Matematik 3, 1963–64

Hans Rischel

Mat 3, Kapitel IV: Differentialgeometri

Håndskrevne noter

Kap. IV Differentialgeometri

§ 1. Differentiabel kurve.

Lad $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$. En afbildning P af $]a,b[$ ind i det euklidiske rum E^3 kaldes en parameterfremstilling med parameterinterval $]a,b[$. Tænker man sig parameteren (d.v.s. den reelle variabel t) som tiden, kan en parameterfremstilling opfattes som en beskrivelse af en partikels bevægelse i rummet, idet partiklen til tidspunktet $t \in]a,b[$ befinder sig i punktet $P(t) \in E^3$. Vælges et ortonormalt koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i E^3 og sættes

$$\overrightarrow{OP(t)} = x_1(t)\,\underline{e}_1 + x_2(t)\,\underline{e}_2 + x_3(t)\,\underline{e}_3$$

beskriver de 3 koordinatfunktioner x_1, x_2 og x_3 bevægelsen i det valgte koordinatsystem.

P siges at være af klasse C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ hvis funktionerne x_1, x_2 og x_3 er af klasse C^k. Dette betyder for $k=0$ at de er kontinuerte, for $k>0$ at de har kontinuerte afledede af op til k-te orden. Denne egenskab ved P har en af valget af koordinatsystem uafhængig betydning (er altså en egenskab ved P selv). Er nemlig $(\hat{O}, \hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$ et andet ortonormalt koordinatsystem i E^3 og $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \hat{x}_3(t)$ koordinatfunktionerne for P i dette system, er $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ og $\hat{x}_3$ førstegradspolynomier med konstante koefficienter i x_1, x_2 og x_3 og følgelig også af klasse C^k.

Er $P:]a,b[\to E^3$ af klasse C^1 kan man definere den såkaldte <u>hastighed</u> eller hastighedsvektor ved

$$\underline{\dot{P}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{P(t)P(t+\Delta t)}$$

At denne grænsevektor eksisterer ser man ved at vælge et ortonormalt koordinatsystem i E^3. Man får da, at

$$\underline{\dot{P}}(t) = \dot{x}_1(t)\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2(t)\,\underline{e}_2 + \dot{x}_3(t)\,\underline{e}_3$$

hvor prikken betegner differentiation med hensyn til t. Længden $|\underline{\dot{P}}(t)|$ af hastigheden kaldes <u>farten</u>. Hastighed og fart afhænger åbenbart kontinuert af t.

En parameterværdi $t_0 \in]a,b[$ siges at være <u>regulær</u> for P (stadig vel af klasse C^1), hvis farten i t_0 er forskellig fra nul: $|\underline{\dot{P}}(t_0)| \neq 0$. P siges at være regulær, hvis enhver værdi $t \in]a,b[$ er regulær.

To parameterfremstillinger $P:]a,b[\to E^3$ og $Q:]c,d[\to E^3$ begge af klasse C^k kaldes <u>C^k-ækvivalente</u>, hvis der findes en voksende og bijektiv afbildning $\varphi:]c,d[\to]a,b[$ så såvel φ som den inverse afbildning φ^{-1} er af klasse C^k og så

$$Q = P \circ \varphi :]c,d[\to E^3 .$$

φ kaldes parameterskiftet fra P til Q.

Man eftervises let, at denne relation er en ækvivalensrelation i mængden af parameterfremstillinger af klasse C^k.

Ved en <u>orienteret kurve</u> K i rummet af klasse C^k forstås en ækvivalensklasse af parameterfremstillinger af klasse C^k. En repræsentant for klassen kaldes en <u>parameterfremstilling</u> for kurven. Det kan meget vel hænde at det samme punkt i rummet optræder svarende til flere forskellige parameterværdier (dobbeltpunkt). Et <u>kurvepunkt</u> på K er givet ved en parameterværdi t_0 og det tilhørende punkt $P(t_0)$ ved en parameterfremstilling af K. Kurvepunktet kaldes <u>regulært</u>, hvis t_0 er en regulær værdi for parameterfremstillingen P.

Sammen med kurven K har det hyppigt interesse at betragte den kurve K', hvis parameterfremstillinger fremgår af K's ved et aftagende parameterskift (d.v.s. φ aft. og bijektiv, φ og φ^{-1} af klasse C^k). K' kaldes kurven K forsynet med den <u>modsatte orientering.</u>

Indførelsen af begrebet <u>buelængde</u> er kendt fra Matematik I. Betegner K en orienteret kurve i rummet af klasse C^k ($k \geq 1$) og er $P:]a,b[\to E^3$ en parameterfremstilling for K, defineres buelængden $s(t_0,t)$ på K fra t_0 til t ved

$$s(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\underline{P}}(t)|\, dt$$

Det bemærkes, at buelængden herved automatisk regnes med fortegn i overensstemmelse med kurvens orientering. Funktionen $s(t_0,t) = s$ er af klasse C^k (dette ses ved at vælge et koordinatsystem), og

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{P}}(t)|$$

Farten er altså "den gennemløbne vejlængde pr tids=enhed".
Er K regulær, kan t udtrykkes som funktion af s $t = \varphi(s)$, og dette er åbenbart et tilladt parameterskift. $P \circ \varphi$ er da en parameterfrem=stilling af K, og den har den specielle egenskab, at <u>farten er konstant 1</u>. En parameterfremstil=ling af K med denne egenskab kaldes en <u>natür=lig parameterfremstilling</u> for K og den tilsvaren=de parameter (den "løbende variabel") en <u>natur=lig parameter</u>. Er s og $\tilde{s}$ naturlige parametre for K, er parameterskiftet fra $\tilde{s}$ til s af formen

$$\tilde{s} = s + \text{konstant}$$

Hastighedsvektoren ved en naturlig parameter=fremstilling er altså en enhedsvektor, den såkaldte tangentvektor $\underline{v}_1$. Den fremgår af hastighedsvek=toren for en vilkårlig parameterfremstilling ved normering.

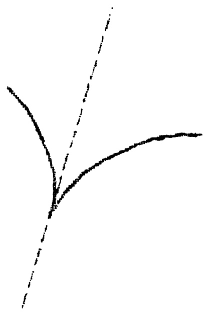
Af det ovenstående følger, at man i omegnen af et regulært punkt kan beskrive en kurve af klasse C^1 ved en naturlig parameter. Taylors formel giver da

$$\overrightarrow{P(s)P(s+\Delta s)} = \Delta s\, \underline{v}_1(s) + \Delta s\, \underline{\varepsilon}(s,\Delta s)$$

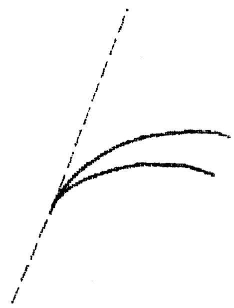
hvor $|\underline{\varepsilon}(s,\Delta s)| \to 0$ for $\Delta s \to 0$ (s fast).
Dette giver følgende oplysning om kurvens forløb i omegnen af det regulære punkt:

For små værdier forskellige fra 0 af Δs er punkterne $P(s)$ og $P(s+\Delta s)$ forskellige. Linien gennem $P(s)$ og $P(s+\Delta s)$ (sekanten) vil for Δs gående mod 0 nærme sig til den linie gennem $P(s)$, som indeholder tangentvektoren $\underline{v}_1(s)$. Denne linie kaldes som bekendt kurvens tangent i punktet $P(s)$.

En kurves forløb i omegnen af et singulært punkt (d.v.s. ikke regulært punkt) kan være kompliceret. Hvis ikke samtlige eksisterende højere afledede i punktet forsvinder, kan kurvens forløb diskuteres ved hjælp af Taylors formel. For plane kurver giver dette spidser af første eller anden art:

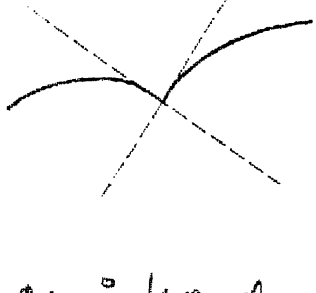


Spids af første art



Spids af anden art

En diskontinuitet i en af de højere afledede kan give anledning til et knæk på kurven:



Knæk

Det kan også hænde, at kurven forløber på samme måde som i omegnen af et regulært punkt.

1. Om en kurve K af klasse C^q i planen E^2 med parameterfremstilling $\underline{P}:]a,b[\to E^2$ vides for en parameterværdi $t_0 \in]a,b[$, at

$$\frac{d^r}{dt^r}\underline{P}(t_0) = \underline{0} \quad \text{for } r = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, q-1$$

og at

$$\underline{u} = \frac{d^p}{dt^p}\underline{P}(t_0) \quad \text{og} \quad \underline{v} = \frac{d^q}{dt^q}\underline{P}(t_0)$$

er lineært uafhængige, for et p med $0 < p < q$. Diskutér kurvens forløb for t i en omegn af t_0 (Inddél i tilfælde eftersom p og q er lige eller ulige).

2. Udled formler til bestemmelse af buelængden for en plan kurve, som er givet ved en parameterfremstilling i polære koordinater

$$\begin{aligned} r &= r(t) > 0 \\ v &= v(t) \end{aligned} \qquad a < t < b$$

3. En kurve i planen af klasse C^1 er i polære koordinater givet ved en parameterfremstilling med vinklen v som parameter

$$\begin{aligned} r &= r(v) \\ v &= v \end{aligned} \qquad a < v < b$$

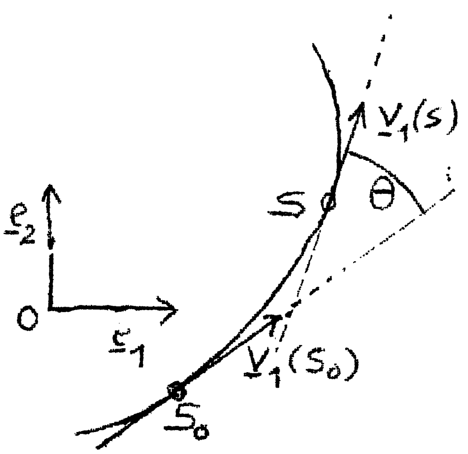
Det forudsættes, at $r(v) > 0$ i hele $]a,b[$. Vis, at der for vinklen μ fra radiusvektor til tangenten i et kurvepunkt gælder

$$\cot \mu = \frac{1}{r}\frac{dr}{dv}$$

(Indfør et retvinklet koordinatsystem i planen).

§ 2. Plane kurver.

Teorien fra §1 gælder selvfølgelig specielt for kurver i planen. Lad K betegne en orienteret regulær kurve af klasse C^2 i planen, s en naturlig parameter på K (K kan, da den er regulær, beskrives ved en sådan) og $\underline{v}_1(s)$ K's tangentvektor. En nærmere analyse af kurven får man da ved at studere tangentvektorens variation. Vi tænker os planen orienteret og et ortonormalt koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ valgt i overensstemmelse med orienteringen. Endvidere vælges et "udgangspunkt" s_0 på kurven. Der findes da et entydigt bestemt, af s kontinuert afhængigt, måltal $\theta(s)$ for vinklen fra $\underline{v}_1(s_0)$ til $\underline{v}_1(s)$, for hvilket $\theta(s_0) = 0$. $\theta(s)$ kaldes kurvens <u>tangentdrejning</u> regnet udfra s_0. Betegnes α vinklen fra $\underline{e}_1$ til $\underline{v}_1(s_0)$ er



$$\underline{v}_1(s) = (\cos(\theta(s)+\alpha), \sin(\theta(s)+\alpha)).$$

Heraf følger, at θ er differentiabel som funktion af s med kontinuert differentialkvotient, idet man lokalt har

$$\theta(s) = \operatorname{Arccos} v_{11}(s) + \text{konstant}$$

eller

$$\theta(s) = \operatorname{Arcsin} v_{12}(s) + \text{konstant}$$

idet $(v_{11}(s), v_{12}(s)) = \underline{v}_1(s)$.

Differentialkvotienten

$$\kappa(s) = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

kaldes kurvens krumning i det til parameterværdien s svarende kurvepunkt. Den bliver ifølge forudsætningerne en kontinuert funktion af s. Det ses, at krumningen er en geometrisk invariant, idet den ikke afhænger af valget af koordinatsystem og heller ikke af valget af naturlig parameter og udgangspunkt. Derimod vil en overgang til den modsatte orientering af planen bevirke, at krumningen skifter fortegn. Det samme sker, hvis man skifter orienteringen på kurven.

Vektoren $\underline{v}_2(s)$, som fremgår af $\underline{v}_1(s)$ ved en drejning på $+\frac{\pi}{2}$ (i overensstemmelse med planens orientering) kaldes kurvens normalvektor. Den linie gennem $P(s)$, som indeholder $\underline{v}_2(s)$, kaldes kurvens normal i $P(s)$. Af koordinatformlerne

$$\underline{v}_1(s) = \left(\cos(\theta(s)+\alpha), \sin(\theta(s)+\alpha) \right)$$

$$\underline{v}_2(s) = \left(-\sin(\theta(s)+\alpha), \cos(\theta(s)+\alpha) \right)$$

får man ved differentiation Frenet's formler

$$\boxed{\frac{d}{ds}\underline{v}_1 = \kappa\,\underline{v}_2 \qquad \frac{d}{ds}\underline{v}_2 = -\kappa\,\underline{v}_1 .}$$

Ved hjælp heraf kan samtlige eksisterende højere afledede (d.v.s. afledede af $\underline{v}_1$) på simpel måde udtrykkes ved $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ samt κ og dennes afledede.

Ved opgaver er det ofte bekvemt at have en færdig formel for krumning af en kurve, som i retvinklede koordinater er givet ved en parameterfremstilling,

som ikke nødvendigvis er en naturlig parameterfremstilling. Vi vil derfor udlede en sådan formel.
Lad altså

$$x_1 = x_1(t)$$
$$x_2 = x_2(t)$$

være en parameterfremstilling af klasse C^2 i sædvanlige retvinklede koordinater i planen. Tangentvektoren er da givet ved

$$\underline{v}_1(t) = [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{-\frac{1}{2}}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

og normalvektoren følgelig ved

$$\underline{v}_2(t) = [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{-\frac{1}{2}}(-\dot{x}_2, \dot{x}_1).$$

Endvidere gælder

$$\frac{ds}{dt} = [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{\frac{1}{2}}$$

for enhver naturlig parameter s.
Ifølge Frenet's formler er $\kappa = \underline{v}_2 \cdot \frac{d}{ds}\underline{v}_1$

$$= \left(1/\frac{ds}{dt}\right)\underline{v}_2 \cdot \frac{d}{dt}\underline{v}_1$$

hvoraf vi får den ønskede formel:

$$\kappa = \frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1}{[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{3/2}}.$$

Størrelsen $\rho(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}$

som er defineret i punkter, hvor $\kappa(s) \neq 0$, kaldes kurvens <u>krumningsradius</u> i $P(s)$, og punktet $Q(s)$, som er fastlagt ved

$$\overrightarrow{P(s)\,Q(s)} = \rho(s)\,\underline{V}_2(s)$$

kaldes <u>krumningscentret</u> i punktet $P(s)$. Det ses let, at krumningscentret forbliver uændret, selvom der skiftes orientering i planen eller på kurven. Cirklen gennem $P(s)$ med centrum $Q(s)$ kaldes kurvens <u>krumningscirkel</u> i punktet $P(s)$. Dens betydning fremgår af følgende:

<u>Er $\kappa(s_0) \neq 0$ vil punktet $P(s_0+\Delta s)$ for små værdier forskellige fra 0 af $|\Delta s|$ ikke ligge på tangenten gennem $P(s_0)$. Cirklen gennem $P(s_0+\Delta s)$ og $P(s_0)$, som i $P(s_0)$ har samme tangent som kurven, vil for Δs gående mod nul nærme sig til kurvens krumningscirkel i $P(s_0)$</u>

Bevis: Ved hjælp af Taylors grænseformel og den første af Frenets formler får vi

$$\overrightarrow{P(s_0)\,P(s_0+\Delta s)} = \Delta s\,\underline{V}_1 + \tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2\underline{V}_2 + (\Delta s)^2\underline{\varepsilon}(\Delta s)$$

hvor $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| \to 0$ for $\Delta s \to 0$. For kortheds skyld har vi skrevet $\underline{V}_1, \underline{V}_2$, κ og $\underline{\varepsilon}(\Delta s)$ i stedet for $\underline{V}_1(s_0)$, $\underline{V}_2(s_0)$, $\kappa(s_0)$ og $\underline{\varepsilon}(s_0,\Delta s)$. For $|\Delta s|$ tilstrækkelig lille er da $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| < \frac{1}{2}|\kappa|$, og $P(s_0+\Delta s)$ ligger da ikke på tangenten i $P(s_0)$. Cirklen gennem $P(s_0+\Delta s)$, som tangerer kurven i $P(s_0)$ eksisterer da, og dens centrum $Q(\Delta s)$ vil ligge et sted på kurvens normal i $P(s_0)$. Vi har altså

$$\overrightarrow{P(s_0)\,Q(\Delta s)} = \rho(\Delta s)\,\underline{V}_2$$

hvor $|\rho(\Delta s)|$ er cirklens radius. Der gælder altså

$$|\overrightarrow{Q(\Delta s)P(s_0+\Delta s)}|^2 = |\rho(\Delta s)|^2 .$$

Idet

$$\overrightarrow{Q(\Delta s)P(s_0+\Delta s)} = \Delta s \underline{v}_1 + \left(\tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2 - \rho(\Delta s)\right)\underline{v}_2 + (\Delta s)^2 \underline{\varepsilon}(\Delta s)$$

får vi

$$(\Delta s)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2 - \rho(\Delta s)\right)^2 + (\Delta s)^4 |\underline{\varepsilon}(\Delta s)|^2$$
$$+ \Delta s^3\, \underline{v}_1 \cdot \underline{\varepsilon}(\Delta s) + 2\left(\tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^3 - \rho(\Delta s)(\Delta s)^2\right) \underline{v}_2 \cdot \underline{\varepsilon}(\Delta s)$$
$$= (\rho(\Delta s))^2$$

hvoraf følger, at

$$(\Delta s)^2 - \rho(\Delta s)\,[\kappa + \varepsilon_1(\Delta s)]\,(\Delta s)^2 = (\Delta s)^2\, \varepsilon_2(\Delta s)$$

hvor $\varepsilon_1(\Delta s)$ og $\varepsilon_2(\Delta s)$ går mod 0 for Δs gående mod 0. Ved division med $(\Delta s)^2$ får vi da, at

$$\rho(\Delta s) = \frac{1}{\kappa + \varepsilon_1(\Delta s)} + \varepsilon_3(\Delta s)$$

hvor $\varepsilon_3(\Delta s) \to 0$ for $\Delta s \to 0$, hvilket viser det ønskede:

$$\rho(\Delta s) \to \frac{1}{\kappa} = \rho \quad \text{for } \Delta s \to 0.$$

<u>Den plane kurveteoris hovedsætning:</u>

<u>Givet et interval $]a,b[\, \subseteq \mathbb{R}$, en i $]a,b[$ kontinuert reel funktion φ samt et tal $s_0 \in\,]a,b[$. Til opgivet punkt P_0 og enhedsvektor $\underline{a}$ i en orienteret plan findes der da en og kun en regulær orienteret kurve af klasse C^2 med en parameter-</u>

fremstilling $P(s)$ med $]a, b[$ som parameterinterval, således at

$P(s_0) = P_0$
s er en naturlig parameter på kurven
$\underline{v}_1(s_0) = \underline{a}$
$\kappa(s) = \varphi(s)$ for ethvert $s \in]a, b[$, hvor $\kappa(s)$ betegner kurvens krumning

Bevis: Vi vælger et ortonormalt koordinatsystem i planen (i overensstemmelse med orienteringen). Punktet P_0 og vektoren $\underline{a}$ har da visse koordinater i dette system

$$P_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \,, \quad \underline{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \,.$$

Lad nu $P(s)$ være en parameterfremstilling, som tilfredsstiller de stillede krav. $P(s)$ vil da beskrives i koordinaterne ved

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s) \\ x_2 &= x_2(s) \end{aligned} \qquad a < s < b$$

hvor $x_1(s)$ og $x_2(s)$ er funktioner af klasse C^2 i $]a, b[$. Betegner $\theta(s)$ tangentdrejningen ud fra s_0 på den ved $P(s)$ fremstillede kurve, har man

$$\frac{d\theta}{ds} = \varphi(s) \quad \text{og} \quad \theta(s_0) = 0$$

altså

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \varphi(t)\,dt \,.$$

Da s er en naturlig parameter på kurven, er

$$\underline{v}_1 = ({}^{dx_1}/_{ds}, {}^{dx_2}/_{ds})$$

På den anden side er

$$\underline{V}_1(s) = (\cos(\theta(s)+\alpha), \sin(\theta(s)+\alpha)),$$

hvoraf vi får

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos(\theta(s)+\alpha) \qquad \frac{dx_2}{ds} = \sin(\theta(s)+\alpha)$$

altså

$$(*) \quad \begin{aligned} x_1(s) &= x_1^{(0)} + \int_{s_0}^{s} \cos\left\{ \int_{s_0}^{t} \varphi(u)\,du + \alpha \right\} dt \\ x_2(s) &= x_2^{0} + \int_{s_0}^{s} \sin\left\{ \int_{s_0}^{t} \varphi(u)\,du + \alpha \right\} dt \end{aligned}$$

da $(x_1(s_0), x_2(s_0)) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.
Hermed er entydigheden bevist.

For at vise eksistensen betragter vi den ved formlerne $(*)$ definerede parameterfremstilling. Da φ er kontinuert, er denne af klasse C^2, og vi får umiddelbart at der gælder

$$(x_1(s_0), x_2(s_0)) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}\right) = (\cos(\alpha+\psi(s)), \sin(\alpha+\psi(s)))$$

$$\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}, \frac{dx_2}{ds^2}\right) = \varphi(s)(-\sin(\alpha+\psi(s)), \cos(\alpha+\psi(s)))$$

hvor $$\psi(s) = \int_{s_0}^{s} \varphi(u)\,du.$$

Den første af disse formler viser, at $P(s_0) = P_0$. Af den anden ses, at $\dot{\underline{P}}(s) = (dx_1/ds, dx_2/ds)$ er en enhedsvektor. $P(s)$ er altså regulær i hele $]a,b[$ og s er en naturlig parameter på den ved $P(s)$ fremstillede kurve. Endelig viser den hedie, at $\kappa(s) = \varphi(s)$ for ethvert $s \in]a, b[$.

Hermed er sætningen bevist.

Krumningen κ som funktion af en naturlig parameter beskriver ifølge den ovenstående sætning en kurves udseende fuldstændigt pånær dens beliggenhed i planen. En sådan relation kaldes derfor en <u>naturlig ligning</u> for kurven.

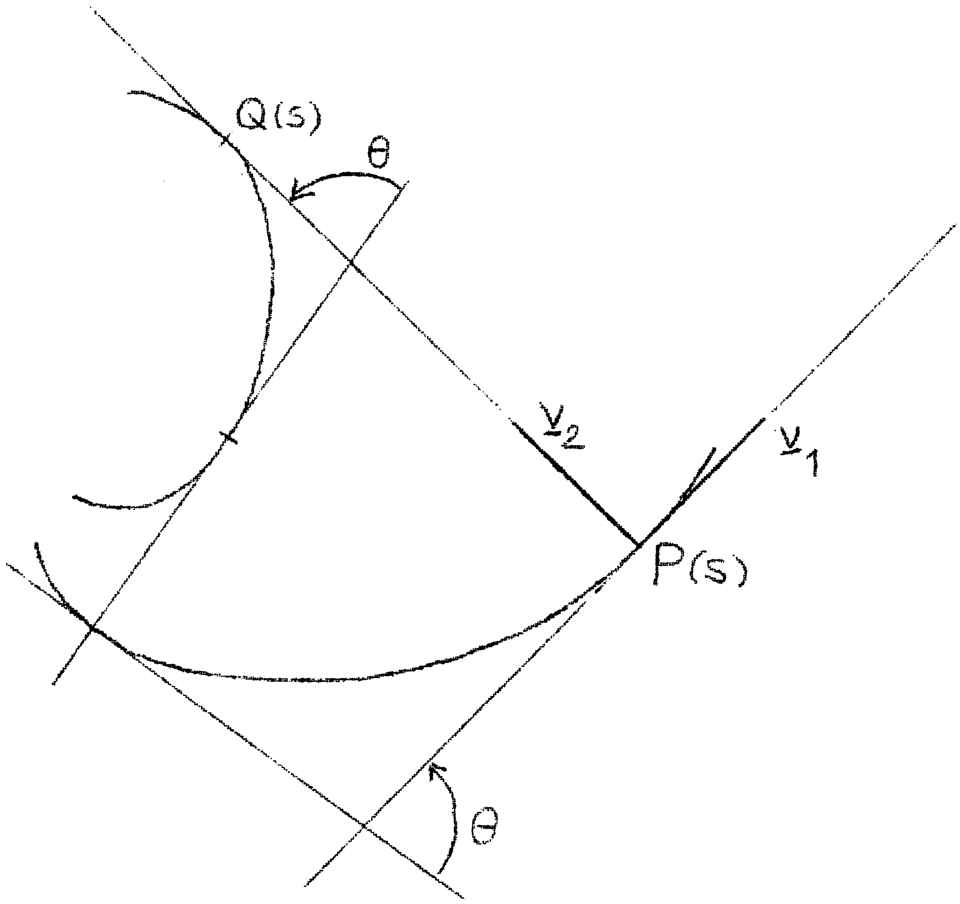
Lad K være en singularitetsfri kurve af klasse C^2 og $P(s)$ en naturlig parameterfremstilling for K. I et ethvert delinterval af parameterintervallet, hvor κ ikke bliver 0, vil krumningscentret da beskrive en kurve. Samlingen af disse kurver kaldes den givne kurves <u>evolut</u>. I det følgende antages det, at K er af klasse C^4 og at krumningen $\kappa(s)$ af K ikke antager værdien 0. Evolutten har da parameterfremstillingen $Q(s)$, hvor

$$\overrightarrow{P(s)\,Q(s)} = \rho(s)\,\underline{v}_2(s)$$

Da $P(s)$ har hastigheden $\underline{v}_1$, får vi ved den anden af Frenet's formler, at $Q(s)$ har hastigheden

$$\underline{\dot{Q}}(s) = \frac{d\rho}{ds}\,\underline{v}_2(s) .$$

Evolutten er altså en kurve af klasse C^2, og har



kun singulariteter i punkter, svarende til værdier af s, for hvilke $d\rho/ds = 0$. Vi antager i det følgende yderligere, at $d\rho/ds \neq 0$ i hele intervallet. Med et passende valg af orientering i planen og med passende valgt gennemløbsretning af kurven kan man da opnå, at ρ og $d\rho/ds$ er positive. Skifter man nemlig orientering i planen eller på kurven vil ρ skifte fortegn. Ved et samtidigt orienteringsskift på plan og kurve vil ρ derimod bevare sit fortegn, mens fortegnet på $d\rho/ds$ ændres. Vi kan tillade os at vælge orienteringerne frit, da krumningscentret Q, og dermed evoluten (pånær dens gennemløbsretning) er bestemt uafhængigt af orienteringerne.

Af formlen

$$\underset{\circ}{\underline{Q}}(s) = \frac{d\rho}{ds}\,\underline{V}_2(s)$$

ser man da, at ρ er en naturlig parameter på evolutten, og at $\underline{V}_2(s)$ er evoluttens tangentvektor. Evoluttens tangent er altså netop den givne kurves normal i det tilsvarende punkt. De to kurver har derfor den samme tangentdrejning θ i tilsvarende punkter regnet ud fra tilsvarende punkter. Endvidere ses, at den givne kurve fremkommer ud fra evolutten på følgende måde: Man vælger en naturlig parameter s^* (nemlig $s^* = \rho$) for evolutten, og afsætter stykket s^* ud ad den negative halvtangent fra det til s^* svarende punkt. Man siger derfor, at kurven er en <u>afvikler</u> eller <u>evolvent</u> af sin evolut.

For evoluttens krumning får vi

$$\kappa^* = \frac{d\theta}{d\rho}$$

og dermed krumningsradius

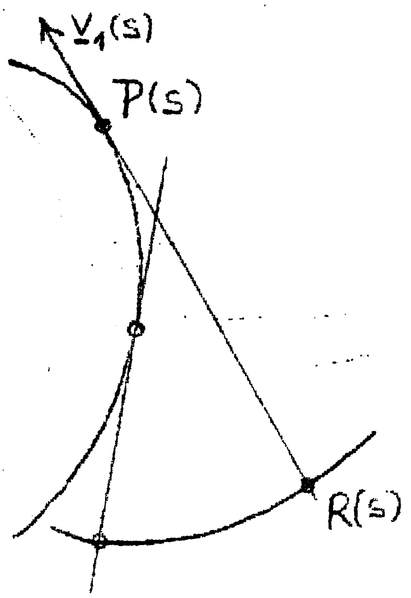
$$\underline{\rho^* = \frac{d\rho}{d\theta}}$$

Kendes krumningsradius ρ af K som funktion af tangentdrejningen (ud fra et fast punkt), kan man altså bestemme en naturlig ligning for K's evolut (krumningsradius som funktion af en naturlig parameter), idet man ved den ovenstående formel finder ρ^* som funktion af θ og heri substituerer θ som funktion af ρ (ρ var

~~jo en naturlig parameter~~ på evolutten.

Punkter, hvori $d\rho/ds = 0$, vil som tidligere nævnt svare til singulære punkter på evolutten. Sædvanligvis bliver singulariteten en spids.

Vi vil nu omvendt gå ud fra en kurve og undersøge dens afviklere. Lad K være en orienteret og singularitetsfri kurve af klasse C^3 i en orienteret plan og $P(s)$ en naturlig parameterfremstilling for K.



Afsætter man for hvert s stykket s udfra $P(s)$ i den negative tangentretning (d.v.s. i modsat retning af $\underline{V}_1(s)$) til punktet $R(s)$, vil $R(s)$ beskrive en kurve, som kaldes en <u>afvikler</u> eller <u>evolvent</u> af K. (Anskueligt beskrives en afvikler af et punkt på en snor, som lægges stramt over kurven og derefter vikles af den). Da en vilkårlig anden naturlig parameter $\tilde{s}$ for K fås ud fra s ved addition af en konstant, fås enhver anden afvikler af K ved for ethvert s at afsætte samme konstante stykke udfra $R(s)$ i K's tangentretning.

Idet

$$\overrightarrow{P(s)R(s)} = -s\cdot\underline{V}_1(s)$$

er hastigheden på afvikleren

$$\dot{\underline{R}}(s) = -s\,\kappa(s)\,\underline{V}_2(s) - \underline{V}_1(s) + \dot{\underline{P}}(s)$$
$$= -s\,\kappa(s)\,\underline{V}_2(s).$$

Afviklerén er altså en kurve af klasse C^2 og regulær i alle punkter, hvor $s\kappa(s) \neq 0$. I ethvert interval, hvor $s\kappa(s) \neq 0$ kan vi da slutte af den ovenstående formel, at afviklerens normal er den givne kurves tangent i det tilsvarende punkt. Endvidere er afviklerens tangentvektor $-\underline{V}_2$ og normalvektoren derfor $\underline{V}_1$ hvis $s\kappa(s)$ er positiv. Er $s\kappa(s)$ negativ er tangentvektoren $\underline{V}_2$ og normalvektoren $-\underline{V}_1$.
Betegner s^* en naturlig parameter på afviklerén, er

$$\frac{ds^*}{ds} = |s\,\kappa(s)|$$

Af Frenets anden formel for kurven K, får man da

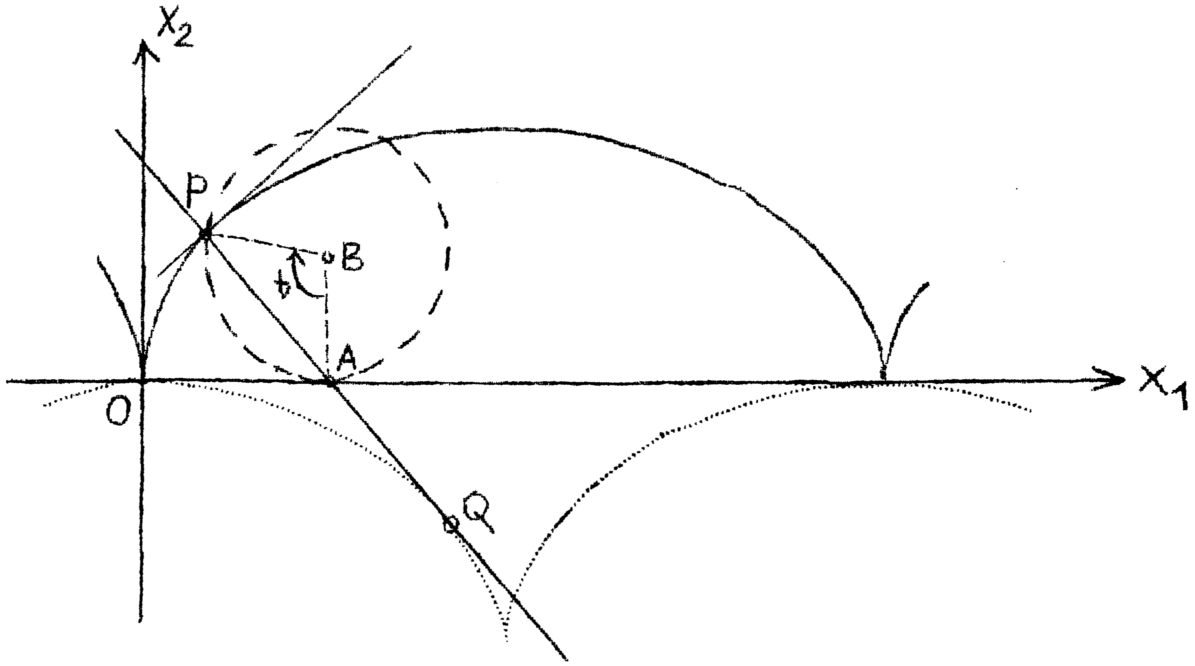
$$\frac{d\underline{V}_2}{ds^*} = -\frac{\kappa(s)}{|s\,\kappa(s)|}\,\underline{V}_1$$

og dermed afviklerens krumning:

$$\kappa^* = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{når } s\kappa(s) > 0 \\ -\frac{1}{s} & \text{når } s\kappa(s) < 0 \end{cases}$$

I begge tilfælde vil gælde, at afviklerens krumningscenter i $R(s)$ netop er $P(s)$. <u>En kurve er altså evolut for enhver af sine afviklere.</u>

Som et eksempel på en plan kurve betragter vi den sædvanlige cykloide. Denne er den kurve, som beskrives af et fast punkt på periferien af en cirkel (med radius $a>0$), som ruller hen ad en ret linie. Vi vælger denne linie som x_1-akse og x_2-aksen, således at $(0,0)$ bliver et punkt på kurven, og således at denne kommer til at ligge i halvplanen $x_2 \geqq 0$.



Drejningsvinklen t bruges som parameter. Der gælder

$\overrightarrow{OA} = (at, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (0, a)$ og

$\overrightarrow{BP} = (-a\sin t, -a\cos t)$

idet vektoren $\overrightarrow{BP}$ fremgår af $\overrightarrow{BA} = (0,-a)$ ved en drejning på $-t$. Kurvens parameterfremstilling med parameteren t er altså

$$x_1 = at - a\sin t$$
$$x_2 = a - a\cos t \qquad -\infty < t < \infty$$

Heraf ses, at kurven er af klasse C^∞. Endvidere ses, at en parallelforskydning på $2\pi a$ i x_1-aksens retning vil føre kurven over i sig selv, idet

$$x_1(t+2\pi) = x_1(t) + 2\pi a \quad \text{og} \quad x_2(t+2\pi) = x_2(t).$$

Kurven er symmetrisk om linien $x_1 = \pi a$, idet

$$x_1(\pi + t) - a\pi = a\pi - x_1(\pi - t)$$

og $$x_2(\pi+t) = x_2(\pi - t)$$

Hastighedens koordinater fås ved differentiation

$$\dot{x}_1 = a - a\cos t = 2a\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\dot{x}_2 = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

Farten $|2a\sin\frac{t}{2}|$ bliver 0 netop for $t = 2p\pi$ d.v.s. i punkterne $(2p\pi a, 0)$, $p \in \mathbb{Z}$, som følgelig er kurvens singulære punkter.

I det følgende undersøges kurven i parameterintervallet $0 \leq t \leq 2\pi$. I dette interval er $|2a\sin\frac{t}{2}| = 2a\sin\frac{t}{2}$ og for buelængden udfra punktet $(\pi a, 2a)$, svarende til $t = \pi$, får vi da

$$s = \int_{\pi}^{t} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}.$$

Buen mellem $(0,0)$ og $(2\pi a, 0)$ har altså længden $8a$. For $0 < t < 2\pi$ er kurven regulær, og tangentvektoren er

$$\underline{v}_1(t) = \left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}\right)$$

Kurvens normal i P går altså gennem røringspunktet A for cirklen i den til P hørende stilling.

Tangentvektoren i $t=\pi$: $(a\pi, 2a)$ er $(1,0)$, og tangentdrejningen regnet ud fra $t=\pi$ bliver derfor

$$\theta = \frac{1}{2}(\pi - t)$$

Heraf fås krumningen

$$\kappa = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}$$

og krumningsradius

$$\rho = -4a\sin\frac{t}{2}$$

(Dette kunne man selvfølgelig også finde ved direkte at indsætte i den færdige formel for krumningen)
Da $PA = 2a\sin\frac{t}{2}$ følger heraf, at krumningscentret er det symmetriske punkt til P med hensyn til A.
Af det ovenstående får vi også direkte en naturlig ligning for den til $0<t<2\pi$ svarende bue af cykloiden:

$$\rho = -\sqrt{16a^2 - s^2}, \quad -4a < s < 4a.$$

Heraf fås $\frac{d\rho}{ds} = \frac{s}{\sqrt{16a^2-s^2}}$

Evolutten har altså en singularitet for $s=0$. Vi kan nu undersøge evolutten til stykket $-4a<s<0$.
I dette interval gælder $\rho<0$ og $d\rho/ds<0$.
Vender vi planens orientering bliver såvel ρ som $d\rho/ds$ positive og cykloidebuen har da naturlig ligning

$$\rho = \sqrt{16a^2 - s^2}$$

Med den nye orientering har man for denne bue:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(t-\pi) \qquad\qquad -\tfrac{\pi}{2} < \theta < 0$$

$$0<t<\pi$$

$$\rho = 4a\sin\tfrac{t}{2} \qquad\qquad 0<\rho<4a$$

Altså

$$\rho = 4a\cos\theta$$

For evolutten får vi da

$$\rho^* = -4a\sin\theta = |4a\sin\theta| = \sqrt{16a^2-\rho^2},$$

da θ løber i intervallet $]-\tfrac{\pi}{2}, 0[$. Dette stykke af evolutten har altså en naturlig ligning

$$\rho^* = \sqrt{16a^2-\rho^2}\quad, \quad 0<\rho<4a\,.$$

Denne er imidlertid identisk med den naturlige ligning for den til $\pi<t<2\pi$ svarende bue af cykloiden. Af kurveteoriens hovedsætning følger da, at evolutten af den til $0<t<\pi$ svarende cykloidebue er kongruent med den til $\pi<t<2\pi$ svarende cykloidebue.
Cykloidens symmetriegenskaber må genfindes hos evolutten. Det følger da heraf, at evolutten består af stykker af den cykloide gennem $(0,0)$, som fremkommer af en punkt på en cirkel med radius a, som ruller på linien $x_2 = -2a$.

Undersøgelsen af evolutten kan selvfølgelig også gennemføres ved koordinatregning. Idet normalvektoren er

$$\underline{v}_2(t) = \left(-\cos\tfrac{t}{2},\ \sin\tfrac{t}{2}\right)$$

for $0<t<2\pi$, får man som parameterfremstilling af dette stykke af evolutten

$$x_1 = at - a\sin t - 4a\sin\tfrac{t}{2}\cdot(-\cos\tfrac{t}{2})$$
$$x_2 = a - a\cos t - 4a\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{t}{2} \qquad 0<t<2\pi$$

altså

$$x_1 = at + a\sin t$$
$$x_2 = -a + a\cos t \qquad 0<t<2\pi$$

eller

$$x_1 - a\pi = a(t-\pi) - a\sin(t-\pi)$$
$$x_2 + 2a = a - a\cos(t-\pi) \qquad -\pi < t-\pi < \pi$$

hvilket igen viser, at evolutten er kongruent med den oprindelige kurve.

For at undersøge cykloidens forløb i omegnen af det singulære punkt $(0,0)$ rækkeudvikler vi

$$x_1 = at - a\sin t = \tfrac{1}{6}at^3 + t^3\varepsilon_1(t)$$
$$x_2 = a - a\cos t = \tfrac{1}{2}at^2 + t^2\varepsilon_2(t)$$

hvor ε_1 og $\varepsilon_2 \to 0$ for $t \to 0$. Det slutter heraf, at der for tilstrækkeligt små værdier af $|t|$ gælder

$$\begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \text{ for } t>0 \quad \text{og} \quad \begin{matrix} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \text{ for } t<0 .$$

Endvidere at linien gennem $(0,0)$ og $P(t)$ for $t \to 0$ har x_2-aksen som grænsestilling, idet $x_1/x_2 \to 0$ for $t \to 0$. Kurven har altså en spids af første art i $(0,0)$.

Mat. 3, 1963-64 $\qquad$ IV, 2, øv. 1-2

1. I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen betragtes kurven (kædelinien) givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = t \qquad\qquad -\infty < t < \infty$$
$$x_2 = a \cosh \frac{t}{a}$$

hvor a er en positiv konstant.
Find buelængden s regnet ud fra $(0, a)$ som funktion af t og opskriv en naturlig parameterfremstilling for kurven.
Find en naturlig ligning for kurven og vis, at ethvert kurvepunkt halverer liniestykket mellem krumningscentret og normalens skæringspunkt med x_1-aksen.
Kædelinien afvikles udfra $(0, a)$, d.v.s. svarende til den naturlige parameter, som er 0 i dette punkt, hvorved en ny kurve (traktricen) fremkommer. Find en naturlig ligning for traktricen, og vis at enhver tangent til denne afskærer et liniestykke af længde a mellem røringspunktet og x_1-aksen.

2. En plan kurve, den logaritmiske spiral, er i plane polære koordinater (r, v) givet ved

$$r = a e^{bv}, \quad -\infty < v < \infty,$$

hvor a og b er positive konstanter.
Vis, at kurvens tangent danner en konstant vinkel med radiusvektor.

Find en naturlig ligning for kurven, og vis, at krumningscentret i et vilkårligt kurvepunkt er skæringspunktet mellem kurvens normal og den vinkelrette på radiusvektor i begyndelsespunktet. Vis herved, at kurvens evolut er ligedannet med den selv.

3. En plan kurve (arkimedes' spiral) er i sædvanlige retvinklede koordinater i planen givet ved parameterfremstillingen:

$$x_1 = t\cos t \qquad -\infty < t < \infty$$
$$x_2 = t\sin t$$

Find buelængde og tangentdrejning regnet ud fra (0,0) som funktioner af t.
Bestem kurvens krumning som funktion af t.
Idet O betegner begyndelsespunktet (0,0) og P det til en parameterværdi $t>0$ hørende kurvepunkt, skal man vise følgende: Kurvens normal i P vil skære den vinkelrette på OP gennem O i et punkt A, således at $OA = 1$.
Idet B betegner skæringspunktet mellem linien gennem A, parallel med tangenten i P, og linien gennem P, vinkelret på OP, vil OB skære AP i det til P svarende krumningscentrum Q for kurven.

4. En ellipse er i sædvanlige retvinklede koordinater givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = a\cos t \qquad -\infty < t < \infty$$
$$x_2 = b\sin t$$

hvor halvakserne a og b er positive konstanter.

Find ellipsens krumning og krumningsradius som funktioner af t.
Vis, at krumningen i et punkt af ellipsen er proportional med tredie potens af afstanden fra centrum $(0,0)$ til tangenten i det betragtede punkt.
Vis endvidere, at linien gennem (a,b), vinkelret på linien gennem toppunkterne $(a,0)$ og $(0,b)$, vil skære x_1- og x_2-aksen i ellipsens krumningscentre, svarende til punkterne $(a,0)$ og $(0,b)$.

5. En differentiabel kurve K i en orienteret plan har en naturlig ligning

$$\kappa = \frac{1}{2\sqrt{s}} \qquad 0 < s < \infty$$

Find kurvens tangentdrejning θ udfra punktet P_0, der svarer til $s = \frac{\pi^2}{4}$.

Hvad er kurvens evolut?

I planen vælges et ortonormalt koordinatsystem, således at P_0 får koordinaterne $(\pi, 2)$ og tangentvektoren i P_0 koordinaterne $(0,1)$. Find en parameterfremstilling for kurven og for dens evolut i dette koordinatsystem.

6. Givet er tal r og R, således at $0 < 2r < R$. Idet en cirkel med radius r rulles inden i en fast cirkel med radius R, vil et på den rullende cirkels periferi fast punkt beskrive en kurve, en såkaldt <u>hypocykloide</u>. I planen vælges et sædvanligt retvinklet

Mat. 3, 1963-64 $\underline{IV}$, 2, øv. 6

Koordinatsystem med begyndelsespunkt i den faste cirkels centrum og således, at $(R, 0)$ bliver et kurvepunkt.
Find hypocykloidens parameterfremstilling, idet vinklen t fra x_1-aksen til cirklernes centerlinie (i den til det betragtede kurvepunkt svarende stilling) vælges som parameter.
Find tangentvektoren som funktion af t for $0 < t < \frac{2\pi r}{R}$, og vis, at kurvens normal i et kurvepunkt P går gennem røringspunktet A mellem cirklerne (i den til P svarende stilling).
Find buelængden ud fra $(R, 0)$ som funktion af t, for $0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{R}$.

Find kurvens krumning som funktion af t for $0 < t < \frac{2\pi r}{R}$ og en naturlig ligning for den til $0 < t < \frac{2\pi r}{R}$ svarende bue af kurven.
Vis endelig, at kurvens evolut igen er en hypocykloide, og angiv, hvordan den kan tænkes frembragt ved rulning af en cirkel inden i en anden cirkel.

§ 3. Rumkurver.

Lad K være en orienteret regulær kurve af klasse C^2 i det euklidiske rum E^3, s en naturlig parameter for K (løbende i et parameterinterval $]a,b[$), og $\underline{v}_1(s)$ tangentvektoren til K. Afsættes alle vektorerne $\underline{v}_1(s)$ ud fra det samme punkt O, vil endepunktet af $\underline{v}_1(s)$, når s gennemløber $]a,b[$, gennemløbe en kurve, som kaldes det sfæriske tangentbillede af K. Farten på det sfæriske tangentbillede (med hensyn til en naturlig parameter på kurven K) kaldes krumningen af K og betegnes med $\kappa(s)$. $\kappa(s)$ bliver en kontinuert funktion af s, og der gælder åbenbart $\kappa(s) \geqq 0$ (krumningen regnes altså ikke med fortegn i modsætning til krumningen af plane kurver). I punkter, hvor $\kappa(s) > 0$ kan man indføre vektoren $\underline{v}_2(s)$ ved

$$\frac{d\underline{v}_1}{ds} = \kappa(s)\,\underline{v}_2(s) .$$

Da $\underline{v}_1(s)\cdot\underline{v}_1(s) = 1$ fås ved differentiation, at $\underline{v}_1(s)\cdot\underline{v}_2(s) = 0$. $\underline{v}_2(s)$, som kaldes kurvens hovednormalvektor, er altså vinkelret på $\underline{v}_1(s)$. Af dens definition aflæses endvidere, at den er en enhedsvektor. Den varierer åbenbart kontinuert med s (for $\kappa(s) > 0$).

Planen gennem kurvepunktet $P(s)$, som indeholder vektorerne $\underline{v}_1(s)$ og $\underline{v}_2(s)$, kaldes kurvens oskulationsplan i $P(s)$. Den er defineret, når $\kappa(s) > 0$. Den geometriske betydning af oskulationsplanen er følgen=

de:
Hvis $\kappa(s_0) > 0$ vil $P(s_0+\Delta s)$ for små værdier forskellige fra 0 af $|\Delta s|$ ikke ligge på kurvens tangent i $P(s_0)$. Planen gennem $P(s_0+\Delta s)$ og tangenten i $P(s_0)$ vil for Δs gående mod 0 konvergere mod kurvens oskulationsplan i $P(s_0)$.

Bevis: Da K er af klasse C^2 får vi af Taylors grænseformel, at

$$\overrightarrow{P(s_0)P(s_0+\Delta s)} = \Delta s\, \underline{v}_1 + \frac{\kappa}{2}(\Delta s)^2 \underline{v}_2 + (\Delta s)^2 \underline{\varepsilon}(\Delta s)$$

hvor $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| \to 0$ for $\Delta s \to 0$, og hvor κ, $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ er svarende til værdien s_0 af parameteren. Idet $\kappa > 0$, har vi $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| < \frac{1}{2}\kappa$ for $|\Delta s|$ tilstrækkelig lille, og $P(s_0+\Delta s)$ ligger da ikke på tangenten i $P(s_0)$. Der findes da præcis én plan gennem $P(s_0+\Delta s)$ og tangenten i $P(s_0)$, og denne er åbenbart den plan gennem $P(s_0)$, som indeholder vektorerne

$$\underline{v}_1 \quad \text{og} \quad \underline{v}_2 + \frac{2}{\kappa}\underline{\varepsilon}(\Delta s).$$

Den første vektor er konstant $\underline{v}_1$ og den anden vil for Δs gående mod 0 konvergere mod $\underline{v}_2$, hvoraf det ønskede følger.

Vektorparret $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ inducerer en orientering af oskulationsplanen. Man eftervise nu let, at rumkurvens krumning i $P(s_0)$ netop er krumningen i $P(s_0)$ af dens retvinklede projektion på oskulationsplanen. Punktet $Q(s_0)$ bestemt ved, at

$$\overrightarrow{P(s_0)\,Q(s_0)} = \frac{1}{\kappa(s_0)}\underline{v}_2(s_0)$$

kaldes kurvens <u>krumningscenter</u> i $P(s_0)$. Det er åbenbart krumningscentret, svarende til punktet $P(s_0)$, af kurvens projektion på oskulationsplanen.

For yderligere at studere kurven antager vi, at den er af klasse C^3, og at $\kappa(s) > 0$ i hele parameterintervallet. Endvidere antages, at rummet er orienteret. For at studere oskulationsplanens variation betragter vi en normalvektor til denne, nemlig vektoren

$$\underline{v}_3(s) = \underline{v}_1(s) \times \underline{v}_2(s) .$$

Denne kaldes kurvens <u>binormalvektor</u>. Den er en enhedsvektor og netop den positive normalvektor til oskulationsplanen med hensyn til den givne orientering i rummet og den tidligere omtalte orientering af oskulationsplanen. Koordinatsystemet

$$(P(s), \underline{v}_1(s), \underline{v}_2(s), \underline{v}_3(s))$$

er for hver værdi af s et ortonormalt højrekoordinatsystem (d.v.s. det er i overensstemmelse med rummets orientering). Det kaldes kurvens <u>ledsagende koordinatsystem</u>. Vektortriplen $(\underline{v}_1(s), \underline{v}_2(s), \underline{v}_3(s))$ kaldes det <u>ledsagende treben</u>. Den kurve som fremkommer, når alle binormalvektorerne afsættes ud fra det samme punkt O kaldes det <u>sfæriske binormalbillede</u>. Denne kurve er af klasse C^1: Da K er af klasse C^3 bliver $\kappa(s)$ af klasse C^1, og

$$\underline{v}_3(s) = \underline{v}_1(s) \times \left(\frac{1}{\kappa(s)} \frac{d}{ds} \underline{v}_1(s) \right)$$

er derfor af klasse C^1. Af relationerne

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_3 = 0 \quad \text{og} \quad \underline{V}_3 \cdot \underline{V}_3 = 1$$

får vi ved differentiation

$$\underline{V}_1 \cdot \frac{d}{ds}\underline{V}_3 = \underline{V}_3 \cdot \frac{d}{ds}\underline{V}_3 = 0 ,$$

da
$$\underline{V}_3 \cdot \frac{d}{ds}\underline{V}_1 = \underline{V}_3 \cdot (K\underline{V}_2) = 0$$

Den afledede af $\underline{V}_3$, altså hastigheden på binormalbilledet, er altså proportional med $\underline{V}_2$, d.v.s.

$$\frac{d\underline{V}_3}{ds} = \left(\frac{d\underline{V}_3}{ds} \cdot \underline{V}_2\right) \underline{V}_2 .$$

Vi kan da indføre størrelsen $\tau(s)$ ved

$$\tau(s) = -\frac{d\underline{V}_3}{ds} \cdot \underline{V}_2 ,$$

og har
$$\frac{d\underline{V}_3}{ds} = -\tau \underline{V}_2 .$$

$\tau(s)$ bliver en kontinuert funktion af s og kaldes kurvens <u>torsion</u> (snoning). Det ses, at $|\tau(s)|$ er farten på det sfæriske binormalbillede. De følgende løse bemærkninger giver en begrundelse for den valgte fortegnsregning: At binormalens afledede er proportional med $\underline{V}_2$ betyder, at oskulationsplanens øjeblikkelige bevægelse er en drejning om tangenten (samt en forskydning i tangentens retning). Positiv torsion betyder, at den halvplan af oskulationsplanen, som indeholder $\underline{V}_2$, er på vej opad d.v.s. i retning af binormalen, mens negativ torsion betyder, at denne halvplan er på vej udad.

Af formlerne

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_3 \cdot \underline{v}_2 = 0 \quad \text{og} \quad \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = 1$$

fås ved differentiation

$$\underline{v}_1 \cdot \frac{d\underline{v}_2}{ds} = -\kappa \;,\quad \underline{v}_3 \cdot \frac{d\underline{v}_2}{ds} = \tau \;,\quad \underline{v}_2 \cdot \frac{d\underline{v}_2}{ds} = 0$$

altså

$$\frac{d\underline{v}_2}{ds} = -\kappa \underline{v}_1 + \tau \underline{v}_3 .$$

For de afledede af $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ med hensyn til en naturlig parameter s gælder altså de Frenet'ske formler:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \frac{d}{ds}\underline{v}_1 = & & +\kappa\underline{v}_2 & \\ \frac{d}{ds}\underline{v}_2 = & -\kappa\underline{v}_1 & & +\tau\underline{v}_3 \\ \frac{d}{ds}\underline{v}_3 = & & -\tau\underline{v}_2 & \end{array}}$$

Angående de forskellige størrelsers afhængighed af orienteringen i rummet og gennemløbsretningen på kurven viser man let, at skiftes rummets orientering vil $\underline{v}_3$ skifte retning og τ fortegn, mens de øvrige størrelser lades uændret. Skiftes kurvens gennemløbsretning vil $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_3$ skifte retning, mens de øvrige størrelser (NB: også torsionen τ) lades uændret.

Vi kan ved hjælp af Taylors grænseformel få et ret detaljeret billede af forløbet af en kurve af klasse C^3 i omegnen af et punkt, hvori κ og τ er forskellige fra 0. Lad $P(s)$ være en naturlig parameterfremstilling af kurven. Vi kan da finde de første afledede ved hjælp af Frenets formler. Vi får

$$\underline{\dot{P}}(s) = \underline{v}_1(s)$$

$$\underline{\ddot{P}}(s) = \kappa(s)\,\underline{v}_2(s)$$

$$\underline{\dddot{P}}(s) = -(\kappa(s))^2\underline{v}_1(s) + \frac{d\kappa(s)}{ds}\underline{v}_2(s) + \kappa(s)\tau(s)\underline{v}_3(s)$$

Taylors grænseformel giver da

$$\overrightarrow{P(s)P(s+\Delta s)} = \Delta s\,\underline{v}_1 + \tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2\underline{v}_2 + \tfrac{1}{3}(\Delta s)^3\left[-\kappa^2\underline{v}_1 + \kappa'\underline{v}_2 + \kappa\tau\underline{v}_3\right]$$
$$+ (\Delta s)^3\underline{\varepsilon}(\Delta s)$$

hvor $|\underline{\varepsilon}(\Delta s)| \to 0$ for $\Delta s \to 0$, og hvor størrelserne $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \kappa, \kappa'$ og τ alle er svarende til parameterværdien s. Ordnes leddene på højre side efter $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ og "fordeles" $\underline{\varepsilon}(\Delta s)$ på $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$, d.v.s.

$$\underline{\varepsilon}(\Delta s) = (\underline{\varepsilon}(\Delta s)\cdot\underline{v}_1)\underline{v}_1 + (\underline{\varepsilon}(\Delta s)\cdot\underline{v}_2)\underline{v}_2 + (\underline{\varepsilon}(\Delta s)\cdot\underline{v}_3)\underline{v}_3$$

får vi

$$\overrightarrow{P(s)P(s+\Delta s)} = \left[\Delta s - \frac{\kappa^2}{3}(\Delta s)^3 + (\Delta s)^3\varepsilon_1(\Delta s)\right]\underline{v}_1$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2 + \frac{\kappa'}{3}(\Delta s)^3 + (\Delta s)^3\varepsilon_2(\Delta s)\right]\underline{v}_2$$
$$+ \left[\tfrac{1}{3}\kappa\tau(\Delta s)^3 + (\Delta s)^3\varepsilon_3(\Delta s)\right]\underline{v}_2$$

hvor $\varepsilon_i(\Delta s) \to 0$ for $\Delta s \to 0$, $i = 1,2,3$.

For at anskueliggøre kurvens forløb i omegnen af punktet P(s) vil vi betragte dens retvinklede projektioner på de 3 koordinatplaner i det ledsagende koordinatsystem i P(s). (Disse 3 koordinatplaner er $\underline{v}_1$-$\underline{v}_2$-planen, hvilket er oskulationsplanen, $\underline{v}_2$-$\underline{v}_3$-planen, som kaldes <u>normalplanen</u> og $\underline{v}_1$-$\underline{v}_3$-planen, som kaldes den <u>rektificerende plan</u>).
Formlen på forrige side giver, at disse kurver er bestemt ved

$$x_1 = \Delta s + (\Delta s)^2 \tilde{\varepsilon}_1(\Delta s)$$
$$x_2 = \tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2 + (\Delta s)^2 \tilde{\varepsilon}_2(\Delta s) \quad ,$$

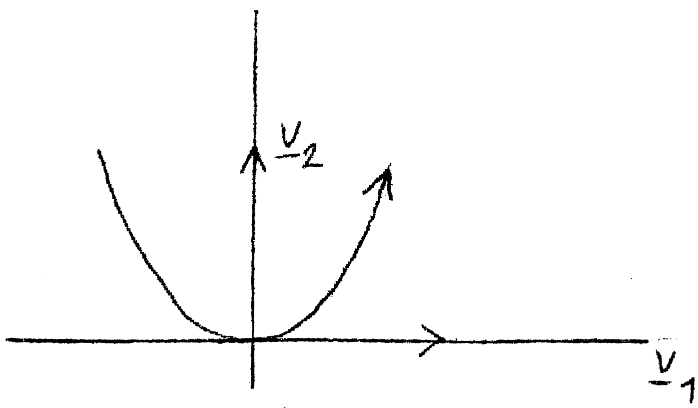
$$x_2 = \tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^2 + (\Delta s)^2 \tilde{\varepsilon}_2(\Delta s)$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3}\kappa\tau(\Delta s)^3 + (\Delta s)^3 \tilde{\varepsilon}_3(\Delta s)$$

samt

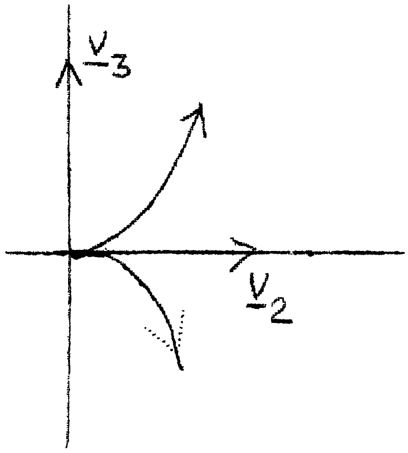
$$x_1 = \Delta s + (\Delta s)^2 \tilde{\varepsilon}_1(\Delta s)$$
$$x_3 = \tfrac{1}{3}\kappa\tau(\Delta s)^3 + (\Delta s)^3 \tilde{\varepsilon}_3(\Delta s)$$

hvor $\tilde{\varepsilon}_i(\Delta s) \to 0$ for $\Delta s \to 0$, $i = 1, 2, 3$.

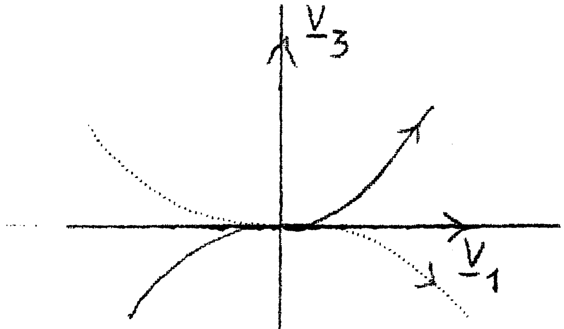
Projektionerne får altså følgende udseender:



Oskulationsplanen



Normalplanen



Den rektificerende plan

Her svarer den fuldt optrukne kurve i $\underline{v}_1$-$\underline{v}_3$ planen og den fuldt optrukne gennemløbsretning i $\underline{v}_2$-$\underline{v}_3$-planen til positiv torsion, de punkterede svare til negativ torsion.

Ved opgaver har man som regel kurven givet ved en ikke nødvendigvis naturlig parameterfremstilling, og igen denne givet i et retvinklet koordinatsystem i rummet. I det følgende starter vi med sådanne data, og vil bestemme formler for krumning og torsion samt det ledsagende koordinatsystems grundvektorer $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$.

Lad altså $\underline{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ være en parameterfremstilling af klasse C^3 for en kurve, hvor t løber i et interval $]a, b[$. Forudsat, at $|\dot{\underline{r}}(t)| > 0$ er tangentvektoren da givet ved

$$\underline{v}_1(t) = \frac{1}{|\dot{\underline{r}}(t)|}\,\dot{\underline{r}}(t)$$

og for enhver naturlig parameter s gælder

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{r}}(t)|$$

Ifølge Frenet's formler har vi, at

$$\kappa = \left|\underline{v}_1 \times \frac{d}{ds}\underline{v}_1\right|.$$

Ved differentiation af det ovenstående udtryk for $\underline{v}_1$ fås den afledede som linearkombination af $\dot{\underline{r}}$ og $\ddot{\underline{r}}$. Addenden med $\dot{\underline{r}}$ har imidlertid forsvindende vektorprodukt med $\underline{v}_1$, og vi får da følgende formel for krumningen:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}$$

Krumningen er altså forskellig fra 0, når og kun når $\dot{\underline{r}}(t)$ og $\ddot{\underline{r}}(t)$ er lineært uafhængige. Oskulationsplanen er da den plan gennem kurvepunktet, som indeholder $\dot{\underline{r}}(t)$ og $\ddot{\underline{r}}(t)$, idet $\underline{v}_2(t)$ kan skrives som linearkombination af disse to vektorer. Endvidere bemærker man, at $\ddot{\underline{r}}(t)$ ligger på samme side af tangenten som $\underline{v}_2(t)$, idet koefficienten til $\ddot{\underline{r}}(t)$ i $\underline{v}_2$'s fremstilling som linearkombination af $\dot{\underline{r}}(t)$ og $\ddot{\underline{r}}(t)$ bliver positiv, nemlig

$$\frac{1}{\kappa(t)\,|\dot{\underline{r}}(t)|^2} = \frac{|\dot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)|}\,.$$

Binormalvektoren er derfor

$$\underline{v}_3(t) = \frac{\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)|}\,.$$

Ifølge Frenet's formler har vi

$$\tau = -\underline{v}_2\cdot\frac{d}{ds}\underline{v}_3\,.$$

Fra før har vi

$$\underline{v}_2 = \frac{|\dot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}|}\ddot{\underline{r}} + \alpha\dot{\underline{r}}$$

og ved differentiation får vi

$$\frac{d}{ds}\underline{v}_3 = \frac{\dot{\underline{r}}\times\dddot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|\,|\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}|} + \beta\,\underline{v}_3$$

hvor α og β er visse (af t afhængige tal).
Heraf fås den ønskede formel

$$\tau(t) = \frac{[\,\dot{\underline{r}}(t),\ddot{\underline{r}}(t),\dddot{\underline{r}}(t)\,]}{|\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)|^2}\,.$$

(Symbolet [, ,] betegner rumproduktet af 3 vektorer: $[\underline{a},\underline{b},\underline{c}] = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})$).

Rumkurveteoriens hovedsætning

Givet et interval $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, en i $]a,b[$ positiv reel funktion φ af klasse C^1, en i $]a,b[$ kontinuert reel funktion ψ samt et tal $s_0 \in]a,b[$. Til foreskrevet punkt P_0 og ortonormalt højrestillet treben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ i et orienteret euklidisk rum E^3 findes da en og kun en regulær orienteret kurve af klasse C^3 med aldrig forsvindende krumning og med en parameterfremstilling $P(s)$ med $]a,b[$ som parameterinterval således, at

$P(s_0) = P_0$

s er naturlig parameter

$\underline{v}_1(s_0) = \underline{a}$, $\underline{v}_2(s_0) = \underline{b}$, $\underline{v}_3(s_0) = \underline{c}$,

$\kappa(s) = \varphi(s)$ og $\tau(s) = \psi(s)$ for ethvert $s \in]a,b[$,

idet $\kappa(s)$ betegner krumningen og $\tau(s)$ torsionen for kurven.

Bevis: Vi vælger et ortonormalt højre-koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i rummet E^3, og regner i resten af beviset i koordinater.

For at vise entydigheden antager vi, at $P(s)$ er en parameterfremstilling, som opfylder de i sætningen stillede krav. Vi betragter da den af s afhængige

3×3 matrix $\underline{\underline{V}}(s)$, hvis rækker er koordinatsættene til vektorerne $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$ og $\underline{v}_3(s)$ for den ved $P(s)$ fremstillede kurve. Da s er naturlig parameter på kurven, og da denne har krumning $\varphi(s)$ og torsion $\psi(s)$, får vi af Frenet's formler, at

$$(*) \qquad \frac{d}{ds}\underline{\underline{V}}(s) = \underline{\underline{A}}(s)\,\underline{\underline{V}}(s)$$

hvor

$$\underline{\underline{A}}(s) = \begin{Bmatrix} 0 & \varphi(s) & 0 \\ -\varphi(s) & 0 & \psi(s) \\ 0 & -\psi(s) & 0 \end{Bmatrix}$$

og hvor differentiation af en matrixfunktion skal forstås som elementvis differentiation. Om matricen gælder endvidere, at

$$(**) \qquad \underline{\underline{V}}(s_0) = \underline{\underline{V}}_0 ,$$

hvor $\underline{\underline{V}}_0$ er den matrix, hvis rækker er koordinatsættene til vektorerne $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$.

Opfattes matricen $\underline{\underline{V}}(s)$ som ubekendt, bliver $(*)$ et sæt af 9 sammenhørende lineære differentialligninger af første orden med 9 ubekendte (nemlig elementerne i $\underline{\underline{V}}(s)$) og $(**)$ bliver et sæt begyndelsesbetingelser til dette differentialligningssystem. Da funktionerne $\varphi(s)$ og $\psi(s)$ er forudsat kontinuerte i intervallet $]a,b[$ slutter vi da af entydighedssætningen for sådanne differentialligningssystemer, at der højst findes én matrix $\underline{\underline{V}}(s)$, som tilfredsstiller $(*)$ og $(**)$.

At $P(s)$ er entydig bestemt ved de stillede krav følger nu let. Af

$$\frac{d}{ds}\overrightarrow{OP}(s) = \underline{v}_1(s) \quad \text{og} \quad P(s_0) = P_0$$

får vi

$$\overrightarrow{OP(s)} = \overrightarrow{OP_0} + \int_{s_0}^{s} \underline{v}_1(t)\,dt$$

og hermed entydigheden, idet der ifølge det foregående højst var én mulighed for $\underline{v}_1(s)$.

For at vise eksistensen tager vi vort udgangspunkt i differentialligningssystemet (*) med begyndelsesbetingelserne (**). Ifølge eksistenssætningen findes der en matrix $\underline{\underline{V}}(s)$ med differentiable elementer, som opfylder (*) og (**). Betegner ' som sædvanlig transponering, har vi da

$$\frac{d}{ds}\left(\underline{\underline{V}}'(s)\underline{\underline{V}}(s)\right) = \underline{\underline{V}}'(s)\frac{d}{ds}\underline{\underline{V}}(s) + \left(\frac{d}{ds}\underline{\underline{V}}(s)\right)'\underline{\underline{V}}(s)$$

$$= \underline{\underline{V}}'(s)\underline{\underline{A}}(s)\underline{\underline{V}}(s) + \underline{\underline{V}}'(s)\underline{\underline{A}}'(s)\underline{\underline{V}}(s) = \underline{\underline{O}} \,,$$

da matricen $\underline{\underline{A}}(s)$ er antisymmetrisk. Matricen $\underline{\underline{V}}'(s)\underline{\underline{V}}(s)$ er altså konstant. (Man godtgør let de her brugte regneregler for differentiation af matrixfunktioner). Da

$$\underline{\underline{V}}'(s_0)\underline{\underline{V}}(s_0) = \underline{\underline{V}}_0'\underline{\underline{V}}_0 = \underline{\underline{E}} \,,$$

($\underline{\underline{V}}_0$ er jo ortogonal, da dens rækker er koordinatsættene for et ortonormalt treben) har vi altså

$$\underline{\underline{V}}'(s)\underline{\underline{V}}(s) = \underline{\underline{E}}$$

i hele intervallet, d.v.s. $\underline{\underline{V}}(s)$ er ortogonal for ethvert $s \in]a,b[$. $\underline{\underline{V}}(s)$ er endda egentlig ortogonal, d.v.s. yderligere $\det(\underline{\underline{V}}(s)) = +1$. Vi har nemlig, at $|\det(\underline{\underline{V}}(s))| = 1$ i hele $]a,b[$, og følgelig $\det(\underline{\underline{V}}(s)) = +1$ eller -1 konstant i hele $]a,b[$, idet $\det(\underline{\underline{V}}(s))$ er en kontinuert funktion af s. Da

$$\det(\underline{\underline{V}}(s_0)) = \det(\underline{\underline{V}}_0) = 1$$

(rækkerne i $\underline{\underline{V}}_0$ er jo et et højre-stillet ortonormalt heben) følger påstanden.

Indføres vektorerne $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$ og $\underline{v}_3(s)$ som de vektorer, hvis koordinater er rækkerne i $\underline{\underline{V}}(s)$, er $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ for hvert s et højre-stillet ortonormalt heben. Vi definerer nu parameterfremstillingen $P(s)$ ved

$$\overrightarrow{OP(s)} = \overrightarrow{OP_0} + \int_{s_0}^{s} \underline{v}_1(t)\,dt$$

Denne opfylder åbenbart $P(s_0) = P_0$. Endvidere ses den at være af klasse C^1 med hastighedsvektor $\underline{v}_1(s)$. Da denne er en enhedsvektor, er s naturlig parameter. Vi ved, at $\underline{\underline{V}}(s)$ opfylder $(*)$. Heraf følger, at $\underline{v}_1(s)$ er differentiabel, og at

$$\frac{d\underline{v}_1}{ds} = \varphi(s)\,\underline{v}_2(s).$$

Da $\varphi(s)$ er kontinuert og positiv og $\underline{v}_2$ en enhedsvektor viser dette, at parameterfremstillingen er af klasse C^2, at $\varphi(s)$ er krumningen og $\underline{v}_2(s)$ hovednormalvektoren for den fremstillede kurve. Af $(*)$ sluttes videre, at

$$\frac{d\underline{V}_2}{ds} = -\varphi(s)\,\underline{V}_1(s) + \psi(s)\,\underline{V}_3(s) .$$

Da $\varphi(s)$ er af klasse C^1 er parameterfremstillingen følgelig af klasse C^3.

Det er nu trivielt, at de øvrige krav er opfyldt: Da $\underline{\underline{V}}(s)$ er egentlig ortogonal, er $\underline{V}_3(s)$ kurvens binormalvektor. Relationen (xx) betyder altså præcis, at det ledsagende beben i $P(s_0)$ er $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Endelig aflæses af den sidste række i (x), at kurvens torsion præcis er $\psi(s)$.

Hermed er sætningen bevist.

Som et eksempel på en rumkurve vil vi betragte den såkaldte skruelinie. Den er i et retvinklet koordinatsystem i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = R\cos t$$
$$x_2 = R\sin t \qquad -\infty < t < \infty$$
$$x_3 = ht$$

hvor $R>0$ og h er reelle konstanter. For $h=0$ fås specielt en cirkel. Hastigheden fås ved differentiation:

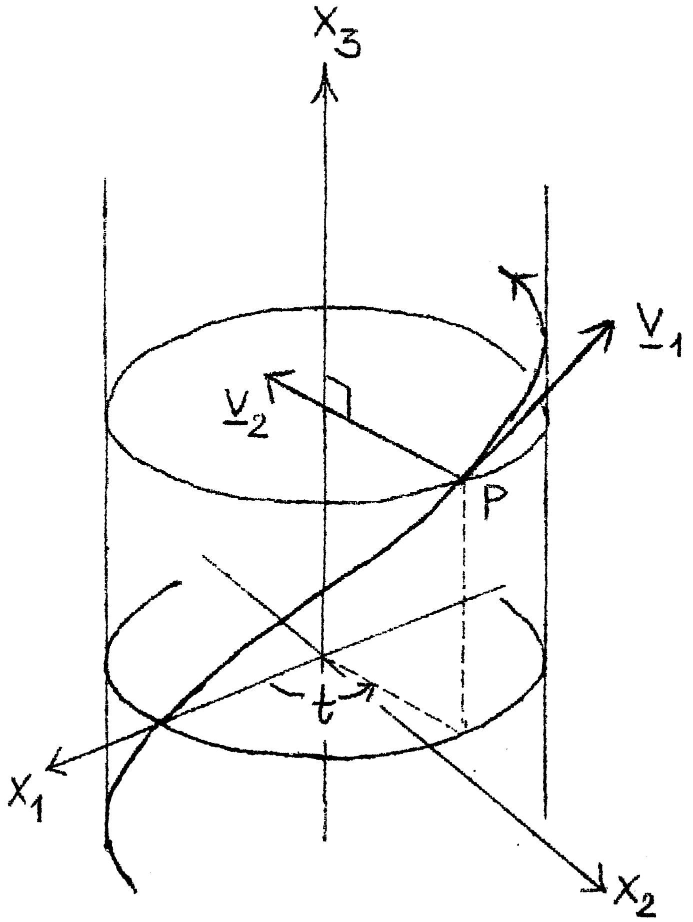
$$\dot{x}_1 = -R\sin t$$
$$\dot{x}_2 = R\cos t$$
$$\dot{x}_3 = h$$

og dermed farten

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{R^2+h^2}$$

Buelængden regnet ud fra $(R,0,0)$, svarende til $t=0$, bliver derfor

$$s = \sqrt{R^2+h^2}\, t.$$



Endvidere får vi, at tangentvektoren er

$$\underline{v}_1(t) = \left(-\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\sin t,\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos t,\ \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

heraf fås ved differentiation, at

$$\frac{d\underline{v}_1}{ds} = \frac{R}{R^2+h^2}(-\cos t, -\sin t, 0)$$

hvoraf vi, da $R>0$ slutter, at

$$\kappa = \frac{R}{R^2+h^2} \quad \text{og} \quad \underline{v}_2(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

Nu kan $\underline{v}_3(t)$ bestemmes som $\underline{v}_1(t)\times\underline{v}_2(t)$, og vi får

$$\underline{v}_3(t) = \left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\sin t,\ -\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos t,\ \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right).$$

Ved differentiation heraf og ved brug af den tredje af Frenet's formler finder man endelig torsionen

$$\tau = \frac{h}{R^2+h^2}$$

Det ses, at krumning og torsion er konstante i overensstemmelse med at kurven kan glide i sig selv, endvidere, at vektorerne $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ danner konstante vinkler med skrueaksen = x_3-aksen.

Ligningerne

$$\kappa = \frac{R}{R^2+h^2} \quad \text{og} \quad \tau = \frac{h}{R^2+h^2}$$

kan løses med hensyn til h og R:

$$R = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} \qquad h = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2} .$$

Vi kan da af kurveteoriens hovedsætning slutte, at en rumkurve med konstant krumning $\kappa > 0$ og konstant torsion τ er en skruelinie (eller en del af en skruelinie), hvor størrelserne R og h er bestemt ved de ovenstående formler.

Øvelser til Kap. IV, § 3.

1. Vis, at en rumkurve af klasse C^2, hvis krumning forsvinder identisk, er en del af en ret linie.
Vis, at en rumkurve af klasse C^3, med $\kappa > 0$ og $\tau = 0$ overalt, er beliggende i en plan.

2. En kurve er i retvinklede koordinater i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = \cosh t$$
$$x_2 = \sinh t \qquad -\infty < t < \infty$$
$$x_3 = t$$

Bestem krumningen og torsionen som funktioner af t. Angiv dernæst vektorerne $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ og $\underline{v}_3$ som funktioner af t og kontroller, at Frenets formler er opfyldt.

3. I rummet er givet en differentiabel kurve K af klasse C^4 med naturlig parameter s. Det forudsættes, at krumningen og torsion af kurven aldrig bliver 0. Find tangentvektor, krumning, hovednormalvektor og binormalvektor for K's sfæriske tangentbillede udtrykt ved $\kappa(s)$, $\tau(s)$, $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$, $\underline{v}_3(s)$ for den givne kurve.
Vis, at følgende 3 påstande er ensbetydende:
(1) Det sfæriske tangentbillede af K er en cirkel.
(2) Forholdet $\tau(s)/\kappa(s)$ er uafhængigt af s.
(3) Der findes en vektor $\underline{a}$ i rummet, således

at $\underline{a} \cdot \underline{v}_1(s)$ er uafhængig af s.
Angiv, under forudsætning af, at ( ) er opfyldt, en konstant vektor $\underline{a}$, således at (3) er opfyldt.
(En kurve, som opfylder (3), og dermed (1) og (2), kaldes en vindellinie).

4. I et orienteret euklidisk rum er givet et koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Lad $\overrightarrow{OA} = \underline{a}(s)$, $\alpha \leqq s \leqq \beta$, være en naturlig parameterfremstilling for en kurve af klasse C^3 med aldrig forsvindende krumning, og som ligger på kugleoverfladen med centrum O og radius 1. Vis, at den ved

$$\overrightarrow{OP} = \int_\alpha^s \underline{a}(t)\,dt \qquad \alpha \leqq s \leqq b$$

givne kurve har konstant krumning, og at den ved

$$\overrightarrow{OP} = \int_\alpha^s \underline{a}(t) \times \underline{a}'(t)\,dt \qquad \alpha \leqq s \leqq \beta$$

givne kurve har konstant torsion. For den første kurve er $\underline{a}(s)$ tangentvektor, for den anden binormalvektor

5. En kurve af klasse C^3 fremstilles i retvinklede koordinater i rummet ved en naturlig parameterfremstilling

$$x_1 = x_1(s)$$
$$x_2 = x_2(s) \qquad 0 < s < \infty$$
$$x_3 = x_3(s)$$

Find denne parameterfremstilling idet følgende oplyses:
For ethvert $s \in]0, \infty[$ er krumning og torsion givet ved:

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{s} \quad \text{og} \quad \tau(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{s},$$

for $s = \sqrt{3}$ har kurvepunktet koordinaterne $(1, 0, 1)$, tangentvektoren koordinaterne $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ og hoved=normalvektoren koordinaterne $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

(Find først tredjekoordinaterne af $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$ og $\underline{v}_3(s)$)

6. I det euklidiske rum er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. En kurve er i koordinaterne givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = \frac{\cos t}{\cosh t}$$

$$x_2 = \frac{\sin t}{\cosh t} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$x_3 = \operatorname{tgh} t$$

Vis, at kurven ligger på kugleoverfladen med centrum O og radius 1. Find buelængden s regnet ud fra det til $t = 0$ svarende kurvepunkt og tangentvektoren som funktioner af t. Vis, at i ethvert kurvepunkt $P(t)$ danner kurven en vinkel på $\frac{\pi}{4}$ med storcirklen gennem $P(t)$ og $(0,0,1)$ på den før nævnte kugleoverflade.
Find endelig kurvens krumning og torsion som funktioner af t og som funktioner af s.

§4. Differentiabelt fladestykke. Den metriske fundamentalform.

Der er adskillige muligheder for beskrivelse af en flade i rummet. Den kan f. eks. være givet ved en geometrisk forskrift (en kugleflade som mængden af punkter med afstand r fra centrum) eller i rumkoordinater x_1, x_2, x_3 ved en ligning $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ved en differentialgeometrisk undersøgelse af en flade er det imidlertid nødvendigt, at den er givet ved en parameterfremstilling (definition nedenfor). En flade kan ofte ikke i sin helhed beskrives ved én parameterfremstilling. Man må derfor dele fladen op i stykker, som hver for sig kan beskrives ved parameterfremstillinger. Dette fænomen bliver ikke nogen væsentlig indskrænkning for det følgende. Vi skal nemlig kun interessere os for lokale egenskaber, altså sådanne egenskaber, som i hvert punkt af fladen er bestemt ved fladens forløb i omegnen af punktet. Der skal i dette indledende afsnit ikke gøres noget forsøg på at give en definition af den klasse af flader, som er adækvate for differentialgeometrien, men vi tager vort udgangspunkt i det nedenfor definerede begreb: Differentiabelt fladestykke. I eksempler og opgaver vil det naturligt fremgå af sammenhængen, hvordan den pågældende flades forløb i det store skal opfattes og hvordan den kan opdeles i fladestykker.

Lad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ være et område (åben, sammenhængende delmængde). Ved en <u>parameterfremstilling</u> P med Ω som <u>parameterområde</u> forstås en afbildning $P : \Omega \to E^3$ af Ω ind i det euklidiske rum E^3. De to reelle variable i Ω kaldes <u>parametrene</u>; de betegnes med (u^1, u^2), $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, (v^1, v^2), $(\bar{v}^1, \bar{v}^2)$ el. lignende. Tallene 1 og 2 er altså indices og ikke eksponenter. Er der givet et koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ i rummet, vil P i koordinaterne fremstilles ved tre ligninger

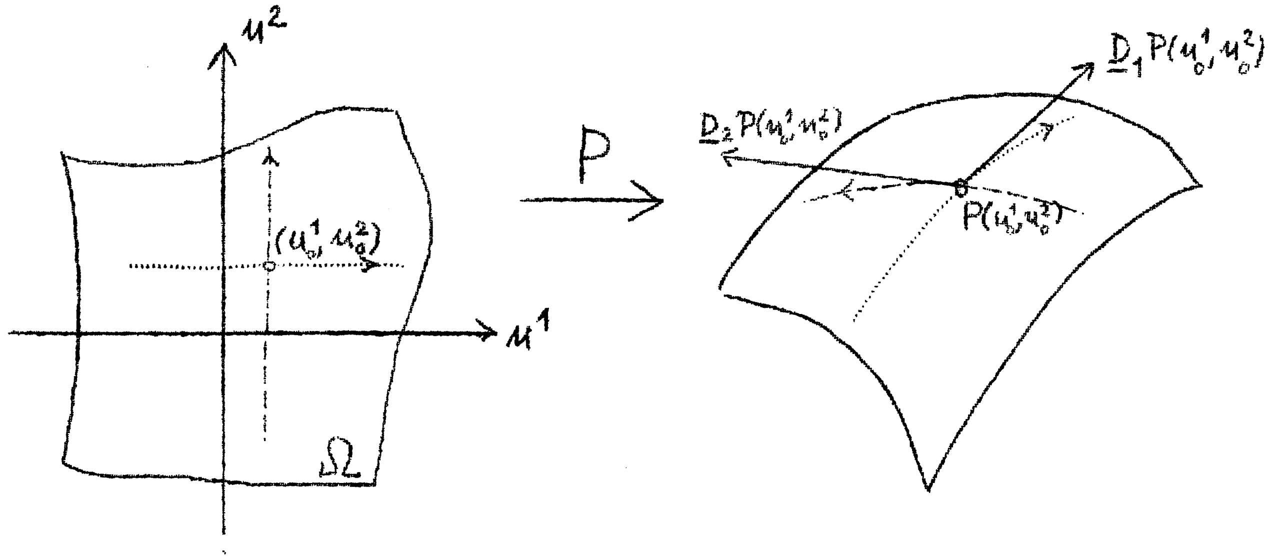
$$x_1 = x_1(u^1, u^2)$$
$$x_2 = x_2(u^1, u^2)$$
$$x_3 = x_3(u^1, u^2)$$

hvor $x_i(u^1, u^2)$ for $i = 1, 2, 3$ er en reel funktion, defineret for $(u^1, u^2) \in \Omega$.
Parameterfremstillingen P siges at være af <u>klasse C^k</u>, $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, hvis hver af funktionerne $x_i(u^1, u^2)$ er af klasse C^k i Ω. Dette betyder kontinuerte for $k = 0$, for $k > 0$, at de har kontinuerte partielle afledede af op til k'te orden efter u^1 og u^2 i Ω.
Ligesom ved parameterfremstillinger med én parameter, ses det, at dette begreb er uafhængigt af koordinatsystemet i rummet.
Betegner (u_0^1, u_0^2) et fast punkt i parameterområdet Ω bestemmes der ved

$$(1): \quad t \longrightarrow P(u_0^1 + t, u_0^2)$$

$$(2): \quad t \longrightarrow P(u_0^1, u_0^2 + t)$$

parameterfremstillinger for to rumkurver gennem



punktet $P(u_0^1, u_0^2)$. Disse kurver kaldes <u>parameterkurverne</u> gennem $P(u_0^1, u_0^2)$, (1) u^1-kurven og (2) u^2-kurven. Er P af klasse C^k bliver parameterkurverne af klasse C^k. For $k \geq 1$ eksisterer de partielle afledede

$$\underline{D}_1 P(u_0^1, u_0^2) = \frac{\partial}{\partial u^1} P(u^1, u^2) \Big]_{(u^1, u^2) = (u_0^1, u_0^2)}$$

$$\underline{D}_2 P(u_0^1, u_0^2) = \frac{\partial}{\partial u^2} P(u^1, u^2) \Big]_{(u^1, u^2) = (u_0^1, u_0^2)}$$

hvor stregen under symbolet $\underline{D}_i$ skal minde om, at den afledede er en <u>vektor</u> i rummet. $\underline{D}_i P(u_0^1, u_0^2)$ er åbenbart hastigheden i (u_0^1, u_0^2) af u^i-kurven gennem $P(u_0^1, u_0^2)$. Vi siger, at parameterfremstillingen er <u>regulær</u>, hvis $\underline{D}_1 P(u^1, u^2)$ og $\underline{D}_2 P(u^1, u^2)$ er lineært uafhængige i ethvert punkt af Ω.
I retvinklede koordinater i rummet får vi

$$\underline{D}_i P(u^1, u^2) = \left(\frac{\partial x_1(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \frac{\partial x_2(u^1, u^2)}{\partial u^i}, \frac{\partial x_3(u^1, u^2)}{\partial u^i} \right)$$

For at komme frem til begrebet fladestykke må vi yderligere specificere parameterskiftene. Lad Ω og Ω' være områder i R^2. De variable i Ω betegn=

nes u^1, u^2, de variable i Ω' $\bar{u}^1, \bar{u}^2$. En afbildning $\varphi : \Omega' \to \Omega$ kaldes et <u>parameterskift</u> af klasse C^k, hvis φ er bijektiv, og hvis φ og φ^{-1} er af klasse C^k. Afbildningerne φ og φ^{-1} fremstilles ved funktionspar

$$\varphi : \begin{array}{l} u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \\ u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \end{array} \qquad \varphi^{-1} : \begin{array}{l} \bar{u}^1 = \quad (u^1, u^2) \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) \end{array}$$

Hvis $k \geqq 1$ eksisterer funktionalmatricerne

$$\left\{ \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\[2ex] \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{Bmatrix} \text{ og } \left\{ \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^l} \right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{Bmatrix}$$

og de er ifølge kædereglen indbyrdes inverse (i ved φ tilsvarende punkter $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ og (u^1, u^2)). Heraf følger at de begge overalt har rang 2. Endvidere følger, at begge funktionaldeterminanter

$$\det \left\{ \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right\} \text{ og } \det \left\{ \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^l} \right\}$$ er enten overalt positive eller overalt negative. (Den første er jo en i den sammenhængende mængde Ω' kontinuert reel funktion, som ikke antager værdien 0).

Er $P : \Omega \to E^3$ en parameterfremstilling af klasse C^k og $\varphi : \Omega' \to \Omega$ et parameterskift af klasse C^k, bliver $P \circ \varphi : \Omega' \to \Omega$ åbenbart igen en parameterfremstilling af klasse C^k. Den siges at fremgå af P ved parameterskiftet φ, og P og $P \circ \varphi$ siges at være C^k-ekvivalente. (Man–

efterviser let, at der herved er defineret en ækvivalens=relation). Betegner u^1, u^2 parametrene i Ω og $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ parametrene i Ω', vil vi tillade os at bruge den lidt ukorrekte (men praktiske) betegnelse $P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ for $P(\varphi(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$. Vi kan nu se, at hvis $P(u^1, u^2)$ er regulær (vi forudsætter her $k \geqq 1$), vil $P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ også være regulær. Ifølge kædereglen har vi nemlig

$$\bar{\underline{D}}_i P(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} P(\varphi(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^j} P(u^1, u^2)$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \underline{D}_j P(u^1, u^2) \quad , \quad i = 1, 2 ,$$

hvor $\bar{\underline{D}}_i$ betegner partiel differentiation m.h.t. $\bar{u}^i$. Da vektorerne $\underline{D}_j P(u^1, u^2)$ er lineært uafhængige, og da matricen

$$\left\{ \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \right\}$$

har rang 2, følger, at vektorerne $\bar{\underline{D}}_i P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ligeledes er lineært uafhængige.

Et differentiabelt <u>fladestykke</u> af klasse C^k defineres som en klasse af C^k-ækvivalente parameterfremstil=linger af klasse C^k. En repræsentant for klassen kaldes en parameterfremstilling for fladestykket. Er en af parameterfremstillingerne regulær (og dermed dem alle) siges fladestykket at være <u>regulært</u>.

I fladeteorien arbejder man meget med indicerede størrelser, og disse kan have indices såvel for oven som for neden. Af sådanne størrelser kommer man hyp=

pigt til at summere over et eller flere af disse indices. Størrelsen under summationstegnet består da altid af et enkelt indiceret led eller et produkt af indicerede led, og det indeks, som der summeres over, forekommer netop 2 gange (smlg. formlen for $\bar{\underline{D}}_i P$ på side 5). Man har da for bekvemmelighedens skyld indtaget den konvention (<u>summationskonventionen</u>), at man undlader at skrive summationstegnet, idet det ved gentagelsen af et indeks allerede er angivet, at der skal summeres over dette indeks. Summationsgrænserne vil fremgå af sammenhængen. Formlen på side 5 skrives da med denne konvention:

$$\bar{\underline{D}}_i P(\bar{u}^1,\bar{u}^2) = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i}\,\underline{D}_j P(u^1,u^2)$$

Lad der være givet et regulært fladestykke af klasse C^k, $k \geq 1$, og lad $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$ være en parameterfremstillingen af dette. Er $u^i = u^i(t)$, $i=1,2$ $\alpha < t < \beta$ en parameterfremstilling af klasse C^l, $1 \leq l \leq k$, bliver $P(u^1(t), u^2(t))$, $\alpha < t < \beta$ igen en parameterfremstilling af klasse C^l. Vi siger, at denne sidste fremstiller en <u>kurve på fladestykket</u>. Parameterfremstillingen $u^i = u^i(t)$, $i=1,2$, kaldes kurvens parameterfremstilling i parametrene u^i. Er $\bar{u}^i$ et andet sæt parametre for fladestykket er kurvens parameterfremstilling i disse parametre givet ved $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1(t), u^2(t))$, hvor $\bar{u}^i(u^1,u^2)$ er funktionsparret, som fremstiller parameterskiftet. Hastigheden på kurven på fladestykket kan findes ved differentiation gennem parametrene u^i, og vi får:

$$\frac{d}{dt} P(u^1(t), u^2(t)) = \frac{du^i(t)}{dt} \underline{D}_i P(u^1(t), u^2(t)) .$$

Planen gennem fladepunktet $P(u^1, u^2)$, som indeholder vektorerne $\underline{D}_1 P(u^1, u^2)$ og $\underline{D}_2 P(u^1, u^2)$, kaldes fladestykkets <u>tangentplan</u> i punktet. Af det ovenstående ses, at <u>enhver regulær kurve på fladestykket gennem $P(u^1, u^2)$ i dette punkt vil have sin tangent beliggende i tangentplanen til fladestykket i dette punkt.</u> Hermed er samtidig givet en parameterfremstillingen uafhængig karakterisering af tangentplanen. Parametrene u^i inducerer et koordinatsystem i tangentplanen i $P(u^1, u^2)$, nemlig systemet

$$(P(u^1, u^2), \underline{D}_1 P(u^1, u^2), \underline{D}_2 P(u^1, u^2)),$$

som kaldes <u>det til parametrene u^i svarende koordinatsystem i tangentplanen.</u> En vektor $\underline{a}$ i rummet, som er parallel med tangentplanen i $P(u^1, u^2)$, kaldes en <u>tangentvektor</u> til fladestykket i $P(u^1, u^2)$. Man tænker sig gerne $\underline{a}$ afsat ud fra fladepunktet; den vil da ligge i tangentplanen. Det har i fladeteorien stor betydning at fremstille tangentvektorer i det til et sæt parametre svarende koordinatsystem. Svarende til parametre u^i defineres koordinaterne a^i, $i = 1, 2$, til en tangentvektor $\underline{a}$ i $P(u^1, u^2)$ ved

$$\underline{a} = a^i \underline{D}_i P(u^1, u^2)$$

Formlen øverst på siden udtrykker da, at hastighedsvektoren

$$\frac{d}{dt} P(u^1(t), u^2(t))$$

i dette system har koordinaterne $\frac{du^i(t)}{dt}$.

Ved hjælp af formlen på side 6 kan vi finde sammenhængen mellem en tangentvektors koordinater svarende til forskellige valg af parametre. Betegner a^i koordinaterne, svarende til parametre u^i, og $\bar{a}^i$ koordinaterne, svarende til parametre $\bar{u}^i$, for en tangentvektor $\underline{a}$ i punktet $P(u^1, u^2) = P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, har vi

$$\underline{a} = a^i \underline{D}_i P(u^1, u^2) = \bar{a}^j \underline{\bar{D}}_j P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

$$= \bar{a}^j \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \underline{D}_i P(u^1, u^2)$$

altså
$$a^i = \bar{a}^j \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} .$$

For transformationen den anden vej fås tilsvarende:

$$\bar{a}^i = a^j \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}$$

Dette ses for koordinaterne til en hastighedsvektor $\frac{du^i(t)}{dt}$ at være i overensstemmelse med kædereglen.

Ethvert valg af parametre u^i for et fladestykke (regulært af klasse C^k, $k \geq 1$) inducerer en orientering i enhver af fladestykkets tangentplaner, nemlig svarende til vektorparret $\underline{D}_1 P(u^1, u^2)$, $\underline{D}_2 P(u^1, u^2)$, og man siger, at fladen hermed er <u>orienteret</u>.
Det er her naturligt at spørge om, hvormange muligheder der er for at orientere en flade. Er $\bar{u}^i$ et andet sæt parametre for fladestykket ved vi fra tidligere (side 4), at

$$\det\left\{\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\right\} \quad \text{og} \quad \det\left\{\frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^l}\right\}$$

enten begge er overalt positive eller begge overalt negative. Af sammenhængen mellem $\underline{D}_i P$ og $\overline{\underline{D}}_j P$ (side 6) ses, at i det første tilfælde vil de to sæt parametre inducere samme orientering i enhver tangentplan, i det andet tilfælde modsat orientering i enhver tangentplan. Der er altså to muligheder for at orientere et fladestykke.

Lad F være et regulært fladestykke af klasse C^k, $k \geq 1$, og $P(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in \Omega$ en parameterfremstilling af F. Er $\underline{a}$ og $\underline{b}$ to tangentvektorer til F i et punkt $P(u^1, u^2)$ af F, har $\underline{a}$ og $\underline{b}$ som vektorer i rummet et skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b}$. (Vi "låner" altså skalarproduktet fra det fladestykket F omgivende euklidiske rum). Skalarproduktet bliver åbenbart en symmetrisk bilinearform på det 2-dimensionale vektorrum, bestående af tangentvektorer til F i $P(u^1, u^2)$. Denne bilinearform kan udtrykkes i det til parametrene ui svarende koordinatsystem i tangentplanen. Vi har

$$\underline{a} = a^i \underline{D}_i P(u^1, u^2) \quad \text{og}$$

$$\underline{b} = b^j \underline{D}_j P(u^1, u^2)$$

hvoraf vi får

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{D}_i P(u^1, u^2) \cdot \underline{D}_j P(u^1, u^2) \; a^i b^j$$

altså

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = g_{ij}(u^1, u^2) \, a^i b^j}$$

hvor koefficienterne $g_{ij}(u^1, u^2)$ er bestemt ved

$$g_{ij}(u^1,u^2) = \underline{D}_i P(u^1,u^2) \cdot \underline{D}_j P(u^1,u^2)$$

Den ved skalarproduktet definerede bilinearform i tangentplanen til F i $P(u^1,u^2)$ kaldes <u>den metriske fundamentalform</u> eller <u>den første fundamentalform</u> for F i punktet $P(u^1,u^2)$. Den indrammede formel udtrykker denne i det til parametrene u^i svarende koordinatsystem. Vedrørende koefficienterne g_{ij} bemærker vi, at de bliver funktioner af klasse C^{k-1} af parametrene. Endvidere gælder

$$g_{11} = \underline{D}_1 P \cdot \underline{D}_1 P > 0$$

$$g_{12} = \underline{D}_1 P \cdot \underline{D}_2 P = g_{21}$$

og

$$g = \det\{g_{ij}\} = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 = |\underline{D}_1 P|^2 |\underline{D}_2 P|^2 - |\underline{D}_1 P \cdot \underline{D}_2 P|^2 > 0$$

(Cauchy-Swartz' ulighed).

Den metriske fundamentalform fastlægger længdemålingen i fladestykket F (heraf betegnelsen). Er $u^i = u^i(t)$, $\alpha < t < \beta$, parameterfremstilling for en kurve af klasse C^1 i parametrene u^i har vi nemlig

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d}{dt} P(u^1(t), u^2(t))\right|^2$$

$$= \left|\underline{D}_i P(u^1(t),u^2(t)) \frac{du^i(t)}{dt}\right|^2 = g_{ij}(u^1(t),u^2(t)) \frac{du^i(t)}{dt} \frac{du^j(t)}{dt}$$

og dermed buelængden svarende til intervallet $t_1 \le t \le t_2$ ($\alpha < t_1 < t_2 < \beta$):

$$s(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(u^1(t),u^2(t)) \frac{du^i(t)}{dt} \frac{du^j(t)}{dt} .$$

Vinkler mellem tangentvektorer kan ligeledes bestemmes ud fra den metriske fundamentalform:
Da

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos(\underline{a}, \underline{b})$$

har vi nemlig

$$\cos(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{g_{ij}\, a^i a^j}{\sqrt{g_{k\ell} a^k a^\ell}\,\sqrt{g_{mn} b^m b^n}}$$

På den anden side kan den metriske fundamentalform bestemmes alene ved længde- og vinkelmålinger i fladestykket. Vi har nemlig

$$g_{ii}(u^1, u^2) = |\underline{D}_i P(u^1, u^2)|^2$$

(NB! ingen summation), og denne er altså kvadratet på farten på u^i-kurven gennem punktet. Endvidere er

$$g_{12}(u^1, u^2) = \frac{\cos(\underline{D}_1 P(u^1, u^2), \underline{D}_2 P(u^1, u^2))}{|\underline{D}_1 P(u^1, u^2)|\,|\underline{D}_2 P(u^1, u^2)|} .$$

Man siger, at den metriske fundamentalform er en fuldstændig invariant for fladestykkets <u>indre geometri</u>, altså den del af fladestykkets geometriske egenskaber, som alene er bestemt ved målinger i selve fladestykket.

Transformationen af koefficienterne g_{ij} ved et parameterskift kan vi bestemme ved definitionsligningerne (øverst side 10) og transformationsligningerne for $\underline{D}_i P$ (side 6). Betegner $g_{ij}(u^1, u^2)$ koefficienterne svarende til parametrene u^i og $\bar{g}_{ij}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ koefficienterne svarende til parametrene $\bar{u}^i$, har vi

$$\bar{g}_{ij}(\bar{u}^1,\bar{u}^2) = \underline{\bar{D}}_i P(\bar{u}^1,\bar{u}^2)\cdot \underline{\bar{D}}_j P(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$$

$$= \left(\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\, \underline{D}_k P(u^1,u^2)\right)\cdot\left(\frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j}\, \underline{D}_l P(u^1,u^2)\right)$$

$$= \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j}\, \underline{D}_k P(u^1,u^2)\cdot \underline{D}_l P(u^1,u^2)$$

altså

$$\underline{\bar{g}_{ij}(\bar{u}^1,\bar{u}^2) = \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j}\, g_{kl}(u^1,u^2)}\ .$$

Denne transformationsligning harmonerer med transformationsligningen for en tangentvektors koordinater (side 8) og det faktum, at skalarproduktet er det samme uanset koordinatfremstillingen. Er nemlig $\underline{a}$ og $\underline{b}$ tangentvektorer i $P(u^1,u^2) = P(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$, og

$$\underline{a} = a^i\, \underline{D}_i P(u^1,u^2) = \bar{a}^i\, \underline{\bar{D}}_i P(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$$

$$\underline{b} = b^i\, \underline{D}_i P(u^1,u^2) = \bar{b}^i\, \underline{\bar{D}}_i P(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$$

har vi

$$\bar{g}_{ij}\,\bar{a}^i\bar{b}^j = \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j}\, g_{kl}\, a^m\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^m}\, b^n\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^n}$$

$$= \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^m}\frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^j}\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^n}\, g_{ij}\, a^m b^n$$

$$= \delta^k_m\,\delta^l_n\, g_{kl}\, a^m b^n = g_{mn}\, a^m b^n\ ,$$

hvor δ^i_j betegner det Kroneckerske indeks $\delta^i_j = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j\end{cases}$.

Fladeareal er fastlagt ved første fundamentalform. Er A en kompakt delmængde af parameterområdet Ω er arealet S_A af det til A hørende stykke af fladen bestemt ved

$$S_A = \iint_A \sqrt{\det\{g_{ij}(u^1,u^2)\}}\, du^1 du^2$$

Vi skal ikke her gøre rede for, hvordan man finder denne formel for fladearealet, men blot vise, at transformationsformlen for størrelserne g_{ij} medfører, at ovenstående integrals værdi er uafhængig af den valgte parameterfremstilling. Er $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ nemlig andre parametre, $\bar{g}_{ij}$ svarende hertil og $A' \subseteq \Omega'$ den til A svarende delmængde, har vi

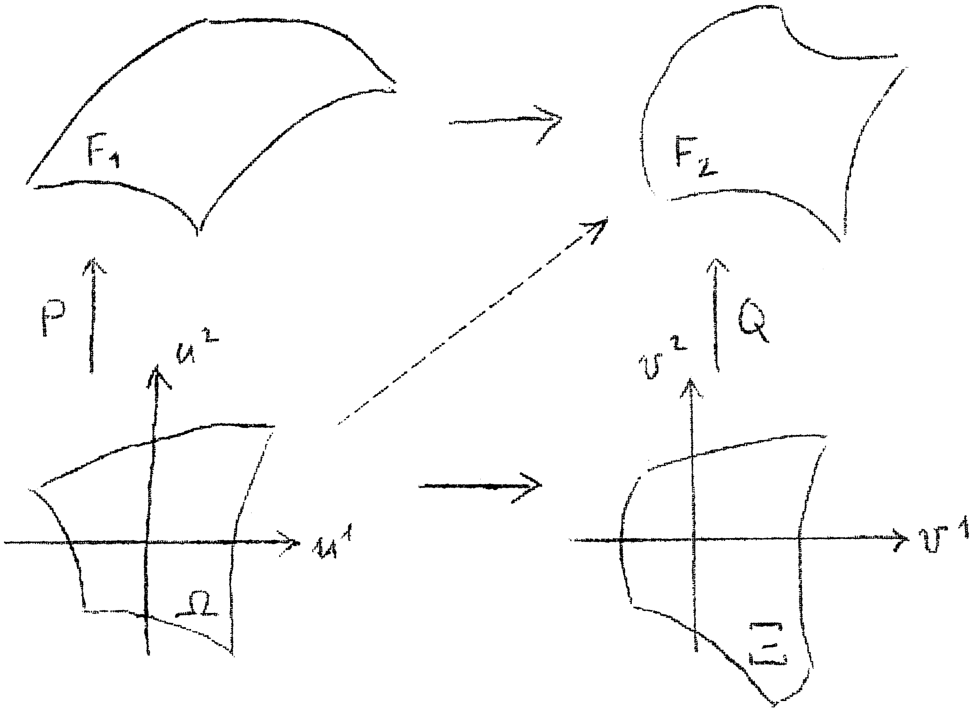
$$\det\{\bar{g}_{ij}\} = \det\{g_{ij}\} \left(\det\left\{\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^\ell}\right\}\right)^2$$

idet transformationsligningen på side 12 i matrixsprog betyder, at matricen $\{\bar{g}_{ij}\}$ er matricen $\{g_{ij}\}$ ganget fra venstre med $\left\{\frac{\partial u^\ell}{\partial \bar{u}^i}\right\}$ og fra højre med dennes transponerede. Vi har da

$$\iint_{A'} \sqrt{\det\{\bar{g}_{ij}\}}\, d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = \iint_{A'} \sqrt{\det\{g_{ij}\}} \left|\det\left\{\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^\ell}\right\}\right| d\bar{u}^1 d\bar{u}^2,$$

og dette er ifølge transformationsformlen for planintegralet netop S_A.

Er F_1 og F_2 regulære fladestykker af klasse C^k, $k \geq 1$, $P(u^1,u^2)$ med parameterområde Ω en parameterfremstilling af F_1 og $Q(v^1,v^2)$ en parameterfremstilling af F_2 med parameterområde Ξ, er en <u>afbildning af F_1 ind i F_2</u> bestemt ved en afbildning af Ω ind i Ξ. Denne sidste siges at beskrive afbildningen i de valgte parametre. Afbildningen siges at være af klasse C^l, $l \leq k$, hvis den beskrevet i parametrene er af klasse C^l.



Vi vil her interessere os for afbildninger, som er bijektive af klasse C^k og med invers afbildning af klasse C^k. En sådan afbildning er fremstillet i parametrene et tilladt parameterskift. Vi kan altså bruge samme parametre på begge fladestykker, og afbildningen er da simpelthen bestemt ved at ved afbildningen tilsvarende punkter på F_1 og F_2 svarer til de samme parameterværdier. (Denne parameterfremstilling $Q(u^1, u^2)$ af F_2 svarer til den stiplede pil på figuren). I ethvert punkt af F_1 kan vi da definere en afbildning af tangentplanen til F_1 i dette punkt på tangentplanen til F_2 i det tilsvarende punkt, idet vi til vektoren

$$a^i \underline{D}_i P(u^1, u^2)$$

knytter vektoren

$$a^i \underline{D}_i Q(u^1, u^2).$$

Et eksempel på dette har vi allerede mødt før, nemlig en parameterfremstilling. Opfattes parameterområdet selv som et fladestykke med den identiske afbildning som parameterfremstilling, er selve parameterfremstillingen en afbildning af dette fladestykke på det oprindelige fladestykke, og er i parametrene givet ved den identiske afbildning. For parameterområdet falder alle tangentplaner sammen med parameterplanen, og den ovenfor definerede afbildning af tangentplan på tangentplan bliver den afbildning, som til vektoren $a^i = (a^1, a^2)$ i parameterplanen knytter tangentvektoren $a^i \underline{D}_i P$ på fladestykket. Den er altså netop det tidligere definerede af parametrene u^i inducerede koordinatsystem i fladestykkets tangentplan.

Tilbage til det almindelige tilfælde. Afbildningen siges at være <u>isometrisk</u> eller <u>en isometri</u>, hvis tilsvarende kurver på de to fladestykker altid har den samme længde. Dette er ensbetydende med, at de to fladestykker har den samme metriske fundamentalform (som funktion af de fælles parametre u^i). Betegner $\overset{1}{g}_{ij}(u^1, u^2)$ koefficienterne i den metriske fundamentalform for F_1 og $\overset{2}{g}_{ij}(u^1, u^2)$ tilsvarende for F_2, har vi for en parameterfremstilling

$$u^i = u^i(t), \quad a < t < b,$$

at længden l_1 for den til $\alpha \le t \le \beta$ svarende kurve på F_1 er

$$l_1 = \int_\alpha^\beta \sqrt{g^1_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\, dt$$

og for kurven på F_2

$$l_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{g^2_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\, dt ,$$

(hvor $a < \alpha < \beta < b$). Ved differentiation med hensyn til β får vi af $l_1 = l_2$, at

$$g^1_{ij} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = g^2_{ij} \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}$$

for ethvert $t \in]a, b[$. Da enhver tangentvektor kan fremkomme som hastighedsvektor for en passende valgt parameterfremstilling slutter vi heraf, at de to kvadratiske former

$$g^1_{ij}(u^1, u^2)\, a^i a^j \quad \text{og} \quad g^2_{ij}(u^1, u^2)\, a^i a^j$$

stemmer overens for enhver værdi af u^1, u^2 og dermed, at de fundamentalformer stemmer overens, da de er de tilhørende symmetriske bilinearformer.

Det er på den anden side klart, at afbildningen er en isometri, hvis de to fundamentalformer stemmer overens.

Som et eksempel på en simpel fladetype vil vi betragte <u>omdrejningsflader.</u> Lad der være givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet og lad

$$x_1 = r(u^1)$$
$$x_2 = 0 \qquad a < u^1 < b$$
$$x_3 = q(u^1)$$

være en naturlig parameterfremstilling for en kurve (af klasse C^k) i x_1-x_3-planen. Drejes denne kurve om x_3-aksen, vil den beskrive en omdrejningsflade. Det til en parameterværdi u^1 og en drejningsvinkel u^2 (om x_3-aksen fra x_1-x_3 planen) svarende fladepunkt får åbenbart koordinaterne

$$(*) \qquad \begin{aligned} x_1 &= r(u^1)\cos u^2 \\ x_2 &= r(u^1)\sin u^2 \\ x_3 &= q(u^1) \end{aligned}$$

Vi har her fået en parameterfremstilling for hele fladen. Den er imidlertid behæftet med den svaghed, at (u^1, u^2) og $(u^1, u^2 + 2p\pi)$ for $p \in \mathbb{Z}$ svarer til samme punkt på fladen. Dette volder dog ikke nogen større vanskelighed, blot man er opmærksom derpå.
For ethvert interval $]c, d[$ af længde $\leq 2\pi$ giver (*) med parameterområdet $a < u^1 < b$, $c < u^2 < d$ en parameterfremstilling for et stykke (i den tidligere forstand) af fladen.

For de afledede får vi:

$$\underline{D}_1 P = (r'(u^1)\cos u^2, r'(u^1)\sin u^2, q'(u^1))$$
$$\underline{D}_2 P = (-r(u^1)\sin u^2, r(u^1)\cos u^2, 0)$$

For $r(u^1) = 0$ bliver $\underline{D}_2 P$ nulvektoren, mens de to vektorer for $r(u^1) \neq 0$ vil være lineært uafhængige. Det er også geometrisk klart, at parameterfrem-

stillingen må blive singulær i punkter, hvor $u^1 = 0$, d.v.s. punkter på x_3-aksen. Punktet vil nemlig være det samme uanset værdien af vinklen u^2.
Vi vil derfor antage, at $r(u^1) \neq 0$ for $a < u^1 < b$.

Man ser, at u^1-kurverne er snittene af fladen med halvplaner ud fra x_3-aksen. De kaldes meridiankurver på fladen. u^2-kurverne bliver cirkler med centrum på x_3-aksen.

Den metriske fundamentalform kan nu findes direkte ved definitionsligningerne for g_{ij}. Vi få

$$g_{11}(u^1,u^2) = (r'(u^1))^2 + (q'(u^1))^2 = 1$$

da parameterfremstillingen for meridiankurven var en naturlig parameterfremstilling.

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

og

$$g_{22}(u^1,u^2) = (r(u^1))^2$$

altså den metriske fundamentalform er

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a^1 b^1 + (r(u^1))^2 a^2 b^2$$

Produktleddet mangler i overensstemmelse med at parameterkurverne står vinkelret på hinanden.
Endvidere ser vi, at fundamentalformen er uafhængig af u^2. Dette følger også af, at en drejning om x_3-aksen er en isometri af fladen. En sådan drejning på vinklen v fremstilles i parametrene ved:

$$u^1 = u^1$$
$$u^2 = u^2 + v$$

Øvelser til kap IV § 4:

1. Polære koordinater i en plan kan opfattes som en parameterfremstilling af planen. Find planens metriske fundamentalform i disse parametre (sml. øv. IV, 1, 2).

2. I planen er givet en regulær kurve af klasse C^2 ved en naturlig parameterfremstilling $A(u^1)$, $a<u^1<b$. Ved til talsættet (u^1, u^2), hvor $a<u^1<b$, at lade svare punktet $P(u^1,u^2)$ i planen, bestemt ved
$$\overrightarrow{A(u^1)P(u^1,u^2)} = (u^2-u^1)\,\underline{v}_1(u^1),$$
og hvor $\underline{v}_1(u^1)$ betegner kurvens tangentvektor, fås en parameterfremstilling af en del af planen.
Hvad er parameterkurverne?
Udregn den metriske fundamentalform.

3. O betegner et fast punkt i rummet og $\overrightarrow{OP(u^1)} = \underline{a}(u^1)$, $\alpha<u^1<\beta$ en naturlig parameterfremstilling for en rumkurve af klasse C^1 på kugleoverfladen med centrum O og radius 1. Den ved parameterfremstillingen $P(u^1,u^2)$, hvor
$$\overrightarrow{OP(u^1,u^2)} = u^2\,\underline{a}(u^1),$$
bestemte flade kaldes da keglefladen med toppunktet O og den givne kurve som ledekurve. I det følgende betragtes den til $u^2>0$ svarende del af keglen. Find første fundamentalform for denne flade, og vis, at denne kan afbildes isometrisk på en del

af planen (eventuelt bliver der selvoverdækninger ved denne afbildning). (Benyt resultatet fra opg. 1).

4. I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Idet punktet A gennemløber skruelinien

$$x_1 = \cos u^1$$
$$x_2 = \sin u^1 \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_3 = h u^1$$

vil den rette linie l_A gennem A og x_3-aksen, og vinkelret på denne (d.v.s. skruelinenes hovednormal), beskrive en flade, vindelfladen. Opskriv parameterfremstillingen for vindelfladen, idet der som den ene parameter bruges u^1, og den anden bruges afstanden u^2 fra x_3-aksen, regnet positiv i retningen fra denne mod punktet A. Find i disse parametre den metriske fundamentalform af vindelfladen.
Find en naturlig parameterfremstilling for den kurve på vindelfladen, som er givet ved parameterfremstillingen

$$u^1 = \sqrt{2h}\, t \,, \quad u^2 = \sqrt{2h}\, \frac{1}{t} \,, \quad 0 < t < \infty .$$

5. Ved drejning af den i x_1-x_3 planen beliggende kædelinie

$$x_1 = a \cosh \frac{x_3}{a}$$

om x_3-aksen fremkommer en flade katenoiden. Opskriv parameterfremstillingen og find første fundamentalform for denne, idet der som parametre u^1 og u^2 bruges buelængden ud fra $(a,0,0)$ på kædelinien og drejningsvinklen.

Vis, at for $a=h$ findes der en isometri mellem den til $x_2 \geqq 0$ svarende del af katenoiden og den til $0 \leqq x_3 \leqq h\pi$ svarende del af vindelfladen (se den forrige opgave).

6. I halvplanen $x_3 > 0$ af x_1-x_3-planen betragtes tractricen, der fremkommer ved at afvikle kædelinien

$$x_1 = a \cosh \frac{x_3}{a}$$

ud fra $(a,0,0)$. (se opgave IV, 2, 1).
Ved at dreje denne kurve om x_3-aksen fremkommer en flade, pseudosfæren. På denne bruges som parametre buelængden ud fra $(a,0,0)$ på tractricen og drejningsvinklen. Find den metriske fundamentalform af pseudosfæren i disse parametre.
Vis, at der ved

$$(u^1, u^2) \rightarrow \left(u^1 + \alpha,\ e^{\frac{\alpha}{a}}(u^2 + \beta)\right),$$

hvor $\alpha, \beta \in R$ defineres en isometrisk afbildning af en delmængde af pseudosfæren på en delmængde af pseudosfæren. Slut heraf, at hvis P og Q er punkter på pseudosfæren, da findes på denne omegne U_P og U_Q af P og Q med en isometrisk afbildning $f: U_P \rightarrow U_Q$, ved hvilken $f(P) = Q$.

Mat. 3, 1963-64 IV, 4, øv. 7

7. I rummet er en keglefladе K givet i retvinklede koordinater ved

$$x_3^2 = 3(x_1^2 + x_2^2), \quad x_3 > 0 .$$

F betegner en plan med retvinklede koordinater (ξ_1, ξ_2) hvorfra punktet $(0,0)$ er fjernet. Vis, at der findes en afbildning $f: F \to K$, som er isometrisk og lokalt bijektiv, og ved hvilken $(1,0) \longrightarrow (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0,1) \longrightarrow (-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Opskriv x_1, x_2 og x_3 som funktioner af ξ_1 og ξ_2 ved f. (Beskriv først afbildningen f, idet K fremstilles ved polære koordinater i rummet og F ved polære koordinater i planen).

Ethvert punkt af K er ved f billede af netop 2 punkter i F.

Find en naturlig parameterfremstilling for den korteste kurve på K fra punktet $(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ til punktet $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

Find en parameterfremstilling for den kurve, hvor K skæres af cylinderfladen

$$x_3^2 - 3x_1^2 = \frac{3}{4} .$$

§ 5. Fladens krumning. Den anden fundamentalform.

Lad F være et regulært fladestykke af klasse C^2 i rummet og $P(u^1, u^2)$ en parameterfremstilling af F. Vi vil i dette afsnit antage at rummet er orienteret. Vektorproduktet af to vektorer er da defineret. Svarende til parameterfremstillingen $P(u^1, u^2)$ af F kan vi da i ethvert punkt på F definere normalvektoren $\underline{N}(u^1, u^2)$ ved

$$\underline{N}(u^1, u^2) = \frac{\underline{D}_1 P(u^1, u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1, u^2)}{|\underline{D}_1 P(u^1, u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1, u^2)|} .$$

Den er åbenbart den positive enhedsnormalvektor til tangentplanen i $P(u^1, u^2)$ med hensyn til den af parametrene u^1, u^2 inducerede orientering af denne (og den givne orientering i rummet). To parameterfremstillinger af F giver altså samme normalvektor når og kun når de inducerer samme orientering af F. Vi vil i det følgende antage, at F er orienteret og kun benytte parameterfremstillinger, som inducerer den valgte orientering af F. Normalvektoren er da uafhængig af valget af parametre.

For at analysere fladens forløb i omegnen af et punkt betragter vi de partielle afledede af anden orden

$$\underline{D}_i \underline{D}_j P(u^1, u^2) = \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} P(u^1, u^2) .$$

Disse er vektorer i rummet og kan hver især på netop 1 måde skrives som linearkombination af $\underline{D}_1 P(u^1, u^2)$, $\underline{D}_2 P(u^1, u^2)$ og $\underline{N}(u^1, u^2)$. Vi indfører størrelserne $\Gamma_{ij}^k(u^1, u^2)$ og $L_{ij}(u^1, u^2)$ ved

$$\underline{D}_i\, \underline{D}_j\, P(u^1,u^2) = \Gamma_{ij}^{k}(u^1,u^2)\, \underline{D}_k P(u^1,u^2) + L_{ij}(u^1,u^2)\underline{N}(u^1,u^2).$$

Hermed er de partielle afledede af anden orden skrevet i fladens ledsagende koordinatsystem $(\underline{D}_1 P, \underline{D}_2 P, \underline{N})$. Vi bemærker, at symmetrien af de blandede afledede $(\underline{D}_i \underline{D}_j = \underline{D}_j \underline{D}_i)$ medfører, at Γ_{ij}^k og L_{ij} er symmetriske i de nedre indices:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{og} \quad L_{ij} = L_{ji}.$$

Størrelserne L_{ij} kan direkte bestemmes af den ovenstående ligning, da $\underline{N}$ er vinkelret på $\underline{D}_1 P$ og $\underline{D}_2 P$. Vi får

$$L_{ij}(u^1,u^2) = \underline{D}_i\, \underline{D}_j\, P(u^1,u^2) \cdot \underline{N}(u^1,u^2)$$

Størrelserne Γ_{ij}^k kaldes Christoffelsymboler af anden art, L_{ij} er koefficienterne i fladens anden fundamentalform (se nedenfor).

Lad $u^i = u^i(s)$ i parametrene fremstille en naturlig parameterfremstilling for en kurve af klasse C^2 på F. (At parameterfremstillingen er naturlig betyder, at

$$g_{ij}(u^1(s),u^2(s))\,\frac{du^i(s)}{ds}\,\frac{du^j(s)}{ds} = 1 \;)$$

Vi søger da et udtryk for kurvens krumning i punktet $P_0 = P(u^1(s_0),u^2(s_0))$. Tangentvektoren er

$$\underline{V}_1(s) = \frac{d}{ds}P(u^1(s),u^2(s)) = \frac{du^i(s)}{ds}\,\underline{D}_i P(u^1(s),u^2(s))$$

Ved differentiation med hensyn til s får krumningsvektoren

$$\frac{d\underline{V}_1}{ds} (= \kappa \underline{V}_2) = \frac{d^2u^i}{ds^2}\,\underline{D}_i P + \frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds}\,\underline{D}_j\,\underline{D}_i P,$$

hvor vi for korthedens skyld har udeladt symbolerne for de uafhængige variable. Med den ovenfor definerede opspaltning af de anden afledede for fladen, får vi da

$$\frac{d\underline{V}_1}{ds} = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^{k} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\underline{D}_k P + \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} L_{ij}\,\underline{N}$$

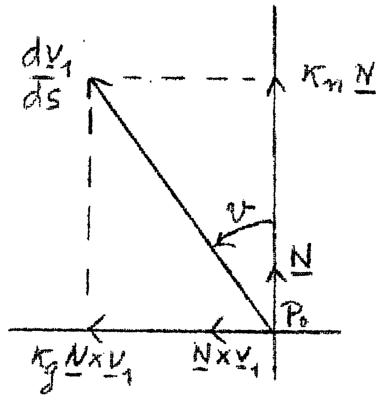
Hermed er krumningsvektoren opløst i komposanter efter fladens tangentplan og normal. Da $d\underline{V}_1/ds$ og $\underline{N}$ står vinkelret på $\underline{V}_1$, må den tangentielle komposant stå vinkelret på $\underline{V}_1$ og er derfor proportional med vektoren $\underline{N} \times \underline{V}_1$ (Denne er den positive normalvektor i tagentplanen til $\underline{V}_1$). Størrelserne κ_g og κ_n indføres ved

$$\frac{d\underline{V}_1}{ds} = \kappa_g\, \underline{N} \times \underline{V}_1 + \kappa_n\, \underline{N}$$

og vi har åbenbart

$$\kappa_n = L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

κ_g kaldes kurvens geodætiske krumning i P_0 og κ_n kaldes kurvens normalkrumning i P_0. Man bemærker, at de begge er regnet med fortegn (via de indførte orienteringer).



Vektorerne $\underline{N}$ og $d\underline{V}_1/ds$ ligger begge i kurvens normalplan. På figuren er denne tegnet, svarende til at tagentvektoren peger ind i papiret. Tegningen svarer til $\kappa_n > 0$ og $\kappa_g > 0$. Den indtegnede vinkel v er vinklen mellem fladenormalen og kurvens oskulationsplan i P_0.

Af formlen for normalkrumningen ser man, <u>at denne størrelse er bestemt alene ved vektoren $\underline{v}_1$ og fladen</u>. Den er altså den samme for alle fladekurver, som har $\underline{v}_1$ som tangentvektor. Den kaldes derfor fladens normalkrumning i retningen $\underline{v}_1$ i P_0.

Er $\underline{a} = a^i \underline{D}_i P$ en tangentvektor $\neq \underline{0}$ i P_0 fås normalkrumningen i retningen af $\underline{a}$ ved

$$L_{ij}\, b^i b^j$$

hvor $\underline{b} = b^i \underline{D}_i P = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$.

Idet $|\underline{a}|^2 = g_{ij} a^i a^j$, får vi

$$\underline{\kappa_n(\underline{a}) = \frac{L_{ij} a^i a^j}{g_{kl} a^k a^l}}$$

Den kvadratiske form $L_{ij} a^i a^j$ på tangentplanen kaldes fladens <u>anden fundamentalform</u>. Formlen for $\kappa_n(\underline{a})$ udtrykker, at normalkrumningen i $\underline{a}$'s retning er forholdet mellem anden og første fundamentalforms værdi på $\underline{a}$.

Af figuren på side 3 aflæser vi <u>Meusnier's sætning</u>:

Lad $\underline{a} \neq \underline{0}$ være en enhedstangentvektor til F i P_0, og $\kappa_n(\underline{a}) \neq 0$. For en kurve (af klasse C^2) på F, som går gennem P_0 og her har $\underline{a}$ som tangentvektor, vil oskulationsplanen i P_0 ikke kunne falde sammen med tangentplanen i P_0.

Kurvens krumning i P_0 er bestemt ved Meusniers formel:

$$\kappa = \left| \frac{\kappa_n(\underline{a})}{\cos v} \right| ,$$

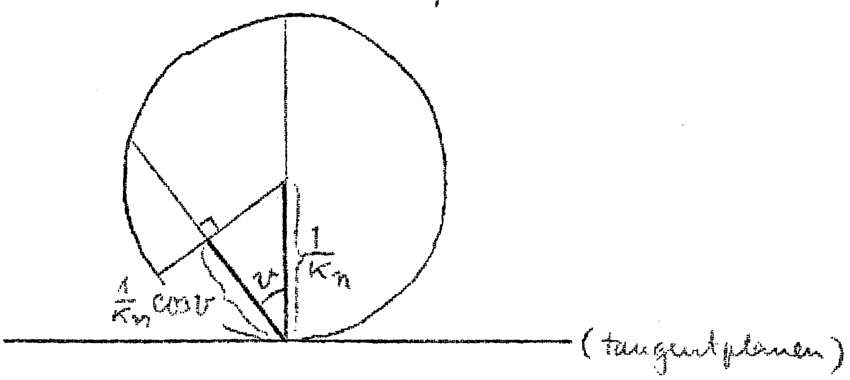
hvor v betegner vinklen mellem fladenormalen og kurvens oskulationsplan i P_0.

Er $\kappa_n(\underline{a}) = \underline{0}$ vil enhver kurve gennem P_0 med $\underline{a}$ som tangentvektor og krumning forskellig fra 0 have tangentplanen som oskulationsplan.

Meusniers sætning tillader en meget anskuelig fortolkning. Tegnes kuglefladen (Meusniers kugle) gennem P_0 med centrum $C(\underline{a})$ bestemt ved

$$\overrightarrow{P_0 C(\underline{a})} = \frac{1}{\kappa_n(\underline{a})} \underline{N}$$

vil krumningscirklen (sml side IV 3,2 - 3. Her er dog kun indført dens centrum) for en kurve på F gennem P_0 og med $\underline{a}$ som tangentvektor i dette punkt, være skæringscirklen mellem Meusniers kugle og kurvens oskulationsplan i P_0. At dette er rigtig ses af den Meusnier'ske formel for κ og af følgende figur, som fremstiller situationen i kurvens normalplan:



Betegnelsen normalkrumning er valgt af følgende grund: Normalkrumningen i P_0 i retningen $\underline{a}$ er taget numerisk lig med krumningen i P_0 af den kurve hvori planen gennem $\underline{a}$ og $\underline{N}$ (normalsnittet i retningen $\underline{a}$) skærer fladen.

Dette følger umiddelbart af Meusniers sætning, da denne kurve har planen gennem $\underline{a}$ og $\underline{N}$ som oskulationsplan.

For at analysere normalkrumningens variation med retningen bemærker vi, at $\kappa_n(\underline{a})|\underline{a}|^2$ er en kvadratisk form i tangentplanen, nemlig anden fundamentalform

$$\kappa_n(\underline{a})|\underline{a}|^2 = L_{ij}a^i a^j .$$

Fra teorien for ortogonal reduktion af kvadratiske former ved vi da, at der findes et ortonormalt par $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ af tangentvektorer, som er konjugerede med hensyn til denne kvadratiske form. Dette betyder, at i koordinatsystemet med $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ som grundvektorer er formen på diagonalform:

$$\kappa_n(\underline{a})|\underline{a}|^2 = \kappa_1(\xi^1)^2 + \kappa_2(\xi^2)^2 = \kappa_i(\xi^i)^2$$

$$\text{idet} \quad \underline{a} = \xi^i \underline{e}_i .$$

Her er κ_i åbenbart normalkrumningen i retningen $\underline{e}_i$. Et sådant sæt af retninger kaldes <u>hovedretninger</u> og de tilhørende normalkrumninger <u>hovedkrumninger</u>

I tilfældet $\kappa_1 = \kappa_2$ er normalkrumningen den samme i alle retninger og anden fundamen=

talform er på diagonalform i ethvert ortonormalt system i tangentplanen. Punktet siges da at være et kuglepunkt (spec. fladpunkt, når alle normalkrumninger er 0) på fladen. I de øvrige tilfælde er hovedretningerne entydigt bestemt (pånær fortegnsændringer og ombytning af rækkefølgen for $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$).

Af formlen på forrige side får vi, idet vi bemærker, at

$$\frac{(\xi^1)^2}{|a|^2} = \cos^2(\underline{e}_1, \underline{a}) \qquad \frac{(\xi^2)^2}{|a|^2} = \sin^2(\underline{e}_1, \underline{a})$$

Eulers formel:

$$\underline{K_n(\underline{a}) = K_1 \cos^2(\underline{e}_1, \underline{a}) + K_2 \sin^2(\underline{e}_1, \underline{a})}$$

Ved hjælp af denne kan man finde normalkrumningen i en vilkårlig retning i tangentplanen, når hovedretningerne og hovedkrumningerne er kendte.

Kendes første og anden fundamentalform for fladestykket F i punktet P_0 i parametre u^1, u^2, kan hovedretningerne og hovedkrumningerne bestemmes på følgende måde:

At $\quad \underline{e}_1 = e_1^i \underline{D}_i P \quad$ og $\quad \underline{e}_2 = e_2^i \underline{D}_i P$

er hovedretninger svarende til hovedkrumningerne K_1 og K_2 betyder, at

$$g_{ij}\, e_k^i e_\ell^j = \delta_{k\ell}\,, \quad L_{ij}\, e_1^i e_2^j = 0\,,$$

$$L_{ij}\, e_1^i e_1^j = \kappa_1 \quad \text{og} \quad L_{ij}\, e_2^i e_2^j = \kappa_2\,.$$

Den første ligning udtrykker nemlig, at $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ er et ortonormalt par af vektorer, den anden, at de er indbyrdes konjugerede med hensyn til den anden fundamentalform, den tredje og fjerde, at κ_1 og κ_2 er de til $\underline{e}_1$ henh. $\underline{e}_2$ hørende normalkrumninger (da $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = 1$). Det ses nu let, at

$$(L_{ij}\, e_1^i - \kappa_1 g_{ij}\, e_1^i)\, e_k^j = 0$$

for $k = 1$ og for $k = 2$. Da vektorerne $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ er lineært uafhængige, er talparrene (e_1^i) og (e_2^i) ikke proportionale, og der gælder derfor

$$(L_{ij} - \kappa_1 g_{ij})\, e_1^i = (L_{ij}\, e_1^i - \kappa_1 g_{ij}\, e_1^i) = 0$$

for $j = 1$ og 2. Heraf sluttes, at

$$\det\{L_{ij} - \kappa_1 g_{ij}\} = 0$$

da $(e_1^1, e_1^2) \neq (0,0)$.
Tilsvarende ses, at

$$\det\{L_{ij} - \kappa_2 g_{ij}\} = 0\,.$$

Hovedkrumningerne er altså begge rødder i ligningen

$$\det\{L_{ij} - \lambda g_{ij}\} = 0\,.$$

De er endda altid rødderne. Er punktet et kuglepunkt, er de to fundamentalformer nemlig proportionale, og ligningen har da kun een rod.

Når hovedkrümningerne er bestemt bestemmes hovedretningerne af ligningerne fra forrige side:

$$(L_{ij} - \kappa_k g_{ij}) e^i_k = 0 \;, \quad g_{ij} e^i_k e^j_k = 1 .$$

Ud fra hovedkrümningerne κ_1 og κ_2 af F i punktet P_0 kan man danne størrelserne

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \qquad K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 .$$

H kaldes fladens <u>middelkrümning</u> K den <u>gausssiske krümning</u> (eller krümningsmålet) af fladen i P_0.
Da κ_1 og κ_2 er rødderne i andengradsligningen

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda g_{11} & L_{12} - \lambda g_{12} \\ L_{21} - \lambda g_{12} & L_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

har man

$$K = \frac{L}{g} ,$$

hvor $L = \det\{L_{ij}\}$ og $g = \det\{g_{ij}\}$, samt

$$H = \frac{g_{11} L_{22} - 2 g_{12} L_{12} + g_{22} L_{11}}{2g} .$$

Indføres den inverse matrix g^{ij} til g_{ij}, får vi

$$H = \tfrac{1}{2} g^{ij} L_{ij} .$$

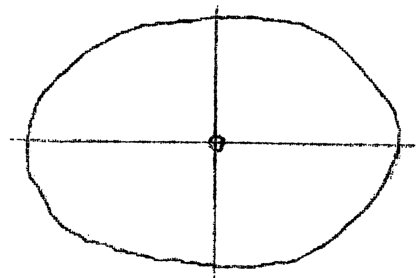
Et geometrisk billede af normalkrumningens afhængighed af retningen kan man få ved i denne at tegne kurven

$$|L_{ij}a^i a^j| = 1.$$

(Her betegner a^i koordinaterne i koordinatsystemet $(P_0, \underline{D}_1P, \underline{D}_2P)$ til et punkt i tangentplanen). Denne kurve kaldes <u>Dupin's indikatrix</u> for fladen i det pågældende punkt. Man ser, at den fremkommer ved, at man i enhver retning $\underline{a}$ afsætter stykket $1/\sqrt{|\kappa_n(\underline{a})|}$ ud fra P_0.

Der er følgende muligheder for forløbet af Dupins indikatrix:

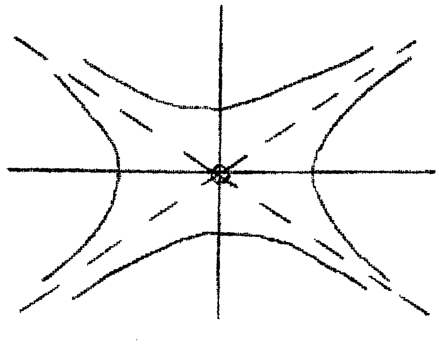
<u>1. $K > 0$</u>, d.v.s. κ_1 og κ_2 er begge $\neq 0$ og har samme fortegn



Indikatrix er da en ellipse (spec. en cirkel, hvis punktet er et kuglepunkt). Dennes akseretninger er hovedretningerne og halvakserne er $1/\sqrt{|\kappa_1|}$ og $1/\sqrt{|\kappa_2|}$.

Fladen siges at være <u>elliptisk krummet</u> i punktet.

<u>2. $K < 0$</u>, d.v.s. κ_1 og κ_2 begge $\neq 0$ med modsat fortegn

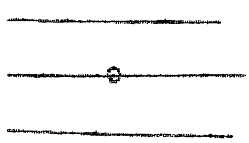


Indikatrix er da to hyperbler (ligesidede for $\kappa_1 = -\kappa_2$ d.v.s. for $H = 0$). Akseretningerne er hovedretningerne og halvakserne er $1/\sqrt{|\kappa_1|}$ og $1/\sqrt{|\kappa_2|}$.

Fladen siges at være <u>hyperbolsk krummet</u> i punktet.

De to retninger, hvori normalkrumningen bliver 0, kaldes (af let forståelige grunde) asymptoteretningerne i punktet.

3. $K = 0$, d.v.s. en af hovedkrumningerne er 0. Er den anden hovedkrumning forskellig fra 0 (d.v.s. $H \neq 0$), bliver indikatrix et par af af parallelle linier med retning efter den hovedretning, hvor hovedkrumningen er 0. Fladen siges da at være parabolsk krummet i Punktet.



Er begge hovedkrumninger 0 (d.v.s. $H = 0$) er punktet et fladpunkt og indikatrix er den den tomme mængde

---

Dupins indikatrix kan give en tilnærmet beskrivelse af fladens forløb i omegnen af fladepunktet P_0 i følgende forstand:
Idet $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$ er enhedsvektorer i hovedretningerne i P_0, er $(P_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{N})$, hvor $\underline{N}$ er normalvektoren i P_0, et retvinklet koordinatsystem i rummet. Fladens parameterfremstilling i dette koordinatsystem har formen

$$x_1 = x_1(u^1, u^2)$$
$$x_2 = x_2(u^1, u^2)$$
$$x_3 = x_3(u^1, u^2).$$

Der gælder $$\frac{\partial x_3(u_0^1, u_0^2)}{\partial u^1} = \frac{\partial x_3(u_0^1, x_0^2)}{\partial u^2} = 0,$$

da tangentplanen i $P_0 = P(u_0^1, u_0^2) = (0,0,0)$ er e_1-e_2-planen. Da parameterfremstillingen er regulær, har vi altså

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(u_0^1,u_0^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1(u_0^1,u_0^2)}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2(u_0^1,u_0^2)}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2(u_0^1,u_0^2)}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Af sætningen om omvendt funktionspar følger da, at vi kan udtrykke u^1 og u^2 som funktioner af x_1 og x_2 i en omegn af $(0,0)$. I en omegn af P_0 kan x_1 og x_2 altså bruges som parametre, og fladen bliver herved fremstillet ved ligninger af formen:

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

i en omegn af P_0. Funktionen f er af klasse C^2 i en omegn af $(0,0)$. Med disse parametre får vi

$$\underline{D}_1 P(x_1,x_2) = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)$$
$$\underline{D}_2 P(x_1,x_2) = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)$$

og

$$\underline{D}_i \underline{D}_j P(x_1,x_2) = \left(0,\ 0,\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

I P_0 er normalvektoren $(0,0,1)$ og den anden fundamentalform $\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2$, idet κ_1 og κ_2 er hovedkrumningerne svarende til hovedretningerne $\underline{e}_1$ og $\underline{e}_2$. Vi har altså

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} = \kappa_1,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2} = \kappa_2,\quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

(se formlen side 5.2).

Taylors formel med led af indtil anden orden for funktionen f giver da:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2) + \varepsilon(x_1, x_2)\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

hvor $\varepsilon(x_1, x_2) \to 0$ for $(x_1, x_2) \to (0,0)$.

I omegnen af $P_0 = (0,0,0)$ approximeres fladen altså godt af paraboloiden

$$x_3^2 = \frac{1}{2}(\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2).$$

Denne paraboloide kaldes derfor den oskulerende paraboloide til F i P_0. (En kort udregning viser, at denne flade har de samme normalkrümninger som F i P_0). Dette giver en forklaring på gloserne: elliptisk, hyperbolsk og parabolsk krümning, idet dette direkte refererer til arten af den oskulerende paraboloide.
Dupin's indikatrix er åbenbart de kurver, hvori den oskulerende paraboloide skæres af planerne $x_3 = \pm\frac{1}{2}$.
(Planerne $x_3 = \pm\varepsilon$ $(\varepsilon \neq 0)$ vil skære den oskulerende paraboloide i et kurvesystem som er ligedannet med indikatrix. For små værdier af $|\varepsilon|$ er disse snit en god approximation til de samme snit i fladen F. Indikatrix er altså (pånær en ligedannethed) et tilnærmet billede af de kurver, hvori fladen skæres af et sæt af parallelle naboplaner $x_3 = \pm\varepsilon$ til tangentplanen).

En kurve på F, som i ethvert punkt har en hovedretning som tangentretning kaldes en krümningskurve. Man kan vise, at der gennem hvert punkt på F, som ikke er kuglepunkt eller fladpunkt, går netop to krümningskurver. Vi vil ikke bevise dette her, men blot angive en differentialligning, som en krümningskurve må tilfredsstille. Fra side 8 har vi, at den til hovedkrumningen κ svarende hovedretning $\underline{e} = e^i \underline{D}_i P$

tilfredsstiller ligningerne:

$$(L_{ij} - \kappa g_{ij}) e^i = 0$$

eller udførligt skrevet:

$$L_{11} e^1 + L_{21} e^2 = \kappa (g_{11} e^1 + g_{21} e^2)$$
$$L_{12} e^1 + L_{22} e^2 = \kappa (g_{21} e^1 + g_{22} e^2)$$

Elimineres κ, får vi

$$(L_{11} e^1 + L_{21} e^2)(g_{21} e^1 + g_{22} e^2) = (L_{12} e^1 + L_{22} e^2)(g_{11} e^1 + g_{21} e^2)$$

eller

$$\begin{vmatrix} L_{1k} e^k & g_{1k} e^k \\ L_{2k} e^k & g_{2k} e^k \end{vmatrix} = 0$$

Er $u^i = u^i(t)$ en (ikke nødvendigvis naturlig) parameterfremstilling for en krumningskurve, er $\left(\frac{du^i}{dt}\right)$ for hvert t proportional med en enhedstangentvektor, svarende til en hovedretning. Der gælder derfor:

$$\begin{vmatrix} L_{1k} \frac{du^k}{dt} & g_{1k} \frac{du^k}{dt} \\ L_{2k} \frac{du^k}{dt} & g_{2k} \frac{du^k}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

hvilket er den søgte differentialligning. (Her skal værdierne af L_{ij} og g_{ij} selvfølgelig tages i det pågældende punkt på kurven).

Er F en hyperbolsk krummet flade d.v.s. hyperbolsk krummet i ethvert punkt, kaldes en kurve på F, som i ethvert punkt har en asymptoteretning som tangentretning, en asymptotekurve på F. Af Meusniers sætning ser vi, at en asymptotekurve er karakteriseret ved, at i de punkter, hvor dens krumning er forskellig fra 0, er dens oskulationsplan sammenfaldende med fladens tangentplan. Hvis $u^i = u^i(t)$ er en parameterfremstilling i parametre u^i for en asymptotekurve på F, gælder åbenbart

$$L_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 .$$

Denne ligning er altså differentialligningen for asymptotekurverne. Ved differentialligningsteoretiske metoder kan man vise, at der gennem hvert punkt på en hyperbolsk krummet flade går netop 2 asymptotekurver.

Øvelser til kap IV § 5

1. Hvilke ændringer sker der med en fladekurves geodætiske krumning og med dens normalkrumning, når der skiftes orientering i rummet, på fladen eller på kurven?

2. Find transformationsformlerne for størrelserne L_{ij} og Γ_{ij}^{k} ved et parameterskift.

3. Angiv hovedretninger og hovedkrumninger for en omdrejningscylinder med radius $b > 0$. Find, ved Eulers og Meusniers sætninger, krumningen i et plant snit i denne cylinder i et punkt P, hvor snittets tangent danner vinklen θ med frembringeren og snitplanen vinklen ψ med tangentplanen. Benyt resultatet til at løse opgave IV, 2, 4.

4. Vis, at middelkrumningen for en flade i et punkt er bestemt ved
$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa_n(\theta)\,d\theta ,$$
hvor $\varkappa_n(\theta)$ betegner normalkrumningen i en retning i tangentplanen, der danner vinklen θ med en fast retning i denne.

5. I retvinklede koordinater i rummet betragtes den ligesidede hyperboloide
$$X_3 = X_1 X_2$$

Koordinaterne x_1 og x_2 bruges som parametre. Bestem fladens første og anden fundamentalform. Vis, at fladen overalt er hyperbolsk krummet. Find kurvens asymptotekurver og krumningskurver, og skitsér forløbet af disse kurvers retvinklede projektioner på x_1-x_2-planen.

6. Find hovedretninger og hovedkrumninger i et punkt af en omdrejningsflade (sml. side IV, 4, 16-18). Vis, at katenoiden (sml. øv. IV, 4, 5) har middel-krumning identisk 0 og at pseudosfæren (sml. øv. IV, 4, 6) har konstant gaussisk krumning $-\frac{1}{a^2}$.

7. En ringflade (torus) fremkommer ved at cirklen i x_1-x_3-planen med centrum $(b, 0, 0)$ og radius a, $b > a > 0$, drejes om x_3-aksen. Opskriv en parameterfremstilling for ringfladen. Find hovedretninger og hovedkrumninger i et vilkårligt punkt af fladen og angiv hvor denne er elliptisk, hyperbolsk eller parabolsk krummet.

8. Idet kugleoverfladen med centrum O og radius 1 orienteres således, at normalvektoren peger bort fra centrum i ethvert punkt, skal man, udtrykt ved κ og τ, finde den geodætiske krumning af en rumkurves sfæriske tangentbillede (sml. øv. IV, 3, 3). Vis under brug af rumkurveteoriens hovedsætning, at der for kurver på kugleoverfladen gælder en sætning, analog til den plane kurveteoris hovedsætning, idet den geodætiske krumning træder i

stedet for den plane krumning.

9. Find anden fundamentalform, middelkrumning og krumningsmål for vindelfladen (øv. IV, 4, 4). Vis, at med den i denne øvelse fundne parameterfremstilling er parameterkurverne asymptotekurver.

De partielle afledede af normalvektoren $\underline{N}(u^1, u^2)$ kan udtrykkes ved de indførte størrelser. Idet $\underline{N} \cdot \underline{N} = 1$ har vi

$$\underline{N} \cdot \underline{D}_i \underline{N} = 0,$$

og $\underline{D}_i \underline{N}$ kan derfor skrives som linearkombination af $D_1 P$ og $D_2 P$:

$$\underline{D}_i \underline{N} = B_i^j \underline{D}_j P .$$

Da $\underline{N}$ er vinkelret på tangentplanen, har vi $\underline{N} \cdot \underline{D}_k P = 0$. Heraf fås ved differentiation:

$$\underline{D}_i \underline{N} \cdot \underline{D}_k P = - \underline{N} \cdot \underline{D}_i \underline{D}_k P = - L_{ik} \,,$$

altså

$$B_i^j \underline{D}_j P \cdot \underline{D}_k P = B_i^j g_{jk} = - L_{ik} .$$

Betegner g^{ij} den inverse matrix til g_{ij} (vi har altså

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = - \frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g},$$

hvor $g = \det\{g_{ij}\} > 0$) får man

$$B_i^l = - g^{kl} L_{ik} \,,$$

idet $g_{jk} g^{kl} = \delta_j^l$ (dette udtrykker i den valgte notation, at $\{g^{kl}\}$ er invers til $\{g_{jk}\}$).

Hermed har vi den ønskede formel:

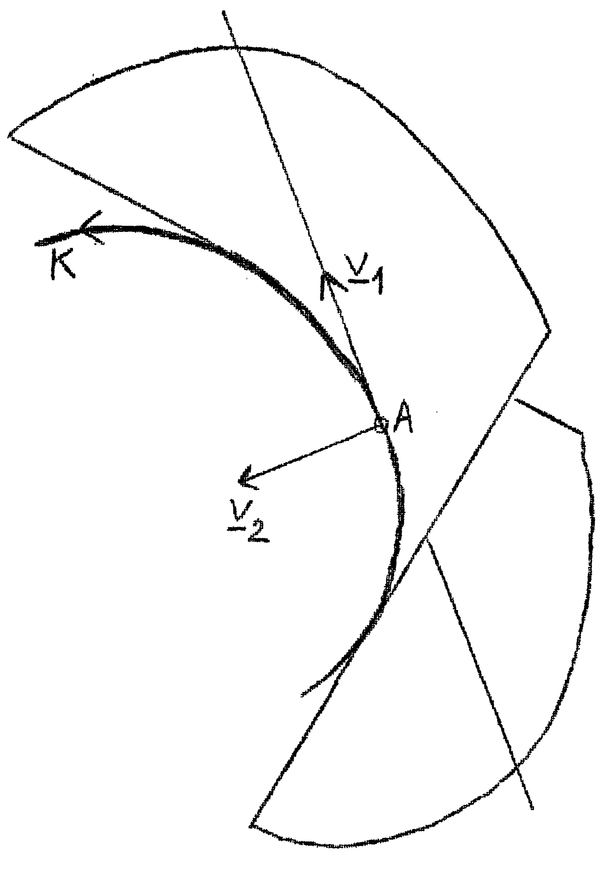
$$\underline{\underline{D}_i \underline{N}(u^1, u^2) = - g^{kj}(u^1, u^2) L_{ji}(u^1, u^2) \underline{D}_k P(u^1, u^2)}$$

§ 6. Retliniede flader.

Idet K er en kurve i rummet forstår man ved <u>tangentfladen</u> til K den flade F, som beskrives af kurvens tangent, idet røringspunktet gennemløber kurven. Vi forudsætter, at K er af klasse C^3, og at dens krumning ikke antager værdien 0. Idet $A(u^1)$, $a < u^1 < b$, er en naturlig parameterfremstilling for K, bestemmes en parameterfremstilling $P(u^1, u^2)$ for F ved

$$\overrightarrow{A(u^1)\,P(u^1,u^2)} = u^2\,\underline{v}_1(u^1),$$

hvor $\underline{v}_1$ betegner tangentvektoren til K.



Vi får for de afledede:

$$\underline{D}_1 P(u^1, u^2) = \underline{V}_1(u^1) + u^2 \kappa(u^1) \underline{V}_2(u^1)$$

$$\underline{D}_2 P(u^1, u^2) = \underline{V}_1(u^1).$$

Fladen er altså af klasse C^2 (de indgående størrelser er af klasse mindst C^1) og regulær pånær i punkter, hvor $u^2 = 0$, d.v.s. i punkterne på K. Kurven K kaldes fladens <u>spidskant</u> (eller gratlinie), da man kan vise, at normalplanen til K gennem A skærer F i en kurve, som har en spids i A. Normalvektoren er $-\underline{V}_3$ for $u^2 > 0$ og $\underline{V}_3$ for $u^2 < 0$. Det følger heraf, at <u>fladens tangentplan er den samme i alle punkter af en frembringer</u>, idet man kalder tangenterne til K for fladens <u>frembringere.</u> Den metriske fundamentalforms koefficienter bliver

$$g_{11} = 1 + [\kappa(u^1)\, u^2]^2$$
$$g_{12} = g_{21} = 1$$
$$g_{22} = 1$$

Er $\tilde{K}$ en anden rumkurve med naturlig parameterfremstilling $\tilde{A}(u^1)$ med samme parameterinterval som $A(u^1)$, kan man definere en afbildning af tangentfladen $\tilde{F}$ for $\tilde{K}$ på F, idet man lader tilsvarende punkter på de to flader være punkter med samme parameterværdier. Af det ovenstående udtryk for den metriske fundamentalform ser man, at denne afbildning bliver en isometri, hvis de to kur=

ver har samme krumning som funktion af den fælles parameter u^1. Heraf følger, at <u>en tangent=flade kan afbildes isometrisk på et stykke af planen</u>. (En sådan flade siges at være <u>udfoldelig</u>, og afbildningen kaldes en <u>udfoldning</u> af fladen). Ifølge den plane kurveteoris hovedsætning (IV, 2, s. 5) findes der nemlig en plan kurve K' med u^1 som naturlig parameter, som har samme krumning som K (som funktion af u^1). Tangent=fladen til K' bliver åbenbart en del af planen. Udfoldningen af en tangentflade vil udvise selv=overdækninger, idet det samme punkt i planen fås med flere gange i den plane kurves tangent=flade, men den vil være bijektiv i omegnen af hvert punkt på F, som ikke ligger på K.

Tangentfladerne er et specielt eksempel på <u>retliniede flader</u>. Ved en retliniet flade forstås en flade, som beskrives af en variabel ret linie i rummet. De forskellige stillinger af denne linie kaldes fladens <u>frembringere</u>. Andre velkendte eksempler på retliniede flader er <u>kegleflader</u> og <u>cylinderflader</u>. Disse er udfoldelige (se ovf. IV, 4, 3 og IV, 6, 1) og har, ligesom tangentfladerne den egenskab, at tangentplanen er konstant langs enhver frembringer.

Den variable rette linie, som beskriver en retliniet flade F tænkes angivet ved et punkt $A(u^1)$ og en enhedsvektor $\underline{a}(u^1)$ på linien. Vi vil antage, at $A(u^1)$ er en naturlig parameterfremstilling af klasse C^2 og at $\underline{a}(u^1)$ er af klasse C^2 (i det fælles parameterinterval $a < u^1 < b$). Som parameterfremstilling for F kan vi da bruge $P(u^1, u^2)$, $a < u^1 < b$, $-\infty < u^2 < \infty$, hvor

$$\overrightarrow{A(u^1)P(u^1, u^2)} = u^2 \underline{a}(u^1).$$

De partielle afledede bliver:

$$\underline{D}_1 P(u^1, u^2) = \underline{v}_1(u^1) + u^2 \underline{a}'(u^1)$$
$$\underline{D}_2 P(u^1, u^2) = \underline{a}(u^1)$$

Vi vil forudsætte, at der for ethvert $u^1 \in]a, b[$ gælder, at $\underline{a}'(u^1) \neq \underline{o}$ eller at $\underline{v}_1(u^1)$ og $\underline{a}(u^1)$ er lineært uafhængige. Fladen F er da regulær eventuelt pånær et enkelt punkt af hver frembringer. Da $\underline{a}(u^1) \cdot \underline{a}'(u^1) = 0$ ($\underline{a}(u^1)$ er en enhedsvektor) udtrykker betingelsen nemlig, at mindst en af de to vektorer $\underline{v}_1(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ er lineært uafhængig med $\underline{a}(u^1)$.

Normalvektorens retning er bestemt ved vektoren

$$\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P = \underline{v}_1 \times \underline{a} + u^2 \underline{a}' \times \underline{a}.$$

Fladen siges at være <u>vridningsfri</u>, hvis tangentplanen er konstant langs enhver frembringer. Dette er ensbetydende med, at normalens retning er konstant langs enhver frembringer. Dette er ifølge det ovenstående udtryk for $\underline{D}_1P \times \underline{D}_2P$ igen ensbetydende med, at $\underline{v}_1(u^1) \times \underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1) \times \underline{a}(u^1)$ er lineært afhængige for ethvert u^1. Af vektorproduktets geometriske betydning (her blot, at det er vinkelret på begge faktorer) ser man, at dette er tilfældet netop når $\underline{v}_1(u^1)$, $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ er lineært afhængige for ethvert u^1.

Vi har altså vist:

<u>Den retliniede flade givet ved $A(u^1)$ og $\underline{a}(u^1)$ er vridningsfri da og kun da, når vektorerne $\underline{v}_1(u^1)$, $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ er lineært afhængige for enhver værdi af u^1, d.v.s. når rumproduktet $[\underline{v}_1(u^1), \underline{a}(u^1), \underline{a}'(u^1)]$ er identisk 0.</u>

Begrebet vridningsfrihed kan bringes i forbindelse med fladens krumningsforhold. De afledede af anden orden er

$$\underline{D}_1\underline{D}_1P(u^1,u^2) = \kappa(u^1)\underline{v}_2(u^1) + u^2\underline{a}''(u^1)$$

$$\underline{D}_1\underline{D}_2P(u^1,u^2) = \underline{a}'(u^1)$$

$$\underline{D}_2\underline{D}_2P(u^1,u^2) = 0$$

Heraf følger, at $L_{22} = 0$. For den Gauss'iske krumning har vi da (se IV, 5, side 9):

$$K = \frac{L}{g} = -\frac{(L_{12})^2}{g} \leq 0$$

Fladen er altså enten hyperbolsk eller parabolsk krummet (eventuelt flad) i et punkt. Dette følger også af, at fladen ikke kan være elliptisk krummet, da normalkrumningen åbenbart er 0 i frembringerretningen.

Da

$$L_{12} = \underline{D}_1 \underline{D}_2 P \cdot \underline{N}$$

har vi for et passende $k \neq 0$, at

$$k L_{12} = \underline{a}' \cdot (\underline{V}_1 \times \underline{a} + u^2 \underline{a}' \times \underline{a}) = -[\underline{V}_1, \underline{a}, \underline{a}'] .$$

Heraf ses, <u>at fladen er vridningsfri når og kun når dens Gauss'ske krumning er identisk 0.</u>

Om vridningsfri retliniede flader gælder følgende sætning:

<u>En vridningsfri retliniet flade af klasse C^4 kan ved opdeling langs visse frembringere deles i fladestykker, således at hvert stykke i denne opdeling er en kegleflade, en cylinderflade eller en tangentflade.</u>

Bevis: Fladen tænkes som ovenfor beskrevet ved en kurve med naturlig parameterfremstilling $A(u^1)$, $a < u^1 < b$, og en af u^1 afhængig enhedsvektor $\underline{a}(u^1)$, $a < u^1 < b$. Det forudsættes, at $A(u^1)$ og $\underline{a}(u^1)$ begge er af klasse C^4.

Vi opdeler nu parameterintervallet i delintervaller, således at der i hvert åbent delinterval gælder enten $\underline{a}'(u^1) = \underline{0}$ identisk eller $\underline{a}'(u^1) \neq \underline{0}$ for ethvert u^1 i delintervallet.

De intervaller, hvor $\underline{a}'(u^1)$ er identisk $\underline{0}$, d.v.s. hvor $\underline{a}(u^1)$ er konstant, svarer åbenbart til <u>cylinderfladestykker</u> af fladen.

For at analysere forholdene i de resterende delintervaller betragter vi kegle- og tangentflader. For sådanne findes der på hver frembringer præcis ét punkt, hvori fladen er singulær, nemlig toppunktet for keglen og frembringerens røringspunkt med spidskanten for tangentfladen. Under forudsætningen $\underline{a}'(u^1) \neq \underline{0}$ søger vi derfor et singulært punkt på den pågældende frembringer. Da fladen er vridningsfri er vektorerne $\underline{V}_1(u^1)$, $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ lineært afhængige, og vi kan derfor udtrykke $\underline{V}_1(u^1)$ som linearkombination af $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ ($\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ er lineært uafhængige, da $\underline{a}'(u^1) \neq \underline{0}$ og $\underline{a}(u^1) \cdot \underline{a}'(u^1) = 0$) :

$$\underline{V}_1(u^1) = f(u^1)\,\underline{a}(u^1) + g(u^1)\,\underline{a}'(u^1)$$

Vi får

$$f(u^1) = \underline{V}_1(u^1) \cdot \underline{a}(u^1)$$

$$g(u^1) = \frac{\underline{V}_1(u^1) \cdot \underline{a}'(u^1)}{|\underline{a}'(u^1)|^2} \;,$$

da $|\underline{a}(u^1)|^2 = 1$ og $\underline{a}(u^1) \cdot \underline{a}'(u^1) = 0$. Dette indsat i formlerne på side 4 giver

$$\underline{D}_1 P(u^1, u^2) = f(u^1)\,\underline{a}(u^1) + (u^2 + g(u^1))\,\underline{a}'(u^1)$$

$$\underline{D}_2 P(u^1, u^2) = \underline{a}(u^1) .$$

På den til u^1 hørende frembringer findes altså netop ét singulært punkt, nemlig svarende til $u^2 = -g(u^1)$. Dette punkt kaldes $Q(u^1)$, og vi har altså

$$\overrightarrow{A(u^1)\,Q(u^1)} = -g(u^1)\,\underline{a}(u^1) = -\frac{\underline{V}_1(u^1) \cdot \underline{a}'(u^1)}{|\underline{a}'(u^1)|^2}\,\underline{a}(u^1)$$

Den herved bestemte parameterfremstilling $Q(u^1)$ bliver af klasse C^3 (selvfølgelig i ethvert interval, hvor $\underline{a}'(u^1) \neq 0$) ifølge forudsætningerne. I punktet $Q(u^1)$ af fladen er

$$\underline{D}_1 P(u^1, u^2) = f(u^1)\,\underline{a}(u^1)$$
$$\underline{D}_2 P(u^1, u^2) = \underline{a}(u^1) .$$

Heraf følger, at farten $\underline{\dot{Q}}(u^1)$ er nulvektoren eller en vektor proportional med $\underline{a}(u^1)$.

Ethvert af de ovenfor nævnte delintervaller af parameterintervallet $]a, b[$, i hvilke $\underline{a}'(u^1)$ er forskellig fra nulvektoren, tænkes nu videredelt i intervaller, således at der i hvert åbent delinterval gælder enten $\underline{\dot{Q}}(u^1) = \underline{0}$ eller $\underline{\dot{Q}}(u^1) \neq \underline{0}$ for ethvert u^1 i delintervallet. De intervaller, hvori $\underline{\dot{Q}}(u^1) = \underline{0}$ vil da svare til keglefladestykker, idet punktet $Q(u^1)$ da ligger fast, og alle frembringere går gennem det. Endelig vil de intervaller, hvori $\underline{\dot{Q}}(u^1) \neq \underline{0}$ svare til tangentfladestykker. $Q(u^1)$ er nemlig da en regulær parameterfremstilling for en rumkurve, og da farten af $Q(u^1)$ er proportional med $\underline{a}(u^1)$, har denne rumkurve netop frembringeren gennem $Q(u^1)$ som tangent i dette punkt.

Hermed er sætningen bevist.

Man bemærker, at beviset kun kan gennemføres i kraft af, at man tillader sig at se bort fra "patalogiske" flader. Det bliver desværre hverken sær=

lig simpelt eller særlig smukt, hvis man forsøger at finde et nøjagtigt udtryk for, hvad det er for "patalogiske" fænomener, som ikke må optræde. Sagt hårdt: Det er kompliceret at give et nøjagtigt sæt af forudsætninger, så sætningen bliver rigtig i "streng" forstand.

Et vigtigt corollar til sætningen er:
Enhver vridningsfri retliniet flade er udfoldelig.

Ifølge sætningen kan den nemlig opbygges af udfoldelige fladestykker.

Af hensyn til en anvendelse i det følgende afsnit skal vi vise følgende:
Givet en rumkurve K af klasse C^3 med naturlig parameterfremstilling $A(u^1)$, $a < u^1 < b$ og en enhedsvektor $\underline{N}(u^1)$, som er af klasse C^3 i $]a,b[$, således at $\underline{v}_1(u^1) \cdot \underline{N}(u^1) = 0$ for ethvert $u^1 \in]a,b[$. Da findes en vridningsfri retliniet flade F, som indeholder kurven K, og i ethvert punkt $A(u^1)$ af denne har vektoren $\underline{N}(u^1)$ som normalvektor.

Bevis: Hvis $\underline{N}'(u^1) = \underline{0}$ i hele $]a,b[$ er $\underline{N}(u^1)$ konstant $= \underline{N}$. Betegner A_0 et fast punkt på K har vi

$$\frac{d}{du^1}\left(\underline{N} \cdot \overrightarrow{A_0 A(u^1)}\right) = \underline{N} \cdot \underline{v}_1(u^1) = 0 ,$$

altså $\underline{N} \cdot \overrightarrow{A_0 A(u^1)} = \text{konstant}.$

Kurven K ligger altså i en plan F, som har $\underline{N}$ som normalvektor, hvormed sætningen er bevist i dette tilfælde, da en plan åbenbart er en vridningsfri retliniet flade.

Vi betragter nu tilfældet: $\underline{N}'(u^1) \neq \underline{0}$ i hele $]a,b[$. Lad da F være den retliniede flade, som er givet ved kurven $A(u^1)$ og vektoren $\underline{a}(u^1)$, hvor

$$\underline{a}(u^1) = \frac{\underline{N}(u^1) \times \underline{N}'(u^1)}{|\underline{N}(u^1) \times \underline{N}'(u^1)|} .$$

Ved differentiation af $\underline{a}(u^1)$ bliver denne skrevet som en linearkombination af vektorerne $\underline{N}(u^1) \times \underline{N}'(u^1)$, $\underline{N}'(u^1) \times \underline{N}'(u^1) = \underline{0}$ og $\underline{N}(u^1) \times \underline{N}''(u^1)$ (idet et vektorprodukt differentieres ved den sædvanlige differentiationsregel for produkter). Heraf ses, at vektorerne $\underline{v}_1(u^1)$, $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ alle er vinkelret på $\underline{N}(u^1)$. De er altså lineart afhængige, hvoraf følger, at F er vridningsfri. Tangentplanen til F i $A(u^1)$ står åbenbart vinkelret på $\underline{N}(u^1)$, da den er fastlagt ved vektorerne $\underline{v}_1(u^1)$ og $\underline{a}(u^1)$ (se formlerne side 4 for D_1P og D_2P). $\underline{N}(u^1)$ er altså normalvektoren til F langs K (eventuelt pånær fortegnet).

I det almindelige tilfælde må man, ligesom ved det foregående bevis, dele intervallet $]a,b[$ op i delintervaller, hvori der enten gælder $\underline{N}' = \underline{0}$ identisk eller $\underline{N}' \neq \underline{0}$.

Det bemærkes, at man ligesom ved det foregående bevis har set bort fra "patalogiske" tilfælde.

Endvidere ser vi, at det kan hænde, at den på s. 10 angivne vektor $\underline{a}(u^1)$ er proportional med $\underline{v}_1(u^1)$. Dette svarer til, at $\underline{N}(u^1)$ er binormalvektoren til kurven K (eller dens modsatte vektor). Fladen F bliver da tangentfladen til K. Tillægger man en tangentflade spidskantens oskulationsplan som tangentplan i et punkt af denne, bliver sætningen rigtig også i dette tilfælde.

Øvelser til kap. IV §6:

1. I rummet er givet en enhedsvektor $\underline{a}$ og en kurve K med naturlig parameterfremstilling $A(u^1)$. Det forudsættes, at K er af klasse C^2 og beliggende i en plan vinkelret på $\underline{a}$. Ved parameterfremstillingen $P(u^1, u^2)$, hvor

$$\overrightarrow{A(u^1)P(u^1,u^2)} = u^2 \underline{a}$$

fremstilles da cylinderfladen med K som ledekurve og $\underline{a}$ som frembringerretning. Find denne flades metriske fundamentalform og vis, at fladen er udfoldelig.

2. Angiv en parameterfremstilling for en tangentflade, således at parameterkurverne bliver krumningskurver. Hvilke kurver vil disse overføres i ved fladens udfoldning?

3. Givet en flade F af klasse C^2 og en kurve K af klasse C^2 på F. Vis, at K er en krumningskurve på F netop når den retliniede flade, som har K som ledekurve og i ethvert punkt af denne har normalvektoren til F som frembringerretning, er vridningsfri. (Benyt formlen for de partielle afledede af $\underline{N}$).

4. I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Tangentfladen F til skruelinien

$$x_1 = \cos u^1$$
$$x_2 = \sin u^1 \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_3 = u^1$$

fremstilles ved

$$x_1 = \cos u^1 - u^2 \sin u^1 \qquad -\infty < u^1 < \infty$$
$$x_2 = \sin u^1 + u^2 \cos u^1 \qquad -\infty < u^2 < \infty$$
$$x_3 = u^1 + u^2$$

Find den metriske fundamentalform for F i disse parametre.
Fladen F udfoldes i en plan med retvinklede koordinater (ξ, η) således, at spidskanten overføres i en cirkel med centrum $(0,0)$ og punktet $(1,0,0)$ i et punkt på den positive del af ξ-aksen.
Find ξ og η som funktioner af u^1 og u^2 ved udfoldningen.
Find en parameterfremstilling for den korteste kurve på F, som forbinder punktet $(1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ med et punkt på spidskanten.

5. I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. F betegner paraboloiden

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

Find normalvektoren til F, idet x_1 og x_2 bruges som parametre.
Find en parameterfremstilling for den kurve K, hvori F skæres af planen $x_3 = 2x_1$.

Find en parameterfremstilling for den retliniede flade G som er vridningsfri, indeholder kurven K, og i hvert punkt af denne har samme normalvektor som F.
Vis, at G er en kegleflade og angiv dens toppunkt.

6. En flade er i retvinklede koordinater i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = 2u^1 \cos u^2 \qquad 0 < u^1 < \infty$$

$$x_2 = u^1 \sin u^2 \qquad -\infty < u^2 < \infty$$

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(u^1)^2 (2\cos^2 u^2 + \sin^2 u^2)$$

Angiv en ligning for fladen i de retvinklede koordinater x_1, x_2, x_3.
Find fladens normalvektor $\underline{N}(u^1, u^2)$
Find en parameterfremstilling for den retliniede flade, som indeholder kurven K givet ved

$$u^1 = 1, \quad u^2 = t \qquad -\pi < t < \pi$$

og langs denne har samme normalvektor som den givne flade.
Fladen F er en tangentflade. Find en parameterfremstilling for dens spidskant.
Vis, at ved udfoldningen af F vil dens spidskant gå over i en hypocykloide (sml. øv. IV, 2, 6).

§7. Fladers indre geometri.

Vi har tidligere (IV, 4 s. 11) defineret en flades indre geometri som den del af dens geometriske egenskaber, der kan bestemmes alene ved målinger i selve fladen. Sagt på en anden måde er det de egenskaber, som er invariante overfor isometriske afbildninger. Analytisk kan en størrelses indre-geometriske natur eftervises ved, at den, svarende til parametre u^1 og u^2 på fladen, udtrykkes på en form, således at de størrelser i udtrykket, som afhænger af fladens udseende, kan beregnes ud fra den metriske fundamentalforms koefficienter.

I det følgende betragtes orienterede, regulære fladestykker af klasse C^3 i et orienteret rum.

Vi skal først ved et lille regnestykke eftervise, at de tidligere (IV, 5 s. 2) indførte Christoffelsymboler Γ_{ij}^{k} kan bestemmes ud fra koefficienterne g_{ij} i den metriske fundamentalform.

Af

$$g_{ij}(u^1,u^2) = \underline{D}_i P(u^1,u^2) \cdot \underline{D}_j P(u^1,u^2)$$

fås ved differentiation (i det følgende udelades de variable u^1, u^2 af pladshensyn):

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \underline{D}_k \underline{D}_i P \cdot \underline{D}_j P + \underline{D}_i P \cdot \underline{D}_k \underline{D}_j P .$$

Indføres Christoffelsymbolerne $\Gamma_{ij|k}$ af første art ved

$$\underline{\Gamma_{ij|k} = \underline{D}_i \underline{D}_j P \cdot \underline{D}_k P}$$

har vi da:

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \Gamma_{ki|j} + \Gamma_{kj|i}$$

Der gælder åbenbart $\Gamma_{ij|k} = \Gamma_{ji|k}$ på grund af ombyttelighheden af differentiationsrækkefølgen. Vi har da, at

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} =$$

$$(\Gamma_{ij|k} + \Gamma_{ik|j}) + (\Gamma_{jk|i} + \Gamma_{ji|k}) - (\Gamma_{ki|j} + \Gamma_{kj|i})$$

$$= 2\Gamma_{ij|k} \quad \text{altså}$$

$$\underline{\Gamma_{ij|k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij}\right)}$$

Af formlen øverst på side IV, 5, 2 får vi

$$\Gamma_{ij|l} = \underline{D}_i \underline{D}_j P \cdot \underline{D}_l P = \Gamma_{ij}^k \underline{D}_k P \cdot \underline{D}_l P = g_{kl} \Gamma_{ij}^k$$

Betegner g^{ij} som hidtil den inverse matrix til g_{ij} har vi da

$$\underline{\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ij|l} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij}\right)},$$

hvormed Christoffelsymbolerne Γ^k_{ij} af anden art er udtrykt ved koefficienterne i den metriske fundamentalform.

Vi kan nu bevise, at <u>en fladekurves geodætiske krumning er en indregeometrisk størrelse.</u>

Beviset foregår ved, at vi finder et udtryk for $\varkappa_g$, hvoraf påstanden umiddelbart kan aflæses. Lad altså K være en kurve på fladen F, og lad K være beskrevet i parametre u^1 og u^2 på F ved den naturlige parameterfremstilling $u^i = u^i(s)$, $\alpha < s < \beta$, $i = 1, 2$. Ifølge IV, 5 side 3 har vi

$$\frac{d\underline{v}_1}{ds} = \varkappa_g \underline{N} \times \underline{v}_1 + \varkappa_n \underline{N}$$

og dermed

$$\varkappa_g = \frac{d\underline{v}_1}{ds} \cdot (\underline{N} \times \underline{v}_1).$$

Bruges udtrykket på ovennævnte side for $\frac{d\underline{v}_1}{ds}$ og formlen $\underline{v}_1 = \frac{du^i}{ds} \underline{D}_i P$, får vi

$$\varkappa_g = \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \right) \underline{D}_k P \cdot \left(\underline{N} \times \frac{du^i}{ds} \underline{D}_i P \right)$$

$$= \frac{du^i}{ds} \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \right) \varepsilon_{ik},$$

idet størrelsen ε_{ik} er indført ved

$$\varepsilon_{ik} = [\underline{D}_i P, \underline{D}_k P, \underline{N}] \quad (= [\underline{D}_k P, \underline{N}, \underline{D}_i P]).$$

Da

$$\underline{N} = \frac{\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P}{|\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P|}$$

og da $|\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P|^2 = |\underline{D}_1 P|^2 |\underline{D}_2 P|^2 - |\underline{D}_1 P \cdot \underline{D}_2 P|^2$

$$= g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = g = \det\{g_{ij}\}$$

har vi $\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \ , \ \varepsilon_{12} = \sqrt{g} \ , \ \varepsilon_{21} = -\sqrt{g}$

Formlen

$$\varkappa_g = \varepsilon_{ik} \frac{du^i}{ds} \left(\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right)$$

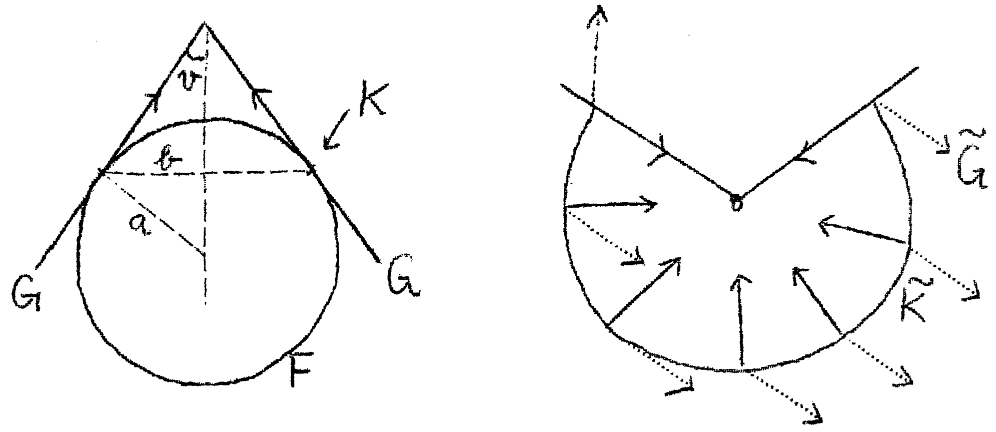
viser da det ønskede, at $\varkappa_g$ er en indregeometrisk størrelse.

Sagt med isometriske afbildninger betyder dette, at er F og $\tilde{F}$ fladestykker, og er der givet en isometri mellem F og $\tilde{F}$, som afbilder i overensstemmelse med orienteringerne af F og $\tilde{F}$ (dette er automatisk tilfældet, når F og $\tilde{F}$ som omtalt på side IV, 4, 14 via afbildningen beskrives ved de samme parametre), da vil en kurve K på F og dens billedkurve $\tilde{K}$ på $\tilde{F}$ ved isometrien have samme geodætiske krumning i tilsvarende punkter. (De to kurver behøver ikke at have samme normalkrumning i tilsvarende punkter, da de to flader meget vel kan have forskellige anden fundamentalformer).

En anskuelig fortolkning af en fladekurves geodætiske krumning kan man få ved hjælp af den såkaldte <u>afrulning</u> af kurven. Lad altså K være en kurve på fladen F. Ifølge en sæt=

ning i § 6 findes der da en udfoldelig flade G, som indeholder kurven K og langs denne har samme normalvektorer som fladen F. Kurven K har da i et=hvert pūnkt samme geodætiske krūmning enten den opfattes som kurve på F eller på G ($\underline{N}\times\underline{V}_1$ er samme vektor i begge tilfælde). Da fladen G er ūdfoldelig kan den afbildes isometrisk på en flade $\tilde{G}$, som er en del af en plan Π. Kurven K vil herved overføres i en kurve $\tilde{K}$ i planen Π og ifølge sætningen på side 3 har $\tilde{K}$, betragtet som kurve i $\tilde{G}$, samme geodætiske krūmning i et pūnkt, som K (på G og dermed på F) har i det tilsvarende pūnkt. Fladen $\tilde{G}$ har i ethvert pūnkt planen Π som tangentplan og vil, da normalvektoren $\tilde{N}$ er konstant, overalt inducere den samme orientering af Π. Den geodætiske krūmning af $\tilde{K}$ (på $\tilde{G}$) bliver netop den plane krūmning (som indført i § 2) af $\tilde{K}$ i planen Π med denne orientering. Dette følger af, at komposanten efter $\tilde{N}$ af den afledede af $\tilde{K}$'s tangentvektor $\tilde{\underline{V}}_1$ åbenbart er identisk 0 og af, at vektoren $\tilde{N}\times\tilde{V}_1$ netop er den plane normalvektor til $\tilde{K}$ (se § 2) i den pågældende orientering af planen Π.

Som et eksempel på en fladekurves afrūlning betragter vi en lillecirkel K med radius $b>0$ på en kugleflade F med radius $a>b$. Den udfoldelige flade G, som rører F langs kūrven K, bliver da en omdrejningskeglefade, hvis halve åbningsvinkel v er bestemt ved $\cos v = \frac{b}{a}$. Afstanden fra keglens



toppunkt til punkterne på K bliver konstant og lig med $a \cot v = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$. På figuren er dels skitseret et snit gennem kuglens centrum vinkelret på den plan, hvori kurven K ligger og dels udfoldningen $\tilde{G}$ af kegle=fladen G. Man slutter heraf, at kurven K har konstant geodætisk krumning og at

$$|\varkappa_g| = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}.$$

Fortegnet for $\varkappa_g$ vil afhænge af orienteringen af F og gennemløbsretningen på K. (Vi kunne selvfølgelig gå have fundet dette resultat ved hjælp af teorien fra § 5).

Som omtalt på $\underline{IV}$, 4 side 14–15 vil der ved en differentiabel og bijektiv afbildning af et fladestykke F på et fladestykke $\tilde{F}$ induceres en afbildning, som til en tangentvektor til F i et punkt P af F knyt=ter en tangentvektor til $\tilde{F}$ i billedpunktet $\tilde{P}$. Fremstilles de to fladestykker ved de samme para=metre u^1, u^2 på en sådan måde, at punktet $P(u^1, u^2)$ på F afbildes i det punkt $\tilde{P}(u^1, u^2)$, som har samme parameterværdier, er afbildningen af tangent=vektorerne bestemt ved, at tangentvektoren $\underline{a}$

$$\underline{a} = a^i \underline{D}_i P(u^1, u^2)$$

til F i punktet $P(u^1,u^2)$ afbildes på tangentvektoren $\underline{\tilde{a}}$ til $\tilde{F}$ i billedpunktet $\tilde{P}(u^1,u^2)$, hvor

$$\underline{\tilde{a}} = a^i \underline{D}_i \tilde{P}(u^1, u^2),$$

altså simpelthen ved, at ved afbildningen tilsvarende tangentvektorer har de samme koordinater i de af parametrene inducerede koordinatsystemer i de respektive tangentplaner.

Det er herved muligt, at udvide afrulnings=afbildningen (som indført på side 4-5) til også at omfatte tangentvektorerne til fladen F langs kurven K. En tangentvektor $\underline{a}$ til F i et punkt P af K er nemlig også tangentvektor til G i samme punkt. Ved udfoldningen af G til den da overføres i en tangentvektor til $\tilde{G}$ d.v.s. i en vektor $\underline{\tilde{a}}$ i planen Π. (Det er hensigtsmæssigt, for at kunne overse situationen, at tænke sig $\underline{\tilde{a}}$ afsat ud fra det til P svarende punkt på $\tilde{K}$). På figuren på side 6 er indtegnet afrulningen, af et system af tangentvektorer til kuglefladen F langs K, som alle peger mod keglens toppunkt. Man bemærker, at ved afrulningen til tangentvektoren $\underline{v}_1$ til K i et punkt P af denne overføres i tangent=vektoren $\underline{\tilde{v}}_1$ til $\tilde{K}$ i det tilsvarende punkt. Endvidere bemærkes det, at hvis $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er tangentvektorer til F i samme punkt P af K og $\underline{\tilde{a}}$ og $\underline{\tilde{b}}$ deres billeder

<u>ved afrulningen</u>, <u>da er de to skalarprodukter $\underline{a} \cdot \underline{b}$ og $\tilde{\underline{a}} \cdot \tilde{\underline{b}}$ lige store.</u> Begge disse egenskaber følger af, at udfoldningen af fladen G er en isometrisk afbildning.

Lad F være et fladestykke med parameterfremstilling $P(u^1, u^2)$ og K en kurve på F, som i parametrene er fremstillet ved $u^i = u^i(t)$, $i = 1, 2$, $\alpha < t < \beta$. Ved et <u>tangentvektorfelt til fladen F langs kurven K</u> forstår vi da en afbildning, som til ethvert punkt $P(u^1(t), u^2(t))$ af kurven K knytter en tangentvektor $\underline{a}(t)$ til fladen F i punktet $P(u^1(t), u^2(t))$. Tangentvektorfeltet siges at være af klasse C^1, hvis vektorfunktionen $\underline{a}(t)$ ($\underline{a}(t)$ er jo en vektor i det fladen omgivende euklidiske rum) er af klasse C^1.

For enhvert værdi af t i $]\alpha, \beta[$ kan vektoren $\underline{a}(t)$ skrives i det af parametrene inducerede koordinatsystem i tangentplanen til F i punktet $P(u^1(t), u^2(t))$:

$$\underline{a}(t) = a^i(t)\, \underline{D}_i P(u^1(t), u^2(t)),$$

og de to reelle funktioner $a^1(t), a^2(t)$ i $]a, b[$ beskriver da feltet i de valgte parametre på fladen. Det ses let, at hvis $\underline{a}(t)$ er af klasse C^1 vil hver af funktionerne $a^i(t)$ være af klasse C^1. (Man har nemlig

$$\underline{a} \cdot \underline{D}_j P = a^i \underline{D}_i P \cdot \underline{D}_j P = g_{ij} a^i$$

og dermed $\quad a^k(t) = g^{jk}(u^1(t), u^2(t))\, \underline{a}(t) \cdot \underline{D}_j P(u^1(t), u^2(t)),$

hvoraf det ønskede følger, når blot F er af klasse C^2, og vi forudsætter jo stiltiende klasse C^3).

Man kan da danne den afledede $d\underline{a}(t)/dt$ for enhver værdi af t. Denne bliver en vektor i rummet, og behøver ikke at være tangentvektor til F i det pågældende punkt. Den retvinklede projektion af $d\underline{a}(t)/dt$ på tangentplanen til F i punktet $P(u^1(t), u^2(t))$ kaldes den <u>covariante afledede</u> af vektorfeltet langs kurven K i punktet $P(u^1(t), u^2(t))$. Vi kan finde et udtryk for den covariante afledede ved hjælp af formlen på side IV, 5, 2. Vi har

$$\underline{a}(t) = a^i(t)\, \underline{D}_i P(u^1(t), u^2(t))$$

og hermed

$$\frac{d\underline{a}}{dt} = \frac{da^i}{dt} \underline{D}_i P + a^i \frac{du^j}{dt} \underline{D}_j \underline{D}_i P$$

$$= \left(\frac{da^k}{dt} + a^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \underline{D}_k P + a^i \frac{du^j}{dt} L_{ij} \underline{N} .$$

Den covariante afledede bliver altså

$$\frac{\delta \underline{a}(t)}{\delta t} = \left(\frac{da^k(t)}{dt} + a^i(t) \frac{du^j(t)}{dt} \Gamma_{ij}^k (u^1(t), u^2(t)) \right) \underline{D}_k P(u^1(t), u^2(t)).$$

Denne formel viser, <u>at den covariante afledede af et tangentvektorfelt langs en kurve er en indre-geometrisk størrelse</u>, idet fladestørrelsen Γ_{ij}^k, som før bevist, kan bestemmes ud fra den metriske fundamentalforms koefficienter.

Hermed er specielt påny bevist, at den geodætiske krumning af en kurve er en indregeometrisk størrelse. Vektoren $\varkappa_g \underline{N} \times \underline{V}_1$ er jo simpelthen den covariante afledede af tangentvektoren $\underline{V}_1(s)$ langs kurven, når s er en naturlig parameter på denne.

Udtrykt med isometriske afbildninger udsiger den indregeometriske natur af et vektorfelts covariante afledede langs en kurve følgende: På fladestykket F er givet kurven K med parameter t $(\alpha < t < \beta)$ og et tangentvektorfelt $\underline{a}(t)$ langs K. Lad $\tilde{F}$ være et andet fladestykke og lad der være givet en isometri af F på $\tilde{F}$. Med $\hat{K}$ og $\underline{\tilde{a}}(t)$ betegner vi billederne ved isometrien af kurven K og feltet $\underline{a}(t)$. Da vil den covariante afledede $\delta\underline{a}(t)/\delta t$ for enhver værdi af t (i $]\alpha,\beta[$) ved isometrien overføres i den covariante afledede $\delta\underline{\tilde{a}}(t)/\delta t$ (på $\tilde{F}$), svarende til samme værdi af t. (Komposanterne af $d\underline{a}(t)/dt$ og $d\underline{\hat{a}}(t)/dt$ efter de respektive normalvektorer bliver i almindelighed forskellige, da de to flader ikke behøver at have den samme anden fundamentalform).

Er fladen F et stykke af en plan, bliver den covariante afledede $\delta\underline{a}(t)/\delta t$ identisk med den sædvanlige afledede $d\underline{a}(t)/dt$. Dette følger umiddelbart af, at $d\underline{a}(t)/dt$ igen vil ligge i planen og derfor have normalkomposant identisk 0. Ved hjælp af afrulningen kan vi da give en anskuelig fortolkning af den covariante afledede i det almindelige tilfælde. Lad der altså på fladen F være givet kurven K med parameter t og et tangentvektorfelt $\underline{a}(t)$ til F langs K. Feltet $\underline{a}(t)$ vil da genfindes som tangentvektorfelt på den udfoldelige flade G og på denne have samme covariante afledet, da F og G har den samme tangentplan i ethvert punkt af kurven K. Da den covariante afledede bevares ved isometriske afbildninger, vil $\delta \underline{a}(t)/\delta t$ ved udfoldningen af G i planen Π overføres i den covariante afledede af det udfoldede felt. Denne sidste afledede er imidlertid, som ovenfor nævnt, identisk med den sædvanlige afledede. Man får altså den covariante afledede idet man ruller feltet af i en plan, her danner de sædvanlige afledede og afsætter disse i de punkter, hvor de er dannet, og derpå ruller det plane felt med afledede på fladen igen.

Et tangentvektorfelt $\underline{a}(t)$ langs en kurve K (parameter t) på en flade F, siges at være et <u>parallelfelt i Levi-Civita's forstand</u> eller et <u>geodætisk parallelfelt</u>, og man siger, at feltets vektorer fremgår af hinanden ved <u>parallelforskydning langs kurven i Levi-Civita's forstand</u> eller ved <u>geodætisk parallelforskydning langs kurven</u>, hvis feltets covariante afledede langs kurven er $\underline{0}$ i ethvert punkt af denne. Dette betyder åbenbart, at feltet ved afrulningen vil overføres i et felt af ens vektorer, altså at vektorerne i det afrullede felt fremgår af hverandre ved sædvanlige parallelforskydninger i planen. Analytisk betyder det, med de tidligere betegnelser, at koordinatfunktionerne $a^i(t)$ tilfredsstiller differentialligningssystemet

$$\frac{da^k(t)}{dt} + a^i(t)\frac{du^j(t)}{dt}\Gamma_{ij}^{\;k}(u^1(t), u^2(t)) = 0$$

Det ses heraf, at begrebet parallelitet i Levi-Civitas forstand er uafhængigt af valget af parameter på kurven, idet den tilsvarende differentialligning for $k = 1, 2$, svarende til en anden parameter $\bar{t}$, fås af den for parameteren t ved multiplikation med $d\bar{t}/dt$.

Af eksistens- og entydighedssætningen for differentialligningssystemer ser man, at <u>er der på et fladestykke F givet en kurve K og i et punkt P_0 af denne en tangentvektor $\underline{a}_0$ til F, da findes præcis et tangentvektorfelt til F langs K, som er et parallelfelt i Levi-Civitas forstand, og som i P_0 har $\underline{a}_0$ som feltvektor.</u>

På figuren på side 6 er i afrulningen tegnet parallelforskydningen af en vektor langs kurven K. Idet man bemærker, at de to halvlinier, som afgrænser keglens udfoldning, svarer til den samme frembringer på keglen, svarer den stiplede vektor på figuren til den samme tangentvektor på keglen som slutstillingen (øverste højre hjørne af figuren) ved parallelforskydningen. <u>Parallelforskydes en tangentvektor til en kugleflade rundt langs en lillecirkel bliver slutstillingen altså forskellig fra udgangsstillingen.</u> Heraf kan vi slutte, at <u>et vilkårligt stykke af en kugleoverflade ikke kan afbildes isometrisk på en del af en plan</u>, idet man ved parallelforskydning i

(i Levi-Civita's forstand)

Levi-Civita's forstand af en vektor langs en lukket kurve i en plan altid kommer tilbage til udgangsstillingen, da parallelforskydning i Levi-Civitas forstand i en plan er identisk med den sædvanlige parallelforskydning af vektorer.

Er K en kurve på fladen F og $\underline{a}(t)$ og $\underline{b}(t)$ to felter af tangentvektorer til F langs K, som begge er parallelfelter i Levi-Civita's forstand, kan vi af afrundingen umiddelbart se, at <u>skalarproduktet $\underline{a}(t)\cdot\underline{b}(t)$ må være konstant</u>. Dette ses også let ved regning. Lad F have parameterfremstilling $P(u^1,u^2)$, K parameterfremstilling $u^i = u^i(t)$ og lad $\underline{a}(t)$ og $\underline{b}(t)$ i tangentplankoordinater have koordinatfunktionerne $a^i(t)$ og $b^i(t)$. Der gælder da

$$\frac{da^k}{dt} = -a^i\frac{du^j}{dt}\Gamma_{ij}^k \quad \text{og} \quad \frac{db^k}{dt} = -b^i\frac{du^j}{dt}\Gamma_{ij}^k .$$

Heraf får vi

$$\frac{d}{dt}(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \frac{d}{dt}(g_{ij}a^ib^j) = \frac{du^k}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij}\right)a^ib^j + g_{ij}\frac{da^i}{dt}b^j + g_{ij}a^i\frac{db^j}{dt}$$

$$= \frac{du^k}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij}\right)a^ib^j - g_{ij}a^l\frac{du^m}{dt}\Gamma_{lm}^i b^j - g_{ij}a^ib^l\frac{du^m}{dt}\Gamma_{lm}^j$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij}\right)\frac{du^k}{dt}a^ib^j - g_{lj}\Gamma_{ik}^l\frac{du^k}{dt}a^ib^j - g_{il}\Gamma_{jk}^l\frac{du^k}{dt}a^ib^j$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u^k}g_{ij} - g_{lj}\Gamma_{ik}^l - g_{il}\Gamma_{jk}^l\right]\frac{du^k}{dt}a^ib^j = 0,$$

idet vi på side 2 har

$$\frac{\partial}{\partial u^k} g_{ij} = \Gamma_{ki|j} + \Gamma_{kj|i} = g_{\ell j}\Gamma_{ki}^{\ell} + g_{\ell i}\Gamma_{kj}^{\ell}$$
$$= g_{\ell j}\Gamma_{ik}^{\ell} + g_{\ell i}\Gamma_{jk}^{\ell}.$$

Det følger specielt, at i et parallelfelt i Levi-Civitas forstand er alle feltvektorerne lige lange.

En kurve K på en flade F kaldes en geodætisk kurve, hvis dens geodætiske krumning er identisk 0. Da den geodætiske krumning er en indregeometrisk størrelse er der her tale om et indre-geometrisk begreb. Ved isometriske afbildninger af flader på flader vil geodætiske kurver altså overføres i geodætiske kurver. At en kurve på F er en geodætisk kurve (altså at $\varkappa_g$ er 0) er åbenbart ensbetydende med, at den covariante aflededede af kurvens tangentvektor $\underline{V}_1(s)$ langs kurven med hensyn til en naturlig parameter er identisk 0, hvilket igen er ensbetydende med, at kurvens tangentvektorer danner et parallelfelt i Levi-Civita's forstand langs denne. Dette betyder igen, at kurvens afrulning er en ret linie (eller en del af en ret linie). Af formlen på side IV, 5, 3 får vi, at en kurve K, fremstillet i parametre u^1, u^2 på fladen F ved en naturlig parameterfremstilling $u^i = u^i(s)$, er en geodætisk kurve på F, når og kun når funktionerne $u^i(s)$ tilfredsstiller differentialligningerne

$$\frac{d^2u^k(s)}{ds^2} + \frac{du^i(s)}{ds}\frac{du^j(s)}{ds}\Gamma_{ij}^{k}(u^1(s), u^2(s)) = 0,$$

idet disse udtrykker, at den tangentielle komposant af $d\underline{v}_1(s)/ds$ er $\underline{0}$. Nøjagtig det samme differentialligningssystem får man, hvis man i differentialligningerne s. 11 nederst for parallelforskydning i Levi-Civita's forstand indsætter vektoren $\underline{V}_1(s)$ istedet for vektoren $\underline{a}(t)$ d.v.s. indsætter du^i/ds istedet for a^i. Har en fladekurve K en parameterfremstilling $u^i(t)$, således at der gælder

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\Gamma^k_{ij} = 0 \quad (k=1,2),$$

da er K en geodætisk kurve på fladen, og t vil være proportional med en naturlig parameter for K. Differentialligningerne udsiger nemlig, at feltet af hastighedsvektorer $du^i/dt\,\underline{D}_iP$ er et parallelfelt i Levi-Civita's forstand langs K. Disse vektorer har altså alle den samme længde $\alpha > 0$, hvoraf følger, at $s = t/\alpha$ er en naturlig parameter på K. Idet $\underline{V}_1(s) = 1/\alpha\, du^i/dt\,\underline{D}_iP$ åbenbart også er et parallelfelt i Levi-Civita's forstand langs kurven, er denne en geodætisk kurve.

Af eksistens- og entydighedssætningen for differentialligningssystemer slutter vi da, at der igennem ethvert punkt på en flade går precis én geodætisk kurve i hver retning i tangentplanen.

Ifølge teorien fra § 5 er en geodætisk kurve karakteriseret ved, at i ethvert punkt, hvori dens krumning er forskellig fra 0, vil dens oskulationsplan indeholde fladens normal i det pågældende punkt.

Heraf følger f. eks. umiddelbart, at de geodætiske kurver på en kugleoverflade er storcirkelbuerne.

Opfatter man den geodætiske krumning af fladekurver som den naturlige generalisation af den plane krumning af kurver i en plan, bliver de geodætiske kurver den naturlige generalisation af de rette linier i en plan. Den følgende sætning viser, at denne opfattelse også på anden måde er rimelig:

<u>På en flade F er givet to punkter P_0 og P_1 og en kurve K, som forbinder P_0 med P_1. Hvis det om enhver anden kurve på F, som forbinder P_0 med P_1 og som forløber nær K gælder, at dens længde (fra P_0 til P_1) er mindst længden af K (fra P_0 til P_1), da er K en geodætisk kurve på F.</u>

Bevis: Der er her tale om et variationsproblem, og sætningen vises simpelthen ved, at Eulers ligninger for dette variationsproblem er identiske med differentialligningerne for geodætiske kurver. (Der henvises til afsnittet i mat. 2 noterne om variationsregning). Lad

$$u^i = \varphi^i(s) \qquad 0 \leq s \leq l$$

være en naturlig parameterfremstilling for K. ($s=0$ svarer til P_0, $s=l$ til P_1). En vilkårlig nabokurve til K fremstilles da i parametrene ved

$$u^i = \varphi^i(t) + \varepsilon\psi^i(t) \qquad 0 \leqq t \leqq l\,,$$

hvor $|\varepsilon|$ er lille og funktionerne ψ^1 og ψ^2 vilkårlige af klasse C^1 med $\psi^j(0) = \psi^j(\ell) = 0$ for $j = 1,2$. Længden af nabokurven bliver da

$$L(\varepsilon) = \int_0^\ell \sqrt{g_{ij}(\varphi^1(t)+\varepsilon\psi^1(t), \varphi^2(t)+\varepsilon\psi^2(t))\,[\dot\varphi^i(t)+\varepsilon\dot\psi^i(t)][\dot\varphi^j+\varepsilon\dot\psi^j(t)]}\,dt$$

hvor prikken betegner differentiation m.h.t. t. Ekstremal-egenskaben af kurven K udtrykkes da ved, at $\left.\frac{dL}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0$.

Idet s var naturlig parameter på K er

$$g_{ij}(\varphi^1(t), \varphi^2(t))\,\dot\varphi^i(t)\dot\varphi^j(t) = 1 \quad \text{for } 0 \le t \le \ell$$

Ved differentiation under integraltegnet for $\varepsilon = 0$, får vi da:

$$L'(0) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\psi^k\dot\varphi^i\dot\varphi^j + g_{ij}\dot\varphi^i\dot\psi^j + g_{ij}\dot\psi^i\dot\varphi^j \right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\psi^k\dot\varphi^i\dot\varphi^j + 2g_{ik}\dot\varphi^i\dot\psi^k \right) dt,$$

hvor størrelserne g_{ik} og $\partial g_{ij}/\partial u^k$ er taget i punktet med parameterværdier $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$.
Ved delvis integration får vi:

$$\int_0^\ell g_{ik}\dot\varphi^i\dot\psi^k dt = \left. g_{ik}\dot\varphi^i\psi^k \right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{\partial(g_{ik}\dot\varphi^i)}{\partial t}\psi^k dt.$$

Da $\psi^k(0) = \psi^k(\ell) = 0$ for $k = 1,2$, har vi

$$L'(0) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot\varphi^i\dot\varphi^j - 2\frac{\partial(g_{ik}\dot\varphi^i)}{\partial t} \right)\psi^k dt.$$

Dette skal være 0 uanset valget af funktionerne ψ^k, hvoraf vi får:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot\varphi^i\dot\varphi^j - \frac{\partial(g_{ik}\dot\varphi^i)}{\partial t} = 0 \quad \text{for } k=1,2.$$

eller

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot\varphi^i\dot\varphi^j - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\dot\varphi^j\dot\varphi^i - g_{ik}\ddot\varphi^i = 0$$

Idet
$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\dot\varphi^i\dot\varphi^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right)\dot\varphi^i\dot\varphi^j$$

(dette er blot et skift af betegnelsen for et summations-indeks), har vi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)\dot\varphi^i\dot\varphi^j + g_{ik}\ddot\varphi^i = 0$$

eller

$$\Gamma_{ij/k}\dot\varphi^i\dot\varphi^j + g_{ik}\ddot\varphi^i = 0$$

Multipliceres med g^{lk} og summeres over k, får vi

$$\ddot\varphi^l + \Gamma^l_{ij}\dot\varphi^i\dot\varphi^j = 0.$$

Dette er imidlertid præcis differentialligningssystemet for en geodætisk kurve på F. Kurven K er altså, som påstået, en geodætisk kurve.

Vi tager nu et sidespring bort fra fladens indre geometri, idet vi i nogle regninger vil betragte de tredje afledede af en flades parameterfremstilling.

Af formlerne

$$\underline{D}_j \underline{D}_k \underline{P} = \Gamma^{\ell}_{jk} \underline{D}_\ell \underline{P} + L_{jk} \underline{N} \quad \text{og}$$

$$\underline{D}_i \underline{N} = -g^{mn} L_{ni} \underline{D}_m \underline{P}$$

får vi

$$\underline{D}_i \underline{D}_j \underline{D}_k \underline{P} = \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{jk}}{\partial u^i} \underline{D}_\ell \underline{P} + \Gamma^{\ell}_{jk} \underline{D}_i \underline{D}_\ell \underline{P}$$

$$+ \frac{\partial L_{jk}}{\partial u^i} \underline{N} + L_{jk} \underline{D}_i \underline{N}$$

$$= \frac{\partial \Gamma^{m}_{jk}}{\partial u^i} \underline{D}_m \underline{P} + \Gamma^{\ell}_{jk} \left(\Gamma^{m}_{i\ell} \underline{D}_m \underline{P} + L_{i\ell} \underline{N} \right)$$

$$+ \frac{\partial L_{jk}}{\partial u^i} \underline{N} - L_{jk} g^{mn} L_{ni} \underline{D}_m \underline{P}$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^{m}_{jk}}{\partial u^i} + \Gamma^{\ell}_{jk} \Gamma^{m}_{i\ell} - L_{jk} g^{mn} L_{ni} \right) \underline{D}_m \underline{P}$$

$$+ \left(\Gamma^{\ell}_{jk} L_{i\ell} + \frac{\partial L_{jk}}{\partial u^i} \right) \underline{N}$$

Ombytteligheden af differentiationsrækkefølgen ved to på hinanden følgende partielle differentiationer giver

$$\underline{D}_i \underline{D}_j \underline{D}_k \underline{P} = \underline{D}_j \underline{D}_i \underline{D}_k \underline{P}$$

Disse to vektorer må da have samme komposanter efter hver af vektorerne $\underline{D}_1 \underline{P}$, $\underline{D}_2 \underline{P}$ og $\underline{N}$. Heraf fås ligningerne:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\Gamma^m_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^m_{ik} + \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}$$
$$- L_{jk}\, g^{mn} L_{ni} + L_{ik}\, g^{mn} L_{nj} = 0\,,$$

som kaldes Gauss' ligning, og

$$\frac{\partial}{\partial u^i} L_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j} L_{ik} + \Gamma^l_{jk} L_{il} - \Gamma^l_{ik} L_{jl} = 0\,,$$

som kaldes Mainardi og Codazzi's ligning.

Størrelsen R^l_{ijk} indføres ved

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^l_{ij} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{km}.$$

(Den kaldes <u>krumningstensoren</u>. Nogle fremstillinger giver R^l_{ijk} det modsatte fortegn). Gauss' ligning kan da kort skrives

$$L_{jk}\, g^{mn} L_{ni} - L_{ik}\, g^{mn} L_{nj} = R^m_{kij}$$

Man bemærker, at krumningstensoren R^l_{ijk} er udtrykt ved Christoffelsymbolerne og disses partielle afledede. Den er følgelig en indregeometrisk størrelse. Af Gauss' ligning følger da følgende sætning:

<u>Theorema egregium af Gauss</u>: <u>En flades Gauss'ske krumning K i et punkt af denne er en indre geo=</u>

metrisk størrelse

Bevis: Fra side IV, 5, 9 har vi $K = \frac{L}{g}$, hvor $g = \det\{g_{ij}\}$ og $L = \det\{L_{ij}\}$.

Af Gauss' ligning får vi ved multiplikation med g_{mp} og summation over m, at

$$L_{jk} L_{pi} - L_{ik} L_{pj} = g_{mp} R^{m}_{kij},$$

hvoraf

$$L = L_{11} L_{22} - L_{22}^2 = g_{m2} R^{2}_{121}$$

og følgelig

$$\underline{K = \frac{1}{g} g_{m2} R^{2}_{121}},$$

hvormed sætningen er bevist, da der på højre side kun indgår størrelser, som kan bestemmes ud fra koefficienterne i den metriske fundamentalform.

Sætningen er ret dybtliggende. Ved en isometrisk afbildning vil begge hovedkrumninger i almindelighed ændre sig, og hovedretninger behøver ikke svare til hovedretninger.

Af sætningen kan vi slutte, at en udfoldelig flade har Gauss'sk krumning identisk 0. Et stykke af en kugleoverflade er altså ikke udfoldeligt (som allerede bevist på s. 12). Som en tilføjelse til § 6 har vi, at en udfoldelig ret=

linet flade nødvendigvis må være vridningsfri (se IV, 6, s. 6). Sætningen på side IV, 6, 9 kan altså skærpes til: En retlinet flade er udfoldelig når og kun når den er vridningsfri.

Som en anden anvendelse kan vi af resultatet i opg. IV, 4, 6 umiddelbart slutte, at pseudosfæren har konstant Gaussisk krumning (sml. IV, 5 opg. 6).

Vi skal ikke her forsøge på en nærmere indregeometrisk tolkning af den Gauss'ske krumning men blot nævne, at det indre-geometriske fænomen, som viser, at en flade er krummet, er, at man ved parallelforskydning i Levi-Civitas forstand af en tangentvektor langs en lukket kurve på fladen ikke kommer tilbage til udgangsstillingen.

Mat. 3, 1963-64 IV, 7, Øv. 1-3

Øvelser til Kap IV § 7.

1. Bestem naturlige parameterfremstillinger for samtlige geodætiske kurver på keglefladen

$$x_3^2 = 15(x_1^2 + x_2^2) \quad , \quad x_3 > 0 \ ,$$

som forbinder punkterne $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$ og $(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{30})$.

(Benyt en udfoldning af keglen).

2. Om et fladestykke med parametre u^1 og u^2 forudsættes, at

$$g_{11}(u^1,u^2) = g_{22}(u^1,u^2) = \frac{1}{[\varphi(u^1,u^2)]^2} \ ,$$

samt $g_{12} = g_{21} = 0$, hvor φ er en given funktion.
Vis, at enhver parameterkurve er en kurve med konstant geodætisk krumning, når og kun når der findes funktioner φ_1 og φ_2 af én variabel, således at

$$\varphi(u^1,u^2) = \varphi_1(u^1) + \varphi_2(u^2).$$

3. En omdrejningsflade er i retvinklede koordinater i rummet givet ved en parameterfremstilling

$$x_1 = \varphi(u^1)\cos u^2 \qquad a < u^1 < b$$
$$x_2 = \varphi(u^1)\sin u^2 \qquad -\infty < u^2 < \infty$$
$$x_3 = \psi(u^1)$$

hvor $\varphi(u^1) > 0$ og $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$.
Bestem samtlige Christoffelsymboler Γ_{ij}^k af anden art.
Find parameterkurvernes geodætiske krumning.
Vis, at en kurve på fladen, givet ved

$$u^2 = f(u^1)$$

er en geodætisk kurve, når og kun når f tilfredsstiller differentialligningen

$$f'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi} f' + (f')^3 \varphi' \varphi = 0$$

Bestem herved de geodætiske kurver på pseudosfæren (sml. opg. IV, 4, 6).

4. Lad F betegne kuglefladen med ligningen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

hvor x_1, x_2 og x_3 er sædvanlige retvinklede koordinater i rummet. Linien, der forbinder punkterne $(0,0,1)$ og $(u^1, u^2, 0)$ skærer kuglefladen i et fra $(0,0,1)$ forskelligt punkt $P(u^1, u^2)$. Herved fås en parameterfremstilling af $F \setminus \{(0,0,1)\}$.
Bestem denne parameterfremstilling i de retvinklede koordinater x_1, x_2, x_3, den dertil hørende metriske fundamentalform og Christoffelsymboler som funktioner af u^1 og u^2.

For et givet tal β, $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$ betragtes cirklen K, hvori F skæres af planen med ligningen

$x_3 = \sin\beta$. Find en naturlig parameterfremstilling $u^i = u^i(s)$ for K.
Lad $\underline{a} \neq \underline{0}$ være en tangentvektor til F i punktet $(\cos\beta, 0, \sin\beta)$, som er vinkelret på tangenten til K i dette punkt. Vektoren $\underline{a}$ parallelforskydes i Levi-Civitas forstand langs med K rundt til udgangspunktet. Beregn, ved direkte integration af differentialligningerne for parallelforskydning, vinklen mellem $\underline{a}$ og den parallelforskudte vektor.
Angiv afrulningen af kurven K i en plan og løs herved opgavens sidste spørgsmål påny.

5. F betegner en kegleflade, som i retvinklede koordinater i rummet er givet ved ligningen

$$x_3^2 = 3(x_1^2 + x_2^2), \quad x_3 > 0.$$

Find hovedkrumningerne i et punkt P af F, som har afstanden r fra $O = (0,0,0)$.
K betegner rumkurven med parameterfremstilling

$$x_1 = \cos t \cos 2t$$
$$x_2 = \cos t \sin 2t \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$
$$x_3 = \sqrt{3}\cos t$$

Vis, at K ligger på F og har konstant geodætisk krumning 1. Vis, at i det til parameterværdien t svarende punkt af K danner K's tangent en

vinkel på $\frac{\pi}{2}+t$ med frembringeren gennem punktet, og find herved normalkrumningen og selve krumningen af K som funktioner af t.
(Benyt en udfoldning af keglefladen).

6. Et fladestykke har en parameterfremstilling $P(u^1, u^2)$. Vis, at hvis vektorerne $\underline{D}_2 P$ danner et parallelfelt i Levi-Civitas forstand langs enhver u^1-kurve, da vil vektorerne $\underline{D}_1 P$ danne et parallelfelt i Levi-Civitas forstand langs enhver u^2-kurve. Vis dernæst, at en af disse påstande (og dermed dem begge) er opfyldt, når og kun når g_{11} kun afhænger af u^1 og g_{22} kun afhænger af u^2.

Fladeteoriens formler og ligninger

Den metriske fundamentalform:

$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a^i \underline{D}_i P) \cdot (b^j \underline{D}_j P) = g_{ij} a^i b^j$, hvor

$g_{ij} = \underline{D}_i P \cdot \underline{D}_j P$.

$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}$, $g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$, $g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}$, hvor

$g = \det\{g_{ij}\} = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2$.

Normalvektor:

$$\underline{N} = \frac{\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P}{|\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P|}$$

Den anden fundamentalform:

$\kappa_n(\underline{a}) |\underline{a}|^2 = L_{ij} a^i a^j$, idet $\underline{a} = a^i \underline{D}_i P$.

$L_{ij} = \underline{D}_i \underline{D}_j P \cdot \underline{N}$, $L = \det\{L_{ij}\}$.

Christoffelsymboler:

$\Gamma_{ij/k} = \underline{D}_i \underline{D}_j P \cdot \underline{D}_k P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)$,

$\Gamma^i_{jk} = g^{il} \Gamma_{jk/l}$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ki/j} + \Gamma_{kj/i}$.

De afledede af anden orden:

$\underline{D}_i \underline{D}_j P = \Gamma^k_{ij} \underline{D}_k P + L_{ij} \underline{N}$.

$\underline{D}_i \underline{N} = -g^{kj} L_{ji} \underline{D}_k P$.

Krumningstensoren:

$$R^{\ell}_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^{\ell}_{ik} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^{\ell}_{ij} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{\ell}_{jm} - \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{\ell}_{km}$$

Gauss' ligning:

$$L_{jk}L_{ni}g^{mn} - L_{ik}L_{nj}g^{mn} = R^{m}_{kij}$$

Mainardi - Codazzis' ligning:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}L_{jk} - \frac{\partial}{\partial u^j}L_{ik} + \Gamma^{\ell}_{jk}L_{i\ell} - \Gamma^{\ell}_{ik}L_{j\ell} = 0$$

Buelængde af fladekurve

$$s = \int\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt$$

Krumning af fladekurve (s naturlig parameter)

$$\frac{d\underline{v}_1}{ds} = \kappa_g\,\underline{N}\times\underline{v}_1 + \kappa_n\,\underline{N}$$

$$\kappa_n = L_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}$$

$$\kappa_g = \varepsilon_{\ell k}\frac{du^\ell}{ds}\left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^{k}_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right), \text{ hvor}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}.$$

Meusniers formel:

$$\kappa = \left|\frac{\kappa_n}{\cos v}\right|$$

Eulers formel:

$$\varkappa_n(\underline{a}) = \varkappa_1 \cos^2(\underline{e}_1, \underline{a}) + \varkappa^2 \sin^2(\underline{e}_1, \underline{a})$$

Middelkrumning og gaussisk krumning:

$$H = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{1}{2} g^{ij} L_{ij}$$

$$K = K_1 K_2 = \frac{L}{g} = \frac{1}{g} g_{m2} R^m_{121} .$$

Krumningskurver

$$\begin{vmatrix} L_{1k} \frac{du^k}{dt} & g_{1k} \frac{du^k}{dt} \\ L_{2k} \frac{du^k}{dt} & g_{2k} \frac{du^k}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

Asymptotekurver

$$L_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0$$

Geodætiske kurver (s naturlig parameter)

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Parallelforskydning i Levi-Civitas forstand

$$\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} a^i \frac{du^j}{dt} = 0 .$$

Rettelser til kap IV.

IV, 1, 5 l. 1: læs: $|\Delta s|$ i stedet for Δs

IV, 2, 5 l. 7: læs:

$$2\,\Delta s^3\,\underline{v}_1\cdot\underline{\varepsilon}(\Delta s) + 2\left(\tfrac{1}{2}\kappa(\Delta s)^4 - \rho(\Delta s)(\Delta s)^2\right)\underline{v}_2\cdot\underline{\varepsilon}(\Delta s)$$

IV, 2, 11 l. 5 f.n.: læs: en vilkårlig
i stedet for: enhver

IV, 2, øv. 6 l. 7 f.n.: læs: $\frac{2\pi}{R}r$ istedet for: $\frac{2\pi}{R}$

IV, 3, 6 l. 11, l. 2, 3 og 4 fra neden: læs: $1/3!$ i stedet for: $\frac{1}{3}$

IV, 3, 7 l. 13 og 16: læs: $\frac{1}{3!}$ i stedet for $1/3$

IV, 3, 10 l. 4: $\underline{v}_3(t) = \dfrac{\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)}{|\dot{\underline{r}}(t)\times\ddot{\underline{r}}(t)|}$

IV, 3, øv. 3-5 l. 2: læs: (2) i stedet for ( )

IV, 4, 4 l. 6 læs: $\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2)$ i stedet for
$\bar{u}^1 = (u^1, u^2)$

IV, 4, 4 l. 4 f.n. læs: $P\circ\varphi : \Omega' \to E^3$ i stedet for
$P\circ\varphi : \Omega' \to \Omega$

IV, 4, 7 l. 8 læs: givet en af istedet for: givet en

IV, 4, 10 sidste linie:

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^1(t), u^2(t))\frac{du^i(t)}{dt}\frac{du^j(t)}{dt}}\,dt$$

IV, 4, 11, lin. 14, læs:

$$g_{12}(u^1,u^2) = |\underline{D}_1 P(u^1,u^2)| \cdot |\underline{D}_2 P(u^1,u^2)| \cdot \cos(\underline{D}_1 P(u^1,u^2), \underline{D}_2 P(u^1,u^2))$$

IV, 4, øv. 7 : de 3 sidste linier udelades.

IV, 5, 8, l. 11, læs: (e_1^j) og (e_2^j) istedet for: (e_1^i) og (e_2^i)

IV, 5, 8, l. 15, læs: $\det\{L_{ij} - \kappa_1 g_{ij}\} = 0$

IV, 5, 8, l. 16, læs: da $(e_1^1, e_1^2) \neq (0,0)$

IV, 5, 8, l. 19, læs: er altså rødder i stedet for: er altså begge rødder

IV, 5, 8, l. 21, læs: De er endda altid samtlige rødder i stedet for: De er endda altid rødderne

IV, 5, 10, l. 2, læs: retningen i tangentplanen i stedet for: retningen

IV, 5, 10, l. 9, læs: enhver tangentretning $\underline{a}$ i stedet for: enhver retning $\underline{a}$

IV, 5, 13, l. 5, læs: $x_3 = \frac{1}{2}(\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2)$ i stedet for: $x_3^2 = \frac{1}{2} \ldots$

IV, 6, 11, l. 9, læs: punkt af denne (d.v.s. samme tangentplan som i alle andre punkter af frembringeren gennem punktet), bliver ...

Mat. 3, 1963–64 $\underline{\mathrm{IV}}$, rettelse 3

i stedet for: punkt af denne, bliver ...

$\underline{\mathrm{IV}}$, 7, 3 l.5 fra neden, læs: $(\underline{N} \times \frac{du^l}{ds} \underline{D}_l P)$

i stedet for: $(\underline{N} \times \frac{du^i}{ds} \underline{D}_i P)$

$\underline{\mathrm{IV}}$, 7, 3 l.4 fra neden, læs:

$$= \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \frac{du^l}{ds} \varepsilon_{lk}$$

$\underline{\mathrm{IV}}$, 7, 4, l.5 læs:

$$\varkappa_g = \varepsilon_{lk} \frac{du^l}{ds} \left(\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right)$$

$\underline{\mathrm{IV}}$, 7, 8 l.8 fra neden, læs: $]\alpha, \beta[$

i stedet for: $]a, b[$.

$\underline{\mathrm{IV}}$, 7, 21, l.8, læs: $g_{m2} R^m_{121}$

i stedet for: $g_{m2} R^2_{121}$

IV,4,11	l.6	b^j	a^j
IV,4,12	l.7 f.n.	g_{kl}	g_{ij}
IV,4,16	l.9 f.n.	at de to	at de
IV,4,18	l.1	$r(u^1)$	u^1
IV,5,5	l.8	Der tilføjes: Man bemærker, at der gælder ulationerne $\|\kappa g\| = \kappa \sin v$ $\|\kappa g\| = \|\kappa n\| \operatorname{tg} v$ for $v \neq 0$ og $\frac{\pi}{2}$	
IV,5,11	l.4 f.n.	u_o^2	x_o^2
IV,6,1	l.1	en regulær, orienteret kurve	en kurve
IV,6,6	l.7	$[\underline{v}_1, \underline{q}, q'']$	$-[\underline{v}_1, \underline{q}, \underline{q}'']$
IV,6,8	l.7 l.8 f.n.	hastigheden	farten
IV,6,9	l.11 f.n.	en regulær, orienteret rumkurve	en rumkurve
IV,7,12	l.6	$dt/d\bar{t}$	$d\bar{t}/dt$
IV,7,15	l.12 f.n.	$s = \alpha t$	$s = t/\alpha$
IV,7,17	l.6	Idet (φ^1, φ^2) er en naturlig parameterfremstilling (i parametrene u^1, u^2) for K er	Idet s var naturlig parameter på K er
IV,7,21	l.8	$L = L_{11}L_{22} - L_{12}{}^2$	$L = L_{11}L_{22} - L_{22}^2$
	l.10	$g_{m2}\, R^m_{121}$	$g_{m2}\, R^2_{121}$
IV,appendix,3	l.2	κ_2	κ^2

Tilføjelser og kommentarer til kap. IV §§ 1 - 7

Kap. IV §§ 1-7 består af følgende blade:

§ 1	tekst side 1-5	øvelser 1 - 3
§ 2	tekst side 1-17	øvelser 1 - 6
§ 3	tekst side 1-17	øvelser 1 - 6
§ 4	tekst side 1-18	øvelser 1 - 7
§ 5	tekst side 1-15	øvelser 1 - 9
	+ supplement til s. 2	
§ 6	tekst side 1-11	øvelser 1 - 6
§ 7	tekst side 1-22	øvelser 1 - 6
	Appendix side 1 - 3	
	Rettelser side 1 - 3	

Tilføjelser til kap. IV §2 side 9 - 10.

Ved ræsonnementerne på side 10 bruges forudsætningen

$$\frac{d\rho}{ds} > 0.$$

Derimod bruges forudsætningen $\rho > 0$ <u>ikke</u>, og formlerne gælder derfor også selvom $\rho < 0$.

For fuldstændighedens skyld udleder vi her også formlerne svarende til tilfældet

$$\frac{d\rho}{ds} < 0.$$

Formlen

$$\dot{\underline{Q}}(s) = \frac{d\rho}{ds}\,\underline{V}_2(s)$$

giver da, at evoluttens tangentvektor er

$$\underline{v}_1^*(s) = -\underline{v}_2(s)$$

og at der for enhver naturlig parameter s^* på evolutten gælder

$$\frac{ds^*}{ds} = \left|\frac{d\rho}{ds}\right| = -\frac{d\rho}{ds}.$$

Specielt er $s^* = -\rho$ altså en naturlig parameter på evolutten. Af formlen for $\underline{v}_1^*$ ser man, at de to kurver har den samme tangentdrejning i tilsvarende punkter regnet ud fra tilsvarende punkter, og vi får derfor for evoluttens krumning

$$\kappa^* = d\Theta/ds^* = -d\Theta/d\rho$$

altså

$$\rho^* = -\frac{d\rho}{d\Theta}$$

Formlerne for krumningsradius ρ^* for evolutten kan sammenfattes til

$$\rho^* = \begin{cases} \dfrac{d\rho}{d\Theta} & \text{når } \dfrac{d\rho}{ds} > 0 \\ -\dfrac{d\rho}{d\Theta} & \text{når } \dfrac{d\rho}{ds} < 0. \end{cases}$$

(Ved bestemmelse af fortegnet for $d\rho/ds$ kan det være bekvemt at bemærke, at

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{d\Theta}\frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\Theta}).$$

Tilføjelse til kap. IV, §4, s. 11.

Den metriske fundamentalforms koefficienter kan bestemmes alene ved længde - (eller rettere sagt fart -) målinger i fladen. Størrelsen $g_{11} = |\underline{D}_1 P|^2$ er nemlig kvadratet på farten på u^1- kurven, $g_{22} = |\underline{D}_2 P|^2$ tilsvarende for u^2- kurven gennem P. Betragtes fladekurven med parameterfremstillingen

$$u^1 = u_o^1 + t$$
$$u^2 = u_o^2 + t$$

ser man, at dennes hastighedsvektor er $\underline{D}_1 P + \underline{D}_2 P$. Kvadratet på farten er altså $|\underline{D}_1 P + \underline{D}_2 P|^2 = g_{11} + g_{22} + 2g_{12}$, og heraf kan g_{12} $(=g_{21})$ så bestemmes.

Tilføjelse til kap IV, §5 side 4-6.

Overskriften "Meusnier's sætning" står et underligt sted. Det er den understregede påstand øverst på side IV, 5, 4, altså udsagnet om, at en fladekurves normalkrumning i et punkt er fastlagt ved fladen og kurvens tangentvektor i det pågældende punkt, som er Meusnier's sætning.

Et andet vigtigt udsagn på side IV, 5, 4, er følgende: Den funktion L på fladens tangentvektorer i punktet P, som er bestemt ved

$$L(\underline{b}) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } \underline{b} = \underline{0} \\ |\underline{b}|^2 \kappa_n(\underline{b}/|\underline{b}|) & \text{hvis } \underline{b} \neq \underline{0}, \end{cases}$$

er en kvadratisk form. For $\underline{b} = b^i \, \underline{D}_i P$ gælder

$$L(\underline{b}) = L_{ij} \, b^i \, b^j .$$

Meusnier's formel side IV,5,5 øverst kan skærpes til

$$\kappa \cos v = \kappa_n(\underline{a})$$

(numerisk-tegnene er fjernet), idet v nu betegner vinklen mellem kurvens hovednormal-vektor og fladens normalvektor i punktet P. Dette følger af, at da $\kappa \geq 0$ (sml. side IV, 3, 1), vil vektorerne $\underline{v}_2$ og $d\underline{v}_1/ds$ have samme retning.

Dette giver os yderligere en geometrisk fortolkning af fortegnet for κ_n. Fra rumkurveteorien vides nemlig (se side IV,3,7-8), at kurven i omegnen af punktet P "næsten" forløber i oskulationsplanen og heri på den side af tangenten, hvori hovednormalvektoren $\underline{v}_2$ peger. En fladekurve har altså positiv normalkrumning i punktet P, hvis den i omegnen af P forløber på den positive side af tangentplanen til fladen i P (samme side som fladens normalvektor i P) og den har negativ normalkrumning i P, hvis den i omegnen af P forløber på den negative side af tangentplanen i P.

Tilføjelse til kap IV, §5 side 7 nederst - 9 øverst.

Det følgende erstatter de sidste 7 linier af side 7, hele side 8 og de 5 første linier af side 9.

Kender man - svarende til parametre (u^1, u^2) - koefficienterne g_{ij} og L_{ij} for de to fundamentalformer i et punkt P_o af en flade F, kan man beregne hovedretningerne og hovedkrumningerne efter nedenstående recept.

Lad

$$\underline{e}_1 = e_1^i \, \underline{D}_i P \quad \text{og} \quad \underline{e}_2 = e_2^i \, \underline{D}_i P$$

være hovedretninger svarende til hovedkrumningerne κ_1 og κ_2. Med matrixbetegnelserne

$$\underline{\underline{g}} = \{g_{ij}\} \quad , \quad \underline{\underline{L}} = \{L_{ij}\}$$

og
$$\underline{\underline{e}} = \begin{Bmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{Bmatrix}$$

har vi da

$$\underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{g}} \, \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{E}}$$

og

$$\underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\underline{e}} = \begin{Bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Bmatrix} .$$

Hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 er altså rødderne i ligningen

$$\det (\underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\underline{e}} - \lambda \, \underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{g}} \, \underline{\underline{e}}) = 0$$

Idet

$$\underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{L}} \, \underline{\underline{e}} - \lambda \, \underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{g}} \, \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}'(\underline{\underline{L}} - \lambda \, \underline{\underline{g}}) \, \underline{\underline{e}}$$

og da $\underline{\underline{e}}$ er regulær, er κ_1 og κ_2 altså rødderne i ligningen

$$(1) \qquad \det (\underline{\underline{L}} - \lambda \, \underline{\underline{g}}) = 0 .$$

Her kan man bekvemt starte sine udregninger. Er der dobbeltrod, er punktet et kuglepunkt og to vilkårlige, på hinanden vinkelrette enhedstangentvektorer kan bruges som hovedretninger. I det almindelige tilfælde, hvor $\kappa_1 \neq \kappa_2$, kan vi bemærke, at talsættet (e_1^1, e_1^2) vil tilfredsstille ligningerne

$$\underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{g}} \begin{Bmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{e}}' \, \underline{\underline{L}} \begin{Bmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da matricen $\underline{\underline{e}}'$ er regulær fås heraf, at

$$(2) \qquad (\underline{\underline{L}} - \kappa_1 \, \underline{\underline{g}}) \begin{Bmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

En hovedretning

$$\underline{e}_1 = e_1^i \, \underline{D}_i P,$$

svarende til hovedkrumningen κ_1, fås følgelig udfra en egentlig løsning til ligningssystemet (2) ved normering :

$$g_{ij} \, e_1^i \, e_1^j = 1.$$

På analog måde bestemmes en hovedretning til den anden hovedkrumning κ_2.

<u>Kommentar til kap IV §6 side 7 nederste linie.</u>

Denne formel er baseret på, at u^1 er en naturlig parameter på kurven, der beskrives at punktet A, og den er <u>ikke</u> gyldig i det almindelige tilfælde, hvor u^1 ikke er en naturlig parameter.

<u>Rettelse til kap IV §6 side 8.</u>

To steder på siden rettes "fart" til"hastighed".

Tilføjelse til kap IV §6 side 10 linie 8.

Denne vektor $\underline{a}(u^1)$ er ikke grebet ud af luften, som det synes at fremgå af teksten. Vi kan nemlig sige følgende:

Der søges en vektorfunktion $\underline{a}(u^1)$, således at både $\underline{a}(u^1)$ og $\underline{a}'(u^1)$ står vinkelret på $\underline{N}(u^1)$, d.v.s. så

$$\underline{a}(u^1) \cdot \underline{N}(u^1) = 0 \qquad \underline{a}'(u^1) \cdot \underline{N}(u^1) = 0$$

Den første af disse ligninger giver ved differentiation, at der skal gælde

$$\underline{a}'(u^1) \cdot \underline{N}(u^1) + \underline{a}(u^1) \cdot \underline{N}'(u^1) = 0$$

altså

$$\underline{a}(u^1) \cdot \underline{N}'(u^1) = 0.$$

Vektoren $\underline{a}(u^1)$ må derfor vælges vinkelret på både $\underline{N}(u^1)$ og $\underline{N}'(u^1)$ d.v.s. proportional med $\underline{N}(u^1) \times \underline{N}'(u^1)$.