Mogens [illegible] La...

# Komplekse analyser

Forelæsninger i efteråret 1967 og foråret 1968

af H. Rischel

Indledende forkegnelse:


Kap 1 Indledende bemærkninger om holomorfe funktioner af flere variable — Side 1

Kap 2 Lokal teori for holomorfe funktioner, analytiske mængder, meromorfe funktioner — Side 27

Kap 3 Cousin's første problem og de indvendige Cauchy-Riemann ligninger — Side 84

Kap 4 Samtidig analytisk fortsættelse, holomorfekonveksitet — Side 111

Kap 5 Den Grassmann'ske algebra. Differentialformer. Poincaré's lemma. Dolbeault's lemma — Side 141

Kap 6 Hovedsætninger i polynomkonvekse, åbne delmængder af $\mathbb{C}^n$ — Side 186

Kap 7 Knipper, cohomologi — Side 202

Kap 8 Fine resolutioner, Leray's sætning, cohomologi på afsluttede undermængder — Side 247

Kap 9 Analytiske knipper, Oka's sætning, kohærens — Side 279

## Kapitel 1. Indledende bemærkninger om holomorfe funktioner af flere variable.

Lad f betegne en kompleks funktion af den komplekse variabel $z = x + iy$, hvor x og y er reelle, defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ = komplekse tal . Hvis f er $C^1$ i U, altså hvis f er kontinuert og hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer og er kontinuerte, har f et differential givet ved

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Hermed menes som bekendt, at der for hvert $z \in U$ gælder $f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(z) \cdot \Delta y + |\Delta z|\,\varepsilon(\Delta z)$ hvor $|\varepsilon(\Delta z)| \to 0$ for $\Delta z \to 0$ . For koordinatfunktionen z og dennes konjugerede $\bar{z}$ har vi specielt

$$dz = dx + i dy, \qquad d\bar{z} = dx - i dy .$$

Indsættes dette i formlen (1) får vi

$$(2) \qquad df = \partial f + \bar{\partial} f$$

hvor $\partial f$ og $\bar{\partial} f$ er defineret ved

$$(3) \qquad \begin{aligned} \partial f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz \\ \bar{\partial} f &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z} . \end{aligned}$$

Indfører vi yderligere symbolerne $\frac{\partial}{\partial z}$ og $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , som jo på forhånd ikke har nogen mening og derfor står til fri rådighed, ved

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

har vi altså

$$(5) \quad df = \partial f + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

Denne formel ligner (1) - der er dog den væsentlige forskel at z og $\bar{z}$ ikke kan opfattes som 2 uafhængige variable. I det følgende vil vi imidlertid se, at vi hermed har fået en bekvem symbolik.

Funktionen f (se ovenfor) kaldes som bekendt <u>holomorf</u>, hvis dens differential er lineært i $dz$ – her menes kompleks lineært . Dette kommer øjensynligt ud på, at

$$(6) \quad \bar{\partial} f = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

Ligningen (6) er - naturligvis - Cauchy - Riemann's differentialligninger på komprimeret form. Skriver vi f = u + iv har vi nemlig

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) + i \frac{\partial}{\partial y} (u + iv) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ,$$

altså (6) er ensbetydende med

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Videre ser vi f.eks. af (5), at for en holomorf funktion f er den komplekse differentialkvotient $\frac{df}{dz}$ identisk med $\frac{\partial f}{\partial z}$ som defineret ved (4). Operatoren $\frac{\partial}{\partial z}$ er altså en udvidelse til ikke-holomorfe funtioner af den komplekse differentiation $\frac{d}{dz}$.

Med $\mathbb{C}^n$ betegnes mængden af ordnede sæt $z = (z_1, \ldots, z_n)$ af n komplekse tal. Ved $z_k = x_k + iy_k$ $k = 1, \ldots, n$ fås en naturlig identifikation af $\mathbb{C}^n$ med $\mathbb{R}^{2n}$. Vi tænker os $\mathbb{C}^n$ forsynet med den til den sædvanlige topologi af $\mathbb{R}^{2n}$ svarende topologi. Som en generalisation af (4) indføres differentialoperatorer $\frac{\partial}{\partial z_k}$ og $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ ved

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

For en kompleks funktion $f$, der er $C^1$ på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ [altså $f$ kontinuert $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ og $\frac{\partial f}{\partial y_k}$, $k=1,\dots,n$ eksisterer og er kontinuerte i $U$] har vi da i lighed med (2):

$$(9)\qquad df = \partial f + \bar{\partial} f \text{, hvor}$$
$$\partial f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \text{, } \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

Vi kan nu definere: En kompleks funktion $f$, defineret på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ kaldes holomorf i $U$, hvis $f$ er $C^1$ i $U$ og hvis $\bar{\partial} f = 0$ i ethvert punkt af $U$. Sagt med andre ord: $f$ er $C^1$ i $U$ og holomorf i hver variabel, når de øvrige fastholdes.
De afledede $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ som defineret ved (8) er åbenbart de komplekse partielt afledede af den holomorfe funktion, altså den komplekse differentialkvotient

$$\frac{d}{dz} f(z_1,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)\Big]_{z=z_k}$$

Vi lader $\mathcal{H}(U)$ betegne mængden af holomorfe funktioner, definerede på $U$. Da er $\mathcal{H}(U)$ en ring med den sædvanlige addition og multiplikation af funktioner og $\mathcal{H}(U)$ indeholder de konstante funktioner, hvorved den bliver en algebra over $\mathbb{C}$. Denne påstand følger af, at $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ opfylder de sædvanlige differentiationsregler for sum og produkt, hvilket let ses af definitionen (8).

Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben. En afbildning $F: U \to \mathbb{C}^m$, som er beskrevet ved et funktionssystem

$$(10)\qquad \begin{aligned} w_1 &= f_1(z_1, \dots, z_n) \\ &\cdots \\ w_m &= f_m(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

hvor $(z_1, \dots, z_n)$ og $(w_1, \dots, w_m)$ er koordinater i henholdsvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ og $\mathbb{C}^m$, kaldes en <u>holomorf afbildning</u>, hvis $f_1, \dots, f_m$ er holomorfe i $U$. Splitter vi op i real- og imaginærdel $z_k = x_k + iy_k$, $w_k = u_k + iv_k$, har vi blot $F$ er $C^1$ (d.v.s. $f_1, \dots, f_m$ er $C^1$ i $U$) den sædvanlige kæderegel

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial u_p}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial u_p} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial v_p}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial v_p} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} &= \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial u_p}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial u_p} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial v_p}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial v_p} \end{aligned}$$

Heraf fås ved lidt regning under brug af (8), at

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &= \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial w_p}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w_p} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_p} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &= \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial w_p} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_p} \end{aligned}$$

Hvis afbildningen $F$ er holomorf har vi

$$\frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_k} = 0.$$

Idet man ved fra (8) let ser, at

$$\frac{\partial \bar{w}_p}{\partial z_k} = \overline{\left(\frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}_k}\right)} \quad \text{og} \quad \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial \bar{z}_k} = \overline{\left(\frac{\partial w_p}{\partial z_k}\right)}$$

har vi hermed

for en holomorf afbildning

$$(12') \qquad \frac{\partial}{\partial z_k} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial w_p}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial w_p}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{p=1}^{m} \overline{\left(\frac{\partial w_p}{\partial z_k}\right)} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_p}$$

For hvert $z=(z_1,\dots,z_n)\in U$ giver den komplekse Jacobi-matriks $(\partial w_p/\partial z_k)$ en lineær afbildning $dF: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, som kaldes (det komplekse) differential af $F$. Hvis $f$ er en $C^1$ funktion på åben $V\subseteq\mathbb{C}^m$, er $f\circ F$ $C^1$ på $F^{-1}(V)$ og (12') medsiger, at

$$(13) \qquad \partial(f\circ F) = \partial f \circ dF \;,\quad \bar{\partial}(f\circ F) = \bar{\partial} f \circ \overline{dF}$$

Heraf følger, at hvis $f$ er holomorf, da er også $f\circ F$ holomorf og for den partielle komplekse differentiation gælder den sædvanlige kæderegel.

For et punkt $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ og et sæt $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ af positive reelle tal defineres den åbne polycylinder med centrum $a$ og polyradius $\rho$ som

$$P(a;\rho) = \{ z\in\mathbb{C}^n \mid |z_k-a_k|<\rho_k,\ k=1,\dots,n\}$$

Afslutningen

$$\bar{P}(a;\rho) = \{ z\in\mathbb{C}^n \mid |z_k-a_k|\leqq\rho_k,\ k=1,\dots,n\}$$

kaldes den afsluttede polycylinder med centrum $a$ og polyradius $\rho$. (Hvis $\rho=(\rho,\dots,\rho)$ [grov misbrug af betegnelsen] kaldes $P(a,\rho)=P(a;(\rho,\dots,\rho))$ den ligesidede polycyl. m. centr. $a$ og radius $\rho$). Randen af $P(a;\rho)$ er åbenbart

$$\bar{P}(a;\rho)\setminus P(a;\rho) = \bigcup_{k=1}^{n} \{ z \mid |z_k-a_k|=\rho_k,\ |z_p-a_p|\leqq\rho_p, p\neq k\}$$

Delmængden

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k - a_k| = \rho_k \text{ for } k = 1, \ldots, n\}$$

af randen kaldes polycylinderens kant.

Vi noterer i forbifarten følgende:
Hvis $K \subseteq P(a;\rho)$ er kompakt, da findes $r = (r_1, \ldots, r_n)$ med $r_k < \rho_k$, så $K \subseteq P(a;r)$. Dette følger, af at $|z_k - a_k|$ har en størst-værdi $\tau_k < \rho_k$ på $K$ og vi vælger så $\tau_k < r_k < \rho_k$.
Hvis $\overline{P}(a;\rho) \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ åben, da findes $r = (r_1, \ldots, r_n)$ med $\rho_k < r_k$, så $P(a;r) \subseteq \mathcal{V}$. Hvis $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$ er dette klart ellers bemærkes, at $|z_k - a_k|$ har mindsteværdi $r_k > \rho_k$ på $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{V}$.

Cauchy's integralformel: Lad $f$ være en holomorf funktion på en åben omegn af den afsluttede polycylinder $\overline{P}(a;\rho) \subseteq \mathbb{C}^n$. Da gælder

$$(14)\quad f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = \rho_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n| = \rho_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_n \cdots d\zeta_1$$

for ethvert $z = (z_1, \ldots, z_n) \in P(a;\rho)$.

Bevis: Vi har $f$ holomorf for $|z_k - a_k| < \tau_k$, hvor $\tau_k > \rho_k$, $k = 1, \ldots, n$. For faste $z_2, \ldots, z_n$ med $|z_k - a_k| < \tau_k$ har vi derfor

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - z_1| = \rho_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} \, d\zeta_1$$

for $|z_1 - a_1| < \rho_1$. Vi anvender nu den sædvanlige

integralformel for fast $\zeta_1$, $|\zeta_1 - a_1| = \rho_1$, $z_1$, $|z_1 - a_1| < \rho_1$ faste $z_3, \ldots, z_n$, $|z_k - a_k| < r_k$ og får

$$\frac{f(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - z_2| = \rho_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \ldots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \, d\zeta_2$$

for $|z_2 - a_2| < \rho_2$. Ved gentagelse af denne procedure fås formlen.

Q.E.D.

Vi kan direkte finde $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ ved differentiation under integraltegnet i integralformlen og ser heraf, at den er $C^1$ i $P(a;\rho)$. Den er endda en holomorf funktion. Af ombytteligheden af de "reelle" partielle differentiationer, som gælder i den givne situation, fås nemlig

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} \frac{\partial}{\partial z_k} f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_p} + i \frac{\partial}{\partial y_p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right) f$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_p}\right) f = \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} f = 0$$

Hermed er bevist:

<u>Hvis $f$ er en holomorf funktion på $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ åben, da er $f$ $C^\infty$ i $\mathcal{U}$</u> (d.v.s. vilk. ofte kont. diff. m.h.t. $x_k$ og $y_k$) <u>og enhver komplekst partiel afledet</u>

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} f$$

<u>er holomorf i $\mathcal{U}$.</u>

Beviset går successivt op gennem de afledede, idet vi benytter, at ethvert punkt $a \in \mathcal{U}$ ligger i en polycylinder $\overline{P}(a;\rho) \subseteq \mathcal{U}$.

Udføres differentiationen under integraltegnet og

indsættelse af $z=a$, fås

$$(15)\quad \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a) = \frac{\nu_1!\cdots\nu_n!}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1-a_1)^{\nu_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{\nu_n+1}}\,d\zeta_n\cdots d\zeta_1$$

Vi kan her benytte den sædvanlige vurdering $|\int| \leq \int|\,|$, og idet $|\zeta_k - a_k| = \rho_k$ og da integrationsvejenes længder er $2\pi\rho_k$, fås vi

Cauchy's uligheder: Hvis $f$ er holomorf på en åben omegn af den afsluttede polycylinder $\overline{P}(a,\rho) \subseteq \mathbb{C}^n$, gælder der

$$(16)\quad \left|\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a)\right| \leq \frac{\nu_1!\cdots\nu_n!}{\rho_1^{\nu_1}\cdots\rho_n^{\nu_n}}\,M,$$

hvor $M = \max\{|f(z)| \text{ på } \{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_k-a_k| = \rho_k,\ k=1,\ldots,n\}\}$, d.v.s. $M = \max|f(z)|$ på kanten af $P(a;\rho)$.

Af hensyn til det følgende (om potensrækker) behøver vi en snært om multiple rækker. Vi gør det så kortfattet (og kort) som muligt. En opstilling af leddene i en multipel række $\sum A_{\nu_1\ldots\nu_n}$ som en følge, hvorved vi får en sædvanlig række, kaldes en summationsrækkefølge. En multipel række kaldes konvergent, hvis der findes en summationsrækkefølge, hvori den fremkomne sædvanlige række er konvergent. Summen af størrelserne kaldes da en sum for den multiple række. En konvergent multipel række har begrænsede led d.v.s. $|A_{\nu_1\ldots\nu_n}| \leq M$ for alle $(\nu_1\ldots\nu_n)$. En multipel række kaldes absolut konvergent, hvis den multiple

rælde $\sum |A_{\nu_1 \ldots \nu_n}|$ er konvergent. Rælden er da ubetinget konvergent med en bestemt sum, idet et skift i summationsrækkefølge modsvares af en omordning af leddene i de tilsvarende sædvanlige rælder. En multipel rælde $\sum A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(t)$ med variable led (derfor parameter $t$) kaldes normalt konvergent, hvis den har en konvergent majorantrælde d.v.s. en multipel konvergent rælde $\sum M_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ hvor $M_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ er pos. reel konstant, og $M_{\nu_1 \ldots \nu_n} \geq |A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(t)|$ for ethvert $(\nu_1 \ldots \nu_n)$ og ethvert $t$. Det sædvanlige majorantkriterium giver åbenbart, at en normalt konvergent multipel rælde er absolut konvergent for hver værdi af $t$ og ligelig konvergent i hvilken som helst summationsrækkefølge.

Vi betragter nu den multiple kvotientrælde

$$(17) \qquad \sum_{\nu_1=0,\ldots,\nu_n=0}^{\infty,\ldots,\infty} \alpha_1^{\nu_1} \cdots \alpha_n^{\nu_n}$$

Vi har åbenbart

$$\sum_{\nu_1=0,\ldots,\nu_n=0}^{N,\ldots,N} \alpha_1^{\nu_1} \cdots \alpha_n^{\nu_n} = \sum_{\nu_1=0}^{N} \alpha_1^{\nu_1} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{N} \alpha_n^{\nu_n}$$

$$= \frac{(1-\alpha_1^{N+1}) \cdots (1-\alpha_n^{N+1})}{(1-\alpha_1) \cdots (1-\alpha_n)}$$

Hvis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ er reelle $0 \leq \alpha_k < 1$ for $k = 1, \ldots, n$ ser vi heraf, at rælden i dette tilfælde er konvergent (altså absolut konvergent) idet vi åbenbart kan finde

hvori $\sum_{0,\dots,0}^{N_1,\dots,N}$ forekommer blandt afsnittene. I det afsnitsfølgen er voksende er den altså konvergent.

Heraf fås, at (17) er absolut konvergent, når $|\alpha_1|<1, \dots, |\alpha_n|<1$. Idet vi igen kan vælge en summationsrækkefølge, så $\sum_{0,\dots,0}^{N_1,\dots,N}$ er blandt afsnittene, ses, at summen er $\frac{1}{(1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_n)}$

Vi kan heraf se, at (17) er normalt konvergent for $|\alpha_1|\le\rho_1<1, \dots, |\alpha_n|\le\rho_n<1$ (altså spec. ligelig).

Vi vender tilbage til integralformlen (14). Vælges en polyradius $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ med $\sigma_k<\rho_k$ kan vi nå $|\zeta_k-a_k|=\rho_k$, $|z_k-a_k|\le\sigma_k$, at

$$\frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdot(\zeta_n-z_n)} = \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1-a_1)\cdots(\zeta_n-a_n)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z_1-a_1}{\zeta_1-a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{z_n-a_n}{\zeta_n-a_n}\right)}$$

$$= \frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1-a_1)\cdots(\zeta_n-a_n)}\sum_{\nu_1=0,\dots,\nu_n=0}^{\infty,\dots,\infty}\left(\frac{z_1-a_1}{\zeta_1-a_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{z_n-a_n}{\zeta_n-a_n}\right)^{\nu_n}$$

Som er normalt konvergent under de givne betingelser. Vi fastholder nu $z=(z_1,\dots,z_n)\in P(a;\rho)$ og kan da ligelig konvergens m.h.t. $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ for enhver summationsrækkefølge. Ledvis integration er altså lovlig. Udføres denne og husker vi på formlen (15) fås vi heraf

$$(18)\quad f(z)=\sum_{\nu_1=0,\dots,\nu_n=0}^{\infty,\dots,\infty}\frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_n!}\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}f(a)}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(z_1-a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n-a_n)^{\nu_n}$$

Den multiple række på højre side af formel (18) kaldes Taylorrækken for $f$ med udviklingspunkt $a$. Vi har vist, at for hvert $z \in P(a;\rho)$ er denne række konvergent med sum $f(z)$ for enhver summationsrækkefølge. En nærmere besked om konvergensforholdende fås v.hj. af Cauchy's uligheder (16): For $|z_k - a_k| \le r_k < \rho_k$ har vi åbenbart

$$\left| \frac{1}{\nu_1! \cdots \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(a)}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} (z_1-a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n-a_n)^{\nu_n} \right| \le M \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{r_n}{\rho_n}\right)^{\nu_n}$$

hvoraf vi ser, at Taylorrækken er normalt konvergent på $\overline{P}(a;r)$. Hermed fås

Sætning om Tayloudvikling: Hvis $f$ er en holomorf funktion på den åbne mængde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ og $a = (a_1, \ldots, a_n)$ er et punkt i $\mathcal{U}$, da er Taylorrækken for $f$ med udviklingspunkt $a$ absolut konvergent med sum $f(z)$ for ethvert punkt $z$ i en polycylinder $P(a;\rho) \subseteq \mathcal{U}$. Taylorrækken er normalt og (dermed ligeligt) konvergent på enhver kompakt delmængde $K$ af en sådan polycylinder

Bevis: Hvis $z \in P(a;\rho) \subseteq \mathcal{U}$ findes $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ med $\tau_k < r_k$, så $z \in P(a;\tau)$. Idet $\overline{P}(a;\tau) \subseteq \mathcal{U}$ fås første del af påstanden straks af det ovenstående. Hvis $K \subseteq P(a;\rho)$ er kompakt kan vi finde $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ og $r = (r_1, \ldots, r_n)$ med $r_k < \tau_k < \rho_k$, så $K \subseteq P(a,r)$. Idet $\overline{P}(a;\tau) \subseteq \mathcal{U}$ fås resultatet af det ovenstående.

Q.E.D.

Det følger, at to funktioner $f$ og $g$, som er holomorfe på en omegn af $a \in \mathbb{C}^n$, stemmer overens i en omegn af $a$, når og kun når de har samme Taylor=

række ud fra a. Heraf fås

Identitetssætningen: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben og sammenhængende mængde. Hvis $f$ og $g$ er holomorfe funktioner på $U$, som stemmer overens på en åben, ikke tom delmængde af $U$, da stemmer de overens i hele $U$

Bevis: Vi betragter mængden af de punkter $a \in U$ for hvilke $f$ og $g$ har samme Taylorrække ud fra $a$. Denne mængde er ikke tom ifølge forudsætningerne. Af det overstående følger, at den er åben. Den er også afsluttet relativt til $U$, idet den er mængden af punkter hvor den kontinuerte funktion $f-g$ og alle dennes (kontinuerte) partielle afledede har værdien 0. Idet $U$ er sammenhængende fås påstanden Q.E.D.

Nulreglen i $\mathcal{H}(U)$ for sammenhængende $U$: Hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er åben og sammenhængende, da gælder nulreglen i $\mathcal{H}(U)$, d.v.s. hvis $f$ og $g$ er holomorfe funktioner på $U$ og $fg$ er identisk 0 på $U$, da er enten $f$ eller $g$ identisk 0 på $U$

Bevis: Hvis $f$ ikke er identisk 0 på $U$ er mængden $\{z \in U \mid f(z) \neq 0\}$ åben og ikke tom. Idet $g$ er identisk 0 på denne mængde giver identitetssætningen, at $g$ er identisk 0 på $U$. Q.E.D.

For $U \subseteq \mathbb{C}^n$ åben danner $\mathcal{H}(U)$, som tidligere nævnt, et vektorrum over $\mathbb{C}$. Vektorrumsstrukturen giver anledning til mængdeoperationer for delmængder af $\mathcal{H}(U)$:

$$A + B = \{h \in \mathcal{H}(U) \mid h = f+g,\ f \in A,\ g \in B\}$$

specielt $$f + A = \{ h \in \mathcal{H}(U) \mid h = f + g,\ g \in A \}$$
hvor $f \in \mathcal{H}(U)$. For $\lambda \in \mathbb{C}$ og $A \subseteq \mathcal{H}(U)$ endvidere
$$\lambda A = \{ h \in \mathcal{H}(U) \mid h = \lambda f,\ f \in A \}.$$

Vi ønsker nu at indføre en <u>topologi i $\mathcal{H}(U)$</u>. Hertil betragtes mængderne
$$\mathcal{N}(K, \delta) = \{ f \in \mathcal{H}(U) \mid \max_{z \in K} |f(z)| < \delta \},$$
hvor $K \subseteq U$ er kompakt og $\delta$ er reel og $> 0$. Vi <u>definerer</u> nu: $A \subseteq \mathcal{H}(U)$ kaldes <u>åben</u>, hvis der til hvert $f \in A$ findes $K \subseteq U$ kompakt og $\delta > 0$, således at
$$f + \mathcal{N}(K, \delta) \subseteq A.$$

At der herved defineres en topologi i $\mathcal{H}(U)$ er let bevist.
Det er klart, at $\emptyset$ og $\mathcal{H}(U)$ er åbne.
Hvis $A_i$, $i \in I$ er åbne, er $\bigcup A_i$ øjensynlig også åben
Hvis $A$ og $B$ er åbne og $f \in A \cap B$ findes $K_1, \delta_1, K_2, \delta_2$ så $f + \mathcal{N}(K_1, \delta_1) \subseteq A$ og $f + \mathcal{N}(K_2, \delta_2) \subseteq A$
Nu er $K = K_1 \cup K_2 \subseteq U$ kompakt og for $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ gælder åbenbart $\mathcal{N}(K, \delta) \subseteq \mathcal{N}(K_1, \delta_1) \cap \mathcal{N}(K_2, \delta_2)$
altså $$f + \mathcal{N}(K, \delta) \subseteq A \cap B.$$

Denne definition af topologi i $\mathcal{H}(U)$ svarer øjensynlig til, at vi har <u>specificeret omegnene af $0 \in \mathcal{H}(U)$</u>, nemlig som mængder, som indeholder en mængde $\mathcal{N}(K, \delta)$. Derefter er en omegn af $f \in \mathcal{H}(U)$ defineret som en mængde af formen
$$f + \text{omegn af } 0.$$
Man siger, at $\mathcal{H}(U)$ er <u>et topologisk vektorrum</u>.

Rummet $\mathcal{H}(U)$ er lokalkonvekst, idet basisomegnene $V(K,\delta)$ af $0 \in \mathcal{H}(U)$ er konvekse: Hvis $f, g \in V(K,\delta)$ og $t$ er et reelt tal $0 \leq t \leq 1$, da gælder $tf + (1-t)g \in V(K,\delta)$

En funktionsfølge $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ $f_\nu \in \mathcal{H}(U)$ konvergerer mod $f \in \mathcal{H}(U)$ i denne topologi når og kun når $\max_{z \in K} |f(z) - f_\nu(z)| \to 0$ for $\nu \to \infty$ gælder for enhver kompakt mængde $K \subseteq U$, altså når og kun når $f_\nu$ konvergerer ligeligt mod $f$ på enhver kompakt delmængde af $U$. Topologien kaldes derfor ofte topologien af kompakt konvergens. Vi vil ikke betragte andre topologier på $\mathcal{H}(U)$

Ved definitionen af topologien behøver vi kun visse kompakte delmængder af $U$. Vi viser nedenfor, at vi for enhver åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ kan finde en følge af kompakte delmængder $K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots$ af $U$ så $K_m \subseteq \mathring{K}_{m+1}$ og så $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{K}_m$. Har vi en sådan følge og er $K \subseteq U$ kompakt, da findes øjensynlig et $m$, så $K \subseteq K_m$, hvorfor der gælder $V(K_m, \delta) \subseteq V(K, \delta)$ En delmængde af $\mathcal{H}(U)$ er altså omegn af $0 \in \mathcal{H}(U)$ når og kun når, den indeholder en mængde $V(K_m, \delta)$. Til mængderne $K_m$ kan vi knytte semi-normerne

$$|f|_m = \max_{z \in K_m} |f(z)|$$

på $\mathcal{H}(U)$. Topologien på $\mathcal{H}(U)$ kan øjensynlig fås af disse semi-normer og disse opfylder endvidere $|\ |_1 \leq |\ |_2 \leq \ldots$. Ved hjælp af semi-normerne kan vi konstruere en metrik på $\mathcal{H}(U)$:

$$d(f,g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{|f-g|_m}{1+|f-g|_m}$$

Det overlades læseren at bevise, at $d$ er en metrik og at den inducerer den rigtige topologi — iøvrigt har metrikken ikke megen interesse.

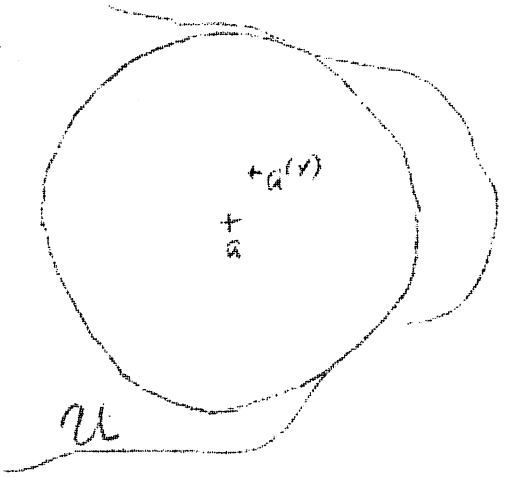
Vi skylder at bevise eksistensen af en følge af kompakte mængder $K_1, K_2, \ldots$ med de anførte egenskaber. For $\mathcal{U} = \mathbb{C}^n$ er dette klart, idet vi blot vælger $K_m = \overline{P}(0; m)$. Hvis $\mathcal{U} \neq \mathbb{C}^n$, altså $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$, bemærker vi først, at der til hvert $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$ findes et største $\rho$, så $P(a; \rho) \subseteq \mathcal{U}$, nemlig sup for alle sådanne $\rho$. Dette $\rho$ betegnes $\rho_a$. Dernæst vælger en følge $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ af punkter, som er overalt tæt i $\mathcal{U}$ (f.eks. alle punkter i $\mathcal{U}$ med rationel real- og imaginærdel), og vi sætter

$$K_m = \bigcup_{\nu=1}^{m} \overline{P}\left(a^{(\nu)}; \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\rho_{a^{(\nu)}}\right)$$

Mængden $K_m$ er åbenbart kompakt og $\subseteq \mathcal{U}$, da $1 - \frac{1}{2m} < 1$. Endvidere gælder

$$\overset{\circ}{K}_{m+1} \supseteq \bigcup_{\nu=1}^{m+1} P\left(a^{(\nu)}; \left(1 - \frac{1}{2(m+1)}\right)\rho_{a^{(\nu)}}\right) \supseteq K_m .$$

Lad nu $a \in \mathcal{U}$. Da findes et $\nu$, så $a^{(\nu)} \in P(a; \frac{1}{3}\rho_a)$, idet følgen var overalt tæt. For ethvert $z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{U}$ gælder da




$$|z_k - a_k^{(\nu)}| \geq |z_k - a_k| - |a_k - a_k^{(\nu)}|$$
$$> \rho_a - \frac{1}{3}\rho_a = \frac{2}{3}\rho_a ,$$

hvorfor $\rho_{a^{(\nu)}} \geq \frac{2}{3}\rho_a$, hvoraf vi får $\frac{1}{2}\rho_{a^{(\nu)}} \geq \frac{1}{3}\rho_a$, hvilket giver

$|a_k - a_k^{(\nu)}| < \frac{1}{3}\rho_a \leq \frac{1}{2}\rho_{a^{(\nu)}}$ for $k=1,\ldots,n$, altså $a \in P(a^{(\nu)}, \frac{1}{2}\rho_{a^{(\nu)}})$. For $m \geq \nu$ gælder derfor $a \in \mathring{K}_m$, hvormed påstanden er bevist.

Som en mild generalisation af Cauchy's uligheder (16) beviser vi:

Hvis $K_1, K_2$ er kompakte delmængder af $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ($U$ åben) så $K_1 \subseteq \mathring{K}_2$, da findes et reelt tal $\rho > 0$, således at der gældet

$$\max_{z \in K_1} \left| \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \right| \leq \frac{1}{\rho} \max_{z \in K_2} |f(z)|$$

for $k = 1, \ldots, n$ og ethvert $f \in \mathcal{H}(U)$.

Bevis: Vi kan finde $\rho > 0$, således at $a \in K_1 \Rightarrow \overline{P}(a;\rho) \subseteq \mathring{K}_2$. Til hvert $a \in K_1$ kan vi nemlig finde $r_a > 0$, så $\overline{P}(a, r_a) \subseteq \mathring{K}_2$. Nu kan $K_1$ åbenbart (kompaktheden) overdækkes af endeligt mange $P(a, \frac{1}{2}r_a)$ og påstanden er så rigtig for $\rho = \frac{1}{2}$min. af de forekommende $r_a$. Hvis nemlig $b \in P(a; \frac{1}{2}r_a)$ har vi $\overline{P}(b, \frac{1}{2}r_a) \subseteq \overline{P}(a, r_a)$.

Herefter har vi nu blot at anvende (16) for hvert $a \in K_1$. Q.E.D.

Som en konsekvens har vi:

Weierstrass første sætning: Enhver differentialoperator

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} : \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U)$$

er kontinuert med den indførte topologi i $\mathcal{H}(U)$.

Bevis: Det er nok at vise, at $\frac{\partial}{\partial z_k}$ er kontinuert, idet resultatet så fås ved sammensætning. Idet $\frac{\partial}{\partial z_k}$

er lineær er det endvidere nok at vise, at til opgivne $K_1, \delta_1$, $K_1 \subseteq U$ kompakt $\delta_1 > 0$ findes $K_2, \delta_2$ (af samme art), så

$$\frac{\partial}{\partial z_k} \mathcal{V}(K_2, \delta_2) \subseteq \mathcal{V}(K_1, \delta_1)$$

Hertil vælger $K_2$ så $K_1 \subseteq \overset{\circ}{K_2}$ [man overdækker $K_1$ med endeligt mange $P(a; \frac{1}{2}\delta_a)$, hvor $P(a, \delta_a) \subseteq U$, og vælger $K_2 = \bigcup \overline{P}(a; \frac{1}{2}\delta_a)$]. Vurderingen ovenfor giver derefter resultatet.

Q.E.D.

Vi kan indføre begrebet fundamentalfølge i $\mathcal{H}(U)$ ved definitionen: En følge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ $f_\nu \in \mathcal{H}(U)$ kaldes en fundamentalfølge, hvis der til enhver omegn $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}(U)$ af $0 \in \mathcal{H}(U)$ findes et $N \in \mathbb{N}$, så $\mu, \nu > N \Rightarrow f_\mu - f_\nu \in \mathcal{W}$. Dette betyder åbenbart præcist (via basisomegnene $\mathcal{V}(K, \delta)$), at $f_1, f_2, \ldots$ er ligefrit fundamentalfølge på enhver kompakt delmængde $K \subseteq U$.

Der gælder nu

Weierstrass' anden sætning: Rummet $\mathcal{H}(U)$ er fuldstændigt d.v.s. enhver fundamentalfølge er konvergent.

Bevis: Lad $f_1, f_2, \ldots$ være den givne fundamentalfølge. I det hvert punkt $a \in U$ har en kompakt omegn $\subseteq U$ har vi en grænsefunktion $f$. Endvidere konvergerer $f_1, \ldots$ åbenbart ligefrit mod $f$ på hver kompakt delmængde af $U$. Problemet er at vise, at $f$ er holomorf. Hertil bemærkes, at for hvert $k = 1, \ldots, n$ er følgen $\frac{\partial}{\partial z_k} f_\nu$ ligeledes fundamentalfølge i $\mathcal{H}(U)$ (ifølge den ovenstående sætning) altså ligefrit konvergent på kompakte delmængder af $U$. I det $f_\nu$ er

holomorf d.v.s. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f_\nu = 0$ har vi

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu = \frac{\partial}{\partial z_k} f_\nu \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu = i \frac{\partial}{\partial z_k} f_\nu$$

(ifølge formlerne (8)), hvorfor $\frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu$ og $\frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu$ konvergerer ligeligt på hver kompakt delmængde. Heraf sluttes, at $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ og $\frac{\partial}{\partial y_k} f$ eksisterer, og

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu \,, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} f = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu$$

hvorfor $f$ er $C^1$ i $\mathcal{U}$ (kontinuerte grænsefunktioner). Endelig fås

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f + i \frac{\partial}{\partial y_k} f\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu + i \lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu\right)$$

$$\therefore = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu + i \frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu\right) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f_\nu = 0$$

hvilket viser, at $f$ er holomorf Q.E.D.

En mængde $A \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{U})$ kaldes <u>begrænset</u>, hvis der til enhver omegn $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{U})$ af $0 \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ findes et pos. reelt tal $\lambda$, så $A \subseteq \lambda \mathcal{W}$ [$A$ "absorberes" af enhver omegn af 0]. Dette kommer åbenbart ud på, at der til hver kompakt mængde $K \subseteq \mathcal{U}$ findes reelt tal $M_K$, så $f \in A \Rightarrow \max_{z \in K} |f(z)| \leq M_K$. (kig på $\mathcal{N}(K, \delta)$).

<u>Advarsel</u>: Begrænset defineret ved hjælp af metrikken på side 34 er ikke det samme og ihvertfald et uinteressant begreb.

Vi kan nu bevise:

Montels sætning: Lad $f_1, f_2, \ldots$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{H}(U)$, så mængden $\{f_1, f_2, \ldots\}$ er en begrænset delmængde af $\mathcal{H}(U)$ [se ovenfor]. Da har følgen en konvergent delfølge [konvergent i $\mathcal{H}(U)$]

Bevis. Vi indfører først nogle betegnelser. For $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ og $b=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{C}^n$ defineres $a+b=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$. Videre sættes $|a|=\max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}$. Derved bliver $|a-b|$ en metrik på $\mathbb{C}^n$ (som giver den rigtige topologi) og "kuglerne" i denne metrik er åbenbart de ligesidede polycylindre.

Lad $K\subseteq U$ være kompakt. Vi kan da vælge $K_1, K_2\subseteq U$ kompakte, så $K\subseteq K_1^\circ$ og $K_1\subseteq K_2^\circ$. Videre kan vi (se side 16) finde $r>0$, så

$$a\in K \Rightarrow P(a;r)\subseteq K_1$$

Ifølge forudsætningen har vi

$$\max_{z\in K_2}|f_\nu(z)|\leq M$$

for alle $\nu$. Af uligheden på side 16 får vi hermed

$$\max_{z\in K_1}\left|\frac{\partial}{\partial z_k}f_\nu(z)\right|\leq M'$$

Lad nu $a\in K$ og $b=a+h\in P(a;r)$ d.vs. $|h|<r$.

Da har vi

$$f_\nu(a+h)-f_\nu(a)=\frac{d}{dt}f_\nu(a+th)\Big]_{t=\theta}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}p_k\frac{\partial}{\partial x_k}f_\nu(a+\theta h)+\sum_{k=1}^{n}q_k\frac{\partial}{\partial y_k}f_\nu(a+\theta h)$$

hvor $h_k=p_k+iq_k$. Idet $|p_k|\leq|h_k|\leq h$ og idet

samme for $g_k$, og idet

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} f_\nu(a+\theta h)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu(a+\theta h)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial z_k} f_\nu(a+\theta h)\right|$$

$$\leqq M' \text{ idet } a+\theta h \in P(a;r) \subseteq K_1$$

får vi heraf

$$|f_\nu(a+h) - f_\nu(a)| \leqq |h| \cdot 2n M' = |h| \cdot M''$$

hvilket gælder for $a \in K$, $|h| < r$ og ethvert $\nu$. En sådan vurdering findes for hver kompakt mængde $K \subseteq U$.

Vi vælger nu en følge $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ af punkter fra $U$, som er overalt tæt i $U$ (f.eks. punkterne i $U$, hvis koordinater har rationale real- og imaginærdele). Vi ønsker så at finde en delfølge $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots$ af følgen $f_1, f_2, \ldots$, således at $\tilde{f}_1(a^{(m)}), \tilde{f}_2(a^{(m)}), \ldots$ er en konvergent talfølge for hvert $m$. Dette gøres ved Cantors diagonalmetode: Det bemærkes først, at da $\{a^{(m)}\}$ er en kompakt del mængde af $U$ for hvert $m$, vil hver af følgerne $f_1(a^{(m)}), f_2(a^{(m)}), \ldots$ være begrænsede. Vi kan altså finde en delfølge

(1) $\quad f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots$

af den oprindelige, så følgen af funktionsværdier i $a^{(1)}$ konvergerer for følgen (1). Fra (1) udtages nu en delfølge

(2) $\quad f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots$

således, at funktionsværdierne også i $a^{(2)}$ danner en konvergent talfølge, etc... Herved får en følge af følger. Hver af disse er en delfølge af den givne, d.v.s. $f_{p,q+1}$

er et element med større indeks i den oprindelige følge end $f_{pq}$. Heraf følger, at <u>diagonalfølgen</u> $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots$ ligeledes er en delfølge af den oprindelige. Forinden $f_{m+1,m+1}$ vælges i følgen $f_{m1}, f_{m2}, \ldots$ er der nemlig allerede valgt $m$ stk, hvorfor vi har passeret $f_{m,m}$. Diagonalfølgen har øjensynlig de ønskede egenskaber.

Påstanden er nu, at den konstruerede delfølge er ligelig fundamentalfølge på hver kompakt del-mængde $K \subseteq U$. [Heraf følger påstanden ved Weierstrass nr. 2].

<u>Lad $K \subseteq U$ kompakt og $\varepsilon > 0$ være givet.</u> Til $K$ har vi da tal $M''$ og $r$ som ovenfor. Vælges

$$\delta = \min\left\{ r, \frac{\varepsilon}{3M''} \right\} > 0$$

har vi altså $|f_\nu(b) - f_\nu(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ for $a \in K$ og $|b-a| < \delta$.

Følgen af polycylinder

$$P(a^{(1)}, \delta), P(a^{(2)}, \delta), \ldots$$

overdækker $U$ og dermed $K$: Til hvert $a \in U$ findes, da $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ er overalt tæt, et $m$, så $a^{(m)} \in P(a, \delta)$; men så er $a \in P(a^{(m)}, \delta)$. Idet $K$ er kompakt har vi derfor

$$K \subseteq P(a^{(1)}, \delta) \cup \ldots \cup P(a^{(m)}, \delta)$$

Nu er hver af de <u>endeligt mange</u> talfølger

$$\tilde{f}_1(a^{(\ell)}), \tilde{f}_2(a^{(\ell)}), \ldots \qquad \ell = 1, \ldots, m$$

fundamentalfølge. Vi kan derfor finde $N \in \mathbb{N}$, så

$$\mu, \nu > N \Rightarrow |\tilde{f}_\mu(a^{(\ell)}) - \tilde{f}_\nu(a^{(\ell)})| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ for } \ell = 1, \ldots, m$$

Lad nu endelig $a \in K$. Da findes $\ell$, $1 \leq \ell \leq m$, så

$a \in P(a^{(\ell)}, \delta)$ altså, så $a^{(\ell)} \in P(a\ ,\ \delta)$. For $\mu, \nu > N$ har vi da

$$|\tilde{f}_\mu(a) - \tilde{f}_\nu(a)| \leq |\tilde{f}_\mu(a) - \tilde{f}_\mu(a^{(\ell)})| + |\tilde{f}_\nu(a^{(\ell)}) - \tilde{f}_\nu(a)| + |\tilde{f}_\mu(a^{(\ell)}) - \tilde{f}_\nu(a^{(\ell)})|$$

og hvert led er $< \frac{\varepsilon}{3}$, hvilket giver påstanden.

Q.E.D.

Vi betragter en <u>multipel potensrække</u>

$$(19) \qquad \sum_{\nu_1=0,\ldots,\nu_n=0}^{\infty,\ldots,\infty} A_{\nu_1 \ldots \nu_n} (z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}$$

hvor $A_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ er givne komplekse tal og $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et givet punkt. Med $B \subseteq \mathbb{C}^n$ betegnes mængden af punkter $z \in \mathbb{C}^n$, hvor (19) har begrænsede led, altså

$$B = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \exists\, M, \text{ så } |A_{\nu_1 \ldots \nu_n} (z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}| \leq M \text{ for alle } \nu_1 \ldots \nu_n \}$$

Ethvert konvergenspunkt for (19) tilhører åbenbart B. Heraf følger, at enhver åben mængde af rutter konvergenspunkter er en delmængde af $A = \mathring{B}$. Mængden A kaldes <u>konvergensområdet</u> for potensrækken (19) idet der gælder (forudsat $A \neq \emptyset$):

<u>Potensrækken (19) er absolut konvergent i et hvert punkt $z \in A$ og normalt konvergent på enhver kompakt delmængde $K \subseteq A$. Summen $f(z)$ er en holomorf funktion på A, og Taylorrækken for f med udviklingspunkt a er identisk med rækken (19)</u> [led for led].

Bevis: Hvis $z \in A$ findes $\zeta \in B$, så $|z_k - a_k| < |\zeta_k - a_k| = \rho_k$. Idet $\zeta \in B$ har vi

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}| \rho_1^{\nu_1} \cdots \rho_n^{\nu_n} \leq M$$

altså

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}| \leq M\left(\frac{|z_1 - a_1|}{\rho_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{|z_n - a_n|}{\rho_n}\right)^{\nu_n}$$

Rækken (19) med $z$ indsat er altså majorisent af en konvergent kvotientrække og derfor absolut konvergent.

Har vi en polyradius $r$, så $\overline{P}(a; r) \subseteq A$ kan vi (da $A$ er åben) finde polyradiussen $\rho$ så $r_k < \rho_k$ og så $\overline{P}(a; \rho) \subseteq A$ $(\subseteq B)$. For $z \in \overline{P}(a; r)$ har vi da

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}| \leq M\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{r_n}{\rho_n}\right)^{\nu_n}$$

hvilket viser den normale konvergens på $\overline{P}(a; r)$. En kompakt mængde $K \subseteq A$ kan overdækkes med endeligt mange $P(a; r)$, hvor $\overline{P}(a; r) \subseteq A$, hvoraf påstanden fås. Til $z \in A$ findes nemlig $\zeta \in B$ med $|z_k - a_k| < |\zeta_k - a_k|$ og vi vælger blot $r_k$, så $|z_k - a_k| < r_k < |\zeta_k - a_k|$, hvorefter $\overline{P}(a; r) \subseteq A$ (ifølge ovenfor). Q.E.D.

Potensrækken (19) kaldes <u>konvergent</u>, hvis $A \neq \emptyset$. Af beviset ovenfor fremgår, at $A$ er foreningsmængde af polcylindre med centrum i $a$. En nærmere redegørelse for de geometriske egenskaber ved en potensrækkes konvergensområde vil blive givet senere.

Vi glemte påstandens sidste halvdel! At summen $f(z)$ er holomorf følger af Weierstrass anden sætning. Weier-

Strass' første sætning giver herefter, at ledvis differentiation i (19) er lovlodt. Indsættes $z = a$ fås det ønskede

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a) = \nu_1! \cdots \nu_n!\, A_{\nu_1 \cdots \nu_n}$$

Opgaver:

1. Vis, at konvergensområdet $A \subseteq \mathbb{C}^2$ for en potensrække

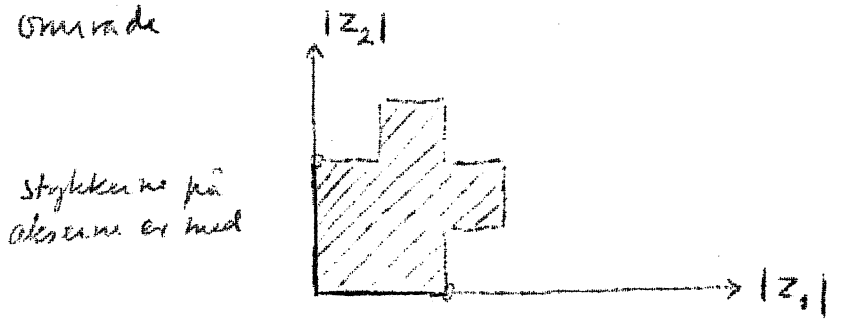
$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty\ \infty} A_{\mu\nu} z_1^{\mu} z_2^{\nu}$$

er et såkaldt Reinhardt'sk område, d.v.s. givet ved $(|z_1|, |z_2|) \in D$, hvor $D$ er en relativt åben delmængde af kvadranten

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Ved $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2) = (\log x_1, \log x_2)$ afbildes den åbne kvadrant på $\mathbb{R}^2$. Vis, at $D \setminus$ Akserne herved overføres i en konveks mængde ($A$ er logaritmisk konveks) [Ræssonnér på mængden ugen].

2. Vis, at enhver holomorf funktion i det Reinhardt'ske område

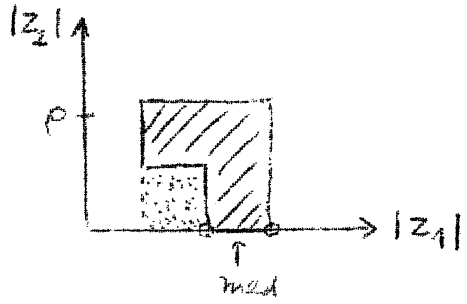



stykket ned på akserne er med

har en potensrække ved fx $(0,0)$, som konvergerer

i et større Reinhardt'sk område og angiv et sådant. (Eksempel på samtidig analytisk fortsættelse).

3. Vis, at en holomorf funktion i det skraverede Reinhardt'ske område




kan fortsættes til det prikkede område. [Benyt integralformlen $\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(z_1,\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta$ eller se på potensrækken $\sum f_\nu(z_1) z_2^\nu$ ] Vis herved, at en holomorf funktion af flere variable ikke kan have isolerede singulariteter.

4. Vi betragter rækker af typen

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(z_1, z_2)$$

hvor $P_m$ er et homogent polynomium af grad $m$ i $z_1, z_2$. Definér konvergensområde og bevis den relevante sætning for sådanne rækker [husk, at $P_m(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^m P_m(z_1, z_2)$] Vis, at konvergensområdet altid er et <u>cirkelområde</u>: $(z_1, z_2) \in D$ $\Rightarrow (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2) \in D$ hvor $\theta$ er reel.

5. I $\mathbb{C}^2$ betragtes funktionen $f(z) = \dfrac{1}{1-(z_1^2+z_2^2)}$.

Vi kan udvikle $f$ i potensrække ud fra $(0,0)$. Samles leddene i denne række til homogene polynomier fås en række som omtalt i opgave 4. Find konvergensområderne for hver af de to rækker.

6. En delmængde $A \subseteq \mathbb{C}^2$ er givet ved:
$1 < |z_1| < 2$ og for hver værdi af $z_1$ afviger $|z_2|$ mindre end $\frac{\pi}{2}$ fra en værdi for argumentet til $z_1$. [ fs en fornemmelse af $A$: for hvert $z_1$ er $\{z_2 \mid (z_1, z_2) \in A\}$ foreningsmængde af cirkelringe plus evt en cirkelskive ] Vis, at i en omegn af hvert $(a_1, a_2) \in A$ kan en funktion $f$, som er holomorf i $A$, fremstilles ved en række

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu(z_1) z_2^\nu$$

Vis dernæst, at funktionerne $f_\nu(z_1)$ kan fortsættes analytisk rundt i cirkelringen $1 < |z_1| < 2$ og vis herved, at $f_\nu(z_1)$ er identisk $0$ for $\nu < 0$. Vis herved, at for ethvert punkt $(a_1, a_2) \in A$ kan vi fortsætte $f(z_1, z_2)$ analytisk ud fra $(a_1, a_2)$ langs enhver kurve, hvor $1 < |z_1| < 2$ og hvor $|z_2|$ stadig aftager. Vis, at der findes en (entydig) holomorf funktion $f(z_1, z_2)$ i $A$, så $e^{f(z_1,z_2)} = z_1$ [eksempel på samtidig analytisk fortsættelse med ikke entydig fortsættelse ]. Vis, at hvis vi skifter koordinater ved $(\zeta_1, \zeta_2) \to (e^{\zeta_1}, \zeta_2)$, da

kan enhver holomorf funktion i $A$, opfattet som funktion af $(\zeta_1, \zeta_2)$ fortsættes holomorft til mængden $\{(\zeta_1, \zeta_2) \mid 0 < |\zeta_1| < \log 2\}$.

<o>

## Kapitel 2 Lokal teori for holomorfe funktioner, analytiske mængder, meromorfe funktioner.

Hvis $f$ er en holomorf funktion på en polycylinder $P(a, \rho)$ kan vi udvikle $f$ i potensrække med hensyn til potenser af $z_n$. Vi skriver $z'$ for $(z_1, \dots, z_{n-1})$, $a'$ for $(a_1, \dots, a_{n-1})$, $\rho'$ for $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ etc. og har da

$$(1) \quad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z')(z_n - a_n)^\nu$$

for $z' \in P(a', \rho')$, $|z_n - a_n| < \rho_n$, hvor $f_\nu$ er holomorfe funktioner i $P(a', \rho')$. Dette ses ved et 1-variabel argument

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a_n| = r_n} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n} \, d\zeta$$

hvor $r_n < \rho_n$, rækkeudvikling under integraltegn, etc.

Hvis ikke alle $f_\nu(a') = 0$ siges $f$ at være almen med hensyn til $z_n$ i punktet $a$. Tallet $m$, så

$$f_0(a') = \dots = f_{m-1}(a') = 0, \quad f_m(a') \neq 0$$

kaldes da ordenen af $f$ med hensyn til $z_n$.

Hvis $f$ ikke er identisk 0 på nogen omegn af $a$ kan vi finde et lineært koordinatskift

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} z_1 - a_1 \\ \vdots \\ z_n - a_n \end{Bmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} \neq 0$$

*således at $f$ som funktion af $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ er almen med hensyn til $\zeta_n$ i det til $a$ svarende punkt 0.*

Bevis: Vi kan åbenbart finde $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ $h \neq (0, \dots, 0)$ så $g(z) = f(a + zh)$ ikke er identisk 0 på nogen omegn af $z = 0$. Vi behøver så blot at vælge $\underline{\underline{A}}$, så $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ og

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix}$$

hvilket er muligt, da $(h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$. Q.E.D.

*Weierstrass' divisionssætning: Lad $f$ være en holomorf funktion på en omegn af $a \in \mathbb{C}^n$ og almen af orden $m$ med hensyn til $z_n$ i punktet $a$. Da findes ialfald små polycylindre $P(a; R)$ således at følgende gælder: Til $P(a; R)$ findes en konstant $M$ således at hvis $g$ er en holomorf og begrænset funktion på $P(a; R)$ findes der holomorfe og begrænsede funktioner $q$ og $r$ på $P(a; R)$, som opfylder*

$$(2) \qquad g(z) = q(z) f(z) + r(z)$$

*for ethvert $z \in P(a; R)$ og hvor $r(z)$ er et polynomium i $(z_n - a_n)$ af grad $< m$, hvis koefficienter er holomorfe funktioner af $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Parret $q, r$ med de*

angivne egenskaber er entydigt bestemt og der gælder

$$\sup_{z\in P(a;R)} |q(z)| \leq M \sup_{z\in P(a;R)} |g(z)|$$

og

$$\sup_{z\in P(a;R)} |r(z)| \leq M \sup_{z\in P(a;R)} |g(z)|.$$

Bevis: Ved beviset benyttes en bestemt vurdering, som vi først gør rede for: Lad $F(z)$ være holomorf og begrænset på $P(0;R)$ og

$$(*) \qquad F(z) = G(z) z_n^m + R(z)$$

hvor $G(z)$ og $R(z)$ er holomorfe på $P(0;R)$ og $R(z)$ er et polynomium i $z_n$ af grad $< m$, hvis koefficienter er holomorfe funktioner af $z' \in P(0;R') \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$. Udviklers i potensrækken efter $z_n$ har vi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(z') z_n^\nu = F(z) = z_n^m \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\nu(z') z_n^\nu}_{G(z)} + \underbrace{R_0(z') + \cdots + z_n^{m-1} R_{m-1}(z')}_{R(z)}$$

Heraf sluttes, at $R(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} F_\nu(z') z_n^m$

og $\quad G(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} F_\nu(z') z_n^{\nu-m}$

For fast $z' \in P(0;R')$ og $\rho < R_n$ giver Cauchy's uligheder (i 1 variabel), at

$$|F_\nu(z')| \leq \frac{1}{\rho^\nu} \sup_{z\in P(0;R)} |F(z)|$$

og dermed, da $\rho$ kan vælges vilkårligt nær $R_n$, at

$F_\nu(z')$ er begrænset på $P(0;R')$ og

$$\sup_{z'\in P(0;R')} |F_\nu(z')| \leq \frac{1}{R_n^\nu} \sup_{z\in P(0,R)} |F(z)|$$

Heraf får en vurdering for $R(z)$:

$$|R(z)| \leq |F_0(z')| + R_n |F_1(z')| + \cdots + R_n^{m-1} |F_{m-1}(z')|$$

$$\leq m \cdot \sup |F(z)|$$

Altså $R(z)$ er begrænset i $P(0,R)$ og

$$(4) \quad \sup_{z\in P(0,R)} |R(z)| \leq m \cdot \sup_{z\in P(0,R)} |F(z)|$$

Dette giver straks, at $G(z) z_n^m$ er begrænset, og

$$\sup |G(z) z_n^m| \leq (m+1) \sup |F(z)|$$

Vurderingen af $G(z)$ beror nu på et klassisk "trick": For fast $z' \in P(0;R')$ kan vi bruge maximum princippet på $G(z', z_n)$ for $|z_n| \leq \rho < R_n$ og får

$$\max_{|z_n|\leq\rho} |G(z', z_n)| = \max_{|z_n|=\rho} |G(z', z_n)| = \frac{1}{\rho^m} \max_{|z_n|=\rho} |G(z', z_n) z_n^m|$$

$$\leq \frac{1}{\rho^m} \sup |G(z) z_n^m| \leq \frac{m+1}{\rho^m} \sup |F(z)|$$

Ved grænseovergangen $\rho \to R_n$ ses heraf, at $G(z)$ er begrænset og

$$(5) \quad \sup_{z\in P(0;R)} |G(z)| \leq \frac{m+1}{R_n^m} \sup_{z\in P(0,R)} |F(z)|$$

Dette var vurderingen, og vi kan nu gå til selve beviset. Først bemærkes, at vi kan antage $a = (0, \ldots, 0)$ blot for

forenkling af betegnelser). Vi har

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) z_n^\nu$$

hvor $f_\nu(0) \neq 0$, altså

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{m-1} f_\nu(z) z_n^\nu + z_n^m F(z)$$

hvor $F(0) \neq 0$. På en passende lille omegn af 0 har vi da $0 < M_1 \leq |F(z)| \leq M_2$, og vi kan derfor erstatte $f(z)$ med $\frac{1}{F(z)} f(z)$, idet dette blot ændre $g(z)$ med en faktor, som er begrænset såvel opad som nedad. Vi kan altså antage, at

$$(6) \quad f(z) = z_n^m + h(z)$$

hvor $h(0, z_n)$ er identisk 0 [ovenfor var $f_\nu(0) = 0$ for $\nu = 1, \ldots, m-1$ ]

Vi beviser nu først vurderingerne og entydigheden, idet eksistens gemmes til sidst. Ved valget af $P(0; R)$ vælges $R_n$ vilkårligt lille $> 0$. Idet $h(0, z_n) = 0$ kan vi dernæst vælge $R_1, \ldots, R_{n-1}$, således at

$$|h(z)| \leq \text{konstant} < \frac{R_n^m}{(m+1)}$$

i $P(0; R)$, idet $|h(z)|$ er kontinuert. Vi har altså

$$(7) \quad \sup_{z \in P(0;R)} |h(z)| < \frac{R_n^m}{(m+1)}$$

Lad nu $g$, $q$ og $r$ være holomorfe og begrænsede i $P(0; R)$, så (2) gælder, altså

$$g(z) = q(z) f(z) + r(z) = q(z) z_n^m + q(z) h(z) + r(z)$$

Idet $g(z) - q(z)h(z) = q(z)z_n^m + r(z)$

har vi vurderingerne (4) og (5):

$$\sup|r(z)| \leq m \sup|g(z) - q(z)h(z)|$$

og

$$\sup|q(z)| \leq \frac{m+1}{R_n^m} \sup|g(z) - q(z)h(z)|$$

Den sidste giver

$$\sup|q(z)| \leq \frac{m+1}{R_n^m} \sup|g(z)| + \frac{m+1}{R_n^m} \sup|h(z)| \cdot \sup|q(z)|$$

altså

$$\sup|q(z)| \leq \frac{m+1}{R_n^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m+1}{R_n^m}\sup|h(z)|} \cdot \sup|g(z)|$$

hvilket er den ønskede vurdering af $q$, idet nævneren er $>0$.
Dernæst fås så vurdering af $\sup|r(z)|$:

$$\sup|r(z)| \leq m \sup|g(z)| + m \sup|q(z)| \cdot \sup|h(z)|$$

$$\leq \text{Konstant} \sup|g(z)|$$

idet vi lige har vundet $\sup|q(z)|$.

Entydigheden af løsningen til (2) følger nu let:
Har vi for samme $g$ to løsningssæt $(q, r)$ og $(q', r')$ gælder der åbenbart

$$0 = f(z)(q(z) - q'(z)) + (r(z) - r'(z))$$

Parret af differenser er altså løsning for $g = 0$, altså $\sup|q(z) - q'(z)| \leq M \cdot 0 = 0$, $\sup|r(z) - r'(z)| \leq M \cdot 0 = 0$ hvilket giver entydigheden.

Ideen i eksistensbeviset er rekursion. Vi skal finde $q$ og $r$, så

$$g(z) = q(z) f(z) + r(z)$$

altså, så

$$(8)\quad g(z) = q(z) z_n^m + q(z) h(z) + r(z).$$

Ideen er her, at "$h(z)$ er meget mindre end $z_n^m$", hvorfor vi prøver med

$$(9)\quad g(z) = q_{\nu+1}(z) z_n^m + q_\nu(z) h(z) + r_{\nu+1}(z)$$

Dette kan også skrives

$$(10)\quad q_{\nu+1}(z) z_n^m + r_{\nu+1}(z) = g(z) - q_\nu(z) h(z)$$

Vi ser her, at $q_{\nu+1}$ og $r_{\nu+1}$ er entydigt bestemt når $q_\nu$ er valgt, idet $r_{\nu+1}$ skal være et polynomium i $z_n$ af grad $< m$ [Højre side udvikles i potensrække efter $z_n$]
Vurderingerne (4) og (5) viser (idet $g$ er begrænset i $P(0;R)$), at $q_{\nu+1}$ og $r_{\nu+1}$ er begrænset i $P(0;R)$, hvis $q_\nu$ er begrænset i $P(0;R)$. Vi vælger $q_1 = 0$, $r_1 = 0$), hvorefter $q_\nu, r_\nu$ for $\nu \geq 1$ er bestemt ved (10)

For $\nu > 1$ har vi (10) med index forskudt 1,

$$q_\nu(z) z_n^m + r_\nu(z) = g(z) - q_{\nu-1}(z) h(z)$$

hvilket sammen med (10) giver

$$(11)\quad \begin{aligned} &\big(q_{\nu+1}(z) - q_\nu(z)\big) z_n^m + r_{\nu+1}(z) - r_\nu(z) \\ &= -h(z)\big(q_\nu(z) - q_{\nu-1}(z)\big) \end{aligned}$$

Vi husker, at $R$ var valgt, så $\lambda = \frac{m+1}{R_n^m} \sup|h| < 1$

Vurderingen (5) giver da, at

$$\sup|q_{\nu+1}-q_\nu| \leqq \frac{m+1}{R_n^m}\sup|h|\cdot\sup|q_\nu-q_{\nu-1}|$$

$$= \lambda \sup|q_\nu-q_{\nu-1}|$$

Ved induktion giver dette, at

$$(12)\quad \sup|q_{\nu+1}-q_\nu| \leqq \lambda^{\nu-1}\sup|q_2-q_1|$$

hvilket viser, at følgen $q_1, q_2, \ldots$ konvergerer ligelidt på $P(0;R)$. Den holomorfe grænsfunktion $f$ ses ligeledes heraf at være begrænset i $P(0;R)$.

Vurderingen (4) giver nu

$$\sup|r_{\nu+1}-r_\nu| \leq m\cdot\sup|h|\cdot\sup|q_\nu-q_{\nu-1}|$$

$$\leq m\sup|h|\cdot\lambda^{\nu-2}\sup|q_2-q_1|$$

hvor vi tilsidst har brugt (12). Dette viser ligeledes konvergensen af $r_1, r_2, \ldots$ mod begrænset grænsfunktion $r$ på $P(0;R)$.

At (2) d.v.s. (8) er opfyldt ses ved at foretage grænseovergangen $\nu\to\infty$ på formlen (10) ($\Leftrightarrow$ (9)). At endelig $r$ er en funktion af den ønskede art ses f.eks. af

$$\frac{\partial^m}{\partial z_n^m} r = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\partial^m}{\partial z_n^m} r_\nu = 0$$

i ethvert $z\in P(0;R)$. Q.E.D.

<u>Bemærkning</u>: Ved entydighedsbeviset behøver vi ikke at forudsætte, at $q$ og $r$ er begrænsede i $P(0;R)$. Vi kan nemlig blot vælge "en god" polycylinder $P(0;\tilde{R})$, så $\overline{P}(0;\tilde{R})\subseteq P(0;R)$ — den er $q$ og $r$ begrænsede på $P(0;\tilde{R})$, altså entydigheden sikret her, men dermed

også i den store polycylinder $P(0,R)$ ved identitetssætningen.

Definition En holomorf funktion af formen

$$(z_n-a_n)^m + A_{m-1}(z')(z_n-a_n)^{m-1} + \dots + A_0(z'),$$

hvor $A_0,\dots,A_{m-1}$ er holomorfe funktioner af $z'=(z_1,\dots,z_{n-1})$ på en omegn af $a'=(a_1,\dots,a_{n-1})$ kaldes et Weierstrass-polynomium, hvis

$$A_0(a') = \dots = A_{m-1}(a') = 0,$$

og $a$ kaldes centret for polynomiet.

Weierstrass' forberedelsessætning: Lad $f$ være holomorf i en omegn af $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ og almen af orden $m$ med hensyn til $z_n$ i punktet $a$. Da findes præcis et Weierstrass polynomium i $(z_n-a_n)$ med centrum $a$, $p(z',z_n)$, således at der gælder

$$(13)\quad f(z) = e(z)\,p(z',z_n)$$

i en omegn $U$ af $a$, hvor $e(z)$ er holomorf i $U$ og $e(a)\neq 0$. Graden af polynomiet $p$ er lig med ordenen $m$ af $f$.

Bevis. Vi benytter divisionssætningen på $g=(z_n-a_n)^m$ og får

$$(14)\quad (z_n-a_n)^m = q(z)f(z) + r(z',(z_n-a_n)).$$

Som ved beviset for div sætningen kan vi antage, at

$$f(z) = (z_n-a_n)^m + h(z',(z_n-a_n))$$

hvor $h(a',(z_n-a_n)) = 0$ identisk. Indsættes $z'=a'$

fås $(z_n - a_n)^m = q(a', z_n)(z_n - a_n)^m + r(a', (z_n - a_n))$

Heraf ses, at $q(a', z_n) = 1$ og $r(a', (z_n - a_n)) = 0$. Altså er $(z_n - a_n)^m - r(z', (z_n - a_n))$ et Weierstrass-polynomium med centrum a og $q(a) \neq 0$. Følgelig er $e(z) = 1/q(z)$ holomorf på en omegn af a, hvormed vi har eksistensen.

Til entydigheden bemærker først, at indsættes $z' = a'$ i (13) fås

$$(z_n - a_n)^m = (\alpha_0 + \alpha_1(z_n - a_n) + \cdots)(z_n - a_n)^k$$

hvor k er graden af p og hvor $\alpha_0 \neq 0$, da $e(a) \neq 0$. Følgelig er $k = m$. Ligningen (13) kan nu skrives

$$(z_n - a_n)^m = \frac{1}{e(z)} f(z) + r(z', (z_n - a_n))$$

hvor $r(z', (z_n - a_n)) = p(z', (z_n - a_n)) - (z_n - a_n)^m$ er et pol. af grad $< m$ i $(z_n - a_n)$. Af divisionssætningens entydighedsdel kan vi så slutte, at p præcis er det ovenfor fundne Weierstrass-polynomium.

Q.E.D

For et punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ betragtes mængden af par $(f, \mathcal{U})$, hvor $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ er en åben omegn af a og f en holomorf funktion på $\mathcal{U}$. I denne mængde indføres en relation $\sim_a$ ved:

$(f, \mathcal{U}) \sim_a (g, \mathcal{V}) \Leftrightarrow$ der findes åben omegn $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ af a, så f og g stemmer overens på $\mathcal{W}$. Denne relation ses let at være en ekvivalensrelation (idet fel-

les mængden af to åbne omegn af a er en åben omegn af a – det er kun transitiviteten, som volder noget problem). Fjernsynligt betyder $(f,U) \sim_a (g,V)$ præcis, at f og g har samme Taylorrække ud fra a. Mængden af ækvivalensklasser betegnes med $\mathcal{O}_a$ og for f holomorf på omegn af a betegnes klassen af f med $\gamma_a(f)$. Dette element i $\mathcal{O}_a$ kaldes <u>funktionskimen</u> af f i punktet a. Mængden $\mathcal{O}_a$ ses at kunne identificeres med mængden af konvergente potensrækker i $(z_1-a_1), \ldots, (z_n-a_n)$.

Vi kan definere kompositioner + og · ved
$(f,U)+(g,V) = (f+g, U\cap V)$, $(f,U)\cdot(g,V) = (f\cdot g, U\cap V)$
Disse operationer ses at harmonere med ækvivalensrelationen $\sim_a$ og $\mathcal{O}_a$ bliver herved en <u>ring</u>. Opfattes $\mathcal{O}_a$ som mængden af konvergente potensrækker ud fra a, nedskrives disse kompositioner åbenbart af de "formelle" algebraiske operationer med potensrækker

For et element $\gamma_a(f) \in \mathcal{O}_a$ er funktionsværdien $f(a)$ uafhængig af valget af repræsentant f, hvorfor det har mening at tale om værdien af $\gamma_a(f)$ i punktet a. Ét-elementet i $\mathcal{O}_a$ er åbenbart $\gamma_a(1)$ og vi ser, at $\gamma_a(f)$ er enhed i $\mathcal{O}_a$ (d.v.s. har en invers med hensyn til ·) præcis når $f(a)\neq 0$. Iff $\gamma_a(f\cdot g) = \gamma_a(f)\cdot\gamma_a(g) = \gamma_a(1)$ følger nemlig $f(a)\cdot g(a) = 1$, altså $f(a)\neq 0$. Er omvendt $f(a)\neq 0$ er $g(z) = 1/f(z)$ defineret og holomorf på en omegn af a og $\gamma_a(g)$ er fjernsynligt invers til $\gamma_a(f)$. I $\mathcal{O}_a$ gælder nulreglen. Hvis nemlig $\gamma_a(f\cdot g) = \gamma_a(f)\cdot\gamma_a(g) = \gamma_a(0)$ er $f\cdot g = 0$ på en omegn U af a. Vi kan vælge U sammenhængende (hvorved evt. mindre) og ser så af sætn. på s. 12, at enten f eller g er identisk 0 på

U altså $\gamma_a(f) = 0$ eller $\gamma_a(g) = 0$. Mængden $M_a$ af ikke-enheder i $\mathcal{O}_a$, altså $\gamma_a(f)$ så $f(a) = 0$, danner et ideal i $\mathcal{O}_a$. Hvis nemlig $f(a) = 0$ har vi $f(a)\,g(a) = (f \cdot g)(a) = 0$ for ethvert $\gamma_a(g) \in \mathcal{O}_a$, altså $\gamma_a(f) \in M_a$, $\gamma_a(g) \in \mathcal{O}_a \Rightarrow \gamma_a(f) \cdot \gamma_a(g) \in M_a$. Et ideal, som indeholder en enhed $\gamma_a(e)$ er hele $\mathcal{O}_a$. For $\gamma_a(f) \in \mathcal{O}_a$ har vi nemlig $\gamma_a(f) = \gamma_a(f/e)\,\gamma_a(e)$.

Det bevist kan samles i en sætning:

Ringen $\mathcal{O}_a$ af holomorfe funktionskim i punktet $a \in \mathbb{C}^n$ er en integritetsring. Enhederne er præcis sådanne $\gamma_a(f)$, hvor $f(a) \neq 0$. Mængden $M_a \subsetneq \mathcal{O}_a$ af ikke-enheder er et maximalt ideal i $\mathcal{O}_a$ (man siger, at $\mathcal{O}_a$ er en lokal ring)

Lad $\Lambda$ betegne en integritetsring*). Et element $d \in \Lambda$, $d \neq 0$ siges at være divisor i $a \in \Lambda$ (eller gå op i $a$) og vi skriver $d \mid a$, hvis der findes $c \in \Lambda$, så

$$a = d \cdot c$$

Divisorerne i ételementet 1 er åbenbart præcis enhederne i $\Lambda$. To elementer $a, b \in \Lambda$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ kaldes associerede, hvis $a \mid b$ og $b \mid a$, altså hvis $a = e \cdot b$ hvor $e$ er en enhed. Et element $a \in \Lambda$, $a \neq 0$, $a$ ikke enhed, kaldes irreducibelt, hvis enhver divisor i $a$ er associeret med $a$, d.v.s. af $a = b \cdot c$ følger, at $b$ eller $c$ er enhed. Integritetsringen $\Lambda$ siges at være en faktoriel ring, hvis der gælder

---

* En sådan er pr. definition kommutativ

(1) Ethvert element $a \neq 0$, $a \in \Lambda$ kan skrives som et produkt $a = p_1 \cdots p_m$ af endeligt mange irreducible elementer fra $\Lambda$.

(2) Hvis $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$ hvor $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ er irreducible elementer fra $\Lambda$, da er $m = n$ og der findes en permutation $\sigma$ af $\{1, \ldots, n\}$ så $p_j$ og $q_{\sigma(j)}$ er associerede for hvert $j$.

I en faktoriel ring findes <u>største fælles divisor</u>: Til endeligt mange elementer $a_1, \ldots, a_n$ fra $\Lambda$ findes et element $d \in \Lambda$ således, at de fælles divisorer i $a_1, \ldots, a_n$ præcis er divisorerne i $d$. Heraf er $d$ åbenbart bestemt på nær en enheds-faktor.

<u>Hvis $L$ er et kommutativt legeme er polynomiringen $L[x]$ faktoriel</u> (idet den er hovedidealring).

Lad $\Lambda$ være et faktorielt integritetsområde. Et polynomium $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \Lambda[x]$ kaldes <u>primitivt</u>, hvis $a_0, \ldots, a_n$ er indbyrdes primiske dvs. hvis største fælles divisor er 1. Der gælder nu:

<u>Hvis integritetsringen $\Lambda$ er faktoriel, da er også polynomiringen $\Lambda[x]$ faktoriel. Enhederne i $\Lambda[x]$ er præcis enhederne i $\Lambda$, opfattet som polynomier af grad 0. De irreducible elementer i $\Lambda[x]$ er præcis de irreducible elementer i $\Lambda$, opfattet som polynomier med grad 0, samt de primitive polynomier i $\Lambda[x]$, som er irreducible polynomier i polynomiringen $L[x]$, hvor $L$ betegner kvotientlegemet af $\Lambda$.</u>

For beviser af ovenstående algebraiske ting henvises til standard lærebøger i algebra.

Målet er nu at bevise

Ringen $\mathcal{O}_a$ af holomorfe funktionskim i punktet $a \in \mathbb{C}^n$ er en faktoriel ring.

Uden at miste meget kan vi antage $a = (0, \ldots, 0)$ og for kortheds skyld udelades a-et på $\mathcal{O}$ i beviset. Beviset vil foregå ved induktion efter antallet af variable og vi skriver derfor ${}_n\mathcal{O}$ for ringen af hol. fkt.kim i $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Vi har åbenbart inklusioner

$$ {}_n\mathcal{O} \subseteq {}_{n+1}\mathcal{O}, \quad {}_n\mathcal{O}[z_{n+1}] \subseteq {}_{n+1}\mathcal{O} $$

idet $z_{n+1}$ betragtes som en "tilkommende, ekstra variabel".

For $n = 1$, altså ${}_1\mathcal{O}$ er påstanden let: Kimet bestemt ved $z_1$ er irreducibelt, thi af

$$ z_1 = f(z_1)\, g(z_1) $$

følger $f(0) \neq 0$ eller $g(0) \neq 0$ (ellers kunne vi "trække" en faktor $z_1^2$ ud af produktet) altså $f$ eller $g$ giver enheder i ${}_1\mathcal{O}$. For hvert $f$ har vi

$$ f(z_1) = z_1^k\, g(z_1) $$

hvor $g(0) \neq 0$ altså $g$ enhed, hvormed (1) er bevist. Samtidig ses, at $f$ kun er irreducibel, hvis $k = 1$, altså hvis $f$ er associeret med $z_1$. Der er altså essentielt kun ét irreducibelt element i ${}_1\mathcal{O}$. Hvis $p_1, \ldots p_m$, $q_1, \ldots, q_n$ er irreducible og $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n$ har vi derfor

$$ z_1^m\, \hat{p}(z_1) = z_1^n\, \hat{q}(z_1) $$

hvor $\tilde{p}$ og $\tilde{q}$ er produkter af enheder, altså selv enheder. Heraf fås $m = n$ og derefter også (2) for ${}_1\mathcal{O}$.

Nøglen til induktionsskridtet er nu forberedelsessætningen. Begrebet Weierstrass-polynomium i ${}_{n-1}\mathcal{O}(z_n)$ har god mening: Det er et polynomium med højeste koefficient 1, hvis øvrige koefficienter er ikke-enheder i ${}_{n-1}\mathcal{O}$. Begrebet almen med hensyn til $z_n$ har øjensynlig også mening for elementer i ${}_n\mathcal{O}$ (altså for funktionskim) og forberedelsessætningen siger da, at hvis $f_0(f) \in {}_n\mathcal{O}$ er almen med hensyn til $z_n$ er den i ${}_n\mathcal{O}$ associeret med et og kun et Weierstrass-polynomium.

I resten af beviset skrives $f$ i stedet for $f_0(f)$ (der menes bestandigt kim $(0,\dots,0)$)

Vi viser nu nogle hjælpesætninger.

Produktet af to Weierstrass-polynomier i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er igen et Weierstrass-polynomium.

Dette ses straks af definitionen (sæt $(z_1,\dots,z_{n-1}) = (0,\dots,0)$).

Hvis $p \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er et Weierstrass-polynomium, da er enhver divisor $f \in {}_n\mathcal{O}$ i $p$ $({}_n\mathcal{O})$ associeret $({}_n\mathcal{O})$ med et Weierstrass-polynomium $q$. Kvotienten $p/q$ er ligeledes et Weierstrass-polynomium.

Bevis: $p$ er øjensynlig almen m.h.t. $z_n$. Heraf følger straks, at $f$ er almen m.h.t. $z_n$, idet jo $p = f \cdot g$, altså $p(0,z_n) = f(0,z_n)\cdot g(0,z_n)$ ikke er identisk 0. Vi har derfor $f$ associeret med et Weierstrass-polynomium $q$, $f = e\cdot q$, $e$ enhed.

Kvotienten $h = p/q$ er åbenbart også almen m.h.t. $z_n$ altså $h = e' \cdot r$, $r$ Weierstrass-pol. og $e'$ enhed. Vi har derfor

$$p = e' \cdot q \cdot r$$

Her er $q$ og $r$ Weierstrass-pol. hvormed også $q \cdot r$ er Weierstrass-pol. (se ovenfor). Idet nu $p$ er Weierstrass-pol og $e'$ enhed slutter vi af entydigheden i forberedelsessætningen, at $e' = 1$ og $p = q \cdot r$. Hermed er den påstand bevist.

<u>Et Weierstrass-polynomium $p \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er et irreducibelt element i ${}_n\mathcal{O}$ når og kun når det er et irreducibelt element i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$.</u>

Bevis: Et Weierstrass-polynomium af grad 0 er åbenbart $= 1$. Hvis altså $p$ er reducibel i ${}_n\mathcal{O}$ har vi ved den foregående hjælpesætning, at

$$p = q \cdot r,$$

hvor $q$ og $r$ er Weierstrass-polynomier af grad $> 0$ i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$. Denne ligning gælder åbenbart også i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, og idet et polynomium af grad $> 0$ ikke er enhed i polynomieringen ses heraf, at $p$ også er reducibel i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$.

Hvis $p$ er reducibel i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ har vi $p = q \cdot r$ med polynomier $q$ og $r$. De højeste koefficienter i $q$ og $r$ må være enheder, idet deres produkt er koefficienten 1 foran i Weierstrass-polynomiet. Både $q$ og $r$ har altså grad $> 0$, da de ellers var enheder i ${}_{n-1}\mathcal{O}$. Endvidere kan vi antage, at de begge har højeste koefficient 1, idet vi kan opnå dette ved at gange $q$ med den

højeste koefficient i r og r med den højeste koefficient i q, idet disse to koefficienter er indbyrdes inverse. Vi har altså

$$p = z_n^m + A_{m-1} z_n^{m-1} + \cdots + A_0$$
$$q = z_n^k + B_{k-1} z_n^{k-1} + \cdots + B_0$$
$$r = z_n^\ell + C_{\ell-1} z_n^{\ell-1} + \cdots + C_0$$

sættes $(z_1, \ldots, z_{n-1}) = (0, \ldots 0) = 0'$ ... fås

$$z_n^m = (z_n^k + B_{k-1}(0') z_n^{k-1} + \ldots)(z_n^\ell + C_{\ell-1}(0') z_n^{\ell-1} + \ldots)$$

Heraf sluttes, at $B_{k-1}(0') = \ldots = C_{\ell-1}(0')$. Polynomierne q og r er altså Weierstrass-polynomier med grad $> 0$ og ingen af dem derfor enhed i ${}_n\mathcal{O}$. Altså er p også reducibel i ${}_n\mathcal{O}$.

Nu kan vi foretage det induktive skridt.
Vi antager, at ${}_{n-1}\mathcal{O}$ er faktoriel og betragter $f \in {}_n\mathcal{O}$ $f \neq 0$, f ikke enhed. Fra side 27 vides det, at vi kan vælge koordinaterne, så f er almen m.h.t. $z_n$. Et sådant koordinatskift ændrer selvfølgelig ikke på de algebraiske egenskaber ved ${}_n\mathcal{O}$ og det "nye" ${}_{n-1}\mathcal{O}$ er lige så godt som det "gamle". Af forberedelsessætningen får vi så

$$f = \epsilon \cdot p$$

hvor $\epsilon \in {}_n\mathcal{O}$ er en enhed og $p \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ et Weierstrass-polynomium. Vi ved nu, at polynomiringen ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er faktoriel og vi kan derfor spalte p op

$$p = p_1 \cdots p_r$$

som produkt af irreducible elementer i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$.

Produktet af de højeste koefficienter i $p_1, \dots, p_r$ er 1, hvorfor disse alle er enheder i ${}_{n-1}\mathcal{O}$. Ganges hvert polynomium med den reciprokke koefficient, får alle polynomierne højeste koefficient 1 og der gælder stadig $p = p_1 \cdots p_r$

Det "nye" $p_j$ er associeret med det gamle i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ og derfor også irreducibelt her. Ligesom på foregående side sluttes så, at $p_1, \dots p_r$ er Weierstrass-polynomier. Idet de er irreducible i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er de altså også irreducible i ${}_n\mathcal{O}$. Hermed er (1) vist for ${}_n\mathcal{O}$.

Lad nu $f = g_1 \cdots g_s$
være en opspaltning i ${}_n\mathcal{O}$ i irreducible elementer af det samme $f$ som før. Da er $g_1 \mid p$, altså $\overset{\text{asso-}}{\uparrow g_1}$ ciert med et Weierstrass-polynomium $g_1$ = enhed $q_1$ og $p/q_1 = t_1$ er ligeledes et Weierstrass-polynomium. Videre gælder $g_2 \mid t_1$ altså $g_2$ = enhed · Weierstrass pol. $q_2$ etc. Heraf fås

$$p = q_1 \cdots q_s$$

hvor $g_j$ er associeret med $q_j$, som er et Weierstrass-polynomium. Idet dette er irreducibelt i ${}_n\mathcal{O}$ er det også irreducibelt i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$. I ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ har vi altså

$$p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$

med irreducible elementer. Idet ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ er faktoriel sluttes $r = s$ og eksistens af permutation $\sigma$, så $p_j$ er associeret i ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ med $q_{\sigma(j)}$, hvoraf

slutter, at $p_j$ er associeret med $g_j \cdot {}_n\mathcal{O}$, men det var (2) for ${}_n\mathcal{O}$.

Q.E.D.

Der findes en række forskellige beviser for fortegnsbestemmelsessætningen. Vi vil ikke give andre her, men benytte teknikken fra et andet tilfælde til at få forskellige oplysninger.

Hjælpesætning: Hvis $f$ er holomorf på en åben omegn af den afsluttede cirkelskive

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r \}$$

og ikke har nulpunkter på periferien $\{z \mid |z-a| = r\}$, da har kurveintegralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

en heltallig værdi, nemlig antallet af nulpunkter for $f$ i $\{z \mid |z-a| < r\}$, hvert tal med multiplicitet.

Bevis: Vi benytter residuesætningen på den meromorfe funktion $f'(z)/f(z)$. Polene er netop nulpunkterne for $f$. I omegnen af et nulpunkt $\alpha$ for $f$ har vi

$$f(z) = (z-\alpha)^k g(z) \quad \text{hvor } g(\alpha) \neq 0$$

og dermed

$$f'(z) = k(z-\alpha)^{k-1} g(z) + (z-\alpha)^k g'(z)$$

altså

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-\alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

I $\alpha$ er altså en pol af første orden, hvis residium er

ordenen af nulpunktet $a$ i $f$. Påstanden fås så af residuesætningen.

Q.E.D.

Sætning: Lad $f$ være en holomorf funktion på en åben omegn af $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ og almen med orden $m$ med hensyn til $z_n$ i $a$. Da findes en polycylinder $P(a;R)\subseteq\mathbb{C}^n$, så $f$ er holomorf på en åben omegn af $\overline{P}(a;R)$ og således at det for hvert $z'=(z_1,\dots,z_{n-1})\in P(a';R')$ gælder, at $f(z',z_n)$ har ialt $m$ nulpunkter (talt med multiplicitet) i cirklen $\{z_n\mid |z_n-a_n|<R_n\}$ og ingen nulpunkter på periferien $\{z_n\mid |z_n-a_n|=R_n\}$.

Bevis: Af forudsætningen fås

$$f(a',z_n)=(z_n-a_n)^m g(z_n)$$

med $g(a_n)\neq 0$. Følgelig findes $R_n>0$, så $f(a',z_n)$ ikke har nulpunkter med $|z_n-a_n|=R_n$ og præcis det $m$-dobbelte nulpunkt $z_n=a_n$ i cirklen $\{z_n\mid |z_n-a_n|<R_n\}$, men ikke andre nulpunkter her. Vi kan, idet $|f(z)|$ er kontinuert dernæst finde $R_1>0,\dots,R_{n-1}>0$, således at det for hvert $z'\in P(a',R')$ gælder, at $f(z',z_n)$ ikke har nulpunkter på $\{z_n\mid |z_n-a_n|=R_n\}$. For hvert $z'$ i $P(a',R')$ er integralet

$$I(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a_n|=R_n}\frac{\frac{\partial}{\partial z_n}f(z',\zeta)}{f(z',\zeta)}\,d\zeta$$

defineret, og det afhænger åbenbart kontinuert af $z'$. Ifølge hjælpesætningen antager $I(z')$ kun heltallige vær-

dier. Idet $I(a_n) = m$ fås påstanden nu af hjælpesætningen, idet $I(z') = m$ for hvert $z' \in P(a', R')$.

Q.E.D.

Ifølge forberedelsessætningen har vi

$$f(z) = e(z)\, p(z', z_n)$$

i en omegn af $a$. Vi kan tænke os $P(a,R)$ valgt, så dette gælder i $P(a;R)$. For hvert $z' \in P(a', R')$ kan vi da slutte, at nulpunkterne i $f(z', z_n)$ med $|z_n - a_n| < R_n$ også er nulpunkter i $p(z', z_n)$ og med mindst samme multiplicitet. Idet antallet af nulpunkter i $f(z', z_n)$ i $\{|z_n - a_n| < R_n\}$ er $m$ er disse følgelig præcis samtlige rødder i $m$'te grads polynomiet $p(z', z_n)$. Heraf sluttes "kontinuiteten af rødderne i et Weierstrass-polynomium":

Lad $p(z', z_n)$ være et Weierstrass-polynomium med centrum $a \in \mathbb{C}^n$. Da findes til hvert $\varepsilon > 0$ en polycylinder $P(a', r') \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$, således at hvis $z' \in P(a', r')$ da ligger samtlige rødder for polynomiet $p(z', z_n)$ i cirklen $\{z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n - a_n| < \varepsilon\}$.

Af hensyn til en anvendelse senere i kapitlet spinder vi lidt videre på dette tema:

Lad $p(z', z_n)$ være et Weierstrass-polynomium med centrum $a = (a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{C}^n$, defineret på en åben omegn af $\overline{P}(a;R) \subseteq \mathbb{C}^n$, hvor $P(a,R)$ er valgt, så det for hvert $z' \in P(a', R')$ gælder, at rødderne i polynomiet $p(z', z_n)$ alle ligger i cirklen $\{z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n - a_n| < R_n\}$. Til et

punkt $b = (b_1, \ldots, b_n) = (b', b_n) \in P(a,R)$, der har den egenskab, at $b_n$ er simpel rod (d.v.s. med multiplicitet 1) i polynomiet $p(b', z_n)$, findes da en polycylinder $P(b;r) \subseteq P(a;R)$, således at for hvert $z' \in P(b', r')$ har polynomiet $p(z', z_n)$ præcis én rod $h(z')$ med $|b_n - h(z')| < r_n$. Funktionen $h(z')$ er holomorf i polycylinderen $P(b'; r')$.

Bevis: Vi behøver en udvidelse af hjælpesætningen fra før: Hvis $f$ er holomorf på en omegn af $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$, hvis $f(z) \neq 0$ på $\{z \mid |z-a| = r\}$ og hvis

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta = 1$$

da har $f$ præcis ét nulpunkt i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$. Dette nulpunkt har multiplicitet 1 og dets værdi er

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

Bevis: Eksistensen af nulpunktet og at multipliciteten er 1 følger af den foregående hjælpesætning. Formlen for nulpunktet fås ved residuesætningen: Integranten er meromorf og har kun en singularitet i nulpunktet $z_0$. I en omegn af dette har vi

$$f(z) = (z - z_0) g(z) \quad \text{med} \quad g(z_0) \neq 0$$

og altså

$$f'(z) = g(z) + (z - z_0) g'(z)$$

hvorfor

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = z\left(\frac{1}{z-z_0} + g'(z)\right)$$

$$= z_0\frac{1}{z-z_0} + 1 + z\,g'(z)$$

hvoraf ses, at residiet er $z_0$, hvorefter påstanden fås.

Ved beviset for sætningen vælges nu $r_n$, således at $p(b', z_n)$ ikke har andre nulpunkter end $b_n$ i cirklen $\{ z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n - b_n| \le r_n \}$. Dernæst vælges $r_1, \dots, r_{n-1}$ således at for $z' \in P(b', r')$ har $p(z)$ ingen nulpunkter med $|z_n - a_n| = r_n$. Integralet

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - b_n| = r_n} \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} p(z', \zeta)}{p(z', \zeta)}\, d\zeta$$

har da værdien 1 for hvert $z' \in P(b', r')$ hvoraf vi får, at $p(z', z_n)$ for sådanne $z'$ har præcis ét nulpunkt $h(z')$ med $|h(z') - b_n| < r_n$ og at

$$h(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - b_n| = r_n} \zeta\, \frac{\frac{\partial}{\partial z_n} p(z', \zeta)}{p(z', \zeta)}\, d\zeta$$

Denne formel viser, at $h(z')$ er holomorf i $P(b'; r')$.

Q.E.D.

Vi kan også give en anvendelse af en helt anden art. Vi knytter an til sætningen på side 46:
I denne situation gælder, at hvis $g$ er en holomorf og begrænset funktion ($|g(z)| \le M$) på mængden

$P(a;r) \setminus \{ z \in P(a,r) \mid f(z) = 0 \}$, hvor $r_1 = R_1, \ldots, r_{n-1} = R_{n-1}, r_n > R_n$, da findes en entydig holomorf fortsættelse af $g(z)$ til hele $P(a;R)$, d.v.s. der findes præcis én holomorf funktion $G(z)$ på $P(a;R)$, som stemmer overens med $g(z)$ på $P(a,R) \setminus \{ z \mid f(z) = 0 \}$

Bevis: Hvis $G$ findes har vi ved Cauchy's integralformel

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a_n| = R_n} \frac{g(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta$$

hvilket viser entydigheden. Dette integral definerer endvidere en holomorf funktion $G(z)$ på $P(a;R)$, så problemet er blot at vise, at den er en fortsættelse af $g(z)$. Hertil betragtes et vilkårligt $z' \in P(a';R')$. Da er funktionen $g(z', z_n)$ holomorf i cirklen $\{ |z_n - a_n| < r_n \}$ på nær endeligt mange punkter og endviden begrænset. Ved Riemanns sætning om hævelige singulariteter i én variabel fås så, at $g(z', z_n)$ kan fortsættes holomorf til hele cirkelskiven. Cauchy's integralformel giver dernæst, at forstørrelsen – og dermed $g(z', z_n)$ selv – er givet ved integralet ovenfor, men så har vi påstanden.

Q.E.D.

Denne sætning om hævelige singulariteter kliver smukkere, når den indpasses i en mere generel ramme. Hertil må vi dog først indføre et lidt nyt begreb.

**Definition** Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. En delmængde $M \subseteq U$ kaldes en analytisk mængde i $U$, hvis

(1) $M$ er afsluttet relativt til $U$

(2) Til hvert punkt $a \in M$ findes en åben omegn $W \subseteq U$ af $a$ og endeligt mange holomorfe funktioner $f_1, \ldots, f_m$ på $W$, således at

$$M \cap W = \{ z \in W \mid f_1(z) = \ldots = f_m(z) = 0 \}$$

Sagt kort er en analytisk mængde en rel. afl. delmængde af $U$, som lokalt er fælles nulpunktsmængde for endeligt mange holomorfe funktioner.

Vi viser nu

**Hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er åben og sammenhængende, da er $U$ selv den eneste analytiske mængde $M \subseteq U$, som indeholder nogen åben, ikke tom delmængde af $U$**

Bevis: Vi antager, at $M \subseteq U$ er en analytisk mængde i $U$ og at $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Da er $U \cap \overline{\overset{\circ}{M}}$ afsluttet relativt til $U$ og ikke tom. Den er imidlertid også åben: Til $a \in U \cap \overline{\overset{\circ}{M}}$ kan vi nemlig finde en sammenhængende åben omegn $W \subseteq U$ af $a$ og holomorfe funktioner $f_1, \ldots, f_m$ på $W$, så

$$M \cap W = \{ z \in W \mid f_1(z) = \ldots = f_m(z) \}.$$

Nu er mængden $W \cap \overset{\circ}{M}$ åben og ikke tom (da $a \in \overline{\overset{\circ}{M}}$) og idet $W$ er sammenhængende er $f_1, \ldots, f_m$ følgelig identisk $0$ i $W$ ved identitetssætningen, idet de er iden-

tisk 0 på $\mathring{M} \subseteq M$. Følgelig er $W \subseteq M$, altså $W \subseteq \mathring{M} \subseteq \overline{\mathring{M}} \cap U$, da $W$ er åben — altså $a$ er indre punkt i $U$.

Q.E.D.

En analytisk mængde $M \subseteq U$ uden indre punkter - hvilket ifølge det overstående er det interessante tilfælde, vil vi kalde en lavere-dimensional analytisk mængde i $U$ (uden derfor at påstå, at vi har indført noget dimensionsbegreb for analytiske mængder).

Vi kan nu formulere og bevise:

Sætningen om hævelige singulariteter: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben og $M \subseteq U$ en lavere-dimensional analytisk mængde i $U$. Hvis $g$ er en holomorf funktion på $U \setminus M$, således at der til hvert punkt $a \in M$ findes en åben omegn $W \subseteq U$ af $a$, så $|g(z)|$ er begrænset på $W \setminus M$, da findes præcis én holomorf funktion $G(z)$ på $U$, så $g(z)$ og $G(z)$ stemmer overens på $U \setminus M$.

Bevis: Entydigheden af $G(z)$ er klar, idet $\mathring{M} = \emptyset$ altså $U \cap \overline{U \setminus M} = U$, hvorfor der højst er én mulighed for endda en kontinuert fortsættelse $G$ af $g$.

Lad nu $a \in M$. Da findes åben omegn $W$ (sammenhængende) af $a$, $W \subseteq U$ og en ikke-identisk 0 holomorf funktion $f$ på $W$, så

$$M \cap W \subseteq \{ z \in W \mid f(z) = 0 \}$$

thi ellers var a indre punkt i $M$ (se ovenfor - $f$ er en af $f_1, \ldots, f_m$). Efter et passende koordinatvalg (samt side 27) kan vi bruge resultatet på side 49-50 og slutter, at $g$ kan fortsættes holomorft til en omegn af $a$.

Disse lokale fortsættelser af $g$ fejer sig - på grund af identitetssætningen - sammen til den ønskede fortsættelse af $g$. Q.E.D.

<u>Corollar</u>: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben og sammenhængende. Hvis $M \subseteq U$ er en lavere-dimensional analytisk mængde i $U$, da er $U \setminus M$ også sammenhængende.

Bevis: Antag $U \setminus M = W_1 \cup W_2$ hvor $W_1, W_2$ er åbne, ikke tomme og $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Den ved

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \in W_1 \\ 1 & \text{for } z \in W_2 \end{cases}$$

definerede funktion er da holomorf og begrænset på $U \setminus M$. Da $U$ er sammenhængende, har den ifølge tidligere ingen holomorf fortsættelse til $U$. Modstrid! Q.E.D.

Vi vender os nu til nogle mere algebraisk betonede overvejelser. Lad $p(z', z_n)$ og $q(z', z_n)$ være holomorfe funktioner på $P(a; R) \subseteq \mathbb{C}^n$, så $p$ og $q$ er

polynomier i $(z_n - a_n)$ med koefficienter, der er holomorfe funktioner af $z' \in P(a', R')$.

$$p(z', z_n) = A_k(z')(z_n - a_n)^k + \cdots + A_0(z')$$

$$q(z', z_n) = B_\ell(z')(z_n - a_n)^\ell + \cdots + B_0(z')$$

hvor $A_k$ og $B_\ell$ ikke er identisk 0 i $P(a', R')$. Hvis $k \geq \ell$ har vi da en <u>divisionsligning</u>

$$(15) \quad F(z')\, p(z', z_n) = s(z', z_n)\, q(z', z_n) + r(z', z_n)$$

hvor $r$ og $s$ er polynomier i $z_n - a_n$, graden af $r < \ell$ og hvor $F(z')$ ikke er identisk 0.

Vi har nemlig, at

$$(16) \quad B_\ell(z')\, p(z', z_n) - \left(A_k(z') \cdot (z_n - a_n)^{k-\ell}\right) q(z', z_n)$$

åbenbart er et pol. af grad $\leq k-1$ i $(z_n - a_n)$. Hvis graden er $< \ell$ er vi færdige, ellers anvender proceduren igang til på polynomiet (16) i stedet for $p(z', z_n)$, etc. Man ser, at $F(z')$ kan vælges som en potens af $B_\ell(z')$.

Dette betyder, at <u>Euklids algoritme</u> "næsten" kan gennemføres for to sådanne polynomier:

$$(17) \quad \begin{aligned} F_1(z')\, p(z', z_n) &= s_1(z', z_n)\, q(z', z_n) + r_1(z', z_n) \\ F_2(z')\, q(z', z_n) &= s_2(z', z_n)\, r_1(z', z_n) + r_2(z', z_n) \\ F_3(z')\, r_1(z', z_n) &= s_3(z', z_n)\, r_2(z', z_n) + r_3(z', z_n) \\ &\cdots \\ F_{p+2}(z')\, r_p(z', z_n) &= s_{p+2}(z', z_n)\, r_{p+1}(z', z_n) + r_{p+2}(z', z_n) \\ &\cdots \\ F_{t+2}(z')\, r_t(z', z_n) &= s_{t+2}(z', z_n)\, r_{t+1}(z', z_n) \end{aligned}$$

hvor divisionskæden må slutte, da restenes grader aftager.

I det ringen $\mathcal{O}_{a'}$ af holomorfe funktionskim af de variable $z_1, \ldots, z_{n-1}$ i punktet $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ er faktoriel, har vi i omegnen af $a$

$$r_{t+1}(z', z_n) = F(z')\, d(z', z_n)$$

hvor $F(z')$ ikke er identisk $0$ og hvor $d$ er et polynomium efter $z_n - a_n$ (koeff. hvl. fkt. af $z'$), så $\gamma_a(d) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n - a_n]$ er et <u>primitivt</u> polynomium. Af algoritmen (17) sluttes rekursivt, at $\gamma_a(d)$ indeh. for polynomiringen $\mathcal{O}_{a'}[z_n - a_n]$ er divisor i

$$\gamma_a(F_1 \cdots F_{t+2})\, \gamma_a(p) \text{ og i } \gamma_a(F_1 \cdots F_{t+2})\, \gamma_a(q)$$

Idet $\gamma_a(F_1 \cdots F_{t+2}) \neq 0 \in \mathcal{O}_{a'}$ og da $\gamma_a(d)$ er primitivt sluttes heraf, at $\gamma_a(d)$ <u>er fælles divisor for</u> $\gamma_a(p)$ <u>og</u> $\gamma_a(q)$ i polynomiringen $\mathcal{O}_{a'}[z_n - a_n]$ og dermed også <u>i ringen</u> $\mathcal{O}_a$.

Flyttes første led på højre side over på venstre i hver af identiteterne (undtagen den sidste) i algoritmen får vi ved at begynde med den næstsidste ligning og successivt indsætte en identitet

$$r_{t+1}(z', z_n) = a(z', z_n)\, p(z', z_n) + b(z', z_n)\, q(z', z_n)$$

eller altså

$$(18) \quad F(z')\, d(z', z_n) = a(z', z_n)\, p(z', z_n) + b(z', z_n)\, q(z', z_n)$$

Heraf ses, at hvis $\gamma(u) \in \mathcal{O}_a$ er fælles divisor for $\gamma_a(p)$ og $\gamma_a(q)$, da er $\gamma(u)$ divisor i $\gamma_a(F) \cdot \gamma_a(d)$. Vi antager nu, at <u>enten $p$ eller $q$ er almen med hensyn til $z_n$ i punktet $a$</u>. Ifølge bem. side 41 er $\gamma_a(u)$ da associe-

net med et Weierstrass-polynomium og vi kan derfor antage, at $u$ er et Weierstrass-polynomium. For nu at slutte, at $\gamma_a(u)$ er divisor i $\gamma_a(d)$ behøver vi blot vise: Hvis $\gamma_a(F) \neq 0 \in \mathcal{O}_a$, $F = F(z')$, **d.v.s. $F$ afhænger ikke af $z_n$** og hvis $\gamma_a(u)$ er et Weierstrass-polynomium med grad $>0$, da er $\gamma_a(F)$ og $\gamma_a(u)$ indbyrdes primiske.

Bevis: Hvis $\gamma_a(F)$ og $\gamma_a(u)$ har en fælles divisor, som ikke er enhed kan denne (da den er divisor i $\gamma_a(u)$) vælges som et Weierstrass-polynomium af grad $>0$. På en omegn af $a$ har vi dermed en relation

$$F(z') = \varphi(z)\, u(z', z_n)$$

hvor $u$ er et Weierstrass-polynomium med grad $>0$. Indskrevet i denne omegn af $a$ vælges nu en polycylinder til polynomiet $u$ som anført på side 47. Idet $u$ har grad $>0$ kan vi da til hvert $z' \in P(a', R')$ finde et $z_n$ nær ved $a_n$ (d.v.s. $(z', z_n)$ i den omtalte omegn af $a$), så $u(z', z_n) = 0$. Heraf følger, at $F$ er identisk 0 på en omegn af $a$, hvilket er en modstrid.

Idet vi benytter betegnelsen "polynomium efter $(z_n - a_n)$" for et polynomium i $(z_n - a_n)$, hvis koefficienter er holomorfe funktioner af $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ på en omegn af $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$, har vi dermed bevist:

Hvis $p$ og $q$ er polynomier efter $(z_n - a_n)$ og hvis $p$ eller $q$ er almen med hensyn til $z_n$ i punktet $a$, da består en identitet

$$F(z')\, d(z', z_n) = a(z', z_n)\, p(z', z_n) + b(z', z_n)\, q(z', z_n)$$

på en omegn af a, hvor $F(z')$ ikke er identisk 0, hvor $d, a$ og $b$ er polynomier efter $(z_n - a_n)$ og hvor $\gamma_a(d)$ er største fælles divisor for $\gamma_a(p)$ og $\gamma_a(q)$ i ringen $\mathcal{O}_a$. Det bemærkes, at $d$ er associeret i $\mathcal{O}_a$ med et Weierstrass-polynomium. Tillader vi ydermere en enhed-faktor fra $\mathcal{O}_a$ på venstre side i formlen (altså $e(z)$, hvor $e(a) \neq 0$) kan $d$ altså vælges som et Weierstrass-polynomium.

En vigtig følge af denne sætning er:
Hvis $f$ og $g$ er holomorfe funktioner på en omegn af $a \in \mathbb{C}^n$ og hvis $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(g)$ er indbyrdes primiske i $\mathcal{O}_a$, da findes en åben omegn $U \subseteq \mathbb{C}^n$ af $a$, således at for $b \in U$ er $\gamma_b(f)$ og $\gamma_b(g)$ indbyrdes primiske i $\mathcal{O}_b$.

Bevis: Vi har det trivielle tilfælde hvor den ene af $f$ eller $g$ er identisk 0, hvorfor den anden er enhed i $\mathcal{O}_a$ d.v.s. $f(a) \neq 0$ (eller $g(a) \neq 0$). Vi vælger da blot $U$, så $f(b) \neq 0$ (...) for $b \in U$.

Det interessante tilfælde er det, hvor hverken $f$ eller $g$ er identisk 0. Da er $f \cdot g$ heller ikke identisk 0. Efter et koordinatskift er derfor både $f$ og $g$ almene med hensyn til $z_n$, hvorfor vi kan antage, at $f$ og $g$ er Weierstrass-polynomier. På en omegn $U$ af $a$ har vi derfor

$$e(z)\, F(z') = a(z)\, f(z) + b(z)\, g(z)$$

hvor $F$ ikke er identisk 0, idet 1 er største fælles di-

visor, og hvor $e(z) \neq 0$ for $z \in U$. For $b \in U$ har vi, at $f$ og $g$ er almene m.h.t. $z_n$ i $b$. De kan nemlig omformes til polynomier efter $(z_n - b_n)$ med højeste koefficient 1. En eventuel ikke-triviel fælles divisor $\gamma_b(h) \in \mathcal{O}_b$ kan altså vælges som et Weierstrass-polynomium. Dette giver modstrid, idet $\gamma_b(h)$ ikke kan være divisor i $\gamma_b(F)$ ifølge bem. øverst på side 56. Q.E.D.

Et element $\gamma_a(f) \in \mathcal{O}_a$ kaldes <u>kvadratfrit</u>, hvis der ikke findes en ikke-enhed $\gamma_a(g) \in \mathcal{O}_a$, så $\gamma_a(g^2)$ er divisor i $\gamma_a(f)$. At $\gamma_a(f)$ er kvadratfrit betyder øjensynligt, at dets opspaltning i irreducible faktorer ikke indeholder to associerede faktorer. Der gælder: <u>Et Weierstrass-polynomium $\gamma_a(f) \in \mathcal{O}_a$ er kvadratfrit når og kun når $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(\frac{\partial}{\partial z_n} f)$ er indbyrdes primiske</u>:

Vi kan spalte $f$ som produkt af Weierstrass-polynomier, som er irreducible i $\mathcal{O}_a$

$$f = f_1 \cdots f_k$$

Da er

$$\frac{\partial}{\partial z_n} f = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu \cdot \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu$$

Heraf ses, at hvis $f_i$ og $f_j$ $(i \neq j)$ er associerede, da er $f_i$ divisor i $\frac{\partial}{\partial z_n} f$.

På den anden side er $f_\nu$ og $\frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu$ indbyrdes prim

mistke i a. Ellers var – da $f_\nu$ er irreducibel – $f_\nu$ divisor i $\frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu$, hvilket ikke er muligt. Funktionen $\frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu$ er nemlig altså m.h.t. $z_n$ i a med en ordenen, som er lavere end graden af $f_\nu$, hvorfor et Weierstrass-polynomium, som er divisor i $\frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu$ har lavere grad (se resultatet nederst på side 41).
Hvis $f_\nu$ er divisor i $\frac{\partial}{\partial z_n} f$ har vi altså, da

$$\frac{\partial}{\partial z_n} f - \sum_{\lambda \neq \nu} \frac{\partial}{\partial z_n} f_\lambda \cdot \prod_{\mu \neq \lambda} f_\mu = \frac{\partial}{\partial z_n} f_\nu \cdot \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu$$

at $f_\nu$ er divisor i $\prod_{\mu \neq \nu} f_\mu$, hvorfor $f_\nu^2$ er divisor i $f$.

Q.E.D.

Ved den foregående sætning slutter man let

<u>Lad $f$ være holomorf på en åben omegn af $a \in \mathbb{C}^n$. Hvis $\mathfrak{z}(a|f)$ er kvadratfri, da findes en åben omegn $U$ af $a$, så $\mathfrak{z}(b|f)$ er kvadratfri for hvert $b \in U$.</u>

Vi kan nemlig antage, at $f$ er et Weierstrass-polynomium med centrum $a$, og $f$ og $\frac{\partial}{\partial z_n}$ er da indbyrdes primiske i $a$. De er dermed også indbyrdes primiske i ethvert punkt $b$ i en omegn $U$ af $a$. Nu benyttes den første del af beviset (side 58 nederst) altså ikke, at $f$ er et Weierstrass-polynomium. Vi kan derfor heraf slutte, at $\mathfrak{z}(b|f)$ er kvadratfri i ethvert $b \in U$.

Q.E.D.

Lad $f$ og $g$ være holomorfe funktioner på en åben omegn $U \subseteq \mathbb{C}^n$ af $a \in \mathbb{C}^n$. Hvis ethvert nulpunkt $z \in U$ for $f$ også er nulpunkt for $g$, da er enhver irreducibel divisor $\gamma a(h)$ i $\gamma a(f)$ ligeledes divisor i $\gamma a(g)$. Hvis $\gamma a(f)$ ydermere er kvadratfri, da er $\gamma a(f)$ divisor i $\gamma a(g)$.

Bevis: Tilfældet hvor $f$ eller $g$ er identisk 0 er trivielt. Vi antager derfor, at $f$ og $g$ er almene med hensyn til $z_n$ og kan dermed antage, at de er Weierstrass-polynomier. Hvis nu $\gamma a(h)$ er en divisor i $\gamma a(f)$, som er irreducibel, og som ikke er divisor i $\gamma a(g)$, kan vi vælge $h$ som et Weierstrass-polynomium (forberedelsessætn.). Af sætn. på side 56 fås dernæst en identitet

$$F(z') = a(z)h(z) + b(z)g(z)$$

på en omegn af $a$. Nu er ~~$h$~~ $h(z)$ et Weierstrass-polynomium af grad $> 0$ og ethvert nulpunkt for $h$ er nulpunkt for $f$ og dermed også for $g$. Ligesom på side 56 (midten) sluttes heraf, at $F(z')$ er identisk 0, hvilket giver modstrid.

Hvis $f$ er kvadratfri er den produkt af indbyrdes primiske irreducible faktorer. Disse er allesammen divisorer i $g$, hvorfor $f$ er divisor i $g$. Q.E.D.

Lad $f$ og $g$ betegne holomorfe funktioner på en polycylinder $P(a;R) \subseteq \mathbb{C}^n$ og antag, at $g$ ikke er identisk 0. Kvotienten $f(z)/g(z)$ er da defineret og holomorf på $P(a;R) \setminus \{z \mid g(z)=0\}$, hvilket er en overalt tæt åben delmængde af $P(a;R)$ (se side 51-52). Vi ønsker at studere kvotienten i omegnen af punktet $a$. Vi kan derfor antage, at $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(g)$ er indbyrdes primiske i $\mathcal{O}_a$, idet vi i en omegn af $a$ har $f = d \cdot f_1$, $g = d \cdot g_1$, hvor $\gamma_a(f_1)$ og $\gamma_a(g_1)$ er indbyrdes primiske og hvor åbenbart $f_1/g_1 = f/g$. Der optræder her 3 tilfælde:

1° $g(a) \neq 0$. Da er kvotienten holomorf på en omegn af $a$.

2° $g(a) = 0$, $f(a) \neq 0$. Da kan kvotienten ikke fortsættes holomorft til en fast omegn af $a$. For $g(z) \neq 0$ gælder øjensynligt

$$z \to a \Rightarrow \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \to \infty$$

Vi siger, at $f/g$ har en pol (af første art) i $a$.

3° $g(a) = 0$, $f(a) = 0$ (og $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(g)$ indbyrdes primiske). Da kan kvotienten ikke fortsættes holomorft til en fast omegn af $a$; der gælder endda: For hvert komplekst tal $A$ findes punkter $z$ vilkårligt nær $a$, så

$$g(z) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{f(z)}{g(z)} = A.$$

Bevis: Indirekte: Vi antager altså, at der findes $A \in \mathbb{C}$ således at for $z$ tilstrækkeligt nær ved $a$ (d.v.s. i en omegn af $a$) gælder, at

$$f(z) - Ag(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(z) = 0$$

Ifølge sætningen på side 60 medfører dette, at enhver irreducibel divisor $\gamma_a(h)$ i $\gamma_a(f - Ag)$ ligeledes er divisor i $\gamma_a(g)$. Sådanne divisorer findes, da $f(a) - Ag(a) = 0$. Man ser da, at $\gamma_a(h)$ åbenbart også er divisor i $\gamma_a(f) = \gamma_a(f - Ag) + A\gamma_a(g)$, hvilket strider mod, at $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(g)$ er indbyrdes primiske.

Vi siger, at $f/g$ har en singularitet af anden art i $a$, eller at $a$ er et <u>ubestemthedspunkt</u> for $f/g$.

Før vi definerer begrebet meromorf funktion, er det bekvemt med endnu et begreb.

<u>Def.</u> Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. En analytisk mængde $M \subseteq U$ i $U$ kaldes en <u>principal-analytisk mængde</u>, hvis der til ethvert punkt $a \in M$ findes en åben omegn $W \subseteq U$ af $a$ og en holomorf funktion $f$ på $W$, som ikke er identisk 0, således at

$$M \cap W = \{ z \in W \mid f(z) = 0 \}.$$

En principal-analytisk mængde er kaldet $n-1$-dimensional (se side 51-52).

Komplekse analyse I, 1967

Vi kan nu definere:

Med en meromorf funktion $F$ på den åbne mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ forstår et par $(f, M)$ af en principal-analytisk mængde $M \subseteq U$ i $U$ og en holomorf funktion $f$ på $U \setminus M$ således at:

1. Funktionen $f$ er ikke begrænset i omegnen af noget punkt $a \in M$ (d.ks. der findes ikke omegn $W$, så $f$ er begrænset på $W \setminus M$)
2. Til hvert punkt $a \in M$ findes en omegn $W \subseteq U$ af $a$ og holomorfe funktioner $g$ og $h$ på $W$, hvor $g$ ikke er identisk $0$ og hvor der gælder

$$(\mathrm{II}) \qquad f \cdot g = h$$

på $W \setminus M$.

Mængden $M$ kaldes singularitetsmængden for den meromorfe funktion $F$.

For $n=1$ får det vellandte begreb, idet en principal analytisk mængde $M \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ er en diskret punktmængde i $U$.

I det følgende benyttes også betegnelsen $F$ for den til $F$ hørende holomorfe funktion $f$ på $U \setminus M$.

Til definitionen bør føjes tilfældet $M = \emptyset$, i hvilket tilfælde den meromorfe funktion $F$ er en holomorf funktion på $U$.

Lad $F$ være en meromorf funktion på $U \subseteq \mathbb{C}^n$ med singularitetsmængde $M$. Til ethvert $a \in M$ findes da åben omegn $W$ af $a$ og holomorfe funktioner $g$ og $h$ på $W$, $g$ ikke identisk 0, så

$$(10) \qquad F \cdot g = h$$

på $W \setminus M$. Denne relations gyldighed ændres åbenbart ikke, hvis samme holomorfe divisor i $g$ og $h$ fjernes fra disse. Ved eventuelt at vælge $W$ mindre og ved boldivision kan vi derfor antage, at $\gamma_a(g)$ og $\gamma_a(h)$ er indbyrdes primiske. Ifølge sætningen på side 57 kan vi så endda antage, at $W$ er valgt, så $\gamma_b(g)$ og $\gamma_b(h)$ er indbyrdes primiske for ethvert $b \in W$. Ifølge side 61-62 er ethvert $b \in W$, hvor $g(b) = 0$ et singulært punkt for kvotienten $h/g$ og denne har på den anden side ikke andre singulære punkter i $W$. Hermed er vi klar, at

$$M \cap W = \{ z \in W \mid g(z) = 0 \}.$$

Idet vi for $a \in U \setminus M$ kan vælge omegn $W$ af $a$, så $W \cap M = \emptyset$, kan vi i et sådant $W$ vælge $g = 1$, $h = F$, hvormed vi har bevist:

Hvis $F$ er en meromorf funktion på $U \subseteq \mathbb{C}^n$, da findes til hvert punkt $a \in U$ en åben omegn $W \subseteq U$ og på $W$ holomorfe funktioner $g$ og $h$, hvor $g$ ikke er identisk 0, hvor $\gamma_b(g)$, $\gamma_b(h)$ er indbyrdes primiske i ethvert punkt $b \in W$, hvor $M \cap W = \{ z \in W \mid g(z) = 0 \}$ og hvor $F(z)\, g(z) = h(z)$ for $z \in W \setminus M$.

Hvis $W_1$ og $W_2$ betegner to sådanne åbne mængder med henholdsvis funktioner $g_1, h_1$ og $g_2, h_2$ og hvis $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ har vi

$$\frac{h_1}{g_1} = \frac{h_2}{g_2} \quad \text{på } W_1 \cap W_2 \setminus M$$

altså

$$h_1 g_2 = h_2 g_1 \quad \text{på } W_1 \cap W_2 \setminus M$$

og dermed på $W_1 \cap W_2$, da $W_1 \cap W_2 \setminus M$ er overalt tæt heri. For hvert $b \in W_1 \cap W_2$ er $\gamma_b(g_1)$ og $\gamma_b(h_1)$ indbyrdes primiske, hvorfor $\gamma_b(g_1)$ er divisor i $\gamma_b(g_2)$. Heraf slutter, at $g_2/g_1$ er holomorf på $W_1 \cap W_2$. Den samme slutning anvendt et par gange til giver, at vi har relationer

$$(20) \qquad \begin{aligned} g_2 &= e\, g_1 \\ h_2 &= e\, h_1 \end{aligned}$$

på $W_1 \cap W_2$, hvor $e$ er holomorf og nulpunktfri på $W_1 \cap W_2$. Den principal-analytiske mængde $M_0$, som derfor defineres ved $h$-erne, idet jo $h_1(z) = 0$ når og kun når $h_2(z) = 0$ for $z \in W_1 \cap W_2$, kaldes <u>nulpunktsmængden</u> for den meromorfe funktion $F$. Mængden $M_0 \setminus M$ er øjensynlig nulpunktsmængden for den holomorfe funktion $F$ på $U \setminus M$, mens $M_0 \cap M$ kaldes <u>ubestemthedsmængden</u> for $F$, idet den præcis er mængden af ubestemthedspunkter (sml. side 61–62).

Vi ønsker nu at definere sum og produkt af

meromorfe funktioner. Hertil behøves to bemærkninger: Hvis $M_1 \subseteq U$, $M_2 \subseteq U$ er principal-analytiske mængder i $U$, da er $M_1 \cup M_2$ en principal-analytisk mængde i $U$:

Det er klart, at $M_1 \cup M_2$ er afsluttet relativt til $U$. Hvis $a \in M_1 \cup M_2$ er der tre muligheder

(i) $a \in M_1$, $a \notin M_2$. Vi vælger så omegnen $W$ af $a$, så $W \cap M_2 = \emptyset$ og så $M_1 \cap W = \{z \in W \mid f(z) = 0\}$, men så er $(M_1 \cup M_2) \cap W = \{z \in W \mid f(z) = 0\}$

(ii) $a \notin M_1$, $a \in M_2$. Dette tilfælde er analogt til (i).

(iii) $a \in M_1 \cap M_2$. Da vælges omegnen $W$ af, så $M_1 \cap W = \{z \in W \mid f_1(z) = 0\}$, $M_2 \cap W = \{z \in W \mid f_2(z) = 0\}$ og vi har $(M_1 \cup M) \cap W = \{z \in W \mid f_1(z) \cdot f_2(z) = 0\}$

Hvis $M' \subseteq U$ er en principal-analytisk mængde og $f$ en holomorf funktion på $U \setminus M'$, så 2 på side 63 er opfyldt (med $M'$ for $M$), da findes præcis én meromorf funktion $F$ på $U$ med singularitetsmængde $M \subseteq M'$, så $F$ og $f$ stemmer overens på $U \setminus M'$. Entydigheden er klar. Hvis $F$ findes er $M$ præcis mængden af punkter i $U$, så $f$ ikke er begrænset på $W \cap (U \setminus M')$ for nogen omegn $W$ af punktet. Desuden stemmer $F$ og $f$ overens på $U \setminus M'$ som er ovenalt tæt i $U \setminus M$. Ved eksistensen kan vi bruge overvejelserne på side 64-65, som (påner

Konklusionen om singularitetsmængden M på side 64) ikke benyttes i med kun 2 i def. af meromorf funktion. Heved får M som nulpunktsmængden for "nævnere" g og selve F som værdien af kvotienterne f/g på U\M.

For meromorfe funktioner $F_1$ og $F_2$ på U med singularitetsmængder $M_1$ og $M_2$ har vi denne situation for $F_1+F_2$ og $F_1 \cdot F_2$ på $U \setminus M'$, $M' = M_1 \cup M_2$. Heved er sum og produkt defineret og man ser, at sing. mængderne for $F_1+F_2$ og $F_1 \cdot F_2$ er delmængder af $M_1 \cup M_2$.

Der gælder identitetssætning for meromorfe funktioner på sammenhængende åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$: Hvis $F_1$ og $F_2$ med sing. mgd. $M_1$ og $M_2$ er meromorfe på U og hvis $F_1$ og $F_2$ stemmer overens på en åben, ikke tom delmængde af $U \setminus (M_1 \cup M_2)$, da stemmer de overens er U (d.v.s. de er samme meromorfe funktion). Dette følge ved identitetssætn. for holomorfe funktioner, idet $U \setminus (M_1 \cup M_2)$ er sammenhængende (side 53).

Hvis U er en sammenhængende åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ danner de meromorfe funktioner på U et legeme

Bevis: Problemet er at eftervise eksistensen af reciprok til meromorf funktion F på U, som ikke er identisk 0. Hertil tager vi udgangspunkt i overvejelserne på side 65, nemlig formel (20). Man ser her, at hvis $h_1$ er identisk

0, da er også $h_2$ identisk 0 — dermed alle $h$ identisk 0 på grund af sammenhængen, eller om man vil: den analytiske mængde $M_0$ har et indre punkt og er dermed $= U$ (side 51). (Her kan vi iøvrigt en konstruktion tel side 65: $M_0$ er kun principal-analytisk, hvis intet $h$ er identisk 0). Heraf ses, at når $F$ ikke er identisk 0, da er intet $h$ identisk 0. Kvotienterne $g/h$ er holomorfe uden for den principal-analytiske mængde $M_0$ og definerer åbenbart den reciprokke funktion til $F$. Man ser, at $M_0$ præcis er singularitetsmængde for $1/F$ og $M$ præcis nulpunktsmængde for $1/F$. Funktionerne $F$ og $1/F$ har dermed samme uendelighedsmængde.

⟨0⟩

Den resterende del af kap. 2 bliver ikke gennemgået ved forelæsning.

Vi slutter dette kapitel med en lidt nærmere behandling af principal-analytiske mængder (den generelle teori for analytiske mængder er betydeligt mere kompliceret og vil ikke blive behandlet her).

Anbefales til selvstudium

Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben og $M \subseteq U$ en principal-analytisk mængde. Til hvert punkt $a \in M$ findes da åben omgn. $W \subseteq U$ af $a$ og holomorf funktion $f$ på $W$, så

$$M \cap W = \{z \in W \mid f(z) = 0\}$$

Vi siger, at $f$ er en minimal funktion for $M$ i $W$ eller, at $f(z) = 0$ er en minimal-ligning for $M$ i $W$.

hvis det for hvert $b \in \tilde{W}$ gælder, at $\gamma_b(f)$ er kvadratfri. Til hvert $a \in M$ kan vi finde åben omegn $\tilde{W} \subseteq U$ af $a$ og holomorf funktion $\tilde{f}$ på $\tilde{W}$ som er minimalfunktion for $M$ i $\tilde{W}$: Har vi nemlig $f$ og $W$ som ovenfor, kan $f$ opspaltes på en omegn af $a$

$$f = f_1 \cdots f_p$$

hvor $\gamma_a(f_1), \ldots, \gamma_a(f_p)$ er irreducible. Disse kan samles i klasser af indbyrdes associerede og vi tager nu en funktion fra hver klasse og danner deres produkt

$$\tilde{f} = f_{\tilde{1}} \cdots f_{\tilde{q}} .$$

Da er $\gamma_a(\tilde{f})$ øjensynlig kvadratfri og divisor i $\gamma_a(f)$. På den anden side findes et nat.tal $m$ (nemlig det største antal elementer i en af de omtalte klasser), så $\gamma_a(f^m)$ er divisor i $\gamma_a(\tilde{f})^m$. Vi kan altså finde en omegn $\tilde{W}$ af $a$, så $\gamma_b(\tilde{f})$ er kvadratfri for ethvert $b \in \tilde{W}$ (se side 59) og så der i $\tilde{W}$ gælder relationerne

$$f = g\tilde{f}$$
$$f^m = h \cdot \tilde{f}$$

med holomorfe funktioner $g$ og $h$ i $\tilde{W}$. Disse relationer giver

$$M \cap \tilde{W} = \{ z \in \tilde{W} \mid f(z) = 0 \} \subseteq \{ z \in \tilde{W} \mid \tilde{f}^m(z) = 0 \}$$
$$= \{ z \in \tilde{W} \mid \tilde{f}(z) = 0 \} \subseteq \{ z \in \tilde{W} \mid f(z) = 0 \} = M \cap \tilde{W}$$

altså det ønskede. QED

Grunden til glosen minimalfunktion er følgende:
*Hvis $f$ er minimalfunktion i $W \subset U$ for den principal-analytiske mængde $M \subset U$ og hvis $g$ er en holomorf funktion på en åben mængde $V \subseteq W$, så $g(z) = 0$ for $z \in M \cap V$, da har $g$ formen $g = f \cdot h$, hvor $h$ er en holomorf funktion på $V$*

Bevis: For $z \in W \setminus M$ er $f(z) \neq 0$ og kvotienten $g/f$ dermed holomorf i en omegn af $z$. For $a \in W \cap M$ kan vi bruge sætningen på side 60 og slutte, at $\mathfrak{z}(f)$ er divisor i $\mathfrak{z}(g)$ altså at kvotienten $g/f$ er holomorf på en omegn af $a$. Q.E.D.

Af denne sætning følger, at to minimalfunktioner for $M$ kun adskiller sig med en faktor, som er en holomorf funktion uden nulpunkter.

Lad $a \in M$ og lad $f$ være en minimalfunktion for $M$ i en omegn af $a$. Punktet $a$ kaldes da et *regulært punkt af $M$*, hvis

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a)\right) \neq (0, \ldots, 0)$$

og et *singulært punkt på $M$*, hvis

$$(22) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a)\right) = (0, \ldots, 0).$$

I det en vilkårlig anden minimalfunktion $\tilde{f}$ for $M$ på en omegn af $a$ har formen $\tilde{f} = e \cdot f$, hvor $e(a) \neq 0$

hvor vi

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} = e\frac{\partial f}{\partial z_k} + f\frac{\partial e}{\partial z_k}$$

og dermed, da $f(a)=0$ og $e(a)\neq 0$, at

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k}(a)=0 \iff \frac{\partial f}{\partial z_k}(a)=0$$

hvorfor begreberne regulært og singulært punkt er uafhængige af valget af minimalfunktion. Af formlen (12') på side 5 kan man også se, at et lineært ikke-singulært skift af komplekse koordinater i $\mathbb{C}^n$ slet ikke ændre på, hvilke punkter der er regulære og hvilke der er singulære.

Mængden $M^s \subseteq M$ af singulære punkter for $M$ er en analytisk mængde i $U$

Bevis: $M^s$ er afsluttet relativt til $U$:

Hvis $a \notin M^s$ er der to muligheder

(i) $a \notin M$, da findes omegn $W$ af $a$, så $W \cap M = \emptyset$ altså $W \cap M^s = \emptyset$

(ii) $a \in M$. Da findes omegn $W$ af $a$ og minimalfunktion $f$ for $M$ i $W$. Vi har $\frac{\partial f}{\partial z_k}(a) \neq 0$ for et eller andet $k$, $1 \leq k \leq n$ og dermed også $\frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \neq 0$ i en omegn $W'$ af $a$, hvorfor $W' \cap M^s = \emptyset$.

For $a \in M^s$ kan vi finde omegn $W$ og minimalfunktion $f$ for $M$ på $W$. Vi har da, at

$$W \cap M^s = \{ z \in W \mid f(z) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) = 0 \}$$

hvilket viser, at $M^s$ er en analytisk mængde i $U$.

Q.E.D.

Mængden af regulære punkter $M \setminus M^s$ er åben relativt til $M$ og overalt tæt i $M$

Bevis: At $M \setminus M^s$ er åben i $M$ følger af, at $U \setminus M^s$ er åben og $M \setminus M^s = M \cap (U \setminus M^s)$. Lad $a \in M$. Da kan vi vælge omegn $W$ af $a$ og minimalformulation $f$ for $M$. Vi kan antage, at $W$ er en polycylinder $P(a; R)$ og at $f$ er et Weierstrass-polynomium (enhedsfaktoren spiller jo ingen rolle her)

$$f(z) = (z_n - a_n)^m + A_{m-1}(z')(z_n - a_n)^{m-1} + \ldots + A_0(z')$$

Idet $\gamma_a(f)$ er kvadratfri er $\gamma_a(f)$ og $\gamma_a(\frac{\partial f}{\partial z_n})$ indbyrdes primiske (side 58) og dermed har vi i omegnen af $a$ en relation (se side 56)

$$F(z') = a(z) f(z) + b(z) \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)$$

hvor $F$ ikke er identisk 0. Vælges et $b' \in P(a', R')$ så $F(b') \neq 0$ og har vi herfor $b_n$, så $f(b) = 0$, da er altså $\frac{\partial f}{\partial z_n}(b) \neq 0$, hvorfor $b$ er et regulært punkt. Heraf fås, da $P(a', R') \setminus \{ z' \mid F(z') = 0 \}$ er tæt i $P(a', R')$ og da vi for hvert $b'$ kan finde $b_n$ som omtalt, at $a$ er fortætningspunkt for regulære punkter idet $b' \to a'$ medfører $b_n \to a_n$ (se side 47)

Q.E.D

Begrundelsen for betegnelsen regulært punkt er følgende: Hvis $a \in M$ er et regulært punkt og $f$ en minimalfunktion for $M$ i en omegn af $a$ kan vi antage, at $\frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \neq 0$ (ellers blot omnummerering af koordinater). Idet $f(a) = 0$ er $f$ altså ellers med orden 1 med hensyn til $z_n$ i punktet. På en omegn $W$ af $a$, lad os sige $W = P(a; R)$ kan vi da

$$f(z) = e(z)(z_n - a_n - A(z'))$$

hvor $e(z) \neq 0$ for $z \in P(a;R)$. Vælger polycylinderen yderligere således, at for hvert $z' \in P(a';R)$ ligger nulpunktet for polynomiet i $\{z_n \mid |z_n - a_n| < R_n\}$ (hvilket skal $R_1, \ldots, R_{n-1}$ blot vælges passende små jfr. side 47) kan vi derfor

$$M \cap P(a;R) = \{ z \in P(a;R) \mid z_n = A(z_1, \ldots, z_{n-1}) + a_n \}$$

hvormed $M$ på simpleste måde er parametriseret ved $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ i omegnen af $a$.

Den principal-analytiske mængde $M$ kaldes <u>irreducibel i punktet $a \in M$</u>, hvis det for en (og dermed for enhver) minimalfunktion $f$ for $M$ på en omegn af $a$ gælder, at $\gamma_a(f)$ er irreducibel i $\mathcal{O}_a$.

<u>Et regulært punkt $a \in M$ er $M$ irreducibel</u>: En divisor $\gamma_a(g) \in \mathcal{D}_a$ i $z_n - a_n - A(z')$ er nemlig associeret med et Weierstrass-polynomium $\gamma_a(h)$ (side 41) og $\gamma_a(h)$ er divisor i $\gamma_a(z_n - a_n - A(z'))$ indenfor polynomiringen $\mathcal{O}_{a'}[z_n - a_n]$ (også side 41) hvorfor $\gamma_a(h)$ har grad 1 eller 0

altså $f_\alpha(h) = f_\alpha(z_n - a_n - A(z'))$ eller $f_\alpha(h)$ er enkel.

Til hvert punkt $a \in M$ findes en polycylinder $P(a;R)$ og endvidere mange principal analytiske mængder $M_1, \dots, M_k$ i $P(a;R)$, således at

$$M \cap P(a;R) = M_1 \cup \dots \cup M_k,$$

hvor af $M_1, \dots, M_k$ er irreducible i punktet $a$,
for hvert $\nu$, $\nu = 1, \dots, k$ gælder

$$M_\nu = P(a;R) \cap \overline{(M_\nu \setminus M^s)}$$

for hvert $\nu$, $\nu = 1, \dots, k$ er

$$M_\nu \setminus M^s \subset P(a;R)$$

en sammenhængende mængde.

Bevis: Vi vælger koordinaterne således, at et Weierstrass-polynomium $f$ med centrum $a$ er minimalfunktion for $M$ på en omegn af $a$. I $\mathcal{O}_a$ kan vi spalte $f_a(f)$ i irreducible faktorer $f_a(f_1), \dots, f_a(f_k)$, som kan vælges som Weierstrass-polynomier. På en polycylinder $P(a;R)$ kan vi altså

$$f = f_1 \cdots f_k,$$

hvor vi endvidere antager, at $P(a;R)$ er valgt således, at for $z' \in P(a',R')$ opfylder samtlige nuller for $f(z', z_n)$ uligheden $|z_n - a_n| < R_n$. Vi kan da definere

$$M_\nu = \{ z \in P(a,R) \mid f_\nu(z) = 0 \}$$

og kan så $P(a;R) \cap M = M_1 \cup \dots \cup M_k$

hvor $M_1, \dots, M_r$ er irreducible i punktet $a$.

Vi kan ydeligere antage, at $P(a;R)$ er valgt, så vi har en identitet

$$F(z') = a(z) f(z) + b(z) \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)$$

hvor $F(z')$ ikke er identisk 0 på $P(a',R')$.

Med $p: M \cap P(a;R) \longrightarrow P(a',R')$ betegnes restriktionen af projektionsafbildningen $(z_1,\dots,z_n) \to (z_1,\dots,z_{n-1})$. Hvis $N = \{z' \in P(a';R') \mid F(z') = 0\}$ har vi så, at

$$M^S \cap P(a;R) \subseteq p^{-1}(N)$$

Et punkt $b = (b_1,\dots,b_n) \in M \cap P(a;R)$ hvor $p(b) = (b_1,\dots,b_{n-1}) \notin N$ er nemlig regulært for $m$, idet $F(b') \neq 0$ altså $\frac{\partial f}{\partial z_n}(b) \neq 0$ da $f(b) = 0$.

Lad $b \in \big(M \cap P(a;R)\big) \setminus p^{-1}(N)$, da er $b_n$ en simpel rod i polynomiet $f(b_1,\dots,b_{n-1},z_n)$ og dermed rod i præcis én af $f_1,\dots,f_k$, lad os sige $f_\nu$, og nærmeligvis også simpel rod i $f_\nu$. Idet altså $f_\mu(b) \neq 0$ for $\mu \neq \nu$ findes der derfor en omegn $P(b;r)$, så $P(b;r) \cap M = P(b;r) \cap M_\nu$. Endvidere ses, at $b$ er regulært punkt for $M_\nu$, da

$$0 \neq \frac{\partial f}{\partial z_n}(b) = \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu(b) \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial z_n}(b) + \sum_{\lambda \neq \nu} f_\nu(b) \prod_{\substack{\mu \neq \nu \\ \mu \neq \lambda}} f_\mu(b) \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_n}(b)$$

$$= \prod_{\mu \neq \nu} f_\mu(b) \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial z_n}(b)$$

hvorfor $\frac{\partial f_\nu}{\partial z_n}(b)$. Ved resultatet på side 73 ses dernæst, at der findes vilkårligt små $P(b;r)$, så $P(b;r) \cap M_\nu$ er sammen-

hængende. Hermed har vi foreløbig bevist:

$M \cap P(a;R) \setminus p^{-1}(N)$ er den disjunkte foreningsmængde af mængderne $M_V \setminus p^{-1}(N)$. Hver af disse er relativt åben i $M \cap P(a;R) \setminus p^{-1}(N)$ og lokalt sammenhængende.

Vi ønsker nu at vise, at hver af mængderne $M_V \setminus p^{-1}(N)$ er sammenhængende. Lad derfor $\tilde{M}$ betegne en sammenhængskomponent af $M \cap P(a;R) \setminus p^{-1}(N)$. Da er $\tilde{M}$ relativt åben i $M \cap P(a;R) \setminus p^{-1}(N)$ idet denne er lokalt sammenhængende. For hvert $z' \in P(a',R') \setminus N$ betragtes mængden $\{h_1(z'), \dots, h_r(z')\}$ af værdier af $z_n$, så $(z', z_n) = (z_1, \dots, z_n) \in \tilde{M}$. Denne mængde kan naturligvis ikke på forhånd vides at være ikke tom, og antallet af punkter $r$ kan tænkes at afhænge af $z'$. Vi kan imidertid alligevel danne

$$\tilde{f}(z', z_n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } r = 0 \\ (z_n - h_1(z')) \cdots (z_n - h_r(z')) \end{cases}$$

Herved fås for hvert $z' \in P(a';R') \setminus N$ et polynomium i $z_n$. Koefficienterne er de elementarsymmetriske polynomier i $\{h_1(z'), \dots, h_r(z')\}$ og afhænger derfor ikke af den valgte rækkefølge – polynomiet er altså bestemt alene ved $z'$ og mængden $\tilde{M}$. Der gælder nu, at $\tilde{f}$ er en holomorf funktion for $z' \in P(a',R') \setminus N$, $z_n \in \mathbb{C}$. Lad nemlig $b' \in P(a';R') \setminus N$. Ifølge side 73 findes da en polycylinder $P(b',r') \subseteq P(a',R') \setminus N$ og $m$ (= graden af $f$)

holomorfe funktioner $h_1(z'), \dots, h_m(z')$ på $P(b', r')$ så

$$p^{-1}(P(b', r')) = \bigcup_{\mu=1}^{m} \{ z \in \mathbb{C}^n \mid z_n = h_\mu(z_1, \dots, z_{n-1}) \}$$

Hvis $r'$ vælges tilstrækkeligt lille vil disse mængde være disjunkte, idet $h_1(b'), \dots, h_m(b')$ er indbyrdes forskellige (ellers ville de være rødder i $f(b', z_n)$). Hver af disse mængder er åbenbart sammenhængende, hvorfor $\tilde{M} \cap p^{-1}(P(b', r'))$ er en foreningsmængde af disse, lad os sige

$$\tilde{M} \cap p^{-1}(P(b', r')) = \bigcup_{\mu=1}^{r} \{ z \mid z_n = h_\mu(z') \}$$

altså er $\tilde{f}(z', z_n) = (z_n - h_1(z')) \cdots (z_n - h_r(z'))$

for $z' \in P(b', r')$, hvoraf vi ser, at $\tilde{f}$ er holomorf på $(P(a', R') \setminus N) \times \mathbb{C}$.

Koefficienterne i $\tilde{f}$ er begrænsede idet rødderne, der jo er rødder i $f$ er begrænset, idet de ligger i cirklen $\{ z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n - a_n| < R_n \}$, og idet graden af $\tilde{f}$ er mindre end eller lig graden af $f$. Idet $\tilde{f}$ er holomorf og begrænset i $P(a; R)$ på nær den principal-analytiske mængde $\{ z \in P(a; R) \mid F(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0 \}$ i $P(a; R)$ kan den altså forbedres holomorft til hele $P(a; R)$.

For hvert $z' \in P(a', R') \setminus N$ er polynomiet $\tilde{f}(z', z_n)$ divisor i $f(z', z_n)$ idet rødderne i $\tilde{f}$ er disse af rødderne i $f$. Kvotienten $f / \tilde{f}$ er åbenbart begrænset i $P(a', R')$ og dermed holomorf her. Vi kan let skutte, at graden af $\tilde{f}(z', z_n)$ er den samme for ethvert $z' \in P(a', R')$

Komplekse analyse

For hvert $z' \in P(a', R')$ er graden $r$ netop karakteristisk ved, at

$$\frac{\partial^r \tilde{f}}{(\partial z_n)^r}(z', z_n) = r! \qquad \frac{\partial^{r+1} \tilde{f}}{(\partial z_n)^{r+1}} = 0$$

Det største $r$, hvor $\partial^r \tilde{f}/(\partial z_n)^r$ ikke er identisk 0 er altså graden, idet så $\partial^r \tilde{f}/(\partial z_n)^r$ er konstant $= r!$.

Idet $\tilde{f}$ er et Weierstrass-polynomium, som går op i $f$, må det følgelig være et produkt af visse $f_\mu$. Dette medfører, at $\tilde{M}$ er foreningsmængden af de tilsvarende $M_\mu \setminus p^{-1}(N)$. Idet disse er disjunkte, er $\tilde{M}$ altså netop en af mængderne $M_\mu \setminus p^{-1}(N)$.

Heraf er så bevist, at mængderne $M_\mu \setminus p^{-1}(N)$ er sammenhængende.

Vi har så fået, at $M^s \cap P(a;R) \subseteq p^{-1}(N)$. Følgelig gælder der

$$M_\mu \setminus p^{-1}(N) \subseteq M_\mu \setminus M^s \subseteq M_\mu$$

for hvert $\mu$. Idet $M_\mu$ er relativt afsluttet i $P(a;R)$ giver dette straks

$$P(a;R) \cap \overline{(M_\mu \setminus p^{-1}(N))} \subseteq M_\mu$$

og vi vil nu vise, at der her gælder ligheds tegn:

Lad nemlig $b = (b_1, \ldots, b_n) \in M_\mu \cap p^{-1}(N)$. Da er $f_\mu$ ifølge forberedelsessætningen af formen

$$f_\mu = e \cdot g$$

på en omegn af $b$, hvor $e(b) \neq 0$ og $g$ er et Weierstrass-polynomium med centrum $b$ ($f_\mu$ er åbenbart almen

m.h.t. $z_n$ i 6). Nu ved vi ifølge side 47, at $b_n$ er grænseværdi for nævnerne i $g(z', z_n)$ når omegnen om $c' \in \mathbb{C}^{n-1}$ gøres vilkårlig lille. Enhver lidan omegn indeholder $z' \notin N$ og nævnerne i $g(z', z_n)$ stiger her til uendelig på $M_\mu \setminus p^{-1}(N)$ — dette giver påstanden.

Vi slutter så heraf, at

$$P(a; R) \cap \overline{M_\mu \setminus M^s} = M_\mu$$

og af

$$M_\mu \setminus p^{-1}(N) \subseteq M_\mu \setminus M^s \subseteq \overline{M_\mu \setminus p^{-1}(N)}$$

slutter endelig at også $M_\mu \setminus M^s$ er sammenhængende.

Q.E.D.

Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben. En principal-analytisk mængde $M \subset U$ i $U$ kaldes <u>reducibel i $U$</u>, hvis der findes principal-analytiske mængder $M_1$ og $M_2$ i $U$, så

$$M = M_1 \cup M_2, \quad M_1 \neq M, \quad M_2 \neq M$$

En principal-analytisk mængde $M \subset U$ i $U$ kaldes <u>irreducibel i $U$</u>, hvis den ikke er reducibel i $U$.

<u>Sætning</u>: <u>Den principal-analytiske mængde $M \subset U$ er irreducibel i $U$ når og kun når mængden $M \setminus M^s$ af regulære punkter af $M$ er sammenhængende.</u>

Bevis: Vi beviser først: <u>Hvis $\tilde{M}$ er en sammenhængskomponent af $M \setminus M^s$, da er $\overline{\tilde{M}} \cap U$ en princi-</u>

pal-analytisk mængde i $\mathcal{U}$. Dette sluttes let af den foregående sætning. For $a \in \overline{\tilde{M}} \cap \mathcal{U}$ og dermed $a \in M$ (da $M$ er rel. afsluttet i $\mathcal{U}$) har vi en omegn $\mathcal{W}$ af $a$, så

$$\mathcal{W} \cap M = M_1 \cup \ldots \cup M_k$$

hvor $M_\nu$ er principal-analytisk i $\mathcal{W}$ og $M_\nu \setminus M^s$ sammenhængende. Mængden $\tilde{M} \cap \mathcal{W}$ må, da $\tilde{M}$ er en komponent af $M \setminus M^s$, bestå af en eller flere af mængderne $M_\nu \setminus M^s$, lad os sige

$$\tilde{M} \cap \mathcal{W} = (M_1 \setminus M^s) \cup \ldots \cup (M_p \setminus M^s)$$

men så er

$$\overline{\tilde{M}} \cap \mathcal{W} = M_1 \cup \ldots \cup M_p ,$$

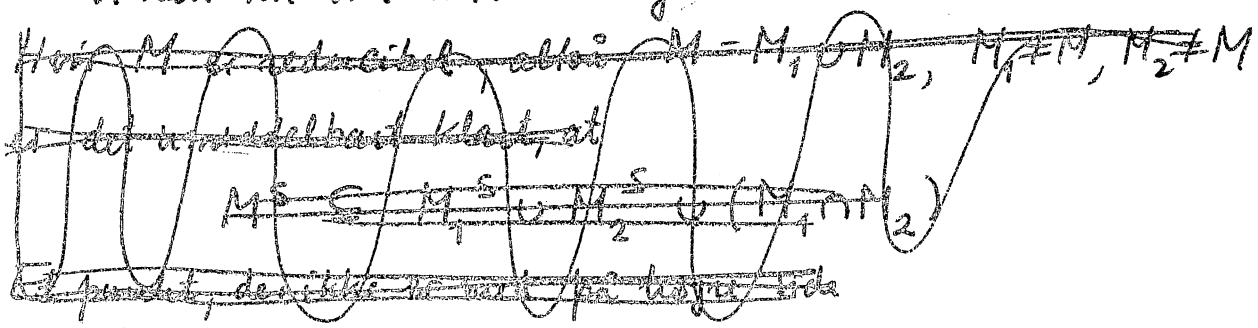
altså principal analytisk i $\mathcal{W}$ (nemlig givet ved $f_1 \cdots f_p = 0$).

Vi kan nu vise selve sætningen:

~~Hvis $M$ er reducibel, altså $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \neq M$, $M_2 \neq M$ er det umiddelbart klart, at~~

$$\cancel{M^s \subseteq M_1^s \cup M_2^s \cup (M_1 \cap M_2)}$$

~~et punkt, der ikke er med på høyre side~~



Hvis $M \setminus M^s$ er sammenhængende skal vi bevise, at hvis $M_1$ er en ikke tom principal-analytisk mængde i $\mathcal{U}$ med $M_1 \subseteq M$, da er $M_1 = M$. Lad $a \in M_1$. Vi kan da vælge en omegn $\mathcal{W}$ af $a$ og minimalfunktioner $f$ og $f_1$ for $M$ og $M_1$ i $\mathcal{W}$. Idet ethvert nulpunkt i $\mathcal{W}$ for $f_1$ ligeledes er nulpunkt for $f$ og da $\gamma_a(f_1)$ er kvadratfri har vi derfor (se side 60), at $f = g \cdot f_1$ på en omegn af $a$. Heraf fås

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(a) = g(a)\frac{\partial f_1}{\partial z_k}$$

altså, hvis $a$ er et singulært punkt for $M_1$, da er det også singulært for $M$, d.v.s. $M_1^s \subseteq M^s$. Videre ser vi også, at hvis $a$ er et regulært punkt for $M$, da er $g(a)\neq 0$, altså $M\cap W = M_1\cap W$ for en tilstrækkelig lille omegn af $a$.

Vi betragter nu $M_1\setminus M^s \subseteq M\setminus M^s$. Mængden $M_1\setminus M^s$ er <u>ikke tom</u>; i den overstående identitet

$$f = g\cdot f_1$$

kan $g$ ikke være identisk 0 på $M_1\cap W$, thi så var $f_1$ divisor i $g$ (igen side 60) og $f$ følgelig ikke kvadratfri. Vi kan derfor finde $b\in M_1\cap W$, så $g(b)\neq 0$. Vilkårligt tæt $b$ kan vi dernæst finde et regulært punkt $c\in M_1$, altså vi kan finde reg. punkt $c\in M_1\cap W$, så $g(c)\neq 0$, men så er $c$ også regulært for $M$.

For hvert $a\in M_1\setminus M^s$ findes en omegn $W$, så $W\cap M^s=\emptyset$ endvidere kan den vælges, så $M\cap W = M_1\cap W$ (se ovenfor), derfor er $M_1\setminus M^s$ <u>relativt åben</u> i $M\setminus M^s$.

Endelig er $M_1\setminus M^s$ også <u>rel. afl.</u> i $M_\#\setminus M^s$: Hvis $a\in M\setminus M^s$ og $a\notin M_1\setminus M^s$ kan vi $a\in M$, $a\notin M^s$, $a\notin M_1\setminus M^s$ altså $a\in M$, $a\notin M_1$. Idet $M_1$ er rel. afl. i $U$ findes altså omegn $W$ af $a$, så $W\cap M_1=\emptyset$.

Af sammenhængen af $M\setminus M^s$ sluttes så, at $M_1\setminus M^s = M\setminus M^s$ og dermed

$$M = \overline{M\setminus M^s\cap U} = \overline{M_1\setminus M^s\cap U}\subseteq M_1$$

altså $M_1=M$, da $M_1\subseteq M$.

Hvis $M \setminus M^s$ ikke er sammenhængende har vi en komponent $\tilde{M} \subseteq M \setminus M^s$ der ikke er hele $M \setminus M^s$. Så er $M_1 = \overline{\tilde{M}} \cap U \subseteq M$ en principal-analytisk mængde i $U$. Der gælder $M_1 \neq M$, idet $M_1 \subseteq \tilde{M} \cup M_s \neq M$, idet vi ovenfor beviste, at $M_1^s \subseteq M$. Betegner $M^*$ foreningsmængden af de øvrige komponenter af $M \setminus M_s$ kan vi (ligesom på side 80 øverst, blot var forudsætn. valgt forspeciett) slutte, at $M_2 = U \cap \overline{M}^* \subseteq M$ er en principal-analytisk mængde i $U$, at $M_2 \neq M$, og at $M = M_1 \cup M_2$, hvormed er vist, at $M$ er reducibel.

Q.E.D.

Endelig har vi så slutstenen på værket:

<u>Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben og $M \subseteq U$ en principal-analytisk mængde i $U$. Da findes en og pånær rækkefølgen kun én oppaltning</u>

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots$$

<u>af $M$ som foreningsmængde af endeligt eller tælleligt mange indbyrdes forskellige irreducible principal-analytiske mængder $M_\nu$ i $U$. Hvis $K \subseteq U$ er kompakt, da er $K \cap M_\nu = \emptyset$ pånær for endeligt mange $\nu$.</u>

Bevis: Idet det topologiske rum $M \setminus M^s$ er lokalt sammenhængende og dets topologi har en tællelig basis, kan $M \setminus M^s$ opspaltes i endeligt eller tælleligt mange sammenhængskomponenter

$$M \setminus M^s = \tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_2 \cup \dots$$

Vi sætter $M_\nu = U \cap \overline{M}_\nu$, og der så en opspaltning i indbyrdes forskellige irreducible principal-analytiske mængder. Hvis $M' \subseteq M$ er en irred. princ.-analyt. mgd. har vi [illegible] (se side 81), at $M' \setminus M^s$ er en foreningsmængde af komponenter af $M \setminus M^s$, lad os sige $\bigcup_{\mu \in I} (M_\mu \setminus M^s)$. Så gælder

$$M_\mu \setminus M^s \subseteq M \setminus M^s$$

altså

$$M_\mu \subseteq M$$

for hvert $\mu \in I$, hvilket da $M_\nu$-erne er indbyrdes forskellige medfører, at $M$ er lig et bestemt $M_\mu$, da den er irreducibel.

Hvert punkt $a \in U$ har en omegn, så $W \cap M \setminus M^s$ består af endeligt mange komponenter (side 74). I $W$ ligger altså kun endeligt mange $M_\nu$ ind. Den sidste del af påstanden får vi straks af, at en kompakt mængde $K \subseteq U$ kan overdækkes med endeligt mange sådanne omegne.

(D)

Hermed slut på det, der ikke gennemgås.

## Kapitel 3: Cousin's første problem og de forhomogene Cauchy-Riemann ligninger.

Vi siger, at to meromorfe funktioner $F_1$ og $F_2$ på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ har de samme singulariteter (den samme singulære part), hvis $F_1 - F_2$ er en holomorf funktion på $U$. Et indledende og vigtigt problem i den komplekse analyse er, hvorvidt der til forskrevne singulariteter findes en meromorf funktion med præcis disse singulariteter. Præcist formuleret:

Cousin's første problem: Givet en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$, en overdækning af $U$ med åbne mængder $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ og for hvert $i \in I$ en meromorf funktion $F_i$ på $U_i$, således at der gælder:

(1) Hvis $i, j \in I$ og $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, da er $F_i - F_j$ holomorf på $U_i \cap U_j$.

Findes der da en meromorf funktion $F$ på $U$, således at $F - F_i$ er holomorf i $U_i$ for hvert $i \in I$?

"Forligelighedsbetingelsen" (1) er åbenbart en nødvendig betingelse for eksistensen af $F$ – den undersøger, at de i $U_i$ og $U_j$ givne data er forligelige på $U_i \cap U_j$.

Problemet er åbenbart at finde de holomorfe funktioner $h_i = F - F_i$ på $U_i$, $i \in I$, således at de "korrigerede" $F_i$-er, $F_i + h_i$ knytter sig sam-

men til en meromorf funktion på hele $U$, altså så (2) $F_i + h_i = F_j + h_j$ på $U_i \cap U_j$ når $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Betingelsen (2) kan også skrives

$$h_j - h_i = F_i - F_j = f_{ij}$$

hvor nu $f_{ij}$ er holomorf på $U_i \cap U_j$. Vi kan derfor omformulere og generalisere problemet, idet de meromorfe funktioner $F_i$ erstattes af de holomorfe funktioner $f_{ij}$. Hertil bemærker vi ydermere, at der gælder

$$f_{ii} = 0 \quad \text{for hvert } i$$
$$f_{ij} = -f_{ji} \quad \text{for hvert } i,j \text{ hvor } U_i \cap U_j \neq \emptyset$$

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0 \text{ på } U_i \cap U_j \cap U_k, \text{ hvis denne } \neq \emptyset.$$

Dette følger af

$$f_{ij} = F_i - F_j = -(F_j - F_i) = -f_{ji}$$
$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = (F_i - F_j) + (F_j - F_k) + (F_k - F_i) = 0$$

Vi kan nu formulere:

<u>Det generaliserede første Cousin-problem: Givet en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$, en åben overdækning $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ og for hvert $i,j \in I$, hvor $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ en holomorf funktion $f_{ij}$ på $U_i \cap U_j$, således at</u>

$$f_{ii} = 0 \quad \text{på } U_i \text{ for hvert } i$$
(3) $$f_{ij} = -f_{ji} \quad \text{på } U_i \cap U_j, \text{ hvis } U_i \cap U_j \neq \emptyset$$
$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0 \text{ på } U_i \cap U_j \cap U_k, \text{ hvis } \neq \emptyset$$

Findes der da holomorfe funktioner $h_i$ på $U_i$, således, at

$$f_{ij} = h_j - h_i$$

på $U_i \cap U_j$ for hvert par $i,j \in I$, hvor $U_i \cap U_j \neq \emptyset$?

Betingelserne (3) er øjensynligt nødvendige for eksistensen af $\{h_i\}$. Vi bemærker, at hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er en given åben mængde og det generaliserede problem er vindskrænket løsbart i $U$ (altså $\{h_i\}$ findes til hvilketsomhelst $\{f_{ij}\}$), da er Cousin's første problem vindskrænket løsbart i $U$.

Vi skal i det følgende se, at det generaliserede problem er ensbetydende med, at et vist differentialligningssystem har løsninger. Hertil må vi dog først studere $C^\infty$-funktioner lidt nærmere.

Den ved

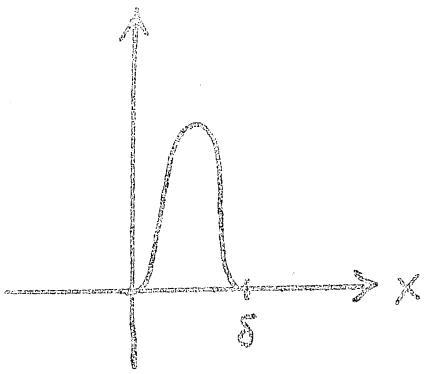
$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

givne reelle funktion er $C^\infty$ på hele $\mathbb{R}$. Dette følger af, at hvis $P(x)$ er et polynomium og $n$ et naturligt tal gælder

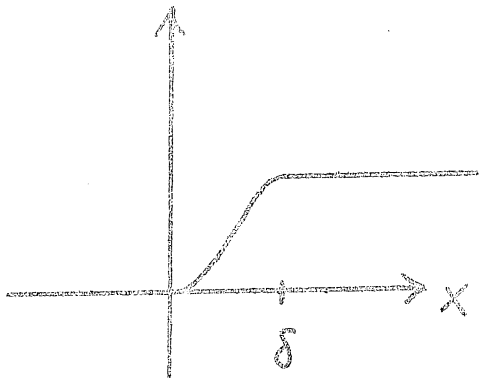
$$\frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} \to 0 \text{ for } x \to 0, \; x > 0,$$

idet nemlig den $m$'te afledede $\varphi^{(m)}(x)$ for $x > 0$ har denne form. For hvert $\delta > 0$ er derfor også $\varphi(x)\varphi(\delta - x)$ en $C^\infty$-funktion og det samme gælder dermed også for

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\varphi(\delta - t)\,dt$$




$\varphi(x)\,\varphi(\delta - x)$




$\psi(x)$

Hvis vi i $\mathbb{R}^n$ benytter den sædvanlige betegnelse

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\,, \text{ hvor } x = (x_1, \ldots, x_n),$$

for den euklidiske norm, kan vi herved

<u>Til hvert punkt $a \in \mathbb{R}^n$ og positive reelle tal $\rho > 0$, $\delta > 0$ findes en $C^\infty$-funktion $\tau$ på $\mathbb{R}^n$, således at</u>

$$\varphi(x) = 1 \text{ for } \|a - x\| \leq \rho\,, \quad \varphi(x) = 0 \text{ for } \|a - x\| \geq \rho + \delta$$

Bevis: Funktionen $\chi(x) = \frac{1}{\psi(\delta)}\psi(\rho + \delta - x)$ er $C^\infty$ og opfylder $\chi(x) = 1$ for $x \leq \rho$, $\chi(x) = 0$ for $x \geq \rho + \delta$.

Vi sætter

$$\tau(x) = \chi(\|a - x\|)$$

for $x \in \mathbb{R}^n$. Da gælder åbenbart

$$\tau(x) = 1 \text{ for } \|a - x\| \leq \rho \text{ og } \tau(x) = 0 \text{ for } \|a - x\| \geq \rho + \delta,$$

hvoraf vi også ser, at $\tau$ er $C^\infty$ for $\|a - x\| < \rho$. Idet $\|a - x\|$ er $C^\infty$ for $x \neq a$ fås heraf påstanden.

<u>Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde og $K \subseteq U$ en kompakt mængde, da findes en $C^\infty$-funktion $\varphi$ på $\mathbb{R}^n$, så</u>

$$\varphi(x) = 1 \text{ for } x \in K, \quad \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}} \subseteq U, \text{ og}$$

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

Mængden $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ kaldes <u>støtten</u> for $\varphi$; den er den mindste afsluttede mængde, således at $\varphi$ er identisk 0 på komplementærmængden.

Bevis for sætning: Til hvert punkt $a \in K$, kan vi finde $\rho > 0$, $\delta > 0$, så

$$\{x \mid \|a - x\| \leq \rho + \delta\} \subseteq U .$$

Idet $K$ er kompakt vil den være overdækket af endelig mange "åbne $\rho$-kugler":

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \{x \mid \|a_j - x\| < \rho_j\} .$$

Lad nu $\tau_j$ være $C^\infty$-funktioner på $\mathbb{R}^n$, så

$$\tau_j(x) = 1 \text{ for } \|a_j - x\| \leq \rho_j , \quad \tau_j(x) = 0 \text{ for } \|a_j - x\| \geq \rho_j + \delta_j$$

Vi sætter da

$$\varphi(x) = 1 - (1 - \tau_1(x)) \cdots (1 - \tau_m(x))$$

og har påstanden. Hvis nemlig $x \in K$ findes et $j$, så $\tau_j(x) = 1$, hvorfor $\varphi(x) = 1$.

Hvis

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{m} \{x \mid \|a_j - x\| \leq \rho_j + \delta_j\} \left(\subseteq U\right)$$

er samtlige $\tau_j(x)$ lig 0, hvorfor $\varphi(x) = 0$. Idet mængden

$$\bigcup_{j=1}^{m} \{x \mid \|a_j - x\| \leq \rho_j + \delta_j\} \subseteq U$$

er afsluttet, indeholder den $\operatorname{supp}\varphi$, som derfor er en delmængde af $U$.

Q.E.D.

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde. Et system $\{\varphi_j, j \in J\}$ af reelle $C^\infty$-funktioner på $\mathbb{R}^n$ kaldes en <u>deling af enheden i $U$</u>, hvis der gælder

(1) For hvert $j \in J$ er $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U$, og $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$

(2) Til hvert $x \in U$ findes en åben omegn $W$ af $x$, så $W \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \emptyset$ på nær for endeligt mange $j \in J$

(3) For hvert $x \in U$ gælder $\sum_{j \in J} \varphi_j(x) = 1$

Man bemærker, at betingelsen (2) medfører, at summen i (3) blot er en endelig sum, idet alle $\varphi_j(x)$ på nær endeligt mange er 0.

Lad nu ydermere $\{U_i, i \in I\}$ være åbne mængder i $U$, så $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Vi siger da, at delingen af enheden $\{\varphi_j, j \in J\}$ er <u>underordnet</u> overdækningen $\{U_i, i \in I\}$, hvis der findes en afbildning af indeksmængder $\sigma: J \to I$, således at $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_{\sigma(j)}$ for hvert $j \in J$.

<u>Sætning: Lad $\{U_i, i \in I\}$ være et system af åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ og $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Da findes der en deling af enheden i $U$, som er underordnet den givne overdækning.</u>

Vi beviser først en hjælpesætning:

Hvis $V_1, \ldots, V_m$ er åbne mængder i $\mathbb{R}^n$ (ikke tomme) og $K$ en kompakt mængde i $\mathbb{R}^n$ med $K = V_1 \cup \ldots \cup V_m$. Da findes $C^\infty$-funktioner $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ på $\mathbb{R}^n$ (reelle) med $\varphi_j \geq 0$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq V_j$, $j = 1, \ldots, m$, så $\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x) > 0$ for $x \in K$.

Bevis for hjælpesætning: Til hvert punkt $a \in K$ findes $\rho > 0$, så $\{x \mid \|a-x\| \leq \rho\}$ er indeholdt i en af mængderne $V_1, \ldots, V_m$. Idet $K$ er kompakt, kan den følgelig overdækkes med endeligt mange $\{x \mid \|a_p - x\| < \rho_p\}$, hvor hver $\{x \mid \|a_p - x\| \leq \rho_p\}$ er indeholdt i en af $V_j$-erne. Samles disse sidste mængder svarende til hvert $V_j$, altså

$$K_j = \bigcup \{x \mid \|a_p - x\| \leq \rho_p\}, \text{ hvor hver mgd.} \subseteq V_j$$

får kompakte mængder $K_1, \ldots, K_m$ så $K_j \subseteq V_j$ og $K \subseteq K_1 \cup \ldots \cup K_m$. Ifølge side 87 kan vi så finde reelle $C^\infty$ funktioner $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ på $\mathbb{R}^n$, så

$$\varphi_j(x) = 1 \text{ for } x \in K_j \text{ og } \operatorname{supp} \varphi_j \subseteq V_j$$

endvidere (det har vi glemt at bemærke) kan $\varphi_j$ vælges $\geq 0$. Dermed er hjælpesætningen bevist.

Til selve sætningen benyttes det på side 15 beviste (som uden videre overføres til $\mathbb{R}^n$), nemlig, at der findes en følge $K_1, K_2, \ldots$ af kompakte delmængder af $U$, så $K_m \subseteq \mathring{K}_{m+1}$ og $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{K}_m$. Idet vi sætter $K_0 = K_{-1} = \emptyset$ bevises så nu: Til hvert $m = 1, 2, \ldots$ findes endeligt mange ikke-negative reelle $C^\infty$-funktioner $\varphi_k$, således at der til hvert $\varphi_k$ findes et $U_i$, så

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq U_i \cap (\mathring{K}_{m+1} - K_{m-2})$$

og således at der gælder

$$\sum \varphi_k(x) > 0 \text{ for hvert } x \in K_m - \mathring{K}_{m-1}$$

Dette følger straks af hjælpesætningen. Mængden

$K_m \setminus \mathring{K}_{m-1}$ er nemlig en kompakt delmængde af den åbne mængde $\mathring{K}_{m+1} \setminus K_{m-2}$ og derfor overdækkes den af endeligt mange af mængderne $V_i \cap (\mathring{K}_{m+1} \setminus K_{m-2})$, hvorefter hjælpesætningen kan anvendes.

Ved denne procedure fås tælleligt mange funktioner $\varphi_k$, som hver har deres støtte i en mængde $V_i$. Betingelsen (2) er opfyldt, idet dest til $x \in U$ findes et $m$, så $x \in K_m \setminus K_{m-1}$. Mængden $\mathring{K}_{m+1} \setminus K_{m-1}$ er da en åben omegn af $x$ og blandt mængderne $\mathring{K}_{p+1} \setminus K_{p-2}$ har denne kun punkter fælles med de til $p = m+2$, $p = m+1$, $p = m$, $p = m-1$ hørende. Heraf følger, at kun endeligt mange mængder $\operatorname{supp} \varphi_k$ trænger ind i $\mathring{K}_{m+1} \setminus K_{m-1}$.

Funktionen $\varphi(x) = \sum \varphi_k(x)$ er ~~kontinuert~~ $C^\infty$ på $U$, idet den på omegnen af hvert $x$ er en endelig sum af $C^\infty$-funktioner. Endvidere er $\varphi(x) > 0$ for ethvert $x \in U$.

Funktionerne $\tau_k(x) = \varphi_k(x)/\varphi(x)$ vil altså være en deling af enheden i $U$ af den ønskede art.

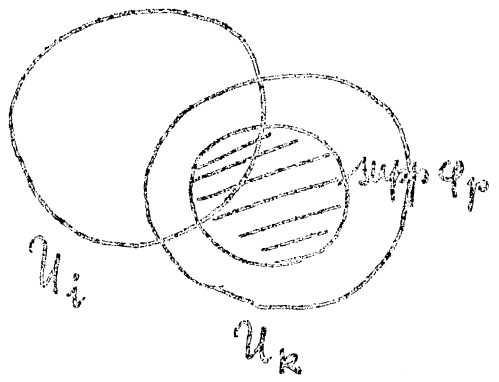
Q.E.D.

---

Vi vender nu tilbage til problemet på side 85–86, idet vi beviser, at det er muligt at finde <u>$C^\infty$-funktioner</u> $\tilde{h}_i$ på $U_i$, så $f_{ij} = \tilde{h}_j - \tilde{h}_i$ på $U_i \cap U_j$ — sagt kortfattet <u>Det generaliserede første Cousin-problem har altid en løsning med $C^\infty$-funktioner $\{\tilde{h}_i\}$</u>.

Bevis: Vi vælger en deling af enheden $\{\varphi_p, p \in J\}$ som er underordnet den givne overdækning $\{U_i, i \in I\}$

altså $\operatorname{supp}\varphi_p \subseteq U_{\sigma(p)}$, hvor $\sigma: J \to I$.
Vi bemærker nu, at hvis $\sigma(p)=k$, hvormed $\operatorname{supp}\varphi_p \subseteq U_k$,
da kan $f_{ki}\varphi_p$ fortsættes med
0 i $U_i \setminus U_k$ til en $C^\infty$-funk-
tion i hele $U_i$. Til $z \in \operatorname{supp}\varphi_k$
$\cap U_i$ og deraf $z \in U_i \cap U_k$
findes nemlig mængden $W \subseteq U_i \cap U_k$
hvori $f_{ki}\cdot\varphi_p$ er $C^\infty$, og hvis
$z \in U_i \setminus \operatorname{supp}\varphi_p$ findes åben omegn $W$ af $z$, så
$W \cap \operatorname{supp}\varphi_p = \emptyset$, altså $f_{ki}\cdot\varphi_p = 0$ på $W \cap (U_i \cap U_k)$.
Benytte samme symbol for de således fortsatte funktioner
definerer vi




$$\tilde{h}_i = \sum_{\substack{k \\ U_k \cap U_i \neq \emptyset}} \sum_{\sigma(p)=k} f_{ki}\cdot\varphi_p$$

Summen er lokalt endelig, da (2) gælder for $\varphi_p$-erne, og $\tilde{h}_i$
er hermed en $C^\infty$ funktion på $U_i$.

Idet vi bemærker, at

$$f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0 \quad \text{på } U_i \cap U_j \cap U_k \text{ når } \neq \emptyset$$

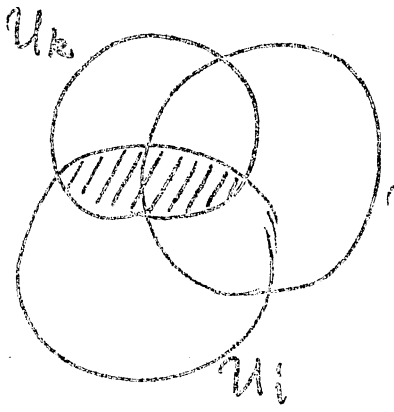
eller altså $f_{ij} = f_{kj} - f_{ki}$ på $U_i \cap U_j \cap U_k$, da $f_{jk} = -f_{kj}$
har vi så

$$\tilde{h}_j - \tilde{h}_i = \sum_{U_k \cap U_j \neq \emptyset} \sum_{\sigma(p)=k} f_{kj}\varphi_p - \sum_{U_k \cap U_j \neq \emptyset} \sum_{\sigma(p)=k} f_{ki}\varphi_p$$

Idet vi kun interesserer os for $z \in U_i \cap U_j$ (ellers har differensen ikke mening) har kun de $k$, hvor $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ interesse. Hvis nemlig $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$ er $U_i \cap U_j \cap \operatorname{supp} \varphi_p = \emptyset$ når $\sigma(p) = k$ og de pågældende led derfor identisk 0 på $U_i \cap U_j$. Altså

$$\tilde{h}_j - \tilde{h}_i = \sum_{U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset} \left( \sum_{\sigma(p)=k} f_{kj} \varphi_p - \sum_{\sigma(p)=k} f_{ki} \varphi_p \right)$$

For fast $k$ og $p$ kan vi uden bemærke, at $f_{kj} \cdot \varphi_p$ er identisk 0 på $U_j \setminus U_k$ og $f_{ki} \cdot \varphi_p$ identisk 0 på $U_i \setminus U_k$. Idet vi kun er interesserede i $z \in U_i$ har altså kun vendierne i $U_i \cap U_j \cap U_k$ interesse, og her gælder




$$f_{kj} - f_{ki} = f_{ij}$$

hvormed

$$f_{kj} \cdot \varphi_p - f_{ki} \cdot \varphi_p = f_{ij} \cdot \varphi_p$$

gælder i hele $U_i \cap U_j$. Hermed fås det ønskede

$$\tilde{h}_j - \tilde{h}_i = f_{ij} \sum \varphi_p = f_{ij} ,$$

idet $\sum \varphi_p = 1$. Q.E.D.

Dette betyder naturligvis ikke en løsning af selve Cousin-problemet, men det giver anledning til en omformulering af dette. Hvis nemlig $\{\tilde{h}_i\}$ og $\{h_i\}$ betegner to $C^\infty$-løsningssæt til det samme problem, har vi

$$\tilde{h}_j - \hat{h}_i = h_j - h_i \quad \text{på } U_i \cap U_j$$

eller

$$\tilde{h}_i - h_i = \tilde{h}_j - h_j \quad \text{på } U_i \cap U_j$$

Ved

$$g(z) = \tilde{h}_i - h_i \quad \text{for } z \in U_i$$

defineres derfor en $C^\infty$-funktion på hele $U$.
Omvendt ses også, at hvis $\{\tilde{h}_i\}$ er en $C^\infty$-løsning til problemet og $g$ er en $C^\infty$-funktion på $U$, da er $\{h_i\}$, hvor $\tilde{h}_i - g = h_i$ en $C^\infty$-løsning. Problemet er altså at finde den søgende $C^\infty$-løsning $\{\tilde{h}_i\}$ skal finde en $C^\infty$-funktion $g$ på $U$, så $\tilde{h}_i - g$ er holomorf i $U_i$. Dette betyder, at der skal gælde

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\tilde{h}_i - g) = 0 \quad \text{på } U_i, \ k = 1, \dots, n$$

eller

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} g = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \tilde{h}_i \quad \text{på } U_i, \ k = 1, \dots, n$$

Vi kan nu yderligere bemærke, at idet

$$\tilde{h}_j - \tilde{h}_i = f_{ij}$$

er holomorf på $U_i \cap U_j$ gælder der

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \tilde{h}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \tilde{h}_i \quad \text{på } U_i \cap U_j, \ k = 1, \dots, n$$

hvorfor der ved

$$f_k(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \tilde{h}_i(z) \quad \text{for } z \in U_i$$

defineres $C^\infty$-funktioner $f_1, \dots, f_n$ på hele $U$. Problemet er at finde $C^\infty$-funktion $g$ på $U$, så

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f_k \quad \text{på } U, \; k = 1, \dots, n.$$

Videre kan vi bemærke, at dette ligningssystem har en løsning i hvert $U_i$, nemlig $\tilde{h}_i$. Det generaliserede Cousin-I problem for den åbne mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er altså et specielt tilfælde af følgende problem

<u>På den åbne mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet $n$ $C^\infty$-funktioner $f_1, \dots, f_n$ med den egenskab, at der til hvert punkt $z \in U$ findes en åben omegn $W \subseteq U$ af $z$, så ligningssystemet</u>

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} g = f_k$$

<u>har en $C^\infty$ løsning på $W$. Findes der da en $C^\infty$ løsning til dette ligningssystem på hele $U$?</u>

Dette problem kan imidlertid omvendt opfattes som et Cousin-I problem (generaliseret) i $U$. Vi kan nemlig finde en åben overdækning $\{U_i, i \in I\}$ af $U$, så vi i $U_i$ har en løsning $g_i$ til (4). Da er

$$f_{ij} = g_i - g_j$$

holomorf på $U_i \cap U_j$ og (3) på side 85 øjensynlig opfyldt. Problemet, at finde løsning $g$ til (4) er da det samme som at finde

$$h_i = g - g_i \quad \text{på } U_i$$

så

$$h_i + g_i = h_j + g_j \quad \text{på } U_i \cap U_j$$

eller så

$$h_j - h_i = f_{ij} \quad \text{på } U_i \cap U_j$$

og således at $g$ bliver en løsning til (3), hvilket ses at være ensbetydende med, at $h_i$ er holomorf på $U_i$.

---

Vi vil nu studere de inhomogene Cauchy-Riemann ligninger

$$(4)\qquad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f_k \quad , k=1,\dots,n$$

mærkes.

Vi ser først på tilfældet $n=1$.

Sætning. Lad $f$ være en (kompleks) $C^\infty$-funktion på $\mathbb{C}$, som har kompakt støtte, d.v.s.

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{z\in\mathbb{C} \mid f(z)\neq 0\}}$$

er en kompakt delmængde af $\mathbb{C}$. Da defineres ved

$$(5)\qquad g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, d\theta \right\} dr$$

en $C^\infty$-funktion $g$ på $\mathbb{C}$, således at der gælder $\frac{\partial}{\partial z} g = f$ i $\mathbb{C}$.

Bevis: Idet $f$ har kompakt støtte findes $R_1$, så $f(z)=0$ for $|z|\geq R_1$. Betragter vi kun mængden $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<R_2\}$ hvor $R_2>0$ ellers kan vælges vilkårligt, gælder derfor

$$f(z+re^{i\theta}) = 0$$

når $r \geq R = R_1 + R_2$. Integralet i formel (5) er altså kun tilsyneladende et egentligt integral, idet

Så er

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta}) e^{-i\theta}\, d\theta \right\} dr$$

(når $|z| < R_2$). Hvad følger, at $g$ er en $C^\infty$-funktion, idet integranden afhænger $C^\infty$ af parameteren $z$. Videre fås (for $|z| < R_2$)

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} g = -\frac{1}{\pi}\int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z+re^{i\theta}) e^{-i\theta}\, d\theta \right\} dr$$

Idet integranden er kontinuert her vi derover, at

$$I_\rho(z) \to \frac{\partial g}{\partial \bar z}(z) \quad \text{for } \rho \to 0,$$

hvor

$$I_\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\int_\rho^R \left\{ \int_0^{2\pi} \dots\, d\theta \right\} dr$$

Vi indføres nu en ny kompleks variabel $z' = x' + iy'$ ved $z' = re^{i\theta}$. Da er $x' = r\cos\theta$, $y' = r\sin\theta$, hvorfor der for $r > 0$ gælder

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x'} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x'} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y'}$$

For $r > 0$ har vi derved

$$e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z+re^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z+z') = e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \bar z'} f(z+z')$$

$$= (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i\frac{\partial}{\partial y'}\right) f(z+z')$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x'} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y'}\right) + \frac{i}{2}\left(-\sin\theta \frac{\partial}{\partial x'} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y'}\right)\right) f(z+z')$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} f(z+re^{i\theta}) + \frac{i}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} f(z+re^{i\theta})$$

Hermed får

$$I_\rho(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_\rho^R \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} f(z+re^{i\theta})\, d\theta \right\} dr$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_\rho^R \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} f(z+re^{i\theta})\, d\theta \right\} dr$$

I det sidste integral er $r$ at betragte som en konstant ved integrationen efter $\theta$ og det indeste integral bliver derfor

$$\frac{1}{r} f(z+re^{i\theta}) \Big]_0^{2\pi} = 0,$$

idet $\theta = 0$ og $\theta = 2\pi$ giver samme værdi af $e^{i\theta}$. Idet vi ombytter rækkefølgen af de to integrationer i det første integral har vi så

$$I_\rho(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \int_\rho^R \frac{\partial}{\partial r} f(z+re^{i\theta})\, dr \right\} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} \Big[ f(z+re^{i\theta}) \Big]_{r=\rho}^{r=R} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\, d\theta$$

idet $f(z+re^{i\theta}) = 0$ for $r = R$ (se side 96). $I_\rho(z)$ er altså middelværdien af $f$ på cirklen med centrum $z$ og radius $\rho$. Idet $f$ er kontinuert gælder derfor, at

$$I_\rho(z) \to f(z)$$

for $\rho \to 0$, hvormed sætningen er bevist.

Hvordan kan vi bevise:

**Sætning:** *Lad $f$ være en (kompleks) $C^\infty$-funktion på cirklen $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < R\}$ (eller på hele $\mathbb{C}$, svarende til $R=\infty$), da findes en $C^\infty$-funktion $g$ på cirklen, så der gælder $\partial g/\partial \bar{z} = f$ i ethvert punkt af denne*

Bevis: Vi vælger $R_1 < R_2 < \dots < R$ så $R_n \to R$ for $n \to \infty$ ($R_n \to \infty$ hvis $R = \infty$). Ifølge side 87 findes da $C^\infty$-funktioner $\tau_n$ på $\mathbb{C}$, så

$$\tau_n(z) = 1 \text{ for } |z-a| \le R_n, \quad \tau_n(z) = 0 \text{ for } |z-a| \ge R_{n+1}$$

For hvert $n$ kan $\tau_n \cdot f$ fortsættes med 0 udenfor cirklen $\{z \mid |z-a| \ge R_{n+1}\}$ og bliver herved en $C^\infty$-funktion på $\mathbb{C}$ med kompakt støtte. Der findes følgelig en $C^\infty$-funktion $g_n$ på $\mathbb{C}$, så

$$\frac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} = \tau_n \cdot f$$

For $|z-a| < R_n$ gælder $\dfrac{\partial g_n}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial g_{n+1}}{\partial \bar{z}}$, idet både $\tau_n$ og $\tau_{n+1}$ er 1 her.

Følgelig er $g_{n+1} - g_n$ en holomorf funktion på $\{z \mid |z-a| < R_n\}$. Denne kan udvikles i potensrække ud fra $a$ og denne potensrække vil konvergere ligeligt på $\{z \mid |z-a| \le R_{n-1}\}$. Vi kan derfor finde et polynomium $p_n$ i $z$ (de første endelig mange og tilstrækkeligt mange led af Taylorrækken), så

$$|g_{n+1}(z) - g_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{2^n}$$

for $|z-a| \le R_{n-1}$. Vi betragter så funktionsfølgen

$$h_n(z) = g_1(z) + (g_2(z) - g_1(z) - p_1(z)) + \cdots + (g_{n+1}(z) - g_n(z) - p_n(z))$$

$$= g_{n+1}(z) - (p_1(z) + \cdots + p_n(z))$$

$$= g_p(z) + (g_{p+1}(z) - g_p(z) - p_p(z)) + \cdots + (g_{n+1}(z) - g_n(z) - p_n(z)) - (p_1(z) + \cdots + p_{p-1}(z))$$

Denne følge er ligeligt konvergent på hver af cirklerne $\{z \mid |z-a| < R_m\}$. For $n > m+1$ og $p > 0$ har vi nemlig

$$|h_{n+p}(z) - h_m(z)| \le |g_{n+2}(z) - g_{n+1}(z) - p_{n+1}(z)| + \cdots$$

$$+ |g_{n+p+1}(z) - g_{n+p}(z) - p_{n+p}(z)| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p+1}} < \frac{1}{2^n}$$

når $|z-a| < R_m$. Videre ser vi af den sidste af ovenstående ulighed for $h_n(z)$, at for $|z-a| < R_p$ og $n > p$ er

$$h_n(z) = g_p(z) + \text{hol. fkt i } \{|z-a| < R_p\}$$

for $|z-a| < R_p$. For $n \to \infty$ konvergerer denne holomorfe funktion ligeligt på $|z-a| < R_p$ og derfor med en holomorf funktion. Hvis

$$g = \lim_{n\to\infty} h_n(z)$$

gælder altså

$$g = g_p + \text{hol. fkt}$$

for $|z-a| < R_p$. Heraf ses, at $g \in C^\infty$ og at

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} g = \frac{\partial}{\partial \bar z} g_p = f$$

for $|z-a| < R_p$. Idet $p$ kan vælges vilkårligt og da $R_p \to R$ har vi hermed bevist sætningen.

Heraf følger naturligvis at Cousin's første problem altid er løsbart på en vilkårlig åben i den komplekse plan (Mittag-Leffler sætning). Ved beviset for sætn. på side 99 var ingrediensene sætn. på side 96 plus approximation ved hjælp af afsnit af Taylorrækker. Med en finere approximationsmetode (Rünges sætning) kan man vise, at det for enhver åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}$ gælder, at hvis $f$ er en $C^\infty$-funktion på $U$, da findes en $C^\infty$ funktion $g$ på $U$, så $\partial g / \partial \bar z = f$.

Vi ser dernæst på tilfældet $n > 1$. Vi har ligningerne

$$(4) \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar z_k} = f_k \qquad k = 1, \dots, n .$$

Idet vi kun er interesseret i $C^\infty$-funktioner ser vi straks af identiteten

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \frac{\partial}{\partial \bar z_k} g = \frac{\partial}{\partial \bar z_k} \frac{\partial}{\partial \bar z_j} g$$

at en <u>nødvendig betingelse</u> for at (4) har en løsning, er

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_j} f_k = \frac{\partial}{\partial \bar z_k} f_j \qquad j = 1, \dots, n \;,\; k = 1, \dots, n$$

Ligningssystemet (6) kaldes <u>integrabilitetsbetingelserne</u> for (4). [illegible]

Vi uddrager nu først nogen oplysning af formlen på side 96

Lemma: I en polycylinder $P(a;r) \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet en $C^\infty$-funktion $f$. Da findes til hvert $\rho < r_n$ en $C^\infty$-funktion $g$ på

$$\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_k - a_k| < r_k \text{ for } k = 1, \dots, n-1,\ |z_n - a_n| < \rho \}$$

så der heromkring gælder

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_n} = f .$$

Hvis $f$ afhænger holomorft af visse af de variable for de øvrige fastholdt, gælder det samme om $g$ (således kan den vælges)

Bevis: Vi vælger (side 87) en $C^\infty$-funktion $\tau(z_n)$, så

$\tau(z_n) = 1$ for $|z - a_n| \le \rho$

$\tau(z_n) = 0$ for $|z - a_n| \ge \rho + \varepsilon$ hvor $\varepsilon > 0$ og $\rho + \varepsilon < r_n$

Da er integralet

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{2\pi} f(z_1, \dots, z_n + re^{i\theta})\, \tau(z_n + re^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, d\theta \right\} dt$$

ifølge side 96 en løsning på den stillede opgave. Det er klart, at hvis $f$ er holomorf i $z_k$, $k < n$, da er også $g$ holomorf i $z_k$.

Q.E.D.

Herudfra kan vi så bevise:

Sætning: I en polycylinder $P(a;r) \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet $n$ $C^\infty$-funktioner $f_1, \dots, f_n$ således at

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \qquad j, k = 1, \dots, n$$

gælder i $P(a;r)$. Da findes til hvert $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ med $\rho_k < r_k$ for $k = 1, \dots, n$ en $C^\infty$-funktion $g$ på $P(a;\rho)$, så

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f_k \quad k = 1, \dots, n$$

gælder i $P(a;\rho)$.

Beviset føres ved induktion – ikke efter antallet af variable men efter antallet af $f_k$, som ikke er identisk 0.

Hvis $f_1, \dots, f_n$ alle er identisk 0 er sagen klar, idet $g = 0$ da løser opgaven.

Vi skal derfor blot tilbageføre opgaven til det tilfælde, hvor én $f_k$ mere er identisk 0. Vi antager altså, at

$$f_{m+1} = \dots = f_n = 0$$

identisk på $P(a;\rho)$. Integrabilitetsbetingelsen giver da

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \text{for } k = m+1, \dots, n$$

altså $f_1, \dots, f_m$ afhænger holomorft af $z_{m+1}, \dots, z_n$. Vi vælger nu $r_m' < r_m$ større end $\rho_m$. Lemmaet kan da bruges på $f_m$ og $z_m$, d.v.s. der findes en $C^\infty$-funktion $h$ på

$$V = \{(z_1, \dots, z_n) \mid |z_k - a_k| < r_k \text{ for } k \neq m,\ |z_m - a_m| < r_m'\}$$

så

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_m} = f_m$$

på $V$, og så $h$ er holomorf i $z_{m+1}, \dots, z_n$.

Vi sætter så

$$\tilde{f}_k = f_k - \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k} \quad k = 1, \dots, m-1, \quad \tilde{f}_k = 0 \text{ for } k \geq m$$

i $V$. Dette system opfylder integrabilitetsbetingelsen, idet

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\tilde{f}_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f_k - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} h = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f_j - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\tilde{f}_j & \text{for } j \leq m-1 \\ 0 & \text{for } j \geq m \end{cases}$$

idet jo $f_m - \dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}_m} = 0$ og idet ~~$f_j$~~ $f_j = 0$ for $j \geq m$ og $h$ er holomorf i $z_j$ for $j > m$, hvorfor $\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}_j} = 0$ for $j \geq m$.

Ifølge induktions-antagelsen findes $C^\infty$-funktion $\tilde{g}$ på $P(a;\rho)$, så

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \bar{z}_k} = \tilde{f}_k \quad \text{for } k = 1, \ldots, n$$

Men så ser man straks, at $g = \tilde{g} + h$ er den søgte funktion.

Q.E.D.

<u>Sætning: I en polycylinder $P(a;r) \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet $n$ $C^\infty$ funktioner $f_1, \ldots, f_n$, således at der gælder</u>

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \qquad j, k = 1, \ldots, n$$

<u>i $P(a;r)$. Da findes en $C^\infty$ funktion $g$ på $P(a;r)$, så</u>

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} = f_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

<u>i $P(a;r)$.</u>

Bevis: Vi vælger en følge af polycylindre med centrum

a, $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$ så $\overline{P^{(m)}} \subset P^{(m+1)}$ og så

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} P^{(m)} = P(a;r)$$

I hvert $P^{(m)}$ findes da en $C^\infty$ funktion $g_m$, så

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} g_m = f_k \qquad k=1,\ldots,n.$$

Funktionen $g_{m+1} - g_m$ er holomorf på $P^{(m)}$ og kan derfor udvikles i potensrække ud fra a. Der findes derfor et polynomium $p_m(z)$ i $(z_1,\ldots,z_n)$, så

$$|g_{m+1}(z) - g_m(z) - p_m(z)| < \frac{1}{2^m} \text{ for } z \in P^{(m-1)}$$

Vi betragter så følgen

$$h_m(z) = g_{m+1}(z) - (p_1(z) + \cdots + p_m(z))$$
$$= g_p(z) - (p_1(z) + \cdots + p_{p-1}(z)) + \sum_{r=p+1}^{m} (g_r(z) - g_{r-1}(z) - p_{r-1}(z))$$

Denne følge konvergerer ligeligt på hvert $P^{(m)}$ (sml. side 100) og på $P^{(m)}$ gælder

$$g(z) = \lim_{m\to\infty} h_m(z) = g_m(z) + \text{hol. fkt.}$$

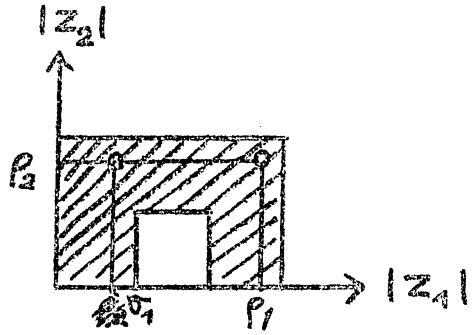
hvilket beviser sætningen. Q.E.D.

Dette viser, at Cousin's første problem altid kan løses i en polycylinder (P. Cousin 1895 – helt anderledes bevis). Endvidere ser vi, at den lokale eksistensbetingelse i problemet på side 95 kan erstattes med integrabilitetsbetingelsen (6).

Vi skal nu ved et simpelt eksempel vise, at Cousin's første problem (og dermed det generaliserede) ikke altid er løsbart for $n \geq 1$. Vi betragter den åbne mængde $U \subseteq \mathbb{C}^2$ givet ved

$$U = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|<1\,,\ |z_2|<2\}$$
$$\cup \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 1 \leq |z_1| \leq 2,\ 1<|z_2|<2\}$$
$$\cup \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 2<|z_1|<3\,,\ |z_2|<2\}$$

Som skematisk kan angives ved




Enhver holomorf funktion $f$ på $U$ kan fortsættes holomorft til $\tilde{U} = \{(z_1,z_2) \mid |z_1|<3, |z_2|<2\}$.

Vælges nemlig $0<\sigma_1<1$, $1<\rho_2<2$ kan koefficienterne $a_{\mu\nu}$ i Taylorrækken for $f$ ud fra $(0,0)$

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} z_1^{\mu} z_2^{\nu}$$

udtrykkes ved

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z_2|=\rho_2} \left\{ \int_{|z_1|=\sigma_1} \frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{\mu+1} z_2^{\nu+1}}\, dz_1 \right\} dz_2$$

For fastholdt $z_2$ med $|z_2| = \rho_2$, $1<\rho_2<2$ er integranden en holomorf funktion af $z_1$ for $0<|z_1|<3$, hvorfor Cauchy's Integralsætning i én variabel giver

$$\int_{|z_1|=\sigma_1} \frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{\mu+1} z_2^{\nu+1}}\,dz_1 = \int_{|z_1|=\rho_1} \frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{\mu+1} z_2^{\nu+1}}\,dz_1$$

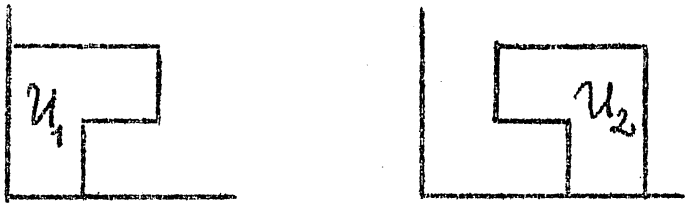
for $|z_2|=\rho_2$, når blot $0<\rho_1<3$. Altså har vi

$$|a_{\mu\nu}| = \left| \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z_2|=\rho_2} \left\{ \int_{|z_1|=\rho_1} \frac{f(z_1,z_2)}{z_1^{\mu+1} z_2^{\nu+1}}\,dz_1 \right\} dz_2 \right|$$

$$\leqq \frac{1}{\rho_1^{\mu}\rho_2^{\nu}} \max_{\substack{|z_1|=\rho_1 \\ |z_2|=\rho_2}} |f(z_1,z_2)|$$

Dette viser, at Taylorrækken konvergerer absolut og ligeligt i polycylinderen $\{(z_1,z_2) \mid |z_1|<\rho_1, |z_2|<\rho_2\}$. Summen af Taylorrækken er altså en holomorf funktion på $\tilde{\mathcal{U}}$ og den stemmer overens med $f$ på $\{(z_1,z_2) \mid |z_1|<1, |z_2|<2\}$ og dermed på hele $\mathcal{U}$ (identitetssætn.). Vi betragter nu

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \cap \{(z_1,z_2) \mid |z_1|<2\}$$
$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U} \cap \{(z_1,z_2) \mid |z_1|>1\}$$




og vi sætter (sml. side 84)

$$F_1 = \frac{1}{z_2}, \qquad F_2 = 0$$

Da er $F_1 - F_2 = \frac{1}{z_2}$ holomorf på $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{(z_1,z_2) \mid \begin{matrix} 1<|z_1|<2 \\ 1<|z_2|<2 \end{matrix}\}$ så vi har hermed et Cousin I - problem.

Hvis nu $F$ var en meromorf funktion i $U$, som var en løsning, var

$$F - \frac{1}{z_2} \text{ holomorf i } U_1.$$
$$\text{og } F \text{ holomorf i } U_2$$

Altså var $f = z_2 \cdot F$ en funktion med følgende egenskaber

$$f = 1 + z_2 \cdot g \text{ med } g \text{ holomorf i } U_1$$
$$f = z_2 \cdot h \text{ med } h \text{ holomorf i } U_2$$

Nu kan $f$ som ovenfor bevist fortsættes til en holomorf funktion i hele $\tilde{U} = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 2, |z_2| < 2\}$. Dette strider imidlertid imod, at

$$f(z_1, 0) = 1 \quad \text{for } |z_1| < 1$$
$$f(z_1, 0) = 0 \quad \text{for } 2 < |z_1| < 3$$

idet vi har identitetssætningen i én variabel for den holomorfe funktion $f(z_1, 0)$ på $|z_1| < 3$.

Man ser, at modeksemplet brænger nøje sammen med den <u>samtidige analytiske fortsættelse</u> af alle holomorfe funktioner fra $U$ til $\tilde{U}$. Dette fænomen optræder ikke i én variabel. Det er hovedgrunden til at mange sætninger fra 1-variabel teorien ikke generelt er gyldige for flere variable. Vi skal i det følgende se, at man kan afgrænse visse specielle typer af åbne mængder i $\mathbb{C}^n$, som er særligt "funktionsteoretisk relevante".

## Opgaver til kapitel III

1. Vis, at enhver holomorf funktion på
$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^2 \setminus \{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|<R_1 \wedge |z_2|<R_2\}$$
kan fortsættes holomorft til hele $\mathbb{C}^2$. (Hjælp: Vis, at der gælder
$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta_2|=\rho_2}\left\{\int_{|\zeta_1|=\rho_1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}\,d\zeta_1\right\}d\zeta_2$$
for $(z_1,z_2)\in\{(z_1,z_2) \mid R_1<|z_1|<\rho_1 \wedge R_2<|z_2|<\rho_2\}$ og foretag rækkendvikling under integraltegnet)

Vis dernæst følgende: Hvis $f_1$ og $f_2$ er $C^\infty$-funktioner på $\mathbb{C}^2$ begge med kompakt støtte, så $\partial f_2/\partial\bar z_1 = \partial f_1/\partial\bar z_2$ i ethvert punkt af $\mathbb{C}^2$, da findes en $C^\infty$-funktion $g$ på $\mathbb{C}^2$ med kompakt støtte, så $f_1 = \partial g/\partial\bar z_1$, $f_2 = \partial g/\partial\bar z_2$ på $\mathbb{C}^2$. (Benyt formlen på side 96 to gange og derefter det ovenfor beviste). Vis, at $g$ er entydigt bestemt ved $f_1$ og $f_2$. ~~og at der gælder:~~ ~~Hvis $K\subseteq\mathbb{C}^2$ er en kompakt mængde, så $\mathbb{C}^2\setminus K$ er sammenhængende og så $\operatorname{supp} f_1\subseteq K$, $\operatorname{supp} f_2\subseteq K$, da er også $\operatorname{supp} g\subseteq K$.~~ Hvis $K\subseteq\mathbb{C}^2$ er kompakt, da er samtlige sammenhængskomponenter af $\mathbb{C}^2\setminus K$ begrænsede på nær en, som kaldes den ubegrænsede komponent af $\mathbb{C}^2\setminus K$ (vis det). Vis, at $g$ er $0$ på den ubegrænsede komponent af $\mathbb{C}^2\setminus(\operatorname{supp} f_1\cup\operatorname{supp} f_2)$.

Vis endelig følgende sætning af Hartogs: Hvis $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}^2$ er en åben mængde og $K\subseteq\mathcal{U}$ en kompakt mængde, så $\mathcal{U}\setminus K$ er sammenhængende, da kan enhver holomorf

funktion på $U \setminus K$ fortsætter til en holomorf funktion på $U$. (Hjælp: Vælg $C^\infty$-fkt. $\tau$ på $\mathbb{C}^2$, så $\tau = 1$ på omegn af $K$ og $\operatorname{supp}\tau \subseteq U$ og betragt $f_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}((1-\tau)f)$ $f_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}((1-\tau)f)$.)

2. Vis (ved transformation af dobbeltintegral) at formlen (5) på side 96 kan skrives

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi+i\eta)}{\xi+i\eta-z}\,d\xi\right\}d\eta$$

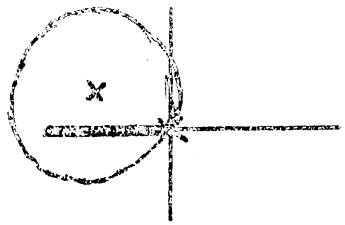
(hvor det singulære punkt $\xi+i\eta = z$ dog skal behandles med særlig delikatesse ved den første integration). Kopier beviset på side 97-98 til bevis for <u>den generaliserede Cauchy'ske integralformel:</u>
Hvis $f$ er en $C^\infty$-funktion på en omegn af cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ gælder der for $|z| < R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\le R}\frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta$$

hvor $\zeta = \xi + i\eta$.

## Kapitel 4: Samtidig analytisk fortsættelse. Holomorfi konvekshet.

På side 106-107 har vi set et eksempel på åbne mængder $U \subseteq \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n$, således at enhver holomorf funktion på $U$ kan fortsætte til en holomorf funktion på $\tilde{U}$ – vi siger, at der er samtidig fortsættelse af alle holomorfe funktioner på $U$ til $\tilde{U}$. For nærmere at studere dette problem må vi først præcisere forskelligge begreber. Som et eksempel betragtes $\mathbb{C}$ hvorfra halvlinien $\{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ reel } z \leq 0\}$ er fjernet. På restmængden $U$ er hovedværdien $f(z)$ af $\log z$ en holomorf funktion. Der findes øjensynlig ingen åben mængde $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$, $U \subseteq \tilde{U}$, $U \neq \tilde{U}$, så $f$ kan fortsættes holomorft til $\tilde{U}$ – på den anden side føles det dog heller ikke rimeligt at sige, at den negative reelle halvakse er en fortsættelsesgrænse for $f$. F.eks. vil Taylorrækken for $f$ ud fra $-2+i$ konvergere i en cirkel som rager ud over randen af $U$ – vi kommer blot straks ind i $U$ igen og fortsættelsen stemmer ikke mere overens med den oprindelige $f$.



I $\mathbb{C}^n$ indføres en metrik ved

$$d(a,b) = |a-b| = \max\{|a_1-b_1|, \ldots, |a_n-b_n|\}$$

kuglerne i denne metrik er præcis de ligesidede polycylindre. Hvis $M, N \subseteq \mathbb{C}$ er ikke tomme mængder, bruger vi betegnelsen

$$d(M,N) = \inf_{\substack{a\in M\\ b\in N}} d(a,b)$$

For en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ kan vi specielt

$$d(a, \mathbb{C}U)$$

som kaldes randafstanden for $a$. Vi ser, at

$$a \in U \iff d(a,\mathbb{C}U) > 0$$

For $U = \mathbb{C}^n$ sættes $d(a,\mathbb{C}U) = \infty$ for ethvert $a \in \mathbb{C}^n$. Randafstanden $d(a,\mathbb{C}U)$ er åbenbart radius i den største åbne lige sidede polycylinder med centrum $a$, som er indeholdt i $U$.

Hvis vi har en Potensrække med udviklingspunkt $a$

$$\sum_{\nu_1 \dots \nu_n = 0}^{\infty} A_{\nu_1 \dots \nu_n} (z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}$$

definerer vi konvergensradius $\rho$ for potensrækken, som supremum af de $r$, for hvilke

$$\{ |A_{\nu_1 \dots \nu_n}| r^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \}$$

er en begrænset talmængde. Polycylinderen $P(a;\rho)$ er præcis den største åbne lige sidede polycylinder med centrum $a$, hvori den givne potensrække er konvergent (smdl. kap. 1).

For en holomorf funktion $f$ på en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ kan vi for hvert punkt $a \in U$ definere holomorfiradius $\tau(a;f)$ for $f$ i punktet $a$, som konvergensradius for Taylorrækken for $f$ ud fra punktet $a$. Det er klart, at

$$\tau(a;f) \geq d(a,\mathbb{C}U)$$

idet Taylorrækken konvergerer i polycylinderen

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,a) < d(a, \complement U)\}$$

idet denne er en delmængde af $U$ (se kap I side 11).
Hvis der findes et punkt $a \in U$, således at

$$\tau(a;f) > d(a, \complement U)$$

vil vi sige, at $f$ kan fortsættes ud over randen af $U$
(jvf. betragtningerne på side 111).

Vi vil nu indføre forskellige begreber, hvorunder egenskaber som en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ kan have (eller ikke have).

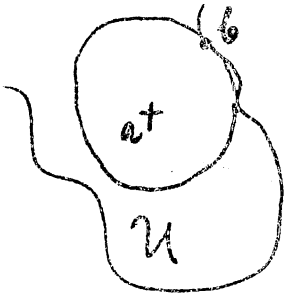
Egenskab I Til ethvert punkt $a \in U$ findes en holomorf funktion $f$ på $U$, således at $\tau(a;f) = d(a; \complement U)$

Dette betyder præcis, at vi intetsteds kan fortsætte samtlige holomorfe funktioner på $U$ ud over randen af $U$.

Enhver åben delmængde $U \subseteq \mathbb{C}$ har egenskab I

Bevis: Dette er klart, hvis $U = \mathbb{C}$. Hvis $U \neq \mathbb{C}$ vil der til hvert punkt $a \in U$ findes et punkt $b \in \mathbb{C} \setminus U$, så

$$d(a, \complement U) = d(a,b)$$




(Mængden $\{z \in \mathbb{C} \setminus U \mid d(z,a) \leq d(a, \complement U) + 1\}$ er kompakt, hvorfor den kont. fkt. $d(a,z)$ antager sin mindsteværdi her. Denne må være $d(a, \complement U)$). Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z-b}$$

har da den ønskede egenskab. Q.E.D.

Egenskab II: Der findes en holomorf funktion $f$ på $U$, således at $\tau(a;f) = d(a;\complement U)$ for ethvert $a \in U$.

Øjensynlig gælder Eg. II $\Rightarrow$ Eg. I. Hvis Eg. II er opfyldt siges $U$ at være holomorfiområdet for funktionen $f$.

Egenskab III: $U$ kaldes metrisk holomorf konveks hvis: Til enhver kompakt mængde $K \subseteq U$ og punkt $a \in U$, så $d(a,\complement U) < d(K,\complement U)$ findes en holomorf funktion $f$ på $U$, således at

$$|f(a)| > \max_{z \in K} |f(z)|$$

Sætning (Cartan & Thullen) Hvis en åben*) mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ har én af egenskaberne I, II eller III, da har den dem alle.

Bevis: Vi har allerede set, at II $\Rightarrow$ I.
For at vise, at I $\Rightarrow$ III, antages at III ikke gælder, altså at der findes kompakt mængde $K \subseteq U$ punkt $a \in U$ med

$$d(a,\complement U) < d(K,\complement U)$$

så

$$(*) \quad |f(a)| \leq \max_{z \in K} |f(z)|$$

gælder for enhver holomorf funktion på $U$. Vi vælger nu $\rho$, så $d(a,\complement U) < \rho < d(K,\complement U)$. Så er mængden

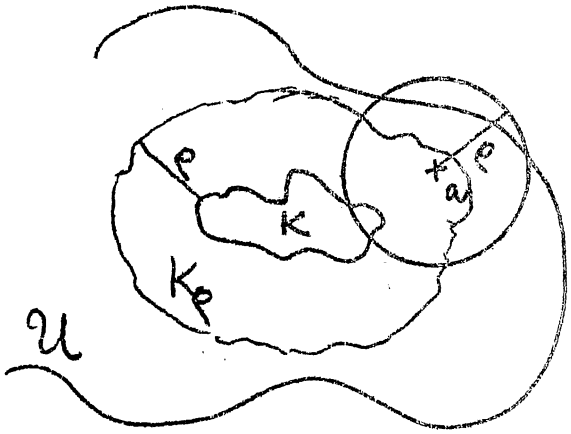
af betydning mulighedsgrunde også sammenhængende

$K_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) \le \rho \}$ kompakt og en delmængde af $U$, idet $z \notin U \Rightarrow d(z,K) \ge d(K, \complement U) > \rho$.
Hvis $z \in K$ gælder $\overline{P}(z;\rho) \subseteq K_\rho$. Hvis $f$ er en holomorf funktion på $U$ giver Cauchy's uligheder ((16) side 8), at

$$\left| \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(z) \right| \le \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{\rho^{\nu_1+\cdots+\nu_n}} M \quad \text{for } z \in K$$

hvor $M = \max_{z \in K_\rho} |f(z)|$. Idet hver af de afledede $\dfrac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}$ er en holomorf funktion på $U$ får vi hermed af (*), at

$$\left| \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a) \right| \le \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{\rho^{\nu_1+\cdots+\nu_n}} M$$




For Taylorrækken for $f$ ud fra $a$:

$$\sum A_{\nu_1 \ldots \nu_n} (z_1-a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n-a_n)^{\nu_n} = \sum \frac{1}{\nu_1! \cdots \nu_n!} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a) (z_1-a_1)^{\nu_1} \cdots (z_n-a_n)^{\nu_n}$$

gælder altså

$$|A_{\nu_1 \ldots \nu_n}| \le \frac{M}{\rho^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}$$

hvilket viser, at konvergensradius $\tau(a;f) \ge \rho > d(a, \complement U)$.
Idet dette gælder for enhver holomorf funktion $f$ på $U$, er I ikke opfyldt for $U$. Hermed er vist, at $\mathrm{I} \Rightarrow \underline{\mathrm{III}}$.

Vi skal nu vise, at $\underline{\mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{II}}$. Dette gøres direkte.

Opgaven er altså at konstruere en holomorf funktion $f$ på $U$, således at II gælder. Tilfældet $U = \mathbb{C}^n$ er trivielt, så vi antager, at $\mathbb{C}^n \setminus U \neq \emptyset$. Beviset går nu i en række skridt.

(1) <u>Vi kan finde en punktfølge $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \bar{U} \setminus U$, som er overalt tæt i $\bar{U} \setminus U$</u>

$\bar{U} \setminus U$ er ikke tom og afsluttet, da $U$ er åben og $\neq \mathbb{C}^n$. For hvert $m \in \mathbb{N}$ er mængden

$$\bar{U} \setminus U \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| \leq m\} \subseteq \mathbb{C}^n$$

en kompakt mængde, hvorfor den kan overdækkes med endeligt mange ligesidede polycylinder

$$P(c_{m1}, \tfrac{1}{m}), \ldots, P(c_{mk_m}, \tfrac{1}{m})$$

hvor $c_{m1}, \ldots, c_{mk_m} \in \bar{U} \setminus U$. Altså hvis $z \in \bar{U} \setminus U$ og $|z| \leq m$ findes et $k$, $1 \leq k \leq k_m$, så $|z - c_{mk}| < \frac{1}{m}$. Vi påstår så, at følgen

$$c_{11}, \ldots, c_{1k_1}, c_{21}, \ldots, c_{2k_2}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mk_m}, \ldots$$

kan bruges som følge $b_1, b_2, \ldots$. Hvis nemlig $z \in \bar{U} \setminus U$ findes der for hvert $m > |z|$ et $b_j$, så $|z - b_j| < \frac{1}{m}$.

(2) <u>Vi kan finde en punktfølge $a_1, a_2, \ldots$ i $U$, som ikke har fortsætningspunkter i $U$, men hvor ethvert $b_m$ som fortsætningspunkt</u>

Idet $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$, kan hvert naturligt tal skrives på præcis én måde som $m^2 + k$, hvor $1 \leq k \leq 2m+1$ og $m = 0, 1, 2, \ldots$. Vi vælger nu

$a_{m^2+1}, \ldots, a_{m^2+2m+1}$ i $\mathcal{U}$, således at

$$d(a_{m^2+k}, b_k) < \frac{1}{m+1}$$

hvilket er muligt, da $b_k \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$. Da gælder

$d(a_m, C\mathcal{U}) \to 0$ for $m \to \infty$ og $d(a_{m^2+k}, b_k) \to 0$ for $m \to \infty$

hvilket er påstanden.

Vi bemærker, at man øjensynlig kan udelade endeligt mange punkter fra følgen $a_1, a_2 \ldots$ uden at rigtigheden af (2) anfægtes

(3) <u>Hvis der er givet en kompakt mængde $K \subseteq \mathcal{U}$, et punkt $a \in \mathcal{U}$ så $d(a, C\mathcal{U}) < d(K, C\mathcal{U})$, naturligt tal $N$ og pos. reelt tal $\delta$, kan vi finde en holomorf funktion $g$ på $\mathcal{U}$, så</u>

$$g(a) = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} g}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a) = 0 \quad \text{for } \nu_1+\cdots+\nu_n \leq N$$

<u>og således at</u>

$$|1 - g(z)| < \delta \text{ for } z \in K$$

(Altså $g$ er nær 1 på $K$, mens den har et nulpunkt med høj orden i $a$). Idet $d(a, C\mathcal{U}) < d(K, C\mathcal{U})$ kan vi finde en holomorf funktion $h$ på $\mathcal{U}$, således at

$$|h(a)| > \max_{z \in K} |h(z)|$$

Da er $h(a) \neq 0$ og for $\tilde{h}(z) = \frac{h(z)}{h(a)}$ gælder derfor

$$\tilde{h}(a) = 1 \qquad \max_{z \in K} |\tilde{h}(z)| < 1$$

Til et opgivet $\varepsilon > 0$ (valgt senere afh. af $\delta$ og $N$) kan

Komplet [illegible] 7, 1967 [illegible]

vi derfor finde et [illegible] til, så $\tilde{g}(z) = (\tilde{h}(z))^{N}$

opfyldes

$$\tilde{g}(0) = 1 \qquad \max_{z \in K} |\tilde{g}(z)| < \varepsilon$$

Vi betragter så

$$g(z) = (1 - \tilde{g}(z))^{N+1}$$

Ved regelen for differentiation af et produkt er vi [illegible], at en afledet af $g(z)$ af total orden $\leq N$ [illegible] en faktor $(1-\tilde{g}(z))$, hvorfor den er 0 i 0, så den finde del af på den [illegible] er opfyldt. Videre har vi for $z \in K$

$$|1 - g(z)| = |1 - (1 - \tilde{g}(z))^{N+1}|$$

$$= \left| 1 - 1 - \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^k \binom{N+1}{k} (\tilde{g}(z))^k \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N+1}{k} |\tilde{g}(z)|^k < \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N+1}{k} \varepsilon^k = (1+\varepsilon)^{N+1} - 1$$

Vort $\varepsilon$ skal altså blot valges, så

$$(1+\varepsilon)^{N+1} - 1 \leq \delta$$

eller

$$(1+\varepsilon)^{N+1} \leq 1 + \delta$$

d.v.s., så

$$\varepsilon \leq \sqrt[N+1]{1+\delta} - 1$$

hvilket er mulig, da $\delta > 0$, hvorfor $\sqrt[N+1]{1+\delta} > 1$.

(4) Vi kan finde en holomorf funktion $f$ på $\mathcal{U}$, som ikke er identisk 0 og således at

$$f(a_k) = 0$$

$$(*) \quad \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a_k) = 0 \quad \text{for } \nu_1+\dots+\nu_n \le k$$

hvor $a_1, a_2, \dots$ er en punktfølge i $\mathcal{U}$, som opfylder (2).

Idet $d(a_m, C\mathcal{U}) \to 0$ for $m \to \infty$ kan vi vælge en følge af pos. reelle tal $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_m > \dots$ så $\rho_m \to 0$ for $m \to \infty$ og så $\rho_m > d(a_m, C\mathcal{U})$.

Mængdenne

$$K_m = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, C\mathcal{U}) \le \rho_m \text{ og } |z| \le m \}$$

er da kompakte delmængder af $\mathcal{U}$, således at

$$K_m \subseteq \mathring{K}_{m+1} \quad \text{og} \quad \mathcal{U} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{K}_m$$

De første endeligt mange $K_m$ kan være tomme – men de bortkastes blot, hvorved endeligt mange $a_m$ bortkastes, men det betyder ikke noget (snul. side 117).

Idet nu $d(a_m, C\mathcal{U}) < \rho_m = d(K_m, C\mathcal{U})$

kan vi ifølge (3) finde en holomorf funktion $g_m$ på $\mathcal{U}$, således at

$$|1 - g_m(z)| \le \frac{1}{2^{m+1}} \quad \text{for } z \in K_m$$

og så

$$g_m(a_m) = \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} g_m}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a_m) = 0 \quad \text{for } \nu_1+\dots+\nu_n \le m$$

Vi ønsker nu at vise, at funktionsfølgen

$$f_m(z) = g_1(z) \cdots g_m(z)$$

konvergerer mod en kvasinormal funktion $f(z)$ på $U$ med de ønskede egenskaber. Hertil viser vi en vurdering:

For $k \geq m$, $p \geq 0$ gælder

$$\begin{cases} |g_k(z)\, g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p}(z)| < 2 \\ |g_k(z)\, g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p}(z) - 1| < \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}} \end{cases} \quad \text{for } z \in K_m$$

Dette gøres ved <u>induktion efter $p$</u> for fast $k \geq m$. For $k \geq m$ har vi $K_m \subseteq K_k$, hvorfor

$$|g_k(z) - 1| \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} \quad \text{for } z \in K_m$$

Idet $\frac{1}{2^k} < 1$ giver dette, at

$$|g_k(z)| < 2 \quad \text{for } z \in K_m,$$

hvormed vi har påstandene for $p = 0$.
Induktionsskridtet er følgende vurdering for $z \in K_m$:

$$\begin{aligned} &|g_k(z) g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p}(z) - 1| \\ &= |g_k(z) g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p-1}(z)\big(g_{k+p}(z) - 1\big) + g_k(z) g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p-1}(z) - 1| \\ &\leq |g_k(z) g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p-1}(z)|\,|g_{k+p}(z) - 1| + |g_k(z) g_{k+1}(z) \cdots g_{k+p-1}(z) - 1| \\ &\leq 2 \cdot \frac{1}{2^{k+p+1}} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p-1}} = \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}}. \end{aligned}$$

Idet $\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}} < 1$

får vi herved

$$|g_k(z)\,g_{k+1}(z)\cdots g_{k+p}(z)| \leqq |g_k(z)g_{k+1}(z)\cdots g_{k+p}(z)-1|+1<2$$

for $z\in K_m$, hvormed induktionen er fuldført.

Af denne vurdering fås for $k\geq m$, $p\geq 0$, at

$$|f_{k+p}(z)-f_k(z)| = |g_{k+1}(z)\cdots g_{k+p}(z)-1|\,|g_{m+1}(z)\cdots g_k(z)|\,|f_m(z)|$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+p}}\right)\cdot 2\cdot|f_m(z)|$$

$$< \frac{1}{2^{k-1}}\max_{z\in K_m}|f_m(z)| \quad \text{for } z\in K_m$$

Dette viser, at følgen $f_1, f_2, \ldots$ er ligelig fundamentalfølge på $K_m$. Idet dette gælder for hvert $m$ kan vi hermed <u>en holomorf grænsefunktion på $\mathcal{U}$</u>

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z).$$

En ligesnde vurdering viser, at for hvert $\ell\geq 1$ er funktionsfølgen

$$h_{\ell,k}(z) = g_\ell(z)\,g_{\ell+1}(z)\cdots g_{\ell+k}(z), \quad k=1,2,\ldots$$

ligeligt konvergent på hver $K_m$, idet vi for $k>m$, $p\geq 1$ har

$$|h_{\ell,k+p}(z)-h_{\ell,k}(z)| = |g_{k+1}(z)\cdots g_{k+p}(z)-1|\cdot|g_{m+1}(z)\cdot g_k(z)|$$
$$\cdot|g_\ell(z)\cdots g_m(z)|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+p}}\right)\cdot 2\cdot \max_{z\in K_m}|g_\ell(z)\cdots g_m(z)|, \text{ for } z\in K_m$$

hvis $\ell<m$. For $\ell\geq m$ bliver vurderingen

$$|h_{\ell,k+p}(z) - h_{\ell,k}(z)| = |g_{k+1}(z)\cdots g_{k+p}(z) - 1| \cdot |g_\ell(z)\cdots g_k(z)|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}}\right)\cdot 2 < \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{for } z \in K_m$$

Heraved har vi for hvert $\ell$ holomorfe grænsefunktioner

$$h_\ell(z) = \lim_{k\to\infty} h_{\ell k}(z)$$

på $U$, og idet $f_{\ell+k}(z) = f_\ell(z)\cdot h_{\ell k}(z)$ har vi heraved

$$f(z) = f_\ell(z)\cdot h_\ell(z)$$

for hvert $\ell$.

Det afgørende er nu, at $h_\ell(z) \neq 0$ for $z \in K_\ell$. Dette følger af uligheden på side 120, som giver

$$|h_{\ell,p}(z) - 1| < \frac{1}{2^\ell} + \cdots + \frac{1}{2^{\ell+p}} \quad \text{for } z \in K_\ell$$

hvorfor $|h_\ell(z) - 1| < 1$ for $z \in K_\ell$, altså deraved

$$h_\ell(z) \neq 0 \quad \text{for } z \in K_\ell$$

Dette viser, at <u>$f$ ikke er identisk 0</u>, og dermed ikke identisk 0 i omegnen af noget punkt af $U$, idet $U$ er sammenhængende (identitetssætningen).

Af $f(z) = f_\ell(z)\, h_\ell(z)$

ser vi også, at hvis $m \leq \ell$ gælder der

$$f(a_m) = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_m} f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_m^{\nu_m}}(a_m) = 0 \quad \text{for } \nu_1+\cdots+\nu_m \leq m$$

idet dette gælder for $f_\ell(z) = g_1(z)\cdots g_\ell(z)$. Idet vi tit hvert $m$

kan findet et større $l$, er det hermed bevist, at $f$ har de ønskede egenskaber.

Vi kan nu endelig vise det ønskede:

(5) <u>$U$ er holomorfiområdet for $f$, d.v.s. $\tau(a;f) = d(a;CU)$ for ethvert punkt $a \in U$</u>

Lad os antage, at vi havde et $a \in U$, så $\tau(a;f) > d(a;CU)$. Så kan vi finde et randpunkt for $U$ i polycylinderen

$$P(a;\tau(a;f))$$

og dermed også et punkt $b$, som er element i følgen $b_1, b_2, \ldots$ (smal side 116) Videre kan vi finde en delfølge $a'_1, a'_2, \ldots$ af følgen $a_1, a_2, \ldots$ som konvergerer mod $b$ (også side 116). Potensrækken for $f$ ud fra $a$ konvergerer i hele $P(a;\tau(a;f))$, hvormed $f$ og enhver partiel afledet $\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f / \partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}$ er fortsat til hele polycylinderen. For enhver partiel afledet af $f$ gælder imidlertid

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a'_m) = 0 \quad \text{for } m \geq \nu_1 + \cdots + \nu_n$$

og dette med-fører åbenbart, at der for den fortsatte funktion (vi kalder også den for $f$) gælder

$$f(b) = \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(b) = 0 \quad \text{for alle } \nu_1, \ldots, \nu_n$$

Men så er den fortsatte funktion identisk 0 på en omegn af $b$ altså i hele polycylinderen (identitetssætningen), hvorfor $f$ er identisk 0 på en ikke tom åben delmængde af $U$, hvilket er en modstrid.

Q.E.D.

Man bemærker, at den konstruerede funktion $f$ er så stærkt singulær på randen af $U$, at hvis $g$ er holomorf i $U$ og ikke identisk 0, da er $U$ også holomorfiområde for $f \cdot g$.

Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde og $\mathcal{F}$ en mængde af holomorfe funktioner på $U$ (en familie af hol. fkt. siges ikke også). Hvis $K \subseteq U$ er kompakt kan vi da definere

$$\hat{K}_{\mathcal{F}} = \{ z \in U \mid \text{For hvert } f \in \mathcal{F} \text{ gælder } |f(z)| \leq \max_{w \in K} |f(w)| \}.$$

<u>Definition</u>: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde og $\mathcal{F}$ en mængde af holomorfe funktioner på $U$. Da siges $U$ at være <u>metrisk $\mathcal{F}$-konveks</u>, hvis det for enhver (ikke tom) kompakt mængde $K \subseteq U$ gælder, at

$$d(\hat{K}_{\mathcal{F}}, \complement U) = d(K, \complement U).$$

Hvis man sammenligner med definitionen på side 114 ser man, at metrisk $\mathcal{H}$-konveks, hvor $\mathcal{H}$ = mgd. af alle holomorfe funktioner på $U$, er ensbetydende med metrisk holomorf-konveks.

<u>Definition</u>: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde og $\mathcal{F}$ en mængde af holomorfe funktioner på $U$. Da siges $U$ at være <u>$\mathcal{F}$-konveks</u>, hvis det for enhver (ikke tom) kompakt mængde $K \subseteq U$, gælder at

$$\hat{K}_{\mathcal{F}} = \{ z \in U \mid \forall f \in \mathcal{F} : |f(z)| \leq \max_{w \in K} |f(w)| \}$$

også er en kompakt mængde.

Det er klart, at hvis $\mathcal{F}_1$ og $\mathcal{F}_2$ er mængder af holomorfe funktioner på $U$, så $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ da er for hver kompakt mængde $K \subset U$

$$K_{\mathcal{F}_2} = \{ z \in U \mid \forall f \in \mathcal{F}_2 : |f(z)| \leq \max_K |f| \}$$

en afsluttet delmængde af

$$K_{\mathcal{F}_1} = \{ z \in U \mid \forall f \in \mathcal{F}_1 : |f(z)| \leq \max_K |f| \}$$

hvoraf vi ser, at

$$U \ \mathcal{F}_1\text{-konvekst} \Rightarrow U \ \mathcal{F}_2\text{-konvekst}$$

<u>Sætning</u>: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde og $\mathcal{F}$ en mængde af holomorfe funktioner på $U$. Da gælder

$$U \ \mathcal{F}\text{-konvekst} \Rightarrow U \text{ metrisk holomorf konvekst}.$$

Hvis $\mathcal{F}$ indeholder alle koordinatfunktionerne $z_1, \ldots, z_n$ og hvis der af $f \in \mathcal{F}$ følger

$$f^p \in \mathcal{F} \text{ for hvert naturligt tal } p$$

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \in \mathcal{F} \text{ for alle } \nu_1, \ldots, \nu_n$$

da gælder

$$U \ \mathcal{F}\text{-konvekst} \Leftrightarrow U \text{ metrisk } \mathcal{F}\text{-konvekst}.$$

<u>Bevis</u>: Den første påstand er en speciel del af den sidste, idet $U$-$\mathcal{F}$-konvekst $\Rightarrow U$ holomorf-konvekst (d.v.s. $\mathcal{H}$-konvekst, hvor $\mathcal{H}$ = mgd. af alle holomorfe funktioner på $U$).

Vi beviser først, at

## U metrisk F-konveks $\Rightarrow$ U F-konveks

Lad altså $K \subseteq U$ være kompakt og ikke tom. Da har funktionerne $|z_1|, \ldots, |z_n|$ største værdier $r_1, \ldots, r_n$ på $K$. Idet $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{F}$ gælder derfor

$$R_{\mathcal{F}} \subseteq \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \leq r_1, \ldots, |z_n| \leq r_n \}$$

Idet $U$ er metrisk $\mathcal{F}$-konveks gælder

$$R_{\mathcal{F}} \subseteq \{ z \in U \mid d(z, \complement U) \geq d(K, \complement U) \}$$

Altså har vi

$$\hat{R}_{\mathcal{F}} \subseteq \{ z \in U \mid d(z, \complement U) \geq d(K, \complement U), |z_1| \leq r_1, \ldots, |z_n| \leq r_n \},$$

men mængden på højre side er en kompakt delmængde af $U$, hvorfor også $R_{\mathcal{F}}$ (som er afsluttet rel. til $U$) er kompakt.

Vi skal så vise det (noget vanskeligere)

## U F-konveks $\Rightarrow$ U metrisk F-konveks

Vi viser dette indirekte, idet vi benytter et argument, som ligner det på side 114-115. Lad altså $K \subseteq U$ være kompakt og ikke tom og lad $a \in U$, så $d(a, \complement U) < d(K, \complement U)$. Vi skal vise, at $a \notin R_{\mathcal{F}}$, altså at der findes $f \in \mathcal{F}$, så $|f(a)| > \max_{z \in K} |f(z)|$. Vi antager derfor, at det for enhver $f \in \mathcal{F}$ gælder, at

$$|f(a)| \leq \max_{z \in K} |f(z)|$$

og skal opnå en modstrid med $\mathcal{F}$-konveksiteten af $U$.

Vi vælger $\rho$, så $d(a, \complement U) < \rho < d(K, \complement U)$. Så er mængden

$$K_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, K) \leq \rho \}$$

en kompakt delmængde af $U$. For $f \in \mathcal{F}$ giver Cauchy's uligheder

$$\max_{z \in K} \left| \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(z) \right| \leq \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{\rho^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}} \max_{z \in K_\rho} |f(z)|$$

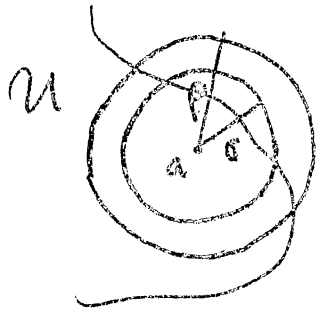
Idet vi iflg. forudsætningerne har

$$\frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \in \mathcal{F}$$

får vi heraf

$$\left| \frac{\partial^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}}(a) \right| \leq \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{\rho^{\nu_1 + \cdots + \nu_n}} \max_{z \in K_\rho} |f(z)|$$

Potensrækken for $f$ ud fra $a$ konvergerer derfor i den ligesidede polycylinder med centrum $a$ og radius $\rho$. Vi vælger nu yderligere $\sigma$, så $d(a, \complement U) < \sigma < \rho$. Hvis $w \in U$ og $d(a, w) \leq \sigma$ har vi dermed Taylor-rækken med $w$ indsat majoriseret af rækken




$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu_n} \max_{z \in K_\rho} |f(z)|$$

Som har summen

$$\left( \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{\rho}} \right)^n \max_{z \in K_\rho} |f(z)| .$$

For hvert $f \in F$ gælder altså

$$|f(w)| \le \left(\frac{\rho}{\rho-\sigma}\right)^n \max_{K_\rho} |f| .$$

Idet $f \in F \Rightarrow f^N \in F$ for hvert $N \in \mathbb{N}$ har vi derfor

$$|f(w)|^N = |f(w)^N| \le \left(\frac{\rho}{\rho-\sigma}\right)^n \max_{K_\rho} |f^N| = \left(\frac{\rho}{\rho-\sigma}\right)^n \left(\max_{K_\rho} |f|\right)^N$$

og dermed

$$|f(w)| \le \sqrt[N]{\left(\frac{\rho}{\rho-\sigma}\right)^n} \max_{K_\rho} |f|$$

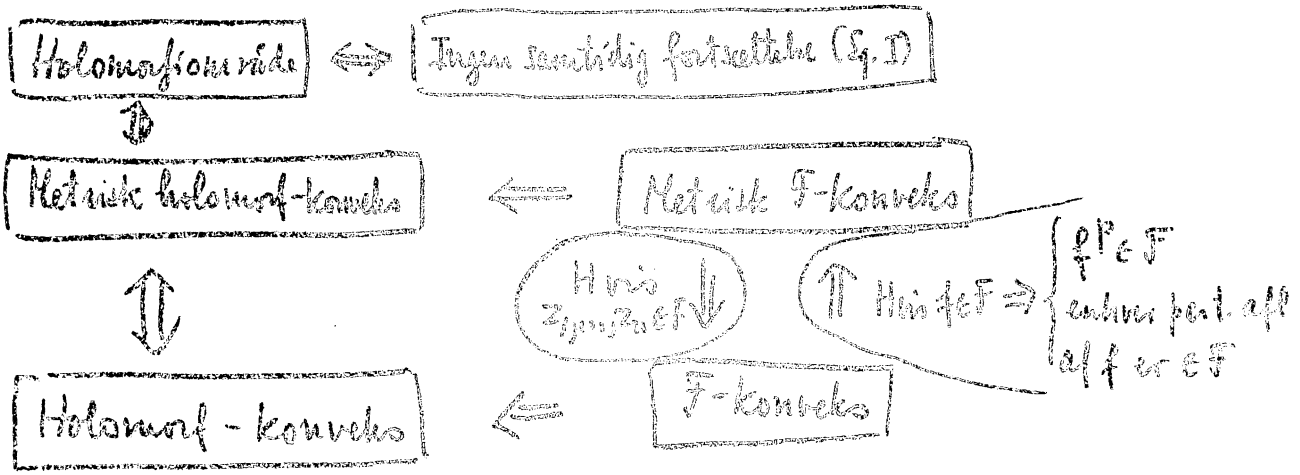
For $N \to \infty$ får vi, at

$$|f(w)| \le \max_{K_\rho} |f|$$

gælder for hvert $f \in F$. Det betyder, at $w \in \widehat{K}_{\rho F}$. Men så har vi modstrid med, at $K_{\rho F}$ er kompakt, idet der findes $w \in U$ med $d(a,w) \le \sigma$ med vilkårlig lille $d(w, \complement U)$, altså $d(K_{\rho F}, \complement U) = 0$, hvilket ikke kan gælde for en kompakt delmængde af $U$.

Q.E.D.

Det bevist kan samles i et lille skema:



Begrebet F-konveks har en vigtig sammenhæng med approksimationsspørgsmål. Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben, $\mathcal{H}(U)$ betegne mængden af holomorfe funktioner på $U$ og lad $F$ være en delmængde af $\mathcal{H}(U)$. At $F$ er overalt tæt i $\mathcal{H}(U)$ i den på side 13 indførte topologi betyder åbenbart, at til $g \in \mathcal{H}(U)$, $K \subseteq U$ kompakt og til $\varepsilon > 0$ findes der $f \in F$, således at $|g(z) - f(z)| < \varepsilon$ for $z \in K$.

Sætning: Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være et holomorfområde og $F$ en mængde af holomorfe funktioner på $U$. Hvis $F$ er tæt i $\mathcal{H}(U)$, da er $U$ F-konveks.

Bevis: Lad $K \subseteq U$ være kompakt. Vi skal vise, at

$$\hat{K}_F = \{ z \in U \mid \forall f \in F: |f(z)| \leq \max_K |f| \}$$

er kompakt.

Idet $F \subseteq \mathcal{H}$ $(= \mathcal{H}(U))$ gælder der

$$\hat{K}_{\mathcal{H}} \subseteq \hat{K}_F$$

Kan vi vise, at $\hat{K}_F \subseteq \hat{K}_{\mathcal{H}}$ er vi færdige, idet $\hat{K}_{\mathcal{H}}$ er kompakt i $U$, da $U$ er holomorf-konveks. Vi beviser, at for $z \in U$ gælder

$$z \notin \hat{K}_{\mathcal{H}} \Rightarrow z \notin \hat{K}_F.$$

Idet $z \notin \hat{K}_{\mathcal{H}}$ findes der holomorf funktion $g$ på $U$, så

$$|g(z)| > \max_K |g|$$

Vi vælger nu $\varepsilon > 0$ så $\varepsilon < \frac{1}{2}\left(|g(z)| - \max_K |g|\right)$

Idet $K' = K \cup \{z\}$ er kompakt, kan vi finde $g \in \mathcal{F}$, så

$$|f(w) - g(w)| < \varepsilon \quad \text{for } w \in K'$$

men så har vi

$$\max_K |f| \leq \max_K |f-g| + \max_K |g| < \max_K |g| + \varepsilon$$

og

$$|f(z)| \geq -|f(z)-g(z)| + |g(z)| > |g(z)| - \varepsilon$$

hvoraf vi får

$$|f(z)| > \max_K |f|$$

hvilket viser, at $z \notin \hat{K}_{\mathcal{F}}$. Q.E.D.

(Den omvendte sætning, $U$ holomorfiområde & $U$ $\mathcal{F}$-konvekst $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ er tæt i $\mathcal{H}(U)$ er også rigtig, men det er meget svært at bevise).

Der er en variation over dette tema, som også har interesse. Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben og $f_1(z), f_2(z), \ldots$ en følge af holomorfe funktioner på $U$. Vi definerer da <u>området af normal konvergens</u> $V \subseteq U$ <u>for rækken</u> $\sum f_m(z)$, som mængden af $a \in U$, således at der til $a$ findes åben omegn $W \subseteq U$ af $a$, en konvergent række $\sum A_m$ med positive reelle led, således at $|f_m(z)| \leq A_m$ for ethvert $m$ og ethvert $z \in W$. Rækken er åbenbart normalt konvergent på hver kompakt delmængde af $V$ og $V$ er den største åbne delmængde af $U$ med denne egenskab.

<u>Sætning</u> Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være åben, $F$ en mængde af kontinuerte funktioner på $U$, så $U$ er $F$-konveks. Hvis $F$ opfylder

$$f \in F \Rightarrow \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \in F \quad \text{for alle } \nu_1, \ldots, \nu_n$$

da gælder: Hvis $f_1, f_2, \ldots$ er en følge af funktioner, alle fra $F$, da er området $V \subseteq U$ af normal konvergens for rækken $\sum f_m(z)$ $F$-konveks (eller tom).

Bevis: Lad $K \subseteq V$ være kompakt. Da er $\hat{K}_F \subseteq U$ en kompakt mængde (da $U$ er $F$-konveks) vi skal vise, at $\hat{K}_F \subseteq V$. Vi benyger nu det samme argument som på side 114-115 & side 126-127:

Lad $a \in \hat{K}_F$ og vælg $\rho > 0$, så

$$K_\rho = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) \leq \rho \} \subseteq V$$

Idet $K_\rho$ er kompakt har vi da en majorantrække $\sum A_m$, som er konvergent og majoriserer på $K_\rho$:

$$|f_m(z)| \leq A_m \text{ for } z \in K_\rho.$$

Idet $a \in \hat{K}_F$ ~~[illegible]~~ har vi

$$|f(a)| \leq \max_K |f(z)|$$

for ethvert $f$. Cauchy's ulighed giver derfor

$$\left| \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} f_m(a) \right| \leq \max_K \left| \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f_m}{\partial z_1^{\nu_1} \cdots \partial z_n^{\nu_n}} \right| \leq \frac{\nu_1! \cdots \nu_n!}{\rho^{\nu_1+\cdots+\nu_n}} A_m$$

Vælges $\sigma$, så $0<\sigma<\rho$ får vi heraf

$$|f_m(z)| \leq \left(\frac{1}{1-\frac{\sigma}{\rho}}\right)^n A_m \quad \text{for } d(z,a)\leq\sigma$$

(sammenlign side 127). Dette viser, at $a\in V$ idet vi som $W$ kan bruge polycylinderen $\{z \mid d(z,a)\leq\sigma\}$ (sml. def. side 130). Altså gælder $a\in V$, altså $R_F\subseteq V$.

Q.E.D

Sætningen kan f.eks. anvendes på $U=\mathbb{C}^n$ og

$$F=\{f=az_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n} \mid \nu_1,\dots,\nu_n=0,1,2,\dots;\ a\in\mathbb{C}\}$$

De tilsvarende rækker er præcis ~~Taylorrækker~~ Potensrækker ud fra 0; eller på

$$F=\{f=az_1^{\nu_1}\cdots z_n^{\nu_n} \mid \nu_1,\dots,\nu_n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots,\ a\in\mathbb{C}\}$$

og $U=\mathbb{C}^n\setminus\{z \mid z_1=0 \vee z_2=0 \vee\dots\vee z_n=0\}$ – de tilsvarende rækker er Laurent-rækker ud fra 0.

---

En åben mængde $U\subseteq\mathbb{C}^n$ kaldes et <u>åbent analytisk polyeder</u>, hvis

$\overline{U}$ er en kompakt mængde

Der findes en åben mængde $V\subseteq\mathbb{C}^n$ så $\overline{U}\subseteq V$, endeligt mange holomorfe funktioner $f_1,\dots,f_m$ på $V$ og positive reelle tal $\rho_1,\dots,\rho_m$ således at

$$z\in U \Rightarrow |f_1(z)|<\rho_1,\dots,|f_m(z)|<\rho_m$$

$$z\in\overline{U}\setminus U \Rightarrow \exists k, \text{ så } |f_k(z)|=\rho_k.$$

Vi kalder $f_1, \dots, f_m$ et <u>funktionsystem</u> for $\mathcal{U}$. Hvis $f_1, \dots, f_m$ tilhører en given funktionsmængde $F$ kaldes $\mathcal{U}$ et <u>åbent $F$-polyeder</u>. Til yderligere forklaring af definitionen kan vi sige, at $\mathcal{U}$ er en foreningsmængde af komponenter af mængden

$$\{z \in \mathcal{V} \mid |f_1(z)| < \rho_1, \dots, |f_m(z)| < \rho_m\}$$

og har yderligere den egenskab, at $\bar{\mathcal{U}}$ er kompakt og at <u>ethvert randpunkt for $\mathcal{U}$ er et punkt i $\mathcal{V}$</u>.

Det simpleste eksempel på et analytisk polyeder er en begrænset polycylinder.

<u>Et $F$-polyeder $\mathcal{U}$ er $F$-konvekst</u>

Bevis: Lad $K \subseteq \mathcal{U}$ være kompakt. Vi skal vise, at

$$\hat{K}_F = \{z \in \mathcal{U} \mid \forall f \in F: |f(z)| \leq \max_K |f|\}$$

er kompakt. (Her ser vi symbolikkens ufuldstændighed: Der bände også være et $\mathcal{U}$ på $\hat{K}_F$, opfattes $K \subseteq \mathcal{V}$ har vi et andet $\hat{K}_F$, nemlig ${}_{\mathcal{V}}\hat{K}_F$, men ${}_{\mathcal{U}}\hat{K}_F = \mathcal{U} \cap {}_{\mathcal{V}}\hat{K}_F$).

Vi har $f_1, \dots, f_m \in F$. For hvert $z \in K$ gælder

$$|f_1(z)| < \rho_1, \dots, |f_m(z)| < \rho_m$$

og dermed, da $K$ er kompakt

$$\max_K |f_k(z)| = \sigma_k < \rho_k$$

Vi har derfor

$$\hat{K}_F \subseteq \{z \in \mathcal{U} \mid |f_1(z)| \leq \sigma_1, \dots, |f_m(z)| \leq \sigma_m\}$$

Heraf ser vi, at ethvert randpunkt for $\widehat{K}_F$ er indre punkt i $\mathcal{U}$, idet $z \in \operatorname{Rand} \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U} \Rightarrow \exists k$ så $|f_k(z)| = \rho_k$. Idet $\widehat{K}_F$ er afsluttet relativt til $\mathcal{U}$ er den derfor en afsluttet delmængde

Anvendeligheden af analytiske polyedre beror på to sætninger.

<u>Sætning</u> Lad $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde og $F$ en mængde af holomorfe funktioner på $\mathcal{V}$. ~~så $\mathcal{V}$ er $F$-konveks~~ Hvis $\mathcal{V}$ er $F$-konveks, da findes til hver kompakt mængde $K \subseteq \mathcal{V}$ et $F$-polyeder $\mathcal{U}$, så $K \subseteq \mathcal{U} \subseteq \overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{V}$

Bevis: Idet $\mathcal{V}$ er $F$-konveks er $\widehat{K}_F \subseteq \mathcal{V}$ kompakt. Vi kan finde en kompakt mængde $K'$, så

$$\widehat{K}_F \subseteq \overset{\circ}{K'} \subseteq K' \subseteq \mathcal{V}$$

(f.eks. $K' = \{z \mid d(z, \widehat{K}_F) \leq \rho\}$, hvor $\rho < d(\widehat{K}_F, \complement \mathcal{V})$).

Til hvert punkt $a \in K' \setminus \overset{\circ}{K'}$ findes da $f \in F$, så

$$|f(a)| > \max_K |f|$$

idet jo $a \notin \widehat{K}_F$. Idet $|f|$ er kontinuert har vi dermed en åben omegn $W_a$ af $a$, så

$$|f(z)| > \rho_a > \max_K |f| \quad \text{for } z \in W_a.$$

Idet $K' \setminus \overset{\circ}{K'}$ er kompakt (afsl. delmgd. af $K'$) vil endeligt mange $W_a$ overdække den. Vi kan altså finde

funktioner $f_1, f_2, \ldots, f_m \in F$ og pos. reelle tal $\rho_1, \ldots, \rho_m$ således at

$$z \in K \Rightarrow |f_1(z)| < \rho_1, \ldots, |f_m(z)| < \rho_m$$

og $\quad z \in K' \setminus \mathring{K}' \Rightarrow \exists k$, så $|f_k(z)| > \rho_k$.

Vi definerer nu

$$U = \{ z \in \mathring{K}' \mid |f_1(z)| < \rho_1, \ldots, |f_m(z)| < \rho_m \}$$

Da gælder (se side 132)

$$\bar{U} \subseteq K'$$

hvorfor $\bar{U}$ er kompakt.

Videre gælder $z \in U \Rightarrow |f_1(z)| < \rho_1, \ldots, |f_m(z)| < \rho_m$

Endelig kan vi, da $\bar{U} \subseteq K'$, at

$$\bar{U} \subseteq \{ z \in K' \mid |f_1(z)| \leq \rho_1, \ldots, |f_m(z)| \leq \rho_m \}$$
$$= \{ z \in \mathring{K}' \mid |f_1(z)| \leq \rho_1, \ldots, |f_m(z)| \leq \rho_m \}$$

idet jo $z \in K' \setminus \mathring{K}' \Rightarrow \exists k$, så $|f_k(z)| > \rho_k$. Altså

$$\bar{U} \setminus U \subseteq \{ z \in \mathring{K}' \mid |f_1(z)| = \rho_1 \vee \ldots \vee |f_m(z)| = \rho_m \}$$

hvilket giver den sidste egenskab på side 132.

Mængden $U$ er altså et F-polyeder med de ønskede egenskaber.

Q.E.D.

Hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er et åbent analytisk polyeder og $f$ en funktion, der er holomorf på en åben omegn af $\bar{U}$, og hvis $\rho$ er et reelt tal, så $z \in U \Rightarrow |f(z)| < \rho$, kan vi føje uligheden $|f(z)| < \rho$ til de definerende uligheder for $U$ (side 132).

Den gør ingen gavn - men heller ingen skade. F.eks. kan man føje de komplekse koordinatfunktioner $z_1, \ldots, z_m$ til det definerende funktionssystem for $U$.

Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være et åbent analytisk polyeder med definerende uligheder $|f_1(z)| < \rho_1, \ldots, |f_m(z)| < \rho_m$. Ved

(*) $(z_1, \ldots, z_n) = z \to (w_1, \ldots, w_m)$, hvor $w_k = f_k(z)$

defineres da en holomorf afbildning $U \xrightarrow{\Phi} \mathbb{C}^m$ (endda af en åben omegn $V$ af $\bar{U}$ ind i $\mathbb{C}^m$). Billedmængden er åbenbart indeholdt i polycylinderen

$$P(0;\rho) = \{ w \in \mathbb{C}^m \mid |w_1| < \rho_1, \ldots, |w_m| < \rho_m \}.$$

Der gælder nu:

<u>Den holomorfe afbildning $\Phi: U \to P(0;\rho)$ er egentlig, d.v.s. hvis $K \subseteq P(0;\rho)$ er kompakt, da er $\Phi^{-1}(K) \subseteq U$ også kompakt. Hvis koordinaterne $z_1, \ldots, z_n$ findes blandt $f_1, \ldots, f_m$ da er $\Phi$ injektiv og Jacobimatricen for $\Phi$ har rangen $n$ i ethvert $z \in U$.</u>

Bevis: Definitionen (*) giver en afbildning

$$\tilde{\Phi}: \bar{U} \to \overline{P(0;\rho)}$$

og her gælder $\tilde{\Phi}(\bar{U} \setminus U) \subseteq \overline{P(0;\rho)} \setminus P(0;\rho)$ d.v.s. rand afbildes i rand (se sidste linie side 132). For $w \in P(0;\rho)$ har vi derfor

$$\tilde{\Phi}^{-1}(w) \subseteq U$$

altså $\tilde{\Phi}^{-1}(w) = \hat{\Phi}^{-1}(w) \cap U = \Phi^{-1}(w)$

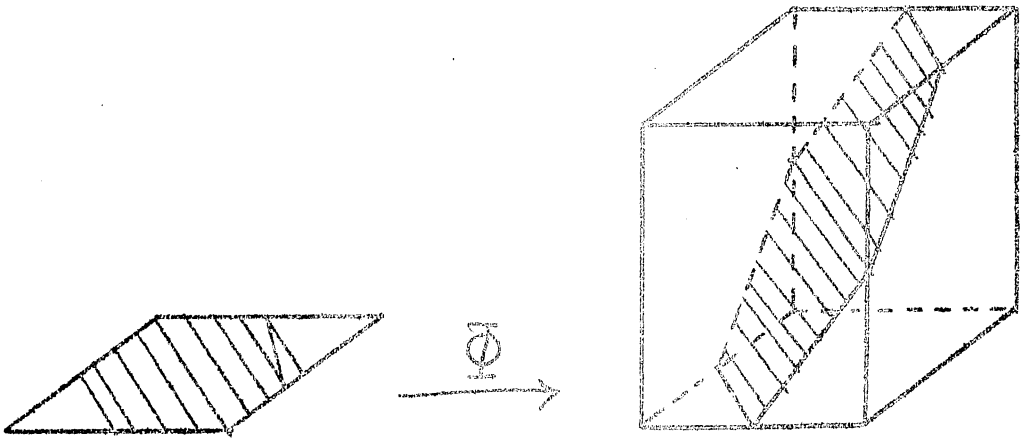
For den kompakte mængde $K \subset P(0;\rho)$ får vi altså

$$\Phi^{-1}(K) = \tilde{\Phi}^{-1}(K),$$

men idet $\tilde{\Phi}$ er kontinuert, er $\tilde{\Phi}^{-1}(K)$ afsluttet relativt til $\overline{U}$, altså afsluttet i $\mathbb{C}^n$. Idet den også er begrænset, er den følgelig kompakt.

Den sidste påstand er indlysende. Q.E.D.

Illustration:




$U$: $|z_1| < \rho_1$
$|z_2| < \rho_2$
$|f_3| < \rho_3$

$\Phi$: $w_1 = z_1$
$w_2 = z_2$
$w_3 = f_3(z_1, z_2)$

Det følger heraf, at $\underline{\Phi(U) \text{ er relativt afsluttet i } P(0;\rho)}$

Vi har nemlig

$$\Phi(U) = P(0;\rho) \cap \tilde{\Phi}(\overline{U})$$

og $\tilde{\Phi}(\overline{U})$ er kompakt, altså afsluttet, idet $\overline{U}$ er kompakt og $\tilde{\Phi}$ kontinuert.

$\underline{\text{Hvis } z_1, \ldots, z_n \text{ er blandt funktionerne } f_1, \ldots, f_m, \text{ da er}}$
$\underline{\Phi(U) \text{ en analytisk mængde i } P(0;\rho).}$

Bevis: Vi kan antage, at $f_1 = z_1, \ldots, f_n = z_n$, altså $\Phi$ er givet ved

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 \\ &\vdots \\ w_n &= z_n \qquad\qquad (z_1, \ldots, z_n) \in U \\ w_{n+1} &= f_{n+1}(z_1, \ldots, z_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(z_1, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

Hvis nu $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m) \in \Phi(U)$ har vi

$$a' = (a_1, \ldots, a_n) \in U$$

Idet $U$ er åben er

$$W = \{ w \in P(a;\rho) \mid (w_1, \ldots, w_n) \in U \}$$

en åben delmængde af $P(a;\rho)$ og en omegn af $a$.
Vi har øjensynlig

$$W \cap \Phi(U) = \{ w \in W \mid w_{n+1} = f_{n+1}(w_1, \ldots, w_n), \ldots, w_m = f_m(w_1, \ldots, w_n) \}$$

og her er $f_{n+1}, \ldots, f_m$ holomorfe funktioner på $W$.
Idet $\Phi(U)$ er afsluttet rel. til $P(a;\rho)$ er den altså en analytisk mængde heri. Q.E.D.

Bemærkning: Funktionerne $f_{n+1}(w_1, \ldots, w_n)$ vides kun at være definerede på $W$, men ikke på hele $P(a;\rho)$.

Bemærkning: $\Phi(U)$ er en analytisk mængde i $P(a;\rho)$ uden den ekstra forudsætning, men det er svært at bevise.

## Opgaver til kapitel 4

1. Med $F$ betegnes mængden af helomorfe funktioner

$$a z_1^m z_2^n \quad , a \in \mathbb{C} \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

på $\mathbb{C}^2$. Vis, at en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^2$ er $F$-konveks når og kun når:

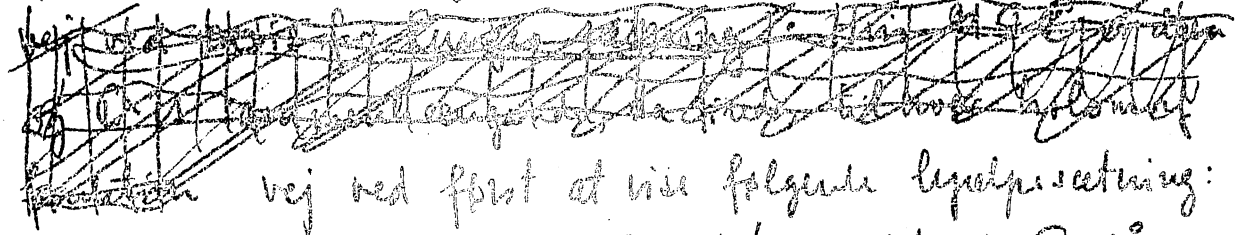
(i) Hvis $(z_1,z_2) \in U$ og $|z_1'| \leq |z_1|$, $|z_2'| \leq |z_2|$ da gælder $(z_1',z_2') \in U$ ; og

(ii) Mængden $\{(\rho_1,\rho_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (e^{\rho_1}, e^{\rho_2}) \in U\}$ er konveks

Vis, at hvis $U$ er $F$-konveks og $f$ er en helomorf funktion på $U$, da konvergerer Taylorrækken ud fra $(0,0)$ mod $f(z)$ for ethvert $z \in U$.

Vis, at en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^2$ er konvergensområde for en potensrække $\sum_{\mu\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} z_1^\mu z_2^\nu$ når og kun når (i) og (ii) er opfyldt.

2. Vis, at en åben, sammenhængende mængde $U \subseteq \mathbb{C}$ er polynomikonveks (d.v.s. $F$-konveks, hvor $F$ = mgd. af polynomier $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$) når og kun når $\mathbb{C} \setminus U$ er sammenhængende. (Benyt max.-princippet for beviset den ene vej). (Bevis på stranden den anden



vej ved først at vise følgende hjælpesætning:
Hvis $K \subseteq \mathbb{C}$ er kompakt, $b$ og $b'$ punkter i $\mathbb{C}$, så

$b \neq b'$ og $|b-b'| < \min_{z\in K}|z-b|$ og $|b-b'| < \min_{z\in K}|z-b'|$,

og hvis vi har givet komplekse tal $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, da findes til hvert $\varepsilon>0$ endeligt mange komplekse tal $\beta_1,\dots,\beta_\ell$ og et polynomium $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$, således at der gælder

$$\left|\frac{\alpha_1}{z-b}+\frac{\alpha_2}{(z-b)^2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{(z-b)^k}-\frac{\beta_1}{(z-b')}-\cdots-\frac{\beta_\ell}{(z-b')^\ell}-P(z)\right|<\varepsilon$$

for $z\in K$.).

3. Vis ved hjælp af sætn. på side 134, at hvis $U\subseteq\mathbb{C}^n$ er et regularitetsområde, da findes regularitetsområder $U_1,U_2,\dots$ så $\overline{U}_m\subseteq U_{m+1}$, $\overline{U}_m$ kompakt og $U=\bigcup_{m=1}^{\infty}U_m$. Et reg. område kan altså approximeres "indefra" med reg. områder. Vis, at $\mathcal{U}=\{(z_1,z_2)\mid |z_2|<|z_1|<1\}$ er et reg. område. Vis, at hvis $f$ er holomorf på en åben omegn af $\overline{U}$, da kan $f$ fortsættes til en åben omegn af polycylinderen $\{(z_1,z_2)\mid |z_1|\le 1, |z_2|\le 1\}$ (man siger, at $U$ har et "side-hylster").

## Kapitel 5: Den Grassmann'ske algebra. Differentialformer. Poincaré's lemma. Dolbeault's lemma.

Vi begynder med at repetere en velkendt kendsgerning fra den lineære algebra. Hvis $V_1, \ldots, V_k$ og $W$ er vektorrum over et kommutativt legeme $L$ kaldes en afbildning

$$F : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$$

$L$-multilineær, hvis den er $L$-lineær i hver af de variable, når de øvrige fastholdes. Hvis $V_1, \ldots, V_k$ har endelig dimension over $L$, og $(e_i^1, \ldots, e_i^{p_i})$, $p_i = \dim V_i$ er en basis for $V_i$ over $L$, da er $F$ fastlagt ved billedvektorerne

$$F(e_1^{p_1}, \ldots, e_k^{p_k}) \in W, \quad 1 \le p_i \le \dim V_i .$$

På den anden side kan disse frembringes vilkårligt i $W$, og der vil findes en $L$-multilineær afbildning $F$, som har de fremkomne billedvektorer på $(e_1^{p_1}, \ldots, e_k^{p_k})$.

Vi lader nu $L$ betegne et kommutativt legeme med karakteristik 0 (sidenhen vil $L$ være $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Ved en *sammenhængende, gradueret algebra* $A$ over $L$ forstås en følge af vektorrum over $L$

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \qquad n \in \mathbb{N}$$

og et system af $L$-bilineære afbildninger

$$\mu_{pq} : A_p \times A_q \to A_{p+q} \qquad p, q \in \mathbb{N} .$$

[Afbildningerne $\mu_{pq}$ opfattes som regel som et produkt, og man skriver $a$ og $b$ med et produktsymbol imellem istedet for $\mu_{pq}(a,b)$]

Det er sedvanne også at medtage $A_0 = L$ til en sådan algebra og så definere $\mu_{0p}: A_0 \times A_p \to A_p$ og $\mu_{p0}: A_p \times A_0 \to A_p$ som multiplikationen med et tal fra $L$ i vektorrummet $A_p$ – specielt er $\mu_{00}: A_0 \times A_0 \to A_0$ multiplikationen i legemet $L$.

Vi siger, at algebraen $A$ er <u>associativ</u>, hvis hvert af diagrammerne

$$\begin{array}{ccc} A_p \times A_q \times A_r & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \mu_{qr}} & A_p \times A_{q+r} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{pq} \times \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{p\,q+r}} \\ A_{p+q} \times A_r & \xrightarrow[\mu_{p+q\,r}]{} & A_{p+q+r} \end{array} \qquad (1)$$

er <u>kommutativt</u> – d.v.s. de to sammensatte afbildninger fra øverste venstre til nederste højre hjørne er identiske. Man bemærker, at begge disse afbildninger er $L$-multilineære (Id betegner en identisk afbildning).

Videre siges $A$ at være <u>antikommutativ</u>, hvis hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} A_p \times A_q & \xrightarrow{T} & A_q \times A_p \\ & {\scriptstyle \mu_{pq}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mu_{qp}} & \\ & A_{p+q} & \end{array} \qquad (2)$$

hvor $T$ blot betegner ombytningen $(a,b) \to (b,a)$, er kommutativt påmær en faktor $(-1)^{pq}$, d.v.s.

$$\mu_{pq} = (-1)^{pq}\, \mu_{qp} \circ T$$

Igen bemærker vi, at de to afbildninger begge er $L$-multilineære.

En associativ, sammenhængende, graderet algebra $A$ siges at være *frembragt af* $A_1$, hvis det for hvert $p \in \mathbb{N}$ gælder, at vektorrummet $A_p$ er udspændt af de elementer, som er produkter af elementer fra $A_1$ d.v.s. af formen

$$\mu_{p-1,1}(\mu_{p-2,1}(\dots\mu_{21}(\mu_{11}(a^{(1)}, a^{(2)}), a^{(3)}), \dots)a^{(p)})$$

hvor $a^{(1)}, \dots, a^{(p)} \in A_1$.

Lad $A$ og $B$ være sammenhængende, graderede algebraer over $L$. Ved en *isomorfi* $\Phi: A \to B$ forstås et system af $L$-lineære afbildninger $\Phi_p: A_p \to B_p$, $p \in \mathbb{N}$, som "harmonerer" med multiplikationerne i $A$ og $B$, d.v.s. hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} A_p \times A_q & \xrightarrow{\mu_{pq}} & A_{p+q} \\ \Phi_p \times \Phi_q \downarrow & & \downarrow \Phi_{p+q} \\ B_p \times B_q & \xrightarrow{\nu_{pq}} & B_{p+q} \end{array} \tag{3}$$

er kommutativt. Her betegner $\nu_{pq}$ multiplikationen i $B$. Vi ser igen, at de to afbildninger er $L$-multilineære.

Lad nu $V$ være et vektorrum over $L$ med endelig dimension $m$ og lad $e^1, \dots, e^m$ være en basis for $L$.
For hvert $k$ med $1 \le k \le m$ findes præcis $\binom{m}{k}$ talsæt $(i_1, \dots, i_k)$ så $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$, og disse kan tænkes ordnet ved den leksikografiske ordning. For hvert $k \in \mathbb{N}$ defineres nu

$$\Lambda^k(V) = \begin{cases} 0 & \text{for } k > m \\ L^{\binom{m}{k}} & \text{for } 1 \le k \le m \end{cases}$$

De $\binom{m}{k}$ basiselementer $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0) \dots$ i $L^{\binom{m}{k}}$ betegnes med $\not* e^{i_1}, \dots, e^{i_k} *$, hvor $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$ og hvor $(i_1, \dots, i_k)$ gennemløber de omtalte talsæt i den naturlige rækkefølge. Hvert element $V \in \Lambda^k(V)$ har altså præcis én fremstilling

$$V = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \lambda_{i_1 \dots i_k} \not* e^{i_1}, \dots, e^{i_k} *$$

hvor $\lambda_{i_1 \dots i_k} \in L$. Ved

$$\lambda_1 \not* e^1 * + \dots + \lambda_m \not* e^m * \longleftrightarrow \lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_m e^m$$

kan vi åbenbart identificere $V$ og $\Lambda^1(V)$.

For vilkårlige $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$ defineres nu et element $\not* e^{j_1}, \dots, e^{j_k} * \in \Lambda^k(V)$ ved

$$\not* e^{j_1}, \dots, e^{j_k} * = \begin{cases} 0 \text{ hvis der er to ens blandt } j_1, \dots, j_k \\ \text{og ellers} \\ \operatorname{sign}(\sigma) \not* e^{j_{\sigma(1)}}, \dots, e^{j_{\sigma(k)}} *, \text{ hvor } \sigma \text{ betegner den permutation af } \{1, \dots, k\}, \text{ så} \\ 1 \le j_{\sigma(1)} < \dots < j_{\sigma(k)} \le m \end{cases} \tag{4}$$

Her er $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, hvis $\sigma$ er lige og $= -1$, hvis $\sigma$ er ulige. Permutationen $\sigma$ er øjensynlig entydigt bestemt, og den er identiteten, hvis $1 \le j_1 < \dots < j_k \le m$.

Vi kan nu <u>definere $L$-bilineære afbildninger</u>

$$\mu_{pq} : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V)$$

ved, at for $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$ og $1 \le j_1 < \dots < j_q \le m$, gælder

$$\mu_{pq}(\not* e^{i_1}, \dots, e^{i_p} *, \not* e^{j_1}, \dots, e^{j_q} *) = \not* e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q} * \tag{5}$$

hvor højre side skal fortolkes ved hjælp af (4). Hermed er afbildningen $\mu_{pq}$ virkelig veldefineret, idet vi har foreskrevet den på

hvert par af basisvektorer (sml. side 141). Hermed har vi konstrueret en sammenhængende, gradueret algebra over $L$. For $a \in \Lambda^p(V)$ og $b \in \Lambda^q(V)$ skrives $a \wedge b$ istedet for $\mu_{pq}(a,b)$. Produktet $\wedge$ kaldes det ydre produkt.

Af (4) får vi let, at der gælder

(6) $\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_k} \rangle = \operatorname{sign}(\rho) \langle e^{i_{\rho(1)}}, \dots, e^{i_{\rho(k)}} \rangle$

hvor $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ og $\rho$ er en permutation af $\{1, \dots, k\}$. Hvis nemlig to af $i$-erne er ens er begge sider $= 0$, og ellers har vi ifølge (4), at

$$\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_k} \rangle = \operatorname{sign}(\sigma) \langle e^{i_{\sigma(1)}}, \dots, e^{i_{\sigma(k)}} \rangle$$
$$\langle e^{i_{\rho(1)}}, \dots, e^{i_{\rho(k)}} \rangle = \operatorname{sign}(\tau) \langle e^{i_{\tau(\rho(1))}}, \dots, e^{i_{\tau(\rho(k))}} \rangle$$

hvor $1 \le i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)} \le m$ og $1 \le i_{\tau(\rho(1))} < \dots < i_{\tau(\rho(k))} \le m$. Heraf følger øjensynlig, at $\sigma = \tau \circ \rho$ og dermed $\operatorname{sign}(\rho) = \operatorname{sign}(\tau^{-1} \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1} \circ \tau) = \operatorname{sign}(\tau) / \operatorname{sign}(\sigma)$, men de to høje sider ovenfor adskiller sig præcis med denne faktor, og heraf får påstanden.

Ud fra (6) kan vi nu vise, at for vilkårlige $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ i $\{1, \dots, m\}$ gælder der

(7) $\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_p} \rangle \wedge \langle e^{j_1}, \dots, e^{j_q} \rangle = \langle e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q} \rangle$.

Dette er pr. def. af $\wedge$ rigtigt, når $1 \le i_1 < \dots < i_p \le m$ og $1 \le j_1 < \dots < j_q \le m$. Hvis der er gentagelser blandt $i$-erne eller blandt $j$-erne, bliver begge sider 0 ifølge (4) (og bilinearitæten af $\wedge$), så her er (7) rigtig. Hvis både $i$-er og $j$-er er hver for sig indbyrdes forskellige, har vi

$$\langle e^{i_1}, \dots, e^{i_p} \rangle = \operatorname{sign}(\sigma) \langle e^{i_{\sigma(1)}}, \dots, e^{i_{\sigma(p)}} \rangle$$
$$\langle e^{j_1}, \dots, e^{j_q} \rangle = \operatorname{sign}(\tau) \langle e^{j_{\tau(1)}}, \dots, e^{j_{\tau(q)}} \rangle$$

hvor $1 \le i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(p)} \le m$ og $1 \le j_{\tau(1)} < \dots < j_{\tau(q)} \le m$.

Heraf fås så

$$\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast \wedge \ast e^{j_1},\dots,e^{j_q}\ast = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)\ast e^{i_{\sigma(1)}},\dots,e^{i_{\sigma(p)}},e^{j_{\tau(1)}},\dots,e^{j_{\tau(q)}}\ast$$

Af (6) fås dernæst

$$\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_r}\ast = \operatorname{sign}(\rho)\ast e^{i_{\sigma(1)}},\dots,e^{i_{\sigma(p)}},e^{j_{\tau(1)}},\dots,e^{j_{\tau(q)}}\ast,$$

hvor $\rho$ er den permutation af $\{1,\dots,p+q\}$, som er bestemt ved

$$\rho(t)=\sigma(t) \quad \text{for } 1\le t\le p$$

$$\rho(t)=\tau(t-p)+p \quad \text{for } p+1\le t\le p+q$$

Idet $\operatorname{sign}(\rho)=\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$ fås påstanden.

Vi kan nu let vise, at <u>algebraen er associativ</u>. Vi skal hertil vise, at diagram (1) kommuterer. Idet hver af de to sammensætninger er $L$-multilineære, er det nok at vise, at de stemmer overens på hvert sæt af basisvektorer (smh. side 141) – det er med andre ord nok at vise associativiteten for produkt af tre basisvektorer. Men af (7) får vi umiddelbart, at såvel

$$(\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast \wedge \ast e^{j_1},\dots e^{j_q}\ast)\wedge \ast e^{l_1},\dots e^{l_r}\ast$$

som

$$\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast \wedge (\ast e^{j_1},\dots,e^{j_q}\ast \wedge \ast e^{l_1},\dots,e^{l_r}\ast)$$

er lig med $\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_q},e^{l_1},\dots,e^{l_r}\ast$,

hvormed associativiteten er bevist.

Efter samme princip kan vi vise, at algebraen er <u>anti-kommutativ</u>. Det er her diagrammet (2) som kommer i spil, og det er igen nok at vise påstanden for to basisvektorer. Af (6) fås vi

$$\ast e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast \wedge \ast e^{j_1},\dots,e^{j_q}\ast = \ast e^{i_1},\dots,e^{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_q}\ast$$

$$= \operatorname{sign}(\rho)\ast e^{j_1},\dots,e^{j_q},e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast = \operatorname{sign}(\rho)\ast e^{j_1},\dots,e^{j_q}\ast \wedge \ast e^{i_1},\dots,e^{i_p}\ast,$$

hvor $\rho$ er den ved $(1,\dots,p,p+1,\dots,p+q) \to (p+1,\dots,p+q,1,2,\dots,p)$ bestemte permutation. Idet $\operatorname{sign}(\rho) = (-1)^{pq}$ fås påstanden.

Af (7) ser vi, idet algebraen er associativ, at

$$\langle e^{i_1},\dots,e^{i_p}\rangle = e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_p} \qquad (\text{her bruges } \Lambda^1(V)=V)$$

og vi vil derfor ikke mere bruge symbolet $\langle\dots\rangle$.

Vi kan samle resultaterne i en sætning:

<u>Til et vektorrum $V$ med endelig dimension $m$ over $L$ og med basis $e^1,\dots,e^m$, findes en associativ, antikommutativ sammenhængende, graderet algebra, den Grassmann'ske algebra af $V$,</u>

$$\Lambda(V) = (\Lambda^1(V), \Lambda^2(V), \dots)$$

<u>hvor der gælder</u> (idet produktet betegnes med $\wedge$)

(a) $\Lambda^1(V) = V$

(b) for $k>m$ er $\Lambda^k(V) = 0$

(c) elementerne $e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$, hvor $1\le i_1<\dots<i_k\le m$, danner en basis for $\Lambda^k(V)$ som vektorrum over $L$.

[Ved denne konstruktion har vi taget vort udgangspunkt i en bestemt basis for $V$. Algebraen $\Lambda(V)$ er imidlertid <u>uafhængig af valget af basis</u>. Hvis nemlig $\tilde e^1,\dots,\tilde e^m$ er en anden basis for $V$, kan vi skrive hver af basisvektorerne $e^1,\dots,e^m$ som linearkombination af $\tilde e^1,\dots,\tilde e^m$. Af produktets associativitet ses deraf, at hvert element $e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$ kan skrives som linearkombination af elementerne $\tilde e^{j_1}\wedge\dots\wedge\tilde e^{j_k}$. Her kan vi bruge antikommutativiteten og få

(8) $$\tilde e^{j_1}\wedge\dots\wedge\tilde e^{j_k} = \begin{cases} 0 & \text{hvis der er gentagelser blandt } j_1,\dots,j_k \\ \operatorname{sign}(\sigma)\,\tilde e^{j_{\sigma(1)}}\wedge\dots\wedge\tilde e^{j_{\sigma(k)}} & \text{hvor } j_{\sigma(1)}<\dots<j_{\sigma(k)} \end{cases}$$

Følgelig vil elementerne

$$\tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k}, \text{ hvor } 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq m$$

udspænde vektorrummet $\Lambda^k(V)$. Idet dette har dimension $\binom{m}{k}$ og da er præcis $\binom{m}{k}$ sådanne elementer, danner disse en basis. Vi får nu en isomorfi mellem de Grassmann'ske algebraer defineret ved hjælp af basene $e^1, \ldots, e^m$ henh. $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^m$ ved

$$(9) \qquad * \hat{e}^{j_1}, \ldots, \hat{e}^{j_k} * \longleftrightarrow \tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k}$$

for $j_1 < \ldots < j_k$. Formlen (8) medfører præcis (4) for algebraen defineret ud fra $\hat{e}$-erne, hvorfor den ved (9) definerede korrespondance opfylder

$$* \tilde{e}^{j_1}, \ldots, \tilde{e}^{j_k} * \longleftrightarrow \hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_k}$$

for vilkårlige $j_1, \ldots, j_k$, men heraf får

$$* \tilde{e}^{i_p}, \ldots, \tilde{e}^{i_1} * \wedge * \tilde{e}^{j_1}, \ldots, \tilde{e}^{j_q} * = * \tilde{e}^{i_1}, \ldots, \tilde{e}^{i_p}, \tilde{e}^{j_1}, \ldots, \tilde{e}^{j_q} *$$

$$\longleftrightarrow \hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p} \wedge \hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_1} = (\hat{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{i_p}) \wedge (\hat{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}^{j_q}),$$

hvilket viser, at korrespondancen også harmonerer med multiplikationen. — I det følgende skal vi dog hovedsagelig se på vektorrum, hvori der vælges en bestemt basis ].

Vi har fra det foregående, at <u>hver element</u> $\varphi \in \Lambda^k(V)$ <u>har præcis én fremstilling</u>

$$(10) \qquad \varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \lambda_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$$

som vi vil kalde <u>den første normal-fremstilling</u> af $\varphi$. Derimod vil $\varphi$ have flere fremstillinger

$$\varphi = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$$

idet elementerne $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ jo er lineært uafhængige - for nogle af dem er endda 0. Et talsæt $\mu_{i_1 \ldots i_k}$, indiceret

vel to indices, som hver kan antage værdierne $\{1,\dots,m\}$, kaldes *alternerende*, hvis der gælder

(11) $\qquad \mu_{i_1\dots i_k} = \operatorname{sign}(\sigma)\,\mu_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(k)}}$

for hver permutation $\sigma$ af $\{1,\dots,k\}$. Der gælder nu:
*Hvert element $\varphi \in \Lambda^k(V)$ har præcis én fremstilling*

(12) $\qquad \varphi = \frac{1}{k!}\sum \mu_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$,

*hvor talsættet $\mu_{i_1\dots i_k}$ er alternerende. Denne fremstilling kaldes den anden normalfremstilling. Koefficienterne i de to normalfremstill. er forbundet ved*

(13) $\qquad \mu_{i_1\dots i_k} = \lambda_{i_1\dots i_k}$ *for* $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$.

*Hvis*

$$\varphi = \sum \alpha_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$$

*er en vilkårlig fremstilling af $\varphi$, er koefficienterne i den anden (og dermed den første) normalfremst. bestemt ved*

(14) $$\mu_{i_1\dots i_k} = \sum_{\sigma\in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\,\alpha_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(k)}},$$

*hvor $S^k$ betegner gruppen af permutationer af $\{1,\dots,k\}$.*

**Bevis:** Vi beviser først *entydigheden* af den anden normalfremstilling og formlen (13). Hvis

$$\varphi = \frac{1}{k!}\sum \mu_{i_1\dots i_k} e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$$

hvor $\mu_{i_1\dots i_k}$ er alternerende, har vi åbenbart

$$\varphi = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S^k}\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le m} \operatorname{sign}(\sigma)\,\mu_{j_1\dots j_k} e^{j_{\sigma(1)}}\wedge\dots\wedge e^{j_{\sigma(k)}}.$$

Idet $e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_k}$ ved antikommutationsreglen ophæver alternerende

de af sine indices, får vi

$$\varphi = \frac{1}{k!} \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le m} \sum_{\sigma \in S^k} \mu_{j_1 \dots j_k} e^{j_{\sigma 1}} \wedge \dots \wedge e^{j_{\sigma k}}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le m} \mu_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}$$

Men dette må være den ønskede normalfremstilling af $\varphi$, altså har vi

$$\mu_{i_1 \dots i_k} = \lambda_{i_1 \dots i_k} \quad \text{når } 1 \le i_1 < \dots < i_k \le m,$$

og dermed, da $\mu_{i_1 \dots i_k}$ er alternerende

$$\mu_{i_1 \dots i_k} = \begin{cases} 0 \text{ hvis der er gentagelser blandt } i_1, \dots, i_k \\ \operatorname{sign}(\sigma)\, \lambda_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}, \text{ hvor } i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)} \end{cases}$$

Hermed er entydigheden og formel (13) bevist.

Dernæst vises eksistensen af den anden normalfremstilling og formel (14). Hvis

$$\varphi = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

definerer vi $\mu_{i_1 \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}$. Dette talsæt er alternerende, idet der for $\tau \in S^k$ gælder

$$\mu_{i_1 \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma\tau)\, \alpha_{i_{\sigma\tau(1)} \dots i_{\sigma\tau(k)}}$$

$$= \operatorname{sign}(\tau) \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{i_{\sigma\tau(1)} \dots i_{\sigma\tau(k)}}$$

$$= \operatorname{sign}(\tau)\, \mu_{i_{\tau(1)} \dots i_{\tau(k)}}$$

Endvidere gælder der for hvert $\sigma \in S^k$, at

$$\varphi = \sum_{i_1 \cdots i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e^{i_{\sigma(k)}}$$

$$= \operatorname{sign}(\sigma) \sum_{j_1 \cdots j_k} \alpha_{j_{\tau(1)} \cdots j_{\tau(k)}}\, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$$

hvor $\tau = \sigma^{-1}$. Idet $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\tau)$, gælder altså

$$\varphi = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)}}\, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

for hver permutation $\sigma \in S^k$. Heraf fås

$$\varphi = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)}}\, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} = \sum_{i_1 \cdots i_k} \frac{1}{k!}\, \mu_{i_1 \cdots i_k}\, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

Hermed er så bevist, at $\varphi$ virkelig kan fremstilles med alternerende $\mu_{i_1 \cdots i_k}$, og at dette talsæt bestemmes ved formel (14).

Lad $V$ og $W$ være endelig-dimensionale vektorrum over $L$ med baser $e^1, \ldots, e^n$ og $f^1, \ldots, f^n$. Da gælder

<u>Hver $L$-lineær afbildning $\Phi : V \to W$ kan på en og kun måde udvides til en homomorfi</u>

$$\wedge\Phi : \wedge(V) \to \wedge(W)$$

(dvs. $\wedge\Phi_1 : \wedge^1(V) \to \wedge^1(W)$ er identisk med $\Phi$). <u>Hvis $\Phi$ er givet ved, at</u>

$$e^i \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_j^i f^j ,$$

<u>da er $\wedge\Phi$ bestemt ved</u>

$$(15) \qquad e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \longrightarrow \sum_{j_1 \cdots j_k = 1}^{n} A_{j_1}^{i_1} \cdots A_{j_k}^{i_k}\, f^{j_1} \wedge \cdots \wedge f^{j_k}$$

Bevis: Hvis $\Lambda\Phi$ er en homomorfi med den ønskede egenskab, fås vi

$$\Lambda\Phi_k(e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}) = (\Lambda\Phi_1(e^{i_1}))\wedge\ldots\wedge(\Lambda\Phi_1(e^{i_k}))$$

$$= \Phi(e^{i_1})\wedge\ldots\wedge\Phi(e^{i_k}) = \Big(\sum_{j_1=1}^{m} A_{j_1}^{i_1} f^{j_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_k=1}^{m} A_{j_k}^{i_k} f^{j_k}\Big)$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{m} A_{j_1}^{i_1}\cdots A_{j_k}^{i_k} f^{j_1\wedge\ldots\wedge f^{j_k}}.$$

Dette viser <u>entydigheden</u> af $\Lambda\Phi$ – og endvidere, at denne er givet ved (15), hvis den findes.

Idet elementerne $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$ med $1\le i_1<\ldots<i_k\le m$ danner en basis for $\Lambda^k(V)$ kan vi <u>definere</u> en $L$-lineær afbildning $\Lambda\Phi_k$ ved

$$\Lambda\Phi_k(e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{m} A_{j_1}^{i_1}\cdots A_{j_k}^{i_k} f^{j_1}\wedge\ldots\wedge f^{j_k}$$

for $1\le i_1<\ldots<i_k\le m$, og ved $\Lambda\Phi_k = 0$ for $k>m$.

Idet såvel $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$ som

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{m} A_{j_1}^{i_1}\cdots A_{j_k}^{i_k} f^{j_1}\wedge\ldots\wedge f^{j_k} = \Big(\sum_{j_1=1}^{m} A_{j_1}^{i_1} f^{j_1}\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{j_k=1}^{m} A_{j_k}^{i_k} f^{j_k}\Big)$$

afhænger alternerende af $i_1,\ldots,i_k$ ser vi, at den definerede afbildning $\Lambda\Phi_k$ opfylder (15) for vilkårlige $i_1,\ldots,i_k$ med $k\le m$.

Vi skal nu vise, at $\Lambda\Phi = (\Lambda\Phi_1, \Lambda\Phi_2, \ldots)$ er en homomorfi, altså at hvert diagram (3) er kommutativt. Her er det nok at se på par af basisvektorer (jvf. tidligere). For $1\le i_1<\ldots<i_p\le m$ og $1\le j_1<\ldots<j_q\le m$, har vi

$$(\wedge\bar\Phi_p(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_p}))\wedge(\wedge\bar\Phi_q(e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_q}))$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_p} A^{i_1}_{k_1}\cdots A^{i_p}_{k_p} f^{k_1}\wedge\dots\wedge f^{k_p}\ \wedge\ \sum_{l_1,\dots,l_q} A^{j_1}_{l_1}\cdots A^{j_q}_{l_q} f^{l_1}\wedge\dots\wedge f^{l_q}$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_p,l_1,\dots,l_q} A^{i_1}_{k_1}\cdots A^{i_p}_{k_p} A^{j_1}_{l_1}\cdots A^{j_q}_{l_q} f^{k_1}\wedge\dots\wedge f^{k_p}\wedge f^{l_1}\wedge\dots\wedge f^{l_q} \qquad (*)$$

For $p+q\le m$ har vi

$$\wedge\bar\Phi_{p+q}((e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_p})\wedge(e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_q}))=\wedge\bar\Phi_{p+q}(e^{i_1}\wedge\dots\wedge e^{i_p}\wedge e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_q})$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_p,l_1,\dots,l_q} A^{i_1}_{k_1}\cdots A^{i_p}_{k_p} A^{j_1}_{l_1}\cdots A^{j_q}_{l_q} f^{k_1}\wedge\dots\wedge f^{k_p}\wedge f^{l_1}\wedge\dots\wedge f^{l_q}$$

Dette viser påstanden for $p+q\le m$. For $p+q>m$ er $\wedge\bar\Phi_{p+q}=0$ (da $\wedge^{p+q}(V)=0$), men idet elementet (*) åbenbart er $=0$, idet det er produktet af mere end $m$ faktorer af formen $\sum_{\delta=1}^{m} A^i_j f^j$, og der findes kun $m$ sådanne forskellige (nemlig svarende til $i=1,\dots,m$), gælder påstanden også for $p+q>m$.

Det er klart, at $\wedge\bar\Phi_1=\Phi$, så sætningen er hermed bevist.

Lad $V$ være et vektorrum over $\mathbb{R}$. Vi kan da til $V$ knytte et vektorrum $V_{\mathbb{C}}$ over $\mathbb{C}$, som kaldes komplekssificeringen af $V$. Som abelsk gruppe skal $V_{\mathbb{C}}$ blot være den direkte sum $V\oplus V$, mens multiplikationen med kompleks tal $\lambda+i\mu$, $\lambda$ og $\mu$ reelle, defineres ved

$$(\lambda+i\mu)(v_1,v_2)=(\lambda v_1-\mu v_2,\ \mu v_1+\lambda v_2)$$

Det er en simpel sag at efterprøve, at $V_{\mathbb{C}}$ virkelig er et vektorrum over $\mathbb{C}$.

Ved $v\longleftrightarrow(v|0)$ kan vi identificere $V$ med en del-

Man kan betragte $\mathbb{C}$ som vektorrum over $\mathbb{R}$ med dimension 2 – nemlig som $\mathbb{R}^2$ ved

$$\mathbb{C} \ni z \longleftrightarrow (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Det har derfor mening at tale om mængden $V$ af $\mathbb{R}$-lineære afbildninger

$$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}.$$

Mængden $V$ danner et vektorrum over $\mathbb{C}$, idet multiplikation med kompleks tal $\lambda$ defineres ved

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x) \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Hvis $e_1, \dots, e_m$ betegner standardbasis $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0)$ etc for $\mathbb{R}^m$, har vi $\mathbb{R}$-lineære afbildninger

$$e^j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad j = 1, \dots, m.$$

bestemt ved $e^j(e_i) = \delta_i^j$. Disse kan åbenbart også opfattes som $\mathbb{R}$-lineære afbildninger ind i $\mathbb{C}$ (blot med reelle værdier).

Elementerne $e^1, \dots, e^m$ danner en basis for $V$ over $\mathbb{C}$

For $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ har vi nemlig

$$(\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_m e^m)(e_j) = \lambda_j,$$

hvoraf den lineære uafhængighed ses. Hvis $\varphi \in V$, vil $\varphi$ og

$$\varphi(e_1)\, e^1 + \dots + \varphi(e_m)\, e^m$$

have samme værdi på $e_1, \dots, e_m$, og altså være identiske, da $e_1, \dots, e_m$ danner en basis for $\mathbb{R}^m$.

**Def.** Lad $U \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde. Ved en **differentialform** $\omega$ af **grad** $k$ forstås en afbildning

$$\omega : U \to \Lambda^k(V)$$

hvor $V$ betegner det ovenfor definerede vektorrum over $\mathbb{C}$ (og

hvor den ydre algebra er dannet over legemet $L = \mathbb{C}$).

[Dette er en kompleks-vurdiet differentialform; hvis vi istedet for $V$ tager det $\mathbb{R}$-duale rum til $\mathbb{R}^m$ og betragter den ydre algebra over $\mathbb{R}$, fås reelt-vurderede differentialformer].

Hvis $\omega$ er en differentialform af grad $k$ på $U$, kan vi for hvert $x \in U$ vælge en fremstilling af $\omega(x)$

$$(16) \qquad \omega(x) = \sum_{i_1,\dots,i_k} \alpha_{i_1\dots i_k}(x)\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

hvormed vi har komplekse <u>koefficientfunktioner</u> $\alpha_{i_1\dots i_k}$ på $U$. Her er der selvfølgelig i al uendelighed flere muligheder, men vi kan specielt vælge den første normalfremstilling

$$(17) \qquad \omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \alpha_{i_1\dots i_k}(x)\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

og koefficientfunktionerne i (16) og (17) er da forbundet ved formel (14).

En differentialform $\omega$ af grad $k$ på $U$ siges at være $C^\infty$, hvis der findes en fremstilling (16) af $\omega$ med $C^\infty$ koefficientfunktioner. Dette er åbenbart ensbetydende med, at koefficientfunktionerne i normalfremstillingen (17) er $C^\infty$-funktioner. Mængden af $C^\infty$ differentialformer af grad $k$ på $U$ vil vi betegne med $\Omega^k_U$. Mængden $\Omega^k_U$ er <u>et vektorrum over $\mathbb{C}$</u>, idet $\lambda\omega + \mu\varphi$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\omega, \varphi \in \Omega^k_U$ defineres ved

$$(\lambda\omega + \mu\varphi)(x) = \lambda\,\omega(x) + \mu\,\varphi(x) \quad \text{for hvert } x \in U.$$

Vi definere endvidere $\Omega^0_U$ = mgd. af komplekse $C^\infty$-funktioner på $U$.

Hvis $f$ er en kompleks funktion og $\omega$ en differentialform af grad $k$ på $U$, definerer vi en diff. form af grad $k$ på $U$ ved

$$(f\omega)(x) = f(x)\,\omega(x) \quad \text{for hvert } x \in U.$$

Hvis endvidere $\varphi$ er en differentialform af grad $l$ på $U$, kan vi definere en diff. form $\varphi \wedge \psi$ af grad $k+l$ på $U$ ved

$$(\varphi \wedge \psi)(x) = \varphi(x) \wedge \psi(x) \quad \text{for hvert } x \in U.$$

Der gælder åbenbart

$$f \in \Omega^0_U,\ \omega \in \Omega^k_U \Rightarrow f\omega \in \Omega^k_U$$
$$\omega \in \Omega^k_U,\ \varphi \in \Omega^l_U \Rightarrow \varphi \wedge \omega \in \Omega^{k+l}_U.$$

og de fra den ydre algebra kendte regneregler nedarvet til

$$\left.\begin{aligned}(fg)\omega &= f(g\omega)\\ f(\omega+\varphi) &= f\omega + f\varphi\end{aligned}\right\} \text{for } f,g \in \Omega^0_U,\ \omega,\varphi \in \Omega^k_U$$

$$\left.\begin{aligned}(f_1\omega_1 + f_2\omega_2)\wedge\varphi &= f_1\omega_1\wedge\varphi + f_2\omega_2\wedge\varphi\\ \varphi\wedge(f_1\omega_1+f_2\omega_2) &= f_1\varphi\wedge\omega_1 + f_2\varphi\wedge\omega_2\end{aligned}\right\} \text{for } f_1,f_2 \in \Omega^0_U,\ \omega_1,\omega_2 \in \Omega^k_U,\ \varphi \in \Omega^l_U$$

$$\omega\wedge\varphi = (-1)^{k\cdot l}\varphi\wedge\omega \quad \text{for } \omega \in \Omega^k_U,\ \varphi \in \Omega^l_U.$$

For en kompleks $C^\infty$-funktion $f$ på $U$, altså $f \in \Omega^0_U$, har vi til hvert punkt $x \in U$ et <u>differentialet</u> $df(x)$. Differentialet er en $\mathbb{R}$-lineær afbildning

$$df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$$

og defineret ved

$$\mathbb{R}^m \ni h \longrightarrow \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}(f(x+\delta h) - f(x)) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^j}(x)\cdot h^j$$

<u>idet</u> $h = (h^1,\dots,h^m)$*. Ved $x \longrightarrow df(x)$ har vi følgelig defi-

* Der er tradition for at skrive koordinatnummeret foroven – det gør vi i det følgende.

netop en differentialform $df$ af grad 1 på $U$. Denne kaldes differentialet af $f$ i $U$. For hvert $x \in U$ har vi ifølge (15)

$$df(x) = \sum_{\delta=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^\delta}(x)\, e^\delta$$

hvoraf vi ser, at $df$ er $C^\infty$, altså $df \in \Omega^1_U$.
Hermed har vi en afbildning

$$d : \Omega^0_U \to \Omega^1_U .$$

Denne er $\mathbb{C}$-lineær, altså

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ f, g \in \Omega^0_U$$

og endvidere gælder regelen for differentiation af et produkt:

$$d(fg) = f\,dg + g\,df \qquad f, g \in \Omega^0_U .$$

Vi kan specielt se på koordinatfunktionerne

$$x^\delta : x \longrightarrow x^\delta \qquad \text{(se bem. nederst side 156)}$$

Her har vi åbenbart

$$dx^\delta(x) = e^\delta \qquad \text{for ethvert } x \in U.$$

Formlen (16) kan altså omskrives til

$$(16') \qquad \omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

som nu er en identitet, idet koefficienterne er funktioner og differentialformerne på $U$. Specielt har vi for en $C^\infty$-funktion $f$ på $U$, at

$$df = \sum_{\delta=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^\delta}\, dx^\delta .$$

Lad $\omega \in \Omega^k_U$, $k \geq 1$ og lad

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \mu_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

være en første normalfremstilling af $\omega$. Da definerer vi differentialformen af grad $k+1$ dvs på $U$ ved

$$(18) \qquad d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} d(\mu_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Det gælder åbenbart $d\omega \in \Omega^{k+1}_U$, altså $d : \Omega^k_U \to \Omega^{k+1}_U$.

Sætning: Systemet af afbildninger $d : \Omega^k_U \to \Omega^{k+1}_U$, $k \geq 0$ har følgende egenskaber

(1) Hver $d$ er $\mathbb{C}$-lineær

(2) Hvis $f \in \Omega^0_U$, $\omega \in \Omega^k_U$ $(k \geq 0)$ gælder

$$d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega \quad (= f\,d\omega + \omega\,df \text{ for } k=0)$$

(3) Hvis $\omega \in \Omega^k_U$, $\varphi \in \Omega^\ell_U$ $(k, \ell > 0)$ gælder

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$$

(4) Hvis $\omega \in \Omega^k_U$ $(k \geq 0)$ gælder $d(d\omega) = 0$.

Bevis: (1) følger umiddelbart af (18) og det samme gælder (2) for $k=0$, som blot er produktreglen på side 157.

For at komme videre beviser vi nu først, at hvis

$$\omega = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

er en vilkårlig fremstilling af $\omega$ med $C^\infty$ koefficientfunktio-

ner, da gælder

$$d\omega = \sum d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} .$$

Ifølge (14) side 149 har vi nemlig

$$\mu_{i_1 \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}$$

og dermed

$$d\mu_{i_1 \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\, d\alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}$$

Ved definitionen af $d\omega$, og idet $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ afhænger alternerende af $\{1, \dots, k\}$, får så

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} d\mu_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sign}(\sigma)\, d\alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \sum_{\sigma \in S^k} d\alpha_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} \wedge dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\sigma(k)}}$$

$$= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ \text{forskellige}}} d\alpha_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

$$= \sum d\alpha_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$$

idet $dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = 0$, hvis to blandt $j_1, \dots, j_k$ er ens.

Herefter er beviserne for (2) og (3) blot regnestykker. Vi viser (3) og har (2) som specialtilfælde. Hvis

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \qquad \varphi = \sum \varphi_{j_1 \dots j_l}\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

har vi

$$d(\omega\wedge\varphi) = \sum_{\substack{i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_\ell}} d(\omega_{i_1\cdots i_k}\varphi_{j_1\cdots j_\ell})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}$$

$$= \sum \varphi_{j_1\cdots j_\ell}\, d(\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}$$

$$+ \sum \omega_{i_1\cdots i_k}\, d\varphi_{j_1\cdots j_\ell}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}$$

$$= \Big(\sum d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\Big)\wedge\Big(\sum\varphi_{j_1\cdots j_\ell}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}\Big)$$

$$+(-1)^k\Big(\sum\omega_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\Big)\wedge\Big(\sum d\varphi_{j_1\cdots j_\ell}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_\ell}\Big)$$

$$= d\omega\wedge\varphi + (-1)^k\,\omega\wedge d\varphi\,,$$

idet fortegnet $(-1)^k$ fremkommer ved, at formen $d\varphi_{j_1\cdots j_\ell}$ af grad 1 ombyttes med formen $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ med grad $k$.

Ved (4) har vi

$$d\Big(d\sum\omega_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\Big) = d\Big(\sum d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\Big)$$

$$= d\sum_{i_1\cdots i_k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_{i_1\cdots i_k}\, dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

$$= \sum_{i_1\cdots i_k}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\omega_{\cdots}}{\partial x^i\partial x^j}\, dx^i\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

Det er altså nok at vise at for $f\in\Omega^0_U$, gælder

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\, dx^i\wedge dx^j = 0$$

hvilket idvrigt er (4) for $k=0$. Men det er let. Idet vi ombytter betegnelserne for indices og bemytter, at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i} \quad\text{og}\quad dx^i\wedge dx^j = -dx^j\wedge dx^i$$

får vi $\sum\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \sum\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$

$$= -\sum\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j$$

altså $= 0$. Hermed er sætningen bevist.

Vi bemærker, at for $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{U}}$,

$$\omega = f_1 dx^1 + \dots + f_m dx^m = \sum f_i dx^i$$

har vi
$$d\omega = \sum_{j \neq i} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$
$$= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j$$

hvilket præcis er den første normalfremstilling. Betingelsen $d\omega = 0$ er altså præcis den velkendte nødvendige betingelse

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \quad \text{for } i, j = 1, \dots, m$$

for at $\omega$ er et "totalt differential" d.v.s. $\omega = df$ med $f \in \Omega^0_{\mathcal{U}}$. Vi beviser nu <u>Poincaré's lemma</u>:

<u>Sætning</u> Hvis $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ er en åben kasse, altså

$$\mathcal{U} = \{ (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid a_k - \rho_k < x^k < a_k + \rho_k, \ k = 1, \dots, m \}$$

da gælder følgende:
Hvis $\omega \in \Omega^k_{\mathcal{U}}$ med $k > 0$ opfylder $d\omega = 0$, da findes $\varphi \in \Omega^{k-1}_{\mathcal{U}}$ så $\omega = d\varphi$.

Bevis: Vi skriver $\omega$ på den første normalfremstilling

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \omega_{i_1 \dots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

og siger, at $\omega$ ikke involverer $dx^{p+1}, \dots, dx^m$, hvis samtlige $\omega_{i_1 \dots i_k}$ med $i_k \ge p+1$ er $= 0$. Hvis $\omega$ ikke involverer $dx^{p+1}, \dots, dx^m$ kan vi altså

$$(19) \qquad \omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le p} \omega_{i_1 \dots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Vi beviser nu sætningen ved <u>induktion efter $p$</u>.

Hvis $p = k-1$ er $\omega = 0$, og så er påstanden trivial.

Lad nu $\omega$ være givet ved (19) og antag, at påstanden er rigtig for $p-1$.

Vi har $$d\omega = \ast + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le p} \sum_{j=p+1}^{m} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^j$$

hvor $\ast$ ikke involverer $dx^{p+1}, \dots, dx^m$. Idet $d\omega = 0$, fås heraf

$$(20) \qquad \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le p} \sum_{j=p+1}^{m} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} \, dx^{j} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0$$

og dermed

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_k} = 0 \qquad \text{for } j = p+1, \dots, m$$

idet (20) er første normalfremstilling. Dette betyder, at koefficientfunktionerne $\omega_{i_1 \dots i_k}$ ikke afhænger af de variable $x^{p+1}, \dots, x^m$.

Vi definerer nu en $(k-1)$ - differentialform ved

$$\tilde{\varphi} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{k-1} \le p} \tilde{\varphi}_{i_1 \dots i_{k-1}} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

hvor

$$\tilde{\varphi}_{i_1 \dots i_{k-1}}(x) = \int_{a_p}^{x^p} \omega_{i_1 \dots i_{k-1} p}(x^1, \dots, x^{p-1}, t) \, dt$$

Det er klart, at $\tilde{\varphi}_{i_1 \dots i_{k-1}}$ ikke afhænger af $x^{p+1}, \dots, x^m$, hvorfor $d\tilde{\varphi}$ ikke involverer $dx^{p+1}, \dots, dx^m$. Endvidere fås

$$d\tilde{\varphi} = \ast + \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{k-1} \le p} \omega_{i_1 \dots i_{k-1} p} \, dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

hvor $\ast$ ikke involverer $dx^p, dx^{p+1}, \dots, dx^m$.

Heraf ses, at

$$\omega - (-1)^{k-1} d\tilde{\varphi}$$

ikke involverer $dx^p, \dots, dx^m$. Ved induktionsantagelsen har vi derfor

$$\omega - (-1)^{k-1} d\tilde{\varphi} = d\psi$$

altså

$$\omega = d\varphi, \text{ hvor } \varphi = \psi + (-1)^{k-1} \tilde{\varphi}$$

Q.E.D.

---

Vi vil nu se på $\mathbb{C}^n$ og differentialformer på åbne mængder $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Vi har en naturlig identifikation $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ ved

$$(z^1, \dots, z^n) \longleftrightarrow (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$$

hvor $z^k = x^k + i y^k$ (tallene er nummer - ikke eksponenter)

Hermed bliver $\mathbb{C}^n$ et vektorrum af dimension $2n$ over $\mathbb{R}$ (man "glemmer" multiplikationen med ikke reel skalar) og vi kan indføre vektorrummet $V$ over $\mathbb{C}$ af $\mathbb{R}$-lineære afbildninger

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

og så betragte den ydre algebra af dette vektorrum over $\mathbb{C}$. Blandt elementerne i $V$ har vi imidlertid specielt de $\mathbb{C}$-lineære afbildninger

$$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

altså $\varphi(\lambda z + \tilde{\lambda}\tilde{z}) = \lambda\varphi(z) + \tilde{\lambda}\varphi(\tilde{z})$ for $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}^n$.

Disse danner et vektorrum $W$ over $\mathbb{C}$ (det $\mathbb{C}$-duale rum til $\mathbb{C}^n$), som er et underrum af $V$. Hvis $\varphi \in V$ har vi

(21) $\varphi \in W \iff \varphi(iz) = i\varphi(z)$ for ethvert $z \in \mathbb{C}^n$

Betingelsen er åbenbart nødvendig ($\Rightarrow$ er trivial), og $\Leftarrow$ ses af

$$\varphi(\lambda z + \tilde{\lambda}\tilde{z}) = \varphi(\mathrm{Re}\lambda \cdot z + i\,\mathrm{Im}\lambda \cdot z + \mathrm{Re}\tilde{\lambda}\cdot\tilde{z} + i\,\mathrm{Im}\tilde{\lambda}\cdot\tilde{z})$$
$$= \varphi(\mathrm{Re}\lambda\cdot z) + \varphi(i\,\mathrm{Im}\lambda\cdot z) + \varphi(\mathrm{Re}\tilde{\lambda}\cdot\tilde{z}) + \varphi(i\,\mathrm{Im}\tilde{\lambda}\cdot\tilde{z})$$
$$= \mathrm{Re}\lambda\cdot\varphi(z) + \mathrm{Im}\lambda\varphi(iz) + \mathrm{Re}\tilde{\lambda}\cdot\varphi(\tilde{z}) + \mathrm{Im}\tilde{\lambda}\,\varphi(i\tilde{z})$$
$$= \mathrm{Re}\lambda\cdot\varphi(z) + i\,\mathrm{Im}\lambda\cdot\varphi(z) + \mathrm{Re}\tilde{\lambda}\,\varphi(\tilde{z}) + i\,\mathrm{Im}\tilde{\lambda}\,\varphi(\tilde{z}) = \lambda\varphi(z) + \tilde{\lambda}\varphi(\tilde{z})$$

(hvor vi har udnyttet $\mathbb{R}$-linearitden af $\varphi$).

For hvert $\varphi \in V$ definerer det <u>konjugerede</u> $\overline{\varphi} \in V$ ved

$$\overline{\varphi}(z) = \overline{\varphi(z)} \quad \text{for hvert } z \in \mathbb{C}^n$$

[Dette vedrører kun den komplekse struktur af billedrummet $\mathbb{C}$ – en konjugering kan ligesåvel defineres i den på side 154 beskrevne situation I. Konjugeringen $\varphi \to \overline{\varphi}$ er åbenbart <u>involutorisk</u> (lig sin inverse afbildning), endvidere er den <u>$\mathbb{C}$-antilineær</u> d.v.s. $\overline{\lambda\varphi + \mu\psi} = \bar{\lambda}\overline{\varphi} + \bar{\mu}\overline{\psi}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in V$.

En afbildning $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ kaldes <u>$\mathbb{C}$-antilineær</u>, hvis

$$\varphi(\lambda z + \hat{\lambda}\hat{z}) = \overline{\lambda}\varphi(z) + \overline{\hat{\lambda}}\varphi(\hat{z}) \quad \text{for } \lambda, \hat{\lambda} \in \mathbb{C},\ z, \hat{z} \in \mathbb{C}^n$$

Mængden af $\mathbb{C}$-antilineære afbildninger $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ danner et underrum i $V$. Idet der åbenbart gælder for $\varphi \in V$:

(22) $\varphi$ $\mathbb{C}$-lineær $\iff$ $\overline{\varphi}$ $\mathbb{C}$-antilineær

er dette underrum præcis billedet af $W$ ved konjugeringen, hvorfor det betegnes $\overline{W}$. Af (21) og (22) fås så, at for $\varphi \in V$:

(23) $\varphi \in \overline{W} \iff \varphi(iz) = -i\varphi(z)$ for hvert $z \in \mathbb{C}^n$

[ billedet naturligvis også kan ses direkte af def. på $\mathbb{C}$-antilineær ]

<u>Der gælder</u>

$$V = W \oplus \overline{W}$$

<u>som vektorrum over $\mathbb{C}$, d.v.s. hvert element $\varphi \in V$ har én og kun én opsplitning</u>

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

<u>hvor $\varphi_1 \in W$ og $\varphi_2 \in \overline{W}$</u>.

<u>Bevis:</u> Af (21) og (23) følger straks, at $W \cap \overline{W} = \{0\}$. Dette giver entydigheden af en opspaltning, idet

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2 \qquad \varphi_1, \psi_1 \in W,\ \varphi_2, \psi_2 \in \overline{W}$$

giver

$$\varphi_1 - \psi_1 = \psi_2 - \varphi_2 = \chi$$

hvor altså $\chi \in W \cap \overline{W}$ og derfor $\chi = 0$.

Ved eksistensen definerer, for $\varphi \in V$; $\varphi_1$ og $\varphi_2 \in V$ ved

$$\varphi_1(z) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(z) - i\varphi(iz)\right)$$
$$\varphi_2(z) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(z) + i\varphi(iz)\right) \qquad \text{for } z \in \mathbb{C}^n$$

En lille udregning viser, at $\varphi_1 \in W$ (ved (21)) og $\varphi_2 \in \overline{W}$ (ved (23)) og at $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ Q.E.D.

Denne opspaltning tager vi hensyn til ved basisvalget i $V$. Idet $E_1, \ldots, E_n$ betegner basiselementerne $(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots$ for $\mathbb{C}^n$ som vektorrum over $\mathbb{C}$, har vi den $\mathbb{C}$-duale basis i $W$, $E^1, \ldots, E^n$, hvor altså $E^\partial$ er den $\mathbb{C}$-lineære afbildning

$$E^\partial : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

bestemt ved $\quad E^\partial(E_i) = \delta_i^\partial$

Ved konjugeringen har vi åbenbart

$$\overline{\lambda_1 E^1 + \cdots + \lambda_n E^n} = \mu_1 \overline{E^1} + \cdots + \mu_n \overline{E^n} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

hvor $\mu_1 = \overline{\lambda}_1, \ldots, \mu_n = \overline{\lambda}_n$. Idet konjugeringen afbilder $W$ bijektivt på $\overline{W}$, har hvert element i $\overline{W}$ præcis én fremstilling

$$\mu_1 \overline{E^1} + \cdots + \mu_n \overline{E^n} \qquad \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$$

altså $\overline{E^1}, \ldots, \overline{E^n}$ danner en basis for $\overline{W}$ over $\mathbb{C}$, hvoraf følger, at $E^1, \ldots, E^n, \overline{E^1}, \ldots, \overline{E^n}$ danner en basis for $V$ over $\mathbb{C}$

[ Ved identifikationen $\mathbb{C}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (se side 163) får $\mathbb{C}^n$ en basis $e_1, \ldots, e_{2n}$ over $\mathbb{R}$. Vi har åbenbart $e_k = E_k$ for $k = 1, \ldots, n$ og $e_{k+n} = i E_k$ for $k = 1, \ldots, n$. Den tilsvarende basis $e^1, \ldots, e^{2n}$ i $V$ (se side 154) er da sammenknyttet med $E^1, \ldots, E^n, \overline{E^1}, \ldots, \overline{E^n}$ ved $\quad E^k = e^k + i e^{k+n}$, $\overline{E^k} = e^k - i e^{k+n}$ for $k = 1, \ldots, n$

og $\quad e^k = \frac{1}{2}(E^k + \overline{E^k})$, $e^{k+n} = \frac{1}{2i}(E^k - \overline{E^k})$ for $k = 1, \ldots, n$ ].

Hermed har vi så, at elementerne

$$(24) \qquad E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_p} \wedge \overline{E^{j_1}} \wedge \ldots \wedge \overline{E^{j_q}}$$

hvor $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$, $p \ge 0$, $q \ge 0$ og $p+q = k$ danner en basis over $\mathbb{C}$ for $\Lambda^k(V)$. Dette giver anledning til

en opspaltning af $\Lambda^k(V)$ som direkte sum af underrum: For hvert $(p,q)$ med $p\geq 0, q\geq 0$ og $p+q=k$ defineres $\Lambda^{p,q}(V)$ som det underrum af $\Lambda^k(V)$, der har elementerne

$$E^{i_1}\wedge\ldots\wedge E^{i_p}\wedge\overline{E}^{j_1}\wedge\ldots\wedge\overline{E}^{j_q}$$

hvor $1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n$, $1\leq j_1<\ldots<j_q\leq n$, som basis.

Vi har åbenbart

$$\Lambda^k(V)=\Lambda^{0,k}(V)\oplus\Lambda^{1,k-1}(V)\oplus\ldots\oplus\Lambda^{k,0}(V)$$

og $\Lambda^{p,q}(V)=0$ hvis $p>n$ eller $q>n$

Endvidere ser vi af definitionen, at

$$a\in\Lambda^{p,q}(V),\ b\in\Lambda^{r,s}(V)\Rightarrow a\wedge b\in\Lambda^{p+r,q+s}(V).$$

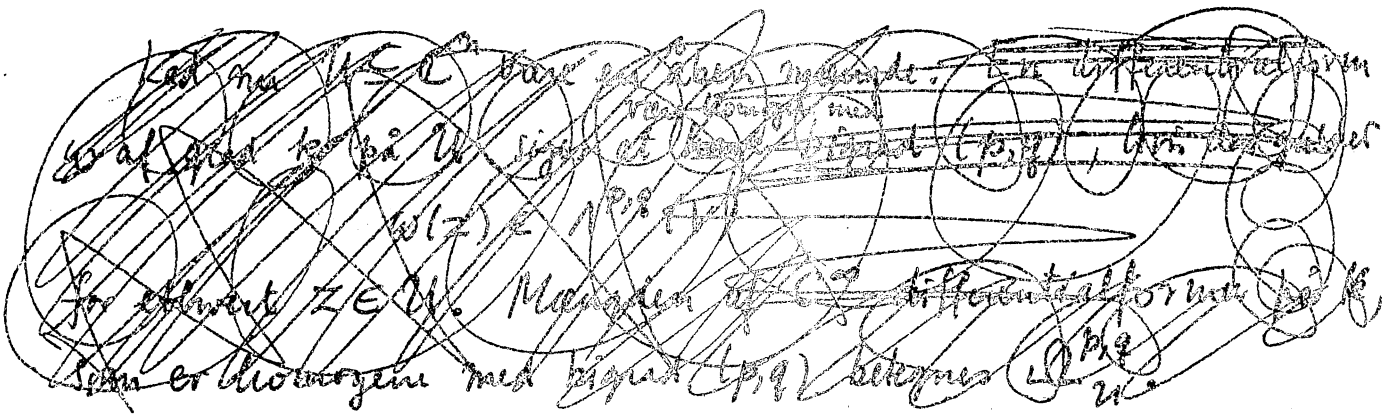
Specielt har vi $\Lambda^{1,0}(V)=W$ og $\Lambda^{0,1}(V)=\overline{W}$.

[Konjugeringen i $V$ kan udvides til den ydre algebra af $V$ ved

$$\overline{(\lambda E^{i_1}\wedge\ldots\wedge E^{i_p}\wedge\overline{E}^{j_1}\wedge\ldots\wedge\overline{E}^{j_q})}=\overline{\lambda}\,\overline{E}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overline{E}^{i_p}\wedge E^{j_1}\wedge\ldots\wedge E^{j_q}$$

hvorved vi får $\mathbb{C}$-antilineære afbildninger $\Lambda^k(V)\to\Lambda^k(V)$. Der gælder åbenbart $a\in\Lambda^{p,q}(V)\Rightarrow\overline{a}\in\Lambda^{q,p}(V)$.]

---



Lad nu $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. I $\mathbb{C}^n$ har vi komplekse koordinater $z^1, \ldots, z^n$ og reelle koordinater $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ forbundet ved relationerne

$$z^k = x^k + iy^k \qquad \overline{z^k} = x^k - iy^k$$

For differentialerne får vi heraf

(25) $$dz^k = dx^k + i\,dy^k \qquad d\overline{z^k} = dx^k - i\,dy^k$$

og dermed

(26) $$dx^k = \frac{1}{2}(dz^k + d\overline{z^k}) \qquad dy^k = \frac{1}{2i}(dz^k - d\overline{z^k}).$$

Vi bemærker, at $dz^k$ og $d\overline{z^k}$ præcis er de ved

(27) $$\begin{aligned} dz^k(z) &= E^k \\ d\overline{z^k}(z) &= \overline{E^k} \end{aligned} \qquad z \in U$$

bestemte differentialformer.

<u>Definition</u>: En differentialform $\omega$ med grad $k$ på $U$ siges at være <u>homogen med bigrad</u> $(p,q)$, hvis der gælder

$$\omega(z) \in \Lambda^{p,q}(V)$$

for ethvert $z \in U$.

Hvis $\omega$ er homogen med bigrad $(p,q)$ har vi

$$\omega(z) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n}} \omega_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}(z)\, E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_p} \wedge \overline{E^{j_1}} \wedge \ldots \wedge \overline{E^{j_q}}$$

for hvert $z \in U$. Ifølge (27) kan dette også skrives

(28) $$\omega = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n}} \omega_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}\, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\overline{z^{j_1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z^{j_q}}$$

Ved hjælp af (25) og (26) består der en simpel sammenhæng mellem koefficientfunktionerne $\omega_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}$ og koefficientfunktionerne i

normalfremstillingen ved hjælp af $dx^1, \dots, dx^n, dy^1, \dots, dy^n$. Vi ser heraf, at $\omega$ er $C^\infty$ når og kun når $\omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ er $C^\infty$-funktioner.

Mængden $\Omega_U^{p,q}$ af $C^\infty$-differentialformer på $U$, der er homogene med bigrad $(p,q)$ danner følgelig et vektorrum over $\mathbb{C}$. Der gælder

$$\Omega_U^k = \Omega_U^{0,k} \oplus \Omega_U^{1,k-1} \oplus \dots \oplus \Omega_U^{k,0}$$

$$\Omega_U^{p,q} = 0 \quad \text{hvis } p > n \text{ eller } q > n$$

$$\varphi \in \Omega_U^{p,q}, \ \psi \in \Omega_U^{r,s} \Rightarrow \varphi \wedge \psi \in \Omega_U^{p+r, q+s}$$

[Vi har endvidere konjugeringen

$$\Omega_U^{p,q} \to \Omega_U^{q,p}$$

bestemt ved

$$\overline{\sum \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}}$$

$$= \sum \overline{\omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}} \, d\bar{z}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{i_p} \wedge dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_q}$$

Man bemærker, at idet $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ er reelle gælder der $\overline{dx^k} = dx^k$ og $\overline{dy^k} = dy^k$. Vi har derfor

$$\overline{\sum \mu_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}} = \sum \overline{\mu_{i_1 \dots i_k}} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

For konjugering gælder

$$\overline{\varphi \wedge \psi} = \bar{\varphi} \wedge \bar{\psi} \ ].$$

Sneddigheden i det komplekse ligger nu skjult i sammenspillet mellem den ydre differentiation $d$ og opspaltningen efter bigrad.

For en $C^\infty$-funktion $f$, d.v.s. $f \in \Omega^0_u$, har vi

$$df \in \Omega^1_u = \Omega^{1,0}_u \oplus \Omega^{0,1}_u$$

hvormed vi får en entydigt bestemt opspaltning

$$df = \partial f + \bar\partial f \text{, hvor } \partial f \in \Omega^{1,0}_u,\ \bar\partial f \in \Omega^{0,1}_u .$$

Dette blev allerede omtalt på side 1-2-3, hvor vi fandt

$$\partial f = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^\delta} dz^\delta \qquad \bar\partial f = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z^\delta} d\bar z^\delta$$

Hermed har vi altså $\mathbb{C}$-lineære afbildninger

$$\partial : \Omega^0_u \to \Omega^{1,0}_u \text{ og } \bar\partial : \Omega^0_u \to \Omega^{0,1}_u$$

hvor $$d = \partial + \bar\partial$$

ved benyttelse af (1)-(4) side 158

For $\omega \in \Omega^{p,q}_u$ har vi, idet $\omega$ er givet ved (28), at

$$d\omega = \sum d\omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar z^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q}$$

$$= \sum (\partial \omega_{\dots} + \bar\partial \omega_{\dots}) \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar z^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q}$$

$$= \sum \partial \omega_{\dots} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q} + \sum \bar\partial \omega_{\dots} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q}$$

altså $d\omega \in \Omega^{p+1,q}_u \oplus \Omega^{p,q+1}_u$.

Hermed kan vi definere $\mathbb{C}$-lineære afbildninger

$$\partial : \Omega^{p,q}_u \to \Omega^{p+1,q}_u \text{ og } \bar\partial : \Omega^{p,q}_u \to \Omega^{p,q+1}_u$$

ved, at $$d = \partial + \bar\partial .$$

Relationen $d \circ d = 0$ giver nu, at for $\omega \in \Omega^{p,q}_u$ gælder der $(\partial + \bar\partial) \circ (\partial + \bar\partial)(\omega) = 0$

Altså $\partial\circ\partial\omega + (\partial\circ\bar\partial + \bar\partial\circ\partial)(\omega) + \bar\partial\circ\bar\partial(\omega) = 0$. De tre led har her henholdsvis bigrader $(p+2,q)$, $(p+1,q+1)$ og $(p,q+2)$, så vi får heraf

$$\boxed{(29)\qquad \partial\circ\partial = 0 \quad \bar\partial\circ\bar\partial = 0 \quad \partial\circ\bar\partial = -\bar\partial\circ\partial}$$

Et lille diagram gør situationen klarere:

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^{p,q+2} & & \uparrow & & \\
\bar\partial\uparrow & & & & \\
\Omega^{p,q+1} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q+1} & \longrightarrow & \\
\bar\partial\uparrow & & \uparrow\bar\partial & & \\
\Omega^{p,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+1,q} & \xrightarrow{\partial} & \Omega^{p+2,q}
\end{array}$$

[Der er en sammenhæng med konjugeringen, som har interesse. For $f\in\Omega^0_U$ gælder der

$$\overline{df} = \bar\partial\bar f$$

hvilket ses af definitionerne. Heraf fås

$$\overline{\partial f} + \overline{\bar\partial f} = \partial\bar f + \bar\partial\bar f$$

Ved at se på bigrader, fås vi heraf

$$(30)\qquad \overline{\partial f} = \bar\partial\bar f \quad\text{og}\quad \overline{\bar\partial f} = \partial\bar f$$

[hvilket er begrundelsen for betegnelsen $\bar\partial$]

I almindelighed gælder der

$$\overline{\partial\omega} = \bar\partial\bar\omega \quad\text{og}\quad \overline{\bar\partial\omega} = \partial\bar\omega$$

for $\omega\in\Omega^{p,q}_U$, hvilket let vises ud fra definitionerne.].

For $f\in\Omega^0_U$ er $\bar\partial f = 0$ nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $f$ er holomorf. For $\omega\in\Omega^{0,1}_U$, hvor

$$\omega = f_1 d\bar{z}^1 + \cdots + f_n d\bar{z}^n$$

her vi

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{1 \le j < k \le n} \left( \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}^k} \right) d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^k$$

hvorfor

$$\bar{\partial}\omega = 0 \iff \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}^j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}^k} \quad j,k = 1, \ldots, n$$

Hvilket altså er en nødvendig betingelse for, at der findes $g \in \Omega^0_U$ så $\bar{\partial} g = \omega$ eller så

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}^j} = f_j$$

Dette er præcis resultatet på side 101.

Som en generalisation af sætningen på side 104 beviser vi

**Dolbault's lemma:** Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en polycylinder $U = P(a;r)$. Da findes til $\omega \in \Omega^{p,q}_U$, hvor $q > 0$, som opfylder $\bar{\partial}\omega = 0$, et element $\varphi \in \Omega^{p,q-1}$, således at $\bar{\partial}\varphi = \omega$.

Sætningen på side 104 er præcis denne påstand for $p=0$, $q=1$.

Nu til <u>beviset</u>:

Vi bemærker først, at det er nok at vise påstanden for $p=0$. Et element

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \omega_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q} \, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

kan vi nemlig skrive som

Kompleks analyse f. 1967

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}\wedge\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p}$$

hvor $\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p} = \sum_{1\le j_1<\dots<j_q\le n} \omega_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}\, d\bar{z}^{j_1}\wedge\dots\wedge d\bar{z}^{j_q} \in \Omega_U^{0,q}$

og her gælder $\bar\partial\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p} = 0$

for hvert sæt $(i_1,\dots,i_p)$ hvis $\bar\partial\omega = 0$. Vi har nemlig

$$\bar\partial\omega = (-1)^p\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}\wedge\bar\partial\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p}$$

(idet det tilsvarende gælder for $d\omega$ ved (1)–(4) side 158, hvorefter vi blot skal udvælge elementerne med bigrad $(p,q+1)$) og her må hvert enkelt led i summen være 0, da $\bar\partial\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p}$ ikke involverer $dz^1,\dots,dz^n$ (men kun $d\bar{z}^1,\dots,d\bar{z}^n$). Hvis påstanden er rigtig for $p=0$, kan vi altså finde differentialformer

$$\tilde{\varphi}_{i_1\dots i_p} \in \Omega_U^{0,q-1}$$

således, at $\bar\partial\tilde{\varphi}_{i_1\dots i_p} = \bar\partial\tilde{\omega}_{i_1\dots i_p}$, men så har vi

$$\omega = \bar\partial\varphi$$

hvor $\varphi = (-1)^p\sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}\wedge\tilde{\varphi}_{i_1\dots i_p}$.

Vi mangler altså at vise, at hvis $\omega\in\Omega_U^{0,q}$, $q\ge 2$ opfylder $\bar\partial\omega = 0$, da findes $\varphi\in\Omega_U^{0,q-1}$ med $\bar\partial\varphi = \omega$. Hertil bevises først:

Givet $\omega \in \Omega^{0,q}_{\mathcal{U}}$, $q \geq 2$ med $\bar\partial\omega = 0$. Til hver polyradius $\rho$ med $\rho_k < r_k$ findes da $\varphi \in \Omega^{0,q}_{\mathcal{V}}$, hvor $\mathcal{V} = P(a;\rho)$, så der gælder $\bar\partial\varphi = \omega$ i $\mathcal{V}$.

Her kan vi ræsonnerer analogt til på side 162–163, idet integration på s. 163 erstattes af lemmaet på side 102:

Vi antager, at $\omega$ ikke involverer $d\bar z^{p+1}, \dots, d\bar z^{n}$, altså

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq p} \omega_{j_1 \dots j_q} \, d\bar z^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q}$$

Så har vi

$$\bar\partial\omega = \ast + (-1)^q \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq p} \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_q}}{\partial \bar z^j} \, d\bar z^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q} \wedge d\bar z^j$$

hvor $\ast$ ikke involverer $d\bar z^{p+1}, \dots, d\bar z^{n}$. Idet $\bar\partial\omega = 0$ får vi

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j} \omega_{j_1 \dots j_q} = 0 \quad \text{for } j = p+1, \dots, n$$

altså $\omega_{j_1 \dots j_q}$ afhænger holomorft af $z^{p+1}, \dots, z^n$. Ved lemma på side 102 kan vi så finde $C^\infty$-funktioner

$$\tilde\varphi_{j_1 \dots j_{q-1}} \qquad 1 \leq j_1 < \dots < j_{q-1} < p$$

på $P(a;\rho) = \mathcal{V}$, så

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j} \tilde\varphi_{j_1 \dots j_{q-1}} = \omega_{j_1 \dots j_{q-1} p}$$

og så

$$\frac{\partial}{\partial \bar z^j} \tilde\varphi_{j_1 \dots j_{q-1}} = 0 \quad \text{for } j \geq p+1$$

(holomorf i $z^{p+1}, \dots, z^n$). Idet

$$\tilde\varphi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{q-1} < p} \tilde\varphi_{j_1 \dots j_{q-1}} \, d\bar z^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar z^{j_q}$$

så er $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}\Omega_V^{0,q-1}$ og opfylder, at

$$\omega - (-1)^{p-1}\bar{\partial}\tilde{\varphi},$$

som er defineret på $V$, og ikke indeholder $d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$, kan vi altså få påstanden på side 175 ved induktion efter $p$.

Vi vælger nu en følge af kompakte polycylinder med centrum $a$, $K_1, K_2, \ldots$, så

$$K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$$

og så $U = P(a;r) = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \quad (= \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{K}_m)$.

For hvert $m$ kan vi da ifølge det lige bevist finde $\psi_m \in \mathcal{L}\Omega_{V_m}^{0,q-1}$ hvor $V_m$ er en åben polycylinder-omegn af $K_m$, så

$$\bar{\partial}\psi_m = \omega$$

på $V$.

Vi bestemmer nu induktivt $\varphi_m \in \mathcal{L}\Omega_{V_m'}^{0,q-1}$, hvor $V_m'$ er en åben pol. cyl. omegn af $K_m$, således at

(31) $\bar{\partial}\varphi_m = \omega$ på $V_m'$ og så $\varphi_m = \varphi_{m-1}$ på $K_{m-1}$:

Vi vælger $\varphi_1 = \psi_1$ og antager nu, at $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ er fundet, så (31) er opfyldt. Vi skal da bestemme

$$\varphi_{N+1} \in \mathcal{L}\Omega_{V_{N+1}'}^{0,q-1}$$

så $\bar{\partial}\varphi_{N+1} = \omega$ på $V_{N+1}'$ og så $\varphi_{N+1} = \varphi_N$ på $K_N$.

Formen $\psi_{N+1} - \varphi_N$ er defineret på en åben omegn af $K_N$ og opfylder

$$\bar{\partial}(\psi_{N+1} - \varphi_N) = \omega - \omega = 0$$

her indenfor. Nu er $q > 1$, hvorfor $q - 1 > 0$. Der findes altså

en $C^\infty$-form $\chi$ af bigrad $(0,q-2)$ på en åben mængde $\tilde{V}$ af $K_N$ med $\bar\partial\chi = \psi_{N+1} - \varphi_N$ på $\tilde{V}$.

Ifølge side 87 kan vi nu finde en $C^\infty$-funktion $\tau$ på $\mathbb{C}^n$, så $\tau = 1$ på $K_N$ og $\operatorname{supp}\tau \subset \tilde{V}$. Differentialformen $\tau\chi$ kan da ved at fortsætte med 0 opfattes som en $C^\infty$-differentialform på hele $\mathbb{C}^n$. På $K_N$ opfylder den

$$\bar\partial(\tau\chi) = \bar\partial\chi = \psi_{N+1} - \varphi_N$$

Ved $\varphi_{N+1} = \psi_{N+1} - \bar\partial(\tau\chi)$ har vi nu en $C^\infty$-diff. form med bigrad $(p,q-1)$ på $V'_{N+1} = V_{N+1}$, og den opfylder

$$\bar\partial\varphi_{N+1} = \bar\partial\psi_{N+1} - \bar\partial\bar\partial(\tau\chi) = \bar\partial\psi_{N+1} = \omega \quad \text{på } V'_{N+1}$$

og på $K_N$: $\psi_{N+1} - \bar\partial(\tau\chi) = \psi_{N+1} - (\psi_{N+1} - \varphi_N) = \varphi_N$

Hermed er induktionen fuldført.

Ved $\varphi = \varphi_m$ for $z \in \overset{\circ}{K}_m$

får vi så en form med den ønskede egenskab på hele $U$.

Q.E.D.

For en differentialform af bigrad $(p,0)$

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \omega_{i_1\dots i_p}\, dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}$$

har vi

$$\bar\partial\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\bar z^j}\omega_{i_1\dots i_p}\, d\bar z^j \wedge dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}$$

Heraf ser, at $\bar\partial\omega = 0$ er ensbetydende med, at koefficient-funktionerne $\omega_{i_1 \dots i_p}$ i normalfremstillingen er holomorfe. Et element $\omega \in \Omega_U^{p,0}$ der opfylder $\bar\partial\omega = 0$ kaldes derfor en <u>holomorf differentialform</u> af grad $p$. For holomorfe differentialformer gælder

<u>Komplekst Poincaré lemma</u> Hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er en polycylinder og $\omega \in \Omega_U^{p,0}$ er holomorf, d.v.s. $\bar\partial\omega = 0$ og endvidere opfylder $\partial\omega = 0$, da findes (for $p>0$) en holomorf $\varphi \in \Omega_U^{p-1,0}$ d.v.s. $\bar\partial\varphi = 0$ med $\partial\varphi = \omega$.

Bem. For en holomorf diff. form $\omega$ er $d\omega = \partial\omega$, idet

$$d\omega = \partial\omega + \bar\partial\omega = \partial\omega$$

Vi skal ikke give beviset her, men blot gøre opmærksom på, at beviset på side 162-163 overføres ord til andet. Integralet på side 163 skal blot fortolkes som et kurveintegral med en kompleks parameter $t$.

---

Lad $U \subseteq \mathbb{R}^m$ være en åben mængde og $F : U \to \mathbb{R}^{\tilde m}$ en $C^\infty$-afbildning. Til hvert punkt $x \in U$ har vi da en $\mathbb{R}$-lineær afbildning, differentialet af $F$

$$dF_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\tilde m}$$

bestemt ved

$$dF_x(h) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left(F(x+\delta h) - F(x)\right)$$

Hvis vi skriver F op som et funksjonssystem

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \tilde{x}^1(x^1,\dots,x^m) \\ &\dots \qquad\qquad (x^1,\dots,x^m) \in \mathcal{U} \\ \tilde{x}^{\tilde{m}} &= \tilde{x}^{\tilde{m}}(x^1,\dots,x^m) \end{aligned}$$

er differensialet $dF_x$ bestemt ved

(32) $dF_x(h) = \tilde{h}$, hvor $\tilde{h}^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} h^i$

hvor de avledede er tatt i punktet $x \in \mathcal{U}$.

Idet vi med $\tilde{V}$ betegner vektorrommet over $\mathbb{C}$ av $\mathbb{R}$-lineære avbildninger $\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ heruh. $\mathbb{R}^{\tilde{m}} \to \mathbb{C}$, får vi for hvert $x \in \mathcal{U}$ en avbildning

$$dF_x^* : \tilde{V} \to V$$

ved $\quad dF_x^*(\varphi) = \varphi \circ dF_x \quad$ hvor $\varphi : \mathbb{R}^{\tilde{m}} \to \mathbb{C}$

Hvis $\quad \varphi = \alpha_1 \tilde{e}^1 + \dots + \alpha_{\tilde{m}} \tilde{e}^{\tilde{m}}$

hvor $\tilde{e}^1,\dots,\tilde{e}^{\tilde{m}}$ betegner den på side 154 omtalte basis for $\tilde{V}$, har vi

$$dF_x^*(\varphi)(h) = \varphi(dF_x(h)) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} h^i \tilde{e}_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \alpha_j\Big) h^i$$

altså

(33) $$dF_x^*\Big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \alpha_j \tilde{e}^j\Big) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \alpha_j\Big) e^i$$

Afbildningen $dF_x : \tilde{V} \to V$ er altså $\mathbb{C}$-lineær. Som omtalt på side 151–153 for vi herved en homomorfi

$$\Lambda dF_x : \Lambda(\tilde{V}) \to \Lambda(V)$$

bestemt ved

$$\tilde{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{i_k} \longrightarrow \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{\tilde{m}} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k}$$

idet (33) specielt udsiger

$$dF_x^*(\tilde{e}^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} e^j$$

Lad nu $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ være en åben mængde, så $F(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$. Hvis $\omega$ er en differentialform af grad $k$ på $\mathcal{V}$, kan vi <u>definere</u> en differentialform $F^*(\omega)$ af grad $k$ på $\mathcal{U}$ ved

$$F^*(\omega)(x) = \Lambda dF_x \left( \omega(F(x)) \right)$$

altså, hvis

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le \tilde{m}} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, d\tilde{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^{i_k}$$

har vi

$$F^*(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le \tilde{m}} \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

Vi ser heraf, at hvis $\omega$ er $C^\infty$ på $\mathcal{V}$, da er $F^*(\omega)$ $C^\infty$ på $\mathcal{U}$, altså vi har en $\mathbb{C}$-lineær afbildning

$$F^* : \Omega^k_{\mathcal{V}} \to \Omega^k_{\mathcal{U}}.$$

Der gælder specielt $F^*(f) = f \circ F$ for $f \in \Omega^0_V$. Endvidere har vi

$$(3') \quad \begin{aligned} F^*(f\omega) &= F^*(f)F^*(\omega) \\ F^*(\omega \wedge \varphi) &= F^*(\omega) \wedge F^*(\varphi) \end{aligned} \qquad f \in \Omega^0_V,\ \omega \in \Omega^k_V,\ \varphi \in \Omega^s_V$$

idet dette kan udledes direkte af ~~Hovedsætningen~~ kan udføres forskel i hvert punkt $x \in U$ for sig, og her vide $\wedge dF_x$ at være en homomorfi af de ydre algebraer.

Men overraskende er, at $F^*$ kommuterer med den ydre differentiation:

For $\omega \in \Omega^k_V$ gælder $d \circ F^*(\omega) = F^*(d\omega)$.

Bevis: I $U$ har vi $C^\infty$-funktionerne $\tilde{x}^i \circ F$, $i = 1, \dots, \tilde{m}$, og her gælder

$$d(\tilde{x}^i \circ F) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j$$

altså

$$d\left( \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j \right) = d \cdot d(\tilde{x}^i \circ F) = 0$$

Husk fra ved (3) side 158, at

$$d\left( \sum_{j_1, \dots, j_k = 1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) = 0$$

for vilkårlige indices $i_1, \dots, i_k$.

Ved samme formel fås nu

$$d(F^*(\omega)) = d\left( \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le \tilde{m}} \left( \omega_{i_1 \dots i_k} \circ F \sum_{j_1, \dots, j_k}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \right) \right)$$

$$= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} \Big( d(\omega_{i_1\dots i_k}\circ F) \wedge \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}}\, dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_k} \Big)$$

Vi kan nu bruge kædereglen

$$d(f\circ F) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f\circ F)}{\partial x^j}\, dx^j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big( \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big)\, dx^j$$

(hvilket netop er påstanden for $k=0$) og får

$$d(F^*(\omega)) = \sum \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \omega_{i_1\dots i_k} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_k}}{\partial x^{j_k}}\, dx^j \wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_k}$$

Idet

$$d\omega = \sum \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \omega_{i_1\dots i_k}\, d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^{i_1}\wedge\dots\wedge d\tilde{x}^{i_k}$$

får vi heraf det ønskede.

---

Vi betragter nu tilfældet, hvor $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er åben og $F: U \to \mathbb{C}^m$ er en $C^\infty$-afbildning. Vi kan skrive de komplekse koordinater op i reel- og imaginærdele

$$z^k = x^k + iy^k$$

$$\tilde{z}^k = \tilde{x}^k + i\tilde{y}^k$$

og af det ovenstående ser vi, at $F^*$ er bestemt ved

$$F^*(d\tilde{x}^k) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\, dx^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial y^j}\, dy^j$$

$$F^*(d\tilde{y}^k) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial x^j}\, dx^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \tilde{y}^k}{\partial y^j}\, dy^j$$

Lad os betragte $\mathbb{C}^m$ og $\mathbb{C}^n$ med koordinater $(z^1,\dots,z^m)$, $(w^1,\dots,w^n)$ hvor $z^k = x^k + iy^k$, $w^k = u^k + iv^k$, lad $U \subseteq \mathbb{C}^m$ være åben og lad $F: U \to \mathbb{C}^n$ være en $C^\infty$-afbildning. Da har vi

$$F^*(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \left( \frac{\partial w^k}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial w^k}{\partial y^j} dy^j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}\left( \frac{\partial w^k}{\partial x^j} - i\frac{\partial w^k}{\partial y^j} \right)(dx^j + i\,dy^j) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}\left( \frac{\partial w^k}{\partial x^j} + i\frac{\partial w^k}{\partial y^j} \right)(dx^j - i\,dy^j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial w^k}{\partial z^j} dz^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

(Sammenlign side 1-4), og analogt fås

$$F^*(d\bar{w}^k) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial z^j} dz^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

$$\vdots$$

Hvis specielt $F$ er <u>en holomorf afbildning</u>, altså

$$\frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^j} = 0 \quad \text{og dermed} \quad \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial z^j} = \overline{\left(\frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^j}\right)} = 0$$

fås vi

$$F^*(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial w^k}{\partial z^j} dz^j$$

og

$$F^*(d\bar{w}^k) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j .$$

Heraf følger, at <u>hvis $F$ er holomorf</u> vil $F^*$ <u>respektivere bigraden</u> altså hvis $V \supseteq F(U)$ er åben i $\mathbb{C}^n$ og $\omega \in \Omega_V^{p,q}$, hvor vi $F^*(\omega) \in \Omega_U^{p,q}$, idet vi for

$$\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \, dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p} \wedge d\overline{w}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{w}^{j_q}$$

for

$$F^*(\omega) = \sum \frac{\partial w^{i_1}}{\partial z^{\tau_1}} \cdots \frac{\partial w^{i_p}}{\partial z^{\tau_p}} \cdot \frac{\partial \overline{w}^{j_1}}{\partial \overline{z}^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial \overline{w}^{j_q}}{\partial \overline{z}^{\sigma_q}} \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} \, dz^{\tau_1} \wedge \dots \wedge dz^{\tau_p} \wedge d\overline{z}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}^{\sigma_q}$$

Heraf er det nu let at se, at <u>hvis $F$ er en holomorf afbildning</u> <u>da vil $F^*$ kommutere både med $\partial$ og $\overline{\partial}$ d.v.s.</u>

$$\partial \circ F^* = F^* \circ \partial \quad \text{og} \quad \overline{\partial} \circ F^* = F^* \circ \overline{\partial}$$

Hvis $\omega \in \Omega_V^{p,q}$ har vi nemlig

$$F^*(\partial\omega) + F^*(\overline{\partial}\omega) = F^*(\partial\omega + \overline{\partial}\omega) = F^*(d\omega) = d \circ F^*(\omega)$$
$$= \partial \circ F^*(\omega) + \overline{\partial} \circ F^*(\omega)$$

og her har leddene bigrader $(p+1, q)$ hvorh. $(p, q+1)$, så vi får de ønskede identiteter.

---

## Opgaver til kapitel 5

1. Lad $V$ være et vektorrum med endelig dimension $m$ over et kommutativt legeme $L$ med karakteristik $0$, og lad $a \in V$ med $a \neq 0$. Vis, at sekvensen af $L$-lineære afbildninger mellem vektorrum over $L$

$$0 \to \Lambda^0(V) \xrightarrow{\varphi_0} \Lambda^1(V) \xrightarrow{\varphi_1} \dots \to \Lambda^m(V) \to 0$$

er <u>eksakt</u> (d.v.s. på hvert trin er kernen af den udgående afbildning lig billedet af den indgående afbildning), idet

$$\varphi_k : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k+1}(V)$$

for $k>0$ defineres ved $z \longrightarrow z \wedge a$, mens

$\varphi_0 : \Lambda^0(V) = L \to V = \Lambda^1(V)$

defineres ved $\lambda \to \lambda a$. (Valg basis i $V$, så $a$ er en af basisvektorerne).

2. $V$ er som i opg. 1. Vis, at for vektorer $v_1, \ldots, v_k \in V$ gælder der

$v_1, \ldots, v_k$ lineært uafhængige $\iff v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$

Vis dernæst, at hvis $u_1, \ldots, u_k$ og $v_1, \ldots, v_k$ er sæt af lineært uafhængige vektorer fra $V$, gælder der:

$u_1, \ldots, u_k$ og $v_1, \ldots, v_k$ udspænder samme $k$-dim. underrum af $V \iff$ der findes $\lambda \in L$, $\lambda \neq 0$ så $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k = \lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$.

3. En åben mængde $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ kaldes stjerneformet ud fra 0, hvis $x \in \mathcal{U}$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx \in \mathcal{U}$. I en sådan mængde kan vi definere en afbildning

$$H : \Omega^p(\mathcal{U}) \to \Omega^{p-1}(\mathcal{U}) \qquad p \geq 1$$

ved, at hvis

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

er

$$H\omega = -\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m} \sum_{j=1}^{p} (-1)^j x^{i_j} \int_0^1 \left( \omega_{i_1 \ldots i_p}(tx)\, t^{p-1} \right) dt \cdot$$

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Vis, at $H$ er $\mathbb{C}$-lineær og at definitionsformlen gælder

ikke blot for standard fremstillingen (det var ref. af H) men for enhver fremstilling af $\omega$ med $C^\infty$-koeff. fkt.

Vis, at for $\omega \in \Omega^p(U)$, $p \geq 1$ gælder

$$dH\omega + Hd\omega = \omega$$

og vis heraf, at konklusionen af Poincaré's lemma gælder i $U$.

4. På en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet en $C^\infty$ (1,1) form

$$\omega = \sum a_{jk}\, dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

som opfylder $d\omega = 0$. Vi antager, at $U$ er således, at konklusionen i Poincaré's lemma for $d$ gælder, og så konklusionen i Dolbeault's gælder for både $\partial$ og $\bar{\partial}$. Vis, at der findes en $C^\infty$-funktion $f$ på $U$, så

$$a_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}.$$

Vis, at $f$ kan valgs reel når og kun når der gælder

$$\overline{a_{ij}} = -a_{ji}$$

Betingelsen $d\omega = 0$, altså $\partial\omega = 0$ og $\bar{\partial}\omega = 0$ kan udtrykkes ved

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} a_{jk} = \frac{\partial}{\partial z^j} a_{lk} \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} a_{jk} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} a_{jl}$$

(vis det!) Resultatet er så en udtrykning af Kählers.

## Kapitel 6: Hovedsætninger i polynomkonvekse, åbne delmængder af $\mathbb{C}^n$.

Med det allerede udviklede redskab er det muligt at bevise, at Cousin's første problem altid kan løses i en åben mængde $U \subseteq \mathbb{C}^n$, som er polynomkonveks d.v.s. konveks m.h.t. funktionsmængden af polynomier i $z_1, \ldots, z_n$. Dette vigtige resultat skyldes K. Oka (1936). I det følgende bruger vi på afgørende punkter Okas argumentation, idet dog fremstillingen er forenklet ved brug af differentialformer – hermed fås også et mere generelt resultat (fremstillingen ligger nær op ad den, som er givet i Gunning og Rossi's bog side 36-43 eller Hörmanders bog side 52-59).

Vi minder om begrebet analytisk polyeder (side 132). Et åben analytisk polyeder, som har et funktionssystem

$$z_1, \ldots, z_n, p_1, \ldots, p_m$$

hvor $p_1, \ldots, p_m$ er polynomier i $(z_1, \ldots, z_n)$, kaldes et polynomium-polyeder. Det mindste antal $m$ af nødvendige polynomier, ud over koordinaterne, kaldes ordenen af polyedret. Polynomium polyedret $U_m(p_1, \ldots, p_m; \rho)$ er en foreningsmængde af komponenter af mængden

$$\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \rho_1, \ldots, |z_n| < \rho_n, |p_1(z)| < \rho_{n+1}, \ldots, |p_m(z)| < \rho_{n+m} \}$$

og denne mængde er åbenbart selv et polynomium-polyeder. For $r = (r_1, \ldots, r_{n+m})$, hvor $0 < r_k < \rho_k$ betegner $U_m(p_1, \ldots, p_m; r)$ den delmængde af $U_m(p_1, \ldots, p_m; \rho)$, hvori der gælder

$|z_1|<r_1, \ldots, |z_n|<r_n, |p_1|<r_{n+1}, \ldots, |p_m|<r_m$.
Man ser let, at $U_n(p_1, \ldots, p_m; r)$ ligeledes er et polynomium-polyeder og at dens afslutning er en kompakt del mængde af $U_n(p_1, \ldots, p_m; \rho)$. Sammen med $U_m(p_1, \ldots, p_m; \rho)$ får vi også brug for at behagte delmængden

$$U_{n+1}(p_2, \ldots, p_m; \rho) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$$

bestemt ved



$$\{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|<\rho_1, \ldots, |z_{n+1}|<\rho_{n+1}, |p_2(z)|<\rho_2, \ldots, |p_m(z)|<\rho_m\}$$

og hvor $z_{n+1}$ altså er "blind variabel" i $p_2, \ldots, p_m$. Denne mængde er et polynom. - poly. af orden $m-1$ (eller lavere), og vi kan en holomorf injektion

$$\Phi : U_n(p_1, \ldots, p_m; \rho) \to U_{n+1}(p_2, \ldots, p_m; \rho)$$

bestemt ved

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_n, p_1(z_1, \ldots, z_n))$$

Billedmængden ved $\Phi$ er den analytiske mængde $M$ i $U_{n+1}$ bestemt ved

$$z_{n+1} - p_1(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

eller rettere sagt en foreningsmængde af komponenter af denne (idet $\Phi$ afbilder rand i rand, side 136-137). Vi bruger $M$ som betegnelse for billedmængden ved $\Phi$. Projektionen

$$P: (z_1, \ldots, z_{n+1}) \to (z_1, \ldots, z_n)$$

afbilder $M$ på $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$.

Sætning 1. Hvis $\varphi$ er en $C^\infty$-differentialform med bigrad $(p,q)$ defineret på polynomium-polycylinderen $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)\subseteq\mathbb{C}^n$ således at $q>0$ og $\bar\partial\varphi=0$, da findes for hvert $r=(r_1,\dots,r_m)$ med $0<r_k<\rho_k$ en $C^\infty$-form af bigrad $(p,q-1)$ på $U_n(p_1,\dots,p_m;r)$ således at $\bar\partial\psi=\varphi$ på $U_n(p_1,\dots,p_m;r)$.

Beviset føres ved induktion efter $m$. For $m=0$ har vi en polycylinder og påstanden følger af Dolbeault's lemma på side 172.

Vi antager nu påstanden rigtig for alle poly.-poly defineret med højst $m-1$ polynomier, men vilkårligt antal af variable. Lad $r'=(r_1',\dots,r_{n+m}')$ være valgt, så $r_k<r_k'<\rho_k$.

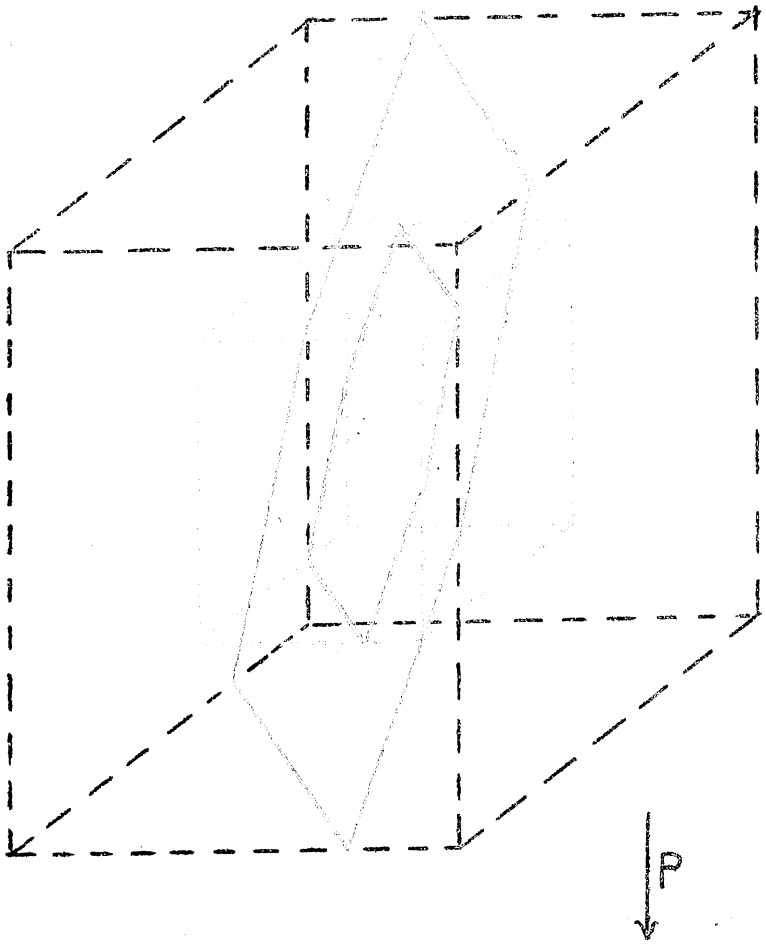
Vi betragter nu $M\subseteq U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\rho)$ og $M\cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')$, hvilket åbenbart er billedmængden af $\Phi$'s restriktion til $U_n(p_1,\dots,p_m;r')$. Ved projektionen $P$ afbildes $\overline{M\cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')}$ i $\overline{U_n(p_1,\dots,p_m;r')}$ altså i en kompakt delmængde af $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$, hvorfor der findes en åben delmængde $V\subseteq U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\rho)$, således at

$$\overline{M\cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')}\subseteq V$$

og således at $V$ projiceres indenfor $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$. Dermed er formen $\varphi$ veldefineret i $V$, idet $z_{n+1}$ medtages som "blind variabel", differentialerne $dz_{n+1}$ og $d\bar z_{n+1}$

kommer ikke til at indgå og derfor vil i hele $V$ gælde $\bar\partial\varphi = 0$

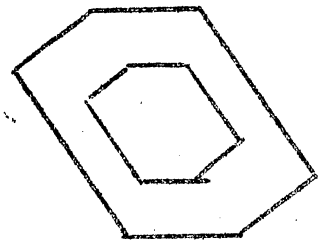
*Illustration*




Sort kasse $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\rho)$

Grøn kasse $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')$

Medrødt er tegnet $M$



$U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$ og
inden i $U_n(p_1,\dots,p_m;r')$.

Vi vælger nu en $C^\infty$-funktion $\tau$ på $C^{n+1}$, så $\tau = 1$ på en omegn af $\overline{M \cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')}$ og så $\operatorname{supp}\tau \subseteq V$.
Formen $\tau\varphi$ kan da fortsættes med 0 til en $C^\infty$-form $\tilde\varphi$ på hele $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r')$.
Der gælder åbenbart $\bar\partial\tilde\varphi = 0$ i en omegn af $M \cap U_{n+1}(\dots,r')$
Vi kan derfor finde en $C^\infty$-form med bigrad $(p,q+1)$ på

$U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\tau')$ så

$$\bar\partial\,\tilde\varphi = (z_{n+1}-p_1(z))\,\theta$$

idet $\theta = 0$ uden for $\operatorname{supp}\tau$ og på en omegn af $M\cap U_{n+1}(\dots,\tau')$. Idet funktionen $z_{n+1}-p_1$ er holomorf har vi

$$0 = \bar\partial\bar\partial\tilde\varphi = (z_{n+1}-p_1)\,\bar\partial\theta,$$

og idet mængden $z_{n+1}-p_1(z)=0$ er indeholdt i $U_{n+1}(\dots,\tau')$ ses heraf, at

$$\bar\partial\theta = 0$$

i $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m,\tau')$. Vi bruger nu induktionsantagelsen på <u>$(p,q+1)$-formen</u> $\theta$, idet $\tau''=(\tau_1'',\dots,\tau_{n+m}'')$ vælges, så $\tau_k<\tau_k''<\tau_k'$, og der findes altså en $C^\infty$-$(p,q)$ form $\omega$ på $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m,\tau'')$ med

$$\bar\partial\omega = \theta$$

i $U_{n+1}(\dots,\tau'')$. Men så har vi

$$\bar\partial\left(\tilde\varphi-(z_{n+1}-p_1(z))\,\omega\right) = 0$$

og ifølge induktionsantagelsen findes derfor en $C^\infty$-$(p,q-1)$ form $\Psi$ på $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\tau)$, så

$$\bar\partial\Psi = \tilde\varphi-(z_{n+1}-p_1(z))\,\omega\,.$$

Vi kan nu gå tilbage til $U_m(p_1,\dots,p_m;\tau)$ ved $\Phi^*$ og får

$$\bar\partial(\Phi^*(\Psi)) = \Phi^*(\bar\partial\Psi) = \Phi^*(\tilde\varphi)-\Phi^*(z_{n+1}-p_1)\cdot\Phi^*(\omega)$$

Ifølge konstruktionen er $\Phi^*(\tilde{\varphi}) = \varphi$
idet $\Phi^*$ er bestemt ved:

$$dz_1 \longrightarrow dz_1$$
$$\vdots$$
$$dz_n \longrightarrow dz_n$$
$$dz_{n+1} \longrightarrow dp_1 \quad \text{(kommer ikke i brug)}$$

og endviderе er $\Phi^*(z_{n+1} - p_1) = 0$, da funktionen er 0 på billedmængden $M$.
Forresten $\psi = \Phi^*(\Psi)$ løser altså opgaven.

Q.E.D.

Heraf fås som corollar, at Cousin's første problem kan løses med "tab af terræn":

<u>Sætning 2</u>: Lad $U_n(p_1, \dots, p_m; \rho) \subseteq \mathbb{C}^n$ være et polyno-minium-polyeder $(U_j, j \in J)$ en åben opdeling af $U_n(p_1, \dots, p_m; \rho)$ og lad er der for hvert par $(i,j) \in J \times J$, hvor $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ være givet en holomorf funktion $f_{ij}$ på $U_i \cap U_j$ således at

$$f_{ii} = 0 \quad , \quad f_{ij} = -f_{ji} \quad , \quad f_{jk} + f_{ki} + f_{ij} = 0$$

Da findes for hvert $r = (r_1, \dots, r_{n+m})$ med $0 < r_k < \rho_k$ holomorfe funktioner $h_i$ på $U_i \cap U_n(p_1, \dots, p_m; r)$, således at

$$f_{ij} = h_j - h_i$$

på $U_i \cap U_j \cap U_n(p_1, \dots, p_m; r)$.

Bevis: Vi har som tidligere bevist $C^\infty$ funktioner $\tilde{h}_i$ på $U_i$, så $f_{ij} = \tilde{h}_j - \tilde{h}_i$.

Ved
$$\varphi = \bar{\partial}\tilde{h}_i \text{ på } U_i$$
defineres så en $C^\infty$-(0,1)-form på $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$, som opfylder $\bar{\partial}\varphi = 0$. Ifølge sætning 1. findes derfor en $C^\infty$-funktion $g$ på $U_n(p_1,\dots,p_m;r)$, så $\bar{\partial}g = \varphi$. Men dette fører til, at
$$h_i = \tilde{h}_i - g \text{ på } U_i \cap U_n(p_1,\dots,p_m;r)$$
er holomorfe funktioner af den ønskede art.

Vi betragter igen situationen med injektionen
$$\Phi : U_n(p_1,\dots,p_m;\rho) \to U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\rho)$$
og dennes restriktion til $U_n(p_2,\dots,p_m;r)$ hvor $0<r_k<\rho_k$.

Her kan vi nu bevise:

<u>Forberedelse til Sætning 3</u>: Hvis $g$ er en holomorf funktion på $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$ findes en holomorf funktion $G$ på $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r)$ således at $\Phi^*(G) = G\circ\Phi = g$ på $U_n(p_1,\dots,p_m;r)$

[Sagt mere fornt kan vi ved $\Phi$ opfatte $g$ som en funktion på $M$ og påstanden er, at denne funktion ikuden for $U_{n+1}(\cdot;r)$ er restriktion af en holomorf funktion $G$ i $U_{n+1}(\cdot;r)$].

Bevis: Vi overdækker $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;\rho)$ med åbne mængder $(U_j, j\in J)$ og disse vælges således, at hvis $U_j\cap M\neq\emptyset$, da projiceres $U_j$ ikuden for $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$ — dette er muligt

da $M$ er relativt afsluttet, altså om hvert punkt $\notin M$ kan lægges en åben mængde disjunkt med $M$, og da $M$ projiceres i $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$, altså om hvert punkt $\in M$ kan lægges en åben mængde, som projiceres i $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$.
For hvert $j \in J$ defineres

$$g_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } U_j \cap M = \emptyset \\ g(z_1,\dots,z_n) & \text{hvis } U_j \cap M \neq \emptyset \end{cases} \quad (z_{n+1} \text{ blind variabel})$$

og denne definition har mening, idet $U_j \cap M \neq \emptyset$ og $(z_1,\dots,z_{n+1}) \in U_j \Rightarrow (z_1,\dots,z_n) \in U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$.
Vi ser, at $g_j - g_i$ er lig 0 undtagen hvis $U_i \cap M \neq \emptyset$ og $U_j \cap M = \emptyset$ (eller med $i$ og $j$ ombyttet), og hvis dette indtræffer er $U_i \cap U_j$ disjunkt med $M$ og projiceres i $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$. Hvis $g_i - g_j$ ikke er identisk 0 antager funktionen $z_{n+1} - p_1(z_1,\dots,z_n)$ altså ikke værdien 0 på $U_i \cap U_j$. Vi kan derfor definere holomorfe funktioner $f_{ij}$ på $U_i \cap U_j$ ved

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } g_j - g_i = 0 \text{ identisk} \\ \dfrac{g_j - g_i}{z_{n+1} - p_1(z_1,\dots,z_n)} & \text{ellers} \end{cases}$$

Hermed har vi et Cousin-I-problem, idet $f_{ii} = 0$, $f_{ij} = -f_{ji}$ er indlysende og hvor $f_{jk} + f_{ki} + f_{ij} = 0$ følger af, at vi, hvis ikke alle 3 er 0, kan "sætte på fælles brøkstreg" med nævner $z_{n+1} - p_1(z_1,\dots,z_n)$.
Nu kan sætning 2 anvendes og der findes altså holo-

morfe funktioner $h_i$ på $U_i \cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r)$ med

$$f_{ij} = h_j - h_i \quad \text{på } U_i \cap U_j \cap U_{n+1}(\cdot\cdot;r)$$

For hvert $(i,j)$ har vi så

$$g_j - g_i = (z_{n+1} - p_1(z_1,\dots,z_n))\, f_{ij} = (z_{n+1}-p_1)h_j - (z_{n+1}-p_1)h_i$$

på $U_i \cap U_j \cap U_{n+1}(\dots,r)$ og dermed

$$g_i - (z_{n+1}-p_1)h_i = g_j - (z_{n+1}-p_1)h_j$$

på samme mængde. Vi kan derfor definere en holomorf funktion $G$ på $U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r)$ ved

$$G = g_i - (z_{n+1}-p_1)h_i \quad \text{på } U_i \cap U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r)$$

Idet $\Phi : (z_1,\dots,z_n) \to (z_1,\dots,z_{n+1}) = (z_1,\dots,z_n, p_1(z_1,\dots,z_n))$

har vi $G \circ \Phi(z_1,\dots,z_n) = G(z_1,\dots,z_n, p_1(z_1,\dots,z_n))$

og selve definitionen af $g_i$ giver dermed, at

$$G \circ \Phi = g$$

som ønsket.

Vi kan øjensynlig anvende argumentet en gang til på funktionen $G$ og injektionen

$$U_{n+1}(p_2,\dots,p_m;r) \to U_{n+2}(p_3,\dots,p_m;r)$$

hvor

$$(z_1,\dots,z_{n+1}) \to (z_1,\dots,z_{n+1}, p_2(z_1,\dots,z_n))$$

men igen tabes naturligvis lidt terræn d.v.s. vi får lidt mindre radier. Dette terrænstab kan vi dog holde styr på,

idet vi til givne $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$, $r = (r_1, \dots, r_{n+m})$ med $0 < r_k < \rho_k$ knytter polyradier $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \dots, r_{n+m}^{(k)})$ for $k = 1, \dots, m-1$ med $0 < r_k < r_k^{(m-1)} < \dots < r_k^{(1)} < \rho_k$.

I det sammensatte af injektionerne

$$U_n(\rho_1, \dots, \rho_m; \rho) \to U_{n+1}(\rho_2, \dots, \rho_m; \rho) \to \dots \to U_{n+m}(\rho)$$

er injektionen

$$(z_1, \dots, z_n) \longrightarrow (z_1, \dots, z_n, p_1(\underline{z}), \dots, p_m(\underline{z}))$$

af $U_n(\rho_1, \dots, \rho_m; \rho)$ i polycylinderen

$$U_{n+m}(\rho) = \{(z_1, \dots, z_{n+m}) \mid |z_1| < \rho_1, \dots, |z_{n+m}| < \rho_{n+m}\}$$

har vi hermed bevist

<u>Sætning 3</u>: Hvis $g$ er en holomorf funktion på polynomiumspolyedret $U_n(\rho_1, \dots, \rho_m; \rho) \subseteq \mathbb{C}^n$, da findes for hvert $r = (r_1, \dots, r_{n+m})$ med $0 < r_k < \rho_k$ en holomorf funktion $G$ på polycylinderen $P(0; r) \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$, således at

$$G(z_1, \dots, z_n, p_1(z_1, \dots, z_n), \dots, p_m(z_1, \dots, z_n)) = g(z_1, \dots, z_n)$$

for $\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) \in U_n(\rho_1, \dots, \rho_m; r)$.

Vi kan udvikle $G$ i potensrække efter $z_1, \dots, z_{n+m}$ og altså hermed approximere $G$ ligeligt og vilkårligt godt på en polycylinder $P(0; r')$, hvor $0 < r_k' < r_k$, med et polynomium $Q(z_1, \dots, z_{n+m})$ (nemlig et afsnit i potensrækken). Derved bliver $g$ approximeret indenfor $U_n(\rho_1, \dots, \rho_m; r')$ med $Q(z_1, \dots, z_n, p_1(\underline{z}), \dots, p_m(\underline{z}))$, <u>som også er et polynomium!</u>

Hvis $K \subseteq U_n(p_1, \ldots, p_n; \rho)$ er kompakt, kan vi altid vælge $r$ og $r'$ med $0 < r_k' < r_k < \rho_k$, så $K \subseteq U_n(p_1, \ldots, p_n; r')$ og hermed har vi, at hver holomorf funktion på $U_n(\ldots; \rho)$ kan approximeres vilkårligt godt på $K$ med et polynomium i $(z_1, \ldots, z_n)$. Dette giver det første hovedresultat:

Approximationssætning Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en polynomkonveks åben delmængde. Da findes til hver holomorf funktion $g$ på $U$, hver kompakt mængde $K \subseteq U$ og hvert $\varepsilon > 0$ et polynomium $P(z_1, \ldots, z_n)$ i $z_1, \ldots, z_n$, således at $|g(z) - P(z)| < \varepsilon$ for $z \in K$.

Bevis: Idet $U$ er polynomkonveks findes der (side 134) et polynomium-polyeder $V \subseteq \mathbb{C}^n$, så $K \subseteq V \subseteq U$, hvorefter resultatet straks fås af det ovenstående.

Hermed er kanonerne kort i stilling, og vi kan bevise

Sætning I Lad $U \subseteq \mathbb{C}^n$ være en polynomkonveks åben delmængde. Hvis $\omega$ er en $C^\infty$-differentialform på $U$ med bigrad $(p, q)$ hvor $q > 0$, som opfylder $\bar\partial \omega = 0$, da findes en $C^\infty$-differentialform $\varphi$ med bigrad $(p, q-1)$ på $U$, så $\bar\partial \varphi = \omega$.

Bevis: Vi vælger kompakte mængder

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$$

så $\quad \bigcup K_k = U$

Da findes et polyn.-polyed. $U^{(1)}$, så

$$K_1 \subseteq U^{(1)} \subseteq \overline{U^{(1)}} \subseteq U.$$

Mængden

$$K_2 \cup \overline{U^{(1)}} \subseteq U$$

er kompakt, altså findes polyn.-polyed $U^{(2)}$, så

$$K_2 \cup \overline{U^{(1)}} \subseteq U^{(2)} \subseteq \overline{U^{(2)}} \subseteq U.$$

Sådan fortsættes, og vi får en følge $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots$ af polynom.-polyeder, således at

$$\overline{U^{(k)}} \subseteq U^{(k+1)} \quad \text{og} \quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^{(k)}.$$

Hvis $U^{(k)} = U_n(p_1, \ldots, p_m; \rho)$, da findes der $r = (r_1, \ldots, r_{n+m})$ med $0 < r_k < \rho_k$, så $\overline{U^{(k-1)}} \subseteq U_n(p_1, \ldots, p_m; r)$, idet $\overline{U^{(k-1)}}$ er en kompakt delmængde af $U^{(k)}$. Vi kan nu vise påstanden for en $(0,1)$ form $\omega$ med $\bar\partial\omega = 0$, idet vi går frem præcis som på side 104-105: For hvert $k$ gælder $\bar\partial\omega = 0$ på $U^{(k)} = U_n(p_1, \ldots, p_m; \rho)$. Altså findes der ifølge sætning 1 (side 188) en $C^\infty$-funktion $g_{k-1}$ på $U_n(p_1, \ldots, p_m; r) \supseteq U^{(k-1)}$ så $\bar\partial g_{k-1} = \omega$, hvormed specielt $g_{k-1}$ er $C^\infty$ på $U^{(k-1)}$ og her opfyldes $\bar\partial g_{k-1} = \omega$. Funktionen $g_{k+1} - g_k$ er holomorf på $U^{(k)}$ og ifølge approximationssætningen nederst side 195 findes derfor et polynomium $q_k$ i $z_1, \ldots, z_n$, så

$$|g_{k+1} - g_k - q_k| < \frac{1}{2^k} \text{ på } U_n(p_1, \ldots, p_m; r')$$

og dermed på $U^{(k-1)}$. Funktionsfølgen

$$h_k = g_{k+1} - (q_1 + \cdots + q_k)$$

vil så (se side 105) konvergere mod en $C^\infty$-funktion $g$ på $U$, så $\bar\partial g = \omega$.

Ligesom på side 172-173 kan vi indse, at det nu er nok at vise påstanden for en $(0,q)$-form med $q>1$. Vi går her til værks analogt til på side 175 (nederste halvdel), idet vi dog indfører en lille forenkling. For hvert $k$ har vi

$$U^{(k)} = U_m(p_1,\dots,p_m;\rho)$$

med passende valgte $p_1,\dots,p_m,\rho$, og vi kan finde

$$V_{k-1} = U_m(p_1,\dots,p_m;r)$$

så $\overline{U^{(k-1)}} \in V_{k-1} \in \overline{V_{k-1}} \in U^{(k)}$

Ifølge sætning 1 findes altså til hver $C^\infty$-$(p,q)$-form $\mu$ på $U^{(k)}$ med $q>0$ og $\bar\partial\mu = 0$ en $C^\infty(p,q-1)$ form $\nu$ på $V_{k-1}$, så $\bar\partial\nu = \mu$.

Vi bestemmer nu induktivt

En $(p,q)$-form $\varphi_k$ på $U^{(k+1)}$, således at
$\bar\partial\varphi_k = \omega$ på $U^{(k+1)}$
$\varphi_{k+1} = \varphi_k$ på $U^{(k)}$

Vi antager $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ er fundne og skal finde $\varphi_{k+1}$. Idet $\omega$ er $C^\infty$ på $U^{(k+3)}$ findes $C^\infty$-form $\psi_{k+1}$ på $V_{k+2}$ og dermed på $U^{(k+2)}$ med $\bar\partial\psi_{k+1} = \omega$. På $U^{(k+1)}$ gælder så $\bar\partial\varphi_k = \bar\partial\psi_{k+1} = \omega$, altså $\bar\partial(\psi_{k+1}-\varphi_k) = 0$ på $U^{(k+1)}$. Idet $\psi_k - \varphi_{k+1}$ har bigrad $(p,q-1)$, hvor $q>1$, altså $q-1>0$, findes derfor en $C^\infty$-form $\chi$ på $V_k$ så

$$\bar\partial\chi = \psi_{k+1} - \varphi_k \quad \text{på } V_k.$$

Nu valges (sætning nederst side 87) en $C^\infty$ funktion $\tau$ på $\mathbb{C}^n$, så $\tau = 1$ på $\mathcal{U}^{(k)}$ og $\operatorname{supp}\tau \subseteq V_k$. Formen $\tau X$ kan så fortsættes med 0 til hele $\mathbb{C}^n$. Vi definerer

$$\varphi_{k+1} = \psi_{k+1} - \bar\partial(\tau X)$$

Denne form er defineret og $C^\infty$ på $\mathcal{U}^{(k+2)}$ og opfylder her

$$\bar\partial\varphi_{k+1} = \bar\partial\psi_{k+1} - \bar\partial\bar\partial(\tau X) = \bar\partial\psi_{k+1} = \omega$$

På den åbne mængde $\mathcal{U}^{(k)}$ er $\tau$ identisk 1, så her er

$$\bar\partial(\tau X) = \bar\partial X = \psi_{k+1} - \varphi_k ,$$

altså er $\varphi_{k+1} = \varphi_k$ på $\mathcal{U}^{(k)}$.

Ved

$$\varphi = \varphi_k \text{ på } \mathcal{U}^{(k)}$$

får så det ønskede. Q.E.D.

Et polynomiumspolyeder er en polynomiumkonvekse mængde. Sætning 2 gælder altså uden tab af terræn (idet hovedsætningen ovenfor medfører, at det generaliserede Cousin-problem kan løses (se side 94-95 for eventuel repetition)). Beviset for sætning 3 kan derfor føres uden tab af terræn og vi får:

<u>Sætning II</u>: Hvis $g$ er en holomorf funktion på polynomiumspolyederet $U_n(p_1,\dots,p_m;\rho) \subseteq \mathbb{C}^n$, da findes en holomorf funktion $G$ på polycylinderen $P(0;\rho) \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$ så

$$g(\underline{z}) = G(z_1,\dots,z_n,p_1(\underline{z}),\dots,p_m(\underline{z}))$$

for $\underline{z} = (z_1,\dots,z_n) \in U_n(p_1,\dots,p_m;\rho)$.

Det er rimeligt at spørge hvorfor maskineriet ikke fungerer for et vilkårligt analytisk polyeder

$$\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \rho_1, \ldots, |z_n| < \rho_n ; |f_1(z)| < \rho_{n+1}, \ldots, |f_m(z)| < \rho_{n+m} \}$$

hvor $f_1, \ldots, f_m$ blot er holomorfe funktioner på en åben omegn af $\overline{\mathcal{U}}$ (side 132). Svaret er det enkle, at polyedrene

$$\mathcal{U}_{n+1}(f_2, \ldots, f_m; \rho)$$

da ikke uden videre har mening, idet dette kræver større definitionsmængde for $f_2, \ldots, f_m$ (på figuren side 189 ses, at store dele af $\mathcal{U}_{n+1}(p_2, \ldots, p_m)$ projiceres uden for $\mathcal{U}_n(p_1, \ldots, p_m; \rho)$) Dette problem har vi undgået ved kun at betragte polynomier som definerende funktioner for polyedret.

For et analytisk polyeder $\mathcal{U}_n(f_1, \ldots, f_m; \rho)$ har vi altid injektionen $\Phi : \mathcal{U}_n \to P(0; \rho) \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$ (se side 136-137) og det man kunne gøre sig håb om er at Sætn. II (eller den tilsvarende med tenæntab: Sætn. 3) også skulle gælde i dette mere generelle tilfælde. Dette skal vi senere udføre. På indeværende tidspunkt bemærkes blot, at vi i beviset for sætn. 3 brugte løsning af Cousin-problem. Den generaliserede sætning II bygger faktisk på en sådan teknik, men det er nødvendigt med en mere generel problemstilling. De to følgende paragraffer vil indeholde de almene begrebsdannelser, som er nødvendige som forberedelse hertil.

Vi skal endelig bemærke, at vi i beviset på side 190 brugte differentialformer af forskellig orden. Der er her tale om en væsentlig simplifikation i forhold til Oka's oprindelige be-

vis. Han beviser sætning 3 og sætning 2 i mere speciel form (meromorfe funktioner $F_i$ på $U_i$, sml. side 84-85) og en yderlige hjælpesætning ved et sindrigt induktionsbevis. Afhandlingen anbefales til eventuelle interesserede: J. Sci. Hiroshima Univ. 6 (1936), 245-255 eller i bogen: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, som er optryk af 9 afhandlinger af Oka, hvoraf denne er den første.

## Kapitel 7: Knipper, cohomologi.

I dette og det følgende afsnit vil vi opbygge en general begrebsramme, hvorindenfor den komplekse analyse lader sig formulere på bekvem og hensigtsmæssig måde. Der er tale om den såkaldte knippe-teori (engelsk: sheaf, tysk: Garbe, fransk: faisceaux). En forholdsvis kort fremstilling findes i § 2 af Hirzebruch's bog: Topological methods in algebraic Geometry, mere omfattende fremstillinger er Godement: Théorie des faisceaux og Bredon: Sheaf theory.

Definition af pre-knippe: Lad $X$ være et topologisk rum. Ved et pre-knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper på $X$ forstår en afbildning, som til hver åben mængde $U \subseteq X$ knytter en abelsk gruppe $\mathcal{A}_U$, og til hvert par af åbne mængder med $V \subseteq U$ en homomorfi $\rho_V^U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_V$, således at

1) $\mathcal{A}_\emptyset = \{0\}$
2) For hver åben mængde $U \subseteq X$ er $\rho_U^U$ identiteten af $\mathcal{A}_U$
3) Hvis $W \subseteq V \subseteq U$ er åbne delmængder af $X$, gælder
$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_W .$$

Eksempel: Vi kan lade $\mathcal{A}_U$ = mængden af reelle funktioner på $U$ med $+$ som komposition og $\rho_V^U$ = restriktion til $V$ af funktion på $U$. Så er 1), 2), 3) øjensynlig opfyldt. Mere specielt kan vi tage $\mathcal{A}_U$ = mgd. af kont. fkt på $U$, $\rho$ stadig restriktion. Hvis specielt $X$ er en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$

har vi <u>præ-knipperne</u> $C^\infty$ og $\mathcal{O}$, hvor $C^\infty_U$ = mgd. af komplekse $C^\infty$ funktioner på $U$, $\mathcal{O}_U$ = mgd. af holomorfe funktioner på $U$. Kompositionen er + og $\rho$ restriktion i begge tilfælde.

Et præ-knippe behøver naturligvis ikke at bestå af funktioner, men vi kalder generelt $\rho$ for <u>restriktionen</u> hørende til præknippet $\mathcal{A}$. Vi kan definere et <u>præ-knippe $\mathcal{A}$ af vektorrum over $\mathbb{C}$</u> derved, at hver $\mathcal{A}_U$ skal være et vektorrum over $\mathbb{C}$, hver restriktion skal være $\mathbb{C}$-lineær og 1, 2, 3 skal gælde. Præ-knipperne $C^\infty$ og $\mathcal{O}$ er præ-knipper af vektorrum over $\mathbb{C}$.

<u>Def. af homomorfi</u>: Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ være præ-knipper af abelske grupper over det topologiske rum $X$. Ved en homomorfi $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ forstår et system af homomorfier

$$f_U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}'_U, \quad U \text{ åben i } X$$

som respekterer restriktionen i $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$, altså hvor hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_U & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{A}'_U \\ \downarrow \rho^U_V & & \downarrow \rho'^U_V \\ \mathcal{A}_V & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{A}'_V \end{array} \qquad V \subseteq U \text{ åbne}$$

er kommutativt ($\rho$ og $\rho'$ betegner restriktioner i $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$).

<u>Eksempel</u>: Hvis $X$ er en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ har vi homomorfier $\frac{\partial}{\partial z_k} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ $\quad k = 1, \ldots, n$

bestemt ved, at $f \in \mathcal{O}_U \to \frac{\partial}{\partial z_k} f \in \mathcal{O}_U$.

Hvis specielt $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ er pre-knipper af $\mathbb{C}$-vektorrum, kaldes $f$ en $\mathbb{C}$-homomorfi, hvis hver $f_U$ er $\mathbb{C}$-lineær.

Definition af kerne og pre-billede. Injektiv og stærkt surjektiv homomorfi. Idet $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ er en homomorfi, betragte Ker $f_U$ af $f_U: \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}'_U$ for hver åben mængde $U \subseteq X$. Af det kommutative diagram på side 203 følger straks, at restriktionen i $\mathcal{A}$ afbilder Ker $f_U$ i Ker $f_V$. Hermed har vi et pre-knippe Ker $f$ af abelske grupper, idet 1, 2, 3 er opfyldt, da de gælder for $\mathcal{A}$. Vi kalder Ker $f$ kernen af homomorfien $f$.

Homomorfien $f$ kaldes injektiv, hvis Ker $f_U = \{0\}$ for hver åben mængde $U \subseteq X$.

For hver åben mængde $U \subseteq X$ kan vi betragte billedet pre-Im $f_U$ af homomorfien $f_U$. Diagrammet giver igen, at restriktionen i $\mathcal{A}'$ afbilder pre-Im $f_U$ i pre-Im $f_V$. Hermed fås et pre-knippe, som kaldes pre-billedet ved $f$ (begrundelse for den sære terminologi kommer senere).

Homomorfien $f$ kaldes stærkt surjektiv, hvis pre-billedet er hele $\mathcal{A}'$, altså hvis $f_U$ er surjektiv for hver åben mængde $U$.

Definition af kim og strå: Lad $\mathcal{A}$ være et pre-knippe af abelske grupper på det topologiske rum $X$. For et punkt $x \in X$ betragter mængden af par $(\sigma, U)$ hvor $U \subseteq X$ er åben med $x \in U$ og $\sigma \in \mathcal{A}_U$. I denne mængde indføres en ækvivalensrelation $\sim_x$ ved definitionen

$(\sigma, U) \underset{x}{\sim} (\tau, V) \Leftrightarrow$ der findes en åben mængde $W \subseteq X$ med $x \in W \subseteq U \cap V$, så $\rho^U_W(\sigma) = \rho^V_W(\tau)$ (sammenlign side 36-37). Det er let at vise, at vi herved får en ækvivalensrelation. Mængden af klasser betegnes $\mathcal{A}_x$ og kaldes <u>stiået</u> af $\mathcal{A}$ i $x$, de enkelte klasser kaldes <u>kim</u> af $\mathcal{A}$ i punktet $x$. For $\sigma \in \mathcal{A}_U$ med $x \in U$ betegner $\sigma_x$ det tilhørende kim. Den ved $\sigma \to \sigma_x$ bestemte afbildning $\mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_x$ kaldes <u>den kanoniske afbildning</u>. Stiået $\mathcal{A}_x$ kan organiseres som abelsk gruppe, idet kompositionen

$$(\sigma, U) + (\tau, V) = (\rho^U_{U\cap V}\sigma + \rho^V_{U\cap V}\tau, U \cap V)$$

harmonerer med $\underset{x}{\sim}$. Den kanoniske afbildning er en homomorfi af abelske grupper.

Bevis: Øvelse til læseren.

<u>Komplettering af pre-knippe. Begrebet knippe</u>. For prætnippet $\mathcal{A}$ betragter vi den disjunkte foreningsmængde $T(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$ af alle stråene. Hvis $U \subseteq X$ er åben, $U \neq \emptyset$ kaldes en afbildning $s: U \to T(\mathcal{A})$ et <u>snit over $U$</u>, hvis

(1) For hvert $x \in U$ er $s(x) \in \mathcal{A}_x$

(2) Til hvert $x \in U$ findes en åben mængde $V$ med $x \in V \subseteq U$ og et element $\sigma \in \mathcal{A}_V$, således at $s(y) = \sigma_y$ for hvert $y \in V$

Sagt anderledes: Et element $\sigma \in \mathcal{A}_V$ bestemmer et snit

over $V$ ved $x \to \sigma_x$, og en afbildning $s: U \to T(\mathcal{A})$ med $s(x) \in \mathcal{A}_x$ er et snit når den lokalt fås fra elementer i $\mathcal{A}$.

Vi betegner mængden af snit over $U$ med $\tilde{\mathcal{A}}_U$. Mængden $\tilde{\mathcal{A}}_U$ er en abelsk gruppe, idet vi definerer

$$(s+t)(x) = s(x) + t(x)$$

hvor $+$ på højre side er kompositionen i stalken $\mathcal{A}_x$. Det må naturligvis vises, at $s+t$ er et snit: Betingelse (1) er klart opfyldt. Idet (2) gælder for $s$ og $t$ har vi (eventuelt efter restriktion) en åben mængde $V$ med $x \in V \subseteq U$ og elementer $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_V$, så $s(y) = \sigma_y$, $t(y) = \tau_y$ for $y \in V$. Men så er $(s+t)(y) = (\sigma+\tau)_y$ for $y \in V$, hvor $\sigma+\tau \in \mathcal{A}_V$.

<u>Eksempel</u> Idet $G$ er en abelsk gruppe sætter vi $\mathcal{A}_U = G$ for $U \neq \emptyset$ og lader restriktionen være identiteten. $T(\mathcal{A})$ er så $G \times X$, idet hvert snit er $G$. Et snit over $U$ bliver præcis en afbildning $t: U \to G$ som er <u>lokalt konstant</u>.

Vi kan definere en restriktion $\tilde{\mathcal{A}}_U \to \tilde{\mathcal{A}}_V$ for $V \subseteq U$ simpelthen som restriktionen af snit. Sætter $\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset = \{0\}$ ses det, at vi hermed har et præ-knippe $\tilde{\mathcal{A}}$ af abelske grupper. Endvidere har vi en <u>kanonisk homomorfi</u> $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ bestemt ved, at $\sigma \in \mathcal{A}_U$ afbildes på $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$, hvor $s(x) = \sigma_x$ for $x \in U$. Vi kalder $\tilde{\mathcal{A}}$ kompletteringen af $\mathcal{A}$.

I almindelighed vil den kanoniske afbildning $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ hverken være injektiv eller stærkt surjektiv. Herom har vi følgende

Den kanoniske homomorfi $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}'$ er bijektiv når kun når der gælder

4) Hvis $\sigma \in \mathcal{A}_U$, hvor $U \subseteq X$ er vilkårlig åben mgd $\neq \emptyset$, har den egenskab, at der til hvert punkt $x$ findes en åben mængde $V$ med $x \in V \subseteq U$, så $\rho_V^U(\sigma) = 0 \in \mathcal{A}_V$, da er $\sigma = 0 \in \mathcal{A}_U$

og 5) Hvis $U = \bigcup_{j \in J} U_j$, hvor $U_j \subseteq X$ er åbne mængder, og hvis der er givet elementer $\sigma_j \in \mathcal{A}_{U_j}$, således at $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(\sigma_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(\sigma_j)$ for hvert par af indices, da findes et element $\sigma \in \mathcal{A}_U$, så $\rho_{U_j}^{U}(\sigma) = \sigma_j$ for hvert $j$.

Betingelsen 4 siger nemlig, at $\sigma \in \mathcal{A}_U$ er $= 0$, blot kimen $\sigma_x \in \mathcal{A}_x$ er $= 0$ for hvert $x \in U$, hvilket betyder, at den kanoniske homomorfi $\mathcal{A}_U \to \tilde{\mathcal{A}}'_U$ har kernen 0, altså er injektiv (idet $x \to \sigma_x$ er det tal $\sigma$ svarende snit over $U$).
Et snit $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$ kan ifølge definitionen fås ved en åben overdækning $(U_j, j \in J)$ af $U$ og elementer $\sigma_j \in \mathcal{A}_{U_j}$, hvor så $s_x = \sigma_{jx}$ for $x \in U_j$. Her gælder så

$$\sigma_{jx} = \sigma_{ix} \quad \text{for} \quad x \in U_i \cap U_j,$$

men dette er, idet vi anvender det lige viste på $U_i \cap U_j$, ensbetydende med, at

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(\sigma_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(\sigma_j).$$

Under forudsætning af 4 – hvilket er en nødvendig betingelse for, at den kanoniske afb er bijektiv – har vi altså præcis givet et snit

$s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$ i 5). Betingelsen 5 siger så, at der til hvert snit $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$ findes et element $\sigma \in \mathcal{A}_U$, så $\sigma_x = s_x$, altså at $s$ er billede ved den kanoniske afbildning, idet

$$\rho^U_{U_j}(\sigma) = \sigma_j$$

er ensbetydende med

$$\sigma_x = \sigma_{jx} \quad (= s_x)$$

for hvert $x \in U_j$, da $\mathcal{A}_{U_j} \to \tilde{\mathcal{A}}_{U_j}$ er injektiv.

<u>Definition:</u> Et præ-knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper kaldes et <u>knippe</u>, hvis den kanoniske homomorfi $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ er bijektiv, altså hvis $\mathcal{A}$ opfylder 4 og 5 (forudes 1, 2, 3).

<u>Eksempel</u> Hvis $G$ er en abelsk gruppe og $\mathcal{A}$ et præknippe, så $\mathcal{A}_U$ er en mængde af funktioner $U \to G$, additionen af funktioner er kompositionen i $\mathcal{A}_U$ og hvis restriktionen $\rho$ i $\mathcal{A}$ er restriktion af funktioner, kaldes $\mathcal{A}$ et <u>præ-knippe af funktioner</u>. For $f \in \mathcal{A}_X$ gælder øjensynlig, at $f_x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, altså funktionsværdien i $x$ er 0, hvis kimet i $x$ er 0-kimet (men ikke omvendt, naturligvis). Heraf følger, at $\mathcal{A}$ opfylder betingelsen 4, idet $f \in \mathcal{A}_U$, $f_x = 0$ for hvert $x \in U \Rightarrow f(x) = 0$ for hvert $x \in U$, altså $f = 0$ identisk på $U$. Betingelsen 5 udsiger, at det er en <u>lokal egenskab</u> ved en afbildning $f: U \to G$, der afgør, hvorvidt den hører med til $\mathcal{A}_U$. Vi kan også se dette af definitionen på snit. Et snit $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$, hvorved $x \to s(x) \in \mathcal{A}_x$, kan vi nemlig identificere med den ved

$f(x) = s(x)(x)$ (vandi i $x$ af kim) bestemte funktion $f: \mathcal{U} \to G$. Til hvert punkt $x \in \mathcal{U}$ findes nemlig (se side 207) en åben mængde $\mathcal{V} \subseteq X$, $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, og et element $\sigma \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ ($\sigma$ er altså en funktion $\mathcal{V} \to G$), så

$$s(y) = \sigma(y)$$

for hvert $y \in \mathcal{V}$, hvormed

$$f(y) = s(y)(y) = \sigma(y)(y) = \sigma(y)$$

for hvert $y \in \mathcal{V}$. Funktionen $f$ bestemmer altså snittet $s$ derved, at hvert punkt $x \in \mathcal{U}$ har en åben omegn $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, således at $f|\mathcal{V} \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$ og så $s(x) = f_x$ (kim i $x$).

Man ser, at præ-knipper og knipper af funktioner er begrebsmæssigt langt simplere end det generelle begreb. Sidenhen bliver det imidlertid en stor fordel at arbejde med det mere generelle begreb.

<u>For ethvert præ-knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper er kompletteringen $\tilde{\mathcal{A}}$ et knippe. Det kaldes det af $\mathcal{A}$ frembragte knippe.</u>

Bevis: Vi ved, at $\tilde{\mathcal{A}}$ er et præ-knippe, så vi skal blot vise, at det opfylder 4 og 5.

4: Af selve definitionen på snit $s \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}}$ følger, at

$$s = 0 \iff s(x) = 0 \ (\text{i } \mathcal{A}_x) \text{ for hvert } x \in \mathcal{U},$$

og det er så indlysende, at 4 gælder for $\tilde{\mathcal{A}}$.

5: Vi har givet $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U}_j$, $s_j \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{U}_j}$, så $s_i$ og $s_j$ stemmer overens i $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Men så defineres åbenbart en afbildning $s: \mathcal{U} \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$ ved

$$s(x) = s_j(x) \text{ for } x \in U_j,$$

og $s$ er et snit med de ønskede egenskaber. Egenskab (1) side 207 er nemlig trivielt opfyldt og (2) ses på følgende måde:

Lad $x \in U$. Så findes $j$ med $x \in U_j$. Idet $s_j$ er et snit over $U_j$ findes åben omegn $V$, $x \in V \subseteq U_j$ og element $\sigma \in \mathcal{A}_V$, så $s_j(y) = \sigma_y$ for $y \in V$, hvormed $s(y) = \sigma_y$ for $y \in V$.

Endelig er det klart, at $s_j$ præcis er restriktionen af $s$ til $U_j$.

Induceret homomorfi af stråene. Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ være præknipper (spec. knipper) af abelske grupper over topologisk rum $X$ og lad $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ være en homomorfi. For hvert punkt $x \in X$ har vi da stråene $\mathcal{A}_x$ og $\mathcal{A}'_x$. For hver åben mængde $U \ni x$ har vi homomorfien

$$f_U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}'_U.$$

Idet disse homomorfier kommuterer med restriktionerne, vil de (på naturlig måde) kommutere med relationerne $\sim_x$ i $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$. Homomorfien $f$ giver derfor anledning til en homomorfi

$$f_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}'_x$$

Denne er bestemt ved, at $\xi = \sigma_x \in \mathcal{A}_x$, hvor $\sigma \in \mathcal{A}_U$, afbildes på kimet $(f_U(\sigma))_x$.

Den <u>inducerede homomorfi</u> $f_x$ i punktet $x$ afhænger <u>funktorielt</u> af $f$. Hermed menes, at

Hvis $Id : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ betegner identiteten af $\mathcal{A}$, da er $Id_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_x$ identiteten af $\mathcal{A}_x$.
Hvis $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ og $g : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ er homomorfier af præ-knipper af abelske grupper, gælder der

$$(g \circ f)_x = g_x \circ f_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}''_x$$

Det simple bevis overlades til læseren.

For ethvert præ-knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper gælder, at den kanoniske homomorfi

$$k : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$$

inducerer isomorfier af stråene

$$k_x : \mathcal{A}_x \cong \tilde{\mathcal{A}}_x$$

Eller sagt lidt anderledes: $\mathcal{A}$ og $\tilde{\mathcal{A}}$ har de samme strå

Bevis: Homomorfien $k_x$ er bestemt ved, at kimet $\sigma_x \in \mathcal{A}_x$ af $\sigma \in \mathcal{A}_U$, hvor $U$ åben, $U \ni x$, afbilder i kimet $s_x \in \tilde{\mathcal{A}}_x$ af det ved $s(y) = \sigma_y$, $y \in U$ bestemte snit $s$ over $U$.
$k_x$ er injektiv: At $s_x = 0$ betyder, at der findes en åben omegn $W \subseteq U$ af $x$, så $s(y) = 0$ for $y \in W$. Men så er specielt $s(x) = 0$ (element i $\mathcal{A}_x$), altså $\sigma$ har kimet 0 i $x$, hvilket præcis er påstanden.
$k_x$ er surjektiv: Vi betragter kimet $s_x \in \tilde{\mathcal{A}}_x$ af snittet $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$, hvor $U$ er en åben omegn af $x$. Idet $s$ er et snit, findes en åben mængde $V$, $x \in V \subseteq U$ og et element $\sigma \in \mathcal{A}_V$, så $s(y) = \sigma_y$ for $y \in V$. Men så er $k_x(\sigma_x) = s_x$ ifølge definitionen af $k_x$.

Induceret homomorfi af de frembragte knipper. Hvis $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ er en homomorfi af ~~abelske~~ pre-knipper af abelske grupper, kan vi definere en homomorfi

$$\tilde{f}: \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}'$$

ved, at snittet $s \in \tilde{\mathcal{A}}_U$ afbildes i snittet $\tilde{f}(s) \in \tilde{\mathcal{A}}'_U$, bestemt ved

$$\tilde{f}(s)(x) = f_x(s(x))$$

~~[illegible]~~

At $\tilde{f}(s)$ virkelig er et snit følger af, at $s$ lokalt er af formen $x \to \sigma_x$, hvor $\sigma \in \mathcal{A}_U$ for et passende $U$, hvorfor vi for $x \in U$ har

$$\tilde{f}(s)(x) = f_x(s(x)) = f_x(\sigma_x) = (f_U(\sigma))_x$$

altså $\tilde{f}(s)$ fås lokalt fra elementer i $\mathcal{A}'$, d.v.s. den er et snit.

Man beviser let at vi har funktorialitet:
For $\mathrm{Id}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ er $\tilde{\mathrm{Id}}: \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}$ den identiske afbildning
For homomorfier $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $g: \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ gælder

$$(g \circ f)^{\sim} = \tilde{g} \circ \tilde{f}: \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}''.$$

## Kerne, billede, kvotient, eksakt sekvens af knipper.

Hvis $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ er en homomorfi af knipper af abelske grupper, da er kernen $\ker f$ et knippe (på side 204 er kernen defineret og vist at være et pre-knippe). For hvert $x \in X$ er $(\ker f)_x$ kernen af $f_x: \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}'_x$.

Vi skal vise, at pre-knippet $\mathrm{Ker} f$ opfylder 4 og 5.
Det er klart, at 4 gælder, idet den gælder for $\mathcal{A}$ og $\mathrm{Ker} f$ er et del-pre-knippe af $\mathcal{A}$.
Ved problemstillingen i 5 kan vi finde et element $\sigma \in \mathcal{A}_U$ med de ønskede egenskaber, da $\mathcal{A}$ opfylder 5. Vi ved, at

$$f_{U_j}(\sigma_j) = 0 \quad \text{for hvert } j$$

og vi skal vise, at $f_U(\sigma) = 0$. Hertil benyttes, at 4 gælder i $\mathcal{A}'$. Vi har elementer $f_U(\sigma) \in \mathcal{A}'_U$, hvor der for hvert $j$ gælder

$$\rho'^{U}_{U_j} f_U(\sigma) = f_{U_j}(\rho^{U}_{U_j}(\sigma)) = f_{U_j}(\sigma_j) = 0,$$

men så er $f_U(\sigma) = 0$ ifølge 4, da $(U_j, j \in J)$ overdækker $U$.

Lad $\xi \in \mathcal{A}_x$ være kimet i $x$ af $\sigma \in \mathcal{A}_U$, altså $\xi = \sigma_x$.
Så er $f(\xi) = 0 \iff f_x(\sigma_x) = f_U(\sigma)_x = 0$
$\iff$ der findes en åben omegn $V \subseteq U$ så restriktionen $\rho'^{U}_{V} f_U(\sigma) = 0$ i $\mathcal{A}'_V$ $\iff$ der findes en åben omegn $V \subseteq U$ af $x$, så $\rho^{U}_{V}(\sigma) \in \mathrm{Ker} f_V \iff \xi$ kan repræsenteres med et element fra $\mathrm{Ker} f \iff \xi \in \mathrm{Ker} f_x$.

Hvis $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ er en homomorfi af knipper af abelske grupper, vil billed-pre-knippet i almindelighed ikke være et knippe. Betingelsen 4 vil naturligvis være opfyldt, da vi har et del-pre-knippe af knippet $\mathcal{A}'$; men 5 vil i almindelighed ikke gælde. Vi definerer billedet $\mathrm{Im} f$

bed, at $\sigma \in \mathcal{A}'_U$ tilhører $\mathrm{Im} f_U$ når og kun når hvert kim $\sigma_x$ ligger i $(\mathrm{pre}\text{-}\mathrm{Im} f)_x$, altså når og kun når $\sigma$ lokalt tilhører pre-Im f. Man ser, at Im f bliver et del-præ-knippe af $\mathcal{A}'$, som opfylder 4 (da V gælder for $\mathcal{A}'$). Betingelsen 5 er også opfyldt, idet den definerende egenskab er lokal (i situationen 5 vil der findes et element $\sigma \in \mathcal{A}'_U$ med de ønskede egenskaber og dette element vil ligge i $\mathrm{Im} f_U$, da vi for hvert $x \in U$ har $\sigma_x = (\sigma_j)_x \in (\mathrm{pre}\text{-}\mathrm{Im} f)_x$ med et passende valgt $j$). Hermed har vi defineret billed-knippet Im f. Vi ser, at for hvert $x \in X$ er homomorfien af stængene

$$f_x : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathrm{Im} f_x$$

surjektiv, mens der for en åben mængde $U \subseteq X$ i almindelighed ikke gælder, at

$$f_U : \mathcal{A}_U \longrightarrow \mathrm{Im} f_U$$

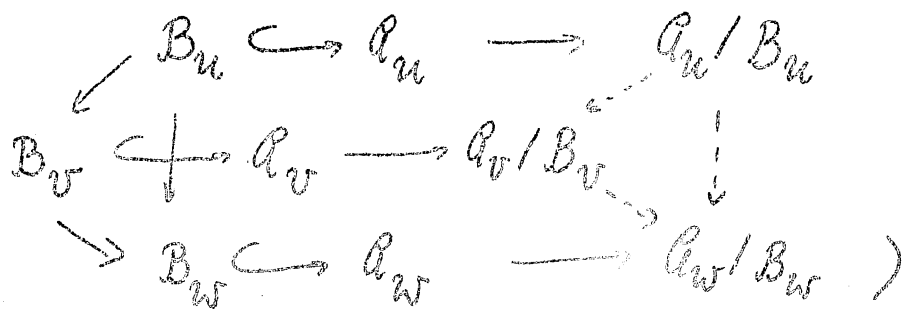
er surjektiv.

Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper og $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ et delknippe (altså $\mathcal{B}$ er et knippe af abelske grupper, $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{A}_U$ for hvert $U$ og restriktionen i $\mathcal{B}$ fås fra restriktionen i $\mathcal{A}$ ved restriktion). For hver åben mængde $U$ kan vi da betragte kvotient-gruppen $\mathcal{A}_U / \mathcal{B}_U$. Hvis $V \subseteq U$ har vi diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}_U & \hookrightarrow & \mathcal{A}_U & \longrightarrow & \mathcal{A}_U / \mathcal{B}_U \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots \\ \mathcal{B}_V & \hookrightarrow & \mathcal{A}_V & \longrightarrow & \mathcal{A}_V / \mathcal{B}_V \end{array}$$

som er kommutativt. Der findes da præcis én homomorfi $\dot{v}$, som

kompletten diagrammet til et kommutativt diagram, og med disse homomorfier får vi et pre-knippe $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.
(Beviset overlades læseren. Ved 3 benyttes diagrammet



Pre-knippet $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ opfylder 4 (men ikke 5). Et element $\sigma \in \mathcal{A}_U/\mathcal{B}_U$ er nemlig repræsenteret ved et element $\tilde{\sigma} \in \mathcal{A}_U$, og $\rho^U_V(\sigma) = 0$ er ensbetydende med, at $\rho^U_V(\tilde{\sigma}) \in \mathcal{B}_V$. Idet $\mathcal{B}$ opfylder 4, har vi derfor $\tilde{\sigma} \in \mathcal{B}_U$, altså $\sigma = 0$.
Knippet

$$\mathcal{A}/\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$$

kaldes <u>kvotientknippet</u>. Vi har åbenbart en <u>kanonisk homomorfi</u> $k: \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$

som er <u>surjektiv</u> (se ovenfor, $\mathcal{A}/\mathcal{B} = \operatorname{Im} k$) og har <u>$\mathcal{B}$ som kerne</u>, altså for hvert $x \in X$ er

$$k_x: \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}/\mathcal{B}_x$$

surjektiv med $\mathcal{B}_x$ som kerne, men for $U \subseteq X$ åben er

$$k_U: \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}/\mathcal{B}_U$$

i al almindelighed ikke surjektiv, men den har $\mathcal{B}_U$ som kerne.

Begrebet kvotientknippe er kompliceret, men rummer på den anden side meget væsentligt:
<u>Eksempel</u>: På en åben delmængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ kan vi be-

prae-knippet $\mathcal{O}$ af holomorfe funktioner og $\mathcal{M}$ af meromorfe funktioner. Disse ses begge let at være knipper. Vi har en injektion $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$, idet hver holomorf funktion på en åben mængde $U \subseteq X$ også er en meromorf funktion på $U$. Vi betragter nu kvotientknippet $\mathcal{M}/\mathcal{O}$. Et element i $\mathcal{M}/\mathcal{O}_U = \mathcal{M}_U/\mathcal{O}_U$ er en klasse af meromorfe funktioner på $U$, som indbyrdes adskiller sig ved en holomorf addend på $U$. Et element i $\mathcal{M}/\mathcal{O}_U$ kan derfor repræsenteres ved, at vi har en åben opdeling

$$U = \bigcup_{j \in J} U_j$$

en meromorf funktion $F_j$ på $U_j$, således at $F_i - F_j$ er holomorf på $U_i \cap U_j$. Problemet om, hvorvidt

$$\mathcal{M}_U \to \mathcal{M}/\mathcal{O}_U$$

er altså, om der findes en meromorf funktion $F$ på $U$, så $F - F_j$ er holomorf på $U_j$ — altså præcis Cousin's første problem.

Vi har ovenfor lidt forudgrebet begivenhedernes gang. En homomorfi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mellem knipper af abelske grupper kaldes <u>injektiv</u>, hvis $\operatorname{Ker} f = 0$ (0-knippet) og <u>surjektiv</u>, hvis $\mathcal{A}' = \operatorname{Im} f$. Vi kan også sige, at $f$ er injektiv (surjektiv), hvis det for hvert $x \in X$ gælder, at

$$f_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}'_x$$

er injektiv (surjektiv).

En sekvens af abelske grupper og homomorfier

$$\ldots \to G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \to \ldots$$

(endelig eller uendelig) kaldes eksakt, hvis der for hvert n gælder $\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n$, altså hvis billedet ved den indgående homomorfi er lig kernen ved den udgående homomorfi.

En eksakt sekvens af typen

$$0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \to 0,$$

hvor 0 betegner 0-gruppen, kaldes en kort eksakt sekvens. Eksaktheden betyder åbenbart, at

$i$ er injektiv

$\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j$

$j$ er surjektiv

Ved $j$ etableres altså en bijektiv korrespondance mellem sideklasser til $i(A')$ i $A$ og elementerne i $A''$ d.v.s. vi har en entydigt bestemt isomorfi $\bar{j}: A/i(A') \cong A''$, så diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to A' & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{j} & A'' \\ & & \downarrow k & \nearrow \bar{j} & \\ & & A/i(A') & & \end{array}$$

er kommutativt.

Ved hjælp af begreberne billede og kerne for homomorfier kan vi analogt definere eksakte sekvenser af kvipper.

[illegible]

En sekvens

(*) $$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$$

af knipper af abelske grupper og homomorfier (over et topologisk rum $X$), hvor $0$ betegner $0$-knippet

$$0_U = \{0\} \text{ for hver åben mgd. } U \subseteq X$$

er altså eksakt præcis når hver sekvens af stå

$$0 \to \mathcal{A}'_x \xrightarrow{i_x} \mathcal{A}_x \xrightarrow{j_x} \mathcal{A}''_x \to 0 \quad x \in X$$

er eksakt. Hvis (*) er eksakt, er sekvensen

$$0 \to \mathcal{A}'_U \xrightarrow{i_U} \mathcal{A}_U \xrightarrow{j_U} \mathcal{A}''_U$$

eksakt for hver åben mængde $U \subseteq X$, men $j_U$ behøver ikke være surjektiv.

<u>Definition</u> Et knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper over det topologiske rum $X$ siges at være <u>fissent</u> (flasque) hvis restriktionen

$$\rho^X_U : \mathcal{A}_X \to \mathcal{A}_U$$

er en surjektiv homomorfi for enhver åben mængde $U \subseteq X$.

Et knippe vil "normalt" ikke være fissent. Hvis f.eks. $G$ er en abelsk gruppe er knippet af lokalt konstante funktioner med værdier i $G$ (sml. side 208) ikke fissent, hvis der findes åbne delmængder i $X$, som ikke er sammenhængende og samtidig indeholdt i en større sammenhængende mængde. Hvis vi derimod sætter

$\mathcal{A}_U$ = mgd. af alle afbildninger $U \to G$
for vi åbenbart et vissent knippe.

**Sætning** Hvis $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ er en sekvens af knipper af abelske grupper over det topologiske rum $X$ og hvis knippet $\mathcal{A}'$ er vissent, da er

$$0 \to \mathcal{A}'_U \xrightarrow{i_U} \mathcal{A}_U \xrightarrow{j_U} \mathcal{A}''_U \to 0$$

en eksakt sekvens for hver åben delmængde $U \subseteq X$.

**Bevis** Vi skal vise, at $j_U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}''_U$ er surjektiv. Lad altså $\sigma'' \in \mathcal{A}''_U$. Vi betragter så mængden $\mathcal{M}$ af åbne delmængder $V \subseteq U$, hvor der findes

$$\sigma \in \mathcal{A}_V \text{ så } j_V(\sigma) = \rho^U_V(\sigma'')$$

Mængden $\mathcal{M}$ er øjensynlig delvist ordnet ved inklusion.
Endvidere er $\mathcal{M}$ ikke tom, idet hvert punkt $x \in U$ har en omegn $V \in \mathcal{M}$, idet $j_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}''_x$ er surjektiv.
Vi viser nu, at $V_1 \in \mathcal{M} \wedge V_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow V_1 \cup V_2 \in \mathcal{M}$:

Vi har $\sigma_1 \in \mathcal{A}_{V_1}$ og $\sigma_2 \in \mathcal{A}_{V_2}$ så

$$j_{V_1}(\sigma_1) = \rho^U_{V_1}(\sigma'') \text{ og } j_{V_2}(\sigma_2) = \rho^U_{V_2}(\sigma'')$$

Dette giver

$$j_{V_1 \cap V_2}\left(\rho^{V_1}_{V_1 \cap V_2}\sigma_1 - \rho^{V_2}_{V_1 \cap V_2}\sigma_2\right) = 0$$

altså

$$\rho^{V_1}_{V_1 \cap V_2}\sigma_1 - \rho^{V_2}_{V_1 \cap V_2}\sigma_2 \in \mathcal{A}'_{V_1 \cap V_2}$$

Idet $\mathcal{A}'$ er vissent findes derfor et element $s' \in \mathcal{A}'_X$, så

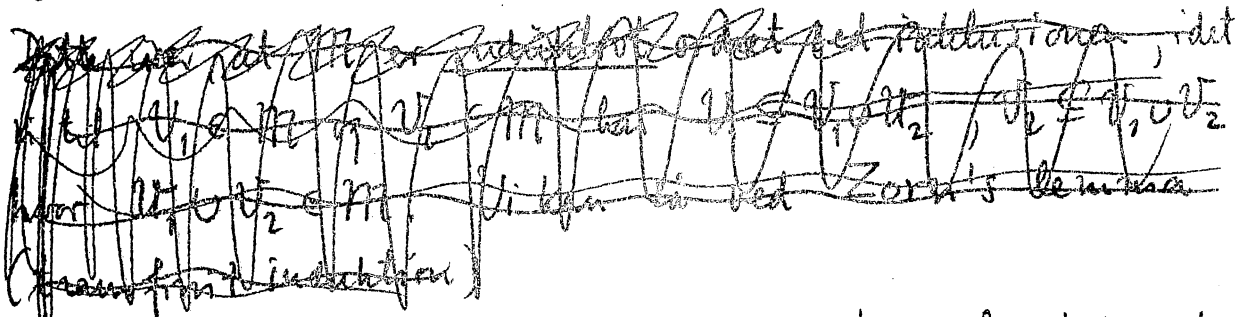
$$\rho^{V_1}_{V_1 \cap V_2} \sigma_1 - \rho^{V_2}_{V_1 \cap V_2} \sigma_2 = \rho^{X}_{V_1 \cap V_2} s'$$

Da $\mathcal{A}$ er et knippe kan vi nu definere et element $\sigma \in \mathcal{A}_{V_1 \cup U_2}$ ved

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{på } V_1 \\ \sigma_2 + s' & \text{på } V_2 \end{cases}$$

(idet vi ikke kan holde ud at skrive flere $\rho$-er og disse nu er underforstået). Idet $j$ afbilder $s'$ i $0$ (sekvensen er eksakt) har vi det ønskede.

~~Dette vi at $\mathcal{M}$ er induktiv-ordnet ved inklusionen, idet vi til $V_1 \in \mathcal{M}$ og $V_2 \in \mathcal{M}$ har $U_1 \subseteq V_1 \cup U_2$, $V_2 \subseteq V_1 \cup V_2$ hvor $U_1 \cup V_2 \in \mathcal{M}$. Vi kan så ved Zorn's lemma (transfinit induktion)~~



Beviset kan nu fuldføres ved hjælp af transfinit induktion i det almindelige tilfælde. Uden skade kan vi dog forudsætte, at $X$ har en numerabel basis, hvorefter sædvanlig induktion slår til:

Ifølge s. 221 kan vi finde en åben overdækning

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} V_i$$

af $\mathcal{U}$ med mængder $V_i \in \mathcal{M}$ (idet vi til hvert $x \in \mathcal{U}$ har omegn $\in \mathcal{M}$). Hvis $X$ har numerabel basis, vil allerede numerabelt mange blandt $V_i$-erne overdække $\mathcal{U}$ d.v.s.

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \cup \ldots$$

For hvert $n$ har vi $\sigma_n \in \mathcal{A}_{U_n}$, som ved $j$ afbildes på $\sigma''$'s restriktion til $U_n$.

Vi konstruerer nu induktivt

$$\tilde{\sigma}_n \in \mathcal{A}_{U_1 \cup \ldots U_n}$$

således at

(1) $\tilde{\sigma}_n$ afbildes ved $j$ på restriktionen af $\sigma''$

(2) $\tilde{\sigma}_n$ er identisk med restriktionen af $\tilde{\sigma}_{n+1}$ til $U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

Nemlig: $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1$.

Og det induktive skridt: Vi benytter proceduren side 221-222 på $\tilde{\sigma}_n \in \mathcal{A}_{U_1 \cup \ldots U_n}$ og $\sigma_{n+1} \in \mathcal{A}_{U_{n+1}}$ og får herved $\tilde{\sigma}_{n+1}$ (bemærk at på s. 222 er $\sigma = \sigma_1$ på $U_1$).

Ved

$$\sigma = \tilde{\sigma}_n \text{ på } U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

defineres så det ønskede element i $\mathcal{A}_U$.

Q.E.D.

<u>Corollar:</u> Hvis $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ er en eksakt følge af kvipper af abelske grupper over $X$ og hvis både $\mathcal{A}'$ og $\mathcal{A}$ er fine, da er også $\mathcal{A}''$ fin.

Bevis: Lad $\sigma'' \in \mathcal{A}''_U$. Ifølge sætn. findes da $\sigma \in \mathcal{A}_U$, så $j_U(\sigma) = \sigma''$. Idet $\mathcal{A}$ er fin, findes $s \in \mathcal{A}_X$, så $\rho^X_U(s) = \sigma$. Vi sætter $s'' = j_X(s) \in \mathcal{A}''_X$ og har da

$$\rho^X_U(s'') = \sigma''$$

hvilket viser, at restriktionen $\mathcal{A}''_X \to \mathcal{A}''_U$ er surjektiv, altså at $\mathcal{A}''$ er et visset knippe. Q.E.D.

Corollar II: Hvis $0 \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$ er en eksakt sekvens og hvis $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}^1, \dots$ er visne knipper, da er sekvensen

$$0 \to \mathcal{A}^0_U \to \mathcal{A}^1_U \to \dots$$

eksakt for enhver åben mængde $U \subseteq X$.

Bevis: For $k = 0, 1, 2$ sættes

$$Z^k = \operatorname{Ker} d^k,$$

hvor $Z^k$ altså er et delknippe af $\mathcal{A}^k$. På grund af eksaktheden har vi

$$Z^k = \operatorname{Im} d^{k-1}$$

(hvor $d^{-1} = 0$-afbildningen). Vi har derfor korte eksakte sekvenser

$$0 \to Z^k \hookrightarrow \mathcal{A}^k \to Z^{k+1} \to 0$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. Heraf sluttes induktivt ved korollaret, at knipperne $Z^0 = 0, Z^1, Z^2, \dots$ alle er visne (idet 0 åbenbart er visset). Af sætningen ovenfor sluttes så, at

$$d^k_U : \mathcal{A}^k_U \to Z^{k+1}_U \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

er surjektiv for hver åben mængde $U \subseteq K$. Idet $Z^{k+1}_U \subseteq \mathcal{A}^{k+1}_U$ præcis er kernen for $d^{k+1}_U$ har vi hermed eksaktheden (påmeer på pladsen $\mathcal{A}^0_U$ — men her ved vi, at $d^0_U$ er injektiv, da $d^0$ er injektiv). Q.E.D.

Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over det topologiske rum $X$. For hver åben mængde $U \subseteq X$ definerer da $C(\mathcal{A})_U$ som mængden af <u>alle</u> afbildninger

$$s : U \longrightarrow \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$$

således at $s(x) \in \mathcal{A}_x$ for hvert $x \in U$. Mængden $C(\mathcal{A}_U)$ danner åbenbart på en abelsk gruppe med punktvis addition som komposition og benytter restriktionen af afbildninge $s$ som restriktion

$$C(\mathcal{A})_U \longrightarrow C(\mathcal{A})_V \quad \text{for } V \subseteq U$$

har vi hermed ~~et pre-knippe~~ og endda, som man letter, et knippe. Knippet $C(\mathcal{A})$ er <u>kissent</u>, idet et element

$$s \in C(\mathcal{A})_U$$

er restriktionen til $U$ af det ved

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x) & \text{for } x \in U \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus U \end{cases}$$

bestemte element i $C(\mathcal{A})_X$.

Vi har <u>en homomorfi</u> $\mathcal{A} \xrightarrow{i} C(\mathcal{A})$ bestemt ved, at

$$\mathcal{A}_U \ni \sigma \longrightarrow s, \text{ hvor } s(x) = \sigma_x \text{ for } x \in U$$

altså $\sigma$ afbildes på det ved $\sigma$ bestemte snit $i(\sigma)$. Homomorfien $i$ ses at være <u>injektiv</u>

<u>Eksempel</u>: Hvis $\mathcal{A}$ er knippet af lokalt konstante afbildninger ind i den abelske gruppe $G$ bliver $C(\mathcal{A})$ igen-

Synlig knippet af alle afbildninger ind i $G$. Selv i dette simple tilfælde er $C(\mathcal{A})$ altså et meget kompliceret knippe, og stængene i $C(\mathcal{A})$ bliver kolossalt komplicerede (undtagen hvis $X$ ligefrem har diskret topologi).

Hvis vi har en homomorfi $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ kan vi hertil knytte en homomorfi $C(f): C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A}')$ der ved, at $C(f)(s)(x) = f_x(s(x))$ for $s \in C(\mathcal{A})_U$, $x \in U$, altså ved

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{s} & \bigcup_{x\in X} \mathcal{A}_x \\ & \searrow^{C(f)(s)} & \downarrow \bigcup_{x\in X} f_x \\ & & \bigcup_{x\in X} \mathcal{A}'_x \end{array}$$

Det er let at se, at $C(f)$ afhænger funktorielt af $f$, altså
Hvis $Id: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ er en identitet, da er
$C(Id): C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A})$ identiteten, og
Hvis $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ og $g: \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ er homomorfier, har vi $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f): C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A}'')$.

For et vilkårligt knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper over $X$ har vi injektionen $i: \mathcal{A} \hookrightarrow C(\mathcal{A})$. Vi kan her se på faktorknippet $\mathcal{Z}^1 = C(\mathcal{A})/i(\mathcal{A})$. Her kan operationen $C$ igen anvendes, og vi definerer

$$C^1(\mathcal{A}) = C(\mathcal{Z}^1)$$

Igen har vi en inklusion $i_1: \mathcal{Z}^1 \hookrightarrow C^1(\mathcal{A})$, kan dannе

kvotienten $C^1(\mathcal{A})/i_1(Z^1) = Z^2$ etc. Hermed har vi en følge af visne knipper

$$C(\mathcal{A}) = C^0(\mathcal{A}),\ C^1(\mathcal{A}), \ldots \qquad C^k(\mathcal{A}) = C(Z^k)$$

hvor vi har eksakte sekvenser

$$(*) \qquad 0 \to Z^k \xhookrightarrow{i_k} C^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{j_k} Z^{k+1} \to 0$$

og specielt

$$(**) \qquad 0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{j_0} Z^1 \to 0 .$$

Vi kan sammesætte

surjektionen $C^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{j_k} Z^{k+1}$

med injektionen $Z^{k+1} \xrightarrow{i_{k+1}} C^{k+1}(\mathcal{A})$

hvormed vi får en sekvens

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{A}) \to \cdots$$

<u>Denne sekvens af knipper er eksakt</u>: Vi ved, at $i$ er injektiv, så der er eksakthed på $\mathcal{A}$'s plads.

Idet $d^k = i_{k+1} \circ j_k$, hvor $i_{k+1}$ er injektiv, har vi

$$\operatorname{Ker} d^k = \operatorname{Ker} j_k$$

hvorefter sekvensen $(**)$ viser eksakthed på $C^0(\mathcal{A})$'s plads.

I det almindelige tilfælde får vi, at

$$\operatorname{Im} d^{k-1} = \operatorname{Im} i_k ,$$

da $j_{k-1}$ er surjektiv, altså

$$\operatorname{Im} d^{k-1} = \operatorname{Im} i_k = \operatorname{Ker} j_k = \operatorname{Ker} d^k ,$$

hvor det midsterste lighedstegn følger af, at $(*)$ er eksakt.

<u>Definition</u>: Sekvensen $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{A}) \to \cdots$ kaldes den <u>kanoniske visne resolution af $\mathcal{A}$.</u>

Vi betragter nu en homomorfi $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. Ifølge s. 226 inducerer den en homomorfi $C(f): C(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A}')$. Vi sætter $f_0 = C(f)$ og har da et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathcal{A} & \hookrightarrow & C^0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\partial_0} & Z^1 \to 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \vdots \tilde{f}_1 \\ 0 & \to & \mathcal{A}' & \hookrightarrow & C^0(\mathcal{A}') & \xrightarrow{\partial'_0} & Z'^1 \to 0 \end{array}$$

Da findes præcis én homomorfi $\tilde{f}_1: Z^1 \to Z'^1$, som kompletterer diagrammet til et kommutativt diagram (sml. situationen på s. 216). Vi sætter $f_1 = C(\tilde{f}_1)$ og har

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & Z^1 & \hookrightarrow & C^1(\mathcal{A}) & \to & Z^2 \to 0 \\ & & \tilde{f}_1 \downarrow & & \downarrow f_1 & & \vdots \tilde{f}_2 \\ 0 & \to & Z'^1 & \hookrightarrow & C'^1(\mathcal{A}') & \to & Z'^2 \to 0 \end{array}$$

hvoraf vi får $\tilde{f}_2: Z^2 \to Z'^2$ og $f_2 = C(\tilde{f}_2)$ etc.
Der findes altså <u>præcis ét sæt af homomorfier</u>

$$f_k: C^k(\mathcal{A}) \to C^k(\mathcal{A}')$$

så de anførte diagrammer er kommutative. Systemet af homomorfier $(f_0, f_1, \dots)$ kaldes <u>den af $f$ inducerede homomorfi af de kanoniske visne resolutioner</u>. Ved at "sammenbygge" diagrammerne ovenfor ser man, at <u>diagrammet</u>

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & C^0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{d^0} & C^1(\mathcal{A}) \to \cdots \\ & & f \downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 \\ 0 & \to & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i'} & C^0(\mathcal{A}') & \xrightarrow{d'^0} & C'^1(\mathcal{A}') \to \cdots \end{array}$$

<u>er kommutativt</u>.

Videre ser man af funktorialiteten af $C(f)$, at <u>den inducerede homomorfi af de kanoniske visne resolutioner</u> $(f_0, f_1, \dots)$

afhænger funktorielt af $\mathcal{A}$.

Det er klart, at den kanoniske resolution af $\mathcal{O}$-knippet består af lutter $\mathcal{O}$-knipper. Der gælder nu, at den kanoniske resolution er funktorielt eksakt, i den forstand, at hvis

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{A}'' \to 0$$

er en eksakt sekvens, da er hver af sekvenserne

$$0 \to C^k(\mathcal{A}') \xrightarrow{f_k} C^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{g_k} C^k(\mathcal{A}'') \to 0$$

eksakte.

Bevis: Vi viser først, at $C$ er funktorielt eksakt, altså

$$(*) \quad 0 \to C(\mathcal{A}') \xrightarrow{C(f)} C(\mathcal{A}) \xrightarrow{C(g)} C(\mathcal{A}'') \to 0$$

er eksakt, hvis

$$(**) \quad 0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{f} \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{A}'' \to 0$$

er eksakt:

1° $C(f)$ er injektiv: Lad $s \in C(\mathcal{A}')_U$ med $C(f)_U(s) = 0$. Så er $f_x(s(x)) = 0$ for hvert $x \in U$, altså $s(x) = 0$ for hvert $x \in U$, da hver $f_x$ er injektiv.

2° $\operatorname{Im} C(f) \subseteq \operatorname{Ker} C(g)$: Vi har $g \circ f = 0$ ($0$-afb.) og dermed $C(g) \circ C(f) = C(g \circ f) = C(0)$. Men ifølge definitionen på $C$ er det klart, at $C(0) = 0$.

3° $\operatorname{Ker} C(g) \subseteq \operatorname{Im} C(f)$: Lad $s \in \operatorname{Ker} C(g)_U$, altså $g_x(s(x)) = 0$ for hvert $x \in U$. Da hver sekvens

$$\mathcal{A}'_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{A}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{A}''_x$$

er eksakt, findes så element $t(x) \in \mathcal{A}'_x$ med

$f_x(t(x)) = s(x)$. Ved $U \ni x \to t(x) \in \mathcal{A}'_x$ defineres et element $t \in C(\mathcal{A}')_U$, hvor der åbenbart gælder $C(f)_U(t) = s$; altså er $s \in \operatorname{Im} C(f)_U$.

4°: $C(g)$ er surjektiv: Den er endda stærkt surjektiv. Hvis nemlig $s \in C(\mathcal{A}'')_U$ findes til hvert $x \in U$ et element $t(x) \in \mathcal{A}_x$, så $g_x(t(x)) = s(x)$ (idet $g_x$ er surjektiv) og vi har åbenbart $t \to s$ ved $C(g)_U$.

Selve sætningen kan nu bevises induktivt. Det lige bevistе giver, at hvis sekvensen

$$(+) \quad 0 \to Z'^k \xrightarrow{f_k} Z^k \xrightarrow{\tilde{g}_k} Z''^k \to 0$$

er eksakt, da er også

$$(++) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \to & C^k(\mathcal{A}') & \xrightarrow{f_k} & C^k(\mathcal{A}) & \xrightarrow{g_k} & C^k(\mathcal{A}'') \to 0 \\ & & \| & & \| & & \| \\ 0 & \to & C(Z'^k) & \xrightarrow{C(\tilde{f}_k)} & C(Z^k) & \xrightarrow{C(\tilde{g}_k)} & C(Z''^k) \to 0 \end{array}$$

en eksakt sekvens.

Vi bemærker, at for $k=0$ er $(+)$ den givne eksakte sekvens

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0,$$

så vi skal altså blot vise, at hvis $(+)$ og $(++)$ er eksakte for en given værdi $k$, da er $(++)$ eksakt for $k+1$. Hertil betragtes diagrammet på næste side. Her er alle 3 rækker og de to første søjler eksakte. Beviset fås ved "diagram chase" (vi kan betragte skår i et punkt $x \in X$ og har så blot sædvanlige abelske grupper og homomorfier) — udførelsen er en øvelse til læseren

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z'^k & \to & C^k(\mathcal{A}') & \to & Z'^{k+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z^k & \to & C^k(\mathcal{A}) & \to & Z^{k+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z''^k & \to & C^k(\mathcal{A}'') & \to & Z''^{k+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

---

**Bem:** Man ser hyppigt knippe defineret på anden vis. Situationen er den, at vi kan forsyne mængden $\bigcup_{x\in X} \mathcal{A}_x$ med en (i alm. ikke-Hausdorff'sk) topologi, således at en afbildning $s: U \to \bigcup_{x\in X} \mathcal{A}_x$ med $s(x) \in \mathcal{A}_x$ for hvert $x \in U$ er et snit (se side 207) præcis når $s$ er kontinuert. Et knippe defineres da istedet som et top. rum $T$ med en afbildning $p: T \to X$ således at hvert $T_x = p^{-1}(x)$ er en abelsk gruppe og så forenede betingelser er opfyldt (se f. eks. Hirzebruch: Neue Top. meth. ... §2).

---

I det følgende vil vi definere cohomologi i knipper. Det er hertil hensigtsmæssigt først at omtale et par småting fra homologisk algebra.

Ved et (co-) kædekompleks forstås en sekvens

$$C = C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} \cdots$$

af abelske grupper og homomorfier, således at $d \circ d = 0$, altså den sammensatte homomorfi

$$C^n \xrightarrow{d} C^{n+1} \xrightarrow{d} C^{n+2}$$

er 0-homomorfien. Undergruppen $Z^n \subseteq C^n$ af elementer $x \in C^n$ med $d(x) = 0$, altså kernen af $d: C^n \to C^{n+1}$ kaldes gruppen af n-cocykler, og et element $\in Z^n$ kaldes en n-cocykel, mens $\operatorname{Im} d = B^n \subseteq C^n$ for $n \geq 1$ kaldes gruppen af n-corande, og et element $x \in B^n$, altså et element af formen $x = d(y)$, $y \in C^{n-1}$ kaldes en n-corand. Vi sætter $B^0 = \{0\}$ og har dermed $B^n \subseteq Z^n$ for hvert $n$, fordi der gælder $d \circ d = 0$. Faktorgrupperne $H^n(C) = Z^n/B^n$ kaldes cohomologigrupperne af $C$.

Lad $C$ og $C'$ være kædekomplekser. Ved en kædeafbildning $F: C \to C'$ forstås et system af homomorfier, $F^n: C^n \to C'^n$, så diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
 & \uparrow d & \uparrow d' \\
C^n & \xrightarrow{F^n} & C'^n \\
 & \uparrow d & \uparrow \\
 & \vdots & \vdots \\
 & \uparrow d & \uparrow \\
C^1 & \xrightarrow{F^1} & C'^1 \\
 & \uparrow d & \uparrow d' \\
C^0 & \xrightarrow{F^0} & C'^0
\end{array}$$

er kommutativt. En kædeafbildning $F$ inducerer homomorfier $F_*: H^n(C) \to H^n(C')$ af cohomologigrupperne. Af det kommutative diagram

$$\begin{array}{ccc} C^{n+1} & \xrightarrow{F^{n+1}} & C'^{n+1} \\ \uparrow d & & \uparrow d' \\ C^n & \xrightarrow{F^n} & C'^n \\ \uparrow d & & \uparrow d' \\ C^{n-1} & \xrightarrow{F^{n-1}} & C'^{n-1} \end{array}$$

ser vi nemlig, at $F^n$ afbilder $Z^n$ i $Z'^n$ og $B^n$ i $B'^n$, hvorfor hver sideklasse til $B^n$ i $Z^n$ (hvilket er et element i $H^n(C)$) afbilder i en sideklasse til $B'^n$ i $Z'^n$ (element i $H^n(C')$), hvorved $F^*$ fås.

Man ser let, at <u>den inducerede homomorfi afhænger funktorielt af $F$</u>, d.v.s.

For $Id: C \to C$ er $Id_*: H^n(C) \to H^n(C)$ identiteten for hvert $n$

For $F: C \to C'$, $G: C' \to C''$ har vi $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ for hvert $n$.

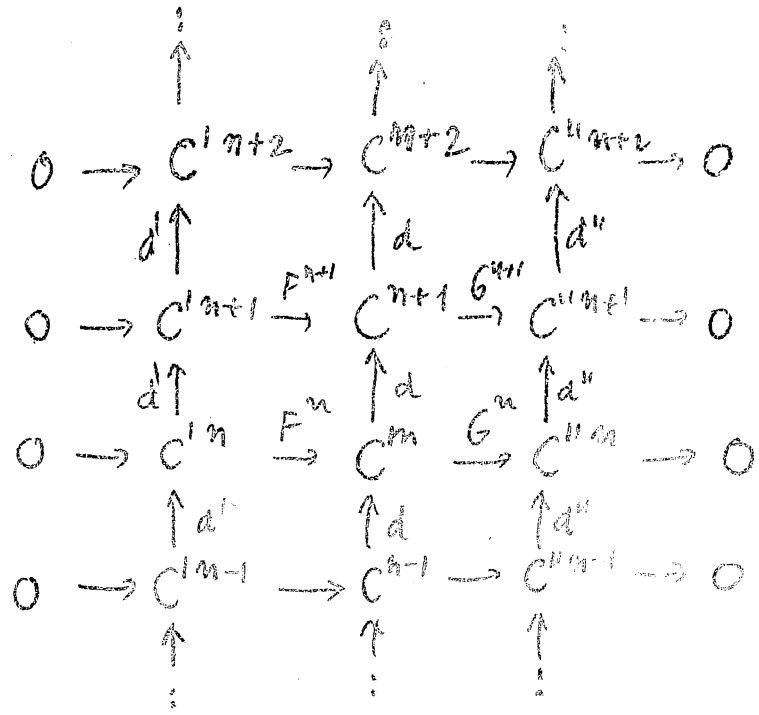
Idet vi med $0$ betegner kædekomplekset med kun nulgrupper siges en sekvens

$$0 \to C' \xrightarrow{F} C \xrightarrow{G} C'' \to 0$$

af kædekomplekser, at være en <u>kort eksakt sekvens af kædekomplekser</u>, hvis hver sekvens

$$0 \to C'^n \xrightarrow{F^n} C^n \xrightarrow{G} C''^n \to 0$$

er eksakt. Vi har så et kommutativt diagram:



Spørgen er så, at dette diagram giver homomorfier

$$\delta : H^n(C'') \to H^{n+1}(C')$$

på følgende "naturlige" måde: Lad $x \in Z''^n$. Da $G^n$ er surjektiv findes så $y \in C^n$ med $G^n(y) = x$. Af kommutativiteten får $G^{n+1}(d(y)) = d''(G^n(y)) = d''(x) = 0$, da $x \in Z''^n$. Altså findes præcis ét element $z \in C'^{n+1}$, så

$$F^{n+1}(z) = d(y)$$

Idet $F^{n+2}(d'(z)) = d(F^{n+1}(z)) = d \circ d(y) = 0$ er $d'(z) = 0$, da $F^{n+2}$ er injektiv, altså $z \in Z'^{n+1}$.

Processen er beskrevet ved

$$G^n(y) = x \quad , \quad F^{n+1}(z) = d(y)$$

Der skal nu vises:

(1) Et andet valg af $y$ giver et nyt $z$, som ligger i samme sideklasse til $B'^{n+1}$ i $Z'^{n+1}$

Når det er vist har vi så en afbildning $Z''^n \to H^{n+1}(C')$

og den er homomorf, idet vi kan vælge $\gamma_1+\gamma_2$ til $x_1+x_2$, hvis vi har valgt $\gamma_1$ til $x_1$ og $\gamma_2$ til $x_2$. Videre skal bevises

(2) Hvis $x \in B''^{n}$ så gælder $z \in B'^{n+1}$ for hvert valg af $\gamma$ til $x$.

Dette giver nemlig, at vor homomorfi afbilder $B''^{n}$ på 0 i $H^{n+1}(C')$ og derfor reducerer en homomorfi $\delta$ af den ønskede art.

Beviserne for (1) og (2) overlades til læseren.

Der gælder nu, at <u>sekvensen</u>

$$H^0(C') \xrightarrow{F_*} H^0(C) \xrightarrow{G_*} H^0(C'') \xrightarrow{\delta} H^1(C') \to \dots$$
$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(C') \xrightarrow{F_*} H^n(C) \xrightarrow{G_*} H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C') \to \dots$$

<u>er en eksakt sekvens</u>. Den kaldes cohomologisekvensen for den korte eksakte sekvens af kædekomplekser.

<u>Beviset</u> foregår ved at "chase" rundt i diagrammet på side 223. Der er 6 ting at bevise, idet man i hvert af tilfældene

$H^n(C') \xrightarrow{F_*} H^n(C) \xrightarrow{G_*} H^n(C'')$, $H^n(C) \xrightarrow{G_*} H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C')$ og

$H^n(C'') \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C') \xrightarrow{F_*} H^{n+1}(C)$ skal vises, at $\mathrm{Ker} \subseteq \mathrm{Im}$ og $\mathrm{Ker} \supseteq \mathrm{Im}$.

Vi ser på det sidste tilfælde – de to andre overlades til læseren.

(a): $\mathrm{Im}\,\delta \subseteq \mathrm{Ker}\,F_*$ : Lad $\xi \in H^n(C'')$ være repræsenteret ved $X \in Z''^{n}$. Så er $\delta\xi$ repræsenteret ved $z \in Z'^{n+1}$, hvor $F^{n+1}(z) = d(y)$ for et $y \in C^n$, men $F_*(\delta(\xi))$ er så repræsenteret ved $F^{n+1}(z) = d(y) \in B^{n+1}$, altså $F_*(\delta(\xi)) = 0$.

(b): $\mathrm{Im}\,\delta \supseteq \mathrm{Ker}\,F_*$. Lad $\eta \in H^{n+1}(C')$ være repræsenteret ved $z \in Z'^{n+1}$. At $\eta \in \mathrm{Ker}\,F_*$ betyder præcis, at $F^{n+1}(z) \in B^{n+1}$, altså at der findes $y \in C^n$, så $F^{n+1}(z) = d(y)$. Lad $x = G^n(y)$. Så har vi $d(x) = d \circ G^n(y) = G^{n+1}(dy) = G^{n+1}(F^{n+1}(z)) = 0$, da $G^{n+1} \circ F^{n+1} = 0$. Elementet $x$ er altså en cocykel og repræsenterer dermed et element $\xi \in H^n(C'')$. Ifølge definitionen af $\delta$ har vi $\delta(\xi) = \eta$, altså $\eta \in \mathrm{Im}\,\delta$.

Homomorfien $\delta$ kommuterer med inducerede homomorfier, i den forstand, at hvis vi har to eksakte sekvenser af kædekomplekser $0 \to C' \xrightarrow{F} C \xrightarrow{G} C'' \to 0$, $0 \to D' \xrightarrow{L} D \xrightarrow{M} D'' \to 0$ og kædeafbildninger $\Phi' : C' \to D'$, $\Phi : C \to D$, $\Phi'' : C'' \to D''$, så hvert diagram

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} C'^n & \xrightarrow{F^n} & C^n & \xrightarrow{G^n} & C''^n \\ \downarrow \Phi'^n & & \downarrow \Phi^n & & \downarrow \Phi''^n \\ D'^n & \xrightarrow{L^n} & D^n & \xrightarrow{M^n} & D''^n \end{array}$$

er kommutativt, da er hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} H^n(C'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C') \\ \downarrow \Phi''^n_* & & \downarrow \Phi'^{n+1}_* \\ H^n(D'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(D') \end{array}$$

kommutativt. Dette følger af, at hvis vi til $x \in Z''^n$ har valgt $y \in C^n$, så $G^n(y) = x$, hvormed $z \in Z'^{n+1}$, hvor $F^{n+1}(z) = d(y)$, repræsenterer $\delta$ af klassen af $x$, kan vi til $\Phi''^n(x)$ vælge $\Phi^n(y)$ [da $(*)$ er kommutativt] og $\Phi'^{n+1}(z)$ vil så [ved kommutativitet] være det element, så $L^{n+1}(\Phi'^{n+1}(z)) = d(\Phi^n(y))$.

[Det er i visse tilfælde af interesse at kunne afgøre, hvorvidt to kædeafbildninger $F, G : C \to C'$ mellem kædekomplekser $C$ og $C'$ inducerer samme homomorfi af cohomologigrupperne, og vi vil derfor udlede et nyttigt kriterium.

<u>Definition</u>: Ved en <u>kædehomotopi</u> fra $F$ til $G$ forstår et system af homomorfier

$$\Delta^n : C^n \to C'^{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

således at

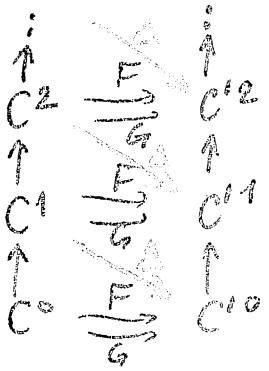
$$F^0 - G^0 = \Delta^1 \circ d$$

og

$$F^n - G^n = \Delta^{n+1} \circ d + d \circ \Delta^n \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots ,$$

Hvis der findes en kædehomotopi fra $F$ til $G$, kaldes $F$ og $G$ <u>kædehomotope</u>.

Diagram:




<u>Hvis $F$ og $G$ er kædehomotope, da gælder</u>

$$F_* = G_* : H^n(C) \to H^n(C')$$

<u>for hvert $n$</u>.

Hvis nemlig $x \in Z^0$, altså $dx = 0$, har vi

$$F^0(x) - G^0(x) = \Delta^1 \circ d(x) = 0$$

hvorved påstanden for $n = 0$. For $n > 0$ og $x \in Z^n$ har vi

$F^n(x) - G^n(x) = \Delta^{n+1} \circ d(x) + d \circ \Delta^n(x) = d(\Delta^n(x))$
idet $d(x) = 0$, da $x \in Z^n$. Altså ligger $F^n(x)$ og $G^n(x)$ i samme sideklasse til $B'^n$ i $Z'^n$, altså de repræsenterer samme element i $H^n(C')$, men det giver påstanden ∎.

---

Vi vender nu tilbage til knipperne. Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over det topologiske rum $X$. Vi har så den kanoniske visne resolution

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{A}) \to \cdots$$

Herudfra kan vi danne sekvensen

$$C(X;\mathcal{A}) = \quad C^0(\mathcal{A})_X \xrightarrow{d^0_X} C^1(\mathcal{A})_X \xrightarrow{d^1_X} C^2(\mathcal{A})_X \to \cdots$$

af abelske grupper og homomorfier. <u>Denne sekvens er et kædekompleks</u>, idet vi har $d^{n+1} \circ d^n = 0$ og dermed specielt $d^{n+1}_X \circ d^n_X = 0$. Vi kan derfor <u>definere den $k$'te cohomologigruppe af $X$ med koefficientknippe $\mathcal{A}$</u> ved

$$H^k(X;\mathcal{A}) = H^k(C(X;\mathcal{A})) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

hvormed vi til hvert knippe $\mathcal{A}$ over $X$ har knyttet en følge af abelske grupper.

I det sekvensen

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} Z^1 \to 0$$

er eksakt (se side 226-227) har vi, at

$$0 \to \mathcal{A}_X \xrightarrow{i_X} C^0(\mathcal{A})_X \xrightarrow{d^0_X} Z^1_X \quad (\subseteq C^1(\mathcal{A})_X)$$

er en eksakt sekvens (side 220), altså $i_X$ giver en isomorfi

$$\underline{\mathcal{A}_X \cong H^0(X;\mathcal{A})}$$

idet $H^0(X;\mathcal{A}) \cong \operatorname{Ker} d_X^0$.

Lad $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ være en homomorfi af knipper. Ifølge side 228 har vi så ét sæt af homomorfier $f_k: C^k(\mathcal{A}) \to C^k(\mathcal{A}')$. Hermed fås et kommutativt diagram

$$\begin{pmatrix} 0 \to \mathcal{A}_X \hookrightarrow \\ \downarrow f_X \\ 0 \to \mathcal{A}'_X \hookrightarrow \end{pmatrix} \begin{matrix} C^0(\mathcal{A})_X \xrightarrow{d_X^0} C^1(\mathcal{A})_X \to \cdots \\ \downarrow f_{0X} \quad \downarrow f_{1X} \\ C^0(\mathcal{A}')_X \xrightarrow{d_X'^0} C^1(\mathcal{A}')_X \to \cdots \end{matrix}$$

altså $(f_{0X}, f_{1X}, \ldots)$ er en kædeafbildning $C(X;\mathcal{A}) \to C(X;\mathcal{A}')$. Vi har derfor, at $f$ <u>inducerer homomorfier</u>

$$f_*: H^n(X;\mathcal{A}) \to H^n(X;\mathcal{A}')$$

<u>af cohomologigrupperne</u>. Diagrammet viser specielt, at $f_*: H^0(X,\mathcal{A}) \to H^0(X,\mathcal{A}')$ ved isomorfierne svarer til $f_X: \mathcal{A}_X \to \mathcal{A}'_X$. Vi vil derfor <u>identificere</u> $\mathcal{A}_X$ <u>med</u> $H^0(X;\mathcal{A})$.

Vi ved, at $(f_0, f_1, \ldots)$ afhænger funktorielt af $f$ og videre ved vi, at den inducerede homomorfi afhænger funktorielt af kædeafbildningen. Dette giver alt i alt, at $f_*$ <u>afhænger funktorielt af</u> $f$.

Lad $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}'' \to 0$

være en eksakt sekvens af knipper. Ifølge s. 229-230 har vi så et diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
0 & \to & C^q(\mathcal{A}') & \to & C^q(\mathcal{A}) & \to & C^q(\mathcal{A}'') \to 0 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{A}' & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}'' \to 0 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

af eksakte sekvenser af knipper. Idet hvert knippe $C^k(\mathcal{A}')$ er risset er sekvenserne

$$0 \to C^k(\mathcal{A}')_X \to C^k(\mathcal{A})_X \to C^k(\mathcal{A}'')_X \to 0$$

eksakte (se side 221). Vi har altså hermed en eksakt sekvens af kædekomplekser

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
0 & \to & C^1(\mathcal{A}')_X & \to & C^1(\mathcal{A})_X & \to & C^1(\mathcal{A}'')_X \to 0 \\
 & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
0 & \to & C^0(\mathcal{A}')_X & \to & C^0(\mathcal{A})_X & \to & C^0(\mathcal{A}'')_X \to 0
\end{array}$$

Dette giver ifølge s. 233-236 anledning til homomorfier

$$\delta : H^k(X; \mathcal{A}'') \to H^{k+1}(X; \mathcal{A}')$$

således at

$$H^0(X,\mathcal{A}') \xrightarrow{i_*} H^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{j_*} H^0(X,\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} \cdots$$

er en eksakt sekvens. Endvidere kommutener $\delta$ med inducerede homomorfier.

Lad $\mathcal{A}$ være et vissent knippe. Vi kan da bruge corollar II side 22Y på den kanoniske visne resolution af $\mathcal{A}$

$$0 \to \mathcal{A} \to C^0(\mathcal{A}) \to C^1(\mathcal{A}) \to C^2(\mathcal{A}) \to \cdots$$

og slutte, at sekvensen

$$C^0(\mathcal{A})_X \to C^1(\mathcal{A})_X \to C^2(\mathcal{A})_X \to \cdots$$

er eksakt. Heraf fås øjensynligt, at

$$H^k(X;\mathcal{A}) = 0 \quad \text{for } k \geq 1$$

når $\mathcal{A}$ er et vissent knippe.

Vi samler de opnåede resultater, så det hele bliver mere overskueligt:

Givet er et topologisk rum $X$. Vi kan da til hvert knippe $\mathcal{A}$ over $X$ knytte en følge $H^k(X;\mathcal{A})$ af abelske grupper, til hver homomorfi $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ en følge af homomorfier $f_*: H^k(X;\mathcal{A}) \to H^k(X;\mathcal{A}')$, $k=0,1,2,3$ og til hver kort eksakt sekvens $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ en følge af homomorfier $\delta: H^k(X;\mathcal{A}'') \to H^{k+1}(X;\mathcal{A})$, således at følgende gælder

(1) Funktorialitet:
Hvis $Id: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ er en identisk afbildning, da er hver $Id_*: H^k(X;\mathcal{A}) \to H^k(X;\mathcal{A})$ den identiske afbildning.
Hvis $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $g: \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ er homomorfier, gælder der $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : H^k(X;\mathcal{A}) \to H^k(X;\mathcal{A}'')$ for hvert $k$.

(2) Der findes et system af isomorfier $\mathcal{A}_x \cong H^0(X;\mathcal{A})$, som er naturlige i den forstand, at

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_x & \cong & H^0(X;\mathcal{A}) \\ \downarrow f_x & & \downarrow f_* \\ \mathcal{A}'_x & \cong & H^0(X;\mathcal{A}') \end{array}$$

er kommutativt for hver homomorfi $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$

(3) For hver kort eksakt sekvens

$$0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}'' \to 0$$

gælder at sekvensen

$$H^0(X;\mathcal{A}') \xrightarrow{\iota_*} H^0(X;\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_*} H^0(X;\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} H^1(X;\mathcal{A}') \to \cdots$$

er eksakt

(4) Hvis

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{A}' & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}'' & \to & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \to & \mathcal{B}' & \xrightarrow{\iota'} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\partial'} & \mathcal{B}'' & \to & 0 \end{array}$$

er et kommutativt diagram med abstrakte mængder, da er hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} H^k(X;\mathcal{A}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(X;\mathcal{A}') \\ \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* \\ H^k(X;\mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(X;\mathcal{B}') \end{array}$$

kommutativt $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

(5) Hvis knippet $\mathcal{A}$ er visseut, gælder

$$H^k(X;\mathcal{A}) = 0 \text{ for } k \geq 1.$$

[Det har en vis interesse, at egenskaberne (1) - (5) faktisk karakteriserer cohomologigrupperne — sagt mere præcist kan man bevise, at et system $(H^k, f^*, \delta)$ som opfylder (1)-(5) er isomorft (i en nærliggende forstand) med cohomologien, som defineret ovenfor].

## Opgaver til kapitel 7

1. Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over et topologisk rum $X$. Vi betragter mængden

$$A = \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x$$

For hver åben mængde $U \subseteq X$ og element $\sigma \in \mathcal{A}_U$ kan vi definere en delmængde $V(U,\sigma) \subseteq A$ ved

$$\mathcal{U}(U,\sigma) = \{ \sigma_x \mid x \in U \}.$$

Vis, at der defineres en topologi i $A$ ved, at $\forall \xi \in A$ kalder en omegn af $\xi \in A$ når og kun når der findes $U \subseteq X$ åben og $\sigma \in \mathcal{O}_U$, så $x \in \mathcal{U}(U,\sigma) \subseteq V$.
Ved $p(\mathcal{O}_x) = x$ defineres en afbildningen $p: A \to X$.
Vis, at $p$ er kontinuert og endda lokalt homeomorf d.v.s. hvert punkt $\xi \in A$ har en åben omegn $V \subseteq A$, så $p(V) = U \subseteq X$ er åben og så $p|V : V \to U$ er en homeomorfi.
Med $M \subset A \times A$ betegnes mængden

$$M = \{ (\xi, \eta) \mid p(\xi) = p(\eta) \}$$

og vi har så en afbildning

$$q : M \longrightarrow A$$

bestemt ved, at $(\xi, \eta) \to \xi - \eta$ (subtraktion i $\mathcal{O}_x$, $x = p(\xi) = p(\eta)$). Vis, at $q$ er kontinuert.
Vis, at en afbildning

$$f : U \to A$$

hvor $U \subseteq X$ er åben, som opfylder $p \circ f = Id.$ af $U$ er et snit, d.v.s. der findes $\sigma \in \mathcal{O}_U$ så $f(x) = \sigma_x$ for $x \in U$, præcis hvis $f$ er kontinuert.

Lad nu $A$ være et topologisk rum, $p: A \to X$ en kontinuert afbildning og lad hver $A_x = p^{-1}(x)$ være en abelsk gruppe, således at
$p$ er lokalt homeomorf
afbildningen $q: M \to A$ er kontinuert,

hvor $M = \{(\xi,\eta) \in A \times A \mid p(\xi) = p(\eta)\}$ og hvor
$q : (\xi,\eta) \to \xi - \eta$.

For hver åben mængde $U$ betegner vi med $\mathcal{A}_U$ mængden af kontinuerte afbildninger $f : U \to A$, så $p \circ f =$ Id. af $U$. Vis, at $\mathcal{A}_U$ er en abelsk gruppe og at vi herved får defineret et kompleks $\mathcal{A}$, idet restriktionen $\mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_V$ defineres som restriktion af funktion $f$. Vis at strængene $\mathcal{A}_x$ i dette kompleks kan identificeres med grupperne $A_x$. Vis endelig, at den topologi, som vi ovenfor definerede i

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{A}_x = A$$

er identisk med den givne topologi på $A$.

2. For et givet topologisk rum $X$ tænker vi os, at vi til hvert kompleks $\mathcal{A}$ over $X$ af abelske grupper har tilordnet en følge af abelske grupper

$$\check{H}^0(X;\mathcal{A}),\ \check{H}^1(X;\mathcal{A}),\ \ldots$$

til hver homomorfi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ et system af homomorfier

$$f_{\ast} : \check{H}^k(X;\mathcal{A}) \to \check{H}^k(X;\mathcal{A}')$$

og til hver kort eksakt sekvens $0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0$ et system af homomorfier

$$\delta : \check{H}^k(X;\mathcal{A}'') \to \check{H}^{k+1}(X;\mathcal{A}'),$$

således at systemet opfylder (1)-(5) side 242-243.

Vis, at der da findes et system af isomorfier

$$\mathcal{I}_{\mathcal{A}} : \check{H}^k(X;\mathcal{A}) \cong H^k(X;\mathcal{A})$$

således at hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^k(X;\mathcal{A}) & \cong & H^k(X;\mathcal{A}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \check{H}^k(X;\mathcal{A}') & \cong & H^k(X;\mathcal{A}') \end{array}$$

er kommutativt og hvert diagram

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^k(X;\mathcal{A}'') & \cong & H^k(X;\mathcal{A}'') \\ \downarrow \check{\delta} & & \downarrow \delta \\ \check{H}^{k+1}(X;\mathcal{A}') & \cong & H^{k+1}(X;\mathcal{A}') \end{array}$$

er kommutativt. (Benyt $\check{H}$ på hver af de korte eksakte sekvenser, som hører til den kanoniske risne resolution, side 227).

3. (I tilslutning til opg 1). Vi har to knipper $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ og de tilhørende topologiske rum $A$, $A'$ med afbildninger $p: A \to X$, $p': A' \to X$. Vis, at et system af homomorfier $f_x : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}'_x$ knytter sig sammen til en homomorfi af knipper $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, præcis når afbildningen

$$\bigcup_{x \in X} f_x : A \to A'$$

er kontinuert.

Kompleks analyse 1967-68

## Kapitel 8: Fine resolutioner, Leray's sætning, cohomologi på afsluttede underrum

Vi har i det foregående kapitel defineret cohomologien i knipper ved hjælp af den kanoniske visne resolution. I den komplekse analyse kommer visne knipper ikke naturligt ind i problemstillingen, men vi har en anden type af knipper, de såkaldte fine knipper, som spiller en anlog rolle. For at definere fine knipper må vi dog først indføre et par begreber:

Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ være knipper af abelske grupper over det topologiske rum $X$ og lad

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

være en homomorfi. Vi definerer da <u>støtten</u> $\operatorname{supp}\varphi$ for $\varphi$ ved

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in X \mid \varphi_x \neq 0\text{-homomorfien}\}}$$

Sagt på anden måde, er komplementet

$$\mathcal{U} = X \setminus \operatorname{supp}\varphi$$

den største åbne mængde $\mathcal{U} \subseteq X$, således at

$$\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{A}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{A}'_{\mathcal{U}}$$

er 0-homomorfien.

Vi vil sige, at et system af homomorfier

$$\varphi_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

er <u>lokalt endeligt</u>, hvis mængdesystemet $\operatorname{supp}\varphi_j$ er lokalt endeligt i $X$ d.v.s. hvis der til hvert punkt

Kompleks analyse

$x \in X$ findes en åben omegn $W_x$ så $W_x \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \emptyset$ pånær for endeligt mange $j$ (jvf. (2) side 39).
Det har god mening at tale om <u>summen</u> $\sum \varphi_j$ af et <u>lokalt endeligt system af homomorfier</u>:
Lad nemlig $U \subseteq X$ være åben og $\sigma \in \mathcal{O}_U$. Vi kan da opnå overdækkelse $U$,

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

med åbne mængder $U_i$, så hver $U_i$ kun skærer endeligt mange $\operatorname{supp} \varphi_j$. Dette indebærer, at kun endeligt mange $\varphi_j(\sigma)$ er forskellige fra 0 på $U_i$. Det er nu let at se, at vi præcis er i situationen som i 5) på side 209, idet vi på hvert $U_i$ har $\sum \varphi_j(\sigma)$ — og idet $\mathcal{A}'$ er et knipper får vi hermed billedelementet $\sum \varphi_j(\sigma)$ på $U$.

<u>Definition</u>: Et knipper af abelske grupper over et topologisk rum $X$ siges at være <u>fint</u>, hvis der til enhver åben overdækning

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

findes et lokalt endeligt system af homomorfier

$$\varphi_j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

således at

$$\sum \varphi_j = \text{identiteten af } \mathcal{A},$$

og således at der til hvert $j$ findes et $i$, så

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq U_i .$$

Eksempel: Hvis $X$ er en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ vil kvotienten $C^\infty$ af komplekse $C^\infty$-funktioner på åbne delmængder af $X$ være et fint kvotient. Ifølge sætn. på side 89 har vi nemlig til hver åben overdækning $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ en underordnet delning af enheden $\varphi_j$. Hver funktion $\varphi_j$ definerer en homomorfi

$$\varphi_j : C^\infty \to C^\infty$$

defineret ved

$$f \to \varphi_j \cdot f$$

og påstanden kan nu aflæses. Mere generelt kan vi se på kvotienten $\Omega^{pq}$ af $C^\infty$ diff. former med bigrad $(p,q)$ (se side 168-169) – dette ses ved samme argument at være fint.

Derimod er kvotienten $\mathcal{O}$ af holomorfe funktioner ikke et fint kvotient.

Lemma Hvis $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ er en kort eksakt sekvens af kvotienter af abelske grupper og hvis kvotienten $\mathcal{A}'$ er fint, da er homomorfien

$$j_U : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}''_U$$

surjektiv for enhver åben mængde $U \subseteq X$.

(Dette udsagn er analogt til sætn. for visne kvotienter på side 221).

For ikke at komplicere beviset mere end nødvendigt,

vil vi antage, at der til hver åben mængde $U_i \subseteq X$, $i \neq j_0$ findes en følge af åbne mængder

$$V_1, V_2, \dots$$

således at $V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq V_{n+1}$ $\quad U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$

Dette er tilfældet, hvis $X$ er normalt og har tællelig basis (hvilket f.eks. er tilfældet for åbne delmgd. af $\mathbb{C}^n$).

Vi har givet $\sigma'' \in \mathcal{A}''_U$ og skal finde $\sigma \in \mathcal{A}_U$, så $\sigma$ afbildes på $\sigma''$ ved $j_U$. Dette gøres i 2 skridt.

1. Vi kan finde $\tilde{\sigma}_n \in \mathcal{A}_{V_n}$, så $\tilde{\sigma}_n$ ved $j$ afbildes på restriktionen af $\sigma''$ til $V_n$:

Vi kan finde åbne mængder $U_i$, $i \in I$, så

$$\overline{V}_n \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq U$$

således at der findes $\tau_i \in \mathcal{A}_{U_i}$, som ved $j$ afbildes på restriktionen til $U_i$ af $\sigma''$.

Vi sætter $\quad U_0 = X \setminus \overline{V}_n$

og har hermed en åben overdækning af $X$

$$X = \bigcup_{i \in I \cup \{0\}} U_i$$

I det kompakte $A'$ er fint findes der så homomorfier

$$\varphi_j : A' \to A' \qquad j \in J$$

med en afbildning $\sigma : J \to I \cup \{0\}$, således at

$$\operatorname{Supp} \varphi_j \subset U_{\sigma(j)}$$

$\{\operatorname{Supp} \varphi_j\}$ er et lokalt end. mgd. sygt.

$\sum \varphi_j = \text{Id. af } \mathcal{A}'$

Sætte $J' = \{j \in J \mid \sigma(j) \neq 0\}$ her vi, at

$$j \in J \setminus J' \Rightarrow \operatorname{supp} \varphi_j \cap \bar{U}_n = \emptyset$$

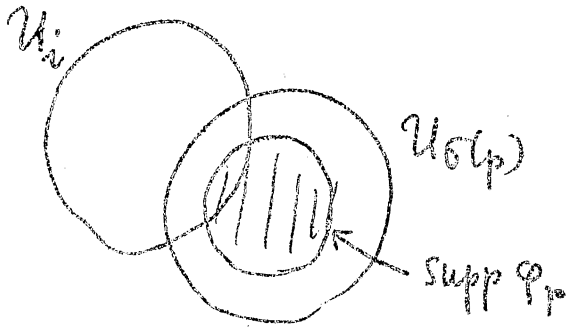
Heraf følger, at

$$\sum_{j \in J'} \varphi_j$$

er identiteten inden for $U_n$.

Idet sekvensen er eksakt, er $\tau_i - \tau_k$ et element i $\mathcal{A}'_{U_i \cap U_k}$. For $i \in I$, $p \in J'$ betragter vi

$$\varphi_p(\tau_i - \tau_{\sigma(p)}) \in \mathcal{A}'_{U_i \cap U_{\sigma(p)}}$$




Dette element kan fortsætte med 0 til et element i hele $U_i$. Vi har nemlig åbne mængder med tilhørende element

$$\begin{cases} 0 & \text{på } U_i \setminus \operatorname{supp} \varphi_p \\ \varphi_p(\tau_i - \tau_{\sigma(p)}) & \text{på } U_i \cap U_{\sigma(p)} \end{cases}$$

og kan anvende 5) side 209.

Vi bruger samme betegnelse for det således fortsatte element og definerer endvidere dette som 0, hvis $U_i \cap U_{\sigma(p)} = \emptyset$.

Hermed har vi elementet

$$\mu_i = \sum_{p \in \mathfrak{f}'} \varphi_p(\tau_i - \tau_{\sigma(p)})$$

i $\mathcal{O}'_{U_i}$. For vilkårlige $i, j \in I$ fås

$$\mu_i - \mu_j = \sum_{p \in \mathfrak{f}'} \varphi_p(\tau_i - \tau_{\sigma(p)}) - \sum_{p \in \mathfrak{f}'} \varphi_p(\tau_j - \tau_{\sigma(p)})$$

$$= \sum_{p \in \mathfrak{f}'} \varphi_p(\tau_i - \tau_j)$$

på $U_i \cap U_j$, og dermed

$$\mu_i - \mu_j = \tau_i - \tau_j \text{ på } U_i \cap U_j \cap V_n$$

Elementet $\tilde{\sigma}_n$ kan så defineres ved

$$\tilde{\sigma}_n = \tau_i - \mu_i \text{ på } U_i \cap V_n$$

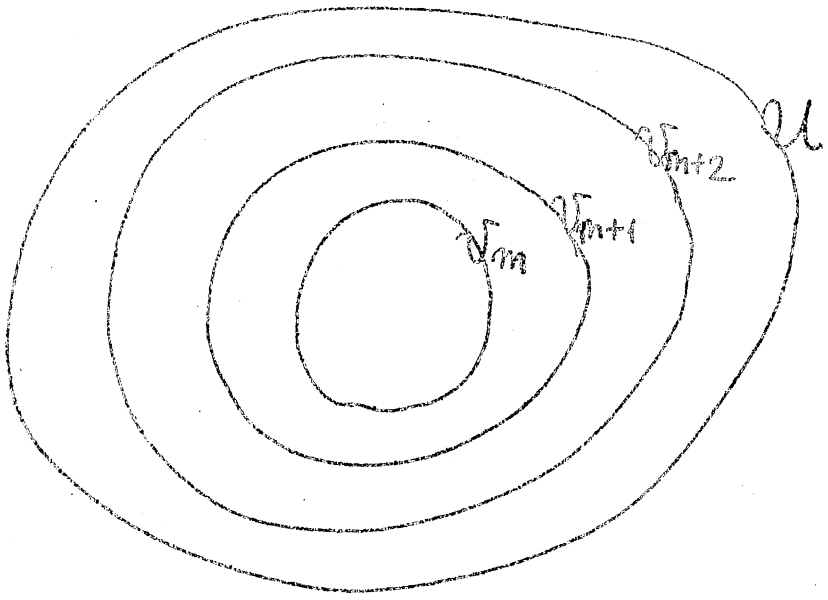
(idet 5 side 209 igen benyttes) og har den ønskede egenskab, idet hvert $\mu_i$ ligger i kernen af $j$.

§. Vi kan finde elementer $\sigma_n \in \mathcal{O}_{V_{n+2}}$, som ved $j$ afbildes på $\sigma''$'s restriktion til $V_{n+2}$, og således

at restriktionerne af $\sigma_{n+1}$ og $\sigma_n$ til $U_n$ stemmer overens for $n = 1, 2, \ldots$ .

Dette gøres induktivt.

Vi vælger $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_3$, og antager $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ valgt, så betingelserne er opfyldte.




Mængderne $U_{m+1}$ og $X \setminus \overline{V}_m$ danner en åben overdækning af $X$. Idet $\mathcal{A}'$ er et fint kompleks findes der så en underordnet spaltning $\sum \varphi_j$ af identiteten af $\mathcal{A}'$. Idet vi samler $\varphi_j$-erne i to klasser, svarende til de to mængder i overdækningen, har vi hermed

$$Id = \varphi + \psi$$

hvor $\varphi$ og $\psi$ er homomorfier af $\mathcal{A}'$, som i hvert fald er $0$ på det indre af komplementermængden af den respektive åbne mængde d.v.s.

$$\varphi = 0 \text{ på } X \setminus \overline{V}_{m+1} \qquad \psi = 0 \text{ på } V_m$$

Der gælder altså, at

$\varphi = Id.$ på $\overline{U}_m$

$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{U}_{m+1} \subseteq U_{m+2}$.

Vi har elementet $\tilde{\sigma}_{m+3}$ på $U_{m+3}$, som afbilder på $\sigma''$ ved $f$.

Elementet $\sigma_m - \tilde{\sigma}_{m+3} \in \mathcal{A}_{U_{m+2}}$

afbilder derfor i 0 og ligger altså i $\mathcal{A}'_{U_{m+2}}$. Elementet $\varphi(\sigma_m - \tilde{\sigma}_{m+3})$ kan ved fortsættelse med 0 opfattes som et element i $\mathcal{A}'_X$. Det stemmer overens med $\sigma_m - \tilde{\sigma}_{m+3}$ på $U_m$. Vi sætte

$$\sigma_{m+1} = \tilde{\sigma}_{m+3} + \varphi(\sigma_m - \tilde{\sigma}_{m+3})$$

Dette løser opgaven, idet dette element stemmer overens med $\sigma_m$ på $U_m$, og det afbilder i $\sigma''$ på $U_{m+3}$, idet korrektionen $\varphi(\sigma_m - \tilde{\sigma}_{m+3})$ ligger i kernen af $f$.

Beviset for lemmaet fuldføres nu ved, at vi definerer $\sigma$ ved

$$\sigma = \sigma_m \text{ på } U_m.$$

[Man bør sammenholde første halvdel med beviset på side 92-93 og sidste halvdel af beviset med side 175-176 og side 198-199].

Vi får nu let

<u>Corollar</u> Hvis $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ er eksakt, $\mathcal{A}'$ er fint, $\mathcal{A}$ er lissent, da er $\mathcal{A}''$ lissent.

Herfra skal vi blot udnytte at $j_*$ er surjektiv, hvorfor resonnementet på side 223-224 (Cornalba) kan overtages uændret.

Sætning Hvis $\mathcal{A}$ er et fint knippe over det topologiske rum $X$ gælder der

$$H^k(X; \mathcal{A}) = 0$$

for $k = 1, 2, \ldots$ .

Bevis: Vi betragter den kanoniske risme resolution af $\mathcal{A}$. (s. 226-227). Vi har her den eksakte sekvens

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow Z^1 \longrightarrow 0$$

hvor $C^0(\mathcal{A})$ er vissent. Ifg Cornalbas følger så, at $Z^1$ er et vissent knippe. Vi har diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & C^0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & Z^1 \longrightarrow 0 \\ & & & & & \searrow & \downarrow \\ & & & & & & C^1(\mathcal{A}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & C^2(\mathcal{A}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

og selve definitionen viser, at den forkortede sekvens er den kanoniske risme resolution af $Z^1$, d.vs. $C^1(\mathcal{A}) = C^0(Z^1)$ etc. Idet $Z^1$ er vissen, har vi

$$H^k(X; Z^1) = 0 \quad \text{for } k = 1, 2, \ldots .$$

Dette medfører, at

$$C^1(\mathcal{A})_X \to C^2(\mathcal{A})_X \to \cdots$$

er eksakt, altså $H^k(X;\mathcal{A}) = 0$ for $k \geq 2$.
Til undersøgelse af $H^1(X;\mathcal{A})$ betragtes

$$\begin{array}{ccc} C^0(\mathcal{A})_X & \xrightarrow{\partial_X} & Z^1_X \\ & \searrow^{d^0_X} & \downarrow p_X \\ & & C^1(\mathcal{A})_X \\ & & \downarrow d^1_X \\ & & C^2(\mathcal{A})_X \end{array}$$

Den lodrette sekvens vides at være eksakt ($H^1(X;Z^1)=0$). Endvidere følger af lemma'et, at $j_X$ er surjektiv. Men dette giver at hvert element i $\operatorname{Ker} d^1_X$ er billede ved $d^0_X$ (idet det er billede ved $p_X$), og heraf fås $H^1(X;\mathcal{A})=0$.

Q.E.D.

Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over det topologiske rum $X$. En eksakt sekvens

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{D^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{D^1} \mathcal{F}^2 \to \cdots$$

kaldes en <u>resolution</u> af $\mathcal{A}$. Sekvensen

$$\mathcal{F}^0_X \to \mathcal{F}^1_X \to \cdots$$

danner så et kædekompleks. Resolutionen kaldes en <u>fin resolution</u>, hvis knipperne $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1, \ldots$ er fine.

Sætning om fine resolutioner: Hvis

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{D^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{D^1} \mathcal{F}^2 \to \cdots$$

er en fin resolution af knippet $\mathcal{A}$, da er cohomologigruppen $H^k(X;\mathcal{A})$ isomorf med den $k$'te cohomologigruppe af kædekomplekset

$$(*) \qquad \mathcal{F}_X^0 \xrightarrow{D_X^0} \mathcal{F}_X^1 \xrightarrow{D_X^1} \mathcal{F}_X^2 \to \cdots$$

Bevis: Ifølge (2) side 212 kan kædekomplekset (*) identificeres med kædekomplekset

$$C \quad H^0(X;\mathcal{F}^0) \xrightarrow{D_*^0} H^0(X;\mathcal{F}^1) \xrightarrow{D_*^1} H^0(X;\mathcal{F}^2) \to \cdots$$

For hvert $k=0,1,2,\ldots$ betegner vi med $\mathcal{Z}^k \subseteq \mathcal{F}^k$ kernen af homomorfien $D^k: \mathcal{F}^k \to \mathcal{F}^{k+1}$, og har hermed eksakte sekvenser af knipper

$$(**) \qquad 0 \to \mathcal{Z}^k \xrightarrow{i} \mathcal{F}^k \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{k+1} \to 0$$

idet resolutionen var en eksakt sekvens af knipper. Vi ser også heraf, at $\mathcal{Z}^0$ er isomorft med $\mathcal{A}$.

Den korte eksakte sekvens (**) giver ifølge (3) s. 212 en lang eksakt cohomologisekvens, hvoraf vi betragter en del:

$$\cdots \to H^p(X;\mathcal{F}^k) \to H^p(X;\mathcal{Z}^{k+1}) \to H^{p+1}(X;\mathcal{Z}^k) \to H^{p+1}(X;\mathcal{F}^k) \to$$

I det knippet $\mathcal{F}^k$ er fint, er $H^p(X;\mathcal{F}^k) = 0$ for $p>0$, og sekvensen giver derfor isomorfier

$$H^p(X;\mathcal{Z}^{k+1}) \cong H^{p+1}(X;\mathcal{Z}^k), \quad p>0, \ k\geq 0$$

Idet $H^p(X;\mathcal{A}) \simeq H^p(X;\mathbb{Z}^0)$ for hvert $p$, får vi altså

$$H^0(X;\mathcal{A}) \simeq H^0(X;\mathbb{Z}^0)$$

$$H^p(X;\mathcal{A}) \simeq H^1(X;\mathbb{Z}^{p-1}) \quad \text{for } p \geq 1.$$

Vi mangler derfor at angive isomorfierne

$$H^0(C) \simeq H^0(X;\mathbb{Z}^0) \quad , \quad H^p(C) \simeq H^1(X;\mathbb{Z}^{p-1})$$

Hertil benyttes først, at ifølge definitionen af $i$ og $\partial$ er sammensætningen

$$\mathcal{F}^k \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^{k+1} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^{k+1}$$

præcis homomorfien $D^k$. Vi kan nu opbygge følgende kommutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(X;\mathcal{F}^{k-1}) & & \xrightarrow{D_*^{k-1}} & & 0 & & \\
\downarrow \partial_* & & & & \downarrow & & \\
0 \longrightarrow H^0(X;\mathbb{Z}^k) & \xrightarrow{i_*} & H^0(X;\mathcal{F}^k) & \xrightarrow{\partial_*} & H^0(X;\mathbb{Z}^{k+1}) & & \\
\downarrow \delta & & & \searrow^{D_*^k} & \downarrow i_* & & \\
H^1(X;\mathbb{Z}^{k-1}) & & & & H^0(X;\mathcal{F}^{k+1}) & & \\
\downarrow & & & & & & \\
H^1(X;\mathcal{F}^{k-1}) = 0 & & & & & &
\end{array}$$

At diagrammet er kommutativt følger af funktorialiteten (1) side 242). Den vanskelige del af de lodrette sekvenser er eksaktheden, idet de er støtter af den lange sekvens hørende til (**) for forskellige værdier af $k$. Det er nu en lille rask diagram chase at bevise, at $H^k(C) \simeq H^1(X;\mathbb{Z}^{k-1})$

Idet den lodrette $i_*$ er injektiv har $D_*^k$ af $j_*$ samme kerne. Gruppen af $k$-cocykler i komplekset $C$ er altså lig kernen af $j_*$ og dermed billedet af $H^0(X;Z^k)$ ved $i_*$. For $k=0$ er vi hermed færdige (grupperne med $k-1$ skal så ikke med i diagrammet), idet $i_*$ da giver en isomorfi mellem $H^0(X;Z^0)$ og gruppen af $k$-cocykler, som er lig cohomologigruppen $H^0(C)$.

For $k>0$ bemærker vi, at $i_*$ afbilder $H^0(X;Z^k)$ isomorft på gruppen af $k$-cocykler (det er lige vist) og billedet af $H^0(X;\mathcal{F}^{k-1})$ ved $j_*$ isomorft på billedet af $H^0(X;\mathcal{F}^{k-1})$ ved $D_*^{k-1}$. Ved $i_*$ etableres derfor en isomorfi mellem $H^k(C)$ og faktorgruppen $H^0(X;Z)/j_*(H^0(X;\mathcal{F}^{k-1}))$. Gruppen $j_*(H^0(X;\mathcal{F}^{k-1}))$ er præcis kernen af $\delta$, hvorfor $\delta$ induceres en injektiv homomorfi

$$H^0(X;Z^k)/j_*(H^0(X;\mathcal{F}^{k-1})) \to H^1(X;Z^{k-1})$$

Idet $\delta$ er surjektiv (da $H^1(X;\mathcal{F}^{k-1})=0$) bliver denne homomorfi også surjektiv, hvormed vi har den ønskede isomorfi

Q.E.D.

Lad $X \subseteq \mathbb{R}^n$ være en åben mængde. På $X$ har vi da knipperne $\Omega^0, \Omega^1, \ldots$ af komplekse $C^\infty$-differentialformer med grad $0,1,2,\ldots$ Disse er fine knipper. Videre definerer den ydre differentiation (side 158) homomorfier

$$d: \Omega^k \to \Omega^{k+1}$$

Det følger af definitionen, at kernen af $d: \Omega^1 \to \Omega^2$ præcis er kvotienten af lokalt konstante komplekse funktioner. Idet dette kvotientbegreb med $\mathbb{C}$ har vi altså en sekvens

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \dots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$$

Denne sekvens af kvotienter er eksakt og er derved en fin resolution af kvotienten $\mathbb{C}$. Hvis nemlig

$$\omega_x \in \Omega^k_x, \quad d_x \omega_x = 0$$

hvor $x \in X$, gælder der $d\omega = 0$ på en omegn af $x$, idet $\omega$ er en repræsentant for kimen $\omega_x$. Vi kan derfor vælge en kasse $U \ni x$, så $d\omega = 0$ på $U$. Ifølge Poincaré's lemma findes så $k-1$-formen $\varphi$ på $U$, med $d\varphi = \omega$, altså $d\varphi_x = \omega_x$.

Vel sætningen om finite resolutioner fås så, at for $k \geq 1$: $H^k(X; \mathbb{C}) \cong \operatorname{Ker}(d: \Omega^k_X \to \Omega^{k+1}_X) / \operatorname{Im}(d: \Omega^{k-1}_X \to \Omega^k_X)$

Denne isomorfi kaldes de Rham's sætning.

Hvis $X \subseteq \mathbb{C}^n$ har vi analogt en fin resolution

$$0 \to \Theta \to \Omega^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \to \Omega^{0,n} \to 0$$

af kvotienten $\Theta$ af holomorfe funktioner (hvis bruges Dolbeault's lemma s. 172). Dette giver

$$H^k(X; \Theta) \cong \operatorname{Ker}(\bar\partial: \Omega^{0,k}_X \to \Omega^{0,k+1}_X) / \operatorname{Im}(\bar\partial: \Omega^{0,k-1}_X \to \Omega^{0,k}_X)$$

for $k \geq 1$. Denne isomorfi kaldes Dolbeault's sætning. Af resultaterne på side 172 og 196 får vi så:

Hvis $X \subseteq \mathbb{C}^n$ er en åben mængde, som er en polycylinder eller som (mere generelt) er polynomkonveks, da gælder

$$H^k(X; \mathcal{O}) = 0$$

for $k \geq 1$.

Vi har tidligere (side 218) omtalt den eksakte sekvens

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{M} \xrightarrow{j} \mathcal{M}/\mathcal{O} \to 0$$

af knipper og set at Cousin's første problem i $X \subseteq \mathbb{C}^n$ præcis er spørgsmålet om, hvorvidt

$$j_*: H^0(X; \mathcal{M}) \to H^0(X; \mathcal{M}/\mathcal{O})$$

er surjektiv. Vi har den eksakte sekvens

$$H^0(X; \mathcal{M}) \xrightarrow{j_*} H^0(X; \mathcal{M}/\mathcal{O}) \xrightarrow{\delta} H^1(X; \mathcal{O})$$

hvoraf vi ser, at Cousins første problem er løsbart i $X$, hvis $H^1(X; \mathcal{O}) = 0$.

---

Det har betydelig interesse, at cohomologigrupperne kan sættes i forbindelse med åbne overdækninger af $X$. ~~Vi vil her ikke bevise alt dermed~~ Lad $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ være en åben overdækning af det

topologiske rum $X$. For hvert indeksset $(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}$ sættes
$$U_{i_0\dots i_p} = U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}.$$

Lad nu $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over $X$. For hvert $p\geq 0$ definere da $\mathcal{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{A})$, som mængden af elementsæt
$$a = \{ a_{i_0\dots i_p}\in \mathcal{A}_{U_{i_0\dots i_p}} \mid (i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}\}$$

der er <u>alternerende</u> d.v.s.
$$a_{i_{\sigma(0)}\dots i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{i_0\dots i_p}$$
for hver permutation $\sigma$ af $\{0,1,\dots,p\}$. Mængden $\mathcal{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{A})$ danner en abelsk gruppe med kompositionen
$$(a+b)_{i_0\dots i_p} = a_{i_0\dots i_p} + b_{i_0\dots i_p}.$$

Vi kan definere en homomorfi $\delta: \mathcal{C}^p\to\mathcal{C}^{p+1}$ ved
$$(\delta a)_{i_0\dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k a_{i_0\dots\hat{i_k}\dots i_{p+1}}$$
hvor $\wedge$ betyder, at det pågældende indeks skal udelades, og hvor hvert element i summen skal fortolkes som dets restriktion til $U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}$.

<u>Der gælder $\delta\circ\delta=0$ hvorfor $(\mathcal{C}^p(\mathcal{U};\mathcal{A}),\delta)$ danner et kædekompleks:</u>

Bevis: Ifg. selve definitionen på $\delta$ for $a \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{R})$, så

$$(\delta\delta a)_{i_0 \dots i_{p+2}} = \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k (\delta a)_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k \Big( \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^\ell a_{i_0 \dots \hat{i}_\ell \dots \hat{i}_k \dots i_{p+2}} + \sum_{\ell=k+1}^{p+2} (-1)^{\ell-1} a_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_\ell \dots i_{p+2}} \Big)$$

$$= \sum_{\ell<k} (-1)^{k+\ell} a_{i_0 \dots \hat{i}_\ell \dots \hat{i}_k \dots i_{p+2}} - \sum_{k<\ell} (-1)^{k+\ell} a_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_\ell \dots i_{p+2}}$$

$$= 0.$$

Vi kan definere en afbildning

$$H^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{A})$$

ved $(i(a))_{i_0} = \rho^X_{U_{i_0}}(a)$

Det følger straks af 4 og 5 side 209, at $i$ afbilder $H^0(X; \mathcal{A})$ isomorft på kernen af $\delta: \mathcal{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{A}) \to \mathcal{C}^1(\dots)$.

Vi betegner cohomologigrupperne af kædekomplekset $\mathcal{C}$ med $H^k(\mathcal{U}; \mathcal{A})$ og har altså

$$H^0(\mathcal{U}; \mathcal{A}) = H^0(X; \mathcal{A}).$$

Bem: Vi betragter Cousin's første problem (generelt) på side 85-86. Vi har her en åben overdækning $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ og betingelserne (3) siger præcis, at $f|_{U_i} \in \mathcal{O}(U_i)$. Problemet er præcis, hvorvidt der findes en $\delta^0(\mathcal{U}; \mathcal{O})$ så $\delta(h) = f$. Problemet kan altså formuleres således, at der spørges om $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}) = 0$.

Vi ønsker nu at skabe en forbindelse mellem cohomologigrupperne $H^k(X; \mathcal{A})$ og de lige definerede $H^k(\mathcal{U}; \mathcal{A})$ svarende til en åben overdækning $\mathcal{U}$ af $X$. Hertil bemærkes først:

For et kompleks af typen $C(\mathcal{A})$ (side 225) er

$$H^k(\mathcal{U}; C(\mathcal{A})) = 0 \quad \text{for } k \geq 1.$$

Bevis: Idet $\mathcal{U} = (U_i, i \in I)$ er en overdækning af $X$ kan vi finde mængder $M_i \subseteq U_i$, $i \in I$ således at $X = \bigcup M_i$ og så de forskellige $M_i$ er indbyrdes disjunkte — vi skal nemlig blot for hvert $x$ vælge et $i = \tau(x)$, så $x \in U_i$, hvorefter

$$M_i = \{x \mid \tau(x) = i\}$$

Lad nu $a \in \mathcal{E}^p(\mathcal{U}; C(\mathcal{A}))$, $p \geq 1$ opfylde $\delta a = 0$, altså

$$\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k a_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_{p+1}} = 0$$

Vi definerer da $b \in \mathcal{E}^{p-1}(\mathcal{U}; C(\mathcal{A}))$ ved

$$b_{i_0 \cdots i_{p-1}}(x) = a_{i i_0 \cdots i_{p-1}}(x)$$

for $x \in M_i$. Dette har god mening, da koeffisientene $a$ har verdier i $C(\mathcal{A})$ og da

$$x \in U_{i_0 \cdots i_{p-1}} \wedge x \in M_i \Rightarrow x \in U_{i i_0 \cdots i_{p-1}}.$$

I et punkt $x \in M_i$ har vi så

$$(\delta b)_{i_0 \cdots i_p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k b_{i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_p}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_{i i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_p}$$

$$= a_{i_0 \cdots i_p} - \left( a_{i_0 \cdots i_p} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_{i i_0 \cdots \hat{i}_k \cdots i_p} \right)$$

$$= a_{i_0 \cdots i_p} - (\delta a)_{i i_0 \cdots i_p} = a_{i_0 \cdots i_p},$$

hvormed $\delta b = a$, hvilket gir påstanden.

<u>En homomorfi</u> $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ <u>av kompleks lokalt konvekse homomorfier</u>

$$f: \mathcal{E}^p(\mathcal{U}; \mathcal{A}) \to \mathcal{E}^p(\mathcal{U}; \mathcal{A}')$$

Sinquisitten ved

$$(f(a))_{i_0 \cdots i_p} = f_{U_{i_0 \cdots i_p}}(a_{i_0 \cdots i_p})$$

og ideet i disse oppbygningene er å "kunstig" innføre kommutativitet med $\delta$.

Man ser umiddelbart at hvis

$$0 \to \mathcal{C}' \to \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$$

er en eksakt sekvens av kompleks, så er hver av sekvensene

$$0 \to \mathcal{C}^p(X;\mathcal{C}') \to \mathcal{C}^p(X;\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^p(X;\mathcal{C}'')$$

eksakte.

For et gitt kompleks $\mathcal{C}$ og gitt overdekning $\mathcal{U}$ kan vi nå oppskrive følgende diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^0(X;\mathcal{C}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U};\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U};\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} \cdots \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
0 & \to & H^0(X;C^1(\mathcal{C})) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U};C^1(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U};C^1(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U};C^1(\mathcal{C})) \xrightarrow{\delta} \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
0 & \to & H^0(X;C^2(\mathcal{C})) & \to & \mathcal{C}^0(\mathcal{U};C^2(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^1(\mathcal{U};C^2(\mathcal{C})) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}^2(\mathcal{U};C^2(\mathcal{C})) \xrightarrow{\delta} \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Diagrammet er kommutativt. Den første rekke i diagrammet er det kanoniske komplekset som har $H^0(X;\mathcal{C})$ som ko-

motsvarighet. De givna skyllerna är ligglekes komplexkomplexen d.v.s. $d \circ d = 0$. Den givande relativa inklusionen av komplexen, som har $H^p(\mathcal{U}; \mathcal{Q})$ som homologi, innan det av det ovanstående följer, att alla givna relationer är ekvivalenta sekvenser.

På en viktärlig plats i skärmet kan vi betrakta undergruppen $\mathrm{Ker}(d \circ \delta) = \mathrm{Ker}(\delta \circ d)$

I det $d \circ d = 0$ och $\delta \circ \delta = 0$ är såväl $\mathrm{Im}(d)$ som $\mathrm{Im}(\delta)$ en undergrupp här och det samma gäller därför summan $\mathrm{Im}(d) + \mathrm{Im}(\delta)$, d.v.s. alla element av form $d(a) + \delta(b)$. Vi kan därför betrakta faktorgruppen

$$G^{pq} = \mathrm{Ker}(d \circ \delta) / (\mathrm{Im}(d) + \mathrm{Im}(\delta))$$

här indices $p, q$ betyder att vi ser på $\mathcal{E}^p(\mathcal{U}; \mathcal{C}^q(\mathcal{Q}))$.

För "$q = -1$", alltså

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow d & & \\ \mathcal{E}^{p-1}(\mathcal{U}; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{E}^p(\mathcal{U}; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{E}^{p+1}(\mathcal{U}; \mathcal{Q}) \\ & & \downarrow d & & \downarrow d \leftarrow \cdots \\ & & \mathcal{E}^p(\mathcal{U}; \mathcal{C}^0(\mathcal{Q})) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{E}^{p+1}(\mathcal{U}; \mathcal{C}^0(\mathcal{Q})) \end{array}$$

här vi, att $d$ är injektiv (afsnuttet med $\leftarrow\!\!-$), hvarför $\mathrm{Ker}(d \circ \delta) = \mathrm{Ker}(\delta)$. Vidare är $\mathrm{Im}(d) = 0$, så $G^{p,-1}$ är identisk med $H^p(\mathcal{U}; \mathcal{Q})$.

För "$p = -1$" har vi

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(X;C^{q-1}(\mathcal{A})) & & \\ & & \downarrow d & & \\ 0 & \xrightarrow{\text{"}\delta\text{"}} & H^0(X;C^q(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\text{"}\gamma\text{"}} & \mathcal{E}^0(\mathcal{U};C^q(\mathcal{A})) \\ & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X;C^{q+1}(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\text{"}\delta\text{"}} & \mathcal{E}^0(\mathcal{U};C^{q+1}(\mathcal{A})) \end{array}$$

Her er $\delta$ ($\leftarrow\cdots$) injektiv, så $\operatorname{Ker}(\delta\circ d) = \operatorname{Ker} d$. Vidre ses, at $\operatorname{Im}(d) + \operatorname{Im}(\delta) = \operatorname{Im}(d)$, så $G^{-1,q}$ er identisk med $H^q(X;\mathcal{A})$.

Det afgørende er nu, at diagrammet på naturlig måde giver homomorfier

$$G^{p,q} \longrightarrow G^{p-1,q+1}$$

Her er det afgørende, at alle nuller på nær den øverste er eksakte sekvenser:

Lad $a \in \mathcal{E}^p(\mathcal{U};C^q(\mathcal{A}))$ så $a \in \operatorname{Ker}(\delta\circ d)$. Da er $d(a) = \operatorname{Ker}(\delta)$; men $\operatorname{Ker}(\delta) = \operatorname{Im}(\delta)$ idet nulleken er en eksakt sekvens. Altså findes

$$b \in \mathcal{E}^{p-1}(\mathcal{U};C^{q+1}(\mathcal{A})),$$

så

$$\underline{\delta(b) = d(a)}$$

Idet $d\cdot\delta(b) = d\circ d(a) = 0$, har vi $b \in \operatorname{Ker}(d\circ\delta)$. Valget af $b$ er entydigt på nær et element i $\operatorname{Ker}(\delta)$.

Idet rækken er eksakt (ét skridt tilbage i forhold til fler) er "ubestemtheden i $b$" altså af formen $\delta(c)$. Klassen af $b$ i faktorgruppen

$$G^{p-1,q+1} = \mathrm{Ker}(d\circ\delta)/(\mathrm{Im}(d)+\mathrm{Im}(\delta))$$

er altså entydigt bestemt.

Hermed har vi en homomorfi

$$\mathrm{Ker}(d\circ\delta) \longrightarrow G^{p-1,q+1}.$$

Tilbage er at vise, at et element i $\mathrm{Im}(d)+\mathrm{Im}(\delta)$ afbildes på 0 herved:

Lad $a = d(a') + \delta(a'')$. Så har vi

$$d(a) = d\circ d(a') + d\circ\delta(a'') = \delta(d(a'')).$$

Et muligt valg af $b$ til dette $a$ er altså

$$b = d(a'')$$

Idet dette ligger i $\mathrm{Im}(d) \subseteq \mathrm{Im}(d)+\mathrm{Im}(\delta)$, afbildes $a$ altså på 0.

Hermed er bevist:

<u>For hver åben overdækning $\mathcal{U}$ af $X$ har vi på naturlig måde homomorfier</u>

$$\varphi_k : H^k(\mathcal{U};\mathcal{A}) \longrightarrow H^k(X;\mathcal{A})$$

<u>Homomorfien $\varphi_0$ er en isomorfi</u>. <u>Homomorfien $\varphi_1$ er injektiv.</u>

Vi mangler bevis for påstanden om $\varphi_1$. Hertil bemærkes, at en bemærkning på s. 266 viser, at den del af diagram=

met på samme side, som ligger indenfor den røde vanne har eksakte rækker og søjler, og dette medfører, at hver af homomorfierne

$$H^1(\mathfrak{U};\mathbb{Q}) = G^{1,-1} \to G^{0,0} \text{ og } G^{0,0} \to G^{-1,1} = H^1(X;\mathbb{Q})$$

er injektive:

Hvis nemlig $a \in \mathrm{Ker}(d\circ\delta)$ $(=\mathrm{Ker}\,\delta)$ repræsenterer et element i $G^{1,-1}$, som afbildes på $0$ i $G^{0,0}$, har vi

$$d(a) = \delta(\delta(b') + d(b''))$$

altså

$$d(a) = d(\delta(b''))$$

Idet $d$ er injektiv, har vi derfor

$$a = \delta(b'')$$

hvilket viser, at $a$ repræsenterer $0$.

Hvis $a \in \mathrm{Ker}(d\circ\delta)$ repræsenterer et element i $G^{0,0}$, som afbildes på $0$ i $G^{-1,1}$, har vi

$$d(a) = \delta(d(b))$$

(idet der sidder en $0$-gruppe til venstre for $H^0(X; C^1(\mathbb{Q}))$.

Altså er

$$d(a - \delta(b)) = 0.$$

Nu giver eksaktheden "lodret", at

$$a - \delta(b) = d(c).$$

eller

$$a = d(c) + \delta(b) \in \mathrm{Im}(d) + \mathrm{Im}(\delta)$$

hvorfor $a$ repræsenterer $0$ i $G^{0,0}$. Q.E.D.

Homomorfien $\varphi_1$ er i almindelighed ikke surjektiv og $\varphi_k$ for $k>1$ vil i almindelighed hverken være injektive eller

surjektive. Vi kan imidlertid bemærke, at hvis alle søjler -pånær den første- er eksakte sekvenser, kan vi på analog måde konstruere homomorfier

$$G^{p,q} \to G^{p+1,q-1}$$

Disse bestemmes ved, at klassen af $a$, afbildes på klassen af $b$, hvor

$$d(b) = \delta(a)$$

og bliver derfor inverse til de tidligere konstruerede. I dette tilfælde er samtlige homomorfier $\varphi_k$ derfor isomorfier. Dette giver

<u>Leray's sætning</u>: <u>Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over det topologiske rum $X$. Hvis $\mathcal{U} = (U_i, i \in I)$ er en åben overdækning af $X$, således at der gælder</u>

$$H^k(U_{i_0} \cap .. \cap U_{i_p}; \mathcal{A}) = 0 \quad \text{for } k \geq 1$$

<u>for hvilkesomhelst endeligt mange indices $i_0, .., i_p \in I$, da er homomorfien</u>

$$\varphi_k : H^k(\mathcal{U}; \mathcal{A}) \to H^k(X; \mathcal{A})$$

<u>en isomorfi for $k = 0, 1, 2, \ldots$</u>

Bevis: Vi skal vise, at søjlerne (pånær den første) er eksakte under den anførte betingelse. Betingelsen siger præcis, at hver sekvens

$$0 \to H^0(U_{i_0 \cdots i_p}; \mathcal{A}) \to H^0(U_{i_0 \cdots i_p}, C^0(\mathcal{A})) \to H^0(U_{i_0 \cdots i_p}, C^1(\mathcal{A})) \to \cdots$$

er eksakt, idet $0 \to \mathcal{A} \to C^0(\mathcal{A}) \to C^1(\mathcal{A}) \to \dots$ også er den kanoniske visne resolution af $\mathcal{A}$ på delmænmet

$$U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \subseteq X.$$

For
$$a \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}; C^q(\mathcal{A}))$$
er $d(a)$ givet ved
$$(da)_{i_0 \dots i_p} = d(a_{i_0 \dots i_p}).$$

Hvis $d(a) = 0$ har vi altså
$$d(a_{i_0 \dots i_p}) = 0$$
for hvert sæt $i_0, \dots, i_p$ af indices. Nu er
$$a_{i_0 \dots i_p} \in H^0(U_{i_0 \dots i_p}; C^q(\mathcal{A}))$$
og $d(a_{i_0 \dots i_p})$ er præcis billedet ved homomorfien i sekvensen nederst på side 271, så der findes derfor
$$b_{i_0 \dots i_p} \in H^0(U_{i_0 \dots i_p}, C^{q-1}(\mathcal{A}))$$
med
$$d(b_{i_0 \dots i_p}) = a_{i_0 \dots i_p}$$

Hermed er påstanden bevist, idet vi blot skal sørge for, at $b_{i_0 \dots i_p}$ bliver alternerende (se side 262). Dette kan lade sig gøre, idet $a_{i_0 \dots i_p}$ er alternerende, vi kan f. eks. vælge en ordning af $I$ og kun se på voksende indexsæt $i_0, \dots, i_p$ ved denne ordning, vælge $b_{i_0 \dots i_p}$ svarende til disse, og så udvide definitionen af $b_{i_0 \dots i_p}$ ved
$$b_{i_{\sigma(0)} \dots i_{\sigma(p)}} = \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{i_0 \dots i_p}$$

For indeksset med genetagelser er det pågældende $a_{i_0 \cdots i_p}$ lig 0 (p.g.a. alternerende) og det tilsv. $b_{i_0 \cdots i_p}$ vælges lig 0.

Q.E.D.

---

Lad $\mathcal{A}$ være et knippe af abelske grupper over det topologiske rum $X$. Vi definerer da <u>støtten af $\mathcal{A}$</u> ved

$$\operatorname{supp} \mathcal{A} = \overline{\{x \in X \mid \mathcal{A}_x \neq \{0\}\}},$$

altså $\mathcal{U} = X \setminus \operatorname{supp} \mathcal{A}$ er den største åbne delmængde af $X$, så $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{A}_x = \{0\}$. Hvis $M \subseteq X$ er en <u>afsluttet</u> delmængde, siges $\mathcal{A}$ at være <u>koncentreret på $M$</u>, hvis

$$\operatorname{supp} \mathcal{A} \subseteq M.$$

Hvis $\mathcal{A}$ er koncentreret på den afsluttede delmængde $M \subseteq X$ gælder

$$\mathcal{A}_{X \setminus M} = \{0\}$$

idet det eneste snit over $X \setminus M$ er 0-snittet, da alle strå $\mathcal{A}_x$, $x \in X \setminus M$ er $\{0\}$. Heraf følger, at for hver åben mængde $\mathcal{U} \subseteq X$ er restriktionen

$$\mathcal{A}_{(X \setminus M) \cup \mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$$

en isomorfi. Hvert snit over $\mathcal{U}$ kan nemlig udvides med 0-snittet over $X \setminus M$ og det er på den anden side den eneste mulighed. Vi ser heraf, at hvis $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ er åbne mængder i $X$, så $\mathcal{U} \cap M = \mathcal{V} \cap M$, da er $\mathcal{A}_{\mathcal{U} \cap M}$ og $\mathcal{A}_{\mathcal{V} \cap M}$ isomorfe. Dette indebærer, at vi kan definere et knippe

$\mathcal{R}|M$ over delmængden $M$ ved

$$\mathcal{R}|M_{\tilde{U}} = \mathcal{R}_U$$

idet $\tilde{U} \subseteq M$ er rel. åben og $U \subseteq X$ åben valgt, så $\tilde{U} = U \cap M$. Dette kvotient kaldes <u>restriktionen af $\mathcal{R}$ til $M$</u>. Vi har åbenbart

$$\text{specielt} \quad \mathcal{R}|M_x = \mathcal{R}_x$$

for hvert $x \in M$.

Der findes en omvendt proces til restriktionen: Hvis $\mathcal{B}$ er et kvotient af abelske grupper over $M \subseteq X$, som er en afsluttet delmængde af $X$, definerer <u>den trivielle udvidelse $\mathcal{B}'$</u> af $\mathcal{B}$ ved

$$\mathcal{B}'_U = \mathcal{B}_{U \cap M}$$

for hver åben delmængde $U \subseteq X$. Det er let at se, at vi herved får et kvotient over $X$. Hvert $x \in X \setminus M$ har $X \setminus M$ som åben omegn, hvorfor alle tilstrækkeligt små åbne omegne af $x$ er disjunkte med $M$. Heraf følger

$$\mathcal{B}'_x = \{0\} \quad \text{for } x \in X \setminus M$$

hvorfor $\mathcal{B}'$ er koncentreret på $M$. Det er nu umiddelbart, at $\mathcal{B}$ kan identificeres med restriktionen $\mathcal{B}'|M$.

<u>Eksempel</u>: Hvis $X \subseteq \mathbb{C}^n$ er åben og $M \subseteq X$ er afsluttet i $X$ kan vi definere et delkvotient $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}$ over $X$ ved

$$\mathcal{J}_U = \{ f \in \mathcal{O}_U \mid f(z) = 0 \text{ for } z \in M \cap U \}$$

for hver åben mængde. Det er let at se, at $\mathcal{J}$ er et

knippe, idet den definerende egenskab ($f$ er 0 på $M$) er lokal (se side 209-211). Betegner $\mathcal{A}$ knippet af komplekse funktioner på $M$ og $\mathcal{A}'$ dets trivielle udvidelse til $X$, kan vi definere en homomorfi

$$j : \mathcal{O} \to \mathcal{A}'$$

ved at $f \in \mathcal{O}_U$ afbildes på $f|M \cap U$ "udvidet trivielt" med 0 til $U$. Kernen af $j$ er øjensynlig $\mathcal{J}$, hvorfor kvotienten er isomorf med et delknippe af $\mathcal{A}'$:

$$\mathcal{O}/\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}'$$

Af kvotientens definition ser vi så, at et element i $\mathcal{A}'_U$ ligger i $\mathcal{O}/\mathcal{J}_U$ når det lokalt er billede ved $j$, altså præcis når den tilsvarende komplekse funktion $g$ på $M \cap U$ lokalt er restriktion af holomorfe funktioner på åbne delmængder af $X$. Knippet $\mathcal{O}/\mathcal{J}|M$ kaldes knippet af holomorfe funktioner på $M$.

Hvis vi har $M \subseteq X$ afsluttet delmængde og et knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper over $M$, kan vi identificere knipperne $C(\mathcal{A})'$ og $C(\mathcal{A}')$, idet $C$ betegner konstruktionen på s. 225 og $'$ betegner triviel udvidelse. Hvis nemlig $U \subseteq X$ er en åben mængde er et element $s \in C(\mathcal{A}')_U$ en afbildning

$$s : U \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{A}'_x$$

så $s(x) \in \mathcal{A}'_x$ for hvert $x \in U$. Idet $\mathcal{A}'_x = \{0\}$ for $x \notin M$ og $\mathcal{A}'_x = \mathcal{A}_x$ for $x \in M$, er $s$ fuldstændigt bestemt ved

Sin restriktion

$$s|U\cap M : U\cap M \to \bigcup_{x\in M} \mathcal{A}'_x = \bigcup_{x\in M} \mathcal{A}_x ,$$

som er et element i $C(\mathcal{A})_{U\cap M}$. Ved $s \longleftrightarrow s|U\cap M$ fås den ønskede identifikation.

Det følger heraf, at hvis

$$0 \to \mathcal{A} \to C^0(\mathcal{A}) \to C^1(\mathcal{A}) \to \dots$$

er den kanoniske visne resolution af $\mathcal{A}$ over $M$, da er de trivielle udvidelser

$$0 \to \mathcal{A}' \to C^0(\mathcal{A})' \to C^1(\mathcal{A})' \to \dots$$

præcis den kanoniske visne resolution af den trivielle udvidelse $\mathcal{A}'$ over $X$. For hvert knippe $\mathcal{B}$ på $M$ gælder åbenbarlig

$$H^0(M;\mathcal{B}) = H^0(X;\mathcal{B}').$$

Vi har derfor følgende

Sætning: Hvis $M$ er en afsluttet delmængde af det topologiske rum $X$ og $\mathcal{A}$ et knippe af abelske grupper over $M$ med trivial udvidelse $\mathcal{A}'$ til $X$ (eller $\mathcal{B}$ et knippe over $X$, koncentreret på $M$, med restriktion $\mathcal{B}|M$), da findes isomorfier

$$H^k(X;\mathcal{A}') \cong H^k(M;\mathcal{A}) \quad (\text{eller } H^k(X;\mathcal{B}) \cong H^k(M;\mathcal{B}|M))$$

for $k = 0,1,2,\dots$ .

Eksempel fra før forårsat: Den eksakte sekvens

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{J} \to 0$$

giver en eksakt kohomologisekvens, hvoraf vi betragter et

Stjelke

$$H^0(X;\mathcal{O}) \to H^0(X;\mathcal{O}/\mathcal{J}) \to H^1(X;\mathcal{J})$$
$$\searrow \quad \| \quad \nearrow$$
$$H^0(M;\mathcal{O}/\mathcal{J}|M)$$

Den punktvise afbildning er præcis restriktionen til $M$ af holomorf funktion, defineret på hele $X$. Denne er altså surjektiv, hvis $H^1(X;\mathcal{J}) = 0$. Det er præcis dette der stikker under i argumentet på side 192-195.

---

## Opgaver til kap 8.

1. Med $\mathbb{C}$ betegnes de knipper af lokalt konstante komplekse funktioner på $\mathbb{R}^2$. Vis (ved Poincaré's lemma) at for et åbent rektangel $X \subseteq \mathbb{R}^2$ med akseparallelle sider, gælder der $H^0(X;\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ (komplekse tal), $H^k(X;\mathbb{C}) = \{0\}$. Vis, at det samme gælder for en figur 1. Find kvotientgrupperne $H^k(X;\mathbb{C})$ for en figur 2. (Bennyt Leray's sætning)

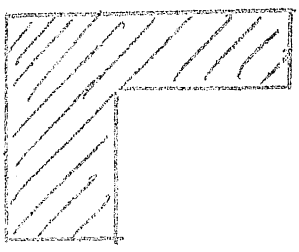


fig 1.

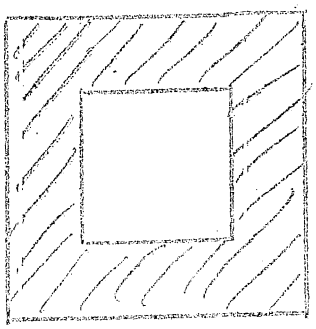


fig. 2.

Vis herved, at der findes en $C^\infty$ diff. form $\omega$ af grad 1 på figur 2 med $d\omega = 0$, hvor der ikke findes en $C^\infty$ funktion $f$ på fig. 2 med $\omega = df$.

2. Hvis $U \subseteq \mathbb{C}^n$ og $V \subseteq \mathbb{C}^n$ er åbne og hvis der findes en biholomorf afbildning $F: U \to V$, da findes der isomorfier $H^k(U;\Theta) \cong H^k(V;\Theta)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (Benyt $\bar\partial$-resolutionen s. 260 og inducerede former ved $F^*$ s. 182-183).

3. For en cirkelring $U = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ gælder $H^k(U;\Theta) = 0$ for $k \geq 1$ (Benyt et argument som på s. 99-100, idet Laurentrække erstatter potensrække). Med $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ betegnes den komplekse projektive linie (d.v.s. Riemanns talkugle). Hvis $\zeta$ er en inhomogen koordinat, altså $\zeta \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kan vi opdele $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ i mængderne $U_1 = \{\zeta \mid |\zeta| < 2\}$, $U_2 = \{\zeta \mid |\zeta| > \frac{1}{2}\}$. Vis, at $H^k(\mathbb{P}^1(\mathbb{C});\Theta) = 0$ for $k \geq 1$ (En funktion på $U \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ er holomorf, hvis den affh. hol. af $\zeta$ på $U \setminus \{\infty\}$ og hol. af $1/\zeta$ på $U \setminus \{0\}$).

## Kapitel 9: Analytiske knipper, Oka's sætning, kohærens

Først et (sikkert velkendt) algebraisk begreb: Hvis $\Lambda$ er en kommutativ ring med et element 1, forstås ved en $\Lambda$-modul $A$* en abelsk gruppe $A$ (komposition +) med en komposition $\Lambda \times A \to A$ (skrives $\lambda a$), således at

$$1a = a$$
$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$$
$$\lambda(a_1+a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2$$
$$(\lambda_1+\lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a$$

gælder for vilkårlig $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $a, a_1, a_2 \in A$. Hvis $A$ og $B$ er $\Lambda$-moduler, kaldes en afbildning $f: A \to B$ en $\Lambda$-homomorfi, hvis

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

for $\lambda, \mu \in \Lambda$, $a, b \in A$. De simpleste eksempler på $\Lambda$-moduler er $\Lambda$ selv og idealerne i $\Lambda$. For $\Lambda$-moduler $A$ og $B$ har vi den direkte sum $A \oplus B$. Som mængde er den $A \times B$, hvor

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Vi benytter $A^k$ (spec $\Lambda^k$) for den direkte sum $A \oplus \dots \oplus A$ ($k$ "addender").

Hvis $f: A \to B$ er en $\Lambda$-homomorfi af $\Lambda$-moduler, da er kernen og billedet ved $f$ $\Lambda$-delmuler af $A$ og $B$.

* egentlig unitær $\Lambda$-modul

Hvis $A$ er en $\Lambda$-modul og $A' \subseteq A$ en $\Lambda$-delmodul, da kan faktorgruppen $A/A'$ på naturlig måde opfattes som $\Lambda$-modul og den kanoniske afbildning $A \to A/A'$ bliver herved en $\Lambda$-homomorfi.

Lad $X \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. Knippet $\mathcal{O}$ af holomorfe funktioner på åbne delmængder $U \subseteq X$ kan da opfattes som et <u>ring-knippe</u>: For hvert $U$ er $\mathcal{O}_U$ en ring (1-element = funktionen konstant 1) og multiplikationen af funktioner kommuterer med restriktionen. Vi indfører nu følgende <u>definition</u> Ved et <u>analytisk knippe</u> $\mathcal{A}$ over $X$ forstår et knippe $\mathcal{A}$ af abelske grupper over $X$, hvor der for hver åben delmængde $U \subseteq X$ er givet $\mathcal{A}_U$ struktur som $\mathcal{O}_U$-modul (d.v.s. et produkt $\mathcal{O}_U \times \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}_U$) således at modul-strukturen kommuterer med restriktionen, altså hvis $V \subseteq U$ er diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_U \times \mathcal{A}_U & \longrightarrow & \mathcal{A}_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_V \times \mathcal{A}_V & \longrightarrow & \mathcal{A}_V \end{array}$$

kommutativt (vandret: produkter, lodret: restriktioner).

Eksempel på et analytisk knipper er $\mathcal{O}$ og $\mathcal{O}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Det på side 274-275 betragtede knippe $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}$ er ligeledes et analytisk knippe, et såkaldt ideal-knippe i $\mathcal{O}$.

En homomorfi $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mellem analytiske knipper kaldes en <u>$\mathcal{O}$-homomorfi</u>, hvis $f_U: \mathcal{A}_U \to \mathcal{B}_U$ er en $\mathcal{O}_U$-homomorfi for enhver åben mængde $U \subseteq X$. Det er en meget stærk indskrænkning at kræve, at en homomorfi skal være en $\mathcal{O}$-homomorfi. Betragt f.eks. en $\mathcal{O}$-homomorfi

$$f: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$$

Vi kan da se på elementerne $\begin{Bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{Bmatrix}$ i $\mathcal{O}^p_X$ (vi skriver elementer i $\mathcal{O}^p$ og $\mathcal{O}^q$ som søjer). Deres billeder ved $f_X$ er $p$ søjler af hver $q$-holomorfe funktioner på $X$

$$\begin{Bmatrix}f_{11}\\\vdots\\f_{q1}\end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix}f_{1p}\\\vdots\\f_{qp}\end{Bmatrix}$$

og der gælder nu, at $f_U$ <u>for hver delmængde $U \subseteq X$ er multiplikation med matricen</u> $\{f_{ij}\}$ (eller rettere sagt dennes restriktion til $U$). Da $f$ kommuterer med restriktionerne vil nemlig basiselementerne $\begin{Bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}, \dots$ på $U$, afbilde på restriktionen til $U$ af matricens søjler, og påstanden følger derefter af, at $f_U$ er $\mathcal{O}_U$-lineær:

$$f_U\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\\vdots\\\varphi_p\end{pmatrix}\right) = f_U\left(\varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \varphi_p\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1p}\\\vdots & & \\f_{qp} & \cdots & f_{qp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\vdots\\\varphi_p\end{pmatrix}.$$

Det følger omvendt let, at har vi givet en matrix med $q$ rækker og $p$ søjler, hvis elementer er holomorfe funktioner på hele $X$, da bestemmes herved en $\mathcal{O}$-homomorfi $\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$.

Et lidt andet aspekt er følgende: Kvipperne $\Omega^{p,q}$ af $C^\infty$ diff former med bigrad $(p,q)$ er $\mathcal{O}$-kvipper ved sædvanlig multiplikation med funktioner som $\mathcal{O}$-modul-strukturer. Her gælder, at

$$\bar\partial : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}$$

er en $\mathcal{O}$-homomorfi, mens $\partial$ ikke er en $\mathcal{O}$-homomorfi.

Hvis $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er analytiske kvipper over $X$ og $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ en $\mathcal{O}$-homomorfi, da er $\ker f$ og $\operatorname{im} f$ analytiske kvipper (lille øvelse til læseren: man skal blot kontrollere, at man ved multiplikation med en lokalmorf funktion $g$ på $U \subseteq X$ af et element i $\ker f \subseteq \mathcal{A}$ henh. $\operatorname{im} f \subseteq \mathcal{B}$ ikke kommer "uden for" $\ker f$ henh. $\operatorname{im} f$). Ligeledes gælder, at hvis $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ er analytiske kvipper, så inklusionen $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ er en $\mathcal{O}$-homomorfi, da er $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ et analytisk kvippe og den kanoniske afbildning $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ en $\mathcal{O}$-homomorfi.

For et analytisk kvippe $\mathcal{A}$ kan $\mathcal{O}$-modulstrukturen overføres til kimene:

For $z \in X$, $U \subseteq X$ åben $z \in U$, $f \in \mathcal{O}_U$, $a \in \mathcal{A}_U$ vil kimen $(fa)_z$ alene afhænge af kimene $f_z$ og $a_z$.

For hvert punkt $z \in X$ er stalken $\mathcal{A}_z$ altså en $\mathcal{O}_z$-modul

Vi bemærker, at det let følger, at hvis $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ er en $\mathcal{O}$-homomorfi af analytiske kvipper, da er kerne

morfien af strå $f_z : \mathcal{A}_z \to \mathcal{B}_z$ en $\mathcal{O}_z$-homomorfi for hvert $z \in X$.

Definition: Et analytisk kompleks $\mathcal{A}$ på den åbne mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ siges at være lokalt endeligt frembragt, hvis der til hvert punkt $z \in X$ findes en åben omegn $U \subseteq X$ og en $\mathcal{O}$-homomorfi (for et passende valgt $p$)

$$F : \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}$$

af kompleks over $U$, som er surjektiv.

Her betyder surjektiv som bekendt, at for hvert $z' \in U$ er $F_{z'} : \mathcal{O}^p_{z'} \to \mathcal{A}_{z'}$ surjektiv. Betegner $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}_U$ billederne ved $F_U$ af $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ har vi

$$F_{z'}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\vdots\\\varphi_p\end{pmatrix} = \varphi_1 f_{1z'} + \cdots + \varphi_p f_{pz'}$$

for $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{O}_{z'}$. Surjektivitetsen af $F$ kan altså fortolkes derved, at for hvert $z' \in U$ danner kimene af $f_1, \ldots, f_p$ i $z'$ et frembringersystem for $\mathcal{A}_{z'}$ som modul over ringen $\mathcal{O}_{z'}$.

Sætning (Oka) Lad $F : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$ være en $\mathcal{O}$-homomorfi over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$, da er kernen $\ker F \subseteq \mathcal{O}^p$ et lokalt endeligt frembragt analytisk kompleks over $X$

Før vi giver os i kast med det komplicerede bevis for denne fundamentale sætning, vil vi se lidt på dens forskellige aspekter. Påstanden er, at der til hvert punkt $z \in X$ findes åben omegn $\mathcal{U}$, et $r \in \mathbb{N}$ og en $\mathcal{O}$-homomorfi $G: \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^p$ over $\mathcal{U}$, så

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{G} \mathcal{O}^p \xrightarrow{F} \mathcal{O}^q$$

er en eksakt sekvens af knipper over $\mathcal{U}$.
Homomorfien $F$ er givet ved en matriks med koefficienter der er holomorfe funktioner på $X$:

$$\begin{Bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1p} \\ \vdots & & \\ F_{q1} & \cdots & F_{qp} \end{Bmatrix}$$

Elementerne i $\ker F$ er netop sådanne $\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} \in \mathcal{O}^p$, hvor

$$\varphi_1 \begin{Bmatrix} F_{11} \\ \vdots \\ F_{q1} \end{Bmatrix} + \cdots + \varphi_p \begin{Bmatrix} F_{1p} \\ \vdots \\ F_{qp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

og $\ker F$ kaldes derfor også <u>knippet af relationer</u> mellem de $p$ søjler i matricen.

<u>Nu til beviset</u>: Dette føres ved dobbelt induktion efter dimensionen $n$ af talrummet og tallet $q$, idet vi viser:

1) Sætningen er rigtig for $n=1$ og $q=1$
2) Hvis sætningen for et givet $n$ er rigtig for værdiere $q'<q$ er den også rigtig for $n$ og $q$

3) Hvis sætningen er rigtig med $n-1$ variable og vilkårlig $q$, er den også rigtig med $n$ variable og $q=1$.

(Den vanskelige del er 3, som vi gemmer til sidst).

1): Vi har kun en variabel $z$ og $F: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ er givet ved en række $(F_1, \ldots, F_p)$ af holomorfe funktioner på $X \subseteq \mathbb{C}$. Vi kan tænke os, at $z = 0 \in X$, idet et lineært koordinatskift $z \to z-a$ ikke forstyrrer. Visse blandt $F_1, \ldots, F_p$ kan være identisk 0 i omegnen af 0. Er de det alle er $\ker F = \mathcal{O}^p$ og identiteten $G: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^p$ løser problemet. Ellers kan vi finde en omegn $|z| < r$ af 0, så vi heri har

$$F_i(z) = g_i(z)\, z^{m_i}$$

hvor $g_i(z) \neq 0$ for $|z| < r$ – for så vidt $F_i$ ikke er identisk 0; hvis $F_i$ er identisk 0 sætter $g_i(z) = 1$. Homomorfien $F$ er åbenbart en sammensætning

$$(F_1, \ldots, F_p) = (z^{m_1}, \ldots, z^{m_p}) \begin{pmatrix} g_1(z) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_p(z) \end{pmatrix}$$

(her evt. virus nuller)

af en isomorfi $\Psi: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^p$ (matricen til højre) og $\mathcal{O}$-homomorfien $F': \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ bestemt ved $(z^{m_1}, \ldots, z^{m_p})$. Kan vi finde $G': \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^p$, på en omegn af $0 \in \mathbb{C}$, så

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{G'} \mathcal{O}^p \xrightarrow{F'} \mathcal{O}$$

er eksakt over $\mathcal{U}$ vil $G = \Psi^{-1} \circ G'$ løse problemet:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}^p \arrow[d, "\Psi", "\cong"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{O}^r \arrow[r, "G'"] & \mathcal{O}^p \arrow[r, "F'"] & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

Det er altså nok at se på tilfældet $(F_1, .., F_p) = (z^{m_1}, .., z^{m_p})$, hvor der dog på visse pladser kan stå $0$ istedet for en potens $z^{m_i}$, $m_i = 0, 1, 2, \ldots$. Vi anbringer $0$-erne tilsidst (dette er blot at sammensætte $F$ med en automorfi af $\mathcal{O}^p$ bestemt ved ombytning af pladser) og kan antage $(F_1, \ldots, F_p) = (z^{m_1}, .., z^{m_{p'}}, 0, .., 0)$.

Her er kun den $\mathcal{O}$-homomorfi $\mathcal{O}^{p'} \xrightarrow{F'} \mathcal{O}$, som bestemmes af $(z^{m_1}, .., z^{m_{p'}})$ interessant. Kan vi finde $G'$ hertil, så $\mathcal{O}^{r'} \xrightarrow{G'} \mathcal{O}^{p'} \xrightarrow{F'} \mathcal{O}$ er surjektivt over en omegn $\mathcal{U}$ af $0$ vil $\mathcal{O}^{r'+(p-p')} \xrightarrow{G} \mathcal{O}^p$ bestemt ved, at matricen for $G'$ suppleres med en $(p-p')$ enhedsmatrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Matrix for } G' & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

løse problemet, idet det er ganske uafhængigt af $\varphi_{p'+1}, .., \varphi_p$, hvorvidt

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{matrix} \right\} \in \mathcal{O}^p$$

tilhører kernen af $F$. Med den valgte matrix får netop vilkårligt (holomorft) indhold på de sidste pladser

i elementer af $\operatorname{Im} G$.

Vi kan altså koncentrere os om tilfældet

$$(F_1, \ldots, F_p) = (z^{m_1}, \ldots, z^{m_p}).$$

Her kan vi antage, at

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_p$$

(ellers ombytning af rækkefølge). Vi betragter nu den homomorfi $G : \mathcal{O}^{p-1} \to \mathcal{O}^p$, som beskrives af matricen

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ & & 1 \\ -z^{m_1-m_p} & -z^{m_2-m_p} & -z^{m_{p-1}-m_p} \end{Bmatrix} \quad \ldots$$

Søjlerne, som præcis er billederne af de $p-1$ basiselementer i $\mathcal{O}^{p-1}$ ved $G$, ligger øjensynlig i kernen af $F$, altså gælder $\ker G \subseteq \operatorname{im} F$. Påstanden er nu, at for hvert $a \in \mathbb{C}$ er sekvensen

$$\mathcal{O}_a^{p-1} \xrightarrow{G_a} \mathcal{O}_a^p \xrightarrow{F_a} \mathcal{O}_a$$

eksakt: Lad $\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} \in \ker F_a$, altså $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ er holomorfe funktionskim i $a$, så

$$z^{m_1}\varphi_1 + \cdots + z^{m_p}\varphi_p = 0$$

(hvor $z$ også bruges som betegnelse for dens kim i $a$). Idet

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \varphi_1(1, 0, \ldots, 0, -z^{m_1-m_p}) + \cdots + \varphi_{p-1}(0, \ldots, 0, 1, -z^{m_{p-1}-m_p})$$
$$+ (0, \ldots, 0, z^{m_1-m_p}\varphi_1 + \cdots + z^{m_{p-1}-m_p}\varphi_{p-1} + \varphi_p)$$

følger $\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} = G_a \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{p-1} \end{Bmatrix}$, idet

$$z^{m_p}\Big(\underbrace{z^{m_1-m_p}\varphi_1+\cdots+z^{m_{p-1}-m_p}\varphi_{p-1}+\varphi_p}_{=0}\Big)=0$$

og dermed $\varphi_p = 0$ (nulrækken i $\mathcal{O}_a$ !)

Hermed har vi bevist 1. (Beviset er et specielt tilfælde af det argument vi skal bruge ved 3 og er normalt taget med for at trivialisere visse tekniske detaljer i det kommende bevis for 3).

Bevis for 2.: Vi har altså givet $\mathcal{O}$-homomorfi

$$F: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$$

over en åben delmængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$. $F$ er bestemt ved en matrix af holomorfe funktioner på $X$ med $q$ rækker og $p$ søjler. Med $F': \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^{q-1}$ og $F'': \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$ betegnes de $\mathcal{O}$-homomorfier over $X$, som bestemmes ved matricen bestående af de $q-1$ første rækker, henh. sidste række, altså for $\varphi \in \mathcal{O}^p$ er $F'(\varphi)$ de første $q-1$ komponenter og $F''(\varphi)$ den $q^{te}$ komponent af $F(\varphi)$. Det er klart, at kernen af $F$ præcis er fællesmængden $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} F' \cap \operatorname{Ker} F''$

$$\mathcal{O}^s \xrightarrow{\tilde{G}} \mathcal{O}^r \xrightarrow{G'} \mathcal{O}^p \xrightarrow{F'} \mathcal{O}^{q-1}$$

$$F'' \searrow \mathcal{O}$$

Lad $z \in X$. Ifølge induktionsforudsætn. kan vi så finde en åben omegn $U \subseteq X$ af $z$ og over $U$ en eksakt sekvens

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{G'} \mathcal{O}^p \xrightarrow{F'} \mathcal{O}^{q-1}$$

af $\mathcal{O}$-homomorfier, d.v.s. $\operatorname{Ker} F' = \operatorname{Im} G'$. Det er nu klart, at

$$G'(\operatorname{Ker}(F''\circ G')) = \operatorname{Ker} F,$$

idet $\operatorname{Ker} F$ præcis er de elementer i $\operatorname{Ker} F' = \operatorname{Im} G'$, som afbilder på 0 ved $F''$. Vi kan bruge induktionsforudsætningen igen, denne gang på $\mathcal{O}$-homomorfien

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{F''\circ G'} \mathcal{O}$$

over $U$. Dermed findes en åben omegn $V \subseteq U$ af $z$ og over $V$ en $\mathcal{O}$-homomorfi $\tilde{G}: \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^r$ så $\operatorname{Im}\tilde{G} = \operatorname{Ker}(F''\circ G')$. Hermed har vi det ønskede: Vi definerer

$$G = G'\circ\tilde{G}: \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^p$$

og har

$$\operatorname{Im}(G) = \operatorname{Im}(G'\circ\tilde{G}) = G'(\operatorname{Im}\tilde{G}) = G'(\operatorname{Ker}(F''\circ G')) = \operatorname{Ker} F$$

over $V$.

<u>Bevis for 3:</u> Over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ er givet en $\mathcal{O}$-homomorfi $F: \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$. Homomorfien $F$ beskrives ved en rækkematrix

$$(F_1, \ldots, F_p)$$

Vi kan antage (for at forsimple betegnelserne) at det betragtede punkt er $\underline{0} \in X$. Ligesom ved bevist for 1 ses, at vi kan antage, at $F_1, \ldots, F_p$ alle er ikke identisk 0 i omegnen af $\underline{0}$. Hermed er produktet $F_1 \cdots F_p$ ikke identisk 0 i omegnen af $\underline{0}$ og vi kan derfor vælge koordinaterne (lineært koordinatskift), således at $F_1 \cdots F_p$ er almen m.h.t. $z_n$ i $\underline{0}$. Dermed er

hver af $F_1, \dots, F_p$ almene m.h.t. $z_n$ i $\underline{0}$. Forberedelsessætningen kan nu anvendes og på en polycylinder $V \subseteq \mathbb{C}^n$ med centrum $\underline{0}$ har vi hermed

$$F_j = e_j P_j$$

hvor $e_j$ ikke antager værdien 0 på $V$ og hvor $P_j$ er et Weierstrass-polynomium. Ligesom ved 1 ser vi, at det er nok at vise påstanden for den $\mathcal{O}$-homomorfi

$$P : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$$

over $V$, som bestemmes af matricen $(P_1, \dots, P_p)$. Videre kan vi antage, at graderne (m.h.t. $z_n$) af $P_1, \dots, P_p$ opfylder

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_p$$

Vi skal nu se at få udnyttet induktionsforudsætningen. Vi har

$$V = V' \times V_n,$$

hvor

$$V' = \{(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \mid |z_1| < \rho_1, \dots, |z_{n-1}| < \rho_{n-1}\}$$

$$V_n = \{z_n \in \mathbb{C} \mid |z_n| < \rho_n\}$$

og hver $P_j$ har formen

$$P_j(z) = z_n^{m_j} + A_{j,m_j-1}(z') z_n^{m_j-1} + \dots + A_{j,0}(z')$$

hvor $A_{pq}(z')$ er holomorfe funktioner på $V'$.

For hvert naturligt tal $m$ ($m$ fastlægges om lidt) betragtes knippet ${}_{n-1}\mathcal{O}^{mp}$ over $V'$ (holomorfe funktioner af $z_1, \dots, z_{n-1}$). Vi indfører et symbol $\zeta$ (en "ubestemt") og et element i ${}_{n-1}\mathcal{O}^{mp}$ kan dermed opfattes som et sæt

$$(\Phi_1(\zeta), \dots, \Phi_p(\zeta))$$

af $p$ polynomier i $\zeta$ med grader $\leq m-1$, hvor koefficienterne

er elementer i ${}_{n-1}\mathcal{O}$. I $P_1, \dots, P_p$ erstatter $z_n$ med $\zeta$ og vi kan så definere en afbildning

$$\tilde{F} : {}_{n-1}\mathcal{O}^{mp} \longrightarrow {}_{n-1}\mathcal{O}^{m+m_1}$$

ved $(\Phi_1(\zeta), \dots, \Phi_p(\zeta)) \to P_1(\zeta)\Phi_1(\zeta) + \dots + P_p(\zeta)\Phi_p(\zeta)$

Polynomiet på højre side får grad $\leq m-1+\max(m_1, \dots, m_p)$ $= m+m_1-1$, hvorfor der er $m+m_1$ koefficienter (alle i ${}_{n-1}\mathcal{O}$). Afbildningen $\tilde{F}$ er en ${}_{n-1}\mathcal{O}$-homomorfi, idet koefficienterne i $\tilde{F}(\Phi_1(\zeta), \dots, \Phi_p(\zeta))$ er linearkombinationer af koefficienterne i $\Phi_1(\zeta), \dots, \Phi_p(\zeta)$ med koefficienterne i $P_1, \dots, P_p$ som faktorer.

Ifølge induktionsantagelsen kan vi så finde en åben omegn $U' \subseteq V'$ af $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ og en ${}_{n-1}\mathcal{O}$-homomorfi $\tilde{G} : {}_{n-1}\mathcal{O}^{s} \to {}_{n-1}\mathcal{O}^{mp}$, så sekvensen

$${}_{n-1}\mathcal{O}^{s} \xrightarrow{\tilde{G}} {}_{n-1}\mathcal{O}^{mp} \xrightarrow{\tilde{F}} {}_{n-1}\mathcal{O}^{m+m_1}$$

er eksakt.

Vi kan opfatte billederne ved $\tilde{G}$ af basiselementerne $(1,0,\dots,0), \dots (0,\dots,0,1)$ (d.v.s. søjlerne i matricen for $\tilde{G}$) som sæt af polynomier

$$(\Phi_1(\zeta), \dots, \Phi_p(\zeta))$$

hvor koefficienterne i $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ er holomorfe funktioner af $z_1, \dots, z_{n-1}$ på $U'$. Hermed bliver $\tilde{G}$ at opfatte som en afbildning ind i ${}_{n-1}\mathcal{O}_m^p[\zeta]$, hvor det nederste indeks $m$ betyder, at polynomiernes grad er højst $m-1$. Tilsvarende kan vi gøre for $\tilde{F}$.

Vi erstatter nu $\zeta$ med $z_n$ i matricerne for $\tilde{F}$ og $\tilde{G}$.

Dermed genfindes $F : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}$, mens $\tilde{G}$ giver en $\mathcal{O}$-homomorfi $G' : \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^p$ over $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \times \mathcal{V}_n$. Sammensætningen $F \circ G'$ er $0$, idet billederne ved $G'$ af basiselementerne $\begin{Bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}, \dots, \begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{Bmatrix}$ er sæt $(\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ af polynomier i $z_n$ med koefficienter holomorfe af $z' \in \mathcal{U}'$, som opfylder

$$P_1 \Phi_1 + \dots + P_p \Phi_p = 0 .$$

Videre har vi fra det ovenstående, at hvis $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{O}^p_{\underline{a}}$, hvor $\underline{a} = (a', a_n) \in \mathcal{U}$, er et element af $\operatorname{Ker} F$ og hvis hver af kimene $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ er et polynomium i ${}_{n-1}\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ med grad mindre end $m$, da er $\varphi \in \operatorname{Im} G'_a$, idet vi endda kan vælge $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s) \in \mathcal{O}^s_a$ med $G'_a(\psi) = \varphi$, så $\psi_1, \dots, \psi_s$ kun afhænger af $z_1, \dots, z_{n-1}$.

Vi vælger nu $m = m_p + m_{-1}$ og tænker $G'$ fundet svarende hertil $\mathcal{O}$-homomorfien $G$ over $\mathcal{U}$, $G : \mathcal{O}^{s+p-1} \to \mathcal{O}^p$ defineres da ved matricen

$$\left(\begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\text{Matrix for } G'} \\ \hline P_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & -P_1 \\ 0 & P_p & 0 & \cdots & 0 & -P_2 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & P_p & -P_{p-1} \end{array}\right)$$

Det ses, at $F \circ G = 0$ idet de sidste $p-1$-rækker, som er billederne af de ekstra $p-1$ basiselementer ved $G$, ligger i

kernen af $F$.

Lad nu $\underline{a} = (a', a_n) \in U$ og lad $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{O}_{\underline{a}}^p$ opfylde $F_{\underline{a}}(\varphi) = 0$. Opgaven er at finde $\psi \in \mathcal{O}_{\underline{a}}^{p\times 1}$, så $G_{\underline{a}}(\psi) = \varphi$. Vi betragter $P_p$. ... Denes Weierstrass-polynomium m.h.t. $z_n$ i $\underline{a}$. Det vil i almindelighed ikke være Weierstrass-polynomium i $\underline{a}$, men dets elementer m.h.t. $z_n$ i $\underline{a}$, idet dets polynomium i $z_n$ med højeste koeff. 1. Anvender forberedelsessætningen har vi derfor

$$P_p = E_p W_p$$

som relation i ringen $\mathcal{O}_{\underline{a}}$, hvor $W_p$ er et Weierstrass-poly i $\underline{a}$ og $E_p$ en enhed i $\mathcal{O}_{\underline{a}}$. Vi kan omskrive $P_p$ til et polynomium i $(z_n - a_n)$ [$z_n^k = ((z_n - a_n) + a_n)^k$ = binomialformel] og har heraf $P_p \in {}_{n-1}\mathcal{O}_{\underline{a}'}[z_n - a_n]$. Idet $W_p$ har højeste koefficient 1, kan vi udføre division med rest i polynomieringen ${}_{n-1}\mathcal{O}_{\underline{a}'}[z_n - a_n]$ og får

$$P_p = Q_p W_p + R_p$$

hvor $R_p$ har grad $<$ graden af $W_p$ og hvor igen $Q_p$ er et poly i $z_n - a_n$. Af entydighedsdelen af Weierstrass' divisionssætning slutter vi så, at $R_p = 0$ og $Q_p = E_p$, hvorfor $E_p$ er et polynomium i $z_n - a_n$.

Vi kan anvende divisionssætningen og får

$$\varphi_j = \mu_j W_p + \tau_j \qquad j = 1, \dots, p-1$$

hvor $\tau_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}_{\underline{a}'}[z_n - a_n]$ har grad mindre end graden af $W_p \leq$ graden af $P_p = m_p$. Heraf får

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = (\mu_1 W_p + r_1, \dots, \mu_{p-1} W_p + r_{p-1}, \varphi_p)$$

$$= \frac{1}{E_p}\mu_1 \cdot (P_p, 0, \dots, 0, -P_1) + \cdots + \frac{1}{E_p}\mu_{p-1}(0, \dots, 0, P_p, -P_{p-1})$$

$$+ (r_1, \dots, r_{p-1}, \varphi_p + \frac{1}{E_p}\mu_1 P_1 + \cdots + \frac{1}{E_p}\mu_{p-1} P_{p-1})$$

hvor vi har udnyttet, at $E_p$ er en enhed i $\mathfrak{O}_a$. De første $p-1$ led ligger åbenbart i $\operatorname{Im} G_a$, så problem er

$$(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p),$$

hvor

$$r_p = \varphi_p + \frac{1}{E_p}\mu_1 P_1 + \cdots + \frac{1}{E_p}\mu_{p-1} P_{p-1}.$$

Her vides $r_1, \dots, r_{p-1}$ at være polynomier i $z_n - a_n$ af grad $< m_p$, men vi ved ikke meget om $r_p$. Vi skulle imidlertid, at $(r_1, \dots, r_p)$ ligger i kernen af $F_a$, altså

$$r_1 P_1 + \cdots + r_p P_p = 0;$$

altså

$$r_p P_p = -r_1 P_1 - \cdots - r_{p-1} P_{p-1} = S$$

er et poly. i $z_n - a_n$ med grad $< m_p + m_1 = m$.

Af

$$r_p P_p = r_p E_p W_p = S$$

ses, at $W_p$ er divisor i $S$. Kvotienten $\frac{S}{W_p}$ er også et polynomium i $(z_n - a_n)$. Idet $W_p$ har højeste koefficient 1 kan division med rest gennemføres i ${}_{n-1}\mathfrak{O}_a'[z_n - a_n]$ og resultatet må blive rest 0 p.gr. af entydigheden i divisionssætningen. Heraf skulle, at $r_p E_p$ er et polynomium efter $z_n - a_n$ af grad $< m_p + m_1 = m$

Elementet $(E_p\tau_1, .., E_p\tau_p)$ ligger tydeligvis i $\mathrm{Ker}\, F_a$ og består af elementer i $\mathcal{O}_a[z_n - a_n]$ der har grad $< n$ efter $z_n - a_n$. Ved binomialformel $(z_n - a_n)^k = \ldots$ omskrives elementerne til polynomier i $z_n$. Ifølge konstruktionen af $G'$ findes derimod $\psi \in \mathcal{O}_a^{s+p-1}$, så $G(\psi) = (E_p\tau_1, .., E_p\tau_p)$. Dette giver

$$G\left(\frac{1}{E_p}\psi\right) = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$$

idet $E_p$ er en enhed, og hermed er påstanden bevist.

Q.E.D.

Vi indfører nu følgende

Definition: Et analytisk knippe $\mathcal{A}$ over en åben delmængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ kaldes koherent i $X$, hvis der til hvert punkt $a \in X$ findes en åben omegn $U \subseteq X$ af $a$ og over $U$ en eksakt følgen af analytiske knipper og $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\lambda} \mathcal{A} \to 0 .$$

Vi ser, at koherensen betyder, at $\mathcal{A}$ er lokalt endeligt frembragt og at $\lambda : \mathcal{O}^q \to \mathcal{A}$ surjektiv endda kan vælges, så kernen af $\lambda$ er lokalt endeligt frembragt.

Lemma 1 Hvis $\lambda : \mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^r$ er en $\mathcal{O}$-homomorfi over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$, da er $\mathrm{Ker}\,\lambda$ og $\mathrm{Im}\,\lambda$ koherente analytiske knipper over $X$.

Bevis:

Lad $a \in X$. Ifølge Oka's sætning findes da en eksakt sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}^r$$

over en åben omegn $U \subseteq X$ af $a$. Den deraf flydende eksakte sekvens

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Im}\lambda \to 0$$

over $U$ viser så kohærensen af $\mathrm{Im}\lambda$.
Indenfor $U$ har vi $\mathrm{Ker}\lambda = \mathrm{Im}\lambda_1$. Ifølge det lige bevist anvendt på $\mathcal{O}$-homomorfien $\lambda_1$ over $U$ er $\mathrm{Ker}\lambda$ derfor kohærent over $U$ og dermed over hele $X$, da $a \in X$ var vilkårligt valgt.

<u>Lemma 2</u> Hvis $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}^p$ og $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}^p$ er kohærente analytiske knipper over åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$, da er også knippet $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (defineret ved $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})_U = \mathcal{A}_U \cap \mathcal{B}_U$) et kohærent analytisk knippe over $X$.

Bevis: Lad $a \in X$ over en åben omegn $V \subseteq X$ findes der da surjektive $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\lambda_1 : \mathcal{O}^q \to \mathcal{A} \qquad \lambda_2 : \mathcal{O}^r \to \mathcal{B}$$

Idet $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er delknipper af $\mathcal{O}^p$ kan vi opfatte $\lambda_1$ og $\lambda_2$ som $\mathcal{O}$-homomorfier ind i $\mathcal{O}^p$ med billeder $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$. Vi definerer nu $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mu : \mathcal{O}^{q+r} \to \mathcal{O}^p \qquad \nu : \mathcal{O}^{q+r} \to \mathcal{O}^p$$

ved

$$\mu(\varphi, \psi) = \lambda_1(\varphi), \quad \nu(\varphi, \psi) = \lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\psi)$$

for $(\varphi, \psi) \in \mathcal{O}^{q+r}$, $\varphi \in \mathcal{O}^q$, $\psi \in \mathcal{O}^r$.

Her gælder, at $\mu$ vil afbilde $\ker \nu$ surjektivt på $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Thi nemlig $(\varphi, \psi) \in \ker \nu$ betyder at

$$\mu(\varphi, \psi) = \lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\psi)$$

altså $\mu(\varphi, \psi) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Lad på den anden side $\alpha \in \mathcal{A}_z \cap \mathcal{B}_z$, $z \in \mathcal{U}$. Så findes $\varphi \in \mathcal{O}^q$, $\psi \in \mathcal{O}^r$ med $\alpha = \lambda_1(\varphi) = \lambda_2(\psi)$, hvilket giver $(\varphi, \psi) \in \ker \nu_z$ og $\mu(\varphi, \psi) = \alpha$.

Ifølge Lemma 1 er $\ker \nu$ kohærent over $\mathcal{U}$. Der findes derfor en åben mængde $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ og over $\mathcal{U}$ en surjektiv $\mathcal{O}$-homomorfi

$$\mu' : \mathcal{O}^s \to \ker \nu .$$

Dermed er

$$\mathcal{O}^s \xrightarrow{\mu'} \mathcal{O}^{q+r} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \to 0$$

en eksakt følge af $\mathcal{O}$-homomorfier over $\mathcal{U}$, hvilket viser kohærensen af $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

<u>Lemma 3</u>. Lad $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være analytiske knipper over åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ og $\lambda : \mathcal{O}^p \to \mathcal{B}$, $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $\mathcal{O}$-homomorfier over $X$. Hvis $\operatorname{Im}\mu \supseteq \operatorname{Im}\lambda$ findes der til hvert punkt $a \in X$ en åben omgn. $\mathcal{U}$ således at der på $\mathcal{U}$ findes en $\mathcal{O}$-homomorfi $\lambda' : \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}$ med $\lambda = \mu \circ \lambda'$

<u>Bevis</u>: Vi betragter basiselementerne $e_1, \dots, e_p$, $e_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$ i $\mathcal{O}^p$. Idet $\operatorname{Im}\lambda_a \subseteq \operatorname{Im}\mu_a$ findes der kim $\in \mathcal{A}_a$, som ved $\mu_a$ afbildes på kimen $\lambda_a(e_1), \dots, \lambda_a(e_p)$.

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\lambda'}{\dashrightarrow} & \mathcal{A} \\ & & \downarrow \mu \\ \mathcal{O}^p & \xrightarrow[\lambda]{} & \mathcal{B} \end{array}$$

Vi kan så vælge en åben mængde $U \subseteq X$ af $\underline{a}$, så der findes elementer $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{A}_U$, med

$$\mu_{\underline{a}}(\varphi_{j\underline{a}}) = \lambda_{\underline{a}}(e_j) \quad j = 1, \ldots, p$$

Dermed har vi

$$\mu_U(\varphi_j)_{\underline{a}} = \lambda_{\underline{a}}(e_j) = \lambda_U(e_j)_{\underline{a}}$$

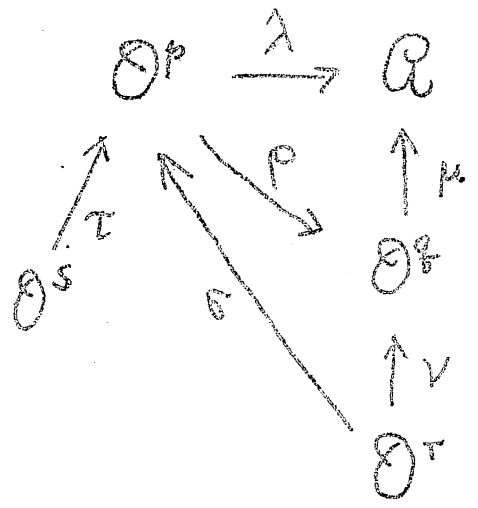
og derfinder derfor en åben omegn $U \subseteq V$ af $\underline{a}$, så $\mu_V(\varphi_j)$ og $\lambda_V(e_j)$ har samme restriktion til $U$.
Idet for $U$ definere $\lambda'$ så ved

$$e_j \longrightarrow \varphi_j\text{'s restriktion til } U$$

og vi får herved en $\mathcal{O}$-homomorfi med de ønskede egenskaber.

<u>Lemma 4.</u> *Hvis $\mathcal{A}$ er et kohærent analytisk kvippe og $\lambda : \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}$ en $\mathcal{O}$-homomorfi – begge dele over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$, da er $\operatorname{Ker}\lambda$ og $\operatorname{Im}\lambda$ kohærente analytiske kvipper over $X$.*

<u>Bevis:</u> Lad $\underline{a} \in X$. Idet $\mathcal{A}$ er kohærent findes der en surjektiv $\mathcal{O}$-homomorfi $\mu : \mathcal{O}^q \to \mathcal{A}$ på en omegn $U \subseteq X$ af $\underline{a}$. Så gælder $\operatorname{Im}\mu \supseteq \operatorname{Im}\lambda$ og ifølge Lemma 3 kan vi, hvis $U$ vælges tilstrækkelig lille finde en $\mathcal{O}$-homomorfi $\rho : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q$, så




$\lambda = \mu \circ \rho$ på $U$. Ifølge kohærensen af $\mathcal{Q}$ kan $\mu$ tænkes valgt, så $\operatorname{Ker}\mu$ er billedet ved en $\mathcal{O}$-homomorfi $\mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^q$ over $U$. Lemma 1 giver så, at $\operatorname{Ker}\mu \subseteq \mathcal{O}^q$ og $\operatorname{Im}\rho \subseteq \mathcal{O}^q$ er kohærente. Ifølge Lemma 2 er $\operatorname{Ker}\mu \cap \operatorname{Im}\rho$ dermed også kohærent (over $U$) og vælges $U$ evt. mindre, findes der dermed en $\mathcal{O}$-homomorfi $\nu: \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^q$, så $\operatorname{Im}\nu = \operatorname{Ker}\mu \cap \operatorname{Im}\rho$. Specielt gælder altså $\operatorname{Im}\nu \subseteq \operatorname{Im}\rho$ så lemma 3 giver en $\mathcal{O}$-homomorfi $\sigma: \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^p$ over $U$ (evt. ved $U$ gøres mindre), så $\nu = \rho \circ \sigma$.

Videre gælder, at $\operatorname{Ker}\rho \subseteq \mathcal{O}^p$ er kohærent iflg. lemma 1, så vi kan finde $\mathcal{O}$-homomorfi $\tau: \mathcal{O}^s \to \mathcal{O}^p$ med $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Ker}\rho$ (evt. mindre $U$).

Vi betragter nu $\mathcal{O}$-homomorfien

$$\sigma + \tau : \mathcal{O}^{r+s} \to \mathcal{O}^p,$$

defineret ved $(\sigma+\tau)(\varphi,\psi) = \sigma(\varphi) + \tau(\psi)$ $\varphi \in \mathcal{O}^r, \psi \in \mathcal{O}^s$

og påstår, at $\operatorname{Ker}\lambda = \operatorname{Im}(\sigma+\tau)$.

Vi har nemlig

$$\lambda \circ \tau = \mu \circ \rho \circ \tau = 0, \text{ da } Im\,\tau = Ker\,\rho$$

og $\lambda \circ \sigma = \mu \circ \rho \circ \sigma = \mu \circ \nu = 0$, da $Im\,\nu \subseteq Ker\,\mu$

altså $Im(\sigma+\tau) \subseteq Ker\,\lambda$.

Lad omvendt $\xi \in Ker\,\lambda_z$ (for et punkt $z \in U$)

Så er $0 = \lambda(\xi) = \mu(\rho(\xi))$

(for kortheds skyld udelades indekset $z$) og dermed

$$\rho(\xi) \in Im\,\rho \cap Ker\,\mu = Im\,\nu.$$

Der findes altså $\eta \in \mathcal{O}_z^r$, så

$$\nu(\eta) = \rho(\xi).$$

Dermed gælder

$$\rho(\xi - \sigma(\eta)) = \rho(\xi) - \rho(\sigma(\eta)) = \nu(\eta) - \nu(\eta) = 0$$

altså $\xi - \sigma(\eta) \in Ker\,\rho = Im\,\tau$.

Der findes altså $\zeta \in \mathcal{O}_z^s$ med

$$\tau(\zeta) = \xi - \sigma(\eta),$$

hvormed $\xi = \sigma(\eta) + \tau(\zeta) = (\sigma+\tau)(\eta,\zeta)$,

hvilket viser, at $Ker\,\lambda \subseteq Im(\sigma+\tau)$.

Den eksakte sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^{r+1} \xrightarrow{\sigma+\tau} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\lambda} Im\,\lambda \to 0$$

over $U$ viser så, at $Im\,\lambda$ er kohærent.

I $U$ har vi $ker\,\lambda = Im(\sigma+\tau)$, som er kohærent

ifølge lemma 1. Hermed er $\ker\lambda$ koherent i $X$ og lemma 4 er bevist.

Sætning: Hvis $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ er kohærente analytiske rumpper over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ og hvis $\lambda: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ er en $\mathcal{O}$-homomorfi over $X$, da er $\ker\lambda$ og $\operatorname{Im}\lambda$ kohærente analytiske rumpper.

Bevis: Lad $a \in X$. Idet $\mathcal{A}$ er koherent findes der da en surjektiv $\mathcal{O}$-homomorfi $\mu: \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}$ over en åben omegn $U$ af $a$. I $U$ gælder dermed $\operatorname{Im}\lambda = \operatorname{Im}(\lambda\circ\mu)$ og af lemma 4 følger, at $\operatorname{Im}\lambda$ er koherent over $U$. Dermed har vi vist koherensen af $\operatorname{Im}\lambda$.
Med de samme betegnelser har vi over $U$, at $\mathcal{C} = \ker(\lambda\circ\mu)$, $\lambda\circ\mu: \mathcal{O}^p \to \mathcal{B}$, er koherent ifølge lemma 4. Vi kan anvende det lige bevistе på $\mathcal{O}$-homomorfien

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}$$

over $U$. Dette viser, at $\mu(\mathcal{C}) = \ker\lambda$ (idet $\mu: \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}$ var surjektiv) er koherent i $U$ altså specielt i $a$. Hermed er sætningen bevist.

Sætning: Hvis $0 \to \mathcal{A}' \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{A}'' \to 0$ er en eksakt sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier og analytiske rumpper over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ gælder, at hvis to af rumpperne $\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}''$ er kohærente, da er også det tredje kohærent.

Bevis:

1° $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}''$ forudsat kohærente over $X$
Vi ser, at $\mathcal{O}$-homomorfien $i$ inducerer en $\mathcal{O}$-isomorfi mellem $\mathcal{A}'$ og $\ker j$, hvorfor påstanden følger af den foregående sætning.

2° $\mathcal{A}'$ og $\mathcal{A}$ forudsat kohærente over $X$.
Lad $a \in X$. Over en åben mængde $a \in U \subseteq X$ kan vi da finde en eksakt sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{A} \to 0$$

og en surjektiv $\mathcal{O}$-homomorfi $\mu : \mathcal{O}^r \to \mathcal{A}'$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}'' & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mu} & & \uparrow{\scriptstyle \lambda_1} & \nearrow{\scriptstyle \rho} & & & \\
 & & \mathcal{O}^r & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{O}^p & & & & \\
 & & & & \uparrow{\scriptstyle \lambda_2} & & & & \\
 & & & & \mathcal{O}^q & & & &
\end{array}$$

Idet $\operatorname{Im}\lambda_1 \supseteq \operatorname{Im}(i \circ \mu)$ kan vi ifølge lemma 3, idet $U$ evt. gøres mindre, finde en $\mathcal{O}$-homomorfi $\nu : \mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^p$ over $U$, så $\lambda_1 \circ \nu = i \circ \mu$. Vi sætter $\rho = j \circ \lambda_1$. Homomorfien $\rho$ er surjektiv, idet $\lambda_1$ og $j$ er surjektive. En lille diagram-chase viser dernæst, at $\ker \rho = \operatorname{Im}(\nu + \lambda_2)$, hvor

$$\nu + \lambda_2 : \mathcal{O}^{r+q} \to \mathcal{O}^p$$

defineres analogt til på side 299. Den eksakte sekvens

$$\mathcal{O}^{p+q} \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{O}^p \xrightarrow{\rho} \mathcal{A}' \to 0$$

af $\mathcal{O}$-homomorfier over $U$ viser så kohærensen af $\mathcal{A}''$.

3° $\mathcal{A}'$ og $\mathcal{A}''$ forudsat kohærente over $X$.

Lad $a \in X$. Over en åben omegn $U \subseteq X$ kan vi så finde surjektive $\mathcal{O}$-homomorfier $\lambda : \mathcal{O}^p \to \mathcal{A}'$, $\mu : \mathcal{O}^q \to \mathcal{A}''$. Idet $j$ er surjektiv, hvorfor $\operatorname{Im} j \supseteq \operatorname{Im} \mu$ kan vi så ifølge lemma 3 finde en $\mathcal{O}$-homomorfi $\beta : \mathcal{O}^q \to \mathcal{A}$ med $\mu = j \circ \beta$ (idet $U$ evt. vælges mindre). Vi sætter $\alpha = \rho \circ \lambda$ og definerer $\alpha + \beta : \mathcal{O}^{p+q} \to \mathcal{A}$. Idet $i' : \mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^{p+q}$ defineres som tilføjelse af $q$ nuller og $j' : \mathcal{O}^{p+q} \to \mathcal{O}^q$ som projektionen på de $q$ sidste komponenter, kan vi så et kommutativt diagram (af $\mathcal{O}$-homom. over $U$):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{A} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}'' & \to & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \lambda} & \nearrow{\scriptstyle \alpha} & \uparrow{\scriptstyle \alpha+\beta} & \nwarrow{\scriptstyle \beta} & \uparrow{\scriptstyle \mu} & & \\
0 & \to & \mathcal{O}^p & \xrightarrow{i'} & \mathcal{O}^{p+q} & \xrightarrow{j'} & \mathcal{O}^q & \to & 0
\end{array}$$

En lille diagram-chase viser, at $\alpha + \beta$ er surjektiv. En velkendt diagram-chase viser dernæst, at vi har en eksakt sekvens

$$0 \to \operatorname{Ker} \lambda \xrightarrow{\hat{i}} \operatorname{Ker}(\alpha+\beta) \xrightarrow{\hat{j}} \operatorname{Ker} \mu \to 0$$

af $\mathcal{O}$-homomorfier over $\mathcal{U}$, hvor $\tilde{\imath}$ og $\tilde{\jmath}$ er restriktioner af $\imath'$ og $\jmath'$. Ifølge lemma 4 er $\operatorname{Ker}\lambda$ og $\operatorname{Ker}\mu$ kohærente analytiske knipper over $\mathcal{U}$. Vi har derfor præcis udgangssituationen blot med knipper og homomorfier over $\mathcal{U}$ og det netop udførte viser så, at der findes en åben omegn $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ af $\underline{a}$ og over $\mathcal{V}$ en surjektiv $\mathcal{O}$-homomorfi

$$\mathcal{O}^{\tilde{p}+\tilde{q}} \xrightarrow{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} \operatorname{Ker}(\alpha+\beta) .$$

Hermed har vi en eksakt sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^{\tilde{p}+\tilde{q}} \xrightarrow{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} \mathcal{O}^{p+q} \xrightarrow{\alpha+\beta} \mathcal{A} \to 0$$

over $\mathcal{V}$, hvilket viser kohærensen af $\mathcal{A}$.

Q.E.D.

Vi bemærker, at der af 2° straks følger, at hvis $\mathcal{A}$ er et kohærent analytisk knippe over $X$, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$-delknippe, som ligeledes er kohærent over $X$, da er også kvotientknippet $\mathcal{A}/\mathcal{A}'$ kohærent over $X$.

Vi har tidligere (s. 247) defineret støtten af et knippe $\mathcal{A}$ over et topologisk rum $X$ ved

$$\operatorname{supp} \mathcal{A} = \overline{\{x \in X \mid \mathcal{A}_x \neq \{0\}\}} .$$

For kohærente analytiske knipper over en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ gælder specielle egenskaber om støtten:

**Sætning** Hvis $\mathcal{A}$ er et kohærent analytisk tensorprodukt over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$, da er mængden

$$\{z \in X \mid \mathcal{A}_z \neq \{0\}\}$$

afsluttet relativt til $X$ og derfor identisk med støtten $\operatorname{supp} \mathcal{A}$. Støtten $\operatorname{supp} \mathcal{A} \subseteq X$ er en analytisk mængde i $X$.

**Bevis:** Lad $a \in X$. Over en åben omegn $U \subseteq X$ af $a$ kan vi så en eksakt sekvens af $\mathcal{O}$-homomorfier

$$\mathcal{O}^r \xrightarrow{F} \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0 .$$

Man ser, at for $z \in U$ gælder $\mathcal{A}_z = \{0\}$ præcis når $F_z : \mathcal{O}_z^r \to \mathcal{O}_z^q$ er surjektiv. $\mathcal{O}$-homomorfien $F$ er beskrevet ved en matrix

$$\underline{F} = \{F_{ij}\}$$

af holomorfe funktioner i $U$ med $p$ rækker og $q$ søjler. Det afgørende er nu, at homomorfien $F_z$ er surjektiv netop når matricen $\underline{F}(z)$ af funktionsværdier i punktet $z$ har rangen $q$. Hvis $F_z$ er surjektiv kan vi nemlig finde $q$ elementer i $\mathcal{O}_z^p$, som ved $F_z$ afbildes på basiselementerne i $\mathcal{O}_z^q$. Skrives disse $q$ elementer i $\mathcal{O}_z^p$ som søjlerne i en matrix $\underline{Q}$ har vi dermed

$$\underline{F}_z \underline{Q} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

som en relation mellem kim i punktet $z$. For funktionsværdierne i $z$ gælder dermed $\underline{F}(z)\,\underline{Q}(z) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$, hvilket viser

at $\underline{E}(z)$ har rang $q$.

Hvis omvendt matricen $\underline{E}(z)$ har rang $q$ kan vi finde en matrix $\underline{S}$ (med konstante elementer) så

$$\underline{E}(z)\underline{S} = \begin{Bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{Bmatrix}.$$

Søjlerne i matricen $\underline{S}$ definerer $q$ kim af sæt af konstante funktioner og disse afbilder ved $F_z$ på kim

$$\varphi_1 = (\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1p})$$

$$\dots$$

$$\varphi_p = (\varphi_{p1}, \dots, \varphi_{pp})$$

hvor $\varphi_{jj}(z) = 1$, altså hvor $\varphi_{jj}$ er enhed. Enhver linearkombination af $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ med koefficienter fra $\mathcal{O}_z$ ligger dermed i billedet af $F_z$. Vi kan gange $\varphi_j$ med $1/\varphi_{jj}$, da $\varphi_{jj}$ er enhed og få herved elementer $\psi_j$ med kimet af 1 på den $j$'te plads. Herudfra kan basiselementerne få som linearkombinationer og dette viser, at $F_z$ er surjektiv.

Hvis vi lader $G_1, \dots, G_N$ betegne samtlige underdeterminanter af $\underline{E}$ af $q$'te orden - $G_1, \dots, G_N$ er herved holomorfe funktioner i $\mathcal{U}$ - kan vi herved

$$\mathcal{U} \cap \{z \in X \mid \mathcal{A}_z \neq \{0\}\} = \{z \in \mathcal{U} \mid G_1(z) = \dots = G_N(z) = 0\}$$

Heraf følger, idet hvert punkt $a \in X$ har en omegn $\mathcal{U}$ af den nævnte art, at mængden

$$\{z \in X \mid \mathcal{A}_z \neq \{0\}\}$$

er relativt afsluttet i $X$ og at den er en analytisk mængde i $X$, hvormed sætningen er bevist.

Vi kan straks drage en vigtig konsekvens:

Sætning: Hvis $\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}''$ er kohærente analytiske knipper og $\lambda: \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$, $\mu: \mathcal{A} \to \mathcal{A}''$ $\mathcal{O}$-homomorfier over en åben mængde $X \subseteq \mathbb{C}^n$ gælder følgende: Hvis sekvensen

$$\mathcal{A}'_a \xrightarrow{\lambda_a} \mathcal{A}_a \xrightarrow{\mu_a} \mathcal{A}''_a$$

er eksakt, hvor $a$ er et punkt i $X$, da findes en åben omegn $U \subseteq X$, så sekvensen

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{\lambda} \mathcal{A} \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}''$$

er eksakt over $U$.

Bevis: Vi ser først på det specielle tilfælde, hvor $\mathcal{A}'' = 0$. Forudsætningen er her, at $\lambda_a: \mathcal{A}'_a \to \mathcal{A}_a$ er surjektiv. Ifølge en tidligere sætning er billedet $\operatorname{Im}\lambda \subseteq \mathcal{A}$ et kohærent analytisk delknippe af $\mathcal{A}$, hvormed også kvotientknippet $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\operatorname{Im}\lambda$ er kohærent. Vi har $\mathcal{B}_a = \{0\}$. Den foregående sætning giver så, at der findes en åben omegn $U \subseteq X$ af $a$, så $\mathcal{B}_z = 0$ for $z \in U$. Heraf har vi, at $\lambda_z: \mathcal{A}'_z \to \mathcal{A}_z$ er surjektiv for $z \in U$, altså $\lambda$ er surjektiv over $U$.

Ved det almindelige tilfælde betragter vi først delknippet $\operatorname{Im}(\mu \circ \lambda) \subseteq \mathcal{A}''$. Her gælder

$$\operatorname{Im}(\mu \circ \lambda)_a = \operatorname{Im}(\mu_a \circ \lambda_a) = \{0\}$$

og idet $\operatorname{Im}(\mu \circ \lambda)$ er kohærent findes der derfor en åben omegn $V \subseteq X$ af $a$, så $\operatorname{Im}(\mu \circ \lambda) = \{0\}$ i $V$.

Over $V$ kan vi derved $\operatorname{Im}\lambda \subseteq \operatorname{Ker}\mu$ og vi kan derfor opfatte $\lambda$ som en homomorfi $\lambda' : \mathcal{E}' \to \operatorname{Ker}\mu$, når vi indskrænker os til $V$. Idet $\lambda'_a$ er surjektiv og $\operatorname{Ker}\mu$ koherent giver det for visse, at $\lambda'$ er surjektiv på en åben omegn $U \subseteq V \subseteq X$ af $a$, men det giver påstanden.

Hvis $X$ er en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ og $M$ en delmængde af $X$ kan vi (som allerede omtalt på side 274) definere et delkvippe $\mathcal{J}(M) \subseteq \mathcal{O}$ over $X$ ved

$$\mathcal{J}(M)_U = \{ f \in \mathcal{O}_U \mid f(z) = 0 \text{ for } z \in M \cap U \}$$

for hver åben mængde $U \subseteq X$. Det er umiddelbart, at $\mathcal{J}(M)$ er et analytisk kvippe. Idet $\overline{M} \cap U$ kan $M$ som tæt delmængde gælder $\mathcal{J}(\overline{M} \cap U) = \mathcal{J}(M)$, hvorfor vi i det følgende vil forudsætte, at M er afsluttet relativt til X. Der gælder da, at M præcis er nulstedet for kvotientkvippet $\mathcal{O}(M) = \mathcal{O}/\mathcal{J}(M)$. Hvis $z \in M$ kan vi nemlig $1 \notin \mathcal{J}(M)_z$ hvorfor $\mathcal{J}(M)_z \neq \mathcal{O}_z$, altså $\mathcal{O}(M)_z \neq \{0\}$, mens $z \notin M$ medfører (idet M er rel. afsl.) at der findes en åben omegn $U \subseteq X$ af $z$ med $U \cap M = \emptyset$, hvorfor $\mathcal{J}(M)_z = \mathcal{O}_z$ altså $\mathcal{O}(M)_z = \{0\}$.

Husk os, at idealkvippet $\mathcal{J}(M)$ for en rel. afsluttet delmængde $M \subseteq X$ kan kun være koherent over $X$, hvis $M$ er en analytisk mængde i $X$. Hvis $\mathcal{J}(M)$ er koherent er nemlig også $\mathcal{O}(M)$ koherent, hvorfor

$M = \operatorname{supp} \mathcal{O}(M)$ er en analytisk mængde i $X$.
Man kan bevise, at for enhver analytisk mængde $M \subseteq X$ er idealknippet $\mathcal{I}(M)$ kohærent. Vi vil dog ikke gå ind på det komplicerede bevis, som skyldes H. Cartan, men nøjes med et specielt, ærligt simpelt tilfælde.

Her til gør vi først en bemærkning af almen natur. <u>Hvis</u> $X$ <u>og</u> $Y$ <u>er åbne delmængder af</u> $\mathbb{C}^n$ <u>og</u> $\Phi : X \to Y$ <u>en biholomorf afbildning, da etablerer</u> $\Phi$ <u>en bijektiv korrespondance mellem analytiske knipper over</u> $X$ <u>og over</u> $Y$. For et knippe $\mathcal{A}$ over $X$ definerer vi nemlig knippet $\Phi_* \mathcal{A}$ over $Y$ ved $\Phi_* \mathcal{A}_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}_{\Phi^{-1}(\mathcal{U})}$ ($\mathcal{U}$ åben delmgd. af $Y$) og for et knippe $\mathcal{A}'$ over $Y$ defineres $\Phi_*^{-1} \mathcal{A}'$ over $X$ ved $\Phi_*^{-1} \mathcal{A}'_{\mathcal{U}} = \mathcal{A}'_{\Phi(\mathcal{U})}$ ($\mathcal{U}$ åben i $X$). Her kan $\Phi_*^{-1} \Phi_* \mathcal{A}$ på naturlig måde identificeres med $\mathcal{A}$ og $\Phi_* \Phi_*^{-1} \mathcal{A}'$ med $\mathcal{A}'$, hvorfor vi har den eventydige korrespondance.
For knippet $\mathcal{O}$ over $X$ kan $\Phi_* \mathcal{O}$ identificeres med $\mathcal{O}$ på $Y$, idet $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ ($\mathcal{U}$ åben i $Y$) svarer til $f \circ \Phi \in \mathcal{O}_{\Phi^{-1}(\mathcal{U})}$. Hermed kommer analytiske knipper over $X$ til at svare til analytiske knipper over $Y$ $\mathcal{O}$-homomorfier til $\mathcal{O}$-homomorfier, kohærente knipper til kohærente knipper etc.

Lad $X \subseteq \mathbb{C}^n$ være en åben mængde. En analytisk mængde $M \subseteq X$ i $X$ siges da at være <u>regulær</u>, eller

$M$ siges at være en <u>analytisk undermangfoldighed af $X$</u>, hvis der til hvert punkt $m \in M$ findes en åben omegn $\mathcal{U} \subseteq X$ af $m$ og en biholomorf afbildning

$$F : \mathcal{U} \longrightarrow P(0;r)$$

(hvor $P(0;r)$ er en åben polycylinder i $\mathbb{C}^n$ med koordinater $w_1, \dots, w_n$) således at der for et $k$, $1 \leq k \leq n$ gælder

$$F(M \cap \mathcal{U}) = \{ w \in P(0;r) \mid w_{k+1} = \dots = w_n = 0 \}$$

Et eksempel på en analytisk undermangfoldighed har vi ved de analytiske polyedre. For et analytisk polyeder $W$ med definerende ligninger

$$|z_1| < \rho_1, \dots, |z_n| < \rho_n, \; |f_1(z)| < \rho_{n+1}, \dots, |f_m(z)| < \rho_{n+m}$$

har vi den holomorfe afbildning

$$\Phi : W \longrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$$

hvor $(z_1, \dots, z_n) \longrightarrow (z_1, \dots, z_n, f_1(z), \dots, f_m(z))$.

<u>Billedmængden</u> $M = \Phi(W) \subseteq P(0;\rho) \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$ <u>er en analytisk undermangfoldighed af $P(0;\rho)$</u>. Hvis nemlig $m = (m_1, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_{n+m}) \in M$ findes en åben omegn $V \subseteq P(0;\rho)$ af $m$, så $f_1, \dots, f_m$ er definerede på hele $V$ ($V$ projiceres nemlig for $W$). Vi definerer en holomorf afbildning

$$F : V \longrightarrow \mathbb{C}^{n+m}$$

ved $(z_1, \ldots, z_{n+m}) \longrightarrow (w_1, \ldots, w_{n+m})$

hvor
$$w_1 = z_1 - m_1$$
$$\vdots$$
$$w_n = z_n - m_n$$
$$w_{n+1} = z_{n+1} - f_1(z_1, \ldots, z_n)$$
$$\vdots$$
$$w_{n+m} = z_{n+m} - f_m(z_1, \ldots, z_n)$$

Afbildningen $F$ afbilder åbenbart en åben mængde $U \subset V$ af formen

$$U = \{ |z_1 - m_1| < r_1, \ldots, |z_n - m_n| < r_n, |z_{n+1} - f_1(z)| < r_{n+1}, \ldots, |z_{n+m} - f_m(z)| < r_{n+m} \}$$

biholomorft på polycylinderen $P(0; r) \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$ og $M \cap U$ afbildes på den delmængde af $P(0; r)$, hvor $w_{n+1} = \ldots = w_{n+m} = 0$.

Q.E.D.

Vi bemærker nu.

<u>Sætning</u>: Hvis $X$ er en åben delmængde af $\mathbb{C}^n$ og $M$ en analytisk undermangfoldighed af $X$, da er idealknippet $\mathcal{J}(M) \subseteq \mathcal{O}$ et kohærent analytisk knippe over $X$.

<u>Bevis</u>: Lad $a \in X$. Hvis $a \notin M$ findes en åben mængde $U \subseteq X$ af $a$, så $U \cap M = \emptyset$. Indenfor $U$ har vi åbenbart $\mathcal{J}(M) = \mathcal{O}$ og den eksakte sekvens $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{O} \to 0$ viser kohærensen. Hvis $a \in M$ kan vi vælge omegn $U$ og biholomorf afbildning $F$ (se def. s. 209). Vi skal altså blot vise, at for mængden

$$N = \{ z \in P(0; \rho) \mid z_{k+1} = \ldots = z_n = 0 \} \subseteq P(0; \rho) \subseteq \mathbb{C}^n$$

gælder, at idealknippet $\mathcal{I}(N) \subseteq \mathcal{O}$ er koherent over $P(0;\rho)$. Hertil defineres en $\mathcal{O}$-homomorfi

$$\lambda : \mathcal{O}^{n-k} \to \mathcal{O}$$

ved

$$\lambda(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}) = z_{k+1}\varphi_1 + \dots + z_n \varphi_{n-k}$$

og vi påstår, at $\mathcal{I}(N) = \operatorname{Im}\lambda$. I et punkt $a$, som ikke ligger på $N$ er dette klart, idet en af $z_{k+1}, \dots, z_n$ da er en enhed i ringen $\mathcal{O}_a$, hvorfor $\operatorname{Im}\lambda_a = \mathcal{O}_a = \mathcal{I}(N)_a$. Lad $a \in N$ d.v.s. $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$. Det er klart, at $\operatorname{Im}\lambda_a \subseteq \mathcal{I}(N)_a$, idet $z_{k+1}, \dots, z_n$ er $0$ på $N$, hvormed $\lambda(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k})$ tilhører $\mathcal{I}(N)$. Lad nu $f_a \in \mathcal{I}(N)_a$, hvor $f_a$ er kimet af en holomorf funktion $f$ på en åben omegn $W$ af $a$. Vi kan tænke os $W$ som en polycylinder med centrum i $a$ og kan så udvikle $f$ i potensrække efter de variable $z_{k+1}, \dots, z_n$ (vi husker, at $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$)

$$f(z) = \sum_{\nu_{k+1}, \dots, \nu_n = 0}^{\infty} f_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}(z_1, \dots, z_k)\, z_{k+1}^{\nu_{k+1}} \cdots z_n^{\nu_n}$$

hvor $f_{\nu_{k+1} \dots \nu_n}$ er en hol. fkt af $z_1, \dots, z_k$. Forudsætningen $f_a \in \mathcal{I}(N)_a$ betyder, at $f(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ er identisk $0$ på en omegn af $a$. ($f$ er $0$ på $N$). Dette medfører åbenbart, at $f_{00\dots0}(z_1, \dots, z_k)$ er identisk $0$. Hvert led $\neq 0$ i potensrækken ideholder altså mindst en af $z_{k+1}, \dots, z_n$ i en potens $\geq 1$. Ved at splitte potens-

$$f(z) = z_{k+1}\,\varphi_1(z) + \cdots + z_n\,\varphi_n(z),$$

hvilket viser, at $f_a \in (\mathfrak{Im}\,\lambda)_a$, hvorved påstanden er bevist ved hjælp af lemma 1 (S. 295). Q.E.D.

---

— Og så nåede vi ikke mere. For anvendelser af hele det begrebsapparat vi her har indført henvises til lærebøgerne

Gunning & Rossi: Analytic funct. of several compl. var.

og Hörmander: An introd. to compl. anal. in ser. var.