et punkt af L , kan vi benytte den første udgave af Hahn-Banach's sætning, som fortæller os, at der findes en hyperplan H gennem L med $H \cap O = \emptyset$. Ifølge 3.20 eksisterer der netop en kontinuert funktional $f_1:E$ ind i $\mathbb{R}$, for hvilken $f_1^{-1}(1) = H$. Tilsvarende findes der på M kun en kontinuert funktional $f:M$

ind i $\mathbb{R}$ med $f^{-1}(1) = L$. Altså er $f(x) = f_1(x)$ for $x \in M$. Lad nu $x \in E$ være et vilkårligt punkt. Hvis $f_1(x) = 0$ gælder $f_1(x) \leq p(x)$. Er $f_1(x) \neq 0$, kan vi finde et reelt tal λ , således at $f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x) = 1$, altså $\lambda x \in H$. Men af $H \cap O = \emptyset$ følger $p(\lambda x) \geq 1$, altså $f_1(\lambda x) \leq p(\lambda x)$. Dette medfører imidlertid

$$|f_1(x)| = |\lambda|^{-1} f_1(\lambda x) \leq |\lambda|^{-1} p(\lambda x) = p(x),$$

og dermed er beviset færdigt.

3.24. Som eksempel på anvendelsen af Hahn-Banach's sætning skal vi vise følgende sætning.

3.24.1. Sætning. Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum over $\mathbb{R}$. Lad (x_n) være en punktfølge på E med den egenskab, at der findes et punkt $x \in E$, således at enhver kontinuert funktional $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ tilfredsstiller betingelsen $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$. Lad $M \subseteq E$ være det underrum, der består af alle endelige linearkombinationer $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ med koefficienter fra $\mathbb{R}$. Da gælder $x \in \overline{M}$.

Bevis. Ellers var x ydre punkt for M , og vi kunne da vælge en åben mængde O , således at $x \in O$ og $O \cap M = \emptyset$. Ifølge Hahn-Banach's sætning ville der da eksistere en kontinuert funktional $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ med $\phi(x) = 0$ for alle $x \in M$ og med $\phi(x) > 0$. For denne funktional vil betingelsen $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$ ikke være opfyldt.

Singulariteter for sædvanlige reelle
differentialligninger af første og anden orden.

4.1. Differentialligningsteorien er stærkt præget af sin nære kontakt ved matematikkens anvendelser. Dette har medført, at der er udviklet et stort antal meget specielle metoder med henblik på specielle anvendelsesområder. Fra den rene matematiks synspunkt har mere generelle metoder selvfølgelig størst interesse, men disse generellere metoder er ofte udviklet på basis af en af de mere specielle metoder, der stammer fra anvendelserne, og det er ofte hændt, at en terminologi, der stammer fra de mere specielle anvendelser, er ført med over i generalisationerne. De særlige undersøgelser, der beskæftiger os i dette og det følgende kapitel, er indledning til en gren af teorien, der sædvanligvis betegnes som svingningsteori.

4.2. Vi vil beskæftige os med ligninger i tre variable, som vi betegner x, y og t . Den variable t indtager en særstilling, og vi vil betegne den som tiden. De variable x og y opfattes som koordinater til punkter i en plan, i hvilken vi har et sædvanlig retvinklet koordinatsystem. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt endeligt eller uendeligt interval. To differentiable afbildninger $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definerer en differentiabel bevægelse i (x, y) -planen, idet vi sætter $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. For nemheds skyld taler vi da simpelthen om bevægelsen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, men også om bevægelsen (φ, ψ) .

Vi vil systematisk benytte de afkortede betegnelser $\dot{x}$ og $\dot{y}$ for differentialkvotienterne

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = D\varphi(t), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = D\psi(t),$$

og analogt $\ddot{x}$ og $\ddot{y}$ for differentialkvotienterne af anden orden.

Dette er en praksis, der er udbredt i de fysiske og tekniske anvendelser, og vi vil følge den her, hvor den ikke vil kunne give anledning til misforståelser.

4.3. Vi vil studere to sammenhørende differentiaalligninger af formen

$$(1) \quad \dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y),$$

hvor P og Q er kontinuerte funktioner i et område Ω i (x,y) -planen.

En løsning til (1) vil være en bevægelse $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, og vektoren med koordinater $\dot{x} = D\varphi(t)$, $\dot{y} = D\psi(t)$ (vi siger kort vektoren $(\dot{x}, \dot{y})$) er hastigheden i denne bevægelse. Ligningen (1) angiver således hastighedsvektor i ethvert punkt af Ω , og vi siger derfor også, at (1) er et hastighedsfelt i området Ω . Banekurverne for de bevægelser, der er løsninger til (1), er de ved hastighedsfeltet (1) bestemte banekurver.

Den omstændighed, at tiden t er uafhængig variabel i (1) udelukker selvfølgelig ikke, at resultaterne kan anvendes på ligninger med en anden uafhængig variabel. Man vil da tale om vektorfelt i stedet for hastighedsfelt, og om feltlinier i stedet for banekurver.

4.4. Ifølge eksistenssætningen vil der for ethvert værdisæt (t_0, x_0, y_0) eksistere en løsning $x = \varphi(x_0, y_0, t_0; t)$, $y = \psi(x_0, y_0, t_0; t)$, for hvilken

$$x_0 = \varphi(x_0, y_0, t_0; t_0), \quad y_0 = \psi(x_0, y_0, t_0; t_0),$$

og løsningen er éntydig bestemt ved (t_0, x_0, y_0) , såfremt P og Q er pæne nok (tilfredsstiller en lokal Lipschitz-betingelse).

Lad $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ være en løsning. Den omstændighed, at t ikke optræder på højre side i (1), bevirker åbenbart, at $x = \varphi(t-t_0)$, $y = \psi(t-t_0)$ ligeledes er en løsning. Den ovenfor

omtalte partikulære løsninger tilfredsstiller derfor betingelsen $\varphi(x_0, y_0, t_0; t) = \varphi(x_0, y_0, 0; t - t_0)$; $\psi(x_0, y_0, t_0; t) = \psi(x_0, y_0, 0; t - t_0)$, forudsat, at P og Q er tilstrækkelig pæne.

Løsningsmængden til (1) er således invariant overfor forskydninger i tid. Et punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ bestemmer derfor en løsningskurve bortset fra en sådan forskydning.

Hvis $x = g(u)$, $y = h(u)$ er parameterfremstilling for en banekurve for en løsning, fås ved indsættelse i (1)

$$(3) \quad Dg(u)\dot{u} = P(g(u), h(u)), \quad Dh(u)\dot{u} = Q(g(u), h(u)).$$

Heraf fås let, at $x = g(u)$, $y = h(u)$ er en løsningskurve, hvis og kun hvis

$$-Q(g(u), h(u))Dg(u) + P(g(u), h(u))Dh(u) = 0,$$

og det plejer vi at udtrykke ved at sige, at banekurverne er løsningskurverne til differentialligningen

$$(4) \quad -Q(x, y)dx + P(x, y)dy = 0.$$

Når banekurverne først kendes, kan sammenhængen mellem u og t fås af en af de 2 ensbetydende ligninger (3), og da de variable kan adskilles, kræver dette blot en integration. Bestemmelsen af banekurverne er således den væsentligste del af problemet.

4.5. Differentialligningen

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

er for $P(x, y) \neq 0$ ensbetydende med (4), og dens løsningskurver er derfor netop banekurverne for løsningerne til (1) bortset fra de punkter, hvor $P(x, y) = 0$. Ved overgangen til (5) vil således alle de punkter af løsningskurverne, hvor tangenten er lodret, gå tabt. Ved overgangen fra (5) til (1) er der en vis frihed, idet brøken på højre side i (5) kan forlænges eller forkortes.

4.6. Differentialligningen

$$(6) \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

er ækvivalent med systemet

$$(7) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y),$$

som er speciellere end (1).

En løsning $x = \phi(t)$ til (6) er en bevægelse på en ret linie, og $\dot{x} = y$ er bevægelsens hastighed, medens $\ddot{x}$ er dens acceleration. I dette tilfælde betyder overgangen til (6) altså, at man studerer den plane bevægelse, der fremkommer, når sted og hastighed benyttes som retvinklede koordinater. Parret (x, y) angiver den øjeblikkelige bevægelsestilstand og kaldes derfor bevægelsens fase, ligesom (x, y) -planen også kaldes faseplanen, og de ved (7) bestemte banekurver kaldes fasekurverne.

4.7. I de punkter (x_0, y_0) , hvor P og Q i (1) begge bliver 0, vil eksistenssætningen gælde for (1), men sædvanligvis ikke for (5). På samme måde går det med éntydighedssætning, hvis P og Q er pæne nok. De punkter, hvor eksistens- og eksistenssætningen ikke kan anvendes på ligningen (5), kaldes singulære punkter for (1) og tillige for (5). De falder således umiddelbart i følgende 2 kategorier:

- 1). Punkter, hvor P og Q tilfredsstiller en Lipschitz-betingelse, men begge antager værdien 0.
- 2). Punkter, hvor P og Q ikke begge tilfredsstiller en Lipschitzbetingelse.

I tilfælde 2) kan man ikke vente særlig fine resultater vedrørende singulariteternes art, hvis vi ikke indfører begrænsninger med hensyn til arten af singulariteterne for P og Q . Vi vil koncentrere os om tilfældet 1), og vi vil studere forholdene i omegnen af et fælles nulpunkt for P og Q . Da en parallelforskydning af koordinatsystemet blot betyder addition af konstanter til

x og y , kan vi antage, at det fælles nulpunkt falder i $(0,0)$.

4.8. Hvis P og Q er differentiable og antager værdien 0 i $(0,0)$ har vi fremstillinger af formen

$$(8) \quad P(x,y) = Ax + By + \delta(x,y)\sqrt{(x^2+y^2)}$$

$$Q(x,y) = Cx + Dy + \varepsilon(x,y)\sqrt{(x^2+y^2)},$$

hvor δ og ε har grænseværdien 0 i $(0,0)$, og hvor A, B, C og D er konstanter. Vi må selvfølgelig ikke forveksle D med et differentiationstegn.

Det er nærliggende i første tilnærmelse at se bort fra de to restled, og således erstatte (1) med de sammenhørende ligninger

$$(9) \quad \dot{x} = Ax + By, \quad \dot{y} = Cx + Dy.$$

Man kan så håbe at studiet af løsningerne til (9) i omegnen af $(0,0)$ giver resultater, som også giver en forestilling om situationen i det generelle tilfælde. Det viser sig nu, at det virkelig går sådan, og vi går derfor optimistisk i gang med at løse (9) for at studere dens løsninger i omegnen af singulariteten i $(0,0)$.

4.9. Ligningerne (9) løses selvfølgelig let ved elementære metoder, og det er måske strengt taget unødvendigt i denne sammenhæng at gå alle detaljer af løsningsprocessen igennem. Diskussionen af resultatet er imidlertid vævet så intimt sammen med selve løsningsprocessen, at vi finder det ret hensigtsmæssigt at tage alle detaljerne med.

Ligningerne (9) kan løses ved flere af de elementære metoder, som omtaltes i matematik 1. Vi vil vælge en metode, der giver os løsningerne på en sådan form, at vi også let når til en forestilling om banekurvernes udseende. Når man har en forhåndsviden om, at løsningerne ved passende lineære afbildninger føres over i simple og velkendte kurver, er det nærliggende at indlede løs-

ningsprocessen med at udføre en lineær afbildning, således at ligningen får en simplere form.

4.10. Vi vil altså forsøge, om vi i (9) kan indføre nye variable ξ og η , der udtrykkes ved x og y ved relationer

$$(10) \quad \xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

På matrix form har vi

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

og ved differentiation af den første ligning og indsættelse af den anden, får vi

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vi prøver først, at transformere ligningssystemet, så det nye system får formen

$$(11) \quad \dot{\xi} = \lambda \xi, \quad \dot{\eta} = \mu \eta.$$

Hertil kræves, at

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \mu\gamma & \mu\delta \end{pmatrix}$$

eller

$$(12) \quad \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

hvilket er ensbetydende med, at (α, β) og (γ, δ) er egenvektorer for dens transponerede koefficientmatrix. Da transformationens determinant ikke må være nul, må vi kræve, at de 2 egenvektorer er lineært uafhængige. Det ses umiddelbart, at transformationen virkelig lykkes, hvis den transponerede koefficientmatrix har 2 lineært uafhængige egenvektorer. Det spiller ingen rolle, om disse hører til samme egenværdi eller til forskellige egenværdier.

4.11. Egenværdierne for den transponerede koefficientmatrix for ligningssystemet (1) fås af ligningen

$$(A - \lambda)(D - \lambda) - BC = 0$$

eller

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - BC = 0,$$

og vi må derfor dele i flere tilfælde eftersom diskriminanten

$$\Delta = (A+D)^2 - 4(AD-BC) = (A-D)^2 + 4BC$$

er positiv, nul eller negativ.

4.12. Vi vil først undersøge tilfældet $\Delta > 0$. I dette tilfælde har den transponerede matrix 2 reelle egenverdier ^{λ, μ} , og til disse svarer selvfølgelig 2 lineært uafhængige egenvektorer^{reelle} η og ξ . Hvis (α, β) og (γ, δ) vælges som egentlige løsninger til (12) vil transformationen (1) overføre (1) i (11), hvor

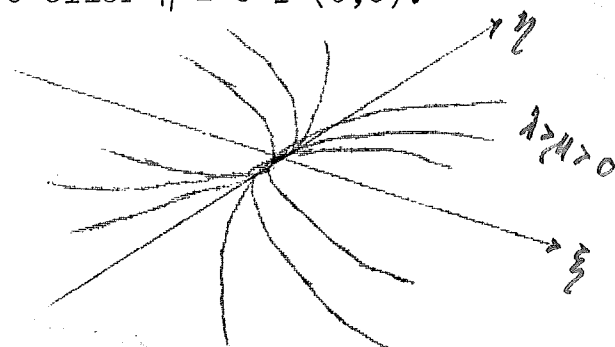
$$\lambda\mu = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC.$$

Ligningssystemet (11) har den fuldstændige løsning

$$\{\xi = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

For $c_1 = c_2 = 0$ fås nullløsningen. Ingen af de andre løsninger passerer $(0,0)$. For $\lambda > 0, \mu > 0$ vil samtlige løsninger konvergere mod $(0,0)$ for $t \rightarrow -\infty$. For $\lambda < 0, \mu < 0$ vil samtlige løsninger konvergere mod $(0,0)$ for $t \rightarrow \infty$. Løsningerne er altså i det første tilfælde bevægelser, der startede i $(0,0)$ for uendelig lange siden, og i det andet tilfælde bevægelser, der styrer ind mod $(0,0)$, som de dog først vil nå efter uendelig lang tid. For $c_1 = 0$ fås bevægelser med $\xi = 0$ som banekurve og for $c_2 = 0$ fås bevægelser med $\eta = 0$ som banekurve. For $\lambda > \mu > 0$ gælder $\frac{\xi}{\eta} = \frac{c_1}{c_2} e^{(\lambda-\mu)t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$, og heraf følger, at vi for $c_1 c_2 \neq 0$ får banekurver, der udgår fra $(0,0)$ og rører linien $\xi = 0$ i dette punkt. Også for andre størrelsesrelationer mellem λ, μ og 0 vil banekurverne røre $\xi = 0$ eller $\eta = 0$ i $(0,0)$.

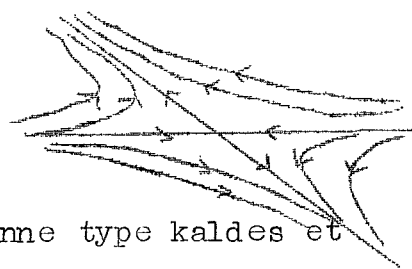
På figuren har vi skitseret systemet af løsningskurver i omegnen af $(0,0)$. Et singulært punkt af denne type kaldes et knudepunkt.



Ved et knudepunkt forstår vi præcist udtrykt et punkt, der er udgangspunkt svarende til $t = -\infty$ eller endepunkt svarende til $t = +\infty$ for uendelig mange integralkurver, der alle har en tangent i knudepunktet. Vi kan yderligere klassificere knudepunkterne efter antallet af forskellige tangenter/^{til}integralkurver gennem knudepunkt. I det her foreliggende tilfælde drejer det sig altså om et knudepunkt med 2 tangenter.

Vi mangler endnu at omtale de tilfælde, hvor $\lambda\mu \leq 0$. Tilfældet $\lambda\mu = 0$ svarende til $Ad-BC = 0$ har kun ringe betydning. Systemet af banekurver bliver et system af parallelle rette linier. For $\lambda\mu < 0$ bliver $|\xi|^{|\mu|}|\eta|^{|\lambda|}$ konstant langs hver integralkurve, og ingen integralkurve med $c_1 c_2 \neq 0$ kommer i nærheden af $(0,0)$. Som før er $\xi = 0$ og $\eta = 0$ banekurver, men denne gang således, at bevægelsen på den ene af disse linier er startet i $(0,0)$ for $t = -\infty$, medens den på den anden går mod $(0,0)$, som dog ikke nås før $t = \infty$.

Vi har på figuren skitseret systemet af integralkurver, og i dette tilfælde har vi antydnet bevægelsesretningen med pile. Et singulært punkt af denne type kaldes et sadelpunkt. Et sadelpunkt er præcist formuleret et punkt gennem hvilket der går endelig mange, men mindst 2 integralkurver, som har indbyrdes forskellige tangenter, og således at ingen anden integralkurve kommer vilkårligt nær det singulære punkt.



4.13. Vi vil nu undersøge tilfældet $\Delta < 0$ svarende til komplekse egenverdier $\lambda_1 = \mu + i\nu$ og $\lambda_2 = \mu - i\nu$. Til disse svarer komplekse egenvektorer, som også er indbyrdes konjugerede. I relationen

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \xi \\ \lambda_2 \eta \end{pmatrix}$$

er der kun 1 ikke reel faktor i det midterste udtryk, og vi kan derfor spalte i real- imaginærdel, idet vi sætter

$$\alpha = p+iq, \beta = r+is, \gamma = p-iq, \delta = r-is$$

$$\xi = X+iY, \eta = X-iY,$$

og vi får derved ligningerne

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} p & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu X - \nu Y$$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \nu X + \mu Y$$

eller samlet i 1 ligning

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Nu er

$$\begin{pmatrix} X+iY \\ X-iY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+iq & r+is \\ p-iq & r-is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

altså

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Endelig er

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ p-iq & r-is \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ 2p & 2r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iq & is \\ 2p & 2r \end{vmatrix} = -2i \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix},$$

hvilket viser, at $ps-qr \neq 0$. Vi har dermed vist, at systemet (1) i dette tilfælde kan overføres i

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \mu X - \nu Y \\ \dot{Y} &= \nu X + \mu Y. \end{aligned}$$

Betingelsen $\Delta < 0$ medfører $AD-BC > 0$, $BC < 0$. Desuden er

$$2\mu = A+D, \mu^2 + \nu^2 = AD-BC.$$

4.14. Vi vil nu løse systemet (13) og det gør vi ved at indføre polære koordinater i (X,Y) -planen, altså ved at indføre

nye variable r og θ ved transformationen

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

som fører ligningerne (13) over i systemet

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = r(\mu \cos \theta - \nu \sin \theta)$$

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r(\nu \cos \theta + \mu \sin \theta)$$

eller

$$(\dot{r} - \mu r) \cos \theta - r(\dot{\theta} - \nu) \sin \theta = 0$$

$$(\dot{r} - \mu r) \sin \theta + r(\dot{\theta} - \nu) \cos \theta = 0.$$

Dette kan opfattes som et ligningssystem til bestemmelse af $\dot{r} - \mu r$ og $r(\dot{\theta} - \nu)$, og da dets determinant ikke er 0, bliver dets løsning

$$\dot{r} - \mu r = r(\dot{\theta} - \nu) = 0.$$

Dette ligningssystem kan umiddelbart integreres, og den fuldstændige løsning bliver givet ved

$$r = c_1 e^{\mu t}, \quad \theta = \nu(t - t_0),$$

og da vi har $\nu \neq 0$, bliver banekurverne bestemt ved

$$r = c_1 e^{\frac{\mu}{\nu}(\theta + \theta_0)}; \quad \theta_0 = \nu t_0.$$

Banekurverne bliver for $\mu \neq 0$ logaritmiske spiraler, og i (x, y) -planen ser systemet af banekurver ud omtrent som vist på figuren, idet de logaritmiske spiraler forvrænges ved den lineære transformation. Selve det singulære punkt er for $\mu > 0$ udgangspunkt for bevægelsen svarende til $t = -\infty$ og for $\mu < 0$ endepunkt svarende til $t = \infty$. Et singulært punkt af denne type kaldes et spiralpunkt for differentialligningen. Et spiralpunkt er udgangs- eller endepunkt for uendelig mange bevægelser svarende til $t = -\infty$ eller $t = +\infty$, og således at θ varierer monotont og ubegrænset med t i en omegn af det singulære punkt.



I specialtilfældet $\mu = 0$ bliver banekurverne i (XY)-planen cirkler, som ved den lineære transformation overføres i ligedannede ellipser. Disse gennemløbes alle samme vej, og bevægelserne bliver periodiske med periode $2\nu^{-1}\pi$. I dette tilfælde kaldes det singulære punkt et centralpunkt. Et centralpunkt er et singulært punkt, der har en omegn, i hvilken alle banekurverne er lukkede kurver, der omkredser det singulære punkt. Der går altså ingen integralkurver gennem et centralpunkt.

4.15. Vi mangler endnu det tilfælde, hvor $\Delta = 0$. Der findes da 1 egen værdi

$$\lambda = \frac{1}{2}(A+D),$$

og vi kan da ved en lineær substitution, som ikke er éntydig bestemt, bringe ligningssystemet på formen

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \lambda\xi + b\eta \\ \dot{\eta} &= \lambda\eta.\end{aligned}$$

Den sidste ligning har den fuldstændige løsning

$$\left\{ \eta = c_1 e^{\lambda t} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\},$$

og hvis en løsning fra denne mængde indsættes i den første ligning, får vi den lineære differentiaalligning

$$\dot{\xi} - \lambda\xi = bc_1 e^{\lambda t},$$

hvis fuldstændige løsning er givet ved

$$\xi = (bc_1 t + c_2) e^{\lambda t},$$

så den fuldstændige løsning til systemet er givet ved

$$\xi = (bc_1 t + c_2) e^{\lambda t}, \quad \eta = c_1 e^{\lambda t}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Det ses, at bevægelserne også i dette tilfælde begynder i $(0,0)$, for $t = -\infty$, hvis $\lambda > 0$ og ender i $(0,0)$ for $t = \infty$, hvis $\lambda < 0$. For $c_1 = 0$ fås en bevægelse på linien $\eta = 0$. Hvis $b \neq 0$, får vi for alle andre bevægelser, at $\frac{\xi}{\eta} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \pm \infty$. I dette tilfælde får vi altså et knudepunkt med kun 1 tangent.

I undtagelsestilfældet $b = 0$ har ligningssystemet den simple form

$$\dot{\xi} = \lambda \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda \eta,$$

og denne form bevares uændret ved enhver ikke singulær lineærtransformation. Dette tilfælde kan altså kun indtræde, når

$$A = D; B = C = 0.$$

Den fuldstændige løsning er i dette tilfælde givet ved

$$\xi = c_2 e^{\lambda t}, \quad \eta = c_1 e^{\lambda t}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

og det ses, at alle bevægelserne foregår på rette linier gennem $(0,0)$. Vi får altså et knudepunkt i $(0,0)$ og alle rette linier gennem knudepunktet bliver tangenter til løsningskurver. Et knudepunkt med denne egenskab kaldes et stjerneformet knudepunkt.

4.16. Vi samler resultatet af de foregående afsnit vedrørende singularitet i $(0,0)$ for systemet af banekurver for løsninger til differentiaalligningssystemet

$$\dot{x} = Ax + By, \quad \dot{y} = Cx + Dy,$$

hvor vi har sat

$$\Delta = (A-D)^2 + 4BC,$$

og vi når derved til følgende resume:

1). $\Delta > 0$.

α). $AD - BC > 0$. Knudepunkt, 2 tangenter.

β). $AD - BC < 0$. Sadelpunkt.

γ). $AD - BC = 0$. Ingen singularitet.

2). $\Delta < 0$.

α). $A + D \neq 0$. Spiralpunkt.

β). $A + D = 0$. Centralpunkt.

3). $\Delta = 0$.

α). $\neg(A=D \wedge B=C=0)$. Knudepunkt, 1 tangent.

β). $A=D \wedge B=C=0$. Stjerneformet knudepunkt.

4.17. Vi vender nu tilbage til det generelle system

$$(14) \quad \dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y); (x,y) \in \Omega,$$

hvor (x,y) tilfredsstiller en Lipschitz-betingelse i området Ω , således at eksistens- og éntydighedssætningen gælder overalt i Ω . Et differentiaalligningssystem af denne specielle form kaldes autonomt.

Lad (x_0, y_0, t_0) være et sæt udgangsværdier og

$$(15) \quad x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

en dertil svarende løsning, som altså er defineret i et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og tilfredsstiller ligningen i dette interval. Vi vil tænke os, at intervallet I er valgt så stort som muligt, og det vil da være åbent, idet vi for $t_1 \in I$ ved, at der findes én og kun én løsning i et åbent interval omkring t_1 , og den vil da være identisk med (15). Vi vil nu først undersøge det tilfælde, hvor I er opad begrænset.

4.18. Lad T være højre endepunkt af I . Mængden

$$\hat{F} = \{]t, T[\mid t \in I \}$$

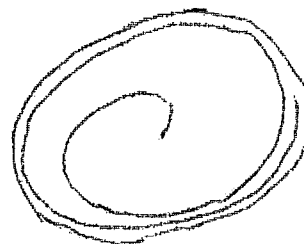
er en filterbasis på I , og ved afbildning (φ, ψ) går den over i en filterbasis $\hat{G}$ på Ω . Vi vil vise følgende påstand:

Filterbasis $\hat{G}$ har intet fortætningspunkt i Ω .

Bevis. For $(a,b) \in \Omega$ kan vi vælge en afsluttet cirkelskive C med centrum i (a,b) og indeholdt i Ω . Ifølge eksistens- og éntydighedssætningen eksisterer der et $h > 0$, således at den ved udgangsværdier (x,y,t) , hvor $(x,y) \in C$, bestemte løsning er defineret i intervallet $[t, t+h]$. Dette viser, at $(\varphi(t), \psi(t))$ for $t \in]T-h, T[$ ikke kan tilhøre C , og (a,b) er derfor ikke kontaktpunkt for billedet ved (φ, ψ) af $]T-h, T[$. Dermed er påstanden bevist.

Anskueligt betyder påstanden, at bevægelsen (φ, ψ) enten

ender i et randpunkt for Ω for $t = T$ eller nærmer sig asymptotisk mod randen eller en del af denne for $t \rightarrow T$. Figuren viser, hvorledes dette kan indtræffe, men der kan selvfølgelig tænkes andre muligheder.



Der gælder selvfølgelig et tilsvarende resultat, hvis I er begrænset nedad. Det fremgår af disse resultater, at det tilfælde, hvor I er begrænset, kun har ringe interesse. Vi vil derfor i det følgende holde os til det tilfælde, hvor I er ubegrænset, f.eks. opad, og vi vil studere forholdene for $t \rightarrow \infty$.

4.19. Vi må nu studere de bevægelser, der begyndte for $t = -\infty$ eller fortsætter til $t = \infty$. Der er selvfølgelig intet i vejen for, at disse bevægelser kan begynde eller ende i randpunkter for Ω eller gå asymptotisk mod en del af randen af Ω . Disse tilfælde vil ikke have særlig stor interesse i vore generelle undersøgelser.

Vore undersøgelser i det lineære tilfælde har vist, at en bevægelse også kan begynde eller ende i et indre punkt af Ω . Som en anden interessant mulighed skal vi nævne, at en bevægelse kan forløbe langs en lukket kurve, og den vil da blive periodisk. Tilbage er så blot det mest spændende tilfælde, hvor bevægelsen "flakker rundt" i Ω uden at konvergere mod et bestemt punkt

og uden at gentage sig selv. Vi skal senere se, at den ikke kan flakke rundt helt uden mål og med.

Lad (x_0, y_0) være et punkt, hvor $P(x_0, y_0) \neq 0$. Der eksisterer et positivt tal k og en kugleomegn U af (x_0, y_0) , således at

$$|P(x, y)| \geq k \text{ for } (x, y) \in U.$$

Hvis en løsning (φ, ψ) til (14) nu var en bevægelse, der for $t \rightarrow \infty$ konvergerede mod (x_0, y_0) , ville der eksistere et $T \in \mathbb{R}$, således at det for alle $t > T_0$ ville gælde, at $(\varphi(t), \psi(t)) \in U$. For $t_1, t_2 > T$ får vi derved anvendelse af middelværdisætningen, at

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = |\varphi'(\tau)| |t_2 - t_1| \geq k |t_2 - t_1|,$$

i modstrid med, at $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$ for $t_1, t_2 > T$ ifølge antagelsen aldrig må overstige det dobbelte af radius for kugleomegnen U .

Vi kan derfor drage følgende konklusion:

Hvis en løsning (φ, ψ) til (14) er en bevægelse, som for $t \rightarrow \infty$ eller for $t \rightarrow -\infty$ konvergerer mod $(x_0, y_0) \in \Omega$, da er $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

De punkter af Ω , der er grænsepunkter for løsninger til (14) er således punkter, for hvilke systemet af banekurver, altså systemet af løsninger til ligningen

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

kan forventes at have singulariteter.

4.20. Vi vil nu på den anden side betragte et punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$, hvor $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Svarende til udgangsværdier (x_0, y_0, t_0) har vi da den trivielle løsning $x = x_0$, $y = y_0$, og da Lipschitzbetingelsen gælder, er dette den eneste løsning. Vi ser således, at ingen bevægelser, som er løsninger til (14), passerer de singulære punkter eller anderledes udtrykt:

Hvis en banekurve for en løsning til (14) går gennem et singulært punkt, kan dette kun være udgangspunkt for løsningen svarende til $t = -\infty$ eller endepunkt svarende til $t = \infty$.

I resten af dette kapitel vil vi beskæftige os med løsningernes forhold i omegnen af et singulært punkt. I det følgende kapitel vil vi studere de løsninger, der "flakker rundt" i og i denne forbindelse tillige diskutere spørgsmålet om eksistens

af periodiske løsninger.

4.21. Vi skal nu bevise en sætning af I. Bendixson (1901) om løsningskuvernes forhold i omegnen af et singulært punkt, som vi for simpeltheds skyld tænker os anbragt i $(0,0)$. Vi vil anvende betegnelsen $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.21.1. Sætning. Lad Ω være et område, som indeholder $(0,0)$. Lad $P, Q: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være funktioner, som har en fremstilling af formen

$$P(x,y) = H(x,y) + \rho^m \delta(x,y), \quad Q(x,y) = K(x,y) + \rho^m \varepsilon(x,y),$$

hvor δ og ε er kontinuerte i Ω , og $\delta(0,0) = 0$, medens m er et naturligt tal, og H og K er homogene polynomier af grad m . Lad M være det homogene polynomium defineret ved

$$M(x,y) = xK(x,y) - yH(x,y).$$

Lad bevægelsen (φ, ψ) være en løsning til differentiaalligningssystemet

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y),$$

og således at $(\varphi(t), \psi(t)) \rightarrow (0,0)$ for $t \rightarrow +\infty$ (eller for $t \rightarrow -\infty$).

Da gælder følgende:

1) Hvis $(0,0)$ er det eneste nulpunkt for M , vil $(\varphi(t), \psi(t))$ nærme sig $(0,0)$ langs en spiral.

2) Hvis M ikke er identisk nul, og $(\varphi(t), \psi(t))$ ikke nærmer sig $(0,0)$ langs en spiral, har banekurven en nullinie for M som tangent.

3) Hvis M antager både positive og negative værdier, vil ingen løsning nærme sig $(0,0)$ langs en spiral.

4) Beviset for Bendixsons sætning er ikke så vanskeligt, som den besværlige formulering antyder. For at undgå for lange afsnit, vil vi dog dele beviset i flere afsnit.

4.22. Vi går over til polære koordinater (ρ, θ) , idet vi

4) Hvis en løsning går mod $(0,0)$, således at den tangenter en nullinie for M , vil ingen anden løsning gå i spiral mod $(0,0)$

sætter $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\rho \geq 0$, hvilket bringer differential-
ligningerne på formen

$$\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta = \rho^m (H(\cos \theta, \sin \theta) + \delta(\delta \cos \theta, \rho \sin \theta))$$

$$\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta = \rho^m (K(\cos \theta, \sin \theta) + \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)).$$

Vi indfører de afkortede betegnelser

$$\Phi(\theta) = H(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + K(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta$$

$$\Psi(\theta) = K(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - H(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta = M(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\Delta(\rho, \theta) = \delta(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta$$

$$E(\rho, \theta) = \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta - \delta(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta,$$

og differentiaalligningssystemet er da ensbetydende med følgende system:

$$(16) \quad \begin{aligned} \rho^{-m} \dot{\rho} &= \Phi(\theta) + \Delta(\rho, \theta) \\ \rho^{-m+1} \dot{\theta} &= \Psi(\theta) + E(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Her vil funktionerne Δ og E for $\rho \rightarrow 0$ konvergere mod 0
ligeligt i θ .

Lad os et øjeblik betragte en løsning (φ, ψ) , som går mod
 $(0,0)$ for $t \rightarrow \infty$. Idet vi sætter $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ og lader ρ
og θ være de polære koordinater for (x,y) , således at θ afhænger
kontinuert af t , har vi sammenhængen

$$(17) \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \frac{K(\cos \theta, \sin \theta) + \varepsilon(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}{H(\cos \theta, \sin \theta) + \delta(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}.$$

Hvis banekurven har en bestemt
tangent i $(0,0)$ (se skitsen), går θ mod
en bestemt grænseværdi θ_0 for $t \rightarrow \infty$, og
tæller og nævner i (17) vil da gå mod $K(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ og
 $H(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$. Da både $\frac{y}{x}$ og $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ går mod tangenthældningen i $(0,0)$,
og $\frac{y}{x} = \tan \theta$, kan vi slutte at

$$K(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \cos \theta_0 - H(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \sin \theta_0 = 0$$

eller



$$M(\cos\Theta_0, \sin\Theta_0) = 0,$$

hvilket viser, at tangenten i $(0,0)$ er en nulllinie for M .

4.23. Vi vil nu betragte det specielle tilfælde, hvor

$$\Psi(\Theta) > 0 \text{ for alle } \Theta.$$

Der eksisterer da et reelt tal $k > 0$, således at

$$\Psi(\Theta) \geq 2k > 0,$$

og da $E(\rho, \Theta) \rightarrow 0$ for $\rho \rightarrow 0$ ligeligt i Θ , kan vi vælge $\rho_0 > 0$, således at

$$|E(\rho, \Theta)| \leq k \text{ for } \rho \leq \rho_0 \text{ og alle } \Theta.$$

Endelig vælger vi T , således at $\rho \leq \rho_0$ for $t \geq T$. For $t \geq T$ får vi da ifølge den sidste af ligningerne (16), at $\rho^{-m+1} \dot{\Theta} \geq k > 0$ for $t \geq T$. Heraf følger, at Θ vokser med t for $t \geq T$ og at $\Theta \rightarrow \infty$ for $t \rightarrow \infty$.

Specialtilfældet, hvor $\Psi(\Theta) < 0$ for alle Θ behandles ganske analogt. Dermed er punkt 1) i sætning 4.21.1 behandlet færdigt.

4.24. Lad os nu antage, at M har p nullinier. Da har ligningen $\Psi(\Theta) = 0$ netop $2p$ løsninger i hvert interval af længde 2π . I hvert af de $2p$ forskellige intervaller mellem på hinanden følgende nulpunkter for Ψ har $|\Psi(x)|$ et fra 0 forskellig maksimum. Lad k betegne det mindste af disse maxima.

Lad Θ_1 og Θ_2 være på hinanden følgende nulpunkter for Ψ , og lads os antage, at $\Psi(\Theta) > 0$ for $\Theta \in]\Theta_1, \Theta_2[$. Lad σ være et positivt tal, således at

$$\kappa(\sigma) = \sup\{|E(\rho, \Theta)| \mid \Theta \in \Lambda, 0 < \rho \leq \sigma\} < k.$$

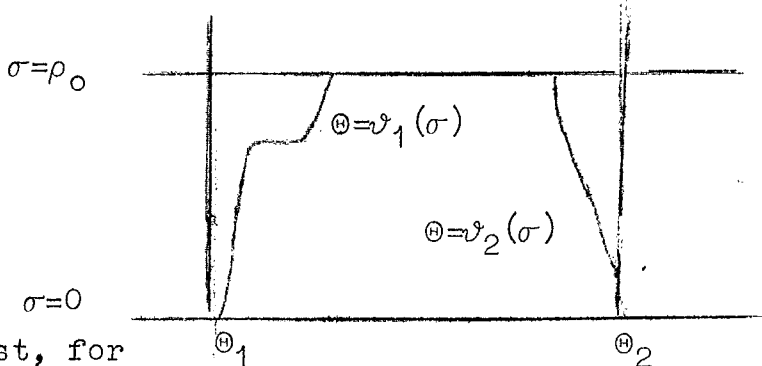
Dette vil være opfyldt for $\sigma \in]0, \rho_0]$, hvor ρ_0 er et passende positivt tal. Mængden

$$\{\Theta \mid \Psi(\Theta) > \kappa(\sigma)\}$$

er foreningsmængde af højst numerabelt mange disjunkte, åbne intervaller, og blandt disse vil vi med $]v_1(\sigma), v_2(\sigma)[$ betegne

det, som indeholder et fast valgt punkt af $]\Theta_1, \Theta_2[$, hvor $\Psi(\Theta)$ antager sin største værdi i dette interval. Funktionen ϑ_1 er voksende og har grænseværdi Θ_1 for $\sigma \rightarrow 0$, medens ϑ_2 er aftagende og har grænseværdi Θ_2 for $\sigma \rightarrow 0$.

Vi har illustreret situationen på skitsen. Når (ρ, Θ) ligger i området mellem $\Theta = \vartheta_1(\sigma)$ og $\Theta = \vartheta_2(\sigma)$, eller mere præcist, for



$$0 < \rho \leq \rho_0, \vartheta_1(\rho) < \Theta < \vartheta_2(\rho)$$

er ifølge den sidste af ligningerne (16) altid $\dot{\Theta} > 0$, hvilket betyder, at punktet (ρ, Θ) på skitsen vil bevæge sig mod højre, når punktet med polære koordinater (ρ, Θ) følger banekurven for en løsning. Ifølge bemærkningen sidst i 4.22 vil (ρ, Θ) ikke kunne nå Θ -aksen tidligere end i Θ_2 .

På den næste skitse har vi tegnet et længere stykke af Θ -aksen med flere på hinanden følgende nulpunkter for Ψ . Om hver af nullinierne har vi skraveret det kileformede område, hvor



vi ikke kan sige noget om fortegnet for $\dot{\Theta}$. I resten af strimlerne mellem nullinierne for $\rho \leq \rho_0$ har $\dot{\Theta}$ bestemt fortegn, f.eks. som antydnet på figuren. For en løsning, der for $t \rightarrow \infty$ konvergerer mod $(0,0)$ vil (ρ, Θ) fra et vist tidspunkt at regne forblive i strimlen $\rho < \rho_0$. Hvis (ρ, Θ) på et vist tidspunkt er i det første af figurens felter, må (ρ, Θ) bevæge sig mod højre,

og dette kan kun ende med, at (ρ, Θ) for $t \rightarrow \infty$ går mod $(0, \Theta_2)$ eller ved, at (ρ, Θ) for en endelig ^{verdi} af t passerer ind i det skraverede område. Derefter har punktet stadig chance for at konvergere mod $(0, \Theta_2)$, men det kan også tænkes, at det slipper ud i positivitetsområdet mellem Θ_2 og Θ_3 . Hvis dette sker må punktet fortsætte tværs over dette område og konvergere mod $(0, \Theta_3)$ eller vandre ind i det næste skraverede område. Denne gang er situationen imidlertid anderledes end før, idet det bevægelige punkt nu er "fanget" i det skraverede område. Hvis det smutter ud over randen, tvinges det til at bevæge sig tilbage mod det skraverede område igen, og (ρ, Θ) må derfor i dette tilfælde ^{gå} mod $(0, \Theta_3)$.

Det fremgår af denne udredning, at fortegnsskift for M medfører, at alle løsninger, der konvergerer mod $(0, 0)$, har en bestemt tangent i dette punkt, og at denne tangent er en nullinie for M .

Hvis M har nullinier men ingen fortegnsskift, kan en løsning gå i spiral mod $(0, 0)$. Hvis Lipschitz-betingelsen er opfyldt, kan løsningskurver ikke mødes, og vi kan da se, at hvis en løsning går mod $(0, 0)$ og har en tangent i $(0, 0)$, kan andre løsninger ikke gå i spiral mod $(0, 0)$.

Hermed er bevist for Bendixsons sætning færdigt.

4.25. Vi kan nu kombinere Bendixsons sætning med den detaljerede diskussion, vi har gennemført for $m = 1$, men vi får ikke helt umiddelbart et fuldstændigt svar, da Bendixsons sætning kun udtaler sig om løsninger, der starter i eller går mod det singulære punkt. Det er derfor nødvendigt i hvert enkelt tilfælde at overveje, om alle løsninger eller visse løsninger virkelig begynder eller ender i det singulære punkt.

Da vi kun skal undersøge om løsningerne konvergerer mod det singulære punkt eller ikke, kan vi alle tilfælde udnytte de samme lineære transformationer som ved studiet af de specielle ligninger. Vi vil derfor umiddelbart starte undersøgelsen i (ξ, η) -planen eller (X, Y) -planen, uden at dette bliver uddybet nærmere. Vi vil sædvanligvis indføre polære koordinater, men det må ikke glemmes, at dette polære koordinatsystem indføres i dens transformerede plan, og at de fundne løsninger må underkastes en lineær transformation for at blive ført over i de virkelige løsninger.

4.26. Vi vil altså nu gå over til at undersøge et lignings-system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By + \rho\delta(x, y) \\ \dot{y} &= Cx + Dy + \rho\varepsilon(x, y),\end{aligned}$$

og vi sætter som før

$$\Delta = (A+D)^2 - 4(AD-BC) = (A-D)^2 + 4BC,$$

for efterhånden at diskutere mulighederne $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ og $\Delta = 0$.

4.27. Vi betragter først tilfældet

$$\Delta > 0, AD-BC > 0.$$

Det transformerede ligningssystem har da formen

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \lambda\xi + \rho\delta(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} &= \mu\eta + \rho\varepsilon(\xi, \eta),\end{aligned}$$

hvor $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, og hvor δ og ε ikke er de samme funktioner, som ovenfor, men de er stadig kontinuerte og 0 i $(0, 0)$. Idet λ og μ har samme fortegn, og vi eventuelt kan lade ξ og η bytte rolle, kan vi antage, at

$$0 < \lambda < \mu.$$

Når vi indfører polære koordinater, går ligningerne over i

$$\rho^{-1}\dot{\rho} = \lambda + (\mu - \lambda)\sin^2\theta + E_1(\rho, \theta)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{2}(\mu - \lambda)\sin 2\Theta + E_2(\rho, \Theta),$$

hvor E_1 og E_2 går mod 0 ligeligt i Θ for $\rho \rightarrow 0$. Af den første ligning følger, at der eksisterer positive tal ρ_0 og k , således at

$$\rho^{-1}\dot{\rho} \geq k \text{ for } \rho < \rho_0.$$

For $\rho < \rho_0$ gælder derfor

$$\frac{d}{dt} \log \rho = \rho^{-1}\dot{\rho} \geq k.$$

Hvis det for $t = t_0$ gælder, at $\rho < \rho_0$, vil ρ aftage, når t aftager, og uligheden viser, at vi for $t < t_0$ har

$$\log \rho \leq \log \rho_0 - k(t_0 - t),$$

og heraf fremgår, at $\rho \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$. For $0 > \lambda > \mu$ giver et lignende ræsonnement, at $\rho \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Vi ser således, at enhver bevægelse, der kommer indenfor kuglen med radius ρ_0 om det singulære punkt vil konvergere mod dette punkt. Derefter giver Bendixsons sætning, at vi i dette tilfælde har et knudepunkt med $\xi = 0$ og $\eta = 0$ som tangentretninger. Det må dog tilføjes, at vi ^{ikke} har fået oplysninger om antallet af løsningskurver svarende til hver af de 2 tangentretninger, ligesom vi heller ikke har bevist, at hver akse virkelig bliver tangent til mindst én løsningskurve. Det gælder i dette tilfælde ligesom i de tilfælde, vi vil omtale i de følgende afsnit, at vi kan opnå et positivt udsagn om eksistens af netop én integralkurve med den ene tangentretning, medens alle de andre har den anden tangentretning, hvis vi indfører lidt skarpere antagelser vedrørende restleddene δ og ε . Vi vil dog ikke gå ind på denne side af sagen.

4.28. Vi går nu over til tilfældet

$$\Delta > 0, AD - BC < 0$$

svarende til det transformerende ligningssystem

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + \rho \delta(\xi, \eta)$$

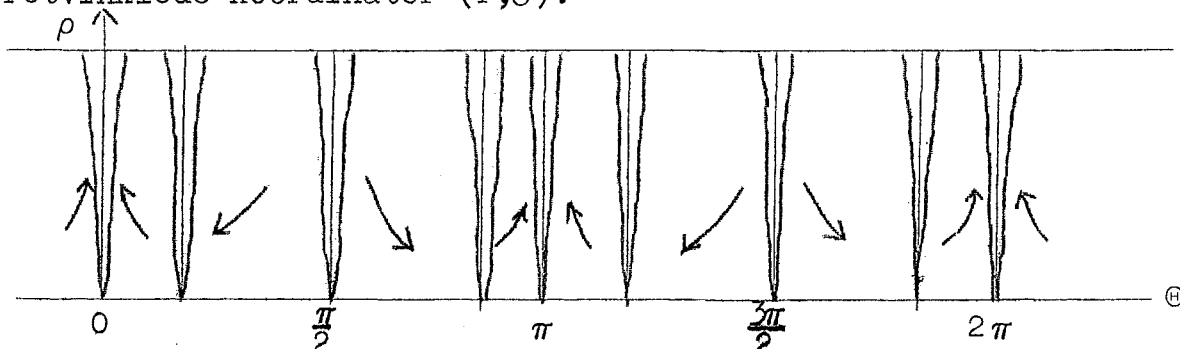
$$\dot{\eta} = \mu \eta + \rho \varepsilon(\xi, \eta),$$

hvor $\lambda > 0$, $\mu > 0$, medens δ og ε tilfredsstiller de samme betingelser som i foregående afsnit. I polære koordinater får vi

$$\rho^{-1} \dot{\rho} = \lambda \cos^2 \Theta - \mu \sin^2 \Theta + E_1(\rho, \Theta)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \sin 2\Theta + E_2(\rho, \Theta).$$

Størrelsen $\lambda \cos^2 \Theta - \mu \sin^2 \Theta$ bliver 0 for $\tan^2 \Theta = \frac{\lambda}{\mu}$, har altså et nulpunkt i hver kvadrant. Vi kan derfor i (r, Θ) -planen omgive hver af de ved $\tan^2 \Theta = \frac{\lambda}{\mu}$ bestemte halvlinier med et kileformet område, og udenfor disse områder bestemmer fortegnet for $\lambda \cos^2 \Theta - \mu \sin^2 \Theta$ om ρ vokser eller aftager. Dette sammenholdes med den fortegnsgenstand for $\dot{\Theta}$, som vi gennemførte i forbindelse med beviset for Bendixsons sætning. Derved får vi den på figuren antydede oversigt over bevægelsesretningen for punktet med de retvinklede koordinater (r, Θ) .

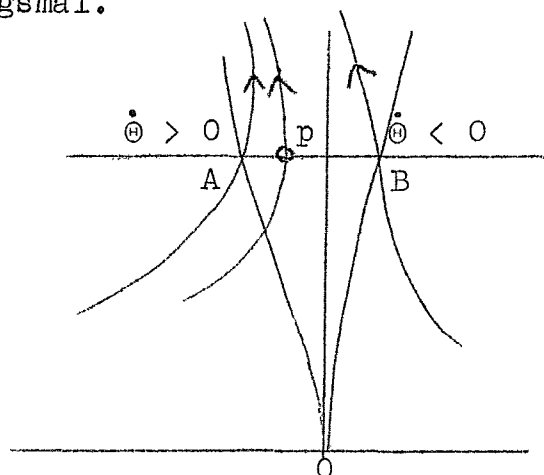


Figuren skal forstås på den måde, at pilen i hvert vinkelrum angiver om såvel r som Θ vokser eller aftager. Vi ved fra Bendixsons sætning, at $\rho \rightarrow 0$ kun kan indtræffe, hvis Θ samtidig går mod et multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Altså vil ingen bevægelse, der overhovedet kommer udenfor de kileformede områder, kunne konvergere mod $(0,0)$ for $t \rightarrow -\infty$ eller for $t \rightarrow \infty$.

Vi ser, at forholdene virkelig i det store og hele er som i et sadelpunkt bortset fra at vi ikke har fået oplysninger om eksistensen af løsninger, der passerer gennem $(0,0)$. Vi vil et

øjeblik opholde os ved dette spørgsmål.

På figuren har vi skitseret det kileformede område, der svarer til $\dot{\Theta} = 0$. En linie parallel med $\dot{\Theta}$ -aksen skærer randene i A og B. Gennem A og B passerer de fuldt optrukne banekurver for løsninger



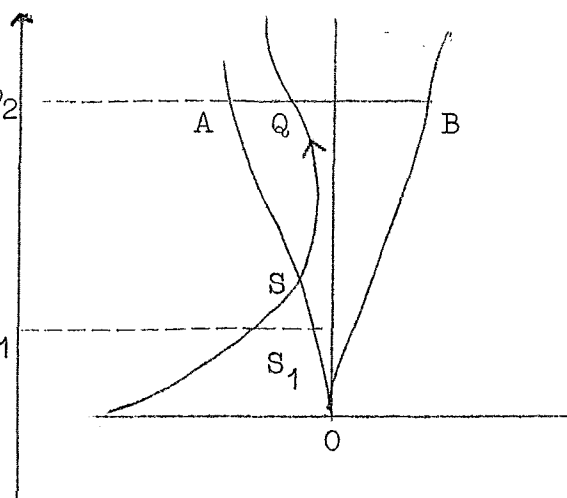
til differentialligningen. Læg mærke til, at en løsning, der har bevæget sig ind i det kileformede område må blive der, indtil den overskrider områdets begrænsning opad til.

Til venstre for A er $\dot{\Theta} > 0$ og til højre for B er $\dot{\Theta} < 0$. Mellem A og B findes derfor et punkt P, hvor $\dot{\Theta} = 0$. En løsning gennem P bevæger sig lodret opad ved passagen af P og må efter passagen af P forblive i mellemrummet mellem integralkurverne gennem A og B.

På liniestykket AB betragter vi to punktmængder M_1 og M_2 , således at et punkt $Q_1 \in AB$ regnes til M_1 , hvis og kun hvis integralkurven gennem Q_1 skærer den venstre rand af det kileformede område, medens $Q_2 \in AB$ regnes til M_2 , hvis og kun hvis integralkurven gennem Q_2 skærer den højre rand af det kileformede område. Da integralkurverne ikke kan skære hinanden, kræver dette, at Q_1 ligger til venstre for Q_2 .

Der eksisterer derfor på AB et punkt Q , som skiller M_1 og M_2 .

Hvis integralkurven gennem Q som antydnet på den næste figur skærer venstre rand af det kileformede område i et punkt S, vil integralkurven, der skærer det



kileformede områdes venstre rand i et punkt S_1 nedenfor S ikke kunne skære AB i et punkt af M_1 . Integralkurverne kan nemlig fremstilles på formen $\Theta = \vartheta_1(\rho)$ (gennem S) og $\Theta = \vartheta_2(\rho)$ (gennem S_1), og funktionen $\vartheta_2(\rho) - \vartheta_1(\rho)$ ville under de anførte betingelser være positiv i ρ_1 og negativ i ρ_2 , og da den er kontinuert i $[\rho_1, \rho_2]$, medfører dette, at den antager værdien 0 i modstrid med, at integralkurver ikke skærer hinanden. Antagelsen om, at integralkurven gennem Q skærer venstre rand af det kileformede område fører således til en modstrid. Det vil gå på samme måde, hvis integralkurven gennem Q skærer højre rand af det kileformede område. Altså vil integralkurven gennem Q udgå fra $(0,0)$.

Banekurverne i (ρ, Θ) -planen er bestemt ved differentialligningen

$$\rho \frac{d\Theta}{d\rho} = \frac{-\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \sin 2\Theta + E_2(\rho, \Theta)}{\lambda \cos^2 \Theta - \mu \sin^2 \Theta + E_1(\rho, \Theta)}$$

Her er

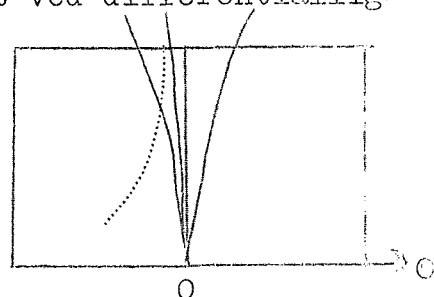
$$E_1(\rho, \Theta) = \delta(\rho \cos \Theta, \rho \sin \Theta) \cos \Theta + \varepsilon(\rho \cos \Theta, \rho \sin \Theta) \sin \Theta$$

$$E_2(\rho, \Theta) = \varepsilon(\rho \cos \Theta, \rho \sin \Theta) \cos \Theta - \delta(\rho \cos \Theta, \rho \sin \Theta) \sin \Theta,$$

og hvis vi til de betingelser vi hidtil har krævet opfyldt, føjer den antagelse, at funktionerne δ og ε har begrænsede partielle differentialkvotienter med hensyn til ξ og η , ser vi, at de partielle differentialkvotienter af E_1 og E_2 med hensyn til Θ går mod 0 ligeligt i Θ for $\rho \rightarrow 0$. Dette medfører, at fortegnet for den partielle differentialkvotient med hensyn til Θ i omegnen af $(0,0)$ bliver bestemt ved fortegnet af $\frac{\partial}{\partial \Theta}(-\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \sin 2\Theta)$.

Vi kan derfor som antydnet på skitsen lægge et rektangel

$|\Theta| < \alpha$, $0 < \rho < \beta$ indenfor hvilket $\rho \frac{d\Theta}{d\rho}$ for fast ρ er en strengt aftagende funktion af Θ . Lad nu $\Theta = \varphi(\rho)$ være en løsningskurve



gennem $(0,0)$. En løsningskurve, der ^{er givet ved} $\sqrt{\Theta} = \varphi_1(\rho)$ med $\varphi_1(\beta) < \varphi(\beta)$ vil forløbe helt til venstre for $\Theta = \varphi(\rho)$, og $\varphi - \varphi_1$ vil da have negativ differentialkvotient. Funktionen $\varphi - \varphi_1$ er således strengt aftagende, og for $\rho \rightarrow 0$ vil $\Theta = \varphi_1(\rho)$ derfor fjerne sig mere og mere fra $\Theta = \varphi(\rho)$. Derfor vil $\Theta = \varphi_1(\rho)$, når ρ er aftaget med under en vis værdi, bevæge sig ud af det kileformede område, og $\Theta = \varphi_1(\rho)$ kan således ikke passere $(0,0)$. Dermed har vi bevist, at kun 1 løsningskurve udgår fra $(0,0)$.

Vi understreger, at det sidste resultat er baseret på en stærkere antagelse om restleddene δ og ε . Vi har ikke gjort noget forsøg på at klare sagen med den svagest mulige antagelse.

4.29. Vi går nu over til tilfældet

$$\Delta < 0, \quad A + D \neq 0$$

svarende til det transformerede ligningssystem

$$\dot{\xi} = \mu\xi - \nu\eta + \rho\delta(\xi, \eta)$$

$$\dot{\eta} = \nu\xi + \mu\eta + \rho\varepsilon(\xi, \eta),$$

hvor vi har brugt samme betegnelser som i de to foregående tilfælde, hvilket ikke er i overensstemmelse med vore betegnelser ved behandlingen af det lineære tilfælde. I polære koordinater får vi ligningen af formen

$$\rho^{-1}\dot{\rho} = \mu + E_1(\rho, \Theta)$$

$$\dot{\Theta} = \nu + E_2(\rho, \Theta),$$

hvor $E_1(\rho, \Theta)$ og $E_2(\rho, \Theta)$ går mod 0 ligeligt i Θ for $\rho \rightarrow 0$. Der findes således for $\mu \neq 0$ et ρ_0 , således at $\rho^{-1}\dot{\rho}$ har samme fortegn som μ og numerisk overstiger $\frac{1}{2}|\mu|$ for $\rho < \rho_0$. Dette medfører, at $\rho \rightarrow 0$ for $t \rightarrow -\infty$ eller for $t \rightarrow \infty$, og det følger derefter af Bendixson's sætning, at $(0,0)$ i dette tilfælde er et spiralpunkt:

For $\Delta < 0$, $A + D = 0$ får vi $\mu = 0$, og det fremgår af op-

gaverne 2-4, at det ikke i dette tilfælde umiddelbart kan afgøres, om $(0,0)$ er centralpunkt eller spiralpunkt eller endog en mærkelig mellemting således som det indtræffer i opgave 4.

4.30. Vi har set, at den diskussion af singulariteterne, som vi gennemførte i det lineære tilfælde, har almindelig gyldighed i alle de tilfælde, der er afgrænsede ved skarpe uligheder. I de udartede tilfælde, som kun indtræder, når en ligning er tilfredsstillet, befinder den lineære ligning sig i et grænsetilfælde, og restleddet kan da få ligningen til at falde indenfor et af de tilstødende områder.

Det udartede tilfælde, hvor determinanten $AD-BC$ bliver 0, giver anledning til særlige komplikationer, som vi ikke skal gå nærmere ind på.

En kurvefamilie, der er givet ved

$$f(x,y) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

er familie af banekurver for løsninger til systemet

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y),$$

hvor

$$P(x,y) = -D_y f(x,y); \quad Q(x,y) = D_x f(x,y).$$

Heraf følger, at vi, såfremt P og Q er kontinuert differentiable, har relationen

$$D_x P + D_y Q = 0,$$

hvoraf fremgår, at $A+D$ i dette tilfælde forsvinder identisk. Nu har systemet $f(x,y) = c$ jo åbenbart centralpunkter, hvor f har relative maxima eller minima, og centralpunkter vil derfor normalt optræde for kurvesystemer af denne specielleslags, men det stemmer jo netop med, at betingelsen $A+D = 0$ er opfyldt identisk.

1. Gennemfør en diskussion af forholdene i omegnen af det singulære punkt i faseplanen for hver af de to differentielle ligninger

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + h^2x = 0, \quad \ddot{x} + 2kx - h^2x = 0,$$

hvor h og k er konstante.

2. Bestem banekurverne for løsningerne til systemet

$$\dot{x} = y + 2y^3, \quad \dot{y} = -x - 2x^3.$$

Undersøg arten af det singulære punkt i $(0,0)$, og se efter, om denne helt eller delvis kunne forudsiges ud fra den almindelige teori.

3. Samme spørgsmål for ligningssystemet

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2).$$

(Her vil polære koordinater være bekvemme).

4. Angiv det fuldstændige system af banekurver for løsninger til systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= -x - y\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

(regn i polære koordinater). Skitser systemet af banekurver på en figur. Nu glemte De vel ikke de cirkulære banekurver?

5. Bestem banekurverne for løsningerne til systemet

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = -2xy.$$

Det går lettest ved at opstille banekurvernes differential-ligning som en differentialform (der bliver et totalt differential) sat lig med nul. Diskuter arten af singulariteten i $(0,0)$.

6. Samme opgave for

$$\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy,$$

men denne gang går det nok lettere med polære koordinater.

7. Bestem alle de singulære punkter for differentiaalligningssystemet

$$\dot{x} = -x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2; \quad \dot{y} = -2xy,$$

og forsøg om arten af disse singulariteter kan bestemmes uden at løse ligningen. Løs derefter ligningen (når højresiderne multipliceres med $(x^2 + y^2)^{-2}$, bliver differentialformen et totalt differential. Systemet løses også ret let i polære koordinater).

8. Hvilken ændring sker der med løsningerne (bevægelserne) til differentiaalligningssystemet

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x,$$

når begge højre sider multipliceres med x , og når de multipliceres med x^2 ?

9. Samme spørgsmål for differentiaalligningssystemet

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y.$$

10. Konstruer et differentiaalligningssystem, hvis eneste singularitet er et centralpunkt i $(0,0)$, og hvis løsninger som banekurver har kurverne $x^4 + y^4 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$.
11. Konstruer et differentiaalligningssystem, hvis løsninger som banekurver har Cassinis ovaler med brændpunkter 1 og -1 (disse kurver er defineret ved, at hver oval består af netop de punkter i planen, hvis afstande fra brændpunkterne har et givet produkt). Gør rede for singulariteternes art både ved at studere banekurverne og ved at studere differentiaalligningssystemet.
12. En kugle med radius $\frac{1}{2}$ stilles på den komplekse plan, som den tangerer i punktet $z = 0$. Punkterne i planen projiceres over på kuglen fra dennes øverste punkt (stereografisk projektion). Kuglen drejes $\frac{1}{4}$ omgang om den diameter, der er parallel med den imaginære akse, således at det punkt, der

før lå i $z = 0$, kommer til at ligge lodret over $z = \frac{1}{2}$. Derefter projiceres kuglens punkter tilbage i den komplekse plan fra kuglens øverste punkt.

Vis, at punktet z i den komplekse plan ved de tre på hinanden følgende afbildninger går over i punktet

$$w = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Systemet af banekurver for løsninger til differential-ligningssystemet

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y$$

overføres ved afbildningen φ i et nyt kurvesystem. Bestem et differentiaalligningssystem, hvis løsninger har det nye kurvesystem som banekurver og diskuter det nye ligningssystems singulariteter.

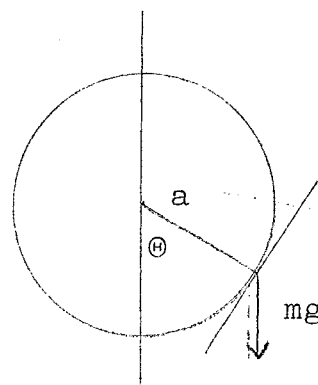
13. En tung partikel med masse m , som bevæger sig på en fast, glat cirkel i en lodret plan, har acceleration med komponenten $ma\ddot{\theta}$ i tangentens retning og $ma\dot{\theta}^2$ rettet ind mod centrum. Hvis vi udtrykker, at accelerationens komponent i tangentretningen er lig med tyngdekraftens komponent i samme retning, får vi bevægelsens differentiaalligning

$$ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Idet vi sætter $a^{-1}g = h^2$ og skriver x i stedet for θ , når vi således til ligningen

$$\ddot{x} = -h^2 \sin x,$$

som på "lineariseret" form bliver $\ddot{x} = -h^2 x$. Diskuter singulariteterne i faseplanen for disse differentiaalligninger, og



bestem tillige banekurverne. Bestemmelsen af selve bevægelsen i faseplanen og dermed af partiklens bevægelse på cirklen fører til et elliptisk integral, som ikke kan udregnes elementært.

14. Hvilken ændring sker der i opgave 13, hvis partiklen tillige påvirkes af en luftmodstand proportional med hastigheden, således at differentialligningen bliver

$$\ddot{x} = -2k \dot{x} - h^2 \sin x,$$

hvor k er en positiv konstant.

15. Prøv på grundlag af bevægelsesretningen forskellige steder i planen at lave en oversigt over banekurverne for løsninger til systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + xy^2(\sqrt{x^2+y^2})^{-1} \\ \dot{y} &= y - x^2y(\sqrt{x^2+y^2})^{-1}.\end{aligned}$$

Rettelsesblad til T.4.

4.18. Den i formlen linie 6 f.n. optrædende mængde skal være

$$\{E(\rho, \Theta) \mid \Theta \in]\Theta_1, \Theta_2[\wedge 0 < \rho \leq \sigma\},$$

4.22. I linie 13 f.n. er et "ikke" faldet ud. Det skal indføjles mellem "har" og "fået".

4.25. Slutningen af afsnit 4.28. regnet fra liniebruddet midt på side 4.25. kan overspringes.

Relaxationssvingninger.

5.1. De i følgende kapitel omtalte differentialligninger optræder i anvendelserne, hvor de især benyttes til forklaring af mekaniske og elektriske svingninger, således som det f.eks. er antydnet i opgave 4.13 og 4.14. I praksis hindrer de modstandskræfter, som altid vil være til stede, at situationen i 4.13 indtræder, altså at der kan optræde svingninger med vilkårlig, fast svingningsamplitude (indenfor rimelige grænser) omkring en singularitet, som altså er et centralpunkt. Når der, som i 4.14 optræder modstandskræfter, ændres centralpunktet ved små modstandskræfter sædvanligvis til et spiralpunkt med indadgående bevægelsesretning, men ved større modstand til et knudepunkt. Bevægelsen om et spiralpunkt er den velkendte dæmpede svingning.

En svingning kan holdes i gang af en anden svingning, og i det tilfælde taler man om en tvungen svingning. Dette indebærer, at systemet modtager en påvirkning, som er en periodisk funktion af t , og ligningssystemet kan da ikke være autonomt. Problemet har meget betydelig interesse, men vi vil i første omgang holde os til autonome systemer.

Vi skal altså interessere os for systemer, som udefra modtager en påvirkning, som blot afhænger af systemets egen tilstand. Denne påvirkning skal tilføre systemet energi, således at der opstår svingninger. Det er let at angive eksempler på systemer, der udfører svingninger under konstant påvirkning udefra. Et standur holdes i gang af tyngdekraften, altså af en meget konstant påvirkning. Tilsvarende holdes et elektrisk ringeapparat i gang af en konstant elektromotorisk kraft.

Selv om systemets påvirkning udefra er konstant, gælder det samme ikke om energitilførslen til systemet. Således regulerer

Relaxationssvingninger.

5.1. De i følgende kapitel omtalte differentiaalligninger optræder i anvendelserne, hvor de især benyttes til forklaring af mekaniske og elektriske svingninger, således som det f.eks. er antydnet i opgave 4.13 og 4.14. I praksis hindrer de modstandskræfter, som altid vil være til stede, at situationen i 4.13 indtræder, altså at der kan optræde svingninger med vilkårlig, fast svingningsamplitude (indenfor rimelige grænser) omkring en singularitet, som altså er et centralpunkt. Når der, som i 4.14 optræder modstandskræfter, ændres centralpunktet ved små modstandskræfter sædvanligvis til et spiralpunkt med indadgående bevægelsesretning, men ved større modstand til et knudepunkt. Bevægelsen om et spiralpunkt er den velkendte dæmpede svingning.

En svingning kan holdes i gang af en anden svingning, og i det tilfælde taler man om en tvungen svingning. Dette indebærer, at systemet modtager en påvirkning, som er en periodisk funktion af t , og ligningssystemet kan da ikke være autonomt. Problemet har meget betydelig interesse, men vi vil i første omgang holde os til autonome systemer.

Vi skal altså interessere os for systemer, som udefra modtager en påvirkning, som blot afhænger af systemets egen tilstand. Denne påvirkning skal tilføre systemet energi, således at der opstår svingninger. Det er let at angive eksempler på systemer, der udfører svingninger under konstant påvirkning udefra. Et standur holdes i gang af tyngdekraften, altså af en meget konstant påvirkning. Tilsvarende holdes et elektrisk ringeapparat i gang af en konstant elektromotorisk kraft.

Selv om systemets påvirkning udefra er konstant, gælder det samme ikke om energitilførslen til systemet. Således regulerer

ringeapparatet selv energitilførslen, som det modtager i små doser, og noget lignende gælder for standuret, hvis hjul bevæger sig i små ryk.

Det er iøjnefaldende, at svingninger af den her omtalte slags er væsentlig forskellige fra svingningerne omkring et centralpunkt, først og fremmest derved at svingningerne er bundet til at foregå med en ganske bestemt amplitude. Der er tale om en bevægelse, der meget hurtigt konvergerer mod en periodisk bevægelse, og denne periodiske bevægelse er uafhængig af begyndelsesbetingelserne bortset fra den forskydning i tiden t , der altid er mulig.

Betegnelsen relaxationssvingning anvendes netop om disse specielle svingninger, som visse af et autonomt systems løsninger konvergerer asymptotisk mod.

5.2. Vi skal i det følgende forsøge at opstille kriterier, der udtaler sig om eksistens eller ikke-eksistens af periodiske løsninger til autonome systemer. Det vil sædvanligvis dreje sig om relaxationssvinger.

Vi står her overfor et problem, der er væsentlig vanskeligere end det i kapitel 5 behandlede. Problemet vedrørende eksistens af periodiske løsninger kræver nemlig et studium af løsningskurvernes forløb indenfor et område, der ikke kan være vilkårlig lille. Det er således et globalt problem i modsætning til de ovenfor behandlede lokale problemer.

Ved behandlingen af det globale problem vil metoder fra den videregående teori kunne være til stor nytte. Det drejer sig om visse resultater vedrørende lukkede kurver i almindelighed samt om sådanne kurvers komplementærmængde. I denne sammenhæng vil begrebet omløbstal være til stor nytte. Ved siden af selve studiet

af kurverne skal vi også bringe disse i forbindelse med det ved differentialligningssystemet definerede retningsfelt.

5.3. Ved studiet af den ved

$$(1) \quad x = \phi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$$

definerede kurve, sætter vi $z = x+iy$ og $\gamma(t) = \phi(t)+i\psi(t)$, således at kurven bliver givet ved

$$(1') \quad z = \gamma(t), t \in [a, b].$$

Billedet

$$\Gamma = \gamma([a, b])$$

er kompakt og sammenhængende, og komplementærmængden $\mathcal{C}\Gamma$ er derfor åben. For $\zeta \in \mathcal{C}\Gamma$ kan vi bestemme en kontinuert funktion $\arg_{\zeta}\gamma$, således at $\arg_{\zeta}\gamma(t)$ for hver værdi af t er en argumentværdi for $\gamma(t)-\zeta$. Vi skriver for nemheds skyld $\arg_{\zeta}\gamma(t) = \arg(\gamma(t)-\zeta)$. Differensen $\arg(\gamma(b)-\zeta) - \arg(\gamma(a)-\zeta)$ er uafhængig af valget af $\arg_{\zeta}$ og kaldes argumentvariationen langs kurven (1) (eller (1')). Argumentvariationen langs (1) er en kontinuert funktion af ζ for $\zeta \in \mathcal{C}\Gamma$. Hvis

$$z = \gamma(u, t), t \in [a, b], u \in [c, d]$$

er en kontinuert familie af kurver, og ζ ikke tilhører billedet af $[a, b] \times [c, d]$ ved γ , får vi for hvert fast u en argumentvariation langs den tilsvarende kurve, og denne argumentvariation vil være en kontinuert funktion af u .

Hvis kurverne specielt er lukkede, altså $\gamma(a) = \gamma(b)$, henholdsvis $\gamma(u, a) = \gamma(u, b)$ for hvert $u \in [c, d]$ bliver alle argumentvariationerne heltallige multipler af 2π og argumentvariationen divideret med 2π kaldes da kurvens omløbstal omkring ζ og betegnes $I(\gamma, \zeta)$. Det bliver uafhængigt af u , og som funktion af ζ bliver det konstant i hver komponent i den åbne komplementærmængde til banekurven, henholdsvis til foreningsmængden af fa-

miliens banekurver.

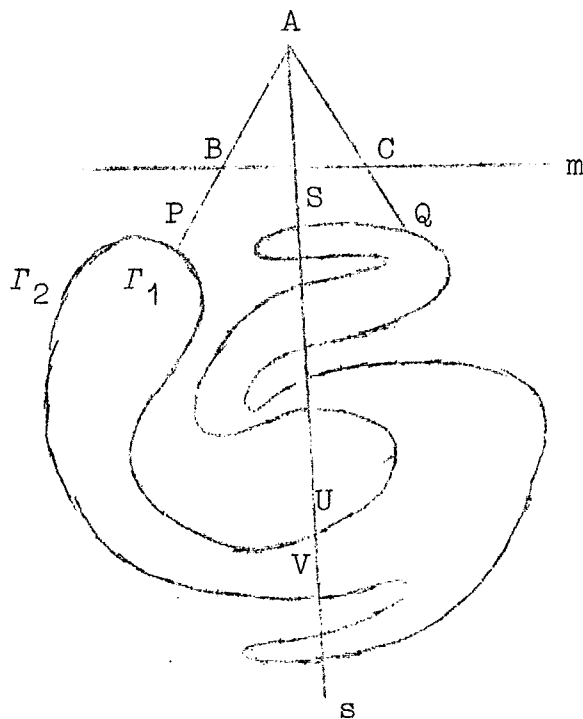
Vi henviser iøvrigt til omtalen af begrebet omløbstal i kursus i matematik 2 (Cartan II,1,8).

5.4. Vi vil nu udnytte begrebet omløbstal til et bevis for "den lette halvdel" af Jordan's kurvesætning.

5.4.1. Sætning. Lad Γ være en simpel lukket banekurve i planen $\mathbb{R}^2$. Komplementærmængden $C\Gamma$ har mindst 2 komponenter, nemlig en ubegrænset komponent, om hvis punkter den bevægelse, der definerer Γ , har omløbstal 0, samt én begrænset komponent, om hvis punkter det tilsvarende omløbstal er 1 eller -1.

Bevis. Vi tænker os kurven givet på kompleks form ved parameterfremstillingen $(1')$, og da kurven er simpel og lukket, har vi altså, at $\gamma(a) = \gamma(b)$, men bortset fra dette specielle tilfælde vil $t_1 \neq t_2$ medføre $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Vi minder om, at parameterfremstillingen kan ændres, således at endepunktet $\gamma(a) = \gamma(b)$ bliver et vilkårligt forelagt punkt på kurven, og at en sådan ændring ikke vil forandre omløbstallet om noget punkt.

Da Γ er kompakt, er Γ begrænset, og vi kan derfor vælge en ret linie m , således at Γ helt tilhører en af de ved m bestemte åbne halvplaner. I den anden åbne halvplan vælges et punkt A . Det er nu klart, at omløbstallet om A er 0, og at A ligger i en ubegrænset komponent. Vi skal således blot vise, at der eksisterer et punkt, om hvilket kurven har omløbs-



tal 1 eller -1 . Vi bemærker først, at banekurven ikke kan være indeholdt i en ret linie, da hvert punkt kun må passeres 1 gang af bevægelsen $\gamma(t)$. Vi kan derfor gennem A lægge to halvlinier, som skærer kurven. Da kurven Γ er en afsluttet punktmængde, kan vi på hver af de to halvlinier vælge det skæringspunkt med kurven, som ligger nærmest ved A. På den måde får vi liniestykkerne AP og AQ, hvor P og Q er kurvepunkter, medens liniestykkerne iøvrigt ikke skærer Γ . Da P og Q begge er skilt fra A ved m , vil AP skære m i et punkt B og AQ vil skære m i et punkt C.

Randen af trekant ABC er en simpel lukket kurve, idet vi let kan vælge en passende bevægelse langs trekantens rand. Vi kan tænke os AP og AQ valgt således, at denne bevægelse får omløbstal 1 om punkter i trekantens indre, når vinkelspidserne passerer i alfabetisk orden.

Jordankurven Γ bestemmer to veje Γ_1 og Γ_2 fra P til Q. Vi vil senere fastlægge, hvilken af de to veje vi vil give betegnelsen Γ_1 . Kurven Γ fås ved at addere (d.v.s. sætte i forlængelse af hinanden) de to veje, dog én af dem med modsat gennemløbsretning, altså $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ eller $\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$.

Vi indfører endnu to Jordankurver, nemlig

- 1) Kurven J_1 bestående af AP, Γ_1 , QA i den nævnte rækkefølge.
- 2) Kurven J_2 bestående af AP, Γ_2 , QA i den nævnte rækkefølge.

Kurven J_1 kan opfattes som sammensat af CA, AB, BC, CB, BP, Γ_1 , QC, og den giver derfor omløbstal 1 om et punkt i det indre af trekanten ABC. Det samme gælder om J_2 . Vi betragter nu en halvlinie s , som udgår fra A og skærer gennem trekanten. Kurverne J_1 og J_2 har omløbstal 1 om punkter af s tæt ved A, men om-

løbstal 0 om tilstrækkelig fjerne punkter af s . Heraf følger, at s skærer både J_1 og J_2 , altså åbenbart både Γ_1 og Γ_2 . Vi tænker os betegnelserne valgt, således at det skæringspunkt S mellem Γ og s , som ligger nærmest A , er et punkt af Γ_1 . Lad U være det skæringspunkt mellem Γ_1 og s , som ligger fjernest fra A . Den delbue af Γ_1 , som har endepunkter S og U , skærer ikke J_2 . Altså tilhører S og U samme komponent af $\mathbb{C}J_2$, og vi kan derfor slutte, at J_2 har omløbstallet 1 om U . Heraf følger, at $s \setminus AU$ har punkter fælles med J_2 , altså med Γ_2 . Lad V være det blandt disse skæringspunkter, som ligger nærmest ved A . Liniestykket UV har da kun endepunkterne fælles med Γ . For midtpunktet T af UV gælder nu, at J_1 har omløbstallet 0 om T , medens J_2 har omløbstallet 1 om T . Hvis vi nu gennemløber J_2 og derefter $-J_1$, altså i rækkefølge

$$\Gamma_2, QA, AP, PA, AQ, -\Gamma_1,$$

har vi ialt gennemløbet $\Gamma_2 - \Gamma_1$, altså enten Γ eller $-\Gamma$. Heraf følger, at Γ eller $-\Gamma$ har omløbstal 1 om T , og T vil derfor tilhøre en komponent af $\mathbb{C}\Gamma$, om hvilken Γ har omløbstal 1 eller -1 .

Det ses umiddelbart, at alle punkter udenfor en cirkel, der helt omslutter Γ , tilhører samme komponent som A af $\mathbb{C}\Gamma$. Dette medfører, at alle de andre komponenter af $\mathbb{C}\Gamma$ er begrænsede.

Med henblik på anvendelser i det følgende bemærker vi, at vi tillige har bevist følgende lemma:

5.4.2. Lemma. På en Jordankurve Γ kan vælges punkter P , Q , U , V , således at U og V ligger på hver sin af de buer, hvori P og Q deler Jordankurven, og således at P og Q kan forbindes med en brudt linie, der kun har P og Q fælles med kurven, og som ligger i den ubegrænsede komponent af $\mathbb{C}\Gamma$, medens liniestykket UV bortset fra endepunkterne tilhører en komponent af $\mathbb{C}\Gamma$, om hvilken Γ har omløbstal 1 eller -1 .

5.5 Beviset for, at mængden $\mathbb{C}\Gamma$ kun har én komponent, er væsentlig vanskeligere, og vi vil forberede det med nogle simplere resultater, der også lejlighedsvis vil vise sig nyttige. I første omgang vil vi undersøge tilsvarende spørgsmål for brudte linier og for polygoner.

Vi minder om, at en sammenhængende åben mængde i $\mathbb{C}^2$ er polygonalt sammenhængende, altså at 2 punkter af en sådan mængde altid kan forbindes ved hjælp af en brudt linie i mængden. En brudt linie uden dobbeltpunkter kaldes simpel.

5.5.1. Sætning. Lad O være en åben, sammenhængende mængde i $\mathbb{C}$. Lad Γ være en simpel ^{polygonal} brudt linie, som enten helt eller bortset fra et endepunkt tilhører O . Da er $O \setminus \Gamma$ sammenhængende.

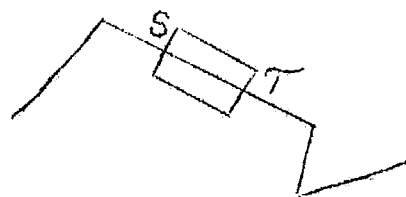
Bevis. Hvis vi kan vise sætningen i det specielle tilfælde, hvor Γ er et liniestykke, fås det almindelige tilfælde umiddelbart ved et induktionsbevis. Lad altså Γ være et liniestykke og $\gamma:[0,1]$ ind i O være en parameterfremstilling for Γ , således at $\gamma(1) \in O$. Lad A og B være to punkter af $O \setminus \Gamma$. Sætningen vil være bevist, når det lykkes os at vise, at A og B kan forbindes med en brudt linie i $O \setminus \Gamma$. Da O er sammenhængende, kan A og B forbindes med en brudt linie $\Gamma_1 \subseteq O$. Hvis Γ_1 ikke skærer Γ , er vi allerede fær-

dige. Hvis Γ_1 skærer Γ , vil vi med τ betegne den mindste parameter-værdi, for hvilken $\gamma(\tau)$ er et skæringspunkt. Liniestykket $\gamma([\tau, 1])$ er afsluttet og ligger i O . Det har derfor en positiv (eller uendelig stor) afstand fra randen af O og kan derfor omslutes med et åbent rektangel, hvis rand k tilhører $O \setminus \{a, b\}$.
 Nu er $k \setminus \Gamma$ polygonalt sammenhængende, og vi får en brudt linie, der forbinder A og B uden at skære Γ ved at gå fra A langs Γ_1 til det første skæringspunkt med k , derefter langs k til et punkt, hvor Γ_1 sidste gang skærer k og endelig langs Γ_1 til punktet B .

I beviset har vi benyttet, at et rektangel deler planen, men det vises helt umiddelbart.

5.5.2. Sætning. Lad O være en åben, sammenhængende mængde i $\mathbb{C}$. Lad Γ være en simpel, lukket, brudt linie i O eller en simpel brudt linie, der bortset fra endepunkterne tilhører O . Da har $O \setminus \Gamma$ højst 2 komponenter.

Bevis. På det indre af en side af Γ vælger vi et afsluttet liniestykke ST . Der eksisterer da et rektangel, der har ST som symmetriakse, og som ikke har punkter fælles med $\Gamma \setminus ST$. Dette rektangel deles af ST i to komponenter R_1 og R_2 . Ifølge sætningen 5.5.1 er



$O \setminus (\Gamma \setminus ST)$ sammenhængende, og et vilkårligt punkt $A \in O \setminus \Gamma$ kan derfor forbindes med midtpunktet af ST ved hjælp af en brudt linie $\Gamma_1 \subseteq O$, der ikke skærer $\Gamma \setminus ST$, og ved at gå fra A langs Γ_1 til det første skæringspunkt med rektanglets omkreds, får vi en brudt linie, der forbinder A med et punkt af R_1 eller R_2 . Altså ligger A i en komponent, som indeholder enten R_1 eller R_2 . Dermed er sætningen bevist.

5.5.3. Sætning. Lad Γ være en simpel polygon i $\mathbb{C}$. Da har Γ netop 2 komponenter.

Bevis. Af sætning 5.4.1. følger, at Γ har mindst 2 komponenter, og af sætning 5.5.2. følger, at Γ har højst 2 komponenter.

Vi får endvidere brug for følgende meget enkle resultat:

5.5.4. Sætning. En brudt linie, der forbinder punkterne A og B, indeholder en simpel brudt linie med A og B som endepunkter.

Bevis. Lad Γ være en brudt linie, som forbinder A og B. Når vi går langs Γ fra A til B gennemløber vi måske ikke hele Γ , og vi udelader da den del af Γ , som ikke gennemløbes. Den resterende del Γ' er en brudt linie med endepunkter A og B, men Γ' gennemløbes måske sådan, at samme punkt passerer flere gange. Sådanne dobbeltpunkter kan være isolerede, f.eks. hvis 2 sider af Γ' skærer hinanden, men det kan også indtræffe, at 2 sider rager ind over hinanden, og et helt stykke af Γ' vil da gennemløbes flere gange. Ved gennemløb af Γ' fra A til B vil der i hvert fald være et første dobbeltpunkt, hvis der overhovedet er dobbeltpunkter. Vi kan da udelade hele den del af Γ' , der gennemløbes mellem første og sidste passage af dette dobbeltpunkt, og derved får vi en ny brudt linie Γ'' , som forbinder A og B og har mindst 1 side færre end Γ' . Da Γ' kun har endelig mange sider, når vi ved endelig mange gentagelser af processen til en brudt linie uden dobbeltpunkter. Dermed er sætningen bevist.

5.6. Det vanskeligste afsnit af beviset for Jordans sætning er beviset for, at en simpel bue ikke kan dele den komplekse plan i flere komponenter. Dette bevis udformes bekvemlest som et indirekte bevis opbygget af en standardslutning, der forløber rutinemæssigt, samt et konstruktivt afsnit. Vi foretrækker, at

behandle det konstruktive afsnit selvstændigt, idet vi udskiller følgende hjælpesætning.

5.6.1. Lemma. Lad $\gamma: [0,1]$ ind i $\mathbb{C}$ være en parameterfremstilling for en simpel kurve Γ , og lad A og B være 2 punkter af Γ . Hvis det for ethvert $\tau \in [0,1[$ gælder, at A og B kan forbindes med en brudt linie, som ikke skærer $\gamma([0,\tau])$, da kan A og B forbindes med en brudt linie i Γ .

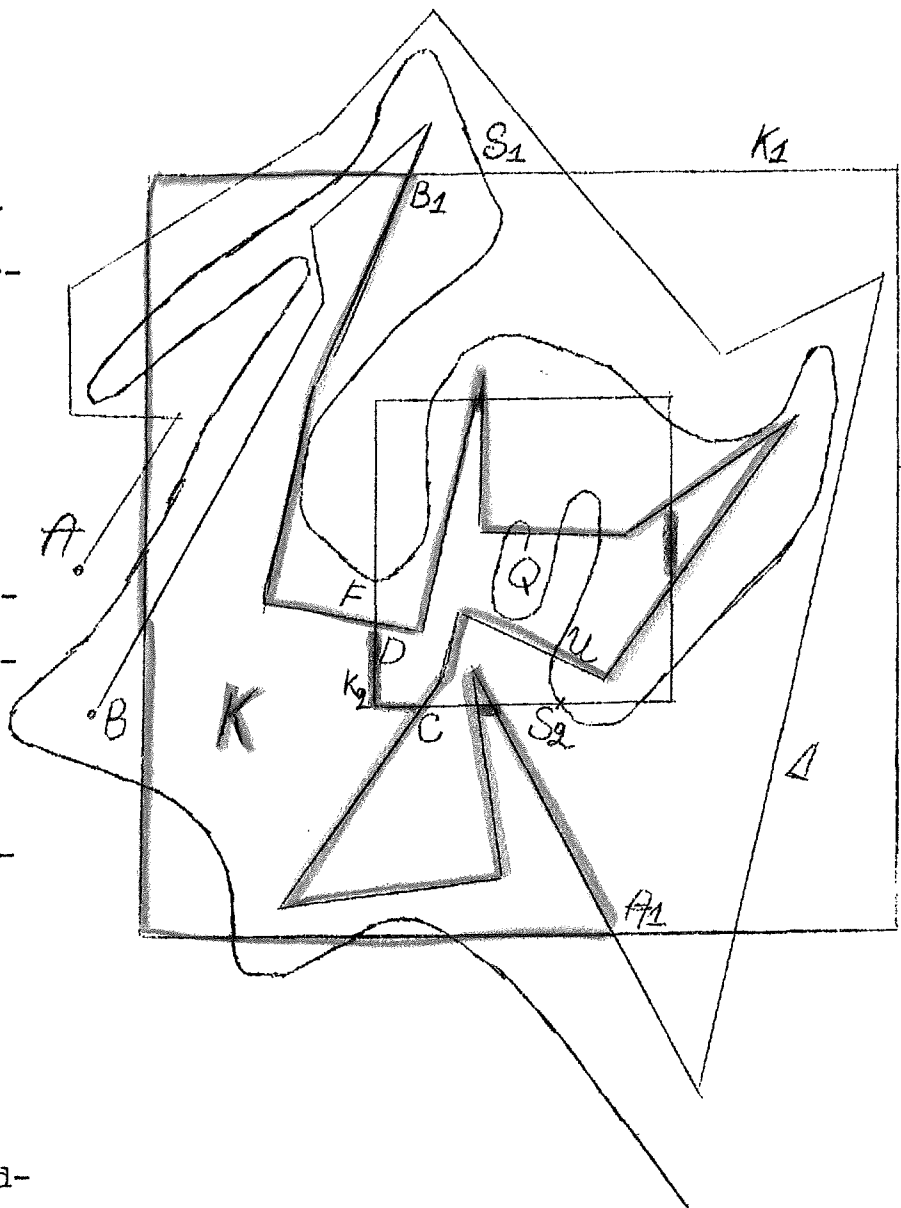
Bevis. Med $Q = \gamma(1)$ som centrum vælger vi et afsluttet kvadrat, der hverken indeholder A eller B . Vi betegner randen af dette kvadrat med k_1 . Vi vælger nu $\varepsilon > 0$, således at $\gamma([1-\varepsilon, 1])$ helt tilhører kvadratets indre. Da $[0,1]$ er kompakt, og $\gamma: [0,1]$ på Γ er bijektiv og kontinuert, er Γ kompakt og γ^{-1} kontinuert. Vi kan derfor vælge et afsluttet kvadrat med centrum i Q , således at dette kvadrat kun indeholder kurvepunkter svarende til parameterverdier i $]1-\varepsilon, 1]$. Vi betegner randen af dette kvadrat med k_2 .

Idet punkterne på Γ tænkes ordnet efter parameterverdierne, eksisterer der et første skæringspunkt F mellem Γ og k_2 . Vi har valgt k_2 således at Γ efter at have passeret F ikke mere kan nå randen k_2 af det første kvadrat, og det sidste skæringspunkt S_1 mellem Γ og k_1 kommer derfor før F . Lad S_2 være det sidste skæringspunkt mellem Γ og k_2 . Kurvestykket S_2Q ligger da helt i det lille kvadrat og bortset fra punktet S_2 endda i kvadratets indre.

Ifølge antagelserne har $\Gamma \setminus S_2Q$ sammenhængende komplementærmængde, og (vi kan derfor trække en brudt linie Δ fra A til B , således at Δ højst skærer stykket S_2Q af Γ . Ifølge sætning 5.5.4 kan vi endda vælge Δ som en simpel brudt linie. Vi kan endvidere altid ændre en lille smule på Δ , således at betingelserne forbliver opfyldt, og derved kan vi opnå, at Δ ikke går gennem vinkelspidsen af k_1 eller k_2 , og at intet knæk på Δ ligger på k_1 eller

k_2 . Alle fællespunkter mellem Δ og k_1 eller k_2 vil da være simple skæringspunkter mellem liniestykker.

Idet vi gennemløber Δ fra A til B, støder vi eventuelt på et første skæringspunkt U mellem Δ og S_2Q . Lad A_1 være det sidste skæringspunkt før U mellem k_1 og Δ , og lad B_1 være det første skæringspunkt efter U mellem Δ og k_1 . Stykket A_1B_1 af Δ repræsenterer således den brudte linies første "afstikker" til



det farlige område, hvor skæringspunkter mellem Δ og Γ kan forekomme. Der kan højst være endelig mange af den slags "afstikkere", men hver af disse kan skære Γ uendelig mange gange. Vort program er nu, at konstruere en ny brudt linie, der går fra A_1 til B_1 uden at skære Γ . Derefter vil vi behandle de øvrige "afstikkere" på tilsvarende måde. Derved erstattes Δ med en ny brudt linie fra

A til B, og denne nye, brudte linie vil ikke mere skære Γ . Den vil muligvis ikke være simpel, men det var jo heller ikke ønsket. Vi går nu i gang med dette program.

Punkterne A_1 og B_1 deler k_1 i 2 segmenter. Det af disse, som ikke indeholder S_1 , udgør sammen med stykket A_1B_1 af Δ en simpel polygon p . Ifølge sætning 5.5.3. består C_p af netop 2 komponenter, og den ene af disse K er begrænset og ligger indenfor k_1 . Punktet S_1 tilhører altså den ubegrænsede komponent.

Stykket S_1S_2 af Γ kan ikke skære p og indeholder derfor ingen punkter af K . Men vi har valgt k_1, k_2, S_1 og S_2 sådan, at alle skæringspunkter mellem Γ og k_2 ligger på buen S_1S_2 . Herved får vi det afgørende resultat:

Kurven Γ skærer ikke $k_2 \cap K$.

Den brudte linie A_1U begynder udenfor k_2 og ender indenfor k_2 . Den skærer derfor k_2 et ulige antal gange. Tilsvarende vil UB_1 skære k_2 et ulige antal gange. Hvert skæringspunkt mellem A_1B_1 og k_2 er imidlertid endepunkt af netop et segment af $k_2 \cap K$, og alle skæringspunkterne falder derfor i par af endepunkter af disse segmenter. Heraf følger, at mindst 1 segment af $k_2 \cap K$ har sit ene endepunkt C på A_1U og det andet D på UB_1 . Vi erstatter stykket CD af den brudte linie med segmentet CD af $k_2 \cap K$, og dermed har vi fået en ny brudt linie Δ' , og skæringspunktet U er elimineret. Vi modificerer Δ' ved at ændre stykket CD, så det kommer til at ligge ganske lidt udenfor k_2 . Den brudte linie Δ' er simpel, og den skærer k_2 mindst 2 gange færre end Δ . Hvis Δ' har et skæringspunkt V med S_2Q , kan vi gentage processen, og da antallet af skæringspunkter med k_2 falder med mindst 2 ved hver gentagelse, får vi efter endelig mange trin A_1B_1 erstattet med en *simpel* brudt linie, som ikke skærer Γ .

Dermed er beviset fuldført.

5.6.2. Sætning. En simpel bue deler ikke planen.

Bevis. Lad $\gamma:[0,1]$ ind i $\mathbb{C}$ være parameterfremstilling for en simpel kurve Γ . Lad A og B være to punkter i Γ . Hvis det for et $t \in [0,1]$ gælder, at A og B ikke kan forbindes med nogen brudt linie, der ikke skærer $\gamma([0,t])$, vil vi sige, at $\gamma([0,t])$ skiller A og B . Vi sætter nu

$$\tau = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma([0,t]) \text{ skiller ikke } A \text{ og } B\}.$$

Det er klart, at mængden på højre side ikke er tom. Af lemma 5.6.1. følger nu, at $\gamma([0,\tau])$ ikke skiller A og B . Lad Δ være en brudt linie, som forbinder A og B uden at skære $\gamma([0,\tau])$. Er $\tau < 1$, kan vi vælge $\varepsilon > 0$, således at $\gamma([0,\tau + \varepsilon]) \in \mathcal{C}(\overline{\Delta})$, hvilket strider mod definitionen af τ . Altså $\tau = 1$, og dermed er sætningen bevist.

Vi er nu nået så vidt, at et ikke alt for specielt tilfælde af Jordans sætning kan vises meget let.

5.6.3. Lemma. Lad Γ være en Jordankurve, der indeholder et liniestykke. Komplementærmængden $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ har omløbstal 0 om punkter i den ubegrænsede komponent og omløbstal $+1$ eller -1 om punkter i den begrænsede komponent.

Bevis. Lad AB være et liniestykke, som tilhører Γ . Om midtpunktet af AB lægger vi en afsluttet cirkelskive K , der kun har sin diameter CD fælles med Γ . Vi borttager det indre af diameteren fra Γ og får derved en simpel kurve $\Gamma' = \Gamma \setminus \overset{\circ}{K}$. Lad P være et vilkårligt punkt af $\mathbb{C} \setminus K$. Vi kan forbinde P med centrum af K ved hjælp af en brudt linie i $\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}$. Stykket af denne brudte linie fra P til dens første skæringspunkt med K forbinder P med en af de to komponenter, hvori AB deler K , ved hjælp af en brudt linie i Γ , og P tilhører derfor samme komponent af $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ som én af

disse halvcirkelskiver. Dermed har vi bevist, at CT højst har 2 komponenter. Resten af sætningen følger umiddelbart af sætning 5.4.1.

5.7. Det er nu ikke mere særlig vanskeligt at vise den vanskelige del af Jordans sætning.

5.7.1. Jordans sætning. Lad Γ være en simpel, lukket kurve i $\mathbb{C}$. Komplementærmængden CT har netop 2 komponenter, af hvilke netop 1 er begrænset. Kurven Γ har omløbstal 0 om et punkt i den ubegrænsede komponent og omløbstal $+1$ eller -1 om et punkt i den begrænsede komponent. Begge komponenter er åbne og har Γ som rand.

Bevis. Vi knytter beviset til figuren på side 5.4., og vi benytter betegnelserne fra beviset for sætning 5.4.1. Vi indførte ved den lejlighed Jordankurverne J_1 og J_2 . Vi bemærker, at disse indeholder rette liniestykker og derfor ifølge lemma 5.6.3. hver deler planen i et begrænset og ubegrænset område. Vi vil betegne disse 4 områder $I(J_1)$, $Y(J_1)$, $I(J_2)$, $Y(J_2)$, hvor de med I betegnede er begrænsede. Da U ligger i $I(J_2)$, vil buen Γ_1 på nær endepunkterne P og Q tilhøre $I(J_2)$. Heraf fremgår, at $Y(J_2)$ overhovedet ikke indeholder punkter af J_1 , og vi har derfor $Y(J_2) \subseteq Y(J_1)$. Heraf følger $I(J_1) \cap Y(J_2) \subseteq I(J_1) \cap Y(J_1) = \emptyset$, altså $I(J_1) \subseteq I(J_2)$. Nu kan ethvert punkt i $I(J_1)$ og ethvert punkt i $Y(J_2)$ forbindes med A ved en brudt linie i henholdsvis $I(J_1)$ og $Y(J_2)$. Disse brudte linier vil ikke kunne skære Γ . Men heraf følger, at

$$Y(\Gamma) = PA \cup AQ \cup I(J_1) \cup Y(J_2) \setminus \{P, Q\}$$

er sammenhængende. Dermed har vi gjort rede for alle punkter af CT undtagen punkterne af mængden

$$I(\Gamma) = I(J_2) \setminus (\Gamma_1 \cup I(J_1)).$$

Kurven J_1 har omløbstal 0 om punkterne $I(\Gamma)$, medens J_2 har omløbstallet +1 eller -1 om disse punkter. Heraf følger, at Γ har omløbstallet +1 eller -1 om disse punkter.

Punkterne U og V deler Γ i to buer, og hver af disse udgør sammen med UV en Jordankurve, der indeholder et liniestykke. Vi vil betegne disse kurver J_3 og J_4 . For $a \in I(\Gamma) \setminus UV$ har vi nu, at Γ har omløbstal 1 eller -1 om a . Men dette omløbstal er ved passende orientering af J_3 og J_4 sum af disse kurvers omløbstal om a . Da disse omløbstal har værdierne +1, -1 eller 0, kan vi slutte, at den ene kurve, f.eks. J_3 har omløbstal 0 om a , J_4 vil da have omløbstal 1 eller -1 om a . Altså tilhører a den begrænsede komponent af (J_4) . Heraf følger, at a kan forbindes med et punkt af UV med en brudt linie, der bortset fra punktet på UV tilhører $I(J_4)$. Punkterne af $J_3 \setminus UV$ tilhører $Y(J_4)$. Altså vil den brudte linie ikke have punkter fælles med Γ . Vi har dermed bevist, at $I(\Gamma)$ er polygonalt sammenhængende, og Γ har således kun 2 komponenter.

Påstanden om omløbstallene er allerede bevist. Da Γ er en afsluttet mængde i $\mathbb{C}$ er dens komponenter åbne. Heraf følger, at $I(\Gamma) \cup \Gamma$ og $Y(\Gamma) \cup \Gamma$ er afsluttede. Altså er randene af $I(\Gamma)$ og $Y(\Gamma)$ indeholdt i Γ . Lad nu $a \in \Gamma$ være vilkårlig valgt, og lad K være en cirkelskive med centrum i a . Lad Γ' være en Jordanbue, der fremkommer ved at borttage en bue omkring a og indeholdt i K fra kurven Γ . Lad b være et punkt af $I(\Gamma)$. Da Γ' er sammenhængende, kan vi trække en brudt linie fra b til a uden at skære Γ' . Den første side af den brudte linie, som når indenfor K , vil indeholde punkter af $K \cap I(\Gamma)$. Altså er a randpunkt for $I(\Gamma)$. Tilsvarende vises, at a er randpunkt for $Y(\Gamma)$.

5.8. Vi vil supplere Jordan's sætning med nogle sætninger om mere komplicerede punktmængders deling af planen. I det følgende vil vi for en Jordan kurve Γ altid betegne den begrænsede komponent af $C\Gamma$ med $I(\Gamma)$ og den ubegrænsede med $Y(\Gamma)$.

5.8.1. Sætning. Lad Γ være en Jordankurve, og lad Δ være en simpel bue med endepunkter på Γ , men med alle sine øvrige punkter i $C\Gamma$. Disse punkter vil da alle tilhøre samme komponent K af $C\Gamma$, og $K \setminus \Delta$ vil bestå af netop 2 komponenter. Ethvert punkt af Δ er randpunkt for begge disse komponenter.

Bevis. Endepunkterne A og B af Δ deler Γ i 2 Jordanbuer Γ_1 og Γ_2 . Da $\Delta \setminus \{A, B\}$ er sammenhængende vil $\Delta \setminus \{A, B\}$ helt tilhøre en komponent K af $C\Gamma$. Vi vil gennemføre beviset i tilfældet $K = I(\Gamma)$. Vi har da Jordankurver $J_1 = \Gamma_1 \cup \Delta$, $J_2 = \Gamma_2 \cup \Delta$, som vi tænker os orienteret, således at orienteringen på stykkerne Γ_1 og Γ_2 stemmer med orienteringen af Γ , og vi kan tænke os, at Γ har omløbstal 1 om punkter af $I(\Gamma)$. Da $Y(\Gamma)$ er sammenhængende og ikke indeholder punkter af $J_1 \cup J_2$ gælder $Y(\Gamma) \subseteq Y(J_1)$ og $Y(\Gamma) \subseteq Y(J_2)$, altså $I(J_1) \subseteq I(\Gamma)$ og $I(J_2) \subseteq I(\Gamma)$. Nu er Γ 's omløbstal om et punkt $Q \in I(\Gamma) \setminus \Delta$ summen af omløbstallene for J_1 og J_2 , og dette kræver, at et af disse omløbstal er 1, medens det andet er 0. Heraf følger, at

$$I(\Gamma) \setminus \Delta = I(J_1) \cup I(J_2) \text{ og } I(J_1) \cap I(J_2) = \emptyset.$$

Heraf fremgår, at $I(\Gamma) \setminus \Delta$ netop har komponenterne $I(J_1)$ og $I(J_2)$. Af Jordan's sætning følger, at hver punkt af Δ er randpunkt for både $I(J_1)$ og $I(J_2)$.

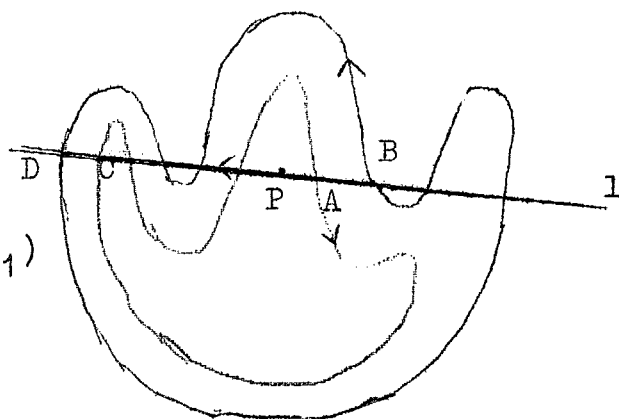
5.8.2. Sætning. Lad Γ_1 og Γ_2 være Jordankurver og $\Gamma_1 \subset I(\Gamma_2)$. Da har $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ de tre komponenter

$$I(\Gamma_1), Y(\Gamma_2), I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1).$$

Bevis. Det følger umiddelbart af Jordan's sætning, at $I(\Gamma_1)$ og $Y(\Gamma_2)$ er komponenter af $C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, og vi behøver derfor

blot at vise, at $I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1)$ er en sammenhængende mængde.

Vi vil antage, at Γ_2 har omløbstal 1 om punkter af $I(\Gamma_2)$, medens Γ_1 har omløbstal -1 om punkter af $I(\Gamma_1)$. En orienteret ret linie gennem et punkt $P \in I(\Gamma_1)$ har et første skæringspunkt A og et sidste skæringspunkt C med Γ_1 , samt et sidste skæringspunkt B



før A med Γ_2 og et første skæringspunkt D efter C med Γ_2 .

Vi får nu en Jordankurve J_1 ved at gå fra A til B langs l , fra B til D langs Γ_2 i den ved orienteringen bestemte retning, fra D til C langs l og endelig fra C til A langs Γ_1 i den ved orienteringen bestemte retning. Vi får en anden Jordankurve J_2 ved at gå fra B til A langs l , fra A til C langs Γ_1 i orienteringens retning, fra C til D langs l og endelig fra D til B langs Γ_2 i orienteringens retning. For ethvert punkt $Q \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup CD \cup AB)$ gælder nu, at summen af omløbstallene for Γ_1 og Γ_2 om Q er lig med summen af omløbstallene for J_1 og J_2 om Q . Nu gælder åbenbart $I(J_1) \subseteq I(\Gamma_2)$ og $I(J_2) \subseteq I(\Gamma_2)$. Da midtpunktet af AB tilhører $I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1)$ og samtidig er randpunktet for både $I(J_1)$ og $I(J_2)$, kan vi slutte, at J_1 og J_2 har omløbstal 1 om henholdsvis $I(J_1)$ og $I(J_2)$. Heraf følger igen, at $I(J_1) \subseteq Y(\Gamma_1)$ og $I(J_2) \subseteq Y(\Gamma_1)$. Men så får vi netop, at

$$I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1) = AB \cup CD \cup I(J_1) \cup I(J_2) \setminus \{A, B, C, D\},$$

og da ethvert punkt af $I(J_1)$ eller $I(J_2)$ kan forbindes med midtpunkterne af AB og CD ved brudte linier, der bortset fra endepunkterne helt tilhører $I(J_1)$ eller $I(J_2)$, kan vi slutte, at $I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1)$ er sammenhængende. Dermed er beviset fuldført.

5.8.3. Sætning. Lad Γ være en Jordankurve, A et punkt af denne, K en komponent af $C\Gamma$ og U en omegn af A . Der eksisterer da en brudt linie Δ , der bortset fra endepunkterne B og C på Γ helt ligger i $K \cap U$, samtidig med at den bue af Γ , som har endepunkter B og C og indeholder A , helt ligger i U .

Bevis. Vi kan antage, at U netop er mængden af punkter indenfor et kvadrat k_1 med centrum i A , og at dette kvadrat er så lille, at Γ indeholder en bue γ_1 , der ligger udenfor k_1 . Lad E være et punkt af K . Da $\Gamma \setminus \gamma_1$ ikke deler planen, kan E forbindes med et punkt $P \in \gamma_1$ ved en brudt linie Δ_1 , som bortset fra P tilhører K . Vi kan nu vælge en bue af Γ , som indeholder A og helt ligger indenfor k_1 , og dernæst kan vi vælge et kvadrat k_2 med centrum i A , således at det indre af k_2 ikke indeholder punkter af Γ bortset fra dele af den valgte bue. Lad γ_2 være en bue af Γ , som indeholder A og ligger indenfor k_2 . Da $\Gamma \cup \Delta_1 \setminus \gamma_2$ ifølge sætningerne 5.6.2 og 5.5.2 ikke deler planen, kan E forbindes med et punkt $Q \in \gamma_2$ ved en brudt linie Δ_2 , der bortset fra Q helt tilhører $K \setminus \Delta_1$. Den brudte linie $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ har ingen dobbeltpunkter, og bortset fra endepunkterne P og Q tilhører den K . Vi orienterer Δ , således at den gennemløbes fra P til Q . Da vi kan ændre Δ en lille smule indenfor K , kan vi antage, at Δ ikke passerer gennem nogen vinkelspids af k_2 , og at Δ ikke har nogen vinkelspids liggende på k_2 . Ifølge sætning 5.8.1 deler Δ komponenten K i to komponenter K_1 og K_2 . Randen af K_1 består af Δ samt en bue $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ med endepunkter P og Q , medens randen af K_2 består af Δ og den resterende del Γ_2 af Γ .

Mængden $k_2 \cap K$ er åben relativt til k_2 og består således af højst numerabelt mange sammenhængende stykker af k_2 . Da Δ skærer disse stykker i et ulige antal punkter, vil Δ skære mindst

et sådant stykke I i et ulige antal punkter. Stykket I har endepunkter S og T på L . Idet vi går langs I fra S til T , vil vi ved hver passage af et skæringspunkt med Δ gå fra K_1 til K_2 eller omvendt. Heraf følger, at S og T er randpunkter for hver sit af områderne K_1 og K_2 , altså at S og T ligger på hver sin af buerne Γ_1 og Γ_2 . Lad os antage, at $S \in \Gamma_1$ og $T \in \Gamma_2$.

Idet vi gennemløber Γ_1 fra P til Q vil vi efter passagen af S være nået kvadratet k_2 , og vi kan derefter ikke mere nå ud til k_1 , så stykket SQ af Γ_1 ligger helt indenfor k_1 . Tilsvarende ligger buen TQ af Γ_2 helt indenfor k_1 . Men så vil I sammen med buen SQT udgøre en Jordankurve, som ligger indenfor k_1 . Da buen SQT indeholder Q og når randen af k_2 , vil A ligge på denne bue. Dermed er sætningen bevist.

5.8.4. Sætning. Lad Γ være en Jordankurve, A et punkt af denne og B et punkt af en komponent K af $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Der eksisterer da en kurve, som består af numerabelt mange liniestykker, har endepunkter A og B og ligger i K bortset fra punkterne A og B .

Bevis. Lad U_1 være en cirkelskive om A , så $B \notin U_1$. Vi lægger (sætning 5.8.3) en brudt linie Δ_1 , således at Δ_1 sammen med en bue af Γ omkring A udgør en Jordankurve, der helt ligger i $U_1 \cap K$. Vi vælger nu cirkelskiven U_2 om A , således at Δ_1 ligger udenfor U_2 og således at U_2 højst har halvt så stor radius som U_1 . Ved hjælp af en brudt linie Δ_2 får vi en Jordankurve i $U_2 \cap K$, o.s.v. Vi kan nu fra B trække en brudt linie i K til et punkt af Δ_1 , og således at den ikke har andre punkter fælles med Δ_1 . Fra endepunktet på Δ_1 kan vi trække en brudt linie, som forløber indenfor den første Jordankurve i den konstruerede følge og ender i et punkt af Δ_2 uden at have andre punkter fælles med Δ_2 . Ved at fortsætte denne proces i det uendelige får vi den ønskede kurve fra B til A .

Dermed er sætningen fuldstændig bevist.

5.9. Som en anvendelse af Jordans sætning vil vi nu vise en sætning om eksistens af periodiske løsninger til differential-ligninger. Vi vender således igen tilbage til differentiaallignings-systemet

$$(1) \quad \dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y),$$

hvor vi vil antage, at $f(x,y)$ og $g(x,y)$ er kontinuerte og tilfredsstiller Lipschitz-betingelser i et ringformet område D , samt på dettes rand, som antages at bestå af 2 Jordankurver.

5.9.1. Sætning. Lad D være et ringformet område, begrænset af 2 Jordankurver. Lad $f, g: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være afbildninger, som tilfredsstiller Lipschitzbetingelser og ikke begge antager værdien 0. Hvis vektoren med koordinatsættet $(f(x,y), g(x,y))$ afsat ud fra randpunktet (x,y) altid peger ind i D (randkurverne antages tilstrækkelig regulære, så dette har mening), har ligningssystemet (1) en periodisk løsning.

Sætningen skyldes Bendixson.

Bevis. Lad

$$(2) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \geq a$$

være en løsning til (1). Mængderne

$$A(t) = \{(\varphi(u), \psi(u)) \mid u \geq t\} \quad t \geq a$$

udgør en filterbasis på $\bar{D}$ og har derfor et fælles fortætningspunkt $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Lad

$$(3) \quad x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t), \quad t \geq b$$

være den løsning til (1), som svarer til begyndelsesværdierne

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0.$$

Vi minder om, at løsningerne afhænger kontinuert af udgangsbetingelserne. I det foreliggende tilfælde formuleres dette præcist på følgende måde:

Lad $\varepsilon > 0$ og $T > 0$ være givet. Der eksisterer da et $\delta > 0$, således at det for en løsning $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$ til (1) svarende til udgangsværdierne

$$t = \tau, x = x_1, y = y_1,$$

hvor $|x_1 - x_0| \leq \delta$, $|y_1 - y_0| \leq \delta$, gælder, at

$$|\xi(t) - \xi(t-\tau)| \leq \varepsilon, |\eta(t) - \eta(t-\tau)| \leq \varepsilon$$

for

$$\tau \leq t \leq \tau + T.$$

Heraf følger, at alle til $t \geq 0$ svarende punkter af bane-
kurven for løsningen (3) er fortætningspunkt for mængderne $A(t)$.

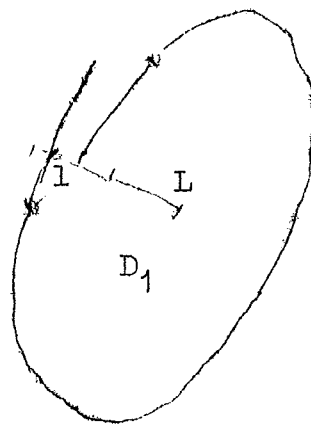
Vi vil nu vise, at løsningen (3) er periodisk. Vi bemærker, at (3) er periodisk, hvis og kun hvis afbildningen $(\Phi, \Psi): [b, \infty[$ ind i $\mathbb{R}^2$ ikke er injektiv. Vi fører beviset indirekte, idet vi nu antager, at (Φ, Ψ) er en injektiv afbildning. Mængderne

$$B(t) = \{(\Phi(u), \Psi(u)) \mid u \geq t\}$$

udgør en filterbasis i $\bar{D}$ og har derfor et fælles fortætningspunkt $(X, Y) \in \bar{D}$, og ganske som ovenfor ser vi, at ethvert punkt af en løsningskurve gennem (X, Y) ligeledes er fælles fortætningspunkt for mængderne $B(t)$. Vi kan derfor træffe valget af (X, Y) , således at $(X, Y) \in D$.

Vi kan nu vælge et liniestykke L med (X, Y) som midtpunkt og vinkelret på den ved $(f(X, Y), g(X, Y))$ bestemte retning i $\mathbb{R}^2$, således at alle løsningskurver gennem punkter af L skærer samme vej gennem L .

Nu vil løsningen (3) skære
1 for en værdi $t = t_1 > 0$, og den til
 $t > t_1$ svarende del af (3) vil igen
skære 1, således som antydnet på fi-
guren. Stykket af løsningskurven mellem



2 på hinanden følgende skæringspunkter t_1 og t_2 sammen med stykket 1 af L mellem skæringspunkterne danner en Jordankurve, hvis komplementærmængde har netop 2 komponenter D_1 og D_2 . Lad D_1 være den komponent, som kurven går ind i efter passage af det sidste skæringspunkt. Det ses da let, at den til $t < t_1$ svarende del af løsningens banekurve er i D_2 , medens den til $t > t_2$ svarende del af banekurven for (3) er i D_1 .

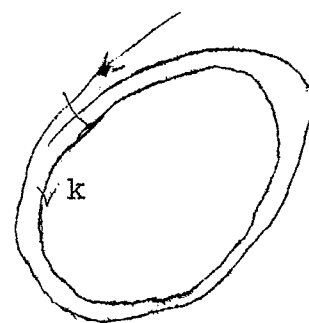
Som nævnt ovenfor er ethvert punkt svarende til $t \geq 0$ af løsningen (3) fælles fortætningspunkt for alle $A(t)$. Heraf følger, at $A(t)$ indeholder punkter af D_1 , altså, at løsningen (2) bevæger sig ind i D_1 . Men da banekurver for løsninger ikke kan skære hinanden og løsninger kun kan krydse L i den retning, der fører ind i D_1 , medfører dette, at løsningen (2) fra en vis værdi af t at regne er henvist til at bevæge sig omkring i det indre af D_1 . Altså er en af mængderne $A(t)$ en delmængde af D_1 i modstrid med, at de punkter af løsningen (3), der svarer til $t \in [0, t_1[$, er fortætningspunkter for alle mængderne $A(t)$ og ligger i området D_2 .

Vi er således nået til en modstrid, og vi kan derfor slutte, at løsningen (3) er periodisk.

5.10. For overskueligheds skyld valgte vi en ret simpel formulering af sætning 5.9.1. Allerede beviset i foregående afsnit viste jo, at det for den helt tilfældigt valgte løsning (2) gjaldt, at den nærmer sig asymptotisk til den periodiske løsning (3). Vi har derfor følgende skærpelse:

5.10.1. Sætning. Under de samme forudsætninger som i sætning 5.9.1. gælder, at enhver ikke periodisk løsning til (1) i $\bar{D}$ nærmer sig asymptotisk til en periodisk løsning i D .

Banekurven for en periodisk løsning er en Jordankurve k . Enhver anden løsning forløber helt i et af de områder, hvori k deler planen. Som antydnet på figuren vil en løsning, der asymptotisk nærmer sig k skære 2 gange gennem en normal til k . Derved opstår som i beviset for sætning 5.9.1. en Jordankurve og vi kan slutte, at k ligger i det af de ved Jordankurven bestemte områder, som løsningen bevæger sig ind i. Lad (x_0, y_0) være et punkt af løsningskurven. Vi kan da finde en omegn U af (x_0, y_0) , således at enhver løsningskurve, der starter i et punkt af U , ledsager den allerede betragtede løsningskurve ind i det område, der indeholder k . Den nye løsningskurve bliver da "klemt inde" mellem vindingerne i den gamle, og den må derfor ligeledes asymptotisk nærme sig k . Vi har dermed bevist, at mængden af udgangspunkter for løsninger, der asymptotisk nærmer sig k , er en åben mængde. Mængden af udgangspunkter for løsninger, der asymptotisk nærmer sig en anden periodisk løsning end k , er da også åben. Heraf følger:



5.10.2. Sætning. Under de samme forudsætninger som i sætning 5.9.1 gælder, at løsninger med udgangspunkt i en komponent K af komplementærmængden med hensyn til $\bar{D}$ til foreningsmængden af banekurverne for de periodiske løsninger, alle vil nærme sig asymptotisk til samme periodiske løsning. Specielt vil alle løsninger med udgangspunkt på den ydre randkurve for D nærme sig asymptotisk til den samme periodiske løsning. Tilsvarende for løsninger med udgangspunkt på den indre randkurve for D .

Hvis komplementærmængden med hensyn til $\bar{D}$ af foreningsmængden af banekurverne for de periodiske løsninger har mere end 2 kom-

ponenter, vil den have en komponent K , der ikke indeholder randpunkter for $\bar{D}$. For løsningskurver i K kan det ræsonnement, der benyttedes i beviset for sætning 5.9.1, med trivielle ændringer benyttes også for $t \rightarrow -\infty$, og vi får da, at løsninger i en sådan komponent også for $t \rightarrow \infty$ asymptotisk vil nærme sig til periodiske løsninger.

5.11. Lad nu igen D være et område i $\mathbb{R}^2$ og lad $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ være afbildninger, som tilfredsstiller en Lipschitzbetingelse, og som kun i isolerede punkter bliver 0 samtidig. Med D^* betegner vi det område, der fås af D , når de fælles nulpunkter for f og g udelades.

Den komplekse funktion

$$F(z) = f(x,y) + ig(x,y), \quad z = x + iy$$

er kontinuert og uden nulpunkter i D^* . Lad k være en orienteret, lukket kurve i D^* . Argumentvariationen af $F(z)$ langs k er et tal af formen $2\pi n$, og tallet n kaldes Poincaré's index for retningsfeltet (f,g) med hensyn til kurven k . Vi vil i denne forbindelse altid tænke os, at k er en Jordankurve med omløbstal 1 om punkterne af $I(k)$.

Det følger af definitionen, at (f,g) har samme Poincaré index med hensyn til kurver, som er isomorfe i D^* .

Hvis k suppleres med et tværsnit som antydnet

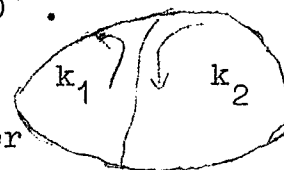
på figuren, således at der opstår to Jordankurver

k_1 og k_2 i D^* , bliver Poincaré index for (f,g) med

hensyn til k lig med summen af de tilsvarende indices med hensyn til k_1 og k_2 . Hvis k specielt er nulhomotop i D , følger heraf,

at Poincaré index for (f,g) med hensyn til k kan fås som sum af Poincaré indices for (f,g) med hensyn til små cirkler, som hver

omkredser et af de singulære punkter (fælles nulpunkter for f og g)



indenfor k .

Vi skriver nu

$$f(x,y) = Ax+By+r\delta(x,y)$$

$$g(x,y) = Cx+Dy+r\varepsilon(x,y), \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

hvor $\delta(0,0) = \varepsilon(0,0) = 0$, og hvor δ og ε er kontinuerte. Vi sætter her $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$, $\eta = \delta + i\varepsilon$, og en elementær udregning giver

$$\frac{1}{r} F(z) = \frac{1}{2}((A+D)+i(C-B))e^{i\Theta} + \frac{1}{2}((A-D)+i(C+B))e^{-i\Theta} + \eta(r\cos\Theta, r\sin\Theta),$$

altså et udtryk af formen

$$pe^{i\Theta} + qe^{-i\Theta} + \eta(r, \Theta).$$

For $|p| > |q|$ får vi, når r er tilstrækkelig lille, at

$$|pe^{i\Theta}| > |qe^{-i\Theta} + \eta(r, \Theta)|,$$

og udtrykket

$$pe^{i\Theta} + \lambda(qe^{-i\Theta} + \eta(r, \Theta))$$

vil da ikke antage værdien 0 for $0 \leq \lambda \leq 1$. Dette medfører, at argumentvariationen, når Θ løber fra 0 til 2π , ikke afhænger af λ , og vi får den altså bestemt ved at vælge $\lambda = 0$, og den bliver derfor 2π . For $|p| < |q|$ lader vi p og q bytte roller i ræsonnementet, og argumentvariationen bliver da -2π .

Vi finder således, at Poincaré index bliver +1, såfremt

$$|\frac{1}{2}((A+D)+i(C-B))|^2 - |\frac{1}{2}((A-D)+i(C+B))|^2 > 0$$

eller

$$AD - BC > 0,$$

og at Poincaré index bliver -1, såfremt $AD - BC < 0$. Dermed har vi bevist følgende sætning.

5.11. Sætning. Lad (f,g) være et retningsfelt, som opfylder en Lipschitzbetingelse i et område D . Lad k være en Jordankurve i D^* , som er nulhomotop i D og har omløbstal 1 om punkterne af $I(k)$. Hvis der i $I(k)$ ikke findes andre singulære punkter end

knudepunkter, spiralpunkter, centralpunkter og sadelpunkter, da er Poincaré index for (f,g) med hensyn til k lig med antallet af knudepunkter, spiralpunkter og centralpunkter i $I(k)$ minus antallet af sadelpunkter i $I(k)$.

5.12. Nyttten af Poincaré index beror på en topologisk sætning af global karakter, som vi nu vil vise. Beviset stammer fra en afhandling af H. Hopf (1935).

5.12.1. Sætning. Lad $\gamma:[0,1]$ ind i $\mathbb{C}$ være parameterfremstilling for en differentiabel Jordankurve Γ (altså $D\gamma$ kontinuert og forskellig fra 0). Hvis Γ har omløbstallet $+1$ om punkterne af $I(\Gamma)$, har $D\gamma:[0,1]$ ind i $\mathbb{C}$ omløbstallet $+1$ om punktet 0.

Bevis. Vi deler beviset i 2 afsnit, af hvilke det første ved hjælp af et kunstgreb reducerer bestemmelser af omløbstallet for $D\gamma$ til bestemmelse af en argumentvariation, der er bekvemmere at arbejde med. I den anden del af beviset bestemmes derpå denne argumentvariation.

1. Vi betragter kvadratet $K = [0,1] \times [0,1]$, samt en afbildning $\Phi:K$ ind i $\mathbb{C}$ defineret ved

$$\Phi(t,t) = D\gamma(t),$$

$$\Phi(0,1) = \Phi(1,0) = -D\gamma(0),$$

$$\Phi(t,u) = (\gamma(u) - \gamma(t))(u-t)^{-1}(1-|u-t|)^{-1}$$

for $t \neq u$, $(t,u) \neq (0,1)$ og $(1,0)$. Vi har $\Phi(u,t) = \Phi(t,u)$. Da γ er injektiv er $\Phi(t,u) \neq 0$ overalt i K . For $0 < |u-t| < 1$ giver middelværdisætningen

$$\Phi(t,u) = D\gamma(\tau(t,u))(1-|u-t|)^{-1},$$

hvor $\tau(t,u)$ tilhører det åbne interval med endepunkter t og u . Da $D\gamma$ er kontinuert, viser denne relation, at Φ er kontinuert også for $t = u$. For $u = 1-k$, $0 \leq k < 1$, $0 \leq t < 1-k$, $u+k > 0$ er

$$\Phi(t, u) = (\gamma(1-k) - \gamma(t))(1-k-t)^{-1}(k+t)^{-1}.$$

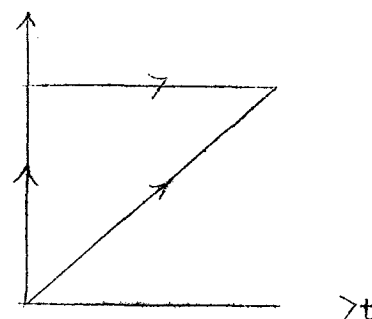
Hvis vi udvider definitionen af γ til intervallet $]-1, 1]$ ved at sætte $\gamma(-k) = \gamma(1-k)$, bliver γ differentiabel på hele dette interval, og vi får

$$\Phi(t, u) = D\gamma(\tau(k, t)) (1-k-t)^{-1},$$

hvor $\tau(k, t)$ tilhører intervallet med endepunkter $-k$ og t . Heraf fremgår, at Φ er kontinuert i $(0, 1)$. Af symmetri Grunde er Φ da også kontinuert i $(1, 0)$, altså i hele K .

Argumentvariationen af $D\gamma$:

$[0, 1]$ ind i $\mathbb{C}$ er nu argumentvariationen af Φ langs diagonalen i den retning, som er antydnet på figuren. Da Φ er kontinuert og forskellig fra 0 i hele K ,



eksisterer der en kontinuert argumentfunktion $\arg \Phi$ i hele K .

Den søgte argumentvariation kan derfor også bestemmes som argumentvariationen langs 2 af kvadratets sider som antydnet på figuren.

Nu er

$$\Phi(0, u) = (\gamma(u) - \gamma(0))u^{-1}(1-u)^{-1}$$

og

$$\Phi(t, 1) = (\gamma(1) - \gamma(t))(1-t)^{-1}t^{-1},$$

men af $\gamma(0) = \gamma(1)$ følger nu

$$\Phi(0, t) = \Phi(t, 1),$$

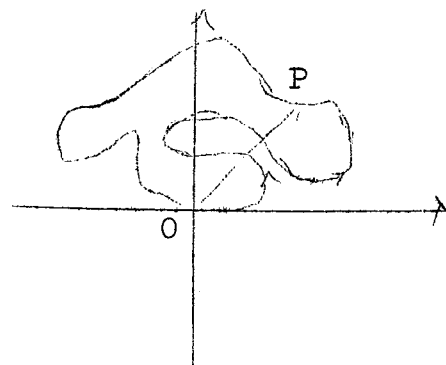
hvilket viser, at de 2 kvadratsider giver samme bidrag til argumentvariationen.

2. Sætningen vil være bevist, når det lykkes os at vise, at funktionen

$$\varphi(t) = \Phi(0, t) = t^{-1}(1-t)^{-1}(\gamma(t) - \gamma(0)).$$

har argumentvariationen π på intervallet $[0,1]$. Da den søgte argumentvariation af $D\gamma$ åbenbart er afhængig af, hvilket kurvepunkt der svarer til endepunkterne af parameterintervallet, og da en flytning af kurven i den komplekse plan heller ikke kan spille nogen rolle, kan vi tænke os, at punktet $\gamma(0) = \gamma(1)$ på kurven er valgt sådan, at tangenten i dette punkt er støttelinie, og desuden kan vi antage, at selve denne tangent er den reelle akse og at $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ (se figuren).

Vi kan endvidere antage, at kurvetangenten i 0 er rettet i den reelle akse positive retning. Da vi har antaget, at k har omløbstal 1 om $I(k)$, medfører dette, at k ligger over den reelle akse. Argumentet af $\phi(t)$ bliver da for $t \neq 0$ og 1 identisk med argumentet af $\gamma(t)$, og som kontinuert argument kan vi derfor bruge hovedværdien, som altid ligger mellem 0 og π . Det går åbenbart mod 0 for $t \rightarrow 0$ og mod π for $t \rightarrow 1$. Dermed er sætningen fuldstændig bevist.



5.13. Vi kan umiddelbart anvende sætning 5.12.1 på banekurven for en periodisk løsning til en differentiaalligning

$$(4) \quad \dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y),$$

hvor f og g tilfredsstiller Lipschitzbetingelser i et område D . Ved bestemmelsen af Poincaré index skal banekurven Γ orienteres, således at den får omløbstal 1 om punkterne af $I(\Gamma)$. Det er ganske uden betydning om denne orientering er med eller mod gennemløbsretningen af Γ . Vi har altså følgende sætning.

5.13.1. Sætning. Retningsfeltet (f,g) i området D har Poincaré index 1 med hensyn til enhver banekurve for periodiske

løsninger til (4).

Hvis vi kombinerer dette resultat med sætning 5.11.1 får vi følgende sætning.

5.13.2. Sætning. Banekurven Γ for en periodisk løsning til (4) i området D vil ikke passere gennem singulære punkter. Hvis Γ er nulhomotop i D , og der ikke findes andre singulariteter i $I(\Gamma)$ end knudepunkter, spiralpunkter, centralpunkter og sadelpunkter, vil antallet af knudepunkter, spiralpunkter og centralpunkter i $I(\Gamma)$ være 1 plus antallet af sadelpunkter i $I(\Gamma)$. Hvis en banekurve for en periodisk løsning til (4) er nulhomotop i D , vil der altid i $I(\Gamma)$ findes et singulært punkt, som ikke er et sadelpunkt.

nd 5.14. Vi vil vise endnu en sætning om Jordankurver til brug i det følgende.

5.14.1. Sætning. For en Jordankurve Γ gælder altid, at $I(\Gamma)$ er enkelt sammenhængende.

Bevis. Vi skal blot vise, at enhver lukket trappelinie (brudt linie, hvis sider er parallelle med en af koordinatakserne) er nulhomotop. Vi minder om, at en nulhomotop kurve kan ændres kontinuert til en kurve, der er udartet til et punkt, og at det endda er muligt at vælge dette punkt vilkårligt på selve kurven, og at den kontinuerte ændring da kan udføres, således at det udvalgte punkt bliver liggende. Hvis en i sig selv tilbageløbende sløjfe på kurven er nulhomotop, kan den altså trækkes sammen, således at det punkt, hvor den begynder og ender, bliver liggende. Heraf følger, at det er nok at vise påstanden for en simpel lukket trappelinie.

Hvis en simpel, lukket trappelinie er konveks, er den et kvadrat og derfor nulhomotop. Hvis en simpel lukket trappelinie

ikke er konveks, vil man ved at gennemløbe den engang komme til en side, hvis forlængelse går ind i området indenfor trappelinien. Denne er da åbenbart homotop med den nye trappelinie, man får ved at forlænge en sådan side ind i det indre indtil den første gang rammer trappelinien igen. Den nye trappelinie gennemløbes, således, at man efter den nævnte side gennemløber forlængelsen og går tilbage igen langs denne og derefter fortsætter som før. Den nye trappelinie består af 2 lukkede sløjfer, der hver har færre sider end den oprindelige. Hvis vi nu allerede har vist, at en trappelinie med færre sider end den givne, er nulhomotop, følger det af bemærkningerne i begyndelsen af dette bevis, at den givne også er det. Da nu en trappelinie med 4 sider er nulhomotop, er vi nået til et induktionsbevis for sætningen.

Beviset bygger på, at området indenfor en simpel, lukket trappelinie i $I(T)$ er en delmængde af $I(T)$. Da dette er den eneste egenskab ved $I(T)$, vi har benyttet, har vi samtidig fået bevist følgende sætning:

5.14.2. Sætning. Et område D er enkelt sammenhængende, hvis og kun hvis det for enhver simpel, lukket trappelinie $T \subset D$ gælder, at $I(T) \subset D$.

Vi vil nu vise følgende sætning:

5.14.3. Sætning. Lad D være et område, og lad $T \subset D$ være en Jordankurve, for hvilken $I(T) \subset D$. For en Jordankurve T_1 , som er homotop med T i D gælder $I(T_1) \subset D$.

Bevis. Vi betragter et vilkårligt punkt $a \in I(T_1)$, og vi skal da blot vise, at $a \in D$. Hvis $a \in \overline{I(T)}$ er dette på forhånd givet. Hvis $a \in Y(T)$ vil T have omløbstal 0 om a , medens T_1 har omløbstal 1 eller -1 om a . Heraf følger imidlertid, at en

kontinuert kurvefamilie $\Delta(t) \subset D$, hvor $\Delta(0) = \Gamma$ og $\Delta(1) = \Gamma_1$, indeholder en kurve gennem a , og da denne kurve ligger i D , kan slutte, at $a \in D$.

5.14.4. Sætning. Lad Γ være en differentiabel Jordankurve i et område D . Hvis $I(\Gamma) \subset D$, er Γ nulhomotop i D .

Bevis. Idet vi tænker os D tilhørende (x,y) -planen, kan vi inddele Γ i endelig mange buer, som hver kan fremstilles ved en ligning af formen $y = \phi(x)$ eller $x = \psi(y)$. Efter tur erstatter vi hver af disse buer med en med buen homotop trappelinie uden skæringspunkter med den øvrige del af Γ og homotop med den oprindelige bue. Derved får vi Γ erstattet med en simpel trappelinie Γ_1 homotop i D med Γ . Ifølge sætning 5.14.2 gælder $I(\Gamma_1) \subset D$ og sætning 5.14.1 medfører derfor, at Γ_1 er nulhomotop i D . Dermed er sætningen bevist.

5.15. De i foregående afsnit udledte topologiske resultater giver os yderligere en del oplysninger om de periodiske integralkurver til differentiaalligninger. For det første ser vi, at der ikke kan findes periodiske løsninger i et enkelt sammenhængende område uden singulære punkter.

For en differentiaalligning i et ringformet område mellem en Jordankurve Γ_2 og en Jordankurve $\Gamma_1 \subset I(\Gamma_2)$ og uden singulære punkter i dette område, får vi, at periodiske løsninger ikke kan have nulhomotope banekurver. Hvis Δ er banekurve for en periodisk løsning, gælder $I(\Delta) \subset I(\Gamma_2)$, men da $I(\Delta) \subset I(\Gamma_2) \cap Y(\Gamma_1)$ ville medføre, at Δ var nulhomotop, gælder $I(\Delta) \cap I(\Gamma_1) \neq \emptyset$, men da $I(\Gamma_1)$ er sammenhængende, medfører dette, at $\Gamma_1 \subset I(\Delta)$. Vi ser således, at banekurven Δ må omslutte Γ_1 . Hvis der er flere periodiske løsninger viser det samme ræsonnement, at det for 2 vilkårlige blandt dem vil gælde, at den

ene banekurve omslutter den anden.

5.16. Vi kan ikke vente, at de ovenfor omtalte topologiske betragtninger i konkrete tilfælde vil give tilstrækkelige oplysninger. Først og fremmest giver metoderne kun svar på spørgsmålet om eksistens af periodiske løsninger uden at oplyse om antallet af sådanne. Et noget mere indgående studium af differentialligningen vil dog ofte kunne give præcisere oplysninger.

Vi skal i det følgende gennemføre en sådan behandling af en mere speciel differentialligning, idet vi skal vise følgende sætning, som skyldes N. Levinson og O.K. Smith.

5.16.1. Sætning. Lad $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner, der tilfredsstiller følgende betingelser:

1). $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$.

2). $g(x) > 0$ for $x > 0$ og $g(x)$ tilfredsstiller Lipschitz betingelse.

3). Funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ antager værdien 0 for 1 og kun 1 positiv værdi α af x , og $F(x)$ er negativ i hele intervallet $]0, \alpha[$.

4). $F(x)$ er voksende for $x \geq \alpha$ og går mod ∞ for $x \rightarrow \infty$.

Da vil differentialligningen (den generaliserede Liénaard-ligning)

$$(5) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

have 1 og bortset fra forskydninger i t kun 1 periodisk løsning.

Bevis. Vi indfører den nye variable

$$y = \dot{x} + F(x),$$

som har differentialkvotienten

$$\dot{y} = \ddot{x} + f(x)\dot{x},$$

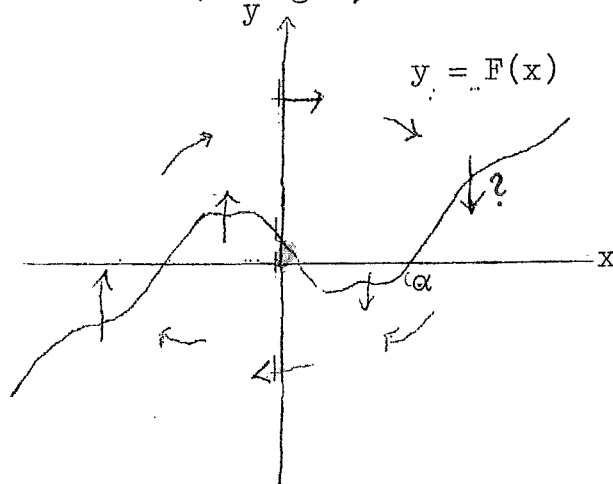
og vi ser da, at ligningen (5) transformeres til ligningssystemet

$$(6) \quad \dot{x} = y - F(x)$$

$$\dot{y} = -g(x), \quad ?$$

som har sit eneste singulære punkt i $(0,0)$. Dette singulære punkt kan i hvert fald ikke være et sadelpunkt, og der er således mulighed for eksistens af periodiske løsninger, hvis bane-
kurve omkredser $(0,0)$.

På figuren har vi antydnet bevægelsesretningerne i hvert af de 4 områder, hvori planen deles af y -aksen og kurven $y = F(x)$. Hastighedsfeltet i (6) er på grund af betingelsen 2) symmetrisk om $(0,0)$.



En banekurve, der starter i et punkt $(0,\beta)$ af y -aksen, hvor $\beta > 0$, vil fortsætte mod højre og nedad. Da $f(x) > \beta$ fra en eller anden værdi at regne, vil banekurven altid nå kurven $y = F(x)$ i løbet af endelig lang tid. Efter passage af $y = F(x)$ fortsætter banekurven nedad og mod venstre. Lige under kurven $y = F(x)$ for $x > 0$ kan vi afgrænse et bælte af varierende positiv bredde, som gennemskæres af de nedadgående løsninger. Til højre for det punkt, hvor $y = F(x)$ antager sin mindste værdi for $x > 0$ vil vi derfor fra et vist tidspunkt have $\dot{x} < -k$, hvor k er et positivt tal. Løsningskurven vil derfor bevæge sig mod venstre under $y = F(x)$ og i hvert fald passere minimumspunktet. Til venstre for dette vil $\dot{x}$ være endnu mindre, og vi kan derfor slutte, at kurven igen når y -aksen, som den rammer i et punkt $(0,-\mu(\beta))$, hvor $\mu(\beta) > 0$. Derved har vi defineret en afbildning $\mu:]0,\infty[\rightarrow]0,\infty[$.

Funktionen μ er strengt voksende. Banekurven fra $(0,\beta)$

til $(0, -\mu(\beta))$ sammen med stykket på y-aksen mellem disse punkter udgør nemlig en Jordankurve, og en banekurve, der starter i $(0, \beta_1)$, hvor $\beta_1 > \beta$, må forløbe i det ydre område, og den rammer y-aksen igen i $(0, -\mu(\beta_1))$, som altså ligger udenfor Jordan kurven. Derfor er $\mu(\beta_1) > \mu(\beta)$.

Lad os nu antage, at løsningen med udgangsværdier $t = 0$, $x = 0$, $y = \beta$ er givet ved

$$x = \varphi(\beta, t), \quad y = \psi(\beta, t),$$

så vi har

$$0 = \varphi(\beta, 0), \quad \beta = \psi(\beta, 0).$$

Idet $t^* = t^*(\beta)$ betegner tidspunktet for den næste passage af y-aksen, har vi

$$0 = \varphi(\beta, t^*), \quad -\mu(\beta) = \psi(\beta, t^*).$$

Idet vi med Γ betegner banekurven fra $(0, \beta)$ til $(0, -\mu(\beta))$, har vi ifølge (6)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x) dy &= - \int_0^{t^*} F(\varphi(\beta, t)) g(\varphi(\beta, t)) dt = \\ &= \int_0^{t^*} \left(\frac{d}{dt} \varphi(\beta, t) \right) \psi(\beta, t) g(\varphi(\beta, t)) dt = \\ &= \int_0^{t^*} g(\varphi(\beta, t)) d\varphi(\beta, t) + \int_0^{t^*} \psi(\beta, t) d\psi(\beta, t). \end{aligned}$$

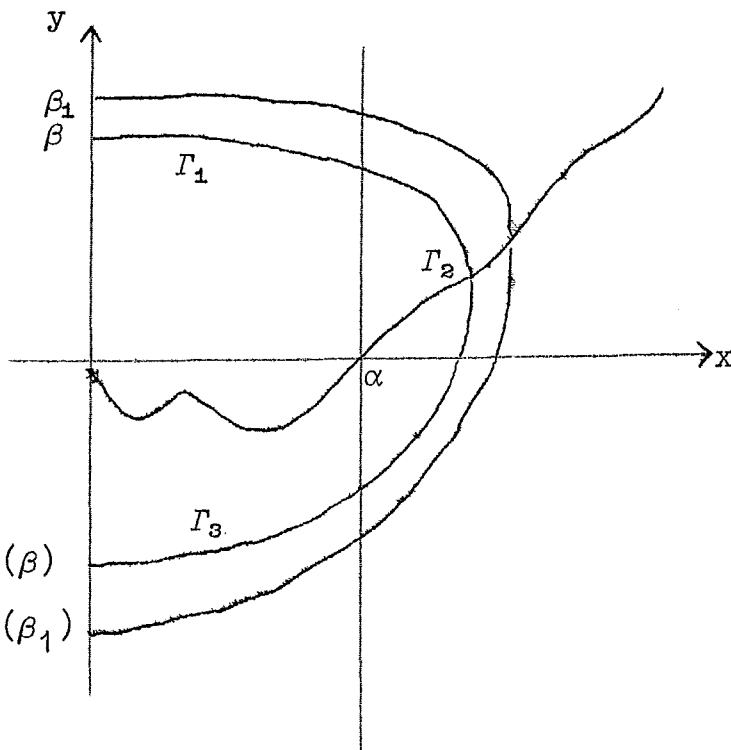
Her bliver det første integral lig med 0, fordi $\varphi(\beta, 0) = \varphi(\beta, t^*) = 0$. Altså får vi

$$(7) \quad \int_{\Gamma} F(x) dy = \left[\frac{1}{2} (\psi(\beta, t))^2 \right]_0^{t^*} = \frac{1}{2} ((\mu(\beta))^2 - \beta^2).$$

Ved udregningen af kurveintegralet kan vi udnytte, at kurven Γ kan fremstilles på formen $x = \gamma(y)$, og deraf følger, at integralet i (7) bliver positivt, hvis $F(x)$ er negativ overalt

langs Γ , altså hvis skæringspunktet mellem Γ og $y = F(x)$ har abscisse $\leq \alpha$. Heraf fremgår, at integralet i (7) er positivt for små, positive værdier af β . Ved at forfølge en banekurve for en løsning fra et punkt på $y = F(x)$ og i den retning, der svarer til aftagende t , ser vi nemlig ved en betragtning, der ganske ligner den tilsvarende ovenfor, at enhver sådan banekurve kommer fra et punkt $(0, \beta)$ med $\beta > 0$.

Vi vil nu nærmere undersøge, hvordan udtrykket (7) varierer, når Γ skærer $y = F(x)$ i et punkt, hvor $x > \alpha$. Ved denne undersøgelse deler vi som antydnet på figuren Γ i stykkerne Γ_1 , Γ_2 og Γ_3 , således at Γ_1 og Γ_3 er de $-\mu(\beta)$ stykker, der ligger mellem $-\mu(\beta_1)$ y-aksen og linien $x = \alpha$.



På stykket Γ_1 kan vi bruge x som variabel, og (6) giver

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y-F(x)},$$

får vi derved

$$\int_{\Gamma_1} F(x) dy = - \int_0^\alpha \frac{F(x)g(x)dx}{y-F(x)},$$

hvor vi i nævneren skal indsætte ligningen $y = h(x)$ for Γ_1 . Ved overgang til løsningen, der starter i $\beta_1 > \beta$, sker der blot en forøgelse af nævneren, som altid er positiv. Da $-F(x)g(x)$ ligeledes er positiv, vil hele udtrykket formindskes. En helt tilsva-

rende overvejelse giver, at integralet langs Γ_3 ligeledes aftager, når β vokser.

Langs den resterende del af integrationsvejen er $F(x) > 0$, og udtrykket i (7) derfor negativt. Ved overgangen fra β til β_1 vokser $F(x)$ for hver enkelt værdi af y , og desuden fås et par nye bidrag, fordi intervallet bliver længere. Bidraget fra denne del af integrationsvejen er altså også aftagende, og det går åbenbart mod $-\infty$ for $\beta \rightarrow \infty$.

Vi har dermed vist, at udtrykket i (7) er positivt for små værdier af β , og at udtrykket fra en værdi af β at regne, for hvilken udtrykket endnu er positivt, er en monotont aftagende funktion, som går mod $-\infty$ for $\beta \rightarrow \infty$.

Vi vil nu vise, at afbildningen μ er kontinuert for værdien β . Vi betragter et vilkårligt tal $\varepsilon \in]0, \mu(\beta_1) - \mu(\beta)[$. Vi kan da forfølge løsningerne fra punkterne $(0, \mu(\beta) + \varepsilon)$ og fra $(0, -\mu(\beta) - \varepsilon)$ i retning af aftagende tid, og da deres banekurver ikke kan skære de fra $(0, \beta)$ og $(0, \beta_1)$ udgående banekurver, vil de ramme y -aksen i punkter $(0, \beta - \delta_1)$ og $(0, \beta + \delta_2)$, hvor δ_1 og δ_2 er positive. På grund af monotoniteten gælder nu

$$\mu(] \beta - \delta_1, \beta + \delta_2 [) \subseteq] \mu(\beta - \delta_1), \mu(\beta + \delta_2) [=] \mu(\beta) - \varepsilon, \mu(\beta) + \varepsilon [,$$

og dermed er kontinuiteten bevist.

Da udtrykket $(\mu(\beta))^2 - \beta^2$ i (7) således er kontinuert, positivt for små β og aftagende fra et β , der endnu svarer til en positiv værdi af udtrykket, medens det er negativt for store værdier af β , kan vi slutte, at betingelsen

$$\mu(\beta) = \beta$$

er opfyldt for netop 1 positiv værdi af β .

Hvis løsningen, som starter i $(0, \beta)$ er periodisk, vil der

på grund af banekurvens symmetri om $(0,0)$ netop gælde $\mu(\beta) = \beta$. Omvendt vil $\mu(\beta) = \beta$ netop sikre, at den integralkurve, der starter i $(0, \beta)$ er periodisk.

Vi har dermed vist eksistensen af netop 1 positivt β_0 , således at løsningen med udgangspunkt $(0, \beta_0)$ er periodisk, og dermed er sætningen endelig bevist.

For $\beta > \beta_0$ gælder $\mu(\beta) < \beta$, og efter et helt omløb er kurven i $\mu(\mu(\beta)) < \beta$, og kurven løber indad i spiral mod den periodiske løsningskurve. For $\beta < \beta_0$ vil løsningskurven løbe udad i spiral.

bemærker vi,
Inden vi forlader problemstillingen, at vi ganske vist har bevist, at alle integralkurver, der starter på y-aksen, går asymptotisk mod den periodiske løsning i indad- eller udadgående spiraler. Det er imidlertid ikke rigtigt, at løsningerne altid går i spiraler, også når man følger dem i retning af aftagende t -værdier. Hvis vi starter på y-aksen og følger banekurven i den nævnte retning, vil det eventuelt indtræffe, at banekurven aldrig når kurven $y = F(x)$, og den bliver da ikke spiralformet.

5.17. Som eksempel på den i sætning 5.16.1 omtalte generaliserede Liénardligning skal vi særlig nævne ligningen

$$(8) \quad \ddot{x} - 2k(1 - qx^2)\dot{x} + h^2x = 0,$$

som opfylder alle betingelserne, hvis de 3 koefficienter alle er positive.

Ligningen (8) kaldes Van der Pol's ligning efter den schweiziske matematiker, som først gennemførte en indgående undersøgelse af den. Van der Pol behandlede ligningen ved ret primitive metoder, idet han ved en grafisk integrationsmetode konstruerede løsningskurverne i faseplanen med tilnærmelse, og derved nåede han netop til den opfattelse, at ligningen har 1 og kun 1 perio-

disk løsning, som alle de andre løsninger går asymptotisk mod.
Det lykkedes ham dog ikke at bevise dette.

Motiveringen for Van der Pol's interesse for ligningen (8) var netop, at ligningen med tilnærmelse beskriver de processer, der foregår i visse former for svingningsgeneratorer.

1. Beviset for, at en Jordankurve deler planen, kan simpliciferes meget væsentligt, når Jordankurven indeholder et liniestykke. Prøv at udføre sådan et simplificeret bevis.
2. Beviset for, at en simpel polygon deler planen, kan udformes simplere på grundlag af følgende idé: Et punkt a , der ikke ligger på polygonen, siges at ligge udenfor eller indenfor polygonen skærer en halvlinie med endepunkt a i et ulige eller lige antal skæringspunkter. Denne definition må selvfølgelig præciseres ganske væsentligt. Vis, at Jordans sætning for polygoner kan bevises lettere på grundlag af der her anførte.
3. Gennemfør et simplere bevis for sætningen om, at en simpel bue ikke deler planen, idet det specielt antages, at buen er differentiabel.
4. Prøv at udføre beviset for, at Jordans sætning gælder for en differentiabel Jordankurve, så enkelt som muligt.
5. Udnyt Jordan's sætning til bevis for, at en Jordankurve ikke kan udfylde et område i planen. Heraf fremgår, at et interval af $\mathbb{R}$ ikke er homeomorft med nogen delmængde af $\mathbb{R}^2$, som har indre punkter. Vis, at et interval af $\mathbb{R}$ heller ikke er isomorft med nogen delmængde af $\mathbb{R}^m$, $m > 2$, som har indre punkter. Disse resultater antyder, at egenskaben "1-dimensional" er topologisk invariant.
6. Det er anskueligt klart, at en kontinuert kurve fra a til b indeholder en delmængde, som er en simpel bue fra a til b . Endvidere kan denne bue vælges således, at dens punkter gennemløbes i samme rækkefølge, som de tilsvarende på den kontinuerte kurve (med forbehold overfor dobbeltpunkter). Prøv at præcisere og vise dette. Det er temmelig svært.

7. Bestem Poincaré index for retningsfeltet

$$\dot{x} = -y(x^2+y^2-1) ; \quad \dot{y} = x(x^2+y^2+1)$$

med hensyn til en kurve, der omkredser en eller flere singulariteter. Sammenfold resultatet med banekurverne for de periodiske løsninger.

8. Lad $P, Q: \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuerte afbildninger, som tilfredsstiller betingelserne

$$P(-x, -y) = P(x, y); \quad Q(-x, -y) = Q(x, y); \quad P(0, 0) = Q(0, 0) = 0.$$

Vis, at differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2pxy + P(x, y)(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= q(x^2-y^2) + Q(x, y)(x^2+y^2), \end{aligned}$$

hvor p og q er reelle tal, ikke har periodiske løsninger, som omkredser $(0, 0)$.

9. Vis, at differentialligningssystemet

$$\dot{x} = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2; \quad \dot{y} = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2,$$

hvor koefficienterne er reelle tal, ikke har periodiske løsninger. Gennemfør først beviset direkte, f.eks. ved at undersøge, om der forekommer rette linier som banekurver for løsningerne. Undersøg dernæst, hvilke værdier Poincaré index for $(\dot{x}, \dot{y})$ med hensyn til en lukket kurve omkring $(0, 0)$ overhovedet kan antage, og udled resultatet heraf.

10. Diskuter spørgsmålet om eksistens af periodiske løsninger til ligningssystemet

$$\dot{x} = x - y - x(x^2+y^2); \quad \dot{y} = x + y - y(x^2+y^2)$$

dels ved topologiske metoder, dels ved eksplicit at løse ligningssystemet.

11. Vis, at der eksisterer et autonomt differentialligningssystem, hvis løsninger som banekurver har koordinataksene,

samt alle kurver, der er ligedan beliggende med kurven med ligningen

$$xy(x^2+y^2-1) + 2(x+y).$$

Hvilken værdi får Poincaré index for det tilsvarende retningsfelt med hensyn til en Jordankurve, der omkredser 0?

12. Vis, at der for $a > 0$, $b > 0$ eksisterer netop 1 periodisk løsning til ligningssystemet

$$\dot{x} = x - y - x\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right); \quad \dot{y} = x + y - y\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

13. Vis, at differentiaalligningen

$$\ddot{x} - a(1-\dot{x}^2)\dot{x} + h^2x = 0$$

for $a > 0$ har 1 og bortset fra parallelforskydning kun 1 periodisk løsning.

Rettelsesblad til T.5.

- 5.2. I linie 4.n. rettes "teori" til topologi".
- 5.8. Påstanden i linie 8.7. f.n. følger af, at i hvert fald den sidste side, der gennemløbes før den sidste passage af dobbeltpunktet, udelades i sin helhed.
- 5.11. Linie 2. f.o. udgår.
Læg godt mærke til ræsonnementet i linie 16-10 f.n. Det er trods sit uskyldige udseende af ganske afgørende betydning for beviset.
Sidst i linie 2 f.n. tilføjes "simpel".
- 5.12. I anden linie i lemma 5.6.3 er nogle ord faldet ud:
Komplementærmængden C består af netop 1 begrænset og 1 ubegrænset komponent og Γ har omløbstal 0 om ...
I linie 5 f.n. rettes C til $C \setminus K$.
- 5.13. Linie 14 f.n. Der skal selvfølgelig stå: "et begrænset og et ubegrænset område".
Linie 8 f.n. Idet vi drager slutningen $I(J_1) \subseteq I(J_2)$, benytter vi, at $\Gamma_2 \subset Y(J_1)$, men det følger af, at Γ_2 er sammenhængende, og at $V \in Y(J_1)$.
- 5.14. Linie 1 f.o. Der skal stå "punkterne af $I(\Gamma)$ ".
Linie 14 f.o. At punkterne af $J_3 \setminus UV$ tilhører $Y(J_4)$ følger af, at $J_3 \setminus UV$ er sammenhængende og ikke har punkter fælles med J_4 , samt at et punkt af $J_3 \setminus UV$ er forbundet med A ved et liniestykke, der ikke har punkter fælles med J_4 .
- 5.19. Den første linie på siden udgår.
- 5.23. Linie 14 f.n. Der skal stå $2\pi n$.
- 5.27. Linie 2.fo. rettes "afhængig" til "uafhængig".

- 5.28. Afsnit 5.14 og 5.15 er ikke eksamensstof.
- 5.31. Linie 10 f.n. Der er et e for meget i Liénard.
- 5.33. Linie 8 f.n. Der skal sættes parentes om $\frac{d}{dt}\varphi(\beta, t)$.
- 5.36. Linie 11 f.o. Ordene "bemærker vi" er faldet ud.

Sætninger om homogene, lineære
differentialligninger af 2. orden.

5A .1. Vi skal i dette kapitel studere løsningerne til en homogen lineær differentialligning

$$(1) \quad A(t) \ddot{x} + B(t) \dot{x} + C(t)x = 0,$$

hvor funktionerne A, B, C er kontinuerte i et interval I , og

og hvor A ikke antager værdien 0.

Fra den almindelige teori for lineære differentialligninger ved vi, at der eksisterer 2 funktioner $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$, således at den fuldstændige løsning til (1) er givet ved

$$(2) \quad x = c_1 \varphi(t) + c_2 \psi(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Løsningsmængden udgør således et vektorrum med φ og ψ som basis. At φ og ψ er lineært uafhængige er ensbetydende med, at Wronski-determinanten

$$(3) \quad W_{\varphi, \psi}(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ D\varphi(t) & D\psi(t) \end{vmatrix}$$

ikke er 0. Da Wronski-determinanten er løsning til

$$A(t) W' + B(t) W = 0$$

gælder

$$- \int \frac{B(t)}{A(t)} dt$$

$$(4) \quad W_{\varphi, \psi}(t) = c e^{\int \frac{B(t)}{A(t)} dt},$$

hvilket medfører, at Wronski-determinanten er identisk 0, hvis den overhovedet antager værdien 0 på intervallet I .

5A.2.. Af (2) følger

$$(5) \quad \dot{x} = c_1 D\varphi(t) + c_2 D\psi(t)$$

Hvis x og $\dot{x}$ bliver 0 for samme værdi af t , giver (2) og (5) for denne værdi af t , at $c_1 = c_2 = 0$, altså at løsningen netop er

er nulløsningen. Hvis en løsning $x = \chi(t)$ bliver 0 for $t = t_0$, vil alle løsninger $x = c \chi(t)$ have den samme egenskab. Da ϕ og ψ ikke har fælles nulpunkter, findes der ikke flere løsninger med nulpunkt i t_0 . Vi sammenfatter dette i en sætning:

5A.2.1. Sætning. Egentlige løsninger til (1) har ingen multiple nulpunkter. Egentlige løsninger med et fælles nulpunkt fremgår af hinanden ved multiplikation med konstant.

5A.3. For den specielle differentiaalligning

$$\ddot{x} + 2k \dot{x} + h^2 x = 0$$

får vi for $|k| > |h|$ den fuldstændige løsning

$$x = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

hvor λ og μ er rødder i ligningen

$$R^2 + 2kR + h^2 = 0.$$

For $|k| < |h|$ har denne ligning komplekse rødder $-k \pm i\gamma$, og differentiaalligningen har da den fuldstændige løsning

$$x = e^{-kt}(c_1 \cos \gamma t + c_2 \sin \gamma t); c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vi ser således, at løsningerne i tilfældet $|k| > |h|$ højst har 1 nulpunkt hver, medens løsningerne for $|k| < |h|$ bliver svingninger, som skifter fortegn uendelig mange gange.

For den almindelige ligning (1) vil det undertiden indtræffe, at løsningerne får karakter af svingninger, idet de hyppigt og mere eller mindre regelmæssigt skifter fortegn. Vi vil i det følgende forsøge at finde kriterier, der gør det muligt ud fra viden om koefficienterne A, B og C at afgøre, om løsninger til (1) har karakter af svingninger, og i bekræftende fald finde vurderingen af intervalllængden mellem på hinanden følgende nulpunkter.

5A.4. Vi vil bringe ligningen (1) på en form, der er mere hensigtsmæssig. Vi sætter (sml. (4))

$$p(t) = e^{v(t)}, \quad p(t) = \frac{C(t)}{A(t)} e^{v(t)},$$

hvor v er en stamfunktion til B/A , altså

$$Dv(t) = \frac{B(t)}{A(t)}.$$

Vi får da, hvis (1) tænkes opfyldt

$$D(p(t)\dot{x}) = p(t)\ddot{x} + p(t)Dv(t)\dot{x} =$$

$$\frac{p(t)}{A(t)} (A(t)\ddot{x} + B(t)\dot{x}) = - \frac{p(t)}{A(t)} C(t)x = -P(t)x,$$

så vi får differentiaalligningen

$$(6) \quad D(p(t)\dot{x}) + P(t)x = 0.$$

Det fremgår også af omregningen, at (6) medfører (1).

Det fremgår af definitionen af funktionen p , at den ikke antager værdien 0.

5A.5. Undertiden kan man med fordel yderligere simplificere (6) ved at indføre

$$(7) \quad u = \int \frac{dt}{p(t)}$$

som en ny uafhængig variabel. Da u afhænger strængt monotont af t , er dette altid muligt.

Af (7) følger

$$p(t) \frac{d}{dt} = \frac{d}{du},$$

så (6) vil efter multiplikation gå over i ligningen

$$(8) \quad \frac{d^2 x}{du^2} + Q(u)x = 0,$$

hvor Q er defineret ved, at

$$(9) \quad Q(u) = p(t)P(t).$$

Da udregningen af integralet i (7) kan volde vanskeligheder, vil vi i det følgende ofte behandle differentiaalligningen på formen (6).

5A.6. Vi vil nu bevise en sætning for løsningerne til (6) i et specielt tilfælde:

5A.6.1. Sætning. Hvis $p(t) > 0$ og $P(t) \leq 0$ for ethvert t indeholdt i I , da har en løsning $x = \varphi(t)$ til (6) højst et nulpunkt i intervallet I , og

ϕ og $D\phi$ vil ikke begge have nulpunkter i I .

Bevis: Da ϕ tilfredsstiller (6), fås

$$D(p(t)\phi(t)D\phi(t)) = p(t)(D\phi(t))^2 - p(t)(\phi(t))^2,$$

hvilket viser, at den ved $p(t)\phi(t)D\phi(t)$ definerede

funktion er monoton. Da ϕ åbenbart ikke kan

være konstant på noget interval, bliver $p(t)$

$\phi(t)D\phi(t)$ endda strengt monoton, og har

derfor højst et nulpunkt i intervallet I . Heraf

følger alle påstande umiddelbart.

5A.7. . Vi skal nu vise en sætning, der kan udnyttes til påvisning af, at en løsning til en differentialligning af formen (6) er svingende:

5A.7.1. Sturms Sammenligningssætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ en strengt positiv differentiabel funktion, og $P_1, P_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlige afbildninger. Lad for $j=1,2$ funktionen ϕ_j være løsning til differentialligningen

$$(10) \quad D(p(t)\dot{x}) + P_j(t)x = 0.$$

Lad a og b være på hinanden følgende nulpunkter

for ϕ_1 i intervallet I . Hvis $P_2(t) \geq P_1(t)$ for alle $t \in$

$[a, b]$, da har ϕ_2 et nulpunkt i $[a, b]$, og *hvorfor er ϕ_2 defineret på $[a, b]$*
hvis P_2 og P_1 ikke er identiske, har ϕ_2 endda et
nulpunkt i $]a, b[$.

Bevis: Vi viser den første påstand ved at vise den med påstanden ækvivalente implikation:

$$(\forall t \in [a, b] (\phi_2(t) \neq 0)) \Rightarrow \exists t \in [a, b] (P_2(t) < P_1(t)).$$

Da vi kan multiplicere hver af løsningerne ϕ_j med en fra 0 forskellig konstant uden at ændre dens nulpunkter, kan vi antage, at ϕ_1 og ϕ_2 er positive på $]a, b[$. Da ϕ_1 og ϕ_2 endvidere tilfredsstiller (10) får vi:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b (P_2(t) - P_1(t)) \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt = \\
& \int_a^b \left(\varphi_2(t) D(p(t) D\varphi_1(t)) - \varphi_1(t) D(p(t) D\varphi_2(t)) \right) dt = \\
& \int_a^b D \left(p(t) (\varphi_2(t) D\varphi_1(t) - \varphi_1(t) D\varphi_2(t)) \right) dt = \\
& p(b) \varphi_2(b) D\varphi_1(b) - p(a) \varphi_2(a) D\varphi_1(a).
\end{aligned}$$

Af antagelserne følger imidlertid

$$\begin{aligned}
p(a) > 0, p(b) > 0, \varphi_2(a) > 0, \varphi_2(b) > 0 & \Bigg| \begin{array}{l} \text{Hvis } \varphi_2 \text{ ikke har nulpunkter i }]a, b[, \\ \text{men eventuelt i } a \text{ eller } b, \end{array} \\
D\varphi_1(a) > 0, D\varphi_1(b) < 0, &
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet, at φ_2 ikke har multiple nulpunkter. Vi har således vist, at

$$(11) \quad \int_a^b (P_2(t) - P_1(t)) \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt < 0,$$

og integranden er derfor ikke ≥ 0 i hele intervallet $[a, b]$. Dermed er den første påstand i sætningen bevist.

Hvis φ_2 ikke har nulpunkter i $]a, b[$, men eventuelt i det ene eller begge endepunkter, fører regningen ovenfor til (11) med $\leq$ i stedet for $<$. Da integranden er ≥ 0 i hele intervallet, kan vi slutte, at integranden er identisk 0, altså at P_1 og P_2 er identiske.

Sætning 5.A.7.1. kan anvendes i det specielle tilfælde, hvor P_1 og P_2 er identiske, og vi får da sætningen:

5.A.7.2. Sætning: Mellem 2 på hinanden følgende nulpunkter for en løsning φ til ligningen (6) ligger netop 1 nulpunkt for hver løsning til (6), som er lineært uafhængig af φ .

5A.8. Vi vil vise endnu en sammenligningssætning, som slutter sig nøje til Sturm's sammenligningssætning:

5A.8.1. Sætning. Hvis vi til forudsætningerne

i sætning 5A.7.1 føjer at $P_2(t) > P_1(t)$ for alle $t \in [a, b]$, samt at φ_1 og φ_2 svarer til samme begyndelsesværdier i et punkt $t_0 \in [a, b]$, altså at:

$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = x_0$, $D\varphi_1(t_0) = D\varphi_2(t_0) = y_0$,
da vil forholdet φ_1/φ_2 være monotont aftagende på $[t_0, b]$, altså også $|\varphi_2(t)| < |\varphi_1(t)|$ for alle $t \in]t_0, b[$.

Bevis. For

$$a \leq t_0 < t_1 \leq b$$

får vi ved at kopiere regningerne i beviset for sætning 5A.7.1 at:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (P_2(t) - P_1(t)) \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt &= \\ \left[P(t) (\varphi_2(t) D\varphi_1(t) - \varphi_1(t) D\varphi_2(t)) \right]_{t_0}^{t_1} &= \\ P(t_1) (\varphi_2(t_1) D\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_1) D\varphi_2(t_1)) &= \\ P(t_1) (\varphi_2(t_1))^2 D \frac{\varphi_1}{\varphi_2}(t_1), \end{aligned}$$

idet indsættelse af nedre grænse i det ubestemte integral giver 0 på grund af udgangsbetingelserne. Vi har således vist, at

$D \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ er positiv i $]t_0, b]$, og dermed er sætningen fuldstændig bevist for $t_0 > a$. For $t_0 = a$ behøver vi blot at bemærke, at φ_1 / φ_2 på grund af l'Hôpital's regel har grænseværdi 1 i a .

5A.9. Hvis en løsning til (6) har svingningskarakter vil dens grafiske billede i almindelighed bestå af en række uensartede bølgetoppe og bølgedale, således at svingamplituden varierer fra udsving til udsving. Imidlertid gælder følgende sætning:

5A.9.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, $p, P: I \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable afbildninger, af hvilke p er positiv, medens P ikke antager værdien 0 på I . Lad φ være en løsning til differentialligningen

$$(12) \quad D(p(t)\dot{x}) + P(t)x = 0,$$

og lad $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ være de punkter af I , hvor φ antager en ekstremumsværdi. Hvis produktet pP er en på I aftagende (voksende) funktion, vil følgen $(|\varphi(t_n)|)$ være voksende (aftagende).

Bevis. Funktionen $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, hvor

$$\Phi(t) = (\varphi(t))^2 + \frac{(p(t)D\varphi(t))^2}{p(t)P(t)}$$

antager i hvert t_n værdien $(\varphi(t_n))^2$, og sætningen vil derfor være bevist, hvis vi viser, at $D\Phi$ og $D(pP)$ altid har modsat fortegn. I det vi erindrer, at φ er en løsning til (12), får vi

$$\begin{aligned} D\Phi(t) &= 2\varphi(t)D\varphi(t) + 2 \frac{D\varphi(t)D(p(t)D\varphi(t))}{P(t)} - \\ &\quad \left(\frac{D\varphi(t)}{P(t)} \right)^2 D(p(t)P(t)) = \\ &\quad - \left(\frac{D\varphi(t)}{P(t)} \right)^2 D(p(t)P(t)), \end{aligned}$$

og dermed er sætningen bevist.

1. Bring Bessels differentialligning

$$t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + (t^2 - n^2)x = 0,$$
 samt hver af differentialligningerne

$$t \ddot{x} - 2p \dot{x} - c^2 tx = 0$$

$$t \ddot{x} + \dot{x} + (t+p)x = 0,$$
 hvor n, c og p er reelle tal, på formen (8).
2. Bring den hypergeometriske differentialligning

$$t(1-t)\ddot{x} + (c-(a+b+1)t)\dot{x} - abx = 0,$$
 hvor a, b og c er reelle tal, på formen (6).
3. Vis, at sætning 5A.6.1 gælder i en skarpere form for differentialligningen (8).
4. Find for n hel og ikke negativ alle løsninger til Bessels differentialligning (opgave nr. 1), der kan udvikles i en potensrække $\sum a_n t^n$.
5. Vis, at enhver af de i (4) fundne egentlige løsninger er positiv og konveks eller negativ og konkav på $[0, n]$.
6. Undersøg dels for $t > 0$ og dels for $t < 0$ om løsningerne til de 2 sidste differentialligninger i opgave nr. 1 har karakter af svingninger.
7. Vis, at afstanden mellem på hinanden følgende nulpunkter for løsninger til Bessels differentialligning konvergerer mod π for $t \rightarrow \infty$.
8. Vis, at de numeriske værdier af en løsning φ til Bessels differentialligning i ekstremumpunkterne for $t > 0$ danner en aftagende følge.

Sturm-Liouville-problemet.

5 B.1. Vi skal også i dette kapitel studere en lineær differentiaalligning af 2. orden, som vi vil tænke os bragt på formen

$$(1) \quad D(p(t)\dot{x}) + P(t)x = 0,$$

hvor p er positiv og kontinuert differentiabel på et interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, medens P er kontinuert på I .

Lad ϕ_1 og ϕ_2 være lineært uafhængige løsninger til (1). Den fuldstændige løsning er da

$$\{c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Et rimeligt randværdiproblem for (1) består i at bestemme en løsning til (1), som i endepunkterne a og b antager givne værdier. Det har imidlertid også ofte interesse at bestemme en løsning, hvis differentialkvotienter i a og b antager givne værdier. Endelig får man undertiden brug for en mellemting mellem 2 problemer. Alle disse problemer er imidlertid specielle tilfælde af det randværdiproblem, der består i at bestemme en løsning ϕ til (1), således at

$$(2) \quad h_1\phi(a) + h_2D\phi(a) = A, \quad k_1\phi(b) + k_2D\phi(b) = B,$$

hvor h_1, h_2, k_1, k_2, A og B er givne reelle tal.

Opgaven er altså at bestemme c_1 og c_2 , således at $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ tilfredsstiller (2), altså således at

$$c_1(\overset{h_1}{\phi_1}(a) + \overset{h_2}{D}\phi_1(a)) + c_2(\overset{h_1}{\phi_2}(a) + \overset{h_2}{D}\phi_2(a)) = A.$$

$$c_1(\phi_1(b) + D\phi_1(b)) + c_2(\phi_2(b) + D\phi_2(b)) = B.$$

Dette ligningssystem vil have 1 og kun 1 løsning, hvis og kun hvis

$$\begin{vmatrix} \phi_1(a) + D\phi_1(a), & \phi_2(a) + D\phi_2(a) \\ \phi_1(b) + D\phi_1(b), & \phi_2(b) + D\phi_2(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hvis denne determinant har værdien 0, er randværdiproblemet (1), (2) kun løseligt for specielle valg af A og B, men det vil da have uendelig mange løsninger. Vi ser, at dette indtræffer, hvis og kun hvis ligning (1) har en egentlig løsning, der tilfredsstiller de homogene randbetingelser

$$(3) \quad h_1 \varphi(a) + h_2 D\varphi(a) = k_1 \varphi(b) + k_2 D\varphi(b) = 0.$$

Det system, der består af differentiaalligningen (1) med randbetingelserne (3) kaldes et Sturm-Liouville-system.

Sturm-Liouville-systemet giver selvfølgelig ikke anledning til vanskeligheder, hvis man kender 2 lineært uafhængige løsninger til (1), men det forekommer selvfølgelig ofte, at løsninger til (1) ikke kan udtrykkes ved elementære funktioner.

5 B.2. Idet vi indfører en ny variabel

$$y = p(t)\dot{x},$$

er differentiaalligningen (1) ensbetydende med differentiaalligningssystemet

$$(4) \quad \dot{x} = \frac{1}{p(t)} y, \quad \dot{y} = -P(t)x,$$

og Sturm-Liouville-problemet er ækvivalent med (4) kombineret med randbetingelserne

$$(5) \quad h_1 \varphi(a) + \frac{h_2}{p(a)} \Psi(a) = k_1 \varphi(b) + \frac{k_2}{p(b)} \Psi(b) = 0,$$

som kræves opfyldt for den søgte løsning (φ, Ψ) til (4).

Vi vil nu indføre polære koordinater i (4), idet vi sætter

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

og den partikulære løsning, der optræder i (5), vil derefter kunne fremstilles på formen

$$\rho = \sigma(t), \quad \theta = \vartheta(t).$$

Ligningerne (4) går nu over i

$$\begin{aligned} \dot{\rho} \cos\theta - \rho \dot{\theta} \sin\theta &= \frac{1}{p(t)} \rho \sin\theta \\ \dot{\rho} \sin\theta + \rho \dot{\theta} \cos\theta &= -P(t)\rho \cos\theta, \end{aligned}$$

og heraf finder vi

$$(6) \quad \rho^{-1} \dot{\rho} = \left(\frac{1}{p(t)} - P(t) \right) \sin \Theta \cos \Theta$$

$$\dot{\Theta} = - \frac{1}{p(t)} \sin^2 \Theta - P(t) \cos^2 \Theta.$$

Vi ser, at løsning af (4) er reduceret til løsning af den sidste af ligningerne (6), samt en integration. I matematik 1 blev det bevist, at løsningen af en lineær differentiaalligning kan reduceres til løsning af en Riccati-ligning og løsning af lineære differentiaalligninger af første orden. Det er dette resultat vi har genfundet i en ny skikkelse.

Randbetingelserne (5) får nu formen

$$\sigma(a) \left(h_1 \cos \vartheta(a) + \frac{h_2}{p(a)} \sin \vartheta(a) \right) = 0$$

$$\sigma(b) \left(k_1 \cos \vartheta(b) + \frac{k_2}{p(b)} \sin \vartheta(b) \right) = 0.$$

Da x og $\dot{x}$ ikke samtidig bliver 0 undtagen for nulløsningen, som vi ikke interesserer os for, kan $\sigma(a)$ og $\sigma(b)$ bortforkortes.

Vi indfører nu reelle tal H, K, α, β , således at

$$h_1 = H \sin \alpha, \quad \frac{h_2}{p(a)} = -H \cos \alpha, \quad k_1 = K \sin \beta, \quad \frac{k_2}{p(b)} = K \cos \beta,$$

og randbetingelserne bliver da

$$\sin(\vartheta(a) - \alpha) = \sin(\vartheta(b) - \beta) = 0.$$

Den sidste af ligningerne (6) ændres ikke, når Θ erstattes med $\Theta + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Randbetingelserne bliver derfor ensbetydende med

$$(7) \quad \vartheta(a) = \alpha, \quad \vartheta(b) = \beta + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

hvor vi kan tænke os α og β valgt i intervallet $[0, \pi[$.

Nu vil begyndelsesbetingelsen $\vartheta(a) = \alpha$ fuldstændig bestemme en løsning til den sidste ligning (6) og en sådan løsning vil altid eksistere. Det vil selvfølgelig kun undtagelsesvis indtræffe, at den således fastlagte løsning tilfredsstiller

den anden betingelse (7) for en eller anden værdi af n . Derfor vil et Sturm-Liouville-system sædvanligvis ikke have egentlige løsninger. Hvis den sidste ligning (6) sammen med randbetingelserne (7) har en løsning, giver den første af ligningerne (6) et tilsvarende $\sigma(t)$, der kun bliver bestemt bortset fra en konstant faktor, og vi får da åbenbart en familie af indbyrdes proportionale løsninger til Sturm-Liouville-systemet.

5 B.3. For ligninger af form som den sidste ligning (6) gælder en sammenligningssætning, som er nær beslægtet med Sturm's sammenligningssætning:

5 B.3.1. Sætning. Lad $p:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være en positiv, differentiabel funktion, lad $P_1, P_2:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuerlige funktioner. Lad for $j = 1, 2$ funktionen $\vartheta_j:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være løsning til

$$\ddot{\Theta} = -\frac{1}{p(t)} \sin^2 \Theta - P_j(t) \cos^2 \Theta.$$

Hvis betingelserne

$$\vartheta_1(a) = \vartheta_2(a), \quad \forall t \in [a,b] \quad (P_1(t) < P_2(t)),$$

da gælder

$$\forall t \in]a,b] \quad (\vartheta_1(t) > \vartheta_2(t)).$$

Bevis. Lad $t_0 \in [a,b]$ være et punkt, hvor $\vartheta_1(t_0) = \vartheta_2(t_0)$.

Nu er

$$\begin{aligned} D\vartheta_1(t) - D\vartheta_2(t) &= \\ (8) \quad \frac{1}{p(t)} &= (\sin^2 \vartheta_2(t) - \sin^2 \vartheta_1(t)) + P_2(t) \cos^2 \vartheta_2(t) - \\ &\quad P_1(t) \cos^2 \vartheta_1(t), \end{aligned}$$

og for $t = t_0$ fås specielt

$$D\vartheta_1(t_0) - D\vartheta_2(t_0) = (P_2(t_0) - P_1(t_0)) \cos^2 \vartheta_1(t_0),$$

og denne størrelse vil være positiv, hvis $\vartheta_1(t_0)$ ikke er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$.

Hvis $\vartheta_1(t_0)$ er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$ får vi, at $D\vartheta_1(t_0) - D\vartheta_2(t_0) = 0$. Ved fornyet differentiation af (8) får vi $D^2\vartheta_1(t_0) - D^2\vartheta_2(t_0) = 0$. Hvis vi differentierer endnu en gang, får vi selvfølgelig et særdeles kompliceret udtryk, men vi kan forudse, at differentiationen af det første led i (8) giver en differens mellem et udtryk, der afhænger af ϑ_1 , $D\vartheta_1$, $D^2\vartheta_1$ og et udtryk, der fås af dette ved at erstatte ϑ_1 med ϑ_2 . For $t = t_0$ vil de 2 udtryk altså antage samme værdi og således have hinanden. I differentialkvotienterne af de sidste led i (8) forsvinder alle led, der indeholder mindst en faktor med en cosinus, for $t = t_0$, hvis $\vartheta_1(t_0)$ er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Altså får vi ganske simpelt

$$D^3\vartheta_1(t_0) - D^3\vartheta_2(t_0) = 2(P_2(t_0) - P_1(t_0))\sin^2\vartheta_1(t_0)(D\vartheta_1(t_0))^2 = 2(P_2(t_0) - P_1(t_0))(D\vartheta_1(t_0))^2.$$

Af selve differentiaalligningen fås nu

$$D\vartheta_1(t_0) = -\frac{1}{p(t_0)} \neq 0$$

og vi kan derfor slutte, at $D^3\vartheta_1(t_0) - D^3\vartheta_2(t_0) > 0$.

I et punkt t_0 , hvor $\vartheta_1(t_0) = \vartheta_2(t_0)$, gælder det altså, at den første fra 0 forskellige differentialkvotient af $\vartheta_1 - \vartheta_2$ er af ulige orden og positiv, og det medfører, at $\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)$ er negativ i et vist åbent interval med t_0 som højre endepunkt og positiv i et vist åbent interval med t_0 som venstre endepunkt. Specielt følger heraf, at uligheden $\vartheta_1(t) > \vartheta_2(t)$ er opfyldt i et vist åbent interval med a som venstre endepunkt. Hvis betingelsen $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(t)$ er opfyldt i et punkt af $[a, b]$, kan vi med t_0 betegne det første nulpunkt for $\vartheta_1 - \vartheta_2$ på $[a, b]$. Funktionen $\vartheta_1 - \vartheta_2$ er da positiv overalt på $[a, t_0[$, men vi har netop bevist, at den er negativ på et vist åbent interval med t_0 som højre endepunkt. Antagelsen om, at $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(t)$ gælder i et punkt

af $[a,b]$ fører således til en modstrid. Da v_1 og v_2 er kontinuerte, har $v_1 - v_2$ konstant fortegn på $[a,b]$. Dermed er sætningen bevist.

5 B.4. Vi har set, at et Sturm-Liouville-system sædvanligvis ikke har egentlige løsninger. Hvis et Sturm-Liouville-system har egentlige løsninger, har det i følge éntydighedssætningen et 1-dimensionalt løsningsrum.

Vi vil nu antage, at funktionen P har formen

$$(9) \quad P = q + \lambda r,$$

hvor q og r er kontinuerte funktioner, medens λ er en reel konstant. Vi vil antage, at r er positiv overalt i det betragtede interval. Det er da rimeligt at vente, at det ved (1), (3) og (9) givne Sturm-Liouville-system vil have løsninger for visse specielt valgte værdier af λ . Disse værdier kaldes Sturm-Liouville-systemets egenværdier, og hvis λ er egenværdi, kaldes systemets løsningsrum det til λ svarende egenfunktionsrum, og enhver egentlig vektor i dette rum kaldes en til λ svarende egenfunktion.

På rummet af kontinuerte funktioner på $[a,b]$ indfører vi et indre produkt, idet vi sætter

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b r(t) f(t) g(t) dt,$$

hvor r er den i (9) optrædende funktion. Det er klart, at vi har regnereglerne

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle.$$

Endvidere er

$$\langle f, f \rangle \geq 0,$$

og her gælder lighedstegnet kun, hvis f er identisk 0. Vi ind-

fører normen

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Af den for vilkårlige reelle tal u, v gyldige ulighed

$$0 \leq \|uf + vg\|^2 = \|f\|^2 u^2 + 2\langle f, g \rangle uv + \|g\|^2 v^2$$

følger, at den kvadratiske form i det sidste udtryk har diskriminant ≤ 0 . Heraf får vi Schwarz's ulighed

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Af relationen

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

følger ved Schwarz's ulighed, at

$$|\|f\| - \|g\|| \leq \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Heraf fremgår, at vi med den indførte norm har organiseret vektorrummet af kontinuerte funktioner på $[a, b]$ som et normeret vektorrum. Det er ikke et Banach-rum, idet det ikke er fuldstændigt.

5 B.5. Den operator, som til en 2 gange kontinuert ^{differentiabel} funktion φ på intervallet $[a, b]$ lader svare den på $[a, b]$ kontinuerte funktion $T\varphi$, som er defineret ved

$$T\varphi(t) = -\frac{1}{r(t)}(D(p(t)D\varphi(t)) + q(t)\varphi(t))$$

vil afbilde den delmængde A af på $[a, b]$ to gange differentiable funktioner, som tilfredsstiller randbetingelserne (3), altså

$$h_1\varphi(a) + h_2D\varphi(a) = k_1\varphi(b) + k_2D\varphi(b) = 0,$$

ind i mængden af på $[a, b]$ kontinuerte funktioner. At λ er egen-værdi for Sturm-Liouville problemet betyder nu, at der eksisterer en 2 gange differentiable funktion φ , som ikke er identisk 0 på $[a, b]$, og som tilfredsstiller ligningen

$$T\varphi(t) = \lambda\varphi(t).$$

Med denne formulering bliver begreberne egen-værdi og egenfunktion specielle tilfælde af egen-værdi og egenvektor for en

lineær operator på et vektorrrum. Vi skal ikke gennemføre undersøgelserne fra dette synspunkt, idet de vil forudsætte mere indgående kendskab til teorien for topologiske vektorrum. Denne teori vil blive behandlet i det andet afsnit af denne forelæsningsrække. Her vil vi indskrænke os til at udlede to fundamentale resultater vedrørende egenværdier og egenfunktioner for et Sturm-Liouville system.

5 B.6. Vi vil først vise en sætning, der generaliserer en kendt sætning fra teorien for endelig-dimensionale vektorrum:

5 B.6.1. Sætning. Hvis φ_1 og φ_2 er egenfunktioner svarende til 2 forskellige egenværdier λ_1, λ_2 for et Sturm-Liouville system, da er $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$. Vi siger, at φ_1 og φ_2 er indbyrdes ortogonale.

Bevis. Ifølge det givne er

$$D(p(t)D\varphi_1(t)) + q(t)\varphi_1(t) = -\lambda_1 r(t)\varphi_1(t)$$

$$D(p(t)D\varphi_2(t)) + q(t)\varphi_2(t) = -\lambda_2 r(t)\varphi_2(t),$$

og heraf fås

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b r(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt &= \\ \int_a^b \left(\varphi_2(t)D(p(t)D\varphi_1(t)) - \varphi_1(t)D(p(t)D\varphi_2(t)) \right) &= \\ \int_a^b D\left(p(t)(\varphi_2(t)D\varphi_1(t) - \varphi_1(t)D\varphi_2(t)) \right) dt &= \\ \left[p(t)(\varphi_2(t)D\varphi_1(t) - \varphi_1(t)D\varphi_2(t)) \right]_a^b. \end{aligned}$$

Da φ_1 og φ_2 tillige tilfredsstiller randbetingelserne, er

$$h_1\varphi_1(a) + h_2D\varphi_1(a) = 0, \quad k_1\varphi_1(b) + k_2D\varphi_1(b) = 0$$

$$h_1\varphi_2(a) + h_2D\varphi_2(a) = 0, \quad k_1\varphi_2(b) + k_2D\varphi_2(b) = 0.$$

Disse ligninger kan opfattes som lineære ligningssystemer med h_1, h_2, k_1 og k_2 som ubekendte. Da såvel de to ligninger i venstre kolonne som de to i højre kolonne har egentlige løs-

ninger, kan vi slutte, at hvert system har determinanten 0, altså, at

$$\varphi_2(a)D\varphi_1(a) - \varphi_1(a)D\varphi_2(a) = \varphi_2(b)D\varphi_1(b) - \varphi_1(b)D\varphi_2(b) = 0.$$

Heraf fremgår, at integralet ovenfor bliver 0, og da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, får vi

$$\int_a^b r(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0,$$

og dermed er sætningen bevist.

5 B.7. Angående mængden af egenverdier for et Sturm-Liouville system har vi følgende sætning:

5 B.7.1. Sætning. Egenverdierne for et Sturm-Liouville system kan ordnes som en strengt voksende følge $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, som divergerer mod ∞ .

Bevis. Vi betragter Sturm-Liouville systemet

$$(10) \quad D(p(t)\dot{x}) + (q(t) + \lambda r(t))x = 0$$

$$h_1\varphi(a) + h_2D\varphi(a) = k_1\varphi(b) + k_2D\varphi(b) = 0,$$

som ved den i 5 B.2 omtalte transformation

$$x = \rho \cos\theta, \quad p(t)\dot{x} = \rho \sin\theta$$

går over i ligningerne

$$(11) \quad \rho^{-1}\rho = \left(\frac{1}{p(t)} - q(t) - \lambda r(t) \right) \sin\theta \cos\theta$$

$$(12) \quad \ddot{\theta} = \frac{1}{p(t)} \sin^2\theta - (q(t) + \lambda r(t))\cos^2\theta$$

med randbetingelserne

$$\vartheta(a) = \alpha, \quad \vartheta(b) = \beta + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

for en løsning $\theta = \vartheta(t)$ til den sidste ligning.

Vi vil nu først antage, at

$$\lambda < \inf_{t \in [a,b]} \frac{-q(t)}{r(t)}.$$

Ligningen

$$(13) \quad \operatorname{tg}^2\theta = p(t)(q(t) + \lambda r(t))$$

vil da med hensyn til Θ have en løsning af formen

$$\Theta = \eta(t), \quad t \in [a, b],$$

hvor $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, og $\eta(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Mængden af nulpunkter i (t, Θ) -planen

for højre side i (12) består

af alle kurverne

$$\Theta = \pm \eta(t) + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En del af dette kurvesystem er indtegnet på figuren. Kurverne deler den ved $a \leq t \leq b$ definerede strimmel i tværgående bælter. Hvert andet af disse bælter er positivitetsområde for Θ og indeholder et rektangel defineret ved en ulighed af formen

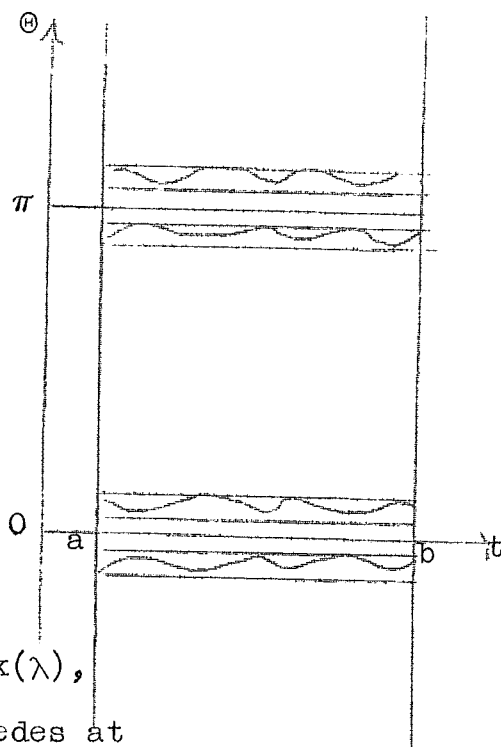
$$(14) \quad a \leq t \leq b, \quad |\Theta - (2n+1)\frac{\pi}{2}| \leq k(\lambda),$$

hvor $k(\lambda)$ ifølge (13) kan vælges, således at

$$k(\lambda) \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ for } \lambda \rightarrow -\infty,$$

og positivitetsbælterne for Θ vil således for $\lambda \rightarrow \infty$ efterhånden opsluge hele strimlen undtagen liniestykkerne, hvor Θ er et heltalligt multiplum af π . De øvrige bælter er negativitetsområder for Θ , og hver af dem indeholder et rektangelformet bælte tværs over strimlen omkring de punkter, hvor Θ er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$.

Vi betragter nu en løsning $\Theta = \vartheta(t)$ med $\vartheta(a) = \alpha$. Hvis λ blot er lille nok, kan vi åbenbart være sikker på, at linien $\Theta = \alpha$ skærer gennem et af de ovenfor omtalte rektangler, der ligger i et positivitetsbælte eller i et negativitetsbælte, og løsningen $\Theta = \vartheta(t)$ vil da aldrig kunne nå ind i et af de rektang-



ler, der ligger i et af nabobælterne.

For $\alpha = 0$ starter løsningen i et negativitetsbælte og er derfor først aftagende. Derfor vil $\vartheta(b)$ altid blive negativ. Det bliver derfor nødvendigt at kræve, at $\beta + n\pi \in]-\pi, 0[$. Men så kan vi finde et Λ_1 , således at linien $\Theta = \beta + n\pi$ for $\lambda \leq \Lambda_1$ skærer gennem rektanglet i den tilgrænsede positivitetsstrimmel. Nu kan løsningen imidlertid ikke nå ind i dette rektangel. På grund af periodiciteten i Θ gælder ræsonnementet med samme Λ_1 , når α er et vilkårligt heltalligt multiplum af π .

Hvis $\alpha \in]0, \pi[$ kan vi vælge Λ_2 , således at linien $\Theta = \alpha$ for $\lambda \leq \Lambda_2$ skærer gennem rektanglet i positivitetsbæltet omkring $\Theta = \frac{\pi}{2}$. For løsningen gælder da altid $\vartheta(b) \in]\alpha, \pi[$. For $\beta + n\pi \in]\alpha, \pi[$ kan vi imidlertid vælge Λ_3 således at vi i hele rektanglet $[a, b] \times [\alpha, \beta + n\pi]$ for $\lambda \leq \Lambda_3$ har uligheden

$$|\Theta| > \frac{\beta + n\pi - \alpha}{b - a},$$

for løsningen $\Theta = \vartheta(t)$ med $\vartheta(a) = \alpha$, $\vartheta(b) = \beta + n\pi$ giver middelværdisætningen, at der eksisterer et $t_1 \in]a, b[$ med

$$D\vartheta(t_1) = \frac{\beta + n\pi - \alpha}{b - a}.$$

En løsning med disse egenskaber eksisterer altså ikke for $\lambda \leq \Lambda_3$.

Det vil altså under alle omstændigheder gælde for Sturm-Liouville systemet, at der eksisterer et Λ_0 , så systemet ikke har løsninger for $\lambda \leq \Lambda_0$.

Vi burde egentlig have betegnet den ovenfor betragtede løsning med $\Theta = \vartheta(\lambda, t)$, da den tillige afhænger af λ . I det følgende kommer vi til at benytte, at løsningen $\Theta = \vartheta(\lambda, t)$ er kontinuert som funktion af begge de to variable. Vi vil udskyde beviset for denne påstand til et senere tidspunkt og først af-

slutte beviset for sætning 5 B.7.1.

Vi betragter nu løsningen $\Theta = \vartheta(\lambda, t)$ svarende til udgangsværdien

$$\vartheta(\lambda, a) = \alpha.$$

Vi vælger nu $k, K, \Lambda \in \mathbb{R}$, således at

$$\frac{1}{p(t)} \geq k > 0, \quad q(t) + \lambda r(t) \geq K > 0 \text{ for } \lambda \geq \Lambda, \quad t \in [a, b],$$

og vi har da for løsning $\Theta = \vartheta(\lambda, t)$, at

$$\dot{\Theta} \leq -k \sin^2 \Theta - K \cos^2 \Theta.$$

Vi vil løse differentialligningen

$$\dot{\Theta} = -k \sin^2 \Theta - K \cos^2 \Theta.$$

Vi sætter $\operatorname{tg} \Theta = u$ og får

$$\dot{u} = -ku^2 - K,$$

som har løsningen

$$t = - \int_{\operatorname{tg} \alpha}^u \frac{dv}{K+k v^2} = \sqrt{\frac{1}{Kk}} \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{k}{K}} \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{k}{K}} u \right),$$

så (15) får løsningen

$$\Theta = \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{K}{k}} \operatorname{tg} \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{k}{K}} \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{(Kk)t} \right),$$

idet vi dog bemærker, at løsningsmetoden forudsætter, at Θ ikke er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Dette stemmer med, at den fundne løsningsfunktion ikke er defineret, når

$$\operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{k}{K}} \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{(Kk)t}$$

er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Det ses umiddelbart, at Θ springer $-\pi$ hver gang t passerer en af de kritiske værdier. Det ses endvidere, at intervallerne mellem på hinanden følgende kritiske værdier har længden $\pi/\sqrt{(Kk)}$. Endvidere er løsningen monotont aftagende. Efter korrektion for springene vil løsningen således aftage med mindst

$$\left[\frac{(b-a)\sqrt{(Kk)}}{\pi} \right] \pi,$$

hvor den firkantede parentes betegner det største hele tal, som er mindre eller lig tallet i parentes. Heraf følger nu ved sammenligning, at

$$\vartheta(\lambda, b) \rightarrow -\infty \text{ for } \lambda \rightarrow -\infty.$$

Af sammenligningssætningen 5 B.3.1 følger, at $\vartheta(\lambda, b)$ er en aftagende funktion af λ . Da den tillige er kontinuert, kan vi slutte, at der eksisterer en diskret følge af værdier $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, således at $\vartheta(\lambda, b)$ netop for disse værdier bliver lig med $\beta + n\pi$ for passende valgt n . Dermed er sætningen bevist.

5 B.8. Vi mangler endnu at vise, at løsningen $\vartheta(\lambda, t)$ er kontinuert som funktion af to variable. Dette følger imidlertid af, at differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -\frac{1}{p(t)} \sin^2 \Theta - (q(t) + z r(t)) \cos^2 \Theta \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}$$

har løsningen $\Theta = \vartheta(\lambda, t)$, $z = \lambda$ svarende til udgangsværdierne $\vartheta(a) = \alpha$, $\zeta(a) = \lambda$, og vi ved, at løsningen til et differentialligningssystem afhænger kontinuert af begyndelsesværdierne.

Partielle differentiaalligninger af første orden.

6.1. Den helt simple partielle differentiaalligning

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

hvor $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er en overalt kontinuert funktion, har åbenbart den fuldstændige løsning

$$(2) \quad z = \int f(x, y) dx + c(y),$$

hvor $c(y)$ er en arbitrær funktion.

Vi må altså vente, at den fuldstændige løsning til en partiel differentiaalligning indeholder én eller flere arbitrære funktioner. Ved fastlæggelse af en partikulær løsning må man altså bestemme disse funktioner, og begyndelsesværdi- og randværdiproblemer vil derfor ofte frembyde alvorlige vanskeligheder. Undertiden er man i den situation, at en kendt fuldstændig løsning til en partiel differentiaalligning slet ikke er egnet som grundlag for løsning af et randværdiproblem.

6.2. En anden ejendommelighed er, at den arbitrære funktion $c(y)$ ikke behøver at være differentiabel og endda ikke at være kontinuert. Dette fænomen har en vis sammenhæng med begyndelsesværdiproblemet for (1).

Lad $x = \alpha(s)$, $y = \beta(s)$, $s \in [a, b]$ være parameterfremstilling for en differentiabel kurve k i (x, y) -planen, idet s er buelængden på kurven, således at

$$(D\alpha(s))^2 + (D\beta(s))^2 = 1.$$

Lad $\phi : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Vi kan da spørge om ligningen (1) har en løsning $z = \phi(x, y)$, som tilfredsstiller betingelsen $\phi(\alpha(s), \beta(s)) = \phi(s)$ for $s \in [a, b]$. Dette vil være et typisk begyndelsesværdiproblem for ligningen (1).

Nu viser (2), at kendskab til løsningen i 1 punktet (x_0, y_0) fastlægger løsningen fuldstændigt på hele linien $y = y_0$, idet indsættelse af de kendte begyndelsesværdier i (2) giver en ligning til bestemmelse af $c(y_0)$. Hvert punkt af k bestemmer således løsningen langs en ret linie parallel med x -aksen. Hvis en ret linie parallel med x -aksen skærer k i mere end 1 punkt, får vi flere bestemmelser af løsningen langs denne rette linie, og disse vil sædvanligvis ikke stemme overens. En éntydig fastlæggelse af en partikulær løsning får vi således kun, hvis begyndelsesværdier er givet langs en kurve, som har netop 1 skæringspunkt med hver ret linie parallel med x -aksen.

Et randværdi- eller begyndelsesværdiproblem for en partiel differentialligning eller et system af sådanne siges at være korrekt stillet, hvis det har netop 1 løsning for alle valg af rand- eller begyndelsesværdierne, således at forstå, at systemet af kurver, langs hvilke disse er opgivet, samt selv betydningen af rand- og begyndelsesværdierne holdes fast. Det viser sig netop at være en hovedvanskelighed, at man sædvanligvis ikke på forhånd kan afgøre, om et forelagt problem er korrekt stillet. Mere forbavsende er det, at praktiske problemer undertiden fører til randværdiproblemer, der ikke er korrekt stillede.

Vore overvejelser har også gjort klart, at de rette linier parallelle med x -aksen spiller en særlig rolle for differential- ligningen (1), idet ligningen åbenbart løses langs hver af disse rette linier for sig, og til gengæld kan man altså netop langs disse rette linier ikke fastlægge randværdier helt vilkårligt.

6.3. Vi skal nu vise, hvorledes ovenstående betragtninger overføres til den almindeligere ligning

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n a_k(\underline{x}) \frac{\partial y}{\partial x_k} = b(\underline{x}, y),$$

hvor b er en afbildning af et område $O \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ind i $\mathbb{R}$, medens $a_1, \dots, a_n$ er afbildninger af projektionen O' af O på det n -dimensionale $\underline{x}$ -underrum ind i $\mathbb{R}$. Vi vil antage, at $a_1, \dots, a_n$ og b tilfredsstiller en Lipschitz betingelse.

Det autonome differentiaalligningssystem

$$(4) \quad \dot{x}_1 = a_1(\underline{x}), \dots, \dot{x}_n = a_n(\underline{x}), \dot{y} = b(\underline{x}, y)$$

har for hvert sæt $(t^0, \underline{x}^0, y^0)$ af begyndelsesværdier i O netop 1 løsning, og da det tilsvarende gælder for det ligningssystem i O' , der fås ved at stryge den sidste ligning i (4), vil projektionen ned i O' af banekurven for den omtalte løsning netop give banekurven for løsningen med begyndelsesværdier $(t^0, \underline{x}^0)$ til systemet

$$(5) \quad \dot{x}_1 = a_1(\underline{x}), \dots, \dot{x}_n = a_n(\underline{x}).$$

Gennem hvert punkt af O går netop 1 (eventuelt udartet) banekurve for en løsning til (4), og gennem hvert punkt af O' går ligeledes netop 1 (eventuelt udartet) banekurve for en løsning til (5). De således definerede banekurver i O kaldes karakteristikker for differentiaalligningen (3), og deres projektioner på O' kaldes projicerede karakteristikker for (3).

Lad nu

$$x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$$

være en karakteristik for (3) gennem et punkt $(\underline{x}^0, y^0) \in O$, hvor $a_1(\underline{x}^0), \dots, a_n(\underline{x}^0)$ ikke alle forsvinder. For ethvert $t \in [a, b]$ har vi nu

$$D\varphi_k(t) = a_k(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), k = 1, \dots, n,$$

$$D\psi(t) = b(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \psi(t)).$$

Lad nu $y = f(\underline{x})$ være en vilkårlig funktion, som er differentiable i en omegn af $\underline{x}^0$ og tilfredsstiller $y^0 = f(\underline{x}^0)$. Vi har da

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \sum_{k=1}^n D_k f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) D\varphi_k(t) =$$

$$\sum_{k=1}^n a_k(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) D_k f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

hvilket blot udtrykker den velkendte kendsgerning, at udtrykket på venstre side i (3) er en retningsdifferentialkvotient med hensyn til det ikke normerede talsæt $(a_1(\underline{x}), \dots, a_n(\underline{x}))$.

Det følger, at $y = f(\underline{x})$ tilfredsstiller (3) i alle punkter af banekurven for $x_1 = \varphi_1(\underline{x}), \dots, x_n = \varphi_n(\underline{x})$, hvis og kun hvis

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = b(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))),$$

hvilket netop udtrykker, at

$$x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), y = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

tilfredsstiller ligningen

$$\dot{y} = b(\underline{x}, y).$$

Da ligningen (4) har netop 1 løsning med begyndelsesværdierne $(t^0, \underline{x}^0, y^0)$, følger heraf, at

$$f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \psi(t).$$

Vi har dermed bevist følgende sætning.

6.3.1. Sætning. Hvis en løsningsmangfoldighed $y = f(\underline{x})$ til ligningen (3) indeholder et punkt af en karakteristik, indeholder den hele karakteristikken.

6.4. For en differentiabel afbildning $f : O' \text{ ind i } K$, hvor O' har samme betydning som i 6.3 har vi differentialet

$$df(\underline{x}, d\underline{x}) = \sum_{k=1}^n D_k f(\underline{x}) dx_k,$$

og for $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ har vi

$$\left[\frac{d}{dt} f(\underline{x} + \underline{a}t) \right]_{t=0} = \sum_{k=1}^n a_k D_k f(\underline{x}) = df(\underline{x}, \underline{a}),$$

så ligningen (3) kan skrives på formen

$$(6) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x} + \underline{a}(\underline{x})t) \right]_{t=0} = b(\underline{x}, y),$$

hvor $\underline{a}(\underline{x}) = (a_1(\underline{x}), \dots, a_n(\underline{x}))$, og hvor f er den ubekendte funktion.

Det bemærkes, at udtrykket på venstre side i (6) kan eksistere, selv om f ikke har partielle differentialkvotienter. På den anden side kan f eventuelt have partielle differentialkvotienter med hensyn til alle de variable, uden at udtrykket (6) eksisterer. Hvis f er differentiabel, stemmer (6) altid overens med (3). Hvis den partielle differentiaalligning stammer fra et eller andet problem i anvendt matematik, vil den ofte være opstået netop på formen (6), og det vil da være urimeligt at forlange, at løsningsfunktionen skal have partielle differentialkvotienter. Resultatet i 6.3 giver da umiddelbart følgende sætning.

6.4.1. Sætning. Den ved $y = f(\underline{x})$ bestemte mangfoldighed er løsning til (6), hvis og kun hvis den kan frembringes af en skare af karakteristikker.

6.5. Lad os antage, at vi har fundet den fuldstændige løsning til (4) på formen

(7) $x_k = \varphi_k(t-t_0, c_1, \dots, c_n)$, $k = 1, \dots, n$; $y = \psi(t-t_0, c_1, \dots, c_n)$, idet (4) er autonomt. Vi tænkes os efter elimination af $t-t_0$ i ligningssystemet (7) dette ligningssystem løst på formen

$$c_k = c_k(\underline{x}, y), \quad k = 1, \dots, n,$$

og vi får da en $n-1$ -dobbelt mangfoldighed af karakteristikker, altså en løsning, ved at kræve en ligning tilfredsstillet af $c_1, \dots, c_n$. Vi får derfor den fuldstændige løsning på formen

$$\Phi(c_1(\underline{x}, y), \dots, c_n(\underline{x}, y)) = 0,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion.

Det er klart, at den her omtalte proces frembyder væsentlige

vanskeligheder, og at man ikke kan regne med, at eliminationsprocesserne kan gennemføres, uden at løsninger går tabt eller der indføres fremmede løsninger.

6.6. Et begyndelsesværdiproblem løses ganske enkelt, idet hvert sæt af de givne begyndelsesværdier er udgangspunkt for en karakteristik, og foreningsmængden af disse karakteristikker skal ligge på løsningsmangfoldigheden. De krav, som derved stilles til løsningen kan selvfølgelig være modstridende, ligesom det også kan indtræffe, at de ikke fastlægger løsningen fuldstændigt.

6.7. Vi vil illustrere ovenstående undersøgelser med nogle simple eksempler. Først vil vi undersøge ligningen

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

hvis karakteristikker bestemmes af

$$\dot{x} = x, \dot{y} = y, \dot{z} = z,$$

som har den almindelige løsning

$$x = c_1 e^t, y = c_2 e^t, z = c_3 e^t.$$

Vi ser, at karakteristikkerne og derfor også de projicerede karakteristikker er halvlinier ud fra $\underline{0}$. For $c_1 \neq 0$ kan vi skrive karakteristikkerne på formen

$$x = e^{t-t_0}, y = c_2 e^{t-t_0}, z = c_3 e^{t-t_0},$$

så vi får den fuldstændige løsning på formen

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion. Dermed har vi dog tabt de dele af løsninger, hvor $x = 0$ gælder. Vi kan imidlertid skrive den fuldstændige løsning på formen

$$z = \Psi(x, y),$$

hvor Ψ er homogen af grad 1.

For at konstruere en løsning, som er konstant lig med 1 på

enhedscirklen, benytter vi udgangsværdierne

$$t = 0, x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 1,$$

som giver

$$c_1 = \cos\theta, c_2 = \sin\theta, c_3 = 1,$$

så vi får parameterfremstillingen

$$x = e^t \cos\theta, y = e^t \sin\theta, z = e^t.$$

Ved elimination af t og θ får vi den søgte partikulære løsning

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Hvis vi vil bestemme en løsning, der er konstant lig 1 for $x = 1$, må vi benytte udgangsværdierne

$$t = 0, x = 1, y = u, z = 1,$$

som giver

$$c_1 = 1, c_2 = u, c_3 = 1,$$

så vi får parameterfremstillingen

$$x = e^t, y = ue^t, z = e^t.$$

Heraf følger imidlertid $x > 0$, så løsningen fastlægges kun i en halvplan. Ved elimination af t og u får vi iøvrigt den simple løsningsfunktion $\overset{z}{y} = x$.

Hvis vi vil bestemme en løsning, der er konstant lig 1 for $|x| + |y| = 1$, kan vi benytte udgangsværdierne

$$t = 0, x = u, y = \pm(1 - |u|), z = 1, u \in [-1, 1]$$

hvor begge fortegn skal benyttes. Vi får

$$c_1 = u, c_2 = \pm(1 - |u|), c_3 = 1,$$

som giver parameterfremstillingen

$$x = ue^t, y = \pm(1 - |u|)e^t, z = e^t,$$

som giver løsningen

$$z = |x| + |y|.$$

Vi lægger mærke til, at singulariteterne på kurven $|x| + |y| = 1$

breder sig langs karakteristikkene ud over den partikulære løsning. Derfor bliver denne heller ikke differentiablel på koordinataksene.

For differentialligningen

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

bliver karakteristikkernes differentialligningen

$$\dot{x} = x, \dot{y} = -y, \dot{z} = z,$$

og karakteristikkene bliver

$$x = c_1 e^t, y = c_2 e^{-t}, z = c_3 e^t.$$

Familien af banekurver for karakteristikker, der ikke er parallelle med z-aksen, er givet ved

$$xy = C_1, z = C_2 x,$$

og vi får differentialligningens almindelige løsning ved at sætte $C_2 = \Phi(C_1)$, hvor Φ er en arbitrær funktion, altså

$$z = x\Phi(xy).$$

En partikulær løsning, som er identisk 1 for $y = x$ og for $y = -x$ fås ved at benytte udgangsværdierne

$$t = 0, x = u, y = \pm u, z = 1,$$

som giver

$$c_1 = u, c_2 = \pm u, c_3 = 1,$$

så vi får parameterfremstillingen

$$x = u e^t, y = \pm u e^{-t}, z = e^t,$$

som giver

$$z\sqrt{|y|} = \sqrt{|x|},$$

altså

$$z = \sqrt{\frac{|x|}{|y|}}, y \neq 0.$$

Vi ser, at løsningen bliver singulær på y-aksen, hvilket hænger sammen med, at O er singulært punkt for differentiallig-

ningssystemet for de projicerede karakteristikker. Derved bliver den til $x = y = 0$ svarende karakteristik i den partikulære løsning en lodret linie, som derfor vil savnes i løsningsfladen skrevet på formen $z = \Phi(x, y)$.

6.8. Den generellere differentiaalligning

$$(8) \quad \sum_{k=1}^n a_k(\underline{x}, y) \frac{\partial y}{\partial x_k} = b(\underline{x}, y),$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b$ er afbildninger af et område $0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ind i $\mathbb{R}$, er åbenbart ækvivalent med ligningssystemet

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k(\underline{x}, x_{n+1}) \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0,$$

$$y = x_{n+1},$$

hvor $a_{n+1} = -b$, og det er derfor ikke nødvendigt at gennemføre en særlig teori for denne ligning.

Det skal dog bemærkes, at de metoder, vi gennemgik i 6.3-5 uden videre kan anvendes uændret. Der er blot en væsentlig forskel, som vi skal omtale mere udførligt, selv om den ikke influerer på selve løsningsmetoden.

For det i 6.3-5 behandlede tilfælde gjaldt, at enhver løsningsmangfoldighed frembragtes af karakteristikker, hvis projektioner på $\mathbb{E}$ -rummet var løsningerne til ligningssystemet (5) og derfor nøjagtigt det samme kurvesystem for alle løsningsmangfoldighederne.

For ligningen (8) bestemmes karakteristikkerne af differentiaalligningssystemet

$$\dot{x}_1 = a_1(\underline{x}, y), \dots, \dot{x}_n = a_n(\underline{x}, y), \dot{y} = b(\underline{x}, y),$$

og vi får ikke noget til (5) analogt system til bestemmelse af projicerede karakteristikker. Derimod vil en partikulær løsning

$y = f(\underline{x})$ være frembragt af en familie af karakteristikker, og disses projektioner på $\underline{x}$ -rummet vil være løsninger til differentialligningssystemet

$$\dot{x}_1 = a_1(\underline{x}, f(\underline{x})), \dots, \dot{x}_n = a_n(\underline{x}, f(\underline{x})),$$

men dette system afhænger på væsentlig måde af den partikulære løsning f .

For ligningen (3) gælder det, at man kan forudsige, om et begyndelsesværdiproblem er korrekt stillet, ved at studere de projicerede karakteristikkens forløb i forhold til de mangfoldigheder, på hvilke begyndelsesværdier er givet, og det vil derfor ikke afhænge af selve begyndelsesværdierne, om problemet er korrekt stillet eller ikke. Denne behagelige situation foreligger ikke for ligningen (8).

Vi skelner mellem de 2 situationer, idet vi vil kalde ligningen (3) lineær, medens vi vil kalde (8) quasilineær.

6.9. Som eksempel betragter vi ligningen

$$(9) \quad z \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

hvis karakteristikker har differentialligningssystemet

$$\dot{x} = z, \dot{y} = 1, \dot{z} = 0$$

med den fuldstændige løsning

$$(10) \quad x = a + ct, y = t + b, z = c.$$

Her kan vi tænkes os begyndelsestidspunktet valgt, således at $b = 0$, og ligningerne giver da

$$a = x - yz, c = z,$$

og den fuldstændige løsning til (9) kan derfor skrives på den implicite form

$$\Phi(x - yz, z) = 0,$$

hvor Φ er en arbitrær funktion.

Vi bemærker, at karakteristikkerne (10) er rette linier, og

at enhver ret linie i (x,y) -planen, som ikke er parallel med x -aksen, er en projiceret karakteristik.

For udgangsværdierne

$$t = 0, y = 0, x = u, z = -u$$

får vi af (10), at

$$a = u, b = 0, c = -u,$$

hvilket giver

$$x = u(1 - t), y = t, z = -u$$

eller

$$z = -\frac{x}{1-y}.$$

De projicerede karakteristikker er de rette linier

$$x = u(1 - y),$$

som alle går gennem $(0,1)$. Ingen karakteristik passerer punkter $(x,1)$ med $x \neq 0$. Dette stemmer med, at løsningen ikke kan fortsættes forbi linien $y = 1$.

For udgangsværdierne

$$t = 0, y = 0, x = u, z = -u^2$$

får vi

$$a = u, b = 0, c = -u^2,$$

hvilket giver

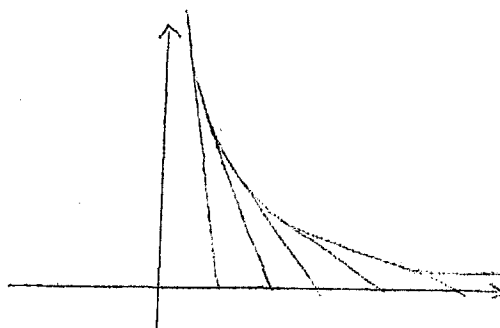
$$x = u(1 - ut), y = t, z = -u^2.$$

Ved elimination af t og u fås heraf den søgte partikulære løsning

$$z = \frac{-2x^2}{1 - 2xy + \sqrt{1 - 4xy}}.$$

Vi ser, at løsningen eksisterer i det område, der indeholder $(0,0)$ og har derved $2xy = 1$ definerede hyperbel som rand. De projicerede karakteristikker er netop y -aksen samt denne hyperbels tangenter.

Vi har antydnet på figuren, hvorledes de projicerede karakteristikker dækker området under hyperbelgrenen i første kvadrant. De kommer slet ikke op over hyperbelgrenen, og ved forlængelse ud over røringspunkterne vil karakteristikkerne skære hinanden.



6.10 Vi vil nu gå over til at betragte en generel partiel differentiaalligning af første orden, idet vi dog for nemheds skyld vil indskrænke os til det forholdsvis simple tilfælde, hvor den ubekendte funktion afhænger af 2 variable. Vi betragter et område D i det 5-dimensionale (x,y,z,p,q) -rum, samt en differentiable afbildning

$$F : D \text{ ind i } \mathbb{R}.$$

Vi vil da forsøge at løse den partielle differentiaalligning

$$(11) \quad F(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0,$$

altså at bestemme funktionen $z = f(x,y)$, således at $x,y,z = f(x,y)$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ identisk giver $F(x,y,z,p,q) = 0$.

Lad os nu antage, at vi ønsker at løse et begyndelsesværdiproblem, idet vi har givet en differentiable kurve

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a,b]$$

samt funktionsværdier $z = \chi(t)$ langs denne kurve. Lad $z = f(x,y)$ være en løsning til dette problem. Vi har da

$$\chi(t) = f(\varphi(t), \psi(t)),$$

og vi kender derfor differentialkvotienten

$$D\chi(t) = \frac{\partial z}{\partial x} D\varphi + \frac{\partial z}{\partial y} D\psi$$

Kendskab til begyndelsesværdier langs en kurve giver såle-

des mulighed for bestemmelse af en linearkombination af $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$, altså en retningsdifferentiel kvotient i hvert punkt af kurven. Ligningen (11) giver en anden ligning mellem $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$, og vi har således ligningssystemet

$$(12) \quad \begin{aligned} p D \varphi + q D \psi &= D \chi(t) \\ F(x, y, z, p, q) &= 0 \end{aligned}$$

til bestemmelse af $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ og $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Hvis funktionaldeterminanten

$$(13) \quad \begin{vmatrix} D\varphi & D\psi \\ D_p F & D_q F \end{vmatrix}$$

for ligningssystemet (12) er forskellig fra 0 i et punkt, vil en løsning til (12) kunne fortsættes i en omegn af punktet og være differentiabel i en sådan omegn.

Nu viser funktionaldeterminanten (13), at det i ethvert punkt (x, y, z, p, q) , hvor $(D_p F, D_q F) \neq (0, 0)$ er muligt at vælge en retning, således at determinanten (13) forsvinder, hvis og kun hvis kurven (φ, ψ) går i den valgte retning eller den modsatte. For hvert (x, y, z, p, q) eksisterer der derfor en særlig udmærket retning i (x, y) -planen bestemt ved

$$(14) \quad \dot{x} = D_p F, \quad \dot{y} = D_q F.$$

For en given løsning $z = f(x, y)$ til (11) er (14) et autonomt differentiaalligningssystem i definitionsområdet for f , når $z = f(x, y)$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ indsættes i højre side. Løsningerne til (14) kaldes de til løsningen $z = f(x, y)$ svarende projicerede karakteristikker.

Ved differentiation af $z = f(x, y)$ får vi, idet $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, at

$$\dot{z} = p D_p F + q D_q F,$$

hvor vi har udnyttet 14. Endvidere er

$$(15) \quad \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial x} D_p F + \frac{\partial p}{\partial y} D_q F, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x} D_p F + \frac{\partial q}{\partial y} D_q F,$$

hvor p og q tænkes udtrykt ved x og y . Idet z , p og q udtrykt ved x og y tilfredsstiller ligningen $F(x, y, z, p, q) = 0$ identisk, får vi ved differentiation

$$(16) \quad \begin{aligned} D_x F + p D_z F + \frac{\partial p}{\partial x} D_p F + \frac{\partial q}{\partial x} D_q F &= 0 \\ D_y F + q D_z F + \frac{\partial p}{\partial y} D_p F + \frac{\partial q}{\partial y} D_q F &= 0. \end{aligned}$$

Hvis løsningen f er 2 gange differentiabel, har vi desuden

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

og hvis vi udnytter dette til at eliminere differentialkvotienten af q fra den første og differentialkvotienten af p fra den sidste af ligningerne (16), kan da resulterende ligninger udnyttes til elimination af differentialkvotienterne af p og q på højre siderne i (15). Derved får vi

$$\dot{p} = -D_x F - p D_z F, \quad \dot{q} = -D_y F - q D_z F.$$

Vi ser således, at x, y, z, p, q som funktioner af parameteren i den projicerede karakteristik tilfredsstiller differentiaalligningssystemet

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= D_p F, \quad \dot{y} = D_q F, \quad \dot{z} = p D_p F + q D_q F, \\ \dot{p} &= -D_x F - p D_z F, \quad \dot{q} = -D_y F - q D_z F. \end{aligned}$$

Dette er et autonomt differentiaalligningssystem i området D i det 5-dimensionale rum. Dets løsningskurver kaldes karakteristikk for differentiaalligningen (11). Det fremgår af ovenstående regninger, at en vilkårlig løsning $z = F(x, y)$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ til (11) kan frembringes af en skare af karakteristikk.

6.11. Lad os nu på den anden side betragte en skare af karakteristikk, som vi tænker os givet på formen

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= X(t, u), \quad y = Y(t, u), \quad z = Z(t, u), \quad p = P(t, u), \\ q &= Q(t, u) \end{aligned}$$

hvor (t,u) gennemløber et område i $\mathbb{R}^2$, og hvor funktionerne for hvert fast u er løsninger til (17). Vi betragter en omegn af et punkt, hvor funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)}$ ikke er 0, og hvor t og u derfor kan elimineres mellem de 3 første af relationerne (18), hvilket giver en fremstilling

$$z = f(x,y).$$

Vi må nu yderligere antage, at karakteristikkene (18) starter i punkter, hvor betingelsen $F(x,y,z,p,q) = 0$ er opfyldt.

Af

$$\frac{d}{dt} F(x,y,z,p,q) = \dot{x} D_x F + \dot{y} D_y F + \dot{z} D_z F + \dot{p} D_p F + \dot{q} D_q F$$

fås ved indsættelse af (17), at

$$\frac{d}{dt} F(x,y,z,p,q) = 0,$$

hvilket viser, at F er konstant langs karakteristikkene. Da hver karakteristik starter i et punkt, hvor $F = 0$, har vi således

$$F(x,y,z,p,q) = 0.$$

For at vise, at $z = f(x,y)$ er en løsning til (11) skal vi nu blot vise, at $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ og $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Nu er

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u},$$

og da $\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} \neq 0$, bestemmer disse ligninger $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ éntydigt.

Påstanden vil derfor være bevist, når det lykkes at vise, at

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Differentialkvotienterne i den første af disse ligninger er netop $\dot{z}, \dot{x}$ og $\dot{y}$ fra (17) og indsættelse af disse værdier giver umiddelbart, at ligningen er opfyldt.

Den anden ligning giver ved differentiation med hensyn til t , at

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \\
& \frac{\partial \dot{z}}{\partial u} - p \frac{\partial \dot{x}}{\partial u} - q \frac{\partial \dot{y}}{\partial u} - \dot{p} \frac{\partial x}{\partial u} - \dot{q} \frac{\partial y}{\partial u} = \\
& \frac{\partial}{\partial u} (p D_p F + q D_q F) - p \frac{\partial}{\partial u} D_p F - q \frac{\partial}{\partial u} D_q F + \\
& (D_x F + p D_z F) \frac{\partial x}{\partial u} + (D_y F + q D_z F) \frac{\partial y}{\partial u} = \\
& \frac{\partial x}{\partial u} D_x F + \frac{\partial y}{\partial u} D_y F + \frac{\partial z}{\partial u} D_z F + \frac{\partial p}{\partial u} D_p F + \frac{\partial q}{\partial u} D_q F \\
& - \left(\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right) D_z F = \\
& \frac{\partial F}{\partial u} - \left(\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right) D_z F,
\end{aligned}$$

idet vi har indsat værdierne fra (17). Som funktion af t og u er F imidlertid identisk med 0, og vi får derfor differentialligningen

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right) = - \left(\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} \right) D_z F.$$

Vi tænker os nu, at alle karakteristikkene for $t = 0$ starter ud fra givne udgangsværdier x, y, z . De tilsvarende p og q må da vælges, således at $F(x, y, z, p, q) = 0$ og desuden således at retningskoefficienten langs udgangskurven har den rigtige værdi, hvilket kræver, at

$$\frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \quad \text{i punktet } t=0$$

og løsningen til (19) bliver da nulløsningen. $\therefore \frac{\partial z}{\partial u} - p \frac{\partial x}{\partial u} - q \frac{\partial y}{\partial u} = 0$ for alle t .

Vi kan sammenfatte de opnåede resultater på følgende måde:

Enhver løsning til (11) kan frembringes af karakteristikker. Hvis der langs en kurve $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ foreligger udgangsværdier for z, p, q , således at

$$\underline{F(x, y, z, p, q) = 0}, \quad \underline{\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}},$$

da vil de karakteristikker, som starter i disse udgangspunkter, frembringe en løsning til (11), forudsat, at kurven $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ ikke rører de projicerede karakteristikker.

6.12. Som et simpelt eksempel til illustration af ovenstående overvejelser vil vi studere differentialligningen

$$(20) \quad p^2 + q^2 - z = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ligningerne (17) til bestemmelse af karakteristikkene bliver i dette tilfælde

$$(21) \quad \dot{x} = 2p, \quad \dot{y} = 2q, \quad \dot{z} = 2(p^2 + q^2), \quad \dot{p} = p, \quad \dot{q} = q.$$

Da relationen $z = p^2 + q^2$ vides at være opfyldt langs karakteristikkene, kan vi spare at løse den midterste ligning. Vi bestemmer først p og q , derefter x og y . Karakteristikkene bliver derefter

$$(22) \quad x = 2c_1 e^t + c_3, \quad y = 2c_2 e^t + c_4, \quad z = (c_1^2 + c_2^2) e^{2t}, \\ p = c_1 e^t, \quad q = c_2 e^t.$$

Ved at "snyde" for løsning af den midterste ligning (21) har vi fået en integrationskonstant mindre end der optræder i den fuldstændige løsning til (21). Derfor har vi heller ikke fundet alle karakteristikkene, men undersøgelserne ovenfor viste jo også, at udgangsværdierne for x, y, z, p og q måtte tilfredsstille visse relationer, og derfor er det kun en del af karakteristikkene, der kan optræde i løsninger til (20).

Hvis vi har givet udgangsværdierne

$t = 0, x = x_0(u), y = y_0(u), z = z_0(u), p = p_0(u), q = q_0(u)$, ser vi ved differentiation langs den ved $x = x_0(u), y = y_0(u)$ bestemte kurve, at

$$(23) \quad Dz_0(u) = p_0(u) Dx_0(u) + q_0(u) Dy_0(u),$$

og (20) medfører desuden, at

$$(24) \quad z_0(u) = p_0(u)^2 + q_0(u)^2.$$

Når udgangsværdierne er valgt i overensstemmelse med disse betingelser, får vi en skare af karakteristikker bestemt ved

$$(25) \quad x = x_0(u) + 2p_0(u)(e^t - 1), \quad y = y_0(u) + 2q_0(u)(e^t - 1), \\ z = z_0(u)e^{2t}, \quad p = p_0(u)e^t, \quad q = q_0(u)e^t.$$

Ligningerne (23), (24) og (25) er en slags parameterfremstilling for den fuldstændige løsning til (20). Det må dog bemærkes, at flere sæt udgangsværdier giver samme løsning.

For udgangsværdierne

$$x_0(u) = \cos u, \quad y_0(u) = \sin u, \quad z_0(u) = \frac{1}{4}$$

får vi (23) og (24) opfyldt ved at vælge

$$p_0(u) = \frac{1}{2} \cos u, \quad q_0(u) = \frac{1}{2} \sin u,$$

og vi får følgende parameterfremstilling for løsningen

$$x = e^t \cos u, \quad y = e^t \sin u, \quad z = \frac{1}{4} e^{2t},$$

og ved elimination af t og u får vi

$$z = \frac{1}{4} (x^2 + y^2).$$

I overensstemmelse med netop denne løsning er også udgangsværdierne

$x_0(u) = 0, y_0(u) = u, z_0(u) = \frac{1}{4} u^2, p_0(u) = 0, q_0(u) = \frac{1}{2} u,$
men parameterfremstillingen (25) giver i dette tilfælde

$$x = 0, \quad y = u e^t, \quad z = \frac{1}{4} u^2 e^{2t},$$

og alle disse kurver falder sammen. Dette skyldes selvfølgelig, at vi har været så uheldige at vælge udgangsværdierne langs en karakteristik.

Til udgangsværdierne

$$x_0(u) = 0, \quad y_0(u) = u, \quad z_0(u) = \frac{1}{8} u^2, \quad p_0(u) = q_0(u) = \frac{1}{4} u,$$

som er i overensstemmelse med (23) og (24), svarer parameterfremstillingen

$$x = \frac{1}{2} u(e^t - 1), \quad y = \frac{1}{2} u(e^t + 1), \quad z = \frac{1}{8} u^2 e^{2t}$$

for løsningen

$$z = \frac{1}{8} (x + y)^2.$$

Vi understreger, at regningerne er forløbet tilfredsstillende udelukkende, fordi vi har valgt særlig venlige udgangsværdier. I almindelighed vil den praktiske udførelse af regningerne frembyde

uoverstigelige praktiske vanskeligheder. Det gælder derfor, at partielle differentiaalligninger i praksis næsten altid må behandles ved numerisk tilnærmelsesmetode. Imidlertid er karakteristikmetoden anvendelig også til numerisk regning, idet man regner i skridt langs karakteristikkerne ved hjælp af de metoder, der benyttes til løsning af systemer af sædvanlige differentiaalligninger.

1. Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 2xyz.$$

Angiv også det fuldstændige system af karakteristikker. Undersøg, om der eksisterer én eller flere løsninger, som på y-aksen stemmer overens med funktionen $z = y^2$.

2. Samme spørgsmål for differentiaalligningen

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + zx \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

3. Undersøg, om differentiaalligningen

$$(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-x) \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

har en partikulær løsning, som er konstant = 1 på randen af det ved $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ bestemte kvadrat.

4. Bestem karakteristikkerne for den partielle differentiaalligning

$$-y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Har differentiaalligningen en løsning, som er kontinuert i hele $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

5. Undersøg, om differentiaalligningen

$$(1+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1-z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

har løsninger, som forsvinder identisk på y-aksen.

6. Bestem karakteristikkerne for differentiaalligningen

$$pq - xy = 0$$

og bestem en løsning, som på y-aksen stemmer overens med funktionen $z = y$.

7. Find en løsning til differentiaalligningen

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

svarende til udgangsværdierne $z = 1$ for $y = -x$. I hvilken del af planen er løsningen fastlagt ved disse betingelser.

8. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cos y + \frac{\partial z}{\partial y} \sin x = 0.$$

9. Bestem en løsning til differentiaalligningen

$$x(x^2+3y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + y(3x^2+y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z(x^2+y^2),$$

som på cirklen $x^2+y^2 = r^2$ har den konstante værdi a .

10. Bestem en løsning til differentiaalligningen

$$(1-z)p + (1+z)q,$$

som for ethvert y i punktet $(0,y)$ antager værdien y .

11. Bestem en flade, som indeholder den ved

$$y + z = 5, \quad x^2 - z^2 = 9$$

bestemte hyperbel, og som i ethvert punkt, i omegnen af hvilket fladen kan fremstilles på formen $z = f(x,y)$, tilfredsstiller differentiaalligningen

$$p - 4xzq = 2x.$$

(Det er enklest først at bestemme den fuldstændige løsning og dernæst at vælge den arbitrære funktion, så løsningens ligning tilfredsstilles af punkterne på hyperblen).

12. Undersøg, om differentiaalligningen

$$p^2 + q + z + x = 0$$

har en løsning, som forsvinder identisk på den rette linie

med ligningen $x = y$.

13. Undersøg, om differentialligningen

$$pq + xp + yq - z = 0$$

har en løsning, som er konstant = 1 på enhedscirklen.

Klassifikation af partielle
differentialligninger af anden orden.

7.1. Vi vil i dette kapitel studere den partielle differentialligning

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = g,$$

hvor a, b, c og g i det almindeligste tilfælde kan afhænge af $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$. For enkelheds skyld vil vi systematisk anvende forkortelserne

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Vi må derfor huske, at vi ikke må anvende t som kurveparameter i det følgende.

7.2. Ligningen (1) er en differentialligning af anden orden. Den kaldes lineær, hvis a, b og c kun afhænger af x og y , medens g er af første grad i $z, \frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Det er rimeligt at vente, at der kræves væsentlig flere betingelser til fastlæggelse af en partikulær løsning til (1), end det var tilfældet for ligningen af første orden. Ud fra en sammenligning med teorien for sædvanlige differentialligninger er det rimeligt at vente, at kendskab til en løsning og dennes partielle differentialkvotienter af første orden i punkter af en kurve "sædvanligvis" vil være tilstrækkeligt til at fastlægge løsningen i nærheden af kurven. Denne problemstilling er et typisk begyndelsesværdiproblem eller Cauchy-problem for differentialligningen.

Man kunne også tænke sig at erstatte kendskabet til differentialkvotienterne af løsningen med kendskab til selve løsningens værdier langs en anden kurve. Specielt skal nævnes den situation, hvor selve løsningens værdier er kendt langs en Jordankurve, og

der søges en løsning til ligningen i området indenfor kurven og med de givne randværdier. Dette er et typisk randværdiproblem eller Dirichlet-problem.

I første omgang er Cauchy-problemet af lokal natur, medens Dirichlet-problemet er globalt. Vi vil derfor i første omgang koncentrere os om Cauchy-problemet for ligningen (1).

7.3. I overensstemmelse med det anførte program, vil vi tænke os, at koefficienterne til (1) er differentiable funktioner i et område D i (x, y, z, p, q) -rummet, og at vi i dette område har givet begyndelsesværdier

(2) $x = \xi(u)$, $y = \eta(u)$, $z = \zeta(u)$, $p = \pi(u)$, $q = \kappa(u)$, $u \in [\alpha, \beta]$, hvor alle funktionerne antages differentiable, og hvor den ved (ξ, η) bestemte kurve i (x, y) -planen er en differentiablel Jordanbue.

Lad $z = f(x, y)$ være en løsning til (1) svarende til de anførte begyndelsesværdier. Ved at differentiere denne løsning langs kurven (2) får vi relationen

$$(3) \quad D\zeta(u) = \pi(u)D\xi(u) + \kappa(u)D\eta(u),$$

som altså må kræves opfyldt, hvis en løsning med de givne begyndelsesværdier skal eksistere.

Vi vil nu undersøge, om vi på grundlag af det givne kan bestemme

$$r = \rho(u), \quad s = \sigma(u), \quad t = \tau(u)$$

langs kurven. Ved differentiation langs kurven af p og q får vi

$$D\pi(u) = \rho(u)D\xi(u) + \sigma(u)D\eta(u)$$

$$D\kappa(u) = \sigma(u)D\xi(u) + \tau(u)D\eta(u),$$

og da r , s og t desuden skal tilfredsstille (1), ser vi, at r , s og t i punkterne af kurven (2) tilfredsstiller ligningssystemet

$$(4) \quad \begin{aligned} D\xi r + D\eta s &= 0 \quad D\eta(u) \\ D\xi s + D\eta t &= 0 \quad D\eta(u) \\ ar + 2bs + ct &= g, \end{aligned}$$

som vil bestemme r , s , t éntydigt, såfremt determinanten ikke er 0.

Determinanten for (4) har værdien

$$c(D\xi)^2 - 2bD\xi D\eta + a(D\eta)^2,$$

og differentiaalligningen

$$(5) \quad cdx^2 - 2b dx dy + ady^2 = 0$$

bestemmer således de værdisæt $(D\xi, D\eta)$, for hvilke begyndelsesværdierne ikke kan fastlægge r , s og t éntydigt

Løsningerne til (5) vil således for den givne løsning $z = f(x, y)$ være de kurver, for hvilke det gælder, at løsningen $z = f(x, y)$ ikke kan fastlægges ved begyndelsesværdier langs nogen del af disse kurver.

I overensstemmelse med teorien for partielle differentiaalligninger af 1. orden kaldes løsningskurverne til (5) de til løsningen $z = f(x, y)$ svarende projicerede karakteristikker.

Hvis a , b og c kun afhænger af x og y , er (5) en differentiaalligning til bestemmelse af de projicerede karakteristikker, uden at en løsning til (1) tages i betragtning. I dette tilfælde bliver systemet af projicerede karakteristikker uafhængigt af løsningen $z = f(x, y)$.

Nu er (5) af anden grad i (dx, dy) , og den vil derfor give 2 reelle eller komplekse, eventuelt sammenfaldende tangentretninger for karakteristikkerne. Dette giver anledning til en klassifikation efter skemaet:

reelle rødder	hyperbolsk
sammenfaldende rødder	parabolsk
komplekse rødder	elliptisk .

Således vil vi f.eks. sige, at differentiaalligningen (1) med hensyn til løsningen $z = f(x, y)$ er elliptisk i punktet (x_0, y_0) , hvis

(5) har komplekse rødder i dette punkt, når $z = f(x,y)$ og dens partielle differentialkvotienter af første orden indsættes i ligningens koefficienter. Vi vil sige, at (1) er elliptisk i en punktmængde, hvis den er elliptisk i ethvert punkt af mængden.

Den sædvanlige situation for en partiel differentiaalligning af formen (1) er, at (x,y) -planen for en løsning $z = f(x,y)$ til (1) indeholder en eller flere kurver, hvor ligningen er parabolisk, og at disse kurver inddeler planen i områder, hvor ligningen er elliptisk, og områder, hvor ligningen er hyperbolisk. Hvis a , b og c kun afhænger af x og y bliver den omtalte inddeling af planen ens for alle løsninger.

7.4. Det er sædvanligvis kun den reelle teori for partielle differentiaalligninger, der har interesse, og derfor får karakteristikerne ingen betydning i det elliptiske tilfælde. Til gengæld er de et ganske afgørende hjælpemiddel for de hyperbolske differentiaalligninger.

Næsten alle hidtil gennemførte mere dybtgående undersøgelser over partielle differentiaalligninger behandler kun de 3 tilfælde hver for sig, og det generelle tilfælde, hvor alle 3 muligheder optræder samtidigt, frembyder overordentlig store vanskeligheder.

Manglen på karakteristikker i det elliptiske tilfælde bevirker, at dette tilfælde må behandles ved helt andre metoder. Det viser sig imidlertid, at også løsningsmængden selv er af helt forskellig karakter i de tre tilfælde. Vi vil illustrere dette ved en diskussion af det simpleste tilfælde, nemlig ligningen

$$(6) \quad ax + 2by + cz = 0,$$

hvor a , b og c er konstanter.

Det er nærliggende i dette tilfælde at benytte en lineær substitution

$$x_1 = \alpha x + \beta y$$

$$y_1 = \gamma x + \delta y,$$

som giver

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha \frac{\partial z}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial z}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \beta \frac{\partial z}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial z}{\partial y_1}.$$

Idet (r, s, t) ved substitutionen overføres i (r_1, s_1, t_1) , får vi ved fornyet differentiation

$$r = \alpha^2 r_1 + 2\alpha\gamma s_1 + \gamma^2 t_1$$

$$s = \alpha\beta r_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma) s_1 + \gamma\delta t_1$$

$$t = \beta^2 r_1 + 2\beta\delta s_1 + \delta^2 t_1,$$

så vi ser, at ligningen (6) går over i en ligning, hvis koefficienter (a_1, b_1, c_1) bestemmes ved matrixligningen

$$\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b \\ b & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Bmatrix}.$$

Hvis vi vælger den lineære substitution ortogonal, kan vi bringe ligningen på diagonalform. Da vi her blot skal vælge substitutionen ikke singular, kan vi endda opnå, at diagonalledene har en af værdierne $+1, -1, 0$. Vi får derfor følgende 3 tilfælde at betragte

$$\text{ellipsetilfældet } r+t = 0$$

$$\text{parabeltilfældet } r = 0$$

$$\text{hyperbeltilfældet } r-t = 0 \text{ eller } s = 0.$$

Her har vi udeladt indices på r, s og t . Formen $s = 0$ i hyperbeltilfældet fås som bekendt af formen $r-t = 0$ ved at dreje koordinatsystemet en vinkel $\frac{\pi}{4}$.

7.5. I hyperbeltilfældet er det lettest at behandle ligningen på formen $s = 0$. En integration giver

$$p = \varphi_1(x),$$

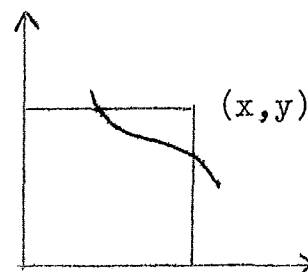
hvor φ_1 er en arbitrær funktion. En fornyet integration giver

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

hvor φ er en stamfunktion til φ_1 , medens ψ er en ny arbitrær funktion. Det er klart, at vi dermed har fundet den fuldstændige løsning til differentiaalligningen.

Karakteristikkernes differentiaalligning (5) viser, at karakteristikkene i det foreliggende tilfælde netop er de akseparallelle rette linier.

Lad os nu tænke os, at vi har opgivet udsagnsværdierne (2), hvor den ved (ξ, η) bestemte Jordanbue, hverken har lodrette eller vandrette tangenter. Den løsning, som



svarer til de søgte udgangsværdier er givet ved $z = \varphi(x) + \psi(y)$, og vi har differentialkvotienterne

$$p(x) = D\varphi(x), \quad q(y) = D\psi(y),$$

som hver kun afhænger af 1 variabel. Her kan $p(x)$ og $q(y)$ bestemmes ved løsning af $x = \xi(u)$ og $y = \eta(u)$ med hensyn til u og indsættelse af resultaterne i $p = \pi(u)$, $q = \kappa(u)$. Hvis vi vælger φ og ψ som vilkårlige stamfunktioner til p og q , har vi derefter

$$z = \varphi(x) + \psi(y) + k,$$

hvor k er en konstant, hvis værdi fastlægges, når en af begyndelsesværdierne for z indsættes. Det kunne her se ud, som om opgaven var overbestemt, men de givne udgangsværdier for p og q er bundet ved betingelsen (3), og det er let at se, at denne betingelse sikrer, at værdien for k ikke afhænger af, hvilken af de givne udgangsværdier man benytter.

7.6. Den hyperboliske differentiaalligning

$$(7) \quad r-t = 0$$

har den fuldstændige løsning

$$(8) \quad z = \varphi(x+y) + \psi(x-y),$$

hvor φ og ψ er arbitrære funktioner. Karakteristikkerne er rette linier parallelle med halveringslinierne til vinklerne mellem koordinataksene.

Vi vil nu søge at bestemme en løsning til (7), som for $y = 0$ reduceres til

$$(9) \quad f(x, 0) = \zeta(x)$$

hvor ζ er en given funktion. Vi må da have

$$(10) \quad \pi(x) = D\zeta(x),$$

men vi kan endnu opgive begyndelsesværdier for q . Vi vil vælge

$$(11) \quad \kappa(x) = kD\zeta(x),$$

hvor k er en konstant.

Ved at indsætte den almindelige løsning (8) i udgangsbetingelserne (10) og (11) får vi

$$D\varphi(x) + D\psi(x) = D\zeta(x), \quad D\varphi(x) - D\psi(x) = kD\zeta(x),$$

altså

$$D\varphi(x) = \frac{1}{2}(1+k)D\zeta(x), \quad D\psi(x) = \frac{1}{2}(1-k)D\zeta(x),$$

og ved integration og sammenligning med udgangsbetingelsen (9) får vi derefter

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(1+k)\zeta(x), \quad \psi(x) = \frac{1}{2}(1-k)\zeta(x),$$

og endelig

$$(12) \quad z = \frac{1}{2}(1+k)\zeta(x+y) + \frac{1}{2}(1-k)\zeta(x-y).$$

Det første led i dette udtryk er for fast y identisk med funktionen (9) multipliceret med en konstant faktor og forskudt stykket y til venstre. Tilsvarende gælder for det andet led, men forskydningen går her mod højre. Hvis y opfattes som tiden, vil de to funktioner i (12) opfattet som funktioner af rumkoordinaten x simpelthen forskydes med hastighed 1 til hver sin side. En funktion af formen $f(x-\lambda t)$, hvor t er tiden, kaldes en bølge,

og λ er dens bølgehastighed. For et lodret snit gennem en vandoverflade med bølger vil overfladens bevægelse netop kunne beskrives på denne måde. I anvendelserne vil det åbenbart være nødvendigt at arbejde med generellere bølger, der afhænger af 2 eller 3 rumkoordinater.

Vi skal fremhæve, at den fundne løsning har en mening, selv om funktionen ζ ikke er differentiabel, men det er da nødvendigt at fortolke selve begrebet "løsning" på en egnet måde. I nyere tid har indførelsen af generaliserede funktioner (Laurent Schwartz's distributioner), som altid er vilkårlig ofte differentiable, skaffet vanskelighederne i forbindelse med de ikke differentiable løsninger af vejen på en særdeles elegant måde.

Det skal endvidere fremhæves, at (12) viser, at begyndelsesværdierne svarende til $x \in]a, b[$ bestemmer løsningen éntydigt inden for kvadratet med intervallet $]a, b[$ som diagonal. Dette kan "populært" forklares ved, at bølgehastigheden er 1, og virkningen af begyndelsesværdier uden for $]a, b[$ kan derfor ikke nå ind i kvadratet.

7.7. Vi vil nu gå over til en nærmere undersøgelse af den elliptiske differentiaalligning

$$(13) \quad r + t = 0.$$

Lad $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ være en løsning til (13). For

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gælder da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\partial q}{\partial y},$$

hvilket viser, at

$$-qdx + pdy$$

er en lukket differentialform, og hvis vi antager, at D er en-

kelt sammenhængende, har denne differentialform en stamfunktion $g(x,y)$. Vi sætter nu

$$z = x + iy, \quad F(z) = f(x,y) + ig(x,y),$$

$$u = f(x,y), \quad v = g(x,y),$$

og vi har da

$$(14) \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Hvis vi nu antager, at p og q er kontinuerte, ser vi, at F er en analytisk funktion, idet (14) netop er Cauchy-Riemann's differential ligninger.

Lad nu omvendt $F:D$ ind i $\mathbb{C}$ være en analytisk funktion. Vi kan da skrive

$$u + iv = F(z) = f(x,y) + ig(x,y),$$

og Cauchy-Riemann's differential ligninger giver da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da f og g er vilkårlig ofte differentiable, får vi ved differentiation af den første ligning med hensyn til x og den anden med hensyn til y , og addition af de fremkomne ligninger, at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Af disse overvejelser kan vi slutte, at mængden af 1 gang kontinuert differentiable løsninger til (13) er identisk med mængden af analytiske funktioner.

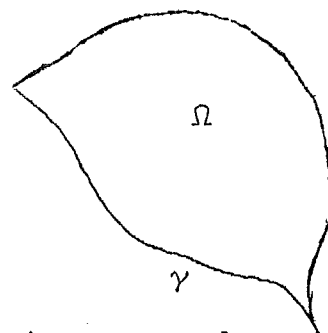
Specielt kan vi slutte, at en løsning til (13), som er 1 gang kontinuert differentiabel er vilkårlig ofte differentiabel. Den er endda en analytisk funktion af 2 reelle variable.

7.8. Lad nu f_1 og f_2 være løsninger til (13) i et enkelt sammenhængende område D . Der eksisterer da analytiske funktioner F_1 og F_2 på D , således at $f_1 = \operatorname{Re} F_1$ og $f_2 = \operatorname{Re} F_2$.

Lad os nu envidere antage, at f_1 og f_2 er identiske på et delområde $D_1 \subset D$. Af Cauchy-Riemann's differential ligninger føl-

ger da, at $F_2 - F_1$ er en ren imaginær konstant på området D_1 , og identitetssætningen for analytiske funktioner medfører derefter, at det samme gælder i hele D , men deraf følger, at realdelene af F_1 og F_2 , altså f_1 og f_2 , er identiske på hele D .

Lad os nu antage, at vi ud fra kendskab til begyndelsesværdier langs en kurve γ har bestemt en løsning til (13) i et tilgrænsende område Ω som antydnet på figurerne. Hvis vi nu ændrer begyndelsesbetingelserne på en bue af γ , vil løsningerne ændres i nærheden af denne bue, men ifølge ræsonnementet ovenfor kan den ændrede løsning ikke være identisk med den gamle i noget delområde af Ω .



Vi er således i den kedelige situation, at begyndelsesværdierne på ethvert lille stykke af den kurve, hvor begyndelsesværdierne er givet, effektivt influerer på løsningen i hele dens definitionsområde. Dette betyder, at bestemmelsen af en partikulær løsning principielt bliver et globalt problem, og det er derfor rimeligt at vente, at behandlingen af elliptiske differentialligninger frembyder ganske betydelige vanskeligheder. For ligningen (13) gælder det dog, at de analytiske funktioner er et effektivt hjælpemiddel, som overvinder mange af vanskelighederne.

Den omstændighed, at en lokalændring af en løsning omgående gør sin indflydelse gældende i hele løsningens definitionsområde, viser, at der ikke kan være tale om fænomener med endelig udbredelseshastighed. Derimod finder elliptiske differentialligninger anvendelse til beskrivelse af stationære fænomener i rummet.

7.9. Vi mangler endnu at diskutere den paraboliske differentialligning $r = 0$, men dette tilfælde er så trivielt, at vi ikke

vil spille tid på det. Vi skal senere diskutere en noget mere general parabolisk differentialligning.

1. Bestem de områder, hvor differentiaalligningen

$$2y^2 r + 4xs + xt = 0$$

er elliptisk, og de områder, hvor den er hyperbolsk.

2. Differentiaalligningen

$$pr + qt = 0$$

har åbenbart løsningen $z = xy$. Bestem de til denne løsning svarende familier af karakteristikker.

3. Bestem den fuldstændige løsning til den paraboliske differentiaalligning

$$r + 2s + t = z.$$

4. Bestem den fuldstændige løsning til den hyperbolske differentiaalligning

$$s = p + q - z$$

og undersøg, om ligningen har en eller flere løsninger, som er konstante lig 1 på koordinataksene.

5. Bestem den løsning $z = f(x, y)$ til differentiaalligningen

$$r - t = 0,$$

i den ved $|x| \leq 1$, $y \geq 0$ bestemte punktmængde, som for $y = 0$, $|x| \leq 1$ tilfredsstiller

$$f(x, 0) = 1 - |x|, \quad D_y f(x, 0) = 0,$$

og som desuden opfylder betingelserne

$$f(-1, y) = f(1, y) = 0$$

for alle $y > 0$.

Tegn det grafiske billede af løsningen for forskellige faste værdier af x og prøv at fortolke løsningen som en sum af to bølgebevægelser (y opfattes som tiden), der tilbagekastes fra endepunkterne af intervallet $[-1, 1]$ efter bestemte regler.

+ 6. Vis, at den elliptiske differentialligning

$$r + t = k,$$

hvor $k > 0$ er konstant, har en løsning, som forsvinder identisk på en given ellipse med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vis dernæst, at der kun er én løsning (benyt maksimumsprincippet for analytiske funktioner).

7. Vis, at den elliptiske differentialligning

$$r + t = k$$

har én og kun en for $0 < x^2 + y^2 < \infty$ to gange kontinuert differentiable løsning, som tilfredsstiller følgende betingelser:

1. Løsningen går mod 0 for $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.
2. Forskellen mellem løsningen og den ved $x(x^2 + y^2)^{-1}$ definerede funktion har en grænseværdi i $(0,0)$.

8. Lad

$$ar + 2bs + ct = f(x, y)$$

være en hyperbolsk differentialligning med konstante koefficienter a , b og c . Funktionen f antages kontinuert i hele planen. Vis, at differentialligningen har netop 1 løsning svarende til givne kontinuerte begyndelsesværdier på foreningsmængden af en karakteristik fra hvert system.

9. Forsøg at overføre karakteristikbegrebet til differentialligningen

$$rt - s^2 = g(x, y).$$

Der bliver her tale om at bestemme r , s og t af en andengrads-

ligning og to førstegradslikninger, men andengradsleddene forsvinder, når r og t elimineres. Det viser sig dernæst, at ligningen ikke har løsninger for alle valg af højresiderne. Dette giver en betingelsesligning, som er af første grad. Hvis betingelsen er opfyldt, må ligningens højre side opfylde en speciel betingelse, for at løsninger alligevel skal kunne eksistere. Denne betingelse viser sig at være af anden grad, og den giver således anledning til en klassifikation.

10. Undersøg, om differentialligningen

$$r^2 - 2rs + t^2 = 0$$

har en løsning $z = f(x,y)$, som tilfredsstiller betingelserne

$$\forall x,y \quad (f(x,0) = x \wedge f(0,y) = -y).$$

Hyperbolske differentiaalligninger.

8. 1. Vi vender nu tilbage til differentiaalligningen

$$(1) \quad ar + 2bs + ct = g,$$

hvor a, b, c og g er differentiale funktioner af x, y, z, p, q i et område $D \subseteq \mathbb{R}^5$. Vi vil søge at bestemme en løsning $z = f(x, y)$ ud fra givne begyndelsesværdier, og vi vil antage, at disse begyndelsesværdier er valgt, således at $ac - b^2 < 0$, så differentiaalligningen er hyperbolsk med hensyn til den søgte løsning i de givne begyndelsesværdier.

Vi vil indlede med en analyse af problemet, idet vi forudsætter løsningen $z = f(x, y)$ bekendt. I et hvert punkt, hvor ligningen (1) er hyperbolsk med hensyn til denne løsning, bestemmer differentiaalligningen.

$$(2) \quad cdx^2 - 2bdxdy + ady^2 = 0$$

2 karakteristikkretninger i (x, y) -planen, idet vi tænker os $z = f(x, y)$ og $p = D_x f(x, y)$, $q = D_y f(x, y)$ indsat i koefficienterne a, b og c .

Vi tænker os nu, at ligningen (2) er løst på formen

$$(3) \quad U(x, y) = u, \quad V(x, y) = v,$$

hvor U og V er differentiable, og hvor det for hver af funktionerne U og V gælder, at de partielle differentiaalkvotienter ikke samtidig bliver 0. Da de to projicerede karakteristikker rører hver sin af de ved (2) bestemte karakteristikkretninger i (x, y) , kan vi slutte, at

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

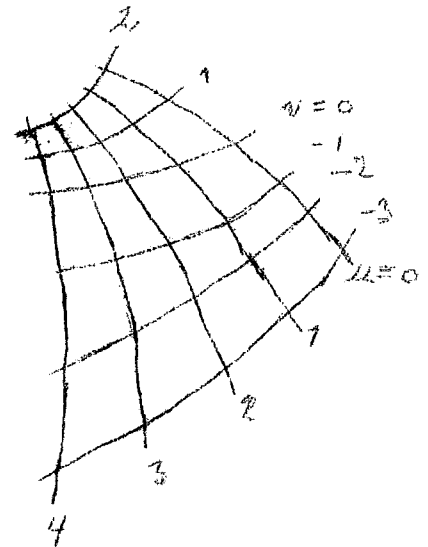
og vi kan derfor løse ligningerne (3) på formen

$$(4) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v).$$

For fastholdt værdi af den ene variable er (4) altid

parameterfremstilling for en bevægelse langs en karakteristik, og (4) giver os således parameterfremstillinger for 2 forskellige familier af projicere karakteristikker.

På figuren har vi antydnet, hvorledes et punkt i (x,y) -planen fastlægges ved parameterverdierne (u,v) for de 2 projicerede karakteristikker gennem punktet. Vi siger, at (u,v) er krumlinede koordinater. Sædvanligvis foreligger de krumlinede (u,v) koordinater kun i et område i (x,y) -planen, og kun talsæt (u,v) fra et område i (u,v) -planen figurerer som koordinat sæt for punkter.



8. 2. Vi vil nu tænke os, at vi ved hjælp af transformationen (4) med den omvendte transformation (3) indfører u og v som variable i (1) og (2) samt i løsningen $z = f(x,y)$. Idet vi skriver

$$z = f(x,y) = f(u,v),$$

og anvender p_1 og q_1 som betegnelse for $\frac{\partial z}{\partial u}$ og $\frac{\partial z}{\partial v}$, får vi ved differentiation

$$(5) \quad \begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = p_1 \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 \frac{\partial v}{\partial x} \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y} = p_1 \frac{\partial u}{\partial y} + q_1 \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

hvor differentialkvotienterne på højre side stammer fra funktionerne (3). Udtrykt ved differentialer er (5) blot udtryk for, at

$$dz = p dx + q dy = p_1 du + q_1 dv.$$

Ved indførelserne af u og v som variable får vi også brug for de nye værdier r_1 , s_1 og t_1 for r , s og t . Vi

finder disse ved differentiation af (5) med hensyn til x og y , idet vi benytter, at

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = r_1 \frac{\partial u}{\partial x} + s_1 \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \frac{\partial q_1}{\partial x} + s_1 \frac{\partial u}{\partial x} + t_1 \frac{\partial v}{\partial x}$$

og analogt for partiel differentiation med hensyn til y . Differentiationen giver derefter

$$\begin{aligned} r &= r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2s_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + t_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ (6) \quad s &= r_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + s_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + t_1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ t &= r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2s_1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + t_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} . \end{aligned}$$

Ved indsættelse af disse udtryk i (1) får vi en ny ligning

$$a_1 r_1 + 2b_1 s_1 + c_1 t_1 = g_1,$$

og her er

$$\begin{aligned} a_1 &= a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ c_1 &= a \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + c \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \end{aligned}$$

men talsættene $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ og $\left(-\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ er tangentretninger for projicerede karakteristikker, og derfor får a og b begge værdien 0. Den reducerede ligning får derfor formen

$$\boxed{2b_1 s_1 = g_2.}$$

8. 3. For den specielle partielle differentialligning

$$2x^2 r + 3xys + y^2 t = 0$$

bestemmes de projicerede karakteristikker af

$$y^2 dx^2 - 3xy dx dy + 2x^2 dy^2 = 0$$

som spaltes i

$$y dx - 2x dy = 0 \text{ og } y dx - x dy = 0,$$

som giver de 2 systemer af karakteristikker

$$x^{-1} y^2 = u \text{ og } xy^{-1} = v,$$

som løses på formen

$$x = uv^2, \quad y = uv.$$

Ved indsættelse af (6) i differentiaalligningen får vi efter udregning af de partielle differentialkvotienter, idet vi udnytter, at $a_1 = c_1 = 0$, den transformerede ligning

$$\begin{aligned} & (4x^2 \cdot -x^{-2} y^2 \cdot y^{-1} + 3xy(-x^{-2} y^2 \cdot -xy^{-2} + 2x^{-1} y \cdot y^{-1}) + 2y^2 \cdot 2x^{-1} y \cdot -xy^{-2}) s_1 + \\ & p_1 (2x^2 \cdot 2x^{-2} y^2 + 3xy \cdot -2x^{-2} y + y^2 \cdot 2x^{-1}) + \\ & q_1 (2x^2 \cdot 0 + 3xy \cdot -y^{-2} + y^2 \cdot 2xy^{-2}) = 0 \end{aligned}$$

eller efter reduktion

$$3ys_1 - xy^{-1}q_1 = 0.$$

Efter indsættelse af x og y udtrykt ved u og v får vi den transformerede ligning

$$s_1 - \frac{1}{3u}q_1 = 0.$$

Denne ligning kan skrives

$$\frac{\partial q_1}{\partial u} = \frac{1}{3u}q_1,$$

som har den fuldstændige løsning

$$q_1 = \varphi(v) \sqrt[3]{u}.$$

Heraf fås

$$\frac{\partial p_1}{\partial v} = \frac{\partial q_1}{\partial u} = \frac{1}{3u} \varphi(v) \sqrt[3]{u},$$

som igen giver

$$p_1 = \Phi(v) \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} + \psi(u),$$

hvor Φ er en stamfunktion til φ , medens ψ er en ny arbitrær funktion. Ved integration får vi nu

$$z = \Phi(v) \sqrt[3]{u} + \Psi(u),$$

hvor Ψ er en stamfunktion til ψ . Ved at indsætte udtrykkene for u og v ved x og y får vi endelig den fuldstændige løsning til den oprindelige ligning på formen

$$z = \Phi\left(\frac{x}{y}\right) \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} + \Psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

8. 4. Vi vender nu tilbage til den generelle differentiationsligning (1). Lad

(9) $x = \xi(u)$, $y = \eta(u)$, $z = \zeta(u)$, $p = \pi(u)$, $q = \kappa(u)$ være en parameterfremstilling, der beskriver variationen af de 5 koordinater x , y , z , p og q langs en karakteristik. Vi minder om at disse givne størrelser er bundet til at tilfredsstille betingelsen

$$(10) \quad D\zeta(u) = pD\pi(u) + qD\kappa(u).$$

Endvidere minder vi om, at r , s og t langs kurven bestemmes af ligningerne

$$(11) \quad \begin{aligned} D\xi(u)r + D\eta(u)s &= D\pi(u) \\ D\xi(u)s + D\eta(u)t &= D\kappa(u) \\ ar + 2bs + ct &= g. \end{aligned}$$

Hvis (9) er en karakteristik, har dette lignings-system determinanten 0. Derfor vil en vis linearkombination af ligningernes venstre side forsvinde identisk. En sådan linearkombination må i hvert fald vælges, således at koefficienterne til r og t forsvinder, og dette opnås kun, når de tre ligninger multipliceres med faktorer proportionale med

$$aD\eta(u), \quad cD\xi(u), \quad -D\xi(u)D\eta(u),$$

og da vi på den anden side ved, at en passende linearkombination af ligningerne forsvinder, kan vi slutte, at netop de tre anførte faktorer vil bevirke, at venstre side af linearkombinationen forsvinder. Da ligningssystemet skal være løseligt, må højre side også forsvinde, og vi ser således, at

$$(12) \quad aD\eta(u)D\pi(u) + cD\kappa(u)D\xi(u) = gD\xi(u)D\eta(u).$$

Nu ved vi imidlertid, at de projicerede karakteristikker tilfredsstiller ligningen (2), og da differentialligningen er hyperbolsk, kan venstre side af (2) spaltes i 2 faktorer. Hvis $a \neq 0$, kan vi først dividere med a , og (2) opløses derefter i ligningerne

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = \chi_1, \quad \frac{dy}{dx} = \chi_2,$$

hvor χ_1 og χ_2 afhænger af x, y, z, p og q .

Hvis vi har bestemt de projicerede karakteristikker på formen (4), får vi en sammenfattende fremstilling

$x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$, $p = P(u, v)$, $q = Q(u, v)$ for selve karakteristikkerne. Ligningerne (13) får da formen

$$(14) \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \chi_1 \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \chi_2 \frac{\partial x}{\partial v},$$

og (10) får formen

$$(15) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v},$$

medens (12) giver

$$a \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial u} + c \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial u} = g \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad a \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial v} + c \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial v} = g \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v},$$

som efter indsættelse af (14) og division med den fælles faktor reduceres til

$$(16) \quad \left[a \chi_1 \frac{\partial p}{\partial u} + c \frac{\partial q}{\partial u} = g \chi_1 \frac{\partial x}{\partial u}, \quad a \chi_2 \frac{\partial p}{\partial v} + c \frac{\partial q}{\partial v} = g \chi_2 \frac{\partial x}{\partial v} \right].$$

Vi har således de 6 ligninger (14), (15) og (16) med de 5 ubekendte funktioner X, Y, Z, P, Q . Ligningerne (15) er til dels ensbetydende, idet den ligning, der fås ved differentiation af den første med hensyn til v , er indentisk med den, der fås ved differentiation af den anden med hensyn til u . Det nye ligningssystem er lineært, men til gengæld er antallet af ligninger og ubekendte øget til 5.

Ligningerne (14), (15), (16) er ligningen (1) på karakteristikkelform. Det nye ligningssystem lader sig ikke altid behandle ved elementære metoder.

8.5. Lad os nu antage, at vi har bestemt x, y, z, p og q som funktioner af u og v , således at (13), (14) og (15) er opfyldt. Hvis $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \neq (0,0)$ og $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \neq (0,0)$, sikrer (13) i forbindelse med $x_1 \neq x_2$, at u og v lokalt kan bestemmes som funktioner af x og y , og dermed bliver også z, p og q funktioner af x og y . De partielle afledede r, s og t vil tilfredsstille ligningerne

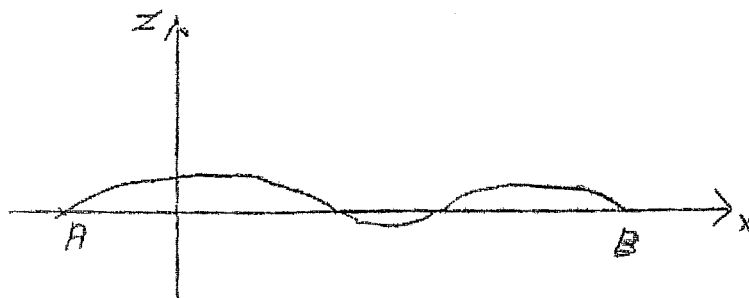
$$r dx + s dy = dp$$

$$s dx + t dy = dq,$$

der for fast v er ensbetydende med de 2 første af ligningerne (11). For fast v tilfredsstiller x og y imidlertid differential-ligningen for karakteristikkene og (12) bevirker da, at den sidste ligning bliver en følge af de 2 første. Endelig sikrer (15), at p og q virkelig er de partielle differentialkvotienter af z .

Vi vil nu behandle nogle eksempler på mere specielle hyperbolske differentialligninger under anvendelse af mindre generelle metoder. Vi vil indlede med en diskussion af differentialligningen for en svingende streng, og vi vil først kort omtale den fysiske baggrund for denne ligning.

Vi tænker os en streng stramt udspændt mellem punkterne $(A,0)$ og $(B,0)$ af x -aksen. Spændingen



i strengen vil vi betegne med S . Vi vil antage, at strengen er inhomogen med en massetæthed $\rho(x)$, således at der på intervallet $[x_1, x_2]$ findes massen

$$m(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx.$$

Vi tænker os nu strengen deformeret en lille smule, således som det er antydnet på figuren, idet hvert punkt fjernes et stykke $z = \varphi(x)$ fra x-aksen, og når strengen slippes løs, vil den derefter give sig til at svinge. Ved deformationen bliver strengen en lille smule ængere, men vi vil antage, at den forlænges så lidt, at vi ikke begår nogen væsentlig fejl ved stadig at give spændingen den konstante værdi S . Vi antager desuden, at strengens bevægelse foregår, således at hvert punkt bevæger sig på en ret linie parallel med x-aksen. Strengens bevægelse beskrives da ved en funktion

$$z = f(x, t),$$

som i udgangsstillingen for $t = 0$ er indentisk med $\varphi(x)$, altså

$$f(x, 0) = \varphi(x).$$

På den anden figur har vi skitseret det til intervallet $[x_1, x_2]$ svarende stykke af strengen med stærkt forstørrede z-koordinater. Med Θ_1 og Θ_2 har vi betegnet de vinkler, som tangentterne i endepunkterne danner med x-aksen. Det omhandlede stykke af strengen påvirkes som antydnet af snorspændingerne i de to endepunkter, og de lodrette komponenter af disse kræfter udgør ialt $S \sin \Theta_1 - S \sin \Theta_2$. Da vinklerne Θ_1 og Θ_2 er små, vil vi uden at tabe alt for meget i nøjagtighed kunne erstatte dette udtryk med

$$S \operatorname{tg} \Theta_2 - S \operatorname{tg} \Theta_1 = S(D_x f(x_2, t) - D_x f(x_1, t)).$$

Det omhandlede stykke af strengen har bevægelses-
mængden

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) D_t f(x, t) dx,$$

og dennes differentialkvotient med hensyn til t er lig med den ovenfor anførte kraftkomponent. Altså er

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) D_{tt}^2 f(x, t) dx = S \frac{D_x f(x_2, t) - D_x f(x_1, t)}{x_2 - x_1}.$$

Her foretager vi grænsovergangen $x_2 \rightarrow x_1$ og skriver x i stedet for x_1 . Derved får vi den svingende strengs differentiaalligning

$$\rho(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

med randbetingelserne

$$f(x, 0) = \varphi(x), \quad f(A, t) = f(B, t) = 0.$$

På grund af problemets natur er $\rho(x)$ og S positive, og differentiaalligningen derfor hyperbolsk. Ved den følgende behandling skriver vi y i stedet for t og sætter

$$\frac{S}{\rho(x)} = (c(x))^2,$$

så det fremgår af betegnelserne, at dette forhold ikke er negativt.

8. 6. Vi vil altså studere den partielle differentiaalligning

$$(17) \quad c^2 r - t = 0,$$

hvor c kun afhænger af x . Vi indfører en stamfunktion α til $\frac{1}{c}$, og dennes omvendte funktion β , så vi har

$$(18) \quad D\alpha(x) = \frac{1}{c(x)}, \quad D\beta(x) = c(\beta(x)).$$

Differentiaalligningens projicerede karakteristikker bestemmes af

$$-dx^2 + c^2 dy^2 = 0$$

så de 2 skarer af projicerede karakteristikker har formen

$$(19) \quad y = \alpha(x) - 2u, \quad y = 2v - \alpha(x)$$

eller

$$(20) \quad x = \beta(u + v), \quad y = v - u.$$

Ved opstilling af ligningerne (16) må vi huske, at koefficienten c^2 i disse ligninger her har værdien -1 , medens a har værdien c^2 med den nye betydning af c . Desuden er $\chi_1 = \frac{1}{c}$ og $\chi_2 = -\frac{1}{c}$. Vi får derfor ligningerne

$$c \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} = 0, \quad c \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial v} = 0.$$

Her er imidlertid

$$c(x) = c(\beta(u + v)) = D\beta(u + v),$$

og ligningerne kan derfor skrives

$$\frac{\partial}{\partial u}(pD\beta(u + v) - q) = \frac{\partial}{\partial v}(pD\beta(u + v) + q) = pD^2\beta(u + v).$$

Vi indfører nu de nye variable

$$(21) \quad H = pD\beta(u + v) - q, \quad K = pD\beta(u + v) + q,$$

og ligningerne viser, at der eksisterer en funktion L af u og v , således at

$$(22) \quad dL = -Kdu + Hd v.$$

Ligningerne (21) giver nu

$$2pD\beta(u + v) = K + H = \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial u},$$

og de 2 sammenhørende differentialligninger reduceres derved til den fælles form

$$(23) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial v} + \frac{D^2\beta(u + v)}{2D\beta(u + v)} \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial L}{\partial v} \right) = 0.$$

Vi har således reduceret problemet til løsning af ligning (23).

8. 7. Vi har nu mødt 2 eksempler på partielle differentialligninger, der ved karakteristikmetoden i den ene eller den anden omtalte form overføres i en partiel differentialligning af den specielle form

$$(24) \quad S = Ap + Bq + Cz,$$

og vi skal derfor nærmere omtale ligninger af denne specielle form. For det første fremhæver vi, at ligningen (24) kan løses explicit, såfremt koefficienterne A, B og C er funktioner af x og y og tilfredsstiller betingelsen

$$(25) \quad C = \frac{\partial A}{\partial x} - AB$$

eller betingelsen

$$(26) \quad C = \frac{\partial B}{\partial y} - AB$$

For at vise dette indfører vi

$$(27) \quad \zeta = q - Az = \frac{\partial z}{\partial y} - Az$$

som ny variabel, og vi får da ved anvendelse af (24)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = S - Ap - \frac{\partial A}{\partial x} z = Bq + Cz - \frac{\partial A}{\partial x} z$$

eller, idet q elimineres ved hjælp af (27)

$$(28) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = B\zeta + (AB + C - \frac{\partial A}{\partial x})z.$$

Hvis betingelsen (25) er opfyldt, reduceres (28) til

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = B\zeta$$

med den fuldstændige løsning

$$\zeta = \varphi(y) e^{\int B(x,y) dx},$$

og dette resultat indsættes i (27), der ligeledes kan løses som en sædvanlig differentialligning.

Hvis (26) er opfyldt går det på tilsvarende måde, idet den nye variable $\zeta_1 = p - Bz$ indfører og $\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}$ udregnes.

Hvis (25) ikke er opfyldt fås ved differentiation af (28) med hensyn til y en differentiaalligning af samme form som (24).

For at fremme overskueligheden sætter vi

$$AB + C - \frac{\partial A}{\partial x} = E,$$

og partiel differentiation af (28) med hensyn til y giver

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = B \frac{\partial \zeta}{\partial y} + E q + \frac{\partial B}{\partial y} \zeta + \frac{\partial E}{\partial y} z =$$

$$B \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (E + \frac{\partial B}{\partial y}) \zeta + (EA + \frac{\partial E}{\partial y}) z,$$

idet vi eliminerede q ved hjælp af (27). Vi eliminerer nu z ved (28), som giver

$$z = \frac{1}{E} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{B}{E} \zeta,$$

og ved indsættelse får vi den nye differentiaalligning

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = (A + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial y}) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + B \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (E - AB + \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{B}{E} \frac{\partial E}{\partial y}) \zeta$$

8.8. Vi vil nu undersøge det specielle tilfælde, hvor c specielt er givet ved

$$c(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

I dette tilfælde bliver y-aksen en singular linie, og vi må indskrænke os til at studere løsningerne i hver af de ved $x > 0$ og $x < 0$ bestemte halvplaner.

Vi får nu karakteristikhældningerne

$$\chi_1(x) = x^{-\frac{2}{3}} \quad \chi_2(x) = -x^{-\frac{2}{3}}$$

og de to systemer af projicerede karakteristikker er givet ved

$$y = \sqrt[3]{x} - 2u, \quad y = 2v - \sqrt[3]{x},$$

som løses på formen

$$x = \left(\frac{v+u}{3}\right)^3, \quad y = v-u.$$

Differentialligningerne til bestemmelse af p og q får formen

$$(29) \quad \left(\frac{v+u}{3}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} = 0, \quad \left(\frac{v+u}{3}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v} = 0,$$

og her eliminerer vi q ved at differentiere den første ligning med hensyn til v og den anden med hensyn til q og addere de fremkomne ligninger. Derved får vi

$$\frac{2}{9}(u+v)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{2}{9}(u+v) \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{2}{9}(u+v) \frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

hvilket efter bortdivision af den fælles faktor $\frac{2}{9}(u+v)$ kan skrives

$$\frac{\partial}{\partial v} \left((u+v) \frac{\partial p}{\partial u} + p \right) = 0,$$

som har integralet

$$(30) \quad (u+v) \frac{\partial p}{\partial u} + p = \varphi(u),$$

hvor φ er en arbitrær funktion.

Lad os tænke os, at vi har opgivet udgangsværdier, f. eks. , at

$$z = 0, \quad q = x \quad \text{for } y = 0.$$

Vi får da også

$$p = r = t = 0, \quad s = 1 \quad \text{for } y = 0.$$

Nu er

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(\frac{u+v}{3}\right)^2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -1,$$

så vi får

$$\frac{\partial p}{\partial u} = r \left(\frac{u+v}{3}\right)^2 - s.$$

For $y = 0$ er $v = u$ og (30) giver derfor

$$\varphi(u) = 2u \frac{\partial p}{\partial u} + p = -2u,$$

og (30) får løsningen

$$(31) \quad p = v - u + \frac{9\psi(v)}{u + v},$$

hvor ψ er en ny arbitrær funktion, og 9-tallet er tilføjet af bekvemmelighedshensyn. Ligningerne (29) giver nu

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \left(\frac{u+v}{3}\right)^2 + \psi(v) \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \left(\frac{u+v}{3}\right)^2 - \psi(v) + (u+v)D\psi(v),$$

og ved integration fås

$$(32) \quad q = \left(\frac{u+v}{3}\right)^3 + u \psi(v) + k,$$

hvor k er en arbitrær konstant.

$$\text{For } v = u \text{ er } s = 0 \text{ og } q = x = \left(\frac{2}{3}u\right)^3,$$

hvilket indsat i (31) og (32) fører til

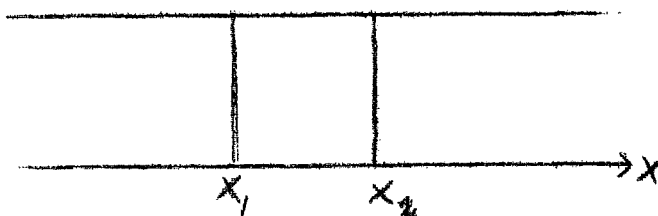
$$\psi(v) = 0 \quad , \quad k = 0 \quad ,$$

som ved en triviel integration giver

$$z = xy \quad ,$$

idet integrationskonstanten bestemmes ved udgangsværdierne.

8. 9. Vi vil nu studere en anden speciel differentiationsligning, der ligeledes stammer fra fysikken. Vi skal igen kort gennemgå ligningens fysiske baggrund, idet vi dog ikke kan diskutere alle detaljer. Vi betragter en luftmasse indesluttet i et cylindrisk rør. Vi vil tænke os luftmassen i bevægelse på en



sådan måde, at hastigheden overalt går i rørets længderetning og har samme værdi i alle punkter af et normalsnit i cylinderen. Denne situation er kun tilnærmelsesvis realisabel, idet hastigheden (hvis cylinderen er i hvile) altid aftager gradvist mod nul ud mod cylinderens vægge. Vi vil endvidere antage, at luftmassens tæthed og tryk er ens i alle

punkter af hvert tværsnit i røret.

Heraf fremgår, at den øjeblikkelige situation kan beskrives ved, at hastighed, tæthed og tryk er givet som funktionen

$$v = V(x,t), \quad \rho = R(x,t), \quad p = P(x,t).$$

Rørets tværsnitsareal kommer til at indgå som en fælles faktor i alle de følgende ligninger, og for simpelhedsskyld sætter vi det lig 1. Den luftmængde, der tilhører intervallet $[x_1, x_2]$ har massen

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx,$$

som for faste x_1 og x_2 har ændringshastigheden

$$D \int_{x_1}^{x_2} R(x,t) dx = \int_{x_1}^{x_2} D_t R(x,t) dx.$$

Idet luftmængden kun ændres ved, at en vis luftmængde strømmer gennem de til x_1 og x_2 svarende normalsnit er den samme ændringshastighed også givet ved

$$R(x_1,t)V(x_1,t) - R(x_2,t)V(x_2,t),$$

og vi får derfor relationen

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} D_t R(x,t) dx + \frac{R(x_2,t)V(x_2,t) - R(x_1,t)V(x_1,t)}{x_2 - x_1} = 0$$

For $x_2 \rightarrow x_1$ får vi, idet vi skriver x i stedet for x_1 , at

$$D_t R(x,t) + D_x (R(x,t)V(x,t)) = 0,$$

så vi har den partielle differentialligning

$$(33) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Denne ligning kaldes traditionelt kontinuitetsligningen.

Bevægelsesmængden af den til x_1, x_2 svarende luftmasse er givet ved

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x,t)V(x,t) dx.$$

Ved udregning af ændringshastigheden for denne bevægelsesmængde må det tages i betragtning, at luftmassen er i bevægelse, således at grænsefladerne ved x_1 og x_2 selv bevæger sig med hastighederne $V(x_1, t)$ og $V(x_2, t)$, så ændringshastigheden bliver

$$D \int_{x_1}^{x_2} R(x, t) V(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} D_t (R(x, t) V(x, t)) dx + R(x_2, t) V(x_2, t)^2 - R(x_1, t) V(x_1, t)^2.$$

Den kraft, der påvirker luftmassen, er resultant af trykkene i de 2 grænseflader og har således værdien

$$P(x_1, t) - P(x_2, t).$$

Vi sætter igen de 2 udtryk lig med hinanden, dividerer med $x_2 - x_1$ og foretager grænseovergangen $x_2 \rightarrow x_1$. Derved får vi ligningen, hvor vi har skrevet x i stedet for x_1

$$D_t (R(x, t) V(x, t)) + D_x (R(x, t) V(x, t)^2) = -D_x P(x, t),$$

så vi får den partielle differentialligning

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Vi multiplicerer nu (33) med v og subtraherer den fra den nye ligning. Derved får vi bevægelsesligningen

$$(34) \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

I ligningerne (33) og (34) indgår de 3 ubekendte funktioner v , ρ og p . Vi har således brug for endnu en ligning, og det første, der i denne sammenhæng falder os ind, er luftartens tilstandsligning, som udtrykker, at p og ρ er proportionale ved sammentrykning, og vi finder det rimeligst at studere problemet ud fra den forudsætning, at der ikke

tilføres eller bortføres nogen form af energi, altså heller ikke varme, fra systemet.

Det er rimeligt at antage, at luften i røret er homogen i den forstand, at hver lille luftrumfangs temperatur og tryk er en og samme funktion af tætheden. Temperaturen behøver da slet ikke at indgå i ligningerne og det er da kendt resultat fra termodynamikken, at

$$(35) \quad p = A \rho^\gamma,$$

hvor γ er en karakteristisk konstant for luftblandingen i røret som stof betragtet, medens A er en konstant, som er knyttet til den samlede luftmasse, og som ændres, hvis der tilføres varme til systemet. Ligningen (35) vil også gælde indenfor visse grænser, selv om luftmassen er indesluttet mellem stempler, der indflyverer på luftstrømningen.

8. 10. Idette tilfælde vil vi bibeholde de fra fysikken stammende betegnelser. Vi tænker os, at vi langs en kurve i (x, t) -planen har opgivet værdier af ρ og v . Vi har da ligningssystemet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx = d\rho$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx = dv$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \rho = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \gamma A \rho^{\gamma-1} + \frac{\partial v}{\partial t} \rho + \frac{\partial v}{\partial x} \rho v = 0$$

Dette ligningssystem til bestemmelse af de partielle differentialkvotienter af ρ og v har determinanten

$$\begin{vmatrix} dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \\ 1 & v & 0 & \rho \\ 0 & \gamma A \rho^{\gamma-1} & \rho & \rho v \end{vmatrix} =$$

$$-\rho dx^2 + 2\rho v dx dt - (\rho v^2 - \gamma A \rho^\gamma) dt^2.$$

Vi ser, at ligningssystemets determinant bliver 0, hvis

$$(36) \quad dx = (v + c)dt \quad \text{eller} \quad dx = (v - c)dt$$

hvor vi har sat

$$(37) \quad c = \sqrt{\gamma A \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}}.$$

Størrelsen c , der således er en funktion af tætheden, kaldes lyd hastigheden. De ved (36) bestemte retninger er retningerne for de projicerede karakteristikker!

Hvis ligningssystemet til bestemmelse af de 4 partielle differentialkvotienter skal være løseligt, når determinanten er 0, skal den linearkombination af ligningerne, der fås ved multiplikation med komplementer til determinantens anden søjle og addition, forsvinde identisk. Dette kræver, at størrelserne d og dv på højre side tilfredsstiller betingelsen

$$(\rho dx - \rho v dt)d\rho + \rho^2 dt dv.$$

Heri indsætter vi de to udtryk fra (36), og derved får vi de to andre ligninger på karakteristikform

$$cd\rho + \rho dv = 0 \quad \text{eller} \quad -cd\rho + \rho dv = 0.$$

Vi tænker os nu som sædvanlig de projicerede karakteristikker givet på parameterform

$$x = X(\xi, \eta) \quad , \quad y = Y(\xi, \eta) \quad ,$$

hvor vi for fast η får de karakteristikker, der svarer til de ligninger, vi har skrevet til venstre for "eller", medens faste værdier af ξ giver de andre karakteristikker. Vi får da hele ligningssystemet på karakteristikform

$$(38) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = (v + c) \frac{\partial t}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = (v - c) \frac{\partial t}{\partial \eta}$$

$$c \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad c \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \rho \frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

Dette ligningssystem sammen med (37) bestemmer ρ , v og c som funktioner af ξ og η .

8.11. Vi skal ikke gennemføre nogen fuldstændig diskussion af metoder til løsning af ligningssystemet (38), men derimod omtale en speciel klasse af løsninger. Det drejer sig om løsninger med den egenskab, at ρ er konstant langs hver karakteristik i det ene system. Lad os f.eks. antage, at

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0$$

identisk i ξ og η . Af (38) følger da, at vi også har

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$

og vi har derfor

$$\rho = R(\eta), \quad c = C(\eta), \quad v = V(\eta),$$

og den første af ligningerne (38) viser, at de karakteristikker, langs hvilke η har en konstant værdi, er rette linier med ligning

$$x = (v + c)t + x_0.$$

Endvidere viser den sidste af ligningerne (38), at

$$dv = \frac{c}{\rho} d\rho = \sqrt{\gamma A} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} d\rho,$$

så vi får relationen

$$(39) \quad v = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma A} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} + k$$

eller

$$v = \frac{2c}{\gamma-1} + k,$$

hvor k er en konstant. Hældningen af det andet sæt karakteristikker er nu

$$v - c = k - \frac{3-\gamma}{\gamma-1} c$$

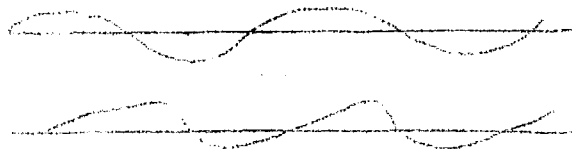
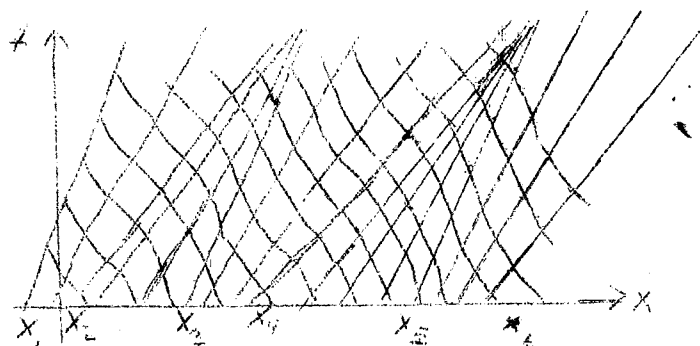
og er således en lineær funktion af c . Det første sæt karakteri-

stikker har hældningen

$$k + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c.$$

I alle praktisk forekommende tilfælde er γ en konstant med værdi mellem 1 og 3. Med voksende tæthed får vi derfor voksende c og voksende hastighed. Endvidere vokser hældningen af karakteristikkene af det første system, men hældningen af karakteristikkene af det andet system aftager.

På figuren har vi skitseret forløbet af de projicerede karakteristikker for en løsning af den her omtalte specielle type. Vi minder om, at ρ , c og v er konstante langs de retlinede karakteristikker, samt at c og v er lineære voksende funktioner af de retlinede karakteristikkers hældning mod t -aksen. For den på figuren skitserede løsning gælder det altså, at vi for $t = 0$ har voksende tæthed på $[x_1, x_2]$ men aftagende tæthed på $[x_2, x_3]$. Desuden fremgår det, at "tæthedsprofilen" bevæger sig mod højre som en bølge, når t vokser, men under denne bevægelse mod højre vil intervaller med voksende tæthed blive længere, medens intervaller med aftagende tæthed bliver kortere, og tæthedsprofilen vil derfor ændres som antydnet på hosstående skitse.



En løsning af den her omtalte form kaldes en simpel

bølge. Størrelsen c er ligesom ρ en tilstandsfunktion for luftmassen. Den kaldes lydhastigheden. Ved de strømminger, vi møder i dagliglivet, er ændringerne i ρ og c fra sted til sted ret ubetydelige, og v er meget mindre end c . For eksempel er en orkans hastighed omkring en tiendedel af lydhastigheden.

8. 12. Vi vil supplere ovenstående studium af de simple bølger med en undersøgelse, derviser, at visse begyndelsesværdiproblemer altid har simple bølger som løsninger. Til det formål betragter vi den ved en løsning

$$\rho = R(x,t) \quad , \quad v = V(x,t)$$

definerede afbildning ϕ af (x,t) -planen ind i (ρ,v) -planen.

De projicerede karakteristikker afbildes ved ϕ på 2 kurversystemer, der tilfredsstiller hver sin af de 2 nederste af ligningerne (38), altså på systemerne med differential-ligningerne

$$dv = -\frac{c}{\rho}d\rho \quad \text{og} \quad dv = \frac{c}{\rho}d\rho.$$

Vi løste den sidste af disse ligninger ovenfor og løsningen til den første fås af løsningen (39) ved et fortegnsskifte. Derved får vi karakteristikkernes billeder i (ρ,v) -planen. Fremstillingen bliver enklere, når vi benytter v og c som variable, idet vi så får

$$(40) \quad v = \frac{2c}{\gamma - 1} + k_1 \quad \text{og} \quad v = -\frac{2c}{\gamma - 1} + k_2$$

som ligninger for de 2 familier af karakteristikker. Det drejer sig om 2 skarer af parallelle rette linier eller rettere halvlinier, da kun halvplanen $c > 0$ kommer i betragtning. De 2 skarer er indbyrdes symmetriske om en vilkårlig akse parallel med v -aksen.

Vi vil nu antage, at vi i (x,t) -rummet har et

område Ω , hvor

$$v = v_0, c = c_0, \rho = \rho_0$$

er konstante. Dette område afbildes ved φ på punktet (c_0, v_0) i (c, v) -planen og derfor vil enhver projiceret karakteristik, der skærer gennem Ω ved φ afbildes på en af kurverne (40) gennem (c_0, v_0) . I Ω er karakteristikkene rette linier.

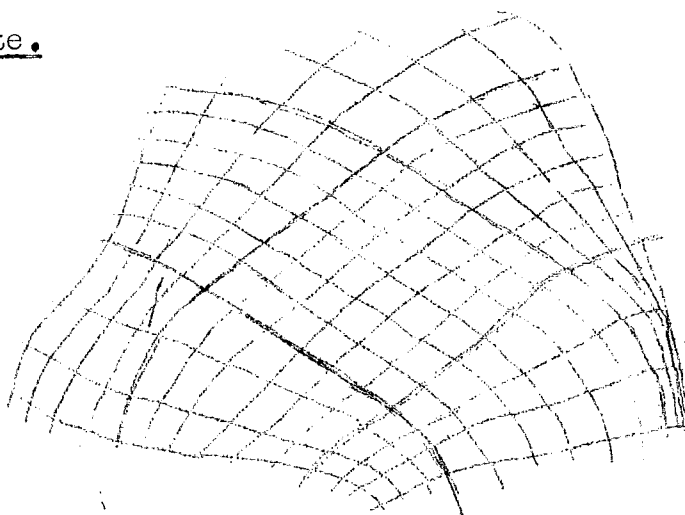
På figuren har vi tegnet

1 projiceret karakteristik af hvert system, og således at de skærer hinanden



udenfor Ω . Skæringspunktet vil da også afbildes på (c_0, v_0) . Men alle projicerede karakteristikker gennem punkter i det skraverede område vil da skære gennem Ω , og vi kan slutte, at hele det skraverede område afbildes på (c_0, v_0) og at de projicerede karakteristikker også i det skraverede område er rette linier. Heraf følger, at området Ω , hvor v , c og ρ er konstante kan udvides til et parallelogram begrænset af projicerede karakteristikker, i hvilket det stadig gælder, at v , c og ρ er konstante.

Midt på hestående figur findes et parallelogram begrænset af de kraftigt optrukne karakteristikker, indenfor hvilket v , c og ρ er konstante.

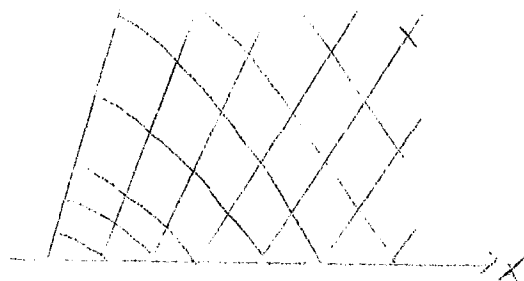


De 2 karakteristikker, der indeholder et par modstående sider af parallelogrammet, afgrænser et bælte, som udfyldes af karakteristikker af den ene familie. Ved φ af-

bildes hele dette bælte i en ret linie gennem (v_0, c_0) . For projicerede karakteristikker af det andet system gælder det nu, at ϕ afbilder dem på rette linier af det andet system, og den del af en projiceret karakteristik, der ligger i det ovenfor omtalte bælte, vil derfor afbildes i et enkelt punkt. Altså er v , c og ρ konstante langs de stykker af karakteristikker, der forløber tværs over det omtalte bælte. Heraf følger, at bevægelsen svarende til de dele af bæltestet, der ligger udenfor parallelogrammet, er en simpel bølge. Parallelogrammet forlænges således ud over alle fire sider i bælter, indenfor hvilke bevægelsen er en simpel bølge. De projicerede karakteristikker er retlinede på de stykker, der skærer tværs gennem et af bælterne. Udenfor bælterne findes fire vinkelrum, hvor bevægelsen sædvanligvis er af mere kompliceret natur.

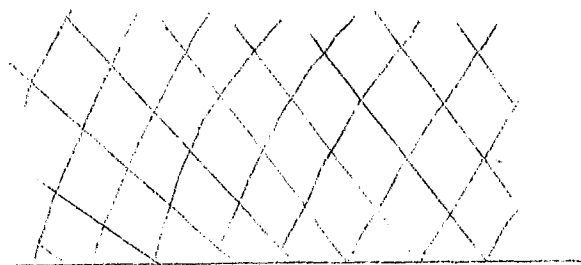
8. 13. Det er let at konstruere løsninger af den i 8. 12. omtalte art. Vi behøver blot at gå ud fra en vilkårlig simpel bølge, som vi anvender på den ene side af en af dens retlinede karakteristikker. På den anden side af denne kan vi da altid fortsætte løsningen ved at lade v_0 , c_0 og ρ_0 beholde de samme konstante værdier, som de har på karakteristikken.

Vi kan således have det på figuren viste forløb af de projicerede karakteri-

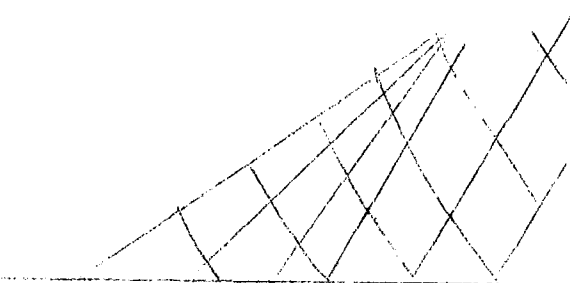


stikker. Det drejer sig her om en fortynding, der som en simpel bølge breder sig mod højre ind i en hvilende luftmasse. Vi kan imidlertid også have den på den følgende situ-

ation viste situation,
 hvor fortyndingsbølgen
 løber mod venstre og
 efterlader luften bag
 sig i hvile.



8. 14. For fortætningsbølger har vi ganske
 tilsvarende muligheder, men den komplikation, vi allerede
 i 8. 11. har antydnet, gør sig nu gældende på helt afgørende
 vis. Som antydnet på figu-
 ren, vil de retlinede ka-
 rakteristikker i dette
 tilfælde skære hinanden.



Der er her tale om en for-
 tætningsbølge, der breder sig ind i en i en hvilende luft-
 masse. Skæringen mellem karakteristikkene viser, at luft
 med større tæthed efter nogen tid indhenter luft med rin-
 gere tæthed, og fra matematisk synspunkt kan løsningen da
 ikke fortsætte for højere værdier af t . De virkelige karak-
 teristikker i (t, x, ρ, v) -rummet ligger da i flere lag over
 visse dele af (t, x) -planen, så vi får flere løsninger at
 vælge imellem i et vist område.

Situationen kan virkelig indtræffe i praksis, og
 der sker da det, at der opstår en grænseflade, således at én
 løsning bruges på den ene side af grænsefladen, medens en
 anden løsning bruges på den anden side af grænsefladen. Ved
 passage gennem grænsefladen ændres ρ , c og v diskontinuert.
 Grænsefladen af denne art kaldes chokbølger. Det er ikke
 vanskeligt at opstille et ligningssystem til beskrivelse
 af selve chokbølgens bevægelse, men løsning af dette lig

ningssystem sammen med de partielle differentialligninger bliver let en kompliceret sag.

Behandlingen af en chokbølge som en ren diskontinuitet er selvfølgelig ikke helt realistisk, men i praksis viser det sig, at chokbølgens længde er så ringe, at processerne i selve chokbølgen bør diskuteres under hensyn til luftmassens partikelstruktur. Den egentlige risiko ved de her anvendte simplifikationer ligger i, at der i selve chokbølgen sker en betydelig omsætning af bevægelsesenergi og potentiellenergi til varme, som delvis ledes væk. Dette medfører, at den overfor med A betegnede konstant ikke mere forbliver konstant.

8. 15. Ved den praktiske løsning af ligningerne (38) vil det være hensigtsmæssigt at behandle simple bølger for sig. I de resterende områder kan vi derefter bruge c og v som uafhængige, idet vi har

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

og vi kan forudsætte c og v kendt fra (40), hvor vi har indsat ξ og η for k_1 og k_2 , giver indsættelse af dette i den første ligning (38) en lineær ligning med de partielle differentialkvotienter af x og t som ubekendte. Den anden ligning (38) behandles tilsvarende, og vi får derved et lineært ligningssystem. Vi skal ikke gå nærmere ind på behandlingen af dette problem, der er af ganske samme art som det, vi kender fra varmeledningsligningen.

8. 16. Vi skal tilføje, at definitionen af simpel bølge uden videre kan anvendes for andre hyperbolske differentialligninger, og at sætningen, om at et område, hvor

løsningen er konstant, begrænses af karakteristikker, og at løsningen i tilgrænsende bælter er en simpel bølge, vil gælde uændret. Derimod vil det selvfølgelig ikke være rigtigt, at det ene system af karakteristikker i sådanne bælter reduceres til system af rette liniestykker.

En eksistenssætning.

9.1. For hyperbolske differentiaalligninger gælder eksistenssætninger, der både med hensyn til formulering og med hensyn til bevis ligner de for sædvanlige differentiaalligninger gyldige sætninger. Vi vil først vise en meget speciel sætning.

9.1.1. Sætning. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ være et område i (x, y, z, p, q) -rummet og lad $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion, som tilfredsstiller en Lipschitz-betingelse med hensyn til z, p og q , idet der eksisterer et positivt tal A , således at

$$(1) \quad |g(x, y, z_2, p_2, q_2) - g(x, y, z_1, p_1, q_1)| \leq A(|z_2 - z_1| + |p_2 - p_1| + |q_2 - q_1|).$$

Lad $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion, for hvilken $(x, \varphi(x), 0, 0, 0) \in \Omega$ for alle $x \in [a, b]$, og hvis differentialkvotient ikke antager værdien 0. Ethvert punkt (x_0, y_0) med $x_0 \in]a, b[, y_0 = \varphi(x_0)$ har da en omegn U , i hvilken der eksisterer en løsning $z = f(x, y)$ til den partielle differentiaalligning

$$(2) \quad s = g(x, y, z, p, q),$$

således at

$$f(x, \varphi(x)) = D_x f(x, \varphi(x)) = D_y f(x, \varphi(x)) = 0,$$

når $(x, \varphi(x)) \in U$.

Bevis. Punktmængden

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \mid a \leq x_1 < x_2 \leq b\}$$

er sammenhængende, og den ved

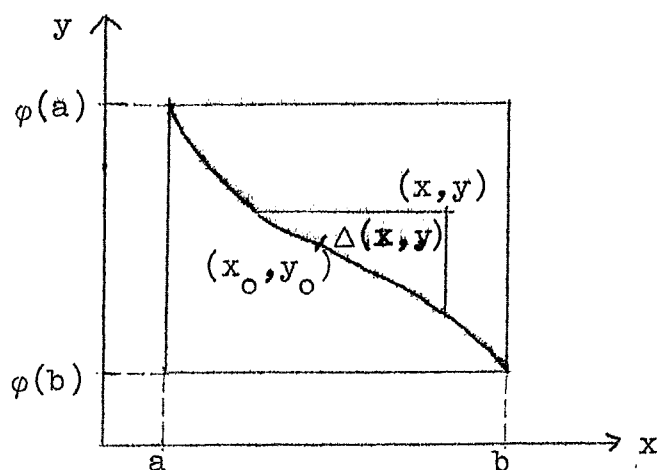
$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^{-1}(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))$$

definerede afbildning $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert. Værdimængden $\Phi(\Delta)$ er altså sammenhængende. Ifølge differentiaalligningens midelværdisætning antager $D\varphi$ værdien $\Phi(x_1, x_2)$ i et punkt af $]x_1, x_2[$. Altså gælder $0 \notin \Phi(\Delta)$, og vi kan således slutte, at

$\Phi(\Delta)$ er et delinterval af $]0, \infty[$ eller af $]-\infty, 0[$. Vi vil antage, at $\Phi(\Delta) \subseteq]-\infty, 0[$, idet den anden mulighed kan behandles analogt. Funktionen φ er da strengt aftagende. Vi vil endvidere antage, at intervallet $[a, b]$ er valgt så lille, at det afsluttende rektangel med vinkelspidser $(a, \varphi(a))$ og $(b, \varphi(b))$ tilhører fællesmængden for Ω og (x, y) -planen. Vi kan da vælge $k > 0$, således at

$$(3) \quad [a, b] \times [\varphi(b), \varphi(a)] \times [-k, k] \times [-k, k] \times [-k, k] \subset \Omega.$$

For ethvert $(x, y) \in [a, b] \times [\varphi(b), \varphi(a)]$ afgrænser kurven $y = \varphi(x)$ sammen med akseparallelle linier gennem (x, y) et trekantet område $\Delta(x, y)$, der specielt bliver tomt, hvis $y = \varphi(x)$.



Inden for et passende mindre rektangel

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [\varphi(x_0 + \delta), \varphi(x_0 - \delta)],$$

hvor δ er et positivt tal, som vi senere vil fastlægge nærmere, vil vi konstruere en følge (f_n) af reelle funktioner ved følgende iterationsproces:

$$f_0(x, y) = 0$$

$$(4) \quad f_{n+1}(x, y) = \iint_{\Delta(x, y)} g(t, u, f_n(t, u), D_x f_n(t, u), D_y f_n(t, u)) dt du.$$

Vi må først vælge δ så lille, at integralet altid er defineret. Med B betegner vi supremum for $|g|$ på punktmængden (3). Vi har da, såfremt integralet er defineret, at

$$|f_{n+1}(x, y)| \leq 2\delta(\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))B$$

samt

$$(5) \quad D_x f_{n+1}(x, y) = \int_{\varphi(x)}^y g(x, u, f_n(x, u), D_x f_n(x, u), D_y f_n(x, u)) du$$

og

$$(6) \quad D_y f_{n+1}(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(y)}^x g(t, y, f_n(t, y), D_x f_n(t, y), D_y f_n(t, y)) dy,$$

som giver vurderingerne

$$|D_x f_{n+1}(x, y)| \leq (\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))B$$

$$|D_y f_{n+1}(x, y)| \leq 2\delta B.$$

Det fremgår heraf, at iterationen vil kunne fortsættes i det uendelige, hvis blot δ er valgt så lille, at

$$(7) \quad 2\delta < 1, \quad 2\delta B < k, \quad (\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))B < k,$$

idet disse betingelser sikrer, at

$$(x, y, f_{n+1}(x, y), D_x f_{n+1}(x, y), D_y f_{n+1}(x, y))$$

vil tilhøre punktmængden (3).

Vi indfører for kortheds skyld betegnelserne u_n , v_n og w_n for supremernerne af $|f_{n+1} - f_n|$, $|D_x f_{n+1} - D_x f_n|$ og $|D_y f_{n+1} - D_y f_n|$ på rektanglet $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [\varphi(x_0 + \delta), \varphi(x_0 - \delta)]$. Vi subtraherer (4), (5) og (6) fra de tilsvarende relationer med $n+1$ i stedet for n og vurderer højresiderne ved (1). Derved får vi vurderingerne

$$u_{n+1} \leq 2\delta(\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))A(u_n + v_n + w_n)$$

$$v_{n+1} \leq (\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))A(u_n + v_n + w_n)$$

$$w_{n+1} \leq 2\delta A(u_n + v_n + w_n).$$

Vi vælger δ så lille, at (7) er opfyldt, og yderligere således at der eksisterer et $\varepsilon \in]0, 1[$, således at

$$2\delta A \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\varphi(x_0 - \delta) - \varphi(x_0 + \delta))A \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

og vurderingen giver da

$$u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} \leq \varepsilon(u_n + v_n + w_n),$$

hvilket medfører, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n + w_n)$$

er konvergent. Denne række majoriserer imidlertid hver af rækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1}(x,y) - f_n(x,y)),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (D_x f_{n+1}(x,y) - D_x f_n(x,y)) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (D_y f_{n+1}(x,y) - D_y f_n(x,y))$$

og disse rækker konvergerer derfor alle ligeligt. Da rækkernes afsnitsfølger netop er $(f_n(x,y))$, $(D_x f_n(x,y))$ og $(D_y f_n(x,y))$ følger heraf, at (f_n) konvergerer ligeligt mod en grænsefunktion f , og at $(D_x f_n)$ og $(D_y f_n)$ konvergerer ligeligt mod $D_x f$ og $D_y f$. Vi kan da også i (4) foretage grænseovergangen $n \rightarrow \infty$, hvilket giver

$$(8) \quad f(x,y) = \iint_{\Delta(x,y)} g(t,u,f(t,u), D_x f(t,u), D_y f(t,u)) dt du,$$

hvoraf vi får ved differentiation

$$D_{xy} f(x,y) = g(x,y,f(x,y), D_x f(x,y), D_y f(x,y)),$$

hvilket viser, at f tilfredsstiller differentiaalligningen. Af (8) fremgår umiddelbart, at $f(x, \varphi(x)) = 0$. Af (5) og (6) ses, at

$$D_x f_{n+1}(x, \varphi(x)) = D_y f_{n+1}(x, \varphi(x)) = 0$$

og for $n \rightarrow \infty$ fås heraf

$$D_x f(x, \varphi(x)) = D_y f(x, \varphi(x)) = 0,$$

og dermed er beviset fuldført.

9.2. Vi supplerer sætning 9.1.1 med følgende entydigheds-sætning:

9.2.1. Sætning. Under samme forudsætninger, som i sætning 9.1.1 er løsningen f éntydigt bestemt i en omegn U af (x_0, y_0) .

Bevis. Med betegnelserne fra beviset for sætning 9.1.1 har vi for to løsninger f_1 og f_2 relationen (8), som ved (1) giver

$$|f_2(x,y)-f_1(x,y)| =$$

$$\left| \iint_{\Delta(x,y)} \left(g(t,u,f_2(t,u), D_x f_2(t,u), D_y f_2(t,u)) - \right. \right.$$

$$\left. g(t,u,f_1(t,u), D_x f_1(t,u), D_y f_1(t,u)) \right) dt du \Big| \leq$$

$$A \iint_{\Delta(x,y)} (|f_2(t,u)-f_1(t,u)| + |D_x f_2(t,u)-D_x f_1(t,u)| +$$

$$|D_y f_2(t,u)-D_y f_1(t,u)|) dt du,$$

eller

$$|f_2(x,y)-f_1(x,y)| \leq 2\delta A(\varphi(x_0-\delta)-\varphi(x_0+\delta)) \sup \left(|f_2(x,y)-f_1(x,y)| + \right.$$

$$\left. |D_x f_2(x,y)-D_x f_1(x,y)| + |D_y f_2(x,y)-D_y f_1(x,y)| \right).$$

Ved differentiation af (8) fås relationerne

$$D_x f(x,y) = \int_{\varphi(x)}^x g(x,u,f(x,u), D_x f(x,u), D_y f(x,u)) du$$

$$D_y f(x,y) = \int_{\varphi^{-1}(y)}^x g(t,y,f(t,y), D_x f(t,y), D_y f(t,y)) dt,$$

og af disse får vi på tilsvarende måde vurderingerne

$$|D_x f_2(x,y)-D_x f_1(x,y)| \leq (\varphi(x_0-\delta)-\varphi(x_0+\delta)) A \sup \left(\dots \right)$$

$$|D_y f_2(x,y)-D_y f_1(x,y)| \leq 2\delta A \sup \left(\dots \right),$$

hvor prikkerne i parentes står for den treleddede sum, der indgår i den første vurdering. Stadig med betegnelserne fra beviset for sætning 9.1.1 får vi nu ved addition af de tre vurderinger

$$|f_2(x,y)-f_1(x,y)|+|D_x f_2(x,y)-D_x f_1(x,y)|+|D_y f_2(x,y)-D_y f_1(x,y)| \leq \\ \varepsilon \sup_x (|f_2(x,y)-f_1(x,y)|+|D_x f_2(x,y)-D_x f_1(x,y)|+|D_y f_2(x,y)-D_y f_1(x,y)|),$$

og dette kræver, da $\varepsilon < 1$, at den treleddede sum forsvinder identisk. Dermed er påstanden bevist.

9.3. Vi vil nu udvide sætning 9.1.1 til det tilfælde, hvor udgangsværdier er opgivet langs kurven $y = \varphi(x)$.

9.3.1. Sætning. Med betegnelserne fra sætning 9.1.1 tænker vi os givet afbildninger $\zeta, \pi, \kappa: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, af hvilke ζ er differentiabel, medens de to andre er kontinuerte. Hvis ζ, π og κ tilfredsstiller betingelsen

$$D\zeta = \pi + \kappa D\varphi,$$

har den partielle differentialligning (2) en løsning $z = f_1(x, y)$, som tilfredsstiller udgangsbetingelserne

$$f(x, \varphi(x)) = \zeta(x), \quad D_x f(x, \varphi(x)) = \pi(x), \quad D_y f(x, \varphi(x)) = \kappa(x).$$

Bevis. Funktionen

$$\psi(x, y) = \zeta(x) + (y - \varphi(x))\kappa(x)$$

ses umiddelbart at tilfredsstille alle udgangsbetingelserne, og vi indfører en ny variabel z_1 , idet vi sætter

$$z = z_1 + \psi, \quad p = \frac{\partial z_1}{\partial x} + D_x \psi, \quad q = \frac{\partial z_1}{\partial y} + D_y \psi.$$

Derved overføres begyndelsesværdiet i et problem af den type, for hvilken sætning 9.1.1 og 9.1.2 gælder. Vi fik altså med det samme bevist, at løsningen er éntydig bestemt.

9.4. Den vilkårlige lineære differentialligning

$$ax + 2by + ct = g,$$

hvor a, b og c kun afhænger af x og y , overføres ved de i kapitel 8 behandlede metoder i en ligning af den her behandlede form, og vi kan derfor anvende sætningerne på enhver hyperbolsk, lineær differentialligning, når udgangsværdierne er givet langs en kurve, der ikke rører nogen projiceret karakteristik.

9.5. Som for sædvanlige differentialligninger kan det vises, at løsningen i en vis forstand afhænger kontinuert af udgangsværdierne. Nu består disse imidlertid af funktioner, og vi må således indføre en topologi på funktionsrummet for at definere den omtalte kontinuitet. Af beviset for sætning 9.3.1 frem-

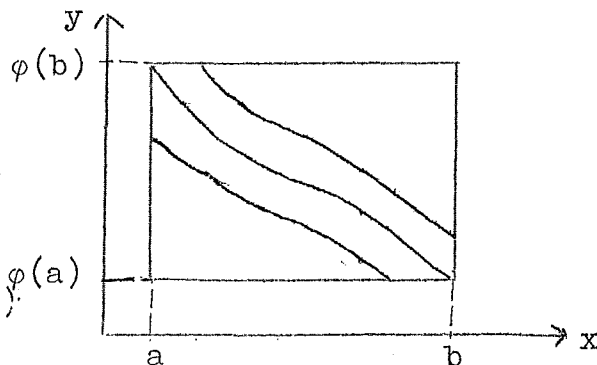
går, at en ændring i udgangsværdien kan erstattes med en ændring af funktionen g . Vi må nu vælge topologien sådan, at Lipschitzbetingelsen bliver opfyldt ligeligt på en omegn i funktionsrummet. Vi får da ligelig konvergens af iterationen, og kontinuiteten vil da følge af, at hvert trin i iterationen afhænger kontinuert af udgangsværdierne. Vi skal ikke gennemføre detaljerne, da en generel sætning ikke har stor topologi. Hvis funktionen g er "pæn", vil kontinuiteten ofte kunne vises for en ret grov topologi på funktionsrummet, og det er skærpede resultater af denne art, der har praktisk interesse.

9.6. For den specielle differentiaalligning

$$(9) \quad s = Ap + Bq + Cz + E,$$

hvor A, B, C og E kun afhænger af x og y , kan vi vise en global

eksistenssætning, idet udgangsværdier på kurven $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, der tilfredsstiller lignende betingelser som i de ovenfor viste sætninger, for en ligning af formen (9)



éntydigt fastlægger en løsning i

det mindste akseparallelle rektangel, der indeholder kurven.

Dette beror på, at højre side i (9) er defineret for alle p, q og z , således at betingelsen for, at z, p og q bliver indenfor området automatisk er opfyldt. Endvidere kan konstanten i Lipschitzbetingelsen vælges fast som det største af supremernerne for $|A|, |B|$ og $|C|$ i rektanglet. Dette medfører, at den positive konstant δ i eksistensbeviset kan vælges ens for alle punkter i rektanglet for udgangsværdier på kurver, hvis hældning ligger mellem faste grænser. Dette medfører, at udgangsværdierne på kurven sikrer eksistens og

éntydighed af løsningerne i et bælte af fast bredde som det på figuren antydede. En kurve tæt ved bæltets rand giver nu anledning til en løsning i et nyt bælte af samme bredde o.s.v.

Adskillelse af de variable.

10.1. Hvis en partiel differentiaalligning er lineær i såvel den ubekendte funktion som alle de optrædende differentialkvotienter, bliver løsningsmængden et lineært funktionsrum, og det kan da være formålstjenligt at forsøge at bestemme visse specielle løsninger, som frembringer hele løsningsmængden.

I visse simple tilfælde har løsningsrummet en basis, bestående af produkter af funktioner, der hver kun afhænger af 1 variabel, og det vil da i reglen være let at bestemme disse basisfunktioner. En partikulær løsning svarende til givne udgangsværdier kan da bestemmes, idet de givne udgangsværdier rækkeudvikles efter basisfunktionerne. I mange tilfælde kan løsningen af opgaven tilrettelægges, således at basisfunktionerne kan bestemmes som egenvektorer for en operator i et Hilbert- eller Banach-rum, og rækkeudviklingen fås ved hjælp af spektralsætningen. Vi skal her blot beskæftige os med et særligt simpelt eksempel, nemlig den svingende strengs differentiaalligning.

10.2. Vi tænker os den svingende strengs differentiaalligning givet på formen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha(x)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

hvor α er en kontinuert, strengt positiv funktion. Vi indsætter

$$z = f(x)g(t),$$

hvor f og g er 2 gange differentiable funktioner. Derved får vi

$$g(t)D^2f(x) - \alpha(x)^2f(x)D^2g(t) = 0.$$

eller bortset fra nulpunkter for f og g

$$\frac{D^2f(x)}{\alpha(x)^2f(x)} = \frac{D^2g(t)}{g(t)},$$

og den fælles-værdi for disse 2 kvotienter er således uafhængig af såvel x som y og har derfor en konstant værdi $-\lambda$, og f og g må således være løsninger til hver sin af de 2 differentiaalligninger

$$(2) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\alpha(x)^2u = 0, \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \lambda v = 0.$$

Den sidste af disse ligninger kan løses ved elementære metoder, medens behandlingen af den første ligning er mere kompliceret.

10.3. Der knytter sig størst interesse til det specialtilfælde, hvor den svingende streng har sine endepunkter fæstnet i to punkter. Svarende hertil vil vi kun interessere os for de løsninger, der tilfredsstiller betingelsen $z = 0$ for $x = 0$ og for $x = 1$. Idet vi erindrer, at dette gælder for alle t , ser vi, at betingelsen reduceres til $f(0) = f(1) = 0$. Tallet $l > 0$ er den svingende strengs længde. Vi ser, at tilføjelsen af den anførte udgangsbetingelse fører os til et randværdiproblem for den første af de sædvanlige differentiaalligninger (2).

Vi vil i det følgende antage, at koefficienten α_i (1) er en afbildning $\alpha: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$. Heri ligger der intet specielt, idet vi altid kan tænke os funktionen α fortsat på hele den reelle akse som en kontinuert funktion. Den fuldstændige løsning til den første af ligningerne (2) har da formen

$$(3) \quad u = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

hvor c_1 og c_2 er arbitrære konstanter, medens $f_1, f_2: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er partikulære løsninger, som tilfredsstiller betingelsen

$$(4) \quad W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ Df_1(x) & Df_2(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

for enhver værdi af x . Determinanten kaldes som bekendt Wronskideterminanten. Betingelsen (4) sikrer som bekendt, at begyndelsesværdier for $f(x)$ og $Df(x)$ i et punkt x_0 altid éntydigt fastlægger en løsning til den første ligning (2).

I det foreliggende tilfælde er problemet imidlertid et randværdiproblem. Hvis vi har givne randværdier $f(0) = u_1$, og $f(1) = u_2$ fører løsning af randværdiproblemet til ligningssystemet

$$(5) \quad \begin{aligned} c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) &= u_1 \\ c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) &= u_2 \end{aligned}$$

til bestemmelse af de arbitrære konstanter. Randværdiproblemet får 1 og kun 1 løsning undtagen i det specielle tilfælde, hvor det til (5) svarende homogene ligningssystem

$$\begin{aligned} c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) &= 0 \\ c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) &= 0 \end{aligned}$$

har egentlige løsninger. Men det svarer netop til, at det specielle randværdiproblem $f(0) = f(1) = 0$ har egentlige løsninger. Det vil da netop have uendelig mange indbyrdes proportionale løsninger.

10.4. Vi skal således finde løsningerne til

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda \alpha(x)^2 u = 0, \quad u = 0 \text{ for } x = 0 \text{ og for } x = 1,$$

idet 1 er et givet positivt tal, medens λ er et ubekendt tal. Vi vil først undersøge forholdene for $\lambda < 0$, og vi vil vise, at i dette tilfælde har differentialligningen slet ikke løsninger med flere end 1 nulpunkt.

Hvis løsningen f , som ikke er identisk 0, har mere end 1 nulpunkt, kan vi finde et interval $]x_1, x_2[$ mellem på hinanden følgende nulpunkter for f . Heraf følger, at f har konstant fortegn på $]x_1, x_2[$, og da $-f$ også er løsning, kan vi antage, at f er positiv. Af middelværdisætningen følger nu umiddelbart, at der findes et punkt $x_3 \in]x_1, x_2[$ med $Df(x_3) > 0$. Af (6) følger, at $D^2 f$ er positiv i ethvert interval, hvor f er positiv. Altså er Df strengt voksende på $]x_1, x_2[$, altså positiv på $]x_3, x_2[$. Heraf følger, at f er strengt voksende på $[x_3, x_2]$ i modstrid med, at $f(x_3) > 0$, men $f(x_2) = 0$.

Randværdiproblemet har således aldrig egentlige løsninger for $\lambda < 0$.

For $\lambda = 0$ har randværdiproblemet heller ikke egentlig løsninger, idet alle løsninger til differentialligningen i dette tilfælde er lineære.

10.5. Vi går nu over til at betragte det vanskeligere tilfælde $\lambda > 0$. Vi vil indføre den antagelse, at

$$(7) \quad \int_0^\infty (\alpha(x))^2 dx = \varphi.$$

Lad nu f være en løsning, og lad x_0 være et nulpunkt for f . Da Wronskideterminanten aldrig forsvinder, er $Df(x_0) \neq 0$. Lad os antage, at $Df(x_0) > 0$. Vi kan vælge $h > 0$, således at f er strengt voksende i $[x_0, x_0 + h]$. Vi har da på grund af differentialligningen

$$Df(x_0+h) < Df(x_0),$$

og vi sætter

$$k = f(x_0+h) > 0.$$

Lad os nu antage, at $x_1 > x_0 + 2h$ er valgt, således at

$$f(x) \geq k \text{ for } x \in [x_0+h, x_1].$$

For $x \in [x_0+h, x_1]$ får vi da ifølge differentialligningen

$$Df(x) = Df(x_0+h) - \lambda \int_{x_0+h}^x \alpha(\xi)^2 f(\xi) d\xi \leq$$

$$Df(x_0) - \lambda k \int_{x_0+h}^x \alpha(\xi)^2 d\xi,$$

hvilket igen medfører

$$k \leq f(x_1) = f(x_0+h) + \int_{x_0+h}^{x_1} Df(\eta) d\eta \leq$$

$$k + Df(x_0)(x_1-x_0) - \lambda k \int_{x_0+h}^{x_1} \left(\int_{x_0+h}^{\eta} \alpha(\xi)^2 d\xi \right) d\eta.$$

Ved delt integration omskrives det sidste integral til

$$x_1 \int_{x_0+h}^{x_1} \alpha(\xi)^2 d\xi - \int_{x_0+h}^{x_1} \eta \alpha(\)^2 d\eta = \int_{x_0+h}^{x_1} (x_1-\xi) \alpha(\xi)^2 d\xi,$$

så vi får uligheden

$$\lambda k \int_{x_0+h}^{x_1} (x_1-\xi) \alpha(\xi)^2 d\xi \leq Df(x_0)(x_1-x_0),$$

og da integranden er positiv, gælder uligheden stadig, hvis vi erstatter øvre grænse med $\frac{1}{2}(x_0+x_1)$, og vi har derfor

$$(x_1-\xi) \alpha(\xi)^2 d\xi \geq \frac{1}{2}(x_1-x_0) \int_{x_0+h}^{\frac{1}{2}(x_0+x_1)} \alpha(\xi)^2 d\xi,$$

så vi sluttelig får vurderingen

$$\int_{x_0+h}^{\frac{1}{2}(x_0+x_1)} \alpha(\xi)^2 d\xi \leq \frac{2}{\lambda k} Df(x_0).$$

Af (7) følger nu, at x_1 ikke kan være vilkårlig stor. Altså kan vi vælge x_1 , således at vi netop har $f(x_1) = k$. På intervallet $]x_0+h, x_1[$ er $f(x) > k$, og da Df er monotont aftagende for $f(x) > 0$, kan vi slutte, at $Df(x_1) < 0$. For $x > x_1$ har vi da, så længe $f(x)$ bliver ved at være positiv, at $f(x) < k - (x-x_1)Df(x_1)$, og heraf fremgår, at f har et nulpunkt for $x > x_1$.

Vi har således

vist, at løsningsfunktionens grafiske billede



har en bølgetop som antydnet på figuren. Da $-f$ også er løsning, kan vi gentage ræsonnementet og påvise eksistensen af en følgende bølgedal. Løsningsfunktionen har altså form som en bølge, der strækker sig i det uendelige, men det vil sædvanligvis være en noget uregelmæssig bølge, hvis toppe og dale har varierende længde og højde. Vi bemærker, at kurvens vendepunkter altid falder nøjagtigt i skæringspunkterne med x -aksen.

10.6 Det er let at vise, at løsningen til differential-ligningen

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda \alpha(x)^2 u = 0$$

svarende til givne udgangsværdier

$$x = 0, \quad u = 0, \quad \frac{du}{dx} = \beta$$

på ethvert fast endeligt interval afhænger kontinuert af λ .

Vi erstatter λ med $\lambda + \Delta\lambda$ og løsningen bliver derefter $u + u_1$,

hvor

$$\frac{d^2(u+u_1)}{dx^2} + (\lambda+\Delta\lambda)\alpha(x)^2(u+u_1) = 0.$$

Ved subtraktion af den oprindelige ligning fås

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \lambda \alpha(x)^2 u_1 + \Delta \lambda \alpha(x)^2 (u + u_1) = 0.$$

Hvis (8) har de lineært uafhængige løsninger $f_1(x)$ og $f_2(x)$ med Wronskideterminanten $W(x)$ giver de arbitrære konstanter variationsmetode løsning $u_1(x)$ på formen

$$u_1(x) = \Delta \lambda \left(f_1(x) \int_{x_0}^x \frac{f_2(\xi) \alpha(\xi)^2 (u(\xi) + u_1(\xi))}{W(\xi)} d\xi - \right. \\ \left. f_2(x) \int_{x_0}^x \frac{f_1(\xi) \alpha(\xi)^2 (u(\xi) + u_1(\xi))}{W(\xi)} d\xi \right)$$

Betragter vi nu et fast interval $[x_0, x_0+1]$, giver denne ligning umiddelbart en vurdering af formen

$$\sup |u_1| \leq |\Delta \lambda| K (\sup |u| + \sup |u_1|),$$

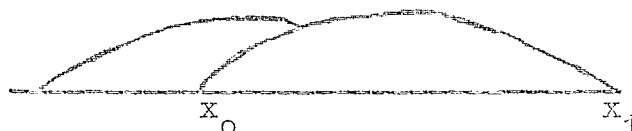
som for tilstrækkelig små $|\Delta \lambda|$ giver

$$\sup |u_1| \leq \frac{K \sup |u|}{1 - K |\Delta \lambda|} |\Delta \lambda|.$$

Heraf fremgår, at løsningen afhænger kontinuert af λ .

10.7. Lad f være en løsning til (8) og lad $[x_0, x_1]$ være et interval mellem 2 nulpunkter for f . På figuren har vi antydnet løsningen i dette

interval, idet vi har antaget, at det drejer



sig om en bølgetop. Vi har desuden tegnet et stykke af en løsning, der starter lidt til venstre for x_0 med samme hældning. I x_0 er dens hældning formindskes noget og til højre for x_0 vil hældningen formindskes hurtigere end for den oprindelige løsning.

Den nye bølge vil derfor have sin top til venstre for den gamle bølges. Vi kan nu multiplicere den nye løsning med en konstant, så de to bølgetoppe bliver lige høje. Det er da klart, at den nye kurve skærer den gamle. Den kan imidlertid kun skære bølgetoppen 1 gang, da randværdiproblemet er éntydigt løseligt for ægte delintervaller af $[x_0, x_1]$. Vi ser således at den nye bølge ligger således i forhold til den gamle, at alle skæringspunkter med x -aksen er forskudt mod venstre.

10. 8. Vi vil nu betragte 2 eksemplarer af ligningen (8) svarende til forskellige værdier af λ_1 altså

$$(9) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda_1 \alpha(x)^2 u = 0 \quad , \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda_2 \alpha(x)^2 u = 0,$$

hvor vi vil antage, at $\lambda_1 < \lambda_2$. Vi betragter en løsning f_1 til den første ligning og en løsning f_2 til den anden ligning, og vi antager, at det i et punkt x_0 gælder, at

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0, \quad Df_1(x_0) = Df_2(x_0) > 0.$$

Begge løsninger vil da have bølgetop, som begynder i x_0 . Af differentialligningen fremgår umiddelbart, at

$$D^2 f_1(x_0) = -\lambda_1 \alpha(x_0)^2 f_1(x_0) = 0,$$

$$D^2 f_2(x_0) = -\lambda_2 \alpha(x_0)^2 f_2(x_0) = 0,$$

samt ved differentiation af differentialligningen, at

$$(10) \quad D^3 f_1(x_0) = -\lambda_1 \alpha(x_0)^2 Df_1(x_0), \quad D^3 f_2(x_0) = -\lambda_2 \alpha(x_0)^2 Df_2(x_0),$$

hvilket viser, at $D^3 f_1(x_0) > D^3 f_2(x_0)$. Heraf følger, at der eksisterer et interval $]x_0, x_0+h[$, $h > 0$, hvor $f_1(x) > f_2(x)$.

Lad nu x_1 være det første nulpunkt for f_1 efter x_0 . Vi vil vise, at ligningen $f_1(x) = f_2(x)$ ikke kan være opfyldt i intervallet $]x_0, x_1]$. Vi fører beviset indirekte, idet vi antager, at $f_1(x_2) = f_2(x_2)$ og $x_2 \in]x_0, x_1]$. Vi betragter først tilfældet

$x_2 < 1$. I dette tilfælde er $f_1(x)(f_2(x))^{-1}$ kontinuert på $]x_0, x_2]$ og har grænseværdien 1 i venstre endepunkt. Den vil derfor i et punkt $x_3 \in]x_0, x_2[$ antage sin størsteværdi $\kappa > 1$. Vi betragter løsningen $f_3(x) = \kappa f_2(x)$ til den sidste af ligningerne (9). Den tilfredsstiller betingelsen $f_3(x_3) = f_1(x_3)$, men $f_3(x) \geq f_1(x)$ i en omegn af x_3 . Nu er imidlertid

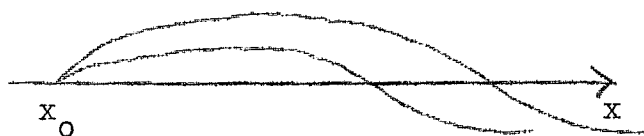
$$Df_3(x_3) = Df_1(x_3), \quad D^2f_3(x_3) < D^2f_1(x_3).$$

Det første følger af, at $f_3(x) - f_1(x) \geq 0$ i en omegn af x_3 , og det sidste følger af, at f_1 og f_3 tilfredsstiller hver sin af ligningerne (9). Men denne ulighed ville netop medføre, at $f_3(x) < f_1(x)$ i en omegn af x_3 bortset fra selve punktet x_3 .

I tilfældet $x_2 = x_1$ får $f_1(x)(f_2(x))^{-1}$ en grænseværdi i x_1 , da $Df_2(x_1) \neq 0$, og den antager derfor sin størsteværdi $\kappa > 1$ i et punkt $x_3 \in]x_0, x_1]$. For $x_3 < x_1$ gælder ræsonnementet uændret. For $x_3 = x_1$ benytter vi (10) med x_1 i stedet for x_0 og f_3 i stedet for f_2 for at få

$Df_1(x_1) = Df_3(x_1)$, $D^2f_1(x_1) = D^2f_3(x_1)$, $D^3f_1(x_1) < D^3f_3(x_1)$ i modstrid med, at $f_3(x) > f_1(x)$ i et interval til venstre for x_1 .

Af ovenstående overvejelser følger, at alle løsningskurvens skæringspunkter med x-aksen til højre for x_0 bevæger sig mod venstre, når λ vokser.



10.9. Vi vender nu tilbage til det oprindelige problem, som er et specielt tilfælde af det såkaldte Sturm-Liouville-problem. Vi søger altså løsningen til

$$(10) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda \alpha(x)^2 u = 0$$

med randbetingelserne

$$(11) \quad u = 0 \quad \text{for } x = 0 \quad \text{og } x = 1.$$

For $\lambda \leq 0$ har dette problem ingen løsninger. For $\lambda > 0$ vil en løsning $u = f(x)$ med $f(0) = 0$ til ligningen (10) være en bølge, der skærer x -aksen uendelig mange gange. Når λ vokser vil alle disse skæringspunkter bevæge sig mod venstre. Det ses også umiddelbart af det foregående, at man ved at vælge λ tilstrækkelig stor kan opnå, at den samlede længde af de første n bølger bliver vilkårlig lille. Af resultatet i 10.6 fremgår, at abscisserne til skæringspunkterne med x -aksen afhænger kontinuert af λ . Heraf følger, at det for uendelig mange værdier af λ indtræffer, at et skæringspunkt med x -aksen falder i $x = 1$, og randbetingelsen (11) er da opfyldt. Vi ser således, at Sturm-Liouville-problemet (10), (11) har løsninger for en voksende følge $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ af værdier af λ . Det ses også, at denne følge går mod ∞ .

10.10. Sturm-Liouville-problemet kan formuleres som et egenværdiproblem. Lad $\hat{C}^2[0,1]$ være klassen af 2 gange differentiable funktioner $f : [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ med $f(0) = f(1) = 0$, organiseret som et vektorrum med en passende topologi. Vi har da en operator

$$L : \hat{C}^2[0,1] \text{ ind i } \hat{F}[0,1],$$

hvor $\hat{F}[0,1]$ er mængden af funktioner på $[0,1]$, og hvor L er defineret ved

$$Lu = -\alpha(x)^{-2} \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Det ses da, at de søgte værdier af λ netop er egenværdier for L , medens løsningerne er de tilsvarende egenvektorer.

Det ses, at L ikke afbilder sit definitionsrum på sig selv, men ind i et langt mere omfattende rum. Dette giver anledning til principielle vanskeligheder ved anvendelsen af den almindelige teori for operatorer i Banach-rum. Vi skal ikke gå nærmere ind på dette spørgsmål.

10.11. For den partielle differentiaalligning for den svingende streng får vi nu umiddelbart løsninger ved at supplere løsningerne til Sturm-Liouville-problemet med løsninger til differentiaalligningen

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda v = 0$$

for samme værdier af λ . Vore fundamentale løsninger får således formen

$$f(x)\cos(\omega t - \varphi),$$

hvor $\omega^2 = \lambda$. Her er $f(x)$ en funktion, hvis grafiske billede er bølgeformet. Denne bølge vandrer ikke henad x -aksen, som de tidligere omtalte, men bliver på samme sted, således at alle dens knuder er faste, men amplituden varierer altså periodisk i tidens løb. Vi taler derfor om en stående bølge.

Vi får en voksende følge $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ af værdier af konstanten ω i løsningen, når l er fast valgt. Svarende hertil får vi stående bølger med svingningstider

$$\frac{2\pi}{\omega_1} > \frac{2\pi}{\omega_2} > \dots$$

Hvis strengen er homogen, bliver disse indbyrdes harmoniske, men i det almindelige tilfælde vil de sædvanligvis være disharmoniske.

Hvis vi nu søger en løsning svarende til givne udgangsværdier

$$f(x,0) = g(x), \quad D_t f(x,0) = h(x),$$

hvor

$$g(0) = g(1) = 0, \quad h(0) = h(1) = 0,$$

tænker vi os denne skrevet som en sum af fundamentalløsninger

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t),$$

og vi ser, at vi blot behøver at vælge koefficienterne a_n og b_n , således at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) = g(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n f_n(x) = h(x),$$

og denne opgave reduceres således til problemet om udvikling af f og g i række efter egenvektorerne f_n og en passende spektralsætning vil eventuelt klare sagen. Vi skal ikke her gå nærmere ind på dette spørgsmål.

Varmeledningsligningen.

11.1. Hvis de to sider af en tyk metalvæg holdes på hver sin faste temperatur, vil der i tidens løb indstille sig en ligevægtstilstand, således at temperaturen varierer lineært gennem væggen, og der vil da ved varmeledning transporteres energi gennem væggen med en hastighed, der viser sig, at være proportional med forskellen mellem temperaturen på væggens to sider. Energitransporten går i retning af den side, hvor temperaturen er lavest. Vi kan derfor skrive

$$(1) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -k \frac{\partial T}{\partial x},$$

hvor $\frac{\partial E}{\partial t}$ er energitransporten pr. tidsenhed, medens $\frac{\partial T}{\partial x}$ er temperaturændringen pr. længdeenhed vinkelret på vægfladen. Minustegnet antyder, at energitransporten går i retning af aftagende temperatur, og k er en konstant, som er karakteristisk for det materiale, væggen består af. I virkeligheden er k ikke helt uafhængig af temperaturen.

11.2. Den ovenfor omtalte situation kan uden videre efterprøves eksperimentelt. Fra matematisk synspunkt kan man naturligvis ikke ud fra det ovenfor anførte slutte noget som helst om forholdene, når den omtalte ligevægtstilstand endnu ikke har indstillet sig, så temperaturfordelingen endnu varierer i tidens løb. For at komme videre gør vi nu den antagelse, at ligningen (1) er almen gyldig. Vi vil kun beskæftige os med det 1-dimensionale tilfælde, hvor temperaturen er funktion af t og den ene rumkoordinat x , men uafhængig af de 2 andre rumkoordinater.

Vi betragter nu stykket $[x_1, x_2]$ af x -aksen. Den varmemængde, der findes i et rør af tværsnit 1 langs dette interval er givet ved

$$\int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) T(x, t) dx,$$

hvor γ er varmemfylden og T temperaturen. I varmemængden indgår en additiv, arbitrær konstant, som er uden betydning for os. Ændringen af energiindholdet i det betragtede rumelement er givet ved

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx,$$

men også ved den ifølge (1) tilførte energi

$$-k(x_1) D_x T(x_1, t) + k(x_2) D_x T(x_2, t).$$

Altså er

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x) D_t T(x, t) dx = \frac{k(x_2) D_x T(x_2, t) - k(x_1) D_x T(x_1, t)}{x_2 - x_1}.$$

Vi foretager grænseovergangen $x_2 \rightarrow x_1$ og skriver x i stedet for x_1 . Derved får vi den 1-dimensionale varmeledningsligning

$$(2) \quad \gamma(x) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial T}{\partial x}).$$

I denne form er ligningen anvendelig også for inhomogent stof, idet γ og k kan variere fra sted til sted. Vi minder om, at (2) ikke følger umiddelbart af det først omtalte til grund liggende eksperiment. Ligningen (2) er ikke umiddelbart egnet til efterprøvning ved eksperiment. Den egentlige eksperimentelle verifikation af (2) må således være en verifikation af løsninger til (2), idet disse ofte lader sig efterprøve ved eksperiment.

11.3 Vi vil nu først forsøge at finde fundamentalløsninger til (2) ved at adskille de variable. Vi sætter

$$T = uv, \quad u = f(x), \quad v = g(t),$$

og vi får

$$\gamma u \frac{dv}{dt} = v \frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right),$$

og efter division med γuv bliver venstre side uafhængig af x og højre side uafhængig af t , så begge sider får en konstant værdi $-\lambda$.

Vi får derved ligningerne

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) + \lambda \gamma u = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \lambda v = 0.$$

Den første af disse ligninger giver anledning til et Sturm-Liouville-problem i lighed med det, vi mødte i forbindelse med den svingende strengs differentialligning.

11.4 Vi vil nu nærmere studere det specielle tilfælde, hvor γ og k er konstante. Ved et variabelskift $t = \kappa t_1$, $\kappa > 0$ kan vi vilkårligt ændre værdien af den konstante faktor $\gamma^{-1}k$, og det vil derfor være tilstrækkeligt at betragte ligningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Denne ligning er ligesom den generellere ligning (2) en parabolisk differentialligning, og karakteristikkene er rette linier parallelle med x -aksen. Ved adskillelse af de variable får vi ligningerne

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \lambda v = 0.$$

Vi vil nu specielt søge at bestemme fundamentalløsninger svarende til randværdierne

$$u = 0 \text{ for } x = 0 \text{ og } x = l, \quad l > 0.$$

Da vi straks kunne have indført en ny uafhængig variabel ved $x = \mu x_1$, er det nok at studere en speciel værdi af l . Vi vil foretrække at vælge $l = \pi$.

Om den første af ligningerne (3) gælder det, at løsninger for $\lambda \leq 0$ har højst 1 nulpunkt, og de kan derfor ikke tilfreds-

stille de foreliggende randbetingelser. For $\lambda = \omega^2$ får den første ligning (3) løsningerne $a \sin(\omega x + \varphi)$, hvor a og φ er arbitrære konstanter. Det ses, at randbetingelserne kan opfyldes, hvis og kun hvis ω er et helt tal, og vi kan da vælge $\varphi = 0$. Svarende til løsningen

$$u = \sin nx$$

har vi $\lambda = n^2$, og den sidste ligning (3) får derfor løsningen

$$v = e^{-n^2 t},$$

så vi får fundamentalløsningerne

$$T = e^{-n^2 t} \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vi ser, at temperaturen i ethvert punkt af væggen går eksponentielt mod 0. Det interessante er, at dette sker, således at sinusform af temperaturfordelingen bevares under nedkølingen.

11.5. Vi vil nu antage, at vi har opgivet temperaturfordelingen

$$T(x, 0) = f(x)$$

til tidspunktet $t = 0$. Funktionen $f : [0, \pi]$ ind i $\mathbb{R}$ antages differentiabel, og desuden forudsætter vi, at $f(0) = f(\pi) = 0$. Vi kan da tænke os f fortsat som en ulige kontinuert funktion med periode 2π . Vi vil anvende betegnelsen f også for den udvidede funktion. Vi ved da fra mat. 1 og mat. 2, at funktionen f kan udvikles i en konvergent Fourierrække

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Det følger umiddelbart, at rækken

$$(4) \quad T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx.$$

er ligelig konvergent for $t \geq 0$, idet rækken $(\sum b_n \sin nx)$ er ligelig konvergent, medens de tilføjede faktorer $e^{-n^2 t}$ for enhver fast værdi af $t \geq 0$ varierer monotont med n .

Heraf følger, at $T(x, t)$ er kontinuert for $t \geq 0$, og det ses derefter umiddelbart, at T tilfredsstiller randbetingelserne. For $t \geq t_0$, hvor t_0 er positiv, er også de rækker, der fås ved ledvis differentiation 2 gange med hensyn til x eller t ligelig konvergente, og vi kan derfor slutte, at T tilfredsstiller differentiationsligningen for $t \geq t_0$ uden at stille flere krav til funktionen $f(x)$. Vi må i hvert fald kræve 2 gange differentiabilitet, før problemet overhovedet har mening. Hvis vi kræver, at f er 3 gange kontinuert differentiabel, kan vi differentiere (4) ledvis for $t = 0$, og ligningen vil da være tilfredsstillet for $t = 0$.

For $f > 0$ er (4) vilkårlig ofte differentiabel. Det ses umiddelbart, at (4) konvergerer ligeligt, også for komplekse værdier af x og t i det ved $\operatorname{Re} t \geq t_0, |\operatorname{Im} x| \leq A$, hvor t_0 og A er positive tal. Heraf følger, at løsningen (4) endda er en analytisk funktion.

Vi ser således, at randværdiproblemet er løseligt, selv om f har visse former for singulariteter, men disse singulariteter udglattes øjeblikkeligt, så løsningen bliver analytisk for $t > 0$.

11.6. Vi betragter en løsning $T(x, t)$ til varmeledningsledningen i et rektangel

$$a \leq x \leq b, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

således at forstå, at T er kontinuert i hele rektanglet, og i rektanglets indre 2 gange differentiabel med hensyn til x og 1 gang

med hensyn til t , således at

$$(6) \quad D_{xx}T = D_tT.$$

Vi vil nu vise sætningen:

Funktionen T antager sin størsteværdi i et punkt (x_0, t_0) , hvor enten $x_0 = a$ eller b eller $t_0 = t_1$. Det samme gælder for mindsteværdien af T .

Bevis. Da $-T$ også er løsning, er det nok at vise påstanden for størsteværdiens vedkommende. Vi vil først indirekte vise, at størsteværdien antages på rektanglets rand. I modsat fald var $T(x_0, t_0)$ effektivt større end størsteværdien af T på rektanglets rand, og vi kunne vælge $\varepsilon > 0$, således at det for

$$(7) \quad U(x, t) = T(x, t) + \varepsilon(x - x_0)^2$$

ligeledes gælder, at $U(x_0, t_0)$ er større end enhver værdi, som U antager på rektanglets rand. Lad (x^*, t^*) være det punkt, hvor U antager sin størsteværdi. Vi har da

$$(8) \quad D_x U(x^*, t^*) = D_t U(x^*, t^*) = 0; \quad D_{xx} U(x^*, t^*) \leq 0,$$

men ved anvendelse af (6) og (7) følger heraf

$$(9) \quad 2\varepsilon = D_{xx}T(x^*, t^*) - D_tT(x^*, t^*) + 2\varepsilon = \\ D_{xx}U(x^*, t^*) - D_tU(x^*, t^*) \leq 0,$$

i modstrid med, at ε var positiv.

Ved en simpel modifikation af dette ræsonnement får vi nu et bevis for påstanden i sætningen. Hvis denne påstand ikke var rigtig, kunne vi i henhold til det ovenfor anførte vælge (x_0, t_2) på rektanglets øverste side, således at $T(x_0, t_2)$ var effektivt større end funktionens størsteværdi på de øvrige 3 sider. Dette ville imidlertid stadig gælde, hvis vi erstattede t_2 med $t_2 - h$, hvor $h > 0$ er tilstrækkelig lille. Vi kan derfor antage, at (6) er opfyldt, også på rektanglets øverste side. Vi kan da gennemføre ordret samme arrangement som ovenfor med den ene ændring, at (x^*, t^*) eventuelt falder på rektanglets øverste side, og (8)

må da erstattes med

$$D_x U(x^*, t^*) = 0, D_t U(x^*, t^*) \geq 0, D_{xx} U(x^*, t^*) \leq 0,$$

men det vil ikke ødelægge vurderingen (9).

11.7. Vi vender et øjeblik tilbage til problemstillingens fysiske baggrund. Begyndelsesværdierne $f(x)$ er en given temperaturfordeling for $t = 0$. Det fremgår af vort resultat ovenfor, at temperaturfordelingen derved er fastlagt for ethvert senere tidspunkt. Ved hjælp af varmeledningsligningen kan vi således forudsige,

hvordan temperaturfordelingen vil være på ethvert tidspunkt i fremtiden.

På den anden side ser vi også, at den fundne rækkeudvikling ikke kan forventes at konvergere for alle negative værdier af t . Det fremgår endda, at visse løsninger for $t \rightarrow -t_0$, $t_0 > 0$ vil konvergere mod en grænse-funktion, der ikke er vilkårlig ofte differentiabel, ja måske ikke 2 gange differentiabel. Så kan vi ikke følge løsningen længere tilbage i tiden. Hvis den nemlig kunne føre løsningen tilbage til tidspunktet $-t_1 < -t_0$ som en 2 gange differentiabel funktion, kunne vi også forfølge den frem i tiden fra tidspunktet $-t_1$ ved den overfor benyttede metode, og vi ville få en analytisk løsning i modstrid med, at løsningen ikke var 2 gange differentiabel for $t = -t_0$.

Disse forhold stemmer med, at varmeledning er en irreversibel proces. Dermed menes, at den altid vil forløbe i én bestemt retning, så vi ikke som ved så mange andre processer kan tillade os at skifte retning på tidsaksen.

11. 8. Den anførte metode kan anvendes, selv om de givne begyndelsesværdier har ret kraftige singulariteter. Lad os f.eks. antage, at vi har givet, at

$$T(x, 0) = 1 \quad , \quad x \in] 0, \pi [.$$

Vi får da

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{4}{n\pi},$$

så vi får løsningen

$$T(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 t} \sin nx,$$

og det ses let, at denne løsning er kontinuert undtagen i $(0,0)$ og $(\pi,0)$. Diskontinuiteterne i endepunkterne glattes altså ud øjeblikkeligt.

11.9. Vi vil forsøge at løse et randværdiproblem af en helt anden karakter. Vi betragter de givne randværdier

$$T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = T(\pi,t) = t,$$

svarende til, at vi til tidspunktet $t = 0$ begynder at opvarme væggens sider, så deres temperatur øges med jævn hastighed.

Vi sætter

$$f(x,t) = t - \frac{1}{2}x(\pi - x),$$

og vi ser da, at f tilfredsstiller varmeledningsligningen, og at

$$f(0,t) = f(\pi,t) = t.$$

For den søgte løsning T gælder altså, at $T = f + g$, hvor g tilfredsstiller varmeledningsligningen, og

$$g(x,0) = \frac{1}{2}x(\pi - x), \quad g(0,t) = g(\pi,t) = 0,$$

så problemet er reduceret til en randværdiopgave af den ovenfor behandlede form.

I dette tilfælde får vi

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [(\pi - 2x) \sin nx]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n^3}, \end{aligned}$$

så vi får

$$g(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-n^2 t} \sin nx,$$

og løsningen til vort problem bliver

$$T(x, t) = t - \frac{1}{2}x(\pi - x) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-n^2 t} \sin nx.$$

Her er ledvis differentiation tilladt, da den resulterende række bliver ligelig konvergent. Vi får

$$D_t T(x, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 t} \sin nx,$$

hvor rækken netop er løsningen til det ovenfor behandlede problem. Det fremgår heraf, at løsningen for $x \in]0, \pi[$ starter med partiel differentialkvotient 0 med hensyn til t . Vi får altså også i dette tilfælde en udglatning af singulariteten.

11.10 Laplacetransformationer er et vigtigt hjælpemiddel i teorien for såvel sædvanlige som partielle differentiaalligninger. For en afbildning $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, hvor f er stykkevis kontinuert differentiabel, sætter vi

$$(11) \quad Lf(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

hvor $s = \sigma + i\tau$ er en kompleks variabel.

Lad os antage, at det uegentlige integral er konvergent i punktet $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$. Vi betragter nu et nabopunkt

$$s = s_0 + re^{i\Theta}, \quad r > 0, \quad |\Theta| \leq \Theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

Vi får da

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-sx} f(x) dx &= \int_a^b e^{-rxe^{i\Theta}} e^{-s_0x} f(x) dx = \\ &= \int_a^b e^{-rxe^{i\Theta}} dF(x) = \\ &= F(b)e^{-bre^{i\Theta}} - F(a)e^{-are^{i\Theta}} + re^{i\Theta} \int_a^b F(x) e^{-rxe^{i\Theta}} dx, \end{aligned}$$

hvor vi har sat

$$F(x) = \int_0^x e^{-s_0 \xi} f(\xi) d\xi.$$

Funktionen $F(x)$ er begrænset, og vi vælger K , således at

$|F(x)| \leq K$, og vi får således vurderingen

$$\left| \int_a^b e^{-sx} f(x) dx \right| \leq K (e^{-b \cos \Theta_0} + e^{-a \cos \Theta_0}) +$$

$$\frac{K}{\cos \Theta_0} (e^{-b \cos \Theta_0} + e^{-a \cos \Theta_0}) \leq \frac{4K}{\cos \Theta_0} e^{-a \cos \Theta_0}.$$

Heraf fremgår, at Laplace-integralet (11) konvergerer ligeligt i fællesmængden for det ved $\text{Arg}(s-s_0) \leq \Theta_0$ bestemte vinkelrum og en halvplan $\sigma \geq \sigma_1$, hvor $\sigma_1 > \sigma_0$. Da dette gælder for ethvert $\sigma_1 > \sigma_0$ og ethvert $\Theta_0 < \frac{1}{2}\pi$ har vi tillige bevist, at (11) konvergerer i halvplanen $\sigma > \sigma_0$.

Af det netop viste fremgår nu, at integralet (11) har en konvergenshalvplan, der eventuelt kan være tom eller hele planen, og at (11) konvergerer i alle halvplanens indre punkter og divergerer i alle halvplanens ydre punkter. Integralet (11) konvergerer ligeligt i ethvert afsluttet vinkelrum, der er indeholdt i den åbne konvergenshalvplan. På halvplanens begrænsningslinie kan der findes punkter, hvor integralet konvergerer, og punkter, hvor det divergerer.

11.11. Laplace-integralet (11) er nært beslægtet med de velkendte Fouriertransformerede. For et σ , der tilhører konvergenshalvplanen, sætter vi

$$F_\sigma(x) = e^{-\sigma x} f(x).$$

Denne funktion tænker vi os defineret for alle x , idet vi giver den funktionsværdien 0 for ethvert negativt x . Den får da den

eksponentialtransformerede

$$(12) \quad EF_{\sigma}(t) = \int_0^{\infty} F_{\sigma}(x) e^{ixt} dx = LF(\sigma - it),$$

så vi for ethvert σ i konvergenshalvplanen har

$$LF(s) = EF_{\sigma}(-t).$$

Hvis vi nu antager, at $F_{\sigma}(x)$ er absolut integrabel, hvilket er ensbetydende med, at Laplace-integralet (11) konvergerer absolut, har vi omvendingsformlen

$$F_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} EF_{\sigma}(t) e^{-ixt} dt,$$

hvilket også kan skrives

$$(13) \quad f(x) = e^{\sigma x} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} LF(\sigma + it) e^{ixt} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} LF(s) e^{xs} ds,$$

hvor det sidste integral er udstrakt over en lodret linie i den komplekse plan.

Hvis $LF(s)$ konvergerer med 0 ligeligt i σ for $\sigma > \sigma_1$, når $t \rightarrow \infty$ eller $t \rightarrow -\infty$, følger umiddelbart af Cauchy's integralsætning, at det sidste integral i (13) er uafhængigt af σ for $\sigma > \sigma_1$.

11.12. To afbildninger $f, g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$, som begge er stykkevis kontinuert differentiable har en foldning

$$f * g(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt = \int_0^x f(x-u) g(u) du = g * f(x).$$

For tre afbildninger f, g og h med de samme egenskaber får vi

$$\begin{aligned}
 (f*g)*h(x) &= \int_0^x (f*g)(t)h(x-t)dt = \int_0^x \int_0^x f(u)g(t-u)h(x-t)du dt = \\
 &= \int_0^x \int_u^x f(u)g(t-u)h(x-t)dt du = \int_0^x f(u) \int_0^{x-u} g(x-u-v)h(v)dv du = \\
 &= f*(g*h)(x).
 \end{aligned}$$

Endvidere har vi umiddelbart regnereglen

$$f*(g+h) = f*g + f*h,$$

og mængden af afbildninger er således organiseret som en ring. Det kan vises, at denne ring ikke har nul-divisorer, men dette resultat er meget dybtliggende; og vi får ikke brug for det.

Hvis f og g er begrænsede og absolut intergrable, er $f*g$ også kontinuert og absolut intergrabel. Vi kan da udregne Laplacetransformationen

$$\begin{aligned}
 L(f*g)(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} f*g(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t)dt dx = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t)g(x-t)e^{-sx} dx = \int_0^\infty f(t)e^{-st} \int_0^\infty g(x-t)e^{-s(x-t)} dx dt = \\
 &= Lf(s)Lg(s).
 \end{aligned}$$

Vi ser således, at foldning af to funktioner modsvarer multiplikation af deres Laplacetransformerede.

11.13. Lad nu $T(x,t)$ være en løsning til varmeledningsligningen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

svarende til randværdierne

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0, t) = 0, \quad T(\pi, t) = \varphi(t).$$

Med $U(x,s)$ betegner vi den Laplacetransformerede af $T(x,t)$ for hver fast værdi af x , altså

$$(14) \quad U(x,s) = \int_0^\infty T(x,t)e^{-st} dt.$$

Vi vil foreløbig antage, at $T(x,t)$ forholder sig således, at integralet konvergerer absolut for tilstrækkelig store σ .

Vi har da omvendingsformlen

$$(15) \quad T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(x, s) e^{ts} ds.$$

Under passende skærpede forudsætninger giver (14)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) e^{-st} dt$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) e^{-st} dt = [T(x, t) e^{-st}]_{t=0}^\infty +$$

$$s \int_0^\infty T(x, t) e^{-st} dt = sU(x, s),$$

og ved differentiation af (15) får vi tilsvarende omvendingsformler. Vi ser, at varmeledningsligningen modsvarer relationen

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) = sU(x, s)$$

for den Laplacetransformerede U . Dette er imidlertid en sædvanlig differentiaalligning for hver fast værdi af s .

For reelle værdier af s løses (16) umiddelbart, og vi får for $s > 0$ løsningen

$$U(x, s) = c_1(s) e^{\sqrt{s} x} + c_2(s) e^{-\sqrt{s} x}.$$

Af $T(0, t) = 0$ følger $U(0, s) = 0$, så vi får $c_2(x) = -c_1(x)$, og løsningen har derfor formen

$$(17) \quad U(x, s) = c(s) (e^{\sqrt{s} x} - e^{-\sqrt{s} x}).$$

For fast x er U analytisk. Dette medfører, at $c(s)$ er en analytisk funktion af x .

Løsningen (17) kan nu anvendes for alle s undtagen på den negative reelle aks, idet $\sqrt{s}$ eksisterer som analytisk funktion i hele dette område. De arbitrære konstanter **variationsmetode** kan anvendes ganske som i det reelle bortset fra nulpunkterne for Wronski-determinanten. Denne bliver imidlertid

$$\begin{vmatrix} e^{\sqrt{s}x} & , & e^{-\sqrt{s}x} \\ \sqrt{s}e^{\sqrt{s}x} & , & -\sqrt{s}e^{-\sqrt{s}x} \end{vmatrix} = -2\sqrt{s} ,$$

og løsningen (17) vil derfor kunne anvendes for alle de nævnte værdier af s . Vi foretrækker at skrive (17)

$$U(x,s) = 2c(x) \sinh \sqrt{s} x.$$

Randbetingelsen $T(\pi, t) = \varphi(t)$ medfører, at

$$U(\pi, s) = L\varphi(s) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-st} dt,$$

og vi får således

$$U(x,s) = L\varphi(s) \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi}.$$

Omvendingsformlen giver nu

$$(18) \quad T(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L\varphi(s) \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi} e^{ts} ds,$$

og vi har således løst den stillede randværdiopgave, forudsat, at visse ikke nøjagtigt formulerede konvergensbetingelser er opfyldt. Nu viser (18) imidlertid, at den Laplacetransformerede af T er produkt af de to funktioner

$$L\varphi \quad \text{og} \quad \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi}.$$

Vi indfører nu en funktion $w(x,t)$, hvis Laplacetransformerede netop er den sidste af disse funktioner, altså

$$(19) \quad w(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi} e^{ts} ds,$$

forudsat, at en sådan funktion eksisterer. Hvis dette er tilfældet, er $T(x,t)$ en foldning af φ og w , så vi har

$$(20) \quad T(x, t) = \int_0^t \varphi(\tau) w(x, t-\tau) d\tau.$$

Nu ser vi imidlertid, at løsningen i et rektangel $[0, \pi] \times [0, t_1]$ kun afhænger af restriktionen af φ til $[0, t_1]$, og ved udledelsen af (20) for et sådant rektangel kan vi derfor antage, at $\varphi(t) = 0$ for alle t over en vis grænse. Heraf følger, at antagelsen om, at φ ikke vokser alt for hurtigt for $t \rightarrow \infty$, er helt uden betydning for gyldigheden af (20). Dette er grunden til, at vi ikke har præciseret disse forudsætninger. Det må erindres, at (18) ikke har den samme almene gyldighed som (20).

11.14. Vi mangler endnu at vise, at (19) virkelig definerer en funktion, og at denne funktion virkelig har

$$(21) \quad \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi}$$

som Laplacetransformeret for hvert fast $x \in [0, \pi]$.

Hvis vi i (21) indsætter potensrækkerne for de hyperbolske sinusser i tæller og nævner, kan $\sqrt{s}$ bortforkortes, og vi får potensrækker i s både i tælleren og nævneren. Altså er (21) en i hele planen meromorf funktion. Vi ser, at nævneren har nulpunkter netop i de negative hele tal, og bortset fra disse værdier af s er (19) altså en analytisk funktion.

Vi sætter $s = \sigma + i\tau$ og (21) er da analytisk for $\sigma > 0$. For en fast værdi af σ er

$$\sqrt{s} = (1 + \varepsilon(\tau)) \sqrt{i\tau} = (1 + \varepsilon(\tau)) \sqrt{\tau} \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

hvor $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ for $\tau \rightarrow \infty$. For negative τ fås et tilsvarende udtryk med $\sqrt{-\tau}$ og $1 - i$. Vi får

$$|\sinh \sqrt{s} x| = \frac{1}{2} e^{(1+\varepsilon(\tau))\sqrt{\frac{\pi}{2}} x} (1+\varepsilon_1(\tau)),$$

hvor $\varepsilon_1(\tau) \rightarrow 0$ for $\tau \rightarrow \infty$. Heraf følger

$$\left| \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi} \right| \leq \frac{1}{2} e^{(1+\varepsilon(\tau))\sqrt{\frac{\pi}{2}}(x-\pi)} (1+\varepsilon_2(\tau)),$$

hvor $\varepsilon_2(\tau) \rightarrow 0$ for $\tau \rightarrow \infty$. Tilsvarende vurdering fås for $\tau \rightarrow -\infty$.

Dette viser, at integranden i (19) går eksponentielt mod 0.

Dette sikrer, at Fourier's omvendingsformel kan anvendes og $w(x, t)$ eksisterer i hvert fald for $x \in [0, \pi[$. Det må imidlertid erkendes, at den grove undersøgelse ikke fortæller noget om $w(x, t)$ for x i nærheden af π , og vi må derfor særskilt undersøge dette tilfælde. Det viser sig dog, at denne undersøgelse kan spares, idet vi ad anden vej kan vise, at (20) er løsning til varmeledningsligning og tilfredsstiller randbetingelserne.

11.15. At (20) tilfredsstiller varmeledningsligning følger umiddelbart af, at $w(x, t)$ gør det. Dette følger af, at integranden i (19) går ligeligt og eksponentielt mod 0, så vi kan differentiere under integraltegnet.

Det ses ligeledes af (19) og (20), at den fundne løsning tilfredsstiller $T(0, t) = 0$ for alle t . For $t = 0$ og $x \in [0, \pi[$ får vi

$$w(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sinh \sqrt{s} x}{\sinh \sqrt{s} \pi} ds.$$

Vi sætter her

$$s = \frac{\sigma}{\cos \Theta} (\cos \Theta + i \sin \Theta) = \sigma + i \sigma \operatorname{tg} \Theta, \quad \Theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

og vi får

$$w(x, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\cos\theta}} \left(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right)x\right)}{\sinh\left(-\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\cos\theta}} \left(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right)\pi\right)} \frac{\sigma d\theta}{\cos^2\theta}.$$

For en passende konstant K har vi vurderingen

$$\left| \frac{\sinh(\dots)x}{\sinh(\dots)\pi} \right| \leq K e^{-\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\cos\theta}} |\pi-x| \cos\frac{1}{2}\theta},$$

hvilket viser, at integranden går mod 0 for $\theta \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ og for $\sigma \rightarrow \infty$. Da integralet er uafhængigt af σ , har det således værdien 0.

11.16. Vi vælger nu specielt $\varphi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Vi får da for $\sigma > 0$ ved gentagen delt integration

$$L\varphi(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n!}{s^n} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Her går integranden eksponentielt mod 0, og omvendingsformlen kan anvendes. I (18) er faktoren til $L\varphi(s)$ begrænset for $t \in [0, t_1]$, og vurderingen $|L\varphi(s)| \leq n! |s|^{-2}$ sikrer, at integralet konvergerer ligeligt. I dette tilfælde får vi derfor løsningen ved hjælp af (18). For $x \in [0, \pi[$ har både φ og w de rigtige Laplacetransformerede, og derfor stemmer (18) og (20) overens. Altså løser (20) randværdiproblemet for $\varphi(t) = t^n$.

Ved udnyttelse af lineariteten får vi nu umiddelbart, at (20) løser randværdiproblemet, når φ specielt er et polynomium

$$P(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n.$$

Lad nu φ være en vilkårlig kontinuert funktion $\varphi: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ med $\varphi(0) = 0$, og lad ε og t_1 være positive tal. På grund af Weierstrass' approksimationssætning findes

der et polynomium

$$Q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

som tilfredsstiller betingelsen

$$|\varphi(t) - Q(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ for } x \in [0, t_1].$$

For $t = 0$ får vi specielt $|a_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, og for $P = Q - a_0$ får vi derfor

$$|\varphi(t) - P(t)| \leq \varepsilon \text{ for } x \in [0, t_1].$$

Heraf fremgår, at vi kan vælge en følge (P_n) af polynomier uden konstantled, som på $[0, t_1]$ konvergerer ligeligt mod φ . For hvert P_n giver (20) en løsning T_n til randværdiproblemet. Af maksimumsprincippet følger, at (T_n) konvergerer ligeligt på $[0, \pi] \times [0, t_1]$ mod en grænsefunktion T , og denne vil åbenbart have de givne randværdier. For $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, t_1]$ stemmer den overens med (20), idet vi for $x \in [0, \pi]$ kan foretage grænseovergangen under integraltegnet. Heraf følger, at T tilfredsstiller varmeledningsligningen. Vi har dermed bevist, at (20) virkelig løser det stillede randværdiproblem.

Det modsvarende randværdiproblem

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0, t) = \varphi(t), \quad T(\pi, t) = 0$$

løses selvfølgelig på ganske analog vis. Ved addition får vi løsninger til det randværdiproblem, hvor der er givet randværdier på de 3 sider af rektanglet. Vi har allerede tidligere vist, at dette problem højst har 1 løsning.

11.17. Andre typer af randværdiproblemer for varmeledningsligningen frembyder også en del interesse. Vi kan således søge en løsning $T(x, t)$ svarende til givne begyndelsesværdier $T(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in]-\infty, \infty[$. Hvis φ er absolut integrabel og stykkevis differentiable, har vi en fremstilling af φ ved

hjælp af den eksponentialtransformerede $E\varphi$, idet

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\varphi(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

og svarende hertil får vi løsningen

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\varphi(\lambda) e^{-\lambda^2 t} e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

idet integranden her for hver fast værdi af λ er en af de ovenfor fundne fundamentalløsninger. I dette tilfælde får vi altså et egenværdiproblem med et kontinuert spektrum.

Opgaver til T3.

Ved vektorrum forstås vektorrum over $\mathbb{R}$ (uden topologi).

Ved et topologisk vektorrum (t.v.r.) forstås et vektorrum som samtidig er et topologisk rum, og hvor addition og skalær multiplikation er kontinuerte. Dersom et t.v.r. skal forudsættes lokalkonvekst eller Hausdorff, vil dette blive anført.

1. ✓ Formuler og bevis en sætning om, at summen af to konvekse mængder er konveks.
2. ✓ Formuler og bevis en sætning om, at et produkt $\prod A_j$ af konvekse mængder A_j ($j \in J$) er konvekst, hvis og kun hvis hver A_j er konveks.
3. ✓ (Konveks funktion). Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E . En funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes konveks dersom det for ethvert $\lambda \in [0,1]$ og $x_1, x_2 \in A$ gælder, at

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$
 Bevis, at definitionen er ensbetydende med kravet om, at "overgrafen"

$$\{(x,y) \in \{A \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}\}$$
 er en konveks delmængde af $E \times \mathbb{R}$. (~~I stedet for $y \geq f(x)$ kunne her også skrives $y > f(x)$.~~)
4. ✓ Lad A betegne en konveks delmængde af et vektorrum E .
 Idet $x_j \in A$ og $\lambda_j \in [0,1]$ for $j = 1, \dots, m$, og idet $\sum \lambda_j = 1$, skal man vise, at $\sum \lambda_j x_j \in A$. Lad endvidere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ være konveks. Vis, at $f(\sum \lambda_j x_j) \leq \sum \lambda_j f(x_j)$.

5. ✓ Gør rede for, at det har mening at definere det konvekse hylster, $\text{conv } A$, af en delmængde A af et vektorrum E som den mindste konvekse delmængde af E , der omfatter A . Bevis, at $\text{conv } A$ består af samtlige konvekse kombinationer $\sum \lambda_j x_j$ af endelig mange punkter $x_j \in A$ (hvorved $\lambda_j \in [0,1]$, $\sum \lambda_j = 1$).
6. ✓ Lad A og B betegne to konvekse delmængder af et vektorrum E , og lad $A \cap B = \emptyset$. Bevis at der eksisterer to konvekse mængder U og V , således at $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ og $U \cup V = E$. (Benyt Zorn's lemma).
7. ✓ Giv et eksempel på en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^2$, som er afsluttet, men hvor $\text{conv } A$ ikke er afsluttet.
8. ✓ Lad A betegne en delmængde af et t.v.r. Bevis:
- a) A åben $\Rightarrow \text{conv } A$ åben.
 - b) A er et underrum $\Rightarrow \bar{A}$ er et underrum.
 - c) A konveks $\Rightarrow \bar{A}$ konveks.
 - d) A konveks $\Rightarrow \overset{\circ}{A}$ konveks.
9. ✓ Lad A betegne en ^{konveks} delmængde af et t.v.r. Lad $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $x \in \bar{A}$. Bevis, at samtlige punkter $y \neq x$ på liniestykket med endepunkter x_0 og x er indre punkter af A , altså $y \in \overset{\circ}{A}$. (Betragt f.eks. først tilfældet $x \in A$).
10. ✓ Lad A betegne en konveks delmængde af et t.v.r., og lad $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. Vis, at $\bar{\overset{\circ}{A}} = \bar{A}$ og $\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{A}$. (Benyt opgave 9). *konvekst legeme*
11. ✓ Lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ betegne en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af et t.v.r.

Bevis, at f er kontinuert, hvis og kun hvis f er opadtil begrænset i en passende, ikke tom, åben delmængde af A . $\Leftrightarrow f$ opad l.k.
 (Vejledning vedr. "hvis": Vis først, at f er kontinuert i $x_0 \in A$ dersom f er opadtil begrænset i en omegn af x_0 .
 Vis dernæst, at f er opadtil begrænset i en passende omegn af et vilkårligt punkt af A).

12. ✓ Lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ være en konveks funktion defineret i en konveks, åben delmængde $A \neq \emptyset$ af $\mathbb{R}^n$. Bevis, at f er kontinuert.
 (Benyt opgave 11 og det forhold, at filtret af omegne af et punkt i $\mathbb{R}^n$ har en basis bestående af mængder, som hver er det konvekse hylster af en endelig mængde).
- ✓ 13. Lad p betegne en seminorm på et t.v.r. E , og antag at p er kontinuert i $\underline{0}$. Bevis, at
- a) p er ligelig kontinuert i E .
 - b) Mængden $A = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$ er konveks, symmetrisk om $\underline{0}$ og afsluttet.
 - c) $\mathring{A} = \{x \in E \mid p(x) < 1\}$.
 - d) $p(x) = \inf \{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \rho A\}$ for ethvert $x \in E$.
- ✓ 14. Lad A betegne en konveks, symmetrisk (om $\underline{0}$) og afsluttet delmængde af et t.v.r. E , og lad $\mathring{A} \neq \emptyset$. Bevis, at der eksisterer præcis én seminorm p på E for hvilken $A = \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$. Vis endvidere, at denne seminorm er kontinuert. (Benyt opgave 13).
- ✓ 15. Lad E betegne et vektorrum (over $\mathbb{R}$, uden topologi), og lad $B(\underline{0})$ betegne mængden af alle konvekse delmængder U af E som er symmetriske om $\underline{0}$, og absorberende, (d.v.s. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU = E$). Bevis, at $B(\underline{0})$ udgør en basis for filtret af omegne af $\underline{0}$.

i den fineste topologi på E , hvorved E er et lokalkonvekst t.v.r. Bevis tillige, at E herved bliver et Hausdorff rum. (Vejledning til dette sidste: Lad $e \in E$, $e \neq 0$, og lad H betegne en hyperplan i E gennem 0 , som ikke indeholder e . Da vil $H +]-1, 1[e \in B(0)$).

16. Lad E være et vektorrum udstyret med den i opg. 15 omtalte fineste lokalkonvekse topologi. Bevis følgende:

- a) Enhver seminorm på E er kontinuert.
- b) Enhver linearform på E er kontinuert.
- c) Ethvert underrum af E er afsluttet.
- d) Et punkt $x_0 \in E$ er et indre punkt af en konveks mængde $A \subseteq E$ hvis og kun hvis der på enhver linie gennem x_0 findes et i A indeholdt liniestykke, hvortil x_0 hører uden at være endepunkt for liniestykket.

17. Lad $\{p_j \mid j \in J\}$ være en (ikke tom) mængde af seminormer på et vektorrum E . For ethvert $j \in J$ og $\rho \in \mathbb{R}^+$ sættes

$$V_{j,\rho} = \{x \in E \mid p_j(x) < \rho\}.$$

(Man kunne ligeså gerne skrive $\leq$ i stedet for $<$).

- a) Bevis, at mængden $B(0)$ af alle fællesmængder af endelig mange $V_{j,\rho}$ er basis for filtret af omegne af 0 i en topologi på E , som gør E til et lokalkonvekst t.v.r.
- b) Bevis, at den fundne topologi er den groveste topologi på E , der gør E til et t.v.r., og for hvilken alle p_j er kontinuerte.
- c) Vis, at den fundne topologi er Hausdorff, hvis og kun hvis der for ethvert $x \in E$, $x \neq 0$ findes $j \in J$ så at $p_j(x) \neq 0$.

d) Idet det nu antages, at J er endelig, skal man vise, at den omtalte topologi kan defineres ved hjælp af en enkelt seminorm p , f.eks.

$$p(x) = \sup_{j \in J} p_j(x), \text{ eller } p(x) = \sum_{j \in J} p_j(x).$$

Det tilføjes, at en seminorm p på et vektorrum E kaldes en norm, dersom $p(x) = 0 \Rightarrow x = \underline{0}$.

Ved et normeret (vektor-)rum (E, p) forstås et vektorrum E hvorpå er defineret en norm p .

Et normeret rum er således specielt et lokalkonvekst Hausdorff t.v.r., idet topologien defineres ved den ene (semi-)norm p . Samtidig er et normeret rum et metrisk rum, idet afstandsfunktionen defineres ved

$$\text{dist}(x, y) = p(x - y) \quad (x \in E, y \in E).$$

Den ved denne afstandsfunktion bestemte topologi på E er åbenbart identisk med den omtalte ved p definerede lokalkonvekse topologi på E .

18. ✓ Lad A være en konveks delmængde af et vektorrum. Vis, at $A + A = 2A$.

✓ 19. Lad A være en symmetrisk omegn af $\underline{0}$ et t.v.r.. Vis, at $\bar{A} \subseteq 2A$. ~~(Benyt opg. 18.)~~

✓ 20. Vis under benyttelse af opg.19, at ethvert t.v.r. opfylder adskillelsesaksiom T3. - Det følger heraf, at man i kravet v2 til $\hat{B}(\underline{0})$ kan tilføje: "... og afsluttet". Det følger endvidere, at ethvert Hausdorff t.v.r. er regulært.

✓ 21. Lad E betegne et lokalkonvekst t.v.r.. Bevis, at topologien på E kan defineres på den i opg.17 omtalte måde.

(Benyt opg. 14 og opg. 20.) - Hvorledes kan den i opg. 15 omtalte fineste lokalkonvekse topologi på et vektorrum E defineres ved seminormer?

22. ✓ Bevis, at ethvert 1-dimensionalt Hausdorff t.v.r. er isomorft med $\mathbb{R}$ (uden, som i noterne, at benytte lokalkonvekssitet).

23. ✓ Bevis, at en filterbasis $\mathcal{F}$ på et t.v.r. bestemmer et fundamentalfilter, hvis og kun hvis

$$\forall U \in \mathcal{U}(\underline{0}) \quad \exists A \in \mathcal{F} \quad (A - A \subseteq U).$$

Formuler specielt dette resultat i tilfælde af et normeret rum E under benyttelse af den tilhørende afstandsfunktion (jvf. opg. 17, tilføjelse). Inddrag sluttelig begrebet diameter af en punktmængde i et metrisk rum (specielt i et normeret vektorrum).

24. ✓ Lad $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en punktfølge i et t.v.r. E , og lad $\mathcal{F}$ betegne filterbasen på E bestående af samtlige mængder

$$A_n = \{a_{n+p} \mid p \in \mathbb{N}\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bevis, at $\mathcal{F}$ er en fundamentalfilterbasis, hvis og kun hvis $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge i den forstand, at der til enhver omegn $U \in \mathcal{U}(\underline{0})$ findes et nummer $N \in \mathbb{N}$, således at

$$a_{n+p} - a_n \in U \quad \text{for alle } n > N, p > 0.$$

Formuler specielt dette resultat i tilfælde af et normeret rum. - I øvrigt henledes opmærksomheden på, at beviset for sætn. 3.16.1 kan overføres på flg. sætning: Et normeret vektorrum E er fuldstændigt hvis (og kun hvis) enhver fun -

damentalfølge på E er konvergent. (Et tilsvarende resultat gælder for vilkårlige metriske rum).

25. Bevis, at et lokalkonvekst t.v.r. E er metriserbart, hvis og kun hvis E er Hausdorff og topologien på E kan defineres ved en numerabel mængde af seminormer p_n ($n \in \mathbb{N}$). (Der findes en numerabel basis for rummet af E).
- (Vejledning til "hvis" delen: Sæt

$\text{dist}(x, y) = d(x, y)$, hvor

$$d(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} p_n(x) / (1 + p_n(x)).$$

Eftervis og benyt dernæst følgende uligheder:

- a) $(\lambda + \mu) / (1 + \lambda + \mu) \leq \lambda / (1 + \lambda) + \mu / (1 + \mu)$ for $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$.
- b) $\lambda / (1 + \lambda) \leq 2\lambda$ for $\lambda \in [0, 1]$.
- c) $p_n(x) \leq \varepsilon$ gælder for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, for hvilke $d(x) \leq \varepsilon / 2^{n+1}$.

26. Lad E og F betegne to lokalkonvekse t.v.r.. Lad topologien på E være defineret ved en mængde $\{p_i \mid i \in I\}$ af seminormer på E , og lad topologien på F være defineret ved en mængde $\{q_j \mid j \in J\}$ af seminormer på F . Bevis, at en linear afbildning $f: E \rightarrow F$ er kontinuert hvis og kun hvis der til enhver af seminormerne q_j svarer endelig mange seminormer p_i ($i = i_1, i_2, \dots, i_m$) og et tal $a > 0$, således at der for alle $x \in E$ gælder

$$q_j(f(x)) \leq a \cdot \max_{i=i_1, \dots, i_m} p_i(x) \quad (i = i_1, \dots, i_m).$$

Find derved i tilfældet $E = F$ en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at den ved $\{p_i \mid i \in I\}$ definerede topologi er finere end, henholdsvis identisk med, den ved $\{q_j \mid j \in J\}$ definerede topologi.

Formuler endelig de fundne resultater i specialtilfældet, hvor E og F er normerede rum (opg.17).

27. Lad T betegne en mængde (ikke tom), og $\hat{R}^T$ mængden af alle funktioner $f: T \rightarrow \hat{R}$. Gør rede for, at $\hat{R}^T$ bliver et vektorrum ved punktvis addition og punktvis multiplikation med skalarer. Med $B(T)$ betegnes mængden af begrænsede funktioner $f: T \rightarrow \hat{R}$. Gør rede for, at $B(T)$ er et underrum af $\hat{R}^T$. Bevis, at den ved

$$\|f\| = \sup_{x \in T} |f(x)| \quad (f \in B(T))$$

definerede funktion $\|\cdot\|$ er en norm på vektorrummet $B(T)$, og at $B(T)$ herved bliver et fuldstændigt normeret rum.

$B(T)$ er endda en Banach-algebra.

28. Lad T betegne et Hausdorffrum, og lad $C(T)$ betegne mængden af alle kontinuerte funktioner $f: T \rightarrow \hat{R}$. Gør rede for, at $C(T)$ er et underrum af $\hat{R}^T$ (og tillige af $B(T)$, dersom T er kompakt). For enhver kompakt mængde $K \subseteq T$ sættes

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad (f \in C(T)).$$

- a) Påvis, at p_K er en seminorm på $C(T)$. - Den ved systemet af alle p_K (K kompakt) definerede lokalkonvekse topologi på $C(T)$ (jvf. opg.17) kaldes topologien for ligelig konvergens på kompakte delmængder (eller kort: kompakt konvergens).

- b) Lad $\{K_j | j \in J\}$ betegne en vilkårlig ~~overdækning af T med~~ *system af kompakte delmængder* kompakte delmængder. Vis, at seminormerne $p_j = p_{K_j}$ ($j \in J$) definerer den omtalte topologi på $C(T)$. Specielt bliver $C(T)$ metriserbart, dersom J er numerabel (opg.25).

- c) Bevis, at $C(T)$ er et fuldstændigt Hausdorff t.v.r.

når $T = K$ -rum.

- d) Gør rede for, at hvis T er kompakt, er den her betragtede topologi på $C(T)$ identisk med delrumstopologien på $C(T) \subseteq B(T)$, idet $B(T)$ udstyres med den i opg. 27 omtalte topologi.
- e) I tilfældet $T = \mathbb{R}$ skal det vises, at $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda U \neq \{0\}$ for enhver omegn U af 0 i $C(\mathbb{R})$.

29. Lad T betegne et lokalkompakt (Hausdorff-)rum, og lad $C_0(T)$ betegne mængden af alle kontinuerte funktioner $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ med kompakt støtte $\text{st}(f)$. Gør rede for, at $C_0(T)$ er et underrum såvel af $B(T)$ som af $C(T)$. For enhver funktion $\varphi \in C(T)$ med $\varphi(x) > 0$ for alle $x \in T$ sættes

$$p_\varphi(f) = \sup_{x \in T} (|f(x)|/\varphi(x))$$

(Man kunne ligeså gerne skrive $|f(x)|\varphi(x)$).

- a) Påvis, at p_φ er en seminorm på $C_0(T)$, og at den ved mængden af alle disse seminormer p_φ definerede lokalkonvekse topologi på $C_0(T)$ er Hausdorff.
- b) For enhver kompakt mængde $K \subseteq T$ indføres underrummet

$$C_0(T, K) = \{f \in C_0(T) \mid \text{st}(f) \subseteq K\}$$

af $C_0(T)$. Dette er ligeledes et underrum af $C(K)$ og af $B(K)$. Vis, at $C(K)$, $B(K)$ og $C_0(K)$ alle inducerer den samme topologi på underrummet $C_0(T, K)$.

- c) Bevis, at $C_0(T)$ er fuldstændigt.
- d) I tilfældet $T = \mathbb{R}$ skal det vises, at $C_0(\mathbb{R})$ ikke er metriserbart. (Bevis og benyt, at der for enhver følge af funktioner $\varphi_n \in C(T)$, med $\varphi_n > 0$ overalt, findes en funktion $\varphi \in C(T)$, ligeledes med $\varphi > 0$ overalt, således at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\varphi(x)/\varphi_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{for } |x| \rightarrow \infty$$

For $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ sættes

$$p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

For $f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$ sættes

$$p_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \varphi(x) dx,$$

hvor $\varphi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Påvis, at p_n , p og p_φ er seminormer på de respektive vektorrum $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{L}_0(\mathbb{R})$, som herved bliver lokal-konvekse t.v.r.

b) For ethvert interval $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, indføres underrummet

$$\mathcal{L}_0(\mathbb{R}, [-n, n]) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R}) \mid \text{st}(f) \subseteq [-n, n]\}$$

af de tre rum $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{L}_0(\mathbb{R})$.

Vis, at disse sidste alle tre inducerer den samme topologi på $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}, [-n, n])$.

c) Find afslutningen N af $\{0\}$ i hvert af de tre t.v.r.

$$\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}), \mathcal{L}(\mathbb{R}) \text{ og } \mathcal{L}_0(\mathbb{R}).$$

d) Idet man sætter

$$L_{loc}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})/N,$$

$$L(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R})/N,$$

$$L_0(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_0(\mathbb{R})/N,$$

skal man vise, at disse Hausdorff t.v.r. er fuldstændige.

(Det samme gælder for øvrigt om de oprindelige rum $\mathcal{L}_{loc}$, $\mathcal{L}$ og $\mathcal{L}_0$.) Herved tages Riesz-Fischer's sætning for bekendt.

e) Bevis, at $L_{loc}(\mathbb{R})$ er metriserbart, $L_0(\mathbb{R})$ derimod ikke.

($L(\mathbb{R})$ er jo endda et normeret rum.)

32. Lad E og F betegne to Hausdorff t.v.r. Vi skriver i denne opgave $E \subset F$, dersom nedenstående tre betingelser er opfyldt:

- F er et ægte underrum af E .
- Som delmængde af E er F overalt tæt i E .
- Delrumstopologien på F er strengt grovere end den givne topologi på F . (Anderledes udtrykt: injektionen $i : F \rightarrow E$ er kontinuert, men ikke åben, i de givne topologier på E og F .) Det ses, at F ikke kan være fuldstændigt i delrumstopologien for E .

Vis, at relationen $\subset$ er transitiv. Eftervis, dernæst nogle af nedenstående relationer mellem de i opgaverne 28-31 indførte fuldstændige lokalkonvekse Hausdorff t.v.r. (idet vi tager $T = \mathbb{R}$ i opg. 28 og 29):

$$\begin{array}{ccccccc} C_0^\infty & \subset & C_0 & \subset & L_0 & \subset & L \\ \cap & & \cap & & & & \\ C^\infty & \subset & C & \subset & L_{loc} & \supset & L \end{array}$$

(Vejledning til punkt b: For at approximere en funktion $f \in C$ med funktioner fra C_0 , multipliceres f med funktioner $\psi_n \in C_0$, hvor $\psi_n(x) = 1$ for $x \in [-n, n]$. En analog fremgangsmåde kan benyttes ved relationerne $C_0^\infty \subset C^\infty$ og $L_0 \subset L \subset L_{loc}$. For at approximere en funktion $f \in C$ med funktioner $f_n \in C^\infty$ benyttes regularisering (udglatning) ved foldning med funktioner $\psi_n \in C_0^\infty$, for hvilke

$$\psi_n \geq 0, \text{ st}(\psi_n) \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1,$$

idet man sætter $f_n = \psi_n * f$, dvs.

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\psi_n(y)dy.$$

Det første udtryk benyttes til at vise, at $f_n \in C^\infty$, og det andet til at vise, at $f_n \rightarrow f$ i C^∞ for $n \rightarrow \infty$. Samme fremgangsmåde kan benyttes ved de resterende relationer.)