# Matematik 221, 1975

### Anders Thorup
### Algebra

Håndskrevne noter

# Pakke 221

benyttes ved kurset Mat 221, 1976. Pakke 221 indeholder af noter fra pakke 221 AB og C følgende:
Algebra 1974/75 :

MODULER. s. 0-40.
1. Modul. Homomorfi.
2. Undermodul. Kvotientmodul.
3. Noethersisomorfisætninger.
4. Sum og produkt af moduler. Basis.
5. Endomorfiring. Kommutant. Bikommutant.
6. Simpel modul. Schurs lemma.

ENDELIGHEDSBETINGELSER. s. 0-27.
1. Endeligt frembragte moduler.
2. Jordan-Hölder moduler.
3. Semisimple moduler og ringe.

TENSORPRODUKT. s. 0-28.
1. Tensorproduktet.
2. Funktoren $M \otimes_R -$ .
3. n-lineære afbildninger.
4. Alternerende n-lineære afbildninger.
5. Ydre produkt.
6. Den ydre Algebra.

REPRÆSENTATIONER. s. 0-43.
1. Repræsentationer og matrixrepræsentationer.
2. Eksempler.
3. Moduler over $\mathbb{C}G$.
4. Karakterer og klassefunktioner.

OPGAVER. s. 1-21

I alt 164 sider, incl. forside

Februar, 1976
Anders Thorup

Algebra 1975 Moduler 0*

**1. Modul. Homomorfi.** 1.1 – 1.2: Modul. 1.3: Nul-modulen. 1.5: $\mathbb{Z}$-modul. 1.6: Homoteti. $\Lambda \to End(M)$. 1.7: Højremodul. 1.8: $\Lambda^n$ som $\Lambda$-modul og som $Mat_n(\Lambda)$-modul. 1.9: Homomorfi. Kerne. 1.10: Endomorfierne $\Lambda_s^n \to \Lambda_s^n$. 1.11: $End_\Lambda(M)$ 1.12: $End_R(M)$. $R[X]$-moduler. 1.13: $R[X_1, \dots, X_n]$-moduler.

**2. Undermodul. Kvotientmodul.** 2.1: Undermodul. 2.2: Kongruensrelation. Kvotient. 2.3: Udvidelsessætning. 2.4: Isomorfisætning. 2.5: Notationer 2.7: Eksempler. Linearkombinationer. Venstreideal.

**3. Noethers Isomorfisætninger.** 3.1–3.2: Noethers anden isomorfisætning. 3.3: Noethers første isomorfisætning.

**4. Sum og produkt af moduler. Basis.** 4.1: Sum af undermoduler. 4.2: Uafhængige undermoduler. Direkte sum af undermoduler. 4.3: Direkte produkt af moduler. Projektionerne. 4.4: Direkte sum af moduler. Injektionerne. 4.5: Homomorfien $\oplus N_\nu \to \Sigma N_\nu$. 4.6: Frembringersystem. Uafhængigt system. Frit system. Basis. Fri modul. 4.7: Eksempler. 4.8: $N^{(I)}$. 4.9–4.11: Den fri $\Lambda$-modul frembragt af en mængde $I$. 4.12: Endelig direkte sum.

**5. Endomorfiring. Kommutant. Bikommutant.** 5.1: Kommutant. 5.2: $End_\Lambda(\Lambda_s)$. 5.3: $End_\Lambda(\Lambda_s^n)$. 5.4: $End_\Lambda(\Lambda_d^n)$. 5.5: Kommutant for $\Lambda^n$ som $Mat_n(\Lambda)$-modul. 5.6: Korollar. Centret i $Mat_n(\Lambda)$. 5.7: $\Lambda^n$ som højre-$Mat_n(\Lambda)$-modul. 5.8: Kommutant for $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$. 5.9: $\Lambda_s \oplus \cdots \oplus \Lambda_s$. 5.10-12: Bikommutant. 5.13: Eksempler 5.14: Sætning om bikommutant. 5.15: Anvendelse på $\Lambda^n$.

**6. Simpel modul. Schur's lemma.** 6.1: Simpel modul. 6.3 – 6.4: Schur's lemma. 6.5: Maksimalt venstreideal. 6.6: Simple moduler over $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}[X]$ og $\mathbb{R}[X]$. 6.7: Den simple $Mat_n(D)$-modul. 6.8: Moduler over et produkt af matrixringe.

# MODULER

I det følgende betegner $\Lambda$ en ring (med ét-element).

## 1. Modul. Homomorfi.

1.1. DEFINITION. En $\Lambda$-modul (også kaldet en modul over $\Lambda$) er en mængde $M$ forsynet med en (indre) komposition : $M \times M \to M$ kaldet addition, og betegnet : $(x,y) \longmapsto x+y$, og en (ydre) komposition: $\Lambda \times M \to M$ kaldet multiplikation og betegnet $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, således at følgende er opfyldt:

a) M.h.t. additionen er $M$ en kommutativ gruppe. Det neutrale element for additionen kaldes modulens nul-element og betegnes $0$. Det til et element $x \in M$ hørende modsatte element betegnes $-x$. Den additive gruppe betegnes $(M,+)$ eller $M^+$. Betingelserne kan udtrykkes ved ligningerne

$$\begin{aligned} &a1) \quad x+y = y+x \\ &a2) \quad x+(y+z) = (x+y)+z \qquad x,y,z \in M. \\ &a3) \quad x+0 = x \\ &a4) \quad x+(-x) = 0. \end{aligned}$$

m) For multiplikationen gælder følgende ligninger

$$\begin{aligned} &m1) \quad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \\ &m2) \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \\ &m3) \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \\ &m4) \quad 1x = x. \end{aligned}$$

1.2. Det ses, ligningerne a1), ..., m4) formelt er de krav, vi har stillet til et vektorrum. En modul over et legeme L er altså blot et vektorrum over L. Mere generelt bruges betegnelsen **vektorrum** for moduler over et skævlegeme.

1.3. **Nul-modulen** er den modul, der har ét element (som altså må være 0); den betegnes (0).

Ringen $\Lambda$ kan opfattes som $\Lambda$-modul, idet additionen $\Lambda\times\Lambda \to \Lambda$ er den sædvanlige addition i ringen $\Lambda$ og multiplikationen $\Lambda\times\Lambda\to\Lambda$ er multiplikationen i ringen $\Lambda$. Opfattes $\Lambda$ som $\Lambda$-modul, bruges ofte betegnelsen $\Lambda_s$. ($s$ for sinistra = venstre).

1.5. I en given kommutativ gruppe $(M,+)$ kan en multiplikation $\mathbb{Z}\times M \to M$ defineres ved

$$(p,x) \longmapsto px = (p\text{-te potens af } x).$$

Betingelserne m1) - m4) er netop potensreglerne. En kommutativ gruppe $(M,+)$ kan altså opfattes som $\mathbb{Z}$-modul.

1.6. Lad $M$ være en $\Lambda$-modul. For hvert fast $\lambda\in\Lambda$ kan vi betragte den ved

$$x \longmapsto \lambda x$$

definerede afbildning $: M \to M$. Den kaldes **homotetien med faktor $\lambda$**, og den betegnes $\lambda_M : M\to M$.

Betingelsen m1) udtrykker, at $\lambda_M$ er en homomorfi $\lambda_M : (M,+) \to (M,+)$, altså, at

$$\lambda_M \in End(M),$$

og vi ser nu, at betingelserne m2), m3), m4) udsiger, at afbildningen $\lambda \mapsto \lambda_M$ er en ring-homomorfi:

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}(M).$$

Det er i mange henseender bekvemt at opfatte en $\Lambda$-modul som en kommutativ gruppe (M,+) forsynet med en ringhomomorfi

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}(M)$$

1.7. I en $\Lambda$-modul $M$ kunne produktet $\lambda x$ af ringelementet $\lambda$ med modulelementet $x$ også betegnes $x\lambda$. Herved ville ligningerne m1), …, m4) få udseendet

$$\begin{aligned} &m1) & (x+y)\lambda &= x\lambda + y\lambda \\ &m2) & x(\lambda+\mu) &= x\lambda + x\mu \\ &m3) & x(\lambda\mu) &= (x\mu)\lambda \\ &m4) & x1 &= x, \end{aligned}$$

hvor særlig ligningen m3) bør bemærkes.

En kommutativ gruppe $(M,+)$ forsynet med en multiplikation $M \times \Lambda \to M$, betegnet $(x,\lambda) \mapsto x\lambda$, som opfylder

$$\begin{aligned} &dm1) & (x+y)\lambda &= x\lambda + y\lambda \\ &dm2) & x(\lambda+\mu) &= x\lambda + x\mu \\ &dm3) & x(\lambda\mu) &= (x\lambda)\mu \\ &dm4) & x1 &= x, \end{aligned}$$

kaldes derimod en højre-$\Lambda$-modul. Det er kun betingelsen dm3) der er forskellig fra den tilsvarende betingelse m3), og vi ser, at hvis $\Lambda$ er en kommutativ ring, så er en højre-$\Lambda$-modul det samme som en $\Lambda$-modul.

Ringen $\Lambda$ kan opfattes som højre-$\Lambda$-modul. Som sådan betegnes den $\Lambda_d$ (d for dextra = højre).

1.8. Lad $\Lambda$ være en ring. Produktmængden $\Lambda^n$ bestående af $n$-sæt

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad , \quad x_\nu \in \Lambda$$

organiseres til en $\Lambda$-modul ved kompositionerne

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Denne $\Lambda$-modul betegnes $\Lambda_s^n$.

Opfatter vi elementerne i $\Lambda^n$ som søjler, kan vi definere et produkt

$$\mathrm{Mat}_n(\Lambda) \times \Lambda^n \longrightarrow \Lambda^n$$

ved

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x,$$

hvor $\alpha x$ er det sædvanlige matrixprodukt af $(n \times n)$-matricen $\alpha$ med søjlematricen $x$. Herved organiseres <u>$\Lambda^n$ som en $\mathrm{Mat}_n(\Lambda)$-modul.</u>

Tilsvarende kan $\Lambda^n$ organiseres som en højre-$\Lambda$-modul (betegnet $\Lambda_d^n$), og opfattes elementerne i $\Lambda^n$ som rækkematricer, organiseres $\Lambda^n$ ved produktet

$$(x, \alpha) \longmapsto x\alpha$$

som en højre-$\mathrm{Mat}_n(\Lambda)$-modul.

1.9. DEFINITION. En afbildning $f: M \to N$ mellem $\Lambda$-moduler $M$ og $N$ kaldes en $\Lambda$-*homomorfi* (eller en $\Lambda$-*lineær afbildning*), hvis den bevarer strukturen, d.v.s. hvis der gælder

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad x, y \in M$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad \lambda \in \Lambda .$$

Ved *kernen* for en homomorfi $f: M \to N$ forstås originalmængden $f^{-1}(0)$.

Hvis $f$ er bijektiv, kaldes $f$ en *$\Lambda$-isomorfi*. Hvis $M = N$ bruges også benævnelserne *$\Lambda$-endomorfi* og *$\Lambda$-automorfi*

Det er klart, at identiteten er en $\Lambda$-homomorfi $1_M : M \to M$, og at vi ved sammensætning af $\Lambda$-homomorfier $f: M \to N$ og $g: P \to M$ får en $\Lambda$-homomorfi $f \circ g : P \to N$.

En $\Lambda$-homomorfi $f: M \to N$ er *injektiv hvis og kun hvis $f^{-1}(0) = \{0\}$*, idet dette som bekendt gælder for homomorfier : $(M,+) \to (N,+)$.

1.10. *De $\Lambda$-lineære afbildninger: $\Lambda_s^n \to \Lambda_s^n$ er afbildningerne af formen*

$$(x_1, \dots, x_n) = x \longmapsto x\alpha ,$$

*hvor $\alpha$ er en entydigt bestemt $(n \times n)$-matrix.*

Lad nemlig $f : \Lambda_s^n \to \Lambda_s^n$ være en $\Lambda$-lineær afbildning. Med $\delta_\mu \in \Lambda_s^n$ betegnes elementet

$$\delta_\mu = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \Lambda^n, \qquad \mu = 1, \dots, n.$$

Elementet $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Lambda_s^n$ kan da skrives

$$x = x_1\delta_1 + \dots + x_n\delta_n .$$

Sættes $f(\delta_\mu) = (\alpha_{\mu 1}, \dots, \alpha_{\mu n})$, finder vi

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(\delta_1) + \cdots + x_n f(\delta_n) \\ &= x_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \cdots + x_n(\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}) \\ &= (x_1\alpha_{11} + \cdots + x_n\alpha_{n1}, \ldots, x_1\alpha_{1n} + \cdots + x_n\alpha_{nn}) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ &= x\alpha \end{aligned}$$

Omvendt er det let at se, at enhver afbildning af formen $x \mapsto x\alpha$ er en $\Lambda$-lineær afbildning: $\Lambda_s^n \to \Lambda_s^n$, og matricen $\alpha$ er entydigt bestemt, idet ($\nu$-te række i $\alpha$) $= \delta_\nu \alpha$.

Specielt ser vi, at de $\Lambda$-lineære afbildninger: $\Lambda_s \to \Lambda_s$ er afbildningerne af formen

$$\lambda \mapsto \lambda\alpha$$

(höjre-multiplikation med elementet $\alpha \in \Lambda$).

1.11. Endomorfierne i $\Lambda$-modulen $M$ udgör med sædvanlig addition og sammensætning som multiplikation en ring, kaldet **endomorfiringen for $\Lambda$-modulen $M$** og betegnet $\mathrm{End}_\Lambda(M)$. Ringen $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ er en delring af endomorfiringen $\mathrm{End}(M)$ for $M$ som kommutativ gruppe. Homotetierne i $M$ udgör ligeledes en delring af $\mathrm{End}(M)$. Det er billedringen ved ringhomomorfien

$$\Lambda \to \mathrm{End}(M), \qquad \lambda \mapsto \lambda_M,$$

og den betegnes også $\Lambda_M$.

Bemærk, at homotetierne kommuterer med $\Lambda$-endomorfierne. Derimod vil homotetierne i almindelighed ikke være $\Lambda$-lineære, idet dette ville kræve, at $\lambda\mu x = \mu\lambda x$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $x \in M$. Det fölger imidlertid, at den for en modul $M$

over en kommutativ ring $R$ gælder, at homotetierne i $M$ er $R$-lineære. I dette tilfælde har vi altså

$$R_M \subseteq \mathrm{End}_R(M) \subseteq \mathrm{End}(M).$$

1.12. For en modul $M$ over en kommutativ ring $R$ kan vi opfatte afbildningen $\lambda \mapsto \lambda_M$ som en ringhomomorfi:

$$R \longrightarrow \mathrm{End}_R(M).$$

Da homotetierne kommuterer med $R$-endomorfierne, er denne homomorfi central. *Endomorfiringen $\mathrm{End}_R(M)$ er altså på naturlig måde en $R$-algebra.*

Til en givet $R$-endomorfi $f: M \to M$, altså til et givet element $f \in \mathrm{End}_R(M)$ findes som bekendt netop én $R$-algebrahomomorfi $R[X] \to \mathrm{End}_R(M)$, således at $X \mapsto f$, nemlig afbildningen

$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n \mapsto (\lambda_0)_M + (\lambda_1)_M f + \cdots + (\lambda_n)_M f^n.$$

Ved ringhomomorfien $R[X] \to \mathrm{End}_R(M) \hookrightarrow \mathrm{End}(M)$ organiseres $M$ som en $R[X]$-modul. Produktet er givet ved

$$(\lambda_0 + \cdots + \lambda_n X^n,\ v) \longmapsto \lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_n f^n(v).$$

Er der omvendt givet en $R[X]$-modul $M$, så har vi en homomorfi : $R[X] \to \mathrm{End}(M)$. Ved sammensætning får vi homomorfien $R \hookrightarrow R[X] \to \mathrm{End}(M)$, og herved organiseres $M$ som en $R$-modul. Det er klart, at homotetien $X_M : v \mapsto Xv$ er $R$-endomorfi i $R$-modulen $M$.

MORALE: *En $R[X]$-modul er det samme som en $R$-modul, i hvilken der er givet en udvalgt $R$-endomorfi $f: M \to M$.*

1.13. Tilsvarende får vi: *En $R[X_1, \dots, X_n]$-modul er det samme som en $R$-modul $M$, i hvilken der er givet et udvalgt sæt af kommuterende $R$-endomorfier $f_1, \dots, f_n : M \to M$.*

Og mere generelt: Lad $S$ være en semigruppe med neutralt element (et såkaldt **monoid**). *En $R[S]$-modul er det samme som en $R$-modul $M$, i hvilken der er givet en homomorfi*

$$\underline{S \to \mathrm{End}_R(M)^\times}.$$

## 2. Undermodul. Kvotientmodul.

2.1. DEFINITION. Lad $M$ være en $\Lambda$-modul. En delmængde $N \subseteq M$ kaldes en *undermodul*, hvis $N$ er stabil over for addition og multiplikation og hvis $N$ med de inducerede kompositioner $N \times N \to N$ og $\Lambda \times N \to N$ er en $\Lambda$-modul.

Det ses let, at enhver ikke-tom, stabil delmængde $N$ af $M$ er en $\Lambda$-modul.

Det er klart, at for en undermodul $N \subseteq M$ er inklusionsafbildningen : $N \hookrightarrow M$ en $\Lambda$-homomorfi.

2.2. DEFINITION. Lad $M$ være en $\Lambda$-modul. Ved en *kongruensrelation* i $M$ forstås en ækvivalensrelation $\equiv$ i $M$, som harmonerer med additionen (i den sædvanlige forstand:

$$x \equiv x' \wedge y \equiv y' \Rightarrow x+y \equiv x'+y')$$

og med multiplikationen i den forstand, at

$$x \equiv x' \Rightarrow \lambda x \equiv \lambda x'.$$

Der er en bijektiv forbindelse mellem kongruensrelationer i $M$ og undermoduler i $M$, ved hvilken der til undermodulen $N \subseteq M$ svarer kongruensrelationen $\underset{N}{\equiv}$ ("kongruens modulo $N$") defineret ved

$$x \underset{N}{\equiv} x' \Leftrightarrow x'-x \in N.$$

Den tilhørende kvotient betegnes også $M/N$, og den kan organiseres til en $\Lambda$-modul, således, at der gælder

$$\textcircled{x} + \textcircled{y} = \textcircled{x+y} \qquad \lambda \in \Lambda$$
$$\lambda \textcircled{x} = \textcircled{\lambda x}, \qquad x, y \in M.$$

Her betegner $O$ som sædvanlig den kanoniske afbildning ind i kvotienten $O: M \to M/N$; denne afbildning er altså en $\Lambda$-homomorfi. Modulen $M/N$ kaldes en *kvotientmodul* af $M$.

2.3. Vi får nu på velkendt måde:
UDVIDELSESSÆTNING. *Enhver $\Lambda$-homomorfi $f: M \to P$, som forsvinder på undermodulen $N \subseteq M$, kan entydigt udvides til en $\Lambda$-homomorfi $\tilde{f}: M/N \to P$.* Dette betyder, at der findes netop én $\Lambda$-homomorfi $\tilde{f}: M/N \to P$, så at $\tilde{f} \circ O = f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "O"] \arrow[d, "f"'] & M/N \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ P & \end{tikzcd}$$

Afbildningen $\tilde{f}: M/N \to P$ siges at være *induceret* af $f: M \to P$.

2.4. Kernen for en $\Lambda$-homomorfi $f: M \to P$ er øjensynlig en undermodul i $M$, og billedet $f(M)$ er en undermodul i $P$. Herom gælder
ISOMORFISÆTNING. *Den inducerede $\Lambda$-homomorfi $: M/f^{-1}(0) \to P$ giver en isomorfi $\tilde{f}: M/f^{-1}(0) \to f(M)$ af kvotienten $M/f^{-1}(0)$ på billedet $f(M)$.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "O"] \arrow[d] & M/f^{-1}(0) \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ P & f(M) \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

2.5. Kerne og billede for en $\Lambda$-homomorfi $f : M \to N$ betegnes henholdsvis $\operatorname{Ker} f$ og $\operatorname{Im} f$, altså

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) \subseteq M \; ; \qquad \operatorname{Im} f = f(M) \subseteq N .$$

Isomorfisætningen giver altså en isomorfi

$$M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f .$$

Kvotienterne $M/\operatorname{Ker} f$ og $N/\operatorname{Im} f$ betegnes henholdsvis $\operatorname{Coim} f$ og $\operatorname{Coker} f$ og kaldes **kobilledet** og **kokernen** for $f$.

2.6. Hvis $f : M \to P$ er surjektiv, får vi en isomorfi

$$M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} P .$$

2.7. Enhver modul $M$ har de **trivielle** undermoduler $(0)$ og $M$.

Hvis $e$ er et element i $\Lambda$-modulen $M$, ser vi let, at delmængden

$$\Lambda e = \{ \lambda e \mid \lambda \in \Lambda \}$$

er en undermodul i $M$, **den af $e$ frembragte undermodul**.

Mere generelt: hvis $S \subseteq M$ er en delmængde, så udgør de elementer $x \in M$, der er endelige **linearkombinationer**

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

af elementer $e_1, \ldots, e_n \in S$, en undermodul i $M$, **den af $S$ frembragte undermodul**. Denne undermodul er den mindste undermodul i $M$, som indeholder $S$.

Undermodulerne i $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ kaldes *venstreidealer* i $\Lambda$. At en ikke-tom delmængde $\mathfrak{a} \subseteq \Lambda$ er et venstreideal, betyder altså, at

$$\alpha \in \mathfrak{a} \wedge \beta \in \mathfrak{a} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathfrak{a}$$

$$\lambda \in \Lambda \wedge \alpha \in \mathfrak{a} \Rightarrow \lambda\alpha \in \mathfrak{a}.$$

Er der givet et element $e$ i $\Lambda$-modulen $M$, defineres ved

$$\lambda \longmapsto \lambda e$$

en $\Lambda$-homomorfi : $\Lambda_s \to M$. Dens billede er undermodulen $\Lambda e \subseteq M$. Dens kerne er et venstreideal i $\Lambda$, kaldet *annullatoren* for $e$.

2.8. DEFINITION. En modul $M$ kaldes *cyklisk*, hvis der findes et element $e \in M$ således at $\Lambda e = M$. For et sådant element $e$ er $\lambda \mapsto \lambda e$ en surjektiv homomorfi : $\Lambda_s \to M$, så ifølge isomorfisætningen har vi en isomorfi

$$\Lambda_s / \text{kernen} \xrightarrow{\sim} M.$$

Det følger, at de cykliske $\Lambda$-moduler (på nær isomorfi) er kvotienterne af $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$.

## 3. Noethers isomorfisætninger.

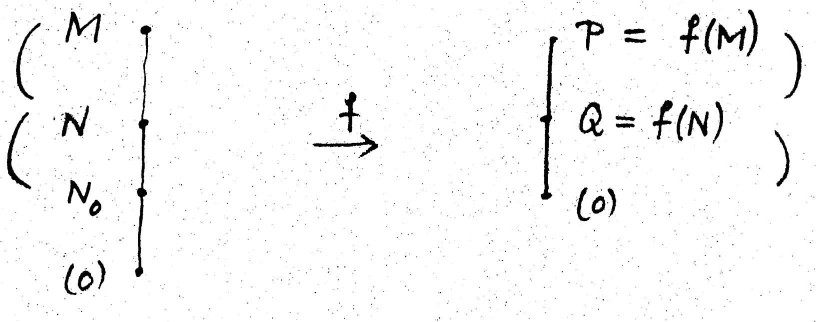
3.1. For en Λ-homomorfi $f: M \to P$ ser vi let, at billedet $f(N)$ af en undermodul $N$ i $M$ er en undermodul i $P$, og at originalmængden $f^{-1}(Q)$ af en undermodul $Q$ i $P$ er en undermodul i $M$.

NOETHERS ANDEN ISOMORFISÆTNING. *Lad $f: M \to P$ være en surjektiv Λ-homomorfi, og lad $N_0 \subseteq M$ være kernen for $f$. Ved $N \mapsto f(N)$ og $Q \mapsto f^{-1}(Q)$ defineres da en bijektiv forbindelse*

$$\underline{\{\text{undermoduler } N \text{ i } M \mid N \supseteq N_0\} \rightleftarrows \{\text{undermoduler } Q \text{ i } P\}}.$$

*Denne forbindelse bevarer inklusionen $\subseteq$, og der gælder*

$$\underline{f(N) \cong N/N_0 \quad \text{og} \quad P/f(N) \cong M/N.}$$



Bevis. For en undermodul $Q$ i $P$ har vi øjensynlig $f^{-1}(Q) \supseteq N_0$, og da $f$ er en surjektiv afbildning, gælder $f(f^{-1}(Q)) = Q$. For at vise, at forbindelsen er bijektiv, skal vi altså vise, at der for en undermodul $N$ i $M$, med $N \supseteq N_0$, gælder

$$f^{-1}(f(N)) = N.$$

Her er "$\supseteq$" klart, og omvendt, hvis $x \in f^{-1}(f(N))$, kan vi skrive $f(x) = f(n)$, hvor $n \in N$, og har altså $f(x-n) = f(x) - f(n) = 0$. Det følger, at $x - n \in \operatorname{Ker} f = N_0 \subseteq N$, men så er også

$$x = n + (x-n) \in N.$$

Af den generelle isomorfisætning følger de to isomorfier let, – den første fordi $f$ definerer en surjektiv afbildning $: N \to f(N)$, der klart har kernen $N_0$, den anden fordi den sammensatte surjektive afbildning

$$M \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\bigcirc} P/f(N)$$

har kernen $f^{-1}(f(N)) = N$. ▨

3.2. Specielt kan $f$ være den kanoniske homomorfi $\bigcirc : M \longrightarrow M/N_0$, hvor $N_0 \subseteq M$ er en givet undermodul. Hvis $N \supseteq N_0$ er en undermodul i $M$, kan vi identificere billedet $\text{\textcircled{N}} \subseteq M/N_0$ med $N/N_0$:

$$N/N_0 \subseteq M/N_0,$$

og vi får isomorfien

$$M/N \xrightarrow{\sim} (M/N_0)/(N/N_0)$$

3.3. Hvis $N_1$ og $N_2$ er undermoduler i $\Lambda$-modulen $M$, ses det let, at <u>fællesmængden</u> $N_1 \cap N_2$ er en undermodul. Videre er det let at se, at <u>summen</u> $N_1 + N_2$, defineret ved

$$N_1 + N_2 = \{ n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1 \wedge n_2 \in N_2 \},$$

er en undermodul, endda den mindste undermodul i $M$, som indeholder både $N_1$ og $N_2$. Vi har

$$N_1 \cap N_2 \subseteq \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right\} \subseteq N_1 + N_2,$$

og der gælder

NOETHERS FØRSTE ISOMORFISÆTNING. <u>Lad $N_1$ og $N_2$</u> -

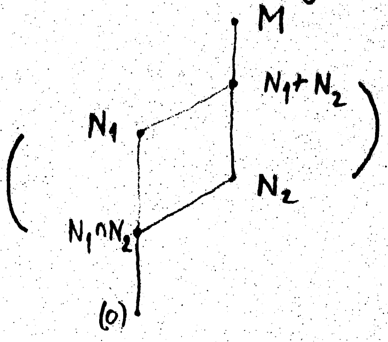
være undermoduler i Λ-modulen M. Der findes en naturlig isomorfi

$$N_1/N_1\cap N_2 \xrightarrow{\sim} N_1+N_2\ /N_2$$

Bevis. Vi har $N_1 \subseteq N_1+N_2$, og vi betragter den sammensatte homomorfi

$$N_1 \xhookrightarrow{i} N_1+N_2 \xrightarrow{k} N_1+N_2\ /N_2 .$$

Denne homomorfi er surjektiv, thi hvert element i $N_1+N_2\ /N_2$ er af formen $\boxed{n_1+n_2} = \boxed{n_1} = k\circ i\,(n_1)$. Da kernen for denne homomorfi øjensynlig er $N_1\cap N_2$, følger påstanden af den generelle isomorfisætning. ■



## 4. Sum og produkt af moduler. Basis.

4.1. Lad der i Λ-modulen $M$ være givet en familie $(N_\nu)_{\nu\in I}$ af undermoduler. Det ses let, at den mindste undermodul i $M$, som indeholder alle $N_\nu$'erne, består af de elementer $x \in M$, der kan skrives som en *endelig* sum

$$x = \sum_{\nu\in I} x_\nu \quad , \quad x_\nu \in N_\nu \text{ for alle } \nu\in I.$$

(at summen er endelig betyder, at kun endelig mange $x_\nu$ er $\neq 0$).
Denne undermodul i $M$ kaldes *summen* af undermodulerne $N_\nu$, $\nu\in I$, og betegnes $\sum_{\nu\in I} N_\nu$, altså

$$\sum_{\nu\in I} N_\nu = \left\{ \sum_{\nu\in I} x_\nu \;\middle|\; \begin{array}{l} x_\nu\in N_\nu \text{ for alle } \nu\in I \\ x_\nu\neq 0 \text{ kun for endelig mange } \nu \end{array}\right\}$$

Hvis $I = \{1,\dots,n\}$ bruges også betegnelsen

$$N_1+\dots+N_n,$$

og hvis $I = \mathbb{N}$ bruges også betegnelsen

$$N_1+N_2+\cdots$$

4.2. DEFINITION. Undermodulerne $N_\nu$, $\nu\in I$ i $M$ kaldes *uafhængige* (eller siges at *danne direkte sum*), hvis fremstillingen

$$x = \sum_{\nu\in I} x_\nu \;, \quad x_\nu \in N_\nu$$

af et element $x$ i $\sum_{\nu\in I} N_\nu$ er entydig. Hertil er det nok at kræve, at fremstillingen af $0$ er entydig, altså kræve, at vi af

$$0 = \sum_{\nu\in I} x_\nu \quad , \quad x_\nu\in N_\nu$$

kan slutte, at $x_\nu = 0$ for alle $\nu\in I$.

Hvis der desuden gælder $M = \sum_{\nu\in I} N_\nu$, siger vi, at <u>M er direkte sum af undermodulerne</u> $N_\nu$, $\nu \in I$.

4.3. Lad nu $(N_\nu)_{\nu\in I}$ være en vilkårlig familie af $\Lambda$-moduler. Vi kan da betragte produktmængden

$$\mathop{\times}_{\nu\in I} N_\nu$$

bestående af alle familier

$$(x_\nu)_{\nu\in I}\ , \text{ hvor } x_\nu \in N_\nu .$$

Denne mængde organiseres til en $\Lambda$-modul ved definitionerne

$$(x_\nu) + (y_\nu) = (x_\nu + y_\nu)$$

$$\lambda(x_\nu) = (\lambda x_\nu).$$

Den kaldes <u>det direkte produkt</u> (eller blot <u>produktet</u>) af $\Lambda$-modulerne $N_\nu$, $\nu\in I$, og den betegnes også

$$\prod_{\nu\in I} N_\nu .$$

Hvis $I = \{1,\dots,n\}$ (resp. $I = \mathbb{N}$) bruges også betegnelsen

$$N_1 \times \dots \times N_n \quad (\text{resp. } N_1\times N_2 \times \dots )$$

Elementerne heri er $n$-sæt $(x_1,\dots,x_n)$, med $x_\nu \in N_\nu$ (resp. "følger" $(x_1,x_2,\dots)$, med $x_\nu \in N_\nu$).

Fra produktet $N = \prod_{\nu\in I} N_\nu$ har vi for hvert $\mu\in I$ <u>projektionen</u>

$$p_\mu : N \longrightarrow N_\mu ,$$

defineret ved $p_\mu : (x_\nu)_{\nu\in I} \longmapsto x_\mu$. Projektionen $p_\mu$ er en surjektiv $\Lambda$-homomorfi.

4.4. I produktet $\prod_{\nu\in I} N_\nu$ kan vi betragte de elementer

$$x = (x_\nu)_{\nu\in I} \quad , \quad x_\nu \in N_\nu ,$$

for hvilke $x_\nu \neq 0$ kun gælder for endelig mange $\nu \in I$. Det ses let, at disse elementer udgør en undermodul i $\prod N_\nu$. Denne undermodul kaldes <u>den direkte sum af</u> modulerne $N_\nu, \nu\in I$, og den betegnes $\bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$, altså

$$\bigoplus_{\nu\in I} N_\nu = \{ (x_\nu) \in \prod N_\nu \mid x_\nu \neq 0 \text{ kun for endelig mange } \nu \}$$

Hvis $I$ er en endelig mængde, har vi naturligvis $\bigoplus N_\nu = \prod N_\nu$.

Hvis $I = \{1,\dots,n\}$ (resp. $I = \mathbb{N}$) bruges betegnelsen

$$N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \quad (\text{resp. } N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots).$$

Elementerne i $N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots$ er følger $(x_1, x_2, \dots, 0, 0, \dots)$, der er $=0$ fra et vist trin.

For hvert $\mu \in I$ defineres <u>injektionen</u>

$$i_\mu : N_\mu \longrightarrow \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$$

ved at vi for $z \in N_\mu$ med $i_\mu(z)$ betegner det element $(x_\nu) \in \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$, for hvilket

$$x_\nu = \begin{cases} z & \text{for } \nu = \mu \\ 0 & \text{for } \nu \neq \mu \end{cases}$$

Injektionen $i_\mu$ er en injektiv $\Lambda$-homomorfi.

4.5. Lad os nu antage, at modulerne $N_\nu, \nu\in I$ er undermoduler i modulen $M$. For et element $(x_\nu)_{\nu\in I} \in \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$ er $x_\nu \neq 0$ kun for endelig man-

Vi kan derfor i M betragte den endelige sum

$$\sum_{\nu\in I} x_\nu \in M$$

let at se, at der ved $(x_\nu) \longmapsto \sum x_\nu \in M$

s en $\Lambda$-homomorfi

$$\bigoplus_{\nu\in I} N_\nu \longrightarrow M,$$

billede er undermodulen $\sum_{\nu\in I} N_\nu \subseteq M$.

ser nu, at denne homomorfi er

ktiv, hvis og kun hvis M er sum af $N_\nu$'erne,

tiv, hvis og kun hvis $N_\nu$'erne er uafhængige

e

ktiv, hvis og kun hvis M er direkte sum af $N_\nu$'erne.

tte sidste er tilfældet, skriver vi derfor

$$\bigoplus_{\nu\in I} N_\nu = M.$$

NITION. Et system $(e_\nu)_{\nu\in I}$ af elementer i

ulen M kaldes et frembringersystem, hvis

$\in M$ kan skrives som en endelig linearkombi-

$$x = \sum_{\nu\in I} \lambda_\nu e_\nu \quad , \quad \lambda_\nu \in \Lambda,$$

earkombinationen er endelig betyder, at $\lambda_\nu \neq 0$

Det ses, at $(e_\nu)_{\nu \in I}$ er et frit system, hvis og kun hvis det for elementer $x \in \sum \Lambda e_\nu$ gælder, at i fremstillingen

$$x = \sum \lambda_\nu e_\nu$$

er koefficienterne $\lambda_\nu$ entydigt bestemte.

Et uafhængigt frembringersystem kaldes (ofte) en *basis.* Et frit frembringersystem kaldes en *fri basis*. En $\Lambda$-modul, i hvilken der findes en fri basis, kaldes en *fri modul.*

En basis $(e_\nu)_{\nu \in I}$ for $M$ er altså en en fri basis, hvis dens elementer er frie. Bemærk imidlertid, at der ved en basis for en fri modul næsten altid underforstås en fri basis.

4.7. Eksempler. Gruppen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ er en $\mathbb{Z}$-modul. Elementet ① $\in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ er en basis. Systemet ②,③ er også en basis. Modulen har ingen fri basis, da den ikke indeholder nogen frie elementer.

Ethvert element $\neq 0$ i $\mathbb{Z}$-modulen $\mathbb{Q}^+$ er frit. Denne modul har ingen basis, thi er $e_1, e_2 \in \mathbb{Q}$ elementer $\neq 0$, ser vi, at $\mathbb{Z}e_1 \cap \mathbb{Z}e_2$ indeholder mere end $0$.

I en modul over et skævlegeme $\Lambda$ er alle elementer $\neq 0$ frie, thi er $\lambda e = 0$ og $\lambda \neq 0$, får vi $e = 1e = \lambda^{-1}\lambda e = \lambda^{-1}0 = 0$. Man kan vise, at enhver modul over et skævlegeme er fri, altså at ethvert vektorrum har en basis.

4.8. Hvis modulerne $N_\nu$ i en familie $(N_\nu)_{\nu\in I}$ af $\Lambda$-moduler alle er den samme modul $N$, sætter vi

$$N^{I} = \prod_{\nu\in I} N_\nu$$

og

$$N^{(I)} = \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu .$$

$N^{I}$ er altså $\Lambda$-modulen bestående af alle afbildninger $x : I \longrightarrow N$, og $N^{(I)}$ er undermodulen heri bestående af de afbildninger $\nu \mapsto x_\nu$, for hvilke $x_\nu \neq 0$ kun for endelig mange $\nu$.

Hvis indexmængden $I$ er endelig, har vi $N^{(I)} = N^{I}$. Hvis $I = \{1,\cdots,n\}$, skriver vi også $N^{n}$ for $N^{(I)}$, altså

$$N^{n} = N\oplus\cdots\oplus N.$$

4.9. Lad der være givet en mængde $I$. Vi kan da betragte $\Lambda$-modulen $\Lambda_s^{(I)}$. Den består af de afbildninger $x : I \to \Lambda$, for hvilke $x_\nu \neq 0$ kun for endelig mange $\nu\in I$. Vi har $1\in\Lambda$, og kan for hvert $\mu\in I$ betragte elementet $\delta^{\mu} = i_\mu(1)$, hvor $i_\mu : \Lambda_s \to \Lambda_s^{(I)}$ er injektionen. $\delta^{\mu}$ er altså afbildningen

$$\delta^{\mu} : \nu \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{for } \nu=\mu \\ 0 & \phantom{\text{for }} \nu\neq\mu \end{cases}$$

For et vilkårligt element $x = (x_\nu) \in \Lambda_s^{(I)}$ finder vi

$$x = \sum_{\mu} x_\mu \delta^{\mu} \qquad (\text{endelig sum}),$$

og vi slutter, at elementerne $\delta^{\mu}$ er en fri basis for $\Lambda$-modulen $\Lambda_s^{(I)}$. Ofte identificerer vi elementerne $\mu\in I$ med de tilsvarende basis elementer $\delta^{\mu}$. Med denne identifikation består elementerne i $\Lambda_s^{(I)}$ af endelige summer

$$x = \sum x_\mu \mu .$$

Modulen $\Lambda_s^{(I)}$ kaldes den *fri $\Lambda$-modul frembragt af mængden $I$.*

4.10. SÆTNING. *Lad der være givet en fri $\Lambda$-modul $M$ med fri basis $(e_\nu)_{\nu\in I}$. Til en $\Lambda$-modul $N$ og en givet familie $(y_\nu)_{\nu\in I}$ af elementer $y_\nu \in M$ findes da netop en $\Lambda$-homomorfi $f: N \to M$, således at*

$$f: e_\nu \longmapsto y_\nu \quad , \quad \nu \in I,$$

*nemlig den ved*

$$x = \sum \lambda_\nu e_\nu \longmapsto \sum \lambda_\nu y_\nu$$

*givne.* □

4.11. Er der i $\Lambda$-modulen $M$ givet en familie $(y_\nu)_{\nu\in I}$ af elementer $y_\nu \in M$ findes der netop én $\Lambda$-homomorfi

$$\Lambda_s^{(I)} \longrightarrow M,$$

således at $\delta^\mu \mapsto y_\mu$. Billedet er undermodulen $\sum_\nu \Lambda y_\nu \subseteq M$. Vi ser, at denne homomorfi er

*surjektiv, hvis og kun hvis $(y_\nu)$ er et frembringersystem,*

*injektiv, hvis og kun hvis elementerne $y_\nu$ er fri og uafhængige,*

og altså *bijektiv, hvis og kun hvis $(y_\nu)_{\nu\in I}$ er en fri basis for $M$.*

De fri $\Lambda$-moduler er altså de moduler, der er isomorfe med en modul af formen $\Lambda_s^{(I)}$ for en passende mængde $I$.

4.12. Lad os betragte en endelig direkte sum
$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n .$$
Vi har da injektionerne $i_\nu : N_\nu \to N$ givet ved
$$z \longmapsto (0, \dots, z, \dots, 0) \quad , \quad \nu = 1, \dots, n$$
og projektionerne $p_\nu : N \to N_\nu$ givet ved
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_\nu , \qquad \nu = 1, \dots, n .$$
Vi ser let, at der gælder
$$p_\nu i_\mu = \begin{cases} 1_{N_\nu} & \text{for } \nu = \mu \\ 0 & \phantom{for } \nu \neq \mu \end{cases}$$
samt
$$\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu p_\nu = 1_N .$$
Omvendt har vi

SÆTNING. *Lad der være givet $\Lambda$-moduler $M, N_1, \dots, N_n$ og $\Lambda$-homomorfier $i_\nu : N_\nu \to M$, $p_\nu : M \to N_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, således at*
$$p_\nu i_\mu = \begin{cases} 1_{N_\nu} & \text{for } \nu = \mu \\ 0 & \phantom{for } \nu \neq \mu \end{cases} \qquad \nu, \mu = 1, \dots, n$$
*og*
$$\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu p_\nu = 1_M .$$
*Afbildningen*
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum i_\nu (x_\nu)$$
*er da en $\Lambda$-isomorfi*
$$N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \xrightarrow{\sim} M ,$$
*hvis inverse er afbildningen*
$$x \longmapsto (p_1(x), \dots, p_n(x)) .$$
$\square$

## 5. Endomorfiring. Kommutant. Bikommutant.

5.1. DEFINITION. Er $M$ en $\Lambda$-modul, kan vi betragte ringen $\mathrm{End}(M)$ af additive endomorfier: $M \to M$. Homotetierne i $M$, altså afbildningerne af formen

$$\lambda_M : x \mapsto \lambda x \ , \quad \text{med } \lambda \in \Lambda,$$

udgør da en delring af $\mathrm{End}(M)$, som vi betegner $\Lambda_M$. Det ses, at $\Lambda_M$ er billedringen for ringhomomorfien

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}(M) \ , \quad \text{jfr. } 1.6.$$

$\Lambda$-endomorfierne i $M$ udgør ligeledes en delring af $\mathrm{End}(M)$, som vi betegner $\mathrm{End}_\Lambda(M)$.

At en additiv endomorfi $f \in \mathrm{End}(M)$ er $\Lambda$-lineær betyder, at vi har

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad x \in M,\ \lambda \in \Lambda,$$

altså at

$$f \circ \lambda_M = \lambda_M \circ f \ , \quad \lambda \in \Lambda.$$

Ringen $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ er altså kommutanten for delringen $\Lambda_M \subseteq \mathrm{End}(M)$:

$$\mathrm{End}_\Lambda(M) = \Lambda_M^{\,c}.$$

Ringen $\mathrm{End}_\Lambda(M)$ kaldes også *kommutanten for $\Lambda$-modulen $M$.*

5.2. Som nævnt i 1.10 gælder for kommutanten for $\Lambda_s$ følgende

SÆTNING. *$\Lambda$-endomorfierne i $\Lambda_s$ er afbildningerne af formen*

$$r_\gamma : x \mapsto x\gamma \ , \quad \text{med } \gamma \in \Lambda.$$

*Den herved bestemte afbildning: $\gamma \mapsto r_\gamma$ er en antiisomorfi: $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s)$, altså en isomorfi*

$$\Lambda^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s)$$

5.3. Men generelt gælder som tidligere nævnt

SÆTNING. Λ-endomorfierne i $\Lambda_s^n = \Lambda_s \oplus \cdots \oplus \Lambda_s$ er afbildningerne af formen

$$r_\gamma : x \mapsto x\gamma, \quad \text{med en matrix } \gamma \in \mathrm{Mat}_n(\Lambda).$$

[Vi tænker på elementer $x \in \Lambda_s^n$ som rækkematricer; produktet $x\gamma$ er det sædvanlige matrixprodukt: række × matrix]. Den herved bestemte afbildning: $\gamma \mapsto r_\gamma$ er en anti-isomorfi: $\mathrm{Mat}_n(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s^n)$, altså en isomorfi:

$$\mathrm{Mat}_n(\Lambda)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s^n).$$

Vi minder om beviset: En Λ-endomorfi $f : \Lambda_s^n \to \Lambda_s^n$ er helt bestemt ved sine værdier $\gamma_1 = f(1,0,\cdots,0), \cdots, \gamma_n = f(0,0,\cdots,1)$, idet vi for $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Lambda_s^n$ har

$$x = x_1(1,0,\cdots,0) + \cdots + x_n(0,0,\cdots,1),$$

og dermed

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(1,0,\cdots,0) + \cdots + x_n f(0,0,\cdots,1) \\ &= x_1\gamma_1 + \cdots + x_n\gamma_n, \end{aligned}$$

eller på matrixform:

$$f(x) = (x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix} = x\gamma,$$

hvor $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$ er matricen med rækkerne $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$. Omvendt er en afbildning af formen $r_\gamma : x \mapsto x\gamma$ en Λ-endomorfi, idet

$$(\lambda x)\gamma = \lambda(x\gamma),$$

og matricen $\gamma$ er entydigt bestemt ved afbildningen $r_\gamma$, idet der for dens rækker $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ gælder

$$\gamma_1 = (1,0,\cdots,0)\gamma, \quad \cdots, \quad \gamma_n = (0,0,\cdots,1)\gamma.$$

Afbildningen $\gamma \mapsto r_\gamma$ er således bijektiv: $\mathrm{Mat}_n(\Lambda) \to \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s^n)$, og den er en antiisomorfi, idet

$$\begin{aligned} r_{\gamma+\gamma'}(x) &= x(\gamma+\gamma') = x\gamma + x\gamma' = r_\gamma(x) + r_{\gamma'}(x) \\ &= (r_\gamma + r_{\gamma'})(x), \end{aligned}$$

$$r_{\gamma\gamma'}(x) = x(\gamma\gamma') = (x\gamma)\gamma' = r_{\gamma'}(x\gamma)$$
$$= (r_{\gamma'} \circ r_{\gamma})(x)$$

$$r_{1_n}(x) = x1_n = x$$
$$= 1_{\Lambda_s^n}(x).$$ ▨

5.4. Betragter vi istedet $\Lambda^n$ som højre-$\Lambda$-modul, altså modulen $\Lambda_d^n$ finder vi tilsvarende for kommutanten
SÆTNING. $\Lambda$-endomorfierne i $\Lambda_d^n = \Lambda_d \oplus \cdots \oplus \Lambda_d$ er afbildningerne af formen

$$\ell_\gamma : y \mapsto \gamma y, \text{ med en matrix } \gamma \in \mathrm{Mat}_n(\Lambda).$$

[Vi tænker på elementer $y \in \Lambda_d^n$ som søjlematricer; produktet $\gamma y$ er det sædvanlige matrixprodukt: matrix × søjle ].
Den herved bestemte afbildning: $\gamma \mapsto \ell_\gamma$ er en isomorfi:

$$\mathrm{Mat}_n(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_d^n).$$ ☐

5.5. Vi kan organisere $\Lambda^n$ som modul over matrixringen $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$. For kommutanten finder vi:
SÆTNING. $\Gamma$-endomorfierne i $\Lambda^n$ (som modul over $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$) er afbildningerne af formen

$$r_\lambda : x \to x\lambda, \text{ med } \lambda \in \Lambda.$$

Den herved bestemte afbildning $\lambda \mapsto r_\lambda$ er en anti-isomorfi: $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Gamma(\Lambda^n)$, altså en isomorfi:

$$\Lambda^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Gamma(\Lambda^n).$$

Bevis. En $\Gamma$-lineær endomorfi $f : \Lambda^n \to \Lambda^n$ er bestemt ved værdien $f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in \Lambda^n$, idet vi for $x = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \Lambda^n$ har

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

og dermed

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Indsættes heri $x = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ser vi, at $f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ må være af formen $\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, og vi slutter, at der for alle $x \in \Lambda^n$ gælder

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_n\lambda \end{pmatrix} = x\lambda$$

Resten af påstandene følger nu let □

5.6. Heraf får vi som

KOROLLAR. *Centret i matrixringen $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$ består af matricerne $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots\ \lambda \end{pmatrix}$, hvor $\lambda$ tilhører centret i $\Lambda$. Med en oplagt isomorfi har vi altså*

$$\underline{\mathrm{Cent}(\Lambda) \simeq \mathrm{Cent}(\mathrm{Mat}_n(\Lambda))}$$

Bevis. Hvis $\xi \in \mathrm{Cent}(\Gamma)$, har vi $\xi\gamma = \gamma\xi$ for alle $\gamma \in \Gamma$ og dermed

$$\xi\gamma x = \gamma\xi x, \quad \gamma \in \Gamma,\ x \in \Lambda^n.$$

Dette betyder, at afbildningen $x \mapsto \xi x$ er en $\Gamma$-endomorfi i $\Lambda^n$, så der findes $\lambda \in \Lambda$, således at

$$\xi x = x\lambda, \quad x \in \Lambda^n.$$

Heraf slutter vi, at $\xi = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$, og at $\lambda \in \mathrm{Cent}(\Lambda)$. Omvendt er det klart, at en sådan matrix tilhører centret i $\mathrm{Mat}_n(\Lambda)$. ▨

5.7. Vi kan også organisere $\Lambda^n$ som højre-modul over $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$, jfr. 1.8. For kommutanten finder vi

SÆTNING. *$\Gamma$-endomorfierne i $\Lambda^n$ (som højre-modul over $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$) er afbildningerne af formen*

$$\underline{\ell_\lambda : x \longmapsto \lambda x.}$$

*Den herved definerede afbildning $\lambda \mapsto \ell_\lambda$ er en isomorfi:*

$$\underline{\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_\Gamma(\Lambda^n).} \qquad \square$$

5.8. Lad $M$ og $N$ være $\Lambda$-moduler. Mængden af $\Lambda$-homomorfier $: M \to N$ organiseres da på oplagt måde til en kommutativ gruppe, idet vi for homomorfier $f, g : M \to N$ definerer summen $f+g$ ved

$$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x).$$

Denne gruppe betegnes $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. Vi har øjensynlig

$$\mathrm{End}_\Lambda(M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(M,M).$$

Er der givet endelige direkte summer

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \quad , \quad N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \; ,$$

så kan elementerne i $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ beskrives ved matricer: Er $i^M_\mu : M_\mu \hookrightarrow M$ injektionerne og er $p^N_\nu : N \to N_\nu$ projektionerne, så kan vi for hver $\Lambda$-homomorfi

$$f : M \to N$$

betragte "matricen"

$$\underline{\underline{f}} = (f_{\nu\mu}) \; , \quad \text{hvor } f_{\nu\mu} = p^N_\nu \circ f \circ i^M_\mu$$

Det ses, at $\underline{\underline{f}}$ er en $(n \times m)$-"matrix", hvor det $(\nu,\mu)$-te element tilhører $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, N_\nu)$.

Er der omvendt givet en $(n \times m)$-"matrix"

$$G = (g_{\nu\mu}) \; , \quad \text{hvor } g_{\nu\mu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, N_\nu),$$

kan vi definere en afbildning

$$\ell_G : M \to N$$

ved

$$\ell_G : x \longmapsto \sum_{\nu,\mu} i^N_\nu \, g_{\nu\mu} \, p^M_\mu (x)$$

Skrives elementerne i $M$ som søjler $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, hvor altså $x_\mu = p^M_\mu(x)$, og tilsvarende elementerne i $N$ som søjler $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, hvor $y_\nu = p_\nu(y)$, finder vi

$$\ell_G(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

hvor "matrix"-produktet på højre side er defineret på oplagt måde.

Det er nu let at se, at der ved

$$f \longmapsto \underline{\underline{f}}$$

defineres en bijektiv afbildning af $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ på den betragtede mængde af matricer, og at

$$G \longmapsto \ell_G$$

er den inverse afbildning. Vi kan på oplagt måde definere en addition af sådanne matricer, idet vi for $G = (g_{\nu\mu})$, $H = (h_{\nu\mu})$, hvor $g_{\nu\mu}, h_{\nu\mu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, N_\nu)$ sætter

$$G + H = (g_{\nu\mu} + h_{\nu\mu}).$$

Det ses let, at vi har

$$\underline{\underline{f+g}} = \underline{\underline{f}} + \underline{\underline{g}} \qquad f, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$$

således at $f \longmapsto \underline{\underline{f}}$ er en isomorfi.

Matricerne kan også multipliceres på følgende måde: Er $K = K_1 \oplus \cdots \oplus K_k$ endnu en endelig direkte sum, og er der givet matricer

$$G = (g_{\nu\mu}) \ , \quad g_{\nu\mu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, N_\nu)$$

$$H = (h_{\kappa\nu}) \qquad h_{\kappa\nu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N_\nu, K_\kappa),$$

defineres produktet $HG = (f_{\kappa\mu})$ ved

$$f_{\kappa\mu} = \sum_\nu h_{\kappa\nu} \circ g_{\nu\mu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, K_\kappa)$$

Produktet

$$HG = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \\ h_{k1} & \cdots & h_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{pmatrix}$$

udregnes altså ved at "gange rækker med søjler".

Med denne definition har vi

$$\underline{\underline{h \circ g}} = \underline{\underline{h}}\,\underline{\underline{g}} \quad , \quad h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N, K), g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N).$$

thi sætter vi $f = h \circ g$, $\underline{\underline{f}} = (f_{\kappa\mu})$, så har vi

$$f_{\kappa\mu} = p^K_\kappa \circ f \circ i^M_\mu = p_\kappa \circ h \circ g \circ i^M_\mu$$

$$= p^K_\kappa \circ h \circ 1_N \circ g \circ i^M_\mu = p^K_\kappa \circ h \circ \Big(\sum_\nu i^N_\nu \circ p^N_\nu\Big) \circ g \circ i^M_\mu$$

$$= \sum_\nu \big(p^K_\kappa \circ h \circ i^N_\nu\big) \circ \big(p^N_\nu \circ g \circ i^M_\mu\big) = \sum_\nu h_{\kappa\nu} \circ g_{\nu\mu}.$$

Er endelig $M = N$, $m = n$ og $M_\mu = N_\mu$, $\mu = 1, \dots, m$ så er

$$\underline{\underline{1_M}} = \text{enhedsmatrix},$$

thi

$$p^M_\nu \circ 1_M \circ i^M_\mu = p^M_\nu \circ i^M_\mu = \begin{cases} 0_{M_\nu} & \text{hvis } \nu \neq \mu \\ 1_{M_\nu} & \phantom{\text{hvis }} \nu = \mu \end{cases}$$

For endomorfier i en direkte sum $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ får vi således alt i alt: Afbildningen, der til en endomorfi

$$f \in \mathrm{End}_\Lambda(M)$$

lader svare "matricen"

$$\underline{\underline{f}} = (f_{\nu\mu}), \quad \text{hvor } f_{\nu\mu} = p_\nu \circ f \circ i_\mu \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, M_\nu)$$

er en ringisomorfi.

Den inverse afbildning er givet ved at den til "matricen"

$$\underline{(f_{\nu\mu}) \quad , \quad f_{\nu\mu} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M_\mu, N_\nu)}$$

svarer endomorfien

$$\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.}$$

Er $M_1 = \dots = M_m = L$, altså $M = L^m$ med en $\Lambda$-modul $L$, får vi en isomorfi:

$$\boxed{\mathrm{End}_\Lambda(L^m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_m\big(\mathrm{End}_\Lambda(L)\big)}$$

5.9. For $\Lambda$-modulen $M = \Lambda_s^m$ giver ovenstående en isomorfi

$$\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s^m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_m(\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s)).$$

Elementerne i $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s)$ er højre-multiplikationerne

$$r_\gamma : x \longmapsto x\gamma, \quad \text{med } \gamma \in \Lambda.$$

Den til en matrix

$$G = \begin{pmatrix} r_{\gamma_{11}} & \cdots & r_{\gamma_{1m}} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{\gamma_{m1}} & \cdots & r_{\gamma_{mm}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s))$$

hørende endomorfi i $\ell_G$ i $\Lambda_s^m$ er givet ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{\gamma_{11}} & \cdots & r_{\gamma_{1m}} \\ \vdots & & \\ r_{\gamma_{m1}} & \cdots & r_{\gamma_{mm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Vi finder $y_\nu = \sum_\mu r_{\gamma_{\nu\mu}}(x_\mu) = \sum_\mu x_\mu \gamma_{\nu\mu}$, altså

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{1m} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix}$$

Endomorfien $\ell_G$ er altså højremultiplikation med den transponerede $\gamma^T$ af den til $G$ hørende matrix

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\Lambda),$$

i overensstemmelse med resultatet i 5.3.

5.10. DEFINITION. Som nævnt kan kommutanten $C = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ for en $\Lambda$-modul $M$ opfattes som kommutanten for delringen $\Lambda_M \subseteq \mathrm{End}(M)$:

$$\Lambda_M^{c} = \mathrm{End}_\Lambda(M).$$

Bikommutanten for $\Lambda_M \subseteq \mathrm{End}(M)$, altså $\Lambda_M^{cc}$, er kommutantens kommutant. Den kaldes også **bikommutanten for $\Lambda$-modulen $M$**. Vi har

$$\Lambda_M \subseteq \Lambda_M^{cc}$$

5.11. Da vi har $C = \mathrm{End}_\Lambda(M) \hookrightarrow \mathrm{End}(M)$, kan vi opfatte $M$ som modul over $C$. Vi har $C_M = C$, og bikommutanten for $\Lambda$-modulen $M$ er altså $\Lambda_M^{cc} = C_M^{c} = \mathrm{End}_C(M)$. Altså

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{End}(M) & \\
\Lambda_M^{c} = C = \mathrm{End}_\Lambda(M) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathrm{End}_C(M) = C_M^{c} = \Lambda_M^{cc} \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \\
 & & \Lambda_M \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

5.12. DEFINITION. $\Lambda$-modulen $M$ siges at have **triviel bikommutant**, hvis $\Lambda_M = \Lambda_M^{cc}$. Idet $C = \mathrm{End}_\Lambda(M)$ er kommutanten, betyder dette, at enhver $C$-lineær endomorfi $: M \to M$ er en homoteti med et $\lambda \in \Lambda$, altså at afbildningen $\lambda \mapsto \lambda_M$ er surjektiv

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}_C(M).$$

5.13. Eksempler ① $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ har triviel bikommutant, thi kommutanten består af afbildningerne

$$r_\gamma : x \longmapsto x\gamma\,, \quad \text{hvor } \gamma \in \Lambda,$$

og bikommutanten består tilsvarende af afbildningerne

$$l_\lambda : x \longmapsto \lambda x\,, \quad \text{hvor } \lambda \in \Lambda,$$

altså af homotetierne i $\Lambda_s$.

② $\Lambda$-modulen $\Lambda_s^n$ har triviel bikommutant, thi af sætning 5.3 følger, at kommutanten består af afbildningerne

$$r_\gamma : x \longmapsto x\gamma, \quad \text{med } \gamma \in Mat_n(\Lambda),$$

og af sætning 5.7 følger nu, at bikommutanten består af afbildningerne

$$l_\lambda : x \longmapsto \lambda x,$$

altså af homotetierne i $\Lambda_s^n$.

③ $\Gamma$-modulen $\Lambda^n$ (hvor $\Gamma = Mat_n(\Lambda)$) har triviel bikommutant, thi af sætning 5.5 følger, at kommutanten består af afbildningerne

$$r_\lambda : x \longmapsto x\lambda, \quad \text{med } \lambda \in \Lambda$$

og af sætning 5.4 følger nu, at bikommutanten består af afbildningerne

$$l_\gamma : x \longmapsto \gamma x,$$

altså af homotetierne i $\Gamma$-modulen $\Lambda^n$.

5.14. En $\Lambda$-modul kan specielt opfattes som $\mathbb{Z}$-modul. Af overvejelserne i 5.8 følger at vi også for de additive homomorfier i en $\Lambda$-modul $M = L^n$ får en beskrivelse ved matricer, med elementer i $End(L)$.

$m \geq 1$

SÆTNING. For en $\Lambda$-modul $M = L^m$ gælder, at afbildningen

$$\varphi \longmapsto \begin{pmatrix}\varphi & & 0\\ & \varphi & \\ 0 & & \varphi\end{pmatrix}$$

er en injektiv afbildning $\mathrm{End}(L) \hookrightarrow \mathrm{End}(L^m)$. Denne afbildning definerer isomorfier

$$\{\text{homotetier i } L\} \xrightarrow{\sim} \{\text{homotetier i } L^m\}$$

$$\text{Bikommutant for } L \xrightarrow{\sim} \text{Bikommutant for } L^m.$$

Specielt har $L$ triviel bikommutant, hvis og kun hvis $L^m$ har triviel bikommutant.

Bevis. Det er klart, at afbildningen $\varphi \mapsto \begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}$ er injektiv, og udsagnet om homotetierne er ligeledes klart. En $\Lambda$-endomorfi $\quad : M \to M$ kan beskrives ved en matrix $\underline{\underline{f}} = (f_{\nu\mu})$.
Hvis $\varphi \in$ kommutanten for $\mathrm{End}_\Lambda(L)$, hvis altså $\varphi g = g\varphi$ for alle $g \in \mathrm{End}_\Lambda(L)$, så gælder øjensynlig

$$\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{f}}\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}$$

for alle $\underline{\underline{f}} \in \mathrm{Mat}_m(\mathrm{End}_\Lambda(L))$, så vi slutter, at $\begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}$ kommuterer med alle endomorfier i $\mathrm{End}_\Lambda(L^m)$.

Omvendt, hvis $\psi \in \mathrm{End}(L^m)$ kommuterer med alle endomorfier i $\mathrm{End}_\Lambda(L^m)$, så kan $\psi$ beskrives ved en matrix $\underline{\underline{\psi}} = (\psi_{\nu\mu})$ og vi har

$$\underline{\underline{\psi}}\,(g_{\nu\mu}) = (g_{\nu\mu})\,\underline{\underline{\psi}}$$

for enhver matrix $G = (g_{\nu\mu})$ med $g_{\nu\mu} \in \mathrm{End}_\Lambda(L)$.

Specielt skal $\underline{\underline{\psi}}$ kommutere med matricerne

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \leftarrow \alpha \quad ,$$

$$\uparrow$$

$$\beta$$

der har $1_L$ på plads $\alpha,\beta$ og 0 på de øvrige pladser. Udregner vi $\Psi G^{\alpha\beta}$ og $G^{\alpha\beta}\Psi$ og sammenligner, slutter vi, at $\Psi$ må have formen

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi \end{pmatrix}$$

Da $\Psi$ også skal kommutere med matricerne $\begin{pmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, hvor $f \in \mathrm{End}_\Lambda(L)$, må vi have $\varphi f = f \varphi$ for $f \in \mathrm{End}_\Lambda(L)$, og ser, at $\varphi$ tilhører bikommutanten for $L$ som ønsket.

Sætningens sidste påstand følger af de to isomorfier. ▨

5.15. Som nævnt i Eksempel 5.13① har $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ oplagt en triviel bikommutant. Af sætningen følger derfor resultatet fra eksempel 5.13②, at $\Lambda$-modulen $\Lambda_s^n$ har triviel bikommutant.
Tilsvarende får højre-modulen $M = \Lambda_d^n$ en triviel bikommutant, d.v.s. vi har

$$\Lambda_M = \Lambda_M^{cc}$$

I sætning 5.4 beskrev vi kommutanten for $M$: Opfatter vi $M = \Lambda^n$ som modul over $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$ fandt vi

$$\Lambda_M^{c} = \Gamma_M .$$

Det følger nu, at vi har $\Gamma_M^{cc} = \Lambda_M^{ccc} = \Lambda_M^{c} = \Gamma_M$, så vi genfinder resultatet fra eksempel 5.13③, at $\Lambda^n$ som modul over $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$ har triviel bikommutant.

## 6. Simpel modul. Schurs lemma.

6.1. DEFINITION. En $\Lambda$-modul $S$, der har præcis to undermoduler, kaldes en *simpel* modul. De to undermoduler må være de trivielle, $(0)$ og $S$. Bemærk, at nulmodulen $0$, der kun har én undermodul, ikke er simpel.

6.2. SÆTNING. *Modulen $\Lambda_s$ er en simpel $\Lambda$-modul, hvis og kun hvis $\Lambda$ er et skævlegeme.* □

6.3. SÆTNING. *Lad $S$ og $T$ være $\Lambda$-moduler, og lad $f: S \to T$ være en $\Lambda$-homomorfi forskellig fra 0-afbildningen.*

*Hvis $S$ er simpel, er $f$ injektiv.*
*Hvis $T$ er simpel, er $f$ surjektiv.*
*Hvis $S$ og $T$ er simple, er $f$ isomorfi.*

Bevis. $\operatorname{Ker} f$ (resp. $\operatorname{Im} f$) er en undermodul i $S$ (resp. $T$). Da $f$ ikke er 0-afbildningen, har vi

$$(0) \subseteq \operatorname{Ker} f \subset S \quad \text{og} \quad (0) \subset \operatorname{Im} f \subseteq T$$

Hvis $S$ er simpel, må vi have $(0) = \operatorname{Ker} f$, og $f$ er injektiv. Hvis $T$ er simpel, må vi have $\operatorname{Im} f = T$, og $f$ er surjektiv. ▨

6.4. Som korollar får vi

SCHUR'S LEMMA. *Kommutanten $\operatorname{End}_\Lambda(S)$ for en simpel $\Lambda$-modul $S$ er et skævlegeme.*

Thi $f: S \to S$ er en isomorfi, hvis og kun hvis $f$ er invertibel i $\operatorname{End}_\Lambda(S)$. ▨

6.5. DEFINITION. Et venstreideal $\mathfrak{m}$ i ringen $\Lambda$ kaldes et *maksimalt venstreideal*, hvis det er maksimalt blandt venstreidealer $\subset \Lambda$. Dette betyder altså, at $\mathfrak{m} \subset \Lambda$, og at der for venstreidealer $\mathfrak{a}$ i $\Lambda$ gælder

$$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \subset \Lambda \Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{a}.$$

Venstreidealerne i $\Lambda$ er undermodulerne i $\Lambda_s$. Af noethers 2. isomorfisætning følger, at vi har en bijektiv forbindelse

$$\{\text{venstreidealer } \mathfrak{a} \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \Lambda\} \leftrightarrow \{\text{undermoduler i } \Lambda_s/\mathfrak{m}\},$$

så vi ser:

$\mathfrak{m}$ er et maksimalt venstreideal $\Leftrightarrow$ $\Lambda_s/\mathfrak{m}$ er en simpel $\Lambda$-modul.

SÆTNING. *De simple $\Lambda$-moduler er modulerne isomorfe med en kvotient $\Lambda_s/\mathfrak{m}$, hvor $\mathfrak{m} \subset \Lambda$ er et maksimalt venstreideal. Specielt er enhver simpel $\Lambda$-modul cyklisk.*

**Bevis.** Lad $S$ være en simpel $\Lambda$-modul og vælg et element $x \neq 0$ i $S$. Ved $\lambda \mapsto \lambda x$ defineres da en $\Lambda$-homomorfi $\Lambda_s \to S$, hvis kerne $\mathfrak{m}$ er et venstreideal i $\Lambda$, og hvis billede $\Lambda x$ er en undermodul $\neq 0$ i $S$. Da $S$ var simpel, må vi have $\Lambda x = S$, og vi får derfor en isomorfi

$$\Lambda_s/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} S. \quad ▨$$

6.6. Hvis ringen $\Lambda$ er kommutativ, er maksimalt venstreideal det samme som et maksimalideal.

F. eks. er de simple $\mathbb{Z}$-moduler modulerne $\mathbb{Z}(p)$, $p$ primtal. Kommutanten er $\mathbb{Z}/p = \mathbb{F}_p$.

De simple $\mathbb{C}[X]$-moduler er modulerne $S_\lambda = \mathbb{C}[X]/(X-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Bemærk, at $S_\lambda = \mathbb{C}$, som vektorrum over $\mathbb{C}$, og at multiplikationen er givet

$Xv = \lambda v$ Kommutanten er $\mathbb{C}$.

De simple $\mathbb{R}[X]$ moduler er modulerne $S_\lambda = \mathbb{R}[X]/(X-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, samt modulerne $S_{\alpha,\beta} = \mathbb{R}[X]/(X^2-2\alpha X+\alpha^2+\beta^2)$ hvor $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta>0$.

Bemærk, at $S_\lambda = \mathbb{R}$ som vektorrum over $\mathbb{R}$, med multiplikation givet ved

$$Xv = \lambda v,$$

og at $S_{\alpha,\beta} \simeq \mathbb{R}^2$ som vektorrum over $\mathbb{R}$ [i basen bestemt ved $\boxed{X-\alpha}$, $\boxed{\beta}$ er multiplikationen givet ved

$$X\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}.$$

Kommutanten for $S_\lambda$ er $\mathbb{R}$, kommutanten for $S_{\alpha,\beta}$ er $\simeq \mathbb{C}$.

6.7. SÆTNING. Lad

$$\Gamma = \mathrm{Mat}_n(D)$$

være en matrixring med koefficienter i et skævlegeme $D$, og betragt $S = D^n$ som modul over $\Gamma$. Da gælder

① $S$ er en simpel $\Gamma$-modul, og der findes en $\Gamma$-isomorfi : $\Gamma_s \xrightarrow{\sim} S^n = S\oplus\cdots\oplus S$.

② Kommutanten $C = \mathrm{End}_\Gamma(S)$ er et skævlegeme, og som modul over $C$ har $S$ en fri basis med $n$ elementer ($\supset$: $S$ har som vektorrum over $C$ dimensionen $n$).

③ Afbildningen $\gamma \mapsto \gamma_S$ bestemt ved homotetierne er en isomorfi

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_C(S).$$

Bevis. Idet $C$ er kommutanten, er $\mathrm{End}_C(S)$ altså bikommutanten. Isomorfien i ③ følger derfor af de generelle overvejelser i eksempel 5.13 ③. Kommutanten $C$ for

Γ-modulen $S$ består af afbildningerne

$$r_\lambda : x \longmapsto x\lambda, \quad \text{med } \lambda \in D;$$

vi har $C \simeq D^{op}$, jfr. sætning 5.5. Det er klart, at elementerne $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ i $S$ er en fri basis for $S$ som modul over $C$. Videre er $C \simeq D^{op}$ et skævlegeme, da $D$ er et skævlegeme, så hermed er ② vist.

For at vise, at $S$ er en simpel Γ-modul, skal vi vise, at der for hvert $x \neq 0$ i $S$ gælder $\Gamma x = S$, altså at der for hvert $y \in S$ findes $\gamma \in \Gamma$, så at

$$\gamma x = y.$$

Ifølge ③ skal vi altså vise, at der for hvert $y$ i $S$ findes en $C$-endomorfi $f \in End_C(S)$, så at

$$f(x) = y.$$

Hvis $D$ (og dermed $C$) er kommutativ, altså $C$ et legeme, er dette klart, thi vektoren $x \neq 0$ i det endeligdimensionale vektorrum $S$ over $C$ kan suppleres til en basis for $S$. På denne $C$-basis for $S$ kan vi foreskrive værdierne for en $C$-lineær afbildning $f: S \to S$; specielt kan vi foreskrive værdien $y = f(x)$.
Som vi senere viser, kan denne suppleringsegenskab overføres til vektorrum over skævlegeme.
Endelig er isomorfien $\Gamma_S \xrightarrow{\sim} S^n$ afbildningen, der til en matrix $\gamma$ lader svare sættet af søjler $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Det er klart en Γ-isomorfi, hvormed ① er vist ▨

6.8. Af hensyn til en senere anvendelse viser vi:

SÆTNING. Lad

$$\Gamma = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}(D_p)$$

være et produkt af matrixringe med koefficienter i skævlegemer $D_1, \dots, D_p$, og betragt $S_i = D_i^{n_i}$ som modul over $\Gamma$ [For $x \in S_i$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ er produktet $\gamma x$ defineret ved $\gamma x = \gamma_i x$], $i = 1, \dots, p$. Da gælder

① $S_1, \dots, S_p$ er simple $\Gamma$-moduler, og der findes en $\Gamma$-isomorfi: $\Gamma_s \xrightarrow{\sim} S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_p^{n_p}$.

② Kommutanten $C_i = \mathrm{End}_\Gamma(S_i)$, $i = 1, \dots, p$ er et skævlegeme, og $S_i$ har som vektorrum over $C_i$ dimensionen $n_i$.

③ Afbildningen $\gamma \mapsto (\gamma_{S_1}, \dots, \gamma_{S_p})$ bestemt ved homotetierne er en isomorfi:

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{C_1}(S_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_{C_p}(S_p).$$

Bevis. Følger let af den foregående sætning □

1. Endeligt frembragte moduler. 1.1: Endeligt frembragt modul. 1.2: Modulen $\Lambda_s$. Kvotient af endeligt frembragt modul. 1.3: Sætning. 1.4: Sætning. 1.5: Sætning.

2. Jordan-Hölder moduler. 2.1: Kæder i en modul. 2.2: Eksempler. 2.3: Jordan's sætning. 2.4: Hölder's sætning. Schreiers forfiningssætning. 2.5: Jordan-Hölder modul. 2.6: Korollar. 2.7-2.10: Sætning med korollarer. 2.11: Sætning. 2.12: Ring af endelig længde. 2.13: Eksempler. 2.14: Eksempel 2.15: Sætning. 2.16: Dimension af vektorrum. 2.17: $D^n$ som simpel $Mat_n(D)$-modul.

3. Semisimple moduler og ringe. 3.1: Komplement. Direkte summand. 3.2: Semisimpel modul. 3.3: Eksempler. 3.4: Undermodul og kvotientmodul. 3.5-3.6: Semisimpel er sum af simple. 3.7: Suppleringssætning. 3.8-3.9: Hovedsætning om semisimple moduler. 3.10: Vektorrum. Diagonaliserbare endomorfier over $\mathbb{C}$. 3.11: Sætning. 3.12: Sætning. 3.13: Semisimpel ring. Simple typer. 3.14: Hovedsætning om simple ringe. 3.15: Wedderburn's sætning. 3.16. Hovedsætning for semisimple ringe. 3.17: Sætning.

# ENDELIGHEDSBETINGELSER FOR MODULER OG RINGE

## 1. Endeligt frembragte moduler

1.1. DEFINITION. En $\Lambda$-modul $M$, i hvilken der findes et endeligt frembringersystem, siges at være <u>endeligt frembragt.</u> Dette betyder altså, at der findes endelig mange elementer $e_1,\dots,e_n \in M$ således at hvert element $x \in M$ har en fremstilling

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n. \qquad \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda$$

1.2. $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ er endeligt frembragt, idet $1 \in \Lambda$ er en frembringer. Enhver cykliske $\Lambda$-modul er endeligt frembragt, nemlig frembragt af ét element.

SÆTNING. <u>En kvotient $M/N$ af en endeligt frembragt $\Lambda$-modul $M$ er ligeledes endeligt frembragt,</u> thi hvis $e_1,\dots,e_n$ er et frembringersystem for $M$, vil $\textcircled{e_1},\dots,\textcircled{e_n}$ være et frembringersystem for $M/N$ ▨

Derimod vil en undermodul $N$ af en endelig frembragt modul $M$ i almindelighed ikke være endeligt frembragt: Er f.eks. $\Lambda = C^0[0,1]$ ringen af kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, vil de funktioner $f \in \Lambda$, der opfylder $f(0) = 0$, udgøre et ideal i $\Lambda$, altså en undermodul i $\Lambda_s$, og denne undermodul er ikke endeligt frembragt.

1. Endeligt frembragte moduler. 1.1: Endeligt frembragt modul. 1.2: Modulen $\Lambda_s$. Kvotient af endeligt frembragt modul. 1.3: Sætning. 1.4: Sætning. 1.5: Sætning.

2. Jordan-Hölder moduler. 2.1: Kæder i en modul. 2.2: Eksempler. 2.3: Jordan's sætning. 2.4: Hölder's sætning. Schreiers forfiningssætning. 2.5: Jordan-Hölder modul. 2.6: Korollar. 2.7-2.10: Sætning med korollarer. 2.11: Sætning. 2.12: Ring af endelig længde. 2.13: Eksempler. 2.14: Eksempel 2.15: Sætning. 2.16: Dimension af vektorrum. 2.17: $D^n$ som simpel $\mathrm{Mat}_n(D)$-modul.

3. Semisimple moduler og ringe. 3.1: Komplement. Direkte summand. 3.2: Semisimpel modul. 3.3: Eksempler. 3.4: Undermodul og kvotientmodul. 3.5-3.6: Semisimpel er sum af simple. 3.7: Suppleringssætning. 3.8-3.9: Hovedsætning om semisimple moduler. 3.10: Vektorrum. Diagonaliserbare endomorfier over $\mathbb{C}$. 3.11: Sætning. 3.12: Sætning. 3.13: Semisimpel ring. Simple typer. 3.14: Hovedsætning om simple ringe. 3.15: Wedderburn's sætning. 3.16. Hovedsætning for semisimple ringe. 3.17: Sætning.

1.3. SÆTNING. Lad $N$ være en undermodul i $M$. Hvis undermodulen $N$ og kvotientmodulen $M/N$ er endeligt frembragte, så er $M$ endeligt frembragt.

Bevis. Hvis $e_1,\dots,e_n \in N$ er et frembringersystem for $N$ og $\textcircled{$f_1$},\dots,\textcircled{$f_p$} \in M/N$ er et frembringersystem for $M/N$, så er $e_1,\dots,e_n, f_1,\dots,f_p$ et frembringersystem for $M$. Er nemlig $x \in M$, findes en fremstilling

$$\textcircled{$x$} = \lambda_1 \textcircled{$f_1$} + \dots + \lambda_p \textcircled{$f_p$}, \qquad \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \Lambda$$

Dette betyder, at $\textcircled{$x$} = \textcircled{$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$}$, altså at $x - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p) \in N$, men så findes en fremstilling

$$x - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p) = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n, \quad \mu_1,\dots,\mu_n \in \Lambda,$$

og heraf får vi den ønskede fremstilling af $x$ ▨

1.4. SÆTNING. En direkte sum $M = \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$ af $\Lambda$-moduler $N_\nu \neq (0)$ er endeligt frembragt, hvis og kun hvis indexmængden $I$ er endelig og hver af modulerne $N_\nu$ er endeligt frembragte.

Bevis. V.hj.a. injektionerne $i_\nu : N_\nu \to M$ kan vi opfatte modulerne $N_\nu$ som undermoduler i $M$. Hvert element $x \in M$ kan entydigt skrives som en endelig sum

$$x = \sum_{\nu\in I} x_\nu, \quad x_\nu \in N_\nu, \quad x_\nu \neq 0 \text{ kun for endelig mange } \nu \in I.$$

"hvis" For hvert af de endelig mange $\nu$'er findes et endeligt frembringersystem $e_{\nu 1},\dots,e_{\nu n_\nu}$ for $N_\nu$. De endelig mange elementer $e_{\nu k} \in M$, $\nu \in I$, $k = 1,\dots,n_\nu$ vil så være et frembringersystem for $M$.

"kun hvis". Lad $e^{(1)},\dots,e^{(n)}$ være et frembringersystem for $M$. For hvert $k = 1, \dots, n$ har vi

$$e^{(k)} = \sum_{\nu \in I} e^{(k)}_{\nu}, \qquad e^{(k)}_{\nu} \in N_{\nu},$$

med $e^{(k)}_{\nu} = 0$ bortset fra endelig mange $\nu$'er. Da der kun er endelig mange $k$'er slutter vi, at der findes en endelig delmængde $J \subseteq I$, således at

$$e^{(k)}_{\nu} = 0, \qquad k = 1, \dots, n, \qquad \nu \in I \setminus J.$$

For et vilkårligt element $x \in M$ har vi en fremstilling

$$x = \lambda^{(1)} e^{(1)} + \dots + \lambda^{(n)} e^{(n)} = \sum_{\nu \in I} \left( \lambda^{(1)} e^{(1)}_{\nu} + \dots + \lambda^{(n)} e^{(n)}_{\nu} \right),$$

og vi har følgelig $x_{\nu} = \lambda^{(1)} e^{(1)}_{\nu} + \dots + \lambda^{(n)} e^{(n)}_{\nu}$, $\nu \in I$, og specielt

$$x_{\nu} = 0 \quad \text{for} \quad \nu \in I \setminus J.$$

Heraf følger imidlertid, da $N_{\nu} \neq (0)$ for alle $\nu$, at $I \setminus J = \emptyset$, og dermed, at $I = J$ er endelig.

At hver af modulerne $N_{\nu}$ er endeligt frembragt, følger af at $N_{\nu}$ er isomorf med en kvotientmodul af $M$. (via projektionen $p_{\nu} : M \to N_{\nu}$) ▨

1.5. SÆTNING. *Enhver endeligt frembragt $\Lambda$-modul $M \neq (0)$ har en simpel kvotient.*

Ifølge Noethers anden isomorfisætning svarer undermodulerne i en kvotient $M/N_0$ til undermoduler $N$, således at $N_0 \subseteq N \subseteq M$. At en kvotient $M/N_0$ er simpel betyder altså at $N_0 \subset M$ og at der for enhver undermodul $N$ gælder

$$N_0 \subseteq N \subset M \Rightarrow N_0 = N.$$

En undermodul $N_0$ i $M$ med denne egenskab kaldes også en *maksimal undermodul*. Det skal altså vises, at en endeligt frembragt $\Lambda$-modul $M \neq (0)$

har en maksimal undermodul. Vi vil *ikke* bevise denne påstand, men kun anføre et argument. Et korrekt bevis bygger på udvalgsaksiomet (Zorns lemma).

*Argument:* Da $M \neq (0)$ findes en undermodul $N_1$ i $M$ således at $N_1 \subset M$. Hvis $N_1$ er maksimal, er vi færdige. Ellers findes en undermodul $N_2$, så at $N_1 \subset N_2 \subset M$. Hvis $N_2$ er maksimal, er vi færdige. Ellers findes $N_3$, så at $N_2 \subset N_3 \subset M$. Hvis denne proces ikke stopper, har vi undermoduler

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots \subset M.$$

Vi sætter $N_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$. Det er let at se, at $N_\omega$ er en undermodul i $M$, og der gælder endda $N_\omega \subset M$, thi ellers ville de endelig mange frembringere for $M$ tilhøre $N_\omega$. Hver frembringer ville derfor tilhøre et $N_i$, og da der kun er endelig mange frembringere, ville de endda *alle* tilhøre et $N_i$ ("det største $i$"). At alle frembringerne tilhører $N_i$ ville imidlertid medføre, at $N_i = M$, hvad der ikke var tilfældet.

Vi kan nu fortsætte processen: Hvis $N_\omega$ er maksimal er vi færdige. Ellers findes $N_{\omega+1}$, så at $N_\omega \subset N_{\omega+1} \subset M$. O.s.v. At en proces som denne altid vil stoppe (eventuelt efter *mere* end numerabelt mange skridt), kan vises at være en konsekvens af udvalgsaksiomet. Når processen stopper, har vi opnået en maksimal undermodul.

## 2. Jordan-Hölder moduler.

2.1. DEFINITION. Lad M være en Λ-modul. En endelig følge $(M_\nu)_{\nu=0,\dots,n}$ af undermoduler i M, således at

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$$

kaldes en **kæde** i M. Tallet n kaldes **kædens længde**. Kvotientmodulerne $M_{\nu+1}/M_\nu$, $\nu = 0, \dots, n-1$ kaldes **kædens kvotienter** (eller **faktorer**). Antallet af kvotienter er altså kædens længde. En kæde siges at have **gentagelser**, hvis der for et $\nu$ gælder $M_\nu = M_{\nu+1}$. Dette er ensbetydende med at der for den tilsvarende kvotient gælder $M_{\nu+1}/M_\nu = (0)$.

En kæde $(N_\nu)_{\nu=0,\dots,n}$ i M siges at være en **forfining** af kæden $(M_\mu)_{\mu=0,\dots,m}$ i M, hvis der findes $0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_m \leq n$, således at

$$N_{\nu_i} = M_i \quad , \quad i = 0, \dots, m.$$

Dette betyder, at vi kan tænke på kæden $(N_\nu)$ som fremkommet ud fra kæden $(M_\mu)$ ved at der mellem $M_\mu$ og $M_{\mu+1}$ er indskudt visse N'er:

$$(M_\mu =) N_{\nu_\mu} \subseteq N_{\nu_\mu+1} \subseteq N_{\nu_\mu+2} \subseteq \cdots \subseteq N_{\nu_{\mu+1}} (= M_{\mu+1})$$

En kæde $(M_\mu)_{\mu=0,\dots,m}$ kan **trivielt forfines** ved at gentage visse af $M_\mu$'erne.

En kæde $(M_\mu)$, hvori alle kvotienterne er simple moduler kaldes en **Jordan-Hölder kæde** i M. Undermodulerne i en kvotient $M_{\mu+1}/M_\mu$ svarer til undermoduler N, så at $M_\mu \subseteq N \subseteq M_{\mu+1}$. Det følger heraf, at en kæde $(M_\mu)$ i M er en Jordan-Hölderkæde, hvis og kun hvis den er uden gentagelser og kun trivielt kan forfines.

2.2. Eksempler. En kæde i et vektorrum $V$ over et legeme $L$ er en følge af underrum

$$(0) = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V.$$

De simple $L$-moduler er modulerne isomorfe med $L_s$, altså de 1-dimensionale vektorrum. At kæden er en Jordan-Hölder kæde betyder altså at $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2/V_1 = 1, \ldots, \dim V_n/V_{n-1} = 1$, hvilket ifølge dimensionsformlen er ensbetydende med at

$$\dim V_1 = 1,\ \dim V_2 = 2,\ \ldots,\ \dim V_n = n.$$

Der findes således kun Jordan-Hölderkæder i endeligdimensionale vektorrum, og alle Jordan-Hölderkæder i et sådant vektorrum $V$ har den samme længde, nemlig $\dim V$.

En $\mathbb{Z}$-modul er blot en kommutativ gruppe $M$, og en kæde i $M$ er en følge af undergrupper

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M.$$

De simple $\mathbb{Z}$-moduler er grupper, hvis orden er et primtal $p$ (nødvendigvis isomorfe med $\mathbb{Z}/p$). At kæden er en Jordan-Hölder kæde betyder altså, at index

$$|M_1|,\ |M_2 : M_1|,\ \ldots,\ |M_n : M|$$

alle er primtal. Ifølge indexsætningen (Lagrange's formel) er $|M_2| = |M_2 : M_1|\,|M_1|$, $|M_3| = |M_3 : M_2|\,|M_2| = |M_3 : M_2|\,|M_2 : M_1|\,|M_1|$, $\ldots$, $|M| = |M_n| = |M_n : M_{n-1}| \cdots |M_2 : M_1|\,|M_1|$.

Hvis $(M_\mu)$ er en Jordan-Hölderkæde i $M$, er

$$|M| = |M_n : M_{n-1}| \cdots |M_2 : M_1|\,|M_1|$$

en primopløsning af $|M|$. Specielt er altså $M$ en endelig gruppe, og $n$ er antallet af primfaktorer i $|M|$.

Kæden

$$(0) \subseteq 12\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$

i $\mathbb{Z}$ er ikke en Jordan-Hölderkæde. Dens kvotienter er (på isomorfi nær) : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/6$.

2.3. I analogi med de foregående eksempler gælder for moduler over en vilkårlig ring
JORDAN'S SÆTNING. *To vilkårlige Jordan-Hölderkæder i en $\Lambda$-modul $M$ har samme længde.*
Denne sætning er en følge af Hölders sætning, som vi nu formulerer.

2.4. DEFINITION. To kæder $(M_\mu)_{\mu=0,\dots,m}$ og $(N_\nu)_{\nu=0,\dots,n}$ i $\Lambda$-modulen $M$ kaldes *ækvivalente*, hvis de (på nær isomorfi og permutation) har de samme kvotienter. Dette betyder altså, at $m = n$ og at der findes en permutation $i: \{0,\dots,m-1\} \longrightarrow \{0,\dots,m-1\}$, således at $M_{\mu+1}/M_\mu$ er isomorf med $N_{i_\mu+1}/N_{i_\mu}$. To ækvivalente kæder i $M$ har specielt samme længde.

HÖLDER'S SÆTNING. *To vilkårlige Jordan-Hölderkæder i en $\Lambda$-modul $M$ er ækvivalente.*
Denne sætning følger af

SCHREIERS FORFININGSSÆTNING. *To vilkårlige kæder i en $\Lambda$-modul $M$ har ækvivalente forfininger.*
Det er klart, at forfiningssætningen medfører Hölders sætning, idet en Jordan-Hölderkæde kun har trivielle forfininger.
Bevis for forfiningssætningen. Lad de to kæder i $M$ være $(M_\mu)_{\mu=0,\dots,m}$ og $(N_\nu)_{\nu=0,\dots,n}$. Ved hjælp af kæden $(N_\nu)$ indskyder vi nu mellem $M_\mu$ og $M_{\mu+1}$ en hel række undermoduler og vi får herved en for-

fining af kæden $(M_\mu)$: Vi sætter

$$M_{\mu\nu} = (M_{\mu+1} \cap N_\nu) + M_\mu\,, \quad \mu = 0, \dots, m-1;\ \nu = 0, \dots, n.$$

Vi har $M_\mu = M_{\mu 0} \subseteq M_{\mu 1} \subseteq \dots \subseteq M_{\mu, n-1} \subseteq M_{\mu n} = M_{\mu+1}$; Af kæden $(M_\mu)$ får vi således en forfining

$$(0) = M_0 \subseteq M_{01} \subseteq \dots \subseteq M_{0,n-1} \subseteq M_1 \subseteq M_{11} \subseteq \dots \subseteq \dots \subseteq M_{m-1,n-1} \subseteq M_m.$$

Denne kæde har længden $mn$ og dens kvotienter er

$$M_{\mu,\nu+1} / M_{\mu,\nu}\,, \quad \mu = 0, \dots, m-1;\ \nu = 0, \dots, n-1.$$

Tilsvarende sætter vi

$$N_{\nu\mu} = (M_\mu \cap N_{\nu+1}) + N_\nu\,,$$

og vi får en forfining af kæden $(N_\nu)$, af længden $nm$ og med kvotienterne

$$N_{\nu,\mu+1} / N_{\nu,\mu}\,, \quad \nu = 0, \dots, n-1;\ \mu = 0, \dots, m-1.$$

For at vise, at de to forfininger er ækvivalente, viser vi, at der for alle $\nu, \mu$ gælder

$$M_{\mu,\nu+1} / M_{\mu,\nu} \approx N_{\nu,\mu+1} / N_{\nu,\mu}$$

altså

$$\frac{(M_{\mu+1} \cap N_{\nu+1}) + M_\mu}{(M_{\mu+1} \cap N_\nu) + M_\mu} \simeq \frac{(M_{\mu+1} \cap N_{\nu+1}) + N_\nu}{(M_\mu \cap N_{\nu+1}) + N_\nu}$$

Denne påstand involverer de fire undermoduler $M_\mu \subseteq M_{\mu+1}$ og $N_\nu \subseteq N_{\nu+1}$. Påstanden kaldes

ZASSENHAUS' LEMMA. *Lad der i $\Lambda$-modulen $M$ være givet fire undermoduler $M' \subseteq M''$ og $N' \subseteq N''$. Da findes en isomorfi*

$$\underline{\frac{(M'' \cap N'') + M'}{(M'' \cap N') + M'} \simeq \frac{(M'' \cap N'') + N'}{(M' \cap N'') + N'}.}$$

Bevis for lemmaet. Ved sammensætning får vi en homomorfi

$$M''\cap N'' \hookrightarrow (M''\cap N'')+M' \longrightarrow \frac{(M''\cap N'')+M'}{(M''\cap N')+M'}.$$

Denne homomorfi er klart surjektiv, og dens kerne er
$(M''\cap N'')\cap[(M''\cap N')+M'] = (M''\cap N')+(M'\cap N'')$.
Vi får derfor en isomorfi

$$\frac{M''\cap N''}{(M''\cap N')+(M'\cap N'')} \xrightarrow{\sim} \frac{(M''\cap N'')+M'}{(M''\cap N')+M'}$$

Påstanden fås nu ved at ombytte M'erne med N'erne ▨

Hermed er beviset for sætningerne fuldført.

2.5. En $\Lambda$-modul $M$, i hvilken der findes en Jordan-Hölderkæde, kaldes en *Jordan-Hölder modul* eller en modul af *endelig længde*. ***Længden*** af en sådan modul $M$ kan ifølge Jordans sætning defineres som længden af en vilkårlig Jordan-Hölderkæde i $M$. Denne længde betegnes long$(M)$.

Nul-modulen har længde 0. Den eneste kæde uden gentagelser er $M_0=(0)$. Modulerne af længde 1 er de simple $\Lambda$-moduler.

2.6. En simpel anvendelse af forfiningssætningen giver følgende

KOROLLAR. *I en Jordan-Hölder modul $M$ kan enhver kæde uden gentagelser forfines til en Jordan-Hölder kæde* ☐

Specielt har enhver kæde uden gentagelser en længde $\leq$ long $M$.

2.7 SÆTNING. *Lad N være en undermodul i Λ-modulen M. M er da en Jordan-Hölder modul, hvis og kun hvis både N og M/N er Jordan-Hölder moduler. Er dette tilfældet, gælder*

$$\operatorname{long} M = \operatorname{long} N + \operatorname{long} M/N.$$

Bevis. I følge Noethers anden isomorfisætning er der en entydig forbindelse mellem kæder i M/N og følger

$$(*) \quad N = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M,$$

endda på en sådan måde, at kvotienterne for kæden i M/N er isomorfe med kvotienterne $M_{\mu+1}/M_\mu$. Jordan-Hölder kæder i M/N svarer altså til følger (*), der er uden gentagelser, og som kun trivielt kan forfines.

"hvis", så findes en Jordan-Hölder kæde

$$(0) = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = N$$

i undermodulen N, og en Jordan-Hölderkæde i M/N svarende til en følge

$$N = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$$

med simple kvotienter. Vi får nu i M en Jordan-Hölder kæde

$$(0) = N_0 \subset \cdots \subset N_{n-1} \subset N \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M.$$

(og vi ser, at dens længde er $n+m$).

"kun hvis". Vi kan antage, at $(0) \subset N \subset M$. Hvis M er en Jordan-Hölder modul, kan kæden $(0) \subset N \subset M$ forfines til en Jordan-Hölder kæde:

$$(0) = N_0 \subset \cdots \subset N_{n-1} \subset N \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M.$$

Her er $(0) = N_0 \subset \cdots \subset N_{n-1} \subset N$ en Jordan-Hölderkæde i N og af følgen $N \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$ får vi som nævnt en Jordan-Hölderkæde i M/N. ▨

**2.8. KOROLLAR.** *Lad der i modulen M være givet en kæde*

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

*med kvotienterne* $Q_\nu = M_\nu / M_{\nu-1}$, $\nu = 1, \dots, n$. *Da er M en Jordan-Höldermodul, hvis og kun hvis alle kvotienterne* $Q_\nu$ *er Jordan-Höldermoduler. Er dette tilfældet, gælder*

$$\operatorname{long} M = \operatorname{long} Q_1 + \cdots + \operatorname{long} Q_n .$$

fölger af sætningen ved induktion. ▨

**2.9. KOROLLAR** *Lad der være givet en direkte sum* $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. *Da er M en Jordan-Hölder modul, hvis og kun hvis hver af modulerne* $N_\nu$ *er Jordan-Höldermoduler. Er dette tilfældet, gælder*

$$\operatorname{long} N_1 \oplus \cdots \oplus N_n = \operatorname{long} N_1 + \cdots + \operatorname{long} N_n ,$$

thi i M har vi kæden

$$(0) \subseteq N_1 \subseteq N_1 \oplus N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_1 \oplus \cdots \oplus N_n = M$$ ▨

**2.10. KOROLLAR.** *Lad* $N_1$ *og* $N_2$ *være undermoduler i Λ-modulen M, og antag, at de er Jordan-Höldermoduler. Da er også* $N_1 \cap N_2$ *og* $N_1 + N_2$ *Jordan-Höldermoduler, og*

$$\operatorname{long}(N_1 \cap N_2) + \operatorname{long}(N_1 + N_2) = \operatorname{long} N_1 + \operatorname{long} N_2$$

Dette fölger ved gentagen anvendelse af sætning 2.7. i forbindelse med Noethers förste isomorfi

$$N_1 + N_2 / N_1 \simeq N_2 / N_1 \cap N_2 .$$

**2.11 SÆTNING.** *En Jordan-Höldermodul er endeligt frembragt.*

Bevis. I en Jordan-Hölder modul M findes en kæde

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

hvis kvotienter er simple og dermed cykliske $\Lambda$-moduler. Påstanden følger ved induktion efter $n$ af sætning 1.3. ■

Mere generelt ser vi: Er der i en $\Lambda$-modul $M$ givet en kæde

$$(0) = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M,$$

og elementer $x_1 \in M_1, \ldots, x_{n-1} \in M_{n-1}, x_n \in M_n$ således at $\textcircled{x_\nu} \in M_\nu / M_{\nu-1}$ er en frembringer for $M_\nu / M_{\nu-1}$, så gælder

$$\Lambda x_1 + \cdots + \Lambda x_\nu = M_\nu .$$

2.12. DEFINITION. Ringen $\Lambda$ siges at have **endelig længde**, hvis $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ har endelig længde (altså hvis $\Lambda_s$ er en Jordan-Höldermodul). En ring af endelig længde siges mere præcist at have endelig venstrelængde. Tilsvarende kunne vi nemlig have betragtet højre-modulen $\Lambda_d$. Hvis denne højremodul har endelig længde, siger vi, at $\Lambda$ har endelig **højrelængde**. Kæder i $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ svarer til følger

$$(0) = \mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n = \Lambda$$

af venstreidealer i $\Lambda$, hvorimod kæder i højremodulen $\Lambda_d$ svarer til følger af højreidealer i $\Lambda$.

2.13. Et skævlegeme $D$ har endelig længde. Vi finder

$$\operatorname{long} D_s = \operatorname{long} D_d = 1.$$

Matrixringen $\Lambda = \mathrm{Mat}_n(L)$ af $n \times n$-matricer med koefficienter i et legeme har endelig længde. Opfatter vi nemlig $S = L^n$ som $\Lambda$-modul, har vi set, at $S$ er en simpel $\Lambda$-modul, og vi har fundet en isomorfi $\Lambda_s \simeq S^n$. Det følger, at $\operatorname{long} \mathrm{Mat}_n(L) = n$.

En algebra $A$ over et legeme $L$ er specielt et vektorrum over $L$, og venstreidealerne i $A$ er specielt underrum i $A$. Det følger, at hvis algebraen har endelig dimension over $L$, så har den også endelig længde, og vi har

$$\operatorname{long} A_s \leq \dim_L A.$$

2.14. Eksempel. Lad $A = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ være delringen af $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ bestående af matricer $\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & x \end{pmatrix}$ for hvilke $x \in \mathbb{R}$. For denne ring finder vi

$$\operatorname{long} A_s = 3, \quad \operatorname{long} A_d = 4.$$

Betragter vi i stedet ringen $B = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ finder vi stadig $\operatorname{long} B_s = 3$, men $B$ har ikke endelig højrelængde $\square$

2.15. SÆTNING. *Lad $\Lambda$ være en ring af endelig længde. Enhver endeligt frembragt $\Lambda$-modul er da en Jordan-Höldermodul.*

Bevis. At $\Lambda$-modulen $M$ er endeligt frembragt, betyder at der findes en surjektiv homomorfi : $\Lambda_s^n \to M$, altså at $M$ er isomorf med en kvotient af $\Lambda_s^n$. Ifølge korollar 2.9. er $\Lambda_s^n$ en Jordan-Höldermodul, og ifølge sætning 2.7. er kvotienten derfor ligeledes en Jordan-Höldermodul. ▨

2.16. I 2.2. har vi v.h.a. teorien for baser i vektorrum givet eksempler på Jordan-Hölder moduler. Omvendt giver den nu udviklede teori for Jordan-Höldermoduler let de klassiske sætninger om baser i vektorrum:

SÆTNING. *Lad $D$ være et skævlegeme, og lad $V$ være en endeligt frembragt $D$-modul. Da gælder*

*(1) $V$ er en Jordan-Hölder modul.*

*(2) $V$ er en fri $D$-modul, og alle baser i $V$ har samme kardinaltal, nemlig $\operatorname{long} V$.*

*(3) Fra ethvert frembringersystem kan udtages en basis.*

*(4) Ethvert uafhængigt system kan suppleres til en basis.*

En endeligt frembragt $D$-modul $V$ kaldes også et *endeligdimensionalt* vektorrum over $D$, og vi sætter

$$\dim_D V = \operatorname{long} V.$$

Bevis. (1) følger umiddelbart af sætning 2.15. Vi sætter $\operatorname{long} V = n$. I et frembringersystem for $V$ kan vi vælge et element $e_1 \neq 0$, dernæst, hvis $De_1 \subset V$, et element $e_2 \notin De_1$, dernæst, hvis $De_1 + De_2 \subsetneq V$, et element $e_3 \notin De_1 + De_2$, o.s.v. Vi får da

$$(0) \subset De_1 \subset De_1 + De_2 \subset De_1 + De_2 + De_3 \subset \cdots .$$

De successive kvotienter $De_1 + \cdots + De_\nu / De_1 + \cdots + De_{\nu-1}$ er cykliske, frembragt af $\textcircled{$e_\nu$} \neq 0$, og derfor $\simeq D_s$, og altså simple. Følgelig må processen stoppe efter netop $n$ skridt med at vi har en Jordan-Hölderkæde

$$(*) \qquad (0) \subset De_1 \subset De_1 + De_2 \subset \cdots \subset De_1 + \cdots + De_n = V.$$

De fundne elementer $(e_1, \dots, e_n)$ er nu en basis for $V$, thi ellers fandtes en relation mellem e'erne, i hvilken der forekommer en koefficient $\neq 0$. Divideres med denne koefficient, fås et af e'erne udtrykt som en linearkombination af de øvrige e'er. Ved hjælp heraf kan vi nu opbygge en kæde som $(*)$, hvori der forekommer en gentagelse, men dette er i modstrid med at $\operatorname{long} V = n$.

De resterende påstande indses tilsvarende. $\square$

2.17. Vi kan nu fuldføre beviset for, at $S = D^n$ opfattet som modul er ringen $\Lambda = \mathrm{Mat}_n(D)$ er en simpel modul. Vi kunne opfatte $D^n$ som højremodul over $D$, og det krævedes, at vi til et givet $x \in D^n$, $x \neq 0$, og et givet $y \in D^n$ kunne finde en $D$-endomorfi $f : D^n \to D^n$ således at $f(x) = y$. Men $x$ kan suppleres til en basis for $D^n_d$ : $(x, x_2, \dots, x_n)$, og vi kan bestemme den søgte $D$-homomorfi f.eks. således at $x \mapsto y, x_2 \mapsto 0, \dots, x_n \mapsto 0$.

KOROLLAR. *Ringen $\Lambda = \mathrm{Mat}_n(D)$ af $n \times n$-matricer med koefficienter i et skævlegeme $D$ har længden $n$.* thi vi havde fundet en isomorfi $\Lambda_s \simeq S^n$.

## 3. Semisimple moduler og ringe.

3.1. DEFINITION. Lad $N$ være en undermodul i $\Lambda$-modulen $M$. En undermodul $K$ i $M$ kaldes et komplement til $N$, hvis $N \oplus K = M$. Hertil kræves, at $N \cap K = (0)$ og at $N + K = M$. Undermodulen $N$ siges at være direkte sumand i $M$, hvis den har et komplement.

En vilkårlig undermodul har ikke nødvendigvis et komplement. F.eks. er undermodulen $\mathbb{Z}2 \subseteq \mathbb{Z}$ ikke direkte sumand.

En direkte sumand $N$ i $M$ vil i almindelighed have flere komplementer. Er f.eks. $N$ undermodulen $N = \mathbb{R}\binom{1}{0}$ i $M = \mathbb{R}^2$, vil enhver undermodul af formen $\mathbb{R}\binom{a}{1}$, $a \in \mathbb{R}$, være et komplement til $N$.

Er $K$ et komplement til $N$, har vi $K \xrightarrow{\sim} M/N$. Specielt er altså alle komplementer til $N$ isomorfe.

3.2. DEFINITION. En $\Lambda$-modul $M$ kaldes semisimpel, hvis enhver undermodul i $M$ er direkte sumand i $M$.

3.3. Eksempler. Nulmodulen $(0)$ er en semisimpel $\Lambda$-modul. Enhver simpel $\Lambda$-modul er semisimpel.

Et vektorrum $V$ over et skævlegeme $\mathcal{D}$ er en semisimpel $\mathcal{D}$-modul. Dette følger – hvis $V$ er endeligt frembragt – af overvejelserne i 2.16: En undermodul $N$ i $V$ har en basis, og denne basis kan suppleres med elementer $e_1, \dots, e_q$ til en basis for hele $V$. Undermodulen $\mathcal{D}e_1 + \dots + \mathcal{D}e_q$ er da et komplement til $N$.

Lad $V$ være et endeligdimensionalt vektorrum over $L$ ($= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) med indre produkt. Til hver lineær endomorfi $f : V \to V$ hører den adjungerede $f^* : V \to V$. Vi har $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$, $(fg)^* = g^* f^*$, $1_V{}^* = 1_V$ og $f^{**} = f$.

En delalgebra $A \subseteq \mathrm{End}_L(V)$ kaldes en *$*$-algebra*, hvis $f \in A \Rightarrow f^* \in A$. Er der givet en sådan $*$-algebra $A$ kan vi opfatte $V$ som $A$-modul; undermodulerne i $A$-modulen $V$ er de underrum i vektorrummet $V$, der er invariante under alle endomorfier $f \in A$. Der gælder nu, at $V$ er en semisimpel $A$-modul. Er nemlig $W$ en under-$A$-modul, altså et underrum i $V$, invariant under alle $f \in A$, kan vi betragte det ortogonale komplement $W^\perp$. Hvis $f \in A$, har vi $f^* \in A$ og dermed $f^*(W) \subseteq W$, men heraf følger som bekendt, at $W^\perp$ er invariant under $f^{**} = f$. $W^\perp$ er således et komplement til $W$ i $A$-modulen $V$.

3.4. SÆTNING. *Lad $M$ være en semisimpel $\Lambda$-modul. Enhver undermodul og enhver kvotientmodul i $M$ er da ligeledes semisimpel.*

Bevis. Lad $M' \subseteq M$ være en undermodul i $M$. Vi skal vise, at enhver undermodul $N' \subseteq M'$ har et komplement i $M'$. Da $N'$ er direkte summand i $M$ findes en undermodul $K \subseteq M$, således at $N' \oplus K = M$. Vi sætter $K' = K \cap M' \subseteq M'$, og ønsker at vise, at

$$N' \oplus K' = M'.$$

Det er klart, at $N' \cap K' \subseteq N' \cap K = (0)$. For at vise, at $N' + K' = M'$ betragter vi et element $x' \in M'$. Da $N' + K = M$, kan specielt $x'$ skrives $x' = y' + z$, hvor $y' \in N'$, $z \in K$. Nu har vi $z = x' - y' \in M'$, og dermed $z \in K \cap M' = K'$, og har således vist, at $x' \in N' + K'$, som ønsket.

Er $M/P$ en kvotient af $M$, så har undermodulen $P$ et komplement $Q$ i $M$, og vi har en isomorfi $Q \xrightarrow{\sim} M/P$. Ifølge det allerede viste er undermodulen $Q$ semisimpel, og det følger, at også $M/P$ er semisimpel. ▨

3.5. LEMMA. *Enhver semisimpel modul $M \neq (0)$ indeholder en simpel undermodul.*

Bevis. $M$ indeholder en endeligt frembragt undermodul $N \neq (0)$ (f.eks. $N = \Lambda x$, hvor $x \neq 0$). Da $N$ er endeligt frembragt, har $N$ en simpel kvotient (sætning 1.5.), og da $N$ er semisimpel (sætning 3.4.) er denne kvotient isomorf med en undermodul af $N \subseteq M$. ▨

3.6. KOROLLAR. *En semisimpel modul $M$ er sum af simple undermoduler.*

Bevis. Lad $N \subseteq M$ være summen af alle simple undermoduler i $M$. Hvis $N \subset M$, har $N$ et komplement $K \neq (0)$. Her er $K$ en undermodul i $M$, og derfor semisimpel, og følgelig har $K$ en simpel undermodul $S$ (lemma 3.5.). Nu har vi også $S \subseteq N$, ifølge definitionen af $N$, og dermed

$$(0) \neq S \subseteq N \cap K,$$

men dette er i modstrid med at $N \cap K = (0)$ ▨

3.7. SUPPLERINGSSÆTNING. *Lad der i Λ-modulen $M$ være givet en familie $(S_\nu)_{\nu\in I}$ af simple undermoduler samt en undermodul $N$, og antag, at $M$ er sum af undermodulerne $S_\nu$, $\nu\in I$ og $N$:*

$$\sum_{\nu\in I} S_\nu + N = M.$$

*Der findes da en delmængde $J\subseteq I$, således at $M$ er direkte sum af undermodulerne $S_\nu$, $\nu\in J$, og $N$:*

$$\bigoplus_{\nu\in J} S_\nu \oplus N = M.$$

Bevis. Der findes delmængder $I'\subseteq I$, der har følgende egenskab: "Undermodulerne $S_\nu$, $\nu\in I'$ og $N$ er uafhængige," f.eks. $I'=\emptyset$. Blandt delmængder af $I$ med denne egenskab udvælger vi en maksimal $J$, altså således at $J$ har egenskaben og således at $J$ ikke er ægte indeholdt i nogen anden delmængde med egenskaben. (Hvis mængden $I$ er endelig, er det klart, at vi kan finde en sådan delmængde; hvis $I$ er uendelig bruges Zorns lemma). Vi vil nu vise, at

$$\oplus_{\nu\in J} S_\nu \oplus N = M.$$

Vi sætter $\Sigma_{\nu\in J} S_\nu + N = M'$. Da de betragtede undermoduler vides at være uafhængige, skal vi blot vise, at $M' = M$. Da $\Sigma_{\nu\in I} S_\nu + N = M$, er det nok at vise, at $S_\nu\subseteq M'$, $\nu\in I$ og $N\subseteq M'$. Det sidste er klart, og det første er klart, hvis $\nu\in J$. Hvis det første ikke var opfyldt fandtes altså et $\mu\in I\setminus J$, således at $S_\mu\nsubseteq M'$. Nu er

$$S_\mu\cap M' \subset S_\mu,$$

og da $S_\mu$ var en simpel modul, må vi have $S_\mu\cap M'=(0)$. Heraf følger imidlertid, at modulerne $S_\mu$ og $M'$ er uafhængige, og dermed at modulerne $S_\mu$, $S_\nu$, $\nu\in J$ og $N$ er uafhængige. Følgelig ville delmængden $\{\mu\}\cup J$ af $I$

have egenskaben i modstrid med maksimaliteten af $J$ ▨

3.8. Som korollar til suppleringssætningen får vi følgende HOVEDSÆTNING OM SEMISIMPLE MODULER. *For en $\Lambda$-modul $M$ er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *$M$ er semisimpel.*
(ii) *$M$ er sum af simple undermoduler.*
(iii) *$M$ er isomorf med en direkte sum af simple moduler.*

Bevis. (i) $\Rightarrow$ (ii) har vi vist (korollar 3.6.); og (iii) $\Rightarrow$ (ii) er trivielt. Implikationerne (ii) $\Rightarrow$ (i) og (ii) $\Rightarrow$ (iii) følger begge af suppleringssætningen: Er nemlig $M$ sum af simple undermoduler $S_\nu$, $\nu \in I$ viser suppleringssætningen, at hver undermodul $N \subseteq M$ har et komplement, nemlig et komplement af formen $\oplus_{\nu \in J} S_\nu$. $M$ er altså semisimpel. At undermodulen $(0) \subseteq M$ har et komplement af denne form, betyder, at $M = \oplus_{\nu \in J} S_\nu$, hvoraf (iii). ▨

Som en anvendelse af betingelsen (iii) får vi

3.9. SÆTNING. *En direkte sum af semisimple $\Lambda$-moduler er selv semisimpel.* ▨

3.10. Eksempler. En modul $V$ over et skævlegeme $D$, altså et vektorrum over $D$, opfylder trivielt betingelsen (ii). Af (i) får vi derfor, at hvert underrum $W$ i $V$ har et komplement. De simple $D$-moduler er de 1-dimensionale vektorrum. Betingelsen (iii) giver derfor: *Ethvert vektorrum har en basis.*

Lad $V$ være et endeligdimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$. Er der givet en $\mathbb{C}$-endomorfi $f: V \to V$, betegner vi med ${}_fV$ vektorrummet $V$ opfattet som $\mathbb{C}[X]$-modul (Produktet $\mathbb{C}[X] \times V \to V$ givet ved $Xv = f(v)$). Der gælder da: ${}_fV$ er en semisimpel $\mathbb{C}[X]$-modul $\Leftrightarrow$ $f$ er diagonaliserbar. Vi har nemlig set, at de simple $\mathbb{C}[X]$-moduler er de $\mathbb{C}[X]$-moduler $S$, for hvilke $\dim_{\mathbb{C}} S = 1$. De simple undermoduler i ${}_fV$ er derfor de 1-dimensionale invariante underrum i $V$. Heraf følger påstanden.

Lad $V$ være et endeligdimensionalt vektorrum over $L$ ($= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) med indre produkt, og lad $A \subseteq \mathrm{End}_L(V)$ være en $*$-algebra. $A$-modulen $V$ er da semisimpel, så der findes simple undermoduler $S_\nu$ i $V$, således at $\oplus S_\nu = V$. Eksistensen af en sådan fremstilling kan også indses på følgende måde: Først vælger vi i $V$ en simpel undermodul $S_1$, dernæst i dennes ortogonale komplement $S_1^\perp$ en simpel undermodul $S_2$, o.s.v. Herved får vi en fremstilling

$$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$$

i parvis ortogonale simple $A$-moduler.

3.11. SÆTNING. En endeligt frembragt semisimpel $\Lambda$-modul $M$ har endelig længde. Der findes en isomorfi

$$M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k, \quad k = \operatorname{long} M.$$

hvor $S_1, \ldots, S_k$ er simple $\Lambda$-moduler. $S_\nu$'erne er (på nær isomorfi og permutation) entydigt bestemte.

**Bevis.** Da $M$ er semisimpel, findes en isomorfi

$$\bigoplus_{\nu\in I} S_\nu \twoheadrightarrow M. \quad , \quad S_\nu\text{'erne simple.}$$

Da $M$ er endeligt frembragt, må indexmængden $I$ være endelig (sætning 1.4.), og vi har en fremstilling som ønsket. Ud fra denne fremstilling får vi en kæde

$$(0) \subset S_1 \subset S_1 \oplus S_2 \subset \cdots \subset S_1 \oplus \cdots \oplus S_k = M,$$

der har kvotienterne $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Heraf følger de resterende påstande. ▨

3.12. SÆTNING. *Hvis $\Lambda$-modulen $M$ er sum af simple undermoduler $S_\nu$, $\nu \in I$, så er enhver simpel undermodul og enhver simpel kvotientmodul i $M$ isomorf med et af $S_\nu$'erne.*

Bevis. Lad os først betragte en simpel kvotient $S$ i $M$. Vi har da en surjektiv homomorfi $: M \to S$. Da $M = \Sigma S_\nu$, kan ikke alle $S_\nu$'erne være indeholdt i denne homomorfis kerne. Ved restriktion får vi derfor for mindst et $\nu$ en homomorfi $: S_\nu \to S$, der ikke er nulafbildningen. Da $S_\nu$ og $S$ er simple moduler, er den derfor en isomorfi.

Da $M$ er sum af simple moduler, er $M$ semisimpel (sætning 3.8.). Følgelig er enhver undermodul i $M$ isomorf med en kvotient, og sætningens første påstand følger af det allerede viste. ▨

3.13. DEFINITION. Ringen $\Lambda$ kaldes **semisimpel**, hvis $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$ er semisimpel. Da $\Lambda_s$ er endeligt frembragt, er dette ensbetydende med, at der findes en isomorfi:

$$\Lambda_s \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_k ,$$

hvor $S_\nu$'erne er simple $\Lambda$-moduler. Enhver simpel $\Lambda$-modul er isomorf med en kvotient af $\Lambda_s$, og dermed isomorf med et af $S_\nu$'erne (sætning 3.12.). På isomorfi nær findes der altså kun endelig mange simple $\Lambda$-moduler over en semisimpel ring $\Lambda$. Er der givet en semisimpel ring $\Lambda$, vil vi altid for hver isomorfiklasse af simple $\Lambda$-moduler tænke os valgt en bestemt $T$. Disse udvalgte simple $\Lambda$-moduler kaldes de *simple typer*. Der er altså kun endelig mange simple typer $T_1, \dots, T_p$. Hvis $S$ er isomorf med $T_\mu$ siger vi, at $S$ er *simpel af type $T_\mu$* (eller af *type $\mu$*).

Erstatter vi i fremstillingen $\Lambda_s \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$ hvert $S_\nu$ med sin type, får vi en isomorfi

$$\Lambda_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p}, \qquad n_\mu \geq 1.$$

3.14. Inden vi generelt undersøger de semisimple ringe, vil vi indføre en speciel klasse af ringe.

DEFINITION. En ring $\Lambda$ kaldes *simpel*, hvis den har netop to idealer (som så må være $(0)$ og $\Lambda \neq (0)$), og desuden har endelig længde.

HOVEDSÆTNING OM SIMPLE RINGE. *For en ring $\Lambda$ er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *$\Lambda$ er en simpel ring*

(ii) *$\Lambda$ er en semisimpel ring, og der findes netop en type simpel $\Lambda$-modul.*

(iii) *Der findes en $\Lambda$-isomorfi $\Lambda_s \simeq T^n$, hvor $T$ er en simpel $\Lambda$-modul.*

(iv) *$\Lambda$ er isomorf med en matrixring $\mathrm{Mat}_n(D)$ af $(n\times n)$-matricer med koefficienter i et skævlegeme $D$.*

Bevis. At (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), følger af overvejelserne i 3.13.

(i) ⇒ (ii). Vi bemærker først, at der i $\Lambda_s$ findes en simpel undermodul $S_1$, f.eks. den første modul i en Jordan-Hölderkæde i $\Lambda_s$. Lad nu $\mathfrak{a}$ være summen af alle de simple undermoduler $S$ i $\Lambda_s$, der er isomorfe med $S_1$:

$$\mathfrak{a} = \sum \{ S \subseteq \Lambda_s \mid S \simeq S_1 \}.$$

$\mathfrak{a}$ er en undermodul i $\Lambda_s$, altså et venstreideal. Men $\mathfrak{a}$ er endda et ideal i $\Lambda$. Hertil kræves, at

$$\mathfrak{a}\lambda \subseteq \mathfrak{a} \quad , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

og det er nok at vise, at $S\lambda \subseteq \mathfrak{a}$ for enhver simpel undermodul $S \simeq S_1$ i $\Lambda_s$. Lad $S \subseteq \Lambda_s$ være en sådan undermodul. Afbildningen $x \mapsto x\lambda$ (højremultiplikation med $\lambda$) er en $\Lambda$-homomorfi : $\Lambda_s \to \Lambda_s$, og den definerer ved restriktion en surjektiv homomorfi

$$S \to S\lambda .$$

Da $S$ er simpel, er denne homomorfi *enten* nulafbildningen, og så har vi $S\lambda = (0) \subseteq \mathfrak{a}$, *eller* en isomorfi, og så har vi $S\lambda \simeq S \simeq S_1$, og det følger, at $S\lambda \subseteq \mathfrak{a}$.

Da $\Lambda$ er en simpel ring, og da $\mathfrak{a}$ er et ideal $\neq (0)$ (thi $\mathfrak{a} \supseteq S_1$) i $\Lambda$, må vi have $\mathfrak{a} = \Lambda$. Følgelig er $\Lambda_s$ sum af simple moduler, der alle er isomorfe med $S_1$, og heraf følger dels, at $\Lambda$ er semisimpel, dels, at hver simpel $\Lambda$-modul er isomorf med $S_1$.

(iii) ⇒ (iv). Antag, at $\Lambda_s \simeq T^n$, hvor $T$ er en simpel $\Lambda$-modul. Vi har $End_\Lambda(\Lambda_s) = \Lambda^{op}$ og $End_\Lambda(T^n) = Mat_m(End_\Lambda(T))$, og får derved en isomorfi

$$\Lambda^{op} \simeq Mat_m(End_\Lambda(T)).$$

Ifølge Schur's lemma er kommutanten $C = End_\Lambda(T)$ for den simple $\Lambda$-modul $T$ et skævlegeme. Den modsatte ring $D = C^{op}$ er derfor ligeledes et skævlegeme. Af isomorfien $\Lambda^{op} \simeq Mat_n(C)$ får vi nu ved transpo-

nering en isomorfi $\Lambda \overset{\sim}{\to} \mathrm{Mat}_n(D)$ som ønsket.
(iv) ⇒ (i). Vi har tidligere set, at en matrixring $\Gamma = \mathrm{Mat}_n(D)$ med koefficienter i et skævlegeme $D$ har endelig længde (nemlig $\mathrm{long}\, \Gamma_s = n$), og at den kun har de to trivielle idealer. ▨

### 3.15. WEDDERBURNS SÆTNING.

*Lad $\Lambda$ være en simpel ring, og lad $T$ være den simple type $\Lambda$-modul. Da gælder*

(1) *$\Lambda_s$ har endelig længde, og der findes en isomorfi $\Lambda_s \simeq T^n$, hvor $n$ er entydigt bestemt, $n = \mathrm{long}\, \Lambda_s$.*

(2) *Kommutanten $C = \mathrm{End}_\Lambda(T)$ er et skævlegeme, og $T$ er et vektorrum over $C$ af den endelige dimension*

$$\dim_C T = n = \mathrm{long}\, \Lambda_s .$$

(3) *Den ved homotetierne bestemte ringhomomorfi: $\Lambda \to \mathrm{End}(T)$ er en isomorfi*

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}_C(T).$$

Bevis. Vi kan antage, at $\Lambda = \mathrm{Mat}_n(D)$ er ringen af $n \times n$-matricer med koefficienter i et skævlegeme $D$, og at $T$ er $D^n$ opfattet som $\Lambda$-modul. Påstandene følger nu af de eksplicite udregninger for matrixringe. ▨

### 3.16. HOVEDSÆTNING FOR SEMISIMPLE RINGE.

*For en ring $\Lambda$ er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *Enhver $\Lambda$-modul $M$ er semisimpel*

(ii) *$\Lambda$ er en semisimpel ring*

(iii) *Der findes en isomorfi $\Lambda_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p}$, hvor $T_1, \dots, T_p$ er parvis ikke-isomorfe simple $\Lambda$-moduler*

(iv) *$\Lambda$ er isomorf med et produkt $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_p$ af* simple ringe $\Lambda_\mu$, $\mu = 1, \cdots, p$.

(v) $\Lambda$ er isomorf med et produkt

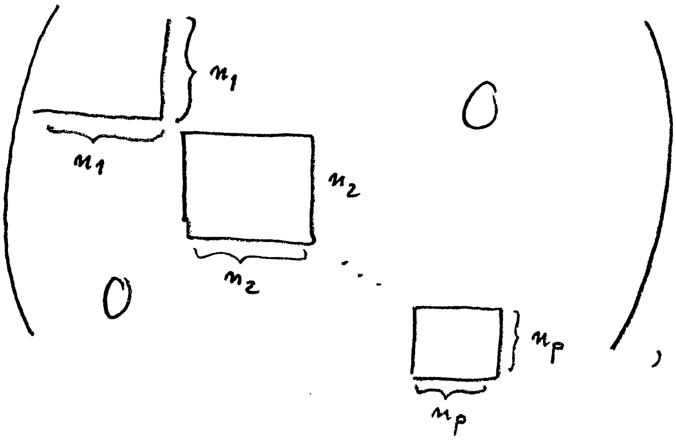
$$\mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}(D_p)$$

af matrixringe over skævlegemer $D_\mu$, $\mu = 1, \cdots, p$.

Bevis. At (i) $\Rightarrow$ (ii) er klart. At (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) har vi bemærket. At (iv) $\Leftrightarrow$ (v) følger af sætning 3.14.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Hvis $\Lambda_s$ er semisimpel, er enhver direkte sum $\Lambda_s^{(I)} = \bigoplus_{\nu \in I} \Lambda_s$ ligeledes semisimpel, og følgelig er enhver kvotient af $\Lambda_s^{(I)}$ semisimpel. Da enhver modul $M$ er isomorf med en sådan kvotient, får vi (i).

(iii) $\Rightarrow$ (v). Endomorfierne i den direkte sum $\Lambda_s \simeq$
$T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p} = (T_1 \oplus \cdots \oplus T_1) \oplus (T_2 \oplus \cdots \oplus T_2) \oplus \cdots \oplus (T_p \oplus \cdots \oplus T_p)$
kan beskrives ved matricer. Når $\nu \neq \mu$, er $T_\nu$ og $T_\mu$ simple og ikke isomorfe, så nulafbildningen er den eneste homomorfi : $T_\nu \to T_\mu$. Det følger, at disse matricer må være blokmatricer



,

hvor den $\nu$-te blok er en matrix $\in \mathrm{Mat}_{n_\nu}(\mathrm{End}_\Lambda(T_\nu))$.

Sættes $C_\nu = \mathrm{End}_\Lambda(T_\nu)$ og $D_\nu = C_\nu^{op}$, er $D_\nu$ et skævlegeme, $\nu = 1, \cdots, p$. Vi har isomorfier

$$\Lambda^{op} = \mathrm{End}_\Lambda(\Lambda_s) \simeq \mathrm{Mat}_{n_1}(C_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}(C_p),$$

og får heraf

$$\Lambda \simeq \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}(D_p),$$

som ønsket.

(iv) ⇒ (iii). For hvert $\nu$ findes en simpel $\Lambda_\nu$-modul $T_\nu$ og en $\Lambda_\nu$-isomorfi $(\Lambda_\nu)_s \simeq T_\nu^{n_\nu}$. Vi har de surjektive projektioner $\Lambda \to \Lambda_\nu$. Herved kan enhver $\Lambda_\nu$-modul opfattes som $\Lambda$-modul, og den får de samme undermoduler. Vi kan altså opfatte $(\Lambda_\nu)_s$ og $T_\nu$ som $\Lambda$-moduler, $T_\nu$ er en simpel $\Lambda$-modul, og isomorfien

$$(\Lambda_\nu)_s \xrightarrow{\sim} T_\nu^{n_\nu}$$

er en $\Lambda$-isomorfi. Den givne isomorfi $\Lambda \simeq \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_p$ er nu en $\Lambda$-isomorfi

$$\Lambda_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p}.$$

▨

3.17. I analogi med Wedderburns sætning får vi:

SÆTNING. Lad $\Lambda$ være en semisimpel ring og lad $T_1, \dots, T_p$ være de simple typer af $\Lambda$-moduler. Da gælder:

(1) $\Lambda$ har endelig længde, og der findes en isomorfi $\Lambda_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p}$, hvor $n_\mu$'erne er entydigt bestemte, $n_1 + \cdots + n_p = \operatorname{long} \Lambda_s$.

(2) Kommutanten $C_\mu = \operatorname{End}_\Lambda(T_\mu)$ er et skævlegeme, og $T_\mu$ er et vektorrum over $C_\mu$ af den endelige dimension $\dim_{C_\mu} T_\mu = n_\mu$.

(3) De ved homotetierne i $T_\mu$ bestemte ringhomomorfier: $\Lambda \to \operatorname{End}_{C_\mu}(T_\mu)$ er surjektive, og de giver en isomorfi

$$\Lambda \simeq \operatorname{End}_{C_1}(T_1) \times \cdots \times \operatorname{End}_{C_p}(T_p).$$

Bevis. Dette vises ved eksplicitte udregninger for matrixringe □

**1. Tensorproduktet:** 1.1. Definition af bilinearitet. 1.2: Eksempler. 1.3-4: Konstruktion af tensorproduktet. 1.5: Udvidelsessætning. 1.6: Isomorfien $R\otimes_R N \xrightarrow{\sim} N$ 1.7: Isomorfien $M\otimes_R N \xrightarrow{\sim} N\otimes_R M$. 1.8: Karakterisering af tensorprodukt.

**2. Funktoren $M\otimes_R -$:** 2.1-2: Funktorerne $M\otimes_R -$ og $-\otimes_R N$. 2.3: Additivitet af $M\otimes_R -$. 2.4: Tensorprodukt af fri moduler 2.5: Advarsel. 2.6: Homomorfien $f\otimes_R g$. 2.7: Sætning om kernen for $f\otimes g$.

**3. n-lineære afbildninger:** 3.1: Definition af n-lineær afbildning. 3.2: $M_1\otimes_R\cdots\otimes_R M_n$. 3.3: Isomorfien $M_1\otimes\cdots\otimes M_n \to (M_1\otimes\cdots\otimes M_{n-1})\otimes M_n$. 3.4: Tensorprodukt af fri moduler. 3.5: $\overset{n}{\otimes}_R M$.

**4. Alternerende n-lineære afbildninger:** 4.1: Definition af alternerende afbildning. 4.2. Sætning om permutation. 4.3: Notation 4.4: Udregning af $\Phi(x\alpha)$. 4.5: Eksistens af m-lineære afbildninger fra en fri modul.

**5. Ydre produkt:** 5.1: Definition af ydre potens. 5.2: Udvidelsessætning. 5.3: $\Lambda^p M$ for en fri modul M. 5.4: Rang 5.5: Homomorfien $\overset{p}{\wedge} f$. 5.6: Determinant af endomorfi.

**6: Den ydre algebra:** 6.1: Homomorfien: $\overset{p}{\Lambda} M\otimes\overset{q}{\Lambda} M\to\overset{p+q}{\Lambda} M$. 6.2: "hak"-produktet $\varphi\wedge\psi$. 6.3: Egenskaber ved $\wedge$. 6.4: Den ydre algebra.

# TENSORPRODUKT

I det følgende betegner $R$ en kommutativ ring.

## 1. Tensorproduktet.

1.1. DEFINITION. Lad $M, N$ og $P$ være $R$-moduler. En afbildning $\phi : M\times N \to P$, der er $R$-lineær i hver variabel, kaldes **$R$-bilineær**. Dette betyder, at vi har

$$\begin{aligned}
&\phi(x_1+x_2, y) = \phi(x_1,y)+\phi(x_2,y) && x_1,x_2\in M,\ y\in N\\
&\phi(\lambda x, y) = \lambda\phi(x,y) && x\in M,\ y\in N,\ \lambda\in R\\
&\phi(x, y_1+y_2) = \phi(x,y_1)+\phi(x,y_2) && x\in M,\ y_1,y_2\in N\\
&\phi(x,\lambda y) = \lambda\phi(x,y) && x\in M,\ y\in N,\ \lambda\in R
\end{aligned}$$

1.2. Hvis $N$ er en $R$-modul, er $(\lambda, y)\mapsto \lambda y$ $R$-bilineær: $R\times N \to N$. Specielt er afbildningen $R\times R\to R$ defineret ved $(\lambda,\mu)\mapsto\lambda\mu$ en $R$-bilineær afbildning.

Et indre produkt i et vektorrum $V$ over $\mathbb{R}$ er en $\mathbb{R}$-bilineær afbildning : $V\times V\to\mathbb{R}$. Et indre produkt i et vektorrum $V$ over $\mathbb{C}$ er derimod ikke en $\mathbb{C}$-bilineær afbildning. Det kan opfattes som en $\mathbb{C}$-bilineær afbildning $V\times\overline{V}\to\mathbb{C}$, hvor $\overline{V}$ er det konjugerede til $V$.

Krydsproduktet $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defineret ved $(u,v)\mapsto u\times v$ er en $\mathbb{R}$-bilineær afbildning.

1.3. Lad $M$ og $N$ være $R$-moduler. Med $L$ betegnes den fri $R$-modul frembragt af mængden

$M \times N$, altså

$$L = R^{(M\times N)}.$$

Det til elementet $(x,y) \in M\times N$ hørende basiselement i $L$ betegnes $\delta_{x,y}$. Elementerne i $L$ kan altså entydigt skrives som endelige summer

$$\xi = \lambda_1 \delta_{x_1,y_1} + \lambda_2 \delta_{x_2,y_2} + \cdots + \lambda_k \delta_{x_k,y_k}.$$

Vi skriver også

$$\xi = \sum \lambda_{x,y}\delta_{x,y}$$

Med $\mathcal{R} \subseteq L$ betegner vi undermodulen frembragt af alle elementer af formen

$$\begin{array}{ll} \delta_{x_1+x_2,y} - \delta_{x_1,y} - \delta_{x_2,y} & \\ \delta_{\lambda x,y} - \lambda\delta_{x,y} & x,x_1,x_2 \in M \\ \delta_{x,y_1+y_2} - \delta_{x,y_1} - \delta_{x,y_2} & y,y_1,y_2 \in N \\ & \lambda \in R. \\ \delta_{x,\lambda y} - \lambda\delta_{x,y} & \end{array}$$

Lad endelig $\bigcirc : L \to L/\mathcal{R}$ være $R$-homomorfien ind i den tilhørende kvotientmodul. Idet vi sætter

$$\boxed{x,y} = \boxed{\delta_{x,y}}$$

finder vi, da $\bigcirc$ er en $R$-homomorfi, at elementet

$$\xi = \lambda_1\delta_{x_1,y_1} + \cdots + \lambda_k\delta_{x_k,y_k} \in L$$

afbildes på

$$\boxed{\xi} = \lambda_1\boxed{x_1,y_1} + \cdots + \lambda_k\boxed{x_k,y_k} \in L/\mathcal{R}.$$

Elementerne $\boxed{x,y}$ er altså et frembringersystem for $R$-modulen $L/\mathcal{R}$.

Da $O$ afbilder elementer i $\mathcal{R}$ over i $0 \in L/\mathcal{R}$, finder vi i $L/\mathcal{R}$:

$$\enclose{circle}{x_1+x_2,y} - \enclose{circle}{x_1,y} - \enclose{circle}{x_2,y} = 0$$
$$\enclose{circle}{\lambda x,y} - \lambda\enclose{circle}{x,y} = 0$$
$$\enclose{circle}{x,y_1+y_2} - \enclose{circle}{x,y_1} - \enclose{circle}{x,y_2} = 0$$
$$\enclose{circle}{x,\lambda y} - \lambda\enclose{circle}{x,y} = 0.$$

Disse ligninger udsiger, at afbildningen: $(x,y) \longmapsto \enclose{circle}{x,y}$ er en bilineær afbildning: $M\times N \to L/\mathcal{R}$.

1.4. DEFINITION. Den til de to $R$-moduler $M$ og $N$ ovenfor konstruerede $R$-modul $L/\mathcal{R}$ kaldes *tensorproduktet af $M$ og $N$*, og betegnes $M\otimes_R N$. Billedet $\enclose{circle}{x,y} \in M\otimes_R N$ af et element $(x,y)\in M\times N$ betegnes $x\otimes y$.

Elementerne af formen $x\otimes y$, $x\in M$, $y\in N$, er ifølge det viste et frembringersystem for $R$-modulen $M\otimes_R N$, d.v.s. hvert element i $M\otimes_R N$ kan skrives på formen

$$\lambda_1(x_1\otimes y_1) + \cdots + \lambda_k(x_k\otimes y_k)$$

Videre er afbildningen $(x,y)\longmapsto x\otimes y$ en $R$-bilineær afbildning: $M\times N \to M\otimes_R N$, d.v.s. vi har

$$(x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y$$
$$(\lambda x)\otimes y = \lambda(x\otimes y)$$
$$x\otimes(y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x\otimes y_2$$
$$x\otimes\lambda y = \lambda(x\otimes y).$$

1.5. Endelig gælder følgende

UDVIDELSESSÆTNING. *Enhver $R$-bilineær afbild-*

*ning $\Phi : M\times N \longrightarrow P$ kan entydigt udvides til en R-lineær afbildning $\tilde{\Phi} : M\otimes_R N \longrightarrow P$.*

Hermed menes: Til hver R-bilineær afbildning $\Phi : M\times N \rightarrow P$ findes netop én R-lineær afbildning $\tilde{\Phi} : M\otimes_R N \rightarrow P$, således at $\tilde{\Phi}(x\otimes y) = \Phi(x,y)$ for alle $(x,y)\in M\times N$.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & M\otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\tilde{\Phi}"] \\
P &
\end{tikzcd}$$

Bevis. Afbildningen $(x,y)\longmapsto x\otimes y$ af $M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ er den sammensatte afbildning

$$M\times N \xrightarrow{\delta} L \longrightarrow L/\mathcal{R} = M\otimes_R N.$$

Afbildningen $\Phi : M\times N \longrightarrow P$ kan – som det gælder for enhver afbildning $: M\times N \rightarrow P$ – entydigt udvides til en R-lineær afbildning $\Phi^* : L \rightarrow P$. Dette følger af at $L$ er en fri R-modul med basis $\delta_{x,y}$, således at en R-lineær afbildning fra $L$ er helt bestemt ved sine værdier på basiselementerne $\delta_{x,y}$. Den udvidede afbildning $\Phi^* : L \rightarrow P$ vil afbilde et element

$$\xi = \lambda_1\delta_{x_1,y_1} + \dots + \lambda_k\delta_{x_k,y_k} \in L$$

på

$$\Phi^*(\xi) = \lambda_1\Phi(x,y) + \dots + \lambda_k\Phi(x_k,y_k) \in P.$$

Da $\Phi$ er R-bilineær, ser vi, at $\Phi^*$ forsvinder på de elementer, der frembringer $\mathcal{R}$. Følgelig forsvinder $\Phi^*$ på $\mathcal{R}$, men så kan $\Phi^*$ entydigt udvides til en R-lineær afbildning $\tilde{\Phi} : L/\mathcal{R} \rightarrow P$.

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\Phi"'] & L \arrow[r, "\rho"] \arrow[dl, dashed, "\Phi^*"] & L/\mathcal{R} = M\otimes_R N \arrow[dll, dashed, "\tilde{\Phi}"] \\
P & &
\end{tikzcd}$$

▨

Ofte siger vi, at den udvidede R-lineære afbildning $\tilde{\phi} : M \underset{R}{\otimes} N \to P$ *er defineret ved* (eller *givet ved*)

$$\tilde{\phi} : x \otimes y \mapsto \phi(x,y).$$

1.6. Som nævnt er for enhver R-modul $N$ afbildningen $(\lambda, y) \mapsto \lambda y$ en R-bilineær afbildning: $R \times N \to N$. Vi kan altså definere en R-lineær afbildning $k : R \underset{R}{\otimes} N \to N$ ved $k : \lambda \otimes y \mapsto \lambda y$.

SÆTNING. *For enhver R-modul $N$ gælder, at den naturlige homomorfi*

$$\underline{k : R \underset{R}{\otimes} N \to N},$$

*givet ved $k : \lambda \otimes y \mapsto \lambda y$, er en R-isomorfi.*

Bevis. Ved $y \mapsto 1 \otimes y \in R \underset{R}{\otimes} N$ defineres en afbildning $j : N \to R \underset{R}{\otimes} N$. Vi viser, at $j$ er R-lineær, og at den er invers til $k$. At $j$ er R-lineær følger let, thi $1 \otimes (y_1 + y_2) = 1 \otimes y_1 + 1 \otimes y_2$, og $1 \otimes (\lambda y) = \lambda (1 \otimes y)$. Videre er det klart, at $k \circ j = Id_N$, så vi mangler blot at vise, at $j \circ k$ er identiteten på $R \underset{R}{\otimes} N$. Da $j \circ k$ er R-lineær, og da elementer af formen $\lambda \otimes y$ frembringer $R \underset{R}{\otimes} N$, er det nok at vise, at $(j \circ k)(\lambda \otimes y) = \lambda \otimes y$, $\lambda \in R$, $y \in N$. Vi finder

$$\begin{aligned} j \circ k (\lambda \otimes y) &= j(\lambda y) = 1 \otimes \lambda y = \lambda (1 \otimes y) \\ &= (\lambda 1) \otimes y = \lambda \otimes y. \end{aligned}$$ ▨

KOROLLAR. *Den naturlige homomorfi*

$$\underline{R \underset{R}{\otimes} R \to R},$$

*givet ved $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \mu$, er en R-isomorfi.* ▨

1.7. Ganske som sætning 1.6 vises

SÆTNING. *Lad M og N være R-moduler. Den naturlige homomorfi* $$M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow N \underset{R}{\otimes} M,$$ *givet ved* $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$, *er en R-isomorfi.* □

1.8. Tensorproduktet $M \underset{R}{\otimes} N$ er karakteriseret ved at udvidelsessætningen 1.5 gælder, idet vi har:

SÆTNING. *Lad der være givet en R-bilineær afbildning* $F_0 : M \times N \to P_0$, *med den egenskab, at enhver R-bilineær afbildning* $F : M \times N \to P$ *entydigt kan udvides til en R-lineær afbildning* $\tilde{F} : P_0 \to P$. *Homomorfien* : $M \underset{R}{\otimes} N \to P_0$ *givet ved* $x \otimes y \longmapsto F_0(x,y)$ *er da en R-isomorfi.*

Bevis.

$$\begin{tikzcd}
 & M \underset{R}{\otimes} N \arrow[d, shift right] \\
M \times N \arrow[ur] \arrow[r, "F_0"'] & P_0 \arrow[u, dashed, shift right]
\end{tikzcd}$$ □

## 2. Funktoren $M\underset{R}{\otimes}-$.

2.1. Er der givet en fast $R$-modul $M$, kan vi for forskellige $R$-moduler $N$ betragte $R$-modulen $M\underset{R}{\otimes}N$. Vi kan således opfatte tensorproduktet som en "funktion"

$$N \longmapsto M\underset{R}{\otimes}N,$$

der til enhver $R$-modul knytter en $R$-modul. Videre kan vi til enhver $R$-homomorfi $N \xrightarrow{f} N'$ knytte en $R$-homomorfi : $M\underset{R}{\otimes}N \longrightarrow M\underset{R}{\otimes}N'$, nemlig afbildningen defineret ved

$$x\otimes y \longmapsto x\otimes f(y).$$

Denne homomorfi betegnes $1_M\underset{R}{\otimes}f$, eller blot $1\otimes f$, altså

$$(1\otimes f)(x\otimes y) = x\otimes f(y).$$

For en given fast $R$-modul $M$ kan vi derfor opfatte tensorproduktet som en "funktion" $T$, der til hver $R$-modul $N$ knytter en $R$-modul $T(N) = M\underset{R}{\otimes}N$, og til hver $R$-homomorfi $N \xrightarrow{f} N'$ mellem $R$-moduler knytter homomorfien $T(f) = 1\otimes f :$ $T(N) \to T(N')$ mellem deres "billeder". For denne "funktion" $T$ gælder videre for identiteten $1_N : N \to N$, at

$$T(1_N) = 1_{T(N)},$$

[thi $T(1_N) = 1\otimes 1_N : M\underset{R}{\otimes}N \longrightarrow M\underset{R}{\otimes}N$ er defineret ved : $x\otimes y \longmapsto x\otimes 1_N(y) = x\otimes y$ ], og er $f : N \to N'$, $g : N' \to N''$ givne $R$-homomorfier, gælder for den sammensatte, at

$$T(g\circ f) = T(g)\circ T(f) : M\underset{R}{\otimes}N \to M\underset{R}{\otimes}N''.$$

[idet begge homomorfier sender $x\otimes y \longmapsto x\otimes g(f(y))$ ].

Vi siger også, at $T$ er en *funktor* fra $R$-moduler til $R$-moduler, og skriver

$$T: (R\text{-mod}) \longrightarrow (R\text{-mod}).$$

Denne funktor betegnes også $M\underset{R}{\otimes} -$.

2.2. Tilsvarende får vi for en fast $R$-modul $N$ ved at "variere" $R$-modulen $M$ en "funtion"

$$M \longmapsto M\underset{R}{\otimes} N,$$

der er en funktor

$$-\underset{R}{\otimes} N : (R\text{-mod}) \longrightarrow (R\text{-mod}).$$

2.3. SÆTNING. *For en fast $R$-modul $M$ er tensorproduktet en additiv funktor $M\underset{R}{\otimes} - : (R\text{-mod}) \to (R\text{-mod})$.*

Bevis. Idet en vilkårlig funktor $T: (R\text{-mod}) \to (R\text{-mod})$ kaldes *additiv*, hvis der for to $R$-homomorfier $f, g: N \to N'$ gælder

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \; : \; T(N) \to T(N'),$$

udsiger sætningen, at der for $R$-homomorfier $f, g: N \to N'$ gælder

$$1\otimes(f+g) = 1\otimes f + 1\otimes g \; : \; M\underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M\underset{R}{\otimes} N'.$$

Da de to afbildninger er $R$-lineære, er det nok at vise, at de stemmer overens på elementer af formen $x\otimes y$, $x\in M$, $y\in N$, idet disse elementer frembringer $M\underset{R}{\otimes} N$. Vi finder

$$[(1\otimes(f+g)](x\otimes y) = x\otimes(f+g)(y) = x\otimes(f(y)+g(y))$$
$$= x\otimes f(y) + x\otimes g(y)$$

og

$$[1\otimes f + 1\otimes g](x\otimes y) = (1\otimes f)(x\otimes y) + (1\otimes g)(x\otimes y)$$
$$= x\otimes f(y) + x\otimes g(y). \qquad ▨$$

KOROLLAR. Tensorproduktet $M\underset{R}{\otimes}-$ kommuterer med endelige direkte summer.

Bevis. Er der givet en direkte sum $N = \bigoplus_{\nu\in I} N_\nu$, har vi injektionerne $i_\nu : N_\nu \hookrightarrow N$. Er $T: (R\text{-mod}) \to (R\text{-mod})$ en funktor, får vi $R$-homomorfier $T(i_\nu) : T(N_\nu) \to T(N)$, og dermed en $R$-homomorfi

$$\bigoplus_\nu T(N_\nu) \longrightarrow T(N).$$

Funktoren $T$ siges at kommutere med direkte summer (resp. med endelige direkte summer), hvis den homomorfi er en isomorfi for enhver direkte sum $N = \bigoplus N_\nu$ (resp. for enhver endelig direkte sum $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$.).

At udsagnet er et korollar af sætningen, altså at enhver additiv funktor $T:(R\text{-mod}) \to (R\text{-mod})$ kommuterer med endelige direkte summer, følger af karakteriseringen af sådanne summer. Ud over injektionerne $i_1, \dots, i_r$ har vi projektionerne $p_1, \dots, p_r$, og der gælder

$$p_\mu i_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad \text{og} \quad \sum i_\nu p_\nu = 1.$$

Anvendes funktoren $T$ får vi

$$T(p_\mu) T(i_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{og} \quad \sum T(i_\nu) T(p_\nu) = 1,$$

og påstanden følger. □

2.4. SÆTNING. Lad $M$ og $N$ være fri $R$-moduler med baser $(e_\nu)_{\nu\in I}$ og $(f_\mu)_{\mu\in J}$. Tensorproduktet $M\underset{R}{\otimes}N$ er da en fri $R$-modul med basis $(e_\nu \otimes f_\mu)_{(\nu,\mu)\in I\times J}$

Bevis. Det er klart, at elementerne $e_\nu \otimes f_\mu$, $(\nu,\mu)\in I\times J$ er et frembringersystem for $M \underset{R}{\otimes} N$. For at vise, at de er fri og uafhængige, betragter vi en endelig relation

$$\sum_{\nu,\mu} r_{\nu,\mu}(e_\nu \otimes f_\mu) = 0 \quad i \quad M \underset{R}{\otimes} N$$

og vi vil vise, at koefficienterne $r_{\nu\mu} \in R$ alle er 0.

Vi betragter et fast index $\mu_0 \in J$, og betegner med $p: N \to R$ den hertil hørende koordinatfunktion. Homomorfien $p$ er altså bestemt ved

$$p(f_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mu = \mu_0 \\ 0 & \text{for } \mu \neq \mu_0 . \end{cases}$$

Anvendes homomorfien $1 \underset{R}{\otimes} p : M \underset{R}{\otimes} N \to M \underset{R}{\otimes} R$ får vi

$$\sum_\nu r_{\nu,\mu_0}(e_\nu \otimes 1) = 0 \quad i \quad M \underset{R}{\otimes} R$$

og anvender vi herpå den ved $x \otimes r \mapsto rx$, bestemte homomorfi $M \underset{R}{\otimes} R \to M$ (der for øvrigt er en isomorfi) får vi

$$\sum_\nu r_{\nu,\mu_0} e_\nu = 0 \quad i \quad M,$$

og slutter, at $r_{\nu,\mu_0} = 0$ for alle $\nu \in I$. □

2.5. ADVARSEL. Lad $M$ være en $R$-modul, og lad $N_0$ være en undermodul i $R$-modulen $N$. Vi har da den injektive inklusionshomomorfi $i: N_0 \hookrightarrow N$, og dermed homomorfien

$$1 \otimes i : M \otimes N_0 \longrightarrow M \otimes N .$$

<u>Denne homomorfi behöver ikke at være injektiv.</u> (Eks. $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2$, $N_0 = \mathbb{Z} \hookrightarrow N = \mathbb{Q}$. Vi har $\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2$, jfr. 1.6, men for et element $x \otimes y$ i $\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ finder vi

$$x \otimes y = x \otimes 2\left(\tfrac{y}{2}\right) = 2x \otimes \tfrac{y}{2} = 0 \otimes \tfrac{y}{2} = 0.)$$

<u>Hvis</u> $N'$ er direkte summand i $N$, <u>er</u> denne homomorfi imidlertid injektiv, og vi kan opfatte $M \otimes N'$ som direkte summand i $M \otimes N$. Specielt er dette altid tilfældet for moduler over et legeme.

2.6. Er der givet homomorfier $f: M \to M'$ og $g: N \to N'$, kan vi betragte den ved

$$x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

definerede homomorfi

$$M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M' \underset{R}{\otimes} N'.$$

[For at dette er veldefineret, kræves jo, at

$$(x,y) \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

er en bilineær afbildning $M \times N \to M' \underset{R}{\otimes} N'$, hvilket öjensynlig er tilfældet.]

Denne homomorfi kaldes <u>tensorproduktet</u> af homomorfierne $f$ og $g$ og betegnes $f \underset{R}{\otimes} g$.

Den er altså bestemt ved

$$f \underset{R}{\otimes} g : x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y).$$

**2.7. SÆTNING.** Lad $f : M \to M'$ være en surjektiv homomorfi med kernen $M_0$, og lad $g : N \to N'$ være en surjektiv homomorfi med kernen $N_0$. Homomorfien defineret ved

$$f \underset{R}{\otimes} g : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M' \underset{R}{\otimes} N'$$

er da en surjektiv homomorfi, hvis kerne er mængden $K$ af de elementer i $M \underset{R}{\otimes} N$, der er summer af elementer af formen

$$x \otimes y \ , \quad \text{hvor } x \in M_0 \text{ eller } y \in N_0$$

Bevis. Vi bemærker først, at delmængden $K \subseteq M \underset{R}{\otimes} N$ er en undermodul. Endvidere ser vi, at homomorfien $f \underset{R}{\otimes} g$ forsvinder på $K$ [vi har $K \subseteq$ kernen], og følgelig kan $f \underset{R}{\otimes} g$ udvides til en homomorfi $h$ fra kvotienten

$$\begin{tikzcd}
M \underset{R}{\otimes} N \arrow[r] \arrow[d, "f \underset{R}{\otimes} g"'] & (M \underset{R}{\otimes} N)/K \arrow[dl, "h"] \\
M' \underset{R}{\otimes} N' &
\end{tikzcd}$$

For at vise sætningen skal vi vise, at $h$ er bijektiv. Vi konstruerer en invers:
For et givet $(x', y') \in M' \times N'$ kan vi, da $f$ og $g$ er surjektive, vælge $(x, y) \in M \times N$, således at

$$(fx, gy) = (x', y').$$

Er $(u, v) \in M \times N$ et andet par, således at $(fu, gv) = (x', y')$, så er $u - x \in M_0$ og $v - y \in N_0$, og vi slutter, at

$$u \otimes v - x \otimes y = (u - x) \otimes y + u \otimes (v - y) \in K.$$

Dette betyder imidlertid, at vi i kvotienten har

$$\boxed{x \otimes y} = \boxed{u \otimes v}$$

Dette element i $(M \underset{R}{\otimes} N)/K$, der således kun afhænger af det givne par $(x', y')$, betegnes $\Phi(x', y')$. Nu ses det let, at

$$\phi : M' \times N' \longrightarrow (M \underset{R}{\otimes} N)/K$$

er en bilineær afbildning. Den kan derfor entydigt udvides til en lineær afbildning

$$\tilde{\Phi} : M' \underset{R}{\otimes} N' \longrightarrow (M \underset{R}{\otimes} N)/K .$$

Det vises let, at $\tilde{\Phi}$ er invers til $h$. ▨

## 3. $n$-lineære afbildninger.

3.1. DEFINITION. Lad der være givet $R$-moduler $M_1, \dots, M_n$. En afbildning $\phi : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow P$, hvor $P$ er en $R$-modul, kaldes *$n$-lineær*, hvis den er $R$-lineær i hver variabel.

3.2. Ganske som for bi-lineære afbildninger $(n=2)$ vises det, at vi til givne $R$-moduler $M_1, \dots, M_n$ kan konstruere en $R$-modul betegnet $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$ og en $n$-lineær afbildning

$$M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$$

betegnet

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n ,$$

med den egenskab, at enhver $n$-lineær afbildning $\phi : M_1 \times \cdots \times M_n \to P$ entydigt kan udvides til en $R$-lineær afbildning $\tilde{\phi} : M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n \longrightarrow P$.

$R$-modulen $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$ kaldes tensorproduktet af modulerne $M_1, \dots, M_n$ og betegnes også $\bigotimes_{i=1}^{n}{}_R \, M_i$

Det er let at se (jfr. 1.8), at den er karakteriseret ved at udvidelsessætningen gælder. Heraf følger f.eks.

3.3. SÆTNING. *Lad $M_1, \dots, M_n$ være $R$-moduler. Homomorfien defineret ved*

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1}) \otimes x_n$$

*er en isomorfi*

$$M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n \xrightarrow{\sim} (M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_{n-1}) \otimes_R M_n .$$

□

3,4. Ganske som for $n=2$, eller ved induktion ud fra sætning 3.3, ser vi, at et tensorprodukt af endelig mange fri moduler $M_1, \dots, M_n$ igen bliver en fri modul (med en basis, der eksplicit kan bestemmes ud fra baser i $M_1, \dots, M_n$.

3.5. Hvis $M_1 = \cdots = M_n = M$, skriver vi for tensorproduktet $M \underset{R}{\otimes} \cdots \underset{R}{\otimes} M$ også $\overset{n}{\underset{R}{\bigotimes}} M$. Hvis $M$ er en fri $R$-modul med basis $(e_\nu)_{\nu \in I}$, bliver $\overset{n}{\underset{R}{\bigotimes}} M$ en fri $R$-modul med basis

$$(e_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_n})_{(\nu_1, \dots, \nu_n) \in I \times \cdots \times I}.$$

## 4. Alternerende n-lineære afbildninger.

4.1. DEFINITION. Lad M være en R-modul. En n-lineær afbildning $\phi : M\times\cdots\times M \to P$, hvor P er en R-modul, kaldes *alternerende*, hvis der gælder

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = 0$$

for alle sæt $(x_1,\dots,x_n)\in M^n$, i hvilke et $x_i$ er lig med et $x_j$ for $i\neq j$.

4.2. SÆTNING. *Lad $\phi : M\times\cdots\times M \to P$ være en alternerende n-lineær afbildning. For ethvert sæt $(x_1,\dots,x_n)\in M^n$ og enhver permutation $\sigma\in S_n$ gælder da*

$$\underline{\phi(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n}) = (\operatorname{sign}\sigma)\,\phi(x_1,\dots,x_n).}$$

□

4.3. Af hensyn til de følgende udregninger er det hensigtsmæssigt at indføre en praktisk notation: Lad M være en R-modul og betragt et n-sæt

$$x = (x_1,\dots,x_n)\in M^n.$$

En delmængde $J\subseteq\{1,\dots,n\}$ med p elementer kan skrives

$$J = \{j_1,\dots,j_p\},\quad \text{hvor } 1\leq j_1<\cdots<j_p\leq n,$$

og for en sådan delmængde J sætter vi

$$x_J = (x_{j_1},\dots,x_{j_p})\in M^p.$$

Videre er det hensigtsmæssigt for en $(m\times n)$-matrix $\alpha$ med koefficienter fra R at skrive rækkeindex for oven og søjleindex for neden. Matricen $\alpha$ kan da skrives

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \cdots & \alpha_n^m \end{pmatrix}.$$

Matricen $\alpha$ kan opfattes som et $n$-sæt bestående af de $n$ søjler:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (R^m)^n$$

For en delmængde $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ med $p$ elementer betegnes derfor med $\alpha_J$ den $(m \times p)$-delmatrix, der fremgår af $\alpha$ ved at betragte søjler svarende til indices i $J$:

$$\alpha_J = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_p}), \qquad J = \{j_1, \dots, j_p\}$$

Matricen $\alpha$ kan ligeledes opfattes som et $m$-sæt bestående af de $m$ rækker:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix} \in (R^n)^m$$

For en delmængde $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ med $q$ elementer $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq m$ betegner vi med $\alpha^I$ den $(q \times n)$-delmatrix, der fremgår af $\alpha$ ved betragte rækkerne svarende til indices i $I$:

$$\alpha^I = \begin{pmatrix} \alpha^{i_1} \\ \vdots \\ \alpha^{i_q} \end{pmatrix}.$$

4.4. Med denne notation gælder

SÆTNING. Lad $\Phi : M^m \to P$ være en alternerende m-lineær afbildning. Er elementerne $y_1, \dots, y_m \in M$ skrevet som linearkombinationer af elementerne $x_1, \dots, x_n \in M$, og ordnes koefficienterne i $(m \times n)$-matricen $\alpha$ [Vi har altså

$$(y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n)\alpha \quad \text{eller kort: } y = x\alpha \Big],$$

så er

$$\Phi(y_1, \dots, y_m) = \sum_I (\det \alpha^I)\, \Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$$

$$\Big[ \text{eller kort: } \Phi(y) = \sum_I (\det \alpha^I)\, \Phi(x_I) \Big],$$

hvor der summeres over alle delmængder $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ med m elementer.

Er specielt $m = n$, har vi

$$\Phi(y) = (\det \alpha)\, \Phi(x),$$

og er $m > n$, har vi $\Phi(y) = 0$.

Bevis. Idet $\alpha = (\alpha^i_j)$, er det givet, at

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k_j x_k, \quad j = 1, \dots, m$$

Udnyttes m-lineariteten får vi

$$\Phi(y) = \Phi(y_1, \dots, y_m) = \Phi\Big( \sum_{k_1=1}^{n} \alpha^{k_1}_1 x_{k_1}, \dots, \sum_{k_m=1}^{n} \alpha^{k_m}_m x_{k_m} \Big)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \alpha^{k_1}_1 \cdots \alpha^{k_m}_m\, \Phi(x_{k_1}, \dots, x_{k_m})$$

Vi skal summere over alle m-sæt $(k_1, \dots, k_m)$. Idet vi yderligere udnytter, at $\Phi$ er alternerende, ser vi, at det er nok at summere over de m-sæt $(k_1, \dots, k_m)$, i hvilke k'erne er parvis forskellige. Dette er ensbetydende med at mængden $\{k_1, \dots, k_m\}$ har m elementer, så vi får

$$\phi(y) = \sum_{I} \sum_{\{k_1,\dots,k_m\}=I} \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_m^{k_m}\,\phi(x_{k_1},\dots,x_{k_m})$$

hvor der summeres over alle delmængder $I \subseteq \{1,\dots,n\}$. med $m$ elementer. En hver sådan delmængde $I$ kan skrives

$$I = \{i_1,\dots,i_m\}, \quad \text{hvor } 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n,$$

og de forskellige sæt $(k_1,\dots,k_m)$ med $\{k_1,\dots,k_m\}$ er netop sættene af formen

$$(i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_m}), \quad \text{hvor } \sigma \in S_m.$$

Vi har derfor

$$\sum_{\{k_1,\dots,k_m\}=I} \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_m^{k_m}\,\phi(x_{k_1},\dots,x_{k_m})$$

$$= \sum_{\sigma\in S_m} \alpha_1^{i_{\sigma_1}}\cdots\alpha_m^{i_{\sigma_m}}\,\phi(x_{i_{\sigma_1}},\dots,x_{i_{\sigma_m}})$$

Nu er $\alpha^{i_{\sigma_1}}$ er den $\sigma_1$-te række i matricen $\alpha^I$, o.s.v. Endvidere er ifølge sætning 4.2.

$$\phi(x_{i_{\sigma_1}},\dots,x_{i_{\sigma_m}}) = (\operatorname{sign}\sigma)\,\phi(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$$

$$= (\operatorname{sign}\sigma)\,\phi(x_I)$$

Vi slutter derfor, at

$$\sum_{\{k_1,\dots,k_m\}=I} \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_m^{k_m}\,\phi(x_{k_1},\dots,x_{k_m})$$

$$= \left(\sum_{\sigma\in S_m} (\operatorname{sign}\sigma)(\alpha^I)_1^{\sigma_1}\cdots(\alpha^I)_m^{\sigma_m}\right)\phi(x_I).$$

Her er koefficienten i parantesen netop $\det\alpha^I$, og ved indsætning får vi det ønskede. ▨

4.5. Vi har endnu ikke givet eksempler på $n$-lineære alternerende afbildninger $\phi : M^n \to P$. Lad os først bemærke, at de alternerende 1-lineære afbildninger blot er de 1-lineære, altså de lineære afbildninger. Videre gælder som bekendt, at determinanten, opfattet som funktion af de $n$ søjler er en alternerende $n$-lineær afbildning

$$\det : R^n \times \cdots \times R^n \longrightarrow R.$$

Herudfra får vi alternerende $m$-lineære afbildninger i tilfældet hvor $M$ er en fri $R$-modul. Mere præcist har vi:

SÆTNING. *Lad $M$ være en fri $R$-modul med basis $e_1, \cdots, e_n$ og lad der for alle delmængder $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ med $m$ elementer være givet elementer $z_I$ i $R$-modulen $P$. Da findes netop én alternerende $m$-lineær afbildning $\phi : M^m \to P$, således at $\phi(e_I) = z_I$, nemlig afbildningen bestemt ved at vi for*

$$(x_1, \cdots, x_m) = (e_1, \cdots, e_n)\alpha = e\alpha$$

*har*

$$\phi(x_1, \cdots, x_m) = \sum_I (\det \alpha^I)\, z_I .$$

$\square$

## 5. Ydre produkt

5.1. Lad $M$ være en $R$-modul. For et givet $p \in \mathbb{N}$ kan vi i tensorproduktet $\overset{p}{\underset{R}{\otimes}} M$ betragte undermodulen $\mathcal{R}=\mathcal{R}_p$ frembragt af elementer af formen

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p ,$$

hvor $(x_1, \dots, x_p) \in M^p$ er et $p$-sæt, i hvilket et $x_i$ er lig med et $x_j$ for $i \neq j$.

DEFINITION. Kvotientmodulen $\overset{p}{\underset{R}{\otimes}} M / \mathcal{R}$ kaldes den *p-te ydre potens af M* og betegnes $\Lambda^p_R M$ eller blot $\Lambda^p M$. Den sammensatte afbildning

$$M \times \cdots \times M \longrightarrow \overset{p}{\otimes} M \longrightarrow \Lambda^p M$$

betegnes

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p .$$

Elementet $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \in \Lambda^p M$ er altså billedet af $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ i kvotienten $\otimes^p M / \mathcal{R}$.

5.2. SÆTNING. *Afbildningen* $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ *er en alternerende, p-lineær afbildning*

$$M \times \cdots \times M \longrightarrow \Lambda^p M .$$

*Enhver alternerende, p-lineær afbildning* $\Phi :$ $M \times \cdots \times M \rightarrow P$, *hvor* $P$ *er en* $R$*-modul, kan entydigt udvides til en* $R$*-lineær afbildning* $\hat{\Phi} : \Lambda^p M \rightarrow P$.

$$\begin{tikzcd}
M \times \cdots \times M \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & \Lambda^p M \arrow[dl, dashed, "\hat{\Phi}"] \\
P &
\end{tikzcd}$$

Bevis. Da afbildningen $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$

er en $p$-lineær afbildning, er det klart, at den sammensatte afbildning

$$(x_1,\cdots,x_n) \longmapsto x_1\otimes\cdots\otimes x_n \longmapsto x_1\wedge\cdots\wedge x_n$$

ligeledes er $p$-lineær. For et $p$-sæt $(x_1,\cdots,x_p)$, i hvilket et $x_i$ er lig med et $x_j$ for $i\neq j$, har vi $x_1\otimes\cdots\otimes x_p \in \mathcal{R}$, men dette betyder netop at vi for den tilsvarende restklasse $x_1\wedge\cdots\wedge x_p$ har $x_1\wedge\cdots\wedge x_p = 0$ i $\otimes^p M/\mathcal{R}$.

En alternerende $p$-lineær afbildning $\Phi: M\times\cdots\times M \to P$ kan – da den er $p$-lineær – udvides til en $R$-lineær afbildning $\tilde{\Phi}: \otimes^p M \to P$. Da $\Phi$ desuden er alternerende, vil $\tilde{\Phi}$ forsvinde på undermodulen $\mathcal{R} \subseteq \otimes^p M$, og $\tilde{\Phi}$ kan derfor entydigt udvides til en $R$-lineær afbildning $\hat{\Phi}: \Lambda^p M \to P$, som påstået

$$\begin{tikzcd} M\times\cdots\times M \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & \otimes^p M \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\Phi}"] & \Lambda^p M \arrow[dll, dashed, "\hat{\Phi}"] \\ P & & \end{tikzcd}$$

▨

5.3. For et $p$-sæt $x=(x_1,\cdots,x_p)\in M^p$ betegner vi med $\wedge x$ elementet

$$\wedge x = x_1\wedge\cdots\wedge x_p \in \Lambda^p M.$$

Er $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $n$-sæt, og er $J \subseteq \{1,\cdots,n\}$ en delmængde med $p$ elementer skriver vi

$$J=\{j_1,\cdots,j_p\},\ \text{hvor}\ 1\leq j_1<\cdots<j_p\leq n,$$

og vi betegner med $x_J$ $p$-sættet $(x_{j_1},\cdots,x_{j_p})\in M^p$. Følgelig betegner $\wedge x_J$ elementet

$$\wedge x_J = x_{j_1}\wedge\cdots\wedge x_{j_p} \in M^p.$$

Med denne notation gælder

SÆTNING. *Lad $M$ være en fri $R$-modul med basis $e_1, \dots, e_n$. Modulen $\Lambda^p M$ er da en fri modul med basis $\Lambda e_J$, hvor $J$ gennemløber alle delmængder $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ med $p$ elementer.*

Bevis. Det er klart, at de angivne elementer frembringer $\Lambda^p M$. At de udgør en fri basis er ensbetydende med, at der for hver given $R$-modul $P$ og hvert givet sæt $z_I$ af elementer i $P$ findes netop en $R$-homomorfi $: \Lambda^p M \to P$, så at $\Lambda e_I \longmapsto z_I$. Men da $R$-homomorfierne $: \Lambda^p M \to P$ svarer til de alternerende $p$-lineære afbildninger $: M \times \cdots \times M \to P$, er denne påstand netop indeholdt af sætning 4.5. □

5.4. Antallet af elementer i den fundne basis er $\binom{n}{p}$. Dette gælder også hvis $p > n$, idet vi for sådanne $p$ har $\Lambda^p M = 0$. Specielt ser vi, at antallet, $n$, af elementer i den givne basis kan karakteriseres som det største tal $p$, for hvilket $\Lambda^p M \neq 0$. Dette tal kaldes også *rangen* af den fri modul $M$.

For en fri $R$-modul af rang $n$ er altså $\Lambda^p M$ en fri $R$-modul af rang $\binom{n}{p}$. Dette gælder også for $p = 0$, idet vi definerer $\Lambda^0 M = R$.

Vi fremhæver, at der for en fri $R$-modul $M$ af rang $n$ gælder, at $\Lambda^n M$ er en fri $R$-modul af rang 1. Hvis $e_1, \dots, e_n$ er en basis for $M$, er

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \text{ en basis for } \Lambda^n M.$$

Skrives elementerne i et $n$-sæt $(x_1, \dots, x_n)$ som linearkombinationer af de givne basis elementer:

$$(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)\alpha,$$

hvor $\alpha \in \mathrm{Mat}_n(R)$, så er

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = (\det \alpha)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

5.5. Lad $f: M \to N$ være en $R$-homomorfi. For hvert $p$ er det klart, at der ved

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_p)$$

defineres en alternerende $p$-lineær afbildning:

$$M \times \cdots \times M \longrightarrow \Lambda^p N,$$

og denne afbildning kan entydigt udvides til en $R$-lineær afbildning, betegnet

$$\Lambda^p f : \Lambda^p M \longrightarrow \Lambda^p N.$$

Den udvidede afbildning er bestemt ved

$$\Lambda^p f : x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \longmapsto f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_p).$$

Det er let at se, at $\Lambda^p$ kan betragtes som en funktor

$$\Lambda^p : (R\text{-mod}) \longrightarrow (R\text{-mod}).$$

5.6. Er $M$ en fri $R$-modul af rang $n$, og er $f: M \to M$ en $R$-endomorfi, så bliver

$$\Lambda^n f : \Lambda^n M \longrightarrow \Lambda^n M$$

ligeledes en $R$-endomorfi. Da $\Lambda^n M$ er fri af rang $1$, er $\Lambda^n f$ en homoteti med et entydigt bestemt element i $R$. Dette element kaldes endomorfiens **determinant** og betegnes $\det f$.

Er $e_1, \dots, e_n$ en basis for $M$, og er $f$ i denne basis beskrevet ved matricen $\alpha_f$, så er

$$\det f = \det \alpha_f .$$

At matricen $\alpha_f$ i den givne basis beskriver endomorfien $f$ betyder jo at vi har

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (e_1, \dots, e_n)\,\alpha_f ,$$

og så er

$$\begin{aligned}(\overset{n}{\wedge} f)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_n) \\ &= (\det \alpha_f)\,(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n),\end{aligned}$$

og det følger, at homotetifaktoren er $\det \alpha_f$.

## 6. Den ydre algebra

6.1. SÆTNING. *Lad $M$ være en $R$-modul. For alle $p, q \geqslant 0$ findes en naturlig bilineær afbildning*

$$\Lambda^p M \times \Lambda^q M \longrightarrow \Lambda^{p+q} M$$

*således at*

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p\,,\ y_1 \wedge \cdots y_q) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q .$$

*for $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \in M$.*

Bevis. Elementer af formen $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ frembringer $\Lambda^p M$ og elementer af formen $y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$ frembringer $\Lambda^q M$. Heraf følger let, at der højst findes en bilineær afbildning af den betragtede art. Lad os vise eksistensen: En bilineær afbildning fra $\Lambda^p M \times \Lambda^q M$ svarer til en lineær afbildning fra $\Lambda^p M \underset{R}{\otimes} \Lambda^q M$. Vi søger altså en lineær afbildning

$$\Lambda^p M \underset{R}{\otimes} \Lambda^q M \longrightarrow \Lambda^{p+q} M,$$

således at

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \otimes (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$$

Vi har en oplagt lineær afbildning

$$f : \bigotimes{}^p M \otimes \bigotimes{}^q M \longrightarrow \Lambda^{p+q} M$$

defineret ved

$$f : (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_p) \longmapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$$

Nu var $\Lambda^p M$ en kvotient $\bigotimes^p M / \mathcal{R}_p$ hvor $\mathcal{R}_p$ er undermodulen i $\bigotimes^p M$ beskrevet i 5.1. Vi har altså en surjektiv homomorfi $u \longmapsto \textcircled{u}_p$ af $\bigotimes^p M \rightarrow \Lambda^p M$ med kerne $\mathcal{R}_p$. Tilsvarende har vi en surjektiv homomorfi $v \longmapsto \textcircled{v}_q$ af $\bigotimes^q M \rightarrow \Lambda^q M$ med kerne $\mathcal{R}_q$.
Af sætning følger derfor, at der ved

$$u \otimes v \longmapsto \textcircled{u}_p \otimes \textcircled{v}_q$$

definereres en surjektiv homomorfi

$$\bigotimes^p M \otimes \bigotimes^q M \longrightarrow \Lambda^p M \otimes \Lambda^q M,$$

hvis kerne består af de elementer i $\bigotimes^p M \otimes \bigotimes^q M$, der kan skrives som summer af elementer af formen

$$u \otimes v, \quad \text{hvor } u \in R_p \ \underline{\text{eller}} \ v \in R_q.$$

Vi ønsker at vise, at homomorfien $f: \bigotimes^p M \otimes \bigotimes^q M \to \Lambda^{p+q} M$ kan udvides til en homomorfi: $\Lambda^p M \otimes \Lambda^q M \to \Lambda^{p+q} M$. Hertil kræves, at $f$ forsvinder på ovenstående kerne, og det er klart ifølge beskrivelsen af denne kerne. □

6.2. Billedet i $\Lambda^{p+q} M$ af et element $(\varphi, \psi) \in \Lambda^p M \times \Lambda^q M$ kaldes **produktet** ("hak"-produktet) af $\varphi$ og $\psi$ og betegnes $\varphi \wedge \psi$. Er

$$\varphi = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \quad \text{og} \quad \psi = y_1 \wedge \cdots \wedge y_q,$$

har vi altså

$$\varphi \wedge \psi = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q.$$

6.3. Da afbildningen $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi$ er bilineær, er det indførte produkt specielt **distributivt** m.h.t. addition. Videre er det **associativt** i den forstand, at der for elementer

$$\varphi \in \Lambda^p M, \quad \psi \in \Lambda^q M \quad \chi \in \Lambda^r M$$

gælder

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \quad \text{i } \Lambda^{p+q+r} M.$$

Udnyttes distributiviteten reduceres det til tilfældet hvor

$$\varphi = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \quad \psi = y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \quad \chi = z_1 \wedge \cdots \wedge z_r,$$

og så får vi

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \wedge z_1 \wedge \cdots \wedge z_r$$

på begge sider af lighedstegnet.

Det er nu klart, hvorledes vi kan definere "hak"-produkter med flere faktorer. Specielt ser vi, at et element af formen $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \in \Lambda^p M$ er produktet af elementerne $y_1, \dots, y_p \in \Lambda^1 M = M$.

Det indførte produkt er ikke kommutativt, idet der tværtimod for elementer

$$\varphi \in \Lambda^p M \qquad \psi \in \Lambda^q M$$

gælder

$$\psi \wedge \varphi = (-1)^{pq} \varphi \wedge \psi .$$

Dette følger af at permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & q & q+1 & \cdots & q+p \\ p+1 & \cdots & p+q & 1 & \cdots & p \end{pmatrix}$$

har fortegnet $(-1)^{pq}$.

6.4. Med $\Lambda^{\cdot} M$ betegner vi den direkte sum

$$\Lambda^{\cdot} M = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p M = R \oplus M \oplus \Lambda^2 M \oplus \Lambda^3 M \oplus \cdots$$

Det er let at udvide "hak"-produktet til en distributiv komposition (også betegnet "$\wedge$") i $\Lambda^{\cdot} M$. Vi ser, at $\Lambda^{\cdot} M$ bliver en $R$-algebra. Den kaldes den ydre algebra over $M$.

**1. Repræsentationer og matrixrepræsentationer:** 1.1: Repræsentation af $G$ i $V$. 1.2: Repræsentation af $G$. 1.3: Matrixrepræsentationer. 1.4: $G$-lineær afbildning. Ækvivalente repræsentationer. 1.5: $G$-invariante underrum. Simpel repræsentation. 1.6: Reducibel og irreducibel repræsentation. 1.7: Dual repræsentation. Konjugeret repræsentation. Direkte sum, tensorprodukt og Hom-repræsentation. 1.8: Restriktion.

**2. Eksempler:** 2.1: Trivielle repræsentationer. 1-repræsentationen. Fix-vektor. 2.2: 1-dimensionale repræsentationer. Diagonaliserbare repræsentationer. 2.3: Repræsentationer af $\mathbb{Z}/3$. 2.4: Den regulære repræsentation. 2.5: Stabilisatorgrupper. 2.6: Simplexrepræsentationen af $S_{n-1}$. 2.7: Diedergruppen. 2.8: Oktaedergruppen $O$. 2.9: Nogle repræsentationer af $S_n$ og $A_n$. 2.10. Repræsentationer af $S_3$ og $A_3$. 2.11: Repræsentationer af $S_4$ og $A_4$.

**3. Moduler over $\mathbb{C}G$.** 3.1: Foldningsringen $\mathbb{C}G$. 3.2-3: Repræsentation af $G$ = endeligt frembragt $\mathbb{C}G$-modul. 3.4: Lemma. 3.5: Maschke's sætning. 3.6: Dekomposition i simple typer. 3.7: Schur's lemma. 3.8: Struktur af $\mathbb{C}G$. 3.9: $G = \mathbb{Z}/3$. 3.10: $G$ = diedergruppen $D_4$. 3.11: $G = S_3$ og $G = A_3$. 3.12: $G = S_4$ og $G = A_4$. 3.13: Repræsentationer af kommutativ gruppe. 3.14: Konjugertklasser. 3.15-16. Antal konjugertklasser = antal typer. 3.17: $S_3$ og $S_4$

**4: Karakterer og klassefunktioner:** 4.1-3: Spor af endomorfi. 4.4: Karakter af repræsentation. 4.5: Karakter af ækvivalente repræsentationer. 4.6-7: Dimension. 4.8-9: Karakter af dual, ... repræsentation. 4.10: Klassefunktioner. 4.11-4.18: Eksempler. 4.19: $\chi(g^i) = \zeta_1^i + \cdots + \zeta_m^i$. 4.20: $\chi^* = \overline{\chi}$. 4.21-23: Karakterrelationer. 4.24: Indre produkt i $\mathrm{Afb}(G,\mathbb{C})$. 4.25: Korollar. 4.26-28: Ortonormale baser for $cf(G)$.

# KOMPLEKSE REPRÆSENTATIONER AF ENDELIGE GRUPPER

I det følgende betegner G en endelig gruppe

## 1. Repræsentationer og matrixrepræsentationer.

1.1. Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum over de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$.

DEFINITION. Ved en *repræsentation af G i V* forstås en (gruppe)homomorfi

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} V.$$

Herved svarer altså til hvert element $g \in G$ en automorfi, ofte betegnet $g_V$, i vektorrummet $V$, og vi har

$$(gh)_V = g_V \circ h_V , \quad g, h \in G.$$

Vi siger også, at G *opererer* (lineært) på vektorrummet V.

Er $g \in G$, skriver vi for billedet $g_V(v)$ af en vektor $v \in V$ ofte $g.v$ eller blot $gv$.

1.2. DEFINITION. Ved en *repræsentation af G* forstås et et endeligdimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, i hvilket der er givet en repræsentation af G. Dette vektorrum kaldes repræsentationens *vektorrum*, og dets dimension kaldes *repræsentationens dimension*.

1.3. DEFINITION. Ved en matrixrepræsentation af $G$ af dimension $n$ forstås en homomorfi

$$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$$

af $G$ ind i den generelle lineære gruppe af invertible $(n \times n)$-matricer over $\mathbb{C}$.

Idet vi kan identificere gruppen $GL_n(\mathbb{C})$ med gruppen $Aut_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$, kan en matrixrepræsentation af $G$ opfattes som en repræsentation af $G$ i vektorrummet $\mathbb{C}^n$.

Er der givet en basis i et $n$-dimensionalt vektorrum $V$, kan vi identificere $Aut_{\mathbb{C}}(V)$ med $GL_n(\mathbb{C})$. Herved svarer repræsentationerne af $G$ i $V$ til matrixrepræsentationerne af $G$ af dimension $n$.

1.4. DEFINITION. Lad der være givet repræsentationer af $G$ i vektorrummene $U$ og $V$. En lineær afbildning

$$f : U \to V$$

kaldes G-lineær (eller G-invariant), hvis der gælder

$$f \circ g_U = g_V \circ f , \qquad g \in G.$$

Dette kan også udtrykkes

$$f(g.u) = g.f(u) , \qquad u \in U, \ g \in G.$$

Hvis $f$ desuden er bijektiv, siger vi, at $f$ er en G-isomorfi. Er dette tilfældet, er den inverse afbildning $f^{-1} : V \to U$ ligeledes G-lineær.

Vi siger, at repræsentationerne i $U$ og $V$ er ækvivalente, hvis der findes en G-isomorfi

$$f : U \xrightarrow{\sim} V.$$

To matrixrepræsentationer $\rho$ og $\sigma$ af $G$ kaldes ækvivalente, hvis de tilhørende repræsentationer af $G$ i $\mathbb{C}^n$ er ækvivalente. Dette betyder, at der findes en invertibel matrix $\alpha \in GL_n(\mathbb{C})$, således at

$$\sigma(g) = \alpha\,\rho(g)\,\alpha^{-1}, \qquad g \in G$$

SÆTNING. *Lad $U$ og $V$ være ækvivalente repræsentationer af $G$. For hvert $g \in G$ har endomorfierne $g_U \in End_{\mathbb{C}}(U)$ og $g_V \in End_{\mathbb{C}}(V)$ det samme karakteristiske polynomium. Specielt har de samme determinant og samme spor.*

Bevis. I følge forudsætningen findes en isomorfi $f : U \to V$, således at

$$f \circ g_U = g_V \circ f.$$

Vælges baser i $U$ og $V$, hører der til $g_U, g_V$ og $f$ matricer $\underline{\underline{g}}_U, \underline{\underline{g}}_V$ og $\underline{\underline{f}}$, og vi har

$$\underline{\underline{g}}_V = \underline{\underline{f}}\,\underline{\underline{g}}_U\,\underline{\underline{f}}^{-1}$$

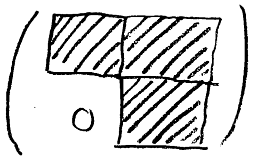
Det karakteristiske polynomium kan fås udfra matricen, og påstanden følger af at matricerne $\underline{\underline{g}}_U$ og $\underline{\underline{f}}\,\underline{\underline{g}}_U\underline{\underline{f}}^{-1}$ har samme karakteristiske polynomium. ▨

1.5. DEFINITION. Lad $V$ være en repræsentation af $G$. Et underrum $U \subseteq V$ kaldes *G-invariant*, hvis der for alle $g \in G$ gælder $g_V(U) \subseteq U$. Hvert $g \in G$ definerer da ved restriktion en automorfi $g_U$ i $U$, og vi får en repræsentation

$$G \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(U).$$

Hvis $V$ kun har de *trivielle* $G$-invariante underrum $(0)$ og $V$, og $V \neq (0)$, siger vi, at $V$ er en *simpel* repræsentation af $G$.

At en repræsentation $V$ af $G$ ikke er simpel, er ensbetydende med at den er ækvivalent med en matrixrepræsentation : $G \to GL_n(\mathbb{C})$, hvor matricerne $\underline{g}$ alle har samme form

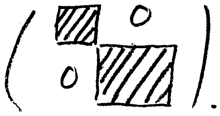


Dette indses ved at vælge en basis i et ikke-trivielt $G$-invariant underrum, og supplere til en basis for $V$.

1.6. DEFINITION. En repræsentation $V$ af $G$ kaldes *reducibel*, hvis der findes to ikke-trivielle $G$-invariante underrum $V_1, V_2$ i $V$, således at

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

Dette ses let at være ensbetydende med, at repræsentationen er ækvivalent med en matrixrepræsentation : $G \to GL_n(\mathbb{C})$, hvor matricerne $\underline{g}$ alle har samme form



Ofte medregnes vektorrummet (0) til de reducible repræsentationer. Som vi senere skal se, er de simple repræsentationer netop de ikke-reducible. De kaldes derfor også *irreducible* repræsentationer.

1.7. Ud fra givne repræsentationer af $G$ kan vi danne nye:

Er $V$ en repræsentation af $G$, kan vi danne: den *duale repræsentation $V^*$*: Vektorrummet er vektorrummet $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ af linearformer på $V$, og $G$ opererer herpå ved

$$g\cdot\xi = \xi\circ g_V^{-1}, \quad g\in G,\ \xi\in V^*.$$

Endvidere kan vi danne den *konjugerede repræsentation $\bar V$*: Vektorrummet er det konjugerede vektorrum $\bar V$ [defineret udfra $V$ ved at erstatte den givne multiplikation med skalar: $\mathbb{C}\times V\to V$, betegnet $(\alpha,v)\mapsto \alpha v$, med en ny, betegnet $(\alpha,v)\longmapsto \alpha \underset{k}{\cdot} v$ defineret ved $\alpha\underset{k}{\cdot} v = \bar\alpha v$]. Operationen af $G$ på $\bar V$ er den samme som på $V$.

Er $U$ endnu en repræsentation af $G$, kan vi danne:

*Den direkte sum $U\oplus V$*: Vektorrummet er den direkte sum $U\oplus V$, og operationen af $G$ er bestemt ved

$$g\cdot(u,v) = (g\cdot u,\ g\cdot v), \quad g\in G,\ (u,v)\in U\oplus V.$$

*Tensorproduktet $U\otimes V$*: Vektorrummet er tensorproduktet $U\underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$, og operationen af $G$ her er bestemt ved

$$g\cdot(u\otimes v) = g\cdot u\otimes g\cdot v, \quad g\in G,\ u\in U, v\in V.$$

*Hom-repræsentationen $\mathrm{Hom}(U,V)$*: Vektorrummet er vektorrummet $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$ af lineære afbildninger $\varphi: U\to V$, og operationen af $G$ her er bestemt ved

$$g\cdot\varphi = g_V\circ\varphi\circ g_U^{-1}, \quad g\in G,\ \varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V).$$

Det ses, at

$$\dim V^* = \dim\bar V = \dim V,$$

$$\dim(U\oplus V) = \dim U + \dim V$$

$$\dim(U\otimes V) = \dim\mathrm{Hom}(U,V) = (\dim U)(\dim V).$$

1.8. Lad $\varphi: H \to G$ være en (gruppe) homomorfi. Ud fra en repræsentation $V$ af $G$ får vi ved sammensætning

$$H \xrightarrow{\varphi} G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$$

en repræsentation af $H$. Den betegnes $V_\varphi$. Er $\varphi$ en inklusionshomomorfi ($H$ er en undergruppe i $G$) bruges også betegnelsen $V_{/H}$, og $V_{/H}$ kaldes <u>restriktionen</u> af den givne repræsentation til $H$.

## 2. Eksempler

2.1. Den triviélle repræsentation af $G$ i et vektorrum $V$ er givet at homomorfien $: G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ er den trivielle $(g \mapsto 1_V)$. Vi har altså
$$g.v = v \quad \text{for} \quad g \in G,\ v \in V.$$

Den trivielle repræsentation af $G$ i $\mathbb{C}$ kaldes 1-repræsentationen og betegnes $\mathbb{C}_1$. At $V$ er en triviel repræsentation af $G$ er ensbetydende med at $V$ er ækvivalent med en direkte sum
$$\mathbb{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_1.$$

Er $V$ en vilkårlig repræsentation af $G$, kan vi i $V$ betragte mængden $V^G$ af fixvektorer, dvs elementer $v \in G$, som opfylder
$$g.v = v \quad \text{for alle } g \in G.$$
Det er let at se, at $V^G \subseteq V$ er et invariant underrum, og at repræsentationen af $G$ heri er triviel.

2.2. De 1-dimensionale repræsentationer: De 1-dimensionale matrixrepræsentationer er givet ved homomorfier $: G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Til en sådan homomorfi $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ hører altså en repræsentation betegnet $\mathbb{C}_\chi$ af $G$, hvis vektorrum er $\mathbb{C}$, og hvori operationen af $G$ er givet ved
$$g.z = \chi(g)z \quad , \quad g \in G,\ z \in \mathbb{C}.$$
For ethvert 1-dimensionalt vektorrum $V$ har vi $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) = \mathbb{C}^*$. Det følger let, at hver 1-dimensional repræsentation $V$ af $G$ er ækviva-

lent med et $\mathbb{C}_\chi$, hvor homomorfien $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ er entydigt bestemt. Det er klart, at en 1-dimensional repræsentation af $G$ er simpel.

En repræsentation $V$ af $G$ kaldes *diagonaliserbar*, hvis den er ækvivalent med en matrixrepræsentation : $G \to GL_n(\mathbb{C})$, hvor matricerne ~~g~~ alle er diagonalmatricer. Dette er ensbetydende med at $V$ er ækvivalent med en direkte sum af 1-dimensionale repræsentationer.

2.3. *Repræsentationer af $\mathbb{Z}/3$.* Idet $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ er en tredie enhedsrod, har vi homomorfien $\chi : \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{C}^*$ givet ved $n \mapsto \zeta^n$. Videre har vi homomorfien $\bar{\chi} : \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{C}^*$ (bestemt ved $n \mapsto \zeta^{-n}$), og det er let at se, at $1, \chi, \bar{\chi}$ er samtlige homomorfier: $\mathbb{Z}/3 \to \mathbb{C}^*$. Vi har således tre 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_\chi, \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ af $\mathbb{Z}/3$.

Drejningen på $+\frac{2\pi}{3}$ i $\mathbb{R}^2$ svarer til en matrix $\delta \in Mat_2(\mathbb{R})$. Opfattes $\delta$ som komplex matrix, får vi en repræsentation $n \mapsto \delta^n$

$$\mathbb{Z}/3 \to Mat_2(\mathbb{C})$$

af dimension 2. Den ses let at være ækvivalent med den direkte sum $\mathbb{C}_\chi \oplus \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$.

Lader vi $\mathbb{Z}/3$ operere i $\mathbb{C}^3$ ved cyklisk at permutere koordinaterne, får vi en tredimensional repræsentation af $\mathbb{Z}/3$. Den er ækvivalent med $\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_\chi \oplus \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$.

2.4. *Den regulære repræsentation af $G$.* Til den givne gruppe $G$ af orden $|G|$ betragter vi et vektorrum $V$ af dimension $|G|$ med en basis $e_h$, $h \in G$, hvis elementer svarer til elementerne i $G$ ( $V$ er den fri $\mathbb{C}$-modul $\mathbb{C}^G$ frembragt af mængden $G$). Vi lader $G$ operere på $V$ ved at permutere vektorerne i denne basis, således at

$$g . e_h = e_{gh} \quad , \quad g, h \in G$$

Vektoren $\sum_{h \in G} e_h \in V$ er fixvektor. Den frembringer et 1-dimensionalt invariant underrum.

2.5. *Stabilisatorgrupper*. Er der i et (reelt eller komplekst) vektorrum $W$ givet en delmængde $S$, vil mængden af automorfier $\alpha \in Aut(W)$, som opfylder $\alpha(S) = S$, udgøre en undergruppe $G_S \subseteq Aut(W)$, *stabilisatorgruppen* for $S$. Er delmængden $S$ endelig, og er dens rang lig med dimensionen af $V$, bliver stabilisatorgruppen $G_S$ endelig. Vi kan nemlig udtage en basis $e_1, \dots, e_n \in S$; enhver endomorfi er da bestemt ved sine billeder $\alpha e_1, \dots, \alpha e_s$. Er $\alpha \in G_S$, må disse billeder tilhøre $S$, så der er kun endelig mange muligheder. Hvis vektorrummet $W$ er komplekst, har vi

$$G_S \hookrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(W),$$

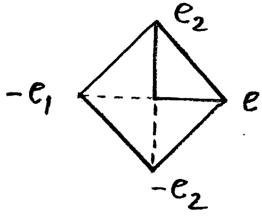
og dermed en repræsentation af $G_S$ i $W$. Er vektorrummet reelt, kan vi vælge en basis, hvorved fås en isomorfi $Aut_{\mathbb{R}}(W) \simeq GL_n(\mathbb{R})$. Vi får herved matrixrepræsentationer

$$G_S \hookrightarrow Aut_{\mathbb{R}}(W) \approx GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C}).$$

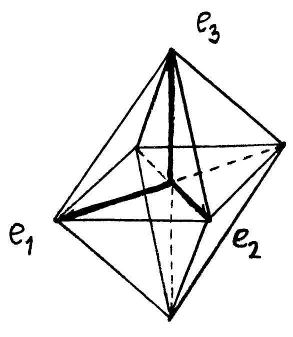
2.6. Hvis $W$ har dimension $n-1$, og hvis $S = \{p_1, \cdots, p_n\}$ består af hjørnerne i et $(n-1)$-simplex (dvs. $S$ har rang $n-1$ og $p_1 + \cdots + p_n = 0$), bliver $G_S$ *simplexgruppen*. Som bekendt svarer elementerne $\alpha \in G_S$ helt til de tilsvarende permutationer af hjørnerne $p_1, \cdots, p_n$: Vi har en isomorfi af den symmetriske gruppe: $S_n \simeq G_S$, og får således en $(n-1)$-dimensional repræsentation af $S_n$, kaldet *simpleksrepræsentationen*

2.7. Hvis $W = \mathbb{R}^2$, og hvis $S = \{\pm e_1, \pm e_2\}$, hvor $e_1$ og $e_2$ er den kanoniske basis, bliver $G_S$ *diedergruppen* $D_4 \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ bestående af de automorfier $\alpha$, der afbilder et kvadrat på sig selv. $D_4$ har $4 \cdot 2 = 8$ elementer. (4 muligheder for $\alpha e_1$, for hver af disse 2 muligheder for $\alpha e_2$). De er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



2.8. Hvis $W = \mathbb{R}^3$, og hvis $S = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$, hvor $e_1, e_2, e_3$ er den kanoniske basis, bliver $G_S$ den *uegentlige oktaedergruppe* $\tilde{O} \subseteq GL_3(\mathbb{R})$ bestående af de automorfier, der afbilder oktaedret på sig selv.



Det ses, at $\tilde{O}$ får $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ elementer. Videre ses, at automorfierne i $\tilde{O}$ har determinant $\pm 1$, så vi får en undergruppe $O \subseteq \tilde{O}$ af index 2, bestående af de automorfier i $O$, der har determinant 1. Gruppen $O$ kaldes _oktaedergruppen_. Dens orden er $48 : 2 = 24$.

I oktaedret kan vi betragte de fire "midtnormaler" $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ (linier gennem modstående sideflades midtpunkter). Disse linier er 1-dimensionale underrum i $\mathbb{R}^3$ bestemt ved vektorerne $\ell_1 : n_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\ell_2 : n_2 = -e_1 + e_2 + e_3$, $\ell_3 : n_3 = -e_1 - e_2 + e_3$, $\ell_4 : n_4 = e_1 - e_2 + e_3$. Enhver automorfi $\alpha \in O$ vil permutere disse fire linier. Herved fås en homomorfi:

$$O \longrightarrow S_4$$

At $\alpha$ ligger i kernen for denne homomorfi betyder, at hver af linierne $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ ved $\alpha$ afbildes på sig selv, altså at hver af vektorerne $n_1, n_2, n_3, n_4$ er egenvektor for $\alpha$. Nu ses det let, at de eneste automorfier i $GL_3(\mathbb{R})$, der kan have disse fire vektorer som egenvektorer er 1 og $-1$. Da elementerne i $O$ har determinant 1 er $-1$ udelukket, så vi slutter, at homomorfiens kerne kun består af 1, og dermed, at $O \to S_4$ er en injektiv homomorfi. Da de to grupper har samme orden, nemlig 24, slutter vi endelig, at homomorfien er en isomorfi: $O \simeq S_4$. _Oktaedergruppen $O$ er således isomorf med den symmetriske gruppe $S_4$._ Vi får heraf en repræsentation

$$S_4 \approx O \hookrightarrow GL_3(\mathbb{R}) \subseteq GL_3(\mathbb{C}),$$

der kaldes _oktaederrepræsentationen af $S_4$._

2.9. _Nogle repræsentationer af $S_n$ og $A_n$._ Vi har 1-repræsentationen $\mathbb{C}_1$ og _fortegnsrepræsentationen_ $\mathbb{C}_{sign}$ (defineret ved homomorfien $\mathrm{sign} : S_n \to \mathbb{C}^*$.)

Den symmetriske gruppe $S_n$ opererer på $\mathbb{C}^n$ ved at permutere de kanoniske basisvektorer $e_1, \dots, e_n$. Herved fås en $n$-dimensional repræsentation af $S_n$, *den naturlige repræsentation*. Vektoren $e_1 + \dots + e_n$ er øjensynlig fixvektor, og frembringer et 1-dimensionalt invariant underrum, ækvivalent med 1-repræsentationen. Underrummet $W$ i $\mathbb{C}^n$ med ligningen $x_1 + \dots + x_n = 0$ ses ligeledes at være et invariant underrum. Repræsentationen af $S_n$ heri er ækvivalent med simplexrepræsentationen af $S_n$ (betragt $S = \{p_1, \dots, p_n\}$, hvor $p_i = e_i - \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$, jfr. 2.6). Den naturlige repræsentation af $S_n$ er således ækvivalent med den direkte sum af 1-repræsentationen og simplexrepræsentationen. Det er ikke svært at vise, at *simplexrepræsentationen $W$ er en simpel præsentation af $S_n$*.
[et $S_n$-invariant underrum $U \neq 0$ i $W$ må indeholde en vektor $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \neq 0$. Da $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, findes $\lambda_i$ og $\lambda_j$ således at $\lambda_i \neq \lambda_j$. Anvendes en permutation i $S_n$, får vi stadig en vektor i $U$. Vi kan derfor antage, at $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Anvendes transpositionen $t = (1,2) \in S_n$, ser vi, at også $t.v = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1 + \lambda_3 e_3 + \dots + \lambda_n e_n \in U$. Nu slutter vi, at også $v - t.v = (\lambda_1 - \lambda_2)(e_1 - e_2) \in U$, og dermed, at $e_1 - e_2 \in U$. Tilsvarende får vi, at $e_1 - e_j \in U$, $j = 2, \dots, n$, og da disse vektorer er en basis for $W$, må vi have $U = W$ ▨ ]

For repræsentationerne af $S_n$ kan vi betragte restriktionerne til undergruppen $A_n$ (den alternerende gruppe). Herved fås 1-repræsentatationen, den $n$-dimensionale naturlige repræsentation og den $(n-1)$-dimensionale simplexrepræsentation af $A_n$. Det er kun lidt mere omstændeligt at vise, at *simplexrepræ-*

*sentationen er en simpel repræsentation af $A_n$ for $n \geq 4$.* $\square$

2.10. *Repræsentationer af $S_3$ og $A_3$:* Vi har de 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1$ og $\mathbb{C}_{sign}$ af $S_3$. Simplexrepræsentationen af $S_3$ er den 2-dimensionale trekantsrepræsentation. Den er simpel. Den alternerende gruppe $A_3$ er cyklisk af orden 3. Vi har tre 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_\chi, \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ af $A_3$ (jfr. 2.3). Restriktionen af trekantsrepræsentationen til $A_3$ er *ikke* simpel. Den er ækvivalent med den direkte sum $\mathbb{C}_\chi \oplus \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ (jfr. 2.3).

2.11. *Repræsentationer af $S_4$ og $A_4$.* Vi har de 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1$ og $\mathbb{C}_{sign}$ af $S_4$. Simplex repræsentationen af $S_4$ er den 3-dimensionale *tetraederrepræsentation*. Den er simpel. Videre har vi den 3-dimensionale *oktaederrepræsentation (2.8)*, der let kan vises ligeledes at være simpel. Vi bemærker her, at tetraederrepræsentationen og oktaederrepræsentationen er *ikke-ækvivalente* repræsentationer af $S_4$. Dette følger af at $S_4$ i oktaederrepræsentationen opererer ved automorfier, der alle har determinant 1, hvorimod de tilsvarende determinanter ved tetraederrepræsentationen netop er fortegnene for permutationerne. (cfr. sætning 1.4).

Endelig får vi en 2-dimensional repræsentation, *"trekantsrepræsentationen"* af $S_4$, på følgende måde: Der findes en surjektiv homomorfi:

$$S_4 \longrightarrow S_3.$$

[Eksistensen heraf indses måske lettest ved at betragte isomorfien $S_4 \simeq O$. Hver automorfi $\alpha$ i oktaedergruppen $O$ vil permutere de tre koordinatakser. Det er let at se, at den herved definerede homomorfi : $O \to S_3$ er surjektiv ].

Ud fra den simple trekantsrepræsentation af $S_3$: $S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ får vi ved sammensætning:

$$S_4 \to S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$$

trekantsrepræsentationen af $S_4$, som igen bliver en simpel repræsentation.

Ved restriktion får vi repræsentationer af $A_4$: Her gælder imidlertid, at tetraederrepræsentationen og oktaederrepræsentationen er ækvivalente repræsentationer af $A_4$. (Vises senere).

Videre har vi naturligvis 1-repræsentationen $\mathbb{C}_1$ af $A_4$. Og endelig får vi yderligere to 1-dimensionale repræsentationer af $A_4$, idet homomorfien $S_4 \to S_3$ ses at definere en surjektiv homomorfi $A_4 \to A_3$, således at vi ved sammensætning:

$$A_4 \to A_3 \underset{\overline{\chi}}{\overset{\chi}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}^*$$

får repræsentationer $\mathbb{C}_\chi$ og $\mathbb{C}_{\overline{\chi}}$ af $A_4$.

## 3. Moduler over $\mathbb{C}G$.

3.1. Vi minder om, at foldningsringen $\mathbb{C}[G]$ består af formelle summer

$$\lambda = \sum_{g\in G} \lambda_g g , \qquad \lambda_g \in \mathbb{C}.$$

Er $\mu = \sum_g \mu_g g$ endnu et element i $\mathbb{C}[G]$, er summen $\lambda+\mu$ givet ved

$$\lambda+\mu = \sum_g (\lambda_g+\mu_g) g$$

og produktet $\lambda\mu$ er givet ved

$$\lambda\mu = \sum_g \Big( \sum_{g_1 g_2 = g} \lambda_{g_1}\mu_{g_2} \Big) g$$

Foldningsringen $\mathbb{C}[G]$ kaldes også grupperingen (eller gruppealgebraen) over $\mathbb{C}$; den betegnes i det følgende $\mathbb{C}G$. Den indeholder $G$, og det neutrale element $1\in G$ er et-elementet i $\mathbb{C}G$. Videre er den en algebra over $\mathbb{C}$. Dens dimension som vektorrum over $\mathbb{C}$ er $|G|$, idet elementerne $g$, $g\in G$ er en basis.

3.2. Er der givet en repræsentation af $G$ i et endelig dimensionalt vektorrum $V$ over $\mathbb{C}$, kan vi definere en komposition $\mathbb{C}G \times V \to V$ ved at vi for

$$\lambda = \sum_g \lambda_g g \in G \qquad v \in V$$

sætter

$$\lambda v = \sum_g \lambda_g g.v$$

Det er let at se, at $V$ herved organiseres som $\mathbb{C}G$-modul. Homotetien $\lambda_V$ i i denne modul er altså endomorfien

$$\lambda_V = \sum_g \lambda_g g_V .$$

[Det ses, at afbildningen $\lambda \mapsto \lambda_V$ er udvidelsen af den multiplikative afbildning

$$G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

til en $\mathbb{C}$-algebra homomorfi

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}G \arrow[r] & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \\
\mathbb{C} \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

]

For hvert element $\alpha \in \mathbb{C}$ kan vi betragte det tilhørende element $\alpha 1 \in \mathbb{C}G$. Det ses, at vi har

$$(\alpha 1) v = \alpha v , \quad v \in V.$$

Det følger specielt, at et $\mathbb{C}$-frembringersystem for vektorrummet $V$ vil være et $\mathbb{C}G$-frembringersystem for $\mathbb{C}G$-modulen $V$. Vi kan altså opfatte $V$ som en endeligt frembragt $\mathbb{C}G$-modul.

Lad der omvendt være givet en endeligt frembragt $\mathbb{C}G$-modul $V$. Vi har da ringhomomorfien $\lambda \mapsto \lambda_V$ af

$$\mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V).$$

Idet vi for et element $\alpha \in \mathbb{C}$ og et element $v \in V$ sætter $\alpha v = (\alpha 1)_V (v)$, hvor $\alpha 1$ er det til $\alpha$ svarende element i $\mathbb{C}G$, organiseres $V$ som vektorrum over $\mathbb{C}$. Det ses, at afbildningen : $\mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$ afbilder *ind i* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ [idet vi har $(\alpha 1)\lambda = \lambda(\alpha 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}G, \alpha \in \mathbb{C}$] For hvert $g \in G$ er $g_V$ således endomorfi, og – idet $g_V \circ (g^{-1})_V = (gg^{-1})_V = 1_V$ – endda en automorfi. Afbildningen $g \mapsto g_V$ er således en gruppehomomorfi:

$$G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$$

Endelig er $V$ et endeligdimensionalt vektorrum, thi er $v_1, \dots, v_r$ et $\mathbb{C}G$-frembringersystem for $\mathbb{C}G$-modulen $V$, så er elementerne $g.v_i$, $g \in G$, $i = 1, \dots, r$ et $\mathbb{C}$-frembringersystem for vektorrummet $V$.

Vi får derfor følgende

KONKLUSION. *En repræsentation af $G$ er "det samme som" en endeligt frembragt $\mathbb{C}G$-modul.*

Yderligere er det klart, at

*et $G$-invariant underrum i en repræsentation $V$ (definition 1.5) er det samme som en $\mathbb{C}G$-undermodul i $V$*, og at

*en $G$-lineær afbildning $f : U \to V$ (def. 1.4) mellem repræsentationer er det samme som en $\mathbb{C}G$-lineær afbildning mellem $\mathbb{C}G$-moduler.*

Specielt ser vi, at

*ækvivalens af repræsentationer svarer til isomorfi af $\mathbb{C}G$-moduler*, og at

*simple repræsentationer svarer til simple $\mathbb{C}G$-moduler.*

3.3. Studiet af repræsentationer af $G$ henføres altså til studiet af endeligt frembragte moduler over ringen $\mathbb{C}G$. Det er klart, at ringen $\mathbb{C}G$ har endelig længde, idet dens venstreidealer specielt er underrum i vektorrummet $\mathbb{C}G$, altså

$$\mathrm{long}\, \mathbb{C}G \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G = |G|.$$

Vi bemærker, at $\mathbb{C}G$-modulen $\mathbb{C}G_s$ svarer til den regulære repræsentation af $G$.

3.4 LEMMA. *Lad $U$ og $V$ være repræsentationer af $G$, og lad $\varphi : U \to V$ være en $\mathbb{C}$-lineær afbildning. Afbildningen*

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g_V^{-1} \circ \varphi \circ g_U \quad : U \to V$$

*er da $\mathbb{C}G$-lineær.*

Bevis. Vi skal vise, at der for hvert element $h \in G$ gælder $\tilde{\varphi} \circ h_U = h_V \circ \tilde{\varphi}$. Vi finder

$$\begin{aligned}
h_V \circ \tilde{\varphi} &= \frac{1}{|G|} \sum_g h_V \circ g_V^{-1} \circ \varphi \circ g_U \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g h_V \circ (gh)_V^{-1} \circ \varphi \circ (gh)_U \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g h_V \circ h_V^{-1} \circ g_V^{-1} \circ \varphi \circ g_U \circ h_U \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g g_V^{-1} \circ \varphi \circ g_U \circ h_U \\
&= \tilde{\varphi} \circ h_U \quad ▨
\end{aligned}$$

3.5. Heraf fås hovedsætningen, der kaldes

MASCHKE'S SÆTNING. *Gruppe ringen $\mathbb{C}G$ er semisimpel.*

Bevis. Vi skal vise, at hver undermodul $V$ i en $\mathbb{C}G$-modul $U$ er direkte summand. Hertil er det nok at finde en $\mathbb{C}G$-lineær afbildning $p : U \to V$, således at

$$p \circ i = 1_V ,$$

hvor $i : V \hookrightarrow U$ er inklusionsafbildningen. Som vektorrum over $\mathbb{C}$ er $V$ et underrum i $U$. Der findes derfor en $\mathbb{C}$-lineær afbildning $\pi : U \to V$, således at $\pi \circ i = 1_V$. Ifølge lemmaet er afbildningen

$$p = \mathring{\pi} = \frac{1}{|G|}\sum_g g_V^{-1} \circ \pi \circ g_U \ : \ U \to V$$

en $\mathbb{C}G$-lineær afbildning. Da $i : V \to U$ er $\mathbb{C}G$-lineær, har vi $g_U \circ i = i \circ g_V$, og vi finder nu

$$\begin{aligned} p \circ i &= \frac{1}{|G|}\sum_g g_V^{-1} \circ \pi \circ g_U \circ i \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_g g_V^{-1} \circ \pi \circ i \circ g_V \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_g g_V^{-1} \circ 1_V \circ g_V = \frac{1}{|G|}\sum_g 1_V \\ &= 1_V, \end{aligned}$$

som ønsket. ▨

Heraf følger:

3.6. Til den givne gruppe $G$ kan vi udtage endelig mange simple repræsentationer $T_1, \dots, T_p$ (de simple typer), således at enhver simpel repræsentation af $G$ er isomorf med netop en af $T_i$'erne. Enhver repræsentation $U$ af $G$ er da isomorf med en direkte sum

$$U \simeq T_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{m_p}$$

og tallene $m_i \geq 0$ er entydigt bestemte.

Specielt har vi for den regulære repræsentation en isomorfi

$$\mathbb{C}G_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p} \quad , \quad n_i \geq 1.$$

3.7. Inden vi udnytter struktursætningen for semisimple ringe, vil vi undersøge, hvad Schur's lemma udsiger i dette konkrete tilfælde

SCHURS LEMMA. *Hvis $T$ er en simpel repræsentation af $G$, gælder*

$$\underline{\mathrm{End}_G(T) = \mathbb{C}.}$$

*Hvis $S$ er endnu en simpel repræsentation af $G$, der ikke er isomorf med $T$, gælder*

$$\underline{\mathrm{Hom}_G(S,T) = 0.}$$

Bevis. I følge det "almindelige" Schurs lemma er kommutanten $D = \mathrm{End}_G(T) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}G}(T)$ for den simple $\mathbb{C}G$-modul $T$ et skævlegeme. Dette skævlegeme indeholder $\mathbb{C}$ i sit centrum(!) og det er endelig dimensionalt som vektorrum over $\mathbb{C}$. Heraf følger imidlertid, at $\mathbb{C} = D$! [Lad $\varphi \in D$. Vi kan da betragte delalgebraen $\mathbb{C}[\varphi] \subseteq D$, og vi har en surjektiv homomorfi : $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[\varphi]$. Da $\mathbb{C}[\varphi] \subseteq D$, er $\mathbb{C}[\varphi]$ endelig dimensional over $\mathbb{C}$, så kernen er frembragt af et *egentligt* polynomium $f$. Da $\mathbb{C}[\varphi] \subseteq D$, er $\mathbb{C}[\varphi]$ et integritetsområde, og det følger, at $f$ er et irreducibelt polynomium. Nu følger endelig af algebraens fundamentalsætning, at $f$ er 1ste grads polynomium, og dermed, at $\varphi \in \mathbb{C}$ ]

Den sidste påstand følger som bekendt af at enhver homomorfi : $S \to T$, forskellig fra 0-homomorfien, må være en isomorfi ▨

3.8. Anvender vi nu struktursætningen ("endelighedsbetingelser", sætning 3.17) får vi

SÆTNING. Lad $T_1, \dots, T_p$ være de simple typer af repræsentationer af $G$, da gælder

(1) Gruppeiringen $\mathbb{C}G$ har endelig længde, og for den regulære repræsentation findes en isomorfi
$$\mathbb{C}G_s \simeq T_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus T_p^{n_p},$$
hvor $n_\mu$'erne er entydigt bestemte. Vi har
$$\operatorname{long} \mathbb{C}G = n_1 + \cdots + n_p.$$

(2) Kommutanten $\operatorname{End}_G(T_\mu)$ er $\mathbb{C}$, og
$$\dim_{\mathbb{C}} T_\mu = n_\mu$$

(3) De ved homotetierne i $T_\mu$ bestemte ringhomomorfier: $\mathbb{C}G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(T_\mu)$ er surjektive, og de giver en isomorfi
$$\mathbb{C}G = \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(T_1) \times \cdots \times \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(T_p).$$

(4) Der findes en isomorfi
$$\mathbb{C}G \simeq \operatorname{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \operatorname{Mat}_{n_p}(\mathbb{C}),$$
og
$$|G| = n_1^2 + \cdots + n_p^2.$$

Bevis. Kun (4) kræver en bemærkning: Den søgte isomorfi fås af isomorfien i (3) ved at vælge en $\mathbb{C}$-basis i hvert $T_\mu$. Et sådant valg giver jo en isomorfi $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(T_\mu) \simeq \operatorname{Mat}_{n_\mu}(\mathbb{C})$. Ligningen $|G| = n_1^2 + \cdots + n_p^2$ fås nu ved at sammenligne dimensioner over $\mathbb{C}$ på begge sider i isomorfien i (1) (eller i (4)). ▨

3.9. Tilbage står nu problemet til en given gruppe $G$ at bestemme samtlige simple typer af repræsentationer. Vi anfører en række eksempler:

De 1-dimensionale simple typer af repræsentationer af $G$ svarer til homomorfierne : $G \to \mathbb{C}^*$. (jfr. 2.2). For en cykliske gruppe $\mathbb{Z}/3$ fandt vi 3 homomorfier $1, \chi, \bar{\chi} : \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{C}^*$ svarende til simple 1-dimensionale typer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_\chi, \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$ (2.3.). Da

$$|\mathbb{Z}/3| = 3 = 1^2 + 1^2 + 1^2,$$

er disse altså samtlige simple typer af repræsentationer af $\mathbb{Z}/3$.

3.10. For diedergruppen $D_4$ af orden 8 fandt vi i 2.7 en 2-dimensional repræsentation, som let vises at være simpel. Den eneste mulighed for at skrive $|D_4| = 8$ på formen $n_1^2 + \dots + n_p^2$ bliver nu

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2.$$

Udover den fundne simple 2-dimensionale repræsentation af $D_4$ er der altså fire 1-dimensionale. (hvoraf den ene er $\mathbb{C}_1$). De findes let! □

3.11. For den symmetriske gruppe $S_3$ fandt vi i 2.10 de to 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1$ og $\mathbb{C}_{sign}$ samt den simple 2-dimensionale trekantsrepræsentation. Da $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$,
er disse netop de simple typer.

For den alternerende gruppe $A_3$ har vi $A_3 \simeq \mathbb{Z}/3$, så $A_3$ har tre simple typer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_\chi, \mathbb{C}_{\bar{\chi}}$, jfr. 3.9.

3.12. For den symmetriske gruppe $S_4$ fandt vi (jfr. 2.11) to 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_{sign}$. Videre fandt vi den 2-dimensionale "trekantsrepræsentation" $V_{tri}$, der var simpel, samt to 3-dimensionale repræsentationer, tetraederrepræsentationen $V_{tetra}$ og oktaederrepræsentationen $V_{oct}$, der ligeledes var simple. Videre så vi, at $V_{tetra}$ og $V_{oct}$ ikke var ækvivalente. Da

$$|S_4| = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$$

følger det, at de nævnte repræsentationer er samtlige simple typer af repræsentationer af $S_4$. Som en simpel anvendelse heraf kan vi vise: Oktaederrepræsentationen er tensorproduktet af fortegnsrepræsentationen og tetraederrepræsentationen: $V_{oct} \approx \mathbb{C}_{sign} \otimes V_{tetra}$: thi repræsentationen $\mathbb{C}_{sign} \otimes V_{tetra}$ er – som $V_{tetra}$ – en 3-dimensional simpel repræsentation af $S_4$. Den er ikke isomorf med $V_{tetra}$ (indses ved at betragte determinanterne), og den må følgelig være isomorf med den anden simple type, altså med $V_{oct}$.

For den alternerende gruppe $A_4$ fandt vi ved restriktion den simple 3-dimensionale repræsentation $V_{tetra}$ (og af isomorfien ovenfor følger straks, at $V_{oct}$ og $V_{tetra}$ er isomorfe repræsentationer af $A_4$). Videre fandt vi tre 1-dimensionale repræsentationer $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_\chi$ og $\mathbb{C}_{\bar{\chi}}$, og da

$$|A_4| = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2,$$

er disse repræsentationer altså samtlige simple typer af repræsentationer af $A_4$.

3.13. I almindelighed er det svært for en given gruppe $G$ at bestemme samtlige simple typer af repræsentationer. For kommutative grupper får vi imidlertid straks

SÆTNING. Gruppen $G$ er kommutativ, hvis og kun hvis samtlige simple repræsentationer er 1-dimensionale. Er dette tilfældet, så svarer de simple typer til homomorfierne $: G \to \mathbb{C}^*$, og antallet af simple typer er netop $|G|$. I dette tilfælde er enhver repræsentation af $G$ diagonaliserbar.

Bevis. Det er klart, at $G$ er kommutativ, hvis og kun hvis grupperingen $\mathbb{C}G$ er kommutativ; af isomorfien i 3.8 (4) følger, at dette er ensbetydende med at $n_1 = \cdots = n_p = 1$. Er dette tilfældet, viser ligningen $|G| = n_1^2 + \cdots + n_p^2$, at antallet, $p$, af simple typer er $|G|$. De resterende påstande følger af de almindelige resultater. ▨

3.14. Også i det ikke-kommutative tilfælde vil vi skaffe os et overblik over antallet af simple typer af repræsentationer.

DEFINITION. For elementer $g, g' \in G$ siger vi, at $g$ er konjugeret med $g'$, og skriver $g \sim g'$, hvis der findes et element $x \in G$ således at $g' = xgx^{-1}$. I tegn

$$g \sim g' \Leftrightarrow \exists x \in G : g' = xgx^{-1}.$$

Det vises let, at "konjugeret med" er en ækvivalensrelation i $G$. Ækvivalensklasserne kaldes konjugeretklasserne i $G$. Det ses, at konjugeretklassen, der indeholder netop ét element, svarer til elementerne i centret for $G$.

3.15. LEMMA. Lad $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_p$ være konjugeretklasserne i $G$, og betragt elementerne

$$c_i = \sum_{h \in \mathcal{C}_i} h \quad \in \mathbb{C}G, \quad i = 1, \dots, p.$$

Disse elementer vil da udgøre en $\mathbb{C}$-basis for centret i grupperingen $\mathbb{C}G$. Specielt har vi altså

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Cent}(\mathbb{C}G) = \text{antal konjugeretklasser i } G$$

Bevis. Det er klart, at elementerne $c_i$, $i = 1, \dots, p$ er lineært uafhængige.

For et element $\lambda = \sum_g \lambda_g g \in \mathbb{C}G$ har vi $\lambda \in \mathrm{Cent}\,\mathbb{C}G$, hvis og kun hvis $\lambda x = x\lambda$ for alle $x \in G$. Vi har

$$\lambda x = \sum_g \lambda_g gx \qquad \text{og} \qquad x\lambda = \sum_g \lambda_g xg$$

Koefficienten til $gx$ i $\lambda x$ er $\lambda_g$, og koefficienten til $gx$ i $x\lambda$ er $\lambda_{x^{-1}gx}$. Vi har altså $\lambda x = x\lambda$, hvis og kun hvis

$$\lambda_{x^{-1}gx} = \lambda_g \quad \text{for alle } g \in G,$$

og slutter, at $\lambda \in \mathrm{Cent}\,\mathbb{C}G$, hvis og kun hvis $g \mapsto \lambda_g$ er konstant på hver konjugeretklasse. Dette er ensbetydende med at $\lambda$ er en linearkombination af $c_i$'erne. ▨

3.16. Som korollar får vi

SÆTNING. For repræsentationer af $G$ gælder, at

$$(\text{antal simple typer}) = (\text{antal konjugeretklasser i } G).$$

Bevis. Er $T_1, \dots, T_p$ de simple typer, og er $n_i = \dim_{\mathbb{C}} T_i$, findes en $\mathbb{C}$-isomorfi

$$\mathbb{C}G \simeq \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_p}(\mathbb{C}).$$

Centret i en matrixring $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ består af skalarerne, så vi får en isomorfi

$$\mathrm{Cent}\, \mathbb{C}G \simeq \overbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}^{p}.$$

Sammenligner vi dimensionerne, fremgår de ønskede ▨

3.17. Som bekendt gælder, at enhver permutation $g \in S_n$ entydigt kan skrives som produkt af disjunkte cykler. Til hver permutation $g \in S_n$ får vi en række tal $a_1(g), a_2(g), \cdots, a_n(g)$, hvor

$$a_i(g) = \text{antallet af } i\text{-cykler i } g.$$

Det er let at se, at to elementer $g, g' \in S_n$ er konjugerede, hvis og kun hvis $a_i(g) = a_i(g')$, $i = 1, \cdots, n$. Vi ser, at $a_1(g) =$ antallet af fixpunkter for $g$, at

$$a_1(g) + 2a_2(g) + \cdots + n a_n(g) = n.$$

og at der til hver følge $a_1, \ldots, a_n$ af hele tal $\geqslant 0$, der opfylder denne ligning, svarer en konjugeret-klasse. Vi siger, at elementerne heri er af formen

$$\overbrace{(*) \cdots (*)}^{a_1} \; \overbrace{(*,*) \cdots (*,*)}^{a_2} \; \overbrace{(*,*,*) \cdots (*,*,*)}^{a_3} \cdots .$$

For $S_3$ finder vi således

1 af formen $(*)(*)(*)$ (nemlig identiteten)
2 af formen $(*,*,*)$ (3-cyklerne)
3 af formen $(*)(*,*)$ (transpositionerne)

i overensstemmelse med at vi fandt tre simple typer. For $S_4$ finder vi :

| Antal | Form |
|---|---|
| 1 | (*) (*) (*) (*) |
| 8 | (*) (*, *, *) |
| 3 | (*, *) (*, *) |
| 6 | (*) (*) (*, *) |
| 6 | (*, *, *, *) |

Der er altså 5 konjugeretklasser i $S_4$ i overensstemmelse med, at vi fandt 5 simple typer.

Bemærk, at vi alene ud fra en viden om, at $S_4$ har har 5 konjugeretklasser i forbindelse med ligningen

$$24 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$$

kunne have forudsagt, at $S_4$ har 2 1-dimensionale, 1 2-dimensional og 2 3-dimensionale typer af simple repræsentationer.

## 4. Karakterer og klassefunktioner.

4.1. Vi minder om, at vi for en endomorfi $\varphi : V \to V$ i et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$ kan definere <u>sporet af $\varphi$</u>, betegnet $\mathrm{Tr}\,\varphi \in \mathbb{C}$, ud fra det karakteristiske polynomium for $\varphi$. Er $e_1, \dots, e_n$ en basis for $V$, og er $\alpha \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ den til $\varphi$ hørende matrix m.h.t. denne basis, så er

$$\mathrm{Tr}\,\varphi = \mathrm{Tr}\,\alpha = \sum_i \alpha_{ii}$$

Sporet $\mathrm{Tr}\,\varphi$ bestemmes altså ud fra en vilkårlig basis $e_1, \dots, e_n$ ved for hvert $i$ at skrive $\varphi(e_i)$ som linearkombination af $e$'erne, og heri opsøge koefficienten til $e_i$. Summen af disse koefficienter, $i = 1, \dots, n$, er da $\mathrm{Tr}\,\varphi$.

4.2. For endomorfier $\varphi, \psi : V \to V$, og en skalar $\gamma \in \mathbb{C}$ gælder:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\varphi + \psi) &= \mathrm{Tr}\,\varphi + \mathrm{Tr}\,\psi, \\ \mathrm{Tr}(\gamma\varphi) &= \gamma\,\mathrm{Tr}\,\varphi \end{aligned}}$$

[ Sporet er en lineær afbildning : $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \to \mathbb{C}$ ], samt:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\varphi\psi) = \mathrm{Tr}(\psi\varphi)}$$

og specielt hvis $\varphi$ er en automorfi:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\varphi\psi\varphi^{-1}) = \mathrm{Tr}(\psi).}$$

Endelig gælder for den identiske afbildning $1_V : V \to V$:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(1_V) = \dim_{\mathbb{C}} V.}$$

Dette følger af at tilsvarende ligninger gælder for matricer.

4.3. Er $V$ et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, og er $\varphi : V \to V$ en endomorfi, kan vi betragte det duale vektorrum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ af linearformer $\xi : V \to \mathbb{C}$, og den duale endomorfi $\varphi^t : V^* \to V^*$ defineret ved $\varphi^t : \xi \mapsto \xi \circ \varphi$. Der gælder:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\varphi^t = \mathrm{Tr}\,\varphi}$$

Videre kan vi betragte det konjugerede vektorrum $\overline{V}$ og den konjugerede endomorfi $\overline{\varphi} : \overline{V} \to \overline{V}$ (der er den samme afbildning $\varphi$ blot opfattet som lineær afbildning : $\overline{V} \to \overline{V}$). Der gælder

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\overline{\varphi} = \overline{\mathrm{Tr}\,\varphi}}$$

Er $U$ endnu et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, og er $\psi : U \to U$ endnu en endomorfi, kan vi betragte den direkte sum $U \oplus V$, samt endomorfien $\psi \oplus \varphi$ heri (defineret ved $\psi \oplus \varphi : (u, v) \longmapsto (\psi(u), \varphi(v))$). Der gælder

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\psi \oplus \varphi) = \mathrm{Tr}\,\psi + \mathrm{Tr}\,\varphi.}$$

Videre kan vi betragte tensorproduktet $U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$ samt endomorfien $\psi \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \varphi$ heri (defineret ved $\psi \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \varphi : u \otimes v \longmapsto \psi(u) \otimes \varphi(v)$). Der gælder

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\psi \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \varphi) = (\mathrm{Tr}\,\psi)(\mathrm{Tr}\,\varphi).}$$

Endelig kan vi betragte vektorrummet $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)$ af lineære afbildninger $\rho : U \to V$, og endomorfien $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\psi, \varphi)$ heri, defineret ved

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\psi, \varphi) : \rho \longmapsto \varphi \circ \rho \circ \psi .$$

Der gælder

$$\boxed{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\psi, \varphi)\right) = (\mathrm{Tr}\,\psi)(\mathrm{Tr}\,\varphi).}$$

Disse ligninger vises let ved at vælge baser $(e_1, \dots, e_n)$ i $V$, $(f_1, \dots, f_m)$ i $U$. Vi indskrænker os her til at vise den sidste ligning, der vil spille en væsentlig rolle i det følgende.

I de valgte baser hører til $\varphi$ og $\psi$ matricer $\alpha \in Mat_n(\mathbb{C})$, $\beta \in Mat_m(\mathbb{C})$, og vi har

$$\varphi(e_i) = \alpha_{ii} e_i + \cdots \qquad Tr\,\varphi = \sum \alpha_{ii}$$

$$\psi(f_j) = \beta_{jj} f_j + \cdots \qquad Tr\,\psi = \sum \beta_{jj}.$$

Vektorrummet $Hom_{\mathbb{C}}(U,V)$ har dimension $mn$. En basis består af homomorfierne $\delta^{ij} : U \to V$, $i = 1, \dots, n$ $j = 1, \dots, n$ bestemt ved

$$\delta^{ij}(f_k) = \begin{cases} e_i & \text{for } k = j \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Idet vi lader $x_1, \dots, x_n : V \to \mathbb{C}$ være de til basen $(e_1, \dots, e_n)$ hørende koordinatfunktioner på $V$ (for en vektor $v \in V$ er $x_i(v)$ altså den $i$-te koordinat for $v$ m.h.t. basen $e_1, \dots, e_n$), ser vi, at der for et element $\rho \in Hom_{\mathbb{C}}(U,V)$ gælder, at den $(i,j)$-te koordinat for $\rho$ m.h.t. basen $\delta^{ij}$ er bestemt ved $x_i[\rho(f_j).]$

Søger vi sporet af endomorfien $Hom_{\mathbb{C}}(\psi, \varphi)$, skal vi for hver basisvektor $\delta^{ij}$ opsøge den $(i,j)$-te koordinat til billedet. Billedet er $\varphi \circ \delta^{ij} \circ \psi$, og den $(i,j)$-te koordinat bliver følgelig

$$x_i[\varphi \circ \delta^{ij} \circ \psi(f_j)]$$

Her er $\psi(f_j) = \beta_{jj} f_j + \cdots$, altså $\delta^{ij}(\psi(f_j)) = \beta_{jj} e_i$, altså $\varphi(\delta^{ij}(\psi(f_j)) = \beta_{jj}\varphi(e_i) = \beta_{jj}\alpha_{ii} e_i + \cdots$ og endelig $x_i[\varphi \circ \delta^{ij} \circ \psi(f_j)] = \beta_{jj}\alpha_{ii}.$

Det søgte spor er derfor $\sum_{i,j} \beta_{jj}\alpha_{ii} = \left(\sum_j \beta_{jj}\right)\left(\sum_i \alpha_{ii}\right) =$ $(Tr\,\psi)(Tr\,\varphi)$ som påstået ▨

4.4. Lad nu $V$ være en repræsentation af $G$. $V$ er da et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, og vi har homomorfien : $G \to Aut_{\mathbb{C}}(V)$ betegnet $g \mapsto g_V$. For hvert $g \in G$ er $g_V : V \to V$ specielt en endomorfi i $V$, og vi kan betragte dens spor $Tr(g_V) \in \mathbb{C}$. Vi sætter

$$\chi_V(g) = Tr(g_V) \in \mathbb{C}.$$

DEFINITION. Den ved $g \longmapsto \chi_V(g) = Tr(g_V)$ definerede afbildning $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$ kaldes *karakteren for repræsentationen V*. En afbildning $\chi : G \to \mathbb{C}$, der er karakter for en repræsentation af $G$, kaldes en *karakter på G*. En karakter på $G$ kaldes *simpel* (eller irreducibel), hvis den er karakter for en simpel repræsentation.

4.5. I det følgende ønsker vi at studere sammenhængen mellem repræsentationer af $G$ og karakterer på $G$. Vi bemærker først, at vi har

SÆTNING. *Ækvivalente repræsentationer af G har samme karakter* :

Bevis. Vi skal altså vise, at der for ækvivalente repræsentationer $U$ og $V$ af $G$ gælder $\chi_U = \chi_V$, altså at vi har $\chi_U(g) = \chi_V(g)$. for alle $g \in G$. Her er $\chi_U(g) = Tr(g_U)$ og $\chi_V(g) = Tr(g_V)$, og påstanden følger af at $g_U$ og $g_V$ har samme karakteristiske polynomium. (sætning 1.4). ▨

4.6. Lad $V$ være en repræsentation af $G$. Vi kan da opfatte $V$ som $\mathbb{C}G$-modul, og for hvert $\lambda \in \mathbb{C}G$ har vi homotetien $\lambda_V : v \mapsto \lambda v$ i $V$. Homotetierne er $\mathbb{C}$-lineære afbildninger, og $\lambda \mapsto \lambda_V$ er en $\mathbb{C}$-algebrahomomorfi

$$\mathbb{C}G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

For hvert $\lambda \in \mathbb{C}G$ kan vi altså betragte sporet $Tr(\lambda_V) \in \mathbb{C}$. Af overvejelserne i 4.2 følger nu: Afbildningen $\lambda \mapsto Tr(\lambda_V)$ er en $\mathbb{C}$-lineær afbildning: $\mathbb{C}G \to \mathbb{C}$, og vi har $Tr(\mu\lambda)_V = Tr(\lambda\mu)_V$. Specielt kan hvert af disse spor udtrykkes ved karakteren for $V$, idet vi for

$$\lambda = \sum \lambda_g g \in \mathbb{C}G \quad \text{har} \quad Tr(\lambda_V) = \sum_g \lambda_g \chi_V(g).$$

Videre har vi

$$\boxed{\chi_V(gh) = \chi_V(hg)}$$

og

$$\boxed{\chi_V(1) = \dim_{\mathbb{C}} V}$$

Dimensionen af $V$, der således kan bestemmes ud fra karakteren, kaldes også **karakterens dimension.**

4.7. Karaktererne på $G$ er funktioner: $G \to \mathbb{C}$, og de kan derfor opfattes som delmængde af mængden $\mathrm{Afb}(G,\mathbb{C})$ af alle sådanne funktioner. Her er $\mathrm{Afb}(G,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}$-algebra (Vi kan multiplicere en funktion med en konstant, og vi har sædvanlig sum og produkt af funktioner $: G \to \mathbb{C}$) Det ses, at

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Afb}(G,\mathbb{C}) = |G|.$$

Yderligere kan vi for en funktion $\chi : G \to \mathbb{C}$ betragte funktionen $\overline{\chi} : G \to \mathbb{C}$ defineret ved $\overline{\chi} : g \longmapsto \overline{\chi(g)}$ og funktionen $\chi^* : G \to \mathbb{C}$ defineret ved $\chi^* : g \longmapsto \chi^*(g) = \chi(g^{-1})$.

**4.8. SÆTNING.** Lad $U$ og $V$ være repræsentationer af $G$. Da gælder

$$\boxed{\begin{aligned} \chi_{\overline{V}} &= \overline{\chi}_V \\ \chi_{V^*} &= \chi_V{}^* \\ \chi_{U\oplus V} &= \chi_U + \chi_V \\ \chi_{U\otimes V} &= \chi_U\,\chi_V \\ \chi_{\mathrm{Hom}(U,V)} &= \chi_U^*\,\chi_V \end{aligned}}$$

Bevis. Vi minder om, at repræsentationerne $\overline{V}$, $V^*$, $U\oplus V$, $U\otimes V$, $\mathrm{Hom}(U,V)$ er defineret i 1.7. Vi har

$$g_{\overline{V}} = \overline{g_V}, \quad g_{V^*} = (g_V^{-1})^t, \quad g_{U\oplus V} = g_U \oplus g_V,$$

$$g_{U\otimes V} = g_U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} g_V, \quad g_{\mathrm{Hom}(U,V)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(g_U^{-1}, g_V),$$

jfr. betegnelserne i 4.3. Ligningerne følger nu af de tilsvarende ligninger i 4.3. ▨

4.9. Er $\varphi : H \to G$ en (gruppe-)homomorfi, og er $V$ en repræsentation af $G$, får vi ved sammensætning:

$$H \xrightarrow{\varphi} G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$$

en repræsentation $V_\varphi$ af $H$, jfr. 1.8. Det er umiddelbart at se, at der for karaktererne gælder

$$\chi_{V_\varphi} = \chi_V \circ \varphi : H \to \mathbb{C}.$$

Er specielt $H \hookrightarrow G$ en undergruppe, får vi for restriktionen

$$\chi_{V/H} = \chi_V / H : H \to \mathbb{C}.$$

4.10. DEFINITION. En funktion $\chi : G \to \mathbb{C}$, der er konstant på hver konjugeretklasse i $G$, kaldes en *klassefunktion*. Dette er ensbetydende med at funktionen $\chi : G \to \mathbb{C}$ respekterer ækvivalensrelationen "konjugeret med", altså ensbetydende med at vi har $\chi(xgx^{-1}) = \chi(g)$, $x \in G, g \in G$.

altså $\chi(gh) = \chi(hg)$.

Det ses, at klassefunktionerne udgør en delalgebra af $\mathrm{Afb}(G, \mathbb{C})$. Den betegnes $cf(G, \mathbb{C})$ eller blot $cf(G)$. Vi har

$$\dim_{\mathbb{C}} cf(G) = (\text{antallet af konjugeretklasser}).$$

Af 4.6. følger:

*Karaktererne er klassefunktioner.*

Lad os nu betragte en række

Eksempler:

4.11 Er $V$ en triviel repræsentation af $G$, så har vi $g_V = 1_V$ for alle $g \in G$, og karakteren er den konstante afbildning $\chi_V(g) = \dim_{\mathbb{C}} V$ for alle $g \in G$. Karakteren for 1-repræsentationen, der kaldes **1-karakteren** og betegnes $\chi_1$ (eller blot 1), er specielt givet ved

$$\chi_1(g) = 1, \quad g \in G.$$

4.12 Karakteren for en 1-dimensional repræsentation, $\mathbb{C}_\chi$, givet ved homomorfien $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, er netop $\chi$. De 1-dimensionale karakterer er altså homomorfierne

$$\chi : G \to \mathbb{C}^*.$$

Det følger, at karakteren for en diagonaliserbar repræsentation (jfr. 2.2) er en sum af 1-dimensionale karakterer.

4.13. For den cykliske gruppe $\mathbb{Z}/3$ har vi de tre 1-dimensionale karakterer $1, \chi, \bar{\chi}$. Den 2-dimensionale matrixrepræsentation af $\mathbb{Z}/3$ defineret ved drejningen $+\frac{2\pi}{3}$ (jfr. 2.3) har karakteren

$$(\chi + \bar{\chi})(g) = \begin{cases} 2 & \text{for } g = 0 \text{ i } \mathbb{Z}/3 \\ -1 & \phantom{\text{for }} g \neq 0. \end{cases}$$

og repræsentationen af $\mathbb{Z}/3$ i $\mathbb{C}^3$ givet ved cyklisk permutation af koordinaterne har karakteren

$$(1 + \chi + \bar{\chi})(g) = \begin{cases} 3 & \text{for } g = 0 \text{ i } \mathbb{Z}/3 \\ 0 & \phantom{\text{for }} g \neq 0. \end{cases}$$

4.14. Karakteren for den regulære repræsentation af $G$ betegnes $\chi_{reg}$. Den ses at være givet ved

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{for } g = 1 \\ 0 & \phantom{\text{for }} g \neq 1. \end{cases}$$

□

4.15. Den 2-dimensionale "kvadratrepræsentation" af diedergruppen $D_4$ (jfr. 2.7) har karakteren $\chi$ givet ved

$$\chi(g) = \begin{cases} 2 & \text{for } g = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ -2 & \text{for } g = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \\ 0 & \text{ellers,}\end{cases}$$

hvilket ses ved at betragte de 8 matricer, som udgør $D_4$.

4.16. På den symmetriske gruppe $S_n$ har vi de 1-dimensionale karakterer $\chi_1$ og $\chi_{sign}$. For den naturlige repræsentation af $S_n$ på $\mathbb{C}^n$ finder vi karakteren $\chi_{nat}$ bestemt ved

$$\chi_{nat}(g) = (\text{antal fixpunkter for } g).$$

Den naturlige repræsentation af $S_n$ er ækvivalent med den direkte sum af 1-repræsentationen og simplex-repræsentationen. For karakteren $\chi_{simpl}$ af simplexrepræsentationen har vi derfor

$$\chi_{nat} = \chi_1 + \chi_{simpl},$$

altså

$$\chi_{simpl}(g) = (\text{antal fixpunkter for } g) - 1.$$

4.17. Som eksempler på karakterer på $S_3$ har vi $\chi_1$, $\chi_{sign}$, $\chi_{reg}$, $\chi_{nat}$ samt karakteren $\chi_{tri}$ for simplexrepræsentationen, der her er trekantsrepræsentationen. I nedenstående tabel er for hver af de tre konjugeretklasser i $S_3$ anført antallet af elementer i klassen, samt karakterernes værdi på klassen:

| Antal | Form | $\chi_1$ | $\chi_{sign}$ | $\chi_{reg}$ | $\chi_{nat}$ | $\chi_{tri}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (*)(*)(*) | 1 | 1 | 6 | 3 | 2 |
| 2 | (*,*,*) | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| 3 | (*)(*,*) | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |

4.18. Med oplagte betegnelser har vi på $S_4$ karaktererne karaktererne $\chi_{reg}$, $\chi_{nat}$, $\chi_1$, $\chi_{sign}$, $\chi_{tetra}$, $\chi_{oct}$, $\chi_{tri}$ beskrevet i nedenstående tabel:

| Antal | Form | $\chi_{reg}$ | $\chi_{nat}$ | $\chi_1$ | $\chi_{sign}$ | $\chi_{tetra}$ | $\chi_{oct}$ | $\chi_{tri}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (*)(*)(*)(*) | 24 | 4 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| 8 | (*)(*,*,*) | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 |
| 3 | (*,*)(*,*) | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | 2 |
| 6 | (*)(*)(*,*) | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 |
| 6 | (*,*,*,*) | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |

Den er fundet på følgende måde: Søjlerne for $\chi_{reg}$ og $\chi_1$ kan umiddelbart opskrives. Ligeledes søjlen for $\chi_{sign}$. Søjlerne for $\chi_{nat}$ og $\chi_{tetra} = \chi_{simpl}$ er bestemt ud fra resultatet i 4.6. Søjlen for $\chi_{oct}$ er bestemt ud fra isomorfien $V_{oct} \approx \mathbb{C}_{sign} \otimes V_{tetra}$ (jfr. 3.12), som giver $\chi_{oct} = \chi_{sign}\chi_{tetra}$. Endelig er trekantsrepræsentationen $V_{tri}$ af $S_4$ defineret ved at sammensætte trekantsrepræsentationen af $S_3$ med en surjektiv homomorfi: $S_4 \to S_3$, og søjlen for $\chi_{tri}$ fås derfor af den tilsvarende søjle for karakteren $\chi_{tri}$ på $S_3$ ved at sammensætte med $S_4 \longrightarrow S_3$. Det ses let, at kernen for en sådan homomorfi består af elementer af formen (*)(*)(*)(*) [det ene 2 i søjlen] eller (*,*)(*,*) [det andet 2 i søjlen], at ulige permutation afbildes på ulige permutation [de to 0'er i søjlen], og endelig, at en permutation af formen (*)(*,*,*) afbildes på en af formen (*,*,*) [−1 i søjlen].

**4.19. SÆTNING.** *Lad $V$ være en $m$-dimensional repræsentation af $G$, og lad $g \in G$ være et element af orden $d$. Da findes $m$ $d$-te enhedsrødder $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{C}$, således at vi for alle $i$ har*

$$\chi_V(g^i) = \xi_1^i + \dots + \xi_m^i$$

[Et tal $\xi \in \mathbb{C}$ kaldes en $d$-te enhedsrod, hvis $\xi^d = 1$].

Bevis. Elementet $g$ frembringer i $G$ en cyklisk undergruppe af orden $d$, og repræsentationens restriktion til denne undergruppe er diagonaliserbar ifølge sætning 3.13. Der findes altså en basis for $V$, i hvilken $g_V$ beskrives ved en diagonalmatrix

$$\underline{g}_V = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_m \end{pmatrix}.$$

Til $g_V^i$ svarer matricen $\underline{g}_V^{\,i}$, og da $g^d = 1$, har vi $\underline{g}_V^{\,d} = 1$, altså $\xi_1^d = \dots = \xi_m^d = 1$. Da sporet af matricen $\underline{g}_V^{\,i}$ er $\xi_1^i + \dots + \xi_m^i$ følger påstanden. ▨

**4.20. KOROLLAR.** *For enhver karakter $\chi : G \to \mathbb{C}$ gælder $\chi^* = \overline{\chi}$ (altså $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ for alle $g \in G$).*

Bevis. Vi kan nemlig skrive $\chi(g^i) = \xi_1^i + \dots + \xi_m^i$, og får specielt

$$\chi^*(g) = \chi(g^{-1}) = \xi_1^{-1} + \dots + \xi_m^{-1} = \overline{\xi_1 + \dots + \xi_m} = \overline{\chi(g)},$$

idet der for en enhedsrod $\xi$ gælder $\xi^{-1} = \overline{\xi}$. ▨

4.21. Vi vil nu nærmere studere de simple (eller irreducible) karakterer på $G$, altså karaktererne $\chi_T$ hørende til de simple typer $T$ af repræsentationer. For den regulære repræsentation $\mathbb{C}G_s$ havde vi en isomorfi (Sætning 3.8).

$$\mathbb{C}G_s \simeq \bigoplus_T T^{n_T}, \quad \text{hvor } n_T = \dim_{\mathbb{C}} T.$$

Følgelig får vi for karaktererne ligningen

$$\chi_{reg} = \sum_T n_T \chi_T$$

4.22. Vi kan nu vise de fundamentale KARAKTERRELATIONER. Lad $h$ være et element i $G$. Hvis $T$ er en simpel type, så er

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_T(g^{-1}) \chi_T(gh) = \frac{\chi_T(h)}{\dim_{\mathbb{C}} T}.$$

Hvis $S$ er endnu en simpel type $\neq T$, så er

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_T(g^{-1}) \chi_S(gh) = 0.$$

Bevis. Vi viser den sidste ligning først: I vektorrummet $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S,T)$ af lineære afbildninger $\rho : S \to T$ kan vi for hvert $g \in G$ betragte endomorfien

$$\rho \longmapsto g_T^{-1} \circ \rho \circ (hg)_S$$

Dette er – med betegnelserne fra 4.3. – endomorfien $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((hg)_S, g_T^{-1})$, og dens spor er følgelig $Tr(g_T^{-1})\, Tr(hg)_S = \chi_T(g^{-1}) \chi_S(hg) = \chi_T(g^{-1}) \chi_S(gh)$.

Vi slutter derfor at ligningens venstre side er sporet af den ved

$$\Phi : \rho \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g_T^{-1} \circ \rho \circ (hg)_S$$

definerede endomorfi $\Phi$ af $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S,T)$. For hvert $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S,T)$ har vi

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_T^{-1}\circ[\rho\circ h_S]\circ g_S .$$

Af lemma 3.4. følger derfor, at billedet $\Phi(\rho)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S,T)$ endda er en $\mathbb{C}G$-lineær afbildning. Da S og T er simple af forskellig type, og dermed ikke-isomorfe, følger det af Schurs lemma, at $\Phi(\rho): S\to T$ må være nul-afbildningen. Dette betyder, at $\Phi$ er nul-afbildningen, og dens spor er derfor 0. Vi har således vist den sidste ligning.

For at vise den første ligning, udnytter vi, at $\chi_{reg} = \sum_S n_S\chi_S$ i forbindelse med at $\chi_{reg}(1) = |G|$, $\chi_{reg}(g) = 0$ for $g\neq 1$. Vi finder:

$$\begin{aligned}\chi_T(h) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{reg}(g^{-1})\chi_T(gh)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_S n_S\chi_S(g^{-1})\chi_T(gh)\\ &= \sum_S n_S\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_S(g^{-1})\chi_T(gh)\right)\\ &= n_T\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_T(g^{-1})\chi_T(gh),\end{aligned}$$

hvoraf den første ligning fremgår ▨

4.23. Indsættes $h=1$, har vi $\chi_T(1) = \dim_{\mathbb{C}} T$, og vi får de såkaldte

ORTOGONALITETSRELATIONER. For simple typer S og T af repræsentationer af G gælder

$$\underline{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_S(g)\chi_T(g^{-1}) = \delta_{S,T}}$$

(hvor $\delta_{S,T}$ er Kronecker's $\delta$, $=1$ når $S=T$, $=0$ når $S\neq T$).

4.24. I vektorrummet Afb$(G,\mathbb{C})$ indføres et indre produkt, betegnet $\langle\ ,\ \rangle$, ved at vi for funktioner $\chi, \chi' : G \to \mathbb{C}$ sætter

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)}$$

Herved organiseres Afb$(G,\mathbb{C})$ til et unitært vektorrum over $\mathbb{C}$. Idet vi for en *karakter* $\chi : G \to \mathbb{C}$ har $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, kan ortogonalitetsrelationerne udtrykkes ved

$$\langle \chi_S, \chi_T \rangle = \delta_{S,T},$$

så vi har

SÆTNING. *De simple karakterer på $G$ er et ortonormalt sæt i Afb$(G,\mathbb{C})$.*

4.25. KOROLLAR. *To repræsentationer af $G$ er ækvivalente, hvis og kun hvis de har samme karakter.*

Bevis. "kun hvis" har vi vist (sætning 4.5).

"hvis". For hver repræsentation $V$ af $G$ findes en isomorfi

$$V \simeq \bigoplus_T T^{m_T},$$

så det er nok at vise, at $m_T$'erne kan bestemmes ud fra karakteren $\chi_V$. Vi har $\chi_V = \Sigma m_T \chi_T$, og dermed

$$\begin{aligned} \langle \chi_V, \chi_S \rangle &= \sum_T m_T \langle \chi_T, \chi_S \rangle \\ &= \sum_T m_T \delta_{T,S} \\ &= m_T, \end{aligned}$$

hvoraf det ønskede fremgår. ▨

4.26. Karaktererne – og specielt de simple karakterer – på $G$ er klassefunktioner, og kan altså opfattes som elementer i underrummet $cf(G,\mathbb{C}) \subseteq Afb(G,\mathbb{C})$. Da (antal simple typer) = (antal konjugeretklasser), har vi altså

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} cf(G,\mathbb{C}) &= (\text{antal konjugeretklasser})\\ &= (\text{antal simple typer})\\ &= (\text{antal simple karakterer}),\end{aligned}$$

hvoraf vi slutter

SÆTNING. <u>De simple karakterer på $G$ er en ortonormal basis i $cf(G,\mathbb{C})$</u>

4.27. Lad $\mathscr{C} \subseteq G$ være en konjugeretklasse. Det ses let, at delmængden $\mathscr{C}^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in \mathscr{C}\} \subseteq G$ igen bliver en konjugeretklasse. Idet vi for en klassefunktion $\chi : G \to \mathbb{C}$ med $\chi(\mathscr{C})$ betegner funktionens konstante værdi på klassen, kan ortogonalitetsrelationerne skrives

$$\boxed{\frac{1}{|G|} \sum_{\mathscr{C}} |\mathscr{C}| \chi_S(\mathscr{C}) \chi_T(\mathscr{C}^{-1}) = \delta_{S,T}.}$$

Ordnes typerne: $T_1, \dots, T_p$ og konjugeretklasserne: $\mathscr{C}_1, \dots, \mathscr{C}_p$, og indføres $(p \times p)$-matricerne

$$\alpha = (\alpha_{ij}), \quad \text{hvor } \alpha_{ij} = \frac{|\mathscr{C}_j|}{|G|} \chi_{T_i}(\mathscr{C}_j)$$

og

$$\beta = (\beta_{kl}), \quad \text{hvor } \beta_{kl} = \chi_{T_l}(\mathscr{C}_k^{-1}),$$

kan relationerne skrives

$$\sum_j \alpha_{ij} \beta_{jl} = \delta_{il},$$

eller på matrixform

$$\alpha\beta = 1.$$

Heraf følger imidlertid, at vi også har

$$\beta\alpha = 1,$$

altså

$$\sum_\ell \beta_{k\ell}\,\alpha_{\ell j} = \delta_{kj},$$

d.v.s.

$$\sum_\ell \chi_{T_\ell}(\mathcal{C}_k^{-1})\,\frac{|\mathcal{C}_j|}{|G|}\,\chi_{T_\ell}(\mathcal{C}_j) = \delta_{kj}$$

Disse relationer kan skrives

$$\boxed{\frac{1}{|G|}\sum_T \chi_T(\mathcal{D}^{-1})\,\chi_T(\mathcal{C}) = \frac{\delta_{\mathcal{D},\mathcal{C}}}{|\mathcal{C}|}.}$$

4.28. Det er ikke svært at vise, at ortogonalitetsrelationerne udsiger, at <u>matricen</u>

$$\left(\sqrt{\frac{|\mathcal{C}|}{|G|}}\,\chi_T(\mathcal{C})\right)$$

<u>er en unitær matrix.</u>

Algebra 1974 Opgaver 1

1. Et element $\lambda$ i ringen $\Lambda$ kaldes *nilpotent*, hvis der findes et $n \in \mathbb{N}$, så at $\lambda^n = 0$. Vis, at der for et sådant element gælder, at $1-\lambda$ er invertibelt.

2. Et element $e$ i ringen $\Lambda$ kaldes *idempotent*, hvis $e^2 = e$. Lad $e \in \Lambda$ være idempotent. Vis, at også $1-e$ er idempotent. Vis, at delmængden

$$e\Lambda e = \{e\lambda e \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \Lambda$$

er stabil over for addition og multiplikation, og at denne delmængde er en ring. Hvad er et-elementet i denne ring? Er inklusionsafbildningen $e\Lambda e \hookrightarrow \Lambda$ en ringhomomorfi?

3. Ved en ortogonal dekomposition af $1 \in \Lambda$ i idempotenter forstås en fremstilling

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \quad \text{hvor} \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i$$

Elementerne $e_i \in \Lambda$ er altså idempotente $(e_i^2 = e_i)$ og parvis ortogonale $(e_i e_j = 0$ når $i \neq j)$. Vi sætter $\Lambda_i = e_i \Lambda e_i$. Vis, at afbildningen

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

er en injektiv ringhomomorfi : $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n \longrightarrow \Lambda$.

4. Ved en ortogonal dekomposition af $1 \in \Lambda$ i centrale idempotenter forstås en fremstilling

$$1 = e_1 + \cdots + e_n, \quad \text{hvor} \quad e_i e_j = e_i \delta_{ij},$$

og hvor elementerne $e_i \in \Lambda$ desuden er centrale (d.v.s. opfylder $e_i \lambda = \lambda e_i$, $\lambda \in \Lambda$). Vis, at den ovenfor definerede afbildning : $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n \rightarrow \Lambda$ i dette tilfælde er en isomorfi.

5. Lad $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$ være et produkt af ringe. Vis, at

$$(1, \dots, 1) = (1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, 1)$$

er en ortogonal dekomposition af $1 = (1, \dots, 1) \in \Gamma$ i centrale idempotenter. Gør rede for, at der for enhver ring $\Lambda$ findes en entydig forbindelse mellem ringhomomorfierne $: \Gamma \to \Lambda$ og ortogonale dekompositioner

$$1 = e_1 + \cdots + e_n$$

af $1 \in \Lambda$ i idempotenter og ringhomomorfier $\Gamma_i \to e_i \Lambda e_i$.

6. Lad $R$ være en kommutativ ring og lad

$$d = X^n + d_1 X^{n-1} + \cdots + d_{n-1} X + d_n \in R[X]$$

være et <u>normeret</u> polynomium. Vis, at der til hvert polynomium $p \in R[X]$ findes entydigt bestemte polynomier $q, r \in R[X]$, så at

$$p = qd + r, \quad \deg(r) < \deg(d) = n.$$

Vis, at hvis polynomiet $p \in R[X]$ i $R$ har en rod $a$, så findes et entydigt bestemt polynomium $q \in R[X]$, så at

$$p(X) = q(X)(X - a).$$

Vis ved et eksempel, at selv om $p$ i $R$ har endnu en rod $b \neq a$, så behøver $b$ ikke at være rod i $q(X)$.

7. Gør rede for, at en højre-$\Lambda$-modul er det samme som en $\Lambda^{op}$-modul.

8. Elementet $\lambda \in \Lambda$ siges at <u>annullere</u> $\Lambda$-modulen $M$, hvis $\lambda x = 0$ for alle $x \in M$.

Mængden af elementer $\lambda \in \Lambda$, der annullerer en given $\Lambda$-modul $M$ kaldes modulens annullator og betegnes $\mathrm{Ann}_\Lambda(M)$. Vis, at $\mathrm{Ann}_\Lambda(M)$ er et ideal i $\Lambda$. Vis, at $\mathrm{Ann}_\Lambda(M)$ er kernen for ringhomomorfien

$$\Lambda \longrightarrow \mathrm{End}(M).$$

9. Et ideal $\mathfrak{a} \subseteq \Lambda$ siges at annullere $\Lambda$-modulen $M$, hvis $\alpha x = 0$ for alle $\alpha \in \mathfrak{a}$, $x \in M$. Dette betyder altså at $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}_\Lambda(M)$. Vis, at en $\Lambda$-modul, der annulleres af $\mathfrak{a}$, på naturlig måde kan opfattes som en $\Lambda/\mathfrak{a}$-modul.

10. Lad $\mathfrak{a} \subseteq \Lambda$ være et ideal, og lad $M$ være en $\Lambda$-modul. Vis, at delmængden $\mathfrak{a}M$ bestående af de elementer $x \in M$, der har en fremstilling

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \;, \quad \alpha_i \in \mathfrak{a}, \; x_i \in M$$

er en undermodul i $M$, og at kvotienten $M/\mathfrak{a}M$ på naturlig måde kan opfattes som en $\Lambda/\mathfrak{a}$-modul.

11. Vis, at hvis elementerne $e_1, \dots, e_k \in M$ er en fri basis for $\Lambda$-modulen $M$, så er elementerne $\textcircled{e_1}, \dots, \textcircled{e_k} \in M/\mathfrak{a}M$ en fri basis for $\Lambda/\mathfrak{a}$-modulen $M/\mathfrak{a}M$. Vis, som en anvendelse heraf: *I en fri modul $M$ over en kommutativ ring $R$ gælder at alle baser har samme kardinaltal.* [Vink: påstanden gælder som bekendt for moduler over et legeme. Den generelle påstand reduceres hertil ved i stedet for $R$-modulen $M$ at betragte $R/\mathfrak{m}$-modulen $M/\mathfrak{m}M$, hvor $\mathfrak{m} \subset R$ er et maksimalideal]. Bemærk: påstanden gælder ikke generelt for ikke-kommutative ringe.

12. Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde med koordinaterne $x_1, \dots, x_n$. Med $R$ betegner vi ringen af alle funktioner $f : U \to \mathbb{R}$, og med $M$ betegnes mængden af familier $\varphi = (\varphi_a)_{a \in U}$ bestående af linearformer $\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Vis, at $M$ på naturlig måde er en $R$-modul. For en differentiabel funktion $f : U \to \mathbb{R}$ er differentialet $df \in M$. $df$ er familien $(df_a)_{a \in U}$, hvor $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er differentialet af $f$ i punktet $a$. Specielt har vi svarende til koordinaterne $x_1, \dots, x_n$ elementerne $dx_1, \dots, dx_n \in M$. Differentialet $dx_i$ er som bekendt den konstante familie

$$(dx_i)_a \text{ er linearformen} : (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i .$$

Vis, at elementerne $dx_1, \dots, dx_n$ er en fri $R$-basis for $M$. [Vink: dette har intet med differentiabilitet at gøre]. Hvad bliver – for en differentiabel funktion $f : U \to \mathbb{R}$ – koefficienterne, når $df \in M$ skrives som linearkombination af basiselementerne $dx_1, \dots, dx_n$?

13. Lad $M$ være en modul over en kommutativ ring $R$. Et element $x \in M$ kaldes et *torsionselement*, hvis der findes et *regulært* element $r \in R$, så at $rx = 0$. Vis, at mængden $M_T \subseteq M$ af torsionselementer i $M$ er en undermodul i $M$. Modulen $M$ siges at være en *torsionsmodul* (resp. at være *torsionsfri*), hvis ethvert element i $M$ er torsionselement (resp. hvis $0 \in M$ er det eneste torsionselement). Vis, at $M_T$ er en torsionsmodul, og at kvotienten $M/M_T$ er torsionsfri. Vis, at enhver fri $R$-modul er torsionsfri.

14. Lad $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ være en primopløsning af $n \in \mathbb{N}$. Vis, at ringen

$$\mathbb{Z}/p_1^{\nu_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\nu_r}$$

har karakteristik $n$. Vis dernæst, at den kanoniske homomorfi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_1^{\nu_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\nu_r}$ definerer en isomorfi

$$\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p_1^{\nu_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\nu_r}$$

(Den kinesiske restklassesætning) [Vink: surjektiviteten indses ved at betragte elementantallene i de to ringe].

15. Lad $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ være idealer i ringen $\Lambda$, således at

$$\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = \Lambda, \quad i \neq j.$$

Med $\lambda \mapsto \textcircled{\lambda}_i$ betegnes den naturlige homomorfi: $\Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a}_i$. Vis, at ringhomomorfien

(*) $\Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times \Lambda/\mathfrak{a}_n$, $\lambda \mapsto (\textcircled{\lambda}_1, \dots, \textcircled{\lambda}_n)$

definerer en isomorfi

$$\Lambda/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \xrightarrow{\sim} \Lambda/\mathfrak{a}_1 \times \cdots \times \Lambda/\mathfrak{a}_n$$

[Vink: For at vise, at (*) er en surjektiv afbildning, er det nok at vise, at hvert element $(\textcircled{0}_1, \dots, \textcircled{1}_i, \dots, \textcircled{0}_n)$, $i = 1, \dots, n$ tilhører billedet! Der skal altså findes et element $e_i \in \Lambda$, så at $e_i \equiv 1 \mod \mathfrak{a}_i$ og $e_i \equiv 0 \mod \mathfrak{a}_j$, $j \neq i$. I følge forudsætningen kan vi for hvert $j \neq i$ skrive

$$1 = \alpha_j + \beta_j, \quad \text{hvor } \alpha_j \in \mathfrak{a}_i, \ \beta_j \in \mathfrak{a}_j.$$

Vis, at elementet $e_i = \beta_1 \cdots \beta_{i-1} \beta_{i+1} \cdots \beta_n$ opfylder det stillede krav].
Resultatet kaldes også den kinesiske restklassesætning. Hvorfor er opgave 14 et specialtilfælde heraf?

16. Elementet $1 \in \Lambda$ er en fri basis for $\Lambda$-modulen $\Lambda_s$. Hvilke andre fri baser har denne $\Lambda$-modul.

17. Vis, at en $R$-algebra $A$ er "det samme som" en mængde $A$ forsynet med kompositioner

$R \times A \to A$ betegnet $(r,a) \mapsto ra$

$A \times A \to A$ betegnet $(a,b) \mapsto a+b$

$A \times A \to A$ betegnet $(a,b) \mapsto a \cdot b$

således at

1) $(A,+,R)$ er en $R$-modul
2) $(A,+,\cdot)$ er en ring
3) For alle $r \in R$, $a,b \in A$ gælder $r(a\cdot b) = (ra)\cdot b = a\cdot(rb)$.

18. Lad $G$ være en endelig kommutativ gruppe. En homomorfi $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ kaldes en (kompleks) *karakter* på $G$. Vis, at mængden $\hat{G}$ af karakterer på $G$ er en undergruppe i gruppen $\mathrm{Afb}(G,\mathbb{C}^*)$. Vis, at hvis $H \leq G$ er en undergruppe, så kan $\widehat{G/H}$ identificeres med en undergruppe i $\hat{G}$, og kvotienten $\hat{G}/\widehat{G/H}$ kan identificeres med $\hat{H}$. Vis, at der for en cyklisk gruppe $C$ gælder, at $\hat{C}$ ligeledes er cyklisk og af samme orden som $C$. Slut nu, at der for alle endelige kommutative grupper $G$ gælder

$$|G| = |\hat{G}|.$$

Definér en naturlig homomorfi : $G \to \hat{\hat{G}}$, vis, at den er injektiv, og slut heraf, at den er en isomorfi.

19. Lad $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$ være et produkt af $\Lambda$-moduler, og sæt $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \Lambda$. Vis, at der for enhver $\Lambda$-modul $M$ gælder, at delmængderne

$$M_i = e_iM = \{ e_ix \mid x \in M \} \qquad i = 1, \dots, n$$

er undermoduler i $M$, og vis, at

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n .$$

Vis, at $M_i$ på naturlig måde er en $\Lambda_i$-modul, og vis, hvorledes man omvendt fra et sæt $(N_1, \dots, N_n)$, hvor $N_i$ er en $\Lambda_i$-modul, kan "komme til" en $\Lambda$-modul $N$.

20. Lad $u : V \to V$ være en endomorfi i et $n$-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$, og lad $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ være det minimale polynomium for $u$. Polynomiet $f$ er altså en normeret frembringer for idealet af polynomier $p \in \mathbb{C}[X]$, for hvilke $p(u) = 0$. Vi har

$$\mathbb{C}[X]/(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[u] \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$

Vektorrummet $V$ kan altså opfattes som en modul over $\mathbb{C}[X]/(f)$. Ifølge algebraens fundamentalsætning kan vi skrive

$$f = (X-\lambda_1)^{n_1} \cdots (X-\lambda_k)^{n_k} , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

og får dermed

$$\mathbb{C}[X]/(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X]/(X-\lambda_1)^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}[X]/(X-\lambda_k)^{n_k}$$

Slut nu v.hj.a. opgave 19: Der findes en dekomposition

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

af vektorrummet $V$ i en direkte sum af underrum $V_i$, invariante under $u$, og således at $u - \lambda_i e$ er nilpotent på $V_i$.

21. Lad $J : V \to V$ være en endomorfi i et n-dimensionalt vektorrum over $\mathbb{R}$, således at
$$J^2 = -1_V .$$
Vis, at $V$ kan opfattes som modul over $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) = \mathbb{C}$. Vis, hvorledes man fra en $\mathbb{C}$-basis for $V$ kan komme til en "fornuftig" $\mathbb{R}$-basis for $V$.

22. For hvert primtal $p$ betragtes $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ som $\mathbb{Z}$-modul, altså $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{\frac{n}{p^r} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge r \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q}$

Vis, at der findes en isomorfi
$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_p \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}.$$
Gruppen $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ kan identificeres med en undergruppe i $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Hvilken? Hvilken undergruppe $\mathbb{U}$ svarer til $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$.

23. Lad $M$ være en $\mathbb{Z}$-modul. For et primtal $p$ sættes $M(p) = \{x \in M \mid \exists r \in \mathbb{N} : p^r x = 0\}$.

Vis, at $M(p)$'erne er uafhængige undermoduler i $M$, og vis, at deres sum er torsionsundermodulen i $M$.

24. Lad $M$ være $\mathbb{Z}$-modulen $\mathbb{Z}^2$. For hvilke $a, b \in \mathbb{Z}$ er undermodulen $\mathbb{Z}(a,b)$ direkte summand i $M$.

25. Vis, at hvis en kvotient $M/N$ er en fri $\Lambda$-modul, så er $N$ direkte summand i $M$.

26. En $R$-modul $N$ kaldes delelig, hvis der for ethvert reguleert element $r \in R$ og hvert element $x \in N$ findes et element $y \in N$, således at $ry = x$.
Vis, at hvis $M$ er en torsionsmodul (jfr. opg. 13) og $N$ er en delelig modul, så er $M \underset{R}{\otimes} N = 0$.

27. Lad $f : N \to N'$ være en surjektiv $R$-homomorfi med kernen $N_0$, lad $i : N_0 \hookrightarrow N$ være inklusionshomomorfien, og lad $M$ være endnu en $R$-modul. Med $K$ betegnes billedet ved homomorfien

$$1 \underset{R}{\otimes} i : M \underset{R}{\otimes} N_0 \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N.$$

Beskriv $K$, og vis, at homomorfien

$$1 \underset{R}{\otimes} f : M \underset{R}{\otimes} N \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} N'$$

er surjektiv, og at dens kerne er $K$ (jfr. Tensorprodukt, sætning 2.7.)

28. Lad $\mathfrak{a}$ være et ideal i $R$ og lad $M$ være en $R$-modul. Find en isomorfi:

$$M/\mathfrak{a}M \xrightarrow{\sim} M \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{a}$$

28. Lad $\mathfrak{a}_1$ og $\mathfrak{a}_2$ være idealer i ringen $R$. Find en isomorfi

$$R/(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \xrightarrow{\sim} R/\mathfrak{a}_1 \underset{R}{\otimes} R/\mathfrak{a}_2 .$$

29. Vis, at funktoren $M \underset{R}{\otimes} -$ kommuterer med (alle) direkte summer.

30. Lad $R \to R'$ være en ring homomorfi. Vi kan da opfatte $R'$ som en $R$-modul, og for en vilkårlig $R$-modul $M$ kan vi betragte $R$-modulen
$$M \underset{R}{\otimes} R'$$

Vis, at $M \underset{R}{\otimes} R'$ på naturlig måde er en $R'$-modul.
Vis, at $x \mapsto x \otimes 1$ er en $R$-lineær afbildning
$$M \longrightarrow M \underset{R}{\otimes} R'.$$
Vis, at hvis $M$ er en fri $R$-modul med basis $(e_\nu)_{\nu \in I}$, så er $M \underset{R}{\otimes} R'$ en fri $R'$-modul med basis $(e_\nu \otimes 1)_{\nu \in I}$.

31. Lad $M$ være en $R$-modul og lad $S \subseteq R$ være en multiplikativ delmængde. I produktmængden $M \times S$ defineres en relation $\equiv$ ved
$$(x,s) \equiv (x',s') \Leftrightarrow \exists u,v \in S:\ (ux,us) = (vx',vs').$$
Vis, at $\equiv$ er en ækvivalensrelation. Kvotientmængden betegnes $M[S^{-1}]$, og den naturlige afbildning $M \times S \to M[S^{-1}]$ betegnes $(x,s) \mapsto x/s$. Vis, at $M[S^{-1}]$ på naturlig måde er en $R[S^{-1}]$-modul. Find en isomorfi
$$M[S^{-1}] \xrightarrow{\sim} M \underset{R}{\otimes} R[S^{-1}].$$

32. Lad $M$ være en $R$-modul, og lad $\phi: M \to P$ være en alternerende $p$-lineær afbildning. Lad $f: M \to R$ være en linearform på $M$. Vis, at den ved
$$f \cap \phi:\ (x_0,\dots,x_p) \mapsto \sum_{i=0} (-1)^i f(x_i)\,\phi(x_0,\dots,\cancel{x_i},\dots,x_p)$$

defineres en alternerende $(p+1)$-lineær afbildning

$$f \cap \phi : M^{p+1} \to P.$$

Gør rede for, at vi til $p$ givne linearformer $f_1, \dots, f_p : M \to R$ induktivt kan definere en alternerende $p$-linearform betegnet

$$f_1 \cap \dots \cap f_p : M^p \to P$$

således at

$$f_1 \cap \dots \cap f_p = f_1 \cap (f_2 \cap \dots \cap f_p),$$

og vis, at afbildningen $(f_1, \dots, f_p) \mapsto f_1 \cap \dots \cap f_p$ er alternerende.

33. Idet vi for en $R$-modul $M$ med $M^*$ betegner den duale modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ bestående af lineære afbildninger $: M \to R$ (linearformer), er det let at se, at der for en fri modul $M$ med basis $e_1, \dots, e_n$ gælder, at $M^*$ er en fri modul med en basis, der består af de tilhørende koordinatfunktioner $x_1, \dots, x_n$. Basen $x_1, \dots, x_n$ for $M^*$ kaldes den til basen $e_1, \dots, e_n$ hørende duale basis. Vis, at

$$(x_1 \cap \dots \cap x_n)(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Er $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ en delmængde med $p$ elementer

$$J = \{j_1, \dots, j_p\}, \text{ hvor } 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n,$$

sætter vi $x_J = (x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$ og $\cap x_J = x_{j_1} \cap \dots \cap x_{j_p}$.
Vis, at der for en delmængde $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ med $p$ elementer gælder

$$(\cap x_J)(e_I) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad I = J \\ 0 & \phantom{\text{hvis}} \quad I \neq J \end{cases}$$

34. Lad $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ være en fast delmængde med $p$ elementer. Vi kan skrive

$$I = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad \text{hvor } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n,$$

og for komplementærmængden skrive

$$CI = \{i_{p+1}, \dots, i_n\}, \quad \text{hvor } 1 \leq i_{p+1} < \dots < i_n \leq n.$$

Idet $J$ er endnu en delmængde med $p$ elementer, skriver vi tilsvarende

$$J = \{j_1, \dots, j_p\}, \quad \text{hvor } 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$$

og

$$CJ = \{j_{p+1}, \dots, j_n\}, \quad \text{hvor } 1 \leq j_{p+1} < \dots < j_n \leq n.$$

Med $\binom{I}{J}$ betegnes permutationen

$$\binom{I}{J} = \begin{Bmatrix} i_1 & \dots & i_p & i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_p & j_{p+1} & \dots & j_n \end{Bmatrix} \in S_n.$$

Vis ved udregning, at der for enhver matrix $\alpha \in Mat_n(R)$ gælder

$$\det \alpha = \sum_J \operatorname{sign}\binom{I}{J} \left(\det \alpha^I_J\right)\left(\det \alpha^{CI}_{CJ}\right)$$

Hvad udsiger formlen, når $I = \{i\}$ kun består af ét element?

35. Lad $M$ være en $R$-modul. Vis, at der for elementer $x_1, \dots, x_p \in M$ og linearformer $f_1, \dots, f_p \in M^*$ gælder

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, \dots, x_p) = \det\left(f_i(x_j)\right).$$

36. I kvaternionskævlegemet $\mathbb{H}$ med kvaternionenhederne $1, i, j, k$ kan kvaternionerne af formen $\alpha_0 + \alpha_1 i$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ identificeres med de tilsvarende komplekse tal. Herved kan $\mathbb{C}$ opfattes som en delring af $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}.$$

Vis, at $\mathbb{H}$ kan organiseres som vektorrum over $\mathbb{C}$, idet produktet $\mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, betegnet $(z, w) \mapsto z.w$ defineres ved $z.w = wz$.

Vis, at elementerne $1, j$ er en $\mathbb{C}$-basis for $\mathbb{H}$.

Vis, at der for enhver kvaternion $\alpha \in \mathbb{H}$ gælder, at afbildningen $h_\alpha : w \longrightarrow \alpha w$ (homoteti med faktor $\alpha$) er en $\mathbb{C}$-lineær afbildning $: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, og vis, at $h$ er en injektiv ringhomomorfi

$$h : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}).$$

V.hj.a. $\mathbb{C}$-basen $1, j$ for $\mathbb{H}$, kan $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ identificeres med matrixringen $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, og $\mathbb{H}$ kan altså identificeres med en delring

$$\mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

Angiv denne delring.

37. Kvaterniongruppen $K$ er undergruppen i $\mathbb{H}^*$ bestående af elementerne $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$. Definer v.hj.a. homomorfien $h : \mathbb{H} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$ en repræsentation $K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{H})$, og vis, at denne er en simpel 2-dimensional repræsentation af $K$. Angiv en hermed ækvivalent matrixrepræsentation af $K$.

38. I $\mathbb{R}^3$ med den kanoniske basis $e_1, e_2, e_3$

betragter delmængden S bestående af de 8 vektorer af formen $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3$. (Hjørnerne i et hexaeder). Vis, at stabilisatorgruppen $G_S \subseteq GL_3(\mathbb{R})$ netop er den uegentlige oktaedergruppe $\tilde{O}$. Oktaedergruppen kaldes derfor også hexaedergruppen.

39. Find samtlige typer af simple repræsentationer af diedergruppen $D_4$

40. Find samtlige simple typer af repræsentationer af kvaterniongruppen K.

41. Vis, at mængden $\{1,2,3,4\}$ på netop 3 måder kan deles i 2 lige store disjunkte delmængder, og angiv disse tre delinger af $\{1,2,3,4\}$. Vis, at enhver permutation $g \in S_4$ permuterer de tre delinger, og definer v.hj. heraf en homomorfi : $S_4 \to S_3$. Vis, at den er surjektiv, og angiv dens kerne.

42. Lad g være et element i gruppen G. Vis, at delmængden $N_g = \{x \in G \mid xgx^{-1} = g\}$ er en undergruppe i G.
Lad $\mathscr{C}_g \subseteq G$ være den konjugentklasse i G, som indeholder g. Vis, at der ved

$$x \mapsto xgx^{-1}$$

defineres en surjektiv afbildning : $G \to \mathscr{C}_g$, og angiv den hertil hørende ækvivalensrelation.
Slut heraf, at

$$|\mathscr{C}_g| = |G : N_g|,$$

og specielt, at antallet af elementer i en konjugentklasse er divisor i gruppens orden.

43. Vis, at en undergruppe $H$ i $G$ er normal, hvis og kun hvis den er en forening af konjugeret-klasser. Vis, v.hj.a tabellen i "repræsentationer 3.17", at $S_4$ udover $A_4$ har netop én ikke-triviel normal undergruppe, og angiv denne.

44. Vis, at der for en repræsentation $V$ af $G$ gælder

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \dim_{\mathbb{C}} V^G,$$

hvor $V^G$ er underrummet af invariante vektorer i $V$. [Vink: Betragt endomorfien $\nu = \frac{1}{|G|}\sum_g g_V : V\to V$, og vis, at

$$\nu(V)\subseteq V^G \quad \text{og at} \quad \nu(x)=x,\ x\in V^G.$$

Vælg nu en basis for $V^G$, supplér til en basis for $V$ og udregn $\mathrm{Tr}\,\nu$ i denne basis.]

45. Vis, at de invariante vektorer i Homrepræsentationen $\mathrm{Hom}(U,V)$ udgør underrummet

$$\mathrm{Hom}_G(U,V)\subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$$

af $G$-lineære afbildninger : $U\to V$. Slut heraf v.hj.a opgave 44, at

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g^{-1})\chi_V(g) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(U,V).$$

Hvad følger heraf ved at betragte simple repræsentationer $S=U$, $T=V$?

46. Lad $S$ og $T$ være simple typer af repræsentationer af $G$, og lad $\rho : S \to T$ være en $\mathbb{C}$-lineær afbildning. Vis, at

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_T^{-1}\circ\rho\circ g_S = \begin{cases} \frac{\operatorname{Tr}\rho}{\dim_{\mathbb{C}} T}\, 1_T\,, & S = T \\ 0\,, & S \neq T. \end{cases}$$

[Vink: Benyt Schurs lemma. Vis – i tilfældet $S = T$ – at afbildningen er homoteti med en skalar i $\mathbb{C}$, og bestem denne skalar ved at udregne sporet.]

47. For de simple typer $T$ af repræsentationer af $G$ betegnes med $\varepsilon^T \in \mathbb{C}G$ det ved

$$\varepsilon^T = \frac{\dim T}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_T(g^{-1})\,g$$

definerede element. Det er klart, at elementerne $\varepsilon^T$ tilhører $\operatorname{Cent}\mathbb{C}G$. (Hvorfor?). Vis v.hj.a. karakterrelationerne, at $1 = \sum_T \varepsilon^T$ er en ortogonal spaltning af $1 \in \mathbb{C}G$ i centrale idempotenter.

For enhver repræsentation $V$ af $G$ kan vi betragte endomorfien $\varepsilon^T_V \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ (homoteti med faktor $\varepsilon^T$). Vis, for en simpel type $S$, at

$$\varepsilon^T_S = \begin{cases} 0 & S \neq T \\ 1_S & S = T \end{cases}$$

[Vink: Da $\varepsilon^T \in \operatorname{Cent}\mathbb{C}G$ er $\varepsilon^T_V$ en $G$-lineær afbildning. Vis, for $V = S$, at $\varepsilon^T_S$ er en homoteti med en skalar i $\mathbb{C}$, og bestem denne skalar ved at udregne sporet ].

48. Er der valgt en basis for hver af de simple typer $T$ af repræsentationer af $G$, får vi matrix-repræsentationer

$$\alpha^T : G \to GL_{n_T}(\mathbb{C}), \qquad n_T = \dim_{\mathbb{C}} T,$$

af de simple typer. For hvert $g \in G$ har vi $(n_T \times n_T)$-matricen $\alpha^T(g) = (\alpha^T_{ip}(g))$. Vi får altså koordinatfunktioner $g \mapsto \alpha^T_{ip}(g)$, i alt $\sum_T n_T^{\,2} = |G|$ funktioner: $G \to \mathbb{C}$. Vis, at

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha^T_{ip}(g^{-1})\,\alpha^S_{qj}(g) = \begin{cases} \frac{1}{\dim T} & \text{når } S = T \text{ og } i = j \text{ og } p = q \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

[Vink: Anvend opg. 46 på de homomorfier $\rho : S \to T$, der i de givne baser beskrives ved matricer af formen $\delta^{pq}$, hvor matricen $\delta^{pq}$ er givet ved $\delta^{pq}_{ij} = \delta^p_i \delta^q_j$.].

Slut heraf, at funktionerne $\alpha^T_{ip}$ er lineært uafhængige i $Afb(G, \mathbb{C})$, og dermed, at de er en basis.

49. Lad $V$ være et unitært vektorrum. En repræsentation af $G$ i $V$ kaldes *unitær*, hvis automorfierne $g_V$, $g \in G$, er unitære. Idet vi i et unitært vektorrum $V$ med $U(V)$ betegner gruppen af unitære automorfier i $V$, er en sådan repræsentation altså givet en en homomorfi

$$G \to U(V).$$

Vis for en sådan repræsentation, at hvis $W \subseteq V$ er et $G$-invariant underrum, så er $W^{\perp}$ (det ortogonale komplement) ligeledes $G$-invariant.

50. Lad V være en repræsentation af G, og lad der i vektorrummet V være givet et indre produkt, betegnet $(v, v') \mapsto \langle v, v'\rangle$. Vis, at der ved

$$\langle v, v'\rangle_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g.v, g.v'\rangle$$

defineres et indre produkt, at at den givne repræsentation er unitær m.h.t. dette indre produkt. Slut heraf, at enhver repræsentation af G er ækvivalent med en unitær matrixrepræsentation.

51. Vis v.hj.a. opgave 48, at hvis der er givet unitære matrixrepræsentationer af de simple typer T:

$$\alpha^T : G \to GL_{m_T}(\mathbb{C}),$$

så vil de $|G|$ funktioner $\alpha^T_{ip} : G \to \mathbb{C}$ opfylde

$$\langle \alpha^S_{qj}, \alpha^T_{ip}\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\dim T} & \text{når } S=T,\ q=i,\ j=p \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

og slut, at de udgør en ortogonal basis for $\mathrm{Afb}(G,\mathbb{C})$.

52. For en modul M over en kommutativ ring R sættes $T^n_R M = \overset{n}{\underset{R}{\otimes}} M$. $(T^0 M = R)$. Vis, at den direkte sum

$$T^{\cdot} M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T^n M$$

på naturlig måde kan organiseres som en R-algebra, kaldet tensoralgebraen

53. Definer for en modul M over den kommutative ring R det symmetriske (tensor-)produkt $S^n_R M$ ved at betragte symmetriske n-lineære afbildninger fra $M \times \cdots \times M$, og vis, at den direkte sum $S^{\cdot}_R M$ kan organiseres som en kommutativ R-algebra, kaldet den symmetriske algebra

54. For et primtal $p$ betragtes i ringen $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ delmængden

$$W = \{(x,y) \mid x^p \equiv y \pmod{p}\}.$$

Vis, at $W$ er en delring. Hvad betyder det, at vi for hvert $n \in \mathbb{Z}$ har $(n,n) = n1_W \in W$?

55. For et polynomium $p \neq 0$ med koefficienter i et legeme $L$ kan $L[X]$-modulen

$$M = L[X]/(p^n)$$

specielt betragtes som vektorrum over $L$. Angiv en basis.

Vis, i tilfældet $p = X-\lambda$, at elementerne $\textcircled{e_1},\dots,\textcircled{e_n} \in M$, hvor $e_i = p^{n-i}$, er en basis. Hvad bliver matricen for endomorfien $X_M$ m.h.t. denne basis?

Vis, i tilfældet $p = (X-\alpha)^2+\beta^2$ $(\beta\neq 0)$, at elementerne $\textcircled{e_1},\textcircled{f_1},\dots,\textcircled{e_n},\textcircled{f_n} \in M$, hvor $e_i = \beta^i p^{n-i}$, $f_i = \beta^{i-1}(X-\alpha)p^{n-i}$, er en basis. Hvad bliver matricen for endomorfien $X_M$ m.h.t. denne basis?

56. Lad $p$ være et primelement i et hovedidealområde $R$, og lad $N$ være en endeligt frembragt $R$-modul således at $pN = (0)$. Vis, at $N$ kan opfattes som vektorrum over legemet $R/(p)$. Vis, at $N$ (som $R$-modul) har endelig længde, og at der gælder $\operatorname{læng} N = \dim_{R/(p)} N$.

Vis, at der for en $R$-modul $M$ af endelig længde gælder

$$\dim_{R/(p)} {}_pM = \dim_{R/(p)} M/pM.$$

[ ${}_pM$ betegner kernen for homomorfien $p_M : M \to M$ (og $M/pM$ er kokernen ].

57. Et element $x$ i en modul $M$ over et hovedidealområde $R$ siges *at have orden $a$* $\in R$, hvis $a$ er en frembringer for idealet $\{r \in R \mid rx = 0\}$. Vi har da $R/Ra \cong Rx$. Ordenen er altså et (på associering nær entydigt bestemt) element i $R$. Bestem for et element $b \neq 0$ i $R$ ordenen af $bx \in M$ udtrykt ved $b$ og ordenen $a$ af $x$.

Elementet $x \in M$ kaldes *primært*, hvis dets orden er en potens af et primelement. Er $p$ dette primelement, siges $x$ at være *p-primært*. Vis, at de p-primære elementer i $M$ udgør en undermodul $M(p)$. Vis, at vi for torsionsundermodulen $M_T$ i $M$ har

$$M_T = \bigoplus_p M(p),$$

hvor $p$ gennemløber primelementerne på nær associering.

58. Ved en *primær basis* for en modul $M$ over et hovedidealområde $R$ forstås en endelig basis, hvis elementer er primære. Vis, at for hvert primelement $p \in R$ er antallet $a_{p,\nu}$ af elementer af orden $p^\nu$ i en sådan basis entydigt bestemt, idet vi har

$$\dim_{R/(p)} p^{\nu-1}M/p^{\nu}M = \sum_{\mu \geq \nu} a_{p,\mu}.$$

Slut specielt, at antallet af p-primære elementer i en sådan basis er $\dim_{R/(p)} {}_pM = \dim_{R/(p)} M/pM$.

59. Man kan vise, at enhver endeligt frembragt torsionsmodul $M$ over et hovedidealområde $R$ har en primærbasis. Vis, at denne sætning i tilfældet $R = \mathbb{C}[X]$ essentielt er sætningen om Jordans normalform. Hvad får vi i tilfældet $R = \mathbb{R}[X]$.
[Vink: Anvend opgave 55].

60. Lad $a \neq 0$ være element i et hovedidealområde $R$. Vis, at $R$-modulen $R_s/Ra$ har endelig længde, og bestem denne længde ud fra en primopløsning af $a$. Vis, at en $R$-modul $M$ har endelig længde, hvis og kun hvis den er en endeligt frembragt torsionsmodul.

61. Vis den i opgave 59 nævnte basissætning ved induktion efter long $M$. [Vink: Betragt et primelement $p \in R$, således at ${}_pM \neq (0)$. Vælg i $N = pM$ en primærbasis af formen $pe_1, \dots, pe_n$. Vælg i (vektorrummet over $R/(p)$) ${}_pM$ elementer $f_1, \dots, f_s$, således at ${}_pM = {}_pN \oplus Rf_1 \oplus \dots \oplus Rf_s$. Vis nu, at $M = Re_1 + \dots + Re_n + Rf_1 + \dots + Rf_s$, og slut, at summen er direkte ved at "sammenligne længden på venstreside med summen af længderne på højre side".]

62. Lad $\mathfrak{a}$ være et venstreideal i ringen $\Lambda$. Vis, at

$$\tilde{\Lambda} = \{\lambda \in \Lambda \mid \mathfrak{a}\lambda \subseteq \mathfrak{a}\}$$

er en delring af $\Lambda$, og at $\mathfrak{a}$ er et (to-sidet) ideal i $\tilde{\Lambda}$. Find en isomorfi

$$\tilde{\Lambda}/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\Lambda}(\Lambda_s/\mathfrak{a}).$$

63. Lad $N \subseteq \Lambda_s^n$ være en undermodul. Vis, at delmængden $I(N) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\Lambda)$, bestående af de matricer $\alpha$ for hvilke rækkerne tilhører $N$, er et venstreideal. Er alle venstreidealer i $\mathrm{Mat}_n(\Lambda)$ af denne form?

64. Lad $V$ være et endelig dimensionalt vektorrum over $L$, betragt i $V$ en kæde

$$(0) = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

og vektorer $e_j^{(i)} \in V_i$, $j = 1, \dots, k_i$, således at elementerne

$$\boxed{e_j^{(i)}} \in V_i / V_{i-1} \quad \text{er en basis,} \quad i = 1, \dots, n$$

Vis, at vektorerne $e_j^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k_i$ er en basis for $V$.

Lad nu $f \in \mathrm{End}_L(V)$ være en endomorfi, og antag, at underrummene $V_i$ er invariante under $f$. Vis, hvorledes $f$ inducer en endomorfi $f_i \in \mathrm{End}_L(V_i / V_{i-1})$. Antag, at $f_i$ m.h.t. basen $\boxed{e_j^{(i)}}$, $j = 1, \dots, k_i$ beskrives ved matricen $\alpha_i \in \mathrm{Mat}_{k_i}(L)$ og angiv matricen, der beskriver $f$ m.h.t. basen $e_j^{(i)}$ for $V$.

Lad $V$ betegne $V$ som $L[X]$-modul "via $f$". Vis, at ${}_fV$ har endelig længde. Find for $L = \mathbb{C}$ og $L = \mathbb{R}$ v.hj.a. en Jordan-Hölder kæde for ${}_fV$ en "fornuftig" matrix for $f$. Hvad udsiger Jordan-Hölders sætning om denne matrix?

65. Lad $V$ være endeligdimensional med indre produkt over $L$ ($L = \mathbb{R}$ eller $L = \mathbb{C}$). Vis, at enhver $*$-algebra $A \subseteq \mathrm{End}_L(V)$ er semisimpel [Lad $e_1, \dots, e_n$ være en basis for $V$, og betragt homomorfien $A_s \to Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$ givet ved $f \mapsto (fe_1, \dots, fe_n)$. Vis, at den er injektiv, og slut: $V$ s.s. $\Rightarrow$ $Ae_i \subseteq V$ s.s. $\Rightarrow$ $Ae_1 \times \cdots \times Ae_n = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ s.s. $\Rightarrow$ $A_s$ s.s. ].

Lad $f \in \mathrm{End}_L(V)$. Beskriv den mindste delalgebra $L\{f, f^*\} \subseteq \mathrm{End}_L(V)$, som indeholder $f$ og $f^*$, og vis, at den er en $*$-algebra. Hvilket resultat fås, når $f$ er normal (ɔ: $ff^* = f^*f$). [Udnyt, at hvis et legeme $L \supseteq \mathbb{C}$, og $\dim_{\mathbb{C}} L < \infty$, så er $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$ (og $L = \mathbb{C}$), og hvis $L \supseteq \mathbb{R}$, med $\dim_{\mathbb{R}} L < \infty$, så er enten $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ (og $L = \mathbb{R}$) eller $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$ (og $L \simeq \mathbb{C}$). {algebraens fundamentalsætn.?}]