

Matematik 2. del, 1976-82

Anders Thorup

Forelæsningsnoter til skemaer mm

Håndskrevne noter

Geometriske rum ... Geom 1–4

Skemaer ... Sch 1–16

Morfier af skemaer ... Morf 1–41

Algebraiske kurver ... Kurv 1–34

Om IP^r ... IP^r 0–9

Mini- K -teori ... K 1–9

Divisorer ... Div 1–5

Om $\text{Spec}(A)$... Spec 1–5

Graduerede moduler ... Grad 1–17

Om $\text{Proj}(G)$... Proj 1–6

Præknipper og knipper ... I 1–7

Formel projektiv geometri ... Form 1–9

Induktiv og projektiv limes ... Lim 1–9

Mangfoldigheder ... Mangf 1–20

Indhold

Geometriske rum (Geom)

1: Geometrisk rum. 2: Restriktion. 3: L -mangfoldighed. 4-5: Morfi. 6: C^∞ -mangfoldighed. 7: Riemann-flade. 8: Affin mangfoldighed. 9: Algebraisk mangfoldighed. 10: Morfier ind i $\text{Spec}(A)$.

Skemaer (Sch)

1: Affint skema, k -skema. 2: Topologiske egenskaber (quasi-kompakt, topologisk noethersk, sammenhængende, irreducibel). 3: Strukturegenskaber (lokalt noethersk, noethersk, reduceret, integritetsskema). 4: Specialisation og generisation. 5: Generisk punkt. 6: Rationale funktioner. 7: Afsluttet delskema. 8: Punkter på skema. 9: Dimension og transcendensgrad. 10: Nul-dimensionale skemaer. 11: Sammenklstring. 12: Fibreret produkt. 13: Produkt af k -skemaer. 14: Originalmængde. 15: Fibre. 16: Base-change.

Morfier af skemaer (Morf)

1: Lemma. 2: Affin, hel, og endelig morfi; afsluttet immersion. 3: Cohen–Seidenbergs sætning. 4: Immersion. 5: Afsluttet delskema. 6: Lokale egenskaber. 7: Multiplikative egenskaber. 8: Universelle egenskaber. 9: Separeret morfi; diagonalen. 10: Morfi ind i separeret skema. 11: Quasi-kompakte morfier. 12: Lokalt endelig type. 13: Endelig type. 14: Proper morfi; hovedsætning. 15: Valuative kriterier. 16: Oversigt over egenskaber. 17: Flat base-change. 18: Dimension af produkt. 19: Dimensionssætning. 20: Grad af morfi. 21. Valuationsring. 22. Valuative kriterier II. 23: Rational morfi. 24: Dominerende morfi. 25: Propert skema over k . 26: Valuative kriterier III. 27: Regulært skema. 28: Jacobis kriterium. 29-32: Glat k -skema. 33: Opgave. 34-36: Jacobis kriterium (projektivt). 37: Glat skæring; Bertinis sætning. 38: Differentialer. 39: Normalknippe; første eksakte følge. 40: Topologisk proper afbildning.

Algebraiske kurver (Kurv)

0–1: Algebraisk kurve. 2: Proper kurve (god kurve); rationale funktioner, nulpunkter og poler, divisorer, principal divisor, Picard-gruppe, grad af divisor. 3: Grad af pol-divisor. 4: Riemanns lemma. 5: Riemanns halvdel af RR , genus. 6: Eksempler. 7: Tilføjelse til Riemanns halvdel. 8: Former. 9: Kanonisk divisor, RR . 10: Divisorklasser. 11: Genus 0. 12: Opgave om $g < 0$. 13: Genus 1, elliptisk kurve. 14-15: Weierstrass-form, j -invariant. 16: Sammenligning med analytisk $j(\tau)$. 17: Hilbertpolynomium. 18: Morfier ind i IP^r . 19: Lineært system. 20: Kurvebemærkninger.

Om IP^r (IP^r)

0–1: Gradueret moduler. 2: Coherente moduler på IP^r . 3: Cohomologi. 4: K -teori for IP^r .

Mini- K -teori (K)

1: Grothendieck-gruppe. 2: K -gruppen. 3–4: Relativ K -gruppe, $K_Y(X)$ og $L_Y(X)$. 5: Filtration via codimension. 6: Cykel-klassen. 7: Filtration via dimension, $K_0(X)$. 8: Produkt med klasse af en lokalt fri modul. 9: Chern-klasse af invertibel modul. 10: Produkt af Chern-klasser. 11: Snit-tal, effektiv divisor. 12: Kurver. 13: Flader, normalknippe for divisor. 14: Dualiserende knippe, kanonisk klasse. RR for flader, adjunktionsformlen.

Divisorer (Div)

Cartierdivisor og Weildivisor, (komplet) lineært system, dimension af lineært system, indlejringer i IP^r , snit-paring på flade.

Om $\text{Spec}(A)$ (Spec)

1: Mængden $\text{Spec}(A)$. 2: Zariski-topologi. 3–4: Funktoren Spec. 5: Topologisk immersion. 6: Strukturknippet.

Graduerede moduler (Grad)

1: Gradueret ring og modul. 2: Relevant primideal. 3: Homogen “prime avoidance”. 4: Noethersk gradueret ring. 5: Gradueret Nakayama’s Lemma. 6: Ass af en gradueret modul. 7: Opgave. 8: Polynomial funktion. 9: Opgaver. 10–11: Hilbertpolynomium. 12–13: Hovedsætning. 14: “Krull’s Hovedidealsætning”. 15–16: Parametersystem. 17: Noethers graduerede normaliseringslemma. 18: Opgaver. 19: Algebraisk uafhængighed af parametre. 20: Ass*. 21: Dimensionsformlen. 22: Regulær følge. Homogen dybde. 23: Dybde-sætning. 24–25: Macauley-modul. 26: Parameterfølge og regulær følge. 27–28: Krulls Hovedidealsætning. 29: Hilberts graduerede nulpunktssætning. 30–32: Homogen lokalisering. 33–36: Eksempler. 37: Dimension og homogen dimension. 38: Support. 39: Længde. 40: Hilbert’s graduerede nulpunktssætning. 41: Ikke-graduerede konsekvenser.

Om $\text{Proj}(G)$ (Proj)

1-2: Indskud om homogen lokalisering. 3: $\text{Proj}(G)$. 4: Opgaver.

Formel projektiv geometri (Form)

1. Punkt i $\mathbb{P}^r$. 2: Skematisk ideal. 3: Delskema af $\mathbb{P}^r$. 4: Hilbert polynomium. Dimension. 5: Reduceret skema. 6: Lokal ring for punkt. 7: 0-cykel. Multiplicitet. 9–10: Dimension. 11–13: Dimension af hyperflade snit. 14: Næsten-regulær følge. 15: Dimensionsformel. 16: $\mathbb{P}^r$ som Macaulay-skema. 17: Macaulay’s sætning. 18: Krull’s hovedidealsætning. 19: Bezout’s sætning. 20: Fuldstændigt snit. 21: Max Noether’s sætning. 22: Snit-cykler. 23: Rationale funktioner.

Præknipper og knipper (I)

Præknippe, restriktion, morfi, strå, direkte billede, funktionspræknippe, separeret præknippe; Knippe, kompatibel familie, knippifikation, frembragt delknippe, sektioner, knippe på basis; $\text{Spec}(A)$; Støtte, adjunktionssætning, billede, co-billede, inverst billede.

Induktiv og projektiv limes (Lim)

Præknippe. Restriktion. Morfi. Strå. Direkte billede. Funktionspræknippe. Separeret præknippe. Knippe. Kompatibel familie. Knippifikation. Delknippe. Sektioner. Knippe på basis. $\text{Spec}(A)$. Støtte. Pre- R - X og She- R - X som abelske kategorier. Inverst billede. Adjungerede funktorer.

Mangfoldigheder (Mangf)

1: L -mangfoldighed. 2: Strå. Kim. 3: Lokal betingelse. 4: Geometrisk rum. 5: $\mathcal{C}$ -funktioner på delmængde. Delmangfoldighed. 6: Morfi. Initialstruktur. Immersion. Eksempler. 7: $\mathcal{C}^\infty$ -mangfoldigheder. Glat mangfoldighed. Mangfoldighed med rand. Tangentvektor. Tangentkegle. Cotangentrum. Differential. Derivationer. Former. Ydre differentiation. 8: Kvotientmangfoldighed. 9: Analytisk mangfoldighed. 10: Rationalt spektrum. 11: Algebraisk mangfoldighed. 12: Opgaver.

OVERSIGT

Kom. Alg. 1977 -

lin og lin
→ ←

Præknippet og
knippet "I"

Mangfoldigheder



geometriske rum



Skemaer

Morfier af skemaer



Kurver

Divisorer

"Mini" K-teori



Spec



Proj



P_n



Hele udvidelser

Transcendensgrad

Ass

Dybde

Suppl. til Matsumura

Matsumura:

§ 10-11: Artin-Rees' sætning

§ 12-13: Dimensionsteori for
(lokale) ringe

§ 14: Endeligt frembragte
algebraer

(§ 15-16): Cohen-Macaulay ringe

§ 17: Regulære (lokale, no-
thenske) ringe



Graderede moduler



Formel projektiv geometri

GEOMETRISKE RUM

(K kommutativ ring)

1. Et geometrisk rum over K er et par $(X, \mathcal{O})$, hvor X er et topologisk rum og $\mathcal{O}$ er et knippe af K -algebraer på X , således at alle stæner $\mathcal{O}_x$ er lokale ringe.

Maksimalidealiet i $\mathcal{O}_x$ betegnes $\mathfrak{m}_x$ og restklasseløbet betegnes $\kappa(x) = \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$. Er $f \in \mathcal{O}(U)$ har vi for $x \in U$ knippet $f_x \in \mathcal{O}_x$ og værdien

$$f(x) = (f_x \bmod \mathfrak{m}_x) \in \kappa(x).$$

Er $f \in \mathcal{O}(X)$, sætter vi

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

SÆTNING. For $f \in \mathcal{O}(X)$ er X_f åben i X og $f|_{X_f}$ er invertibel i $\mathcal{O}(X_f)$. Bewis. Er $x \in X_f$, så er $f_x \notin \mathfrak{m}_x$, så der findes $\sigma \in \mathcal{O}_x$ med $\sigma f_x = 1$. Representerer vi σ ved $s \in \mathcal{O}(U)$, hvor $x \in U$, har vi $[s(f|U) - 1]_x = 0$. I stedet for at betragte en mindre omegn af x , kan vi antage, at $s(f|U) - 1 = 0$ i $\mathcal{O}(U)$, men så er $f|U$ invertibel, og dermed f_y invertibel for alle $y \in U$. Vi har altså $U \subseteq X_f$. Videre følger det, at vi kan overdække X_f med åbne mængder U_α så at der for hvert α findes $s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ med $s_\alpha(f|_{U_\alpha}) - 1 = 0$. Nu er $\{s_\alpha\}$ en kompatibel familie [the $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} =$ invers til $f|_{U_\alpha \cap U_\beta}$] altså af formen $\{s|_{U_\alpha}\}$, hvor $s \in \mathcal{O}(X_f)$, og her er $s \cdot f|_{X_f} - 1 = 0$ d: $f|_{X_f}$ er invertibel $\square$

2. Til $U \hookrightarrow X$ får vi ved restriktion et geometrisk rum $(U, \mathcal{O}|_U)$.

3. En L -mangfoldighed $(X, \mathcal{C})$ (hvor L er et legeme) er specielt et geometrisk rum over L . Strukturknippet $\mathcal{C}$ er her et delknippe af $U \mapsto \text{Aff}(U, L)$. Vi kan identificere
- $$\kappa(x) := \mathcal{C}_x / \mathcal{M}_x = L.$$

Herved svarer værdien $f(x) \in \kappa(x) = L$ for $x \in U$, $f \in \mathcal{C}(U)$ netop tilsvarende funktionsværdien af afbildningen $f: U \rightarrow L$.

4. En morfi $\psi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mellem geometriske rum over $\mathbb{R}$ er et par $\psi = (\psi_{\text{top}}, \psi^*)$, hvor

$\psi_{\text{top}}: X \rightarrow Y$ er en kontinuert afbildning

og $\psi^*: \mathcal{O}_Y \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_X$ ($:= \psi_{\text{top}*} \mathcal{O}_X$) er en knippemorfi, således at afbildningen

$$\psi_x^*: \mathcal{O}_{Y, \psi(x)} \rightarrow (\psi_* \mathcal{O}_X)_{\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

er en lokalhomomorfi for alle $x \in X$. ψ_x giver altså $\kappa(\psi(x)) \hookrightarrow \kappa(x)$ for alle x .

Idet sammensætning defineres på oplagt måde (!) får vi en kategori: $(\mathbb{R}\text{-geom})$.

5. Er $(X, \mathcal{C}_X)$ og $(Y, \mathcal{C}_Y)$ L -mangfoldigheder, ses det, at en morfi af geometriske rum $\psi = (\psi, \theta): (X, \mathcal{C}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_Y)$ er det samme som en morfi $\psi: (X, \mathcal{C}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_Y)$. Knippemorfien $\psi^*: \mathcal{C}_Y \rightarrow \psi_* \mathcal{C}_X$ er altså helt bestemt ved ψ . !!

6. Eksempel. $\mathbb{R}^k$ med knippet $\mathcal{C}$ af reelle C_∞ -funktioner er et $\mathbb{R}$ -rum $(\mathbb{R}^k, \mathcal{C}_\infty)$. Et $\mathbb{R}$ -rum, der lokalt er isomorft med $(U, \mathcal{C}_\infty|_U)$, hvor $U \subseteq \mathbb{R}^k$ er åben, kaldes en (glat) (k -dimensional) C_∞ -mangfoldighed.

7. Eksempel. $\mathbb{C}$ med knippet $\mathcal{A}$ af analytiske (=holomorfe) funktioner er et $\mathbb{C}$ -rum. Et $\mathbb{C}$ -rum, der lokalt er isomorft med $(U, \mathcal{A}/U)$ hvor $U \subseteq \mathbb{C}$ er åben, kaldes en 1-dimensional analytiske mangfoldighed eller en Riemann-flade

8. Eksempel. Til en L -algebra A (hvor L er et legeme) defineres et L -rum $\text{Spec}_{\text{rat}}(A)$ ved

$$X = \text{Spec}_{\text{rat}}(A) = \{L\text{-algebrahom. } x: A \rightarrow L\}$$

(= { maks. idealer $\mathfrak{m}_x \subset A$, så at $L \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}_x$ er isomorf })

For $x \in X$, $f \in A$ sættes $\tilde{f}(x) = x(f) \in L$, og topologien på X defineres ved at mængderne

$$X_f = \{x \in X \mid \tilde{f}(x) \neq 0\}$$

er en basis. Funktionsknippet $\mathcal{O}_X$ defineres ved

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ \varphi: U \rightarrow L \mid \varphi \text{ lokalt af formen } \tilde{f}/\tilde{g} \}.$$

Hvis $A = L[x_1, \dots, x_n] / \text{Ideal frembragt af } \{p_\alpha\}$ har vi

$$\text{Spec}_{\text{rat}}(A) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in L^n \mid p_\alpha(x) = 0\}.$$

9. For en k -algebra A defineres et geometrisk rum $\text{Spec} A = (X, \mathcal{O}_X)$ over k ved

$$X = \text{Spec} A \cong \{\text{primideal} \subset A\}.$$

med topologi givet ved at delmængderne

$$X_f = \{x \in X \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$$

er en basis for de åbne mængder, og

$$\mathcal{O}_X = A^\#$$

er knippet associeret med præknippet

$$U \mapsto \mathcal{A}(U) = S_U^{-1}A,$$

hvor $S_U = \{g \in A \mid X_g \supseteq U\}$. Som bekendt (!?) gælder:

RESULTAT. Ringkuppet $\mathcal{O}_X$ på $X = \text{Spec } A$ opfylder:

$$A = \mathcal{O}_X(X) \text{ og } A_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X_f) \text{ for } f \in A.$$

Isomorfitegnet $\xrightarrow{\sim}$ skal forstås således: For hvert $f \in A = \mathcal{O}_X(X)$ er $f/X_f \in \mathcal{O}_X(X_f)$ invertibel, og den udvidede ringhomomorfi $A_f \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ er en isomorfi.

KOROLLAR. For hvert $x \in X = \text{Spec } A$ har vi forstået:

$$A_{\mathcal{O}_x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x} \quad [\text{og altså } \mathcal{M}_x = \mathcal{O}_x A_{\mathcal{O}_x}, \kappa(x) = A_{\mathcal{O}_x} / \mathcal{O}_x A_{\mathcal{O}_x} = \text{brøkleget for } A/\mathcal{O}_x] \quad \square$$

$\text{Spec } A = (X, \mathcal{O}_X)$ er altså et geometrisk rum over k .

10. Lad A være en k -algebra, og lad Y være et geometrisk rum over k . For hver morfi $\psi: Y \rightarrow \text{Spec } A = X$ har vi dels en kontinuert afbildning $\psi: Y \rightarrow X$, dels en knippemorfi $\psi^\#: \mathcal{O}_X \rightarrow \psi_*(\mathcal{O}_Y)$, altså for hver åben delmængde $U \subseteq X$

$$\psi^\#_U: \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\psi^{-1}(U))$$

og specielt for $U = X$ en k -algebrahomomorfi

$$\psi^\#_X = \theta_\psi: A = \mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$$

SÆTNING. Ved $\psi \mapsto \psi^\#_X$ defineres en bijektiv afbildning:

$$\text{Hom}_{\text{geom}/k}(Y, \text{Spec } A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{alg}/k}(A, \mathcal{O}_Y(Y)).$$

SKITSE. Den inverse afbildning $\mathcal{D} \mapsto (\psi, \psi^\#)$ defineres således: Lad $\mathcal{D}: A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ være en k -algebra homomorfi. Afbildningen $\psi: Y \rightarrow X = \text{Spec } A$ defineres ved

$$\mathcal{O}_{Y,y} = \text{Kern}(A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \kappa(y))$$

Det ses let, at $\psi^{-1}(X_f) = Y_{\mathcal{D}(f)}$. Det følger først, at $\psi: Y \rightarrow X$ er kontinuert, og dernæst at afbildningen:

$$A \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_Y(Y_{\mathcal{D}(f)}) = \psi_* \mathcal{O}_Y(X_f) \text{ kan udvides til}$$

$\psi^\#_{X_f}: \mathcal{O}_X(X_f) = A_f \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_Y(X_f)$. Brug nu knippeegenskaben til at definere $\psi^\#_U$ for alle $U \subseteq X$... $\square$

SKEMAER

[over en kommutativ ring k]

1. En åben delmængde U af et geometrisk rum $(X, \mathcal{O}_X)$ kaldes affin, hvis $(U, \mathcal{O}_U)$ er isomorf med $\text{Spec } A$, hvor A er en k -algebra.

Et geometrisk rum, der lokalt er affint (d: hvor hvert punkt har en åben omegn, der er affin), kaldes et k -skema

At $(X, \mathcal{O})$ er isomorf med $\text{Spec } A$, dvs er et affint skema, betyder, at den kanoniske morfi $X \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(X)$ er en isomorfi.

Bemærk, at et skema X har en basis bestående af affine, åbne delmængder.

2. TOPOLOGISKE EGENSKABER. VED ET SKEMA X .

- (a) X er quasikompakt, hvis X_{top} er quasikompakt $\Leftrightarrow X$ er en endelig forening $X = U_1 \cup \dots \cup U_N$ af affine åbne. [Brug, at $\text{Spec } A$ altid er quasikompakt]
- (b) X er topologisk noethersk, hvis X_{top} er noethersk (d: hvis enhver voksende følge $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ af åbne delmængder er stationær) $\Leftrightarrow$ Enhver åben delmængde $U \subseteq X$ er quasikompakt.
- (c) X er sammenhængende, hvis X_{top} er sammenhængende $\Leftrightarrow$ Ringen $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ er indekomposabel [Vink: Er $X = U_1 \cup U_2$ med $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, har vi ("knippeegenskaben"): $\Gamma(X, \mathcal{O}) = \Gamma(U_1, \mathcal{O}) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O})$, og er $\Gamma(X, \mathcal{O}) \simeq A_1 \times A_2$, findes $f_1, f_2 \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ med
- $$1 = f_1 + f_2 \quad (\text{hvoraf } X = X_{f_1} \cup X_{f_2}) \text{ og}$$
- $$0 = f_1 \cdot f_2 \quad (\text{hvoraf } \emptyset = X_0 = X_{f_1} \cap X_{f_2})]$$

- (d) X er irreducibel, hvis X_{top} er irreducibel ($\because$ hvis $X = Z_1 \cup Z_2$, Z_i afsluttet, medfører $X = \text{et } Z_i$) $\Leftrightarrow$ Enhver åben delmængde er sammenhængende. $\Leftrightarrow$ Enhver åben delmængde $\neq \emptyset$ er tæt i X . Bemærk. $\emptyset$ kaldes reducibel.

SÆTNING. Antag, at X er topologisk noethersk. Da er X en endelig forening:

$$X = Z_1 \cup \dots \cup Z_n$$

af afsluttede, irreducible delmængder Z_i . Bortkastes her overflødige Z_i 'er, er fremstillingen entydig. De resterende Z_i 'er, der kaldes X 's irreducible komponenter, kan karakteriseres som de maksimale afsluttede, irreducible delmængder.

Endvidere er X lokalt sammenhængende.

[Vink: Vis (indirekte), at den første påstand gælder for enhver afsluttet delmængde $Z \subseteq X$. "Endvidere": Lad $x \in X$. Vi kan antage, at $x \in Z_i$ netop når $i = 1, \dots, s$. $Z = Z_{s+1} \cup \dots \cup Z_n$ er da afsluttet, så $X \setminus Z = Z_1 \setminus Z \cup \dots \cup Z_s \setminus Z$ er en åben omegn af x , og = en endelig forening af sammenhængende mængder, der indeholder x og derfor selv sammenhængende. Eller direkte: Vælg U minimal blandt de delmængder, der er afsluttede og åbne og indeholder x , da er U sammenhængende $\square$

3. EGENSKABER, DER INVOLVERER STRUKTURKNIPPET.

- (a) X er lokalt noethersk, hvis hvert $x \in X$ har en åben omegn $\cong \text{Spec}(\text{noethersk ring})$

SÆTNING. X er lokalt noethersk $\Leftrightarrow$ For enhver åben, affin delmængde $U \subseteq X$ er $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ en noethersk ring.

BEVIS (for " $\Rightarrow$ "): Hvis $V \cong \text{Spec } B$, hvor B er noethersk, så er $V_f \cong \text{Spec } B_f$, og B_f er noethersk. Det følger, at enhver åben delmængde er lokalt noethersk, så vi kan antage, at $U = X = \text{Spec } A$, og skal vise, at A er noethersk. Overdæk nu X med X_f 'er, så at hvert $X_f \subseteq U \cong \text{Spec } B$, hvor B er noethersk. Vi har

$$X_f = U_{f|U} = \text{Spec}(B_{f|U}),$$

så $A_f \cong \text{Spec } B_{f|U}$ er noethersk.

Da $X = \text{Spec} A$ er quasikompakt findes altså en endelig overdækning
 $X = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_N}$ med A_{f_i} noethersk, $i = 1, \dots, N$.

Vi skal vise, at hvert ideal $\mathcal{O} \subseteq A$ er endeligt frembragt. Vælg hertil elementer $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{O}$ så at der for hvert i gælder, at billederne $a_1/1, \dots, a_k/1$ frembringer idealitet $\mathcal{O}A_{f_i}$. For hvert $a \in \mathcal{O}$ findes da $n_i \in \mathbb{N}$ så at

$$f_i^{n_i} a \in Aa_1 + \dots + Aa_k.$$

Da $X = X_{f_1^{n_1}} \cup \dots \cup X_{f_N^{n_N}}$ har vi $1 = \sum c_i f_i^{n_i}$ og dermed
 $a = \sum c_i f_i^{n_i} a \in Aa_1 + \dots + Aa_k.$

Følgelig er $\mathcal{O} = Aa_1 + \dots + Aa_k$.

(b) X er noethersk, hvis X er lokalt noethersk og quasikompakt
 $\Leftrightarrow X$ er en endelig forening $X = U_1 \cup \dots \cup U_N$ af åbne, affine
 $U_i \approx \text{Spec}(\text{noethersk ring})$.

(c) X er reducent, hvis $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ er reducent (d: uden nilpotente elementer) for alle åbne $U \Leftrightarrow \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ er reducent for blot én affin overdækning $X = \bigcup U_\alpha \Leftrightarrow$ alle små $\mathcal{O}_{X,x}$ er reducerede.

BEMÆRK. Hvis $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, så er $f(x) = 0$ for alle $x \in X$, hvis og kun hvis f lokalt er nilpotent. SPECIELT: Hvis X er reducent, er $f(x) = 0$ for alle $x \in X$, hvis og kun hvis $f = 0$ i $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

(d) X er et integritetsskema, hvis $X \neq \emptyset$ og $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ er et integritetsområde for alle åbne $U \neq \emptyset \Leftrightarrow X \neq \emptyset$ og $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ er et integritetsområde for alle affine åbne $U \neq \emptyset \Leftrightarrow X$ er sammenhængende, $\neq \emptyset$ og $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X)$ er integritetsområde for blot én affin overdækning $X = \bigcup U_\alpha \Leftrightarrow X$ er irreducibel og reducent.

[Vink: Udnyt følgende BEMÆRKNING: Et vilkårligt topologisk rum X er forening af sine maximale afsluttede, irreducible delmængder (Zorns lemma), kaldet de (irreducible) komponenter. Komponenterne er afsluttede. Hvis X lokalt er irreducibel, er komponenterne også åbne: Er nemlig $x \in Z = \text{komponent}$, og $x \in U$ en åben irreducibel omegn, så er også $\bar{U}$ irreducibel. Af $Z \subseteq (Z \setminus U) \cup \bar{U}$ fås $Z \subseteq \bar{U}$, altså $Z = \bar{U}$, og specielt $U \subseteq Z$.]

4. SPECIALISATION OG GENERISATION. Lad $x, \xi \in \text{skema } X$.

Hvis $x \in \overline{\{\xi\}}$ kaldes x en specialisation af ξ og ξ en generisation af x . Enhver åben omegn U af x er da også omegn af ξ , så vi får en kanonisk generisationshomomorfi

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}.$$

SÆTNING. For givet $x \in X$ er der en bijektiv forbindelse

$$\{\xi \in X \mid x \in \overline{\{\xi\}}\} = \bigcap_{x \in U} U = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}.$$

Hvis ξ har ved svarer til primidealit $\mathfrak{p}_\xi \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$, er generisationshomomorfien netop lokalisering: $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow (\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}_\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi}$.
[Vink. Antag $X = \text{Spec } A$ er affin].

5. GENERISKE PUNKTER.

SÆTNING. Lad X være et skema. Da er afbildningen $x \mapsto \overline{\{x\}}$ en bijektiv afbildning:

$$X \rightarrow \{\text{afsluttede, irreducible delmængder } Z \subseteq X\}.$$

[Vink. Reducér først til $X = \text{Spec } A$ affin]. x er generisk punkt for $Z = \overline{\{x\}}$.

KOROLLAR 1. De irreducible komponenter gennem x svarer til de minimale primideal i $\mathcal{O}_{X,x}$.

KOROLLAR 2. Hvis X er noethersk, så er X et integritetsskema, hvis og kun hvis X er sammenhængende, $\neq \emptyset$, og alle stier $\mathcal{O}_{X,x}$ er integritetsområder.

[Vink til "hvis": Ifølge Korollar 1 er komponenterne disjunkte.

Da X er noethersk, er der kun endelig mange komponenter (Sætning 2 (d)), og komponenterne er derfor også åbne. Da X er sammenhængende, er der kun én komponent, dvs X er irreducibel.]

6. RATIONALE FUNKTIONER.

SÆTNING. Lad X være et integritetsskema. Da har X netop et generisk punkt ξ , og stået

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = \varinjlim_{U \ni \xi} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) =: R(X).$$

er et legeme (altså $= \kappa(\xi)$). For $x \in U \subseteq \text{åben } X$ er afbildningerne

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\text{knip i } x} & \mathcal{O}_{X,x} \\ & \searrow \text{knip i } \xi & \downarrow \text{generalisation} \\ & & \mathcal{O}_{X,\xi} = R(x) \end{array}$$

alle injektive. Opfattes disse ringe som delringe af $R(x)$, svarer restriktion i knippet $\mathcal{O}_X$ til inklusion, og

$$(i) \quad \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x} \quad (ii) \quad \mathcal{O}_{X,x} = \bigcup_{x \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X).$$

Legemet $R(x)$ er brøkligemed for $\mathcal{O}_{X,x}$, og for $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, når U er affin, $\neq \emptyset$.

[Vink til beviset for (i). Vis først påstanden, når $U = \text{spec } A$ er affin, og bemærk så blot, at (i) "definerer" et knippe.]

Elementer $\varphi \in R(x)$ kaldes rationale funktioner på X .

Hvis $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ (resp. $\in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$) siges φ at være defineret i x (resp. på U). Mængden af punkter, hvor φ er defineret, er åben og $\neq \emptyset$ (iflg (i) og (ii)), og komplementærmængden, kaldet polmængden for φ , er altså afsluttet og $\subset X$.

7. AFSLUTTEDE DELSKEMAER. Lad $(X, \mathcal{O}_X)$ være et skema, og lad $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ være et ideal knippe. Vi kan da betragte kvotient knippet $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ med støtten

$$Z := \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}\} \hookrightarrow X,$$

som er afsluttet i X . Restriktionen $\mathcal{O}_Z := (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_Z$ er da et ringknippe på Z med støtten

$$\mathcal{O}_{Z,z} = \mathcal{O}_{X,z} / \mathcal{I}_z \neq 0,$$

så $(Z, \mathcal{O}_Z)$ er et geometrisk rum. - Men det behøver ikke at være et skema. De skemaer, der fremkommer således

(altså for visse valg af $\mathcal{I}$), kaldes de afsluttede del-skemaer af X . Bemærk, at vi har $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\cong} i_* \mathcal{O}_Z$,

så med $i^\# := \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = i_* \mathcal{O}_Z$ får vi inklusionsmorfien

$$i: Z \hookrightarrow X.$$

Eks. 1. Lad $I \subseteq A$, og betragt $\text{Spec } A = (X, \mathcal{O}_X)$. For hvert primideal $\mathfrak{p} \in A$ har vi ideal $I_{\mathfrak{p}} \subseteq A_{\mathfrak{p}}$, altså for hvert $x \in X$ et ideal $I_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$. Ved definitionen

$$\mathcal{I}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f_x \in I_x \text{ for alle } x \in U\}$$

defineres et idealknippe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$. Det tilsvarende geometriske rum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ er et skema, nemlig $\simeq \text{Spec}(A/I)$, altså et afsluttet delskema af X . Bemærk, at ideal I er helt bestemt ved det afsluttede delskema Z , idet

$$I = \text{Kernen} (A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X, i_* \mathcal{O}_Z)).$$

Vi skal senere se, at alle afsluttede delskemaer af $\text{Spec } A$ har denne form.

Eks 2. Lad $Z \subseteq X$ være en afsluttet delmængde af et skema X . Ved definitionen

$$\mathcal{I}_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(z) = 0 \text{ for alle } z \in Z \cap U\}$$

defineres et idealknippe, og $\text{Supp } \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_Z = Z$. Her er $(Z, \mathcal{O}_Z)$ et afsluttet delskema af X . Det er reduceret, og det betegnes Z_{red} .

Opgave Lad $Y \xrightarrow{\psi} X$ være en morfi af skemaer, lad $Z \subseteq^{\text{afsl}} X$, og antag, at vi for billedmængden har $\psi(Y) \subseteq Z$. Vis, at hvis Y er et reduceret skema, så kan ψ "faktoriseres":

$$Y \longrightarrow Z_{\text{red}} \hookrightarrow X.$$

8. PUNKTER PÅ SKEMAER.

For en lokal ring $\mathcal{O}$ har $Y := \text{Spec } \mathcal{O}$ præcis ét afsluttet punkt $=: y_0$, og shæet heri er netop $\mathcal{O}_{Y, y_0} = \mathcal{O}$. For en morfi af skemaer $\psi: \text{Spec } \mathcal{O} \rightarrow X$ kan vi betragte billedelementet $x = \psi(y_0) \in X$ og den tilhørende lokale ringhomomorfi $\mathcal{O}_{X, x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y_0} = \mathcal{O}$.

SÆTNING. Den således definerede afbildning er bijektiv:

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(\text{Spec } \mathcal{O}, X) \xrightarrow{\sim} \bigvee_{x \in X} \text{Hom}_{\text{loc}}(\mathcal{O}_{X, x}, \mathcal{O})$$

Et tilsvarende resultat gælder, hvis man betragter skemaer og lokale ringe over en grundring k .

Specielt har vi for hvert element $x \in X$ kanoniske morfier

$$\text{Spec } \kappa(x) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$$

Oftentimes kaldes morfien $i_x: \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$ for det til elementet $x \in X$ hørende punkt på skemaet X .

Lad X være et k -skema og lad A være en k -algebra. Ved et A -punkt på X forstås en morfi af k -skemaer: $\text{Spec } A \rightarrow X$, og mængden af A -punkter på X betegnes $X(A)$, altså

$$X(A) = \text{Hom}_{k\text{-Sch}}(\text{Spec } A, X).$$

k -punkterne på X kaldes også rationale punkter på k -skemaet X .

Overvej: For $X = \text{Spec } k[T_1, \dots, T_m]/I$ gælder

$$X(A) = \{a = (a_1, \dots, a_m) \in A^m \mid f(a) = 0 \text{ for alle } f \in I\}$$

9. DIMENSION AF SKEMAER. For et topologisk rum X defineres (Krull-) dimensionen $\dim X$ ved

$$\dim X \geq d \Leftrightarrow \exists \text{ afsl. irr. } (\emptyset \subset) Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_d \subseteq X.$$

For en delmængde $W \subseteq X$ vises let, at $\dim W \leq \dim X$.

For $x \in X$ er den lokale dimension af X i x bestemt ved

$$\dim_x X = \inf_{x \in U} \dim U, \quad U \text{ åben omegn af } x.$$

For en afsluttet irreducibel delmængde $Z \subseteq X$ defineres codimensionen $\text{codim}(Z, X)$ ved

$$\text{codim}(Z, X) \geq c \Leftrightarrow \exists \text{ afsl. irr. } Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_c \subseteq X.$$

Det er klart, at

$$\dim X = \sup_{Z \text{ afsl. irr.}} \dim Z = \sup_{Z \text{ komp.}} \dim Z = \sup_{Z \text{ afsl. irr.}} \text{codim}(Z, X)$$

$$= \sup_{x \in X} \text{codim}(\overline{\{x\}}, X).$$

og at

$$\dim Z + \text{codim}(Z, X) \leq \dim X, \quad Z \text{ afsl. irr.}$$

For en ring A har vi øjensynlig

$$\dim \operatorname{Spec} A = \dim A$$

idet de afsluttede, irreducible delmængder af $\operatorname{Spec} A$ svarer til primidealene i A . Mere generelt finder vi for et skema X (jfr. 4 og 5), at

$$\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) = \dim \mathcal{O}_{X,x}$$

og at

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x} = \sup_{\xi \in X} \dim \overline{\{\xi\}}.$$

SÆTNING. Lad X være lokalt af endelig type over et legeme k . Da gælder for hvert $\xi \in X$, at

$$\dim \overline{\{\xi\}} = \operatorname{trdeg}_k \kappa(\xi)$$

(og altså

$$\dim X = \sup_{\xi \in X} \operatorname{trdeg}_k \kappa(\xi))$$

Bemærkning. At X lokalt er af endelig type betyder, at hvert element $x \in X$ har en åben affin omegn $\simeq \operatorname{Spec}(\text{endelig frembragt } k\text{-algebra})$. Det medfører for enhver åben affin delmængde U , at $U = \operatorname{Spec}(\text{endeligt frembragt } k\text{-algebra})$.

BEVIS. " $\leq$ ": Antag, at vi har $\overline{\{\xi_0\}} \subset \overline{\{\xi_1\}} \subset \dots \subset \overline{\{\xi_d\}} = \overline{\{\xi\}}$ og vælg affin omegn $U = \operatorname{Spec} B$ af ξ_0 . Da er $\xi_0, \dots, \xi_d \in U$, og de svarer til primidealene $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_d \subset \dots \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_0 \subset B$. og $\kappa(\xi) = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ er brøkleget for $B/\mathfrak{p}$. Men så er $d \leq \dim B/\mathfrak{p} = \operatorname{trdeg}_k \kappa(\xi)$.

" $\geq$ ": Sæt $t = \operatorname{trdeg}_k \kappa(\xi)$ og vælg affin omegn $V = \operatorname{Spec} A$ af ξ . ξ svarer til primideal $\mathfrak{p} \subset A$ og $\kappa(\xi)$ er brøkleget for $A/\mathfrak{p}$. Følgelig er $t = \dim A/\mathfrak{p}$, så i A findes primidealene $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_t \subset \dots \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_0 \subset A$

Disse primidealer svarer til elementer $\xi_0, \dots, \xi_t = \xi$ i V ,
og i X får vi:

$$\overline{\{\xi_0\}} \subset \overline{\{\xi_1\}} \subset \dots \subset \overline{\{\xi_t\}} = \overline{\{\xi\}},$$

altså $t \leq \dim \overline{\{\xi\}}$. $\square$

KOROLLAR 0. Elementet $x \in X$ er afsluttet punkt $\Leftrightarrow \kappa(x)/k$ er
algebraisk ($\Leftrightarrow |\kappa(x):k| < \infty$),

thi $\{x\} = \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \dim \overline{\{x\}} = 0$. $\square$

KOROLLAR 1. Er $Z \subseteq X$ afsluttet og irreducibel, og er $U \subseteq \overset{\text{abst}}{X}$
med $Z \cap U \neq \emptyset$, så er $U \cap Z$ afsluttet og irreducibel i U , og

$$\dim Z \cap U = \dim Z,$$

thi er $Z = \text{cl}_X(\xi)$, må vi have $\xi \in Z \cap U$, og så får vi
let $\text{cl}_U(\xi) = Z \cap U$, og altså $\dim Z \cap U = \text{trdeg}_k \kappa(\xi) = \dim Z$. $\square$

KOROLLAR 2. For alle $x \in X$ gælder

$$\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x} + \text{trdeg}_k \kappa(x) = \sup_{\substack{x \in Z \\ Z \text{ afsl. irr.}}} \dim Z$$

BEVIS. De tre tal (kald dem d_1, d_2 og d_3) ændres ikke,
hvis X erstattes med en omegn af x . (anvend Korollar 1
på d_3). Vi kan derfor antage, at $X = \text{Spec } A$ er affin,
og så tillige, at $\dim X = \dim_x X$, altså $\dim A = d_1$.

$d_1 \geq d_2$, thi $d_1 = \dim X \geq \text{codim}(\overline{\{x\}}, X) + \dim \overline{\{x\}} = d_2$.

$d_2 \geq d_3$, thi $x \in Z = \overline{\{\xi\}}$ svarer til $\mathfrak{p}_\xi \subseteq \mathfrak{p}_x \subset A$, og
så er ifølge dimensionsformlen:

$$\dim Z = \dim A/\mathfrak{p}_\xi = \text{ht } \mathfrak{p}_x/\mathfrak{p}_\xi + \text{trdeg}_k (A/\mathfrak{p}_x)$$

$$\leq \text{ht } \mathfrak{p}_x + \text{trdeg}_k (A/\mathfrak{p}_x) = \dim \mathcal{O}_{X,x} + \text{trdeg}_k \kappa(x).$$

$d_3 \geq d_1$ Betragt de endelig mange (komponenter) $Z_1, \dots, Z_r$
 $\subseteq X$ for hvilke $\dim Z_i = \dim X$. Vi skal vise, at $x \in \text{et } Z_i$.

Indirekte, da er $x \in U := X \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_r)$ og altså
 $\dim U = \dim X$ (da $\dim_x X = \dim X$), og så findes $\xi \in U$
med $\text{trdeg}_k \kappa(\xi) = \dim X \Rightarrow \dim \overline{\{\xi\}} = \dim X \nmid \square$

KOROLLAR 3. For fast $d \geq 0$ er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) $\dim_x X = d$ for alle $x \in X$
- (ii) $\dim_x X = d$ for alle afsluttede punkter $x \in X$
- (iii) $\dim \mathcal{O}_{X,x} = d$ for alle afsluttede punkter $x \in X$
- (iv) $\dim Z = d$ for alle komponenter $Z \subseteq X$.

BEVIS: Af det foregående følger: (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Lad os vise (iii) $\Rightarrow$ (iv): Ifølge korollar 1 kan vi erstatte X med U , når blot $U \cap Z \neq \emptyset$. Vi kan derfor antage, at X er affin, og så er X noethersk, så udover Z findes højst endelig mange komponenter $Z_1, \dots, Z_r$. (Sætning 2(d)). Vælg nu et afsluttet punkt $x \in X \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_r)$ [Hvorfor kan vi det?]. Da får $\dim Z = \dim_x X = d$ iflg Korollar 2 $\blacksquare$

DEFINITION. Skemaet X (lokalt af endelig type over legemet k) kaldes "da" equidimensionalt (af dimension d). Eks.: X er irreducibel (iflg (iv)).

KOROLLAR 4. Hvis X er equidimensional, gælder

$$\text{codim}(Z, X) + \dim Z = \dim X, \quad Z \subseteq \text{afsl. } X$$

Hvis $Z = \{\bar{x}\}$, bliver v.s. $= \dim_x X$ iflg Korollar 2 $\blacksquare$

10. DIMENSION NUL. Lad X være et skema af dimension nul, og antag, at X er noethersk. Elementerne $x \in X$ svarer da til komponenter, og da der kun er endelig mange, er X topologisk et endeligt diskret rum:

$$X = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_r\}.$$

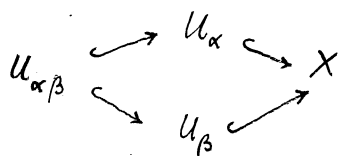
Hvert $\{x_i\}$ er således åben, og derfor affin, nødvendigvis $\cong \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x_i}$ og det følger, at også X er affin, med

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X,x_1} \times \dots \times \mathcal{O}_{X,x_r},$$

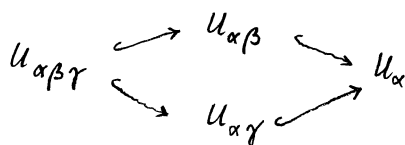
og at $\text{long } \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \sum \text{long } \mathcal{O}_{X,x_i} < \infty$. Hvis X er af endelig type over et legeme k , så er altså $e_x := \text{long } \mathcal{O}_{X,x} < \infty$ og $f_x := |\kappa(x) : k| < \infty$ og således også

$$\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{x \in X} e_x f_x < \infty.$$

11. SAMMENKLISTRING. Lad der være givet en åben overdækning $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ af et skema X . For $\alpha, \beta \in I$ har vi da et åbent snit

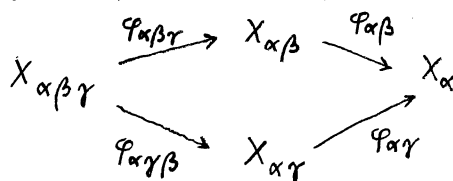


der et kommutativt diagram af åbne immersioner, som identificerer $U_{\alpha\beta}$ med snittet $U_\alpha \cap U_\beta$ daunet i X . Ligeledes får vi med $U_{\alpha\beta\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ et åbent snit:

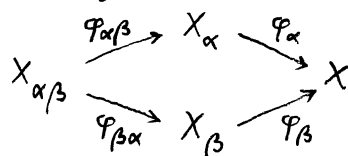


Omvendt gælder:

SÆTNING. Lad der for en indexmængde I være givet skemaer X_α , $\alpha \in I$; $X_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in I$; $X_{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in I$, og åbne immersioner $\varphi_{\alpha\beta}: X_{\alpha\beta} \rightarrow X_\alpha$, $\varphi_{\alpha\beta\gamma}: X_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow X_{\alpha\beta}$ så at (i) $\varphi_{\alpha\alpha}: X_{\alpha\alpha} \rightarrow X_\alpha$ er en isomorfi, (ii) $X_{\alpha\beta}$ afhænger kun af $\{\alpha, \beta\}$ (d: $X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha}$) og $X_{\alpha\beta\gamma}$ afhænger kun af $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ og (iii)



er et åbent snit for alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$. Da findes "netop et" skema X forsynet med åbne immersioner $\varphi_\alpha: X_\alpha \xrightarrow{\sim} U_\alpha \subseteq X$, så at $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ og



er et åbent snit for alle $\alpha, \beta \in I$.

X kaldes sammenklistingen af X_α 'erne.

EKSEMPEL. Invertor i polynomiumsringen $k[T_0, \dots, T_n]$ alle monomierne $T_0^{v_0} \dots T_n^{v_n}$ får en brøkring

$$A \supseteq k[T_0, \dots, T_n].$$

(Det er åbenlyst nok at invertere monomet $T_0 \cdots T_n$)

I A kan vi betragte delringene

$$A_\alpha = k[T_0/T_\alpha, \dots, T_n/T_\alpha]$$

$$A_{\alpha\beta} = k[\dots, T_i T_j / T_\alpha T_\beta, \dots] \quad A_{\alpha\beta\gamma} = k[\dots, T_i T_j T_k / T_\alpha T_\beta T_\gamma, \dots]$$

og inklusionerne

$$(*) \quad A_{\alpha\beta\gamma} \supseteq A_{\alpha\beta} \supseteq A_\alpha \\ A_{\alpha\beta\gamma} \supseteq A_{\alpha\gamma} \supseteq A_\alpha$$

Bemærk, at $A_{\alpha\beta}$ er en lokering: $A_{\alpha\beta} = (A_\alpha)_{T_\beta/T_\alpha}$. Det følger let, at Spec anvendt på diagrammet $(*)$ er et åbent snit. Skemaet, der fås ved således at sammenslutte

$$U_\alpha = \text{Spec } A_\alpha \approx \mathbb{P}_k^n, \quad \alpha = 0, \dots, n$$

er det projektive rum $\mathbb{P}_k^n$.

Opgave. Vis, at $k \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$. [Vink. Vis, at elementerne i A_α har formen $f = \frac{P(T_0, \dots, T_n)}{T_\alpha^d}$, hvor $P \in k[T_0, \dots, T_n]$ er et homogent polynomium af grad d , $d = 0, 1, 2, \dots$ og indse, at vi endda har $\Gamma(U_\alpha \cup U_\beta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = A_\alpha \cap A_\beta = k$, når $\alpha \neq \beta$.

12. FIBRERET PRODUKT. Lad der være givet et diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S \\ Y & \xrightarrow{g} & \end{array}$$
 af skemaer. Ved et fibreret produkt heraf

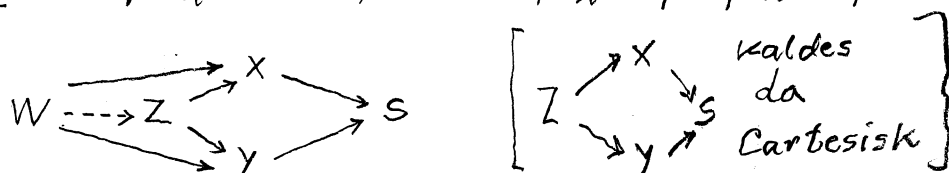
forstås et diagram $Z \begin{array}{ccc} \xrightarrow{p} & X & \\ \searrow q & & \end{array} \begin{array}{ccc} & Y & \end{array}$, så at følgende gælder:

(i) Diagrammet $Z \begin{array}{ccc} \xrightarrow{p} & X & \xrightarrow{f} S \\ \searrow q & & \nearrow g \end{array} \begin{array}{ccc} & Y & \end{array}$ er kommutativt.

(ii) For ethvert kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{f} & S \\ & \searrow \psi & & \nearrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

findes netop én morfi $\chi: W \rightarrow Z$, så at $p \circ \chi = \varphi, q \circ \chi = \psi$.



SÆTNING 0. Hvis et fibret produkt eksisterer, så er det "entydigt".

BEVIS. Abstrakt nonsense $\square$

DEFINITION. Hvis "det" fibrede produkt af $\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow S$ eksisterer, betegnes det $X \times_S Y$, og morfierne $X \times_S Y \xrightarrow{p_X} X$ og $X \times_S Y \xrightarrow{p_Y} Y$ kaldes projektionerne.

SÆTNING A. Hvis $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B, S = \text{Spec } R$ er affine, så eksisterer det fibrede produkt, og vi har

$$X \times_S Y = \text{Spec} \left(A \otimes_R B \right), \text{ med oplagte projektioner.}$$

BEVIS. Brug at vi har $\text{Hom}_{\text{Sch}}(W, \text{Spec } C) = \text{Hom}_{\text{Ring}}(C, \Gamma(W, \mathcal{O}_W))$ $\square$

SÆTNING B. Givet $\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \xrightarrow[f]{g} S$, og antag, at $X \times_S Y$ eksisterer.

Lad $U \subseteq X, V \subseteq Y, W \subseteq S$ være åbne delmængder med $U \subseteq f^{-1}W, V \subseteq g^{-1}W$. Da eksisterer det fibrede produkt af $\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \twoheadrightarrow W$, og

$$U \times_W V = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V), \text{ med oplagte projektioner}$$

BEVIS. Check, at den angivne åbne delmængde af $X \times_S Y$ har den universelle egenskab $\square$

SÆTNING C. For ethvert diagram $\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix} \xrightarrow[f]{g} S$ eksisterer det fibrede produkt.

SKITSE. Brug sætningen om sammenklustering. Indexmængden I består af tipler $\alpha = (U_\alpha, V_\alpha, W_\alpha)$, hvor $U_\alpha \subseteq X, V_\alpha \subseteq Y, W_\alpha \subseteq S$ er åbne affine delmængder med $U_\alpha \subseteq f^{-1}(W_\alpha), V_\alpha \subseteq g^{-1}(W_\alpha)$. [Og dem er der mange af!].

Vi sætter $Z_\alpha = U_\alpha \times_{W_\alpha} V_\alpha$ (Eksisterer iflg Sætning A), og $Z_{\alpha\beta} = (U_\alpha \cap U_\beta) \times_{W_\alpha \cap W_\beta} (V_\alpha \cap V_\beta)$ (Eksisterer iflg Sætning B, som også giver åben immersion $Z_{\alpha\beta} \hookrightarrow Z_\alpha$), og klister sammen! $\square$

BEMÆRKNING. Den angivne information fortæller, hvordan det fibredede produkt af $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S \\ Y & \xrightarrow{g} & \end{array}$ ser ud lokalt:

Lad nemlig $z \in Z = X \times_S Y$. Vi kan da betragte projek-tionerne $x := p_X(z)$, $y := p_Y(z)$, hvor altså $f(x) = g(y) =: s \in S$. Lad $W = \text{Spec } R$ være en åben affin omegn af s . Da er $f^{-1}(W)$ en åben omegn af x , så vi kan vælge en affin åben omegn $U = \text{Spec } A$ af x , med $U \subseteq f^{-1}(W)$. Tilsvarende findes åben affin omegn $V = \text{Spec } B$ af y , med $V \subseteq g^{-1}(W)$. Nu er $p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V)$ en åben omegn af z og ifølge Sætning A og B er den affin, og isomorf med $\text{Spec } A \otimes_R B$.

13. PRODUKT AF k -SKEMAER. Et k -skema kan opfattes som et skema X forsynet med en strukturmorfi $X \rightarrow \text{Spec } k$, og en morfi af k -skemaer $\varphi: Z \rightarrow X$ er en morfi af skemaer $: Z \rightarrow X$ så at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array} \quad (= \text{en } \underline{k\text{-morfi}})$$

er kommutativt. For k -skemaer X og Y kan vi betragte det fibredede produkt $(=: X \times_k Y)$ af $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } k \\ Y & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$. Med den sammensatte morfi $: X \times_k Y \xrightarrow{p_X} X \rightarrow \text{Spec } k$ som strukturmorfi er det et k -skema, projektionerne p_X og p_Y er morfier af k -skemaer, og for hvert par af k -morfier $W \xrightarrow{\varphi} X$ $\xrightarrow{\psi} Y$ findes netop én k -morfi $\chi: W \rightarrow X \times_k Y$, med $p_X \circ \chi = \varphi$, $p_Y \circ \chi = \psi$.

14 ORIGINALMÆNGDE. Lad der være givet en morfi $f: X \rightarrow Y$.

For en åben delmængde $U \hookrightarrow Y$ er originalmængden $f^{-1}(U)$ gængslyt det fiberede produkt $X \times_Y U$:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

SÆTNING. Lad $f: X \rightarrow Y$ være en morfi, lad $Z \subseteq Y$ være et afsluttet delskema, og betragt det fiberede produkt:

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f \\ Z & \xhookrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Da er ψ topologisk en immersion på den afsluttede delmængde $f^{-1}(Z) \subseteq X$.

BEVIS. Det er klart, at $\psi(Z \times_Y X) \subseteq f^{-1}(Z)$ (da diagrammet er kommutativt), og da påstanden kan undersøges lokalt i en omegn af et punkt i $f^{-1}(Z)$, kan vi antage, at $X = \text{Spec } B$, $Y = \text{Spec } A$, $Z = \text{Spec } A/I$ er affine, og så er $Z \times_Y X = \text{Spec } (B \otimes_A A/I) = \text{Spec } (B/BI) = f^{-1}(Z)$, jfr. "Spec" 5.

BEMÆRKNING. "Produktkonstruktionen" "strukturere" altså originalmængden $f^{-1}(Z)$ som et afsluttet delskema af X . Hvis X selv er et afsluttet delskema af Y , får vi herved organiseret $X \cap Z$ som et afsluttet delskema af Y .

15. FIBRE.

SÆTNING. Lad $f: X \rightarrow Y$ være en morfi, lad $y \in Y$ og betragt "punktet" $i_y: \text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$, (jfr. 8) og det fiberede produkt

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\psi} & X \times_Y \text{Spec } \kappa(y) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xleftarrow{i_y} & \text{Spec } \kappa(y) \end{array}$$

Da er ψ topologisk en immersion på originalmængden $f^{-1}(y)$, og for $x \in f^{-1}(y)$ er

$$\mathcal{O}_{f^{-1}(y), x} = \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x}$$

BEVIS. Som det forgående, jfr. "Spec" 5 $\square$

16 BASECHANGE.

BEMÆRKNING. Originalmængderne $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ kaldes morfens fibre. "Produktkonstruktionen" "strukturerer" altså fiberen $f^{-1}(y)$ som et $\kappa(y)$ -skema.

I visse forbindelser er det naturligt at opfatte en morfi $f: X \rightarrow S$ som en familie $X_\lambda = f^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in S$ af skemaer. Skemaet S er da basis (= parameterskemaet) og X er totalrummet. De enkelte skemaer X_λ er "knyttet sammen" via strukturen på totalrummet $X = \bigcup_{\lambda \in S} X_\lambda$.

For et fibert produkt (= Cartesisk diagram)

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{v} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

siger "familien" $f': X' \rightarrow S'$ at fungere af f ved "basechange" fra S til S' (via g). Basechange er transitiv: I et diagram

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{v} & X' & \xleftarrow{v'} & X'' \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f'' \\ S & \xleftarrow{g} & S' & \xleftarrow{g'} & S'' \end{array}$$

hvor kvadraterne er Cartesiske, er også "rektanglet" Cartesisk. Det følger af den universelle egenskab ved fibert produkt.

Når $S = \text{Spec } R$, $S' = \text{Spec } R'$ bruges ofte betegnelsen

$$X \times_R R' = X \times_S S'$$

for det "basechangede" R' -skema.

For en given morfi $f: X \rightarrow S$ betragtes ofte basechange af formen $\text{Spec } K \rightarrow S$, hvor K er et algebraisk afsluttet legeme. (Bemærk, at en sådan morfi svarer til et element $\lambda \in S$ og en indlejring: $\kappa(\lambda) \hookrightarrow K$, jf. 1.8) De basechangede skemaer af denne form: $X \times_S \text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } K$ kaldes morfens geometriske fibre.

EKSEMPEL.

$$A^n_R \times_R R' = A^n_{R'}, \quad \mathbb{P}^n_R \times_R R' = \mathbb{P}^n_{R'}$$

MORFIER AF SKEMAER. 1976

1. Er $(X, \mathcal{O}_X)$ et skema, og $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, så er som bekendt $X_g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$ åben, og $g|_{X_g}$ er invertibel. Restriktionshomomorfien $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X_g, \mathcal{O}_{X_g})$ kan altså udvides til en homomorfi

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_g \rightarrow \Gamma(X_g, \mathcal{O}_{X_g}).$$

LEMMA. Hvis X er quasikompakt, er $\Gamma(X, \mathcal{O})_g \rightarrow \Gamma(X_g, \mathcal{O})$ injektiv. Hvis $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$, U_i affin, og $U_i \cap U_j$ er quasikompakt, så er $\Gamma(X, \mathcal{O})_g \rightarrow \Gamma(X_g, \mathcal{O})$ bijektiv.

Bevis. Vi har $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$, U_i affin.

Injektiv: Vise: $a \in \Gamma(X, \mathcal{O})$, $a|_{X_g} = 0 \Rightarrow g^n a = 0$.

Sæt $a_\alpha = a|_{U_\alpha}$. Vi har $U_\alpha \cap X_g = (U_\alpha)_g|_{U_\alpha}$, så $a_\alpha|_{U_\alpha \cap X_g} = a|_{X_g \cap U_\alpha} = 0$ medfører $(g|_{U_\alpha})^{n_\alpha} a_\alpha = 0$. Er $n \geq n_\alpha$, har vi $(g^n a)|_{U_\alpha} = 0$ for alle α , altså $g^n a = 0$.

Surjektiv: I dette tilfælde er $U_\alpha \cap U_\beta$ quasikompakt, og vi skal til $b \in \Gamma(X_g, \mathcal{O})$ finde $a \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ med $a|_{X_g} = (g|_{X_g})^m b$. Sæt $b_\alpha = b|_{U_\alpha \cap X_g}$, da findes $a_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$ med $a_\alpha|_{U_\alpha \cap X_g} = (g|_{U_\alpha \cap X_g})^{m_\alpha} b_\alpha$. Multipliseres a_α med passende potens af g , kan vi antage $m_\alpha = m$. Betragt nu familien $\{a_\alpha\}$, $a_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O})$, og $a_\alpha - a_\beta \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O})$. På $U_\alpha \cap U_\beta \cap X_g$ har vi $a_\alpha - a_\beta = g^m b - g^m b = 0$. Af den allerede viste injektivitet følger, at vi ved at multiplicere a_α 'erne med en passende potens af g kan antage, at $\{a_\alpha\}$ er en kompatibel familie, dvs af formen $a|_{U_\alpha}$, $a \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. Nu er $a|_{X_g} = (g|_{X_g})^m b$, idet denne ligning er opfyldt på hvert $U_\alpha \cap X_g$. $\square$

KOROLLAR. $(X, \mathcal{O})$ skema. $B = \Gamma(X, \mathcal{O})$, $g_1, \dots, g_k \in B$ med $B = Bg_1 + \dots + Bg_k$. Hvis X_{g_i} er affin for alle i , så er X affin.

Bevis. $B \Rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ giver $\psi: X \rightarrow \text{Spec } B$. Vise, at ψ er isomorfi. Vi har $\text{Spec } B = \text{Spec } B_{g_1} \cup \dots \cup \text{Spec } B_{g_n}$, $\psi^{-1}(\text{Spec } B_{g_i}) = X_{g_i}$. Nok at vise, at $X_{g_i} \rightarrow \text{Spec } B_{g_i}$ er en isomorfi, men denne morfi er givet ved $B_{g_i} \rightarrow \Gamma(X_{g_i}, \mathcal{O})$, som er en isomorfi ifølge lemmaet [Bemærk, at $X_{g_i} \cap X_{g_j} = (X_{g_i})_{g_j} / X_{g_i}$ endda er affin] og påstanden følger af at X_{g_i} er affin $\square$

2. DEFINITION. En morfi af skemaer $\psi: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ kaldes affin (resp. hel, resp. endelig, resp. en afsluttet immersion), hvis det for hver affin åben $U \subseteq Y$ gælder, at $\psi^{-1}(U)$ er affin (resp. $\psi^{-1}(U)$ er affin, og $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(\psi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$ er hel, resp. _____ " _____ endelig, resp. _____ " _____ surjektiv.)

SÆTNING. [Ovenstående definition(er) er det nok, at hvert $Y \in \mathcal{Y}$ har en affin omgævn, som opfylder betingelsen.

Skitse: Kald U speciel, hvis $U \subseteq Y$ er affin og opfylder betingelsen. Antagelsen er så, at Y kan overdækkes med specielle, og vi skal vise, at hver affin $U \subseteq Y$ er speciel. Bemærk først, at U speciel og $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow U_f$ er speciel. Som sædvanlig kan vi derfor indskrænke os til tilfældet, hvor $Y = \text{Spec } A$ er affin, $f_1, \dots, f_k \in A$ med $Y_{f_i} = \text{Spec } A_{f_i}$ speciel, og $A = A_{f_1} + \dots + A_{f_k}$, og skal vise, at Y er speciel. Af korollar 1 følger nu først, at X er affin, $X \cong \text{Spec } B$. $\psi: X \rightarrow Y$ svarer altså til $\theta: A \rightarrow B$, og vi skal videre vise, at $\theta: A \rightarrow B$ har en vis egenskab, når $A_{f_i} \rightarrow B_{\theta f_i}$ har egenskaben for alle i $\square$

[og det "koger ned til": M A -modul, $M_{f_i} = 0$ for alle $i \Rightarrow M = 0$]

Bemærk: Afsluttet immersion $\Rightarrow$ endelig $\Rightarrow$ hel $\Rightarrow$ affin.

3. SÆTNING (Cohen-Seidenberg). En hel morfi $\psi: X \rightarrow Y$ er afsluttet ($\psi: Z \subseteq X$ afsluttet $\Rightarrow \psi_{\text{top}}(Z) \subseteq Y$ afsluttet).
 Bevis. Kan undersøges lokalt på Y , så vi kan antage $Y = \text{Spec } A$ affin, og dermed $X = \text{Spec } B$ med $A \xrightarrow{\theta} B$ hel. Z har da formen $V(I) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_x \supseteq I\}$ og $\psi(Z) = \{y \mid \mathcal{O}_y = \theta^{-1}(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_x \supseteq I\}$. Da $A \rightarrow B$ er hel, gælder $\psi(Z) = V(\theta^{-1}(I))$, altså $\psi(Z)$ afsluttet. $\square$

4. DEFINITION. En morfi $\psi: X \rightarrow Y$ er en immersion, hvis der for hvert $x \in X$ findes en affin omegn U af $\psi(x)$, så at $\psi^{-1}(U)$ er affin, og $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(\psi^{-1}U, \mathcal{O}_X)$ er surjektiv. Topologisk er ψ da en homomorfi af X på en lokalt afsluttet delmængde af Y .

Eksempel. $U \subseteq Y$ åben giver en åben immersion $U \hookrightarrow Y$. En afsluttet immersion er en immersion.

SÆTNING. En immersion $\psi: X \rightarrow Y$ er en afsluttet immersion, hvis og kun hvis $\psi(X)$ er afsluttet i Y .

Bevis. "kun hvis" iflg sætning 3. "hvis": Vi overdækker Y med specielle, ved først at overdække $\psi(X) \subseteq \bigcup U_\alpha$, og dernæst den åbne mængde $Y \setminus \psi(X) = \bigcup V_\beta$, idet enhver affin $V_i \cap Y \setminus \psi(X)$ trivielt er speciel (med $\psi^{-1}(V) = \emptyset = \text{Spec } 0$, og $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \rightarrow 0$ surjektiv) $\square$

5. Er $(Z, \mathcal{O}_Z)$ et afsluttet delskema af $(Y, \mathcal{O}_Y)$ bliver inklusionen $Z \hookrightarrow Y$ en (afsluttet) immersion. [Vi har $Z = \text{Supp } \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$, hvor $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}$, og $\mathcal{O}_Z = i^*(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})$. Til hvert $z \in Z$ findes $z \in U$ affin, åben $\subseteq Y$, så $U \cap Z$ er affin i Z : Er nemlig W en åben, affin omegn af z i Y , så er $W \cap Z$ en åben omegn af z i Z , indeholder altså en affin åben omegn,

som vi kan antage er af formen $V \cap Z$, hvor $V \subseteq W$. Med et passende $f \in \Gamma(W, \mathcal{O}_Y)$ har vi $z \in W_f \subseteq V \subseteq W$, og $U = W_f$ er affin, åben i Y , og $U \cap Z = (V \cap Z)_f / V \cap Z$ er affin åben i Z . For at vise, at $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(U \cap Z, \mathcal{O}_Z)$ er surjektiv, kan vi indskrænke til tilfældet, hvor $U = Y = \text{Spec } A$ er affin. Vi har da $Z = \text{Spec } B$, og skal vise $A \xrightarrow{\theta} B$ er surjektiv. Vi har $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y / \mathfrak{f} = i_* \mathcal{O}_Z$ er surjektiv i ståene, og finder $\Gamma(Y_f, i_* \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Y_f \cap Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z_{\theta f}, \mathcal{O}_Z) = B_{\theta f}$, stået er $(i_* \mathcal{O}_Z)_y = B_{\mathfrak{f}_y}$. Da

$$A_{\mathfrak{f}_y} \rightarrow B_{\mathfrak{f}_y}$$

er surjektiv for alle $y \in \text{Spec } A$, er $A \rightarrow B$ en epimorfi af A -moduler, altså surjektiv.]

Er omvendt $X \xrightarrow{\psi} Y$ en afsluttet immersion, så er kernelen for $\mathcal{O}_Y \rightarrow \psi_* \mathcal{O}_X$ et idealbunde, og ψ definerer en isomorfi på det hertil hørende afsluttede delskema.

KOROLLAR. 1-1-forbindelse

$$\{\text{afsluttede delskemaer af } \text{Spec } A\} \leftrightarrow \{\text{idealer i } A\}.$$

6. LOKALE EGENSKABER. En egenskab $\wp(f)$ ved morfien $f: X \rightarrow S$ kaldes lokal (på S) (eller bedre: lokal på basis), hvis følgende gælder for enhver morfi $f: X \rightarrow S$.

(i) Hvis $U \subseteq {}^{\text{åben}} S$, så vil $\wp(X \xrightarrow{f} S) \Rightarrow \wp(f^{-1}U \xrightarrow{f|_U} U)$.

(ii) Hvis $S = \bigcup U_\alpha$ er en åben overdækning så at der for alle α gælder $\wp(f^{-1}U_\alpha \xrightarrow{f|_{U_\alpha}} U_\alpha)$, så gælder $\wp(X \xrightarrow{f} S)$.

EKSEMPEL. Egenskaberne "affin", "hel", "endelig", "afsluttet immersion" er lokale på basis

BEMÆRKNING. Alle vigtige egenskaber ved morfien

er lokale på S . Nogle få egenskaber er desuden lokale på X (preciser selv!).

OPGAVE. Vis, at egenskaberne "afsluttet morfi", "åben morfi", "isomorfi", "åben immersion", "immersion" alle er lokale på basis.

7. MULTIPLIKATIVE EGENSKABER. En egenskab $\wp$ ved morfier kaldes multiplikativ, hvis den bevares ved sammensætning, dvs hvis der for morfier $g: Y \rightarrow X$ og $f: X \rightarrow S$ gælder

$$\wp(g) \wedge \wp(f) \Rightarrow \wp(f \circ g).$$

EKSEMPEL. Egenskaberne "affin", "hel", "endelig", "afsluttet immersion" er multiplikative. (Hvorfor).

BEMÆRKNING. Alle ... OPGAVE. Vis dette.

8. UNIVERSELLE EGENSKABER. En egenskab $\wp(f)$ ved morfier $f: X \rightarrow S$ kaldes universel, hvis den bevares ved basechange, dvs hvis der for et cartesisk diagram

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array} \quad \text{gælder } \wp(f) \Rightarrow \wp(f').$$

LEMMA. En lokal egenskab $\wp$ er universel, hvis der blot for ethvert cartesisk diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \text{Spec } R & \longleftarrow & \text{Spec } R' \end{array}$$

(hvor S, S' er affine) gælder $\wp(f) \Rightarrow \wp(f')$.

BEVIS. Antag i den generelle situation (*), at $\wp(f)$, og lad $s' \in S'$. Det er nok at finde en omegn U' af s' så at $\wp(f'|_{U'})$. Vælg først affin omegn U af $g(s')$ og dernæst affin omegn $U' \subseteq g^{-1}(U)$ af s' , og brug forudsætningen.

KOROLLAR. Egenskaberne "affin", "hel", "endelig", "afsluttet immersion" er universelle.

BEVIS. Da disse egenskaber er lokale, er det nok at betragte en affin basechange

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \text{Spec } R & \longleftarrow & \text{Spec } R' \end{array}$$

Antag, at f har egenskaben. Heraf følger, at X er affin, $X = \text{Spec } A$ (og at $R \rightarrow A$ har egenskaben). Men så er $X' = \text{Spec}(A \otimes_R R')$ affin (og $R' \rightarrow A \otimes_R R'$ har egenskaben) $\square$

BEMÆRKNING. Ikke alle egenskaber ved morfier er universelle. Til hver sådan egenskab $\mathcal{P}$ hører en ny egenskab "universel $\mathcal{P}$ " defineret ved:

f er "universel $\mathcal{P}$ ", hvis enhver basechange af f har egenskaben $\mathcal{P}$.

Det er klart, at "universel $\mathcal{P}$ " er en universel egenskab.

EKSEMPLER. ① Betragt en basechange

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k[T] = A_k^1 & \longleftarrow & A_k^2 = A_k^1 \times A_k^1 = \text{Spec } k[T, u] \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \text{Spec } k & \longleftarrow & \text{Spec } k[u] = A_k^1 \end{array}$$

hvor k er et legeme. Morfien f er afsluttet (Spec k indeholder jo kun ét element), men f' (der svarer til $k[u] \hookrightarrow k[T, u]$) er ikke afsluttet [Betrakt f.eks.

$$f'(V(uT-1))]$$

② En hel morfi er universelt afsluttet (Korollar + Cohen - Seidenberg).

9. SEPAREREDE MORFIER. Lad $f: X \rightarrow S$ være en morfi og betragt det fiberede produkt $X \times_S X$ med projektionerne

$$\begin{array}{ccccc} & & p_2 & \rightarrow & X \\ X \times_S X & & & & \searrow \\ & & p_1 & \rightarrow & X \end{array} \rightarrow S$$

Ved diagonalmorfien forstås den entydigt bestemte morfi

$$\Delta_f = \Delta : X \rightarrow X \times_S X,$$

som opfylder $p_1 \circ \Delta = p_2 \circ \Delta = 1_X$. Billedmængden $\Delta(x) \subseteq X \times_S X$ kaldes diagonalen.

SÆTNING. Diagonalmorfien $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ er en immersion.

BEVIS. Vi skal for et givet $x \in X$ finde en affin omegn U af $y = \Delta(x)$, på at $\Delta^{-1}(U) \subseteq X$ er affin og $\Gamma(U, \mathcal{O}_{X \times_S X}) \rightarrow \Gamma(\Delta^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ er surjektiv. Da $y = \Delta(x)$, har vi $p_1 y = p_2 y = x$. Vælg nu en affin omegn $W = \text{Spec } R$ af $f(x)$ og i $f^{-1}(W)$ en affin omegn $V = \text{Spec } A$ af x . Nu er $U := p_1^{-1}(V) \cap p_2^{-1}(V)$ en omegn af $\Delta(x)$, og den er $= V \times_W V = \text{Spec } A \otimes_R A$, og altså affin, og $\Delta^{-1}(U) = \Delta^{-1} p_1^{-1} V \cap \Delta^{-1} p_2^{-1} V = V \cap V = V = \text{Spec } A$.

Det er klart, at restriktionen $V' = \Delta^{-1}(U) \rightarrow U = V \times_W V$ svarer til diagonalmorfien $V \rightarrow V \times_W V$, og denne svarer til ringhomomorfien:

$$A \leftarrow A \otimes_R A$$

(givet ved $a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 \cdot a_2$) som åbenlyst er surjektiv. $\square$

DEFINITION. En morfi $f : X \rightarrow S$ er separat, hvis diagonalen $\Delta(x) \subseteq X \times_S X$ er en afsluttet delmængde $\Leftrightarrow$ diagonalmorfien $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ er en afsluttet immersion.

STANDARD. Egenskaben "separat" er 1) lokal på basis, 2) multiplikativ, 3) universel.

VINK. 1) En åben overdækning af $S = \bigcup W_\alpha$ giver en åben overdækning $X \times_S X = \bigcup_\alpha X_\alpha \times_{W_\alpha} X_\alpha$, hvor $X_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$.

2) Brug for en sammensætning $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} S$ diagrammet

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\Delta_g} & Y \times_X Y \longrightarrow Y \times_S Y \\ & \downarrow & \downarrow \\ & X & \xrightarrow{\Delta_f} X \times_S X, \end{array}$$

hvor kvadratet er carterisk, i forbindelse med at "afsluttet immersion" er universel og multiplikativ.

3) Brug for en basechange $\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \leftarrow & S' \end{array}$ diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\Delta_{f'}} & X' \times_{S'} X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta_f} & X \times_S X, \end{array}$$

som er cartesisk, i forbindelse med at "afsluttet immersion" er universel.

KRITERIUM. En morfi $f: X \rightarrow \text{Spec } R^S$ er separat, hvis og kun hvis der for alle affine, åbne $U, V \subseteq X$ gælder:

$$(*) \begin{cases} U \cap V \text{ er affin og } \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \otimes_R \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X) \\ \text{er surjektiv.} \end{cases}$$

Det er nok, at (*) gælder for alle U_α, U_β i en affin overdækning $X = \bigcup U_\alpha$.

BEVIS. For åbne, affine $U = \text{Spec } A$, $V = \text{Spec } B$ i X , er $W := p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ åben i $X \times_S X$, og $W = U \times_S V = \text{Spec}(A \otimes_R B)$ og $\Delta^{-1}(W) = \Delta^{-1}p_1^{-1}U \cap \Delta^{-1}p_2^{-1}V = U \cap V$,

og restriktionen: $U \cap V = \Delta^{-1}(W) \rightarrow W = \text{Spec}(A \otimes_R B)$ svarer til $A \otimes_R B \rightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$. Påstanden følger nu af sætning 2.

BEMÆRKNING. Surjektiviteten udsiger, at hvert $h \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X)$ er en endelig sum af produkter $(f|_{U \cap V}) \cdot (g|_{U \cap V})$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$. Kriteriet af hænger således ikke af R : Det er en absolut egenskab ved X at være separat (over et affint skema)

KOROLLAR. En affin morfi $X \rightarrow S$ er separat.

BEVIS. Da det kan afgøres lokalt på S , kan vi antage, at S er affin, men så er også $X = \text{Spec } A$ affin, og så er det let at bruge kriteriet $\square$

EKSEMPEL. $\mathbb{P}_R^n$ er separat.

10 MORFIER IND 1 SEPAREREDE SKEMAER.

SÆTNING. Lad $\mathfrak{f}$ være en egenskab ved morfier, som opfyldes:
 $1^\circ \mathfrak{f}$ er multiplikativ $2^\circ \mathfrak{f}$ er universel $3^\circ \mathfrak{f}$ (afsluttet immersion)
 og betragt et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & S \end{array}$$

hvor g er separat. Da gælder: $f(h) \Rightarrow f(f)$.

VINK. 7 diagrammit

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & \xrightarrow{f} & S & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 X & \longrightarrow & X \times_S Y & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y & \xrightarrow{\Delta_g} & Y \times_S Y & &
 \end{array}$$

er kvadraterne cartesiske. Anvend nu de 4 forudsætninger $\square$

EKSEMPLER. "affin", $\dots$, "separert", "universelt afsluttet"

ANVENDELSE. Lad k være et legeme, lad $X \rightarrow \text{Spec } k$ være universelt afsluttet, og antag, at X er reduceret. Da er $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ algebraisk over k , og er der valgt et element x_i i hver sammenhængskomponent, er $f \mapsto (f(x_i))_i$ en injektiv homomorfi: $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \prod_i k(x_i)$.

BEVIS. Et element $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ svarer til $k[T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ og dermed til en k -morfisme af skemaer

$$\varphi: X \rightarrow \operatorname{Spec} k[T] = \mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1 \quad \mathcal{P}(T) \mapsto \mathcal{P}(f) \mapsto \mathcal{P}(f)(x)$$

(defineret ved $\varphi_{\varphi x} = \text{kernen for } : k[T] \rightarrow \Gamma(x, \mathcal{O}_x) \rightarrow \kappa(x)$) $\mathcal{P}(x)$
Da A'_k er separant, er $\varphi(x)$ afsluttet i A' , og da A' er ikke afsluttet i $\mathcal{P}_k$ ($\leftarrow$ separant), må vi have $\varphi(x) \subset A'$, så $\varphi(x)$ består af endelig mange afsluttede punkter $y_1, \dots, y_N \in A'$, svarende til irreducible polynomier $p_j \in k[T]$. At $\varphi(x) = y_j$, betyder at $p_j(f)(x) = p_j(f(x)) = 0$ i $\kappa(x)$, så $(\prod p_j)(f)(x) = 0$ for alle x , hvorefter $(\prod p_j)(f) = 0$, da X er reduceret. $\therefore f = 0$
Af $f(x) = 0$ og $p_j(f(x)) = 0$ følger $p_j(T) = T$ (hvorfor). Af $\varphi(x) = \varphi(\{ \dots, x_i, \dots \})$ og $f(x_i) = 0$ for alle i , følger derfor $f = 0$ $\square$

11 QUASI-KOMPAKTE MORFIER. En morfi $f: X \rightarrow S$ kaldes quasikompakt, hvis

$f^{-1}(\text{åben quasikompakt})$ er quasikompakt.

Da de åbne quasikompakte delmængder er de endelige foreningsmængder af affine åbne, kan betingelsen udtrykkes:

For enhver affin, åben delmængde $V \subseteq S$ er

(*) $f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_n$ en endelig forening af affine, åbne U_i .

KRITERIUM. En morfi $f: X \rightarrow S$ er quasikompakt, når blot (*) gælder for alle V_α i en affin overdækning $S = \bigcup V_\alpha$. $\square$

STANDARD. Egenskaben "quasikompakt" er lokal på basis, multiplikativ og universel.

EKSEMPLER. En affin morfi er quasikompakt. En morfi $X \rightarrow \text{Spec } R$ er quasikompakt netop når X er quasikompakt. $\mathbb{P}_R^n \rightarrow \text{Spec } R$ er quasikompakt.

12. MORFIER LOKALT AF ENDELIG TYPE. En morfi $f: X \rightarrow S$ kaldes lokalt af endelig type, hvis der for enhver affin, åben $V = \text{Spec } R \subseteq S$ og enhver affin, åben $U = \text{Spec } A \subseteq f^{-1}(V)$, gælder, at $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ er en endelig frembragt algebra over $R = \Gamma(V, \mathcal{O}_S)$. Er dette tilfældet gælder

For enhver affin, åben $V \subseteq S$ er

(*) $f^{-1}(V) = \bigcup U_i$ en forening af affine, åbne U_i med $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ endelig frembragt algebra over $\Gamma(V, \mathcal{O}_S)$.

KRITERIUM. En morfi $f: X \rightarrow S$ er lokalt af endelig type, når blot (*) gælder for alle V_α i en affin overdækning $S = \bigcup V_\alpha$. $\square$

STANDARD. Egenskaben "lokalt af endelig type" er lokal på basis (og på totalrummet), multiplikativ og universel.

EKSEMPLER. En hel morfi er lokalt af endelig type netop når den er endelig. A_R^n og $\mathbb{P}_R^n$ er lokalt af endelig type over $\text{Spec } R$.

13 MORFIER AF ENDELIG TYPE. En morfi $f: X \rightarrow S$ kaldes af endelig type, hvis den er lokalt af endelig type og quasikompakt.

14 PROPRE MORFIER. En morfi $f: X \rightarrow S$ kaldes proper, hvis den er separat, universelt afsluttet, og af endelig type.

STANDARD. Egenskaben "proper" er lokal på basis, multiplikativ og universel $\square$

EKSEMPLER. En endelig morfi er proper. Specielt er en afsluttet immersion proper.

HOVEDSÆTNING. Struktur morfien $\psi: \mathbb{P}_R^n \rightarrow \text{Spec } R$ er proper.

BEVIS. Vi mangler at vise, at ψ er universelt afsluttet. Det er nok at betragte et affint basechange $R \rightarrow R'$, men så er den basechangede morfi blot $\mathbb{P}_{R'}^n \rightarrow \text{Spec } R'$. Det er derfor nok at vise at ψ er afsluttet.

Lad $Z \subseteq \mathbb{P}_R^n$ være afsluttet. Vi har $\mathbb{P}_R^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$, hvor $U_\alpha = \text{Spec } A_\alpha$ og kan til Z knytte idealerne $I_\alpha = \mathcal{I}(Z \cap U_\alpha) \subseteq A_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$.

Sættes

$$I^{(d)} = \{ F \in A^{(d)} \mid F/T_\alpha^d \in I_\alpha, \alpha = 0, \dots, n \}$$

(hvor $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} \oplus \dots$ er den graduerede ring $R[T_0, \dots, T_n]$)

gælder

$$(*) \quad I_\alpha = \{ F/T_\alpha^d \mid F \in I^{(d)}, d = 0, 1, \dots \}$$

Bevis. (for $\alpha = 0$). " $\supseteq$ " er klart. " $\subseteq$ ". Lad $a \in I_0$,

skriv $a \in G/T_0^k$, hvor $G \in A^{(k)}$ og betragt

$a_\beta = G/T_\beta^k \in A_\beta$. Sættes $t_\beta = T_0/T_\beta \in A_0$ og $f_\beta = T_0/T_\beta \in A_\beta$,

har vi $(A_0)_{t_\beta} = (A_\beta)_{f_\beta} = A_{0\beta}$ og altså

$$(I_0)_{t_\beta} = (I_\beta)_{f_\beta} \subseteq A_{0\beta}.$$

I $A_{0\beta}$ har vi $a_\beta = f_\beta^k a \in (I_\beta)_{f_\beta}$, så der findes n_β

så $f_\beta^{n_\beta} a_\beta \in I_\beta$. Med et $m \geq \max \{n_\beta\}$ har vi

$$\begin{aligned}
 & f_\beta^n a_\beta \in I_\beta \text{ for all } \beta. \\
 & \text{Og så er } F := G/T_0^n \in A^{(k+m)} \text{ brugbar, thi} \\
 & F/T_0^{n+k} = G/T_0^k = a, \text{ og da} \\
 & F/T_\beta^{n+k} = T_0^n/T_\beta^n \cdot G/T_\beta^k = f_\beta^n a_\beta \in I_\beta, \\
 & \text{er } F \in I^{(k+m)}.
 \end{aligned}$$

Nu får vi (for $\mathfrak{y} \in \text{Spec } R$)

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{y} \notin \psi(Z) &\Leftrightarrow \forall \alpha : \mathfrak{y} \notin \psi(Z \cap U_\alpha) \Leftrightarrow \forall \alpha : 1 \in \mathfrak{y}(A_\alpha/I_\alpha)_\mathfrak{y} \\
 &\Leftrightarrow \forall \alpha \exists \lambda_\alpha \notin \mathfrak{y} : \lambda_\alpha 1 \in \mathfrak{y}(A_\alpha/I_\alpha)_\mathfrak{y} \\
 &\Leftrightarrow \forall \alpha \exists \lambda_\alpha \notin \mathfrak{y} : \lambda_\alpha \in \mathfrak{y}A_\alpha + I_\alpha \\
 (\text{brug } \lambda = \prod \lambda_\alpha) &\Leftrightarrow \exists \lambda \notin \mathfrak{y} \forall \alpha : \lambda \in \mathfrak{y}A_\alpha + I_\alpha \\
 (\text{brug } (*)) &\Leftrightarrow \exists \lambda \notin \mathfrak{y} \forall \alpha \exists d_\alpha : \lambda X_\alpha^{d_\alpha} \in \mathfrak{y}A^{(d_\alpha)} + I^{(d_\alpha)} \\
 (\text{brug } d = \sum d_\alpha) &\Leftrightarrow \exists \lambda \notin \mathfrak{y} \exists d : \lambda A^{(d)} \subseteq \mathfrak{y}A^{(d)} + I^{(d)} \\
 (A^{(d)} \text{ er e.f.}/R) &\Leftrightarrow \exists d : A_\mathfrak{y}^{(d)} = \mathfrak{y}A_\mathfrak{y}^{(d)} + I_\mathfrak{y}^{(d)} \\
 &\Leftrightarrow \exists d : A_\mathfrak{y}^{(d)}/I_\mathfrak{y}^{(d)} = \mathfrak{y}(A_\mathfrak{y}^{(d)}/I_\mathfrak{y}^{(d)}) \\
 (\text{Nakayama}) &\Leftrightarrow \exists d : A_\mathfrak{y}^{(d)}/I_\mathfrak{y}^{(d)} = 0 \\
 (\text{definition}) &\Leftrightarrow \mathfrak{y} \notin \text{Supp}(A^{(d)}/I^{(d)}).
 \end{aligned}$$

og altså

$$\psi(Z) = \bigcap_d \text{Supp}(A^{(d)}/I^{(d)}),$$

og da $A^{(d)}/I^{(d)}$ er en e.f. R -modul, er $\text{Supp} = V(A_{\text{uv}})$ en afsluttet delmængde af $\text{Spec } R$ $\square$

Et k -skema X kaldes projektivt, hvis der findes en afsluttet immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^n$ over k .

KOROLLAR. Et projektivt k -skema er propre over k .

BEMÆRK. Af "standard" følger, at et produkt $X \times_k Y$ af propre k -skemaer igen er propre, thi strukturmorfien kan faktoriseres

$$X \times_k Y \xrightarrow{p_Y} Y \rightarrow \text{Spec } k$$

i morfien, der begge er propre.

15 VALUATIVE KRITERIER. Lad $X \xrightarrow{f} S$ være en morfi, og betragt for et kommutativt diagram

$$\square \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & \text{Spec } K \\ f \downarrow & \nwarrow x & \downarrow i \\ S & \xleftarrow{\varphi} & \text{Spec } V, \end{array}$$

hvor V er en valuationsring med brøklegerne K spørgsmålet om hvorvidt der findes morfier x , der gør trekantene kommutative. DEFINITION. Morfien $f: X \rightarrow S$ kaldes v-separeret (resp. v-afsluttet), hvis der for hvert kommutativt diagram $\square$ højst findes én (resp. mindst findes én) morfi x .

OBSERVATION. Da V og K er lokale ringe er diagrammet $\square$ bestemt ved: 1) Et element $\xi \in X$ og en lokal ringhomomorfi $f: \mathcal{O}_\xi \rightarrow K$ 2) Et element $\rho \in S$ og en lokal ringhomomorfi $\varphi: \mathcal{O}_\rho \rightarrow V$ og kommutativiteten udsiger, at 3) $\rho \in \{f(\xi)\}$ og at vi for generisationsmorfien $\mathcal{O}_\rho \rightarrow \mathcal{O}_{f(\xi)}$ har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\xi & \xrightarrow{f} & K \\ f \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{O}_\rho & \xrightarrow{\varphi} & V \subseteq K \end{array}$$

Morfien x er givet ved: a) et element $x \in X$ og en lokal homomorfi $x: \mathcal{O}_x \rightarrow V$ og kommutativiteten af trekantene udsiger, at

b) $f(x) = \rho$ og diagrammet $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x & \xrightarrow{x} & V \\ f \uparrow & & \\ \mathcal{O}_\rho & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array}$ er kommutativt

c) $x \in \overline{\{\xi\}}$ og diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x & \xrightarrow{x} & V \\ \text{gen} \nearrow & & \parallel \\ \mathcal{O}_\xi & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

er kommutativt.

Af c) følger, at x er bestemt alene ved elementet $\boxed{x \in \overline{\{\xi\}}}$, som skal opfylde, at $\mathcal{O}_x \xrightarrow{\text{gen}} \mathcal{O}_\xi \xrightarrow{f} K$ skal afbilde ind i V og afbilde m_x ind i m_V . Kort: V dominerer homomorfien $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_\xi \rightarrow K$.

Hvis $\boxed{f(x) = \rho}$ har vi et kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{O}_{\xi} & \xrightarrow{\quad} & K \\
 & \nearrow g_{\mu} & \uparrow f & & \parallel \\
 \mathcal{O}_x & & \mathcal{O}_{f(\xi)} & & K \\
 \uparrow f & \nearrow g_{\mu} & & & \\
 \mathcal{O}_{\Delta} & \xrightarrow{\quad} & V & \nearrow &
 \end{array}$$

$\xi \in X$
 $\Delta \in S, \Delta \in \overline{\{f(\xi)\}}$

og kommutativiteten i b) er opfyldt, når c) er opfyldt. Altså:

Med de i 1), 2) og 3) givne forudsætninger svarer de søgte morfier x til

a) elementer $x \in X$ som opfylder b) $f(x) = \Delta$ og c) $x \in \overline{\{\xi\}}$ og V dominerer homomorfien $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{\xi} \rightarrow K$.

Morfien $f: X \rightarrow S$ er således v -separeret (resp. v -afsluttet), netop hvis der for givne data 1), 2) og 3) findes højst et (resp. mindst et) sådant x .

STANDARD. Egenskaberne " v -separeret" og " v -afsluttet" er lokale på basen, multiplikative og universelle. [Følger direkte af definitionerne].

SÆTNING (S) En separeret morfi $: X \rightarrow S$ er v -separeret. Hvis diagonalmorfien $\Delta: X \rightarrow X \times_S X$ er quasi-kompakt, gælder det omvendte også.

(A) En universelt afsluttet morfi $: X \rightarrow S$ er v -afsluttet. Hvis $X \rightarrow S$ er quasi-kompakt gælder det omvendte også.

BEVIS. Vi giver "omvendt" lidt. (S): Antag, at problemet i (□) har to løsninger x_1, x_2 . De svarer til én morfi $\chi: \text{Spec } V \rightarrow X \times_S X$ så at diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{\quad j \quad} & \text{Spec } K \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow i \\
 X \times_S X & \xleftarrow{\quad \chi \quad} & \text{Spec } V
 \end{array}$$

er kommutativt,

og via det fibrerede produkt får vi

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{\quad j \quad} & \text{Spec } K \\
 \Delta \downarrow & \xleftarrow{\quad \chi' \quad} & Z \\
 X \times_S X & \xleftarrow{\quad \chi \quad} & \text{Spec } V
 \end{array}$$

$\downarrow \Delta' \quad \swarrow i$

Da Δ er en afsluttet immersion, er også Δ' en afsluttet immersion, men så er Δ' en isomorfi (thi når $V \rightarrow V/I \rightarrow K$ er inklusionen: $V \hookrightarrow K$ må vi have $I = (0)$) og så er $\chi = \Delta \chi' (\Delta')^{-1}$, og altså

$\chi_i = \text{pr}_i \circ \chi = \text{pr}_i \circ \Delta \circ \chi' \circ (\Delta')^{-1} = \chi' \circ (\Delta')^{-1}$ uafhængig af i .

(A) For i et givet diagram ($\square$) at finde en løsning χ kan vi først "base-change": $S \leftarrow \text{Spec } V$, og altså antage, at $S \leftarrow \text{Spec } V$ er identitet. Da $f: X \rightarrow S (= \text{Spec } V)$ er afsluttet, findes et element $x \in \overline{\{\xi\}}$ med $f(x) = s$ (thi af $\{f(\xi)\} \subseteq f(\overline{\{\xi\}}) \subseteq \overline{\{f(\xi)\}}$ følger $s \in \overline{\{f(\xi)\}} = f(\overline{\{\xi\}})$). Med dette x betragtes diagrammet $\boxtimes$. Da $\mathcal{O}_s \rightarrow V$ er identitet, er den specielt surjektiv, og billedringen $\mathcal{O}$ for $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_{\xi} \rightarrow K$ vil derfor dominere V . Da V er en valuationsring, følger heraf $\mathcal{O} = V$. Men så vil specielt V dominere $\mathcal{O}$ $\square$

For at bevise "omvendt" har vi brug for følgende:

LEMMA. Lad $f: X \rightarrow T$ være en quasi-kompakt morfi. For enhver afsluttet delmængde $Z \subseteq X$ gælder da $\overline{f(Z)} = \bigcup_{z \in Z} \overline{\{f(z)\}}$.

KOROLLAR TIL LEMMA. En quasi-kompakt morfi $f: X \rightarrow T$ er afsluttet, når blot $\overline{\{f(\xi)\}} \subseteq f(\overline{\{\xi\}})$ for alle $\xi \in X$.

BEVIS FOR LEMMA. " $\supseteq$ " er klart. " $\subseteq$ ": Lad $t \in \overline{f(Z)}$. I stedet for at erstatte T med en affin omegn af t , kan vi antage, at $T = \text{Spec } R$ er affin, men så er $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$, U_i affin, og $\overline{f(Z)} = \overline{f(Z \cap U_1)} \cup \dots \cup \overline{f(Z \cap U_n)}$.

Vi har derfor $t \in \overline{f(Z \cap U_i)}$ for passende i , og i stedet for at erstatte X med U_i kan vi antage, at $X = \text{Spec } A$ er affin, så at f svarer til $R \rightarrow A$ og $Z = V(I)$, $I \subseteq A$.

16. Egenskaber ved morfi $X \xrightarrow{f} S$ [$S = \text{Spec } R$]

	mult	lokal på X	lokal på $\#S$	universel	Opfyldt for afsl. immersion
Isomorf	ja	nej	ja	ja	nej
Injektiv	ja	nej	ja	nej	ja
Surjektiv	ja	nej	ja	nej	nej
Afsluttet	ja	nej	ja	nej	ja
Åben	ja	ja	ja	nej	nej
Quasikompakt [$\Leftrightarrow X$ er quasikomp.]	ja	nej	ja	ja	ja
Affin [$\Leftrightarrow X$ er affin]	ja	nej	ja	ja	ja
Hel [$\Leftrightarrow X$ er affin og $R \rightarrow \Gamma(X)$ er hel]	ja	nej	ja	ja	ja
Endelig [$\Leftrightarrow X$ er affin og $R \rightarrow \Gamma(X)$ endelig]	ja	nej	ja	ja	ja
Afsl. Im. [$\Leftrightarrow X$ er affin og $R \rightarrow \Gamma(X)$ surj.]	ja	nej	ja	ja	ja
Immersion	ja	nej	ja	ja	(nej) ja
Lok. endelig type [$\Leftrightarrow X = \bigcup U_\alpha$, $U_\alpha \cong \text{Spec}(e.f. R\text{-algebra})$]	ja	ja	ja	ja	ja
Separeret [$\Leftrightarrow X = \bigcup U_\alpha$ U_α affin, $\Gamma(U_\alpha) \otimes \Gamma(U_\beta) \rightarrow \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta)$ surjektiv]	ja	nej	ja	ja	ja

SÆTNING. Lad β være en egenskab ved morfi, så at

- 1) β er universel. 2) β er multiplikativ 3) β (afsl. immersion)

Da gælder for $X \xrightarrow{g} Y$ at: $\beta(f) \wedge h$ separat $\Rightarrow \beta(g)$.
 $hg = f \xrightarrow{\quad} S \xleftarrow{\quad} h$

BEVIS: I diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & \longrightarrow & S \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{(1,g)} & X \times_S Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\
 g \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y & &
 \end{array}$$

er kvadraterne "pull-backs" $\square$

Eksempel:

proper = univ. afsluttet
 + separat
 + lok. endelig type
 + quasikompakt

17. Er $S = \text{Spec } R$, $S' = \text{Spec } R'$ (således at $S' \rightarrow S$ svarer til $R \rightarrow R'$) skrives ofte $X \times_R R'$ for den "base-changede" $X \times_S S'$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{q} & X' = X \times_R R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R & \leftarrow & \text{Spec } R' \end{array}$$

Vi får en oplagt morfi $R'_R \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, som er en isomorfi, hvis $X = \text{Spec } A$ er affin, idet vi så har $X' = \text{Spec } R'_R \otimes A$.
 SÆTNING. Hvis $R \rightarrow R'$ er flad, og X er quasikompakt, er $R'_R \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ injektiv. Er derudover $X = U_1 \cup \dots \cup U_r$, hvor U_α er affin og $U_\alpha \cap U_\beta$ er quasikompakt, så er den en isomorfi.

Bewis. Antag $X = U_1 \cup \dots \cup U_r$, U_α affin. Får $X' = q^{-1}(U_1) \cup \dots \cup q^{-1}(U_r)$.

Vi får

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow R'_R \otimes \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & \rightarrow & \prod_\alpha R'_R \otimes \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha}) & \rightarrow & \prod_{\alpha, \beta} R'_R \otimes \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta}) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \\ 0 \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) & \rightarrow & \prod_\alpha \Gamma(q^{-1}(U_\alpha), \mathcal{O}_{q^{-1}(U_\alpha)}) & \rightarrow & \prod_{\alpha, \beta} \Gamma(q^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), \mathcal{O}_{q^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}) \end{array}$$

med exakte rækker! Da U_α er affin, er φ' en isomorfi, og folgelig er φ injektiv. Er også $U_\alpha \cap U_\beta$ affin, bliver φ'' injektiv, og dermed φ bijektiv. $\square$

BEMÆRK. Resultatet er en generalisation af - og bewiset er en simplifikation af bewiset for - lemma 1.

18. SÆTNING. Lad X, Y være integritets-skemaer af endelig type over k , da er $X \times_k Y$ equidimensional af dimension $\dim X + \dim Y$.

Skitse: Antag X, Y affine $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$. Sæt $K = R(X), L = R(Y)$. Vælg i A (resp. B) transcendentbasis $x = (x_1, \dots, x_d)$ (resp. $y = (y_1, \dots, y_e)$) for K/k resp. L/k , og betragt:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_k B & \subseteq & K \otimes_k L \\ \cup & & \cup \\ k[x, y] & = & k[x] \otimes_k k[y] \subseteq k(x) \otimes_k k(y) \end{array}$$

$k[x, y]$ er en transcendent af grad $d+e$, og $k[x, y] \hookrightarrow k(x) \otimes_k k(y)$ er en lokalisering (mht. $S = \{f \otimes g \mid f \in k[x] \setminus (0), g \in k[y] \setminus (0)\}$), så $k(x) \otimes_k k(y)$ er et int. omr. $K \otimes_k L$ er fii over $k(x) \otimes_k k(y)$ (basis $u_i \otimes v_j$, hvor u_i er $k(x)$ -basis for K osv). Folgelig er hvert elt $\neq 0$ i $k(x) \otimes_k k(y)$ regulært i $K \otimes_k L \Rightarrow$ hvert element $\neq 0$ i $k[x, y]$ er regulært i $A \otimes_k B$. For et minimalt primideal $\mathfrak{p} \subset A \otimes_k B$ har vi derfor (!) $\mathfrak{p} \cap k[x, y] = (0)$ $\square$

19. DIMENSIONSSÆTNING. Lad X og Y være skemaer af endelig type over legemet k , og lad $\psi: X \rightarrow Y$ være en k -morf, da gælder for hvert $x \in X$, at

$$\dim_x \psi^{-1}(\psi(x)) \geq \dim_x X - \dim_{\psi(x)} Y.$$

Hvis Y er et integritetsskema, med generisk punkt η gælder " $=$ " for alle punkter x i den generiske fiber. {Mere generelt gælder " $=$ " i punkter x hvor $\mathcal{O}_{Y, \psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ er flad.}

Bewis. For $y = \psi(x)$ er fiberen $X_y = \psi^{-1}(y)$ den "basechangede" $X \times_Y \text{Spec } \kappa(y)$, og $\mathcal{O}_{X_y, x} = \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x}$. Specielt er restklasselgemenerne for x som element i X og som element i X_y de samme. For den lokale homomorfie $\mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ gælder som bekendt [Matsumura, Th 19, p. 79] at

$$(*) \quad \dim \mathcal{O}_{X, x} \leq \dim \mathcal{O}_{Y, y} + \dim \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X, x}$$

og via den generelle formel $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X, x} + \text{tdeg}_k \kappa(x)$ er dette netop den søgte ulighed. Hvis $\mathcal{O}_{Y, y}$ er et legeme, så er " $=$ " i (*) evident. {Mere generelt gælder som bekendt " $=$ " i (*), hvis $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ er flad} $\blacksquare$

BEMÆRK. Hvis X og Y begge er integritetsskemaer (med generiske punkter ξ og η) og $\psi: X \rightarrow Y$ er dominerende ($\psi(X) = Y \Leftrightarrow \psi(\xi) = \eta$) ses det let, at den generiske fiber $\psi^{-1}(\eta)$ er et integritetsskema, altså af dimension $= \dim X - \dim Y$. Alle andre fibre har altså dimension $\geq$ den generiske (eller $= \emptyset$).

20. For en endelig morfie $\psi: X \rightarrow S$ gælder for hvert $s \in S$ at fiberen $X_s = \psi^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec } \kappa(s)$ er endelig over $\kappa(s)$, altså $X_s \simeq \text{Spec } A$, hvor $A = \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ er endelig over $\kappa(s)$.

Vi definerer graden af ψ i s , $\deg \psi_s$ ved

$$\deg \psi_s = \dim_{\kappa(s)} \Gamma(X_s, \mathcal{O}_{X_s}).$$

For en algebra A , endelig over et legeme κ , gælder som bekendt, at A kun har endelig mange primidealer $\mathfrak{p}_i$, at disse alle er maksimalidealer, at $A \cong \prod A_{\mathfrak{p}_i}$, og at A har endelig længde. Vi har altså $\text{long } A = \sum \text{long } A_{\mathfrak{p}_i}$, $\dim_{\kappa} A_{\mathfrak{p}_i} = (\text{long } A_{\mathfrak{p}_i}) / |\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa|$, og $\dim_{\kappa} A = \sum (\text{long } A_{\mathfrak{p}_i}) / |\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa|$.

Vi slutter altså, at fiberen $\psi^{-1}(s) \cong \text{Spec } A$ er en endelig diskret punktmenge, og sætter vi for $x \in X$, $s = \psi(x)$,

$$e_{\psi}(x) = \text{long } \mathcal{O}_{\psi^{-1}(s), x} = \text{long } \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_x$$

$$f_{\psi}(x) = |\kappa(x) : \kappa(s)|,$$

så er

$$\deg \psi_s = \sum_{x \in \psi^{-1}(s)} e_{\psi}(x) f_{\psi}(x)$$

Lokalt på S svarer ψ til $R \rightarrow A$, hvor A er en e.f. R -modul, og hvis $s \leftrightarrow \mathfrak{p} \subset R$, bliver fiberen $\text{Spec } A \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) = \text{Spec } A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$, altså iflg. NAK

$$\deg \psi_s = \text{minimale antal } R_{\mathfrak{p}}\text{-fremb. for } A_{\mathfrak{p}}.$$

$$= \text{minimale antal } d \text{ af elementer}$$

$$a_1, \dots, a_d \in A, \text{ så at } \exists t \in R \setminus \mathfrak{p} : tA \subseteq Ra_1 + \dots + Ra_d.$$

Vi slutter altså: Hvis $\deg \psi_s = d$, så er $\deg \psi \leq d$ i en omegn af s .

Tidst $\psi: X \rightarrow S$ kaldes endelig flad, hvis ψ er endelig og $\Gamma(\psi^{-1}(U_{\alpha}), \mathcal{O}_X)$ er en (e.f.) fri modul over $\Gamma(U_{\alpha}, \mathcal{O}_S)$, for en affin overdækning $S = \bigcup U_{\alpha}$, ser vi

For en endelig flad morfi $\psi: X \rightarrow S$ er $\deg \psi$ lokalt konstant på S . Er således S sammenhængende (f. irreducibel), bliver $\deg \psi$ konstant på S .

OPGAVE. En S et integritetsskema, så gælder omvendt, at en endelig morfi $\psi: X \rightarrow S$ af konstant grad er endelig flad.

21. Lad K være et legeme. En valuationsring i K er en delring $V \subset K$, med K som brøklegerne, og således at (hoved)idealene i V er totalt ordnede. ($\Leftrightarrow \forall a, b \in V \setminus \{0\}$: $a/b \vee b/a \Leftrightarrow \forall \alpha \in K^*: \alpha \in V \vee \alpha^{-1} \in V$). En valuationsring V er specielt en lokal ring (med maksimalideal $\mathfrak{m} = \{\alpha \mid \alpha^{-1} \notin V\}$). En noetheriske valuationsring kan som bekendt karakteriseres som en regulær lokal ring af dimension 1. [en diskret valuationsring]

Idet de lokale delringe $\mathcal{O} \subseteq K$ ordnes ved dominans (vi siger, at $\mathcal{O}'$ dominerer $\mathcal{O}$, og skriver $\mathcal{O} \prec \mathcal{O}'$, hvis $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ og $\mathfrak{m}(\mathcal{O}) \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{O}')$) følger det let, at en valuationsring $V \subset K$ er maksimal. Omvendt

Lad nu $A \subseteq K$ være en vilkårlig delring, og lad $\alpha \in K^*$. Enten er α hel over A . Da er for hvert primideal $\mathfrak{p} \subset A$ α hel over $A_{\mathfrak{p}}$, og dermed $A_{\mathfrak{p}}[\alpha]$ endelig over $A_{\mathfrak{p}}$. Ifølge NAK er $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}[\alpha] \subset A_{\mathfrak{p}}[\alpha]$, så der findes i $A_{\mathfrak{p}}[\alpha]$ et primideal, som indeholder $\mathfrak{p}$. Lokalisering i dette primideal giver en lokal ring $\mathcal{O} \supset A_{\mathfrak{p}}$ med $\alpha \in \mathcal{O}$. Eller α er ikke hel over A . Da er $\{a \in A \mid \exists \text{ relation } a\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0\} \subset A$ og dermed $\subseteq$ et maksimalideal $\mathfrak{m} \subset A$. Det følger, at $(\mathfrak{m}, \alpha^{-1}) \subset A[\alpha^{-1}]$, så der findes i $A[\alpha^{-1}]$ et primideal, som indeholder $\mathfrak{m}$ og α^{-1} . Lokalisering i dette primideal giver en lokal ring $\mathcal{O} \supset A_{\mathfrak{m}}$, så at $\alpha^{-1} \in \mathfrak{m}(\mathcal{O})$.

Det er let at se, at de lokale delringe af K er induktivt ordnet (m.h.t. dominans). Af Zorns lemma og det foregående får vi derfor

SÆTNING. En valuationsring $V \subset K$ er maksimal. Enhver lokal ring $\mathcal{O} \subset K$ domineres af en valuationsring. For en vilkårlig delring $A \subseteq K$ er

$$A\text{'s hele afslutning i } K = \bigcap \{V \mid V \text{ er en valuationsring i } K\}.$$

22. For en valuationsring V i legemet K kan vi i $Y = \text{Spec } V$ betragte det generiske punkt η svarende til primidealit (0) i V , og det afsluttede punkt y svarende til maksimalidealit $\mathfrak{m}$ i V . Vi har $K = \mathcal{O}_{Y,\eta} = \kappa(\eta)$, $V = \mathcal{O}_{Y,y}$, $\kappa(y) = V/\mathfrak{m}$.

Betragt nu et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccc} \xi & X & \xleftarrow{j} & \text{Spec } K & \eta \\ & \psi \downarrow & \nwarrow x & \downarrow i & \\ s, \sigma & S & \xleftarrow{\varphi} & \text{Spec } V & y, y \end{array}$$

- SÆTNING. (i) Hvis ψ er separert findes højst en morfi $\chi: \text{Spec } V \rightarrow X$, som gør de to trekanter kommutative.
 (ii) Hvis ψ er proper findes netop én morfi $\chi: \text{Spec } V \rightarrow X$, som gør de to trekanter kommutative.

BEMÆRKNING. (jfr. "Sch", sætn. 13). Morfien i er "punktet" $i_\eta: \text{Spec } \kappa(\eta) \rightarrow \text{Spec } V$. Morfien j er bestemt ved $\xi \in X$ og en lokal morfi $\mathcal{O}_{X,\xi} \xrightarrow{j} K$. Morfien φ er bestemt ved $s \in S$ og en lokal morfi $\mathcal{O}_{S,s} \xrightarrow{\varphi} V$. Herudfra bestemmes billedet $\sigma = \varphi(\eta) \in S$ ved at $\{\sigma\} \ni S$ og det til σ svarende primideal i $\mathcal{O}_{S,s}$ (jfr. "Sch" 9) er kernen for morfien $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow V$. Vi har altså givet et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{X,\xi} & \xrightarrow{j} K \\ & \uparrow \psi & \uparrow 1 \\ \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{X,\xi} & \xrightarrow{j} K \\ \uparrow \psi & \uparrow \varphi & \uparrow \\ \mathcal{O}_{S,\sigma} & \xrightarrow{\varphi} V & \end{array}$$

Idet χ er bestemt ved et $x \in X$ og en lokal morfi $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow V$, ses det, at vi søger

et $x \in \psi^{-1}(s) \cap \overline{\{\xi\}}$ så at $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow K$ afbilder

lokalt, ind i V .

Bevis. (i) Entydighed. Hvis χ og χ' opfylder det stillede krav har vi $\chi \circ i_\eta = \chi' \circ i_\eta (= j)$, altså $\eta \in \{z \in Y \mid \chi \circ i_z = \chi' \circ i_z\}$. Da ψ er separat, er den sidste mængde afsluttet, og da den indeholder det generiske punkt η , må den være hele Y . Da Y er reduceret, slutter vi $\chi = \chi'$ (jfr. Bemærkning 14).

(ii) Eksistens. Vi kan "basechange" til $S = \text{Spec } V$, og altså specielt antage, at $\mathcal{O}_{S,S} \rightarrow V$ er surjektiv. Da ψ er afsluttet, er $s \in \overline{\{s\}} = \overline{\{\psi(\xi)\}} = \psi(\overline{\{\xi\}})$, så der findes et $x \in \psi^{-1}(s) \cap \overline{\{\xi\}}$. Morfien $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow K$ vil afbilde lokalt på sin billedring $(=: \bar{\mathcal{O}})$. Sammensættes med den lokale morfi $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,s}$, ser vi at $\bar{\mathcal{O}} \supset V$, og vi slutter, at $\bar{\mathcal{O}} = V$ $\square$

Hvis skemaet X er separat (over $\text{Spec } \mathbb{Z}$) kan vi for $\xi \in X$ og en valuationsring $V \subset \kappa(\xi)$ anvende (i) på diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{i_\xi} & \text{Spec } \kappa(\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } V, \end{array}$$

og får: Der findes højst ét $x \in \overline{\{\xi\}}$, så at $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow \kappa(\xi)$ afbilder lokalt, ind i V .

Er X et integritetsskema, og er ξ det generiske punkt, har vi $\mathcal{O}_{X,\xi} = \kappa(\xi) = R(X)$, og morfierne $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow R(X)$ er injektive.

KOROLLAR. Lad X være et separat integritetsskema med generisk punkt ξ . For $x, y \neq \xi$ gælder da i $R(X)$, at $\mathcal{O}_{X,y} \subset \mathcal{O}_{X,x} \Rightarrow x = y$. Specielt: $x \mapsto \mathcal{O}_{X,x} \subseteq R(X)$ er injektiv.

Hvis $U \subseteq X$ er affin gælder: $\mathcal{O}_{X,x} \supseteq \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \Leftrightarrow x \in U$.

Bevis. $\mathcal{O}_{X,x}$ domineres af en valuationsring V , hvorefter den første påstand. Er $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ vil $A \cap \mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}$ være et primideal, altså svar til $y \in U$, og $\mathcal{O}_{X,y} = A_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{X,x}$, hvorefter $x = y \in U$ $\square$

KOROLLAR A. Hvis X er proper over et legeme k , og $x_0 \in X$, så gælder, at enhver valuationsring R i $\kappa(x_0)/k$ dominerer netop ét ståt $\mathcal{O}_{x,x}$, med $x \in \overline{\{x_0\}}$. d.v.s. der findes netop ét $x \in \overline{\{x_0\}}$, så et $\mathcal{O}_{x,x} \rightarrow \mathcal{O}_{x,x_0} \rightarrow \kappa(x_0)$ afbilder lokalt, ind i R . $\square$

KOROLLAR B. Hvis X er et integritetsskema, proper over et legeme k , så gælder, at enhver valuationsring R i $R(X)/k$ dominerer netop ét ståt $\mathcal{O}_{x,x}$. $\square$

KOROLLAR C. Hvis X er en irreducibel regulær kurve, proper over k , så defineres ved $x \mapsto \mathcal{O}_{x,x}$ en bijektiv forbindelse

$$\{\text{afsluttede punkter } x \text{ i } X\} \cong \{\text{valuationsringe i } R(X)/k\}.$$

23. RATIONALE MORFIER. Lad X, Y være skemaer over et legeme k , og antag, at X er et integritetsskema med generisk punkt ξ , og at Y/k er separert. Er $U_1, U_2 \subseteq X$ åbne, ikke-tomme ($\because \xi \in U_1, \xi \in U_2$) siges to k -morfier

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow Y \quad \varphi_2: U_2 \rightarrow Y$$

at være ækvivalente, hvis der findes en ikke-tom, åben delmængde $V \subseteq U_1 \cap U_2$, så at $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$. De tilsvarende ækvivalensklasser kaldes rationale morfier fra X til Y .

At $\bar{\varphi}$ er en rational morfi fra X til Y skrives ofte $X \dashrightarrow Y$.

For en rational morfi $X \dashrightarrow Y$ er billedet $\bar{\varphi}(\xi) =: y_0$ og $\kappa(y_0) \rightarrow \kappa(\xi) = R(X)$ vel-defineret. Videre bemærker vi for to k -morfier $\varphi_1: U_1 \rightarrow Y$ og $\varphi_2: U_2 \rightarrow Y$ har ækv. bet.

i) φ_1 og φ_2 er ækvivalente

ii) $\varphi_1 = \varphi_2$ på $U_1 \cap U_2$

iii) $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) =: y_0$ og $\kappa(y_0) \xrightarrow{\sim} R(X)$ er samme afbildning.

thi ii) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ iii) er klart, og for at vise iii) $\Rightarrow$ ii) kan vi

antag, at $U_1 = U_2 = X$. Forudsætningen i iii) er da, at $\varphi_1 \circ i_{\xi} = \varphi_2 \circ i_{\xi}$, og da Y/k er separant følger heraf $\varphi_1 \circ i_x = \varphi_2 \circ i_x$ for alle $x \in \{\bar{\xi}\} = X$, hvilket medfører (da X er reducent), at $\varphi_1 = \varphi_2$.

Vi får således en injektiv afbildning

$$(*) \quad \text{Hom}_k^{\text{rat}}(X, Y) \longrightarrow \bigcup_{y_0 \in Y} \text{Hom}_k(\kappa(y_0), R(X)).$$

Videre ser vi, at hver rational morfi $\phi: X \dashrightarrow Y$ har en repræsentant $\varphi: U \rightarrow Y$, hvor $U \subseteq X$ er maksimal. Hvis $x \in U$, siger vi, at ϕ er defineret i U .

SÆTNING. Lad X være et integritetsskema over k , og antag, at X er separant over k , da er afbildningen (*) bijektiv.
Er $\kappa(y_0) \hookrightarrow R(X)$ givet, da er den tilhørende rationale morfi defineret i x , hvis og kun hvis der findes et $y \in \overline{\{y_0\}}$, så at $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y_0} \rightarrow \kappa(y_0) \hookrightarrow R(X)$ afbilder lokalt ind i $\mathcal{O}_{X,x}$.
 Bevis. Lad $V = \text{Spec } A$ være en affin omegn af Y , og betragt en affin omegn $U = \text{Spec } B$ af X . Vi har da (idet $x \leftrightarrow \mathfrak{p} \in B$, $y \leftrightarrow \mathfrak{q} \in A$):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{Y,y_0} & \longrightarrow & \kappa(y_0) & \hookrightarrow & R(X) \\ & & & & \cup \\ & \uparrow & & & \\ A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{Y,y} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & = & B_{\mathfrak{p}} \\ & & & & \cup \\ & \uparrow & & & \\ A = \Gamma(V, \mathcal{O}_Y) & \dashrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_X) & = & B \end{array}$$

Her er $A \cong k[y_1, \dots, y_r]$ og hvert y_i afbildes ind i $B_{\mathfrak{p}}$. I stedet for at gøre U mindre (d. estatte B med B_f , $f \notin \mathfrak{p}$) kan vi antage, at hvert y_i , og dermed A , afbildes ind i B . Den tilhørende morfi $U = \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A \hookrightarrow Y$ er nu en repræsentant for den søgte rationale morfi $\square$

KOROLLARA. Hvis Y er proper over k , er en rational morfi $X \dashrightarrow Y$ defineret i alle punkter $x \in X$ hvori $\mathcal{O}_{X,x}$ er en valuationsring.

Bevis. (Jfr. ovenstående diagram). Thi enten er $\kappa(y_0) \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$,
 og så kan vi som y bruge $y = y_0$ eller $\kappa(y_0) \cap \mathcal{O}_{X,x} \subset \kappa(y_0)$,
 og så er $R = \kappa(y_0) \cap \mathcal{O}_{X,x}$ en valuationsring i $\kappa(y_0)/k$, og
 eksistensen af y følger af Korollar 2.2 A.

KOROLLAR B. Hvis X/k er en regulær, irreducibel kurve,
og Y/k er proper, så er enhver rational morfi $X \dashrightarrow Y$
overalt defineret. (ϕ = en k -morfi $X \rightarrow Y$).

(med generisk punkt η)

24. Hvis også Y er et integritetsskema, siger en rational
 morfi $\phi: X \dashrightarrow Y$ at være dominerende, hvis $\phi(\xi) = \eta$
 ($\Leftrightarrow$ for en (vilkaarlig) repræsentant $\varphi: U \rightarrow Y$ gælder, at $\varphi(U)$ er
 tæt i Y). Idet $\mathcal{O}_{Y,\eta} = \kappa(\eta) = R(Y)$, får vi af sætning 23:

SÆTNING. Lad X/k og Y/k være integritetsskemaer med Y/k
separat af endelig type. Afbildningen $\phi \mapsto \phi(\xi): \kappa(\phi(\xi)) \rightarrow \kappa(\xi)$
er da en bijektion

$$\text{Hom}_k^{\text{rat, dom}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(R(Y), R(X))$$

Er $R(Y) \hookrightarrow R(X)$ givet, da er den tilhørende rational morfi
defineret i x , hvis og kun hvis der findes $y \in Y$, så
at $\mathcal{O}_{X,x}$ dominerer $\mathcal{O}_{Y,y}$.

KOROLLAR. Hvis X/k desuden er en regulær kurve, og
 Y/k er proper, har vi en bijektion

$$\text{Hom}_{\text{sch}/k}^{\text{dom}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(R(Y), R(X)).$$

Er specielt både X og Y regulære, irreducible, propre over
 k , så er $X \cong Y \Leftrightarrow R(X) \cong R(Y)$ (over k).

25. SÆTNING. Lad X/k være proper, og antag, at X er redu-
ceret. Da er $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ endeligdimensional over k , $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

er et produkt af legemer, og X er sammenhængende, hvis og kun hvis $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ er et legeme. Hvis X er sammenhængende gælder for hvert $x \in X$, at afbildningen $f \mapsto f(x)$ er injektiv $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \kappa(x)$.

Bewis. Da X er noethersk, har X endelig mange sammenhængskomponenter $U_1, \dots, U_r$, som er åbne ($\Rightarrow \Gamma(X) = \Gamma(U_1) \times \dots \times \Gamma(U_r)$) og afsluttede ($\Rightarrow$ propre over k). Idet den sidste påstand specielt kan anvendes på et afsluttet punkt x , hvor $|\kappa(x):k|$ er endelig, ser vi alt i alt, at det er nok at vise den sidste påstand.

Lad altså $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ og antag, at $f(x) = 0$ i $\kappa(x)$. f definerer da en k -homomorfi $k[T] \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $T \mapsto f$. Sætter vi $A = \text{Spec } k[T]$ får vi altså en k -morf $\psi: X \rightarrow A$. Her $\psi(X) \subseteq A$ afsluttet (sætning 17) og sammenhængende, altså enten $\psi(X) = \text{et afsluttet punkt}$ eller $\psi(X) = A$. Det sidste kan ikke være tilfældet, thi vi kan opfatte $A = \text{Spec } k[T]$ som den åbne, ikke-afsluttede delmængde P_S af $P = \text{Proj } k[T, S]$, og den sammensatte k -morf $X \rightarrow A \hookrightarrow P$ har billedet $\psi(A) \subseteq P$ som er afsluttet i P (sætning 17), da P/k er separant. Vi har altså $\psi(X) = \{y\}$, hvor $y \in A$ er et afsluttet punkt. Det tilsvarende afsluttede delskema af A er $\text{Spec } \kappa(y) \hookrightarrow A$, og af opgaven i Sch 12, eks 1 følger, at ψ kan faktorisere

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & A \\ & \searrow \psi_0 & \uparrow i_y \\ & & \text{Spec } \kappa(y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & k[T] \\ & & \parallel \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & \xleftarrow{\theta} & \Gamma(A, \mathcal{O}_A) \\ \downarrow & \swarrow \theta_0 & \downarrow \\ \kappa(x) & \xleftarrow{\theta(x)} & \kappa(y) \end{array}$$

og vi får et kommutativt diagram

Na var $0 = f(x) = (\theta T)(x) = \theta(x)[T(y)]$, og da $\theta(x): \kappa(y) \rightarrow \kappa(x)$ nødvendigvis er injektiv, slutter vi, at $T(y) = 0$ ($\because y$ er max-ideal i (T) svarende til punktet $0 \in k$), og dermed, at $f = \theta_0(T(y)) = 0$.

Bemærk: Vi ser, at $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ er divisor i $|\kappa(x):k|$ for hvert afsluttet punkt $x \in X$. Har specielt X et rationalt punkt, er $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$.

26. VALUATIVE KRITERIER

LEMMA. Lad $\psi: X \rightarrow S$ være quasikompakt. Da gælder for hver afsluttet delmængde $Z \subseteq X$, at $\overline{\psi(Z)} = \bigcup_{z \in Z} \{\overline{\psi(z)}\}$.

Bewis. $\supseteq$ er klart. Antag omvendt, at $s \in \overline{\psi(Z)}$, og lad U være en affin omgave af s . Da er $s \in \text{cl}_U(\psi(Z \cap \psi^{-1}(U)))$. Nu kan $\psi^{-1}(U)$ overdækkes med endelig mange affine åbne $V_1, \dots, V_r$, og $\text{cl}_U(\psi(Z \cap \psi^{-1}(U))) = \bigcup_i \text{cl}_U \psi(Z \cap V_i)$. Specielt findes en affin åben $V \subseteq \psi^{-1}(U)$, så at $s \in \text{cl}_U \psi(Z \cap V)$. Her er $\psi: V \rightarrow U$ bestemt ved ringhomomorfien $\mathcal{V}: \Gamma(U) \rightarrow \Gamma(V)$, og den afsluttede delmængde $Z \cap V$ af V svarer til et ideal $I \subseteq \Gamma(V)$. Sættes $B = \Gamma(V)/I$ og $A = \Gamma(U)/\mathcal{V}^{-1}(I)$ får vi et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(U) & \longrightarrow & A & \dashrightarrow & A_{\mathcal{O}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V) & \longrightarrow & B & \dashrightarrow & B_{\mathcal{O}} \quad m \end{array}$$

Det er klart, at $\psi(Z \cap V) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{V}^{-1}(I))$ så $s \in U = \text{Spec } \Gamma(U)$ svarer til et primideal $\mathfrak{p} \supseteq \mathcal{V}^{-1}(I)$, d.v.s. til et primideal $\mathfrak{q} \subset A$. Lad nu (Zorns lemma) $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ være et minimalt primideal i A .

Lokalisering i $\mathfrak{q}$ giver $A_{\mathcal{O}} \hookrightarrow B_{\mathcal{O}}$, specielt $B_{\mathcal{O}} \neq 0$. Der findes altså primideal $\mathfrak{m}$ i $B_{\mathcal{O}}$. Kontraktion til A bliver $\mathfrak{q}$ (da $A_{\mathcal{O}}$ har ét primideal), og kontraktionen til $\Gamma(U)$ svarer altså til $\sigma \in U$ med $s \in \text{cl}_U(\sigma)$. Kontraktion af m til $\Gamma(V)$ giver et element $z \in \mathcal{V}(I) = Z \cap V$ med $\psi(z) = \sigma$. Altså er $s \in \text{cl}_U(\psi(z)) \subseteq \text{cl}_X(\psi(z))$ $\square$

KOROLLAR. Lad $\psi: X \rightarrow S$ være quasikompakt, og antag at $\{\overline{\psi(\xi)}\} \subseteq \psi(\overline{\{\xi\}})$ for alle $\xi \in X$, da er ψ afsluttet $\square$

Lad os et øjeblik sige, at $\psi: X \rightarrow S$ opfylder (ent) (resp. (eksist)), hvis der for hvert kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \text{Spec } K \\ \downarrow & \nwarrow \bar{x} & \downarrow \\ S & \longleftarrow & \text{Spec } V \end{array}$$

hvor V er en valuationsring i legemet K findes højst (resp. mindst) en morfi X , der gør trekantene kommutative.

SÆTNING. (i) Hvis $\psi: X \rightarrow S$ opfylder (cut) og hvis $\Delta: X \rightarrow X_{\bar{S}}X$ er quasikompakt, er ψ separat. {Eksempel: X er noethersk}

(ii) Hvis $\psi: X \rightarrow S$ opfylder (eksist) og $\psi: X \rightarrow S$ er quasikompakt, er ψ universelt afsluttet. {Eksempel: X er noethersk}.

Bewis. (i). Sæt $Y = X_{\bar{S}}X$, og lad $p_1, p_2: Y \rightarrow X$ være projektornerne. Vi har da $\psi \circ p_1 = \psi \circ p_2$. Vi skal vise, at $\Delta(X)$ er afsluttet i Y . Det er nok at vise, at $y \in \overline{\{\Delta(x)\}} \Rightarrow y \in \Delta(X)$. Billedet ved den sammensatte morfi $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,\Delta(x)} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$ domineres ifølge sætning 21 af en valuationsring $V \subset \kappa(x)$. Vi har altså et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccc} p_1 \nearrow & \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\chi} & V & \\ \downarrow \mathcal{O}_{X,p_1 y} & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathcal{O}_{Y,\Delta(x)} & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \rightarrow & \kappa(x) \\ p_2 \nearrow & \downarrow \mathcal{O}_{X,x} & & & \end{array}$$

hvor den lokale morfi $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow V$ svarer til $\text{Spec } V \xrightarrow{\chi} Y$. Morfien $\chi_i = p_i \circ \chi$ ($i=1,2$) er givet ved $\mathcal{O}_{X,p_i y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow V$. Her er $\psi \circ \chi_1 = \psi \circ p_1 \chi = \psi \circ p_2 \chi = \psi \circ \chi_2$ og $\chi_i \circ i_y$ er givet ved $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{p_i} \mathcal{O}_{Y,\Delta(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$ så at også $\chi_1 \circ i_y = \chi_2 \circ i_y$. Af (cut) følger derfor at $\chi_1 = \chi_2 (=:\bar{\chi})$, hvorefter $\chi = \Delta \circ \bar{\chi}$, og $y = \chi(\text{afsl. pkt}) = \Delta(\bar{\chi}(\text{afsl. pkt})) \in \Delta(X)$.

(ii). Da forudsætningerne bevarer ved basechange er det nok at vise, at ψ er afsluttet, og hertil er det nok at vise, at $s \in \overline{\{\psi(\xi)\}} \Rightarrow s \in \psi(\overline{\{\xi\}})$. Billedet ved morfien $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{S,\psi(\xi)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow \kappa(\xi)$ domineres af en valuationsring V i $\kappa(\xi)$. Vi har altså kommutativt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{S,s} & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{S,\psi(\xi)} & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow \kappa(\xi) \end{array}$$

Ifølge (eksist) kan $\varphi: \text{Spec } V \rightarrow S$ faktoriseres: $\varphi = \psi \circ \chi$, men så er $s = \varphi(\text{afsl. pkt}) = \psi(\chi(\text{afsl. pkt})) \in \psi(\chi(\overline{\{\xi \text{ pkt}\}})) \subseteq \psi(\overline{\{\xi\}})$ $\square$

27. DEFINITION. Et regulært skema er et noethersk skema X , hvis stia $\mathcal{O}_{X,x}$ er regulære for alle $x \in X$. Et sådant skema er sammenhængende $\Leftrightarrow$ det er irreducibelt $\Leftrightarrow$ det er et integritetsskema. Er $X = \text{Spec } A$ affin og irreducibel, bliver X regulær af dimension 1 netop hvis A er en Dedekindring. (o: A er noethersk integritetsområde af dimension 1).
normalt

SÆTNING. Lad X og Y være regulære, irreducible kurver (o: af dimension 1), propre over legemet k . Enhver k -homomorfi $R(Y) \hookrightarrow R(X)$ kommer da fra en entydigt bestemt dominerende rational k -morfi $\varphi: X \dashrightarrow Y$, og φ er en overalt defineret endelig flad morfi af konstant grad $= |R(X):R(Y)|$.

Bemærk: Da begge funktionslegemer har transcendensgrad 1 over k , er $R(X)$ algebraisk over $R(Y)$, og dermed (!) endeligdimensional over $R(Y)$.

Beris. Eksistens (og entydighed) af $\varphi: X \rightarrow Y$ følger af sætning 23 og korollar 23 A. Er $U = \text{Spec } A \subseteq Y$ affin, åben, så er $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \subseteq R(Y)$ en Dedekindring. Er $p \in X$, så er $\mathcal{O}_{X,p} \subseteq R(X)$, og $\mathcal{O}_{Y, \varphi(p)} = R(Y) \cap \mathcal{O}_{X,p}$. Følgelig er (korollar 22): $p \in \varphi^{-1}(U) \Leftrightarrow \varphi(p) \in U \Leftrightarrow \mathcal{O}_{Y, \varphi(p)} \supseteq A \Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,p} \supseteq A$, og dermed

$$B := \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X) = \bigcap_{p \in \varphi^{-1}(U)} \mathcal{O}_{X,p} = \bigcap \{ \mathcal{O}_{X,p} \mid \mathcal{O}_{X,p} \supseteq A \}$$

= A 's hele afslutning i $R(X)$!. Heraf følger som bekendt, at B ligeledes er en Dedekindring [det ikke-trivielle er at B er noethersk] med brøkleget $L = R(X)$. Nu har vi morfien $\varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \text{Spec } B$, og isomorfien $R(X) \xrightarrow{\sim} L$ giver en dominerende rational morfi $\chi: \text{Spec } B \dashrightarrow X$. Da $\text{Spec } B$ er en regulær kurve, er χ overalt defineret, og χ afbilder øjensynlig ind i $\varphi^{-1}(U)$. Det følger let, at φ og χ er hinandens inverse. Følgelig er $\varphi^{-1}(U) \cong \text{Spec } B$ affin, og som åben i X er B af endelig type over k og dermed e.f. som A -modul.

For $y \in U$, $y \leftrightarrow y \in A$ er A_y et hovedidealområde, og dermed $B_y \subseteq L$ fri, men så er $|R(X):R(Y)| = |B_y \otimes_{A_y} R(Y):R(Y)| = |B_y:A_y| = |B_y \otimes_{A_y} \kappa(y):\kappa(y)| \square$

28. I polynomringsen $R = k[x_1, \dots, x_n]$ er de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x_i} : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$ k -lineære derivationer i R . [v: $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i}$]

Ved definitionen $\frac{\partial}{\partial x_i} (f/s) = \frac{\partial f}{\partial x_i} / s - f \frac{\partial s}{\partial x_i} / s^2$ udvides de til derivationer i enhver lokalisering $S^{-1}R$. For et sæt af

polynomier $(f_1, \dots, f_q)$ i R betegner vi med $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ Jacobimatrixen $\in \text{Mat}_{q \times n}(R)$. Idet I er idealet $(f_1, \dots, f_q) \subseteq R$ og $A = R/I$ kan vi betragte skemaet

$$X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_q) \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$$

og for hvert $x \in X$ billedet $J(x)$ af Jacobimatrixen under afbildningen $R \rightarrow A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$. Vi har altså

$$J(x) \in \text{Mat}_{q \times n}(\kappa(x))$$

Funktionen $x \mapsto \text{rg } J(x)$ er nedad(?) halvkontinuert thi er $\text{rg } J(x) = d$ findes en d -minor (v: en $d \times d$ -underdeterminant i J) Δ i J med $\Delta(x) \neq 0$, og så er $\text{rg}(J(y)) \geq d$ for alle $y \in X_\Delta$.

SÆTNING. Lad $x \in X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_q)$ (k et legeme) og lad $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ være Jacobimatrixen. Da er

$$(*) \dim_x X \leq n - \text{rg } J(x).$$

Hvis "=" gælder i denne ulighed, så findes en åben omegn $x \in U \subseteq \mathbb{A}^n$ og $r = \text{rg } J(x)$ blandt f_i 'erne (vi kan antage at det er $f_1, \dots, f_r$) så at der for det tilsvarende skema

$$\mathbb{A}^n \supseteq \tilde{X} (= \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_r)) \supseteq X \text{ gælder:}$$

$$U \cap \tilde{X} = U \cap X$$

er et regulært integritetsskema.

Specielt er X altså regulær i en omegn af x .

Bevis. $x \in X$ svarer til et primideal $\mathfrak{p} \subset A = R/I$ og dermed til et primideal $\mathfrak{p} \subset R$, $\mathfrak{p} \supseteq I$. Sætter $\tilde{\mathcal{O}} = R_{\mathfrak{p}}$ og $\mathcal{O} = A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_x$ bliver $\tilde{\mathcal{O}}$ og $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} / I \tilde{\mathcal{O}}$ lokale ringe med restklasse-

legemet $\kappa := \tilde{\mathcal{O}}/\tilde{\mathfrak{m}} = \mathcal{O}/\mathfrak{m} = \kappa(x)$. Betragt nu følgende diagram af vektorrum over κ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I\tilde{\mathcal{O}} + \tilde{\mathfrak{m}}^2/\tilde{\mathfrak{m}}^2 & \rightarrow & \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 & \rightarrow & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \sigma & & \downarrow \delta & & \\ & & \kappa^q & \longrightarrow & \kappa^n & & \end{array}$$

hvor σ er afbildningen givet ved at i 'te basisvektor i κ^q afbildes på $f_i/1 \pmod{\tilde{\mathfrak{m}}^2}$ og δ er givet ved $f \mapsto (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)) \in \kappa^n$. Den sammensatte afbildning $\kappa^q \rightarrow \kappa^n$ er givet ved $J(x)$. Da $\mathcal{O} = R_{\mathfrak{p}}$ er en regulær (!) lokal ring, er

$$\begin{aligned} \dim_{\kappa} \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 &= \dim \tilde{\mathcal{O}} = \text{ht } \mathfrak{p} = n - \dim R/\mathfrak{p} \\ &= n - \dim A/\mathfrak{p} = n - \dim \overline{\{x\}}. \end{aligned}$$

og sættes $U = I\tilde{\mathcal{O}} + \tilde{\mathfrak{m}}^2/\tilde{\mathfrak{m}}^2 \subseteq \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2$ har vi

$$\dim_{\kappa} U \geq \dim_{\kappa} \delta(U) = \text{rg } J(x) \text{ da } \sigma \text{ er surjektiv.}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}_{x,x} &\leq \dim_{\kappa} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\kappa} \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 - \dim_{\kappa} (U) \\ &\leq n - \dim \overline{\{x\}} - \text{rg } J(x). \end{aligned}$$

hvoraf den søgte ulighed følger, da $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{x,x} + \dim \overline{\{x\}}$.

Antag nu at "=" gælder, da gælder specielt "=" i den første ulighed, hvoraf følger at $\mathcal{O}_{x,x}$ er regulær. Specielt er $\mathcal{O}_{x,x}$ et integritetsområde, så der er kun én af X 's irreducible komponenter, der indeholder x . For en lille åben omegn $x \in U \subseteq A^n$ er $X \cap U$ altså irreducibel af dimension $d = \dim_x X$. Vi kan videre antage, at $\text{rg } J(y) \geq \text{rg } J(x) = r$ for $y \in U$, men så slutter vi for $y \in U \cap X$, at "=" gælder i

$$\dim_y X \leq n - \text{rg } J(y)$$

og dermed at $X \cap U$ er et regulært integritetsskema af dimension d . Er $r = \text{rg } J(x)$ kan vi antage, at

$f_1, \dots, f_r$ opfylder, at de tilsvarende rækker i $J(x)$ er

lineært uafhængige. For det tilsvarende skema $\tilde{X} = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_r)$ bliver Jacobimatrixen $\tilde{J}$ en delmatrix af J . Vi har $x \in X \subseteq \tilde{X}$, altså

$$d = \dim_x X \leq \dim_x \tilde{X} \leq n - \text{rg } \tilde{J}(x) = n - r.$$

og slutter, at $=$ gælder. Idet vi går frem som ovenfor kan vi antage at $U \subseteq A^n$ er valgt så lille, at også $\tilde{X} \cap U$ er et (regulært) integritetsskema af dimension $\dim_x \tilde{X} = d$. Da det indeholder $X \cap U$ som afsluttet delskema, og da $\dim X \cap U = \dim \tilde{X} \cap U$, slutter vi, at $X \cap U = \tilde{X} \cap U$. $\square$

(over k)

29 DEFINITION. Et k -skema X kaldes glat i $x \in X$, hvis x har en affin omegn $U \simeq \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_r)$ så at

$$\dim_x X = n - \text{rg } J(x).$$

Af det foregående følger, at de glatte punkter på X udgør en åben mængde U , og at U er regulær.

Skemaet X (over k) kaldes glat, hvis det er af endelig type over k , equidimensionalt og glat i ethvert punkt. Det er her til nok at kræve, at det er glat i hvert afsluttet punkt, da $x \mapsto \text{rg } J(x)$ er halokontinuert.

Et glat skema er altså regulært.

30. Hvis $x \in \text{Spec } k[x_1, \dots, x_m]/(f_1, \dots, f_r)$ er et rationalt punkt svarende til $\mathcal{K} = (x_1 - \lambda_1, \dots, x_m - \lambda_m) \subset R$ (med betegnelserne fra 28), så er $(x_1 - \lambda_1), \dots, (x_m - \lambda_m) \in \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2$ en k -basis, og $\delta: \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 \rightarrow k^n$ er i denne basis givet ved enhedsmatrix, så δ er specielt injektiv, og vi har $\dim_k \delta(U) = \dim_k U$. Det følger for et sådant punkt x , at X er glat i $x \Leftrightarrow X$ er regulær i x .

Man kan vise, at hvis k er perfekt, så gælder for ethvert $x \in X$, at $\delta: \tilde{M}/\tilde{M}^2 \rightarrow \kappa(x)^n$ er injektiv, og dermed:

$$X \text{ er glat i } x \Leftrightarrow X \text{ er regulær i } x.$$

KOROLLAR. Hvis X er et integritetsskema af endelig type over et perfekt legeme k , så er

$$\{\text{regulære punkter}\} = \{\text{glatte punkter}\}$$

åben og ikke-tom,

thi et integritetsskema er dividielt regulært i sit generiske punkt ξ , hvor stæket $\mathcal{O}_{X,\xi} = R(X)$ er et legeme.

31. OPGAVE. Gør rede for at Jacobimatrixen ikke ændres ved basechange $k \hookrightarrow k'$. Slut heraf for et integritetsskema X af endelig type over k , og det basechangede X' over k' , at
- $$X \text{ er glat over } k \Leftrightarrow X' \text{ er glat over } k'.$$

32. Er $k = \mathbb{R}$, og $X = \text{Spec } \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]/(f_1, \dots, f_r)$, kan mængden $X(\mathbb{R})$ af rationale punkter på X opfattes som en delmængde $X(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Er $x \in X(\mathbb{R})$ har vi

$$X \text{ regulær i } x \Leftrightarrow X \text{ er glat i } x \Rightarrow X(\mathbb{R}) \text{ er glat (i } \mathbb{C}_\infty\text{-forstand) i } x \text{ af dim} = \text{dim}_x X.$$

thi (med betegnelserne fra 28) er $X(\mathbb{R})$ i den åbne (!) mængde $U(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n$ givet som nulpunkterne for r (!) $\mathbb{C}_\infty$ -funktioner $f_1, \dots, f_r$ med $\text{rg} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right\} = r$.

BEMÆRK, at man ^{selv} for et integritetsskema ikke kan vise " $\Leftarrow$ ". [Eks $f = y(x^2 + y^2) - x^4$]



33. OPGAVE. Vis v.h.p. det valuative kriterium (og Sch, opg 19, ⑤), at $\mathbb{P}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ er proper.

34. BEMÆRKNING. For $p \in X$ (af endelig type over legemet k)

sættes

$$\delta_p(X) = \dim_{\kappa(p)} \kappa(p) \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/k} =: \operatorname{rg} \Omega_{\mathcal{O}_{X,p}/k}.$$

Det er ikke svært at vise for $p \in X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_g)$ at

$$\delta_p(X) = n - \operatorname{rg} J_f(p)$$

Af sætning 28 følger derfor, at $\delta_p(X) \geq \dim_p X$, og at "=" gælder netop når X er glat i p .

35. HOMOGENE JACOBI-KRITERIUM. For et element $p \in \mathbb{P}_n/k$ og et homogent polynomium $F \in k[x_0, \dots, x_n]^{(d)}$ kan vi ikke umiddelbart definere værdien $F(p) \in \kappa(p)$. Er $L=0$ ligningen for en hyperplan, der ikke går gennem p (s: $p \in (\mathbb{P}_n)_L$), så er $F/L^d \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n, p}$, og vi definerer $F(p)$ m.h.t. L som

$$F(p) = (F/L^d \bmod \mathfrak{m}_p) \in \kappa(p).$$

Idet $x_i := (x_i/L \bmod \mathfrak{m}_p) \in \kappa(p)$, $i=0, \dots, n$ er de homogene koordinater for p m.h.t. L finder vi

$$F(p) = F(x_0, \dots, x_n) \in \kappa(p).$$

For et andet valg: $L'=0$ finder vi

$$(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda (x_0, \dots, x_n) \text{ hvor } \lambda = (L/L' \bmod \mathfrak{m}_p) \neq 0$$

og dermed $F(x'_0, \dots, x'_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$.

Lad nu $X \subseteq \mathbb{P}_n/k$ være et afsluttet delskema bestemt ved homogene polynomier $F_1, \dots, F_g$.

Jacobi-matricen $J_F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ er da en $g \times (n+1)$ -

matrix hvis koefficienter er homogene polynomier. For $p \in \mathbb{P}_n$ har det derfor mening at tale om $\operatorname{rg} J_F(p)$,

SÆTNING. For $p \in X$ gælder $\delta_p(X) = n - \operatorname{rg} J_F(p)$.

Bewis. Vi kan antage, at $p \in U_0 : X_0 \neq 0$. Da er

$$p \in X \cap U_0 \simeq \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_m] / (f_1, \dots, f_q)$$

hvor $f_i(x_1, \dots, x_m) = F_i(1, x_1, \dots, x_m)$, altså $\delta_p(X) = n - \operatorname{rg} J_f(p)$.

Vi skal altså vise, at $\operatorname{rg} J_F(p) = \operatorname{rg} J_f(p)$. Idet $J_F(p)$ defineres m.h.t. hyperplan $X_0 = 0$ finder vi

$$J_F(p) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_m}(1, x_1, \dots, x_m) \end{array} \middle| J_f(p) \right)$$

Er F homogen af grad d gælder som bekendt

$$\sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot x_j = dF$$

Anvendes dette på F_i 'erne og indsættes $(1, x_1, \dots, x_m)$, og bruges at $F_i(1, x_1, \dots, x_m) = 0$ (da $p \in X$), ser vi, at første søjle er en linear-kombination af de øvrige $\blacksquare$

36 OPGAVE. Betragt for to projektive rum $\mathbb{P}_{n/k} = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]$
 $\mathbb{P}_{m/k} = \operatorname{Proj} k[y_0, \dots, y_m]$ produktskemaet
 $\mathbb{P}_n \times_k \mathbb{P}_m$.

Overvej, at bi-homogene polynomier $G_r \in k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]$ definerer et afsluttet delskema $B \subseteq \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m$.

Betragt en base change situation

$$\begin{array}{ccc} B \subseteq \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m & & \\ \searrow \downarrow & \downarrow & \swarrow \\ & \mathbb{P}_m & \xleftarrow{y} \operatorname{Spec} K \end{array}$$

hvor $K (\supseteq k)$ er et legeme og $y: \text{Spec } K \rightarrow \mathbb{P}_{n/k}$ altså er givet ved et sæt $(y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1}$. Vi får da et afsluttet delskema

$$B' := B \times_{\mathbb{P}_m} \text{Spec } K \hookrightarrow (\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_m) \times_{\mathbb{P}_m} \text{Spec } K = \mathbb{P}_{n/K}$$

Overvej, at $B' \subseteq \mathbb{P}_{n/K} = \text{Proj } K[X_0, \dots, X_n]$ er delskemat bestemt ved de homogene polynomier $G_r(X_0, \dots, X_n, y_0, \dots, y_n)$.

37. DEFINITION. Lad $X \subseteq \mathbb{P}_{n/k}$ være et afsluttet delskema af dimension r , givet ved homogene polynomier F_α . Hvis X er equidimensional, siges en hyperplan $H \subseteq \mathbb{P}_{n/k}$ at skære X godt, hvis $X \cap H$ er glat, equidimensional af dimension $r-1$ og hvert $p \in X \cap H$ er glat på X . Under brug af ulighederne

$$\underset{\text{VII}}{\delta_p(X) - 1} \leq \underset{\text{VII}}{\delta_p(X \cap H)} \leq \underset{\text{VII}}{\delta_p(X)}$$

$$r-1 = \dim_p(X) - 1 \leq \dim_p(X \cap H) \leq \dim_p(X) = r$$

ses, at dette indtæffer netop når $\delta_p(X \cap H) \leq r-1$ for alle $p \in X \cap H$. Vi definerer derfor - uden forudsætninger om equidimensionalitet - at $p \in \mathbb{P}_{n/k}$ er et dårligt punkt m.h.t. H , hvis $p \in X \cap H$ og $\delta_p(X \cap H) \geq r$, og vi siger, at H skærer X dårligt (resp. godt) hvis der findes (resp. ikke findes) dårlige punkter m.h.t. H .

Er $\mathbb{P}_n^\vee = \text{Proj } k[Y_0, \dots, Y_n]$, og $ev: K \supseteq k$ et legeme, så definerer hver k -morf $\text{Spec } K \xrightarrow{y} \mathbb{P}_n^\vee$ (bestemt ved $(y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1}$) hyperplanen $H(y) \subseteq \mathbb{P}_{n/K}$ med ligningen $L(X_0, \dots, X_n, y_0, \dots, y_n) = y_0 X_0 + \dots + y_n X_n = 0$.

I $\mathbb{P}_n/k$ kan vi også betragte delskemaet $X_K \subseteq \mathbb{P}_n/k$.
 Er $q \in \mathbb{P}_n^V$, så har vi morfismen $\text{Spec } \kappa(q) \rightarrow \mathbb{P}_n^V$ og får
 defineret hyperplanen $H(q)$ og det afsluttede delskema X_q i $\mathbb{P}_n/\kappa(q)$.

BERTINI'S SÆTNING. Lad $X \subseteq \mathbb{P}_n/k$ være et afsluttet
 delskema af dimension r , bestemt ved homogene
 polynomier F_α , og antag, at der højst for endelig mange
 elementer $p \in X$ gælder $\delta_p(X) > r$. Da er delmængden
 $Q \subseteq \mathbb{P}_n^V$ bestemt ved

$$Q = \{q \in \mathbb{P}_n^V \mid H(q) \text{ skærer } X_q \text{ dårligt}\}$$

afsluttet og $\subset \mathbb{P}_n^V$.

BEMÆRK. Betingelsen $\delta_p(X) > r \Leftrightarrow p \in X \wedge \text{rg } J_F(p) < n-r$.
 kan udtrykkes ved homogene ligninger, nemlig $F_\alpha = 0$ og
 alle $(n-r)$ -minorer i $J_F = 0$. Punkterne hvori den
 gælder udgør altså en afsluttet delmængde af $\mathbb{P}_n$.
 Gælder den kun for endelig mange elementer p , må
 disse altså være afsluttede. Hvis X er equidimensional,
 er forudsætningen altså at X er glat på nær i endelig
 mange (afsluttede punkter).

BEVIS. En hyperplan $H = H(y) \subseteq \mathbb{P}_n/k$ er givet ved en
 ligning

$$L = L(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) = y_0 x_0 + \dots + y_n x_n = 0$$

hvor $(y_0, \dots, y_n) \in k^{n+1}$, og $X \cap H \subseteq \mathbb{P}_n/k$ er bestemt ved
 polynomierne F_α, L . Den tilhørende Jacobimatrix

$$\text{er} \quad \begin{pmatrix} J_F \\ y_0 \quad \dots \quad y_n \end{pmatrix}$$

så vi har: p er dårligt m.h.t. $H \Leftrightarrow p \in X \cap H \wedge \delta_p(X \cap H) \geq r$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_\alpha(p) = 0 \\ L(p) = 0 \\ \text{rg} \begin{pmatrix} J_F(p) \\ y_0 \quad \dots \quad y_n \end{pmatrix} \leq n-r. \end{cases}$$

Idet $\Delta_\beta \in k[X_0, \dots, X_m, Y_0, \dots, Y_m]$ er $(n-r+1)$ -minorerne i matricen $\begin{pmatrix} J_F \\ Y_0 \dots Y_m \end{pmatrix}$, og $L = X_0 Y_0 + \dots + X_m Y_m$ har vi altså

$$p \text{ er dårligt m.h.t. } H(y) \Leftrightarrow \begin{cases} F_\alpha(p) = 0 \\ L(p, y_0, \dots, y_m) = 0 \\ \Delta_\beta(p, y_0, \dots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Mængden B_y af dårlige punkter m.h.t. $H(y)$ udgør altså det afsluttede delskema bestemt ved de homogene polynomier $F_\alpha(X_0, \dots, X_m)$, $L(X_0, \dots, X_m, y)$, $\Delta_\beta(X_0, \dots, X_m, y)$. Videre bemærker vi, at polynomierne Δ_β har grad 0 eller 1 i Y 'erne. Heraf følger hvis $p \in \mathbb{P}_m/k$ er et rationalt punkt (med homogene koordinater $x = (x_0, \dots, x_m) \in k^{n+1}$) at mængden B af hyperplaner $H = H(y) \subseteq \mathbb{P}_m$, der har $p = x$ som dårligt punkt kan opfattes som det lineære (evt tomme) underrum i $\mathbb{P}_m^V/k$ med givet ved $F_\alpha(x) = 0$, $L(x, Y) = 0$, $\Delta_\beta(x, Y) = 0$. Vi finder

$$\dim_x B = \begin{cases} -1 & (B = \emptyset) \text{ hvis } x \notin X \\ n-1 & \delta_x(x) > r \\ n-r-1 & \delta_x(x) = r \end{cases} \quad x \in X.$$

De rationale punkter $y = (y_0, \dots, y_m) \in k^{n+1}$ er nemlig givet ved $F_\alpha(x) = 0$, $L(x, y) = 0$, og $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} J_F(x) \\ y \end{pmatrix} \leq n-r$. Hvis $x \notin X$ er påstanden klar. Hvis $\delta_x(x) > r$, dvs hvis $\operatorname{rg} J_F(x) < n-r$, er den sidste betingelse altid opfyldt. Hvis $\delta_x(x) = r$, dvs hvis $\operatorname{rg} J_F(x) = n-r$, er den sidste betingelse opfyldt for et $(n-r)$ -dimensionalt underrum af $(y_0, \dots, y_m)$ 'er (nemlig for linearkombinationerne af rækkerne i $J_F(x)$) og disse $(y_0, \dots, y_m)$ 'er opfylder $L(x, y_0, \dots, y_m) = 0$, da hver række i $J_F(x)$ opfylder denne betingelse.

Lad nu $B \subseteq \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_m^\vee$ være det afsluttede delskema bestemt ved de bihomogene polynomier $F_\alpha, L, \Delta_\beta$. Via projektionerne får vi morfier $B \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_m^\vee$ og vi kan betragte fibrene $\tau^{-1}(p), p \in \mathbb{P}_m$ og $\sigma^{-1}(q), q \in \mathbb{P}_m^\vee$. Da fibrene er givet ved basechange (Morf, sætning) betragter vi en mere generel basechange $\text{Spec } K \xrightarrow{x} \mathbb{P}_m$ (og $\text{Spec } K \xrightarrow{y} \mathbb{P}_m^\vee$). Af de foregående overvejelser følger: xB er det lineære underrum i $\mathbb{P}_{m/K}^\vee$ bestående af hyperplaner, der har $x \in \mathbb{P}_{m/K}$ som dårligt punkt. Vi har

$$\dim_x B = \begin{cases} -1 & \text{hvis } x \notin X_K \\ n-1 & \delta_x(x) > r \quad \text{d: } \text{rg } J_F(x) < n-r \\ n-r-1 & \delta_x(x) = r \quad \text{d: } \text{rg } J_F(x) = n-r \end{cases}$$

og B_y er det afsluttede delskema i $\mathbb{P}_{m/K}$ bestående af punkter, der er dårlige m.h.t. $H(y)$.

Specielt ses, at $Q = \{q \in \mathbb{P}_m^\vee \mid B_q \neq \emptyset\} = \sigma(B)$. Da $\mathbb{P}_{m/K} \rightarrow \text{Spec } K$ er proper (!) slutter vi, at $\mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_m^\vee \rightarrow \mathbb{P}_m^\vee$ er afsluttet, og dermed at $\sigma(B) \subseteq \mathbb{P}_m^\vee$ er afsluttet.

Videre har vi ${}_p B = \emptyset$ hvis $p \notin X$, $\dim({}_p B) = n-r-1$ hvis $\delta_p(x) = r$, og $\dim({}_p B) = n-1$ hvis $\delta_p(x) > r$, og vi ved(!) at den sidste mulighed kun kan gælde for afsluttede punkter $p \in X$. Heraf følger let, at $\dim B \leq \max \{n-1, \dim X + n-r-1\} = n-1$, (endda =) og dermed at $\dim \sigma(B) \leq n-1$. Heraf følger $B \subset \mathbb{P}_m^\vee$. $\square$

KOROLLAR. Hvis $k = \bar{k}$ findes en hyperplan $H \subseteq \mathbb{P}_{m/k}$ som skærer X pænt

thi at $Q \subset \mathbb{P}_{m/k}$ følger $\{\text{afsluttede } p \in Q\} \subset \{\text{afsluttede } p \in \mathbb{P}_{m/k}\}$.

EKSEMPEL. Forudsætn. er opfyldt hvis X er glat, eller en integritetskurve.

38. For et algebraisk skema X over k kan vi betragte den coherente modul $\Omega_{X/k}$. Vi har $(\Omega_{X/k})_x = \Omega_{\mathcal{O}_x/k}$ og sætter $\Omega_{X/k}(x) := \kappa(x) \otimes_{\mathcal{O}_x} \Omega_x$. Som nævnt gælder

$$\dim_p X \leq \dim_{\kappa(p)} \Omega(p) (=: \operatorname{rg}_p \Omega)$$

og " $=$ " $\Leftrightarrow X$ er glat i p .

SÆTNING. For $p \in X$ er følgende betingelser ækvivalente

- (i) X er glat i p ($\Leftrightarrow \dim_p X = \dim_{\kappa(p)} \Omega(p)$)
- (ii) Der findes en omegn U af p , der er et regulært integritetsskema med $\operatorname{rg}_x \Omega = \dim_p X (= \dim U)$ for $x \in U$
- (iii) $\Omega_{X/k}$ er i en omegn af p fri af rang $= \dim_p X$.

Bewis. (i) $\Rightarrow$ (ii) har vi set (sætning 28). (ii) $\Rightarrow$ (iii) følger af at en endelig frembragt modul over et integritetsområde af konstant rang er lokalt fri. (iii) $\Rightarrow$ (i) er trivielt $\blacksquare$

- 39 SÆTNING. Lad Y/k være glat af dimension n , lad X være et afsluttet delskema med idealknippet $\mathcal{I}$ og betragt den exakte følge

$$(*) \quad \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{X/k} \rightarrow 0$$

For $p \in X$ er følgende betingelser ækvivalente

- (i) X er glat i p
- (ii) $\mathcal{I}$ en omegn af p er $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ en fri $\mathcal{O}_X$ -modul og δ er en split mono ($\Leftrightarrow \mathcal{I}$ en omegn af p er δ en monomorfi og $\Omega_{X/k}$ er fri).

$\mathcal{I}$ bekræftende fald er i en omegn af p $\mathcal{I}$ frembragt af $n - \dim_p X$ elementer og $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ er fri af rang $n - \dim_p X$.

Bewis. Da $\Omega_{Y/k}$ er lokalt fri af rang n er ($\Leftrightarrow \dots$), klart.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sættes $r = \operatorname{rg} \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, har vi $\operatorname{rg}_p \Omega_{X/k} = n - r$ da følgen splittes, og $r = \operatorname{rg}_p \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \stackrel{\text{NAK}}{=} \text{minimale antal } \mathcal{O}_{X,p}\text{-frembringere for } \mathcal{I}_p$ hvoraf $\dim \mathcal{O}_{X,p} \geq \dim \mathcal{O}_{Y,p} - r$ og altså $\dim_p X \geq \dim_p Y - r = n - r = \operatorname{rg}_p \Omega_{X/k}$

Dette medfører, at X er glat i p , da den omvendte ulighed altid gælder.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ved eventuelt at indskrænke Y , kan vi antage, at $Y = \text{Spec } A$ er affin, at $X = \text{Spec } \bar{A}$, $\bar{A} = A/I$, at $\Omega_{Y/k}$ er fri af rang n , at $\Omega_{X/k}$ er fri af rang $d := \dim_p X$ og at $\ker \varphi$ er fri af rang $n-d =: r$.

Følgen (*) svarer nu til

$$(*) \quad I/I^2 \xrightarrow{\delta} A/I \otimes_A \Omega_{A/k} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{\bar{A}/k} \rightarrow 0.$$

Vi kan derfor finde elementer $f_1, \dots, f_r \in I$ så at $\delta(f_1) = 1 \otimes df_1, \dots, \delta(f_r) = 1 \otimes df_r$ er en $\bar{A}$ -basis for $\ker \varphi$. Og elementer $w_1, \dots, w_d \in \Omega_{A/k}$ så at $\bar{w}_1 = \varphi(1 \otimes w_1), \dots, \bar{w}_d = \varphi(1 \otimes w_d)$ er en $\bar{A}$ -basis for $\Omega_{\bar{A}/k}$. Elementerne $1 \otimes df_1, \dots, 1 \otimes df_r, 1 \otimes w_1, \dots, 1 \otimes w_d \in A/I \otimes_A \Omega_{A/k} = \Omega_{A/k} / I \Omega_{A/k}$ er da en A/I -basis.

Da $\Omega_{A/k}$ er en fri A -modul af rang $n = r+d$ kan vi (eventuelt efter yderlige indskrænkning) antage, at $df_1, \dots, df_r, w_1, \dots, w_d$ er en A -basis for $\Omega_{A/k}$ [Vink: skriv disse elementer som en basis $\times$ matrix α , slut, at $\det \alpha \bmod I$ er invertibel i $\bar{A}$, og lokalisér i $\det(\alpha)$]. Lad nu $\tilde{I} = (f_1, \dots, f_r)A \subseteq I$, svarende til $p \in X \subseteq \tilde{X} = \text{Spec } \tilde{A}$, $\tilde{A} = A/\tilde{I}$ og betragt den tilsvarende følge

$$(*) \quad \tilde{I}/\tilde{I}^2 \xrightarrow{\tilde{\delta}} A/\tilde{I} \otimes_A \Omega_{A/k} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \Omega_{\tilde{A}/k} \rightarrow 0$$

Af konstruktionen følger, at $\text{Im } \tilde{\delta} = \ker \tilde{\varphi}$ er fri af rang r , og dermed $\tilde{\delta}$ injektiv (!), og at $\Omega_{\tilde{A}/k}$ er fri af rang d .

Da vi har vist (ii) $\Rightarrow$ (i), er altså $\tilde{X}$ glat i p med $\dim_p \tilde{X} = d$. Af $p \in X \subseteq \tilde{X}$ følger nu, da begge er integritetsskemaer af samme dimension i en omegn af p , at $X = \tilde{X}$ i en omegn af p . Indskrænkes til denne omegn har vi altså $\tilde{I} = I$, hvoraf $\delta = \tilde{\delta}$ er injektiv. Samtidig har vi indset "I bekræftende fald..." $\blacksquare$

40. TOPOLOGISK PROPER AFBILDNING

I kategorien (Top) kaldes morfism $X \xrightarrow{f} S$ proper, hvis den er universelt afsluttet. Ækv. bet.

- (a) f er proper
- (b) Givet filterbasis $\mathcal{F}$ på X og s kontakt for $f(\mathcal{F})$, da findes $x \in X$ så $f(x) = s$, x kontakt for $\mathcal{F}$
- (c) f er afsluttet og $f^{-1}(s)$ er quasikompakt for $s \in S$.

Kor 1 $X \rightarrow *$ er proper $\Leftrightarrow X$ er quasikomp. (iflg (b)).

Kor 2 proper $\Rightarrow$ quasikompakt.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b). Lad X_0 være X 's underliggende mængde og definer topologi på $\tilde{X} = X_0 \cup \{\infty\}$ ved

$W \subseteq \tilde{X}$ er åben $\Leftrightarrow W \not\subseteq \infty$ eller $W \supseteq F \cap f^{-1}(U)$ for passende $F \in \mathcal{F}$, $U \in \mathcal{U}(s)$.

At s er kontakt for $f(\mathcal{F})$ betyder, at $\overline{X_0} = \tilde{X}$. Definer $g: \tilde{X} \rightarrow S$ som udvidelsen af f med $g(\infty) = s$ bliver g kontinuert (da $U \in \mathcal{U}(s)$ $\Rightarrow g^{-1}(U) = \{\infty\} \cup f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(\infty)$) og vi kan betragte

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{q} & X \times \tilde{X} \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xleftarrow{g} & \tilde{X} \end{array}$$

sæt $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times \tilde{X}$.

Da er $p(\Delta) = X_0$, og så altså (a) $p(\bar{\Delta}) = \overline{X_0} = \tilde{X}$. Altså findes $(x_0, \infty) \in \bar{\Delta}$

Da $(x_0, \infty) \in X \times \tilde{X}$, er $f(x_0) = s$, og for $V \in \mathcal{U}(x_0)$, $F \in \mathcal{F}$ er $\{\infty\} \cup V \cap F \in \mathcal{U}(\infty)$ så $V \cap (\{\infty\} \cup F) \cap \Delta \neq \emptyset$. $\therefore V \cap F \neq \emptyset$

(b) $\Rightarrow$ (a). Vis først at (b) bevises ved basechange, dernæst at (b) $\Rightarrow f$ afsluttet

Kor 1 Thi quasikompakt $\Leftrightarrow$ hvert filterbasis har en kontakt.

Kor 2 For $U \subseteq S$ gælder $f^{-1}(U) = X \times U$ proper over U , U proper over $*$ $\Rightarrow f^{-1}(U)$ proper over $*$ $\Rightarrow f^{-1}(U)$ quasikompakt.

(a) $\Rightarrow$ (c) iflg Kor 1. (c) $\Rightarrow$ (b) trivielt

For lokal-kompakte rum: f proper $\Leftrightarrow f^{-1}(\text{Kompakt}) = \text{Kompakt}$.

iflg (c) [idet det er klart, at f kompakt $\Rightarrow f$ er afsluttet i Hausdorff rum]

ALGEBRAISKE KURVER.

0. I det følgende betegner X en irreducibel kurve, der er glat over legemet k . k -skemaet X er altså irreducibelt af dimension 1, og det kan overdekkes af endelig mange affine $U \cong \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$, således at der for Jacobimatrixen $J = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ gælder
- $$(\dim X =) 1 = n - \operatorname{rg} J(x), \quad x \in U.$$

1. a) Topologien. X er af endelig type over k , specielt altså (topologisk) noethersk. For det generiske punkt ξ har vi $\overline{\{\xi\}} = X$. Komplementarmængden
- $$\dot{X} := X \setminus \{\xi\}$$

består netop af de afsluttede punkter (da $\dim X = 1$). De afsluttede delmængder $Z \subset X$ er delmængder af formen

$$Z = \{P_1, \dots, P_s\}, \quad P_i \in Z.$$

(P_i 'erne er de irreducible komponenter af Z). Vi har

$$|\dot{X}| = \infty$$

thi ellers ville $\{\xi\} = X \setminus \dot{X}$ være åben i modstrid med at enhver åben ikke-tom delmængde af X har dimension 1.

- b) Strukturkrippet. Ståene er regulære lokale noetherske ringe og dermed integritetsområder. Det følger, at X er et integritetsskema. I det generiske punkt ξ er

$$\mathcal{O}_{X, \xi} = \kappa(\xi) =: R(X)$$

legemet af rationale funktioner på X . Legemet $R(X)$ er af endelig type over k (s: $R(X) = k(\xi_1, \dots, \xi_n)$) og af transcendergrad 1 over k . For $P \in \dot{X}$ har vi

$$\mathcal{O}_{X, P} \hookrightarrow R(X),$$

og $\mathcal{O}_{X, P}$ er en diskret valuationsring i $R(X)/k$. For restklasselegemet $\kappa(P)$ har vi $|\kappa(P):k| < \infty$.

$U \neq \emptyset$
 For en åben $U \subseteq X$ har vi $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow R(X)$, og

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}, \quad \mathcal{O}_{X,x} = \bigcup_{x \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \quad [\text{også for } x = \infty].$$

Er U affin bliver $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ en Dedekindring, endeligt frembragt over k . med $R(X)$ som troflegeme.
 Hvis X er separert bliver $P \mapsto \mathcal{O}_{X,P}$ en injektiv afbildning

$$X \longrightarrow \{V \mid V \text{ er en d.v.r. i } R(X)/k\}$$

og en $U \subseteq X$ affin, gælder: $P \in U \Leftrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \subseteq \mathcal{O}_{X,P}$. Hvis X er proper over k bliver afbildningen endda bijektiv].

c) Valuationerne. For hvert $P \in X$ betegner vi med $v_P: R(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ($v_P(0) = +\infty$) den til valuationsringen $\mathcal{O}_{X,P} \subseteq R(X)$ hørende valuation. Vi har

$$v_P(1) = 0 \quad \text{for } 1 \in k^* \subseteq R(X)^*$$

$$\text{og} \quad v_P(\varphi\psi) = v_P(\varphi) + v_P(\psi) \quad \varphi, \psi \in R(X)$$

$$v_P(\varphi + \psi) \geq \min\{v_P(\varphi), v_P(\psi)\}$$

med "=" når $v_P(\varphi) \neq v_P(\psi)$.

$$\text{Vi har } \mathcal{O}_{X,P} = \{\varphi \in R(X) \mid v_P(\varphi) \geq 0\} \quad (\text{og } \mathfrak{m}_P = \{\varphi \mid v_P(\varphi) > 0\})$$

$$\text{og dermed } \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{\varphi \mid \forall P \in U: v_P(\varphi) \geq 0\}.$$

Det følger, at der for hvert $\varphi \in R(X)^*$ gælder: $v_P(\varphi) = 0$ for næsten alle P , thi $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ for en passende åben $U \subseteq X$, og så er $v_P(\varphi) \geq 0$ på nær når P tilhører den endelige komplementermængde $X \setminus U$. Tilsvarende er $v_P(\varphi) = -v_P(\varphi^{-1}) \leq 0$ for næsten alle P .

d) Rationale funktioner. Den affine linie $A_k^1 = \text{Spec } k[T]$ er en irreducibel (affin) kurve, glat over k . Den har funktionslegemet $k(T)$. De øvrige punkter på A^1 svarer til de irreducible polynomier i $k[T]$. Specielt svarer elementer $\lambda \in k$ til de rationale punkter på A^1 ($\lambda \leftrightarrow (T - \lambda)$).

Den projektive linie $P_1 = \text{Proj } k[T_0, T_1]$ er en irreducibel glat kurve. Vi har

$$P_1 = U_0 \cup U_1, \quad U_0 \simeq \text{Spec } k[T_1/T_0] \simeq \mathbb{A}^1$$

og udover $U_0 = \mathbb{A}^1$ indeholder P_1 ét element ∞ svarende til det eneste relevante homogene primideal i $k[T_0, T_1]$, som indeholder T_0 , nemlig (T_0) . Punktet ∞ er et rationalt punkt på P_1 : $P_1(k) = \mathbb{A}^1(k) \cup \{\infty\} = k \cup \{\infty\}$.

En rational k-morfi $\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ er enten dominerende, dvs. svarende til en k-indlyring $k(T) = R(\mathbb{A}^1) \hookrightarrow R(X)$, dvs. svarende til et transcendent element $\varphi \in R(X)$. Som bekendt er φ defineret i $P \Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \ni$ et strå for $\mathbb{A}^1$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \ni (\text{en lokalisering af } k[T] \text{ i et primideal})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \supseteq k[\varphi] \simeq k[T]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \ni \varphi \Leftrightarrow v_P(\varphi) \geq 0.$$

Er dette tilfældet bliver $\varphi(P) \in \mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[T]$ primidealit $k[T] \cap \mathcal{M}_P$. Specielt er altså $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{M}_P \Leftrightarrow v_P(\varphi) > 0$. Punkterne $P \in X$, hvor $v_P(\varphi) > 0$ er altså netop nulpunkterne for φ , og nulpunktets orden er $v_P(\varphi) > 0$.

Punkterne P hvor φ ikke er defineret (dvs. hvor $v_P(\varphi) < 0$) er polerne for φ , og $-v_P(\varphi) > 0$ er polens orden.

Eller φ er ikke dominerende, dvs. svarende til et afsluttet punkt $Q \in \mathbb{A}^1$ (dvs. et irreducibelt polynomium $Q \in k[T]$) og en k-indlyring $k[T]/(Q) = k(Q) \hookrightarrow R(X)$, dvs. svarende til et algebraisk element $\varphi \in R(X)$ (med Q som minimalt polynomium). Et sådant φ er specielt helt over $\mathcal{O}_{X,P}$ og dermed $\in \mathcal{O}_{X,P}$ for alle P , dvs. $\varphi \in \bigcap_{P \in X} \mathcal{O}_{X,P} = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, så φ er en overalt defineret "konstant" morfi: $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ med (hvis $\varphi \neq 0$) $v_P(\varphi) = 0$ for alle P .

En rational morfi $\varphi: X \dashrightarrow A^1 \approx \mathbb{A}_0^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ kan også opfattes som en rational morfi $\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{P}_1$ (som ikke er konstant $= \infty$), og som sådan er φ overalt defineret, dvs φ er en morfi $: X \rightarrow \mathbb{P}_1$. Bemærk, at $\varphi^{-1}(\mathbb{A}_0^1) = \{P \mid \varphi \text{ er defineret}\} \cup \{\infty\}$, og at

$$\varphi^{-1}(0) = \{\text{nulpunkter}\}$$

$$\varphi^{-1}(\infty) = \{\text{poler}\}.$$

e) Divisorer. Den frie kommutative gruppe frembragt af punkter $P \in X$ kaldes gruppen af divisorer på X og betegnes $\text{Div}(X)$. En divisor D er altså en endelig sum

$$D = \sum n_P P, \quad n_P = 0 \text{ for næsten alle } P.$$

Oftest skrives $n_P =: v_P(D)$. Divisorerne ordnes partielt ved

$$D \geq E \iff v_P(D) \geq v_P(E) \text{ for alle } P \in X.$$

Det er klart, at max og min af to divisorer eksisterer.

Støtten for en divisor D er

$$\text{Supp } D = \{P \in X \mid v_P(D) \neq 0\}.$$

Den er $\subset X$, afsluttet (og $\neq \emptyset$ når $D \neq 0$). Et $D \geq 0$ skrives ofte $P \in D$ for $P \in \text{Supp } D$.

For hver funktion $\varphi \in R(X)^*$ defineres ved

$$\text{div}(\varphi) = (\varphi) = \sum_P v_P(\varphi) P$$

en principal divisor. Vi har $\text{div}(\varphi) \geq 0 \iff \varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$,

altså $\text{div}(\varphi) = 0 \iff \varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$. Kvotientgruppen

$\text{Div}(X) / \{\text{principale divisorer}\}$ kaldes Picard-gruppen og betegnes $\text{Pic}(X)$. Vi har altså en exact følge: Den tilhørende ækvivalensrelation i $\text{Div}(X)$ kaldes lineær ækvivalens og betegnes $\equiv$.

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* \rightarrow R(X)^* \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0.$$

For $\varphi \in R(X)^*$ defineres nulpunktsdivisoren $(\varphi)_0$ og poldivisoren $(\varphi)_\infty$ ved.

$$(\varphi)_0 = \sum_{v_P(\varphi) > 0} v_P(\varphi) P, \quad (\varphi)_\infty = \sum_{v_P(\varphi) < 0} -v_P(\varphi) P.$$

Vi har $(\varphi) = (\varphi)_0 - (\varphi)_\infty$ og $\text{Supp}(\varphi)_0 = \bar{\varphi}'(0)$, $\text{Supp}(\varphi)_\infty = \bar{\varphi}'(\infty)$.

For en divisor D sætter vi

$$\Gamma(D) = \{\varphi \in R(X) \mid \text{div}(\varphi) + D \geq 0\}$$

Det følger, at $\Gamma(D)$ er et k -undersum i $R(X)$, og at

$$D \leq E \Rightarrow \Gamma(D) \subseteq \Gamma(E). \quad \text{Er } D \equiv D', \quad D' = D + \text{div}(\psi)$$

defineres ved $\varphi \mapsto \varphi\psi$ in k -isomorfi $\Gamma(D') \cong \Gamma(D)$.

Bemærk, at $\Gamma(0) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ og vi for en positiv divisor $D = n_1 P_1 + \dots + n_r P_r$ har $\varphi \in \Gamma(D) \Leftrightarrow \varphi$ er defineret i alle $P \notin \{P_1, \dots, P_r\}$ og φ har i P_i højst en pol af orden n_i .

For en divisor $D = \sum n_p P$ defineres graden som

$$\deg D = \sum_p n_p |\kappa(P) : k| \in \mathbb{Z}.$$

For $D \geq 0$ har vi $\deg D \geq 0$, og " $= 0$ " $\Leftrightarrow D = 0$, " $= 1$ " $\Leftrightarrow$

$D = P$, hvor P er et rationelt punkt ($\circ: k \cong \kappa(P)$).

Det er klart, at $\deg$ er en homomorfi: $\text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

SÆTNING. Lad $\varphi \in R(X)$ være transcendent svarende til den dominerende morfi $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_1$ og betragt fiberen X_0 svarende til punktet $0 \in \mathbb{P}_1$ (hvor $k \cong \kappa(0)$):

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_1 & \longleftarrow & \text{Spec } \kappa(0). \end{array}$$

[Og tilsvarende:

$$\dim_k \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = \deg(\varphi)_\infty]$$

Da er $\dim_k \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = \deg(\varphi)_0.$

Bewis. X_0 er af endelig type over $\kappa(0) = k$, og $\cong \bar{\varphi}'(0) \subset X$,

dvs. en endelig diskret punktmængde. Følgelig er X_0

affin, $X_0 \cong \text{Spec } \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \cong \text{Spec } \bigcap_{P \mapsto 0} \mathcal{O}_{X_0, P}$, og her er

$$\mathcal{O}_{X_0, P} = \mathcal{O}_{X, P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1, 0}} \kappa(0) = \mathcal{O}_{X, P} \otimes_{k[T]} k[T]/(T) = \mathcal{O}_{X, P} / (\varphi).$$

$$\begin{aligned} \text{hvoraf } \dim_k \mathcal{O}_{X_0, P} &= \dim_k \mathcal{O}_{X, P} / (\varphi) = \left(\text{long } \mathcal{O}_{X, P} / (\varphi) \right) / |\kappa(P) : k| \\ &= v_P(\varphi) / |\kappa(P) : k| = \deg(v_P(\varphi)P). \end{aligned}$$

Heraf fås

$$\dim_k \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = \sum_{P \mapsto 0} \dim_k \mathcal{O}_{X_0, P} = \deg \left(\sum_{P \mapsto 0} v_P(\varphi)P \right) = \deg(\varphi)_0 \quad \square$$

2. I det følgende vil vi antage, at den irreducible glatte kurve X yderligere er proper over k , og vi vil kort sige, at X er en god kurve.

① Eksempel. Lad $f(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_0 \in k[x]$ være et polynomium af grad $n+1$ med diskriminant $\neq 0$ dvs med $n+1$ forskellige rødder i $\bar{k}$, og lad

$$F(X, Z) = X^{n+1} + a_n X^n Z + \dots + a_0 Z^{n+1} \in k[X, Z]$$

være "homogeniseringen" af f . Hvis $\text{Char } k \nmid n$, er

$$\text{Proj } k[X, Y, Z] / (Y^n Z - F(X, Z)) \hookrightarrow \mathbb{P}_2$$

en god kurve.

② Eksempel. Lad $a, b \in k$, $ab \neq 0$. Hvis $\text{Char } k \neq 2$, er

$$\text{Proj } k[X, Y, Z] / (aX^2 + bY^2 + Z^2)$$

en god kurve.

SÆTNING. Lad X være en god kurve, da er $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et legeme, endeligdimensionalt over k .

Bewis. jfr delvis "Morfier" Anvendelse 10 $\square$

BEMÆRKNING. I en "pæn" situation er $k \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Dette er f.eks. opfyldt, hvis X har et rationalt punkt, og det er forøvrigt ækvivalent med at den base-changede $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ er en god kurve, thi $\bar{X}$

er proper over $\bar{k}$ (!) equidimensional af dimension 1 (!),
hvoraf det følger, at $\bar{X}$ er glat over $\bar{k}$ og specielt at
stærkene $\mathcal{O}_{\bar{X},x}$ er integritetsskemaer. Heraf slutter vi (!), at

$\bar{X}$ er god $\Leftrightarrow \bar{X}$ er irreducibel $\Leftrightarrow \bar{X}$ er sammen-
hængende $\Leftrightarrow \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ er et legeme $\Leftrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\bar{k}} \bar{k}$ er

et legeme,

og dette er igen ækvivalent med at $\bar{k} \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (!).

Kurven X siges da at være geometrisk god.

3. SÆTNING. Lad X være en god kurve, og lad $\varphi \in R(X)$
være transcendent, da er

$$\deg(\varphi)_0 = \deg(\varphi)_\infty = |R(X) : k(\varphi)|.$$

Bewis. "Morf", sætn. 27 i forbindelse med udregningen i
sætning 1e). ▮

Sætningen udsiger, at talt med passende multiplaciteter
gælder for en dominerende morfi $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_1$, at

$$\# \{ \text{mulpunkter} \} = \# \{ \text{poler} \}.$$

KOROLLAR. For $\varphi \in R(X)^*$ gælder $\deg(\text{div } \varphi) = 0$. For
linært ækvivalente divisorer $D \equiv D'$ gælder

$$\deg D = \deg D'.$$

Bewis. Er φ transcendent følger påstanden af sætningen,
og er φ algebraisk, har vi $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^*$, og dermed
 $\text{div}(\varphi) = 0$. ▮

Vi kan altså opfatte $\deg$ som en homomorfi $\deg: \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, og
sætte $\text{Pic}_0(X) = \ker \deg$.

4. Lad $\varphi \in R(X)$ være transcendent og betragt den endelige
flade morfi $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}_1 = U_0 \cup U_1$, jfr. "Morf", sætn. 27.

Vi har da $U := \varphi^{-1}(U_0) = X \setminus \varphi^{-1}(\infty)$, og

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = (\text{hele afslutning af } k[\varphi] \text{ i } R(X)).$$

LEMMA. Lad X være en god kurve, lad $\varphi \in R(X)$ være transcendent, og lad $Z = (\varphi)_\infty$ være poldivisoren for φ . Da findes en konstant, så at vi for alle $r \in \mathbb{N}$ har

$$\dim_k \Gamma(rZ) \geq \deg(rZ) - \text{konst.}$$

BEVIS. Vi har $U = X \setminus \text{Supp } Z$. Hvis $\chi \in R(X)$ er hel over $k[\varphi]$, er $\chi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ så for $P \in U$ har vi $v_P(\chi) \geq 0 = v_P(Z)$. Da der kun er endelig mange punkter i $X \setminus U = \text{Supp}(Z)$, findes et τ_0 , så at $\text{div}(\chi) + \tau_0 Z \geq 0$. Lad nu $\chi_1, \dots, \chi_n$ være en $k(\varphi)$ -basis for $R(X)$, altså $n = |R(X) : k(\varphi)|$. Multipliceres med passende "nævner", kan vi antage, at $\chi_1, \dots, \chi_n$ er hele over $k[\varphi]$ og dermed at der findes $\tau_1, \dots, \tau_n$ så at $\text{div}(\chi_i) + \tau_i Z \geq 0$, og så er

$$\text{div}(\varphi^v \chi_i) + rZ \geq 0 \quad \text{når} \quad 0 \leq v \leq r - \tau_i$$

Når $r \gg 0$ er de elementerne $\varphi^v \chi_i$, $i=1, \dots, n$, $0 \leq v \leq r - \tau_i$ altså $\sum_{i=1}^n (r - \tau_i + 1) = rn - \sum_{i=1}^n (\tau_i - 1)$ lineært uafhængige elementer i $\Gamma(rZ)$. Da $n = |R(X) : k(\varphi)| = \deg Z$ ifølge sætning 3 følger påstanden $\blacksquare$

BEMÆRKNING. Uden brug af sætning 3 udviser lemmaet, at $\dim_k \Gamma(rZ) \geq r |R(X) : k(\varphi)| - \text{konst.}$ Som vi ovenlidt skal se, er det en elementær følge af sætning 2, at $\dim_k \Gamma(rZ) \leq r \deg Z + \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Ved grænsovergang $r \rightarrow \infty$ sluttas altså at $|R(X) : k(\varphi)| \leq \deg Z$. Da man ved "valuations-teoretiske metoder" kan vise den omvendte ulighed, giver dette altså et alternativt bevis for sætning 3.

5. RIEMANN'S HALVDEL AF RR. (=Riemann-Roch'sætning)

Lad X være en god kurve. Da er $\Gamma(D) = 0$ når $\deg D < 0$, og for en vilkårlig divisor D er $\Gamma(D)$ end-

lig dimensional over k . Funktionen

$$D \mapsto \bar{\phi}(D) = \deg D - \dim_k \Gamma(D) + 1$$

er voksende og ^{opad} ~~begænset~~ ^{og opfylder} $D \equiv D' \Rightarrow \bar{\phi}(D) = \bar{\phi}(D')$.
ved $g := \max_{r \in \mathbb{N}} \bar{\phi}(+Z)$, $Z = (\varphi)_{\infty}$.

BEVIS. Er $\varphi \in \Gamma(D)$, $\varphi \neq 0$, er $0 \leq D + \text{div}(\varphi)$, altså ifølge korollar 3: $0 \leq \deg(D + \text{div}(\varphi)) = \deg D$.
Lad nu D være en vilkårlig divisor, og lad $P \in X$, da er $\Gamma(D) \subseteq \Gamma(D+P)$. I det vi for $n \in \mathbb{Z}$ sætter

$$\mathcal{M}_P^n = \{\varphi \in R(X) \mid v_P(\varphi) \geq n\}$$

får vi specielt for $n = -v_P(D) - 1$, at $\Gamma(D+P) \subseteq \mathcal{M}_P^n$, og vi har klart en eksakt følge

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D+P) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_P^n / \mathcal{M}_P^{n+1},$$

og her er $\mathcal{M}_P^n / \mathcal{M}_P^{n+1} \simeq \mathcal{O}_P / \mathcal{M}_P = \kappa(P)$ endelig dimensional over k . Følgelig er $\Gamma(D)$ endelig dimensional over k netop hvis $\Gamma(D+P)$ er det. Da en vilkårlig divisor D kan fås ud fra 0 i endelig mange skridt ved at addere eller subtrahere punkter $P \in X$, og da $\Gamma(0)$ er endelig-dimensional, ifølge sætning 2 slutter vi, at $\Gamma(D)$ er endelig-dimensional. Af den eksakte følge (*) slutter vi nu, at

$$\begin{aligned} \dim \Gamma(D+P) &\leq \dim \Gamma(D) + |\kappa(P):k| \\ &= \dim \Gamma(D) + \deg(D+P) - \deg D, \end{aligned}$$

altså at $\bar{\phi}(D) \leq \bar{\phi}(D+P)$. Altså er $\bar{\phi}$ voksende.

Når $D \equiv D'$, er $\deg D = \deg D'$ og da $\Gamma(D) \simeq \Gamma(D')$ er også $\dim_k \Gamma(D) = \dim_k \Gamma(D')$. Følgelig er $\bar{\phi}(D) = \bar{\phi}(D')$.

For endelig at vise, at $\bar{\phi}$ er begænset anvendes lemma

4. For $Z = (\varphi)_{\infty}$ kan vi definere g ved

$$g = \max_{r \in \mathbb{N}} \bar{\phi}(+Z) (< \infty).$$

For at vise, at $\bar{\phi}(D) \leq g$ for en given divisor D er det nok til D at bestemme $\psi \in R(X)^*$ og $r \in \mathbb{N}$, så at

$$D - \operatorname{div}(\psi) \leq rZ.$$

For hvert af de endelig mange punkter P_i , $i=1, \dots, s$ hvor $v_{P_i}(D) > 0$, $P_i \notin Z = \varphi^{-1}(\infty)$ er $\mathcal{O}_{X, P_i}$ en lokalisering af $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ (i et primideal), så der findes i $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et element ψ_i med $v_{P_i}(\psi_i) = 1$. Da $\psi_i \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ har vi $v_P(\psi_i) \geq 0$ for alle $P \in U$, og følgelig er

$$v_P \left(D - \operatorname{div} \left(\prod_{i=1}^s \psi_i^{v_{P_i}(D)} \right) \right) \leq 0 \text{ for } P \in U = X \setminus Z.$$

Når $r \gg 0$ er altså $D - \operatorname{div}(\prod \psi_i^{v_{P_i}(D)}) \leq rZ$ $\square$

Undervys så vi

LEMMA. I den exacte følge

$$(*) \quad 0 \rightarrow \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D+P) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_P^n / \mathcal{M}_P^{n+1},$$

hvor $n = -v_P(D) - 1$, er α surjektiv, hvis og kun hvis "=" gælder i uligheden $\bar{\phi}(D) \leq \bar{\phi}(D+P)$.

DEFINITION. Tallet $g = \max_D \bar{\phi}(D) = \max_D [\deg D - \dim \Gamma(D) + 1]$.

Kaldes genus af den gode kurve X .

I Riemann's ulighed

$$\dim_k \Gamma(D) \geq \deg D + 1 - g$$

gælder altså "=" for visse divisorer, nemlig for divisorer af formen rZ , $r \gg 0$, $Z = (\varphi)_\infty$ med $\varphi \in R(X)$ transcendent.

For $D=0$ siger uligheden, at $g \geq 1 - \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. For en geometrisk god kurve X ($\alpha: k \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$) er altså $g \geq 0$.

6. Eksempler. ① $X = \mathbb{P}_1$ har genus $g = 0$. Betragt nemlig $T \in k(T) = R(\mathbb{P}_1)$ har vi $(T)_\infty = \{\infty\}$, og for $U = \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$ har vi $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = k[T]$, og for $\psi \in k[T]$ finder vi

$$v_\infty(\psi) = -\deg \psi.$$

Følgelig er $1, T, \dots, T^r$ en k -basis for $\Gamma(r(\infty))$, så

$$\dim_k \Gamma(r(\infty)) = r + 1 = r \deg(\infty) + 1$$

for $r \geq 0$, hvoraf påstanden følger ved at betragte $r \gg 0$.

① Kurven $C = \text{Proj } k[x, y, z] / (y^n z - F(x, z))$

fra eksempel 2 ① er geometrisk god, og udtrykt ved graden $d = n+1$ af det homogene polynomium har den genus

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \text{Spec } k[\xi, \eta]$$

Bewis. Vi har $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2$ hvor $C_0 = \text{Spec } k[x, y] / (y^n - f(x))$ og udover U indeholder C kun et punkt, nemlig det rationale punkt $*$ $= [0, 1, 0]$. Vi har $R(C) = k(\xi, \eta) = k(\xi)[\eta]$, og da $y^n - f(x)$ er irreducibel, er $|R(C) : k(\xi)| = n$. og $1, \eta, \dots, \eta^{n-1}$ er en $k(\xi)$ -basis for $R(C)$. Da $\xi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C)$, er $v_P(\xi) \geq 0$ for $P \in U$, altså $(\xi)_\infty =: v_*(\xi) *$. Af $\deg(\xi)_\infty = n$ følger nu, at $v_*(\xi) = -n$, og af $\eta^n = f(\xi) = \xi^{n+1} + \dots$ slutter, at $v_*(\eta) = -n-1$.

Nu er $\Gamma(r*) = \{\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C) \mid v_*(\varphi) + r \geq 0\}$.

Et element $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C) = k[\xi, \eta]$ kan entydigt skrives

$$\varphi = g_0(\xi) + g_1(\xi)\eta + \dots + g_{n-1}(\xi)\eta^{n-1}$$

hvor $g_0, \dots, g_n$ er polynomier af grad $d_0, \dots, d_{n-1}$. Vi har

$$v_*(\varphi) \geq \min_i \{v_*(g_i(\xi)\eta^i)\} = \min_{0 \leq i \leq n-1} \{-nd_i + (-n-1)i\}$$

og her gælder endda "=", da de enkelte led har indbyrdes forskellig valuation. Altså

$$\varphi \in \Gamma(r*) \iff -nd_i + (-n-1)i + r \geq 0 \text{ for } i = 0, \dots, n-1.$$

Elementerne $\xi^j \eta^i$ hvor $0 \leq j, 0 \leq i \leq n-1$, $nj + (n+1)i \leq r$

er således en k -basis for $\Gamma(r*)$, og vi får

$$\dim_k \Gamma(r*) = \sum_{i=0}^{n-1} \# \{j \mid 0 \leq j \leq \frac{r-i}{n} - i\}$$

$$\begin{aligned} (r = ns + r_0, 0 \leq r_0 \leq n-1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \# \{j \mid 0 \leq j \leq s-i + \frac{r_0-i}{n}\} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq r_0} (s-i+1) + \sum_{r_0 < i \leq n-1} (s-i) = r_0 + 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (s-i) \\ &= r + 1 - \frac{n(n-1)}{2}, \quad r \geq n(n-1); \end{aligned}$$

for $r \gg 0$ sluttet $g = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad \square$

② Kurven $C = \text{Proj } k[x, y, z] / (ax^2 + by^2 + z^2)$ er geometrisk god af genus $g=0$.

Idet $C \supseteq U = \text{Spec } k[\xi, \eta] = \text{Spec } k[x, y] / (a\xi^2 + b\eta^2 + 1)$, har

vi $R(C) = k(\xi, \eta)$ og $|R(C) : k(\xi)| = 2$

Enten har C et rationalt punkt. Vi kan antage, at det har formen $[x, y, 1]$, hvor $x, y \in k$ altså opfylder $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, og så er i $R(C) = k(\xi, \eta)$:

$$0 = 1 + a[\xi - x + x]^2 + b[\eta - y + y]^2 = a(\xi - x)^2 + 2ax(\xi - x) + b(\eta - y)^2 + 2by(\eta - y),$$

hvoraf med $\tau = \frac{\eta - y}{\xi - x} \in R(C)$:

$$b\tau^2 + 2by\tau \frac{1}{\xi - x} + 2ax \frac{1}{\xi - x} + a = 0$$

altså $\xi = x - 2 \frac{ax + by\tau}{a + b\tau^2} \in k(\tau)$, $\eta = y + (\xi - x)\tau \in k(\tau)$.

Vi slutter, at $R(C) = k(\tau) \simeq R(\mathbb{P}^1)$ og dermed (!) at $C \simeq \mathbb{P}^1$

og specielt, at $g=0$.

Eller C har ingen rationale punkter. I dette tilfælde består $C \setminus U$ af et punkt $*$, med $|k(*) : k| = 2$. Vi har $(\xi)_\infty = -v_*(\xi) *$

og $\deg(\xi)_\infty = |R(C) : k(\xi)| = 2$, hvoraf $v_*(\xi) = -1$ og dermed

$v_*(\eta) = -1$. Slut nu, at $1, \xi, \dots, \xi^r, \eta, \xi\eta, \dots, \xi^{r-1}\eta$ er en k -basis for $\Gamma(r*)$, altså $\dim \Gamma(r*) = 2r + 1 = r \deg(*) + 1$, hvoraf $g=0$.

7. For at forstærke Riemann's halvdel af RR sætter vi for den gode kurve X med funktionslegemet $R := R(X)$

$$A = \{ \tau = (\tau_P) \in \prod_P R \mid v_P(\tau_P) \geq 0 \text{ for næsten alle } P \}$$

og for en divisor D på X :

$$A(D) = \{ \tau = (\tau_P) \mid v_P(\tau_P) + v_P(D) \geq 0 \}.$$

Det er klart, at A er en delring af $\prod_P R$, og at R kan indlejres i A via "diagonalen" $\varphi \mapsto (\dots, \varphi, \varphi, \dots)$. Følgelig er A en R -algebra. Vi har: $A(D) \subseteq A$ er et k -under rum, og klart

$$\# \quad \psi \in \Gamma(D) \wedge \tau \in A(E) \Rightarrow \psi \tau \in A(D+E).$$

Vi kan også indlejre $R \hookrightarrow A$ via den P' -te koordinat:

$$i_P(\varphi) = (\dots, 0, \underset{P}{\varphi}, 0, 0, \dots)$$

Billedet herved betegnes R_P . Bemærk, at $R_P \cap A(D) = \mathfrak{m}_P^{-v_P(D)}$ (over k).

For hver divisor D kan vi betragte kvotienten:

$$I(D) = A / (R + A(D)),$$

som er et vektorrum over k . Er $D \leq E$ får vi $A(D) \subseteq A(E)$ og dermed en surjektiv homomorfi $I(D) \rightarrow I(E)$.

SÆTNING. Lad D være en divisor på X , lad $P \in X$ og sæt $n = -v_P(D) - 1$. Den exacte følge 5(*) kan forlænges til en exact følge

$$0 \rightarrow \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D+P) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{m}_P^n / \mathfrak{m}_P^{n+1} \xrightarrow{\beta} I(D) \xrightarrow{\gamma} I(D+P) \rightarrow 0$$

BEVIS. γ er den surjektive homomorfi givet ved at $D \leq D+P$ og β er homomorfien induceret af

$$\mathfrak{m}_P^n \hookrightarrow R \xrightarrow{i_P} A \rightarrow I(D).$$

Det er klart, at følgen er en nul-følge. Hvis $\beta(\varphi) = 0$, er $i_P(\varphi) \in R + A(D)$, så der findes $\psi \in R$ med

$$v_P(\psi - \varphi) \geq -v_P(D) = n+1.$$

$$v_Q(\psi) + v_Q(D) \geq 0 \quad Q \neq P,$$

Men så er $v_p(\psi) \geq \inf \{v_p(\varphi), v_p(\psi - \varphi)\} \geq n = -v_p(D+P)$,
 så $\psi \in \Gamma(D+P)$ og $\alpha(\psi) = \psi = \varphi$.

Hvis $\gamma(\tau) = 0$, har vi $\tau = \psi + s$, hvor $\psi \in R$
 og $s \in A(D+P)$. Sættis $s_p = \psi$ har vi altså $v_p(\psi)$
 $+ v_p(D+P) \geq 0$ dvs. $\psi \in M_p^n$ og $s - i_p(\psi) \in A(D)$.

Følgelig er $\tau = \psi + s - i_p(\psi) + i_p(\psi) = i_p(\psi) = \beta(\psi) \quad \square$

KOROLLAR. Med betegnelserne fra 5 gælder:

$\bar{\phi}(D) = \bar{\phi}(D+P) \Leftrightarrow \alpha$ er surjektiv $\Leftrightarrow \gamma$ er injektiv.

Bewis. Lemma 5 og exactheden $\square$

LEMMA. Lad D være en divisor, så at $\bar{\phi}(D) = g^V$, da
 er $I(D) = 0$. og sådanne findes!

Bewis. Indirekte: Antag, at $I(D) \neq 0$, altså at
 $A(D) + R \subset A$. For et givet $\tau \in A$ har vi $v_Q(\tau_Q) \geq 0$
 og $v_Q(D) = 0$ på nær for endelig mange punkter $P_1, \dots, P_s$.
 Følgelig er $\tau - i_{P_1}(\tau_{P_1}) - \dots - i_{P_s}(\tau_{P_s}) \in A(D)$. Der fin-
 des derfor et $Q \in X$ og et $\varphi \in R$, så at

$$\tau = i_p(\varphi) \notin R + A(D).$$

For $k \gg 0$ har vi $v_p(\varphi) + v_p(D) + k \geq 0$, altså

$$\tau = i_p(\varphi) \in A(D+kP) \subseteq R + A(D+kP)$$

Elementet $\tau \neq 0$ i $I(D)$ afbildes altså i $0 \in I(D+kP)$
 ved den sammensatte afbildning

$$I(D) \rightarrow I(D+P) \rightarrow I(D+2P) \rightarrow \dots \rightarrow I(D+kP)$$

i modstrid med at maksimaliteten af D sikrer, at
 $\bar{\phi}(D) = \bar{\phi}(D+P) = \dots = \bar{\phi}(D+kP)$ og dermed ifølge korol-
 laret, at disse afbildninger er injektive $\square$

TILFØJELSE TIL RIEMANN'S HALVDEL AF RR.

For enhver divisor D er $\dim_k I(D) < \infty$, og

$$\dim_k \Gamma(D) = \deg D + \dim_k I(D) + 1 - g.$$

BEVIS. Af den exacte følge fremgår, at $I(D)$ er endelig dimensional netop når $I(D+P)$ er det. Da der findes divisorer med $\dim I(D) < \infty$ [nemlig med $I(D)=0$, lemma'et], og da enhver divisor kan fås ud fra en sådan i endelig mange skridt ved at addere eller subtrahere punkter P følger endeligdimensionaliteten for enhver divisor.

Ligningen udsiger, at $\ell(D) + \dim_k I(D) = g$.

Af den eksakte følge får vi

$$\ell(D) + \dim_k I(D) = \ell(D+P) + \dim_k I(D+P)$$

hvoraf

$$\ell(D) + \dim_k I(D) = \text{konst.}$$

Af lemmaet følger nu, at $\text{konst} = g$ ■

8. For yderligere at udnytte endeligdimensionaliteten betragter vi vektorrummet J af linearformer

$$\omega: A \rightarrow k, \text{ som forsvinder på } R \text{ og på } A(E)$$

i det følgende kaldet former. for en passende divisor E ,
Sættis for en divisor E

$$J(E) = I(E)^\vee = (A/R + A(E))^\vee,$$

$$\text{har vi } J(E) \subseteq J, \quad J = \bigcup_E J(E).$$

For en linearform $\omega: A \rightarrow k$ og en funktion $\varphi \in R$ betegner vi med $\omega\varphi$ linearformen $r \mapsto \omega(\varphi r)$.

Af 7(#) følger

$$\varphi \in \Gamma(D) \wedge \omega \in J(D+E) \Rightarrow \omega\varphi \in J(E).$$

eller

$$\# \varphi \in \Gamma(D) \wedge \omega \in J(E) \Rightarrow \omega\varphi \in J(E-D).$$

Specielt følger det, at J ved kompositionen $(\varphi, \omega) \mapsto \omega\varphi$ organiseres som vektorrum over $\mathbb{A}. R$.

LEMMA. Hvis $J(E) \neq 0$, så er $\deg E \leq 2g-2$. Vektorrummet J er 1-dimensionalt over legemet R .

BEVIS. Lad $\omega \in J(E)$, $\omega \neq 0$. Afbildningen $\varphi \mapsto \omega\varphi$ er da en injektiv k -linær afbildning: $R \rightarrow J$. Ifølge (#) afbilder den for enhver divisor D : $\Gamma(D) \rightarrow J(E-D)$, så

$$\dim_k \Gamma(D) \leq \dim_k J(E-D) = \dim_k I(E-D).$$

og her er $\dim \Gamma(D) \geq \deg D + 1 - g$

og $\dim I(E-D) = \dim \Gamma(E-D) - \deg(E-D) - 1 + g.$

og $\dim \Gamma(E-D) = 0$ når D vælges med $\deg D > \deg E$.

Således fås $\deg E \leq 2g - 2$.

Vi har $J \neq 0$, thi af $\dim J(E) = \dim I(E) = \dim \Gamma(E) - \deg E - 1 + g$ fås når $\deg E$ er negativ (og $< g-1$), at $\dim J(E) > 0$, og dermed at $J \supseteq J(E) \neq 0$.

Og var $\dim_R J > 1$ fandtes $\omega, \tau \in J$, lineært uafhængige over R . Vi kan antage, at $\omega, \tau \in J(E)$ [thi $J(E) + J(E') \subseteq J(\min\{E, E'\})$], og får således for enhver divisor D ved $(\varphi, \psi) \mapsto \omega\varphi + \tau\psi$ defineret en injektiv afbildning: $\Gamma(D) \oplus \Gamma(D) \rightarrow J(E-D)$.

For $\deg D > \deg E$ fås

$$\begin{aligned} -\deg(E-D) - 1 + g &= \dim J(E-D) \\ &\geq 2 \dim \Gamma(D) \\ &\geq 2 [\deg D + 1 - g], \end{aligned}$$

modstrid når $\deg D \gg 0$. $\blacksquare$

KOROLLAR. Når $\deg D > 2g - 2$ gælder $\dim \Gamma(D) = \deg D + 1 - g$, thi så er $I(D) = 0$ ifølge lemmaet.

9. SÆTNING/DEFINITION.

Til hver form $w \neq 0$ i J findes en største divisor K så at w forsvinder på $A(K)$. Den kaldes den kanoniske divisor hørende til w , og betegnes $K = \text{div}(w)$. De kanoniske divisorer udgør en ækvivalensklasse (m.h.t. $\equiv$), den kanoniske klasse. For en kanonisk divisor $K = \text{div}(w)$ defineres ved $\varphi \mapsto w\varphi$ en isomorfi $\Gamma(D) \xrightarrow{\sim} J(K-D)$.

BEVIS. At $w \neq 0$ forsvinder på $A(E)$ betyder, at $w \in J(E)$. Sådanne E 'er findes, og da $w \neq 0$ har de ifølge lemma 8 $\deg E \leq 2g-2$. Det er derfor nok at vise, at hvis $w = 0$ på $A(E)$ og på $A(E')$, så er også $w = 0$ på $A(\max\{E, E'\})$, og det følger af at $A(\max\{E, E'\}) = A(E) + A(E')$, som let eftervises. Heraf følger eksistensen af $K = \text{div}(w)$.

Da de øvrige former $\tau \in J$, $\tau \neq 0$ kan skrives $\tau = w\varphi$, $\varphi \in R^*$ ifølge lemma 8, og da vi øjensynlig har

$$\text{div}(w\varphi) = \text{div}(w) + \text{div}(\varphi),$$

får vi den anden påstand.

For endelig at vise den sidste påstand betragter vi $\tau \in J(K-D)$. Vi kan skrive $\tau = w\psi$, $\psi \in R$. Da $\tau = w\psi = 0$ på $A(K-D)$ vil $w = 0$ på $A(K-D - \text{div}(\psi))$ [thi $\tau \in A(K-D - \text{div}(\psi)) \Rightarrow \psi^{-1}\tau \in A(K-D)$, og så er $w(\tau) = (w\psi)(\psi^{-1}\tau) = 0$], og folgelig er $K-D - \text{div}(\psi) \leq \text{div}(w) = K$, hvorefter $D + \text{div}(\psi) \geq 0$, og altså $\psi \in \Gamma(D)$. ▮

Erstattes D med $K-D$ får vi en isomorfi

$$\Gamma(K-D) \xrightarrow{\sim} J(D),$$

og altså specielt $\dim I(D) = \dim J(D) = \dim \Gamma(K-D)$.

Indsættes i TILFØJELSE 7 fås

RIEMANN-ROCH'S SÆTNING. Lad K være en kanonisk divisor på den gode kurve X . Da gælder for hver divisor D på X , at

$$\dim_K \Gamma(D) = \deg D + \dim_K \Gamma(K-D) + 1 - g$$

(og $\Gamma(D) = 0$ når $\deg D < 0$).

KOROLLAR. For en kanonisk divisor K gælder

$$\dim_k \Gamma(K) = g + [\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1], \quad \deg K = 2g - 2.$$

BEVIS. Indsæt $D = 0$ og $D = K$ i ligningen. $\square$

Bemærk, at vi genfinder korollar 8, thi når $\deg D > 2g - 2$, er $\deg(K - D) < 0$ og dermed $\Gamma(K - D) = 0$.

10. For divisorklasser $\mathcal{C}$ på X , dvs elementer $\mathcal{C} \in \text{Pic}(X)$, er

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{C}) &:= \dim_k \Gamma(D) \\ \deg(\mathcal{C}) &:= \deg D \end{aligned} \quad , \text{ når } D \in \text{Div}(X) \text{ repræsenterer } \mathcal{C},$$

veldefinerede og RR udsiger for den kanoniske klasse $K \in \text{Pic}(X)$, at

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{C}) &= \deg \mathcal{C} + \ell(K - \mathcal{C}) + 1 - g \\ \ell(\mathcal{C}) &= 0 \quad \text{når } \deg \mathcal{C} < 0. \end{aligned}$$

11. Genus 0. Hvis $g(X) = 0$, har vi $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = 1$ ($\because X$ er geometrisk god), thi da $\deg K = 2g - 2 < 0$, er $0 = \dim \Gamma(K) = g + [\dim \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1] = \dim \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1$.

Vider gælder

$$\left. \begin{aligned} g(X) = 0 \text{ og} \\ X \text{ har et rationelt punkt} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow X \simeq \mathbb{P}_1^1 \quad (\Leftrightarrow R(X) \simeq k(T))$$

thi " $\Leftarrow$ " har vi set i eksempel 6 $\odot$, og " $\Rightarrow$ " ses således:

Er P et rationelt punkt, så er $\deg P = 1 > 2g - 2$, altså $\dim \Gamma(P) = 1 + 1 - g = 2 > 1 = \dim \Gamma(0)$. At $\varphi \in \Gamma(P) \setminus \Gamma(0)$ betyder, at $(\varphi)_\infty = P$, og så er $|R(X) : k(\varphi)| = \deg(\varphi)_\infty = 1$, dvs $R(X) = k(\varphi) \simeq k(T)$, hvorefter $X \simeq \mathbb{P}_1^1$.

Er X vilkårlig af genus $g = 0$, har vi

$$\dim \Gamma(D) = \deg D + 1, \quad \text{når } \deg D > 2g - 2 = -2,$$

altså specielt $\Gamma(D) \neq 0$ når $\deg D \geq 0$. Enhver sådan

divisor er altså $\equiv$ en divisor ≥ 0 , [nemlig $D \equiv D + \text{div}(\varphi) \geq 0$

når $\varphi \in \Gamma(D)$, $\varphi \neq 0$].

Da $\deg D' = 0$ $\wedge D' \geq 0 \Rightarrow D' = 0$, slutter vi specielt, at enhver divisor af grad 0 er principal ($\because \text{Pic}_0(X) = (0)$), og altså

$$D \equiv D' \Leftrightarrow \deg D = \deg D'.$$

For en kanonisk divisor K har vi $\deg(-K) = -(2g-2) = 2 > 0$; Vi kan derfor antage, at $-K$ er positiv (og af grad 2),

$$\therefore -K = \begin{cases} P+Q & |\kappa(P):k| = |\kappa(Q):k| = 1 \quad (\text{gennem } P=Q) \\ P & |\kappa(P):k| = 2. \end{cases} \text{ eller}$$

Specielt ses, at hvis X er uden rationale punkter, så findes i hvert fald et punkt $P \in X$ med $|\kappa(P):k| = 2$. Lad nu P være et sådant punkt, og betragt vektorrummene $\Gamma(0) \subset \Gamma(P) \subset \Gamma(2P)$ af dimension 1, 3, 5. Vi kan vælge $\xi, \eta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma(0)$, så at $1, \xi, \eta$ er en k -basis for $\Gamma(P)$. Da $\xi, \eta \in \Gamma(P) \setminus \Gamma(0)$, har vi $(\xi)_\infty = (\eta)_\infty = P$. Nu har vi $\xi^2, \xi\eta, \eta^2 \in \Gamma(2P) \setminus \Gamma(P)$, så da $\dim_k \Gamma(2P) = 5$ findes en ikke-triviel relation

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\xi\eta + d\xi + e\eta + f = 0, \quad a, \dots, f \in k.$$

Her er mindst 2 af elementerne $a, b, c \neq 0$ (!). Vi kan antage, at $a \neq 0$. Hvis $\text{Char } k \neq 2$ kan vi bortskaffe produktleddet [$\because$ erstatte ξ med $\xi + \frac{c}{2a}\eta$] og dernæst 1^{ste} gradsleddene. Nu er $f \neq 0$, thi ellers var $a\xi^2 + b\eta^2 = 0$, hvoraf $(\xi/\eta)^2 + b/a = 0$, men så ville ξ/η være algebraisk over k , og dermed element i $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$. Vi kan derfor antage, at $f = 1$, altså at

$$a\xi^2 + b\eta^2 + 1 = 0, \quad a, b \neq 0.$$

Betragt nu den oplagte ^{subjektive} homomorfi: $k[X][Y]/(bY^2 + aX^2 + 1) \rightarrow$

$$k[X, Y]/(aX^2 + bY^2 + 1) \rightarrow k[\xi, \eta] \subseteq R.$$

Da $k[\xi, \eta]$ er et integritetsområde af $\text{trdeg} = 1$ og dermed af $\dim = 1$, er homomorfien en isomorfi, d.v.s. $1, \eta$ er en $k[\xi]$ -basis for $k[\xi, \eta]$, d.v.s. elementerne

$$1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \dots$$

er uafhængige over k . De $2r+1$ elementer

$$1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \dots, \xi^r, \xi^{r-1}\eta$$

tilhører $\Gamma(rP)$ og må derfor af dimensionsgrunde frem-

bringe $\Gamma(+P)$. Vi har derfor $k[\xi, \eta] = \bigcup_r \Gamma(+P) = \Gamma(X \setminus \{P\}, \mathcal{O}_X)$.
 Da $U = X \setminus \{P\} = X \setminus \text{Supp}(\xi)_\infty$ er affin(!), er altså $R(X) =$ brøklegemet for $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, dvs.

$$R(X) = k(\xi, \eta). \quad a\xi^2 + b\eta^2 + 1 = 0$$

Vi har derfor $R(X) \simeq R(C)$, hvor $C = \text{Proj } k[X, Y, Z] / (aX^2 + bY^2 + Z^2)$,
 og heraf følger $X \simeq C(!)$. Alt i alt fås således:
 Hvis $\text{Char } k \neq 2$ gælder

$$g(X) = 0 \iff X \simeq \text{Proj } k[X, Y, Z] / (aX^2 + bY^2 + Z^2).$$

12 OPGAVE. Lad $k \hookrightarrow k'$ være legemer og lad X være et skema, så at $k \hookrightarrow k' \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, da kan X opfattes som k - og som k' -skema. Vis, at hvis X er glat over k , så er X også glat over k' (anvend "Jacobis ulighed", Morf 28). Vis, at hvis $k' = k(\alpha)$ er en simpel algebraisk udvidelse med $f_{\alpha/k'} \neq 0$ (α : separabel), så gælder også det omvendte. Vis for en god kurve X , at

$$1 - g = |k' : k| (1 - g').$$

Anvendelse: X er god over k , $k' := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, hvor $g' \geq 0$.
 Anvend på kurve X med $g < 0$.

13 $g=1$ elliptiske kurve med udvalgt rationelt punkt er en god kurve C/k med $g(C) = 1$, sammen med et udvalgt punkt $O \in C(k)$. For en sådan kurve gælder

Definition. Afbildningen: $C(k) \rightarrow \text{Pic}_0(C)$ defineret ved

$$P \longmapsto \mathcal{O}_C((P) - (O))$$

er bijektiv.

Andledes udtrykt: Til givne rationale punkter $P, Q \in C(k)$ findes netop et rationelt punkt $S = P * Q \in C(k)$, så at $(P) + (Q) \equiv (O) + (S)$. Med denne komposition* er $C(k)$ en abelsk gruppe med O som neutralt element.

Bevís. Til en given divisor D af grad 0 søger vi $P \in C(k)$, så at $(P) - (O) \equiv D$, og vi skal vise, at der findes netop ét P . Vi søger altså $\varphi \in R(C)^*$, så at $D + (O) + \text{div}(\varphi)$ har formen (P) med $P \in C(k)$. Nu har $D + (O) + \text{div}(\varphi)$ grad 1 og er altså af formen (P) netop når den er ≥ 0 . Vi søger altså $\varphi \in \Gamma(D + (O))$, og da $\deg(D + (O)) = 1 > 2(g-1) = 0$ har vi $\dim_k \Gamma(D + (O)) = 1$, hvilket er påstanden $\square$

14. Vi betragter stadig en elliptisk kurve C med O som udvalgt rationelt punkt. Ifølge korollar 8 har vi $\dim_k \Gamma(n(O)) = n$ når $n > 0$, altså

$$k = \Gamma(0) = \Gamma(1(O)) \subset \Gamma(2(O)) \subset \dots \subset \Gamma(n(O)) \subset \dots$$

Betragt nu funktioner

$$\xi \in \Gamma(2(O)) \setminus \Gamma(0) \quad \eta \in \Gamma(3(O)) \setminus \Gamma(2(O)).$$

Vi har $v_0(\xi) = -2$, $v_0(\eta) = -3$ og finder for funktionerne

$$\xi_{2k} = \xi^k, \quad \xi_{2k+1} = \xi^{k-1} \eta, \quad \text{at}$$

$$v_0(\xi_v) = -v \quad v = 2, 3, \dots$$

Skælttes $U = C \setminus \{O\}$, er $\Gamma(U, \mathcal{O}_C) = \bigcup_n \Gamma(n(O)) = k[\xi, \eta]$, og da $U = C \setminus \text{Supp}(\xi)_\infty$ er affin, har vi $R(C) = k(\xi, \eta)$

og af dimensionsgrunde følger, at funktionerne $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n$ er en k -basis for $\Gamma(n(O))$, $n \geq 2$.

Specielt i $\Gamma(6(O))$ er $1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \xi^3$ en k -basis, og da $\eta^2 \in \Gamma(6(O))$ har $v_0(\eta^2) = -6$, kan vi entydigt skrive

$$(*) \quad \eta^2 = a\xi^3 + b\xi\eta + c\xi^2 + d\eta + e\xi + f, \quad a, \dots, f \in k, \quad a \neq 0.$$

Ligningen $(*)$ er relationen mellem ξ, η .

SÆTNING. (Antag $\text{Char } k \neq 2, 3$). Funktionerne ξ, η som ovenfor kan vælges, så at relationen har normalformen

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3.$$

Der gælder $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

For andre valg ξ', η' hvor relationen har normalformen gælder

$$\xi = u^2\xi', \quad \eta = u^3\eta', \quad g_2 = u^4g_2', \quad g_3 = u^6g_3', \quad \text{hvor } u \in k^*.$$

Beris. Antag, at vi for funktionerne ξ, η har relationen (*).
 For et andet valg ξ', η' har vi entydigt

$$\begin{aligned}\xi &= p\xi' + q \\ \eta &= r\eta' + s\xi' + t\end{aligned} \quad p, q, r, s, t \in k, \quad p \neq 0, r \neq 0.$$

Indsættelse i (*) giver nu relationen for ξ', η' . At denne er på normalform er ensbetydende med at

$$a' = 4 \iff \frac{ap^3}{r^2} = 4$$

$$b' = 0 \iff 2rs = bpr \iff 2s = bp$$

$$c' = 0 \iff s^2 = 3ap^2q + bps + cp^2 \iff b^2 = 12aq + 2b^2 + 4c$$

$$d' = 0 \iff 2rt = bqr + dr \iff 2t = bq + d$$

Af de to sidste ligninger kan vi umiddelbart bestemme q og t (entydigt). Den første ligning er opfyldt netop hvis

$$p = \left(\frac{4}{a}\right)u^2, \quad r = \left(\frac{4}{a}\right)u^3 \quad u = \left(\frac{r}{p}\right) \in k^*$$

og så kan s bestemmes af den anden ligning. Den sidste påstand så vi undervys. Vi viser nu, at

$$\Delta \neq 0.$$

$\Delta = q_2^3 - 27q_3^2$ er diskriminanten af polynomiet

$$f(X) = 4X^3 - q_2X - q_3 \in k[X].$$

[har vi i $\bar{k}[X]$: $f(X) = 4(X-p_1)(X-p_2)(X-p_3)$, gælder

$$\Delta = 16(p_1-p_2)^2(p_1-p_3)^2(p_2-p_3)^2]$$

Hvis $\Delta = 0$, ville f altså have en dobbeltrod i $\bar{k}$, og da $f'(X) = 12X^2 - q_2 \neq 0$ sluttas specielt, at f ikke kan være irreducibel i $k[X]$. Heraf sluttas nu let, at vi må have en fremstilling

$$f(X) = 4(X-a)^2(X-b), \quad \text{hvor } a, b \in \bar{k}$$

og dermed $\eta^2 = 4(\xi-a)^2(\xi-b)$ i $R(C)$.

Idet $\tau = \frac{\eta}{2(\xi-a)} \in k(\xi, \eta) = R(C)$, finder vi $\xi = \tau^2 + b$

$\eta = 2\tau(\tau^2 + b - a)$. Vi har altså $\xi, \eta \in k(\tau)$, og dermed

$R(C) = k(\xi, \eta) = k(\tau) = R(P_1)$,
 hvilket giver $C \simeq P^1$ i modstrid med at $g(C) = 1 \neq 0 = g(P_1)$ $\square$

KOROLLAR. De elliptiske kurver er netop kurverne (isomorfe med en kurve) af formen

$C_{g_1, g_2} = \text{Proj } k[X, Y, Z] / Y^2 Z - (4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3)$
 (med $[0, 1, 0]$ som udvalgt punkt), hvor $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Bevis. Vi har allerede set, (eks. 2① og 6①), at kurverne C_{g_1, g_2} er elliptiske. Er omvendt C en elliptisk kurve, kan vi bestemme $\xi \in \Gamma(2(0))$, $\eta \in \Gamma(3(0))$, så at

$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2 \xi - g_3$, $g_2, g_3 \in k$, $\Delta \neq 0$,
 og så er $R(C) = k(\xi, \eta) = R(C_{g_1, g_2})$ og dermed $C \simeq C_{g_1, g_2}$ $\square$

15. Er funktionerne ξ, η på den elliptiske kurve C valgt så at relationen har normalform $\eta^2 = 4\xi^3 - g_2 \xi - g_3$, har vi $\Delta \neq 0$.

Af sætning 14 følger, at $j(C) = 12^3 \cdot \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \in k$ kun afhænger af C og O .

SÆTNING. j -invarianten er en surjektiv afbildning

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{isomofiklasser af elliptiske kurver} \\ \text{med udv. rat. punkt} \end{array} \right\} \longrightarrow k = A^1(k).$$

Vi har $j(C) = 0 \Leftrightarrow C \simeq [Y^2 = 4X^3 - v]$, $v \in k^*/(k^*)^6$ entydig

$j(C) = 12^3 \Leftrightarrow C \simeq [Y^2 = 4X^3 - vX]$ $v \in k^*/(k^*)^4$ entydig

og for $j \neq \begin{smallmatrix} 0 \\ 12^3 \end{smallmatrix}$:

$$j(C) = j \Leftrightarrow C \simeq \left[Y^2 = 4X^3 - v \frac{27j}{j-12^3} X - v \frac{3 \cdot 27j}{j-12^3} \right] \quad v \in k^*/(k^*)^2 \text{ entydig}$$

Bevis. $[Y^2 = f(X)]$ betegner her den til $Y - f(X)$ svarende homogenerende projektive kurve (med udvalgt rationelt punkt $(0, 1, 0)$).

Af sætn./Korollar 14 følger, at $C \simeq [Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3]$ (for passende $g_2, g_3 \in k$), og at $[Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3] \simeq [Y^2 = 4X^3 - g_2'X - g_3'] \Leftrightarrow$ der findes $u \in k^*$, så at $g_2 = u^4 g_2'$, $g_3 = u^6 g_3'$. Heraf følger påstandene let under brug af følgende bemærkninger:

1) Hvis $[Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3]$ har invariant $j \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 12^3 \end{Bmatrix}$, så er

$$v^2 \frac{27j}{j-12^3} = g_2 \quad \text{og} \quad v^3 \frac{27j}{j-12^3} = g_3 \quad \text{ved } v = g_3/g_2^3 \in k^*.$$

2) Kurven $C = [Y^2 = 4X^3 - v^2 \frac{27j}{j-12^3} X - v^3 \frac{27j}{j-12^3}]$, hvor $j \in k^*$, $j \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 12^3 \end{Bmatrix}$

har j -invariant $= j$. $\square$

KOROLLAR. Hvis k er algebraisk afsluttet, er j -invarianten bijektiv:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{isomorfiklassen af} \\ \text{med udv. rat. pkt} \end{array} \right. \text{ elliptiske kurver } \} \xrightarrow{\sim} k = A^1(k).$$

16. BEMÆRKNING. "Normaliserings" faktoren $(12^3)^3$ fra $\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ normaliserer følgende analytiske situation:

For hvert lattice $L \subseteq \mathbb{C}$ kan $\mathbb{C}/L$ opfattes som de rationale punkter på en elliptisk kurve $E = E(L)$ hvor

$$E = [Y^2 = 4X^3 - g_2(L)X - g_3(L)]; \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \leftrightarrow \wp_L \quad \text{Weierstrass} \\ \eta \leftrightarrow \wp_L' \quad \wp\text{-funkt} \end{array} \right.$$

g_2 og g_3 , og dermed også j , kan altså opfattes som funktioner af L . Idet vi for $\tau \in H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \tau > 0\}$ sætter

$L_\tau = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}\tau$, og $j(\tau) = j(L_\tau)$, kan j opfattes som en funktion $j: H \rightarrow \mathbb{C}$. Den er holomorf (!) og da $L_\tau = L_{\tau+1}$ har vi $j(\tau+1) = j(\tau)$, d. j har perioden 1. Det følger, at j har formen $j = j(e^{2\pi i \tau})$

med en funktion - også kaldet j - holomorf i $\{q \mid 0 < |q| < 1\}$. Man kan vise, at denne funktion j har en simpel pol i 0. Faktoren 12^3 er nu valgt så at

$$\text{Res}_{q=0} j(q) = 1.$$

17. Hilbertpolynomiet Lad en god kurve C være givet som

$$C = \text{Proj } R$$

hvor R er et e.f. gradueret integritetsområde over k , s:

$$R = k[T_0, \dots, T_r] / \text{homogent primideal}.$$

Vi kan da opfatte C som et afsluttet delskema $C \hookrightarrow \mathbb{P}_r$.

Da $1 = \dim C = \dim^* R$, er Hilbertpolynomiet χ_R for R et 1^{ste}-gradspolynomium:

$$\chi(n) = dn + \chi(0)$$

hvor $d \geq 1$ kaldes kurvens grad (i $\mathbb{P}_r$). Punkterne $P \in C$ svarer til de relevante primidealer i R , og $\mathcal{O}_{C,P} = R_{(P)}$. Specielt er $R(C) = (\text{homogene brøklegerne for } R)$. En $F \neq 0$ et homogent element i R , har vi for hvert P idealitet $(F)_P \subseteq \mathcal{O}_{C,P}$ og vi kan definere

$$\text{div}(F) = \sum_P \text{long } \mathcal{O}_{C,P} / (F)_P \in \text{Div}(C).$$

Som bekendt gælder

$$\deg(\text{div}(F)) = d \deg(F)$$

idet for passende $n \gg 0$ har en isomorfi $(R/(F))^n \rightarrow \bigoplus_P \mathcal{O}_{C,P} / (F)_P$.
jfr "grad" sætning 39. Det er let at se, at der for homo-

gene elementer $F, G \neq 0$ i R gælder $\text{div}(FG) = \text{div}(F) + \text{div}(G)$.

Hvis F og G har samme grad i , kan vi betragte $F/G \in R(C)$,

og

$$(F/G) = \text{div}(F) - \text{div } G.$$

Er $P \in C$ og vælges $L \in R^1$, så at $L \notin P$, så er $(F)_P = \text{hovedidealitet frembragt af } F/L^i \in \mathcal{O}_{C,P}$, altså $v_P(\text{div}(F) - \text{div}(G)) = v_P(F/L^i) - v_P(G/L^i) = v_P(F/G)$.

Som bekendt har vi

$$\text{div}(F) \leq \text{div}(G) \iff (G)_P \subseteq (F)_P \text{ for alle } P \iff (G) \leq (F).$$

Lad os betragte $\Gamma(\text{div}(F)) \subseteq R(C)$.

Hvert $\varphi \in R(C)$ kan skrives $\varphi = G/H$, og $\varphi \in \Gamma(\operatorname{div}(F)) \Leftrightarrow \operatorname{div}(G/H) + \operatorname{div}(F) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(GF) \geq \operatorname{div}(H) \Leftrightarrow (GF) \leq (H)$.

Specielt er altså $GF^v \in (H)$, når $v \gg 0$, så vi kan skrive $GF^v = AH$, altså $G/H = A/F^v$.

SÆTNING. For hvert homogent $F \in R^i$ findes et $\tau_0 \geq 0$, så der for homogene elementer $A \in R$ af grad $\geq \tau_0$ gælder

$$(A) \leq (F) \Rightarrow A \in (F).$$

For $\tau \geq \tau_0$ er $A \mapsto A/F^\tau$ en isomorfi

$$R^{i+\tau} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\tau \operatorname{div}(F)).$$

Bewis. De homogene A 'er med $(A) \leq (F)$ frembringer et homogent ideal $I \subseteq R$. Da I er endeligt frembragt slutter vi, at $I \leq (F)$, altså at der findes τ_0 så at $I^{(\tau)} \subseteq (F)^{(\tau)}$ når $\tau \geq \tau_0$. Heraf fås den første påstand. Den betragtede afbildning er klart injektiv. Lad os vise, at den er surjektiv. Ifølge det tidligere viste kan hvert element $\varphi \in \Gamma(\tau \operatorname{div}(F))$ skrives $\varphi = A/F^{\tau v} = A/F^v$, og vi skal finde en fremstilling, hvor $v = \tau$. Er $v > \tau$, har vi $\operatorname{div}(A/F^v) + \tau \operatorname{div}(F) \geq 0$, hvoraf $(A) \leq (F^{v-\tau}) \subseteq (F)$. Da $\tau \geq \tau_0$, sluttas at $A \in (F)$, altså $A = A'F$, og så er $A/F^v = A'/F^{v-1}$. Fortsættes således fås det ønskede $\square$.

KOROLLAR. For konstant leddet $\chi(0)$ i Hilbertpolynomiet gælder

$$\chi(0) = 1 - g,$$

hvor g er kurvens genus.

Bewis. For $\tau \gg 0$ og F af grad $i > 0$ gælder

$$\dim \Gamma(\tau \operatorname{div}(F)) = \dim R^{i\tau} = \chi(i\tau) = di\tau + \chi(0)$$

$$\Leftrightarrow \deg(\tau \operatorname{div}(F)) + 1 - g = \tau di + 1 - g.$$

BEMÆRKNING. Hvis R er Macaulay kan (som bekendt) $\tau_0 = 0$ bruges i sætningen. For $L \in R^1$ har vi altså $\dim \Gamma(\tau \operatorname{div}(L)) = \dim R^\tau$ for alle $\tau \geq 0$. Specielt fås for $\tau = 0$, at $k = \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$, Og $\dim R^\tau = \chi_R(\tau)$, når $\tau d > (2g - 2)$

18. Morfier ind i $\mathbb{P}_r$. For et integritetsskema X er en rational morfi $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}_r$ det samme som en morfi $\text{Spec } R(X) \rightarrow \mathbb{P}_r$. ψ er altså givet ved et sæt af funktioner $(\varphi_0, \dots, \varphi_r) \neq (0, \dots, 0)$, $\varphi_i \in R(X)$. Billedet $\psi(\xi) \in \mathbb{P}_r$ af det generiske punkt ξ , er det homogener primideal $\mathcal{K} \subseteq k[T_0, \dots, T_r] = G$ bestemt ved

$$\mathcal{K}^{(i)} = \{f \in G^{(i)} \mid f(\xi_0, \dots, \xi_r) = 0\}.$$

Vi kan betragte ψ som en dominerende rational morfi

$$\psi: X \dashrightarrow \tilde{X} = \text{Proj } G/\mathcal{K} \hookrightarrow \text{Proj } G = \mathbb{P}_r.$$

Hvis $W \subseteq R(X)$ er k -underrummet frembragt af $\varphi_0, \dots, \varphi_r$, kan vi betragte $W^i \subseteq R(X)$, hvor W^i er k -underrummet frembragt af produkter af i -elementer fra W , og

$$k^*[W] := k \oplus W \oplus W^2 \oplus \dots$$

er en gradueret k -algebra frembragt af $\dot{\varphi}_i := \varphi_i \in W^1 = W$, altså $k^*[W] = k[\dot{\varphi}_0, \dots, \dot{\varphi}_r]$. Vi har $k^*[W] = G/\mathcal{K}$.

Den rationale morfi $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}_r$ kan altså opfattes som en dominerende rational morfi $\psi: X \dashrightarrow \tilde{X} = \text{Proj } k^*[W]$ efterfulgt af den afsluttede immersion $\text{Proj } k^*[W] \hookrightarrow \text{Proj } k^*[T_0, \dots, T_r]$ bestemt ved frembringersystemet $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ for W .

Oftentimes vil vi antage, at $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ er en basis for W ($\Leftrightarrow \tilde{X} \not\subset$ nogen hyperplan i $\mathbb{P}_r$). I dette tilfælde kaldes ψ den ved W bestemte rationale morfi $\psi_W: X \dashrightarrow \mathbb{P}_r$, idet den bortset fra en (lineær) automorfi af $\mathbb{P}_r$ er uafhængig af den valgte basis.

Lad nu X være en god kurve, og lad $W \subseteq R(X)$ være et underrum af dimension $\dim_k W = r+1$, og betragt den rationale morfi $\psi_W: X \dashrightarrow \tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_r$ bestemt ved W . Da X er en regulær kurve, er ψ_W overalt defineret. Billedet af et punkt $P \in X$ er det relevante primideal $\tilde{\mathcal{P}} \subset k^*[W]$ bestemt ved

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = \{\varphi \in W^i \mid v_P(\varphi) > i \cdot \inf_{\chi \in W} v_P(\chi)\}.$$

[Vis dette! Bemærk, at $R(\tilde{X}) =$ homogene brøklegerne for $k[W] = k(\dots, \varphi_i/\varphi_j, \dots) \subseteq R(X)$, når $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ er en basis for W] Da X er projektiv, er $\psi_W: X \rightarrow \tilde{X}$ surjektiv.

SÆTNING. Hvis der blandt $\varphi/x \in R(X)$, $\varphi, x \in W \setminus \{0\}$ findes en transcendent funktion [Hvis $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ betyder dette blot at $\dim_k W = r+1 \geq 2(!)$], så er $\psi_W: X \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_r$ en endelig morfi.

Hvis $k = \bar{k}$ gælder
 $\psi_W: X \rightarrow \mathbb{P}_r$ er injektiv $\Leftrightarrow \forall P \neq Q \exists \varphi \in W: v_P(\varphi) > \inf_{x \in W} v_Q(x)$
 $v_Q(\varphi) = \inf_{x \in W} v_Q(x).$

og er dette opfyldt gælder

$\psi_W: X \rightarrow \mathbb{P}_r$ er en afsluttet immersion $\Leftrightarrow \forall P \exists \varphi \in W: v_P(\varphi) = \inf_{x \in W} v_P(x) + 1.$

Bemærk. Indførs divisoru $\text{div}_\infty(W) = \sum_{x \in W} -\inf_{x \in W} v_P(x) \cdot P$

kan de to betingelser under et udtrykkes ved:

$$\forall P, Q \in X \exists \varphi \in W: (\varphi) + \text{div}_\infty(W) - P \geq 0$$

$$(\varphi) + \text{div}_\infty(W) - P - Q \neq 0.$$

Beris. Lad $\varphi_0, \dots, \varphi_r$ være en k -basis for W . Vi skal vise, at $\psi_W: X \rightarrow \tilde{X} = \text{Proj } k[\dot{\varphi}_0, \dots, \dot{\varphi}_r]$ er endelig.

Nu er $\tilde{X} = V_0 \cup \dots \cup V_r$, hvor $V_i = \tilde{X}_{\dot{\varphi}_i} = \text{Spec } A_i$ er affin, $A_i = k[\dot{\varphi}_0, \dots, \dot{\varphi}_r]_{\dot{\varphi}_i}^{(0)} = k[\varphi_0/\varphi_i, \dots, \varphi_r/\varphi_i] \subseteq R(X)$,

$$\text{og } P \in \psi^{-1}(V_i) \Leftrightarrow \psi(P) \in V_i \Leftrightarrow \dot{\varphi}_i \notin \tilde{P} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_P(\varphi_i) = \inf_{x \in W} v_P(x) = \inf_j v_P(\varphi_j)$$

$$\Leftrightarrow v_P(\varphi_j/\varphi_i) \geq 0, j=0, \dots, r$$

$$\Leftrightarrow k[\varphi_0/\varphi_i, \dots, \varphi_r/\varphi_i] \subseteq \mathcal{O}_{X,P}.$$

Heraf følger først, at $U_i^{\neq} = \psi^{-1}(V_i) = \bigcap_j U_{ij}$, hvor $U_{ij} = \{P \in X \mid v_P(\varphi_i/\varphi_j) \geq 0\}$. Hvis φ_j/φ_i er algebraisk, er $U_{ij} = X$. Hvis φ_j/φ_i er transcendent, er U_{ij} affin (jfr. "Morf" sætn 27 og "Kurv" 4). Ifølge forudsætningen findes j så at φ_j/φ_i er transcendent. $\psi^{-1}(V_j)$ er altså en fællesmængde af affine, og dermed selv affin, da X er separeret. Da $\tilde{X} = V_0 \cup \dots \cup V_r$ var en affin overdækning af $\tilde{X}$, slutter vi, at ψ er affin. Da

$$B_i := \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{P \in U_i} \mathcal{O}_{X,P} = \bigcap_{\mathcal{O}_{X,P} \supseteq A_i} \mathcal{O}_{X,P}$$

ser vi, at B_i = hele afslutning af A_i i $R(X)$. Da $U_i \subseteq X$ er affin, er B_i e.f. over k , og dermed også e.f. over A_i . Følgelig er B_i endelig over A_i , og vi slutter, at $\psi: X \rightarrow \tilde{X}$ er endelig.

Hvis $k = \bar{k}$, vil afsluttede punkter i $\tilde{X} = \text{Proj } k[W]$ svare til relevante primideal, der er frembragt af elementer i $W^{(1)}$. Vi har derfor

$$\psi(P) = \psi(Q) \iff \tilde{P} = \tilde{Q} \iff \tilde{P}^{(1)} = \tilde{Q}^{(1)}$$

Heraf følger sætningens første " $\Leftarrow$ ".

Lad os nu vise det sidste " $\Leftarrow$ ", altså at $\psi: X \rightarrow \tilde{X}$ er en isomorfi. Da X er proper og $\tilde{X}$ er separeret er ψ afsluttet. Da ψ desuden er bijektiv (og kontinuert) er ψ en topologisk isomorfi. Med $A = A_i$, $B = B_i$ har vi altså $A \subseteq B$, B endelig som A -modul, $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ er en topologisk isomorfi og vi ønsker at vise, at $A = B$. Til $\mathfrak{o}_f \subset A$ (svarende til $\tilde{x} \in \text{Spec } A \subseteq \tilde{X}$) findes netop et $\mathfrak{y} \subset B$ (svarende til $x \in \text{Spec } B \subseteq X$) med $\mathfrak{y} \cap A = \mathfrak{o}_f$ ($\psi(x) = \tilde{x}$).

Da B er endelig som A -modul, er det nok at vise, at $A_{\mathfrak{o}_f} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{o}_f}$ for alle $\mathfrak{o}_f$. Da $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ er en homeomorfi, slutter vi, at $B_{\mathfrak{o}_f} = B_{\mathfrak{y}} = \mathcal{O}_{X,x}$. Da $R(X) = \bigcup_P \mathcal{O}_{X,P}$,

ser vi,

at det er nok at vise, at $A_{\mathcal{O}_P} \cong B_{\mathcal{O}_P} = B_{\mathcal{O}_P}$ gælder for afsluttende punkter $\mathcal{O}_P$ ($\Leftrightarrow \tilde{P}$, $\mathcal{O}_P \Leftrightarrow P$). Ifølge forudsætningen findes $\varphi \in W$, så at $v_P(\varphi) = \inf_{\chi \in W} v_P(\chi) + 1$. Hvis $P \in U_i$ har vi altså $v_P(\varphi/\varphi_i) = 1$, så at $\varphi/\varphi_i \in A$ er en frembringer for maksimalidealet i $B_{\mathcal{O}_P} = B_{\mathcal{O}_P} = \mathcal{O}_{X,P}$. Da de lokale ringe $A_{\mathcal{O}_P}$ og $B_{\mathcal{O}_P}$ har samme restklasselegeme ($\kappa(\tilde{P}) = k = \kappa(P)$, da $k = \bar{k}$) er det nok at vise følgende LEMMA. Lad $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ være lokale ringe, lad $\mathcal{O} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ være en lokal homomorfi, så at $\mathcal{O}$ er endelig over $\mathcal{O}$, og antag ① at $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong \mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$ og ② $\mathfrak{m}'$ er frembragt af elementer fra $\mathcal{O}$. Da er $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ surjektiv. Bewis for lemma. $1 \in \mathcal{O}'/\mathfrak{m}\mathcal{O}' = \mathcal{O}'/\mathfrak{m}' = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ er et $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ -frembringersystem for $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}\mathcal{O}'$ og dermed (NAK) et $\mathcal{O}$ -frembringersystem for $\mathcal{O}'$, dvs. $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ er surjektiv. $\square$

19. DEFINITION. Et lineært system L på den ^{geometrisk} gode kurve X er en mængde L af positive divisorer, der kan skrives på formen

$$L = \{D_0 + (\varphi) \mid \varphi \in W \setminus \{0\}\}$$

med en divisor $D_0 \in \text{Div}(X)$ og et endeligdimensionalt underum $W \subset R(X)$. Divisorerne $D \in L$ er lineært ækvivalente, og har specielt alle den samme grad (betygnet deg L , hvis $L \neq \emptyset$). ^{klart, at $\text{deg} L \geq 0$.} Underrummet W er (næsten) entydigt bestemt ved L , thi er $D_1 \in L$, og sættes

$$W_1 = \{\psi \in R(X) \mid D_1 + (\psi) \in L\}$$

så findes $\varphi_1 \in R(X)$, så at $W_1 = \varphi_1 W$. Specielt er

$$\underline{\underline{\text{dim } L}} := \text{dim } W - 1$$

veldefineret.

Et punkt $P \in X$ kaldes et fast punkt på L , hvis der for alle $D \in L$ gælder $v_P(D) \geq 1$. Vi har da $D - P \geq 0$ for alle $P \in X$, så $L - P$ er et lineært system af grad $= \deg L - \deg P$. Gjentages dette opnås efter endelig mange skridt et lineært system uden faste punkter.

Eks ① For hver divisor $D \in \text{Div}(X)$ er

$$|D| = \{D + (\varphi) \mid \varphi \in \Gamma(D)\}$$

et lineært system. Sådanne systemer kaldes komplette

Divisoren D er (på nær lineær ækvivalens) entydigt bestemt ved systemet. Vi har

$$\deg |D| = \deg D, \dim |D| = \dim \Gamma(D) - 1, \text{ hvis } \Gamma(D) \neq (0).$$

Ethvert lineært system L er indeholdt i et komplet, nemlig $L \subseteq |D|$, når $D \in L$.

② Er $X = \text{Proj } R \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, så er

$$\{\text{div}(f) \mid f \in R^{(1)} \setminus (0)\}$$

Det har $\text{grad} = \text{grad}(X)$.

et lineært system, systemet af hyperplansnit i X . Det er uden faste punkter, men det behøver ikke at være komplet. Det er komplet, hvis R er Macaulay. For hvert $n \geq 0$ er også $\{\text{div}(f) \mid f \in R^{(n)} \setminus (0)\}$ et lineært system.

③ Er $W \neq (0)$ et underrum i $R(X)$ af dimension $r+1$ defineres divisoren $\text{div}_\infty(W) = \sum_P -\left(\inf_{\chi \in W} v_P(\chi)\right) P$, og vi sætter

$$|W| = \{(\chi) + \text{div}_\infty(W) \mid \chi \in W \setminus \{0\}\}.$$

Det ses, at $|W|$ er et lineært system uden faste punkter, og at ethvert lineært system uden faste punkter har formen $|W|$ med et næsten entydigt bestemt W .

Bemærk. $\text{div}_\infty(W) \geq 0 \Leftrightarrow R \subseteq W$. $\text{div}_\infty(1, \varphi) = (\varphi)_\infty$.

Er $\varphi_W: X \rightarrow \tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_r$ den til W hørende morfi, fås det lineære system $|W|$ ved at "tilbagetrække" hyperplansektionerne i $\tilde{X}$ via φ_W til X .

Bemærk, at morfismen φ_W essentielt kun afhænger af det lineære system $|W|$. Den kan derfor betegnes $\varphi_{|W|}$.

SÆTNING. Lad D være en divisor på den gode kurve X over k ($=\bar{k}$). Da gælder

- a) Hvis $\deg D \geq 2g-1$, så er $\dim |D| = \deg D - g$
- b) Hvis $\deg D \geq 2g$, så er $|D|$ uden faste punkter.
- c) Hvis $\deg D \geq 2g+1$, så er $\varphi_D: X \rightarrow \mathbb{P}_r$, $r = \dim |D|$, en afsluttet immersion.

Bewis. a): er RR. ($\dim |D| = \dim \Gamma(D) - 1$). b): er a) anvendt på $D-P$. c): er a) anvendt på $D-P-Q$, jf. sætning 18. $\square$

20.

KURVEBEMÆRKNINGER

0. (α). Man kan vise, at Jacobi-betingelsen (altså $\dim X = 1 = n - \operatorname{rg} J(x)$) $\Rightarrow$ alle strå $\mathcal{O}_{x,x}$ er regulære, altså = legeme, når $\dim \mathcal{O}_{x,x} = 0$ og = diskret valuationsring = hovedidealområde med "et" primelement, når $\dim \mathcal{O}_{x,x} = 1$.

0. (β) Værdien $J(x)$ af Jacobi-matricen i $x \in U$ er billedet af J ved den til $x \in U$ hørende ringhomomorfi:

$$k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_m] / (\dots, f_i, \dots) \rightarrow \mathcal{O}_{x,x} \rightarrow \kappa(x).$$

Men generelt kan vi betragte værdien $J(x)$ i et K -punkt $x: \operatorname{Spec} K \rightarrow U$, hvor $K \supseteq k$ er et vilkårligt legeme. I det K -punktet svarer til en k -algebrahomomorfi

$$k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow k[x_1, \dots, x_m] / (\dots, f_i, \dots) \rightarrow K,$$

ders til $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^n$ med $f_i(x_1, \dots, x_m) = 0$, $i = 1, \dots, q$, fås værdien $J(x)$ altså ved at indsætte $x = (x_1, \dots, x_m)$ i polynomierne $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

0. (γ) For en projektiv, irreducibel kurve $X = \operatorname{Proj} k[t_0, \dots, t_m] / (\dots, F_i, \dots)$ kan et K -punkt repræsenteres ved et $(n+1)$ -tupel $t = (t_0, \dots, t_m) \in K^{n+1}$ med $F_i(t_0, \dots, t_m) = 0$, $i = 1, \dots, q$, og svarende til repræsentanten kan vi betragte den homogene $q \times (n+1)$ matrix $\frac{\partial F_i}{\partial t_j}(t_0, \dots, t_m)$. Hvis $t_\alpha \neq 0$, svarer K -punktet til et punkt i den affine åbne $V_\alpha = X \cap U_\alpha$, og vi får hertil Jacobimatrixen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = J(x)$, hvor $f_i = F_i(x_0, \dots, 1, \dots, x_m)$. Det er ikke svært at vise, at $\frac{\partial F_i}{\partial t_j}(t)$ og $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ har samme rang.

1. c) Den til $P \in X$ hørende valuation $v_P: R(X)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ er bestemt således: I det $\pi \in \mathcal{O}_P$ er primelementet i $\mathcal{O}_P$, dvs en frembringer for hovedidealit $\mathfrak{m}_P$, kan hvert element $\varphi \neq 0$ i brøklegeret $R(X)$ entydigt skrives

$$\varphi = u \pi^n, \quad \text{hvor } u \in \mathcal{O}_P^*, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi sætter $v_P(\varphi) = n$ [og bekvemt $v_P(0) = +\infty$].

Bemærk, at når $\varphi \in \mathcal{O}_P$, så er

$$v_P(\varphi) = \operatorname{long} \mathcal{O}_P / (\varphi).$$

1.d) En morfi $\varphi: X \rightarrow Y$ mellem glatte, irreducible kurver (over k) giver for hvert $x \in X$ en lokal k -homomorfi i stråene

$$\varphi_x: \mathcal{O}_{Y, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$$

Hvis morfien er dominerende, dvs. afbilder det generiske punkt ξ for X på det generiske punkt η for Y får vi specielt en k -homomorfi i det generiske strå:

$$\varphi_\xi: R(Y) = \mathcal{O}_{Y, \eta} \rightarrow \mathcal{O}_{X, \xi} = R(X)$$

som må være en inklusion (d. injektiv), og herved svarer φ_x til en inklusion:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y, \varphi(x)} & \subseteq & \mathcal{O}_{X, x} \\ \cap & & \cap \\ R(Y) & \hookrightarrow & R(X) \end{array}$$

For glatte kurver gælder følgende

HOVEDRESULTAT. Lad X og Y være glatte kurver, og antag, at $Y \rightarrow \text{Spec } k$ er proper. Til hver k -indlejring $R(Y) \hookrightarrow R(X)$ findes netop én dominerende k -morfi $\varphi: X \rightarrow Y$ som i det generiske strå giver den givne indlejring. Morfien φ er bestemt ved at $\varphi(x) = y$ er det entydigt bestemte element $y \in Y$ som opfylder

$$(*) \quad \mathcal{O}_{Y, y} = R(Y) \cap \mathcal{O}_{X, x}$$

Hvis også $X \rightarrow \text{Spec } k$ er proper, er $\varphi: X \rightarrow Y$ endelig, af konstant grad $= |R(X) : R(Y)|$. [Graden af φ i $y \in Y$ er $\dim_{\kappa(y)} \Gamma(\varphi^{-1}(y), \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(y)})$. Den angiver altså antallet af punkter (talt med multiplaciteter) i fiberen $\varphi^{-1}(y)$].

Bemærk, at $|R(X) : R(Y)|$ er endelig, da begge legemer har transcendensgrad $= 1$ over k .

Eksempel. Et transcendent element $\varphi \in R(X)$ giver en indlejring: $R(\mathbb{P}^1) = k(T) \approx k(\varphi) \subseteq R(X)$ altså en morfi $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Polerne er $\varphi^{-1}(\infty)$, hvor $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$.

$$\dim \mathbb{P}^n$$

0. $A = k \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \dots$ gradueret ring, $k = A^0$ vilkårlig.

Betragt graduerede A -moduler $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ hvor $M_i = 0$ når $i \ll 0$.

$A^{>0} = \sum_{i>0} A^i$ gradueret ideal. $k = \bar{A} = A/A^{>0}$

For hver gradueret A -modul M er $\bar{M} = M/A^{>0}M$ en gradueret k -modul

$$\bar{M} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \bar{M}^i, \quad \bar{M}^i = \text{Im}(M^i \rightarrow \bar{M})$$

hvert $\bar{M}^i$ er en k -modul.

"Gradueret Nakayama": $\bar{M} = 0 \Rightarrow M = 0$.

Bewis. Hvis $M \neq 0$ findes mindst i med $M^i \neq 0$ og så er $A^{>0}M \subset M^{>i}$ og dermed $M^i \cap A^{>0}M = 0$, så $\bar{M}^i \cong M^i \neq 0$.

Sætning. Antag enhver [e.f.] projektiv k -modul er k -fri.

Da er hver [e.f.] gradueret A -modul, der er $|A|$ -projektiv, gradueret fri.

Bewis. $\bar{P} = \bigoplus \bar{P}_i$ er en [e.f.] projektiv k -modul. Følgelig er hvert $\bar{P}_i$ en [e.f.] projektiv k -modul, og dermed k -fri. Vælg derfor homogene elementer e_i i P , hvis billeder i $\bar{P}$ er en k -basis, og betragt tilsvarende homogene morfi:

$$\varphi: F = \bigoplus_d A(-d) \rightarrow P$$

I følge valget er $\bar{\varphi}: \bar{F} \rightarrow \bar{P}$ specielt surjektiv Nakayama $\Rightarrow \varphi$ surj. Vi har nu med $K = \text{Ker } \varphi$

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} P \rightarrow 0$$

Da P er $|A|$ -projektiv, er også $0 \rightarrow K \rightarrow \bar{F} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{P} \rightarrow 0$ exact. Da $\bar{\varphi}$ var bijektiv, er $K = 0$, så Nakayama $\Rightarrow K = 0$. Dvs φ var en isomorfi $\square$

Om $\mathbb{P}^2$ Om k kun blot antages,
at enhver projekt. er fri & PID1. Gradede moduler. $A = k \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \dots$ graderet ringmed $A^0 = k$ et legeme. Betragt graderede A -moduler M , $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$, med $M^i = 0$ for $i < 0$. (Spec. e.f. grad. A -moduler). $M(d)$ med $M(d)^n = M^{d+dn}$ er igen graderet. M er kvotient af graderet modul af formen $\bigoplus_{\alpha \in I} A(-d_\alpha)$

[en (graderet) fri modul].

Vi har $k \simeq A/A^{\geq 1}$ "Nakayama"s lemma: $M \otimes_A k = 0 \Rightarrow M = 0$.Bevis. $M \otimes_A k = M/A^{\geq 1}M$. Er $M \neq 0$, kan vi vælge i minimal, så $M^i \neq 0$. Men så er $A^{\geq 1}M \subseteq M^{\geq i+1} \subset M$. $\square$ Korollar. $\text{Tor}_1^A(M, k) = 0 \Rightarrow M$ er (graderet) fri.Bevis. Vælg homogene elementer $x_\alpha \in M^{d_\alpha}$ hvis restklasser er en k -basis for $M \otimes_A k$, og betragt $L = \bigoplus A(-d_\alpha)$ og den oplagte graderede homomorfi $L \xrightarrow{\varphi} M$. Den er surjektiv ifølge Nakayamas lemma. Er K kernelen, har vi exact

$$\text{Tor}_1^A(M, k) \rightarrow K \otimes_A k \rightarrow L \otimes_A k \xrightarrow{\varphi \otimes 1} M \otimes_A k \rightarrow 0$$

Da $\varphi \otimes 1$ er bijektiv ifølge konstruktionen, og $\text{Tor}_1 = 0$, slutter vi, at $K \otimes_A k = 0$ og dermed igen ifølge Nakayama, at $K = 0$. $\square$ Korollar Hvis k som (ikke-graderet) A -modul har en projektiv resolution af længde r , så har enhver graderet A -modul en fri resolution af længde r .

Bevis. Vi kan finde en graderet resolution

$$0 \leftarrow M \leftarrow L_0 \leftarrow L_1 \leftarrow \dots \leftarrow L_{r-1} \leftarrow K \leftarrow 0$$

hvor L_i 'erne er graderede fri. Forudsætningen medfører, at $\text{Tor}_{r+1}^A(M, k) = 0$, men så er

$$\text{Tor}_1^A(K, k) \simeq \text{Tor}_2^A(\dots, k) \simeq \dots \simeq \text{Tor}_{r+1}^A(M, k) = 0,$$

og altså K graderet fri. $\square$ Opgave ① Slut noget mere end korollant af beviset. ② Kopier fremgangsmåden for e.f. moduler over en lokal noetherisk ring.

Korollar (Hilberts "syzygy"-sætning). Enhver e.f. gradueret modul over $A = k[x_1, \dots, x_r]$ har en gradueret fri resolution af længde r .

Heri Koszul-komplekset $K^{x_1, \dots, x_r}(A)$ giver da en fri resolution af $A/(x_1, \dots, x_r) = k$. $\blacksquare$

Bemærkning. Hvis M opfylder $M^i = 0$ for $i < d$, kan de graduerede fri moduler i den fri resolution af M vælges på formen $\bigoplus_{\alpha \in I} A(-d_\alpha)$, hvor $d_\alpha \geq d$.

Opgave. (3) Kopier resultatet for en regulær lokal noethersk ring.

Korollar. For en e.f. gradueret modul M over $A = k[x_0, \dots, x_r]$ ($r+1$ variable) gælder, at Hilbertfunktionen $h_M: n \mapsto \dim_k M^n$ er polynomial af grad $\leq r$.

Bevis. For en exact følge $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ har vi øjensynlig $h_M = h_{M'} + h_{M''}$. Da M har en endelig fri resolution er det nok at vise påstanden for M fri, og her til er det nok at vise påstanden for $M = A(-d)$. Da $h_{M(p)}(n) = h_M(n+p)$ er det nok at vise påstanden for $M = A$. Her finder vi

$$h_A(n) = \binom{n+r}{r} \quad \text{for } n \geq 0 \quad \blacksquare$$

2. Coherent moduler på $\mathbb{P}^r$

Vi sætter $A = k[x_0, \dots, x_r]$, $P = \mathbb{P}^r = \text{Proj}(A)$. For en e.f. gradueret A -modul M , defineres $\mathcal{O}_P$ -modulen $\tilde{M}$ ganske som vi konstruerede $\mathcal{O}_P$ ud fra A . Hvis $f \in A^i$, $i \geq 1$, så er $P_f \cong \text{Spec}(A_f^\circ)$, og $\tilde{M}/p_f$ svarer til A_f° -modulen M_f° . $\tilde{M}$ er altså coherent. Det er klart, at $x \mapsto x/1$ definerer en homomorfi $M^n \rightarrow \Gamma(P, \tilde{M}(n))$.

Vi sætter $\mathcal{O}_P(1) = \widetilde{A(1)}$. $\mathcal{O}_P(1)$ bliver en invertibel $\mathcal{O}_P$ -modul, og for enhver e.f. A -modul M gælder

$$\boxed{\widetilde{M} \otimes \mathcal{O}_P(1)^{\otimes n} \simeq \widetilde{M(n)}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Spec. $\mathcal{O}_P(n) := \mathcal{O}_P(1)^{\otimes n} = \widetilde{A(n)}$.

For en $\mathcal{O}_P$ -modul F sættes $F(n) = F \otimes \mathcal{O}_P(n)$. Ved hjælp af afbildningerne

$$A^i \otimes \Gamma(P, F(j)) \rightarrow \Gamma(P, \mathcal{O}(i)) \otimes \Gamma(P, F(j)) \rightarrow \Gamma(P, F(i+j))$$

organiseres $\Gamma^*(F) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Gamma(P, F(i))$ som gradueret A -modul.

Sætning. Lad $\mathcal{G}$ være kategorien, hvis objekter er e.f. graduerede A -moduler, og hvor morfisme er bestemt ved

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(M, N) = \varinjlim_k \text{Hom}_A^{\text{grad}}(M^{\geq k}, N^{\geq k}),$$

og lad $\mathcal{E}$ være kategorien af coherent $\mathcal{O}_P$ -moduler.

Funktoren $M \mapsto \widetilde{M}$ af $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$ er da en ækvivalens af kategorier, hvis inverse er funktoren $F \mapsto \Gamma^*F$.

(Uden bevis).

Specielt gælder, at $M^n \rightarrow \Gamma(P, \widetilde{M(n)})$ er isomorf for $n \gg 0$.

Korollar. En coherent $\mathcal{O}_P$ -modul F har en resolution af længde

$$\text{r}+1: \quad (*) \quad 0 \leftarrow F \leftarrow E_0 \leftarrow \dots \leftarrow E_{r+1} \leftarrow 0,$$

hvor E_i 'erne er endelige direkte summer $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{O}(-d_\alpha)$.

Bemærkning. Vi kan antage, at hvert $d_\alpha \geq 0$, thi $F = \widetilde{M} = \widetilde{M^{\geq 1}}$.

Korollar. For en coherent $\mathcal{O}_P$ -modul F gælder, at $F(m)$ er frembragt af globale sektioner for $m \gg 0$. [$\mathcal{O}(1)$ er "ample"].

thi $F = \widetilde{M}$, og er $f_1, \dots, f_r$ homogene A -frembringere for M , med f_α af grad d_α , da er for $m \geq \max\{d_\alpha\}$ $M^{\geq m}$ frembragt af elementerne $u f_\alpha$, hvor u gennemløber monomierne af grad $m - d_\alpha$, og $(M^{\geq m})(m)$ er altså frembragt af elementer der er homogene af grad 0. Og $F(m) = (\widetilde{M^{\geq m}})(m)$ $\square$

Korollar. En coherent $\mathcal{O}_P$ -modul F har en filtration

$$(**) \quad 0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N = F$$

hvis kvotienter er af formen $\mathcal{O}_Z(-v)$, hvor $Z \subseteq \mathbb{P}^2$ er et afsluttet irreducibelt delskema.

thi $F = \tilde{M}$, og M har en tilsvarende filtration med kvotienter af formen $A/\mathcal{P}(-v)$, hvor $\mathcal{P} \subseteq A^{\geq 1}$ er et homogent primideal. [Betragt $\text{Ass } M$]. Anvendes $M \mapsto \tilde{M}$ forsvinder kvotienterne af formen $A/A^{\geq 1}(v)$ $\square$

3 Cohomologi af coherent $\mathcal{O}_P$ -moduler

Explicit udregning via Čech-cohomologi m.h.t. overdekningen $P = P_{x_0} \cup \dots \cup P_{x_n}$ giver følgende

Resultat. For $0 \leq n$ er $\dim_k \Gamma(P, \mathcal{O}(n)) = \binom{n+r}{r}$, og $H^i(P, \mathcal{O}(n)) = 0, i \neq 0$.

For $-r \leq n \leq -1$ er $H^i(P, \mathcal{O}(n)) = 0$ for alle i .

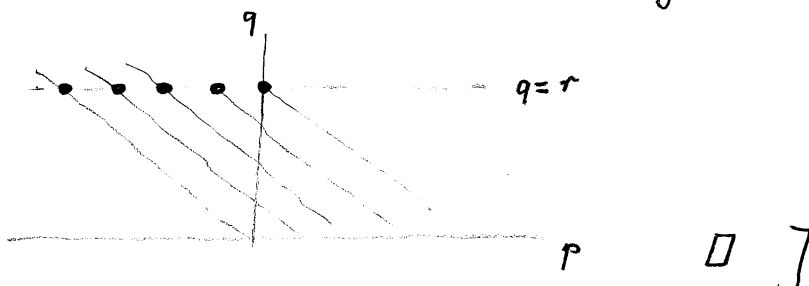
For $n \leq -r-1$ er $\dim_k H^r(P, \mathcal{O}(n)) = \binom{-n-1}{r}$, og $H^i(P, \mathcal{O}(n)) = 0, i \neq r$.

Korollar. For enhver coherent $\mathcal{O}_P$ -modul F gælder, at $H^i(P, F)$ er endeligdimensional over k , og $= 0$ for $i > r$ (og $i < 0$).

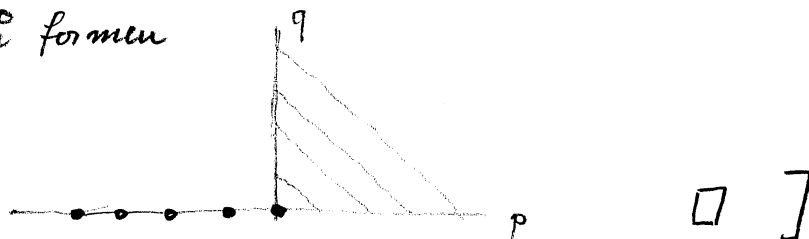
[Bevis. Af resolutionen (*) fås en quasi-isomorfi $\mathcal{E}_\bullet \rightarrow F$, og dermed en isomorfi $R\Gamma \mathcal{E}_\bullet \xrightarrow{\sim} R\Gamma F$ og dermed en spektral-sekvens

$$H^p(H^q(P, \mathcal{E}_\bullet)) \Rightarrow H^n(P, F).$$

Vi kan antage, at $\mathcal{E}_\bullet^{-i} = \mathcal{E}_i \simeq \bigoplus \mathcal{O}(-d_\alpha)$, $d_\alpha > 0$, og dermed at $H^q(P, \mathcal{E}_\bullet) = 0$ for $q \neq r$. Spektralfølgen har altså formen



[Bemærk. Ud fra resolutionen (*) af F fås en resolution af $F(v)$ med $E_i(v) \simeq \bigoplus \mathcal{O}(-d_\alpha + v)$. Hvis $v \gg 0$, er $-d_\alpha + v \geq 0$ så $H^q(P, E_i(v)) = 0$ for $q \neq r$. Spectralfølgen $H^p(H^q(P, E_i(v)))$ har altså formen


$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(\mathcal{P}, \mathcal{F}).$$
$$x_{\tilde{M}}(n) = h_M(n) \text{ for } n \gg 0.$$
$$\chi_{\mathcal{Q}}(u) = \binom{n+r}{r} \quad u \in \mathbb{Z},$$

$$\text{idet} \quad \binom{n+r}{r} = \begin{cases} 0 & -r \leq n \leq -1 \\ (-1)^r \binom{-n-1}{r} & n \leq -r-1. \end{cases}$$

Vi ser således at χ_F er et polynomium for $F = \mathcal{O}$, og dermed også for $F = \mathcal{O}(-d)$ [da $\chi_{F(d)}(n) = \chi_F(n+d)$], og dermed også for $F = \bigoplus \mathcal{O}(-d_\alpha)$, og dermed v.h.a. resolutionen (*) for ethvert F . For $F = \tilde{M}$, og $n \gg 0$ har vi $\chi_{\tilde{F}}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(P, F(n)) = \dim H^0(P, F(n)) = \dim \Gamma(P, F(n)) = \dim M^n = h_M^n$. Vi ved (!), at $(\text{gradus af } h_M) = \sup \{d \mid \exists A \text{ med } M \subseteq \mathcal{P}_0 \subset \dots \subset \mathcal{P}_d \subset A^{\geq 1}\}$.

Nu er $R \supseteq \text{Ann } M \Leftrightarrow M_R \neq 0 \Leftrightarrow M_{(R)}^\circ \neq 0$ som det let eftervises, og for $F = \tilde{M}$, $x \leftrightarrow R$ har vi naturligvis $\tilde{F}_x = M_{(R)}^\circ$. Heraf følger påstanden om graden. $\square$

Polynomiet $\chi_F(n)$ antager værdier i $\mathbb{Z}$, og kan altså entydigt skrives

$$\chi_F(n) = c_r \binom{n+r}{r} + \dots + c_1 \binom{n+1}{1} + c_0, \quad c_i \in \mathbb{Z}.$$

Hvis $d = \dim(\text{Supp } F)$, har vi $c_i = 0$ for $i > d$, og

$c_d = c_d(F) > 0$, da $\chi_F(n) \geq 0$ for $n \gg 0$. $c_d(F)$ kaldes graden af F .

SÆTNING. For $d = \dim(\text{Supp } F)$ gælder

$$c_d(F) = \sum_{\substack{\xi \in \text{Supp } F \\ \dim \overline{\xi\xi} = d}} \left(\text{long}_{\mathcal{O}_{P, \xi}} F_{\xi} \right) c_d(\mathcal{O}_{\overline{\xi\xi}}).$$

Der summeres over de endelig mange punkter, der er generiske punkter for en komponent af $\text{Supp } F$ af den maksimale dimension d . For et sådant punkt ξ er F_{ξ} klart af endelig længde. $\mathcal{O}_{\overline{\xi\xi}}$ er strukturkrøppet for det afsluttede irreducible delschema $\overline{\xi\xi} \subseteq \mathbb{P}^r$.

Bevis. Højre side (hs) er defineret for alle coherent $\mathcal{O}_P$ -moduler $\mathcal{G}$, der har $\text{Supp } \mathcal{G} \subseteq X = \text{Supp}(F)$. Den er ligesom venstre side additiv som funktion af sådanne $\mathcal{G}$, og ændes ikke når $\mathcal{G}$ erstattes med $\mathcal{G}(v)$. Udnyttelse af filtrationen $(**)$ af $\mathcal{G}$ ser vi, at det er nok at vise " $=$ " for $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Z$, $Z = \overline{\{x\}}$, $x \in X$, og det er klart $\square$

Korollar. Hvis $\dim(\text{Supp } F) = 0$ gælder

$$c_0(F) = \sum_{x \in \text{Supp}(F)} \dim_k F_x.$$

Bewis. Nok at vise, at der for et afsluttet punkt $x \in P$ gælder $c_0(\mathcal{O}_{\{x\}}) = \dim_k \kappa(x)$. $x \leftrightarrow \mathfrak{p} \subset A^+$. Vælg $f \in A^+$, $f \notin \mathfrak{p}$ får vi for hvert $n \in \mathbb{N}$ en k -lineær afbildning $a \mapsto a/f^n : A^n/\mathfrak{p}^n \rightarrow A_{(\mathfrak{p})}^\circ/\mathfrak{p}A_{(\mathfrak{p})}^\circ = \kappa(x)$ som klart er injektiv. Er $V_n \subseteq \kappa(x)$ billedet, har vi $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$, $\bigcup V_n = \kappa(x)$. Her er $\dim_k V_n = \dim_k A^n/\mathfrak{p}^n = h_{A/\mathfrak{p}}(n) = \chi_{\mathcal{O}_{\{x\}}}(n)$ konstant for $n \gg 0$, altså for $n \gg 0$ $c_0(\mathcal{O}_{\{x\}}) = \dim_k V_n = \dim_k \kappa(x)$ $\blacksquare$

4. K-teori for $\mathbb{P}^2$

For en coherent $\mathcal{O}_P$ -modul F defineres Chern-polynomiet c_F ud fra

$$\chi_F(n) = c_r \binom{n+r}{r} + c_{r-1} \binom{n+r-1}{r-1} + \dots + c_0$$

som

$$c_F = c_F(T) = c_r + c_{r-1}T + \dots + c_0 T^r$$

Chern-polynomiet opfattes som element i ringen $\mathbb{Z}[T]/(T^{r+1})$

χ_F og c_F er additive funktioner af F , og kan altså opfattes som additive homomorfier fra $K(\mathbb{P}^2)$.

Sætning. Chern-afbildningen $Z \mapsto c_Z$ er en ring-isomorfi

$$K(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[T]/(T^{r+1})$$

Lemma. I $K(\mathbb{P}^2)$ gælder $(1 - cl(\mathcal{O}(-1)))^{r+1} = 0$.

Bewis for lemma. Koszul-komplekset $K^{x_0, \dots, x_r}(A)$ giver en resolution

$$0 \rightarrow K_{r+1} \rightarrow \dots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow A/(x_0, \dots, x_r) \rightarrow 0$$

$\parallel$
 k

Opfattes som complex af graduerede A -moduler har vi $K_i = A(-i) \binom{r+1}{i}$, og anvendes $\sim$ får vi [da $\tilde{K} = 0$] et exact complex $0 \rightarrow \tilde{K}_{r+1} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{K}_0 \rightarrow 0$. Følgelig er $0 = \sum (-1)^i \text{cl } \tilde{K}_i = \sum (-1)^i \binom{r+1}{i} \text{cl } \mathcal{O}(-1)^i = (1 - \text{cl } \mathcal{O}(-1))^{r+1}$. $\blacksquare$

Bevis for sætningen. Læt $t = 1 - \text{cl } \mathcal{O}(-1) \in K(\mathbb{P}^2)$. Ifølge lemmaet er $t^{r+1} = 0$ i $K(\mathbb{P}^2)$, så vi har en ringhomomorfi $\varphi: \mathbb{Z}[T]/T^{r+1} \rightarrow K(\mathbb{P}^2)$ givet ved $T \mapsto t$. Her er φ surjektiv: For en coherent $\mathcal{O}_p$ -modul F får vi nemlig af resolutionen (*), at $\text{cl}(F)$ er en $\mathbb{Z}$ -linear-kombination af elementer af formen $\text{cl}(\mathcal{O}(-d)) = [1-t]^d$, og dermed en $\mathbb{Z}$ -linearkombination af $1, t, t^2, \dots$. Heraf følger $\mathbb{Z}[t] = K(\mathbb{P}^2)$. For at afslutte beviset er det derfor nok at vise, at $\underline{c \circ \varphi} = \text{Id}$. Da $c \circ \varphi$ er additiv, er det nok at vise, at $c \circ \varphi(T^i) = T^i$, altså $\underline{c_{ti} = T^i}$, $i = 0, \dots, r$. For $i = 0$ har vi $t^0 = 1 = \text{cl}(\mathcal{O})$, og da $\chi_{\mathcal{O}}(n) = \binom{n+r}{r}$, er $c_{\mathcal{O}} = 1$, altså $c_{t^0} = 1$. For at vise påstanden for alle i , viser vi generelt, at $c_{tz} = T \cdot c_z$ for $z \in K(\mathbb{P}^2)$.

Det er nok at vise denne påstand for $z = \text{cl}(F)$. Nu svarer c_F til $\chi_F(n) = c_0 \binom{n+r}{r} + \dots + c_r$, og c_{tz} svarer til $\chi_{tz} = \chi_{(1-\text{cl } \mathcal{O}(-1))z} = \chi_z - \chi_{\mathcal{O}(-1)z} = \chi_F - \chi_{F(1)}$, altså $\chi_{tz}(n) = \chi_F(n) - \chi_F(n-1)$. Da $\binom{n+i}{i} - \binom{n-1+i}{i} = \binom{n+i-1}{i-1}$, svarer hertil polynomiet Tc_z . $\blacksquare$

Eksempler. $cl[\mathcal{O}] = 1$ $cl[\mathcal{O}(-1)] = 1-t$, $cl \mathcal{O}(-d) = (1-t)^d$
 $cl \mathcal{O}(d) = (1-t)^{-d} = (1+t+\dots+t^r)^d$. For et afsluttet

delskema $Z \subseteq \mathbb{P}^r$ sættes $[Z] = cl \mathcal{O}_Z \in K(\mathbb{P}_r)$. Vi har

$$[Z] = c_d t^{r-d} + \dots + c_0 t^r, \quad d = \dim Z, c_d = \deg(Z).$$

Hvis Z og Z' er i generel position har vi (!) $[Z \cap Z'] = [Z][Z']$

$$= c_d c_{d'} t^{(r-d)+(r-d')} + \dots, \quad \text{altså } Z \cap Z' = \emptyset \text{ hvis}$$

$$\dim Z + \dim Z' < r, \text{ og}$$

$$\dim Z \cap Z' + r = \dim Z + \dim Z'$$

$$\deg Z \cap Z' = (\deg Z)(\deg Z') \quad \text{ellers.}$$

Er specielt $\dim Z + \dim Z' = r$, gælder $\dim Z \cap Z' = 0$,
 og antal punkter i $Z \cap Z'$ (med multiplisitet) $= \deg Z \deg Z'$.

For en hyperflade $V(f)$ givet ved et homogent polynomium $f \in A^d$, har vi exact $0 \rightarrow \mathcal{O}(-d) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{V(f)} \rightarrow 0$
 altså

$$[V(f)] = 1 - (1-t)^d = dt - \binom{d}{2} t^2 + \dots$$

altså $\dim V(f) = r-1$, $\deg V(f) = d$. For s ($\leq r$) hyperflader
 i generel position får vi $[V(f_1, \dots, f_s)] = [V_{f_1}] \dots [V_{f_s}]$
 $= d_1 \dots d_s t^s + \dots$ så at delskemaet $V(f_1, \dots, f_s)$ [kaldet
 en "complete intersection"] får dimension $r-s$ og grad $d_1 \dots d_s$.

Specielt skærer n hyperflader af grad $d_1, \dots, d_n$ i generel position hinanden i $d_1 \dots d_n$ punkter (Bezout's sætning).

For en kurve X , der er en complete intersection $X = V(f_1, \dots, f_{r-1})$,
 får mere fuldstændigt $[X] = d_1 \dots d_{r-1} t^{r-1} - d_1 \dots d_{r-1} \sum \frac{d_i-1}{2} \cdot t^r$.

Bemærk. Ud fra $C_F = c_r + \dots + c_0 T^r$ kan Eulerkarakteristikken
 $\chi(F) = \chi_F(0)$ beregnes som $c_r + \dots + c_0$. For kurven X som
 ovenfor finder vi $\chi(\mathcal{O}_X) = d_1 \dots d_{r-1} (1 - \sum \frac{d_i-1}{2})$ og dermed
 for den aritmetiske genus $p_a(X) = 1 - \chi(\mathcal{O}_X) = 1 + d_1 \dots d_{r-1} \frac{\sum d_i - r - 1}{2}$.

"Mini" - K-teori

1. DEFINITION. For en additiv klasse $\mathcal{P}$ i en abelsk kategori defineres Grothendieck gruppen $K(\mathcal{P})$ som den fri gruppe frembragt af (isomorfiklasser) $[F]$, $F \in \mathcal{P}$ modulo relationerne
- $$[F] = [F'] + [F'']$$
- for hver korteksakt følge $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ med $F', F, F'' \in \mathcal{P}$.

2. DEFINITION. For et noethersk skema X sættes

$$K(X) = K_{\text{coh}}(X) := K(\text{coherente } \mathcal{O}_X\text{-moduler}).$$

For en kommutativ gruppe G svarer homomorfier $K(X) \rightarrow G$ altså til additive "funktioner" $(\text{coherente } \mathcal{O}_X\text{-moduler}) \rightarrow G$.

Eks. ② Er X et integritetsskema med generisk punkt ξ defineres ved $F \mapsto \text{rg}[F] := \dim_{\mathcal{O}_{\xi}} F_{\xi}$ en homomorfi $\text{rg}: K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Eks. ③ Hvis X er proper over legemet k defineres ved

$$F \mapsto \chi(F) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(X, F)$$

en homomorfi $\chi: K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Elementet $[\mathcal{O}_X] \in K(X)$ betegnes ofte 1. For hvert afsluttet delskema $Y \subseteq X$ sættes ofte $[Y] := [\mathcal{O}_Y]$.

3. For et afsluttet delmængde $Y \subseteq X$ sættes vi

$$K_Y(X) = K(\text{coherente } \mathcal{O}_X\text{-moduler } F \text{ med } \text{Supp } F \subseteq Y)$$

og vi betegner med $L_Y(X)$ undergruppen i $K_Y(X)$ frembragt af $[F]$ med $\text{Supp } F \subset Y$.

LEMMA. Hvis Y er reducibel, er $K_Y(X) = L_Y(X)$. Hvis Y er irreducibel, er $K_Y(X)/L_Y(X)$ cyclisk frembragt af $[\mathcal{O}_Y]$ mod L_Y .

Bemærk. Hvis F og G har $\text{Supp} \subseteq Y$, og $F \rightarrow G$ er en homomorfi, som er en isomorfi i et enkelt stå: $F_x \xrightarrow{\sim} G_x$, $x \in \text{Supp } F$ så er $[F] \equiv [G] \pmod{L}$.

Bemærk. Påstanden er trivial, hvis $X = \text{Spec } A$ er affin, thi hver e.f. modul M med $\text{Supp } M \subseteq Y$ har en endelig filtration med kvotienter $= A/\mathfrak{q}$, hvor $\mathfrak{q} \in \text{Supp } M$.

Kom. Alg. 1978

Beweis for lemma. Antag at F har $\text{supp } F \subseteq Y$, $F \neq 0$. Det er nok at vise, at der findes en undermodul $(0) \subset F_0 \subseteq F$ og en afsluttet irreducibel delmængde $Z \subseteq Y$ så at $[F_0] \equiv [\mathcal{O}_Z]$ mod L .

Lad $U = \text{Spec } A$ være åben affin i X med $U \cap \text{Supp } F \neq \emptyset$ og sæt $M = \Gamma(U, F)$, altså $F/U \cong \tilde{M}$. Da $M \neq 0$ findes et primideal $\mathfrak{p} \subset A$ svarende til et $x \in U$ og en injektion $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. Nu er $x \in \text{Supp } F \subseteq Y$, så $Z := \{\overline{x}\} \subseteq Y$ og vi har en monomorfi

$$\mathcal{O}_Z/U = \tilde{A/\mathfrak{p}} \xrightarrow{f} \tilde{M} = F/U,$$

og dermed en exact følge

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Z/U \xrightarrow{f} \mathcal{O}_Z/U \oplus F/U \xrightarrow{(-f, 1)} F/U \rightarrow 0$$

Idet $i: U \hookrightarrow X$ er inklusionsmorfien, får vi en morfi $\mathcal{O}_Z \oplus F \rightarrow i_* F$.

Lad $\mathcal{G}$ være kernen og lad $p: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_Z$, $q: \mathcal{G} \rightarrow F$ være morfierne induceret af $\mathcal{O}_Z \oplus F \rightarrow \mathcal{O}_Z$ og $\mathcal{O}_Z \oplus F \rightarrow F$. Da $i_* F$ er quasicohærent (!) er også $\mathcal{G}$ quasicohærent, og da $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}_Z \oplus F$ er $\mathcal{G}$ coherent med $\text{Supp } \mathcal{G} \subseteq Y$. Nu er $\mathcal{G}/U \xrightarrow{p} \mathcal{O}_Z/U$ en isomorfi, og $\mathcal{G}/U \rightarrow F/U$ er en isomorfi på billedet $F_0/U \subseteq F/U$. Altså er $[F_0] \equiv [\mathcal{G}] \equiv [\mathcal{O}_Z]$ mod L . $\square$

4. For en afsluttet delmængde $Y \subseteq X$ defineres codimensionen af Y i X som

$$\text{codim } Y = \text{codim}(Y, X) := \inf_{Y \in Y} \dim \mathcal{O}_{X, Y}$$

Bemærk, at $\text{codim } Y = \min_{\eta} \dim \mathcal{O}_{X, \eta}$, hvor η gennemløber de generiske punkter for Y 's komponenter.

Hvis $\text{Codim } \text{Supp } F \geq \dim \mathcal{O}_{X, \eta}$, så er F_η en $\mathcal{O}_\eta$ -modul af endelig længde, thi enten er $\eta \notin \text{Supp } F$, og så er $F_\eta = 0$ eller $\eta \in \text{Supp } F$ og så svarer η i en affin omgæng af η til et primideal, der nødvendigvis er minimalt for den til F svarende modul.

SÆTNING. Lad $Y \subseteq X$ være en afsluttet delmængde, og lad $K_Y^1(X) \subseteq K_Y(X)$ være undergruppen frembragt af $[F]$ 'er, hvor $\text{Supp } F \subseteq Y$ og $\text{codim } \text{Supp } F > \text{codim } Y$. Da er K_Y/K_Y^1 en fri kommutativ gruppe frembragt af $[\mathcal{O}_{\overline{\eta}}]$ mod K^1

Kom. Alg. 1978

hvor η gennemløber elementer $\eta \in Y$ af $\dim \mathcal{O}_{X,\eta} = \text{codim } Y$.

Hvis $\text{Supp } F \subseteq Y$ gælder

$$[F] \equiv \sum_{\eta} \text{long}_{\mathcal{O}_{\eta}} F_{\eta} [\mathcal{O}_{\{\eta\}}] \pmod{K_Y^1}.$$

Bewis. Er $G = \bigoplus_{\eta} \mathbb{Z} e_{\eta}$ den fri kommutative gruppe frembragt af de endelig mange η 'er, definerer $F \mapsto \sum_{\eta} \text{long } F_{\eta} e_{\eta}$ en surjektiv homomorfi $: K_Y(X) \rightarrow G$, som afbilder $[\mathcal{O}_{\{\eta\}}] \mapsto e_{\eta}$, og som forsvinder på K_Y^1 . Det er derfor nok at vise, at $[\mathcal{O}_{\{\eta\}}]$ 'erne frembringer K_Y mod K_Y^1 . Dette vises ved noethersk induktion efter Y : Hvis Y er irreducibel, er $K_Y^1 = L_Y$ og påstanden følger af lemma 3. Hvis Y er reducibel, har vi for hvert $Y' \subseteq Y$ en oplagt homomorfi $K_{Y'}(X) \rightarrow K_Y(X)$, som afbilder $K_{Y'}^1$ ind i K_Y^1 , og lemma 3 udsiger, at $K_Y(X) = L_Y = \sum_{Y' \subset Y} \text{Im}(K_{Y'} \rightarrow K_Y)$. $\square$

5. For hvert r defineres $K_r(X) \subseteq K(X)$ som undergruppen frembragt af $[F]$ 'er med $\text{codim Supp } F \geq r$. Vi har $K = K^0 \supseteq K^1 \supseteq K^2 \supseteq \dots$

SÆTNING. Hvis $\text{codim Supp}(F) \geq r$, så er

$$[F] \equiv \sum_{\dim \mathcal{O}_{\eta} = r} \text{long } F_{\eta} [\mathcal{O}_{\{\eta\}}] \pmod{K_{r+1}}$$

Bewis. Konsekvens af sætning 4 med $Y = \text{Supp } F$ idet $K_Y^1(X) \subseteq K^{r+1}(X)$ $\square$

6. Lad $\text{Cyc}^r(X)$ er gruppen af co- r -cyclor på X , d: den fri kommutative gruppe frembragt af punkter $\eta \in X$ af $\dim \mathcal{O}_{\eta} = r$, har vi en oplagt homomorfi $\text{Cyc}^r(X) \rightarrow K^r(X)$. Af sætning 5 følger, at $\text{Cyc}^r \rightarrow K^r/K^{r+1} =: A^r(X)$.

er surjektiv, således at $A^r(X)$ er en kvotient af $\text{Cyc}^r(X)$.

Komm. Alg. 1978

Er X et integritetsskema har vi $\mathbb{Z} = \text{Cyc}^0 \xrightarrow{\sim} K/K^1 = \mathbb{Z}$ ifølge sætning 4, og $K \rightarrow \mathbb{Z}$ er netop $\text{rg}: K \rightarrow \mathbb{Z}$, jfr. eks. 2(a). Bemærk, at $\text{Cyc}^1(X)$ er gruppen $\mathcal{W}(X)$ af Weil-divisorer på X .

7. $K(X)$ kan også filtreres ved dimension af supporten ν : $K_r(X)$ er undergruppen frembragt af $[\mathcal{F}]$ 'er med $\dim \text{Supp } \mathcal{F} \leq r$. Vi har $K \supseteq \dots \supseteq K_r \supseteq K_{r-1} \supseteq \dots \supseteq K_0 \supseteq K_{-1} = (0)$. Hvis X (af endelig type over et legeme k) er equidimensional af dimension d har vi $K^+ = K_{d-r}$. Specielt er altså $K^{d+1} = 0$.

$\text{Cyc}^d(X) = \text{Cyc}_0(X)$ er den fri gruppe frembragt af de afsluttede punkter. Den oplagte homomorfi $\deg: \text{Cyc}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ defineret ved $P \mapsto \dim_k \kappa(P)$ "tæller" (med multiplacitet) antallet af punkter. Hvis X desuden er proper over k er diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyc}_0(X) & \longrightarrow & K_0(X) \subseteq K(X) \\ & \searrow \text{deg} & \swarrow \chi \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

kommutativt, thi $\chi(\mathcal{O}_{\overline{\{P\}}}) = \sum (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_{\overline{\{P\}}})$
 $\sum (-1)^i \dim_k H^i(\overline{\{P\}}, \mathcal{O}_{\overline{\{P\}}}) = \dim_k \Gamma(\overline{\{P\}}, \mathcal{O}_{\overline{\{P\}}}) = \dim_k \kappa(P)$.

For $z \in K_0(X)$ angiver $\chi(z)$ altså (med multiplacitet) antallet af punkter i "supporten" for z .

8. For en lokalt fri modul $\mathcal{E}$ af endelig rang er

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$$

en exact funktor (coherente $\mathcal{O}_X$ -moduler) $\rightarrow$ (coherente $\mathcal{O}_X$ -moduler). Den definerer altså en homomorfi

$$K(X) \rightarrow K(X) \quad \text{beteqnet} \quad z \mapsto \mathcal{E} \cdot z$$

Det er klart at $\mathcal{E} \cdot z$ kun afhænger af $\mathcal{E}$'s isomorfiklasse, og at der for en kortexact følge $0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow 0$

Komm. Alg. 1978

af lokalt fii-moduler gælder $\varepsilon \cdot z = \varepsilon' \cdot z + \varepsilon'' \cdot z$ [thi da (*) lokalt er splitexact (!) er også $0 \rightarrow \varepsilon' \otimes F \rightarrow \varepsilon \otimes F \rightarrow \varepsilon'' \otimes F \rightarrow 0$ exact]. Er ε og ε' lokalt fii gælder

$$(\varepsilon' \otimes \varepsilon) \cdot z = \varepsilon' \cdot (\varepsilon \cdot z) \quad z \in K(X).$$

SÆTNING. Er ε lokalt fii af rang r , og er $z \in K^r(X)$, så er

$$\varepsilon \cdot z \equiv rz \pmod{K^{r+1}(X)}.$$

Bewis. Vi kan antage $z = [F]$ og påstanden følger af sætning 5 idet $\varepsilon \otimes F$ og F^r i ethvert punkt har isomorfe stia. $\square$

9. Hvis $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ ($\because \mathcal{L}$ er invertibel = lokalt fii af rang 1) og $z \in K^r$, har vi $z - \mathcal{L} \cdot z \in K^{r+1}$. Vi sætter $C(\mathcal{L})(z) = C_z(\mathcal{L}) = z - \mathcal{L}^{-1} \cdot z = (1 - \mathcal{L}^{-1}) \cdot z \in K^{r+1}/K^{r+2} = A^{r+1}$ og vi kan opfatte $z \mapsto C_z(\mathcal{L})$ en familie af homomorfier $C(\mathcal{L}): A^r(X) \rightarrow A^{r+1}(X)$.

($\because$ en homomorfi $A^r(X) \rightarrow A^r(X)$, homogen af grad 1).

SÆTNING $C(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = C(\mathcal{L}) + C(\mathcal{M}) : A^r(X) \rightarrow A^{r+1}(X)$.

thi for $z \in K^r$ har vi $(1 - \mathcal{L}^{-1}) \cdot z + (1 - \mathcal{M}^{-1}) \cdot z = (1 - \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1}) \cdot z = [(1 - \mathcal{L}^{-1})(1 - \mathcal{M}^{-1})] \cdot z = (1 - \mathcal{L}^{-1}) \cdot [(1 - \mathcal{M}^{-1}) \cdot z] \equiv 0 \pmod{K^{r+2}}$ ved 2 gange anvendelse af sætning 8 $\square$

Bemærkning. Som bekendt har vi en homomorfi $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Cyc}^1(X)$ af Cartier-divisorerne ind i Weil-divisorerne og en homomorfi $D \mapsto \mathcal{O}(D)$ af $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$. Man kan vise, at

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Cyc}^1(X) & \rightarrow & A^1(X) \\ \text{Div}(X) & \nearrow & & & \\ & \searrow & \text{Pic}(X) & \xrightarrow{C_1} & \end{array} \quad \text{er kommutativt.}$$

10. For $z \in K^r$ og $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s \in \text{Pic}(X)$ sætter vi

$$C_z(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s) = C(\mathcal{L}_1) \circ \dots \circ C(\mathcal{L}_s)(z) \in A^{r+s}(X)$$

$C_z(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s) \in A^{r+s}(X)$ er i $K^{r+s}(X)$ repræsenteret af

$$(1 - \mathcal{L}_1^{-1}) \dots (1 - \mathcal{L}_s^{-1}) \cdot z$$

Af sætning 9 følger, at $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s) \mapsto C_z(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s)$ er multiadditiv (iadditiv i hver variabel). Endvidere er den klart symmetrisk.

Hvis $\dim X = d$, så er $K^{d+1}(X) = 0$, så $A^d(X) = K^d(X)$.

Vi får derfor

SÆTNING. Er $\dim X = d$ og er $z \in K^{d-s}(X)$, så er

$$(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s) \mapsto C_z(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s) = (1 - \mathcal{L}_1^{-1}) \dots (1 - \mathcal{L}_s^{-1}) \cdot z$$

en symmetrisk, multiadditiv afbildning

$$\text{Pic}(X) \times \dots \times \text{Pic}(X) \rightarrow K^d(X). \quad \square$$

Er $D_1, \dots, D_s$ divisorer på X sættes $C_z(D_1, \dots, D_s) = C_z(\mathcal{O}(D_1), \dots, \mathcal{O}(D_s))$

11. Er X proper over k og equidimensional af dimension d sætter vi

$$\langle z, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s \rangle = \chi(C_z(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s)) \in \mathbb{Z}.$$

for $z \in K^{d-s}(X)$, og specielt

$$\langle \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d \rangle = \langle 1, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d \rangle, \text{ hvor } 1 = [\mathcal{O}] \in K^0(X).$$

Hvis $D_1, \dots, D_d$ er divisorer på X sættes

$$D_1 \cdots D_d = \langle D_1, \dots, D_d \rangle = \langle \mathcal{O}(D_1), \dots, \mathcal{O}(D_d) \rangle \in \mathbb{Z}.$$

og dette tal kaldes snittallet af divisorerne $D_1, \dots, D_d$.

En divisor D kaldes effektiv, hvis $\mathcal{O}(-D) \subseteq \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}(-D)$ er da et ideal i $\mathcal{O}$, og kvotientgruppen

$\mathcal{O}_D := \mathcal{O}/\mathcal{O}(-D)$ er strukturgruppe for et afsluttet

delskema (også betegnet) $D \subseteq X$. Vi skriver også $D \geq 0$.

12. Kurver. Hvis X er en proper kurve (i: equidimensional af dimension 1) skrives ofte $\deg \mathcal{L} = \langle \mathcal{L} \rangle$ (og $\deg \mathcal{D} = \langle \mathcal{D} \rangle$)

Hvis $\mathcal{D} \geq 0$ bliver skemaet $\mathcal{D}$ af dimension 0, og

$$\deg \mathcal{D} = - \sum_{P \in \mathcal{D}} \dim_k \mathcal{O}_{\mathcal{D}, P}$$

thi af den exacte folge $0 \rightarrow \mathcal{O}(-\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$ får vi

$$\deg \mathcal{D} = \langle \mathcal{D} \rangle = \chi([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-\mathcal{D})]) = \chi(\mathcal{O}_{\mathcal{D}}) = \dim \Gamma(\mathcal{D}, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) =$$

$$\sum_{P \in \mathcal{D}} \dim_k \mathcal{O}_{\mathcal{D}, P} \quad [\text{det følger specielt af denne definition af } \deg$$

for en god kurve stemmer overens med den tidligere]. Og

"Riemanns halvdel"

$$\dim \Gamma(\mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} + \dim H^1(X, \mathcal{O}(\mathcal{D})) + 1 - g$$

(i: $\chi(\mathcal{O}(\mathcal{D})) = \langle \mathcal{D} \rangle + \chi(\mathcal{O})$) følger af at $\langle \mathcal{D} \rangle = - \langle -\mathcal{D} \rangle$

$$= - \chi([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(\mathcal{D})]) = - \chi(\mathcal{O}) + \chi(\mathcal{O}(\mathcal{D})).$$

13. Flader. SÆTNING. Er X en proper regulær integritetsflade, og er C, D effektive divisorer således at $\dim C \cap D = 0$, da er

$$\langle C \cdot D \rangle = \sum_{P \in C \cap D} \dim_k \mathcal{O}_{C \cap D, P}$$

Bewis. Ifølge definitionen af $C \cap D$ har vi en exact folge

$$\mathcal{O}(-C) \oplus \mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap D} \rightarrow 0$$

[Idealknippe for fællesmængde er sum af idealknipperne].

Nu er folgen

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-C-D) \rightarrow \mathcal{O}(-C) \oplus \mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{C \cap D} \rightarrow 0$$

exact, thi er f, g ligninger for C, D i omegnen af et $x \in X$.

bliver folgen i stråene svarende til x :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_x f g \rightarrow \mathcal{O}_x f \oplus \mathcal{O}_x g \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x / (f, g) \rightarrow 0$$

Enten er $(f, g) \subset \mathcal{O}_x$, og så er $x \in C \cap D$; vi slutter, at x er et afsluttet punkt, og af $\dim \mathcal{O}_x = 2$, $\dim \mathcal{O}_x / (f, g) = 0$ følger da $\mathcal{O}_x$ er regulær (Macaulay), at (f, g) er en regulær følge i $\mathcal{O}_x$. Eller $(f, g) = \mathcal{O}_x$, og så må (f.eks.) f være invertibel og dermed (f, g) en regulær følge i $\mathcal{O}_x$. Heraf følger exactheden, og vi finder

$$\begin{aligned} \sum_P \dim \mathcal{O}_{C \cap D, P} &= \dim \Gamma(C \cap D, \mathcal{O}_{C \cap D}) = \dim \Gamma(X, \mathcal{O}_{C \cap D}) \\ &= \chi(\mathcal{O}_{C \cap D}) = \chi([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-C)] - [\mathcal{O}(-D)] + [\mathcal{O}(-C-D)]) \\ &= \chi((1 - \mathcal{O}(-C)) \cdot (1 - \mathcal{O}(-D)) \cdot 1) \\ &= \chi(C, (C, D)) = \langle C, D \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Hvis C er en effektiv divisor på X bliver delskemaet $C \subseteq X$ en (Macaulay)-kurve. For hver divisor D på X kan $\mathcal{O}_C(D) := \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}(D)$ opfattes som en invertibel modul på C .

SÆTNING. $\langle C, D \rangle = \deg_C \mathcal{O}_C(D)$, når $C \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{thi } \deg_C(\mathcal{O}_C(D)) &= \chi_C(\mathcal{O}_C) - \chi_C(\mathcal{O}_C(-D)) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_C(-D)) \\ &= \chi([\mathcal{O}_C] - \mathcal{O}(-D) \cdot [\mathcal{O}_C]) = \chi((1 - \mathcal{O}(-D)) \cdot ([\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-C)])) \\ &= \langle C, D \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_C(C)$ kaldes normalknippet og betegnes $\mathcal{N}_{C/X}$,
altså $\langle C, C \rangle = \deg \mathcal{N}_{C/X}$.

14. Dualiserende knippe. Lad X være et projektivt (over k) Macaulay-skema, equidimensionalt af dimension d . Man kan da vise, at der findes en coherent modul $\omega_X = \omega$ og en isomorfi

$$H^i(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \omega) \simeq H^{d-i}(X, \mathcal{E})'$$

for alle lokalt frie moduler $\mathcal{E}$ på X . Hvis X er glat bliver ω et invertibelt knippe, svarer altså til en kanonisk divisor klasse K_X .

For en god kurve får vi "Roch's halvdel":

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}(D)) = \dim \Gamma(K_X - D).$$

For en projektiv glat flade får vi

RIEMANN-ROCH'S SÆTNING:

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2} \langle D, D - K \rangle.$$

NB

Generelt har vi nemlig $\chi(\mathcal{E} \otimes \omega) = \chi(\mathcal{E})$ og får med $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$:

$$\begin{aligned} \langle D, D - K \rangle &= \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes \omega^{-1} \rangle = -\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1} \rangle + \langle \mathcal{L}, \omega^{-1} \rangle \\ &= \chi((1 - \mathcal{L}^{-1}) \cdot (\mathcal{L} - 1) \cdot 1 + (1 - \mathcal{L}^{-1})(1 - \omega) \cdot 1) \\ &= \chi((1 - \mathcal{L}^{-1})([\mathcal{L}] - [\omega])) \\ &= \chi(\mathcal{L}) + \chi(\mathcal{L}^{-1}\omega) - \chi(\mathcal{O}) - \chi(\omega) = 2[\chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O})] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ADJUNKTIONSFORMLEN. $\langle C, C + K \rangle = 2g(C) - 2$ når $C \geq 0$,
hvor $g(C) := 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$ er aritmetisk genus for kurven C ,

$$\begin{aligned} \text{thi } \langle C, C + K \rangle &= \langle -C, -C - K \rangle \stackrel{RR}{=} 2\{\chi(\mathcal{O}(-C)) - \chi(\mathcal{O})\} \\ &= -2\chi(\mathcal{O}_C) = 2(g - 1). \end{aligned}$$

Eksempel For $X = \mathbb{P}_2$ kan man vise, at $\omega = \mathcal{O}(-3)$

At $C \subset \mathbb{P}_2$ er en plan kurve af grad e betyder, at $\mathcal{O}(C) \simeq \mathcal{O}(e)$

L', L'' forskellige linier i $\mathbb{P}_2$, har vi $\langle L', L'' \rangle = 1$ (Sætning 13)

Følgelig er $\langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(e) \rangle = de \langle \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1) \rangle = de$, og for kurver C og D af grad e og d finder vi

$$\langle C, D \rangle = ed \quad (\text{Bezouts sætning}).$$

Adjunktionsformlen giver

$$2g - 2 = \langle \mathcal{O}(e), \mathcal{O}(e) \otimes \mathcal{O}(-3) \rangle = e(e - 3)$$

altså

$$g(C) = \frac{(e-1)(e-2)}{2}.$$

DIVISORER

X noethensk integritetsskema med funktionslegeme $R = R(X)$,
 $R =$ konstante knippe ($U \mapsto R$ for $\emptyset \subset U \subseteq X$). Knippet Div af Cartierdivisorer på X er kvotientknippet

$$\text{Div} = R^*/\mathcal{O}^*$$

og gruppen $\text{Div}(X)$ af Cartierdivisorer på X er

$$\text{Div}(X) = \Gamma(X, \text{Div}).$$

Ifølge definitionen har vi en kortkædet følge af knipper

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow R^* \rightarrow \text{Div} \rightarrow 0$$

og dermed en lang-exakt følge

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^* \rightarrow R^* \rightarrow \text{Div}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(X, R^*) \rightarrow \dots$$

SÆTNING. $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(X) = \{\text{invertible } \mathcal{O}_X\text{-moduler}\} / \text{isomorfi.}$

og $\text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*)$ er givet ved $D \mapsto \mathcal{O}(D)$.

Men præcist: $H^1(X, \mathcal{O}^*) = \check{H}^1(X, \mathcal{O}^*) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, og
 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}_{\mathcal{U}}(X) = \{ \mathcal{L} \in \text{Pic}(X) \mid \mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{O}|_{\mathcal{U}} \text{ når } \mathcal{U} \in \mathcal{U} \}.$

KOROLLAR. Hvert $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(D)$ for passende $D \in \text{Div}(X)$

thi da enhver invertibel R -modul er $\simeq R$ (!!), er $H^1(X, R) =$

$\text{Pic}(X, R) = 0$ så δ er surjektiv.

Def. Hvis $\mathcal{O}(E) \subseteq \mathcal{O}(D)$ skrives $E \preceq D$. Specielt $0 \preceq D$ hvis $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(D)$.

Knippet $\mathcal{W}$ af Weil-divisorer på X defineres som

$$U \mapsto \mathcal{W}(U) = \bigoplus_{\xi \in U, \dim \mathcal{O}_{\xi} = 1} \mathbb{Z}.$$

med oplagte restriktioner. Det er et knippe (her bruges, at X er noethensk). Gruppen $\mathcal{W}(X)$ af Weil-divisorer på X er

$$\mathcal{W}(X) = \Gamma(X, \mathcal{W}) = \bigoplus_{\dim \mathcal{O}_{\xi} = 1} \mathbb{Z}.$$

Bemærk, at $\mathcal{W}(X) = \text{Cyc}^1(X)$, jfr "K" 6.

Hvis $\dim \mathcal{O}_{\xi} = 1$, så gælder for $\varphi \neq 0$ i $\mathcal{O}_{\xi}$, at $\mathcal{O}_{\xi}/(\varphi)$ har $\dim = 0$, således at

$$v_{\xi}(\varphi) = \text{long } \mathcal{O}_{\xi}/(\varphi) \geq 0$$

er veldefineret. Det er let at se, at $v_{\xi}(\varphi\psi) = v_{\xi}(\varphi) + v_{\xi}(\psi)$, således at v_{ξ} kan udvides til en homomorfi:

$$v_{\xi} : R^* \rightarrow \mathbb{Z}.$$

(R er brøkleget for $\mathcal{O}_{\xi}$).

For $\varphi \in R^*$ er $w(\varphi) = \sum v_{\frac{x}{y}}(\varphi) \cdot \frac{x}{y}$ en Weil-divisor ($v_{\frac{x}{y}}(\varphi) = 0$ for næsten alle $\frac{x}{y}$), og w definerer klart en gruppe-morfi $R^* \rightarrow W$, som forsvinder på $\mathcal{O}^*$. Vi kan altså opfatte w som en morfi

$$w: \text{Div} \rightarrow W.$$

SÆTNING. Antag at X er normal ($\therefore$ alle små $\mathcal{O}_x$ er helt afsluttede). Da gælder

$$E \leq D \Leftrightarrow w(E) \leq w(D).$$

Specielt er altså $w: \text{Div} \rightarrow W$ en monomorfi. Videre er $w: \text{Div} \rightarrow W$ en isomorfi netop når alle små $\mathcal{O}_x$, $x \in X$ er faktorielle.

Beweis " $\Rightarrow$ " er oplagt. " $\Leftarrow$ " Nok at vise, at $0 \leq w(D) \Rightarrow \mathcal{O} \leq \mathcal{O}(D)$.

Nu er $\mathcal{O}(D)_x = \mathcal{O}_x \cdot \varphi^{-1}$, hvor $\varphi \in R^*$ er en repræsentant for $D_x \in R^*/\mathcal{O}_x^*$ og vi skal vise, at $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{O}_x \cdot \varphi^{-1}$, altså at $\varphi \in \mathcal{O}_x$. Nu er $W_x = W(\mathcal{O}_x)$ og $w(D)_x = \text{div}(\varphi) \in W(\mathcal{O}_x)$.

Påstandene følger nu af "Supplement til Matsumura" sætning 2, der udsiger, at $\text{div}(\varphi) \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \mathcal{O}_x$ og at følger

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_x^* \rightarrow R^* \rightarrow W(\mathcal{O}_x)$$

er exact med den sidste afbildning surjektiv netop når $\mathcal{O}_x$ er faktoriel. $\square$

For $D \in \text{Div}(X)$ har vi $\mathcal{O}(D) \subseteq R$, specielt $\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \subseteq R$.

Overvej, at $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \Leftrightarrow D + \text{div}(\varphi) \geq 0$.

Lad $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$. Hvert $s \neq 0$; $\Gamma(X, \mathcal{L})$ definerer da en effektiv divisor $D = \text{div}_{\mathcal{L}}(s)$ og en isomorfi

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$$

på følgende måde: $s \neq 0$ definerer en homomorfi $\neq 0$:

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}$$

og dermed i de generiske små $R \simeq \mathcal{O}_{\eta} \rightarrow \mathcal{L}_{\eta}$ som må være injektiv (begge vektorrum af dimension 1 over R).

For hvert $x \in X$ har vi

$$R = \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\eta & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}_\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_x & \rightarrow & \mathcal{L}_x \end{array}$$

Elementet $s_x \in \mathcal{L}_x$ kan skrives $s_x = \varphi_x \sigma$, hvor σ er en frembringer (bestemt mod $\mathcal{O}_x$) for $\mathcal{L}_x$, og $\varphi_x \in \mathcal{O}_x$ (bestemt mod $\mathcal{O}_x^*$). Det er klart, at φ_x 'erne svarer til en effektiv Cartier-divisor D og at $\mathcal{L}$ via isomorfien $\mathcal{O}_\eta \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_\eta$ svarer til $\mathcal{O}(D) \subseteq R$.

Bemærk, at vi for en divisor E og $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}(E)) \setminus \{0\} \subseteq R^*$ har $\text{div}_E(\varphi) = E + \text{div}(\varphi)$.

Antag X er projektiv over k .

Er $W \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ et underrum sætter vi

$$\text{div}_\mathcal{L}(W) = \{ \text{div}_\mathcal{L}(s) \mid s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\} \}$$

Et lineært system L på X er en mængde L af (effektive) divisorer, der har formen $\text{div}_\mathcal{L}(W)$ for passende $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ og underrum $W \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$. Bemærk, at alle divisorer i L er lineært ækvivalente, og $\mathcal{L}$ og W essentielt er entydigt bestemt ved L (når $L \neq \emptyset$), thi vælges $D_0 \in L$, $D_0 = \text{div}_\mathcal{L}(s_0)$, så definerer s_0 en isomorfi: $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(D_0)$, hvorved W svarer til $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}(D_0))$ og $L = \text{div}_{D_0}(V)$.

Et lineært system L er komplet, hvis enhver effektiv divisor $\sim$ med divisor i L selv $\in L$. Dette betyder, at L har formen

$$L = |\mathcal{L}| := \{ \text{div}_\mathcal{L}(s) \mid s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\} \}.$$

Dimensionen af det lineære system L defineres som

$$\dim L = \dim_k W - 1.$$

Bemærk, at vi for $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\}$ har $X \setminus \text{div}_\mathcal{L}(s) = X_s$, hvor $X_s = \{x \in X \mid s(x) \neq 0 \text{ i } \mathcal{L}(x)\}$. Heraf følger, at lineære systemer af dimension ≥ 1 "udspænder" de rationale punkter på X i den forstand at der for hvert rationelt punkt $x \in X$ findes $D \in L$ med $x \in D$. Er nemlig $s_0, s_1 \in W$ lineært

uafhængige, så er $s_0(x), s_1(x) \in \mathcal{L}(x) \simeq \kappa(x) = k$ lineært afhængige, så der findes $s = \lambda s_0 + \mu s_1 \neq 0$ med $s(x) = 0$, og så er $x \in \text{div}_x(s)$.

Viden følger det, at L er uden faste punkter (d. for hvert $x \in X$ findes $D \in L$ med $x \notin D$) netop når $\mathcal{L}$ er frembragt af globale sektioner fra $W \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$. Er $s_0, \dots, s_m$ et k -frembringelsessystem for et sådant W , svarer $s_0, \dots, s_m$ til en morfi $\psi: X \rightarrow \mathbb{P}_m$ og en isomfi $\mathcal{L} \simeq \psi^* \mathcal{O}(1)$, hvorved

$$k^{n+1} = \Gamma(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(1)) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \Gamma(X, \mathcal{L})$$

har billedet W ($T_i \mapsto s_i$). Dvej, idet elementer $f \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ svarer til hyperplaner $H_f \subseteq \mathbb{P}_m$, at $\tilde{\psi}(f) = 0 \Leftrightarrow H_f \supseteq \psi(X)$ og at der for hyperplaner $H_f \not\supseteq \psi(X)$ gælder

$$\psi^{-1}(H_f) = \text{div}_x(\tilde{\psi}(f)) \text{ i } X.$$

Slut heraf, at de lineære systemer uden faste punkter kan opfattes som hyperplansnittene i X mht morfien $X \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}_m$.

SÆTNING. Antag X/k er proper. Da er et lineært system L very ample (d. af formen $|\mathcal{L}|$ med $\mathcal{L}$ very ample) netop når der findes en afsluttet immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, så at $L = \{ \text{hyperplansnit i } X \}$. Immersionen kan vælges således at $X \not\subseteq$ nogen hyperplan i $\mathbb{P}_n$.

Bewis. "Når" er trivialt. "Kun når". Der findes en afsluttet immersion $\psi: X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$, så at $\mathcal{L} \simeq \psi^* \mathcal{O}(1)$. Er $t_0, \dots, t_m$ billederne af $T_0, \dots, T_m$ i $\Gamma(X, \mathcal{L})$ er altså 1) $X = \bigcup_{i=0}^m X_{t_i}$ 2) X_{t_i} er affin 3) $\Gamma(X_{t_i}, \mathcal{O}_X)$ er frembragt af $t_j/t_i, j=0, \dots, m$ som k -algebra. Udtages en max. lin. uafh. delmængd. af t_i 'erne vil 1), 2) og 3) stadig være opfyldt. Vi kan derfor antage, at t_i 'erne er uafhængige. Suppleres med $t_{m+1}, \dots, t_N$ til en basis for $\Gamma(X, \mathcal{L})$ ser vi at den tilhørende morfi $\bar{\psi}: X \rightarrow \mathbb{P}_N$ er en immersion og dermed en afsluttet immersion. Det er nu klart, at

$$\Gamma(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}(1)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}) \text{ er bijektiv } \blacksquare$$

NB Hyperplansnittene m.h.t. en immersion $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ er ikke nødv. komplet.

Eksempel. Vi minder om at for en projektiv, glat irreducibel flade X/k vil snitparingen $\langle, \rangle : \text{Div}(X) \times \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ opfylde

$$(1) \quad \langle C, D \rangle = \langle D, C \rangle$$

$$(2) \quad \langle C_1 + C_2, D \rangle = \langle C_1, D \rangle + \langle C_2, D \rangle$$

$$(3) \quad C \sim C' \Rightarrow \langle C, D \rangle = \langle C', D \rangle$$

$$(4) \quad C, D \geq 0, \dim C \cap D = 0 \Rightarrow \langle C, D \rangle = \sum_{P \in C \cap D} \dim_k \mathcal{O}_{C \cap D, P}.$$

(4') Hvis C, D er glatte irreducible kurver med

transversal skæring ($\because \dim_k \mathcal{O}_{C \cap D, P} = 1$ for $P \in C \cap D$) så er $\langle C, D \rangle = |C \cap D|$.

Lad os et øjeblik sige, at $\langle C, D \rangle$ er beregnetlig (resp. beregnetlig') hvis $\langle C, D \rangle$ kan udregnes ud fra (1)-(4) (resp. hvis $k = \bar{k}$ og $\langle C, D \rangle$ kan udregnes ud fra (1), (2), (3) og (4')).

SÆTNING. Hvis $C \sim$ effektiv $\neq 0$ (resp. $\sim$ effektiv, glat), og H er ample, så er $\langle C, H \rangle > 0$ beregnetlig (resp. beregnetlig').

BEVIS. Vi kan antage at C er integritets (resp. og glat) kurve og at H er very ample. Altså findes $X \hookrightarrow \mathbb{P}_r$, så at

$$|H| = \{X \cap L \mid L \subseteq \mathbb{P}_r \text{ er en hyperplan}\}.$$

Vælg L så at $C \not\subseteq L$ (resp. (Bertini)), så at $X \cap L$ og $C \cap L$ er glatte). Vi kan antage, at $H = X \cap L$, men så er $C \cap H = C \cap L$ og $\langle C, H \rangle$ kan beregnes ud fra (4) (resp. (4')). Da $C \cap L \neq \emptyset$ (!), er $\langle C, H \rangle > 0$. $\square$

SÆTNING. $\langle C, D \rangle$ er beregnetlig (resp. beregnetlig') for alle divisorer C, D , og > 0 , hvis C, D er ample.

BEVIS. Sandt hvis C, D er ample. Vi kan nemlig antage, at C er very ample, og dermed $\sim$ effektiv $\neq 0$ (resp. (Bertini) $\sim$ effektiv, glat); påstanden følger af den foregående sætning.

Lad nu H være very ample, og lad C, D være vilkårlige.

Der findes $n \in \mathbb{N}$ så at $K = nH$, $C+K$, $D+K$ alle er ample, men så kan $\langle C, D \rangle$ udtrykkes ved $\langle C+K, D+K \rangle$, $\langle C+K, K \rangle$, $\langle D+K, K \rangle$ og $\langle K, K \rangle$. $\square$

Bemærk. Nogen analyse viser, at $\langle C, D \rangle$ beregnet som ovenfor er veldefineret.

OM $\text{Spec } A$ (A kommutativ ring).

1. $\text{Spec } A$ som mængde er $\text{Spec } A = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ er primideal}\}$. Det er bekendt at tænke på $\text{Spec } A = X$ som en abstrakt mængde X , således at der er en bijektiv forbindelse $x \mapsto \mathfrak{p}_x$ mellem elementerne i X og primidealene i A .

For delmængden $F \subseteq A$ og $W \subseteq X$ sættes

$$V(F) = \{x \in X \mid \mathfrak{p}_x \supseteq F\} \quad \mathcal{I}(W) = \bigcap_{x \in W} \mathfrak{p}_x, \text{ radikalideal i } A.$$

Vi har klart

$$F \subseteq F' \Rightarrow V(F) \supseteq V(F') \quad W \subseteq W' \Rightarrow \mathcal{I}(W) \supseteq \mathcal{I}(W')$$

$$V\left(\bigcup_{\alpha} F_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} V(F_{\alpha}) \quad \mathcal{I}\left(\bigcup_{\alpha} W_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} \mathcal{I}(W_{\alpha})$$

$$V(0) = X$$

$$\mathcal{I}(X) = \{\text{nilpotente}\}$$

$$V(1) = \emptyset$$

$$\mathcal{I}(\emptyset) = A.$$

samt $V(A \cdot F) = V(F)$ og $V(F \cdot \mathcal{G}) = V(F) \cup V(\mathcal{G})$.

$$\boxed{\mathcal{I}(V(F)) = \text{Rad}(A \cdot F)} \quad \bigg| \quad V(\mathcal{I}(V(F))) = V(F)$$

For $f \in A$ sættes $\boxed{D(f) = X_f = \{x \in X \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}} = X \setminus V(f)$.

Klart, at $X \setminus V(F) = \bigcup_{f \in F} X_f$. $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

For $g, f_{\alpha} \in A$ gælder

$$X_g \subseteq \bigcup_{\alpha} X_{f_{\alpha}} \Leftrightarrow V(g) \supseteq V(\{f_{\alpha}\}) \Leftrightarrow \text{Rad}(g) \subseteq \text{Rad}(A \cdot \{f_{\alpha}\})$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N, c_1, \dots, c_N : g^n = c_1 f_{\alpha_1} + \dots + c_N f_{\alpha_N}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_N : X_g \subseteq X_{f_{\alpha_1}} \cup \dots \cup X_{f_{\alpha_N}}.$$

2. Zariski topologien på $X = \text{Spec } A$ defineres ved at de afsluttede mængder i X er delmængder af formen $V(F)$. Delmængderne $X_f, f \in A$ er altså en basis for systemet af åbne mængder. Afslutningen af en delmængde $W \subseteq X$ bliver

$$\bar{W} = V(\mathcal{I}(W))$$

Specielt er for et punkt $x \in X$ afslutningen

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X \mid \mathfrak{p}_y \supseteq \mathfrak{p}_x\},$$

så x er et afsluttet punkt netop hvis $\mathfrak{p}_x$ er et maksimalideal.

Det ses, at X er et T_0 -rum.

SÆTNING. Delmængderne X_g (og specielt $X = X_1$) er quasikompakte

Bewis. Følger af den sidste overvejelse i 1. ▮

OPGAVE. $X = \text{Spec } A$ er sammenhængende $\Leftrightarrow A$ er indekomponabel
(d: $\neq A_1 \times A_2$).

For $x \in X$ betegner vi med $\mathfrak{m}_x$ maksimalidealet $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}_x A_{\mathfrak{p}_x}$
i den lokale ring $A_{\mathfrak{p}_x}$ og med $\kappa(x)$ restklasseløse

$$\kappa(x) = A_{\mathfrak{p}_x} / \mathfrak{m}_x = \text{brøklese for } A/\mathfrak{p}_x.$$

Vi skriver $f_x = f/1 \in A_{\mathfrak{p}_x}$ og $f(x) := (f_x \text{ mod } \mathfrak{m}_x) \in \kappa(x)$

kaldes f 's værdi i x .

Bemærk, at

$$V(F) = \{x \in X \mid \forall f \in F: f(x) = 0\} \quad \mathcal{I}(W) = \{f \in F \mid \forall x \in W: f(x) = 0\}$$

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

OPGAVE 2. Vis, at de afsluttede irreducible delmængder i
 $X = \text{Spec } A$ er af formen $\overline{\{x\}}$, med et entydigt bestemt
 $x \in X$.

3. Funktor $\text{Spec}: (\text{Rings})^{\text{op}} \rightarrow (\text{Top})$. For en ringhomomorfi

$\mathfrak{v}: A \rightarrow B$ defineres $\tilde{\mathfrak{v}} = \text{Spec } \mathfrak{v}: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ ved

"kontraktion" d: For $y \in Y = \text{Spec } B$ er $\tilde{\mathfrak{v}}(y) = x \in X = \text{Spec } A$ be-
stemt ved at $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}_y \cap A := \mathfrak{v}^{-1}(\mathfrak{p}_y)$. Det er klart, at

$$\tilde{\mathfrak{v}}^{-1}(X_f) = Y_{\mathfrak{v}(f)}$$

hvoraf følger, at $\tilde{\mathfrak{v}}: Y \rightarrow X$ er kontinuert. Spec er såle-
des en kontravariant funktor: $(\text{Rings}) \rightarrow (\text{Top})$.

4. Idet $A \xrightarrow{\vartheta} B$ giver $\text{Spec } A = X \xleftarrow{\psi} Y = \text{Spec } B$ finder vi let for en delmængde $W \subseteq Y$, at

$$\mathcal{I}(\psi(W)) = \vartheta^{-1}(\mathcal{I}(W)).$$

Videre gælder for et ideal $I \subseteq B$, at

$$\boxed{V(\vartheta^{-1}(I)) = \overline{\psi(V(I))}}$$

thi da $\psi(V(I)) \subseteq V(\vartheta^{-1}(I))$, har vi " $\supseteq$ ", og er omvendt $x \in V(\vartheta^{-1}(I))$, d.v.s. $\mathfrak{p}_x \supseteq \vartheta^{-1}(I)$, så har vi

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}_x} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{p}_x} \end{array}$$

med $B_{\mathfrak{p}_x} \supset IB_{\mathfrak{p}_x}$. Et maksimalideal i $B_{\mathfrak{p}_x}/IB_{\mathfrak{p}_x}$ korrateres i B til et primideal $\mathfrak{p}_y \supseteq I$ med $\mathfrak{p}_y \cap A \subseteq \mathfrak{p}_x$. Vi har altså $x \in \overline{\{\psi(\mathfrak{p}_y)\}} \subseteq \overline{\psi(V(I))}$. $\square$

Specielt fås for $I = (0)$, at $\overline{\psi(Y)} = V(\vartheta^{-1}(0))$ og ser, at $\psi(Y)$ er tæt i $X \Leftrightarrow$ Kernen $\vartheta^{-1}(0) \subseteq \{\text{nilpotente}\}$.

Som korollar af Cohen-Seidenbergs 1. sætning fås
SÆTNING. Hvis $A \xrightarrow{\vartheta} B$ er en hel morfi, så er $Y \xrightarrow{\psi} X$ afsluttet, thi med betingelserne ovenfor kan $\mathfrak{p}_y$ da bestemmes så at $\mathfrak{p}_y \cap A = \mathfrak{p}_x$.

5. SÆTNING. Lad $A \xrightarrow{\vartheta} B$ være en ringhomomorfi således at hvert ideal $I \subseteq B$ har formen $I = BJ$ med et ideal $J \subseteq A$ ($\Leftrightarrow I = B(I \cap A)$), da er $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ en topologisk immersion.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

Beweis. Det er klart, at ψ er injektiv, og således definerer en bijektiv kontinuert afbildning $\chi: Y \rightarrow \psi(Y)$. Vi skal vise, at χ er en homeomorfi, altså en afsluttet afbildning, og det følger af at vi klart har

$$\chi(V(BJ)) = \psi(V(BJ)) = \psi(Y) \cap V(J) \quad \square$$

ANVENDELSE 1. En kvotient $A \rightarrow A/J$ giver en afsluttet immersion $\text{Spec } A/J \xrightarrow{\sim} V(J) \subseteq \text{Spec } A$.

ANVENDELSE 2. En lokalisering $A \rightarrow S^{-1}A$ giver en immersion $\text{Spec } S^{-1}A \xrightarrow{\sim} \{x \in X / \varphi_x \cap S = \emptyset\} \subseteq \text{Spec } A$,

specielt for $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ en åben immersion

$$\text{Spec } A_f \xrightarrow{\sim} X_f \subseteq X$$

og for $S = A \setminus \varphi_x$ en isomorfi

$$\text{Spec } A_{\varphi_x} \xrightarrow{\sim} \bigcap_{x \in U} U \subseteq X.$$

$$[\text{idet } \varphi_y \subseteq \varphi_x \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow \forall \text{ åben } U \ni x : y \in U]$$

ANVENDELSE 3. Til givet $A \xrightarrow{\psi} B$ og $x \in X = \text{Spec } A$ har vi

$$\begin{array}{ccccc} Y = \text{Spec } B & B & \longrightarrow & B_{\varphi_x} & \longrightarrow & B_{\varphi_x} / \varphi_x B_{\varphi_x} = B_A \otimes \kappa(x). \\ \downarrow \psi & \uparrow \psi & & \uparrow & & \uparrow \\ x \in X = \text{Spec } A & A & \longrightarrow & A_{\varphi_x} & \longrightarrow & \kappa(x) \end{array}$$

og vi får en isomorfi $\text{Spec}(B_A \otimes \kappa(x)) \xrightarrow{\sim} \psi^{-1}(x) \subseteq Y$.

Tilsvarende får vi for en afsluttet delmængde $Z = V(I) \subseteq X$ en isomorfi $\text{Spec}(B_A \otimes A/I) \xrightarrow{\sim} \bar{\psi}'(Z) \subseteq B$.

6. Strukturknippet på $\text{Spec } A = X$. For en åben delmængde $U \subseteq X$, er

$$S_U = \{f \in A \mid \chi_f \geq U\}$$

en multiplikativ delmængde af A , og

$$\alpha: U \longmapsto S_U^{-1}A$$

definerer på oplagt måde et præknappe af ringe på X .

For stråene finder vi

$$\alpha_x = \varinjlim_{x \in U} (S_U^{-1}A) = \left(\bigcup_{x \in U} S_U \right)^{-1}A = (A \setminus \varphi_x)^{-1}A = A_{\varphi_x}.$$

Bemærk, at $S_x = A^*$ så at $A \xrightarrow{\sim} \alpha(x)$ [og at $\alpha(\emptyset) = 0$].

Men generelt ser vi let for $f \in A$, at

$$A_f \cong S_{x_f}^{-1} A = \mathcal{Q}(x_f)$$

og at vi har følgende

LEMMA. Lad $U \subseteq X$ være en basisåben ($\exists$ af formen x_g for passende $g \in A$), da gælder:

I) Hvis $a \in \mathcal{Q}(X)$ opfylder $a|U = 0$, så findes $f \in \mathcal{Q}(X)$ med $x_f = U$ og $fa = 0$

II) For hvert $s \in \mathcal{Q}(U)$ findes $a \in \mathcal{Q}(X)$ og $f \in \mathcal{Q}(X)$ med $x_f = U$ så at $(f|U)s = a|U$.

DEFINITION. Ringkuppet $\mathcal{Q}^\#$ associeret med prekuppet $\mathcal{Q}$ kaldes strukturkuppet på $\text{Spec } A$ og betegnes $\tilde{A}$

For hver åben delmængde U har vi altså en homomorfi $\mathcal{Q}(U) \rightarrow \tilde{A}(U)$

og for stæne en isomorfi

$$A_{\varphi_x} \cong \mathcal{Q}_x \cong \tilde{A}_x.$$

SÆTNING. For en basisåben $U \subseteq X$ er $\mathcal{Q}(U) \cong \tilde{A}(U)$. For $U = X_f$ har vi altså $A_f \cong \tilde{A}(X_f)$. Specielt $A \cong \tilde{A}(X)$.

Bewis. Det er nok at vise, at kuppelbetingelserne (i) og (ii) er opfyldt for en endelig overdækning med basisåbne!

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_r.$$

(i) Antag $s \in \mathcal{Q}(U)$, $s|U_\alpha = 0$. Skriv $(f|U)s = a|U$, $U = X_f$, $f_\alpha a = 0$

$X_f = U_\alpha$ ioverensstemmelse med I+II. Af $X_f = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_r}$ følger $f^\# = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$, altså $f^\# a = 0$ hvorfra det følger $s = 0$.

(ii) Givet $s_\alpha \in \mathcal{Q}(U_\alpha)$ med $s_\alpha|U_\alpha \cap U_\beta = s_\beta|U_\alpha \cap U_\beta$. Skriv ifølge II

* $\{ (f_\alpha|U_\alpha) s_\alpha = a_\alpha|U_\alpha, X_{f_\alpha} = U_\alpha \}$ Så er $f_\beta a_\alpha = f_\alpha a_\beta$ på $U_\alpha \cap U_\beta = X_{f_\alpha} f_\beta$ så

der findes $n_{\alpha\beta}$ med $(f_\alpha f_\beta)^{n_{\alpha\beta}} (f_\beta a_\alpha - f_\alpha a_\beta) = 0$. Kan antage $n_{\alpha\beta} = n$.

Kan erstatte a_α med $f_\alpha^n a_\alpha$ og f_α med $f_\alpha^n f_\alpha$ under bibeholdelse af (*), og har så $f_\beta a_\alpha = f_\alpha f_\beta$. Skriv $U = X_f$, $f = \sum f_\alpha c_\alpha$, da er

$$s = (\sum a_\alpha c_\alpha)|U \cdot (f|U)^{-1} \text{ brugbar. } \square$$

GRADUEREREDE MODULER

ANTAGELSE

(kommutativ)

1. DEFINITIONER. En graduert ring er en ring R i hvilken der er givet undergrupper $R^0, R^1, \dots$ således at
- $$R = R^0 \oplus R^1 \oplus \dots \quad \text{og} \quad R^i \cdot R^j \subseteq R^{i+j}.$$

Det følger let, at R^0 er en delring ($1 \in R^0$!!), og at undergrupperne R^i er R^0 -moduler. I det følgende vil vi ANTAGE at $R^1 \dots R^1 = R^i$. (eller ensbetydende hermed, at R som algebra over R^0 er frembragt af elementer i R^1). Eksempel: $R = k[x_1, \dots, x_n]$, hvor $R^i = \{\text{polynomier homogæne af grad } i\}$.

En graduert R -modul er en modul M , i hvilken der er givet undermoduler M^i (evt. skrevet $M^{(i)}$), $i \in \mathbb{Z}$, så at

$$M = \dots \oplus M^{-1} \oplus M^0 \oplus M^1 \oplus \dots \quad \text{og} \quad R^i \cdot M^j \subseteq M^{i+j}.$$

Hvert $x \in M$ kan entydigt skrives $x = \sum x^{(i)}$, (endelig sum) hvor $x^{(i)} \in M^i$. En R -lineær afbildning $\varphi: M \rightarrow N$ mellem graduerede moduler kaldes homogen, hvis $\varphi(M^i) \subseteq N^i$ for alle i . En undermodul $N \subseteq M$ kaldes homogen, hvis $x \in N \Rightarrow x^{(i)} \in N$, (eller ensbetydende hermed, hvis $N = \sum (N \cap M^i)$).

Det følger, at N selv er graduert, med $N^i = N \cap M^i$, og også for kvotienten får vi en graduering $(M/N)^i = M^i/N^i$.

For en graduert modul M defineres for $p \in \mathbb{Z}$ en ny graduert modul $M(p)$ ved $M(p)^i = M^{p+i}$.

Homotetier med elementer $a \in R$ er (normalt) ikke homogene afbildninger. Er imidlertid $a \in R^p$, kan homoteti med a opfattes som en homogen afbildning: $M \rightarrow M(p)$. (eller $: M(-p) \rightarrow M$). Tilsvarende kan vi for $x \in M^i$ opfatte $a \mapsto ax$ som en homogen afbildning: $R \rightarrow M(i)$ (eller $R(-i) \rightarrow M$).

Bemærk, at en undermodul i M er homogen, hvis og kun hvis den er R -frembragt af homogene elementer, d.v.s. elementer i $\cup M^i$.

OBSERVATIONER

2. DEFINITIONER. Specielt kan vi i den graderede ring R betragte homogene idealer $\mathfrak{a}$. For sådanne bliver kvotienten $R/\mathfrak{a}$ igen en graderet ring. Bemærk, at idealerne $R^{\geq i} = \sum_{v \geq i} R^v$ er homogene. Vores antagelse medfører, at
- $$R^{\geq i} = (R^{\geq 1})^i \quad (\text{Her er "i" på højresiden en eksponent}).$$

Det er let at se, at en graderet ring $= 0$ er et integritetsområde, netop hvis nul-reglen gælder for homogene elementer. Det følger, at et homogent ideal $\mathfrak{p} \subset R$ er et primideal, netop hvis reglen $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p} \vee y \in \mathfrak{p}$ gælder for homogene elementer. Ideal $\mathfrak{a}$ i R , som indeholder $R^{\geq 1}$ svarer til ideal $\mathfrak{a}_0$ i kvotienten $R/R^{\geq 1} = R^0$. De er homogene, nemlig af formen

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap R^0) + R^1 + R^2 + \dots$$

Et relevant primideal er et homogent primideal, som ikke indeholder $R^{\geq 1}$ (hvilket under den gjorte antagelse er ensbetydende med at $R^1 \not\subset \mathfrak{p}$). Ethvert relevant primideal $\mathfrak{p}$ er $\subset$ et "irrelevant" homogent primideal, nemlig i $\mathfrak{p} \cap R^0 + R^{\geq 1}$.

3. LEMMA. Lad $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ være homogene primideal i R , lad $\mathfrak{a}$ være et homogent ideal, så at $\mathfrak{a}^{(0)} = (0)$, og så at
- $$\mathfrak{a}^{(v)} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r \quad \text{for } v \gg 0.$$

Da er $\mathfrak{a} \subseteq$ et $\mathfrak{p}_i$.

VINK. Induktion efter r . For $r=1$ er forudsætningen at der findes K , så at $\mathfrak{a}^{(v)} \subseteq \mathfrak{p}$ for $v \geq K$. Det betyder, at $\mathfrak{a}^{\geq K} \subseteq \mathfrak{p}$, og da $\mathfrak{a}^{(0)} = (0)$ slutter vi $\mathfrak{a}^K \subseteq \mathfrak{a}^{\geq K} \subseteq \mathfrak{p}$ og dermed at $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Induktionsskridtet føres indirekte: Antag altså at $\mathfrak{a}^{(v)} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_r$ for $v \gg 0$ og at $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ for hvert i . Vi slutter, at $\mathfrak{p}_i$ 'erne er relevante, at der ikke er relationer mellem $\mathfrak{p}_i$ 'erne, at $\mathfrak{a} \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{r-1} \not\subseteq \mathfrak{p}_r$, og at der gælder

$$\neg (\mathfrak{a}^{(v)} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{p}_{r-1} \text{ for } v \gg 0).$$

Vælg i overensstemmelse hermed et homogent element $x \in \mathcal{O}^{(i)} \cap \varphi_1 \cap \dots \cap \varphi_{r-1} \setminus \varphi_r$, og et $v \geq i$ og et homogent element $y \in \mathcal{O}^{(v)} \setminus (\varphi_1 \cup \dots \cup \varphi_{r-1})$. Da φ_r er relevant, findes element $s \in R^{(1)} \setminus \varphi_r$. I stedet for at multiplicere x med s^{v-i} , kan vi antage, at $i=v$. Men så kan elementet $x+y$ ingen steder ligge $\square$

4. SÆTNING. En gradueret ring R er (under den givte antagelse) noethersk, hvis og kun hvis R^0 er noethersk og R^1 er en e.f. R^0 -modul.

VINK. Brug Hilberts basissætning, og brug at $R^0 = R/R^{\geq 1}$ og at $R^1 = R^{\geq 1}/R^{\geq 2}$.

5. GRADUERET NAKAYAMA'S LEMMA. Hvis en gradueret R -modul M har $M^i = 0$ for $i \ll 0$, så vil

$$M = R^{\geq 1}M \Rightarrow M = 0.$$

VINK. Vi har $M = M^{\geq v}$ for passende v , og $R^{\geq 1}M^{\geq v} \subseteq M^{\geq v+1}$.

BEMÆRK, at hvis M er e.f. så er $M^i = 0$ for $i <$ mindste grad af frembringerne.

6. SÆTNING. Hvis M er en e.f. gradueret modul over en gradueret noethersk ring R , så vil $\text{Ass}(M)$ bestå af homogene primidealer. Specielt vil de minimale primidealer for M være homogene.

VINK. Kopier fra "Ass" lemma 5 for homogene elementer, og dernæst sætning 10.

7 OPGAVE. Vis sætning 6 uden de noetherske forudsætninger ved at vise, at hvis $\mathcal{O} = \text{Ann}(x)$, (hvor $x \in M$ ikke nødvendigvis er homogent) er et radikalideal, så er $\mathcal{O}$ homogent.

8 INDSKUD. Lad $(G, +)$ være en kommutativ gruppe. En afbildning $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ kaldes polynomial af grad $\leq r$, hvis der findes elementer $a_0, \dots, a_r \in G$, så at

$$(*) \quad \lambda(n) = \binom{n+r}{r} a_r + \dots + \binom{n+1}{1} a_1 + a_0 \text{ for } n \gg 0.$$

At λ er polynomial af grad ≤ 0 betyder, at $\lambda(n) = \text{konstant}$ for store n . Idet vi for en afbildning $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ definerer $\Delta\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ ved $(\Delta\lambda)(n) = \lambda(n) - \lambda(n-1)$, og bemærker, at

$$\binom{n+r}{r} - \binom{n-1+r}{r} = \binom{n+r-1}{r-1} \text{ følger det let, at } (\Delta^2\lambda)(n)$$

$= a_r$ for $n \gg 0$, og videre, at koefficienterne $a_0, \dots, a_r$ i fremstillingen $(*)$ er entydigt bestemt. Videre ses, at vi har
SÆTNING. $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ er polynomial af grad $\leq r$ ($r \geq 1$), hvis og kun hvis $\Delta\lambda$ er polynomial af grad $\leq r-1$.

DEFINITION. Hvis $a_r \neq 0$ siges λ at have grad r . (Hvis $\lambda(n) = 0$ for $n \gg 0$ tilføjes λ graden -1), og a_r kaldes højste-koefficienten.

BEMÆRKNING. Hvis $(G, +) \subseteq (\mathbb{C}, +)$, så er de polynomiale afbildninger $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ netop de afbildninger, for hvilke der findes et polynomium $p \in \mathbb{C}[X]$, så at $\lambda(n) = p(n)$ for $n \gg 0$.

9. OPGAVER. Vis, at hvis $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ er polynomial af grad r , så er også afbildningen $\Sigma\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow G$ defineret ved

$$\Sigma\lambda(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \sum_{v=0}^n \lambda(v) & n \geq 0 \end{cases}$$

polynomial af grad $r+1$. Vis, at hvis $(G, +, \cdot)$ er en ring, så gælder for polynomiale afbildninger $\lambda, \mu: \mathbb{Z} \rightarrow G$, at

$$\lambda * \mu: n \longmapsto \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} \lambda(p)\mu(q) & n \geq 1 \end{cases} \text{ er polynomial.}$$

Vis, at hvis $\lambda(n) = 0$ for $n < 0$, så kan "polynomialitet" af λ udtrykkes som en egenskab ved "Laurentrekken" $\sum_n \lambda(n) X^n$.

10. ANTAGELSE. I det følgende antages om den graderende ring R , at $R^0 = A$ har endelig længde, og at R som A -algebra er frembragt af endelig mange elementer i R^1 . Dette betyder, at R er (isomorf med) en graderet ^{kvotient} af en polynomiumsring $A[X_1, \dots, X_s]$. Vi sætter

$$r = \bigcup_{i \geq 1} R^i$$

DEFINITION.

11. SÆTNING. Lad M være en e.f. graderet R -modul. Da er for hvert $n \in \mathbb{Z}$ $M^{(n)}$ en A -modul af endelig længde. Afbildningen $\lambda_M: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ defineret ved

$$\lambda_M(n) = \text{long}_A M^{(n)}$$

er polynomial af en grad r , hvor

$$r \leq (\text{minimale antal } A\text{-fremb. for } R^1) - 1.$$

Det til λ_M hørende polynomium kaldes Hilbert polynomiet for M , og betegnes χ_M . Dets grad kaldes den homogene dimension af M og betegnes $d^*(M)$. Dets højstefkoefficient $\in \mathbb{N}$.

VINK. Induktion efter $t = t(R) = \text{minimale antal } A\text{-fremb. for } R^1$.

$t=0$ betyder at $R = R^0 = A$, og så er $M^{(n)} = 0$ for $n \gg 0$.

Er $t > 0$ findes $f \in R^1$ (del af et frembringelsessystem) så at $\bar{R} = R/Rf$ har $t(\bar{R}) = t(R) - 1$. Fuld for induktionssteppedet ved at betragte den exacte følge

$$0 \rightarrow {}_f M(-1) \rightarrow M(-1) \rightarrow M \rightarrow M/fM \rightarrow 0,$$

som giver $\Delta \lambda_M = \lambda_{M/fM} - \lambda_{{}_f M(-1)}$ $\square$

12. SÆTNING. For en e.f. graderet R -modul M er følgende tre tal ligstør:

$d^*(M) = \text{graden af Hilbert-polynomiet } \chi_M.$

$h^*(M) = \text{største } h, \text{ så at der findes relevante primidealer}$

$$\text{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h$$

$s^*(M) = \text{mindste } s, \text{ så at der findes elementer } f_0, \dots, f_s \text{ i } r$
med $M/(f_0, \dots, f_s)M$ af endelig længde.

Vi sætter $\dim^* M = d^*(M) = h^*(M) = s^*(M).$

VINK. Vis først $(d^* = -1) \Leftrightarrow (h^* = -1) \Leftrightarrow (s^* = -1) \Leftrightarrow M$ har endelig længde. (Bemærk, at de ikke-relevante homogene primidealer er maximalidealer, da A har endelig længde)

Vis dernæst $h^*(M) \leq d^*(M)$ ved induktion efter $d^*(M) = d$:

Er $\text{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h$, skal vi vise, at $h \leq d$. Vi kan antage, at $\mathfrak{p}_0$ er et minimalt primideal, og dermed i $\text{Ass}(M)$, så at vi har en monomorfi $(R/\mathfrak{p}_0)(-v) \hookrightarrow M$. Reducer til tilfældet $M = A/\mathfrak{p}_0$, vælg $f \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, homogen af grad $i \geq 1$, betragt $0 \rightarrow M(-i) \xrightarrow{f} M \rightarrow M/fM \rightarrow 0$, slut, at $d^*(M/fM) = d-1$, og dernæst, at $h-1 \leq h^*(M/fM) \leq d^*(M/fM) = d-1$.

Og dernæst $s^*(M) \leq h^*(M)$ ved induktion efter $h^*(M) = h$: 7

Med $\text{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h$ med $h+1$ relevante primidealer må $\mathfrak{p}_0$ være et minimalt primideal for M . Der er folgelig kun endelig mange mulige $\mathfrak{p}_0$ 'er, så der findes (lemma 3) et element $f \in R$, som ikke tilhører nogen af disse $\mathfrak{p}_0$ 'er. Da $\text{Ann}(M) + Rf \subseteq \text{Ann}(M/fM)$, sluttet, at $h^*(M/fM) \leq h-1$, og dermed, at $s^*(M) \leq s^*(M/fM) + 1 \leq h^*(M/fM) + 1 \leq h$.

Og endelig $d^*(M) \leq s^*(M)$ ved induktion efter $s^*(M) = s$. Vælg $f \in R$ med $s^*(M/fM) = s-1$, og sættes $i = \text{grad } f \geq 1$ kan vi betagte $0 \rightarrow {}_f M(-i) \rightarrow M(-i) \rightarrow M \rightarrow M/fM \rightarrow 0$, som giver $\chi_{M/fM} - \chi_{{}_f M(-i)} = \chi_M - \chi_{M(-i)} = \text{polynomium af grad } = d^*(M) - 1$. Da $-\chi_{{}_f M(-i)}(n) = -\text{lang} \dots \leq 0$, sluttet heraf, at $d^*(M) - 1 \leq d^*(M/fM) \leq s^*(M/fM) = s - 1$.

13. BEMÆRKNING. Er $A = k$ et legeme med uendelig mange elementer gælder

$$\dim^* M = s_i^*(M) = \text{mindste } s, \text{ så der findes elementer}$$

$$f_0, \dots, f_s \in R^1 \text{ med } M/(f_0, \dots, f_s)M \text{ af endelig længde.}$$

VINK. Nok at vise, at $s_i^*(M) \leq h^*(M)$. Slut som ovenfor, men brug (i stedet for lemma 3), at et vektorrum over k (hev: R^1) ikke kan være en endelig forening af ægte underrum (hev: $R^1 \cap \mathfrak{p}_0$).

14. KOROLLAR. Hvis $f \in \mathcal{P}$ gælder

$$\dim^* M \geq \dim^* M/fM \geq \dim^* M - 1.$$

Og $\dim^* M/fM = \dim^* M - 1$ gælder, hvis og kun hvis vi for hvert relevant primideal $\mathfrak{p} \supseteq \text{Ann}(M)$ med $\dim^* R/\mathfrak{p} = \dim M$ har: $f \notin \mathfrak{p}$.

15. DEFINITION. $f \in \mathcal{P}$ kaldes en M-parameter, hvis $\dim^* M/fM = \dim^* M - 1$, og $(f_1, \dots, f_s)$ kaldes en M-parameter-følge, hvis

f_i er en $M/(f_1, \dots, f_{i-1})$ -parameter, $i = 1, \dots, s \iff$

$\dim^* M/(f_1, \dots, f_s) = \dim^* M - s$. En maximal M-parameter-følge $(f_0, \dots, f_r)$ kaldes et M-parametersystem. For en sådan

gælder $r = \dim^* M$. BEMÆRKNING. Af korollar 14 følger let, at hvis f er en parameter på M , så er også f^n en parameter på M , $n \in \mathbb{N}$.

16. KOROLLAR. $\dim^* M \leq \dim^* R - t \iff \exists$ R-parameter-følge $(f_1, \dots, f_t)$ i $\text{Ann}(M)$.

VINK. Induktion efter t .

17. NOETHERS graduerede NORMALISERINGSLEMMA. Lad

$f_0, \dots, f_r$ være et M-parametersystem, da er M c.f. over delringen $A[f_0, \dots, f_r] \subseteq R$.

VINK. Vis, at der som frembringelsystem kan bruges homogene elementer $e_1, \dots, e_n$ i M , hvis billeder $(e_1, \dots, e_n) \in M/(f_0, \dots, f_r)M$ er et A-frembringelsystem.

18. OPGAVER. Vis, at den graduerede polynomiumsring $R = A[T_0, \dots, T_r]$ i $r+1$ variable har

$$\chi_R(n) = (\text{long } A) \binom{n+r}{r} \text{ og } \text{følgeligt } \dim^* R = r \text{ (hvis } A \neq 0).$$

Vis direkte, at $s^*(R) \leq r$ og $h^*(R) \geq r$.

Definer for en gradueret ring R gradueringen i polynomiumsringen $R[X]$, og vis, at $\lambda_{R[X]} = \sum \lambda_R$, og dermed, at

$$\dim^* R[X] = \dim^* R + 1.$$

Vis direkte, at $s^*(R[X]) \leq s^*(R) + 1$, og $h^*(R[X]) \geq h^*(R) + 1$.

19. BEMÆRKNING. Hvis $A=k$ er et legeme, gælder, at parametre er algebraisk uafhængige. Hvis et parametersystem $(f_0, \dots, f_r)$ på M er valgt, så at f_i 'erne har samme grad d [dette kan altid gøres, jfr. bemærkning 15; hvis k er uendelig, kan vi endda opnå $d=1$], kan vi omgradue delringen $Q=k[f_0, \dots, f_r]$, så at f_i 'erne får grad 1, og Q -undermodulen $N = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M^{(pd)}$ i M kan gradueres ved $N^{(p)} = M^{(pd)}$. Vi slutter, at $p \mapsto \dim_k N^{(p)}$ er polynomial af grad $\leq \dim^* Q$. Da $\dim_k N^{(p)} = \dim_k M^{(pd)}$ må graden være $\dim^* M$, altså $r = \dim^* M \leq \dim^* Q = \dim^* k[X_0, \dots, X_r]/\mathcal{O} \leq \dim^* k[X_0, \dots, X_r] = r$. Heraf følger $Q = k[X_0, \dots, X_r]$, altså at parametrene er algebraisk uafhængige i dette tilfælde.

20. OPGAVE. Lad $\text{Ass}^*(M)$ være de relevante primidealer i $\text{Ass}^*(M)$ altså $\text{Ass}^*(M) = \text{Ass}(M) \setminus \{\text{irrelevante homogene primidealer}\}$. Vis, at $\text{Ass}^*(M) = \text{Ass}^*(M^{\geq n})$ for alle n . Vis, at $\text{Ass}^*(M^{\geq n}) = \text{Ass}^*(M)^{\geq n}$ for $n \gg 0$. [Vink: $\text{Ass}^*(M) \subset \text{Ass}(M) \Leftrightarrow M$ har undermodul $\neq 0$ af endelig længde]. Vis, at hvis $\dim^* M = r$, så findes en næsten- M -regulær følge $(f_0, \dots, f_r)$ i r ($f \in R^i$ er næsten-regulær på M , hvis $M^{n-i} \xrightarrow{f} M^n$ er injektiv for $n \gg 0$).

21. OPGAVE. Lad $R=k[T_0, \dots, T_r]$, og lad M og N være graduerede e.f. R -moduler. Graduer tensorproduktet $M \otimes_R N$, og vis, at det kan opfattes som modul over $R \otimes R = k[T_0 \otimes 1, \dots, T_r \otimes 1, 1 \otimes T_0, \dots, 1 \otimes T_r]$. Vis, at

$$\dim^* M \otimes_R N = \dim^* M + \dim^* N + 1$$

Vis herved dimensionsformlen: For homogene idealer $\mathcal{O}$ og $\mathcal{V}$ i polynomiumsringen $R=k[T_0, \dots, T_r]$ gælder

$$\dim^* R/\mathcal{O} + \mathcal{V} \geq \dim^* R/\mathcal{O} + \dim^* R/\mathcal{V} - r$$

[Vink: Opfat $R/\mathcal{O} + \mathcal{V}$ som en kvotient af $R/\mathcal{O} \otimes R/\mathcal{V}$ m.h.t. idealitet frembragt af $(\delta_0, \dots, \delta_r)$, hvor $\delta_i = T_i \otimes 1 - 1 \otimes T_i$]

22. SÆTNING. DEFINITION. En homogen M-regulær følge er en M-regulær følge $(f_1, \dots, f_t)$, hvor $f_i \in R$. Ifølge lemma 3 har vi $R^{\leq 1} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p} \Leftrightarrow R \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)} \mathfrak{p}$, så hvis der findes et M-regulært element i $R^{\geq 1}$, findes også et M-regulært element i R . Heraf følger, at alle maksimale homogene M-regulære følger indeholder det samme antal elementer, nemlig $\text{depth}_{R^{\geq 1}} M$. Vi sætter $\text{depth}^* M = \text{depth}_{R^{\geq 1}} M - 1$, den homogene dybde

23. SÆTNING. For hvert $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ gælder $\dim^* R/\mathfrak{p} \geq \text{depth}^* M$. Specielt $\text{depth}^* M \leq \dim^* M$ når $M \neq 0$

VINK. Induktion efter $d = \dim^* R/\mathfrak{p}$. $d = -1$. Let. Antag $d \geq 0$

Antag $\text{depth}^* M \geq 0$ og vælg et $f \in R^1$ som er M-regulært.

Vælg $x \in M^1, x \neq 0$ så $\text{Ann}(x) = \mathfrak{q}$, skriv $x = f^t y$, med $t \geq 0$

størst mulig. Da er $y \notin fM$, så $\mathfrak{q} \neq 0$. Af

$\mathfrak{q} + (f) \subseteq \text{Ann}(\mathfrak{q})$, slutter, at der findes $\mathfrak{q}' \in \text{Ass}(M/fM)$, med $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{q} + (f)$. Anvend nu induktionsforudsætningen. $\square$

OBSERVATION.

24. DEFINITION. M kaldes en Macaulay-modul, hvis $M = (0)$ eller $\dim^* M = \text{depth}^* M$. For en sådan gælder for et hvert associeret primideal, at $\dim^* R/\mathfrak{p} = \dim^* M$. Specielt er alle associerede primidealer minimale.

Hvis den graduerede ring som modul over sig selv er en Macaulay-modul kaldes ringen en Macaulayring.

25. SÆTNING. Den graduerede polynomiumsring $A[T_0, \dots, T_r]$ er en Macaulayring.

VINK. $\square$

26. SÆTNING. Lad M være en Macaulay-modul. Hvis $(f_1, \dots, f_s)$ er en M -parameterfølge, så er det en M -regulær følge, og $M/(f_1, \dots, f_s)M$ er en Macaulay-modul (af dimension $= \dim^* M - s$).
VINK. Induktion efter s (brug korollar 14).

27. KRULL'S homogene HOVEDIDEALSÆTNING. Er $\mathfrak{p} \subset R$ et homogent primideal og er $f \notin \mathfrak{p}$ et homogent element, så gælder for hvert minimalt primideal $\mathfrak{q}$ for $R/\mathfrak{p} + (f)$, at
- $$\dim^* R/\mathfrak{q} = \dim^* R/\mathfrak{p} - 1$$

VINK. Vi kan antage, at R er polynomiumringen $k[T_0, \dots, T_r]$, altså specielt, at R er en Macaulay-ring og at f er R -regulær. Sæt $t = \dim^* R - \dim^* R/\mathfrak{p}$, altså $\dim^* R/\mathfrak{p} = r - t$ da er $\dim^* R/\mathfrak{p} + (f) = \dim^* R/\mathfrak{p} - 1 = r - t - 1 = \dim^* R/(f) - t$. Slut af korollar 16, at der findes homogene elementer $f_1, \dots, f_t \in \mathfrak{p}$ så at $\dim^* R/(f, f_1, \dots, f_t) = r - t - 1$. Anvend nu sætning 26 til at vise, at $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/(f_1, \dots, f_t))$ og at f er regulær på $R/(f_1, \dots, f_t)$, og dermed ("Ass" lemma 26), at $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(R/(f_1, \dots, f_t, f))$ $\square$

28. KOROLLAR. Hvis R er et integritetsområde, så vil alle uforfinelige kæder af relevante primidealer

$$(0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h,$$

indeholde samme antal, nemlig $h = \dim^* R$. $\square$

29. BEMÆRKNINGER. Krulls almindelige hovedidealsætning udsiger for primidealer $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ i en noethersk ring R , at hvis $\mathfrak{q}$ er minimalt for $R/\mathfrak{p} + (f)$, så findes ingen primidealer mellem $\mathfrak{p}$ og $\mathfrak{q}$. Det følger, at korollar 28 medfører sætning 27. Lad os give endnu et bevis for den homogene sætning 27 (Vi antager, at $\mathfrak{p} = (0)$, og kalder $\mathfrak{q}$ for $\mathfrak{p}!!$):

VINK. $\mathfrak{p}$ er også minimalt for $R/f^n R$, for $n \in \mathbb{N}$, så vi kan antage at f kan suppleres til et R -parametersystem $(f, f_1, \dots, f_r)$, hvor f og f_i 'erne har samme grad. Nu er R e.f. over delringen

$Q = k[f_1, \dots, f_r]$, og da parametrene er algebraisk uafhængige, er Q faktoriel. Hovedidealit Qf er et primideal i Q , og da $Qf \subseteq \varphi \cap Q$ findes iflg. "going down" et primideal $\varphi' \subseteq \varphi$ med $\varphi' \cap Q = Qf$. Da $f \in \varphi'$ har vi $Rf \subseteq \varphi' \subseteq \varphi$, og dermed $\varphi' = \varphi$, så at $\varphi \cap Q = Qf$, og dermed $Q/Qf \hookrightarrow R/\varphi$. $Q/Qf \cong k[X_1, \dots, X_r]$, og vi slutter (jfr. overvejelserne i bemærkning 19), at $\dim^* R/\varphi = \dim^* k[X_1, \dots, X_r] = r-1 = \dim^* R - 1 \quad \square$

29A. LEMMA. Lad $f \in R$ og lad φ være et homogent primideal, så at $\dim^* R/\varphi \geq 1$. Hvis $f \notin \varphi$ findes et homogent primideal φ' så at $f \notin \varphi'$. VINK. Reducér til $\varphi = (0)$. Suppler f til parameterfølge (f, g) [da $\dim^* R \geq 1$]. Vælg $\varphi' \supseteq Rg$, så at $\dim^* R/\varphi' = \dim^* R/Rg = \dim^* R/(f, g)R + 1$, og slut, at $f \notin \varphi'$. $\square$ Som korollar fås HILBERTS graduerede NULPUNKTSSÆTNING (1^{ste} halvdel): Hvis R er et integritetsområde af $\dim^* R \geq 0$, så er

$$(0) = \bigcap \{ \varphi \mid \dim^* R/\varphi = 0 \}.$$

Specielt: Hvis $\dim^* R \geq 1$ findes i R uendeligt mange φ med $\dim^* R/\varphi = 0$.

OBSERVATION.

30. DEFINITION. En homogen multiplikativ delmængde S af en gradueret ring R er en multiplikativ delmængde bestående af homogene elementer ($S = \bigcup_{n \geq 0} S^{(n)}$), så at $S^{(n)} \neq \emptyset$ for et $n \geq 1$. Eks. $S = \{1, f, f^2, \dots\}$, hvor $f \in R^{(n)}$, $n \geq 1$. $S_p = \{\text{homogene elementer i } R \setminus P\}$, hvor P er et relevant primideal. Specielt: når R er et integritetsområde, $R \supset R^{(0)}$, $S = \{\text{homogene elementer} \neq 0\}$.

For en gradueret R modul M sættes

$$(S^{-1}M)^{\circ} = \{x/s \in S^{-1}M \mid x \text{ og } s \text{ er homogene af samme grad}\}.$$

Det er let at se, at $(S^{-1}R)^{\circ}$ er en delring af $S^{-1}R$, og at $S^{-1}M^{\circ}$ er en $S^{-1}R^{\circ}$ -modul. En $P \subseteq R$ et relevant primideal bruges betegnelsen $R_{(P)}$ for $S_p^{-1}R^{\circ}$.

Funktoren $M \mapsto S^{-1}M^\circ$ er exact. Specielt kan vi for et homogent ideal I i R opfatte $S^{-1}I^\circ$ som et ideal i $(S^{-1}R)^\circ$.

SÆTNING. For den "homogene" lokalisering $\tilde{R} = (S^{-1}R)^\circ$ gælder:

Afbildningen $I \rightarrow (S^{-1}I)^\circ$ definerer en surjektiv afbildning $\{ \text{homogene idealer } I \subseteq R \text{ med } I \cap S \neq \emptyset \} \rightarrow \{ \text{idealer } \sigma \subset \tilde{R} \}$

og en bijektiv afbildning

$$\{ \text{homogene primidealer } P \subseteq R \text{ med } P \cap S = \emptyset \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{primidealer } \wp \subset \tilde{R} \}.$$

Hvis primidealet $\wp \subset \tilde{R}$ har ved svarer til $P \subset R$ findes en kanonisk isomorfi $M_{(P)} = (S^{-1}M^\circ)_\wp$.

VINK. For et ideal $\sigma \subset \tilde{R}$ defineres $\sigma^* = \bigoplus \sigma^{(n)} \subseteq R$ ved

$$\sigma^{(n)} = \{ a \in R^{(n)} \mid \forall f \in R^{(k)} \forall s \in S^{(n+k)} : fa/s \in \sigma \}.$$

Da er σ^* et homogent ideal i R , elt. i S er regulær på R/σ^* og $(S^{-1}\sigma^*)^\circ = \sigma$.

Er P et homogent primideal, $P \cap S \neq \emptyset$, bliver $S^{-1}P^\circ$ et primideal,

og $[S^{-1}P^\circ]^* = P$. Er $\wp \subset \tilde{R}$ et primideal, bliver $\wp^*$ et homogent primideal, $\wp^* \cap S = \emptyset$. Isomorfin er bestemt ved at $\frac{a}{s} / \frac{t}{u} \mapsto au/st$

BEMÆRKNING. Ovenstående letter væsentligt, hvis $S^{(1)} \neq \emptyset$.

Er f.eks. $t \in S^{(1)}$, kan $\sigma^{(n)}$ defineres som $\{ a \in R^{(n)} \mid a/t^n \in \sigma \}$.

31. OPGAVE. Definer for $S \subseteq T \subseteq R$, $\tilde{T} \subset \tilde{R} = S^{-1}R^\circ$ så at $(T^{-1}M)^\circ = \tilde{T}^{-1}(S^{-1}M^\circ)$.

32. KOROLLAR. For et relevant primideal $P \subset R$ fås en bijektiv forbindelse $\{ \text{homogene primidealer } \subseteq P \} \xrightarrow{\sim} \{ \text{primidealer i } R_{(P)} \}$. Specielt er $R_{(P)}$ en lokal ring. Er R et integritetsområde, får vi ved lokalisering i (0) det homogene broklegeme $R_{((0))}$.

33. EKSEMPEL. Homogen lokalisering af den graduerede polynomiumsring $R = A[T_0, T_1, \dots, T_r]$ i $r+1$ variable m.h.t. $S = \{1, T_0, T_0^2, \dots\}$ giver polynomiumsringen $\tilde{R} = A[X_1, \dots, X_r]$ i r variable, hvor $X_i = T_i/T_0$. Hvis $A = k$ er et legeme, bliver det homogene brøklege $\tilde{R} \cong k(X_1, \dots, X_r)$ [bemærk, at $T_i/T_0 = X_i$, $T_0/T_i = 1/X_i$, $T_i/T_j = X_i/X_j$].

34. EKSEMPEL. Der er en bijektiv forbindelse
 $\{\text{primideal } \mathfrak{p} \subset A[X_1, \dots, X_r]\} \Leftrightarrow \{\text{homogene primideal } P \text{ med } T_0 \notin P \subset A[T_0, \dots, T_r]\}$

35. SÆTNING. For en homogen lokalisering $(S^{-1}R)^0 = \tilde{R}$ gælder $\dim \tilde{R} \leq \dim^* R$. Hvis $f \in R$, og der findes et (nødvendigvis minimalt) primideal $P \subset R$ med $\dim^* R/P = \dim^* R$ så $f \notin P$ ($\Leftarrow$ f er en parameter), så er
 $\dim R_f^0 = \dim^* R$.

VINK. Klat, at $\dim \tilde{R} \leq \dim^* R$. Hvis $f \notin P$ findes $P \subset Q$, så $f \notin Q$ og $\dim^* R/Q = 0$ (lemma 29A). En uforfædlig kæde af homogene primideal $P = P_0 \subset \dots \subset P_r = Q$ giver $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_r = 0$ i $\tilde{R}$, så iflg korollar 28 gælder $\dim \tilde{R} \geq r = \dim^* R/P - \dim^* R/Q = \dim^* R - 0$. $\square$

36 KOROLLAR. Den ikke-graduerede polynomiumsring $A[X_1, \dots, X_r]$ har Krull-dimensionen $\dim A[X_1, \dots, X_r] = r$.
 VINK $\square$

37. KOROLLAR. For en e.f. gradueret modul M over den graduerede ring R har Krull-dimension
 $\dim M = \dim^* M + 1$. Hvis $A = k$ er et legeme, er et M -parametersystem $f_0, \dots, f_r$ i R algebraisk uafhængigt.

VINK. Vi har $r = \dim^* M$, og delringen $A[f_0, \dots, f_r] \subseteq R$ er en kvotient af $A[X_0, \dots, X_r]$. Det er klart, at $\dim M \geq r+1$. Da M er e.f. over $A[f_0, \dots, f_r]$ får vi $\dim M \leq \dim A[f_0, \dots, f_r] \leq \dim A[X_0, \dots, X_r] = r+1$, hvorefter det ønskede $\square$

DEFINITION.

38 OBSERVATION. For en c.f. graduert modul M sætter vi

$$\text{Supp}^* M = \{p \mid p \text{ relevant}, M_{(p)} \neq 0\}$$

Det er let at se, at

$$\text{Supp}^* M = \{P \mid P \text{ relevant}, P \supseteq \text{Ann}(M)\}.$$

Følgelig gælder $\text{Supp}^* M = \emptyset \Leftrightarrow \dim^* M = -1$. Og $\dim^* M \leq 0$ $\Leftrightarrow$ alle relevante primidealer $P \supseteq \text{Ann}(M)$ har $\dim^* R/P = 0$.39. SÆTNING. Hvis M har $\dim^* M = 0$, så er $\text{Supp}^* M$ endelig (og $\neq \emptyset$); er $f \in R$ så at $f \notin \bigcup_{P \in \text{Supp}^*(M)} P$, så er

$$\text{long}_A \left[\bigoplus_{P \in \text{Supp}^*(M)} M_{(P)} \right] = \text{long}_A M_f^0 = \text{long}_A M^{(n)} \text{ for } n \gg 0.$$

Denne længde er altså højstegrads-koefficienten i det (konstante) Hilbertpolynomium χ_M .VINK. Homogene primidealer Q med $f \notin Q$ svarer til primidealer $\mathfrak{q} \subset R_f^0$, og $M_{(Q)} \cong (M_f^0)_{\mathfrak{q}}$. Primidealene $P \in \text{Supp}^* M$ svarer altså til primidealene i $\text{Supp}(M_f^0)$, og de er altså alle maximalidealer i R_f^0 . Heraf følger, at

$$M_f^0 \cong \bigoplus_{P \in \text{Supp}^* M} (M_f^0)_P = \bigoplus_{P \in \text{Supp}^* M} M_{(P)}.$$

Er nu $d = \text{graden af } f$, kan vi betragte afbildningen $M^{(nd)} \rightarrow M_f^0$ givet ved $x \mapsto x/f^n$. M_f^0 er (den voksende)foreningsmængde af disse billeder. Da f er næsten-regulær på M (jfr. opgave 20), er afbildningerne injektive, når $n \gg 0$. Da $\text{long } M^{(nd)}$ er begrænset (idet $\dim^* M = 0$), slutter vi at afbildningerne er bijektive, når $n \gg 0$.(2^{den} halvdel)

40 KOROLLAR. HILBERTS graduerede NULPUNKTSSÆTNING

Hvis $A=k$ er et legeme, og P er et homogent primideal

$\kappa(P)$

med $\dim^* R/P = 0$, så er $(R/P)_{(P)} = (\text{Restklasselegemeet for } R_{(P)}) =$
 (homogene brøklegerne for R/P) et legeme af endelig dimension
 $\dim_k \kappa(P) = \dim_k (R/P)^{(n)} \text{ for } n \gg 0.$

BEMÆRK. Hvis $\dim_k \kappa(P) = 1$ (d: hvis $k \cong \kappa(P)$), så er $\bar{R} =$
 $R/P \cong k[X]$. Er nemlig $f \in \bar{R}^{(1)}$, $f \neq 0$, så er multiplikation
 med f injektiv da R er et integritetsområde. Af $f^v \in R^{(v)}$ følger
 $R^{(v)} \neq 0$ for alle v , og af $R^{(v)} f^n \subseteq R^{(n+v)}$ følger
 $0 < \dim_k R^{(v)} = \dim_k R^{(v)} f \leq \dim_k R^{(n+v)} = 1 \text{ for } n \gg 0$, altså
 $\dim_k R^{(v)} = 1$ for alle v , og dermed $R^{(v)} = k f^v$. $\square$

41. OVERSIGT. Af det foregående får vi en række resultater for
 polynomiums-ringen $\tilde{R} = k[x_1, \dots, x_n] = R_{T_0}^0$, hvor $R = k[T_0, \dots, T_n]$,
 og dens kvotienter $\tilde{R}/\mathfrak{o}$. Vi minder om at T_0 er regulær på
 $R/\mathfrak{o}$, så at $\dim^* R/\mathfrak{o} = \dim \tilde{R}/\mathfrak{o}$. (sætning 35).

HILBERTS NULPUNKTSSÆTNING. For hvert ideal $\mathfrak{o} \subseteq \tilde{R}$ gælder

$$\text{Rad } \mathfrak{o} = \bigcap \{ \mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{o} \text{ er et maksimalideal} \}$$

Hvis $\mathfrak{m} \subseteq \tilde{R}$ er et maksimalideal, er $\dim_k \tilde{R}/\mathfrak{m} < \infty$.

KOROLLAR. Er $Q \rightarrow Q'$ en k -algebra homomorfi mellem e.f.
 algebrer over k , så gælder for hvert maksimalideal $\mathfrak{m} \subseteq Q'$,
 at kontraktionen $\mathfrak{m} \cap Q$ er et maksimalideal i Q .

VINK. Sætningens anden halvdel følger umiddelbart af korol-
 lar 40. Heraf følger også korollaret. Sætningens første halv-
 del følger enten af lemma 29A, eller af korollaret an-
 vendt på $Q \rightarrow Q'$, hvor $Q = \tilde{R}/\mathfrak{o}$, $Q' = Q_f$, hvor $f \in Q$ er
 ikke-nilpotent. $\square$

KRULLS HOVEDIDEALSÆTNING. Er $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \subset \tilde{R}$ primidealer, og
 er $f \notin \mathfrak{p}'$ så at $\mathfrak{p}$ er minimalt for $\tilde{R}/\mathfrak{p}' + (f)$, da er
 $\dim \tilde{R}/\mathfrak{p} = \dim \tilde{R}/\mathfrak{p}' - 1$.

KOROLLAR. Er $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \subset \tilde{R}$ primidealer, og er

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{q}_r = \mathfrak{p}$$

en uforfælgelig kæde af primidealer, så er $\dim \tilde{R}/\mathfrak{p} = \dim \tilde{R}/\mathfrak{q} - r$.

VINK. Sætningen følger af sætning 27 og medfører naturligvis korollaret.

BEMÆRKNING. Korollaret følger også af korollar 28. I forbindelse med Krull's generelle hovedideal sætning, vil korollaret medføre sætningen.

KOROLLAR. Hvis $Q = \tilde{R}/\mathfrak{o}$ er ^{unmixed} equidimensional ($\forall \mathfrak{q} \in \text{Ass } Q : \dim Q/\mathfrak{q} = \dim Q$), så gælder for hver minimalt primideal $\mathfrak{q}$ for $Q/(f_1, \dots, f_s)Q$, at $\dim Q/\mathfrak{q} \geq \dim Q - s$.

NOETHERS NORMALISERINGSLEMMA. Lad $\mathfrak{o} \subseteq \tilde{R}$ være et ideal med $\dim \tilde{R}/\mathfrak{o} = t$, og sæt $s = r - t$. Da findes algebraisk uafhængige polynomier $F_1, \dots, F_s, G_1, \dots, G_t \in \tilde{R}$, så at $\tilde{R}$ er e.f. over delringen $\tilde{Q} = k[F_1, \dots, F_s, G_1, \dots, G_t] \subset \tilde{R}$, og

$$\mathfrak{o} \cap \tilde{Q} = \tilde{Q}F_1 + \dots + \tilde{Q}F_s.$$

VINK. Da T_0 er regulær på $R/\mathfrak{o}$, er $\dim^* R/\mathfrak{o} + (T_0) = \dim^* R/\mathfrak{o} - 1 = \dim^* R/(T_0) - s$. Det følger af korollar 16, at vi kan finde s elementer $f_1, \dots, f_s$ i $\mathfrak{o}$, så at $\dim^* R/(T_0, f_1, \dots, f_s) = \dim^* R/\mathfrak{o} + (T_0) = \dim^* R - (s+1)$. Suppler $(T_0, f_1, \dots, f_s)$ til et R -parametersystem $(T_0, f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)$ og betragt delringen $\tilde{Q} = k[T_0, f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t]$. Er $\mathfrak{o} \subseteq P$ et homogent primideal med $\dim^* R/P = \dim^* R/\mathfrak{o} (= t = \dim^* R/Rf_1 + \dots + Rf_s)$ slutter vi (jfr bemærkning 29), at $P \cap \tilde{Q} = \tilde{Q}f_1 + \dots + \tilde{Q}f_s$. Specielt er altså $\mathfrak{o} \cap \tilde{Q} = \tilde{Q}f_1 + \dots + \tilde{Q}f_s$. Som polynomier i $\tilde{R}$ kan vi nu bruge $F_i = \frac{f_i}{T_0} d_i$, $G_j = \frac{g_j}{T_0} e_j$, hvor $f_i \in R^{(d_i)}$, $g_j \in R^{(e_j)}$ $\square$

KOROLLAR. Er $\mathfrak{p} \subset \tilde{R}$ et primideal, gælder

$$\dim \tilde{R}/\mathfrak{p} = t \deg_k \tilde{R}/\mathfrak{p}.$$

KOROLLAR. En e.f. algebra Q over k ($\exists Q \cong \tilde{R}/\mathfrak{o}$) har dimension $d \Leftrightarrow \exists^d$ algebraisk uafhængige elementer $y_1, \dots, y_d \in Q$, så at Q er endelig over delringen $k[y_1, \dots, y_d]$.

BEMÆRKNING. Hvis Q er endelig over polynomiumsringen $k[y] = k[y_1, \dots, y_d]$, så er Q ^{umixet} equidimensional netop hvis elementerne $\neq 0$ i $k[y]$ er regulære i Q .

DIMENSIONSFORMLEN. Hvis Q og Q' er e.f. algebraer over k , så er $\dim Q \otimes_k Q' = \dim Q + \dim Q'$. Hvis Q og Q' er ^{umixede} equidimensionale, så er også $Q \otimes_k Q'$ ^{umixet} equidimensional. Hvis $\mathfrak{o}$ og $\mathfrak{o}'$ er ^{umixede} idealer i $\tilde{R} = k[X_1, \dots, X_n]$, så at $\tilde{R}/\mathfrak{o}$ og $\tilde{R}/\mathfrak{o}'$ er equidimensionale, så gælder for hvert minimalt primideal $\mathfrak{p}$ for $\mathfrak{o} + \mathfrak{o}'$, at $\dim \tilde{R}/\mathfrak{p} \geq \dim \tilde{R}/\mathfrak{o} + \dim \tilde{R}/\mathfrak{o}' - r$.

VINK. Q er endelig over $k[y] = k[y_1, \dots, y_d]$ og Q' er endelig over $k[y'] = k[y'_1, \dots, y'_{d'}]$. Det følger, at $Q \otimes_k Q'$ er endelig over delringen $k[y] \otimes_k k[y'] = k[y_1, \dots, y_d, y'_1, \dots, y'_{d'}]$ som er en polynomiumsring i $d+d'$ variable. Heraf følger den første påstand. Hvis Q og Q' er equidimensionale, er elementerne i $S = k[y] \setminus \{0\}$ og $S' = k[y'] \setminus \{0\}$ regulære i Q og Q' . $S^{-1}Q$ og $S'^{-1}Q'$ er moduler over legemsrum $S^{-1}k[y] = k(y)$ og $S'^{-1}k[y'] = k(y')$, altså f.ri., og det følger, at $S^{-1}Q \otimes_k S'^{-1}Q'$ er en f.ri. $k(y) \otimes_k k(y')$ -modul. Nu har vi

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_k Q' & \hookrightarrow & S^{-1}Q \otimes_k S'^{-1}Q' \\ \downarrow & & \uparrow \\ k[y] \otimes_k k[y'] & \hookrightarrow & k(y) \otimes_k k(y') \end{array}$$

og $k(y) \otimes_k k(y')$ er et integritetsområde (næmlig brøkring for $k[y] \otimes_k k[y']$ m.h.t. $\{f \otimes f' \mid f \in S \wedge f' \in S'\}$). Da $S^{-1}Q \otimes_k S'^{-1}Q'$ er en f.ri. $k(y) \otimes_k k(y')$ -modul, er elementer $\neq 0$ i $k(y) \otimes_k k(y')$ (og specielt elementer $\neq 0$ i $k[y] \otimes_k k[y']$) regulære på $S^{-1}Q \otimes_k S'^{-1}Q'$ (og så meget desto mere regulære på $Q \otimes_k Q'$). Heraf følger den anden påstand. Den sidste påstand følger let, jfr. opgave 21 $\square$

$\mathcal{O}_M \text{ Proj}(G)$

(R kommutativ ring).

1. En åben delmængde U af et geometrisk rum $(X, \mathcal{O})$ kaldes affin, hvis $(U, \mathcal{O}|_U)$ er isomorf med $\text{Spec } A$, hvor A er en R -algebra.

Et geometrisk rum $(X, \mathcal{O})$, ^{over R} der lokalt er affin (d: hvor hvert punkt har en omegn, der er affin) kaldes et R -skema. At $(X, \mathcal{O}_X)$ er $\simeq \text{Spec } A$, dvs er et affint R -skema, betyder, at den kanoniske morfi $X \rightarrow \text{Spec } R$ er en isomorfi.

Et R -skema X har en basis bestående af affine (åbne). Et R -skema X er quasikompakt, hvis og kun hvis det kan skrives som en endelig forening $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$ af affine åbne.

2. Indskud om homogen lokalisering. Lad $G = G^0 \oplus G^1 \oplus \dots$ være en gradueret ring, og lad $T \subseteq G$ være en multiplikativ delmængde bestående af homogene elementer. Med $T^{-1}G^0$ betegnes delringen af $T^{-1}G$ bestående af elementer af formen g/t , hvor $g \in G$ er homogen med $\deg g = \deg t$. [Bemærk, at vi oplagt har

$$T^{-1}G = \dots \oplus (T^{-1}G)^{-1} \oplus (T^{-1}G)^0 \oplus (T^{-1}G)^1 \oplus \dots$$

hvor

$$(T^{-1}G)^v = \{g/t \mid \deg g = v + \deg t\}.$$

Er $\mathfrak{p} \subset G$ et homogent primideal, sætter vi

$$T_{\mathfrak{p}} = \{\text{homogene elementer i } G \setminus \mathfrak{p}\}.$$

og

$$G_{(\mathfrak{p})} = T_{\mathfrak{p}}^{-1}G.$$

Det er let at se, at $G_{(\mathfrak{p})}^0$ er en lokal ring med maksimalidealit $\{p/t \mid p \in \mathfrak{p}, t \notin \mathfrak{p}, p \text{ og } t \text{ er homogene af samme grad}\}.$

Er $\mathfrak{p}$ et primideal disjunkt med T , så er $T^{-1}\mathfrak{p} \subset T^{-1}G$ et primideal i $T^{-1}G$, og fællismængden

$$T^{-1}\mathfrak{p}^{\circ} = T^{-1}\mathfrak{p} \cap T^{-1}G^{\circ}$$

er et primideal i $T^{-1}G^{\circ}$. Er $\mathfrak{p}$ homogent, har vi

$$T^{-1}\mathfrak{p}^{\circ} = \{ p/t \mid p \in \mathfrak{p}, \deg p = \deg t \}.$$

LEMMA. Hvis T indeholder elementer af grad > 0 , så defineres ved $\mathfrak{p} \mapsto (T^{-1}\mathfrak{p})^{\circ}$ en bijektiv afbildning

$$\{\text{homogene } \mathfrak{p}, \text{ disjunkte med } T\} \rightarrow \{\text{primidealer i } T^{-1}G^{\circ}\}$$

Bewis. Noget omstændeligt, især hvis der ikke i T findes elementer af grad 1. $\square$

3. Proj G Lad $G = G^{\circ} \oplus G^1 \oplus \dots$ være en gradueret R -algebra, frembragt af homogene elementer af grad > 0 . (?: $R \rightarrow G^{\circ}$ er surjektiv). Vi sætter

$$Y = \text{Proj } G = \{ \text{homogen } \mathfrak{p} \subset G \mid \mathfrak{p} \not\supset G^{\geq 1} \}$$

og for et homogent element $g \in G$

$$Y_g = \{ y \in Y \mid g \notin \mathfrak{p}_y \}.$$

Vi finder $Y_g \cap Y_h = Y_{gh}$

og $Y = \bigcup_{\deg g \geq 1} Y_g$.

På Y defineres en topologi ved at delmængderne Y_g er en basis for de åbne mængder.

Er V åben i Y sættes $T_V = \{ g \in G \mid g \text{ er homogent og } Y_g \supseteq V \}$.

Det følger let, at der ved

$$V \mapsto \mathcal{G}(V) = (T_V^{-1}G)^\circ$$

defineres et præ-knippe $\mathcal{G}$ af R -algebraer på Y . For stråene finder vi let

$$\mathcal{G}_y = G_{(\mathcal{P}_y)}^\circ.$$

Sætter altså $\mathcal{O}_Y = \mathcal{G}^\#$, så er

$$\text{Proj } G = (Y, \mathcal{O}_Y)$$

et geometrisk rum over R med strå $\mathcal{O}_{Y,y} = G_{(\mathcal{P}_y)}^\circ$.

Er $f \in G$ homogen, så er $f \in T_{Y_f}$, så at vi får $G_f \rightarrow T_{Y_f}^{-1}G$, og

$$\mathfrak{d} : G_f^\circ \rightarrow (T_{Y_f}^{-1}G)^\circ = \mathcal{G}(Y_f) \rightarrow \mathcal{G}^\#(Y_f) = \Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y).$$

$\mathfrak{d}$ svarer altså til en morfi $(\psi, \theta) : Y_f \rightarrow \text{Spec } G_f^\circ$.

SÆTNING. Hvis $f \in G$ er homogen af grad $\varphi \geq 1$, så er

$$\underline{(\psi, \theta) : Y_f \rightarrow \text{Spec } G_f^\circ}$$

en isomorfi.

Bevis. Sæt $A = G_f^\circ$, $X = \text{Spec } A$. For at definere $\psi : Y_f \rightarrow X$ betragter vi

$$\begin{array}{ccccc} A = G_f^\circ & \longrightarrow & T_{Y_f}^{-1}G^\circ & \longrightarrow & \Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y) \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & G_{(\mathcal{P}_y)}^\circ & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathcal{O}_{Y,y} \end{array}$$

Det følger, at primidealit $\mathcal{P}_{Yy} \subset A = G_f^\circ$ er

$$\mathcal{P}_{Yy} = (\mathcal{P}_y)_f^\circ$$

Videre ser vi, at $\psi^{-1}(X_{g/f^n}) = Y_g \cap Y_f$.

Af lemma 2 følger, at $\psi: Y_f \rightarrow X$ er bijektiv. Da mængderne $Y_g \cap Y_f$, $\deg g = n \deg f$ er en basis for de åbne mængder i Y_f [$Y_h \cap Y_f = Y_{h^n} \cap Y_f$], er ψ endda en homeomorfi. Vi skal altså nu vise, at

$\theta: \mathcal{O}_X \rightarrow \psi_*(\mathcal{O}_{Y_f})$ er en isomorfi. Er $U \subseteq X$ åben,

og er $g/f^n \in S_U$, altså $X_{g/f^n} \supseteq U$, finder vi

$Y_g \cap Y_f \supseteq \psi^{-1}U$, altså $g, - \in T_{\psi^{-1}U}$ og slutter, at

$g/f^n \in T_{\psi^{-1}U}^{-1} G^0$ er invertibel.

Vi har derfor

$$\begin{array}{ccccc} A = G_f^0 & \longrightarrow & T_{Y_f}^{-1} G^0 = \mathcal{G}(Y_f) & \longrightarrow & \mathcal{G}^\#(Y_f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_U^{-1} A & \longrightarrow & (T_{\psi^{-1}U}^{-1} G)^0 = \psi_* \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \psi_* \mathcal{G}^\#(U) \end{array}$$

Morfien $\theta: \mathcal{G}^\# \rightarrow \psi_* \mathcal{G}^\#$ er altså $()^\#$ anvendt på

$\mathcal{G} \rightarrow \psi_* \mathcal{G}$, og påstanden følger af at denne morfi mellem præknipper er en isomorfi, altså af at

$$S_U^{-1} A \longrightarrow T_{\psi^{-1}U}^{-1} G^0$$

er bijektiv for alle U . [Den inverse afbildning

er givet ved $a/g \mapsto \frac{ag^{r-1}/f^r}{g^r/f^r}$, $r = \deg g$.
($= \deg a$)]

□

Korollar. $\text{Proj } G = (Y, \mathcal{O}_Y)$ er et R -skema, Y_f er affin

og $G_f^0 \cong \Gamma(Y_f, \mathcal{O}_Y)$, hvis $\deg f \geq 1$.

4. OPGAVER OM Proj. ① Lad $G = G^0 \oplus G^1 \oplus \dots$ være en gradueret ring. Vis, at $\text{Proj } G \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists$ homogent element af grad > 0 , som ikke er nilpotent. Vis, at hvis G er frembragt (over G^0) af endelig mange elementer i G^1 , så gælder

$$\text{Proj } G \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall d \geq 0 : G^d \neq 0.$$

② Lad G' være endnu en gradueret ring og lad $\vartheta: G \rightarrow G'$ være en homogen morfi. Vis, at delmængden

$$P_{\vartheta} = \{x' \in \text{Proj } G' \mid G^{\geq x'} \not\subseteq \vartheta^{-1}(P_{x'})\} \subseteq \text{Proj } G'$$

er åben, og at $\vartheta: G \rightarrow G'$ naturligt definerer en morfi

$$\psi: P_{\vartheta} \rightarrow \text{Proj } G$$

$$\uparrow \cap$$

$$\text{Proj } G'$$

Vis, at hvis ϑ er en kvotientmorfie $G \rightarrow G/I$, så er $P_{\vartheta} = \text{Proj}(G/I)$ og $\psi: \text{Proj}(G/I) \rightarrow \text{Proj } G$ er en afsluttet immersion.

③ Antag, at G er en gradueret R -algebra, og betragt en ringhomomorfie $R \rightarrow R'$. Vis at $G \otimes_R R'$ naturligt gradueres, og at $\vartheta: G \rightarrow G \otimes_R R'$ er homogen. Vis, at $P_{\vartheta} = \text{Proj}(G \otimes_R R')$, og at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj } G & \xleftarrow{\psi} & \text{Proj}(G \otimes_R R') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R & \xleftarrow{\quad} & \text{Spec } R' \end{array}$$

er kartesisk.

④ Vis, at hvis G er frembragt over R af endelig mange elementer i G^1 , så gælder for den naturlige morfi $\chi: \text{Proj}(G) \rightarrow \text{Spec } R$, at

$$\chi(\text{Proj } G) = \bigcap_{d \geq 0} \text{Supp } G^d \text{ er afsluttet}$$

[Vink: Brug ① og ③ til at vise, at $\chi^{-1}(s) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall d: G^d \otimes_R \kappa(s) \neq 0$ og anvend Nakayamas lemma: $M \otimes_R \kappa(y) \neq 0 \Leftrightarrow M_y \neq 0 \Leftrightarrow y \in \text{Supp } M \Leftrightarrow y \in \text{Ann } M$ (for en e.f. R -modul M)].

⑤ I $P = \mathbb{P}_{n/R} = \text{Proj } R[T_0, \dots, T_n]$ betragtes standard overdækningen $P = P_0 \cup \dots \cup P_n$, $P_i = P_{T_i} \simeq \text{Spec } R[T_0/T_i, \dots, T_n/T_i]$.

For en R -algebra A sættes $A_v^{n+1} = \{\alpha \in A^{n+1} \mid \alpha_v = 1\}$, og for $\alpha \in A_v^{n+1}$ betegner vi med $\varphi_{v,\alpha}$ R -morfien

$$\varphi_{v,\alpha} : \operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} R[T_0/T_v, \dots, T_n/T_v] = P_v$$

givet ved at $T_i/T_v \mapsto \alpha_i \in A$. Vis, at der for $\beta \in A_\mu^{n+1}$ gælder, at

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\varphi_{v,\alpha}} & P_v \\ & \searrow \varphi_{\mu,\beta} & \nearrow \\ & P_\mu & \end{array} \quad \text{er kommutativt} \iff \begin{cases} \alpha_\mu \in A^* \text{ og} \\ \beta = \alpha_\mu^{-1} \alpha. \end{cases}$$

[Vink: Diagrammet er kommutativt, hvis og kun hvis der findes en morfi $\chi : \operatorname{Spec} A \rightarrow P_v \cap P_\mu (= P_{T_v T_\mu})$ så at

$$\varphi_{v,\alpha} = (\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\chi} P_v \cap P_\mu \hookrightarrow P_v) \text{ og } \varphi_{\mu,\beta} = (\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\chi} P_v \cap P_\mu \hookrightarrow P_\mu).]$$

Slut heraf: Idet $\dot{A}^{n+1} \subseteq A^{n+1}$ er delmængden

$$\dot{A}^{n+1} = \{\alpha \in A^{n+1} \mid \exists v : \alpha_v \in A^*\},$$

og $\dot{A}^{n+1}/A^*$ er kvotienten heraf m.h.t. $\alpha \sim \beta \iff \exists \lambda \in A^* : \lambda\alpha = \beta$ så findes en bijektion

$$\dot{A}^{n+1}/A^* \xrightarrow{\sim} \{\varphi \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Spec} A, P_n) \mid \exists v : \varphi(\operatorname{Spec} A) \subseteq P_v\}$$

For en lokal R -algebra A gælder derfor

$$\dot{A}^{n+1}/A^* = P_n(A).$$

Overvej, at vi for et homogent ideal $I \subseteq R[T_0, \dots, T_n]$ og det hertil svarende afsluttede delskema

$$X = \operatorname{Proj}(R[T_0, \dots, T_n]/I) \hookrightarrow P_n$$

tilsvarende har

$$\{\alpha \in \dot{A}^{n+1}/A^* \mid \forall d \forall f \in I^d : f(\alpha) = 0\} \subseteq X(A),$$

og at "=" gælder, når A er lokal.

⑥ Find for et legeme k en bijektion

$$\{\text{afsluttede delskemaer } X \subseteq P_n/k\} \xrightarrow{\sim} \{\text{skematiskke idealer i } k[T_0, \dots, T_n]\}$$

LIDT FORMEL PROJEKTIV GEOMETRI

k er et legeme. $R = k[T_0, \dots, T_r]$ gradueret (idealer er sædvl. homogene). $R_{\geq 1}$ det irrelevante homogene primideal. $\mathcal{R} = \{\text{homogene elt } \neq 0 \text{ i } R_{\geq 1}\}$.

1. DEFINITIONER. Et punkt P i $\mathbb{P}_r =$ relevant primideal i R .

$\mathcal{O}_P := R_{(P)}$ lokal ring med maksimalideal $=: \mathfrak{m}_P$ og restklassellegeme $\kappa(P) := \mathcal{O}_P / \mathfrak{m}_P = R_{(P)} / P_{(P)} =$ homogene brøklegerne for R/P .

Punktet P er algebraisk, hvis $\dim^* R/P = 0 \Leftrightarrow |\kappa(P):k| < \infty$,

og rationalt, hvis $|\kappa(P):k| = 1 \Leftrightarrow k \cong \kappa(P) \Leftrightarrow R/P \cong k[X]$

$\Leftrightarrow P$ har formen $P_{(\lambda_0, \dots, \lambda_r)} := \ker \left\{ \begin{array}{c} k[T_0, \dots, T_r] \rightarrow k[X] \\ T_i \mapsto \lambda_i X \end{array} \right\} =$

$(\dots, \lambda_i T_j - \lambda_j T_i, \dots)$ for passende $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \in k^r \setminus \{0\}$. Løst at se,

at $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \mapsto P_{(\lambda_0, \dots, \lambda_r)}$ giver bijektion

"Sædvanlige" projektive rum $\mathbb{P}_r(k) \cong \{\text{rational punkter i } \mathbb{P}_r\}$.

Hvis $k = \bar{k}$, er alle algebraiske punkter rationale.

For et punkt P og en gradueret R -modul M skriver vi M_P for den homogene lokalisering $M_{(P)}$.

2. DEFINITIONER. For idealer J, I skrives $\underline{J} < \underline{I}$, hvis

$J^{(n)} \subseteq I^{(n)}$ for $n \gg 0 \Leftrightarrow [J+I/I]^{(n)} = 0$ for $n \gg 0$

$\Leftrightarrow \dim^* [J+I/I] = -1 \Leftrightarrow \text{Supp}^* (J+I/I) = \emptyset \Leftrightarrow$

$(J+I/I)_P = 0$ for alle (algebraiske) punkter $P \Leftrightarrow J_P + I_P = I_P$

for alle (algebraiske) punkter $P \Leftrightarrow J_P \subseteq I_P$ for alle (algebraiske) punkter P .

Og $\underline{J} \sim \underline{I}$, hvis $\underline{J} < \underline{I} \wedge \underline{I} < \underline{J} \Leftrightarrow J^{(n)} = I^{(n)}$ for $n \gg 0 \Leftrightarrow$

$J_P = I_P$ for alle (algebraiske) punkter P . [Bemærk $\underline{I} \sim \underline{J} \Rightarrow \underline{I} \sim \underline{I} + \underline{J}$]

I er skematisk, hvis $[\underline{J} < \underline{I} \Rightarrow \underline{J} \subseteq \underline{I}] \Leftrightarrow [\underline{J} \sim \underline{I} \Rightarrow \underline{J} \subseteq \underline{I}]$

$\Leftrightarrow [R/I \text{ har ingen undermoduler } \neq 0 \text{ af endelig længde}] \Leftrightarrow$

$R_{\geq 1} \not\in \text{Ass}(R/I) \Leftrightarrow \exists f_0 \in \mathcal{R} : f_0 \text{ er } R/I\text{-regulært} \Leftrightarrow \text{depth}^* R/I \geq 0$.

Radikalideal (specielt primideal) er skematisk. Hoved-

idealer er skematisk. Hvis R/I er Macaulay af $\dim^* R/I \geq 0$,
er I skematisk.

3. DEFINITIONER. Et skema Z i $\mathbb{P}_n$ = ækvivalensklasse af
homogene idealer. Er I en repræsentant for Z skrives $Z = Z(I)$.
Skemaet $Z(0)$ betegnes $\mathbb{P}_n$. Skemaet $Z((f))$ hørende til hoved-
ideal $(0) \subset (f) \subset R$ betegnes Z_f . Sådanne skemaer kaldes
hyperflader.

Hvert skema Z har netop en skematisk repræsentant,
betegnet $\mathcal{I}_Z$. Den graduerede ring $\Gamma^*(Z) := R/\mathcal{I}_Z$ kaldes den
homogene koordinat-ring for Z . Skemaet Z kaldet et
reducent skema (resp. integritetsskema, resp. et Macaulayskema)
hvis $\Gamma^*(Z)$ er reducent (uden nilpotente elementer) (resp.
et integritetsområde, resp. en Macaulay-ring).

For skemaer Z, Z' skrives $Z \leq Z'$, hvis $\mathcal{I}_Z \supseteq \mathcal{I}_{Z'}$. Hvis
 $Z = Z(I)$, $Z' = Z(I')$, gælder: $Z \leq Z' \Leftrightarrow I' \subset I$. Skemaerne
er herved (partielt) ordnet, og udgør et lattice med
 $Z \cup Z' = Z(\mathcal{I}_Z \cap \mathcal{I}_{Z'})$ [og $\mathcal{I}_{Z \cup Z'} = \mathcal{I}_Z \cap \mathcal{I}_{Z'}$] og $Z \cap Z' = Z(\mathcal{I}_Z + \mathcal{I}_{Z'})$
[men $\mathcal{I}_{Z \cap Z'} \supseteq \mathcal{I}_Z + \mathcal{I}_{Z'}$].

Skemaerne af formen $Z(p)$ hvor P gennemløber de minimale
primidealer for $\mathcal{I}_Z$ kaldes Z 's komponenter. De er integri-
tetsskemaer. Hvis Z er reduceret, gælder

$$Z = \bigcup \text{komponenterne.}$$

4. DEFINITIONER. Et skema Z har Hilbertpolynomiet
 $\chi_Z := \chi_{\Gamma^*(Z)}$, dimensionen $\dim Z =$ graden af $\chi_Z = \dim^* \Gamma^*(Z)$
og (hvis $Z \neq \emptyset$) graden $\deg(Z) =$ "højstekoeficienten" i χ_Z .
Eks. $\mathbb{P}_n$ har Hilbertpolynomiet $\chi_{\mathbb{P}_n}(n) = \binom{n+r}{r}$, og altså
 $\dim \mathbb{P}_n = r$ og $\deg \mathbb{P}_r = 1$. En hyperflade Z_f , hvor $f \in R^{(d)}$
har Hilbertpolynomiet $\chi_{Z_f} = \Delta_d \chi_{\mathbb{P}_n}$, $\chi_{Z_f}(n) = \chi_{\mathbb{P}_n}(n) - \chi_{\mathbb{P}_n}(n-d) =$

$$= \binom{n+r}{r} - \binom{n-d+r}{r} = d \binom{n+r-1}{r-1} + \dots, \text{ altså } \dim Z_f = r-1$$

$$\text{og } \deg Z_f = d (= \deg f).$$

Bemærk, at $\dim Z = \text{største } h$, således at der findes en kæde af integritetsskemaer

$$Z_0 < Z_1 < \dots < Z_h \leq Z.$$

og at $\dim Z = \max \dim(\text{komponeut})$.

Hvis $Z = Z(I)$, har vi $\chi_Z = \chi_{R/I}$.

5. DEFINITIONER. Punktet P er et punkt på Z , og vi skriver $P \in Z$, hvis $P \in \mathcal{I}_Z$. Klart, at $(P \in Z \cup Z') \Leftrightarrow (P \in Z \vee P \in Z')$ og $(P \in Z \cap Z') \Leftrightarrow (P \in Z \wedge P \in Z')$. Til hvert skema hører således en mængde af punkter. Og de reduceret skema Z er bestemt ved sine punkter, idet $\mathcal{I}_Z = \bigcap_{P \in Z} P$. Ifølge Hilberts nulpunktssætning gælder endda

$$\mathcal{I}_Z = \bigcap \{P \mid P \text{ er algebraisk på } Z\} \text{ når } Z \text{ er reduceret.}$$

Mængden af rationale punkter på Z betegnes $Z(k)$. Når $Z = Z(I)$ har vi tydeligvis

$$P_{(\lambda_0, \dots, \lambda_r)} \in Z \Leftrightarrow \text{alle homogene } f \in I \text{ gælder } f(\lambda_0, \dots, \lambda_r) = 0.$$

Punktmængden $Z(k)$ er altså en algebraisk delmængde af $P_n(k)$. Den betegnes $V(I)$. Omvendt defineres for hver algebraisk delmængde $V \subseteq P_n(k)$ ideal $\mathcal{I}_V$ som det homogene ideal frembragt af de homogene polynomier f der opfylder

$$f(\lambda_0, \dots, \lambda_r) = 0 \text{ for alle } P_{\lambda_0, \dots, \lambda_r} \in V.$$

Og vi har

$$\begin{array}{ccc} \{\text{algebraiske delmængd. i } P_n(k)\} & \xrightleftharpoons[V(I) \leftarrow I]{V \mapsto \mathcal{I}_V} & \{\text{homogene idealer i } R\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Z(k) \\ \uparrow \\ Z \end{array}$$

$$\{\text{skemaer i } P_n\}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{I}_Z \\ \swarrow \quad \searrow \\ Z \quad \quad \mathcal{I} \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad Z(I) \end{array}$$

Specielt hører til hver algebraisk delmængde $V \subseteq \mathbb{P}_n(k)$ et reduceret skema $Z = \mathcal{Z}(\mathcal{I}_V)$ med $V = Z(k)$. Hvis $k = \bar{k}$ følger det af Hilberts nulpunktsætning, at vi har en bijektiv forbindelse

$$\{\text{alg. delmængd.}\} \rightleftharpoons \{\text{reducerede skemaer}\} \rightleftharpoons \{\text{homogene idealer}\}.$$

6. DEFINITIONER. For et punkt P i $\mathbb{P}_n$ og et skema Z har vi $\mathcal{I}_{Z,P} \subseteq \mathcal{O}_P$, og vi sætter $\mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_P / \mathcal{I}_{Z,P}$ ($= \Gamma^*(Z)_P$). Hvis $P \notin Z$, er $\mathcal{O}_{Z,P} = 0$. Hvis $P \in Z$, er $\mathcal{O}_{Z,P}$ en lokal ring (den lokale ring for Z i P) med restklasselegeme $\kappa(P)$.

7. DEFINITIONER. En 0-cykel D i $\mathbb{P}_n$ er en endelig formel linearkombination af algebraiske punkter i $\mathbb{P}_n$:

$$D = \sum_P n_P \cdot P.$$

Den knytter altså til hvert algebraisk punkt P en multiplicitet $n_P =: v_P(D)$, $= 0$ for næsten alle P . Altså

$$\{0\text{-cykler}\} = \{\text{fri abelske gruppe frembr. af afsluttede punkter}\}.$$

Cykeln D kaldes positiv ($D > 0$), hvis $v_P(D) \geq 0$ for alle P .

Hvis $D - D' > 0$ skrives $D > D'$. graden af $D = \sum n_P P$ er

$$\deg D = \sum_P n_P |\kappa(P):k|$$

8. SÆTNING. For et skema Z i $\mathbb{P}_n$ gælder $\dim Z = 0$, hvis og kun hvis der kun er endelig mange punkter på Z . Disse punkter er da alle algebraiske punkter,

$$\text{cyc}(Z) = \sum_{P \in Z} \text{long } \mathcal{O}_{Z,P} P$$

er en veldefineret (positiv) 0-cykel, og

$$\deg(\text{cyc } Z) = \deg Z. \quad \square$$

$\text{cyc}(Z)$ er punkterne på Z regnet med multiplicitet.

Af sætninger om graduerte ring får vi nu en række resultater for skemaer Z i $\mathbb{P}_n$:

9. SÆTNING (jfr. "grad" 12). $\dim Z =$ mindste tal h så at der eksisterer h hyperflader $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_h}$ således at
 $W = Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_h}$ kun har endelig mange punkter.

10. BEMÆRKNING (jfr. "grad" 13). Hvis k har uendelig mange elementer er $\dim Z =$ mindste h så at der eksisterer hyperplaner (s: af grad 1)

1) $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_h}$ således at

$$W = Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_h} \text{ er endelig}$$

Her er $Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_h}$ et lineært skema af dimension $r-h$.

11. SÆTNING (jfr. "grad" 14). For en hyperflade Z_f gælder

$$\dim Z \geq \dim Z \cap Z_f \geq \dim Z - 1,$$

og $\dim Z = \dim Z \cap Z_f \Leftrightarrow Z_f \supseteq$ komponent Z_i af Z med $\dim Z_i = Z$.

12. SÆTNING (jfr. "grad" 16). $\dim Z \leq r-t \Leftrightarrow \exists$ hyperflader $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_t}$ så at $Z \subseteq Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_t}$, $\dim Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_t} = r-t$.

13. BEMÆRKNING (jfr. "grad" 17+19). Hvis $\dim Z = h$ findes på "punkt-niveau" en surjektiv afbildning $Z \rightarrow \mathbb{P}_h$ med endelige fibre (s: kun endelig mange punkter i Z over hvert punkt i $\mathbb{P}_h$). Dette følger af Noethers normaliseringslemma.

14. Hvis $\dim Z = h$, så findes hyperflader $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_h}$, så at $(f_1, \dots, f_h)$ er en næsten-regulær følge på $\Gamma^*(Z)$. Bemærk, at vi for en næsten-regulær følge $(f_1, \dots, f_s)$ på $\Gamma^*(Z)$ har

$$\chi_{Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s}} = \Delta_{d_1} \circ \dots \circ \Delta_{d_s} \chi_Z, \quad f_i \in R^{(d_i)}$$

$$\text{hvor } \Delta_d \chi(m) = \chi(m) - \chi(m-d) = \sum_{i=0}^{d-1} \Delta \chi(m-i).$$

$$\text{Specielt er } \deg Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s} = (d_1 \dots d_s) \deg Z$$

$$\text{og } \dim Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s} = \dim Z - 1$$

15. DIMENSIONSFORMLEN. (jfr. "grad" 21). For skemaer Z, Z' i $\mathbb{P}_n$ gælder

$$\dim Z \cap Z' \geq \dim Z + \dim Z' - n$$

16 SÆTNING. (jfr. "grad" 25) $\mathbb{P}_n$ er et Macaulay-skema.

(jfr. "grad" 26)

17. MACAULAY'S SÆTNING. Lad Z være et Macaulayskema, og lad $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_s}$ være hyperflader af grader $d_1, \dots, d_s$, så at $\dim Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s} = \dim Z - s \geq 0$. Da er $(f_1, \dots, f_s)$ en r^* -reguler følge, $W = Z \cap Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s}$ er igen et Macaulayskema med $\mathcal{I}_W = \mathcal{I}_Z + (f_1, \dots, f_s)$ (Specielt er altså $\mathcal{I}_Z + (f_1, \dots, f_s)$ skematisk) og

$$\chi_W = \Delta_{d_1} \cdots \Delta_{d_s} \chi_Z$$

$$\text{spec. } \deg W = d_1 \cdots d_s \deg Z$$

18. KRULLS HOVEDIDEALSÆTNING. (jfr. grad 27). Hvis Z er et integritetsskema og Z_f er en hyperflade med $Z \not\subset Z_f$, så har alle komponenter af $Z \cap Z_f$ dimensionen $\dim Z - 1$.

19. BEZOUT'S SÆTNING. Lad $Z_{f_1}, \dots, Z_{f_r}$ være r hyperflader i $\mathbb{P}_n$ af graderne $d_1, \dots, d_r$. Hvis $W = Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r}$ er endelig, så gælder

$$\sum_{P \in Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r}} i_P(Z_{f_1} \cdots Z_{f_r}) |\kappa(P):k| = d_1 \cdots d_r,$$

$$\text{hvor } i_P(Z_{f_1} \cdots Z_{f_r}) = \text{long } \mathcal{O}_{W,P} \quad \square$$

Bemærk, at $\mathcal{O}_{W,P} = \mathcal{O}_P / (f_1, \dots, f_r)_P$, og at idealitet $(f_1, \dots, f_r)_P$ i $\mathcal{O}_P$ er frembragt af $f_1/d_1, \dots, f_r/d_r$ med et $l \in R^{(1)}$, $l \notin P$.

MORALE: Antal punkter i $Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_r}$ talt med smitmultipliciteter $i_P(Z_{f_1} \cdots Z_{f_r})$ (og hensyn til ikke-rationale algebraiske punkter P , hvor $|\kappa(P):k| > 1$) er $= d_1 \cdots d_r$.

20. DEFINITION. Et fuldstændigt snit ("Complete intersection") i $\mathbb{P}_r$ er et skema Z af formen $Z = Z_{f_1} \cap \dots \cap Z_{f_s}$, hvor $\dim Z = r-s$ ($\Leftrightarrow (f_1, \dots, f_s)$ er en (mesten)- R -regulær følge. Specielt er Z et Macaulayskema og

$$\chi_Z(n) = \Delta_{d_1} \circ \dots \circ \Delta_{d_s} \chi_{\mathbb{P}_r}(n) = \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{i_s=0}^{d_s-1} \binom{n-i_1-\dots-i_s+r-s}{r-s}$$

Er specielt Z en kurve ($\because \dim Z = 1$ ($\Leftrightarrow s = r-1$)) fås

$$\begin{aligned} \chi_Z(n) &= \sum_{i_1=0}^{d_1-1} \dots \sum_{i_{r-1}=0}^{d_{r-1}-1} (n-i_1-\dots-i_{r-1}+1) \\ &= d_1 \dots d_{r-1} (n+1) - \sum_{v=1}^{r-1} d_1 \dots \binom{d_v}{2} \dots d_{r-1} \\ &= d_1 \dots d_{r-1} n - \frac{1}{2} d_1 \dots d_{r-1} (\sum d_v - r - 1) \end{aligned}$$

21. Er Z et skema og Z_f en hyperflade af grad d , så er $Z \cap Z_f = Z(\mathcal{I}_Z + (f))$, altså $\mathcal{I}_{Z \cap Z_f} \sim \mathcal{I}_Z + (f)$, og følgende

$$\mathcal{O}_{Z \cap Z_f, P} = \mathcal{O}_P / \mathcal{I}_{Z, P} + (f)_P = \mathcal{O}_{Z, P} / (f)_{Z, P},$$

hvor $(f)_{Z, P}$ er billedet i $\mathcal{O}_{Z, P} = \mathcal{O}_P / \mathcal{I}_{Z, P}$ af idealitet $(f)_P$. Det er klart et hovedideal, frembragt af

$$\bar{f}_* = (f/l^d \bmod \mathcal{I}_{Z, P}) \quad l \in R^{(1)}, l \notin P \quad \left[\begin{array}{l} 0: P \notin \text{hyper-} \\ \text{planum } Z_f \end{array} \right]$$

Er g endnu et homogent polynomium har vi følgende ækvivalente betingelser (Max Noethers lokale betingelser):

$$\left\{ \begin{array}{l} Z \cap Z_g \supseteq Z \cap Z_f \Leftrightarrow Z_g \supseteq Z \cap Z_f \\ \Leftrightarrow (g) \subset \mathcal{I}_Z + (f) \\ \Leftrightarrow (g)_P \subseteq \mathcal{I}_{Z, P} + (f)_P \text{ i } \mathcal{O}_P \text{ for alle } P \in Z \cap Z_f \\ \Leftrightarrow (g)_{Z, P} \subseteq (f)_{Z, P} \text{ i } \mathcal{O}_{Z, P} \text{ for alle } P \in Z \cap Z_f \end{array} \right.$$

MAX NOETHERS SÆTNING. Hvis Z er et Macaulayskema, $\dim Z \geq 1$, og f er regulær på $\Gamma^*(Z)$ ($\Leftrightarrow \dim Z \cap Z_f = \dim Z - 1$), så er Noethers lokale betingelser ækvivalente med den (globale) betingelse $g \in \mathcal{I}_Z + (f)$ ($\Leftrightarrow g = a + hf, a \in \mathcal{I}_Z \Leftrightarrow \bar{g} = \bar{h}\bar{f}$ i $\Gamma^*(Z)$),

VINK. $\mathcal{I}_Z + (f)$ er skematisk $\square$

22. Sætningen gælder specielt for en Macaulaykurve Z . Er f regulær på $\Gamma^*(Z)$, har vi $\dim Z \cap \mathcal{Z}_f = 0$, og vi sætter

$$\operatorname{div}_Z(f) = \operatorname{cyc}(Z \cap \mathcal{Z}_f) = \sum_{P \in Z \cap \mathcal{Z}_f} (\operatorname{long}_{\mathcal{O}_{Z,P}}(f)) P.$$

Sådanne cykler kaldes snitcykler på Z . Er P et algebraisk punkt på Z , har vi $\dim \mathcal{O}_{Z,P} = 1$ (!). Er $\varphi \in \mathcal{O}_{Z,P}$ et regulært element, har vi derfor $\dim \mathcal{O}_{Z,P}/(\varphi) = 0$, og kan definere

$$v_P(\varphi) = \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{Z,P}}(\varphi).$$

Er ψ endnu et regulært element i $\mathcal{O}_{Z,P}$ gælder

$$(*) \quad v_P(\varphi\psi) = v_P(\varphi) + v_P(\psi).$$

[Vink: Følger $0 \rightarrow \mathcal{O}_{Z,P}/(\varphi) \xrightarrow{\cdot\psi} \mathcal{O}_{Z,P}/(\varphi\psi) \rightarrow \mathcal{O}_{Z,P}/(\psi) \rightarrow 0$ er exact].

Er f regulær på $\Gamma^*(Z)$, sætter vi $v_P(f) = v_P(\bar{f}_*) = \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{Z,P}}(f)_{Z,P}$

og har altså $\operatorname{div}_Z(f) = \sum_{P \in Z} v_P(f) \cdot P$

Er også h regulær på $\Gamma^*(Z)$, følger det, at vi har

$$\operatorname{div}_Z(hf) = \operatorname{div}_Z(h) + \operatorname{div}_Z(f),$$

Er også g regulær på $\Gamma^*(Z)$, og er de lokale betingelser opfyldt.

(v: er $Z \cap \mathcal{Z}_g \supsetneq Z \cap \mathcal{Z}_f$), så har vi naturligvis $\operatorname{div}_Z(g) > \operatorname{div}_Z(f)$.

(og af sætningen følger, at vi endda har $\operatorname{div}_Z(g) = \operatorname{div}_Z(f) + \operatorname{div}_Z(h)$)

Det er klart, at vi for hvert algebraisk punkt P har

$$(g)_{Z,P} \subseteq (f)_{Z,P} \Rightarrow \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{Z,P}}(g)_{Z,P} \geq \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{Z,P}}(f)_{Z,P}$$

og at der gælder " $\Leftarrow$ ", hvis ① $P \notin Z \cap \mathcal{Z}_f$ (thi her er $(f)_{Z,P} = \mathcal{O}_{Z,P}$)

eller ② $P \in Z \cap \mathcal{Z}_f$ og $v_P(f) = 1$ (thi det betyder, at $(f)_{Z,P}$ er

maximalideal i $\mathcal{O}_{Z,P}$) eller ③ $P \in Z$ og idealerne i $\mathcal{O}_{Z,P}$

er totalt ordnede. Er det sidste tilfældet siges $\mathcal{O}_{Z,P}$ at være en

valuationsring, og Z siges at være regulær i punktet P

Vi får derfor:

KOROLLAR. Er f og g regulære på $\Gamma^*(Z)$, er $\operatorname{div}_Z(g) > \operatorname{div}_Z(f)$

og er Z regulær i alle punkter P hvor $v_P(f) \geq 2$, så er

$g = a + hf$, $a \in \mathcal{I}_Z$, og specielt $\operatorname{div}_Z(g) = \operatorname{div}_Z(f) + \operatorname{div}_Z(h)$.

MORALE. Er $D' > D$ snitcykler på Macaulaykurven Z , og er Z regulær i alle punkter P hvori $v_P(D) \geq 2$, så er differensen $D' - D$ igen en snitcykel.

EKSEMPLER. Pappos' sætning. Pascals sætning (incl. udartede). Addition i mængden af regulære (rationale) punkter på (2^{den} og 3^{die} grads kurver.

BEMÆRKNING. Afbildningen $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto P(1, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ er en bijektion $k^r \xrightarrow{\sim} U_0 \subseteq \mathbb{P}_r(k)$. For $k = \mathbb{R}$ kan $Z_0 = Z(\mathbb{R}) \cap U_0$ altså opfattes som en delmængde af $\mathbb{R}^r$. Man kan vise for $P \in Z_0$, at Z er regulær i $P \iff Z_0$ er glat i P .

23. Hvis en Macaulaykurve Z er et integritetsskema kaldes det homogene brøklegerne for $\Gamma^*(Z)$ for legumt af rationale funktioner på Z , og det betegnes $\mathcal{R}(Z)$. For hvert punkt $P \in Z$ er den lokale ring $\mathcal{O}_{Z,P}$ et integritetsområde, hvis brøklegerne kan identificeres med $\mathcal{R}(Z)$. Er Z regulær i P følger det af 22 (*), at afbildningen $\varphi \mapsto v_P(\varphi)$ kan udvides til en homomorfi $v_P: \mathcal{R}(Z)^* \rightarrow \mathbb{Z}$. Er $\varphi = f/g$, $f, g \in \Gamma^{(n)}$, $f, g \neq 0$, er $v_P(\varphi) = v_P(f) - v_P(g)$. Hvis Z er regulær i alle punkter følger det for $\varphi \in \mathcal{R}(Z)^*$, at

$$\text{div}(\varphi) = \sum_{P \in Z} v_P(\varphi) \cdot P$$

er en veldefineret 0-cykel på Z , at vi for $\varphi = f/g$ har

$$\text{div}(\varphi) = \text{div}_Z(f) - \text{div}_Z(g)$$

og dermed specielt, at $\deg(\text{div}(\varphi)) = 0$. For en cykel D på Z defineres $\Gamma(D) \subseteq \mathcal{R}(Z)$ ved $\Gamma(D) = \{\varphi \in \mathcal{R}(Z) \mid D + \text{div}(\varphi) \geq 0\}$. Det er et k -undersum i $\mathcal{R}(Z)$.

SÆTNING. For hvert fast $g \in \Gamma^{(n)}$ gælder, at $f \mapsto f/g$ er en isomorfi $\Gamma^{(n)} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\text{div}(g))$.

VINK. Anvend Morale 22.

KOROLLAR. Vi har $\chi_Z(0) = 1 - g(Z)$, hvor $\chi_Z(0)$ er Hilbertpolynomiets værdi i 0, og $g(Z)$ er kurvens genus.

I Præknipper og knipper

Begreber: Præknippe F på top. rum X : $u \mapsto F(u)$

$$\begin{array}{ccc} U \supseteq V & F(u) \rightarrow F(v) & s \mapsto s|_V \\ & \downarrow & \\ & F(w) & \end{array}$$

Restriktion $F|_{X'}$ til åben mængde $X' \subseteq X$.

Morfi: $F \xrightarrow{\varphi} G$ mellem præknipper F, G på X :

$$\begin{array}{ccc} F(u) & \xrightarrow{\varphi_u} & G(u) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(v) & \xrightarrow{\varphi_v} & G(v) \end{array}$$

Stået F_x af præknippe F i punkt $x \in X$ er

$$F_x = \varinjlim_{x \in U} F(u).$$

For $u \ni x$: $F(u) \rightarrow F_x$, $s \mapsto s_x$.

Dirkte billede $\psi_* F$ for præknippe F på X ved kont. afb. $X \xrightarrow{\psi} Y$

$$\psi_* F(u) = F(\psi^{-1}(u)).$$

For hvert $x \in X$: $(\psi_* F)_{\psi x} \rightarrow F_x$.

Funktionspræknipper: Fast F . $F(u) \subseteq \{s: u \rightarrow F\}$ og med sædvanlig restriktion. Eks. (Med topologi på F): $\mathcal{C}^F$ = knippet af kontinuerte funktioner. $\mathcal{C}^F(u) = \{\text{kontinuerte afbildninger } u \rightarrow F\}$.

$\mathcal{C}_\infty^{\mathbb{R}}$ på $\mathbb{R}^k$: $\mathcal{C}_\infty^{\mathbb{R}}(u) = \{C_\infty\text{-funktioner } u \rightarrow \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{A}$ på $\mathbb{C}^k$, $\mathcal{A}(u) = \{\text{analytiske funktioner } u \rightarrow \mathbb{C}\}$.

Separat præknippe F

(i) $s, t \in F(u)$, $u = \bigcup u_\alpha$, $s|_{u_\alpha} = t|_{u_\alpha} \Rightarrow s = t$.

Funktionspræknipper er separate.

Knippe $\mathcal{F}$, separat samt

$$\boxed{\text{Kort: } s_\alpha = s_\beta \text{ p\u00e5 } U_\alpha \cap U_\beta}$$

(ii) $U = \bigcup U_\alpha$, $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$, $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$
s\u00e5 findes $s \in \mathcal{F}(U)$, s\u00e5 $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ for alle α .

Kompatibel familie $\mathcal{U} = (U_\alpha)$, $\bigcup_\alpha U_\alpha = U$, system (s_α)
 $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ s\u00e5 at $s_\alpha = s_\beta$ p\u00e5 $U_\alpha \cap U_\beta$.

$\Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}) = \{ \text{kompatible familier} \}$. Defin\u00e9r

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$$

$$\text{ved } s \mapsto (s|_{U_\alpha}).$$

Vi har (i) $\Leftrightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ injektiv for alle $\mathcal{U}$

(ii) $\Leftrightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ surjektiv for alle $\mathcal{U}$.

$\mathcal{F}^+$ defineres ved $\mathcal{F}^+(U) = \varinjlim_{\bigcup \mathcal{U} = U} \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ og vi f\u00e5r $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$

(i) $\Leftrightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ injektiv

Oftest skrives

$\check{\Gamma}(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}^+(U)$. (ii) $\Rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ surjektiv

S\u00e6tning (a) $\mathcal{F}^+$ er separat (b) $\mathcal{F}$ separat $\Rightarrow \mathcal{F}^+$ er et knippe

(c) $\mathcal{F}^\# := \mathcal{F}^{++}$ er altid knippe. (d) $\mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_X^+$ er isomorfi. (e)

$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\#$ er funktor $(\text{pre}) \rightarrow (\text{she})$

Er $\square: (\text{she}) \rightarrow (\text{pre})$ den g\u00e6nsomme funktor,

har vi

$$\text{Hom}_{\text{she}}(\mathcal{F}^\#, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\text{pre}}(\mathcal{F}, \square \mathcal{G}).$$

Eks. Er pr\u00e6knippet $\mathcal{F} \subseteq$ knippet $\mathcal{G}$ finder vi

$$\mathcal{F}^\#(U) = \mathcal{F}^+(U) = \{ s \in \mathcal{G}(U) \mid \exists U = \bigcup U_\alpha : \\ s|_{U_\alpha} \in \mathcal{F}(U_\alpha) \}.$$

Anvend p\u00e5 funktionspr\u00e6knipper.

Bem\u00e6rk: Restriktion og direkte billede af knipper f\u00f8r igen til knipper.

Delknippet frembragt af elementer $s_\alpha \in F(U_\alpha)$, $U_\alpha \subseteq X$ i knippet F defineres på følgende måde: Først betragtes præknippet $\mathcal{G}_0 : U \mapsto \{s \in F(U) \mid \exists \alpha : U \subseteq U_\alpha \wedge s_\alpha|_U = s\}$, og herudfra defineres knippet ved $U \mapsto \{s \in F(U) \mid s \text{ lokalt tilhører } \mathcal{G}_0\}$, jfr. foregående eksempel.

Er F et knippe af kommutative grupper, definerer vi $\mathcal{G}_0(U)$ som undergruppen i $F(U)$ frembragt af $\{s \in F(U) \mid \exists \alpha : U \subseteq U_\alpha \wedge s_\alpha|_U = s\}$, og fortsætter som ovenfor.

Sektioner Er der givet en afbildning $F \xrightarrow{p} X$ defineres knippet af sektioner i p ved $U \mapsto \{s : U \rightarrow F \mid ps(x) = x \text{ for } x \in U\} =: \Gamma(U, F)$. Er p kontinuert (og F et top. rum) defineres tilsvarende et knippe af kontinuerte sektioner. Er F et præknippe på X kan vi ^{på denne måde} definere et kaotisk knippe $\tilde{F}$ ved at betragte den disjunkte forening

$$\hat{F} = \bigcup_{x \in X} F_x \quad \checkmark$$

med den oplagte afbildning $\hat{F} \rightarrow X$. For hvert $s \in F(U)$ er $\hat{s} = (s_x)_{x \in U}$ en sektion i $\hat{F}$, altså element i $\Gamma(U, \hat{F})$, og vi får en morfi af præknipper $F \rightarrow \hat{F}$.

Det er ikke svært at identificere $F^\#$ med delknippet af $\tilde{F}$ frembragt af $\{s. \mid s \in F(U), U \subseteq X\}$.

Hvis F selv er et knippe, så er $F \hookrightarrow \tilde{F}$ (dette følger blot (i)). Det er ikke svært at definere en topologi på $\tilde{F}$, så at $F^\# =$ knippet af kontinuerte funktioner i $\tilde{F}$.

For et knippe F på X skrives ofte $\Gamma(U, F) = F(U)$.

* $\checkmark$ Knipet $\tilde{F}$ er altså givet ved

$$\begin{aligned} \tilde{F}(U) &= \Gamma(U, \hat{F}) = \{x \mapsto \sigma(x) \in F_x \mid x \in U\} \\ &= \bigcup_{x \in U} F_x. \end{aligned}$$

Knippe på basis for de åbne mængder Lad $\mathcal{B}$ være en basis for de åbne mængder på X , og lad $\mathcal{F}$ være et præknippe på X , som opfylder (i) og (ii) for overdækninger

$$U = \bigcup U_\alpha, \text{ hvor } U, U_\alpha \in \mathcal{B},$$

da er

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^\#(U)$$

en isomorfi for $U \in \mathcal{B}$. [Nok at vise, at $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}^\#(U)$, og hertil bruges, at overdækninger $U = \bigcup U_\alpha$ med $U_\alpha \in \mathcal{B}$ er finale blandt alle overdækninger af U].

Spec A. På $X = \text{Spec}(A)$ har vi basis $X_f = \{x \mid f \notin \mathfrak{p}_x\}$.

og præknippet $\mathcal{Q}: U \mapsto A[S_U^{-1}]$,

hvor

$$S_U = \{f \in A \mid X_f \supseteq U\}.$$

Let at se, at $A_f \cong \mathcal{Q}(X_f)$ og $A_{\mathfrak{p}_x} \cong \mathcal{Q}_x$

Knippet $\mathcal{Q}^\#$ betegnes $\tilde{A}$. Vi har altså $A_{\mathfrak{p}_x} \cong \tilde{A}_x$.

(*) Præknippet $\mathcal{Q}$ opfylder (i) og (ii) m.h.t. basen $\{X_f\}$.

Vi har altså

$$A_f \cong \tilde{A}(X_f) = \Gamma(X_f, \tilde{A})$$

specielt

$$A \cong \tilde{A}(X) = \Gamma(X, \tilde{A}).$$

[Bevis for (*): Reducer til endelig overdækning. $X_f = X_{f_{\alpha_1}} \cup \dots \cup X_{f_{\alpha_N}}$.

$$f_{\alpha} \in \text{Rad}(f) \quad f \in \text{Rad}(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_N}).$$

Insigt: Nok $s = a/f \in \mathcal{Q}(X_f) = A_f$ $f_{\alpha} a = 0$ $f = \sum c_{\alpha} f_{\alpha}$

$f a = \sum c_{\alpha} f_{\alpha} a = 0$. Surj. Reducer til: givet $s_{\alpha} = a_{\alpha}/f_{\alpha}$

$f_{\beta} a_{\alpha} = f_{\alpha} a_{\beta}$, $f = \sum c_{\gamma} f_{\gamma}$ $f_{\alpha} = b_{\alpha} f$, da er $s = \frac{\sum c_{\gamma} a_{\gamma}}{f}$ brugbar,

$$\text{th} s|_{X_{\alpha}} = \frac{\sum_{\gamma} c_{\gamma} a_{\gamma} b_{\alpha}}{f_{\alpha}} = \frac{\sum_{\gamma} c_{\gamma} a_{\gamma} f_{\alpha} b_{\alpha}}{f_{\alpha}^2} = \frac{\sum_{\gamma} c_{\gamma} f_{\gamma} a_{\alpha} b_{\alpha}}{f_{\alpha}^2} = \frac{f b_{\alpha} a_{\alpha}}{f_{\alpha}^2} = \frac{a_{\alpha}}{f_{\alpha}} = s_{\alpha}.$$

[Brug gentagne gange ved reduktion, at $X_g = X_{g^N}$]

Støtten for knippe F på X er $\text{Supp}(F) = \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$.

Sætning. Hvis $Z \stackrel{i}{\subseteq} X$ afsluttet, så bijektiv forbindelse
 $\{\text{knipper } \mathcal{G} \text{ på } Z\} \Leftrightarrow \{\text{knipper på } X \text{ af formen } i_* \mathcal{G}\} \Leftrightarrow \{\text{knipper } F \text{ på } X \mid \text{med } \text{Supp } F \subseteq Z\}$.

En B -modul, hvor B er knippe af ringe på X er et knippe F , således at $F(U)$ er en $B(U)$ -modul, og således at

$$\begin{array}{ccc} B(U) \times F(U) & \longrightarrow & F(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(V) \times F(V) & \longrightarrow & F(V) \end{array} \quad \text{er kommutativ når } U \supseteq V.$$

Givet $(X, B) \xrightarrow{\psi} (Y, \mathcal{A})$, hvor $\psi = (\psi, \theta)$, med $\psi: X \rightarrow Y$ kontinuert, og $\theta: \mathcal{A} \rightarrow \psi_* B$. Hvis F er en B -modul, så er $\psi_* F$ en $\psi_* B$ -modul, og kan via θ opfattes som $\mathcal{A}$ -modul.

Belegning: $\psi_* F$. Hvis $\mathcal{G}$ er en $\mathcal{A}$ -modul, så er $\mathcal{G}_y$ en $\mathcal{A}_y$ modul, og vi har for hvert $x \in X$, $\mathcal{A}_{\psi x} \xrightarrow{\theta_x} B_x$, og kan danne $B_x \otimes_{\mathcal{A}_{\psi x}} \mathcal{G}_{\psi x}$, en B_x -modul. Det kaotiske knippe $K = \bigcup_{x \in X} B_x \otimes_{\mathcal{A}_{\psi x}} \mathcal{G}_{\psi x}$ er en B -modul. For hver åben $U \subseteq Y$, og $s \in \mathcal{G}(U)$ har vi $1 \otimes s \in \Gamma(\psi^{-1}(U), K)$ defineret ved $1 \otimes s: x \mapsto 1 \otimes s_{\psi x} \in B_x \otimes_{\mathcal{A}_{\psi x}} \mathcal{G}_{\psi x}$. Under- B -modulen i K frembragt af alle sådanne elementer betegnes $\psi^* \mathcal{G}$.

Sætning. $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{G}, \psi_* F) = \text{Hom}_B(\psi^* F, \mathcal{G})$.

Eksempel. Til A -modul M kan konstrueres en $\tilde{A}$ -modul $\tilde{M}$ på $Y = \text{Spec } A$, således at vi på $Y_f = \text{Spec } A_f$ har $\Gamma(Y_f, \tilde{M}) = M_f$.

Er N en B -modul, og $\theta: A \rightarrow B$ en ringhomomorfi svarende til $X = \text{Spec } B \xrightarrow{\psi} \text{Spec } A = Y$, så er

$$\psi_*(\tilde{N}) = \tilde{N}_\theta \quad \text{og} \quad \psi^* \tilde{M} = \widetilde{B \otimes_A M}$$

(N_θ er N opfattet som A -modul via θ).

Pre-R-X og She-R-X som abelske kategorier. Kategorierne (Pre) og (She) af præknipper af R-moduler og knipper af R-moduler er på oplagt måde additive kategorier. De er endda abelske kategorier:

For en morfi

$$M \xrightarrow{\varphi} N \quad \text{i} \quad (\text{Pre})$$

defineres Ker , Coker , Coim , Im "u for u", dvs.

$$(\text{Ker } \varphi)(u) = \text{Ker } \varphi_u \quad (\text{Coker } \varphi)(u) = \text{Coker } \varphi_u$$

$$(\text{Coim } \varphi)(u) = \text{Coim } \varphi_u \quad (\text{Im } \varphi)(u) = \text{Im } \varphi_u.$$

Klart, at $\text{Coim } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ er en isomorfi i (Pre).

For en morfi

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N} \quad \text{i} \quad (\text{She})$$

defineres $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \square \varphi$ [$u \mapsto \text{Ker } \varphi_u$ er et knippe]

og $\text{Coker } \varphi = (\text{Coker } \square \varphi)^\#$ [$u \mapsto \text{Coker } \varphi_u$ er normalt

ikke et knippe; er imidlertid φ injektiv, ses det, at $u \mapsto \text{Coker } \varphi_u$ opfylder (i), således at vi i dette tilfælde har $\text{Coker } \varphi = (\text{Coker } \square \varphi)^+$], og altså

$$\text{Coim } \varphi = \text{Coker} [\text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{M}] = (\text{Coim } \square \varphi)^+$$

$$\text{Im } \varphi = \text{Ker} [\mathcal{N} \rightarrow \text{Coker } \varphi] = (\text{delknippet af } \mathcal{N} \text{ frembragt af } \text{Im } \square \varphi) = (\text{Im } \square \varphi)^+ = (\text{Im } \square \varphi)^\#.$$

Det at se, at $\text{Coim } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ er isomorfi i (She)

$$M \rightarrow N \rightarrow P \text{ er exact i (Pre)} \Leftrightarrow M(u) \rightarrow N(u) \rightarrow P(u) \text{ exact for alle } u$$

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \text{ er exact i (She)} \Leftrightarrow \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{N}_x \rightarrow \mathcal{P}_x \text{ exact for alle } x \in X$$

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0 \text{ exact i (She)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow \mathcal{M}(u) \rightarrow \mathcal{N}(u) \rightarrow \mathcal{P}(u) \text{ exact} \\ \text{og} \\ \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \text{ lokalt surjektiv} \end{cases}$$

Invert billede $\mathcal{C}$ kategori $(= (\text{Sets}), (Ab), (R\text{-mod}), (R\text{-alg}))$

X, Y top. rum, $\text{Open}(X) =$ kategorien af åbne mængder i X ,

$\text{Pre-}X =$ kategorien af præknipper på X med

værdier i $\mathcal{C} =$ kategorien af kontravariante

funktorer $: \mathcal{U} \mapsto F(\mathcal{U})$ fra $\text{Open}(X) \rightarrow \mathcal{C}$.

Er

$$\bar{\phi} : \text{Open}(Y) \longrightarrow \text{Open}(X)$$

en funktor, defineres for $F \in \text{Pre-}X$, det direkte billede $\bar{\phi}^! F \in \text{Pre-}Y$ ved $\bar{\phi}^! F = F \circ \bar{\phi}$, altså $\bar{\phi}^! F(V) = F(\bar{\phi}(V))$.

Er $G \in \text{Pre-}Y$ defineres det inverse billede $\bar{\phi}_! G \in \text{Pre-}X$ ved

$$(*) \quad \bar{\phi}_! G(\mathcal{U}) = \varinjlim_{\bar{\phi}(V) \supseteq \mathcal{U}} G(V)$$

Vi har altså
$$\text{Pre-}Y \xrightleftharpoons[\bar{\phi}_!]{\bar{\phi}^!} \text{Pre-}X$$

og finder let

$$\text{Hom}_{\text{Pre-}X}(\bar{\phi}_! G, F) = \text{Hom}_{\text{Pre-}Y}(G, \bar{\phi}^! F)$$

Hvis funktoren $\bar{\phi}$ respekterer ^{endelig} $\cap$, så er indermængden i $(*)$ filterende. Hvis $\bar{\phi}$ desuden respekterer overdækninger, så er $\bar{\phi}^!(\text{knippe})$ igen et knippe. Sættes $\bar{\phi}_!^\# = \# \circ \bar{\phi}_!$ har vi

$$\text{She-}Y \xrightleftharpoons[\bar{\phi}_!^\#]{\bar{\phi}^!} \text{She-}X$$

og finder

$$\text{Hom}_{\text{She-}X}(\bar{\phi}_!^\# G, F) = \text{Hom}_{\text{She-}Y}(G, \bar{\phi}^! F)$$

Ek. 1. $\bar{\phi} : \text{Open}(Y) \longrightarrow \text{Open}(X)$ er af formen ψ^{-1} , hvor

$\psi : X \rightarrow Y$ er kontinuert. I dette tilfælde skrives

$$\psi_{\text{pre}} \quad \text{for} \quad \bar{\phi}^! : \text{Pre-}X \rightarrow \text{Pre-}Y, \quad \text{og} \quad \psi_* = \psi_{\text{she}} = \bar{\phi}_!^\# : \text{She-}X \rightarrow \text{She-}Y$$

og $\psi^{\text{pre}} = \phi_! : \text{Pre-}Y \rightarrow \text{Pre-}X$, $\psi^{\text{she}} = \phi_!^{\#} : \text{She-}Y \rightarrow \text{She-}X$,
altså

$$\text{Pre-}X \xrightleftharpoons[\psi^{\text{pre}}]{\psi^{\text{pre}}} \text{Pre-}Y$$

$$\text{Hom}_X(\psi^{\text{pre}} G, F) = \text{Hom}_Y(G, \psi^{\text{pre}} F)$$

og

$$\text{She-}X \xrightleftharpoons[\psi^*]{\psi_*} \text{She-}Y$$

$$\text{Hom}_X(\psi^* G, F) = \text{Hom}_Y(G, \psi_* F)$$

Eks. 1a Inklusionsafbildningen $i: U \hookrightarrow Y$, hvor U åben i Y .

$$i_{\text{pre}} F = i_* F : V \mapsto F(U \cap V).$$

$$i^{\text{pre}} G = i^* G = G|_U.$$

$$\text{Hom}_U(G|_U, F) = \text{Hom}_Y(G, i_* F)$$

Eks. 2 $i: \text{Open}(U) \rightarrow \text{Open}(X)$ er inklusionen hørende til inklusion $i: U \hookrightarrow^{\text{åben}} X$. Vi finder her $i^! F = F|_U$,

og

$$i_! G(V) = \begin{cases} G(V) & \text{hvis } V \subseteq U \\ \text{initialobj.} & \text{hvis } V \not\subseteq U \quad (\text{indermængden } i \\ (*) & \text{er tom!!!} \end{cases}$$

Altså

$$\text{Hom}_{\text{Pre-}X}(i_! G, F) = \text{Hom}_{\text{Pre-}U}(G, F|_U)$$

$$\text{Hom}_{\text{She-}X}(i_!^{\#} G, F) = \text{Hom}_{\text{She-}U}(G, F|_U)$$

Eks. 3. $\cdot = \text{top. rum med ét element}$, $\phi_u: \text{Open}(\cdot) \rightarrow \text{Open}(X)$ givet ved $\emptyset \mapsto \emptyset$, $\cdot \mapsto U$. Til $G \in \mathcal{C}$ svarer prækniippet $\check{G}$ på $\cdot$ givet ved $\check{G}$ og knippet $G^{\#}$ givet ved $\check{G}$ finalobjekt.

Betegnelse: $\check{G}_u = \phi_u^! \check{G}$, $G_u^{\#} = \phi_u^{\#}(G^{\#})$. Vi finder for

$G \in \mathcal{C}$, $F \in \text{Pre-}X$ (resp. $\text{She-}X$), at

$$\text{Hom}_{\text{Pre-}X}(\check{G}_u, F) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, F(U))$$

$$\text{Hom}_{\text{She-}X}(G_u^{\#}, F) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(G, F(U))$$

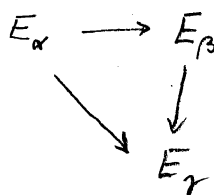
Opq: Bestem $\check{G}_u$ og sammenlign med eks. 2.

INDUKTIV OG PROJEKTIV LIMS

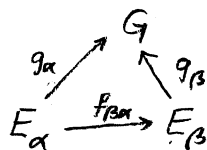
1. Lad I være en ^{pre}partielt ordnet mængde d.v.s. en mængde forsynet med en reflektiv, transitiv relation $<$. Lad $\mathcal{C}$ være en kategori (f.eks.: mængder, kommutative grupper, R -moduler, ringe, R -algebraer).

Ved et I-system i $\mathcal{C}$ forstås en tilordning, der til hvert $\alpha \in I$ knytter et objekt E_α i $\mathcal{C}$, og til hvert $\alpha < \beta$ knytter en morfi $E_\alpha \xrightarrow{f_{\beta\alpha}} E_\beta$ i $\mathcal{C}$, således at følgende er opfyldt:

$$f_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha} \text{ og for } \alpha < \beta < \gamma \text{ gælder } f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}.$$



2. Ved en morfi fra I-systemet $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ til et objekt G i $\mathcal{C}$ forstås en familie af morfier $E_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} G$ således at $g_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_\alpha$ for $\alpha < \beta$:



Ved en induktiv limes af I-systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ forstås et objekt E' i $\mathcal{C}$ med en morfi fra $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ til E' ,

$$E_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} E'$$

således at følgende universelle egenskab er opfyldt:

For hver morfi (g_α) fra I-systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ til et objekt G i $\mathcal{C}$ findes netop en morfi $g: E' \rightarrow G$ således at

$$g_\alpha = g \circ i_\alpha.$$

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & G \\ i_\alpha \uparrow & \nearrow g_\alpha & \\ E_\alpha & & \end{array}$$

Hvis der findes en induktiv limes af I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, så er den entydigt bestemt. Den betegnes $E' = \varinjlim_{\alpha \in I} E_\alpha$ og morfierne $E_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} E'$ kaldes injektionerne.

3. Duallt defineres en morfi (h_α) fra et objekt H i $\mathcal{C}$ til I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ som en familie af morfier $H \xrightarrow{h_\alpha} E_\alpha$ således at $h_\beta = f_{\beta\alpha} \circ h_\alpha$ for $\alpha < \beta$, og en projektiv limes af I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ som et objekt E'' i $\mathcal{C}$ med en morfi (p_α) fra E'' til I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, således at der til hver morfi (h_α) fra et objekt H til I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ findes netop en morfi $H \xrightarrow{h} E''$ i $\mathcal{C}$ således at $p_\alpha \circ h = h_\alpha$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{h} & E'' \\ & \searrow h_\alpha & \downarrow p_\alpha \\ & & E_\alpha \end{array}$$

Hvis der findes en projektiv limes af I -systemet $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, så er den entydigt bestemt. Den betegnes $E'' = \varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha$, og morfierne $E'' \xrightarrow{p_\alpha} E_\alpha$ kaldes projektionerne.

4. Hvis ordningen i I er "=", så er $\varinjlim E_\alpha$ den direkte sum $\bigsqcup_\alpha E_\alpha$ og $\varprojlim E_\alpha$ er det direkte produkt $\prod_\alpha E_\alpha$.

5. I kategorien (Sets) af mængder findes altid $\varinjlim$ og $\varprojlim$: Lad $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ være et I -system. Vi kan da betragte den disjunkte forening $\bar{E} = \bigsqcup E_\alpha$

med inclusionerne $\bar{i}_\alpha: E_\alpha \rightarrow \bar{E}$, og i $\bar{E}$ den mindste ækvivalensrelation $\sim$ således at vi for alle $\alpha < \beta$ og alle $x \in E_\alpha$ har $\bar{i}_\alpha(x) \sim \bar{i}_\beta(f_{\beta\alpha}(x))$. Kvotienten $E' = \bar{E}/\sim$ forsynet med injektionerne $i_\alpha: E_\alpha \rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{E}/\sim$ er da den induktive limes $\varinjlim E_\alpha$. Vi ser, at elementerne $\xi \in \varinjlim E_\alpha$ har repræsentanter $x \in E_\alpha$ og at $x \in E_\alpha$ og $y \in E_\beta$ repræsenterer samme $\xi \in \varinjlim E_\alpha$, netop hvis der findes $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_m = \beta$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in I$ med

$$\alpha = \alpha_0 < \gamma_1 > \alpha_1 < \gamma_2 > \alpha_2 \dots < \gamma_m > \alpha_m = \beta$$

således at vi kan udfylde



Behagter vi i stedet det kartesiske produkt $\bar{E} = \prod E_\alpha$ ser vi, at delmængden E' , bestående af elementer $(x_\alpha) \in \prod E_\alpha$, som opfylder $f_{\beta\alpha}x_\alpha = x_\beta$ for alle $\alpha < \beta$, forsynet med projektionerne $p_\alpha: E' \hookrightarrow \bar{E} \rightarrow E_\alpha$, er den projektive limes $\varprojlim E_\alpha$.

Elementerne i $\varprojlim E_\alpha$ er kompabile familier (x_α) .

6. Lad $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ være et I -system i kategorien $\mathcal{C}$ og betragt et objekt G i $\mathcal{C}$. For hvert $\alpha \in I$ har vi så mængden

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\alpha, G)$$

og for $\alpha < \beta$ defineres ved $\varphi \mapsto \varphi \circ f_{\beta\alpha}$ en afbildning

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\beta, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\alpha, G).$$

Betegner I^{op} mængden I med den modsatte ordning
 får vi således et I^{op} -system af mængder

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_{\alpha}, G).$$

Det ses, at morfierne fra $(E_{\alpha}, f_{\beta\alpha})$ til G netop er de
 kompatible familier i dette I^{op} -system af mængder,
 altså elementerne i

$$\varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_{\alpha}, G).$$

Vi ser derfor, at $E_{\alpha} \xrightarrow{i_{\alpha}} E'$ er en induktiv limes af
 I -systemet $(E_{\alpha}, f_{\beta\alpha})$, netop hvis vi får en bijektiv
 afbildning

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E', G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_{\alpha}, G)$$

for alle objekter G i $\mathcal{C}$. Definitionen udsiger altså,
 at

$$\boxed{\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\varinjlim_{\alpha \in I} E_{\alpha}, G\right) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_{\alpha}, G)}$$

Tilsvarende får vi for alle objekter H i $\mathcal{C}$ et
 I -system af mængder

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E_{\alpha})$$

og morfierne fra H til I -systemet $(E_{\alpha}, f_{\beta\alpha})$ er netop
 de kompatible familier i dette system, altså elemen-
 terne i $\varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E_{\alpha})$. At $E'' \xrightarrow{p_{\alpha}} E_{\alpha}$ er en
 projektiv limes af I -systemet $(E_{\alpha}, f_{\beta\alpha})$ betyder altså
 at $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E'') \rightarrow \varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E_{\alpha})$ er bijektiv
 for alle H i $\mathcal{C}$. Definitionen udsiger altså, at

$$\boxed{\text{Hom}_{\mathcal{C}}\left(H, \varprojlim_{\alpha \in I} E_{\alpha}\right) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, E_{\alpha})}$$

7. En delmængde J af den partielt ordnede mængde I kaldes initial, hvis

$$1^\circ \quad \forall \alpha \in I \exists \gamma \in J : \gamma < \alpha$$

$$2^\circ \quad \forall \alpha \in I \forall \gamma', \gamma'' \in J : \begin{matrix} \gamma' < \alpha \\ \gamma'' < \alpha \end{matrix} \Rightarrow \exists \gamma \in J : \begin{matrix} \gamma < \gamma' \\ \gamma < \gamma'' \end{matrix}$$

Dualt defineres final.

LEMMA. Lad $(S_\alpha, f_{\beta\alpha})$ være et I -system af mængder, og lad $J \subseteq I$ være en initial delmængde, da er

$$\varprojlim_{\alpha \in I} S_\alpha \longrightarrow \varprojlim_{\alpha \in J} S_\alpha$$

en bijektion. $\square$

KOROLLAR. Lad $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ være et I -system i kategorien $\mathcal{C}$, og lad $J \subseteq I$ være en delmængde. Hvis $J \subseteq I$ er initial, så er

$$\varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha \longrightarrow \varprojlim_{\alpha \in J} E_\alpha$$

en isomorfi.

Hvis $J \subseteq I$ er final, så er

$$\varinjlim_{\alpha \in J} E_\alpha \longrightarrow \varinjlim_{\alpha \in I} E_\alpha$$

en isomorfi.

Bewis. Følger af bijektionerne i 6. $\square$

8. Den partielt ordnede mængde I kaldes filtrerende, hvis

$$\forall \alpha', \alpha'' \in I \exists \alpha \in I : \begin{matrix} \alpha' < \alpha \\ \alpha'' < \alpha \end{matrix}$$

Qualt defineres cofiltrerende. Det ses, at hvis I er filtrerende, så er en delmængde $J \subseteq I$ final, blot der gælder

$$\forall \alpha \in I \exists \gamma \in J : \alpha < \gamma.$$

For et I -system af mængder $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ havde vi

$$\lim_{\rightarrow} E_\alpha = (\bigvee_{\alpha} E_\alpha) / \sim.$$

(jfr 5.). Hvis I er filtrerende, kan ækvivalensrelationen $\sim$ beskrives ved:

For $x \in E_\alpha, y \in E_\beta$ gælder

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \begin{matrix} > \\ \alpha \end{matrix} \beta : f_{\gamma\alpha}(x) = f_{\gamma\beta}(y)$$

For hver af kategorierne $(G+)$, $(A\text{-mod})$, $(R\text{-alg})$ kan man vise, at $\lim_{\leftarrow}$ og $\lim_{\rightarrow}$ altid eksisterer.

$\lim_{\leftarrow}$ er $\lim_{\leftarrow}$ (underliggende mængder) forsynet med passende kompositioner. $\lim_{\rightarrow}$ er ikke helt så trivial. Er imidlertid I filtrerende, så gælder for et I -system $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ fra en af disse kategorier, at

$$\lim_{\rightarrow} E_\alpha = \lim_{\rightarrow} (\text{underliggende mængder}) \text{ forsynet}$$

med "passende kompositioner." $\square$

9. Eksempler. ① Lad $f \in R$ og lad M være en R -modul, da gælder i kategorien $(R\text{-mod})$, at

$$M_f = \lim_{\rightarrow} (M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{f} M \rightarrow \dots)$$

② Er $n|m$ har vi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\frac{m}{n}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

og finder $\varinjlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ i $(\mathbb{Z}\text{-mod})$.

③ En n/m har vi $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ er et I -system i (Rings). [har intet at gøre med eks. ②]. Definition:

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n$$

For et primtal p har vi et M -system i (Rings).

$$\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \dots$$

Definition:

$$\hat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k$$

Der gælder $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \hat{\mathbb{Z}}_p$ (kineriske restklasser).

④ Lad K/k være en galoisk udvidelse ($\because K^{Aut(K/k)} = k$).
 $\underbrace{K/k}_{K/k \text{ er algebrisk og}}$
 Da gælder

$$Aut(K/k) = \varprojlim_{\alpha} Aut(K_{\alpha}/k)$$

hvor K_{α} gennemløber de endelige galoiske udvidelser K_{α}/k ($K \supseteq K_{\alpha} \supseteq k$).

⑤ Lad S være en multiplikativ delmængde af den kommutative ring A , og definer $<$ i S ved

$$s < t \iff \exists a \in A : as = t.$$

For $s < t$ defineres $A_s \rightarrow A_t$ så at $1/s \mapsto a/t$, som bliver uafhængig af a . Vi finder

$$\varinjlim_{s \in S} A_s = A[S^{-1}].$$

INDUKTIV OG PROJEKTIV LIMES II

1. Lad I være en (pre-)ordnet mængde, dvs en mængde med en reflexiv, transitiv relation $\leq$. Ved et I -system af ringe (resp. grupper, resp. k -moduler, resp.) forstås en tilordning, der til hvert $\alpha \in I$ knytter en ring (resp.) E_α og til hvert par (α, β) med $\alpha \leq \beta$ knytter en ring- (resp.) homomorfi

$$f_{\alpha\beta} : E_\alpha \rightarrow E_\beta,$$

således at følgende er opfyldt:

For alle α er $f_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ og når $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ er $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$.

2. Eksempel. Hvis I består af de åbne delmængder af et topologisk rum X , ordnet ved $U \supseteq V$, kaldes et I -system også et pre-knippe på X .

3. For et I -system $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ defineres den inverse limes $\varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha$ som delmængden af $\prod E_\alpha$ bestemt ved

$$\varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha := \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} E_\alpha \mid \forall \alpha \leq \beta : f_{\alpha\beta}(x_\alpha) = x_\beta \right\}$$

Det er klart, at $\varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha$ er en (del-)ring (resp.) af produktet, og at koordinatprojektionerne er ring- (resp.) homomorfier

$$p_\beta : \varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha \rightarrow E_\beta \text{ med } f_{\alpha\beta} \circ p_\alpha = p_\beta.$$

Endvidere gælder trivielt følgende

UNIVERSELLE EGENSKAB. Givet en ring G og homomorfier

$$G \xrightarrow{g_\alpha} E_\alpha \text{ for alle } \alpha \text{ således at } f_{\alpha\beta} \circ g_\alpha = g_\beta \text{ for alle } \alpha \leq \beta.$$

Da findes netop en homomorfi $g : G \rightarrow \varprojlim_{\alpha \in I} E_\alpha$ så at

$$p_\alpha \circ g = g_\alpha \text{ for alle } \alpha.$$

4. For et I -system $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ kan man definere den såkaldt direkte limes med den dualt universelle egenskab. Hvis I er opad filterende (dvs opfylder: For alle $\alpha, \beta \in I$ findes

$\gamma \in I$ med $\alpha \leq \gamma$ og $\beta \leq \gamma$) er konstruktionen følgende:

Betragt den disjunkte foreningsmængde

$$E = \bigsqcup_{\alpha} E_{\alpha}$$

og heri relationen R defineret ved at vi for $x \in E_{\alpha}$ og $y \in E_{\beta}$ skriver

$$x R y \Leftrightarrow \exists \gamma \geq \{\alpha, \beta\} : f_{\alpha\gamma} x = f_{\beta\gamma} y.$$

Dette er en ækvivalensrelation! Endvidere har 2 elementer ξ og η i kvotienten E/R altid repræsentanter x og y , der ligger i samme E_{α} . Det følger, at vi kan definere kompositioner i kvotienten E/R ved regning med repræsentanter, at E/R bliver en ring (kaldet den direkte eller induktive limes af I -systemet og betegnet $\varinjlim_{\alpha} E_{\alpha}$

og at injektionerne $i_{\beta}: E_{\beta} \hookrightarrow E \xrightarrow{\circ} E/R$ er ringhomomorfier

$$i_{\beta}: E_{\beta} \rightarrow \varinjlim_{\alpha} E_{\alpha} \text{ med } i_{\beta} \circ f_{\alpha\beta} = i_{\alpha}$$

og at vi har følgende

UNIVERSELLE EGENSKAB. Givet en ring G og homomorfier $E_{\alpha} \xrightarrow{g_{\alpha}} G$ for alle α , således at $g_{\beta} \circ f_{\alpha\beta} = g_{\alpha}$ for alle $\alpha \leq \beta$.

Da findes netop én homomorfi $g: \varinjlim_{\alpha} E_{\alpha} \rightarrow G$ så at $g \circ i_{\alpha} = g_{\alpha}$ for alle α .

OPGAVE. Lad $J \subseteq I$ være en delmængde. Vis, at der findes naturlige homomorfier

$$\varprojlim_{\alpha \in I} E_{\alpha} \xrightarrow{(1)} \varprojlim_{\alpha \in J} E_{\alpha} \text{ og } \varinjlim_{\alpha \in J} E_{\alpha} \xrightarrow{(2)} \varinjlim_{\alpha \in I} E_{\alpha}$$

og at (1) (resp. 2) er en isomorfi, hvis J er initial (resp. final)

MANGFOLDIGHEDER (over et legeme L)

0. NOTATION. For en afbildning $\psi: X \rightarrow Y$, og delmængden $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ betegner vi med $\psi|_A$ den ved

$$x \mapsto \psi(x) \text{ definerede afbildning } \psi|_A: A \rightarrow Y.$$

og med ψ^B den ved

$$x \mapsto \psi(x) \text{ definerede afbildning } \psi^B: \psi^{-1}(B) \rightarrow B.$$

(helt generel)

1. DEFINITION. En L -mangfoldighed er et par $(X, \mathcal{C})$ bestående af et topologisk rum X og en "forskrift" $\mathcal{C}$, der til hver åben delmængde $U \subseteq X$ knytter en delmængde $\mathcal{C}(U) \subseteq \text{Afb}(U, L)$ af afbildninger $f: U \rightarrow L$ (kaldet $\mathcal{C}$ -funktionerne på U) således at følgende betingelser er opfyldt:

$$(præ): \left\{ \begin{array}{l} V \subseteq U \wedge f \in \mathcal{C}(U) \Rightarrow f|_V \in \mathcal{C}(V) \end{array} \right.$$

$$(knp): \left\{ \begin{array}{l} U = \bigcup U_\alpha, f: U \rightarrow L: f|_{U_\alpha} \in \mathcal{C}(U_\alpha) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(U) \end{array} \right.$$

(alg): $\mathcal{C}(U) \subseteq \text{Afb}(U, L)$ er en delalgebra, dvs. konstante funktioner er $\mathcal{C}$ -funktioner, sum og produkt af $\mathcal{C}$ -funktioner er igen en $\mathcal{C}$ -funktion.

(loc): $\left\{ \begin{array}{l} x \in U \wedge f \in \mathcal{C}(U) \wedge f(x) \neq 0 \Rightarrow \text{Der findes åben omegn } W, \\ x \in W \subseteq U, \text{ så at } f(y) \neq 0 \text{ for alle } y \in W, \text{ og } \frac{1}{f} \in \mathcal{C}(W). \\ \text{(hvor } \frac{1}{f} \text{ er den ved } y \mapsto \frac{1}{f(y)} \text{ definerede afbildning: } W \rightarrow L.) \end{array} \right.$

$\mathcal{C}$ kaldes strukturknippet.

2. DEFINITION. For en L -mangfoldighed $(X, \mathcal{C})$ defineres for hvert $x \in X$ strået i x som

$$\mathcal{C}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{C}(U).$$

Er $x \in U$ og $f \in \mathcal{C}(U)$, betegner vi med f_x billedet af f ved "injektionen" $\mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}_x$. Det kaldes f 's hin i x . Den oplagte surjektive homomorfi $\mathcal{C}_x \rightarrow L$ givet ved $f \mapsto f(x)$ betegner $\sigma \mapsto \sigma(x)$, og dens kerne kaldes maksimalidealet i x og betegnes $\mathfrak{m}_x$.

SÆTNING. $f \in \mathcal{C}(U)$, $f(x) \neq 0$ for alle $x \in U \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{C}(U)$. $\square$

3. BEMÆRKNING. Disse definitioner kan indføres for en forskrift $\mathcal{C}$, der opfylder (pre) og (alg) (et præknippe af L -funktioner på X). For en sådan forskrift gælder:

$$(\text{loc}) \Leftrightarrow \forall x \in X: \mathcal{C}_x \text{ er en lokal ring.}$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " Vi skal vise, at $\mathfrak{m}_x$ er det eneste maksimalideal i $\mathcal{C}_x$, altså at hvert $\sigma \in \mathcal{C}_x \setminus \mathfrak{m}_x$ er invertibelt. Lad $f \in \mathcal{C}(U)$, $x \in U$ være en repræsentant for σ . Da $\sigma \notin \mathfrak{m}_x$ er $f(x) \neq 0$. Ifølge (loc) kan vi antage (i stedet for at formindske U), at $f(y) \neq 0$ for alle $y \in U$ og dermed at $\frac{1}{f} \in \mathcal{C}(U)$. Af ligningen $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ i $\mathcal{C}(U)$ følger nu $f_x \cdot \left(\frac{1}{f}\right)_x = 1$ i $\mathcal{C}_x$, og dermed at $\sigma = f_x$ er invertibel.

" $\Leftarrow$ ". Lad $f \in \mathcal{C}(U)$, $x \in U$, $f(x) \neq 0$. Da er $f_x \notin \mathfrak{m}_x$ så der findes $\tau \in \mathcal{C}_x$, så at $f_x \cdot \tau = 1$ i $\mathcal{C}_x$. Lad $g \in \mathcal{C}(V)$, $x \in V$ være en repræsentant for τ . Vi kan antage, at $V \subseteq U$. Af $[(f|V) \cdot g - 1]_x = f_x \cdot \tau - 1 = 0$ følger, at der findes $W \subseteq V$, $x \in W$, så at $[(f|V) \cdot g - 1]|_W = 0$ i $\mathcal{C}(W)$. Specielt er $f|W$ overalt forskellig fra 0, og $\frac{1}{f|W} = g|W \in \mathcal{C}(W)$. $\blacksquare$

4. DEFINITION. Er der på det topologiske rum X givet en forskrift $\mathcal{C}$, som opfylder betingelserne (pre), (alg) og (loc) defineres ved

$$\mathcal{C}^+(U) = \left\{ f: U \rightarrow L \mid \begin{array}{l} \exists \text{ \u00e5ben overd\u00e6kning } U = \bigcup U_\alpha \text{ s\u00e5 at} \\ f|_{U_\alpha} \in \mathcal{C}(U_\alpha) \text{ for alle } \alpha \end{array} \right\}$$

en ny forskrift $\mathcal{C}^+$ som let ses, at opfylder alle fire betingelser. $\mathcal{C}^+$ kaldes det af $\mathcal{C}$ fremskaffte knippe.

Det er let at se, at vi har

$$\mathcal{C}_x \supseteq \mathcal{C}_x^+.$$

Hvis $\mathcal{C}$ selv er et knippe har vi naturligvis $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+$.

5. DEFINITION. Er $(X, \mathcal{C})$ en mangfoldighed, sætter vi for en delmængde $A \subseteq X$

$$\mathcal{C}^0(A) = \{\varphi: A \rightarrow L \mid \exists \text{ åben } U \supseteq A \text{ og } f \in \mathcal{C}(U): f|_A = \varphi\}.$$

og

$$\Gamma(A, \mathcal{C}) = \left\{ \varphi: A \rightarrow L \mid \forall a \in A \exists \text{ åben } U \ni a \text{ og } f \in \mathcal{C}(U): \right. \\ \left. f = \varphi \text{ på } U \cap A \right\}.$$

For en åben delmængde $U \subseteq X$ finder vi let

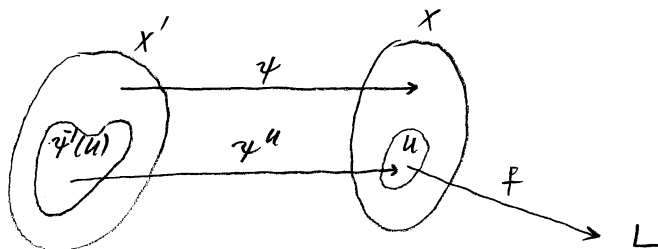
$$\Gamma(U, \mathcal{C}) = \mathcal{C}(U).$$

Er $Z \subseteq X$ en delmængde, og betragter vi $A \mapsto \Gamma(A, \mathcal{C})$ for delmængden $A \subseteq Z$, der er åben i Z , får vi defineret en forskrift på delrummet Z (med delrumstopologien), som betegnes $\mathcal{C}_Z$ (eller $\mathcal{C}|_Z$). Det er let at se, at $\mathcal{C}_Z$ opfylder betingelserne, således at $(Z, \mathcal{C}_Z)$ er en mangfoldighed, kaldet delmangfoldigheden hørende til delmængden Z .

BEMÆRK, at vi for hvert $z \in Z$ kan opfatte $\mathcal{C}_{Z,z}$ som kvotient af $\mathcal{C}_Z$, m.h.t. ideal af kin, der på Z er $= 0$ i en omegn af z (præciser selv!).

6. DEFINITION. En morfi $\psi: (X', \mathcal{C}') \rightarrow (X, \mathcal{C})$ mellem mangfoldigheder er en afbildning $\psi: X' \rightarrow X$, der er kontinuert, og for enhver åben delmængde $U \subseteq X$ opfylder

$$f \in \mathcal{C}(U) \Rightarrow f \circ \psi^U \in \mathcal{C}'(\psi'^U(U))$$



Herved får vi klart en kategori af mangfoldigheder (over L). En mangfoldighed betegnes ofte med et enkelt symbol $(X, Y, \dots)$, og samme symbol anvendes til at betegne det underliggende topologiske rum. (Strukturknippet kan f.eks. betegnes $\mathcal{C}_X, \mathcal{C}_Y, \dots$).

En morfi af mangfoldigheder $(Y, \mathcal{E}_Y) \xrightarrow{\psi} (X, \mathcal{E}_X)$ inducerer for hvert åbent $U \subseteq X$ en (L -algebra-) homomorfi

$$\mathcal{E}_X(U) \longrightarrow \mathcal{E}_Y(\psi^{-1}(U))$$

og for hvert $y \in Y$ en lokal homomorfi

$$\mathcal{E}_{X, \psi(y)} \longrightarrow \mathcal{E}_{Y, y}.$$

["lokal" betyder, at maksimalideal afbildes ind i maksimalideal].

Er $(X, \mathcal{E}_X)$ en mangfoldighed, og Z en delmængde, bliver inklusionsafbildningen $\iota: Z \hookrightarrow X$ en morfi $\iota: (Z, \mathcal{E}_X|_Z) \rightarrow (X, \mathcal{E}_X)$. Her gælder endda, at $(Z, \mathcal{E}_X|_Z)$ er en initialstruktur i følgende forstand: Er $(Y, \mathcal{E}_Y)$ en mangfoldighed, og $\psi: Y \rightarrow Z$ en afbildning, så gælder:

ψ er en morfi $(Y, \mathcal{E}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{E}_X|_Z) \iff \iota \circ \psi$ er en morfi $(Y, \mathcal{E}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{E}_X)$.

En morfi $\psi: (Y, \mathcal{E}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{E}_X)$ kan således "faktoriseres gennem sit billede": $(\psi(Y), \mathcal{E}_X|_{\psi(Y)})$. Hvis $(Y, \mathcal{E}_Y) \rightarrow (\psi(Y), \mathcal{E}_X|_{\psi(Y)})$ er en isomorfi kaldes ψ en immersion.

Præciser: At være en morfi er lokalt på Y og lokalt på X .

EXEMPLER. Ethvert topologisk rum X kan opfattes som L -mangfoldighed ved som strukturgruppe at betragte

1° knippet af alle funktioner

2° knippet af lokal-konstante funktioner (betegnet L_X)

3° (for $L = \mathbb{R}$ eller $= \mathbb{C}$) knippet af kontinuerte funktioner.

Til hver $\mathbb{R}$ -mangfoldighed $(X, \mathcal{E})$ hører en $\mathbb{C}$ -mangfoldighed $(X, \mathcal{E}^{\mathbb{C}})$, hvor

$$\mathcal{E}^{\mathbb{C}}(U) = \{ f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid \operatorname{Re} f \in \mathcal{E}(U) \wedge \operatorname{Im} f \in \mathcal{E}(U) \}.$$

Talrummene $\mathbb{R}^k$ kan opfattes som $\mathbb{R}$ -mangfoldighed ved som strukturgruppe at betragte knippet af $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner.

(eller knippet af r -gange kontinuert differentiable funktioner eller knippet af analytiske funktioner).

$\mathbb{C}^k$ (specielt $\mathbb{C}$) kan opfattes som $\mathbb{C}$ -rum ved som strukturknippe at betragte knippet af analytiske funktioner.

7. $\mathcal{C}_\infty$ -MANGFOLDIGHEDER. I det følgende opfattes talrummene $\mathbb{R}^k$ som $\mathbb{R}$ -mangfoldigheder, idet strukturknippet er knippet af $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner, og delmængder af $\mathbb{R}^k$ opfattes som delmangfoldigheder og altså specielt som $\mathbb{R}$ -mangfoldigheder. Specielt er halvrummene $\mathbb{R}_{\geq 0}^k := \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_k \geq 0\}$ $\mathbb{R}$ -mangfoldigheder. "generel"

DEFINITION. En $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldighed er en $\mathbb{R}$ -mangfoldighed $(X, \mathcal{C}_X)$ der lokalt er (dvs. hvert punkt $p \in X$ har en åben omegn, der er) isomorf med en delmængde af et talrum $\mathbb{R}^k$. En $\mathbb{R}$ -mangfoldighed $(X, \mathcal{C}_X)$ kaldes glat i punktet $p \in X$, hvis p har en åben omegn, der er isomorf med en åben delmængde af et talrum $\mathbb{R}^k$. En differentiabel mangfoldighed (uden rand) er en $\mathbb{R}$ -mangfoldighed, der er glat i ethvert af sine punkter, dvs. lokalt er isomorf med en åben delmængde af et talrum $\mathbb{R}^k$. En differentiabel mangfoldighed med rand er en $\mathbb{R}$ -mangfoldighed, der lokalt er isomorf med en åben delmængde af et ^{halv-}talrum. For en $\mathbb{R}$ -mangfoldighed $(X, \mathcal{C}_X)$ defineres det indre $\overset{\circ}{X}$ som mængden af glatte punkter, og randen ∂X som komplementermængden.

Lad $(X, \mathcal{C}_X)$ være en $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldighed. En afbildning $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ er da givet ved sine k koordinatfunktioner $\psi_1, \dots, \psi_k: X \rightarrow \mathbb{R}$. Herom gælder

SÆTNING. $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ er en morfi $\Leftrightarrow \psi_1, \dots, \psi_k \in \mathcal{C}_X(X)$.

Bevis. " $\Rightarrow$ " Det er let at se, at koordinatprojektionerne $pr_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ er morfier. Endvidere er den identiske afbildning $Id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}_\infty$ -funktion, altså $Id \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R})$, men så er

$$\psi_i = Id \circ (pr_i \circ \psi) \in \mathcal{C}_X(X),$$

da $pr_i \circ \psi$ er en morfi $: X \rightarrow \mathbb{R}$.

" $\Leftarrow$ " Det er nok at vise, at hvert punkt $p \in X$ har en åben omegn U , så at $\psi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ er en morfi. Vi kan derfor antage, at $X \subseteq \mathbb{R}^k$, og dernæst videre, at der findes en åben delmængde V i $\mathbb{R}^k$, $V \supseteq X$ og funktioner $f_i \in \mathcal{C}_\infty(V)$ med $f_i|_X = \psi_i$, $i=1, \dots, k$. Da $X \hookrightarrow V$ er en morfi, er det nok at vise, at afbildningen $V \rightarrow \mathbb{R}^k$ bestemt ved $\mathcal{C}_\infty$ -funktionerne $f_1, \dots, f_k$ er en morfi, og det er en velkendt egenskab ved $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner $\square$

Specielt for $k=1$ ser vi, at morfierne $X \rightarrow \mathbb{R}$ netop er funktionerne $f \in \mathcal{C}(X)$.

7a KOROLLAR. 7 kategorien af $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldigheder er $\mathbb{R}^k$ produktet $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$.

[Øvelse: Diskuter ovenstående ^{korollar} i kategorien af alle $\mathbb{R}$ -mangfoldigheder].

7b TANGENTVEKTORER. For et interval $J = [0, \varepsilon[$ (som $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldighed) kan vi betragte strikt $\mathcal{C}_{J,0}$ (som er uafhængigt af ε). For $\varphi \in \mathcal{C}_{J,0}$ sætter vi $D\varphi = \frac{d\varphi}{dt}(0)$. D er specielt en lineær afbildning $D: \mathcal{C}_{J,0} \rightarrow \mathbb{R}$. For en morfi $\gamma: J \rightarrow X$, hvor X er en $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldighed, betegner vi med D_γ den sammensatte lineære afbildning

$$\mathcal{C}_{X, \gamma(0)} \rightarrow \mathcal{C}_{J,0} \xrightarrow{D} \mathbb{R}.$$

D_γ er specielt en linearform på $\mathcal{C}_{X, \gamma(0)}$, altså element i det dualvektorrum $\mathcal{C}_{X, \gamma(0)}^\vee$. En geometrisk tangentvektor til X i punktet $p \in X$ er en linearform $\xi \in \mathcal{C}_{X,p}^\vee$ der har formen $\xi = D_\gamma$ med en passende morfi $\gamma: J \rightarrow X$, $\gamma(0) = p$. De geometriske tangentvektorer til X i p udgør tangentkeglen

$$Z_X(p) \subseteq \mathcal{C}_{X,p}^\vee$$

og det af $Z_X(p)$ frembragte under rum i $\mathcal{C}_{X,p}^\vee$ er tangentrummet $T_X(p)$. Dets dimension kaldes X 's dimension i p og betegnes $\dim_p X$. Det dualvektorrum kaldes cotangentrummet i p og betegnes $\mathcal{C}_X^1(p) = T_X(p)^\vee$.

Da $T_x(p) \subseteq \mathcal{C}_{X,p}^\vee$ får vi en surjektiv homomorfi: $\mathcal{C}_{X,p}^{\vee\vee} \rightarrow T_x(p)^\vee = \mathcal{C}_X'(p)$ og ved sammensætning en lineær afbildning

$$\mathcal{C}_{X,p} \rightarrow \mathcal{C}_{X,p}^{\vee\vee} \rightarrow \mathcal{C}_X'(p)$$

der ofte betegnes d. Den knytter altså til et kimen $\sigma \in \mathcal{C}_{X,p}$ linearformen $d\sigma: \xi \mapsto \xi(\sigma)$ på tangentrummet. Er U en åben omegn af p , og er $f \in \mathcal{C}_X(U)$, har vi kimen $f_p \in \mathcal{C}_{X,p}$, og dermed cotangentvektoren

$$df_p \in \mathcal{C}_X'(p)$$

der kaldes funktions differential i p. Vi har altså $df_p(\xi) = \xi(f_p)$

For en morfi $X \rightarrow Y$ og et punkt $p \in X$ har vi homomorfien $\mathcal{C}_{Y,\psi(p)} \rightarrow \mathcal{C}_{X,p}$, der specielt er lineær, og dermed dualt en lineær afbildning

$$\mathcal{C}_{X,p}^\vee \rightarrow \mathcal{C}_{Y,\psi(p)}^\vee.$$

Herved afbildes geometrisk tangentvektor i geometrisk tangentvektor (nemlig $D_Y \mapsto D_{\psi \circ Y}$), således at vi får en lineær afbildning $T_X(p) \rightarrow T_Y(\psi(p))$ kaldet morfis differential i p og betegnet $d\psi_p$.

Er $X \subseteq Y$ en delmangfoldighed, bliver $\mathcal{C}_{Y,p} \rightarrow \mathcal{C}_{X,p}$ surjektiv (bemærkning 5), og dermed $\mathcal{C}_{X,p}^\vee \rightarrow \mathcal{C}_{Y,p}^\vee$ injektiv. Specielt er differential: $T_X(p) \rightarrow T_Y(p)$ injektiv, således at tangentrummet i p til delmangfoldigheden X er et underrum i tangentrummet $T_Y(p)$.

Lad $p \in \mathbb{R}^k$, og lad $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^k)$ være de sædvanlige koordinater på $\mathbb{R}^k$. De partielle afledede: $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ er da (veldefinerede) linearformer på $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^k,p}$, betegnet $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$.

7c SÆTNING. De geometriske tangentvektorer til $\mathbb{R}^k$ i punktet p er netop underrummet i $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^k,p}^\vee$ frembragt af de partielle afledede $\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}(p)$. De partielle afledede er en basis for $T_{\mathbb{R}^k}(p)$ ($= Z_{\mathbb{R}^k}(p)$), og den duale basis for $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^k}^1(p)$ er differentialerne $d(x_1)_p, \dots, d(x_k)_p$.

Bewis. En geometrisk tangentvektor $\xi \in T_{\mathbb{R}^k}(p)$ har formen $\xi = D_\gamma$ hvor $\gamma: [0, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^k$ er en morfi med $\gamma(0) = p$. Ifølge sætning 7 er γ 's koordinatfunktioner $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner på $[0, \varepsilon[$, så ifølge kædereglen gælder

$$\xi(f) = D_\gamma(f) = D(f \circ \gamma) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{d\gamma_i(0)}{dt}$$

for enhver funktion $f \in \mathcal{C}_\infty(U)$ defineret i en åben omegn U af p .

Vi har altså

$$\xi = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad \text{hvor} \quad v_i = D\gamma_i = \frac{d\gamma_i(0)}{dt} \in \mathbb{R}.$$

Omvendt gælder for hvert $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, idet vi et øjeblik også med v betegner den ved

$$v: t \mapsto p + tv$$

bestemte morfi (jfr. sætning 7) $v: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^k$, at

$$D_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

Heraf følger den første påstand.

$$\text{Da } d(x_i)_p \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$$

slutter vi, at de partielle afledede er uafhængige, og at differentialerne er den duale basis. $\square$

Via denne basis for $T_{\mathbb{R}^k}(p)$ identificerer vi sædvanligvis $T_{\mathbb{R}^k}(p)$ med vektorrummet $\mathbb{R}^k$, og kan altså for en delmangfoldighed $X \subseteq \mathbb{R}^k$ og $p \in X$ opfatte $T_X(p)$ som underum i $\mathbb{R}^k$.

KOROLLAR. For hver $\mathcal{C}_\infty$ -mangfoldighed X og $p \in X$ er $\dim_p X$ endelig. Thi $\dim_p X = \dim T_X(p)$, og $T_X(p)$ ændes ikke hvis X erstattes med en åben omegn af p . Vi kan derfor antage, at $X \subseteq \mathbb{R}^k$, og så er $T_X(p)$ et underum i $\mathbb{R}^k$.

7e ØVELSE. Vis for et punkt $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k$ med $p_k = 0$ at $T_{\mathbb{R}_{\geq 0}^k}(p) = \mathbb{R}^k$, og at $T_{\mathbb{R}_{\geq 0}^k}(p) \subset T_{\mathbb{R}_{\geq 0}^k}(p)$ er et halvrum.

Karakteriser herved for en differentiable k -dimensional mangfoldighed X med randpunkterne og vis, at $\partial X \subseteq X$ er en $(k-1)$ -dimensional mangfoldighed uden rand (incl. $\partial X = \emptyset$).

7f. TANGENTVEKTORER SOM DERIVATIONER. Linearformen $D: \mathcal{O}_{X,0} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $D(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt}(0)$ opfylder som bekendt at $D(\varphi\chi) = \varphi(0)D(\chi) + \chi(0)D(\varphi)$. Heraf følger at vi for hver tangentvektor $\xi \in T_X(p)$ til en $\mathcal{O}_\infty$ -mangfoldighed X i et punkt p har

$$(*) \quad \xi(\varphi\chi) = \varphi(p)\xi(\chi) + \chi(p)\xi(\varphi).$$

Linearformen $\xi: \mathcal{O}_{X,p} \rightarrow \mathbb{R}$ er altså en $\mathbb{R}$ -derivation af $\mathcal{O}_{X,p}$ ind i $\mathcal{O}_{X,p}$ -modulen $\mathbb{R} = \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$. Det er let at se, at undersummet $\text{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{X,p}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{O}_{X,p}^\vee$ af $\mathbb{R}$ -derivationer kan identificeres med det dual vektorrum $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ [En $\mathbb{R}$ -derivation er $= 0$ på konstanter, og $= 0$ på $\mathfrak{m}_p^2$, altså helt fastlagt ved en linearform på $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$; - er omvendt $\delta: \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en linearform på $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ bestemmes ved $\varphi \mapsto \delta(\varphi - \varphi(p))$ en derivation på $\mathcal{O}_{X,p}$]. Ifølge det foregående har vi $T_X(p) \hookrightarrow (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ og dermed en surjektiv homomorfi: $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \rightarrow \mathcal{O}_X^1(p)$.

SÆTNING. Hvis en $\mathcal{O}_\infty$ -mangfoldighed X er glat i punktet p , er $T_X(p) = (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee$ altså $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^1(p)$. Enhver derivation er altså en tangentvektor.

BEVIS. Vi kan antage at X er en åben delmængde af $\mathbb{R}^k$ og at $p = 0$. Koordinationerne $x_1, \dots, x_k$ opfylder altså $(x_i)_p \in \mathfrak{m}_p$ og ved $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \rightarrow \mathcal{O}_X^1(p)$ vil $\bar{x}_i = (x_i)_0 \in \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ tydeligvis afbildes i $d(x_i)_p \in \mathcal{O}_X^1(p)$. Da $d(x_1)_p, \dots, d(x_k)_p$ er en basis for $\mathcal{O}_X^1(p)$ er det nok at vise, at $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ er et $\mathbb{R}$ -frembringer-system for $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ (og folgelig også en basis). Dette følger af at der som bekendt(?) gælder: enhver $\mathcal{O}_\infty$ -funktion φ defineret i en omegn af 0 og med $\varphi(0) = 0$ kan skrives på formen

$$\varphi = x_1 \varphi_1 + \dots + x_k \varphi_k$$

hvor $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ er $\mathcal{O}_\infty$ -funktioner $\square$

79 FORMER. Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{C}_\infty$ -mangfoldigheden X . Et kaotisk tangentvektorfelt (resp. en kaotisk 1-form) på U er en familie

$$\xi = (\xi_p)_{p \in U} \quad \text{hvor} \quad \xi_p \in T_X(p)$$

$$(\text{resp. } \omega = (\omega_p)_{p \in U} \quad \text{hvor} \quad \omega_p \in \mathcal{C}_X^1(p) = T_X^*(p)).$$

Kaotiske felter og former på U udgør på oplagt måde moduler over ringen $\text{Aff}(U, \mathbb{R})$ af alle reelle funktioner. For et kaotisk felt ξ og en kaotisk form ω betegner vi med

$$\langle \omega, \xi \rangle \quad \text{den ved } p \mapsto \omega_p(\xi_p) \quad \text{bestemte afbildning}$$

$$: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

For $f \in \mathcal{C}_X(U)$ er $df := (df_p)_{p \in U}$ en kaotisk 1-form. For et kaotisk felt ξ på U sætter vi $\langle df, \xi \rangle =: \xi(f)$. Det er altså afbildningen $p \mapsto \xi_p(f_p)$ af $U \rightarrow \mathbb{R}$.

For kaotiske felter ξ (resp. former ω) på U , og en åben delmængde $V \subseteq U$ defineres på oplagt måde restriktionen $\xi|_V$ (resp. $\omega|_V$).

DEFINITION. Et $(\mathbb{C}_\infty)$ -vektorfelt på U er et kaotisk vektorfelt ξ således at der for hver åben delmængde $V \subseteq U$ og hvert $f \in \mathcal{C}_X(V)$ gælder $\xi|_V(f) \in \mathcal{C}_X(V)$.

En $(\mathbb{C}_\infty)$ -1-form på U er en kaotisk 1-form ω således at der for hvert punkt $p \in U$ findes en åben omegn V , $p \in V \subseteq U$, og elementer $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}_X(V)$ med

$$\omega|_V = f_1 dg_1 + \dots + f_r dg_r.$$

Vektorfelterne (resp. 1-formerne) på U udgør en $\mathcal{C}_X(U)$ -modul, der betegnes $T_X(U)$ (resp. $\mathcal{C}_X^1(U)$).

For en morfi $\psi: X \rightarrow Y$, og $p \in X$ har vi differentialet $d\psi_p: T_X(p) \rightarrow T_Y(\psi(p))$ og dualt $\mathcal{C}_Y^1(\psi(p)) \rightarrow \mathcal{C}_X^1(p)$. For en 1-form $\omega = (\omega_q)$ på Y defineres herved en 1-form på X betegnet

$$\omega \circ \psi. \quad \text{Bemærk, at vi for } g \in \mathcal{C}(Y) \text{ har}$$

$$d(g \circ \psi) = dg \circ \psi \quad \text{i } \mathcal{C}^1(X)$$

For en $\mathcal{C}_\infty$ -funktion $f \in \mathcal{C}_X(U)$ er $df \in \mathcal{C}_X^1(U)$ en $(\mathcal{C}_\infty)$ -1-form kaldet differentialet af f . Bemærk, at $d(fg) = f dg + g df$.

Er X en åben delmængde af $\mathbb{R}^k$ (eller af $\mathbb{R}_{\geq 1}^k$, jf. øvelse 7e), og er $x_1, \dots, x_k$ koordinaterne på X kan vi betragte differentialerne $dx_1, \dots, dx_k \in \mathcal{C}^1(X)$ og tangentvektorfelterne $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$, der åbenlyst er $\mathcal{C}_\infty$ -vektorfelter på X .

SÆTNING. Differentialerne $dx_1, \dots, dx_k$ er en $\mathcal{C}(X)$ -basis for $\mathcal{C}^1(X)$ [og tangentfelterne $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ er en $\mathcal{C}(X)$ -basis for $T(X)$]

For en $\mathcal{C}_\infty$ -funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ gælder

$$(*) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \quad i \quad \mathcal{C}^1(X).$$

BEVIS. For hvert punkt $p \in X$ har vi $df_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) d(x_1)_p + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) d(x_k)_p$ og det er netop indholdet i (*). Da $d(x_1)_p, \dots, d(x_k)_p$ er en $\mathbb{R}$ -basis for $\mathcal{C}_X^1(p)$ kan hver kaotisk 1-form ω skrives

$$\omega = \varphi_1 dx_1 + \dots + \varphi_k dx_k,$$

med entydigt bestemte (kaotiske) funktioner $\varphi_1, \dots, \varphi_k: X \rightarrow \mathbb{R}$. Vi skal vise, at hvis ω er en $\mathcal{C}_\infty$ -form, så er funktionerne $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner. Da dette spørgsmål er lokalt, kan vi antage, at ω har formen $\omega = f_1 dg_1 + \dots + f_r dg_r$, og herudfra kan funktionerne $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ bestemmes v.h.j.a. (*); de bliver klart $\mathcal{C}_\infty$ -funktioner. [På tilsvarende måde ses påstanden om tangentvektorfelterne].

For et punkt $p \in X$ sættes $\mathcal{C}_X^r(p) = \bigwedge_{\mathbb{R}}^r \mathcal{C}_X^1(p)$. Analogt kan vi definere kaotiske r -former på en åben delmængde $U \subseteq X$. Er ω en kaotisk r -form og τ en kaotisk s -form defineres "punktvis" produktet $\omega \wedge \tau$. Det er en kaotisk $(r+s)$ -form. En $(\mathcal{C}_\infty)$ - r -form på U er en r -form der lokalt er sum af r -former af formen

$$f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_r.$$

Disse r -former udgør en modul $\mathcal{C}_X^r(U)$ over ringen $\mathcal{C}_X(U)$. For en morfi $\psi: Y \rightarrow X$ defineres på oplagt måde homomorfien $\mathcal{C}_X^r(U) \rightarrow \mathcal{C}_Y^r(\psi^{-1}(U))$ betegnet $\omega \mapsto \omega \circ \psi$, eller $\omega \mapsto \psi^* \omega$.

7k YDRE DIFFERENTIATION. Er $X \subseteq \mathbb{R}^k$ (eller $X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^k$) har vi 1-formerne $dx_1, \dots, dx_k$ og for hver delmængde $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ med r elementer r -formen

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \quad \text{der kort skrives } dx_J$$

SÆTNING. For en åben delmængde $X \subseteq \mathbb{R}^k$ (eller $X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^k$) gælder, at de $\binom{k}{r}$ r -former dx_J $|J|=r$ er en $\mathcal{C}(X)$ -basis for $\mathcal{C}^r(X)$.

Den ved

$$d: \omega = \sum_J f_J dx_J \longmapsto \sum_J df_J \wedge dx_J$$

bestemte afbildning $d: \mathcal{C}^r(X) \rightarrow \mathcal{C}^{r+1}(X)$ er

① $\mathbb{R}$ -lineær, ② lokal (d: for $u \in X$ gælder $(d\omega)/u = d(\omega/u)$) og opfylder ③ $d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_r) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_r$.

Endvidere gælder for $\omega \in \mathcal{C}^r(X)$ og $\tau \in \mathcal{C}^s(X)$, at

$$(*) \quad d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^r \omega \wedge (d\tau)$$

og $d \circ d = 0: \mathcal{C}^r \rightarrow \mathcal{C}^{r+2}$

Følgende

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_X^0(u) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^1(u) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^2(u) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_X^k(u) \rightarrow 0$$

er exact når u er et åbent interval i $\mathbb{R}^k$ ($\mathbb{R}_{\geq 0}^k$).

BEVIS. At r -formerne dx_J er en $\mathcal{C}(X)$ -basis følger som i beviset for sætning 7g. At d opfylder ① og ② er klart, og ligningen $(*)$ eftervises let ved udregning (under brug af at $d(fg) = fdg + gdf$). Endvidere gælder for $f \in \mathcal{C}(X)$, at $d(df) = 0$, idet denne ligning udtrykker, at $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$. Under brug af $(*)$ følger nu let betingelsen ③, og videre at $d \circ d = 0$ for alle r . Eksaktheden vises ved at finde "kontraktioner" $s: \mathcal{C}^r \rightarrow \mathcal{C}^{r-1}$, så at $sd + ds = 1$. Beviset er ved induktion efter k . $k=0$ er trivielt: som $s: \mathcal{C}^0 = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi bruge identiteten.]

induktionsskridtet ($k \geq 1$) vælger vi et punkt $p = (p_1, \dots, p_k) \in u$.

Vi kan antage, at vi svarende til det åbne interval

$$u_0 = \{(t_1, \dots, t_{k-1}) \mid (t_1, \dots, t_{k-1}, p_k) \in u\}$$

i $\mathbb{R}^{k-1}$ og den ydre differentiation d_0 hørende hertil har fundet kontraktioner s_0 med $s_0 d_0 + d_0 s_0 = 1$.

Med $i: U_0 \rightarrow U$ (resp. $j: U \rightarrow U_0$) betegner vi den oplagte injektion (resp. projektion). Det er klart, at $j^* d_0 = d j^*$, $d_0 i^* = i^* d_0$.

Videre definerer vi $\int: \mathcal{E}^r(U) \rightarrow \mathcal{E}^{r-1}(U)$ på følgende måde: Hvert element $w \in \mathcal{E}^r(U)$ kan entydigt skrives som en sum af elementer af formen

$$w_1 = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \text{ hvor } i_1 < \dots < i_r < k$$

eller af formen

$$w_2 = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}} \wedge dx_k, \text{ hvor } i_1 < \dots < i_{r-1} < k,$$

og $\int w$ defineres ved at $\int w_1 = 0$,

$$\int w_2 = \left(\int_{p_k}^{x_k} f(x_1, \dots, x_{k-1}, t) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}}$$

og dermed udvide additivt.

Vi sætter nu

$$S = j^* s_0 i^* - (-1)^r \int : \mathcal{E}^r(U) \rightarrow \mathcal{E}^{r-1}(U)$$

og finder

$$\begin{aligned} ds + sd &= d j^* s_0 i^* - (-1)^r d \int + j^* s_0 i^* d - (-1)^{r+1} \int d \\ &= j^* (d_0 s_0 + s_0 d_0) i^* + (-1)^r (\int d - d \int) \\ &= j^* i^* + (-1)^r (\int d - d \int). \end{aligned}$$

For $w = w_1$ finder vi $\int d w = (-1)^r [w - j^* i^* w]$ og $\int w = 0$, og for $w = w_2$ finder vi $\int d w - d \int w = (-1)^r w$ og $i^* w = 0$. Altså i alle tilfælde $(ds + sd)(w) = w$ $\square$

BEMÆRKNING. Er $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^l$ åbne, og $\psi: V \rightarrow U$ en morfi, gælder $d(w \circ \psi) = (dw) \circ \psi$ ($\because d\psi^* = \psi^* d$). Dette følger umiddelbart af betingelsen ③ under brug af at $d(f \circ \psi) = (df) \circ \psi$.

KOROLLAR. Lad X være en differentiabel mangfoldighed. Der findes da netop én familie $d = (d_u)$ af afbildninger

$$d_u: \mathcal{E}^r(U) \rightarrow \mathcal{E}^{r+1}(U), \text{ som er}$$

① $\mathbb{R}$ -linær ② lokal og opfylder ③:

$$d(f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_r) = df \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_r, \quad f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{E}(U).$$

Endvidere gælder $d(\omega \wedge \tau) = d(\omega) \wedge \tau + (-1)^r \omega \wedge d\tau$, $\omega \in \mathcal{E}^r$, $\tau \in \mathcal{E}^s$ og $d \circ d = 0$. For en morfi $\psi: Y \rightarrow X$ mellem differentiable mangfoldigheder $d \circ \psi^* = \psi^* \circ d$.

BEVIS. Entydigheden følger af ① og ② i forbindelse med at hvert ω lokalt er sum af elementer af typen angivet i ③

Eksistens Er $U \subseteq X$ åben, og isomorf med en åben delmængde i $\mathbb{R}^k$ kan vi v.h.p. isomorfien få afbildninger d_U , der ifølge bemærkningen er uafhængige af isomorfien. Disse afbildninger kan nu sammenstykkes til $d = (d_U)$ defineret for alle åbne delmængder, og at denne afbildning opfylder kravene er trivielt. $\square$

Bemærk, at mul-følgen

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X) \rightarrow \dots$$

i almindelighed ikke er exact. Er $\mathcal{E}^*(X)$ komplekst

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \dots$$

kan man for en parakompakt differentiable mangfoldighed finde en isomorfi $H_{\text{sing}}^n(X, \mathbb{R}) \simeq H^n(\mathcal{E}^*(X))$.

8 KVOTIENTMANGFOLDIGHED. Er $(X, \mathcal{E})$ en L -mangfoldighed, og $\sim$ en ækvivalensrelation i X kan kvotientmængden $X/\sim$ organiseres som en L -mangfoldighed ved at topologier på $X/\sim$ er kvotienttopologien m.h.t. $\pi: X \rightarrow X/\sim$ ($U \subseteq X/\sim$ er åben, hvis og kun hvis $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ er åben) og $\mathcal{E}_{X/\sim}(U) = \{f: U \rightarrow L \mid f \circ \pi^u \in \mathcal{E}_X(\pi^{-1}(U))\}$. Denne struktur er endda en final-struktur på kvotienter.

UBEHAGELIGHED. For en delmængde $A \subseteq X$ kan $A/\sim$ opfattes som en delmængde af $X/\sim$, men vi må skelne (selv for åbne delmængder, og selv hvis $\pi: X \rightarrow X/\sim$ er en åben afbildning) $A/\sim$ med kvotientstrukturen (arvet fra $A \rightarrow A/\sim$) fra $A/\sim$ med delstrukturen (arvet fra $A/\sim \hookrightarrow X/\sim$).

En kvotient af en $\mathbb{C}_\infty$ -mangfoldighed er sædvanligvis ikke en $\mathbb{C}_\infty$ -mangfoldighed. (En $\mathbb{C}_\infty$ -mangfoldighed er f.eks. altid et T_1 -rum).

OPGAVE. Vis, at hvis en gruppe G opererer (ved morfier - nødvendigvis automorfier) på mangfoldigheden X , og $X \xrightarrow{\pi} Y = X/G$ er kvotient-morfien, så gælder for hver åben delmængde $U \subseteq X$, at $\pi(U)$ er åben i Y , og at delstrukturen på $\pi(U)$ arvet fra Y er = kvotientstrukturen på $\pi(U)$ arvet fra U .

Vis (f.eks. ved brug heraf), at kvotienterne

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{og} \quad \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) = \dot{\mathbb{R}}^{k+1}/\mathbb{R}^* \quad [\dot{\mathbb{R}}^{k+1} = \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}]$$

er differentiable mangfoldigheder.

OPGAVE: Givet morfier $(X, \mathcal{E}_X) \xrightleftharpoons[\sigma]{\rho} (Y, \mathcal{E}_Y)$ med $\rho \circ \sigma = 1_Y$. Vis, at ρ er en kvotientmorfie og σ er en inklusionsmorfie [Brug de universelle egenskaber]

9. ANALYTISKE MANGFOLDIGHEDER. I det følgende opfattes $\mathbb{C}^k$ (og åben delmængder heraf) som $\mathbb{C}$ -mangfoldigheder idet strukturekuppet er knippet $\mathcal{A}$ af analytiske funktioner.

DEFINITION. En analytisk mangfoldighed (resp. en Riemann-flade) er et $\mathbb{C}$ -rum, der lokalt er isomorf med en åben delmængde af et $\mathbb{C}^k$ (resp. af $\mathbb{C}$).

Eksempler. $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{0\}$ er en Riemann-flade.

$\mathbb{C}/\Lambda$, hvor $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ er et lattice er en Riemann-flade.

(torus). $\mathbb{P}^k(\mathbb{C}) := \dot{\mathbb{C}}^{k+1}/\mathbb{C}^*$ er en analytisk mangfoldighed.

OPGAVE. For en kompakt ^{sammenhængende} Riemann-flade $(X, \mathcal{A})$ gælder $\Gamma(X, \mathcal{A}) = \mathbb{C}$.

10. RATIONALT SPEKTRUM. Lad A være en endeligt frembragt L -algebra. Med $X = \text{Spec}_{\text{rat}}(A)$ betegnes mængden af L -algebra homomorfier $x: A \rightarrow L$. Er $f \in A$ og $x \in X$ skriver vi

$$f(x) := x(f).$$

Hvert $f \in A$ definerer således en funktion $x \mapsto f(x)$, som vi mere præcist betegner $\tilde{f} \in \text{Afb}(X, L)$ (altså $\tilde{f}(x) = f(x) = x(f)$), og $f \mapsto \tilde{f}$ er en $(L\text{-algebra})$ -homomorfi $A \rightarrow \text{Afb}(X, L)$. Billedalgebraen betegnes $\tilde{A}$. Af $\tilde{f} = 0$ betyder, at $f \in \ker x$ for samtlige homomorfier $x: A \rightarrow L$. Er f nilpotent, så er $\tilde{f} = 0$.

Er L algebraisk afsluttet gælder også det omvendte (Hilberts nulpunktssætning.)

Er $A = L[T_1, \dots, T_m]$ kan vi identificere $X = L^n$ (og $x(f) = f(x_1, \dots, x_m)$ for $f \in A$. For en kvotient $A = L[T_1, \dots, T_m] / (\dots, f_\alpha, \dots)$

har vi $X = \{(x_1, \dots, x_m) \in L^n \mid \forall \alpha: f_\alpha(x_1, \dots, x_m) = 0\}$.

For en vilkårlig L -algebra A , $X = \text{Spec}_{\text{rat}}(A)$, og $f \in A$ sætter vi $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$

og for en delmængde $F \subseteq A$:

$$V(F) = \{x \in X \mid \forall f \in F: f(x) = 0\}.$$

For $f, g \in A$ har vi gensejntlig

$$X_f \cap X_g = X_{fg}.$$

DEFINITION. $X = \text{Spec}_{\text{rat}}(A)$ opfattes som topologisk rum, idet delmængderne X_f tages som basis for de åbne mængder. De åbne delmængder af X er altså delmængderne af formen

$$U = \bigcup_{f \in F} X_f, \quad F \subseteq A$$

og de afsluttede delmængder er delmængder af formen

$$Z = X \setminus \bigcup_{f \in F} X_f = V(F), \quad F \subseteq A.$$

For en åben delmængde $U \subseteq X$ sættes

$$A^\#(U) = \{\varphi: U \rightarrow L \mid \varphi \text{ har lokalt formen } x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, f, g \in A\}.$$

At $\varphi: U \rightarrow L$ lokalt har den angivne form betyder at der til hvert punkt $x_0 \in U$ findes en åben omegn U af x_0 , og elementer $f, g \in A$ med $U \subseteq X_g$, så at $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ for alle $x \in U$.

Det er let at se, at med forskriften $A^\#$ bliver $(X, A^\#)$ en L -mangfoldighed, som vi (også) betegner $\text{Spec}_{\text{rat}}(A)$.

Idet følgende vil vi antage, at $A \cong \tilde{A}$. Det er ikke nogen væsentlig indskrænkning, idet vi oplagt kan identificere (som L -mangfoldighed) $\text{Spec}_{\text{rat}} A$ med $\text{Spec}_{\text{rat}} \tilde{A}$.

Hvis L er algebraisk afsluttet er antagelsen, at A er uden nilpotente (γ -reducent). Hvert $x \in A$ definerer da et maksimalideal $\mathfrak{p}_x \subset A$ nemlig kernelen for $A \xrightarrow{x} L$, og vi kan oplagt identificere den lokale ring $A_{\mathfrak{p}_x}$ med stået $A_x^\#$:

$$A_{\mathfrak{p}_x} \simeq A_x^\#.$$

Hvis L er algebraisk afsluttet gælder ifølge Hilberts nulpunktsætning, at $\mathfrak{p}_x$ 'erne er samtlige maksimalideal i A . Heraf følger:

$$\{f \in A \mid f=0 \text{ på } V(F)\} = \bigcap_{\mathfrak{p}_x \supseteq F} \mathfrak{p}_x = \text{Rad}(F),$$

specielt

$$X = \bigcup_{f \in F} X_f \Leftrightarrow V(F) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in \text{Rad}(F) \Leftrightarrow 1 = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r.$$

SÆTNING. Hvis L er algebraisk afsluttet (og A er reducent) er

$$A \simeq A^\#(X)$$

Lad $\varphi \in A^\#(X)$.

BEVIS. Hvert punkt har en åben omegn (som vi kan antage har formen X_f) hvori φ har formen $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. I stedet for at erstatte g med hg og f med hf kan vi antage, at omegnen er X_f ! Ifølge ovenstående findes en linearkombination

$$(1) \quad 1 = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r, \quad c_i \in A.$$

og så er (2) $X = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_r}$ og $\varphi(x) = \frac{g_i(x)}{f_i(x)}$ når $x \in X_{f_i}$.

Nu er $f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x) = 0$ når $x \in X_{f_i} \cap X_{f_j} = X_{f_i f_j}$ og dermed $f_i(x)f_j(x)[f_i(x)g_j(x) - f_j(x)g_i(x)] = 0$ for alle x . Heraf sluttet, at

$$f_i f_j [f_i g_j - f_j g_i] = 0 \quad i, j \in A.$$

I stedet for at erstatte f_i med f_i^2 og g_i med $f_i g_i$ [dette ød lægger ikke (2) da $X_f = X_{f^2}$ og en ny fremstilling (1) fås ved at opløfte den gamle til $(r+1)$ -te potens], kan vi antage, at

$$f_i g_j = f_j g_i \quad i, j \in A.$$

Sættes $g = \sum c_i g_i$, har vi $g f_j = \sum c_i f_j g_i = \sum c_i f_i g_j = g f_j$,

altså $g(x)f_j(x) = g_j(x)$ og dermed for $x \in X_{f_j}$:

$$g(x) = \frac{g_j(x)}{f_j(x)} = \varphi(x). \quad \text{Følgelig er } g(x) = \varphi(x) \text{ for alle } x, \text{ s. } \tilde{g} = \varphi \quad \square$$

ADVARSEL. Det er essentielt, at L er algebraisk afsluttet. Er f.eks. $L = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}[x, y] / (x^2 + y^2 - 1) = \mathbb{R}[x, y]$ kan vi opfatte $X = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$ som delmængde af $\bar{X} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\}$, der er en irreducibel kurve i $\mathbb{C}^2$. Hvis $f = F(x, y)$ opfylder $\tilde{f} = 0$, vil $F = 0$ på X , dvs kurven $H_F \subseteq \mathbb{C}^2$ vil opfylde $H_F \cap \bar{X} \supseteq X$ og således have uendelig mange punkter fælles med $\bar{X}$. Heraf følger (f.eks. Bezout), at $\bar{X}$ er en komponent af H_F , altså at $F = A(x^2 + y^2 - 1)$. Det er let at se, at A har koefficienter i $\mathbb{R}$, og vi slutter, at $f = F(x, y) = 0$. $\wedge$ Det er nu let at se, at funktionen $\frac{1}{x-2}$ (d: $(u, v) \mapsto \frac{1}{u-2}$) opfylder $\frac{1}{x-2} \in A^\#(X) \setminus \tilde{A}$.

Ellers fandtes $g = G(x, y) \in A$ med $1 - (x-2)g = 0$ i A . Men så ville $1 - (x-2)G(x, y) \in (x^2 + y^2 - 1)$, hvilket er umuligt.

11 ALGEBRAISKE MANGFOLDIGHEDER.

DEFINITION. En affin L-mangfoldighed er en L -mangfoldighed, der er isomorf med $\text{Spec}_{\text{rat}}(A)$ for en passende endeligt frembragt L -algebra A . En algebraisk L-mangfoldighed er en L -mangfoldighed, der kan overdækkes med endeligt mange åbne mængder, der er affine.

OPGAVER. Lad $X = \text{Spec}_{\text{rat}} A$. ① Vis for $f \in A$, at den åbne delmangfoldighed X_f er isomorf med $\text{Spec}_{\text{rat}}(A_f)$. Slut heraf: Enhver algebraisk mangfoldighed har en basis for de åbne mængder bestående af affine åbne mængder.

② Vis, - idet et topologisk rum kaldes noetherisk, hvis den opstigende kædes egenskaber gælder for åbne delmængder - at $X = \text{Spec}_{\text{rat}}(A)$ er noetherisk. Slut heraf: Enhver algebraisk mangfoldighed er noetherisk og enhver åben delmangfoldighed er selv en algebraisk mangfoldighed.

③ Vis for et ideal $\mathfrak{o} \subseteq A$, at den afsluttede delmangfoldighed $V(\mathfrak{o})$ er isomorf med $\text{Spec}_{\text{rat}}(A/\mathfrak{o})$. Slut heraf:

④ Det affine rum $A^n(L)$ er mangfoldighedens $\text{Spec}_{\text{nat}} L[T_1, \dots, T_n]$. Hvis L er algebraisk afsluttet svarer de globale algebraiske funktioner på $X = A^n(L)$ altså til polynomierne i $L[T_1, \dots, T_n]$.

⑤ Det projektive rum $X = P^n(L)$ er mangfoldighedens defineret således:

Som mængde er

$$X = L^{n+1} / L^* = \{x \in L^{n+1} \setminus \{0\}\} / \text{ækvivalensrelationen } x \sim \lambda x, \lambda \in L^* \\ = \{1\text{-dimensionale underrum i } L^{n+1}\}$$

For $x \in L^{n+1}$ skrives $[x]$ for billedet af $x \in X$.

For et homogent polynomium $g \in L[T_0, \dots, T_n]$ skrives

$$g([x]) = 0, \text{ hvis } g(x) = 0, \quad x = (x_0, \dots, x_n) \in L^{n+1}$$

Det har naturligvis ingen mening at betragte polynomiets "værdi" $g([x])$. Er f et homogent polynomium af samme grad som g , kan vi umiddelbart definere (såfremt $g([x]) \neq 0$)

$$\frac{f}{g}([x]) = \frac{f(x)}{g(x)} \in L.$$

Topologien på X defineres ved at delmængderne

$X_f = \{[x] \in X \mid f([x]) \neq 0\}$, f et homogent polynomium, tages som basis for de åbne mængder, og strukturknippet $=: \mathcal{O}_X$ defineres ved

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ \varphi: U \rightarrow L \mid \varphi \text{ har lokalt formen } \frac{f}{g} \text{ med } f \text{ og } g \text{ homogent polynomier af samme grad} \right\}$$

SÆTNING. Mangfoldigheden $(X, \mathcal{O}_X)$, $X = P^n(L)$, er algebraisk.

Mere præcist: For hver af de $n+1$ åbne mængder $U_i = X_{T_i}$ (der gensidigt overdækker X) defineres

$$(y_1, \dots, y_n) \longrightarrow [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$$

en isomorfi: $A^n(L) \rightarrow U_i$. $\square$

Opgave Antag L er algebraisk afsluttet. Vis, at de eneste globale algebraiske funktioner på $X = P^n(L)$ er konstanterne,

$$\therefore k \xrightarrow{\approx} \mathcal{O}_X(X).$$

12. OPGAVER. (1) Kvotientstruktur. Givet L -rum $(X, \mathcal{E}_X)$ og surjektiv afbildning $\kappa: X \rightarrow Y$ (mængde). Giv Y kvotienttopologi: $W \subseteq Y$ åben $\Leftrightarrow \kappa^{-1}(W) \subseteq X$ åben og strukturknippe: $g \in \mathcal{E}_Y(W) \Leftrightarrow g \circ \kappa_W \in \mathcal{E}_X(\kappa^{-1}(W))$. Vis (i) $(Y, \mathcal{E}_Y)$ er et L -rum. (ii) κ er en morfi af L -rum. (iii) Universelle egenskab. (formuler selv!).

(2) Submersion. $p: X \rightarrow Y$ morfi af L -rum er en submersion, hvis der findes basis $\mathcal{B}$ for de åbne delmængder af X så: (*) For alle $u \in \mathcal{B}$ er $p(u)$ åben i Y og for afbildninger $f: p(u) \rightarrow L$ gælder $f \in \mathcal{E}_Y(p(u)) \Leftrightarrow f \circ p|_u \in \mathcal{E}_X(u)$.

Vis: En submersion p er åben, og (*) gælder for alle u åbne i X . En surjektiv submersion er en kvotientmorfi.

(3) Antag G virker på L -rum X . Vis, at $X \rightarrow X/G$ er en (surjektiv) submersion.

(4) Vis, at en surjektiv affin afbildning $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ er en submersion