

Matematik 1MA, 1961–62

Hans Tornehave

Forelæsningsnoter til MATEMATIK 1 Matematisk analyse

1. Summer og produkter.
2. Taylors formel.
3. Nogle nye elementære funktioner.
4. Om reelle og komplekse tal.
5. Uendelige rækker.
6. Stamfunktioner.
7. Lineære differentialligninger.
8. Kontinuitet og grænseværdi.
9. Differentiable funktioner.
10. Kompakthedsteori med anvendelser på differentiabilitysteori.
11. Sammenhæng og kurver.
12. Monotone funktioner og konvekse funktioner.
13. Implicit givne funktioner.
14. Ligelik konvergens.
15. [Mål og integral, 1962-63. Af H. E. Skovgaard].
16. [findes ikke].
17. Harmonisk analyse.

Rettelser

Synex 1–3

Forelæsningsnoter til MATEMATIK 1.

matematisk analyse.

Nærværende duplikerede noter udgør eksamenspensum i den halvdel af matematik 1, som omfatter matematisk analyse. Enkelte afsnit læses dog efter Apostol's Mathematical analysis.

I sammenligning med den første udgave af forelæsningsnoterne er øvelsesstoffet ret stærkt udvidet, især ved tilføjelse af lettere øvelsesopgaver og eksempler med mere eller mindre detaljeret løsning.

Forelæsningsnoterne indledes med nogle afsnit, der er en overbygning over gymnasiets matematikkursus. Derefter følger en gennemgang af analysens mere grundlæggende afsnit i en generellere form end den i gymnasiet benyttede. Den sidste halvdel af kursus beskæftiger sig med videregående emner. De grundlæggende spørgsmål vedrørende eksistensen af det reelle talsystem vil indgå i matematik 2 og bliver ikke omtalt her.

Det vil fremgå af noterne, hvilke afsnit af Apostol's bog indgår i eksamenspensum, og på hvilket sted disse afsnit indgår i rækkefølgen.

August 1961.

1. Summer og produkter.

1.1. Ved opskrivning af summer erstattes serier af udeladte led med tre prikker, og de opskrevne led skilles fra prikkerne ved et fortegn, således som følgende eksempler illustrerer det:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^m \frac{1}{2^m} + \dots = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots = 1.$$

Ved opskrivning af produkter udelades tegn, når det ikke giver anledning til misforståelse. Vi anfører nogle eksempler:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n},$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Symbolet $\binom{n}{p}$ betegnes også $K_{n,p}$ og angiver, på hvor mange forskellige måder p ting kan udvælges blandt n , når rækkefølgen ikke tages i betragtning. Vi minder om binomialformen:

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \dots + \binom{n}{p} x^{n-p} y^p + \dots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

1.2. Det er ofte hensigtsmæssigt at skrive summer og produkter på kort form ved hjælp af summationstegn (det græske bogstav sigma) eller produkttegn (det græske bog-

stav π). Det almindelige led anføres, idet dets indeks betegnes med et bogstav, der ellers ikke indgår, og det anføres under og over summations- eller produkttegnet, hvilke værdier den variable indeks skal gennemløbe. De ovenfor anførte formler får da følgende udseende

$$\sum_{\nu=1}^n \nu^2 = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1) \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad ; \quad n! = \prod_{\nu=1}^n \nu \quad ; \quad \prod_{p=2}^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}$$

$$\binom{n}{p} = \prod_{k=1}^p \frac{n-k+1}{k} .$$

Man opnår noget større frihed i anvendelsen af disse symboler ved at tillade "tomme" summer og produkter. En sum, der ingen led indeholder, tillægges værdien 0, og et produkt, der ingen faktorer indeholder, tillægges værdien 1. Vi får da også

$$0! = 1, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

og binomialformlen kan skrives

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^{n-p} y^p .$$

1.3. Når summationsindeks ikke gennemløber på hinanden følgende tal, angives under summationstegnet, hvilke værdier index skal gennemløbe. Eventuelt benyttes flere indices. Det er vigtigt at erindre, at summationsindices er "passive" variable, af hvilke summens værdi ikke afhænger, så man kan udenvidere ændre betegnelser for indices i en sum uden hensyn til, hvilke betegnelser der benyttes i andre summer.

Vi viser nogle eksempler:

$$\sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} = \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 1 \leq \nu \leq n}} a_{\mu} b_{\nu}.$$

$$\left(\sum_{p=1}^n a_p \right)^2 = \sum_{p,q=1}^n a_p a_q = \sum_{p=1}^n a_p^2 + \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n a_p a_q =$$

$$\sum_{p=1}^n a_p^2 + \sum_{1 \leq p < q \leq n} a_p a_q + \sum_{1 \leq q < p \leq n} a_p a_q =$$

$$\sum_{p=1}^n a_p^2 + 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} a_p a_q.$$

Her er det sidste resultat fremkommet ved, at betegnelserne for indices p og q er byttede i den sidste sum. Som et andet eksempel vil vi udlede Lagranges identitet.

$$\sum_{p=1}^n a_p^2 \sum_{p=1}^n b_p^2 - \left(\sum_{p=1}^n a_p b_p \right)^2 =$$

$$\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n (a_p^2 b_q^2 - a_p a_q b_p b_q) = \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n a_p^2 b_q^2 - \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^n a_p a_q b_p b_q =$$

$$\sum_{\substack{p,q=1 \\ p < q}}^n a_p^2 b_q^2 - 2 \sum_{\substack{p,q=1 \\ p < q}}^n a_p a_q b_p b_q + \sum_{\substack{p,q=1 \\ p < q}}^n a_q^2 b_p^2 =$$

$$\sum_{\substack{p,q=1 \\ p < q}}^n (a_p b_q - a_q b_p)^2.$$

Hvis tallene $a_p, b_p, p = 1, \dots, n$ er reelle tal, fås heraf
Cauchy - Schwarz's ulighed

$$\left(\sum_{p=1}^n a_p b_p \right)^2 \leq \sum_{p=1}^n a_p^2 \sum_{p=1}^n b_p^2 .$$

Lighedstegnet gælder kun, hvis $a_p b_q - a_q b_p = 0$ for alle (p, q) , altså kun, hvis de to talsæt $(a_1, \dots, a_n)$ og $(b_1, \dots, b_n)$ er proportionale. At lighedstegnet virkelig gælder i dette tilfælde følger umiddelbart af Lagranges identitet.

1.4. Undertiden er det fordelagtigt at indføre en summationsindex, der gennemløber andre værdier som f.eks.

$$\sum_{\nu=n}^N a_{\nu} = \sum_{\mu=n+k}^{N+k} a_{\mu-k} = \sum_{\nu=n+k}^{N+k} a_{\nu-k} ,$$

hvor vi først sætter $\nu = \mu - k$ og derefter skriver ν i stedet for μ . En meget simpel anvendelse heraf er grundlaget for den følgende udledning af en rekursionsformel til beregning af potenssummerne

$$s_p(n) = \sum_{\nu=1}^n \nu^p = \sum_{\nu=0}^n \nu^p \quad \text{for } p > 0.$$

Vi benytter omskrivningen

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^{p+1} - \sum_{\nu=0}^n \nu^{p+1} = \sum_{\nu=0}^n ((\nu+1)^{p+1} - \nu^{p+1}),$$

og derefter får vi ved binomialformlen efterfulgt af en ombytning af summationsordenen

$$\begin{aligned} (n+1)^{p+1} &= 1 + \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{q=0}^p \binom{p+1}{q} \nu^q \right) = \sum_{q=1}^p \binom{p+1}{q} s_q(n) + n + 1 \\ &= (p+1) s_p(n) + \sum_{q=1}^{p-1} \binom{p+1}{q} s_q(n) + n + 1. \end{aligned}$$

Potenssummen $s_p(n)$ bestemmes således ved rekursionsformlen

$$s_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - \sum_{q=1}^{p-1} \binom{p+1}{q} s_q(n) - n - 1 \right).$$

Ved efterhånden at sætte $p = 1, 2, \dots$, fås

$$s_1(n) = \frac{1}{2} n (n+1)$$

$$s_2(n) = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$$

$$s_3(n) = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

$$s_4(n) = \frac{1}{30} n (n+1) (2n+1) (3n^2+3n-1) ,$$

og regningerne kan føres videre, så langt energien rækker.

Lette opgaver.

1. Bevis formlerne

$$\prod_{k=1}^n (x+k) - \prod_{k=1}^n (x+k-1) = n \prod_{k=1}^{n-1} (x+k).$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{x+k} - \prod_{k=1}^n \frac{1}{x+k-1} = -n \prod_{k=0}^n \frac{1}{x+k}.$$

2. Bevis formlen (skriv beviset både med og uden anvendelse af produkttegn)

$$\binom{n-1}{p} + 2 \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-2} = \binom{n+1}{p}$$

3. Skriv induktionsbeviset for formlen

$$\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

både med og uden anvendelse af produktegn.

4. Vis, at den første af formlerne i opgave 1 medfører relationen

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r}{n} - \binom{n+r-1}{n}$$

Omskriv hvert led i summen i opgave 3 ved hjælp af denne relation, og bevis derved formlen i opgave 3 uden induktion. Skriv det nye bevis med og uden anvendelse af sumtegn.

5. Omskriv ved hjælp af formlerne i 1 (på lignende måde som i opgave nr. 4) hver af summerne

$$\sum_{p=0}^n \prod_{k=0}^q (x+p+k) \quad \text{og} \quad \sum_{p=0}^n \prod_{k=0}^q \frac{1}{x+p+k}$$

til et enkelt produkt. For den sidste sums vedkommende lykkes omskrivningen ikke for $q=0$, og der gælder ingen pæn

reduktionsformel i dette tilfælde. Den første sum reduceres for $q=0$ til en differensrække. Skriv udregningen op for dette specielle tilfælde og sammenlign det med den sædvanlige udledning af summen af en differensrække:

$$\sum_{p=0}^n (x+p) = \sum_{p=0}^n (x+n-p) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n (2x+n) = \frac{1}{2} (n+1)(2x+n).$$

6. Reducer udtrykket $s = \sum_{p=0}^{n-1} (a+pd)k^p$, idet a , d og k er givne

tal. (omskriv differensen $ks - s$).

7. Reducer udtrykket $H(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$. (Dan $H(x)\sin x$ og gør hvert led ulogaritmisk.) Benyt summations-tegn.

Vanskeligere opgaver.

8. Et helt tal N har primtalopløsningen $\prod_{\nu=1}^n p_{\nu}^{q_{\nu}}$. Bevis, at summen af alle divisorer i N har værdien

$$S(N) = \prod_{\nu=1}^n \frac{p_{\nu}^{q_{\nu}+1} - 1}{p_{\nu} - 1}.$$

9. Hvis $2^p - 1$ er et primtal, vil tallet $N = 2^{p-1} (2^p - 1)$ tilfredsstille betingelsen $S(N) = 2N$, idet $S(N)$ er den i opgave nr. 8 definerede sum. (Euklids Elementer, bog 9, sætning 36.)
10. (Dette er ikke en opgave til løsning, men et eksempel på et problem, der endnu ikke har fundet sin løsning!) Tal N , som tilfredsstiller den i opgave nr. 9 omtalte ligning $S(N) = 2N$, kaldes fuldkomne. Findes der ulige tal, som er fuldkomne?

11. I talteorien betegner (m,n) største fælles divisor for m og n , medens $\varphi(n)$ er antallet af tal $< n$ og indbyrdes primiske med n . Tegnet $d|n$ betyder, at d er en divisor i n . Forklar trin for trin følgende regning

$$\begin{aligned} n &= \sum_{\nu=1}^n 1 = \sum_{d|n} \sum_{\substack{h=1 \\ (n,h)=d}}^n 1 = \sum_{d|n} \sum_{\substack{h=1 \\ (\frac{n}{d}, \frac{h}{d})=1}}^n 1 = \sum_{d|n} \sum_{\substack{p=1 \\ (\frac{n}{d}, p)=1}}^{\frac{n}{d}} 1 = \\ &= \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d). \end{aligned}$$

Svare opgaver.

12. Opstil formler (eventuelt rekursionsformler efter q) til udregning af summerne

$$\sum_{p=0}^n x^p \prod_{k=0}^q (p+k) \quad \text{og} \quad \sum_{p=1}^n p^q x^p.$$

13. Vis, at summen af alle mulige produkter af 2 forskellige hele positive tal $\leq n$ har værdien $\frac{1}{24} n(n-1)(n+1)(3n+2)$.

14. Vis polynomialformlen

$$\left(\sum_{k=1}^q a_k \right)^n = \sum_{\substack{P_1, \dots, P_q=0 \\ \sum_{k=1}^q P_k = n}}^n \frac{n!}{\prod_{k=1}^q (P_k!)} \prod_{k=1}^q a_k^{P_k}$$

2. Taylors formel.

2.1. Vi betragter en funktion $f(x)$, som er vilkårlig ofte differentiabel i et åbent interval, samt to reelle tal a og b i dette interval. Ved partiel integration får vi relationen

$$\int f^{(p)}(x) (b-x)^{p-1} dx = -f^{(p)}(x) \frac{(b-x)^p}{p} + \frac{1}{p} \int f^{(p+1)}(x) (b-x)^p dx,$$

og for det bestemte integral med grænserne a og b følger

$$\int_a^b f^{(p)}(x) (b-x)^{p-1} dx = f^{(p)}(a) \frac{(b-a)^p}{p} + \frac{1}{p} \int_a^b f^{(p+1)}(x) (b-x)^p dx$$

eller

$$f^{(p)}(a) \frac{(b-a)^p}{p!} = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^b f^{(p)}(x) (b-x)^{p-1} dx - \frac{1}{p!} \int_a^b f^{(p+1)}(x) (b-x)^p dx$$

hvoraf følger

$$\sum_{p=1}^n f^{(p)}(a) \frac{(b-a)^p}{p!} = \int_a^b f'(x) dx - \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x) (b-x)^n dx,$$

og idet vi indsætter

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

og skriver $f^{(0)}(a)$ i stedet for $f(a)$, får vi endelig

$$\sum_{p=0}^n f^{(p)}(a) \frac{(b-a)^p}{p!} = f(b) - \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x) (b-x)^n dx.$$

Dette er Taylors formel. Dens nytte beror på, at det sidste led på højre side ofte viser sig at være lille, således at summen på venstre side er en god tilnærmet værdi for $f(b)$.

Ved udledelsen af Taylors formel har vi kun benyttet, at $f(x)$ er $n+1$ gange differentiabel i et interval, som indeholder a og b , samt at $f^{(n+1)}(x)$ er kontinuert i dette interval.

2.2. Den variable under et bestemt integral er ganske som summationsindeks en "passiv" variabel, af hvilken integralets værdi ikke afhænger, og hvis betegnelse uden videre kan ændres. Det er hensigtsmæssigt at undgå, at den variable under integraltegnet også forekommer i integralets grænser eller uden for integralet, men det er strengt taget ikke nødvendigt at overholde dette.

Vi ændrer nu Taylors formel, idet vi skriver t i stedet for x under integraltegnet, skriver x i stedet for b og sætter $a = 0$. Derved fås

$$(1) \quad \sum_{p=0}^n f^{(p)}(0) \frac{x^p}{p!} = f(x) - \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt.$$

Den uendelige række

$$\sum_{p=0}^{\infty} f^{(p)}(0) \frac{x^p}{p!}$$

kaldes den til $f(x)$ hørende Mac-Laurinrække. Man kan danne denne række for enhver funktion $f(x)$, der er vilkårlig ofte differentiable for $x = 0$. Rækkens n^{te} afsnit

$$s_n(x) = \sum_{p=0}^n f^{(p)}(0) \frac{x^p}{p!}$$

er et polynomium af n^{te} grad. Hvis $s_n(x)$ konvergerer mod $f(x)$ for $n \rightarrow \infty$, kaldes Mac-Laurinrækken konvergent med sum $f(x)$, og vi skriver da

$$(2) \quad f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} f^{(p)}(0) \frac{x^p}{p!}.$$

Hvis x tilhører en omegn af 0 , i hvilken $f(x)$ er vilkårlig ofte dif-

ferentiabel, giver formlen (1)

$$(3) \quad f(x) - s_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt,$$

og i dette tilfælde ser vi da, at rækkeudviklingen (2) er gyldig, hvis og kun hvis

$$\frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

2.3. For funktionerne e^x , $\cos x$, $\sin x$ har vi

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x, \quad \frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}),$$

og for integralet (3) fås i disse tre tilfælde henholdsvis

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (x-t)^n dt \right| &\leq \frac{|x|^n}{n!} \left| \int_0^x e^t dt \right| \\ \left| \frac{1}{n!} \int_0^x \sin(t + n\frac{\pi}{2}) (x-t)^n dt \right| &\leq \frac{|x|^n}{n!} \cdot |x| \\ \left| \frac{1}{n!} \int_0^x \cos(t + n\frac{\pi}{2}) (x-t)^n dt \right| &\leq \frac{|x|^n}{n!} \cdot |x|. \end{aligned}$$

Alle tre integraler vil således konvergere mod 0, såfremt udtrykket

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \dots \frac{|x|}{n}$$

konvergerer mod 0 for $n \rightarrow \infty$, og dette vil jo virkelig være tilfældet, da vi for $n > 2|x|$ ser, at produktet mindskes til under halvdelen, hver gang n øges med 1. Dermed har vi bevist de tre rækkeudviklinger

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{2} \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Den første af disse rækker giver for $x = 1$ rækkeudviklingen til bestemmelse af grundtallet for de naturlige logaritmer

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Denne række konvergerer hurtigt og er et bekvemt middel til tilnærmet beregning af e . Det samme gælder rækken for e^x , når x har en numerisk lille værdi.

2.4. For funktionen $(1+x)^\alpha$ får vi

$$\frac{d^n}{dx^n} (1+x)^\alpha = \prod_{q=0}^{n-1} (\alpha-q) (1+x)^{\alpha-n}$$

så dens Mac-Laurinrække tilfredsstiller betingelsen

$$(1+x)^\alpha - s_n(x) = \alpha \prod_{q=1}^n \frac{\alpha-q}{q} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt.$$

Nu er

$$x - \frac{x-t}{1+t} = \frac{(1+x)t}{1+t},$$

hvilket viser, at for $|t| \leq |x| < 1$ har denne forskel samme fortegn som t . For $|x| < 1$ har vi derfor følgende vurdering af integranden

$$(4) \quad \left| (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n \right| \leq (1+t)^{\alpha-1} |x|^n,$$

og vi får således vurderingen

$$\left| (1+x)^\alpha - s_n(x) \right| \leq |\alpha| \prod_{q=1}^n \left(\frac{|\alpha-q|}{q} |x| \right) \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt \right|.$$

Der eksisterer nu ^{for fastholdt x} et reelt tal k og et helt tal N, således at

$$\frac{|\alpha - q|}{q} |x| \leq k < 1 \text{ for } q \geq N,$$

og vi får da for $n > N$

$$\left| (1+x)^\alpha - s_n(x) \right| \leq k^{n-N} \cdot |\alpha| \prod_{q=1}^N \left(\frac{|\alpha - q|}{q} |x| \right) \left| \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt \right|$$

og dette udtryk går mod 0 for $n \rightarrow \infty$, idet kun den første faktor afhænger af n. Idet vi indfører betegnelsen

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} = \prod_{q=1}^n \frac{\alpha-q+1}{q}$$

har vi således vist rækkeudviklingen

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots \quad |x| < 1.$$

Hvis α specielt er et positivt helt tal, bliver koefficienterne 0 fra et vist trin, og rækken går over i binomialformlen. Rækken kaldes derfor binomialrækken.

Hvis $\alpha = -n$ er et negativt helt tal, får vi

$$\binom{-n}{p} = (-1)^p \frac{n(n+1) \cdots (n+p-1)}{p!} = (-1)^p \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = (-1)^p \binom{n+p-1}{n-1},$$

og vi har derfor udviklingen

$$(1+x)^{-n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{n+p}{n} x^p = 1 - \binom{n+1}{n} x + \binom{n+2}{n} x^2 - \cdots.$$

For $n = 0$ fås en udvikling i en uendelig kvotientrække

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \cdots.$$

2.5. Vi vil endelig også opstille en rækkeudvikling for logaritmefunktionen. I den højere matematik er den naturlige logaritme den vigtigste logaritmefunktion, og vi vil derfor anvende betegnelsen $\log$ for denne funktion. Vi søger en række-

udvikling for $\log (1+x)$, som giver

$$\frac{d^n}{dx^n} \log (1+x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n},$$

og vi får derfor

$$\log (1+x) - s_n(x) = (-1)^n \int_0^x (1+t)^{-n-1} (x-t)^n dt,$$

og vurderingen (4) giver for $|x| < 1$

$$|\log (1+x) - s_n(x)| \leq |x|^n \left| \int_0^x (1+t)^{-1} dt \right|$$

hvilket viser konvergens af rækkeudviklingen

$$\log (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad |x| < 1.$$

Heraf udledes let den for numerisk beregning lidt bedre egnede rækkeudvikling

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots), \quad |x| < 1.$$

2.6. Af Mac-Laurinrækken for e^x følger umiddelbart for et hvert helt tal n og $x > 0$, at

$$e^x > \frac{x^n}{n!}.$$

Er nu α et positivt tal, fås heraf umiddelbart for $n > \alpha$, at

$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{1}{n!} x^{n-\alpha} \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow \infty.$$

Dette vil stadig gælde, hvis vi erstatter x med $\log x$, og vi har derfor også

$$\frac{x}{(\log x)^\alpha} \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow \infty.$$

Hvis vi her erstatter x med x^β ($\beta > 0$), får vi endelig

$$\frac{x^\beta}{(\log x)^\alpha} \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow \infty.$$

Hvis vi her erstatter x med $\frac{1}{x}$, får vi

$$x^\beta |\log x|^\alpha \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow 0 \text{ fra højre.}$$

Vi udtrykker dette kort ved at sige, at en eksponentialfunktion sejrer over en potens og en potens over en potens af en logaritme. Disse resultater vedrørende de almindelige funktioners relative størrelsesorden vil ofte være til stor nytte.

Lette opgaver.

1. En funktion $f(x)$, som er vilkårlig ofte differentiabel for $|x| \leq h$, hvor h er et positivt tal, er fremstillet som sum af en potensrække

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots, \quad |x| \leq h.$$

Bevis, at

$$x^{-n} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) \rightarrow a_n \quad \text{for } x \rightarrow 0.$$

Heraf følger, at $f(x)$ ikke kan udvikles i flere potensrækker af den anførte form.

2. Lad $g(x)$ være en funktion, som er vilkårlig ofte differentiabel for $|x| \leq h$, $h > 0$, og som tilfredsstiller betingelsen

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0.$$

Vis, at

$$x^{-n} g(x) \rightarrow \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{for } x \rightarrow 0.$$

(Benyt formel (1) i afsnit 2.2).

Anvend det fundne resultat på funktionen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

hvor betegnelserne har samme betydning som i opgave 1, vis ved induktion, at potensrækken i opgave 1 netop er Mac-Laurinrækken for $f(x)$.

Dette resultat er ikke trivielt, da vi ikke umiddelbart kan vide, at Mac-Laurinrækken for $f(x)$ er konvergent.

3. Dan konvergente potensrækker for funktionerne

$$e^{x^2}, e^{-x^2}, \cos(x^2), \sin(x^2)$$

ved at substituere $\pm x^2$ for x i kendte Mac-Laurinrækker. Vis på grundlag af resultaterne fra opgaverne 1 og 2, at de fundne rækker netop er Mac-Laurinrækkerne.

4. Benyt formel (1) (afsnit 2.2) til at vise vurderingen

$$\left| \operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3 \right| < \frac{64}{15} x^5 \quad \text{for } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

(Det er praktisk at skrive differentialkvotienterne af $\operatorname{tg} x$ som polynomier i $\operatorname{tg} x$).

Find ved hjælp af uligheden en tilnærmet løsning til ligningen

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{1}{3000},$$

og angiv en grænse for den opnåede nøjagtighed.

Kan den samme nøjagtighed opnås ved hjælp af en 5-cifret trigonometrisk tabel.

5. Udregn en tilnærmet værdi for $\sqrt[3]{30}$ ved hjælp af binomialrækken (benyt omskrivningen $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3(1 + \frac{1}{9})^{\frac{1}{3}}$).

6. Gør rede for, at potensrækker kan adderes ledvis, og benyt dette til at gennemføre beviset for den sidste formel i 2.5. Find tillige potensrækker for

$$\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

7. Bevis formelen

$$\frac{d}{dx} [e^x \cos(x+a)] = \sqrt{2} e^x \cos(x+a+\frac{\pi}{4}).$$

Opstil Mac-Laurinrækkerne for $e^x \cos x$ og $e^x \sin x$, og vis, at de konvergerer for alle x .

Vanskeligere opgaver.

8. Vis relationen

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t},$$

og vis derved konvergens af rækken

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Heraf følger

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots$$

Prøv at finde en række med sum $\frac{3}{2} \ln 2$ ved at addere de to rækker ledvis. Sammenlign den fremkomne række med rækken for $\log 2$.

9. Find Mac-Laurinrækkerne for $e^{ax} \cos bx$ og $e^{ax} \sin bx$ ved en videre udvikling af den i opgave 7 benyttede metode (udtryk af formen $A \cos \theta + B \sin \theta$ bliver logaritmiske ved indførelse af størrelser R og φ , således at $A = R \cos \varphi$, $B = R \sin \varphi$).

10. Vis uligheden (benyt rækken for e)

$$0 < n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{n}.$$

Vis derved, at e er irrational (ellers eksisterede der et tal n , således at e kunne skrives som en brøk med nævner $n!$, og uligheden kunne da ikke være opfyldt, idet det mindste udtryk ville være et helt tal).

Ved en videreudvikling af ræsonnementet vises, at e ikke tilfredsstiller nogen relation af formen

$$a e + b + c \cdot e^{-1} = 0,$$

hvor a, b og c er hele tal. Tallet e er altså ikke rod i nogen andengradsligning med hele tal som koefficienter.

Et tilsvarende resultat gælder for ligninger af hvilken som helst grad, men det er meget svært at bevise.

11. Hvorledes kan e^{100} beregnes.

Svar opgave.

12. Funktionen $f(x)$ er tillige med alle sine differentialkvotienter positiv for $0 \leq x \leq 1$. Vis, at Mac-Laurinrækken for $f(x)$ konvergerer mod $f(x)$ for $0 \leq x \leq 1$.

3. Nogle nye elementære funktioner.

3.1. Vi minder om, at en funktion $y = f(x)$, som er kontinuert og monoton i et interval $a \leq x \leq b$, har en omvendt funktion $x = g(y)$, som er kontinuert og monoton i intervallet $f(a) \leq y \leq f(b)$. Hvis $f(x)$ er differentiabel med fra 0 forskellig differentialkvotient, da gælder det samme for $g(y)$, og for $y = f(x)$ gælder $f'(x)g'(y) = 1$.

3.2. De trigonometriske funktioner er jo ikke kontinuerte og monotone i hele deres forløb, men vi vil for hver af funktionerne vælge et interval så stort som muligt, på hvilket sætningen kan anvendes. For $\operatorname{tg} x$ og $\operatorname{cot} x$ bliver det nødvendigt at vælge åbne intervaller, men sætningen anvendes da for ethvert afsluttet delinterval. Vi opstiller definitionen af de omvendte funktioner i et overskueligt skema.

trigonometrisk funktion	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cot} x$
interval	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$0 \leq x \leq \pi$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$0 < x < \pi$
monotonitet	voksende	aftagende	voksende	aftagende
omvendt funktion	$x = \operatorname{Arcsin} y$	$x = \operatorname{Arccos} y$	$x = \operatorname{Arctg} y$	$x = \operatorname{Arccot} y$
interval	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	$-\infty < y < \infty$	$-\infty < y < \infty$
monotonitet	voksende	aftagende	voksende	aftagende
differentialkvotient	$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\frac{1}{1+y^2}$	$\frac{-1}{1+y^2}$

Det anbefales at tegne grafiske fremstillinger af de trigonometriske funktioner samt deres omvendte. Læg mærke til, at $\operatorname{Arcsin} y$ og $\operatorname{Arccos} y$ ikke er differentiable for $y = \pm 1$.

Vi viser udregningen af en af differentialkvotienterne. For $y = \sin x$ fås

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

idet $\cos x > 0$ for $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Heraf følger

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

De her definerede omvendte trigonometriske funktioner kaldes også cirkulære funktioner eller arcusfunktioner. I de engelsktalende lande benyttes betegnelserne

$$\sin^{-1}y, \cos^{-1}y, \operatorname{tg}^{-1}y, \operatorname{cot}^{-1}y,$$

men disse betegnelser kan ikke anbefales, da de kan give anledning til forveksling med visse generelle betegnelser i moderne matematik.

Af de ovenfor fundne differentialkvotienter af arcusfunktionerne fås de nyttige integralformler

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C, \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + C, \quad -\infty < x < \infty.$$

3.3. Ved "oversættelse" af trigonometriske formler fås tilsvarende formler for arcusfunktionerne. Vi skal blot illustrere dette ved at udlede den formel, der svarer til additionsformlen

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

hvor vi må forudsætte, at ingen af tallene x , y , $x+y$ har formen $\frac{\pi}{2} + p\pi$. Vi sætter i denne formel

$$x = \operatorname{Arctg} u, \quad y = \operatorname{Arctg} v,$$

hvilket medfører, at

$$|x| < \frac{\pi}{2}, \quad |y| < \frac{\pi}{2},$$

og formelen bliver nu

$$(1) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} u + \operatorname{Arctg} v) = \frac{u+v}{1-uv}.$$

Vi lægger mærke til, at $uv = 1$ netop medfører, at $x + y$ har formen $\frac{\pi}{2} + p\pi$. Endvidere er $|x + y| < \pi$, og (1) medfører derfor, at

$$\operatorname{Arctg} u + \operatorname{Arctg} v = \operatorname{Arctg} \frac{u + v}{1 - uv} + \varepsilon \frac{\pi}{2},$$

hvor ε har en af værdierne 0 eller ± 1 . Betingelsen for $\varepsilon = 0$ er $|x + y| < \frac{\pi}{2}$, hvilket altid er opfyldt, når u og v har forskelligt fortegn. For $x > 0$, $y > 0$ bliver betingelsen $y < \frac{\pi}{2} - x$, hvilket er ensbetydende med $\operatorname{tg} y < \cot x$ eller $uv < 1$. Formlen

$$\operatorname{Arctg} u + \operatorname{Arctg} v = \operatorname{Arctg} \frac{u + v}{1 - uv}$$

gælder altså for $uv < 1$. Vi har nemlig vist den under denne betingelse for $u > 0$, $v > 0$, samt for $uv < 0$, og alle tre led i formelen skifter fortegn, når både u og v skifter fortegn. For $u > 0$, $v > 0$, $uv > 1$ fås $\varepsilon = 1$, og for $u < 0$, $v < 0$, $uv > 1$ fås $\varepsilon = -1$.

3.4. Af kvotientrækkeudviklingen

$$\frac{1}{1 + t^2} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p t^{2p} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1 + t^2}$$

fås ved integration mellem grænserne 0 og x

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2}$$

For integralet på højre side fås vurderingen

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2} \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n} dt \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

som viser, at integralet for $|x| \leq 1$ går mod 0 for $n \rightarrow \infty$, og vi har således udledt den konvergente rækkeudvikling

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots; |x| \leq 1.$$

For $x = 1$ fås specielt Leibniz' række

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots,$$

som dog konvergerer så langsomt, at den er ganske uegnet til beregning af π . Beregning af π kan bekvemt udføres ved hjælp af formelen (se opgave 6)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239},$$

idet $\operatorname{Arctg} \frac{1}{5}$ og $\operatorname{Arctg} \frac{1}{239}$ beregnes ved hjælp af den fundne række.

3.5. De såkaldte hyperbelfunktioner

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

har en række egenskaber, der minder om de trigonometriske funktioners. Ved direkte regning eftervises således formlerne

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh (x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh (x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\operatorname{tgh} (x+y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$$

$$\cosh 2x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}, \quad \sinh 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$$

$$\operatorname{tgh} \frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

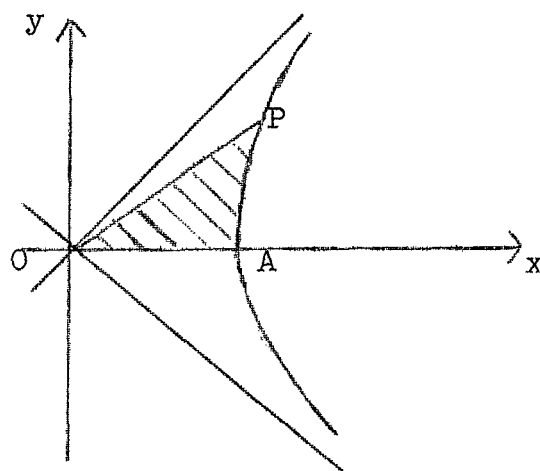
$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x.$$

Funktionen $\cosh x$ ændres ikke, når x skifter fortegn. Den er voksende for $x > 0$ og antager mindsteværdien 1 for $x = 0$. De andre tre funktioner skifter fortegn, når x skifter fortegn, og $\sinh x$ og $\tanh x$ er monotont voksende for alle x , medens $\coth x$ er monotont aftagende for $x < 0$ og for $x > 0$.

3.6. Når θ løber fra $-\infty$ til ∞ vil $(x, y) = (\cosh \theta, \sinh \theta)$ gennemløbe den i halvplanen $x > 0$ liggende gren af hyperblen $x^2 - y^2 = 1$. På figuren er P punktet med koordinater

$$(\cosh \theta, \sinh \theta),$$

og den skraverede sektor OAP har (som en ikke særlig vanskelig beregning giver) arealet $\frac{1}{2}\theta$. Dette resultat understreger yderligere analogien med de trigonometriske funktioner.



På grund af den sidstnævnte egenskab har de omvendte funktioner til hyperbelfunktionerne fået navnet areafunktioner. Funktionerne $\sinh x$ og $\tanh x$ er overalt voksende, medens $\cosh x$ kun er voksende for $x \geq 0$, og $\coth x$ er aftagende dels for $x < 0$, dels for $x > 0$. De omvendte funktioner bestemmes ved eksplicite udtryk, idet f. eks. ligningen

$$\sinh x = y$$

eller

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$$

reduceres til

$$(e^x)^2 - 2y \cdot e^x - 1 = 0,$$

hvoraf fås

$$x = \log (y + \sqrt{y^2 + 1}),$$

så vi har den eksplicite formel

$$\operatorname{Arsinh} y = \log (y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Areafunktionernes definition og vigtigste egenskaber fremgår af følgende tabel:

hyperbolsk funktion	$y = \sinh x$	$y = \cosh x$	$y = \operatorname{tgh} x$	$y = \operatorname{coth} x$
monotonitetsinterval	$-\infty < x < \infty$	$0 < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$	$x < 0; x > 0$
monotonitet	voksende	voksende	voksende	aftagende
omvendt funktion	$x = \operatorname{Arsinh} y$	$x = \operatorname{Arcosh} y$	$x = \operatorname{Artgh} y$	$x = \operatorname{Arcoth} y$
definitionsområde	$-\infty < y < \infty$	$1 < y < \infty$	$-1 < y < 1$	$y < -1, y > 1$
eksplicit udtryk	$\log(y + \sqrt{y^2 - 1})$	$\log(y + \sqrt{y^2 + 1})$	$\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$	$\frac{1}{2} \log \frac{y+1}{y-1}$
differentialkvotient	$\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$	$\frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$	$\frac{1}{1 - y^2}$	$\frac{1}{1 - y^2}$

3. 7. Endelig skal vi nævne rækkeudviklingerne

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{Artgh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Den sidste udvikling blev udledt ovenfor i forbindelse med rækkeudviklingen for $\log(1+x)$. De to første udledes let af eksponentialrækken.

Lette opgaver.

1. Angiv værdien af

$$\text{Arc sin } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ Arc cos } \frac{-1}{2}, \text{ Arc sin } (-1)$$

$$\text{Arc tg } \sqrt{3}, \text{ Arc cot } \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ Arc cot } \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

2. Gennemfør bestemmelsen af de differentialkvotienter, som er anført i tabellen i afsnit 3.2.

3. Bevis relationerne

$$\text{Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leq 1.$$

$$\text{Arc tg } x + \text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{alle } x.$$

4. Udregn værdien af

$$\sin (2 \text{Arc tg } \frac{1}{2}), \cos \text{Arg tg } \frac{3}{4}, \sin \text{Arc cos } \frac{-3}{4}, \sin \text{Arc cos } \frac{-3}{5},$$

$$\text{Arc tg } (2 \sin \frac{\pi}{3}), \text{Arc sin } (\text{tg } \frac{\pi}{3}) - \sin \frac{\pi}{3}.$$

5. Vis formelen

$$\text{Arc cos } \sqrt{1 - x^2} = |\text{Arc sin } x|, \quad |x| \leq 1,$$

Gælder der også en formel, der afviger fra denne ved, at Arc cos og Arc sin er ombyttede.

6. Vis formelen

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arc tg } \frac{1}{5} - \text{Arc tg } \frac{1}{239}.$$

7. Beregn $\cosh x$, $\sinh x$, $\text{tgh } x$, $\text{coth } x$ for $x = \log 2$, $\log 3$, $\log 4$, Skitser grafiske billeder af de fire funktioner.

8. Vis nogle af de i 3.5 anførte formler.

9. Gennemfør udregningen af de i tabellen i afsnit 3.6 anførte eksplicite udtryk og differentialkvotienter. Disse sidste ønskes udregnet både ved hjælp af sætningen om differentialkvotient af omvendt funktion og direkte ved differentiation af de eksplicite udtryk.
10. Find de formler for cirkulære funktioner, som svarer til formlerne (udfør lig diskussion)

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$

11. Bevis følgende formler i deres gyldighedsområde. Anfør gyldighedsområdet i hvert enkelt tilfælde, og angiv eventuelle modsvarende formler, som gælder udenfor gyldighedsområderne.

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

- 12) Bevis den for $x > 0, y > 0$ gyldige ulighed

$$\operatorname{Arctg}(x+y) < \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y.$$

Vanskeligere opgaver.

- 13) Diskuter gyldigheden af relationen

$$\operatorname{Arc} \sin x + \operatorname{Arc} \sin y = \operatorname{Arc} \sin (x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2})$$

og opstil den tilsvarende relation for $\operatorname{Arc} \cos$.

- 14) En for alle reelle x defineret funktion $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + n\pi & \text{for } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(2 \operatorname{tg} x) + n\pi & \text{for } |x - n\pi| < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Idet n gennemløber alle hele tal. Tilsvarende defineres

$$g(x) = \begin{cases} n\pi & \text{for } x = n\pi \\ \text{Arc cot } \left(\frac{1}{2} \cot x\right) + n\pi & \text{for } n\pi < x < (n+1)\pi. \end{cases}$$

Vis, at $f(x)$ og $g(x)$ i virkeligheden er identiske, og at de er differentiable for alle x . Udregn differentialkvotienten.

Tegn grafisk fremstilling af funktionerne og differentialkvotienten.

- 15) Vis, at funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ \text{Arctg}(3\text{tg}x) - \text{Arctg}(2\text{tg}x) & \text{ellers,} \end{cases}$$

er kontinuert og differentiable for alle værdier af x .

- 16) Gennemfør beregningen af det i afsnit 3.6 omtalte areal.

- 17) I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem foreligger kurven $y = \cosh x$. Vis, at afstanden mellem punktet $(q, 0)$ og tangenten til $y = \cosh x$ i punktet med abscisse q har længden 1.

Svær opgave.

- 18) Find en rækkeudvikling for $\text{Arc sin } x$ og angiv dens konvergensinterval (kopier den for $\text{Arctg } x$ benyttede metode, idet binomialrækken anvendes til rækkeudvikling af differentialkvotienten).

De reelle og komplekse tal.

4.1. Vi skal ikke ofre tid på en detaljeret indførelse i teorien for de reelle tal, men forudsætte det reel talbegreb kendt fra gymnasiet.

I matematik 2 vil det blive vist, hvorledes det er muligt ud fra de naturlige tal $1, 2, 3, \dots$, der udgør en mængde vi vil betegne med $\mathbb{N}$, efterhånden at indføre de hele tal, som udgør mængden $\mathbb{Z}$, de rationale tal, som udgør mængden $\mathbb{Q}$, samt endelig de reelle tal, som udgør mængden $\mathbb{R}$. Vi har således

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

4.2. De 4 nævnte mængder er organiserede ved regneregler. Hvis $a_1, \dots, a_n$ tilhører en af mængderne, kan vi danne

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k; \quad a_1 \cdots a_n = \prod_{k=1}^n a_k,$$

og talværdien af disse udtryk afhænger ikke af rækkefølgen af de n elementer, ligesom den heller ikke ændres, når der sættes parenteser. Endvidere gælder reglen

$$\sum_{k=1}^m a_k \sum_{l=1}^n b_l = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_l$$

for multiplikation af summer.

For mængderne $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ gælder tillige, at ligninger af formen $a + x = b$ altid har en og kun en løsning, og denne betegnes $x = b - a$. Udtrykket $a - a = 0$ bliver uafhængigt af a , og hvis vi sætter $0 - a = -a$, viser vi let gyldigheden af de sædvanlige regler for regning med fortegn.

Af regnereglerne følger nu umiddelbart, at $a \cdot 0 = 0$ for alle a . På den anden side har enhver ligning $ax = b$ med $a \neq 0$ en og kun en løsning, tallet $\frac{b}{a}$. Løsningen til $ax = b$ betegnes $\frac{b}{a}$. De rationale tal er netop tallene $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. De velkendte regler for regning med brøker kan nu vises.

Det følger ikke umiddelbart af regnereglerne, at tallene 1 , $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $\dots$ alle er forskellige, men vi antager nu, at de virkelig alle er forskellige. Det er disse tal, der udgør mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal.

Mængder, på hvilke regneregler er definerede, vil blive behandlet indgående i det andet kursus under matematik 1. Vi vil nøjes med den foregående kortfattede beskrivelse og blot tilføje, at en mængde, der er organiseret ved de fire regningsarter, således at de sædvanlige regler er gyldige, kaldes et legeme. Mængderne $\mathbb{R}$ og $\mathbb{Q}$ er eksempler på legemer, men $\mathbb{Z}$ er ikke et legeme, da division ikke altid er mulig.

4.3. Mængderne $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$ er endvidere organiserede ved ordningsrelationen $\leq$. De fra 0 forskellige tal i $\mathbb{R}$ falder i 2 klasser $\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}_-$ (de positive og de negative tal). At 2 tal a og b tilfredsstiller $a < b$ skal betyde, at $b - a \in \mathbb{R}_+$. Relationen $a \leq b$ betyder blot $a < b \vee a = b$. Der er et sammenspil mellem ordningsrelationerne og regnereglerne, idet summer og produkter af positive tal er positive. Det er let på grundlag heraf at udlede de kendte regneregler for uligheder.

En mængde, der er organiseret ved regneregler og ordensrelationer med et sammenspil, således som vi har beskrevet det for $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$, kaldes et ordnet legeme.

Af reglerne følger, at kvadratet på et element $\neq 0$ altid er positivt. Specielt er 1 positivt, og derfor medfører ordningsreglerne, at tallene 1 , $2 = 1 + 1$, $\dots$ alle er forskellige, og forudsætningen herom bliver derfor nu overflødig.

Vi kan nu definere begrebet numerisk værdi

$$|a| = \begin{cases} a & \text{for } a \geq 0 \\ -a & \text{for } a < 0 \end{cases}$$

og vi beviser let de vigtige regneregler

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a||b|.$$

Vi understreger endnu engang, at begrebet numerisk værdi er indført på grundlag af ordningsreglerne, idet inddelingen i positive og negative tal er grundlaget for definitionen.

4.4. Begrebet konvergent talfølge hviler også på ordningsrelationerne, idet en talfølge (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, siges at have grænseværdien a , såfremt følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| \leq \varepsilon).$$

At talfølgen er konvergent betyder, at der eksisterer et tal a , som er grænseværdi for følgen, altså

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| \leq \varepsilon).$$

Vi vil sædvanligvis (ikke ganske berettiget) afkorte disse logiske relationer en smule. Vi vil således skrive den første på den afkortede form

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| \leq \varepsilon),$$

idet $N \in \mathbb{N}$ og $\forall n$ underforstås. Vi kunne også skrive

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N (|a - a_n| \leq \varepsilon).$$

Vi skal endvidere nævne, at det er ligegyldigt, om vi anvender relationerne $\leq$, $\geq$ eller $<$, $>$ i definitionerne. De i gymnasieundervisningen omtalte regler for regning med grænseværdier beror ligeledes kun på regneregler og ordningsrelationer. På den anden side omfatter gymnasieundervisningen også nogle sætninger, der udtaler sig om eksistens af grænseværdi for visse følger, og disse sætninger kan ikke udledes på grundlag af de hidtil omtalte egenskaber ved de reelle tal.

4.5. Begrebet interval hviler ligeledes på ordningsrelationerne. Vi definerer

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, \text{ afsluttet interval,}$$

$$]a, b[= \{x | a < x < b\}, \text{ åbent interval}$$

$$[a, b[= \{x | a \leq x < b\}, \text{ (halvåbent)}$$

$$[a, \infty[= \{x | a \leq x\}, \text{ uendeligt interval,}$$

$$]-\infty, b[= \{x | x < b\},$$

o.s.v. En talfølge, hvis elementer alle tilhører et og samme endelige interval, kaldes som bekendt begrænset. Vi skriver betingelsen i det logiske tegnsprog:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \forall n (a_n \in [a, b]).$$

Vi har her kort skrevet $\exists a, b$ i stedet for $\exists a \exists b$. Dette kan ikke give anledning til misforståelse. Vi minder om, at det for talfølger gælder, at konvergent $\implies$ begrænset. Talfølgen (a_n) kaldes opad begrænset, når

$$\exists b \in \mathbb{R} \forall n (a_n \leq b).$$

Tallet b kaldes da et overtal for talfølgen. Tilsvarende defineres nedad begrænset. Vi har

$$\text{opad begrænset og nedad begrænset} \iff \text{begrænset}.$$

Denne skrivemåde er ligesom den også lidt tidligere benyttede ikke helt korrekt, idet de benyttede logiske tegn kun kan sættes mellem relationer. Vi har således underforstået " (a_n) er" 3 gange i den sidste relation.

4.6. En talmængde $M \subseteq \mathbb{R}$ kaldes opad begrænset, hvis

$$\exists b \in \mathbb{R} \forall x \in M (x \leq b),$$

og b kaldes et overtal for mængden. Analogt indføres nedad begrænset og undertal. Mængden M kaldes begrænset, hvis den er både opad og nedad begrænset. En talfølge (a_n) er opad begrænset, hvis og kun hvis mængden af dens elementer er opad begrænset. Tilsvarende for nedad begrænset og begrænset.

Vi indfører en ny forudsætning:

4.6.1. Aksiom. Blandt overtallene for en opad begrænset mængde findes et, som er mindst.

Dette mindste overtal betegnes $\sup M$ (læses supremum). Det

er karakteriseret ved følgende to egenskaber

$$\forall x \in M \ (x \leq \sup M)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M \ (x > \sup M - \varepsilon).$$

Hvis M er en vilkårlig mængde af reelle tal, betegner vi med $-M$, der fås ved at skifte fortegn på alle elementer i M , altså

$$x \in -M \iff -x \in M.$$

At a er undertal for M er da ensbetydende med, at $-a$ er overtal for $-M$, og hvis $-c = \sup(-M)$ er det mindste overtal for $-M$, da er $c = -\sup(-M)$ det største undertal for M , og vi har dermed bevist

4.6.2. Sætning. Blandt undertallene for en nedad begrænset, ikke begrænset talmængde findes ét, som er størst.

Dette største undertal for M betegnes $\inf M$ (infimum). Det er karakteriseret ved følgende to egenskaber

$$\forall x \in M \ (x \geq \inf M)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M \ (x < \inf M + \varepsilon).$$

Vi fremhæver endvidere den ovenfor fundne sammenhæng

$$\inf M = -\sup(-M), \quad \sup M = -\inf(-M).$$

Den sidste relation fås af den første, når M erstattes med $-M$.

For den tomme mængde er infimum og supremum ikke defineret. For en mængde M , der ikke er opad begrænset, skriver vi $\sup M = \infty$, og hvis M ikke er nedad begrænset, skrives $\inf M = -\infty$.

4.7. Lad M_1 og M_2 være mængder af reelle tal. Med $M_1 + M_2$ betegner vi da mængden af alle summer af et tal fra M_1 og et tal fra M_2 , altså

$$a \in M_1 + M_2 \iff \exists a_1 \in M_1 \ \exists a_2 \in M_2 \ (a = a_1 + a_2).$$

4.7.1. Sætning. Hvis de ikke tomme, reelle talmængder M_1 og M_2 er opad begrænsede, gælder ligningen

$$\sup (M_1 + M_2) = \sup M_1 + \sup M_2,$$

og hvis M_1 og M_2 er nedad begrænsede, gælder ligningen

$$\inf (M_1 + M_2) = \inf M_1 + \inf M_2.$$

Det er nok at bevise den første af de to relationer. Vi bemærker først, at $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ medfører, at $a_1 + a_2 \leq \sup M_1 + \sup M_2$, og denne sum er således et overtal for $M_1 + M_2$ og altså $\geq \sup(M_1 + M_2)$, som er det mindste overtal. Altså kan vi slutte, at

$$(1) \quad \sup(M_1 + M_2) \leq \sup M_1 + \sup M_2.$$

Vi vælger dernæst et vilkårligt element $a_1 \in M_1$. Det er da klart, at $\sup(M_1 + M_2) - a_1 \geq a_2$ for alle $a_2 \in M_2$, altså at

$$\sup(M_1 + M_2) - a_1 \geq \sup M_2,$$

hvilket også kan skrives

$$\sup(M_1 + M_2) - \sup M_2 \geq a_1.$$

Da a_1 her er et vilkårligt element i M_1 , viser denne ligning, at $\sup(M_1 + M_2) - \sup M_2$ er et overtal for M_1 , altså

$$\sup(M_1 + M_2) - \sup M_2 \geq \sup M_1,$$

og denne ulighed sammen med (1) giver den ønskede relation.

4.8. Lad $f : M \text{ ind i } \mathbb{R}$ være en reel funktion på en vilkårlig mængde M . Vi vil da benytte betegnelserne

$$\sup_M f = \sup f(M), \quad \inf_M f = \inf f(M)$$

og hvis ingen af disse er $+\infty$ eller $-\infty$, siges f at være begrænset.

Har vi nu to begrænsede reelle funktioner $f : M \text{ ind i } \mathbb{R}$ og $g : M \text{ ind i } \mathbb{R}$, da gælder jo

$$\{f(x) + g(x) \mid x \in M\} \subseteq \{f(x) \mid x \in M\} + \{g(x) \mid x \in M\},$$

men sædvanligvis gælder $\subsetneq$, og vi kan derfor kun slutte, at

$$\sup_M (f+g) \leq \sup_M f + \sup_M g$$

$$\inf_M (f+g) \geq \inf_M f + \inf_M g.$$

Hvis vi sætter $f + g = h$, har vi $f = h + (-g)$, altså

$$\sup_M f \leq \sup_M h + \sup_M (-g) = \sup_M (f+g) - \inf_M g,$$

hvilket også kan skrives

$$\sup_M (f+g) \geq \sup_M f + \inf_M g.$$

Her kan vi lade f og g bytte rolle. Desuden kan et tilsvarende ræsonnement gennemføres for $\inf$. Det endelige resultat kan sammenfattes på den overskuelige form

$$\inf_M f + \inf_M g \leq \inf_M (f+g) \leq \left\{ \begin{array}{l} \inf_M f + \sup_M g \\ \sup_M f + \inf_M g \end{array} \right\} \leq \sup_M (f+g) \leq \sup_M f + \sup_M g.$$

En reel talfølge (a_n) er en reel funktion på $\mathbb{N}$, og vi kan derfor tale om dens supremum og infimum, idet disse blot bliver supremum og infimum for mængden af talfølgens elementer, og vi vil kort betegne dem $\sup(a_n)$ og $\inf(a_n)$. Vi vil ligeledes benytte de umiddelbart forståelige betegnelser $\sup_{n \geq N}(a_n)$, $\inf_{n > N}(a_n)$, etc.

4.9. Vi vil endvidere fremhæve den nyttige sætning:

4.9.1. Sætning. Lad A og B være to ikke tomme mængder af reelle tal, således at et hvert element i A er mindre end et hvert element i B . Da gælder uligheden

$$\sup A \leq \inf B.$$

Vi skal ikke give noget bevis for denne sætning (se opgave nr. 8).

4.9.2. Definition. Et par (A, B) af reelle talmængder, som tilfredsstiller betingelserne

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}, \forall a \in A \forall b \in B (a < b)$$

kaldes et snit i $\mathbb{R}$.

Af den sidste betingelse følger, at $A \cap B = \emptyset$, således at (A, B) er en inddeling af $\mathbb{R}$ i to klasser. Af sætning 4.9.1 følger $\sup A \leq \inf B$, men her må lighedstegnet gælde. I modsat fald

fandtes et tal c , således at $\sup A < c < \inf B$, og heraf følger $c \notin A$, $c \notin B$ i modstrid med, at $A \cup B = \mathbb{R}$. Altså er $\sup A = \inf B$, og dette tal er da enten det største element i A eller det mindste i B . Vi har således bevist

4.9.3. Sætning. For ethvert snit (A, B) i $\mathbb{R}$ gælder, at A har et største element eller at B har et mindste element.

Denne sætning, snitsætningen, blev via forskellige mellemled afledt af aksiomet 4.6.1. Vi bemærker, at aksiomet 4.6.1 er en umiddelbart følge af sætning 4.9.3.

Lad nemlig M være en ikke tom, opad begrænset reel talmængde. Da er mængden B af overtal for M ikke tom og $A = \mathbb{R} \setminus B$ er heller ikke tom. Det ses umiddelbart, at (A, B) er et snit i $\mathbb{R}$, og af sætning 4.9.3 følger da eksistensen af et tal c , som er størst i A eller mindst i B . Da ethvert $x > c$ er overtal for M , er ethvert element i M mindre eller lig c , og c er derfor overtal, altså $c \in B$, hvilket viser, at c er det mindste overtal for M .

Vi kunne altså have valgt 4.9.3 som aksiom i stedet for 4.6.1. Det er en skønssag, hvilken af de to egenskaber, man finder så indlysende, at man vil akceptere den som aksiom. Det fremgår af udviklingen ovenfor, at de to aksiomer er omtrent lige bekvemme som grundlag for teorien.

4.10. I gymnasieskolen har man som udgangspunkt for de reelle tals teori ofte benyttet et aksiom, som passende kan kaldes aksiomet om intervalindsnævring. I vor fremstilling bliver dette aksiom en sætning:

4.10.1. Sætning. Lad $([a_n, b_n])$ være en følge af afsluttede intervaller, som for $n = 1, 2, \dots$ tilfredsstiller betingelsen

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$$

(altså $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$). Der eksisterer da et punkt c , som

er fælles for alle intervallerne.

Af sætning 4.9.1 følger, at intervallet $[\sup a_n, \inf b_n]$ er delinterval af alle $[a_n, b_n]$.

Hvis $b_n - a_n \rightarrow 0$, sluttes umiddelbart, at intervallerne kun har ét fælles punkt. I reglen er det kun dette specielle tilfælde, der benyttes som aksiom.

Det skal tilføjes, at sætning 4.10.1 ikke medfører aksiomet 4.6.1, men må suppleres med en ekstra forudsætning.

4.11. Et andet ofte benyttet udgangspunkt for de reelle tals teori er eksistensen af grænseværdier for monotone, begrænsede følger. Vi bruger betegnelserne voksende og aftagende i overensstemmelse med følgende definition.

4.11.1. Definition. En reel talfølge (a_n) kaldes (monoton) voksende, hvis $a_n \leq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$, strengt voksende, hvis $a_n < a_{n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$, aftagende hvis $a_n \geq a_{n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$ og strengt aftagende, hvis $a_n > a_{n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$. En følge, som er voksende eller aftagende, kaldes monoton.

Vi har da sætningen

4.11.2. Sætning. Hvis (a_n) er en monoton talfølge gælder

$$a_n \rightarrow \sup(a_n), \text{ hvis } (a_n) \text{ er voksende}$$

$$a_n \rightarrow \inf(a_n), \text{ hvis } (a_n) \text{ er aftagende.}$$

Bevis. For (a_n) voksende og $\sup(a_n) = \infty$ kan vi for $A \in \mathbb{R}$ vælge N , således at $a_N \geq A$, og vi har da $a_n \geq a_N \geq A$ for $n \geq N$, altså $a_n \rightarrow \infty$. For (a_n) voksende og $\sup(a_n)$ endelig, gælder $a_k \leq \sup(a_n)$ for alle k , og for $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N , således at $a_N \geq \sup(a_n) - \varepsilon$, og vi har da

$$\sup(a_n) - \varepsilon \leq a_k \leq \sup(a_n) \text{ for } k \geq N,$$

hvilket viser, at $a_n \rightarrow \sup(a_n)$. Analogt for aftagende følger

4.12. Vi skal indføre to nye begreber, som idemæssigt er be-

slægtede dels med grænseværdibegrebet for en talfølge, dels med begreberne $\inf(a_n)$ og $\sup(a_n)$. Lad (a_n) være en opad begrænset talfølge. Vi indfører da en talmængde B , som vi passende kunne kalde "mængden af næsten-overtal", defineret ved

$$b \in B \iff \{n \mid a_n \geq b\} \text{ er endelig.}$$

Denne betingelse er ensbetydende med, at der eksisterer et n , således at b er overtal for følgen $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$. Vi definerer nu limes superior ved

$$\limsup(a_n) = \inf B = \inf_{n \geq N} (\sup(a_n)),$$

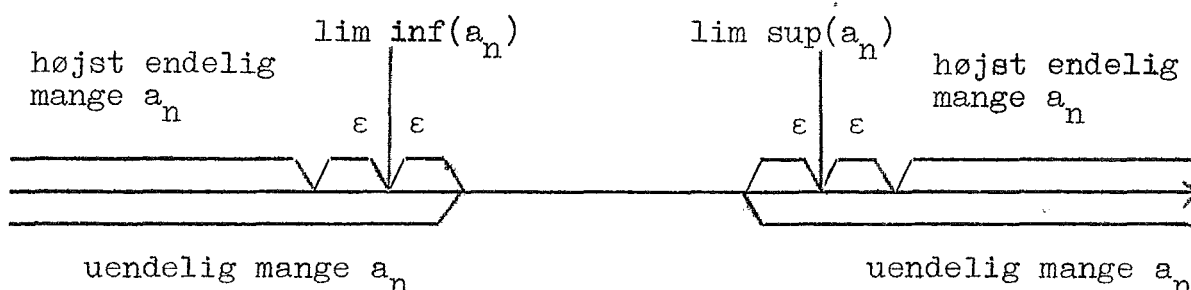
idet den anden karakterisering af "næsten-overtallene" viser, at det sidste udtryk netop er $\inf B$. Det ses umiddelbart, at $\limsup(a_n) = -\infty$ indtræffer, hvis og kun hvis $a_n \rightarrow -\infty$. Hvis (a_n) ikke er opad begrænset, sætter vi $\limsup(a_n) = \infty$. Vi indfører analogt en mængde A af "næsten-undertal", som fører til limes inferior:

$$\liminf(a_n) = \sup A = \sup_{n \geq N} (\inf(a_n)).$$

De to nye begreber er karakteriserede ved, at vi for $\varepsilon > 0$ har

$$\begin{aligned} a_n &\geq \limsup(a_n) + \varepsilon && \text{højst for endelig mange } n \\ a_n &\geq \limsup(a_n) - \varepsilon && \text{for uendelig mange } n \\ a_n &\leq \liminf(a_n) - \varepsilon && \text{højst for endelig mange } n \\ a_n &\leq \liminf(a_n) + \varepsilon && \text{for uendelig mange } n. \end{aligned}$$

Disse forhold anskueliggøres bekvemt grafik på en tallinie, som antydnet nedenfor.



Da de to intervaller, hvor der kun ligger endelig mange a_n ikke må gribe ind over hinanden for nogen som helst positiv værdi af ε , kan vi slutte, at

$$\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n).$$

Sammenhængen med grænseværdibegrebet fremgår til dels af følgende sætning:

4.12.1. Sætning. For vilkårlig talfølge (a_n) og vilkårligt reelt tal a gælder

$$a_n \rightarrow a \iff \liminf(a_n) = \limsup(a_n) = a.$$

Påstanden gælder også for $a = \infty$ og for $a = -\infty$, men vi vil dog kun gennemføre beviset for et endeligt a . Hvis $a_n \rightarrow a$ har vi for ethvert $\varepsilon > 0$, at

$$a_n \geq a + \varepsilon \text{ højst for endelig mange } n$$

$$a_n \leq a - \varepsilon \text{ højst for endelig mange } n,$$

hvilket viser, at a er både $\liminf(a_n)$ og $\limsup(a_n)$. På den anden side vil $a = \liminf(a_n) = \limsup(a_n)$ netop medføre, at ovenstående to betingelser er opfyldt for ethvert $\varepsilon > 0$, og det er ensbetydende med, at $a_n \rightarrow a$.

4.13. Vi har allerede nogle sætninger til rådighed, som gør det muligt at vise, at en talfølge konvergerer uden at selve grænseværdien inddrages i undersøgelsen. Vi har f.eks. sætning 4.11.2, som dog kun anvendes på monotone følger. Et andet middel har vi i sætning 4.12.1, som virker på enhver konvergent talfølge, men brugen af den involverer, i hvert fald tilsyneladende, en bestemmelse af grænseværdien. Vi skal nu udlede en helt generel konvergensbetingelse, som ikke forudsætter kendskab til grænseværdien. Vi skal begynde med en definition.

4.13.1. Definition. En talfølge (a_n) kaldes en fundamentalfølge, når den opfylder betingelsen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n \geq N (|a_m - a_n| \leq \varepsilon).$$

Betingelsen kan også skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n ((m \geq N \wedge n \geq N) \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon).$$

Vi viser nu først

4.13.2. Sætning. En fundamentalfølge er begrænset. Til $\varepsilon = 1$ svarer nemlig et N , således at vi for alle $n \geq N$ har $|a_n - a_N| \leq 1$. Udenfor intervallet $[a_{N-1}, a_{N+1}]$ findes altså højst endelig mange af følgens elementer, og deraf følger, at følgen er begrænset.

4.13.3. Sætning. En konvergent følge er en fundamentalfølge.

Lad (a_n) være en følge med grænseværdi a , og lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da et tal N , således at vi for $m \geq N, n \geq N$ har

$$|a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

hvilket medfører

$$|a_m - a_n| = |(a - a_n) - (a - a_m)| \leq |a - a_n| + |a - a_m| \leq \varepsilon,$$

hvormed sætningen er bevist.

4.13.4. Sætning. En fundamentalfølge er konvergent.

Lad (a_n) være en fundamentalfølge, og lad ε være et positivt tal. Da (a_n) er begrænset har $\liminf(a_n)$ og $\limsup(a_n)$ endelige værdier. Lad N være valgt, således at

$$|a_m - a_n| \leq \varepsilon \quad \text{for } m, n \geq N.$$

For vilkårligt $\eta > 0$ kan vi vælge $m, n \geq N$, således at

$$a_m < \liminf(a_n) + \eta, \quad a_n > \limsup(a_n) - \eta,$$

og vi får da

$$\limsup(a_n) - \liminf(a_n) \leq 2\eta + a_n - a_m \leq 2\eta + \varepsilon,$$

og da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$ og $\eta > 0$, følger heraf, at

$$\limsup(a_n) = \liminf(a_n),$$

og af sætning 4.12.1 følger nu, at (a_n) er konvergent.

Sætningerne 4.13.3 og 4.13.4 udgør det almindelige konvergensprincip. Som det vil fremgå af det følgende, bl.a. af teorien for uendelige rækker, som bliver emnet for kapitel 5, har dette konvergenskriterium grundlæggende betydning for analysen, men sætninger, som er udledt af det almindelige konvergensprincip anvendes hyppigere end konvergensprincippet selv.

4.14. Af en følge $a_1, a_2, \dots$ kan vi danne en ny følge ved at udelade visse led. Mærketallene for de tiloversblevne led danner da en strengt voksende følge $p_1 < p_2 < \dots$, og den resulterende delfølge bliver følgen $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots$. Ordet delfølge anvendes altid i denne betydning. At (b_n) er en delfølge af (a_n) betyder altså, at der eksisterer en voksende følge (p_n) af naturlige tal, således at $(b_n) = (a_{p_n})$.

4.14.1. Sætning. Enhver talfølge (a_n) har en delfølge (a_{p_n}) , som konvergerer mod $\limsup(a_n)$, og en delfølge (a_{q_n}) , som konvergerer mod $\liminf(a_n)$.

Bevis. Vi behandler kun det tilfælde, hvor $\limsup(a_n)$ er endelig. For ethvert naturligt tal k indeholder intervallet

$$(1) \quad]\limsup(a_n) - \frac{1}{k}, \limsup(a_n) + \frac{1}{k}[$$

uendelig mange a_n . For $k = 1, 2, 3, \dots$ udvælger vi a_{p_k} i intervallet (1), således at p_k er $>$ de tidligere udvalgte mærketal. Følgen (a_{p_n}) vil da konvergere mod $\limsup(a_n)$. Analogt for $\liminf(a_n)$.

4.14.2. Sætning. Hvis en talfølge (a_n) har en delfølge (a_{p_n}) med grænseværdi c , tilhører c intervallet

$$[\liminf(a_n), \limsup(a_n)].$$

Omkring et punkt b udenfor dette interval kan vi nemlig lægge et interval $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$, som højst indeholder endelig mange a_n .

4.14.3. Hvis $a_n \rightarrow a$ gælder for enhver delfølge $a_{p_n} \rightarrow a$.

Dette følger umiddelbart af definitionen på konvergens.

4.15. Vi vil i det følgende benytte de i gymnasieundervisningen behandlede sætninger om regning med talfølger, og vi skal ikke i denne forbindelse gå nærmere ind på beviserne for disse sætninger. De er specialtilfælde af sætninger, som vil blive vist i et senere afsnit, og i beviserne benytter vi ikke de anvendelser af regnereglerne, som forekommer i dette og i næste kapitel.

4.16. Vi minder ganske kort om de komplekse tal $a = a_1 + ia_2$, hvor a_1 og a_2 er reelle tal, medens den imaginære enhed i ikke er noget reelt tal, men tilfredsstiller betingelsen $i^2 = -1$, og hvor regning iøvrigt foregår ganske som med reelle tal, således at vi får

$$(a_1 + ia_2) \pm (b_1 + ib_2) = a_1 \pm b_1 + i(a_2 \pm b_2)$$

$$(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2) = a_1b_1 - a_2b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$\frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} = \frac{(a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2)}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

De i 4.2 omtalte regneregler gælder uændret for de komplekse tal, som derfor siges at udgøre et legeme. I et ordnet legeme vil ligningen $x^2 + y^2 = 0$ kun have løsningen $x = y = 0$, men i de komplekse tals legeme har vi jo $1^2 + i^2 = 0$, og det er derfor umuligt at organisere de komplekse tal som ordnet legeme. Vi kan imidlertid alligevel indføre en numerisk værdi (også kaldet modulus) af et komplekst tal, idet vi sætter

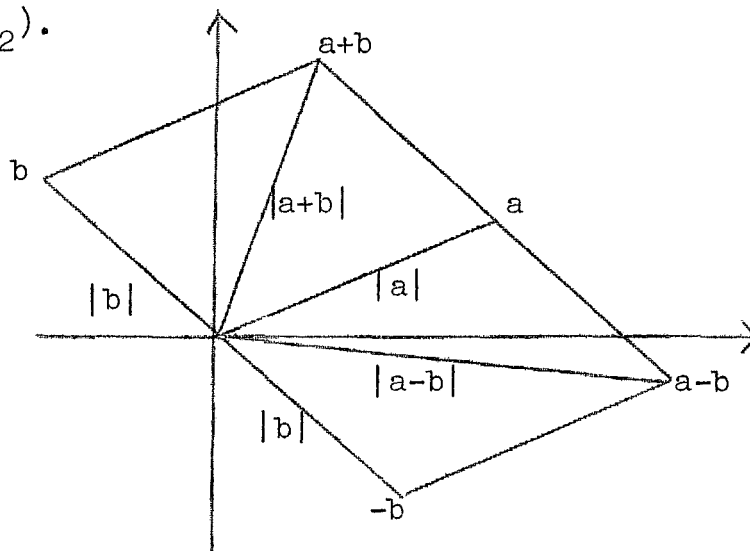
$$|a_1 + ia_2| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}.$$

og det viser sig da, at vi har de samme relationer som for reelle tal, idet

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

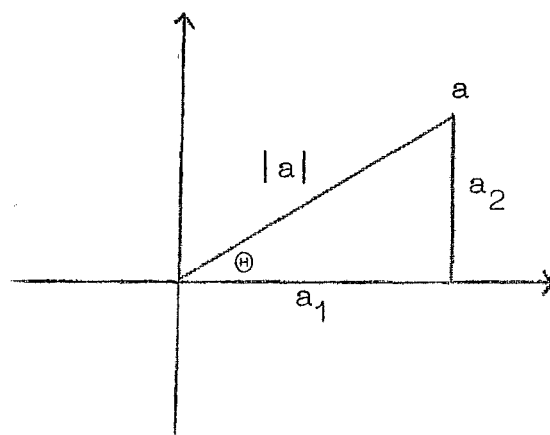
$$|ab| = |a||b|.$$

Den første af disse regler følger umiddelbart af den geometriske fortolkning af addition og subtraktion, som vist på nedenstående skitse, hvor det komplekse tal $a_1 + ia_2$ afsat som punktet (a_1, a_2) .



Den anden regneregul for numerisk værdi vises bekvemlest ved i den geometriske fremstilling, således som antydnet på figuren, at gå over til de polære koordinater $(|a|, \Theta)$, således som antydnet på

figuren. Vinklen Θ har en éntydig bestemt værdi $\Theta =$



$\text{Arg } a \in [-\pi, \pi],$

men vi kan også

benytte enhver af værdierne $\text{Arg } a + 2n\pi$, hvor n er hel, og mængden af disse værdier vil vi betegne $\arg a$. Vi understreger, at $\text{Arg } a$ er et tal og $\arg a$ en mængde, og at $\text{Arg } a \in \arg a$. For $\Theta \in \arg a$ har vi nu

$$a_1 = |a| \cos \Theta, \quad a_2 = |a| \sin \Theta,$$

så vi kan skrive

$$a = |a| (\cos \Theta + i \sin \Theta).$$

Har vi nu 2 komplekse tal

$$a = |a|(\cos\theta + i \sin\theta) \quad , \quad b = |b|(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

hvor altså $\theta \in \arg a$ og $\varphi \in \arg b$, får vi

$$\begin{aligned} ab &= |a||b|(\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\varphi + i \sin\varphi) = \\ &= |a||b|((\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)) = \\ &= |a||b|(\cos(\theta+\varphi) + i \sin(\theta+\varphi)), \end{aligned}$$

og heraf følger umiddelbart, at $|ab| = |a||b|$. Desuden ser vi, at $\theta+\varphi \in \arg(ab)$, og $\arg(ab)$ består derfor af alle summer $\theta+\varphi$, hvor $\theta \in \arg a$ og $\varphi \in \arg b$, så vi har bevist mængderelationen (se indledningen til 4.7)

$$\arg(ab) = \arg a + \arg b.$$

Hvert element af mængden $\arg a$ kaldes et argument for det komplekse tal a , og $\text{Arg } a$ kaldes hovedargumentet for a . Vi understreger, at den pæne relation, som gælder for mængderne af argumenter for a , b og ab ikke afspejler sig i en lige så smuk relation for hovedargumenterne, idet vi får

$$\text{Arg } (ab) = \begin{cases} \text{Arg } a + \text{Arg } b + 2\pi, & \text{hvis } \text{Arg } a + \text{Arg } b \leq -\pi \\ \text{Arg } a + \text{Arg } b - 2\pi, & \text{hvis } \text{Arg } a + \text{Arg } b > \pi \\ \text{Arg } a + \text{Arg } b, & \text{hvis } -\pi < \text{Arg } a + \text{Arg } b \leq \pi. \end{cases}$$

Vi minder i denne forbindelse om Moivre's formel

$$(|a|(\cos\theta + i \sin\theta))^n = |a|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

heraf følger, at ligningen

$$x^n = a = |a|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

har n forskellige løsninger, nemlig tallene

$$\sqrt[n]{|a|} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + q \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + q \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \right); \quad q = 0, 1, \dots, n-1.$$

På grund af dette forhold vil vi ikke definere $\sqrt[n]{a}$ eller $a^{\frac{1}{n}}$ for komplekse værdier af x , men vi vil dog af og til bruge disse betegnelser, idet vi hver gang præciserer, hvad de skal betyde.

4.17. Vi går nu over til at studere følger (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, og

vi bemærker først, at vi for hvert a_n har et udtryk $a_n = a'_n + ia''_n$, hvor a'_n og a''_n er reelle. De to følger (a'_n) og (a''_n) er henholdsvis realdelen og imaginærdelen af følgen (a_n) .

4.17.1. Definition. Følgen (a_n) siges at have grænseværdien a , såfremt betingelsen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| \leq \varepsilon)$$

er opfyldt. Følgen (a_n) kaldes en fundamentalfølge, såfremt betingelsen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N ((m \geq N \wedge n \geq N) \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon).$$

Vi bemærker, at definitionerne er nøjagtige kopier af de tilsvarende for reelle følger. Vi har nu

4.17.2. Sætning. Følgen (a_n) er konvergent (en fundamentalfølge), hvis og kun hvis realdelen (a'_n) og imaginærdelen (a''_n) er konvergente (fundamentalfølger).

Dette følger umiddelbart af ulighederne

$$\left. \begin{array}{l} |a'_m - a'_n| \\ |a''_m - a''_n| \end{array} \right\} \leq |a_m - a_n| \leq |a'_m - a'_n| + |a''_m - a''_n|,$$

og de analoge uligheder for $|a - a_n|$.

Heraf følger umiddelbart, at (a_n) er konvergent, hvis og kun hvis (a_n) er fundamentalfølge ganske som for reelle følger.

Det er klart, at begreberne $\sup$, $\inf$, $\limsup$ og $\liminf$ beror så væsentligt på ordensrelationen, at de ikke på rimelig måde kan overføres til komplekse variable. Vi skal heller ikke i dette kursus operere med begrebet ∞ som komplekst tal.

Regneregler for konvergente reelle talfølger overføres uden vanskelighed til komplekse følger. Hvis vi f.eks. har $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, hvor $a_n = a'_n + i a''_n$, $b_n = b'_n + i b''_n$, $a = a' + i a''$, $b = b' + i b''$, har vi $a'_n \rightarrow a'$, $a''_n \rightarrow a''$, $b'_n \rightarrow b'$, $b''_n \rightarrow b''$, og for at vise, at $a_n b_n \rightarrow ab$, behøver vi da blot at gennemføre ud-

regningen

$$a_n b_n = (a'_n + i a''_n)(b'_n + i b''_n) = (a'_n b'_n - a''_n b''_n) + i(a'_n b''_n + a''_n b'_n),$$

og her kan vi foretage grænseovergangen for realdel og imaginærdel hver for sig, idet vi benytter regnereglerne for reelle følger. Derved får vi

$$a_n b_n \rightarrow (a' b' - a'' b'') + i(a' b'' + a'' b') = (a' + i a'')(b' + i b'') = ab.$$

Historiske oplysninger.

Regnekunsten kan følges langt tilbage i menneskehedens historie. Ægyptiske papyrusruller og babyloniske kileskrifttavler vidner om, at regneteknikken for de rationale tals vedkommende var højt udviklet, ligesom man også magtede simplere areal- og volumenberegninger og andre geometriske problemer. Omkring 500 opdagede man i Grækenland, at de rationale tal ikke var tilstrækkelige til beskrivelse af selv meget simple geometriske fænomener, og gennem de følgende århundreder fandt man frem til en algebra med selve de geometriske størrelser, og Eudoxos (408-355) udviklede en teori for forhold mellem størrelser af samme art på en sådan form, at det omtrent svarer til fastlæggelse af et irrationalt tal ved at angive de rationale tal, som er større end det irrationale, og de, som er mindre. Denne såkaldte proportionslære er et centralt afsnit i Euklid's elementer (o. 300), den første systematiske lærebog i matematik.

De komplekse tal optræder først i begyndelsen af den nyere tid, f.eks. hos italieneren Geronimo Cardano (1501-1576) i forbindelse med trediegradsligningens løsning. En systematisk indførelse af de komplekse tal blev først givet af danskeren Caspar Wessel i 1798 og uafhængigt heraf af schweizeren J. Argand i 1813, men disse arbejder forblev upåagtede, og det var først, da C.F.

Gauss i 1831 offentliggjorde nogle arbejder om komplekse tal, at de blev mere almindeligt kendt.

Den franske matematiker A. Cauchy (1789-1857) formulerede det almindelige konvergensprincip. En konstruktiv opbygning af de reelle tal ud fra de rationale gennemførtes næsten samtidigt af de tyske matematikere R. Dedekind (1831-1916) og G. Cantor (1845-1918), og en virkelig systematisk opbygning af den matematiske analyse på grundlag af disse teorier er først gennemført af K. Weierstrass (1815-1897).

Lette opgaver.

1. Vis på grundlag af de i 4.2 første og begyndelsen af andet stykke de i andet stykke fremsatte påstande.
2. Vis på grundlag af 4.2 og 4.3 ordningsrelationens transitivitet, d.v.s. påstanden

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$$

3. For hvilke talfølger (a_n) vil hver af følgende 2 betingelser være opfyldt

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a - a_n| \leq \varepsilon)$$

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon).$$

4. Angiv for et hvert $x \in \mathbb{R}$ et overtal for talfølgen (a_n) , hvor

$$a_n = \frac{x^n}{n!}.$$

5. Angiv supremum og infimum for mængden af alle tal af formen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \text{ hvor } p, q, r \in \mathbb{N}.$$

6. Den sidste og sværeste del af beviset for sætning 4.7.1 kan også gennemføres ved et " ε -ræsonnement", idet vi vælger $a_1 \in M_1$ og $a_2 \in M_2$ med $a_1 \geq \sup M_1 - \frac{\varepsilon}{2}$, $a_2 \geq \sup M_2 - \frac{\varepsilon}{2}$ og benytter, at $\sup (M_1 + M_2) \geq a_1 + a_2$. Gennemfør beviset efter disse linier og prøv at formulere det så klart som muligt. Mange vil måske foretrække dette bevis for det i teksten anførte.
7. Angiv værdien af de størrelser der optræder i de i 4.8 beviste uligheder, når M er intervallet $[0, \pi]$ og f og g er funktionerne $\sin$ og $\cos$.

8. Vis sætning 4.9.1 indirekte, idet det vises, at antagelsen $\sup A > \inf B$ fører til en modstrid.

Vis dernæst sætningen direkte, idet det først vises, at $\sup A$ er undertal for B . Det er fristende, at udforme beviset således, at mængderne A og B optræder på symmetrisk måde, men derved bliver beviset længere end nødvendigt. Prøv at udforme beviset så kort som muligt.

9. Vis, at talfølgen

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

er konvergent (vis ved induktion, at alle led er < 2). Vis, at talfølgen for alle n tilfredsstiller betingelsen $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, og find grænseværdien ved at lade $n \rightarrow \infty$ i denne relation.

10. I en talfølge er

$$a_n = 1 + (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} + (1 + (-1)^n)(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Angiv $\liminf(a_n)$ og $\limsup(a_n)$.

11. Vis for begrænsede talfølger (a_n) og (b_n) ulighederne

$$\liminf(a_n) + \liminf(b_n) \leq \liminf(a_n + b_n) \leq$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \liminf(a_n) + \limsup(b_n) \\ \limsup(a_n) + \liminf(b_n) \end{array} \right\} \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$$

12. Gennemfør beviset for sætning 4.12.1 for $a = \infty$.

13. Vis sætning 4.13.4 ved at vise direkte, at $a_n \rightarrow \limsup(a_n)$, idet det benyttes, at følgens led fra et vist trin ligger tæt sammen, og et af leddene ligger tæt ved $\limsup(a_n)$. Med lidt behændighed kan dette bevis blive enklere end de i teksten anførte.

14. For en talfølge (a_n) og et reelt tal a gælder, at enhver del-

følge af (a_n) har en delfølge med grænseværdi a . Kan man deraf slutte, at $a_n \rightarrow a$. (Eksamen i Århus 1961, forprøven).

15. Skitser i en kompleks plan punktmængderne

$$A = \{x \mid |x-1| + |x+1| \leq 3\}$$

$$B = \{x \mid |x-1|^2 + |x+1|^2 \leq 3\}$$

$$C = \{x \mid \operatorname{Arg} \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{\pi}{3}\}$$

16. Vis, at punktmængden

$$\{x \mid |\frac{1}{x} - a| = r\},$$

hvor a er kompleks og r positiv, er en cirkelperiferi eller en ret linie.

17. Vis for komplekse talfølger, at

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|.$$

18. Skitser punktmængden (i den komplekse plan)

$$\{x \mid |x| \leq 1\} + \{x \mid |x-1| + |x+1| = 2\},$$

idet summen af de to mængder defineres som i 4.7.

19. Undersøg om en talfølge (a_n) er konvergent og angiv den eventuelle grænseværdi, idet

$$1) a_n = \frac{1+n^2+i n^3}{n^3+i(1+n^2)}$$

$$2) a_n = [r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n, \quad r, \theta \in \mathbb{R}$$

$$3) a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad x \text{ kompleks.}$$

20. Vis, at $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ for $n \rightarrow \infty$. (Benyt et resultat fra MA 3).

21. Udgående fra et interval $[a_1, b_1]$, $0 < a_1 < b_1$, danner vi en følge af intervaller, idet vi sætter

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vis, at $([a_n, b_n])$ er en aftagende følge af intervaller, og at $\bigcap (a_n, b_n)$ er det eneste fælles punkt for alle intervallerne.

Vanskeligere opgaver.

22. Lad M være en given mængde, og lad p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 være reelle tal, som tilfredsstiller betingelsen

$$p_1 + p_2 \leq p \leq \begin{Bmatrix} p_1 + q_2 \\ p_2 + q_1 \end{Bmatrix} \leq q \leq q_1 + q_2.$$

Undersøg, om der eksisterer afbildninger $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: M \rightarrow \mathbb{R}$, således at

$$\inf_M f = p_1, \quad \inf_M g = p_2, \quad \inf_M (f+g) = p$$

$$\sup_M f = q_1, \quad \sup_M g = q_2, \quad \sup_M (f+g) = q.$$

Hvis en sådan funktion eksisterer, betyder det, at de i 4.8 beviste uligheder er de skarpeste, som har almen gyldighed. I modsat fald vil der (evt. for specielle valg af M) kunne vises en skarpere sætning.

23. Formuler og løs en opgave analog med 22, men omhandlende $\liminf$ og $\limsup$.

24. For en talfølge (a_n) gælder $a_n \rightarrow a$. En ny talfølge (b_n) er defineret ved

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Vis, at $b_n \rightarrow a$.

25. For en talfølge (a_n) gælder, at der eksisterer et positivt tal k , således at

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{k^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vis, at (a_n) er konvergent.

delmængde opfører sig med hensyn til regneregler og ordning nøjagtig som de reelle tal, og vi vil identificere disse følger med de reelle tal.

Vis, at mængden af de sædvanlige hele tal derved får et overtal, men ingen supremum i legemet L .

Vis, at sætning 4.10.1 gælder i legemet L .

28. Afled det almindelige konvergensprincip ud fra sætningen om intervalindsnævring (4.10.1), uden at benytte eksistensen af øvre grænse ved at starte med en følge ε_n af positive tal, der går mod nul og benytte, at alle følgens elementer fra et vist trin N ligger i intervallet $[a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon]$.

Uendelige rækker.

5.1. Allerede i gymnasieundervisningen optræder eksempler på uendelige rækker, ligesom vi også i det foregående har mødt flere uendelige rækker. Vi vil nu behandle deres teori mere indgående. Vi indleder med definitionen.

5.1.1. Definition. Et udtryk af formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

kaldes en uendelig række. Summen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$$

kaldes det n^{te} afsnit af den uendelige række, og følgen (s_n) kaldes rækkens afsnitsfølge. Hvis $(s_n) \rightarrow s$, siges rækken at have summen s , og vi skriver

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots = s.$$

Hvis s tillige er endelig, kaldes rækken konvergent. En række, som ikke er konvergent, kaldes divergent. En divergent række med sum $+\infty$ ($-\infty$) kaldes divergent mod $+\infty$ ($-\infty$). En sum af formen

$$u_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$

kaldes et udsnit af rækken, og dette udsnit siges at begynde ved (index) $n+1$.

Det hænder selvfølgelig, at leddene i den uendelige række er forsynede med indices, som ikke netop angiver leddenes numre i rækken, men det n^{te} afsnit er selvfølgelig alligevel summen af de n første led. For rækken

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+5}$$

bliver det n^{te} afsnit således

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+5} = a_5 + a_7 + \dots + a_{2n+3}.$$

5.2. Ifølge det almindelige konvergensprincip er rækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p > 0 (u_{n,p} \leq \varepsilon),$$

idet vi har relationen $s_{n+p} - s_n = u_{n,p}$.

Dette medfører umiddelbart, at den harmoniske række

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

er divergent, idet vi for $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ikke kan finde noget tilsvarende N , så (1) bliver opfyldt. Vi får nemlig

$$u_{N,N} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Af det almindelige konvergensprincip følger også, at $(a_n) \rightarrow 0$ er en nødvendig betingelse for konvergens af $\sum a_n$ (sådan vil vi kort skrive den uendelige række, når det ikke kan give anledning til misforståelse). Den harmoniske række viser, at betingelsen ikke er tilstrækkelig.

5.3. Vi definerer nu et nyt, overordentligt vigtigt begreb:

5.3.1. Definition. Rækken $\sum a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis $\sum |a_n|$ er konvergent.

5.3.2. Sætning. Hvis en række er absolut konvergent, er den konvergent.

Ellers ville betegnelsen "absolut konvergent" være mindre heldigt valgt. Påstanden er ikke triviell, men vi foretrækker straks at vise følgende sætning, der har 5.3.2 som specialtilfælde, og som sædvanligvis kaldes sammenligningskriteriet.

5.3.3. Sætning. Lad $\sum p_n$ være en konvergent række med positive led, og lad $\sum a_n$ være en række, som tilfredsstiller betingelsen $|a_n| \leq p_n$ for alle n . Da er $\sum a_n$ konvergent.

For $\varepsilon > 0$ kan vi på grund af det almindelige konvergensprincip (som nødvendig betingelse) vælge N , således at

$$\sum_{k=n}^{n+q} p_k \leq \varepsilon \text{ for } n > N, q > 0,$$

og vi har da

$$\left| \sum_{k=n}^{n+q} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+q} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+q} p_k \leq \varepsilon \text{ for } n > N, q > 0.$$

Af det almindelige konvergensprincip (som tilstrækkelig betingelse) følger nu, at $\sum a_n$ er konvergent. Vi understreger, at beviset for sætningerne 5.3.3 og 5.3.2 virkelig kun kan gennemføres ved hjælp af det almindelige konvergensprincip eller en tilsvarende dybtliggende sætning.

5.3.4. Definition. En række, der er konvergent, men ikke absolut konvergent, kaldes betinget konvergent.

Rækken $\sum a_n$, hvor

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2n}, a_{2n} = -\frac{1}{2n} \text{ for } n = 1, 2, \dots,$$

er betinget konvergent, idet afsnitsfølgen (s_n) er givet ved

$$s_{2n-1} = \frac{1}{2n}, s_{2n} = 0,$$

medens afsnitsfølgen for $\sum |a_n|$ har den harmoniske rækkes afsnitsfølge som delfølge.

5.4. Før vi går videre med de mere dybtgående undersøgelser vedrørende uendelige rækker, vil vi anføre en række yderst simple regler vedrørende operationer med rækker.

5.4.1. Sætning. Lad $\sum a_n$ være en konvergent række med sum s . Vi kan da uden at ændre disse forhold foretage følgende processer med rækken:

α) Indskyde endelig eller uendelig mange led med værdi 0.

β) Udelade led med værdien 0 (derved kan rækken eventuelt forvandles til en endelig sum).

γ) Sætte parenteser (men ved at hæve parenteser risikerer man at ødelægge rækkens konvergens).

δ) Permutere rækkens led på en sådan måde, at der eksisterer et tal q , således at intet leds nummer i rækkefølgen ændres mere end q ved permutationen (permutationer, der forskyder led vilkårligt langt, kan ændre summen eller ødelægge konvergens).

Vi bemærker, at α) og β) kun bevirker gentagelser eller udeladelse af gentagelser i afsnitsfølgen, hvilket hverken influerer på konvergens eller grænseværdi. γ) vil erstatte afsnitsfølgen med en delfølge, som ifølge 4.14.3 konvergerer mod s . For at vise δ) bemærker vi, at forskellen mellem det n^{te} afsnit i den oprindelige række og det n^{te} afsnit i den omordnede række bliver en sum af højst $2q + 1$ led af formen $\pm a_k$ med $n - q \leq k \leq n + q$, og en sådan sum går mod 0 for $n \longrightarrow \infty$, da hvert enkelt $a_k \longrightarrow 0$.

5.4.2. Sætning. Lad $\sum a_n$ være en konvergent række med sum s . Vi kan da foretage følgende processer, som ikke ødelægger konvergens, men som dog ændrer summen:

α) Udelade endelig mange led med sum c . Derved ændres summen til $s - c$.

β) Indføje endelig mange led med sum c . Derved ændres summen til $s + c$.

γ) Multiplicere rækken ledvis med et vilkårligt komplekst tal k . Derved fås rækken $\sum ca_n$ med sum cs .

Dette følger umiddelbart af, at afsnittene i det første tilfælde ændres til $s_{n+q} - c$ og i det andet tilfælde til $s_{n-q} + c$ fra en vis index at regne, medens afsnitsfølgen i det tredje tilfælde ændres til cs_n .

5.4.3. Sætning. Lad $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være konvergente rækker med summer s og t .

α) Rækken $\sum (a_n + b_n)$ er da konvergent med sum $s + t$.

β) En række $\sum c_n$, der er fremkommet ved at blande $\sum a_n$ og $\sum b_n$, således at leddene i $\sum c_n$ netop er alle leddene i de to oprindelige rækker, hvert medtaget netop 1 gang, og således at leddene fra hver af rækkerne $\sum a_n$ og $\sum b_n$ står i samme rækkefølge i $\sum c_n$ som i den oprindelige række, vil have summen $s + t$.

Rigtigheden af disse påstande ses umiddelbart ved betragtning af afsnitsfølgerne. Den sidste påstand følger i øvrigt af den første, idet man indskyder nuller før additionen, således som antydnet ved følgende eksempel

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & + & 0 & + & 0 & + & a_2 & + & a_3 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & \dots \\ 0 & + & b_1 & + & b_2 & + & 0 & + & 0 & + & b_3 & + & b_4 & + & b_5 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots \end{array}$$

$$a_1 + b_1 + b_2 + a_2 + a_3 + b_3 + b_4 + b_5 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$$

5.4.4. Sætning. For vilkårlige reelle rækker $\sum a_n$ og $\sum b_n$

gælder

$$\sum (a_n + i b_n) = s + it \iff \sum a_n = s \wedge \sum b_n = t.$$

Dette ses umiddelbart ved at betragte afsnitsfølgerne.

5.5. At undersøge om en række er absolut konvergent fører til undersøgelse af, om en række med positive led er konvergent. Midler til undersøgelse af konvergens af rækker med positive led har derfor ganske stor betydning, og vi skal i dette afsnit nærmere studere sådanne rækker.

Vi bemærker først, at afsnitsfølgen bliver voksende, og derfor vil en række med positive led konvergere, hvis og kun hvis afsnitsfølgen er begrænset. For rækker med positive led gælder derfor også, at enhver delrække er konvergent.

5.5.1. Sætning. Ved omordning på vilkårlig måde af en række $\sum a_n$ med positive led og med sum s fås en række $\sum b_n$ med samme sum.

Bevis. Ethvert afsnit t_n

$$t_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

er en del af et afsnit af den oprindelige række, og vi har derfor $t_n \leq s$. Altså er s et overtal for mængden af afsnit t_n , og vi

har da $s \geq \sup(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, hvilket viser, at

$$\sum b_n \leq \sum a_n .$$

Da nu den oprindelige række fås ved omordning af $\sum b_n$, gælder analogt

$$\sum a_n \leq \sum b_n ,$$

og dermed er påstanden bevist.

5.6. Det vigtigste middel til konvergensundersøgelser for rækker med positive led er sammenligningskriteriet. Som sammenligningsgrundlag benyttes en passende konvergent række $\sum a_n$ med positive led. For nu at vise konvergens af $\sum b_n$, som også antages at have positive led kan man eventuelt direkte sammenligne tilsvarende led i de to rækker. Hvis der eksisterer et positivt tal c og et naturligt tal N , således at $b_n \leq ca_n$ for alle $n \geq N$, da er $\sum b_n$ konvergent. Vi kan nemlig multiplicere $\sum a_n$ med c , udelade de $N-1$ første led af rækkerne og benytte sammenligningskriteriet.

Man kan også sammenligne de to rækker på en mere indirekte måde ved at vise, at leddene i $\sum b_n$ aftager mindst lige så hurtigt som leddene i a_n , altså at der eksisterer et naturligt tal N , således at

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Hvis vi nemlig vælger $c \in \mathbb{R}$, således at $b_N \leq ca_N$, medfører betingelsen $b_n \leq ca_n$ for alle $n \geq N$. Dette ses ved induktion. Hvis $b_n \leq ca_n$, giver uligheden nemlig

$$b_{n+1} \leq a_{n+1} \cdot \frac{b_n}{a_n} \leq c a_{n+1} .$$

Til grovere undersøgelser kan man sammenligne med kvotientrækken, idet man har

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \begin{array}{l} \text{konvergent for } 0 < x < 1 \\ \text{divergent for } x \geq 1, \end{array}$$

og derved får man følgende konvergenzkriterier for rækker $\sum a_n$ med positive led.

1. Rodkriteriet.

Konvergens, hvis $\limsup (\sqrt[n]{a_n}) < 1$.

Divergens, hvis $\limsup (\sqrt[n]{a_n}) > 1$, eller hvis blot $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ for uendelig mange værdier af n .

2. Kvotientkriteriet.

Konvergens, hvis $\limsup \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$.

Divergens, hvis $\liminf \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 1$.

Bevis. Af $\limsup (\sqrt[n]{a_n}) < 1$ følger eksistensen af et helt tal N og et reelt tal $k < 1$, således at $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ for $n \geq N$, altså $a_n \leq k^n$ for $n \geq N$. Her er altså tale om direkte sammenligning med en kvotientrække.

Af $\limsup \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$ følger tilsvarende eksistens af N og $k < 1$, således at $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k = \frac{k^{n+1}}{k^n}$ for $n \geq N$. Her er altså tale

om indirekte sammenligning med en kvotientrække.

Vi vil ikke opholde os ved de to divergensbetingelser, men henviser til opgave nr. 7.

5.7. For bedre at kunne udnytte sammenligningskriteriet, må vi skaffe os konvergente rækker, som konvergerer langsommere end kvotientrækker. Sådanne rækker konvergens kan ofte vises ved følgende kriterium, der kaldes integralkriteriet:

5.7.1. Sætning. Lad $f:[1,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ være en funktion, som er positiv og aftagende, og har grænseværdi 0 i $+\infty$. Rækken $\sum f(n)$ og følgen $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ er begge konvergente eller begge divergente.

Bevis. Som det fremgår af

figuren, er

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1),$$

hvoraf følger

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) - f(k+1).$$

Nu er

$$\sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1) \rightarrow f(1),$$

hvilket viser, at $\sum (f(k) - f(k+1))$ er en konvergent række. Af sammenligningskriteriet følger derefter, at $\sum \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right)$ er konvergent.

At $\sum \int_k^{k+1} f(x)dx$ er konvergent er ensbetydende med, at afsnitsfølgen $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ er konvergens. Da summen af to konvergente rækker igen er konvergent, ses det, at dette medfører konvergens af $\sum f(k)$. Hvis nu omvendt $\sum f(k)$ er konvergent, da er $\sum \int_k^{k+1} f(x)dx$ konvergent, da den er sum af de konvergente rækker $\sum f(k)$ og $\sum \left(\int_k^{k+1} f(x)dx - f(k)\right)$.

Ved at anvende integralkriteriet for $f(x) = x^{-\alpha}$ får vi, at rækken $\sum n^{-\alpha}$ er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leq 1$.

Ved at anvende integralkriteriet for $x^{-1}(\log x)^{-\alpha}$, hvor vi må nøjes med at summere fra $n = 2$, ser vi, at rækken $\sum n^{-1}(\log n)^{-\alpha}$ er konvergent for $\alpha > 1$, divergent for $\alpha \leq 1$. Tilsvarende gælder for rækkerne $\sum (n \log n)^{-1}(\log \log n)^{-\alpha}$, $\sum (n \log n \log \log n)^{-1}(\log \log \log n)^{-\alpha}$, o.s.v. Vi har dermed

fået en mængde langsomt konvergerende rækker, som kan udnyttes i forbindelse med sammenligningskriteriet.

For rækken med det n^{te} led $a_n = n^{-\alpha}$ får vi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}.$$

Nu er ifølge binomialrækken for $1 < \alpha < 2$ og $n > \alpha - 1$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} &= 1 + \alpha \cdot \frac{1}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots \leq \\ 1 + \frac{\alpha}{n} \left(1 + (\alpha-1) + (\alpha-1)^2 + \dots\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{2-\alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{2-\alpha}{1-\alpha} \end{aligned}$$

En række $\sum b_n$ med positive led er altså konvergent, såfremt der eksisterer et helt tal N og et reelt tal $\beta > 1$, således at

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{n}{n+\beta} \text{ for } n \geq N.$$

Dette ses, at vi vælger $\alpha = \frac{2\beta}{\beta+1}$. For $\alpha = 1$ har vi divergens, og vi får derfor, at $\sum b_n$ er divergent, såfremt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq \frac{n}{n+1} \text{ for } n \geq N.$$

5.8 Sammenligningskriteriet kan ifølge sagens natur ikke benyttes til at vise konvergens af betinget konvergente rækker. Et vigtigt hjælpemiddel til studium af betinget konvergente rækker er en omskrivning, der sædvanligvis kaldes Abelsk summation. Vi betragter komplekse tal $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, og vi sætter

$$A_p = \sum_{k=1}^p a_k, \quad p = 1, \dots, n; \quad A_0 = 0.$$

Vi har da

$$a_p = A_p - A_{p-1}, \quad p = 1, \dots, n.$$

Den Abelske summation er da følgende omskrivning

$$\sum_{p=1}^n a_p b_p = \sum_{p=1}^n (A_p - A_{p-1}) b_p = \sum_{p=1}^n A_p b_p - \sum_{p=1}^n A_{p-1} b_p =$$

$$\sum_{p=1}^n A_p b_p - \sum_{p=0}^{n-1} A_p b_{p+1} = A_n b_n + \sum_{p=1}^{n-1} A_p (b_p - b_{p+1}),$$

idet $A_0 = 0$. Vi lægger mærke til, at den Abelske summation bevirker, at a 'erne erstattes med summer af a 'er og b 'erne med differenser mellem b 'er. Den Abelske summation er analog med partiel integration.

Ved anvendelserne har man sædvanligvis en vurdering $|A_p| \leq A$ for $p = 1, \dots, n$, og vi får da følgende vurdering

$$(1) \quad \left| \sum_{p=1}^n a_p b_p \right| \leq A \left(|b_n| + \sum_{p=1}^{n-1} |b_p - b_{p+1}| \right).$$

Vi får da følgende sætning

5.8.1. Sætning. Hvis (a_n) er en kompleks talfølge, med den egenskab, at der eksisterer et tal A , således at

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq A$$

for alle n , medens (b_n) er aftagende talfølge med grænseværdi 0, da er $\sum a_n b_n$ konvergent.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være opgivet. Vi vælger N , således at

$$b_n \leq \frac{\varepsilon}{2A} \text{ for } n \geq N,$$

og vi har nu ifølge (2)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 2A,$$

så vurderingen (1) for $n \geq N$ giver, idet (b_n) er aftagende

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2A \left(b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \right) = 2A b_{n+1} \leq \varepsilon,$$

og rækken $\sum a_n b_n$ er således konvergent ifølge det almindelige konvergensprincip.

I sætning 5.8.1 kan vi også opfatte $\sum a_n$ som en række, hvis afsnitsfølge er begrænset. Vi ønsker da at tilføje faktoren b_1 , således at $\sum a_n b_n$ bliver konvergent, og sætningen siger, at dette indtræffer, når blot b_n er aftagende og går mod 0. Man kan i øvrigt variere betingelserne i 5.8.1 en del.

Rækken $\sum (-1)^n$ er en række med begrænset afsnitsfølge, og for enhver aftagende følge b_n med grænseværdi 0 gælder det derfor, at $\sum (-1)^n b_n$ er konvergent. (Sætningen om konvergens af alternerende række.

Det er let at angive mange flere eksempler på divergente rækker med begrænset afsnitsfølge, og senere i dette kapitel møder vi nogle særlige smukke eksempler.

5.9. Vi vil nu nærmere studere de særlige egenskaber ved absolut konvergente og ved betinget konvergente rækker. Vi betragter først en række $\sum a_n$ med reelle led. Lad $p_1, p_2, \dots$ være de positive, og $-q_1, -q_2, \dots$ de negative led i rækken. Vi har da de to delrækker $\sum p_n$ og $\sum q_n$, af hvilke den ene måske blot er en endelig sum. Vi antager, at $\sum a_n$ er konvergent, og vi sætter

$$s = \sum a_n, p = \sum p_n, q = \sum q_n,$$

hvor p og q eventuelt kan være $+\infty$. Nu er

$$(3) \quad p = s + q,$$

hvilket viser, at rækkerne $\sum p_n$ og $\sum q_n$ begge konvergerer eller begge divergerer. Af

$$\sum |a_n| = p + q$$

følger endelig, at delrækkerne $\sum p_n$ og $\sum q_n$ er konvergente (eller den ene en endelig sum), hvis $\sum a_n$ er absolut konvergent, og $\sum p_n$ og $\sum q_n$ er divergente, hvis $\sum a_n$ er betinget konvergent. Af sætning 5.5.1 og (3) følger nu:

5.9.1. Sætning. Ved omordning på vilkårlig måde af en absolut konvergent række fås en ny konvergent række med samme sum.

På grund af sætning 5.4.4 gælder påstanden også for rækker med komplekse led.

Derimod kan man altid ændre en betinget konvergent rækkes sum ved omordning af rækken, ligesom rækken også kan gøres divergent ved omordning.

Hvis $\sum a_n$ er en betinget konvergent række med reelle led, kan vi ved parenteser inddele hver af rækkerne $\sum p_n$ og $\sum q_n$ i endelige summer, der alle er ≥ 1 , og hvis vi ordner disse parenteser i en uendelig række og derefter hæver parenteserne, får vi en divergent række, der er fremkommet ved omordning af $\sum a_n$. Vi skal ikke gå nærmere ind på disse forhold.

5.10. Vi betragter en afbildning $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ind i $\mathbb{C}$, og vi sætter $\varphi(m, n) = a_{mn}$. Vi kan ordne parrene (m, n) i en følge, og derved bliver $\sum a_{mn}$ en uendelig række. Vi ønsker at finde tilstrækkelige betingelser, for at summerne

$$(4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \right)$$

alle konvergerer og har samme værdi. Vi viser først

5.10.1. Sætning. Hvis $a_{mn} \geq 0$ for alle m og n , har de tre summer i (4) samme værdi.

Bevis. Det er klart, at

$$\forall M \forall N \quad \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N a_{m,n} \right) \leq \sum_{m,n} a_{m,n}.$$

Lader vi her $N \rightarrow \infty$, får vi

$$\forall M \quad \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) \leq \sum_{m,n} a_{m,n}$$

og for $M \rightarrow \infty$ fås nu

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right) \leq \sum a_{mn}.$$

Den modsatte ulighed følger umiddelbart af, at der til hvert afsnit A af $\sum a_{mn}$ svarer hele tal M og N, således at

$$A \leq \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N a_{mn} \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \right).$$

Påstanden vises på helt tilsvarende måde for den sidste af summerne (4).

Vi kan nu vise den almindeligere sætning

5.10.2. Sætning. Hvis $\sum a_{mn}$ er absolut konvergent, er alle de uendelige rækker i (4) absolut konvergente, og de tre udtryk i (4) har samme værdi.

Bevis. Da $\sum |a_{mn}|$ er konvergent, vil også alle rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ konvergere, og vi sætter

$$A_m = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|, \quad a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Af sætning 5.10.1 følger, at $\sum A_m$ konvergerer, og da $|a_m| \leq A_m$, giver sammenligningskriteriet, at $\sum a_m$ er absolut konvergent.

Vi sætter nu

$$p_{m,n} = \begin{cases} a_{m,n}, & \text{hvis } a_{m,n} > 0 \\ 0, & \text{hvis } a_{m,n} \leq 0 \end{cases} \quad q_{m,n} = \begin{cases} -a_{m,n}, & \text{hvis } a_{m,n} < 0 \\ 0, & \text{hvis } a_{m,n} \geq 0 \end{cases}.$$

Ifølge 5.9 er $\sum p_{mn}$ og $\sum q_{mn}$ konvergente, og af sætning 5.10.1 følger

$$\sum p_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{m,n} \right) \quad ; \quad \sum q_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n} \right),$$

og ved flere anvendelser af sætning 5.4.3 får vi

$$\begin{aligned}
\Sigma a_{m,n} &= \Sigma (p_{m,n} - q_{m,n}) = \Sigma p_{m,n} - \Sigma q_{m,n} = \\
\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{m,n} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n} \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_{m,n} - \sum_{n=1}^{\infty} q_{m,n} \right) = \\
\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (p_{m,n} - q_{m,n}) \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right).
\end{aligned}$$

Analogt vises, at også det sidste udtryk i (4) har samme værdi.

5.11. Vi skal nu vise en sætning om multiplikation af absolut konvergente rækker.

5.11.1. Sætning. Lad Σa_n og Σb_n være absolut konvergente rækker med sum s og t . Da er $\Sigma a_m b_n$ absolut konvergent med sum st .

Bevis. Af sætningerne 5.10.1 og 5.4.2γ følger

$$\begin{aligned}
\Sigma |a_m b_n| &= \Sigma |a_m| |b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_m| |b_n| \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(|a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|,
\end{aligned}$$

hvilket viser, at $\Sigma |a_m b_n|$ er konvergent. Ifølge sætning 5.10.2 kan vi da udføre nøjagtig den samme regning uden numerisktegne, og dermed er sætningen vist.

Det er ofte hensigtsmæssigt at samle leddene i $\Sigma a_m b_n$ i parenteser, således at hver parentes indeholder alle led, hvis index har en vis sum. Det enkelte led har således formen

$$(5) \quad c_n = \sum_{p=1}^n a_p b_{n+1-p},$$

og produktformlen bliver da

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_m \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Det kan vises, at denne mere specielle produktformel gælder for to rækker, hvis blot den ene er absolut konvergent. Vi skal ikke opholde os ved beviset for denne påstand. Det kan ligeledes vises, at (6) gælder, hvis alle tre rækker konvergerer, men hvis $\sum a_n$ og $\sum b_n$ er betinget konvergente, vil $\sum c_n$ undertiden divergere.

5.12. En række af formen

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

kaldes en potensrække. Vi vil antage, at $a_0, a_1, \dots$ samt z er komplekse tal. Idet $a_0, a_1, \dots$ har faste værdier, vil vi undersøge, for hvilke værdier af z rækken konvergerer. Vi viser først

5.12.1. Sætning. Hvis talfølgen $(a_n z_0^n)$ er begrænset, konvergerer (7) absolut for $|z| < |z_0|$.

Vi kan nemlig vælge et reelt tal K , således at $|a_n z_0^n| \leq K$ for alle n , og vi har da

$$|a_n z^n| \leq K \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n,$$

og da rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} K \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$$

for $|z| < |z_0|$ er en konvergent kvotientrække, følger sætningen af sammenligningskriteriet.

5.12.2. Sætning. For potensrækken (7) vil der altid gælde én af følgende 3 påstande:

- 1) Rækken konvergerer kun for $z = 0$.
- 2) Rækken konvergerer absolut for alle $z \in \mathbb{C}$.
- 3) Der eksisterer et positivt tal r , således at rækken er absolut konvergent for $|z| < r$ og divergent for $|z| > r$.

Bevis. Lad os antage, at hverken 1) eller 2) indtræder. Der

eksisterer da et komplekst tal $z_0 \neq 0$, således at rækken konvergerer i z_0 , og talfølgen $(a_n z_0^n)$ er da begrænset. Heraf følger nu, at rækken konvergerer absolut for $|z| \leq |z_0|$. Lad M være mængden af positive tal ρ med den egenskab, at rækken konvergerer absolut for $|z| < \rho$. Vi sætter $r = \sup M$, og rækken konvergerer da absolut for $|z| < r$. Hvis rækken konvergerer for $z = z_1$, hvor $|z_1| > r$, ville sætning 5.12.1 medføre, at rækken konvergerede absolut for $|z| < |z_1|$ i modstrid med definitionen af r .

Det i sætning 5.12.2 definerede tal r kaldes potensrækkens konvergensradius og cirklen $|z| < r$ kaldes potensrækkens konvergenscirkel. Konvergensradius sættes $= 0$ i tilfælde 1) og $= \infty$ i tilfælde 2).

Til bestemmelse af konvergensradius har vi

5.12.3. Sætning. For konvergensradius r for rækken (7) gælder

$$(8) \quad r = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1},$$

og hvis følgen $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ har en grænseværdi, er den $= r$.

Bevis. Hvis r er defineret ved (8), får vi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{r},$$

og det følger af rodkriteriet (se 5.6), at r er konvergensradius.

Af $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \rightarrow r$ følger $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \rightarrow \frac{|z|}{r}$, og kvotientkriteriet

(se 5.6) medfører, at r er konvergensradius.

Det skal tilføjes, at konvergensradius ret ofte kan bestemmes uden regning, idet betinget konvergens kun kan indtræffe på konvergenscirkelns rand. At følgen $(a_n z^n)$ er begrænset uden at rækken konvergerer kan ligeledes kun indtræffe på konvergenscirkelns rand.

En række af formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kaldes en potensrække udfra z_0 . Den vil konvergere absolut i en cirkel $|z - z_0| < r$, eventuelt i hele planen eller kun for $z = z_0$. Dette ses umiddelbart ved at benytte $z - z_0$ som ny variabel.

Da potensrækker konvergerer absolut indenfor konvergenscirklerne, kan multiplikationssætningen 5.11.1 anvendes, oftest fordelagtigt på formen (5) og (6), som giver

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

hvor

$$(10) \quad c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}.$$

5.13. For potensrækken

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

fås

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

og rækken er derfor absolut konvergent for alle z , og summen $\exp z$ er en i hele den komplekse plan defineret funktion. For reelle værdier af z fås specielt ifølge 2.3, at

$$\exp x = e^x.$$

Ved produkt formlen får vi endvidere

$$\exp z_1 \exp z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{z_1^p}{p!} \cdot \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} \right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1+z_2).$$

På grund af denne relation, der er en udvidelse af relationen $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ til komplekse tal, er det nærliggende at sætte $\exp z = e^z$. For $z = iy$ (rent imaginær) får vi endvidere

$$(11) \quad e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\cos y + i \sin y,$$

og vi får derfor generelt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

således at e^{x+iy} bliver det komplekse tal, der har e^x som numerisk værdi og y som et argument.

Det er nyttigt at huske, at e^{iy} for reelt y er et komplekst tal med numerisk værdi 1 (et komplekst fortegn), og at ethvert komplekst tal med numerisk værdi 1 kan skrives på formen e^{iy} , hvor y er reel. Moivres formel får med den nye betegnelse det simple udseende

$$(e^{iy})^n = e^{iny}.$$

5.14. Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{iny},$$

hvor y er reel, er divergent, da alle led har numerisk værdi 1. Når y ikke er et multiplum af 2π , har rækken begrænsede afsnit, idet $e^{iny} \neq 1$, og vi får da, idet rækken er en kvotientrække

$$s_n(y) = \sum_{k=0}^n e^{iky} = \sum_{k=0}^n (e^{iy})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)y}}{1 - e^{iy}},$$

og idet

$$|1 - e^{i(n+1)y}| \leq 1 + |e^{i(n+1)y}| = 2,$$

følger heraf

$$|s_n(y)| \leq \frac{2}{|1 - e^{iy}|}.$$

Af sætning 5.8.1 følger derfor, når (b_n) er en monotont aftagende følge med grænseværdi 0, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{iny}$$

er konvergent, når y ikke er et multiplum af 2π . Ved at tage realdel og imaginærdel ser vi, at det samme gælder for rækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n y \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n y.$$

Den sidste er endda konvergent for alle reelle y .

Potensrækken

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

er divergent for $z = 1$ (harmonisk række, se 5.2), men konvergent for $z = -1$ (alternerende række, se 5.8). Rækken har derfor konvergensradius 1. For $z = e^{iy}$, $y \in \mathbb{R}$ fås et specielt tilfælde af den ovenfor behandlede række, og vi får derfor, at rækken (12) er (betinget) konvergent på randen af konvergenscirklen undtagen i punktet $z = 1$.

5.15. Af den i 5.13 udledte relation (11) får vi for alle reelle værdier af y

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y,$$

hvoraf vi får ved addition og subtraktion

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}).$$

Det er derfor nærliggende at udvide definitionerne af de trigonometriske funktioner til det komplekse område ved at sætte

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Hvis vi her indfører rækkeudviklingerne for eksponentialfunktionerne, finder vi, at vi får, at de tidligere udledte rækkeudviklinger gælder i hele den komplekse plan. Vi sætter endvidere

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Definitionerne af de hyperbolske funktioner

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z})$$

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{coth} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

overføres uden videre til komplekse variable, og vi bemærker, at vi får relationerne

$$\cos z = \cosh iz, \quad \sin z = i \sinh iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{tgh} iz, \quad \cot z = \frac{1}{i} \operatorname{coth} iz.$$

Det er klart, at formlerne for regning med hyperbolske funktioner gælder uændret i det komplekse, idet disse regneregler udledes direkte af eksponentialfunktionens funktionalligning. Ved at udnytte sammenhængen mellem hyperbolske og trigonometriske funktioner i det komplekse fås umiddelbart, at de trigonometriske formler ligeledes gælder for komplekse variable. Specielt får vi formlerne

$$\cos (x \pm iy) = \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y$$

$$\sin (x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y$$

Det fremgår heraf, at periodicitetsegenskaberne

$$\cos (z+2\pi) = \cos z, \quad \sin (z+2\pi) = \sin z$$

gælder for komplekse værdier af z . Eksponentialfunktionen og de hyperbolske funktioner får periode $2\pi i$, altså

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad \cosh (z+2\pi i) = \cosh z,$$

o.s.v. Dette fremgår umiddelbart af, at

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

5.16. Af udtrykket

$$\exp z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

fremgår, at eksponentialfunktion kun antager værdier $\neq 0$. Er på den anden side

$$(13) \quad r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

en sådan værdi, ser vi, at $\exp z$ antager denne værdi for

$$(14) \quad z = \log r + i(\theta + 2p\pi),$$

hvor p er et vilkårligt helt tal. Vi har altså en afbildning

$$\exp : \mathbb{C} \text{ på } \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

og originalmængden til punktet (13) er mængden af værdierne (14).

Vi betegner denne mængde $\text{Log}(r(\cos \theta + i \sin \theta))$ og kalder den mængden af logaritmer til tallet (13). Netop 1 af disse logaritmer har sin imaginærdel i intervallet $]-\pi, \pi]$, og denne logaritme kaldes hovedlogaritmen af tallet (13), og den betegnes $\log(r(\cos \theta + i \sin \theta))$.

En potens $z^\gamma = (x+iy)^{\alpha+i\beta}$ kan ligeledes tillægges en fornuftig betydning som en talmængde, idet vi sætter

$$z^\gamma = \exp(\gamma \text{Log } z) =$$

$$\exp(\gamma \log |z| + i \gamma \arg z) =$$

$$\left\{ e^{\gamma \log |z| + i \gamma (\text{Arg } z + 2p\pi)} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

F.eks. bliver

$$i^i = \left\{ e^{-\frac{\pi}{2} + 2p\pi i} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lette opgaver.

1. Benyt opgave 5 i kapitel 1 til at undersøge, om følgende rækker

$$\sum_{p=0}^{\infty} \prod_{k=0}^q \frac{1}{x+p+q}$$

konvergerer for $q > 2$ og til at finde den eventuelle sum.

2. Skriv beviset for sætning 5.4.4 udførligt.
3. Bevis sætning 5.5.1 ved at vurdere differensen mellem afsnit i de to rækker.
4. For hvilke reelle p konvergerer $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p$.
5. Undersøg dels ved rodkriteriet og dels ved kvotientkriteriet, om $\sum n^3 e^{-n}$ er konvergent, og for hvilke p rækken $\sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p$ er konvergent.

6. Vis, at rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(1+\frac{1}{n})}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$$

er divergente.

7. Gennemfør de manglende afsnit af beviserne for rodkriteriet og kvotientkriteriet MA 5.6.

8. Vis, at rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

er konvergente.

9. For hvilke reelle p konvergerer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} n^p (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})?$$

10. For hvilke reelle p og q med $0 < q < p$ konvergerer

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q} \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}.$$

11. Bevis integralkriteriet (sætning 5.7.1.), idet det først (f.eks. ved en arealbetragtning) vises, at

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k),$$

og dernæst benyttes disse uligheder til vurdering af rækkens afsnit, når integralet konvergerer og omvendt. Denne bevismetode er måske bekvemmere end den i teksten benyttede.

12. Vis, at $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n^2} \right)$ er betinget konvergent.

13. Vis, at

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7}} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \dots$$

er betinget konvergent.

14. Prøv at vurdere summen af de n første led i den harmoniske række ved at sammenligne summen med et bestemt integral, og vurder derved den mindste værdi n_0 af n , for hvilken summen overstiger 100. Metoden giver en vurdering $a < n_0 < ae$. Hvorledes kan en skarpere vurdering fås?

15. Vis sætningen om den alternerende række (se 5.8) ved at vise, at afsnittene definerer en intervalindsnævring.

16. Vis følgende sætning:

Hvis $\sum a_n$ er en konvergent række og (b_n) en monoton, begrænset talfølge, er $\sum a_n b_n$ konvergent. (Bevises omtrent som sætning 5.8.1).

17. Vis følgende sætning:

Hvis $\sum a_n$ er konvergent, og følgen (b_n) har den egenskab, at $\sum (b_n - b_{n+1})$ er absolut konvergent, er $\sum a_n b_n$ konvergent.
(Bevises omtrent som sætning 5.8.1).

18. Undersøg om rækkerne

$$\sum \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}, \sum \operatorname{Arctg} \frac{1}{n^2}, \sum \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{n} \right)^2$$

er konvergente. (Forprøven, København 1959).

19. Rækken $\sum a_n$ antages absolut konvergent. Vis, at rækkerne

$$\sum a_n^2, \sum \frac{a_n^2}{1+a_n}, \sum \frac{a_n}{1+a_n}$$

er konvergente, den sidste dog kun, hvis alle a_n er $\neq -1$.

20. Lad $\sum a_n$ være en divergent række. Vis, at $\sum na_n$ også er divergent (prøv indirekte).

21. Vi definerer

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ -1 & \text{for } n = m + 1 \\ 0 & \text{for } n < m \text{ og for } n > m + 1. \end{cases}$$

Vis, at udtrykkene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

eksisterer, men er forskellige.

22. Vis, at

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} h^m k^n = \frac{1}{(1-h)(1-k)},$$

når $|h| < 1$ og $|k| < 1$.

23. Bestem potensrækkeudviklinger for

$$\frac{1}{(1-z)^2}, \frac{1}{(1-z)^3}$$

ved at danne produkter ved formlerne (5) og (6) i 5.11 ud fra udvikling

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

24. Bestem konvergensradius for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(n+1)^{-2}} z^n \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} (\log n) z^n ,$$

og undersøg om rækkerne konvergerer på konvergenscirklen.

25. Bestem konvergensradius for hver af potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} + 1)^n z^n \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n z^n ,$$

og vis, at den første divergerer overalt på konvergenscirklen.

26. Hvis $\sum a_n z^n$ har konvergensradius r og k er et positivt helt tal, hvad er da konvergensradius for hver af rækkerne

$$\sum a_n^k z^n, \quad \sum a_n z^{kn}, \quad \sum a_n z^{n^2} .$$

27. Udregn

$$e^{\log 2 + i \frac{\pi}{6}}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + i \log 3\right), \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3} - i \log 3\right) \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + i \log 2\right), \quad \cosh\left(\log 2 - i \frac{\pi}{6}\right), \quad \operatorname{tgh}\left(\log 5 - i \frac{\pi}{2}\right)$$

28. Find alle de komplekse tal z , som tilfredsstiller hver af følgende ligninger

$$e^z = -1, \quad e^z = -1 + i\sqrt{3}, \quad \sinh z = i \\ \cos z = \frac{1}{2}, \quad \sin z = \frac{5}{3}, \quad \operatorname{tg} z = 2i.$$

29. Angiv alle tal i talmængden

$$(1 + i)^1 - i$$

30. Funktionerne $\sin$ og $\cos$ afbilder den komplekse plan $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Vis, at de afbilder $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$.

31. Funktionen tg afbilder den ved

$$M = \{z \mid \cos z \neq 0\}$$

definerede delmængde af $\mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$. Angiv billedmængden $\operatorname{tg} M$.

32. Idet a og b er reelle tal, og vi for $z \in \mathbb{C}$ skriver $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, søges billederne ved afbildningen $\cos$ af punktmængderne

$$M_a = \{z \mid x = a\}, N_b = \{z \mid y = b\}.$$

Vis, at disse billeder for "næsten alle" valg af a og b (formuler selv et præcisere udsagn) er keglesnit, at disse keglesnit alle har de samme brændpunkter (er konfokale). Ifølge kendte sætninger om tangenter og brændstråler, vil de to systemer af keglesnit skære hinanden under ret vinkel (ortogonale kurvesystemer).

Vanskeligere opgaver.

For de fleste studerende vil det være velkendt fra gymnasiet, at talfølgen (a_n) , hvor $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, er konvergent med grænseværdien e . I vor fremstilling er vi ved opstillingen af Taylorudviklingen for e^x gået ud fra, at $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, og at $e^0 = 1$, og på dette grundlag har vi fundet rækkeudviklingen for e . At ovennævnte følge konvergerer mod en grænseværdi, der er lig med summen af rækkeudviklingen for e vises let direkte. Vi skitserer et bevis:

Binomialformlen giver

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right),$$

og for $0 < p < n$ har vi derfor

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right) < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Derefter fuldendes beviset let, idet man lader $n \rightarrow \infty$ og derefter $p \rightarrow \infty$ i ovenstående ulighed.

33. Skriv det ovenfor skitserede bevis udførligt.

34. Find konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,$$

og undersøg konvergensforholdene på konvergenscirklen.

35. Undersøg om rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log \log n)^{\log \log n}}$$

er konvergente.

36. Vis, at talfølgen (a_n) , hvor

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

er konvergent (se nærmere på beviset for integralkriteriet, idet der specielt vælges $f(x) = \frac{1}{x}$). Grænseværdien, som kaldes Euler's konstant spiller en ikke ringe rolle ved studiet af forskellige specielle funktioner.

37. Lad $\sum a_n$ være en konvergent række med positive led. Vis, at $\sum \sqrt[p]{a_n} n^{-p}$ er konvergent for $p > \frac{1}{2}$. (Benyt det almindelige konvergensprincip, idet produktsummen vurderes ved hjælp af Cauchy-Schwarz's ulighed). Vis, at det tilsvarende ikke gælder for $p = \frac{1}{2}$ (prøv med $a_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$).

38. Vis følgende påstand for reelle talfølger (a_n) og (b_n) :

Hvis $\sum a_n^2$ og $\sum b_n^2$ konvergerer, da er $\sum a_n b_n$ absolut konvergent og $\sum (a_n \pm b_n)^2$ konvergerer. (Vejledning i parenteser i opgave nr. 37 kan også benyttes her).

39. Vi danner en delrække af den harmoniske række $\sum \frac{1}{n}$, idet vi medtager netop de led $\frac{1}{n}$, hvor n skrives uden cifret 4. Vis, at den fremkomne række konvergerer. Det samme gælder, hvis vi i stedet for 4 benytter et andet ciffer. Hvad kan vi slutte om den delrække af den harmoniske række, som består af de led $\frac{1}{n}$, der skrives med alle 10 cifre?

40. For hvilke reelle værdier af x er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{\sin nx}{n}$$

konvergent? (Denne opgave burde vist egentlig placeres blandt de lette opgaver).

41. Lad $\sum a_n$ være en betinget konvergent række med reelle led, og lad c være et reelt tal. Vi omordner rækken, idet vi først medtager så mange positive tal, at summen netop overstiger c , derefter så mange negative, at summen af afsnittet netop er under c , så igen positive led, til vi har et afsnit, der overstiger c , o.s.v. Vis, at denne proces kan fortsættes i det uendelige og fører til en række, som er konvergent og har sum c .

42. Vis, at dobbeltrækken

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |m + in|^{-\alpha}$$

divergerer for $\alpha \leq 2$ og konvergerer for $\alpha > 2$. (Vurder summerne af led svarende til, at $m + in$ ligger på randen af kvadrater definerede ved $|m| \leq q$, $|n| \leq q$.

43. Dan produktet af $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ med sig selv efter formlerne (5) og (6) i 5.11, og vis, at dette produkt er en divergent række.
44. Vis formelen $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ved at indsætte potensrækkerne for $\cos z$ og $\sin z$ og benytte multiplikationssætningen.
45. Lad S betegne det indre af konvergenscirklen for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!}}{(n!)^2}.$$

Vis, at S har radius 1. En afbildning $f:S$ ind i $\mathbb{C}$ defineres ved, at $f(z)$ er summen af rækken. Vis, at f er en éntydig afbildning.

Svære opgaver.

46. Lad (a_n) være en følge af hele tal, som tilfredsstiller
 $0 \leq a_n \leq n-1, n = 2, 3, \dots$. Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!},$$

konvergerer, og at summen er irrational, undtagen hvis der eksisterer et helt tal N , således at $a_n = n-1$ for alle $n \geq N$.

47. Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

omordnes, således at der skrives afvekslende p positive og q negative led, hvor p og q er positive, hele tal. Vis, at den omordnede række har summen $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$.

48. For $a > 0$ kan vi for vilkårlige komplekse z sætte

$$a^z = e^{z \log a},$$

således at a^z er defineret på entydig måde. Når (a_n) er en vilkårlig følge af komplekse tal, kaldes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

hvor $z = x + iy$, en Dirichlet række. Vis, at der eksisterer to reelle tal a og k , som tilfredsstiller $a-1 \leq k \leq a$, således at rækken er absolut konvergent for $x > a$, betinget konvergent for $k < x < a$, og divergent for $x < k$. For $a_n = (-1)^n$ fås specielt $k = 0$, $a = 1$. For $a_n = 1$ (alle n) fås $k = a = 1$.

Stamfunktioner.

6.1. Med $\hat{F}([a,b],\mathbb{R})$ betegner vi mængden af afbildninger $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, altså mængden af reelle funktioner på intervallet $[a,b]$. Tilsvarende betegnelser anvendes for intervaller $[a,b[$, $[a,\infty[$, o.s.v. Med $\hat{C}([a,b],\mathbb{R})$ betegner vi den delmængde af $\hat{F}([a,b],\mathbb{R})$, som består af de kontinuerte funktioner, og med $\hat{D}([a,b],\mathbb{R})$ den delmængde, der består af de overalt differentiable funktioner. Vi har altså

$$\hat{D}([a,b],\mathbb{R}) \subset \hat{C}([a,b],\mathbb{R}) \subset \hat{F}([a,b],\mathbb{R}).$$

Vi har brugt tegnet $\subset$ i stedet for $\subseteq$, da det er klart, at der virkelig er tale om ægte delmængder, hvis intervallet $[a,b]$ ikke er reduceret til et enkelt punkt.

Lad x være et punkt af $[a,b]$. Vi kan da definere en afbildning $\delta_x: \hat{F}([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, idet vi for hver funktion $f \in \hat{F}([a,b],\mathbb{R})$ sætter $\delta_x f = f(x)$. En afbildning af en mængde af funktioner ind i en mængde af tal kaldes en funktional. Lad x og y være vilkårlige punkter af $[a,b]$. Vi har da en anden funktional $I_{x,y}: \hat{C}([a,b],\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, idet vi for $f \in \hat{C}([a,b],\mathbb{R})$ sætter

$$I_{x,y} f = \int_x^y f(t) dt.$$

I gymnasieundervisningen omtales, om end ikke særlig udføreligt, indførelsen af det bestemte integral som grænseværdi for visse tilnærmelsessummer, og det er af afgørende betydning, at man derved når til en definition af det bestemte integral, som har gyldighed for alle kontinuerte funktioner. Vi skal ikke i denne forbindelse gå nærmere ind på definitionen af det bestemte integral ved hjælp af tilnærmelsessummer, men vi vender tilbage til spørgsmålet på et senere tidspunkt.

6.2. En afbildning af en mængde af funktioner ind i en mængde

af funktioner kaldes en operator. Som et meget simpelt eksempel kan vi for et vilkårligt reelt c definere en operator

$T_c: \hat{F}([a,b], \mathbb{R})$ ind i $\hat{F}([a-c, b-c], \mathbb{R})$, idet vi for $f \in \hat{F}([a,b], \mathbb{R})$ definerer billedfunktionen $T_c f$ ved

$$T_c f(x) = f(x+c),$$

og dette er virkelig en definition, da $x \in [a-c, b-c]$ medfører $x+c \in [a,b]$, således at $f(x+c)$ er defineret.

For $c \in [a,b]$ kan vi definere en operator $I_c: \hat{C}([a,b], \mathbb{R})$ ind i $\hat{D}([a,b], \mathbb{R})$, idet vi for $f \in \hat{C}([a,b], \mathbb{R})$ definerer $I_c f: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ ved

$$(1) \quad I_c f(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Læg mærke til, at vi sædvanligvis ikke bruger parentes, når vi skriver billedfunktionen ved en operator eller værdien af en funktional. Dette kan dog ikke altid overholdes. Har vi f.eks. funktionerne $f, g: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$, da er det naturligt med $f+g$ at betegne den funktion, som afbilder x i $f(x) + g(x)$, altså $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Vi har da

$$I_c(f+g) = I_c f + I_c g,$$

og her er parentes på venstre side selvfølgelig nødvendig. Relationen betyder, at vi for ethvert $x \in [a,b]$ har følgende ligning mellem funktionsværdierne

$$I_c(f+g)(x) = I_c f(x) + I_c g(x).$$

Vi anførte ovenfor, at I_c afbilder $\hat{C}([a,b], \mathbb{R})$ ind i $\hat{D}([a,b], \mathbb{R})$. Det vises nemlig i gymnasieundervisningen, at det bestemte integral i (1), hvor f er kontinuert, er en differentiabel funktion af sin øvre grænse, og differentialkvotienten af $I_c f$ er netop f .

6.3. For en differentiabel funktion $f: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$, vil vi betegne differentialkvotienten Df . Den er selv en af-

bildning $Df:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$, og vi har dermed defineret en operator

$$D:\hat{D}([a,b],\mathbb{R}) \text{ ind i } \hat{F}([a,b],\mathbb{R}).$$

Vi minder om definitionen af differentialkvotienten

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)).$$

Operatoren D afhænger strengt taget af intervallet $[a,b]$, men det vil ikke give anledning til misforståelser, at dette ikke fremgår af betegnelserne. Operatoren D er ikke en afbildning ind i $\hat{C}([a,b],\mathbb{R})$, idet differentialkvotienten af en overalt differentiabel funktion ikke altid er kontinuert. Hvis vi f.eks. definerer en afbildning $\varphi:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ på følgende måde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \end{cases}$$

da får vi for $x = 0$ differenskvotienten

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = h \sin \frac{1}{h},$$

som går mod 0 for $h \rightarrow 0$. For $x \neq 0$ er $\varphi(x)$ differentiabel ifølge regnereglerne for differentiation, og vi får

$$D\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0, \end{cases}$$

og det fremgår heraf, at $D\varphi$ er diskontinuert i 0.

6.4. For $f \in \hat{F}([a,b],\mathbb{R})$ kan vi naturligvis benytte den sædvanlige betegnelse $D^{-1}f$ for mængden af funktionen i $\hat{D}([a,b],\mathbb{R})$, som af operatoren D afbildes i f . Hvis mængden $D^{-1}f$ ikke er tom, vil vi også betegne den $\int f$, og vi kalder den da mængden af stamfunktioner til f . At $F \in \int f$ er defineret på intervallet $[a,b]$, er altså ensbetydende med, at F er differentiabel på $[a,b]$, og at $DF = f$.

Enhver funktion $F \in \hat{D}([a,b], \mathbb{R})$ er element af netop én af mængderne $\int f$, nemlig $\int DF$. Det fremgår heraf, at mængderne $\int f$, hvor $f \in \hat{F}([a,b], \mathbb{R})$ udgør en inddeling af $\hat{D}([a,b], \mathbb{R})$ i disjunkte klasser. Fra gymnasieundervisningen ved vi, at to funktioner tilhører den samme klasse $\int f$, hvis og kun hvis forskellen er konstant.

For $f \in \hat{C}([a,b], \mathbb{R})$ eksisterer $\int f$ altid, og for $F \in \int f$ og $x_1, x_2 \in [a,b]$ har vi relationen

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1).$$

På grund af denne relation siger vi også ubestemt integral i stedet for stamfunktion. Vi vil undgå at anvende den sædvanlige betegnelse

$$(3) \quad \int f(x) dx,$$

der traditionelt betyder "en eller anden ikke nærmere bestemt stamfunktion til f ". Betegnelser, der har en flertydighed af denne art, bør undgås, da de giver anledning til misforståelser. Det må dog retfærdigvis indrømmes, at risikoen for alvorligere misforståelser i forbindelse med ubestemte integraler ikke er særlig stor (sml. opgave nr. 2).

Vi bemærker også, at bogstavet x i udtrykket (2) har en ret ejendommelig rolle. Overfladisk kan udtrykket minde om et symbol $f(x)$ for en funktionsværdi, men i (2) kan x netop ikke tillægges en konstant værdi. Vi foretrækker derfor at operere med det bestemte integral

$$\int_c^x f(t) dt,$$

og vi bemærker, at dette udtryk virkelig kan opfattes som sym-

bol for en funktionsværdi $F(x)$, og ved at udelade x får vi et symbol for funktionen

$$F = \int_c f(t) dt,$$

og her er t blot en passiv variabel. Vi har $F(c) = 0$.

For ikke hele tiden at skulle holde regnskab med integrationskonstanter, vil vi anvende betegnelsen $f \sim g$ for at antyde, at forskellen mellem f og g er konstant. Vi behøver da heller ikke at holde regnskab med den nedre grænse.

6.5. Eksemplet i 6.3 viser, at den klasse af funktioner, som har stamfunktioner, omfatter funktioner med komplicerede diskontinuiteter. På den anden side har kontinuerte funktioner altid stamfunktioner. En nærmere redegørelse for disse forhold er først gennemført i dette århundrede og falder uden for rammerne af dette kursus.

Gymnasieundervisningen omfatter nogle simple metoder til bestemmelse af stamfunktioner til elementære funktioner, når det er muligt at finde eksplicite udtryk for stamfunktionerne. Vi skal i det følgende give en oversigt over de vigtigste metoder til eksplicit stamfunktionbestemmelse.

Vi tager vort udgangspunkt i vort kendskab til de elementære funktioners differentialkvotienter, som umiddelbart giver os følgende liste over stamfunktioner, hvor vi i første og sidste kolonne anfører udtrykket for funktionsværdierne.

Funktion	Intervaller	Stamfunktion
$x^a, a \neq -1$	$]0, \infty[$	$(a+1)^{-1} x^{a+1}$
x^{-1}	$] -\infty, 0[,]0, \infty[$	$\log x $
$\cos x$	$] -\infty, \infty[$	$\sin x$
$\sin x$	$] -\infty, \infty[$	$-\cos x$
$\cos^{-2} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$](2p-1)\frac{\pi}{2}, (2p+1)\frac{\pi}{2}[$	$\operatorname{tg} x$
$\sin^{-2} x = 1 + \operatorname{cot}^2 x$	$]p\pi, (p+1)\pi[$	$-\operatorname{cot} x$
$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$] -1, 1[$	$\operatorname{Arcsin} x \sim -\operatorname{Arccos} x$
$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$] -\infty, \infty[$	$\operatorname{Arsinh} x = \log(x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}})$
$(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$	$] -\infty, -1[,]1, \infty[$	$\operatorname{Arcosh} x = \log x + \sqrt{(x^2-1)} $
$(1 + x^2)^{-1}$	$] -\infty, \infty[$	$\operatorname{Arctg} x \sim -\operatorname{Arccot} x$
$(1 - x^2)^{-1}$	$] -1, 1[$	$\operatorname{Artgh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$
$(1 - x^2)^{-1}$	$] -\infty, -1[,]1, \infty[$	$-\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{x+1}$

6.6. De vigtigste hjælpemidler ved udregning af stamfunktioner er integration ved substitution og delt integration, hvortil kommer omformning af integranden, eventuelt under inddragelse af komplekse tal i regningerne.

Integration ved substitution beror på sætningen om differentiation af sammensat funktion. Lad $F : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være stamfunktion til $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$, og lad $\varphi : [\alpha, \beta]$ ind i $[a, b]$ være en differentiabel funktion. For $u \in [\alpha, \beta]$ har vi da

$$\frac{d}{du} F(\varphi(u)) = F'(\varphi(u))\varphi'(u).$$

Skrevet med operationen D får denne relation udseendet

$$D(F \circ \varphi) = (DF \circ \varphi) \cdot D\varphi.$$

Vi kan altså slutte, at $F \circ \varphi$ er stamfunktion til $(f \circ \varphi) \cdot D\varphi$ på $[\alpha, \beta]$. Under de ovenfor anførte forudsætninger har vi altså

$$\int (f \circ \varphi) \cdot D\varphi = \left(\int f \right) \circ \varphi,$$

hvor det sidste udtryk står for mængden

$$\{F \circ \varphi \mid F \in \int f\}.$$

For integraler får vi for $c \in [\alpha, \beta]$, at

$$(4) \quad \int_c^t f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(t)} f(x) dx.$$

For en differentiabel funktion $\varphi(u)$ har vi som bekendt differentialen $\varphi'(u)du$, som afhænger af de 2 variable u og du . Differentialen betegnes med $d\varphi$, og dets funktionsværdi skal derfor betegnes $d\varphi(u, du)$, men i integraler vil vi tillade os at benytte den ukorrekte skrivemåde $d\varphi(u)$, og vi skriver derfor (4) på den praktiske form

$$\int_c^t f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{u=c}^{\varphi(t)} f(\varphi(u)) d\varphi(u).$$

Når der ikke står et enkelt bogstav efter differentialtegnet i et integral, er det sikrest som antydnet at præcisere, hvilken variabel integralgrænserne refererer til. Hvis udtrykkene bliver alt for komplicerede under regningerne, må man selvfølgelig indføre kortere betegnelser. Vi viser et par simple eksempler.

1. For $a > 0$, har vi i intervallet $]-a, a[$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \int_{x=0}^u \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}} = \text{Arc sin } \frac{u}{a}.$$

2. For $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ er

$$\int_0^u \operatorname{tg} x \, dx = - \int_{x=0}^u \frac{d \cos x}{\cos x} = - \log \cos u$$

3. For $u \in]0, \pi[$ er

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{dx}{\sin x} &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^u \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} = \int_{x=\frac{\pi}{2}}^u \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2}} = \\ &= \int_{x=\frac{\pi}{2}}^u \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

4. For $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ er ifølge eksempel 3

$$\int_0^u \frac{dx}{\cos x} = \int_{x=0}^u \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vi kan selvfølgelig også anvende integration ved substitution omvendt, idet vi indsætter $x = \varphi(u)$ i det integral, vi ønsker, at beregne. Hvis den søgte stamfunktion er F , får vi da bestemt den sammensatte funktion $F \circ \varphi$. For at dette skal være tilstrækkeligt til at bestemme F , bliver vi nødt til at forudsætte, at φ er monoton, således at afbildningen ved φ bliver enentydig. Vi viser et simpelt eksempel. For at udregne

$$I = \int_0^x \frac{x \, dx}{\sqrt{(1+x)}} \quad , \quad x \in]-1, \infty[,$$

anvender vi substitutionen $x = \varphi(t)$:

$$x = t^2 - 1, \quad t \in]0, \infty[, \quad t = \sqrt{(x+1)},$$

og vi får da

$$I \circ \varphi = \int_1^x \frac{(t^2-1) \cdot 2t \, dt}{t} = 2 \int_1^x (t^2-1) dt,$$

altså

$$I \circ \varphi(t) = \frac{2}{3} t^3 - 2t + \frac{4}{3} \quad ,$$

og den omvendte substitution giver nu

$$I(x) = \left(\frac{2}{3}(x+1)-2\right)\sqrt{(x+1)} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}((x-2)\sqrt{(x+1)+2}).$$

6.7. Formlen for delt integration kan bekvemt skrives

$$\int_{x=0}^x f(x)dg(x) = fg - f(0)g(0) - \int_{x=0}^x g(x)df(x).$$

Vi viser nogle typiske eksempler.

1. For $\alpha \neq -1$, $x > 0$ fås

$$\begin{aligned} \int_1^u x^\alpha \log x \, dx &= \frac{1}{\alpha+1} \int_{x=1}^u \log x \, dx^{\alpha+1} = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \log u - \frac{1}{\alpha+1} \int_{x=1}^u x^{\alpha+1} \, d \log x = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \log u - \frac{1}{\alpha+1} \int_1^u x \, dx = \frac{1}{(\alpha+1)^2} u^{\alpha+1} ((\alpha+1) \log u - 1) \end{aligned}$$

2. Når n er et naturligt tal har vi rekursionsformlen

$$\int_0^u x^n e^x \, dx = \int_{x=0}^u x^n \, d e^x = u^n e^u - n \int_0^u x^{n-1} e^x \, dx,$$

som muliggør beregning af integralet. Hvis n er negativ, kan rekursionsformlen bruges omvendt til at forøge eksponenten, men $\int_0^x x^{-1} e^x \, dx$ kan ikke udtrykkes ved de elementære funktionstegn. Ganske analogt går det med $x^n \cos x$ og $x^n \sin x$.

3. Når n er et naturligt tal kan vi for $|x| < 1$ udregne

$$\int_0^1 (\text{Arcsin } x)^n \, dx$$

ved at substituere

$$x = \sin u, \quad |u| < \frac{\pi}{2}, \quad u = \text{Arcsin } x,$$

hvorved integralet føres over i

$$\int_0^u u^n \cos u \, du,$$

som vi har lært at udregne. Integranderne $(\operatorname{Arcsin} x)^n$ og $(\log x)^n$, samt potenser af arealfunktionerne behandles analogt.

4. For naturlige tal p og q har vi

$$\int_0^u \sin^p x \cos^q x \, dx = \int_{x=0}^u \sin^p x \cos^{q-1} x \, d \sin x =$$

$$\frac{1}{p+1} \int_{x=0}^u \cos^{q-1} x \, d \sin^{p+1} x =$$

$$\frac{1}{p+1} \sin^{p+1} u \cos^{q-1} u - \frac{1}{p+1} \int_{x=0}^u \sin^{p+1} x \, d \cos^{q-1} x =$$

$$\frac{1}{p+1} \sin^{p+1} u \cos^{q-1} u + \frac{q-1}{p+1} \int_0^u \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x \, dx,$$

og vi har således forøget den ene eksponent med 2 og mindsket den anden med 2, så vi har endnu ikke gjort virkeligt fremskridt. I den sidste integrand bruger vi imidlertid omformningen

$$\sin^{p+2} x = \sin^p x - \sin^p x \cos^2 x,$$

og resultatet får da formen

$$\int_0^u \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{1}{p+1} \sin^{p+1} u \cos^{q-1} u +$$

$$\frac{q-1}{p+1} \int_0^u \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx - \frac{q-1}{p+1} \int_0^u \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

altså en ligning til bestemmelse af integralet på venstre side.

Ved løsning af ligningen får vi

$$\int_0^u \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{1}{p+q} \sin^{p+1} u \cos^{q-1} u + \frac{q-1}{p+q} \int_0^u \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx.$$

Ved at gå regningerne igennem, ser vi, at denne formel gælder

for alle reelle p og q , når blot $p \neq -1$ og $q \neq -p$. En formel til reduktion af eksponenten p udbedes på tilsvarende måde.

5. Idet $n > 1$ er et helt tal og a et positivt tal, har vi

$$\int_0^t (x^2+a^2)^{-n} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^t (x^2+a^2)^{-n+1} dx - \frac{1}{a^2} \int_0^t (x^2+a^2)^{-n} x^2 dx,$$

og her er

$$\int_0^t (x^2+a^2)^{-n} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^t x(x^2+a^2)^{-n} d(x^2+a^2) =$$

$$\frac{-1}{2(n-1)} \int_{x=0}^t x d(x^2+a^2)^{-n+1} =$$

$$\frac{-1}{2(n-2)} t(t^2+a^2)^{-n+1} + \frac{-1}{2n-2} \int_0^t (x^2+a^2)^{-n+1} dx,$$

som ved indsættelse giver

$$\int_0^t (x^2+a^2)^{-n} dx = \frac{1}{(2n-2)a^2} t(t^2+a^2)^{-n+1} +$$

$$\frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int_0^t (x^2+a^2)^{-n+1} dx,$$

og vi har således fået en rekursionsformel, således at vi efter $n-1$ anvendelser blot mangler udregningen

$$\int_0^t \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \int_0^t \frac{\frac{dx}{a}}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a}.$$

Det tilsvarende integral med $(x^2-a^2)^{-n}$ kan behandles analogt. Det mere generelle integral

$$\int_c^t (x^2+2ax+b)^{-n} (px+q) dx$$

føres ved substitutionen $x = u - a$ over i et integral af formen

$$\int_k^t (u^2+\alpha)^{-n} (ru+s) du,$$

og nu er integralet sum af

$$r \int_k^t (u^2+\alpha)^{-n} u du \sim \frac{-r}{2(n-1)} (t^2+\alpha)^{-n+1}$$

og et integral af den ovenfor behandlede form.

6.8. Hvis P og Q er reelle polynomier, kaldes den ved

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

definerede afbildning

$$F: \{x | Q(x) \neq 0\} \text{ ind i } \mathbb{R}$$

en bruden rational funktion. En bruden rational funktion har altid en stamfunktion, der kan skrives på endelig form ved de fire elementære operationstegn, samt log og Arctg. Vi skal ikke gennemføre beviset for denne påstand, men vi vil forklare, hvorledes regningerne kan gennemføres.

Først kan vi ved ufuldstændig division af $P(x)$ med $Q(x)$ skrive $F(x)$ som sum af et polynomium og en bruden rational funktion, hvis tæller er af lavere grad end nævneren. Vi vil derfor i det følgende antage, at $P(x)$ er af lavere grad end $Q(x)$.

Fra gymnasieundervisningen ved vi (selv om beviset ikke er gennemført), at $Q(x)$ kan opløses i reelle faktorer af første og anden grad, således at vi har en produktfremstilling

$$Q(x) = \prod_{p=1}^m (x - \alpha_p)^{r_p} \prod_{q=1}^n (x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{s_q},$$

hvor vi antager, at de m førstegradspolynomier og de n andengrads-polynomier virkelig er indbyrdes forskellige, og at andengrads-polynomierne alle har komplekse rødder.

Der eksisterer nu en fremstilling af $\frac{P(x)}{Q(x)}$ som en sum

$$(5) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{r_p} \frac{a_{p,k}}{(x - \alpha_p)^k} + \sum_{q=1}^n \sum_{l=1}^{s_q} \frac{b_{q,l} x + c_{q,l}}{(x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^l}.$$

Vi skal ikke gennemføre beviset for denne påstand. Det kan ganske vist gennemføres uden større vanskeligheder, men det hænger nøje sammen med visse grundlæggende sætninger om polynomier, og vi finder det rimeligt at vente med beviset, til det

kan behandles i sammenhæng med disse sætninger.

Idet vi således ved, at fremstillingen (5) eksisterer, bliver det hovedopgaven at bestemme koefficienterne, og derefter kan integrationen udføres ved de metoder, vi har omtalt i det foregående.

For at bestemme (5) opskriver vi (5) med ubekendte koefficienter og multiplicerer på begge sider med fællesnævneren $Q(x)$. Derved får vi 2 polynomier, som skal være identiske. Vi kan derfor enten reducere polynomiet på højre side og sætte tilsvarende koefficienter lig hinanden eller vi kan indsætte et passende antal værdier for x . Begge metoder giver ligninger til bestemmelse af de ubekendte koefficienter. Den første metode giver netop tilstrækkelig mange ligninger, men den anden metode har den fordel, at man ved specielt for x at indsætte en af rødderne i $Q(x)$ får en ligning med kun én ubekendt koefficient for en reel rod og to ligninger med to ubekendte koefficienter for en kompleks rod. Vi vil illustrere ved et eksempel, hvorledes regnearbejdet udføres, idet vi søger en stamfunktion til den brudne rationale funktion

$$F(x) = \frac{3x^9 + 7x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 2x^4 - x + 1}{x^2(x-1)^3(x^2+1)^2(x^2+x+1)}.$$

Vi ved, at $F(x)$ kan fremstilles på formen

$$F(x) = \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x} + \frac{b_1}{(x-1)^3} + \frac{b_2}{(x-1)^2} + \frac{b_3}{x-1} +$$

$$\frac{p_1x+q_1}{(x^2+1)^2} + \frac{p_2x+q_2}{x^2+1} + \frac{rx+s}{x^2+x+1},$$

og for at bestemme koefficienterne sætter vi de to udtryk for $F(x)$ lig med hinanden og multiplicerer på begge sider med nævneren til $F(x)$, hvilket giver

$$\begin{aligned}
& 3x^9 + 7x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 2x^4 - x + 1 = \\
& (a_1 + a_2x)(x-1)^3(x^2+1)^2(x^2+x+1) + \\
& (b_1 + b_2(x-1) + b_3(x-1)^2)x^2(x^2+1)^2(x^2+x+1) + \\
& ((p_1x+q_1) + (p_2x+q_2)(x^2+1))x^2(x-1)^3(x^2+x+1) + \\
& (rx+s)x^2(x-1)^3(x^2+1)^2.
\end{aligned}$$

Der er her tale om 2 identiske polynomier, og vi får derfor rigtige ligninger ved at give x helt vilkårlige værdier. For $x = 0$ og $x = 1$ får vi

$$1 = -a_1; 12 = 12b_1, \text{ altså } a_1 = -1, b_1 = 1.$$

Vi kan også sætte $x = i$, hvilket giver

$$2+2i = (p_1i+q_1) \cdot -1(i-1)^3 \cdot i = -i(2+2i)(q_1+ip_1),$$

heraf fås $q_1 + ip_1 = i$, altså $q_1 = 0$, $p_1 = 1$.

Idet vi nu samler de kendte led i vor identitet på venstre side, får vi

$$\begin{aligned}
& 3x^9 + 7x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 2x^4 - x + 1 + \\
& (x^2+x+1)\left((x-1)^3(x^2+1)^2 - x^2(x^2+1)^2 - x^3(x-1)^3\right) = \\
& x(x-1)(x^2+1)\left(a_2(x-1)^2(x^2+1)(x^2+x+1) + \right. \\
& (b_2+b_3(x-1))x(x^2+1)(x^2+x+1) + (p_2x+q_2)x(x-1)^2(x^2+x+1) + \\
& \left. (rx+s)x(x-1)^2(x^2+1)\right).
\end{aligned}$$

Polynomiet på venstre side giver ved reduktion

$$4x^9 - 4x^8 + 11x^7 - 12x^6 + 11x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x,$$

og vi får nu en kontrol på regningernes rigtighed, idet dette polynomium skal være deleligt med $x(x-1)(x^2+1)$. Efter bortdivision af denne faktor får vi følgende nye identitet til bestemmelse af de øvrige koefficienter

$$\begin{aligned}
& 4x^5 + 7x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_2(x-1)^2(x^2+1)(x^2+x+1) + \\
& (b_2+b_3(x-1))x(x^2+1)(x^2+x+1) + (p_2x+q_2)x(x-1)^2(x^2+x+1) + \\
& (rx+s)x(x-1)^2(x^2+1),
\end{aligned}$$

og heraf fås for $x = 0$ og $x = 1$

$$-1 = a_2; 12 = 6b_2, \text{ altså } a_2 = -1; b_2 = 2.$$

For $x = i$ fås $p_2 i + q_2 = 0$, altså $p_2 = q_2 = 0$. Vi udelader først dette led og forkorter med $x^2 + 1$, hvilket giver

$$4x^3 + 3x - 1 = a_2(x-1)^2(x^2+x+1) + (b_2+b_3(x-1))x(x^2+x+1) + (rx+s)x(x-1)^2.$$

Idet vi samler leddene med kendte koefficienter på venstre side, får vi

$$4x^3 + 3x - 1 + (x^2+x+1)((x-1)^2 - 2x) = x(x-1)(b_3(x^2+x+1) + (rx+s)(x-1)),$$

til bestemmelse af de tre sidste koefficienter. For $x = 1$ fås $3 = 3b_3$, altså $b_3 = 1$. Idet leddet med kendt koefficient flyttes til den anden side af lighedstegnet, får vi

$$x - 1 = (rx+s)(x-1),$$

som giver $rx + s = 1$, altså $r = 0$, $s = 1$. Dermed er alle koefficienterne bestemt, og vi har opspaltningen

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1},$$

som umiddelbart giver stamfunktionen

$$G(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x^2+1)} + \ln \frac{|x+1|}{|x|} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

i hvert af de intervaller, hvor F er defineret.

6.9. Et trigonometrisk udtryk kan integreres, hvis det kan omformes til en rational funktion af en tangens. Vi illustrerer metoden med et par eksempler.

1. For $u \in]-\pi, \pi[$ har vi

$$\int_0^u \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^u \frac{(1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})dx}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2 \int_{x=0}^u \frac{d\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$(6) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Denne funktion er stamfunktion til integranden i ethvert interval $](2p-1)\pi, (2p+1)\pi[$, og den er voksende i hvert af disse intervaller, men i hvert intervalendepunkt har den en diskontinuitet med et endeligt spring. Da integranden er kontinuert for alle x , eksisterer der også en stamfunktion i $]-\infty, \infty[$, og den må på hvert interval $](2p-1)\pi, (2p+1)\pi[$ afvige med en konstant fra funktionen (6). Vi kan derfor definere en stamfunktion g på følgende måde:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2p\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x \in](2p-1)\pi, (2p+1)\pi[\\ \frac{(2p+1)\pi}{\sqrt{3}} & \text{for } x = (2p+1)\pi. \end{cases}$$

2. For $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ er

$$\int_0^u \frac{dx}{1+3\sin^2 x} = \int_0^u \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int_{x=0}^u \frac{d \operatorname{tg} x}{1+(2 \operatorname{tg} x)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} 2 \operatorname{tg} u,$$

og vi kan konstruere en stamfunktion i $]-\infty, \infty[$ på lignende måde som i foregående eksempel.

6.10. I denne forbindelse skal vi også nævne anvendelsen af de logaritmiske trigonometriske formler til omskrivning af produkter til summer. Det er måske enklere at gennemføre regningen ved at udtrykke $\cos$ og $\sin$ ved komplekse eksponentialfunktioner. F.eks.

$$\int_0^u \sin^4 x dx = \int_0^u \left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^4 dx =$$

$$\int_0^u \frac{1}{16} \left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix} \right) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int_0^u (3-4 \cos 2x + \cos 4x) dx = \frac{3}{8} u - \frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{32} \sin 4u.$$

Desuden minder vi om den fra gymnasieundervisningen velkendte metode

$$\int_0^u \cos^5 x dx = \int_{x=0}^u (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x = \sin u - \frac{2}{3} \sin^3 u + \frac{1}{5} \sin^5 u$$

samt metoden til integration af en potens af tangens

$$\int_0^u \operatorname{tg}^n x dx = \int_{x=0}^u \operatorname{tg}^{n-2} x d \operatorname{tg} x - \int_0^u \operatorname{tg}^{n-2} x dx =$$

$$\frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int_0^u \operatorname{tg}^{n-2} x dx.$$

6.11. De hyperbolske funktioner kan behandles som de trigonometriske, men det er ofte simplere direkte at udtrykke de hyperbolske funktioner ved eksponentialfunktioner. Vi kan f.eks. regne på følgende måde:

$$\int_0^u \frac{dx}{\cosh x} = \int_0^u \frac{dx}{\cosh \frac{2x}{2} + \sinh \frac{2x}{2}} = 2 \int_{x=0}^u \frac{d \operatorname{tgh} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tgh}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$2 \operatorname{Arctg} \operatorname{tgh} \frac{u}{2},$$

men vi kan også regne på følgende måde:

$$\int_0^u \frac{dx}{\cosh x} = \int_0^u \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int_{x=0}^u \frac{de^x}{1 + (e^x)^2} = 2 \operatorname{Arctg} e^u - \frac{\pi}{2}.$$

6.12. Det i 6.7 eksempel 5 omtalte integral kan også udregnes ved anvendelse af substitutionen

$$x = a \operatorname{tgv}, v \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, v = \operatorname{Arctg} \frac{x}{a},$$

hvorved integralet føres over i

$$a^{-2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} v dv.$$

6.13. Hvis integranden indeholder en rodstørrelse af formen

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad ad - bc \neq 0,$$

kan denne bortskaffes ved den nærliggende substitution, som vil være monoton i ethvert interval, hvor rodstørrelsen er defineret

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{du^n - b}{-cu^n + a}, \quad dx = \frac{n(ad-bc)u^{n-1}}{(-cu^n + a)^2} du.$$

Metoden kan ofte med fordel anvendes til bortskaffelse af kvadratrødder af andengradspolynomier, når rødderne er simple. For $\alpha \leq x \leq \beta$ gælder f.eks.

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha) \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

Som eksempel udregner vi integralet

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{(x+1)(2-x)}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}} dx$$

ved hjælp af substitutionen $x = \varphi(u)$, defineret ved

$$u = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}, \quad x = \frac{2u^2-1}{u^2+1}, \quad dx = \frac{6u}{(u^2+1)^2} du, \quad x+1 = \frac{3u^2}{u^2+1},$$

som ved indsættelse giver

$$I \circ \varphi = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u^2+1}{2u^2-1} \cdot \frac{u^2+1}{3u^2} \cdot u \cdot \frac{6u}{(u^2+1)^2} du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2 du}{2u^2-1} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{u=1}^{\sqrt{2}} \frac{d\sqrt{2} u}{(\sqrt{2} u)^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{u=1}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} u + 1} \right) d\sqrt{2} u,$$

altså

$$I \circ \varphi (u) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{2} u - 1}{\sqrt{2} u + 1} \right|,$$

hvoraf følger

$$I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{(2x+2)} - \sqrt{(2-x)}}{\sqrt{(2x+2)} + \sqrt{(2-x)}} \right|$$

6.14. Til bortskaffelse af kvadratrødder af formerne

$$\sqrt{(a^2-x^2)}, \sqrt{(x^2+a^2)}, \sqrt{(x^2-a^2)}$$

har man et betydeligt antal substitutioner til rådighed ud over

den metode, der er omtalt i slutningen af 6.13, og som kun anvendes for den første og den sidste rodstørrelses vedkommende. Vi anfører de vigtigste substitutioner i følgende tabel:

kvadratrod	substitution for		
	x	kvadratrod	dx
$\sqrt{(a^2 - x^2)}$	$\frac{2at}{1+t^2}$	$a \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$2a \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt$
$x \in [-a, a]$	$a \sin t$	$a \cos t$	$a \cos t dt$
	$a \operatorname{tgh} t$	$\frac{a}{\cosh t}$	$\frac{a dt}{\cosh^2 t}$
$\sqrt{(x^2 + a^2)}$	$\frac{1}{2}(t - \frac{a^2}{t})$	$\frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$	$\frac{1}{2t}(t + \frac{a^2}{t}) dt$
	$a \operatorname{tg} t$	$\frac{a}{\cos t}$	$\frac{a dt}{\cos^2 t}$
	$a \sinh t$	$a \cosh t$	$a \cosh t dt$
$\sqrt{(x^2 - a^2)}$ $a > 0$ $x \in [a, \infty[$	$\frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$	$\frac{1}{2}(t - \frac{a^2}{t})$	$\frac{1}{2t}(t - \frac{a^2}{t}) dt$
	$\frac{a}{\cos t}$	$a \operatorname{tg} t$	$\frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$
	$a \cosh t$	$a \sinh t$	$a \sinh t dt$

Som eksempel vil vi udregne

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x^2+1)}} .$$

Substitutionen $x = \varphi(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$, $t \in]0, \infty[$ giver

$$I \circ \varphi = \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2t}(t + \frac{1}{t}) dt}{\frac{1}{2}(t + 2 - \frac{1}{t}) \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})} = \int_1^{\infty} \frac{2 dt}{t^2 + 2t - 1} =$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2 dt}{(t+1+\sqrt{2})(t+1-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{t+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+1+\sqrt{2}} \right) dt,$$

hvoraf fås

$$I \circ \varphi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}},$$

altså

$$I(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{x+\sqrt{(x^2+1)+1-\sqrt{2}}}{x+\sqrt{(x^2+1)+1+\sqrt{2}}}.$$

Vi udregner samme integral ved substitutionen $x = \psi(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, hvilket giver

$$\begin{aligned} I \circ \psi &= \int_0 \frac{dt}{(\operatorname{tg} t + 1) \cos t} = \int_0 \frac{dt}{\cos t + \sin t} = \int_0 \frac{dt}{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0 \frac{dt}{\sin(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}, \end{aligned}$$

hvoraf følger

$$I \circ \psi(t) = \sqrt{2} \log \operatorname{tg}(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{8}) - \sqrt{2} \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}.$$

Dette var ikke særlig svært, men at reducere udtrykket til en rimelig form efter indsættelse af $t = \operatorname{Arctg} x$ vil koste meget besvær.

Disse integraler er typiske eksempler på opgaver, hvor man har flere løsningsmetoder til rådighed, og de vil sædvanligvis ikke alle være lige praktiske. Det anbefales at forsøge at udregne nogle integraler ved alle de metoder, man har til rådighed. Derved opnås efterhånden den erfaring, der gør det muligt at vælge den bekvemteste metode i hvert enkelt tilfælde.

6.15. En kvadratrods af et andengradspolynomium

$\sqrt{(x^2+2ax+b)}$ overføres ved substitutionen $x = u-a$ i en af de i foregående afsnit behandlede typer. Man kan også anvende en af følgende substitutioner:

A. $\sqrt{(x^2 + ax + b)} = x + t, \quad ax + b = 2xt + t^2$

$$x = \frac{b - t^2}{2t - a}, \quad \sqrt{(x^2 + ax + b)} = \frac{t^2 - at + b}{2t - a}$$

$$dx = -2 \frac{t^2 - at + b}{(2t - a)^2} dt.$$

$$B. \quad \sqrt{(1 + ax + bx^2)} = 1 + xt, \quad a + bx = 2t + xt^2$$

$$x = \frac{2t - a}{b - t^2}, \quad \sqrt{(1 + ax + bt^2)} = \frac{t^2 - at + b}{b - t^2}$$

$$dx = 2 \frac{t^2 - at + b}{(b - t^2)^2} dt.$$

6.16. Hvis integranden indeholder 2 forskellige kvadratrødder af formen $\sqrt{(ax + b)}$, kan den ene bortskaffes ved en substitution $x = \frac{t^2 - b}{a}$, og den anden vil derved overføres i en kvadratrød af et andengradspolynomium, som derefter kan bortskaffes ved de ovenfor omtalte metoder.

6.17. En funktion, der er udtrykt rationalt ved en kvadratrød af et polynomium af tredje eller højere grad, har sædvanligvis en stamfunktion, der ikke kan udtrykkes ved de hidtil indførte funktionstegn. Studiet af disse stamfunktioner fører til en interessant ny funktionsklasse, de elliptiske funktioner, der kan opfattes som generalisationer af de trigonometriske funktioner.

6.18. En afbildning $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{C}$ tilordner til hvert $x \in [a, b]$ et komplekst tal $f(x)$, og dermed lige så vel dette tals realdel og imaginærdel. Vi kan altså skrive $f(x) = g(x) + ih(x)$, hvor g og h afbilder $[a, b]$ ind i $\mathbb{R}$, og mellem funktionerne selv består da også ligningen $f = g + ih$.

Vi siger, at afbildningen $f = g + ih : [a, b]$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert i et punkt $x_0 \in [a, b]$ (i hele $[a, b]$), hvis og kun hvis g og h begge er kontinuerte i x_0 (i hele $[a, b]$).

Vi siger, at $f = g + ih : [a, b]$ ind i $\mathbb{C}$ er differentiabel i $[a, b]$, hvis og kun hvis både g og h er differentiable i $[a, b]$, og vi sætter da $Df = Dg + i Dh$, og funktionen Df kaldes differentialkvotienten af f . Definitionerne af højere differentialkvotienter og af stamfunktioner kan derefter overføres uændret.

Vi kan direkte regne efter, at en lang række regneregler

kan overføres til komplekse funktioner af reelle variable. Dette gælder således reglerne om regning med kontinuerte funktioner og differentiable funktioner. Hvis $f_1 = g_1 + ih_1$ og $f_2 = g_2 + ih_2$ er differentiable afbildninger af $[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$, får vi f.eks.

$$\begin{aligned} D(f_1 f_2) &= D[(g_1 + ih_1)(g_2 + ih_2)] = D[g_1 g_2 - h_1 h_2 + i(g_1 h_2 + h_1 g_2)] = \\ &= D(g_1 g_2 - h_1 h_2) + iD(g_1 h_2 + h_1 g_2) = \\ &= g_2 Dg_1 + g_1 Dg_2 - h_2 Dh_1 - h_1 Dh_2 + i(h_2 Dg_1 + g_1 Dh_2 + g_2 Dh_1 + h_1 Dg_2) = \\ &= (g_2 + ih_2)(Dg_1 + i Dh_1) + (g_1 + ih_1)(Dg_2 + i Dh_2) = \\ &= (g_2 + ih_2)D(g_1 + ih_1) + (g_1 + ih_1)D(g_2 + ih_2) = f_2 Df_1 + f_1 Df_2, \end{aligned}$$

hvilket er reglen om differentiation af et produkt.

Vi kan ikke uden videre anvende reglen om differentiation af sammensat funktion på et udtryk af formen e^f , da vi ikke har defineret differentiation af en kompleks funktion af en kompleks variabel. I det foreliggende tilfælde giver direkte udregning dog, at reglen gælder:

$$\begin{aligned} D e^{f(x)} &= D e^{g(x) + ih(x)} = D(e^{g(x)}(\cos h(x) + i \sin h(x))) = \\ &= e^{g(x)}(\cos h(x) + i \sin h(x))Dg(x) + e^{g(x)}(-\sin h(x) + i \cos h(x))Dh(x) = \\ &= e^{g(x)}(\cos h(x) + i \sin h(x))(Dg(x) + i Dh(x)) = e^{f(x)}Df(x). \end{aligned}$$

Hvis $f = g + ih : [a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuert, kan vi også indføre integralet

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + i \int_a^b h(x)dx,$$

og hvis $F = G + iH$ er en stamfunktion til f , vil G og H være stamfunktioner til g og h , og det ses da direkte, at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

6.19. Vi viser et enkelt eksempel på udnyttelse af diffe-

rentiation og integration af komplekse funktioner. Det fremgår af det foregående, at vi for $\alpha + i\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, har

$$\int_0^{\infty} e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{1}{\alpha+i\beta} (e^{(\alpha+i\beta)x} - 1) =$$

$$\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2} (e^{(\alpha+i\beta)x} - 1),$$

og ved spaltning i realdel og imaginærdel, får vi

$$\int_0^{\infty} (e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x) dx =$$

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \left(\alpha(e^{\alpha x} \cos \beta x - 1) + \beta e^{\alpha x} \sin \beta x + i(\alpha e^{\alpha x} \sin \beta x - \beta(e^{\alpha x} \cos \beta x - 1)) \right),$$

hvoraf følger

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x - \alpha)$$

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x + \beta).$$

Lette opgaver.

1. Diskuter følgende lille regnestykke led for led:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1.$$

2. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel overalt, men at differentialkvotienten ikke for noget $h > 0$ er begrænset i intervallet $[-h, h]$.

3. Udregn

$$\int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^4}, \quad \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{1+x^4}, \quad \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

4. Udregn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \, dx}{\cos^2 x}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

samt

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{Arctg} x}{1+x^2} \, dx, \quad x \in]-\infty, \infty[$$

5. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

ved den i 6.7 eksempel 4 omtalte metode.

6. Udregn den for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin 2x \, dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cos 2x \, dx.$$

7. Udregn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x \sin 4x \sin 5x \, dx.$$

8. Udregn

$$\int_1 \frac{x}{x(x+1)} , \int_1 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} , \int_1 \frac{dx}{x^2(x+1)} , x \in]0, \infty[.$$

9. Udregn

$$\int_1 \frac{dx}{x(x^2+1)} , \int_1 \frac{dx}{x^2(x^2+1)} , \int_1 \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)} , x \in]0, \infty[.$$

10. Udregn

$$\int_0 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} , \int_0 \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2)} , \int_0 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+2)} .$$

11. Angiv stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x} , \frac{x^4}{x+1} , \frac{x^4}{x^2+1} .$$

12. Udregn

$$\int_0 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2} , \int_0 \frac{x^3 dx}{(x+1)(x^2+1)} , x \in]-1, \infty[.$$

13. Udregn stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren

$$\frac{x+1}{x^4+4x^2+3} , \frac{x+1}{x^4+3x^2+4} .$$

14. Udregn stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren

$$\frac{1}{1+2\cos x} , \frac{1}{\cos^2 x + 2\cos x \sin x + 2\sin^2 x} , \frac{\cos x}{\cos 2x} .$$

15. Udregn stamfunktioner i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ til

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} , \frac{\cos 4x}{\cos x} , \frac{\cos 5x}{\cos x} .$$

8. Udregn

$$\int_1 \frac{dx}{x(x+1)}, \int_1 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}, \int_1 \frac{dx}{x^2(x+1)}, x \in]0, \infty[.$$

9. Udregn

$$\int_1 \frac{dx}{x(x^2+1)}, \int_1 \frac{dx}{x^2(x^2+1)}, \int_1 \frac{dx}{x(x+1)(x^2+1)}, x \in]0, \infty[.$$

10. Udregn

$$\int_0 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}, \int_0 \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2)}, \int_0 \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

11. Angiv stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren.

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x}, \frac{x^4}{x+1}, \frac{x^4}{x^2+1}.$$

12. Udregn

$$\int_0 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}, \int_0 \frac{x^3 dx}{(x+1)(x^2+1)}, x \in]-1, \infty[.$$

13. Udregn stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren

$$\frac{x+1}{x^4+4x^2+3}, \frac{x+1}{x^4+3x^2+4}.$$

14. Udregn stamfunktioner for følgende funktioner i ethvert interval, der ikke indeholder nulpunkter for nævneren

$$\frac{1}{1+2 \cos x}, \frac{1}{\cos^2 x + 2 \cos x \sin x + 2 \sin^2 x}, \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

15. Udregn stamfunktioner i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ til

$$\frac{\cos 3x}{\cos x}, \frac{\cos 4x}{\cos x}, \frac{\cos 5x}{\cos x}.$$

16. Samme opgave for

$$\frac{1}{\cos^3 x}, \frac{1}{\cos^4 x}, \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}, \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}.$$

17. Udregn

$$\int_1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx, \int_1 \frac{\sqrt{(x+1)}}{x}, \int_1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, x \in]0, \infty[.$$

18. Udregn

$$\int_1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x}} dx, \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)}}{x}, \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} dx, x \in]0, \infty[.$$

19. Udregn

$$\int_1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}\sqrt{x}}, \int_1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)-\sqrt{x}}}, \int_1 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx, x \in]0, \infty[.$$

20. Udregn for $a > 0$

$$\int_0 \sqrt{(a^2 - x^2)} dx, x \in [-a, a]$$

$$\int_0 \sqrt{(a^2 + x^2)} dx, x \in]-\infty, \infty[$$

$$\int_a \sqrt{(x^2 - a^2)} dx, x \in [a, \infty[.$$

21. Udregn for $a > 0$

$$\int_a x^{-1} \sqrt{(a^2 - x^2)} dx, x \in]0, a]$$

$$\int_a x^{-1} \sqrt{(a^2 + x^2)} dx, x \in]0, \infty[$$

$$\int_a x^{-1} \sqrt{(x^2 - a^2)} dx, x \in [a, \infty[.$$

22. Udregn for $a > 0$

$$\int_a x^{-2} \sqrt{(a^2 - x^2)} dx, x \in]0, a]$$

$$\int_a (a + \sqrt{(a^2 - x^2)})^{-1} dx, x \in [-a, a].$$

23. Udregn differentialkvotienterne af $\cos x$ og $\sin x$ ved at differentiere disse funktioners ved komplekse eksponentialfunktioner.

24. Idet $f : [a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ er en differentiabel funktion ønskes bevise for relationerne

$$D \sin f(x) = \cos f(x) Df(x), D \cos f(x) = -\sin f(x) Df(x).$$

25. Idet $f = g + ih : [a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ er en differentiabel funktion, som for ethvert $x \in [a,b]$ tilfredsstiller betingelsen $g(x) > 0$, ønskes bevis for relationen

$$D \log f(x) = \frac{Df(x)}{f(x)}.$$

26. Udled resultatet i 6.19 ved at benytte MA 2, opgave 7.

27. Vi definerer en ny funktion, integrallogaritmen, ved

$$\text{Li } x = \int_2^x \frac{du}{\log u}.$$

Udregn

$$\int_1^x \frac{e^x}{x} dx, \int_1^x \frac{e^x}{x^2} dx, \int_2^x \frac{dx}{(\log x)^2},$$

idet funktionen Li må indgå i resultatet (det kan vises, at Li ikke kan udtrykkes på endelig form ved kendte funktioner).

Vanskeligere opgaver.

28. Lad $f : [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) være en kontinuert afbildning. Vi definerer en følge (f_n) af afbildninger $f_n : [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) ved

$$f_1(x) = \int_a^x f(t) dt, f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt, n = 1, 2, \dots$$

Vis formelen

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f(t) dt.$$

29. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg}^{2n} x \, dx, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\int_0^1 x^{2n} (1-x^2)^{-1} \log \frac{1+x}{1-x} \, dx, \quad x \in]-1, 1[.$$

30. Udtryk for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg}^{2n-1} x \, dx, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\int_0^1 x^{2n-1} (1-x^2)^{-1} \log \frac{1+x}{1-x} \, dx, \quad x \in]-1, 1[$$

ved

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cosh x \, dx.$$

31. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\infty} x^n \operatorname{Arctg} x \, dx, \quad x \in]-\infty, \infty[$$

$$\int_0^1 x^n \log \frac{1+x}{1-x} \, dx, \quad x \in]-1, 1[.$$

32. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^{\infty} x^{-n-1} \operatorname{Arctg} x \, dx, \quad x \in]0, \infty[$$

$$\int_1^{\infty} x^{-n-1} \log \frac{1+x}{1-x} \, dx, \quad x \in]0, 1[$$

For $n = 0$ fremkommer integraler, der ikke kan udtrykkes ved kendte funktionstegn.

33. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n (x+1)^n}, \quad x \in]-\infty, \infty[.$$

34. Udregn

$$\int_1 \left(\prod_{k=0}^n (x+k) \right)^{-1} dx, \quad x \in]0, \infty[$$

$$\int_0 \left(\prod_{k=1}^n (x^2+k^2) \right)^{-1} dx, \quad x \in]-\infty, \infty[.$$

35. Udregn for $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0 \frac{dx}{(\sqrt{a^2-x^2})^{2n-1}}, \quad x \in]-a, a[$$

$$\int_0 (\sqrt{a^2-x^2})^{2n-1} dx.$$

36. Udregn den n^{te} differentialkvotient af Arctg ved at foretage en opspaltning af den første differentialkvotient i to komplekse brøker ved den i 6.8 omtalte metode, og derefter differentiere ledvis. Opstil derefter Mac-Laurinrækken for Arctg og vis direkte, at den konvergerer i $[-1, 1]$.

Svær opgave.

37. Den i MA 6.8 omtalte fremstilling af en bruden rational funktion som sum af simple funktioner, kan anvendes til bestemmelse af potensrækker for brudne rationale funktioner. Bestem ved denne metode en potensrækkeudvikling $\sum a_n z^n$ for den ved

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}, \quad |z| < 1$$

definerede funktion. Vis, at

$$f(z) = \sum z^n \sum z^{2n} \sum z^{3n}, \quad |z| < 1,$$

og udnyt den derved opståede relation mellem potensrækker til at vise, at koefficienten a_n angiver antallet af heltallige løsninger til ligningen

$$x + 2y + 3z = n$$

(antallet af måder, på hvilke et brev med porto n kan frankeres med frimærker med pålydende 1, 2 og 3 øre). Vis endelig, at a_n er det hele tal, der ligger nærmest ved $\frac{1}{12}(n+3)^2$.

Opgaven er ^{et}særlig smukt eksempel på et såkaldt "pengevekslingsproblem". Den særlige udnyttelse af potensrækker benyttes en hel del i videregående talteori.

Lineære differentiaalligninger.

7.1. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. Mængden af afbildninger $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, hvor f har kontinuerte differentialkvotienter af orden $1, \dots, n$ betegnes $\hat{C}^n(I, \mathbb{R})$. Analogt $\hat{C}^n(I, \mathbb{C})$ for afbildninger ind i $\mathbb{C}$. Vi skal endvidere anvende betegnelserne

$$\hat{C}^n((I), \mathbb{R}) = \bigcup_{I_1 \subseteq I} \hat{C}^n(I_1, \mathbb{R}); \quad \hat{C}^n((I), \mathbb{C}) = \bigcup_{I_1 \subseteq I} \hat{C}^n(I_1, \mathbb{C}),$$

hvor I_1 er et delinterval af I . Mængden $\hat{C}^n((I), \mathbb{R})$ omfatter altså alle n gange kontinuert differentiable funktioner på delintervaller af I .

Vi skal i det følgende beskæftige os med visse operatorer

$$\Phi : \hat{C}^n((I), \mathbb{R}) \rightarrow \hat{C}((I), \mathbb{R}),$$

hvor det sidste symbol betegner mængden af kontinuerte funktioner på delintervaller af I . For de her betragtede operatorer vil altid gælde, at en funktion $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $I_1 \subseteq I$ har et billede $\Phi f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, altså billedet Φf har samme definitionsinterval som f selv. Dette vil f.eks. gælde, hvis Φ er differentiationsoperatoren D eller en differentiationsoperator af højere orden D^q , $1 \leq q \leq n$. Vi vil her også tillade $q = 0$, idet D^0 skal være den identiske afbildning, og D^1 er selvfølgelig det samme som D .

Hvis $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning, kan vi danne

$$a\Phi : \hat{C}^n((I), \mathbb{R}) \rightarrow \hat{C}((I), \mathbb{R}),$$

idet vi sætter

$$(a\Phi)f = a(\Phi f).$$

Lad os nu tænke os, at vi ud over Φ har en operator ψ med samme definitionsmængde. Vi definerer da operatoren $\Phi + \psi$ ved

$$(\Phi + \psi)f = \Phi f + \psi f,$$

hvilket giver mening, da de to funktioner på højre side har samme definitionsinterval.

De operatorer Φ , vi i det følgende beskæftiger os med, vil have den egenskab, at en restriktion af en funktion $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ til et delinterval $I_2 \subset I_1$ afbildes på restriktionen af Φf til I_2 .

Ovenstående betragtninger overføres umiddelbart til operatorer, der virker på komplekse funktioner.

7.2. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og lad $a_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$ være kontinuerte funktioner. Da er

$$(1) \quad \Phi = \sum_{k=0}^n a_k D^k$$

en operator

$$\Phi : \hat{C}^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow \hat{C}(I, \mathbb{R}),$$

og den kaldes en (reel) lineær differentialoperator på intervallet I . Hvis $a_n \neq 0$, siges den at være af orden n . En kompleks lineær differentialoperator defineres analogt.

Det vil ved angivelsen af specielle differentialoperatorer undertiden være mest hensigtsmæssigt at anføre $a_k(x)$ i udtrykket for Φ , som f.eks.

$$\Phi = x^2 D^2 - xD + D$$

på $]-\infty, \infty[$. Med denne operator får vi for $s \in \mathbb{R}$

$$\Phi x^s = (s(s-1) - s + 1)x^s = (s-1)^2 x^s$$

og

$$\Phi(x \log x) = x - x(\log x + 1) + x \log x = 0, \quad x \in]0, \infty[$$

Lad Φ være en lineær reel differentialoperator af orden n på et interval I , og lad f_1 og f_2 være reelle funktioner, som er n gange kontinuert differentiable på et delinterval $I_1 \subset I$. For vilkårlige reelle konstanter c_1 og c_2 har vi da

$$(2) \quad \Phi(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \Phi f_1 + c_2 \Phi f_2.$$

Det vil fremgå af kursus i algebra og geometri, at tillægsordet "lineær" systematisk anvendes om afbildninger med den her omtalte egenskab. Egenskaben formuleres analogt i det komplekse tilfælde.

Den lineære differentialoperator (1) kaldes p gange differentiablel på I , hvis alle funktionerne a_k er p gange differentiablel på I . For enhver funktion $f \in \hat{C}^{n+p}((I), \mathbb{R})$ fås da $\Phi f \in \hat{C}^p((I), \mathbb{R})$, og hvis Ψ er en lineær differentialoperator af orden p på I , kan vi derfor danne $\Phi \Psi f \in \hat{C}((I), \mathbb{R})$. Vi kan altså i dette tilfælde tale om en sammensat operator $\Psi \circ \Phi$, som let vises at være en lineær differentialoperator på I af orden $n+p$. Vi skal ikke gennemføre beviset, som er ganske uinteressant, men vi vil illustrere sammensætningsprocessen ved et eksempel. Vi betragter

$$\Phi = x^2 D^2 - x D + D \quad \text{på }]-\infty, \infty[$$

$$\Psi = D^2 + \cos x D \quad \text{på }]-\infty, \infty[$$

Vi får da for $f \in \hat{C}^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi f(x) &= \Psi(x^2 D^2 f(x) - x D f(x) + f(x)) = \\ &= D^2(x^2 D^2 f(x) - x D f(x) + f(x)) + x^2 \cos x D^2 f(x) - x \cos x D f(x) + \cos x f(x) = \\ &= x^2 D^4 f(x) + 3x D^3 f(x) + (x^2 \cos x - 1) D^2 f(x) - x \cos x D f(x) + \cos x f(x), \end{aligned}$$

så vi har udtrykket

$$\Psi \circ \Phi = x^2 D^4 + 3x D^3 + (x^2 \cos x - 1) D^2 - x \cos x D + \cos x D.$$

7.3. Idet Φ er den lineære differentialoperator (1), og $f \in \hat{C}((I), \mathbb{R})$ betegner $\Phi^{-1} f$ i overensstemmelse med det sædvanlige tegnsprog mængden af funktioner χ , som tilfredsstiller

$$(3) \quad \Phi \chi = f.$$

En ligning af denne form kaldes en lineær differentiaalligning, og mængden $\Phi^{-1} f$ kaldes den fuldstændige løsning til (3), medens ethvert element af (3) kaldes en partikulær løsning til (3).

Hvis g_1 og g_2 er partikulære løsninger til (3) på intervallet $I_1 \subseteq I$, og vi sætter $h = g_2 - g_1$, får vi

$$\Phi h = \Phi(g_2 - g_1) = \Phi g_2 - \Phi g_1 = f - f,$$

hvilket viser, at forskellen mellem to vilkårlige partikulære løsninger til (3) er en løsning til differentiaalligningen

$$(4) \quad \Phi \chi = 0.$$

En differentiaalligning af denne form kaldes homogen, og ligningen (4) er den til (3) svarende homogene differentiaalligning.

Hvis g er en løsning til (3) og h er løsning til (4), og vi sætter $g_1 = g + h$, får vi

$$\Phi g_1 = \Phi(g + h) = \Phi g + \Phi h = f + 0 = f.$$

Idet $\Phi^{-1}0$ er den fuldstændige løsning til (4) og g er en løsning til (3), fremgår det af det foregående, at mængden

$$\{g + h \mid h \in \Phi^{-1}(0)\}$$

er den fuldstændige løsning til (3). Denne mængde kan også betegnes $\{g\} + \Phi^{-1}0$

i overensstemmelse med den sædvanlige definition af ^{summen af} 2 mængder.

I et tilfælde som dette, hvor den ene mængde består af et enkelt element, skriver vi også elementet i stedet for mængden, altså

$$\Phi^{-1}f = g + \Phi^{-1}0.$$

Vi kan således tale om summen af en funktion og en mængde af funktioner.

Hvis g_1 og g_2 er løsninger til (4), og c_1 og c_2 konstanter, får vi

$$\Phi(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \Phi g_1 + c_2 \Phi g_2 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,$$

og vi ser, at $c_1 g_1 + c_2 g_2$ er løsning til (4). Mere almindeligt får vi, hvis $g_1, \dots, g_n$ er løsninger til (4), da er enhver linearkombination $c_1 g_1 + \dots + c_n g_n$ ligeledes løsning til (4).

7.4. Den lineære homogene differentiaalligning af første

orden

$$(5) \quad (D - aD^0)\chi = 0,$$

hvor a er kontinuert på et interval I , tilfredsstilles af $\chi = 0$.

Vi vil først antage, at a er reel, og med A betegner vi en stamfunktion til a på I . Vi betragter nu et vilkårligt delinterval $I_1 \subseteq I$, og vi vil undersøge, hvilke blandt de på I_1 positive funktioner, der er løsninger til. Enhver sådan funktion kan tænkes givet ved et udtryk af formen $e^{\varphi(x)}$, og vi har da

$$(D - aD^0)e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)}D(x) - ae^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)}(D\varphi(x) - a),$$

heraf fremgår, at $e^{\varphi(x)}$ er løsning, hvis og kun hvis $\varphi(x)$ er stamfunktion til a , altså $\varphi(x) = A(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Alle de således fundne løsninger $e^{A(x)+c} = e^c \cdot e^{A(x)}$ er løsninger på hele I og positive på hele I . Det følger nu umiddelbart, at de negative løsninger er $-e^c e^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$, og den fuldstændige løsning er derfor

$$(6) \quad \{c e^{A(x)}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Vi vil nu antage a er kompleks, og har stamfunktion A på I . På baggrund af resultat (6) er det rimeligt at vente, at den fuldstændige løsning i dette tilfælde er

$$(7) \quad \{c e^{A(x)}, c \in \mathbb{C}\}.$$

Ifølge 6. er

$$D c e^{A(x)} = c e^{A(x)} D A(x) = c \cdot e^{A(x)} a(x),$$

hvilket viser, at alle funktioner i mængden (7) er løsninger. At differentialligningen ikke har andre løsninger end funktionerne i (7) og deres indskrænkninger til delintervaller af I vil fremgå af den følgende behandling af den inhomogene lineære differentialligning af første orden

7.5. Vi betragter nu differentialligningen

$$(8) \quad (D - a D^0)\chi = f,$$

hvor a og f er kontinuerte komplekse funktioner på et interval

I , og med A betegner vi en stamfunktion til a på I . Vi har da mængden (7) af løsninger til den tilsvarende homogene differentiaalligning. For at bestemme den fuldstændige løsning til (8) benytter vi et trick, der kaldes de arbitrære konstanter variationsmetode, og som består i at søge differentiaalligningens løsninger blandt de funktioner, der fås ved at erstatte de konstanter, der indgår i en kendt mængde af løsninger til ligningen eller en simplere ligning med ubekendte funktioner.

I det foreliggende tilfælde søger vi derfor løsningerne til (8) blandt funktionerne $\varphi e^{A(x)}$, hvor φ er en vilkårlig kontinuert differentiabel funktion på et interval $I_1 \subseteq I$. Vi bemærker, at enhver kontinuert differentiabel funktion Ψ på I_1 kan skrives på formen $\varphi e^{A(x)}$, idet vi blot sætter $\Psi = e^{-A(x)}$, og vi prøver altså virkelig alle kontinuert differentiable funktioner i ligningen.

Vi indsætter $\varphi e^{A(x)}$ på venstre side i (8) og får

$$(D - a D^0) (\varphi e^{A(x)}) = e^{A(x)} D\varphi + \varphi (D - a D^0) e^{A(x)}$$

og her er det sidste led 0, fordi $e^{A(x)}$ er løsning til den homogene ligningen. Funktionen $\varphi e^{A(x)}$ tilfredsstiller altså (8), hvis og kun hvis φ er en stamfunktion til $f e^{-A(x)}$, altså for

$$\varphi = \int_{\alpha} f(x) e^{-A(x)} dx + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Idet vi sætter

$$F = e^{A(x)} \int_{\alpha} f(x) e^{-A(x)} dx, \quad G(x) = e^{A(x)},$$

er den fuldstændige løsning til (8) således givet ved

$$(9) \quad \{F + c G \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

For $f = 0$ ser vi specielt af dette resultat, at (7) virkelig er den fuldstændige løsning til den homogene ligning (5).

7.6. På grundlag af de foregående resultater kan vi udlede

følgende sætning, som er et nyttigt hjælpemiddel ved forskellige teoretiske undersøgelser.

7.6.1. Sætning. Lad $F: I \rightarrow \mathbb{C}$ være en kontinuert differentiabel kompleks funktion på et interval I . Hvis $0 \notin F(I)$, eksisterer der en kontinuert differentiabel funktion $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, således at $F(x) = e^{f(x)}$. Funktionerne $g_p = f + 2p\pi i$, $p \in \mathbb{Z}$ er netop alle de kontinuert differentiable funktioner, der tilfredsstiller $F(x) = e^{g_p(x)}$ for $x \in I$.

Enhver af funktionerne g_p kaldes en kontinuert logaritme til F .

For at vise sætning 7.6.1, sætter vi $a = \frac{DF}{F}$, og med A betegner vi en stamfunktion til a på I . Det ses direkte, at F tilfredsstiller differentialligningen

$$(D - aD^0) \chi = 0,$$

og som følge deraf er F element af mængden (7), og der eksisterer derfor en kompleks konstant c , for hvilken

$$F(x) = c e^{A(x)} = e^{A(x) + \log c},$$

og sætningens første påstand er dermed bevist, idet $f = A + \log c$.

Af $F(x) = e^{g(x)}$, hvor g er kontinuert differentiabel følger på den anden side

$$a(x) = \frac{DF(x)}{F(x)} = \frac{e^{g(x)} Dg(x)}{e^{g(x)}} = Dg(x),$$

hvilket viser, at både f og g er stamfunktioner til a , og deraf følger, at $g - f = c$ er konstant. Da yderligere $e^c = 1$, er c et helt multiplum af $2\pi i$.

Når F er fremstillet på formen e^f , er $\text{Im} f(x)$ (imaginærdelen af $f(x)$) en argumentværdi for F . Dette giver os mulighed for at indføre argumentet af et komplekst tal uden at inddrage det geometriske vinkelbegreb. Eksponentialfunktionen kan defineres ved rækkeudviklingen. For at ovenstående ræsonnement kan gennemføres,

behøver vi kun at have bevist funktionalligningen, samt reglen for differentiation af e^f . Det første har vi allerede gjort, og det sidste vil blive gennemført i et følgende afsnit. Funktionerne $\cos$ og $\sin$ kan bagefter defineres ved hjælp af eksponentialfunktionen og derved indføres i analysen uden at det bliver nødvendigt at basere definitionerne på det geometriske vinkelbegreb. Vi skal ikke her gennemføre dette program.

7.7. Udtrykket (9) for den fuldstændige løsning til (8) viser, at der for $x_1 \in I, x_2 \in \mathbb{C}$ eksisterer netop én løsningsfunktion, som afbilder x_1 på x_2 , idet konstanten c bestemmes éntydigt ved

$$F(x_1) + c G(x_1) = x_2,$$

idet $G(x_1) = e^{A(x_1)} \neq 0$.

For at løse den almindelige lineære differentiaalligning af første orden

$$(a_1 D - a_0 D^0) X = f$$

dividerer vi først ligningen med a_1 , hvorved ligningen reduceres til formen (8). Derved vil nulpunkterne for a_1 opdele intervallet i flere delintervaller, der må behandles hver for sig.

Nulpunkterne for a_1 giver oftest anledning til, at løsningerne udviser singulære forhold. Vi anskueliggør det med et par eksempler:

$$(x^2 D + D^0) X = 1$$

har åbenbart 1 som løsning, og den fuldstændige løsning bliver

$$\left\{ 1 + c \frac{1}{e^x}, c \in \mathbb{C} \right\},$$

og det ses, at alle løsninger med $c \neq 0$ har singulariteter for $x = 0$.

Ligningen

$$(3xD - D^0)X = \sqrt[3]{x}, \quad x \in [0, \infty]$$

løses let, idet $\sqrt[3]{x}$ er løsning til den tilsvarende homogene

ligning, og ligningen får derfor løsningen

$$F(x) = \sqrt[3]{x} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{1}{3} \log x,$$

så den fuldstændige løsning bliver

$$\left\{ \frac{1}{3} \log x + c \sqrt[3]{x} \mid c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Denne gang har alle løsningsfunktionerne singularitet for $x = 0$.

Endelig ses det umiddelbart, at ligningen

$$(xD - D^0) \chi = x^2 - 2$$

har den fuldstændige løsning

$$\{x^2 + 2 + c x \mid c \in \mathbb{C}\},$$

og i dette tilfælde har ingen løsninger singulariteter, men de singulære forhold for $x = 0$ ytrer sig ved, at alle løsningsfunktionerne antager værdien 2 for $x = 0$.

7.8. Vi skal kort omtale et meget simpelt eksempel på et problem, der fører til en differentialligning:

Et stof (f.eks. en radioaktiv isotop) produceres med en jævn hastighed p g/sek. Når den forhåndenværende mængde af stof er m g, sønderdeles det med en hastighed km g/sek, hvor $k \text{ sek}^{-1}$ er konstant. I tidspunktet $t = 0$ er stofmængden m_0 g. Angiv stofmængden som funktion af tiden.

Vi anvender betegnelsen $m(t)$ g for stofmængden til tidspunktet t og til samme tidspunkt vokser stofmængden med hastigheden $(p - km(t))$ g/sek, hvilket altså også kan skrives $Dm(t)$ g/sek. Heraf fremgår, at den søgte funktion m er en løsning til differentialligningen

$$(D + k D^0) \chi = p,$$

hvis fuldstændige løsning er

$$\left\{ \frac{p}{k} - c e^{-kt}, c \in \mathbb{R} \right\},$$

idet vi kun interesserer os for reelle løsninger. Da $t = 0$ skal

give $m = m_0$, får vi

$$\frac{p}{k} - c = m_0; \quad c = \frac{p}{k} - m_0,$$

og den søgte stofmængde er derfor

$$\left(\frac{p}{k} + (m_0 - \frac{p}{k}) e^{-kt} \right) g.$$

Det ses, at stofmængden varierer strengt monotont og konvergerer mod $\frac{p}{k} g$ uafhængigt af den ved processens begyndelse forhåndenværende mængde.

7.9. Vi skal i denne forbindelse omtale 2 eksempler på differentialligninger, som ikke er lineære, men som alligevel helt eller delvis kan løses ved metoder som de ovenfor anvendte. Vi vil først betragte Bernoulli's differentialligning

$$(10) \quad (D + aD^0)\chi = f\chi^s, \quad s \neq 0, \quad s \neq 1,$$

hvor $a:I \rightarrow \mathbb{R}$ og $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerte, og s er et reelt tal.

Løsningsfunktioner, der antager negative værdier, kommer kun i betragtning for specielle værdier af s .

Hvis φ betegner en løsningsfunktion på et interval $I_1 \subseteq I$, får vi på intervallet I_1

$$\begin{aligned} (D + (1-s)aD^0)\varphi^{1-s} &= (1-s)\varphi^{-s}D\varphi + (1-s)\varphi^{-s}a\varphi = \\ &= (1-s)\varphi^{-s}(D + aD^0)\varphi = (1-s)f, \end{aligned}$$

hvilket viser, at φ^{1-s} er løsning til den lineære differentialligning

$$(11) \quad (D - (s-1)aD^0)\chi = (1-s)f.$$

Er omvendt $\varphi^{(1-s)}$ løsning til denne ligning, giver en regning, der kan overlades til læseren, at φ er løsning til (10).

Vi finder derfor de positive funktioner i den fuldstændige løsning til (10) ved at opløfte alle funktionerne i den fuldstændige løsning til (11) til potensen $(1-s)^{-1}$ i de intervaller,

hvor denne potens er defineret.

Eksempel. Vi betragter differentiaalligningen

$$(xD + D^0)\chi = \chi^3.$$

Den tilsvarende lineære differentiaalligning bliver

$$(xD - 2D^0)\chi = -2,$$

hvis fuldstændige løsning er

$$\{1 + cx^2, c \in \mathbb{R}\},$$

og mængden af positive funktioner i den fuldstændige løsning til den givne ligning bliver derfor

$$\{(1 + cx^2)^{-\frac{1}{2}}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Til den fuldstændige løsning hører desuden alle funktionerne $-(1+cx^2)^{-\frac{1}{2}}, c \in \mathbb{R}$, samt 0. Vi bemærker, at de til $c < 0$ svarende løsningsfunktioner kun er definerede på en del af $\mathbb{R}$. Til (x_1, x_2) med $x_1 \neq 0$ svarer altid en løsningsfunktion φ defineret i et interval omkring x_1 og med $\varphi(x_1) = 0$, men i $x = 0$ har alle løsningsfunktionerne værdien 1.

7.10. Løsningen af de hidtil betragtede differentiaalligninger reduceredes til løsning af stamfunktionsproblemer. Når en sådan reduktion er mulig, siger vi, at differentiaalligningen kan løses ved kvadraturer.

Riccatis differentiaalligning

$$(12) \quad D\chi = a_0 + a_1\chi + a_2\chi^2$$

kan ikke løses ved kvadraturer, men hvis vi kender en partikulær løsning, kan vi bestemme den fuldstændige løsning ved kvadraturer. Vi tænker os, at $a_\nu: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 0, 1, 2$, er kontinuerte, og at φ er en løsning på $I_1 \subseteq I$. Vi forsøger da at indsætte $\varphi + \psi$, hvor ψ er en vilkårlig løsning, og derved får vi en under hensyn-tagen til at φ er en løsning

$$D(\varphi + \psi) - (a_0 + a_1(\varphi + \psi) + a_2(\varphi + \psi)^2) =$$

$$D\varphi - (a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2) + D\psi - (a_1 + 2a_2\varphi)\psi - a_2\psi^2 = \\ (D - (a_1 + 2a_2\varphi)D^0)\psi - a_2\psi^2,$$

hvoraf fremgår, at $\varphi + \psi$ er løsning til (12), hvis og kun hvis ψ er løsning til

$$(D - (a_1 + 2a_2\varphi)D^0)\chi = a_2\chi^2,$$

som er et specielt tilfælde af Bernoullis differentiaalligning.

7.11. Vi betragter nu en lineær differentialoperator af anden orden

$$\Phi = D^2 - a_1D + a_0D^0,$$

hvor a_0 og a_1 er kontinuerte, reelle funktioner på et interval I . Vi vil forsøge at finde en opspaltning

$$\Phi = (D - pD^0) \circ (D - qD^0).$$

Hvis vi udregner højre side, får vi

$$(D - pD^0) \circ (D - qD^0) = D^2 - (p+q)D + (pq - Dq)D^0.$$

Den midterste koefficient får den ønskede værdi, hvis og kun hvis vi vælger

$$(13) \quad p = a_1 - q,$$

og den sidste koefficient i ligningen bliver da $a_1q - q^2 - Dq$, så vi får, at denne koefficient stemmer, hvis og kun hvis q tilfredsstiller ligningen

$$(14) \quad a_1q - q^2 - Dq = a_0,$$

og p er bestemt ved (13). Opløsningen af differentialoperatoren Φ er således reduceret til løsning af (14), altså løsning af Ricatti-ligningen

$$D\chi = -a_0 + a_1\chi - \chi^2.$$

7.12. Lad nu igen

$$\Phi = D^2 - a_1D + a_0D^0$$

være en differentialoperator på et interval I , og lad φ betegne en løsning til differentiaalligningen

$$\Phi\chi = 0$$

på et interval $I_1 \subseteq I$, i hvilket φ ikke antager værdien 0.

På intervallet I_1 definerer vi nu

$$q = \frac{D\varphi}{\varphi}, \quad p = a_1 - \frac{D\varphi}{\varphi},$$

og vi får da

$$Dq = \frac{\varphi D^2\varphi - (D\varphi)^2}{\varphi^2} = \frac{D^2\varphi}{\varphi} - \left(\frac{D\varphi}{\varphi}\right)^2,$$

hvoraf følger

$$pq - Dq = a_1 \frac{D\varphi}{\varphi} - \frac{D^2\varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} (a_1 D\varphi - D^2\varphi).$$

Da φ tilfredsstiller $\Phi\chi = 0$, er

$$a_1 D\varphi - D^2\varphi = a_0\varphi,$$

så vi får

$$pq - Dq = a_0.$$

Med de valgte definitioner af p og q har vi derfor

$$\Phi = (D - pD^0) \circ (D - qD^0).$$

Vi kan altså opløse differentialoperatoren Φ i to operatorer af første orden i ethvert interval i hvilket vi kender en løsning uden nulpunkter til ligningen.

7.13. Vi betragter igen differentiaalligningen

$$\Phi\chi = (D^2 - a_1 D + a_0 D^0)\chi = 0,$$

og vi antager, at den har en løsning φ på intervallet I_1 , og at φ ikke antager værdien 0 i I_1 . Vi har da opspaltningen

$$\Phi = (D - pD^0) \circ (D - qD^0),$$

som vi fandt ovenfor. Er nu ψ en løsning til $\Phi\chi = 0$, da er $(D - qD^0)\psi$ en løsning til

$$(D - pD^0)\chi = 0,$$

som har den fuldstændige løsning

$$(15) \quad \{c e^{P(x)} \mid c \in \mathbb{R}\},$$

hvor P er en stamfunktion til p . Idet A betegner en stamfunktion til A_1 , har $p = a_1 - \frac{D\varphi}{\varphi}$ stamfunktionen $A - \log|\varphi|$, og vi kan derfor skrive (15) på formen

$$\{c \frac{1}{\varphi} e^A \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Ligningen $\Phi_X = 0$ tilfredsstilles derfor netop af de funktioner, som for en eller anden værdi af c er løsning til

$$\left(D - \frac{D\varphi}{\varphi} D^0\right) X = c \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot e^A,$$

og den fuldstændige løsning til denne ligning er for et fast $c \in \mathbb{R}$

$$\{cF + c_1 \varphi \mid c_1 \in \mathbb{R}\},$$

hvor vi med et fast $\alpha \in I_1$ har sat

$$F(x) = \varphi(x) \int_{\alpha}^x \frac{1}{(\varphi(t))^2} e^{A(t)} dt.$$

Den fuldstændige løsning til $\Phi_X = 0$ i intervallet I_1 er derefter givet ved

$$\{cF + c_1 \varphi \mid c_1 \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}\}.$$

Det fremgår umiddelbart af udtrykket for F , at $\frac{F}{\varphi}$ ikke er konstant.

7.14. Vi kunne også have udledt det foregående resultat ved de arbitrære koefficienters variationsmetode, idet vi forsøger om en funktion $\varphi\psi$ passer i ligningen. Indsættelse giver under hensyntagen til, at φ er en løsning

$$\varphi D^2 \psi + (2D\varphi - a_1) D\psi = 0,$$

hvilket viser, at $\varphi\psi$ er løsning til $\Phi_X = 0$, hvis og kun hvis $D\psi$ er løsning til den lineære differentiaalligning

$$(\varphi D + (2D\varphi - a_1) D^0) X = 0,$$

som er af første orden. Ved løsning af denne ligning genfinder vi resultatet fra det foregående afsnit.

7.15. Vi betragter nu igen differentiaalligningen

$$(16) \quad \Phi_X = (D^2 - a_1 D + a_0 D^0) X = 0,$$

hvor a_0 og a_1 er kontinuerte i et interval I . Ved metoder vi endnu ikke har til rådighed, kan det vises, at der til ethvert punkt $x_0 \in I$ svarer en løsning til $\Phi_X = 0$, som i et vist

åbent interval I_1 , der indeholder x_0 , ikke antager værdien 0. Lad φ være en sådan løsning. Der eksisterer da en anden løsning ψ , således at $\frac{\psi}{\varphi}$ ikke er konstant, og således at den fuldstændige løsning på I_1 er givet ved $\{c_1\varphi + c_2\psi \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Differentialkvotienten

$$D \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} (\varphi D\psi - \psi D\varphi)$$

er altså ikke identisk 0 på I_1 . Wronski-determinanten

$$W(\varphi, \psi) = \varphi D\psi - \psi D\varphi = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ D\varphi & D\psi \end{vmatrix},$$

som er en reel funktion på I_1 , er derfor ikke identisk nul.

Nu er

$$DW(\varphi, \psi) = \varphi D^2\psi - \psi D^2\varphi,$$

og vi får, idet vi benytter, at φ og ψ er løsninger

$$\begin{aligned} DW(\varphi, \psi) - a_1 W(\varphi, \psi) &= \\ \varphi(D^2\psi - a_1 D\psi) - \psi(D^2\varphi - a_1 D\varphi) &= \\ \varphi(D^2\psi - a_1 D\psi + a_0\psi) - \psi(D^2\varphi - a_1 D\varphi + a_0\varphi) &= 0, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $W(\varphi, \psi)$ er en løsning til differentiaalligningen

$$(D - a_1 D^0)X = 0,$$

og som følge deraf antager $W(\varphi, \psi)$ ikke værdien 0 i hele intervallet I_1 .

For $x_0 \in I$ eksisterer der altså åbne intervaller $]a_1, b_1[$, således at $x_0 \in]a_1, b_1[\subseteq I$, og således at den fuldstændige løsning på $]a_1, b_1[$ har formen $\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. Dette gælder, når b_1 tilhører en vis mængde B og a_1 en vis mængde A . Vi sætter $b = \sup B$ og $a = \inf A$, og vi har da $x_0 \in]a, b[\subset I$. For $a' < a' < b' < b$ kan den fuldstændige løsning i $]a', b'[$ skrives på formen $\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

Vi vil nu vise, at intervallet $]a, b[$ er identisk med $I \setminus$ endepunkterne. Beviset føres indirekte, idet vi antager, at b er et indre punkt af I . Men så eksisterer der et åbent interval I' med $b \in I' \subseteq I$, i hvilket den fuldstændige løsning kan skrives $\{c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$. I intervallet $I' \cap]a', b'[,$ hvor $b' < b$ og $b' \in I'$ har vi derfor en fremstilling

$$\varphi_1 = c_{11}\psi_1 + c_{12}\psi_2$$

$$\varphi_2 = c_{21}\psi_1 + c_{22}\psi_2$$

med konstante koefficienter, og denne fremstilling kan bruges som definition af φ_1 og φ_2 i hele I' . Da φ_1 og φ_2 ikke har konstant forhold i $I' \cap]a', b'[,$ er determinanten $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$, og ligningssystemet kan derfor løses, så vi får ψ_1 og ψ_2 skrevet som linearkombinationer af φ_1 og φ_2 . Enhver linearkombination af ψ_1 og ψ_2 kan da skrives som en linearkombination af φ_1 og φ_2 , og dette medfører, at den fuldstændige løsning i hele I' har formen $\{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ i modstrid med definitionen af b .

Ræsonnementet viser, at alle løsninger til (16) kan fortsættes henover hele I i lighed med situationen for lineære differentiaalligninger af første orden.

Ved regningerne i 7.13 og 7.14 optræder den kendte løsning φ i nævneren, og vi er derfor nødt til at antage, at φ ikke har nulpunkter i det betragtede interval. Af overvejelser i dette afsnit følger imidlertid, at de singulariteter, der skyldes nulpunkterne for φ , må forsvinde ved udregning af løsningen F .

Vi understreger, at vi i dette afsnit har bygget overvejelserne på den i begyndelsen af afsnittet omtalte påstand om eksistens af en løsning, en påstand, som vi ikke har bevist.

7.16. Som eksempel betragter vi differentiaalligningen

$$\Phi \chi = 0; \quad \Phi = D^2 + 2 \operatorname{tg} x D - D^0, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

For at finde den fuldstændige løsning til denne ligning må vi

gætte en løsning, og det er da nærliggende først at forsøge med simple trigonometriske funktioner. Det viser sig, at $\sin$ er en løsning. En førsteordens differentiaalligning med $\sin$ som løsning er

$$(D - \cot x D^0)\chi = 0,$$

og vi derfor en opløsning

$$\Phi = (D + a(x)D^0) \circ (D - \cot x D^0),$$

hvor vi må vælge

$$a(x) = 2\operatorname{tg}x + \cot x.$$

Ligningen

$$(D + a(x)D^0)\chi = 0$$

har løsningen

$$e^{-\int \frac{\pi}{4} a(x) dx} = e^{\int \frac{\pi}{4} (2\operatorname{tg}x + \cot x) dx} = e^{\log \frac{\cos^2}{\sin}} - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

og vi får derfor den fuldstændige løsning

$$\left\{ c \frac{\cos^2 x}{\sin x} \mid c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vi får altså en løsning til $\Phi\chi = 0$ ved at løse

$$(D - \cot x D^0)\chi = \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

og da den homogene ligning har $\sin$ som løsning, får vi den partikulære løsning

$$\sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \sin x \int_{\frac{\pi}{2}}^x ((1 + \cot^2 x) - 1) dx = -\sin x (\cot x + x - \frac{\pi}{2}),$$

og den fuldstændige løsning til $\Phi\chi = 0$ bliver derfor

$$\{c_1 \sin x + c_2 (x \sin x + \cos x) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Undervejs i regningerne optrådte en generende singularitet for $x = 0$, svarende til nulpunktet for den gættede rod, men det ses, at denne singularitet er faldet bort i slutresultatet. En prøve viser, at den fundne fuldstændige løsning kan anvendes i ethvert interval, som ikke indeholder noget ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Hvis differentiaalligningen multipliceres med $\cos x$, får vi

ligningen

$$(\cos x D^2 + 2 \sin x D - \cos x D^0) \chi = 0,$$

og det viser sig, at de fundne løsninger tilfredsstiller denne ligning på hele $\mathbb{R}$.

Hvis vi har givet et reelt talsæt (x_1, x_2, x_3) , hvor x_1 ikke er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$, fastlægger dette en partikulær løsning, som i x_1 har funktionsværdi x_2 og differentialkvotient x_3 . Hertil bestemmes c_1 og c_2 af ligningerne

$$c_1 \sin x_1 + c_2 (x_1 \sin x_1 + \cos x_1) = x_2$$

$$c_1 \cos x_1 + c_2 x_1 \cos x_1 = x_3.$$

Determinanten for dette ligningssystem er $-\cos^2 x_1$ og derfor $\neq 0$, når x_1 ikke er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$. Determinanten er iøvrigt det i 7.15 indførte udtryk $W(\varphi, \Psi)$.

7.17. For differentialoperatorer

$$\Phi = \sum_{k=0}^p a_k D^k, \quad \Psi = \sum_{l=0}^q b_l D^l$$

med konstante koefficienter kan vi indføre en tilordningslov P , som til hver operator Φ tilordner et $P\Phi$, idet vi sætter

$$P\Phi(R) = \sum_{k=0}^p a_k R^k, \quad P\Psi(R) = \sum_{l=0}^q b_l R^l.$$

Denne tilordningslov har linearitetsegenskaben

$$P(c_1 \Phi + c_2 \Psi) = c_1 P\Phi + c_2 P\Psi,$$

men desuden den interessantere

$$P(\Phi \circ \Psi) = P\Phi P\Psi.$$

Vi får nemlig

$$\Phi \circ \Psi = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l D^{(k+l)}$$

$$P\Phi P\Psi = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l R^{k+l},$$

hvor begge resultater skal ordnes efter voksende eksponenter $k+1$, men det er klart, at denne proces forløber parallelt i de to tilfælde.

Polynomiet $P\Phi$ kaldes karakterpolynomiet for differentialoperatoren Φ . Afbildningen Φ er en isomorfi mellem mængden af lineære differentialoperatorer med konstante koefficienter og mængden af polynomier.

Vi benytter isomorfien til opløsning af differentialoperatorerne, idet vi kopierer opløsningen af det karakteristiske polynomium. Vi illustrerer dette med et eksempel.

$$\Phi = D^4 + 3D^2 + 4D^0.$$

Opløsningen

$$R^4 + 3R^2 + 4 = (R^2+2)^2 - R^2 = (R^2-R+2)(R^2+R+2)$$

kopieres og giver den tilsvarende opløsning

$$\Phi = (D^2-D+2D^0) \circ (D^2+D+2D^0).$$

De to tilsvarende karakterpolynomier har nu komplekse rødder $\pm \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$, så vi får den fuldstændige opløsning

$$\Phi = (D - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})D^0) \circ (D - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2})D^0) \circ (D + (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2})D^0) \circ (D + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})D^0).$$

Det fremgår af overvejelserne, at faktorerne i opløsningen kan ombyttes på vilkårlig måde. Har vi Φ fremstillet som et "produkt"

$$\Phi = (D - \alpha_1 D^0) \circ \dots \circ (D - \alpha_p D^0),$$

vil hver af funktionerne $e^{\alpha_k x}$ $k = 1, \dots, p$ være en løsning til $\Phi\chi = 0$, og hvis disse alle er forskellige, bliver

$$\{c_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + c_p e^{\alpha_p x} \mid c_1 \in \mathbb{C} \wedge \dots \wedge c_p \in \mathbb{C}\}$$

den fuldstændige løsning. Det er ikke vanskeligt at vise udfra opløsningen af Φ , men vi forbigår beviset.

Hvis produktet indeholder flere ens faktorer, kan vi sætte disse sidst. Hvis opløsningen f.eks. ender med

$$\dots \circ (D - \alpha D^0) \circ (D - \alpha D^0) \circ (D - \alpha D^0),$$

ses det direkte, at ikke blot $e^{\alpha x}$, men også $xe^{\alpha x}$ og $x^2 e^{\alpha x}$ er løsninger og de tre faktorer bidrager således til den fuldstændige løsning med et udtryk af formen $(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)e^{\alpha x}$. Den fuldstændige løsning vil altså i ethvert tilfælde umiddelbart kunne opskrives uden regnearbejde.

$$c_1 e^{(\beta + i\gamma)x} + c_2 e^{(\beta - i\gamma)x} = e^{\beta x} \left((c_1 + c_2) \cos \gamma x + i(c_1 - c_2) \sin \gamma x \right) =$$

$$\underset{\text{om}}{e^{\beta x} (c_1 \cos \gamma x + c_2 \sin \gamma x)},$$

således at vi ved at/benævne de arbitrære konstanter får løsningen på reel form.

7.18. Opløsningen af Φ i differentialoperatorer af første orden gør det muligt at løse den inhomogene differentiaalligning $\Phi \chi = f$ ved successivt at løse flere differentiaalligninger af første orden. Det er imidlertid lettere at benytte de arbitrære konstanter variationsmetode. Vi viser denne metode for en differentiaalligning

$$(D^2 + a_1 D + a_0 D^0) \chi = f,$$

hvor a_1 , a_0 og f er kontinuerte (reelle eller komplekse) på et interval I . Vi tænker os, at vi har to ikke proportionale løsninger φ_1 og φ_2 på intervallet I til den tilsvarende homogene ligning. Fra 7.15 ved vi at determinanten

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ D\varphi_1 & D\varphi_2 \end{vmatrix} = \varphi_1 D\varphi_2 - \varphi_2 D\varphi_1$$

er en funktion, som ikke antager værdien 0 i noget punkt af I . Til enhver på I to gange differentiable funktion g svarer der derfor to differentiable funktioner h_1 og h_2 , således at

$$(17) \quad g = h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2, \quad Dg = h_1 D\varphi_1 + h_2 D\varphi_2.$$

Funktionerne h_1 og h_2 fås nemlig simpelthen ved at løse de to lineære ligninger, og de bliver differentiable, da φ_1 , φ_2 og g

er to gange differentiable.

Ved differentiation af den første af ligningerne (17) fås under hensyntagen til den anden ligning

$$(18) \quad \varphi_1 Dh_1 + \varphi_2 Dh_2 = 0.$$

Ved differentiation af den anden ligning (17) fås

$$D^2 g = h_1 D^2 \varphi_1 + h_2 D^2 \varphi_2 + D\varphi_1 Dh_1 + D\varphi_2 Dh_2,$$

og når dette sammen med (17) indsættes i differentiaalligningen, idet det benyttes, at φ_1 og φ_2 er løsninger til den tilsvarende homogene ligning, fås

$$(19) \quad D\varphi_1 Dh_1 + D\varphi_2 Dh_2 = f.$$

Hvis g skal tilfredsstille differentiaalligningen, må Dh_1 og Dh_2 altså tilfredsstille (18) og (19). Hvis på den anden side Dh_1 og Dh_2 tilfredsstiller (18) og (19), vil funktionen g defineret ved den første ligning (17) netop på grund af (18) have sin differentialkvotient defineret ved den anden ligning (17), og (19) sikrer da, at g er løsning til ligning.

Vi får altså den fuldstændige løsning til differentiaalligningen ved at finde Dh_1 og Dh_2 af (18) og (19), bestemme mængden af stamfunktioner til disse og indsætte resultatet i (17).

7.19. Vi skitserer kort metoden for en differentiaalligning

$$(D^p + a_{p-1}D^{p-1}) + \dots + a_1D + a_0D^0)X = f,$$

hvis tilsvarende homogene ligning har den fuldstændige løsning

$$\{c_1\varphi_1 + \dots + c_p\varphi_p\}.$$

Vi sætter da

$$\begin{aligned} g &= h_1\varphi_1 + \dots + h_p\varphi_p \\ Dg &= h_1D\varphi_1 + \dots + h_pD\varphi_p \\ &\dots\dots\dots \\ D^{(p-1)}g &= D^{(p-1)}\varphi_1 + \dots + h_pD^{(p-1)}\varphi_p, \end{aligned}$$

og ved differentiation af disse ligninger får vi

Vi prøver at indsætte funktionen $\frac{1}{4}x^3$ på venstre side, og vi får da resultatet $x^3 - 6x^2 + \frac{15}{2}x - 3$. Hvis vi indsætter $\frac{3}{2}x^2$, får vi $6x^2 - 24x + 15$, og indsættelse af $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ giver altså $x^3 - \frac{33}{2}x + 12$. Vi indsætter nu $\frac{33}{8}x$ og får $\frac{33}{2}x - 33$, og endelig indsættes konstanten $\frac{21}{4}$, som giver 21. Funktionen

$$\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{8}x + \frac{21}{4}$$

vil altså indsat på venstre side give resultatet x^3 .

Hvis vi indsætter $\cos x$ på venstre side, får vi $6 \sin x$, og hvis vi indsætter $\sin x$, får vi $-6 \cos x$. Vi må altså indsætte $-\frac{1}{6} \sin x$ for at få $\cos x$.

Da e^x og xe^x vides at give 0 ved indsættelse på venstre side, prøver vi med x^2e^x , som giver $10e^x$. Ligningens fuldstændige løsning er således

$$\left\{ \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{33}{8}x + \frac{21}{4} - \frac{1}{6} \sin x + \frac{1}{10}x^2e^x + \right.$$

$$\left. (c_1x + c_2)e^x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \mid c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

7.21. Uden at gå nærmere ind på sagen skal vi nævne at Eulers differentialligning

$$(x^n D^n + a_{n-1}x^{n-1}D^{(n-1)} + \dots + a_2x^2D^2 + a_1xD + a_0D^0)\chi = 0,$$

hvor $a_0, \dots, a_{n-1}$ er konstante, kan løses ved at prøve at indsætte x^R . Derved fås et karakterpolynomium, der kan løses med hensyn til R . Derved kan man få potenser med irrationale eksponenter, og de må fortolkes på følgende måde:

$$x^{\beta+i\gamma} = e^{(\beta+i\gamma)\log x} = x^\beta (\cos \gamma \log x + i \sin \gamma \log x)$$

for $x > 0$, og ved at skrive $|x|$ i stedet for x fås en fortolkning, som er anvendelig for negative x . Hvis α er dobbeltrod i karakterpolynomiet, vil $x^\alpha \log x$ være løsning.

7.22. I praksis møder man ofte flere sammenhørende differentialligninger med flere ubekendte. Som eksempel betragter vi et system

$$DX_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1$$

$$DX_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2,$$

hvor a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 er kontinuerte funktioner på et interval I. Vi tilføjer den ligning, der fås ved differentiation af den første ligning

$$D^2X_1 = a_{11}DX_1 + a_{12}DX_2 + Da_{11}X_1 + Da_{12}X_2 + Db_1,$$

og heri indsættes de udtryk for X_2 og DX_2 som fås af de givne ligninger. Derved fås en differentialligning af anden orden til bestemmelse af X_1 . Når X_1 er bestemt fås X_2 af den første af de givne ligninger.

Hvis koefficienterne a_{kl} er konstante, kan man også forsøge at danne en sådan linearkombination af de to ligninger, at der kun forekommer én linear kombination af X_1 og X_2 . Vi illustrerer dette med et eksempel

$$DX_1 = 2X_1 + 3X_2 + 1$$

$$DX_2 = 3X_1 + 2X_2 + e^x.$$

Ved subtraktion og addition fås ligningerne

$$D(X_1 - X_2) = (X_1 - X_2) + 1 - e^x$$

$$D(X_1 + X_2) = 5(X_1 + X_2) + 1 + e^x,$$

og ved løsning af disse ligninger fås

$$X_1 - X_2 = 1 - \frac{1}{2} e^x + c_1 e^{-x}$$

$$X_1 + X_2 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} e^x + c_2 e^{5x},$$

og den fuldstændige løsning kommer til at omfatte alle funktionspar

$$\varphi_1(x) = \frac{2}{5} - \frac{3}{8} e^x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{3}{5} + \frac{1}{8} e^x - C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x},$$

hvor C_1 og C_2 er vilkårlige konstanter. Vi har sat $C_1 = \frac{1}{2} c_1$ og $C_2 = \frac{1}{2} c_2$.

1. Med Φ betegnes differentialoperatoren

$$\Phi = D^4 - 4xD^2 + 4D^0$$

på intervallet $] -\infty, \infty[$. Udregn billedet ved Φ af hver af følgende funktioner

1. Konstant med værdi 1

2. $\frac{1}{4} x$

3. $\cos x$

2. Udregn billedet ved differentialoperatoren

$$\Phi = D^3 - 3D^2 + 3D - D^0, \quad]-\infty, \infty[$$

af den ved $x^n e^x$ definerede funktion, idet n er et helt tal.

3. Udregn billedet ved differentialoperatoren

$$\Phi = x^3 D^3 + xD - D^0, \quad]0, \infty[.$$

Af den på $]0, \infty[$ ved $x(\log x)^n$ definerede funktion.

4. To differentialoperatorer er defineret ved

$$\Phi = xD - pD^0, \quad \Psi = xD - qD^0, \quad]-\infty, \infty[,$$

hvor p og q er konstante. Udregn $\Phi \circ \Psi$ og $\Psi \circ \Phi$.

5. En differentialoperator er defineret ved

$$\Phi = D^3 + \cos x D^2 + \sin x D - \cos x D^0, \quad]-\infty, \infty[.$$

Udregn $\Phi \circ D$ og $D \circ \Phi$.

6. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$\left(D - \frac{x}{1+x^2} D^0 \right) \chi = 0, \quad]-\infty, \infty[$$

$$\left(D - \frac{1}{1-x^2} D^0 \right) \chi = 0, \quad]-1, 1[.$$

7. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(x \log x D - D^0) \chi = (n-1)(\log x)^n, \quad]1, \infty[, n \in \mathbb{R}.$$

(glem ikke først at normere ligningen ved division med $x \log x$).

8. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(\sqrt{x} D - D^0)\chi = \sqrt{x} - 1, \quad]0, \infty[.$$

9. Angiv en lineær differentiaalligning af første orden, som på intervallet $]0, \infty[$ har den fuldstændige løsning

$$\{x(x-1) + c \frac{x-1}{x} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

10. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D - (a+ib)D^0)\chi = e^{ax}, \quad]-\infty, \infty[; a, b \in \mathbb{R}$$

$$(xD - (a+ib)D^0)\chi = 1, \quad]0, \infty[; a, b \in \mathbb{R}.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen

$$\{c(f+ig) \mid c \in \mathbb{C}\},$$

hvor f og g er reelle funktioner.

11. En plan kurve fremstilles ved en ligning $y = f(x)$, hvor $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert differentiabel på I . Idet $(x, f(x))$ er et kurvepunkt og $\phi(x)$ er abscissen til skæringspunktet mellem x -aksen og kurvetangenten i $(x, f(x))$, kaldes $x - \phi(x)$ kurvens subtangente i $(x, f(x))$. Idet α og k er reelle tal, skal man bestemme alle kurver, hvis subtangente for ethvert x i intervallet I er givet ved $k x^\alpha$.

12. En kugle som hænger i en snor er neddyppet i en væske. Til tidspunktet $t = 0$ brændes snoren over, og kuglen indleder en lodret faldbevægelse. Idet kuglens masse er m gram, massen af den fortrængte væskemasse m_1 gram ($m_1 < m$), og kuglen udover tyngdekraft og opdrift påvirkes af en opadrettet bevægelsesmodstand af størrelsen $k v$ dyn, hvor v cm/sek er kuglens fart, medens k er en proportionalitetsfaktor.

Bestem farten v som funktion af tiden.

13. Til tidspunktet $t = 0$ foreligger renfremstillet m gram atomer af et radioaktivt stof. Dette stof sønderdeles med en ha-

stighed, som er en proportionalitetsfaktor h gange den forhåndenværende mængde af stoffet. Af hvert atom, som sønderdeles, opstår et atom af et nyt radioaktivt stof, og dette stof sønderdeles med en hastighed, som er en proportionalitetsfaktor k gange den forhåndenværende mængde af stoffet. Angiv mængderne af de to stoffer (målt i gramatomer) som funktion af tiden.

14. En afbildning $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ er givet ved

$$f(x) = 2e^{ix} + 3e^{-2ix}.$$

Vis, at $f(x)$ ikke antager værdien 0, og angiv et eksplicit udtryk for en kontinuert logaritmefunktion til $f(x)$.

15. Angiv for ethvert $s \in \mathbb{R}$ den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(D+kD^0)\chi = a\chi^s, \quad]-\infty, \infty[$$

hvor a og k er reelle konstanter.

16. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$D\chi = (x - x^{-1})(\chi - \chi^{-1}), \quad]0, \infty[.$$

17. Angiv den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$xD\chi = \chi + x^2\chi^2, \quad]-\infty, \infty[.$$

18. I opgave nr. 11 skrives overalt $-$ normal i stedet for $-$ tangent. Løs den derved fremkomne opgave. Særlig interesse har tilfældene $\alpha = 0$ og $\alpha = 1$.

19. Gæt en løsning til differentialligningen

$$D\chi = 1 + x^2 - 2x\chi + \chi^2, \quad]-\infty, \infty[$$

og bestem derefter den fuldstændige løsning til ligningen.

20. Gæt en løsning til differentialligningen

$$D\chi = \frac{1}{\cos x} (1 - \chi^2), \quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

og bestem derefter den fuldstændige løsning til ligningen.

Skitser grafisk billede af nogle af løsningerne.

21. Spalt for $x \neq 0$ differentialoperatoren

$$D^2 - xD + D^0$$

i lineære differentialoperatorer af første orden (i ligningens fuldstændige løsning indgår integraler, der ikke kan udtrykkes ved elementære funktionstegn).

22. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(\sin^2 x \cos x D^2 - (2 \cos^2 x - \sin^2 x) \sin x D + 2 \cos^3 x D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

23. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$((\sin x - x \cos x) D^2 - x \sin x D + \sin x D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[.$$

24. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$((x^2 + 4x + 1) D^2 - 2(x + 2) D + 2 D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[.$$

25. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D^4 - D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

$$(D^4 + D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

$$(D^4 - 2D^2 + D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[.$$

26. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D^4 - 10D^3 + 35D^2 - 50D + 24D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

$$(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8D^0) \chi = 0,]-\infty, \infty[$$

27. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D^2 - 3D + 2D^0) \chi = x^3,]-\infty, \infty[$$

$$(D^2 - 3D + 2D^0) \chi = e^x,]-\infty, \infty[$$

$$(D^2 - 3D + 2D^0) \chi = \cos x,]-\infty, \infty[.$$

28. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D^2 - 4D + 5D^0)\chi = x^2 + e^x, \quad]-\infty, \infty[$$

$$(D^2 - 4D + 5D^0)\chi = \cosh 2x \cos x, \quad]-\infty, \infty[.$$

29. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(D^2 - 4D + 4D^0)\chi = x^2 + x \sin x, \quad]-\infty, \infty[$$

$$(D^2 - 4D + 4D^0)\chi = e^{2x}, \quad]-\infty, \infty[.$$

30. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D^4 - 2D^3 - 3D^2 - 2D + 6D^0)\chi = e^{-x}(x + \cos x), \quad]-\infty, \infty[.$$

31. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D^5 - 3D^4 + 5D^3 - 7D^2 + 6D - 2D^0)\chi = e^x, \quad]-\infty, \infty[.$$

32. Angiv den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$(x^2 D^2 - 3xD + 3D^0)\chi = 0, \quad]-\infty, \infty[$$

$$(x^2 D^2 + 5xD + 5D^0)\chi = 0, \quad]-\infty, \infty[$$

$$(x^2 D^2 + 5xD + 4D^0)\chi = 0, \quad]-\infty, \infty[.$$

33. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(x^3 D^3 - 2xD - 4D^0)\chi = x^2 - 3x + 5, \quad]-\infty, \infty[.$$

34. Angiv den fuldstændige løsning til de sammenhørende differentiaalligninger

$$DX_1 = 3X_1 + 2X_2 - 1,$$

$$DX_2 = -4X_1 - 3X_2 + x, \quad]-\infty, \infty[.$$

35. Angiv den fuldstændige løsning til de sammenhørende differentiaalligninger

$$DX_1 = 3X_1 + X_2 - 1,$$

$$DX_2 = -10X_1 - 3X_2 + x, \quad]-\infty, \infty[.$$

36. Angiv den fuldstændige løsning til de sammenhørende differentilligninger

$$D^2x_1 = -h^2x_1 + k^2(x_2 - x_1)$$

$$D^2x_2 = -h^2x_2 + k^2(x_1 - x_2).$$

Vis, at der eksisterer netop én løsning (φ_1, φ_2) , som tilfredsstiller betingelserne $\varphi_1(0) = 0$; $D\varphi_1(0) = a$, $\varphi_2(0) = D\varphi_2(0) = 0$.

Ligningen $D^2x = -h^2x$ beskriver bevægelsen af en partikel, der bevæger sig på en ret linie under påvirkning af en elastisk kraft, og den kan med en vis tilnærmelse siges at beskrive en pendulbevægelse. Ligningssystemet forklarer, hvad der sker, når to penduler påvirker hinanden med en elastisk kraft. Prøv at ophænge to ens penduler i ringe indbyrdes afstand og forbind ophængningssnorerne et stykke under ophængningspunktet med en elastik, som ikke må være alt for stram. Sæt det ene pendul i svingninger og se, hvad der sker. Vis, at den fundne løsning til ovenstående ligninger forklarer fænomenet, når det antages, at h^2 er mange gange større end k^2 .

Vanskeligere opgaver.

37. En ikke lineær differentialoperator Φ på $]-\infty, \infty[$ er defineret ved

$$\Phi x = Dx + e^x x^2.$$

Udregn $\Phi \circ \Phi$.

38. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D - (1+x^2)^{-1}D^0)x = \frac{1-x^2}{1+x^2} e^{\text{Arctg } x}, \quad]-\infty, \infty[.$$

39. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D - \log x D^0)x = (ex)^x \cos x, \quad]0, \infty[.$$

40. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D + D^0)\chi = e^{-x}(1+3\sin^2 x)^{-1}, \quad]-\infty, \infty[.$$

41. Vis, uden at løse ligning, at enhver løsningsfunktion $\phi(x)$ til differentiaalligningen

$$(D + xD^0)\chi = x^2 - 1$$

har sin differentialkvotient lig med nul for netop de værdier af x , hvor $\phi(x) = x - x^{-1}$. Vis endvidere (stadig uden at løse ligningen), at funktionen har et relativt minimum (defineret i gymnasieundervisningen) i sådan et punkt, såfremt $x > 0$, men et relativt minimum, såfremt $x < 0$.

42. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(\sin^2 2xD^2 + 2\sin 2x \cos 2xD - 4D^0)\chi = 0, \quad]-\infty, \infty[.$$

43. For hvilke valg af de reelle talsæt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) vil differentiaalligningen

$$(D^2 + D^0)\chi = 0$$

have mindst én (henholdsvis netop én) løsning $\phi(x)$, som tilfredsstiller betingelserne $\phi(x_1) = y_1$ og $\phi(x_2) = y_2$?

44. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$((x^3 + 6x^2 - 6x)D^2 - (4x^2 + 18x - 12)D + (6x + 18)D^0)\chi = 0, \quad]-\infty, \infty[.$$

45. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(D^2 - (1 + 2\operatorname{tg}^2 x)D^0)\chi = 0.$$

46. Angiv den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(xD^2 + 2D + xD^0)\chi = 0.$$

47. Angiv den fuldstændige løsning til de sammenhørende differentiaalligninger

$$Dx_1 = x_3 - x_2, \quad Dx_2 = x_1 - x_3, \quad Dx_3 = x_2 - x_1.$$

Kontinuitet og grænseværdi.

8.1. Begreberne kontinuitet og grænseværdi er af fundamental betydning for differential- og integralregningen og spiller derfor en væsentlig rolle i gymnasiets matematikundervisning. Vi ønsker at kunne tale om kontinuitet af mere generelle afbildninger end de i gymnasiet omtalte reelle funktioner af en reel variabel.

For at vi kan tale om, at en afbildning $f:M_1$, ind i M_2 , hvor M_1 og M_2 er mængder, er kontinuert, må M_1 og M_2 være udstyret med en vis form for organisation, således at vi ved noget om, hvilke punkter der ligger tæt sammen. Dette kan ske ved, at vi har et afstandsbegreb på mængden, og den kaldes da et metrisk rum. Det er dog ikke nødvendigt at have et afstandsbegreb for at kunne tale om kontinuitet, men der må så være en lov, som for hvert element $a \in M_1$ (hhv. M_2) fastlægger visse mængder af elementer af M_1 (hhv. M_2), som ligger tæt ved a . Organisationer af denne art har en geometrisk klang, og man benytter derfor et geometrisk sprog. De organiserede mængder kaldes rum, og deres elementer kaldes punkter. Vi anvender betegnelsen topologisk rum om disse organiserede mængder.

Et topologisk (eller metrisk) rum T er altså en mængde M med en vis organisation $\mathfrak{o}$. Vi skriver $T = (M, \mathfrak{o})$, og vi kalder M den underliggende mængde for rummet T . Et element $a \in M$ kaldes et punkt af T , og vi skriver $a \in T$ med helt samme betydning som $a \in M$. Dette pedantiske synspunkt er nødvendigt, når vi indfører forskellige organisationer $\mathfrak{o}_1$ og $\mathfrak{o}_2$ på samme mængde M og derved får to forskellige rum $T_1 = (M, \mathfrak{o}_1)$ og $T_2 = (M, \mathfrak{o}_2)$. Når vi kun betragter én organisation behøver vi ikke en særlig betegnelse for den underliggende mængde.

Mængderne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ etc. bliver i det følgende organiserede

som rum, og vi vil for disse rum bibeholde betegnelserne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Lejlighedsvis vil vi betragte andre rum med de samme underliggende mængder, og vi må^{da} anvende en anden betegnelse for disse rum. Vi indfører ingen betegnelse for de underliggende mængder til de fire rum.

8.2. Vi går nu i gang med at udføre det ovenfor løst skitserede program, idet vi begynder med afstandsbegrebet.

8.2.1. Definition. Ved en afstandsfunktion på en mængde M forstås en afbildning

$$\text{dist}: M \times M \text{ ind i } \mathbb{R},$$

som tilfredsstiller betingelserne (kvantoren $\forall$ refererer til M)

$$1) \forall x (\text{dist}(x, x) = 0)$$

$$2) \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow \text{dist}(x, y) > 0)$$

$$3) \forall x \forall y (\text{dist}(y, x) = \text{dist}(x, y))$$

$$4) \forall x, \forall y, \forall z (\text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z)).$$

8.2.2. Definition. Et metrisk rum $T = (M, \text{dist})$ er en mængde M , på hvilken en afstandsfunktion dist er defineret.

8.2.3. Definition. Lad T være et metrisk rum, og lad r være et positivt tal og a et punkt af T . Punktmængden

$$K(a, r) = \{x \mid x \in T \wedge \text{dist}(a, x) < r\}$$

kaldes da en kugleomegn af a med radius r i rummet T .

Betingelsen 4) i definition 8.2.1 kaldes trekantsuligheden. Ved hjælp af den vises følgende sætninger om kugleomegnens indbyrdes beliggenhed i et metrisk rum:

8.2.4. Sætning. Hvis $b \in K(a, r)$, gælder

$$K(b, r - \text{dist}(a, b)) \subseteq K(a, r).$$

8.2.5. Sætning. Hvis $\text{dist}(a, b) > r > 0$, gælder

$$K(a, r) \cap K(b, \text{dist}(a, b) - r) = \emptyset.$$

Vi beviser sætning 8.2.4. For ethvert $x \in K(b, r - \text{dist}(a, b))$ gælder

$$\begin{aligned} \text{dist}(a,x) &\leq \text{dist}(a,b) + \text{dist}(b,x) < \\ \text{dist}(a,b) + (r - \text{dist}(a,b)) &= r, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $x \in K(a,r)$. Sætning 8.2.5 følger af, at $x \in K(a,r) \cap K(b, \text{dist}(a,b)-r)$ ville medføre, at

$$\text{dist}(a,x) + \text{dist}(x,b) < r + (\text{dist}(a,b)-r) = \text{dist}(a,b)$$

i strid med trekantsuligheden.

8.3. Mængden af punkter i en plan er med det sædvanlige afstandsbegreb et eksempel på et metrisk rum. Kugleomgivelsen $K(a,r)$ bliver i dette tilfælde cirkelskiven med centrum a og radius r , hvor punkterne på randen ikke regnes med. Et andet nærliggende eksempel er det sædvanlige rum, og en kugleomegn bliver her en rigtig kugle, hvor randpunkterne ikke regnes med.

Mængderne $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ er metriske rum med afstandsfunktion defineret ved

$$\text{dist}(x,y) = |y-x|,$$

idet

$$|z-x| = |(z-y)+(y-x)| \leq |z-y| + |y-x|.$$

Den samme definition kan anvendes for $\mathbb{C}$, og afstanden mellem $a_1 + ia_2$ og $b_1 + ib_2$ bliver da den samme som afstanden mellem punkterne (a_1, a_2) og (b_1, b_2) i planen.

Enhver mængde M kan organiseres som et metrisk rum ved afstandsdefinitionen

$$\text{dist}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x = y \\ 1, & \text{hvis } x \neq y. \end{cases}$$

Dette metriske rum betegnes i reglen med samme bogstav som den underliggende mængde M . En kugleomegn af $a \in M$ med radius ≤ 1 indeholder kun punktet a , men en kugleomegn med radius > 1 omfatter hele rummet.

8.4. For $m \in \mathbb{N}$ kan mængden af talsæt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ organiseres som et metrisk rum, men der er her tale om en organisa-

tion, der fører væsentlig videre, og som for $m \leq 3$ er identisk med den velkendte geometri. Vi skal blot her indføre de mest grundlæggende begreber i den m -dimensionale geometri. Idet $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $\underline{z} = (z_1, \dots, z_m)$ er talsæt, medens α, β, γ er reelle tal, indfører vi de lineære operationer

$$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_m + \beta y_m),$$

samt det indre produkt

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m.$$

Det indre produkt er således en tilordningslov, som til hvert par af talsæt tilordner et reelt tal. Vi har regnereglerne

$$\underline{y} \cdot \underline{x} = \underline{x} \cdot \underline{y}; (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) \cdot \underline{z} = \alpha(\underline{x} \cdot \underline{z}) + \beta(\underline{y} \cdot \underline{z}),$$

hvoraf følger, at produkter af flerleddede udtryk udregnes efter den sædvanlige regel, f.eks.

$$(1) (\alpha \underline{x} - \beta \underline{y}) \cdot (\alpha \underline{x} - \beta \underline{y}) = \alpha^2(\underline{x} \cdot \underline{x}) - 2\alpha\beta(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \beta^2(\underline{y} \cdot \underline{y}).$$

Vi indfører nu normen af et talsæt

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2},$$

og (1) kan da skrives

$$(2) \quad \|\alpha \underline{x} - \beta \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 \alpha^2 - 2(\underline{x} \cdot \underline{y})\alpha\beta + \|\underline{y}\|^2 \beta^2.$$

Her er venstre side $\geq$ for alle valg af α og β , og af gymnasieundervisningens behandling af andengradspolynomier fremgår da, at andengradspolynomiet på højre side har diskriminant ≤ 0 , altså at

$$(\underline{x} \cdot \underline{y})^2 \leq \|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2.$$

Vi har her genfundet Cauchy-Scharz' ulighed, som vi tidligere udledte i kapitel 1. Idet vi benytter betegnelsen $\underline{0}$ for nulsettet $(0, \dots, 0)$, ser vi, at normen har følgende 3 egenskaber

$$1) \quad \|\underline{x}\| > 0 \text{ for } \underline{x} \neq \underline{0}$$

$$2) \quad \|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|\underline{x}\|$$

$$3) \quad \|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|.$$

Egenskaberne 1) og 2) er trivielle, medens 3) umiddelbart følger af Cauchy-Schwarz' ulighed, idet (1) giver med $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 + 2(\underline{x} \cdot \underline{y}) + \|\underline{y}\|^2 \leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2.$$

Vi bemærker, at 2) medfører $\|\underline{0}\| = 0$, idet

$$\|\underline{0}\| = \|\underline{00}\| = |0| \|\underline{0}\| = 0.$$

Endvidere medfører 2) og 3), idet man i 3) skriver $-\underline{x}$ i stedet for $\underline{x}$ og $\underline{x} + \underline{y}$ i stedet for $\underline{y}$, at $|\|\underline{x}\| - \|\underline{y}\|| \leq \|\underline{x} + \underline{y}\|$.

Det ses nu, at mængden af talsæt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ bliver et metrisk rum $\mathbb{R}^m$ ved afstandsdefinitionen

$$\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{y} - \underline{x}\|,$$

og dette rum kaldes det m-dimensionale talrum. Det vil være bekvemt direkte at benytte betegnelsen $\|\underline{y} - \underline{x}\|$ for afstanden mellem $\underline{x}$ og $\underline{y}$.

8.5. Vi vil udbygge organisationen af det m-dimensionale talrum $\mathbb{R}^n$ en smule mere. For ethvert egentligt talsæt $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, d.v.s. et talsæt, der ikke er nulsættet, definerer vi det tilsvarende 1-dimensionale underrum, som mængden

$$L = \{t\underline{\lambda} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Det 1-dimensionale underrum giver anledning til en ækvivalensrelation mellem punkter i L , idet vi skriver

$$\underline{x} \equiv \underline{y} \pmod{L},$$

hvis og kun hvis

$$\underline{y} - \underline{x} \in L.$$

Beviset for, at relationen $\equiv$ virkelig er en ækvivalensrelation, er trivielt, og vi vil ikke opholde os ved det. Den giver anledning til en inddeling af $\mathbb{R}^n$ i ækvivalensklasser, idet hver klasse er en mængde af formen

$$\{\underline{a} + t\underline{\lambda} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

hvor $\underline{a}$ er et element af klassen. Hver af disse ækvivalensklasser kaldes en ret linie, og talsættet $\frac{1}{\|\underline{\lambda}\|} \underline{\lambda}$ kaldes den rette linies retning.

Gennem $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ og $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, hvor $\underline{b} \neq \underline{a}$ går netop 1 ret linie, nemlig punktmængden

$$\{\underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Delmængden

$$\{\underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}) \mid t \in [0,1]\}$$

kaldes det afsluttede liniestykke med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$. Skrives $]0,1[$ i stedet for $[0,1]$, fås det åbne liniestykke med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$, og vi ser, at det åbne liniestykke fås ud fra det afsluttede ved borttagelse af endepunkterne.

En afbildning $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ defineres ved

$$\varphi(t) = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}).$$

Vi ser da, at $\varphi(\mathbb{R})$ er den rette linie gennem $\underline{a}$ og $\underline{b}$, medens $\varphi([0,1])$ og $\varphi(]1,0[)$ er henholdsvis det afsluttede og det åbne liniestykke med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$. Begge disse liniestykker tillægges længden $\|\underline{b} - \underline{a}\|$.

På grund af Cauchy-Schwarz' ulighed kan vi for to egentlige talsæt $\underline{\lambda}$ og $\underline{\mu}$ definere et vinkelmål $\angle(\underline{\lambda}, \underline{\mu})$ ved

$$\cos \angle(\underline{\lambda}, \underline{\mu}) = \frac{\underline{\lambda} \cdot \underline{\mu}}{\|\underline{\lambda}\| \cdot \|\underline{\mu}\|},$$

og (2) giver da for $\alpha = \beta = 1$, $\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$, $\underline{y} = \underline{c} - \underline{b}$, hvor

$\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ er indbyrdes forskellige, at

$$\|\underline{c} - \underline{a}\|^2 = \|\underline{b} - \underline{a}\|^2 + \|\underline{c} - \underline{b}\|^2 - 2\|\underline{b} - \underline{a}\| \|\underline{c} - \underline{b}\| \cos \angle(\underline{b}-\underline{a}, \underline{b}-\underline{c}),$$

hvilket viser, at cosinusrelationen for en trekant gælder i $\mathbb{R}^m$.

Udbygningen af den m-dimensionale geometri vil blive videreført i kursus i algebra og geometri.

8.6. Mængden af alle talsæt $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ organiseres som et metrisk rum $\mathbb{R}_1^m$ ved afstandsdefinitionen

$$\text{dist}_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sup\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_m - x_m|\}$$

og som et metrisk rum $\mathbb{R}_2^m$ ved afstandsdefinitionen

$$\text{dist}_2(\underline{x}, \underline{y}) = |y_1 - x_1| + \dots + |y_m - x_m|.$$

Beviserne for, at de 4 betingelser/opfyldte, ^{er} er ganske enkle og overlades til læseren.

8.7. Mængden af begrænsede talfølger (a_n) organiseres som et metrisk rum l_b ved definitionen

$$\text{dist}((a_n), (b_n)) = \sup\{|b_n - a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Trekantsuligheden følger umiddelbart, af de i 4.8 beviste uligheder.

Lad l være mængden af talfølger (a_n) , for hvilke $\sum a_n$

er absolut konvergente. Hvis $(a_n) \in l$ og $(b_n) \in l$, er

$|a_n \pm b_n| \leq |a_n| + |b_n|$, og $(a_n \pm b_n)$ vil da ligeledes tilhøre l . Vi kan organisere l som et metrisk rum l_a ved afstandsdefinitionen

$$\text{dist}_1((a_n), (b_n)) = \sum |b_n - a_n|.$$

Det ses umiddelbart, at 1) -4) er opfyldt.

Lad nu l_2 være mængden af reelle talfølger $\underline{a} = (a_n)$, $\underline{b} = (b_n), \dots$, for hvilke $\sum a_n^2$, $\sum b_n^2, \dots$ er konvergente.

På grund af Cauchy-Schwarz' ulighed er

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

og rækken $\sum a_k b_k$ er derfor absolut konvergent. Dette medfører igen, at $\underline{a} + \underline{b} = (a_n + b_n) \in l_2$, så vi kan kopiere definitionerne fra $\mathbb{R}^m$.

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = (\alpha a_n + \beta b_n)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum a_n b_n,$$

og vi kan da indføre normen

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{(\underline{a} \cdot \underline{a})} = \sqrt{\sum a_n^2}$$

og afstanden $\|\underline{b} - \underline{a}\|$. Det ses umiddelbart, at normens og afstands- begrebets egenskaber er de samme som i $\mathbb{R}^m$. Det således definerede uendelig dimensionale rum kaldes Hilbert-rummet og betegnes $\mathbb{R}^\infty$. Det spiller en stor rolle for den højere matematiske analyse, ikke mindst for den videregående differentialligningsteori, og derved får Hilbert-rummet også stor betydning for matematikkens anvendelser.

8.7. Vi vender nu tilbage til den almindelige teori. Lad $T = (M, \text{dist})$ være et metrisk rum. En delmængde $A \subseteq M$ organiseres som et metrisk rum ved restriktionen af dist til $M \times M$. Det således definerede metriske rum kaldes et delrum af T , og vi skriver $A \subseteq T$, når A opfattes som delrum af T .

Eksempel: Vi har $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Ethvert interval kan opfattes som delrum af $\mathbb{R}$.

8.7.1. Definition. Et metrisk rum $T = (M, \text{dist})$ kaldes begrænset, hvis dist er en begrænset funktion på $M \times M$. Vi sætter $\sup \{\text{dist}(x, y) \mid x \in M \wedge y \in M\} = \text{diam } T$ (diameteren af T).

Definitionen kan anvendes på en delmængde $A \subset M$, idet denne mængde opfattes som et delrum af T .

8.7.2. Sætning. Et metrisk rum T er begrænset, hvis (og kun hvis) der eksisterer en overdækning af T med endelig mange kugleomgivelser.

Lad os nemlig antage, at vi har

$$T = K(a_1, r_1) \cup \dots \cup K(a_n, r_n).$$

For vilkårlige punkter $x, y \in T$ har vi da indices p og q , således at

$$x \in K(a_p, r_p), \quad y \in K(a_q, r_q),$$

og trekantuligheden giver da

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, y) &\leq \text{dist}(a_p, x) + \text{dist}(a_p, a_q) + \text{dist}(a_q, y) \leq \\ &r_p + r_q + \text{dist}(a_p, a_q), \end{aligned}$$

og hvis vi definerer

$$K = \sup \{r_p + r_q + \text{dist}(a_p, a_q) \mid p, q \in \{1, \dots, n\}\},$$

får vi

$$\forall x, y \in T \quad (\text{dist}(x, y) \leq K).$$

At betingelsen er nødvendig er klart. Enhver kugle, hvis radius overstiger $\text{diam } T$ vil nemlig indeholde hele T .

8.8. Lad T være et metrisk rum. En afbildning $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow T$ kaldes en punktfølge. Vi foretrækker sædvanligvis at skrive $\varphi(n) = a_n$ og betegne følgen (a_n) .

8.8.1. Definition. Punktfølgen (a_n) i det metriske rum T kaldes begrænset, hvis mængden $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er begrænset.

8.8.2. Definition. Et punkt $a \in T$ kaldes grænsepunkt for følgen (a_n) , når følgende betingelse er opfyldt:

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N (a_n \in K(a, \varepsilon)).$$

Punktfølgen (a_n) kaldes konvergent i rummet T , hvis den har et grænsepunkt i T .

8.8.3. Sætning. En konvergent punktfølge er begrænset og har kun ét grænsepunkt.

Lad (a_n) have $a \in T$ som grænsepunkt, og lad $b \in T$ være et andet punkt af T , således at $\text{dist}(a, b) > 0$. Vi sætter $\varepsilon = \frac{1}{2}\text{dist}(a, b)$. Kuglerne $K(a, \varepsilon)$ og $K(b, \varepsilon)$ har da intet punkt fælles (sætning 8.2.5), og da (3) er opfyldt for a , vil alle a_n med $n \geq N$ falde i $K(a, \varepsilon)$. Dette viser, at højst endelig mange a_k falder udenfor $K(a, \varepsilon)$, og deraf følger, at (a_n) er begrænset (sætning 8.7.2), og at (3) ikke er opfyldt for b .

8.9. Vi betragter igen et metrisk rum T og en punktfølge (a_n) i T .

8.9.1. Definition. Punktfølgen (a_n) kaldes en fundamentalfølge, når følgende betingelse er opfyldt:

$$(4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N (\text{dist}(a_m, a_n) \leq \varepsilon)$$

Betingelsen kan også skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} (\text{diam} \{a_n \mid n \geq N\} \leq \varepsilon).$$

8.9.2. Sætning. En fundamentalfølge er begrænset.

Dette følger umiddelbart af den sidste form af betingelsen i forbindelse med sætning 8.7.2.

8.9.3. Sætning. En konvergent følge er en fundamentalfølge.

Lad (a_n) være et punktfølge, som konvergerer mod et grænsepunkt a , og lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan bestemme N , således at vi for alle $n \geq N$ har $\text{dist}(a_n, a) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, og for $m \geq N$, $n \geq N$ får vi da ved trekantsuligheden

$$\text{dist}(a_m, a_n) \leq \text{dist}(a_m, a) + \text{dist}(a_n, a) \leq \varepsilon.$$

8.10. I de metriske rum $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er enhver fundamentalfølge konvergent. Det samme gælder (men er trivielt) i $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$, men det passer ikke for $\mathbb{Q}$. Vi indfører derfor følgende definition.

8.10.1. Definition. Et metrisk rum T kaldes fuldstændigt, hvis og kun hvis enhver fundamentalfølge i T er konvergent.

Mange af de ovenfor indførte metriske rum er fuldstændige. Vi vil vise, at Hilbert-rummet, som indførtes i 8.7, er fuldstændigt. Dertil betragter vi en følge $(\underline{a}_n) = ((a_{nk}))$ af punkter i Hilbert-rummet. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan da bestemme N , således at vi for alle $m \geq N$ og $n \geq N$ har

$$\|\underline{a}_n - \underline{a}_m\| \leq \varepsilon$$

eller udførligt

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{mk})^2 \leq \varepsilon^2.$$

Heraf følger nu for ethvert $k \in \mathbb{N}$

$$|a_{nk} - a_{mk}| \leq \varepsilon.$$

For hvert fast k vil således følgen (a_{nk}) være konvergent, så

vi har en følge (a_k) bestemt ved

$$a_{nk} \rightarrow a_k \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Af (5) følger nu ^{for}ethvert $p \in \mathbb{N}$, når $m \geq N$ og $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^p (a_{nk} - a_{mk})^2 \leq \varepsilon^2,$$

og heraf fås for $m \rightarrow \infty$, at vi for $p \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ har

$$\sum_{k=1}^p (a_{nk} - a_k)^2 \leq \varepsilon^2.$$

Heraf følger nu for $p \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k)^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{for } n \geq N.$$

Dette viser, at følgen $(a_{nk} - a_k)$ er et punkt i Hilbertrummet, og det samme gælder da for $(a_k) = (a_{nk}) - (a_{nk} - a_k)$, og idet vi sætter $\underline{a} = (a_k)$, kan den sidste ulighed altså

$$\|\underline{a} - \underline{a}_n\| \leq \varepsilon,$$

hvilket netop viser, at $(\underline{a}_n) \rightarrow (\underline{a})$.

8.10.2. Det m -dimensionale talrum $\mathbb{R}^m$ er fuldstændigt.

Bevis. Lad $(\underline{a}_n) = ((a_{n1}, \dots, a_{nm}))$ være en fundamentalfølge i $\mathbb{R}^m$. Da er $(\underline{a}_n^*) = (a_{n1}, \dots, a_{nm}, 0, 0, \dots)$ åbenbart en fundamentalfølge i Hilbertrummet, og dens grænsepunkt vil være en følge af formen $\underline{a}^* = (a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots)$. Vi sætter nu $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, og vi har da $(\underline{a}_n) \rightarrow \underline{a}$, hvormed påstanden er bevist. Beviset beror på, at det delrum af Hilbertrummet, der udgøres af de følger, hvis elementer fra nummer $m + 1$ er 0, er en eksakt kopi af det m -dimensionale talrum.

8.11. Som et bekvemt hjælpemiddel ved de følgende undersøgelser indfører vi nu i et vilkårligt metrisk rum et omegnsgreb, der er mere generelt end de hidtil benyttede kugleom-

egne.

8.11.1. Definition. Lad T være et metrisk rum og $a \in T$ et vilkårligt punkt. Ved en omegn af a (i rummet T) forstås en mængde, der indeholder en kugleomegn af a .

Vi vil sædvanligvis benytte betegnelsen $\dot{U}(a)$ for mængden af omegne af a . For enhver delmængde U af det underliggende rum for T har vi altså

$$U \in \dot{U}(a) \iff \exists r > 0 \ (K(a, r) \subseteq U).$$

8.11.2. Sætning. Mængden $\dot{U}(a)$ af omegne af punktet a har følgende egenskaber.

- o1) $\dot{U}(a) \neq \emptyset$.
- o2) $\forall U \in \dot{U}(a) \ (a \in U)$.
- o3) $\forall U, V \ (U \in \dot{U}(a) \wedge V \supseteq U \Rightarrow V \in \dot{U}(a))$.
- o4) $\forall U, V \ (U \in \dot{U}(a) \wedge V \in \dot{U}(a) \Rightarrow U \cap V \in \dot{U}(a))$.
- o5) $\forall U \in \dot{U}(a) \ \exists V \in \dot{U}(a) \ \forall b \in V \ (U \in \dot{U}(b))$.

De tre første af disse egenskaber følger helt umiddelbart af definitionerne af omegn og kugleomegn. Når U og V er omegne af a , eksisterer der kugler $K(a, r) \subseteq U$, $K(a, r_1) \subseteq V$, og vi har da

$$K(a, \inf \{r, r_1\}) = K(a, r) \cap K(a, r_1) \subseteq U \cap V,$$

hvilket viser, at $U \cap V$ er en omegn af a . Dermed er o4) bevist. For at bevise o5) bemærker vi, at sætning 8.2.4 viser, at en kugleomegn er omegn af et hvert af sine punkter. Vi behøver derfor i o5) blot at vælge $V = K(a, r) \subseteq U$.

8.12. Det ovenfor indførte generaliserede omegnsbegreb er hensigtsmæssigt ved mangeteoretiske overvejelser. Det kan endda være hensigtsmæssigt at organisere en mængde ved at indføre omegne, som har de ovenfor nævnte egenskaber, uden først at indføre en metrik. Dette er baggrunden for følgende definition.

8.12.1 Definition. Ved en topologi på en mængde M forstås en tilordningslov

$$\mathcal{U} : M \text{ ind i } \mathcal{D}(\mathcal{D}(M)),$$

hvor $\mathcal{D}(\mathcal{D}(M))$ er mængden af delmængder i mængden af delmængder i M , og som tilfredsstiller betingelserne o1 - o5 i sætning 8.11.2. Ved et topologisk rum $T = (M, \mathcal{U})$ forstås en mængde M , på hvilken en sådan tilordningslov $\mathcal{U}$ er defineret. Mængden M kaldes den underliggende mængde for T , og for $a \in M$ kaldes $\mathcal{U}(a)$ mængden af omegne af a , og hvert element af $\mathcal{U}(a)$ kaldes en omegn af a .

Ifølge det foregående er ethvert metrisk rum tillige et topologisk rum. Vi kan imidlertid ofte med fordel definere topologiske rum uden først at indføre et afstandsbegreb.

Lad os betragte en mængde M , der består af alle reelle tal samt yderligere elementerne ∞ og $-\infty$. Vi definerer

- 1) For $a \in \mathbb{R}$ skal $\mathcal{U}(a)$ bestå af alle delmængder af M , som indeholder et interval (en kugleomegn i $\mathbb{R}$) $]a-h, a+h[$, $h > 0$.
- 2) $\mathcal{U}(\infty)$ skal bestå af alle delmængder af M , som indeholder et interval $]a, \infty[$ (hermed menes $]a, \infty[\cup \{\infty\}$). Analogt $\mathcal{U}(-\infty)$.

Det ses umiddelbart, at o1 - o5 er opfyldt. Det således definerede rum betegnes $\mathbb{R}^*$ og kaldes den udvidede tallinie. Det er let at definere $\mathbb{R}^*$ ved et afstandsbegreb på M , men et sådan afstandsbegreb kommer ikke til at virke naturligt.

8.13. Lad M være en vilkårlig mængde. For $a \in M$ definerer vi $\mathcal{U}(a)$ som mængden af delmængder, der indeholder a . Derved defineres en topologi $\mathcal{U}$ på M . Denne topologi kaldes den diskrete topologi på M , og den fås af den i slutningen af 8.3 omtalte metrik.

Som et kuriosum skal vi nævne, at o1 - o5 vil være til-

fredsstillede, hvis vi for ethvert $a \in M$ lader $\dot{U}(a)$ bestå af den ene mængde M . Derved defineres altså en topologi på M . I denne topologi vil omegne af $a \in M$ og $b \in M$ altid have fælles punkter. I et metrisk rum har (sætning 8.2.5) to forskellige punkter altid omegne uden fælles punkter. Dette eksempel viser, at teorien for de topologiske rum er væsentlig generellere end teorien for metriske rum. Man kan tilføje flere betingelser ud over $\alpha_1 - \alpha_5$ og derved udelukke de topologiske rum, der står de metriske rum særlig fjert.

8.14. Lad $\dot{U}_1$ og $\dot{U}_2$ være topologier på samme mængde M . Vi skriver $\dot{U}_1 \supseteq \dot{U}_2$, hvis og kun hvis

$$\forall a \in M (\dot{U}_1(a) \supseteq \dot{U}_2(a)),$$

altså, når der "altid" er flere omegne i $\dot{U}_1$ end i $\dot{U}_2$. Vi siger da, at $\dot{U}_1$ er finere end $\dot{U}_2$, eller at $\dot{U}_2$ er grovere end $\dot{U}_1$. Den finere topologi har flere omegne, skiller rummets to punkter bedre. De to i 8.13 omtalte topologier er den fineste og den groveste af alle tænkelige topologier på M .

8.15. Lad $T_1 = (M_1, \text{dist}_1)$ og $T_2 = (M_2, \text{dist}_2)$ være metriske rum. Når vi således arbejder med flere forskellige metriske rum, vil vi også anvende en index i betegnelsen for kuglerne, således at en kugle i T_1 betegnes $K_1(a, r)$, hvor $a \in T_1$ og $r > 0$, medens en kugle i T_2 tilsvarende betegnes $K_2(b, r)$, $b \in T_2$. Idet vi som altid skriver $x \in T_1$ som ensbetydende med $x \in M_1$ og analogt for T_2 , kan en afbildning $f : M_1$ ind i M_2 lige så godt kaldes en afbildning $f : T_1$ ind i T_2 . Vi kan nu umiddelbart overføre gymnasieundervisningens kontinuitetsbegreb til afbildninger af et metrisk rum ind i et andet.

8.15.1. Definition. Afbildningen $f : T_1$ ind i T_2 kaldes kontinuert i punktet $x_1 \in T_1$ med billedpunktet $x_2 = f(x_1) \in T_2$, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in T_1 (\text{dist}(x_1, y) < \delta \Rightarrow \text{dist}(x_2, f(y)) < \varepsilon).$$

Dette er en nøjagtig kopi af en af de i gymnasieundervisningen benyttede definitioner. Vi bemærker, at betingelsens sidste del

$$\forall y \in T_1 (\text{dist}(x_1, y) < \delta \Rightarrow \text{dist}(x_2, f(y)) < \varepsilon)$$

udtrykker, at ethvert punkt i kuglen $K_1(x_1, \delta)$ har sit billedpunkt i kuglen $K_2(x_2, \varepsilon)$, altså at $f(K_1(x_1, \delta))$ er en delmængde af $K_2(x_2, \varepsilon)$. Kontinuitetsbetingelsen kan derfor skrives på den mere overskuelige form

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (f(K_1(x_1, \delta)) \subseteq K_2(x_2, \varepsilon)),$$

hvilket også kan skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (f^{-1}(K_2(x_2, \varepsilon)) \supseteq K_1(x_1, \delta)).$$

Hvis vi nu indfører mængderne $\dot{U}_1(x_1)$ og $\dot{U}_2(x_2)$ af omegne af x_1 og x_2 , ser vi, at den sidste del af betingelsen

$$\exists \delta > 0 (f^{-1}(K_2(x_2, \varepsilon)) \supseteq K_1(x_1, \delta))$$

netop udtrykker, at $f^{-1}(K_2(x_2, \varepsilon))$ indeholder en kugleomegn af x_1 , altså er en omegn af x_1 , og hele betingelsen kan derfor kort skrives

$$\forall \varepsilon > 0 (f^{-1}(K_2(x_2, \varepsilon)) \in \dot{U}_1(x_1)).$$

Dette er altså en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, for at f er kontinuert i x_1 . Da enhver omegn af x_2 indeholder en kugleomegn af x_2 , er betingelsen ensbetydende med den tilsyneladende kraftigere betingelse

$$\forall U \in \dot{U}_2(x_2) (f^{-1}(U) \in \dot{U}_1(x_1)),$$

eller sagt i ord, at originalmængden til hver omegn af x_2 er en omegn af x_1 . Denne formulering af kontinuitetsdefinitionen kan anvendes i vilkårlige topologiske rum.

8.15.2. Definition. Lad $T_1 = (M_1, \dot{U}_1)$ og $T_2 = (M_2, \dot{U}_2)$ være topologiske rum. En afbildning $f : T_1 \rightarrow T_2$ kaldes kontinuert

i punktet $x_1 \in T_1$ med billedpunktet $x_2 = f(x_1) \in T_2$, hvis og kun hvis

$$\forall U \in \dot{U}_2(x_2) \quad (f^{-1}(U) \in \dot{U}_1(x_1)).$$

Denne formulering af kontinuitetsdefinitionen er bekvem ved generelle undersøgelser. Ved undersøgelser af specielle funktioner kan man ofte benytte sig af, at det er tilstrækkeligt at eftervise, at betingelsen $f^{-1}(U) \in \dot{U}_1(x_1)$ er opfyldt for enhver omegn $U \in \dot{B}$, hvor $\dot{B}$ er en ægte delmængde af $\dot{U}_2(x_2)$ med den egenskab, at enhver omegn af x_2 indeholder en af mængderne fra $\dot{B}$. En delmængde $\dot{B} \subseteq \dot{U}_2(x_2)$ med denne egenskab kaldes en basis for mængden $\dot{U}_2(x_2)$ af omegn af x_2 . Hvis T_2 specielt er et metrisk rum, udgør mængden af kugler $\{K_2(x_2, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N})\}$ en basis for $\dot{U}_2(x_2)$, og det er således ved afbildninger ind i metriske rum tilstrækkeligt at eftervise betingelsen for denne numerable mængde af omegne.

8.16. Vi vil i det følgende vise nogle sætninger om kontinuerede funktioner og illustrere kontinuitetsbegrebet med enkelte eksempler.

8.16.1. Sætning. Lad $T_1 = (M_1, \dot{U}_1)$, $T_2 = (M_2, \dot{U}_2)$ og $T_3 = (M_3, \dot{U}_3)$, og lad $f : T_1$ ind i T_2 og $g : T_2$ ind i T_3 være afbildninger. Hvis f er kontinuert i $x_1 \in T_1$ med $f(x_1) = x_2 \in T_2$, og hvis endvidere g er kontinuert i x_2 med $g(x_2) = x_3 \in T_3$, da er afbildningen $h = g \circ f : T_1$ ind i T_3 kontinuert i x_1 med $h(x_1) = h(x_3)$.

For $U \in \dot{U}_3(x_3)$ har vi nemlig

$$h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)),$$

og da g er kontinuert, gælder $g^{-1}(U) \in \dot{U}_2(x_2)$, og da f er kontinuert, medfører dette, at $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \dot{U}_1(x_1)$, hvilket viser, at h er kontinuert i x_1 .

8.16.2. Definition. En afbildning $f : T_1$ ind i T_2 , hvor

T_1 og T_2 er topologiske rum, kaldes kontinuert, hvis f er kontinuert i ethvert punkt af T_1 .

Hvis T er et topologisk rum, er den identiske afbildning $e_T : T$ på T selvfølgelig periodisk. Er $T_1 = (M, \dot{U}_1)$ og $T_2 = (M, \dot{U}_2)$ topologiske rum med samme underliggende mængde, har vi en identisk afbildning $e_M : T_1$ på T_2 . For $a \in M$, $U \in \dot{U}_2(a)$ har vi $e_M^{-1}(U) = U$, så kontinuitetsbetingelsen reduceres til $\dot{U}_1(a) \supseteq \dot{U}_2(a)$. Den identiske afbildning $e_M : T_1$ på T_2 er altså kontinuert, hvis og kun hvis topologien $\dot{U}_1$ er finere end topologien $\dot{U}_2$.

En afbildning $f : T_1$ ind i T_2 , hvor T_1 og T_2 er topologiske rum, er kontinuert, hvis T_1 er et diskret rum (d.v.s. et rum med diskret topologi, se 8.13).

Lad T_1 og T_2 være metriske rum med afstandsfunktioner dist_1 og dist_2 . En afbildning $f : T_1$ ind i T_2 kaldes isometrisk, hvis og kun hvis

$$\forall x \in T_1, \forall y \in T_1 \quad (\text{dist}_2(f(x), f(y)) = \text{dist}_1(x, y)).$$

Det ses, at en isometrisk afbildning er 1-1 og kontinuert. Af $x \neq y$ følger nemlig $\text{dist}_2(f(x), f(y)) = \text{dist}_1(x, y) > 0$, hvilket viser, at f er 1-1. At f er kontinuert følger umiddelbart af den oprindelige definition 8.15.1.

Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ et delrum. Vi har da en inklusionsafbildning $i_{A,T} : A$ ind i T defineret ved $i_{A,T}(x) = x$ for alle $x \in A$. Denne afbildning er isometrisk på grund af definitionen af delrum (se 8.7), og som følge deraf kontinuert. Lad nu T_1 være et andet metrisk rum og $f : T$ ind i T_1 en kontinuert afbildning. Restriktionen $f : A$ ind i T_1 er da kontinuert, da den netop er den sammensatte afbildning $f \circ i_{A,T}$. Hvis $g : T$ ind i T_1 er kontinuert i punktet $x \in T$, da

er restriktionen $g : A \text{ ind i } T_1$ kontinuert af x (samme bevis).

Advarsel: Restriktionen $f : A \text{ ind i } T_1$ kan være kontinuert, selv om $f : T \text{ ind i } T_1$ ikke er kontinuert i punkterne af A . F. eks. er den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \text{ irrational} \\ 1 & \text{for } x \text{ rational} \end{cases}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{Z}$ ikke kontinuert i noget punkt, men restriktionen $f : \mathbb{Q} \text{ ind i } \mathbb{Z}$ er kontinuert.

Lad T_1 og T_2 være metriske rum med afstandsfunktioner dist_1 og dist_2 . En afstand $f : T_1 \text{ ind i } T_2$ kaldes afstandsformindskende, hvis

$$\forall x \in T_1 \quad \forall y \in T_1 \quad (\text{dist}_2(f(x), f(y)) \leq \text{dist}_1(x, y)).$$

Af definitionen 8.15.1 fremgår umiddelbart, at en afstandsformindskende afbildning er kontinuert.

Eksempler på afstandsformindskende afbildninger har vi i projektionsafbildningerne $p_{m+q, m} : \mathbb{R}^{m+q} \text{ på } \mathbb{R}^m$, som defineres ved

$$p_{m+q, m}(x_1, \dots, x_{m+q}) = (x_1, \dots, x_m),$$

samt $p_{\infty, m} : \mathbb{R}^{\infty} \text{ på } \mathbb{R}^m$, som defineres ved

$$p_{\infty, m}(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_m),$$

og afbildningerne $p_{\mu} : \mathbb{R}^m \text{ på } \mathbb{R}$, som defineres ved

$$p_{\mu}(x_1, \dots, x_m) = x_{\mu}.$$

Lad $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ (eller i $\mathbb{C}$) være en kontinuert afbildning. Vi kan da danne $f \circ p_{\mu} : \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{R}$ (eller i $\mathbb{C}$), og dette bliver igen en kontinuert afbildning. Sætter vi $g = f \circ p_{\mu}$, har vi

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(x_{\mu}).$$

En kontinuert funktion af én variabel kan således uden videre fortolkes som en kontinuert funktion af flere variable. Hvis f kun er defineret på et interval I , vil $f \circ p_{\mu}$ være defineret på

$p_\mu^{-1}(I)$ og afbilde denne mængde ind i $\mathbb{R}$ (eller i $\mathbb{C}$).

8.17. Vi skal i dette afsnit betragte en mængde M , samt to metriske rum $T_1 = (M, \text{dist}_1)$ og $T_2 = (M, \text{dist}_2)$ med M som underliggende mængde.

8.17.1. Definition. Rummene T_1 og T_2 kaldes ækvivalente, og vi skriver $T_1 \sim T_2$, når følgende betingelser er opfyldt.

$$\forall a \in M \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0 \quad (K_1(a, r) \supseteq K_2(a, s))$$

$$\forall a \in M \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0 \quad (K_2(a, r) \supseteq K_1(a, s)).$$

8.17.2. Sætning. Rummene T_1 og T_2 er ækvivalente, hvis og kun hvis deres topologier $\dot{U}_1$ og $\dot{U}_2$ er identiske.

Lad os først antage, at T_1 og T_2 er ækvivalente. For $a \in M$ betragter vi en omegn $U \in \dot{U}_1(a)$. Ifølge definition af omegn indeholder U en kugleomegn $K_1(a, r)$, og ifølge den første betingelse i 8.17.1 indeholder denne en kugleomegn $K_2(a, s)$, hvilket medfører, at $U \in \dot{U}_2(a)$. Tilsvarende vises, at $U \in \dot{U}_2(a) \Rightarrow U \in \dot{U}_1(a)$, og dermed er det vist, at $\dot{U}_1$ og $\dot{U}_2$ er identiske. Lad os nu på den anden side antage, at $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$. For enhver kugleomegn $K_1(a, r)$ gælder $K_1(a, r) \in \dot{U}_1(a) = \dot{U}_2(a)$, og $K_1(a, r)$ indeholder derfor en kugleomegn $K_2(a, s)$.

Vi kan foretage en klasseinddeling af mængden af metriske rum $T = (M, \text{dist})$ med den givne mængde M som underliggende mængde, idet vi regner to metriske rum til samme klasse, hvis og kun hvis de har samme topologi (altså ved at "sortere" de metriske rum efter dens topologi). Relationen $T_1 \sim T_2$ er ifølge sætning 8.17.2 ensbetydende med, at T_1 og T_2 tilhører samme klasse ved denne inddeling. Heraf følger, at $T_1 \sim T_2$ virkelig er en ækvivalensrelation.

Begrebene kontinuitet og grænseværdi kan, som vi har set, defineres ud fra topologien uden anvendelse af afstandsbegrebet,

og erstatning af afstandsbegrebet med et andet, der giver et metrisk rum ækvivalent med det givne rum T vil derfor ikke ændre noget ved kontinuitet af afbildninger af T eller ind i T og heller ikke ved konvergens af punktfølger i T . Derimod afhænger fundamentalfølgebegrebet på væsentlig måde af afstandsfunktionen, og fuldstændighed (se definition 8.10.1) bevares ikke altid ved overgang til ækvivalente rum (se opgave nr. 20).

8.18. Vi betragter nu endelig mange metriske rum

$$T_{\mu} = (M_{\mu}, \text{dist}_{\mu}), \mu = 1, \dots, m,$$

og vi ønsker at definere et afstandsbegreb på produktmængden

$$M = M_1 \times \dots \times M_m,$$

for hvis elementer vi benytter afkortede $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Vi definerer

$$\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\left(\sum_{\mu=1}^m \text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}) \right)^2}.$$

Det er klart, at den således definerede funktion dist tilfredsstiller 1)-3) i definition 8.2.1. For at vise trekantsuligheden, foretager vi udregningen

$$\begin{aligned} & (\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) + \text{dist}(\underline{y}, \underline{z}))^2 - (\text{dist}(\underline{x}, \underline{z}))^2 = \\ & \left(\sqrt{(\sum \text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}))^2} + \sqrt{(\sum \text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}))^2} \right)^2 - \sum (\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, z_{\mu}))^2 = \\ & \sum \left((\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}))^2 + (\text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}))^2 - (\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, z_{\mu}))^2 \right) + \\ & 2\sqrt{(\sum (\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}))^2) (\sum (\text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}))^2)} = \\ & \sum \left((\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}) + \text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}))^2 - (\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, z_{\mu}))^2 \right) + \\ & 2\left(\sqrt{(\sum (\text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}))^2) (\sum (\text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}))^2)} - \sum \text{dist}_{\mu}(x_{\mu}, y_{\mu}) \text{dist}_{\mu}(y_{\mu}, z_{\mu}) \right). \end{aligned}$$

Her er udtrykket i næstsidste linie ≥ 0 , da trekantsuligheden

gælder for hver dist_μ , og udtrykket i sidste linie er ≥ 0 på grund af Cauchy-Schwarz' ulighed.

Vi har således defineret et metrisk rum $T = (M, \text{dist})$. Det kaldes det metriske produkt af $T_1, \dots, T_m$, og vi skriver

$$T = T_1 \times \dots \times T_m.$$

Vi kunne også indføre andre afstandsfunktioner på produktmængden M . Det er således let at se, at hver af de følgende to funktioner

$$\text{dist}'(\underline{x}, \underline{y}) = \sup \left\{ \text{dist}(x_\mu, y_\mu) \mid \mu \in \{1, \dots, m\} \right\},$$

$$\text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{\mu=1}^m \text{dist}(x_\mu, y_\mu)$$

tilfredsstiller 1)-4) i definition 8.2.1, og vi får således endnu rummene $T' = (M, \text{dist}')$ og $T'' = (M, \text{dist}'')$ med M som underliggende mængde. Vi har nu $T \sim T' \sim T''$. Det ses nemlig umiddelbart, at

$$\text{dist}'(\underline{x}, \underline{y}) \leq \text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) \leq \text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}) \leq m \text{dist}'(\underline{x}, \underline{y}),$$

hvilket for kuglerne $K'(\underline{x}, r)$, $K(\underline{x}, r)$, $K''(\underline{x}, r)$ medfører, at

$$K'(\underline{x}, r) \supseteq K(\underline{x}, r) \supseteq K''(\underline{x}, r) \supseteq K'(\underline{x}, \frac{r}{m}).$$

Rummet $\mathbb{R}^m$ er netop det metriske produkt $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ med m faktorer. Rummene $\mathbb{R}_1^m$ og $\mathbb{R}_2^m$ (se 8.6) er mængden $\mathbb{R}^m$ med afstandsfunktionerne dist' og dist'' ovenfor. Vi har derfor $\mathbb{R}^m \sim \mathbb{R}_1^m \sim \mathbb{R}_2^m$.

8.19. Lad $T = (M, \text{dist})$ være et metrisk rum. Afbildningen $\text{dist} : M \times M \text{ ind i } \mathbb{R}$ kan opfattes som en afbildning

$$\text{dist} : T \times T \text{ ind i } \mathbb{R},$$

og det bevirker, at der er mening i følgende sætning.

8.19.1. Sætning. Afstandsfunktionen dist er kontinuert.

Idet $T'' = (M \times M, \text{dist}'')$, hvor dist' er den ovenfor omtalte afstandsfunktion, defineret ved

$$\text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}) = \text{dist}(x_1, y_1) + \text{dist}(x_2, y_2),$$

får vi for $(x_1, x_2) \in M \times M$, $(y_1, y_2) \in M \times M$, at

$$\text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}) + \text{dist}(x_1, x_2) = \text{dist}(y_1, x_1) + \text{dist}(x_1, x_2) + \text{dist}(x_2, y_2)$$

$$\geq \text{dist}(y_1, x_2) + \text{dist}(x_2, y_2) \geq \text{dist}(y_1, y_2),$$

eller

$$\text{dist}(y_1, y_2) - \text{dist}(x_1, x_2) \leq \text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}).$$

Da vi her kan lade $\underline{x}$ og $\underline{y}$ bytte roller, får vi endda

$$|\text{dist}(y_1, y_2) - \text{dist}(x_1, x_2)| \leq \text{dist}''(\underline{x}, \underline{y}),$$

hvilket viser, at afbildningen $\text{dist}: T''$ ind i $\mathbb{R}$ er afstandsformindskende og derfor kontinuert.

8.20. Vi betragter 4 metriske rum

$$S_1 = (M_1, \text{dist}_1), S_2 = (M_2, \text{dist}_2), T_1 = (N_1, \text{Dist}_1), T_2 = (N_2, \text{Dist}_2),$$

samt afbildninger

$$f_1: S_1 \text{ ind i } T_1, \quad f_2: S_2 \text{ ind i } T_2.$$

Vi definerer da en produktafbildning

$$f = f_1 \times f_2 : S_1 \times S_2 \text{ ind i } T_1 \times T_2,$$

idet vi ganske simpel for $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2$ sætter

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in T_1 \times T_2.$$

8.20.1. Sætning. Hvis f_1 er kontinuert i $a_1 \in S_1$ og f_2 er kontinuert i $a_2 \in S_2$, da er $f = f_1 \times f_2$ kontinuert i (a_1, a_2) .

I stedet for $S_1 \times S_2$ og $T_1 \times T_2$ betragter vi de dermed ækvivalente rum $S' = (M_1 \times M_2, \text{dist}')$, $T' = (M_1 \times M_2, \text{Dist}')$, hvor dist' og Dist' defineres som dist' i 8.18. Vi sætter

$f(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$. Lad nu U være en vilkårlig omegn af (b_1, b_2) .

Da vil U indeholde en kugle $K'(\underline{b}, r) = K(b_1, r) \times K(b_2, r)$. Nu er

$$f^{-1}(K_1(b_1, r) \times K_2(b_2, r)) = f_1^{-1}(K_1(b_1, r)) \times f_2^{-1}(K_2(b_2, r)),$$

og da f_1 og f_2 er kontinuerte, har vi et $s > 0$, således at

$$f_1^{-1}(K_1(b_1, r)) \times f_2^{-1}(K_2(b_2, r)) \supseteq K_1(a_1, s) \times K_2(a_2, s),$$

og denne sidste omegn er indeholdt i $f^{-1}(U)$. Dermed er kon-

tinuiteten af f bevist.

Specielt er en afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defineret ved $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, hvor $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ og $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerte afbildninger. Således definerer

$$y_1 = x_1^2 - 2x_1 + 2, \quad y_2 = \sin 2x_2 - \cos x_2$$

en kontinuert afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, idet vi sætter $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

8.21. Regneoperationerne $+$, $-$, $\cdot$ er afbildninger af $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ på $\mathbb{R}$, f.eks.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ defineret ved $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ defineret ved $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

8.21.1. Sætning. Afbildningerne φ og ψ er kontinuerte.

Beviser for denne sætning er næsten kendt fra gymnasieundervisningen, hvor de forekommer i en lidt ændret skikkelse som bevis for konvergens af sum og produkt af talfølger. Vi viser først sætningen for φ .

Vi betragter et fast punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ med billede $x_1 + x_2$. For $r > 0$ har vi

$$\varphi^{-1}(K(x_1 + x_2, r)) = \{(y_1, y_2) \mid |y_1 + y_2 - x_1 - x_2| < r\}.$$

Nu er

$$U = \{(y_1, y_2) \mid |y_1 - x_1| < \frac{r}{2} \wedge |y_2 - x_2| < \frac{r}{2}\}$$

en omegn af (x_1, x_2) , og for $(y_1, y_2) \in U$ får vi

$|y_1 + y_2 - x_1 - x_2| \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, hvilket viser, at $\varphi^{-1}(K(x_1 + x_2, r)) \supseteq U$, og dermed har vi vist, at φ er kontinuert i (x_1, x_2) .

Vi viser dernæst, at ψ er kontinuert i $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. For $0 < r < 1$ betragter vi

$$\psi^{-1}(K(x_1 x_2, r)) = \{(y_1, y_2) \mid |y_1 y_2 - x_1 x_2| < r\}.$$

Idet vi vælger s som det mindste af tallene

$\frac{1}{2}(|x_1| + 1)^{-1}r$ og $\frac{1}{2}(|x_2| + 1)^{-1}r$, er

$$U = \{(y_1, y_2) \mid |y_1 - x_1| < s \wedge |y_2 - x_2| < s\},$$

er U en omegn af (x_1, x_2) og for $(y_1, y_2) \in U$ får vi

$$|y_1 y_2 - x_1 x_2| = |y_1(y_2 - x_2) + x_2(y_1 - x_1)| \leq$$

$$|y_1| \cdot |y_2 - x_2| + |x_2| \cdot |y_1 - x_1| < (|x_1| + s)s + |x_2|s \leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r$$

hvilket viser, at $\psi^{-1}(K(x_1, x_2, r)) \supseteq U$, og ψ er derfor kontinuert i (x_1, x_2) .

Lad k være et reelt tal. En afbildning $\chi : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}^2$ defineres ved $\chi(x) = (k, x)$. Afbildningen χ er isometrisk og derfor kontinuert. Den sammensatte afbildning $\psi \circ \chi : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er da kontinuert. Nu er $\psi \circ \chi(x) = \psi(k, x) = kx$. Altså er den ved kx definerede funktion kontinuert. Dette i forbindelse med sætning 8.20.1 giver, at $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, -x_2)$ definerer en kontinuert afbildning af $\mathbb{R}^2$ på sig selv, og deraf følger igen, at den ved $x_1 - x_2$ definerede afbildning $\mathbb{R}^2$ på $\mathbb{R}$ er kontinuert.

8.21.2. Sætning. Den ved $f(x) = \frac{1}{x}$ definerede afbildning $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er kontinuert.

Bevis: For $x \neq 0$ og $|h| < \frac{1}{|x|}$ er $U =]\frac{1}{x} - |h|, \frac{1}{x} + |h|[$ en kugleomegn af x , og vi får let

$$f^{-1}(U) =]\frac{x}{1+|h|x}, \frac{x}{1-|h|x}[,$$

hvilket øjensynlig er en omegn af x . Altså er f kontinuert.

Det følger af sætningerne 8.21.2 og 8.20.1, at $(x_1, x_2) \rightarrow (\frac{1}{x_1}, x_2)$ definerer en kontinuert afbildning af det delrum af $\mathbb{R}^2$, hvor $x_1 \neq 0$ på sig selv, og sætning 8.21.1 giver derefter, at den ved $\frac{y}{x}$ definerede funktion er kontinuert på det samme delrum.

8.22. Lad

$$S = (M, \text{dist}), \quad T_\mu = (N_\mu, \text{dist}_\mu), \quad \mu = 1, \dots, m$$

være metriske rum, og lad $T = T_1 \times \dots \times T_m$ være det metriske produktrum. En afbildning

$$\underline{f} : S \text{ ind i } T$$

definerer m koordinatafbildninger

$$p_\mu \circ f : S \text{ ind i } T_\mu,$$

hvor p_μ er den ved

$$p_\mu(x_1, \dots, x_m) = x_\mu$$

definerede projektion $p_\mu : T \text{ ind i } T_\mu$. Har vi omvendt givet m afbildninger $f_\mu : S \text{ ind i } T_\mu$, kan vi definere $\underline{f} : S \text{ ind i } T$, idet vi sætter

$$\underline{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

og vi har da $f_\mu = p_\mu \circ \underline{f}$ for hvert μ . Vi udtrykker denne sammenhæng ved at skrive $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$.

8.22.1. Sætning. Afbildningen $\underline{f}$ er kontinuert, hvis og kun hvis alle koordinatafbildningerne f_μ er kontinuerte.

Det ses umiddelbart, at p_μ er afstandsformindskende og derfor kontinuerte. Altså vil kontinuitet af $\underline{f}$ medføre kontinuitet af $f_\mu = p_\mu \circ \underline{f}$. Lad os nu omvendt antage, at $f_1, \dots, f_m$ er kontinuerte. Vi går nu over til det i 8.18 indførte rum T' , som er ækvi-
valent med T . En kugleomegn af $\underline{f}(x) = (y_1, \dots, y_m) = \underline{y}$ er da givet ved

$$K'(\underline{y}, r) = K_1(y_1, r) \times \dots \times K_m(y_m, r),$$

og vi får derfor

$$\underline{f}^{-1}(K'(\underline{y}, r)) = f_1^{-1}(K_1(y_1, r)) \cap \dots \cap f_m^{-1}(K_m(y_m, r)),$$

og dette er en omegn af x , da det er fællesmængde for m omegne af x .

8.22.2. Sætning. Hvis S er et metrisk rum, og $f : S \text{ ind i } \mathbb{R}$ samt $g : S \text{ ind i } \mathbb{R}$, da er $f+g$, $f-g$ og fg ligeledes kontinuerte. Endvidere er $\frac{g}{f}$ kontinuert i alle de punkter $x \in S$, hvor $f(x) \neq 0$.

Afbildningen fg er nemlig identisk med $\psi \circ (f, g)$, hvor ψ er den i sætning 8.21.1 omtalte afbildning. Analogt for de øvrige tilfælde.

8.23. Vi går nu over til at omtale en række sætninger, som gælder for vilkårlige topologiske rum, og vi vil i første omgang rette opmærksomheden mod det i slutningen af 8.15 omtalte begreb basis. Lad os tænke os, at vi for et topologisk rum $T = (M, \mathring{U})$ har en afbildning $\mathring{B} : T \text{ ind i } \mathring{D}(\mathring{D}(M))$, som til hvert punkt $a \in T$ knytter en basis $\mathring{B}(a)$ for mængden $\mathring{U}(a)$ af omegne af a . Af betingelserne o1) - o5) i 8.11 fremgår, at mængden $\mathring{B}(a)$ for ethvert $a \in T$ har følgende egenskaber

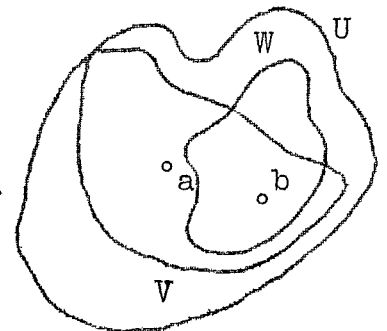
$$b1) \mathring{B}(a) \neq \emptyset.$$

$$b2) \forall U \in \mathring{B}(a) (a \in U).$$

$$b3) \forall U_1, U_2 \in \mathring{B}(a) \exists V \in \mathring{B}(a) (V \subseteq U_1 \cap U_2).$$

$$b4) \forall U \in \mathring{B}(a) \exists V \in \mathring{B}(a) \forall b \in V \exists W \in \mathring{B}(b) (W \subseteq U).$$

Figuren illustrerer den lidt ubehageligt udseende betingelse b4. Det viser sig nu, at en tilordningslov $\mathring{B} : M \text{ ind i } \mathring{D}(\mathring{D}(M))$, som tilfredsstiller b1) - b4), omvendt altid bestemmer en topologi på mængden M , idet vi har følgende sætning.



8.23.1. Sætning. Lad M være en mængde, og $\mathring{B} : M \text{ ind i } \mathring{D}(\mathring{D}(M))$ en tilordningslov, der tilfredsstiller b1) - b4). En ny tilordningslov $\mathring{U} : M \text{ ind i } \mathring{D}(\mathring{D}(M))$ defineres ved, at $\mathring{U}(a)$ skal indeholde netop de delmængder af M , der har en delmængde, som tilhører $\mathring{B}(a)$. Da er $\mathring{U}$ en topologi på M , og for hvert $a \in M$ er $\mathring{B}(a)$ en basis for $\mathring{U}(a)$. Endelig er $\mathring{O}$ mængden af de åbne mængder i $(M, \mathring{U})$.

Vi skal først vise, at $\mathring{U}$ tilfredsstiller o1) - o5) i 8.11. Vi ser, at o3) er en umiddelbar følge af den definition $\mathring{U}(a)$, medens o1), o2) og o4) følger af samme definition i forbindelse med b1), b2) og b3). For $U_1 \in \mathring{U}(a)$ eksisterer $U \in \mathring{B}(a)$ med $U \subseteq U_1$, og vi kan efter b4) vælge et tilsvarende V , så vi for $b \in V$ har

$W \in \mathcal{B}(b)$ med $W \subseteq U \subseteq U_1$, hvilket viser, at o5) er opfyldt. At $\mathcal{B}(a)$ er basis for $\mathcal{U}(a)$ fremgår umiddelbart af definitionen.

8.24. Vi skal nu nærmere diskutere punktmængder i et topologisk rum, og i denne forbindelse indfører vi en række begreber, der er af betydning for de følgende undersøgelser vedrørende matematisk analyse. Vi indleder med en definition.

8.24.1. Definition. Lad $T = (M, \mathcal{U})$ være et topologisk rum, og lad $A \subseteq M$ være en punktmængde i T . Et punkt $a \in A$ kaldes et indre punkt i A , hvis og kun hvis $A \in \mathcal{U}(a)$. Mængden af indre punkter i A kaldes det indre af A og betegnes $\mathring{A}$. En mængde $O \subseteq M$ kaldes åben, hvis og kun hvis $\mathring{O} = O$.

Da $A \in \mathcal{U}(a)$ medfører $a \in A$ gælder trivielt $\mathring{A} \subseteq A$. Vi har iøvrigt:

8.24.2. Sætning. $\mathring{A}$ er åben.

For $a \in \mathring{A}$ gælder $A \in \mathcal{U}(a)$. Ifølge o5) i 8.11 har vi da en omegn $V \in \mathcal{U}(a)$, således at $b \in V$ medfører $A \in \mathcal{U}(b)$, altså $b \in \mathring{A}$. Da dette gælder for alle $b \in V$ har vi $V \subseteq \mathring{A}$, og dette sammen med $V \in \mathcal{U}(a)$ medfører ifølge o3) i 8.11, at $\mathring{A} \in \mathcal{U}(a)$. Dermed er sætningen vist.

8.24.3. Sætning. Mængden $\mathcal{O}$ af åbne mængder i $T = (M, \mathcal{U})$ har følgende egenskaber

å1). $\emptyset \in \mathcal{O} \wedge M \in \mathcal{O}$.

å2). For en vilkårlig familie $\{O_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{O}$ gælder

$$\bigcup_{j \in J} O_j \in \mathcal{O}$$

å3). Af $O_1 \in \mathcal{O} \wedge O_2 \in \mathcal{O}$ følger $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

Egenskaben å1) er triviell. Af

$$a \in \bigcup_{j \in J} O_j = O$$

følger, at der eksisterer et $j \in J$ med $a \in O_j$. Da O_j er åben, er $O_j \in \mathcal{U}(a)$, og da $O \supseteq O_j$ gælder også $O \in \mathcal{U}(a)$, altså O åben. Af

$a \in O_1 \cap O_2$ følger $a \in O_1 \wedge a \in O_2$. Da O_1 og O_2 er åbne, følger heraf $O_1 \in \tilde{U}(a) \wedge O_2 \in \tilde{U}(a)$, altså efter o4) i 8.11 også $O_1 \cap O_2 \in \tilde{U}(a)$, hvilket viser, at $O_1 \cap O_2$ er åben.

8.24.4. Sætning. Lad a være et punkt af T . Vi har da

$$\forall U (U \in \tilde{U}(a) \iff \exists O \in \tilde{\mathcal{O}}(a \in O \subseteq U)).$$

Af $a \in O$ følger $O \in \tilde{U}(a)$, og af $U \supseteq O$ ved o3) fra 8.11, at $U \in \tilde{U}_a$, hvormed inklusionen $\Leftarrow$ er bevist. Til $U \in \tilde{U}(a)$ svarer $V \in \tilde{U}(a)$, således at vi for ethvert $b \in V$ har $U \in \tilde{U}_b$, hvilket netop betyder, at alle $b \in V$ er indre punkter i U , altså, at $V \subseteq \overset{\circ}{U}$. Dette i forbindelse med $V \in \tilde{U}(a)$ giver $\overset{\circ}{U} \in \tilde{U}(a)$. Dermed er $\Rightarrow$ bevist, idet vi vælger $O = \overset{\circ}{U}$, som er åben ifølge sætning 8.24.2.

8.24.5. Sætning. Mængden af åbne mængder, som indeholder punktet $a \in T$, er en basis for $\tilde{U}(a)$.

De åbne mængder, der indeholder a , tilhører $\tilde{U}(a)$, og betingelsen i sætningen 8.24.4 viser netop, at disse mængder udgør en basis i henhold til definitionen i slutningen af 8.15.

8.24.6. Sætning. $\forall O \in \tilde{\mathcal{O}}, \forall A \subseteq T (O \subseteq A \Rightarrow O \subseteq \overset{\circ}{A})$.

Af $a \in O \subseteq A$ følger nemlig $A \in \tilde{U}(a)$, altså $a \in \overset{\circ}{A}$.

8.25. Af sætning 8.24.5 fremgår, at topologien $\tilde{U}$ på det topologiske rum $T = (M, \tilde{U})$ er helt bestemt ved systemet $\tilde{\mathcal{O}}$ af åbne mængder. Denne sammenhæng forstærkes yderligere i kraft af følgende sætning.

8.25.1. Sætning. Lad M være en mængde og $\tilde{\mathcal{O}}$ et system af delmængder af M , således at betingelserne å1), å2) og å3) i sætning 8.24.3 er opfyldt. Der eksisterer da netop en topologi $\tilde{U}$ på M , således at $\tilde{\mathcal{O}}$ netop er mængden af åbne mængder i det topologiske rum $T = (M, \tilde{U})$.

Af sætning 8.24.4 fremgår, at $T = (M, \tilde{U})$ vil medføre, at afbildningen $\tilde{U}$ er defineret ved den i denne sætning anførte rela-

tion, og topologien $\tilde{U}$ kan derfor højst vælges på en måde. For $a \in M$ definerer vi en delmængde $\tilde{B}(a) \subseteq \tilde{O}$ ved, at $0 \in \tilde{O}$ skal tilhøre $\tilde{B}(a)$, hvis og kun hvis $a \in O$. Mængden $\tilde{B}(a)$ vil da tilfredsstille betingelserne b1) - b4) i 8.23 og således ifølge 8.23.1 definere en topologi $\tilde{U}$. For $0 \in \tilde{O}$ og $a \in O$ har vi da $0 \in \tilde{U}(a)$, hvilket viser, at O er åben i topologien $\tilde{U}$. Lad nu $A \subseteq M$ være en åben mængde i topologien $\tilde{U}$. For hvert $x \in A$ kan vi vælge $0(x) \in \tilde{B}(x) \subseteq \tilde{O}$, således at $0(x) \subseteq A$. Vi har da $A = \bigcup_{x \in A} 0(x)$, og da $\tilde{O}$ tilfredsstiller å2) i sætning 8.24.3, medfører dette, at $A \in \tilde{O}$. Dermed er sætningen vist.

Sætning 8.25.1 viser, at et topologisk rum også kan defineres ved hjælp af dets åbne mængder, og vi skriver da $T = (M, \tilde{O})$.

Vi kan udnytte de åbne mængder til formulering af en særlig smuk kontinuitetsbetingelse:

8.25.2. Sætning. Lad $S = (M_1, \tilde{O}_1)$ og $T = (M_2, \tilde{O}_2)$ være topologiske rum. En afbildning $f : S \rightarrow T$ er kontinuert, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall 0 \in \tilde{O}_2 \quad (f^{-1}(0) \in \tilde{O}_1).$$

Hvis f er kontinuert og $x \in f^{-1}(0)$ gælder $f(x) \in O$, altså $0 \in \tilde{U}_2(f(x))$, og på grund af kontinuiteten $f^{-1}(0) \in \tilde{U}_1(x)$, altså $f^{-1}(0)$ åben. Lad nu omvendt f tilfredsstille betingelsen, $x \in S$ og $y = f(x) \in T$. For $U \in \tilde{U}_2(y)$ eksisterer $0 \in \tilde{O}_2$ med $y \in 0 \subseteq U$, og vi har da $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(0)$, hvor $f^{-1}(0) \in \tilde{O}_1^2$. Altså gælder $f^{-1}(U) \in \tilde{U}_1(x)$, hvilket viser, at f er kontinuert.

8.26. Vi indfører endnu nogle nye begreber:

8.26.1. Definition. Lad $T = (M, \tilde{U})$ være et topologisk rum. Lad $A \subseteq M$ være en punktmængde i T , og lad $CA = M \setminus A$ være komplementærmængden til A . Det indre $\overset{\circ}{C}A$ af CA kaldes det ydre for A , og punkterne i $\overset{\circ}{C}A$ kaldes ydre punkter for A . Mængden $\bar{A} = \overset{\circ}{C}(\overset{\circ}{C}A)$ kaldes afslutningen af A og punkterne i $\bar{A}$ kaldes kontaktpunkter for

A. Mængden $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ kaldes randen af A. En mængde $F \subseteq M$ kaldes afsluttet, hvis og kun hvis $\bar{F} = F$.

8.26.2. Sætning. De afsluttede mængder er netop komplementærmængderne til de åbne mængder (og omvendt).

Definitionen af $\bar{A}$ giver $C\bar{A} = \overset{\circ}{A}$. Er nu $\bar{A} = A$, giver denne ligning $CA = \overset{\circ}{A}$, altså CA åben. Er CA åben gælder $CA = \overset{\circ}{A} = C\bar{A}$, altså $A = \bar{A}$ og derfor A afsluttet.

8.26.3. Sætning. $\{\overset{\circ}{A}, \partial A, \bar{A}\}$ er en klasseinddeling af M. Endvidere gælder $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$. En mængde er åben, hvis og kun hvis randen er delmængde af komplementærmængden, og afsluttet, hvis og kun hvis randen er delmængde af selve mængden.

Vi ved allerede, at $\overset{\circ}{A} \subseteq A$, altså $\overset{\circ}{CA} \subseteq CA$, hvilket medfører $C\overset{\circ}{CA} \supseteq CCA = A$, eller $\bar{A} \supseteq A$. Resten af sætningen følger umiddelbart.

For en plan punktmængde, der begrænses af en randkurve, stemmer begreberne indre, ydre og rand med disse ords anskuelige betydning. Mængden er afsluttet, hvis hele randen hører med til den, men åben, hvis intet randpunkt hører med. Hvis en ægte delmængde af randkurven hører til mængden, men resten ikke, er den hverken åben eller afsluttet.

Den tomme mængde og hele rummet er både åbne og afsluttede. I $\mathbb{R}$ har delmængden $\mathbb{Q}$ hverken indre eller ydre punkter, og $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Delmængden $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$ er identisk med sin rand.

8.26.4. Sætning. $\bar{A}$ er afsluttet.

Komplementærmængden $\overset{\circ}{A}$ er nemlig åben.

8.26.5. Sætning. Mængden $\mathfrak{F}$ af afsluttede mængder i $T = (M, \mathfrak{U})$ har følgende egenskaber.

f1). $\emptyset \in \mathfrak{F} \wedge M \in \mathfrak{F}$.

f2). For en vilkårlig familie $\{F_j \mid j \in J\} \subseteq \mathfrak{F}$ gælder

$$\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathfrak{F}$$

f3). Af $F_1 \in \mathfrak{F} \wedge F_2 \in \mathfrak{F}$ følger $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

Dette følger umiddelbart af sætning 8.24.3 ved overgang til komplementærmængderne.

8.26.6. Sætning. $\forall F \in \mathfrak{F} \forall A \subseteq M (F \supseteq A \Rightarrow F \supseteq \bar{A})$

Dette følger umiddelbart af sætning 8.24.6 ved overgang til komplementærmængderne.

8.26.7. Sætning. $\forall A \subseteq M, \forall B \subseteq M \quad (\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B})$.

Da $\overline{A \cup B}$ er afsluttet og $\overline{A \cup B} \supseteq A$ gælder ifølge sætning 8.26.6, at $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A}$. Analogt fås $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{B}$. Men så gælder også $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. På den anden side er $\bar{A} \cup \bar{B}$ afsluttet, så $\bar{A} \cup \bar{B} \supseteq A \cup B$ medfører $\bar{A} \cup \bar{B} \supseteq \overline{A \cup B}$. Dermed er sætningen bevist.

8.27. Vi skal vise nogle sætninger vedrørende sammenhængen mellem konvergens og kontinuitet på den ene side og afsluttet mængde og afslutning på den anden side.

8.27.1. Sætning. Lad $T = (M, \mathfrak{U})$ være et topologisk rum og $A \subseteq M$. Hvis (a_n) er en punktfølge i A , som er konvergent i T med grænsepunkt a , gælder $a \in \bar{A}$.

I modsat fald gjaldt $a \in \overset{\circ}{\bar{A}}$, og a ville da have omegnen $\overset{\circ}{\bar{A}}$, som ikke indeholder noget element af følgen (a_n) .

8.27.2. Sætning. Lad S og T være topologiske rum. En afbildning $f: S \rightarrow T$ er kontinuert, hvis og kun hvis det for enhver afsluttet mængde $F \subseteq T$ gælder, at $f^{-1}(F) \subseteq S$ er afsluttet.

Ved hjælp af relationen $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$ følger sætningen umiddelbart af sætningerne 8.25.2 og 8.26.2.

8.27.3. Sætning. Lad S og T være topologiske rum og $f: S \rightarrow T$ en kontinuert afbildning. Da gælder

$$\forall A \subseteq S \quad (f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}).$$

Mængden $F = \overline{f(A)}$ er afsluttet. Ifølge sætning 8.27.2 er $f^{-1}(F)$ afsluttet. Af $F \supseteq f(A)$ følger $f^{-1}(F) \supseteq A$, altså efter

sætning 8.26.6, at $f^{-1}(F) \supseteq A$, hvilket medfører $F \supseteq f(A)$.

8.28. Vi slutter med en problemstilling, der specielt vedrører afbildninger med en dispositionsmængde, som er et metrisk rum.

8.28.1. Definition. En mængde $A \subseteq T$, hvor T er et topologisk rum, kaldes overalt tæt i T , hvis og kun hvis $\bar{A} = T$.

Dette er ensbetydende med, at $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, og derfor også med, at enhver åben mængde $O \subseteq T$ indeholder punkter af A .

8.28.2. Sætning. Lad S være et topologisk rum og T et metrisk rum. Hvis $f : S \text{ ind i } T$ og $g : S \text{ ind i } T$ er kontinuerte afbildninger, som på en punktmængde $A \subseteq S$ tilfredsstiller

$$\forall x \in A \quad (f(x) = g(x)),$$

da gælder

$$\forall x \in \bar{A} \quad (f(x) = g(x)).$$

Ved sammensætning af afbildningerne

$$(f, g) : S \text{ ind i } T \times T \text{ og } \text{dist} : T \times T \text{ ind i } \mathbb{R}$$

fås den ifølge sætningerne 8.22.1 og 8.19.1 kontinuerte afbildning

$$\text{disto}(f, g) : S \text{ ind i } \mathbb{R},$$

som afbilder $x \in S$ i den reelle værdi $\text{dist}(f(x), g(x))$. Nu er $\{0\} \in \mathbb{R}$ en afsluttet mængde, og ifølge sætning 8.27.2 er dens originalmængde ved $\text{disto}(f, g)$, altså mængden

$$F = \{x \mid \text{dist}(f(x), g(x)) = 0\} = \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

afsluttet, og ifølge det givne gælder $F \supseteq A$. Sætning 8.26.6 giver da $F \supseteq \bar{A}$, altså $f(x) = g(x)$ for $x \in \bar{A}$.

8.28.3. Sætning. Lad S være et topologisk rum, A en punktmængde, som er overalt tæt på S , og T et metrisk rum. Hvis de kontinuerte afbildninger $f : S \text{ ind i } T$ og $g : S \text{ ind i } T$ opfylder ligningen $f(x) = g(x)$ for alle $x \in A$, da er $f = g$.

Dette er blot et specielt tilfælde af sætning 2.28.2. Sætningen benyttes, når man ønsker at udvide gyldighedsområdet for en ligning mellem kontinuerte funktioner til punkter, i hvilke beviset for ligningen har svigtet. Et eksempel på en sådan udvidelse mødte vi i forbindelse med den dekomposition af brudne rationale funktioner, vi benyttede i integrationsteorien (se 6.8).

1. For $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sætter vi

$$\text{dist}(x,y) = \frac{|y-x|}{1 + |y-x|}.$$

Vis, at den således definerede funktion dist tilfredsstiller betingelserne 1)-4) i definition 8.2.1.

2. For $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sætter vi

$$\text{dist}(x,y) = \frac{|y-x|}{1 + |y-x|^2}.$$

Vis, at dist ikke tilfredsstiller trekantsuligheden (forsøg med $x = 0$, $y = 1$ og vælg z meget større end 1).

3. For punkter $\underline{x} = (x_1, x_2)$ og $\underline{y} = (y_1, y_2)$ i planen definerer vi

$$\text{dist}(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|.$$

Vis, at 1)-4) i definition 8.2.1 er opfyldt. Tegn kugleomegnen $K(\underline{0}, 1)$, hvor $\underline{0} = (0, 0)$. Tegn den største kugleomegn af $(\frac{1}{2}, 0)$, som er delmængde af $K(\underline{0}, 1)$ og den største kugleomegn af $(1, 1)$, som ikke har punkter fælles med $K(\underline{0}, 1)$.

4. Samme spørgsmål som i opgave nr. 3, men med afstandsdefinition $\text{dist}(\underline{x}, \underline{y}) = \sup \{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$ og med punktet $(1, 2)$ i stedet for $(1, 1)$ i sidste spørgsmål.
5. I $\mathbb{R}^m$ vælges et talsæt $\underline{\lambda}$ med $\|\underline{\lambda}\| = 1$. Desuden vælges et reelt tal p . Punktmængden

$$\{\underline{x} \mid \underline{\lambda} \cdot \underline{x} = p\}$$

kaldes en hyperplan. Vis, at hyperplanen indeholder netop et punkt med norm $|p|$ og at alle andre punkter i hyperplanen har norm $> |p|$. Vis, at $|\underline{\lambda} \cdot \underline{y} - p|$ for ethvert $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ angiver den mindste værdi af afstanden fra $\underline{y}$ til et punkt i hyperplanen.

6. Angiv sidelængderne og cosinusserne til vinklerne i den tre-

kant i $\mathbb{R}^4$, hvis vinkelspidser er $(0,1,1,2)$, $(0,4,5,2)$ og $(1,2,2,6)$.

7. De tre i 8.7 definerede afstandsfunktioner er alle definerede på mængden l af absolut konvergente talfølger. Vis, at de på denne mængde tilfredsstiller betingelsen

$$\text{dist}(\underline{a}, \underline{b}) \leq \|\underline{b} - \underline{a}\| \leq \text{dist}_1(\underline{a}, \underline{b}),$$

og at forholdene $\|\underline{b} - \underline{a}\| : \text{dist}(\underline{a}, \underline{b})$ og $\text{dist}_1(\underline{a}, \underline{b}) : \|\underline{b} - \underline{a}\|$ for passende valg af talfølgerne $\underline{a}$ og $\underline{b}$ kan blive så store, man ønsker det.

8. I Hilbert-rummet betragtes enhedskuglen $K = \{\underline{a} \mid \|\underline{a}\| < 1\}$. Vi definerer en afbildning $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, idet $f(\underline{x})$ for $\underline{x} \in \mathbb{R}^\infty$ skal være det trediestørste element i følgen $(|x_n|)$. Præciser selv meningen med "trediestørste". Angiv billedmængden $f(K)$.

9. Lad $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots)$ være et punkt af $\mathbb{R}^\infty$. Vi definerer en punktfølge $(\underline{a}_n)$, idet vi sætter $\underline{a}_n = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$. Vis, at $(\underline{a}_n) \rightarrow \underline{a}$ i $\mathbb{R}^\infty$.

10. Vis, at de i 8.7 definerede metriske rum l_p og l_a er fuldstændige.

11. I rummet l_p (se 8.7) betragtes en konvergent følge $(\underline{a}_n) \rightarrow \underline{a}$, hvor $\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots)$ og $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots)$. Det antages, at hver af følgerne (a_{nq}) (fast n) er konvergente, og vi betegner grænseværdien af (a_{nq}) med b_n . Vis, at (a_n) og (b_n) er konvergente med samme grænseværdi. (Svarende til $\varepsilon > 0$ vælges N , således at $n \geq N$ sikrer at $|a_{nq} - a_q| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ for alle q . Her foretages grænseovergangen $q \rightarrow \infty$, og det ses, at (b_n) konvergerer mod en grænseværdi a . Dernæst vælges et fast $n \geq N$, og det vises, at $|a_q - a| \leq |a_{nq} - b_n| + \frac{2}{3} \varepsilon$, hvorefter påstanden let bevises).

12. Vis ved hjælp af resultatet i opgave 11, at de konvergente følger i rummet l_p udgør et fuldstændigt delrum.
13. En afbildning $\hat{U} : \hat{N} \text{ ind i } \hat{D}(\hat{D}(\hat{N}))$ defineres ved, at $\hat{U}(n)$ for $n \in \hat{N}$ indeholder netop de delmængder af $\hat{N}$, som omfatter alle divisorer i n . Vis, at $\hat{D} = (\hat{N}, \hat{U})$ er et topologisk rum. Tallet 1 tilhører enhver omegn i rummet $\hat{D}$, og intet andet tal har denne egenskab.
14. En afbildning $\hat{U}_1 : \hat{N} \text{ ind i } \hat{D}(\hat{D}(\hat{N}))$ defineres ved, at $\hat{U}(n)$ for $n \in \hat{N}$ indeholder netop de delmængder af $\hat{N}$, som omfatter alle naturlige tal med n som divisor. Vis, at $\hat{M} = (\hat{N}, \hat{U})$ er et topologisk rum. I dette rum er fællesmængden for endelig mange omegne (af flere punkter) aldrig tom, men intet punkt er fælles for alle omegne.
15. En afbildning $\hat{U} : \hat{Z} \text{ ind i } \hat{D}(\hat{D}(\hat{N}))$ defineres ved, at $\hat{U}(n)$ for $n \in \hat{Z}$ indeholder netop de delmængder af $\hat{Z}$, som indeholder en mængde af formen
- $$\{n + kp \mid k \in \hat{Z}\}, \quad p \in \hat{N}.$$
- Vis, at $\hat{Z}_d = (\hat{Z}, \hat{U})$ er et topologisk rum. Vis, at 2 forskellige punkter $n_1 \in \hat{Z}_d$, $n_2 \in \hat{Z}_d$ altid har omegne $U_1 \in \hat{U}(n_1)$ og $U_2 \in \hat{U}(n_2)$ med $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
16. Lad T være et topologisk rum, som kun omfatter endelig mange punkter. Vis, at ethvert punkt $x \in T$ har en bestemt omegn $U(x)$, som er delmængde af enhver omegn af x . Vis, at $U(x)$ er omegn af ethvert punkt $y \in U(x)$.
17. Find for alle de afbildninger $\hat{U} : M \text{ ind i } \hat{D}(\hat{D}(M))$, som for en mængde M med 2 eller 3 elementer tilfredsstiller betingelserne 01 - 05 i 8,11.

18. Vi skriver $\operatorname{Arctg} \infty = \frac{\pi}{2}$ og $\operatorname{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Vis, at

$$\operatorname{dist}(x,y) = |\operatorname{Arctg} y - \operatorname{Arctg} x|$$

er en afstandsfunktion på mængden $M = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Vis, at topologien på det metriske rum (M, dist) er identisk med topologien på den udvidede tallinie $\mathbb{R}^*$.

19. Lad $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{R}^*$ være mængden $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ opfattet som delrum, og lad $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ (eller ind i et metrisk rum T) være en afbildning. Vis, at φ er kontinuert, hvis og kun hvis følgen $(\varphi(n))$ er konvergent med grænseværdi $\varphi(\infty)$.

20. Vis, at det i opgave nr. 18 definerede metriske rum er fuldstændigt, men at det delrum, der fås ved at udelade $+\infty$ og $-\infty$, ikke er fuldstændigt, skønt det har samme underliggende rum og samme topologi som $\mathbb{R}$.

21. Vis, at den ved $\varphi(\underline{x}) = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ definerede afbildning $\varphi : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert.

22. Den i 8.7 omtalte mængde l , der organiseredes som det metriske rum l_a , kan også organiseres som et delrum $l'_b \subseteq l_b$ og som et delrum $l_h \subseteq \mathbb{R}^\infty$. Vis, at l_a , l'_b og l_h har hver sin topologi, og undersøg, om der er en fineste og en groveste topologi blandt dem.

23. Lad T være et metrisk rum, og lad $f_\nu : T \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, n$ være kontinuerte afbildninger. En ny afbildning $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ defineres ved

$$f(x) = \sup \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Vis, at f er kontinuert.

24. Lad T være et metrisk rum og K et positivt tal. Lad $f_\nu : T \rightarrow [-K, K]$ være kontinuert afbildning. Vis, at den ved

$$f(x) = \sup\{f_\nu(x) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$$

definerede afbildning $f : T$ ind i $\mathbb{R}$ ikke for ethvert valg af $f_1, f_2, \dots$ vil være kontinuert.

25. Lad $\hat{D}$ betegne det i opgave 13 indførte topologiske rum, og lad k være et naturligt tal. Undersøg om de ved

$$f_1(n) = n + k, f_2(n) = kn, f_3(x) = n^k$$

definerede afbildninger $f_\nu : \hat{D}$ ind i $\hat{D}$ er kontinuerte.

26. Samme spørgsmål med $\hat{D}$ erstattet med det i opgave nr. 14 indførte rum $\hat{M}$.

27. Vis, at den ved $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$, hvor $\underline{x} \cdot \underline{y}$ er det i 8.4 indførte indre produkt, definerer en kontinuert afbildning $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}$.

28. En afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ defineres ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-1} & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

Vis, at de ved $\varphi_b(x) = f(x, b)$ og $\psi_a(x) = f(a, x)$ definerede funktioner alle er kontinuerte for alle x . Vis, at $f(\underline{x})$ er konstant på rette linier gennem $\underline{0}$. Vis, at $f(\underline{x})$ er diskontinuert i $\underline{0}$.

29. En afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ defineres ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x_1 x_2^2 (x_1^2 + x_2^4)^{-1} & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

Vis, at f er kontinuert for $\underline{x} \neq \underline{0}$. Vis, at det for enhver ret linie gennem $\underline{0}$ gælder, at restriktionen af f til denne linie er kontinuert. Skitser $f^{-1}(k)$ for forskellige $k \in \mathbb{R}$. Vis, at f er diskontinuert i $\underline{0}$.

30. Vis, at man for det i opgave 13 indførte rum $\hat{D}$ for $n \in \mathbb{N}$ kan angive en basis $\hat{B}(n)$ omfattende et eneste element for mængden $\hat{U}(n)$.

31. Som opgave nr. 30, men for det i opgave 14 indførte rum $\hat{M}$.
32. Med $\dot{O}_1$ og $\dot{O}_2$ betegner vi mængderne af åbne mængder i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$.
 Vis, at den ved $f(x_1, x_2) = x_1$ definerede projektionsafbildning $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har følgende egenskab

$$\forall O \in \dot{O}_2 \quad (f(O) \in \dot{O}_1).$$
33. Lad $O \subseteq \mathbb{R}$ være en ikke tom, åben mængde. Vis, at $\sup O$ ikke er element af O . Lad $F \subseteq \mathbb{R}$ være en ikke tom, afsluttet mængde med $\sup F < \infty$. Vis, at $\sup F \in F$.
34. Angiv indre, ydre, rand og afslutning, og opgiv om eventuelt åben eller afsluttet for hver af følgende punktmængder i $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\}, \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\},$$

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) > 0\}.$$
35. Samme spørgsmål vedrørende følgende punktmængder i $\mathbb{R}$:

$$\left\{ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^r} \mid p, q, r \in \mathbb{N} \wedge p < q < r \right\}.$$

$$\left\{ x \mid \cos x \neq 0 \wedge \exists n \in \mathbb{N} \left(\operatorname{tg}^n x \leq \frac{1}{4} \right) \right\}.$$
36. Samme spørgsmål vedrørende følgende punktmængde i $\mathbb{R}^4$ (idet vi skriver $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$):

$$\{ \underline{x} \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \cap \{ \underline{x} \mid x_3^2 + x_4^2 \leq 1 \}$$

$$\{ (\cos 2\theta, \sin 2\theta, \cos 3\theta, \sin 3\theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \}.$$
37. Samme spørgsmål vedrørende følgende punktmængder i det i opgave 13 indførte topologiske rum $\hat{D}$:

$$\{1\}, \{15\}, \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}, \{n! \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
38. Samme spørgsmål vedrørende følgende punktmængder i det i opgave 15 indførte topologiske rum $\hat{Z}_d$:

$$\{15\}, \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
39. Lad T være et topologisk rum og $F \subseteq T$ en åben mængde, men $O \subseteq T$ en afsluttet mængde. Vis, at $F \setminus O$ er afsluttet og $O \setminus F$ åben.

40. Lad A og B være punktmængder i et topologisk rum T . Vis relationerne

$$\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B, \quad \partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B.$$

Vejledning: Planens punkter kan inddeles i 9 klasser, nemlig de der er indre i både A og B , de, der er indre i A og randpunkter for B o.s.v. Undersøg for hver af disse klasser om dens punkter kan komme i betragtning som randpunkter for $A \cup B$ eller for $A \cap B$. Derved fås et ret kluntet bevis. Revider det, så det bliver så kort og klart som muligt.

41. Lad F_1 og F_2 være afsluttede punktmængder i et topologisk rum T . Vis relationen

$$\partial(F_1 \cap F_2) = (F_2 \cap \partial F_1) \cup (F_1 \cap \partial F_2).$$

42. Bevis følgende logiske relation for to punktmængder A og B i et topologisk rum T :

$$A \subseteq B \Rightarrow (\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B} \wedge \bar{A} \subseteq \bar{B}).$$

43. Bevis følgende relation for to punktmængder A og B i et topologisk rum T :

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Angiv et eksempel for (f.eks. i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^2$), hvor mængderne $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ og $\bar{A} \cap \bar{B}$ to og to er indbyrdes forskellige.

44. Bevis nedenstående påstande vedrørende punktmængder i et metrisk rum $T = (M, \dot{U}) = (M, \partial)$. Enkelte fejl (forkerte logiske tegn, ombyttede kvantorer) har indsneget sig i de anførte relationer, og de skal selvfølgelig først rettes.

a) Lad A være en punktmængde. Da gælder

$$\forall a \in T \quad (a \in \bar{A} \iff \exists U \in \dot{U}(a) \quad (U \cap A \neq \emptyset)).$$

b) Punktmængden A er åben, hvis og kun hvis

$$\forall a \in T \quad (a \in A \Rightarrow \exists U \quad (U \in \dot{U}(a) \Rightarrow U \subseteq A)).$$

c) For en punktmængde A gælder

$$\forall a \in T \ (a \in \partial A \iff \exists x \in A \ \exists y \in \complement A \ \forall U \in \mathcal{U}(a) \ (x \in U \wedge y \notin U)).$$

d) For punktmængder A og B gælder

$$A \cap B = \emptyset \iff \forall a \in T \ \exists U \in \mathcal{U}(a) \ (U \cap A = \emptyset \wedge U \cap B = \emptyset).$$

45. En kontinuert afbildning $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ (\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)).$$

Vi sætter $\varphi(1) = k$. Vis, at

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (\varphi(x) = kx).$$

(Vis først, at $\varphi(x) = kx$, når x er rational og benyt derefter sætning 8.28.2).

Vanskeligere opgaver.

46. Vis, at potensrækken $\sum a_n x^n$ har konvergensradius $r \geq 1$, når $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots)$ er et punkt i $\mathbb{R}^\infty$ (bemærk, at indices begynder med 0). Vi definerer en afbildning $f : \mathbb{R}^\infty \times]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, idet vi sætter

$$f(\underline{a}, x) = \sum a_n x^n.$$

Bevis uligheden

$$|f(\underline{b}, x) - f(\underline{a}, x)| \leq \frac{\|\underline{b} - \underline{a}\|}{\sqrt{1-x^2}},$$

og vis dernæst, at afbildningen f er kontinuert.

47. Vi betragter et metrisk rum $T = (M, \text{dist})$, i hvilket trekantsuligheden gælder i den forstærkede form

$$\text{dist}(x, z) \leq \sup \{ \text{dist}(x, y), \text{dist}(y, z) \}$$

for alle $x, y, z \in T$. Vis, at en kugleomegn $K(a, r)$ har følgende egenskab:

$$\text{dist}(x, y) < r, \text{ hvis } x \in K(a, r) \text{ og } y \in K(a, r)$$

$$\text{dist}(x, y) \geq r, \text{ hvis } x \in K(a, r) \text{ men } y \notin K(a, r).$$

For $r > 0$ definerer vi en relation $\tilde{r}$, idet vi for $x \in T$, $y \in T$ skriver $x \tilde{r} y$, hvis og kun hvis $\text{dist}(x,y) < r$. Vis, at $\tilde{r}$ er en ækvivalensrelation, og at ækvivalensklasserne netop er kugleomegnene med radius r . Rummet T kan altså overdækkes med disjunkte kugleomegne.

48. Lad p være et primtal. Ethvert rationalt tal a har nøjagtig én fremstilling på formen $a = p^\nu \frac{\alpha}{\beta}$, hvor $\beta \in \mathbb{N}$ og $\nu, \alpha \in \mathbb{Z}$ og $\frac{\alpha}{\beta}$ er uforkortelig. Vi sætter $|a|_p = p^{-\nu}$. Vis de for $a, b \in \mathbb{Q}$ gyldige relationer

$$|a|_p |b|_p = |ab|_p, \quad |a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p.$$

(Skriv $a = p_1^{\nu_1} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $b = p_2^{\nu_2} \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, og undersøg, hvilken potens af p , der kan sættes udenfor parentes i ab og $a+b$). Vi definerer et metrisk rum $\mathbb{Q}_p$, idet vi sætter

$$\text{dist}(a,b) = |b-a|_p.$$

Vis, at dette rum får de i opgave 47 omtalte egenskaber, og illustrer udseendet af en kugleomegn på en tallinie. Vis, at følgen $(n!)$ bliver konvergent i $\mathbb{Q}_p$ og angiv grænseværdien.

49. Vis, at delmængden $\{\underline{a} \mid \|\underline{a}\| < 2\}$ af $\mathbb{R}^\infty$ indeholder en følge af indbyrdes disjunkte kugleomegne med radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

50. Vis, at de ved $\varphi(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ og $\psi(z_1, z_2) = z_1 z_2$ definerede afbildninger af $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er kontinuerte. Formuler og bevis en tilsvarende sætning om division.

51. Vis, at den ved $f(z_1, z_2) = 2z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2)^{-1}$ er en kontinuert afbildning af delmængden $\{(z_1, z_2) \mid z_1^2 + z_2^2 \neq 0\}$ af $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$, og bevis, at enhver omegn af $(0,0)$ afbildes på $\mathbb{C}$.

52. Vi skriver $\text{Arctg } \infty = \frac{\pi}{2}$ og $\text{Arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Vis, at (se MA 2, opgave 12)

$$\text{dist}(x,y) = \text{Arctg } |y-x|$$

er en afstandsfunktion på mængden $M = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, og at denne afstandsfunktion på $\mathbb{R}$ er ækvivalent med den sædvanlige afstand. Hvilke mængder bliver omegne af $+\infty$ (og af $-\infty$) i det metriske rum (M, dist) . Vis, at rummet (M, dist) ikke er fuldstændigt, og at det til $\mathbb{R}$ svarende delrum heller ikke er fuldstændigt.

53. Lad M være en mængde og $\varphi : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ en afbildning, som opfylder betingelserne:

- 1) $\varphi(x, x) = 0$ for alle $x \in M$
- 2) $\varphi(x, y) \geq 0$ for alle $x, y \in M$
- 3) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ for alle $x, y \in M$
- 4) $\varphi(x, z) \leq \varphi(x, y) + \varphi(y, z)$ for alle $x, y, z \in M$.

Rummet M kaldes da et præ-metrisk rum med præ-afstandsfunktionen φ . Vis, at $\varphi(x, y) = 0$ er en ækvivalensrelation på M , og at det for to vilkårlige klasser X og Y i den tilsvarende klasseinddeling gælder, at $\varphi(x, y)$ antager samme værdi for alle valg af $x \in X$ og $y \in Y$, således at vi kan definere $\text{dist}(X, Y) = \varphi(x, y)$. Vis, at dist er en afstandsfunktion på mængden af ækvivalensklasser.

54. Lad M være en mængde og $T = (N, \hat{U})$ et topologisk rum. Lad $f : M \rightarrow T$ være en vilkårlig afbildning. For $a \in M$ sætter vi

$$\hat{B}(a) = \{ f^{-1}(U) \mid U \in \hat{U}(f(a)) \}.$$

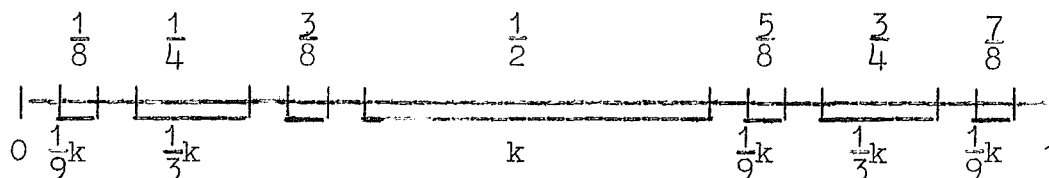
Vis, at afbildningen $\hat{B}$ har egenskaberne b1) - b4) i §8.23.

Vis, at f bliver kontinuert, når M udstyres med den ved $\hat{B}$ bestemte topologi $\hat{U}_1$.

Eksempel: Vi vælger $M = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ix}$. Vis, at de på $(\mathbb{R}, \hat{U}_1)$ kontinuerte funktioner bliver de af de sædvanlige kontinuerte funktioner, der har 2π som periode (d.v.s. de funktioner $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, som tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(x - 2\pi) = \varphi(x)).$$

55. For $k \in]0, \frac{1}{3}]$ indlægger vi på intervallet $I = [0, 1]$ et interval af længde k , dernæst 2 intervaller af længde $\frac{1}{3}k$, dernæst 4 intervaller af længde $\frac{1}{9}k$, o.s.v., således at de nye intervaller hele tiden placeres midt i de tiloversblevne delintervaller (se følgende skitse).



Vis, at processen virkelig kan fortsættes i det uendelige. Foreningsmængden af de indlagte intervaller, der skal være åbne, er en åben mængde O , og $F = I \setminus O$ er en afsluttet mængde. Vis, at enhver omegn af et punkt af F indeholder uendelig mange punkter af F .

En afbildning $g: O \text{ ind i } I$ defineres, således at g på hvert af de indskudte intervaller har den konstante værdi, der er anført på skitsen ovenfor. Vi definerer dernæst en afbildning $f: I \text{ ind i } I$, idet vi sætter

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ \sup g(O \cap [0, x]) & \text{for } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Vis, at f er voksende, afbilder I på I og er kontinuert. Vis, at $f(F) = I$, og udled deraf, at F ikke er numerabel. Læg mærke til, at f for $k = \frac{1}{3}$ er konstant på intervaller med samlet længde 1.

56. Lad $T = (M, \mathcal{U})$ være et topologisk rum, og lad $\mathcal{O}$ og $\mathcal{F}$ være mængderne af åbne og af afsluttede mængder på T . Vis, at følgende 3 udsagn er indbyrdes ækvivalente:

$$\forall x \in T \quad \forall y \in T \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) \quad (y \notin \bar{U}(x)).$$

$$\forall x \in T \quad (\{x\} \in \mathcal{F}).$$

$$\forall x \in T \quad \left(\bigcap_{x \in O \in \mathcal{O}} O = \{x\} \right).$$

57. Undersøg om følgende 2 relationer gælder almindeligt for punktmængder A og B i et topologisk rum.

$$\overline{\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

58. For en mængde M foreligger en afbildning $\varphi: \mathcal{D}(M)$ ind i $\mathcal{D}(M)$ af mængden af delmængder af M ind i sig selv. Det antages, at φ opfylder følgende betingelser:

- 1) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$,
- 2) $\forall A \in \mathcal{D}(M) \quad (\varphi(A) \supseteq A \wedge \varphi(\varphi(A)) = \varphi(A))$,
- 3) $\forall A \in \mathcal{D}(M) \quad \forall B \in \mathcal{D}(M) \quad (\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B))$.

Vi definerer nu en mængde $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{D}(M))$ på følgende måde:

$$\forall O \in \mathcal{D}(M) \quad (O \in \mathcal{O} \iff \exists A \in \mathcal{D}(M) \quad (\varphi(A) = \bigcup_M O)).$$

Vis, at $T = (M, \mathcal{O})$ er et topologisk rum med $\mathcal{O}$ som mængden af åbne mængder, og at $\varphi(A) = \overline{A}$ for alle $A \in \mathcal{D}(M)$.

59. Lad T være et topologisk rum og A en vilkårlig punktmængde i T . Vi definerer en punktmængde A' (mængden af fortætningspunkter for A) på følgende måde:

$$\forall a \in T \quad (a \in A' \iff a \in \overline{A \setminus \{a\}}).$$

Vis, at $a \in A'$, hvis og kun hvis enhver omegn af a indeholder et fra a forskelligt punkt af A . Vis, at A' er afsluttet.

60. Vis, at der eksisterer en numerabel, overalt tæt punktmængde i $\mathbb{R}^\infty$.

Svare opgaver.

61. Lad A være en punktmængde i et topologisk rum. Et punkt $a \in A$ kaldes et isoleret punkt af A , hvis der eksisterer en omegn af a , der ikke indeholder noget fra A forskelligt punkt af A .

Vis, at enhver afsluttet, numerabel mængde i $\mathbb{R}$ har et isoleret punkt.

62. Vis, at hvert element a i det i opgave 48 definerede topologiske rum $\mathbb{Q}_p$ har én og kun én fremstilling på formen

$$(1) \quad a = \frac{1}{p^k} (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots),$$

hvor $0 \leq a_\nu < p$ for $\nu = 0, 1, 2, \dots$, og hvor den uendelige række er konvergent i rummet $\mathbb{Q}_p$. Vis, at følgen (a_n) bliver periodisk. Man kan regne med disse udtryk på lignende måde som med decimalbrøker, men med menteoverføring mod højre. Hvorledes udføres division? (Prøv med taleksempler).

Vis, at regneoperationerne i $\mathbb{Q}_p$ er kontinuerte med den sædvanlige undtagelse for divisionens vedkommende. Vis, at $\mathbb{Q}_p$ ikke er et fuldstændigt rum.

Vis, at regneoperationerne og definitionen af normen $|a|_p$ på naturlig måde kan udvides til alle formelle udtryk af formen (1), og at man derved får et fuldstændigt, metrisk rum $\mathbb{Q}_p^*$ med kontinuerte regneoprationer. Rummet $\mathbb{Q}_p^*$ kaldes rummet af p -adiske tal.

Differentiable funktioner.

9.1. Vi skal videreføre behandlingen af det i gymnasieundervisningen omtalte differentiabilitybegreb, og vi skal især interessere os for generalisation af dette begreb til afbildninger af områder i flerdimensionale rum ind i hinanden.

Vi vil som i kapitel 8 anvende betegnelser som $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ for punkter i $\mathbb{R}^m$. En punktmængde af formen

$$\{\underline{a} + t\underline{\beta} \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \underline{\beta} \neq 0$$

kaldes en ret linie, og $\underline{\beta}$ kaldes et retningssæt for linien. Ethvert punkt i $\mathbb{R}^m$ undtagen $\underline{0}$ kan således også fortolkes som retningssæt. Er $\|\underline{\beta}\| = 1$, kaldes $\underline{\beta}$ normeret. De specielle retningssæt

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\underline{e}_m = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

kaldes basissættene i $\mathbb{R}^m$. For $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ gælder altid

$$(1) \quad \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_m \underline{e}_m.$$

9.2. Det komplekse m -dimensionale rum $\mathbb{C}^m$ består af alle komplekse talsæt $\underline{z} = (z_1, \dots, z_m)$, $z_\mu = x_\mu + iy_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$ med længdedefinitionen

$$\|\underline{z}\| = \sqrt{(|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2)},$$

og afstanden mellem $\underline{z}_1$ og $\underline{z}_2$ defineret ved $\|\underline{z}_2 - \underline{z}_1\|$. Vi definerer en afbildning $\phi : \mathbb{C}^m$ ind i $\mathbb{R}^{2m}$, idet vi sætter

$$\phi(z_1, \dots, z_m) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m).$$

Denne afbildning bliver isometrisk, og vi kan derfor benytte geometrien i $\mathbb{R}^{2m}$ på $\mathbb{C}^m$, således at det ikke er nødvendigt at indføre en særlig, kompleks geometri på dette rum. Vi skal ikke gå dybt

ind i differentiationsteorien ved afbildninger af komplekse rum, men de mest elementære afsnit af teorien kan i nogen udstrækning overføres uændret, og vi kan med ringe besvær opnå ret væsentlige fordele.

9.3. Grundlæggende for differentiationsteorien er begrebet lineær afbildning.

9.3.1. Definition. En afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ kaldes lineær, hvis og kun hvis

$$(2) \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\underline{f}(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha \underline{f}(\underline{x}) + \beta \underline{f}(\underline{y})).$$

Analogt defineres linearitet af $\underline{f} : \mathbb{C}^m$ ind i $\mathbb{C}^n$, idet α og β tages komplekse. En afbildning af en delmængde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eller $\mathbb{C}^m$ kaldes lineær, hvis og kun hvis den er restriktion af en lineær afbildning.

Af (1) følger i det reelle tilfælde ved gentagen anvendelse af (2)

$$\underline{f}(\underline{x}) = x_1 \underline{f}(\underline{e}_1) + \dots + x_m \underline{f}(\underline{e}_m)$$

og analogt i det komplekse tilfælde. Er nu $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ punkter i $\mathbb{R}^n$, da er på den anden side den ved

$$(3) \quad \underline{f}(\underline{x}) = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_m \underline{a}_m$$

en lineær afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$. Det ses, at der findes netop 1 lineær afbildning, som afbilder basisvektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ i hver sin givne billedvektor. Er nu

$$\underline{a}_\mu = (a_{\mu 1}, \dots, a_{\mu n}), \quad \mu = 1, \dots, m,$$

kan (3) skrives

$$\underline{y}_\nu = x_1 a_{1\nu} + \dots + x_m a_{m\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

idet vi har sat $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{y}$.

9.3.2. Sætning. Hvis $\underline{f} : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ og $\underline{g} : \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}^p$ er lineære, da er $\underline{g} \circ \underline{f} : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^p$ lineær.

Vi har nemlig

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) &= g(f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y})) = g(\alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y})) = \\ &= \alpha g(f(\underline{x})) + \beta g(f(\underline{y})) = \alpha g \circ f(\underline{x}) + \beta g \circ f(\underline{y}). \end{aligned}$$

I kursus over algebra og geometri vil teorien for lineære afbildninger blive behandlet under mere generelle forudsætninger og langt mere detaljeret. Ovenstående korte bemærkninger vil være tilstrækkelige som grundlag for vore undersøgelser i dette kapitel.

9.4. I gymnasieundervisningen indføres begrebet grænseværdi af en funktion forud for begrebet kontinuitet, og en kontinuert funktion defineres som en funktion hvis funktionsværdi i et punkt altid er lig med grænseværdien i punktet. Vi har indført kontinuitet uafhængigt af grænseværdibegrebet, og vi kan nu udnytte dette, idet vi kan definere grænseværdi ved hjælp af kontinuitet. I et senere kapitel vil vi generalisere grænseværdi begrebet meget væsentligt og i denne omgang indfører vi da også blot et grænseværdibegreb, der lige netop er tilstrækkelig generelt til at kunne tjene som grundlag for en teori for differentiable afbildninger.

Lad S og T være metriske rum og lad $A \subseteq S$ være en vilkårlig delmængde. For at vi kan tale om grænseværdien i et punkt $a \in S$ for en afbildning $f : A \rightarrow T$, må vi for det første forlange en vis intim forbindelse mellem a og A . Nu er det væsentligt for grænseværdibegrebet, at det eventuelle billede af selve punktet a ikke må spille nogen rolle. Vi kræver derfor, at a er kontaktpunkt for $A \setminus \{a\}$. Deraf følger, at enhver omegn $U \in \mathcal{U}(a)$ indeholder fra a forskellige punkter af A . Hvis U f.eks. indeholder punkterne $b_1, \dots, b_n \in A$, som alle er $\neq a$, vil $U \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ være en omegn af a og derfor indeholde et punkt $b_{n+1} \neq b_\nu$ for $\nu = 1, \dots, n$. Heraf fremgår, at omegnen U indehol-

der uendelig mange punkter af A . Vi siger, at a er fortætningspunkt for A . Et fortætningspunkt for A vil tilhøre $\bar{A}$. Et punkt b , der tilhører A uden at være fortætningspunkt for A , kaldes et isoleret punkt i A . Det har en omegn, som ikke indeholder andre punkter af A . Vi kan nu definere begrebet grænseværdi:

9.4.1. Definition. Lad S og T være metriske rum, $A \subseteq S$ en delmængde og $f : A \rightarrow T$ en afbildning. Vi siger, at f har grænsepunktet c , når x går mod a på A , såfremt den ved

$$f_1(x) = \begin{cases} c & \text{for } x = a \\ f(x) & \text{for } x \in A \setminus \{a\} \end{cases}$$

definerede afbildning er kontinuert i a . Vi skriver da

$$f(x) \rightarrow c \text{ for } x \rightarrow a \text{ på } A$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

Mængden A anføres i betegnelsen, fordi f kan være en indskrænkning af en afbildning af en mere omfattende mængde. Når der ikke er fare for misforståelse vil vi udelade index A .

9.4.2. Sætning. Den i definition 9.4.1 indførte grænseværdi c er entydigt bestemt ved f og A .

Dette følger umiddelbart af sætning 8.28.3, idet $A \setminus \{a\}$ er en overalt tæt mængde på delrummet $A \cup \{a\} \subseteq S$.

9.4.3. Sætning. Lad U være en omegn af A . Den i definition 9.4.1 omtalte afbildning f vil have grænseværdien c , når x går mod a på A , hvis og kun hvis den har grænseværdien c , når x går mod a på $U \cap A$.

Dette følger umiddelbart af, at det ved undersøgelsen af om f_1 er kontinuert i a , er tilstrækkeligt at se på de omegne af a , der er delmængder af U .

I det specialtilfælde, hvor $T = \mathbb{R}$ eller $T = \mathbb{R}^p$, får vi sæt-

ningerne om regning med grænseværdier som umiddelbare konsekvenser af sætningerne om regning med kontinuerte funktioner.

9.5. Vi specialiserer nu, idet vi vælger $S = \mathbb{R}^m$ og $T = \mathbb{R}^n$. Generalisationen til komplekse rum vil være helt umiddelbar, og vi skal ikke ofre den nærmere omtale. Vi betragter en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ med punktet $\underline{0}$ som fortætningspunkt.

9.5.1. Definition. Med $o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$, $q \in \mathbb{Z}$, betegner vi mængden

$$\{\underline{\varepsilon}^q : A \text{ ind i } \mathbb{R}^n \mid \|\underline{h}\|^{-q} \underline{\varepsilon}^q(\underline{h}) \rightarrow 0 \text{ for } \underline{h} \rightarrow \underline{0} \text{ på } A\}.$$

Her er $\underline{\varepsilon}^q$ altså en afbildning, og i betegnelsen $\underline{\varepsilon}^q$ er q index og ikke exponent. Når vi anvender betegnelser som $\underline{\varepsilon}^q$, $\underline{\varepsilon}_\mu^q$, $\underline{\varepsilon}_{\mu\nu}^q, \dots$ for afbildninger skal det altid betyde, at de er elementer af $o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$ for passende A og n . Når det ikke giver fare for misforståelser, skriver vi $o(\|\underline{h}\|^q)$ i stedet for $o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$.

9.5.2. Sætning. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $\varphi \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$, er det, at der eksisterer en i punktet $\underline{0}$ kontinuert afbildning $\underline{\psi} : A \cup \{\underline{0}\}$ ind i $\mathbb{R}^n$ med $\underline{\psi}(\underline{0}) = \underline{0}$, således at $\varphi = \|\underline{h}\|^q \underline{\psi}$.

Dette følger umiddelbart af definitionen 9.5.1, idet vi sætter $\underline{\psi}(\underline{h}) = \|\underline{h}\|^{-q} \varphi(\underline{h})$ for $\underline{h} \in A \setminus \{\underline{0}\}$.

Af sætning 9.5.2 fås umiddelbart regnereglerne for funktionerne i mængderne $o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$ svarende til forskellige værdier af q . Vi samler de vigtigste i følgende sætning.

9.5.3. Sætning. For $p < q$, $\underline{\varepsilon}^p \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^p)$, $\underline{\varepsilon}^q \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^q)$ gælder $\underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}^q \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^p)$. Hvis yderligere $\underline{\varepsilon}^r \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^r)$, gælder $\underline{\varepsilon}^r \underline{\varepsilon}^p \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^{p+r})$. Hvis endelig $\underline{\varepsilon}^s \in o(B; \mathbb{R}^1; \|\underline{h}\|^s)$, hvor $B \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\underline{\varepsilon}^s(A) \subseteq B$, og hvis $p \geq 0$ og $s \geq 0$, gælder $\underline{\varepsilon}^s \circ \underline{\varepsilon}^p \in o(A; \mathbb{R}^1, \|\underline{h}\|^{ps})$.

Vi vil nøjes med at bevise den sidste påstand. Efter sætning 9.5.2 eksisterer der kontinuerte funktioner $\underline{\psi} : A \cup \{\underline{0}\}$

ind i $\mathbb{R}^n$ og $\chi : B \cup \{0\}$ ind i $\mathbb{R}^1$ med $\psi(0) \neq 0$ og $\chi(0) = 0$, således at

$$\varepsilon^p(\underline{h}) = \|\underline{h}\|^p \psi(\underline{h}); \quad \varepsilon^s(\underline{k}) = \|\underline{k}\|^s \chi(\underline{k}),$$

hvoraf følger

$$(\varepsilon^s \circ \varepsilon^p)(\underline{h}) = \varepsilon^s(\|\underline{h}\|^p \psi(\underline{h})) = (\|\underline{h}\|^p \|\psi(\underline{h})\|)^s \chi(\|\underline{h}\|^s \psi(\underline{h})) = \|\underline{h}\|^{ps} \Phi(\underline{h}),$$

hvor den ved

$$\Phi(\underline{h}) = \|\psi(\underline{h})\|^s \chi(\|\underline{h}\|^s \psi(\underline{h}))$$

definerede funktion Φ er kontinuert i 0 ifølge regnereglerne for kontinuerte funktioner og $\Phi(0) = 0$.

9.5.4. Sætning. Hvis $\varepsilon^p \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^p)$ og $\varphi : A$ ind i $\mathbb{R}$ er begrænset i en omegn af 0 , gælder $\varphi \varepsilon^p \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^p)$.

Vi har nemlig $\varepsilon^p = \|\underline{h}\|^p \psi(\underline{h})$, hvor ψ er kontinuert i 0 og $\psi(0) = 0$. Så er $\varphi \varepsilon^p = \|\underline{h}\|^p \chi(\underline{h})$, hvor $\chi = \varphi \psi$. Er nu $|\varphi(\underline{h})| \leq N$ i en omegn $U \cap A$ af 0 , da gælder

$$\chi^{-1}(K(0, r)) \supseteq \psi^{-1}(K(0, \frac{r}{N})),$$

hvilket viser, at χ er kontinuert i 0 . Vi har først bevist, som om $\varphi(0)$ er defineret. Er dette ikke tilfældet, udvider vi blot definitionen af φ ved at sætte $\varphi(0) = 0$, så vi får en afbildning $\varphi : A \cup \{0\}$ ind i $\mathbb{R}$.

9.5.5. Sætning. Hvis $\varepsilon_\mu^0 \in o(A; \mathbb{R}^n; 1) = o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|^0)$, $\mu = 1, \dots, m$, gælder

$$\varepsilon^1 = h_1 \varepsilon_1^0 + \dots + h_m \varepsilon_m^0 \in o(A; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|).$$

Da hver af funktionerne $\|\underline{h}\|^{-1} h_\mu$ er begrænset, gælder $\|\underline{h}\|^{-1} h_\mu \varepsilon_\mu^0 \in o(A; \mathbb{R}^n; 1)$, altså $\|\underline{h}\|^{-1} \varepsilon^1 \in o(A; \mathbb{R}^n; 1)$, og sætningen følger umiddelbart.

9.6. Vi betragter en mængde $M \subseteq \mathbb{R}^m$ en afbildning $\underline{f} : M$ ind i $\mathbb{R}^n$. Endvidere betragter vi et punkt $\underline{a} \in M$, som er fortætningspunkt for M .

9.6.1. Definition. Svarende til $\underline{a} \in M$ og afbildningen f indfører vi mængden

$$M - \underline{a} = \{\underline{h} | \underline{a} + \underline{h} \in M\}$$

samt en afbildning $\Delta_{\underline{a}} f : M - \underline{a}$ ind i $\mathbb{R}^n$ defineret ved

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}).$$

Afbildningen $\Delta_{\underline{a}} f$ kaldes tilvæksten af f i punktet $\underline{a}$.

9.6.2. Definition. Funktionen f kaldes differentiabel i punktet $\underline{a}$, hvis og kun hvis tilvæksten af f i punktet $\underline{a}$ kan skrives på formen

$$(4) \quad \Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = \underline{L}(\underline{h}) + \underline{\varepsilon}^1(\underline{h}),$$

hvor $\underline{L} : M - \underline{a}$ ind i $\mathbb{R}^n$ er lineær, medens $\underline{\varepsilon}^1 \in o(M - \underline{a}; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|)$.

I det følgende skal vi kun interessere os for det tilfælde, hvor $\underline{a} \in \mathbb{M}$, samt for det tilfælde, hvor $m = 1$ og der eksisterer et interval $I \in M$, således at $\underline{a} \in I$. Under disse forhold gælder følgende sætning:

9.6.3. Sætning. Den i definition 9.6.2 omtalte opspaltning af tilvæksten $\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h})$ er éntydig.

Vi skal altså vise, at to opspaltninger

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = \underline{L}_1(\underline{h}) + \underline{\varepsilon}_1^1(\underline{h}) = \underline{L}_2(\underline{h}) + \underline{\varepsilon}_2^1(\underline{h})$$

vil være helt ens. Ligningen er specielt opfyldt, hvis vi vælger $\underline{h} = h\underline{e}_\mu$ (se 9.1), hvilket (se 9.3) medfører $\underline{L}_1(\underline{h}) = h\underline{L}_1(\underline{e}_\mu)$ og $\underline{L}_2(\underline{h}) = h\underline{L}_2(\underline{e}_\mu)$. For $h \neq 0$ har vi således ligningen

$$\underline{L}_1(\underline{e}_\mu) + h^{-1}\underline{\varepsilon}_1^1(\underline{h}) = \underline{L}_2(\underline{e}_\mu) + h^{-1}\underline{\varepsilon}_2^1(\underline{h}).$$

Vi har her en identitet mellem to funktioner af h gyldig i et område med $h = 0$ som fortætningspunkt. Funktionerne har da samme grænseværdi i 0, hvilket giver $\underline{L}_1(\underline{e}_\mu) = \underline{L}_2(\underline{e}_\mu)$. Dette gælder nu for $\mu = 1, \dots, m$ og af 9.3 fremgår nu, at $\underline{L}_1$ og $\underline{L}_2$ er indbyrdes identiske. Det er derefter klart, at også $\underline{\varepsilon}_1^1$ og $\underline{\varepsilon}_2^1$ er identiske, og dermed er sætningen bevist.

9.6.4. Sætning. Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i punktet $\underline{a}$, er $\underline{f}$ kontinuert i $\underline{a}$.

Af (4) følger umiddelbart, at $\Delta_{\underline{a}} \underline{f}$ er kontinuert i $\underline{0}$. Af sætningerne om regning med og sammensætning af kontinuerte funktioner følger derefter, at $\underline{f}$, som også kan defineres ved

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{a}) + \Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{x} - \underline{a}),$$

er kontinuert.

9.7. Vi skal nu bringe det i definition 9.6.2 indførte differentiabilitybegreb i forbindelse med det fra gymnasieundervisningen kendte. Vi betragter derfor en reel funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, hvor I er et interval. For $a \in I$ har vi da, hvis f tilfredsstiller betingelsen i 9.6.2

$$\Delta_a f(h) = L(h) + \varepsilon^1(h) = L(1)h + \varepsilon^1(h),$$

eller

$$h^{-1} \Delta_a f(h) = L(1) + h^{-1} \varepsilon^1(h),$$

hvilket viser, at

$$h^{-1} \Delta_a f(h) \rightarrow L(1) \text{ for } h \rightarrow 0,$$

og det betyder netop, at f er differentiabel efter gymnasieundervisningens definition i punktet a med $L(1)$ som differentialkvotient.

Hvis vi på den anden side har

$$h^{-1} \Delta_a f(h) \rightarrow \alpha \text{ for } h \rightarrow 0,$$

har vi en opspaltning af formen

$$h^{-1} \Delta_a f(h) = \alpha + \varepsilon^0(h),$$

altså

$$\Delta_a f(h) = \alpha h + \varepsilon^0(h)h = \alpha h + \varepsilon^1(h),$$

således at f er differentiabel i a efter definition 9.6.2.

9.8. Vi ser nu på nogle eksempler på differentiability.

Hvis $\underline{f}$ er konstant, får vi $\Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{0}$ for alle $\underline{a}$ og $\underline{h}$, og vi har da den trivielle opspaltning $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$.

Hvis $\underline{f}$ er en lineær afbildning, får vi

$$\Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \underline{f}(\underline{a}) + \underline{f}(\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \underline{f}(\underline{h}),$$

som er en lineær afbildning, så vi får den trivielle spaltning

$$\Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{h}) + 0.$$

Hvis $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved $f(x) = x^2$ får vi

$$\Delta_a f(h) = (a+h)^2 - a^2 = 2ah + h^2,$$

og her er $2ah$ lineær, og $h^2 \in o(h)$.

For $f(x) = \frac{1}{x}$ på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ får vi tilsvarende

$$\begin{aligned} \Delta_a f(h) &= \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a(a+h)} \cdot h = \\ &= -\frac{1}{a^2} h + \frac{h}{a^2(a+h)} \cdot h, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $\frac{1}{x}$ er differentiabel.

9.9. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og $\underline{f} : 0$ ind i $\mathbb{R}^n$ en afbildning. Vi siger, at $\underline{f}$ er differentiabel på 0 , hvis $\underline{f}$ er differentiabel i ethvert punkt $\underline{x} \in 0$.

Svarende til 0 har vi nu en mængde $\Delta 0 \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ og defineret ved

$$\Delta 0 = \{(\underline{x}, \underline{h}) \mid \underline{x} \in 0 \wedge \underline{x} + \underline{h} \in 0\}.$$

Mængden $\Delta 0$ er åben. De ved $\varphi(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{x}$ og $\psi(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{x} + \underline{h}$ definerede funktioner er nemlig kontinuerte, og definitionen af $\Delta 0$ betyder netop, at

$$\Delta 0 = \varphi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0).$$

Vi indfører funktionstilvæksten $\Delta \underline{f} : \Delta 0$ ind i $\mathbb{R}$, defineret ved

$$\Delta \underline{f}(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{f}(\underline{x} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}).$$

Det ses, at tilvæksten af $\underline{f}$ i punktet $\underline{x} \in 0$ er givet ved

$$\Delta \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{h}) = \Delta \underline{f}(\underline{x}, \underline{h}).$$

Det ses, at Δ er en operator $\Delta : \hat{F}(0, \mathbb{R}^n)$ ind i $\hat{F}(\Delta 0, \mathbb{R}^n)$.

Når $\underline{f}$ er differentiabel på 0 , kan $\Delta \underline{f}(\underline{x}, \underline{h})$ for hver enkelt

værdi af $\underline{x}$ skrives som en sum af en lineær afbildning, hvis koefficienter altså vil afhænge af $\underline{x}$ og en afbildning, der for hver fast værdi af $\underline{x}$ tilhører $o(0-\underline{x}; \mathbb{R}^n; \|\underline{h}\|)$, og vi kan derfor skrive

$$(5) \quad \Delta f(\underline{x}, \underline{h}) = L_1(\underline{x})h_1 + \dots + L_m(\underline{x})h_m + \varepsilon^1(\underline{x}, \underline{h}).$$

Som eksempel betragter vi den ved $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$. Vi får i dette tilfælde

$$\Delta f(\underline{x}, \underline{h}) = (x_1 + h_1)(x_2 + h_2) - x_1 x_2 = x_2 h_1 + x_1 h_2 + h_1 h_2.$$

Her gælder $h_1 h_2 \in o(\|\underline{h}\|)$. Vi har nemlig $h_2 \in o(1)$, og påstanden følger derfor af sætning 9.5.5. Altså er f differentiabel.

9.10. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde. En afbildning $\omega : O \times \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ defineret ved et udtryk af formen

$$\omega(\underline{x}, \underline{h}) = L_1(\underline{x})h_1 + \dots + L_m(\underline{x})h_m,$$

hvor $L_\mu : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$, $\mu = 1, \dots, m$ er vilkårlige afbildninger, kaldes en differentialform. Det ses umiddelbart, at differentialformen ω er kontinuert, hvis og kun hvis hver afbildning L_μ er kontinuert.

Den differentialform, der optræder på højre side i udtrykket (5), kaldes det totale differential af f i mængden O . Vi indfører en operator d , som til enhver differentiabel funktion tilordner dens totale differential, og vi har således

$$(6) \quad df(\underline{x}, \underline{h}) = L_1(\underline{x})h_1 + \dots + L_m(\underline{x})h_m.$$

For $\underline{a} \in O$ har vi endvidere den operator $d_{\underline{a}}$, som til $\underline{f}$ tilordner den i (4) (definition 9.6.2) indgående lineære funktion $\underline{L}$, som er bestemt ved

$$\underline{L}(\underline{h}) = d_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = df(\underline{a}, \underline{h}) = L_1(\underline{a})h_1 + \dots + L_m(\underline{a})h_m.$$

Udtrykket $d_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h})$ kaldes det totale differential af f i punktet $\underline{a}$.

For projektionen $\text{pr}_\mu : \mathbb{R}^\mu$ ind i $\mathbb{R}$, som defineres ved $\text{pr}_\mu(\underline{x}) = x_\mu$, får vi specielt

$$\Delta pr_{\mu}(\underline{x}, \underline{h}) = x_{\mu} + h_{\mu} - x_{\mu} = h_{\mu},$$

så vi får

$$dpr_{\mu}(\underline{x}, \underline{h}) = h_{\mu}.$$

Det er derfor muligt at skrive formlen (6) som en relation mellem funktioner og ikke mellem funktionsværdier, idet

$$(7) \quad d\underline{f} = \underline{L}_1 dpr_1 + \dots + \underline{L}_m dpr_m.$$

Sædvanligvis benyttes her en ukorrekt skrivemåde, idet x_{μ} , der er værdien af $pr_{\mu}(\underline{x})$ benyttes også som betegnelse for denne funktion. Formlen (7) bliver da

$$d\underline{f} = \underline{L}_1 dx_1 + \dots + \underline{L}_m dx_m,$$

og svarende dertil skrives (6)

$$d\underline{f}(\underline{x}, d\underline{x}) = \underline{L}_1(\underline{x})dx_1 + \dots + \underline{L}_m(\underline{x})dx_m,$$

hvor $dx_1, \dots, dx_m$ er talværdier, og hvor vi har sat

$$d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_m).$$

Her kan $\underline{x}$ opfattes som betegnelse for den identiske afbildning $\underline{E} : \mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$, idet vi får

$$d\underline{E}(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{h} = (h_1, \dots, h_m) = (dx_1, \dots, dx_m).$$

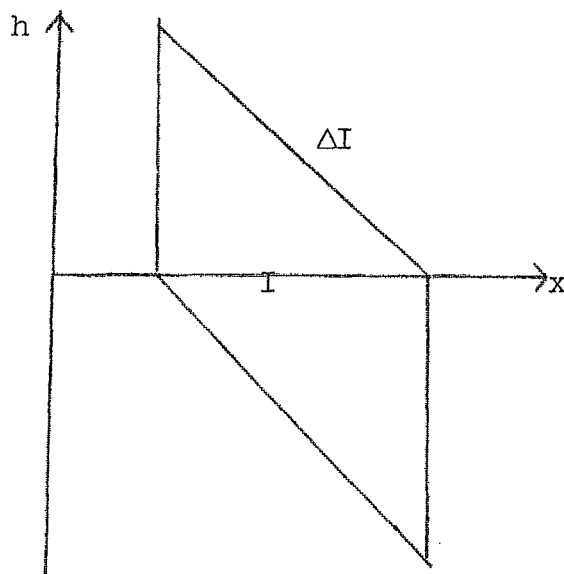
Vi bemærker, at det totale differential af en differentiable afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ er en differentialform.

9.11. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval. Vi definerer da som for $0 \subseteq \mathbb{R}^n$ i 9.9.

$$\Delta I = \{(x, h) \mid x \in I, x + h \in I\}.$$

Som antydnet på figuren bliver

ΔI en parallellogramformet figur i (x, h) -planen. De to sider, der støder op til et endepunkt af I , hører med til ΔI , hvis og kun hvis endepunktet hører med til I . De to vinkelspidser, der ikke



ligger på I , hører med, hvis og kun hvis begge endepunkter hører med til I .

Lad nu $f : I \text{ ind i } \mathbb{R}$ være en vilkårlig afbildning. Den tilsvarende afbildning $\Delta f : \Delta I \text{ ind i } \mathbb{R}$ er defineret ved

$$\Delta f(x, h) = f(x+h) - f(x),$$

og at f er differentiabel, betyder i dette tilfælde, at vi har en opspaltning

$$\Delta f(x, h) = L(x)h + \varepsilon^1(x, h).$$

Vi har altså differentialerne

$$d_a f(h) = L(a)h, \quad df(x, h) = L(x)h,$$

og for den ved $E(x) = x$ definerede identiske afbildning har vi specielt

$$dE(x) = dx = h,$$

og vi skriver derfor dx i stedet for h med den lidt ukorrekte skrivemåde. Vi får da for $h = dx \neq 0$

$$L(x) = \frac{df(x, h)}{h} = \frac{df(x, dx)}{dx}, \quad L = \frac{df}{dE},$$

og funktionen L kaldes derfor differentialkvotienten. På grund af relationen

$$df(x, dx) = L(x)dx$$

har $L(x)$ også været kaldt differentialkoefficienten, men denne betegnelse er for længst gået i brug. I vore dage siger vi ofte den afledede funktion, en betegnelse, der synes at vinde terræn.

Vi vil indføre en operatorbetegnelse D med $Df = L$. Undertiden indføres en bogstavbetegnelse $y = f(x)$ for funktionsværdien, og vi kan da vælge mellem følgende betegnelser for den afledede funktions værdier.

$$L(x) = Df(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

Ved siden af disse benyttes også

$$L(x) = f'(x) = y'.$$

Endelig benyttes i fysik betegnelsen $\dot{y}$ for differentialkvotientens værdi, når $y = f(t)$, hvor t er tiden.

Af eksemplerne i 9.8 får vi således med mere eller mindre korrekt brug af betegnelserne

$$\frac{d}{dx}x^2 = (x^2)' = D(x^2) = 2x; \quad d(x^2) = 2x \, dx$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)' = D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}; \quad d\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}dx, \quad x \neq 0$$

9.12. Hvis $0 \subseteq \mathbb{C}$ er en åben mængde, overføres differentiationsteorien uden videre til afbildninger $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Betegnelserne bliver ganske som for de i foregående afsnit omtalte reelle funktioner af én reel variabel. I det komplekse tilfælde betegnes de to variable oftest $z = x + iy$, $w = u + iv$, idet man skriver $w = f(z)$. Vi har da f.eks.

$$\frac{d}{dz}z^2 = (z^2)' = D(z^2) = 2z; \quad d(z^2) = 2z \, dz$$

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z}\right)' = D\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}; \quad d\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}dz,$$

idet regningerne i 9.8 også gælder for komplekse variable.

9.13. Vi vil betragte en potensrække

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum a_n z^n$$

med konvergensradius $R > 0$. Lad 0 være konvergenscirklen $\{z \mid |z| < R\}$. Vi har da sætningen:

9.13.1. Sætning. Funktionen f er differentiabel i 0 , og differentialkvotienten er givet ved

$$Df(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots = \sum (n+1)a_{n+1} z^n,$$

hvor potensrækken har konvergensradius R .

Vi beviser først, at summen af en potensrække er kontinuert for $z = 0$. For funktionen f har vi, idet vi vælger k , således at $0 < k < R$, at

$$|f(z) - f(0)| = |a_1 z + a_2 z^2 + \dots| = |z| |a_1 + a_2 z + \dots| \leq |z| (|a_1| + k|a_2| + k^2|a_3| + \dots) = A|z|$$

idet vi har betegnet summen i parentesen med A. Denne ulighed viser, at $f^{-1}(K(f(a), \varepsilon)) \supseteq K(0, \frac{\varepsilon}{A})$, hvilket netop viser, at f er kontinuert i 0.

Dernæst viser vi, at f er differentiabel i 0 med a_1 som differentialkvotient. Vi bemærker først, at

$$\varepsilon^0(h) = a_2 h + a_3 h^2 + \dots = h(a_2 + a_3 h + \dots) \in o(0, 0, 1),$$

og vi har derfor

$$\Delta f(0, h) = f(h) - a_0 = a_1 h + \varepsilon^0(h)h = a_1 h + \varepsilon^1(h),$$

hvoraf påstanden følgende.

Beviset for sætningen beror nu på et nærmere studium af dobbeltrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} z^n h^k.$$

Vi viser først, at rækken er absolut konvergent. Ved dette bevis kan vi ordne rækken med leddenes numeriske værdier på vilkårlig måde. Vi benytter $m = n + k$ som ny summationsvariabel. For fast m gælder $0 \leq n \leq m$ og $k = m - n$, så vi får

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} |a_{n+k}| |z|^n |h|^k &= \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{m-n} |a_m| |z|^n |h|^{m-n} &= \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} |z|^n |h|^{m-n} = \\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| (|z| + |h|)^m, \end{aligned}$$

som konvergerer, da rækken $\sum a_n z^n$ konvergerer absolut i det reelle punkt $|z| + |h|$, som ligger inden for konvergenscirklen.

Vi kan nu sætte

$$(8) \quad b_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} z^n,$$

idet denne række er absolut konvergent ifølge sætning 5.10.2, og ifølge den samme sætning er

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) h^k$$

absolut konvergent for $|h| < R - |z|$. På grund af dobbeltrækkens absolutte konvergens fås endvidere

$$(9) \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) h^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} z^n h^k =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{m-n} a_m z^n h^{m-n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z+h)^m =$$

$$f(z+h).$$

Vi ser således, at

$$\Delta f(z, h) = f(z+h) - f(z) = f(z+h) - b_0(z) =$$

$$b_1(z)h + \varepsilon^1(z, h),$$

hvor

$$\varepsilon^1(z, h) = h^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2}(z) h^k,$$

hvilket viser, at f er differentiabel, og

$$Df(z) = b_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Det fremgår af beviset, at denne række konvergerer for $|z| < R$. På den anden side vil dens konvergens åbenbart medføre konvergens af rækken for $f(z)$ (se f.eks. MA 5 opgave 20).

9.14. Hvis f er differentiabel i et interval I og Df igen er differentiabel på I kan vi danne $DDf = (D \circ D)f = D^2 f$, og hvis

denne igen er differentiabel på I , kan vi danne $DD^2f = D^3f$ o.s.v. Dette overføres uden videre til afbildninger $f: O \text{ ind i } \mathbb{C}$, hvor $O \subseteq \mathbb{C}$.

For den i foregående afsnit omtalte funktion havde vi jo

$$f(z) = \sum a_n z^n, \quad Df(z) = \sum (n+1)a_{n+1} z^n$$

og generelt får vi

$$D^k f(z) = \sum \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n = k! \sum \binom{n+k}{k} a_{n+k} z^k,$$

hvilket i forbindelse med formel (8) og (9) viser, at

$$f(z+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(z)}{k!} h^k, \quad |h| < R - |z|.$$

Dette er Taylorrækken for en potensrække. Vi lægger mærke til, at den i hvert fald er konvergent indenfor den største cirkel med centrum z , som får plads indenfor konvergenscirklen $|z| < R$ for den oprindelige potensrække.

Ved hjælp af potensrækkerne får vi nu umiddelbart

$$De^z = e^z, \quad D\cos z = -\sin z, \quad D\sin z = \cos z,$$

og samtidig har vi bevist, hvorledes differentialkvotienterne af disse funktioner kan udledes på grundlag af potensrækkerne.

9.15. Vi betragter nu igen en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ samt en afbildning $\underline{f}: O \text{ ind i } \mathbb{R}^n$. Ved hjælp af de ved

$$\text{pr}_\nu(\underline{x}) = x_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n$$

definerede projektioner $\text{pr}_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ danner vi koordinatafbildningerne $f_\nu = \text{pr}_\nu \circ \underline{f}$, hvor altså $f_\nu: O \text{ ind i } \mathbb{R}$, og for $\underline{x} \in O$ har vi da $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$. Vi har tidligere set, at $\underline{f}$ er kontinuert, hvis og kun hvis $f_1, \dots, f_n$ alle er kontinuerte, og vi viser nu en tilsvarende sætning vedrørende differentiabilitet af $\underline{f}$.

9.15.1. Sætning. Afbildningen f er differentiabel i et punkt $\underline{a} \in O$, hvis og kun hvis hver af funktionerne

f_ν , $\nu = 1, \dots, n$ er differentiabel i $\underline{a}$. Endvidere er

$$d_{\underline{a}}(\underline{h}) = \underline{l}_1 h_1 + \dots + \underline{l}_m h_m$$

ensbetydende med

$$d_{\underline{a}} f_\nu(\underline{h}) = \text{pr}_\nu(\underline{l}_1) h_1 + \dots + \text{pr}_\nu(\underline{l}_m) h_m, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Den ene del af sætningen følger umiddelbart af, at pr_ν er lineær. Af en opspaltning

$$\Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = \underline{l}_1 h_1 + \dots + \underline{l}_m h_m + \underline{\varepsilon}^1(\underline{h})$$

følger nemlig umiddelbart

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{a}} f_\nu(\underline{h}) &= f_\nu(\underline{a} + \underline{h}) - f_\nu(\underline{a}) = \text{pr}_\nu f(\underline{a} + \underline{h}) - \text{pr}_\nu f(\underline{a}) = \\ &\text{pr}_\nu \Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) = \text{pr}_\nu(\underline{l}_1) h_1 + \dots + \text{pr}_\nu(\underline{l}_m) h_m + \text{pr}_\nu(\underline{\varepsilon}^1(\underline{h})), \end{aligned}$$

og her er

$$\text{pr}_\nu(\underline{\varepsilon}^1(\underline{h})) = \text{pr}_\nu(\|\underline{h}\| \underline{\varepsilon}^0(\underline{h})) = \|\underline{h}\| \text{pr}_\nu(\underline{\varepsilon}^0(\underline{h}))$$

åbenbart $\in o(\|\underline{h}\|)$.

Vi har nu fuldført beviset for "kun hvis", og vi går derefter over til beviset for "hvis". Vi skal altså antage, at vi har opspaltninger

$$\Delta_{\underline{a}} f_\nu(\underline{h}) = \underline{l}_{\nu 1} h_1 + \dots + \underline{l}_{\nu m} h_m + \varepsilon_\nu^1(\underline{h}).$$

Idet $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ er basissætningerne i $\mathbb{R}^n$, sætter vi

$$\underline{l}_\mu = \underline{l}_{1\mu} \underline{e}_1 + \dots + \underline{l}_{n\mu} \underline{e}_n,$$

og vi får da

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{a}} f(\underline{h}) &= \Delta_{\underline{a}} f_1(\underline{h}) \underline{e}_1 + \dots + \Delta_{\underline{a}} f_n(\underline{h}) \underline{e}_n = \\ &\underline{l}_1 h_1 + \dots + \underline{l}_m h_m + \underline{\varepsilon}^1(\underline{h}), \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^1(\underline{h}) &= \varepsilon_1^1(\underline{h}) \underline{e}_1 + \dots + \varepsilon_n^1(\underline{h}) \underline{e}_n = \\ &\|\underline{h}\| (\varepsilon_1^0(\underline{h}) \underline{e}_1 + \dots + \varepsilon_n^0(\underline{h}) \underline{e}_n) \end{aligned}$$

åbenbart tilhører $o(\|\underline{h}\|)$.

At sætningens sidste påstand er rigtig fremgår nu umiddelbart af bevisets første del.

Formuleringen af den til 9.15.1. svarende sætning om differentiability i en åben mængde $0 \in \mathbb{R}^m$ eller i et interval

$I \subseteq \mathbb{R}$ er helt umiddelbar og kan overlades til læseren.

For $n = 2$ kan talsættet (y_1, y_2) erstattes med det komplekse tal $y_1 + iy_2$, og sætning 9.15.1. giver derfor $m = 1$ og $I \subseteq \mathbb{R}$:

9.15.2. Sætning. En afbildning $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ er differentiabel, hvis og kun hvis $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er differentiable, og vi har da $df = d\operatorname{Re} f + i d\operatorname{Im} f$, $Df = D\operatorname{Re} f + i D\operatorname{Im} f$.

Dette er i overensstemmelse med den definition af differentialkvotienten af en kompleks funktion, som vi benyttede i 6.18.

9.16. Vi skal nu vise, at sammensætning af differentiable afbildninger igen giver differentiable afbildninger, og at differentialet af den sammensatte afbildning fås ved sammensætning af differentialerne. Helt præcist formuleres denne regel i følgende sætning:

9.16.1. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ og $O_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ være åbne mængder. Lad $\underline{f}: O \rightarrow \mathbb{R}^n$ være en afbildning med $\underline{f}(O) \subseteq O_1$ og lad $\underline{g}: O_1 \rightarrow \mathbb{R}^q$ være endnu en afbildning. Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i et punkt $\underline{a} \in O$, og $\underline{g}$ er differentiabel i $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$, da er $\underline{F} = \underline{g} \circ \underline{f}: O \rightarrow \mathbb{R}^q$ differentiabel i $\underline{a}$, og

$$d_{\underline{a}} \underline{F} = d_{\underline{a}} (\underline{g} \circ \underline{f}) = d_{\underline{b}} \underline{g} \circ d_{\underline{a}} \underline{f}.$$

Vi indfører betegnelsen

$$\underline{k} = \Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{b}$$

og vi har da

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{a}} \underline{F}(\underline{h}) &= \underline{F}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{F}(\underline{a}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{a} + \underline{h})) - \underline{g}(\underline{f}(\underline{a})) = \\ &= \underline{g}(\underline{b} + \underline{k}) - \underline{g}(\underline{b}) = \Delta_{\underline{b}} \underline{g}(\underline{k}), \end{aligned}$$

og vi har således (men det er selvfølgelig temmelig trivielt)

$$\Delta_{\underline{a}} \underline{F} = \Delta_{\underline{b}} \underline{g} \circ \Delta_{\underline{a}} \underline{f}.$$

På grund af differentiabilitysforudsætningerne har vi nu opspaltninger

$$\begin{aligned}\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) &= d_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) + \underline{\varepsilon}_1^1(\underline{h}) \\ \Delta_{\underline{b}}\underline{g}(\underline{k}) &= d_{\underline{b}}\underline{g}(\underline{k}) + \underline{\varepsilon}_2^1(\underline{k}),\end{aligned}$$

så sammensætning giver, idet vi udnytter, at $d_{\underline{b}}\underline{g}$ er lineær

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{F}(\underline{h}) = d_{\underline{b}}\underline{g} \circ d_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) + d_{\underline{b}}\underline{g} \circ \underline{\varepsilon}_1^1(\underline{h}) + \underline{\varepsilon}_1^1 \circ \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}).$$

Af sætningerne 9.5.4 og 9.5.3. følger umiddelbart, at

$$d_{\underline{b}}\underline{g} \circ \underline{\varepsilon}_1^1(\underline{h}) \in o(\|\underline{h}\|).$$

Ifølge sætning 9.5.2 kan vi skrive

$$\underline{\varepsilon}_2^1(\underline{k}) = \|\underline{k}\|\underline{\varphi}(\underline{k}),$$

hvor $\underline{\varphi}(\underline{k})$ er kontinuert i $\underline{0}$ og $\underline{\varphi}(\underline{0}) = \underline{0}$. Vi får da

$$\underline{\varepsilon}_2^1 \circ \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \|\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h})\|\underline{\psi}(\underline{h}),$$

hvor $\underline{\psi} = \underline{\varphi} \circ \Delta_{\underline{a}}\underline{f}$ er kontinuert i $\underline{0}$ og afbilder $\underline{0}$ i $\underline{0}$. Skriver vi nu udførligt

$$\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{l}_1 h_1 \dots + \underline{l}_m h_m + \|\underline{h}\|\underline{\varepsilon}^0(\underline{h}),$$

ser vi, at den for $\underline{h} \neq \underline{0}$ definerede funktion

$$\|\underline{h}\|^{-1}\Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) = \underline{l}_1 \frac{h_1}{\|\underline{h}\|} + \dots + \underline{l}_m \frac{h_m}{\|\underline{h}\|} + \underline{\varepsilon}^0(\underline{h})$$

er begrænset i en omegn af $\underline{0}$, og vi har dermed vist, at

$$\underline{\varepsilon}_2^1 \circ \Delta_{\underline{a}}\underline{f}(\underline{h}) \in o(\|\underline{h}\|).$$

Dermed er beviset for sætningen fuldført.

9.17. Sætning 9.16.1 er det vigtigste hjælpemiddel ved udregning af differentialer af funktioner, som er definerede ved eksplicite udtryk. Inden vi går over til anvendelser på helt konkrete eksempler vil det måske være nyttigt at vise en skematisk fremstilling af indholdet af sætning 9.6.1. Vi opnår en bedre illustration ved at tænke på flere åbne mængder $O_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $O_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, ..., samt afbildninger $\underline{f}_1: O_1 \rightarrow O_2$, $\underline{f}_2: O_2 \rightarrow O_3$, o.s.v. Til $\underline{a}_1 \in O_1$ svarer $\underline{a}_2 = \underline{f}_1(\underline{a}_1) \in O_2$, $\underline{a}_3 = \underline{f}_2(\underline{a}_2) \in O_3$, Vi taler da om en sekvens af afbildninger

$$(10) \quad (O_1, \underline{a}_1) \xrightarrow{\underline{f}_1} (O_2, \underline{a}_2) \xrightarrow{\underline{f}_2} (O_3, \underline{a}_3) \xrightarrow{\underline{f}_3} \dots,$$

og brugen af ordet sekvens skal netop understrege, at vi samtidig med de anførte afbildninger betragter sammensætningerne $\underline{f}_2 \circ \underline{f}_1$, $\underline{f}_3 \circ \underline{f}_2$, $\underline{f}_3 \circ \underline{f}_2 \circ \underline{f}_1$, o.s.v. Sætning 9.16.1 fortæller os nu, at sekvensen (10) har en tilsvarende sekvens

$$(11) \quad \mathbb{R}^{n_1} \xrightarrow{d_{\underline{a}_1} \underline{f}_1} \mathbb{R}^{n_2} \xrightarrow{d_{\underline{a}_2} \underline{f}_2} \mathbb{R}^{n_3} \xrightarrow{d_{\underline{a}_3} \underline{f}_3} ,$$

således at sammensatte afbildninger i (10) svarer til sammensatte afbildninger i (11).

Hvis afbildningerne $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots$ er differentiable i hele $O_1, O_2, \dots$, har vi totale differentialer $d\underline{f}_1, d\underline{f}_2, \dots$, der er afbildninger

$$d\underline{f}_1: O_1 \times \mathbb{R}^{n_1} \text{ ind i } \mathbb{R}^{n_2},$$

og vi får således ikke en tilsvarende sammensætningsregel for afbildningerne $d\underline{f}_1, d\underline{f}_2, \dots$.

Derimod har vi sekvens af afbildninger $\Phi \underline{f}_1, \Phi \underline{f}_2, \dots$ af formen

$$\Phi \underline{f}_1: O_1 \times \mathbb{R}^{n_1} \text{ ind i } O_2 \times \mathbb{R}^{n_2}$$

definerede ved

$$\Phi \underline{f}_1(\underline{x}, \underline{h}) = (\underline{f}_1(\underline{x}), d_{\underline{x}} \underline{f}_1(\underline{h})), \text{ o.s.v.,}$$

og Φ giver anledning til de sammenhørende sekvenser

$$\begin{array}{c} O_1 \xrightarrow{\underline{f}_1} O_2 \xrightarrow{\underline{f}_2} O_3 \xrightarrow{\underline{f}_3} \\ O_1 \times \mathbb{R}^{n_1} \xrightarrow{\Phi \underline{f}_1} O_2 \times \mathbb{R}^{n_2} \xrightarrow{\Phi \underline{f}_2} O_3 \times \mathbb{R}^{n_3} \xrightarrow{\Phi \underline{f}_3} \end{array}$$

Vi har her to eksempler på tilordningslove, der til afbildninger lader svare ny afbildninger på en sådan måde, at sammensætning af afbildninger svarer til sammensætningen af deres billeder. Denne slags tilordningslove kaldes funktorer, og den mest moderne matematik har behandlet funktorer som selvstændige studieobjekter. Differentialer og afbildningen Φ må regnes blandt de enkleste eksempler på funktorer.

9.18. Vi vil nu gå over til behandling af nogle mere eller mindre specielle tilfælde, og vi begynder med følgende simple sætning:

9.18.1. Sætning. Vi betragter den i MA 8.16 (side 18) indførte afbildning $\text{pr}_{m+q,m}:\mathbb{R}^{m+p}$ på $\mathbb{R}^m$ defineret ved

$$\text{pr}_{m+q,m}(x_1, \dots, x_{m+q}) = (x_1, \dots, x_m),$$

en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$, samt originalmængden

$$O_1 = \text{pr}_{m+q,m}^{-1}(O).$$

Hvis $\underline{f}:O$ ind i $\mathbb{R}^n$ er differentiabel, er $\underline{f}_1 = \text{pr}_{m+q,m} \circ \underline{f}:\mathbb{R}^{m+p}$ ind i $\mathbb{R}^m$ ligeledes differentiabel, og $d\underline{f}_1$ er defineret ved samme udtryk som $d\underline{f}$.

Da $\text{pr}_{m+q,m}$ er lineær, er den differentiabel, og (se 9.8)

$$d_{\underline{x}} \text{pr}_{m+q,m} = \text{pr}_{m+q,m}.$$

Sætningen følger derefter umiddelbart af sætning 9.16.1. Sætning 9.18.1 viser groft formuleret, at en differentiabel funktion af m reelle variable kan opfattes som en differentiabel funktion af $m+p$ variable med det samme differential.

9.18.2. Sætning. Lad O være en åben mængde af $\mathbb{R}^m$ og $\underline{f}_q:O$ ind i $\mathbb{R}^n$, $q = 1, \dots, p$ differentiable afbildninger. Hvis $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ er reelle tal, er $\sum \alpha_q \underline{f}_q:O$ ind i $\mathbb{R}^n$ differentiabel, og

$$d \sum \alpha_q \underline{f}_q = \sum \alpha_q d\underline{f}_q.$$

På grund af sætning 9.15.1 er det nok at vise sætningen for $n = 1$, og vi kan da skrive $\underline{f}_q$ i stedet for $\underline{f}_q$. Den ved

$$g(\underline{y}) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_p y_p$$

definerede afbildning $g:\mathbb{R}^p$ ind i $\mathbb{R}$ er lineær, og derfor differentiabel med

$$d_{\underline{y}} g(\underline{k}) = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_p k_p.$$

Endvidere er den ved $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_p(\underline{x}))$ definerede afbildning $\underline{f}:O$ ind i $\mathbb{R}^p$ ifølge 9.15.1 differentiabel med

$$d_{\underline{x}} \underline{f}(\underline{h}) = (d_{\underline{x}} f_1(\underline{h}), \dots, d_{\underline{x}} f_p(\underline{h})),$$

og sætningen følger umiddelbart af sætning 9.16.1, idet

$$\Sigma \alpha_q f_q = \underline{g} \circ \underline{f}.$$

9.18.3. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være åben og f_1 og f_2 differentiable afbildninger af O ind i $\mathbb{R}$. Da er $f_1 f_2: O$ ind i $\mathbb{R}$ differentiable og $d(f_1 f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1$.

Ifølge sætning 9.18.2 er $\varphi_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ og $\varphi_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ differentiable, og

$$d_{\underline{x}} \varphi_1 = \frac{1}{2}(d_{\underline{x}} f_1 + d_{\underline{x}} f_2), \quad d_{\underline{x}} \varphi_2 = \frac{1}{2}(d_{\underline{x}} f_1 - d_{\underline{x}} f_2).$$

Resultatet $d(x^2) = 2x dx$ giver ved sætning 9.16.1

$$d(\varphi_1^2) = 2\varphi_1 d\varphi_1, \quad d(\varphi_2^2) = 2\varphi_2 d\varphi_2,$$

og en fornyet anvendelse af sætning 9.18.2 giver

$$\begin{aligned} d_{\underline{x}} f_1 f_2 &= d_{\underline{x}}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) = d_{\underline{x}}(\varphi_1^2) - d_{\underline{x}}(\varphi_2^2) = \\ &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2)(d_{\underline{x}} f_1 + d_{\underline{x}} f_2) - \frac{1}{2}(f_1 - f_2)(d_{\underline{x}} f_1 - d_{\underline{x}} f_2) = \\ &= f_1 d_{\underline{x}} f_2 + f_2 d_{\underline{x}} f_1. \end{aligned}$$

9.18.4. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være åben og f_1 og f_2 differentiable afbildninger af O ind i $\mathbb{R}$. Hvis $0 \notin f_1(O)$, er $f_1^{-1} f_2: O$ ind i $\mathbb{R}$ differentiable og $df_1^{-1} f_2 = f_1^{-2}(f_1 df_2 - f_2 df_1)$.

Resultatet $d(x^{-1}) = -x^{-2} dx$ i forbindelse med sætning 9.16.1 giver $d(f_1^{-1}) = -f_1^{-2} df_1$, og sætningen følger ved anvendelse af sætning 9.18.3.

9.19. Ved anvendelser af sætning 9.16.1 er det ofte mest praktisk at skrive differentialet af $\underline{g}$ på formen

$$(12) \quad d\underline{g}(\underline{x}, d\underline{x}) = \underline{L}_1(\underline{x}) dx_1 + \dots + \underline{L}_n(\underline{x}) dx_n,$$

og hvis vi endvidere har $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$, kan $d(\underline{g} \circ \underline{f})$ efter sætning 9.16.1 udtrykkes på formen

$$d(\underline{g} \circ \underline{f}) = (\underline{L}_1 \circ \underline{f}) df_1 + \dots + (\underline{L}_n \circ \underline{f}) df_n,$$

et udtryk, der kan siges at fremkomme ved i (12), at sætte

$\underline{x} = \underline{f}$, $x_\nu = f_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, en fremgangsmåde, der falder meget

naturligt. Vi illustrerer metoden ved nogle eksempler, idet vi udnytter kendte differentialkvotienter af funktioner af én variabel.

$$\begin{aligned}\text{For } \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ fås} \\ d(x_1^2 x_2^5 x_3^3) &= x_2^5 x_3^3 d(x_1^2) + x_1^2 d(x_2^5 x_3^3) = \\ &= 2x_1 x_2^5 x_3^3 dx_1 + x_1^2 d(x_2^5) + x_1^2 d(x_3^3) = \\ &= 2x_1 x_2^5 x_3^3 dx_1 + 5x_1^2 x_2^4 x_3^3 dx_2 + 3x_1^2 x_2^5 x_3^2 dx_3.\end{aligned}$$

For $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ får vi, idet vi sætter

$$u = \|\underline{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

at

$$\begin{aligned}d(\|\underline{x}\|^\alpha) &= d(u^{\frac{1}{2}\alpha}) = \frac{1}{2}\alpha u^{\frac{1}{2}\alpha-1} du = \\ &= \frac{1}{2}\alpha \|\underline{x}\|^{\alpha-2} d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \alpha \|\underline{x}\|^{\alpha-2} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3).\end{aligned}$$

Specielt fås

$$d\|\underline{x}\| = \|\underline{x}\|^{-1} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3).$$

Lad O være den ved $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ bestemte åbne delmængde af $\mathbb{R}^3$. For $(x, y, z) \in O$ har vi da

$$\begin{aligned}d\left(x^{(y^z)}\right) &= d e^{y^z \log x} = e^{(y^z) \log x} d(y^z \log x) = \\ &= x^{(y^z)} (y^z d \log x + \log x d(y^z)) = x^{(y^z-1)} y^z dx + x^{(y^z)} \log x d(y^z),\end{aligned}$$

og her er

$$\begin{aligned}d(y^z) &= d e^{z \log y} = e^{z \log y} d(z \log y) = \\ &= y^z (z d \log y + \log y dz) = y^{z-1} z dy + y^z \log y dz,\end{aligned}$$

og ved indsættelse får vi endelig

$$d\left(x^{(y^z)}\right) = x^{(y^z-1)} y^z dx + (y^{z-1} z \log x dy + y^z \log x \log y dz) x^{(y^z)}.$$

9.20. Vi bemærker, at beviset for sætning 9.16.1 gælder uændret, hvis et eller flere af rummene erstattes med et komplekst rum. Vi skal især mærke os følgende specialtilfælde;

9.20.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $O \subseteq \mathbb{C}$ en åben mængde. Hvis $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ og $g: O \rightarrow \mathbb{C}$ er differentiable, er $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{C}$ differentiable, og for differentialkvotienterne gælder

$$D(g \circ f) = ((Dg) \circ f) Df.$$

Vi har nemlig $dg(z, dz) = Dg(z)dz$, og derfor bliver

$$d(g \circ f) = ((Dg) \circ f) df,$$

hvoraf påstanden følger.

Som specialtilfælde får vi de tidligere omtalte formler $D(e^{f(x)}) = e^{f(x)} Df(x)$, $D(\cos f(x)) = -\sin f(x) Df(x)$.

9.21. Vi minder om, at de ovenfor omtalte differentialer betegnedes totale differentialer. Vi vil nu indføre nogle nye differentialer, der skal kaldes partielle differentialer.

Vi betragter rummet $\mathbb{R}^m$. Med $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ betegner vi en delmængde, bestemt ved

$$x_\mu = a_\mu, \mu \in J, J \subset \{1, \dots, m\},$$

hvor tallene a_μ er reelle. Med J_1 betegner vi mængden $\{1, \dots, m\} \setminus J$ og med p betegner vi antallet af elementer i denne mængde. Idet vi antager, at $J \neq \emptyset$, har vi da $0 < p < m$. Vi betragter en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$, og vi antager, at $O \cap \Lambda \neq \emptyset$. Idet et punkt af Λ er entydigt bestemt ved tallene $x_\mu, \mu \in J_1$, kan Λ opfattes som et p -dimensionalt talrum, og $O \cap \Lambda$ vil være en åben mængde i dette talrum.

Vi betragter nu en afbildning $\underline{f}: O \rightarrow \mathbb{R}^n$. Hvis vi i udtrykket $\underline{f}(x_1, \dots, x_m)$ sætter $x_\mu = a_\mu$ for $\mu \in J$, får vi restriktionen $\underline{f}_\Lambda$ af $\underline{f}$ til mængden $O \cap \Lambda$. Funktionen $\underline{f}_\Lambda$ er defineret på en åben mængde i et p -dimensionalt talrum. Lad et punkt i dette være bestemt ved $x_\mu = a_\mu$ for $\mu \in J_1$. Hvis $\underline{f}_\Lambda$ er differentiable i dette punkt, siger vi, at $\underline{f}$ er partielt differen-

tiabel i $\underline{a}$ ($a_1, \dots, a_m$) med hensyn til de variable x_μ , $\mu \in J_1$. Differentiallet af $\underline{f}_1$ kaldes det partielle differential af $\underline{f}$ med hensyn til de variable x_μ , $\mu \in J_1$, og vi vil betegne det

$$(13) \quad \partial_{J_1} \underline{f}(\underline{h}) \quad \text{og} \quad \partial_{J_1} \underline{f}(\underline{x}, \underline{h}),$$

hvor det første betegner det partielle differential i punktet $\underline{a}$, medens det sidste betegner det partielle differential i den åbne mængde O . I stedet for at skrive J_1 som index vil man i praksis ofte anføre elementerne i J_1 med komma imellem. Vi minder om, at $\underline{h}$ i (13) er et talsæt med p elementer.

Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i O , fås de partielle differentia-
ler af de totale differentialer, når man sætter $h_\mu = 0$ for $\mu \in J$. Således er (se 9.19)

$$\begin{aligned} \partial_{23}(x_1^2 x_2^5 x_3^3) &= 5x_1^2 x_2^4 x_3^2 dx_2 + 3x_1^2 x_2^5 x_3^2 dx_3 \\ \partial_1 \|\underline{x}\| &= \|\underline{x}\|^{-1} x_1 dx_1, \end{aligned}$$

og med en lille ændring af betegnelsesmåden

$$\partial_{x,y} \left(x(y^z) \right) = x^{(y^z-1)} y^z dx + y^{z-1} z \left(x(y^z) \right) \log x dy.$$

Groft udtrykt kan man sige, at man finder det partielle differential med hensyn til visse variable ved at behandle de øvrige variable som konstanter ved udregning af differentiallet. Det skal også bemærkes, at begreberne "total" og "partiel" i forbindelse med differentialkvotienter må forstås i relation til et bestemt rum $\mathbb{R}^m$.

Selv om $\underline{f}$ ikke er differentiabel i $\underline{a}$, kan $\underline{f}$ udmærket være partielt differentiabel i $\underline{a}$. Dette er næsten indlysende, men spørgsmålet vil senere blive belyst ved eksempler såvel som ved opgaver

9.22. Vi betragter nu igen en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ og en afbildning $\underline{f} : O \rightarrow \mathbb{R}^n$. For $\underline{a} \in O$ har vi en åben mængde $\Delta_\mu O \subseteq \mathbb{R}$

defineret ved

$$\Delta_{\mu}^0 = \{h \mid \underline{a} + h\underline{e}_{\mu} \in O\},$$

hvor $\underline{e}_{\mu}$ er en af de i 9.1 indførte basisvektorer. Vi indfører den partielle tilvækstfunktion $\Delta_{\mu;\underline{a}} \underline{f} : \Delta_{\mu}^0 \text{ ind i } \mathbb{R}^n$, som defineres ved

$$\Delta_{\mu;\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{f}(\underline{a} + h\underline{e}_{\mu}) - \underline{f}(\underline{a}).$$

At $\underline{f}$ er partielt differentiable med hensyn til den variable x_{μ} betyder, at vi har en opspaltning

$$(14) \quad \Delta_{\mu;\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = \underline{L}_{\mu} h + \underline{\varepsilon}^0(h)h,$$

hvor $\underline{L}_{\mu}$ er konstant.

9.22.1. Definition. Det i (14) indgående konstante talsæt $\underline{L}_{\mu}$ kaldes den partielle differentialkvotient af afbildningen $\underline{f}$ i punktet $\underline{a}$ med hensyn til den μ^{te} koordinat (den variable x_{μ}), og den betegnes $D_{\mu} \underline{f}(\underline{a})$ eller $\underline{f}'_{\mu}(\underline{a})$. Hvis $D_{\mu} \underline{f}(\underline{x})$ eksisterer for alle $\underline{x} \in O$, kaldes afbildningen $D_{\mu} \underline{f} : O \text{ ind i } \mathbb{R}^n$ den partielle differentialkvotient af $\underline{f}$ på mængden O med hensyn til den μ^{te} koordinat.

Af (14) fremgår, at det partielle differential $\partial_{\mu;\underline{a}} \underline{f}$ er defineret ved

$$\partial_{\mu;\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = D_{\mu} \underline{f}(\underline{a})h,$$

og hvis $D_{\mu} \underline{f}$ eksisterer, er

$$(15) \quad \partial_{\mu} \underline{f}(\underline{x}, h) = D_{\mu} \underline{f}(\underline{x})h.$$

Idet vi med $\underline{x}$ betegner den identiske afbildning og med x_{μ} projektionen pr_{μ} , har vi specielt

$$\partial_{\mu} \underline{x} = \partial_{\mu} x_{\mu} = h = d x_{\mu},$$

og vi kan således skrive

$$(16) \quad D \underline{f}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{f}(\underline{x}, h)}{\partial_{\mu} x_{\mu}}.$$

Sædvanligvis skrives $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$, og (16) afkortes til

$$D_{\mu} \underline{f}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{y}}{\partial x_{\mu}}.$$

9.22.2. Sætning. Hvis $\underline{f} : 0 \text{ ind i } \mathbb{R}^n$ er differentiabel, er det totale differential $d\underline{f}$ givet ved

$$(17) \quad d\underline{f}(\underline{x}, \underline{h}) = D_1 \underline{f}(\underline{x})h_1 + \dots + D_m \underline{f}(\underline{x})h_m.$$

Dette følger umiddelbart af, at $d\underline{f}(\underline{x}, \underline{h}_{\mu}) = D_{\mu} \underline{f}(\underline{x})h$. Med $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ skrives relationen traditionel på formen

$$d\underline{y} = \frac{\partial \underline{y}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \underline{y}}{\partial x_m} dx_m.$$

9.23. En partiel differentialkvotient af en afbildning bestemmes ved de fra gymnasieundervisningen kendte differentiationsmetoder, idet alle variable på nær én behandles som konstanter. Hvis funktionen er differentiabel, kan udtrykket (17) umiddelbart opskrives, når de partielle differentialkvotienter først er bestemt. I næste kapitel skal vi vise, at $\underline{f}$ er differentiabel i mængden 0 , hvis de m partielle differentialkvotienter eksisterer og er kontinuerte på 0 . Vi illustrerer fremgangsmåden ved et eksempel:

Vi betragter en afbildning $f : \mathbb{R}^3 \text{ ind i } \mathbb{R}$ defineret ved

$$u = f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^2 + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Idet vi behandler y og z som konstanter, får vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3x^2(x^2+y^2+z^2+1) - 2x(x^3+y^2+z)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 3x^2z^2 - 2xy^2 + 3x^2 - 2xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}, \end{aligned}$$

og på tilsvarende måde fås

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2x^3y + 2x^2y + 2yz^2 - 2yz + 2y}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2x^3z - 2y^2z + x^2 + y^2 - z^2 + 1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}.$$

Man kan nu straks opskrive det totale differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

men vi vil dog ikke skrive det lange udtryk.

Vi betragter den ved

$$(18) \quad \begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \end{aligned}$$

definerede afbildning $\underline{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \text{ ind i } \mathbb{R}^2$. Vi har altså

$$\underline{u} = \underline{f}(\underline{x}) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2),$$

men i praksis vil man i reglen foretrække at opskrive afbildningen på formen (18). I stedet for 1 afbildning ind i $\mathbb{R}^2$ betragter vi således 2 afbildninger ind i $\mathbb{R}$. Vi finder nu

$$\begin{aligned} D_1 f_1(x_1, x_2) &= 2(x_1 - x_2); & D_2 f_1(x_1, x_2) &= 2(-x_1 + 2x_2) \\ D_1 f_2(x_1, x_2) &= 2x_1; & D_2 f_2(x_1, x_2) &= -2x_2, \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} du_1 &= 2(x_1 - x_2)dx_1 + 2(-x_1 + 2x_2)dx_2 \\ du_2 &= 2x_1dx_1 - 2x_2dx_2, \end{aligned}$$

hvilket også kan skrives

$$d\underline{u} = 2(x_1 - x_2, x_2)dx_1 + 2(-x_1 + 2x_2, -x_2)dx_2,$$

men i praksis foretrækker man at opskrive du_1 og du_2 hver for sig.

9.24. Lad nu igen $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, og lad $\underline{f} : 0 \text{ ind i } \mathbb{R}^n$ være en afbildning. Vi betragter et punkt $\underline{a} \in 0$ samt et retningssæt $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, altså $\underline{\lambda} \neq 0$. Mængden $0_1 \subseteq \mathbb{R}$ defineret ved

$$0_1 = \{t | \underline{a} + t\underline{\lambda} \in 0\}$$

er åben, og vi har en afbildning $\varphi : O_1$ ind i $\mathbb{R}^m$ defineret ved

$$\varphi(t) = \underline{f}(\underline{a} + t\underline{\lambda}).$$

9.24.1. Definition. Hvis φ er differentiabel i 0, siges $\underline{f}$ at være differentiabel i retningen $\underline{\lambda}$ i punktet $\underline{a}$. Hvis φ er differentiabel i O_1 , siges $\underline{f}$ at være differentiabel på den rette linie $\{\underline{a} + t\underline{\lambda}\}$. Differentialkvotienten $D\varphi(0)$ kaldes den retningsafledede eller retningsdifferentialkvotienten af $\underline{f}$ i retningen $\underline{\lambda}$ i punktet $\underline{a}$.

9.24.2. Sætning. Hvis $\underline{f}$ i definition 9.24.1 er differentiabel i $\underline{a}$ er dens retningsafledede i retningen $\underline{\lambda}$ i punktet $\underline{a}$ givet ved

$$d\underline{f}(\underline{a}, \underline{\lambda}) = D_1 \underline{f}(\underline{a}) \lambda_1 + \dots + D_m \underline{f}(\underline{a}) \lambda_m.$$

Den ved $\underline{\psi}(t) = \underline{a} + t\underline{\lambda}$ definerede afbildning $\underline{\psi} : O_1$ ind i O er nemlig differentiabel med $d\underline{\psi}(t, dt) = \underline{\lambda} dt$, og da $\varphi = \underline{f} \circ \underline{\psi}$, følger sætningen af sætning 9.16.1.

I det specielle tilfælde, hvor der er tale om en differentiabel afbildning $f : O$ ind i $\mathbb{R}$, indfører man ofte en afbildning

$$\text{grad } f : O \text{ ind i } \mathbb{R}^m$$

defineret ved

$$\text{grad } f = (D_1 f, \dots, D_m f).$$

Vi har da relationen

$$df(\underline{x}, \underline{h}) = \underline{h} \cdot \text{grad } f,$$

hvor vi benytter det i 8.4 indførte produkt af talsæt.

9.25. Vi har set (9.12 ff.), at komplekse funktioner af komplekse variable kan differentieres efter lignende regler som reelle funktioner af reelle variable. En mere indgående undersøgelse viser imidlertid, at der i en anden henseende er en væsentlig forskel mellem det reelle og det komplekse tilfælde, idet kravet om differentiability er langt strengere i det kom-

plekse tilfælde end i det reelle, således at visse komplekse funktioner, der forekommer yderst regulære, alligevel ikke er differentiable.

Vi betragter altså en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{C}$ og en afbildning $f : 0 \text{ ind i } \mathbb{C}$. Vi skriver

$$z = z_1 + iz_2, w = w_1 + iw_2, \underline{z} = (z_1, z_2), \underline{w} = (w_1, w_2)$$

$$w = f(z) = f_1(\underline{z}) + if_2(\underline{z}); \quad 0' = \{\underline{z} \mid z \in 0\},$$

hvor f_1 og f_2 afbilder $0'$ ind i $\mathbb{R}$, og så gælder

$$w_1 = f_1(\underline{z}), w_2 = f_2(\underline{z}), \underline{w} = \underline{f}(\underline{z}).$$

Det ville nu være enkelt, hvis differentiability af f var ensbetydende med differentiability med $\underline{f}$, men vi får i stedet følgende mere komplicerede resultat:

9.25.1. Sætning. Funktionen f er differentiablel, hvis og kun hvis afbildningen $\underline{f}$ er differentiablel og relationerne

$$(19) \quad D_1 f_1 = D_2 f_2, \quad D_2 f_1 = -D_1 f_2,$$

og i så fald gælder tillige

$$(20) \quad Df = D_1 f_1 + iD_2 f_1 = D_2 f_2 - iD_1 f_2.$$

Tilsvarende gælder for differentiability i et enkelt punkt.

Vi sætter $h = h_1 + ih_2$, $\underline{h} = (h_1, h_2)$. Hvis f er differentiablel, har vi en opspaltning

$$\Delta f(z, h) = Df(z)h + \varepsilon^0(h)|h|.$$

Hvis vi sætter $Df(z) = g_1(\underline{z}) + ig_2(\underline{z})$ og spalter ligningen i realdel og imaginærdel, får vi

$$\Delta f_1(\underline{z}, \underline{h}) = g_1(\underline{z})h_1 - g_2(\underline{z})h_2 + \varepsilon_1^0(\underline{h})\|\underline{h}\|$$

$$\Delta f_2(\underline{z}, \underline{h}) = g_2(\underline{z})h_1 + g_1(\underline{z})h_2 + \varepsilon_2^0(\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

som viser, at f_1 og f_2 er differentiablel, samt at

$$D_1 f_1(\underline{z}) = D_2 f_2(\underline{z}) = g_1(\underline{z}), \quad D_1 f_2(\underline{z}) = -D_2 f_1(\underline{z}) = g_2(\underline{z}),$$

og dermed er det bevist, at den i sætningen anførte betingelse

er nødvendig, samt at ligningerne (20) gælder, når f er differentiabel.

Hvis, på den anden side, f er differentiabel og (19) opfyldt, har vi opspaltninger

$$\begin{aligned}\Delta f_1(\underline{z}, \underline{h}) &= D_1 f_1(\underline{z})h_1 + D_2 f_1(\underline{z})h_2 + \varepsilon_1^0(\underline{h})\|\underline{h}\| \\ \Delta f_2(\underline{z}, \underline{h}) &= -D_1 f_2(\underline{z})h_1 + D_1 f_1(\underline{z})h_2 + \varepsilon_2^0(\underline{h})\|\underline{h}\|,\end{aligned}$$

og heraf følger nu

$$\begin{aligned}\Delta f(z, h) &= \Delta f_1(\underline{z}, \underline{h}) + i\Delta f_2(\underline{z}, \underline{h}) = \\ D_1 f_1(\underline{z})h + D_2 f_1(\underline{z})(h_2 - ih_1) + (\varepsilon_1^0(\underline{h}) + i\varepsilon_2^0(\underline{h}))\|\underline{h}\| &= \\ (D_1 f_1(\underline{z}) - iD_2 f_2(\underline{z}))h + \varepsilon^0(h)h,\end{aligned}$$

og dermed er sætningen fuldstændig bevist.

Det følger specielt af sætningen, at de ved udtrykkene $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\bar{z}$ definerede funktioner af z ikke er differentiable for nogen værdi af z .

På den anden side har vi set, at summen af en konvergent potensrække er en differentiabel funktion. I den videregående teori vises det, at en differentiabel afbildning $f: O \rightarrow \mathbb{C}$, hvor $O \subseteq \mathbb{C}$ er en åben mængde, har den egenskab, at $f(z)$ i en omegn af et punkt $z_0 \in O$ kan skrives som sum af en konvergent potensrække $\sum a_n(z-z_0)^n$. Det nærmere studium af disse funktioner har ført til en højt udviklet og meget omfattende teori, som også spiller en stor rolle i matematikkens anvendelser.

1. To lineære afbildninger $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \text{ ind i } \mathbb{R}^4$ og $g : \mathbb{R}^4 \text{ ind i } \mathbb{R}$ er givet ved

$$\underline{f}(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4.$$

Bestem afbildningen $g \circ f$.

2. To lineære afbildninger $f : \mathbb{R}^3 \text{ ind i } \mathbb{C}$ og $g : \mathbb{C} \text{ ind i } \mathbb{C}^2$ er givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + ix_2 - (1+i)x_3$$

$$g(z) = (z, -z).$$

Bestem afbildningen $g \circ f$.

3. En afbildning $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ind i } \mathbb{R}$ defineres ved

$$f(x) = (e^{\frac{1}{x}} + 1)^{-1} (e^{\frac{1}{x}} - 1).$$

Undersøg om dels f , dels restriktionen af f til de positive tal eller til de negative tal, har en grænseværdi i 0.

4. Idet $f(x) = (1 - \cos x)^3 \sqrt{x}$, skal det vises, at $f \in o(\mathbb{R}; \mathbb{R}; h^2)$.

5. Idet $\mathbb{R}_+$ er mængden af positive tal, og $f(x) = \log(1 + e^{\frac{1}{x}})$, skal det vises, at $f \in o(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}; h^p)$ for ethvert $p \in \mathbb{Z}$.

6. Idet $f(\underline{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1} x_1 x_2 x_3$, skal det vises, at afbildningen $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \text{ ind i } \mathbb{R}$ har en grænseværdi i 0.

7. Vis direkte (som i 9.8), at den ved $f(x) = \sqrt[3]{x}$ definerede reelle funktion er differentiabel for $x \neq 0$, men ikke for $x = 0$.

8. Vis direkte, at den ved $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2 \text{ ind i } \mathbb{R}$ er differentiabel, og angiv dens totale differential.

9. Vis, at den ved

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ (x_1^2 + x_2^2)^{-1} x_1^2 x_2^2 & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \end{cases}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2$ på $\mathbb{R}$ er differentiabel i punktet $\underline{0}$ og angiv det totale differential

10. Opskriv betingelsen for differentiabilitet af en afbildning $f : \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{R}$. Vis, at differentiabilitet i dette tilfælde medfører $Df(z) = 0$ (denne specielle differentiabilitetsteori er derfor helt uden interesse).

11. Idet O er cirkelskiven $\{z \mid |z-1| < 1\}$ i $\mathbb{C}$ og afbildningen $f : \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ er givet ved

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (z-1)^n,$$

skal det vises, at $Df(z) = z^{-1}$.

12. Find for $p \in \mathbb{N}$ en potensrækkeudvikling $\sum a_n z^n$ for funktionen $(1-z)^{-p}$ ved gentagen ledvis differentiation af rækkeudviklingen for $(1-z)^{-1}$ (sml. binomialrækken).

13. Bestem konvergensradius for Taylorrækken (se 9.14) for den ved $(1-z)^{-1}$ definerede funktion ud fra punktet $z = \frac{1}{2}i$.

14. En afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$ er bestemt ved, at et punkt $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ har billedpunktet (x_1, x_2^2, x_3^3) . Vis, at $\underline{f}$ er differentiabel og angiv $d\underline{f}$.

15. Vis (ved anvendelse af sætning 9.16.1), at den ved

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 - x_2^2)$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel, og angiv $d\underline{f}$.

16. Vis, at den ved

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ x_1 x_2 \sin(x_1^2 + x_2^2)^{-1} & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

er differentiabel, og angiv df.

17. Vis, at den ved $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|$ definerede afbildning $f : \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel for $\underline{x} \neq \underline{0}$, men ikke i punktet $\underline{0}$.

18. Vi betragter en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^m$, et punkt $\underline{a} \in 0$ og en afbildning $\underline{f} : 0$ ind i $\mathbb{R}^n$. Desuden betragter vi afbildningen $\Delta_{\underline{a}} \underline{f} : 0 - \underline{a}$ ind i $\mathbb{R}^n$. Vi antager, at $\underline{f}$ er differentiabel i 0 , og vi betragter opspaltningen

$$\Delta_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) = d_{\underline{a}} \underline{f}(\underline{h}) + \varepsilon^0(\underline{h})\|\underline{h}\|.$$

Vis, at $\varepsilon^0(\underline{h})$ er kontinuert i hele $0 - \underline{a}$.

19. Idet punkterne i $\mathbb{R}^{2m}$ skrives $(\underline{x}, \underline{y}) = (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m)$, hvor altså $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$, definerer $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$ en afbildning $\varphi : \mathbb{R}^{2m}$ ind i $\mathbb{R}$. Vis, at φ er differentiabel, og vis relationen

$$d(\underline{x} \cdot \underline{y}) = d\underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot d\underline{y}.$$

20. Udregn de partielle differentialkvotienter af følgende afbildninger af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f & \text{ defineret ved } f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + \sin x_2 + \operatorname{Arctg} x_3, \\ g & \text{ defineret ved } g(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} \sin x_2 \operatorname{Arctg} x_3, \\ \varphi & \text{ defineret ved } \varphi(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} \sin x_1 \operatorname{Arctg} x_1. \end{aligned}$$

21. Udregn differentialkvotienten af afbildningen $f :]0, \infty[$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^{(x^x)}$ ved at benytte det sidste eksempel i 9.10 i forbindelse med sætning 9.16.1.

22. Vis, at den ved

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ (x_1^2 + x_2^2)^{-1} x_1 x_2 & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \end{cases}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er partielt differentiabel med hensyn til x_1 og med hensyn til x_2 , skønt f ikke er kontinuert i $\underline{0}$.

23. Vis, at den ved

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ \underline{x}^{-4} x_1 x_2 x_3 x_4 & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \end{cases}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R}^4$ ind i $\mathbb{R}$ er partielt differentiel overalt med hensyn til 3 vilkårlige af de 4 variable. Vis, at afbildningen f er diskontinuert i $\underline{0}$.

24. Udregn det totale differential af hver af afbildningerne

$$f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}; \quad f : \{(x, y) | x \neq 0\} \text{ ind i } \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = \operatorname{Arccot} \frac{x}{y}; \quad g : \{(x, y) | y \neq 0\} \text{ ind i } \mathbb{R}.$$

Tegn en (x, y) -plan og vis, hvorledes værdien af hver af funktionerne er en vinkel i planen, og forklar derved overensstemmelsen mellem resultaterne.

25. Opgave 1 og 2 i kapitel 2 i forbindelse med undersøgelserne i dette kapitel viser, at 2 potensrækker $\sum a_n x^n$ og $\sum b_n x^n$ der er konvergente med samme sum i et interval $]-h, h[$, hvor $h > 0$, stemmer overens koefficient for koefficient. Indsæt

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

i differentialligningen

$$(D^2 - D^0)\chi = 0,$$

og bestem derved en løsning til denne differentialligning.

(Man må først antage, at potensrækken konvergerer i et interval om 0, og når rækken er bestemt, må man kontrollere, at denne antagelse slår til.

26. Vis ved en lignende fremgangsmåde som i opgave 25, at differentialligningen

$$(xD^2 - D + D^0)\chi = 0$$

har en og kun een løsning, der kan skrives som en sum af en uendelig potensrække af formen $x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$.

27. En afbildning $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^3$ er defineret ved

$$\underline{f}(\underline{x}) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2, ax_1),$$

hvor a er konstant. Vis, at afbildningen er injektiv og differentiabel. Angiv $d\underline{f}$.

28. Givet en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^2$, samt en kontinuert afbildning $f : 0$ ind i $\mathbb{R}$. Hvorledes bestemmer man de afbildninger $F : 0$ ind i $\mathbb{R}$, som tilfredsstiller $D_1F = f$. For eksempel:

$$0 = \mathbb{R}^2; \quad f(\underline{x}) = \cos x_1$$

$$0 = \mathbb{R}^2; \quad f(\underline{x}) = \cos x_2$$

$$0 = \mathbb{R}^2; \quad f(\underline{x}) = \cos(x_1x_2).$$

29. Bestem de afbildninger $F : 0$ ind i $\mathbb{R}$, som tilfredsstiller

$$D_1F = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}; \quad 0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

30. Angiv en afbildning $F : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ med det totale differential

$$1) \quad dF(\underline{x}, d\underline{x}) = (x_1^2 - x_2^2)dx_1 - 2x_1x_2dx_2$$

$$2) \quad dF(\underline{x}, d\underline{x}) = e^{x_1} \cos x_2 dx_1 + e^{x_1} \sin x_2 dx_2.$$

31. Angiv afbildninger $F : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ med følgende totale differentialer

$$1) \quad x_1 dx_1 + x_2 dx_2, \quad 2) \quad x_1 dx_1 - x_2 dx_2, \quad 3) \quad x_2 dx_1 + x_1 dx_2.$$

32. Vis, at ingen afbildning $F : 0$ ind i $\mathbb{R}$, hvor $0 \subseteq \mathbb{R}^2$ er åben, har det totale differential

$$x_2 dx_1 - x_1 dx_2.$$

33. En afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\underline{f}(x, y) = (e^x \cos y + e^{-x} \sin y, -e^x \sin y + e^{-x} \cos y).$$

Bestem for $\theta \in \mathbb{R}$ og $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ den retningsafledede af $\underline{f}$ i retningen $(\cos \theta, \sin \theta)$ i punktet (x,y) . Angiv de retninger, i hvilke den retningsaflededes norm er mindst og størst.

34. Vis, at den ved

$$w = \log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$

definerede afbildning $\log : \mathbb{C} \text{ ind i } \mathbb{C}$ er differentiabel undtagen på den negative reelle akse. Angiv differentialkvotienten.

35. Udregn differentialkvotienten af

$$w = \operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

i den åbne mængde, der består af de punkter, hvor funktionen er kontinuert.

Vanskeligere opgaver.

36. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ være åben og $f : 0 \text{ ind i } I \subseteq \mathbb{R}$ være differentiabel. Lad $g : I \text{ ind i } \mathbb{R}$ være differentiabel. Da fremkommer $d(g \circ f)$ af df ved multiplikation med en funktion, som afbilder $0 \text{ ind i } \mathbb{R}$. Formuler og bevis en omvendt sætning.

37. En afbildning $f : \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{R}$ kaldes homogen af grad p , såfremt

$$\forall k > 0. \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m (f(k\underline{x}) = k^p f(\underline{x})).$$

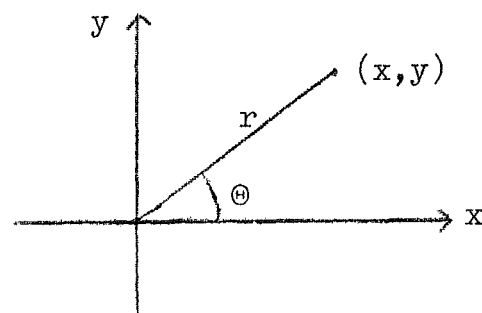
Bevis, at en sådan funktion tilfredsstiller Euler's relation

$$\sum_{\mu=1}^m x_{\mu} D_{\mu} f(\underline{x}) = p f(\underline{x}).$$

38. Punkterne i (x,y) -planen kan også fastlægges ved de polære koordinater (r,θ) , hvor r og θ er numerisk værdi og argument af det komplekse tal $x + iy$. Mellem de to slags koordinater gælder relationerne $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

I anvendelserne møder man ofte differentiable funkti-

oner $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ givet i polære koordinater, altså på formen $z = f(x,y) = g(r,\theta)$. Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ udtrykt ved $\frac{\partial z}{\partial r}$ og $\frac{\partial z}{\partial \theta}$. Punktet $\underline{0}$ indtager en undta-



gelsesstilling, og de fundne resultater gælder ikke i dette punkt.

39. Vis, at den ved

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ (x_1^4 + x_2^2)^{-1} x_1^2 x_2 & \text{for } \underline{x} \neq \underline{0} \end{cases}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel på enhver ret linie i $\mathbb{R}^2$, men alligevel diskontinuert i $\underline{0}$.

Svar opgave.

40. Lad

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

være en potensrække med konvergensradius $R > 0$. Vis, at der for $a_1 \neq 0$ eksisterer en omegn af 0 , som afbildes bijektivt af f . Vis, at det for enhver potensrække, der ikke reduceres til 1 konstant led, gælder, at enhver åben delmængde af konvergenscirklen ved den ved potensrækken definerede afbildning afbildes på en åben delmængde af $\mathbb{C}$.

Kompakthedsteori

med anvendelser på differentiabilitetsteori.

10.1. De videregående undersøgelser af differentiable funktioners egenskaber bygger på de hovedsætninger om kontinuerte funktioner på afsluttede intervaller, som også spiller en rolle i gymnasieundervisningen. I det følgende skal vi diskutere, i hvilket omfang disse sætninger kan udvides til kontinuerte afbildninger af metriske rum ind i metriske rum. I virkeligheden kan sætningerne i et vist omfang overføres til kontinuerte afbildninger af topologiske rum ind i topologiske rum, men en sådan udvidelse vil ikke blive gennemført i dette kursus.

Det viser sig, at de omtalte hovedsætninger for så vidt angår afbildninger af mængder i $\mathbb{R}^m$ er gyldige, når man i stedet for afsluttet interval blot sætter afsluttet, begrænset mængde. Forholdene bliver imidlertid lidt mere komplicerede for afbildninger af vilkårlige metriske rum, og deres formulering nødvendiggør indførelsen af et vigtigt, nyt begreb, kompakthed.

10.2. Vi betragter et metrisk rum $T = (M, \text{dist})$ og en delmængde $A \subseteq T$. Vi vil interessere os for muligheden af, at $A \subseteq T$ har følgende to egenskaber:

I. For ethvert $r > 0$ eksisterer der endelig mange punkter $a_1, \dots, a_n \in T$ (eventuelt $\in A$), således at $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n K(a_\nu, r)$.
Kort udtrykt: for ethvert $r > 0$ kan A dækkes med endelig mange kugler med radius r .

II. Enhver punktfølge (b_n) på A har en delfølge, som er en fundamentalfølge.

10.3. Vi indleder vore undersøgelser med følgende hjælpesætning:

10.3.1. Lemma. Hvis $A \subseteq T$ har egenskaben I, medens (b_n) er

en punktfølge på A , og r er et positivt tal, eksisterer der en delmængde $B \subseteq A$ med $\text{diam } B \leq 2r$, som indeholder en delfølge^{af} (b_n) .

Der eksisterer nemlig punkter $a_1, \dots, a_n \in T$, således at $A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n K(a_\nu, r)$, hvilket medfører $A = \bigcup_{\nu=1}^n A_\nu$, hvor $A_\nu = A \cap K(a_\nu, r)$. For hvert ν gælder $\text{diam } A_\nu \leq \text{diam } K(a_\nu, r) \leq 2r$, og da b_n for hvert $n \in \mathbb{N}$ tilhører en af mængderne A_ν , vil en af disse indeholde en delfølge af (b_n) .

10.3.2. Sætning. Egenskaberne I og II er ækvivalente.

Vi viser først, at egenskaben I implicerer egenskaben II, og vi antager derfor, at $A \subseteq T$ har egenskaben I. Vi benytter lemma 10.3.1. med $r = \frac{1}{2}$, og finder, at der eksisterer en mængde $A_1 \subseteq A$ med

$$\text{diam } A_1 \leq 1 \text{ og delfølge } (a_{1n}) \text{ af } (a_n) \text{ på } A_1.$$

Vi anvender nu lemma 10.3.1 med $r = \frac{1}{4}$ på $A_1 \subseteq T$ og følgen (a_{1n}) , og vi får en mængde $A_2 \subseteq A_1$ med

$$\text{diam } A_2 \leq \frac{1}{2} \text{ og delfølge } (a_{2n}) \text{ af } (a_{1n}) \text{ på } A_2.$$

I næste trin vælger vi $r = \frac{1}{6}$ og anvender lemma 10.3.1 på A_2 og følgen (a_{2n}) . Idet denne proces kan fortsættes i det uendelige (dette burde vises ved et induktionsbevis, som dog er helt trivielt) får vi en følge af delmængder

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

med $\text{diam } A_q \leq \frac{1}{q}$, samt en følge af følger

$$(a_{1n}), (a_{2n}), (a_{3n}), \dots,$$

hvor hver følge har alle de følgende som delfølger, og hvor (a_{qn}) for hvert q ligger i A_n . For følgen (a_{nn}) gælder da, at dens elementer fra index q ligger i A_q , som har diameter $\leq \frac{1}{q}$. Men det viser netop, at (a_{nn}) er en fundamentalfølge. Dermed har vi bevist, at $I \Rightarrow II$.

Beviset for $II \Rightarrow I$ føres indirekte. Vi antager altså, at I

ikke er opfyldt. Vi skriver betingelsen I i formelt sprog:

$$\forall r > 0 \exists a_1, \dots, a_n \in A \left(A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n K(a_\nu, r) \right).$$

Antagelsen, at I ikke er opfyldt, er negationen af denne relation, altså

$$\exists r > 0 \forall a_1, \dots, a_n \in A \left(A \not\subseteq \bigcup_{\nu=1}^n K(a_\nu, r) \right).$$

Betingelsen i parentesen siger, at A omfatter punkter, der falder udenfor alle kuglerne $K(a_\nu, r)$, og betingelsen kan derfor også skrives

$$\exists r > 0 \forall a_1, \dots, a_n \in A \exists a_{n+1} \in A \left(\text{dist}(a_\nu, a_{n+1}) \geq r, \right. \\ \left. \nu = 1, \dots, n \right).$$

Idet $r > 0$ vælges i overensstemmelse med denne betingelse, kan vi altså ét for ét vælge punkter $a_1, a_2, \dots$ i mængden A, således at hvert punkt har afstand $\geq r$ fra alle de foregående. Følgen (a_n) har da den egenskab, at $\text{dist}(a_p, a_q) \geq r$ for alle (p, q) med $p \neq q$. Enhver delfølge af (a_n) vil da have den samme egenskab og kan således ikke være en fundamentalfølge. Vor antagelse medfører således, at betingelsen II ikke er opfyldt.

10.4. Vi vil belyse det foregående med et par eksempler. Vi bemærker først, at sætning 8.7.2 viser, at de ifølge sætning 10.3.2 ækvivalente betingelser I og II højst kan være opfyldte for begrænsede mængder. På den anden side har vi

10.4.1. Sætning. En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ har egenskaberne I og II, hvis og kun hvis den er begrænset.

Lad $r > 0$ være givet. For $\underline{p} \in \mathbb{Z}^m$ indfører vi "kassen" $K(\underline{p})$ defineret ved

$$K(\underline{p}) = \left\{ \underline{x} \mid \left| x_\nu - \frac{2p_\nu r}{\sqrt{(m+1)}} \right| \leq \frac{r}{\sqrt{(m+1)}}; \nu = 1, \dots, m \right\}.$$

Det er klart, at hvert $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ tilhører mindst én af disse kasser. Vi behøver blot for hvert ν at vælge p_ν det (eller et af de)

hele tal, der ligger nærmest ved $\frac{x_\nu}{2r} \sqrt{(m+1)}$, og vi har da $\underline{x} \in K(\underline{p})$. Hvis A er begrænset, er A indeholdt i en "stor kasse"

$$K^* = \left\{ \underline{x} \mid |x_\nu| < \frac{(2N+1)r}{\sqrt{(m+1)}}; \nu = 1, \dots, m \right\},$$

og denne kasse omfatter netop $(2N)^m$ af de små kasser. Hver af de små kasser er helt indeholdt i kuglen med samme midtpunkt og med radius r . Dermed er sætningen vist.

En tilsvarende sætning gælder ikke for Hilbertrummet. Basisfølgerne

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\underline{e}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

tilfredsstiller betingelsen $\|\underline{e}_p - \underline{e}_q\| = \sqrt{2}$ for $p \neq q$, hvilket viser, at mængden $\{\underline{e}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er begrænset, og at ingen delfølge af $(\underline{e}_n)$ er en fundamentalfølge.

10.5. Ved siden af egenskaberne I og II ved en punktmængde A i et metrisk rum T skal vi interessere os for følgende egenskaber, der kan opfattes som skærpede former af I og II:

I'. Enhver overdækning af A med åbne mængder har en delmængde, som er en overdækning af A . Udførligere: Hvis $\{O_j \mid j \in J\}$ er en mængde af åbne mængder, og $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$, eksisterer der en endelig delmængde $J^* \subseteq J$, således at

$$A \subseteq \bigcup_{j \in J^*} O_j.$$

II'. Enhver punktfølge (a_n) på A har en delfølge, som konvergerer mod et grænsepunkt i A .

10.5.1 Sætning. $I' \Rightarrow I \wedge II' \Rightarrow II$.

For $r > 0$ vil mængden $\{K(x, r) \mid x \in A\}$ være en overdækning af A , og af I' følger da, at en vis delmængde $\{K(a_1, r), \dots, K(a_n, r)\}$ udgør en endelig overdækning, men det er netop påstanden I. At

II' $\Rightarrow$ II følger af, at en hver konvergent følge er en fundamentalfølge (sætning 8.9.3).

Af hensyn til det følgende beviser vi følgende hjælpesætning, der ofte kan vise sig nyttig:

10.5.2. Lemma. Hvis punktmængden A i det metriske rum T opfylder betingelsen II', vil enhver aftagende følge $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ af ikke tomme, afsluttede (relativt til A eller F) delmængder af A tilfredsstille betingelsen $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Da mængderne F_n ikke er tomme, kan vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ vælge $x_n \in F_n$. På grund af II' har (x_n) en delfølge (y_n) , som konvergerer mod $a \in A$. Da det for $n \geq N$ gælder, at $y_n \in F_N$, og F_N er afsluttet, har vi $a \in F_N$, og da dette gælder for alle N , kan vi slutte, at $a \in \bigcap F_n$, hvilket viser, at $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Vi har tidligere set, at II' er opfyldt for et afsluttet interval på $\mathbb{R}$. Derved bliver sætningen om intervalindsnævring et specialtilfælde af lemma 10.5.2.

10.6. Vi stiler nu mod at vise en hovedsætning, der siger, at egenskaberne I' og II' er ækvivalente. For at beviset ikke skal blive alt for tungt, vil vi indlede med et par beskedne hjælpesætninger, der kun vil blive benyttede ved dette specielle bevis.

10.6.1. Lemma. Lad A være en punktmængde i et metrisk rum T , og lad (a_n) være en fundamentalfølge på A . Hvis (a_n) ikke er konvergent mod et grænsepunkt i A , er mængden $\{a_n \mid n \geq N\}$ afsluttet relativt til A for enhver værdi af N .

Vi sætter $B_N = \{a_n \mid n \geq N\}$, og vi bemærker først, at $B_N = A$ medfører, at B_N er afsluttet relativt til A . Hvis dette ikke indtræffer, betragter vi et vilkårligt punkt $a \in A \setminus B_N$. Lad os antage, at $a \in \bar{B}_N$, og lad ε være et positivt tal. Da (a_n) er en fundamentalfølge, kan vi vælge $N' \geq N$, således at $\text{diam } B_{N'} < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Da $B_N \setminus B_{N'}$ er en endelig mængde er $C(B_N \setminus B_{N'})$ og derfor også $K(a, \frac{1}{2}\varepsilon) \cap C(B_N \setminus B_{N'})$ en omegn af a , og der eksisterer derfor et $q > N'$ med

$$a_q \in K(a, \frac{1}{2}\varepsilon) \cap C(B_N \setminus B_{N'}), \text{ altså } a_q \in K(a, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Da nu $a_q \in B_{N'}$ og $\text{diam } B_{N'} < \frac{1}{2}\varepsilon$, kan vi slutte, at $B_{N'} \subseteq K(a, \varepsilon)$. Men det viser, at $(a_n) \rightarrow a$ i modstrid med forudsætningerne. Altså kan antagelsen $a \in \bar{B}_N$ ikke være rigtig, og dermed har vi vist, at B_N er afsluttet.

10.6.2 Lemma. Lad A være en punktmængde i et metrisk rum T , og lad $\Delta = \{O_j \mid j \in J\}$ være en overdækning af A med åbne mængder. Vi antager, at II' gælder for $A \subseteq T$. Hvis Δ ikke indeholder en endelig overdækning af A , og hvis ε er et positivt tal, findes der en relativt til A afsluttet delmængde $A_1 \subseteq A$, således at $\text{diam } A_1 \leq \varepsilon$ og således at Δ ikke indeholder nogen endelig overdækning af A_1 .

På grund af implikationerne $\text{II}' \Rightarrow \text{II}$ og $\text{II} \Rightarrow \text{I}$, kan vi vælge $a_1, \dots, a_n \in A$, således at kuglerne $K(a_\nu, \frac{\varepsilon}{2})$ overdækker A . Sætter vi nu $A_\nu = A \cap K(a_\nu, \frac{\varepsilon}{2})$, har vi

$$A = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n,$$

hvor afslutningerne er dannet relativt til A . Hvis Δ nu indeholdt en endelig overdækning af hver af mængderne $\bar{A}_\nu$, ville foreningsmængden af disse overdækninger være en endelig overdækning af A indeholdt i Δ . Altså kan vi vælge et ν , således at Δ ikke indeholder en endelig overdækning af $\bar{A}_\nu$. Af $A_\nu \subseteq K(a_\nu, \frac{\varepsilon}{2})$ følger $\text{diam } A_\nu \leq \varepsilon$. Ved at anvende sætning 8.27.3 på afbildningen dist af mængden $A_\nu \times A_\nu$, hvis afslutningen er $\bar{A}_\nu \times \bar{A}_\nu$, får vi heraf, at $\text{diam } \bar{A}_\nu \leq \varepsilon$. Dermed er sætningen fuldstændig bevist.

10.7. Vi er nu rustede til beviset for hovedsætningen om kompakte mængder i metriske rum.

10.7.1. Sætning. For en punktmængde A i et metrisk rum T gælder $I' \iff II'$.

Vi viser først $I' \Rightarrow II'$. Lad (b_n) være en punktfølge på A . Da $I' \Rightarrow I$ og $I \Rightarrow II$, kan vi umiddelbart slutte, at (b_n) har en delfølge (a_n) , som er en fundamentalfølge. Lad os antage, at (a_n) ikke konvergerer mod et grænsepunkt i A . Vi kan da benytte lemma 10.6.1, som fortæller os, at mængderne $B_N = \{a_n \mid n \geq N\}$ er afsluttede relativt til A . Mængderne $O_N = A \setminus B_N$, $N = 1, 2, \dots$, er da åbne, relativt til A , og $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er en overdækning af A , idet hver a_q tilhører O_n for $n > q$, og alle øvrige elementer af A tilhører alle mængderne O_n . På den anden side vil enhver endelig delmængde af $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ indeholde et O_n med højest mærketal, og a_q vil da for $q > n$ ikke tilhøre nogen af mængderne. Altså er egenskaben I' ikke opfyldt. Vi har således fundet en modstrid mod vore forudsætninger, og antagelsen, om at (a_n) ikke konvergerer mod et grænsepunkt i A , kan således ikke være rigtig.

Dernæst viser vi $II' \Rightarrow I'$. Dette er den vanskeligste del af beviset for sætning 10.7.1, men de fleste af vanskelighederne er overvundet i vore hjælpesætninger, så resten kan klares på ret få linier. Vi fører vort bevis indirekte, idet vi antager, at der findes en overdækning $\Delta = \{O_j \mid j \in J\}$ af A med åbne mængder, således at Δ ikke indeholder en endelig overdækning. Ifølge lemma 10.6.2 findes der en relativt til A afsluttet delmængde $F_1 \subseteq A$ med $\text{diam } F_1 \leq 1$, og således at Δ ikke indeholder en endelig overdækning af F_1 . Vi anvender så lemma 10.6.2 på F_1 og får $F_2 \subseteq F_1$, afsluttet relativt til F_1 , med $\text{diam } F_2 \leq \frac{1}{2}$, og således at Δ ikke indeholder en endelig overdækning af F_1 . Da nu F_1 er afsluttet relativt til A , indeholder F_1 afslutningen af F_2 relativt til A , og denne bliver derfor identisk med afslutningen af F_2 relativt

til F_1 , altså med F_2 . Altså er F_2 afsluttet relativt til A . Ved fortsat anvendelse af lemma 10.6.2 får vi efterhånden en aftagende følge (F_n) af mængder, som er afsluttede relativt til A , og som tilfredsstiller $\text{diam } F_n \leq \frac{1}{n}$, og hvor Δ ikke indeholder en endelig overdækning af F_n . Ifølge lemma 10.5.2 kan vi finde et punkt a , der ligger i alle mængderne F_n . Da Δ er en overdækning af A , kan vi finde $O_q \in \Delta$, således at $a \in O_q$. Der eksisterer da et $r > 0$, således at $K(a, r) \subseteq O_q$. Vi vælger nu et $n > r^{-1}$, og da $a \in F_n$ og $\text{diam } F_n \leq \frac{1}{n} < r$, har vi $F_n \subseteq K(a, r) \subseteq O_q$. Så er $\{O_q\} \subseteq \Delta$ en endelig overdækning af F_n . Ovenfor fandt vi, at Δ ikke indeholdt nogen endelig overdækning af F_n . Dermed har vi en modstrid, og vi kan slutte, at antagelsen om, at Δ ikke indeholder nogen endelig overdækning af A må være forkert.

10.8. Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner kan ikke overføres til helt vilkårlige punktmængder i metriske rum, og en nærmere undersøgelse viser, at disse sætninger gælder for netop de punktmængder, der har egenskaberne I' og II'. Det er derfor rimeligt at give disse punktmængder et særligt navn.

10.8.1. Definition. En punktmængde A i et metrisk rum T kaldes kompakt, hvis og kun hvis den tilfredsstiller de indbyrdes ækvivalente betingelser I' og II'.

Punktmængden A kan opfattes som et delrum $A \subseteq T$, og betingelsen II' vedrører da åbenbart kun delrummet A , således at kompakthed bliver en egenskab ved selve rummet A uafhængig af rummet T . I princippet kunne vi hele vejen nøjes med at tale om kompakthed af metriske rum, men vi måtte da ved anvendelserne i højere grad støtte os til teorien for delrum, så vi ville være nødt til at udvikle denne teori mere detaljeret, end vi har gjort det i det foregående.

10.9. Vi vil vise en række små sætninger om kompakte rum og om kompakte mængder i metriske rum.

10.9.1. Sætning. Et kompakt rum er fuldstændigt.

Lad T være et kompakt rum, lad (a_n) være en fundamentalfølge i T og lad ε være et positivt tal. Vi kan vælge N , således at mængderne $B_n = \{a_q \mid q \geq n\}$ for $n \geq N$ tilfredsstiller betingelsen $\text{diam } B_n < \frac{1}{2}\varepsilon$. Da T er kompakt, har (a_n) en delfølge, som konvergerer mod et grænsepunkt $a \in T$. Heraf fremgår, at B_n indeholder et punkt af kuglen $K(a, \frac{1}{2}\varepsilon)$ og for $n \geq N$ har vi da $B_n \subseteq K(a, \varepsilon)$.

10.9.2 Sætning. En kompakt mængde A i et metrisk rum T er begrænset og afsluttet.

Da betingelsen I er opfyldt for A , er A begrænset ifølge sætning 8.7.2. For at vise, at A er afsluttet, betragter vi et vilkårligt punkt $a \in A$. Om afbildningerne

$$\psi : A \text{ ind i } T \times T \text{ defineret ved } \psi(x) = (a, x)$$

$$\text{dist} : T \times T \text{ ind i } \mathbb{R}$$

ved vi, at de er kontinuerte (se 8.17 samt sætning 8.19.1), idet ψ er isometrisk. Altså er $\varphi = \text{dist} \circ \psi : A \text{ ind i } \mathbb{R}$ kontinuert.

Vi har $\varphi(x) = \text{dist}(a, x)$. Mængden

$$\bar{K}(a, r) = \varphi^{-1}([0, r]) = \{x \mid \text{dist}(a, x) \leq r \wedge x \in A\}$$

er altså afsluttet (sætning 8.27.2) relativt til A , og for $r > 0$ er $\bar{K}(a, r) \neq \emptyset$, da a ikke er et ydre punkt for A . Af lemma 10.5.2 følger nu, at mængderne $\bar{K}(a, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \dots$ har et fælles punkt $b \in A$. For b gælder imidlertid $\text{dist}(a, b) \leq \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$, altså $\text{dist}(a, b) = 0$, hvilket medfører $a = b$. Dermed har vi vist, at et vilkårligt punkt $a \in \bar{A}$ er element af A . Altså er A afsluttet.

10.9.3. Sætning. En punktmængde A i et kompakt metrisk rum T er kompakt, hvis og kun hvis den er afsluttet.

Vi bemærker, at "kun hvis" er et specialtilfælde af sætning 10.9.2, så vi skal blot bevise "hvis". Vi antager altså, at A er afsluttet, og at T er kompakt. Mængden $CA = T \setminus A$ er da åben (sætning 8.26.2). Lad Δ være en overdækning af A med åbne mængder. Så er $\{CA\} \cup \Delta$ en overdækning af T med åbne mængder, og da T er kompakt, indeholder den en endelig overdækning Δ_1 af T . Så er $\Delta_1 \setminus \{CA\} \subseteq \Delta$ en endelig overdækning af A , og dermed er sætningen bevist.

10.10. Det særlig vigtige spørgsmål om kompakthed af mængder i et m -dimensionalt rum besvares fuldstændigt ved følgende sætning.

10.10.1. Sætning. En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er kompakt, hvis og kun hvis den er begrænset og afsluttet.

Vi bemærker, at "kun hvis" følger umiddelbart af sætning 10.9.2. På den anden side har en begrænset og afsluttet mængde A ifølge sætning 10.4.1 egenskaben II. En vilkårlig følge (a_n) på A har således en delfølge (b_n) , som er en fundamentalfølge. Ifølge sætning 8.10.2 har følgen (b_n) da en grænseværdi b i rummet T , men da A er afsluttet, har vi ifølge sætning 8.27.1, at $b \in A$. Dermed har vi vist, at A har egenskaben II', og dermed er sætning 10.10.1 bevist.

Af sætning 10.10.1 fremgår, at en begrænset punktfølge i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge. Dette er Bolzano-Weierstrass' sætning. Desuden følger det, at en overdækning af en lukket og begrænset punktmængde i $\mathbb{R}^m$ med åbne mængder indeholder en endelig overdækning: Dette er Borel's overdækningssætning. Denne sætning har været et vigtigt hjælpemiddel ved mangfoldige matematiske undersøgelser, og den er altså nu indbygget som et yderst vigtigt led i kompakthedsteorien. Den anvendes måske ikke så ofte direkte, men meget ofte mere indirekte, idet kompakthedsteorien i sin helhed

har en central betydning som grundlag for den matematiske analyse.

10.11. For produktrum har vi følgende fundamentale sætning:

10.11.1. Sætning. Lad T_1 og T_2 være metriske rum. Hvis T_1 og T_2 er kompakte, er produktrummet $T = T_1 \times T_2$ kompakt.

En følge (x_n) i T , hvor $x_n = (x'_n, x''_n)$, $x'_n \in T_1$, $x''_n \in T_2$ har, da T_1 er kompakt, en delfølge (y_n) , $y_n = (y'_n, y''_n)$, hvor (y'_n) er konvergent. Da T_2 er kompakt, har (y_n) en delfølge (z_n) , $z_n = (z'_n, z''_n)$, hvor (z''_n) er konvergent. Da (z'_n) er en delfølge af (y'_n) er (z'_n) konvergent. Da både (z'_n) og (z''_n) konvergerer er (z_n) konvergent.

10.12. Vi skal nu studere kompakthed i forbindelse med afbildninger, og vi indleder med kompakthedsteoriens første hovedsætning:

10.12.1. Sætning. Lad S og T være metriske rum og $f : S \rightarrow T$ en kontinuert afbildning. Hvis S er kompakt, er billedmængden $f(S)$ kompakt.

Lad $\Delta = \{O_j \mid j \in J\}$ være en overdækning af $f(S)$ med åbne mængder. Da er $f^{-1}(\Delta) = \{f^{-1}(O_j) \mid j \in J\}$ en overdækning af S med åbne mængder, og vi kan derfor finde endelig mange O_j med $j \in J$, således at mængderne $f^{-1}(O_j)$ dækker S , og mængderne O_j vil da dække $f(S)$.

Som eksempel kan vi nævne, at vi ved at anvende sætning 10.12.1. på projektionsafbildningerne får, at en projektion af en kompakt mængde er kompakt, altså begrænset og afsluttet. Det er derimod ikke rigtigt, at en projektion af en afsluttet mængde altid er afsluttet. I planen udgør en gren af hyperblen $x_1 x_2 = 1$ således en afsluttet mængde, men dens projektion på x_1 -aksen er intervallet $]0, \infty[$, som ikke er afsluttet.

Sætning 10.12.1 er kompakthedsteoriens første hovedsætning. Dens forbindelse med gymnasieundervisningens hovedsætninger om kontinuerte funktioner ses klart af følgende specielle tilfælde:

10.12.2. Sætning. Lad S være et metrisk rum og $f : S \text{ ind i } \mathbb{R}$ en kontinuert, reel funktion på S . Hvis S er kompakt, har mængden $f(S)$ et største element og et mindste element.

Ifølge sætning 10.12.1 er $f(S)$ kompakt, altså ifølge sætning 10.10.1 afsluttet og begrænset. Altså er $\sup f(S)$ endelig. Efter sin definition er $\sup f(S)$ ikke et ydre punkt for $f(S)$, og da $f(S)$ er afsluttet, har vi altså $\sup f(S) \in f(S)$. Analogt for $\inf f(S)$.

10.13. Kompakthedsteoriens anden hovedsætning udtaler sig om en egenskab, der kaldes ligelig kontinuitet. Vi møder her for første gang glosen ligelig, der benyttes i forbindelse med relationer, der indledes med $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ eller $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$. Hvis der i en sådan relation indgår variable, kan det have betydning om $\delta > 0$ kan vælges, således at det på engang kan benyttes for alle værdier af de variable. Lad os betragte de metriske rum S og T , hvor vi i begge rum betegner afstandsfunktionen med dist , idet der ikke er fare for misforståelse. At $f : S \text{ ind i } T$ er kontinuert i et bestemt punkt $x \in S$ udtrykkes ved relationen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in K(x, \delta) (\text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

At $f : S \text{ ind i } T$ er kontinuert udtrykkes ved relationen

$$\forall x \in S \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in K(x, \delta) (\text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

At $f : S \text{ ind i } T$ er ligelig kontinuert betyder, at denne betingelse er opfyldt i den skarpere form, at det samme $\delta > 0$ kan benyttes for alle $x \in S$. For at udtrykke dette må vi flytte kvantoren $\forall x \in S$ hen bag den eksistentielle kvantor, og relationen bliver derfor

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S \forall y \in K(x, \delta) (\text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Her udtrykker kvantorerne $\forall x \in S \ \forall y \in K(x, \delta)$, at påstanden skal være opfyldt for alle x og y i S med $\text{dist}(x, y) < \delta$, og vi foretrækker derfor at skrive relationen på den mere symmetriske form

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in S \ \forall y \in S (\text{dist}(x, y) < \delta \Rightarrow \text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Vi definerer derfor:

10.13.1. Definition. En afbildning $f : S \text{ ind i } T$, hvor S og T er metriske rum, kaldes ligelig kontinuert, hvis og kun hvis den tilfredsstiller betingelsen (1).

Som en forberedelse til beviset for hovedsætningen vil vi dreje betingelsen (1) på den anden måde. På grund af den logiske relation

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A),$$

kan (1) også skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in S \ \forall y \in S (\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \Rightarrow \text{dist}(x, y) \geq \delta).$$

Vi indfører nu en punktmængde $M(\varepsilon) \subseteq S \times S$ defineret ved

$$(2) \quad M(\varepsilon) = \{(x, y) \mid \text{dist}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\},$$

og betingelsen kan da skrives på den kortere form

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \in M(\varepsilon) \ (\text{dist}(x, y) \geq \delta).$$

Nu er dist jo en afbildning $\text{dist} : S \times S \text{ ind i } \mathbb{R}$, og vi kan derfor lige så godt skrive

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 (\inf \text{dist}(M(\varepsilon)) \geq \delta),$$

og nu er δ blevet overflødig i betingelsen, som reduceres til

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 (\inf \text{dist}(M(\varepsilon)) > 0).$$

Vi skal nu vise kompakthedsteoriens anden hovedsætning.

10.13.2. Sætning. En kontinuert afbildning $f : S \text{ ind i } T$ af et kompakt metrisk rum S ind i et metrisk rum T er ligelig kontinuert.

Afbildningen $\text{dist} \circ (f \times f) : S \times S \text{ ind i } \mathbb{R}$ er kontinuert, da den er sammensat af kontinuerte afbildninger. Mængden $M(\varepsilon)$ (se (2)) er netop originalmængden ved denne afbildning til den

afsluttede mængde $[\varepsilon, \infty]$. Af sætning 8.27.2 følger derfor, at $M(\varepsilon)$ er afsluttet. Ifølge sætning 10.11.1 er $S \times S$ kompakt, og derefter følger af sætning 10.9.3, at $M(\varepsilon) \subseteq S \times S$ er kompakt. Da dist er kontinuert på $S \times S$, er dens restriktion til $M(\varepsilon)$ ligeledes kontinuert, og ifølge sætning 10.12.2 har $\text{dist}(x, y)$ en mindste værdi $\inf \text{dist}(M(\varepsilon))$ på $M(\varepsilon)$. For $(x, y) \in M(\varepsilon)$ gælder nu $\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \varepsilon > 0$, altså $f(x) \neq f(y)$, altså $x \neq y$, altså $\text{dist}(x, y) > 0$. Specielt gælder dette også for den mindste funktionsværdi, altså $\inf \text{dist}(M(\varepsilon)) > 0$. Dermed har vi vist, at betingelsen (3) er opfyldt.

Det specielle tilfælde af sætning 10.13.2, der handler om en reel funktion af en reel variabel på et interval, omtales i en del af de i gymnasiet benyttede lærebøger som en sætning om en funktions oscillation.

10.14. Vi skal vise endnu en tredje hovedsætning om kontinuerede afbildninger af kompakte rum. Vi indleder med en definition:

10.14.1. Definition. Lad S og T være topologiske rum. En afbildning $f: S \rightarrow T$ kaldes en homóomorfi, hvis og kun hvis f er bijektiv og såvel f som f^{-1} er kontinuerte. Rummene S og T kaldes homóomorfe, hvis og kun hvis der eksisterer en homóomorfi $f: S \rightarrow T$.

Det fremgår umiddelbart af denne definition, at både f og f^{-1} afbilder åben mængde på åben mængde, afsluttet mængde på afsluttet mængde, kompakt mængde på kompakt mængde. Af $f(A) = B$ følger $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}$, $f(\overline{A}) = \overline{B}$ og $f(\delta A) = \delta B$, og analogt for f^{-1} . Det ses endvidere, at "homóomorf med" er en ækvivalensrelation. Topologien beskæftiger sig netop med de egenskaber og begreber, der bevares ved homóomorfe afbildninger.

Vi skal nu vise den tredje hovedsætning.

10.14.2. Sætning. Lad S og T være metriske rum, og $f:S \rightarrow T$ en kontinuert, bijektiv afbildning. Hvis S er kompakt, er f en homeomorfi.

Lad $F \subseteq S$ være en afsluttet mængde. Da S er kompakt, er F kompakt ifølge sætning 10.9.3, og $f(F)$ er kompakt og dermed afsluttet ifølge sætning 10.12.1. Sætning 8.27.2 viser nu, at f^{-1} er kontinuert, og dermed er beviset fuldført.

Sætning 10.14.2 er ikke umiddelbart en generalisation af nogen af de fra gymnasiet kendte hovedsætninger om kontinuerede funktioner. Hvis en funktion $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert, og afbilder $[a,b]$ bijektivt på mængden $M \subseteq \mathbb{R}$, giver sætningen, at f har en kontinuert, anvendt afbildning $f^{-1}:M \rightarrow [a,b]$ på $\mathbb{R}$. Derimod får vi ikke umiddelbart, at M er et interval, og det er netop det væsentligste punkt i den i gymnasieundervisningen behandlede sætning. Vi skal vende tilbage til denne side af sagen i næste kapitel.

10.15. Vi har nu afsluttet vor gennemgang af den generelle kompakthedsteori, og vi skal derefter gå over til nogle anvendelser af teorien. Først vil vi vise nogle sætninger om afsluttede mængders indbyrdes beliggenhed i metriske rum og specielt i n -dimensionale rum. Vi antager hele tiden, at de optrædende punktmængder ikke er tomme.

10.15.1. Definition. Ved afstanden mellem punktmængderne A og B i det metriske rum T forstår vi talværdien

$$\text{dist}(A,B) = \inf\{\text{dist}(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Hvis specielt $A = \{a\}$ skriver vi $\text{dist}(a,B)$ i stedet for $\text{dist}(A,B)$, og talværdien kaldes da afstanden mellem punktet a og mængden B .

10.15.2. Sætning. $\text{dist}(a,A) = 0 \iff a \in \bar{A}$.

Af definitionen af ydre punkt ses umiddelbart, at

$$\text{dist}(a,A) > 0 \iff a \in \mathring{A},$$

og sætningen er blot den tilsvarende ækvivalens mellem negationerne

10.15.3. Sætning. Hvis punktmængderne A og B i det metriske rum T er kompakte, har vi

$$\exists a \in A \exists b \in B (\text{dist}(a,b) = \text{dist}(A,B)).$$

Den ved $\text{dist}(x,y)$ definerede reelle funktion på den ifølge sætning 10.11.1 kompakte mængde $A \times B$ antager ifølge sætning 10.12.2 en mindste værdi $\text{dist}(a,b)$, som altså netop er $\inf\{\text{dist}(x,y) \mid (x,y) \in A \times B\}$

10.15.4. Sætning. Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Den ved $\varphi(x) = \text{dist}(x,A)$ definerede afbildning $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert.

For $x \in T$, $y \in T$, $\varepsilon > 0$, vil $K(x, \varphi(x) + \varepsilon)$ indeholde punkter af A , og af sætning 8.2.4 følger

$$K(x, \varphi(x) + \varepsilon) \subseteq K(y, \text{dist}(x,y) + \varphi(x) + \varepsilon),$$

så vi kan slutte, at den sidste kugle indeholder punkter af A . Altså har vi

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \text{dist}(x,y) + \varepsilon,$$

og da dette gælder for alle $\varepsilon > 0$, har vi

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \text{dist}(x,y).$$

Det samme ræsonnement kan gennemføres med x og y ombyttede. Altså gælder almindeligt

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \text{dist}(x,y).$$

Afbildningen φ er altså afstandsformindskende og dermed kontinuert (se 8.16).

10.15.5. Sætning. Lad A og B være punktmængder i et metrisk rum T . Hvis A er kompakt, eksisterer der et punkt $a \in A$, således at $\text{dist}(a,B) = \text{dist}(A,B)$.

Ifølge sætning 10.15.4 er den ved $\text{dist}(x,B)$ definerede

reelle funktion kontinuert på den kompakte mængde A , og den har derfor ifølge sætning 10.12.2 en mindste værdi $\text{dist}(a, B)$, hvor $a \in A$. For $x \in A$, $y \in B$ har vi nu

$$\text{dist}(a, B) \leq \text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, y),$$

og på den anden side er

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, B) &= \inf\{\text{dist}(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\} \leq \\ &\inf\{\text{dist}(a, y) \mid y \in B\} = \text{dist}(a, B), \end{aligned}$$

hvormed sætningen er bevist.

10.15.6. Sætning. Lad F være en afsluttet mængde i $\mathbb{R}^m$, og lad a være et punkt. Der eksisterer et punkt $b \in F$, således at $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(a, F)$.

Mængden $F_1 = F \cap \overline{K(a, r)}$ er for et passende $r > 0$ kompakt og ikke tom. Ifølge sætning 10.15.3 eksisterer $b \in F_1$, således at $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(a, F_1)$. På grund af definitionen af F_1 er $\text{dist}(a, b) \leq r$, og for $y \in F \setminus F_1$ er $\text{dist}(a, y) \geq r$. Dermed er sætningen bevist.

10.15.7. Sætning. Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er kompakt, medens $B \subseteq \mathbb{R}^m$ er afsluttet, eksisterer $a \in A$ og $b \in B$, således at $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(A, B)$.

Ifølge sætning 10.15.5 eksisterer $a \in A$, således at $\text{dist}(a, B) = \text{dist}(A, B)$. Ifølge sætning 10.15.6 eksisterer $b \in B$, således at $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(a, B)$. Dermed er sætningen bevist.

10.16. Vi skal nu repetere og i yderst beskedent omfang udvide et afsnit af gymnasieundervisningen.

10.16.1. Definition. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en afbildning. Vi siger, at f er strengt voksende i et punkt $x_0 \in I$, såfremt der eksisterer et positivt tal δ , således at

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[\quad (f(x) < f(x_0))$$

$$\forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[\quad (f(x) > f(x_0)).$$

Analogt for strengt aftagende.

10.16.2. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en afbildning. Hvis f er differentiabel i $x_0 \in I$ har vi:

Hvis $Df(x_0) > 0$, er f strengt voksende i x_0 ;

hvis $Df(x_0) < 0$, er f strengt aftagende i x_0 .

Lad os antage, at $Df(x_0) > 0$. Vi har opspaltningen

$$\Delta_{x_0} f(h) = (Df(x_0) + \varepsilon^\circ(h))h,$$

hvor $\varepsilon^\circ(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$. Vi kan da vælge δ , således at

$$Df(x_0) + \varepsilon^\circ(h) > 0 \text{ for } |h| < \delta,$$

og det ses da, at $\Delta_{x_0} f(h)$ for $0 < |h| < \delta$ har samme fortegn som h , hvilket viser, at f er strengt voksende i x_0 . Analogt for $Df(x_0) < 0$.

10.16.3. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en afbildning. Hvis $f(x)$ antager sin mindste eller sin største værdi i et punkt $x_0 \in I$ og f er differentiabel i dette punkt, er $Df(x_0) = 0$.

Da x_0 er indre punkt i I , og $f(x_0)$ er den største eller den mindste funktionsværdi, er f hverken strengt voksende eller strengt aftagende i x_0 . Af sætning 10.16.2 følger da, at $Df(x_0)$ hverken er positiv eller negativ.

10.16.4. Rolles sætning. Hvis den kontinuerte afbildning $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel på $]a, b[$, og $f(a) = f(b) = 0$, eksisterer der et punkt $c \in]a, b[$, hvor $Df(c) = 0$.

Da $[a, b]$ er kompakt (sætning 10.10.1), eksisterer der ifølge sætning 10.12.2 en største funktionsværdi $f(x_1)$ og en mindste funktionsværdi $f(x_2)$. Hvis en af dem, f.eks. $f(x_1)$ falder i $]a, b[$ er $Df(x_1) = 0$ ifølge sætning 10.16.3. I modsat fald falder x_1 og x_2 i intervalpunkterne, og vi får $f(x_1) = f(x_2) = 0$, hvilket medfører, at $f(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$, og så er $Df(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$.

10.16.5. Den udvidede middelværdisætning. Hvis de kontinuerede afbildninger $f, g: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiable på $]a, b[$, eksisterer der et punkt $c \in]a, b[$, således at

$$(f(b) - f(a))Dg(c) = (g(b) - g(a))Df(c).$$

Vi indfører en hjælpefunktion $\varphi: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved $\varphi(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$. Af regnereglerne følger, at φ er kontinuert på $[a, b]$, og differentiable på $]a, b[$ med

$$D\varphi(x) = (f(b) - f(a))Dg(x) - (g(b) - g(a))Df(x).$$

Da vi endvidere har $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, giver sætning 10.16.4 umiddelbart eksistensen af punktet c .

10.16.6. Differentialregningens middelværdisætning. Hvis den kontinuerede afbildning $f: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiable på $]a, b[$, eksisterer der et punkt $x \in]a, b[$, således at

$$f(b) - f(a) = (b-a)Df(c).$$

Dette er et specialtilfælde af sætning 10.16.5 svarende til, at g er den ved $g(x) = x$ definerede afbildning.

10.16.7. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval og $f: I$ ind i $\mathbb{R}$ en differentiable afbildning. Hvis $Df(x) = 0$ for alle $x \in I$, er f konstant. Hvis $Df(x) \geq 0$ for alle $x \in I$, er f voksende på I . Hvis det yderligere gælder, at Df ikke er identisk 0 i noget interval $I_1 \subseteq I$, er f strengt voksende. Analogt for $Df(x) \leq 0$.

For $[x_1, x_2] \subseteq I$ giver sætning 10.16.7, at der eksisterer et punkt $\xi \in]x_1, x_2[$, således at

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)Df(\xi).$$

Heraf følger de to første påstande umiddelbart. Hvis f er voksende uden at være strengt voksende, eksisterer der punkter $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$, således at $f(x_1) = f(x_2)$, og f er da

konstant på $[x_1, x_2]$, altså $Df(x) = 0$ for alle $x \in [x_1, x_2]$.

10.17. Som allerede beviset for sætning 10.16.7 antyder, vil man i reglen anvende middelværdisætningerne på variable intervaller. Ved de særligt vigtige anvendelser af middelværdisætningerne på selve differentiationsteorien, betegnes intervalendepunkterne ofte med x og $x+h$, hvor h er en tilvækst, som kan være positiv eller negativ. Et punkt i det åbne interval med endepunkter x og $x+h$ betegnes da $x+\theta h$, hvor $\theta \in]0,1[$. Er der tale om en afbildning $f:I$ ind i $\mathbb{R}$, har vi $(x,h) \in \Delta I$, og θ vil afhænge af x og h , så vi bør skrive mere udførligt $x + \theta(x,h)h$, og θ er da en afbildning af ΔI ind i $\mathbb{R}$. Hvis vi anvender middelværdisætningerne må vi huske, at afbildningen θ også afhænger af, hvilke funktioner sætningen anvendes på.

Afbildningen θ vil i almindelighed ikke være kontinuert, og den vil heller ikke være éntydig bestemt. Lad os betragte den ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$

definerede afbildning $\varphi:\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$. Vi har tidligere vist, at φ er overalt differentiablel med differentialkvotienten

$$D\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Middelværdisætningen giver da for et interval $[a,x]$:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x D\varphi(\theta(x)x).$$

Det ses her, at $\theta(x)$, når x er et ikke alt for stort positivt tal, kan vælges på uendelig mange måder, så ligningen kommer til at gælde. På den anden side fremgår det, at $\theta(x)x$ må falde i de intervaller, hvor $|D\varphi(x)|$ er ret lille, og derfor kan $\theta(x)$ ikke vælges som en kontinuert funktion af x , når x nærmer sig nul. Heller ikke $\theta(x)x$ kan blive kontinuert, men dette sidste udtryk

er dog kontinuert i punktet 0.

10.18. Inden vi går over til de mere fundamentale anvendelser af middelværdisætningerne, viser vi 2 simple sætninger om differentiable funktioner af 1 variabel.

10.18.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuert afbildning og a et punkt af I . Hvis f er differentiable på $I \setminus \{a\}$, og Df har en endelig grænseværdi b i punktet a , da er f differentiable i a og $Df(a) = b$.

Af middelværdisætningen følger for $h \in I - a$:

$$\Delta_a f(h) = f(a+h) - f(a) = h Df(a + \theta(h)h).$$

Her er $a + \theta(h)h$ kontinuert for $h \rightarrow 0$, og vi har derfor

$$Df(a + \theta(h)h) = b + \varepsilon^0(h),$$

og ved indsættelse af dette fås

$$\Delta_a f(h) = bh + \varepsilon^0(h)h,$$

hvormed sætningen er vist.

Den i 10.17 betragtede afbildning ϕ viser, at en afbildning kan være differentiable i et punkt uden at differentialkvotienten har en grænseværdi i punktet.

10.18.2. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt interval, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerte afbildninger og a et punkt af I . Vi antager, at $f(a) = g(a) = 0$, at f og g er differentiable på $I \setminus \{a\}$, og at $Dg(x) \neq 0$ for alle $x \in I \setminus \{a\}$. Da har vi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b,$$

også hvis $b = \infty$ eller hvis $b = -\infty$.

Den udvidede middelværdisætning giver nemlig, at der eksisterer et $\theta(h) \in]0,1[$, således at

$$(f(a+h) - f(a))Dg(a + \theta(h)h) = (g(a+h) - g(a))Df(a + \theta(h)h),$$

hvilket viser, at $g(a+h) - g(a) \neq 0$. Relationen kan nu skrives

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{Df(a+\theta(h)h)}{Dg(a+\theta(h)h)},$$

Hvis nu $\frac{Df(a+h)}{Dg(a+h)}$ har grænseværdien b for $h \rightarrow 0$, vil brøken på højre side ligeledes have grænseværdien b for $h \rightarrow 0$. Dermed er sætningen bevist.

Vælger vi specielt for f den i 10.17 omtalte funktion φ , medens vi sætter $g(x) = x$, ser vi umiddelbart, at $\frac{f}{g}$ har grænseværdi 0 for $x \rightarrow 0$, skønt $\frac{Df}{Dg}$ ikke har nogen grænseværdi. Altså er betingelsen i sætning 10.18.2 ikke nødvendig.

Sætning 10.18.2 kaldes l'Hôpital's regel. Vi viser et eksempel på en anvendelse:

For at undersøge om

$$f(x) = \frac{x \sin x + \cos x - 1}{\sin^2 x}$$

har en grænseværdi for $x \rightarrow 0$, bemærker vi først, at både tæller og nævner har grænseværdi 0 (det er selvfølgelig helt afgørende, at denne detalje huskes). Ved differentiation af tæller og nævner fås brøken

$$\frac{\sin x + x \cos x - \sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{x}{\sin x}, \frac{1}{2 \cos x},$$

Vi ved (eller vi finder ved differentiation af tæller og nævner), at $\frac{x}{\sin x}$ har grænseværdi 1, så hele brøken har grænseværdien $\frac{1}{2}$. Den oprindelige funktion vil da også have grænseværdien $\frac{1}{2}$ for $x \rightarrow 0$.

Det skal understreges, at l'Hôpital's regel ikke altid er den mest praktiske metode til grænseværdibestemmelse, og at de primitive metoder, der ved tidligere lejligheder har været til nytte for os, ofte vil være at foretrække.

10.19. Vi skal i det følgende vise nogle sætninger om differentiability af afbildninger $f : O \text{ ind i } \mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{R}^n$), hvor $O \subseteq \mathbb{R}^m$. Vore sætninger forudsætter, at f er partielt differenti-

abel med hensyn til hver variabel, og at de partielle differentialkvotienter har visse kontinuitetsegenskaber. Beviserne beror på gentagne anvendelser af differentialregningens middelværdisætning, idet man giver alle de variable på en enkelt nær konstante værdier, således at man får en funktion af hver variabel, på hvilken middelværdisætningen kan anvendes. Vi vil formulere denne udnyttelse af middelværdisætningen på en enkelt variabel som en hjælpesætning. Da der i hjælpesætningen optræder en særlig udmærket variabel, vil vi benytte et betegnelsesystem, der skiller en variabel ud fra de øvrige.

Vi betragter en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ og en afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. For et punkt i i O benytter vi betegnelsen $(\underline{x}; y) = (x_1, \dots, x_m; y)$ og svarende hertil sætter vi $(\underline{h}; k) = (h_1, \dots, h_m; k)$. Hvis f er partielt differentiable med hensyn til y , vil vi betegne den partielle differentialkvotient med hensyn til y med $D_y f$. Vi skal nu formulere vor hjælpesætning:

10.19.1. Lemma. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ være en åben mængde og $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ en afbildning. Lad $(\underline{x}_0, y_0) \in O$ være et vilkårligt punkt. Vi antager, at restriktionen $f(\underline{x}, y_0)$ er kontinuert i $\underline{x}_0$, og at den partielle differentialkvotient $D_y f$ eksisterer i en omegn $U \in \dot{U}(\underline{x}_0, y_0)$ og er kontinuert i $(\underline{x}_0, y_0)$. Afbildningen f er da kontinuert i $(\underline{x}_0, y_0)$, og for funktionstilvæksten

$$\Delta^* f(\underline{h}; k) = f(\underline{x}_0 + \underline{h}; y_0 + k) - f(\underline{x}_0 + \underline{h}; y_0)$$

har vi en opspaltning

$$\Delta^* f(\underline{h}; k) = D_y f(\underline{x}_0; y_0)k + \varepsilon^{\circ}(\underline{h}; k)k,$$

hvor $\varepsilon^{\circ}(\underline{h}; k)$ er kontinuert i $(\underline{0}; 0)$ og $\varepsilon^{\circ}(\underline{0}; 0) = 0$.

Uden at indskrænke almindeligheden kan vi antage, at der eksisterer et reelt tal $\delta > 0$, således at U netop er givet ved

$$U = \{(\underline{x}_0 + \underline{h}, y_0 + k) \mid |h_1| \leq \delta \wedge \dots \wedge |h_m| \leq \delta \wedge |k| \leq \delta\}.$$

For hvert fast $|\underline{h}|$ med $|h_\mu| \leq \delta$, $\mu = 1, \dots, m$ er $\varphi(y) = f(\underline{x} + \underline{h}, y)$ differentiabel i $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, og for $|k| < \delta$ får vi derfor ved middelværdisætningen

$$\Delta^* f(\underline{h}; k) = D_y f(\underline{x}_0 + \underline{h}; y_0 + \Theta(\underline{h}; k)k)k,$$

hvor $0 < \Theta(\underline{h}; k) < 1$. Funktionen $\Theta(\underline{h}; k)k$ er da kontinuert for $k = 0$ og dermed i $(\underline{0}, 0)$, så vi kan skrive

$$D_y f(\underline{x}_0 + \underline{h}; y_0 + \Theta(\underline{h}; k)k) = D_y f(\underline{x}_0; y_0) + \varepsilon^0(\underline{h}; k),$$

hvor $\varepsilon^0(\underline{h}; k)$ er kontinuert i $(\underline{0}; 0)$ og $\varepsilon^0(\underline{0}; 0) = 0$. Vi har dermed fundet den i lemmaet omtalte opspaltning.

Vi bemærker, at $\Delta^* f(\underline{h}; k)$ er kontinuert i $(\underline{0}; 0)$ ifølge opspaltningen. For $(\underline{x}; y) \in U$ har vi nu

$$f(\underline{x}; y) = f(\underline{x}; y_0) + \Delta^* f(\underline{x} - \underline{x}_0; y - y_0),$$

hvor hvert led på højre side er kontinuert i $(\underline{x}_0; y_0)$. Altså er f kontinuert i $(\underline{x}_0; y_0)$.

10.20. Hvis en afbildning $f : O$ ind i $\mathbb{R}$, hvor $O \subseteq \mathbb{R}^m$ er åben, i en omegn $U \subseteq O$ af et punkt $\underline{x}_0 \in O$ har en partiel differentialkvotient $D_\mu f$, som er kontinuert i $\underline{x}_0$, siger vi, at f er kontinuert partielt differentiabel med hensyn til $\underline{x}_\mu$ i punktet $\underline{x}_0$. Hvis $f : O$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel i O , og de partielle differentialkvotienter $D_1 f, \dots, D_m f$ er kontinuerte i O , siger vi, at f er kontinuert differentiabel i O .

Det er måske på sin ålads at understrege, at de kontinuert differentiable funktioner for de fleste anvendelser er en mere hensigtsmæssig funktionsklasse end de differentiable funktioner. Vi skal nu vise følgende hovedsætning:

10.20.1. Sætning. Hvis $f : O$ ind i $\mathbb{R}$, hvor $O \subseteq \mathbb{R}^m$ er åben, har partielle differentialkvotienter $D_1 f, \dots, D_m f$, som er kontinuerte i O , da er f kontinuert differentiabel i O .

Vi foretrækker dog at formulere og vise en lidt stærkere sætning, som er noget tungere at formulere, men lige så let at

bevise. Ved de fleste anvendelser er det sætning 10.20.1, man har brug for, men den stærkere sætning vil dog vise sig nyttig ved mindst én anvendelse i et senere kapitel.

10.20.2. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, $f : O$ ind i $\mathbb{R}$ en afbildning og $\underline{a} \in O$ et punkt. For $q \in \{1, \dots, m\}$ vil vi benytte betegnelsen

$$\mathbb{R}_{\underline{a}}^q = \{\underline{x} \mid x_{q+1} = a_{q+1} \wedge \dots \wedge x_m = a_m\}.$$

Vi har altså specielt $\mathbb{R}_{\underline{a}}^m = \mathbb{R}^m$ og $R_1 = \{\underline{a} + \underline{e}_1 t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Vi antager, at der eksisterer en omegn $U \in \dot{U}(\underline{a})$, således at det for $q \in \{1, \dots, m\}$ gælder, at $D_q f(\underline{x})$ eksisterer for $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\underline{a}}^q \cap U$ og er kontinuert i $\underline{a}$. Da er f differentiabel i $\underline{a}$.

Vi kan uden at indskrænke almindeligheden antage, at der eksisterer et tal $\delta > 0$, således at U er defineret ved

$$U = \{\underline{x} \mid |x_1 - a_1| \leq \delta \wedge \dots \wedge |x_m - a_m| \leq \delta\}.$$

Med $f_q : \mathbb{R}_{\underline{a}}^q \cap U$ ind i $\mathbb{R}$ betegner vi restriktionen af f til $\mathbb{R}_{\underline{a}}^q \cap U$. Vi viser ved induktion efter q , at f_q er differentiabel i $\underline{a}$. Ifølge det givne er dette opfyldt for $m = 1$. Hvis det gælder for et vist q , har vi en opspaltning

$$\Delta_{\underline{a}} f_q(\underline{h}) = D_1 f(\underline{a})h_1 + \dots + D_q f(\underline{a})h_q + \varepsilon_1^{\circ}(\underline{h})\|\underline{h}\|,$$

hvor $\underline{h} = (h_1, \dots, h_q)$. Af lemma 10.19.11 følger nu, at f_{q+1} er kontinuert i $\underline{a}$, og at vi har en opspaltning

$$\begin{aligned} \Delta^* f_{q+1}(\underline{h}; h_{q+1}) &= \\ f(a_1 + h_1, \dots, a_q + h_q, a_{q+1} + h_{q+1}, a_{q+2}, \dots, a_m) - \\ f(a_1 + h_1, \dots, a_q + h_q, a_{q+1}, \dots, a_m) &= \\ D_{q+1} f(\underline{a})h_{q+1} + \varepsilon_2^{\circ}(\underline{h}, h_{q+1})|h_{q+1}|. \end{aligned}$$

Vi får da umiddelbart for $\underline{h}' = (h_1, \dots, h_{q+1})$

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{a}} f_{q+1}(\underline{h}') &= \Delta_{\underline{a}} f_q(\underline{h}) + \Delta^* f_{q+1}(\underline{h}; h_{q+1}) = \\ D_1 f(\underline{a})h_1 + \dots + D_{q+1} f(\underline{a})h_{q+1} + \varepsilon^{\circ}(\underline{h}')\|\underline{h}'\|, \end{aligned}$$

hvor vi har sat

$$\varepsilon^0(\underline{h}') = \varepsilon_1^0(\underline{h}) \frac{\|\underline{h}\|}{\|\underline{h}'\|} + \varepsilon_2^0(\underline{h}; h_{q+1}) \frac{|h_{q+1}|}{\|\underline{h}'\|},$$

hvilket tilhører $\sigma(\|\underline{h}\|^0)$, da hver af de to brøker er ≤ 1 . Dermed er induktionsbeviset færdigt, og vi har således vist, at f_m er differentiabel i $\underline{a}$. Men f_m er identisk med f i omegnen Uaf $\underline{a}$. Altså er f selv differentiabel i $\underline{a}$.

10.21. Vi vil nu udvide differentiationsteorien, ved at indføre differentiation af højere orden, således som det kendes fra gymnasieundervisningen for funktioner af en variable. Ved partialdifferentiation har vi muligheden for at differentiere flere gange efter hinanden med hensyn til forskellige variable, men det viser sig, at rækkefølgen af differentiationerne for en omfattende klasse af funktioner er uden betydning, og antallet af højere differentialkvotienten bliver derfor nogenlunde overkommeligt. Ved partiel differentiation med hensyn til en variabel holdes de øvrige variable konstante, og det væsentligste indhold af sætningen om ombytning af differentiationsordenen vedrører derfor blot funktioner af 2 variable.

10.21.1. Sætning. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben mængde og $f: O \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ en afbildning. Hvis $D_1 f$, $D_2 f$ og $D_2 D_1 f$ alle eksisterer i O og $D_2 D_1 f$ er kontinuert i et punkt $\underline{x} \in O$, da eksisterer $D_1 D_2 f(\underline{x})$ og $D_1 D_2 f(\underline{x}) = D_2 D_1 f(\underline{x})$.

Det ligger i forudsætningen, at f overalt i O er partielt differentiabel med hensyn til hver variabel, og at $D_1 f$ overalt i O er partielt differentiabel med hensyn til den anden variabel. Beviset er ikke helt nemt, selvom det ikke er særlig langt.

Vi begynder med at vælge et positivt tal k , således at O indeholder kvadratet

$$\{\underline{y} \mid |y_1 - x_1| < k \wedge |y_2 - x_2| < k\}.$$

For $|h_1| < k$, $|h_2| < k$ kan vi da betragte udtrykket

$$\Delta(h_1, h_2) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2+h_2) + f(x_1, x_2).$$

Idet vi foreløbig tænker os, at h_1 og h_2 er faste tal, indfører vi den ved

$$\varphi(y) = f(y, x_2+h_2) - f(y, x_2),$$

definerede hjælpefunktion φ , som ifølge forudsætningerne er differentiable på intervallet $[x_1, x_1+h_1]$. Ved middelværdisætningen får vi nu

$$\begin{aligned} \Delta(h_1, h_2) &= \varphi(x_1+h_1) - \varphi(x_1) = D\varphi(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1)h_1 = \\ &= (D_1f(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1, x_2+h_2) - D_1f(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1, x_2))h_1. \end{aligned}$$

Her er $0 < \theta_1(h_1, h_2) < 1$. Takket være den lille snedighed med hjælpefunktionen φ fik den første variabel samme værdi i parentesens 2 led, og vi kan anvende middelværdisætningen igen, hvilket giver

$$\Delta(h_1, h_2) = h_1 h_2 D_2 D_1 f(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1, x_2+\theta_2(h_1, h_2)h_2).$$

Vi definerer nu den ved

$$\psi(y) = f(x_1+h_1, y) - f(x_1, y)$$

definerede hjælpesætning ψ , som ifølge forudsætningerne er differentiable på intervallet $[x_2, x_2+h_2]$, hvilket giver

$$\begin{aligned} \Delta(h_1, h_2) &= \psi(x_2+h_2) - \psi(x_2) = \Delta_{x_2} \psi(h_2) = \\ &= D\psi(x_2)h_2 + \varepsilon^0(h_1, h_2)h_2, \end{aligned}$$

hvor $\varepsilon^0(h_1, h_2)$ for hver fast værdi af h_1 er kontinuert for $h_2 = 0$, og hvor $\varepsilon^0(h_1, 0) = 0$. Ved at sammenligne de to udtryk for $\Delta(h_1, h_2)$ får vi for $h_2 \neq 0$

$$D\psi(x_2) = h_1 D_2 D_1 f(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1, x_2+\theta_2(h_1, h_2)h_2) - \varepsilon^0(h_1, h_2).$$

Her er

$$D\psi(x_2) = D_2 f(x_1+h_1, x_2) - D_2 f(x_1, x_2),$$

og da $D_2 D_1 f$ er kontinuert i $\underline{x}$, kan vi skrive

$$D_2 D_1 f(x_1+\theta_1(h_1, h_2)h_1, x_2+\theta_2(h_1, h_2)h_2) = D_2 D_1 f(\underline{x}) - \varepsilon_1^0(h_1, h_2)$$

hvor $\varepsilon_1^0(h_1, h_2)$ er kontinuert i $\underline{0}$ og $\varepsilon_1^0(\underline{0}) = 0$. Vi får således

$$(1) \quad D_2 f(x_1 + h_1, x_2) - D_2 f(x_1, x_2) =$$

$$D_2 D_1 f(\underline{x}) h_1 + (\varepsilon_1^0(h_1, h_2) - h_1^{-1} \varepsilon^0(h_1, h_2)) h_1,$$

og vi sætter

$$\varepsilon_2^0(h_1) = \varepsilon_1^0(h_1, h_2) - h_1^{-1} \varepsilon^0(h_1, h_2),$$

idet man ved løsning af ligningen med hensyn til dette udtryk ser, at det (trods sit udseende) ikke afhænger af h_2 . Hvis vi nu i udtrykket foretager grænseovergangen $h_2 \rightarrow 0$, får vi

$$\varepsilon_2^0(h_1) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \varepsilon_1^0(h_1, h_2),$$

hvor h_1 er konstant under grænseovergangen. Lad ε være et vilkårligt positivt tal. Vi kan da finde $\delta > 0$, således at

$$|h_1| \leq \delta \wedge |h_2| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon_1^0(h_1, h_2)| \leq \delta,$$

og ved her at foretage grænseovergangen, ser vi at

$$|h_1| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon_2^0(h_1)| \leq \delta.$$

Vi har dermed vist, at $\varepsilon_2^0(h_1)$ har grænseværdien 0 for $h_1 \rightarrow 0$, og (1) viser da, at $D_1 D_2 f(\underline{x})$ eksisterer og har værdien $D_2 D_1 f(\underline{x})$. Dermed er beviset fuldført.

10.22. Vi betragter igen en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ og en afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis man overalt i O kan foretage p differentiationer med hensyn til samme eller forskellige variable i en bestemt rækkefølge, fås derved en ny afbildning af $O \rightarrow \mathbb{R}$, og den således fremkomne afbildning kaldes en partiell differentialkvotient af p^{te} orden af afbildningen f . Ved hver af de p differentiationer har man valget mellem m variable, som man eventuelt kan differentiere med hensyn til, og der kan således eventuelt blive tale om m^p differentialkvotienter af p^{te} orden. Hvis disse alle eksisterer, kaldes afbildningen f differentiablel af p^{te} orden eller p gange differentiablel.

Hvis afbildningen f er p gange differentiablel i O , og alle de partielle differentialkvotienter af p^{te} orden af funktionen

f er kontinuerte i 0, kaldes f kontinuert differentiabel af p^{te} orden eller p gange kontinuert differentiabel. Ifølge sætning 10.20 er da alle differentialkvotienter af orden lavere end p ligeledes kontinuerte, og den ombyttelighed af differentiationsorden, som gælder ifølge sætning 10.21.1, bevirker, at antallet af forskellige differentialkvotienter af p^{te} orden for $m > 1$ og $p > 1$ reduceret meget væsentligt.

Vi kan for en p gange differentiabel funktion opskrive alle de forskellige partielle differentialkvotienter af p^{te} orden på formen

$$(2) \quad D_1^{q_1} D_2^{q_2} \dots D_m^{q_m} f,$$

hvor $q_1 + \dots + q_m = p$, idet vi vælger differentiationsordenen, således at vi først udfører alle differentiationerne med hensyn til den sidste variabel, dernæst alle med hensyn til den næstsidste variabel, o.s.v.

Det har også interesse for os at kende antallet af partielle differentialkvotienter, som ved omordning af differentiationsordenen kan bringes på formen (2). Dette er også antallet af måder, på hvilke de p differentiationer i (1) kan ordnes. Vi bemærker, at numrene i fækkfølgen for de q_1 differentiationer med hensyn til x_1 kan vælges på

$$\binom{n}{q_1} \frac{n!}{q_1!(n-q_1)!}$$

forskellige måder. Efter at pladserne for de q_1 differentiationer med hensyn til x_1 er valgt, kan pladserne i rækkefølgen for de q_2 differentiationer med hensyn til x_2 vælges på

$$\binom{n-q_1}{q_2} = \frac{(n-q_1)!}{q_2!(n-q_1-q_2)!}$$

forskellige måder o.s.v. Antallet af partielle differentialkvo-

tienter, som kan skrives på formen (2) er således

$$\prod_{k=1}^m \binom{n - \sum_{r=1}^{k-1} q_r}{q_k} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^m q_k!},$$

og for dette antal vil vi anvende betegnelsen

$$\binom{n}{q_1, \dots, q_m}$$

som altså er defineret, hvis $q_1 + \dots + q_m = n$. Vi bemærker, at vi for $m = 2$ får binomialkoefficienterne, idet

$$\binom{n}{q_1, q_2} = \binom{n}{q_1} = \binom{n}{q_2}.$$

For $m = 1$ fås kun én partiel differentialkvotient af p^{te} orden, og det er netop den fra gymnasieundervisningen kendte differentialkvotient af p^{te} orden, og i dette tilfælde udelader vi ordet "partiel".

10.23. Vi betragter en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ samt m afbildninger $L_\mu : \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{R}$. Vi kan da definere en afbildning $\omega : O \times \mathbb{R}^m \text{ ind i } \mathbb{R}$, idet vi sætter

$$\omega(\underline{x}, \underline{h}) = L_1(\underline{x})h_1 + \dots + L_m(\underline{x})h_m.$$

Den således indførte afbildning kaldes en differentialform (1-dimensional og af første grad) på mængden O . Vi ved fra det foregående, at det totale differential $df(\underline{x}, \underline{h})$ af en differentiable afbildning $f : O \text{ ind i } \mathbb{R}$ definerer os en differentialform df .

Mere generelt indfører vi (1-dimensionale) differentialformer af p^{te} grad på O . En sådan er givet ved et udtryk af formen

$$\Omega(\underline{x}, \underline{h}) = \sum_{q_1 + \dots + q_m = p} L_{q_1, \dots, q_m}(\underline{x}) h_1^{q_1} \dots h_m^{q_m}.$$

Af hensyn til det følgende er det hensigtsmæssigt at gå over til de også tidligere benyttede betegnelser og skrive $d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_m)$ i stedet for $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m)$, og med denne betegnelse for de variable får vi

$$\begin{aligned}\omega(\underline{x}, d\underline{x}) &= L_1(\underline{x})dx_1 + \dots + L_m(\underline{x})dx_m, \\ df(\underline{x}, d\underline{x}) &= D_1 f(\underline{x})dx_1 + \dots + D_m f(\underline{x})dx_m, \\ \Omega\left(\frac{\underline{x}}{\underline{x}}, d\underline{x}\right) &= \sum_{q_1 + \dots + q_m = p} L_{q_1, \dots, q_m}(\underline{x}) dx_1^{q_1} \dots dx_m^{q_m}.\end{aligned}$$

10.24. Den i 10.23 indførte differentialform $\omega(\underline{x}, d\underline{x})$ afhænger af de variable $(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m)$. Dens totale differential afhænger af yderligere $2m$ variable, som vi kunne betegne $(d_1 x_1, \dots, d_1 x_m, d^2 x_1, \dots, d^2 x_m)$, og dens differential bliver da

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n D_{\nu} L_{\mu}(\underline{x}) dx_{\mu} d_1 x_{\nu} + \sum_{\mu=1}^m L_{\mu}(\underline{x}) dx_{\mu}.$$

Differentialet af denne størrelse vil afhænge af ialt $8m$ variable, og det ses, at de udtryk, der således fås ved gentagen total differentiation, bliver alt for komplicerede til at kunne anvendes med fordel.

Mere anvendelige differentialer får man, når man ved første differentiation vælger $(dx_1, \dots, dx_m, d^2 x_1, \dots, d^2 x_m)$, som de nye variable, således at kun de m sidste er virkelig nye. Ved den næste differentiation vælges de nye variable $(dx_1, \dots, dx_m, d^2 x_1, \dots, d^2 x_m, d^3 x_1, \dots, d^3 x_m)$. Derved indføres blot m virkelig nye variable ved hver differentiation. Vi vil kalde de således opståede differentialer fuldstændige, og betegne dem ${}^c d\omega$, ${}^c d^2 \omega, \dots$, ligesom vi også vil tale om fuldstændig differentiation. Udtrykkene for de fuldstændige differentialer bliver endnu

for komplicerede til, at vi kan opskrive det almindelige udtryk for det fuldstændige differential af en differentialform. Vi får f.eks.

$$\begin{aligned} c_{d\omega}(\underline{x}, d\underline{x}, d^2\underline{x}) &= \sum_{\lambda, \mu=1}^m D_{\mu} L_{\lambda}(\underline{x}) dx_{\lambda} dx_{\mu} + \sum_{\lambda=1}^m L_{\lambda}(\underline{x}) d^2 x_{\lambda} \\ c_{d^2\omega}(\underline{x}, d\underline{x}, d^2\underline{x}, d^3\underline{x}) &= \sum_{\lambda, \mu, \nu=1}^m D_{\nu} D_{\mu} L_{\lambda}(\underline{x}) dx_{\lambda} dx_{\mu} dx_{\nu} + \\ 2 \sum_{\lambda, \mu=1}^m D_{\mu} L_{\lambda}(\underline{x}) d^2 x_{\lambda} dx_{\mu} &+ \sum_{\lambda, \mu=1}^m D_{\mu} L_{\lambda} dx_{\lambda} d^2 x_{\mu} + \sum_{\lambda=1}^m L_{\lambda}(\underline{x}) d^3 x_{\lambda}. \end{aligned}$$

Det ses, at udtrykkene fås ved sædvanlig differentiation, idet man ved hver partiel differentiation af en koefficient $L_{\lambda}(\underline{x})$ med hensyn til en variabel x_{μ} tilføjer faktoren dx_{μ} .

10.25. Vi opskriver nu specielt nogle af de første fuldstændige differentialer af en afbildning $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval.

$$\begin{aligned} df(x, dx) &= Df(x)dx \\ c_{d^2f}(x, dx, d^2x) &= D^2f(x)dx^2 + Df(x)d^2x \\ c_{d^3f}(x, dx, d^2x, d^3x) &= D^3f(x)dx^3 + 3D^2f(x)dx d^2x + Df(x)d^3x \\ c_{d^4f}(x, dx, \dots, d^4x) &= D^4f(x)dx^4 + 6D^3f(x)dx^2 d^2x + \\ &+ 4D^2f(x)dx d^3x + 3D^2f(x)d^2x^2 + Df(x)d^4x \\ c_{d^5f}(x, dx, \dots, d^5x) &= D^5f(x)dx^5 + 10D^4f(x)dx^3 d^2x + \\ &+ 10D^3f(x)dx^2 d^3x + 15D^3f(x)dx d^2x^2 + 5D^2f(x)dx d^4x \\ &+ 10D^2f(x)d^2x d^3x + Df(x)d^5x. \end{aligned}$$

Det tilsvarende formler for afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $O \subseteq \mathbb{R}$ er åben bliver mere komplicerede, men de er så nær beslægtede med ovenstående, at de umiddelbart kan opskrives på grundlag af disse. Vi opskriver nogle af de første, idet vi gør opmærksom på, at hvert summationstegn betyder summation over alle

indices, og disse skal alle løbe fra 1 til m :

$$\begin{aligned} df(\underline{x}, d\underline{x}) &= \sum D_{\alpha} f(\underline{x}) dx_{\alpha} \\ {}^c d^2 f(\underline{x}, d\underline{x}, d^2 \underline{x}) &= \sum D_{\beta} D_{\alpha} f(\underline{x}) dx_{\alpha} dx_{\beta} + \sum D_{\alpha} f(\underline{x}) d^2 x_{\alpha} \\ {}^c d^3 f(\underline{x}, d\underline{x}, d^2 \underline{x}, d^3 \underline{x}) &= \sum D_{\gamma} D_{\beta} D_{\alpha} f(\underline{x}) dx_{\alpha} dx_{\beta} dx_{\gamma} + \\ &\quad 3 \sum D_{\beta} D_{\alpha} f(\underline{x}) dx_{\alpha} d^2 x_{\beta} + \sum D_{\alpha} f(\underline{x}) d^3 x_{\alpha}. \end{aligned}$$

Vi har nu benyttet vor antagelse, at f er kontinuert differentiable af n^{te} orden, idet vi har ombyttet rækkefølgen af differentiationerne. Det fremgår af de anførte udtryk, hvordan formlerne for de fuldstændige differentialer af funktioner af flere variable kan udledes af de tilsvarende formler for funktioner af én variabel.

Den første sum i udtrykket for det n^{te} fuldstændige differential er en differentialform af n^{te} grad og den sidste sum er en differentialform af første grad. Derimod afhænger de øvrige summer af flere sæt nye variable, og de er således ikke differentialformer.

Hvis vi danner en sammensat funktion ved i $f(\underline{x})$ at indsætte $x_{\mu} = g_{\mu}(\underline{y})$, $\mu = 1, \dots, m$, får vi den sammensatte funktions totale differentialer ved i ovenstående udtryk at sætte $x_{\mu} = g_{\mu}(\underline{y})$ og hvert $d^k x_{\mu} = {}^c d^k g_{\mu}(\underline{y}, d\underline{y}, \dots, d^k \underline{y})$.

10.26. For lineære afbildninger forsvinder alle differentialer af orden ≥ 2 . Hvis vi derfor kun ønsker at studere sammensatte funktioner $f \circ \phi$, hvor ϕ er lineær, vil alle summer undtagen den første i hver af ovenstående formler forsvinde. Da dette specielle tilfælde har temmelig stor betydning, indfører vi de afkortede differentialer, som blot består af det første led i hvert af ovenstående udtryk. For en afbildning $f : O \text{ ind i } \mathbb{R}$, hvor $O \subseteq \mathbb{R}^m$ får vi ved anvendelse af ombytteligheden af differentiationsordenen følgende udtryk for det afkortede differential af n^{te} orden:

$$d^n f(\underline{x}, d\underline{x}) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^m D_{\alpha_n} \dots D_{\alpha_1} f(\underline{x}) dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_n} =$$

$$\sum_{q_1 + \dots + q_m = n} \binom{n}{q_1, \dots, q_m} D_1^{q_1} \dots D_m^{q_m} f(\underline{x}) dx_1^{q_1} \dots dx_m^{q_m},$$

hvor $q_1 \geq 0, \dots, q_m \geq 0$ i den sidste sum.

For den ved

$$\varphi(t) = f(\underline{a} + \underline{\lambda}t)$$

definerede sammensatte funktion får vi specielt

$$d^n \varphi(t, dt) = D^n \varphi(t) dt^n,$$

hvor

$$D^n \varphi(t) = \sum_{q_1 + \dots + q_m = n} \binom{n}{q_1, \dots, q_m} D_1^{q_1} \dots D_m^{q_m} f(\underline{a} + \underline{\lambda}t) \lambda_1^{q_1} \dots \lambda_m^{q_m},$$

eller kortere

$$D^n \varphi(t) = d^n f(\underline{a} + \underline{\lambda}t; \underline{\lambda})$$

10.27. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde, $\underline{a} \in O$ et vilkårligt punkt og $\rho > 0$ et tal, for hvilket kuglen $K(\underline{a}, \rho)$ er en delmængde af O . Lad $f:]$ ind i $\mathbb{R}$ være en n gange kontinuert differentiabel afbildning. For $\|\underline{h}\| \leq \rho$ er den ved

$$\varphi(t) = f(\underline{a} + \underline{h}t)$$

definerede afbildning $\varphi: [0, 1]$ ind i $\mathbb{R}$ ifølge de foregående afsnit n gange kontinuert differentiabel. Ved anvendelse af Taylors formel (MA 2.1) får vi da

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + R_n,$$

hvor

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 D^n \varphi(t) (1-t)^{n-1} dt.$$

Ifølge resultaterne i det foregående afsnit er nu

$$\varphi^{(k)}(0) = D^k \varphi(0) = d^k f(\underline{a}; \underline{h}),$$

og

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 d^n f(\underline{a} + \underline{h}t; \underline{h}) (1-t)^{n-1} dt.$$

Vi bemærker, at $d^n f(\underline{a} + \underline{h}t; \underline{h})$ er en sum af endelig mange led af formen

$$\begin{aligned} D_1^{q_1} \dots D_m^{q_m} f(\underline{a} + \underline{h}t) h_1^{q_1} \dots h_m^{q_m} = \\ (D_1^{q_1} \dots D_m^{q_m} f(\underline{a}) - \varepsilon_1^0(\underline{h}t) h_1^{q_1} \dots h_m^{q_m} = \\ D_1^{q_1} \dots D_m^{q_m} f(\underline{a}) h_1^{q_1} \dots h_m^{q_m} + \varepsilon_2^0(\underline{h}t) \|\underline{h}\|^n, \end{aligned}$$

hvor ε_1^0 og ε_2^0 har grænseværdi 0 i $\underline{0}$. Vi har derfor også

$$d^n f(\underline{a} + \underline{h}t; \underline{h}) = d^n f(\underline{a}; \underline{h}) + \varepsilon_3^0(\underline{h}t) \|\underline{h}\|^n,$$

hvor ε_3^0 har grænseværdien 0 i $\underline{0}$. Ved indsættelse i R_n får vi

$$R_n = \frac{d^n f(\underline{a}; \underline{h})}{n!} + \frac{\|\underline{h}\|^n}{(n-1)!} \int_0^1 \varepsilon_3^0(\underline{h}t) (1-t)^{n-1} dt.$$

For $\varepsilon > 0$ kan vi vælge $\delta > 0$, således at

$$|\varepsilon_3^0(\underline{h}t)| \leq \varepsilon \text{ for } \|\underline{h}\| \leq \delta \wedge t \in [0, 1],$$

og vi får da

$$\left| \int_0^1 \varepsilon_3^0(\underline{h}t) (1-t)^{n-1} dt \right| \leq \varepsilon \text{ for } \|\underline{h}\| \leq \delta,$$

så vi kan skrive

$$\int_0^1 \varepsilon_3^0(\underline{h}t) (1-t)^{n-1} dt = \varepsilon_4^0(\underline{h}),$$

hvor ε_4^0 har grænseværdien 0 i $\underline{0}$. Vi får således formlen

$$\varphi(1) = f(\underline{a} + \underline{h}) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(\underline{a}; \underline{h})}{k!} + \varepsilon^0(\underline{h}) \|\underline{h}\|^n,$$

hvor vi har anvendt skrivemåden

$$d^0 f(\underline{a}; \underline{h}) = f(\underline{a}).$$

Den her udledte formel er Taylors formel for en n gange kontinuert differentiabel funktion. Den har mange anvendelser.

10.28. Vi indskyder i denne sammenhæng med henblik på en senere anvendelse en generalisation af middelværdisætningen til funktioner af flere variable. Vi vil antage, at $O \subseteq \mathbb{R}^m$ er en åben mængde og at $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel. Hvis linie-stykket med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{a} + \underline{h}$ ligger i O , kan vi anvende differentialregningens middelværdisætning på den ved

$$\varphi(t) = f(\underline{a} + \underline{h}t)$$

definerede afbildning $\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, og der eksisterer således et tal $\theta \in]0,1[$, for hvilket

$$\varphi(1) - \varphi(0) = D\varphi(\theta)$$

hvilket giver relationen

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = df(\underline{a} + \theta \underline{h}; \underline{h})$$

eller udførligt

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = D_1 f(\underline{a} + \theta \underline{h}) h_1 + \dots + D_m f(\underline{a} + \theta \underline{h}) h_m.$$

10.29. Lad $O \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde i den komplekse plan. Fra 9.25 ved vi, at det for en differentiabel afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ ind i $\mathbb{C}$ med opspaltningen

$$f(z) = f_1(z_1, z_2) + i f_2(z_1, z_2)$$

i realdel og imaginærdel, gælder at

$$D_1 f_1 = D_2 f_2 \quad \wedge \quad D_2 f_1 = -D_1 f_2.$$

Vi vil nu antage, at f og dermed f_1 og f_2 er 2 gange kontinuert differentiabel. Vi får da

$$D_1^2 f_1 = D_1 D_2 f_2 \quad \wedge \quad D_2^2 f_1 = -D_2 D_1 f_2,$$

og da differentiationerne er ombyttelige, ser vi, at f_1 tilfredsstiller den partielle differentiaalligning

$$D_1^2 f_1 + D_2^2 f_1 = 0,$$

som kaldes Laplace's ligning.

Lette opgaver.

1. På $\mathbb{R}$ benyttes den i MA 8 opgave 1 definerede afstandsfunktion. Vis, at det således definerede metriske rum bliver begrænset, men at der for $0 < \varepsilon < 1$ ikke eksisterer et endeligt ε -net på rummet.
2. Et diskret metrisk rum har egenskaben I (se 10.1), hvis og kun hvis det er endeligt.
3. Vis, at kugleomegnene med centrum 0 og radius 1 i de i 8. 7 indførte metriske rum l_a og l_b ikke har egenskaberne I og II.
4. Vis, at det i MA 8 opgave 18 definerede rum (M, dist) er kompakt.
5. Vi sætter $\text{tg}(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$ og $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$. Vis, at afbildningen $\text{tg} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ på $\mathbb{R}^*$ er kontinuert. Benyt dette til en anden løsning af opgave nr. 4.
6. Vis, at det delrum, der fås af det i MA 8, opgave 18 definerede rum ved at udelade ∞ og $-\infty$, har egenskaberne I og II, skønt det er ækvivalent med rummet $\mathbb{R}$, der ikke har disse egenskaber.
7. Vis, at den i opgave nr. 5 benyttede afbildning er en homeomorfi.
8. I Hilbertrummet betragter vi den afsluttede enhedskugle $K = \{\underline{x} \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Vis påstanden

$$\forall \underline{a} \in \mathbb{R} \quad \exists \underline{x} \in K (\|\underline{x} - \underline{a}\| = \text{dist}(\underline{a}, K)),$$
 hvor vi har brugt betegnelsen $\text{dist}(\underline{x}, \underline{y})$ for afstanden $\|\underline{y} - \underline{x}\|$ (prøv at efterligne det ræsonnement, der benyttes i 3-dimensional geometri).

9. I Hilbertrummet betragtes punktmængden

$$P = \{\underline{x} \mid |x_n| \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}.$$

Vis, at P er kompakt.

10. For $\underline{x} \in K$ (se opgave 8) sætter vi

$$f(\underline{x}) = \sup \left\{ \left(1 - \frac{n|x_n|}{n+1} \right)^{-1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vis, at $f(\underline{x})$ er kontinuert i K , men ikke begrænset.

11. Skriv et omhyggeligt bevis for, at en kontinuert reel funktion på en kompakt mængde er begrænset på grundlag af følgende vejledning:

Af ε -definitionen for kontinuitet fremgår umiddelbart, at ethvert punkt x af den kompakte mængde M har en omegn $U(x)$ på hvilken funktionen f er begrænset. Omegnene $U(x)$, $x \in M$ udgør en overdækning af M , og hvis vi vælger den åbne, indeholder overdækningen en endelig overdækning, etc.

12. Prøv at variere beviset fra opgave nr. 11, idet følgende bemærkning udnyttes:

$$\forall x \in M \exists y \in M \exists U(x) \in \mathcal{U}(x) \forall z \in U(x) (f(z) \leq f(y)).$$

Hvis $f(x)$ er den største funktionsværdi, behøver vi nemlig blot at vælge $y = x$ og $U(x)$ vilkårligt, og hvis $f(x)$ ikke er den største funktionsværdi, kan vi vælge y med $f(y) > f(x)$ og udnytte kontinuiteten. Ved at gå videre som i opgave nr. 11 fås et bevis for, at f antager en største funktionsværdi.

13. Lad T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en kompakt delmængde.

Vis påstanden

$$\exists x \in A \exists y \in A (\text{dist}(x, y) = \text{diam } A).$$

14. I Hilbertrummet betragtes punktmængden $\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, hvor

$$\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots) \text{ og}$$

$$a_{n,q} = \begin{cases} n(n+1)^{-1} & \text{for } q = 0 \\ 0 & \text{for } q \neq n. \end{cases}$$

Vis, at denne punktmængde er afsluttet, samt at den i opgave 13 anførte betingelse ikke gælder for den.

15. En afbildning $f :]a, b[$ ind i $\mathbb{R}$ er ligelig kontinuert. Vis, at f har grænseværdier i a og b .

16. En afbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har grænseværdier i $-\infty$ og i $+\infty$. Vis, at f er ligelig kontinuert.

17. En afbildning $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel med begrænset differentialkvotient. Vis, at f er ligelig kontinuert (benyt middelværdisætningen).

18. Vis eksistensen af følgende grænseværdier og udregn derefter værdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{(\ln x)^2}.$$

19. Er følgende sætning rigtig: Lad $f : [0, \infty[$ ind i $]0, \infty[$ og $g : [0, \infty[$ ind i $]0, \infty[$ være differentiable afbildninger med grænseværdi 0 i ∞ , medens Df og Dg har grænseværdier i ∞ , og grænseværdien af Dg er $\neq 0$. Da har $\frac{f}{g}$ en grænseværdi i ∞ , og denne er lig med grænseværdien af $\frac{Df}{Dg}$.

20. Beviserne i 10.20 er ikke særlig velegnede til gennemgang på tavle. Prøv at udforme et bevis, der er bedre egnet til mundtlig gennemgang ved under hinanden at opskrive differenserne

$$\begin{aligned} & f(a_1+h_1, a_2, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m) \\ & f(a_1+h_1, a_2+h_2, a_3, \dots, a_m) - f(a_1+h_1, a_2, \dots, a_m) \\ & \text{-----} \end{aligned}$$

omskrive hver af differenserne på lignende måde som i teksten og addere de derved fremkomne ligninger.

21. Opskriv de første afkortede differentialer af en funktion af to variable. Skriv dem helt ud uden brug af summationstegn. Ligeledes for en funktion af 3 variable.

22. Udregn alle partielle differentialkvotienter af vilkårlig orden af den ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3.$$

definerede afbildning $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

23. Tilføj den næste formel til hvert af de to formelsæt i 10.25.

24. Opskriv Taylors formel med $\underline{a} = (1, 1, 1)$ for den i 22 indførte funktion og udregn derved billedet af punktet $(1, 2; 0, 8; 0, 95)$.

25. Opstil formler til udregning af de 6 første differentialkvotienter af den sammensatte funktion $f(e^x)$, hvor $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er 6 gange kontinuert differentiabel.

26. Bevis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \log \|\underline{x}\|$$

definerede afbildning $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tilfredsstiller

Laplace's differentiaalligning (se 10.29, sml. MA 9, opgave 34).

27. Bevis, at den ved

$$f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^{-m+2}$$

definerede afbildning $f: \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ for $m \geq 3$ tilfredsstiller Laplace's differentiaalligning i den mere generelle form

$$D_1^2 f + \dots + D_m^2 f = 0.$$

Påstanden er selvfølgelig også rigtig, men uinteressant, for $m = 2$. I dette tilfælde har ligningen den interessantere løsning fra opgave nr. 26.

28. Find alle polynomier af højst fjerde grad i to variable, som tilfredsstiller Laplaces differentiaalligning.

Vanskeligere opgaver.

29. En afbildning $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ind i $\mathbb{N}$ defineres ved, at $\rho(n)!$ er divisor i n , medens $(\rho(n)+1)!$ ikke^{er} divisor i $\mathbb{N}$. Vi definerer nu en afstandsfunktion på $\mathbb{Z}$, idet vi sætter

$$\text{dist}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{hvis } x = y \\ (\rho(n))^{-1}, & \text{hvis } x \neq y. \end{cases}$$

Vis, at $\mathbb{Z}$ med denne afstandsdefinition er et metrisk rum, og vis, at dette rum ikke er kompakt.

30. Om en afbildning $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ antages, at den er voksende i hvert punkt af intervallet. Vis, at f er voksende i $[a, b]$. (Indirekte. Antag $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$, og vis, at f , da ikke kan være voksende i $x_0 = \inf\{y \mid x_1 < y < x_2 \wedge f(y) < f(x_1)\}$).

31. Prøv at føre beviset for, at en kontinuert afbildning af et kompakt rum er ligelig konvergent ved hjælp af Borels overdækningssætning. Vis først, at hvert punkt har en kugleomegn, i hvilken afbildningen er ligelig kontinuert, og overdæk med endelig mange af disse omegne. Beviset lykkes ikke helt på denne måde, men det kan reddes ved en ret enkel finesse.

32. En afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ defineres ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } x_2 = 0 \\ x_2^2 \log\left(1 + \frac{x_1^2}{x_2^2}\right) & \text{for } x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Vis, at $f(\underline{x})$ er differentiabel overalt, og undersøg, om de partielle differentialkvotienter er kontinuerte overalt. Kan

kontinuiteten i dette tilfælde sluttet på grundlag af resultaterne i 10.20?

33. En afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ defineres ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} = \underline{0} \\ x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{ellers} \end{cases}$$

Undersøg, om $D_1^2 f(\underline{0})$, $D_2^2 f(\underline{0})$, $D_2 D_1 f(\underline{0})$ og $D_1 D_2 f(\underline{0})$ eksisterer og find i bekræftende fald værdierne.

34. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en n gange differentiabel afbildning. For $a \in I$, $b \in I$, $a \neq b$, kan vi vælge et reelt tal k , således at

$$f(b) = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{D^q f(a)}{q!} (b-a)^q + k(b-a)^n.$$

Anvend n gange Rolle's sætning på den ved

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{q=0}^{n-1} \frac{D^q f(a)}{q!} (x-a)^q - k(x-a)^n$$

definerede afbildning og find derved et udtryk for k . Derved fås Taylor's formel med et nyt restled, der sædvanligvis kaldes Lagrange's restled.

35. Prøv at variere opgave nr. 34 ved i stedet for den der benyttede afbildning at benytte

$$\psi(x) = f(b) - \sum_{q=0}^{n-1} \frac{D^q f(x)}{q!} (b-x)^q - k(b-x)^n.$$

I dette tilfælde kan metoden yderligere varieres ved i restleddet at benytte en anden eksponent p i stedet for n . Derved fås andre restled. Specielt fremkommer for $p = 1$ Cauchy's restled.

36. Lad $\varphi : [-a, a]$ ind i $\mathbb{R}$ være en n gange differentiabel afbildning og ψ den ved $\psi(x) = x^{-1}\varphi(x)$ definerede afbildning $\psi : [-a, a] \setminus \{0\}$ ind i $\mathbb{R}$. Vis formelen

$$D^n \psi(x) = x^{-n-1} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} D^{n-p} \varphi(x).$$

Det antages, at φ er $n+1$ gange kontinuert differentiabel og at $\varphi(0) = 0$. Vis, at ψ kan udvides til en n gange differentiabel afbildning $\psi_1 : [-a, a]$ ind i $\mathbb{R}$, og at

$$D^n \psi_1(0) = \frac{1}{n+1} D^{n+1} \varphi(0).$$

Svær opgave.

37. Lad $M = \{f_j : [0, 1] \text{ ind i } \mathbb{R} \mid j \in J\}$ være en familie af kontinuerte funktioner. Familien M kaldes ensartet ligelig kontinuert, såfremt følgende betingelse er opfyldt.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall j \in J \forall x \in [0, 1] \forall y \in [0, 1]$$

$$(|y-x| \leq \delta \Rightarrow |f_j(y) - f_j(x)| \leq \varepsilon).$$

Familien M kaldes ensartet begrænset, såfremt

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall j \in J \forall x \in [0, 1] (|f_j(x)| \leq k).$$

Vi indretter mængden M som et metrisk rum, idet vi sætter

$$\text{dist}(f_j, f_k) = \sup\{|f_k(x) - f_j(x)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

Vis, at M virkelig bliver et metrisk rum ved denne afstands definition. Vis, at M (som delmængde af M) har egenskaberne I og II (se 10.2), hvis og kun hvis M er både ensartet ligelig kontinuert og ensartet begrænset.

Sammenhæng og kurver.

11.1. Vi betragter et metrisk (eller blot topologisk) rum T og en mængde $A \subseteq T$, vi skal definere, hvad vi mener med at A er sammenhængende. Hertil indfører vi en mængde med 2 elementer, f.eks. $\{1,2\}$, og vi betragter kontinuerte afbildninger $\varphi : A \rightarrow \{1,2\}$. Det er da i overensstemmelse med vore anskuelige forestillinger at antage, at sammenhæng af A ytrer sig ved, at enhver sådan kontinuert funktion φ er konstant. Vi definerer derfor:

11.1.1. Definition: Mængden A kaldes sammenhængende, hvis og kun hvis enhver kontinuert funktion $\varphi : A \rightarrow \{0,1\}$ er konstant.

Vi vil kalde en mængde usammenhængende, hvis den ikke er sammenhængende. Vi får følgende karakterisering af usammenhængende mængder:

11.1.2. Sætning. Mængden A er usammenhængende, hvis og kun hvis der eksisterer to ikke tomme delmængder O_1, O_2 af A , som er åbne relativt til A , og som tilfredsstiller

$$A = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

(Da O_1 og O_2 er hinandens komplementærmængder med hensyn til A , kunne vi sige "afsluttet med hensyn til A " i stedet for "åben med hensyn til A ").

Bevis: Hvis A er usammenhængende, eksisterer der en kontinuert surjektiv afbildning $\varphi : A \rightarrow \{0,1\}$ og originalmængderne $\varphi^{-1}(0)$ og $\varphi^{-1}(1)$ er da afsluttede, disjunkte og ikke tomme, og $A = \varphi^{-1}(0) \cup \varphi^{-1}(1)$, så den anførte betingelse bliver opfyldt med $O_1 = \varphi^{-1}(0)$, $O_2 = \varphi^{-1}(1)$. Hvis omvendt vi har en fremstilling $A = O_1 \cup O_2$ med $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, kan vi sætte $\varphi(x) = 0$ for $x \in O_1$ og $\varphi(x) = 1$ for $x \in O_2$. Hvis O_1 og O_2 er åbne relativt

til A , bliver $\varphi^{-1}(0) = O_1$ og $\varphi^{-1}(1) = O_2$ begge åbne og φ derfor kontinuert.

Teorien for sammenhængende mængder er (i hvert fald for de grundlæggende afsnits vedkommende) ikke særlig vanskelig, og den følgende gennemgang fylder da heller ikke mange sider. Det skal dog bemærkes, at man ved lidt videregående undersøgelser møder mange lumske fælder, især i form af situationer, der indbyder til fejlslutninger, og det vil derfor være på sin plads at opfordre den, der forsøger at videreføre undersøgelserne på egen hånd, til at gøre det forsigtigt.

11.2. Vi skal først vise et par sætninger, der fra anskueligt synspunkt forekommer meget nærliggende.

11.2.1. Sætning. Lad $\{A_j \mid j \in J\}$ være en mængde af sammenhængende delmængder af et metrisk rum. Hvis der findes mindst et fælles punkt a for alle mængderne A_j er foreningsmængden af mængderne A_j sammenhængende.

Bevis: Vi skriver for kortheds skyld

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j,$$

og vi betragter en kontinuert afbildning $\varphi : A \rightarrow \{0,1\}$. Vi kan åbenbart antage, at $\varphi(a) = 0$ (ellers kunne vi gå over til $1-\varphi$). Vi betragter et vilkårligt $x \in A$. Der eksisterer da et $j \in J$, således at $x \in A_j$. Men A_j er sammenhængende og $a \in A_j$. Så er φ konstant på A_j og altså $\varphi(x) = \varphi(a) = 0$. Men x var et vilkårligt punkt af A , og vi har således vist, at $\varphi(x) = 0$ for alle $x \in A$, og A er derfor sammenhængende.

11.2.2. Sætning. Hvis $A_1, \dots, A_n$ er sammenhængende delmængder af et metrisk rum, og derfor $k = 1, \dots, n-1$ eksisterer $a_k \in A_k \cap A_{k+1}$, da er $A_1 \cup \dots \cup A_n$ sammenhængende.

Bevis: Induktionsbevis. Vi antager, at $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k$ er

sammenhængende. Af sætning 11.2.1 følger nu, at $B_k \cup A_{k+1}$ er sammenhængende, og dermed er induktionsbeviset fuldført.

11.3. Vi betragter igen en punktmængde A i et metrisk rum T . Vi indfører en relation x sam y mellem elementerne i A ved definitionen

$$x \text{ sam } y \iff \exists B \subseteq A (x \in B \wedge y \in B \wedge B \text{ er sammenhængende}).$$

Vi har da x sam x , idet $B = \{x\}$ selvfølgelig er sammenhængende. Af x sam y følger y sam x , da definitionen er helt symmetrisk i x og y . Af x sam y og y sam z følger, at der eksisterer sammenhængende delmængder B_1 og B_2 af A , således at $x, y \in B_1$ og $y, z \in B_2$. Af sætning 11.2.2 (eller 11.2.1) følger, at $B = B_1 \cup B_2$ er sammenhængende, og vi har derfor også x sam z . Vi har således vist sætningen.

11.3.1. Lemma. Relationen sam er en ækvivalensrelation på A .

11.3.2. Definition. Klasserne ved den til ækvivalensrelationen som hørende klasseinddeling kaldes komponenterne af A .

Betegnelsen komponent anvendes også i anden betydning i matematikken, men det giver næppe anledning til misforståelser.

11.3.3. Sætning. Lad a være et punkt af en mængde A i et metrisk rum T . Foreningsmængden B af alle sammenhængende delmængder af A , som indeholder a , er netop den komponent af A , som indeholder a .

Bevis. Det fremgår umiddelbart af de definitioner af ækvivalensrelationen sam, at x sam a er ensbetydende med $x \in B$, og dermed er sætningen bevist.

11.3.4. Sætning. Hver komponent af en mængde er en sammenhængende mængde.

Bevis. Sætningen følger umiddelbart af sætningerne 11.3.3. og 11.2.1.

Det foregående bliver anskueligt tiltalende, hvis vi læser ækvivalensrelationen $a \sim b$ som "a kan forbindes med b (inden for mængden A)". To punkter af A tilhører da samme komponent, hvis og kun hvis de kan forbindes med hinanden. Vi skal nu vise en sætning, som er i god overensstemmelse med vore anskuelige forestillinger om mængder.

11.3.5. Sætning. Lad M være en punktmængde i et metrisk rum T og lad A være en sammenhængende punktmængde i T . Hvis A indeholder både indre punkter af M og ydre punkter for M , indeholder A også et randpunkt for M .

Bevis. Mængderne $O_1 = A \cap \overset{\circ}{M}$ og $O_2 = A \cap \overset{\circ}{M^c}$ er åbne relativt til A . Hvis A ikke indeholdt noget randpunkt for M , var $A = O_1 \cup O_2$ i modstrid med, at A var sammenhængende.

11.4. Vi skal skaffe os endnu lidt oplysning om en mængdes komponenter. Vi begynder med følgende sætning:

11.4.1. Sætning. Lad A være en sammenhængende punktmængde i et metrisk rum T . Hvis en punktmængde B tilfredsstiller betingelsen $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, er B sammenhængende.

Bevis. Mængden A er overalt tæt i delrummet B . Vi betragter en kontinuert afbildning $\phi: B \rightarrow \{0,1\}$. Da A er sammenhængende, vil restriktionen af ϕ til A være konstant, f.eks. overalt $= 0$. Men af sætning 8.28.3 anvendt på delrummet B følger da, at $\phi(x) = 0$ overalt på B , og dermed har vi vist, at B er sammenhængende.

11.4.2. Sætning. En punktmængdes komponenter er afsluttede relativt til punktmængden.

Bevis. Lad A være en komponent af punktmængden B . Den relative afslutning $\bar{A}$ er sammenhængende ifølge sætning 11.4.1 og derfor en delmængde af komponenten A . Dermed er påstanden bevist.

Vi skal senere se, at komponenterne af rummet $\mathbb{Q}$ af rationale tal hver består af et enkelt punkt. Komponenterne af en åben mængde er altså ikke altid åbne. Vi skal dog senere se, at åbne mængder i $\mathbb{R}^m$ har åbne komponenter.

11.5. Vi skal nu vise hovedsætningen om kontinuerte funktioner på sammenhængende mængder:

11.5.1. Sætning. Billedet af en sammenhængende punktmængde ved en kontinuert afbildning er en sammenhængende punktmængde.

Bevis. Vi betragter en sammenhængende punktmængde A i et metrisk rum S og en kontinuert afbildning $f:A \rightarrow T$, hvor T er et metrisk rum. Vi skriver $f(A) = B$ og betragter en kontinuert afbildning $\phi:B \rightarrow \{0,1\}$. Vi har således en kæde af afbildninger

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\phi} \{0,1\}$$

med sammensat afbildning $\phi \circ f:A \rightarrow \{0,1\}$ og da A er sammenhængende er $\phi \circ f$ konstant, f.eks. $= 0$ overalt på A . Heraf følger imidlertid, at $\phi(y) = 0$ for alle $y \in B$, og dermed har vi vist, at $B = f(A)$ er sammenhængende.

11.6. Teorien for sammenhængende mængder på den reelle akse er overordentlig enkel, idet vi har følgende simple resultat:

11.6.1. Sætning. De sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$ er netop intervallerne, heri medregnet de "udartede" intervaller, som består af 1 punkt. Specielt er $\mathbb{R}$ selv sammenhængende.

Bevis. Vi viser først, at en sammenhængende mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er et interval. Dette er ensbetydende med følgende logiske relation:

$$A \text{ sammenhængende} \Rightarrow \forall a \in]\inf A, \sup A[(a \in A),$$

og den er ækvivalent med den modsatte implikation mellem negationerne, altså

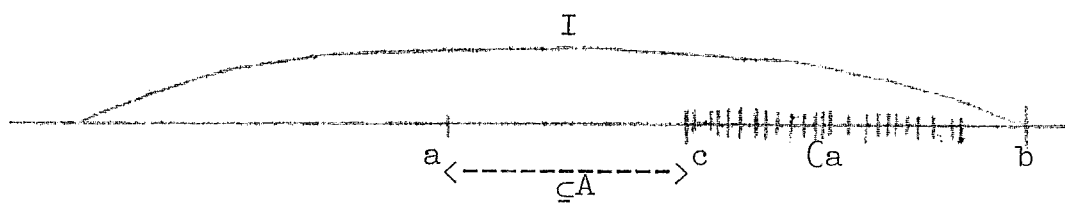
$\exists a \in]\inf A, \sup A[(a \notin A) \Rightarrow A$ usammenhængende. For $a \notin A$ er den ved

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2|x-a|} = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ 1 & \text{for } x > a \end{cases}$$

kontinuert på A , og hvis tillige $a \in]\inf A, \sup A[$, vil φ antage både værdien 0 og værdien 1 på A . Altså er A usammenhængende.

Vi viser dernæst, at et interval I er sammenhængende.

Lad $A \subseteq I$ være en ikke tom delmængde, som er både relativt åben og relativt afsluttet, og lad a være et punkt af A . Lad b være højre endepunkt af I . Hvis $]a, b] \cap CA \neq \emptyset$, betragter vi $c =$



$\inf]a, b[\cap CA$. Punktet c er ikke ydre punkt for A , og da A er afsluttet, følger heraf $c \in A$. Men dette kræver, at c er indre punkt i A , hvilket også er umuligt (sammenlign figuren). Antagelsen $]a, b] \cap CA \neq \emptyset$ kan altså ikke være opfyldt. Tilsvarende ses, at CA heller ikke indeholder punkter til venstre for A . Vi har således vist, at

$$A \subseteq I \wedge CA \text{ åben} \wedge A \neq \emptyset \Rightarrow A = I,$$

men det betyder netop, at I er sammenhængende.

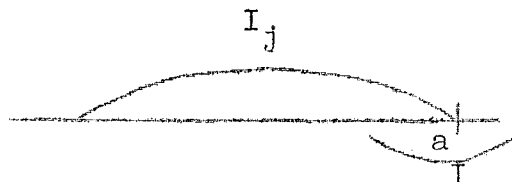
11.6.2. Sætning. Hvis A er en sammenhængende punktmængde på et topologisk rum T , og $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning, da er $f(A)$ netop et interval.

Dette er en umiddelbar følge af sætning 11.5.1 og sætning 11.6.1. Det specielle tilfælde af sætning 11.6.2, hvor A er et interval, er kendt fra gymnasieundervisningen.

11.7. Det er nu let at vise en sætning, der giver en fuldstændig beskrivelse af de åbne mængder på $\mathbb{R}$:

11.7.2. Sætning: En åben mængde på $\mathbb{R}$ er foreningsmængde for en højst numerabel mængde af disjunkte åbne intervaller.

Bevis. Ifølge sætning 11.3.4 og sætning 11.6.1 er hver komponent af en åben mængde O et interval I_j . Disse intervaller I_j er indbyrdes disjunkte, og deres foreningsmængde er netop O . Hvis et endepunkt a af I_j var element af O , skulle et interval I om a tilhøre O , og $I_j + I$ skulle da være del af samme komponent af O i modstrid med definitionen af I_j . Altså er I_j åbent. Vi kan vælge et rationalt tal i hvert I_j , og da mængden af rationale tal er numerabel, bliver mængden af intervaller I_j altså numerabel, endelig (eller tom).



Den således beviste struktursætning for åbne mængder på $\mathbb{R}$ vil ikke komme til at spille nogen stor rolle i resten af dette kursus. Den peger imidlertid fremad mod den mål- og integralteori, der vil blive gennemgået i matematik 2, idet sætningen gør det muligt at indføre et længdemål for begrænsede, åbne mængder på $\mathbb{R}$, idet man bemærker, at længderne af komponenterne af en begrænset, åben mængde danner en konvergent række, og dennes sum kan da benyttes som mål for den åbne mængde. En begrænset, afsluttet mængde F kan skrives $F = I \setminus O$, hvor I er et åbent interval og $O \subseteq I$ en åben mængde. Man kan derfor definere længdemålet for F som forskellen mellem længdemålene for I og O . Derefter udvides målbegrebet til andre begrænsede mængder A ved approximation med åbne og afsluttede mængder efter skemaet $F \subseteq A \subseteq O$. Men alt dette er altså fremtidsmusik.

11.8. Det er rimeligt på dette sted, at ofre nogle bemærkninger om den fra gymnasieundervisningen kendte og i MA 3 benyttede sætning om strengt monotone, kontinuerte funktioner:

11.8.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ en strengt voksende (aftagende), kontinuert funktion. Da er $I_1 = f(I)$ et interval, $f:I$ på I_1 er en homóomorfi og $f^{-1}:I_1$ på I er strengt voksende (aftagende).

Af sætning 11.6.2 følger umiddelbart, at I_1 er et interval. At f er strengt voksende medfører åbenbart, at f er injektiv, altså $f:I$ på I_1 bijektiv. Lad $J \subseteq I$ være et åbent interval. Den strenge monotonitet medfører, at $f(J)$ er et åbent interval. Da enhver åben mængde er foreningsmængde af åbne intervaller medfører dette, at f afbilder åben mængde på åben mængde (f kaldes da en åben afbildning). Men det betyder netop, at f^{-1} er kontinuert. At f^{-1} bliver strengt voksende, når f er det ses let, men det vil også følge af vor næste sætning.

11.8.2. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ en injektiv, kontinuert afbildning. Da er f strengt monoton.

Bevis. Et vilkårligt indre punkt $x \in I$ deler I i intervallerne I_1 og I_2 , og vi vil ikke medregne x til noget af disse intervaller. Ifølge sætning 11.6.2 er $f(I_1)$ og $f(I_2)$ intervaller, og da f er injektiv, kan disse intervaller ikke indeholde $f(x)$. Altså gælder det for hvert af delintervallerne I_1 og I_2 , at alle funktionsværdier på intervallet ligger på samme side af $f(x)$. Det kunne nu først tænkes, at alle funktionsværdier på intervallerne I_1 og I_2 var mindre end $f(x)$, men sætning 11.6.2 ville så medføre, at alle funktionsværdier i et vist interval $[f(x)-h, f(x)[$ blev antaget to gange i strid med, at f var injektiv. Tilsvarende ses, at alle funktionsværdierne på begge intervaller heller ikke kan være større end $f(x)$. Tilbage er så kun den mulighed, at alle funktionsværdier i det ene interval er større end $f(x)$, og alle funktionsværdier i det andet

mindre end $f(x)$.

Har vi nu f.eks. $f(y) > f(x)$

for alle $y > x$, som antydtes

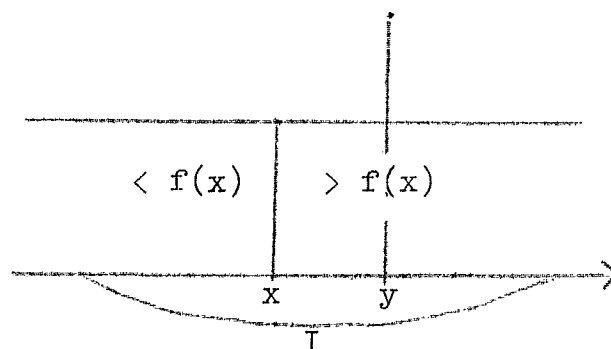
på figuren, ses det, at

situationen for punktet

y bliver den samme som for

punktet x , og dermed er be-

viset fuldført.



Beviset for sætning 11.8.2 kan udføres væsentlig fiksere.

Det er nærliggende at gå ud fra den tanke, at " f ikke kan vokse, hvis f først er begyndt at aftage, uden at antage samme værdier igen." Sådan en tankegang er dog for overfladisk, idet der eksisterer funktioner, som ikke er monotone i noget interval. Imidlertid kunne ideen udnyttes til at vise, at f i ethvert afsluttet delinterval antager sin mindste og sin største værdi i endepunkter, men dertil må man benytte en hovedsætning fra kompakthedsteorien. En anden mulighed var at bemærke, at hvis f ikke er strengt monoton, kan man finde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, således at $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$, $x_3 < x_4$, $f(x_3) > f(x_4)$. Blandt disse 4 punkter kan man så vælge tre, således at funktionsværdien i det midterste er større eller mindre end begge de andre funktionsværdier, og man får så en modstrid ved hjælp af sætning 11.6.2.

11.9. I den populære opfattelse af begrebet sammenhæng spiller begrebet "kurve" en væsentlig rolle. Man vil kalde en mængde sammenhængende, hvis to punkter i mængden altid kan forbindes med en kurve, der selv ligger i mængden. Vi skal i det følgende diskutere et sammenhængsbegreb af denne type, og det vil vise sig, at det ikke helt svarer til det ovenfor indførte. Det er naturligt i denne forbindelse også at diskutere begrebet

"kurve", men vi vil dog ikke anvende dette ord, idet vi foretrækker at lade ordet "kurve" have den sædvanlige anskuelige, men ikke nærmere præciserede betydning. Vi indfører nu det for analysen vigtigste kurvebegreb.

11.9.1. Definition. Lad $[a,b]$ være et afsluttet, begrænset interval, og lad T være et metrisk rum. En kontinuert afbildning $\alpha:[a,b]$ ind i T kaldes en bevægelse i T , og billedet $\alpha([a,b])$ kaldes bevægelsens bane.

Lad nu $[a_1,b_1]$ være et andet interval, og lad $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a,b]$ være en kontinuert, bijektiv afbildning. Så er $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi : [a_1,b_1]$ ind i T ligeledes en bevægelse i T , og vi har omvendt $\alpha = \alpha_1 \circ \varphi^{-1}$. Bevægelserne α og α_1 har samme bane. Ifølge sætning 11.8.2 er φ strengt monoton.

11.9.2. Definition. To bevægelser $\alpha:[a,b]$ ind i T og $\alpha_1:[a_1,b_1]$ ind i T kaldes ækvivalente, hvis og kun hvis der eksisterer en kontinuert, strengt voksende, bijektiv afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a,b]$, således at $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi$. De to bevægelser kaldes indbyrdes modsatte, hvis der eksisterer en kontinuert, strengt aftagende, bijektiv afbildning $\varphi:[a_1,b_1]$ på $[a,b]$, således at $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi$.

Det ses umiddelbart, at det således indførte begreb "ækvivalent med" virkelig er en ækvivalensrelation. Således fås α ækv. α ved at vælge φ som den identiske afbildning. Symmetrien fremgår af bemærkningerne forud for definitionen. Af $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi$ og $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \psi$ følger $\alpha_2 = \alpha \circ (\varphi \circ \psi)$, og deraf fås transitiviteten umiddelbart, idet $\varphi \circ \psi$ bliver strengt voksende, når både φ og ψ er det. Endvidere ses det umiddelbart, at to bevægelser, der er modsatte til samme tredje, er indbyrdes ækvivalente.

11.9.2. Definition. Lad $\alpha:[a,b]$ ind i T være en bevægelse. Punktet $\alpha(a)$ kaldes bevægelsens (og banens) begyndelsespunkt,

og $\alpha(b)$ kaldes bevægelsens (og banens) endepunkt. Klassen af bevægelser ækvivalente med $\alpha(a)$ kaldes en vej fra $\alpha(a)$ til $\alpha(b)$. En vej betegnes med et enkelt bogstav, så man skriver f.eks.

Vejen Γ med parameterfremstilling $\alpha:[a,b]$ ind i T .

De modsatte bevægelser til $\alpha:[a,b]$ ind i T udgør en vej fra b til a , og denne vej betegnes nu $-\Gamma$.

11.9.3. Definition. Lad Γ_1 med parameterfremstilling $\alpha_1:[a,b]$ ind i T og Γ_2 med parameterfremstilling $\alpha_2:[b,c]$ ind i T være veje, som tilfredsstiller $\alpha_1(b) = \alpha_2(b)$ (altså, at Γ_2 begynder, hvor Γ_1 ender). Den ved

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{for } t \in [a,b] \\ \alpha_2(t) & \text{for } t \in [b,c] \end{cases}$$

definerede vej Γ med parameterfremstilling $\alpha:[a,c]$ ind i T kaldes summen af Γ_1 og Γ_2 , og vi skriver $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Det er indlysende, at α bliver kontinuert, således at α i hvert fald definerer en vej. Vi må imidlertid også godtgøre, at vi får den samme vej $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, når vi benytter andre parameterfremstillinger for Γ_1 og Γ_2 . Vi betragter parameterfremstillinger $\beta_1 = \alpha_1 \circ \varphi_1:[a_1,b_1]$ ind i T og $\beta_2 = \alpha_2 \circ \varphi_2:[b_1,c_1]$ ind i T , hvor $\varphi_1:[a_1,b_1]$ på $[a,b]$ og $\varphi_2:[b_1,c_1]$ på $[b,c]$ er kontinuerte og strengt voksende. Vi sætter nu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{for } t \in [a_1,b_1] \\ \varphi_2(t) & \text{for } t \in [b_1,c_1], \end{cases}$$

og φ bliver da en kontinuert og strengt voksende afbildning $\varphi:[a_1,c_1]$ på $[a,c]$, og vi får

$$\alpha \circ \varphi(t) = \begin{cases} \alpha_1 \circ \varphi_1(t) & \text{for } t \in [a_1,b_1] \\ \alpha_2 \circ \varphi_2(t) & \text{for } t \in [b_1,c_1], \end{cases}$$

hvilket viser, at vi får samme vej som før.

Hvis en vej Γ_1 ender i et punkt $p \in T$ og en anden vej Γ_2 begynder i p , kan vi altid danne $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Vi kan nemlig altid erstatte den ene parameterfremstilling med en ækvivalent ved en monoton funktion φ defineret ved $\varphi(t) = k+t$, hvor konstanten k vælges sådan, at højre endepunkt for parameterintervallet for Γ_1 kommer til at falde sammen med venstre endepunkt for parameterintervallet for Γ_2 .

Den således definerede operation $+$ er altså kun defineret for visse specielle valg af Γ_1 og Γ_2 , og den er således ikke en regneoperation i sædvanlig forstand. Vi bemærker, at hvis $\Gamma_1 + \Gamma_2$ og $\Gamma_2 + \Gamma_3$ er definerede, da er $(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_3$ og $\Gamma_1 + (\Gamma_2 + \Gamma_3)$ definerede og identiske. Operationen $+$ er således i en vis forstand associativ. Vi skriver $\Gamma_1 - \Gamma_2$ i stedet for $\Gamma_1 + (-\Gamma_2)$, når dette udtryk har en mening. En konstant afbildning $\alpha: [a, b] \rightarrow T$ har visse af et nulelements egenskaber, men ikke alle. Udtrykket $\Gamma - \Gamma$ har en mening for enhver vej Γ (samme vej frem og tilbage), men Γ og $-\Gamma$ kan ikke siges at hæve hinanden.

11.10. Vi vil nu sætte kurver i forbindelse med sammenhængsteorien. Vi bemærker først, at et afsluttet, endeligt interval $[a, b]$ er både kompakt og sammenhængende, og derfor giver sætningerne 10.12.1 og 11.5.1 umiddelbart sætningen:

11.10.1. Sætning. Lad T være metrisk rum og $\alpha: [a, b] \rightarrow T$ en bevægelse. Dennes bane $\alpha([a, b])$ er kompakt og sammenhængende.

Lad nu T være et metrisk rum og $A \subseteq T$ en punktmængde. Vi siger, at et punkt $p \in A$ kan forbindes med et punkt $q \in A$, hvis og kun hvis der eksisterer en bevægelse $\alpha: [a, b] \rightarrow A$ med begyndelsespunkt $\alpha(a) = p$ og endepunkt $\alpha(b) = q$, og vi skriver da p forb q . Vi kan også udtrykke dette ved, at der i A findes en vej fra p til q . Denne vej har en sammenhængende bane, som

ligger i A og indeholder p og q . Vi har derfor

$$(1) \quad p \text{ forb } q \Rightarrow p \text{ sam } q,$$

hvor sam er den i 11.3 omtalte ækvivalensrelation.

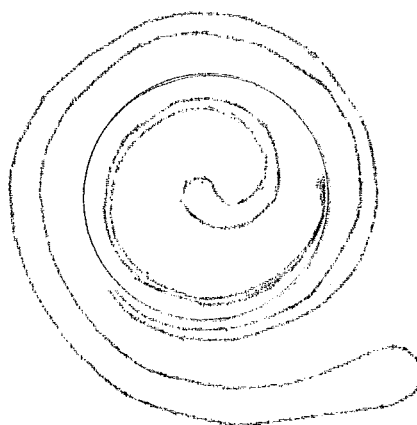
11.10.2. Definition. Hvis relationen $p \text{ forb } q$ er opfyldt for alle valg af $p \in A$ og $q \in A$, kaldes A kurvesammenhængende.

Den logiske relation (1) fortæller os, at kravet om kurvesammenhæng er kraftigere end kravet om sammenhæng, altså:

11.10.3. Sætning. Hvis en mængde er kurvesammenhængende er den også sammenhængende.

Vi bemærker, at relationen forb er en ækvivalensrelation. Vi har nemlig $a \text{ forb } a$, idet den konstante afbildning defineret ved $\alpha(x) = a$ forbinder a med a . Af $a \text{ forb } b$ følger, at der eksisterer en vej fra a til b og den modsatte vej går da fra b til a , så vi får $b \text{ forb } a$. Af $a \text{ forb } b \wedge b \text{ forb } c$ følger eksistensen af en vej Γ_1 fra a til b og en vej Γ_2 fra b til c . Vejen $\Gamma_1 + \Gamma_2$ er da en vej fra a til c , og vi har derfor $a \text{ forb } c$. Relationen forb på mængden A giver anledning til en inddeling af A i ækvivalensklasser, der bliver kurvesammenhængende mængde. Vi vil kalde dem de kurvesammenhængende komponenter af A , og på grund af (1) bliver de delmængder af komponenterne af A .

På figuren er antydnet en punktmængde, som består af en cirkelperiferi, samt to uendelig lange strimler, der konvergerer i spiraler ind mod cirkelperiferien fra hver sin side. Strimlernes rande regnes med til mængden, som da bliver afsluttet. Det er let at se, at den



bliver sammenhængende. Det er anskueligt klart, men dog ikke helt let at vise, at den ikke bliver kurvesammenhængende. Den består af tre kurvesammenhængende komponenter, nemlig cirkelperiferien og hver af de to strimler. Vi skal ikke ofre tid på beviserne for de her anførte påstande.

11.11. Vi vil nu gå over til et nærmere studium af sammenhængsbegrebet for mængder i $\mathbb{R}^m$. Vi bemærker, at vi for $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$, har den specielle bevægelse $\underline{\alpha}: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}^m$ defineret ved

$$\underline{\alpha}(t) = \underline{a}(1-t) + \underline{b}t,$$

som har begyndelsespunkt $\underline{a}$ og endepunkt $\underline{b}$, og hvis bane er liniestykket med endepunkter $\underline{a}$ og $\underline{b}$. Denne bevægelse definerer den retlinede vej fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$. En vej $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, hvor hver Γ_ν er en retlinet vej, kaldes en polygonal vej, og dens bane kaldes en brudt linie.

Vi kan gøre sammenhængsbegrebet endnu skarpere end begrebet kurvesammenhængende, ved at kræve, at to punkter af mængden kan forbindes med en vej af mere speciel art indenfor mængden. Hvis vi kun tillader polygonale veje, får vi et begreb, vi passende kan kalde polygonal sammenhæng. En cirkelperiferi er kurvesammenhængende, men ikke polygonalt sammenhængende.

Hvis en mængde A har den egenskab, at ethvert $\underline{a} \in A$ og ethvert $\underline{b} \in A$ kan forbindes indenfor A ved hjælp af den retlinede vej fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$, kaldes A konveks. Dette begreb omtales nærmere i det andet kursus under matematik 1. Det fremgår umiddelbart af definitionen, at vi har sætningen.

11.11.1. Sætning. En konveks mængde er kurvesammenhængende.

Rummet $\mathbb{R}^m$ har den egenskab, at enhver kugleomegn i dette rum er kurvesammenhængende. Vi har endda den stærkere sætning:

11.11.2. Sætning. En kugleomegn i $\mathbb{R}^m$ er konveks.

Bevis. Lad $K(\underline{a}, r)$ være en kugleomegn. Idet $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er punkter af denne kugleomegn, har vi

$$\|\underline{x} - \underline{a}\| < r, \quad \|\underline{y} - \underline{a}\| < r.$$

Et punkt $\underline{z}$ af liniestykket med endepunkter $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er givet ved

$$\underline{z} = (1-t)\underline{x} + t\underline{y}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

og vi får ved direkte udregning

$$\begin{aligned} \|\underline{z} - \underline{a}\|^2 &= \|(1-t)(\underline{x} - \underline{a}) + t(\underline{y} - \underline{a})\|^2 = \\ &= ((1-t)(\underline{x} - \underline{a}) + t(\underline{y} - \underline{a}))^2 = (1-t)^2(\underline{x} - \underline{a})^2 + t^2(\underline{y} - \underline{a})^2 + \\ &+ 2t(1-t)(\underline{x} - \underline{a}) \cdot (\underline{y} - \underline{a}) = (1-t)^2\|\underline{x} - \underline{a}\|^2 + t^2\|\underline{y} - \underline{a}\|^2 + \\ &+ 2t(1-t)(\underline{x} - \underline{a}) \cdot (\underline{y} - \underline{a}). \end{aligned}$$

På det sidste led anvender vi Cauchy-Schwarz's ulighed

$$|(\underline{x} - \underline{a}) \cdot (\underline{y} - \underline{a})| \leq \|\underline{x} - \underline{a}\| \cdot \|\underline{y} - \underline{a}\|,$$

og vi får

$$\|\underline{z} - \underline{a}\|^2 \leq ((1-t)\|\underline{x} - \underline{a}\| + t\|\underline{y} - \underline{a}\|)^2 < ((1-t)r + tr)^2 = r^2,$$

hvilket viser, at $\underline{z} \in K(\underline{a}, r)$, og dermed er konveksiteten vist.

Hvis vi blot ville vise, at $K(\underline{a}, r)$ er polygonalt sammenhængende, kunne vi slippe lettere fra det, idet $\underline{x}$ og $\underline{y}$ begge kan forbindes med $\underline{a}$ ved retlinede veje.

11.12. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og $K \subseteq O$ en polygonalt sammenhængende komponent af O . Vi betragter et vilkårligt punkt $x \in K$. Da er O en omegn af x , og der eksisterer en kugle $K(x, r) \subseteq O$. Da $K(x, r)$ er polygonalt sammenhængende hører alle punkter af $K(x, r)$ til samme polygonalt sammenhængende komponent af O . Altså gælder $K(x, r) \subseteq K$, hvilket viser, at K er en omegn af x . Altså er K åben, og vi har vist sætningen:

11.12.1. Sætning. De polygonalt sammenhængende komponenter af en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$ er åbne mængder.

Heraf kan vi nu slutte følgende sætning:

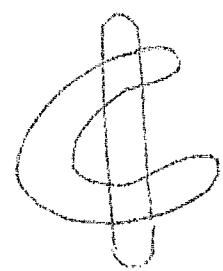
11.12.2. Sætning. Enhver åben sammenhængende punktmængde

$0 \subseteq \mathbb{R}^m$ er polygonalt sammenhængende.

Bevis. Lad $K \subseteq 0$ være en polygonalt sammenhængende komponent af 0 . Ifølge sætning 11.12.1 er K åben. Mængden $0 \setminus K$ er foreningsmængde af alle de øvrige polygonalt sammenhængende komponenter af 0 , og derefter efter sætning 11.12.1 ligeledes åben. Antager vi nu, at K ikke er tom, da har vi på grund af, at 0 er sammenhængende, at $0 \setminus K = \emptyset$, altså $K = 0$. Altså er 0 polygonalt sammenhængende.

11.12.3. Sætning. En åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^m$ har en højst numerabel mængde af komponenter.

Bevis. Hver komponent $K \subseteq 0$ er åben, og vi kan derfor vælge et punkt $\underline{r} \in K$ med rationale $r_1, \dots, r_m$. Mængden af sådanne punkter er imidlertid numerabel og derfor er mængden af komponenter højst numerabel.

11.13. At vi overhovedet kan tale om kurvesammenhængende og polygonalt sammenhængende komponenter beror på, at vi dels for veje og dels for polygonale veje har operationen $+$. Hvis vi anvender operationen $+$ på retlinede veje får vi sædvanligvis blot polygonale og ikke retlinede veje som resultat. Derfor har konvexitetsbegrebet også helt andre egenskaber end sammenhængsbegreberne. Først og fremmest er (se figuren)  en foreningsmængde af konvekse mængder med et fællespunkt sædvanligvis ikke en konveks mængde. Til gengæld er en fællesmængde af konvekse mængder altid konveks, medens (se figuren) fællesmængden  for to sammenhængende mængder ikke behøver at være sammenhængende.

11.14. Vi vil nu gå over til et nærmere studium af begrebet bevægelse, og i denne forbin-

delse vil vi for enhver bevægelse indføre begrebet vejlængde, som altid vil eksistere, men som eventuelt har værdien ∞ . I stedet for vejlængde vil vi også sige buelængde, men det vil vise sig, at ækvivalente bevægelser har samme buelængde og som følge deraf er det naturligt at tale om vejlængde.

Det er rimeligt og naturligt at tillægge den retlinede vej fra $\underline{a}$ til $\underline{b}$ længden $\|\underline{b}-\underline{a}\|$. Det er ligeledes naturligt, at den polygonale vej $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, hvor vi har endepunkterne $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n$, således at Γ_ν begynder i $\underline{a}_{\nu-1}$ og ender i $\underline{a}_\nu$, tillægges længden

$$\lambda(\Gamma) = \sum_{\nu=1}^n \|\underline{a}_\nu - \underline{a}_{\nu-1}\|.$$

Det er klart, at den således definerede vejlængde bliver additiv, idet

$$\lambda(\Gamma_1 + \Gamma_2) = \lambda(\Gamma_1) + \lambda(\Gamma_2).$$

11.15. Vi behøver endnu et hjælpemiddel, før vi kan indføre begrebet buelængde, nemlig begrebet inddeling af et interval $[a, b]$ i delintervaller. Herved forstås en endelig mængde af indre punkter i intervallet. Man vil i reglen foretrække at betegne en inddeling med et enkelt bogstav, oftest D , eventuelt med index, og man skriver

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

for at angive, at D er inddelingen $\{t_1, \dots, t_{n-1}\}$. Punkterne $t_0, \dots, t_n$ kaldes inddelingens delepunkter, og de afsluttede intervaller $[t_{\nu-1}, t_\nu]$, $\nu = 1, \dots, n$ kaldes inddelingens delintervaller.

En inddeling er altså en endelig punktmængde og de mængdeteoretiske symboler benyttes for inddelinger, men man foretrækker ofte mere suggestive navne for de mængdeteoretiske begreber i denne sammenhæng. Hvis $D_2 \supseteq D_1$, foretrækker man at kalde D_2 en

videredeling af D_1 . Hvert delinterval for inddelingen D_1 er da foreningsmængde af delintervaller for inddelingen D_2 . Hvis D_1 og D_2 nu er vilkårlige inddelinger, siges inddelingen $D_1 \cup D_2$ at være den inddeling man får ved at blande D_1 og D_2 . Den er en videredeling både af D_1 og af D_2 . Med $\hat{D}[a,b]$ vil vi betegne mængden af alle inddelinger af intervallet $[a,b]$.

11.16. Vi går nu over til at betragte en afbildning

$$\underline{\alpha}: [a,b] \text{ ind i } \mathbb{R}^m,$$

og selv om vi senere skal anvende vore resultater for bevægelser, vil vi dog ikke i første omgang antage, at α er kontinuert. Vi betragter nu også en inddeling.

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

og vi bemærker, at denne inddeling sammen med α definerer os en polygonal vej $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$, hvor for hvert ν den retlinede vej begynder i $\underline{\alpha}(t_{\nu-1})$ og ender i $\underline{\alpha}(t_\nu)$. Hvis $\underline{\alpha}$ specielt er kontinuert, altså en bevægelse, bliver banen for Γ en brudt linie, hvis vinkelspidser ligger på

banen for $\underline{\alpha}$ i den rækkefølge, i hvilken $\underline{\alpha}$ gennemløbes.

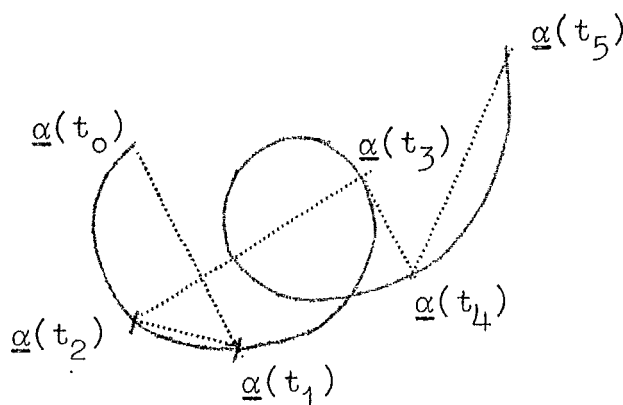
Den således definerede vej har en længde $\lambda(\Gamma)$, som vi også vil

betegne $\lambda(D; \underline{\alpha})$.

Hvis vi varierer inddelingen D på alle mulige måder, får vi en reel talmængde

$$(1) \quad \{ \lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \hat{D}[a,b] \}.$$

Lad nu $\varphi: [a_1, b_1]$ på $[a,b]$ være en kontinuert, bijektiv afbildning. På intervallet $[a_1, b_1]$ har vi da en inddeling



$\varphi^{-1}(D): a_1 = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \dots < \varphi^{-1}(t_{n-1}) < \varphi^{-1}(t_n) = b_1$.

Vi har således en bijektiv afbildning af mængden af inddelinger af $[a, b]$ på mængden af inddelinger af $[a_1, b_1]$. Nu ses det umiddelbart, at afbildningen $\underline{\alpha} \circ \varphi$ i forbindelse med inddelingen $\varphi^{-1}(D)$ af intervallet $[a_1, b_1]$ giver den samme polygonale vej, som vi havde før, så vi får derfor

$$\lambda(D; \underline{\alpha}) = \lambda(\varphi^{-1}(D); \underline{\alpha} \circ \varphi),$$

hvilket på grund af bijektiviteten medfører, at

$$\{\lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\} = \{\lambda(D; \underline{\alpha} \circ \varphi) \mid D \in \mathcal{D}[a_1, b_1]\}.$$

Mængden (1) afhænger således, hvis α er kontinuert, kun af den ved α definerede vej.

Trekantsuligheden medfører, at tilføjelse af et nyt delpunkt vil forøge den brudte linies længde, hvis den overhovedet bevirker nogen ændring. Vi har derfor monotonitetsreglen

$$(2) \quad D_2 \supseteq D_1 \Rightarrow \lambda(D_2; \underline{\alpha}) \geq \lambda(D_1; \underline{\alpha}).$$

11.17. Vi har til enhver vej $\underline{\alpha}: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ fået knyttet en reel talmængde

$$\{\lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\},$$

der for kontinuerte $\underline{\alpha}$ kun afhænger af den ved α definerede vej Γ . Hvad enten $\underline{\alpha}$ er kontinuert eller ikke, kan vi indføre størrelsen

$$\lambda(\underline{\alpha}) = \sup\{\lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\},$$

som altså for $\underline{\alpha}$ kontinuert kun afhænger af vejen Γ , og som derfor i dette tilfælde kan betegnes $\lambda(\Gamma)$.

11.17.1. Definition. Den ovenfor indførte størrelse $\lambda(\underline{\alpha})$ kaldes den totale variation af afbildningen $\underline{\alpha}$. Hvis $\lambda(\underline{\alpha})$ har en endelig værdi, siges $\underline{\alpha}$ at have begrænset variation. Hvis $\underline{\alpha}$ er kontinuert og har begrænset variation, siges den ved $\underline{\alpha}$ definerede vej Γ at være rektifiabel, og $\lambda(\underline{\alpha}) = \lambda(\Gamma)$ kaldes længden af vejen Γ eller den af bevægelsen α gennemløbne vej.

længde.

Fra matematisk synspunkt er brugen af særlige benævnelser, når $\underline{\alpha}$ er kontinuert, ikke velbegrundet, men de for kontinuerte α anvendte betegnelser er tilfredsstillende fra anskueligt synspunkt, og det er i overensstemmelse med traditionen at indskrænke brugen af disse betegnelser til de specielle tilfælde, hvor α er kontinuert.

11.18. For $x, y \in [a, b]$ og $x < y$ kan vi betragte restriktionen $\underline{\alpha}: [x, y]$ ind i $\mathbb{R}^m$, og vi vil da indføre betegnelsen $\lambda(\underline{\alpha}; x, y)$ for den totale variation af denne restriktion. Specielt er altså $\lambda(\underline{\alpha}) = \lambda(\underline{\alpha}; a, b)$. Vi viser nu additivitetssætningen:

11.18.1. Sætning. For $c \in [a, b]$ er

$$\lambda(\underline{\alpha}; a, b) = \lambda(\underline{\alpha}; a, c) + \lambda(\underline{\alpha}; c, b).$$

Bevis. En inddeling D' af $[a, b]$ med c som delepunkt definerer inddelinger D_1 og D_2 af $[a, c] \cup [c, b]$, således at $D_1 = D' \cap [a, c]$ og $D_2 = D' \cap [c, b]$, og vi har da additivitetsrelationen

$$(3) \quad \lambda(D'; \underline{\alpha}) = \lambda(D_1; \underline{\alpha}) + \lambda(D_2; \underline{\alpha}),$$

og sætning 11.18.1 er nu den tilsvarende relation mellem supremumsværdierne for de tre udtryk, idet D' og dermed D_1 og D_2 varierer på vilkårlig måde. Denne overgang er en rutine, der ofte er anvendelse for, og vi vil her gennemføre overvejelserne i alle detaljer, men ved senere lejligheder vil gå let hen over rutinebeviser af denne slags. Vi beviser først, at sætningen i hvert fald gælder med $\leq$ og derefter tilsvarende med $\geq$.

Vi går altså ud fra en vilkårlig inddeling D af $[a, b]$. Ved at tilføje c som delepunkt får vi en videredeling D' , som definerer inddelinger D_1 og D_2 af $[a, c]$ og $[c, b]$. Vi anvender nu (2) og (3), samt definitionerne af total variation, hvilket giver

$$\begin{aligned} \lambda(D; \underline{\alpha}) &\leq \lambda(D'; \underline{\alpha}) = \lambda(D_1; \underline{\alpha}) + \lambda(D_2; \underline{\alpha}) \leq \\ &\quad \lambda(\underline{\alpha}; a, c) + \lambda(\underline{\alpha}; c, b). \end{aligned}$$

Her står nu at løse, at $\lambda(\underline{\alpha}; a, c) + \lambda(\underline{\alpha}; c, b)$ er et overtal for mængden $\{\lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\}$ og derfor $\geq$ det mindste overtal for denne mængde, altså

$$\lambda(\underline{\alpha}; a, b) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, c) + \lambda(\underline{\alpha}; c, b).$$

Vi betragter dernæst vilkårlige inddelinger D_1 og D_2 af $[a, c]$ og $[c, b]$. Disse sammen med punktet c giver os en inddeling D af $[a, b]$, og (3) giver nu

$$\lambda(D_1; \underline{\alpha}) + \lambda(D_2; \underline{\alpha}) = \lambda(D; \underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, b).$$

Heraf følger nu, at mængden $\{\lambda(D_1; \underline{\alpha}) \mid D_1 \in \mathcal{D}[a, c]\}$ har $\lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \lambda(D_2; \underline{\alpha})$ som overtal, hvilket giver

$$\lambda(\underline{\alpha}; a, c) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \lambda(D_2; \underline{\alpha})$$

eller

$$\lambda(D_2; \underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \lambda(\underline{\alpha}; a, c).$$

Udtrykket på højre side er altså overtal for $\{\lambda(D_2; \underline{\alpha}) \mid D_2 \in \mathcal{D}[c, b]\}$, hvilket giver

$$\lambda(\underline{\alpha}; c, b) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \lambda(\underline{\alpha}; a, c),$$

og dermed er beviset fuldført. Den sidste del kunne afkortes ved udnyttelse af sætning 4.7.1, idet beviset for den ene halvdel af denne sætning ses at indgå i ræsonnementet.

For $x, y \in [a, b]$ og $x > y$ sætter vi nu

$$\lambda(\underline{\alpha}; x, y) = \lambda(\underline{\alpha}; y, x),$$

og endvidere sætter vi for alle $x \in [a, b]$.

$$\lambda(\underline{\alpha}; x, x) = 0.$$

Ved at gennemgå de forskellige muligheder for beliggenheden af 3 punkter $x, y, z \in [a, b]$ får vi nu den generelle indskudsregel for den totale variation

$$(4) \quad \lambda(\underline{\alpha}; x, z) = \lambda(\underline{\alpha}; x, y) + \lambda(\underline{\alpha}; y, z).$$

11.19. Den totale variation $\lambda(\underline{\alpha}) = \lambda(\underline{\alpha}; a, b)$ er defineret som supremum for talmængden $\{\lambda(D; \underline{\alpha}) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\}$. Dette ud-

trykkes i de 2 logiske relationer

$$\forall D \in \mathcal{D}[a,b] (\lambda(D;\underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}))$$

$$\forall K < \lambda(\underline{\alpha}) \exists D \in \mathcal{D}[a,b] (\lambda(D;\underline{\alpha}) \geq K).$$

På grund af monotonitetsegenskaben (2) er disse betingelser ækvivalente med den ene betingelse

$$\forall K < \lambda(\underline{\alpha}) \exists D \in \mathcal{D}[a,b] \forall D' \supseteq D (\lambda(D';\underline{\alpha}) \in [K, \lambda(\underline{\alpha})]).$$

Vi lægger mærke til, at dette minder meget om en grænseværdidefinition, og det er ikke svært at indføre enkelte nye begreber og derved opnå, at $\lambda(\underline{\alpha})$ virkelig i sædvanlig forstand bliver en grænseværdi for $\lambda(D;\underline{\alpha})$.

Lad nu $\underline{\alpha}: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ være en afbildning med begrænset variation, og lad ε være et positivt tal. Vi kan da ifølge det foregående finde en inddeling D , således at

$$\lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \varepsilon \leq \lambda(D;\underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, b).$$

Lad nu $c \in]a, b[$ være et vilkårligt punkt. Ved at tilføje c til D får vi en inddeling D' , for hvilken ovenstående ulighed også vil gælde. Den definerer inddelinger D_1 og D_2 af $[a, c]$ og $[c, b]$. Vi har nu ifølge (3) og (4)

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{\alpha}; a, b) - \lambda(D;\underline{\alpha}) &= \\ &= (\lambda(\underline{\alpha}; a, c) - \lambda(D_1;\underline{\alpha})) + (\lambda(\underline{\alpha}; c, b) - \lambda(D_2;\underline{\alpha})), \end{aligned}$$

og da begge tallene i parenteserne er ≥ 0 , ser vi, at

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{\alpha}; a, c) - \varepsilon &\leq \lambda(D_1;\underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; a, c) \\ \lambda(\underline{\alpha}; c, b) - \varepsilon &\leq \lambda(D_2;\underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; c, b). \end{aligned}$$

Hvis vi nu vælger $d \in]c, b[$ og benytter det netop opnåede resultat, får vi den tilsvarende ulighed også for intervallet $[c, d]$, som er et vilkårligt delinterval af $[a, b]$. Vi formulerer resultatet i en sætning:

11.19.1. Sætning. Lad $\underline{\alpha}: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ være en afbildning med begrænset variation, og lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da en inddeling D af $[a, b]$, således at det for ethvert

delinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$ og enhver inddeling D' af $[c,d]$ omfattende alle delepunkter $D \cap]c,d[$, gælder at

$$\lambda(\underline{\alpha}; c, d) - \varepsilon \leq \lambda(D'; \underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}; c, d).$$

Sætningen giver udtryk for en slags ligelighed i forbindelse med konvergens af $\lambda(D; \alpha)$ mod $\lambda(\underline{\alpha}; c, d)$, således at vi svarende til et givet ε kan finde en b stemt inddeling, med hvis delepunkter uligheden er opfyldt for samtlige delintervaller $[c,d]$ på én gang.

11.20. Som en anvendelse af sætning 11.19.1 viser vi nu følgende fundamentale sætning:

11.20.1. Sætning. Lad $\underline{\alpha}: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ være en bevægelse og $c \in [a,b]$ et vilkårligt punkt. Den gennemløbne vejlængde $\varphi(t) = \lambda(\underline{\alpha}; c, t)$ definerer en kontinuert, monotont voksende afbildning $\varphi: [a,b]$ ind i $\mathbb{R}$.

Bevis. For $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ giver indskudsreglen

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \lambda(\underline{\alpha}; t_1, t_2) \geq 0,$$

hvilket viser, at φ er monotont voksende. Vi betragter nu et fast punkt $t_0 \in [a,b]$, og vi skal da blot vise, at φ er kontinuert i t_0 . Lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da en inddeling $D \in \mathcal{D}[a,b]$, med de i sætning 11.19.1 omtalte egenskaber. Endvidere eksisterer der på grund af kontinuiteten et tal $\delta > 0$, således at

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow \|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| \leq \varepsilon.$$

Tallet δ kan vælges således, at intervallerne $]t_0 - \delta, t_0[$ og $]t_0, t_0 + \delta[$ ikke indeholder delepunkter af inddelingen D . Uligheden i sætning 11.19.1 giver da for $|t - t_0| \leq \delta$, at

$$\left| \lambda(\underline{\alpha}; t_0, t) - \|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| \right| \leq \varepsilon,$$

og derfor tillige, at

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= |\lambda(\underline{\alpha}; t_0, t)| \leq \\ &\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| + \left| \lambda(\underline{\alpha}; t_0, t) - \|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| \right| \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

og dermed har vi netop vist, at φ er kontinuert i t_0 .

11.21. Vi skal vise et par regneregler. Hvis k er et reelt tal, får vi åbenbart for enhver inddeling D af $[a, b]$, at $\lambda(D; k\underline{\alpha}) = |k| \lambda(D; \underline{\alpha})$, og heraf følger regneregler. Hvis k er et reelt tal, får vi åbenbart for enhver inddeling D af $[a, b]$, at $\lambda(D; k\underline{\alpha}) = |k| \lambda(D; \underline{\alpha})$, og heraf følger regnereglen

$$(5) \quad \lambda(k\underline{\alpha}; a, b) = |k| \lambda(\underline{\alpha}; a, b).$$

Lad os dernæst betragte 2 bevægelser $\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$. Vi kan da danne afbildningen $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$. For en vilkårlig inddeling

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

får vi nu først

$$\begin{aligned} \|\underline{\alpha}(t_\nu) - \underline{\alpha}(t_{\nu-1})\| &= \|(\underline{\alpha}_1(t_\nu) - \underline{\alpha}_1(t_{\nu-1})) + (\underline{\alpha}_2(t_\nu) - \underline{\alpha}_2(t_{\nu-1}))\| \leq \\ &\|\underline{\alpha}_1(t_\nu) - \underline{\alpha}_1(t_{\nu-1})\| + \|\underline{\alpha}_2(t_\nu) - \underline{\alpha}_2(t_{\nu-1})\|, \end{aligned}$$

hvilket medfører, at

$$\lambda(D; \underline{\alpha}) \leq \lambda(D; \underline{\alpha}_1) + \lambda(D; \underline{\alpha}_2) \leq \lambda(\underline{\alpha}_1) + \lambda(\underline{\alpha}_2),$$

så vi får regnereglen

$$(6) \quad \lambda(\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2) \leq \lambda(\underline{\alpha}_1) + \lambda(\underline{\alpha}_2).$$

11.22 I det specielle tilfælde $m = 1$, hvor α er en afbildning af et interval $[a, b]$ ind i $\mathbb{R}$, får vi

$$\lambda(D; \alpha) = \sum_{\nu=1}^n |\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})|.$$

En generel afbildning $\underline{\alpha}: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er givet ved de m koordinatafbildninger

$$\alpha_\nu = \text{pr}_\nu \circ \underline{\alpha}: [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R},$$

og vi har da

$$(7) \quad \underline{\alpha} = \alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_m \underline{e}_m,$$

hvor $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ er basistalsættene. For hvert μ og ν har vi

$$|\alpha_\mu(t_\nu) - \alpha_\mu(t_{\nu-1})| \leq \|\underline{\alpha}(t_\nu) - \underline{\alpha}(t_{\nu-1})\|,$$

og vi får derfor

$$\lambda(D; \alpha_\mu) \leq \lambda(D; \underline{\alpha}) \leq \lambda(\underline{\alpha}),$$

hvilket medfører, at

$$(8) \quad \lambda(\alpha_\mu) \leq \lambda(\underline{\alpha}), \quad \mu = 1, \dots, m$$

På den anden side ses det umiddelbart, at

$$\lambda(\alpha_1, \underline{e}_1) = \lambda(\alpha_1),$$

og af (7) følger derfor ved gentagen anvendelse af (6), at

$$(9) \quad \lambda(\underline{\alpha}) \leq \lambda(\alpha_1) + \dots + \lambda(\alpha_m).$$

Af ulighederne (8) og (9) følger specielt:

11.22.1. Sætning. En afbildning $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ har begrænset variation, hvis og kun hvis enhver af koordinatafbildningerne $\alpha_\mu = \text{pr}_\mu: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ har begrænset variation.

11.23. Vi går nu over til et nærmere studium af en afbildning $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$, som antages at have begrænset variation. Den ved

$$\varphi(x) = \lambda(\alpha; a, x)$$

definerede afbildning $\varphi: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ er voksende, idet $y > x$ medfører (se indledende bemærkning til 11.22)

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \lambda(\alpha; x, y) \geq |\alpha(y) - \alpha(x)| \geq 0,$$

som viser, at φ er voksende. Sætter vi nu $\psi = \varphi - \alpha$; får vi

$$\psi(y) - \psi(x) = \varphi(y) - \varphi(x) - (\alpha(y) - \alpha(x)) \geq 0,$$

således at ψ også er voksende. Nu er $\alpha = \varphi - \psi$, og vi har altså set, at α kun skrives som differens mellem 2 voksende funktioner. Vi har tidligere set, at φ og dermed tillige ψ bliver kontinuert, hvis α er kontinuert. For en voksende funktion φ får vi for enhver inddeling $\lambda(D; \alpha) = \varphi(b) - \varphi(a)$, hvilket viser, at en voksende funktion og dermed ifølge 11.21 en differens mellem 2 voksende funktioner, har begrænset variation. Vi har således vist sætningen:

11.23.1. Sætning. En afbildning $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ er af be-

grænset variation, hvis og kun hvis den kan skrives på formen $\alpha = \varphi - \psi$, hvor φ og ψ er voksende. Hvis α yderligere er kontinuert, kan φ og ψ vælges kontinuerte.

11.24. Vi vil vise endnu et par regneregler for sædvanlige reelle funktioner med begrænset variation.

11.24.1. Sætning. Lad $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være en afbildning med begrænset variation. Dens kvadrat $\alpha^2: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ har da begrænset variation. Hvis der eksisterer en konstant $k > 0$, således at α ikke antager værdier i intervallet $] -k, k[$, da har også den reciproke $\frac{1}{\alpha}$ begrænset variation.

Bevis. Vi har en fremstilling $\alpha = \varphi - \psi$, hvor φ og ψ er voksende. Vi kan antage, at φ og ψ er overalt positive, da vi ellers blot adderer en passende positiv konstant til φ og ψ , hvilket ikke ændrer α . Men så er $\alpha^2 = \varphi^2 + \psi^2 - 2\varphi\psi$, og her er $\varphi^2 + \psi^2$ såvel som $2\varphi\psi$ voksende, og α^2 har derfor begrænset variation. Er derefter $|\alpha(t)| \geq k$ for alle t , får vi for en inddeling

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

at

$$\left| \frac{1}{\alpha(t_\nu)} - \frac{1}{\alpha(t_{\nu-1})} \right| = \frac{|\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})|}{|\alpha(t_\nu)| |\alpha(t_{\nu-1})|} \leq \frac{1}{k^2} |\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})|,$$

hvoraf følger, at

$$\lambda(D; \frac{1}{\alpha}) \leq k^{-2} \lambda(D; \alpha) \leq k^{-2} \lambda(\alpha),$$

hvilket netop viser, at $\frac{1}{\alpha}$ har begrænset variation.

11.24.2. Sætning. Hvis afbildningerne $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ har begrænset variation, da har produktet $\alpha_1 \alpha_2$ begrænset variation.

Denne sætning følger umiddelbart af sætning 11.24.1 i forbindelse med ulighederne (5) og (6), idet

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{4} ((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2).$$

11.25. Vi indskyder her et par almindelige bemærkninger i tilslutning til det foregående og benytter samtidig lejligheden til en enkelt historisk bemærkning.

De monotone funktioner kommer naturligt ind i analysen som et nyttigt hjælpemiddel. Det er imidlertid en svaghed, at regning med monotone funktioner kun undtagelsesvis fører til monotone funktioner. Ovenfor har vi imidlertid set, at mængden af funktioner, der kan skrives som differens mellem 2 voksende funktioner, er mængden af funktioner med begrænset variation, og at denne mængde er afsluttet overfor addition, subtraktion og multiplikation, samt med en rimelig begrænsning tillige overfor division. Vi har således fundet den mindste funktionsklasse, som indeholder de monotone funktioner og er afsluttet overfor regneoperationer i et rimeligt omfang.

Det er imidlertid værd at lægge mærke til, at vi kom ganske naturligt til begrebet "begrænset variation" ved et forsøg på at indføre begrebet "længde" for en kurve i et m -dimensionalt rum, og vi fandt derved, at begrebet "begrænset variation" for kontinuerte bevægelser var ensbetydende med begrebet "rektificabel". Disse forhold omtaltes først i 2^{den} udgave af Camille Jordan's berømte lærebog "Cours d'analyse de l'école polytechnique", hvis først bind udkom i 1893. Denne bog er blot et enkelt eksempel fra en lang række tilsvarende lærebøger, der ofte har indført helt nye ideer i matematikundervisningen ved École polytechnique i Paris.

Senere undersøgelser viste, at der var en sammenhæng mellem begrænset variation og differentiabilitet. Ingen af de to egenskaber medfører den anden, men i en vis forstand medfører de to egenskaber alligevel omtrent hinanden. Det er Lebesgue's integralteori, der har bragt klarhed i dette spørgsmål.

11.26. Vi skal nu studere de mere specielle bevægelser, der har differentiabel parameterfremstilling. Det viser sig dog, at differentiabilitet i sig selv har ringe interesse i denne sammenhæng, men for kontinuert differentiable bevægelser får vi sætningen:

11.26.1. Sætning. Hvis afbildningen $\underline{\alpha} : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er kontinuert differentiabel, har α begrænset variation, og den ved $\varphi(t) = \lambda(\underline{\alpha}; a, t)$ definerede afbildning $\varphi : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ er differentiabel med $D\varphi(t) = \|D\underline{\alpha}(t)\|$.

Bevis. Da $D\underline{\alpha} : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er kontinuert, og $[a, b]$ er kompakt, har

$$G = \sup\{\|D\underline{\alpha}(t)\| \mid t \in [a, b]\}$$

en endelig værdi. Vi betragter nu en inddeling

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

og vi bemærker først, at vi for $k = 1, \dots, m$; $\nu = 1, \dots, n$ ifølge middelværdisætningen har

$$\alpha_k(t_\nu) - \alpha_k(t_{\nu-1}) = D\alpha_k(\tau_{k,\nu}) (t_\nu - t_{\nu-1}),$$

hvor $\tau_{k,\nu} \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$. Heraf fås vurderingen

$$|\alpha_k(t_\nu) - \alpha_k(t_{\nu-1})| \leq G(t_\nu - t_{\nu-1}),$$

som igen giver

$$\lambda(\Delta; \alpha_k) = \sum_{\nu=1}^n |\alpha_k(t_\nu) - \alpha_k(t_{\nu-1})| \leq$$

$$G \sum_{\nu=1}^n (t_\nu - t_{\nu-1}) = G(b-a),$$

hvilket viser, at α_k og dermed $\underline{\alpha}$ har begrænset variation. Vi ved nu, at $\varphi(t) = \lambda(\underline{\alpha}; a, t)$ er begrænset.

For at vise den sidste del af sætningen, betragter vi et vilkårligt delinterval $[x, y] \subseteq [a, b]$. Vi sætter

$$g_k(x,y) = \inf\{ |D\alpha_k(t)| \mid t \in [x,y] \}$$

$$G_k(x,y) = \sup\{ |D\alpha_k(t)| \mid t \in [x,y] \}.$$

Vi betragter en vilkårlig inddeling

$$\Delta : x = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = y.$$

Ifølge middelværdisætningen kan vi for $k = 1, \dots, m$; $\nu = 1, \dots, n$ vælge $\tau_{k,\nu} \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$, således at

$$\alpha_k(t_\nu) - \alpha_k(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1}) D\alpha_k(\tau_{k,\nu}),$$

hvoraf følger

$$\begin{aligned} \|\underline{\alpha}(t_\nu) - \underline{\alpha}(t_{\nu-1})\| &= \left(\sum_{k=1}^m (\alpha_k(t_\nu) - \alpha_k(t_{\nu-1}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (t_\nu - t_{\nu-1}) \left(\sum_{k=1}^m (D\alpha_k(\tau_{k,\nu}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Vi får således vurderingen

$$\begin{aligned} (t_\nu - t_{\nu-1}) \left(\sum_{k=1}^m (g_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\underline{\alpha}(t_\nu) - \underline{\alpha}(t_{\nu-1})\| \leq \\ &= (t_\nu - t_{\nu-1}) \left(\sum_{k=1}^m (G_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ved summation med hensyn til ν fås heraf

$$(y-x) \left(\sum_{k=1}^m (g_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda(\Delta; \underline{\alpha}) \leq (y-x) \left(\sum_{k=1}^m (G_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vi lægger mærke til, at vi her har fået $\lambda(\Delta; \underline{\alpha})$ vurderet ved udtryk, der ikke afhænger af inddelingen Δ . Vi bemærker også, at vurderingen gælder for alle valg af Δ . Men så gælder den samme vurdering for supremum for $\lambda(\Delta; \underline{\alpha})$, og vi får derfor, idet $\lambda(\underline{\alpha}; x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, at

$$(y-x) \left(\sum_{k=1}^m (g_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq (y-x) \left(\sum_{k=1}^m (G_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

eller

$$\left(\sum_{k=1}^m (g_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x} \leq \left(\sum_{k=1}^m (G_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da funktionerne $D\alpha_k$ alle er kontinuerte, er den ved

$$F(\underline{u}) = \left(\sum_{k=1}^m (D\alpha_k(u_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

definerede afbildning af den kompakte mængde

$$\{\underline{u} \mid a \leq u_k \leq b; k = 1, \dots, m\}$$

ind i $\mathbb{R}$ ligelig kontinuert, og for $\varepsilon > 0$, kan vi altså finde $\delta > 0$, således at

$$|v_k - u_k| \leq \delta; k = 1, \dots, m \Rightarrow |F(\underline{v}) - F(\underline{u})| \leq \varepsilon.$$

Idet $g_k(x,y)$ og $G_k(x,y)$ er funktionsværdier for $D\alpha_k$ i intervallet $[x,y]$, følger heraf, at vi for $|y-x| \leq \delta$ har

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^m (G_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^m (g_k(x,y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Vi betragter nu et vilkårligt punkt $u \in [a,b]$. Vi betragter desuden to andre punkter x og y , således at

$$a \leq x \leq u \leq y \leq b$$

og desuden $x < y$. Vi har da den ovenfor fundne vurdering af $\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x}$, og det ses, at $\|D\underline{\alpha}(u)\|$ ligger mellem de samme grænser, således at vi får

$$\left| \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x} - \|D\underline{\alpha}(u)\| \right| \leq \varepsilon.$$

Sætter vi nu specielt $x = u$ og $y = u+h$, følger heraf, at

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \|D\underline{\alpha}(u)\|h + \varepsilon_1^0(h)h,$$

hvor $\varepsilon_1^0(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$. Tilsvarende fås for $y = u$, $x = u-h$, at

$$\varphi(u-h) - \varphi(u) = -\|D\underline{\alpha}(u)\|h - \varepsilon_2^0(h)h,$$

hvor $\varepsilon_2^0(h) \rightarrow 0$ for $h \rightarrow 0$. De to relationer tilsammen viser, at

φ er differentiabel i u , og at

$$D\varphi(u) = \|D\alpha(u)\|.$$

11.26.2. Sætning. Hvis $\alpha:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er kontinuert differentiabel, er

$$(10) \quad \lambda(\alpha; a, t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Bevis. Ifølge sætning 11.25.1 har de to udtryk i (10) samme differentialkvotient med hensyn til t , og forskellen mellem dem er derfor uafhængig af t . Men for $t = 0$ er begge udtryk $= 0$; altså er deres konstante forskel lig med 0 og udtrykkene således altid lig med hinanden.

11.27. Hvis en kontinuert bevægelse $\alpha:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er injektiv, kaldes dens bane en simpel bue. Da $[a,b]$ er kompakt, er α ifølge sætning 10.14.2 en homöomorf afbildning af $[a,b]$ på banen. Hvis nu $\beta:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er en simpel bue med den samme bane, bliver $\alpha^{-1} \circ \beta$ en homöomorf afbildning af $[a,b]$ på sig selv, altså monoton. Altså er alle injektive bevægelser på en simpel bue indbyrdes ækvivalente eller modsatte.

Det fremgår heraf, at vi kan tale om længden af en simpel bue, uden at det er nødvendigt at vi binder os til en bestemt parameterfremstilling. Vi kan da på samme måde tale om længden af en bane, der er sammensat af flere simple buer. For sådanne baner vil vi også anvende betegnelsen kurver.

En vej kaldes lukket, hvis den begynder og ender i samme punkt. Hvis parameterintervallet er $[a,b]$ og c er et punkt i $]a,b[$, kan vejen Γ da skrives $\Gamma_1 + \Gamma_2$, hvor Γ_1 svarer til $[a,c]$ og Γ_2 svarer til $[b,c]$. Vi kan nu også danne $\Gamma_2 + \Gamma_1$, og det bliver en lukket vej, der begynder og ender i det til c svarende punkt af banen. Vi vil ikke skelne mellem denne vej og Γ , og derved bliver den lukkede vej uafhængig af begyndelses- og endepunktet.

Lad $\alpha:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ definere en lukket vej. Ved afbildningen $\varphi:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^2$ defineret ved

$$\varphi(t) = e^{\frac{2\pi i}{b-a}t}.$$

går $[a,b]$ over i enhedscirklen i $\mathbb{C}$, således at a og b går over i samme punkt af denne, medens $[a,b[$ afbildes injektivt. Vi har da, at φ^{-1} afbilder enhedscirklen bijektivt på $[a,b[$, og $\alpha \circ \varphi^{-1}$ bliver åbenbart kontinuert på enhedscirklen. Hvis $\alpha \circ \varphi^{-1}$ bliver injektiv, kaldes den ved α definerede vej Γ en simpel lukket vej, og dens bane kaldes en Jordan-kurve.

11.28. Lad $\underline{\alpha}:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}^3$ være en 2 gange kontinuert differentiabel bevægelse. Vi kalder $D\underline{\alpha}(t)$ hastigheden, $\|D\underline{\alpha}(t)\|$ farten og $D^2\underline{\alpha}(t)$ accelerationen til tidspunktet t . Hvis vi for alle $t \in [a,b]$ har $D\underline{\alpha}(t) \neq \underline{0}$ kaldes $\underline{\alpha}$ en differentiabel kurve. Vi sætter $s = \lambda(\underline{\alpha}; a, t) = \varphi(t)$, og vi har da

$$\frac{ds}{dt} = D\varphi(t) = \|D\underline{\alpha}(t)\| > 0,$$

således at φ er kontinuert og monoton, og vi kan danne $t = \varphi^{-1}(s)$, og gå over til den ækvivalente bevægelse

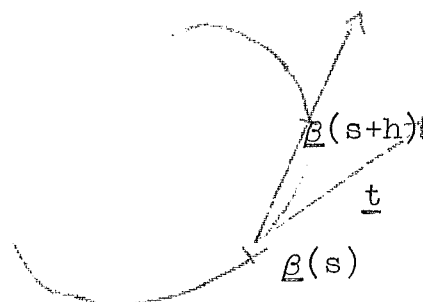
$$\underline{\beta} = \underline{\alpha} \circ \varphi^{-1}: [0, \lambda(\underline{\alpha})] \text{ ind i } \mathbb{R}^3,$$

og denne kaldes den naturlige parameterfremstilling for kurven. Vi har

$$D\underline{\beta}(s) = \frac{D\underline{\alpha}(t)}{D\varphi} = \frac{D\underline{\alpha}(t)}{\|D\underline{\alpha}(t)\|},$$

altså $\|D\underline{\beta}(s)\| = 1$. Den naturlige parameterfremstilling udmærker sig altså ved, at farten netop er 1.

På figuren har vi indtegnet vektoren $\frac{1}{h}(\underline{\beta}(s+h) - \underline{\beta}(s))$, som altså er en vektor på en sekant til kurven. For $h \rightarrow 0$ konvergerer denne vektor mod enhedsvektoren $D\underline{\beta}(s) = \underline{t}(s)$, som



altså ligger på kurvetangenten. Vi kalder denne vektor kurvens tangentvektor. Af $\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = \|\underline{t}(s)\|^2 = 1$ fås ved differentiation

$$\underline{t}(s) \cdot D\underline{t}(s) = 0.$$

Vi skriver

$$D\underline{t}(s) = \kappa(s)\underline{n}(s),$$

hvor $\underline{n}(s)$ er en enhedsvektor og $\kappa(s) \geq 0$. Kun for $\kappa(s) \geq 0$ er $\underline{n}(s)$ éntydigt bestemt, og $\underline{n}(s)$ kaldes da kurvens hovednormalvektor. Når kurven gennemløbes med fart 1, drejer $\underline{t}$, så endepunktet får farten $\kappa(s)$, der kaldes kurvens krumning, og drejningen foregår i den ved $\underline{t}$ og $\underline{n}$ bestemte plan, der kaldes kurvens oskulationsplan.

11.29. Idet vi nu vender tilbage til den oprindelige bevægelse $\underline{\alpha}$, ser vi, at

$$D\underline{\alpha}(t) = v\underline{t},$$

hvor v er farten i bevægelsen. Endvidere er

$$\frac{d\underline{t}}{dt} = \frac{d\underline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa v \underline{n},$$

hvor vi har undladt parameteren t . Altså får vi for accelerationen $\underline{w}(t)$ følgende udtryk

$$\underline{w} = D^2\underline{\alpha} = \frac{dv}{dt}\underline{t} + \kappa v^2 \underline{n},$$

hvilket viser, at accelerationen i bevægelsen har komponenten $\frac{dv}{dt}$ i tangentens retning og komponenten κv^2 i hovednormalens retning.

Vi får nu yderligere

$$\begin{aligned} \|\underline{w}\|^2 &= \left(\frac{dv}{dt}\underline{t} + \kappa v^2 \underline{n} \right) \cdot \left(\frac{dv}{dt}\underline{t} + \kappa v^2 \underline{n} \right) = \\ &= \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \kappa^2 v^4 \end{aligned}$$

til bestemmelse af krumningen κ . Af ligning

$$v^2 = (D\underline{\alpha})^2 = \underline{w}^2$$

får vi ved differentiation

$$\underline{v} \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{w},$$

og den ovenfor fundne ligning giver derfor ved multiplikation med $\underline{v}^2 = v^2$, at

$$\underline{v}^2 \underline{w}^2 = (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 + \kappa^2 (\underline{v}^2)^3,$$

så vi får formelen

$$\kappa^2 = \frac{\underline{v}^2 \underline{w}^2 - (\underline{v} \cdot \underline{w})^2}{(\underline{v}^2)^3},$$

hvor $\underline{v} = D\underline{\alpha}$ og $\underline{w} = D^2\underline{\alpha}$.

Vi skal ikke gå videre med den her kun lige påbegyndte diskussion af de differentiable kurvers teori. Vi har givet en ren matematisk indførelse af de kinematiske begreber hastighed og acceleration, og vi har sat disse begreber i forbindelse med det rent geometriske begreb krumning.

Lette opgaver.

1. Angiv komponenterne af den punktmængde i $\mathbb{R}$, som er givet ved

$$\{x \mid (x^2-1)^2 \geq 1\}$$

2. Lad S og T være sammenhængende metriske rum. Vis, at produkt rummet $S \times T$ er sammenhængende.
3. Vis ved et eksempel, at en delmængde af $\mathbb{R}$ kan have sammenhængende afslutning uden selv at være sammenhængende.
4. En mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ har ingen randpunkter. Vis, at $A = \mathbb{R}$ eller $A = \emptyset$.
5. Vis, at der i rummet $\mathbb{Q}$ af rationale tal ikke findes sammenhængende mængder med mere end ét element.
6. Prøv at give et enklere bevis for sætning 11.8.2 ved at udnytte de bemærkninger, der er anført efter beviset.
7. Tre bevægelser $\alpha, \beta, \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ er givet ved

$$\alpha(t) = \cos 2\pi t + i \sin^2 2\pi t$$

$$\beta(t) = \cos \sqrt{3} \pi (t-t^3) + i \sin \sqrt{3} \pi (t-t^3)$$

$$\gamma(t) = (\cos t - 2) + i(2\cos t - 1).$$

Banerne for disse bevægelser er dele af velkendte kurver.

Angiv de tre bevægelseres baner.

8. Vis, at den ved

$$\{\underline{x} \mid 1 \leq \frac{4x}{x^2+y^2} \leq 2\} \cup \{\underline{0}\}$$

definerede mængde i $\mathbb{R}^2$ er kompakt og kurvesammenhængende, men ikke polygonalt sammenhængende (det er nok bedst at tegne en skitse af mængden og studere denne).

9. Vis, at den ved

$$\{\underline{x} \mid \frac{2|\underline{x}|}{x^2+y^2} \leq 1\} \cup \{\underline{0}\}$$

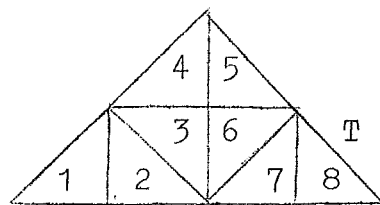
definerede mængde $\mathbb{R}^2$ er polygonalt sammenhængende, men ikke kompakt.

10. Vis, at en kontinuert afbildning $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ er konstant. Lad f_1 og f_2 være kontinuerte afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, således at

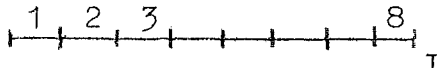
$$\forall x \in \mathbb{R} (e^{if_1(x)} = e^{if_2(x)}).$$

Vis, at der eksisterer et helt tal n , således at $f_2(x) = f_1(x) + 2n\pi$.

11. Vi betragter et kompakt interval I og en retvinklet ligebenet trekant T . Trekanten T deles i 2^n



kongruente dele, idet man

først tegner højden, derefter  højden i hver deltrekant o.s.v.

(se figuren). For hver værdi af n numereres deltrakterne, således som antydnet på figuren, således at trekanten med på hinanden følgende numre har en side fælles, og således at den trekant der har nummer q ved inddelingen i 2^n trekanter, deles i trekanter med numrene $2q-1$ og $2q$ ved overgang til inddelingen i 2^{n+1} dele. Vis ved induktion, at en sådan følge af inddelinger eksisterer. Intervallet I deles tilsvarende for ethvert n i 2^n lige store dele, der numereres fortløbende som antydnet på figuren. Lad $t \in I$ være et vilkårligt punkt. Vi kan da vælge en aftagende intervalfølge $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, således at det afsluttede interval I_n indeholder t , og således at I_n er et delinterval fra inddelingen af I i 2^n delintervaller. Til I_n lader vi nu svare deltrekanten

T_n med samme nummer som I_n fra inddelingen af T i 2^n deltrekanter. Gør rede for, at

$$1) T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$$

2) Mængden $\cap T_n$ (trekanterne er afsluttede) består af netop et punkt.

3) Hvis det er muligt at vælge den til $t \in I$ svarende følge $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ på flere måder, afhænger det i 2) omtalte punkt ikke af valget af følgen, men kun af punktet t .

Det i 2) omtalte punkt betegnes $\varphi(t)$. Derved defineres en afbildning $\varphi: I \text{ ind i } T$. Gør rede for, at

4) φ er kontinuert.

5) φ er surjektiv.

6) φ er ikke injektiv.

Det ses, at $\varphi: I \text{ ind i } \mathbb{R}^2$ er en bevægelse, der gennemløber alle punkter af en trekant. Eksistensen af bevægelser med denne egenskab blev opdaget af den italienske matematiker Peano, og de har været kaldt Peanokurver, selv om betegnelsen kurve netop i denne forbindelse forekommer helt unaturlig.

12. Vi betragter en bevægelse $\underline{\alpha}: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$, en inddeling og den tilsvarende polygonale vej Γ . Det antages, at $\underline{\alpha}$ er injektiv. Anskueliggør ved en figur (vælg $m = 2$), at vejen Γ alligevel kan "skære sig selv".
13. Vis, at et produktrum $T = T_1 \times T_2$ er sammenhængende, hvis T_1 og T_2 er sammenhængende metriske rum (studer en kontinuert afbildning $\varphi: T \text{ ind i } \{0, 1\}$).
14. En bevægelse $\underline{\alpha}: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ er differentiabel og $D\underline{\alpha}$ er begrænset. Vis, at $\underline{\alpha}$ er rektifiabel.

15. Vi betragter mængden af punkter, hvis polære koordinater (r, Θ) er givet ved (a er en positiv konstant)

$$(e^{a\Theta}, \Theta); -\infty < \Theta \leq 0.$$

Vis, at disse punkter tillige med det polære koordinatsystems pol (begyndelsespunkt) udgør banen for en injektiv bevægelse $\alpha: [0, 1]$ ind i $\mathbb{R}$. Hele punktmængden

$$(e^{a\Theta}, \Theta); \quad \Theta \in \mathbb{R}$$

er en såkaldt logaritmisk spiral (skitser den). Den udmærker sig ved, at en drejning om polen har samme virkning på den som en ligedannethed med polen som lighedspunkt (den logaritmiske spiral er kongruent med et forstørret billede af sig selv).

16. Vi betragter en afbildning $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ samt en inddeling

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Idet vi $\max(x, y)$ betegner det største af tallene x og y , sætter vi

$$\begin{aligned} \pi(D; \alpha) &= \sum_{k=1}^n \max(0, \alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})) \\ \nu(D; \alpha) &= \sum_{k=1}^n \max(0, \alpha(t_{k-1}) - \alpha(t_k)). \end{aligned}$$

Endvidere sætter vi

$$\pi(\alpha; a, b) = \sup\{\pi(D; \alpha) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\}$$

$$\nu(\alpha; a, b) = \sup\{\nu(D; \alpha) \mid D \in \mathcal{D}[a, b]\}.$$

For $x \in [a, b]$ indfører vi for restriktionen af α til $[a, x]$ de tilsvarende udtryk $\pi(\alpha; a, x)$ og $\nu(\alpha; a, x)$. Vis relationerne

$$\pi(\alpha; a, x) - \nu(\alpha; a, x) = \alpha(x) - \alpha(a)$$

$$\pi(\alpha; a, x) + \nu(\alpha; a, x) = \lambda(\alpha; a, x).$$

Derved fås en ny fremstilling af en funktion med begrænset variation som differens mellem monotone funktioner, nemlig funktionerne $\pi(\alpha; a, x) + \alpha(a)$ og $\nu(\alpha; a, x)$. Vis, at også disse funktioner bliver kontinuerte, hvis α er kontinuert. Funktionerne π og ν kaldes den positive og den negative variation af α .

17. Afbildningerne $\alpha_1, \alpha_2: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ antages at have begrænset variation. Vis, at afbildningen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ har begrænset variation.

18. Afbildningen $\alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^m$ antages at have begrænset variation, medens $\varphi: \mathbb{R}^m$ ind i $\mathbb{R}^n$ antages kontinuert differentiable. Vis, at $\varphi \circ \alpha: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^n$ har begrænset variation.

19. En bevægelse i $\mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\alpha_1(t) = at^2, \quad \alpha_2(t) = bt^3, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Bestem den i et vilkårligt interval $[a, b]$ gennemløbne vej-længde.

Husk: positiv kvadratrods.

20. Et hjul med radius a ruller på en vandret linie. Udregn den vej-længde et punkt på hjulets periferi gennemløber, mens hjulet triller én omgang.

21. Vis, at det grafiske billede i retvinklede koordinater af en kontinuert differentiable afbildning $f: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}^n$ er en bue med længden

$$\int_a^b (1 + (Df(x))^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

22. Vis, at en kurve, der i polære koordinater er givet ved $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, har længden

$$\int_a^b ((f(\theta))^2 + (Df(\theta))^2)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

23. Opstil en formel for længden af en vilkårlig parabelbue.
24. Udregn længden af en vilkårlig bue af den logaritmiske spiral, der i polære koordinater har ligningen $r = a e^{b\theta}$.
25. En bevægelse i $\mathbb{R}^3$ er givet ved parameterfremstillingen (skruebevægelse)
- $$x_1 = a \cos t, x_2 = a \sin t, x_3 = ht, a > 0, h > 0.$$
- Udregn den i et vilkårligt tidsinterval gennemløbne vej-
længde.
26. En bevægelse i $\mathbb{R}^3$ er givet ved parameterfremstillingen (konisk skruebevægelse)
- $$x_1 = t \cos t, x_2 = t \sin t, x_3 = ht, h > 0.$$
- Udregn den i et vilkårligt tidsinterval gennemløbne vej-
længde.
27. En bevægelse i $\mathbb{R}^4$ er givet ved parameterfremstillingen
- $$x_1 = a \cosh t, x_2 = a \sinh t, x_3 = b \cos kt, x_4 = b \sin kt,$$
- $$a > 0, b > 0, h > 0, k > 0.$$
- Udregn den i et vilkårligt tidsrum gennemløbne vejlængde.
28. Find hastighed, fart, acceleration, tangentvektor, hoved-
normalvektor og krumning for skruebevægelsen
- $$x_1 = a \cos t, x_2 = a \sin t, x_3 = ht, a > 0, h > 0.$$
29. Samme opgave for den koniske skruebevægelse
- $$x_1 = t \cos t, x_2 = t \sin t, x_3 = ht, h > 0.$$
30. Vis, at krumningen for den plane bevægelse $x_1 = \alpha_1(t)$, $x_2 = \alpha_2(t)$ er den numeriske værdi af udtrykket

$$\frac{D\alpha_1 D^2\alpha_2 - D\alpha_2 D^2\alpha_1}{\|D\alpha\|^3}.$$

For plane kurver plejer man at indføre en med fortegn regnet krumning, hvis værdi er givet ved ovenstående udtryk.

31. En plan bevægelse er givet i polære koordinater, idet

$$\Theta = \varphi(t), r = f(t), t \in [a, b].$$

Vi indfører en enhedsvektor $\underline{e} = \underline{e}(t)$ på radiusvektor, samt den enhedsvektor $\underline{e}_1 = \underline{e}_1(t)$, der fås ved at dreje $\underline{e}$ vinklen $\frac{\pi}{2}$ i positiv retning. Vis først, at

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = \frac{d\Theta}{dt}\underline{e}_1, \quad \frac{d\underline{e}_1}{dt} = -\frac{d\Theta}{dt}\underline{e}.$$

Idet det bemærkes, at hastighed og akceleration fås som første og anden differentialkvotient af $r\underline{e}$, udregnes hastighed, akceleration og krumning.

Vanskeligere opgaver.

32. (Almindelig øvelse i topologiens bevisteknik uden nøjere tilknytning til sammenhængsteorien). En voksende følge $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ af afsluttede mængder på et interval $[a, b]$ har som foreningsmængde hele intervallet. Vis, at F_n fra et vist n at regne indholder et delinterval af $[a, b]$ (Benyt indirekte bevis med udnyttelse af intervalindsnævring). Osgood 1897.
33. Lad F være en komponent af komplementærmængden til en åben mængde $O \subseteq \mathbb{R}^m$. Vis, at $C(F)$ er sammenhængende.
34. I $\mathbb{R}^\infty$ betegner vi med M mængden af punkter, som kun har endelig mange koordinater $\neq 0$. Vis, at både M og $C(M)$ er sammenhængende.
35. I $\mathbb{R}^4$ betragtes mængden M af punkter $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ med den egenskab, at

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

definerer en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}^2$ på $\mathbb{R}^2$. Vis, at M er åben og overalt tæt i $\mathbb{R}^4$, men ikke sammenhængende (studer den ved $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha\delta - \beta\gamma$ definerede afbildning $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$).

36. Kræver nogen opfindsomhed). Lad $O_1 \supseteq O_2 \supseteq \dots$ være en aftagende følge af åbne mængder på $\mathbb{R}$, og lad fællesmængden $\cap O_n$ være overalt tæt på $\mathbb{R}$. Vis, at $\cap O_n$ ikke er tællelig.

Specielt følger heraf, at mængden af rationale tal ikke er fællesmængde for en aftagende følge af åbne mængder. Ved over

overgang til komplementærmængderne ses så, at mængden af irrationale tal ikke er foreningsmængde for en voksende følge af afsluttede mængder.

Vis, at mængden af diskontinuitetspunkter for en afbildning $f: \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er foreningsmængde for en voksende følge af afsluttede mængder. Mængden af irrationale tal kan altså ikke optræde som mængden af diskontinuitetspunkter for en sådan afbildning.

På den anden side har den ved

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{for } x = \frac{p}{q} \text{ (uforkortelig)} \\ 0 & \text{for } x \text{ irrational} \end{cases}$$

definerede afbildning af $\mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ sig selv netop mængden af rationale tal som mængde af diskontinuitetspunkter.

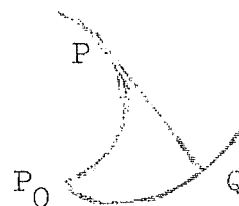
37. Overfør sætning 11.12.3 til Hilbertrummet.
38. Find ved hjælp af funktioner definerede ved udtryk af formen $x^p \sin x^{-q}$ eksempler på differentiable funktioner uden begrænset variation (og omvendt).
39. Lad $\alpha: [a,b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ være en afbildning med begrænset variation. Lad $p: [a,b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ og $q: [a,b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ være voksende afbildninger, således at $\alpha = p - q$. Vis, at der for $a \leq x \leq y \leq b$ gælder

$$p(y) - p(x) \geq \pi(\alpha; a, y) - \pi(\alpha; a, x)$$

$$q(y) - q(x) \geq \nu(\alpha; a, y) - \nu(\alpha; a, x),$$

hvor π og ν er de i opgave 16 indførte funktioner.

40. Vi betragter (se figuren) en plan, differentiable bue med begyndelsespunkt P_0 . I hvert kurvepunkt P afsettes ud ad den negative halvtangent et stykke PQ lig med længden



s af buen P_0P . Hvis punktet P er $\underline{g}(s)$, fås tangentvektoren

$\underline{t} = \frac{d\underline{\beta}}{ds}$ og Q bliver punktet $\underline{\beta}$ - st. Punktet Q beskriver en kurve der kaldes en afvikler af den oprindelige bue. Vis, at PQ er normal til afvikleren i Q , og at $\frac{1}{PQ}$ er afviklerens krumning i Q .

Svær opgave.

41. I et metrisk rum T betragtes en aftagende følge $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ af kompakte, sammenhængende mængder. Vis, at $\bigcap F_n$ er sammenhængende.

Monotone funktioner og konvekse funktioner.

12.1. I dette kapitel, som i modsætning til flere foregående bliver ret kort, vil vi (ligeledes i modsætning til de nærmest foregående kapitler) beskæftige os med nogle ret enkle problemstillinger. Vi indleder med en diskussion af monotone funktioners diskontinuiteter. Derved får vi også klaret det tilsvarende spørgsmål for funktioner med begrænset variation. Denne undersøgelse vedrører selvfølgelig kun reelle funktioner af en reel variabel. Derefter følger en undersøgelse af konvekse funktioner af en reel variabel. En væsentlig del af denne teori kan generaliseres til funktioner af flere variable, men disse udvidelser vil ikke blive omtalt. Til sidst vil vi benytte de konvekse funktioners teori som grundlag for udledelsen af nogle fundamentale uligheder.

12.2. Lad I være et vilkårligt interval for $x \in I$ sætter vi

$$I_x^- = I \cap]-\infty, x[, \quad I_x^+ = I \cap]x, \infty[.$$

Vi betragter nu en voksende afbildning $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis $I_x^- \neq \emptyset$, er $f(x)$ overtal for mængden $f(I_x^-)$, og vi får

$$\sup f(I_x^-) \leq f(x) \leq \inf f(I_x^+).$$

Det ses umiddelbart, at $\sup f(I_x^-)$ og $\inf f(I_x^+)$ er grænseværdierne fra venstre og højre i punktet x . I overensstemmelse med en sædvanlig betegnelse for disse grænseværdier skriver vi

$$f(x-) = \sup f(I_x^-), \quad f(x+) = \inf f(I_x^+).$$

Den ikke negative forskel $f(x+) - f(x-)$ kaldes funktionens spring i x og intervallet $]f(x-), f(x+)[$ kaldes dens springinterval i x .

Det ses, at f er kontinuert i x , hvis og kun hvis springet er 0, altså hvis og kun hvis springintervallet er tomt.

Er x og y vilkårlige punkter af I , kan vi vælge z , således at $x < z < y$, og af definitionerne af $f(x_+)$ og $f(y_-)$ følger da, at

$$f(x_+) \leq f(z) \leq f(y_-).$$

Heraf følger, at de eventuelle springintervaller i x og y er disjunkte. Da vi kan vælge en rational værdi i hvert ikke tomt springinterval for f , og disse værdier altså alle bliver forskellige, kan vi slutte, at mængden af diskontinuitetspunkter for en monoton funktion højst er numerabel.

Da en funktion med begrænset variation er differens mellem 2 voksende funktioner, vil den ligeledes i ethvert punkt besidde grænseværdier fra venstre og højre, og mængden af dens diskontinuitets punkter er højst numerabel. Dens funktionsværdi behøver dog ikke at ligge i springintervallet, og den kan derfor have springet 0 også i et diskontinuitetspunkt.

12.3. Vi går nu over til omtalen af konvekse funktioner, og vi indleder med definitionen, som slutter sig til det i foregående kapitel og i kursus i algebra og geometri omtalte begreb, konveks punktmængde:

12.3.1. Definition. En funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, kaldes konveks, hvis den ved

$$M(f) = \{ \underline{x} \mid x_1 \in I \wedge x_2 \geq f(x_1) \}$$

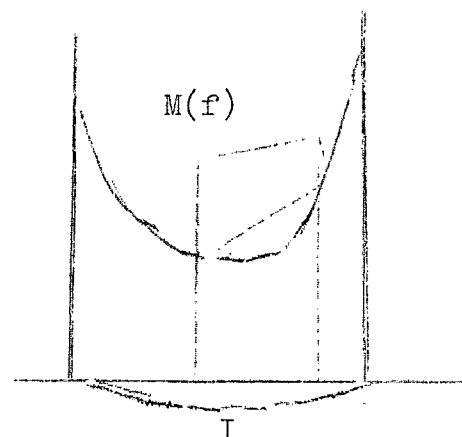
definerede punktmængde i $\mathbb{R}^2$ er konveks.

Mængden $M(f)$ skal altså have den egenskab, at ethvert liniestykke med endepunkter i $M(f)$ helt ligger i $M(f)$. Dette skal specielt gælde for liniestykker med endepunkter på kurven $x_2 = f(x_1)$, og denne kurve har derfor den egenskab, at den "forløber helt under enhver af sine korder" (se figuren). Udtrykt i formelsprog fører dette til betingelsen

$$\forall x_1, y_1 \in I \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$(1) \quad (f((1-t)x_1 + ty_1) \leq (1-t)f(x_1) + tf(y_1)).$$

12.3.2. Sætning. En funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis ovenstående betingelse er opfyldt.



Bevis. Vi har allerede indset nødvendigheden. Tilstrækkeligheden ses måske tydeligst af figuren, men vi vil dog også skrive beviset i formelsprog. Vi betragter $\underline{x} = (x_1, x_2) \in M(f)$ samt $\underline{y} = (y_1, y_2) \in M(f)$. Vi skal for $t \in [0, 1]$ vise, at

$$(2) \quad ((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)x_2 + ty_2) \in M(f).$$

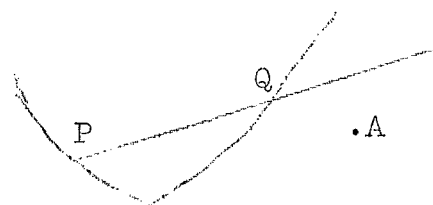
Af $\underline{x}, \underline{y} \in M(f)$ følger $x_2 \geq f(x_1), y_2 \geq f(x_1)$. Heraf, samt af betingelsen (1) fås nu

$$(1-t)x_2 + ty_2 \geq (1-t)f(x_1) + tf(y_1) \geq f((1-t)x_1 + ty_1),$$

hvilket netop viser, at (2) er opfyldt.

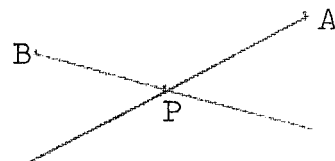
Vi vil i det følgende foretrække at skrive beviserne i den geometriske form. Vi vil bruge ordene "under" og "over" i overensstemmelse med, at vi forestiller os den anden koordinatakse rettet opad. Oversættelse af beviserne til matematisk formelsprog foregår rent rutinemæssigt.

12.4. Vi bemærker først, at kurven $x_2 = f(x_1)$, hvor f er konveks, ligger over enhver kordes forlængelse. Hvis der nemlig var et kurvepunkt A,

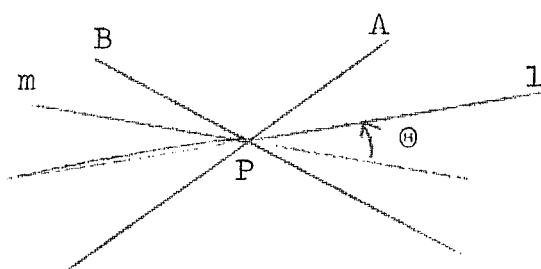


som lå virkelig under forlængelsen af korden PQ, ville Q ligge virkeligt over kurven PA i strid med antagelsen om konveksitet.

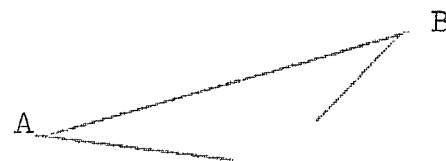
Et kurvepunkt P og nabopunkter A og B på hver sin side af P bestemmer to liniestykker AP og BP , som vist på figuren. Da kurven forløber under de to liniestykker men over dens forlængelser, vil den helt forløbe i venstre og højre vinkelrum. Heraf følger, at en konveks funktion er kontinuert.



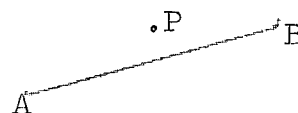
Lader man nu A konvergere mod P langs kurven, vil hældningen af PA aftage monotont og da den er nedad begrænset ved hældningen af BP , vil den konvergere mod hældningen af en halvlinie l , kurvens højre halvtangent i P . Da kurven ligger over forlængelsen af alle korderne udover P , ligger kurven også over halvtangentens forlængelse. Heraf følger, at hældningen af den venstre halvtangent m er $\leq$ hældningen af l . Vinklen Θ , som er antydnet på figuren er altså altid ≥ 0 , og den kaldes knækket i P . Hvis og kun hvis $\Theta = 0$, er f differentiabel i vedkommende punkt.



Det fremgår af det foregående, at halvtangenterne i endepunkterne af den til korden AB svarende kurvebue har den på figuren antydede beliggenhed i forhold til korden.



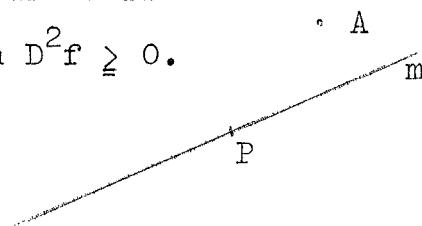
Det fremgår også, at der gennem hvert punkt af kurven går en støttelinie med den egenskab, at kurven ligger over eller på støttelinien. Hvis på den anden side f ikke er konveks, eksisterer der en korde AB og et kurvepunkt, der ligger virkeligt over kurven (punktet P på figuren), og det ses,



at der ikke går nogen støttelinie med den nævnte egenskab gennem P . Altså er eksistensen af støttelinier karakteristisk for de konvekse funktioner.

12.5. Vi vil nu specielt studere en differentiabel, konveks funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Det fremgår umiddelbart af det foregående afsnit, at Df er voksende, altså $D^2f \geq 0$.

Lad os nu omvendt betragte en afbildning $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, for hvilken Df er voksende. Lad m være tangenten i et kurvepunkt P , og lad A være et kurvepunkt til



højre for P . Ifølge middelværdisætningen har PA samme hældning som kurvetangenten i et eller andet kurvepunkt til højre for P , altså har PA større hældning end m . Heraf følger, at A ligger over m . Et tilsvarende ræsonnement kan gennemføres for punkter til venstre for P . Det følger heraf, at m er støttelinie for kurven, og det er således bevist, at f er konveks.

12.6. Den danske matematiker J.L.W.V. Jensen har bemærket, at nogle fundamentale uligheder vedrørende middelværdier er nøje knyttet til teorien for konvekse funktioner. Vi vil udnytte denne sammenhæng, idet vi vil udlede ulighederne ud fra de konvekse funktioners egenskaber.

12.6.1. Definition. Lad $c_1, \dots, c_n$ være positive tal med sum c , og lad $a_1, \dots, a_n$ være reelle tal. Ved det aritmetiske middeltal af talsættet $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vægtet med $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ forstås vi tallet

$$A(\underline{c}; a_1, \dots, a_n) = c^{-1} \underline{c} \cdot \underline{a} = c^{-1} \sum_{\nu} c_{\nu} a_{\nu}.$$

Hvis tallene a_{ν} alle er positive, indfører vi desuden for $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ det p^{te} potensmiddeltal

$$A^p(\underline{c}; \underline{a}) = (A(\underline{c}; a_1^p, \dots, a_n^p))^{\frac{1}{p}}.$$

For $p = 2$ kaldes dette tal det kvadratiske middeltal, og for $p = -1$ kaldes det ofte det harmoniske middeltal. Tallet

$$G(\underline{c}; \underline{a}) = (a_1^{c_1} \dots a_n^{c_n})^{c^{-1}} = e^{A(\underline{c}; \log a_1, \dots, \log a_n)}$$

kaldes det geometriske middeltal af $\underline{a}$ vægtet med $\underline{c}$.

Ingen af middeltallene ændres, når talsættet $\underline{c}$ erstattes med $k\underline{c}$, hvor $k > 0$. Det vil ofte være naturligt at foretrække talsættet $\underline{\gamma} = c^{-1}\underline{c}$, hvis elementer har summen 1.

Vi bemærker, at udtrykket

$$\log A^p(\underline{c}; \underline{a}) = \frac{\log c^{-1} \sum \gamma_{\nu} a_{\nu}^p}{p} = \frac{\log \sum \gamma_{\nu} a_{\nu}^p}{p}$$

er en brøk, hvis tæller og nævner for fast $\underline{c}$ og $\underline{a}$ går mod 0, når p går mod 0. Vi kan da bestemme dens eventuelle grænseværdi i 0 ved at differentiere tæller og nævner med hensyn til p og lade $p \rightarrow 0$. Nævnerens differentialkvotient er da 1, og den eventuelle grænseværdi for $p \rightarrow 0$ bliver da grænseværdien for tællerens differentialkvotient med hensyn til p , altså af udtrykket

$$\frac{\sum \gamma_{\nu} a_{\nu}^p \log a_{\nu}}{\sum \gamma_{\nu} a_{\nu}^p},$$

som ses at konvergere mod $\sum \gamma_{\nu} \log a_{\nu} = \log G(\underline{c}; \underline{a})$. Vi har således set, at

$$A^p(\underline{c}; \underline{a}) \rightarrow G(\underline{c}; \underline{a}) \quad \text{for } p \rightarrow 0,$$

når $\underline{c}$ og $\underline{a}$ er fast under grænseovergangen.

I overensstemmelse med dette resultat, skriver vi

$$A^0(\underline{c}; \underline{a}) = G(\underline{c}; \underline{a}),$$

og dermed er potensmiddelværdien $A^p(\underline{c}; \underline{a})$ defineret for alle reelle p og alle positive a_{ν} og c_{ν} .

12.6. Sammen med talsættene $\underline{a}$ og $\underline{c}$ betragter vi talsæt

$\underline{a}^* = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, $\underline{c}^* = (c_1, \dots, c_n, c_{n+1})$ med $c^* = c_1 + \dots + c_{n+1}$, som opstår ved at føje element til hvert af sætterne $\underline{a}$ og $\underline{c}$. Vi får da

$$A(c, c_{n+1}; A(\underline{c}; \underline{a}), a_{n+1}) = c^{*-1} (c A(\underline{c}; \underline{a}) + c_{n+1} a_{n+1}) =$$

$$c^{*-1} (c_1 a_1 + \dots + c_{n+1} a_{n+1}) = A(\underline{c}^*; \underline{a}^*).$$

Dette viser, at vægtede middeltal kan dannes successivt, således at vi danner middeltallet af de to første elementer, dernæst middeltallet af det første middeltal med summen af de to første middeltal som vægt og det tredje element med sin egen vægt. På denne måde tilføjes element efter element til talsættet er opbrugt. Vi har vist reglen for det aritmetiske middeltal, men det er lige så let at vise den for de andre middeltal.

12.6.1. Sætning. Hvis tallene $a_1, \dots, a_n$ ligger i et interval I , ligger $A(\underline{c}; \underline{a})$ også i I .

Bevis. Hvis f.eks. $I = [\alpha, \beta[$ har vi $a_\nu < \beta$ for ν , altså

$$A(\underline{c}; \underline{a}) = \sum \gamma_\nu a_\nu < \sum \gamma_\nu \beta = \beta \sum \gamma_\nu = \beta.$$

Analogt vises $A(\underline{c}; \underline{a}) \geq \alpha$. Andre tilfælde behandles analogt.

12.7. Vi betragter nu et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ samt en konveks afbildning $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vi har da

12.7.1. Sætning. For et vilkårligt talsæt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ med elementer $a_\nu \in I$ og et sæt $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ af positive vægte, vil den konvekse afbildning $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tilfredsstille betingelsen

$$\varphi(A(\underline{c}; \underline{a})) \leq A(\underline{c}; \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).$$

Bevis. Vi antager først $n = 2$ og benytter vægtsættet $\underline{\gamma} = (1-\gamma_2, \gamma_2)$. Uligheden bliver da

$$\varphi((1-\gamma_2)a_1 + \gamma_2 a_2) \leq (1-\gamma_2)\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2),$$

men det er netop konveksitetsbetingelsen (1) i 12.2. Uligheden

gælder altså for sæt med 2 elementer. Vi antager nu, at uligheden allerede er vist for talsættene $\underline{a}$ og $\underline{c}$, og vi skal da blot vise, at den også gælder for de i 12.6 indførte talsæt $\underline{a}^*$ og $\underline{c}^*$. Vi får nu

$$\begin{aligned}\varphi(A(\underline{c}^*, \underline{a}^*)) &= \varphi(A(c, c_{n+1}; A(\underline{c}; \underline{a}), a_{n+1})) \leq \\ &A(c; c_{n+1}; \varphi(A(\underline{c}; \underline{a})), \varphi(a_{n+1})) \leq \\ &A(c, c_{n+1}; A(\underline{c}; \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)), \varphi(a_{n+1})) = \\ &A(\underline{c}^*; \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)).\end{aligned}$$

Her stammer det første og det sidste lighedstegn fra relationen fra 12.6. Det første ulighedstegn er sætning 12.7.1 anvendt på 2 elementer, og det andet ulighedstegn kommer af, at middeltallet er en voksende funktion af hvert a_ν i forbindelse med induktionsantagelsen. Dermed er beviset fuldført.

12.8. Vi vil nu vise nogle anvendelser på anvendelsen af sætning 12.6.1. Vi betragter $\varphi :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ defineret ved $\varphi(x) = x^r$. Det ses, at φ er konveks for $r > 1$ og for $r < 0$. Vi har derfor, når r ligger udenfor intervallet $[0, 1]$

$$(A(\underline{c}; \underline{a}))^r \leq A(\underline{c}; a_1^r, \dots, a_n^r).$$

Lad p og q være positive tal og $q > p$; vi sætter $r = \frac{q}{p}$ og benytter den netop fundne ulighed på talsættet $(a_1^p, \dots, a_n^p)$. Dermed får vi

$$(A(\underline{c}; a_1^p, \dots, a_n^p))^{\frac{q}{p}} \leq A(\underline{c}; a_1^q, \dots, a_n^q),$$

og hvis vi her opløfter begge sider til potensen $\frac{1}{q}$, får vi heraf, idet $x^{\frac{1}{q}}$ er voksende, at

$$A_p(\underline{c}; \underline{a}) \leq A_q(\underline{c}; \underline{a}) \text{ for } 0 < p < q.$$

Tilsvarende får vi ved at anvende den samme ulighed på talsættet $a_1^{-p}, \dots, a_n^{-p}$, at

$$(A(\underline{c}; a_1^{-p}, \dots, a_n^{-p}))^{\frac{q}{p}} \leq A(\underline{c}; a_1^{-q}, \dots, a_n^{-q}),$$

og ved her at opløfte til potensen $-\frac{1}{q}$ på begge sider, får vi, idet $x^{-\frac{1}{q}}$ er aftagende, at

$$A^{-p}(\underline{c}; \underline{a}) \geq A^{-q}(\underline{c}; \underline{a}) \text{ for } 0 < p < q.$$

Vi har således vist, at middeltallet $A^p(\underline{c}; \underline{a})$ er en voksende funktion af p for $p \in]-\infty, 0[$ og for $p \in]0, \infty[$. Da $A^p(\underline{c}; \underline{a})$ er kontinuert som funktion af p for $p = 0$, har vi også

$$A^0(\underline{c}; \underline{a}) = \sup\{A^p(\underline{c}; \underline{a}) \mid p \in]-\infty, 0[\} = \\ \inf\{A^p(\underline{c}; \underline{a}) \mid p \in]0, \infty[\},$$

hvilket viser, at $A^p(\underline{c}; \underline{a})$ er en voksende funktion af p for alle p .

Specielt fås for $p = 0$ og $p = 1$, at

$$(1) \quad G(\underline{c}; \underline{a}) \leq A(\underline{c}; \underline{a}).$$

Dette er den fundamentale ulighed mellem geometrisk og aritmetisk middeltal. Historiske undersøgelser tyder på, at et nogenlunde rigtigt bevis for denne ulighed først er givet af MacLaurin. I ovenstående bevis har vi inddraget ret kraftige hjælpemidler, men alle de anførte uligheder kan vises ved mere elementære metoder.

En nærmere gennemgang af ovenstående beviser vil afsløre, at lighedstegnene i ulighederne kun vil gælde, hvis $a_1 = \dots = a_n$.

12.9. Vi betragter to sæt af positive tal $(h_1, \dots, h_n)$ og $(k_1, \dots, k_n)$ samt to positive tal α og β med sum $\alpha + \beta = 1$. Vi skriver $h = \sum h_\nu$, $k = \sum k_\nu$. For $\nu = 1, \dots, n$ får vi nu ifølge (1) anvendt på $\underline{a} = (h^{-1}h_\nu, k^{-1}k_\nu)$ og $\underline{c} = (\alpha, \beta)$, at

$$h^{-\alpha} h_\nu^\alpha k^{-\beta} k_\nu^\beta \leq \alpha h^{-1} h_\nu + \beta k^{-1} k_\nu.$$

Ved summation over ν fås

$$h^{-\alpha} k^{-\beta} \sum h_\nu^\alpha k_\nu^\beta \leq \alpha h^{-1} \sum h_\nu + \beta k^{-1} \sum k_\nu = \alpha + \beta = 1$$

eller

$$(2) \quad \sum h_\nu^\alpha k_\nu^\beta \leq (\sum h_\nu)^\alpha (\sum k_\nu)^\beta.$$

Lad nu p og q være positive tal, som tilfredsstiller betingelsen

$$(3) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lad endvidere $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ med $\sum c_\nu = 1$, samt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ og $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ være sæt af positive tal. I formel (2) sætter vi nu

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}; \quad h_\nu = c_\nu a_\nu^p, \quad k_\nu = c_\nu b_\nu^p; \quad \nu = 1, \dots, n,$$

og vi får

$$\sum c_\nu a_\nu b_\nu \leq (\sum c_\nu a_\nu^p)^{\frac{1}{p}} (\sum c_\nu b_\nu^q)^{\frac{1}{q}},$$

eller med de i foregående afsnit benyttede betegnelser

$$A(\underline{c}; a_1 b_1, \dots, a_n b_n) \leq A^p(\underline{c}; \underline{a}) A^q(\underline{c}; \underline{b}).$$

Denne ulighed kaldes Hölders ulighed. For $p = q = 2$ går den over i Cauchy-Schwarz' ulighed.

12.10. Vi vil udlede endnu en interessant ulighed. Vi benytter fortsat betegnelserne fra foregående afsnit, og vi bemærker først, at (3) giver

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}; \quad q = \frac{p}{p-1}; \quad p > 1.$$

For to talsæt $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$ og $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n)$ giver Hölders ulighed altså

$$\sum h_\nu k_\nu \leq (\sum h_\nu^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum k_\nu^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

og heri sætter vi nu

$$h_\nu = c_\nu^{\frac{1}{p}} a_\nu; \quad k_\nu = c_\nu^{\frac{p-1}{p}} (a_\nu + b_\nu)^{p-1},$$

og vi får

$$\sum c_\nu a_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \leq (\sum c_\nu a_\nu^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum c_\nu (a_\nu + b_\nu)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Analogt fås

$$\sum c_\nu b_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \leq (\sum c_\nu b_\nu^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum c_\nu (a_\nu + b_\nu)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Ved addition af de to sidste ligninger fås

$$\sum c_\nu (a_\nu + b_\nu)^p \leq \left((\sum c_\nu a_\nu^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum c_\nu b_\nu^p)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum c_\nu (a_\nu + b_\nu)^p \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

og ved division med den sidste faktor på højre side får vi endelig

$$(\sum_{\nu} (a_{\nu} + b_{\nu})^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{\nu} a_{\nu}^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{\nu} b_{\nu}^p)^{\frac{1}{p}} ; p > 1$$

eller med middelværditegn

$$A^p(\underline{c}; \underline{a} + \underline{b}) \leq A^p(\underline{c}; \underline{a}) + A^p(\underline{c}; \underline{b}).$$

Denne ulighed kaldes Minkowski's ulighed.

Lette opgaver.

1. En afbildning $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{for } x \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

Vis, at f kan skrives som differens mellem 2 monotont voksende funktioner.

2. Lad (x_n) være en følge af indbyrdes forskellige reelle tal, og lad $\sum a_n$ være en konvergent række med positive led. Vi sætter for $x \in \mathbb{R}$

$$J(x) = \{n \mid x_n \leq x\}; \quad f(x) = \sum_{n \in J(x)} a_n.$$

Derved har vi defineret en afbildning $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$. Vis, at

- 1) f er voksende
- 2) f er kontinuert undtagen i punkterne x_n .
- 3) $f(x_n+) = f(x_n)$ og $f(x_n-) = f(x_n) - a_n$.
- 4) Hvis x og y er kontinuitetspunkter og $x < y$, er $f(y) - f(x)$ netop summen af springene i diskontinuitetspunkterne i $[x, y]$.

En funktion med egenskaben 4) kaldes en ren springfunktion (eller en totalt diskontinuert funktion).

3. Vis, at en voksende afbildning $f : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ kan skrives som sum af en ren springfunktion (opgave nr. 2) og en kontinuert funktion.
4. Lad $f : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ være konveks. Vis, at e^f ligeledes er konveks.
5. Lad $f_1, f_2 : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ være konvekse. Vis, at $f_1 + f_2$ er konveks.
6. Vis, at der eksisterer 2 positive, konvekse afbildninger

$f_1, f_2 : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}$, for hvilke f_1, f_2 ikke er konveks

7. Lad $\{f_j : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R} \mid j \in J\}$ være en mængde af konvekse afbildninger. En afbildning $f : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}^*$ (den udvidede tallinie) defineres ved

$$f(x) = \sup\{f_j(x) \mid j \in J\}.$$

Vis, at der eksisterer et delinterval $I \subseteq [a, b]$, således at restriktionen $f : I \text{ ind i } \mathbb{R}$ er konveks, medens $f(x) = \infty$ for $x \in [a, b] \setminus I$.

Eksempel: $J = \mathbb{N}$; $[a, b] = [-2, 2]$; $f_n(x) = n x^{2n}$.

8. Lad $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ være den ved $f(x) = x^n e^{-x}$ bestemte afbildning. Bestem for $n \in \mathbb{N}$ de intervaller, i hvilke f er konveks, samt de intervaller, i hvilke $-f$ er konveks.
9. Lad $f : [a, b] \text{ ind i } \mathbb{R}$ være konveks. Vis, at højst en numerabel mængde af støttelinier til kurven med ligning $y = f(x)$ har mere end 1 punkt fælles med kurven.
10. Vis, at $A^p(\underline{c}; \underline{a})$ for $p \rightarrow \infty$ og for $p \rightarrow -\infty$ konvergerer mod henholdsvis det største og det mindste tal i talsættet $\underline{a}$.
11. Vi betragter de to karakterskalaer

ug	ug-	mg+	mg	mg-	g+	g	g-	tg+	tg	tg-
15	$14\frac{2}{3}$	$14\frac{1}{3}$	14	$13\frac{1}{3}$	$12\frac{2}{3}$	12	$10\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{3}$	8	$5\frac{1}{3}$
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
mdl +	mdl	mdl-	slet+	slet						
$2\frac{2}{3}$	0	$-5\frac{1}{3}$	$-10\frac{2}{3}$	-16						
-1	-2	-3	-4	-5						

af hvilke den øverste er den i gymnasiet anvendte (bortset fra, at mdl- og slet+ ikke anvendes) medens den nederste benyttes ved cand. scient.-studiet. Hvilken skala er gunstigst ved udregning af gennemsnittet.

12. Uligheden (1) i 12.8 kan i det specielle tilfælde

$c_1 = \dots = c_n = \frac{1}{n}$ vises elementært ved udformning af følgende idé: Vi sætter $A = A(\underline{c}; \underline{a})$. Hvis ikke $a_1 = \dots = a_n = A$, findes der i talsættet $\underline{a}$ to tal $A-h$, $A+k$ med $h > 0$, $k > 0$. Hvis vi erstatter disse med A og $A+k-h$ ændres $A(\underline{c}; \underline{a})$ ikke, men det ses let, at $G(\underline{c}; \underline{a})$ bliver større. Ved gentagelse af processen bliver alle elementerne i $\underline{a}$ til sidst ens. Udform beviset detaljeret

13. Angiv nøjagtigt, under hvilke betingelser de i 12.8-10 beviste uligheder gælder med skarpt ulighedstegn.

14. Prøv at udvide Hölder's og Minkowski's uligheder til flere end 2 talsæt.

15. Mellem punkterne i $\mathbb{R}^m$ indføres en afstand, defineret ved

$$\text{dist}_p(\underline{x}, \underline{y}) = (|y_1 - x_1|^p + \dots + |y_m - x_m|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Vis, at $\mathbb{R}^m$ med dette afstandsbegreb for $p > 1$ er et metrisk rum.

16. Idet $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ er et talsæt, hvis elementer er > -1 og har samme fortegn, skal det bevises, at

$$\prod (1+a_\nu) \geq 1 + \sum a_\nu.$$

17. Vis den for $n \geq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ gældende ulighed

$$x^{n+1} - y^{n+1} > (n+1)y^n(x-y).$$

18. Vi betragter en følge (a_n) af positive tal, og for hvert $n \in \mathbb{N}$ betragter vi middeltallene

$$A_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \text{ og } G_n = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Vis uligheden

$$n(A_n - G_n) \leq (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}),$$

hvor lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis $a_{n+1} = G_{n+1}$ (sæt $a_{n+1} = x^{n+1}$, $G_n = y^{n+1}$ og benyt opgave nr. 17).

Udled heraf et induktionsbevis for ulighed (1) i 12.8 i det specielle tilfælde, hvor vægtene er ens.

Vanskeligere opgaver.

19. Lad x_n være en følge af indbyrdes forskellige reelle tal på et interval $[a, b]$, og lad $\sum a_n$ være en konvergent række med positive led. For $x \in [a, b]$ sætter vi

$$J(x) = \{n \mid x_n \leq x\}; \quad f(x) = \sum_{n \in J(x)} a_n (x - x_n).$$

Derved har vi defineret en afbildning $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$. Vis, at

- 1) f er voksende og konveks,
- 2) f er differentiabel undtagen i punkterne x_n ,
- 3) forskellen mellem hældningen af højre og venstre halvtangent til $y = f(x)$ for $x = x_n$ er netop a_n .

Heraf fremgår, at de punkter, hvor en konveks funktion ikke er differentiabel, kan ligge overalt tæt.

20. Lad $0 \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben, konveks mængde. For $\underline{a} \in 0$, $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{\lambda}\| = 1$ er den reelle talmængde

$$I(\underline{a}; \underline{\lambda}) = \{t \mid \underline{a} + \underline{\lambda}t \in 0\}$$

et interval. En afbildning $f : 0$ ind i $\mathbb{R}$ kaldes konveks, hvis og kun hvis det for alle valg af $\underline{a}$ og $\underline{\lambda}$ gælder at den ved $\varphi(t) = f(\underline{a} + \underline{\lambda}t)$ definerede afbildning $\varphi : I(\underline{a}; \underline{\lambda})$ ind i $\mathbb{R}$ er konveks.

Vis, at den konvekse afbildning $f : 0$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert. Vis endvidere, at en 2 gange differentiabel afbildning $f : 0$ ind i $\mathbb{R}$ er konveks, hvis og kun hvis følgende betingelser begge er opfyldt for alle $\underline{x} \in 0$:

$$D_1^2 f(\underline{x}) + D_2^2 f(\underline{x}) \geq 0; \quad D_1^2 f(\underline{x}) D_2^2 f(\underline{x}) - (D_1 f(\underline{x}) D_2 f(\underline{x}))^2 \geq 0.$$

21. En kontinuert afbildning $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b] \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y)) \right).$$

Vis, at f er konveks.

22. For et talsæt $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ og $p > 0$ indfører vi betegnelsen

$$S_p(\underline{a}) = \left(\sum_{\nu} a_{\nu}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vis, at $S_p(\underline{a})$ er en aftagende funktion af p . Vis, at der for to talsæt $\underline{a}$ og $\underline{b}$, samt $p > 1$ gælder

$$(S_p(\underline{a}+\underline{b}))^p > (S_p(\underline{a}))^p + (S_p(\underline{b}))^p.$$

Implicit givne funktioner.

13.1. En afbildning af et område i et talrum ind i et andet talrum kan tænkes givet, således at det til et punkt svarende billedpunkt bestemmes ved løsning af et ligningssystem. Eventuelt har dette ligningssystem flere løsninger, og det må da suppleres med yderligere betingelser (oftest uligheder) for at fastlægge billedpunktet helt. Afbildningen siges da at være givet implicit. Ved løsning af ligningssystemet får man afbildningen givet eksplicit.

I praksis hænder det ofte, at det ikke er praktisk gennemførligt at løse ligningssystemet, eller at man ved løsning af ligningssystemet får eksplicitte udtryk, som er for komplicerede for den videre behandling.

Det er derfor af betydning at have mulighed for at undersøge implicit givne funktioner, f.eks. afgøre om de er kontinuerlige eller differentiable og eventuelt finde udtryk for differentialkvotienten, uden at løse ligningssystemet. I andre tilfælde kan ligningssystemet have en sådan karakter, at en løsningsproces er helt uigennemførlig, og det vil da være af betydning at have sætninger om eksistens og éntydighed af løsningerne.

13.2. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og $I \subseteq \mathbb{R}$ et interval. Vi anvender betegnelsen $(\underline{x}; y)$ for punkter af $O \times I$, og vi betragter en afbildning

$$F: O \times I \text{ ind i } \mathbb{R}.$$

Hvis nu ligningen $F(\underline{x}; y) = 0$ for hvert $\underline{x} \in O$ er tilfredsstillet for netop én værdi $y = f(\underline{x}) \in I$, bestemmer ligningen $F(\underline{x}; y) = 0$ implicit afbildningen $f: O \text{ ind i } I$.

Det er ikke altid let at afgøre, om en ligning $F(\underline{x}; y) = 0$ bestemmer en implicit, ^{given} funktion, og de nødvendige hjælpemidler afhænger af naturen af funktionen F . På dette stadium af matema-

tikstudiet har vi ikke andre midler til rådighed end den følgende sætning, der er en helt triviel følge af kontinuerte, strengt monotone funktioners egenskaber:

13.2.1. Sætning. Den ovenfor betragtede afbildning $F: O \times I$ ind i $\mathbb{R}$ bestemmer implicit (ved løsning med hensyn til y) en afbildning $f: O$ ind i I , såfremt følgende tre betingelser er opfyldt:

- 1) For hvert fast $\underline{x} \in O$ er den ved $\phi(y) = F(\underline{x}; y)$ definerede afbildning $\phi: I$ ind i $\mathbb{R}$ strengt monoton.
- 2) For hvert fast $\underline{x} \in O$ er den i 1) omtalte afbildning ϕ kontinuert.
- 3) For hvert fast $\underline{x} \in O$ indeholder billedet $\phi(I)$ ved den i (1) omtalte afbildning ϕ både positive og negative tal.

13.3. Vi illustrerer sagen ved nogle eksempler. Vi vælger $O = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ og

$$F(x, y) = 4y - 3x + \sin(x-y).$$

Af

$$D_y F(x, y) = 4 - \cos(x-y) \geq 3$$

følger, at 1) i sætning 13.2.1 er opfyldt. Det ses, at F er kontinuert overalt, og 2) altså opfyldt.

For $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ fås

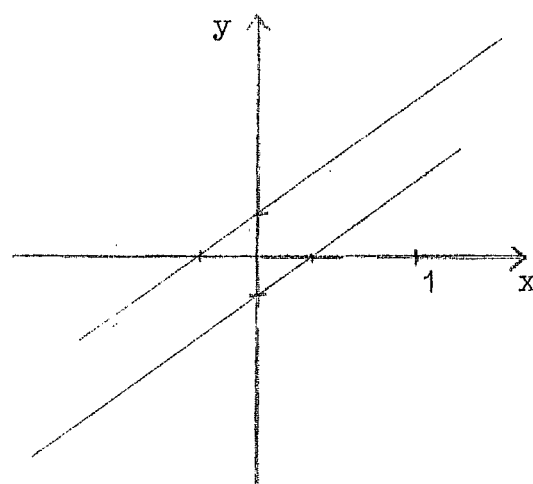
$$F(x, y) = 1 + \sin\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

og for $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ fås tilsvarende

$$F(x, y) = -1 + \sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) \leq 0.$$

Dermed har vi set, at også 3) er opfyldt (lighedstegnene skader ikke; for hvis et af dem gælder, har vi jo et nulpunkt, og 1) udelukker, at der kan være flere.

Vi betragter igen $O = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ og



$$F(x,y) = y^2 - x^2 - 1 - \frac{1}{2}\cos(x^2+y^2).$$

I dette tilfælde fås

$$D_y F(x,y) = 2y + y\sin(x^2+y^2) = (2+\sin(x^2+y^2))y,$$

og det ses, at 1) ikke er opfyldt for intervallet I , men kun for hvert af de to intervaller $]-\infty, 0]$ og $[0, \infty]$. Endvidere er 2) opfyldt, og $F(x,0) < 0$ for alle x , medens vi har $F(x,y) > 0$ for $y = \sqrt{x^2+2}$. Altså har $F(x,y) = 0$ netop 1 løsning i hvert af intervallerne $]-\sqrt{x^2+2}, 0[$ og $]0, \sqrt{x^2+2}[$. Ligningen bestemmer altså i dette tilfælde en implicit given funktion $y = f(x)$, når vi tilføjer en passende bibetingelse, f.eks. $\forall x (f(x) > 0)$.

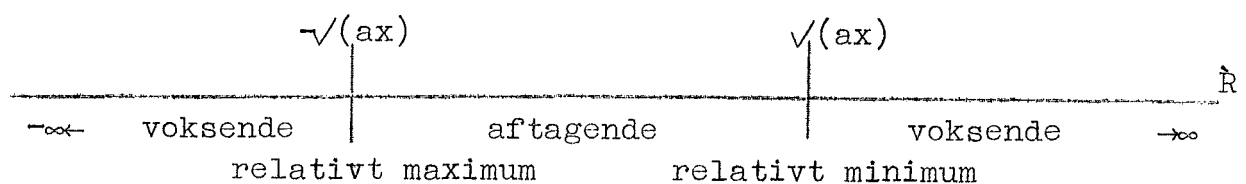
13.4. I de fleste tilfælde får man kun klarhed over spørgsmålet om eksistens og éntydighed af løsninger til ligninger til bestemmelse af implicit givne funktioner. Vi betragter igen situationen $0 = I = \mathbb{R}$ samt afbildning $F: \mathbb{R}^2 = 0 \times I$ ind i $\mathbb{R}$ defineret ved

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy; \quad a > 0.$$

Vi bemærker, at F er kontinuert, så 2) er opfyldt. Endvidere ses det, at man for fast x kan vælge y så stor, at $F(x,y) > 0$, men også så lille, at $F(x,y) < 0$. Altså er 3) opfyldt. Det går ikke så enkelt med 1). Vi har den partielle differentialkvotient

$$D_y F(x,y) = 3(y^2 - ax),$$

og det ses, at 1) er opfyldt, hvis og kun hvis $x \in]-\infty, 0]$, men ikke for $x \in]0, \infty[$. Vi ser imidlertid også, at $F(x,y)$ for et fast $x \in]0, \infty[$ varierer efter følgende skema:



Heraf ser vi nu, at ligningen $F(x,y) = 0$ for fast x har netop 1 løsning, såfremt det relative minimum er positivt, altså hvis $F(x, \sqrt{ax}) > 0$. Dette giver betingelsen

$$x^3 - 2a\sqrt{ax}\sqrt{x} > 0,$$

som for $x > 0$ er ensbetydende med

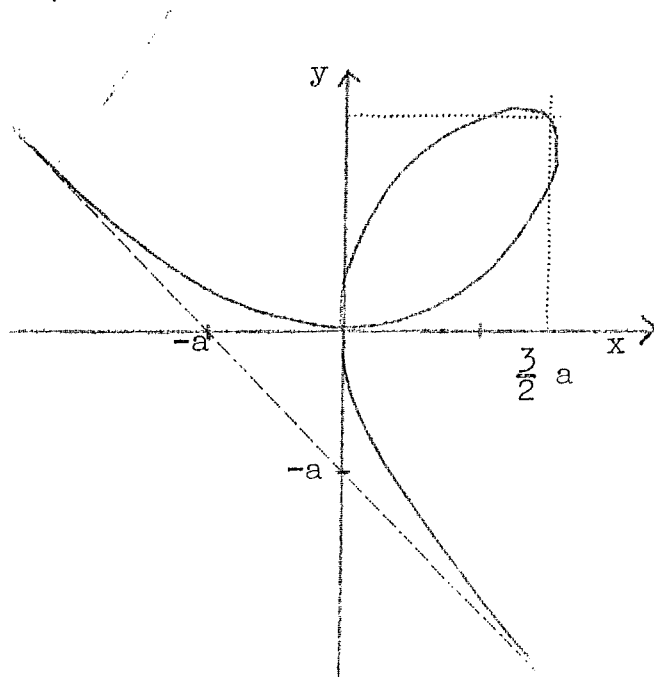
$$x > \sqrt[3]{4a}.$$

Vi har således set, at ligningen $F(x,y) = 0$ også for $x \in \sqrt[3]{4a}, \infty[$ bestemmer y éntydigt som implicit given funktion af x . For $x = \sqrt[3]{4a}$ får ligningen 2 løsninger, og for $x \in]0, \sqrt[3]{4a}[$ fås åbent 3 løsninger, nemlig 1 løsning i hvert af de tre intervaller

$$]-\infty, -\sqrt[3]{ax}[,]0, \sqrt[3]{ax}[,]\sqrt[3]{ax}, \infty[.$$

Nulpunktsmængden for funktionen F er en mængde af den slags der sædvanligvis kaldes en kurve. Hvis vi i ligningen $F(x,y) = 0$ indsætter $y = tx$, kan vi bestemme abscissen til det fra 0 forskellige skæringspunkt, og ordinaten fås derefter ved multiplikation med t . Derved fås x og y udtrykt ved t , altså en bevægelse med kurven som bane. Bevægelsens interval bliver dog ikke afsluttet, hvilket er i overensstemmelse med, at banen ikke er kompakt. Kendskabet til denne bevægelse giver os mulighed for at udregne så mange kurvepunkter, vi ønsker. Desuden kan kurvens symmetriegenskaber tages i betragtning. Det vises ret let, at den rette linie med ligningen $x + y + a = 0$ er asymptote til kurven, der ser ud som vist på figuren. Den kaldes Descarte's blad.

13.5. Vi vil endnu engang studere tilfældet $0 = I = \mathbb{R}$, og denne gang vælger vi at undersøge afbildningen



$$F(x,y) = y^2 - x^2(x-a).$$

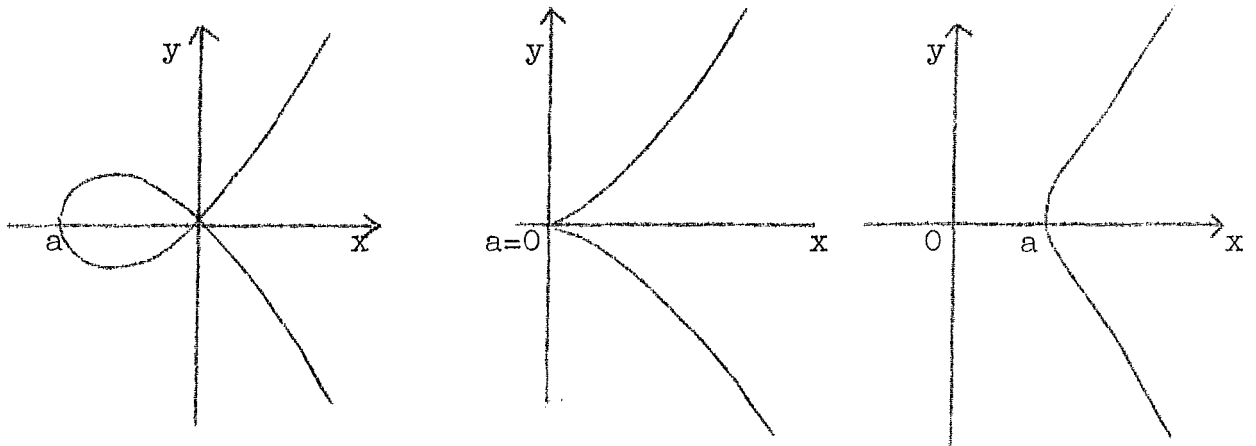
I dette tilfælde kan vi umiddelbart løse ligningen, og vi får løsningen

$$y = \varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ x\sqrt{x-a} & \text{for } x \in [a, \infty[\end{cases}$$

samt løsningen

$$y = \varphi_2(x) = -\varphi_1(x).$$

Vi illustrerer dette med en skitse af nulpunktetsmængde, hvis udseende veksler på en interessant måde med fortegnet for a . Det fremgår, at det "i det store og hele er rigtigt", at der gennem



et løsningspunkt til ligningen $F(x,y) = 0$ går en differentiabel kurve af formen $y = f(x)$ eller $x = g(y)$ (udførligere $x = t$, $y = f(t)$ etc.) Det ses dog også, at a i alle tilfælde er en undtagelse fra den almindelige regel, idet der for $a < 0$ går to differentiable løsningskurver gennem $\underline{0}$, medens der for $a = 0$ går én løsningskurve gennem $\underline{0}$, men den er ikke differentiabel, idet de to halvtangenter er ensrettede i stedet for modsat rettede. For $a > 0$ går der overhovedet ingen løsningskurve gennem $\underline{0}$, som er en isoleret løsning til ligningen.

13.6. Vi mangler spørgsmålet om implicit givne funktioners kontinuitet og differentiabilitet. Vi kæder disse spørgsmål sammen med spørgsmålet om eksistens af løsningskurve gennem et

kendt løsningspunkt, idet alle disse spørgsmål er af rent lokal natur. Vi vender imidlertid tilbage til det almindelige tilfælde $0 \subseteq \mathbb{R}^m$, $I \subseteq \mathbb{R}$ og $F : 0 \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Vi vil nu antage, at F og $D_y F$ er kontinuerte, og at vi har et løsningspunkt $(\underline{x}_0, y_0)$, således at vi altså har $F(\underline{x}_0, y_0) = 0$. Under disse omstændigheder har vi sætningen:

13.6.1. Sætning. Såfremt $D_y F(\underline{x}_0, y_0) \neq 0$, eksisterer der et tal $k > 0$, således at der til ethvert $\varepsilon \in]0, k]$ svarer en kugle-omegn $K(\underline{x}_0, \delta)$ i $\mathbb{R}^n$ med den egenskab, at ligningen $F(\underline{x}, y) = 0$ for ethvert $\underline{x} \in K(\underline{x}_0, \delta)$ har en og kun én løsning i intervallet $[y_0 - k, y_0 + k]$, og denne løsning tilhører endda intervallet $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Den derved bestemte løsningsfunktion $y = f(\underline{x})$ er kontinuert i $\underline{x}_0$.

Bevis. Vi bemærker først, at vi kan antage $D_y F(\underline{x}_0, y_0) > 0$, da vi ellers blot betragter $-F$ i stedet for F . Da $D_y F$ er forudsat kontinuert kan vi vælge $k > 0$ og $r > 0$, således at $D_y F(x, y)$ er positiv for

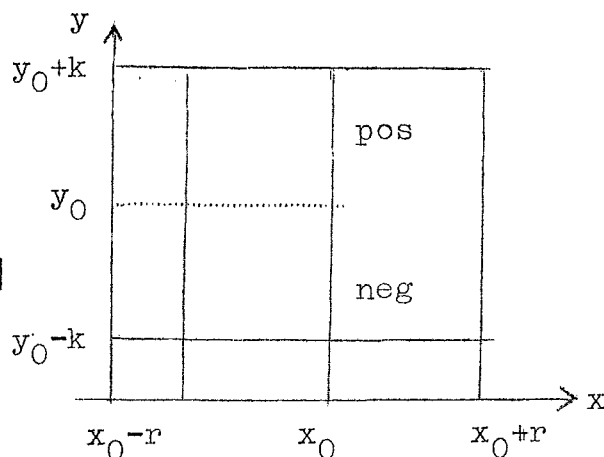
$$(x, y) \in K(\underline{x}_0, r) \times [y_0 - k, y_0 + k].$$

Med $0 = K(\underline{x}_0, r)$ og $I = [y_0 - k, y_0 + k]$

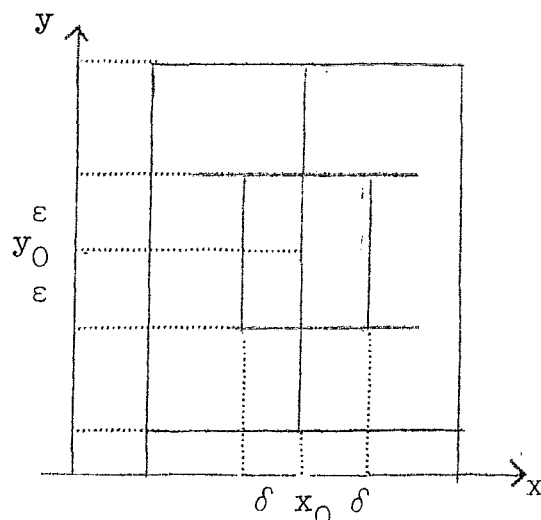
ses betingelserne 1) og 2) i sætning 13.2.1 at være opfyldt, og betingelsen 1) medfører specielt,

at ligningen $F(\underline{x}, y) = 0$ for $\underline{x} \in K(\underline{x}_0, r)$ højst har én løsning i intervallet $[y_0 - k, y_0 + k]$.

Da $F(\underline{x}_0, y)$ er strengt voksende, er $F(\underline{x}_0, y)$ positiv på $]y_0, y_0 + k]$ og negativ på $[y_0 - k, y_0[$, således som antydtes på den første figur i tilfældet $m = 1$. Lad nu $\varepsilon > 0$ være opgivet (se den næste figur). Af de ved $F(\underline{x}, y_0 + \varepsilon)$ og $F(\underline{x}, y_0 - \varepsilon)$ definerede



funktioner er den første positiv og den anden negativ i x_0 . Da de er kontinuerte, er $F(\underline{x}, y_0 + \varepsilon)$ positiv i en omegn af $\underline{x}_0$ og $F(\underline{x}, y_0 - \varepsilon)$ negativ i en omegn af $\underline{x}_0$. Disse omegne er antydet ved de fuldt optrukne streger på figuren. Vi kan da vælge $\delta > 0$,



således at $F(\underline{x}, y_0 + \varepsilon) > 0$ og $F(\underline{x}, y_0 - \varepsilon) < 0$ for $\underline{x} \in K(\underline{x}_0, \delta)$. For $O = K(\underline{x}_0, \delta)$, $I = [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ er alle tre betingelserne fra sætning 13.2.1 opfyldt, og vi har dermed vist eksistensen af en løsningsfunktion f med $y_0 = f(\underline{x}_0)$ og $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ for $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$, samt at $y = f(\underline{x})$ er den eneste løsning i intervallet $[y_0 - k, y_0 + k]$. da ε var et vilkårligt tal i $]0, k]$, har vi samtidig fået vist, at f er kontinuert i $\underline{x}_0$.

13.7. Vi udbygger nu sætning 13.6.1 med følgende tilføjelse:

13.7.1. Sætning. Hvis afbildningen F i sætning 13.6.1 er kontinuert differentiabel i $O \times I$, er løsningsfunktionen f kontinuert differentiabel i $\underline{x}_0$, og dens differential i $\underline{x}_0$ fås ved at løse ligningen

$$(1) \quad D_1 F(\underline{x}_0, y_0) dx_1 + \dots + D_m F(\underline{x}_0, y_0) dx_m + D_y F(\underline{x}_0, y_0) dy$$

med hensyn til dy .

Bevis. Vi antager først $m = 1$. Der eksisterer et rektangel $\{(x, y) \mid |x - x_0| < r \wedge |y - y_0| \leq k\}$, i hvilket $D_y f(x, y) > 0$, og i hvilket vi har den entydigt bestemte løsningskurve $y = f(x)$. For $|h| < r$ og $f(x_0 + h) = f(x_0) + \kappa$ giver middelværdisætningen for funktioner af flere variable (10.28) har vi da

$$0 = F(x_0 + h, y_0 + \kappa) - F(x_0, y_0) = D_x F(x_0 + \Theta(h, \kappa)h, y_0 + \Theta(h, \kappa)\kappa) h + D_y F(x_0 + \Theta(h, \kappa)h, y_0 + \Theta(h, \kappa)\kappa) \kappa,$$

hvilket giver

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = - \frac{D_x F(x_0+\Theta(h,\kappa)h, y_0+\Theta(h,\kappa)\kappa)}{D_y F(x_0+\Theta(h,\kappa)h, y_0+\Theta(h,\kappa)\kappa)}.$$

Her skal vi for κ indsætte $\kappa = f(x_0+h)-f(x_0)$, og højre side bliver da en funktion af h . Da vi allerede ved, at f er kontinuert i x_0 , ser vi, at højre side bliver kontinuert for $h = 0$ med funktionsværdien

$$- \frac{D_x F(x_0, y_0)}{D_y F(x_0, y_0)} = Df(x_0).$$

I det almindelige tilfælde holder vi de variable x_μ fast på en enkelt undtagelse nær, og vi kan da anvende det resultat, vi netop har fundet for $m = 1$, og vi har derfor i dette tilfælde

$$D_\mu f(\underline{x}_0) = - \frac{D_\mu F(\underline{x}_0, y_0)}{D_y F(\underline{x}_0, y_0)}.$$

Resultatet er imidlertid gyldigt i alle punkter af løsningskurven i en vis omegn af $\underline{x}_0$, og vi har derfor almindeligt

$$D_\mu f(\underline{x}) = - \frac{D_\mu F(\underline{x}, f(\underline{x}))}{D_y F(\underline{x}, f(\underline{x}))},$$

og disse udtryk definerer kontinuerte funktioner af $\underline{x}$. Af sætning 10.20.1. følger nu, at f er kontinuert differentiabel i en omegn af $\underline{x}_0$. Det ses derefter, at det totale differential netop bliver det udtryk, der fås ved at løse (1) med hensyn til dy . Af udtrykket for D_μ fremgår i øvrigt, at løsningsfunktionen f bliver kontinuert differentiabel lige så mange gange som F .

13.8. Det følger af sætning 13.7.1, at en afbildning f , som er givet implicit som løsning af en ligning $F(x, y) = 0$, er kontinuert differentiabel, såfremt F er kontinuert differentiabel, og $D_y F$ ikke er nul.

Vi kan i praksis udnytte resultatet på følgende måde: Hvis vi kender et nulpunkt $\underline{x}_0$ for en funktion $F(\underline{x})$, som er kontinuert differentiabel i en omegn af $\underline{x}_0$, kan vi opskrive den differenti-

erede ligning $dF(\underline{x}_0, d\underline{x}) = 0$. Hvis denne differentierede ligning kan løses med hensyn til dx_ν , vil ligningen $F(\underline{x}) = 0$ i en vis omegn af $\underline{x}_0$ kunne løses med hensyn til x_ν , og løsning bliver kontinuert differentiabel med det fundne dx_ν som totalt differential.

13.9. Lad os nu antage, at vi har et helt ligningssystem

$$F_1(\underline{x}) = F_2(\underline{x}) = \dots = F_n(\underline{x}) = 0,$$

hvor $F_1, \dots, F_n$ er kontinuert differentiable i omegnen af et løsningspunkt $\underline{x}_0$. Vi kan da opskrive de differentierede ligninger

$$dF_1(\underline{x}_0, d\underline{x}) = dF_2(\underline{x}_0, d\underline{x}) = \dots = dF_n(\underline{x}_0, d\underline{x}) = 0.$$

Lad os nu antage, at vi kan løse den første ligning med hensyn til x_1 . Vi sætter $\underline{x}^* = (x_2, \dots, x_m)$, og vi får da et udtryk af formen

$$dx_1 = L_2(\underline{x}^*)dx_2 + \dots + L_m(\underline{x}^*)dx_m,$$

og vi ved, at ligningen $F_1(\underline{x}) = 0$ i en omegn af $\underline{x}_0$ kan løses på formen $x_1 = f_1(\underline{x}^*)$ og at $df_1(\underline{x}^*; d\underline{x}^*)$ netop er det fundne udtryk for x_1 .

Vi kan nu eliminere x_1 ved at indsætte $x_1 = f_1(\underline{x}^*)$ i ligningerne

$$F_2(\underline{x}) = \dots = F_n(\underline{x}) = 0.$$

De tilsvarende differentierede ligninger fås ifølge sætningen om differentiation af sammensat funktion ved indsættelse af udtrykket for dx_1 i ligningerne

$$dF_2(\underline{x}, d\underline{x}) = \dots = dF_n(\underline{x}, d\underline{x}) = 0.$$

Det fremgår heraf, at de differentialer man finder ved løsning af det differentierede ligningssystem virkelig modsvarer løsningsfunktioner, som eksisterer og er éntydig bestemt i en vis omegn.

Den her omtalte metode til bestemmelse af løsningsfunktionernes differentialer kaldes implicit differentiation. Den er ofte arbejdsbesparende også når ligningssystemet kan løses eks-

plicit.

13.10. Hvis vi f.eks. ønsker at bestemme de punkter, hvor løsningskurven til ligningen $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ har tangenter parallelle med $y = x$, sætter vi $dx = dy$ i den differentierede ligning

$$(2) \quad 3(x^2 - ay)dx + 3(y^2 - ax)dy = 0,$$

og vi ser da, at de søgte punkter bestemmes af ligningerne

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

$$x^2 + y^2 - a(x+y) = 0.$$

Disse ligninger kan skrives

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y+a) = 0$$

$$(x+y)^2 - a(x+y) - 2xy = 0,$$

som ved elimination af xy giver

$$2(x+y)^3 = 3(x+y+a)(x+y-a)(x+y).$$

Denne ligning spaltes i $x+y = 0$, som giver $xy = 0$, altså $x = y = 0$, samt

$$(x+y)^2 = 3a^2; \quad x+y = a\sqrt{3},$$

som giver $xy = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})a$, og vi har et par symmetriske ligninger, der som løsning har 2 punkter i første kvadrant i overensstemmelse med figuren i 13.4. Løsningen $(0,0)$ må kasseres, idet ligningen (2) bliver identisk opfyldt for $x = y = 0$ og således ikke bestemmer dy udtrykt ved dx eller omvendt.

13.11. I tilslutning til teorien for implicit givne funktioner skal vi kort omtale en noget generaliseret form for differentialligninger, der spiller en ikke helt ringe rolle ved mange anvendelser. De generaliserede differentialligninger er en differentialform i to variable sæt lig med 0, altså

$$(3) \quad L_1(\underline{x})dx_1 + L_2(\underline{x})dx_2 = 0,$$

hvor L_1 og L_2 er kontinuerte afbildninger af en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$. En differentiabel kurve $\alpha: [a,b]$ ind i 0 kaldes

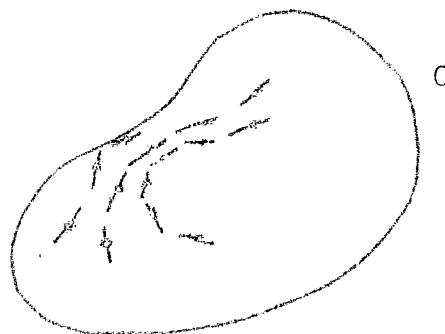
en løsningskurve til differentiaalligning, hvis denne bliver identisk opfyldt ved indsættelse af $\underline{\alpha}$ for $\underline{x}$ og $d\underline{\alpha}$ for $d\underline{x}$, altså hvis

$$L_1(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) D\alpha_1(t) + L_2(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) D\alpha_2(t) = 0.$$

For $(L_1(x_1, x_2), L_2(x_1, x_2)) \neq (0, 0)$ betyder dette, at talsættet $(D\alpha_1(t), D\alpha_2(t))$, der bestemmer løsningskurvens tangentretning, er et af de talsæt, der passer i ligningen.

Geometrisk bestemmer (3) for hvert $\underline{x} \in O$, for hvilket $(L_1(\underline{x}), L_2(\underline{x})) \neq (0, 0)$, en mængde af løsningssæt (dx_1, dx_2) , der fastlægger en ikke orienteret ret linie gennem $\underline{x}$. Vi får således i O et retningsfelt, således som anskueliggjort på figuren.

Hvis vi anbringer et blad papir i et kraftigt magnetfelt, er der i hvert punkt af papirets overside givet en bestemt retning, nemlig retningen af den magnetiske feltstyrkes komponent i papirets plan. Der er således et retningsfelt defineret på papirets overside, undtagen hvor feltstyrken er vinkelret på papirets plan. Vi kan gøre retningsfeltet synligt ved at drysse små jernspåner på papiret. Disse vil da indstille sig i feltstyrkens retning, og denne kan da iagttages. Det viser sig imidlertid, at man ser jernspånerne som et kurvesystem, systemet af løsningskurver svarende til retningsfeltet.



Hvis man i et tæt net af punkter i planen indtegner retningsfeltet, indtræffer en lignende effekt. Løsningskurverne til differentiaalligningen bliver synlige. Vi har således en nærliggende metode til grafisk løsning af differentiaalligningen, men den kræver megen tid og giver kun ringe nøjagtighed.

13.12. Hvis differentialformen på venstre side i differentialligningen specielt er et totalt differential af en afbildning $U:0 \text{ ind i } \mathbb{R}$, altså hvis ligningen har formen

$$D_1 U(\underline{x}) dx_1 + D_2 U(\underline{x}) dx_2 = 0,$$

vil løsningskurverne netop være de kurver, der er implicit givet ved

$$U(\underline{x}) = c,$$

hvor c er en vilkårlig konstant. Vi har nemlig for en differentiable afbildning $\alpha:[a,b] \text{ ind i } 0$, at

$$D(U, \alpha)(t) = D_1 U(\alpha(t)) D\alpha_1(t) + D_2 U(\alpha(t)) D\alpha_2(t),$$

hvilket viser, at α er parameterfremstilling for en løsningskurve, hvis og kun hvis $U \circ \alpha$ er konstant.

Opfattet på denne måde er der god mening i at sige, at differentialligningen

$$D_1 U(\underline{x}) dx_1 + D_2 U(\underline{x}) dx_2 = 0$$

har den fuldstændige løsning

$$U(\underline{x}) = c.$$

13.13. Vi har tidligere set, at en differentialform i 2 variable sædvanligvis ikke er et totalt differential, og den netop omtalte løsningsmetode hjælper derfor umiddelbart kun i ganske specielle tilfælde.

Selv om differentialformen, der optræder på venstre side i differentialligningen

$$L_1(\underline{x}) dx_1 + L_2(\underline{x}) dx_2 = 0$$

ikke er et totalt differential, er det dog undertiden muligt at bringe metoden i anvendelse. Vi kan nemlig multiplicere på begge sider af lighedstegnet med en passende faktor $\varphi(\underline{x})$, og forsøge at vælge den, således at den nye differentialform

$$\varphi(\underline{x}) L_1(\underline{x}) dx_1 + \varphi(\underline{x}) L_2(\underline{x}) dx_2$$

bliver et totalt differential. En faktor $\varphi(\underline{x})$, der opfylder denne betingelse, kaldes en integrerende faktor til differentialligningen.

Desværre findes der ingen praktisk anvendelig metode til bestemmelse af en integrerende faktor. Vi ved ganske vist, at φ for kontinuert differentiable L_1 og L_2 skal tilfredsstille betingelsen

$$D_2(\varphi(\underline{x})L_1(\underline{x})) = D_1(\varphi(\underline{x})L_2(\underline{x})),$$

men det fører til en differentialligning, der er værre end den oprindelige.

Den videregående teori viser, at der altid, i hvert fald lokalt, eksisterer integrerende faktorer, endda altid mange og meget forskellige.

13.14. Det er nyttigt at kende integrerende faktorer til visse simple differentialudtryk. Vi har således flere integrerende faktorer til

$$-ydx + xdy,$$

idet

$$d\frac{y}{x} = \frac{-ydx + xdy}{x^2} \quad \text{for } x \neq 0,$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{for } y \neq 0$$

$$d \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{for } x \neq 0$$

$$d \operatorname{Arctg} \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \quad \text{for } y \neq 0$$

$$d \log \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{-ydx + xdy}{xy} \quad \text{for } x \neq 0, y \neq 0.$$

Det fremgår af disse eksempler, at udregning af $d\varphi(\frac{y}{x})$, hvor φ er en vilkårlig differentiable funktion, yder en integrerende faktor til $-ydx + xdy$.

Det er også nyttigt at lægge mærke til, at
 $d(e^x \cos y) = e^x (\cos y dx - \sin y dy)$ for alle (x, y)

$$d(x + \log \cos y) = \frac{1}{\cos y} (\cos y dx - \sin y dy) \text{ for } \cos y \neq 0.$$

Enhver kan øge sit forråd af integrerende faktorer til simple differentialformer ved at studere differentialerne af de elementære funktioner.

Eksempel: Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(x-y)dx + (x+y)dy = 0.$$

Vi skriver ligningen

$$xdx + ydy - ydx + xdy = 0,$$

og vi bemærker, at $xdx + ydy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$, og nu er $\frac{1}{x^2 + y^2}$ en integrerende faktor til $-ydx + xdy$. Vi multiplicerer med $\frac{1}{x^2 + y^2}$ og får ligningen

$$\frac{1}{2} \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

eller

$$d(\log \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}) = 0 \quad \text{for } x \neq 0,$$

så vi for $x = 0$ får den fuldstændige løsning

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = c.$$

13.15. Vi bemærker os i denne forbindelse differentiaalligningen med adskilte variable

$$L_1(x_1)dx_1 + L_2(x_2)dx_2 = 0,$$

som har den fuldstændige løsning

$$\int_{a_1}^{x_1} L_1(t)dt + \int_{a_2}^{x_2} L_2(t)dt = c.$$

Husk altid at se efter, om differentiaalligningen giver en ligning med adskilte variable efter multiplikation med en passende faktor. F.eks.

$$e^x \cos y \, dx + (e^x + 1) \sin y \, dy = 0,$$

som skrives

$$\frac{e^x dx}{e^x + 1} + \operatorname{tg} y \, dy = 0,$$

og ved integration fås

$$\log(e^x + 1) - \log|\cos y| = c \quad y \neq 0.$$

Dette er ensbetydende med

$$e^x = c_1 \cos y - 1.$$

13.16. En differentialligning af formen

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

kan overføres i en ligning med adskilte variable ved at sætte $y = zx$, hvor $z = \varphi(x)$ er en ny ubekendt funktion.

Vi får nemlig

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

eller

$$x dz + (z - f(z)) dx = 0.$$

Herunder hører også differentialligninger

$$P_1(x_1, x_2) dx_1 + P_2(x_1, x_2) dx_2 = 0,$$

hvor P_1 og P_2 er homogene af samme grad, idet denne ligning netop kan skrives på formen (4). Det skal dog tilføjes, at også overgang til polære koordinater ved substitutionen

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

vil overføre ligningen i en ligning, hvis variable kan adskilles.

Lette opgaver.

1. Vis, at ligningen

$$\cosh x + (1+x^2)\sinh y + y^3 = 0$$

har en og kun een løsning $y = f(x)$, hvor $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning.

2. Vis, at ligningen

$$\cos(x+y) + e^{x^2y} + y = 0$$

har en og kun een løsning $y = f(x)$, hvor $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er en kontinuert afbildning.

3. Vis, at ligningen

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0, \quad a > 0$$

for $x \in [-a, a]$ sammen med bibetingelsen $y \geq 0$ fastlægger y som en kontinuert funktion af x .

4. Vis, at ligningen

$$(x_1^2+x_2^2+1)y^3 - \frac{\sin^5 y}{1+(x_1^2-x_2^2)^2} = 0$$

for alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ fastlægger y som en kontinuert funktion af $\underline{x}$.

5. Vis, at punktmængden i
- $\mathbb{R}^2$

$$\{\underline{x} \mid x_1^2+x_2^2 = x_1^4+x_2^4\}$$

har $\underline{0}$ som isoleret punkt.

6. Find differentialkvotienterne af de ved ligningerne i opgave nr. 1 og opgave nr. 2 indførte implicit givne funktioner udtrykte ved
- x
- og
- y
- .

7. Vis, at ligningen

$$y \cosh x + x + \sinh y = 0$$

i en omegn af $(0,0)$ kan løses på formen $y = f(x)$. Find de 3 første differentialkvotienter af f .

8. Ligningen

$$\|\underline{x}\|^2 - \|\underline{x}\|^4 + y^2 - y^4 = 0$$

fremstiller i omegnen af $(0;1)$ den variable y som funktion af $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Udregn ved implicit differentiation de 4 første afkortede differentialer af denne funktion.

9. Af figuren til 13.4 synes det at fremgå anskueligt, at den ene gren af Descartes' blad i omegnen af 0 kan fremstilles ved en ligning af formen $y = f(x)$. Vis (f.eks. ved hjælp af parameterfremstillingen), at dette virkelig er tilfældet, og at f er vilkårlig ofte differentiable. Udregn $D^2f(0)$.

10. Vis, at ligningssystemet

$$\sin y_1 - \cos y_2 - \tanh x = 0$$

$$\cos y_1 + \sin y_2 - \sqrt{2} = 0$$

i omegnen af $(x; \underline{y}) = (0; \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ fremstiller y_1 og y_2 implicit som funktioner $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$. Udregn $Df_1(0)$ og $Df_2(0)$.

11. Vi betragter en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{R}^2$ og en kontinuert differentiable afbildning $\underline{f} = (f_1, f_2) : 0 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vi betragter et punkt $\underline{a} \in 0$ med billedpunkt $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{b}$, og vi antager, at

$$D_1 f_1(\underline{a}) D_2 f_2(\underline{a}) - D_2 f_1(\underline{a}) D_1 f_2(\underline{a}) \neq 0.$$

Vis, at der eksisterer en omegn af $\underline{a}$, som ved afbildningen $\underline{f}$ afbildes bijektivt på en omegn af $\underline{b}$.

12. Vi betragter en åben mængde $0 \subseteq \mathbb{C}$ og en kontinuert differentiable afbildning $f : 0 \rightarrow \mathbb{C}$. Vi betragter et punkt $a \in 0$, hvor $Df(a) \neq 0$. Vis, at der eksisterer en omegn af a , som ved afbildningen f afbildes på en omegn af $f(a)$.

13. En afbildning $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ er defineret ved $f(z) = e^z$. Vis, at ethvert punkt $z \in \mathbb{C}$ har en omegn (endda af ikke ringe ud-

strækning), som afbildes injektivt ved f . Vis tillige, at $\bar{C}$ ikke afbildes injektivt ved f .

14. En afbildning $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\underline{f}(\underline{x}) = (\|\underline{x}\|^2, \|\underline{x}\|^4).$$

Find billedmængden, og beskriv originalmængden til et vilkårligt punkt af billedmængden. Angiv de punkter i $\mathbb{R}^2$, som ikke har nogen omegn, der afbildes injektivt ved $\underline{f}$. Sammenhold resultatet med opgave nr. 11.

15. En tre gange differentiabel bijektiv afbildning $f : I_1$ på I_2 tilfredsstiller betingelsen

$$\forall x \in I \quad (Df(x) \neq 0).$$

Find de tre første differentialkvotienter af den omvendte afbildning $g = f^{-1} : I_2$ på I_1 udtrykt ved Df , D^2f og D^3f .

16. Find den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne (i hele $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} (x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_2^3)dx_1 + (x_1^3 + 3x_1x_2^2 + x_2^3)dx_2 &= 0 \\ \sin x_1 \cos x_2 dx_1 + \cos x_1 \sin x_2 dx_2 &= 0 \end{aligned}$$

17. Find den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne (i hele $\mathbb{R}^2$). Angiv løsningskurvernes art.

$$\begin{aligned} x_1 dx_1 + x_2 dx_2 &= 0 & x_1 dx_1 - x_2 dx_2 &= 0 \\ x_2 dx_1 + x_1 dx_2 &= 0 & x_2 dx_1 - x_1 dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

18. Find den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne (i hele $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} (1+x_2)dx_1 - x_1 dx_2 &= 0 \\ 2x_2 dx_1 - x_1 dx_2 &= 0 \\ (x_1^3 + x_2)dx_1 - x_1 dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

19. Find den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne (i hele $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned}
 (1+x_2)x_1 dx_1 + (1+x_1x_2)dx_2 &= 0 \\
 x_1 \cos x_2 dx_1 + (1+x_1^2)\sin x_2 dx_2 &= 0 \\
 \sin x_2 dx_1 + \sin x_1 dx_2 &= 0
 \end{aligned}$$

20. Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Vanskeligere opgaver.

21. Vis, at ligningen

$$4x - 3y + \sin(x+y) = 0$$

for enhver værdi af $x \in \mathbb{R}$ har én og kun én løsning $y = f(x)$, hvor $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er differentiabel. Vis, at $Df(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, \frac{5}{2}]$, og bevis derefter, at $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er bijektiv.

22. Vis, at ligningerne

$$x^3 - 4y^3z^2 + 7z - 15 = 0$$

$$x^2y z^4 - 2z^3 + 16 = 0$$

i en omegn af $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ éntydigt kan løses på formen $y = f(x)$, $z = g(x)$. Udregn $Df(1)$, $D^2f(1)$, $Dg(1)$, $D^2g(1)$.

23. Lad $O \subseteq \mathbb{R}^2$ være en åben mængde og $f : O \text{ ind i } \mathbb{R}$ en 2 gange differentiabel afbildning. Ved transformationen $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ går $f(\underline{x})$ over i $g(r, \theta)$. Udtryk $D_1^2 f + D_2^2 f$ ved de partielle differentialkvotienter af g .

24. En ligning $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, hvor F er kontinuert differentiabel, med partielle differentialkvotienter, som i et punkt $\underline{x}^*$ alle antages $= 0$. Ligningen kan da i en omegn af $\underline{x}^*$ løses på enhver af de tre former

$$x_1 = f_1(x_2, x_3), \quad x_2 = f_2(x_3, x_1), \quad x_3 = f_3(x_1, x_2).$$

Bevis relationerne

$$D_1 f_1(x_2^*, x_3^*) D_1 f_2(x_3^*, x_1^*) D_1 f_3(x_1^*, x_2^*) = -1$$

$$D_2 f_1(x_2^*, x_3^*) D_2 f_2(x_3^*, x_1^*) D_2 f_3(x_1^*, x_2^*) = -1$$

25. Lad O være en åben mængde i $\mathbb{R}^2$ og $F : O \rightarrow \mathbb{R}^2$ en differentiable afbildning, givet ved ligningerne

$$y_1 = F_1(x_1, x_2), \quad y_2 = F_2(x_1, x_2).$$

Angiv tilstrækkelige betingelser udtrykt ved de partielle differentialkvotienter af F_1 og F_2 i et punkt $\underline{x}^*$ for, at ligningerne i en omegn af $\underline{x}^*$ éntydigt kan løses på formen

$$x_2 = f_1(x_1, y_1), \quad y_2 = f_2(x_1, y_1).$$

26. Løs differentiaalligningerne

$$(3x^2 + y^2)y \, dx - 2x^3 dy = 0$$

$$2x^3 dx + (y^3 + 3x^2 y) dy = 0.$$

Svare opgaver.

27. Vi betragter en åben mængde $O \subseteq \mathbb{C}$ samt en differentiable afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{C}$. Vi anvender betegnelserne $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$, og f tænkes skrevet på formen

$$y_1 = F_1(x_1, x_2), \quad y_2 = F_2(x_1, x_2).$$

Vi betragter et punkt $x^* \in O$, og vi antager, at $Df(x^*)$ ikke er reel. Vis, at ligningssystemet i en omegn af $(x^*, f(x^*))$ kan løses på formen

$$x_2 = g_1(x_1, y_1), \quad y_2 = g_2(x_1, y_1),$$

og vis derefter, at differentialformen

$$-g_2(x_1, y_1) dx_1 + g_1(x_1, y_1) dy_1$$

er det totale differential af en 2 gange kontinuert differentiable afbildning $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, hvor U er en omegn af $(x_1^*, f_1(x_1^*, x_2^*))$, og vis, at G tilfredsstiller den partielle differentiaalligning

$$(1) \quad D_1^2 G D_2^2 G - (D_1 D_2 G)^2 = 1.$$

Vis, at enten G eller $-G$ er konveks i U , når U vælges som en konveks omegn.

Vis omvendt, at man ud fra en afbildning $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, hvor $U \subseteq \mathbb{R}^2$ er åben, og G er 2 gange differentiabel og tilfredsstillende (1), kan konstruere en differentiabel afbildning $f : O \rightarrow \mathbb{C}$, hvor $O \subseteq \mathbb{C}$, og hvor sammenhængen mellem f og G netop er som ovenfor beskrevet.

28. (I det væsentlige kun klassificeret som svær opgave, fordi visse hjælpemidler fra kursus i algebra og geometri ikke foreligger på indeværende tidspunkter). For $a > 0$ og $k > 0$ betegner vi med $C(a;k)$ mængden af punkter i $\mathbb{C}$, hvis afstande fra punkterne a og $-a$ har produktet k^2 . Vis, at $C(a;k)$ netop er mængden af punkter $x = x_1 + i x_2$, for hvilke (x_1, x_2) tilfredsstillende en vis algebraisk ligning af fjerde grad. Vis, at $C(a;k)$ i omegnen af ethvert punkt bortset fra 0 , a og $-a$ er en differentiabel bue.

Vis, at der for hver værdi af $a > 0$ eksisterer et kurvesystem $\{C^*(a;k) \mid k \in \mathbb{R}\}$, hvis kurver er differentiable undtagen i 0 og skærer alle kurverne i systemet $\{C(a;k) \mid k \in \mathbb{R}\}$ under ret vinkel. Vis, at kurverne $C^*(a;k)$ på en enkelt undtagelse nær er ligesidede hyperbler.

Ligelig konvergens.

14.1. Vi betragter først en vilkårlig mængde M og en følge (f_n) af afbildninger $f_n: M \text{ ind i } T$. Følgen (f_n) kaldes konvergent i et element $x \in M$, hvis følgen $(f_n(x))$ af billedpunkter er konvergent. Hvis dette indtræffer for ethvert $x \in M$ siger vi, at følgen (f_n) er konvergent i ethvert $x \in M$, og vi har da for hvert $x \in M$ et grænsepunkt $f(x)$ for følgen $(f_n(x))$. Derved defineres en grænseafbildning $f: M \text{ ind i } T$, og vi skriver

$$(f_n) \rightarrow f \quad \text{i ethvert element af } M.$$

Vi siger også, at (f_n) er punktvis konvergent på M .

Betingelsen for punktvis konvergens mod f er altså

$$(1) \quad \forall x \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N (f_n(x) \in K(f(x), \varepsilon)),$$

hvor vi med $K(a, r) \subseteq T$ betegner kugleomegnen af a med radius r .

Ligesom tidligere i forbindelse med kontinuitet indfører vi nu også ligelighed i forbindelse med konvergens. Ligelighed skal (nøje svarende til ligelig kontinuitet) betyde, at det til $\varepsilon > 0$ svarende N kan vælges uafhængigt af x , således at det éngang valgte N er brugbart samtidigt for alle $x \in M$. Dette betyder for relationen (1), at kvantoren $\forall x \in M$ flyttes om på den anden side af $\exists N \in \mathbb{N}$, så vi får definitionen

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in M (\text{dist}(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon).$$

Vi har 2 steder ændret de skarpe ulighedstegn, der var benyttet i (1), men det ses umiddelbart at være uden betydning.

14.1.1. Definition. Lad M være en vilkårlig mængde og T et metrisk rum med afstandsfunktionen dist . Lad (f_n) være en følge af afbildninger $f_n: M \text{ ind i } T$. Følgen (f_n) kaldes ligelig konvergent (konvergerer ligeligt) på M mod grænseafbildningen $f: M \text{ ind i } T$, hvis og kun hvis betingelsen (2) er opfyldt.

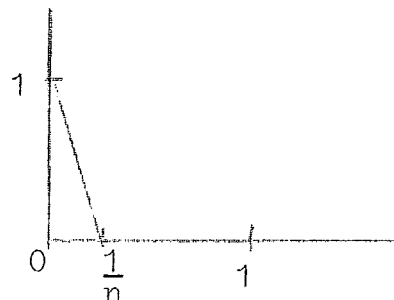
Det er klart, at ligelig konvergens mod f på M medfører

konvergens mod f i et hvert punkt af M .

14.2. For at opnå lidt mere fortrolighed skal vi belyse ligelig konvergens ved nogle eksempler, og sagen illustreres selvfølgelig bedst ved eksempler der viser punktvis, men ikke ligelig konvergens. I alle eksemplerne vælger vi $M = [0,1]$ og $T = \mathbb{R}$.

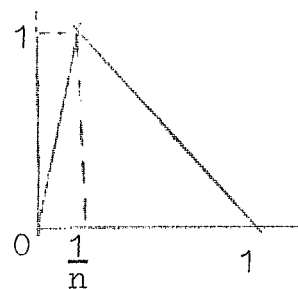
Vi vælger først

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{for } 0 \leq x \leq n^{-1} \\ 0 & \text{for } n^{-1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Det ses, at $(f_n(x))$ konvergerer mod 0 for $x \in]0,1]$, medens $(f_n(0)) \rightarrow 1$. Det ses, at uligheden $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ ikke for noget n er opfyldt for alle $x \in]0,1]$, og (f_n) er derfor ikke ligelig konvergent på $]0,1]$ og derfor selvfølgelig heller ikke på $[0,1]$. For $k > 0$ er (f_n) derimod ligelig konvergent på $[k,1]$, idet vi endda har $f_n(x) = 0$ for $x \in [k,1]$ og $n \geq \frac{1}{k}$.

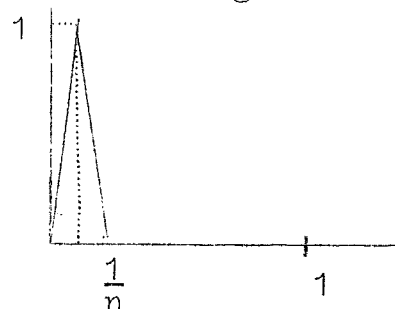
Hvis vi vælger f_n med det på figuren viste grafiske billede, ser vi, at $(f_n(x)) \rightarrow 1-x$ for $x \in]0,1]$, og at $(f_n(0)) \rightarrow 0$. Det ses igen, at der for hvert n findes et x , i hvilket $f_n(x)$ afviger mere end $\frac{1}{2}$ fra grænsefunktionen. Ligeledes gælder det også i dette tilfælde for ethvert $k > 0$, at (f_n) er ligelig konvergent på $[k,1]$.



Hvis dernæst vælger f_n med det på den næste figur viste grafiske billede, ser vi, at

$(f_n(x)) \rightarrow 0$ for ethvert $x \in [0,1]$, men at vi dog har $f_n(2n)^{-1} = 1$ for alle n .

Vi har derfor ikke ligelig konvergens på



$]0,1]$, men for ethvert $k > 0$ har vi ligelig konvergens på $[k,1]$.

Vi kunne variere det sidste eksempel, ved at lade $f_n(x)$ vokse lineært helt op til værdien n i punktet $x = \frac{1}{2n}$, og derefter aftage til 0 i punktet $\frac{1}{n}$. Det ville stadig være rigtigt, at $(f_n(x) \rightarrow 0$ for alle $x \in [0,1]$, og for $k > 0$ er (f_n) ligelig konvergent på $[k,1]$, men ikke på $]0,1]$. Vi bemærker, at vi i dette tilfælde har

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Vi ser således, at en følge af positive funktioner kan konvergere punktvis mod nul på et interval, uden at dens integral over intervallet går mod nul.

14.3. Vi betragter igen en vilkårlig mængde M , et metrisk rum T samt mængden $\hat{F}(M;T)$ af afbildninger $f:M$ ind i T . For $f_1 \in \hat{F}(M;T)$; $f_2 \in \hat{F}(M;T)$; $f_3 \in \hat{F}(M;T)$ sætter vi

$$\text{dist}_u(f_1, f_2) = \sup \{ \text{dist}(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in M \}.$$

Her er $\text{dist}_u(f_1, f_2)$ enten et positivt tal eller 0 eller $+\infty$.

I øvrigt får vi for vilkårlige $f_1, f_2, f_3 \in \hat{F}(M;T)$, at

$$1) \text{dist}_u(f_1, f_1) = 0$$

$$2) \text{dist}_u(f_1, f_2) > 0, \text{ hvis } f_1 \neq f_2$$

$$3) \text{dist}_u(f_2, f_1) = \text{dist}_u(f_1, f_2)$$

$$4) \text{dist}_u(f_1, f_3) \leq \text{dist}_u(f_1, f_2) + \text{dist}_u(f_2, f_3).$$

Betingelserne 1), 2) og 3) er helt trivielle. For at vise 3) sætter vi for $p, q = 1, 2, 3$

$$\varphi_{p,q}(x) = \text{dist}(f_p(x), f_q(x)),$$

og vi har da

$$\text{dist}_u(f_p, f_q) = \sup_M \varphi_{p,q}(M) = \sup_M \varphi_{p,q}.$$

Da T er et metrisk rum, har vi for ethvert $x \in M$

$$\varphi_{13}(x) \leq \varphi_{12}(x) + \varphi_{23}(x),$$

og resultaterne i MA 4.8 giver nu umiddelbart

$$\text{dist}_u(f_1, f_3) = \sup_M \varphi_{13} \leq \sup_M (\varphi_{12} + \varphi_{23}) \leq$$

$$\sup_M \varphi_{12} + \sup_M \varphi_{23} = \text{dist}_u(f_1, f_2) + \text{dist}_u(f_2, f_3).$$

Vi vil benytte betegnelsen $\hat{B}(M, T)$ for mængden $\hat{F}(M, T)$ udstyret med "afstanden" dist_u . Vi understreger, at $\hat{B}(M, T)$ ikke er et metrisk rum, idet det indeholder par af punkter med indbyrdes afstand ∞ . Vi kan imidlertid alligevel benytte den sædvanlige definition for kugleomegn, og $\hat{B}(M, T)$ er derfor i hvert fald et topologisk rum.

En punktfølge (f_n) i $\hat{B}(M; T)$ er således en følge af afbildningen $f_n: M \rightarrow T$. At følgen (f_n) i rummet $\hat{B}(M, T)$ konvergerer mod grænsepunktet f betyder efter definitionen af konvergent punktfølge:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (f_n \in K(f, \varepsilon)),$$

eller, lidt mere udførligt og med et $\leq$ i stedet for $<$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (\text{dist}_u(f, f_n) \leq \varepsilon),$$

og her er betingelsen

$$\text{dist}_u(f, f_n) \leq \varepsilon$$

ifølge definitionen af dist_u ensbetydende med

$$\forall x \in M (\text{dist}(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon),$$

og når dette indføres af konvergensbetingelsen afsløres det, at konvergens i det topologiske rum $\hat{F}(M, T)$ er ensbetydende med ligelig konvergens.

14.4. Begrebet fundamentalfølge kan uden videre anvendes i $\hat{B}(M, T)$ med den sædvanlige definition. Følgen (f_n) er altså fundamentalfølge, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N (\text{dist}_u(f_m, f_n) \leq \varepsilon)$$

eller oversat til udsagn om funktionsværdierne

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N \forall x \in M (\text{dist}(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon).$$

14.4.1. Hvis T er et fuldstændigt metrisk rum, er enhver fundamentalfølge i $\hat{B}(M, T)$ konvergent.

Bevis. Hvis (f_n) er fundamentalfølge, gælder (2). Heraf følger, idet vi betragter en fast værdi af x , at $(f_n(x))$ er en fundamentalfølge i T og som følge deraf kontinuert i T mod en grænseværdi $f(x)$, og denne definerer os en grænseafbildning $f: M \text{ ind i } T$. Vi betragter nu et fast $\varepsilon > 0$, et tilsvarende N (ifølge (2)), og vi har da for ethvert $x \in M$, at

$$(3) \quad \forall m, n \geq N(\text{dist}(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon).$$

For $m \rightarrow \infty$ gælder nu på grund af afstandsfunktionens kontinuitet i rummet T , at

$$\text{dist}(f_m(x), f_n(x)) \rightarrow \text{dist}(f(x), f_n(x)),$$

og vi får derfor

$$\forall n \geq N(\text{dist}(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon).$$

Dermed har vi netop vist, at følgen (f_n) er ligelig konvergent, og beviset er dermed fuldført.

14.5. Hvis S og T er metriske rum har rummet $\hat{B}(S, T)$ af afbildninger af S ind i T et delrum $\hat{U}(S, T)$, som omfatter de kontinuerte afbildninger af S ind i T .

14.5.1. Sætning. Delrummet $\hat{U}(S, T)$ er en afsluttet punktmængde i $\hat{B}(S, T)$.

14.5.2. Sætning. For $a \in S$ er mængden $\hat{U}(a)$ af afbildninger $f: S \text{ ind i } T$, som er kontinuerte i a , en afsluttet delmængde af $\hat{B}(S, T)$.

Bevis. Vi har åbenbart

$$\hat{U}(S, T) = \bigcap_{a \in S} \hat{U}(a),$$

og sætning 14.5.1 følger derfor af sætning 14.5.2. Vi skal altså blot vise, at $\hat{U}(a)$ er en åben mængde. Vi betragter et vilkårligt element $f \in \hat{U}(a)$, og $f: S \text{ ind i } T$ er altså en afbild-

ning, som er diskontinuert i a . Deraf følger, at der eksisterer et tal $\varepsilon > 0$, således at

$$(4) \quad \forall r > 0 \exists x \in K(a, r) \text{ (dist}(f(a), f(x)) \geq \varepsilon).$$

Beviset vil være fuldført, hvis det lykkes os at vise, at $K_u(f, \frac{\varepsilon}{3}) \subseteq \hat{C}(a)$, idet K_u betegner en kugleomegn i $\hat{B}(S, T)$. Vi betragter et vilkårligt element $g \in K_u(f, \frac{\varepsilon}{3})$, altså en afbildning $g : S \rightarrow T$, som tilfredsstiller

$$(5) \quad \forall x \in S \text{ (dist}(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}).$$

For $r > 0$ kan vi vælge $x \in K(a, r)$ ifølge (4), således at

$$\text{dist}(f(a), f(x)) \geq \varepsilon,$$

og ifølge trekantsuligheden har vi da

$$\begin{aligned} \text{dist}(f(a), g(a)) + \text{dist}(g(a), g(x)) + \text{dist}(g(x), f(x)) &\geq \\ \text{dist}(f(a), f(x)) &\geq \varepsilon, \end{aligned}$$

og da første og sidste led på venstre side i uligheden ifølge (5) begge er $\leq \frac{\varepsilon}{3}$, følger heraf, at

$$\text{dist}(g(a), g(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3},$$

og vi har således vist, at

$$\forall r > 0 \exists x \in K(a, r) \text{ (dist}(g(a), g(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3}).$$

Altså er g diskontinuert i a , hvilket medfører, at $g \notin \hat{C}(a)$, og dermed er beviset fuldført.

14.5.3. Sætning. En ligelig konvergent følge (f_n) af kontinuerte afbildninger $f_n : S \rightarrow T$ konvergerer mod en kontinuert grænsefunktion.

Bevis. Punktfølgen (f_n) tilhører $\hat{U}(S, T)$ og da denne mængde er en afsluttet delmængde af $\hat{B}(S, T)$ vil grænsepunktet for (f_n) også tilhøre $\hat{U}(S, T)$.

14.5.4. Sætning. Hvis T er et fuldstændigt rum, er enhver fundamentalfølge i $\hat{U}(S, T)$ konvergent mod et grænsepunkt i $\hat{U}(S, T)$.

Bevis. Sætningen følger umiddelbart af sætningerne 14.4.1 og 14.5.3.

De 2 sidste eksempler i 14.2. viser, at den ligelige konvergens i 14.5.3 ikke er en nødvendig betingelse for grænsefunktionens kontinuitet.

14.6. Som et vigtigt eksempel betragter vi et rektangel $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ samt en kontinuert afbildning $f: R$ ind i T , hvor T er et metrisk rum. Vi indfører betegnelsen f_x for den ved f_x for den ved $f_x(y) = f(x, y)$ definerede afbildning $f_x: [a_2, b_2]$ ind i T . Sætter vi dernæst $\Phi(x) = f_x$, er Φ en afbildning $\Phi: [a_1, b_1]$ ind i $\hat{U}([a_2, b_2], T)$.

Da f er kontinuert og R kompakt, er f ligelig kontinuert, og vi har derfor (lidt mere specielt) for et fast $x_0 \in [a_1, b_1]$, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\forall y \in [a_2, b_2] \\ (\text{dist}(f(x_0, y), f(x, y)) \leq \varepsilon),$$

og dette kan også skrives

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[(\text{dist}_u(\Phi(x_0), \Phi(x)) \leq \varepsilon).$$

Heraf fremgår, at Φ er en kontinuert afbildning. Vi siger derfor også at funktionen f_x konvergerer ligeligt mod f_{x_0} for $x \rightarrow x_0$. Ligelig konvergens kan altså også vises ved kontinuert grænseovergang. Det er imidlertid ikke nødvendigt at gennemføre en detaljeret diskussion af denne form for ligelig konvergens. Den ligelige konvergens benyttes nemlig til udledning af egenskaber ved grænsefunktioner, og vi kan jo altid udtage en passende følge og derefter påberåbe os sætningerne om følger.

14.7. Vi vil nu specielt diskutere det specielle tilfælde, hvor $T = \mathbb{R}$. Vi har da for $f_1, f_2 \in \hat{B}(S, \mathbb{R})$ mulighed for at danne $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ for konstante α_1 og α_2 . Derfor er $\hat{B}(S, \mathbb{R})$ et lineært vektorrum. Vi indfører normen

$$\|f\|_u = \text{dist}_u(0, f) = \sup |f(S)|,$$

og denne har da egenskaberne

$$\|\alpha f\|_u = |\alpha| \|f\|_u, \quad \|f_1 + f_2\|_u \leq \|f_1\|_u + \|f_2\|_u.$$

Hvis vi med $\hat{B}_1(S, \mathbb{R})$ betegner mængden af begrænsede afbildninger $f : S \text{ ind i } \mathbb{R}$, bliver for $f \in \hat{B}_1(S, \mathbb{R})$ normen $\|f\|_u$ altid endelig, og rummet $\hat{B}_1(S, \mathbb{R})$ er derfor et normeret vektorrum. Da $\mathbb{R}$ er fuldstændigt, er $\hat{B}_1(S, \mathbb{R})$ også fuldstændigt. De fuldstændige, normerede, lineære vektorrum kaldes Banach-rum efter den polske matematiker S. Banach. De har været genstand for meget indgående studier i de sidste 20-30 år. Rummene $\mathbb{R}^m$ er eksempler på Banach-rum, men nu har vi altså også mødt rummet $\hat{B}_1(S, \mathbb{R})$ og dets delrum $\hat{U}_1(S, \mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner. Hvis S er kompakt, er $\hat{U}_1(S, \mathbb{R}) = \hat{U}(S, \mathbb{R})$.

Specielt ser vi, at lineære operationer med ligeligt konvergente følger igen giver ligeligt konvergente følger. Mere almindeligt har vi sætningen.

14.7.1. Sætning. Hvis (f_n) er en ligelig konvergent følge af afbildningen $f_n : S \text{ ind i } \mathbb{R}$ mod grænseafbildning f , og $g : S \text{ ind i } \mathbb{R}$ er en begrænset afbildning, da er (gf_n) ligelig konvergent mod grænseafbildningen gf .

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan bestemme $N \in \mathbb{N}$, således at vi for ethvert $n \geq N$ og ethvert $x \in S$ har

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\sup |f(x)|}.$$

Denne ulighed medfører

$$|g(x)f(x) - g(x)f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

14.7.2. Sætning. Hvis (f_n) og (g_n) er ligelig konvergente afbildninger af $S \text{ ind i } \mathbb{R}$, og grænseafbildningerne f og g er begrænsede, da er $(f_n g_n)$ ligelig konvergent mod grænseafbildningen fg .

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan vælge $N \in \mathbb{N}$, således at vi for ethvert $n \geq N$ og ethvert $x \in S$ har

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \sup |g(x)|)}, \quad |g(x) - g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \sup |f(x)|)}.$$

Vi får da (det ældgamle trick)

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| &\leq |f(x) - f_n(x)| |g(x)| + |f_n(x)| |g(x) - g_n(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon \sup |g(x)|}{2(1 + \sup |g(x)|)} + \frac{\varepsilon \sup |f_n(x)|}{2(\varepsilon + \sup |f(x)|)} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

14.8. Af en følge (f_n) af afbildninger $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi konstruere den uendelige række $\sum f_n$ med den tilsvarende række af funktionsværdier $\sum f_n(x)$. Vi har de tilsvarende afsnitsfølger

$$s_n = \sum_{k=1}^n f_k, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Rækken $\sum f_n$ kaldes ligelig konvergent, hvis følgen (s_n) er ligelig konvergent, og grænseafbildningen for (s_n) kaldes som sædvanlig rækkens sum. Vi indfører også udsnittet

$$s_{n,p} = \sum_{k=n+1}^p f_k,$$

og sætning 14.4.1 giver os den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for konvergens

$$(6) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall p > 0 \forall x \in S (|s_{n,p}(x)| \leq \varepsilon).$$

Vi skal dog angive nogle bekvemmere kriterier for ligelig konvergens. Vi skal først bemærke, at de foregående resultater gælder uændret, hvis vi skriver $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$. Det er iøvrigt klart, at en kompleks funktionsfølge eller -række er ligelig konvergent, hvis og kun hvis dens realdel og imaginærdel begge er ligelig konvergente.

14.9. Vi betragter en følge (f_n) af afbildninger $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$, samt en følge (a_n) af positive tal. Hvis $|f_n(x)| \leq a_n$ for

alle $n \in \mathbb{N}$ og $x \in S$, kaldes $\sum a_n$ en majorantrække for $\sum f_n$. Vi har nu sætningen.

14.9.1. Sætning. Hvis rækken $\sum f_n$ har en konvergent majorantrække, er den ligelig konvergent i S og for ethvert $x \in S$ er $\sum f_n(x)$ absolut konvergent.

Bevis. Den sidste påstand følger umiddelbart af sammenligningskriteriet. Den første påstand følger af det almindelige konvergensprincip og betingelsen (6), idet vi her får for ethvert $x \in S$

$$|s_{n,p}(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

14.9.2. Sætning. En potensrække $\sum a_n z^n$ med konvergensradius r er for $k \in]0, r[$ ligelig konvergent i den afsluttede cirkelskive $\{z \mid |z| \leq k\}$.

Bevis. Da k ligger indenfor konvergenscirklen, er $\sum a_n k^n$ absolut konvergent, altså $\sum |a_n| k^n$ konvergent, og denne række er for $|z| \leq k$ majorantrække for $\sum a_n z^n$. Sætningen følger derefter af sætning 14.9.1.

Hermed har vi fundet et nyt bevis for, at summen af en potensrække er kontinuert i konvergenscirkelns indre.

14.10. Vi skal også anføre et kriterium for ligelig konvergens, som er anvendeligt for betinget konvergente rækker.

14.10.1. Sætning. Hvis rækken $\sum f_n$ har den egenskab, at der eksisterer en konstant K , således at alle afsnittene for alle $x \in S$ tilfredsstiller betingelsen $|s_n(x)| \leq K$, og hvis (a_n) er en aftagende følge med grænseværdi 0, da er $\sum a_n f_n$ ligelig konvergent på S .

Bevis. For afsnittene $u_{n,p}$ i $\sum f_n$ gælder

$$|u_{n,p}(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq 2K.$$

For udsnittet $v_{n,p}$ i $\Sigma a_n f_n$ får vi ved Abelsk summation, se MA 5.8, at

$$\begin{aligned} v_{n,p}(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(x) = \sum_{j=1}^p a_{n+j} f_{n+j}(x) = \\ &= \sum_{j=1}^p a_{n+j} (u_{n+j}(x) - u_{n+j-1}(x)) = \sum_{j=1}^p a_{n+j} u_{n+j}(x) - \sum_{j=0}^{p-1} a_{n+j+1} u_{n+j}(x) = \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) u_{n+j}(x) + a_{n+p} u_{n+p}(x). \end{aligned}$$

Heraf får vi nu vurderingen

$$|v_{n,p}(x)| \leq \sum_{j=1}^{p-1} (a_{n+j} - a_{n+j+1}) 2K + a_{n+p} \cdot 2K = 2a_{n+1}K,$$

og for $\varepsilon > 0$ kan vi derfor vælge N , således at uligheden

$$|v_{n,p}(x)| \leq \varepsilon$$

er opfyldt for alle $n \geq N$, alle $p > 0$ og alle $x \in S$. Dermed har vi vist, at betingelsen (6) er opfyldt for rækken $\Sigma a_n f_n$.

14.11. Vi afslutter hermed teorien for ligelig konvergente følger og rækker. Vi skal senere se, at ligelig konvergens sikrer, at integration og grænseovergang kan ombyttes, men vi vil vente med dette, til det lidt generellere integralbegreb er færdigbehandlet.

Lette opgaver.

1. En afbildning $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har grænseværdi A for $x \rightarrow -\infty$ og grænseværdi B for $x \rightarrow \infty$. For $n \in \mathbb{N}$ sætter vi $\tau_n f(x) = f(x+n)$ og $\tau_{-n} f(x) = f(x-n)$. Derved defineres afbildninger $\tau_n f$ og $\tau_{-n} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vis, at afbildningsfølgerne $(\tau_n f)$ og $(\tau_{-n} f)$ konvergerer punktvis mod de konstante afbildninger A og B , og at konvergensens er ligelig på ethvert begrænset interval, men kun i et trivielt undtagelsestilfælde på hele $\mathbb{R}$.

2. Afbildninger $f_n, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er definerede ved

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2 x^2}, \quad g_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x^2}.$$

Undersøg om følgerne (f_n) og (g_n) er punktvis konvergente og/eller ligelig konvergente på hele $\mathbb{R}$. Undersøg også, om integraler over endelige intervaller konvergerer mod de tilsvarende integraler for grænsefunktionen.

3. Samme spørgsmål som i opgave nr. 2 for

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx, \quad g_n(x) = \sin \frac{1}{n} x.$$

4. Samme spørgsmål som i opgave nr. 2 for differentialkvotienterne af funktionerne i opgave nr. 3.
5. Samme spørgsmål som i opgave nr. 2 for

$$f_n(x) = e^{-nx^2}, \quad g_n(x) = e^{-n^{-1}x^2}.$$

6. Vis, at afbildningsfølgen (f_n) , hvor $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved $f_n(x) = (\sin 2m! \pi x)^{2n}$ for ethvert $m \in \mathbb{N}$ konvergerer punktvis mod en grænseafbildning g_m , og at afbildningsfølgen (g_m) igen konvergerer punktvis mod en grænseafbildning g . Angiv denne afbildning (den franske matematiker René Baire

har bevist, at afbildningen g ikke er grænseafbildning for nogen punktvise konvergent følge af kontinuerte afbildninger).

7. (Næsten helt trivielt). En følge (f_n) af afbildninger $f_n: [a, b]$ ind i T , hvor T er et metrisk rum; er punktvise konvergent på $[a, b]$ og ligelig konvergent på $]a, b[$. Vis, at (f_n) er ligelig konvergent på $[a, b]$.
8. En følge (f_n) af kontinuerte afbildninger $f_n: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ konvergerer ligeligt mod en afbildning $f: [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ (kontinuert ifølge sætning 14.5.3). Vis, at

$$\left(\int_a^b f_n(x) dx \right) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$
9. Bevis, at rummet $\hat{B}(M, T)$ altid kan deles i klasser, således at afstanden mellem to punkter er endelig, hvis og kun hvis de to punkter ligger i samme klasse (benyt en ækvivalensrelation).
10. Lad T være et diskret, metrisk rum. Vis, at en følge (f_n) af afbildninger $f_n: M$ ind i T er ligelig konvergent, hvis og kun hvis alle følgens elementer fra et vist trin er identiske.
11. Vi vil forsøge at vise sætning 14.5.3 direkte. Lad $x_0 \in S$ være et punkt, hvor alle f_n er kontinuerte, og lad $\varepsilon > 0$ være opgivet. Vi har nu

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in S (\text{dist}(f(x), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}).$$

Da f_n er kontinuert i x_0 , kan vi bestemme $\delta > 0$, således at

$$\forall x \in K(x_0, \delta) (\text{dist}(f_n(x_0), f_n(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

men så er

$$\text{dist}(f(x_0), f(x)) \leq \text{dist}(f(x_0), f_n(x_0)) + \text{dist}(f_n(x_0), f_n(x)) +$$

$$\text{dist}(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

hvilket viser, at f er kontinuert i x_0 .

Dette bevis er i princippet rigtigt, men vor fremstilling gik let hen over visse detaljer. Det står i mange lærebøger omtrent i denne form, ligesom det ved mundtlig eksamen ofte bliver præsenteret i omtrent denne form. Svagheden er, at det bliver imødegået med spørgsmålet: "Men kommer δ ikke til at afhænge af n ", et spørgsmål, der ofte giver anledning til forvirring.

Gå beviset kritisk igennem og prøv at indføre et par ganske små ændringer, så der ikke bliver noget at indvende. Det er ikke nødvendigt at gøre det længere, og det kan i øvrigt forbedres meget væsentligt ved at udelade en lille smule.

12. Vis, at den uendelige række $\sum n^{-z}$, $z = x+iy$, er ligelig konvergent i den ved $x \in [k, \infty[$ bestemte halvplan, hvis og kun hvis $k > 1$.
13. Angiv de intervaller, i hvilke følgende rækker er ligelig konvergente:

$$\sum \frac{1}{n!} e^{nx}, \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} e^{-nx} \cos nx.$$

14. Vis, at følgende rækker er ligelig konvergente på hele $\mathbb{R}$:

$$\sum \frac{1}{n} \cos\left(x + \frac{1}{6}n\pi\right), \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \sin^2 x.$$

15. Vis, at potensrækken $\sum (-1)^n n^{-1} z^n$ konvergerer ligeligt på intervallet $[0, 1]$.
16. Vi betragter et afsluttet interval $[a, b]$ og en følge (f_n) af kontinuerte afbildninger $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vi antager, at følgen $(f_n(x))$, for ethvert $x \in [a, b]$ er aftagende og konvergent med grænseværdi 0. Vis, at (f_n) er ligelig konvergent.

17. Lad (f_n) være den i opgave 16 omtalte følge, og lad $\sum a_n$ være en konvergent række. Vis, at $\sum a_n f_n$ er ligelig konvergent på $[a, b]$ (benyt Abelsk summation).

Vanskeligere opgaver.

18. Lad I være et interval, og lad (f_n) være en følge af afbildninger $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. Vi antager, at følgen $(f_n(x))$ for hvert $x \in I$ er monoton, og at der eksisterer et positivt tal K , således at

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I (|f_n(x)| \leq K).$$

Lad $\sum a_n$ være en konvergent række. Vis, at $\sum a_n f_n(x)$ er ligelig konvergent på I .

19. Lad $\sum a_n z^n$ være en potensrække med konvergensradius R og konvergent for $z = R$. Vis, at den ved $f(z) = \sum a_n z^n$ definerede funktion er kontinuert på intervallet $[0, R]$ af den reelle akse, (den behøver ikke som afbildning $f: \{z \mid |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ at have en grænseværdi i R , idet den ikke altid konvergerer langs kurver, der rører konvergenscirklen i R . Sætningen er en af de mange, der går under navnet Abels sætning). Det er bekvemt at udnytte opgave nr. 18 til beviset.

20. Lad $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være konvergente ^{rækker} (som begynder med a_0 og b_0) med den egenskab, at rækken $\sum c_n$, hvor

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0,$$

ligeledes er konvergent. Vis, at summen af $\sum c_n$ er produktet af summerne $\sum a_n$ og $\sum b_n$ (betragt produktet af potensrækkerne $\sum a_n z^n$ og $\sum b_n z^n$ og udnyt Abels sætning fra opgave nr. 19).

21. Vis, at rækken $\sum \frac{1}{n} \sin nx$ ikke er ligelig konvergent for alle x .

22. Vis, at den ved

$$W(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{n=0}^{\infty} \cos b^n \pi x,$$

hvor b er et positivt tal, definerede afbildning $W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert.

Funktionen W med b tilstrækkelig stor er det ældste kendte eksempel på en funktion, der er overalt kontinuert, uden at være differentiabel for nogen værdi af x . Eksemplet er givet af Weierstrass.

For at vise, at W ikke er differentiabel for et vilkårligt fast $x \in \mathbb{R}$, skal vi blot vælge to passende følger af tilvækdster (h_n) og (h'_n) , som begge konvergerer mod 0, og ikke således at de tilsvarende følger af differenskvotienter

$$\frac{W(x+h_n)-W(x)}{h_n} \quad \text{og} \quad \frac{W(x+h'_n)-W(x)}{h'_n}$$

går mod ∞ og $-\infty$ (eller omvendt).

Hertil vælger vi $\beta_n \in \mathbb{Z}$, således at

$$-\frac{1}{2} < a^n x - \beta_n \leq \frac{1}{2},$$

og vi sætter så

$$\gamma_n = a^n x - \beta_n, \quad h_n = \frac{1-\gamma_n}{a^n}, \quad h'_n = \frac{-1-\gamma_n}{a^n}.$$

Hvis vi nu udregner differenskvotienterne ledvis af den uendelige række, ser vi, at differenskvotienterne svarende til h_n alle får samme fortegn fra det n^{te} led at regne (tegn bølgelinjerne og husk, at b er ulige), og en vurdering giver, at bidraget fra disse led for b tilstrækkelig stor langt overvejer bidraget fra de $n-1$ første led. Analogt for h'_n .

Hvis vurderingerne udføres omhyggeligt nok, lykkes beviset for $b > 2 + 3\pi$.

Svær opgave.

23. Udregn

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

dels direkte, dels ved at indsætte potensrækken for $\operatorname{Arcsin} x$ og integrere ledvis. Derved fås π^2 skrevet som sum af en uendelig række med simple, rationale led.

24. Van der Waerden har givet et meget simpelt eksempel på en funktion, som ikke er differentiabel for nogen værdi af x . Han definerer først $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - |x| \text{ for } |x| \leq \frac{1}{2}; \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} (\varphi(x+n) = \varphi(x)).$$

Dernæst sætter han

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(4^n x),$$

og $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har de ønskede egenskaber. Vælg $h_n = \pm \frac{1}{4^n}$ med bekvemt valg af fortegnet. Differenskvotienten bliver da et helt tal og lige eller ulige eftersom n er lige eller ulige.

Mål og integral.

15.1. I dette kapitel skal vi tage integralbegrebet op til en mere omfattende drøftelse. Vi har i et tidligere kapitel omtalt forskellige integrationsmetoder, og vi har ved flere andre lejligheder udnyttet det fra gymnasieundervisningen velkendte integralbegreb. Ved denne lejlighed vil vi beskæftige os med selve indførelsen af integralet, og samtidig benytte lejligheden til at indføre nogle nærliggende generalisationer. Disse går i to retninger, idet vi dels ønsker at kunne integere visse diskontinuerte funktioner, og dels ønsker at udvide integralbegrebet til funktioner af flere variable. Det velkendte integralbegreb kan selvfølgelig godt udnyttes for funktioner af flere variable, idet vi kan give de variable på nær én faste værdier. For at kunne udnytte integration på denne måde, må vi imidlertid skaffe os nærmere oplysninger om virkningerne af sådanne integrationer, og disse spørgsmål vil blive taget op i et følgende kapitel.

Det fremgår af gymnasieundervisningens behandling af integration, at integralbegrebet er nøje knyttet til begreberne areal og volumen. Det er mindre iøjnefaldende, at begrebet intervallængde er af grundlæggende betydning ved indførelsen af integralet. Dette skyldes, at begrebet intervallængde er så primitivt og så velkendt, at dets helt fundamentale rolle let overses. Det tilsvarende begreb i n -dimensionale rum er på tilsvarende måde af fundamental betydning, og vi skal derfor indledningsvis omtale dette simple begreb.

15.2. På den reelle akse har vi allerede indført et intervalbegreb, og vi vil benytte det uændret, idet vi dog i det følgende også vil betragte intervaller af formen $[a, a]$, altså intervaller, der består af et eneste punkt. Når vi taler om intervallet $[a, b]$,

forudsætter vi altid, at $a \leq b$, og når vi taler om intervaller $[a, b[$, $]a, b]$ eller $]a, b[$, forudsætter vi, at $a < b$.

Et interval $I = [a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ eller $]a, b[$ har længden $b-a$, der også kaldes målet af I og betegnes $m(I)$. Derved defineres en afbildning $m: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $\mathcal{I}$ betegner mængden af begrænsede intervaller på $\mathbb{R}$.

Ved en endelig inddeling af et interval I forstår vi en fremstilling af I som en foreningsmængde $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$ af endelig mange disjunkte delintervaller. Er I_μ og I_ν to forskellige af disse delintervaller, da vil ethvert element af et af dem, f.eks. I_μ være mindre end ethvert element af det andet, og vi vil da sige, at I_μ kommer før I_ν . Vi kan antage, at intervallerne $I_1, \dots, I_q$ er ordnet, således at I_k kommer før I_{k+1} for $k = 1, \dots, q-1$. På hinanden følgende intervaller vil da have et fælles endepunkt. Efter et interval, der er åbent til højre, følger et, der er afsluttet til venstre, og efter et interval, der er afsluttet til højre, følger et, der er åbent til venstre.

Hvis vi med x_k betegner det fælles endepunkt for I_k og I_{k+1} , $k = 1, \dots, n-1$, medens vi sætter $a = x_0$, $b = x_n$, får vi

$$m(I_k) = x_k - x_{k-1}, \quad m(I) = b - a = x_n - x_0,$$

altså

$$m(I) = \sum_{k=1}^q m(I_k).$$

På grund af denne egenskab, siger vi, at målet m er en additiv intervalfunktion.

15.3. Ved et interval i talrummet $\mathbb{R}^n$ forstår vi et topologisk produkt

$$I = I_1 \times \dots \times I_n,$$

hvor $I_1, \dots, I_n$ er intervaller på $\mathbb{R}$. For intervaller i $\mathbb{R}^n$ indfører vi det n -dimensionale mål ved definitionen

$$m^n(I) = \prod_{\nu=1}^n m(I_{\nu}).$$

Hvis vi for hvert ν har en inddeling

$$D_{\nu} : I_{\nu} = I_{\nu 1} \cup \dots \cup I_{\nu q_{\nu}},$$

får vi deraf en fremstilling

$$D:I = \bigcup_{k_1=1}^{q_1} \dots \bigcup_{k_n=1}^{q_n} I_{1k_1} \times \dots \times I_{nk_n}$$

af I som foreningsmængde af disjunkte delintervaller, altså en inddeling af I . Vi siger, at inddelingen D er produkt af inddelingerne D_{ν} , og en inddeling af I , der således kan fremkomme som produkt af inddelinger af koordinatinddelingen kaldes en simpel inddeling af I .

Vi sætter

$$I_{k_1, \dots, k_n} = I_{1k_1} \times \dots \times I_{nk_n},$$

og vi har da

$$m^n(I) = \prod_{\nu=1}^n m(I_{\nu}) = \prod_{\nu=1}^n \sum_{k_{\nu}=1}^{q_{\nu}} m(I_{\nu k_{\nu}}) = \sum_{k_1=1}^{q_1} \dots \sum_{k_n=1}^{q_n} m(I_{1k_1}) \dots m(I_{nk_n}) = \sum_{k_1=1}^{q_1} \dots \sum_{k_n=1}^{q_n} m^n(I_{k_1, \dots, k_n}).$$

For en simpel inddeling af I har vi således bevist, at det n -dimensionale mål af I er summen af de n -dimensionale mål af delintervallerne.

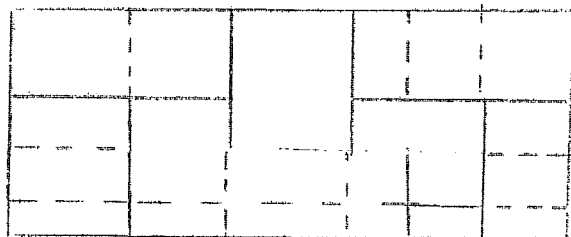
15.4. Således som det er antydnet med de fuldt optrukne linier på figuren, der svarer til det 2-dimensionale tilfælde,

kan et interval $I =$

$$\prod I_{\nu} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ være}$$

fremstillet som en foreningsmængde

$$I = \bigcup_{k=1}^q I_k$$



af disjunkte delintervaller, uden at der foreligger en simpel inddeling. Vi taler da om inddelingen

$$(1) \quad D:I = \bigcup_{k=1}^q I_k.$$

Hvert af intervallerne I_q er et produkt

$$I_q = \prod_{\nu=1}^n I_k^\nu,$$

og hvis vi for hvert ν ordner endepunkterne af intervallerne I_k^ν efter størrelse, altså $x_{\nu 0} < x_{\nu 1} < \dots < x_{\nu p_\nu}$, får vi for hvert ν en inddeling

$$D'_\nu : I^\nu = [x_{\nu 0}, x_{\nu 0}] \cup]x_{\nu 0}, x_{\nu 1}[\cup]x_{\nu 1}, x_{\nu 1}] \cup \\]x_{\nu 1}, x_{\nu 2}[\cup \dots \cup]x_{\nu p_\nu - 1}, x_{\nu p_\nu}[\cup]x_{\nu p_\nu}, x_{\nu p_\nu}],$$

hvor det første eller det sidste interval eventuelt skal udelades, hvis I^ν er åbent til vedkommende side.

Den simple inddeling D' , der fremkommer som produkt af inddelingerne D'_ν er en videredeling af inddelingen (1), og de intervaller fra D' , der er indeholdt i I_k udgør en simpel inddeling

$$(2) \quad D_k : I_k = \bigcup_{j=1}^{s_k} I_{k,j},$$

medens den simple inddeling $\tilde{D}$ er givet ved

$$(3) \quad D' : I = \bigcup_{k=1}^q \bigcup_{j=1}^{s_k} I_{k,j}.$$

Vi kan nu let vise følgende sætning:

15.4.1. Sætning. Lad I være et interval i $\mathbb{R}^n$. For enhver inddeling

$$D:I = \bigcup_{k=1}^q I_k$$

gælder relationen

$$m(I) = \sum_{k=1}^q m(I_k).$$

Bevis. Vi gennemfører den forud for sætningen omtalte konstruktion, og ifølge resultatet i slutningen af 15.3. har vi da

$$m^n(I_k) = \sum_{j=1}^{s_k} m^n(I_{k,j}); \quad m^n(I) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{s_k} m^n(I_{k,j}),$$

hvoraf sætningens rigtighed umiddelbart fremgår.

15.5. Efter ovenstående resultater er det nærliggende, at indføre et mål for enhver mængde i $\mathbb{R}^n$, som er foreningsmængde for endelig mange begrænsede intervaller.

15.5.1. Definition. Ved en trappemængde i $\mathbb{R}^n$ forstår vi en foreningsmængde af endelig mange disjunkte, begrænsede intervaller.

15.5.2. Sætning. Hvis A og B er trappemængder i $\mathbb{R}^n$, da er $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ og $B \setminus A$ trappemængder.

Bevis. Det er velkendt, at fællesmængden for 2 intervaller er et interval. For et interval I gælder det endvidere at komplementærmængden $\complement I$ er foreningsmængde af endelig mange ubegrænsede intervaller, og relationen $I_1 \setminus I_2 = I_1 \cap \complement I_2$ viser derfor, at $I_1 \setminus I_2$ er foreningsmængde af disjunkte, begrænsede intervaller, altså en trappemængde. Er nu A en trappemængde og I et interval, da findes der en fremstilling $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor $I_1, \dots, I_q$ er disjunkte intervaller, og relationen $A \setminus I = (I_1 \setminus I) \cup \dots \cup (I_q \setminus I)$ viser, at $A \setminus I$ er en trappemængde. Af $A \cup I = (A \setminus I) \cup I$ fremgår derefter, at $A \cup I$ er en trappemængde. Heraf følger ved gentagen anvendelse, at foreningsmængden af 2 trappemængder er en trappemængde. Det ses umiddelbart, at fællesmængden for to trappemængder er en trappemængde. For $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor $I_1, \dots, I_q$ er disjunkte intervaller, får vi for $I \supseteq A$, hvor A er et interval, relationen $I \setminus A = (I \setminus I_1) \cap \dots \cap (I \setminus I_q)$, som viser, at $I \setminus A$ er en trappemængde. Hvis A og B er trappe-

mængder, kan vi vælge et interval $I \supseteq A$, og vi har da, at $A \setminus B$ er en trappemængde. Dermed er sætningen fuldstændig bevist.

15.6. Som en forberedelse til indførelse af et mål for trappemængder viser vi følgende sætning:

15.6.1. Sætning. Lad A være en trappemængde i $\mathbb{R}^n$, og lad

$$A = I_1 \cup \dots \cup I_p = I'_1 \cup \dots \cup I'_q$$

være fremstillinger af A som foreningsmængde af disjunkte intervaller. Da er

$$m^n(I_1) + \dots + m^n(I_p) = m^n(I'_1) + \dots + m^n(I'_q).$$

Bevis. Af bekvemmelighedshensyn vil vi skrive $m^n(\emptyset) = 0$.

Vi har nu ved gentagne anvendelser af sætning 15.4

$$\sum_{j=1}^p m^n(I_j) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q m^n(I_j \cap I'_k) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p m^n(I_j \cap I'_k) = \sum_{k=1}^q m^n(I'_k),$$

og dermed er sætningen bevist. Sætningen viser, at den følgende definition er entydig.

15.6.2. Definition. Lad A være en trappemængde og

$$A = I_1 \cup \dots \cup I_p$$

en fremstilling af A som en sum af disjunkte intervaller. Tallet

$$m^n(A) = m^n(I_1) + \dots + m^n(I_p)$$

kaldes det n -dimensionale mål af A .

Vi gør opmærksom på, at $m^n(A)$ afhænger væsentligt af n .

En trappemængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kan jo udmærket også være en trappemængde i $\mathbb{R}^{n+1}$. For eksempel kan A være indeholdt i et n -dimensionalt koordinatunderrum i $\mathbb{R}^{n+1}$. Vi har da $m^{n+1}(A) = 0$. Vi vil imidlertid oftest være i den situation, at tallet n er konstant gennem lange undersøgelser, og vi vil da udelade n som øvre index i m^n ligesom vi også oftest vil undlade ordet n -dimensional.

15.7. Vi minder om, at vi for $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ og en punktmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ anvender betegnelsen

$$\underline{a}+A = \{\underline{a}+\underline{x} \mid \underline{x} \in A\}.$$

15.7.1. Sætning. Lad $\mathring{T}^n$ være mængden af trappemængder på $\mathring{R}^n$. Den ved målet $m(A)$ definerede afbildning $m:\mathring{T}^n$ ind i $\mathring{R}$ har følgende egenskaber:

$$m1) \forall A \in \mathring{T}^n (m(A) \geq 0)$$

$$m2) \forall A, B \in \mathring{T}^n (A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B))$$

$$m3) \forall \underline{a} \in \mathring{R}^n \forall A \in \mathring{T}^n (m(\underline{a}+A) = m(A))$$

$$m4) m([0,1[\times [0,1[\times \dots \times [0,1[, n \text{ faktorer}) = 1.$$

Bevis. Påstandene $m1)$ og $m4)$ er umiddelbare, medens $m2)$ fås ved fremstilling af A og B som foreningsmængder af disjunkte intervaller. For et interval I har vi direkte $m(\underline{a}+I) = m(I)$, og af $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$ er disjunkte, fås fremstillingen

$$\underline{a}+I = (\underline{a}+I_1) \cup \dots \cup (\underline{a}+I_q),$$

hvor $\underline{a}+I_1, \dots, \underline{a}+I_q$ er disjunkte intervaller. Derefter fås $m3)$ umiddelbart.

15.8. Vi skal nu vise, at egenskaberne $m1), \dots, m4)$ karakteriserer målet. Dette er indeholdt i følgende sætning

15.8.1. Sætning. Lad $\varphi:\mathring{T}^n$ ind i $\mathring{R}$ være en afbildning med følgende egenskaber:

$$1) \forall A \in \mathring{T}^n (\varphi(A) \geq 0)$$

$$2) \forall A, B \in \mathring{T}^n (A \cap B = \emptyset \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B))$$

$$3) \forall \underline{a} \in \mathring{R}^n, \forall A \in \mathring{T}^n (\varphi(\underline{a}+A) = \varphi(A))$$

$$4) \varphi([0,1[\times \dots \times [0,1[, n \text{ faktorer}) = 1.$$

Da er φ identisk med m .

Bevis. Lad k være et helt tal. Vi deler intervallet $[0,1[$ i k lige store dele. Ved at danne produkt af n sådanne inddelinger, får vi enhedsterningen $E = [0,1[\times \dots \times [0,1[$ inddelt i k^n terninger, der ifølge 3) alle afbildes ens ved φ . Terningen $[0, k^{-1}[\times \dots \times [0, k^{-1}[$ afbildes derfor ifølge 2) på det reelle tal k^{-n} . Et interval $[a_1, b_1[\times \dots \times [a_n, b_n[$, hvor vi for hvert v har

$b_\nu - a_\nu = p_\nu k^{-1}$, hvor $p_\nu \in \mathbb{N}$, kan på tilsvarende måde deles i $p_1 \dots p_n$ terninger, der hver afbildes i k^{-n} . Altså vil et interval $I = [a_1, b_1[\times \dots \times [a_n, b_n[$, hvor hvert $b_\nu - a_\nu$ er rationalt, give $\varphi(I) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$. På grund af 1) er $\varphi(I)$ for et interval $\geq \varphi(I_1)$ for ethvert $I_1 \subseteq I$, men $\leq \varphi(I_2)$ for $I \subseteq I_2$. Vi kan vælge I_1 og I_2 med koordinatintervaller af rational længde vilkårlig tæt ved de tilsvarende længder for I . Det fremgår heraf, at $\varphi(I) = m(I)$ for ethvert interval. Men så gælder $\varphi(A) = m(A)$ for enhver trappemængde, idet en sådan skrives som foreningsmængde af disjunkte intervaller.

15.9. I mange anvendelser af matematikken optræder der afbildninger $\varphi: \mathbb{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$, som er beslægtede med mål uden dog at have alle et måls egenskaber. I et fysisk rum, i hvilket der befinder sig stof, vil enhver trappemængde $A \in \mathbb{T}^n$ indeholde en vis masse $\mu(A)$ og en vis elektricitetsmængde $e(A)$. Afbildningerne μ og e tilfredsstiller betingelsen 2) fra sætning 15.8.1, og μ tilfredsstiller også 1). Sædvanligvis vil 3) og 4) ikke være tilfredsstillede.

15.9.1. Definition: En afbildning $\varphi: \mathbb{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$ kaldes en additiv intervalfunktion, hvis den tilfredsstiller betingelsen 2) fra sætning 15.8.1. En additiv intervalfunktion kaldes positiv, hvis den tillige tilfredsstiller 1).

Vi skal understrege, at det således definerede begreb er for generelt for de fleste praktiske anvendelser. De supplerende betingelser, der gør det praktisk anvendeligt, er imidlertid noget uanskuelige, og vi vil udskyde en nærmere omtale af dem til et senere tidspunkt. Vi skal foreløbig bemærke, at den ovenfor omtalte additive intervalfunktion e er differens mellem 2 positive, additive intervalfunktioner, af hvilke den ene hidrører fra den positive, medens den anden hidrører fra den negative

elektricitet. I praksis er det kun differenser mellem positive intervalfunktioner, der finder anvendelse.

15.10. Med $\mathbb{I}$ vil vi betegne mængden af intervaller i $\mathbb{R}^n$. Vi vil da vise følgende sætning:

15.10.1. Sætning. Lad $\psi: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en afbildning, som tilfredsstiller betingelsen

2*). For ethvert interval I og enhver simpel inddeling

$$D: I = I_1 \cup \dots \cup I_q \text{ er } \psi(I) = \psi(I_1) + \dots + \psi(I_q).$$

Der eksisterer da en additiv intervalfunktion $\varphi: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, således at ψ er restriktionen af φ til mængden $\mathbb{I}$ (vi siger, at ψ kan udvides til en additiv intervalfunktion).

Bevis. Vi kan erstatte m^n med ψ i beviset for sætning 15.4.1. og får derved bevist, at 2*) gælder for vilkårlige inddelinger. Vi kan derefter kopiere beviset for sætning 15.6.1 og derfor kan vi for $A = I_1 \cup \dots \cup I_p$, hvor $I_1, \dots, I_p$ er disjunkte intervaller, definere

$$\varphi(A) = \psi(I_1) + \dots + \psi(I_p).$$

Det ses nu umiddelbart, at φ er en additiv intervalfunktion, og at $\varphi(I) = \psi(I)$ for ethvert interval I .

15.11. Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en kontinuert afbildning. Hvis I er et af intervallerne $]a, b[, [a, b], [a, b[$ eller $[a, b]$ sætter vi

$$\psi(I) = \int_a^b f(x) dx.$$

Vi ved da, at ψ tilfredsstiller 2*) i sætning 15.10.1, og ψ kan derfor udvides til en additiv intervalfunktion.

Vi kunne også have defineret

$$\varphi(I) = f(b) - f(a),$$

og vi kunne da tilsvarende udvide φ til en kontinuert intervalfunktion.

Vi opgiver forudsætningen om, at f er kontinuert, og kræver

i stedet, at f har begrænset variation på ethvert endeligt interval. Vi kan da benytte grænseværdierne i stedet for funktionsværdierne og sætte

$$\chi(]a,b[) = f(b-)-f(a+), \chi(]a,b]) = f(b+)-f(a+)$$

$$\chi([a,b[) = f(b-)-f(a-), \chi([a,b]) = f(b+)-f(a-),$$

specielt

$$\chi([a,a] = f(a+)-f(a-).$$

Vi får også i dette tilfælde en additiv intervalfunktion. Vi bemærker, at den undertiden knytter en fra 0 forskellig værdi til et interval, der kun indeholder 1 punkt. Intervalfunktionen χ bliver positiv, hvis og kun hvis f er voksende.

En afbildning $f:\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ giver på tilsvarende måde anledning til en additiv intervalfunktion, idet vi for $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ eller ethvert af de intervaller, der fås ved udeladelse af et eller flere endepunkter definerer

$$\varphi(I) = f(b_1, b_2) - f(b_1, a_2) - f(a_1, b_2) + f(a_1, a_2).$$

På analog måde kan man definere additive intervalfunktioner i rum med flere dimensioner.

15.12. Vi skal nu udlede nogle yderst simple regneregler for additive intervalfunktioner.

15.12.1. Sætning. Lad $\varphi:\mathbb{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en additiv intervalfunktion. For $A, B \in \mathbb{T}^n$ har vi da regnereglen

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

og for $A \supseteq B$ gælder tillige

$$\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B).$$

Bevis. For $A \supseteq B$ er $A \setminus B$ og B disjunkte. På grund af additiviteten har vi derfor $\varphi(A) = \varphi(A \setminus B) + \varphi(B)$. For vilkårlige A og B er B og $A \setminus (A \cap B)$ disjunkte. Vi har derfor

$$\varphi(A \cup B) = \varphi((A \setminus (A \cap B)) \cup B) =$$

$$\varphi(A \setminus (A \cap B)) + \varphi(B) = \varphi(A) - \varphi(A \cap B) + \varphi(B).$$

Dermed er sætningen bevist.

15.13. Vi vil endnu anføre et par sætninger om positive, additive mængdefunktioner.

15.13.1. Sætning. Lad φ være en positiv additiv mængdefunktion. For vilkårlige trappemængder $A_1, \dots, A_q$ gælder da

$$\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_q) \leq \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_q).$$

Bevis. For $q = 2$ følger påstanden af sætning 15.12.1. Det generelle resultat fås ved gentagen anvendelse af tilfældet $q = 2$.

15.13.2. Sætning. Lad φ være en positiv additiv mængdefunktion. Lad A være en trappemængde og $\{I_1, \dots, I_q\}$ en overdækning af A med intervaller. Da er

$$\varphi(A) \leq \varphi(I_1) + \dots + \varphi(I_q).$$

Bevis. Af sidste påstand i sætning 15.12.1 og af sætning 15.13.1 fås for $B = I_1 \cup \dots \cup I_q$, at

$$\varphi(A) = \varphi(B) - \varphi(B \setminus A) \leq \varphi(B) \leq \varphi(I_1) + \dots + \varphi(I_q).$$

15.14. Lad nu $f, g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være additive intervalfunktioner på $\mathbb{R}^n$, og lad α og β være reelle tal. Da er $\alpha f + \beta g$ en additiv intervalfunktion. Mængden af additive intervalfunktioner på $\mathbb{R}^n$ udgør således et vektorrum over de reelle tal.

De specielle additive intervalfunktioner, der kan skrives som differens mellem positive, additive intervalfunktioner, udgør et underrum i rummet af alle additive intervalfunktioner på $\mathbb{R}^n$.

15.15. Efter ovenstående gennemgang af den meget elementære målteori vil vi nu gå over til integralteorien, idet vi først behandler et særlig simpelt tilfælde, der er nær knyttet til den elementære målteori. Bagefter vil vi så generalisere integralbegrebet, så det kommer til at omfatte alle kontinuerte

og visse diskontinuerte funktioner.

For at spare en del skrivearbejde vil vi udelukkende beskæftige os med funktioner, der er definerede i hele rummet, altså afbildninger $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dette er ingen væsentlig indskrænkning, idet en afbildning af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ kan udvides til en afbildning af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$, idet vi lader alle punkter af $(A)^c$ afbildes i 0.

Afslutningen af mængden $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) \neq 0\}$ kaldes støtten for funktionen f . En funktionsstøtte er således en afsluttet mængde, og støttens komplementærmængde er det indre af $f^{-1}(0)$.

15.16. Den funktionsklasse, vi i første omgang vil beskæftige os med, indføres ved følgende definition:

15.16.1. Definition. En afbildning $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes en trappefunktion, hvis dens støtte er en trappemængde A med en fremstilling $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$ som foreningsmængde af disjunkte intervaller, således at f er konstant på hvert af intervallerne I_k .

Det fremgår umiddelbart af definitionen, at f er en trappefunktion, hvis og kun hvis billedet $f(\mathbb{R}^n)$ er en endelig mængde, og det for hvert $y \in f(\mathbb{R}^n)$ gælder, at $f^{-1}(y)$ er en trappemængde. Heraf fremgår, at kravet i definition 15.16.1 om, at $I_1, \dots, I_q$ skal være disjunkte, er overflødigt.

15.17. Lad $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være trappefunktioner, og lad α og β være reelle tal. Da er $\alpha f + \beta g$ åbenbart igen en trappefunktion.

For at vise denne påstand behøver vi blot at betragte fremstillinger $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, $B = I'_1 \cup \dots \cup I'_q$ af støtterne for f og g , således at f er konstant på hvert I_k , medens g er konstant på hvert I'_k . Heraf følger, at $\alpha f + \beta g$ kun antager endelig mange værdier og er konstant på hver af mængderne $I_k \cap I'_k$, og dermed er sætningen bevist.

Ganske det samme ræsonnement viser nu, at også produktet

fg er en trappefunktion.

Med $f \vee g$ og $f \wedge g$ betegner vi de to afbildninger, som afbilder $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ på henholdsvis den største og den mindste af værdierne $f(\underline{x})$ og $g(\underline{x})$, altså

$$(f \vee g)(\underline{x}) = \sup\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}, \quad (f \wedge g)(\underline{x}) = \inf\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}.$$

Stadig ved hjælp af det samme ræsonnement ser vi, at $f \vee g$ og $f \wedge g$ igen bliver trappefunktioner.

Operationerne $\vee$ og $\wedge$ kan selvfølgelig udføres på vilkårlige afbildninger ^{ind} i $\mathbb{R}$. De to regneoperationer er associative og kommutative. For $\alpha > 0$ gælder endvidere

$$\alpha f \vee \alpha g = \alpha(f \vee g); \quad \alpha f \wedge \alpha g = \alpha(f \wedge g).$$

Det er selvfølgelig uheldigt, at de her indførte operationstegn er identiske med et par af de logiske tegn. Sagen kompliceres yderligere ved, at de samme tegn ofte anvendes for visse operationer med vektorer. Vi vil derfor indskrænke den her indførte specielle anvendelse af de to operationstegn til de kapitler, der behandler indførelsen af integration.

Vi anfører de for vilkårlige reelle funktioner gyldige relationer

$$(f \vee g)^{-1}([\alpha, \infty[) = f^{-1}([\alpha, \infty[) \cup g^{-1}([\alpha, \infty[),$$

$$(f \wedge g)^{-1}([\alpha, \infty[) = f^{-1}([\alpha, \infty[) \cap g^{-1}([\alpha, \infty[).$$

Der gælder tilsvarende for $]\alpha, \infty[$. Hvis vi i stedet brugte $]-\infty, \alpha]$, ville $\cup$ og $\cap$ bytte plads.

15.18. Vi indfører nu integralet af en trappefunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Funktionen f antager kun endelig mange værdier $y_1, \dots, y_p$, og hver af mængderne $f^{-1}(y_k)$ er en trappemængde i $\mathbb{R}^n$ og har således et n -dimensionalt mål $m(f^{-1}(y_k))$.

15.18.1. Definition. Summen

$$(1) \quad \int f = \sum_{k=1}^p y_k m(f^{-1}(y_k))$$

kalder integralet af trappefunktionen f . Det betegnes også mere udførligt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int f.$$

15.18.2. Sætning. Hvis A er en trappemængde, der indeholder støtten for f og har fremstillingen $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor mængderne I_k er disjunkte, og f er konstant på hvert I_k , og hvis vi for hvert k vælger et vilkårligt $\underline{x}_k \in I_k$, da er

$$(2) \quad \int f = \sum_{k=1}^q m(I_k) f(\underline{x}_k).$$

Bevis. For hver værdi $y_j \neq 0$, der antages af f , bliver $f^{-1}(y_j)$ foreningsmængde af visse af intervallerne I_k , og $m(f^{-1}(y_j))$ bliver summen af disse intervallers mål, og for $x_k \in I_k$ bliver tillige $f(x_k) = y_k$. Hvert led i (1) spaltes derved i en sum af led fra (2), og de tiloversblevne led i (2) har alle værdien 0. Altså har summerne i (1) og (2) samme værdi.

15.19. Vi skal nu udlede regneregler for integraler af trappefunktioner. For kortheds skyld vil vi skrive $f \leq g$ i betydningen $\forall x(f(x) \leq g(x))$.

15.19.1. Sætning. For trappefunktioner f, g på $\mathbb{R}^n$ og reelle tal α og β har vi

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

Hvis $f \leq g$, da er også $\int f \leq \int g$.

Bevis. Foreningsmængden for støtterne for f og g kan fremstilles på formen $I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor $I_1, \dots, I_q$ er disjunkte intervaller^{*}. Sætningen fås nu umiddelbart, idet integralerne skrives på formen (2).

Den første påstand i sætning 15.19.1 udtrykker, at $\int$ er en lineær afbildning af mængden af trappefunktioner ind i de reelle tal. Den sidste egenskab udtrykker, at afbildningen $\int$ tillige er monoton.

15.20. Vi skal nu gøre rede for sammenhængen mellem integral af trappefunktioner og mål af trappemængder. Vi vil betragte $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, og vi vil antage, at $f \geq 0$. Vi vil tænke os, at f har støtten $A = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor $I_1, \dots, I_q$ er disjunkte, og f er konstant på hvert I_k . Sammen med f vil vi betegne en punktmængde $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, defineret ved

$$B = \{(\underline{x}, y) \mid \underline{x} \in A \wedge 0 \leq y < f(\underline{x})\}.$$

^{*}, hvor f og g er konstante på hvert I_k .

15.20.1. Sætning. Punktmængden B er en trappemængde i $\mathbb{R}^{n+1}$, og dens $n+1$ -dimensionale mål er $\int f$.

Bevis. Idet vi vælger $\underline{x}_k \in I_k$, $k = 1, \dots, q$, har vi fremstillingen

$$B = \bigcup_{k=1}^q (I_k \times [0, f(\underline{x}_k)])$$

af B som foreningsmængde af disjunkte intervaller. Altså er B en trappemængde med det $n+1$ -dimensionale mål

$$m(B) = \sum_{k=1}^q m(I_k \times [0, f(\underline{x}_k)]) = \sum_{k=1}^q m(I_k) f(\underline{x}_k) = \int f,$$

og dermed er sætningen bevist.

Lad nu igen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være en trappemængde, og lad χ_A være dens karakteristiske funktion, altså

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \underline{x} \in A \\ 0, & \text{hvis } \underline{x} \notin A. \end{cases}$$

Da er χ_A en trappefunktion, og definitionen 15.18.1 viser, at

$$\int \chi_A = m(A).$$

15.21. Vi vil et øjeblik betragte $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, hvis punkter vi betegner $(\underline{x}, \underline{y})$, hvor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} \in \mathbb{R}^p$.

15.21.1. Sætning. Hvis $f: \mathbb{R}^{n+p}$ ind i $\mathbb{R}$ er en trappefunktion, da er for fast $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ den ved $f_{\underline{x}}(\underline{y}) = f(\underline{x}, \underline{y})$ definerede afbildning $f_{\underline{x}}: \mathbb{R}^p$ ind i $\mathbb{R}$ en trappefunktion, og dens integral

$$F(\underline{x}) = \int f_{\underline{x}} = \int_{\mathbb{R}^p} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}$$

er en trappefunktion på $\mathbb{R}^n$. Endvidere gælder

$$\int f = \int_{\mathbb{R}^{n+p}} f(\underline{x}, \underline{y}) d(\underline{x}, \underline{y}) = \int F = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x}.$$

Bevis. Lad $I = I' \times I''$, $I' \subset \mathbb{R}^n, I'' \subset \mathbb{R}^p$ være et interval, som indeholder støtten for f . Ifølge definition 15.16.1 og kon-

struktionen i 15.4 eksisterer der en simpel inddeling af I i delintervaller $I_{jk} = I'_j \times I''_k$; $j = 1, \dots, J$; $k = 1, \dots, K$, således at f er konstant på hvert I_{jk} med en værdi, som vi betegner f_{jk} . Vi har da

$$\int f = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K m(I'_j \times I''_k) f_{jk} = \sum_{j=1}^J m(I'_j) \sum_{k=1}^K m(I''_k) f_{jk}.$$

Vi vælger nu $\underline{x}_j \in I'_j$, og vi har da

$$F(\underline{x}_j) = \sum_{k=1}^K m(I''_k) f_{jk},$$

hvilket viser, at F er konstant på hvert I'_j , altså en trappefunktion, samt at

$$\int f = \sum_{j=1}^J m(I'_j) F(\underline{x}_j) = \int F,$$

og dermed er sætningen bevist.

15.22. Vi går nu over til den egentlige mål- og integralteori, idet vi udvider mål af trappemængder til mål af en mere omfattende klasse af mængder og integral af trappefunktioner til integral af en mere omfattende klasse af funktioner. Den teknik vi anvender er en slags approximation ved trappefunktioner, og denne approximation lægges således til rette, at man kan tale om approximation fra 2 sider. Derved får enhver mængde et indre og et ydre mål, ligesom enhver funktion får et nedre og et øvre integral. Mængden har et mål, hvis det indre og det ydre mål er lige store, og funktionen har et integral, hvis det nedre og det øvre integral er lige store.

Selve approximationen med trappemængder eller trappefunktioner kan lægges til rette på forskellig vis, og derved bliver klasserne af målelige mængder eller integrable funktioner mere eller mindre omfattende. Vi skal i indeværende kursus i hoved-

sagen holde os til en simpel og nærliggende fremgangsmåde, der fører til Riemann-integralet (B.Riemann 1826-66) og Riemann-målet. En langt mere dybsindig metode leder til Lebesgue-integralet (H.Lebesgue 1875-1941) og Lebesguemålet. Vi vil lejlighedsvis strejfe denne teori, idet det har vist sig, at mængder med Lebesgue-målet 0 spiller en rolle for forståelsen af de Riemann'ske begreber. Matematik 2 vil omfatte en grundig indførelse i Lebesgue's mål- og integralteori.

15.23. Vi vil nu først definere nedre og øvre Riemann-integral.

15.23.1. Definition. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Idet $\hat{T}^n$ er mængden af trappefunktioner $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, sætter vi

$$\int_{-} f = \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \in \hat{T}^n \wedge \varphi \leq f \right\}$$

$$\int_{+} f = \inf \left\{ \int \varphi \mid \varphi \in \hat{T}^n \wedge \varphi \geq f \right\}.$$

De to værdier kaldes henholdsvis nedre og øvre Riemann-integral af f . Hvis $\int_{-} f = \int_{+} f$, kaldes f Riemann-integrabel, og størrelsen $\int_{-} f = \int_{+} f = \int f$ kaldes integralet af f .

Antagelserne, at f er begrænset og har begrænset støtte sikrer netop, at de to talmængder, der optræder i definitionen, ikke er tomme. For et $\varphi_1 \leq f$ og et $\varphi_2 \geq f$ gælder ifølge sætning 15.19.1, at $\varphi_1 \leq \varphi_2$, og af sætning 4.9.1. følger derfor

$$\int_{-} f \leq \int_{+} f,$$

for enhver begrænset funktion med begrænset støtte.

Ganske som for trappefunktionerne vil vi også lejlighedsvis benytte udførligere betegnelser, f.eks.

$$\int_{-} f = \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

og tilsvarende for øvre integral og for integralet.

15.24. Vi vil nu udlede de elementæreste regneregler for Riemann-integralet.

15.24.1. Sætning. Lad $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte og lad α være et positivt tal. Da er

$$\int \alpha f = \alpha \int f; \quad \int \alpha f = \alpha \int f; \quad \int (-\alpha f) = -\alpha \int f; \quad \int (-\alpha f) = -\alpha \int f.$$

Bevis. Idet φ og ψ betegner trappefunktioner, er

$$\{\varphi \mid \varphi \leq -\alpha f\} = \{-\alpha \psi \mid \psi \geq f\},$$

hvilket medfører den tredje relation. De øvrige vises analogt.

15.24.2. Sætning. Lad $f, g: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være begrænsede funktioner med begrænset støtte. Da er

$$\int f + \int g \leq \int (f+g) \leq \left\{ \begin{array}{l} \int f + \int g \\ \int f + \int g \end{array} \right\} \leq \int (f+g) \leq \int f + \int g.$$

Bevis. Idet φ og ψ betegner trappefunktioner, er

$$\begin{aligned} \int f + \int g &= \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \leq f \right\} + \sup \left\{ \int \psi \mid \psi \leq g \right\} = \\ &= \sup \left(\left\{ \int \varphi \mid \varphi \leq f \right\} + \left\{ \int \psi \mid \psi \leq g \right\} \right) = \\ &= \sup \left\{ \int (\varphi + \psi) \mid \varphi \leq f \wedge \psi \leq g \right\} \leq \int (f+g). \end{aligned}$$

Ved at anvende dette resultat på $f+g$ og $-g$ får vi

$$\int f = \int ((f+g) + (-g)) \geq \int (f+g) + \int (-g) = \int (f+g) - \int g,$$

hvor vi benyttede sætning 15.24.1. Dermed har vi bevist uligheden

$$\int (f+g) \leq \int f + \int g.$$

De øvrige uligheder fås ved ombytning af betegnelser.

15.24.3. Sætning. Hvis $f, g: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ er Riemann-integrable og α er et reelt tal, er αf og $f+g$ Riemann-integrable, og

$$\int \alpha f = \alpha \int f; \quad \int (f+g) = \int f + \int g.$$

Sætningen følger umiddelbart af sætning 15.24.1^{og 15.24.2}. Den kan også formuleres på følgende måde.

15.24.4. Sætning. Mængden af Riemann-integrable funktioner $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ udgør et vektorrum over de reelle tal, og $\int$ er en lineær funktional på dette vektorrum.

15.25. Det er klart, at $f \geq 0$ medfører $\int f \geq 0$. Mere generelt har vi resultatet.

15.25.1. Sætning. Hvis $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er begrænsede og har begrænset støtte, vil $f \leq g$ medføre $\int f \leq \int g$ og $\overline{\int} f \leq \overline{\int} g$.

Bevis. For enhver trappefunktion $\varphi \leq f$ gælder $\varphi \leq g$, altså

$$\int \varphi \leq \int g, \text{ altså } \int f = \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \leq f \right\} \leq \int g.$$

Den anden relation vises analogt.

15.25.2. Definition. Ved en positiv Riemann'sk nulfunktion forstås en positiv, Riemann-integrabel funktion, hvis Riemann-integral er 0. Ved en Riemann'sk nulfunktion forstås en funktion, der kan skrives som differens mellem 2 positive Riemann'ske nulfunktioner.

Det er klart, at de Riemann'ske nulfunktioner udgør et vektorrum. Det er endvidere klart, at en funktion f er en Riemann'sk nulfunktion, hvis og kun hvis $\overline{\int} |f| = 0$.

15.25.2. Sætning. Hvis $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er begrænset og har begrænset støtte, medens $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er en Riemann'sk nulfunktion, da er

$$\int (f+h) = \int f; \quad \overline{\int} (f+h) = \overline{\int} f.$$

Bevis: Af sætning 15.24.1 fås

$$\int (f+h) \geq \int f + \int h = \int f,$$

og

$$\int f = \int ((f+h)-h) \geq \int (f+h) + \int (-h) = \int (f+h) - \int h = \int (f+h),$$

hvormed den første påstand er bevist. Den anden vises tilsvarende.

15.26. For begrænsede funktioner $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ med begrænset støtte indfører vi en binær relation $\dot{=}$, som læses omtrent lig med, og som defineres ved, at $f \dot{=} g$ skal være ensbetydende med, at $g-f$ er en Riemann'sk nulfunktion. Det er klart, at $\dot{=}$ opfylder betingelserne

- 1) $\forall f (f \dot{=} f)$; relationen er altså reflektiv
- 2) $\forall f, g (f \dot{=} g \iff g \dot{=} f)$; relationen er altså symmetrisk.
- 3) $\forall f, g, h ((f \dot{=} g \wedge g \dot{=} h) \Rightarrow f \dot{=} h)$; relationen er altså transitiv.

Relationen $\dot{=}$ inducerer således en klasseinddeling på mængden af begrænsede funktioner med begrænset støtte. Funktioner i samme klasse er altså omtrent identiske, og ifølge sætning 15.25.2 har de alle samme nedre og samme øvre integral. Vi skal efterhånden se, at omtrent identiske funktioner også i andre henseender forholder sig ens med hensyn til Riemann-integration. Dette betyder også, at Riemann-integrationen er for grov til at skelne mellem funktioner, der er omtrent ens, et fænomen, som har en ikke ringe betydning, da man ofte ønsker at identificere en funktion f på basis af integraler, hvor f optræder i integranden.

Lad $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være begrænset og lad h være en Riemann'sk nulfunktion. Da er $\alpha|h|$ en Riemann'sk nulfunktion for ethvert $\alpha \in \mathbb{R}$. Specielt er $|h|\sup|f|$ en nulfunktion og af $0 \leq |hf| \leq |h|\sup|f|$ følger ved sætning 15.19.1, at $|hf|$ er en nulfunktion. Altså er hf en Riemann'sk nulfunktion.

Med $\hat{O}$ vil vi betegne klassen af Riemann'ske nulfunktioner. Hver af de ved $\dot{=}$ inducerede klasser har da formen

$$f + \hat{O} = \{f+h \mid h \in \hat{O}\},$$

hvor f er begrænset og har begrænset støttemængde. Vi har nu åbenbart ifølge det foregående

$$\hat{0} + \hat{0} = \hat{0}; f\hat{0} = \hat{0},$$

og vi får derfor

$$(f+\hat{0}) + (g+\hat{0}) = (f+g) + (\hat{0}+\hat{0}) = (f+g)+\hat{0}$$

$$(f+\hat{0})(g+\hat{0}) = fg+(f\hat{0}+g\hat{0}+\hat{0}\hat{0}) = fg+\hat{0},$$

hvilket viser, at der er overensstemmelse mellem klasseinddelingen og regneoperationerne.

15.27. Vi vil nu ligesom i 15.21 betragte $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, hvis punkter betegnes $(\underline{x}, \underline{y})$, hvor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$.

15.27.1. Sætning. For en begrænset funktion $f: \mathbb{R}^{n+p}$ ind i $\mathbb{R}$ med begrænset støttemængde gælder ulighederne

$$\int f \leq \int \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x} \leq \left\{ \int \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x} \right\} \leq \int \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x} \leq \int f$$

Bevis. Vi sætter $F_1(\underline{x}) = \int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}$, $F_2(\underline{x}) = \int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}$, og vi har da $F_1 \leq F_2$, altså $\int F_1 \leq \int F_2$ og $\int F_1 \leq \int F_2$. Dermed har vi vist gyldigheden af de ikke trivielle blandt de 4 midterste uligheder. For en trappefunktion $\phi \leq f$ gælder $\phi(\underline{x}) = \int \phi(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \leq \int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} = F_1(\underline{x})$, hvor ϕ er en trappefunktion. Altså er ifølge sætning 15.21.1

$$\int \phi = \int \Phi \leq \int F_1 = \int \left(\int f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} \right) d\underline{x},$$

og da dette gælder for alle valg af trappefunktionen $\phi \leq f$, vil $\int f = \sup \left\{ \int \phi \mid \phi \leq f \right\}$ tilfredsstille den samme ulighed. Dermed er gyldigheden af det venstre ulighedstegn bevist, og det højre vise tilsvarende.

15.27.2. Sætning. Lad $f: \mathbb{R}^{n+p}$ ind i $\mathbb{R}$ være en Riemann-integrabel funktion. De ved

$$F_1(\underline{x}) = \int_{\underline{y}} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}, \quad F_2(\underline{x}) = \overline{\int} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y},$$

$$G_1(\underline{y}) = \int_{\underline{x}} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}, \quad G_2(\underline{y}) = \overline{\int} f(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{x}$$

definere afbildninger $F_1, F_2: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ og $G_1, G_2: \mathbb{R}^p$ ind i $\mathbb{R}$ tilfredsstiller relationerne

$$F_1 \doteq F_2, \quad G_1 \doteq G_2.$$

Endvidere er disse funktioner Riemann-integrable, og

$$\int f = \int F_1 = \int F_2 = \int G_1 = \int G_2.$$

Bevis. Da f er Riemann-integrabel, er $\int = \overline{\int}$, hvilket bevirker, at alle lighedstegnene i sætning 15.27.1 kommer til at gælde, og vi får derfor

$$\int f = \int F_1 = \overline{\int} F_1 = \int F_2 = \overline{\int} F_2,$$

hvilket viser, at F_1 og F_2 er Riemann-integrable, og at

$\int (F_2 - F_1) = 0$, altså $F_1 \doteq F_2$. Ved at lade $\underline{x}$ og $\underline{y}$ bytte rolle i sætning 15.27.1 fås et nyt sæt uligheder, der giver påstandene om G_1 og G_2 .

Betydningen af sætning 15.27.2 er, at en integration i flere dimensioner kan udføres ved gentagne integrationer i 1 dimension.

15.28. Det viser sig, at klassen af Riemann-integrable funktioner på $\mathbb{R}^n$ også er organiseret ved multiplikation, samt operationerne $\vee$ og $\wedge$. Vi vil basere beviserne på det trivielle kriterium.

15.28.1. Riemann's integrabilitetskriterium. Lad $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse, for at f er Riemann-integrabel, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer trappefunktioner $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$, som tilfredsstiller følgende betingelser:

$$\inf f(\mathbb{R}^n) \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2 \leq \sup f(\mathbb{R}^n); \quad \int (\varphi_2 - \varphi_1) \leq \varepsilon.$$

Bevis. Hvis φ_1 og φ_2 opfylder de anførte betingelser, giver ulighederne $\int \varphi_1 \leq \int f \leq \int \varphi_2$, at $\int f - \int \varphi_1 \leq \varepsilon$. Heraf følger, at betingelsen er tilstrækkelig. Hvis f er Riemann-integrabel, kan vi ifølge definitionerne af nedre og øvre integral vælge trappefunktionerne ψ_1 og ψ_2 , således at

$$\psi_1 \leq f \leq \psi_2, \quad \int \psi_1 \geq \int f - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \int \psi_2 \leq \int f + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Hvis vi derefter sætter $\varphi_1 = \psi_1 \vee \inf f(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_2 = \psi_2 \wedge \sup f(\mathbb{R}^n)$, bliver alle ulighederne opfyldt.

15.28.2. Sætning. Hvis $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann-integrable funktioner, er $f \vee g$, $f \wedge g$, $|f|$, fg Riemann-integrable.

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Vi kan vælge trappefunktioner $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, således at

$$\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2, \quad \psi_1 \leq g \leq \psi_2; \quad \int (\varphi_2 - \varphi_1) \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \int (\psi_2 - \psi_1) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Vi har da

$$\varphi_1 \vee \psi_1 \leq f \vee g \leq \varphi_2 \vee \psi_2,$$

og hvis vi for et $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ har $\varphi_1(\underline{x}) \geq \psi_1(\underline{x})$, får vi

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \vee \psi_2)(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_1)(\underline{x}) &= \varphi_2(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_2)(\underline{x}) \leq \\ &\varphi_2(\underline{x}) - \varphi_1(\underline{x}), \end{aligned}$$

og helt generelt får vi derfor

$$(\varphi_2 \vee \psi_2)(\underline{x}) - (\varphi_1 \vee \psi_1)(\underline{x}) \leq (\varphi_2(\underline{x}) - \varphi_1(\underline{x})) + (\psi_2(\underline{x}) - \psi_1(\underline{x}))$$

altså

$$\int ((\varphi_2 \vee \psi_2) - (\varphi_1 \vee \psi_1)) \leq \int (\varphi_2 - \varphi_1) + \int (\psi_2 - \psi_1) \leq \varepsilon,$$

og dermed har vi vist, at $f \vee g$ er Riemann-integrabel. Analogt

for $f \wedge g$. Af $|f| = f \vee -f$ følger dernæst, at $|f|$ er integrabel.

Af relationen $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ fremgår, at vi viser, at fg er integrabel ved at vise, at kvadratet på en integrabel funktion f er integrabelt. Da $|f|$ er integrabel og $f^2 = |f|^2$, kan vi

antage $f \geq 0$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan da bestemme trappefunktioner φ_1 og φ_2 , således at

$$0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2 \leq \sup f(\mathbb{R}^n); \int (\varphi_2 - \varphi_1) \leq \frac{\varepsilon}{2(\sup f(\mathbb{R}^n))},$$

og vi har da

$$\varphi_1^2 \leq f^2 \leq \varphi_2^2$$

og

$$\int (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) = \int (\varphi_2 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 2 \int (\varphi_2 - \varphi_1) \sup f(\mathbb{R}^n) \leq \varepsilon,$$

og da φ_1 og φ_2 er trappefunktioner, medfører dette, at f er Riemann-integrabel, og dermed er beviset for sætning 15.28.2 fuldført.

15.29. Vi vil nu gå over til at omtale Riemann-målet. Vi vil især lægge vægt på sammenhængen mellem Riemann-integralet og Riemannmålet, og det vil da vise sig, at målets vigtigste egenskaber let udelades af integralets.

15.29.1. Definition. For enhver begrænset mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sætter vi (idet vi underforstår, at T betegner en vilkårlig trappemængde)

$$\underline{m}(A) = \sup \left\{ m(T) \mid T \subseteq A \right\}; \quad \overline{m}(A) = \inf \left\{ m(T) \mid T \supseteq A \right\}$$

Her kaldes $\underline{m}(A)$ det indre og $\overline{m}(A)$ det ydre Riemann-mål af A . Hvis $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) = m(A)$, siges A at være Riemann-målelig, og $m(A)$ kaldes målet af A .

15.29.2. Sætning. For enhver begrænset mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gælder

$$\underline{m}(A) = \underline{m}(\overset{\circ}{A}), \quad \overline{m}(A) = \overline{m}(\overline{A}).$$

Bevis. For enhver trappemængde $T \subseteq A$ gælder $m(T) = m(\overset{\circ}{T})$ og $\overset{\circ}{T} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Heraf følger den første påstand, og den anden vises analogt.

15.30. Vi går nu over til sammenhængen mellem mål og integral. For $A \subseteq \mathbb{R}^m$ betegner χ_A som sædvanlig den karakteristiske

funktion defineret ved

$$\chi_A(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} \notin A \\ 1 & \text{for } \underline{x} \in A. \end{cases}$$

15.30.1. Sætning. For enhver punktmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gælder

$$\underline{m}(A) = \int \chi_A ; \quad \overline{m}(A) = \int \chi_A.$$

Bevis. Hvis φ er en trappefunktion og $\varphi \leq \chi_A$, da er $B = \varphi^{-1}([0,1])$ en trappemængde og $B \subseteq A$. Endvidere er $\varphi \leq \chi_B$. Af sætning 15.25.1 og definitionen 15.18.1 får vi da

$\int \varphi \leq \int \chi_B = m(B) \leq \underline{m}(A)$,
hvilket viser, at $\int \chi_A \leq \underline{m}(A)$. Hvis $T \subseteq A$ er en trappemængde, får vi på den anden side

$$\int \chi_A \geq \int \chi_T = \int \chi_T = m(T),$$

og da dette gælder for alle $T \subseteq A$, får vi $\int \chi_A \geq \underline{m}(A)$. Den sidste påstand fås analogt.

Vi inddrager nu $\mathbb{R}^{n+1}$ i undersøgelserne, og dets punkter betegnes $(\underline{x}, y)$, hvor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

15.30.2. Sætning. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være begrænset og positiv og have den begrænsede støtte A . Lad $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ betegne den begrænsede punktmængde

$$B = \left\{ (\underline{x}, y) \mid \underline{x} \in A \wedge y \in [0, f(\underline{x})] \right\}.$$

Da er

$$\underline{m}(B) = \int f ; \quad \overline{m}(B) = \int f.$$

Bevis. Lad χ_B være den karakteristiske funktion for B . Vi har da $\underline{m}(B) = \int \chi_B$, hvor integralet udstrækkes over $\mathbb{R}^{n+1}$, altså ifølge sætning 15.27.1

$$\underline{m}(B) \leq \int \left(\int f(\underline{x}, y) dy \right) d\underline{x} = \int f(\underline{x}) d\underline{x} = \int f,$$

hvor $f(\underline{x}, y)$ for fast $\underline{x}$ er karakteristisk funktion for intervallet $[0, f(\underline{x})[$. For enhver positiv trappefunktion $\varphi \leq f$ vil B indeholde mængden

$$\{(\underline{x}, y) \mid \underline{x} \in A \wedge y \in [0, \varphi(\underline{x})[\},$$

som ifølge sætning 15.20.1 har målet $\int \varphi$. Altså er $\underline{m}(B) \geq \int \varphi$, og da dette gælder for ethvert $\varphi \leq f$, får vi $\underline{m}(B) \geq \int f$, og dermed er sætningen bevist.

15.31. I integralregningen, som den behandlede i gymnasiet, benyttedes et integral over et endeligt interval, og svarende dertil vil vi definere et integral over en Riemann-integrabel mængde. Vi vil stadig "lade som om" integranderne er definerede i hele rummet, idet vi kan udvide definitionsområdet til hele rummet ved at sætte funktionsværdien lig med 0 for alle punkter udenfor definitionsområdet.

15.31.1. Definition. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være en Riemann-målelig mængde med den karakteristiske funktion χ_A , og lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en vilkårlig funktion. Hvis $\chi_A f$ er begrænset og Riemann-integrabel, siges f at være Riemann-integrabel over A , og vi sætter

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int (\chi_A f).$$

Vi bemærker, at en Riemann-integrabel funktion ifølge sætning 15.28.2 er Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig mængde. Vi vil nu gå over til at anvende ordet Riemann-integrabel om enhver funktion, som er Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig mængde.

15.31.2. Definition. For en Riemann-målelig mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, som er begrænset på A , indfører vi

et nedre og et øvre Riemann-integral over A ved definitionerne

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int (\chi_A f); \quad \overline{\int}_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \overline{\int}_A (\chi_A f).$$

15.32. Vi skal vise nogle flere sætninger om operationer med Riemann-integrable funktioner.

15.32.1. Sætning. Hvis A og B er Riemann-målelige mængder i $\mathbb{R}^n$, da er $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ Riemann-målelige.

Bevis. Påstanden følger umiddelbart af, at de karakteristiske funktioner

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B; \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B; \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$$

er Riemann-integrable.

15.32.2. Sætning. Hvis en funktion f er Riemann-integrabel over en mængde A , er f også Riemann-integrabel over enhver Riemann-målelig delmængde af A . Hvis f er Riemann-integrabel over A og B , er f også Riemann-integrabel over $A \cup B$, $A \cap B$ samt $A \setminus B$.

Bevis. For $B \subseteq A$, hvor B er Riemann-målelig, og $\chi_A f$ er Riemann-integrabel, fås at $\chi_B f = \chi_B \chi_A f$ er Riemann-integrabel. Dermed er første påstand bevist. Da $A \cap B$ og $A \setminus B$ netop er Riemann-integrable delmængder af A , kan vi slutte, at f er Riemann-integrabel over disse mængder. Da $\chi_A, \chi_B, \chi_A f$ og $\chi_B f$ er Riemann-integrable, får vi endvidere, at $\chi_{A \cup B} f = \chi_A f + \chi_B f - \chi_A \chi_B f$ er Riemann-integrabel. Dermed er sætningen bevist.

15.32.3. Sætning. Hvis A og B er Riemann-målelige mængder i $\mathbb{R}^n$ gælder

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

Hvis A og B er disjunkte fås $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ og for $B \subseteq A$ fås $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$.

Bevis. Sætningen fås umiddelbart ved at skrive målene

som integraler af de karakteristiske funktioner.

15.32.4. Sætning. Hvis A og B er Riemann-målelige disjunkte mængder i $\mathbb{R}^n$, og $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er begrænset på $A \cup B$, gælder relationerne

$$\int_{A \cup B} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_B f(\underline{x}) d\underline{x},$$

$$\int_{A \cup B} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_B f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Bevis. Af sætning 15.24.2 fås

$$\int_{A \cup B} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int (\chi_A + \chi_B) f \geq \int \chi_A f + \int \chi_B f = \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_B f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Hvis $\varphi \leq f$ er en trappefunktion, får vi

$$\int_{A \cup B} \varphi = \int_A \chi_A \varphi + \int_B \chi_B \varphi \leq \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_B f(\underline{x}) d\underline{x},$$

og da dette gælder for enhver trappefunktion $\varphi \leq f$, kan vi slutte, at

$$\int_{A \cup B} f(\underline{x}) d\underline{x} \leq \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_B f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

15.33. Vi har tidligere bemærket, at målet for trappemængder var éntydig fastlagt ved betingelserne m1)-m4) i 15.7.1. Dette medfører åbenbart, at også målet af enhver Riemann-målelig mængde er fastlagt, hvis man kræver at målet skal tilfredsstille de 4 betingelser. Det er på den anden side klart, at målet virkelig tilfredsstiller alle 4 betingelser.

De 4 betingelser fastlægger altså målet fuldstændigt for alle Riemann-målelige mængder, men det er nødvendigt at supplere dem med en femte betingelse, hvis man ønsker målet fastlagt også for visse andre mængder.

Integralet kan ligesom målet fastlægges ved, at det skal tilfredsstille forholdsvis få, simple betingelser. F.eks. vil additionsreglen $\int(f+g) = \int f + \int g$ i forbindelse med sætningen om

sammenhængen mellem mål og integral (15.30.2) fuldstændig fastlægge integralet.

Vi skal ikke gå nærmere ind på disse éntydighedsspørgsmål, idet det her anførte vil være tilstrækkeligt for vort formål.

15.34. Betingelsen m_3) i 15.7.1 viser, at Riemann-målet ikke ændres ved en forskydning af koordinatsystemet. Vi vil nu vise, at Riemann-målet og dermed Riemann-integralet er helt uafhængigt af koordinatsystemet. Dertil kræves dog nogle hjælpesætninger, som vi vil bevise i dette afsnit.

15.34.1. Sætning. Enhver begrænset konveks mængde er Riemann-integrabel.

Bevis (kopieret efter Poul Hansen, NMT 9,26-28,1961). Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval og $A \subseteq I$ en konveks mængde. Vi betragter en følge af simple inddelinger af I , således at den q -te inddeling fås ved, at hver projektion af I deles i 3^q lige store åbne intervaller samt et antal udartede intervaller. Alle ikke åbne delintervaller har da målet 0, så vi kan tillade os at ignorere dem. De åbne delintervaller indeholdt i A udgør en trappemængde S_q , medens de delintervaller, der indeholder punkter af A udgør en trappemængde T_q . De åbne delintervaller, der indeholder randpunkter af A , har målet $m(T_q \setminus S_q)$, og hvis vi kan vise, at $m(T_q \setminus S_q) \rightarrow 0$ for $q \rightarrow \infty$, vil sætningen være bevist. Lad $\tilde{I}$ fra den q -te inddeling være et åbent delinterval, som indeholder randpunkter af A . Ved overgangen til den $q+1$ -te inddeling falder $\tilde{I}$ i 3^n åbne delintervaller, og hvis vi kan vise, at mindst et af disse altid vil være frit for randpunkter af A , får vi

$$m(T_{q+1} \setminus S_{q+1}) \leq 3^{-n}(3^n - 1)m(T_q \setminus S_{q+1}),$$

og det vil netop medføre, at $m(T_q \setminus S_q) \rightarrow 0$ for $q \rightarrow \infty$. Sætning

15.34.1 er dermed ført tilbage til følgende hjælpesætning:

15.34.2. Lemma. Lad $I = I_1 \times \dots \times I_n$ være et interval, og lad $I_\nu = I_{\nu 1} \cup I_{\nu 2} \cup I_{\nu 3}$, $\nu = 1, \dots, n$ være en inddeling af hvert I_ν i disjunkte delintervaller. Derved fås en inddeling af I i delintervaller, blandt hvilke $I' = I_{12} \times \dots \times I_{n2}$ vil blive betegnet som det midterste delinterval. Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være en konveks mængde. Hvis det indre af hvert delinterval undtagen I' indeholder randpunkter af A gælder $I' \subseteq A$.

Bevis. Vi benytter induktion efter n . For $n = 1$ er påstanden triviel. Vi antager nu lemmaet opfyldt for intervallet I og enhver konveks mængde, og vi betragter $I^* = I \times I_{n+1}$, samt en inddeling $I_{n+1} = I^1 \cup I^2 \cup I^3$ og en konveks mængde A , hvis rand indeholder indre punkter af alle delintervaller af I^* på nær $I' \times I^2$. Mængden $A \cap (I \times I^1)$ er konveks, og dens projektion på I er da også konveks, og da den indeholder punkter af alle delintervaller af I på nær I' , vil $A \cap (I \times I^1)$ for hvert $\underline{x} \in I'$ indeholde et punkt $(\underline{x}, y')$ med $y' \in I^1$. Derved benyttedes induktionsantagelsen. Tilsvarende ses, at $A \cap (I \times I^3)$ indeholder et $(\underline{x}, y'')$ med $y'' \in I^3$. Da $(\underline{x}, y')$ og $(\underline{x}, y'')$ tilhører den konvekse mængde A , gælder $\underline{x} \times [y', y''] \subseteq A$, og ved at anvende dette for hvert $\underline{x} \in I'$ får vi $I' \times I^2 \subseteq A$, og dermed er lemmaet fuldstændigt bevist.

15.35. Vi betragter nu et n -dimensionalt rum, på hvilket der er indført to forskellige koordinatsystemer. Vi får da to forskellige slags intervaller, men da intervaller er konvekse, og konveksitet er en egenskab, som ikke er afhængig af koordinatsystemet, vil intervaller i det ene system ifølge sætning 15.34.1 være målelige mængder i det andet system. Da en foreningsmængde af målelige mængder igen er målelig, vil trappe-

mængder i det ene system blive målelige mængder i det andet system.

På systemet af trappemængder i det ene system vil målet m^* fra det andet system tilfredsstille $m_1) - m_3)$ fra 15.7.1, men enhedsintervallet vil måske få et mål $k \neq 1$, men k bliver i hvert fald positivt, og $k^{-1}m^*$ bliver da netop det sædvanlige mål. Overgang til et andet koordinatsystem vil altså blot have til følge, at målet af enhver trappemængde multipliceres et og samme tal k .

Heraf fremgår, at også enhedskuglens mål vil blive multipliceret med k , men det er på den anden side klart, at netop enhedskuglens mål ikke kan ændres ved drejning af koordinatsystemet. Vi behøver blot at dreje alle indre og ydre trappemængder sammen med koordinatsystemet for at indse dette. Altså er $k = 1$, og vi har vist, at Riemann-målet er uafhængigt af koordinatsystemet.

15.36. Vi betragter et begrænset interval $I \subset \mathbb{R}^n$. Med $\mathcal{P}(I)$ (mængden af partitioner af I) vil vi forstå den mængde der omfatter følgende elementer:

- 1) Alle inddelinger $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$ af I i disjunkte delintervaller med et særlig udvalgt punkt $\underline{u}_k \in I_k$ for hvert delinterval I_k .
- 2) Et yderligere element P_∞ .

En inddeling med et særlig udvalgt punkt i hvert delinterval vil blive betegnet med P , eventuelt med en index. En sædvanlig inddeling betegnes D ; vi kan skrive $P = (D, (\underline{u}))$, idet $(\underline{u})$ betegner sættet af udvalgte punkter. Vi skriver $D_2 \supseteq D_1$, når D_2 fås som videredeling af D_1 . For $P_1 = (D_1, (\underline{u}))$ og $P_2 = (D_2, \underline{v})$ skriver vi $P_2 \supseteq P_1$ med helt samme betydning som $D_2 \supseteq D_1$.

Vi indfører en topologi på $\mathcal{P}(I)$, idet vi udnævner føl-

gende delmængder af $\dot{P}(I)$ til åbne mængder:

- 1) Alle delmængder, som ikke indeholder P_∞ .
- 2) Alle delmængder, der indeholder en inddeling $P = (D, (u))$ og alle videredelingen af denne.

Det er helt klart, at den således definerede mængde af inddelinger tilfredsstiller de tre betingelser, der kræves af mængden af åbne mængder. Vi vil benytte betegnelsen $\dot{P}(I)$ også for det således definerede topologiske rum.

Vi vil benytte betegnelsen $\dot{P}^*(I)$ for det topologiske rum, der fås, når mængden 2) erstattes med

- 2'). Alle delmængder, der for et tal $\varepsilon > 0$ indeholder alle inddelinger, hvis delintervaller har alle kantlængder $< \varepsilon$.

Det er klart, at topologien på $\dot{P}(I)$ er den fineste af de to topologier. En funktion, som er kontinuert på $\dot{P}^*(I)$ vil derfor også være kontinuert på $\dot{P}(I)$. Vi skal nu se, at et integral kan defineres som en grænseværdi i punktet P_∞ for en afbildning $\sigma: \dot{P}(I) \setminus \{P_\infty\}$ ind i $\mathbb{R}$, idet én af de her omtalte topologier benyttes.

Vi bemærker, at begge topologier er diskrete på $\dot{P}(I) \setminus \{P_\infty\}$, og at en funktion er kontinuert på $\dot{P}(I)$ er derfor ensbetydende med, at den er kontinuert i punktet P_∞ .

15.37. Lad I være et begrænset interval og $f: I$ ind i $\mathbb{R}$ en begrænset funktion på I . Hvis $P \in \dot{P}(I)$ er givet ved $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$, samt $\underline{u}_k \in I_k$, $k = 1, \dots, q$, indfører vi den til P svarende middelsum for f ved definitionen

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^q m(I_k) f(\underline{u}_k),$$

og endvidere til inddelingen svarende undersum og oversum for f ved definitionerne

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^q m(I_k) \inf f(I_k), \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^q m(I_k) \sup f(I_k).$$

Summerne s og S afhænger ikke af punkterne $\underline{u}_k$. De tre summer tilfredsstiller åbenbart ulighederne

$$s(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P).$$

Svarende til inddelingen P , konstruerer vi to trappefunktioner $\varphi_{P,f}$ og $\Phi_{P,f}$, idet vi sætter

$$\varphi_{P,f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} \notin I \\ \inf f(I_k) & \text{for } \underline{x} \in I_k \end{cases} \quad \Phi_{P,f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \underline{x} \notin I \\ \sup f(I_k) & \text{for } \underline{x} \in I_k. \end{cases}$$

Vi har da

$$s(f, P) = \int \varphi_{P,f} \quad ; \quad S(f, P) = \int \Phi_{P,f}.$$

For en videredeling $P_1 \supseteq P$ får vi åbenbart

$$\varphi_{P_1,f} \geq \varphi_{P,f} \quad ; \quad \Phi_{P_1,f} \leq \Phi_{P,f}.$$

Derfor bliver også

$$s(f, P_1) \geq s(f, P); \quad S(f, P_1) \leq S(f, P).$$

For $\varepsilon > 0$ kan vi vælge en trappefunktion $\varphi \leq f$, således at $\int \varphi \geq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon$. Vi kan vælge inddelingen P , således at φ er konstant på hvert I_q , og vi har da $\varphi_{P,f} \geq \varphi$, altså

$$s(f, P) \geq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon.$$

For enhver videredeling $P_1 \supseteq P$ vil det samme da gælde, så vi har

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P \in \mathcal{P}(I) \forall P_1 \supseteq P \left(\int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon \leq s(f, P) \leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} \right),$$

eller med andre ord

$$\lim_{P \rightarrow P_\infty} s(f, P) = \int_{-I} f(\underline{x}) d\underline{x},$$

hvor grænseovergangen er foretaget på $\dot{P}(I)$. Analogt fås

$$\lim_{P \rightarrow P_\infty} S(f, P) = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x},$$

og for en Riemann-integrabel funktion f får vi derfor

$$\lim_{P \rightarrow P_\infty} \sigma(f, P) = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Lad os nu på den anden side antage, at $\sigma(f, P)$ går mod en grænseværdi A for $P \rightarrow P_\infty$. For ethvert $\varepsilon > 0$ har vi da en inddeling $P:I = I_1 \cup \dots \cup I_q$, $\underline{x}_k \in I_k$, således at

$$\left| A - \sum_{k=1}^q m(I_k) f(\underline{x}_k) \right| \leq \varepsilon$$

for alle valg af punkterne $\underline{x}_k$. Nu er

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{k=1}^q m(I_k) f(\underline{x}_k) \mid \underline{x}_k \in I_k, k = 1, \dots, q \right\} = \\ & \inf \left(\left\{ m(I_1) f(\underline{x}_1) \mid \underline{x}_1 \in I_1 \right\} + \dots + \left\{ m(I_q) f(\underline{x}_q) \mid \underline{x}_q \in I_q \right\} \right) = \\ & \inf \left\{ m(I_1) f(\underline{x}_1) \mid \underline{x}_1 \in I_1 \right\} + \dots + \inf \left\{ m(I_q) f(\underline{x}_q) \mid \underline{x}_q \in I_q \right\} = \\ & \sum_{k=1}^q m(I_k) \inf f(I_k) = s(f, P). \end{aligned}$$

Vi har derfor $|A - s(f, P)| \leq \varepsilon$ og analogt $|A - S(f, P)| \leq \varepsilon$, altså

$$S(f, P) - s(f, P) \leq 2\varepsilon,$$

hvilket medfører, at f er Riemann-integrabel, og det fremgår da af det foregående, at A netop er Riemann-integralet. Vi kan således definere Riemann-integralet som grænseværdi for middelsummer.

15.38. Lad I være et interval på $\mathbb{R}^n$ og lad $A \subseteq I$ være en vilkårlig mængde. Lad $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$ være en inddeling af I i

disjunkte intervaller. De af intervallerne I_k , som er delmængder af A , udgør en trappemængde T_1 , og de intervaller I_k , som har punkter fælles med A , udgør en trappemængde T_2 . Vi har da

$$m(T_1) \leq \underline{m}(A) \leq \overline{m}(A) \leq m(T_2),$$

og vi vil nu vise sætningen:

15.38.1. Sætning. Til $\varepsilon > 0$ svarer $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$, hvor alle kantlængder i hvert I_k er $\leq \delta$, gælder for de tilsvarende trappemængder T_1 og T_2 , at

$$m(T_1) \geq \underline{m}(A) - \varepsilon; \quad m(T_2) \leq \overline{m}(A) + \varepsilon.$$

Bevis. Det er nok at vise, at δ kan vælges, således at den første ulighed gælder, idet $\overline{m}(A) = m(I) - \underline{m}(I \setminus A)$. Vi vælger en trappemængde $S = I'_1 \cup \dots \cup I'_p$, hvor $I'_1, \dots, I'_p$ er disjunkte, således at $S \subseteq A$ og $m(S) \geq \underline{m}(A) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Dernæst erstatter vi hvert interval I'_j med et mindre interval I''_j , som er ligedannet med I'_j og har samme centrum, og således at

$$m(I''_1) + \dots + m(I''_p) \geq \underline{m}(A) - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Vi vælger nu δ mindre end den mindste afstand fra et I''_j til randen af det tilsvarende I'_j . For enhver inddeling af I i intervaller, hvis kantlængder alle er $< \delta$, vil det da gælde, at ethvert delinterval, som har punkter fælles med et I''_j , hører med til T_1 . Så vil T_1 dække alle intervallerne I''_j , og derfor bliver

$$m(T_1) \geq m(I''_1) + \dots + m(I''_p) \geq \underline{m}(A) - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

og dermed er påstanden bevist.

Vi understreger, at afstanden fra et I''_j til randen af det tilsvarende I'_j bestemmes ganske elementært, som $\frac{1}{2}(1-\kappa)\lambda$, hvor κ er formindskelsesfaktoren og λ den mindste kantlængde i I'_j . Vi har altså stadig ikke benyttet kompakthedsteorien.

15.39. Til sætning 15.38.1 svarer følgende sætning om integraler:

15.39.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval og $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ en begrænset funktion. Der eksisterer svarende til $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling P af I i delintervaller med kantlængder $\leq \delta$ gælder, at

$$s(f,P) \geq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon; \quad S(f,P) \leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} + \varepsilon.$$

Bevis. Det er nok at vise den første ulighed. Hvis vi adderer en konstant α til f , adderes $\alpha m(I)$ til $s(f,P)$ og til $\int f(\underline{x}) d\underline{x}$. Vi kan derfor antage, at $f \geq 0$. Vi vælger et reelt tal M , så $f \leq M$. Ifølge sætning 15.38.1 eksisterer der et $\delta > 0$, således at det for enhver inddeling af $I \times [0, M]$ i delintervaller med kantlængde $< \delta$ gælder, at vi får $m(T_1) \geq m(\{\underline{x}, y \mid \underline{x} \in I \text{ og } y \in [0, f(\underline{x})]\}) - \varepsilon$. For en inddeling $I = I_1 \cup \dots \cup I_q$ i delintervaller med kantlængde $\leq \delta$, kan vi dele hvert interval $I_k \times [0, \inf f(I_k)]$ i delintervaller med kantlængde $\leq \delta$, og det følger, at

$$\sum_{k=1}^q m(I_k) \inf f(I_k) \geq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon,$$

og dermed er sætningen bevist.

Sætningen udtrykker, at definitionen af integralet som grænseværdi også vil være rigtig, når rummet $\mathbb{P}^*(I)$ lægges til grund. Dette er et smukt, klassisk resultat, men i praksis er det lige så bekvemt at benytte definitionen af integralet som grænseværdi i rummet $\mathbb{P}(I)$.

15.40. Vi har nu afsluttet den egentlige teori for Riemann-integralet. Vi savner endnu et bevis for, at en kontinuert funktion på et afsluttet interval er Riemann-integrabel, men

det fås let ved hjælp af sætningen om ligelig kontinuitet.

Vi skal i denne forbindelse fremhæve, at Riemann's integrationsteori slet ikke har benyttet kompakthedsteorien, men denne kommer altså ind, når det bevises, at en kontinuert funktion er Riemann-integrabel.

En nærmere undersøgelse viser i øvrigt, at det er uvæsentligt for sagen, om intervallet er afsluttet. Det viser sig yderligere, at en videregående analyse af Riemann integrabilitetens væsen baseret på anvendelser af kompakthedsteorien fører til resultater, der naturligere hører til under Lebesgue's integralteori.

Vi skal i denne forbindelse kun omtale enkelte resultater for denne idékreds, som vil blive udførligt behandlet i matematik 2.

15.41. Vi har ofte benyttet os af, at der til en Riemann-målelig mængde A og et $\varepsilon > 0$ svarer trappemængder T_1 og T_2 , således at $T_1 \subseteq A \subseteq T_2$ og $m(T_2 - T_1) < \varepsilon$. Vi kan åbenbart erstatte hvert af de intervaller, hvoraf T_1 består, med et afsluttet delinterval, og hvert af de intervaller, hvoraf T_2 består, med et omsluttende åbent interval, således at betingelserne forbliver opfyldt. Vi kan altså altid vælge T_1 afsluttet og T_2 åben. Vi udnytter dette i beviset for følgende sætning, som i øvrigt bygger på kompakthedsteorien:

15.41.1. Sætning. Lad A være en vilkårlig begrænset mængde, og lad (A_q) være en følge af delmængder, således at

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots ; \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots = A.$$

Da konvergerer følgen $(\overline{m}(A_q))$ mod en grænseværdi $\geq \underline{m}(A)$.

Bevis. Da $(\overline{m}(A_q))$ er voksende og har $\overline{m}(A)$ som overtal, er $(\overline{m}(A_q))$ konvergent. Lad ε være et positivt tal. Vi kan da vælge en afsluttet trappemængde $F \subseteq A$, således at $m(F) \geq$

$\underline{m}(A) - \varepsilon$. For hvert $q \in \mathbb{N}$ kan vi desuden vælge en åben trappe-mængde $O_q \supseteq A_q$, således at $O_q \supseteq A_q$ og $m(O_q) \leq \overline{m}(A_q) + 2^{-q}\varepsilon$.

Da F er kompakt og overdækket af $\{O_q | q \in \mathbb{N}\}$, kan vi vælge q , således at $O_1 \cup \dots \cup O_q \supseteq F$. Vi vil nu ved induktion vise, at

$$m(O_1 \cup \dots \cup O_k) \leq \overline{m}(A_k) + \sum_{\nu=1}^k 2^{-\nu} \varepsilon$$

for ethvert $k \in \mathbb{N}$. For $k = 1$ er uligheden opfyldt. Hvis uligheden antages opfyldt for en værdi af k , har vi

$$\overline{m}(A_k) \leq m((O_1 \cup \dots \cup O_k) \cap O_{k+1}) \leq m(O_1 \cup \dots \cup O_k) \leq \overline{m}(A_k) + \sum_{\nu=1}^k 2^{-\nu} \varepsilon,$$

altså

$$m(O_1 \cup \dots \cup O_{k+1}) = m((O_1 \cup \dots \cup O_k) \setminus (O_1 \cup \dots \cup O_k) \cap O_{k+1}) + m(O_{k+1}) \leq \sum_{\nu=1}^k 2^{-\nu} \varepsilon + \overline{m}(A_{k+1}) + 2^{-k-1} \varepsilon,$$

og dermed er uligheden bevist.

Det følger nu umiddelbart, at

$$\underline{m}(A) \leq m(F) + \varepsilon \leq m(O_1 \cup \dots \cup O_q) + \varepsilon \leq \overline{m}(A_q) + \sum_{\nu=1}^q 2^{-\nu} \varepsilon + \varepsilon < \overline{m}(A_q) + 2\varepsilon.$$

Heraf følger sætningen umiddelbart.

15.41.2. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval og $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en begrænset funktion. Lad (f_q) være en voksende følge af begrænsede funktioner $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. Hvis (f_q) konvergerer punktvis mod f , altså hvis

$$\forall \underline{x} \in I \quad (f_q(\underline{x})) \rightarrow f(\underline{x}),$$

gælder også

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Hvis følgen (f_q) er aftagende i stedet for voksende, gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} \leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Bevis. Hvis vi adderer en reel konstant c til alle f_q og til f , forøges alle integralerne med $cm(I)$, hvilket ikke har indflydelse på gyldigheden af grænserelationerne. Vi kan derfor antage, at alle funktionerne er positive, og den første relation bliver da en umiddelbar følge af sætning 15.41.2, når integralerne fortolkes som mål af punktmængder. Den anden relation fås af den første ved overgang til følgen $(-f_q)$ og funktionen $-f$.

Hvis alle funktionerne f_q i sætning 15.41.2 er Riemann-integrable, gælder

$$\int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I f_q(x) dx \leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Hvis f er Riemann-integrabel fås

$$\int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} \leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Vi har derfor sætningen:

15.41.3. Sætning. Hvis i sætning 15.41.2 enten f eller alle f_q er Riemann-integrable, gælder lighedstegnet i påstanden.

15.42. De ovenfor beviste sætninger om konvergente følger kan udvides til følger, som ikke er monotone, uden at det bliver nødvendigt at inddrage nye hjælpemidler.

15.42.1. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval og (f_q) en følge af Riemann-integrable funktioner, som konvergerer punktvis mod 0 på I . Hvis der eksisterer et reelt tal M , således at

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \forall \underline{x} \in I (|f_q(\underline{x})| \leq M)$$

(følgen kaldes da ensartet begrænset), gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

Bevis. Vi definerer $g_q: I \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$g_q(\underline{x}) = \sup\{|f_k(\underline{x})| \mid k \geq q\},$$

og vi har da for ethvert $\underline{x} \in I$, at

$$\lim(g_q(\underline{x})) = \lim \sup |f_k(\underline{x})| = \lim(f_q(\underline{x})) = 0.$$

Ifølge sætning 15.41.3 har vi derfor, idet (g_q) går aftagende mod 0, og g_q er begrænset, fordi (f_q) er ensartet begrænset, at

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_I g_q(\underline{x}) d\underline{x} = 0,$$

og sætningen følger umiddelbart heraf, idet uligheden

$g_q \geq |f_q|$ medfører, at

$$\int_I g_q(\underline{x}) d\underline{x} \geq \int_I |f_q(\underline{x})| d\underline{x} = \int_I |f_q(\underline{x})| d\underline{x} \geq \left| \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} \right| \geq 0.$$

15.42.2. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ en Riemann-integrabel funktion, og (f_q) en ensartet begrænset følge af Riemann-integrable funktioner, som konvergerer punktvis mod f på I . Da gælder

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Bevis. Idet følgen $(f - f_q)$ er ensartet begrænset og går punktvis mod 0, følger sætningen umiddelbart af den foregående.

I sætning 15.42.2 var grænsefunktionen f forudsat Riemann-integrabel. Hvis vi ønsker en sætning, der også sikrer integrabilitet af grænsefunktionen, må vi skærpe betingelserne meget væsentligt. Vi skal vise følgende sætning:

15.42.3. Sætning. Lad $I \subseteq \mathbb{R}^n$ være et interval og (f_n) en ligelig konvergent følge af Riemann-integrable funktioner

$f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$. Da er grænsefunktionen f Riemann-integrabel, og

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} = \int_I f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Bevis. Lad ε være et positivt tal. Vi vælger n , således at $|f(\underline{x}) - f_q(\underline{x})| \leq \varepsilon$ for alle $\underline{x}$, og vi har da $f_q - \varepsilon \leq f \leq f_q + \varepsilon$, hvoraf følger

$$\begin{aligned} \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} - \varepsilon m(I) &\leq \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} \leq \\ \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} &\leq \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} + \varepsilon m(I), \end{aligned}$$

altså

$$\left| \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} - \int_I f_q(\underline{x}) d\underline{x} \right| \leq 2\varepsilon m(I).$$

Da dette er opfyldt for ethvert $\varepsilon > 0$, er f Riemann-integrabel. Følgen (f_n) konvergerer i rummet $\hat{F}(I; \mathbb{R})$ (se 14.3), og er derfor begrænset i dette rum, hvilket netop betyder, at den er ensartet begrænset. Sætningens sidste påstand følger derefter af sætning 15.42.2.

15.43. Vi skal i de nærmest følgende afsnit udlede en simpel og bekvem nødvendig og tilstrækkelig betingelse for Riemann-integrabilitet. Betingelsen giver samtidig et forbavsende præcist svar på det upræcise spørgsmål: Hvor diskontinuert kan en Riemann-integrabel funktion være? Vi indleder udledelsen med definition af en begrænset funktions oscillation, et begreb, der netop kan opfattes som et mål for funktionens kontinuitet.

15.43.1. Definition. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Den ved

$$\omega_f(\underline{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sup f(K(\underline{x}; r)) - \inf f(K(\underline{x}; r)) \right)$$

definerede afbildning $\omega_f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes oscillationen af f .

At grænseværdien eksisterer følger af, at udtrykket i parentes er en positiv, voksende funktion af r .

Lad k være et positivt tal, og lad $\underline{x}$ være et punkt, hvor $\omega_f(\underline{x}) < k$. Vi kan da vælge $r > 0$, således at

$$\sup f(K(\underline{x}, r)) - \inf f(K(\underline{x}, r)) < k,$$

og for $\underline{y} \in K(\underline{x}, r)$ og $\rho = r - \|\underline{y} - \underline{x}\|$ er $K(\underline{y}, \rho) \subseteq K(\underline{x}, r)$, altså

$$\sup f(K(\underline{y}, \rho)) - \inf f(K(\underline{y}, \rho)) < k,$$

så vi får $\omega_f(\underline{y}) < k$. Dermed har vi bevist følgende sætning:

15.43.2. Sætning. For $k > 0$ er mængden $\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) < k\}$ åben og $\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geq k\}$ er afsluttet.

De to mængder er jo komplementærmængder.

15.43.3. Sætning. Mængden $\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) > 0\}$ er netop mængden af diskontinuitetspunkter for f .

Dette følger umiddelbart af definitionen af ω_f .

15.44. Vi går nu over til at vise den sætning, der skaber forbindelsen mellem oscillation og Riemann-integrabilitet.

15.44.1. Sætning. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en begrænset funktion med begrænset støtte. Da er $\int f - \int f = \int \omega_f$.

Bevis. Lad I være et interval, som indeholder støtten for f . For $q \in \mathbb{R}$ deler vi hver side af I i 2^q lige store dele og vi får derved en inddeling $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$, $m = 2^{nq}$ af I i lige store disjunkte intervaller. Vi definerer nu, idet $r > 0$

$$\varphi_q(\underline{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf \{f(\underline{y}) \mid \text{dist}(\underline{y}, I_\mu) < r\}, \text{ når } \underline{x} \in I_\mu$$

$$\psi_q(\underline{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \{f(\underline{y}) \mid \text{dist}(\underline{y}, I_\mu) < r\}, \text{ når } \underline{x} \in I_\mu;$$

$$\varphi_q(\underline{x}) = \psi_q(\underline{x}) = 0, \text{ når } \underline{x} \notin I.$$

Så er (φ_q) og (ψ_q) følger af trappefunktioner med følgende egenskaber

- 1) $\forall \underline{x} \forall q (\varphi_q(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \leq \psi_q(\underline{x}))$
- 2) $\forall \underline{x} ((\varphi_q(\underline{x})) \text{ voksende og } \psi_q(\underline{x}) \text{ aftagende})$
- 3) $\forall \underline{x} (\lim_{q \rightarrow \infty} (\psi_q(\underline{x}) - \varphi_q(\underline{x})) = \omega_f(\underline{x})).$

De to første påstande er helt indlysende, og den tredje følger umiddelbart af definitionerne af φ_q, ψ_q og ω_f . Af 2) i forbindelse med 1) fås, at (φ_q) og (ψ_q) konvergerer punktvis og sætningerne 15.41.2 og 15.41.3 giver

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int \varphi_q = \int \lim_{q \rightarrow \infty} \varphi_q \leq \int f$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int \psi_q = \int \lim_{q \rightarrow \infty} \psi_q \geq \int f,$$

og de samme sætninger i forbindelse med 3) giver

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int (\psi_q - \varphi_q) = \int \omega_f,$$

så vi får

$$\int f - \int f \leq \lim_{q \rightarrow \infty} \int (\psi_q - \varphi_q) = \int \omega_f.$$

Hvis vi nu på den anden side definerer

$$g(\underline{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf \{ f(\underline{y}) \mid \underline{y} \in K(\underline{x}, r) \}$$

$$h(\underline{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \sup \{ f(\underline{y}) \mid \underline{y} \in K(\underline{x}, r) \},$$

da er $h - g = \omega_f$. Endvidere vil det for enhver trappefunktion $\varphi < f$ gælde, at $\int g > \int \varphi$ og analogt for h . Altså er

$$\int h - \int g \leq \int f - \int f.$$

På den anden side er ifølge regnereglerne

$$\int h = \int (g + \omega_f) \geq \int g + \int \omega_f,$$

og af disse uligheder følger

$$\int \omega_f \leq \int h - \int g \leq \int f - \int f.$$

Dermed er sætningen bevist.

15.45. Det er klart, at sætning 15.44.1 umiddelbart fører til en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, for at f er Riemann-integrabel. Vi foretrækker imidlertid at give denne

denne betingelse en bekvemmere form. Dertil skal vi benytte følgende definition.

15.45.1. Definition. En punktmængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kaldes en (Lebesgue-) nulmængde, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ svarer en intervalfølge (I_q) , således at

$$A \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} I_q \quad \text{og} \quad \sum_{q=1}^{\infty} m(I_q) < \varepsilon.$$

Heraf følger umiddelbart de trivielle sætninger

15.45.2. Sætning. En delmængde af en nulmængde er selv en nulmængde.

15.45.3. Sætning. En mængde, som kun består af 1 punkt, er en nulmængde.

15.45.4. Sætning. Lad (A_p) være en følge af nulmængder. Da er $\bigcup_p A_p$ en nulmængde.

Bevis: Lad ε være et positivt tal. For hvert $p \in \mathbb{N}$ vælger vi en intervalfølge (I_{pq}) , således at

$$A_p \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} I_{pq} \quad \text{og} \quad \sum_{q=1}^{\infty} m(I_{pq}) < 2^{-p} \varepsilon.$$

Vi ordner nu alle intervallerne I_{pq} , $p, q = 1, 2, \dots$ som en følge (I'_q) og for denne gælder da

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p \subseteq \bigcup_{q=1}^{\infty} I'_q \quad \text{og} \quad \sum_{q=1}^{\infty} m(I'_q) < \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \varepsilon = \varepsilon,$$

idet $\sum \sum m(I_{pq})$ er en dobbeltrække med positive led.

15.45.5. Sætning. Enhver numerabel punktmængde i $\mathbb{R}^n$ er en nulmængde.

Bevis. Sætningen følger umiddelbart af sætningerne 15.45.3 og 15.45.4.

15.46. Vi kan nu angive en nødvendig og tilstrækkelig be-

tingelse for Riemann-integrabilitet.

15.46.1. Sætning. Lad $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være begrænset og have kompakt støtte. Afbildningen f er da Riemann-integrabel, hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (m(\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geq \varepsilon\}) = 0).$$

Bevis. Af $m(\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geq \varepsilon\}) = k > 0$ følger umiddelbart $\int \omega_f \geq k\varepsilon$ og sætning 15.44.1 viser da, at f ikke er Riemann-integrabel. Lad os nu omvendt antage, at betingelsen i sætning 15.46.1 er opfyldt. Lad ε være et positivt tal og I et interval, som indeholder støtten for f . Lad T være en trappemængde, således at

$$\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geq \varepsilon\} \subseteq T, \quad m(T) \leq \varepsilon.$$

For $\underline{x} \in T$ er $\omega_f(\underline{x}) \leq 2 \sup |f|$ og for $\underline{x} \notin T$ er $\omega_f(\underline{x}) \leq \varepsilon$. Vi har derfor

$$\int \omega_f \leq \varepsilon(m(I) + 2 \sup |f|),$$

og da denne ulighed er opfyldt for ethvert $\varepsilon > 0$, kan vi slutte, at $\int \omega_f = 0$, og sætning 15.44.1 viser derefter, at f er Riemann-integrabel.

Vi kan give sætningen følgende særdeles overskuelige formulering:

15.46.2. Sætning. En begrænset reel funktion med begrænset støtte er Riemann-integrabel, hvis og kun hvis mængden af dens diskontinuitetspunkter er en nulmængde.

Bevis. Lad først f være en Riemann-integrabel funktion. For ethvert $\varepsilon > 0$ er mængden

$$M(\varepsilon) = \{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) \geq \varepsilon\}$$

ifølge sætning 15.46.1 en Riemann nulmængde og derfor en nulmængde. Af sætning 15.45.4 følger nu, at

$$\{\underline{x} \mid \omega_f(\underline{x}) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{n}\right)$$

er en nulmængde.

Lad os dernæst antage, at $\{\underline{x} | \omega_j(\underline{x}) > 0\}$ er en nulmængde, og lad ε være et positivt tal. Af sætning 15.45.2 følger nu, at $M(\varepsilon)$ er en nulmængde. For $\delta > 0$ kan $M(\varepsilon)$ altså overdækkes med en følge af åbne intervaller med samlet længde $\leq \delta$. Da $M(\varepsilon)$ er kompakt ifølge sætning 15.43.2, vil endelig mange af intervallerne i følgen dække $M(\varepsilon)$, og $M(\varepsilon)$ er derfor en Riemann nulmængde og f således integrabel ifølge sætning 15.46.1. Dermed er sætning 15.46.2 bevist.

15.47. Det er klart, at sætningerne om regning med Riemann-integrable funktioner følger ganske umiddelbart af sætning 15.46.2. Fordelen ved denne sætning er, at betingelsen udelukkende angår mængden af diskontinuitetspunkter, medens diskontinuiteternes art er uden betydning.

Vi vil nu betragte gennemgangen af mål- og integralteorien som afsluttet. Vi vil dog ganske kort omtale endnu et generellere integralbegreb, som spiller en betydelig rolle i anvendelserne.

15.48. Lad $\varphi: \hat{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en additiv intervalfunktion. En sådan kaldes positiv, hvis $\varphi(T) \geq 0$ for ethvert $T \in \hat{T}^n$. Den kaldes fuldstændig additiv, hvis det for $T = T_1 \cup T_2 \cup \dots$, hvor T , samt hvert T_ν , tilhører $\hat{T}^n$, og hvor mængderne T_ν er disjunkte 2 og 2, altid gælder, at $\varphi(T) = \varphi(T_1) + \varphi(T_2) + \dots$. Ved en fuldstændig additiv intervalfunktion forstår vi en intervalfunktion φ , der kan skrives på formen $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, hvor φ_1 og φ_2 er fuldstændig additive, positive intervalfunktioner.

Lad nu $\alpha: \hat{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en fuldstændig additiv intervalfunktion, og lad $\varphi: \hat{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en trappefunktion. Vi kan da danne det såkaldte Stieltjes-integral

$$\int \varphi d\alpha = \sum_{k=1}^p y_k \varphi(f^{-1}(y_k)),$$

hvor $\{y_1, \dots, y_p\}$ er værdimængden for φ . Dette er ganske analogt med definitionen 15.18.1. Her gælder øjensynligt regnereglerne

$$\int (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2) d\alpha = c_1 \int \varphi_1 d\alpha + c_2 \int \varphi_2 d\alpha$$

$$\int \varphi d(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2) = c_1 \int \varphi d\alpha_1 + c_2 \int \varphi d\alpha_2.$$

Derimod har sætning 15.20.1 ikke en umiddelbar generalisation til Stieltjes integraler.

Den i 15.22 og følgende afsnit omtalte udvidelse af integralbegrebet kan uden videre overføres til Stieltjes-integralet, hvis vi blot forudsætter, at intervalfunktionen α specielt er positiv. Nedre og øvre Riemann-Stieltjes integral af en begrænset funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ med begrænset støtte defineres ved

$$\begin{aligned} \int f d\alpha &= \sup \left\{ \int \varphi d\alpha \mid \varphi \in \mathcal{T}^n \wedge \varphi \leq f \right\} \\ \int f d\alpha &= \inf \left\{ \int \varphi d\alpha \mid \varphi \in \mathcal{T}^n \wedge \varphi \geq f \right\}. \end{aligned}$$

Hvis værdierne af de to integraler stemmer overens, betegnes den fælles værdi med $\int f d\alpha$, og den kaldes integralet af f med hensyn til α .

Hvis α_1 og α_2 er positive intervalfunktioner, har vi

$$\int f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int f d\alpha_1 + \int f d\alpha_2,$$

og analogt for øvre integral. Vi skal ikke opholde os ved beviset.

Bortset fra afsnit 15.27 og sætning 15.30.2 vil afsnittene 15.22-15.32 uden videre kunne overføres til Stieltjes integralerne. Vi må her tale om Riemann'sk nulfunktion med hensyn til α

og om mængder, som er Riemann-målelige med hensyn til α . Derimod er de i 15.33-15.35 omtalte resultater netop karakteristiske for Riemann-integralet.

Definitionerne af oversum og undersum i 15.37 overføres uden videre for α positiv, men vi må nu betegne dem $s(f, \alpha, P)$ og $S(f, \alpha, P)$. Tilsvarende indføres $\sigma(f, \alpha, P)$, som har interesse, også når α ikke er positiv. I alle tre summer erstattes $m(I_k)$ selvfølgelig med $\alpha(I_k)$.

Vi kunne nu definere et Riemann-Stieltjes-integral ved

$$\int_I f d\alpha = \lim_{P \rightarrow P_\infty} \sigma(f, \alpha, P),$$

hvor grænseovergangen foretages på $\dot{P}(I)$. Det viser sig, at dette integral eksisterer, hvis og kun hvis der findes en fremstilling $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, hvor α_1 og α_2 er fuldstændig additive, positive intervalfunktioner, og hvor f er integrabel over I med hensyn til såvel α_1 som α_2 . Hvis betingelsen er opfyldt, gælder netop

$$\int_I f d\alpha = \int_I f d\alpha_1 - \int_I f d\alpha_2,$$

hvor integralerne på højre side er defineret ved hjælp af trappefunktioner. Beviset for dette resultat er ikke helt simpelt, men vi vil ikke opholde os ved det. For positivt α kan overvejelserne i 15.37 og 15.38 umiddelbart overføres. Derimod beror vort bevis for sætning 15.39.1 afgørende på sammenhængen mellem interval-længde og målet i $\mathbb{R}^n$, og sætningen lader sig i den foreliggende form ikke umiddelbart generalisere til Riemann-Stieltjes-integraler.

De sidste afsnit af Riemann-integralets teori overføres uden vanskelighed til Riemann-Stieltjes-integralet, når α er positiv. Derimod må vi selvfølgelig tale om nulmængde med hensyn til α .

15.49. Vi vil vise endnu nogle sætninger, som opretter kontakt mellem Riemann-Stieltjes-integraler og mere velkendte begreber.

15.49.1. Sætning. Lad $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være en fuldstændig additiv intervalfunktion, og lad $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være funktioner, som er Riemann-integrable med hensyn til α . Da er f Riemann-integrabel med hensyn til den ved

$$\beta(T) = \int_I g d\alpha$$

definerede fuldstændig additive intervalfunktioner. Endvidere er

$$\int f d\beta = \int f g d\alpha.$$

Bevis. Vi kan antage, at α er positiv, da vi ellers skriver $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, hvor α_1 og α_2 er positive. Tilsvarende kan vi skrive g som differens mellem positive funktioner, som er Riemann-integrable med hensyn til α , og det er derfor nok at vise sætningen, når både α og f er positive.

Lad $\varphi \leq f$ være en trappefunktion. Hvis $\{y_1, \dots, y_p\}$ er værdimængden for φ , har vi

$$\begin{aligned} \int \varphi d\beta &= \sum_{k=1}^p y_k \beta(\varphi^{-1}(y_k)) = \sum_{k=1}^p y_k \int_{\varphi^{-1}(y_k)} g d\alpha = \\ &= \sum_{k=1}^p \int_{\varphi^{-1}(y_k)} g d\alpha = \int \varphi g d\alpha \leq \int f g d\alpha. \end{aligned}$$

Tilsvarende fås for en trappefunktion $\psi \geq f$, at

$$\int \psi d\beta = \int \psi g d\alpha \geq \int f g d\alpha.$$

Lad nu I være et interval, der indeholder støtten for g . Vi får da

$$0 \leq \int \psi d\beta - \int \varphi d\beta = \int (\psi - \varphi) g d\alpha \leq \int (\psi - \varphi) d\alpha \sup g(I).$$

For $\varepsilon > 0$ kan vi derfor vælge $\varphi \leq f$ og $\psi \geq g$, således at denne differens er $\leq \varepsilon$. Men det betyder netop, at f er Riemann-integrabel med hensyn til β , og at integralet har den angivne værdi.

15.49.2. Sætning. Lad $(\underline{x}_n)$ være en begrænset punktfølge i $\mathbb{R}^n$, og lad $\sum y_n$ være en absolut konvergent række. Lad $\alpha: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være den ved

$$\alpha(\mathbb{T}) = \sum_{\underline{x}_n \in \mathbb{T}} y_n$$

definerede fuldstændig additive interval. Enhver begrænset funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er Riemann-integrabel med hensyn til α , og

$$\int f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} y_n f(\underline{x}_n).$$

Bevis. Lad I være et interval, der indeholder følgen $(\underline{x}_n)$, og lad P_n være en partition af I , der blandt andet omfatter de n delintervaller, der hver består af et enkelt af punkterne $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$. Vi har da

$$\sum_{k=1}^n y_k f(\underline{x}_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \inf f(I) \leq s(f, \alpha, P_n) \leq$$

$$S(f, \alpha, P_n) \leq \sum_{k=1}^n y_k f(\underline{x}_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \sup f(I),$$

og da de 2 restsummer konvergerer mod 0 for $n \rightarrow \infty$, følger sætningen umiddelbart.

15.50. Stieltjes-integraler benyttes i anvendelserne i fy-

sik, idet intervalfunktionen f.eks. kan angive masse eller elektricitetsmængde i det pågældende interval.

Hvis α i sætning 15.49.1 er Riemann-målet, får vi

$$\beta(T) = \int_T g(\underline{x}) d\underline{x}; \quad \int f d\beta = \int f(\underline{x}) g(\underline{x}) d\underline{x},$$

og hvis β her er masse (elektricitetsmængde) bliver g massefylde (elektricitetstæthed). I fysikken vil man møde masse og elektricitet fordelt på flader eller koncentreret i isolerede punkter, og fordelene ved Stieltjes-integralet er, at man får mulighed for at opstille formler, der omfatter disse forskellige former for fordelinger under et.

I sandsynlighedsregningen spiller Stieltjes-integraler en stor rolle, idet sandsynligheder netop er fuldstændig additive, positive intervalfunktioner.

Lebesgue's integralteori er et mere hensigtsmæssigt grundlag for en teori for Stieltjes -integraler, og vi skal derfor ikke udføre teorien for Riemann-Stieltjes integraler mere detaljeret.

Lette opgaver.

1. Angiv en afbildning $\varphi: \mathbb{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$, som opfylder 1), 3) og 4) i sætning 15.8.1, men ikke 2).
2. Samme problem, men således at det er 3), der ikke er opfyldt.
3. Vis, at sætning 15.8.1 gælder uændret, hvis betingelse 1) erstattes med følgende:

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall A \in \mathbb{T}^n (|\varphi(A)| \leq K m(A)).$$

4. En intervalfunktion ψ på delintervallerne af $\mathbb{R}$ defineres ved

$\psi(I)=0$, hvis endepunkterne af I begge er rationale eller begge er irrationale.

$\psi(I)=1$, hvis venstre endepunkt af I er irrationalt, medens højre endepunkt er rationalt.

$\psi(I)=-1$, hvis venstre endepunkt er rationalt, medens højre endepunkt er irrationalt.

Vis, at ψ tilfredsstiller betingelsen 2* i sætning 15.10.1. Undersøg, om ψ er et specielt tilfælde af et i 15.11 anført eksempel. Vis, at den additive intervalfunktion, der fås ved udvidelse af ψ , ikke er begrænset på trappemængder på $[0,1]$.

5. En additiv intervalfunktion φ tilfredsstiller $\varphi(I)=0$ for ethvert åbent interval I . Vis, at φ er identisk 0.
6. Undersøg, om der gælder distributive love for regneoperationerne $\vee$ og $\wedge$.
7. En funktion $f: [0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved, at $f(x) = 0$,

hvis x er irrational, men $f(x) = 1$, hvis x er rational. Vis, at f ikke er Riemann-integrabel, og bestem nedre og øvre integral af f .

8. En funktion $f:[0,1]$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved, at $f(x) = 0$, hvis x er irrational, men $f(x) = q^{-1}$, hvis x er den uforkortede brøk p/q .

Vis, at f er en Riemann'sk nulfunktion.

9. Afbildningen $f:\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 + x_2) \text{ for } \underline{x} \in [0, \pi] \times [0, \pi]$$

$$f(\underline{x}) = 0 \text{ ellers.}$$

Udregn $\int f$ ved hjælp af sætning 15.27.1.

10. Afbildningen $f:\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(\underline{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \text{ for } |x_1| + |x_2| \leq 1$$

$$f(\underline{x}) = 0 \text{ ellers.}$$

Udregn $\int f$.

11. Idet $f:[a,b]$ ind i $\mathbb{R}$ er en Riemann-integrabel funktion, har definitionen

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

mening. Vis, at F er differentiabel i kontinuitetspunkterne for f , og at $DF(x) = f(x)$ i sådanne punkter.

12. Lad $\varphi:[0, 2\pi[$ ind i $\mathbb{R}$ være en Riemann-integrabel funktion.

Lad a og b være positive tal, og lad $A \subset \mathbb{R}^2$ være cirkelringen

$$A = \{ \underline{x} \mid a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2 \}.$$

En afbildning $f:A$ ind i $\mathbb{R}$ defineres ved

$$f(r \cos \Theta, r \sin \Theta) = \varphi(\Theta) \text{ for } r > 0.$$

Vis, at f er Riemann-integrabel over A , og at

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \int_0^{2\pi} \varphi(\Theta) d\Theta.$$

13. Lad I være et interval med positivt mål, og lad $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert afbildning, som ikke er konstant på I .

Vis de skarpe uligheder

$$m(I) \inf f(I) < \int_I f(\underline{x}) d\underline{x} < m(I) \sup f(I).$$

14. Bestem det 3-dimensionale mål af den konvekse punktmængde

$$A = \{ \underline{x} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \},$$

hvor a , b og c er positive tal.

15. Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ og $B \subset \mathbb{R}^p$ være Riemann-målelige punktmængder. Vis, at $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+p}$ er Riemann-målelig, og at

$$m^{n+p}(A \times B) = m^n(A) m^p(B).$$

16. Bevis direkte ved anvendelse af ligelig kontinuitet, at en kontinuert funktion på et afsluttet interval er Riemann-integrabel over dette interval.

17. Bevis direkte, at en monoton funktion på et interval på $\mathbb{R}$ er Riemann-integrabel over dette interval.

18. For $n \in \mathbb{N}$ definerer vi $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = n^3 x (1 + n^4 x^4)^{-1}.$$

Vis, at (f_n) går punktvis, men ikke ligeligt mod 0 på $[0,1]$,

og at $\int_0^1 f_n(x) dx$ ikke går mod 0.

19. Angiv en ensartet begrænset følge af Riemann-integrable funktioner, som på et interval konvergerer punktvis mod en grænsefunktion, der ikke er Riemann-integrabel.

20. Lad $\varphi: \mathbb{T}^n$ ind i $\mathbb{R}$ være en additiv intervalfunktion, som vi antager er begrænset. Vi definerer nu 2 nye intervalfunktioner, idet vi for enhver trappemængde T sætter

$$\begin{aligned}\psi_1(T) &= \sup\{\varphi(S) \mid S \in \mathbb{T}^n \wedge S \subseteq T\}, \\ \psi_2(T) &= \sup\{-\varphi(S) \mid S \in \mathbb{T}^n \wedge S \subseteq T\}.\end{aligned}$$

Vis, at ψ_1 og ψ_2 er additive og positive intervalfunktioner, og at $\varphi = \psi_1 - \psi_2$. Vis desuden, at ψ_1 og ψ_2 er fuldstændig additive, hvis φ er det.

21. Bevis, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p} = \log 2.$$

22. For $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ og en Riemann-integrabel funktion $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ sætter vi

$$A(\underline{y}) =]-\infty, y_1] \times \dots \times]-\infty, y_n]$$

og

$$F(\underline{y}) = \int_{A(\underline{y})} f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Idet $\underline{y}$ er et kontinuitetspunkt for f , skal det vises, at

$$D_n \dots D_1 F(\underline{y}) = f(\underline{y}).$$

23. Lad $f: \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}$ og $g: \mathbb{R}^p$ ind i $\mathbb{R}$ være Riemann-integrable funktioner. Vis, at den ved

$$h(\underline{x}; \underline{y}) = f(\underline{x})g(\underline{y})$$

definerede funktion $h: \mathbb{R}^{n+p}$ ind i $\mathbb{R}$ er Riemann-integrabel, og at

$$\int h = \int f \int g.$$

24. For $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vil vi benytte betegnelserne

$$A(\underline{x}) =]-\infty, x_1] \times \dots \times]-\infty, x_n]; \quad B(\underline{x}) = [x_1, \infty[\times \dots \times [x_n, \infty[.$$

Lad $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ være Riemann-integrable funktioner.

Vis relationen

$$\int (f(\underline{x}) \int_{A(\underline{x})} g(\underline{y}) d\underline{y}) d\underline{x} = \int (g(\underline{x}) \int_{B(\underline{x})} f(\underline{y}) d\underline{y}) d\underline{x}.$$

Vis, at denne relation er en generalisation af reglen om delt integration.

25. Bestem det n -dimensionale mål af punktmængden

$$\{\underline{x} \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

Vanskeligere opgaver.

26. Udregn målet af enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$.

27. Ved en stykkevis konstant funktion på $\mathbb{R}^n$ vil vi forstå en funktion φ , som 1) har begrænset støtte, 2) kun antager endelig mange værdier $y_1, \dots, y_n$, og 3) for hver af disse tilfredsstiller, at $\varphi^{-1}(y_k)$ er Riemann-målelig. Vis, at φ er Riemann-integrabel, og at

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^n y_k m(\varphi^{-1}(y_k)).$$

Idet Φ betegner mængden af stykkevis konstante funktioner, skal det vises, at det for enhver begrænset funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ med begrænset støtte gælder, at

$$\int f = \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \in \Phi \wedge \varphi \leq f \right\},$$

samt en analog relation for det øvre integral.

28. Lad $f: \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}$ være en Riemann-integrabel funktion, hvis støtte er givet ved

$\{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta \wedge \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)\}$,
 hvor $\varphi_1, \varphi_2: [\alpha, \beta]$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuerte og $0 \leq \varphi_1(\theta) \leq \varphi_2(\theta)$
 for ethvert $\theta \in [\alpha, \beta]$. Vis, at

$$\int f = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \right) d\theta.$$

Benyt opgave 27.

29. Beregn det 3-dimensionale mål af punktmængden

$$\{(x, y, z) \mid x \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2\}.$$

Benyt opgave 28.

30. Beregn det 2-dimensionale mål af punktmængden

$$\{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^3 + y^3 - 3xy \leq 0\}.$$

Benyt opgave 28.

31. Beregn det 2-dimensionale mål af den begrænsede punktmængde, der som rand har kurven

$$\{(x, y) \mid \exists \theta \in \mathbb{R} (x = \cos^3 \theta \wedge y = \sin^3 \theta)\}.$$

32. Lad $c: [0, 1]$ ind i $]0, \infty[$ være en kontinuert funktion, og lad $f: [0, 1]$ ind i $[0, \infty[$ være en Riemann-integrabel funktion. Vis, at den ved

$$\varphi(p) = \left(\frac{\int_0^1 c(x) (f(x))^p dx}{\int_0^1 c(x) dx} \right)^{\frac{1}{p}}$$

definerede afbildning $\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ind i $[0, \infty[$ er en voksende funktion. Benyt sætningerne fra kapitel 12 om middeltal.

33. Lad $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $[0, \infty[$ være Riemann-integrable funktioner.
Bevis Schwarz' ulighed

$$\left(\int fg \right)^2 \leq \int f^2 \int g^2.$$

34. Udregn det 3-dimensionale mål af punktmængden

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq a^2 \wedge y^2 + z^2 \leq a^2\},$$

idet a er et positivt tal.

35. Vis, at der på et vilkårligt begrænset, åbent interval

$]a, b[\subset \mathbb{R}$ eksisterer en differentiabel funktion $\varphi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, som tilfredsstiller ulighederne

$$|\varphi(x)| \leq (x-a)^2; \quad |\varphi(x)| \leq (b-x)^2,$$

medens $D\varphi(x)$ for ethvert $h > 0$ antager værdierne $+1$ og -1 hver uendelig mange gange i hvert af intervallerne $]a, a+h[$ og $]b-h, b[$. Byg f.eks. $\varphi(x)$ sammen af funktionerne $(x-a)^2 \sin(x-a)^{-1}$ i den venstre ende af intervallet, $(b-x)^2 \sin(b-x)^{-1}$ i højre ende af intervallet, samt en konstant i den midterste del af intervallet.

Lad $O \subset [0, 1]$ være en overalt tæt åben mængde. Den er foreningsmængde af disjunkte åbne intervaller I_j , $j \in J$, hvor J er endelig eller numerabel. Afbildninger $\varphi_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ konstrueres som i opgavens første spørgsmål. Vi sætter nu $f(x) = \varphi_j(x)$ på hvert I_j og $f(x) = 0$ ellers. Vis, at den således konstruerede afbildning $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel, men at Df har oscillation ≥ 1 i alle punkter af mængden $[0, 1] \setminus O$.

Konstruer en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$, som er begrænset, har begrænset støtte og er differentiabel med en differentialkvotient, som ikke er Riemann-integrabel.

Hvis $x^2 \sin x^{-2}$ benyttes i konstruktionen i stedet for $x^2 \sin x^{-1}$, vil denne stadig give en overalt differentiabel funktion, men dennes differentialkvotient vil ikke engang være begrænset i omegnen af $[0,1] \setminus 0$.

Eksemplerne i denne opgave illustrerer vanskeligheden ved løsning af stamfunktionproblemet.

36. Med $\varphi: \mathbb{R}$ ind i $[0,1]$ vil vi betegne den voksende funktion, som er fastlagt ved, at $\varphi(-\infty, 0[) = 0$, $\varphi(1, \infty[) = 0$, medens

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right] = \frac{1}{2^2}, \quad \varphi\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right] = \frac{3}{2^2},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right] = \frac{1}{2^3}, \quad \varphi\left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right] = \frac{3}{2^3}, \quad \varphi\left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right] = \frac{5}{2^3},$$

$$\varphi\left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right] = \frac{7}{2^3},$$

o.s.v. Svarende til φ konstruerer vi en intervalfunktion α , idet vi for et interval I med endepunkter x og y sætter $\alpha(I) = \alpha(y) - \alpha(x)$. Funktionen α bliver positiv og fuldstændig additiv. For et interval I , der er udartet til et punkt, bliver $\alpha(I) = 0$. Desuden er $\alpha(I) = 0$ for ethvert interval udenfor $]0,1[$ samt for delintervaller af $]0,1[$ med samlet længde 1. En intervalfunktion med de her omtalte egenskaber kaldes singulær.

$$\text{Udregn } \int \cos 2\pi x \, d\alpha(x).$$

Definitionen af singulær intervalfunktion kan uden vanskelighed overføres til $\mathbb{R}^n$. For $n > 1$ er det langt lettere at angive eksempler på singulære, additive intervalfunktioner. Prøv f.eks. at udnytte begrebet buelængde til konstruktion af et eksempel.

Harmonisk analyse.

17.1. En funktion $f:[a,b]$ ind i $\mathbb{C}$ kaldes stykkevis kontinuert differentiabel, når der eksisterer en inddeling $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, og funktioner $f_\nu:[x_{\nu-1}, x_\nu]$ ind i $\mathbb{C}$, hvor f_ν har kontinuert differentialkvotient, og $f_\nu(x) = f(x)$ for $x \in]x_{\nu-1}, x_\nu[$. En funktion på et uendeligt interval kaldes stykkevis kontinuert differentiabel, når den er stykkevis kontinuert differentiabel på ethvert afsluttet, begrænset delinterval. Vi vil betegne mængden af stykkevis kontinuert differentiable funktioner på et interval I med $\hat{C}'(I)$. To funktioner $f, g \in \hat{C}'[a,b]$ kaldes i det væsentlige identiske, når $f(x) = g(x)$ gælder for $x \in [a,b]$ undtagen i endelig mange punkter, og vi skriver da $f \doteq g$. Hvis I er et uendeligt interval, benyttes $f \doteq g$, når denne relation gælder for indskrænkningerne til et endeligt delinterval.

Funktionsmængden $\hat{C}'(I)$ er med de sædvanlige regneoperationer en ring. Et produkt af 2 funktioner fra $\hat{C}'(I)$ kan blive nul, selv om ingen af funktionerne er i det væsentlige identisk med nul-funktionen. Division i $\hat{C}'(I)$ er kun mulig, når divisor f tilfredsstiller $|f(x)| \geq k > 0$ for alle x .

Relationen $\doteq$ er en ækvivalensrelation, som giver anledning til en inddeling af $\hat{C}'(I)$ i klasser af funktioner, som er i det væsentlige identiske. Alle funktioner i samme klasse har samme Riemann-integral. For $f, g \in \hat{C}'([a,b])$ gælder det, at

$$f \doteq g \iff \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0 \iff \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0$$

Det er nemlig indlysende, at $f \doteq g$ medfører, at de to integraler bliver 0. Hvis $f \doteq g$ ikke er opfyldt, findes der et $x \in [a,b]$, hvor f og g er kontinuerte, og $|f(x) - g(x)| = k > 0$. Vi kan da afgrænse et interval, i hvilket $|f(x) - g(x)| \geq \frac{k}{2}$, og deraf følger, at de to integraler begge bliver positive.

17.2. Svarende til en funktion $f \in \hat{C}'([a,b])$ indfører vi dens Fourier-transformerede Ef , Cf og Sf , som alle er afbildninger af $]-\infty, \infty[$ ind i $\hat{C}$. Definitionerne er

$$Ef(y) = \int_a^b f(x) e^{ixy} dx;$$

$$Cf(y) = \int_a^b f(x) \cos xy \, dx; \quad Sf(y) = \int_a^b f(x) \sin xy \, dx,$$

og vi har derfor relationerne

$$Ef(y) = Cf(y) + i Sf(y); \quad Ef(-y) = Cf(y) - i Sf(y)$$

$$Cf(y) = \frac{1}{2}(Ef(y) + Ef(-y)); \quad Sf(y) = \frac{1}{2i}(Ef(y) - Ef(-y)).$$

Hvis f specielt er en reel funktion, bliver Cf og Sf real- og imaginærdel af Ef , og $Ef(-y)$ bliver kompleks konjugeret til $Ef(y)$. De tre Fouriertransformerede af f benævnes den eksponentialtransformerede, den cosinustransformerede og den sinustransformerede af f . Vi har

17.2.1. Sætning. Funktionerne Ef , Cf og Sf har grænseværdi 0 for $y \rightarrow \infty$ og for $y \rightarrow -\infty$.

Bevis. Vi har en inddeling $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, således at f på intervallet $]x_{\nu-1}, x_\nu[$ stemmer overens med en funktion $f_\nu :]x_{\nu-1}, x_\nu[$ ind i $\hat{C}$ med kontinuert differentialkvotient. Vi har altså

$$\int_a^b f(x) e^{ixy} dx = \sum_{\nu=1}^n \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f_\nu(x) e^{ixy} dx$$

og for $y \neq 0$ tillige ved delt integration

$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f_\nu(x) e^{ixy} dx = \frac{1}{iy} \left(f_\nu(x_\nu) e^{ix_\nu y} - f_\nu(x_{\nu-1}) e^{ix_{\nu-1} y} - \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f'_\nu(x) e^{ixy} dx \right)$$

hvilket viser, at $Ef(y)$ er en sum af n led, der alle har grænse-

værdi 0 for $y \rightarrow \infty$ og for $y \rightarrow -\infty$.

17.3. Riemann-integraler over uendelige intervaller defineres på indlysende måde som grænseværdier

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx,$$

og

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{A, B \rightarrow \infty} \int_{-A}^B f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$

Det er let at se, at eksistens af begge integralerne i det sidste udtryk medfører eksistens af grænseværdien i det midterste udtryk. Tilsvarende defineres for en Riemann-integrabel funktion $f:]a, b[$ ind i $\mathbb{C}$, idet h og k er positive tal:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \int_{a+h}^{b-k} f(x)dx.$$

De således indførte grænseværdier for Riemann-integraler kaldes uegentlige Riemann-integraler.

Vi bemærker, at det er umiddelbart at eftervise, at kontinuerle, monotone substitutioner i uegentlige integraler er tilladelige. En sådan substitution overfører undertiden et uegentligt integral i et egentligt, og substitutionen er da bevis for det uegentlige integrals eksistens. Således vil det uegentlige integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ved den kontinuerle, monotone funktion $x = \sin u$ overføres i

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \pi.$$

Vi kan også betragte uegentlige integraler over en punktmængde $[a,b] \setminus \{c\}$, hvor $c \in]a,b[$, idet vi definerer integralet over denne punktmængde som summen af integralerne over $[a,c[$ og $]c,b]$. For integralet anvendes også i dette tilfælde en betegnelse

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Det er nu klart, hvorledes integralet defineres, hvis intervallet indeholder flere undtagelsespunkter.

17.4. Vi siger, at $f(x)$ er absolut integrabel på intervallet $[a,\infty[$ såfremt ~~$f(x)$ er integrabel på $[a,\infty[$ og~~

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

eksisterer. Ved hjælp af det almindelige konvergensprincip får man da, at følgen $\left(\int_a^{a+n} f(x) dx\right)$ er konvergent, og dette medfører eksistens af

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

og dermed tillige af

$$Ef(y) = \int_a^\infty f(x) e^{ixy} dx,$$

$$Cf(y) = \int_a^\infty f(x) \cos xy \, dx, \quad Sf(y) = \int_a^\infty f(x) \sin xy \, dx,$$

således at vi for absolut integrable funktioner har Fouriertransformerede også over uendelige intervaller. For $\varepsilon > 0$ kan vi bestemme B således at

$$\int_B^\infty |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

og hvis $f(x)$ er stykkevis differentiabel, kan vi bestemme K , således at $|y| \geq K$ medfører

$$\left| \int_a^B f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

og for $|y| \geq K$ har vi da

$$\left| \int_a^\infty f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \left| \int_a^B f(x) e^{ixy} dx \right| + \int_B^\infty |f(x)| dx \leq \varepsilon,$$

og vi har således vist, at $Ef(y)$ også i dette tilfælde går mod 0, når y går mod ∞ eller $-\infty$. Tilsvarende for $Cf(y)$ og $Sf(y)$, samt for andre uendelige eller åbne intervaller.

17.5. Idet vi for $\varepsilon > 0$ bestemmer B , således at

$$\int_B^\infty |f(x)| dx \leq \varepsilon,$$

har vi

$$\left| \int_a^\infty f(x) e^{ixy} dx - \int_a^b f(x) e^{ixy} dx \right| \leq \varepsilon$$

for $b \geq B$ og alle y . Integralet konvergerer altså ligeligt i y , og vi kan slutte, at Ef er kontinuert også når intervallet er uendeligt. Tilsvarende for Cf og Sf , samt for andre uendelige eller åbne intervaller.

Lad $\hat{C}''(I)$ være mængden af stykkevis kontinuert differentiable, absolut integrable, komplekse funktioner på intervallet I , og lad $\hat{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ være mængden af kontinuerte afbildninger $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Vi har afbildningen $E: \hat{C}''(I) \rightarrow \hat{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, og tilsvarende for C og S .

Mængden $\hat{C}''(I)$ er organiseret som et vektorrum. Tilsvarende er $\hat{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et vektorrum. Det er klart, at afbildningerne E , C og S er lineære (homomorfier), således at

$$E(\alpha f + \beta g) = \alpha Ef + \beta Eg,$$

og analogt for C og S .

17.6. En funktion på intervallet I kan udvides til en funktion på $\mathbb{R}$, idet vi giver den værdien 0 i alle $x \notin I$. Vi får derefter samme værdi for de Fouriertransformerede ved integration over I som ved integration over $\mathbb{R}$. Vi vil udnytte denne kendsgerning på den måde, at vi altid vil bruge integrationsgrænserne $-\infty$ og $+\infty$, hvilket sparer en del skriveri.

17.7. Det er nu interessant, at det i det store og hele lader sig gøre at bestemme en funktion ud fra dens Fouriertransformerede, idet en transformation, der minder meget om selve Fouriertransformationen fører den Fouriertransformerede tilbage til den oprindelige funktion. Der kan dog ikke være tale om nogen fuldstændig symmetri. Vi krævede jo, at f var stykkevis differentiabel og absolut integrabel, men den Fouriertransformerede blev kontinuert under alle omstændigheder. Derimod kan vi ikke stole på, at den bliver absolut integrabel.

Vi danner som sædvanlig

$$Ef(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx,$$

og vi får da

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A Ef(y) e^{-ixy} dy &= \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{izy} dz \right) e^{-ixy} dy \\ &= \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i(z-x)y} dz \right) dy. \end{aligned}$$

Det inderste integral er defineret som en grænseværdi, men da denne eksisterer ligeligt i y , kan grænseovergangen ombyttes med integrationen med hensyn til y , og derefter kan integrationerne ombyttes, så vi får

$$\int_{-A}^A Ef(y) e^{-ixy} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \left(\int_{-A}^A e^{i(z-x)y} dy \right) dz =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \left[\frac{e^{i(z-x)y}}{i(z-x)} \right]_{y=-A}^A dz =$$

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\sin A(z-x)}{z-x} dz.$$

Vi substituerer nu $z = x + u$ i det sidste integral, hvilket giver

$$\int_{-A}^A E f(y) e^{-ixy} dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du.$$

17.8. Idet vi ønsker at udregne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin Au}{u} du$, vil vi studere udtrykket

$$\varphi(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx, \quad y \geq 0.$$

For $0 < a < b$ følger af den anden middelværdissætning for Riemann-Stieltjes integraler, at der eksisterer et tal $\xi \in]a, b[$, således at

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = \int_a^b \left(\frac{-1}{x} e^{-xy} \right) d \cos x =$$

$$(1) \quad \frac{-1}{a} e^{-ay} \int_a^{\xi} d \cos x - \frac{1}{b} e^{-by} \int_{\xi}^b d \cos x =$$

$$\frac{1}{a} e^{-ay} (\cos a - \cos \xi) + \frac{1}{b} e^{-by} (\cos \xi - \cos b),$$

hvilket ved grov vurdering giver

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \right| \leq \frac{4}{a},$$

og heraf følger, at udtrykket for $\varphi(y)$ er et ligelig konvergent uegentligt integral, og $\varphi(y)$ er derfor kontinuert for $y \geq 0$.

17.9. Funktionen

$$\psi(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx, \quad y > 0$$

eksisterer for $y \geq h > 0$ som ligelig konvergent uegentligt integral, idet vi for $0 < a < b$ har

$$\left| \int_a^b e^{-xy} \sin x dx \right| \leq \int_a^b e^{-xy} dx = \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y},$$

hvilket giver

$$\left| \int_a^b e^{-xy} \sin x \, dx \right| \leq \frac{1}{h} e^{-ah},$$

og for $\varepsilon > 0$, vil dette udtryk være $\leq \varepsilon$, såfremt

$a \geq \frac{-\log(h\varepsilon)}{h}$. Altså er $\psi(y)$ ~~kontinuerlig~~ og for $0 < y_1 < y_2$ har vi

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy &= \int_{y_1}^{y_2} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy = \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_0^b e^{-xy} \sin x \, dx \right) dy &= \int_0^\infty \left(\int_{y_1}^{y_2} e^{-xy} \sin x \, dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-xy_1} - e^{-xy_2}}{x} \sin x \, dx, \end{aligned}$$

hvilket også kan skrives

$$(2) \quad \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) \, dy = \varphi(y_1) - \varphi(y_2).$$

Af (1) fås for $b \rightarrow \infty$

$$\left| \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \, dx \right| \leq \frac{2}{a} e^{-ay},$$

altså, idet integranden har numerisk værdi ≤ 1

$$|\varphi(y)| \leq a + \frac{2}{a} e^{-ay}.$$

Sætter vi her $a = (\sqrt{y})^{-1}$, ser vi, at $\varphi(y) \rightarrow 0$ for $y \rightarrow \infty$. Derfor giver (2) for $y_2 \rightarrow \infty$ og $y_1 = y$

$$(3) \quad \varphi(y) = \int_y^\infty \psi(t) dt.$$

17.10. Nu får vi ved direkte regning for $y > 0$

$$\psi(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx = \operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-xy} e^{ix} \, dx =$$

$$\operatorname{Im} \int_0^\infty e^{(i-y)x} \, dx = \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(i-y)x}}{i-y} \right]_{x=0}^\infty = \operatorname{Im} \frac{1}{y-i},$$

idet

$$|e^{(i-y)x}| = e^{-yx},$$

hvilket går mod 0 for $x \rightarrow \infty$. Heraf fås

$$\psi(y) = \frac{1}{y^2 + 1} ;$$

og derefter ved (3)

$$\phi(y) = \int_y^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} y,$$

hvilket sluttelig giver

$$(\phi(0) =) \int_0^\infty \frac{\sin Au}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

og heraf følger umiddelbart det endelige resultat

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{\sin Au}{u} du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } A > 0 \\ 0 & \text{for } A = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } A < 0. \end{cases}$$

17.11. Vi vender nu tilbage til det i 17.7. betragtede integral

$$\int_{-A}^A E f(y) e^{-ixy} dy = 2 \int_{-\infty}^\infty f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du.$$

Idet $f(x+)$ betegner grænseværdien fra højre, har vi ifølge (4)

$$f(x+) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x+) \frac{\sin Au}{u} du,$$

så vi for et vilkårligt fast valgt $a > 0$ kan skrive

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du - f(x+) = \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (f(x+u) - f(x+)) \frac{\sin Au}{u} du = \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \sin Au du + \\ & \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{f(x+u)}{u} \sin Au du + \frac{2}{\pi} f(x+) \int_a^\infty \frac{\sin Au}{u} du, \end{aligned}$$

og her går de to første integraler mod 0 for $A \rightarrow \infty$ ifølge resultatet i 17.4., idet første faktor i integranden er absolut integrabel og stykkevis differentiabel. Integralet i det sidste udtryk går også mod 0 for $A \rightarrow \infty$, idet det er lig med

$$\int_{aA}^\infty \frac{\sin u}{u} du,$$

og dermed har vi vist, at

$$f(x+) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du.$$

Tilsvarende vises

$$f(x-) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+u) \frac{\sin Au}{u} du.$$

Ved addition og division med 2 fås

$$\frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A Ef(y) e^{-ixy} dy,$$

og i et kontinuitetspunkt for $f(x)$ bliver grænseværdien altså netop $f(x)$.

Vi har ikke bevist, at $Ef(y) e^{-ixy}$ er integrabel over $]-\infty, +\infty[$, og det vil heller ikke altid være tilfældet. Hvis $Ef \in \hat{C}''([-\infty, \infty[)$, kan vi jo danne EEf , og resultatet siger da, såfremt f tillige er kontinuert, at

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} EEf(x).$$

Hvis $f(x)$ er en lige funktion, altså $f(-x) = f(x)$, får vi

$$Ef(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{ixy} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{ixy} dx,$$

og idet vi i det sidste integral substituerer $-x$ for x

$$Ef(y) = \int_0^{\infty} f(x) e^{ixy} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx,$$

hvilket viser, at $Ef = Cf$, og at dette igen er en lige funktion.

I dette tilfælde fås altså omvendingsformlen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} CCf(x).$$

Da funktionen er lige, er det rimeligt kun at integrere over $[0, \infty[$, og da enhver funktion på $[0, \infty[$ kan udvides til en lige funktion på $]-\infty, \infty[$, får vi omvendingsformlen

$$f \doteq \frac{2}{\pi} CCf \quad \text{på } [0, \infty[,$$

og tilsvarende

$$f \stackrel{\cdot}{=} \frac{2}{\pi} Sf \quad \text{på } [0, \infty[.$$

17.12. Eksempel. For

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

fås

$$Cf(y) = \int_0^\infty f(x) \cos xy \, dx = \int_0^1 \cos xy \, dx = \frac{\sin y}{y},$$

og omvendingsformlen giver derfor

$$CCf(x) = \int_0^\infty \frac{\sin y \cos xy}{y} dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{for } x = 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases},$$

således som det også (forholdsvis!?) let udledes direkte.

I begyndelsen af 17.10 fandt vi resultatet

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx = \frac{1}{1+y^2}.$$

Idet vi sætter $y = \frac{1}{u}$ og substituerer $x = ut$, får vi for $u > 0$

$$u \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} \sin ut \, dt = \frac{u^2}{1+u^2},$$

som viser at $f(x) = e^{-x}$ har den sinustransformerede

$$Sf(y) = \frac{y}{1+y^2},$$

så omvendingsformlen giver

$$\int_0^\infty \frac{y \sin xy}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x > 0.$$

17.13. Omvendingsformlerne viser, at afbildningerne (operatorerne) E , C og S er i det væsentlige bijektive i den forstand, at $Ef = Eg$ medfører $f \stackrel{\cdot}{=} g$. Betragtede som afbildninger af mængden af klasser af funktioner, der er i det væsentlige ens, er E , C og S isomorfier. Nu er i hvert fald de begrænsede funktioner i $(]-\infty, \infty[)$ tillige organiserede ved det sædvanlige produkt, men rent umiddelbart forekommer det ikke særlig fristende at studere operatorernes virkning på et produkt.

Nu kan man for de begrænsede, absolut integrable funktioner i $\hat{C}'(-\infty, \infty)$ indføre endnu en kompositionssregel, foldning af to funktioner f og g . Foldningen af f og g er en slags produkt og betegnes $f*g$. Definitionen er

$$(5) \quad f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

For $|f(x)| \leq K$ overstiger integrandens numeriske værdi ikke $K|g(t)|$, og det uegentlige integral konvergerer ligeligt i x . Det samme gælder om

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| \cdot |g(t)| dt,$$

og vi har derfor

$$\begin{aligned} \int_a^b |f*g(x)| dx &\leq \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| \cdot |g(t)| dt \right) dx = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_a^b |f(x-t)| \cdot |g(t)| dx \right) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \left(\int_a^b |f(x-t)| dx \right) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $f*g$ er absolut integrabel.

Hvis vi i (5) substituerer $t = x-u$ i integralet, får vi

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = g*f(x),$$

og foldningen er derfor en kommutativ operation. Endvidere fås

$$\begin{aligned} (f*g)*h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x-u)h(u)du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t-u)g(t)h(u)dt \right) du. \end{aligned}$$

Her er det inderste integral ligelig konvergent i både x og u ,

og integrationsordenen kan derfor ombyttes. Heraf følger

$$(f*g)*h = (f*h)*g.$$

Ved gentagen anvendelse af dette resultat og den kommutative lov fås

$$(f*g)*h = (g*f)*h = (g*h)*f = f*(g*h),$$

hvilket viser, at foldningen er associativ.

Den distributive lov

$$f*(g + h) = f*g + f*h$$

er en umiddelbar følge af, at integralet er lineært.

17.14. Vi vil nu udregne den eksponentialtransformerede af en foldning:

$$\begin{aligned} E(f*g)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right) e^{ixy} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{i(x-t)y} g(t) e^{ity} dt \right) dx. \end{aligned}$$

Her kan vi ombytte integrationerne, da integralerne er ligeligt konvergente, og vi får da

$$\begin{aligned} E(f*g)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{ity} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{i(x-t)y} dx \right) dt = \\ E f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{ity} dt &= E f(y) E g(y), \end{aligned}$$

så har vi relationen

$$E(f*g) = (Ef)(Eg).$$

Den eksponentialtransformerede af foldningen er således produktet af de eksponentialtransformerede. Vi ser, at E er en homomorfi (for klasser af i det væsentlige ens funktioner endda en isomorfi) af de begrænsede, absolut integrable funktioner i $\hat{C}'([-\infty, +\infty[)$ med $*$ som kompositionsregel over på en funktionsmængde med multiplikation som kompositionsregel.

17.15. Hvis $K(x)$ og $f(x)$ er begrænsede, absolut integrable funktioner i $\hat{C}'([-\infty, +\infty[)$, medens λ er konstant, kan vi spørge, om

der eksisterer en begrænset, absolut integrabel funktion $\varphi(x)$ i $\hat{C}'([-\infty, \infty[)$, som tilfredsstiller

$$(6) \quad \lambda \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x).$$

En ligning, hvor en ubekendt funktion indgår i en integrand, kaldes en integralligning, og integralligninger af formen (6) spiller en vis rolle i matematikkens anvendelser, selvom det må indrømmes, at de indskrænkende antagelser, vi har gjort vedrørende K og f , som oftest ikke er opfyldt. Ligningen (6) kan skrives

$$\lambda \varphi - K * \varphi = f,$$

og anvendelse af operatoren E på begge sider giver

$$\lambda E\varphi - (EK) E\varphi = Ef,$$

som giver

$$(7) \quad E\varphi = \frac{Ef}{\lambda - EK},$$

hvor tallet λ i nævneren er den konstante funktion med værdi λ . Hvis nævneren i udtrykket ikke er nul, viser regningerne, at (6) højst har 1 løsning, og vi har desuden fået en metode til bestemmelse af løsningen. Det kan ikke umiddelbart sluttes af ræsonnementet, at ligningen virkelig har løsninger, da det f.eks. ikke er sikkert, at udtrykket på højre side i (7) er den eksponentialtransformerede af en funktion med de ønskede egenskaber.

17.16. Eksempel. For at finde en løsning til ligningen

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = |x| e^{-|x|}$$

sætter vi

$$K(x) = e^{-|x|}, \quad f(x) = |x| e^{-|x|}$$

og udregner den transformerede

$$EK(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{ixy} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} \cos xy dx =$$

$$2\operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-x} e^{ixy} dx = 2\operatorname{Re} \int_0^\infty e^{(-1+iy)x} dx =$$

$$2\operatorname{Re} \left[\frac{e^{(-1+iy)x}}{-1+iy} \right]_{x=0}^\infty = 2\operatorname{Re} \frac{1}{-1+iy} = \frac{2}{1+y^2}$$

og tilsvarende, idet der benyttes en delt integration

$$Ef(y) = \int_{-\infty}^\infty |x| e^{-|x|} e^{ixy} dx = 2\operatorname{Re} \int_0^\infty x e^{(-1+iy)x} dx =$$

$$2\operatorname{Re} \left[\frac{x e^{(-1+iy)x}}{-1+iy} \right]_{x=0}^\infty - 2\operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{e^{(-1+iy)x}}{-1+iy} dx =$$

$$-2 \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(-1+iy)x}}{(-1+iy)^2} \right]_{x=0}^\infty = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{(-1+iy)^2} = 2 \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Altså er

$$1 - EK(y) = 1 - \frac{2}{1+y^2} = \frac{y^2-1}{y^2+1},$$

og (7) giver, idet $\lambda = 1$,

$$E\varphi(y) = 2 \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{y^2+1}{y^2-1} = \frac{-2}{1+y^2},$$

og ved sammenligning med det foregående ser vi, at

$$\varphi(x) = -e^{-|x|},$$

og da denne funktion tilfredsstiller alle betingelser, kan vi slutte, at vi ved indsættelse af $\varphi(x)$ i ligningens venstre side får en funktion med samme eksponentialtransformerede som funktionen på højre side, altså, at $\varphi(x)$ er en løsning. Vi ved også, at $\varphi(x)$ er den eneste kontinuerte løsning, som er absolut integrabel og tilhører $\hat{C}'([-\infty, \infty[)$, men vi kan ikke udelukke eksistensen af løsninger, som ikke tilhører denne funktionsklasse.

17.17. Svarende til et reelt tal p har vi en translation $T_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ på $\mathbb{R}$ defineret ved $T_p(x) = x + p$. Som bekendt udgør disse translationer en gruppe isomorf med de reelle tals additive gruppe, idet $T_p \circ T_q = T_{p+q}$. Til en funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ svarer for

hvert reelt p en forskudt funktion $f \circ T_p$, og for funktionsværdierne gælder relationen

$$f(x+p) = f \circ T_p(x).$$

Eksempel. Ved direkte regning fås, hvis f er absolut integrabel

$$\begin{aligned} E(f \circ T_p)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+p) e^{ixy} dx = e^{-ipy} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iuy} du = \\ &= e^{-ipy} Ef. \end{aligned}$$

For $g(x) = e^{ipx}$ får vi på den anden side

$$E(fg)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(p+y)x} dx = Ef(p+y) = (Ef) \circ T_p(y).$$

Lad $\tilde{F}$ betegne mængden af afbildninger $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ organiseret ved sædvanlig addition og multiplikation. Hver afbildning T_p inducerer en afbildning $\tau_p: \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$, idet vi sætter $\tau_p(f) = f \circ T_p$. Det er klart, at τ_p er en isomorfi med hensyn til begge regneoperationer, og det er klart, at også afbildningerne τ_p er organiserede som en gruppe, idet $\tau_p \circ \tau_q = \tau_{p+q}$, og denne gruppe er igen isomorf med de reelle tals additive gruppe.

17.18. I det følgende vil vi betragte klassen $\hat{C}'$ af funktioner, som er stykkevis kontinuerte på $]-\infty, \infty[$, d.v.s. funktioner $f:]-\infty, \infty[$, som i ethvert endeligt interval højst har endelig mange diskontinuitetspunkter, og som i hvert ^{dis}kontinuitetspunkt har en grænseværdi fra højre og en grænseværdi fra venstre.

Det reelle tal p kaldes en periode for $f \in \hat{C}'$, såfremt f er "i det væsentlige fikspunkt" for τ_p , altså hvis

$$\tau_p(f) \doteq f.$$

Dette er ensbetydende med, at ligningen

$$f(x+p) = f(x)$$

er opfyldt for alle reelle x , der ikke tilhører en vis undtagelsesmængde, som højst indeholder endelig mange reelle tal fra hvert

endeligt interval.

Af

$$\tau_p(f) \doteq f, \quad \tau_q(f) \doteq f$$

følger umiddelbart

$$f \doteq \tau_{-p}(f), \quad \tau_{p+q}(f) \doteq (\tau_p \circ \tau_q)(f) \doteq f,$$

så vi ser, at mængden af perioder for f er en undergruppe i de reelle tals additive gruppe.

Det er klart, at tallet 0 er periode for enhver funktion. Det er ligeledes klart, at en funktion har alle reelle tal som perioder, hvis og kun hvis den er i det væsentlige konstant.

Hvis p ikke er periode for f , kan vi finde $x_0 \in]-\infty, \infty[$, således at x_0 og $x_0 + p$ er kontinuitetspunkter for f og $f(x_0 + p) \neq f(x_0)$. Vi sætter $|f(x_0 + p) - f(x_0)| = k > 0$, og da funktionen $f(x+p) - f(y)$ er kontinuert i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kan vi bestemme h , således at

$$f(x+p) \neq f(y) \quad \text{for} \quad |x - x_0| < h, \quad |y - x_0| < h,$$

hvilket viser, at intet tal i intervallet $[p - \frac{h}{2}, p + \frac{h}{2}]$ er periode for f eller, anderledes udtrykt:

Mængden af perioder for f er afsluttet.

Lad os nu antage, at f har andre perioder end 0, men at ikke alle reelle tal er perioder for f . Der findes da et interval $I = [q, q+h]$, $h > 0$, som ikke indeholder perioder for f . Hvis et positivt tal $s < h$ var periode for f , ville alle nh , n hel, være perioder for f , men det er umuligt, da I ikke indeholder perioder. Altså har f ikke vilkårligt små, positive perioder. Hvis P er mængden af positive perioder for f , har vi $\inf P = p \in P$, da P er afsluttet, og p er da den mindste positive periode. Er nu q en vilkårlig periode for f , kan vi finde et helt tal n , således at

$$np \leq q < (n+1)p,$$

men nu er $q - np$ periode for f og $0 \leq q - np < p$, og da p var den mindste, positive periode for f , får vi $q = 0$. Altså omfatter mængden af perioder for f præcis alle heltallige multipla af det positive tal p , som kaldes den primitive periode for f .

17.19. Med $\hat{C}(p)$ vil vi betegne mængden af stykkevis kontinuerlige funktioner med periode p , og med $\hat{C}'(p)$ vil vi betegne mængden af stykkevis kontinuert differentiable funktioner i $\hat{C}(p)$. Vi har altså

$$\hat{C}'(p) = \hat{C}(p) \cap \hat{C}'(\mathbb{R}).$$

Funktionsklasserne $\hat{C}(p)$ og $\hat{C}'(p)$ er organiserede som lineære vektorrum på naturlig måde, og desuden ved den sædvanlige multiplikation. Division er mulig, når divisor ikke antager værdier vilkårlig tæt ved 0.

Når vi taler om, at en funktion er periodisk, mener vi, at den har en periode $p \neq 0$. Konstanterne er altså periodiske funktioner. Regning med periodiske funktioner med 0 som eneste fælles periode fører normalt ikke til periodiske funktioner. De periodiske funktioner udgør derfor ikke en helt naturlig funktionsklasse, sådan som funktioner med en bestemt periode gør det.

En funktion f på et halvåbent interval $[a, b[$ kan udvides til en periodisk funktion, idet

$$f^*(x) = f\left(x - \left[\frac{x-a}{b-a}\right](b-a)\right),$$

hvor den firkantede parentes har samme betydning som i lærebogen side 201, har periode $b-a$ og tilfredsstiller

$$f^*(x) = f(x) \text{ for } x \in [a, b[.$$

Derfor vil de resultater, vi i det følgende skal udlede for periodiske funktioner, også kunne udnyttes for funktioner i et begrænset interval.

Hvis f har periode p , og g betegner den lineære afbildning $y = \frac{p}{q} x$, vil $f \circ g$ være den ved $y = f(\frac{p}{q} x)$ definerede funktion, og det ses, at $f \circ g$ har periode q . Ved hjælp af denne substitution overføres funktioner med periode p i funktioner med periode q , og det vil derfor være nok at gennemføre de nærmere undersøgelser for funktioner med en speciel periode, og det er da rimeligt at vælge perioden 2π , fordi de mest fundamentale periodiske funktioner er kommet til verden med netop denne periode. Det drejer sig om funktionerne e^{ix} , $\cos x$ og $\sin x$, hvis fundamentale rolle i denne sammenhæng yderligere understreges af disse undersøgelser.

17.20. En ligelig konvergent række

$$\begin{aligned} s(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{inx} + A_{-n} e^{-inx}) = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} a_n &= A_n + A_{-n}, & b_n &= i(A_n - A_{-n}), \\ A_n &= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2i} b_n, & A_{-n} &= \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2i} b_n, \end{aligned}$$

fremstiller en kontinuert funktion $s \in \hat{C}(2\pi)$. Ved ledvis integration ses det, at

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

og

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \sin nx dx.$$

Vi bemærker i denne forbindelse, at periodiciteten bevirker, at integralernes værdi ikke ændres, når integrationsintervallet erstattes med et vilkårligt andet interval af længde 2π , en bemærkning vi også vil udnytte i det følgende.

17.21. Lad nu f være en vilkårlig funktion fra $\hat{C}(2\pi)$. Vi sætter nu

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og den dobbelt uendelige række

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}$$

kaldes da Fourierrækken for $f(x)$, og vi skriver

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}.$$

Efter resultaterne i foregående afsnit er det rimeligt at vente, at Fourierrækken under visse betingelser i en eller anden forstand konvergerer mod $f(x)$, eventuelt netop således, at det symmetriske afsnit

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^N A_n e^{inx}$$

konvergerer mod $f(x)$ i alle kontinuitetspunkter. Det viser sig dog, at dette ikke er tilfældet for alle funktioner i $\hat{C}(2\pi)$, ikke engang for de overalt kontinuerte. Derimod skal vi vise, at det for funktionerne i $\hat{C}'(2\pi)$ gælder, at Fourierrækken konvergerer i den nævnte forstand.

For at vise dette indfører vi funktionen

$$K_n(x) = \sum_{q=-n}^n e^{iqx} = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} =$$

$$\frac{e^{(n+\frac{1}{2})ix} - e^{-(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Idet vi udnytter det første udtryk for $K_n(x)$, får vi

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt &= \sum_{q=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) e^{iqt} dt = \\ \sum_{q=-n}^n \frac{1}{2\pi} e^{-iqx} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(u) e^{iqu} du &= \sum_{q=-n}^n A_{-q} e^{-iqx} = s_n(x). \end{aligned} \right\}$$

Af det første udtryk for $K_n(x)$ følger endvidere

$$\int_0^{\pi} K_n(x) dx = \int_{-\pi}^0 K_n(x) dx = \pi,$$

og vi får derfor

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt - f(x+) =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+)) K_n(t) dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \cdot \frac{t}{\sin^{\frac{1}{2}} t} \sin(n+\frac{1}{2})t dt,$$

idet vi her benyttede det sidste udtryk for $K_n(x)$. De to første faktorer i integranden giver en begrænset funktion fra $\hat{C}'([0, \pi])$ og integralet går derfor mod 0 for $n \rightarrow \infty$ ifølge resultatet fra begyndelsen af 17.5. Analogt vises, at

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) K_n(t) dt - f(x-)$$

går mod 0 for $n \rightarrow \infty$, og vi får derefter ved addition, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)),$$

hvilket specielt viser, at Fourierrækken konvergerer i alle kontinuitetspunkter for f .

17.22. Den ovenfor benyttede hjælpefunktion

$$K_n(x) = \sum_{q=-n}^n e^{iqx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin^{\frac{1}{2}} x}$$

kaldes Dirichlets kerne. Vi bemærker, at

$$K_n(x) = \frac{\sin \frac{1}{2}x \sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} = \frac{\cos \sin nx - \cos \sin(n+1)x}{2 \sin^2 \frac{1}{2}x},$$

og vi får derfor

$$\sum_{q=0}^{n-1} K_q(x) = \sum_{q=-n}^n (n-|q|) e^{iqx} = \frac{1 - \cos nx}{2 \sin^2 \frac{1}{2}x} = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}.$$

Funktionen

$$L_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} K_q(x) = \sum_{q=-n}^n \left(1 - \frac{|q|}{n}\right) e^{iqx} = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}x}{n \sin^2 \frac{1}{2}x}$$

kaldes Fejers kerne (L. Fejer, 1880-1959 ungarsk matematiker, især kendt for de her omtalte undersøgelser). Den har egenskaberne

$$1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_n(x) dx = 1,$$

$$2) 0 \leq L_n(x) \leq \frac{1}{n \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Det første resultat fås ved ledvis integration. Med de i begyndelsen af 17.21 indførte betegnelser har vi nu

$$\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) L_n(t) dt,$$

og på grund af 1) kan vi skrive

$$\frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) L_n(t) dt,$$

og på grund af ulighederne 2) følger heraf

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} s_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| L_n(t) dt.$$

Vi vil nu antage, at $f(x)$ er kontinuert for alle x . Vi sætter $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in]-\infty, \infty[\}$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Vi kan da vælge $h > 0$, således at $|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $|y-x| \leq h$. Dette følger af, at $f(x)$ er ligelig kontinuert i $[-2\pi, 2\pi]$ og periodiciteten bevirker, at et $h > 0$ svarende til dette interval, kan benyttes for alle x og y . Altså er

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h |f(x+t) - f(x)| L_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h L_n(t) dt \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_n(x) dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

På resten af integrationsintervallet kan integranden på grund af den sidste ulighed 2) ikke overstige

$$\frac{2KM}{n \sin^2 \frac{1}{2}h},$$

og for

$$n > \frac{4KM}{\varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}h}$$

har vi derfor

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} s_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon,$$

når blot n er tilstrækkelig stor. Altså gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} s_n(x) = f(x), \text{ ligeligt i } x.$$

17.23. Sætningerne om konvergens gælder selvfølgelig uændret, når perioden er p i stedet for 2π , men formlerne får nu følgende udseende:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega x} \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

hvor

$$\omega = \frac{2\pi}{p}, \quad A_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-in\omega x} dx$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos n\omega x dx, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin n\omega x dx.$$

17.24. Som eksempel vælger vi den funktion med perioden 2π , som er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{for } x = \pm\pi, \end{cases}$$

og vi får da

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi \cdot (-1)^n}{-in} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-\pi \cdot (-1)^n}{-in} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

for $n \neq 0$, og

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Vi udregner

$$A_n e^{inx} + A_{-n} e^{-inx} = i \frac{(-1)^n}{n} (e^{inx} - e^{-inx}) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx,$$

og vi har således fundet den konvergente rækkeudvikling

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

For $x = \frac{\pi}{2}$ genfinder vi Leibniz' rækkeudvikling for $\frac{\pi}{4}$.

17.25. Funktionerne $e^{i\lambda x}$, $\cos \lambda x$ og $\sin \lambda x$ kaldes harmoniske svingninger på grund af den rolle, de spiller i fysikkens svingningsteori. En periodisk funktion er også en svingning, og funktionens Fourierrække kan betragtes som en fremstilling af funktionen som en sum af harmoniske svingninger. Ledet A_0 er ligevægtsstillingen, om hvilken svingningen foregår. Leddene

med index 1 og -1 udgør tilsammen svingningens grundtone, og alle de øvrige led er svingningens overtoner. Med en fra optikken hentet gløse betegnes tallene $n\omega$, n hel, $\omega = \frac{2\pi}{p}$ i forbindelse med tallene A_n , som funktionens spektrum, idet svingningen fortolkes som lysbølger, og Fourierrækken svarer til lysets opspaltning i spektrallinier. Man siger derfor, at en periodisk funktion har et diskret spektrum. For de stykkevis differentiable, absolut integrable funktioner på $]-\infty, \infty[$ har vi i fremstillingen ved hjælp af den Fouriertransformerede

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E f(y) e^{-ixy} dy$$

et eksempel på en opløsning af f i en kontinuert familie af harmoniske svingninger, og vi siger derfor, at funktionen $f(x)$ har et kontinuert spektrum.

Spørgsmålet om nærmere karakterisering ved strukturelle egenskaber af de funktioner, der kan fremkomme ved overlejring af højst tællelig mange harmoniske svingninger, løstes i 1924 af Harald Bohr ved indførelsen af de næstenperiodiske funktioner, som i en lang periode var et af hovedemnerne for dansk matematisk forskning.

Rettelser til Mat. 1, MA.

- MA 1.2 1.6 f.o. Andet summationstegn skal have grænse ∞ .
- MA 1.4 1.3 f.n. Det tilføjes: "idet vi nu må forudsætte p hel".
- MA 1 opgave 11. I anden linie rettes $< n$ til $\leq n$.
- MA 3.2 1.7-9 f.o. Teksten ændres til følgende: "da de kan give anledning til forveksling med $\frac{1}{\sin y}$ o.s.v."
- MA 3.3 1.3 f.o. $\varepsilon \frac{\pi}{2}$ rettes til $\varepsilon \pi$.
- 1.4 f.n. Det andet ulighedstegn er overflødigt, og i sidste brøks tæller skal der numerisk tegn om x.
- MA 3 opgave 4. I anden linie skal Arg være Arc, og det sidste udtryk i opgaven skal være $\text{Arc} \sin(\text{tg} \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3})$.
- MA 4.1 1.3-4 f.n. Der er faldet en linie ud. Mellem linie 3 og 4 f.n. tilføjes: "én løsning; specielt har ligningen $ax = a$, hvor $a \neq 0$, en og kun".
- MA 4.2 1.1-3 f.o. Meningen med dette er, at et (uordnet) legeme ikke behøver at have uendelig mange elementer. Man kan f.eks. danne et legeme med blot 2 elementer.
- MA 4.2 Slutningen af første stykke af afsnit 4.3 formuleres således:

Der er et sammenspil mellem ordningsrelationerne og regnereglerne, idet summer og produkter af positive tal er positive, og hvis et tal a er negativt, da er $-a$ positivt. Det er let heraf at udlede de kendte regneregler for uligheder.

- MA 4.3 Det afsnit (midt på siden), der begynder med "Vi vil sædvanligvis", erstattes med følgende:

Vi bemærker, at konvergensdefinitionen også kan skrives på den kortere form

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (|a - a_n| \leq \varepsilon).$$

- MA 4.4 Afsnit 4.6 skal begynde med: En ikke tom talmængde....
- MA 4.5 1.5 f.o. Efter "med $-M$ " indføres "den mængde".
1.13 f.o. "ikke begrænset" rettes til "ikke tom".
- MA 4.6 1.4 f.n. højre side kan også skrives $f(M)+g(M)$.
1.1 og 2 f.n. Der mangler M to steder (under $\inf$ og $\sup$).
- MA 4.8 1.1 f.n. "punkt" rettes til "tal" (også på den følgende side 1.5 f.o.).
- MA 4.9 1.7 f.n. A_N rettes til a_N .
- MA 4.10 1.5 f.o. $a_n \geq b$ rettes til $a_n > b$.
1.9 f.o. Der mangler $N \in \mathbb{N}$ under $\inf$.
1.16 f.o. " " $N \in \mathbb{N}$ " $\sup$.
- MA 4.12 1.1 f.o. Parentesens første led skal være $|a_m - a_n|$.
1.7 f.o. a_{N+1} rettes til $a_N + 1$.
- MA 4.13 1.12 f.o. "voksende" rettes til "strengt voksende".
1.15-16 f.o. "konvergerer" rettes begge steder til "går".
- MA 4.14 1.10 f.n. Efter $x = y = 0$ tilføjes "idet $x^2 > 0$ når $x \neq 0$ (smgl. side MA 4.2)".
- MA 4.15 1.9 f.n. Der skal stå $]-\pi, \pi]$.
- MA 4.16 1.3 f.n. x rettes til a .
- MA 4.18 1.12 f.o. Efter "Omkring 500" tilføjes "f. Kr.".
- MA 4 opgave 1 omformuleres til: "Gennemfør beviserne for de i 4.2 i sidste halvdel af andet stykke anførte påstande.
- MA 4 opgave 10. Af de tre led på højre side af lighedstegnet ændres det sidste til $\frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$.
- MA 4 opgave 26. I tredje linie skal der stå a_{n+1} i stedet for $a_n + 1$.
- MA 5.2 1.3 f.o. $u_{n,p}$ rettes til $|u_{n,p}|$.
- MA 5.4 1.14 f.n. k " " c.
- MA 5.6 1.3 f.n. Efter "betingelsen" tilføjes ", at".

Mat. 1, 1963-64

MA 5.7 1.8 f.n. $n \geq n$ rettes til $n \geq N$.

MA 5.8 1.4 f.n. Sidste udtryk i linien skal være $\sum n^{-1}(\log n)^{-\alpha}$
1.1 f.n. Det første komma skal væk.

MA 5.9 1.5 f.o. $n > \alpha - 1$ rettes til $n > \frac{1}{\alpha-1}$.

1.11 f.o. Der skal stå: "Dette ses, ved at vi vælger...".

MA 5.10 1.3 f.n. Under første summationstegn rettes $a_p b_p$ til
 $a_k b_k$.

MA 5.11 1.2 f.o. "faktoren b_1 " rettes til faktorerne b_n ".

MA 5.16 1.3 f.o. $\leq$ rettes til $<$.

MA 5.20 1.10 f.o. I det sidste udtryk for $\text{tg } z$ skal fortegnene
mellem tællerens og nævnerens led byttes om.

1.9 f.n. Der mangler et minustegn efter det andet **lig-**
hedstegn.

MA 5.21 På den sidste halve side ændres Log til log, og log til
Log (ialt 5 steder).

Kommentarer og rettelser.

Side

MA 6.4. Henvisningen i linie 8 f.n. skal være til opgave nr. 1.

MA 6.6. I tabellens linie 4 f.n. gælder udtrykket $\text{Arcosh } x$ kun for $x \in]1, \infty[$. For $x \in]-\infty, -1[$ må udtrykket erstattes med $-\text{Arcosh}|x|$.

I tabellens sidste linie skal stamfunktionen ændres til $\text{Arcoth } x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$.

Formlen nederst på siden burde skrives

$$D(F \circ \varphi) = (DF \circ \varphi)D\varphi,$$

og tilsvarende bør multiplikationstegnet udelades i første og tredje linie på side 6.7.

MA 6.8. I linie 5 f.n. skal intervallet være $]0, \infty[$.

I sidste linie skal t^2 rettes til t^3 .

MA 6.9. I linie 6 f.o. rettes $x > 0$ til $u > 0$.MA 6.10. I linie 2 f.o. rettes Arcsin til Arccos .

MA 6.11. I linie 2 f.o. rettes "udbedes" til "udledes".

I linie 8 skal nævneren i den første brøk være $2n-2$ og fortegnet for den sidste brøk skal ændres.

MA 6.15. I linie 10 skal indføjes følgende: Reduktion af ligningens venstre side giver udtrykket

$$x^4 + x^3 - 2x^2,$$

og efter division med $x(x-1)$ fås ligningen

$$x^2 + 2x = b_3(x^2 + x + 1) + (rx + s)(x - 1).$$

MA 6.16. I linie 2 f.n. skal den sidste integrand være

$$\left(\frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \right)^4 dx.$$

MA 6.18. Der mangler et komma efter linie 3 f.o.

I linie 4 f.o. er d desværre blevet benyttet både som differentialtegn i du og dx og som talkonstant. I det midterste udtryk er det selvfølgelig talkonstanten.

MA 6.21. Kommentar til afsnit 6.17. Hvis integranden indeholder netop én kvadratrods af et polynomium af tredje eller fjerde grad, kaldes stamfunktionen et elliptisk integral. De elliptiske integraler er generalisationer af $\arcsin$ - og $\arccos$ -funktionerne og de har omvendte funktioner, som er generalisationer af de trigonometriske og hyperbolske funktioner. Disse omvendte funktioner er de elliptiske funktioner. Hvis integranden indeholder mere komplicerede rodstørrelser, får stamfunktionerne ikke omvendte funktioner med rimelige egenskaber. Studiet af disse stamfunktioner er et specielt kapitel af teorien for de såkaldte Abel'ske integraler.

Opgave 6. Ordet "den" slettes.

Opgave 23. Der skal stå : "disse funktioners udtryk ved komplekse".

Opgave 28. På venstre side i den sidste ligning skal der stå

$$f_{n+1}(x).$$

MA 7.1. I linie 10 f.n. rettes "afbildne" til afbildning.

MA 7.2. I linie 9 f.n. skal der stå $\phi = x^2 D^2 - xD + D^0$.

MA 7.3. Udtrykkene i linie 16, 17 f.o. rettes til $x^2 D^2 - xD + D^0$ og $D^2 + \cos x D^0$.

I linie 10 og 8 f.n. skal $x^2 \cos x - 1$ rettes til $x^2 \cos x + 1$.

I linie 6 f.n. mangler et komma foran "betegner".

MA 7.5. I linie 7 f.o. skal der stå "løsninger til (5)".

I linie 9 f.o. skal $D(x)$ rettes til $D\phi(x)$.

I linie 10 f.n. skal der stå "Ifølge 6.18".

MA 7.6. I linie 13 f.o. rettes den sidste ligning til

$$\phi = \psi e^{-A(x)}.$$

I linie 11 f.n. rettes "ligningen" til "ligning".

- MA 7.8. Linie 9 f.o. "løsningsfunktion" skrives i et ord.
 Linie 15 f.o. I ligningen skal der stå $a_1 D$.
- MA 7.9. I linie 2 og 4 f.o. skal $\frac{1}{3} \log x$ rettes til $\frac{1}{3} \sqrt{x} \log x$.
- MA 7.14. I linie 7. f.o. rettes f til $\tilde{F}$.
- MA 7.14. Kommentar til afsnit 7.14. I praksis er den her skitserede anvendelse af de arbitrære konstanter variationsmetode ofte mere hensigtsmæssig end den i 7.12 og 7.13 omtalte metode.
- MA 7.15. I linie 2 f.n. rettes c til $\subseteq$.
- MA 7.17. I linie 13 f.o. er minustegnet i eksponenten glemt i det midterste udtryk, og i det sidste udtryk skal $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ være $\log \frac{1}{2} \sqrt{2}$.
- MA 7.18. I linie 9 f.n. skal stå "tilordner et polynomium $P \Phi$ ".
- MA 7.19. Kommentar. Begrebet "isomorfi" er indført eller vil meget snart blive indført i kursus i algebra og geometri.
 I linie 8 f.n. mangler et komma foran $k = 1, \dots, P$ og i linie 6 f.n. skal der være en lodret streg foran $c_1 \in \mathbb{C} \wedge \dots$.
- MA 7.20. I linie 8 skal c_1 rettes til C_1 .
- MA 7.23. Linie 10 f.o. skal begynde med $-\frac{1}{6} \sin x$.
 Linie 7 f.n. Det første led i den sidste parentes skal være $\cos \gamma \log x$.
- Opgave 33. Leddet $-4D^0$ rettes til $+4D^0$.
- MA 8.3. I linie 8 f.o. rettes "kugleomgivelserne" til "kugleomegnen".
 Det sidste udtryk i linie 17 f.o. skal være $|z-y| + |y-x|$.
- MA 8.4. I linie 6 f.n. skal "Scharz" rettes til Schwarz.
- MA 8.11. Efter linie 11 f.o. tilføjes "skrives".
- MA 8.14. Linie 9 f.o. Sidste ord skal være "fjernt".
- MA 8.16. I linie 7 f.n. rettes $h(x_3)$ til x_3 .
- MA 8.17. I linie 4 f.o. rettes "periodisk" til "kontinuert".
- MA 8.18. I første linie rettes "af" til "i". Linie 2 og 3 f.n. er ikke korrekt formulerede. Det er ikke en kontinuert funk-

tion, men et udtryk, der angiver en sådan funktions
værdier, der uden videre også kan anvendes som defi-
nition af en funktion af flere variable. Man vil da
sige, at "funktionen i virkeligheden ikke afhænger af
alle sine variable."

MA 8.19. I linie 6 f.n. rettes "dens" til "deres".

MA 8.20. I linie 12 f.o. er to ord faldet ud: den afkortede be-
tegnelse.

MA 8.22. I linie 17 f.o. mangler t i "simpelt". Det samme gælder
for "kontinuert" i linie 19 f.o.

MA 8.23. I sidste linie rettes "er" til "og definerer."

MA 8.24. I linie 6 f.n. rettes $\frac{y}{x}$ til $\frac{x_2}{x_1}$.

MA 8.25. I linie 14 rettes "kontinuerte" til "kontinuert."

MA 8.31. Linie 3 f.n. skal være $\forall A \subseteq S(f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(\bar{A})})$.

MA 8.32. Linie 14 f.o. skal være $\forall x \in \bar{A}(f(x) = g(x))$.

MA 8. Opgave 11. Vejledningen i parentesen ændres til følgende:

Lad ε være et positivt tal. Der eksisterer da et N ,
således at

$$\forall m, n \geq N, \forall q \left(|a_{mq} - a_{nq}| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

For $q \rightarrow \infty$ fås heraf en ulighed, der viser, at følgen
(b_n) konvergerer mod en grænseværdi b . For $q \rightarrow \infty$ fås
heraf en ulighed, der viser, at følgen (b_n) konvergerer
mod en grænseværdi b . For $m \rightarrow \infty$ fås yderligere

$$\forall n \geq N(|b - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}).$$

Ved for fast $n \geq N$ at sammenligne $|b - a_q|$ med $|b_n - a_{nq}|$
fås det ønskede.

MA. Opgave 17 skulle selvfølgelig have været formuleret således:

Find for en mængde M med 2 eller 3 elementer alle af-
bildninger $\bar{U}: M \rightarrow \bar{D}(\bar{D}(M))$, som tilfredsstiller

01-05 i 8.11.

MA. Opgave 46. Afbildningen i tredje linie skal være $f: \mathbb{R}^{\infty} \times]-1, 1[$
ind i $\mathbb{R}$.

MA. Opgave 52. I opgavens slutning slettes "ikke" og "heller
ikke."

MA. Opgave 58. Det ene ϕ i tredje linie skal selvfølgelig slettes.

Tillæg
til
Kommentarer og rettelser.

MA 6,2	1. 6 f.o.	Efter ordet "definition" tilføjes "af en funktion på $[a - c, b - c]$ ".
MA 6,4	1. 2 f.o.	Efter " $\int f$ " tilføjes " $f \in \hat{F}([a, b], \mathbb{R})$ ".
	1. 8 f.n.	I parentesen ændres "nr. 2" til "nr. 1".
MA 6,6	1. 2 f.n.	Der skal stå "operatoren" og ikke "operationen".
MA 6,7	1. 2 f.n.	I nævneren i det midterste udtryk skal eksponenten 2 flyttes ind til $\frac{x}{a}$.
MA 6,8	1. 9 f.n.	"monoton" rettes til "strengt monotont".
	1. 6 f.n.	"anvender vi substitutionen" rettes til "substituerer vi".
MA 6,9	1. 9 f.o.	Der skal stå x^α under integraltegnet, og endvidere skal der på højre side af lighedstegnet tilføjes $+(\alpha+1)^{-2}$.
MA 6,11	1. 9 f.n.	Der skal stå t foroven ved de to integraltegn, og t i stedet for x i sidste udtryk.
MA 6,14	1. 11 f.o.	Der mangler en parentes om -1 midt på linien.
MA 6,15	1. 7 f.n.	I den sidste brøk ændres $2x - 1$ til $2x + 1$.
MA 6,16	1. 1,10 og 14 f.o.	Der mangler parentes om produktet efter Arc tg.
	1. 1 f.n.	Der mangler et minustegn i den sidste eksponent.
MA 6,18	1. 3 f.o.	"monoton" rettes til "strengt monotont".
	1. 7 f.o.	Intervallene skal være åbne til venstre.
	1. 6 f.n.	Efter $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sættes parentes, og inde i parenteserne tilføjes leddet $-\log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.
MA 6,20	1.1+3 f.o.	Der skal numerisktegn om tælleren efter log.
	1. 6 f.o.	I sidste brøks nævner rettes $\frac{t}{2}$ til t .
MA 6,21	1. 3 f.o.	Der mangler faktorer dt på højre side.
MA 6	opg. 1	Efter det andet lighedstegn skal der stå $\sqrt{(-1) \cdot (-1)}$.
MA 6	opg. 25	"log" rettes til "Log".
MA 6	opg. 27	Integrallogaritmen defineres sædvanligvis ved

$\int_0^x \frac{du}{\log u}$ og afviger således med en konstant fra det i opg. 27 anførte udtryk.

MA 6 opg. 33 Intervallet ændres til $]0, \infty[$.

MA 7,2 1. 8 f.o. Efter ordet "funktioner" tilføjes "af en reel variabel".

MA 7,3 1. 10 f.o. $\Phi \Psi$ f rettes til $\Psi \Phi$ f.

1. 2 f.n. Der skal stå ϕ^{-1} f.

1. 1 f.n. Hele linien skal lyde: "ethvert element af denne mængde kaldes en partikulær løsning til (3)".

MA 7,7 1. 13 og "log" rettes til "Log".
12 f.n.

MA 7,8 1. 2 f.n. Intervallet skal være $[0, \infty[$.

MA 7,9 1. 2+4 f.o. Den tidligere omtalte rettelse vedr. dette sted indeholder en trykfejl, idet der naturligvis skal rettes til $\frac{1}{3} \sqrt[3]{x} \log x$.

Endvidere skulle der i linie 2 have stået $\int^x$ og t
i stedet for x under integraltegnet.

1. 11 f.n. "sek⁻¹" slettes.

MA 7,10 1. 12 f.n. Der tilføjes "positiv" foran ordet "løsningsfunktion"

MA 7,11 1. 15 f.n. Der skal stå $\varphi(x_1) = x_2$ i st. f. = 0.

1. 14 f.n. I stedet for "værdien 1" skal der stå "værdien $\frac{+}{-}$ 1 eller 0".

1. 3 f.n. Ordet "løsning" rettes til "funktion i $\hat{C}^1(I, \mathbb{R})$."

MA 7,13 1. 2 f.n. A_1 rettes til a_1 .

MA 7,14 1.13-14f.n. "forsøger om" ændres til "søger betingelsen for at".

1. $11 + 8$ " a_1 rettes til $a_1 \varnothing$

MA 7,21 1. 14 f.n. Sætningen skal slutte således:" at g er løsning til
differentialligningen".

MA 7,23 1. 9 f.n. "irrationale" rettes til "imaginære".

1. 7 f.n. Der skal parentes om $\gamma \log x$ både efter cos og sin.

- MA 7,24 1. 3 f.o. a_{21} mangler blandt de nævnte funktioner.
- MA 7 opg. 10 Opgavens sidste 3 linier slettes.
- MA 7 " 12 I opgavens sidste linie ændres "Bestem" til "skal man bestemme", og punktummet lige før rettes til et komma.
- MA 8,1 1. 7 f.o. Kommaet efter $f:M_1$ slettes.
- MA 8,2 1. 9 f.n. Ordet "kugleomgivelse" er også gængs anvendt i stedet for "kugleomegn".
1. 7 f.n. "kugleomegnens" rettes til "kugleomegnes".
- MA 8,3 1. 1 f.n. Ordene "der er her tale om" skal opfattes således: "der er ved den i nærværende paragraf indførte metrik tale om".
- MA 8,4 1. 4 f.o. "talsæt" rettes til "reelle talsæt", og samme retelse foretages på side 8,5 l. 10 f.o.
- MA 8,5 1. 11 f.n. Efter udtrykket for mængden L tilføjes "med samme metrik".
1. 9 f.n. "punkter i L " rettes til "punkter i $\mathbb{R}^m$ ".
- MA 8,6 1. 14 f.n. $]1,0[$ rettes til $]0,1[$.
1. 8 f.n. Der skal stå $\underline{y} = \underline{b} - \underline{c}$, og på l. 6 f.n. strengt taget $\|\underline{b} - \underline{c}\|$ i st. f. $\|\underline{c} - \underline{b}\|$ (to steder), men normen ændres jo ikke ved en sådan ombytning.
1. 2 f.n. "talsæt" rettes til "reelle talsæt".
- MA 8,7 1.12-13 f.o. Ordet "er" sidst i linie 12 ændres til "så vil, på grund af", og i linie 13 slettes ordene "og" og "vil da".
1. 8 f.n. Der mangler kvadratrodstegn over højre side af ulighedstegnet.
- MA 8,8 1. 8 f.o. Denne paragraf er også kommet til at hedde 8,7, så der er to paragraffer med det nummer.
1. 10 f.o. $M \times M$ rettes til $A \times A$.

- MA 8,10 1. 9 f.n. "følge" rettes til "fundamentalfølge".
- MA 8,11 1. 7 f.n. Der mangler en streg under a.
- MA 8,14 1. 16 f.n. Der skal stå "skiller rummets punkter".
- MA 8,15 1. 1 f.o. Der skal stå henh. " dist_1 " og " dist_2 ", og ligeledes i linie 5 f.o.
- MA 8,16 1. 11 f.o. "omegn" rettes til "omegne".
1. 12 f.o. Efter "udgør" tilføjes "f.eks.".
- MA 8,18 1. 10 f.o. "afstand f" rettes til "afbildning f".
- MA 8,20 1. 14 f.o. Der mangler en halv parentes efter Σ .
- MA 8,21 1. 4 f.o. T_2 rettes til T_m .
- 1.9+10 f.o. På højre side af lighedstegnene skal "dist" rettes til " dist_μ ".
1. 3 f.n. Der skal stå "dist" begge steder.
- MA 8,22 1. 8 f.n. Efter T' skal $M_1 \times M_2$ rettes til $N_1 \times N_2$.
1. 5 f.n. På højre side af lighedstegnet skal de to K' 'er rettes til henh. K_1 og K_2 .
- MA 8,24 1. 12 f.n. Der skal stå "kugleomegn af $\frac{1}{x}$ ".
- MA 8,25 1. 5 f.n. Efter "S ind i $\mathbb{R}$ " tilføjes "begge er kontinuerte".
- MA 8,26 1. 16 f.n. "tilordningslov" ændres til "afbildning".
- 1.7-6 f.n. Den sidste sætning "Endelig er $\mathbb{Q}$" slettes.
1. 4 f.n. Der skal stå "vor definition".
- MA 8,27 1. 14 f.n. $b \in \mathbb{U}$ rettes til $b \in \mathbb{A}$.
- MA 8,28 1. 7 f.o. $\mathbb{U}_a$ rettes til $\mathbb{U}(a)$.
- MA 8,29 1. 8 f.n. $\mathbb{Q}^2$ rettes til $\mathbb{Q}_1$.
- MA 8,32 1. 7 f.n. I den første parentes tilføjes $= 0$ efter $\text{dist}(f(x), g(x))$.
- MA 8 opg. 20 I tredje linie rettes "rum" til "mængde".
- MA 8 opg. 24 Anden linie skal begynde således: "ind i $[-K, K]$, $v \in \mathbb{N}$, være kontinuerte afbildninger."

I opgavens sidste linie tilføjes "T og" efter ordene "ethvert valg af".

MA 8 opg. 25

$f_3(x)$ rettes til $f_3(n)$.

Ma 8 opg. 51

I første linie tilføjes "givne funktion" foran ordet "er".

Rettelser og kommentarer.

- MA 9.5. Sætning 9.5.3. begynder: For $p \leq q$,
- MA 9.6. Linie 13 f.n. først rettes til ført.
- MA 9.9. Kommentar. I betegnelsen for funktionsmængden $O(A; \mathbb{R}; |h|^q) = O(|h|^q)$ vil vi sædvanligvis udelade numerisk tegnet. Endvidere skrives $O(1)$ i stedet for $O(\|h\|^0)$.
- MA 9.14. Linie 11 f.o. følgende rettes til følger.
- MA 9.16. Linie 2.fn.: f rettes til $\underline{f}$
- MA 9.17. Linie 13 f.n. basissætningerne rettes til basissæt-
tene.
Linie 9 f.n. $\underline{h}_{m-m}$ rettes til $\underline{h}_m$.
- MA 9.19. Linie 4 f.o.: Det sidste led i formlen skal være $\underline{\varepsilon}_2^1 \circ \Delta_a \underline{f}(\underline{h})$.
- MA 9.21. I linie 2 f.n. rettes 7 til).
- MA 9.22. I sætning 9.18.4 skal det næstsidste 0 i anden linie fortolkes som et nul. Også på de næste sider optræder bogstavet 0 sammen med tallet 0, men tallet nul optræder kun i uligheder, samt i $\{0\}$.
- MA 9.25. Andet stykke formuleres således:
Hvis $\underline{f}$ er differentiabel i den åbne mængde 0,
fås de partielle differentialer ved indsættelse
af $h_\mu = 0$ for $\mu \in J$ i de totale differentialer.
Således er (9.19).
- MA 9.29. I definition 9.24.1 skal 0 fortolkes som nul i første og fjerde linie.
- MA 9.30. I linie 11 f.o. rettes "med $\underline{f}$ " til "af $\underline{f}$ ".
- MA 9. Opgave 11. Den uendelige række ændres til

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (1-z)^n,$$

og det skal vises, at $Df(z) = -z^{-1}$.

- MA 9. Opgave 18. Afbildningen $f:0$ ind i $\mathbb{R}^n$ forudsættes kontinuert.
- MA 9. Opgave 23. For $x \neq 0$ skal udtrykket være $\|x\|^{-4} x_1 x_2 x_3 x_4$.
- MA 9. Opgave 27. Den sidste koordinat i parentesen ændres til ax_2 . Desuden tilføjes antagelsen $a \neq 0$.
- MA 9. Opgave 33. Det skal selvfølgelig være $f:\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$.
- MA 9. Opgave 36. Denne opgave udgår, idet problemstillingen ikke er tilstrækkelig klar.
- MA 9. Opgave 40. bijektivt rettes til injektivt.
- MA 10.12. I linie 8 f.o. rettes 10.10.1 til 10.8.1.
- MA 10.13. Tegnet $\Leftarrow$ er ensbetydende med det i den formelle logik benyttede tegn $\Rightarrow$.
- MA 10.14. I linie 3 f.o. rettes 10.9.1 til 10.8.1.
I definition 10.14.1 skal der stå homeomorfi eller homoeomorfi samt homeomorf eller homoeomorf. Tilsvarende i det følgende.
- MA 10.15. I linie 5 f.o. rettes 10.9.3 til 10.8.1.
- MA 10.17. I linie 14 f.o. mangler et komma i $\text{dist}(a_1, F_1)$.
- MA 10.18. I linie 7 f.n. rettes 10.10.1 til 10.9.1.
- MA 10.21. I linie 12 f.o. mangler en halv parentes lige før lighedstegnet.
- MA 10.22. I linie 12 f.n. skal det første komma selvfølgelig være et gangetegn.
- MA 10.24. I øverste linie rettes $\|\underline{h}\|$ til $\underline{h}$.
I linie 5 f.o. er der tale om kontinuitet af $\Theta(\underline{h};k)k$ som funktion af alle de variable. Idet $0 < \Theta(\underline{h};k) < 1$, fås vurderingen
- $$\left| \Theta(\underline{h}_2, k)k - \Theta(\underline{h}_1, 0) \cdot 0 \right| = \Theta(\underline{h}_2, k)|k| \leq |k|,$$
- hvoraf kontinuiteten umiddelbart følger.
- MA 10.25. I linie 10 f.o. skal x understreges. I denne forbindelse bør det tillige understreges, at kravet om

kontinuitet i $\underline{a}$ af $D_{\underline{q}}f(\underline{x})$ kun vedrører restriktionen af $D_{\underline{q}}f$ til $\mathbb{R}_{\underline{a}}^{\underline{q}} \cap U$.

MA 10.26. Linie 9 f.o. Der skal selvfølgelig stå "partiel differentiation".

MA 10.27. I linie 13 f.n. rettes "hjælpesætning" til "hjelpefunktion".

MA 10.28. I linie 11 f.o. rettes ε_0^1 til ε_1^0 .

MA 10.29. I linie 8 f.n. rettes "fækkefølgen" til "rækkefølgen".
I linie 6 f.n. sættes lighedstegn foran brøkstregen.

MA 10.31. I linie 7 f.o. slettes det $(\underline{x}$, der står ovenover $\Omega(\underline{x}, d\underline{x})$ og den manglende understregning i $d\underline{x}$ anbringes.

MA 10.32. I linie 5 f.o. skal symbolet c_d^2 hæves så meget, at d kommer ud for ω .

I linie 11 f.n. skal c_{d_3} være c_d^3 .

MA 10. Opgave nr. 1. Spørgsmålet rettes til følgende: Vis, at det således definerede metriske rum bliver begrænset, men at det for $0 < \varepsilon < 1$ ikke kan overdækkes med endelig mange kugler med radius ε .

MA 10. Opgave nr. 11. I næstsidste linie rettes "den" til "dem".

MA 10. Opgave nr. 14. I anden linie rettes a_{n_2} til a_{n_2} . I tredje linie rettes $q = 0$ til $q = n$.

MA 10. Opgave nr. 19 omformuleres: Er følgende sætning rigtig:

Lad $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ og $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ være differentiable afbildninger med grænseværdi 0 i ∞ .

Hvis $\frac{Df}{Dg}$ har en grænseværdi c i ∞ , da har $\frac{f}{g}$ ligeledes grænseværdien c i ∞ .

For den, som er dygtig, vil det være en sund træning at overveje, hvad der egentlig er i vejen med den gamle formulering af opgave nr. 19.

MA 10. Opgave 29. I anden linie rettes N til n .

- MA 10. Opgave 31. Som yderligere vejledning skal tilføjes, at vendingen: "at hvert punkt har en kugleomegn, i hvilken afbildningen er ligelig kontinuert" er helt vildledende. På den anden side burde vejledningen med denne tilføjelse være tilstrækkelig.
- MA 10. Opgave 32 viser ikke noget særlig interessant.
- MA 10. Opgave 34 og 35. Det er en god øvelse at prøve at gennemføre nogle af restledsvurderingerne for de i kapitel 2 behandlede elementære potensrækker ved hjælp af de i disse opgaver fundne former for restleddet.
- MA 10. Opgave 37. I linie 7 rettes $\exists k$ til $\exists K$.
- MA 11.1. Det er nok rimeligere i første stykke at skrive $\{0,1\}$ i stedet for $\{1,2\}$.
- MA 11.6 Linie 10 f.n. ændres til:

$$(A \subseteq I \wedge A \text{ åben} \wedge (CA \text{ åben} \wedge A \neq \emptyset) \Rightarrow A = I,$$
- MA 11.16 I linie 5 f.o. rettes "derefter" til "derfor".
- MA 11.21 Linie 9 f.n. skal ændres til

$$\lambda(\underline{a}; x, y) = -\lambda(\underline{a}; y, x),$$
 Der skal ikke være punktum efter linie 8 f.n.
- MA 11.24 Andet punktum i stykket der begynder med 11.21 er skrevet 2 gange. Den første udgave af det skal slettes.
- MA 11.25 I linie 8 f.n. rettes "kun" til "kan".
- MA 11. Opgave nr. 2 og opgave nr. 13 er ens.
- MA 11. Opgave nr. 9. Mon ikke det sidste ord i opgaven skal rettes til "konveks"?
- MA 11. Opgave 10. En løsning står i kapitel 7. Det kan være sundt her at løse den ved at benytte, at den kontinuerte afbildning $f_2 - f_1$ afbilder interval på sammenhængende mængde.
- MA 11. Opgave 11. "Deltranterne" skal selvfølgelig være "deltrekanterne". I den følgende linie rettes "trekanten" til "trekanter".

MA 11. Opgave 16. I tredje linie slettes "vi".

MA 11. Der mangler en halv parentes til sidst i opgave 35 og i begyndelsen af opgave 36. I opgave 36 skal "tællelig" være "numerabel" og ordet "over" sidst på første side skal slettes.

MA 12.3. I sidste linie rettes "kurven" til "korden".

MA 12.4. Linie 7. Der tilføjes "i de indre punkter af intervallet".

MA 12.5. I linie 4 f.o. indføres "2 gange" foran "differentiabel".

MA 12.8. I linie 7 f.n. slettes det første a på højre side af ulighedstegnet.

I linie 4 f.n. skal A_p rettes til A^p .

MA 12.9. I de 2 første linier er minustegnet i $-\frac{1}{q}$ groet sammen med brøkstregen.

MA 12.11. Minkowski's ulighed gælder kun for $p > 1$.

MA 12. Opgave 7. Delintervallet I kan være tomt eller udarte til et enkelt punkt.

Tid: 4 timer. Alle hjælpemidler tilladt. Fem opgaver korrekt besvaret gælder for fuldstændig besvarelse.

1. En følge (a_n) af reelle tal er opad begrænset og tilfredsstiller betingelsen $\forall n \in \mathbb{N} (a_n - a_{n+1} \leq \frac{1}{n^2})$. Vis, at følgen er konvergent.

2. Find den fuldstændige løsning til differentiaalligningen

$$(x^2 D^2 + xD - D^0)\chi = e^{\sqrt{x}}, \quad]0, \infty[.$$

Efter 1960/61-noterne skrives ligningen

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = e^{\sqrt{x}}, \quad x \in]0, \infty[.$$

3. Lad $M \subseteq \mathbb{R}^2$ være en begrænset punktmængde. For $x \in \mathbb{R}^2$ sætter vi

$$\rho(x) = \inf\{r > 0 \mid M \subseteq K(x; r)\},$$

idet $K(x, r)$ er den åbne cirkelskive med centrum x og radius r . Forklar den geometriske betydning af $\rho(x)$. Vis, at funktionen ρ antager sin mindste værdi i ét og kun ét punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

4. Lad $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert, og lad $\alpha, \beta : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuerte afbildninger med begrænset variation. Bevis relationen

$$\int_a^b f(x) d\alpha\beta(x) = \int_a^b f(x)\beta(x) d\alpha(x) + \int_a^b f(x)\alpha(x) d\beta(x),$$

idet $\alpha\beta$ er produktet af α og β .

5. Find de punkter P i planen $\mathbb{R}^2$, for hvilke det gælder, at ligningen

$$(1) \quad x^3 - x^2 y^2 + 2y^3 = 0$$

fremstiller en kurve gennem P , differentiabel i P og med tangent i P parallel med én af koordinataksene. Vis, at

der for ethvert $t \neq 0$ i $\mathbb{R}$ eksisterer netop ét punkt i $\mathbb{R}^2$, der tilfredsstiller (1) samtidig med betingelsen $y = tx$. Vis derved, at (1) har en éntydig bestemt løsning, som er differentiabel i $(0,0)$.

6. En stykkevis kontinuert differentiabel afbildning $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } |x| \leq (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } |x| > (2n+1)\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Find den eksponentialtransformerede Ef_n og vis, at funktionsfølgen $(\frac{1}{(2n+1)\pi} Ef_n)$ konvergerer punktvis, men ikke ligeligt mod en grænsefunktion.

Hvis 5 opgaver er rigtigt besvarede, regnes besvarelsen for fuldstændig. Alle hjælpemidler er tilladt. Tid: 4 timer.

1. De positive tal x, y og z tilfredsstiller betingelsen

$$x+y+z = xyz.$$

Vis, at

$$\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} y + \operatorname{Arctg} z = \pi.$$

2. Find en løsningskurve til differentialligningen

$$xy \, dx - (x^3 + 3x^2 - 4x - 12)dy = 0,$$

som går gennem punktet $(1, \sqrt{3})$.

3. Undersøg, om følgende rækker er konvergente.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\log(e^n + 1)} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n/2\pi}{\log(e^n + 1)} \quad .$$

4. Vis (f.eks. ved induktion) formelen

$$\int_0^1 x^n e^{-x} dx = n! \left(1 - e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) ,$$

og udregn derefter Riemann-Stieltjes-integralet

$$\int_0^{\infty} e^{-x} d(x - [x]) [x] ,$$

hvor $[x]$ betegner den hele del af x .

5. En afbildning $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+xy)}{1+y^2} dy.$$

Udregn Df og derefter f .

6. En afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{for } x_1 = 0 \\ x_1 x_2 \operatorname{Arctg} x_1^{-1} x_2 & \text{for } x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Hvor er f differentiabel, og hvor har f partielle differentialkvotienter?

1. Bevis formelen

$$\frac{1}{2}(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) x^n,$$

og angiv potensrækkens konvergensradius.

2. I Hilbertrummet $\mathbb{R}^{\infty}$ (noterne 8.7) betragtes mængden M af punkter $\underline{a}$, for hvilke $\sum_n a_n^2$ er konvergent. Vis, at $\underline{a} \in M$, $\underline{b} \in M$, $k \in \mathbb{R}$ medfører $k\underline{a} \in M$ og $\underline{a} + \underline{b} \in M$. Vis, at M er overalt tæt i $\mathbb{R}^{\infty}$, og at $\underline{0}$ ikke er indre punkt i M .

3. Med Φ betegner vi den ved $\Phi f(x) = x Df(x)$ definerede differentialoperator. Vis, at differentiaalligningen

$$\Phi^{\circ p} \chi = x \chi,$$

hvor $p \in \mathbb{N}$, har den ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p}$$

definerede afbildning $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ som løsning.

4. Bevis, at ligningen

$$x^5 - y^5 + 2xy^3 - 2x^2y = 0$$

for enhver værdi af $x \in \mathbb{R}$ er tilfredsstillet af én og kun én værdi $y = f(x)$. Vis, at den således definerede afbildning $f : \mathbb{R} \text{ ind i } \mathbb{R}$ er bijektiv og differentiable. Vis, at Df har en grænseværdi for $x \rightarrow \infty$ og for $x \rightarrow -\infty$.

5. Udregn

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) d\alpha(x),$$

hvor

$$\alpha(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

6. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har periode 2π og er for $|x| < \pi$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} n(1-n|x|) & \text{for } |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{for } \frac{1}{n} < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

idet n er et naturligt tal. Bestem Fourierrækkeudviklingen for funktionen f .