Matematik 101, 1972–73

Anders Thorup

Forelæsningsnoter til MATEMATIK 101
Flere reelle variable

DIFFERENTIABILITET.

0. Indledning.

0.1. I det følgende vil vi betragte talrummene $\mathbb{R}^k$ for forskellige dimensionstal k. $\mathbb{R}^k$ vil her spille to roller, som vi dog ikke vil holde skarpt adskilte: Dels som metrisk rum, med den metrik, der udspringer af max-normen; i denne rolle vil elementerne i $\mathbb{R}^k$ blive kaldt punkter og vi kan tale om åbne mængder, kontinuerte afbildninger o.s.v. Dels som vektorrum over $\mathbb{R}$; i denne rolle vil elementerne i $\mathbb{R}^k$ blive kaldt vektorer og vi kan tale om basis, lineære afbildninger o.s.v.
Elementerne i $\mathbb{R}^k$ (i begge roller) er talsæt. Vi vil normalt skrive disse talsæt som søjler. Et talsæt $v \in \mathbb{R}^k$ har k koordinater, som vi sædvanligvis betegner $v_1, \cdots, v_k$, altså

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}.$$

[Bemærk, at vi ikke sætter _ under talsæt.]
Af typografiske grunde vil vi lejlighedsvis skrive en funktionsværdi $f(v)$ udførligt som $f(v_1, \cdots, v_k)$.

Lad os minde om, at de lineære afbildninger: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ er af formen: $v \mapsto Av$ med en entydigt bestemt $(\ell \times k)$-matrix A, kaldet den lineære afbildnings koeffecientmatrix. Specielt er linearformerne: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ af formen
$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \longmapsto \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, hvor $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ kaldes

linearformens <u>koefficienter</u>.

[Bemærk, at vi ikke sætter $=$ under matricer. I matrix-produktet $A v$ opfattes v som en søjlematrix med k elementer; $A v$ er altså en søjlematrix med ℓ elementer, d.v.s. element i $\mathbb{R}^{\ell}$] . For den transponerede til en matrix A benyttes betegnelsen A^T . For en vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ betegner v^T altså rækkematricen $v^T = (v_1, \dots, v_k)$.

0.2. Vi skal i det følgende betragte afbildninger definerede på åbne mængder Ω i $\mathbb{R}^k$. (En del kan dog uden videre udstrækkes til afbildninger, der er definerede på et interval i $\mathbb{R}^k$). Er der givet en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, har vi specielt de k koordinatfunktioner på Ω

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \longmapsto t_i \quad ; \qquad i = 1, \dots, k,$$

der er afbildninger: $\Omega \to \mathbb{R}$. De kaldes <u>koordinaterne på Ω.</u>
I en given sammenhæng vil vi ofte navngive disse koordinater, altså ofre betegnelser for disse k afbildninger. Vi vil således skrive "Lad $x_1, \dots, x_k$ være koordinaterne på Ω " i betydningen: x_i er den ved $t \mapsto t_i$ definerede afbildning $x_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$.
På en given åben mængde Ω i $\mathbb{R}^2$ betegnes koordinaterne ofte også x og y . At x er koordinaten på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ betyder, at x er inklusionsafbildningen: $\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}$.

1. En reel funktion af flere variable.

1.1 Lad os først betragte en reel funktion f på et interval $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, altså en afbildning $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Funktionen f siges som bekendt at være differentiabel i punktet $a \in \mathcal{I}$ med differentialkvotienten α, hvis den ved

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

definerede funktion har grænseværdien α for $t \to a$. Dette betyder altså, at funktionen

$$t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} & \text{for } t \neq a \\ \alpha & \text{for } t = a \end{cases}$$

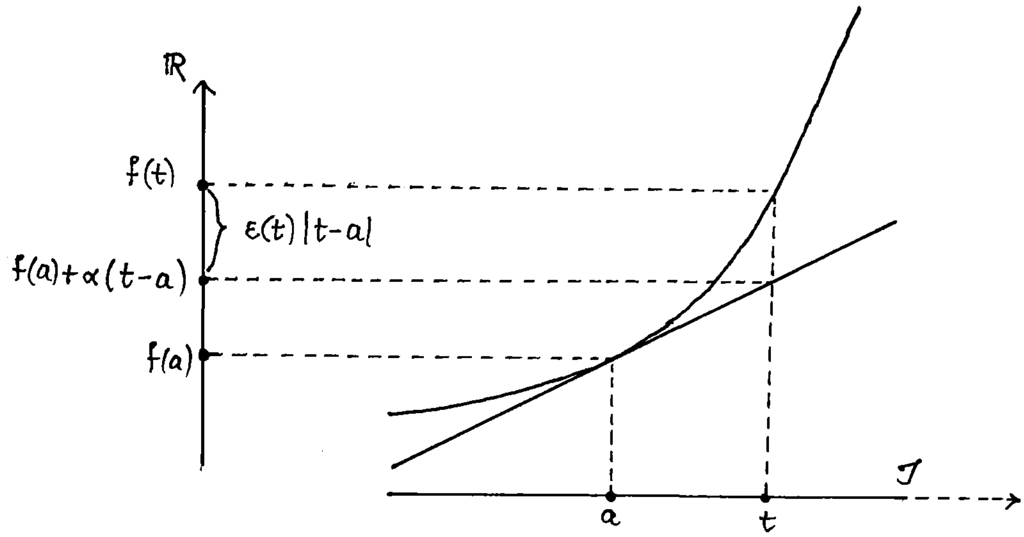
er kontinuert i a, og det er igen ensbetydende med, at funktionen

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(a) - \alpha(t-a)}{|t-a|} & \text{for } t \neq a \\ 0 & \text{for } t = a \end{cases}$$

er kontinuert i a. Differentiabiliteten kan altså udtrykkes ved, at vi har en fremstilling

$$f(t) = f(a) + \alpha(t-a) + \varepsilon(t)|t-a|,$$

hvor funktionen $\varepsilon : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er kontinuert i a med værdien $\varepsilon(a) = 0$.



"Nær" punktet a vil funktionen f altså "ligge tæt ved" den affine funktion $t \longmapsto f(a) + \alpha(t-a)$ i den forstand, at differensen er af formen $\varepsilon(t)|t-a|$, med en funktion $\varepsilon : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, kontinuert i a med værdien $\varepsilon(a) = 0$.

Differentialkvotienten i a betegnes også $Df(a)$ eller $f'(a)$.

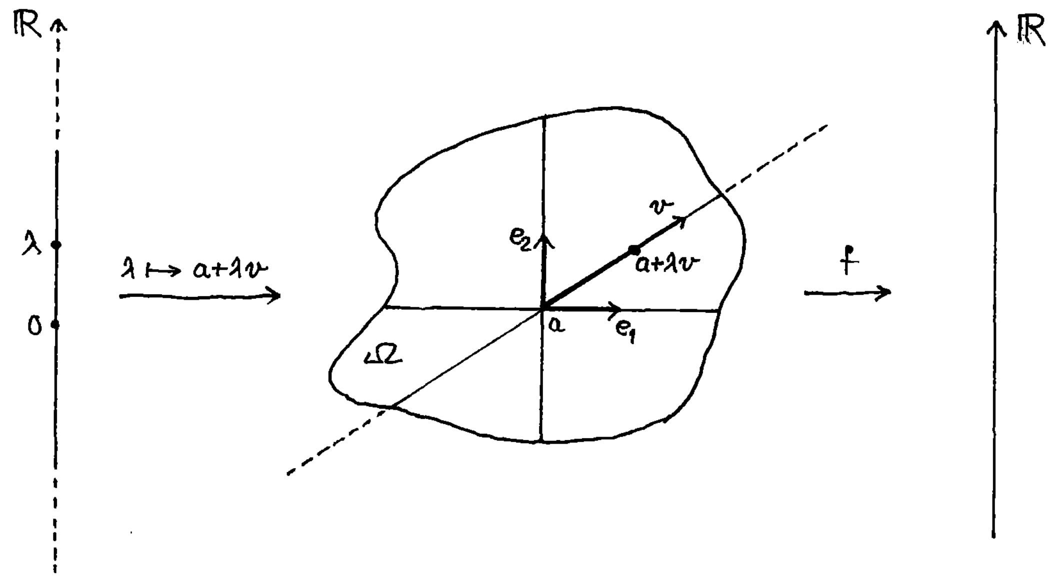
1.2. Lad os dernæst betragte en reel funktion f på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, og et punkt $a \in \Omega$. Det er nærliggende at generalisere ovenstående ved at betragte f's restriktion til linierne gennem a. Hvis $v \in \mathbb{R}^k$ er en vektor og $\lambda \in \mathbb{R}$ er et reelt tal, kan vi betragte vektoren λv (multiplikation af vektoren v med skalaren λ). Linierne gennem a er punktmængderne af formen $\{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, hvor $v \in \mathbb{R}^k$ er en vektor, kaldet en <u>retning</u> for linien. Da Ω er en åben mængde, er funktionen

$$\lambda \mapsto f(a+\lambda v)$$

defineret i en omegn af $0 \in \mathbb{R}$. Vi siger, at f er <u>retningsdifferentiabel i retningen v i punktet a</u> , hvis funktionen

$$\lambda \mapsto f(a+\lambda v)$$

er differentiabel i 0 . Differentialkvotienten af denne funktion i 0 kaldes da f 's <u>afledede i retningen</u> v (i punktet a) og betegnes $D_v f(a)$.



Specielt kan vi betragte en af de k basisretninger

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Funktionen $\lambda \mapsto f(a+\lambda e_i)$ kan udførligt skrives

$$\lambda \mapsto f(a_1, a_2, \cdots, a_i + \lambda, \cdots, a_k).$$

Vi siger, at den fremkommer ved at variere den i-te variabel og holde de øvrige fast. Hvis f er retningsdifferentiabel i hver af de k basisretninger, siger vi, at f er <u>partielt differentiabel i punktet</u> a. De afledede af f i basisretningerne kaldes også f's partielle afledede i punktet a, og betegnes $D_1 f(a), \cdots, D_k f(a)$, altså $D_{e_i} f(a) = D_i f(a)$. Er f partielt differentiabel i ethvert punkt i Ω, kan vi opfatte de partielle afledede som k funktioner $D_1 f, \cdots, D_k f : \Omega \to \mathbb{R}$. Vi siger, at $D_i f$ fås ved at <u>differentiere m.h.t. den i-te variabel</u>.

1.3. Eksempel. Den ved $f : t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1^2 t_2 + t_2^3$ definerede funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er partielt differentiabel med de partielle afledede bestemt ved

$$D_1 f(t) = 2 t_1 t_2 \;, \quad D_2 f(t) = t_1^2 + 3 t_2^2$$

1.4. Har man i en given sammenhæng navngivet koordinaterne på den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, er det ofte hensigtsmæssigt, at lade disse navne indgå i betegnelserne for de partielle afledede. Er således $x_1, \cdots, x_k$ koordinaterne på Ω, skriver vi

$$D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{x_i}(a)$$

og

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f = f'_{x_i} .$$

[Bemærk, at " ∂ " læses som " d ".]

Vi siger også, at $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ fås ved at <u>differentiere m.h.t. x_i</u>

Koordinaterne selv, altså de k funktioner

$x_1, \dots, x_k : \Omega \to \mathbb{R}$, er partielt differentiable med de partielle afledede

$$D_j x_i = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j . \end{cases}$$

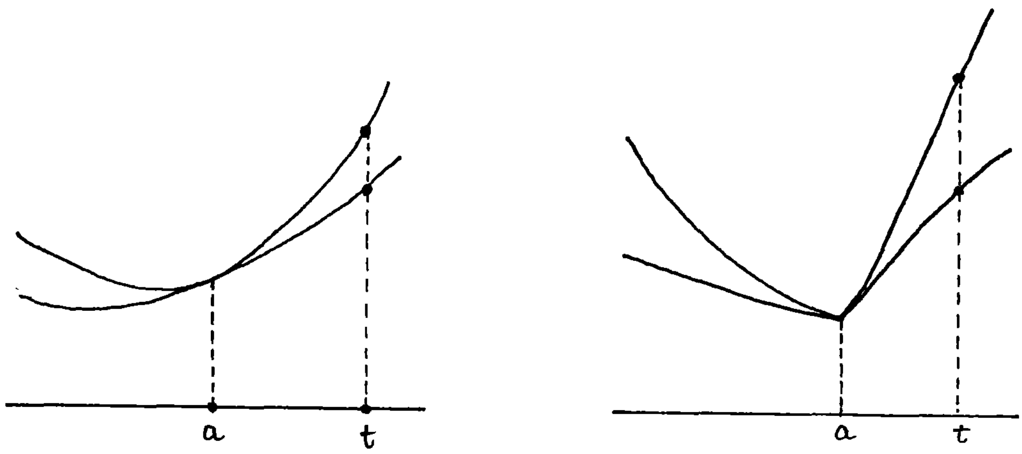
1.5. Eksempel. Lad x, y være koordinaterne på $\mathbb{R}^2$. Funktionen i det foregående eksempel kan skrives $f = x^2 y + y^3$, og vi finder $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$.

1.6. Det ovenfor skitserede differentiabilitetsbegreb er på mange måder utilstrækkeligt. Det viser sig hensigtsmæssigt i stedet at generalisere begrebet "ligger tæt ved en affin funktion".

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben mængde og betragt et punkt $a \in \Omega$. To funktioner $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ siges at have <u>kontakt af n-te orden</u> $(n \geq 1)$ i punktet a , hvis vi for differensen har en fremstilling

$$(*) \qquad f(t) - g(t) = \varepsilon(t)\, \|t-a\|^n , \qquad t \in \Omega$$

med en funktion $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$, der er kontinuert i a med værdien $\varepsilon(a) = 0$. For $n = 1$ siger vi blot, at f og g har kontakt i a. Dette er stærkere end at $f(t) - g(t) \to 0$ for $t \to a$.



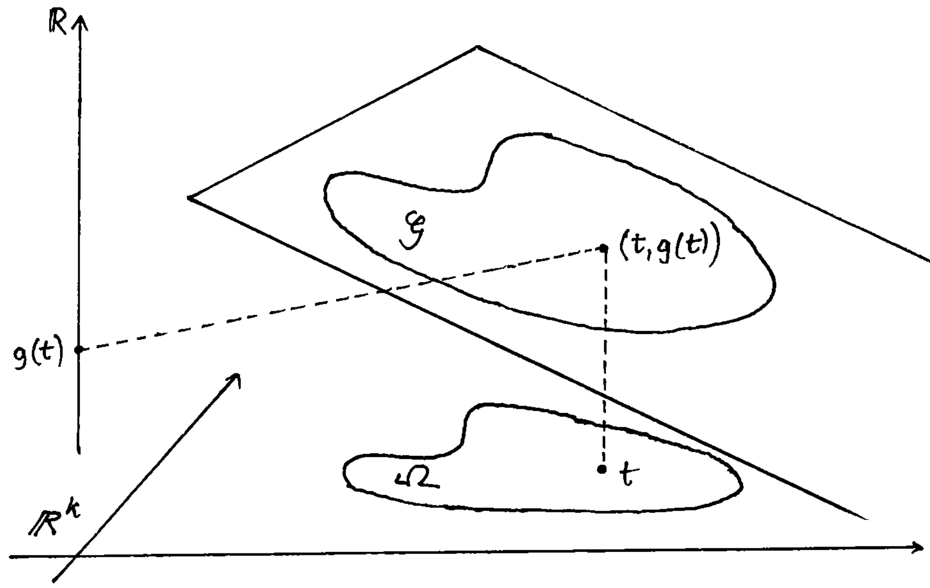
1.7.
Bemærkning. Gyldigheden af $(*)$ for $t = a$ betyder blot, at $f(a) = g(a)$. Det ses, at f og g har kontakt af n-te orden i a, netop hvis $f(a) = g(a)$ og vi har en fremstilling $(*)$ for alle $t \neq a$, med en funktion $\varepsilon : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, som opfylder $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to a$.

1.8. Bemærkning. I en situation, hvor man vil undersøge en afbildning f i omegnen af et punkt $a \in \Omega$, vil man ofte i stedet betragte afbildningen $h \mapsto f(a+h)$. Da Ω er åben, er også mængden $\{h \in \mathbb{R}^k \mid a+h \in \Omega\}$ åben, så $h \mapsto f(a+h)$ er defineret i en omegn af $0 \in \mathbb{R}^k$. Det ses, at f og $g : \Omega \to \mathbb{R}$ har kontakt af n-te orden i a, hvis og kun hvis vi har fremstilling

$$f(a+h) - g(a+h) = \varepsilon(h)\|h\|^n,$$

med en reel funktion ε, kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon(0) = 0$.

1.9. En funktion $g : t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \mapsto \beta + \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_k t_k$, kaldes en <u>affin</u> funktion på Ω. Funktionen g er altså af formen (konstant) + (lineær afbildning). Det ses, at $g : \Omega \to \mathbb{R}$ er en affin funktion, netop hvis grafen $\mathcal{G} = \{(t, g(t)) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t \in \Omega\}$ er indeholdt i en hyperplan i $\mathbb{R}^{k+1}$.



1.10. En afbildning $f : \Omega \to \mathbb{R}$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde, kaldes <u>differentiabel i punktet</u> $a \in \Omega$, hvis den har kontakt med en affin funktion i a. Hvis g er en affin funktion, $g(t) = \beta + \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_k t_k$, finder vi $g(a+h) = \beta + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k = g(a) + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k$. Hvis f har kontakt med g i a, har vi $g(a) = f(a)$, altså $g(a+h) = f(a) + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k$, og vi ser, at f er differentiabel i punktet a, hvis og kun hvis der findes $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, så at vi har en fremstilling

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k + \varepsilon(h)\|h\|.$$

for alle h i en omegn af $0 \in \mathbb{R}^k$, med en funktion ε, kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon(0) = 0$.

Funktionen $h \mapsto \Delta f(h) = f(a+h) - f(a)$ kaldes <u>funktionstilvæksten</u> ud fra a. Idet afbildningen $h \mapsto \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k$ er en lineær funktion, kan differentiabiliteten også udtrykkes ved at sige, at funktionstilvæksten Δf har kontakt med en lineær funktion i 0.

Antag nu, at $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel i punktet $a \in \Omega$, altså at der findes en fremstilling $(*)$.
Vi udleder en række konsekvenser:

1.11. <u>Funktionen f er kontinuert i a.</u> Der gælder endda, at der findes en omegn $U = \{t \mid \|t-a\| < \rho\} \subseteq \Omega$ og en konstant $K > 0$, så at $|f(t) - f(a)| \leq K\|t-a\|$ for $t \in U$, thi da ε er kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon(0) = 0$, findes $\rho > 0$, så at $a+h \in \Omega$ og

$|\varepsilon(h)| \leq 1$, når $\|h\| < \rho$. Vi finder derfor

$$|\Delta f(h)| = |\alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k + \varepsilon(h)\|h\|| \leq [|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| + 1]\|h\|,$$

som viser den ønskede ulighed med $K = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| + 1$.

1.12. <u>Funktionen f er retningsdifferentiabel i enhver retning $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ i punktet a med den retnings-afledede</u>

$$\underline{D_v f(a) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k,}$$

thi for hvert $\lambda \in \mathbb{R}$ tilstrækkelig tæt ved 0 finder vi

$$f(a+\lambda v) - f(a) = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k)\lambda + \varepsilon(\lambda v)\|v\|\,|\lambda|,$$

hvoraf påstanden fremgår, idet $\lambda \longmapsto \varepsilon(\lambda v)\|v\|$ er kontinuert i $0 \in \mathbb{R}$ med værdien 0.

1.13. Specielt følger det, at tallene $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ er entydigt bestemte, idet der gælder

$$\alpha_1 = D_1 f(a), \quad \cdots \quad, \quad \alpha_k = D_k f(a).$$

f har således i a kontakt med netop én affin funktion, nemlig med funktionen $t \longmapsto f(a) + \alpha_1(t_1 - a_1) + \cdots + \alpha_k(t_k - a_k)$.

1.14. Den ved $h \longmapsto \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_k h_k$ bestemte linearform : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ kaldes <u>differentialet</u> af f i punktet a og betegnes df_a, altså

$$\boxed{df_a(h) = D_1 f(a) h_1 + \cdots + D_k f(a) h_k.}$$

1.15. Bemærkning. Opspaltningen $(*)$ har altså formen $\Delta f(h) = df_a(h)+\varepsilon(h)\|h\|$. For at vise, at en given funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel i a med differentialet φ, hvor $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ er en given linearform, skal man altså vise, at funktionen $h \mapsto \Delta f(h) - \varphi(h)$ har formen $\varepsilon(h)\|h\|$, med en funktion ε, så at $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

1.16. Koordinaterne $x_1, \dots, x_k$ på Ω er i ethvert punkt $a \in \Omega$ differentiable med differentialer $(dx_i)_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ bestemt ved

$$(dx_i)_a(h) = h_i , \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$

Vi har således $df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(dx_1)_a(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,(dx_k)_a(h)$, og denne ligning kan med de sædvanlige kompositioner for linearformer skrives

$$\boxed{df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(dx_1)_a + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,(dx_k)_a .}$$

1.17. En konstant funktion $f = c$ er åbenbart differentiabel i a med differentialet $df_a = 0$. Hvis f og g er differentiable i a, er også funktionerne $f+g$, fg og $\frac{f}{g}$ (den sidste er kun defineret, hvis $g(t) \neq 0$ for alle $t \in \Omega$) differentiable med differentialer bestemt ved

$$d(f+g)_a = df_a + dg_a , \quad d(fg)_a = g(a)df_a + f(a)\,dg_a$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{1}{g(a)}\,df_a - \frac{f(a)}{g(a)^2}\,dg_a = \frac{g(a)\,df_a - f(a)\,dg_a}{g(a)^2} .$$

Vi udelader beviserne, der er analoge med de tilsvarende udsagn for funktioner på et interval.

1.18. For en reel funktion f på et interval $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ og et tal $a \in \mathcal{I}$ (altså tilfældet $k = 1$) er $df_a(h) = Df(a)h,\ h \in \mathbb{R}$. Den (ene) partielle afledede er altså den sædvanlige afledede $Df(a) = f'(a)$. Hvis x er koordinaten på $\mathcal{I}$, har vi $dx_a(h) = h$.

For alle $h \neq 0$ har vi altså

$$f'(a) = \frac{df_a(h)}{dx_a(h)}$$

I denne forstand er differentialkvotienten $f'(a)$ altså en kvotient af differentialerne df_a og dx_a . Vi bruger også betegnelsen $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

1.19. Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kaldes <u>differentiabel</u> i Ω , hvis den er differentiabel i ethvert punkt af Ω . En sådan funktion er altså kontinuert, og har <u>partielle afledede</u>, der er funktioner $D_1 f, \cdots, D_k f : \Omega \to \mathbb{R}$. I ethvert punkt $a \in \Omega$ har vi en linearform $df_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Familien af alle disse linearformer kaldes <u>differentialet af f</u> og betegnes df , altså

$$df = (df_a)_{a \in \Omega}$$

1.20. Vi kan på oplagt måde indføre kompositioner for familier $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Omega}$ af linearformer $\varphi_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Hvis $\varphi = (\varphi_a)_{a\in\Omega}$ og $\psi = (\psi_a)_{a\in\Omega}$ er to sådanne familier, sætter vi

$$\varphi + \psi = (\varphi_a + \psi_a)_{a\in\Omega}$$ [altså for hvert $a\in\Omega$ addition af de to linearformer φ_a og ψ_a]

Hvis $\varphi = (\varphi_a)_{a\in\Omega}$ er en sådan familie, og λ er et reelt tal, sætter vi

$$\lambda\varphi = (\lambda\varphi_a)_{a\in\Omega}$$ [altså for hvert $a\in\Omega$ multiplikation af linearformen φ_a med skalaren $\lambda\in\mathbb{R}$] .

Det ses let, at familierne med disse to kompositioner udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$.

Mere generelt, hvis $\varphi = (\varphi_a)_{a\in\Omega}$ er en sådan familie og $g:\Omega\to\mathbb{R}$ er en funktion, sætter vi

$$g\varphi = (g(a)\varphi_a)_{a\in\Omega}$$ [altså for hvert $a\in\Omega$ multiplikation af linearformen φ_a med skalaren $g(a)\in\mathbb{R}$] .

Med disse kompositioner kan ligningerne

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(dx_1)_a + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,(dx_k)_a \ , \quad a\in\Omega$$

simpelt skrives

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k}$$

og for differentiable funktioner f og $g:\Omega\to\mathbb{R}$ får vi ligningerne

$$d(f+g) = df + dg \ , \qquad d(\lambda f) = \lambda\, df$$

$$d(fg) = f\,dg + g\,df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g}\,df - \frac{f}{g^2}\,dg = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$$

(den sidste for så vidt $g(t) \neq 0$ for alle $t \in \Omega$).

1.21. Eksempel. Lad x_1, x_2 være koordinaterne på mængden $\Omega = \{t = \binom{t_1}{t_2} \in \mathbb{R}^2 \mid t_2 \neq 0\}$. Funktionen $x_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ opfylder $x_2(t) = t_2 \neq 0$ for alle $t \in \Omega$. Lad os vise, at funktionen $\frac{x_1}{x_2} : \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiabel med differentialet

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2}{{x_2}^2}.$$

Vi skal vise, at der i ethvert punkt $a = \binom{a_1}{a_2} \in \Omega$ gælder

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_a = \frac{a_2\,(dx_1)_a - a_1\,(dx_2)_a}{{a_2}^2}$$

altså for ethvert $h = \binom{h_1}{h_2} \in \mathbb{R}^2$

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_a (h) = \frac{a_2 h_1 - a_1 h_2}{{a_2}^2}$$

Vi betragter derfor differensen $h \mapsto \Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)(h) - \frac{a_2 h_1 - a_1 h_2}{{a_2}^2}$ og finder herfor udtrykket

$$\frac{a_1 + h_1}{a_2 + h_2} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2 h_1 - a_1 h_2}{{a_2}^2} = \frac{(a_1 h_2 - a_2 h_1)\,h_2}{{a_2}^2\,(a_2 + h_2)},$$

der for hvert $a \in \Omega$ er af formen $\varepsilon(h)\,\|h\|$, hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

2. Kontinuert differentiable funktioner.

2.1. For en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ gælder følgende vigtige sætning:

Hvis en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er partielt differentiabel i ethvert punkt i Ω, og hvis de partielle afledede $D_1 f, \dots, D_k f : \Omega \to \mathbb{R}$ er kontinuerte funktioner, da er f differentiabel.

Bevis. Vi betragter et punkt $a \in \Omega$ og vælger en omegn $U = \{ t \in \mathbb{R}^k \mid \|t - a\| \leq \rho \} \subseteq \Omega$. For en vektor $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$ med $\|h\| \leq \rho$ betragtes punkterne $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$, hvor

$$a^{(j)} = \begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ \vdots \\ a_j + h_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Vi har $a^{(0)} = a$, $a^{(k)} = a + h$, og $a^{(j)} \in U$, $j = 0, 1, \dots, k$. Ved anvendelse af middelværdisætningen for funktioner af en variabel finder vi

$$\begin{aligned} \Delta f(h) &= f(a+h) - f(a) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left[f(a^{(j)}) - f(a^{(j-1)}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} D_j f(\xi^{(j)})\, h_j , \end{aligned}$$

hvor $\xi^{(j)}$ er et punkt på liniestykket, der forbinder

$a^{(j-1)}$ og $a^{(j)}$. Vi har $\|\xi^{(j)} - a\| \leq \|h\|$, og altså $\xi^{(j)} \to a$ når $h \to 0$; da funktionen $D_j f$ er kontinuert i a, kan vi derfor skrive $D_j f(\xi^{(j)}) = D_j f(a) + \varepsilon^{(j)}(h)$, hvor $\varepsilon^{(j)}(h) \to 0$ for $h \to 0$, $j = 1, \cdots, k$. Indsættes dette, får vi

$$\Delta f(h) = D_1 f(a) h_1 + \cdots + D_k f(a) h_k + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^{(j)}(h) h_j,$$

og da restleddet $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon^{(j)}(h) h_j$ er af formen $\varepsilon(h)\|h\|$, med $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$, er f differentiabel i a $\square$

2.2. Eksempel. Lad x, y være koordinaterne på $\mathbb{R}^2$. Funktionen xy har de partielle afledede $\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$, som er kontinuerte. Følgelig er xy differentiabel (hvad der naturligvis også let vises direkte) med differentialet $d(xy) = y\,dx + x\,dy$.

2.3. Udfra klassen $\mathscr{C}^0(\Omega)$ af kontinuerte funktioner på den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ defineres induktivt (for $n \geq 1$) klassen $\mathscr{C}^n(\Omega)$ af <u>n gange kontinuert differentiable funktioner</u>, som de funktioner $f : \Omega \to \mathbb{R}$, der har partielle afledede $D_1 f, \cdots, D_k f : \Omega \to \mathbb{R}$, som tilhører klassen $\mathscr{C}^{n-1}(\Omega)$. Funktionerne $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i klassen $\mathscr{C}^1(\Omega)$ af kontinuert differentiable funktioner er altså differentiable ifølge den viste sætning, og specielt altså kontinuerte. Det følger, at vi har

$$\mathscr{C}^0(\Omega) \supseteq \mathscr{C}^1(\Omega) \supseteq \mathscr{C}^2(\Omega) \supseteq \cdots$$

Fællesmængden af klasserne $\mathscr{C}^n(\Omega)$ er klassen $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ af vilkårligt ofte differentiable funktioner på Ω .

I stedet for at sige, at funktionen $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ligger i klassen $\mathscr{C}^n(\Omega)$ siger vi også at f er af klasse $\mathscr{C}^n$ eller at f er en <u>$\mathscr{C}^n$-funktion</u>.

2.4. Sætning. <u>For en funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ af klasse $\mathscr{C}^2$ gælder</u>

$$\underline{D_iD_jf = D_jD_if\,,\quad i,j=1,\cdots,k.}$$

Bevis. Vi skal vise, at der gælder $D_iD_jf(a)=D_jD_if(a)$ i et hvert punkt $a\in\Omega$. For at bestemme $D_iD_jf(a)$ og $D_jD_if(a)$ behøver vi kun at se på funktionen

$$t=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}\mapsto f(a_1,\cdots,a_i+t_1,\cdots,a_j+t_2,\cdots,a_k).$$

For at vise identiteten, kan vi derfor indskrænke os til tilfældet $k=2$ (og $i=1$, $j=2$).

Vi betragter nu en omegn $\Xi=\{t\mid \|t-a\|\le\rho\}\subseteq\Omega$, og vi sætter

$$S=f(a_1+\rho,a_2+\rho)-f(a_1+\rho,a_2)-f(a_1,a_2+\rho)+f(a_1,a_2).$$

Nu betragtes først funktionen

$$g:\ t_1\mapsto f(t_1,a_2+\rho)-f(t_1,a_2),\quad a_1\le t_1\le a_1+\rho.$$

Da gælder $S=g(a_1+\rho)-g(a_1)$. Funktionen g er differentiabel med den afledede $t_1\mapsto g'(t_1)=D_1f(t_1,a_2+\rho)-D_1f(t_1,a_2)$. Ifølge middelværdisætningen findes derfor et tal ξ_1 med $a_1\le\xi_1\le a_1+\rho$, så at $g(a_1+\rho)-g(a_1)=$

$g'(\xi_1)\rho$, altså så at

$$S = [D_1 f(\xi_1, a_2+\rho) - D_1 f(\xi_1, a_2)]\,\rho .$$

For dette ξ_1 betragtes funktionen $t_2 \mapsto D_1 f(\xi_1, t_2)$, $a_2 \leq t_2 \leq a_2 + \rho$. Denne funktion er differentiabel med den afledede: $t_2 \longmapsto D_2 D_1 f(\xi_1, t_2)$. Ifølge middelværdisætningen findes derfor et tal ξ_2 med $a_2 \leq \xi_2 \leq a_2+\rho$, så at $D_1 f(\xi_1, a_2+\rho) - D_1 f(\xi_1, a_2) = D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2)\rho$. Vi har altså

$$S = D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2)\,\rho^2.$$

På tilsvarende måde ses, at der findes tal η_2 og η_1 med $a_2 \leq \eta_2 \leq a_2+\rho$, $a_1 \leq \eta_1 \leq a_1 + \rho$, så at vi også har

$$S = D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2)\,\rho^2.$$

Det følger, at $D_1 D_2 f(\eta_1, \eta_2) = D_2 D_1 f(\xi_1, \xi_2)$. Specielt har vi altså set, at der i omegnen $\Xi = \{t \mid \|t - a\| \leq \rho\}$ findes to punkter $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$ og $\eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}$ så at

$$D_1 D_2 f(\eta) = D_2 D_1 f(\xi).$$

Lader vi nu $\rho \to 0$, og udnytter vi kontinuiteten af $D_1 D_2 f$ og $D_2 D_1 f$ i punktet a , ser vi, at $D_1 D_2 f(a) = D_2 D_1 f(a)$.

$\square$

2.5. For en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ af klasse $\mathscr{C}^n$ kan vi betragte partielle afledede af n-te orden af formen

$$D_{i_n} \cdots D_{i_2} D_{i_1} f ,$$

hvor vi først har differentieret m.h.t. den i_1-te variabel, dernæst m.h.t. den i_2-te o.s.v. Hvis $x_1, \cdots, x_k$ er koordinaterne på Ω, bruges også betegnelserne

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} .$$

Af sætningen følger, at denne partielle afledede ikke afhænger af rækkefølgen af differentiationerne, men kun af det antal gange, der er differentieret m.h.t. x_1, m.h.t. x_2 o.s.v. Differentieres der p_1 gange m.h.t. x_1, p_2 gange m.h.t. x_2 o.s.v. (altså $p_1 + \cdots + p_k = n$), bruges betegnelsen

$$D_1^{p_1} \cdots D_k^{p_k} f = \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_k^{p_k}} .$$

Ud fra punktet $a \in \Omega$ defineres <u>differentialet af n-te orden</u>, $d^n f_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, som funktionen

$$h \mapsto d^n f_a(h) = \sum_{i_1=1}^{k} \cdots \sum_{i_n=1}^{k} D_{i_n} \cdots D_{i_1} f(a)\, h_{i_n} \cdots h_{i_1}$$

$$= \sum_{p_1+\cdots+p_k=n} \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!} D_1^{p_1} \cdots D_k^{p_k} f(a)\, h_1^{p_1} \cdots h_k^{p_k} ;$$

her har vi benyttet, at antallet af talsæt $(i_1, \ldots, i_n)$, i hvilke

p_1 af tallene er 1

$\vdots$

p_k af tallene er k

er lig med $\dfrac{n!}{p_1! \cdots p_k!}$.

Det ses, at $d^n f_a$ er et homogent n-te grads polynomium.

2.6. Udtryk, hvori der indgår afledede af højere orden, kompliceres ofte af de mange indices. En hensigtsmæssig betegnelsesform fås ved at indføre multiindices. Et <u>multiindex</u> er et sæt $p = (p_1, \cdots, p_k)$ af hele tal ≥ 0 (altså et element i $\mathbb{N}_0^k$).
For et multiindex $p = (p_1, \cdots, p_k)$ definerer vi

$$|p| = p_1 + \cdots + p_k$$
$$p! = p_1! \cdots p_k!$$
$$h^p = h_1^{p_1} \cdots h_k^{p_k}, \text{ for en vektor } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k.$$
$$D^p f = D_1^{p_1} \cdots D_k^{p_k} f, \text{ for en funktion } f \in \mathscr{C}^{|p|}(\Omega)$$

(altså for en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, der er $p_1 + \cdots + p_k$ gange kontinuert differentiabel). Med disse betegnelser kan vi, for en funktion $f \in \mathscr{C}^n(\Omega)$ skrive

$$\boxed{d^n f_a(h) = \sum_{|p| = n} \frac{n!}{p!} D^p f(a) h^p, \quad h \in \mathbb{R}^k,}$$

hvor der summeres over alle multiindices $p = (p_1, \cdots, p_k)$ med $|p| = p_1 + \cdots + p_k = n$.

3. Vektorfunktioner af flere variable.

3.1. Inden vi videreudvikler teorien for differentiable funktioner, vil vi generalisere begreberne til vektorfunktioner.

Lad stadig Ω være en åben mængde i $\mathbb{R}^k$. En afbildning $f: \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ er - som alle afbildninger ind i $\mathbb{R}^\ell$ - af formen

$$f : t \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_\ell(t) \end{pmatrix}.$$

Funktionerne : $t \mapsto f_j(t)$ er afbildninger $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, \ell$. De kaldes afbildningens koordinatfunktioner, og vi skriver også

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}.$$

Afbildninger ind i $\mathbb{R}^\ell$ (for et eller andet ℓ) vil vi kalde vektorfunktioner eller vektorafbildninger.

3.2. To vektorafbildninger $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ siges at have kontakt af orden n $(n \geq 1)$ i punktet $a \in \Omega$, hvis vi for differensen har en fremstilling

$$(*) \qquad f(t) - g(t) = \varepsilon(t)\, \|t-a\|^n, \quad t \in \Omega$$

hvor vektorafbildningen $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ er kontinuert i a med værdien $\varepsilon(a) = 0$.

Fremstillingen er ensbetydende med de ℓ fremstillinger

$$(*)_j \qquad f_j(t) - g_j(t) = \varepsilon_j(t)\, \|t-a\|^n, \quad j = 1, \cdots, \ell.$$

for koordinatfunktionerne, og da $\varepsilon(t) \to 0$ for $t \to a$, hvis og kun hvis vi har $\varepsilon_j(t) \to 0$ for $t \to a$, $j = 1, \cdots, \ell$, har vektorafbildningerne f og g kontakt af n-te orden i a, hvis og kun hvis koordinatfunktionerne f_j og g_j

har kontakt af m-te orden i a, $j = 1, \cdots, \ell$.

3.3. En vektorafbildning $g : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde, af formen $g(t) = At + \beta$, hvor A er en $(\ell \times k)$-matrix og $\beta \in \mathbb{R}^\ell$, kaldes en <u>affin afbildning</u>. g er altså af formen (lineær afbildning) + (konstant afbildning).

Hvis $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\ell 1} & \cdots & \alpha_{\ell k} \end{pmatrix}$, kan afbildningen udførligt

skrives

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\ell 1} & \cdots & \alpha_{\ell k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \end{pmatrix}$$

Hvis $A_1, \cdots, A_k$ er matricens søjler (altså $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{\ell i} \end{pmatrix}$), skriver vi $A = (A_1, \cdots, A_k)$, og afbildningen kan skrives

$$t \longmapsto A_1 t_1 + \cdots + A_k t_k + \beta .$$

Det ses, at en vektorafbildning $g : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ er affin, hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne $g_j : \Omega \to \mathbb{R}$ er affine funktioner.

3.4. En vektorafbildning $f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde, kaldes <u>differentiabel i punktet</u> $a \in \Omega$, hvis den har kontakt med en affin afbildning i punktet a, altså hvis og kun hvis der findes en $(\ell \times k)$-matrix $A = (A_1, \cdots, A_k)$, så at vi har en fremstilling

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(h)\|h\|.$$

for alle h i en omegn af $0 \in \mathbb{R}^k$, med en vektorafbildning ε, der er kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon(0) = 0$.

Fremstillingen $(*)$ kan også skrives

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = A_1 h_1 + \cdots + A_k h_k + \varepsilon(h)\|h\|,$$

og den er ensbetydende med fremstillingerne

$$(*)_j \qquad f_j(a+h) - f_j(a) = \alpha_{j1} h_1 + \cdots + \alpha_{jk} h_k + \varepsilon_j(h)\|h\|$$

for de ℓ koordinatfunktioner $f_1, \cdots, f_\ell$.
Heraf følger straks: <u>Vektorafbildningen $f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ er differentiabel i a, hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ er differentiable i a.</u> Antag nu, at vektorafbildningen $f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ er differentiabel i punktet $a \in \Omega$, altså at der findes en fremstilling $(*)$.
Vi udleder en række konsekvenser.

3.5. <u>f er kontinuert i a.</u> Der gælder endda, at der findes en omegn $U = \{t \mid \|t-a\| \leq \rho\} \subseteq \Omega$ og en konstant $K > 0$ så at $\|f(t) - f(a)\| \leq K\|t-a\|$, når $t \in U$, thi vi har en sådan ulighed for hver af koordinatfunktionerne f_j og dermed også for $\|f(t) - f(a)\| = \max_j |f_j(t) - f_j(a)|$.

3.6. Matricen A er entydigt bestemt, thi af fremstillingen $(*)_j$ følger, at elementerne $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jk}$ i den j-te række er de partielle afledede $D_1 f_j(a), \cdots, D_k f_j(a)$ af den j-te koordinatfunktion $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$. f har således i punktet a kontakt med netop en affin afbildning. Matricen A kaldes <u>funktionalmatricen</u> eller <u>Jacobi-matricen</u> (efter C.G.J. Jacobi 1804-51), og betegnes $Df(a)$. Vi har altså

$$Df(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_k f_1(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_\ell(a) & D_2 f_\ell(a) & \cdots & D_k f_\ell(a) \end{pmatrix}$$

Søjlerne $A_1, \cdots, A_k$ i matricen $A = Df(a)$ kaldes de <u>partielle afledede</u> af f i punktet a , og betegnes $D_1 f(a), \cdots, D_k f(a)$, altså

$$D_i f(a) = \begin{pmatrix} D_i f_1(a) \\ \vdots \\ D_i f_\ell(a) \end{pmatrix} .$$

Den ved $h \mapsto Ah$ bestemte lineære afbildning : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ kaldes <u>differentialet af f i a</u> og betegnes df_a .
Vi har altså

$$\boxed{df_a(h) = D_1 f(a) h_1 + \cdots + D_k f(a) h_k , \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k}$$

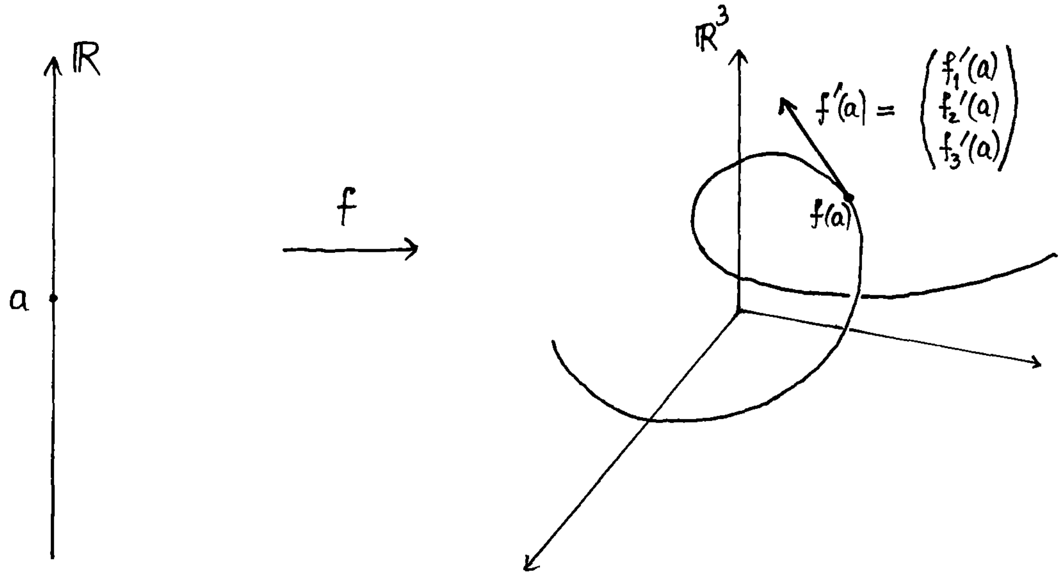
3.7. Vi fremhæver to specialtilfælde.
Tilfældet $\ell = 1$ er det tidligere betragtede tilfælde, hvor $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er en reel funktion på den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$.
Her finder vi

$$Df(a) = (D_1 f(a), \cdots, D_k f(a)).$$

I tilfældet $k = 1$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ er et interval og $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$ er en vektorafbildning $f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$, finder vi derimod

$$\mathcal{D}f(a) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}f_1(a) \\ \vdots \\ \mathcal{D}f_\ell(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_\ell'(a) \end{pmatrix}$$

Vi skriver ofte $f'(a) = \mathcal{D}f(a)$ i dette tilfælde.



3.8. Hvis $x_1, \dots, x_k$ er koordinaterne på Ω, bruges også betegnelserne $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathcal{D}_i f(a)$.
For funktionalmatricen skrives også $\frac{\partial(f_1, \dots, f_\ell)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \mathcal{D}f(a)$.

3.9. Hvis $\ell = k$, er funktionalmatricen $\mathcal{D}f(a)$ kvadratisk, og vi kan betragte determinanten $\det \mathcal{D}f(a) \in \mathbb{R}$, som kaldes <u>funktionaldeterminanten</u> eller <u>Jacobi-determinanten</u>.

3.10. Vektorafbildningen $f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde, kaldes <u>differentiabel</u>, hvis den er differentiabel i ethvert punkt i Ω. For en sådan afbildning kan

kan vi definere differentialet df som familien $(df_a)_{a\in\Omega}$ af lineære afbildninger : $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$. For hvert $a\in\Omega$ har vi afbildningens funktionalmatrix $Df(a)$ i punktet a . Ved f 's <u>funktionalmatrix</u>, Df , forstås den matrixfunktion, der er bestemt ved $a \mapsto Df(a)$ (en <u>matrixfunktion</u> er en matrix, hvis elementer er reelle funktioner). I funktionalmatricen Df står funktionen $D_i f_j$ i den j-te række og i den i-te søjle. Vi kan altså skrive

$$Df = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_k f_1 \\ \vdots & & \\ D_1 f_\ell & \cdots & D_k f_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende skrives for de partielle afledede

$$D_i f = \begin{pmatrix} D_i f_1 \\ \vdots \\ D_i f_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad i = 1, \cdots, k.$$

Hvis $y_1, \cdots, y_\ell$ er koordinaterne på $\mathbb{R}^\ell$ skrives funktionalmatricen også $Df = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_\ell)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_\ell)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)}$, idet afbildningen f er underforstået ved den sidste skrivemåde.

4. <u>Sammensætning</u>.

4.1. Vi betragter åbne mængder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, $\Xi \subseteq \mathbb{R}^\ell$ og vektorafbildninger $f : \Omega \to \mathbb{R}^{\ell}$, $g : \Xi \to \mathbb{R}^{p}$. Hvis $f(\Omega) \subseteq \Xi$, kan vi opfatte f som en afbildning $f : \Omega \to \Xi$, og den sammensatte afbildning $g \circ f$ er en vektorafbildning $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^{p}$.

Hvis f er differentiabel i punktet $a \in \Omega$, og g er differentiabel i billedpunktet $b = f(a) \in \Xi$, da er $g \circ f$ differentiabel i a med funktionalmatricen

$$\underline{D(g \circ f)(a) = Dg(b)\, Df(a).}$$

Sætningen (eller formlen) kaldes kædereglen. Da produktet af de to matricer svarer til sammensætning af de tilhørende lineære afbildninger, udtrykker formlen, at

differentialet $d(g \circ f)_a : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ er den sammensatte lineære afbildning $dg_b \circ df_a$.

Bevis. For h i en omegn af 0 i $\mathbb{R}^k$ har vi

$$(*) \qquad \Delta f(h) = f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \varepsilon(h)\|h\|$$

med en vektorafbildning ε , kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon(0) = 0$. For h' i en omegn af 0 i $\mathbb{R}^{\ell}$ har vi

$$(*)' \qquad \Delta g(h') = g(b+h') - g(b) = Dg(b)h' + \varepsilon'(h')\|h'\|$$

med en vektorafbildning ε' , kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon'(0) = 0$.

For alle h i en passende omegn af 0 i $\mathbb{R}^k$ har vi endvidere en vurdering $\|\Delta f(h)\| \leqslant K\|h\|$. Heraf følger, at vi kan skrive

$$\varepsilon'\big(\Delta f(h)\big)\|\Delta f(h)\| = \varepsilon''(h)\|h\|,$$

med en vektorafbildning ε'', kontinuert i 0 med værdien $\varepsilon''(0) = 0$. Indsættes $h' = f(a+h) - b = \Delta f(h) = Df(a)h + \varepsilon(h)\|h\|$ i ($*'$), får vi derfor fremstillingen

$$g\circ f\ (a+h) - g\circ f\ (a) = Dg(b)Df(a)h + [Dg(b)\varepsilon(h) + \varepsilon''(h)]\|h\|,$$

og her er funktionen $h \mapsto Dg(b)\varepsilon(h) + \varepsilon''(h)$ kontinuert i 0 med værdien 0. $\square$

4.2. Hvis $k = p = 1$, og $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ er et interval, er $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}$ en vektorafbildning : $\Omega \to \mathbb{R}^t$ og $g : \Xi \to \mathbb{R}$ er en reel funktion på Ξ. Den sammensatte afbildning $g\circ f$ er da en reel funktion : $\Omega \to \mathbb{R}$. Kædereglen udsiger her, at

$$(g\circ f)'(a) = D_1 g\ (b)\, f_1'(a) + \cdots + D_t g\ (b)\, f_t'(a).$$

4.3. Hvis afbildningerne f og g er differentiable, er også den sammensatte afbildning $g\circ f$ differentiabel, og vi har

$$\boxed{D(g\circ f) = [(Dg)\circ f\,]\, Df}$$

Her er $(Dg)\circ f$ den matrixfunktion, der fremkommer ved at sammensætte hver af funktionerne i matrixfunktionen Dg med funktionen f.

Sammenligner vi søjlerne får vi kædereglen for de partielle afledede

$$D_i(g\circ f) = [(Dg)\circ f\,]\, D_i f,$$

altså

$$\boxed{D_i(g\circ f) = [(D_1 g)\circ f]\,D_i f_1 + \cdots + [(D_t g)\circ f]\,D_i f_t}$$

4.4. Hvis $x_1,\dots,x_k$ er koordinaterne på Ω og $y_1,\dots,y_t$ er koordinaterne på Ξ, finder vi $y_j\circ f = f_j$. Kædereglen kan altså skrives

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}\circ f\right)\frac{\partial(y_1\circ f)}{\partial x_i} + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial y_t}\circ f\right)\frac{\partial(y_t\circ f)}{\partial x_i}.$$

Denne formel huskes ofte på formen

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_t}\frac{\partial y_t}{\partial x_i}.$$

Vi siger, at $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ fås ved at differentiere gennem $y_1,\dots,y_t$.

4.5. En vektorafbildning $f:\Omega\to\mathbb{R}^t$ er en <u>$\mathscr{C}^n$-afbildning</u> (eller af klasse $\mathscr{C}^n$), hvis dens koordinatfunktioner $f_1,\dots,f_t:\Omega\to\mathbb{R}$ er $\mathscr{C}^n$-funktioner. Af kædereglen følger, at en sammensætning af to $\mathscr{C}^n$-afbildninger igen er en $\mathscr{C}^n$-afbildning. I forbindelse med 1.17 har vi derfor: Klassen af $\mathscr{C}^n$-afbildninger er lukket overfor addition, multiplikation, division og sammensætning.

4.6. Eksempel. Lad I være et interval, og lad f_1 og $f_2: I\to\mathbb{R}$ være differentiable funktioner. Vektorafbildningen $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}: I\to\mathbb{R}^2$ er da differentiabel med funktionalmatricen $Df=\begin{pmatrix}f_1'\\f_2'\end{pmatrix}$. Lad x_1,x_2 være koordinaterne på $\mathbb{R}^2$. Funktionen $m = x_1 x_2$ er som vist i 2.2 differentiabel med funktionalmatricen (x_2, x_1). Den sammensatte funktion $m \circ f = f_1 f_2 : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er altså differentiabel med differentialkvotienten (= funktionalmatricen)

$$(f_1 f_2)' = [(x_2, x_1) \circ f] \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = (f_2, f_1) \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix}$$
$$= f_2 f_1' + f_1 f_2' .$$

5. <u>Taylors formel for funktioner af flere variable</u>.

5.1. Vi betragter en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$. Lad $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være en $\mathscr{C}^n$-funktion, lad a være et punkt i Ω og lad $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$ være en vektor, så at liniestykket $\{a + \lambda h \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ligger helt i Ω.

Ved $\lambda \mapsto a + \lambda h$ defineres så en afbildning $: [0,1] \to \Omega$, der klart er en $\mathscr{C}^\infty$-afbildning. Den sammensatte afbildning

$$g : \lambda \longmapsto g(\lambda) = f(a + \lambda h)$$

er altså en $\mathscr{C}^n$-funktion på $[0,1]$. Ved brug af kædereglen fås

$$Dg(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} D_j f(a + \lambda h)\, h_j ,$$

$$D^2 g(\lambda) = \sum_{j_1=1}^{k} \sum_{j_2=1}^{k} D_{j_2} D_{j_1} f(a+\lambda h)\, h_{j_1} h_{j_2}$$

$$\vdots$$

$$D^n g(\lambda) = \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_n=1}^{k} D_{j_n} \cdots D_{j_1} f(a+\lambda h)\, h_{j_1} \cdots h_{j_n}.$$

Vi finder altså $D^i g(\lambda) = d^i f_{a+\lambda h}(h), \quad i = 0,1,\dots,n.$

Ved anvendelse af Taylors formel med Lagrange's restled på funktionen g fås

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!} Dg(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} g(0) + \frac{1}{n!} D^n g(\theta)$$

for et tal $\theta \in \,]0,1[$. Ved indsættelse fås Taylors formel med restled for en $\mathscr{C}^n$-funktion f

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} df_a(h) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f_a(h) + \frac{1}{n!} d^n f_{a+\theta h}(h).$$

Af kontinuiteten af de afledede $D_{j_1} \cdots D_{j_n} f$ af n-te orden i a følger, at vi har

$$\frac{1}{n!} d^n f_{a+\theta h}(h) = \frac{1}{n!} d^n f_a(h) + \varepsilon(h) \|h\|^n,$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. Dette giver Taylors grænseformel for $\mathscr{C}^n$-funktionen f

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} df_a(h) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f_a(h) + \frac{1}{n!} d^n f_a(h) + \varepsilon(h) \|h\|^n,}$$

5.2. Med de tidligere indførte betegnelser har vi

$$d^i f_a(h) = \sum_{|p|=i} \frac{i!}{p!} D^p f(a)\, h^p.$$

Formlen med restled kan altså skrives

$$f(a+h) = \sum_{|p|<n} \frac{1}{p!} D^p f(a) h^p + \sum_{|p|=n} \frac{1}{p!} D^p f(a+\theta h) h^p,$$

og grænseformlen kan skrives

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{|p|\le n} \frac{1}{p!} D^p f(a) h^p + \varepsilon(h) \|h\|^n.}$$

5.3. Bemærkning. Funktionen $t \mapsto \sum_{|p|\le n} \frac{1}{p!} D^p f(a) (t-a)^p$ er et n-te grads polynomium. Grænseformlen udsiger, at funktionen f har kontakt af n-te orden i punktet a med dette polynomium.

5.4. For $n = 1$ får vi

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{k} D_j f(a+\theta h) h_j, \quad \theta \in]0,1[,$$

der kaldes middelværdisætningen for $\mathscr{C}^1$-funktionen f.

5.5. Taylors formel med restled kan ikke uden videre overføres til en vektorafbildning $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_\ell \end{pmatrix}$. Vi kan opskrive formlen for hver af koordinatfunktionerne $f_1, \dots, f_\ell$, men får i almindelighed forskelligt θ i restleddet for de forskellige funktioner. Derimod kan grænseformlen umiddelbart overføres til vektorafbildninger.

6. Graf af en funktion af flere variable.

6.1. For en funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde, kan vi betragte grafen

$$\mathcal{G}_f = \{ (t, f(t)) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t \in \Omega \},$$

som når f er kontinuert, er en hyperflade i $\mathbb{R}^{k+1}$.
Hvis $x_1, \cdots, x_k, y$ er koordinaterne på $\mathbb{R}^{k+1}$, siger vi, at $\mathcal{G}_f$ er hyperfladen bestemt ved ligningen $y = f(x_1, \cdots, x_k)$ eller blot $y = f$. Hvis to sådanne funktioner $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ har kontakt af n-te orden i punktet $a \in \Omega$, siger vi også, at de tilsvarende hyperflader har røring af n-te orden i punktet $(a, f(a))$.

Taylors grænseformel for en $\mathcal{E}^n$-funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ udsiger, at grafen for f i punktet $(a, f(a))$ har røring af n-te orden med grafen for funktionen

$$t \longmapsto \sum_{|p| \leq n} \frac{1}{p!} D^p f(a) \, (t-a)^p,$$

der er et polynomium af grad $\leq n$.
For $n = 1$ fås hyperplanen med ligningen

$$y = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}(x_k - a_k),$$

som kaldes tangenthyperplanen for grafen $\mathcal{G}_f$ i punktet $(a, f(a))$. For $n = 2$ fås kvadrikken med ligningen

$$y = f(a) + \sum_i \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i)$$
$$+ \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}(x_i - a_i)^2;$$

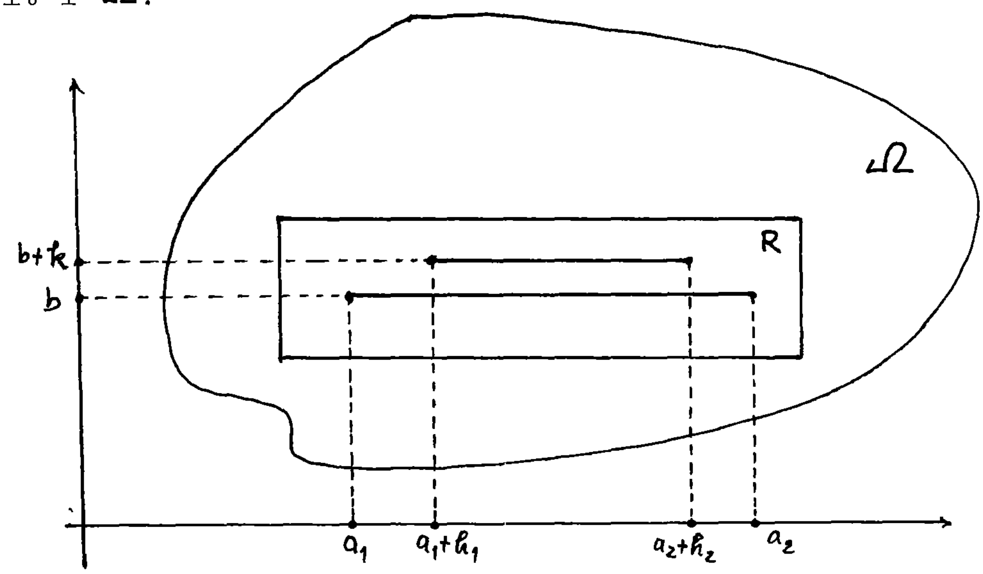
denne kvadrik er en paroboloide og kaldes den <u>oskulerende</u> <u>paraboloide</u> for grafen $\mathcal{G}_f$ i punktet $(a, f(a))$.

7. Integral som funktion af en parameter og af grænserne.

7.1. Betragt en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ og en kontinuert funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ved

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ s \end{pmatrix} \longmapsto \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, s)\, d\tau = I(t_1, t_2, s)$$

defineres da en reel funktion I på den, åbenbart åbne, mængde $\Xi \subseteq \mathbb{R}^3$, der består af alle tripler $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, for hvilke liniestykket med endepunkter $\binom{t_1}{s}$ og $\binom{t_2}{s}$ ligger helt i Ω.



Funktionen $I : \Xi \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Thi for et givet $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} \in \Xi$ kan vi finde et begrænset, afsluttet interval $R \subseteq \Omega$, således at det til $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix}$ svarende liniestykke ligger i det indre af R. For alle numerisk tilstrækkelig små reelle tal h_1, h_2, k vil det så gælde, at $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ k \end{pmatrix} \in \Xi$, og at det tilsvarende linestykke ligger i R, og vi har

$$
\begin{aligned}
& I(a_1+h_1, a_2+h_2, b+k) - I(a_1, a_2, b) \\
&\quad = \int_{a_1+h_1}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_2+h_2} f(\tau, b+k)\, d\tau - \int_{a_1}^{a_2} f(\tau, b)\, d\tau \\
&\quad = \int_{a_1+h_1}^{a_1} f(\tau, b+k)\, d\tau + \int_{a_2}^{a_2+h_2} f(\tau, b+k) + I(a_1, a_2, b+k) - I(a_1, a_2, b).
\end{aligned}
$$

De to første led på højre side er numerisk højst lig med henholdsvis $M|h_1|$ og $M|h_2|$, hvor M er supremum af funktionen $|f|$ på den kompakte mængde R. Denne kompakthed medfører også, at funktionen f er ligeligt kontinuert på R, og heraf kan man som bekendt slutte, at funktionen $s \mapsto \int_{a_1}^{a_2} f(\tau, s)\, d\tau$ er kontinuert. Vi har derfor yderligere, at $I(a_1, a_2, b+k) - I(a_1, a_2, b) \to 0$ for $k \to 0$, og dermed alt i alt, at hele højre side konvergerer mod 0 for $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ k \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lad os nu yderligere antage, at funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ er partielt differentiabel med en kontinuert afledet $D_2 f$. Heraf følger som bekendt, at funktionen $s \mapsto \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, s)\, d\tau$ er differentiabel med den afledede $s \mapsto \int_{t_1}^{t_2} D_2 f(\tau, s)\, d\tau$, altså at I er partielt differentiabel m.h.t. den 3. variabel, med $D_3 I(t_1, t_2, s) = \int_{t_1}^{t_2} D_2 f(\tau, s)\, d\tau$.

Ifølge det foregående (anvendt på $D_2 f$) er denne funktion kontinuert i Ξ. Det er klart, at I er partielt differentiabel m.h.t. de to første variable, med de afledede

$$D_1 I(t_1,t_2,s) = -f(t_1,s) \qquad D_2 I(t_1,t_2,s) = f(t_2,s),$$

som er kontinuerte funktioner på Ξ. Da de partielle afledede således er kontinuerte funktioner, er $I : \Xi \to \mathbb{R}$ en differentiabel funktion.

Hvis x_1, x_2, y er koordinaterne på Ξ, udtrykkes resultatet som følger: <u>Hvis funktionen f er kontinuert, med en kontinuert partiel afledet $D_2 f$, da er funktionen</u>

$$\underline{I = \int_{x_1}^{x_2} f(\tau,y)\,d\tau}$$

<u>kontinuert differentiabel med de partielle afledede</u>

$$\underline{\frac{\partial I}{\partial x_1} = -f(x_1,y), \quad \frac{\partial I}{\partial x_2} = f(x_2,y), \quad \frac{\partial I}{\partial y} = \int_{x_1}^{x_2} D_2 f(\tau,y)\,d\tau.}$$

7.2. Lad nu $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og lad $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ være differentiable funktioner, således at $\begin{pmatrix}\varphi_1(s)\\ \varphi_2(s)\\ s\end{pmatrix} \in \Xi$ for alle $s \in \mathcal{J}$. Vektorafbildningen $s \longmapsto \begin{pmatrix}\varphi_1(s)\\ \varphi_2(s)\\ s\end{pmatrix}$ er da differentiabel, og af kædereglen følger, at den sammensatte funktion

$$s \longmapsto \int_{\varphi_1(s)}^{\varphi_2(s)} f(\tau,s)\,d\tau$$

er differentiabel med differentialkvotienten

$$s \longmapsto -f(\varphi_1(s),s)\,\varphi_1'(s) + f(\varphi_2(s),s)\,\varphi_2'(s) + \int_{\varphi_1(s)}^{\varphi_2(s)} D_2 f(\tau,s)\,d\tau.$$

IMPLICIT GIVNE FUNKTIONER

1. Implicit givne funktioner

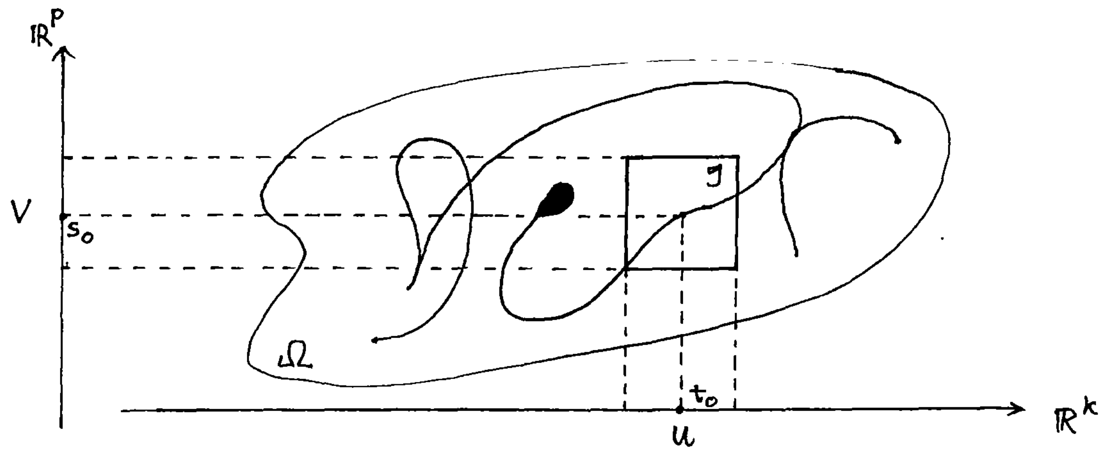
1.1. Vi betragter en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$. Vi betegner koordinaterne på Ω med $x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_p$. $\mathbb{R}^{k+p}$ identificeres med produktmængden $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$. Et punkt i $\mathbb{R}^{k+p}$ er altså af formen (t,s), hvor $t \in \mathbb{R}^k$, $s \in \mathbb{R}^p$.

Vi betragter endvidere p $\mathscr{C}^1$-funktioner $f_1, \cdots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$, og løsningsmængden

$$F = \{(t,s) \in \Omega \mid f_1(t,s) = 0, \cdots, f_p(t,s) = 0\}.$$

De p funktioner kan sammenfattes til vektorafbildningen $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^p$, og F kan beskrives ved

$$F = \{(t,s) \in \Omega \mid f(t,s) = 0\}.$$



Med $D_x f$ og $D_y f$ betegnes funktionalmatricerne for f m.h.t. $x_1, \cdots, x_k$ og m.h.t. $y_1, \cdots, y_p$, altså

$$D_x f = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_p)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad D_y f = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_p)}{\partial(y_1, \cdots, y_p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}.$$

$D_y f$ er altså en (kvadratisk) $(p\times p)$-matrixfunktion.
Funktionalmatricen for f kan skrives

$$Df = (D_x f, D_y f).$$

1.2. Sætning. <u>For ethvert punkt $(t_0,s_0)\in F$, hvori funktionalmatricen $D_y f$ er regulær, findes en omegn $J = U\times V \subseteq \Omega$ bestemt ved afsluttede kugler</u>

$$\underline{U = \{t \mid \|t-t_0\| \le \rho\},\quad V = \{s \mid \|s-s_0\| \le \sigma\},}$$

<u>således, at $D_y f$ er regulær i ethvert punkt $(t,s)\in J$, og således at $F\cap J$ er grafen af en $\mathscr{C}^1$-vektorafbildning</u>

$$\underline{g : U \to V,}$$

<u>d.v.s. mængden af løsninger $(t,s)\in J$ til ligningen $f(t,s)=0$ er netop mængden af punkter $(t,g(t))$, $t\in U$. Funktionalmatricen Dg bestemmes i hvert punkt $t\in U$ ved ligningen</u>.

$$\underline{D_x f(t,g(t)) + D_y f(t,g(t))\,Dg(t) = 0.}$$

Man siger, at vektorafbildningen g er <u>implicit</u> givet ved ligningen $f(t,s)=0$.

Implicit givne funktioner har man betragtet siden differentialregningens begyndelse, men ovenstående sætning er først formuleret i slutning af 18-hundredtallet bl.a. af R. Lipschitz (1880) og G. Peano (1884); det her givne bevis skyldes É. Goursat (1903).

Bevis. For hvert $\rho>0, \sigma>0$ kan vi betragte den tilhørende omegn $J = U\times V$, hvor $U = \{t \mid \|t-t_0\|\le\rho\}$, $V = \{s \mid \|s-s_0\|\le\sigma\}$. Vi vil vise, at ρ og σ kan vælges, således at sætningens konklusion er rigtig.

1) Da Ω er åben, kan vi vælge ρ og σ, så at $J\subseteq\Omega$.

2) Regularitet af $D_y f(t,s)$ er ensbetydende med, at $\det D_y f(t,s)\neq 0$. Da $(t,s)\mapsto \det D_y f(t,s)$ er kontinuert, og da $D_y f(t_0,s_0)$ er forudsat regulær, kan vi antage, at ρ og σ er valgt så små, at $D_y f(t,s)$ er

regulær for alle $(t,s) \in \mathcal{J}$.

③ Til afkortning betegnes matricen $D_y f(t_0,s_0)$ med Γ_0. Γ_0 er altså en regulær matrix. Den inverse matrix Γ_0^{-1} skriver vi udførligt

$$\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{p1} & \cdots & \delta_{pp} \end{pmatrix}.$$

Nu betragtes afbildningen $T = y - \Gamma_0^{-1} f$, altså den ved

$$T: (t,s) \mapsto s - \Gamma_0^{-1} f(t,s)$$

bestemte afbildning $T: \Omega \to \mathbb{R}^p$. Udførligt skrevet har vi

$$T(t,s) = \begin{pmatrix} T_1(t,s) \\ \vdots \\ T_p(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{p1} & \cdots & \delta_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t,s) \\ \vdots \\ f_p(t,s) \end{pmatrix}.$$

Vi bemærker, at $T(t,s) = s$ er ensbetydende med, at $f(t,s) = 0$, altså ensbetydende med, at $(t,s) \in F$.

Det ses, at vektorafbildningen T er $\mathcal{C}^1$, og at

$$D_y T = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial T_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{p1} & \cdots & \delta_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix},$$

eller med matrix-notation

$$D_y T = E - \Gamma_0^{-1} D_y f.$$

Specielt har vi altså $D_y T(t_0,s_0) = E - \Gamma_0^{-1}\Gamma_0 = 0$. Funktionerne $\frac{\partial T_i}{\partial y_j}$ er altså alle 0 i punktet (t_0,s_0).

For to punkter $(t,s),(t,s^*) \in \mathcal{J}$ kan vi for hver af koordinatfunktionerne T_i ifølge middelværdisætningen skrive

$$T_i(t,s) - T_i(t,s^*) = \frac{\partial T_i}{\partial y_1}(s_1 - s_1^*) + \cdots + \frac{\partial T_i}{\partial y_p}(s_p - s_p^*),$$

hvor de afledede $\frac{\partial T_i}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial T_i}{\partial y_p}$ er taget i et punkt på liniestykket der forbinder (t,s) og (t,s^*).

Sætter vi $M = \max_{i,j} \sup_{(t,s)\in \mathcal{J}} \left| \frac{\partial T_i}{\partial y_j}(t,s) \right|$, får vi altså for hvert i vurderingen

$$|T_i(t,s) - T_i(t,s^*)| \leq pM \, \|s - s^*\|,$$

og dermed

$$\|T(t,s) - T(t,s^*)\| \leq pM \, \|s - s^*\|.$$

Da alle funktionerne $\frac{\partial T_i}{\partial y_j}$ er kontinuerte i (t_o,s_o) med værdien 0, kan vi antage, at ρ og σ er valgt så små, at vi har $M \leq \frac{1}{2p}$; vi har da vurderingen

$$\|T(t,s) - T(t,s^*)\| \leq \tfrac{1}{2}\|s - s^*\|, \qquad (t,s),(t,s^*) \in \mathcal{J}.$$

(4) Funktionen $t \mapsto T(t,s_o)$ er kontinuert i t_o med værdien s_o. I stedet for at gøre ρ mindre kan vi derfor antage, at

$$\|T(t,s_o) - s_o\| \leq \tfrac{1}{2}\sigma, \qquad t \in \mathcal{U}.$$

For $(t,s) \in \mathcal{J}$ har vi derfor

$$\begin{aligned}\|T(t,s) - s_o\| &\leq \|T(t,s) - T(t,s_o)\| + \|T(t,s_o) - s_o\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|s - s_o\| + \tfrac{1}{2}\sigma \\ &\leq \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\sigma = \sigma.\end{aligned}$$

(5) For hvert $t \in \mathcal{U}$ betragtes afbildningen $s \mapsto T(t,s)$. Af (4) følger, at dette er en afbildning $: V \to V$, og af (3) følger, at denne afbildning er en kontraktion med kontraktionskonstant $\frac{1}{2}$. Da V som afsluttet delmængde af det fuldstændige metriske rum $\mathbb{R}^p$ selv er et fuldstændigt metrisk rum, følger det af fixpunktsætningen for kontraktioner i et fuldstændigt metrisk rum, at afbildningen har netop et fixpunkt. Til det givne $t \in \mathcal{U}$ findes altså netop ét $s \in V$, således at $T(t,s) = s$, altså således, at $(t,s) \in F$. Betegnes dette fixpunkt $g(t)$, er $F \cap \mathcal{J}$ altså grafen $\{(t,g(t)) \mid t \in \mathcal{U}\}$ for afbildningen $g : \mathcal{U} \to V$.

For hvert $t \in \mathcal{U}$ kan fixpunktet $g(t)$ bestemmes ved iterationsmetoden, idet vi begynder med et punkt i V, f.eks. s_o, og successivt bestemmer

$$g_1(t) = T(t,s_o),\ g_2(t) = T(t,g_1(t)), \ldots, g_{n+1}(t) = T(t,g_n(t)), \ldots.$$

talfølgen $(g_n(t))$ vil da konvergere mod fixpunktet $g(t)$.
Nærmere bestemt har vi ifølge beviset for fixpunktsætningen

$$\| g_n(t) - g(t) \| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \| s_0 - g(t) \| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \sigma .$$

Den sidste vurdering gælder for ethvert $t \in \mathcal{U}$. Heraf ses, at følgen af afbildninger (g_n) konvergerer uniformt mod afbildningen g. Det er klart, at alle afbildningerne $g_1, g_2, \cdots$ er kontinuerte. Følgelig er også afbildningen $g : U \to V$ kontinuert.

(6) Indtil nu har vi af forudsætningerne om f kun benyttet, at f er kontinuert og har kontinuerte partielle afledede m.h.t. $y_1, \cdots, y_p$, og at $D_y f$ er regulær i punktet (t_0, s_0). Idet vi yderligere benytter, at f har kontinuerte partielle afledede m.h.t. $x_1, \cdots, x_k$, vil vi vise, at g er en $\mathscr{C}^1$-afbildning, og at funktionalmatricen bestemmes ved den i sætningen angivne formel.

Hertil betragtes et punkt $a \in \mathcal{U}$ og en vektor $h \in \mathbb{R}^k$, således at også $a+h \in \mathcal{U}$. Vi betragter tilvæksten $\Delta g(h) = g(a+h) - g(a)$, altså (udførligt skrevet)

$$\Delta g(h) = \begin{pmatrix} \Delta g_1(h) \\ \vdots \\ \Delta g_p(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(a+h) - g_1(a) \\ \vdots \\ g_p(a+h) - g_p(a) \end{pmatrix}.$$

Sættes $b = g(a)$, har vi $b + \Delta g(h) = g(a+h)$. Punkterne (a,b) og $(a+h, b+\Delta g(h))$ tilhører begge F, så vi har $f(a,b) = 0$, $f(a+h, b+\Delta g(h)) = 0$, og dermed specielt $f_i(a+h, b+\Delta g(h)) - f_i(a,b) = 0$ for hver af koordinatfunktionerne f_i, $i = 1, \cdots, p$. Ved anvendelse af middelværdisætningen får vi for hver koordinatfunktion en ligning

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} h_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \Delta g_1(h) + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \Delta g_p(h),$$

hvor de afledede er taget i et punkt af liniestykket fra (a,b) til $(a+h, b+\Delta g(h))$. Disse p ligninger kan på matrixform skrives

$$0 = B(h)\, h + \Gamma(h)\, \Delta g(h),$$

hvor $B(h)$ og $\Gamma(h)$ er matricer, hvis elementer er de afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ taget i punkter på liniestykket fra (a,b) til $(a+h, b+\Delta g(h))$.

Da g er kontinuert, vil $(a+h, b+\Delta g(h)) \to (a,b)$ for $h \to 0$. Heraf følger, at

$$B(h) \to D_x f(a,b)\,,\quad \Gamma(h) \to D_y f(a,b) \quad \text{for} \quad h \to 0.$$

Da matricen $D_y f(a,b)$ er regulær, følger det, at også matricen $\Gamma(h)$ er regulær for alle tilstrækkelig små $\|h\|$. For sådanne h kan matrixligningen skrives

$$\Delta g(h) = -\Gamma(h)^{-1} B(h) h.$$

For $h \to 0$ konvergerer $\Gamma(h)^{-1}B(h)$ mod $\Gamma(0)^{-1}B(0) = D_y f(a,b)^{-1} D_x f(a,b)$.
I matrixfunktionen $\Gamma(0)^{-1}B(0) - \Gamma(h)^{-1}B(h)$ konvergerer alle funktionerne derfor mod 0 for $h \to 0$. Vi kan derfor skrive

$[\Gamma(0)^{-1}B(0) - \Gamma(h)^{-1}B(h)]h = \varepsilon(h)\|h\|$, hvor vektorafbildningen $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$. Ved indsættelse fås heraf

$$\Delta g(h) = -\Gamma(0)^{-1}B(0)h + \varepsilon(h)\|h\|,$$

og vi ser, at g er differentiabel i a med funktionalmatricen
$Dg(a) = -\Gamma(0)^{-1}B(0) = -D_y f(a,b)^{-1} D_x f(a,b)$. □

1.3. Ligningen kan skrives $\left(D_x f(t, g(t)), D_y f(t, g(t))\right)\begin{pmatrix} E \\ Dg(t)\end{pmatrix} = 0.$
Vi ser, at det er den ligning, der fremkommer ved at anvende kæderegelen på den sammensatte afbildning $t \mapsto (t, g(t)) \mapsto f(t, g(t))$ og udnytte, at denne afbildning er 0-afbildningen. Denne metode til bestemmelse af de afledede kaldes <u>implicit differentiation</u>.

1.4. Skrives ligningen

$$Dg(t) = -D_y f(t, g(t))^{-1} D_x f(t, g(t)),$$

ses ved udregning af højre side, at hver partiel afledet $D_\nu g_i(t)$ kan fremstilles ved en brøk, hvis nævner er determinanten $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$, altså et polynomium i de afledede $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, og hvis tæller er et polynomium i $\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}$ og $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, idet samtlige afledede er taget i $(t, g(t))$. Ved induktion sluttes heraf, at hvis f er af klasse $\mathscr{C}^n$, er også g af klasse $\mathscr{C}^n$. Beregningen af de højere partielle afledede sker lettest ved fortsat implicit differentiation.

2. Tilfældet $k=1$, $p=1$

I dette tilfælde er Ω en åben mængde i $\mathbb{R}^2$ og $f:\Omega \to \mathbb{R}$ er en $\mathscr{C}^1$-funktion. F er løsningsmængden

$$F = \{(t,s) \in \Omega \mid f(t,s) = 0\}.$$

til ligningen $f=0$. Vi får: For ethvert punkt $(t_0,s_0) \in F$, i hvilket $\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,s_0) \neq 0$, findes en omegn $\mathcal{I} = [t_0-\rho, t_0+\rho] \times [s_0-\sigma, s_0+\sigma] \subseteq \Omega$, hvori $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, således at $F \cap \mathcal{I}$ er grafen for en $\mathscr{C}^1$-funktion $g: [t_0-\rho, t_0+\rho] \to [s_0-\sigma, s_0+\sigma]$, hvis afledede bestemmes af ligningen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t))\, g'(t) = 0,$$

eller

$$g'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t, g(t))}{\frac{\partial f}{\partial y}(t, g(t))}$$

Hvis $f \in \mathscr{C}^n(\Omega)$, gælder $g \in \mathscr{C}^n([t_0-\rho, t_0+\rho])$.

Idet vi for $n=1$ kort skriver

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} g' = 0 \quad \text{eller} \quad g' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

får vi for $n=2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} g' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} g'\right) g' + \frac{\partial f}{\partial y} g'' = 0,$$

hvoraf $g''(t)$ kan findes udtrykt ved $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ taget i punktet $(t, g(t))$.

3. Glatte punktmængder i $\mathbb{R}^k$.

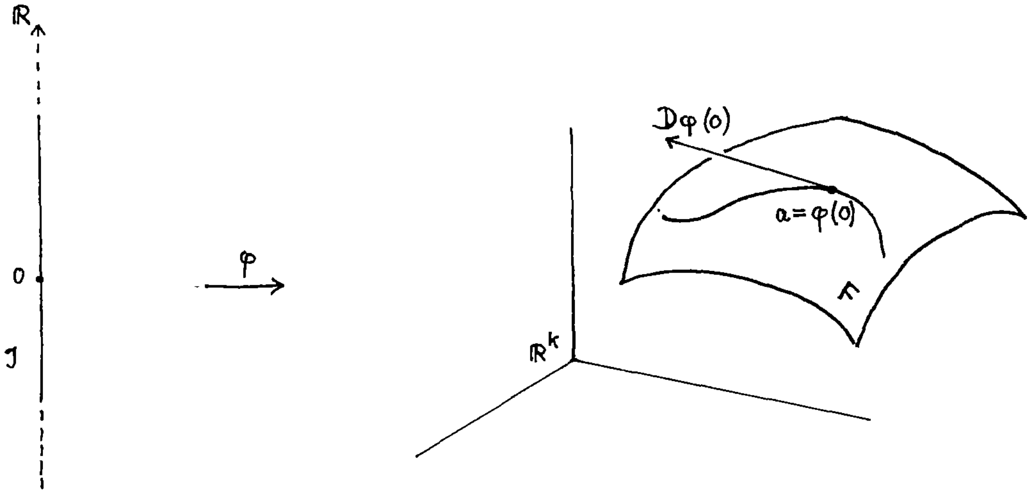
3.1. Vi betragter en punktmængde $F \subseteq \mathbb{R}^k$. Mængden F siges at være <u>glat i punktet $a \in F$</u>, hvis der findes en åben omegn $\mathcal{U}$ af a og et antal, d, af koordinaterne $x_1, \dots, x_k$, så at den ved de d koordinater bestemte afbildning $: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ afbilder $F \cap \mathcal{U}$ <u>bijektivt</u> på en <u>åben</u> mængde $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^d$, således at den inverse afbildning $: \tilde{\mathcal{U}} \to F \cap \mathcal{U}$ er en $\mathscr{C}^1$-vektorafbildning. Vi siger, at et sæt af d af koordinaterne med denne egenskab er <u>parametre på F i omegnen af a</u>.

Ved eventuelt at omnummerere koordinaterne kan vi opnå, at de d parametre er de d første koordinater $x_1, \dots, x_d$. Hvis vi identificerer talrummet $\mathbb{R}^k$ med produktmængden $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{k-d}$, kan hvert element $t \in \mathbb{R}^k$ skrives $t = (\tilde{t}, \bar{t})$, hvor $\tilde{t} \in \mathbb{R}^d$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^{k-d}$, og afbildningen $: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ er netop projektionsafbildningen $: (\tilde{t}, \bar{t}) \mapsto \tilde{t}$. At denne afbildning afbilder $F \cap \mathcal{U}$ <u>bijektivt</u> på den åbne mængde $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^d$, betyder, at vi har

$$F \cap \mathcal{U} = \{ (\tilde{t}, g(\tilde{t})) \mid \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}} \}$$

med en funktion $g : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^{k-d}$. Den inverse afbildning til $: F \cap \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ er afbildningen $\tilde{t} \mapsto (\tilde{t}, g(\tilde{t}))$, og den er af klasse $\mathscr{C}^1$, netop hvis g er af klasse $\mathscr{C}^1$. Vi ser således, at F er glat i a, hvis og kun hvis F i en omegn af a er grafen for en $\mathscr{C}^1$-afbildning $g : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^{k-d}$, hvor $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^d$ er en åben mængde.

3.2. En vektor $v \in \mathbb{R}^k$ kaldes en <u>tangentvektor til F i a</u>, hvis der findes en $\mathscr{C}^1$-kurve på F, hvis tangentvektor i punktet a er vektoren v. Mere præ ist: tangentvektorerne til F i a er vektorerne af formen $D\varphi(0)$, hvor $\varphi : J \to F$ er en $\mathscr{C}^1$-afbildning på et interval J, der indeholder 0, således at $\varphi(0) = a$.



3.3. Sætning. Lad F være glat i punktet $a \in F$, beskrevet i en omegn af a som grafen for en $\mathscr{C}^1$-vektorafbildning $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{k-d}$, $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$. Lad $\tilde{a}$ være det til a svarende punkt i $\tilde{U}$ (altså $a = (\tilde{a}, \bar{a})$), og lad A være funktionalmatricen $Dg(\tilde{a})$. Tangentvektorerne til F i a er netop vektorerne af formen $\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ A\tilde{v} \end{pmatrix}$, $\tilde{v} \in \mathbb{R}^d$.

Bevis. Lad $\varphi : J \to F$ være en $\mathscr{C}^1$-kurve på F, med $\varphi(0) = a$. For alle λ i en omegn af 0 har vi da $\varphi(\lambda) \in F \cap U$, og vi kan altså skrive $\varphi(\lambda) = (\tilde{\varphi}(\lambda), g(\tilde{\varphi}(\lambda)))$ for sådanne λ, med en $\mathscr{C}^1$-afbildning $\tilde{\varphi}$. Af kæderegelen følger nu, at

$$D\varphi(0) = \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} D\tilde{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} D\tilde{\varphi}(0) \\ A\,D\tilde{\varphi}(0) \end{pmatrix},$$

som er af formen $\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ A\tilde{v} \end{pmatrix}$ med $\tilde{v} = D\tilde{\varphi}(0) \in \mathbb{R}^d$.

Omvendt finder vi, ligeledes ved benyttelse af kæderegelen, at enhver vektor af den angivne form er tangentvektor, nemlig tangentvektor til kurven $\lambda \mapsto (\tilde{a} + \lambda\tilde{v},\ g(\tilde{a} + \lambda\tilde{v}))$. $\square$

3.4. Mængden af tangentvektorer i punktet a til en mængde $F \subseteq \mathbb{R}^k$, der er glat i a, kaldes tangentrummet til F i a og betegnes T_aF. Af sætningen følger, at tangentrummet T_aF er et underrum i $\mathbb{R}^k$, thi T_aF er billedrummet ved den lineære afbildning $\tilde{v} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ A\tilde{v} \end{pmatrix}$ af $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Da denne lineære afbildning er injektiv, har vi

$$\dim T_aF = d;$$

heraf ses, at antallet, d, af parametre kun afhænger af F og a. Dimensionen, d, af tangentrummet, T_aF, kaldes dimensionen af F i punktet a. Det følger umiddelbart af definitionen, at hvis mængden F er glat i punktet a, er den også glat i en omegn af a med samme dimension.

3.5. En mængde $F \subseteq \mathbb{R}^k$, der er glat i punktet a af dimension d, kan vi i omegnen af punktet a beskrive som løsningsmængde for $k-d$ ligninger givet ved $\mathscr{C}^1$-funktioner, idet

$$F \cap \mathcal{U} = \{ (\tilde{t}, \bar{t}) \mid \bar{t} - g(\tilde{t}) = 0 \}.$$

Omvendt gælder følgende vigtige sætning:

Lad $f: \Omega \to \mathbb{R}^p$ være en $\mathscr{C}^1$-afbildning defineret på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ og betragt løsningsmængden

$$F = \{ t \in \Omega \mid f(t) = 0 \}.$$

Lad a være et punkt i F. Hvis funktionalmatricen Df har konstant rang r i en omegn af a, er F glat i punktet a af dimension $k-r$. Tangentrummet T_aF er kernen for den lineære afbilding $df_a: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$, altså bestemt som mængden $\{ v \in \mathbb{R}^k \mid Df(a)v = 0 \}$. Hvis r søjler i matricen $Df(a)$, svarende til r af koordinaterne, er lineært uafhængige, kan de øvrige $k-r$ koordinater benyttes som parametre på F i en omegn af a.

Bevis. Vi sætter $d = k-r$ og betragter r lineært uafhængige søjler i matricen $Df(a)$. Ved om nødvendigt at omnummerere koordinaterne kan vi antage, at disse søjler er de r sidste søjler. Idet koordinaterne på Ω betegnes $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_r$, antager vi altså, at søjlerne $\frac{\partial f}{\partial y_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial y_r}(a)$ er lineært uafhængige.

Vi betragter først tilfældet $r = p$. I dette tilfælde er matricen $D_y f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial y_r}(a)\right)$ kvadratisk og regulær. Skriver vi $a = (\tilde{a}, \bar{a})$, hvor $\tilde{a} \in \mathbb{R}^d$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^r$, kan vi ifølge sætning 1.2 finde en omegn $\mathcal{J} = W \times V$ af a, bestemt ved afsluttede kugler $W = \{\tilde{t} \mid \|\tilde{t} - \tilde{a}\| \leqslant \rho\}$ og $V = \{\bar{t} \mid \|\bar{t} - \bar{a}\| \leqslant \sigma\}$, således at matricen $D_y f$ er regulær i ethvert punkt af $\mathcal{J}$, og således at

$$F \cap \mathcal{J} = \{(\tilde{t}, g(\tilde{t})) \mid \tilde{t} \in W\}$$

med en $\mathscr{C}^1$-vektorafbildning $g: W \to V$. Da g er kontinuert, kan vi finde en åben kugle $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{t} \mid \|\tilde{t} - \tilde{a}\| < \tilde{\rho}\}$, så at $\|g(\tilde{t}) - \bar{a}\| < \sigma$ for alle $\tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}}$. I den åbne omegn $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \times \{\bar{t} \mid \|\bar{t} - \bar{a}\| < \sigma\}$ af a har vi derfor

$$F \cap \mathcal{U} = \{(\tilde{t}, g(\tilde{t})) \mid \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$$

med en $\mathscr{C}^1$-vektorafbildning $g: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^r$. Endvidere er funktionalmatricen $A = Dg(\tilde{a})$ bestemt ved ligningen $D_x f(a) + D_y f(a) A = 0$, der også kan skrives $Df(a)\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} = 0$.

Det følger nu, at $x_1, \cdots, x_d$ er parametre på F i omegnen $\mathcal{U}$ af a, og at vektorerne $v \in \mathbb{R}^k$, der tilfredsstiller ligningen $Df(a)v = 0$, netop er vektorerne af formen $\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ A\tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix}\tilde{v}$, $\tilde{v} \in \mathbb{R}^d$, altså netop tangentvektorerne til F i punktet a.

Dernæst betragter vi tilfældet $r < p$. Vi kan blandt de p rækker i $D_y f(a)$ udtage r lineært uafhængige rækker, svarende til r af de p koordinatfunktioner $f_1, \cdots, f_p$. Ved om nødvendigt at omnummere koordinaterne på $\mathbb{R}^p$ kan vi antage, at disse rækker er de r første rækker, svarende til koordinatfunktionerne $f_1, \cdots, f_r$. Matricen $\frac{\partial(f_1, \cdots, f_r)}{\partial(y_1, \cdots, y_r)}(a)$ er altså regulær. Vi betragter nu den ved $\hat{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}$ bestemte vektorafbildning $\hat{f}: \Omega \to \mathbb{R}^r$ og løsningsmængden

$$\hat{F} = \{t \in \Omega \mid \hat{f}(t) = 0\}.$$

Det er klart, at $F \subseteq \hat{F}$. Ifølge det allerede behandlede tilfælde er mængden $\hat{F}$ glat i punktet a : Vi kan finde en åben omegn $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{U}}$ af a, således at matricen $\frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(y_1,\dots,y_r)}$ er regulær i ethvert punkt af $\mathcal{U}$, og således at

$$\hat{F} \cap \mathcal{U} = \{ (\tilde{t}, g(\tilde{t})) \mid \tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}} \}$$

med en $\mathscr{C}^1$-afbildning $g: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^r$. Matricen Df har i omegnen af a den konstante rang r. Ved om fornødent at erstatte $\mathcal{U}$ med en mindre omegn af a kan vi antage, at matricen Df har rang r i ethvert punkt af $\mathcal{U}$, og vi kan yderligere antage, at $\mathcal{U}$ er sammenhængende. I ethvert punkt af $\mathcal{U}$ er rækkerne $D_y f_1, \dots, D_y f_r$ lineært uafhængige, og følgelig er også de "større" rækker $Df_1, \dots, Df_r$ lineært uafhængige. Da rangen er r, slutter vi, at i hvert punkt $t \in \mathcal{U}$ gælder, at hver af de øvrige rækker $Df_j(t)$, $j = r+1, \dots, p$, er en linearkombination af rækkerne $Df_1(t), \dots, Df_r(t)$.

Vi vil nu vise, at vi har

$$F \cap \mathcal{U} = \hat{F} \cap \mathcal{U}.$$

Det er nok at vise, at $f_j(\tilde{t}, g(\tilde{t})) = 0$, $j = r+1, \dots, p$, for alle $\tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Vi betragter funktionerne

$$\tilde{f}_j : \tilde{t} \longmapsto f_j(\tilde{t}, g(\tilde{t})), \quad j = 1, \dots, r, r+1, \dots, p.$$

Disse funktioner er $\mathscr{C}^1$-funktioner: $\tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$, og deres funktionalmatrix i punktet $\tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}}$ er ifølge kæderegelen givet ved

$$D\tilde{f}_j(\tilde{t}) = Df_j(\tilde{t}, g(\tilde{t})) \begin{pmatrix} E \\ Dg(\tilde{t}) \end{pmatrix}.$$

For $j \in \{1, \dots, r\}$ er $\tilde{f}_j$ 0-funktionen; vi ønsker at vise, at vi også har $\tilde{f}_j = 0$ for $j = r+1, \dots, p$. For et sådant j og et punkt $\tilde{t} \in \tilde{\mathcal{U}}$ er $Df_j(\tilde{t}, g(\tilde{t}))$ en linearkombination af rækkerne $Df_1(\tilde{t}, g(\tilde{t})), \dots, Df_r(\tilde{t}, g(\tilde{t}))$. Følgelig er også $D\tilde{f}_j(\tilde{t})$ en linearkombination af $D\tilde{f}_1(\tilde{t}), \dots, D\tilde{f}_r(\tilde{t})$, og vi har derfor $D\tilde{f}_j(\tilde{t}) = 0$. Da $\tilde{\mathcal{U}}$ er sammenhængende, følger heraf, at $\tilde{f}_j$ er konstant, og da

$\tilde{f}_j(\tilde{a}) = f_j(a) = 0$, slutter vi endelig, at $\tilde{f}_j = 0$.

Det følger heraf, at $T_a F = T_a \hat{F}$. Da hver række i $Df(a)$ er en linearkombination af rækkerne $Df_1(a), \cdots, Df_r(a)$, er ligningerne $Df(a)v = 0$ og $D\hat{f}(a)v = 0$ ensbetydende. Følgelig har tangentrummet $T_a F$ den angivne form. $\square$

3.6. Lad mængden $F \subseteq \mathbb{R}^k$ være glat i punktet a. Tangentrummet tænkes ofte "afsat ud fra punktet a". Herved fremkommer sideunderrummet $a + T_a F = \{v \in \mathbb{R}^k \mid v - a \in T_a F\}$ Dette sideunderrum kaldes ofte også for <u>tangentrummet til F i a</u>. Det ses, at hvis F er beskrevet ved en ligning

$$F = \{t \in \Omega \mid f(t) = 0\},$$

hvor $f: \Omega \to \mathbb{R}^p$ har funktionalmatrix af konstant rang i omegnen af punktet a, er sideunderrummet $a + T_a F$ bestemt ved ligningen $Df(a)(x - a) = 0$, altså $a + T_a F = \{t \in \mathbb{R}^k \mid Df(a)(t - a) = 0\}$.

3.7. En delmængde F af $\mathbb{R}^k$, der i hvert punkt er glat af dimensionen $k-1$, kaldes en <u>glat hyperflade</u> i $\mathbb{R}^k$.

Lad $f: \Omega \to \mathbb{R}$ være en $\mathscr{C}^1$-funktion på den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ og betragt løsningsmængden

$$F = \{t \in \Omega \mid f(t) = 0\}$$

Af 3.5. følger, at <u>i omegnen af et punkt $a \in F$, hvori $Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right) \neq (0, \cdots, 0)$ er F en glat hyperflade. Hvis den afledede $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ m.h.t. den i-te koordinat er $\neq 0$, kan de øvrige koordinater bruges som parametre. Tangenthyperplanen til F i a, afsat ud fra a, er givet ved ligningen</u>

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) = 0.}$$

4. Niveauflader. Gradientfelt.

4.1. Forløbet af en $\mathscr{C}^1$-funktion f på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}^k$ anskueliggøres ofte ved at betragte niveauhyperfladerne for f, d.v.s. punktmængderne

$$\{t \in \Omega \mid f(t) = c\}$$

for forskellige værdier af $c \in \mathbb{R}$. For $k=2$, resp. $k=3$, får vi niveaukurver, resp. niveauflader. Ved at anvende (3.7.) på funktionerne $f-c$, hvor $c \in \mathbb{R}$, får vi:

For ethvert punkt $a \in \Omega$, i hvilket $\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}\right) \neq (0, \dots, 0)$, er den gennem a gående niveauhyperflade i en omegn af a en glat hyperflade, hvis tangenthyperplan har ligningen

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}(x_k - a_k) = 0.$$

Hvis den afledede $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ m.h.t. en variabel er $\neq 0$, kan de øvrige bruges som parametre i en omegn af a.

4.2. For en $\mathscr{C}^1$-funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ kaldes vektorfunktionen $\begin{pmatrix} D_1 f \\ \vdots \\ D_k f \end{pmatrix}$ gradienten af f og betegnes $\operatorname{grad} f$. Det ses, at gradienten er den transponerede til funktionalmatricen Df. Idet man for hvert $t \in \Omega$ tænker sig vektoren $(\operatorname{grad} f)(t) \in \mathbb{R}^k$ afsat ud fra t, fås gradientfeltet for funktionen f. Det ses, at i punkter a, hvori $(\operatorname{grad} f)(a) \neq 0$, er gradienten vinkelret på den gennem a gående niveauhyperflade.

Alternativt bevis for sætningen om implicit givne funktioner.

Vi skriver $x = (x_1,\dots,x_k)$ og $y = (y_1,\dots,y_p)$ i stedet for henholdsvis t og s. For ethvert punkt a af et talrum $\mathbb{R}^n$ og ethvert tal $r > 0$ betegnes med $B_r(a)$ den afsluttede "kugle"

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z-a\| \leq r\} ,$$

idet den benyttede norm er max-normen.

Givet er altså en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k+p}$ og en C^1-afbildning $f: \Omega \to \mathbb{R}^p$. Med betegnelsen

$$F = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\},$$

skal det vises, at hvis $(x_o,y_o) \in F$, og hvis $D_y f(x_o,y_o)$ er regulær, findes $\rho > 0$, $\sigma > 0$ med

$$J := B_\rho(x_o) \times B_\sigma(y_o) \subseteq \Omega$$

så at $D_y f$ er regulær i ethvert punkt $(x,y) \in J$, og så at $F \cap J$ er grafen for en C^1-afbildning

$$g : B_\rho(x_o) \to B_\sigma(y_o) .$$

Når først dette er bevist, fremkommer ligningen

(1) $$D_x f(x,g(x)) + D_y f(x,g(x)) \cdot Dg(x) = 0, \quad x \in B_\rho(x_o) ,$$

til bestemmelse af Dg ved implicit differentiation af identiteten

$$f(x,g(x)) = 0, \quad x \in B_\rho(x_o) ,$$

ligesom i § 1.3 ved anvendelse af kædereglen på den sammensatte afbildning $x \mapsto (x,g(x)) \mapsto f(x,g(x)) = 0$.

A. Tilfældet $p = 1$.

Her er altså Ω en åben delmængde af $\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$. Koordinaterne på Ω betegnes med $(x_1,\dots,x_k,y)$, og det givne punkt af F hedder

$$(x_o,y_o) = (x_{o1},\dots,x_{ok},y_o) .$$

Ifølge forudsætning er 1×1-matricen $D_y f(x_o,y_o)$ regulær, altså tallet $D_y f(x_o,y_o) \neq 0$. Ved at erstatte den givne C^1-funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ med en passende konstant gange f kan vi opnå at

$$D_y f(x_o,y_o) = 1 ,$$

og herved sker jo ingen ændring i løsningsmængden $F = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\}$.

1^o) Da $D_y f$ er kontinuert og $=1$ i (x_o,y_o), og da Ω er åben, findes $\rho,\sigma > 0$ med $J := B_\rho(x_o) \times B_\sigma(y_o) \subseteq \Omega$ så at

$$D_y f(x,y) > 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \in J .$$

Specielt er $y \mapsto f(x,y)$ strengt voksende i intervallet $B_\sigma(y_o) = [y_o-\sigma,y_o+\sigma]$ for ethvert fast $x \in B_\rho(x_o)$. Derfor er

$$f(x_o,y_o+\sigma) > 0, \quad f(x_o,y_o-\sigma) < 0.$$

2^o) Da f er kontinuert i Ω, specielt i punkterne $(x_o,y_o \pm \sigma)$, kan vi ved at erstatte det under 1^o) valgte ρ med et passende mindre tal, der fortsat betegnes med ρ, opnå at

$$f(x,y_o+\sigma) > 0, \quad f(x,y_o-\sigma) < 0 \quad \text{for} \quad x \in B_\rho(x_o).$$

For ethvert $x \in B_\rho(x_o)$ er (som nævnt under 1^o) den kontinuerte funktion $y \mapsto f(x,y)$ strengt voksende i intervallet $[y_o-\sigma\ ,\ y_o+\sigma]$, og da den har forskelligt fortegn i intervallets endepunkter, antager den værdien 0 i netop et punkt $y = g(x)$ af dette interval. Herved er da defineret en funktion

$$g\colon B_\rho(x_o) \to B_\sigma(y_o)$$

således at $F \cap J$ netop er grafen for g. Da $(x_o,y_o) \in F$, gælder $y_o = g(x_o)$. Tilbage står at vise:

$3^o)$ $g \in C^1(B_\rho(x_o))$. Først vises, at g er <u>differentiabel</u> i ethvert punkt $a \in B_\rho(x_o)$. Hertil betragtes et vilkårligt punkt $a+h \in B_\rho(x_o)$, og vi sætter

$$b = g(a), \quad \Delta g(h) = g(a+h) - g(a) \ .$$

Så er $f(a,b) = 0$ og $f(a+h,\ b+\Delta g(h)) = f(a+h,\ g(a+h)) = 0$. Ifølge middelværdisætningen (se Differentiabilitet § 5.4, side 33) fås derfor

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 &= f(a+h,\ b+\Delta g(h)) - f(a,b) \\ &= \sum_{i=1}^{k} D_{x_i} f(\xi,\eta) \cdot h_i + D_y f(\xi,\eta) \cdot \Delta g(h) \ , \end{aligned}$$

hvor (ξ,η) afhænger af h og ligger på linjestykket med endepunkter (a,b) og $(a+h,\ b+\Delta g(h))$, hvilket linjestykke er indeholdt i den konvekse mængde $J = B_\rho(x_o) \times B_\sigma(y_o)$. Da $D_y f \neq 0$ i J ifølge 1^o), fås af (2) ved division med $D_y f(\xi,\eta)$

(3) $$\Delta g(h) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{D_{x_i} f(\xi,\eta)}{D_y f(\xi,\eta)} h_i \ .$$

Nu er $D_x f$ og $D_y f$ kontinuerte og $D_y f \neq 0$ i den kompakte mængde J, og der findes derfor en konstant M så at der for alle $i = 1,\dots,k$ gælder

$$|D_{x_i} f|/|D_y f| \leq M \quad \text{i} \quad J.$$

Men så viser (3), at $|\Delta g(h)| \leq Mk\|h\| \to 0$ for $h \to 0$, altså at g er <u>kontinuert</u> i a. Når $h \to 0$ vil derfor $(a+h,\ b+\Delta g(h)) \to (a,b)$, og derfor vil også $(\xi,\eta) \to (a,b)$. Følgelig kan (3) omskrives til

$$\Delta g(h) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{D_{x_i} f(a,b)}{D_y f(a,b)} h_i - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(h) h_i \ ,$$

hvor hvert $\varepsilon_i(h) \to 0$ for $h \to 0$, og derfor $\|h\|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(h) h_i \to 0$ for $h \to 0$. Dette viser, at g er differentiabel i a med de partielle afledede

(4) $$D_i g(a) = -\frac{D_{x_i} f(a,g(a))}{D_y f(a,g(a))} \ , \quad a \in B_\rho(x_o)$$

(hvor vi har indsat $b = g(a)$) i overensstemmelse med (1)). Dette udtryk viser samtidig, at hvert $D_i g$ er kontinuert i $B_\rho(x_o)$, altså at $g \in C^1(B_\rho(x_o))$.

B. Tilfældet $p > 1$.

Her benyttes induktion efter p. Vi antager altså, at sætningen gælder alment med $p-1$ i stedet for p. Da matricen

$$D_y f(x_o,y_o) = (D_{y_j} f_i(x_o,y_o))_{i,j=1,\dots,p}$$

er regulær, er mindst ét af elementerne $D_{y_p} f_i(x_o,y_o)$ i sidste søjle forskelligt fra 0. Efter en omnummerering af ligningerne $f_1(x,y) = 0,\dots,f_p(x,y) = 0$ kan vi antage, at

$$D_{y_p} f_p(x_o,y_o) = 1, \tag{5}$$

fordi vi også kan erstatte f_p med en konstant gange f_p, altsammen uden at ændre på løsningsmængden F.

Nu kan det under A beviste anvendes på funktionen

$$f_p(x,y) = f_p(x,\tilde{y};y_p) ,$$

hvor vi skriver

$$\tilde{y} = (y_1,\dots,y_{p-1}) , \quad y = (y_1,\dots,y_p) = (\tilde{y},y_p) .$$

Specielt kan det givne punkt $(x_o,y_o) \in F$ også betegnes $(x_o,\tilde{y}_o;y_{op})$, idet y_{oj} betyder j'te koordinat af y_o, og $\tilde{y}_o = (y_{o1},\dots,y_{o,p-1})$. - Således eksisterer (ifølge A) $\alpha,\beta > 0$ med

$$B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op}) \subset \Omega$$

samt en C^1-funktion

$$\varphi\colon B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o) \to B_\beta(y_{op}) (= [y_{op}-\beta,y_{op}+ \beta])$$

således, at den sidste af de givne ligninger, nemlig

$$f_p(x,y) = f_p(x,\tilde{y};y_p) = 0 ,$$

inden for $B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op})$ er ensbetydende med

$$y_p = \varphi(x,\tilde{y}) .$$

Specielt er $y_{op} = \varphi(x_o,\tilde{y}_o)$, fordi $f_p(x_o,\tilde{y}_o;y_{op}) = 0$. Ved implicit differentiation fås for den partielle afledede af φ m.h.t. y_j $(j = 1,\ldots,p-1)$

$$D_{y_j}\varphi(x_o,\tilde{y}_o) = -\frac{D_{y_j}f_p(x_o,y_o)}{D_{y_p}f_p(x_o,y_o)} = -D_{y_j}f_p(x_o,y_o) \tag{6}$$

ifølge (4) og (5). (Tilsvarende for $D_{x_i}\varphi(x_o,\tilde{y}_o)$.)

Herefter er hele det givne ligningssystem

$$f(x,y) = (f_1(x,y),\ldots,f_p(x,y)) = 0$$

inden for $B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op})$ ensbetydende med systemet

$$\begin{cases} f_i(x,\tilde{y};\varphi(x,\tilde{y})) = 0 & (i = 1,\ldots,p-1) , \\ \varphi(x,\tilde{y}) = y_p . & \end{cases} \tag{7}$$

Venstresiderne

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(x,\tilde{y}) := f_i(x,\tilde{y};\varphi(x,\tilde{y})) ,\ i = 1,\ldots,p-1, \tag{8}$$

i de første $p-1$ ligninger i (7) er åbenbart C^1-funktioner definerede i $B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o)$, specielt i det indre $\tilde{\Omega} := \mathring{B}_\alpha(x_o,\tilde{y}_o)$, som er en åben mængde indeholdende $(x_o,\tilde{y}_o)$. I dette punkt $(x_o,\tilde{y}_o)$ er de nævnte $p-1$ ligninger $\tilde{f}_i(x_o,\tilde{y}_o) = 0$ alle opfyldt, fordi

$$(x_o,\tilde{y}_o;\varphi(x_o,\tilde{y}_o)) = (x_o,\tilde{y}_o;y_{op}) = (x_o,y_o) \in F .$$

Vi viser nedenfor, at funktionalmatricen $D_{\tilde{y}}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o)$ er <u>regulær</u>. Når det er godtgjort, følger det af induktionsantagelsen, at der findes $\tilde{\rho},\tilde{\sigma} > 0$ med

$$B_{\tilde{\rho}}(x_o) \times B_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}_o) \subset \mathring{B}_\alpha(x_o,\tilde{y}_o)\,(=\tilde{\Omega})$$

og en C^1-afbildning $\tilde{g}\colon B_{\tilde{\rho}}(x_o) \to B_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}_o)$ således, at de første p-1 ligninger i (7) inden for $B_{\tilde{\rho}}(x_o) \times B_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}_o)$ tilsammen er ensbetydende med

$$\tilde{y} = \tilde{g}(x) \ .$$

Specielt er $\tilde{y}_o = \tilde{g}(x_o)$, fordi $\tilde{f}_i(x_o,\tilde{y}_o) = f_i(x_o,\tilde{y}_o;\varphi(x_o,\tilde{y}_o) = f_i(x_o,y_o) = 0$ for $i < p$. Og herefter bliver (7) (og derigennem også det oprindeligt givne ligningssystem $f = 0$) inden for

$$B_{\tilde{\rho}}(x_o) \times B_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op})\,(\subseteq B_\alpha(x_o,\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op}) \subseteq \Omega)$$

ensbetydende med

$$y = (\tilde{y},y_p) = g(x) := (\tilde{g}(x),\varphi(x,\tilde{g}(x))) \ ,$$

hvor g åbenbart er en C^1-afbildning af $B_{\tilde{\rho}}(x_o)$ ind i $B_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y}_o) \times B_\beta(y_{op})$. Vil man desuden opnå, at V (fra sætningens formulering) bliver en "<u>kugleomegn</u>" $B_\sigma(y_o)$ af $y_o = (\tilde{y}_o,y_{po})$, behøver man blot at vælge $\sigma = \min(\tilde{\sigma},\beta)$ og derpå vælge $\rho > 0$ så lille at $\rho < \tilde{\rho}$ og at $g(B_\rho(x_o)) \subset B_\sigma(y_o)$, hvilket er muligt, da g er kontinuert i x_o med billedet $g(x_o) = y_o$.

Det henstår således blot at eftervise, at $D_{\tilde{y}}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o)$ er regulær. Ved differentiation af (8) under benyttelse af kædereglen ses, at elementet på plads (i,j) i denne $(p-1) \times (p-1)$ matrix er

$$
\begin{aligned}
D_{y_j}\tilde{f}_i(x_o,\tilde{y}_o) &= D_{y_j}f_i(x_o,y_o) + D_{y_p}f_i(x_o\cdot y_o)\cdot D_{y_j}\varphi(x_o,\tilde{y}_o) \\
&= D_{y_j}f_i(x_o,y_o) - D_{y_p}f_i(x_o,y_o)\cdot D_{y_j}f_p(x_o,y_o) \ ,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

hvor $i,j = 1,\dots,p-1$, og hvor vi har indsat (6). Hvis vi nu i den givne regulære matrix

$$D_y f(x_o,y_o) = (D_{y_j}f_i(x_o,y_o))_{i,j=1,\dots,p}$$

multiplicerer den sidste række

$$(D_{y_1}f_p(x_o,y_o),\dots,D_{y_{p-1}}f_p(x_o,y_o),\ 1)$$

(jvfr. (5)) med $D_{y_p}f_i(x_o,y_o)$ for et $i < p$ og trækker resultatet fra den i'te række, så fås ifølge (9) den nye i'te række

$$(D_{y_1}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o),\dots,D_{y_{p-1}}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o),\ 0) \ .$$

Ved disse rækkeoperationer (udført for $i = 1,2,\dots,p-1$) overføres $D_y f(x_o,y_o)$ således i en matrix af formen

$$
\left[\begin{array}{c|c}
D_{\tilde{y}}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o) & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\
\hline
* \cdots\cdots * & 1
\end{array}\right] ,
$$

hvilket viser, at $D_{\tilde{y}}\tilde{f}(x_o,\tilde{y}_o)$ er regulær, fordi den har samme determinant som ovenstående og dermed som den givne regulære matrix $D_y f(x_o,y_o)$. - Dermed er sætningen bevist.

Tilføjelse til §2 (side 7)

Tilfældet $k = 2$, $p = 1$

I dette tilfælde er Ω en åben mængde i $\mathbb{R}^3$, og $f: \Omega \to \mathbb{R}$ er en given C^1-funktion. F er løsningsmængden

$$F = \{(x,y,z) \in \Omega \mid f(x,y,z) = 0\}$$

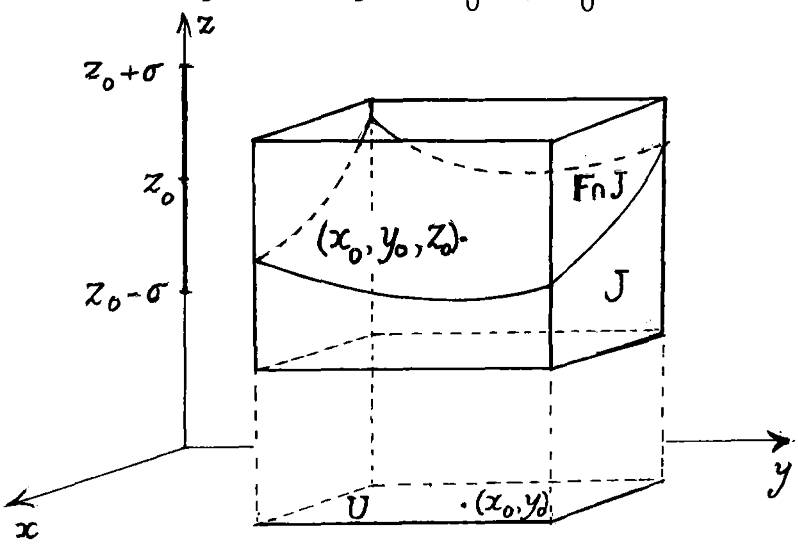
til ligningen $f = 0$. Lad $(x_0,y_0,z_0) \in F$ være et givet punkt af løsningsmængden, så at gradienten

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

er $\neq (0,0,0)$ i (x_0,y_0,z_0). For eksempel kan vi antage, at

$$D_z f(x_0,y_0,z_0) \neq 0.$$

Så findes ifølge sætningen om implicit givne funktioner en (gerne åben) omegn U af (x_0,y_0) i $\mathbb{R}^2$ og en omegn $]z_0-\sigma, z_0+\sigma[$ af z_0 i $\mathbb{R}$ med



$$J := U \times]z_0-\sigma, z_0+\sigma[\subseteq \Omega$$

så at

$$D_z f \neq 0 \text{ i } J$$

og så at $F \cap J$ er grafen for en C^1-funktion

$$g: U \to]z_0-\sigma, z_0+\sigma[,$$

hvis partielle afledede bestemmes ved implicit differentiation af identiteten $f(x,y,g(x,y)) = 0$:

$$D_x f(x,y,g(x,y)) + D_z f(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$D_y f(x,y,g(x,y)) + D_z f(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0,$$

altså

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{D_x f}{D_z f}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{D_y f}{D_z f},$$

hvor der på højre-siderne skal indsættes $(x,y,g(x,y))$.

Således er $F \cap J$ en <u>flade</u> (= 2-dimensional glat punktmængde) i $\mathbb{R}^3$, hvis <u>tangentplan</u> i et punkt $(a,b,c) \in F \cap J$ har ligningen (se Differentiabilitet, side 34):

$$z - c = -\frac{D_x f(a,b,c)}{D_z f(a,b,c)} (x-a) - \frac{D_y f(a,b,c)}{D_z f(a,b,c)} (y-b),$$

eller på symmetrisk form (uafhængig af, at det netop var $D_z f$ som vi antog $\neq 0$ i (x_0,y_0,z_0)):

$$D_x f(a,b,c)\cdot(x-a) + D_y f(a,b,c)\cdot(y-b) + D_z f(a,b,c)\cdot(z-c) = 0.$$

Ligningen udtrykker, at vektoren $(x-a,y-b,z-c)$ skal være vinkelret på gradienten til f i (a,b,c):

$$(\text{grad } f)(a,b,c) = (D_x f(a,b,c),\ D_y f(a,b,c),\ D_z f(a,b,c)),$$

der således er en <u>normalvektor</u> $(\neq (0,0,0))$ til tangentplanen i (a,b,c) og dermed (definitionsmæssigt) til fladen F i dette punkt.

Analogt gælder for øvrigt i tilfældet $k = p = 1$ (se §2), [hvor Ω er en åben mængde i $\mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ en C^1-funktion, og hvor grad $f = (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y) \neq (0,0)$ i et givet punkt (x_0,y_0) af løsningsmængden F til ligningen $f(x,y) = 0$] at F bliver en <u>kurve</u>, hvis <u>tangent</u> i et punkt $(a,b) \in F$ har ligningen

$$D_x f(a,b)\cdot(x-a) + D_y f(a,b)\cdot(y-b) = 0;$$

og grad $f(a,b)$ bliver en <u>normalvektor</u> til kurven i dette punkt.

Tilfældet $k = 1$, $p = 2$

Også her er Ω en åben mængde i $\mathbb{R}^3$; men nu er der givet et <u>par</u> $f = (f_1, f_2)$ af C^1-funktioner i Ω. Hertil svarer løsningsmængden

$$F = \{(x,y,z) \in \Omega \mid f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}$$

til ligningen $f = 0$. Lad $(x_0,y_0,z_0) \in F$ være et givet punkt af F hvori funktionalmatricen

$$Df = (D_x f,\ D_y f,\ D_z f) = \begin{pmatrix} D_x f_1 & D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_x f_2 & D_y f_2 & D_z f_2 \end{pmatrix}$$

har rangen 2, altså hvori rækkerne grad f_1 og grad f_2 er lineært uafhængige, hvilket også kan udtrykkes ved

$$\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 \neq \underline{0} \quad \text{i} \quad (x_0,y_0,z_0)\ .$$

Vi kan for eksempel antage, at

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_y f_2 & D_z f_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

i (x_0,y_0,z_0), altså at grad $f_1 \times$ grad f_2 i dette punkt ikke er vinkelret på x-aksen (nemlig ikke har x-koordinaten 0). Så findes der ifølge sætningen om implicit givne funktioner en åben omegn

$]x_0-\rho,\ x_0+\rho[$ af x_0 i $\mathbb{R}$ og en åben omegn V af (y_0,z_0) i $\mathbb{R}^2$ med

$$J :=]x_0-\rho,\ x_0+\rho[\times V \subseteq \Omega$$

så at (10) også gælder i J, og så at ligningsparret $f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0$ inden for J er ensbetydende med et ligningspar af formen

$$y = g(x), \quad z = h(x),$$

hvor g og h er C^1-funktioner i intervallet $]x_0-\rho,\ x_0+\rho[$, og hvor (g,h) afbilder dette interval ind i V.

Differentialkvotienterne g' og h' bestemmes simplest ved implicit differentiation af identititerne

$$f_1(x,g(x),h(x)) = f_2(x,g(x),h(x)) = 0$$

således:

$$D_xf_1 + D_yf_1 \cdot g'(x) + D_zf_1 \cdot h'(x) = 0$$
$$D_xf_2 + D_yf_2 \cdot g'(x) + D_zf_2 \cdot h'(x) = 0,$$

hvor de partielle afledede af f_1 og f_2 skal tages i $(x,g(x),h(x))$. Determinanten til dette lineære ligningspar med de to ubekendte $g'(x)$ og $h'(x)$ er jo $\neq 0$, fordi (10) gælder i J. Ved løsning fås

$$g'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} D_x f_1 & D_z f_1 \\ D_x f_2 & D_z f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_y f_2 & D_z f_2 \end{vmatrix}}, \quad h'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} D_y f_1 & D_x f_1 \\ D_y f_2 & D_x f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_y f_2 & D_z f_2 \end{vmatrix}},$$

igen med indsættelse af $y = g(x)$, $z = h(x)$.

Således er $F \cap J$ en <u>kurve</u> i $\mathbb{R}^3$, hvis <u>tangent</u> i et kurvepunkt $(x,g(x),h(x))$ har retningen $(1, g'(x),h'(x))$, eller (på symmetrisk form) den dermed proportionale vektor

$$\operatorname{grad} f_1 \times \operatorname{grad} f_2 = \left(\begin{vmatrix} D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_y f_2 & D_z f_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} D_z f_1 & D_x f_1 \\ D_z f_2 & D_x f_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} D_x f_1 & D_y f_1 \\ D_x f_2 & D_y f_2 \end{vmatrix} \right),$$

stadig med indsættelse af $(x,g(x),h(x))$.

Kurven F er efter sin definition <u>skæringskurven</u> mellem de to flader F_1 og F_2 med ligningen henholdsvis $f_1(x,y,z) = 0$ og $f_2(x,y,z) = 0$:

$$F = F_1 \cap F_2 .$$

Tangenten til F i et punkt $(x,y,z) = (x,g(x),h(x))$ af $F \cap J$ er tilsvarende skæringslinjen mellem tangentplanerne til F_1 og F_2 i dette punkt; thi tangenten til F har jo retningen $\operatorname{grad} f_1 \times \operatorname{grad} f_2$, som er vinkelret på $\operatorname{grad} f_1$ og $\operatorname{grad} f_2$, altså vinkelret på normalretningen til tangentplanen til F_1, henh. F_2, i punktet. Således har tangenten til F retning som skæringslinjen mellem de to tangentplaner og er derfor netop sammenfaldende med denne, da både tangenten og skæringslinjen går gennem det betragtede punkt.

Den her foreliggende tilføjelse til §2 belyser samtidig indholdet af §3 (Glatte punktmængder i $\mathbb{R}^k$) i hovedtilfældet $r = p$ i sætningen på side 10.

OMVENDT AFBILDNING

1. Det almene tilfælde

1.1. Vi betragter en åben mængde $\Xi \subseteq \mathbb{R}^k$ samt endnu et "eksemplar" af $\mathbb{R}^k$ og en $\mathscr{C}^1$-afbildning $\varphi: \Xi \to \mathbb{R}^k$. I produktrummet $\mathbb{R}^k \times \Xi \subseteq \mathbb{R}^{2k}$ med koordinaterne $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ betragtes grafen

$$F = \{ (\varphi(s), s) \mid s \in \Xi \}$$

for vektorafbildningen φ. Ved

$$f(t,s) = t - \varphi(s)$$

bestemmes en vektorafbildning $f: \mathbb{R}^k \times \Xi \to \mathbb{R}^k$, og vi har

$$D_x f = E, \quad D_y f = -D\varphi.$$

Endvidere gælder

$$F = \{ (t,s) \in \mathbb{R}^k \times \Xi \mid f(t,s) = 0 \}.$$

Af sætningen om implicit givne funktioner følger derfor:

For ethvert punkt $s_0 \in \Xi$, hvori funktionalmatricen $D\varphi(s_0)$ er regulær, findes en omegn $\mathcal{J} = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k \times \Xi$ af punktet $(t_0, s_0) = (\varphi(s_0), s_0)$ bestemt ved afsluttede kugler

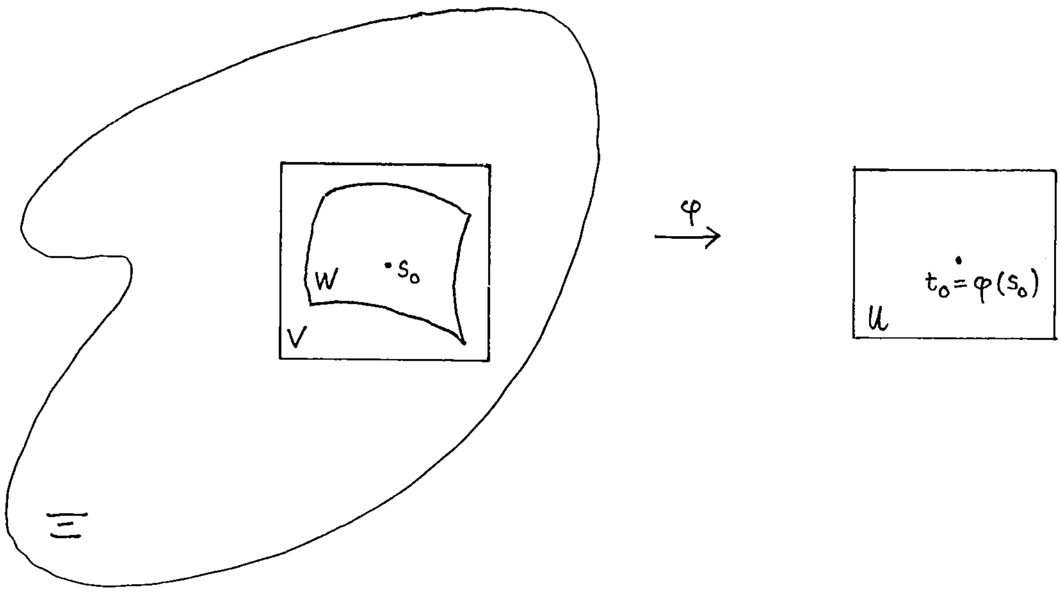
$$\mathcal{U} = \{ t \mid \|t - t_0\| \leq \rho \}, \quad \mathcal{V} = \{ s \mid \|s - s_0\| \leq \sigma \},$$

således at $D\varphi$ er regulær i ethvert punkt $s \in \mathcal{V}$, og således at $F \cap \mathcal{J}$ er grafen for en $\mathscr{C}^1$-afbildning

$$\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V},$$

d.v.s. mængden af punkter $(\varphi(s), s)$ i $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ er netop mængden af punkter $(t, \psi(t))$, $t \in \mathcal{U}$. Funktionalmatricen $D\psi(t)$ bestemmes ved ligningen

$$D\psi(t) = D\varphi(\psi(t))^{-1}.$$



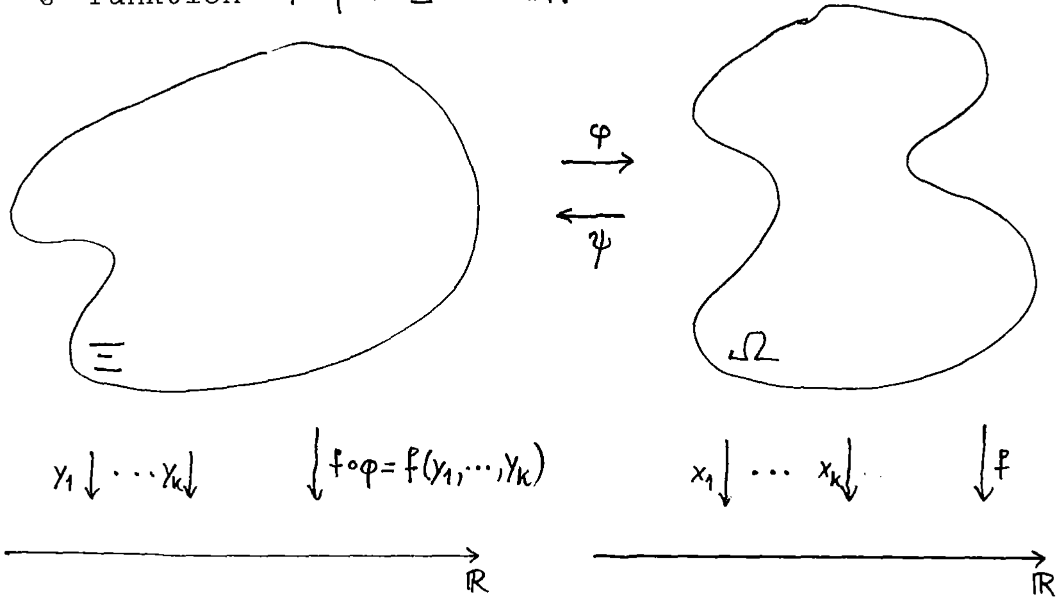
1.2. Specielt ser vi, at billedmængden $\varphi(\Xi)$ indeholder en omegn af billedpunktet $t_0 = \varphi(s_0)$, thi $\mathcal{U}$ er jo en sådan omegn. Heraf følger:

1.3. Korollar. Hvis $D\varphi$ er regulær i ethvert punkt $s \in \Xi$, er billedmængden $\varphi(\Xi)$ åben i $\mathbb{R}^k$.

1.4. Vender vi tilbage til situationen i sætningen, kan vi yderligere bemærke følgende: Sættes $W = \{s \in V \mid \varphi(s) \in \mathcal{U}\}$, er W en afsluttet omegn af s_0. Sætningen udsiger, at restriktionen af φ til W er en bijektiv afbildning: $W \to \mathcal{U}$, og at den inverse afbildning $\psi: \mathcal{U} \to W$ igen er $\mathscr{C}^1$. Formlen for funktionalmatricen kan udtrykkes ved at sige, at matricerne $D\varphi$ og $D\psi$ i sammenhørende punkter $s = \psi(t) \in W$, $t = \varphi(s) \in \mathcal{U}$ er hinandens inverse.

Af korollaret følger, at billedet, $\varphi(W^\circ)$, af det indre af W er indeholdt i det indre af U, og [idet resultatet anvendes på afbildningen $\psi: U \to W$] at billedet, $\psi(U^\circ)$, af det indre af U er indeholdt i det indre af W. Heraf sluttes, at der må gælde $\varphi(W^\circ) = U^\circ$ og $\psi(U^\circ) = W^\circ$.

1.5. Af særlig interesse er det tilfælde, hvor $\varphi: \Xi \to \mathbb{R}^k$ er injektiv og $D\varphi$ er regulær i ethvert punkt $s \in \Xi$. Da er φ en bijektiv afbildning af Ξ på en åben mængde Ω i $\mathbb{R}^k$, og den omvendte afbildning $\varphi^{-1} = \psi : \Omega \to \Xi$ er en $\mathscr{C}^1$-funktion, med funktionalmatricen $D(\varphi^{-1}) = (D\varphi)^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Afbildningerne φ og ψ giver nu en bijektiv afbildning mellem $\mathscr{C}^1$-funktioner ne på Ω og $\mathscr{C}^1$-funktionerne på Ξ. Hvis $x_1, \cdots, x_k$ er koordinaterne på Ω, og $y_1, \cdots, y_k$ er koordinaterne på Ξ, og $f: \Omega \to \mathbb{R}$ er en $\mathscr{C}^1$-funktion på Ω, bruger man ofte betegnelsen $f(y_1, \cdots, y_k)$ (eller simpelthen igen f) for den til f svarende $\mathscr{C}^1$-funktion $f \circ \varphi : \Xi \to \mathbb{R}$.



Funktionerne $y_1, \cdots, y_k$, opfattet som funktioner på Ω (altså funktionerne $y_1 \circ \psi = \psi_1, \cdots, y_k \circ \psi = \psi_k$), kaldes <u>krumlinede koordinater</u>

på Ω, og for funktionalmatricerne bruges betegnelserne $\mathcal{D}\varphi = \frac{\partial(x_1,\dots,x_k)}{\partial(y_1,\dots,y_k)}$, $\mathcal{D}\psi = \frac{\partial(y_1,\dots,y_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}$. I tilfældet, hvor $\varphi: \Xi \to \Omega$ opfylder, at $\mathcal{D}\varphi$ er regulær i hvert punkt af Ξ (men hvor φ ikke nødvendigvis er injektiv), kan ovenstående anvendes i omegnen af ethvert punkt af Ξ.

1.6. <u>Polære koordinater i planen</u>. Lad x, y betegne koordinaterne på $\mathbb{R}^2$, og lad os i endnu et eksemplar af $\mathbb{R}^2$ betegne koordinaterne r, v. Ved

$$\varphi = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix}$$

defineres da en afbildning $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der klart er en $\mathscr{C}^\infty$-afbildning. φ har funktionalmatricen

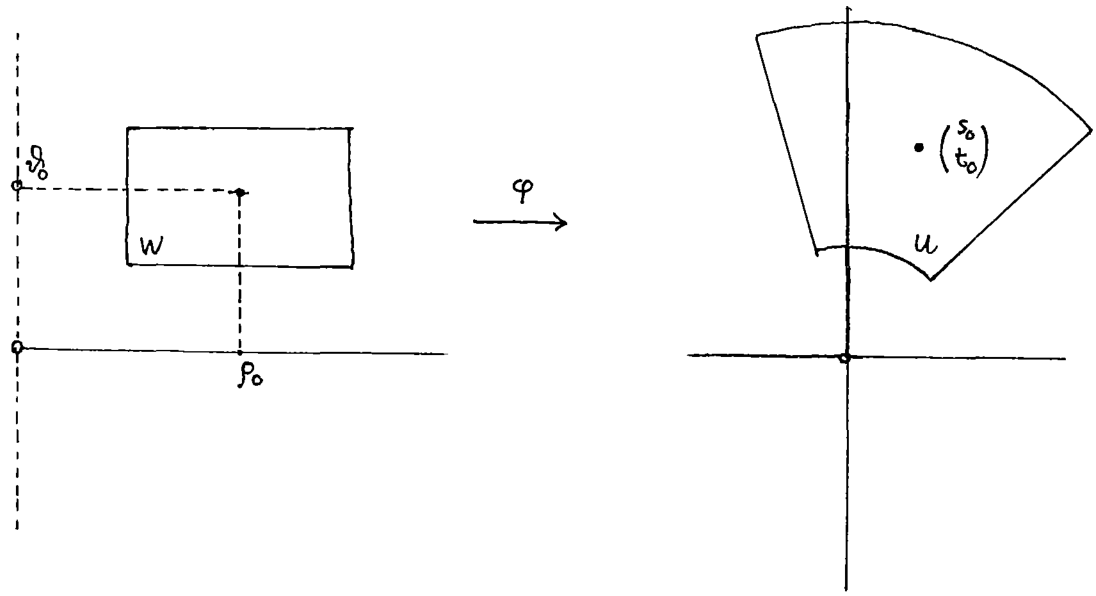
$$\mathcal{D}\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}$$

og Jacobi-determinanten

$$\det \mathcal{D}\varphi = r.$$

Funktionalmatricen er altså regulær i alle punkter, hvori $r \neq 0$. Normalt opereres kun i den (åbne) halvplan, hvori $r > 0$. Det ses let, at φ afbilder denne halvplan på den udprikkede plan $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Til hvert punkt $\begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ findes altså et punkt $\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$ med $\rho_0 > 0$ og åbne omegne U af $\begin{pmatrix} s_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$, W af $\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$, således at φ afbilder W bijektivt på U og således, at den inverse afbildning $\psi = \varphi^{-1}: U \to W$ er $\mathscr{C}^\infty$. Denne inverse afbildning har funktionalmatricen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r,v)}{\partial(x,y)} &= \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,v)} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{1}{r}\sin v & \frac{1}{r}\cos v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



2. Volumenforhold

2.1. Vi betragter en åben mængde $\Xi \subseteq \mathbb{R}^k$ og en injektiv $\mathcal{C}^1$-afbildning $\varphi: \Xi \to \mathbb{R}^k$, således at $D\varphi$ er regulær i ethvert punkt af Ξ. φ er da en bijektiv afbildning af Ξ på den åbne mængde $\tilde{\Xi} \subseteq \mathbb{R}^k$, og den inverse afbildning $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}: \tilde{\Xi} \to \Xi$ er ligeledes en $\mathcal{C}^1$-afbildning. Endvidere betragter vi et punkt $s_0 \in \Xi$ med billedpunktet $\tilde{s}_0 = \varphi(s_0) \in \tilde{\Xi}$.

Lad $v_1, \cdots, v_k$ være et sæt af lineært uafhængige vektorer. Med P betegner vi det parallellotop, der har kanter parallelle med $v_1, \cdots, v_k$ og midtpunkt i punktet s_0; P er altså punktmængden

$$P = \{ s_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid -\tfrac{1}{2} \leq \lambda_i \leq \tfrac{1}{2},\ i = 1, \cdots, k \}.$$

For hvert reelt tal $r > 0$ betegner vi med $P(r)$ det parallellotop, der fremkommer ved at multiplicere P med faktoren r ud fra midtpunktet s_0, altså

$$P(r) = \{ s_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid -\tfrac{r}{2} \leq \lambda_i \leq \tfrac{r}{2},\ i = 1, \cdots, k \}.$$

Vi har $P(r) \subseteq \Xi$, når r er tilstrækkelig lille.

Lad A være funktionalmatricen $A = D\varphi(s_0)$. Vi sætter $\tilde{v}_1 = Av_1, \dots, \tilde{v}_k = Av_k$, og betegner med $\tilde{P}$ og $\tilde{P}(r)$ de ud fra disse vektorer på tilsvarende måde dannede parallellotoper med midtpunkt i $\tilde{s}_0$. Ifølge definitionen af differentiabilitet har φ i punktet s_0 kontakt med den affine afbildning : $s \mapsto \tilde{s}_0 + A(s-s_0)$, d.v.s. vi har en fremstilling

$$\varphi(s) = \tilde{s}_0 + A(s-s_0) + \varepsilon(s)\|s-s_0\|,$$

hvor $\varepsilon(s) \to 0$ for $s \to s_0$. Den affine afbildning afbilder parallellotopet $P(r)$ på parallellotopet $\tilde{P}(r)$. Af fremstillingen følger nu, at vi til hvert $\varepsilon > 0$ kan finde $\delta > 0$, således at

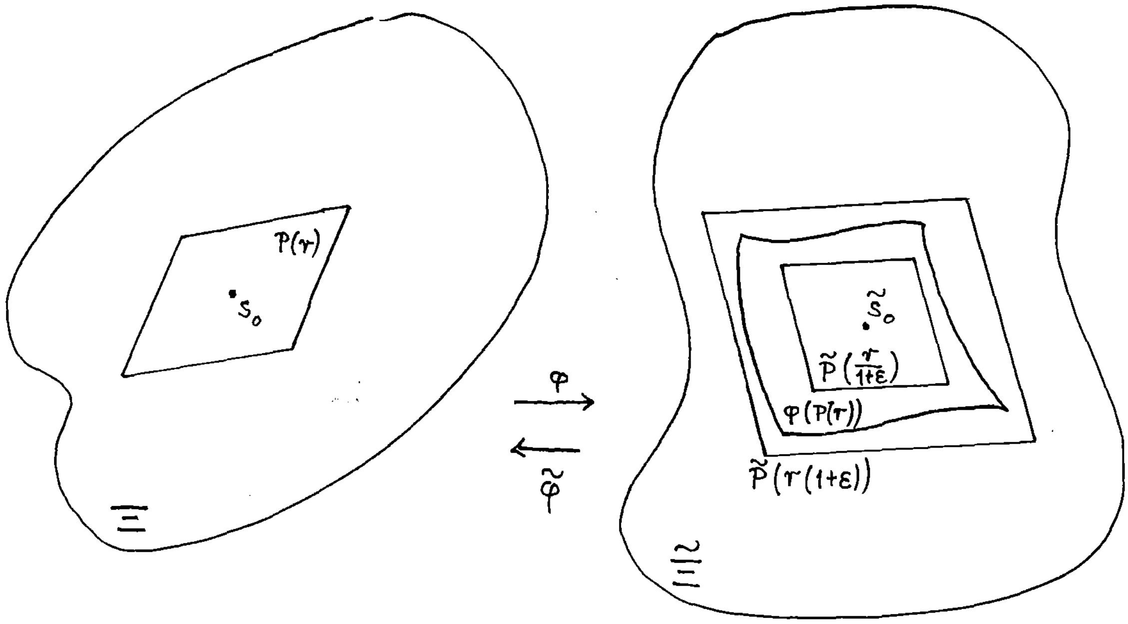
$$\varphi\left(P(r)\right) \subseteq \tilde{P}(r + \varepsilon r) \quad \text{for alle} \quad r < \delta.$$

Den inverse afbildning $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$ har i punktet $\tilde{s}_0$ kontakt med den inverse affine afbildning. Det følger derfor tilsvarende, at vi til hvert $\varepsilon > 0$ kan bestemme $\tilde{\delta} > 0$, således at

$$\varphi^{-1}(\tilde{P}(r)) \subseteq P(r + \varepsilon r) \quad \text{for alle} \quad r < \tilde{\delta}.$$

Af disse overvejelser følger: Til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at

$$\tilde{P}\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right) \subseteq \varphi\left(P(r)\right) \subseteq \tilde{P}\left(r(1+\varepsilon)\right) \quad \text{for alle} \quad r < \delta.$$



Polytopet P har volumen $Vol(P) = |\det(v_1,\dots,v_k)|$, og polytopet $P(r)$ har volumen $Vol(P(r)) = r^k Vol(P)$. Endvidere finder vi

$Vol(\tilde{P}) = |\det(Av_1,\dots,Av_k)| = |\det A \det(v_1,\dots,v_k)| = |\det A|\, Vol(P)$,

og $Vol(\tilde{P}(r)) = |\det A|\, Vol(P(r))$.

Idet vi antager, at billedmængden $\varphi(P(r))$ kan tilskrives et volumen, får vi

$$Vol\left(\tilde{P}\left(\frac{r}{1+\varepsilon}\right)\right) \leq Vol\left(\varphi(P(r))\right) \leq Vol\left(\tilde{P}\left(r(1+\varepsilon)\right)\right)$$

og dermed for volumenforholdet

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^k |\det A| \leq \frac{Vol\left(\varphi(P(r))\right)}{Vol\left(P(r)\right)} \leq (1+\varepsilon)^k |\det A| .$$

Det følger heraf, at

$$\frac{Vol\left(\varphi(P(r))\right)}{Vol\left(P(r)\right)} \longrightarrow |\det A| \quad \text{for} \quad r \to 0 .$$

Den numeriske værdi $|\det A|$ af funktionaldeterminanten $\det A = \det D\varphi(s_0)$ kaldes derfor afbildningens <u>volumenforhold i punktet s_0 .</u>

2.2. Hvis Ξ er sammenhængende, har den kontinuerte funktion $\det D\varphi$ konstant fortegn i Ξ. Vi siger, at φ er <u>orienteringsbevarende</u> eller <u>orienteringsvendende</u>, eftersom funktionaldeterminanten $\det D\varphi$ er positiv eller negativ.

3. Sætningen om det åbne billede

3.1. Sætning. <u>Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben mængde, og lad $f:\Omega \to \mathbb{R}^p$ være en $\mathscr{C}^1$-afbildning. Hvis funktionalmatricen $Df(a)$ i et punkt $a\in\Omega$ har rang p, da vil billedmængden $f(\Omega)$ indeholde en omegn af billedpunktet $f(a)$.</u>

Bevis. Vi skriver $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$. Funktionalmatricen Df har da de p rækker $Df_1, \cdots, Df_p$. Da $\operatorname{rg} Df(a) = p$, kan vi udtage en regulær $(p\times p)$- delmatrix af $Df(a)$, som altså må bestå af p søjler. Ved eventuelt at omordne koordinaterne på $\mathbb{R}^k$ kan vi opnå, at disse p søjler er de p første søjler $D_1 f(a), \cdots, D_p f(a)$. Vi antager altså, at matricen

$$\left(D_1 f(a), \cdots, D_p f(a)\right) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(x_1,\dots,x_p)}(a)$$

er regulær.

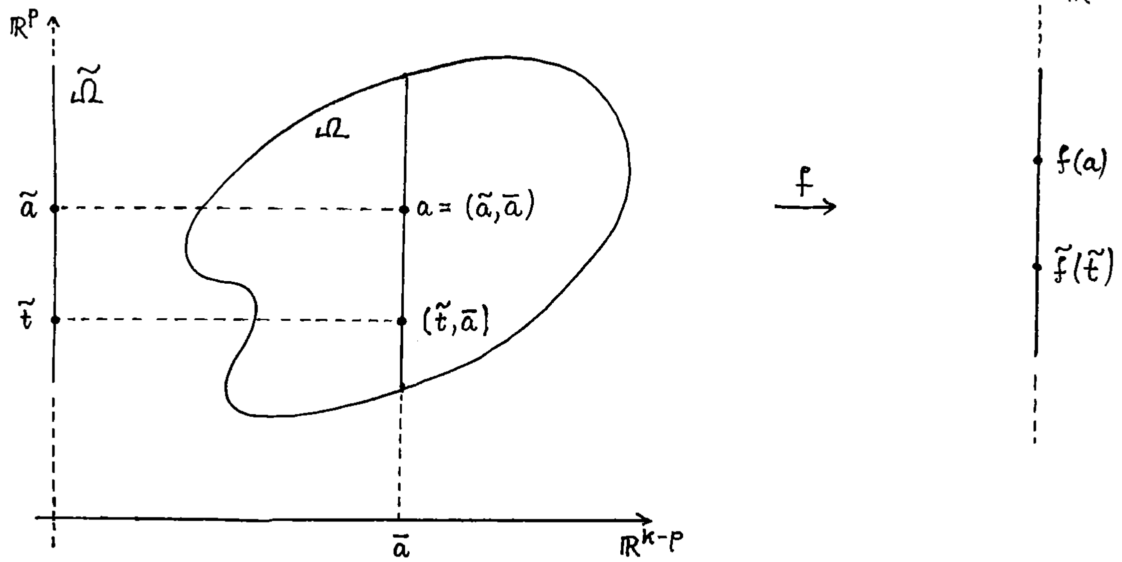
Vi identificerer talrummet $\mathbb{R}^k$ med produktrummet $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{k-p}$. Ethvert punkt $t\in\mathbb{R}^k$ er da af formen $t = (\tilde{t}, \bar{t})$, hvor $\tilde{t}\in\mathbb{R}^p$, $\bar{t}\in\mathbb{R}^{k-p}$. Specielt skriver vi $a = (\tilde{a}, \bar{a})$, hvor $\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_{p+1} \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k-p}$.

Betragt nu mængden

$$\tilde{\Omega} = \{ \tilde{t} \in \mathbb{R}^p \mid (\tilde{t}, \bar{a}) \in \Omega \}.$$

$\tilde{\Omega}$ er da en åben mængde i $\mathbb{R}^p$, vi har $\tilde{a}\in\tilde{\Omega}$, og afbildningen $\tilde{f}: \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^p$ defineret ved $\tilde{f}(\tilde{t}) = f(\tilde{t}, \bar{a})$ er sammensat af afbildningen

f og afbildningen $\tilde{t} \mapsto (\tilde{t}, \bar{a})$ af $\tilde{\Omega} \to \Omega$. Vi har $\tilde{f}(\tilde{a}) = f(a)$, og funktionalmatricen for $\tilde{f}$ i $\tilde{a}$ er $D\tilde{f}(\tilde{a}) = (D_1 f(a), \cdots, D_p f(a))$. Da denne matrix er regulær, vil, ifølge 1.2., billedmængden $\tilde{f}(\tilde{\Omega})$ indeholde en omegn af billedpunktet $\tilde{f}(\tilde{a}) = f(a)$. Da $f(\Omega) \supseteq \tilde{f}(\tilde{\Omega})$, vil også $f(\Omega)$ indeholde en sådan omegn. $\square$



3.2. Korollar. <u>Hvis matricen Df har rang p i ethvert punkt i Ω, er billedmængden $f(\Omega)$ åben i $\mathbb{R}^p$.</u>

EKSTREMUM

1. Minimum og maksimum

Lad F være en delmængde af $\mathbb{R}^k$. En reel funktion $f: F \to \mathbb{R}$ siges at have (globalt) minimum, resp. (globalt) maksimum, i punktet $a \in F$, såfremt $f(t) \geq f(a)$, resp. $f(t) \leq f(a)$, for alle $t \in F$, altså hvis $f(a)$ er mindsteværdi, resp. størsteværdi, for f. Funktionen $f: F \to \mathbb{R}$ siges at have lokalt minimum, resp. lokalt maksimum, i punktet $a \in F$, hvis der findes en omegn af a, således at funktionens restriktion til denne omegn har minimum, resp. maksimum, i a. Dette betyder altså, at der findes et tal $\rho > 0$, så at $f(t) \geq f(a)$, resp. $f(t) \leq f(a)$, for alle $t \in F$, for hvilke $\|t-a\| < \rho$. Som fællesbetegnelse for minimum og maksimum bruges ekstremum.

2. Nødvendig betingelse for lokalt ekstremum. Stationære punkter.

2.1. For en $\mathscr{C}^1$-funktion f på et åbent interval $\mathcal{J}$ gælder som bekendt $f'(a) = 0$ i ethvert ekstremumspunkt $a \in \mathcal{J}$. For funktioner af flere variable har vi følgende

Sætning. Hvis en $\mathscr{C}^1$-funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ har lokalt ekstremum i punktet a, er $df_a = 0$. Anderledes udtrykt:

$$D_1 f(a) = 0, \; \dots, \; D_k f(a) = 0.$$

Bevis. For et tal $j \in \{1, \dots, k\}$ betragtes funktionen $\lambda \mapsto f(a + \lambda e_j)$.

Denne funktion er en $\mathscr{C}^1$-funktion defineret i et åbent interval omkring $0 \in \mathbb{R}$, og den har lokalt ekstremum i 0. Følgelig er dens differentialkvotient 0 i 0, d.v.s. $D_j f(a) = 0$.

Et punkt $a \in \Omega$ med egenskaben $df_a = 0$ kaldes et stationært punkt for funktionen f.

Sætningen udsiger altså, at en nødvendig betingelse for, at funktionen f har lokalt ekstremum i punktet a, er, at a er et stationært punkt for f. At a er stationært punkt for f, er ensbetydende med, at f's graf i $\mathbb{R}^{k+1}$ (med koordinaterne $x_1, \dots, x_k, y$) i punktet $(a, f(a))$ har en tangenthyperplan med ligningen $y = f(a)$ ("vandret" tangenthyperplan).

2.2. Eksempel. For $\Omega = \mathbb{R}^2$ med koordinaterne x, y betragtes funktionerne

$$f_1 = x^2 + y^2, \qquad f_2 = -x^2 - y^2, \qquad f_3 = x^2 - y^2.$$

De har alle 0 som det eneste stationære punkt. Dette punkt er lokalt (endda globalt) minimumspunkt for f_1, lokalt (endda globalt) maksimumspunkt for f_2, men ikke lokalt ekstremumspunkt for f_3.

2.3. Eksempel. Funktionen $f = x^2y + xy^2 + x^2 + xy + 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er $\mathscr{C}^\infty$. Vi søger dens mindste og største værdi på den kompakte mængde $\mathcal{I} = [0,1] \times [-1,1]$. Et punkt $a \in \mathcal{I}$, hvori en af disse to ekstremumsværdier antages, må enten ligge i det indre af $\mathcal{I}$ og altså være lokalt ekstremumspunkt for f eller ligge på randen af $\mathcal{I}$. De stationære punkter for f bestemmes af ligningerne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 + 2x + y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + x = 0,$$

der har løsningerne $\binom{0}{0}$, $\binom{0}{-1}$, $\binom{1}{-1}$, $\binom{1/3}{-2/3}$, af hvilke kun $\binom{1/3}{-2/3}$

ligger i det indre af $\mathcal{J}$. Her finder vi værdien

$$f(1/3, -2/3) = \frac{26}{27}.$$

Vi søger dernæst mindste og største værdi for f på randen af $\mathcal{J}$. Vi finder

$f(x,-1) = 1$,

$f(x,1) = 2x^2+2x+1$, som på $[0,1]$ har mindsteværdien $f(0,1) = 1$ og størsteværdien $f(1,1) = 5$.

$f(0,y) = 1$

$f(1,y) = y^2+2y+2$, som på $[-1,1]$ har mindsteværdien $f(1,-1) = 1$ og størsteværdien $f(1,1) = 5$.

Ved sammenligning af disse funktionsværdier ses, at mindsteværdien af f på $\mathcal{J}$ er $\frac{26}{27}$, og at $\binom{1/3}{-2/3}$ er det eneste punkt i $\mathcal{J}$, hvori denne værdi antages, og at størsteværdien af f i $\mathcal{J}$ er 5, og at $\binom{1}{1}$ er det eneste punkt i $\mathcal{J}$, hvori denne værdi antages.

2.4. Eksempel. Funktionen $f = \log(1+x^2+y^2) - \frac{x^2}{2} - y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er $\mathscr{C}^\infty$. Ved løsning af ligningerne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - x = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} - 2y = 0$$

finder vi de stationære punkter $\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}$, hvori funktionsværdierne er

$$f(0,0) = 0 \qquad f(1,0) = \log 2 - \tfrac{1}{2} \qquad f(-1,0) = \log 2 - \tfrac{1}{2}.$$

Af sædvanlige overvejelser vedrørende funktioner af én variabel ses, at funktionen $f(x,0) = \log(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2$ har lokalt minimum i 0, og at funktionen $f(0,y) = \log(1+y^2) - y^2$ har lokalt maksimum i punktet 0. Følgelig har f hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum i punktet $\binom{0}{0}$.

Da $f \leq \log(1+x^2+y^2) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, og da funktionen $t \mapsto \log(1+t) - \frac{1}{2}t$ går imod $-\infty$ for $t \to +\infty$, ser man, at f må have en størsteværdi.

Denne må antages i et lokalt ekstremumspunkt, og den må altså være $\log 2 - \frac{1}{2}$.

3. Nærmere undersøgelse af stationære punkter. Tilstrækkelige betingelser for lokalt ekstremum

3.1. Hvis en $\mathscr{C}^2$-funktion f på et åbent interval $J \subseteq \mathbb{R}$ har a som stationært punkt, er a lokalt minimumspunkt, hvis $f''(a) > 0$, og lokalt maksimumspunkt, hvis $f''(a) < 0$.

For en $\mathscr{C}^2$-funktion f på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ indføres matricen

$$Hf = \begin{pmatrix} D_1D_1f & \cdots & D_kD_1f \\ \vdots & & \\ D_1D_kf & \cdots & D_kD_kf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} \end{pmatrix}$$

Hf er en matrixfunktion; dens værdi i punktet $a \in \Omega$ er $(k \times k)$-matricen

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(a) & \cdots & D_kD_1f(a) \\ \vdots & & \\ D_1D_kf(a) & \cdots & D_k^2 f(a) \end{pmatrix}$$

Matricen $Hf(a)$ er symmetrisk; den tilhørende kvadratiske form på $\mathbb{R}^k$ er

$$h \mapsto h^T Hf(a) h = \sum_{i,j=1}^{k} D_iD_jf(a)h_ih_j; \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

altså netop differentialet af 2. orden d^2f_a.

3.2. Sætning. <u>For en $\mathscr{C}^2$-funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, der har punktet $a \in \Omega$ som stationært punkt, betragtes den kvadratiske form</u>

$$h \mapsto h^T Hf(a) h = (h_1, \dots, h_k) \begin{pmatrix} D_1^2 f(a) \cdots & D_kD_1f(a) \\ & \\ D_1D_kf(a) \cdots & D_k^2 f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}.$$

<u>Da gælder:</u>

(1) <u>Hvis formen er positiv definit (d.v.s. er >0 for alle $h \neq 0$),</u>

har f lokalt minimum i a.

(2) Hvis formen er negativ definit (d.v.s. er <0 for alle $h \neq 0$), har f lokalt maksimum i a.

(3) Hvis formen antager en positiv, resp. negativ, værdi, har f ikke maksimum, resp. minimum, i punktet a.

Bevis. Ifølge forudsætningen har vi $df_a = 0$. Endvidere er $d^2f_a(h) = h^T H h$, hvor vi for korthedsskyld betegner matricen $Hf(a)$ med H. Taylors grænseformel giver derfor

$$f(a+h) = f(a) + \tfrac{1}{2} h^T H h + \varepsilon(h)\|h\|^2,$$

hvor $\varepsilon(h) \to 0$ for $h \to 0$.

(1) Formen antages positiv definit. Lad c betegne dens infimum på mængden $\{h \in \mathbb{R}^k \mid \|h\| = 1\}$. Da denne mængde er kompakt, og da formen er en kontinuert funktion, der er >0 på mængden, er $c > 0$. For hvert $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi $(\lambda h)^T H (\lambda h) = \lambda^2 h^T H h$, og vi slutter, at der gælder

$$h^T H h \geq c\|h\|^2 \quad \text{for alle} \quad h \in \mathbb{R}^k,$$

og dermed

$$f(a+h) \geq f(a) + \tfrac{c}{2}\|h\|^2 + \varepsilon(h)\|h\|^2.$$

Bestemmes nu en omegn $U = \{t \mid \|t-a\| < \rho\} \subseteq \Omega$, således at $|\varepsilon(h)| \leq \frac{c}{4}$, når $\|h\| < \rho$, har vi

$$f(t) \geq f(a) + \tfrac{c}{4}\|t-a\|^2 \quad \text{for } t \in U.$$

f har altså lokalt minimum i a, og der gælder endda den skarpe ulighed

$$f(t) > f(a) \quad \text{for } t \in U, t \neq a.$$

(2) Formen antages negativ definit. På analog måde som under (1),

eller ved at betragte $-f$ i stedet for f, ses, at f har lokalt maksimum i a. Der findes endda en omegn $U = \{t \mid \|t-a\| < \rho\} \subseteq \Omega$, således at $f(t) < f(a)$ for alle $t \in U, t \neq a$.

(3) Lad $v \in \mathbb{R}^k$ være en vektor, hvori formen antager en positiv værdi c, altså $v^T H v = c > 0$. For numerisk små værdier af λ har vi da $a + \lambda v \in \Omega$ og

$$f(a+\lambda v) = f(a) + \tfrac{1}{2}\lambda^2 c + \varepsilon(\lambda v)\|v\|^2 \lambda^2.$$

For tilstrækkelig små numeriske værdier af $\lambda \neq 0$ har vi derfor $f(a+\lambda v) > f(a)$.

Der sluttes tilsvarende, hvis formen antager en negativ værdi. $\square$

3.3. Eksempel. Funktionen $f = (x_2 - x_1^2)(x_2 - x_1^4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har $\binom{0}{0}$ som stationært punkt. For enhver ret linie gennem $\binom{0}{0}$ har restriktionen af f til linien lokalt minimum i $\binom{0}{0}$. Men f har ikke lokalt minimum i $\binom{0}{0}$.

3.4. Bemærkning. Det karakteristiske polynomium $p_H(t) = \det(H - tE)$ for den symmetriske matrix $H = Hf(a)$ har som bekendt lutter reelle rødder. Vi minder om, at den tilhørende kvadratiske form er positiv definit (resp. negativ definit), hvis og kun hvis alle de karakteristiske rødder er positive (resp. negative). Endvidere antager formen en positiv (resp. negativ) værdi, hvis og kun hvis der findes en positiv (resp. negativ) rod i $p_H(t)$.

3.5. Eksempel. For $k=2$ benyttes ofte betegnelserne $\frac{\partial f}{\partial x_1} = p$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = q$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = t$. Vi ser, at a er stationært punkt, hvis og kun hvis $p=0$, $q=0$. I et sådant punkt betragtes matricen $H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Vi finder $\det H = rt - s^2 =$ produktet af de to karakteristiske rødder, $\mathrm{Tr}\, H = r + t =$ summen af de to karakteristiske rødder. Vi får således

(1) $\det H > 0$, $\mathrm{Tr}\, H > 0$: Lokalt minimum

(2) $\det H > 0$, $\mathrm{Tr}\, H < 0$: Lokalt maksimum

(3) $\det H < 0$, : Ikke lokalt ekstremum.

4. Ekstremum under bibetingelser

4.1. På en mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ tænkes givet p funktioner $f_1, \dots, f_p : \Omega \to \mathbb{R}$. For givne tal $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ betragtes punktmængden

$$F = \{ t \in \Omega \mid f_1(t) = c_1, \dots, f_p(t) = c_p \}$$

Lad $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ være endnu en funktion. Vi siger, at f_0 har <u>lokalt minimum</u>, resp. <u>lokalt maksimum</u>, i et punkt $a \in \Omega$ <u>under bibetingelserne $f_1 = c_1, \dots, f_p = c_p$</u>, hvis $a \in F$, og hvis restriktionen af f_0 til F har lokalt minimum, resp. maksimum, i a. <u>Ekstremum</u> benyttes som fælles betegnelse for maksimum og minimum.

4.2. Vi vil indskrænke os til at udlede en nødvendig betingelse for lokalt ekstremum under bibetingelser:

Sætning. <u>Hvis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er en åben mængde og $f_0, f_1, \dots, f_p$ tilhører $\mathscr{C}^1(\Omega)$, og f_0 har lokalt ekstremum i $a \in \Omega$ under bibetingelserne $f_1 = c_1, \dots, f_p = c_p$, da gælder i a, at</u>

$$\underline{\mathrm{rg}\, \frac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_p)}{\partial (x_1, \dots, x_k)} (a) \leq p.}$$

Hvis $p = 0$ (altså ingen bibetingelser), er $\dfrac{\partial f_0}{\partial (x_1, \dots, x_k)} = \left(\dfrac{\partial f_0}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f_0}{\partial x_k} \right)$, og uligheden er den i sætning 2.1 fundne nødvendige betingelse $d(f_0)_a = 0$.

Bevis. Da matricen har $p+1$ rækker, er dens rang i hvert fald $\leq p+1$. Vi antager nu, at rangen er $p+1$, og vi fører dette til en modstrid.

Betragt en omegn $U = \{t \in \mathbb{R}^k \mid \|t-a\| < \rho\} \subseteq \Omega$. Ved $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ bestemmes da en vektorafbildning $f: U \to \mathbb{R}^{p+1}$, hvis funktionalmatrix Df i punktet a har rang $p+1$. Ifølge sætningen om åbent billede (Omvendt afbildning, 3.1.) vil billedmængden $f(U)$ derfor indeholde en omegn af billedpunktet $f(a) = \begin{pmatrix} f_0(a) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$. Specielt vil der i en sådan omegn findes såvel punkter $\begin{pmatrix} s \\ c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ med $s > f_0(a)$, som punkter $\begin{pmatrix} s \\ c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ med $s < f_0(a)$. I U findes derfor såvel punkter t med $f_0(t) = s > f_0(a)$, $f_1(t) = c_1, \cdots, f_p(t) = c_p$, som punkter t med $f_0(t) = s < f_0(a)$, $f_1(t) = c_1, \cdots, f_p(t) = c_p$.

Vi slutter heraf, at der i enhver omegn af a findes såvel punkter $t \in F$ med $f_0(t) > f_0(a)$ som punkter $t \in F$ med $f_0(t) < f_0(a)$. $\square$

4.3. Eksempel. For vilkårlige $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}_+$ gælder <u>uligheden mellem det geometriske og det aritmetiske middeltal</u>

$$\underline{\sqrt[k]{t_1 \cdots t_k} \leq \frac{t_1 + \cdots + t_k}{k}}$$

Multipliceres tallene $t_1, \cdots, t_k$ med samme tal $\lambda \in \mathbb{R}_+$, multipliceres de to sider i uligheden med λ. Det er således nok at vise uligheden under antagelsen $t_1 + \cdots + t_k = k$; uligheden siger da, at $t_1 \cdots t_k \leq 1$.

Lad $x_1, \cdots, x_k$ være koordinaterne på den åbne mængde

$$\{t \in \mathbb{R}^k \mid t_1 > 0, \cdots, t_k > 0\}.$$

Vi ønsker at undersøge funktionen $f_0 = x_1 \cdots x_k$ på delmængden F givet ved ligningen $f_1 = x_1 + \cdots + x_k = k$. Funktionen f_0 antager en største værdi på denne mængde (dette ses ved at udvide funktionen kontinuert til den større kompakte mængde $\{t \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \geq 0, \ldots, t_k \geq 0, t_1 + \cdots + t_k = k\}$).

Lad $a \in F$ være et punkt, hvori denne størsteværdi antages. Vi har

$$\frac{\partial(f_0, f_1)}{\partial(x_1, \ldots, x_k)} = \begin{pmatrix} x_2 \cdots x_k & \cdots & x_1 \cdots x_{k-1} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

og da a er lokalt ekstrenum for f_0 under bibetingelsen $f_1 = k$, har vi i punktet a

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_2 \cdots a_k & \cdots & a_1 \cdots a_{k-1} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leq 1,$$

hvoraf $a_1 = \cdots = a_k$. Da a skal opfylde bibetingelsen, slutter vi videre, at $a_1 = \cdots = a_k = 1$, og dermed, at størsteværdien er $1 \cdots 1 = 1$.

4.4. Eksempel. Lad x, y være koordinaterne på $\mathbb{R}^2$ og betragt delmængden E bestemt ved uligheden $x^2 + y^2 \leq 1$. Lad f_0 være funktionen $f_0 = x^2 - 2y^2$. Vi ønsker at bestemme billedmængden $f_0(E)$.

Da $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og da E er kompakt og sammenhængende, er $f_0(E)$ et begrænset, afsluttet interval. Lad $a \in E$ være et punkt, hvori en ekstremumsværdi antages. Hvis a er et indre punkt af E, er a stationært punkt for f_0; følgelig gælder i punktet a, at

$$Df_0 = (2x, -4y) = (0,0),$$

hvoraf $a = \binom{0}{0}$. Hvis a er et randpunkt, har f_0 lokalt ekstremum i a under bibetingelsen $x^2 + y^2 = 1$; følgelig gælder i a, at

$$\operatorname{rg} \frac{\partial(f_0, f_1)}{\partial(x, y)} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2x & -4y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \leq 1,$$

altså at $xy = 0$. Da a også skal opfylde bibetingelsen $x^2 + y^2 = 1$, slutter vi, at a må være et af punkterne $\binom{0}{1}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}$. Sammenlignes funktionsværdierne i de 5 punkter, ser vi, at $f_0(E) = [-2,1]$.

5. Lagrange'ske multiplikatorer

Betingelsen $\operatorname{rg} \frac{\partial(f_0,\cdots,f_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)}(a) \leq p$ er ensbetydende med, at matricens $p+1$ rækker er lineært afhængige, altså ensbetydende med, at der findes et talsæt $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at

$$\lambda_0 Df_0(a) + \cdots + \lambda_p Df_p(a) = 0.$$

Dette betyder, at funktionen $f = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_p f_p$ opfylder $Df(a) = 0$, altså at a er stationært punkt for funktionen f. Vi ser således:

<u>Hvis $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ er åben og funktionerne $f_0, f_1, \cdots, f_p$ tilhører $\mathscr{C}^1(\Omega)$ og f_0 har lokalt ekstremum i punktet $a \in \Omega$ under bibetingelserne $f_1 = c_1, \cdots, f_p = c_p$, da findes et talsæt $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at a er stationært punkt for funktionen</u>

$$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p.$$

Hjælpestørrelserne $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ kaldes <u>Lagrange'ske multiplikatorer</u>.

1.** Angiv en funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, der er kontinuert, differentiabel i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ og retningsdifferentiabel i enhvert retning v i punktet 0 med den afledede $D_v g(0) = 0$, men som ikke er differentiabel i punktet 0.

2. Svarende til en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ defineres Laplace operatoren $\Delta = \Delta_\Omega : \mathscr{C}^2(\Omega) \to \mathscr{C}^0(\Omega)$ ved

$$\Delta f = D_1^2 f + \cdots + D_k^2 f.$$

Hvis $x_1, \ldots, x_k$ er koordinaterne på Ω, skrives også

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Vis, at Laplace operatoren Δ er invariant overfor ortogonalt koordinatskrift. Hermed menes: Hvis $A \in \Theta(k, \mathbb{R})$ er en ortogonal matrix og $\beta \in \mathbb{R}^k$ er en vektor, og hvis den ortogonale transformation

$$\varphi : t \to At + \beta, \quad t \in \Omega$$

afbilder Ω på den åbne mængde $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^k$, da gælder for enhver funktion $g \in \mathscr{C}^2(\tilde{\Omega})$, at

$$(\Delta_{\tilde{\Omega}} g) \circ \varphi = \Delta_\Omega (g \circ \varphi).$$

3. En afbildning $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^t$ kaldes <u>bilineær</u>, hvis 1^0) For hver vektor $u \in \mathbb{R}^p$ er $v \mapsto B(u,v)$ en lineær afbildning : $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^t$ og 2^0) For hver vektor $v \in \mathbb{R}^q$ er $u \mapsto B(u,v)$ en lineær afbildning : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^t$.

Produktmængden $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ identificeres med talrummet

$\mathbb{R}^{p+q}$. Vis, at vektorafbildningen $B: \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^{\ell}$ er differentiabel, og at differentialet i punktet $(a,b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ er bestemt ved

$$dB_{(a,b)}(h,k) = B(a,k) + B(h,b), \quad h \in \mathbb{R}^p, \; k \in \mathbb{R}^q.$$

4. Lad $J \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og lad f og $g: J \to \mathbb{R}^3$ være differentiable afbildninger. Med $f \times g: J \to \mathbb{R}^3$ betegnes afbildningen $t \longmapsto f(t) \times g(t)$ (vektorproduktet af vektorerne $f(t), g(t) \in \mathbb{R}^3$). Vis, at $f \times g$ er differentiabel, og at $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

5. Lad a være et punkt i den åbne mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, og lad $f: \Omega \to \mathbb{R}^{\ell}$ være en vektorafbildning. Vis, at hvis f er kontinuert i a og differentiabel i $\Omega \setminus \{a\}$, og hvis funktionalmatricen $Df(t)$ har en grænseværdi for $t \to a$, da er f også differentiabel i a med funktionalmatricen bestemt ved $Df(a) = \lim_{t \to a} Df(t)$.

6. En afbildning $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ kaldes et <u>polynomium</u>, hvis den har formen

$$g(h) = \sum_p c_p h^p, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Der summeres over alle multiindices $p = (p_1, \cdots, p_k)$, og det forudsættes, at kun endelig mange af koefficienterne c_p er forskellige fra 0, således at summen er endelig. Vi skriver også $g = \sum_p c_p X^p$. Polynomiet g har grad $\leq n$, hvis $c_p = 0$ for alle p med $|p| > n$. Vis, at hvis polynomiet g har kontakt i 0 af orden n med funktionen 0, da gælder $c_p = 0$ for alle p med $|p| \leq n$. Slut heraf: Hvis en $\mathscr{C}^n$-funktion f i punktet $a \in \mathbb{R}^k$ har kontakt af orden n med polynomiet $\sum_p c_p (x-a)^p$, så er $c_p = \frac{1}{p!} D^p f(a)$ for $|p| \leq n$.

7. For multiindices $q = (q_1, \cdots, q_k)$, $r = (r_1, \cdots, r_k)$ sætter vi $q + r = (q_1 + r_1, \cdots, q_k + r_k)$. Vis, at der for $\mathscr{C}^n$-funktioner f, g på en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ gælder

$$D^p(fg) = \sum_{q+r=p} \frac{p!}{q!\,r!} D^q f \, D^r g,$$

for alle multiindices $p = (p_1, \cdots, p_k)$ med $|p| \leq n$.
[Vink: brug induktion, eller opgave 6.]

8. Lad $f_1, \cdots, f_\ell$ være differentiable vektorafbildninger $: J \to \mathbb{R}^\ell$, hvor J er et interval. Med $(f_1, \cdots, f_\ell)$ betegnes den (kvadratiske) matrixfunktion, hvis søjler er vektorafbildningerne $f_1, \cdots, f_\ell$.

Vis, at funktionen $\det(f_1, \cdots, f_\ell) : J \to \mathbb{R}$ er differentiabel, og at

$$[\det(f_1, \cdots, f_\ell)]' = \sum_{i=1}^{\ell} \det(f_1, \cdots, f_i', \cdots, f_\ell).$$

8. Vis, at den ved

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t_1^3}{t_1^2+t_2^2} & \text{for} \quad t = \binom{t_1}{t_2} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{for} \quad t = \binom{0}{0} \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og at den er partielt differentiabel i ethvert punkt af $\mathbb{R}^2$. Vis, at f ikke er differentiabel i $\binom{0}{0}$.

9. Kontroller ved udregning af $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, at ligningen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ er opfyldt for funktionen

$$f = x^2 y \exp(x+2y)$$

(x, y er koordinaterne på $\mathbb{R}^2$).

10. Vis, at den ved

$$f(t) = \begin{cases} t_1 t_2 \dfrac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2+t_2^2} & \text{for} \quad t = \binom{t_1}{t_2} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{for} \quad t = \binom{0}{0} \end{cases}$$

definerede funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en $\mathscr{C}^1$-funktion, og at dens partielle afledede $D_1 f$ og $D_2 f$ er partielt differentiable i ethvert punkt af $\mathbb{R}^2$. Vis, at

$$D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0).$$

11. Find den afledede af funktionen

$$F(s) = \int_{s^2}^{s} \frac{\sin(\tau s)}{\tau} \, d\tau, \qquad s > 0.$$

12. Betragt et $\varepsilon > 0$. Vis, at funktionen $f_\varepsilon: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{t^2}{t^2 - \varepsilon^2}\right) & \text{for} \quad |t| < \varepsilon \\ 0 & \text{for} \quad |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

opfylder $f_\varepsilon(0) = 1$, $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$.

Vis, at f_ε er en $\mathscr{C}^\infty$-funktion. [Vink: brug opgave 5]

13. Lad U være en omegn af et punkt $a \in \mathbb{R}^k$. Vis, at der findes en $\mathscr{C}^\infty$-funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, så at $f(a) = 1$, $0 \leq f \leq 1$ og $f(t) = 0$ for alle $t \notin U$.

14.* Lad $F \subseteq \mathbb{R}^k$ være en afsluttet mængde. Vis, at der findes en $\mathscr{C}^\infty$-funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, således at

$$F = \{ t \in \mathbb{R}^k \mid f(t) = 0 \}.$$

15. Idet x, y er koordinaterne på $\mathbb{R}^2$, sætter vi

$$f = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Vis, at der for $c \neq 0, -1$ gælder, at niveaukurven med ligningen $f = c$ er glat. Kurven med ligningen $f = 0$ er Descartes' blad, jfr. Mat. 1 y, 1969-70 § 34. Vis, at niveaukurven med ligningen $f = -1$ består af asymtoten (med ligningen $x + y = -1$) til Descartes' blad samt punktet $\binom{1}{1}$. For hvilke punkter $t \in \mathbb{R}^2$ gælder, at niveaukurven gennem t har lodret, resp. vandret, tangent? Forsøg at skitsere nogle niveaukurver for f.

16. Vis, at ligningen

$$2\exp(x_1 + x_2 + y) - \sin(x_1 + 2x_2 + y) + x_1^2 + 3x_2^2 - 2 = 0$$

i en omegn af $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestemmer y implicit som funktion af x_1, x_2, og at denne funktion er $\mathscr{C}^\infty$. Beregn koefficienterne i Taylors grænseformel for denne funktion i punktet $\binom{0}{0}$, idet leddene af 2. grad medtages.

17. Lad x, y, z være koordinaterne på $\mathbb{R}^3$, lad $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være vektorafbildningerne

$$f = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ z - x^3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ z^2 - y^3 \end{pmatrix},$$

og lad F, G være punktmængderne med ligningerne $f = 0$, $g = 0$. Er F glat? I hvilke punkter er G glat? (Forsøg at tegne!)

18. I $\mathbb{R}^2$ med koordinaterne x_1, x_2 betragtes funktionen $f = x_2^2$ og mængden F med ligningen $f = 0$. Har funktionalmatricen Df konstant rang i nogen omegn af $\binom{0}{0}$? Er F glat?

19. Skitser gradientfeltet for funktionen $x_1 x_2$.

20. Polære koordinater i rummet. I $\mathbb{R}^3$ benyttes koordinaterne r, φ, θ. Ved

$$\begin{pmatrix} r \sin\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$$

defineres da en afbildning: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Bestem denne afbildnings funktionalmatrix og diskuter afbildningen (tegn!)

21. I $\mathbb{R}^2$ benyttes x, y som koordinater. For et punkt $t \in \mathbb{R}^2$ betegnes med $d_+(t)$ afstanden fra t til punktet $\binom{1}{0}$ og med $d_-(t)$ afstanden fra t til punktet $\binom{-1}{0}$. d_+ og d_- er afbildninger: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_+ = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \qquad d_- = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Bestem niveaukurverne for funktionerne $\varphi = \frac{1}{2}(d_- - d_+)$ og $\psi = \frac{1}{2}(d_- + d_+)$. I endnu et eksemplar af $\mathbb{R}^2$ benyttes koordinaterne ξ, η. Gør rede for, at vektorafbildningen $\binom{\varphi}{\psi}$ afbilder mængden bestemt ved uligheden $y > 0$ bijektivt på mængden bestemt ved ulighederne $-1 < \xi < 1$, $1 < \eta < \infty$. Vis, at matricen $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$ har ortogonale rækker, og slut heraf, at den inverse matrix $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$ har ortogonale søjler, altså at vektorerne $\frac{\partial(x,y)}{\partial\xi}$ og $\frac{\partial(x,y)}{\partial\eta}$ er ortogonale. Hvad betyder dette geometrisk?

[Vink: undgå at skrive for mange kvadratrodstegn. Udnyt f.eks., at $\frac{\partial}{\partial x}d_+ = \frac{x-1}{d_+}$ o.s.v.]

22. Find minimum og maksimum for funktionen

$$f = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

på intervallet $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

23. Find (globalt) minimum og maksimum for funktionen

$$f = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

24. Lad $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ være en affin transformation givet ved

$$\varphi : t \longmapsto At+\beta\ , \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

hvor A er en regulær $(k\times k)$-matrix og $\beta \in \mathbb{R}^k$. Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ være en åben mængde med billedet $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$.

Vis, at der for en $\mathscr{C}^2$-funktion f på $\tilde{\Omega}$ gælder

$$H(f\circ\varphi) = A^T\left[H(f)\circ\varphi\right]A.$$

Slut heraf, at Laplace operatoren $\Delta(f) = \operatorname{Tr} H(f)$ er invariant over for ortogonalt koordinatskift.

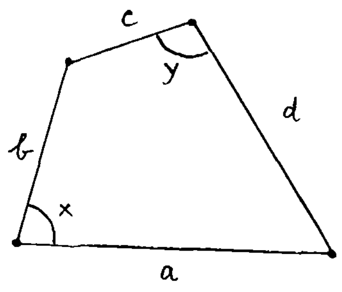
25. Undersøg, om funktionen

$$f = \exp(x^2+y^2-z^2) + 2\cos(y-z) + 2(x+z)^2$$

har lokalt ekstremum i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

26. En konveks firkant med siderne a, b, c, d antages forsynet med hængsler i vinkelspidserne. Den antages i en stilling med maksi-

malt areal. Vis, at den er indskrivelig.



[Vink: Som funktion af vinklerne x,y er arealet A givet ved formlen

$$2A = ab\sin x + cd\sin y.$$

Vis, at der mellem x og y gælder

$$ab\cos x - cd\cos y = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)\ ]$$

27. I planen betragtes en afsluttet trekantskive $A_1A_2A_3$. Højderne fra A_1,A_2,A_3 betegnes h_1,h_2,h_3, og for et vilkårligt punkt P af trekantskiven betegnes med x_1,x_2,x_3 afstandene til linierne A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Vis, at der gælder

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$

Vis herved, at produktet $x_1x_2x_3$ er størst, når P er medianernes skæringspunkt.

28. For et egentligt eller udartet retvinklet parallelepipedum med kantlængder $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ betragtes

overfladen $S = 2yz + 2xz + 2xy$

volumenet $V = xyz$

Hvilke værdier kan V antage for givet $S > 0$?

29. For givne ikke negative tal $t_1,\cdots,t_k$ og givne vægte $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ (positive tal med sum 1) kaldes

$$G = t_1^{\alpha_1}\cdots t_k^{\alpha_k} \qquad A = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_k t_k$$

henholdsvis det geometriske og det aritmetiske middeltal af $t_1,\cdots,t_k$ med vægtene $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$. Bevis, at der gælder uligheden

$$G \leq A,$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $t_1, \cdots, t_k$ er lige store.

[Vink: For givne vægte og givet $A_0 \geq 0$ søges globalt maksimum af G under bibetingelsen $A = A_0$.]

30.* For givne positive tal $t_1, \cdots, t_k$ og givne vægte $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ (positive tal med sum 1) kaldes for et vilkårligt $p \in \mathbb{R}$

$$M_p = \begin{cases} (\alpha_1 t_1^p + \cdots + \alpha_k t_k^p)^{1/p} & \text{for } p \neq 0 \\ t_1^{\alpha_1} \cdots t_k^{\alpha_k} & \text{for } p = 0 \end{cases}$$

den p-te potensmiddelværdi af $t_1, \cdots, t_k$ med vægtene $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$. Bevis, at der for $p < q$ gælder uligheden

$$M_p \leq M_q$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $t_1, \cdots, t_k$ er lige store. Vis endvidere, at M_p er en kontinert funktion af p, og at

$$\lim_{p \to +\infty} M_p = \max\{t_1, \cdots, t_k\}, \qquad \lim_{p \to -\infty} M_p = \min\{t_1, \cdots, t_k\}.$$

[Vink: Ved beviset for, at M_p er kontinuert i punktet $p=0$, benyttes for $p \neq 0$ omskrivningen

$$\log M_p = \frac{1}{p} \log\left(1 + \alpha_1 (t_1^p - 1) + \cdots + \alpha_k (t_k^p - 1)\right).$$

31. Halvrummet $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z > 0 \right\}$ tænkes udfyldt af et medium med brydningsforholdet ν og halvrummet $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z < 0 \right\}$ med et medium med brydningsforholdet μ. Der er givet to punkter $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$, hvor a, h, b er positive tal. Vis Fermats princip, at blandt alle tænkte lysstråler APB, hvor $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, har den ved

brydningsloven bestemte den egenskab, at lyset når hurtigst fra A til B. (Lyshastigheden i et medium med brydningsforholdet ν er $\frac{c}{\nu}$, hvor c er hastigheden i det tomme rum.)

32.* Lad $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ betegne et sæt af ikke negative tal med sum 1. Vi definerer entropien af p ved

$$H(p) = - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \log p_\nu ,$$

hvor funktionen $x \log x$ er defineret ved kontinuitet for $x=0$, d.v.s. $0 \log 0 = 0$. Denne størrelse kan man opfatte som et mål for den usikkerhed, der hersker om udfaldet af et forsøg med n mulige udfald, hvor det ν-te udfald har sandsynligheden p_ν. Bevis, at

$$H(p) \leq H(\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n}) = \log n ,$$

altså at usikkerheden er størst, når de mulige udfald er lige sandsynlige.

[Vink: (1) Vis, at H har et globalt maksimum i $A = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p_1 \geq 0, \cdots, p_n \geq 0, \sum p_\nu = 1\}$. (2) Vis gyldigheden for $n=1$. (3) Vis under antagelse af gyldigheden for $n-1$, at det globale maksimum må antages i $A \cap \{p \mid p_1 > 0, \cdots, p_n > 0\}$, og anvend sætningen om ekstremum under bibetingelser.]

33. Bevis Hadamards determinantvurdering

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \right| \leq \sqrt{a_{11}^2 + \cdots + a_{k1}^2} \cdots \sqrt{a_{1k}^2 + \cdots + a_{kk}^2} ,$$

og afgør, hvornår lighedstegnet gælder.

[Vink: Søg globalt minimum og globalt maksimum af determinanten (opfattet som funktion af de k^2 variable a_{ij}) under bibetingelserne $a_{11}^2 + \cdots + a_{k1}^2 = c_1, \cdots, a_{1k}^2 + \cdots + a_{kk}^2 = c_k$.]

SUPPLERENDE OPGAVER OM DIFFERENTIABLE FUNKTIONER

16/2 2/3 Opgave 1. Vis, at den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} ,$$ §1

definerede afbildning af $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiabel og find differentialet i $(0,0)$.

16/2 Opgave 2. Find differentialet af funktionen $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$. §1

2/3 Opgave 3. Vis, at den ved

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ (x^2)^{1+y^2} \sin\frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \end{cases}$$ §2

definerede afbildning er differentiabel, men en af de partielle afledede er ikke kontinuert i $(0,0)$.

2/3 Opgave 4. Lad $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < 1\}$, og definer $f(x_1,x_2) = \sqrt{1-x_1^2} + x_1^2 + 2x_2^2$. Vis, at f er differentiabel i Θ . §1-2

2/3 Opgave 5. Find $f'(x)$ af den reelle funktion $x^{(x^x)}$ (se opgave 2). §4

Opgave 6. Vis, at $f(x,y) = \log\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ som funktion: $\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to R$ opfyldes $D_1^2 f + D_2^2 f = 0$. § 3

EKSTRA OPGAVER VEDR. "OMVENDT AFBILDNING"

A.

$$f: = \begin{pmatrix} x_1^2 + \tfrac{1}{2} x_2^2 - 2x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 .$$

1) Find mængden af punkter $a \in \mathbb{R}^2$ med den egenskab, at der findes åbne omegne W og U (i $\mathbb{R}^2$) af hhv. a og $f(a)$, således at f afbilder W bijektiv på U med en C^1-afbildning som invers: $U \to W$. Angiv funktionalmatricen for denne inverse afbildning.

2) Find samtlige lokale ekstremumspunkter for funktionen $f_1 = x_1^2 + \tfrac{1}{2} x_2^2 - 2x_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ under bibetinglesen
$f_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$.

B. $\Omega: = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha > 0 \text{ eller } \beta \neq 0\}$.

For $(\alpha,\beta) \in \Omega$ betegner $\mathrm{Arg}(\alpha,\beta)$ hovedargumentet for (α,β), sml. side 2.7 i pakke 101 Æ.

Begrund, at $\mathrm{Arg}: \Omega \to \mathbb{R}$ er en C^∞-funktion (sml. f.eks. "Omvendt afbildning" side 4).

Angiv funktionalmatricen $D\,\mathrm{Arg}$, og find de partielle afledede af anden orden (altså matricen $H\,\mathrm{Arg}$).

Vis, at funktionen $g: = \mathrm{Arg} + \tfrac{1}{2} x^2 + y^2 - x - y : \Omega \to \mathbb{R}$ har lokalt minimum i $(1,0)$.

Begrund, at g ikke har lokalt maksimum i noget punkt.