

Matematik 2LT, 1992–94

Kjeld Bagger Laursen

Lineær algebra og transformationer

1 FLERE REELLE VARIABLE	
1.1 IMPLICIT GIVNE FUNKTIONER	1.1
1.2 OMVENDT AFBILDNING	1.19
OPGAVER	1.25
2 LINEÆRE AFBILDNINGER	
2.1 LINEÆRE AFBILDNINGER	2.1
OPGAVER	2.20
3 JORDANS NORMALFORM	3.1
OPGAVER	3.11
4 HILBERT RUM	
4.1 HILBERT RUM OG DERES GEOMETRI	4.1
4.2 ORTONORMALBASER OG PARSEVAL'S LIGNING	4.9
4.3 ORTOGONALPROJEKTIONER	4.14
OPGAVER	4.20
5 LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER	
5.1 LINEÆRT DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEM AF FØRSTE ORDEN	5.1
5.2 EN LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING AF k te ORDEN	5.4
5.3 LINEÆRT HOMOGENT DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEM AF FØRSTE ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER	5.6
5.4 STABILITET AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER	5.11
5.5 STABILITET AF EN k te ORDENS LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING	5.16
5.6 FASEDIAGRAMMER	5.20
OPGAVER	5.27
6 DIFFERENSLIGNINGER	
6.1 INDLEDNING	6.1
6.2 SÆDVANLIGE DIFFERENSLIGNINGER	6.2
6.3 EKSISTENS- OG ENTYDIGHED	6.2
6.4 LINEÆRE DIFFERENSLIGNINGER	6.4
6.5 LINEÆRE HOMOGENE DIFFERENSLIGNINGSSYSTEMER	6.6
6.6 n TE ORDENS LINEÆR HOMOGEN LIGNING MED KONSTANTE KOEFFICIENTER	6.11
6.7 EN GENEREL LØSNINGSFORMEL	6.15
6.8 STABILITET	6.16
6.9 DIFFERENSLIGNINGER OG KONTRAKTIONER	6.22
OPGAVER	6.28
7 PERRONS SÆTNING	7.1
HOMOGENE MARKOV-KÆDER	7.18
OPGAVER	7.22
8 SPEKTRUM, SPEKTRALRADIUS, STABILITET	8.1
8.2 STABILITET AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER	8.8
9 PERRONS SÆTNING	9.1
HOMOGENE MARKOV-KÆDER	9.12

KBLs bemærkninger 27. august 2012:

a) Notesættets kapitel 9 er en forløber fra foråret 93 til det længere kapitel 7, der blev brugt i foråret 94.

b) Opgavesættet (pagineret Opgaver.1-opgaver.25) er til en vis grad en sammenskrivning af kapitelopgaverne, men omfatter også eksamensopgaver.

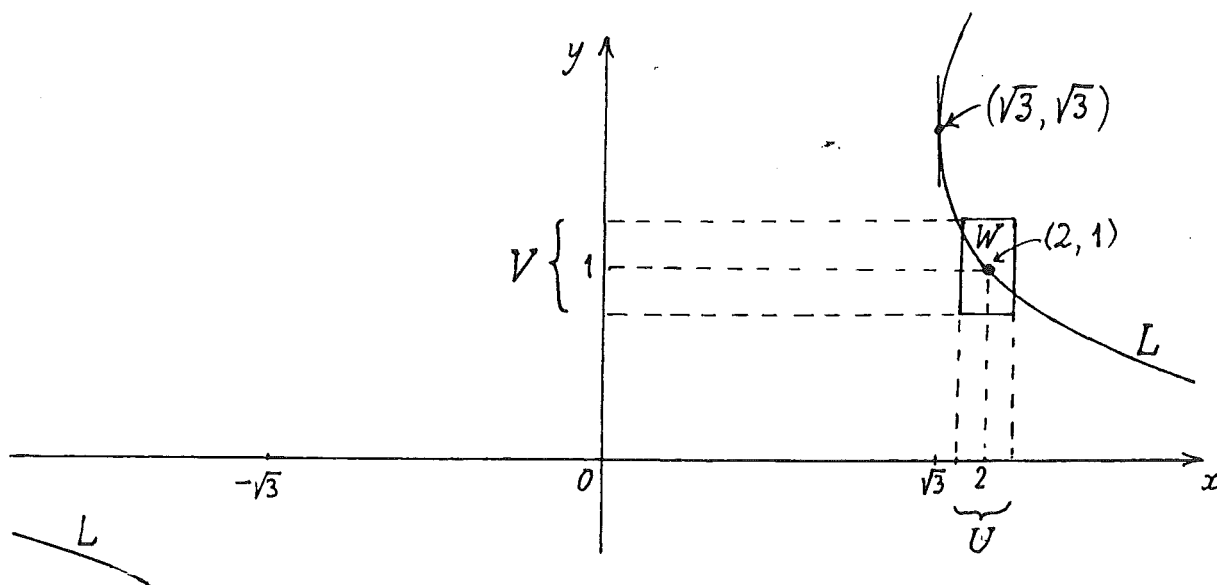
1.1. IMPLICIT GIVNE FUNKTIONER

Lad os først betragte en ligning mellem to variable $x, y \in \mathbb{R}$, for eksempel

$$(1) \quad y^2 - 2xy + 3 = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Det er let at løse denne ligning mht. y og derved udtrykke y explicit som funktion af x , eller snarere to funktioner af x , idet (1) er ensbetydende med

$$(2) \quad y = x \pm \sqrt{x^2 - 3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[.$$



Ser vi istedet på ligningen

$$(3) \quad y^5 - 2xy + 3 = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

kan vi ikke løse eksplicit mht. y . For dog at kunne arbejde med *vilkårlige* ligninger mellem to (eller flere) variable, vil vi udlede en sætning, som sikrer, at en ligning af typen

$$(4) \quad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

hvor $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ betegner en given funktion af 2 variable, under passende forudsætninger kan "løses" i hvert fald i nærheden af et givet punkt (x^0, y^0) af løsningsmængden

$$(5) \quad L = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}.$$

Forudsætningerne er, at Ω er åben (eller i det mindste at (x^0, y^0) er et indre punkt af Ω), at f er af klasse C^1 , og at den partielle afledede $D_y f = \partial f / \partial y$ er $\neq 0$ i (x^0, y^0) :

$$(6) \quad D_y f(x^0, y^0) \neq 0.$$

Under disse forudsætninger siger sætningen, at der eksisterer intervaller U og V indeholdende x^0 , hhv. y^0 som indre punkt (f.eks. som midtpunkt), således at rektanglet $W = U \times V$ omkring (x^0, y^0) er indeholdt i Ω , at $D_y f \neq 0$ i W , og at ligningen (4) inden for W er ensbetydende med en ligning af formen

$$y = g(x),$$

hvor $g : U \rightarrow V$ er en bestemt C^1 -funktion. Denne siges at være *implicit given* ved ligningen (4) i nærheden af (x^0, y^0) .

I hvert af de to ovenfor betragtede eksempler (1) og (3) er funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ af klasse C^∞ , givet ved hhv. $f(x, y) = y^2 - 2xy + 3$ og $f(x, y) = y^5 - 2xy + 3$. Som (x^0, y^0) kan tages f.eks. $(2, 1)$, der jo tilfredsstiller (1), hhv. (3). Og den afgørende betingelse (6) er så opfyldt, idet $D_y f(2, 1) = -2$, hhv. 1. Kun i det første eksempel er løsningen $y = g(x)$ i nærheden af $(2, 1)$ givet eksplicit, nemlig ved $y = x - \sqrt{x^2 - 3}$. (Hvorfor foretrækkes minustegnet foran kvadratroden her?) Principielt er situationen imidlertid den samme i det andet eksempel, selv om (3) som nævnt ikke kan løses eksplicit mht. y , heller ikke i nærheden af $(2, 1)$.

Til belysning af den rolle, betingelsen (6) spiller, kan vi i det første eksempel se på punktet $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ eller $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, som de eneste punkter (x, y) , der opfylder (1), men hvori $D_y f(x, y) = 0$. I nærheden af f.eks. $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ er løsningsmængden L ikke graf for nogen funktion $y = g(x)$ defineret i et interval U med $\sqrt{3}$ som indre punkt. (I stedet er L foreningsmængden af graferne for de to funktioner (2), definerede i og til højre for $\sqrt{3}$; i punktet $\sqrt{3}$ er funktionerne ikke differentiable - der er lodret tangent.)

Ser vi igen på løsningsfunktionen (2) til ligningen (1) i nærheden af det givne punkt $(x^0, y^0) = (2, 1)$, så er det jo let at finde dens differentialkvotient ved eksplicit differentiation af (2):

$$y' = g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

Noget tilsvarende kan ikke gøres (eksplicit) i det andet eksempel. Alligevel kan vi i begge eksempler bestemme $y' = g'(x)$ ved såkaldt *implicit differentiation* af den givne ligning (1), hhv. (3), stadig i nærheden af det givne punkt (2,1). Tager vi f.eks. (3) og indsætter den implicit givne løsningsfunktion $g: U \rightarrow V$ (vi vil ikke her bestemme brugbare intervaller U og V omkring $x^0 = 2$, hhv. $y^0 = 1$), så har vi jo identiteten

$$(7) \quad g(x)^5 - 2xg(x) + 3 = 0, \quad x \in U$$

som udtryk for, at $y = g(x)$ løser (3) inden for $W = U \times V$. Ved differentiation heraf fås

$$(8) \quad 5g(x)^4 g'(x) - 2xg'(x) - 2g(x) = 0,$$

hvoraf

$$(9) \quad g'(x) = \frac{2g(x)}{5g(x)^4 - 2x}, \quad x \in U.$$

Vi får således ikke noget eksplicit udtryk for $g'(x)$ som funktion af x , men dog et udtryk ved x og $g(x)$. Og for den givne værdi $x = 2$ finder vi $g'(2)$ eksplicit ved indsættelse af $g(2) = 1$:

$$g'(2) = 2.$$

Ved fortsat differentiation af (7) kan vi finde tilsvarende udtryk for $g''(x)$, $g'''(x)$, ..., og endda de eksplícitte værdier af $g''(2)$, $g'''(2)$, Differentieres således (8) endnu en gang, fås

$$5g(x)^4 g''(x) + 20g(x)^3 g'(x)^2 - 2xg''(x) - 4g'(x) = 0,$$

hvoraf

$$g''(x) = \frac{-20g(x)^3 g'(x)^2 + 4g'(x)}{5g(x)^4 - 2x}, \quad x \in U.$$

Bemærk at nævneren er den samme som i (9); sådan er det altid, jf. nedenfor. Bemærk også, at det er lettere at differentiere (8) end (9), hvori jo indgår en brøk; også dette er typisk. Ved indsættelse af $x = 2$, $g(2) = 1$, $g'(2) = 2$ (som ovenfor fundet), finder vi

$$g''(2) = -72.$$

Vil vi have et indtryk af løsningsfunktionen g i nærheden af den givne værdi $x = 2$, kan vi anvende Taylor's grænseformel, f.eks. med $n = 2$:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{1}{2}g''(2)(x-2)^2 + o(x-2)^2 \\ &= 1 + 2(x-2) - 36(x-2)^2 + o(x-2)^2 \end{aligned}$$

gældende for $x - 2 \rightarrow 0$.

Hvordan tager nu disse differentiationer sig ud i det generelle tilfælde: en ligning (4), hvor den givne C^1 -funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ opfylder $f(x^0, y^0) = 0$ og $D_y f(x^0, y^0) \neq 0$? Som nævnt fastlægger (4) i et vist rektangel $W = U \times V$ (hvor U og V er intervaller omkring x^0 , hhv. y^0) y som en funktion $g: U \rightarrow V$ af x . Dette udtrykkes ved biimplikationen

$$\forall (x, y) \in W : f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Heraf fremgår, at

$$(10) \quad f(x, g(x)) = 0 \quad \text{for alle } x \in U$$

Ved anvendelse af kædereglen (jf. Mat 1MA) på (10) fås

$$(11) \quad D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0 \quad x \in U,$$

hvilket er ensbetydende med

$$(12) \quad g'(x) = - \frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))}, \quad x \in U.$$

Vi har jo valgt U, V bl.a. sådan, at $D_y f(x, y) \neq 0$ for alle $(x, y) \in U \times V$. Ligningerne (11) og (12) svarer til hhv. (8) og (9) i eksemplet (3) ovenfor. Vi siger, at vi har fundet $g'(x)$ (udtrykt ved x og $g(x)$) ved *implicit differentiation* af (10), og det betyder blot, at vi har anvendt kædereglen.

Ofte giver man ikke den implicit givne funktion g nogen særlig betegnelse, men siger blot, at y ved (4) fastlægges (lokalt) som funktion af x , og at denne funktions differentialkvotient $\frac{dy}{dx}$ findes ved implicit differentiation af (4):

$$D_x f(x, y) + D_y f(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Det hører med til sætningen om implicit givne funktioner, at hvis den givne funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ er af klasse C^n (evt. C^∞), så er den impli-

cit bestemte (lokale) løsningsfunktion $g : U \rightarrow V$ af samme klasse. Og de afledede af g kan fås ved fortsat implicit differentiation af (4) eller (10). Ved differentiation af (11) fås således ved anvendelse af kædereglen

$$D_{xx}f + 2D_{xy}f \cdot g'(x) + D_{yy}f \cdot g'(x)^2 + D_yf \cdot g''(x) = 0,$$

hvorved de partielle afledede af f af enhver forekommende orden skal tages i $(x, g(x))$, $x \in U$. (Gennemfør selv denne differentiation, såvel som den første i (11)!) Heraf kan $g''(x)$ let findes udtrykt ved x , $g(x)$, $g'(x)$ som en brøk med samme nævner $D_yf(x, g(x))$ som i (12).

Sætningen om implicit givne funktioner kan udstrækkes til flere end to variable og til flere ligninger end den ene i (4). Der skal være flere variable end ligninger. Lad antallet af ligninger være p og antallet af variable være $k + p$ ($k, p \in \mathbb{N}$). Så er opgaven ud fra de p ligninger at fastlægge p af de variable $y_1, \dots, y_p$ som funktioner af de øvrige k variable $x_1, \dots, x_k$. For kortheds skyld sammenfattes de to variabelsæt som

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_p).$$

Den i 'te af de givne ligninger ($i = 1, \dots, p$) kan skrives

$$f_i(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) = 0,$$

eller kort $f_i(x, y) = 0$. Her er f_i en given C^1 -funktion defineret i en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{k+p}$. Og de p funktioner f_i kan sammenfattes til en C^1 -vektorfunktion (søjlematrix)

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$$

af de variable $(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p)$. Funktionalmatricen Df for denne vektorfunktion f er en $p \times (k+p)$ matrix:

$$Df = (D_{x_1}f, \dots, D_{x_k}f, D_{y_1}f, \dots, D_{y_p}f) = (D_xf, D_yf),$$

hvor D_xf betegner $p \times k$ matricen med søjlerne $D_{x_j}f = \partial f / \partial x_j$ ($j =$

$1, \dots, k$), mens $D_y f$ er $p \times p$ matricen med søjlerne $D_{y_i} f = \partial f / \partial y_i$ ($i = 1, \dots, p$). Således er $Df = (D_x f, D_y f)$ en *blokmatrix* bestående af de to *partielle* funktionalmatricer $D_x f$ og $D_y f$, den sidste stillet til højre for den første. Udførligt opskrevet er (jvf. s. VIII.1.6 i Mat IMA noterne)

$$D_x f = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1, \dots, \partial f_1 / \partial x_k \\ \vdots \\ \partial f_p / \partial x_1, \dots, \partial f_p / \partial x_k \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$D_y f = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial y_1, \dots, \partial f_1 / \partial y_p \\ \vdots \\ \partial f_p / \partial y_1, \dots, \partial f_p / \partial y_p \end{pmatrix}.$$

Kort fortalt er opgaven nu at løse vektorligningen

$$(14) \quad f(x, y) = 0$$

eller det dermed ensbetydende ligningssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) &= 0 \\ &\vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_p) &= 0 \end{aligned}$$

således at $y = (y_1, \dots, y_p)$ udtrykkes som (implicit given) funktion

$$y = g(x)$$

af $x = (x_1, \dots, x_k)$ i nærheden af et givet punkt

$$(x^0, y^0) = (x_1^0, \dots, x_k^0, y_1^0, \dots, y_p^0),$$

hvor $f(x^0, y^0) = 0$.

Vi betegner med L løsningsmængden til (14):

$$L = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}.$$

Der gælder nu følgende fundamentale sætning om implicit given funktion:

SÆTNING 1.1. Med ovenstående betegnelser vedrørende en given C^1 -afbildning $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ (hvor Ω er en åben delmængde af $\mathbb{R}^{k+p}$) betrag-

tes et punkt $(x^0, y^0) \in \Omega$, hvori $f(x^0, y^0) = 0$ og $p \times p$ matricen $D_y f(x^0, y^0)$ er invertibel.

Så findes der tal $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ således at der med betegnelserne

$$U = \{x \in \mathbb{R}^k; |x_i - x_i^0| \leq \rho, i = 1, \dots, k\},$$

$$V = \{y \in \mathbb{R}^p; |y_j - y_j^0| \leq \sigma, j = 1, \dots, p\},$$

$$W = U \times V,$$

gælder, at $W \subseteq \Omega$, at $D_y f(x, y)$ er invertibel for alle $(x, y) \in W$, og at den del af løsningsmængden L , der falder inden for W , er grafen for en C^1 -afbildning $g : U \rightarrow V$, dvs.

$$L \cap W = \{(x, g(x)) \mid x \in U\},$$

eller anderledes udtrykt:

$$(15) \quad \forall (x, y) \in W : f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Funktionalmatricen til den således implicit fastlagte afbildning g bestemmes ved implicit differentiation af ligningen $f(x, g(x)) = 0$, $x \in U$, hvorved fås

$$(16) \quad D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) Dg(x) = 0$$

dvs.

$$(17) \quad Dg(x) = -D_y f(x, g(x))^{-1} D_x f(x, g(x)),$$

gældende for $x \in U$. Er den givne afbildning af klasse C^n (eller C^∞), da er g af samme klasse.

BEVIS. Vi giver et bevis, der skyldes É.Goursat (fransk matematiker, 1858-1936), og som bygger på fikspunktsætningen for en kontraktion (jvf. Mat 2MA1). Det er herved bekvemmere at arbejde med *max-normen* $\|v\|$ af en vektor $v = (v_1, \dots, v_k)$ i et talrum $\mathbb{R}^k$ i stedet for den euklidiske norm eller længde $|v|$, som vi plejer at benytte. Definitionen er

$$\|v\| := \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\},$$

og man efterviser let de gængse egenskaber

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

gældende for $\lambda \in \mathbb{R}$ og $u, v \in \mathbb{R}^k$. Den nævnte fikspunktsætning gælder derfor også ved brug af max-normen med uændret bevis og uændret formulering af definitionen af en kontraktion.

For hvert $\rho \in \mathbb{R}_+$ og $\sigma \in \mathbb{R}_+$ kan vi nu skrive de i Sætning 1.1 nævnte mængder U og V således:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - x^0\| \leq \rho\},$$

$$V = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|y - y^0\| \leq \sigma\}.$$

U er således den afsluttede *max-kugle* (som egentlig er en "terning") i $\mathbb{R}^k$ med centrum x^0 og "radius" (= halve kantlængde) ρ . Tilsvarende har V centrum y^0 og "radius" σ . Endvidere sætter vi som nævnt

$$W = U \times V.$$

Beviset forløber nu i en række skridt, hvorunder vi først efterhånden fastlægger ρ og σ .

- 1°. Vi vælger ρ og σ så små, at $W = U \times V \subseteq \Omega$. Dette er muligt, da Ω er åben og $(x^0, y^0) \in \Omega$.
- 2°. Vi vælger desuden ρ og σ så små, at $p \times p$ matricen $D_y f(x, y)$ er invertibel for ethvert $(x, y) \in W$, altså at

$$\det D_y f(x, y) \neq 0 \quad \text{for } (x, y) \in W.$$

Dette er muligt, fordi elementerne i $D_y f$ er kontinuerte funktioner i Ω , og fordi $\det D_y f$ er et polynomium i disse elementer, derfor ligeledes kontinuert i Ω ; og endelig har vi jo forudsat, at $\det D_y f(x^0, y^0) \neq 0$.

- 3°. Til afkortning betegnes den invertible $p \times p$ matrix $D_y f(x^0, y^0)$ med B og dens inverse med

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}.$$

Nu betragtes afbildningen $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ defineret ved

$$T(x,y) = y - B^{-1}f(x,y) ,$$

eller udførligt

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} T_1(x,y) \\ \vdots \\ T_p(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}, \dots, b_{1p} \\ \vdots \\ b_{p1}, \dots, b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ \vdots \\ f_p(x,y) \end{pmatrix} .$$

Da B^{-1} er invertibel, er $f(x,y) = 0$ hvis og kun hvis $B^{-1}f(x,y) = 0$ og derfor gælder biimplikationerne

$$(18) \quad T(x,y) = y \Leftrightarrow f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in L .$$

Åbenbart er T ligesom f en C^1 -afbildning, og for hvert $j = 1, \dots, p$ er

$$D_{y_j} T(x,y) = E_j - \begin{pmatrix} b_{11}, \dots, b_{1p} \\ \vdots \\ b_{p1}, \dots, b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{y_j} f_1(x,y) \\ \vdots \\ D_{y_j} f_p(x,y) \end{pmatrix} ,$$

hvor E_j betegner den j 'te søjle i $p \times p$ enhedsmatricen E . Stilles ovenstående søjler, hvor j gennemløber $1, \dots, p$, ved siden af hinanden, danner de den partielle funktionalmatrix af T m.h.t. y :

$$D_y T(x,y) = E - \begin{pmatrix} b_{11}, \dots, b_{1p} \\ \vdots \\ b_{p1}, \dots, b_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_y f_1(x,y) \\ \vdots \\ D_y f_p(x,y) \end{pmatrix} ,$$

eller kort

$$D_y T = E - B^{-1} D_y f ,$$

hvor alle matricer er $p \times p$, jf. sidste ligning (13). Specielt gælder i (x^0, y^0) , at $D_y T(x_0^0, y_0^0) = 0$ i henhold til definitionen $B = D_y f(x^0, y^0)$ ovenfor. De kontinuerte partielle afledede $D_{y_j} T_i$ er således alle $= 0$ i punktet (x^0, y^0) ; og vi kan derfor antage, at ρ, σ yderligere er valgt så små, at

$$(19) \quad |D_{y_j} T_i(x, y)| \leq \frac{1}{2p} \quad \text{for alle } (x, y) \in W.$$

Betragtes nu to punkter $(x, \tilde{y})$ og (x, y^*) , hvor $x \in U$ og $\tilde{y}, y^* \in V$, har vi for hvert $i = 1, \dots, k$ ifølge middelværdisætningen i flere variable (dvs. Taylors formel med restled for $n = 1$, jf. Mat 1MA) anvendt på funktionen $y \rightarrow T_i(x, y)$ (for fast $x \in U$):

$$(20) \quad T_i(x, \tilde{y}) - T_i(x, y^*) = \sum_{j=1}^p D_{y_j} T_i(x, \eta) \cdot (\tilde{y}_j - y_j^*),$$

hvor η betegner et vist punkt af liniestykket, der forbinder $\tilde{y}$ og y^* . Da $\tilde{y}$ og y^* tilhører V , gælder det samme om η , idet terningen V åbenbart er en konveks mængde. Da endvidere $x \in U$, slutter vi af (19), at hver afledet $D_{y_j} T_i(x, \eta)$ er numerisk $\leq \frac{1}{2p}$, og da $|\tilde{y}_j - y_j^*| \leq \|\tilde{y} - y^*\|$, fås af (20) ved en simpel vurdering

$$|T_i(x, \tilde{y}) - T_i(x, y^*)| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{y} - y^*\|, \quad i = 1, \dots, p,$$

hvoraf

$$(21) \quad \|T(x, \tilde{y}) - T(x, y^*)\| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{y} - y^*\|,$$

gældende for ethvert $x \in U$ og vilkårlige $\tilde{y}, y^* \in V$.

4°. Vi er herefter tilfredse med vort valg af σ fra 3°; men vi må om nødvendigt vælge et mindre ρ end det fra 3° for at sikre, at T afbilder W ind i V . Vi vælger ρ så

$$(22) \quad \|T(x, y^0) - y^0\| \leq \frac{1}{2} \sigma \quad \text{for alle } x \in U.$$

Dette er muligt, fordi funktionen $x \rightarrow T(x, y^0)$ ligesom $x \rightarrow f(x, y^0)$ er kontinuert i x^0 , og fordi $T(x^0, y^0) = y^0$, idet jo $f(x^0, y^0) = 0$, jf. (18). For ethvert $(x, y) \in W$ får vi herefter af (21) og (22)

$$\begin{aligned} \|T(x, y) - y^0\| &\leq \|T(x, y) - T(x, y^0)\| + \|T(x, y^0) - y^0\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - y^0\| + \frac{1}{2} \sigma \\ &\leq \frac{1}{2} \sigma + \frac{1}{2} \sigma = \sigma. \end{aligned}$$

Dette betyder, at $T(x, y) \in V$ for ethvert $(x, y) \in W$, altså for ethvert $x \in U$ og $y \in V$.

5°. For fast $x \in U$ betragtes nu afbildningen $y \rightarrow T(x,y)$ af V ind i V (jf. 4°). Ifølge (21) er denne afbildning en *kontraktion* af V (med kontraktionskonstant $1/2$), og den har derfor netop ét fikspunkt. Til et hvert $x \in U$ findes således netop ét $y \in V$ således at $T(x,y) = y$, altså $f(x,y) = 0$, jf. (18). Betegnes dette fikspunkt y med $g(x)$, er (15) derfor opfyldt, og vi har indset at grafen G for g er $L \cap W$. For at vise at $g : U \rightarrow V$ er *kontinuert*, vil vi benytte Hjælpesætning 1.3, s. 1.19, og skal derfor indse at $G = L \cap W$, er afsluttet (i $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$). At G er afsluttet, kan let vises ved hjælp af det fra Mat 1MA kendte: betragt en vilkårlig følge af punkter $(x_n, g(x_n)) \in G$ som konvergerer mod et punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p$. Af $x_n \in U$ og $x_n \rightarrow x$ følger $x \in U$, da U er afsluttet. Tilsvarende ses af $g(x_n) \rightarrow y$, at $y \in V$, og dermed $(x,y) \in W$. Da $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ er kontinuert, og da $f(x_n, g(x_n)) = 0$ ifølge (15), fås at

$$f(x,y) = \lim f(x_n, g(x_n)) = 0$$

og dermed i alt, at $(x,y) \in L \cap W = G$.

6°. Det skal nu vises, at $g : U \rightarrow V$ er en C^1 -afbildning. Hertil betragtes et punkt $a \in U$ og en vektor $h \in \mathbb{R}^k$ så at også $a + h \in U$. Tilvæksten $\Delta g(h) = g(a+h) - g(a)$ opskrives udførligt:

$$\Delta g(h) = \begin{pmatrix} \Delta g_1(h) \\ \vdots \\ \Delta g_p(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(a+h) - g_1(a) \\ \vdots \\ g_p(a+h) - g_p(a) \end{pmatrix},$$

og vi sætter $g(a) = b$, hvorved $b + \Delta g(h) = g(a+h)$. Punkterne (a,b) og $(a+h, b+\Delta g(h)) = (a+h, g(a+h))$ tilhører begge løsningsmængden L ifølge (15), altså

$$f(a,b) = 0 \quad f(a+h, b+\Delta g(h)) = 0$$

Den sidste ligning giver ved subtraktion

$$f_i(a+h, b+\Delta g(h)) - f_i(a,b) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Ved anvendelse af middelværdisætningen (Mat 1 MA, VII. §2, Sætning 1 med $n = 1$) på venstre side i hver af disse p ligninger fås

(23) $D_{x_1} f_i \cdot h_1 + \dots + D_{x_k} f_i \cdot h_k + D_{y_1} f_i \cdot \Delta g_1(h) + \dots + D_{y_p} f_i \cdot \Delta g_p(h) = 0$
 hvor de partielle afledede skal tages i et vist punkt $p^{(i)}$ af linie-
 stykket med endepunkter $(a,b) \in W$ og $(a+h, b+\Delta g(h)) \in W$. Da W er
 konveks, er $p^{(i)} \in W$.

Vi indfører nu en $p \times k$ matrix $A(h)$, hvis i 'te række er den i 'te
 række i $D_x f(p^{(i)})$, altså

$$\left(D_{x_1} f_i(p^{(i)}), \dots, D_{x_k} f_i(p^{(i)}) \right), \quad i = 1, \dots, p,$$

samt en $p \times p$ matrix $B(h)$, hvis i 'te række er den i 'te række i
 $D_y f(p^{(i)})$, altså

$$\left(D_{y_1} f_i(p^{(i)}), \dots, D_{y_p} f_i(p^{(i)}) \right), \quad i = 1, \dots, p.$$

Så kan de p ligninger (23), hvor $i = 1, \dots, p$, sammenfattes kort på
 matrixform således

$$(24) \quad A(h)h + B(h)\Delta g(h) = 0,$$

hvor h og $\Delta g(h)$ er skrevet som søjlematricer (med hhv. k og p ele-
 menter), og 0 er nulsøjlen med p elementer.

Da $g : U \rightarrow V$ er kontinuert ifølge 5°, gælder $g(a+h) \rightarrow g(a) = b$
 for $h \rightarrow 0$, og derfor også $p^{(i)} \rightarrow (a,b)$ for $h \rightarrow 0$ (for ethvert $i =$
 $1, \dots, p$). Da elementerne i $D_x f$ og $D_y f$ er kontinuerte funktioner i
 Ω , følger det videre ud fra definitionerne på $A(h)$ og $B(h)$, at

$$A(h) \rightarrow A(0) = D_x f(a,b), \quad B(h) \rightarrow B(0) = D_y f(a,b)$$

for $h \rightarrow 0$, og derfor at $\det B(h) \rightarrow \det B(0) = \det D_y f(a,b)$ for $h \rightarrow 0$.
 Da $\det D_y f(a,b) \neq 0$ ifølge 2°, slutter vi, at også $B(h)$ er invertibel
 for alle $h \in \mathbb{R}^k$ med $\|h\| < \text{et vist } \delta \in \mathbb{R}_+$. I det følgende betragtes
 kun tilvækstvektorer $h \in \mathbb{R}^k$ med $\|h\| < \delta$ (og $a+h \in U$ som hidtil).
 Så kan matrixligningen (24) omskrives til

$$(25) \quad \Delta g(h) = -B(h)^{-1}A(h)h.$$

Her gælder ifølge ovenstående at

$$B(h)^{-1}A(h) \rightarrow B(0)^{-1}A(0) = D_y f(a,b)^{-1}D_x f(a,b) \text{ for } h \rightarrow 0.$$

Dette betyder, at

$$(26) \quad B(h)^{-1}A(h) = D_y f(a,b)^{-1}D_x f(a,b) + \varepsilon(h),$$

hvor $\varepsilon(h)$ er en $p \times k$ matrix, hvis elementer går mod 0 for $h \rightarrow 0$.
Indsættes (26) i (25), fås

$$\Delta g(h) = -D_y f(a,b)^{-1} D_x f(a,b)h - \varepsilon(h)h.$$

og her gælder $-\varepsilon(h)h = o(h)$ for $h \rightarrow 0$. I henhold til Matl MA, VIII. §1, Definition B og Sætning 1 B, viser dette, at g er differentiabel i a med funktionalmatricen

$$Dg(a) = -D_y f(a,b)^{-1} D_x f(a,b).$$

Hermed er (17) og derfor også (16) bevist. For øvrigt kunne (16) og dermed (17) også fås direkte ud fra $f(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in U$, ved anvendelse af den generaliserede kæderegul, jf. Mat IMA VIII. §1. (Men der er ingen sådan genvej til eksistensen af en C^1 -funktion $g : U \rightarrow V$ med egenskaben (15).)

7^o. Hvis den givne afbildning $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ er af klasse C^2 , ses det af (17) ved fornyet anvendelse af den generaliserede kæderegul, at Dg bliver af klasse C^1 og dermed g af klasse C^2 ligesom f . Ved et induktionsbevis, som vi udelader, kan det på lignende måde vises, at hvis f er af klasse C^n , så også g .

BEMÆRKNING 1. Sætningen om implicit given funktion vedbliver at gælde, hvis $\leq$ erstattes med $<$ i definitionen af max-kuglerne U og V . Dette ses ved om nødvendigt at erstatte det ovenfor fundne ρ med et mindre tal, der afparerer σ , når σ spiller rollen af ε i definitionen på kontinuitet af g i x_0 (jf. Mat IMA III. §1). På lignende måde ses, at sætningen forbliver gyldig hvis max-kuglerne U og V erstattes med euklidiske kugler (afsluttede eller åbne efter behag), svarende til, at max-normen $\|\cdot\|$ erstattes med den euklidiske norm $|\cdot|$.

EKSOGENE OG ENDOGENE VARIABLE. Lad der igen være givet en C^1 -afbildning $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, hvor Ω betegner en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ med $n = k + p > p$. Vi vil fortsat studere ligningen $f(x) = 0$, eller udførligt opskrevet ligningssystemet

$$(27) \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$f_p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

bestående af p ligninger mellem de variable $x_1, \dots, x_n$, i nærheden af et givet punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ hvori (27) er opfyldt. I stedet for som i det foregående at antage, at netop de sidste p søjler i $p \times n$ *funktionalmatricen*

$$f = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1, \dots, \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots \\ \partial f_p / \partial x_1, \dots, \partial f_p / \partial x_n \end{pmatrix}$$

var lineært uafhængige i x^0 , forudsætter vi nu blot om rangen, at

$$\text{rg } Df(x^0) = p.$$

Så findes der jo mindst ét sæt af p lineært uafhængige søjler i $Df(x^0)$, lad os sige at f.eks. søjlerne med numre $j_1, \dots, j_p$ (gerne med $j_1 < \dots < j_p$) er lineært uafhængige; de danner altså en invertibel $p \times p$ delmatrix af $Df(x^0)$ (jf. Mat 1LA). I denne situation siger Sætning 1.1, kort fortalt, at ligningssystemet (27) i nærheden af x^0 kan løses (i hvert fald i princippet) således, at de p variable $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$ fastlægges som C^1 -funktioner af de øvrige variable $x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}$. I økonomisk teori plejer man så at kalde $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$ de *endogene* variable og $x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}$ de *eksogene* variable. Disse sidste kan således variere frit i nærheden af $(x_{j_{p+1}}^0, \dots, x_{j_n}^0)$. I Sætning 1.1 var $x_1, \dots, x_k$ valgt som eksogene og $y_1, \dots, y_p$ som endogene variable. Bemærk analogien med teorien for løsning af et *lineært* ligningssystem. Efter bortkastelse af overflødige ligninger kan et sådant (hvis det overhovedet har en løsning) skrives på formen $Ax = b$, hvor A er en given $p \times n$ matrix af rang p , b en given $p \times 1$ matrix, og x den ubekendte $n \times 1$ matrix. Vi har således et specialtilfælde af (27) med $\Omega = \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax - b$, hvorved $Df(x) = A$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$. (Overvej dette!)

GEOMETRISK FORTOLKNING. Sætningen om implicit funktion i den netop givne formulering kan tolkes geometrisk, hvilket vi vil belyse i tilfældet $p = 1$, hvor der er givet en enkelt C^1 -funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω åben i $\mathbb{R}^n$) og et punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ med $f(x^0) = 0$ og

$$\text{grad } f(x^0) = (D_1 f(x^0), \dots, D_n f(x^0)) \neq \underline{0}.$$

Så kan løsningsmængden $L = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ i nærheden af x^0 beskrives ved, at én af de variable x_j udtrykkes som en C^1 -funktion af de øvrige variable. Vi siger derfor, at L i nærheden af x^0 er en *glat hyperflade* (eller blot flade i tilfældet $n = 3$, jf. VIII.§2. Eksempel 1) af klasse C^1 . Ved dennes *normal* i punktet x^0 forstås linjen gennem x^0 med retning efter $\text{grad } f(x^0)$. Den på normalen vinkelrette hyperplan (eller blot plan, hvis $n = 3$) kaldes *tangenthyperplanen* til L i punktet x^0 ; dens ligning er således

$$(28) \quad \text{grad } f(x^0) \cdot (x - x^0) = 0,$$

hvor venstre side er et skalarprodukt. Udførligt opskrevet er tangenthyperplanens ligning

$$(29) \quad D_1 f(x^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_n f(x^0)(x_n - x_n^0) = 0.$$

Alt dette stemmer i tilfældene $n = 2$ eller 3 med hvad vi kender om kurver ($n=2$) og flader ($n=3$), som vi nu skal se.

I tilfældet $n = 2$ (med variable x, y) har vi at gøre med en ligning af formen

$$(30) \quad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

med $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ af klasse C^1 , og et punkt $(x^0, y^0) \in \Omega$, hvori $f(x^0, y^0) = 0$ og $(f'_x(x^0, y^0), f'_y(x^0, y^0)) \neq (0, 0)$. Antager vi f.eks., at $f'_y(x^0, y^0) \neq 0$, så kan løsningsmængden L til (30) i nærheden af (x^0, y^0) fremstilles ved en ligning af formen

$$y = g(x),$$

hvor g er en C^1 -funktion defineret i et interval U omkring x^0 , og hvor

$$(31) \quad g'(x^0) = - \frac{f'_x(x^0, y^0)}{f'_y(x^0, y^0)}$$

ifølge (12) eller (17). Derfor er L i nærheden af (x, y) en *glat C^1 -kurve*, hvis *tangent* i (x^0, y^0) har ligningen

$$y - y^0 = g'(x^0)(x - x^0)$$

(jf. IMA, VI §1. Eksempel 6). Efter indsættelse af (31) antager tangent-

ens ligning formen

$$f'_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f'_y(x^0, y^0)(y - y^0) = 0$$

i overensstemmelse med (29).

I tilfældet $n = 3$ (med variable x, y, z) har vi tilsvarende at gøre med løsningsmængden L til en ligning af formen

$$(32) \quad f(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3,$$

med $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ af klasse C^1 , og et punkt $(x^0, y^0, z^0) \in \Omega$, hvori $f(x^0, y^0, z^0) = 0$ og

$$(33) \quad (f'_x(x^0, y^0, z^0), f'_y(x^0, y^0, z^0), f'_z(x^0, y^0, z^0)) \neq (0, 0, 0).$$

Antager vi f.eks., at $f'_z(x^0, y^0, z^0) \neq 0$, så kan løsningsmængden L til

(32) i nærheden af (x^0, y^0, z^0) fremstilles ved en ligning af formen

$$z = g(x, y),$$

hvor g er en C^1 -funktion defineret i nærheden af (x^0, y^0) , og hvor

$$(34) \quad g'_x(x^0, y^0) = -\frac{f'_x(x^0, y^0, z^0)}{f'_z(x^0, y^0, z^0)}, \quad g'_y(x^0, y^0) = -\frac{f'_y(x^0, y^0, z^0)}{f'_z(x^0, y^0, z^0)}$$

ifølge (17). Derfor er L i nærheden af (x^0, y^0, z^0) en *glat* C^1 -flade, og en vektor på dennes *normal* i (x^0, y^0, z^0) er $(-g'_x(x^0, y^0), -g'_y(x^0, y^0), 1)$ (jf. IMA, VIII. §2. Eksempel 1 og 3). Ganges den anførte normalvektor med tallet $f'_z(x^0, y^0, z^0) (\neq 0)$, fremkommer en anden normalvektor til L i (x^0, y^0, z^0) , nemlig ifølge (34) den i (33) anførte vektor $\text{grad } f(x^0, y^0, z^0)$; og tangentplanens ligning kommer til at stemme overens med (28), (29).

NIVEAUHYPERFLADER. Forløbet af en C^1 -funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω åben i $\mathbb{R}^n$) anskueliggøres ofte (navnlig for $n = 2$ eller 3) ved at betragte *niveauhyperfladerne* for f , dvs. løsningsmængderne

$$L_c = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$$

for forskellige værdier af "koten" $c \in \mathbb{R}$. I tilfældet $n = 2$ fås niveaukurver (tænk på højdekurver på et terrænkort), i tilfældet $n = 3$ niveauflader, jf. Mat IMA. Disse navne er dog kun rammende uden for de eventuelle stationære punkter for f , altså de punkter $x \in \Omega$, hvori $\text{grad } f(x) = \underline{0}$. I den foreliggende sammenhæng kaldes de stationære punk-

ter også *singulære* eller *kritiske* punkter for f . Gennem ethvert ikke-singulært punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ går åbenbart netop én niveauhyperflade L_c , nemlig den for hvilken $c = f(x^0)$. Uden for eventuelle singulære punkter er L_c ifølge det foregående en glat C^1 -hyperflade, hvis normal i x^0 har en retning efter $\text{grad } f(x)$; og tangenthyperplanen til L_c i x^0 har derfor ligningen (28) eller (29) ligesom i det før betragtede tilfælde $c = 0$; vi kan jo blot erstatte det tidligere f med $f - c$.

ET PAR HJÆLPESÆTNINGER

Ved undersøgelsen af, om en forelagt følge er konvergent, kan følgende undertiden være nyttig; vi vil her bruge det i beviset for Hjælpesætning 1.3. Hjælpesætning 1.3 indgår i beviset for Sætning 1.1 5°.

LEMMA 1.2. Lad $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en begrænset følge i $\mathbb{R}^k$, og lad $x \in \mathbb{R}^k$. Så gælder $x_n \rightarrow x$ hvis og kun hvis enhver konvergent delfølge $(x_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ har grænsepunktet x .

BEVIS. "Kun hvis" følger umiddelbart. "Hvis"-delen vises på kontraponeret form. Antag altså, at (x_n) ikke konvergerer mod x . Der findes så et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ så at $x_n \notin K(x, \varepsilon)$ for uendelig mange $n \in \mathbb{N}$, lad os sige for $n = n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$, hvor vi har valgt disse numre i stigende orden: $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$. Da (x_n) er begrænset, findes en afsluttet kugle A i $\mathbb{R}^k$ så at alle $x_n \in A$. Delfølgen $(x_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ forløber i $A \setminus K(x, \varepsilon)$, som er begrænset (som A) og afsluttet (fordi både A og $\mathbb{R}^k \setminus K(x, \varepsilon)$ er afsluttede), altså kompakt. Derfor kan den udtynnes yderligere til en ny delfølge af $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ som konvergerer mod et punkt $x' \in A \setminus K(x, \varepsilon)$, og dermed $x' \neq x$.

HJÆLPESÆTNING 1.3. Lad A og B være kompakte delmængder af $\mathbb{R}^k$, hhv. $\mathbb{R}^m$. En afbildning $f : A \rightarrow B$ er kontinuert hvis og kun hvis dens graf

$$G = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

er afsluttet (som delmængde af $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{k+m}$).

BEVIS. Antag først, at f er kontinuert. Vi vil vise at hvis $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y)$, så vil (x, y) tilhøre grafen G . Dertil betragter

vi en vilkårlig konvergent følge $(x_n, f(x_n))$ i G (hvor hvert $x_n \in A$), således at $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, altså

$$x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}^k, \quad f(x_n) \rightarrow y \in \mathbb{R}^m;$$

(her benyttes tillige sætningen om koordinatvis grænseovergang). Da A er afsluttet, gælder $x \in A$. Og da f er kontinuert, er $y = f(x)$. Vi slutter derfor, at $(x, y) = (x, f(x)) \in G$, og G er således afsluttet.

Antag dernæst, at G er afsluttet, og lad os vise, at f er kontinuert i hvert punkt $x \in A$. Lad (x_n) være en vilkårlig følge i A , som konvergerer mod x . Vi skal vise, at $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Ifølge Lemma 1.2 kommer det ud på at indse, at enhver konvergent delfølge $(f(x_{n_p}))$ deraf har grænsepunktet $f(x)$. Vi har nu $x_{n_p} \rightarrow x$ (fordi $x_n \rightarrow x$); og $f(x_{n_p}) \rightarrow$ et vist $y \in \mathbb{R}^m$. Altså gælder

$$(x_{n_p}, f(x_{n_p})) \rightarrow (x, y).$$

Da alle $(x_{n_p}, f(x_{n_p})) \in G$, og da G er forudsat afsluttet, slutter vi, at $(x, y) \in G$, altså $y = f(x)$.

BEMÆRKNING 2. Et punkt $x \in \mathbb{R}^k$ siges at være et *fortætningspunkt* for en forelagt punktfølge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}^k$, dersom følgen kan udtyndes til en konvergent delfølge med grænsepunkt x . Det er let at indse, at x er fortætningspunkt for $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : |x_n - x| < \varepsilon \text{ gælder for uendelig mange } n \in \mathbb{N}.$$

Forskellige begreber og resultater i det foregående kan omformuleres ved hjælp af begrebet fortætningspunkt. Eksempler herpå er:

En konvergent følge har kun ét fortætningspunkt, nemlig grænsepunktet. Enhver begrænset følge har mindst ét fortætningspunkt; den er konvergent hvis (og kun hvis) den kun har ét fortætningspunkt (Lemma 1.2).

EKSEMPEL I Kogiku: An Introduction to Macroeconomic Models, pp. 43-44 nævnes følgende (se også s. 275 i Sydsæter: Matematisk Analyse II): Nettonationalproduktet Y kan beskrives som summen af totalforbruget C og investeringen I ,

$$Y = C + I.$$

Vi antager at forbruget afhænger af nettonationalproduktet:

$$C = C(Y).$$

Vi vil, uden nærmere at gøre forsøg på at specificere denne afhængighed, antage at $C(Y)$ er en C^1 -funktion og at den afledede $C'(Y) \in]0,1[$ for

alle Y (plausibilitetsbetragtning: hvis nettonationalproduktet Y stiger med en enhed, vil der rimeligvis ske en stigning i forbruget, men ikke hele stigningen i Y vil gå til forbrug). Lader vi $f(I, Y) := Y - C(Y) - I$, bliver f en C^1 -funktion, idet

$$\partial f / \partial I = -1$$

og

$$\partial f / \partial Y = 1 - C'(Y).$$

I et punkt (I^0, Y^0) , hvor $C(Y^0) = -I^0 + Y^0$, er $f(I^0, Y^0) = 0$ og $(\partial f / \partial Y)(I^0, Y^0) = 1 - C'(Y^0) > 0$, specielt altså $\neq 0$, så den implicitte funktions sætning fortæller os at i en omegn omkring I^0 er Y en C^1 -funktion af I . Endvidere kan $Y'(I)$ i denne omegn udregnes ved implicit differentiation:

$$Y'(I) = -(1 - C'(Y))^{-1} (-1) = 1/(1 - C').$$

Denne udregning kan også foretages direkte på ligningen der definerer $C(Y)$: Af $Y = C(Y) + I$, fås $Y'(I) = C'(Y)Y'(I) + 1$, altså samme udtryk for $Y'(I)$ som før.

1.2. OMVENDT AFBILDNING

Begrebet omvendt (=invers) afbildning f^{-1} til en injektiv afbildning f er (kort) omtalt generelt i 1 LA. For funktioner af en reel variabel har vi i 1 MA bl.a. set, at hvis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ er differentiabel i definitionsintervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ og hvis $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in I$, så er også billedmængden (=værdimængden) $f(I)$ et interval, f er injektiv (nemlig strengt monotont), og den omvendte afbildning $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ er ligeledes differentiabel med

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

når x og y er sammenkoblede ved $y = f(x)$, eller dermed ensbetydende $x = f^{-1}(y)$.

Ved anvendelse af sætningen om implicit given funktion skal vi nu se, at dette for det meste kan udstrækkes til C^1 -afbildninger $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ (Ω åben i $\mathbb{R}^k$). Betingelsen $f'(x) \neq 0$ bliver nu til, at funktionsmatricen $Df(x)$ er invertibel (for ethvert $x \in \Omega$). Denne betingelse er dog ikke længere (når $k > 1$) tilstrækkelig til at sikre, at f bliver injektiv på hele Ω (selv ikke hvis Ω er sammenhængende), jvf. Eksempel 1 nedenfor. Vi viser dog, at f er injektiv i en omegn af et-

hvert punkt $x \in \Omega$, hvori $Df(x)$ er invertibel (sætning 1.2.1).

Ordet omegn benyttes fremover i samme betydning, som den i 2MA1 benyttede: En delmængde V af $\mathbb{R}^k$ kaldes en *omegn* af et punkt $a \in \mathbb{R}^k$, hvis $a \in V^0$, altså hvis a er et indre punkt af V , dvs. hvis V indeholder en kugle $K(a, \rho)$ med centrum a .

BEMÆRKNING 1. Det er uden betydning, at vi her betragter en åben kugle $K(a, \rho)$; den indeholder jo den afsluttede kugle $K(a, \rho')$ af vilkårlig radius $\rho' < \rho$. Ej heller ville det gøre nogen forskel, hvis vi i stedet for en euklidisk kugle betragtede en max-kugle

$$\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x-a\| < \rho\},$$

altså en kugle (eller snarere terning) defineret ved hjælp af max-normen $\|\cdot\|$ i stedet for den euklidiske norm $|\cdot|$, jvf. 2MA1. Dette fremgår af ulighederne

$$\|v\| \leq |v| \leq \sqrt{k} \|v\|$$

mellem de to normer af en vilkårlig vektor $v \in \mathbb{R}^k$. Disse uligheder viser jo, at enhver euklidisk kugle indeholder en max-kugle med samme centrum, og vice versa. (Overvej alt dette!)

Lad nu $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ være en C^1 -afbildning af en åben mængde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ ind i samme talrum $\mathbb{R}^k$. Vi betegner punkterne af Ω med $x = (x_1, \dots, x_k)$ og punkterne af det "eksemplar" af $\mathbb{R}^k$, som f afbilder ind i, med $y = (y_1, \dots, y_k)$. Til afbildningen f hører en funktionalmatrix $Df: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_k^k$:

$$Df = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_k \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_k / \partial x_1 & \dots & \partial f_k / \partial x_k \end{pmatrix}$$

SÆTNING 1.2.1 Ethvert punkt $x^0 \in \Omega$, hvori $Df(x^0)$ er invertibel, har en åben omegn Ω_0 således at f er injektiv i Ω_0 , dvs.

$$\forall x, x' \in \Omega_0 : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

og så at billedet $f(\Omega_0)$ er åbent. Specielt er $f(x^0)$ et indre punkt af $f(\Omega)$. Det kan endvidere opnås, at $Df(x)$ er invertibel i ethvert punkt $x \in \Omega_0$.

BEVIS. Vi vil undersøge ligningen $f(x) = y$ for $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^k$. Hertil indføres en afbildning

$$(1) \quad F : \mathbb{R}^k \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

defineret ved

$$F(y, x) := f(x) - y, \quad (y, x) \in \mathbb{R}^k \times \Omega.$$

Åbenbart gælder for $(y, x) \in \mathbb{R}^k \times \Omega$ at $f(x) = y$ hvis og kun hvis $F(y, x) = 0$. Afbildningen F er af klasse C^1 , fordi f er det. Den partielle funktionalmatrix af F m.h.t. x er åbenbart

$$D_x F(y, x) = Df(x).$$

Sættes $f(x^0) = y^0$, er specielt $F(y^0, x^0) = 0$ og $D_x F(y^0, x^0) = Df(x^0)$ er forudsat invertibel. Vi anvender nu Sætning 1.1 på denne afbildning F i stedet for f , og derfor med $\mathbb{R}^k \times \Omega$ i stedet for Ω . Endvidere lader vi x og y bytte rolle i betegnelserne, derfor også U og V .

Resultatet er, at der eksisterer:

- a) åbne omegne V, U af y^0 , hhv. x^0 (i $\mathbb{R}^k$) så at $V \times U \subseteq \mathbb{R}^k \times \Omega$ (dvs. $U \subseteq \Omega$), og $Df(x)$ er invertibel for alle $x \in U$, samt
- b) en C^1 -afbildning $g : V \rightarrow U$, så at

$$(2) \quad \forall y \in V \quad \forall x \in U : \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y).$$

I den foreliggende situation, hvor $F(y, x) = f(x) - y$, er $D_y = -E$ ($k \times k$ enhedsmatricen; overvej dette!), og vi slutter derfor af sætningen om implicit given funktion, at

$$(3) \quad Dg(y) = (Df(x))^{-1}$$

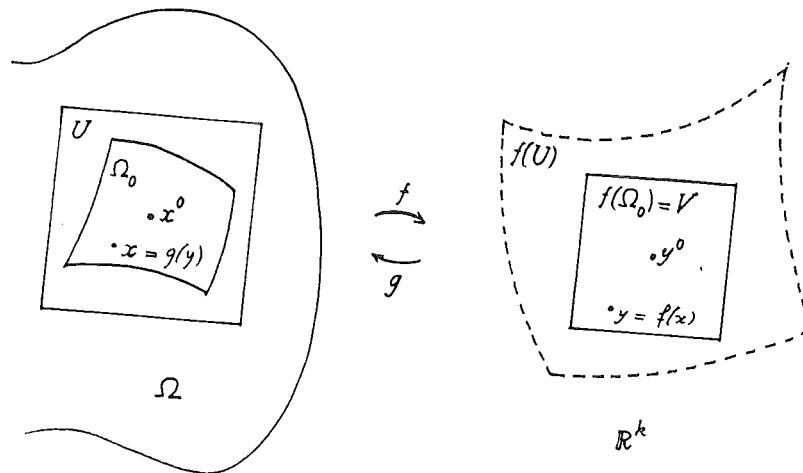
for vilkårligt $y \in V$, idet $x = g(y)$.

Bemærk, at g er injektiv, thi ethvert $y \in V$ er entydigt bestemt ud fra $g(y) = x \in U$ ved $y = f(x)$ ifølge (2). Vi sætter nu (se fig.)

$$\Omega_0 := g(V) = \{x \in U \mid \exists y \in V : x = g(y)\}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} &= \{x \in U \mid \exists y \in V : y = f(x)\} \\ &= \{x \in U \mid f(x) \in V\}, \end{aligned}$$

hvor vi ved det tredje lighedstegn atter benytter (2). Det er klart, stadig ud fra (2), at $f : \Omega_0 \rightarrow V$ er den omvendte afbildning til den bi-jektive afbildning $g : V \rightarrow \Omega_0$, hvorfor f er *injektiv* på Ω_0 . Det er endvidere klart, at $x^0 = g(y^0) \in \Omega_0$, og at $f(\Omega_0) = V$ er *åben*. Derfor er $f(x_0)$ et indre punkt af $f(\Omega_0)$ og følgelig også af $f(\Omega)$ ($\supseteq f(\Omega_0)$). Som nævnt under a) er $Df(x)$ invertibel for alle $x \in U$, specielt for alle $x \in \Omega_0$.



Tilbage står at vise, at også Ω_0 er åben. For ethvert $x \in \Omega_0$ gælder $f(x) \in V$ ifølge (4), og da V er åben, findes en kugle $K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Da f er kontinuert i x , og da U er åben og $x \in U$, kan ε afpares af et $\delta \in \mathbb{R}_+$, som desuden er så lille, at $f(K(x, \delta)) \subseteq K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, og vi slutter i alt af (4) at $K(x, \delta) \subseteq \Omega_0$, og dermed at x er et indre punkt af Ω_0 . Da dette gælder for ethvert $x \in \Omega_0$, er Ω_0 åben.

SÆTNING 1.2.2. a) Hvis en C^1 -afbildning $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ (Ω åben i $\mathbb{R}^k$) har invertibel funktionalmatrix Df overalt i Ω , så er billedmængden $f(\Omega)$ åben.

b) Hvis tillige f er injektiv, så er den omvendte afbildning $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$ ligeledes af klasse C^1 , og der gælder

$$D(f^{-1})(y) = (Df(x))^{-1},$$

når punkterne $x \in \Omega$ og $y \in f(\Omega)$ er sammenkoblede ved $y = f(x)$, eller dermed ensbetydende $x = f^{-1}(y)$.

BEVIS. a) Ethvert punkt $y^0 \in f(\Omega)$ kan jo skrives $y^0 = f(x^0)$ for (mindst) et $x^0 \in \Omega$, og idet $Df(x^0)$ er invertibel, giver Sætning 1.2.1 straks, at $y^0 = f(x^0)$ er et indre punkt af $f(\Omega)$. Hermed er vist, at $f(\Omega)$ er åben.

b) Antag nu yderligere, at f er injektiv, altså at $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$ er bijektiv og således har en omvendt afbildning $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$. At en afbildning er af klasse C^1 , er en lokal egenskab. Det er derfor nok for givet $y^0 \in f(\Omega)$ at betragte restriktionen af f^{-1} til en passende åben omegn af y^0 . Vi vælger $x^0 \in \Omega$ så at $f(x^0) = y^0$, og derpå U, V som i beviset for Sætning 1.2.1. For $y \in V$ sættes $x = g(y) \in$

U, hvoraf $y = f(x)$ ifølge (2), og altså $x = f^{-1}(y)$. Restriktionen $f^{-1}|_V$ er altså netop C^1 -afbildningen g fra beviset. Af (3) får vi videre

$$D(f^{-1})(y^0) = (Df(x^0))^{-1},$$

for vilkårligt $y^0 \in f(\Omega)$ og det tilhørende $x^0 \in \Omega$ med $f(x^0) = y^0$.

BEMÆRKNING 2. Når først man ved, at f^{-1} er en C^1 -afbildning, fås formelen for $D(f^{-1})$ også direkte af den generaliserede kæderegel, anvendt på identiteten $f^{-1}(f(x)) = x$ for alle $x \in \Omega$:

$$D(f^{-1})(y) \cdot Df(x) = E, \quad \text{når } y = f(x).$$

BEMÆRKNING 3. Hvis f er af klasse C^n (eller C^∞), da er f^{-1} af samme klasse. Dette fremgår af den tilsvarende passus til slut i Sætning 1.1, der viser, at afbildning g i b) ovenfor er af klasse C^n , når f er det.

EKSEMPEL 1. Vi betragter C^∞ -afbildningen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$$

og finder

$$Df = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

med determinanten $4(x_1^2 + x_2^2)$. I den sammenhængende åbne mængde $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

er Df således invertibel; men alligevel er $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ikke injektiv, idet $f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$. Dog er f ifølge Sætning 1.2.1 injektiv i en passende omegn Ω_0 af hvert punkt $(x^0, y^0) \in \Omega$ (f.eks. kan man for Ω^0 tage en åben halvplan, der indeholder (x^0, y^0) i sit indre, og hvis begrænsningslinje går gennem $(0,0)$).

Eksemplet forstås bedst, når man identificerer $\mathbb{R}^2$ med den komplekse plan $\mathbb{C}$, idet et punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ identificeres med det komplekse tal $z = x_1 + ix_2$. Skrives tilsvarende $w = y_1 + iy_2$ for billedet

$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) = f(z)$, er afbildningen f simpelthen givet ved $z \rightarrow z^2 = w$. Billedmængden $f(\mathbb{R}^2) = f(\mathbb{C})$ bliver hele $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ (og $f(\Omega)$ bliver $\mathbb{C} \setminus \{0\}$); thi ligningen $z^2 = w$ har for vilkårligt givet $w \in \mathbb{C}$ to rødder z og $-z$ (for $w = 0$ dog en dobbeltrod, nemlig 0).

Sætning 1.2.2 a) udstrækkes let til afbildninger mellem $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{R}^p$ med $p \leq k$ (i stedet for $p = k$). Først viser vi et "punktvis" resultat af denne art.

SÆTNING 1.2.3. Lad $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ (Ω åben i $\mathbb{R}^k$) være en C^1 -afbildning. Hvis funktionalmatricen $Df(x^0)$ i et punkt $x^0 \in \Omega$ har rangen p (hvilket kræver $p \leq k$), så er $f(x^0)$ et indre punkt af billedmængden $f(\Omega)$.

BEVIS. Når $\text{rg} Df(x^0) = p$, kan vi udtage p lineært uafhængige søjler i $Df(x^0)$. Efter en eventuel omnummerering af koordinaterne i $\mathbb{R}^p$ kan vi antage, at de p første af de k søjler i $Df(x^0)$ er lineært uafhængige og dermed danner en invertibel $p \times p$ matrix

$$A := (D_1 f(x^0), \dots, D_p f(x^0)) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x^0).$$

Vi betragter nu en ny afbildning ϕ , som fremkommer af f ved, at de $k - p$ sidste variable holdes fast på deres værdier i det givne punkt x^0 . Vi sætter altså

$$(5) \quad \phi(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0).$$

Da Ω er åben, er denne vektorfunktion $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}$ åbenbart defineret

i en tilpas lille åben kugle $K \subseteq \mathbb{R}^p$ med centrum $a := (x_1^0, \dots, x_p^0)$, og afbildningen $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^p$ er ligesom f af klasse C^1 . Endvidere er

$$D\phi(a) = A$$

som er invertibel. Ved om fornødent at formindske K kan vi af kontinuitetsgrunde tillige opnå, at $D\phi$ er invertibel i alle punkter af K og det følger da af sætning 1.2.2 a), at billedmængden $\phi(K)$ er åben; og specielt er $\phi(a) = f(x^0)$ (jvf. (5)) et indre punkt af $\phi(K)$. Vi mangler derfor blot at vise, at $\phi(K) \subseteq f(\Omega)$. Og dette fremgår af, at ethvert $y \in \phi(K)$ har formen

$$y = \phi(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}^0, \dots, x_k^0) \in f(\Omega),$$

for et $(x_1, \dots, x_p) \in K$, jvf. (5).

Som korollar har vi umiddelbart nedenstående, der også er kendt fra 2OK.

KOROLLAR. (Sætningen om det åbne billede) Hvis Df har rangen p i ethvert punkt af Ω , så er billedmængden $f(\Omega)$ åben i $\mathbb{R}^p$.

OPGAVER TIL IMPLICITTE OG OMVENDTE FUNKTIONER

1. Betragt afbildningen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x, y) := (e^x \sin y, e^x \cos y).$$

Vis at f afbilder cirklen $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ på en åben mængde.

a) Er f injektiv på $\mathbb{R}^2$?

b) Find alle løsninger (x, y) til ligningen $f(x, y) = (0, 1)$.

c) Vis at f er injektiv i en passende omegn af $(0, 0)$, og find funktionalmatricen Dg i punktet $(0, 1)$ for den omvendte afbildning g til restriktionen af f til en sådan omegn.

2. Gør rede for at ligningen $e^{x+y} + \sin(x-z) - \cos(y-z) = 0$ i en omegn af $(0, 0, 0)$ bestemmer z som en C^∞ funktion $z = g(x, y)$ af (x, y) , og bestem ved implicit differentiation $g'_x(0, 0)$ og $g'_y(0, 0)$.

3. Betragt afbildningen $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x, y) := (x - xy, xy).$$

a) Find funktionalmatricen Df og dennes determinant, og vis at Df altid er regulær.

b) Find billedmængden $f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ - det er en halvplan.

c) Vis at f er injektiv. Følger dette af a)?

d) Find den omvendte afbildning f^{-1} til f .

e) Find på to måder funktionalmatricen $D(f^{-1})$.

Vink: Det gælder jo i b) om at finde mængden af $y \in \mathbb{R}^2$ for hvilke $f(\underline{x}) = y$ har mindst én løsning $\underline{x} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; og det gælder i c) om at vise at denne ligning altid har højst én løsning.

4. Gør rede for at ligningen $5x - \sin x = 2$ har netop én løsning, ved at omskrive ligningen til $T(x) = x$, hvor $T(x) := (2 + \sin x)/5$. Vis at T er en kontraktion og at $1/5$ er en tilhørende kontraktionskonstant. Anvend dernæst iterationsmetoden (lommeregner!) f.eks. med start i $x_0 = 0$ eller $x_0 = 1$. Bestem $x_5 = T^5(x_0)$ og vurder fejlen der begås ved at standse efter 5 iterationer.

5. Gør rede for at ligningen $x^3 + 3xy + y^3 = -13$ i en omegn af $(1, -2)$ fastlægger y som en C^∞ funktion $y = g(x)$ af x . Bestem $g'(1)$ og $g''(1)$ og opskriv Taylor's grænseformel til 2.orden for g ud fra udviklingspunktet 1.

6. Lad $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2) := (x_1 + 1/x_2, x_1 - 1/x_2).$$

Vis at f er injektiv og find billedmængden. Bestem den omvendte afbildning $g := f^{-1}$. Find funktionalmatricen Dg i punktet $(2, 0)$, dels direkte, dels vha. T.4, sætning 2.

7. Gør rede for at ligningen $e^{x+y} \sin y + x \cos y = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i nærheden af $(0, 0)$ fastlægger y som en C^∞ funktion $y = g(x)$ af x , og find $g'(x)$ udtrykt explicit ved x og $g(x)$. Bestem specielt $g'(0)$.

8. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 &= -4 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 &= -8 \end{aligned}$$

i en omegn af $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$ fastlægger u og v som C^∞ funktioner $u := g_1(x, y)$ og $v := g_2(x, y)$ af x og y , og bestem disse to funktioners første partielle afledede i $(2, -1)$

9. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2 &= 10 \\ xyz &= 6 \end{aligned}$$

i en omegn af $(2, 3, 1)$ fastlægger x og y som C^∞ funktioner af z , og beregn disses afledede i punktet 1.

10. Lad $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$F(x, y) := (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y).$$

- a) Begrund at der for hvert punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ findes en åben omegn U omkring (x_0, y_0) , således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $F(U)$ omkring $F(x_0, y_0)$, og således at den inverse afbildning $G : F(U) \rightarrow U$ til restriktionen af F til U er en C^∞ afbildning.
- b) Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(1,2)$.

11. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^u - u^2 + v - x^2 - y^2 &= 1 \\ u^3 - u + v^2 - xy \sin u &= 1 \end{aligned}$$

i en omegn af $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ fastlægger u og v som C^∞ funktioner $u = g_1(x, y)$ og $v = g_2(x, y)$ af x og y .
Lad $g := (g_1, g_2)^{\text{tr}}$ og beregn funktionalmatricen Dg .

12. Lad $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$F(x, y) := (e^{-2y} + x(1+y), 2e^{xy} - 3y).$$

- a) Begrund at der findes en åben omegn U omkring $(2,0)$, således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $F(U)$ omkring $F(2,0)$, og således at den inverse afbildning $G : F(U) \rightarrow U$ til restriktionen af F til U er en C^∞ afbildning.
- b) Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(2,0)$.

13. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2 - x_3 - 2, x_1^2 - x_2x_3)$

Udfør følgende række af "ordrer":

- fastlæg definitionsområde og afgør om denne er åben.
- fastlæg billedrum
- hvor mange variable muliggør sætn. om impl. fkt. lokalt fastlæggelse af, som funktion af de øvrige?
- konstater at $f(1,1,1) = 0$ (dette 0 er en vektor)
- udregn $(D_{x_i} f)(1,1,1)$ for alle i .
- hvilke variable kan så fastlægges som funktion af de øvrige, i nærheden af det faste punkt?
- Vælg én af de i vi) fundne muligheder, formuler sætningen om implicit funktion præcist for denne situation og regn et udtryk for Dg ud.

14. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (3x_1 - 4x_2^2 + 6x_3 - 5, -x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 2)$.

Gentag proceduren fra opgave 13.

15. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (3x_1 - 4x_2 + 6x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$. Gentag proceduren fra opg. 13 med punktet $(16, 9, -2)$. Sammenlign med det sidste afsnit på s. T.3.15.

16. Lad $f(x, y) := (y^4 + xy)/x$. Gentag proceduren fra opg. 13; brug punktet $(-1, 1)$. Slut af med at opskrive det 1. grads Taylorpolynomium for g , der tilnærmer g i nærheden af $x^0 = -1$.

17. Lad $f(x_1, x_2) := (x_1 x_2, x_2^2 - x_1^2)$. Angiv den naturlige definitions­mængde for f . Gør nøje rede for at sætning T.4.1 kan anvendes på f , angiv de punkter i definitions­mængden, som sætningen udtaler sig om og hvad sætningen siger, incl. angivelse af funktionalmatricen for den lokale inverse. Er f injektiv på sin definitions­mængde? Find, om muligt, den (globale) inverse. Lad til slut $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ være et punkt hvor $Df(\alpha, \beta)$ ikke er regulær (hvis et sådant findes). Kan du sige noget om injektivitet af f på nogen åben omegn af (α, β) ?

Følg opskriften i opg. 17 i de følgende opgaver:

18. $f(x_1, x_2) := (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

19. $f(x_1, x_2) := (\cos(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_2))$

20. $f(x_1, x_2) := (x_1 x_2, x_2^2 + x_1^2)$.

21. Lad $f(x_1, x_2) := (\exp(x_1) \cos x_2, \exp(x_1) \sin x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Gør rede for at billedmængden $f(\mathbb{R}^2)$ er åben. Find den. Vis at funktionalmatricen Df er overalt regulær, men at f ikke er injektiv. Skitser kurverne $f(c, x_2)$ og $f(x_1, c)$, hvor c er fastholdt.

22. For $(x, y) \in \Omega := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ lader vi $f(x, y) := x^2 y - 3xy^2$. Gør rede for at $f(\Omega)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}$.

23. For $(x, y) \in \Omega := (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ lader vi

$$f(x, y) := \exp(xy) - \exp(-xy).$$

Gør ordentligt rede for at $f(\Omega)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}$.

[Pusseløjerlighed om denne opgave: Ved dannelse af Ω er den positive x-akse blevet fjernet fra højre halvplan. Hvis vi føjer den til, får vi som definitions-mængde den højre halvplan i $\mathbb{R}^2$. Derved er billedmængden blevet øget med *et* punkt. Hvilket? Kan du på grundlag af den oplysning gøre rede for at for alle tilstrækkelig små $\varepsilon > 0$ vil både ε og $-\varepsilon$ være i den oprindelige $f(\Omega)$? Måske kunne det indses mere direkte?]

2. LINEÆRE AFBILDNINGER

Lad U og V betegne to vektorrum. I anvendelser indenfor økonomi er det som regel naturligt at betragte reelle vektorrum, dvs. rum over skalarlegemet $\mathbb{R}$; men optimal formulering af en del fundamentale resultater fordrer at skalarlegemet er $\mathbb{C}$. I tilfælde hvor det er uden betydning om de betragtede rum er reelle eller komplekse, vil vi ofte betegne skalarlegemet med $\mathbb{L}$.

Som bekendt siges en afbildning $f: U \rightarrow V$ at være *lineær* hvis der gælder

$$f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y})$$

for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\underline{x}, \underline{y} \in U$.

EKSEMPLER 2.1

a) I vektorrummet $C^1([0,1])$ af kontinuert differentiable funktioner på enhedsintervallet $[0,1]$ (jf. Mat 2MA1) defineres en afbildning $D: C^1([0,1]) \rightarrow C^0([0,1])$ (de kontinuerte funktioner på $[0,1]$) ved $Df := f'$ (= den afledede af f). Afbildningen D er lineær.

b) I vektorrummet $C^2(\mathbb{R})$ af kontinuert differentiable funktioner på $\mathbb{R}$ defineres en afbildning $D: C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ (de kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$) ved $Df := a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f$, hvor a_2, a_1, a_0 er givne konstanter. Denne afbildning er lineær.

c) Lad $\alpha := \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n\}$ betegne et sæt af n vektorer i vektorrummet V . Definer

$$\phi_\alpha: \mathbb{C}^n \rightarrow V$$

ved

$$\phi_\alpha(c_1, \dots, c_n) := c_1 \underline{x}_1 + c_2 \underline{x}_2 + \dots + c_n \underline{x}_n.$$

Så er ϕ_α lineær.

d) Lad A betegne en $m \times n$ matrix, gerne med komplekse indgange. Definer en afbildning $\Omega_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ved

$$\Omega_A(\underline{x}) := A\underline{x},$$

matrixproduktet af matrixen A med (søjle)vektoren $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$. Denne afbildning er ikke blot beskrevet som en regneforskrift; der er en geometrisk beskrivelse af afbildningen, jf. næste eksempel.

e) Betragt matrixen $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Udstyrer vi $\mathbb{C}^3$ med standardbasen

$\{e_1, e_2, e_3\}$, definerer A en lineær afbildning $\Omega_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, fuldstændigt beskrevet ved lineariteten samt oplysningerne i A om at $\Omega_A(e_1) = 2e_1$, $\Omega_A(e_2) = e_1 + e_2$ og $\Omega_A(e_3) = e_2$.

Generelt: Lad U være et n dimensionalt vektorrum. Vælg en basis α for U . Lad V være et m dimensionalt vektorrum. Vælg en basis γ for V . Hvis A er en given $m \times n$ matrix, definerer A en afbildning f fra U ind i V , som forklaret i Mat 1LA: betegnelsen dér er ${}_{\gamma}[f]_{\alpha}$. Afbildningen f er, foruden ved linearitet, beskrevet ved at billedet af den j .te vektor i basen α står som j .te søjle i matricen A , og søjlens indgange udtrykker denne søjlevektor som en linearkombination af vektorerne i basen γ . Således kan enhver matrix fortolkes som en lineær afbildning, når en basis foreligger i definitionsrummet og en basis foreligger i billedrummet.

Omvendt kan vi, hvis vi har givet endelig-dimensionale vektorrum U (med en valgt basis α), V (med en valgt basis γ) og en lineær afbildning $f : U \rightarrow V$, angive f på matrixform: Hvis $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, skal den j .te søjle i matrixrepræsentationen være $f(\alpha_j)$, opskrevet mht. basen γ . Notationen i Mat 1LA noterne er, som allerede nævnt, ${}_{\gamma}[f]_{\alpha}$.

EKSEMPEL 2.2 ET MARKED

I et bestemt marked opererer n agenter. Vi tænker på disse agenter som konkurrerende producenter af et og samme produkt (geder, f.eks, højhøj). Vi opstiller en model for dette marked, som kvantitativt kan beskrive dets tidsudvikling, ved at angive hver agents markedsandel (hvilket her vil sige 'andel af den samlede kundekreds'), som funktion af tiden.

Vore antagelser er at det samlede kundeantal N er konstant og at en *fast* procentdel af kunderne skifter leverandør i løbet af hver tidsenhed (måned, f.eks.). Til tidspunktet t (hvor $t = 0, 1, \dots$) har de n producenter $1, 2, \dots, n$ en markedsandel på hhv. $x_1(t), \dots, x_n(t)$; ved modellens "start", altså til tiden 0 , har de n producenter $1, 2, \dots, n$ således en markedsandel på hhv. $x_1(0), \dots, x_n(0)$. Da vi taler om andele gælder åbenbart at

$$x_1(0) + \dots + x_n(0) = 1.$$

Hvis agent nr. j afgiver brøkdelen a_{ij} af sine kunder til agent nr. i ($i, j = 1, 2, \dots, n$) (og altså selv beholder brøkdelen a_{jj}) i løbet af forløbet af én tidsenhed, gælder der åbenbart at

$$a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} = 1 \text{ for } j = 1, 2, \dots, n.$$

Efter én tidsenheds forløb vil der om første agents kundeantal Nx_1 gælde at

$$Nx_1(1) = a_{11}Nx_1(0) + a_{12}Nx_2(0) + \dots + a_{1n}Nx_n(0),$$

altså

$$x_1(1) = a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) + \dots + a_{1n}x_n(0),$$

og tilsvarende for $x_2(1), \dots, x_n(1)$. Definerer vi *overgangsmatricen*

$$A := [a_{ij}],$$

får vi altså at søjlevektoren $(x_1(1), x_2(1), \dots, x_n(1))'$ (' betegner transponering) opfylder

$$(x_1(1), x_2(1), \dots, x_n(1))' = A (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))'.$$

Tilsvarende vil det være i løbet af enhver senere tidsenhed, fordi overgangsmatricen A er konstant: lader vi $\underline{x}_i := (x_1(i), x_2(i), \dots, x_n(i))'$ betegne *markedsandelsvektoren* til tiden i , har vi altså

$$\underline{x}_{i+1} = A \underline{x}_i, \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots$$

eller

$$\underline{x}_i = A^i \underline{x}_0, \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots$$

Ønsker man at få overblik over hvordan dette marked vil udvikle sig i tiden, og specielt at undersøge om markedet skulle nærme sig en stabil tilstand (en grænsetilstand, en ligevægtstilstand), skal man altså undersøge A^i for voksende værdier af heltallet i . Specielt vil det være af interesse at undersøge om $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ eksisterer, og i bekræftende fald hvad denne grænseværdi måtte være. Der er her tale om en Markov-kæde; vi skal senere forfølge dette begreb.

En helt speciel ligevægtstilstand vil være til stede, hvis markedsfordelingen har fundet en *konstant* værdi, altså hvis der gælder at $\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i$, eller ækvivalent hermed $\underline{x}_i = A \underline{x}_i$. Sidstnævnte ligning udtrykker at $\underline{x}_i$ er en egenvektor for afbildningen A svarende til egenværdien 1. Vi skal snart se mere herom.

(Bemærk at ovenstående kan fortolkes som udsagn om en lineær afbildning, givet ved overgangsmatricen A , virkende i det n -dimensionale 'tilstands'rum $\mathbb{R}^n$; denne fortolkning er dog ikke helt relevant, fordi kun stokastiske vektorer i $\mathbb{R}^n$ (dvs vektorer med ikke-negative koordinater, hvis sum er 1) er af interesse for modellen.)

EKSEMPEL 2.3 Her er en konkret version af ovenstående. Lad $n = 3$ og

lad markedsandelene til begyndelsestiden 0 være $x_0 := (0.2, 0.3, 0.5)'$. Lad overgangsmatricen A være givet som

$$A := \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Udregning viser (kontrollér! - f.eks. med Matlab) at $x_1 = (0.27, 0.38, 0.35)'$, at $x_2 = (0.327, 0.398, 0.201)'$, at $x_8 = (0.442, 0.357, 0.201)'$ samt at $x_{16} = (0.450, 0.350, 0.200)'$. Videre brug af Matlab vil hurtigt antyde hvad der sker med x_n når n vokser.

BASISSKIFT OG MATRIXREPRÆSENTATIONER.

Man kan finde beskrivelsen af basisskift i Mat 1LANoterne. Vi rekapitulerer. Lad

$$\alpha_1 := \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\} \quad \text{og} \quad \alpha_2 := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$$

være to baser for et givet n dimensionalt vektorrum V . Lad $\underline{x} \in V$. Udtryk $\underline{x}$ ved hjælp af de to baser:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= b_1 \underline{u}_1 + b_2 \underline{u}_2 + \dots + b_n \underline{u}_n, \\ \underline{x} &= c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n. \end{aligned} \quad (\#)$$

Vi skriver ${}_{\alpha_1} \underline{\underline{x}} = (b_1, \dots, b_n)'$, hhv. ${}_{\alpha_2} \underline{\underline{x}} = (c_1, \dots, c_n)'$ for repræsentationen af $\underline{x}$ i hver af de to baser.

Da α_1 er en basis, kan hver af vektorerne $\underline{v}_j$ fra basen α_2 skrives som en linearkombination af elementerne $\{\underline{u}_i\}$ i α_1 . Der findes altså entydig bestemte tal $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ for hvilke ${}_{\alpha_1} \underline{\underline{v}}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})'$. Ligningerne (#) kan derfor også udtrykkes som

$${}_{\alpha_1} \underline{\underline{x}} = c_1 {}_{\alpha_1} \underline{\underline{v}}_1 + c_2 {}_{\alpha_1} \underline{\underline{v}}_2 + \dots + c_n {}_{\alpha_1} \underline{\underline{v}}_n.$$

Hvis ${}_{\alpha_1} \underline{\underline{x}}$ (altså b 'erne) forudsættes kendte, mens ${}_{\alpha_2} \underline{\underline{x}}$ (altså c 'erne) skal findes, og hvis vi derfor opstiller denne lignings koeficientmatrix, altså således at søjlerne er vektorerne i basen α_2 , udtrykt i basen α_1 , så har vi den matrix der i Mat 1LA betegnes ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}$ og kaldes *basisskiftmatricen*. Ovenstående system bliver

$${}_{\alpha_1} \underline{\underline{x}} = {}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2} {}_{\alpha_2} \underline{\underline{x}}.$$

Da søjlerne i ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}$ er de lineært uafhængige vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ er ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}$ invertibel. Matricen ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}^{-1}$ er den matrix der i Mat

1LA hedder *koordinatskiftmatricen* og betegnes ${}_{\alpha_2} \square_{\alpha_1}$. Vi samler disse bemærkninger i en sætning.

SÆTNING 2.4 Lad α_1 og α_2 være baser for det n -dimensionale vektorrum V . Lad $\underline{x} \in V$ og antag at ${}_{\alpha_1} \square \underline{x}$ er koordinaterne til $\underline{x}$ udtrykt i basen α_1 , mens ${}_{\alpha_2} \square \underline{x}$ er koordinaterne til $\underline{x}$ udtrykt i basen α_2 .

Lad ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}$ være matricen hvis j .te søjle er koordinaterne til α_2 -basisvektoren $\underline{v}_j$ udtrykt i basen α_1 . Så er ${}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}$ invertibel og

$${}_{\alpha_2} \square \underline{x} = {}_{\alpha_1} \square_{\alpha_2}^{-1} {}_{\alpha_1} \square \underline{x};$$

ækvivalent,

$${}_{\alpha_2} \square \underline{x} = {}_{\alpha_2} \square_{\alpha_1} {}_{\alpha_1} \square \underline{x}.$$

Hvis U og V er endelig dimensionale vektorrum, mens $f: U \rightarrow V$ er en lineær afbildning, så kan f repræsenteres ved en matrix, når vi har fået opgivet en basis for U og en basis for V . Hvad sker der med denne matrixrepræsentation, hvis vi foretager basisskift i U og/eller V ?

Teknikken ovenfor kan give os svaret. Lad os sige at α_1 og α_2 er baser i U og at β_1 og β_2 er baser i V . Bruger vi α_1 og β_1 i repræsentationen af f , får vi matricen ${}_{\beta_1} [f]_{\alpha_1}$: i den j .te søjle står

billedet under f af den j .te basisvektor i α_1 , og dette billede er udtrykt i basen β_1 . Hver af disse søjlevektorer ønsker vi nu udtrykt i basen β_2 . Af sætning 2.4 har vi at dette gøres ved at anvende koordinatskiftmatricen ${}_{\beta_2} \square_{\beta_1}$ på dem, altså får vi for hele matrixens ved-

kommende:

$${}_{\beta_2} [f]_{\alpha_1} = {}_{\beta_2} \square_{\beta_1} {}_{\beta_1} [f]_{\alpha_1}.$$

Læg mærke til at vi endnu ikke har ændret ved basen i U . Det gør vi nu.

I ${}_{\beta_2} [f]_{\alpha_2}$ er den j .te søjlevektor f^S billede af basisvektor nr. j fra α_2 , udtrykt i β_2 . Hvis basisvektor nr. j i α_2 kaldes a_j er betegnelsen fra Mat 1LA ${}_{\beta_2} \square f(a_j)$. Af det allerede opskrevne har vi at

$${}_{\beta_2} \square f(a_j) = {}_{\beta_2} \square_{\beta_1} {}_{\beta_1} \square f(a_j).$$

Hvis vi for f bruger matrixrepræsentationen ${}_{\beta_1} [f]_{\alpha_1}$ og udtrykker a_j i basen α_1 , altså benytter ${}_{\alpha_1} \square a_j$, er

$$\beta_1 [f(a_j)] = \beta_1 [f]_{\alpha_1} \alpha_1 [a_j].$$

Men $\alpha_1 [a_j]$ er jo den j .te søjle i basisskiftmatricen $\alpha_1 \square \alpha_2$, så samler vi til slut alle disse søjlevektorer til matricer får vi på venstre side $\beta_2 [f]_{\alpha_2}$ og på højre side $\beta_2 \square \beta_1 \beta_1 [f]_{\alpha_1} \alpha_1 \square \alpha_2$. Dermed har vi bevist

KOORDINATSKIFTFORMLEN 2.5 Antag at α_1 og α_2 er baser for det endelige dimensionale vektorrum U , og at β_1 og β_2 er baser for det endelige dimensionale vektorrum V . Betragt en vilkårlig lineær afbildning

$$f : U \rightarrow V.$$

Så gælder for matrixrepræsentationerne for f at

$$\beta_2 [f]_{\alpha_2} = \beta_2 \square \beta_1 \beta_1 [f]_{\alpha_1} \alpha_1 \square \alpha_2.$$

SPECIALTILFÆLDE 2.6 Antag at $f : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning af vektorrummet U ind i sig selv. I en given basis α er afbildningens matrixrepræsentation ${}_{\alpha} [f]_{\alpha}$. Skift basis i U , til f.eks. β . I denne basis ser afbildningen f således ud: ${}_{\beta} [f]_{\beta}$. Og overgangen mellem de to repræsentationer fås direkte af koordinatskiftformlen:

$${}_{\beta} [f]_{\beta} = \beta \square {}_{\alpha} [f]_{\alpha} \alpha \square \beta = \beta \square {}_{\alpha} [f]_{\alpha} \beta \square \alpha^{-1}.$$

De to matrixrepræsentationer for afbildningen f er altså forbundet med hinanden via en invertibel afbildning og dens inverse. Sprogbrugen her formulerer vi i følgende definition:

DEFINITION 2.7 Hvis A og B er $n \times n$ matricer for hvilke der findes en invertibel matrix Q , så $A = Q B Q^{-1}$, siges A og B at være *similære*.

Selve koordinatskiftformlen er selvfølgelig det væsentlige. Men vi skal også hæfte os ved - og dyrke i udstrakt grad - det princip, den er en præcis formulering af: en lineær afbildnings matrixrepræsentation kan ændres ved basisskift. Som vi nu skal se, kan denne observation udnyttes på adskillige måder; nogle af disse, men ikke alle, har du truffet før.

EGENVÆRDIER, EGENVEKTORER

Lad U være et vilkårligt endelig dimensionalt vektorrum, og betragt en lineær afbildning $f : U \rightarrow U$. Lad $V \subseteq U$ være et underrum, altså en delmængde af U , der selv er et vektorrum. Hvis V har den egenskab at $f(V) \subseteq V$, siges V at være f -invariant, eller blot *invariant*, hvis afbildningen f er underforstået.

EKSEMPLER Nulrummet $\{0\} \subseteq U$ er trivielt f -invariant; det er U selv selvfølgelig også.

Hvis $\ker f := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, så er $\ker f$ et f -invariant under- rum (vis det - husk der er to ting at vise!).

Hvis $\operatorname{rg} f := f(U) = \{x \in U \mid \exists y \in U \text{ så } f(y) = x\}$, så er $\operatorname{rg} f$ et f -invariant underrum (vis også det!).

Blandt de f -invariante underrum finder man de såkaldte egenrum. Vi definerer:

Hvis $\lambda \in \mathbb{C}$ er et tal med den egenskab at der findes et element $x \in U \setminus \{0\}$ for hvilket $f(x) = \lambda x$, siges λ at være en *egenværdi*, og x at være en til egenværdien λ hørende *egenvektor*. Bemærk at egenvektorer skal være forskellige fra nul-vektoren. Mængden af egenværdier for en given afbildning f kaldes *spektret* for f og betegnes her $\sigma(f)$. Definitionen er altså

$$\sigma(f) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } f \}.$$

Hvis I betegner den identiske afbildning på U , altså

$$I(x) := x, \text{ for alle } x \in U,$$

kan relationen $f(x) = \lambda x$ også skrives $(f - \lambda I)x = 0$. Heraf følger at λ er en egenværdi for f præcis når afbildningen $f - \lambda I$ ikke er injektiv, altså præcis når $\ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$. Vi kan således skrive

$$\sigma(f) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(f - \lambda I) \neq \{0\} \}.$$

Det er mængden $\ker(f - \lambda I)$ der kaldes *egenrummet* hørende til egen- værdien λ (når $\ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$). Bemærk at glosen "-rum" er ret- færdiggjort af ovenstående eksempel.

Bemærk det allerede antydede: Et egenrum for f er f -invariant (lav argumentet!).

Indskrænket til et egenrum opfører f sig meget skikkelig, idet den jo simpelthen er et multiplum af identitetsafbildningen.

EKSEMPEL 2.8 I det tre-dimensionale euklidiske rum $\mathbb{R}^3$ betragtes en

plan V gennem begyndelsespunktet $\underline{0}$. Antag at V har normalvektoren $\underline{n}$. Hvis f er defineret som den vinkelrette projektion af $\mathbb{R}^3$ på V , så er $f(\underline{n}) = \underline{0}$. Det er klart at $\ker f = \mathbb{R}\underline{n} := \{ \lambda \underline{n} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Hermed har vi konstateret at 0 er en egen værdi, og vi har identificeret det tilhørende egenrum. Endvidere er $f(\underline{x}) = \underline{x}$ for enhver vektor $\underline{x} \in V$. Så 1 er også en egen værdi for f .

Vi ved allerede fra tidligere hvordan det afgøres hvilke egen værdier en foreliggende afbildning har; det kræver lidt genbrug af ting fra Mat 1LA kombineret med ovenstående.

DEFINITION Lad $f : U \rightarrow U$ være lineær. Vælg en basis α for U og betragt den dertil hørende matrixrepræsentation ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$. Ved *det karakteristiske polynomium* $p_f(\lambda)$ forstås determinanten $\det({}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha})$.

At $p_f(\lambda)$ er et polynomium ved vi fra Mat 1LA 21. Men der er en skønhedsplet ved definitionen: den afhænger af valget af basis α . Og dog:

LEMMA 2.9 Hvis α og β er baser for vektorrummet U , så er

$$\det({}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha}) = \det({}_{\beta}[f - \lambda I]_{\beta}),$$

altså er p_f uafhængigt af valget af basis for U .

BEVIS: Af korollaret til koordinatskiftformlen følger at ${}_{\beta}[f - \lambda I]_{\beta} = {}_{\beta} \square_{\alpha} {}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha} {}_{\alpha} \square_{\beta}^{-1}$ og derfor at

$$\det({}_{\beta}[f - \lambda I]_{\beta}) = \det({}_{\beta} \square_{\alpha} {}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha} {}_{\alpha} \square_{\beta}^{-1}) =$$

$$\det({}_{\beta} \square_{\alpha}) \det({}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha}) \det({}_{\alpha} \square_{\beta}^{-1}) = \det({}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha}),$$

ifl. en kendt formel for determinanten af et produkt.

SÆTNING 2.10 Hvis $f : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning med karakteristisk polynomium p_f så er $\lambda \in \mathbb{C}$ en egen værdi for f hvis og kun hvis $p_f(\lambda) = 0$.

BEVIS: Et tal $\lambda \in \mathbb{C}$ er en egen værdi for afbildningen $f : U \rightarrow U$ hvis og kun hvis $f - \lambda I$ ikke er injektiv, dvs. hvis og kun hvis ${}_{\alpha}[f - \lambda I]_{\alpha}$ ikke er injektiv (Mat 1LA 30.4 (4)). Og det er tilfældet hvis og kun

hvis $\det_{\alpha} [f - \lambda I]_{\alpha} = 0$ (Mat 1LA 19.2 (4) sammen med 12.3 (2), Invertibilitetssætningen), altså hvis og kun hvis λ er en rod i p_f .

KOROLLAR En lineær afbildning af et komplekst vektorrum ind i sig selv har altid en egenværdi. Dette er ikke sandt for reelle vektorrum.

BEVIS: Ifølge algebraens fundamentalsætning har ethvert komplekst polynomium en (kompleks) rod. Det beviser første påstand. Anden påstand er en opgave.

Et meget nyttigt tilfælde hvor en lineær afbildning har reelle egenverdier er beskrevet i en af 1LAs hovedsætninger for reelle matricer. Vi minder om at en $n \times n$ matrix $A := [a_{ij}]$ er *symmetrisk* hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle $i, j = 1, \dots, n$. Der gælder da følgende (jf. 1LA, afsnit 25).

SÆTNING 2.11 Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af det reelle n -dimensionale vektorrum V ind i sig selv. Hvis der findes en basis α for V for hvilken ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ er symmetrisk, så er alle egenverdierne for f reelle.

Hvis λ er egenværdi for f , så kaldes multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium den *algebraiske* multiplicitet af λ . Sprogbrugen i 1LA er 'rodmultiplicitet'. Dimensionen af egenrummet $\ker(f - \lambda I)$ kaldes den *geometriske* multiplicitet; i 1LA 'egenverdímultiplicitet'. Specielt siger vi at hvis λ har algebraisk multiplicitet 1, er λ en *simpel* egenværdi. Om egenværdiers multiplicitet gælder følgende

SÆTNING 2.12 Lad λ være en egenværdi for f . Så er den geometriske multiplicitet mindre end eller lig med den algebraiske multiplicitet. Specielt er egenrummet for en simpel egenværdi 1-dimensionalt.

BEVIS: Lad λ være en egenværdi for f og betragt egenrummet $\ker(f - \lambda I)$. Lad os sige at egenrummet $\ker(f - \lambda I)$ har dimension q . Vælg en basis α for U ved at udvide en basis for $\ker(f - \lambda I)$ til en basis for hele U . Så har ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ følgende udseende, som blokmatrix:

$$\begin{bmatrix} \lambda I & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

og derfor er

$$p_f(z) = (\lambda - z)^q \det(C - zI)$$

Det viser at λ er en rod i p_f som *mindst* har multiplicitet q ; thi λ kan jo evt. være rod i polynomiet $\det(C - zI)$. Heraf følger sætningens generelle påstand. Hvis specielt λ er en simpel rod i det karakteristiske polynomium, må egenrummet $\ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$ være 1-dimensionalt.

Det omvendte af Sætning 2.12 gælder ikke: Lad $\{e_1, e_2\}$ være en basis for $\mathbb{C}^2$. Definer $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ved linearitet og forskriften $fe_1 = 0$, $fe_2 = e_1$. Det er let at se at f har én egen værdi, nemlig 0, at $\ker f$ er 1 dimensional, men at 0 er dobbeltrod i det karakteristiske polynomium. Denne afbildning er iøvrigt et eksempel på den type såkaldt nilpotente afbildninger, der dukker op i forbindelse med Jordan's normalform.

Vi minder om (Mat 1LA) at hvis U er et endelig dimensionalt vektorrum og V , W er underrum af U , defineres *summen* af V og W som

$$V + W := \{v + w \mid v \in V, w \in W\}.$$

Derved dannes et underrum af U (ikke?), og man siger at V og W danner *direkte sum* når $V \cap W = \{0\}$. I så fald bruges for $V + W$ betegnelsen $V \oplus W$. Disse begreber udvides uden stort besvær til summer og direkte summer af flere underrum. Hvis $V_1, V_2, \dots, V_p$ er underrum af U og vi betragter underrummet V udspændt af V_i 'erne, altså

$$V := V_1 + \dots + V_p,$$

da er vektorsummen direkte, altså

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$$

hvis og kun hvis nulvektoren $0 \in V$ kun kan skrives som en triviel linearkombination af vektorer fra V_i , altså hvis og kun hvis den lineære relation $0 = v_1 + v_2 + \dots + v_p$ (hvor vektorerne $v_i \in V_i$) kun er opfyldt af vektorerne $v_i = 0$.

Specielt har vi (Mat 1LA) at hvis $V_1, V_2, \dots, V_p$ er underrum af U og der gælder at $U = V_1 + \dots + V_p$, så er

$$U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$$

hvis og kun hvis $\dim U = \sum_{j=1, \dots, p} \dim V_j$.

For egenrum har vi følgende sætning.

SÆTNING 2.13 Hvis $f : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning med de indbyrdes forskellige egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ så danner egenrummene $\ker(f - \lambda_i I)$ direkte sum.

BEVIS: Dette godtgøres med et induktionsbevis (jf. 1LA). Antag først at der foreligger to forskellige egenverdier, altså at $p = 2$. Hvis

$$x \in \ker(f - \lambda_1 I) \cap \ker(f - \lambda_2 I),$$

er $f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$, så $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, må x være nulvektoren.

Antag så udsagnets sandhed for $p = n$ og betragt tilfældet $p = n + 1$.

Ikke alle λ erne kan være lig nul (de er jo indbyrdes forskellige), så vi

kan antage at $\lambda_1 \neq 0$. Hvis $x_i \in \ker(f - \lambda_i I)$ og

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0,$$

så er, da f er lineær,

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) = 0,$$

altså er, da $f(x_i) = \lambda_i x_i$,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0.$$

Af $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0$ får vi

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2 + \dots + \lambda_1 x_{n+1} = 0.$$

Trækker vi denne ligning fra den lige ovenover får vi

$$(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + (\lambda_{n+1} - \lambda_1)x_{n+1} = 0.$$

Her er antallet af led faldet fra $n+1$ til n , så af induktionsantagelsen slutter vi at alle leddene $(\lambda_i - \lambda_1)x_i$ er nul, altså at $x_i = 0$ for

$i = 2, \dots, n+1$ (skalaren i parentes er jo ikke nul). Men så er også

$\lambda_1 x_1 = 0$, og da $\lambda_1 \neq 0$, er $x_1 = 0$.

KOROLLAR Hvis x_i er en egenvektor svarende til egenværdien λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$ og λ_i erne er indbyrdes forskellige, så er $x_1, \dots, x_p$ lineært uafhængige.

BEVIS: Kontroller at korollarets bevis er indeholdt i ovenstående bevis.

KOROLLAR En lineær afbildning $f : U \rightarrow U$ af det n dimensionale vektorrum U har højst n forskellige egenverdier.

BEVIS: Øvelse!

KOROLLAR Hvis U er n dimensionalt og $f : U \rightarrow U$ har n forskellige egenverdier, så har U en basis bestående af egenvektorer for f , og hvert af egenrummene for f er 1-dimensionalt.

BEVIS: Vælg en egenvektor hørende til hver af de n egenverdier. Sættet af disse vektorer er da lineært uafhængigt, og da der netop er n vektorer, følger påstanden.

EKSEMPEL 2.14 Vend tilbage til eksempel 2.1.e), hvor $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Det er nemt at se at egenverdierne er 0, 1 og 2. Altså udspændes $\mathbb{C}^3$ af egenvektorer for Ω_A .

DIAGONALISERING

DEFINITION En lineær afbildning $f : U \rightarrow U$, hvor U er n dimensionalt, er *diagonaliserbar* hvis og kun hvis f har n lineært uafhængige egenvektorer.

EKSEMPEL 2.15 Spejling i en plan i $\mathbb{R}^3$ er en diagonaliserbar afbildning. Beviset herfor er en opgave.

Husk fra Mat 1LA at en *diagonalmatrix* er en kvadratisk matrix hvori der kun forekommer indgange forskellig fra 0 i diagonalen.

SÆTNING 2.16 En lineær afbildning $f : U \rightarrow U$ er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis α for U , i hvilken matrixrepræsentationen ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ er en diagonalmatrix.

BEVIS. Lad os sige at $\dim U = n$. Hvis f er diagonaliserbar, har f da n lineært uafhængige egenvektorer $\alpha := \{x_1, \dots, x_n\}$. Sættet α er en basis for U . Lad de tilsvarende egenværdier hedde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (som ikke behøver være forskellige, blot nummereret svarende til x_i erne). I ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ er den j .te søjle $f(x_j)$, altså $\lambda_j x_j$, udtrykt i basen α ; altså får ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ netop et λ_j i diagonalen, og 0'er ellers.

Hvis omvendt f har en matrixrepræsentation ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$, som er en diagonalmatrix, er hver af basisvektorerne egenvektor for f (ikke?). Altså er f diagonaliserbar.

EKSEMPEL 2.17 a) Hvis f har n forskellige egenværdier, da er f diagonaliserbar.

b) Enhver symmetrisk $n \times n$ matrix definerer en diagonaliserbar afbildning på det reelle rum $\mathbb{R}^n$.

FØLJETONEKSEMPEL (2.18). I det konkrete føljetoneksempel, Eksempel 2.2, ses at den der givne overgangsmatrix er diagonaliserbar.

Vi minder om følgende hovedresultat fra Mat 1LA. Husk at en $n \times n$ reel matrix Q siges at være *ortogonal* hvis dens søjler udgør et sæt af ortonormale vektorer i $\mathbb{R}^n$ (altså enhedsvektorer der er indbyrdes

vinkelrette mht. det sædvanlige indre produkt). En reel matrix A siges at være ortogonalt diagonaliserbar hvis der findes en ortogonal matrix Q for hvilken $Q A Q^{-1}$ er diagonal. Dette er ensbetydende med at der, hvis A opfattes som en afbildning f af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}^n$ findes en basis q af ortogonale vektorer mht. hvilken matrixrepræsentationen ${}_q[f]_q$ er diagonal. Der gælder da følgende

SÆTNING OM SYMMETRISKE REELLE MATRICER 2.19 En reel matrix A er ortogonalt diagonaliserbar hvis og kun hvis A er symmetrisk.

Denne sætning kan bl.a. bruges til at give nyttige måder at karakterisere semidefinitte matricer på.

DEFINITION 2.20 Lad A betegne en reel symmetrisk $n \times n$ matrix. Så siges A at være *positiv definit* hvis

$$x' A x > 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Matricen A siges at være *positiv semidefinit* hvis

$$x' A x \geq 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Matricen A siges at være *negativ (semi)definit* hvis $-A$ er positiv (semi)definit.

SÆTNING 2.21 En reel symmetrisk matrix A er positiv definit hvis og kun hvis alle dens egensværdier er > 0 , og positiv semidefinit hvis og kun hvis dens egensværdier alle er ≥ 0 .

BEVIS: Da A forudsættes reel og symmetrisk, er A ortogonalt diagonaliserbar, dvs. der findes en ortogonalmatrix Q for hvilken $Q A Q^{-1}$ er en diagonalmatrix D . Da Q er en ortogonalmatrix, gælder at dens inverse er lig dens transponerede (ILA, 24), altså har vi at $D = Q A Q'$ og derfor også at $A = Q' D Q$. Men så er den kvadratiske form $x' A x$ nem at beskrive. I diagonalen i D står jo egensværdierne for A . Kald dem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (de er ikke nødvendigvis forskellige, men de er allesammen reelle). Lader vi $Qx := (y_1, \dots, y_n)'$ får vi

$$y' A y = y' Q' D Q y = (Qy)' D (Qy) = \sum_{i=1}^n y_i \lambda_i y_i.$$

Da koordinaterne $y_i^2 \geq 0$, og iøvrigt kan vælges frit, følger sætningen.

SPEKTRUM, SPEKTRALRADIUS.

Som vi skal se senere, får man ved stabilitetsundersøgelser for differens- og differentiaalligninger bl.a. brug for at finde kriterier for at en matrix A opfylder at $A^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. I dette afsnit indleder vi jagten på sådanne kriterier ved først at sætte os i stand til at give selve den nævnte konvergens mening. Det fordrer at vi betragter normerede vektorrum og tilsvarende betragter normer på rum af lineære afbildninger.

Fra Mat 2MA1 minder vi om at vektorrummet $\mathcal{L}(U)$ af begrænsede lineære afbildninger på det normerede vektorrum U kan udstyres med en norm $\|A\|$, defineret ved

$$\|A\| := \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1, x \in U \}.$$

Denne norm vil vi her kalde *operatornormen*. Det er specielt to elementære egenskaber ved denne norm der skal bruges. Vi trækker dem frem her, så vi senere kan referere til dem:

2.a) for enhver vektor $x \in U$ og enhver operator $A \in \mathcal{L}(U)$ gælder at $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

2.b) for alle operatorer $A, B \in \mathcal{L}(U)$ gælder at $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

LEMMA 2.22 Hvis en norm på $\mathcal{L}(U)$ opfylder 2.b), så er $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ for alle $A \in \mathcal{L}(U)$ og alle $n \in \mathbb{N}$.

BEVIS: Let induktionsøvelse.

LEMMA 2.23 Operatornormen på $\mathcal{L}(U)$ opfylder 2.a) og 2.b)

BEVIS: 2.a) Hvis $A = 0$ eller $x = 0$ er uligheden trivielt opfyldt.

Hvis $x \neq 0$, giver definitionen af operatornormen at $\|A(x/\|x\|)\| \leq \|A\|$, hvoraf 2.a) følger umiddelbart.

2.b) Beviset er en let øvelse, der indebærer to anvendelser af 2.a).

Som vi snart skal se er der andre mulige normer på $\mathcal{L}(U)$ end netop operatornormen. Vi skal derfor i de næstfølgende resultater kun forudsætte det for bevisgangen absolut nødvendige.

Et naturligt konvergensbegreb for kontinuerte lineære afbildninger er konvergens i det normerede vektorrum $\mathcal{L}(U)$: En følge $\{A_n\}$ i $\mathcal{L}(U)$ er konvergent mod $A \in \mathcal{L}(U)$ hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$. Skrivemåden er

ofte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{eller} \quad A_n \rightarrow A \quad \text{for} \quad n \rightarrow \infty,$$

hvis det er klart hvilken norm der bruges.

Man kan også betragte *punktvise* konvergens. Dette begreb dækker over kravet at for ethvert $x \in U$ skal gælde at $A_n x \rightarrow Ax$ for $n \rightarrow \infty$. Denne konvergens finder for hvert $x \in U$ sted i vektorrummet U i den norm U er udstyret med. Hvis vi til at begynde med forudsætter at $\mathcal{L}(U)$ er udstyret med en norm $\|\cdot\|$, der opfylder betingelse 2.a) (det kan f.eks. være operatornormen), vil, da $\|A_n - A\| \|x\| \geq \|(A_n - A)x\|$ for enhver vektor x , konvergens $A_n \rightarrow A$ tydeligvis medføre at $A_n x \rightarrow Ax$ for enhver vektor $x \in U$.

I vort første resultat noterer vi at når U er endelig dimensionalt, gælder den omvendte påstand også, uanset hvordan U og $\mathcal{L}(U)$ er normeret. Dette faktum er baseret på en meget væsentlig egenskab ved endelig dimensionale vektorrum, nemlig følgende, kendt fra 2MA1, afsnit 6.3:

Hvis det endelig dimensionale vektorrum U er udstyret med normerne $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$, så er disse normer ækvivalente, dvs. der findes konstanter C_1 og C_2 for hvilke

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \quad \text{for alle } x \in U$$

Bemærk at dette betyder at konvergensbegreberne i de to normer bliver ens: en følge $\{x_n\}$ vil konvergere mod et punkt x mht normen $\|\cdot\|_1$ hvis og kun hvis følgen $\{x_n\}$ konvergerer mod x mht normen $\|\cdot\|_2$. Dette følger ved anvendelse af begge ulighederne ovenfor (lav argumentet!)

Hvis U er et endelig dimensionalt vektorrum, så er $\mathcal{L}(U)$ jo også endelig dimensionalt, og udsagnet om ækvivalens af vilkårlige normer gælder derfor også for $\mathcal{L}(U)$ i dette tilfælde. Men det samspil mellem en norm på U og en norm på $\mathcal{L}(U)$, som 2.a) og 2.b) specificerer, er ikke automatisk opfyldt (medmindre vi tillader forekomsten af en konstant faktor i ulighederne, hvilket vi ikke vil dvæle ved lige nu).

SÆTNING 2.24 Lad U være et endelig dimensionalt normeret vektorrum U og forudsæt at $\mathcal{L}(U)$ er udstyret med en norm $\|\cdot\|$. For vilkårlige operatorer $A, A_n \in \mathcal{L}(U)$ gælder da at $A_n \rightarrow A$ i normen på $\mathcal{L}(U)$ hvis og kun hvis $A_n x \rightarrow Ax$ i normen på U , for enhver vektor $x \in U$.

BEVIS: Vi har allerede konstateret at når $\|\cdot\|$ opfylder 2.a) vil $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ medføre at $A_n x \rightarrow Ax$ i normen på U . Men da den givne norm $\|\cdot\|$ er ækvivalent med operatornormen på $\mathcal{L}(U)$ (endelig dimensionaliteten!), vil $\{A_n\}$ jo også konvergere mod A i operatornorm, hvis $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, og heraf følger at $A_n x \rightarrow Ax$ i normen på U , for enhver vektor $x \in U$, også uden at vi forudsætter at $\|\cdot\|$ opfylder 2.a).

For at bevise den anden implikation lader vi $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ betegne en basis for U og definerer en 'ny' norm på $\mathcal{L}(U)$: For en vilkårlig lineær afbildning B af U ind i U sættes

$$|B| := \max \{ \|Bu_1\|, \dots, \|Bu_p\| \}.$$

Det er let at se at vi derved har defineret en norm på $\mathcal{L}(U)$ (check det efter!). Da $\mathcal{L}(U)$ er endelig dimensionalt, er denne norm ækvivalent med den givne $\|\cdot\|$. Specielt findes der en konstant C for hvilken $\|B\| \leq C|B|$ for alle $B \in \mathcal{L}(U)$.

Hvis vi forudsætter at $A_n x \rightarrow Ax$ for alle $x \in U$, så medfører det jo bl.a. at $\|A_n u_j - Au_j\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, for hvert $j = 1, 2, \dots, p$. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi vælge $N \in \mathbb{N}$ så $\|A_n u_j - Au_j\| < \varepsilon/C$ for alle $n > N$ og for hvert af de endelig mange $j = 1, \dots, p$. Af definitionen af $|B|$ følger straks at $|A_n - A| < \varepsilon/C$ for alle $n > N$. Men så er jo $\|A_n - A\| < \varepsilon$ for alle $n > N$. Dermed er sætningen bevist.

Til senere brug noterer vi et par simple egenskaber ved konvergens af følger af lineære afbildninger.

LEMMA 2.25 Lad A_n, B, Q være elementer i $\mathcal{L}(U)$ og antag Q invertibel. Hvis $B_n = Q A_n Q^{-1}$ for $n \in \mathbb{N}$ så er A_n konvergent hvis og kun hvis B_n er konvergent. Specielt gælder at $\lim_{n \rightarrow \infty} Q A^n Q^{-1}$ eksisterer hvis og kun hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ eksisterer.

BEVIS: Øvelse.

Når V og W er vektorrum så kan

$$V \times W := \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$$

som bekendt opfattes som et vektorrum, når det udstyres med koordinatvis addition og skalarmultiplikation. Er V og W normerede, kan $U := V \times W$ normeres, f.eks. med

$$\|(v, w)\| := \max[\|v\|, \|w\|], \text{ for alle } v \in V, w \in W.$$

Tilsvarende kan vi, hvis $A \in \mathcal{L}(V)$ og $B \in \mathcal{L}(W)$ danne $A \times B$, defineret ved

$$(A \times B)(v, w) := (Av, Bw), \text{ for alle } v \in V, w \in W.$$

Det er let at se at $A \times B \in \mathcal{L}(V \times W)$ og at der med det nævnte valg af norm på $V \times W$ for operatornormerne på V , W og $V \times W$ vil gælde at

$$\|A \times B\| = \max \{ \|A\|, \|B\| \}.$$

LEMMA 2.26 Lad $U = V \times W$, hvor V og W er normerede vektorrum, lad $\{B_n\}$ være en følge i $\mathcal{L}(V)$ og $\{C_n\}$ en følge i $\mathcal{L}(W)$. Så er følgen $\{A_n\}$ i $\mathcal{L}(U)$, hvor $A_n = B_n \times C_n$, $n = 1, 2, \dots$ konvergent hvis og kun hvis $\{B_n\}$ og $\{C_n\}$ er konvergente. I bekræftende fald gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

BEVIS: Øvelse!

Vi minder om at hvis $A : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning er *spektreret* for A $\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } A \}$. Vi minder også om at egenværdierne findes ved at finde rødderne i det karakteristiske polynomium $p_A := \det_{\alpha} [A - \lambda I]_{\alpha}$ for et vilkårligt valg af basis α for U . Tilsvarende defineres spektret af en matrix som rødderne i dennes karakteristiske polynomium. Endelig indfører vi *spektralradius*

$$r(A) := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

Så gælder følgende.

LEMMA 2.27 Lad U være et endelig dimensionalt normeret vektorrum og lad $\mathcal{L}(U)$ være udstyret med en norm $\| \cdot \|$, der opfylder 2.a). Lad $A \in \mathcal{L}(U)$. Så gælder at $r(A) \leq \inf_n \|A^n\|^{1/n}$, specielt at $r(A) \leq \|A\|$.

BEVIS: Lad $\lambda \in \sigma(A)$ og vælg en egenvektor x hørende til A . Så er $Ax = \lambda x$ og derfor, for ethvert $n \in \mathbb{N}$, $A^n x = \lambda^n x$; af dette fås umiddelbart vha 2.a) at $|\lambda|^n \|x\| = \|A^n x\| \leq \|A^n\| \|x\|$, således at $|\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n}$. Da $\lambda \in \sigma(A)$ er vilkårlig, slutter vi heraf at $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$ og derfor også at $r(A) \leq \inf_n \|A^n\|^{1/n}$. Da $\inf_n \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|$ (trivielt), følger sidste påstand.

Til slut skal vi give mening til visse funktioners virkning på lineære

afbildninger. For en vilkårlig lineær afbildning A på et vektorrum U og for et vilkårligt polynomium $p(t) := a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ kan vi umiddelbart give mening til $p(A)$, nemlig ved

$$p(A) := a_0 + a_1 A + \dots + a_n A^n.$$

Dette kan udvides til potensrækker: Lad U være et fuldstændigt normeret vektorrum og lad $A \in \mathcal{L}(U)$ være en begrænset lineær afbildning med operatornorm $\|A\|$. Lad $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ være en funktion, givet ved en potensrække

$$f(z) := \sum a_n z^n,$$

som har en konvergensradius $\rho(f)$. Rækken $\sum a_n z^n$ er altså konvergent for alle z i den åbne skive $|z| < \rho(f)$ med sum $f(z)$. Den er uniformt konvergent i enhver afsluttet skive med centrum i 0 og radius $r < \rho(f)$. Vi ved endvidere at rækken $\sum |a_n| |z|^n$ er konvergent, altså at den givne potensrække er absolut konvergent for ethvert z i den åbne konvergensskive. Ved hjælp af disse fakta kan vi nu definere hvad $f(A)$ skal betyde, hvis vi forudsætter at $\|A\| < \rho(f)$.

DEFINITION 2.28 Med ovenstående forudsætninger om $A \in \mathcal{L}(U)$ og om funktionen f definerer vi

$$f(A) := \sum a_n A^n,$$

hvor den uendelige rækkes konvergens er mht operatornormen.

Det skal selvfølgelig godtgøres at definitionen har mening. Betragt udsnittene $u_{nm}(A) := \sum_{i=n}^m a_i A^i$ (hvor vi forudsætter $m \geq n$) og bemærk at $\|u_{nm}(A)\| = \|\sum_{i=n}^m a_i A^i\| \leq \sum_{i=n}^m |a_i| \|A^i\| \leq \sum_{i=n}^m |a_i| \|A\|^i$. Det sidstnævnte $\leq$ er retfærdiggjort af lemma 2.22 og 2.23. Da vi forudsætter at $\|A\| < \rho(f)$, er rækken $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \|A\|^i$ konvergent, og udsnittet $\sum_{i=n}^m |a_i| \|A\|^i$ kan derfor gøres mindre end et forlods givet, vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, blot n vælges tilstrækkelig stor. Derfor er afsnitsfølgen $s_n(A) := \sum_{i=0}^n a_i A^i$ en Cauchy-følge, og da $\mathcal{L}(U)$ er fuldstændigt, er rækken $\sum a_n A^n$ konvergent.

EKSEMPEL 2.29 For vilkårlig $A \in \mathcal{L}(U)$ har $\exp(A)$ mening, idet konvergensradius for exponentialfunktionens potensrække jo er ∞ . Der gælder

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$$

Tilsvarende kan vi betragte $\exp(tA)$ for vilkårlig reel parameter t .

OPGAVER TIL KAPITEL 2.

2.1 Med udgangspunkt i fordelingsmatricen A fra Eksempel 2.3, men begyndelsesfordelingen $(0.5, 0.5, 0)'$ og tidenheden måned skal fordelingen efter 1 og efter 3 måneder udregnes. Hvad sker med fordelingen, når n går mod ∞ ?

2.2 Tre producenter kaster samtidig hver sit nye tandpastamærke på markedet. I begyndelsen er deres markedsandele 40 %, 40 % og 20 %. I løbet af det første år beholder Selskab 1 85 % af sine egne kunder, snupper 15 % fra Selskab 2 og 5 % fra Selskab 3. Selskab 2 tager 5 % af 1s kunder, beholder 75 % af sine egne og tager 5 % af 3s. Selskab 3 tager 10 % fra 1, 10 % fra 2 og beholder 90 % af sine egne kunder. Antag nu at totalmarkedet ikke ændres og at overgangsfordelingen er konstant. Opskriv fordelingsligningerne (som i begyndelsen af føljetoneksemplet) og overgangsmatricen A for dette marked. Udregn markedsandelene efter 1 og efter 2 år.

2.3 Brug f.eks. Matlab til at undersøge evt. asymptotisk forløb af markedsfordelingen i eksempel 2.3.

2.4 Gør det samme med markedet i opg. 2.2.

2.5 For matricen i Eks. 2.3, og gerne med computerhjælp, f.eks. Matlab, skal potenser af A udregnes: A^2 , A^4 , A^{16} , A^{17} . Ser du noget mønster for A^r , for voksende r ?

2.6 Gør som i opg. 2.5 med fordelingsmatricen for markedet i opg. 2.2.

2.7 I hvert af de nævnte tilfælde skal vektoren $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ skrives i den specificerede basis; begynd med at kontrollere at de givne sæt er baser.

$$\{(1,1), (1,-1)\} \qquad \{(2,-3), (3,-2)\}$$

$$\{(5,7), (3,-4)\} \qquad \{(-1,-2), (-1,2)\}$$

2.8 Som 2.7, idet det hele nu foregår i $\mathbb{C}^3$, $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\{(1,0,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \qquad \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

$$\{(2,1,3), (-1,4,5), (3,-2,-4)\} \qquad \{(a,0,0), (b,d,0), (c,e,f)\},$$

$$\text{idet } adf \neq 0$$

2.9 Idet $\alpha_1 := \{(3,1), (2,-1)\}$ og $\alpha_2 := \{(2,4), (-5,3)\}$ er givne

baser skal $x := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{\alpha_1}$ udtrykkes ved hjælp af α_2 .

2.10 Find egenrummet $\ker(f-I)$ for den i Eksempel 2.8 nævnte afbildning f . Har f andre egenverdier end de to allerede fundne?

2.11 Find egenverdier og egenrum for afbildningen, der i $\mathbb{R}^3$ er defineret ved spejling i en given plan (gennem $\underline{0}$). Lad være med at indføre baser!

2.12 Find egenverdierne for matricen i Eksempel 2.3.

2.13 a) Vis at afbildningen i det reelle to-dimensionale rum $\mathbb{R}^2$, defineret ved drejning gennem en ret vinkel i den positive omløbsretning, ikke har nogen egenverdi. b) Hvis man derimod tænker på planen som $\mathbb{C}$, med skalarlegemet $\mathbb{C}$, så er den netop nævnte afbildning et multiplum af identiteten I . Hvilket? Løs egenverdiproblemet for *denne* afbildning.

2.14 Godtgør påstandene om egenverdierne for afbildningen f der er nævnt i afsnittet lige efter Sætning 2.12.

2.15 Find en basis for $\mathbb{C}^3$ bestående af egenvektorer for den på s. 2.14 nævnte afbildning Ω_A .

2.16 Gør rede for at afbildningen i opgave 2.11 viser at en afbildning af et n dimensionalt vektorrum udmærket kan have n lineært uafhængige egenvektorer, selv om antallet af egenverdier er $< n$.

2.17 Find en basis af egenvektorer for matricen i Eksempel 2.3.

2.18 Betragt rummet $\mathbb{P}^3$ af polynomier af grad højst 3. Gør rede for at polynomierne $\{1, t-1, t^2-1, t^3+t+2\}$ udgør en basis. Er følgende udsagn sandt: Hvis et sæt polynomier indeholder ét polynomium af hver af graderne j , $j = 0, 1, \dots, n$, så er dette sæt en basis for $\mathbb{P}^n$.

2.19 Brug Matlab til at afgøre om sættet $\beta := \{(0, 1, 3, 4), (1, -1, 1, 1), (2, 0, 0, 3), (6, -11, 1, 0)\}$ udgør en basis for $\mathbb{C}^4$.

2.20 Hvad er beskrivelsen i økonomiske vendinger af standardbasen i $\mathbb{R}^3$ i føljetoneksemplet?

2.21 Med α sat til standardbasen i $\mathbb{C}^4$ og β som i opg. 2.19 skal ${}_{\alpha} \square_{\beta}$ opstilles. Find dernæst (Matlab) ${}_{\beta} \square_{\alpha}$.

2.22 Videreførelse af ovenstående. Med $\alpha := \{e_1, \dots, e_4\}$ definerer vi en lineær afbildning $f : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ved at $f(e_j) := e_1 + e_j - 4e_{5-j}$, $j = 1, \dots, 4$. Opskriv ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$. Beregn (Matlab) ${}_{\beta}[f]_{\beta}$.

2.23 Lad os antage at enhver persons uddannelse kan rubriceres som enten faglært, ufaglært eller "videreuddannet". Vi antager også at det er et veletableret faktum at blandt børnene af videreuddannede er 70% selv videreuddannede, 20% er faglærte og 10% er ufaglærte. For de faglærtes børns vedkommende er 20% videreuddannede, 60% er faglærte og 20% ufaglærte, mens ufaglærtes børn er for 20% vedkommende videreuddannede, 30% er faglærte, mens 50% er ufaglærte. Vi antager videre at befolkningstallet er konstant, samt at der i den nuværende generation er 35% videreuddannede, 35% faglærte og 30% ufaglærte.

- Opskriv overgangsmatricen A .
- Find befolkningsfordelingen efter én generations, og efter to generationers, forløb.
- Benyt Matlab til eksperimentelt at undersøge om der i det lange løb vil indtræffe nogen ligevægtstilstand i befolkningens uddannelsesmæssige fordeling.
- Kan Matlab give noget fingerpeg om forløbet af A^n for $n \rightarrow \infty$?

2.24. Hvis $f : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning der opfylder at $f^2 := f \circ f = f$, siger vi at f er en *projektion*. Et finere(?) ord for f er *idempotent*. Vis at 0-afbildningen og identiteten I er (trivielle) projektioner. Giv et ikke-trivielt eksempel på en projektion.

2.25 a) Lad $f \neq I$ være en projektion. Vis at $\ker f \neq \{0\}$. (Hvis $\ker f = \{0\}$, er f invertibel...) Dermed har vi én egen værdi for en projektion. I løbet af de næste (del)opgaver finder vi alle egen værdierne for en projektion.

b) Lad $f \neq I$ være en projektion. Kan f være surjektiv? (Søg evt. inspiration i a) og Dimensionsformlen.

2.26 De her nævnte matricer skal opfattes som matrixrepræsentationer i standardbasen for lineære afbildninger på komplekse vektorrum. Find egen værdierne:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (bc \neq 0)$$

2.27 Find alle egenrum for afbildningen længst til venstre i opg.

2.26. Er denne afbildning diagonaliserbar?

2.28 Lad f være den lineære afbildning, hvis matrixrepræsentation i standardbasen α udtrykt i Matlab sprog er $\langle 2/3 \ -1/3 \ -1/3; -1/3 \ 2/3 \ -1/3; -1/3 \ -1/3 \ 2/3 \rangle$. Opskriv på sædvanlig form ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$. Vis at f er en projektion; find den plan, f projicerer rummet på - jf. analogien til eks. 1.1 b).

2.29 Vis at hvis f er en projektion, er $f(U)$ et egenrum. Hvad er egenværdien?

2.30. Vis at hvis f er en projektion er $U = \ker f \oplus f(U)$. (Vink: $x = f(x) + x - f(x)$). Hvor mange egenværdier har altså en projektion?

2.31 For de to afbildninger til højre i opg. 2.26 skal egenrummene findes. Hvilke af afbildningerne er diagonaliserbare?

2.32 Er enhver projektion diagonaliserbar?

3. JORDANS NORMALFORM

Som det er kendt fra Mat 1LA gælder for en lineær afbildning $f : U \rightarrow V$ med nulrum $\ker f$ *dimensionsformlen*

$$\dim \ker f + \dim f(U) = \dim U.$$

Ofte har man mere nytte af formelen i følgende form:

OPSKRIFT 3.1: Man tager en basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ for $f(U)$, "løfter" den til vektorer $\{u_1, \dots, u_m\}$ i U , dvs. man vælger vektorer u_i i U , så $f(u_i) = v_i$, og man supplerer så disse vektorer med en basis $\{w_1, \dots, w_p\}$ for $\ker(f)$. Man har da en basis $\{u_1, \dots, u_{m+p}\}$ for U .

BEVISGANG: Ud fra følgende kan et fuldt bevis let opskrives.

1. skridt: $\{u_1, \dots, u_m\}$ er et lineært uafhængigt sæt.
2. skridt: $\text{span}\{u_1, \dots, u_m\} \cap \ker f = \{0\}$.
3. skridt: $\{u_1, \dots, u_m\} \cup \{w_1, \dots, w_p\}$ er en basis for U .

DEFINITION 3.2 Lad U være et vektorrum. En lineær afbildning $f : U \rightarrow U$ er *nilpotent* hvis der findes et helt tal $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $f^n(x) = 0$ for alle $x \in U$, altså for hvilket f^n er nulafbildningen (her er $f^2(x) := f(f(x))$, for alle $x \in U$, og $f^n(x) := f^{n-1}(f(x)) = f(f^{n-1}(x))$, for $n = 2, 3, \dots$ og for alle $x \in U$).

EKSEMPEL 3.3 I $\mathbb{C}^2$ vælges en basis $\{x_1, x_2\}$. Definer en lineær afbildning $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ved at fastlægge værdierne på basisvektorerne:

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = x_1.$$

Så er $f^2 = 0$ (vis det!).

LEMMA 3.4 Lad $g : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning i det endelig dimensionale vektorrum V . Der findes en opspaltning $V = U \oplus W$ i g -invariante underrum, så at g er nilpotent på U og bijektiv i W .

BEVIS: I følgen $V \supseteq g(V) \supseteq g^2(V) \supseteq \dots$ af g -invariante underrum må der gælde = fra et vist trin (hvorfor?). Af $g^{p+1}(V) = g^p(V)$ følger, at g er bijektiv (= surjektiv) på $g^p(V)$. Hvis $v \in \ker(g^p) \cap g^p(V)$, har vi $g^p(v) = 0$, og dermed $v = 0$, da g er injektiv på $g^p(V)$. Altså er $\ker(g^p) \cap g^p(V) = \{0\}$, og da $\dim V = \dim \ker(g^p) + \dim g^p(V)$, slutter vi, at $V = \ker(g^p) \oplus g^p(V)$. Bijektiviteten af g

på $g^p(V)$ har vi bemærket. Det er endvidere klart at g er nilpotent på $\ker(g^p)$. Dermed er lemmaet bevist.

SÆTNING 3.5. Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af det endelig dimensionale komplekse vektorrum V med egenverdierne $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Der findes en opspaltning $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ i f -invariante underrum, så at $(f - \lambda_1 I)|_{U_1}$ er nilpotent på U_1 .

BEVIS: Vi har

$$\begin{aligned}
 V &= U_1 \oplus W_1 && \left(\begin{array}{l} \text{Lemma 3.1 anvendt på } f - \lambda_1 I : V \rightarrow V \text{ med } f - \lambda_1 I \\ \text{nilpotent på } U_1, f - \lambda_1 I \text{ bijektiv på } W_1. \end{array} \right) \\
 &= U_1 \oplus U_2 \oplus W_2 && \left(\begin{array}{l} \text{Lemma 3.1 anvendt på } f - \lambda_2 I : W_1 \rightarrow W_1 \text{ med} \\ f - \lambda_2 I \text{ nilpotent på } U_2, f - \lambda_2 I \text{ bijektiv} \\ \text{på } W_2. \end{array} \right) \\
 &\vdots \\
 &= U_1 \oplus \dots \oplus U_r \oplus W_r && \left(\begin{array}{l} \text{Lemma 3.1 anvendt på } f - \lambda_r I : W_{r-1} \rightarrow W_{r-1} \text{ med} \\ f - \lambda_r I \text{ nilpotent på } U_r, f - \lambda_r I \text{ bijektiv} \\ \text{på } W_r. \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Nu er $f - \lambda_1 I$ specielt injektiv på W_1 , og dermed også injektiv på $W_r \subseteq W_1$. Intet af tallene $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ er derfor egenværdi for $f : W_r \rightarrow W_r$. Men hvis W_r ikke er $= \{0\}$, har $f : W_r \rightarrow W_r$ en egenværdi, da skalarlegemet er $\mathbb{C}$. Det er klart at enhver sådan egenværdi må være en egenværdi for f selv. Heraf følger at $W_r = \{0\}$.

SÆTNING 3.6 (Jordans normalform for en nilpotent afbildning $h : U \rightarrow U$) Lad $h : U \rightarrow U$ være en nilpotent afbildning. Så findes der en basis (en "Jordanbasis for h ") i hvilken h beskrives ved en blokmatrix af følgende udseende:

$$\begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{pmatrix} \text{ hvor hver blok } B_i \text{ har formen } \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

BEVIS: At en basis er en Jordanbasis for h betyder at den kan deles i grupper $\{u_0, u_1, \dots, u_k; v_0, \dots, v_l; w_0, \dots, w_m; \dots\}$ svarende til hver af blokkene, så at

$$\begin{aligned}
 u_k &\xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} u_1 \xrightarrow{h} u_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 v_1 &\xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} v_1 \xrightarrow{h} v_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 w_m &\xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} w_1 \xrightarrow{h} w_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

(overvej det!)

At der til hver nilpotent lineær afbildning $h : U \rightarrow U$ findes en Jordanbasis vises nu ved induktion efter $\dim U$. Afbildningen h er en surjektiv afbildning af U på $h(U)$. Hvis $h(U) = \{0\}$, altså $h = 0$, er påstanden triviell. Hvis $h(U) \neq \{0\}$, er $\dim U > \dim h(U)$ (hvorfor?). Induktionsantagelsen tillader derfor, at vi forudsætter at vi har opskrevet en Jordanbasis som i (*) for den nilpotente lineære afbildning $h|_{h(U)} : h(U) \rightarrow h(U)$. Ifølge "opskriften" kan vi få en basis for U ved at løfte basen for $h(U)$ og supplere med en basis for $\ker(h)$. Vi løfter nu vektorerne i (*) ved at vælge $u_{k+1}, v_{l+1}, w_{m+1}, \dots$ i U , så at

$$u_{k+1} \xrightarrow{h} u_k, v_{l+1} \xrightarrow{h} v_l, w_{m+1} \xrightarrow{h} w_m, \dots,$$

og ved som løftning af hver af de øvrige vektorer i (*) at vælge den vektor i (*) der står umiddelbart til venstre. Vi supplerer altså hver af rækkerne i (*) med én vektor. Ingen af de dermed tilføjede vektorer ligger i $\ker h$.

Vi skal supplere med en basis for $\ker(h)$. Vi har allerede de lineært uafhængige vektorer $u_0, v_0, w_0, \dots$ i denne kerne; vi supplerer disse vektorer med vektorer $x_0, y_0, \dots$ til en basis for $\ker(h)$. Den således bestemte basis for U er klart en Jordanbasis.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{
 \begin{array}{l}
 u_{k+1} \xrightarrow{h} u_k \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} u_1 \xrightarrow{h} u_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 v_{l+1} \xrightarrow{h} v_l \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} v_1 \xrightarrow{h} v_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 w_{m+1} \xrightarrow{h} w_m \xrightarrow{h} \dots \xrightarrow{h} w_1 \xrightarrow{h} w_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 \vdots
 \end{array}
 }
 \begin{array}{l}
 \vdots \\
 x_0 \xrightarrow{h} 0 \\
 y \xrightarrow{h} 0 \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

(I $\square$ står de løftede vektorer; udenfor står en basis for kernen)
Hermed er beviset gennemført.

SÆTNING 3.7 (Jordans normalform for en vilkårlig lineær afbildning)
Lad $f : V \rightarrow V$ være en vilkårlig lineær afbildning af det komplekse

endelig-dimensionale vektorrum V ind i V . Så har f en *Jordan form* (ofte kaldet Jordans normalform for f): Hermed menes at der findes en basis for V i hvilken f har matrixrepræsentationen.

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix} \text{ hvor hver blok } J_i \text{ har formen } \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

(medmindre blokken er en 1×1 matrix $[\lambda_i]$).

BEVIS: Vi betragter opspaltningen $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ fra Sætning 3.5. Hver restriktion $(f - \lambda_i I)|_{U_i}$ er nilpotent på U_i , så vi kan finde en Jordanbasis for $(f - \lambda_i I)|_{U_i}$ på U_i . Da $f|_{U_i} = [\lambda_i I + (f - \lambda_i I)]|_{U_i}$ kan $f|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$ beskrives i denne basis ved en Jordanmatrix J_i med λ_i i diagonalen. Forenes de for hvert i fundne vektorer fra U_i fås en basis for $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ i hvilken f beskrives ved en Jordanmatrix.

Det er naturligt at spørge om entydighed af Jordan's normalform. Dette blev besvaret af Camille Jordan (fransk matematiker (1838 - 1921)) himself, i den artikel hvor Jordan-formens eksistens blev bevist: Jordan's normalform er entydig, bortset fra rækkefølgen af Jordanblokkene (dette svarer til at i den ovenfor nævnte opspaltning $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ kan vi bytte om på U_i 'erne). En konsekvens heraf er at hvis en matrix/afbildning er diagonaliseret, har vi hermed også fundet dens Jordanform. Vi skal ikke her retfærdiggøre dette svar.

Et andet naturligt spørgsmål er hvordan man i praksis finder Jordanformen. Lad det være sagt med det samme, at eksistensen af formen er det væsentlige: det er i ræsonnementer at man kan udnytte at en given afbildning/matrix kan bringes på Jordanform, og ikke så meget det præcise udseende af Jordanformen. Denne påstand kan vi illustrere ved at bevise en berømt klassisk sætning om matricer, Cayley-Hamilton's sætning, som et korollar til sætningen om Jordan's normalform. Men først et par simple regneeksempler.

EKSEMPEL 3.8 Lad os regne Jordanformen for matricen $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ud. Egenverdierne findes ud fra $(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0$, hvoraf $\lambda = 2$ eller 5. Da egenverdierne er forskellige, kan A diagonaliseres, og dermed

har vi (ifl. entydighedsudsagnet nævnt ovenfor) fundet Jordanformen.

EKSEMPEL 3.9 Lad os regne Jordanformen for matricen $A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ud. Egenværdierne findes ud fra $(2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0$, hvoraf $(\lambda - 3)^2 = 0$. Når den eneste egenværdi er 3 må Jordanformen være enten $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Den første mulighed er udelukket (opgave 3.1), så vi har svaret.

KOROLLAR 3.10 (Cayley-Hamiltons sætning) Lad A være en kompleks kvadratisk matrix med karakteristisk polynomium $p_A(t)$. Så er matrixpolynomiet $p_A(A) = 0$.

BEVIS: Kald Jordanformen for A for J . Da A og J er similære, findes der en invertibel matrix Q for hvilken $A = Q J Q^{-1}$; endvidere har A og J samme karakteristiske polynomium (lemma 2.9). Altså: $p_A(t) = p_J(t)$ og derfor $p_A(A) = p_J(A)$. Da $p_A(A) = 0$ hvis og kun hvis $Q^{-1} p_A(A) Q = 0$ og da $Q^{-1} p_A(A) Q = p_J(Q^{-1} A Q)$ (overvej!), er det tilstrækkeligt at vise at $p_J(J) = 0$. Hvis $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_p$ angiver opdelingen af J i Jordanblokke, er det klart at $p_J(t) = p_{J_1}(t) \dots p_{J_p}(t)$ og derfor at

$$p_J(J) = p_{J_1}(J_1) \oplus \dots \oplus p_{J_p}(J_p).$$

(overvej!). Vi kan derfor gennemføre beviset ved at antage at J er en $j \times j$ Jordanblok, svarende til egenværdien λ , med karakteristisk polynomium $p_J(t) = (\lambda - t)^j$ og vise at $p_J(J) = 0$, altså vise at $(\lambda I - J)^j = 0$. Men da

$$\lambda I - J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og exponenten j netop er dimensionen af denne matrix, er det en simpel udregning at godtgøre at $(\lambda I - J)^j = 0$.

EKSEMPEL 3.11 I undersøgelser af opførslen af matrixpotenser A^n , når n bliver meget stor, kan Cayley-Hamilton sommetider være til lettelse. Vi antyder dette med et 2×2 eksempel. Lad $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Det karakteristiske polynomium er $p_A(z) = (3-z)(1-z) - 8 = z^2 - 4z - 5$, så af Cayley-Hamilton slutter vi at $A^2 - 4A - 5I = 0$. Heraf følger at $A^2 = 4A +$

$5I$, så $A^3 = (4A + 5I)A = 4A^2 + 5A = 4(4A + 5I) + 5A = 21A + 20I$, etc.

For en generel 2×2 matrix A med karakteristisk polynomium

$$p_A(\lambda) := a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$$

regner vi $\lambda^n/p_A(\lambda)$ ud; vi får et kvotientpolynomium $q(\lambda)$ og et restpolynomium $r(\lambda)$, som er af højst 1. grad:

$$\lambda^n = q(\lambda)p_A(\lambda) + r(\lambda). (*)$$

Altså kan vi skrive $r(\lambda) = a + b\lambda$. Indsætter vi i disse udtryk A under udnyttelse af Cayley-Hamilton, får vi at

$$A^n = q(A)p_A(A) + r(A) = aI + bA.$$

Vi skal altså blot fastlægge a og b . Men vi kan jo finde rødderne i p_A ; de er netop egenværdierne λ_1 og λ_2 for A . Indsættes de i (*), fås

$$\lambda_1^n = a + b\lambda_1$$

og

$$\lambda_2^n = a + b\lambda_2.$$

(det andet led falder jo bort, da λ^{erne} er rod i p_A)

Tilbage til det numeriske eksempel $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, hvor egenværdierne

er 5 og -1. Ønsker vi f.eks. at beregne A^7 , får vi til bestemmelse af a og b de to ligninger

$$5^7 = a + 5b$$

$$-1 = a - b$$

HVORDAN KAN MAN FINDE JORDAN-FORM OG BASISSKIFT I 2 OG 3 DIMENSIONER?

Tilfældet $k = 2$. Der er givet en lineær afbildning $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ (eller måske af $\mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$), dvs. en matrix A (opfattet som afbildningen f udtrykt i standardbasen α , $A := {}_{\alpha}[f]_{\alpha}$). Fremgangsmåden er da:

Først findes egenværdierne λ_1 og λ_2 som rødder i det karakteristiske polynomium.

Hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$, er A diagonaliserbar, og Jordanformen J er givet ved

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Hvis basisskiftet er effektueret af Q , altså hvis

$$A = Q J Q^{-1},$$

har vi at

$${}_{\alpha}[f]_{\alpha} = Q {}_{\beta}[f]_{\beta} Q^{-1},$$

eller, ækvivalent hermed,

$$\alpha [f]_{\alpha} = \alpha [I]_{\beta} \beta [f]_{\beta} \beta [I]_{\alpha} = \alpha [I]_{\beta} \beta [f]_{\beta} \alpha [I]_{\beta}^{-1}.$$

Vi konstaterer at da $\beta [f]_{\beta}$ er en diagonalmatrix, er vektorerne i β simpelthen egenvektorer hørende til λ_1 , hhv. λ_2 . Da $Q = \alpha [I]_{\beta}$, er søjlerne i Q netop vektorerne i β , udtrykt i standardbasen α . For at finde Q skal vi altså finde egenrummene hørende til hver af egenværdierne λ_1 og λ_2 .

Hvis $\lambda_1 = \lambda_2$ kalder vi den fælles værdi λ . Der er to mulige Jordanformer:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Den første svarer åbenbart til at egenrummet $\ker(f - \lambda I)$ er 2-dimensional, altså til at $f = \lambda I$; dette er den *eneste* mulighed for et 2-dimensionalt egenrum, thi

$$\begin{aligned} A &= Q J Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= Q Q^{-1} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hvis $f \neq \lambda I$, og hvis f har én egenværdi, er Jordan-formen altså

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vi regner basisskiftet ud, altså finder et invertibelt Q , for hvilket $A = Q J Q^{-1}$. Detaljerne er med her, fordi de også kan bruges i andre sammenhænge. Som før har vi at

$$Q = \alpha [I]_{\beta}$$

og at

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \beta [f]_{\beta}.$$

Dette viser at første basisvektor v_1 i β er en egenvektor, så egenrummet $\ker(f - \lambda I)$ (der jo vides at være 1-dimensionalt) skal findes. Når v_1 er fundet, ser vi at der for anden basisvektor v_2 gælder at

$$f(v_2) = \lambda v_2 + v_1.$$

(det aflæser vi i anden søjle i Jordan-formen). Altså kan v_2 findes af ligningen

$$(f - \lambda I)(v_2) = v_1.$$

(Matlabs kommando `\` kan bruges her).

Dermed er det 2-dimensionale tilfælde klaret.

Tilfældet $k \equiv 3$. Vi har givet en lineær afbildning f , dvs. en 3×3 matrix A (opfattet som afbildningen f udtrykt i standardbasen α). Proceduren er analog til ovenstående.

Egenværdierne λ_1 , λ_2 og λ_3 findes. De er rødderne i det karakteristiske polynomium.

Hvis λ_1 , λ_2 og λ_3 er indbyrdes forskellige, er A diagonaliserbar, og Jordanformen J er givet ved

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

De andre to muligheder er at det karakteristiske polynomium $p_f(z)$ har en enkelt- og en dobbeltrod, eller at p_f har en tredobbelt rod.

Vi behandler disse hver for sig.

Lad os altså først antage at λ_1 er enkeltrod, λ_2 er dobbeltrod. Det betyder at $p_f(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)^2$. Heraf sluttes to ting:

- Da λ_1 er simpel er egenrummet $\ker(f - \lambda_1 I)$ 1-dimensionalt.
- Jordan-formen J har samme karakteristiske polynomium, så λ_1 forekommer én gang i diagonalen, λ_2 to gange.

De mulige Jordan-former er derfor

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Her må matrix nr. 2 og 4 forkastes; de er ikke på Jordan-form. Så vi har

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

svarende til 2-dimensionalt egenrum, hhv. 1-dimensionalt egenrum, hørende til λ_2 .

Når A foreligger, skal man altså finde $\ker(f - \lambda_2 I)$ (eller i hvert fald dimensionen af dette egenrum). Er $\dim \ker(f - \lambda_2 I) = 2$, er f diagonaliserbar og Jordan-formen er diagonalmatricen ovenfor til venstre. Men hvis $\dim \ker(f - \lambda_2 I) = 1$, er Jordan-formen for f matricen til højre.

Den anden mulighed er at λ er tredobbelt rod. I dette tilfælde er mulighederne for Jordan-formen

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ganske som i tilfældet $k = 2$ vil matricen længst til venstre kun forekomme, hvis $f = \lambda I$. De to midterste Jordan-former er similære (prøv at skrive den invertible matrix op, der effektuerer similariteten), så der er to væsensforskellige muligheder:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Af selve formen ses at den til venstre svarer til $\dim \ker(f - \lambda I) = 2$, den til højre til $\dim \ker(f - \lambda I) = 1$. Regn selv efter!

Dermed har vi fundet alle Jordan-former også for det 3-dimensionale tilfælde. Blot mangler vi at identificere basisskiftet. Hvis basisskiftet er effektueret af Q , altså hvis

$$A = Q J Q^{-1},$$

har vi at

$${}_{\alpha}[f]_{\alpha} = Q {}_{\beta}[f]_{\beta} Q^{-1},$$

eller, ækvivalent hermed, at

$${}_{\alpha}[f]_{\alpha} = {}_{\alpha}[I]_{\beta} {}_{\beta}[f]_{\beta} {}_{\beta}[I]_{\alpha} = {}_{\alpha}[I]_{\beta} {}_{\beta}[f]_{\beta} {}_{\alpha}[I]_{\beta}^{-1}.$$

Her er $Q = {}_{\alpha}[I]_{\beta}$ basen β udtrykt i standardbasen α ; at finde β og at finde ${}_{\alpha}[I]_{\beta}$ kommer altså ud på det samme.

Lad os antage at Jordan-formen ${}_{\beta}[f]_{\beta}$ består af Jordan-blokkene $J_1, \dots, J_p$ (i tre dimensioner er $p = 1, 2$ eller 3 , men princippet er generelt, så vi formulerer det alment). Det er tilstrækkeligt at finde de til en given blok J_i svarende elementer i β . Så lad os koncentrere os om en Jordan-blok

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

og sige at J er $m \times m$. Vi skal bestemme m vektorer $v_1, \dots, v_m$ i basen β . Ignorerer vi notationsmæssigt resten af rummet og resten af β , og justerer symbolikken tilsvarende, kan vi altså betragte samme situation som før:

$${}_{\alpha}[f]_{\alpha} = {}_{\alpha}[I]_{\beta} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix} {}_{\alpha}[I]_{\beta}^{-1}.$$

hvor

$${}_{\beta}[f]_{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(husk vi ignorerer resten af rum og basis). Af dette udtryk aflæser vi først at $f(v_1) = \lambda v_1$, så v_1 udregnes: vi finder en egenvektor

svarende til λ , hvilket vil sige at vi finder en løsning v_1 for hvilken

$$(f - \lambda I)v_1 = 0.$$

I anden søjle står $f(v_2)$ og den skal være $\lambda v_2 + v_1$, dvs. v_2 er en vektor for hvilken

$$(f - \lambda I)v_2 = v_1.$$

Dette mønster fortsætter ned igennem Jordan-blokken: hvis vi har fundet v_1 fås v_{i+1} som en vektor for hvilken

$$(f - \lambda I)v_{i+1} = v_i.$$

(maskinelt kan f.eks. Matlabs `\` være til hjælp her).

Bemærk at disse sidste udredninger forudsætter at vi kender Jordan-formen, dvs. at vi allerede har placeret 1-taller og nuller over diagonalen: her behandles kun den enkelte Jordan-blok med lutter 1-taller over diagonalen. Er der specielt tale om en 1×1 blok, medtages kun det første skridt, altså det om v_1 sagte.

Allerede i dimension $k = 4$ kan situationen være kompliceret nok til at man er nødt til at bruge andre fremgangsmåder.

OPGAVER TIL KAPITEL 3

3.1 Vis at $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ikke kan være similære (vink: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ kommuterer med enhver 2×2 matrix).

3.2 Find Jordanformen for 4×4 matricen med 1 på alle pladser.

3.3 Find Jordanformerne for følgende matricer:

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (her er det kar. poly. er $-(\lambda-1)^2(\lambda-5)$);

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{check først at det kar. pol. er } (\lambda-1)^3(\lambda-2));$$

3.3 For de nedenfor nævnte matricer skal Jordan-formen findes.

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.4 Hvis det endelig-dimensionale vektorrum V er spaltet op i g -invariante underrum $V = U \oplus W$, så g er nilpotent på U og bijektiv på W , og hvis $S \subseteq V$ er et g -invariant underrum, hvorpå g er bijektiv, så gælder at $S \subseteq W$.

3.5 (fortsat fra opg. 3.2): Hvis $U = S \oplus T$, hvor g er nilpotent på T og bijektiv på S , så er $T = U$.

3.6 Find Jordan-formen for

$$\begin{bmatrix} 0 & -18 & -7 \\ 1 & -12 & -4 \\ -1 & 25 & 9 \end{bmatrix}.$$

3.7 Lad $A := \begin{bmatrix} 2+\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & 2-\varepsilon \end{bmatrix}$. Regn ud i hånden hvad Jordan-formen er, når $\varepsilon \neq 0$ og når $\varepsilon = 0$. Regn også Jordan-formen ud hvis der i diagonalen står 2 (og de to andre led er $\pm\varepsilon \neq 0$). Læg mærke til hvad dette viser om hvor følsom Jordan-formen er overfor småændringer i indgangene. Dette har regnetekniske konsekvenser.

3.8 Gør udregningen af a og b (Eksempel 3.11) færdig.

3.9 Betragt en vilkårlig 2×2 overgangsmatrix $A := \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$,

hvor $\alpha, \beta \in [0,1]$ og $\alpha + \beta \neq 0$. Vis ved metoden i eksempel 3.11 at

$$A^n = \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} / (\alpha + \beta) + (1 - \alpha - \beta)^n / (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Diskuter hvad der sker med A^n , når n vokser. Tag hensyn til de mulige værdier af α og β .

4 HILBERT RUM

4.1 HILBERT RUM OG DERES GEOMETRI

DEFINITION 4.1.1. Et komplekst vektorrum V kaldes et *indre produktrum* (eller præ-Hilbert rum), når det er forsynet med en funktion $(\cdot, \cdot)$:

$V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, som opfylder følgende fire betingelser for alle $u, v, w \in V$ og $\alpha \in \mathbb{C}$.

(S i) $(u, u) \geq 0$, og $(u, u) = 0$ hvis og kun hvis $u = 0$,

(S ii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,

(S iii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$,

(S iv) $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Funktionen $(\cdot, \cdot)$ kaldes et *indre produkt* eller et *skalarprodukt*.

Vi bemærker, at (S ii), (S iii) og (S iv) medfører at $(\cdot, \cdot)$ er lineær i første variabel og konjugeret lineær (også kaldet semilineær) i anden variabel. Mere alment kalder man en afbildning $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ *sesquilineær* (idet sesqui på latin betyder 1 1/2), når den er lineær i første variabel og semilineær i anden variabel. (Også når skalarlegemet er $\mathbb{R}$ kan man definere indre produkt rum; her benyttes (S i) - (S iv) blot uden konjugeringstegnet.)

EKSEMPEL 4.1.2. For $u = (u_1, \dots, u_n)$ og $v = (v_1, \dots, v_n)$ i $\mathbb{C}^n$ sættes

$$(u, v) := \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i};$$

dette kaldes ofte det hermitiske skalarprodukt.

Idet $C([a, b])$ betegner mængden af kontinuerte komplekse funktioner på intervallet $[a, b]$ kan vi for $f, g \in C([a, b])$ definere

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx;$$

det er let at se at der hermed er defineret et skalarprodukt.

Også betegnelserne $\langle u, v \rangle$, $(u|v)$, $\{u|v\}$ for skalarproduktet forekommer i litteraturen. Da $\langle u, v \rangle$ sommetider benyttes som betegnelse for den bilineære form $\sum_{i=1}^n u_i v_i$ eller $\int_a^b u(x)v(x)dx$ uden konjugering af v ,

bruger vi her (u,v) for den sesquilineære form. I det følgende benyttes ofte $\{...\}$ hvor man ellers skriver $(...)$, for at undgå forveksling med skalarproduktet.

To vektorer u og v i et indre produkt rum V siges at være indbyrdes *ortogonale*, i symboler $u \perp v$, hvis $(u,v) = 0$. En mængde $\{e_i\}_{i \in I}$ af vektorer i V , indiceret ved en vilkårlig indexmængde I kaldes et *ortogonalsystem*, hvis $(e_i, e_j) = 0$ når $i, j \in I$ med $i \neq j$; og det kaldes et *ortonormalsystem*, hvis der tillige gælder $(e_i, e_i) = 1$ for alle $i \in I$.

Lad A være en delmængde af V , $A \subseteq V$. Vi skriver $u \perp A$ hvis $(u,v) = 0$ for alle $v \in A$. Man bemærker, at enhver endelig delmængde af et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i \in I}$ består af lineært uafhængige vektorer, thi hvis $\sum_{i \in I_0} c_i e_i = 0$, hvor $I_0 \subseteq I$ er endelig, så ser man for hvert $i \in I_0$ at $c_i = 0$ ved at tage indre produkt med e_i .

Når $\{x_i\}_{i \in I}$ er et system af vektorer i et vektorrum V , er $\text{span}\{x_i\}_{i \in I}$ defineret som mængden af vektorer i V , der er linearkombinationer af elementerne i $\{x_i\}_{i \in I}$. Det er et lineært underrum af V (når vi siger underrum i det følgende, mener vi altid lineært underrum). Systemet $\{x_i\}_{i \in I}$ kaldes *lineært uafhængigt*, når ethvert endeligt delsystem er lineært uafhængigt.

Lad os indføre betegnelsen $\|u\| := (u,u)^{1/2}$. Vi skal om lidt se, at $\|\cdot\|$ faktisk er en norm.

SÆTNING 4.1.3. ("PYTHAGORAS"). Lad $x_1, \dots, x_n$ være et ortogonalsystem. Da gælder

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

BEVIS: Da $x_i \perp x_j$ for $i \neq j$, gælder $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right) =$

$$\sum_{i,j=1}^n (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^n (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2. \quad \square$$

SÆTNING 4.1.4. (BESSELS APPROKSIMATIONSSÆTNING). Lad $e_1, \dots, e_n$ være et ortonormalsystem i V . For ethvert $x \in V$ findes netop én vektor $u \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ for hvilken $x - u \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, og den er

givet ved

$$u = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i.$$

For en vilkårlig vektor $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ gælder

$$\|x-v\|^2 = \|x-u\|^2 + \sum_{i=1}^n |(x, e_i) - \lambda_i|^2$$

BEVIS: Lad $u \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, altså $u = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$. Så ser vi ved at tage skalarprodukt med hvert e_i , at $x - u \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ medfører $(x, e_i) - \mu_i = 0$ for $i = 1, \dots, n$. Dette viser at $\mu_i = (x, e_i)$ er eneste mulighed; omvendt ses at $\mu_i = (x, e_i)$ for alle i sikrer at $x - u \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Den sidste ligning ovenfor fås af Pythagoras' sætning: Da $x - u \perp u - v$, er

$$\|x - v\|^2 = \|x - u + u - v\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - v\|^2;$$

og da $u - v = \sum_{i=1}^n ((x, e_i) - \lambda_i) e_i$, er

$$\|u - v\|^2 = \sum_{i=1}^n \|((x, e_i) - \lambda_i) e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i) - \lambda_i|^2. \quad \square$$

For $v \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ gælder altså $\|x - v\| \geq \|x - u\|$, og der gælder $>$ når $v \neq u$. Vektoren u er altså den vektor i $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, der har kortest afstand fra x . Den kaldes den *ortogonale projektion* af x på $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

KOROLLAR 4.1.5 (BESSELS ULIGHED). Lad $e_1, \dots, e_n$ være et ortonormal-system i et indre produkt rum V . Da gælder for alle $x \in V$, at

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

BEVIS: Benyt $v = 0$ i Bessels approksimationssætning. $\square$

KOROLLAR 4.1.6 (CAUCHY-SCHWARZ' ULIGHED). Når u og v er vektorer i et indre produkt rum V , gælder

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

BEVIS: Tilfældet $v = 0$ er trivielt, så vi antager at $v \neq 0$. Vektoren

$\frac{v}{\|v\|}$ udgør et ortonormalsystem, så Bessels ulighed for $u \in V$ giver

$$\left| \left(u, \frac{v}{\|v\|} \right) \right|^2 \leq \|u\|^2.$$

hvoraf Cauchy-Schwarz' ulighed følger umiddelbart.

SÆTNING 4.1.7. Et indre produkt rum V er et normeret vektorrum med normen $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

BEVIS: Det eneste ikke trivielle i beviset er trekantsuligheden. Den ses således:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + (u, v) + (v, u) + \|v\|^2, \\ &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v) + \|v\|^2, \\ &\leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2, \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2, \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt Cauchy-Schwarz' ulighed. $\square$

Ved lignende regninger fås PARALLELLOGRAMLOVEN:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Endvidere kan man vise POLARISERINGSIDENTITETEN

$$(u, v) = \frac{1}{4} \left[(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2) \right],$$

der giver en formel for rekonstruktion af skalarproduktet ud fra normen.

Til normen er som bekendt knyttet en metrik på V

$$d(u, v) := \|u - v\|,$$

og vi har begreberne konvergens i V og fuldstændighed af V .

Man siger, at to skalarprodukter er ækvivalente, når de tilknyttede normer (og dermed metrikker) er ækvivalente (jf. Mat 2MA1).

Det bemærkes, at $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert med hensyn til produktmetrikken. Kontinuiteten ved $\{u, v\} \in V \times V$ ses f.eks. således: For alle $u', v' \in V$ gælder:

$$\begin{aligned}
|(u,v) - (u',v')| &= |(u - u', v) + (u', v - v')| \\
&= |(u - u', v) + (u' - u, v - v') + (u, v - v')| \\
&\leq \|u - u'\| \|v\| + \|u - u'\| \|v - v'\| + \|u\| \|v - v'\|,
\end{aligned}$$

så når $\varepsilon \in]0,1]$ er givet, vil dette være $\leq \varepsilon$, når både

$$\|u - u'\| \quad \text{og} \quad \|v - v'\| \leq \frac{\varepsilon}{3(1+\|u\|+\|v\|)}.$$

Specielt ses, at $u \rightarrow (u,v)$ er en kontinuert afbildning fra V til $\mathbb{C}$ for hvert fast $v \in V$.

DEFINITION 4.1.8. Et *Hilbert rum* er et fuldstændigt indre produkt rum.

Man kan vise, at et præ-Hilbert rum $(V, (.,.))$ altid kan fuldstændiggøres til et Hilbert rum, dvs. der findes et Hilbert rum $(H, (.,.))^\sim$ og en lineær afbildning $\phi: V \rightarrow H$ så $\phi(V)$ er tæt i H og så $(\phi(x), \phi(y))^\sim = (x, y)$ for $x, y \in V$. Det følger af, at V kan fuldstændiggøres på entydig måde som et metrisk rum, jf. en opgave, idet vektorrumstrukturen og skalarproduktet "følger med".

To Hilbert rum $H_1 \rightarrow H_2$ siges at være *isomorfe*, hvis der findes en lineær afbildning $U: H_1 \rightarrow H_2$ med hele H_2 som billede, som opfylder

$$(Uv, Uw)_{H_2} = (v, w)_{H_1}, \text{ for alle } v, w \in H_1.$$

U kaldes da en *isometrisk isomorfi*, eller en *unitær operator*.

EKSEMPEL 4.1.9. Lad $L_2([a,b])$ være mængden af målelige, komplekse funktioner på intervallet $[a,b]$ som opfylder $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$, og hvor vi identificerer funktioner som er ens næsten overalt, jf. Mat 2MA1. $L_2([a,b])$ forsynes med det indre produkt

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

hvor integralet er endeligt, da

$$|f(x) \overline{g(x)}| \leq \frac{1}{2} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} |g(x)|^2.$$

Det følger af Fischers fuldstændighedssætning og Sætning II 7.28 i Mat 2MA1, at $L_2([a,b])$ er en fuldstændiggørelse af $\mathbb{C}([a,b])$ med hensyn til normen

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

som svarer til ovennævnte skalarprodukt.

Mere alment er $L_2(X, \mu)$ et Hilbert rum når (X, μ) (kortere skrivemåde for $(X, \mathcal{E}, \mu)$) er et målrum, med skalarprodukt og norm

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu, \quad \|f\| = \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}};$$

og rummet er fuldstændigt på grund af Fischers sætning.

Mængden $\ell_2(\mathbb{N})$ af talfølger $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ bestående af komplekse tal, som opfylder $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$, forsynes med indre produkt og norm

$$(x, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}, \quad \|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

hvormed det er et Hilbert rum. Dette stemmer med at opfatte $\ell_2(\mathbb{N})$ som rummet $L_2(\mathbb{N}, \mu)$, hvor μ er tællemålet.

I forbindelse med diskussionen af ortonormalbaser skal vi se, at der er mange Hilbert rum, som forekommer i praksis, der er isomorfe med $\ell_2(\mathbb{N})$. Man kan da sige, at ℓ_2 er det kanoniske eksempel på et Hilbert rum.

Lad H_1 og H_2 være Hilbert rum, og betragt alle par af vektorer $\{u_1, u_2\}$, hvor $u_1 \in H_1$ og $u_2 \in H_2$. Disse par er elementer af et nyt Hilbert rum med det indre produkt

$$(\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\}) := (u_1, v_1)_{H_1} + (u_2, v_2)_{H_2}$$

Dette Hilbert rum kaldes summen af H_1 og H_2 , og betegnes $H_1 \oplus H_2$.

LEMMA 4.1.10. Lad H være et Hilbert rum, og lad M være en afsluttet konveks delmængde. For hvert $u \in H$ eksisterer en entydig bestemt vektor $v \in M$ tættest ved u , dvs. med $\|u - v\|$ mindst mulig.

BEVIS: Lad $u \in H$, lad $d = \inf_{w \in M} \|u - w\|$, og vælg en følge $\{w_n\}$ af elementer i M , så at $\|u - w_n\| \rightarrow d$. Da gælder

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - u) - (w_m - u)\|^2 \\ &= 2\|w_n - u\|^2 + 2\|w_m - u\|^2 - \|(w_n - u) + (w_m - u)\|^2. \end{aligned}$$

på grund af parallellogramloven. Det sidste led kan skrives

$4\|u - \frac{1}{2}(w_n + w_m)\|^2$, og da $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in M$ (M er jo konveks) følger, at

$$\|w_n - w_m\|^2 \leq 2\|w_n - u\|^2 + 2\|w_m - u\|^2 - 4d^2.$$

Til givet $\varepsilon > 0$ findes N så der for $n \geq N$ gælder $\|w_n - u\| \leq d + \varepsilon$,
hvoraf ses at der for $n, m \geq N$ gælder

$$\|w_n - w_m\|^2 \leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = \varepsilon(8d + 4\varepsilon);$$

dette viser, at $\{w_n\}$ er en Cauchy følge. Da H er fuldstændigt, findes $v \in H$ så $w_n \rightarrow v$, og da M er afsluttet, må $v \in M$. Da $w_n \rightarrow v$, må $\|u - w_n\| \rightarrow \|u - v\|$, altså $\|u - v\| = d$, så v realiserer afstanden fra u til M .

Hvis v og v' er vektorer fra M med $\|u - v\| = \|u - v'\| = d$, må $\|\frac{1}{2}(v + v') - u\| \geq d$, da $\frac{1}{2}(v + v') \in M$. Ved hjælp af parallellogramloven fås

$$\begin{aligned} \|v - v'\|^2 &= \|v - u - (v' - u)\|^2 \\ &= 2\|v - u\|^2 + 2\|v' - u\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(v + v') - u\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\|\frac{1}{2}(v + v') - u\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

altså $v = v'$, hvilket viser entydighedsudsagnet. $\square$

Lad H være et Hilbert rum og M en delmængde, $M \subseteq H$, da er *ortogonalkomplementet* $M^\perp$ til M defineret som

$$M^\perp = \{w \in H \mid w \perp M\}.$$

Bemærk, at $M^\perp$ er et afsluttet underrum af H , da skalarproduktet er kontinuert.

SÆTNING 4.1.11 (DEKOMPOSITIONSSÆTNINGEN). Lad H være et Hilbert rum og X et afsluttet underrum. Da kan ethvert $u \in H$ på entydig måde skrives som $u = v + w$, hvor $v \in X$ og $w \in X^\perp$.

BEVIS: Lad $u \in H$. Af Lemma 4.1.10 fås, at der eksisterer et entydigt bestemt element $v \in X$ tættest ved u . Definér $w := u - v$, dvs. $u = v + w$. Lad $x \in X \setminus \{0\}$ og $t \in \mathbb{R}$. Sættes $d := \|u - v\| (= \|w\|)$, har vi, da $v + tx \in X$,

$$d^2 \leq \|u - (v + tx)\|^2 = \|w - tx\|^2 = d^2 - 2t\operatorname{Re}(w, x) + t^2\|x\|^2.$$

Dette medfører at $-2t \operatorname{Re}(w, x) + t^2 \|x\|^2 \geq 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$, så andengradspolynomiet $p(t) = \|x\|^2 t^2 - 2\operatorname{Re}(w, x)t$ må have $t = 0$ som dobbeltrod, og dermed må $\operatorname{Re}(w, x) = 0$. Da regningerne gælder for x erstattet med ix , sluttet, at også $\operatorname{Im}(w, x) = 0$; hvormed ialt, at $(w, x) = 0$. Da x var vilkårlig i $X \setminus \{0\}$, følger, at $w \in X^\perp$; og vi har dermed vist at u kan dekomponeres i en sum af to vektorer $v \in X$ og $w \in X^\perp$.

For at vise entydigheden af dekompositionen antager vi, at $u = v + w = v' + w'$; heraf følger at $v - v' = w' - w$, og da $v - v' \in X$ og $w' - w \in X^\perp$, som har fællesmængde $\{0\}$, sluttet at $v - v' = w' - w = 0$. $\square$

Dekompositionssætningen giver en naturlig isomorfi mellem $X \times X^\perp$ og H ,

$$\{u, v\} \rightarrow u + v.$$

Vi har altså, at $X + X^\perp = H$, og idet fremstillingen er entydig, siges H at være direkte sum af X og $X^\perp$; det udtrykkes i symboler ofte: $X \oplus X^\perp = H$.

Blandt de mange anvendelser af dekompositionssætningen giver vi her et enkelt eksempel.

I 2MA1 er nævnt rummet $\mathcal{L}(E, F)$ af kontinuerte lineære afbildninger fra det normerede vektorrum E ind i det normerede vektorrum F . Hvis specielt F tages til at være skalarlegemet $\mathbb{L}$, opfattet som et vektorrum med sig selv som skalarlegeme, og normeret med absolutværdien $|\cdot|$, har vi at gøre med rummet af *kontinuerte lineære funktionaler*. Dette rum kaldes det *duale* rum til E og betegnes ofte simpelthen E' . Det duale rum E' til et normeret vektorrum E er således et Banach rum, når det udstyres med normen

$$\|\phi\| := \sup \{ |\phi(x)| \mid \|x\| \leq 1 \},$$

for enhver $\phi \in E'$, jf. 2MA1, allersidst i kap. 1, afsnit 5.

Dette helt generelle begreb kan selvfølgelig også betragtes for et Hilbert rum H . Der gælder da en speciel, og meget nyttig, måde at beskrive H^* på.

SÆTNING 4.1.12 Det duale rum H^* til et Hilbert rum H kan identificeres med H selv, idet enhver kontinuert lineær funktional ϕ på H kan beskrives ved det indre produkt. Der gælder at for enhver $\phi \in H^*$ findes en entydig bestemt vektor $h_\phi \in H$ således at

$$\phi(h) = (h, h_\phi), \quad \text{for alle } h \in H.$$

Denne vektor h_ϕ opfylder at $\|\phi\| = \|h_\phi\|$.

BEVIS: Det er klart at hvis h_0 fastholdes i H , definerer $\phi(h) := (h, h_0)$ en lineær afbildning af H ind i $\mathbb{C}$. Af Cauchy-Schwarz' ulighed (4.1.6) følger at ϕ er begrænset, idet

$$\begin{aligned} \sup \{ |\phi(h)| \mid \|h\| \leq 1 \} &= \sup \{ |(h, h_0)| \mid \|h\| \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|h\| \|h_0\| \mid \|h\| \leq 1 \} = \|h_0\| \end{aligned}$$

altså at $\|\phi\| \leq \|h_0\|$. Hvis $h_0 = 0$, er ϕ selvfølgelig nul-funktionalen og $\|h_0\| = \|\phi\| = 0$. Hvis h_0 ikke er nul, er $h_0/\|h_0\|$ en enhedsvektor, og derfor er $|\phi(h_0/\|h_0\|)| \leq \|\phi\|$. Men $|\phi(h_0/\|h_0\|)| = (h_0/\|h_0\|, h_0) = \|h_0\|^2/\|h_0\| = \|h_0\|$, og det giver os den anden ulighed. Altså er $\|h_0\| = \|\phi\|$.

Hvis vi omvendt antager at $\phi \in H'$ er givet, kan vi forudsætte at ϕ ikke er nul-funktionalen (thi nul-funktionalen kan jo åbenbart repræsenteres ved nul-vektoren i H). Hvis ϕ ikke er identisk nul, så er

$$\ker(\phi) := \{ h \in H \mid \phi(h) = 0 \}$$

en ægte delmængde af H . Det er klart at $\ker(\phi)$ er en konveks mængde, thi hvis $\phi(h') = \phi(h'') = 0$, så er $\phi(th' + (1-t)h'') = t\phi(h') + (1-t)\phi(h'') = 0$. Det følger endvidere af kontinuiteten af ϕ , at $\ker(\phi)$ er afsluttet: hvis $h_n \rightarrow h$ og alle $h_n \in \ker(\phi)$, vil $0 = \phi(h_n) \rightarrow \phi(h)$, så $h \in \ker(\phi)$. Af dekompositionssætningen følger så at $H = \ker(\phi) \oplus (\ker(\phi))^\perp$. Vælg nu en vektor $k_\phi \in (\ker(\phi))^\perp \setminus \{0\}$. Da $\phi(k_\phi)$ ikke er lig 0, kan vi multiplicere k_ϕ med en passende skalar og således opnå at få en vektor l_ϕ i $(\ker(\phi))^\perp$ for hvilken $\phi(l_\phi) = 1$. Lad $h \in H$ være vilkårlig og betragt vektoren $h - \phi(h)l_\phi$. Åbenbart gælder at $\phi(h - \phi(h)l_\phi) = \phi(h) - \phi(h)\phi(l_\phi) = \phi(h) - \phi(h) = 0$, og derfor er $h - \phi(h)l_\phi$ og l_ϕ ortogonale, altså

$$0 = (h - \phi(h)l_\phi, l_\phi) = (h, l_\phi) - \phi(h)(l_\phi, l_\phi) = (h, l_\phi) - \phi(h)\|l_\phi\|^2.$$

Men så er $\phi(h) = (h, l_\phi/\|l_\phi\|^2)$, og hvis vi lader $h_\phi := l_\phi/\|l_\phi\|^2$, har vi fundet en vektor $h_\phi \in H$ for hvilken $\phi(\cdot) = (\cdot, h_\phi)$.

Det er klart at h_ϕ er entydig bestemt, thi hvis $(h, h') = (h, h'')$ for alle $h \in H$, er $\|h' - h''\|^2 = (h' - h'', h' - h'') = 0$.

Vi mangler at indse at h_ϕ har samme norm som ϕ . Men da vi nu kender formen af ϕ , følger dette af bevisets første afsnit.

4.2 ORTONORMALBASER OG PARSEVAL'S LIGNING.

Som tidligere nævnt er et ortonormalsystem i et Hilbert rum H et system $\{e_i\}_{i \in I}$, hvor I er en indexmængde og $(e_i, e_i) = 1$ for alle $i \in I$, $(e_i, e_j) = 0$ for alle i og $j \in I$ med $i \neq j$. Et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i \in I}$ kaldes en *ortonormal basis*, såfremt systemet er maksimalt, dvs. det kan ikke suppleres til et større ortonormalsystem. Et sådant system kaldes også et *fuldstændigt ortonormalsystem*.

SÆTNING 4.2.13 Ethvert Hilbert rum $H \neq \{0\}$ har en ortonormal basis.

BEVIS: Vi benytter her nogle begreber fra mængdelære. Mængden C af ortonormalsystemer i H er en partielt ordnet mængde med hensyn til ordning ved inklusion; den er også ikke-tom, for hvis $v \in H \setminus \{0\}$, da er $\{v/\|v\|\}$ et ortonormalsystem. Lad $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ være en totalt ordnet delmængde af C . Heraf følger, at $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ er et ortonormalsystem, som indeholder hvert S_α , og som derfor er en majorant for $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Vi ser altså at enhver totalt ordnet delmængde har en majorant, og da følger det af Zorns lemma, at C har et maksimalt element. Et sådant er et ortonormalsystem, der ikke kan suppleres til et større ortonormalsystem. $\square$

SÆTNING 4.2.14. Lad $\{e_i\}_{i \in I}$ være et ortonormalsystem i et Hilbert rum H , og lad $x \in H$. Der gælder:

- 1° Mængden $I(x) = \{i \in I \mid (x, e_i) \neq 0\}$ er enten tom eller tællelig
- 2° Lad $i_1, i_2, \dots$ være en ordning af $I(x)$. Da er følgen $s_n := \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}$, såvel som følgen $a_n := \sum_{j=1}^n |(x, e_{i_j})|^2$, konvergente for $n \rightarrow \infty$. Grænseværdierne er uafhængige af valget af ordning af $I(x)$ og betegnes

$$\sum_{i \in I} (x, e_i) e_i, \text{ resp. } \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2,$$

og man har den generaliserede Bessel ulighed

$$\sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

(Hvis $I(x)$ er tom definerer vi $\sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$ som nulvektoren 0 .)

- 3° $x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i \perp e_j$ for alle $j \in I$.

BEVIS: Vi viser først 1°. For hvert $n \in \mathbb{N}$ betragter vi mængden

$$I_n(x) := \{i \in I \mid |(x, e_i)|^2 > \|x\|^2/n\}.$$

På grund af Bessels ulighed indeholder $I_n(x)$ højst $n - 1$ elementer.

Da $I(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(x)$, følger 1°.

Vi viser herefter 2° og 3°; de er oplagte når $I(x)$ er tom, så vi kan antage at $I(x) \neq \emptyset$. Hvis $I(x)$ er endelig, kan vi skrive $I(x) = \{i_1, \dots, i_n\}$ og definere $\sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$ til at være $\sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}$; den nævnte ulighed er Bessels ulighed, og der følger endvidere:

$$\begin{aligned} (x - \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}, e_{i'}) &= (x, e_{i'}) - \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) (e_{i_j}, e_{i'}) = 0 \\ &= \begin{cases} (x, e_{i'}) - (x, e_{i'}) = 0 & \text{for } i' \in I(x) \\ 0 - 0 = 0 & \text{for } i' \in I \setminus I(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Endelig, hvis $I(x)$ er numerabel, vælger vi en ordning af $I(x)$

$$I(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

og sætter $s_n = \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}$ for hvert n . Da $\sum_{j=1}^n |(x, e_{i_j})|^2 \leq \|x\|^2$ for alle n , er rækken $\sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2$ konvergent med sum $\leq \|x\|^2$; dette viser den generelle Bessel ulighed, som også gælder efter omordning, da det er en række med led ≥ 0 .

For $m > n$ er

$$\|s_m - s_n\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^m (x, e_{i_j}) e_{i_j}\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |(x, e_{i_j})|^2.$$

Dette medfører at $\{s_n\}$ er en Cauchy følge i H , og da rummet H er fuldstændigt, konvergerer s_n mod en vektor s , for hvilken altså $s = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_{i_j}) e_{i_j}$. Vi definerer nu $\sum_{i \in I} (x, e_i) e_i = s$. På grund af kontinuiteten af det indre produkt fås

$$\begin{aligned} \left(x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i, e_k \right) &= (x - s, e_k) = (x, e_k) - (s, e_k) \\ &= (x, e_k) - (\lim s_n, e_k) = (x, e_k) - \lim (s_n, e_k) \\ &= \begin{cases} (x, e_k) - (x, e_k) = 0 & \text{for } i' \in I(x) \\ 0 - 0 = 0 & \text{for } i' \in I \setminus I(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Lad os til slut vise, at definitionen af grænseværdien s er uafhængig af hvilken ordning der benyttes. Vi lader $\{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ være en

omordning af $I(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}$ og sætter $s'_n = \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}$.

Analogt med det tidligere følger, at s'_n konvergerer mod en vektor s' , og vi skal da vise, at $s = s'$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og lad $n_0 \in \mathbb{N}$ være valgt så stor, at der for $n \geq n_0$ gælder $\|s_n - s\| < \varepsilon$, $\|s'_n - s'\| < \varepsilon$, og $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2 < \varepsilon^2$.

Der eksisterer $m_0 \in \mathbb{N}$ med $m_0 > n_0$ så at alle led i s_{n_0} findes med i s'_{m_0} , altså så at $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{m_0}}\} = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_0}}\} \cup \{e_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ for en

vis endelig indexmængde A , hvor $\{e_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subseteq \{e_{i_{n_0+1}}, e_{i_{n_0+2}}, \dots\}$. Så

er $s'_{m_0} - s_n = \sum_{\alpha \in A} (x, e_{\alpha}) e_{\alpha}$, med

$$\|s'_{m_0} - s_{n_0}\|^2 \leq \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |(x, e_{i_j})|^2 < \varepsilon^2.$$

så $\|s'_{m_0} - s_{n_0}\| < \varepsilon$, og

$$\|s' - s\| \leq \|s' - s'_{m_0}\| + \|s'_{m_0} - s_{n_0}\| + \|s_{n_0} - s\| < 3\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårlig, følger at $s' = s$. $\square$

Ortonormalsystemer er særligt interessante, hvis de er maksimale, hvilket følgende sætning demonstrerer.

SÆTNING 4.2.15. Lad H være et Hilbert rum og lad $\{e_i\}_{i \in I}$ være et ortonormalsystem i H . Da er følgende fire udsagn ækvivalente:

- (1) $\{e_i\}$ er maksimalt (også kaldet fuldstændigt).
- (2) Når $x \in H$ og $x \perp e_i$ for alle $i \in I$, så er $x = 0$.
- (3) For ethvert $x \in H$ gælder $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$.
- (4) For ethvert $x \in H$ gælder PARSEVALS LIGNING:

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, e_i)|^2.$$

BEVIS: (1) $\Rightarrow$ (2). Hvis (2) ikke er sand, eksisterer der en vektor $x \neq 0$, så at $x \perp \{e_i \mid i \in I\}$. Lad os definere e ved $e = x/\|x\|$, så har vi at $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$ er et ortonormalsystem, som indeholder $\{e_i\}_{i \in I}$ som en ægte delmængde. Dette modsiger maksimaliteten af $\{e_i\}_{i \in I}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Af sætning 4.2.14 følger, at $x - \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i \perp e_k$ for alle $k \in I$, så (2) medfører at $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Idet $I(x)$ og en ordning (i_j) defineres som i sætning 4.2.14, får vi ved brug af Bessels approksimationssætning med $v = 0$, for hvert n :

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x - \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}\|^2 + \sum_{j=1}^n \|(x, e_{i_j}) e_{i_j}\|^2 \\ &= \|x - \sum_{j=1}^n (x, e_{i_j}) e_{i_j}\|^2 + \sum_{j=1}^n |(x, e_{i_j})|^2;\end{aligned}$$

her går det første led mod 0 ifølge (3), og dermed det andet led mod $\|x\|^2$, for $n \rightarrow \infty$. Altså er $\|x\|^2 = \sum_j |(x, e_{i_j})|^2$. (Når $I(x)$ har endeligt mange elementer, tages blot $n = \text{antallet}$, og første led ovenfor er 0.)

(4) $\Rightarrow$ (1). Hvis $\{e_i\}_{i \in I}$ ikke er maksimal, da er det en ægte delmængde af et ortonormalsystem $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e\}$. Da $e \perp e_i$ for $i \in I$ og $\|e\| = 1$, er Parsevals ligning ikke opfyldt for $x = e$.

Lad $\{e_i\}_{i \in I}$ være en ortonormal basis for Hilbert rummet H og x en vilkårlig vektor i H . Da kaldes tallene (x, e_i) *Fourierkoefficienterne* (eller ortogonalkoefficienterne) for x , og udtrykket $x = \sum_{i \in I} (x, e_i) e_i$ kaldes *Fourierrækken* eller ortogonal-udviklingen for x .

Vi vil nu beskrive en metode til at konstruere et ortonormalsystem ud fra en vilkårlig følge af lineært uafhængige vektorer.

SÆTNING 4.2.16 (GRAM-SCHMIDT ORTONORMALISERING). Givet et lineært uafhængigt system $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i et Hilbert rum H . Ved proceduren:

$$\begin{aligned}e_1 &\text{ fås ved normering af } x_1, \text{ dvs. } e_1 = x_1 / \|x_1\|, \\ e_2 &\text{ fås ved normering af } x_2 - (x_2, e_1) e_1, \\ &\vdots \\ e_n &\text{ fås ved normering af } x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i, \\ &\vdots\end{aligned}$$

defineres et ortonormalsystem, som udspænder det samme underrum som $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

BEVIS: Følgen $e_1, e_2, \dots$ er ortonormal, da hver af vektorerne er normeret og ortogonal på alle de foregående. Lad $U_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, så vil vi vise, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = U_n; \quad (P_n)$$

heraf følger sætningen.

Beviset føres ved induktion. Det er klart at (P_1) gælder. Idet vi antager (P_n) , skal vi vise (P_{n+1}) .

For vilkårlige $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, er $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \neq 0$, idet $x_{n+1} \notin U_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ (jf. (P_n)). Endvidere gælder

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_n, (x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = U_{n+1},$$

idet hver af vektorerne $e_1, \dots, e_n, (x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)$ er en linearkombination af $x_1, \dots, x_{n+1}$, og omvendt. Udsagnet gælder stadig hvis $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ erstattes af den normerede vektor.

Med $\lambda_i = (x_{n+1}, e_i)$ for $i = 1, \dots, n$, opnås at $x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ er ortogonal på $e_1, \dots, e_n$, altså er $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ ortonormal, og (P_{n+1}) er vist. $\square$

Jørgen P Gram (1850-1916) var en dansk matematiker og aktuar, Erhard Schmidt (1876-1959) tysk matematiker.

I Mat 2MA1 indførtes begrebet *separabelt metrisk rum*. Man kan vise, at et Hilbert rum er separabelt hvis og kun hvis der eksisterer en tællelig ortonormal basis; dette er tilfældet for de fleste Hilbert rum som forekommer i praksis.

4.3 ORTOGONALPROJEKTIONER

Vi minder først om vor tidligere brug af ordet projektion: I et generelt vektorrum V er en *projektion* $P : V \rightarrow V$ en lineær afbildning, for hvilken $P = P^2$; om denne egenskab bruges også glosen *idempotent*. Bemærk at $P = P^2$ hvis og kun hvis $(I-P)^2 = I-P$, d.v.s. at P er en projektion hvis og kun hvis $I-P$ er en projektion. (Kun én implikation kræver bevis, fordi $I-(I-P) = P$. Men hvis $P = P^2$, så er $(I-P)^2 = I + P^2 - 2P = I + P - 2P = I - P$).

En mere geometrisk beskrivelse af projektioner får vi hvis vi tager udgangspunkt i en opspaltning af V i en direkte sum af underrum

$$V = U \oplus W.$$

Vi kan så definere en projektion $P_{U,W}$ med billedrum U og kerne W

ved for vilkårligt $x = u + w \in V$ at sætte

$$P_{U,W}(x) := u,$$

altså bruge første"koordinaten" i opsplittningen $x = u + w$ som billedpunkt, samt sende andenkoordinaten i nul.

OPGAVE Vis at der herved er defineret en projektion, altså at $P_{U,W}^2 = P_{U,W}$.

Bemærk at hvis U foreligger, er der mange måder at vælge W på, så $V = U \oplus W$ (tænk blot på sætningen om at supplere en basis for U op til en basis for V ; påstanden kan også illustreres med en tegning af $\mathbb{R}^2$). Der er altså mange projektioner af V på U . Det er derfor vi specificerer både U og W i notationen $P_{U,W}$.

For projektioner gælder at $\ker P = (I-P)V$, altså at kernen for en projektion P er lig billedrummet for $I-P$. (Bevis: $Px = 0$ hvis og kun hvis $(I-P)x = x$ hvis og kun hvis $x \in (I-P)V$).

For enhver linear afbildning $A : V \rightarrow V$, (uanset om V er et endelig eller uendelig dimensionalt vektorrum), gælder åbenbart at

$$V = AV + (I-A)V.$$

Det specielle ved en projektion P er at $(I-P)V = \ker P$, og at $PV \cap (I-P)V = \{0\}$, altså

$$V = PV \oplus \ker P.$$

(At denne ligning gælder for en projektion P , kan indses sådan: hvis $x \in PV \cap (I-P)V$, er $x = Px = (I-P)Px = 0$. Og da $V = PV + (I-P)V$ jo altid gælder, er vi færdige). Omvendt vil kravet $v = Pv + w$, med $w \in \ker P$, for alle $v \in V$, til en afbildning P tvinge P til at være en projektion - se selv efter, jf. ovenfor!

Hvis V er et rum med indre produkt $(\cdot, \cdot)$, har vi mulighed for at fremhæve visse projektioner, nemlig dem for hvilke billedrum og kerne er ortogonale.

DEFINITION 4.3.3 I et rum med indre produkt er en projektion P en orthogonalprojektion hvis og kun hvis $PV \perp \ker P$. (Her skal $\perp$ selvfølgelig opfattes som "ortogonal mht. det foreliggende indre produkt $(\cdot, \cdot)$ ").

Da $\ker P = (I-P)V$, ser vi at en projektion P er orthogonal hvis og

kun hvis billedrummene PV og $(I-P)V$ opfylder at $PV \perp (I-P)V$.

SÆTNING 4.3.4 En projektion P (altså en lineær afbildning P der opfylder at $P = P^2$) er en ortogonalprojektion hvis og kun hvis

$$(x, Py) = (Px, y) = (Px, Py) \text{ for alle } x, y \in V.$$

BEVIS: Antag $(x, Py) = (Px, y)$ for alle $x, y \in V$. Lad $x \in \ker P$. Så er $(Px, y) = 0$ og derfor $(x, Py) = 0$ for alle $y \in V$. Altså slutter vi at $\ker P \perp PV$. Derfor er P ortogonal.

Hvis P er ortogonal, gælder at $PV \perp \ker P = (I-P)V$. Hvis $x, y \in V$, vil $(x, Py) = (Px + (I-P)x, Py) = (Px, Py)$. Tilsvarende vil $(Px, y) = (Px, Py)$. Dermed er sætningen vist.

Lad $U \subseteq V$ være et givet afsluttet underrum i Hilbert rummet V . Lad P betegne ortogonalprojektion af V på U . Vi har altså valgt at opspalte

$$V = U \oplus U^\perp,$$

og lade $\ker P = U^\perp$. For vilkårlig $x \in V$ gælder da at ortogonalprojektion Px er den entydig bestemte vektor i U , der ligger *nærmest* x , jf. Dekompositionssætningen.

Lad Q være en *vilkårlig* projektion af V på U . Projektionen Q giver os en opspaltning

$$V = U \oplus W,$$

med $QV = U$ og $\ker Q = W$, men vi forudsætter intet om hvordan W ligger i forhold til U . Vi kan formulere Dekompositionssætningen med $y = Qx$.

KOROLLAR 4.3.5 $\|x - Px\| \leq \|x - Qx\|$, for vilkårlig $x \in V$ og vilkårlig projektion Q på U .

Det er denne simple observation, der ligger til grund for mindste kvadraters metode.

MINDSTE KVADRATERS METODE

Antag vi har et lineært reelt ligningssystem bestående af N ligninger med n ubekendte (hvor $n \leq N$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{Nn}x_n = b_N$$

På matrixform ser det sådan ud:

$$A x = b,$$

hvor $A := [a_{ij}]$ er koefficientmatricen, af størrelse $N \times n$, mens $x \in \mathbb{R}^n$ og $b \in \mathbb{R}^N$. Hvis vi lader a_j betegne den j .te søjle i A , kan vi også skrive

$$\sum_{j=1}^n x_j a_j = b.$$

At løse denne ligning betyder altså: Find en linearkombination af vektorerne $\{a_1, \dots, a_n\}$, som netop giver os vektoren b .

Det er klart at dette kan lade sig gøre netop når $b \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. Princippet i "mindste kvadraters metode" er da simpelthen: Find den vektor i $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, der ligger nærmest ved b . I lys af Dekompositionssætningen er den ortogonale projektion af b på underrummet $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ den vektor i $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, der ligger nærmest b (specielt b selv, hvis $b \in \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$). I mindste kvadraters metode erstatter man b med dennes ortogonalprojektion Pb på $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. Det derved opståede ligningssystem

$$A x = Pb$$

løses.

Dette gør vi dog her kun i det tilfælde hvor A har rang n , altså hvor sættet $\{a_1, \dots, a_n\}$ er lineært uafhængigt og således udgør en basis for $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$. Til gengæld vil vi acceptere et vilkårligt, givet indre produkt i talrummet $\mathbb{R}^N$, betegnet som sædvanlig med $(\cdot, \cdot)$.

Lad $\{e_1, \dots, e_N\}$ være standardbasen i $\mathbb{R}^N$. Lad $D := [(e_i, e_j)]$. Da vi regner reelt, er D en symmetrisk matrix, dvs. $D' = D$. Endvidere kan vi udtrykke det indre produkt ved matrixmultiplikation som følger:

$$(*) \quad (x, y) = \left(\sum_j x_j e_j, \sum_p y_p e_p \right) = \sum_{j,p} x_j y_p (e_j, e_p) = x' D y.$$

For en vilkårlig ortogonalprojektion P får vi heraf og af sætning 4.3.4 at

$$(x, Py) = (Px, y) = x' D Py = (Px)' D y.$$

Lad $U := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ være det n dimensionale underrum der udspændes af søjlerne i koefficientmatricen A (heri ligger som allere-de nævnt at vektorerne $a_1, \dots, a_n$ er lineært uafhængige). Vi skal give en formel for ortogonalprojektion P på U . Da $U = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} =$

$\mathbb{R}^n$, kan vi opfatte A som den lineære afbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^N$, der er repræsenteret ved koefficientmatricen A . Vi antager altså at A har en matrixrepræsentation ved en $N \times n$ matrix af rang n .

Da A har rang n , er den injektiv (Ax er jo en linearkombination af søjlerne i A og disse søjler er lineært uafhængige, så den eneste mulighed for $Ax = 0$ er $x = 0$). Den transponerede A' er en $n \times N$ matrix, og repræsenterer således en afbildning fra $\mathbb{R}^N$ til $\mathbb{R}^n$. Altså er $A'DA : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vi påstår denne afbildning er invertibel. Dertil er det nok at indse at den er injektiv, fordi dimensionsformlen fortæller os at $\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker(A'DA) + \dim A'DA(\mathbb{R}^n)$. Hvis $A'DAx = 0$, så er $x' A'DAx = 0$. Men af (*) fås så at

$$0 = x' A'DAx = (Ax)'DAx = (Ax, Ax),$$

så $Ax = 0$. Da A er injektiv, får vi $x = 0$. Altså er $(A'DA)$ invertibel.

Hvis nu P er ortogonalprojektion på underrummet $U = A\mathbb{R}^n$, vil der gælde at $A\mathbb{R}^n \perp (I-P)\mathbb{R}^N$, altså for vilkårlig $x \in \mathbb{R}^n$ og $b \in \mathbb{R}^N$:

$$0 = (Ax, (I-P)b) = (Ax)'D(I-P)b = x'A'Db - x'A'DPb,$$

hvoraf, da $x \in \mathbb{R}^n$ og $b \in \mathbb{R}^N$ er vilkårlige,

$$A'D = A'DP.$$

For $Pb \in A\mathbb{R}^n$ er der et $u \in \mathbb{R}^n$ for hvilket $Au = Pb$, så

$$A'Db = A'DPb = A'D(Au) = A'DAu.$$

Så er $u = (A'DA)^{-1}A'Db$, hvoraf

$$Pb = Au = A(A'DA)^{-1}A'Db.$$

Det er dette sidste udtryk for Pb , der erstatter b i den oprindelige ligning, når mindste kvadraters metode benyttes. Bemærk at kun de foreliggende størrelser A og D indgår i formelen for Pb .

EKSEMPEL 4.3.6 Et system bestående af tre lineære ligninger med to ubekendte x_1 og x_2 foreligger:

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

Med koefficientmatricen $A := [a_1 \ a_2]$, hvor $a_1' := \langle 1, 2, 1 \rangle$ og $a_2' := \langle 1, 1, 2 \rangle$, er opgaven altså at undersøge om højresiden $\langle 4, 8, 5 \rangle \in \text{span}(a_1, a_2)$, og i bekræftende fald finde denne linearkombination. Det er nemt at se (prøv!) at dette ikke kan lade sig gøre. I stedet vil vi finde den linearkombination af a_1 og a_2 der ligger nærmest ved

$\langle 4, 8, 5 \rangle$, regnet i den norm, det sædvanlige indre produkt

$$((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) := \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$$

inducerer, altså den sædvanlige euklidiske norm, eller ℓ^2 -normen, på $\mathbb{R}^3$.

Lader vi P betegne ortogonalprojektionen på $U := \text{span}\{a_1, a_2\}$, bemærker vi først at U er to-dimensionalt, da a_1 og a_2 er lineært uafhængige (kontroller!). Altså kan ovenstående formel benyttes til beregning af $P \langle 4, 8, 5 \rangle'$. Den der nævnte matrix D er åbenbart enhedsmatricen I , når den kanoniske basis benyttes (thi denne basis er jo en ONB mht. sædvanligt indre produkt). Altså får vi at

$$\begin{aligned} P \langle 4, 8, 5 \rangle' &= A(A'DA)^{-1}A'D\langle 4, 8, 5 \rangle' = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1/11 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 7 \end{bmatrix} = 1/11 \begin{bmatrix} 47 \\ 87 \\ 54 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har hermed fundet at den vektor i U , der er nærmest (i kvadratisk middel, dvs. i ℓ^2 -norm i $\mathbb{R}^3$) ved vektoren $\langle 4, 8, 5 \rangle'$, er vektoren $(\langle 47, 87, 54 \rangle' / 11)$. Bemærk at vi også kan aflæse at denne nærmeste vektor er linearkombinationen $1/11(40\langle 1, 2, 1 \rangle' + 7\langle 1, 1, 2 \rangle')$ af de udspændende vektorer $\langle 1, 2, 1 \rangle'$ og $\langle 1, 1, 2 \rangle'$.

I Stat 1 bliver denne teknik benyttet, også for andre valg af indre produkt.

OPGAVER TIL KAPITEL 4

4.1. Undersøg om følgende definitioner giver et indre produkt

$((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ i det reelle vektorrum $\mathbb{R}^2$: (her er $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ vilkårlige vektorer i $\mathbb{R}^2$)

a) $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1 y_2 + x_2 y_1$

b) $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$

4.2 Lad V være et *reelt* vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $x \perp y$ hvis og kun hvis $\|x+y\| = \|x-y\|$. Tegn!

4.3 Lad V være et *komplekst* vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $x \perp y$ hvis og kun hvis $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ for alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

4.4 Lad V være et vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Tegn!

4.5 Lad $\{e_1, e_2, e_3\}$ være en ortonormalbasis i et tre-dimensionalt rum V . Lad $U := \text{span}\{e_1 + e_2 + e_3\}$. Find en ortonormalbasis for $U^\perp$.

4.6 Lad a, b, c være vektorer i et rum V med indre produkt. Forudsæt at a og b er lineært uafhængige. Find ortogonalprojektionen af c på $\text{span}\{a, b\}$.

4.7 Lad U_1, U_2 være underrum af et endelig dimensionalt vektorrum V med indre produkt. Vis at

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

og at

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

4.8 a) Vis at hvis en projektion P er en positiv afbildning (i den forstand at dens matrixrepræsentation i en eller anden basis er en positiv matrix), så er billedrummet PV 1-dimensionalt.

b) I hvilke rum er identitesafbildningen positiv (i samme forstand som i a))?

4.9 Vis at en lineær afbildning $A : V \rightarrow V$, hvor V er et endelig dimensionalt vektorrum med indre produkt, hvori der er givet en ONB α , er en ortogonalprojektion hvis og kun hvis ${}_\alpha[A]_\alpha = [a_{ij}]$, hvor $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, for alle i, j ($\bar{}$ er kompleks konjugering)

og $a_{ij} = \sum_p a_{ip} a_{pj}$, for alle i, j .

4.10 I $\mathbb{R}^2$ med sædvanligt indre produkt og med standardbasen som ONB skal du opskrive matrixrepræsentationen (i standardbasen) for ortogonalprojektionen på vinkelhalveringslinien i 1. & 3. kvadrant.

4.11 a) Find ved mindste kvadraters metode den linearkombination af

(1,1,2) og (1,-1,-1), der ligger nærmest ved (3,1,2).

b) Samme spørgsmål, men med det indre produkt $(\cdot, \cdot)$, hvis matrix D er følgende:

$$D := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hvad er (x, y) i dette indre produkt?

4.12 Som opg. 61: find den linearkombination af (1,2,1,0), (2,0,-1,1), (2,-1,0,-1), der er nærmest ved (0,3,0,0)

4.13 Lad V være et vektorrum med indre produkt og lad V_1 og V_2 være underrum af V . Lad P_1 være ortogonalprojektion på V_1 og P_2 være ortogonalprojektion på V_2 . Vis at $V_1 \perp V_2$ hvis og kun hvis $P_1 P_2 = 0$.

4.14 Find et udtryk for ortogonalprojektion af $\mathbb{R}^3$ på det af (1,0,2) og (1,1,0) udspændte underrum, idet sædvanligt indre produkt benyttes. Opskriv en 3x3 matrixrepræsentation (i standardbasen) for denne projektion.

4.15 Lad V være et normeret vektorrum med normen betegnet med $\|\cdot\|$. Lad $f: V \rightarrow V$ være en lineær afbildning. Hvis $\|f(x)\| = \|x\|$ for alle $x \in V$, kaldes f en *isometri*.

a) Vis at med sædvanlig operatornorm ($\|f\| := \sup\{\|f(x)\|\}$, med x gennemløbende mængden hvor $\|x\| \leq 1$) gælder at hvis f er en isometri, så er $\|f\| = 1$.

b) Vis at hvis f er en isometri, så er f^2 også en isometri (her er f^2 som sædvanlig betegnelsen for den sammensatte afbildning: $f^2(x) := f(f(x))$ for alle $x \in V$).

c) Vis at hvis f er en isometri, så er $r(f) = 1$, hvor $r(f)$ er spektralradius.

d) Antag nu yderligere at V er et rum med indre produkt og at f er en ortogonalprojektion. Kan f være en isometri?

4.16 Betragt det endelig dimensionale komplekse Hilbert rum $H = \mathbb{C}^n$, med det hermiteske skalarprodukt $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$, hvor $u = (u_1, \dots, u_n)$ og $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ (eksempel 1.2). Vis, at når vi definerer $e^{(i)}$ ved $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1)$, så er $\{e^{(i)}\}_{i=1}^n$ en ortonormal basis for H .

4.17 Vis, at $\{\sin n\theta\}_{n \in \mathbb{N}}$ udgør et ortonormalsystem i $L_2([0, \pi])$.

4.18 Lad os definere polynomier $p_0(x), p_1(x), \dots$ ved at kræve, at $p_n(x)$ er et polynomium af grad n i én variabel, koefficienten for

x^n er 1 og $\{p_n\}$ er et ortogonalsystem i $L_2([0,1])$. Find $p_0(x)$, $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

4.19 Lad V være et indre produkt rum. Vis, at det indre produkt kan udvides til fuldstændiggørelsen $\hat{V}$, og at $\hat{V}$ også er et indre produkt rum.

4.20 Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, således at $\int_0^\pi |\cos\theta - \sum_{n=1}^3 a_n \sin n\theta|^2 d\theta$ får den mindst mulige værdi.

4.21 Vis, at $\{\sin(n - \frac{1}{2})\theta\}_{n \in \mathbb{N}}$ udgør et ortogonalsystem i $L_2([0, \pi])$.

4.22 Vis, at det indre produkt kan fås fra normen gennem polariserings-identiteten.

$$(u, v) = \frac{1}{4} [\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2)] .$$

4.23 Lad X være et underrum af et Hilbert rum H . Vis, at $X^\perp$, ortogonalkomplementet til X , er et afsluttet underrum, og at $(X^\perp)^\perp$ er afslutningen af X (også betegnet $\bar{X}$).

4.24 Vis, at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \log \theta \sin n\theta d\theta = 0$.

(Vink. Dette kan fås som et korollar til Bessels ulighed, i forbindelse med ortogonalsystemet i Opg. 18)

4.25 Lad $\{e_i\}_{i \in I}$ være en ortonormal basis for Hilbert rummet H . Vis at følgende generalisering af Parsevals ligning gælder, for alle $x, y \in H$: $\sum_{i \in I} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} = (x, y)$.

4.26 Lad H være et Hilbert rum og $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H . Antag, at $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er et ortonormalt system som opfylder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty .$$

Undersøg om $\{f_n\}$ er en ortonormal basis for H . (Vink. Vis, at $|(e_j - f_j, e_i)| = |(e_i - f_i, f_j)|$ for alle i og j . Udnyt dette til at vise, at

$$\sum_j |(e_i - f_i, f_j)|^2 = \|e_i - f_i\|^2$$

for alle i , og slut heraf, at

$$\sum_j (e_i - f_i, f_j) f_j = e_i - f_i \quad \text{for alle } i .)$$

Bemærkning. Yderligere oplysninger kan findes i en artikel af N.Tsao

"Approximate bases in a Hilbert space" Amer. Math. Monthly 75 (1968) s.750.

4.27 Lad V betegne vektorrummet af komplekse følger $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ som er 0 fra et vist trin. Definér $(\cdot, \cdot): V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ved

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

(a) Gør rede for at V er et vektorrum og at $(\cdot, \cdot)$ er et indre produkt på V .

(b) Lad $\|\cdot\|$ betegne normen i V , som induceres af $(\cdot, \cdot)$ og sæt

$$M = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n} = 0 \}.$$

Vis, at M er et afsluttet underrum af $(V, \|\cdot\|)$, og at $M \oplus M^{\perp} \neq V$.

(c) I forbindelse med dekompositionssætningen vises det, at hvis H er et Hilbert rum og X er et afsluttet underrum af H , så vil

$$H = X \oplus X^{\perp}.$$

Undersøg, om dette resultat er sandt i et indre produkt rum.

4.28 Sæt $V = \{f \in C([0,1]) \mid f(1) = 0\}$, $M = \{f \in V \mid \int_0^1 xf(x)dx = 1\}$

Vis, at

1° $(V, \|\cdot\|_u)$ er et Banach rum.

2° M er en afsluttet, konveks og ikke tom delmængde.

3° For alle $\phi \in M$ gælder at

$$\|\phi\| > \inf\{\|f - 0\|_u \mid f \in M\}.$$

Lad H være et Hilbert rum, M en afsluttet konveks, ikke tom delmængde af G , og $u \in H$. Så findes ifølge Lemma 1.10 en entydigt bestemt vektor $v \in M$ tættest ved u . Undersøg, om dette resultat gælder i et Banach rum.

4.29 Lad H være et Hilbert rum, og $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H . Antag, at $A: H \longrightarrow H$ er lineær, og at

$$\sum_n \|Ae_n\| < \infty$$

Undersøg, om A er kontinuert.

4.30 Den generaliserede polariseringsidentitet.

Lad H være et Hilbert rum over $\mathbb{C}$.

Antag $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $a^n = 1$ og $a^2 \neq 1$. Vis, at

$$(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x + a^k y\|^2 a^k$$

4.31 Et ikke-separabelt Hilbert rum.

Lad E betegne vektorrummet over $\mathbb{C}$ af alle reelle funktioner f af formen

$$f(t) = a_1 e^{ib_1 t} + \dots + a_n e^{ib_n t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Vis, at

$$(f, g) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^M f(t) \overline{g(t)} dt$$

eksisterer og er et indre produkt på E . Vis, at hvis f er som i (*), så vil

$$\|f\|^2 = (f, f) = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2.$$

Vis endelig, at fuldstændiggørelsen af E er et ikke-separabelt Hilbert rum.

4.32 Lad m være restriktionen af Lebesgue målet til

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Vis, at $1, z, z^2, \dots$ er ortogonale vektorer i $L_2(D_1, m)$. Bestem $\|z^n\|$.

Lad $e_n = \frac{z^n}{\|z^n\|}$. Undersøg, om $\{e_0, e_1, \dots\}$ er en ortonormal basis for $L_2(D_1, m)$.

4.33 Lad V være et normeret komplekst vektorrum, dvs. et komplekst vektorrum med en norm $\|\cdot\|$ som opfylder

1) $\|u\| \geq 0$; og $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$;

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;

når $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{C}$. Vis at V er et indre produktrum hvis normen $\|\cdot\|$ opfylder parallellogramloven

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

(Vink. Benyt polariseringsidentiteten (jf. side 1.4) til definition af et indre produkt, som skal vises at opfylde Definition 1.1. Eftervis

først (S i) og (S(iv), og dernæst (Sii) (tag realdelen først); slut heraf (Siii) for rationale α og benyt kontinuiteten af normen.)

5. LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER

5.1 LINEÆRT DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEM AF FØRSTE ORDEN.

I dette kapitel skal E betegne identitetsafbildningen ($Ex = x$), hhv. enhedsmatricen (af relevant dimension), fordi $I \subseteq \mathbb{R}$ skal være et begrænset eller ubegrænset åbent interval. Endvidere skal V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$, udstyret med max-normen (jf. kap. 1). Lad $f(t, x): I \times V \rightarrow V$ være en kontinuert funktion. Differentialligningen

$$x'(t) = f(t, x)$$

eller, skrevet ud i koordinater, differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_k) \\ \dots \\ \frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \dots, x_k) \end{cases}$$

kaldes som bekendt et *lineært første ordens differentialligningssystem*, hvis funktionerne $f_1, \dots, f_k$ er førstegradspolynomier i $x_1, \dots, x_k$, altså hvis systemet har formen

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1k}(t)x_k + q_1(t) \\ \dots \\ \frac{dx_k}{dt} = p_{k1}(t)x_1 + \dots + p_{kk}(t)x_k + q_k(t) \end{cases}$$

hvor funktionerne $p_{ij}(t)$ og $q_i(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, afhængigt af om V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$. Hvis funktionerne $q_i(t)$ alle er 0, kaldes systemet *homogent*, ellers *inhomogent*. Indfører vi matrixnotation og lader

$$P(t) := [p_{ij}(t)],$$

samt $q(t) := [q_i(t)]$ (søjlevektor), er ligningssystemet altså givet som

$$x'(t) = P(t) x(t) + q(t).$$

(Af typografilettelsesmæssige grunde bruger vi i dette kapitel oftest betegnelsen $'$ for afledet, snarere end d/dt , eller den for økonomer traditionelle $\dot{x}$).

En *løsning* til dette system er en C^1 -funktion $\phi: J \rightarrow V$ (hvor $J \subseteq I$ er et åbent interval), for hvilken $\phi'(t) = P(t) \phi(t) + q(t)$ for

alle $t \in J$.

Af Eksistens- og entydighedssætningen s. 8.8, 2MA noterne, følger

SÆTNING 5.1 For et lineært differentiaalligningssystem af første orden

$$x'(t) = P(t) x(t) + q(t),$$

hvor $P : I \rightarrow \mathcal{L}(V)$ og $q : I \rightarrow V$ er kontinuerte, gælder at gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in I \times V$ går en og kun een maksimal løsning $\phi : I \rightarrow V$. Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning.

Strukturen af mængden af maksimale løsninger er ret let at beskrive.

SÆTNING 5.2 De maksimale løsninger til et lineært, homogent ligningssystem

$$x'(t) = P(t) x(t), \quad t \in I,$$

bestående af k ligninger med k ubekendte funktioner udgør et k -dimensionalt vektorrum (over det foreliggende skalarlegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Samtlige løsninger til det tilsvarende inhomogene system

$$x'(t) = P(t) x(t) + q(t), \quad t \in I$$

fås ved til een løsning til systemet at addere samtlige løsninger til det homogene system.

BEVIS: Det er klart, at hvis ϕ er en løsning, er $a\phi$ en løsning ($a \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og hvis ϕ og ψ er løsninger, er $\phi + \psi$ en løsning. Dette viser, at løsningerne udgør et underrum i vektorrummet af alle funktioner $\phi : I \rightarrow V$.

Vi betegner vektorrummet bestående af alle maksimale løsninger med L . Vælg nu et fast $t_0 \in I$ og betragt afbildningen $\phi \rightarrow \phi(t_0) : L \rightarrow V$, altså den afbildning, der til hver løsning ϕ lader svare dens værdi i t_0 . Denne afbildning er åbenbart lineær, og da der for hvert $x \in V$ findes en og kun een maksimal løsning ϕ , for hvilken $\phi(t_0) = x$, er den bijektiv (altså surjektiv og injektiv). Den er således en isomorfi og V og L har derfor samme dimension.

Sætningens anden påstand er en øvelse.

Bemærk at en konsekvens af beviset for sætning 5.2 er at et sæt af k løsninger $\phi_1, \dots, \phi_k$ er en basis for løsningsrummet L , hvis og kun hvis vektorerne $\phi_1(t_0), \dots, \phi_k(t_0)$ for eet $t_0 \in I$ er en basis for

V , og at disse vektorer da for *ethvert* $t_0 \in I$ er en basis for V .

Den ved k løsninger $\phi_1, \dots, \phi_k$ bestemte matrix

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \cdots \phi_{k1}(t) \\ \vdots \\ \phi_{1k}(t) \cdots \phi_{kk}(t) \end{pmatrix},$$

hvis søjler er $\phi_1, \dots, \phi_k$ (bemærk at første index bliver søjleindex og andet index rækkeindex) er altså invertibel for *alle* $t \in I$, hvis løsningerne danner basis for løsningsrummet, og ellers singulær for alle $t \in I$. Hvis den er invertibel, kaldes $\Phi(t)$ en *fundamentalmatrix*. Ud fra en fundamentalmatrix bestemmes samtlige løsninger til det homogene ligningssystem som linearkombinationer, altså ved

$$x(t) = \Phi(t)a = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \cdots \phi_{k1}(t) \\ \vdots \\ \phi_{1k}(t) \cdots \phi_{kk}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad a \in V$$

Vælger man specielt $\Phi(t)$ sådan at $\Phi(t_0) = E$, dvs vælger man som basis $\phi_1, \dots, \phi_k$ for løsningsrummet de k løsninger, for hvilke $\phi_1(t_0), \dots, \phi_k(t_0)$ er de k enhedsvektorer i standardbasen, vil $x(t) := \Phi(t)x_0$ for vilkårligt $x_0 \in V$ være løsningen gennem (t_0, x_0) .

SÆTNING 5.3 Ud fra en fundamentalmatrix $\Phi(t)$ for det homogene ligningssystem bestemmes samtlige løsninger til det inhomogene ligningssystem

$$x'(t) = P(t)x(t) + q(t), \quad t \in I,$$

idet $t_0 \in I$, ved

$$x(t) = \Phi(t)a + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1} q(\tau) d\tau, \quad t \in I.$$

Vælger man $\Phi(t)$ så $\Phi(t_0) = E$, fås for $a = x_0$ den løsning, der går gennem (t_0, x_0) .

BEVIS: Vi benytter "de arbitrære konstanter variationsmetode". Da $\Phi(t)$ er invertibel for alle $t \in I$, kan *enhver* funktion $\phi(t) : I \rightarrow V$ på en og kun på een måde skrives på formen $\phi(t) = \Phi(t) \psi(t)$, nemlig ved at sætte $\psi(t) = \Phi(t)^{-1} \phi(t)$. Da elementerne i $\Phi(t)$ er differentiable, bliver $\phi(t)$ og $\psi(t)$ differentiable samtidig. Med $\phi(t) = \Phi(t) \psi(t)$ er $\phi'(t) = P(t) \phi(t) + q(t)$ hvis og kun hvis

$$\Phi(t) \psi'(t) + \Phi'(t) \psi(t) = P(t) \Phi(t) \psi(t) + q(t).$$

Hver søjle i $\Phi(t)$ er løsning til det homogene system; altså er

$$\Phi'(t) = P(t) \Phi(t),$$

og ligningen til bestemmelse af ψ antager derfor formen

$$\Phi(t) \psi'(t) = q(t),$$

altså

$$\psi'(t) = \Phi^{-1}(t) q(t).$$

Samtlige løsninger til denne ligning bestemmes ved integration:

$$\psi(t) = a + \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1} q(\tau) d\tau,$$

hvorefter sætningens udtryk for løsningen x kan opskrives.

BEMÆRK at ovenstående er panserformlen, når $k = 1$. I dette tilfælde er ligningen $x'(t) = p(t) x(t) + q(t)$, hvor $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er kontinuerte. Her er løsningsrummet til den homogene ligning bestemt som alle skalarmultipla af

$$\Phi(t) := \exp \left[\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right], \quad t \in I,$$

og den inhomogene lignings løsninger kan da skrives som

$$x = \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau)^{-1} q(\tau) d\tau, \quad t \in I.$$

BEMÆRK også hvorledes sætning 5.2's udsagn om strukturen af løsningsmængden til den inhomogene ligning fremtræder eksplicit i formen for løsningen x i sætning 5.3.

5.2 EN LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING AF k^{te} ORDEN.

Lad som før V være $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ og lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset eller ubegrænset åbent interval. En k^{te} ordens lineær differential-ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t) \frac{dx}{dt} + \cdots + p_{k-1}(t) \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}} + q(t),$$

hvor funktionerne $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{k-1}(t), q(t)$ er kontinuerte funktioner på I med værdier i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, (afhængigt af om V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$) kaldes *homogen*, hvis funktionen $q(t)$ er 0, ellers *inhomogen*.

Denne klasse af ligninger er ret indgående behandlet i Mat 1MA, og vi

skal derfor her nøjes med at minde om at der for ethvert talsæt $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}) \in I \times V$ findes en og kun en maksimal løsning ϕ til den lineære k .te ordens differentiaalligning for hvilken

$$\left(\phi(t_0), \phi'(t_0), \dots, \phi^{(k-1)}(t_0) \right) = \left(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0} \right).$$

Enhver maksimal løsning er defineret på hele intervallet I . Enhver løsning er restriktion af en maksimal løsning. Endvidere gælder at de maksimale løsninger til den homogene ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + \dots + p_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}$$

udgør et k -dimensionalt vektorrum (over det underliggende tallegeme $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og at samtlige løsninger til den inhomogene k .te ordens ligning fås ved til en løsning til ligningen at lægge samtlige løsninger til den homogene ligning.

Betragter vi specielt en lineær homogen ligning

$$\frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

med *konstante* koefficienter, og opererer vi med $V = \mathbb{C}^k$, kan man, ved at 'oversætte' ligningen til et førsteordens system, vise at enhver løsning $(x_1, \dots, x_k) = (\phi_1(t), \dots, \phi_k(t))$ til denne ligning må bestå af funktioner af formen

$$\zeta_1(t)\exp\lambda_1 t + \dots + \zeta_q(t)\exp\lambda_q t,$$

hvor hvert $\zeta_p(t)$ er et polynomium af grad $\leq \ell_p - 1$. Lidt anderledes udtrykt: Løsningsrummet for den lineære, homogene differentiaalligning af k .te orden med konstante koefficienter har som basis de k funktioner

$$\begin{aligned} & \exp\lambda_1 t, t\exp\lambda_1 t, \dots, t^{\ell_1-1}\exp\lambda_1 t, \\ & \dots \\ & \exp\lambda_q t, t\exp\lambda_q t, \dots, t^{\ell_q-1}\exp\lambda_q t \end{aligned}$$

hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ er de parvis forskellige rødder i ligningens karakteristiske polynomium $K(\lambda) := \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, og $\ell_1, \dots, \ell_q$ er deres multipliciteter.

BEMÆRKNING Hvis koefficienterne $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ er reelle, og $K(\lambda)$

har lutter reelle rødder, giver ovenstående også en basis for løsningsrummet svarende til, at vi opererer med $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må vi operere med $V = \mathbb{C}^k$. Ud fra de komplekse basisfunktioner er det dog let at få en basis bestående af reelle funktioner. Thi når $K(\lambda)$ har reelle koefficienter, vil de imaginære rødder udelukkende forekomme i par af kompleks konjugerede med samme multiplicitet. Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$ et sådant par af rødder hver med multiplicitet ℓ , ser man, at vi i stedet for de 2ℓ basisfunktioner

$$\begin{aligned} & \exp(\alpha+i\beta)t, t\exp(\alpha+i\beta)t, \dots, t^{\ell-1}\exp(\alpha+i\beta)t, \\ & \exp(\alpha-i\beta)t, t\exp(\alpha-i\beta)t, \dots, t^{\ell-1}\exp(\alpha-i\beta)t, \end{aligned}$$

kan benytte de 2ℓ reelle funktioner

$$\begin{aligned} & \exp\alpha t \cos\beta t, t \exp\alpha t \cos\beta t, \dots, t^{\ell-1} \exp\alpha t \cos\beta t, \\ & \exp\alpha t \sin\beta t, t \exp\alpha t \sin\beta t, \dots, t^{\ell-1} \exp\alpha t \sin\beta t. \end{aligned}$$

5.3 LINEÆRT HOMOGENT DIFFERENTIALLIGNINGSSYSTEM AF FØRSTE ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER.

For et lineært, homogent ligningssystem

$$x'(t) = A x(t), \quad t \in I,$$

med konstant koefficientmatrix $A := [p_{ij}]$ (hvor $p_{ij} \in \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, afhængig af om V er $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$), kan man finde samtlige løsninger på følgende måde.

LEMMA 5.4 Lad $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ være en given kvadratisk kompleks matrix og definer, for et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og $t \in I$,

$$x(t) := \exp tA := \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n/n!$$

Så er $x(t) : I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ en C^∞ funktion for hvilken $x'(t) = A x(t)$.

BEVIS: Hvis vi viser at $x'(t)$ er defineret og at $x'(t) = A x(t)$, for alle $t \in I$, ses det direkte af denne formel at $x'(t)$ er kontinuert, og induktivt følger så at x er vilkårlig ofte differentiabel.

Vi kan derfor færdiggøre beviset ved at vise at $\lim_{h \rightarrow 0} [\exp(t+h)A - \exp tA]/h$ eksisterer i $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ og er lig $A x(t)$. Idet de uendelige rækker, der nu opskrives, er absolut konvergente, og omordning af ledene derfor er tilladt (argument analogt med beviset s. 4.12), ser vi at

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n/n! \sum_{k=0}^{\infty} (hA)^k/k! = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^n/n! (hA)^k/k! = \\
& \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^p [p!/(k!(p-k)!)] t^{p-k} h^k \right) A^p/p! = \\
& \sum_{p=0}^{\infty} (t+h)^p A^p/p!,
\end{aligned}$$

og derfor at

$$\exp [(t+h)A] = \exp tA \exp hA.$$

Heraf fås umiddelbart at

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} [\exp (t+h)A - \exp tA]/h = \\
& \lim_{h \rightarrow 0} [\exp tA (\exp hA - E)/h = \\
& \exp tA \lim_{h \rightarrow 0} [\exp hA - E]/h.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
& [\exp hA - E]/h = \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} A^n/n! = \\
& A \sum_{n=0}^{\infty} (hA)^n/(n+1)! = \\
& A [E + \sum_{n=1}^{\infty} (hA)^n/(n+1)!] =
\end{aligned}$$

og da

$$\begin{aligned}
& \|\sum_{n=1}^{\infty} (hA)^n/(n+1)!\| = \\
& |h| \|A \sum_{n=0}^{\infty} (hA)^n/(n+2)!\| \\
& \leq |h| \|A\| \sum_{n=0}^{\infty} |h|^n \|A\|^n/n! =
\end{aligned}$$

$$|h| \|A\| \exp(|h| \|A\|) \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad |h| \rightarrow 0,$$

ser vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} [\exp (t+h)A - \exp tA]/h = A \exp tA,$$

for vilkårligt $t \in I$. Hermed er lemmaet bevist.

Vi kan dermed formulere og bevise en explicit version af sætning 5.3.

SÆTNING 5.5 Betragt det lineære differentialligningssystem

$$x'(t) = A x(t) + q(t), \quad t \in I$$

hvor A er en konstant $k \times k$ koefficientmatrix, og hvor $q : I \rightarrow \mathbb{C}^k$ er en given kontinuert funktion. Så er for vilkårlig given begyndelsesbetingelse $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{C}^k$ den entydig bestemte løsning $x : I \rightarrow \mathbb{C}^k$ for hvilken $x(t_0) = x_0$ givet ved

$$x(t) = \exp[(t-t_0)A] x_0 + \int_{t_0}^t \exp[(t-s)A] q(s) ds,$$

for alle $t \in I$.

BEVIS: Da $g(t) := \int_{t_0}^t \exp[(t-s)A] q(s) ds = \exp(tA) \int_{t_0}^t \exp(-sA) q(s) ds$, er den afledede $g'(t)$ af denne funktion

$$\begin{aligned} A \exp(tA) \int_{t_0}^t \exp(-sA) q(s) ds + \exp(tA) \exp(-tA) q(t) = \\ A g(t) + q(t), \end{aligned}$$

således at g er en løsning til den foreliggende inhomogene differentiaalligning, der opfylder betingelsen $g(t_0) = 0$. Da leddet $\exp[(t-t_0)A] x_0$ ifølge ovenstående lemma er en løsning til den tilsvarende homogene ligning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $\exp[(t_0-t_0)A] x_0 = E x_0 = x_0$, er beviset gennemført.

Vi foregriber udviklingen lidt og formulerer et specialtilfælde af ovenstående.

KOROLLAR 5.6 Betragt den homogene differentialligning

$$x'(t) = J x(t), \quad t \in I,$$

hvor $I \subseteq \mathbb{R}$ er et åbent interval, og hvor $J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda E + U$ er en $n \times n$ Jordan-blok. Så er løsningen $x(t)$ der tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen (t_0, x_0) givet ved udtrykket

$$x(t) = \exp[(t-t_0)J] x_0,$$

hvor $\exp[(t-t_0)J] = \exp[(t-t_0)(\lambda + U)] = e^{(t-t_0)\lambda} \exp(t-t_0)U$, med $\exp[(t-t_0)U]$ givet ved følgende matrixudtryk:

$$\begin{bmatrix} 1(t-t_0)/1! & (t-t_0)^2/2! & \dots & & (t-t_0)^{n-1}/(n-1)! \\ 1 & (t-t_0)/1! & (t-t_0)^2/2! & \dots & (t-t_0)^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 1 & (t-t_0)/1! & (t-t_0)^2/2! \dots (t-t_0)^{n-3}/(n-3)! \\ & 0 & 1 & (t-t_0)/1! \dots & \\ & & & & (t-t_0)/1! \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

BEVIS: Matrixudtrykket for $\exp[(t-t_0)U]$ følger direkte af matrixudtrykket for U . En lidt anden angrebsmåde kan bestå i følgende observation: hvis $\alpha := \{e_1, \dots, e_n\}$ betegner standardbasen i $\mathbb{C}^n$, og hvis vi indfører som konvention at $e_j = 0$, hvis index $j \leq 0$, så er $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ karakteriseret ved at

$$U e_k = e_{k-1}, \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

Tilsvarende bliver, for $s = 2, \dots, n$, U^s karakteriseret ved at

$$U^s e_k = e_{k-s}, \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

Da $U^n = 0$ fås for $\exp[(t-t_0)U] = \sum_{s=0}^{n-1} (t-t_0)^s U^s / s!$ at

$$\begin{aligned} \exp[(t-t_0)U] e_k &= \sum_{s=0}^{n-1} (t-t_0)^s U^s e_k / s! = \\ \sum_{s=0}^{n-1} (t-t_0)^s e_{k-s} / s! &= \sum_{s=0}^{k-1} (t-t_0)^s e_{k-s} / s! = \\ \sum_{s=0}^{k-1} (t-t_0)^{k+s} e_s / (k+s)! & \end{aligned}$$

hvilket netop angiver hvad der skal stå i søjle nr. s af $\exp[(t-t_0)U]$.

Korollaret antyder en anden måde at gribe løsningen an på, ved hjælp af hvilken vi også kan opnå en eksplicit løsningsformel. Vi foretager en koordinattransformation $x = Qy$, hvor Q er invertibel, i rummet V . Herved erstattes ligningssystemet med systemet

$$Q y'(t) = A Q y(t) \quad \text{eller} \quad y'(t) = Q^{-1} A Q y(t).$$

Vi benytter nu at man i tilfældet $V = \mathbb{C}^k$ kan vælge Q sådan at $Q^{-1} A Q$ er Jordans normalform

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_q \end{bmatrix}$$

hvor $J_1, J_2, \dots, J_q$ er kvadratiske matricer langs hoveddiagonalen, uden for hvilke der står lutter nuller og som hver for sig er af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

med λ i hoveddiagonalen, 1 i skrålinien lige over, og ellers nuller. Samtlige tal i hoveddiagonalen i $Q^{-1}AQ$ er samtlige rødder i polynomiet $\det(A - \lambda E)$, hver skrevet så ofte som multipliciteten angiver, men samme rod kan forekomme i flere af matricerne J_p .

Efter en sådan transformation vil ligningerne i det nye system falde i klasser, en klasse svarende til hver af matricerne J_p . Hvis de af de variable $y_1, \dots, y_k$, der svarer til de i et bestemt J_p figurerende række-numre, betegnes $z_1, \dots, z_\ell$, er den pågældende klasse af ligninger

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \lambda z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \lambda z_2 + z_3 \\ &\dots \\ \frac{dz_{\ell-1}}{dt} &= \lambda z_{\ell-1} + z_\ell \\ \frac{dz_\ell}{dt} &= \lambda z_\ell. \end{aligned}$$

Dette systems løsninger findes måske hurtigst ved at man sætter

$$z_i := u_i \exp \lambda t, \quad \text{altså} \quad z_i' = (u_i' + \lambda u_i) \exp \lambda t,$$

hvorved fås systemet

$$u_1' = u_2, u_2' = u_3, \dots, u_{\ell-1}' = u_\ell, u_\ell' = 0.$$

hvis løsninger findes ved successiv løsning bagfra. Resultatet kan udtrykkes som $(u_1, u_2, \dots, u_\ell) = (F(t), F'(t), \dots, F^{(\ell-1)}(t))$, hvor $F(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq \ell-1$. Man får altså

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ F'(t) \\ \vdots \\ F^{(\ell-1)}(t) \end{pmatrix} \exp \lambda t.$$

Det er værd at gøre sig klart at det just fundne løsningsudtryk er principielt det samme som det i korollar 5.6 anførte. Vender vi tilbage til det oprindelige ligningssystem, finder vi samtlige løsninger skrevet på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} F_1(t) \exp \lambda_1 t \\ F_1^{(\ell_1-1)}(t) \exp \lambda_1 t \\ \vdots \\ F_q(t) \exp \lambda_q t \\ F_q^{(\ell_q-1)}(t) \exp \lambda_q t \end{pmatrix}$$

hvor λ_p betegner det i matricen J_p ($p = 1, \dots, q$) optrædende λ , ℓ_p denne matrix's orden, og $F_p(t)$ er et vilkårligt polynomium af grad $\leq \ell_p - 1$. I alt optræder i disse polynomier k koefficienter. De k løsninger, der opnås ved at vælge alle disse koefficienter på nær een $= 0$, og denne ene $= 1$, vil udgøre en basis for løsningsrummet.

Hvis A har reelle elementer, kan Jordans normalform opnås ved et Q med reelle elementer, hvis og kun hvis polynomiet $\det(A - \lambda E)$ har lutter reelle rødder, og metoden er derfor under denne antagelse anvendelig også i tilfældet $V = \mathbb{R}^k$. Ellers må man operere med $V = \mathbb{C}^k$. Herved fås alle komplekse løsninger, blandt hvilke man derefter kan udskille de reelle.

5.4 STABILITET AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER

Vi betragter et lineært, ikke nødvendigvis homogent differentiaalligningssystem på den afsluttede halvlinje $[0, \infty[$:

$$x'(t) = A(t)x(t) + q(t), \quad t \in [0, \infty[. \quad (*)$$

Her er A en $k \times k$ koeficientmatrix, hvis indgange er defineret og kontinuerte på $[0, \infty[$, $q(\cdot) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$ er en kontinuert funktion og $x(\cdot) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$ den søgte løsning, jf. eksistens- og entydighedssætningen. Lad $\mathbb{C}^k$ være normeret, f.eks. med max-normen. Da alle normer på $\mathbb{C}^k$ er ækvivalente, skriver vi blot $\| \cdot \|$.

Et punkt $a \in \mathbb{C}^k$ kaldes et *ligevægtspunkt* (eller en *ligevægtstilstand*) for (*) hvis $A(t)a + q(t) \equiv 0$ for alle $t \in [0, \infty[$. Et ligevægtspunkt er altså en konstant løsning til (*).

DEFINITION Vi siger at ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^k$ er *globalt asymptotisk stabil* hvis enhver løsning til (*) konvergerer mod a for $t \rightarrow \infty$, altså hvis det for enhver funktion $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$, for hvilken $x'(t) = A(t)x(t) + q(t)$ for alle $t \in [0, \infty[$, gælder at $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$.

BEMÆRKNING Hvis et ligevægtspunkt a er globalt asymptotisk stabilt, så har systemet (*) ikke andre ligevægtstilstande. Specielt har ligningen $A(t)a + q(t) \equiv 0$ kun én løsning.

SÆTNING 5.7 Lad $a \in \mathbb{C}^k$ være et ligevægtspunkt for det lineære system (*). Så er a en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis det om enhver løsning x_0 til den tilsvarende homogene ligning $x'(t) = A(t)x(t)$, $t \in [0, \infty[$, gælder at $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

BEVIS: Lad L_0 betegne løsningsrummet til den til (*) svarende homogene ligning $x'(t) = A(t)x(t)$. Vi ved fra sætning 5.2 at L_0 er et n dimensionalt vektorrum. Hvis $a \in \mathbb{C}^k$ er en ligevægtstilstand for (*), er a specielt en løsning og derfor er $a + L_0$ løsningsmængden for (*), igen ifl. sætning 5.2. Antag a er et globalt asymptotisk stabilt ligevægtspunkt. Hvis $x_0 \in L_0$ så vil $a + x_0(t) \rightarrow a$ for $t \rightarrow \infty$, dvs. at $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$. Hvis det omvendt gælder at ethvert element i L_0 konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$, så er et ligevægtspunkt a nødvendigvis globalt asymptotisk stabilt.

Da vi kender L_0 når A i (*) er konstant, kan vi give en præcis beskrivelse af global asymptotisk stabilitet i det tilfælde.

SÆTNING 5.8 Lad $x'(t) = A x(t) + q$, $t \in [0, \infty[$ være et lineært differentiaalligningssystem med konstante koefficienter A og konstant inhomogenitetsled q . Antag a er en ligevægtstilstand for dette system. Så er a globalt asymptotisk stabilt hvis og kun hvis alle egenverdier for A har negativ realdel.

BEVIS: Ifølge den ovenfor udviklede teori (korollar 5.6 og formlen på s. 5.11) er L_0 frembragt af funktioner, hvis koordinater er af formen $t^j e^{\lambda t}$, hvor λ gennemløber $\sigma(A)$ og $0 \leq j \leq l-1$, med l som betegnelse for rodmultipliciteten af λ (som rod i det karakteristiske polynomium for A). Global asymptotisk stabilitet er altså ensbetydende med at $t^j e^{\lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ og derfor ensbetydende med at $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ (husk bemærkningerne om størrelsesorden fra Mat 1MA). Da $|e^{\lambda t}| = |e^{(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)t}| = e^{\operatorname{Re}\lambda t}$ og $e^{\operatorname{Re}\lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $\operatorname{Re}\lambda < 0$, følger sætningen.

BEMÆRKNING Et lineært system med konstante koefficienter, der har en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand, må altså have en invertibel koefficientmatrix A . Dette følger af bemærkningen på forrige side, og også af sætning 5.8, idet 0 ikke er en egenverdi for A .

Det her behandlede stabilitetsbegreb er meget restriktivt, bl.a. fordi ligningen $A(t)a + q(t) \equiv 0$ nødvendigvis må have entydig bestemt løsning. Et mere generelt stabilitetsbegreb er det der kaldes *Liapunov's*: Hvis (*) har ligevægtstilstanden a og hvis det om a gælder, at enhver løsning $x(\cdot)$, hvis begyndelsesværdier (initialværdier) $x(0)$ ligger nær a , "holder sig i nærheden af a " for alle $t > 0$, siger vi at a er *Liapunov-stabilt*. Præcist:

DEFINITION Ligevægtstilstanden a skal opfylde at til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes der $\delta \in \mathbb{R}_+$ således at hvis $x(\cdot) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$ er en løsning til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \delta$ så er $\|x(t) - a\| < \varepsilon$ for alle $t > 0$. Vi har hermed defineret *Liapunov-stabilitet*.

Hvis der yderligere gælder følgende: Hvis a er en Liapunov-stabil ligevægtstilstand og hvis der findes et $\xi \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at hvis $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$ er en løsning til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \xi$ så er $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$, så kaldes ligevægtstilstanden (*lokalt*)

asymptotisk stabil.

Vi skal se at for lineære systemer er der faktisk ingen forskel på lokal og global asymptotisk stabilitet (hvorimod Liapunov-stabilitet er et ægte svagere stabilitetsbegreb).

SÆTNING 5.9 Antag a er en ligevægtstilstand for det lineære system (*). Så er $a \in \mathbb{C}^k$ en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis a er lokalt asymptotisk stabil.

BEVIS: Vi begynder med at vise at en globalt asymptotisk stabil tilstand er Liapunov-stabil. Lad altså $a \in \mathbb{C}^k$ være en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand. Af sætning 5.7 ses at hvis L_0 er løsningsrummet for det tilsvarende homogene system, så vil $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, for ethvert $x_0 \in L_0$. Da L_0 er k -dimensionalt, kan vi vælge en basis $\{y_1, \dots, y_k\}$ for L_0 . Vi kan forudsætte at $y_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, k$, hvor $\{e_1, \dots, e_k\}$ er standardbasen i $\mathbb{C}^k$; denne påstand følger af eksistens- og entydighedssætningen. Da alle elementer i L_0 konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$, gælder dette også basiselementerne y_j . Specielt vil funktionerne y_j være begrænsede på $[0, \infty[$. Der findes altså en konstant $M \in \mathbb{R}_+$ således at

$$\|y_j(t)\| \leq M, \text{ for alle } t \in [0, \infty[, \text{ og } j = 1, \dots, k.$$

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Vi skal finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at $\|\sum c_j y_j(0)\| < \delta$ medfører at $\|\sum c_j y_j(t)\| < \varepsilon$. Men som vi har valgt y_j gælder jo at $\sum c_j y_j(0) = \sum c_j e_j = (c_1, \dots, c_k)$, så hvis vi bruger max-normen i $\mathbb{C}^k$, betyder betingelsen

$$\|\sum c_j y_j(0)\| < \delta$$

simpelthen at $\max |c_j| < \delta$.

Størrelsen $\|\sum c_j y_j(t)\|$ kan vurderes således:

$$\|\sum c_j y_j(t)\| \leq \sum |c_j| \|y_j(t)\| \leq \sum |c_j| M, \text{ for alle } t \in [0, \infty[.$$

Heraf følger at hvis $\max |c_j| < \delta$ så er $\|\sum c_j y_j(t)\| < \delta k M$, for alle $t \in [0, \infty[$. Hvis vi derfor vælger $\delta = \varepsilon/(Mk)$, har vi vist at a er Liapunov-stabilt.

Det følger herefter umiddelbart af sætning 5.7 at a er lokalt asymptotisk stabilt. Lav ræsonnementet!

Vi mangler så at vise at lokal asymptotisk stabilitet medfører global asymptotisk stabilitet. Antag $a \in \mathbb{C}^k$ er et Liapunov-stabilt ligevægtpunkt for hvilket der findes et $\xi \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at for

enhver løsning $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^k$ til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \xi$ gælder $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$. Ifølge sætning 5.7 skal vi vise at enhver løsning x_0 til den homogene ligning konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$. Hvis x_0 er en sådan løsning, kan vi vælge $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tilstrækkelig lille, så $\|s_0 x_0(0)\| < \xi$. Da er $x := a + s_0 x_0$ en løsning til (*) der opfylder at $\|x(0) - a\| = \|s_0 x_0\| < \xi$. Altså er $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Men så er a globalt asymptotisk stabilt, ifølge Sætning 5.7.

EKSEMPEL Betragt det homogene system $x' = -x + y$, $y' = x - y$ med koefficientmatrix $A := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ og karakteristisk polynomium $(-1-\lambda)^2 - 1$, altså egenværdier 0 og -2; vi konstaterer straks ud fra sætning 5.8 at (0,0) ikke er globalt asymptotisk stabilt, og altså heller ikke lokalt asymptotisk stabilt (sætning 5.9). Da $\ker A = \mathbb{C}(1,1)$, er enhver vektor af formen (α, α) en ligevægtstilstand. Løsningsmængden L_0 er åbenbart beskrevet som det to-dimensionale vektorrum

$$L_0 = \{ (c_1 + c_2 e^{-2t}, c_1 - c_2 e^{-2t}) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}.$$

Vi normerer $\mathbb{C}^2$ med max-normen. Vi kan så vise at enhver ligevægtstilstand (α, α) er Liapunov-stabil: Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Hvis en løsning

$$x(t) = (c_1 + c_2 e^{-2t}, c_1 - c_2 e^{-2t})$$

for et indtil videre uspecificeret positivt δ opfylder at $\|x(0) - (\alpha, \alpha)\|$

$= \|(c_1 + c_2 - \alpha, c_1 - c_2 - \alpha)\| = \max(|c_1 + c_2 - \alpha|, |c_1 - c_2 - \alpha|) < \delta$, så er $|c_1 - \alpha| < \delta/2$ og $|c_2| < \delta/2$. For afstanden $\|x(t) - (\alpha, \alpha)\|$ får vi så

$$\begin{aligned} \|x(t) - (\alpha, \alpha)\| &= \max(|c_1 + c_2 e^{-2t} - \alpha|, |c_1 - c_2 e^{-2t} - \alpha|) \leq \\ &|c_1 + c_2 e^{-2t} - \alpha| + |c_1 - c_2 e^{-2t} - \alpha| \leq |c_1 + c_2 - \alpha| + |c_1 - c_2 - \alpha| + \\ &2|c_2| |e^{-2t} - 1| < \\ &2\delta + 2|c_2| < 3\delta. \end{aligned}$$

Hvis vi vælger $\delta := \varepsilon/3$, ser vi dermed at (α, α) er Liapunov-stabilt.

Eksemplet antyder at situationen alment er som den næste sætning beskriver.

SÆTNING 5.10 Betragt det lineære differentialligningssystem

$$x'(t) = A(t)x(t) + q(t), \quad t \in [0, \infty[, \quad (*)$$

og antag at $a \in \mathbb{C}^k$ er en ligevægtstilstand for (*). Så er følgende tre udsagn ækvivalente.

- Ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^k$ for (*) er Liapunov-stabil.
- Alle ligevægtstilstandene for (*) er Liapunov-stabile.
- Enhver løsning til det homogene system $x'(t) = A x(t)$, $t \in [0, \infty[$,

er begrænset.

BEVIS: Vi viser først $a) \Rightarrow c)$ og forudsætter altså at ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^k$ er Liapunov-stabil. Lad $\varepsilon = 1$ og vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$ således at enhver løsning x til det givne system, for hvilken $\|a - x(0)\| < \delta$, opfylder at $\|a - x(t)\| < 1$ for alle $t \in [0, \infty[$. Vi argumenterer som i beviset for sætning 5.9. Lad x_0 være en løsning til den homogene ligning og vælg $s_0 \in \mathbb{R}_+$ så $\|s_0 x_0(0)\| < \delta$. Da $\|a - (a + s_0 x_0(0))\| = \|s_0 x_0(0)\| < \delta$, følger heraf at $\|a - (a + s_0 x_0(t))\| < 1$ for alle $t \in [0, \infty[$, dvs. $\|x_0(t)\| < 1/s_0$ for alle $t \in [0, \infty[$. Hermed har vi vist $a) \Rightarrow c)$.

Det er klart at $b)$ medfører $a)$, så vi mangler blot at vise $c) \Rightarrow b)$. Hvis $c)$ er opfyldt, lader vi c være en ligevægtstilstand og antager at $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er givet. Vi skal finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at hvis x_0 er en løsning til den homogene ligning, som opfylder at $\|x_0(0)\| < \delta$, så er $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Igen bruger vi ideer fra beviset for sætning 5.9. Lad $\{y_1, \dots, y_k\}$ være en basis for løsningsrummet L_0 til den homogene ligning, valgt således at $y_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, k$. Under antagelsen $c)$ findes en konstant M så $\|y_j(t)\| < M$ for alle $t \in [0, \infty[$ og alle $j = 1, \dots, k$. Idet $x_0(t) = \sum c_j y_j(t)$, er

$$x_0(0) = \sum c_j y_j(0) = \sum c_j e_j = (c_1, \dots, c_k),$$

og derfor er $\|x_0(0)\| = \max |c_j|$ og $\|x_0(t)\| = \|\sum c_j y_j(t)\| \leq \sum |c_j| M$.

Altså indser vi, ganske som ovenfor, at hvis $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er givet og hvis vi lader $\delta := \varepsilon/(Mk)$, så vil $\|x_0(0)\| < \delta$ medføre at $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Det beviser Liapunov-stabiliteten af c : hvis x er en løsning til (*) for hvilken $\|c - x(0)\| < \delta$, kan vi skrive $x = c + x_0$. Funktionen x_0 er da en løsning til den homogene ligning, for hvilken $\|x_0(0)\| < \delta$. Altså er $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Derfor er $\|c - x(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Det var den sidste implikation og dermed er sætningen bevist.

5.5 STABILITET AF EN k^{te} ORDENS LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING

Betragt en enkelt k^{te} ordens lineær differentialligning med konstante reelle koefficienter:

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_{k-1} x'(t) + a_k x(t) = b, \quad t \in [0, \infty[\quad (**)$$

DEFINITION En konstantfunktion a , der løser denne ligning kaldes en *ligevægtstilstand*. Hvis enhver løsning $x(t)$ til (**) konvergerer

mod a for $t \rightarrow \infty$, siger vi at ligevægtstilstanden a er *globalt asymptotisk stabil*.

Der gælder som ovenfor:

a) En konstantfunktion a er en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis a er en ligevægtstilstand og enhver løsning til den homogene ligning

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_{k-1} x'(t) + a_k x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty[,$$

konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$.

b) En ligevægtstilstand a er en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand for (***) hvis og kun hvis alle rødderne i det karakteristiske polynomium

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k$$

har negativ realdel.

c) Førsteordensligningen $x'(t) + a_1 x(t) = b$ har b/a_1 som globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis $a_1 > 0$.

d) Andenordensligningen $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$ har b/a_2 som globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis $a_1, a_2 > 0$.

e) Hvis (***) har en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand, så er alle koefficienterne $a_1, \dots, a_k > 0$.

Vi vil nu indføre begrebet Liapunov's stabilitet for denne k.te ordens ligning, så vidt muligt i analogi med ovenstående: Hvis (*) har ligevægtstilstanden a og hvis det om a gælder, at enhver løsning $x(t)$, hvis begyndelsesværdier (initialværdier) ligger nær a , "holder sig i nærheden af a " for alle $t > 0$, siger vi at a er Liapunov-stabilt.

Anvendelsen af navnet Liapunov nødvendiggør visse overvejelser ang. konsistens:

1) Hvis $k = 1$ bør begrebet stemme overens med det allerede indførte. Det er klart, at dette er tilfældet, hvis vi blot bruger den præcise definition som den står formuleret på s. 5.13.

2) Anderledes kan det tage sig ud hvis $k > 1$, thi så involverer begyndelsesbetingelserne på en løsning x jo de afledede $x^{(j)}(0)$, for $j = 0, \dots, k-1$. Ligningen (***) kan oversættes til et førsteordens system med k ligninger; det vil være rimeligt om en ligevægtstilstand a til (***) er Liapunov stabil præcis når a (eller rettere $(a, 0, \dots, 0)$) er

en Liapunov stabil tilstand for det oversatte system.

Lad (**) være oversat til

$$x'(t) = A x(t) + \underline{b}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (***)$$

hvor

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & \dots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

En løsning til (***) er af formen $(x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$, og (**) løses af første-koordinaten $x(t)$. Og omvendt.

For (***) er Liapunov stabilitet følgende: Ligevægtstilstanden $(a, 0, \dots, 0)$ er Liapunov-stabil hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $\delta \in \mathbb{R}_+$ så det om enhver løsning $(x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$ til (***) gælder at hvis

$$|(a-x)^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

så er

$$|a-x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

(den valgte form af ulighederne svarer til at max-normen er blevet brugt i $\mathbb{C}^k$).

Ud fra ønsket om at en ligevægtstilstand a til (**) bør være Liapunov stabil præcis når $(a, 0, \dots, 0)$ er en Liapunov stabil tilstand for det oversatte system (***), definerer vi som følger:

DEFINITION Ligevægtstilstanden a for (**) er *Liapunov-stabil* hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $\delta \in \mathbb{R}_+$ så det om enhver løsning $x(t)$ til (**) gælder at hvis

$$|a-x(0)| < \delta, \quad |x^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, k-1$$

så er

$$|a-x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Trods den tilsyneladende komplicerede formulering af betingelserne kan vi udnytte bevisideerne i sætning 5.10 til at vise følgende

SÆTNING 5.11 En ligevægtstilstand for (**) er Liapunov stabil hvis og kun hvis enhver løsning til den homogene ligning

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_{k-1} x'(t) + a_k x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty[$$

er begrænset på $[0, \infty[$.

BEVIS: Lad L_0 være det k -dimensionale løsningsrum til den homogene ligning. Så ved vi at løsningsmængden L til den givne ligning (**) opfylder

$$L = \{a\} + L_0.$$

Hvis a er Liapunov-stabil, og hvis y er en vilkårlig given løsning til den homogene ligning så er $a + \tau y \in L$ for ethvert $\tau \in \mathbb{R}_+$. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ giver Liapunov-stabiliteten os et $\delta \in \mathbb{R}_+$. Det er klart at for tilstrækkeligt lille τ vil ulighederne

$$|[a - (a + \tau x)]^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

alle kunne opfyldes. Fasthold et sådant positivt τ . Konklusionen bliver så at

$$|\tau x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Det betyder åbenbart specielt at der findes $m \in \mathbb{R}_+$ så $|x(t)| < m$ for alle $t \in \mathbb{R}_+$: vi kan jo lade $m := \varepsilon/\tau$. Dermed har vi vist at Liapunov-stabilitet af a tvinger L_0 til at indeholde lutter begrænsede funktioner.

Hvis det omvendt er forudsat at alle funktioner i L_0 er begrænsede, og hvis vi udnytter vor viden om udseendet af disse funktioner, nemlig at L_0 udspændes af funktionerne $t^j e^{\lambda t}$, hvor λ gennemløber rod-mængden til det karakteristiske polynomium, og j værdierne $0, \dots, (\text{rod-multipliciteten af } \lambda) - 1$, så er altså alle disse funktioner $t^j e^{\lambda t}$ begrænsede. Hvis λ er en simpel rod, er der kun den ene funktion $e^{\lambda t}$ at betragte, og vi slutter at $\text{Re } \lambda \leq 0$; hvis λ er en multipel rod, slutter vi at $\text{Re } \lambda < 0$. Bemærk at enhver afledet af en sådan funktion også er begrænset på hele $\mathbb{R}_+$.

Vælg en basis $\{y_j\}$ for L_0 der opfylder at $y_j(0) = e_j$. Her er e_j det j .te element i standardbasen i $\mathbb{C}^k$, som sædvanlig. Betegnelsen y_j står for vektoren $(y_j, y_j', \dots, y_j^{(k-1)})$, ganske som vi brugte understregningen da vi indførte ligningssystemet (***). Basiselementet y_j er altså valgt så dets $(j-1)^{\text{ste}}$ afledede i 0 har værdien 1, mens alle øvrige afledede i 0 er lig 0. Lad også tallet M være valgt så $|y_j^{(s)}(t)| < M$, for alle $t \in \mathbb{R}_+$, alle $j = 1, \dots, k$ og alle $s = 0, 1, \dots, k-1$. Denne begrænsethedsbetingelse kan, som nævnt, opfyldes, da løsningerne har den ovenfor nævnte form - overvej dette; det er en væsentlig pointe.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. For at checke Liapunov-stabilitet skal vi finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ der opfylder at hvis x er en løsning til (**) for hvilken

$$|a-x(0)| < \delta, \quad |x^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, k-1,$$

så er

$$|a-x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Da $z := x - a$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning for hvilken

$$|z^{(j-1)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, k,$$

og da $z = \sum c_j y_j$, gælder der altså at $z^{(j-1)}(0) = c_j y_j^{(j-1)}(0) = c_j$, dvs betingelsen $|z^{(j-1)}(0)| < \delta$, $j = 1, \dots, k$ kan udtrykkes som betingelsen

$$|c_j| < \delta, \quad j = 1, \dots, k.$$

Dermed er vi i en situation vi har set tilsvarende før: Idet $|z(t)| \leq \sum |c_j| |y_j(t)| \leq \sum \delta M = k \delta M$, kan vi ved at vælge $\delta := \varepsilon/(kM)$ opnå det ønskede resultat, at vores betingelse for Liapunov stabilitet er opfyldt.

5.6 FASEDIAGRAMMER.

I $V = \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ betragtes et førsteordenssystem af formen

$$x'(t) = f(x),$$

hvor $f: V \rightarrow V$ antages at være en C^1 funktion. Denne antagelse betyder at lemmaet s. 8.10 i 2MANoterne kan anvendes (dette lemma gælder uanset om vi betragter $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$) og vi har derfor eksistens og entydighed af maksimale løsninger: for ethvert valg af begyndelsesbetingelse $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times V$ findes præcis en maksimal løsning ϕ (altså en C^1 funktion med værdier i V , defineret på størst muligt åbent interval $J \subseteq \mathbb{R}$ indeholdende t_0 , der opfylder $\phi'(t) = f(\phi(t))$ for alle $t \in J$) for hvilken $\phi(t_0) = x_0$. Mængden $\{\phi(t) \mid t \in J\}$ kaldes *løsningsbanen* for ϕ . I dette afsnit skal vi diskutere nogle relativt simple og overskuelige kvalitative aspekter ved løsningsbaners forløb. SimPLICITETEN skyldes navnlig at vi kun betragter systemer for hvilke højresiden ikke eksplicit afhænger af t . Et sådant system kaldes *autonomt*. Hvis ϕ er en maksimal løsning til det autonome system $x'(t) = f(x)$, har ϕ altså en løsningsbane $\{\phi(t) \mid t \in J\}$ og vi kan tænke os løsningen gennemløbe sin bane; dette sker så med *fasehastigheden* $\phi'(t) = f(\phi(t))$ (idet V kaldes *faserummet*). Denne anskuelse af løsningen ϕ kaldes en *kinematisk* fortolkning.

Først må vi godtgøre at denne kinematiske fortolkning har mening.

LEMMA 5.12 Gennem ethvert punkt x_0 i faserummet V går der en og kun en løsningsbane for en maksimal løsning.

BEVIS: Lad, for $i = 1, 2$, $\phi_i : J_i \rightarrow V$ betegne maksimale løsninger for hvilke $\exists t_1 \in J_1$ der opfylder at $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$. Vi skal vise at de to løsningsbaner er sammenfaldende. Da systemet er autonomt kan definitionsintervaller forskydes (translateres): For et interval J og $s \in \mathbb{R}$ lader vi $J+s := \{t+s \mid t \in J\}$. En funktion ψ defineret på J kan da translateres til ψ_s , defineret på $J+s$ ved at $\psi_s(t) := \psi(t-s)$ for ethvert $t \in J+s$.

Translater så J_1 til $J_1+(t_2-t_1)$ og betragt translationen $(\phi_1)_{t_2-t_1}$. Denne funktion er en løsning til det givne system, thi $((\phi_1)_{t_2-t_1})'(t) = \phi_1'(t-(t_2-t_1)) = f(\phi_1(t-(t_2-t_1))) = f((\phi_1)_{t_2-t_1}(t))$. Det er klart at definitionsintervallet for $(\phi_1)_{t_2-t_1}$ er størst muligt, fordi dette gælder for ϕ_1 ; altså er $(\phi_1)_{t_2-t_1}$ en maksimal løsning. Bemærk at disse to maksimale løsninger har sammenfaldende løsningsbaner. Men $((\phi_1)_{t_2-t_1}(t_2)) = \phi_1(t_2-(t_2-t_1)) = \phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$, så af eksistens- og entydighedssætningen følger at løsningsbanen for ϕ_2 må falde sammen med løsningsbanen for $(\phi_1)_{t_2-t_1}$, altså med løsningsbanen for ϕ_1 .

Et *fasediagram* for en autonom ligning $x'(t) = f(x)$ er et billede af faserummet V med angivelse af løsningsbanerne (og disses retning). Til fasediagrammet hører normalt også en (kvalitativ) diskussion. Vi vil illustrere ved at betragte situationen i $\mathbb{R}^2$; her er der god mulighed for at tegne vellignende billeder. Det en-dimensionale tilfælde vil blive dyrket i opgaver. De højere-dimensionale situationer vil vi forbigå.

Ethvert punkt $x \in V$, for hvilket $f(x) = 0$, angiver en konstant løsning til ligningen $x'(t) = f(x)$ og kaldes som bekendt et *ligevægtspunkt*; i dette tilfælde er løsningsbanen simpelthen punktet x . Betragter vi komponenterne $f := (f_1, f_2)$ og deres nulpunktsmængder

$$N_i := \{x \in V \mid f_i(x) = 0\},$$

som typisk vil være kurver i $\mathbb{R}^2$, er ligevægtpunkterne altså bestemt ved $N_1 \cap N_2$. Mængderne N_1 og N_2 opdeler planen $\mathbb{R}^2$ i områder, hvor de kontinuerte funktioner f_1 og f_2 begge vil have konstant fortegn. Vi kan derfor i hvert område af disse fortegn aflæse retningen af

fasehastigheden f og dermed i ethvert punkt den passerende løsningsbanes orientering.

Det er specielt løsnings opførsel i nærheden af ligevægtpunkter, fasediagrammer kan bruges til afklaring af; hermed finder disse diagrammer altså anvendelse i stabilitetsteorien: Kan det afgøres, også i tilfælde hvor en eksplicit løsning kan være vanskelig at finde, om løsningsbanerne vil konvergere mod en ligevægtsstilling, når $t \rightarrow \infty$?

EKSEMPEL 5.13 $(x', y') = (-y, x)$ i $\mathbb{R}^2$. Her er $f(x, y) := (-y, x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; systemet er åbenbart autonomt. Med $N_1 := \{x \in V \mid f_1(x) = 0\}$ er N_1 x-aksen, og N_2 y-aksen, så $(0, 0)$ er det eneste ligevægtspunkt. Faserummet er her inddelt i fire områder, de fire åbne kvadranter I, ..., IV, og fortegnene for (f_1, f_2) er

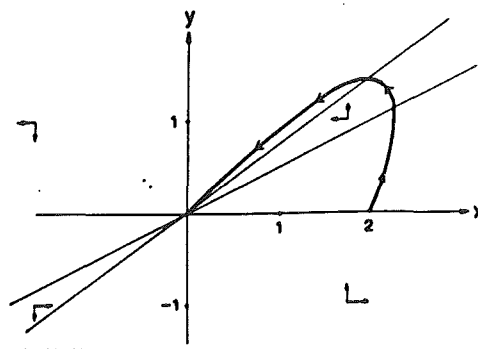
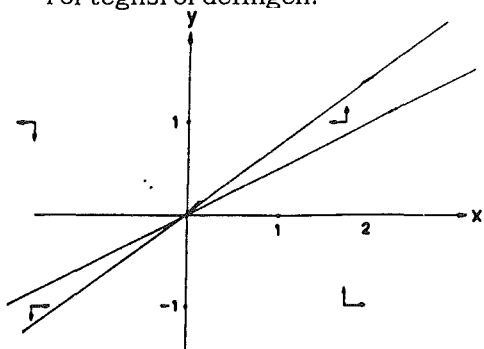
I : $(-, +)$, II : $(-, -)$, III : $(+, -)$, IV : $(+, +)$.

Hvis $\phi(t) = (x(t), y(t))$ angiver en maksimal løsning, er

$$[|\phi(t)|^2]' = [(x(t))^2 + (y(t))^2]' = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0,$$

så løsningsbanerne må være cirkler. Tegn orienteringspile og løsningsbaner! I dette eksempel er der ingen tendens til konvergens imod ligevægtstilstanden, når $t \rightarrow \infty$.

EKSEMPEL 5.14 $(x', y') = (x-2y, 3x-4y)$, altså $f(x, y) := (x-2y, 3x-4y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Med $f_1(x, y) := x-2y$ og $f_2(x, y) := 3x-4y$ deles faserummet $\mathbb{R}^2$ i fire områder, bestemt ved linierne $y = x/2$ og $y = 3x/4$. Det eneste ligevægtspunkt er $(0, 0)$. På tegningen til venstre er angivet fortegnfordelingen.



Ligningen kan jo også skrives $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$; det karakteri-

stiske polynomium for A er $\lambda^2 + 3\lambda + 2$, som har rødderne -1 og -2 .

Vi finder at løsningerne kan udtrykkes ved $(x(t), y(t)) = (\alpha e^{-t} + \beta e^{-2t}, \alpha e^{-t} + (3\beta/2) e^{-2t})$, hvor α, β er vilkårlige reelle konstanter.

Af sætning 5.8 ses at ligevægtstilstanden $(0, 0)$ er globalt asymptotisk

stabil. På tegningen ovenfor til højre er angivet en typisk løsningsbane, der bekræfter dette. Bemærk også hvordan løsningsbanen passerer N_1 , hhv. N_2 , med vandret/lodret tangent.

Eksemplerne illustrerer en simplifikation, vi nu vil køre videre med ved at antage at $f(x) := Ax$, hvor A er en konstant, reel 2×2 matrix. Et basisskift kan bringe A på Jordanform. Dette basisskift vil ændre på koorodinataksernes retning, men vi vil se bort herfra og analysere de mulige fasediagrammer for systemet $x' = Jx$, hvor J er en Jordanform.

Der er kun to forskelligt udseende Jordan former:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Her er egenverdierne jo rødder i det karakteristiske polynomium for A . Er disse rødder forskellige, er A diagonaliserbar, og J må da have form som matricen til venstre. I matricen til højre er altså de to rødder λ_1 og λ_2 ens, og da det karakteristiske polynomium er reelt, er de reelle (hvis et reelt polynomium har komplekse rødder, vil disse forekomme i kompleks konjugerede par). Der kommer altså tre tilfælde fra matricen til højre.

A er ikke-diagonaliserbar:

(akseparallelitet) $J_{12} = 1$ og $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

(ustabil udartet knude) $J_{12} = 1$ og $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

(stabil udartet knude) $J_{12} = 1$ og $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Matricen til venstre bidrager med 11 forskellige tilfælde.

A er diagonaliserbar ($J_{12} = 0$):

(stabil knude) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

(ustabil knude) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

(sadelpunkt) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

(stabil stjerne) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

(ustabil stjerne) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

(stabil akse) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$

(ustabil akse) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ og $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$

Hermed har vi opregnet de mulige tilfælde med reelle rødder. For de resterende erindres det igen at de komplekse rødder i det reelle karakteristiske polynomium forekommer som kompleks konjugerede par; de har således samme realdel.

A er diagonaliserbar ($J_{12} = 0$):

(stabil hvirvel) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ og $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 < 0$

(ustabil hvirvel) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ og $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$

(centrum) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ og $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$

samt

$$J = 0.$$

I opgaver vil der blive lejlighed til at gøre rede for denne listes klassifikation.

EKSEMPEL 5.15 En (her uspecificeret) økonomisk model [T. Haavelmo] fører frem til systemet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

hvor $s, k \in \mathbb{R}$ er givne konstanter. Vi skal diskutere denne models fasediagram for at få et overblik over de asymptotiske forhold, for forskellige værdier af s og k . Men først kan vi løse ligningen, f.eks. ved hjælp af sætning 5.5. Den generelle formel er, idet vi betegner ovenstående koefficientmatrix med A og lader $t_0 = 0$,

$$x(t) = \exp[tA] x_0 + \int_0^t \exp[(t-\tau)A] q(\tau) d\tau,$$

Med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}$ ser vi at $A^2 = s^2 E$, og heraf følger let at $A^{2n} = s^{2n} E$, mens $A^{2n+1} = s^{2n} A$, for $n = 0, 1, \dots$. Deraf følger så at for $s^2 > 0$ er

$$\begin{aligned} \exp[tA] &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} A^{2n}/(2n)! + \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} A^{2n+1}/(2n+1)! &= \\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} s^{2n}/(2n)! \right] E + \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} s^{2n}/(2n+1)! \right] A &= \\ \cosh[ts] E + \sinh[ts] A/s. \end{aligned}$$

Indsættes det tilsvarende udtryk for $\exp[(t-\tau)A]$ og $q(\tau) := \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ i integralet får vi efter en del regninger at løsningen, der opfylder

begyndelsesbetingelsen $(0, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix})$ er $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =$

$$\begin{aligned} \cosh[ts] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \sinh[ts] \begin{bmatrix} y_0/s \\ s x_0 \end{bmatrix} + \\ k \begin{bmatrix} (\cosh[ts]-1)/s \\ \sinh[ts]/s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har hermed, ifølge lemma 5.12, fastlagt løsningsbanen gennem punktet (x_0, y_0) . Men da løsningsformlen ikke udmærker sig ved stor gennemskuelighed, kan banens asymptotiske forløb, når $t \rightarrow \infty$, nok fordre yderligere overvejelser.

Ligevægtspunkter er bestemt ved $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$. Vi betragter de forskellige tilfælde.

i) Hvis s^2 ikke er nul, er ligevægtspunktet entydigt bestemt ved $(x, y) = (-k/s^2, 0)$.

a) Da $s^2 > 0$, er rødderne i det karakteristiske polynomium for A de reelle tal $\lambda_1 = s$ og $\lambda_2 = -s$. Vi ser at global stabilitet er udelukket, og Liapunov-stabilitet ligeledes. Ligevægtspunktet er et sadelpunkt; derfor har visse løsningsbaner et pænt asymptotisk forløb imod ligevægtstilstanden: Ovenstående løsningsudtryk kan også udtrykkes ved eksponentialfunktionen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0 + k/s^2) \cosh(st) + (y_0/s) \sinh(st) - k/s^2 \\ y_0 \cosh(st) + s(x_0 + k/s^2) \sinh(st) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -k/s^2 + e^{st}/2 [(x_0 + k/s^2) + y_0/s] + e^{-st}/2 [(x_0 + k/s^2) - y_0/s] \\ e^{st}/2 [(x_0 + k/s^2) + y_0/s]s + e^{-st}/2 [-(x_0 + k/s^2) + y_0/s]s \end{bmatrix}$$

Det er klart at $(x(t), y(t))$ vil konvergere for $t \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis leddene e^{st} har koefficient 0, altså hvis og kun hvis $(x_0 + k/s^2) + y_0/s = 0$. Det er også klart at i så fald vil $(x(t), y(t)) \rightarrow (-k/s^2, 0)$, ligevægtspunktet. De løsningsbaner der konvergerer mod ligevægtspunktet er altså givet ved

$$\begin{bmatrix} -k/s^2 + e^{-st}[-y_0/s] \\ -e^{-st}[-y_0/s]s \end{bmatrix} = -y_0 e^{-st}/s \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k/s^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hvis y_0 ikke er nul, er der to sådanne løsningsbaner: halvlinier fra punktet $(-k/s^2, 0)$ i retninger givet ved retningsvektorerne $\pm(1, -s)$, afhængig af om y_0 er positiv eller negativ. Hvis $y_0 = 0$, er $x_0 = -k/s^2$, og vores løsning er den konstante ligevægtstilstand.

ii) Hvis $s^2 = k = 0$, er alle punkter $(x, 0)$, altså ethvert punkt på x -aksen, et ligevægtspunkt. Her løses ligningen $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ af $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} et+h \\ e \end{bmatrix}$, med vilkårlige koefficienter e , h , så hvis e ikke er nul er løsningsbanerne rette linier, parallelle med x -aksen (som nævnt ovenfor er vi i tilfældet 'akseparallelitet'). Ligevægtstilstandene er ikke globalt/lokalt asymptotisk stabile, ejheller Li-

apunov-stabile (jf. sætning 5.8 og 5.10). Er $e = 0$, er vi i en ligevægtstilstand (og der bli'r vi!).

iii) hvis $s^2 = 0$ og k er forskellig fra 0, er der ingen ligevægtstilstande. Ligningens løsning er iøvrigt
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kt^2 + et + h \\ kt + e \end{bmatrix},$$
 hvor e og h er vilkårlige.

OPGAVER

5.1 Find først alle løsninger til systemet

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = x_1.$$

og opskriv den fundamentalmatrix der til $t = 0$ er enhedsmatricen.

Find derefter den løsning til

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = x_1 + t,$$

for hvilken $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$.

5.2 Find alle løsninger til systemet

$$x' = x + y + z$$

$$y' = y + z$$

$$z' = z.$$

5.3 Find alle løsninger til systemet $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$.

Tegn og diskuter systemets fasediagram

5.4 Find alle løsningerne til dette system:

$$x' = -x + y + z$$

$$y' = x - y + z$$

$$z' = x + y + z.$$

5.5 Find samtlige løsninger til systemet

$$x' = 8x + 4y,$$

$$y' = -x + 12y$$

ved først at finde koefficientmatricens Jordan-form. Diskuter denne lignings fasediagram.

5.6 Lad $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Find Jordanformen for A .

a) Betragt differentiaalligningssystemet $dx/dt = A x$,

hvor $x(t) := \langle x_1(t), x_2(t), x_3(t) \rangle'$, $t \in \mathbb{R}$. Find den fuldstændige løsning.

b) Løs differensligningssystemet $x(t+1) = A/4 x(t)$, $t \in \mathbb{N}$,

c) Undersøg om den i b) nævnte ligning er stabil.

5.7 Vis at matricen $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar. Løs dernæst differentialligningssystemet $x' = Ax$.

5.8 Som 5.7, men med $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

5.9 Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Vink. Betragt $z = x_1 + ix_2$

5.10 Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \cos t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cos t \end{aligned} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

5.11 Vis, at hvis $\phi_1(t)$ er en løsning til den lineære, homogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt},$$

og $\phi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1 \phi_1(t) + a_2 \phi_2(t),$$

hvor

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{1}{\phi_1(t)^2} \left(\exp \int p_1(t) dt \right) dt$$

[Overalt står $\int \dots dt$ for en vilkårligt valgt af de uendelig mange stamfunktioner til den pågældende funktion.]

Vis, at hvis $\phi_1(t), \phi_2(t)$ er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den lineære, inhomogene diffe-

rentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) - \phi_1(t) \int \frac{\phi_2(t)}{W(t)} q(t) dt + \phi_2(t) \int \frac{\phi_1(t)}{W(t)} q(t) dt,$$

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

5.12 Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x) \frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$.
Find endelig samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x) \frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = \cos^2 x \sin^3 x.$$

Vink. Benyt opg. 5.11.

5.13 Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\left(1-t^2\right) \frac{d^2x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad t \in]-1, 1[,$$

idet det opgives, at $x = t$ er en løsning.

5.14 Lad $A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ og betragt det lineære differentiallignings-system

$$x'(t) = A x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Find $\sigma(A)$; find også en basis for $\mathbb{R}^2$ af egenvektorer for A .
- Gør rede for at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en ligevægtstilstand for det givne system.
- Afgør om dette ligevægtspunkt besidder Liapunov-stabilitet.
- Find mængden af løsninger $x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ for hvilke $y(t) \rightarrow 1$ og $z(t) \rightarrow 1$ for $t \rightarrow \infty$.
- Lav en fasediagramdiskussion.

5.15 Lad $A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ og betragt det lineære differentiallignings-

system

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Find $\sigma(A)$; find også en basis for $\mathbb{R}^2$ af egenvektorer for A .
- b) Gør rede for at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en ligevægtstilstand for det givne system.
- c) Afgør om dette ligevægtspunkt besidder Liapunov-stabilitet.
- d) Find mængden af løsninger $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ for hvilke $y(t) \rightarrow 1$ og $z(t) \rightarrow 1$ for $t \rightarrow \infty$.
- e) Lav en fasediagramdiskussion.

5.16 a) Løs ligningen i eksempel 5.15 ved direkte overgang til Jordanform.

- b) Tegn og diskuter fasediagrammet: marker N_1 og N_2 samt retninger af fasehastigheden $\mathbf{f}$.
- c) Skitser løsningsbaners forløb for baner der ikke konvergerer mod ligevægtstillingen.
- d) Lav en fasediagramdiskussion for eksempel 5.15 for det tilfælde hvor s er rent imaginær, altså $s^2 < 0$.

6. DIFFERENSLIGNINGER.

6.1 INDLEDNING

Mange tidsafhængige systemer der dukker op i økonomiske overvejelser er bekvemt beskrevet med diskretiseret tidsparameter. Opstilles beskrivende ligninger, hvori de økonomiske størrelser indgår, vil disse typisk indeholde en tidsafhængighed, hvor tidsparameteren indgår med 'nabotidspunkter', dvs. hvor f.eks. parameterværdierne t , $t+1$, $t-1$ forekommer. De tidsafhængige størrelser er da som oftest beregnelige via rekursionsformler, ud fra specificerede initilaværdier; dette giver anledning til studier af sådanne rekursive relationer, *differensligninger*:

Lad $x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)$ være reelle eller komplekse størrelser, defineret for $t \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. En given funktion

$$F : (\mathbb{L}^p)^m \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^n$$

(hvor $\mathbb{L}$ som sædvanlig angiver enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) definerer da en differensligning (rettere: et differensligningssystem) ved

$$\begin{aligned} &F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t), x_1(t+1), x_2(t+1), \dots, \\ &x_p(t+1), \dots, x_1(t+m), x_2(t+m), \dots, x_p(t+m), t) = 0, \end{aligned}$$

gældende for alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Ved en *løsning* til denne ligning forstås en funktion $\underline{x} := (x_1, \dots, x_p)$ defineret på $\mathbb{N}_0$, med værdier i $\mathbb{L}^p$, for hvilken

$$F(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m), t) = 0 \text{ for alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

EKSEMPEL 6.1 a) En meget simpel nationaløkonomisk model.

Lad $Y := Y(t)$ betegne et vist lands nationalprodukt, $C := C(t)$ dette lands samlede forbrug, og $I := I(t)$ de samlede investeringer. Tidsparameteren t er diskretiseret, f.eks. med enhed 'år'. For de nævnte størrelser antages det at følgende sammenhænge er tilstede, for enhver værdi af $t \in \mathbb{N}_0$:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

$$C(t+1) = aY(t) + b$$

$$I(t+1) = c(C(t+1) - C(t)),$$

hvor a , b , c er givne reelle konstanter; rimeligvis er alle tre tal positive. Plausibilitetsargumenter for de opstillede ligninger: den første udtrykker nærmest en definition; den anden indeholder et udsagn om et grundforbrugsniveau b , samt at næste års forbrug afspejler

dette års samlede økonomiske aktivitet; den tredje påstår at næste års investeringer er ligefremt proportionale med væksten i forbruget.

b) Markedsmodellen 2.2, hvis løsning er

$$\underline{x}_i = A^i \underline{x}_0, \text{ for } i = 0, 1, 2, \dots$$

kan jo udtrykkes ved relationen $\underline{x}_{i+1} = A \underline{x}_i$, for $i = 0, 1, 2, \dots$,
dvs. ved $\underline{x}_{i+1} - A \underline{x}_i = 0$, for $i = 0, 1, 2, \dots$

6.2 SÆDVANLIGE DIFFERENSLIGNINGER

Tidsparameteren t vil vi normalt forestille os gennemløbende $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$. Vi lader p , m og n være givne positive hele tal og bruger $\underline{x}(t) := (x_1(t), \dots, x_p(t)) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^p$ som betegnelse for en ubekendt funktion, defineret på $\mathbb{N}_0$, og med værdier i $\mathbb{L}^p$ (hvor $\mathbb{L}$ er skalarlegemet, dvs. enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Vi betragter endvidere en given funktion $F : D \times \mathbb{N}_0 \subseteq (\mathbb{L}^p)^m \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^n$, hvor $D \times \mathbb{N}_0$ er definitionsområdet for F , som definerer *den sædvanlige differensligning*

$$F(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \underline{x}(t+2), \dots, \underline{x}(t+m-1), \underline{x}(t+m), t) = 0$$

gældende for alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Ved en *løsning* til denne ligning forstås en funktion

$$\underline{x} := (x_1, \dots, x_p)$$

defineret på $\mathbb{N}_0$, med værdier i $\mathbb{L}^p$, for hvilken

$$(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m)) \in D$$

for alle $t \in \mathbb{N}_0$, og for hvilken

$$F(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m), t) = 0 \text{ for alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Tallet m kaldes ligningens *orden*. Skrives $F = (F_1, \dots, F_n)$ ud i sine n komponenter, kan ligningen opstilles som et *ligningssystem* bestående af n ligninger (i de p ubekendte (følger) $x_j(t)$, $j = 1, \dots, p$):

$$F_1(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m), t) = 0$$

$$F_2(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m), t) = 0$$

..

$$F_p(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \dots, \underline{x}(t+m), t) = 0 \text{ for alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Hovedemnerne vil blive dels løsningsmetoder, dels visse aspekter af stabilitetsforholdene for differensligninger. Men allerførst etablerer vi at der findes en, endog ganske simpel, eksistens- og entydighedssætning for ret store klasser af ligninger.

6.3 EKSISTENS- OG ENTYDIGHED

Betragt følgende system: Idet vi lader p og m være givne positive hele tal og bruger $\underline{x} := (x_1, \dots, x_p)$ som betegnelse for en ubekendt funktion, defineret på $\mathbb{N}_0$, og med værdier i $\mathbb{L}^p$ (hvor $\mathbb{L}$ er skalarlegemet, dvs. enten $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) betragter vi for en given funktion

$$f : (\mathbb{L}^p)^m \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^p$$

differensligningen

$$\underline{x}(t+m) = f(\underline{x}(t), \underline{x}(t+1), \underline{x}(t+2), \dots, \underline{x}(t+m-1), t), \quad (6.1)$$

gældende for alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Vi har da følgende

EKSISTENS- OG ENTYDIGHEDSSÆTNING 6.2 Betragt differensligningen (6.1).

Lad $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{m-1} \in \mathbb{L}^p$ være m vilkårligt givne vektorer. Der findes da en og kun én løsning $\underline{x}(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, til (6.1), for hvilken $\underline{x}(j) = \underline{x}_j$, $j = 0, \dots, m-1$.

BEVIS: Idet $f : (\mathbb{L}^p)^m \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^p$ er en given funktion, vil tilordningen

$$\underline{x}_{t+m} = f(\underline{x}_t, \underline{x}_{t+1}, \underline{x}_{t+2}, \dots, \underline{x}_{t+m-1}, t)$$

for successive valg af $t = 0, 1, \dots$ åbenbart give en løsning $\underline{x}(t) := \underline{x}_t$. Bemærk at der er tale om rekursiv beregning af følgen $\{\underline{x}_n\}$: sættes først $t = 0$ og indsættes de givne vektorer $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{m-1}$, fås $\underline{x}_m := f(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{m-1}, 0)$. Således fortsættes. Det generelle skridt er følgende: antag $n > m - 1$ og antag at $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ foreligger beregnet. Ved indsættelse af $\underline{x}_{n-m}, \underline{x}_{n-m+1}, \underline{x}_{n-m+2}, \dots, \underline{x}_n$ samt $t = n-m$ i f fås værdien for $\underline{x}_{n+1}$. Lader vi altså $\underline{x}(t) := \underline{x}_t$, $t \in \mathbb{N}_0$, har vi etableret eksistensen af en løsning, der opfylder de givne initialbetingelser.

Entydigheden af en løsning med de givne initialværdier følger af at f er en funktion. Den 'næste' værdi $\underline{x}(t)$ er således for ethvert $t \in \mathbb{N}_0$ fuldstændig fastlagt ud fra værdierne $\underline{x}(t-m), \dots, \underline{x}(t-1)$. Dermed er sætningen vist.

Bemærk at der er frit valg af initialbetingelserne $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{m-1} \in \mathbb{L}^p$. Systemet (6.1) har således $m \cdot p$ frihedsgrader, hvor m er systemets orden, og p er antallet af ligninger i systemet (= antal komponenter i funktionen f)

Det er formen af ligningen (6.1), herunder at f er forudsat defineret på hele $(\mathbb{L}^P)^m \times \mathbb{N}_0$, der gør både eksistensdelen og entydighedsdelen af denne sætning til en trivialitet. Ikke desto mindre vil mange af de naturligt forekommende eksempler vise sætningens brugbarhed. Det er dog ikke svært at finde tilfælde hvor situationen er mere kompliceret.

6.4 LINEÆRE DIFFERENSLIGNINGER.

Vi betragter et differensligningssystem af formen

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\x_2(t+1) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\&\dots \\x_n(t+1) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)\end{aligned}$$

med $t \in \mathbb{N}_0$, hvor koefficientfølgerne $a_{ij}(t)$ og følgerne $b_i(t)$ er givne for alle $i, j = 1, \dots, n$. Med koefficientmatricen $A(t) := (a_{ij}(t))$ og inhomogenitetsleddet $B(t) := (b_1(t), \dots, b_n(t))'$ samt de ubekendte skrevet som en søjlevektorfølge $X(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t))'$, får systemet formen

$$X(t+1) = A(t) X(t) + B(t) \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Hvis $B(t)$ er nulvektoren for alle $t \in \mathbb{N}_0$ er systemet *homogent*, ellers *inhomogent*.

EKSISTENS OG ENTYDIGHED (6.3) for ligningen

$$X(t+1) = A(t) X(t) + B(t) \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

For ethvert valg af initialværdi $X_0 \in \mathbb{L}^n$ findes en og kun en løsningsfølge $X(t)$ til ovenstående ligning, for hvilken $X(0) = X_0$.

BEVIS: Med $f : \mathbb{L}^n \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{L}^n$ defineret som $f(X, t) := A(t)X + B(t)$ følger sætningen direkte af eksistens- og entydighedssætning 6.2.

KOROLLAR 6.4 Løsningsmængden L_0 til den homogene lineære ligning

$$X(t+1) = A(t) X(t) \quad t \in \mathbb{N}_0$$

er et n dimensionalt vektorrum.

Løsningsmængden L til en inhomogen ligning

$$X(t+1) = A(t) X(t) + B(t) \quad t \in \mathbb{N}_0$$

med samme koefficientmatrix $A(t)$ er af formen

$$L = L_0 + X_p,$$

hvor X_p er en vilkårlig (*partikulær*) løsning til den inhomogene ligning.

BEVIS: Det er klart fra den homogene lignings form at løsningsmængden L_0 er et vektorrum. Af sætning 6.2 følger at der er en bijektiv korrespondance mellem initialværdierne X_0 og elementerne i L_0 . Da X_0 kan gennemløbe $\mathbb{L}^n$, ses at L_0 har samme dimension som $\mathbb{L}^n$, altså n , jf. også bemærkningen om frihedsgrader efter beviset for sætning 6.2.

Korollarets anden påstand følger af at hvis $Y(t)$ og $Z(t)$ er løsninger til den inhomogene ligning, så er differensfølgen $Y(t) - Z(t)$ en løsning til den homogene ligning, altså et element i L_0 . Og, omvendt, hvis $X_p \in L$ og $X \in L_0$, da vil $X_p + X \in L$.

Vi skal nedenfor udvikle metoder til løsning af homogene differensligningssystemer med konstant koefficientmatrix, altså metoder til identifikation af L_0 for sådanne ligninger. Men inden da skal vi se at hvis L_0 for den generelle homogene ligning $X(t+1) = A(t)X(t)$ er kendt, så kan hele L , for en tilsvarende inhomogen ligning $X(t+1) = A(t)X(t) + B(t)$, principielt konstrueres. Der er udtalt analogi med situationen i sætning 5.3. Vi starter med at trække en konsekvens af eksistens- og entydighedssætningen frem explicit.

LEMMA 6.5 Lad $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)$ være n løsninger til den homogene ligning $X(t+1) = A(t)X(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, hvor $A(t)$ er en $n \times n$ matrix. Så er følgende to udsagn ensbetydende:

- sættet $Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t)$ er et lineært uafhængigt sæt af følger (opfattet som vektorer i vektorrummet af alle følger)
- $Z_1(0), Z_2(0), \dots, Z_n(0)$ er et lineært uafhængigt sæt vektorer i $\mathbb{L}^n$

BEVIS: Antag først at der findes skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ikke alle nul, så følgen $\alpha_1 Z_1(t) + \dots + \alpha_n Z_n(t)$ er nul-følgen. Så er $\alpha_1 Z_1(0) + \dots + \alpha_n Z_n(0) = 0$. Dermed har vi set at implikationen $b) \Rightarrow a)$ gælder.

Antag 'ikke'-b). Så findes skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ikke alle nul, så $\alpha_1 Z_1(0) + \dots + \alpha_n Z_n(0) = 0$. Følgen $Z(t) := \alpha_1 Z_1(t) + \dots + \alpha_n Z_n(t)$ er en løsning til ligningen $X(t+1) = A(t)X(t)$, så $Z(1) = A(0)Z(0) = 0$.

Tilsvarende vil $Z(2) = 0$, og induktivt indser vi at $Z(k) = 0$ for alle hele tal $k \in \mathbb{N}_0$. Alternativt kan man her benytte eksistens- og entydighedssætningen til at slutte at Z er nul-følgen. Altså er føl-

gerne $Z_1(t), \dots, Z_n(t)$ lineært afhængige. Vi har etableret 'ikke'-a).

BEMÆRKNING 6.6 Med differensligningen $X(t+1) = A(t)X(t) + B(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, vil vi ved en *fundamentalmatrix* $\Phi(t)$, som ved differentiaalligninger, forstå en matrix hvis søjler er valgt så de udgør en basis for L_0 . Man kan da udtrykke den fuldstændige løsning til differensligningen ved hjælp af en fundamentalmatrix $\Phi(t)$:

Lad $X(t)$ betegne en vilkårlig løsning til den givne inhomogene ligning. Af lemma 6.5 følger at søjlerne i $\Phi(0)$ er lineært uafhængige. Altså er $\Phi(0)$ invertibel. Da hver søjle i $\Phi(t)$ tilhører L_0 , gælder at $A(t)\Phi(t) = \Phi(t+1)$, hvoraf vi får at $A(0)\Phi(0) = \Phi(1)$ og derfor at $A(0) = \Phi(1)\Phi(0)^{-1}$. For $X(1)$ gælder altså at

$$X(1) = \Phi(1)\Phi(0)^{-1}X(0) + B(0).$$

Hermed har vi indset at $X(1)$ kan beregnes ud fra fundamentalmatrix samt de givne data, incl. initialværdien $X(0)$. Det generelle mønster bliver klart ved udregning af

$$\begin{aligned} X(2) &= A(1)X(1) + B(1) \\ &= A(1)(\Phi(1)\Phi(0)^{-1}X(0) + B(0)) + B(1) = \\ &= \Phi(2)\Phi(0)^{-1}X(0) + A(1)B(0) + B(1). \end{aligned}$$

Generelt ses at

$$\begin{aligned} X(n) &= \Phi(n)\Phi(0)^{-1}X(0) \\ &\quad + A(n-1)A(n-2)A(n-3)B(n-3) \\ &\quad + A(n-1)A(n-2)B(n-2) + B(n-1). \end{aligned}$$

Detaljerne i det (let gennemførlige) induktive skridt overlades til læseren.

Antag omvendt at $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, er givet ved den netop fundne formel, hvor $X(0) \in \mathbb{L}^n$ er valgt vilkårligt. Det følger direkte af den foretagne udledning, at der gælder at $X(n+1) = A(n)X(n) + B(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$. Altså er følgen $X(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, en løsning til den givne inhomogene ligning.

Vi skal opskrive en variant af ovenstående i afsnit 6.7. Men bemærk at vi her i en vis forstand går over åen efter vand, thi løsningen til en differensligning af den foreliggende form kan jo under alle omstændigheder beregnes rekursivt *direkte*.

6.5 LINEÆRE HOMOGENE DIFFERENSLIGNINGSSYSTEMER

MED KONSTANTE KOEFFICIENTER.

Vi betragter et differensligningssystem af formen

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1 \\x_2(t+1) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2 \\&\quad t=0,1,\dots\end{aligned}$$

$$x_n(t+1) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_n$$

hvor koefficienterne a_{ij} og inhomogenitetsleddene b_i er konstante for alle $i, j = 1, \dots, n$. For løsningsmetodens skyld kan vi gerne lade a_{ij} og b_i være komplekse. Lader vi som ovenfor $X(t)$ betegne søjlevektoren med indgange $x_i(t)$, $A := (a_{ij})$ betegne koefficientmatricen, og B betegne søjlevektoren med indgange b_i , kan ligningssystemet sammenfattes som

$$X(t+1) = A X(t) + B, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Det er trivielt at angive en rekursionsformel for løsningen. Med initialværdien givet, $X(0) := X_0$, fås åbenbart at

$$\begin{aligned}X(1) &= A X_0 + B, \\X(2) &= A X(1) + B = A (A X_0 + B) + B = \\&= A^2 X_0 + A B + B,\end{aligned}$$

hvoraf det ved et simpelt induktivt argument kan udledes at

$$X(j) = A^j X_0 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} A^i \right) B.$$

Denne formel er af værdi ved overvejelser angående løsnings forløb når t vokser, og vi skal vende tilbage til den i slig sammenhæng.

For den homogene ligning fås specielt at $X(j) = A^j X_0$, $j \in \mathbb{N}_0$.

En mere eksplicit løsningsform for løsningen af den homogene ligning kan skaffes som følger: Regner vi komplekst ved vi at A kan bringes på Jordanform, dvs. der findes en invertibel matrix Q og en Jordanmatrix J således at

$$A = Q J Q^{-1}.$$

Med $Y(t) := Q^{-1} X(t)$ får vi, da $X(t) = Q Y(t)$, at $X(t+1) = Q Y(t+1)$, så

$$Q Y(t+1) = X(t+1) = A X(t) = A Q Y(t) = Q J Q^{-1} Q Y(t) = Q J Y(t),$$

hvoraf

$$Y(t+1) = J Y(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Løser vi dette system, altså finder $Y(t)$, kan vi også finde $X(t) = QY(t)$ og har således løst det oprindelige system. Hvis det givne system er reelt skal de først fundne løsninger muligvis bringes på reel

form.

Af formen af Jordanmatricen J følger at systemet (2) deles op i "blokke", hver svarende til en Jordanblok; hver sådan blok involverer f.eks. $k+1$ ligninger i $k+1$ ubekendte $y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+k}$ og har udseendet

$$\begin{bmatrix} y_s \\ y_{s+1} \\ \vdots \\ y_{s+k} \end{bmatrix} (t+1) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_s \\ y_{s+1} \\ \vdots \\ y_{s+k} \end{bmatrix} (t) \quad t = 0, 1, \dots$$

Hvis vi for simpelhedsskyld sætter $s = 0$ og skriver systemet ud som et sæt ligninger får vi

$$\begin{aligned} y_0(t+1) &= \lambda y_0(t) + y_1(t), \\ y_1(t+1) &= \lambda y_1(t) + y_2(t), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

..

$$y_k(t+1) = \lambda y_k(t).$$

Vi vil efterligne fremgangsmåden fra differentiallyigningsløsningsmetoden, men først tage vare på muligheden $\lambda = 0$. I dette tilfælde reduceres (3) til

$$\begin{aligned} y_0(t+1) &= y_1(t), \\ y_1(t+1) &= y_2(t), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

...

$$y_k(t+1) = 0.$$

Her er åbenbart $y_k(0)$ vilkårlig, mens $y_k(t) = 0$ for $t = 1, 2, \dots$. Da $y_{k-1}(t+1) = y_k(t)$, bliver $y_{k-1}(0)$ vilkårlig, $y_{k-1}(1) = y_k(0)$, mens $y_{k-1}(t) = 0$ for $t = 2, 3, \dots$. Således fortsættes opefter.

Under forudsætningen $\lambda \neq 0$ lader vi

$$y_i(t) := u_i(t) \lambda^t,$$

og får dermed at

$$y_i(t+1) = u_i(t+1) \lambda^{t+1} = u_i(t+1) \lambda^{t+1} - u_i(t) \lambda^{t+1} + u_i(t) \lambda^{t+1} = (\Delta u_i + u_i) \lambda^{t+1}.$$

Disse udtryk indsættes i (3) og giver for $i = 0, 1, \dots, k-1$

$$(\Delta u_i + u_i) \lambda^{t+1} = \lambda u_i \lambda^t + u_{i+1} \lambda^t,$$

dvs.

$$\Delta u_i \lambda^{t+1} = u_{i+1} \lambda^t,$$

eller simpelthen

$$\Delta u_i \lambda = u_{i+1}. \quad (4)$$

Den nederste ligning i (3) bliver til

$$(\Delta u_k + u_k) \lambda^{t+1} = \lambda u_k \lambda^t,$$

hvoraf

$$\Delta u_k = 0.$$

Denne sidste ligning er let at løse: $u_k(t) = C_k$, en konstant.

Derefter løses (4) for $i = k-1$: der står

$$\Delta u_{k-1} = C_k / \lambda,$$

der som løsning åbenbart har

$$u_{k-1}(t) = (C_k / \lambda) t + C_{k-1}.$$

Det generelle mønster her er åbenbart repræsenteret ved følgende: vi har en ligning af formen

$$u(t+1) - u(t) = p(t),$$

hvor $p(t)$ er et polynomium, lad os sige af grad q . Den tilsvarende homogene ligning

$$u(t+1) - u(t) = 0$$

løses af en arbitrær konstant.

For den inhomogene ligning finder vi ved indsættelse af et polynomium $\sum \alpha_j t^j$ med ukendte koefficienter α_j at

$$\sum \alpha_j [(t+1)^j - t^j] = p(t).$$

Da $(t+1)^j - t^j$ er af grad $j-1$, må vi vælge graden af $\sum \alpha_j t^j$ til at være $q+1$ (forklar dette!).

Når vi derfor løser ligningerne (4) nedefra, får vi at

u_k er et nultegrads polynomium,

u_{k-1} er et førstegrads polynomium,

...

u_0 er et k .grads polynomium.

Disse polynomier er ikke ganske uafhængige af hinanden, selv om nultegrads leddet i hver af dem er arbitrært (det kommer jo fra en løsning til en homogen ligning). Som det fremgår af den opstillede fremgangsmåde gælder der at hvis

$$u_i(t) = p_i(t),$$

så er

$$p_{i+1}(t) = u_{i+1}(t) = \lambda \Delta u_i = \lambda(u_i(t+1) - u_i(t)) = \lambda(p_i(t+1) - p_i(t)).$$

Vi finder alt i alt at for $i = 0, 1, \dots, k$ er

$$y_i(t) := u_i(t) \lambda^t = p_i(t) \lambda^t,$$

hvor p_i er et polynomium af grad højst $k-i$.

Bemærk at det her gennemførte kun beskæftiger sig med en enkelt Jordanblok; det skal altså gøres for hver af disse. Ved anvendelse af transformationen Q kan til slut X findes.

EKSEMPEL

Vi løser følgende differensligningssystem

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= x_1(t) - 4x_2(t) - x_3(t) - 4x_4(t) \\x_2(t+1) &= 2x_1(t) + 5x_3(t) - 4x_4(t) \\x_3(t+1) &= -x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) + 3x_4(t) \\x_4(t+1) &= -x_1(t) + 4x_2(t) - x_3(t) + 6x_4(t).\end{aligned}$$

Her er koefficientmatricen

$$A := \begin{bmatrix} +1 & -4 & -1 & -4 \\ +2 & 0 & +5 & -4 \\ -1 & +1 & -2 & +3 \\ -1 & +4 & -1 & +6 \end{bmatrix},$$

og en del regning vil afsløre at det karakteristiske polynomium er

$$(\lambda - 1)^3 (\lambda - 2),$$

så 2 er en simpel egen værdi og 1 er en egen værdi med algebraisk multiplicitet 3. Vi betragter bidraget til Jordanformen fra egen værdien 1. En udregning af egenrummet $\ker(A - I)$, altså løsning af ligningssystemet

$$(A - I)x = 0,$$

giver at egenrummet er 1-dimensionalt, f.eks. udspændt af

$$(-3, -6, 4, 5)'.$$

Så ved vi allerede at Jordanblokken hørende til egen værdien 1 må have dette udseende:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(hvordan ved vi det?). Vi har også fundet den første søjle i matricen Q . (måske er det en ide at gå igennem afsnittet om beregning af Q i ligningen $A = Q J Q^{-1}$, hvor J er den til A hørende Jordanmatrix, altså her

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix})$$

For at finde den anden søjle i Q skal vi løse ligningssystemet

$$(A - I)x = (-3, -6, 4, 5)',$$

En løsning til $(A - I)x = (-3, -6, 4, 5)'$ er $(-3, -5, 3, 5)'$. Den tredje søjle i Q findes så ved løsning af ligningen $(A - I)x = (-3, -5, 3, 5)'$; en løsning er f.eks. $(-4, -4, 3, 4)'$.

Den fjerde søjle i Q skal være en egenvektor svarende til egen-

værdien 2. Man kan bruge $(-2, -3, 2, 3)'$. Vi har så fundet

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 & -2 \\ -6 & -5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

Men nu til løsningen af differensligningen. Med $Y := Q^{-1} X$ har vi at $Y(t+1) = J Y(t)$, $t = 0, 1, \dots$ Skrevet ud:

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= y_1(t) + y_2(t), \\ y_2(t+1) &= y_2(t) + y_3(t), \\ y_3(t+1) &= y_3(t) \\ y_4(t+1) &= 2 y_4(t), \end{aligned}$$

for $t = 0, 1, \dots$

Vi finder straks at

$$y_4(t) = c_4 2^t, \quad t = 0, 1, \dots$$

og at

$$y_3(t) = c_3, \quad t = 0, 1, \dots$$

hvor c_3 og c_4 er arbitrære konstanter. For y_2 har vi ligningen

$$y_2(t+1) - y_2(t) = c_3,$$

$t = 0, 1, \dots$ Her løses den homogene ligning af en konstant c_2 , mens man ved indsættelse af et *førstegradspolynomium* $\alpha t + \beta$ finder at $\alpha = c_3$, mens β indgår i den arbitrære c_2 . Altså har vi

$$y_2(t) = c_3 t + c_2,$$

$t = 0, 1, \dots$ Endelig har vi til bestemmelse af y_1 at

$$y_1(t+1) - y_1(t) = c_3 t + c_2,$$

$t = 0, 1, \dots$ Igen giver den homogene ligning os en arbitrær konstant, mens en partikulær løsning kan findes ved for y_1 at indsætte et *andengradspolynomium* $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Man finder at $\alpha = c_3/2$ og $\beta = c_2 - c_3/2$.

Og så får vi endelig brug for Q , idet vi ved at $X = Q Y$, altså

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 & -2 \\ -6 & -5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_3/2)t^2 + c_2 t + c_1 \\ c_3 t + c_2 \\ c_3 \\ c_4 2^t \end{bmatrix},$$

hvor $t = 0, 1, \dots$ og hvor c 'erne er vilkårlige konstanter.

6.6 N. TE ORDENS LINEÆR HOMOGEN LIGNING MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

I analogi med det fra differentialligninger kendte gennemfører vi

nu en oversættelse af en n.te ordens lineær homogen ligning med konstante koefficienter til det tilsvarende system.

Betragt altså ligningen

$$x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} x_{t+1} + a_n x_t = 0,$$

hvor a 'erne er konstante og $a_n \neq 0$. Vi indfører nye ubekendte

$$x_n(t) \quad \dots \quad x_2(t) \quad x_1(t)$$

(de nye navne står direkte under det symbol de erstatter). Altså

$$x_j(t) := x_{t-1+j}, \quad \text{for } j = 1, \dots, n \quad \text{og } t = 0, 1, \dots$$

Så er det klart at

$$x_1(t+1) = x_2(t),$$

$$x_2(t+1) = x_3(t),$$

..

$$x_{n-1}(t+1) = x_n(t),$$

mens

$$x_n(t+1) = -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \dots - a_n x_1(t).$$

Skrevet på matrixform bliver dette

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (t).$$

Det er klart at der er en bijektiv korrespondance mellem løsningerne $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ til dette førsteordenssystem og løsningerne $x_t := x_1(t)$ til den oprindelige n.te ordens ligning (overvej!). Begge løsningsmængder er åbenbart vektorrum. Vi slutter at ligningen

$$x_{t+n} + a_1 x_{t+n-1} + \dots + a_{n-1} x_{t+1} + a_n x_t = 0,$$

har et n dimensionalt løsningsrum.

Egenverdierne for førsteordenssystemets koefficientmatrix A findes som sædvanlig som rødderne i $\det[A - \lambda E]$. Betegner vi søjlerne i $A - \lambda E$ ved h_1 , har vi, da et multiplum af en søjle må adderes til en anden søjle uden at determinantens værdi ændres, at

$$\det[A - \lambda E] = \det[h_1, \dots, h_n] = \det[h_1 + \lambda h_2 + \dots + \lambda^{n-1} h_n, h_2, \dots, h_n].$$

Udvikler vi denne sidstnævnte determinant efter første søjle fås at

$$K(\lambda) := (-1)^n \det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Det er altså ligningen

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

der skal løses for at finde egenverdierne for A .

Det opstillede førsteordens system kan nu løses idet man følger den allerede beskrevne procedure for løsning af førsteordens differensligninger. Opererer vi med $\mathbb{C}^n$, viser den foranstående diskussion at hvis en Jordanblok J_p , hørende til egenværdien λ_p for ovenstående koefficientmatrix, er en $\ell_p \times \ell_p$ matrix vil denne give et bidrag til løsningen af form $\zeta_p(t)\lambda_p^t$, hvor $\zeta_p(t)$ er et polynomium af grad $\leq \ell_p - 1$. Via koordinattransformationer (fra Jordans normalform tilbage til den oprindelige ligning) samt det faktum at det kun er komponenten x_1 der er af interesse ved løsning af den oprindelig givne n .te ordens ligning, slutter vi at $x_t = x_1(t)$ må være af formen

$$\zeta_1(t)\lambda_1^t + \dots + \zeta_q(t)\lambda_q^t$$

hvor hvert $\zeta_p(t)$ er et polynomium af grad $\leq \ell_p - 1$. Blokdimensionerne ℓ_p har sum n . Da vi ved at løsningsrummet for ligningen af n .te orden har dimension n , slutter vi at $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ er parvis forskellige, og at løsningsrummet består af alle funktioner af den pågældende form. Matricerne J_p i Jordans normalform må altså i det her foreliggende tilfælde indeholde parvis forskellige λ og for hvert $p = 1, \dots, q$ må ℓ_p simpelthen være multipliciteten af λ_p som rod i det karakteristiske polynomium $K(\lambda)$. Hermed har vi bevist følgende.

SÆTNING Løsningsrummet for den lineære, homogene differensligning af n .te orden med konstante koefficienter har som basis de n funktioner

$$\lambda_1^t, t\lambda_1^t, \dots, t^{\ell_1-1}\lambda_1^t, \\ \dots, \lambda_q^t, t\lambda_q^t, \dots, t^{\ell_q-1}\lambda_q^t,$$

hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ er de parvis forskellige rødder i ligningens karakteristiske polynomium, og $\ell_1, \dots, \ell_q$ er disses multipliciteter.

BEMÆRKNING Hvis koefficienterne $a_1, \dots, a_n$ er reelle, og det karakteristiske polynomium har lutter reelle rødder, giver sætningen også en basis for løsningsrummet svarende til, at vi opererer med $\mathbb{R}^n$. Ellers må vi operere med $\mathbb{C}^n$. Ud fra de komplekse basisfunktioner er det dog let at få en basis bestående af reelle funktioner. Thi når det karakteristiske polynomium har reelle koefficienter, vil de imaginære rødder falde i par af konjugerede med samme multiplicitet. Er $\alpha + i\beta$ og $\alpha - i\beta$

et par af rødder, hver med multiplicitet ℓ , ser man, at vi i stedet for de 2ℓ basisfunktioner

$$(\alpha+i\beta)^t, t(\alpha+i\beta)^t, \dots, t^{\ell-1}(\alpha+i\beta)^t, \\ (\alpha-i\beta)^t, t(\alpha-i\beta)^t, \dots, t^{\ell-1}(\alpha-i\beta)^t$$

kan benytte omskrivningen

$$(\alpha \pm i\beta)^t = |\alpha \pm i\beta|^t e^{\pm i\theta t} = |\alpha \pm i\beta|^t [\cos(\theta t) \pm \sin(\theta t)]$$

så der istedet benyttes de 2ℓ reelle funktioner

$$|\alpha \pm i\beta|^t \cos(\theta t), t|\alpha \pm i\beta|^t \cos(\theta t), \dots, t^{\ell-1}|\alpha \pm i\beta|^t \cos(\theta t) \\ |\alpha \pm i\beta|^t \sin(\theta t), t|\alpha \pm i\beta|^t \sin(\theta t), \dots, t^{\ell-1}|\alpha \pm i\beta|^t \sin(\theta t)$$

EKSEMPEL

Vi betragter differensligningen af tredje orden givet ved

$$x_{t+3} + x_{t+2} + x_{t+1} + x_t = 0,$$

Ved indførelse af ny variabelnavne, som vi her af skrivetekniske grunde

lader være $a := x_t$, $b := x_{t+1}$, og $c := x_{t+2}$, får vi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

Som vi lige har vist er den karakteristiske ligning

$$m^3 + m^2 + m + 1 = 0,$$

hvis rødder er -1 , i og $-i$. Koefficientmatricens Jordanform er altså diagonal:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

og vi skal derfor løse systemet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}(t+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}(t),$$

altså

$$x(t+1) = -x(t), \\ y(t+1) = i y(t), \\ z(t+1) = -i z(t),$$

for $t = 0, 1, \dots$

der som karakteristiske ligninger har hhv.

$$m + 1 = 0, \\ m - i = 0 \\ m + i = 0.$$

og således har løsningerne

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1(-1)^t, \\y(t) &= c_2(i)^t\end{aligned}$$

og

$$z(t) = c_3(-i)^t,$$

for $t = 0, 1, \dots$

Disse løsninger kan også skrives

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1(-1)^t, \\y(t) &= c_2 e^{it\pi/2}, \\z(t) &= c_3 e^{-it\pi/2},\end{aligned}$$

hvor $t = 0, 1, \dots$ og konstanterne c_1, c_2, c_3 er vilkårlige komplekse tal.

De oprindelige tre sammenhørende differensligninger har da løsninger givet ved $Q(x, y, z)'$, når

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} Q^{-1}$$

At finde transformationen Q er her at finde en egenvektor til hver af de tre egenverdier. Regningerne giver som resultat at $(1, -1, 1)'$ er en egenvektor svarende til -1 , $(-i, 1, i)'$ svarende til i , og $(i, 1, -i)'$ til $-i$. Altså er

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -i & i \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \end{bmatrix}$$

Den endelige løsning er da

$$\begin{aligned}a(t) &= x(t) - i y(t) + i z(t), \\&= c_1(-1)^t - i c_2 e^{it\pi/2} + i c_3 e^{-it\pi/2},\end{aligned}$$

for det er jo kun $x_t = a(t)$ der er af interesse for os. De anførte konstanter er komplekse; ønsker man en reel løsning, vælger man dem passende. Dermed kan løsningen også udtrykkes som en reel kombination af funktionerne $(-1)^t$, $\cos t\pi/2$ og $\sin t\pi/2$.

6.7 EN GENEREL LØSNINGSFORMEL

Vi benytter nu bemærkning 6.6 på en højereordensligning. Der er tale om skitseret eksemplificering.

Betragt en andenordens lineær inhomogen differensligning

$$x_{t+2} + a_1(t)x_{t+1} + a_2(t)x_t = b(t),$$

for $t \in \mathbb{N}_0$. Vi vil antage at ligningen er 'ægte' andenordens, altså at $a_2(t)$ aldrig er nul. Oversat til et førsteordenssystem får ligningen

koefficientmatricen

$$A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}.$$

således at systemet er $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t+1) = A(t)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{N}_0$.

Lad som i 6.6 en fundamentalmatrix $\Phi(t)$ være givet. For $t = 0$ er $\Phi(0)$ invertibel. Vi har at $\Phi(t+1) = A(t)\Phi(t)$ for alle $t \in \mathbb{N}_0$. Her er imidlertid $\det(A(t)) = a_2(t)$, så forudsætningen medfører at $A(t)$ er invertibel for alle $t \in \mathbb{N}_0$. Et induktionsbevis giver da at $\Phi(t)$ er invertibel for alle $t \in \mathbb{N}_0$. Løsningsformlen fra sætning 6.6 kan da gives en særlig simpel form: Idet $A(t) = \Phi(t+1)\Phi(t)^{-1}$, ser vi at $A(n)A(n-1)\dots A(n-j) = \Phi(n+1)\Phi(n-j)^{-1}$, således at med

$$X(t) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) \quad \text{og} \quad B(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

fås

$$\begin{aligned} X(n) &= \Phi(n)\Phi(0)^{-1}X(0) + A(n-1)\dots A(2)A(1)B(0) + A(n-1)\dots A(2)B(1) + \dots \\ &\quad + A(n-1)A(n-2)B(n-3) + A(n-1)B(n-2) + B(n-1) = \\ &\quad \Phi(n)\Phi(0)^{-1}X(0) + \Phi(n)\Phi(1)^{-1}B(0) + \Phi(n)\Phi(2)^{-1}B(1) + \dots \\ &\quad + \Phi(n)\Phi(n-2)^{-1}B(n-3) + \Phi(n)\Phi(n-1)^{-1}B(n-2) + B(n-1) = \end{aligned}$$

således at $X(n) =$

$$\Phi(n) \left(\Phi(0)^{-1}X(0) + \Phi(1)^{-1}B(0) + \Phi(2)^{-1}B(1) + \dots + \Phi(n-2)^{-1}B(n-3) + \Phi(n-1)^{-1}B(n-2) \right) + B(n-1)$$

altså

$$X(n) = \Phi(n) \left(\Phi(0)^{-1}X(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \Phi(j)^{-1}B(j-1) \right) + B(n-1),$$

for $n \in \mathbb{N}_0$ (hvor summationen skal ignoreres for $n = 0$ og 1). Ved færdigudviklingen af dette udtryk (øvelser!) kan det så udnyttes at kun $x_1(t)$ er af interesse, samt at $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$.

6.8 STABILITET

Vi skal nøjes med at betragte lineære ligninger med konstante koefficienter:

$$X(t+1) = A X(t) + B, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Hvordan forløber en løsning til denne ligning, når $t \rightarrow \infty$? Da vi har en rekursionsformel for løsningen,

$$X(j) = A^j X_0 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} A^i \right) B,$$

kan vi basere overvejelserne på denne formel, specielt undersøge hvad der

sker med A^j , hhv. $\sum_{i=0}^{j-1} A^i$, når $j \rightarrow \infty$.

For hvert t gælder at $X(t) \in \mathbb{L}^n$; vi vil i resten af dette afsnit forudsætte at $\mathbb{L}^n$ er udstyret med en norm. Tilsvarende forudsætter vi at $\mathcal{L}(\mathbb{L}^n)$ er normeret. Det har så mening at tale om konvergens i $\mathbb{L}$ eller i $\mathcal{L}(\mathbb{L}^n)$. Da begge disse rum er endelig dimensionale, er det mindre væsentligt hvilken norm der benyttes.

Lad os antage at ligningen $X(t+1) = A X(t) + B$, $t \in \mathbb{N}_0$, har en løsning $X(t)$ for hvilken $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$ eksisterer, og lad os betegne denne grænseværdi med $X(\infty)$. Vi har således at $X(\infty) \in \mathbb{L}^n$, og da $X(t+1) = A X(t) + B$ for alle $t \in \mathbb{N}_0$ fås at $X(\infty) = A X(\infty) + B$. En nødvendig betingelse for at $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$ eksisterer er derfor at matrixligningen $X = A X + B$ har en løsning.

DEFINITION Vi siger at ligningen $X(t+1) = A X(t) + B$, $t \in \mathbb{N}_0$, er *globalt asymptotisk stabil*, hvis det for enhver af dens løsninger $X(t)$ gælder at $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$ eksisterer, og det endvidere om denne grænseværdi gælder at den er uafhængig af løsningens initialværdi.

BEMÆRKNING Det er en direkte konsekvens af definitionen at hvis der er global asymptotisk stabilitet, så vil det for enhver løsning X til den homogene ligning $X(t+1) = A X(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, gælde at $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$. Altså vil det for en vilkårlig initialværdi X_0 gælde at $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t X_0 = 0$. Af sætning 2.21 fås da at $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$. Denne betingelse er altså nødvendig for global asymptotisk stabilitet. Vi skal se at den også er tilstrækkelig.

Sigtet er nu at etablere følgende stabilitetsresultat:

SÆTNING 6.7 Ligningen $X(t+1) = A X(t) + B$, $t \in \mathbb{N}_0$, er globalt asymptotisk stabil hvis og kun hvis alle egenverdier for koefficientmatricen A er numerisk mindre end 1, altså $r(A) < 1$.

Vi må udsætte beviset lidt, indtil sætning 6.8 og 6.10 er fra hånden.

SÆTNING 6.8 Lad $A \in \mathcal{L}(U)$, hvor U er et endelig dimensionalt normeret vektorrum. Så gælder at $A^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $r(A) < 1$.

BEVIS: Da $\mathcal{L}(U)$ er endelig dimensionalt, er der intet tabt ved at forudsætte at $\mathcal{L}(U)$ er normeret med operatornormen (svarende til den givne norm på U). Vi betegner her begge disse normer med $\|\cdot\|$.

Antag at $A^n \rightarrow 0$, dvs. $\|A^n\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Så findes $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $\|A^n\|^{1/n} < 1$. Lemma 2.27 viser så at $r(A) < 1$.

For at vise den anden implikation, vil vi bruge Jordan's normalform. Vi skal vise at hvis $r(A) < 1$, så gælder at $A^n \rightarrow 0$, for $n \rightarrow \infty$. Lad J være den til A svarende Jordan form. Så findes en invertibel afbildning Q for hvilken $A = Q J Q^{-1}$. Ifølge Lemma 2.25 er det nok at vise at $J^n \rightarrow 0$. Hvis $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_q$, er $J^n = J_1^n \oplus \dots \oplus J_q^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor (lemma 2.26) er det tilstrækkeligt at vise at der for hver Jordanblok J_j gælder at $J_j^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, for $j = 1, \dots, q$. Betragt derfor en Jordanblok J_j ; i diagonalen står der λ_j og vi ved at $|\lambda_j| \leq r(A) < 1$. Lige over diagonalen står der lutter 1-taller (medmindre blokken er 1×1); resten af matricen for J_j er nul. Altså kan vi skrive $J_j = \lambda_j I + U_j$, hvor U_j er nilpotent. Af binomialformlen får vi at

$$(\lambda_j I + U_j)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} U_j^k.$$

(opgave!)

Hvis $U_j^p = 0$ (og p er minimal med denne egenskab), så vil denne sum for $n \geq p$ få udseendet

$$(\lambda_j I + U_j)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} U_j^k.$$

$(\lambda_j I + U_j)^n$ er altså en linearkombination af p faste elementer, nemlig $I, U_j, U_j^2, \dots, U_j^{p-1}$. Koefficienterne i linearkombinationen er

$\binom{n}{k} \lambda_j^{n-k}$ hvor $|\lambda_j| < 1$, og hvor $k = 0, \dots, p-1$. Lader vi her $n \rightarrow \infty$,

konstaterer vi at da der for ethvert fastholdt $k \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

(opgave!), slutter vi at $J_j^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Bemærk iøvrigt at vi har vist at $J_j^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ ved at vise at hver af koefficienterne $\binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$; det er derfor ligegyldigt hvilken norm der her er blevet benyttet på $\mathcal{L}(U)$. Dermed er sætningen vist.

Her specificeres nu først en forbindelse mellem operatornorm og spektralradius; derefter udvides denne forbindelse til en vilkårlig norm på $\mathcal{L}(U)$.

SÆTNING 6.10 Lad U være et endelig dimensionalt normeret vektorrum. For $A \in \mathcal{L}(U)$ gælder at $r(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$, hvor $\mathcal{L}(U)$ er udstyret med operatornormen.

BEVIS: Vi har allerede, fra lemma 2.27, at $r(A) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$.

For at vise den modsatte ulighed, påstår vi at det er nok at vise at hvis $r(A) < 1$, da er $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} < 1$; i så fald har vi nemlig at der for et vilkårligt positivt tal ε gælder at $r(A/(r(A) + \varepsilon)) = r(A)/(r(A) + \varepsilon) < 1$, hvoraf

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n/(r(A) + \varepsilon)^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}/(r(A) + \varepsilon) < 1,$$

og derfor at

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon.$$

Men da ε er en vilkårlig positiv størrelse, følger heraf at

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq r(A),$$

og dermed ville sætningen være bevist. Vi skal altså bevise, at hvis $r(A) < 1$, da er $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} < 1$. Hvis imidlertid $r(A) < 1$ fås af sætning 6.8, at $A^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, så $\|A^n\|^{1/n} < 1$ for alle tilstrækkelig store tal $n \in \mathbb{N}$; heraf følger at $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} < 1$. Dermed er sætningen bevist.

KOROLLAR 6.11 Lad U være et endelig dimensionalt normeret vektorrum og lad $A \in \mathcal{L}(U)$. Så gælder at $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$ for en vilkårlig norm på $\mathcal{L}(U)$.

BEVIS: Lad først $\|\cdot\|$ betegne operatornormen. Vi ved allerede at $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$; endvidere kan vi, til givet $\varepsilon > 0$ finde et helt tal k så $\|A^k\|^{1/k} < r(A) + \varepsilon$. Hvis $n \in \mathbb{N}$, kan vi dividere:

$$n = p_n k + q_n,$$

hvor resten q_n ligger mellem 0 og $k-1$. Da

$$\|A^n\| = \|A^{p_n k + q_n}\| \leq \|A^k\|^{p_n} \|A^{q_n}\|,$$

har vi at

$$\|A^n\|^{1/n} = \|A^{p_n k + q_n}\|^{1/n} \leq \|A^k\|^{p_n/n} \|A^{q_n}\|^{1/n}.$$

Da $q_n < k$, vil $q_n/n \rightarrow 0$, når $n \rightarrow \infty$, så $p_n k/n \rightarrow 1$, når $n \rightarrow \infty$, og derfor vil $p_n/n \rightarrow 1/k$, når $n \rightarrow \infty$. Altså vil $\|A^k\|^{p_n/n} \rightarrow \|A^k\|^{1/k}$ og $\|A^{q_n}\|^{1/n} \rightarrow 1$, når $n \rightarrow \infty$. Heraf følger at $\|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon$ for alle tilstrækkelig store $n \in \mathbb{N}$. Dermed er korollaret bevist for operatornormen. Lad så $\|\cdot\|$ betegne en vilkårlig norm på $\mathcal{L}(U)$. Da $\mathcal{L}(U)$

er endelig dimensional ved vi at der findes konstanter C_1 og C_2 for hvilke

$$C_1 \|B\| \leq |B| \leq C_2 \|B\|, \text{ for alle } B \in \mathcal{L}(U).$$

Specielt er $(C_1 \|A^n\|)^{1/n} \leq |A^n|^{1/n} \leq (C_2 \|A^n\|)^{1/n}$, for alle $n \in \mathbb{N}$, og derfor er

$$\begin{aligned} \lim(\|A^n\|)^{1/n} &= \lim(C_1 \|A^n\|)^{1/n} = \liminf(C_1 \|A^n\|)^{1/n} \leq \\ \liminf |A^n|^{1/n} &\leq \limsup |A^n|^{1/n} \leq \limsup(C_2 \|A^n\|)^{1/n} = \\ &= \lim(C_2 \|A^n\|)^{1/n} = \lim \|A^n\|^{1/n}, \end{aligned}$$

da jo $\lim(C_1)^{1/n} = \lim(C_2)^{1/n} = 1$. Men de to yderste led er jo netop $r(A)$, ifølge det allerede viste, så dermed er sætningen bevist.

Det næste korollar bliver brugt i beviset for sætning 6.14.

KOROLLAR 6.13 $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $(A')^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

BEVIS: En matrix A og dens transponerede A' har samme spektrum, fordi $A - \lambda I$ og $A' - \lambda I$ har samme determinant (overvej!), og derfor samme karakteristiske polynomium. Korollaret følger derfor af sætning 6.8.

Nu har vi hvad der skal til:

BEVIS FOR SÆTNING 6.7: Vi har allerede konstateret, i bemærkningen efter definitionen af global asymptotisk stabilitet, at hvis ligningen $X(t+1) = AX(t) + B$, $t \in \mathbb{N}_0$, er globalt asymptotisk stabil, så gælder at $A^t \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$. Af sætning 6.8 følger så at $r(A) < 1$.

Hvis vi omvendt om A ved at $r(A) < 1$, ved vi altså, ifl. sætning 6.8, at $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$. Lad X_0 være en vilkårlig initialværdi og lad den tilsvarende løsning være $X(t)$. Der gælder da at

$$X(j) = A^j X_0 + \left(\sum_{i=0}^{j-1} A^i\right) B \text{ for ethvert } j \in \mathbb{N}_0.$$

Betragt matrixrækken hvis afsnit er $\sum_{i=0}^{j-1} A^i$. Da $r(A) < 1$, er matricen $A-I$ invertibel ($1 \notin \sigma(A)$). Endvidere er

$$-(A-I) \sum_{i=0}^{j-1} A^i = (I-A) \sum_{i=0}^{j-1} A^i = I - A^j,$$

så

$$-(A-I)^{-1}(I-A^j) = \sum_{i=0}^{j-1} A^i,$$

hvoraf vi slutter at $\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{j-1} A^i$ eksisterer og er lig

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (-(A-I)^{-1}(I-A^j)) = -(A-I)^{-1}.$$

Det sidste lighedstegn følger af at $A^j \rightarrow 0$ for $j \rightarrow \infty$.

Indfører vi det fundne i formlen $X(j) = A^j X_0 + (\sum_{i=0}^{j-1} A^i) B$, fås at

$$\lim_{j \rightarrow \infty} X(j) = \lim_{j \rightarrow \infty} A^j X_0 + \lim_{j \rightarrow \infty} (\sum_{i=0}^{j-1} A^i) B = -(A-I)^{-1} B.$$

Vi konstaterer at $X(t)$ har en grænseværdi, når $t \rightarrow \infty$, og at denne grænseværdi er uafhængig af X_0 . Dermed er den globale asymptotiske stabilitet etableret.

Vi slutter denne diskussion med en simpel *tilstrækkelig* betingelse på en matrix A for at A^n konvergerer mod 0 for $n \rightarrow \infty$; dette giver os en bekvem tilstrækkelig stabilitetsbetingelse for differensligninger.

SÆTNING 6.14 Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $n \times n$ matrix for hvilken

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, \text{ for alle } i = 1, 2, \dots, n,$$

så vil $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Tilsvarende vil $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis der for søjlesummerne gælder

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1, \text{ for alle } j = 1, 2, \dots, n,$$

BEVIS: Vi beviser søjlesumsudsagnet. Det andet følger så af korollar 6.13. Argumentet har en del tilfælles med det vi gav for sætning 2.21: vi bruger den samme norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, som den i beviset for 2.21; for den vil det fremstå klart at $r(A) < 1$. Sætning 6.8 afslutter så sagen.

Først udstyrer vi $\mathbb{C}^n$ med den kanoniske basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ og opfatter den givne matrix A som en vis lineær afbildnings matrixrepræsentation i denne basis. Dernæst normerer vi $\mathbb{C}^n$ med 1-normen, dvs. for

$$x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

sætter vi

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Vi normerer også $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Lad $A := [a_{ij}]$ være en vilkårlig $n \times n$ kompleks matrix. Vi opfatter altså A som en lineær afbildning af $\mathbb{C}^n$ ind i sig selv. Sæt

$$\|A\| := \max_j \|A(e_j)\|_1.$$

Bemærk at $\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$, altså at $\|A\|$ er den størst forekomende sum af de numeriske søjler.

Vi noterer straks at den netop definerede størrelse $\|A\|$ er en norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ der opfylder 2.a) dvs. der gælder at $\|Ax\|_1 \leq \|A\| \|x\|_1$, for

alle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ og alle $x \in \mathbb{C}^n$. At $\|A\|$ er en norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ er rutine (opgave). For 2.a) lader vi $x := (x_1, \dots, x_n)$, således at $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$. Derfor er

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \left\| A \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^n x_j A e_j \right\|_1 \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|A e_j\|_1 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|A\| = \|A\| \|x\|_1 \end{aligned}$$

Sætningen er nu umiddelbar: den givne betingelse er jo netop at $\|A\| < 1$ og resultatet følger derfor af lemma 2.24 og sætning 6.8.

6.9 DIFFERENSLIGNINGER OG KONTRAKTIONER

Mange udsagn om differensligningers løsning kan bekvemt formuleres som udsagn om operatorer i et vektorrum bestående af følger. Så vi begynder med at minde om nogle ting fra 2MA1.

Hvis $\mathbb{L}$ er skalarlegemet (som regel $\mathbb{R}$ her, men det kan ofte lige så godt være $\mathbb{C}$) og M er en given mængde $\neq \emptyset$, betegner $(\mathcal{B}(M, \mathbb{L}), \|\cdot\|)$ mængden af begrænsede funktioner fra M ind i $\mathbb{L}$, udstyret med supremumsnormen $\|\cdot\|$. Denne mængde er altså et metrisk rum, idet $\|\cdot\|$ svarer til metrikken

$$d(f, g) = \|f - g\| := \sup_{m \in M} |f(m) - g(m)|,$$

hvor $f, g \in (\mathcal{B}(M, \mathbb{L}), \|\cdot\|)$. Husk at $(\mathcal{B}(M, \mathbb{L}), \|\cdot\|)$ er et fuldstændigt metrisk rum.

Som antydnet skal vi primært beskæftige os med følgerum, dvs. vi lader $M = \mathbb{N}$. Den sædvanlige betegnelse for $(\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{L}), \|\cdot\|)$ er $\ell^\infty(\mathbb{N})$, eller blot ℓ^∞ . Eksplicit er ℓ^∞ altså mængden af begrænsede reelle eller komplekse følger:

$\ell^\infty := \{ (x_n) \mid x_n \in \mathbb{L} \text{ for alle } n \in \mathbb{N} \text{ og } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \}$,
udstyret med normen

$$\|(x_n)\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Denne norm udspringer af metrikken

$$d((x_n), (y_n)) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Vi noterer os følgende.

SÆTNING 6.15 Rummet $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ af begrænsede følger er et Banachrum, med koordinatvis vektoraddition og skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &:= (x_n + y_n) \\ \alpha(x_n) &:= (\alpha x_n). \end{aligned}$$

Konvergens i $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ er koordinatvis uniform konvergens:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x_n^{(m)}) = (x_n)$$

hvis og kun hvis

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_n^{(m)} = x_n, \text{ uniformt for } n \in \mathbb{N}.$$

BEVIS: Se kap. 1, afsnit 1, Mat 2MA1 noterne.

BEMÆRK at i ethvert normeret vektorrum er regneoperationerne (skalar-multiplikation og vektoraddition) kontinuerte funktioner.

Vi minder også om det allerede i tidligere kapitler benyttede kontraktionsprincip, fixpunktsætningen for kontraktioner i fuldstændige metriske rum:

KONTRAKTIONSPRINCIPPET Lad (M, d) være et fuldstændigt metrisk rum og lad $T : M \rightarrow M$ være en kontraktion (dvs. der findes en konstant c , $0 \leq c < 1$ for hvilken $d(Tx, Ty) \leq c d(x, y)$ for alle $x, y \in M$). Så har T netop ét fixpunkt, dvs. der findes netop ét punkt $a \in M$ for hvilket $T(a) = a$. Ethvert $x \in M$ tiltrækkes af a i den forstand at følgen $\{T^n x\}$ af itererede punkter konvergerer mod a .

For begrænsede reelle følger kan vi bruge de reelle tals sædvanlige ordning, idet vi vedtager at udsagnet $(x_n) \leq (y_n)$ skal betyde at $x_n \leq y_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi kan så give en nyttig version af kontraktionsprincippet.

SÆTNING 6.16 BLACKWELL'S KONTRAKTIONSBETINGELSE 1. Antag at $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ er en afbildning, der opfylder to betingelser:

- T er *monoton*, dvs. hvis $(x_n) \leq (y_n)$ da gælder at $T((x_n)) \leq T((y_n))$.
- T *diskonterer*, dvs. der findes en reel konstant $\beta \in [0, 1]$ for hvilken det om enhver konstantfølge (c) , hvor $c > 0$, gælder at $T((x_n) + (c)) \leq T((x_n)) + \beta(c)$.

Så er T en kontraktion med kontraktionskonstant β .

BEVIS: For vilkårlige reelle følger (x_n) og (y_n) gælder for ethvert naturligt tal m at

$$x_m - y_m \leq |x_m - y_m| \leq \| (x_n) - (y_n) \|.$$

Danner vi af sidstnævnte størrelse en konstantfølge får vi at

$$(x_n) \leq (y_n) + (\| (x_n) - (y_n) \|).$$

Da T er monoton får vi af dette at

$$T((x_n)) \leq T((y_n) + (\| (x_n) - (y_n) \|)),$$

og da diskonteringsantagelsen fortæller os at

$$T((y_n) + (\| (x_n) - (y_n) \|)) \leq T((y_n)) + \beta (\| (x_n) - (y_n) \|),$$

slutter vi at

$$T((x_n)) \leq T((y_n)) + \beta (\| (x_n) - (y_n) \|),$$

altså at

$$T((x_n)) - T((y_n)) \leq \beta (\| (x_n) - (y_n) \|).$$

Ved at gentage argumentet med ombyttede følger får vi tilsvarende at

$$T((y_n)) - T((x_n)) \leq \beta (\| (x_n) - (y_n) \|).$$

Ordningen på følger er jo den koordinatvise, så vi ser at for hvert $m \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$|(T((y_n)) - T((x_n)))_m| \leq \beta \| (x_n) - (y_n) \|.$$

Men så er jo $d(T((x_n)), T((y_n))) \leq \beta d((x_n), (y_n))$, og dermed er det vist at T er en kontraktion med kontraktionskonstanten β .

Man kan uden besvær "vende ulighederne" i Blackwell's betingelse. I så fald får vi en variant, der ser sådan ud:

SÆTNING 6.17 BLACKWELL'S KONTRAKTIONSBETINGELSE 2. Antag at $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ er en afbildning, der opfylder to betingelser:

- T er *monoton*, dvs. hvis $(x_n) \leq (y_n)$ da gælder at $T((x_n)) \geq T((y_n))$.
- T *diskonterer*, dvs. der findes en reel konstant $\beta \in [0,1[$ for hvilken det om enhver konstantfølge (c) , hvor $c > 0$, gælder at $T((x_n) - (c)) \leq T((x_n)) + \beta (c)$.

Så er T en kontraktion med kontraktionskonstant β .

BEVIS: Øvelse!

Blackwell's betingelse giver os mulighed for at angive at visse differensligninger har en begrænset løsning.

Betragt følgende første ordens inhomogene reelle differensligning

$$y_n = \lambda y_{n+1} + \gamma x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (*)$$

hvor $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$, γ er vilkårlig, mens $(x_n) \in \ell^\infty$ er en given begrænset reel følge. Vi søger en løsning, dvs. en følge (y_n) hvis elementer y_n for alle $n = 0, 1, \dots$ opfylder (*). Dette kan gøres sådan: vi indfører afbildningen $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ givet ved for vilkårlig $(y_n) \in \ell^\infty$ at lade

$$T((y_n))_i := \lambda y_{i+1} + \gamma x_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Det er klart at følgen $(T((y_n)))_i \in \ell^\infty$, idet for alle $i = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} |T((y_n))_i| &= |\lambda y_{i+1} + \gamma x_i| \\ &\leq |\lambda y_{i+1}| + |\gamma x_i| \\ &\leq |\lambda| \|y_{i+1}\| + |\gamma| \|x_i\|, \end{aligned}$$

Ideen med T er at (y_n) er en løsning til (*) præcis hvis $T((y_n)) = (y_n)$, altså præcis hvis T har et fixpunkt. At dette sidste er tilfældet følger af denne sætning:

SÆTNING 6.18 Den ovenfor definerede afbildning T opfylder Blackwell's betingelse. Specielt er T en kontraktion. Altså har differensligningen (*) en entydig bestemt løsning $(y_n) \in \ell^\infty$.

BEVIS: Antag først at $0 \leq \lambda < 1$. Vi efterviser Blackwell's betingelse

1. Først monotoniciteten: hvis $(a_n) \leq (b_n)$ er $(T((b_n)) - T((a_n)))_i = \lambda b_{i+1} + \gamma x_i - \lambda a_{i+1} - \gamma x_i = \lambda(b_{i+1} - a_{i+1}) \geq 0$ for alle $i = 0, 1, \dots$

For at vise at T diskonterer, lader vi $0 < c \in \mathbb{R}$ og $(a_n) \in \ell^\infty$.

For vilkårligt $i = 0, 1, \dots$ har vi

$$(T((a_n) + (c)))_i = \lambda(a_{i+1} + c) + \gamma x_i = (T((a_n)))_i + \lambda c,$$

og da $0 \leq \lambda < 1$, følger påstanden. Altså er Blackwell's betingelse 1 opfyldt i dette tilfælde.

For $\lambda \in]-1, 0]$ bruger vi Blackwell's betingelse 2. Monotoniciteten følger analogt med første del af beviset: hvis $(a_n) \leq (b_n)$ er $(T((b_n)) - T((a_n)))_i = \lambda b_{i+1} + \gamma x_i - \lambda a_{i+1} - \gamma x_i = \lambda(b_{i+1} - a_{i+1}) \leq 0$ for alle $i = 0, 1, \dots$

Tilsvarende hvad diskontering angår: vi lader $0 < c \in \mathbb{R}$ og $(a_n) \in \ell^\infty$ være givet. For vilkårligt $i = 0, 1, \dots$ har vi

$$(T((a_n) - (c)))_i = \lambda(a_{i+1} - c) + \gamma x_i = (T((a_n)))_i - \lambda c,$$

og da $0 \leq \lambda < 1$, følger påstanden: vi lader simpelthen $\beta := -\lambda$.

Ved iteration kan vi angive løsningen explicit. Vi kan vælge en

vilkårlig udgangsvektor, f.eks. nul-følgen og så iterere: betegner vi $T^m((0))$ med $(y^{(m)})_i$ har vi for hvert $i = 0, 1, \dots$

$$y^{(1)}_i = T((0))_i = \gamma x_i,$$

$$y^{(2)}_i = T((\gamma x))_i = \lambda \gamma x_{i+1} + \gamma x_i,$$

$$y^{(3)}_i = \lambda^2 \gamma x_{i+2} + \lambda \gamma x_{i+1} + \gamma x_i,$$

osv.

OPGAVE Brug induktion til at vise at for alle $m \in \mathbb{N}$ gælder

$$y^{(m)}_i = \gamma \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j x_{i+j},$$

for $i = 0, 1, \dots$

Slut heraf at løsningen $(y_n) \in \ell^\infty$ til (*) er givet ved

$$y_i = \gamma \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{i+j},$$

for $i = 0, 1, \dots$

BEMÆRKNING Vi har fundet den entydig bestemte løsning til (*) i ℓ^∞ .

Imidlertid ved vi jo at enhver løsning til den tilsvarende homogene

ligning $y_n = \lambda y_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$, altså enhver følge af formen

$(k \lambda^{-n})$, hvor k er en konstant, kan adderes til den allerede fundne.

Men da $|\lambda| < 1$ vil kun $k = 0$ give en begrænset følge.

Også hvis $|\lambda| > 1$ kan vi løse (*) ved hjælp af kontraktionsprincippet. Vi betragter altså igen

$$y_n = \lambda y_{n+1} + \gamma x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (*)$$

men antager denne gang at $|\lambda| > 1$. Omformes (*) til

$$y_{n+1} = \lambda^{-1} y_n - \gamma \lambda^{-1} x_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

kan vi i analogi med før definere T ved for vilkårlig $(y_n) \in \ell^\infty$ at sætte

$$[T(y_n)]_{i+1} := \lambda^{-1} y_i - \gamma \lambda^{-1} x_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

For at have defineret T skal hertil føjes billedets første koordinat:

$$[T(y_n)]_0 := \text{given begyndelsesværdi.}$$

Som før ses direkte at $T: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$. Endvidere er det samme argumentation som ovenfor der giver at T opfylder Blackwell's betingelse 1 eller 2. Vi har dermed

SÆTNING 6.19 Differensligningen $y_n = \lambda y_{n+1} + \gamma x_n$, $n = 0, 1, \dots$, hvor $|\lambda| > 1$, γ er vilkårlig og både λ og γ er reelle, mens $(x_n) \in \ell^\infty$, har for ethvert valg af begyndelsesværdi y_0 en entydig bestemt

løsning (y_n) i ℓ^∞ , hvis førstekoordinat er y_0 .

OPGAVE a) Giv et bevis for sætning 6.19.

b) Opskriv en formel for løsningen (y_n) , udtrykt ved begyndelsesbetingelsen. Brug iteration.

OPGAVER

6.1 Lad $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ være koefficientmatricen for et homogent system af lineære førsteordens differensligninger. Find den løsning $X(t)$, der opfylder at $X(0) = (1, 1, 0)'$.

6.2 Lad $A := \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ være koefficientmatricen for et system $X(t+1) = A X(t) + (t, 2, t^2)'$, $t = 0, 1, \dots$ af lineære førsteordens differensligninger. Brug en bekvem løsningsmetode til at finde den løsning $X(t)$, der opfylder at $X(0) = (1, 1, 0)'$. Er ligningen stabil? Er den der står i opgave 6.1 stabil?

6.3 Løs differensligningen $x_{t+1} - p x_t = q$, $t = 1, 2, \dots$ hvor p og q er givne reelle konstanter. Husk specialtilfældene.

6.4 Find den fuldstændige løsning til differensligningen

$$y_{t+2} - 2 y_{t+1} + y_t = 2^t(t-1), \quad t \in \mathbb{N}_0$$

6.5 Betragt differensligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (3/5) x_1(t) + (1/5) x_2(t) \\ x_2(t+1) &= (1/5) x_1(t) + (3/5) x_2(t), \end{aligned}$$

for $t \in \mathbb{N}_0$.

a) Gør rede for at koefficientmatricen A i dette system er diagonaliserbar.

b) Vis at med $Q := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er $A = Q D Q^{-1}$, hvor D er en diagonalmatrix.

c) Løs systemet $z(t+1) = D z(t)$, $t \in \mathbb{N}_0$ og find derudfra løsningen til det først givne system.

d) Gør rede for at det først givne system er stabilt.

7 PERRONS SÆTNING

MOTIVERENDE EKSEMPEL 7.1 ("Subsidieproblemet"). Et antal producenter, f.eks. k ialt, indgår i en statsstøttet samproduktion, hvor hver producent gør brug af både sin egen og de andres produktion i forarbejdningsprocessen. Den samlede statsstøtte ligger fast og for dette støttebeløb, som vi vil kalde σ , ønsker staten størst mulig totalproduktion. De samarbejdende producenter ønsker støttemidlerne fordelt retfærdigt, dvs. ingen producent ønsker at bruge en større andel af subsidierne til dækning af egne produktionsomkostninger end den del af subsidierne han modtager ved salg til de øvrige producenter. Alle firmaerne er villige til at overholde de produktionskvoter, som en sådan retfærdig fordeling af støtten måtte give anledning til. Kan en retfærdig fordeling af statsstøtten foretages?

Producenterne fordeler støtten efter følgende princip: For at "få lov til" at deltage i samproduktionen betaler producent nr. j et vist beløb, kaldet c_{ij} , til producent nr. i for hver produceret enhed af sit eget produkt, nr. j . Bruger vi betegnelsen u_i for den i .te producents årlige totalproduktion, får vi at producent nr. j afgiver ialt (pr. år)

$$\sum_i c_{ij} u_j = \left(\sum_i c_{ij} \right) u_j = \gamma_j u_j,$$

hvor vi har indført $\gamma_j := \sum_i c_{ij}$. Tilsvarende modtager producent nr. j fra de andre

$$\sum_i c_{ji} u_i,$$

Nettoforbruget af støttemidler for producent nr. j bliver altså

$$v_j := \gamma_j u_j - \sum_i c_{ji} u_i.$$

Da ingen producent ønsker at udbetale mere end den modtagne statsstøtte, må vi have at hvert $v_j = 0$, altså at

$$u_j = \sum_i (c_{ji}/\gamma_j) u_i \quad (a)$$

for hvert $j = 1, \dots, k$. Endvidere må vi have at

$$u_j > 0 \text{ for hvert } j = 1, \dots, k. \quad (b)$$

Endelig vil kravet om størst mulig produktion kunne formuleres som kravet at

$$\sum u_j \geq \sum x_j \quad (c)$$

for enhver "retfærdig" produktion $(x_1, \dots, x_k)$, dvs. enhver produktion

der også opfylder kravet om optimal subsidiefordeling:

$$0 < x_j = \sum_i (c_{ji}/\gamma_j) x_i.$$

Selv om ligningssystemet (a) skulle have ikke-trivielle løsninger, er det ikke forlods klart at der er positive løsninger. Og kravet (c) om størst mulig produktion gør ikke sagen spor bedre.

Ikke desto mindre skal vi i dette afsnit bevise en sætning (som blev vist af den tyske matematiker Perron i 1905), der er svaret på alle vore bønner. Hans sætning siger følgende: Hvis der foreligger en matrix A med luttet positive indgange a_{ij} (og det gør der her, med $a_{ij} :=$

c_{ij}/γ_i), så er spektralradius $r(A)$ for denne matrix nødvendigvis en egenværdi, dvs. A har nødvendigvis en "stor" positiv egenværdi. Ydermere er denne positive egenværdis egenrum 1-dimensionalt, og - allerbedst, næsten - der findes en egenvektor $u = (u_1, \dots, u_k)$ med lutter positive koordinater hørende til denne egenværdi.

Disse udsagn kan vi oversætte til en løsning på subsidieproblemet. Vi lader altså $A := [a_{ij}]$ være den $k \times k$ matrix for hvilken $a_{ij} = c_{ij}/\gamma_i$. Da samtlige matrixindgange er positive, fortæller Perron os at ligningen $Au = r(A)u$ har en positiv løsning $u := (u_1, \dots, u_k)$, dvs. $u_j > 0$ for alle $j = 1, \dots, k$. Hvad er $r(A)$ her?

Multipliserer vi ligningen $Au = r(A)u$ fra venstre med rækkevektoren $g' := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ får vi $g'Au = r(A)g'u$. Da

$$(g'A)_i = \sum_{j=1}^k \gamma_j (c_{ji}/\gamma_j) = \sum_{j=1}^k c_{ji} = \gamma_i,$$

ser vi at $g'A = g'$, så $g'Au = g'u$. Altså er $g'u = r(A)g'u$. Da skalar $g'u \neq 0$ slutter vi at $r(A) = 1$. Men det betyder jo netop at u er en løsning til (a), som også opfylder (b).

Perron fortæller os også at egenrummet $\ker(A - E)$ er 1-dimensionalt, dvs. enhver løsning til (a) og (b) er et positivt multiplum af den vektor u vi lige har fundet. Lader vi derfor x betegne en vilkårlig produktion (altså en løsning til (a) og (b)) vil der gælde at $x = \tau u$ for et eller andet $\tau > 0$. Totalproduktionen vil være

$$\sum_i x_i = \sum_i \tau u_i$$

og dens totalomkostninger vil være $\sum_i \gamma_i \tau u_i$. Dette tal må ikke overstige totalstøtten σ . Altså vil den optimale produktion opfylde at

$$\sum_i \gamma_i \tau u_i = \tau \sum_i \gamma_i u_i = \sigma,$$

og derfor er hvert x_i bestemt ved at

$$x_i = \tau u_i = (\sigma / \sum_i \gamma_i u_i) u_i.$$

I denne fordeling modtager producent nr. i altså en statsstøtte af størrelsen $\gamma_i x_i$.

Vi ser at Perron har givet os den fuldstændige løsning på subsidieproblemet: der er altid en løsning, og det endda uanset hvad enhedsudligningsbeløbene c_{ij} er.

Først den formelle side af glossariet: *Positive og ikke-negative matricer*: Hvis M og N er reelle matricer, af samme dimension $k \times l$, skriver vi $M \geq N$ hvis $m_{ij} \geq n_{ij}$ for alle $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, og $M > N$ hvis $m_{ij} > n_{ij}$ for alle $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Hvis $M \geq 0$ siger vi at M er *ikke-negativ*. Gælder at $M > 0$ kaldes M *positiv*.

Det vil altså f.eks. sige at $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er positiv, mens $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er ikke-negativ (men ikke positiv). En ikke-negativ, men ikke positiv

matrix behøver altså ikke være nul!

LEMMA 7.2 Hvis $0 \neq x \geq 0$ er en $k \times 1$ matrix (altså en søjlevektor) og $A > 0$ er en $n \times k$ matrix, så er $Ax > 0$.

BEVIS: Lad $A = [a_{ij}]$. Hvis $x \geq 0$, så er den i .te koordinat i Ax givet ved $(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j \geq 0$, og denne sum er $= 0$ hvis og kun hvis hvert led $a_{ij} x_j = 0$. Da $a_{ij} > 0$, sker dette hvis og kun hvis hvert $x_j = 0$.

Vi skal bruge vores første observation om spektret for en positiv matrix et par gange; derfor isolerer vi den i dette lemma.

LEMMA 7.3 Lad $A > 0$ være en $k \times k$ matrix med spektrum $\sigma(A)$ og spektralradius $r(A)$. Lad $\lambda \in \sigma(A)$ være valgt så $|\lambda| = r(A)$ og lad $x := (x_1, \dots, x_k)$ være en egenvektor hørende til λ , altså $Ax = \lambda x$. Så opfylder vektoren

$$p := (|x_1|, \dots, |x_k|)$$

ligningen $Ap = |\lambda|p$, dvs. $r(A)$ er en egenværdi og p er en egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$.

BEVIS: Da $Ax = \lambda x$, ved vi at for hvert $i = 1, \dots, k$ gælder at

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j,$$

og derfor at

$$|\lambda x_i| = r(A)p_i = \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^k a_{ij} p_j = (Ap)_i.$$

Dermed har vi vist at $r(A)p \leq Ap$ og altså at

$$z := (A - r(A))p \geq 0.$$

Hvis $z \neq 0$ får vi af lemma 7.2 at $Az > 0$ og da $Ap > 0$ kan vi ved at gange Ap med et passende lille positivt ϵ antage at $Az \geq \epsilon Ap$, altså at $\epsilon Ap \leq A(A - r(A))p = A^2 p - r(A)Ap$. Af denne ulighed får vi at

$$A^2 p \geq (r(A) + \epsilon)Ap.$$

Dette kan også skrives som uligheden

$$A/(r(A) + \epsilon) Ap \geq Ap.$$

Sætter vi $B := A/(r(A) + \epsilon)$, har vi altså en positiv matrix B for

hvilken

$$B A p \geq A p.$$

Heraf følger at $B^2 A p \geq B A p \geq A p$, og et lige-ud-ad-landevejen induktionsargument viser at

$$B^n A p \geq A p \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ifølge Sætning 6.8 gælder at $B^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, altså at $B^n A p \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, hvoraf $A p = 0$, i strid med at $A p > 0$. Antagelsen om at $z \neq 0$ fører således til en modstrid. Altså slutter vi at $z = (A - r(A))p = 0$ og har dermed indset at $r(A)$ er en egenværdi, samt at p er en egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$.

SÆTNING 7.4 Hvis $A > 0$ er en $k \times k$ matrix med spektralradius $r(A)$, så er $r(A) > 0$, $r(A) \in \sigma(A)$ og der findes en positiv egenvektor svarende til egenværdien $r(A)$.

BEVIS: Vi ved at der findes en egenværdi λ for hvilken $|\lambda| = r(A)$. Af lemma 7.3 følger så at $r(A) \in \sigma(A)$ og at der findes en ikke-negativ vektor $p \neq 0$ for hvilken $A p = r(A)p$. Da $A p > 0$ er $r(A)p > 0$ og derfor er $r(A) > 0$ og $p > 0$. Sætningen er bevist.

LEMMA 7.5 Hvis $|\sum z_j| = \sum |z_j|$, så er alle $z_j = |z_j| e^{i\theta}$, hvor θ ikke afhænger af j . Tallene z_j er altså ensrettede.

BEVIS: Tegn et vektordiagram: læg vektorerne z_j i forlængelse af hinanden og sammenlign længder! Se også opgave 7.7.

SÆTNING 7.6 Antag at $A > 0$. Hvis $r(A) \neq \lambda \in \sigma(A)$, så er $|\lambda| < r(A)$.

BEVIS: Vi skal vise at hvis $\lambda \in \sigma(A)$ og $|\lambda| = r(A)$, så er $\lambda = r(A)$.

Af lemma 7.3 følger at hvis $|\lambda| = r(A)$ og hvis vi har en egenvektor $x = (x_1, \dots, x_k)$ for hvilken $A x = \lambda x$, så er $p := (|x_1|, \dots, |x_k|)$ en positiv vektor for hvilken $A p = r(A)p$. Heraf fås for f.eks. den første koordinat p_1 at

$$r(A) p_1 = |\lambda x_1| = \left| \sum a_{1j} x_j \right|$$

$$\leq \sum a_{1j} |x_j| = \sum a_{1j} p_j = (A p)_1 = r(A) p_1.$$

Men så må $\leq$ i midten være et lighedstegn, altså

$$|\sum a_{1j} x_j| = \sum a_{1j} |x_j|.$$

Af lemma 7.5 følger at $x_j = e^{i\tau} |x_j|$ for alle $j = 1, \dots, k$, dvs. de to vektorer x og p er proportionale. Da begge er egenvektorer, den ene hørende til λ , den anden til $r(A)$, må $\lambda = r(A)$. Dermed er sætningen bevist.

SÆTNING 7.7 Hvis $A > 0$, er egenrummet $\ker(A - r(A)E)$ 1-dimensionalt.

BEVIS: Hvis x er en egenvektor hørende til den positive egenværdi $r(A)$, så er $Ax = r(A)x$ og derfor er $A(\operatorname{Re} x) + i A(\operatorname{Im} x) = r(A)\operatorname{Re} x + i r(A)\operatorname{Im} x$, hvor vi tager realdel og imaginærdel i hver koordinat af x . Da alle indgange i A er reelle (endda positive) er $A(\operatorname{Re} x) = r(A)\operatorname{Re} x$ og $A(\operatorname{Im} x) = r(A)\operatorname{Im} x$; altså er både $\operatorname{Re} x$ og $\operatorname{Im} x$ egenvektorer hørende til egenværdien $r(A)$.

Lad nu x betegne en vilkårlig *reel* egenvektor for A , hørende til egenværdien $r(A)$. Ved evt. at gange med -1 kan vi forudsætte at mindst en af koordinaterne x_1 er positiv.

Lad p være en *positiv* egenvektor hørende til $r(A)$. Lad $t := \max_1 x_1/p_1$. Så er $t > 0$ og da $t p_1 \geq x_1$ for hvert $i = 1, \dots, k$ (med $=$ for mindst en værdi af i), har vi at $tp - x \geq 0$, men at mindst en af koordinaterne i $tp - x$ er lig 0 . Hvis $tp - x \neq 0$, slutter vi af lemma 7.2 at $A(tp - x) > 0$, altså at $A(tp - x) = r(A)(tp - x) > 0$; dette strider imod at mindst en koordinat i $tp - x$ er nul. Det vil sige at $tp - x = 0$, altså at x er et multiplum af p .

Vender vi tilbage til den oprindelige (muligvis komplekse) egenvektor x , ser vi at $\operatorname{Re} x$ og $\operatorname{Im} x$, og derfor x , er multipla af p . Hermed er sætningen vist: Egenrummet hørende til egenværdien $r(A)$ er af dimension 1.

Dermed har vi hele Perron's sætning: Den består af sætning 7.4, sætning 7.6 og sætning 7.7. Vi formulerer den eksplicit:

7.8 PERRON'S SÆTNING Lad $A > 0$ være en positiv $k \times k$ matrix med

spektralradius $r(A)$. Så er $r(A) > 0$, $r(A)$ er en egen værdi og der findes en positiv egenvektor hørende til egen værdien $r(A)$. Egenrummet $\ker(A - r(A)E)$ er en-dimensionalt. Alle andre egen værdier λ opfylder at $|\lambda| < r(A)$.

Vi skal se flere generalisationer af Perron's sætning. Først den for de såkaldt primitive matrixer, for hvilke det viser sig at Perron's sætning gælder i fuldt omfang.

DEFINITION 7.9 Primitiv matrix: En ikke-negativ $k \times k$ matrix $A \geq 0$ er *primitiv* hvis der findes $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $A^n > 0$.

BEMÆRKNING 7.10 En primitiv matrix kan ikke have nogen 0-søjle eller 0-række (overvej!). Heraf følger, via lemma 7.2, at hvis $A^m > 0$, så er $A^k > 0$ for alle $k \geq m$.

SÆTNING 7.11 (udvidelse af Perron til primitiv A) Hvis A er en primitiv $k \times k$ matrix, så har A positiv spektralradius $r(A)$. Spektralradius $r(A)$ er en egen værdi, der findes en positiv egenvektor hørende til $r(A)$, og egenrummet $\ker(A - r(A)E)$ er 1-dimensionalt. For alle andre egen værdier λ gælder at $|\lambda| < r(A)$.

BEVIS: Vi begynder med at gøre opmærksom på at der for *enhver* matrix S og ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder at $\sigma(S^n) = \{ \lambda^n \mid \lambda \in \sigma(S) \}$. (lav et bevis herfor!). Heraf følger så at $r(S^n) = r(S)^n$. Lad os nu antage at $A^n > 0$. Ifølge den just nævnte bemærkning er $r(A^n) = r(A)^n$, og da $A^n > 0$ er $r(A)^n$ en egen værdi for A^n . Hvis $\lambda \in \sigma(A)$, så er $\lambda^n \in \sigma(A^n)$, igen ifl. starten på dette bevis. Hvis specielt $\lambda \in \sigma(A)$ er valgt så $|\lambda| = r(A)$, så er $|\lambda^n| = r(A^n)$, og derfor $\lambda^n = r(A)^n$, fordi $A^n > 0$; dette følger af Perron's sætning. Da også $A^{n+1} > 0$, får vi tilsvarende at $\lambda^{n+1} = r(A)^{n+1}$; kombination af disse udsagn giver at $\lambda^{n+1} = \lambda^n r(A)$, så vi slutter at $\lambda = r(A)$, altså at $r(A)$ er en egen værdi for A . Vi har dermed også vist at hvis $\lambda \neq r(A)$ og hvis $\lambda \in \sigma(A)$, så er $|\lambda| < r(A)$. Endvidere ser vi at $r(A) > 0$, da $r(A^n) > 0$.

Da $Ax = r(A)x$ medfører at $A^n x = r(A)^n x$, ser vi endvidere at $\ker(A - r(A)E) \subseteq \ker(A^n - r(A)^n E)$. Sidstnævnte rum er 1-dimensionalt og

de to egenrum må derfor være ens. Specielt vil A have en positiv egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$.

BEMÆRKNING 7.12 Det kan bevises at hvis A er en primitiv $k \times k$ matrix, så er $A^n > 0$ for alle $n \geq (k-1)^2 + 1$.

Vi skal nu skaffe os information om det asymptotiske forløb af potenser af en matrix A . Vi betragter derfor et endelig dimensionalt normeret vektorrum U (det kan gerne være $\mathbb{C}^k$) og en begrænset lineær afbildning $A \in \mathcal{L}(U)$. Vi ved allerede, fra sætning 6.8, at $A^n \rightarrow 0$ hvis og kun hvis $r(A) < 1$. Mere generelt kan vi straks se at hvis $A^n \rightarrow B$, så vil delfølgen $(A^n)^2 \rightarrow B^2$, således at grænseoperatoren må opfylde at $B^2 = B$, altså være en idempotent. Denne idempotent vil iøvrigt også opfylde at $AB = BA = B$, thi $A^{n+1} \rightarrow B$.

Vi kan sige mere.

SÆTNING 7.13 Hvis $\{A^n\}$ er konvergent, er $r(A) \leq 1$.

BEVIS: Vi erindrer om korollar 6.11, ifølge hvilket $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$. Hvis $r(A) > 1$, kan vi vælge et tal R mellem 1 og $r(A)$ og dernæst finde $n_0 \in \mathbb{N}$ således at $R < \|A^n\|^{1/n}$ for alle $n > n_0$. Men så er $\|A^n\| > R^n$ for alle $n > n_0$, og konvergens af A^n er udelukket.

Betingelsen på spektralradius er nødvendig, men langt fra tilstrækkelig til at sikre konvergens. Betragt f.eks. 2×2 matricen $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, for hvilken $\sigma(A) = \{1, -1\}$. Her er det nemt at se at $A^{2n} = E$, og $A^{2n+1} = A$, så $\{A^n\}$ kan åbenbart ikke konvergere.

Hvis vi imidlertid i stedet for A^n betragter gennemsnittene over den forløbne 'tid', altså betragter operatorerne $M_n(A) := (E + A + \dots + A^{n-1})/n$, får vi en nydelig udvikling når $n \rightarrow \infty$. Her er jo

$$M_{2n}(A) = (E + A + E + A + \dots + A)/(2n) = (E + A)/2$$

og

$$M_{2n+1}(A) = (E + A + E + A + \dots + A + E)/(2n+1) = (E + A)/2 - E/(2n+1)$$

således at $M_n(A) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, når $n \rightarrow \infty$.

Vi vil bruge lidt krudt på dette mildere, og derfor meget vigtige 'middelkonvergens'begreb.

DEFINITION 7.14 Lad $T \in \mathcal{L}(X)$, hvor X er et Banachrum. Lad for $n \in \mathbb{N}$

$$M_n(T) := (E + T + \dots + T^{n-1})/n.$$

Hermed er defineret *Cesaro-middelværdierne* af T .

Vi skal undersøge mængden af vektorer $x \in X$ for hvilke $\{M_n(T)x\}$ er en konvergent følge i X og definerer derfor også

$$X_{me} := \{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)x \text{ eksisterer} \},$$

Blandt grundegenskaberne noterer vi straks følgende.

LEMMA 7.15 Hvis $x \in X_{me}$ så gælder at $T^n x/n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

BEVIS: Forudsætningen er altså at der findes et $y \in X$ således at $M_n(T)x \rightarrow y$ for $n \rightarrow \infty$. Da $(n+1)M_{n+1}(T) - nM_n(T) = n(M_{n+1}(T) - M_n(T)) + M_{n+1}(T) = T^n$, ser vi at konvergens af $\{M_n(T)x\}$ medfører at $T^n x/n = (M_{n+1}(T) - M_n(T))x + M_{n+1}(T)x/n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$.

LEMMA 7.16 X_{me} er et T -invariant underrum af X der indeholder $\ker(E-T)$.

BEVIS: T -invariansen er triviell. Underrummet $\ker(E-T)$ er åbenbart lig $\{ x \in X \mid Tx = x \}$, altså mængden af fikspunkter for T . Det ses direkte at $T^n x = x$, således at $M_n(T)x = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og for ethvert $x \in \ker(E-T)$, så det er klart at $\ker(E-T) \subseteq X_{me}$.

LEMMA 7.17 Hvis $x \in X$ opfylder at $T^n x/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, så gælder at $M_n(T)(E-T)x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Altså er $(E-T)(\{ x \in X \mid T^n x/n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \}) \subseteq X_{me}$.

BEVIS: Antag at $T^n x/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, og betragt $(E-T)x$. Da $M_n(T)(E-T)x = (E-T^n)x/n$, følger lemmaets påstand umiddelbart.

LEMMA 7.18 Hvis $T^n x/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, for alle $x \in X$, så gælder at $(E-T)X \cap \ker(E-T) = \{0\}$. Hvis endvidere følgen $\{M_n(T)\}$ er begrænset i $\mathcal{L}(X)$, så gælder at $(E-T)X^- \cap \ker(E-T) = \{0\}$.

BEVIS: Af lemma 7.17 ses at hvis $x \in (E-T)X$ så gælder at $M_n(T)x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Hvis $x \in (E-T)X$ også tilhører $\ker(E-T)$ har vi som i beviset for lemma 7.16, at $M_n(T)x = x$. Altså vil i dette tilfælde x være 0. Når der findes $C \in \mathbb{R}$ så $\|M_n(T)\| < C$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder det også for $x \in (E-T)X^-$ at $M_n(T)x \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$: hvis nemlig $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er vilkårlig og $y \in (E-T)X$ er valgt så $\|x-y\| < \varepsilon/(2C)$, og n_0 dernæst er valgt så $\|M_n(T)y\| < \varepsilon/2$ for alle $n > n_0$, så er $\|M_n(T)x\| < \|M_n(T)(x-y)\| + \|M_n(T)y\| < C\|x-y\| + \varepsilon/2 < C\varepsilon/(2C) + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Hvis $x \in (E-T)X^- \cap \ker(E-T)$, slutter vi som i første del af beviset at $x = 0$.

LEMMA 7.19 Hvis følgen $\{M_n(T)\}$ er begrænset i $\mathcal{L}(X)$, så er X_{me} afsluttet.

BEVIS: Antag at $\|M_n(T)\| < C$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Lad $x_p \rightarrow x$, $p \rightarrow \infty$, og antag $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)x_p$ eksisterer, for hvert p . Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Vælg $p \in \mathbb{N}$ så $\|x_p - x\| < \varepsilon$ og fasthold dette p . Vælg dernæst $N \in \mathbb{N}$ så $\|(M_n(T) - M_m(T))x_p\| < \varepsilon$ for alle $m, n > N$. Så er $\|(M_n(T) - M_m(T))x\| = \|(M_n(T) - M_m(T))(x - x_p)\| + \|(M_n(T) - M_m(T))x_p\| < 2C\|x_p - x\| + \varepsilon < 2C\varepsilon + \varepsilon$ for alle $m, n > N$. Heraf ses at $\{M_n(T)x\}$ er en konvergent følge, altså at $x \in X_{me}$.

LEMMA 7.20 Hvis følgen $\{M_n(T)\}$ er begrænset i $\mathcal{L}(X)$, og $T^n x/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, for alle $x \in X$, så gælder at $(E-T)X^- \ominus \ker(E-T) \subseteq X_{me}$.

BEVIS: Dette er klart ud fra lemma 7.16, lemma 7.18 og lemma 7.19.

7.21 MIDDEL-ERGODESÆTNINGEN Antag at $T \in \mathcal{L}(X)$ opfylder at følgen af Cesaro-middelværdier $\{M_n(T)\}$ er en begrænset følge i $\mathcal{L}(X)$ og at $T^n x/n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ for ethvert $x \in X$. Så gælder om

$$X_{me} := \{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)x \text{ eksisterer} \},$$

at

$$X_{me} = (E-T)X^- \ominus \ker(E-T).$$

BEVIS: Vi mangler at indse at $X_{me} \subseteq (E-T)X^- \oplus \ker(E-T)$, altså at vise at hvis $x \in X$ opfylder at $\{M_n(T)x\}$ er en konvergent følge så vil $x \in (E-T)X^- \oplus \ker(E-T)$. Bemærk først at det følger af lemma 7.17, at hvis $x \in X_{me}$ og $M_n(T)x \rightarrow z$, så vil $M_n(T)(E-T)x \rightarrow 0$, og derfor $(E-T)M_n(T)x \rightarrow 0$; heraf får vi at $(E-T)z = 0$, altså at $z = Tz$. Af denne ligning følger så at $T^n z = z$ for alle $n \in \mathbb{N}$, hvoraf vi også slutter at $M_n(T)z = z$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Betragt nu afbildningen P der til $x \in X_{me}$ knytter $Px := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)x$. Det er klart at P er en lineær afbildning og da vi har antaget at $\|M_n(T)\| < C$ for alle $n \in \mathbb{N}$, gælder at $\|Px\| \leq C\|x\|$. Ligningen $M_n(T)z = z$ kan åbenbart udtrykkes ved $M_n(T)P = P$. Men heraf følger, ved at lade $n \rightarrow \infty$, at $P^2 = P$, altså at P er en idempotent, en projektion.

Vi har netop indset at $z = Px$ opfylder at $z \in \ker(E-T)$. Hvis omvendt $z \in \ker(E-T)$, ved vi allerede at $M_n(T)z = z$, således at $Pz = z$. Hermed har vi vist at $PX_{me} = \ker(E-T)$.

For $y \in \ker P = (E-P)X_{me}$ har vi at $y = (E-P)y = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)y$. Da $y/n \rightarrow 0$ vil $y = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(T)y = \lim_{n \rightarrow \infty} (E + T + \dots + T^{n-1})y/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T + \dots + T^{n-1})y/(n-1) = T \lim_{n \rightarrow \infty} (E + \dots + T^{n-2})y/(n-1) = Ty$

For $y \in \ker P$ har vi at $M_n(T)y \rightarrow 0$, og derfor at $(E - M_n(T))y \rightarrow y$. Da $[E - M_n(T)]y = [nE - E - T - \dots - T^{n-1}]y/n = [(E-T) + (E-T^2) + \dots + (E-T^{n-1})]y/n = (E-T)[E + (E+T) + \dots + (E+T+\dots+T^{n-2})]y/n$, ser vi heraf at $y \in [(E-T)X_{me}^-]^- \subseteq [(E-T)X]^-$. Inklusionen $(E-T)X \subseteq \ker P$ blev iøvrigt vist i lemma 7.17, så vi har altså at $[(E-T)X]^- = \ker P$.

Her er så den version af ovenstående, vi i dette kursus vil benytte mest.

KOROLLAR 7.22 Lad X være et endelig dimensionalt normeret vektorrum. Lad $T \in \mathcal{L}(X)$. Så er operatorfølgen $\{M_n(T)\}$ konvergent hvis og kun hvis $T^n/n \rightarrow 0$; i bekræftende fald har vi at

$$X = (E-T)X \oplus \ker(E-T).$$

BEVIS: Hvis $\{M_n(T)\}$ er konvergent, er denne følge begrænset. Endvidere vil $nM_n(T) - (n-1)M_{n-1}(T) = T^{n-1}$, så konvergens af $\{M_n(T)\}$ medfører at $T^n/n \rightarrow 0$. Hvis omvendt $T^n/n \rightarrow 0$, ved vi fra lemma 7.18 at

$(E-T)X$ og $\ker(E-T)$ danner direkte sum. Af dimensionsformlen følger så at $X = (E-T)X \oplus \ker(E-T)$. På underrummet $(E-T)X$ er $E-T$ en bijektion, thi $(E-T)X \cap \ker(E-T) = \{0\}$. Altså er $(E-T)X = (E-T)^2X$, så for $x \in (E-T)X$ findes $y \in (E-T)X$ for hvilken $x = (E-T)y$. Men så er jo som også tidligere brugt $M_n(T)x = M_n(T)(E-T)y = (E-T^n)y/n$ og da vi forudsætter at $T^n/n \rightarrow 0$ vil $(E-T^n)y/n \rightarrow 0$. Dermed har vi vist at $\{M_n(T)x\}$ er konvergent for alle $x \in (E-T)X$. På egenrummet $\ker(E-T)$ er konvergen af $\{M_n(T)x\}$ trivielt. Dette viser at hvis P betegner projektionen af X på $\ker(E-T)$ med $\ker P = (E-T)X$, så har vi at $M_n(T)x \rightarrow Px$ for alle $x \in X$. Af en sætning i kap. 2 følger så konvergen af operatorfølgen $\{M_n(T)\}$.

Ergodesætningen for endelig dimensionale rum er altså en sætning om operatorer T for hvilke $T^n/n \rightarrow 0$, altså operatorer med langsomt voksende potenser.

SÆTNING 7.23 Hvis $T \in \mathcal{L}(U)$ har langsomt voksende potenser, altså opfylder at $\|T^n\|/n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, så er $r(T) \leq 1$.

BEVIS: Der findes et $n_0 \in \mathbb{N}$ for hvilket $\|T^n\|/n < 1/2$ for alle $n > n_0$, hvorefter vi ser at $\|T^n\| < n/2$ for alle $n > n_0$, og altså $\|T^n\|^{1/n} < (n/2)^{1/n}$ for alle $n > n_0$. Idet $(n/2)^{1/n} \rightarrow 1$ for $n \rightarrow \infty$ og idet $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$, følger påstanden.

Blandt operatorer med langsomt voksende potenser finder vi klart nok alle operatorer T for hvilke $\{T^n\}$ er begrænset, og heriblandt altså alle operatorer T med operatornorm $\|T\| \leq 1$. Vi vil nu studere denne klasse nærmere.

DEFINITION 7.24 af power bounded: En lineær afbildning $A \in \mathcal{L}(U)$, hvor U er et normeret vektorrum og $\mathcal{L}(U)$ er udstyret med operatornormen siges at være *power bounded* hvis der findes en konstant C således at $\|A^n\| < C$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Tilsvarende siger vi at en kvadratisk $k \times k$ matrix $A = [a_{ij}]$ er *power bounded* hvis der findes en konstant C for hvilken det om alle potenser $A^n = [a_{ij}^{(n)}]$ gælder at

$$|a_{ij}^{(n)}| \leq C \text{ for alle } i, j = 1, \dots, k \text{ og alle } n \in \mathbb{N}.$$

BEMÆRKNING Hvis en matrix A opfattes som en lineær afbildning på $\mathbb{C}^k$ er de to definitioner sammenfaldende: For vilkårligt $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ definerer nemlig summen af alle numeriske matrixindgange $|A| := \sum |a_{ij}|$ en norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$, og da denne norm er ækvivalent med operatornormen på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ gælder at $\{\|A^n\|\}$ er begrænset hvis og kun hvis $\{|A^n|\}$ er begrænset, og dette er tilfældet hvis og kun hvis der findes $C \in \mathbb{R}$ så $|a_{ij}^{(n)}| \leq C$ for alle $i, j = 1, \dots, k$ og alle $n \in \mathbb{N}$.

EKSEMPEL 7.25 Hvis en Jordanblok med λ i diagonalen er power bounded så er $|\lambda| \leq 1$. Hvis specielt $|\lambda| = 1$ er blokken en 1×1 blok. Det kan vi indse således: Lad J være en Jordanblok med λ i diagonalen. Så har J^n diagonalen λ^n , så begrænsethedsbetingelsen medfører umiddelbart at $|\lambda| \leq 1$. Hvis $|\lambda| = 1$ og hvis J ikke er 1×1 , betragtes $(J^n)_{1,2}$. Da J^n er en trekantsmatrix er $(J^n)_{1,2} = (J^{n-1})_{1,1}(J)_{1,2} + (J^{n-1})_{1,2}(J)_{2,2}$, og derfor er det ligetil at indse via induktion at $(J^n)_{1,2} = n\lambda^{n-1}$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $|\lambda| = 1$ er derfor $|(J^n)_{1,2}| = n$. Dette strider mod antagelsen om power boundedness, så J må være en 1×1 matrix i dette tilfælde.

En umiddelbar konsekvens af ovenstående er følgende.

SÆTNING 7.26 Hvis A er power bounded, så er $r(A) \leq 1$. Endvidere gælder at $\{M_n(A)\}$ er konvergent.

Som det fremgår af argumentet i eksempel 7.25, så har den omvendte påstand af den i sætning 7.26 ikke megen chance for at være sand: for den ikke-negative matrix $J := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, som jo har spektralradius 1, gælder at $J^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, således at power boundedness er udelukket. Men, som vi nu skal se, hvis vi betragter positive matricer, så gælder den omvendte implikation.

SÆTNING 7.27 Hvis A er primitiv og $r(A) \leq 1$ så er A power

bounded.

BEVIS: Hvis $r(A) < 1$ ved vi fra sætning 6.8 at $A^n \rightarrow 0$ og power boundedness følger straks. Vi kan derfor nu antage at $r(A) = 1$. Vi ved så at 1 er en egenværdi og at der findes en positiv egenvektor $y := (y_1, \dots, y_k)$ hørende til 1. Af $Ay = y$ slutter vi straks at $A^n y = y$ for alle $n = 1, 2, \dots$. Lad $y_{\max}$, hhv. $y_{\min}$, betegne den største, hhv. mindste, af koordinaterne til y . Så har vi følgende vurdering, som åbenbart gælder for alle $i = 1, \dots, k$, for alle $n \in \mathbb{N}$ og for alle $m = 1, \dots, k$:

$$y_{\max} \geq y_i = \sum_j (A^n)_{ij} y_j \geq \sum_j (A^n)_{ij} y_{\min} \geq (A^n)_{im} y_{\min}.$$

Altså er

$$(A^n)_{im} \leq y_{\max}/y_{\min}$$

for alle $i, m = 1, \dots, k$ og alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er korollaret vist.

BEMÆRK at det af sætning 7.27 følger at hvis B er primitiv så er matrixfølgen $\{B^n/r(B)^n\}$ begrænset.

Faktisk gælder der mere end blot begrænsethed for A^n .

SÆTNING 7.28 Hvis A er primitiv og har $r(A) \leq 1$, er A^n konvergent.

BEVIS: Da vi allerede kender situationen når $r(A) < 1$, kan vi antage at $r(A) = 1$. Lad X betegne det endelig dimensionale normerede vektorrum ($\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$) som A virker på. Da A er power bounded, ved vi at $\{M_n(A)\}$ er konvergent, og derfor at $X = (E-A)X \oplus \ker(E-A)$. Betragt restriktionerne $A^n|(E-A)X$ og $A^n|\ker(E-A)$. Det er tilstrækkeligt at vise konvergens for hver af disse. Da det er klart at $A|\ker(E-A) = E|\ker(E-A)$, er der kun grund til at undersøge $A^n|(E-A)X$. Men åbenbart er $\sigma(A|(E-A)X) = \sigma(A) \setminus \{1\}$, og af sætning 7.11 ses at $r(A|(E-A)X) < 1$. Altså vil $A^n|(E-A)X \rightarrow 0$. Det beviser sætningen.

KOROLLAR 7.29 Hvis A er primitiv så er $A^n/r(A)^n$ konvergent.

Vi opskriver nu indholdet af de to foregående resultater i eksplicit

form.

SÆTNING 7.30 Lad A betegne en primitiv $k \times k$ matrix og X betegne det vektorrum ($\mathbb{C}^k$ eller $\mathbb{R}^k$) som A virker på. Hvis $T := A/r(A)$, så konvergerer T^n mod projektionen P med billedrum

$$PX = \ker(r(A)E - A)$$

og kerne givet ved

$$\ker P = (r(A)E - A)X$$

svarende til opspaltningen $X = (r(A)E - A)X \oplus \ker(r(A)E - A)$.

Et eksplicit udtryk for en matrixrepræsentation for P kan fås således: hvis $p > 0$ er en positiv egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$, mens $q > 0$ er en positiv egenvektor for den transponerede A' hørende til egenværdien $r(A') = r(A)$, så er

$$P = p q' / q' p.$$

BEVIS: Vi ved fra sætning 7.28 at $\{T^n\}$ konvergerer mod den i denne sætnings formulering nævnte projektion P (bemærk at $(r(A)E - A)X = (E - T)X$ og at $\ker(E - T) = \ker(r(A)E - A)$).

Af sætning 7.11 følger at $PX = \ker(r(A)E - A)$ er 1-dimensionalt og kan udspændes af en positiv egenvektor p hørende til egenværdien $r(A)$. Betegner vi matricen for P med samme bogstav P , har vi derfor at hver søjle i P er et multiplum af p . Vi kan skrive

$$P = \begin{bmatrix} r_1 p_1 & r_2 p_1 & \cdots & r_k p_1 \\ r_1 p_2 & r_2 p_2 & \cdots & r_k p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1 p_k & r_2 p_k & \cdots & r_k p_k \end{bmatrix} = p r', \text{ hvor } r := \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}.$$

For den transponerede matrix A' gælder at A' er en ikke-negativ matrix og da $(A')^n = (A^n)'$, er A' også primitiv. Sætning 7.11 kan anvendes: der findes således en positiv egenvektor q hørende til egenværdien $r(A') = r(A)$ (overvej hvorfor vi ved at dette lighedstegn gælder). Da $A'q = r(A')q = r(A)q$, er $T'q = q$, således at $T'^n q = q$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(T')^n = (T^n)'$ ser vi at $T'^n \rightarrow P'$, og dette, kombineret med det lige observerede, medfører at $P'q = q$. Ved transponering heraf får vi $q' = q'P$, og kombinerer vi dette med $P = p r'$, får vi at $q' = q'P = q' p r'$. Da $q' p$ er en skalar, er $r' = q' / (q' p)$

p). Altså er

$$P = p q' / (q' p).$$

Hermed er sætningen vist.

Der er en væsentlig pointe i dette, som vi trækker explicit frem:

SPECIALTILFÆLDE 7.31 Hvis A er en primitiv overgangsmatrix ('overgangsmatrix' betyder at matricen er ikke-negativ og alle søjlesummer er lig 1), så kan $q = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ bruges i ovenstående. Altså: for en vilkårlig $k \times k$ overgangsmatrix A gælder at A' har søjlevektoren $q' = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle'$ som en positiv egenvektor hørende til egenværdien 1. Hvis vi som positiv egenvektor p vælger den der har koordinatsum 1, er $q' p = 1$, og i matricen $p q'$ er hver søjle lig med p . Der gælder altså for en overgangsmatrix A følgende:

a) $r(A) = 1$

Hvis yderligere A er primitiv, så sætning 7.30 gælder, har vi følgende:

- b) hvis den positive egenvektor p hørende til egenværdien 1 er valgt med koordinatsum 1 (man siger at p er stokastisk), så vil for $n \rightarrow \infty$ $A^n \rightarrow L$, hvor hver søjle i L er p .
- c) Lad $x \geq 0$ være en vilkårlig stokastisk vektor. Så er $L x = p$ og derfor vil $A^n x \rightarrow p$, for $n \rightarrow \infty$. Det asymptotiske forløb er altså uafhængigt af udgangssituationen.

Vort føljetoneksempel kan illustrere anvendeligheden af ovenstående.

EKSEMPEL 7.32 Et markeds ligevægtstilstand for $t \rightarrow \infty$.

Vi bruger igen det simple tredimensionale marked som eksempel, jf. 2.3. Tidligere er fundet at egenværdierne er 1, 0.6 og 0.5. Ifølge sætning 7.30 er $\lim A^n = p q' / q' p$, hvor p er en positiv egenvektor for A hørende til 1, mens $q' = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Som p kan vi bruge $\langle 9, 7, 4 \rangle'$. Altså vil

$$A^n \rightarrow 1/20 \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

for $n \rightarrow \infty$.

Hvis markedets initialfordeling er givet ved vektoren $v :=$

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, er v en stokastisk vektor (ikke negativ og med koordinatsum = 1); udviklingen vil til hver tid n være beskrevet ved $A^n v$, $n = 1, 2, \dots$ og vil i det lange løb konvergere mod

$$\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 9(v_1 + v_2 + v_3) \\ 7(v_1 + v_2 + v_3) \\ 4(v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Her ses således at det kun er markedets samlede *størrelse* i begyndelsen, der betyder noget i det lange løb; *initialfordelingen* imellem agenterne er uden betydning.

Vi slutter denne tankekreds af med Perron's sætning for ikke-negative matricer. Endnu et par tekniske detaljer skal klares først.

LEMMA 7.33 Hvis $0 \leq A < B$, så er $r(A) \leq r(B)$.

BEVIS: Vi starter med at bemærke at hvis $0 \leq A < B$, så er $A^n < B^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (dette er en simpel sag, som kan vises ved induktion: $B^{n+1} - A^{n+1} = B^n B - B^n A + B^n A - A^n A = B^n(B - A) + (B^n - A^n)A > 0$, ifl. lemma 7.2).

Specielt følger heraf at $A^n/r(B)^n < B^n/r(B)^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor er $A/r(B)$ power bounded, da jo $B/r(B)$ er power bounded (sætning 7.27). Af sætning 7.26 følger så at $r(A/r(B)) \leq 1$, og altså $r(A) \leq r(B)$.

SÆTNING 7.34 Hvis $A \geq 0$ så er $r(A)$ en egenværdi for A og A har en ikke-negativ egenvektor hørende til $r(A)$.

BEVIS: Med $B_n := A + T/n$, hvor T består af lutter 1-taller, vil $r(A) \leq r(B_{n+1}) \leq r(B_n)$, ifl. lemma 7.33. Følgen $(r(B_n))$ er altså dalende, nedad begrænset og derfor konvergent; specielt gælder at

$$r(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(B_n) =: \lambda.$$

Hver af matricerne B_n har en positiv egenvektor x_n hørende til egenværdien $r(B_n)$. Vi kan udstyre $\mathbb{C}^k$ med ℓ^1 normen $\|\cdot\|_1$, defineret for $a := (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ ved $\|a\|_1 := \sum |a_j|$. Normerer vi så alle egenvektorerne x_n så $\|x_n\|_1 = 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$, og bevarer vi betegnelsen x_n , kan vi af $\mathbb{C}^k$ -enhedskuglens kompakthed slutte at

følgen (x_n) har en konvergent delfølge (x_{n_p}) , altså at der findes $x \in \mathbb{C}^k$ for hvilket $x_{n_p} \rightarrow x$, for $p \rightarrow \infty$. Da alle vektorerne x_{n_p} er positive vil x være ikke-negativ. Da $\|x_{n_p}\| = 1$, for alle p , vil også $\|x\| = 1$. Specielt er altså $x \neq 0$.

Vi påstår at $Ax = \lambda x$, hvor $\lambda = \lim_{p \rightarrow \infty} r(B_{n_p})$ blev indført før. Ved indskydning af led har vi umiddelbart følgende vurdering:

$$\begin{aligned} \|Ax - \lambda x\| &\leq \\ &\|(A - B_{n_p})x\| + \|B_{n_p}x - B_{n_p}x_{n_p}\| \\ &+ \|B_{n_p}x_{n_p} - r(B_{n_p})x\| + \|r(B_{n_p})x - \lambda x\|. \end{aligned}$$

For $\|(A - B_{n_p})x\|$ får vi umiddelbart at $\|(A - B_{n_p})x\| \leq 1/n_p \|T\| \|x\|$.

Det andet led kan også direkte vurderes:

$$\|B_{n_p}x - B_{n_p}x_{n_p}\| \leq (\|A\| + 1/n_p \|T\|) \|x - x_{n_p}\|.$$

For tredje led bruger vi at $B_{n_p}x_{n_p} = r(B_{n_p})x_{n_p}$ og får således

$$\|B_{n_p}x_{n_p} - r(B_{n_p})x\| \leq r(B_{n_p}) \|x - x_{n_p}\|.$$

Endelig giver vurderingen af fjerde led $\|r(B_{n_p})x - \lambda x\|$ sig selv og

vi får alt i alt at $\|Ax - \lambda x\| \leq$

$$1/n_p \|T\| \|x\| + (\|A\| + 1/n_p \|T\|) \|x - x_{n_p}\| + r(B_{n_p}) \|x - x_{n_p}\| + (r(B_{n_p}) - \lambda) \|x\|.$$

Hver af disse fire led konvergerer mod 0 når $p \rightarrow \infty$. Altså er $Ax = \lambda x$. Da $x \neq 0$ betyder det at $\lambda \in \sigma(A)$, og altså at $|\lambda| \leq r(A)$.

Den anden ulighed $r(A) \leq \lambda$ blev bemærket tidligere, og derfor har vi at $\lambda = r(A)$ er en egen værdi for A og at $x \geq 0$ er en egenvektor for A hørende til denne egen værdi. Dermed er sætningen bevist.

Denne sidstnævnte generalisation af Perron's sætning har et berømt og nyttigt specialtilfælde.

KOROLLAR 7.35 (Sætningen om endelige Markov processer) Lad A være en ikke-negativ matrix, hvor hver søjle har koordinatsum 1. Så har A spektralradius 1, 1 er en egen værdi og der findes en ikke-negativ egenvektor hørende til egen værdien 1.

BEVIS: Vi mangler blot at se at $r(A) = 1$. For at vise at $r(A) \leq 1$

benytter vi sætning 7.14: Hvis $s \in \mathbb{R}$ er valgt så $s > 1$, følger det af sætning 7.14, at $r(A/s) < 1$, altså at $r(A) < s$. Da s er et vilkårligt tal > 1 , slutter vi at $r(A) \leq 1$. Hvad uligheden $r(A) \geq 1$ angår, er der i gennemgangen af subsidieproblemet en ide der kan bruges: Betragt ligningen $Ax = r(A)x$, hvor x er valgt ikke-negativ. Multipliker begge sider fra venstre med rækkevektoren $[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$. Detaljerne overlades til læseren; sml. s. 7.2.

BEMÆRKNING Korollar 7.35 kan også udledes af Farkas' alternativsætning (Sætning 7.3 i 2OKs Optimeringsnoter). Korollar 7.35 påstår at hvis $A = [a_{ij}] \geq 0$ så findes der $x \geq 0$ for hvilket $(A - E)x = 0$. Vi kan selvfølgelig yderligere antage at $x := (x_1, \dots, x_k)$ opfylder at $\sum x_j = 1$. Det er den eksplicitte tilføjelse af denne sidste betingelse, der er ideen i beviset. De to betingelser, altså at der findes en ikke-negativ løsning x til $(A - E)x = 0$ for hvilken $\sum x_j = 1$, kan opfattes som alternativ (I) i Farkas' sætning, i følgende formulering: Den matrix A der er nævnt i Farkas' sætning erstatter vi med en $(k+1) \times k$ matrix A , der i de første k rækker har de tilsvarende rækker i $A - E$ (hvor vi bruger "vores" A), mens den nederste række indeholder lutter 1-taller; B vælger vi som søjlevektoren $(0, \dots, 0, 1)$ af "længde" $k+1$. For at have et bevis for korollar 7.35 skal vi altså udelukke den anden mulighed i Farkas' sætning. Den får her udseendet

$$A'y \leq 0$$

$$\text{sampt } B'y > 0$$

for et eller andet $y = (y_1, \dots, y_{k+1}) \geq 0$. Betingelsen $B'y > 0$ betyder simpelthen $y_{k+1} > 0$, mens $A'y = (y'A)' \leq 0$ betyder $y'A \leq 0$.

Udfører vi sidstnævnte matrixmultiplikation får vi

$$\sum_{j=1}^k y_j a_{ji} - y_1 + y_{k+1} \leq 0 \text{ for } i = 1, \dots, k,$$

hvoraf

$$\sum_{j=1}^k y_j a_{ji} + y_{k+1} \leq y_1 \text{ for } i = 1, \dots, k.$$

Vi ser heraf at $y_1 > 0$ for $i = 1, \dots, k$. For det mindste y_1 får vi, da A er en overgangsmatrix, at

$$\min y_1 \leq \sum_{j=1}^k y_j a_{ji} < \sum_{j=1}^k y_j a_{ji} + y_{k+1} \leq y_1 \text{ for } i = 1, \dots, k,$$

en absurditet! Altså må alternativ (II) forkastes og korollaret er bevist.

HOMOGENE MARKOV-KÆDER

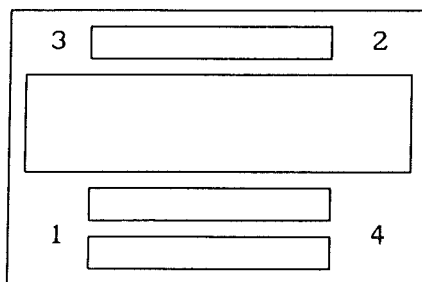
Uden at komme ind på alle formelle aspekter skal vi nu forbinde ovenstående til nogle af grundprincipperne for homogene Markov-kæder.

Som nævnt siges en vektor $p \geq 0$ at være *stokastisk* hvis koordinatsummen er 1. En *stokastisk* matrix er en matrix med stokastiske søjler.

Lad os antage vi har et system $\mathcal{S}$, som kan befinde sig i k forskellige tilstande $s_1, \dots, s_k$ til hvert af tidspunkterne $t_1, t_2, \dots$. Lad os også forudsætte at systemet med sandsynlighed p_{ij} slår over fra tilstand s_j til tilstand s_i i løbet af en tidsenheds forløb. Bemærk at vi forudsætter at overgangssandsynlighederne p_{ij} ikke er tidsafhængige.

Hvis systemet $\mathcal{S}$ i begyndelsen befinder sig i tilstand s_1 med sandsynlighed $p_1^{(0)}$, er vektoren $\langle p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)} \rangle$ (eller rettere den tilsvarende søjlevektor $p_0 := \langle p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)} \rangle'$) en beskrivelse af systemet til initialtidspunktet t_0 . Lader vi overgangsmatricen $P := [p_{ij}]$, fås at $P p_0$ er sandsynlighedsfordelingen af systemets tilstande til tiden t_1 , og derudfra at $p_n := P^n p_0$ er sandsynlighedsfordelingen af systemets tilstande til tiden t_n , $n = 1, 2, \dots$

EKSEMPEL I en "labyrint" med fire kamre, forbundet med adskillige gange, befinder sig en forsøgsrotte:



Alle udgange fra alle kamre er ens, så ingen udgang foretrækkes af rotten frem for nogen anden. Vi antager endvidere at sandsynligheden for at rotten i en given tidsenhed *forbliver* i et kammer er den samme som sandsynligheden for at rotten forlader kamret gennem en af gangene.

Overgangsmatricen P for dette system $\mathcal{S}$ vil derfor være

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.6 & 0.25 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Placeres rotten til at begynde med f.eks. i kammer nr. 3, er $p_0 = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle'$, og rottens bevægelser kan derefter beskrives ved følgen $P^n \langle 0, 0, 1, 0 \rangle'$.

Man kalder det betragtede system regulært hvis der findes en tid t_N efter hvilken systemet kan være i enhver af sine tilstande med positiv sandsynlighed, uanset initialtilstanden. Altså: Systemet $\mathcal{S}$ med stoka-

stisk overgangsmatrix P er *regulært* hvis der findes et $N \in \mathbb{N}$ for hvilket $P^n p_0 > 0$ for alle $n > N$ og for ethvert valg af initialsandsynlighedsfordeling p_0 .

Der gælder da følgende.

SÆTNING 7.36 Et system $\mathcal{S}$ med stokastisk overgangsmatrix P er regulært hvis og kun hvis P er primitiv.

BEVIS: Det er klart at hvis P er primitiv, altså hvis der findes $N \in \mathbb{N}$ for hvilket $P^N > 0$, så er for ethvert tal $n \geq N$ $P^n p_0 > 0$ for vilkårlig stokastisk vektor p_0 .

Og omvendt, hvis $A \geq 0$ er en given matrix, der opfylder at $Ax > 0$ for alle $x \geq 0$, $x \neq 0$, så vil $A > 0$: betragt de kanoniske basisvektorer e_j og erindr at $Ae_j > 0$ angiver den j .te søjle i A . Overbevis dig om at dette udsagn giver beviset for sætningen.

Ifølge specialtilfælde 7.31 kan man for et regulært system $\mathcal{S}$ slutte at sandsynlighedsfordelingen for $n \rightarrow \infty$ vil konvergere mod en bestemt fordeling, uafhængig af initialfordelingen.

Et system $(\mathcal{S}, P)$ kaldes *ergodisk* hvis det for enhver initialfordeling p_0 og enhver tilstand s_j gælder at der findes et tidspunkt t_n for hvilket $p^{(n)}_j > 0$, altså $(P^n p_0)_j > 0$.

SÆTNING 7.37 Et system $\mathcal{S}$ med stokastisk overgangsmatrix P er ergodisk hvis og kun hvis der findes $n \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{j=1}^n P^j > 0.$$

BEVIS: (øvelse)

Bemærk at ethvert regulært system er ergodisk. Det omvendte gælder ikke: betragt blot $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Eller følgende:

EKSEMPEL Antag at rotten i forsøget fra før *ikke* forbliver i det kammer den befinder sig i. Et lille elektrisk stød kan sørge for dette! I så fald er den stokastiske fordelingsmatrix for vort system givet ved

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0.67 & 0.25 \\ 0.25 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.33 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er ikke svært at se at rotten med sandsynlighed 1 vil skifte mellem kamrene $\{1, 2\}$ og kamrene $\{3, 4\}$. Der kan derfor ikke blive tale om at sandsynlighedsfordelingen vil konvergere mod nogen grænseværdi; dette system kan derfor ikke være regulært. Men det er ergodisk, som man umiddelbart kan overbevise sig om.

OPGAVER

7.1. Tidligere har vi fundet spektret for en projektion f . Hvad er altså $r(f)$? Find et udtryk for $R(\lambda)$ for en projektion f , $|\lambda| > 1$.

7.2. Lad A være en nilpotent afbildning af et endelig dimensionalt vektorrum U ind i sig selv. Hvad er spektralradius $r(A)$? Hvorfor er der ingen konvergensproblemer for $R(\lambda)$, $\lambda \neq 0$? Opskriv et udtryk for $R(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, hvis $A^n = 0$ for $n \geq 3$.

7.3 Gør rede for at matrixkonvergens er koordinatvis konvergens, dvs. lad $A_n, A \in \mathcal{L}(U)$, $n = 1, 2, \dots$ og betegn matrixindgangene med $(A)_{i,j}$, hhv. $(A_n)_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, k$. Vis så at $A_n \rightarrow A$ ($\in \mathcal{L}(U)$) hvis og kun hvis

$$(A_n)_{i,j} \rightarrow (A)_{i,j} \text{ for } n \rightarrow \infty, \text{ for alle } i, j = 1, \dots, k.$$

7.4. Lad $A \in \mathcal{L}(U)$ og lad $\lambda \in \sigma(A)$. Vælg en egenvektor x svarende til λ . Lad $\|A\|$ betegne den sædvanlige operator-norm på $\mathcal{L}(U)$. Gør rede for at $\|\lambda x\| \leq \|A\| \|x\|$ og slut heraf at $r(A) \leq \|A\|$.

7.5. Find et eksempel på en ikke-negativ matrix $A \neq 0$ og en ikke-negativ vektor $x \neq 0$ for hvilke $Ax = 0$.

7.6. Vis at hvis $A > 0$ og $z \geq w$, så er $Az \geq Aw$ og at der her gælder lighedstegn hvis og kun hvis $z = w$. Hvornår gælder $=$ i en enkelt koordinat?

7.7. Lemma 7.5 for to tal: Lad z og $w \in \mathbb{C}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ (altså > 0). Antag at $|\alpha z + \beta w| = \alpha|z| + \beta|w|$. Gør først kål på den mulighed, at et af tallene z, w er nul. Hvis både z og $w \neq 0$, kan vi gå sådan frem:

a). omskriv til $|(\alpha|z|)(z/|z|) + (\beta|w|)(w/|w|)| = \alpha|z| + \beta|w|$.

b). divider ligningen med højresiden; gør rede for at der nu på venstre side står den numeriske værdi af en konveks kombination af to

komplekse tal af enhedslængde. Tegn!

c). på højresiden står der 1, så hvad kan du slutte om retningen af de to komplekse tal?

7.8. Betragt en 3×3 diagonalmatrix A med diagonal $1, \alpha, \beta$, hvor $|\alpha|, |\beta| < 1$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Generaliser dette til en Jordanmatrix, der indeholder en 1×1 blok bestående af et 1-tal, samt Jordanblokke α og β med diagonal numerisk < 1 .

7.9. Bevis: 'Hvis $A \geq 0$ og λ er en reel egen værdi med egenvektor x , så er også den kompleks konjugerede vektor $\bar{x}$ en egenvektor. Derfor er også $x + \bar{x}$ en egenvektor.'

7.10. Lad $A := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Find $r(A)$. Find også $\lim_{n \rightarrow \infty} (A/r(A))^n$.

Udregn $v := A^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Brug v som en tilnærmelse til en egenvektor.

Hvorfor kan gennemsnittet $\sum_{i=1}^3 (Av)_i / v_i$ bruges som en tilnærmelse til $r(A)$?

7.11. Samme opgave som opg. 7.10, men med $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

7.12. Gør rede for at hvis A er en overgangsmatrix (altså $A > 0$ og alle søjlesummer er $= 1$) så er $\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ en egenvektor svarende til egen værdien 1 for A .

7.13. Udregn, med mejerieksemplets A (noternes kap.2), størrelsen $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ og giv en økonomisk fortolkning af resultatet.

7.14. Vis at hvis $A := [a_{ij}]$ er en $k \times k$ matrix, og $\lambda \in \sigma(A)$, så er $|\lambda| \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|$.

7.15. Lad M være en vilkårlig kvadratisk matrix og lad λ være en egen værdi for M med multiplicitet ℓ . Lad $n \in \mathbb{N}$.

a) Vis at λ^n er en egen værdi for M^n .

b) Vis at multipliciteten af λ^n som egen værdi for M^n er mindst ℓ .

7.16. Tag Bemærkning 7.12 for gode varer og brug så Matlab til at afgøre om nedennævnte matricer er primitive:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.17. Vis at hvis $0 \leq A < C$ (hvor A og C er givne kvadratiske matricer), så er $r(A) \leq r(C)$.

7.18. Lad $C := [c_{ij}]$ være en positiv kvadratisk matrix med alle søjlesummer $= 1$. Gør rede for at der findes en positiv vektor p for hvilken det for enhver vektor v gælder at

hvis $\sum v_i = \alpha > 0$ så er $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n v = \alpha p$.

Hvad kan vi sige hvis α ikke nødvendigvis er positiv?

7.19. Vil en 2×2 positiv matrix altid have to forskellige reelle egen værdier, med forskellige numeriske værdier?

7.20. Lad $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at A er primitiv. Gør rede for at 2 er en egen værdi og at det tilhørende egenrum er et en-dimensionalt underrum udspændt af en positiv vektor. Find en positiv udspændende vektor.

7.21. Lad $A := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$.

a) Gør rede for at spektralradius for A er 1.

b) Gør rede for at 1 er en egen værdi for A og at A har en ikke-negativ egenvektor hørende til denne egen værdi.

7.22. Lad $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Vis at spektret $\sigma(A) = \{1, 2\}$.
- b) Vis at egenrummet hørende til egenværdien 2 er én-dimensionalt.
 Det oplyses at egenrummet hørende til egenværdien 1 også er én-dimensionalt.
- c) Gør rede for at Jordan-formen for A er

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lad $r(A)$ betegne spektralradius for A .

- d) Opskriv Jordanformen for $A/r(A)$
- e) Er $A/r(A)$ power bounded?

7.23. Lad V være et endelig dimensionalt vektorrum og $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning.

- a) Antag der findes en basis α således at matrixrepræsentationen ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$ er en positiv matrix. Er ${}_{\beta}[f]_{\beta} > 0$ for enhver basis β ?
 Lad nu $V := \mathbb{C}^3$ og lad β være standardbasen. Antag at

$${}_{\beta}[f]_{\beta} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- b) Findes der en basis α så ${}_{\alpha}[f]_{\alpha} > 0$?
- c) Findes der en basis α så ${}_{\alpha}[f]_{\alpha} \geq 0$?

7.24. Lad A være en $k \times k$ matrix med spektrum $\sigma(A)$ og spektralradius $r(A)$. Det er givet at $B := iA$ er primitiv.

- a) Gør rede for at der findes $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $A^n > 0$.
- b) Beskriv mængden $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r(A)\}$.
- c) Gør rede for at $L := \lim_{n \rightarrow \infty} (B/r(B))^n$ eksisterer; angiv L .
- d) Kan man slutte at $\{(A/r(A))^n\}$ er konvergent?

8. SPEKTRUM, SPEKTRALRADIUS, STABILITET.

Lad U være et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathbb{C}$.

DEFINITION 8.1 Hvis $A : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning defineres *spektret* for A

$$\sigma(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ er en egenværdi for } A \}.$$

Vi minder om at egenværdierne findes ved at finde rødderne i det karakteristiske polynomium $p_A := \det_{\alpha} [A - \lambda I]_{\alpha}$ for et vilkårligt valg af basis α for U . Tilsvarende defineres spektret af en matrix som rødderne i dennes karakteristiske polynomium. Endelig indfører vi *spektralradius* $r(A) := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}$

LEMMA 8.2 $\sigma(A^n) = \{ \lambda^n \mid \lambda \in \sigma(A) \}$.

BEVISGANG: Hvis en afbildning er repræsenteret som en trekantmatrix, hvor kan egenværdierne så aflæses? Hvad bliver den tilsvarende matrixrepræsentation for potenser af afbildningen? Hvordan ser disses diagonale ud?

KOROLLAR 8.3 $r(A^n) = r(A)^n$, for alle $n \in \mathbb{N}$.

Hvis U er et *normeret* vektorrum med norm $\| \cdot \|$ kan vi give en formel for spektralradius.

Fra Mat 2MA1 minder vi først om at vektorrummet $\mathcal{L}(U)$ af begrænsede lineære afbildninger på det endelig dimensionale normerede vektorrum U kan udstyres med en norm $\|A\|$, defineret ved

$$\|A\| := \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| \leq 1, x \in U \}.$$

Denne norm vil vi her kalde *operatornormen*.

Sammensætning af afbildninger en komposition in $\mathcal{L}(U)$ og der gælder følgende ulighed, som er af væsentlig betydning i kontinuitetsargumenter.

LEMMA 8.4 For operatornormen på $\mathcal{L}(U)$ gælder at $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, specielt $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ for alle $A, B \in \mathcal{L}(U)$ og alle $n \in \mathbb{N}$.

BEVIS: For vilkårlig $x \in U$ har vi at $\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$, ifl. Mat 2MA1. Altså er $\sup \{ \|ABx\| \mid \|x\| \leq 1, x \in U \} \leq \|A\| \|B\|$, og derfor $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Resten af lemmaets udsagn er dels et specialtilfælde, dels et let induktionsbevis.

KONVERGENS af kontinuerte lineære afbildninger bliver simpelthen konvergens i det normerede vektorrum $\mathcal{L}(U)$: En følge $\{A_n\}$ i $\mathcal{L}(U)$ er konvergent mod $A \in \mathcal{L}(U)$ hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$. Skrivemåden er ofte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{eller} \quad A_n \rightarrow A \quad \text{for} \quad n \rightarrow \infty.$$

Man kan naturligvis også betragte *punktvise* konvergens. Dette begreb dækker over kravet at for ethvert $x \in U$ skal gælde at $A_n x \rightarrow Ax$ for $n \rightarrow \infty$. Denne konvergens finder for hvert $x \in U$ sted i vektorrummet U i den norm U er udstyret med. Da $\|A_n - A\| \geq \|(A_n - A)x\|$ for enhver vektor x med $\|x\| \leq 1$ vil konvergens $A_n \rightarrow A$ tydeligvis medføre at $A_n x \rightarrow Ax$ for enhver vektor $x \in U$.

Det er værd at notere at når U er endelig dimensionalt, er de to konvergenser ækvivalente. Der gælder nemlig

SÆTNING 8.5 For et endelig dimensionalt normeret vektorrum U og operatorer $A, A_n \in \mathcal{L}(U)$ gælder at $A_n \rightarrow A$ i operatornorm hvis og kun hvis $A_n x \rightarrow Ax$ i normen på U , for enhver vektor $x \in U$.

BEVIS: Da U er forudsat endelig dimensional, kan vi lade $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ betegne en basis for U . Vi definerer en hjælpenorm på $\mathcal{L}(U)$: For en vilkårlig lineær afbildning B af U ind i U sættes

$$|B| := \max \{ \|Bu_1\|, \dots, \|Bu_p\| \}.$$

Det er let at se at vi derved har defineret en norm på $\mathcal{L}(U)$ (check det efter!). Da $\mathcal{L}(U)$ er endelig dimensionalt, er denne norm ækvivalent med den givne $\|\cdot\|$. Altså findes der en konstant C for hvilken $\|B\| \leq C|B|$ for alle $B \in \mathcal{L}(U)$.

Hvis vi forudsætter at $A_n x \rightarrow Ax$ for alle $x \in U$, så medfører det jo bl.a. at $\|A_n u_j - A u_j\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, for hvert $j = 1, 2, \dots, p$. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ kan vi vælge $N \in \mathbb{N}$ så $\|A_n u_j - A u_j\| < \varepsilon/C$ for alle $n > N$ og for hvert af de endelig mange $j = 1, \dots, p$. Af definitionen af $|A_n - A|$ følger straks at $|A_n - A| < \varepsilon/C$ for alle $n > N$. Men så er jo

$\|A_n - A\| < \epsilon$ for alle $n > N$. Dermed er sætningen bevist.

BEMÆRKNING 8.6 Hvis $B_n = Q A_n Q^{-1}$ for $n \in \mathbb{N}$ så er A_n konvergent hvis og kun hvis B_n er konvergent. Specielt gælder at $\lim_{n \rightarrow \infty} Q A^n Q^{-1}$ eksisterer hvis og kun hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ eksisterer.

BEVIS: Øvelse.

LEMMA 8.7 Hvis $U = V \oplus W$, hvis $\{B_n\}$ er en følge i $\mathcal{L}(V)$ og $\{C_n\}$ en følge i $\mathcal{L}(W)$, så er følgen $\{A_n\}$ i $\mathcal{L}(U)$, hvor $A_n = B_n \oplus C_n$, $n = 1, 2, \dots$ konvergent hvis og kun hvis $\{B_n\}$ og $\{C_n\}$ er konvergente. I bekræftende fald gælder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \oplus \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

BEVIS: Da $\mathcal{L}(U)$ er et endelig dimensionalt vektorrum er alle normer på et givet underrum af $\mathcal{L}(U)$ ækvivalente. Det gælder specielt $\mathcal{L}(V) \oplus \mathcal{L}(W) \subseteq \mathcal{L}(U)$, som vi derfor udstyrer med normen

$$\|B \oplus C\| := \|B\| + \|C\|.$$

Så er lemmaets påstand en let og nyttig øvelse.

Betragt udtrykket $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / \lambda^{k+1}$ for $|\lambda| > \|A\|$. Da $\|A^k / \lambda^k\| \leq \|A / \lambda\|^k$, for $k = 0, 1, \dots$, og da $\|A / \lambda\| < 1$, er rækken $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k / \lambda^k\|$ konvergent for $|\lambda| > \|A\|$ og derfor er $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k / \lambda^{k+1}\|$ konvergent for $|\lambda| > \|A\|$. Men da $\|\sum_{k=n}^m A^k / \lambda^{k+1}\| \leq \sum_{k=n}^m \|A^k / \lambda^{k+1}\|$ følger heraf (jvf. 2MA1) at den uendelige række der definerer $R(\lambda)$ er konvergent (det endelig dimensionale vektorrum $\mathcal{L}(U)$ er jo fuldstændigt).

Det er let at indse at $-(A - \lambda I)R(\lambda) = -R(\lambda)(A - \lambda I) = I$ (opgave!), hvilket viser at $A - \lambda I$ er invertibel for alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|A\|$. Specielt gælder at $r(A) \leq \|A\|$. Vi skal forbedre på denne ulighed om lidt.

SÆTNING 8.8 Lad $A \in \mathcal{L}(U)$, hvor U er et endelig dimensionalt normeret vektorrum. Så gælder at $A^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $r(A) < 1$.

BEVIS: Som lige vist, gælder at $r(A) \leq \|A\|$. Heraf følger at $r(A^n) \leq$

$\|A^n\|$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $r(A^n) = r(A)^n$, får vi af dette at $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$, for alle $n \in \mathbb{N}$. Antag nu at $A^n \rightarrow 0$, dvs. $\|A^n\| \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Så findes $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $\|A^n\|^{1/n} < 1$, og derfor gælder at $r(A) < 1$.

For at vise den anden implikation, vil vi bruge Jordan's normalform. Vi skal vise at hvis $r(A) < 1$, så gælder at $A^n \rightarrow 0$, for $n \rightarrow \infty$. Lad J være den til A svarende Jordan form. Så findes en invertibel afbildning Q for hvilken $A = Q J Q^{-1}$. Ifølge Bemærkning 8.6 er det nok at vise at $J^n \rightarrow 0$. Hvis $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_p$, er $J^n = J_1^n \oplus \dots \oplus J_p^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor (lemma 8.7) er det tilstrækkeligt at vise at der for hver Jordanblok J_j gælder at $J_j^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, for $j = 1, \dots, p$. Betragt derfor en Jordanblok J_j ; i diagonalen står der λ_j og vi ved at $|\lambda_j| \leq r(A) < 1$. Lige over diagonalen står der lutter 1-taller; resten af matricen for J_j er nul. Altså kan vi skrive $J_j = \lambda_j I + U_j$, hvor U_j er nilpotent. Af binomialformlen får vi at

$$(\lambda_j I + U_j)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} U_j^k.$$

(opgave!)

Hvis $U_j^p = 0$ (og p er minimal med denne egenskab), så vil denne sum for $n \geq p$ få udseendet

$$(\lambda_j I + U_j)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} U_j^k.$$

$(\lambda_j I + U_j)^n$ er altså en linearkombination af p faste elementer, nemlig $I, U_j, U_j^2, \dots, U_j^{p-1}$. Koefficienterne i linearkombinationen er

$\binom{n}{k} \lambda_j^{n-k}$ hvor $|\lambda_j| < 1$, og hvor $k = 0, \dots, p-1$. Lader vi her $n \rightarrow \infty$,

konstaterer vi at da der for ethvert fastholdt $k \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\binom{n}{k} \lambda_j^{n-k} \rightarrow 0 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

(opgave!), slutter vi at $J_j^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$. Dermed er sætningen vist.

Til brug i næste kapitel hiver vi en del af beviset ud. En matrix A er *power bounded* hvis der findes en konstant C så alle de numeriske matrixindgange $|(A^n)_{ij}|$ af A^n er begrænsede af C for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

LEMMA 8.9 Hvis en Jordan matrix $J := \lambda I + U$ er power bounded, så er diagonalelementet λ af numerisk værdi ≤ 1 . Er λ af numerisk værdi 1 er Jordan matricen en 1×1 matrix.

BEVIS: Forudsætningen er at der findes et tal M så alle matrixindgangene $(\lambda I + U)_{i,j}^n$ opfylder at $|(\lambda I + U)_{i,j}^n| \leq M$ for ethvert naturligt tal n . Betragt specielt $(\lambda I + U)_{1,2}^n$. Da U består af 1 taller lige over diagonalen og nuller alle andre steder, vil der i $(\lambda I + U)_{1,2}^n$ kun være bidrag fra binomialformlens led med $k = 1$ (overvej det!). Altså er $(\lambda I + U)_{1,2}^n = \binom{n}{1} \lambda^{n-1} = n \lambda^{n-1}$. Hvis $|n \lambda^{n-1}| \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$, må der gælde at $|\lambda| \leq 1$. Hvis $|\lambda| = 1$ kan der ikke være noget matrixelement med nummer 1,2. Altså er $\lambda I + U$ en 1×1 matrix (og U forekommer slet ikke i udtrykket).

SÆTNING 8.10 For $A \in \mathcal{L}(U)$ gælder at $r(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$.

BEVIS: Da $r(A^n) = r(A)^n \leq \|A^n\|$, ser vi umiddelbart at $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed har vi vist at $r(A) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}$.

For at vise den modsatte ulighed, påstår vi at det er nok at vise at hvis $r(A) < 1$, da er $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq 1$; i så fald har vi nemlig at der for et vilkårligt positivt tal ε gælder at $r(A/(r(A) + \varepsilon)) = r(A)/(r(A) + \varepsilon) < 1$, hvoraf

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n/(r(A) + \varepsilon)^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n}/(r(A) + \varepsilon) \leq 1,$$

og derfor at

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq r(A) + \varepsilon.$$

Men da ε er en vilkårlig positiv størrelse, følger heraf at

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq r(A),$$

og dermed ville sætningen være bevist. Vi skal altså bevise, at hvis $r(A) < 1$, da er $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq 1$. Men hvis $r(A) < 1$ fås af sætning 8.8, at $A^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, så $\|A^n\|^{1/n} \leq 1$ for alle tilstrækkelig store tal $n \in \mathbb{N}$; heraf følger at $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|^{1/n} \leq 1$. Dermed er sætningen bevist.

KOROLLAR 8.11 $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$.

BEVIS: Vi ved allerede at $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$; endvidere kan vi, til givet $\varepsilon > 0$ finde et helt tal k så $\|A^k\|^{1/k} < r(A) + \varepsilon$.

Hvis $n \in \mathbb{N}$, kan vi dividere:

$$n = p_n k + q_n,$$

hvor resten q_n ligger mellem 0 og $k-1$. Da

$$\|A^n\| = \|A^{p_n k + q_n}\| \leq \|A^k\|^{p_n} \|A^{q_n}\|,$$

har vi at

$$\|A^n\|^{1/n} = \|A^{p_n k + q_n}\|^{1/n} \leq \|A^k\|^{p_n/n} \|A^{q_n}\|^{1/n}.$$

Da $q_n < k$, vil $q_n/n \rightarrow 0$, når $n \rightarrow \infty$, så $p_n k/n \rightarrow 1$, når $n \rightarrow \infty$, og derfor vil $p_n/n \rightarrow 1/k$, når $n \rightarrow \infty$. Altså vil $\|A^k\|^{p_n/n} \rightarrow \|A^k\|^{1/k}$ og $\|A^{q_n}\|^{1/n} \rightarrow 1$, når $n \rightarrow \infty$. Heraf følger at $\|A^n\|^{1/n} < r(A) + \varepsilon$ for alle tilstrækkelig store $n \in \mathbb{N}$. Dermed er korollaret bevist.

Den næste sætning har ikke direkte med det foregående at gøre; den bliver brugt nedenfor.

SÆTNING 8.12 En lineær afbildning A og dens duale A' har samme spektrum.

BEVIS: Hvis A bringes på (øvre) triagonalform, vil også A' være (nedre) triagonal, når den udtrykkes i den duale basis. Heraf følger påstanden, idet egenværdierne for A er diagonalelementerne i triagonalformen.

Heraf fås umiddelbart følgende.

KOROLLAR 8.13 $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $(A')^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Som allerede brugt flere gange er $\mathcal{L}(U)$ et endelig dimensionalt vektorrum, når U er endelig dimensional, og det er derfor ligegyldigt hvilken norm vi lægger på $\mathcal{L}(U)$: alle normer er ækvivalente. Denne bemærkning gælder specielt hvis $U = \mathbb{C}^n$. Dette giver os mulighed for at opstille en simpel *tilstrækkelig* betingelse for at et lineært differensligningssystem med konstant koefficientmatrix A er stabilt, nemlig Sydsæters Sætning 17.8

SÆTNING 8.14 Hvis $A = [a_{ij}]$ er en $n \times n$ matrix for hvilken

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1, \text{ for alle } i = 1, 2, \dots, n,$$

så vil $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Tilsvarende vil $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis der for søjlesummerne gælder

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1, \text{ for alle } j = 1, 2, \dots, n,$$

BEVIS: Argumentet har en del tilfælles med det vi gav for sætning 8.5: vi definerer en passende norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, for hvilken det er klart at $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Først udstyrer vi $\mathbb{C}^n$ med den kanoniske basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ og betragter en vilkårlig lineær afbildnings matrixrepræsentation i denne basis. Dernæst normerer vi $\mathbb{C}^n$ med 1-normen, dvs. for

$$x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

sætter vi

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Vi normerer også $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Lad $A := [a_{ij}]$ være en vilkårlig $n \times n$ kompleks matrix. Vi opfatter altså A som en lineær afbildning af $\mathbb{C}^n$ ind i sig selv. Sæt

$$\|A\| := \max_j \sum_k |a_{kj}|.$$

$\|A\|$ er altså den største søjlesum (af de numeriske matrixindgange).

Som bekendt er den j .te søjle i A $A(e_j)$, så en ækvivalent beskrivelse af $\|A\|$ er

$$\|A\| := \max_j \|A(e_j)\|_1.$$

Vi noterer straks de relevante grundegenskaber: Det netop definerede $\|A\|$ er en norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ der opfylder

$$\text{a) } \|Ax\|_1 \leq \|A\| \|x\|_1, \text{ for alle } A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \text{ og alle } x \in \mathbb{C}^n.$$

$$\text{b) } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \text{ for alle } A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n).$$

At $\|A\|$ er en norm på $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ er rutine (opgave). For a) lader vi $x := (x_1, \dots, x_n)$ og $A := [a_{ij}]$. Så er den i .te koordinat i Ax givet ved $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, og derfor er

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] |x_j| \\ &\leq \|A\| \sum_{j=1}^n |x_j| = \|A\| \|x\|_1 \end{aligned}$$

For at bevise b) kan vi så bruge a): Idet

$$\|AB(e_j)\|_1 \leq \|A\| \|B(e_j)\|_1 \text{ for hvert } j = 1, 2, \dots, n,$$

er

$$\begin{aligned}\|AB\| &:= \max_j \|AB(e_j)\|_1 \leq \max_j \|A\| \|B(e_j)\|_1 \\ &= \|A\| \max_j \|B(e_j)\|_1 \\ &= \|A\| \|B\|, \text{ for alle } A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)\end{aligned}$$

Specielt følger heraf at hvis $\|A\| < 1$ så vil $A^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, thi $\|A^t\| \leq \|A\|^t$ og $\|A\|^t \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

Vores sætning følger nu umiddelbart: den givne betingelse er jo netop at $\|A\| < 1$.

Sætningens sidste påstand er en konsekvens af sætning 8.13.

8.2 STABILITET AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER

Vi betragter et lineært differentialligningssystem

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in [0, \infty[. \quad (*)$$

Her er A en $n \times n$ koefficientmatrix, hvis indgange er defineret og kontinuerte på $[0, \infty[$, $b(\cdot) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$ er en kontinuert funktion og $x(\cdot) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$ den søgte løsning, jvf. eksistens- og entydighedssætningen (kap. 5). Lad $\mathbb{C}^n$ være normeret, f.eks. med 1-normen $\|\cdot\|_1$. Da alle normer på $\mathbb{C}^n$ er ækvivalente, skriver vi blot $\|\cdot\|$.

Et punkt $a \in \mathbb{C}^n$ kaldes et *ligevægtspunkt* (eller en *ligevægtstilstand*) for (*) hvis $A(t)a + b(t) \equiv 0$ for alle $t \in [0, \infty[$. Et ligevægtspunkt er altså en konstant løsning til (*).

Vi siger at ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^n$ er *globalt asymptotisk stabil* hvis enhver løsning til (*) konvergerer mod a for $t \rightarrow \infty$, altså hvis det for enhver funktion $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$, for hvilken $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ for alle $t \in [0, \infty[$, gælder at $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$.

BEMÆRKNING Hvis et ligevægtspunkt a er globalt asymptotisk stabilt, så har systemet (*) ikke andre ligevægtstilstande. Specielt har ligningen $A(t)a + b(t) \equiv 0$ kun én løsning.

SÆTNING 8.15 Lad $a \in \mathbb{C}^n$ være et ligevægtspunkt for det lineære system (*). Så er a en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis det om enhver løsning x_0 til den tilsvarende homogene ligning $x'(t) = A(t)x(t)$, $t \in [0, \infty[$, gælder at $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$.

BEVIS: Lad L_0 betegne løsningsrummet til den til (*) svarende homogene ligning $x'(t) = A(t)x(t)$. Vi ved at L_0 er et n dimensionalt vektorrum. Hvis $a \in \mathbb{C}^n$ er en ligevægtstilstand for (*), er a specielt en løsning og derfor er $a \in L_0$ løsningsmængden for (*). Antag a er et globalt asymptotisk stabilt ligevægtspunkt. Hvis $x_0 \in L_0$ så vil $x_0(t) \rightarrow a$ for $t \rightarrow \infty$, dvs. at $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$. Hvis det omvendt gælder at ethvert element i L_0 konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$, så er et ligevægtspunkt a nødvendigvis globalt asymptotisk stabilt.

Da vi kender L_0 når A i (*) er konstant, kan vi give en præcis beskrivelse af global asymptotisk stabilitet i det tilfælde.

SÆTNING 8.16 Lad $x'(t) = A x(t) + b$, $t \in [0, \infty[$ være et lineært differentiaalligningssystem med konstante koefficienter A og konstant inhomogenitetsled b . Antag a er en ligevægtstilstand for dette system. Så er a globalt asymptotisk stabilt hvis og kun hvis alle egenverdier for A har negativ realdel.

BEVIS: Ifølge sætningen på noternes s. 53.05 er L_0 frembragt af funktioner af formen $t^j e^{\lambda t}$, hvor λ gennemløber $\sigma(A)$ og $0 \leq j \leq l-1$, med l som betegnelse for rodmultipliciteten af λ (som rod i det karakteristiske polynomium for A). Global asymptotisk stabilitet er altså ensbetydende med at $t^j e^{\lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ og derfor ensbetydende med at $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ (husk bemærkningerne om størrelsesorden fra Mat IMA). Da $|e^{\lambda t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda)t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda t}$ og $e^{\operatorname{Re} \lambda t} \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$ hvis og kun hvis $\operatorname{Re} \lambda < 0$, følger sætningen.

BEMÆRKNING Et lineært system med konstante koefficienter, der har en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand, må altså have en invertibel koefficientmatrix A . Dette følger af sætning 8.16. Det følger også af at ligningen $A a + b = 0$ har entydig løsning.

Betragt så tilsvarende en enkelt n .te ordens lineær differentiaalligning med konstante reelle koefficienter

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b, \quad t \in [0, \infty[\quad (**)$$

En konstantfunktion a , der løser denne ligning kaldes en ligevægtstilstand. Hvis enhver løsning $x(t)$ til (**) konvergerer mod a for $t \rightarrow$

∞ , siger vi at ligevægtstilstanden a er *globalt asymptotisk stabil*.

Der gælder som ovenfor:

a) En konstantfunktion a er en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis a er en ligevægtstilstand og enhver løsning til den homogene ligning

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty[,$$

konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$.

b) En ligevægtstilstand a er en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand for (***) hvis og kun hvis alle rødderne i det karakteristiske polynomium

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

har negativ realdel.

c) Førsteordensligningen $x'(t) + a_1 x(t) = b$ har b/a_1 som globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis $a_1 > 0$.

d) Andenordensligningen $x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = b$ har b/a_2 som globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis $a_1, a_2 > 0$. *2-grad!*

e) Hvis (***) har en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand, så er alle koefficienterne $a_1, \dots, a_n > 0$.

Som antydnet er det her behandlede stabilitetsbegreb meget restriktivt, bl.a. fordi ligningen $A(t)a + b(t) \equiv 0$ nødvendigvis må have entydig bestemt løsning. Et mere generelt stabilitetsbegreb er det der kaldes *Liapunov's*: Hvis (*) har ligevægtstilstanden a og hvis det om a gælder, at enhver løsning $x(t)$, hvis begyndelsesværdier (initialværdier) $x(0)$ ligger nær a , "holder sig i nærheden af a " for alle $t > 0$, siger vi at a er *Liapunov-stabil*. Præcist: Ligevægtstilstanden a skal opfylde at til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes der $\delta \in \mathbb{R}_+$ således at hvis $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$ er en løsning til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \delta$ så er $\|x(t) - a\| < \varepsilon$ for alle $t > 0$. Vi har hermed defineret *Lyapunov-stabilitet*.

Hvis der yderligere gælder følgende: Hvis a er en Liapunov-stabil ligevægtstilstand og hvis der findes et $\xi \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at hvis $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$ er en løsning til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \xi$ så er $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$, så kaldes ligevægtstilstanden (*lokalt*) *asymptotisk stabil*.

Vi skal se at for lineære systemer er der faktisk ingen forskel på lokal og global asymptotisk stabilitet (hvorimod Liapunov-stabilitet er et ægte svagere stabilitetsbegreb).

SÆTNING 8.17 Antag a er en ligevægtstilstand for det lineære system (*). Så er $a \in \mathbb{C}^n$ en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand hvis og kun hvis a er lokalt asymptotisk stabil.

BEVIS: Vi begynder med at vise at en globalt asymptotisk stabil tilstand er Liapunov-stabil. Lad altså $a \in \mathbb{C}^n$ være en globalt asymptotisk stabil ligevægtstilstand. Af sætning 8.15 ses at hvis L_0 er løsningsrummet for det tilsvarende homogene system, så vil $x_0(t) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, for ethvert $x_0 \in L_0$. Da L_0 er n -dimensionalt, kan vi vælge en basis $\{y_1, \dots, y_n\}$ for L_0 . Vi kan forudsætte at $y_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, n$, hvor $\{e_1, \dots, e_n\}$ er standardbasen i $\mathbb{C}^n$; denne påstand følger af eksistens- og entydighedssætningen. Da alle elementer i L_0 konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$, gælder dette også basiselementerne y_j . Specielt vil funktionerne y_j være begrænsede på $[0, \infty[$. Der findes altså en konstant $M \in \mathbb{R}_+$ således at

$$\|y_j(t)\| \leq M, \text{ for alle } t \in [0, \infty[, \text{ og } j = 1, \dots, n.$$

Lad nu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. Vi skal finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at $\|\sum c_j y_j(0)\| < \delta$ medfører at $\|\sum c_j y_j(t)\| < \varepsilon$. Men som vi har valgt y_j gælder jo at $\sum c_j y_j(0) = \sum c_j e_j = (c_1, \dots, c_n)$, så hvis vi f.eks. bruger 1-normen i $\mathbb{C}^n$, betyder betingelsen

$$\|\sum c_j y_j(0)\| < \delta$$

simpelthen at $\sum |c_j| < \delta$.

Størrelsen $\|\sum c_j y_j(t)\|$ kan vurderes således:

$$\|\sum c_j y_j(t)\| \leq \sum |c_j| \|y_j(t)\| \leq \sum |c_j| M, \text{ for alle } t \in [0, \infty[.$$

Heraf følger at hvis $\sum |c_j| < \delta$ så er $\|\sum c_j y_j(t)\| < \delta M$, for alle $t \in [0, \infty[$. Hvis vi derfor vælger $\delta = \varepsilon/M$, har vi vist at a er Liapunov-stabilt.

Det følger herefter umiddelbart af sætning 8.15 at a er lokalt asymptotisk stabilt. Lav ræsonnementet!

Vi mangler så at vise at lokal asymptotisk stabilitet medfører global asymptotisk stabilitet. Antag $a \in \mathbb{C}^n$ er et Liapunov-stabilt ligevægtspunkt for hvilket der findes et $\xi \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at for enhver

løsning $x(t) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}^n$ til (*) for hvilken $\|x(0) - a\| < \xi$ gælder $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$. Ifølge sætning 8.15 skal vi vise at enhver løsning x_0 til den homogene ligning konvergerer mod 0 for $t \rightarrow \infty$. Hvis x_0 er en sådan løsning, kan vi vælge $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tilstrækkelig lille, så $\|s_0 x_0(0)\| < \xi$. Da er $x := a + s_0 x_0$ en løsning til (*) der opfylder at $\|x(0) - a\| = \|s_0 x_0\| < \xi$. Altså er $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Men så er a globalt asymptotisk stabilt, ifølge Sætning 8.15.

EKSEMPEL Betragt det homogene system $x' = -x + y$, $y' = x - y$ med koefficientmatrix $A := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ og karakteristisk polynomium $(-1-\lambda)^2 - 1$, altså egenværdier 0 og -2; vi konstaterer straks ud fra sætning 8.16 at (0,0) ikke er globalt asymptotisk stabilt, og altså heller ikke lokalt asymptotisk stabilt (sætning 8.18). Da $\ker A = \mathbb{C}(1,1)$, er enhver vektor af formen (α, α) en ligevægtstilstand. Løsningsmængden L_0 er åbenbart beskrevet som det to-dimensionale vektorrum

$$L_0 = \{ (c_1 + c_2 e^{-2t}, c_1 - c_2 e^{-2t}) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}.$$

Vi normerer $\mathbb{C}^2$ med 1-normen. Vi kan så vise at enhver ligevægtstilstand (α, α) er Liapunov-stabil: Lad $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Hvis en løsning

$$x(t) = (c_1 + c_2 e^{-2t}, c_1 - c_2 e^{-2t})$$

for et indtil videre uspecificeret positivt δ opfylder at $\|x(0) - (\alpha, \alpha)\| =$

$$\|(c_1 + c_2 - \alpha, c_1 - c_2 - \alpha)\| = |c_1 + c_2 - \alpha| + |c_1 - c_2 - \alpha| < \delta,$$

så er $|c_1 - \alpha| < \delta/2$ og $|c_2| < 3\delta/2$. For afstanden $\|x(t) - (\alpha, \alpha)\|$ får vi så

$$\begin{aligned} \|x(t) - (\alpha, \alpha)\| &= |c_1 + c_2 e^{-2t} - \alpha| + |c_1 - c_2 e^{-2t} - \alpha| = \\ &|c_1 + c_2 e^{-2t} - \alpha| + |c_1 - c_2 e^{-2t} - c_2 + c_2 - \alpha| \leq |c_1 + c_2 - \alpha| + |c_1 - c_2 - \alpha| + \\ &2|c_2| |e^{-2t} - 1| < \\ &\delta + 2|c_2| < 4\delta. \end{aligned}$$

Hvis vi vælger $\delta := \epsilon/4$, ser vi dermed at (α, α) er Liapunov-stabilt.

Eksemplet antyder at situationen alment er som den næste sætning beskriver.

SÆTNING 8.18 Betragt det lineære differentiaalligningssystem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, $t \in [0, \infty[$, (*)

og antag at $a \in \mathbb{C}^n$ er en ligevægtstilstand for (*). Så er følgende tre udsagn ækvivalente.

a) Ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^n$ for (*) er Liapunov-stabil. b) Alle ligevægtstilstandene for (*) er Liapunov-stabile.

c) Enhver løsning til det homogene system $x'(t) = A x(t)$, $t \in [0, \infty[$, er begrænset.

Hvis A og b er konstante er udsagnene ensbetydende med følgende.

d) Alle egenværdier λ for A opfylder følgende betingelser:

hvis λ er en simpel rod, så er $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

hvis λ er en multipel rod, så er $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

BEVIS: Vi viser først at hvis A og b er konstante, så er c) og d) ækvivalente. Da løsningsrummet L_0 til den homogene ligning er udspændt af funktioner af formen $t^j e^{\lambda t}$, hvor λ gennemløber $\sigma(A)$ og $0 \leq j \leq \ell-1$ (med ℓ , som ovenfor, som betegnelse for rodmultipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium for A), er begrænsethed af en vilkårlig løsning til det homogene system ensbetydende med at $t^j e^{\lambda t}$ er begrænset på $[0, \infty[$. Hvis $\lambda \in \sigma(A)$ er en simpel rod er dette ensbetydende med begrænsethed af $e^{\lambda t}$. Da $|e^{\lambda t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda)t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda t}$, er $e^{\lambda t}$ begrænset hvis og kun hvis $e^{\operatorname{Re} \lambda t}$ er begrænset, og dette er tilfældet hvis og kun hvis $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Hvis $\lambda \in \sigma(A)$ er en rod af multiplicitet $\ell > 1$, er enhver løsning til det homogene system begrænset hvis og kun hvis $t^{\ell-1} e^{\lambda t}$ er begrænset, og da denne begrænsethed indtræffer præcis når $\operatorname{Re} \lambda < 0$, er ækvivalensen af c) og d) klar.

Vend nu tilbage til de generelle antagelser om A og b. Vi viser $a) \Rightarrow c)$ og forudsætter altså at ligevægtstilstanden $a \in \mathbb{C}^n$ er Liapunov-stabil. Lad $\varepsilon = 1$ og vælg $\delta \in \mathbb{R}_+$ således at enhver løsning x til det givne system, for hvilken $\|a - x(0)\| < \delta$, opfylder at $\|a - x(t)\| < 1$ for alle $t \in [0, \infty[$. Vi argumenterer som i beviset for sætning 8.17. Lad x_0 være en løsning til den homogene ligning og vælg $s_0 \in \mathbb{R}_+$ så $\|s_0 x_0(0)\| < \delta$. Da $\|a - (a + s_0 x_0(0))\| = \|s_0 x_0(0)\| < \delta$, følger heraf at $\|a - (a + s_0 x_0(t))\| < 1$ for alle $t \in [0, \infty[$, dvs. $\|x_0(t)\| < 1/s_0$ for alle $t \in [0, \infty[$. Hermed har vi vist $a) \Rightarrow c)$.

Det er klart at b) medfører a), så vi mangler blot at vise $c) \Rightarrow b)$.

Hvis c) er opfyldt, lader vi c være en ligevægtstilstand og antager at $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er givet. Vi skal finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ med den egenskab at hvis x_0 er en løsning til den homogene ligning, som opfylder at $\|x_0(0)\| < \delta$, så er $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Igen bruger vi ideer fra beviset for sætning 8.17. Lad $\{y_1, \dots, y_n\}$ være en basis for løsningsrummet L_0 til

den homogene ligning, valgt således at $y_j(0) = e_j$, $j = 1, \dots, n$. Under antagelsen c) findes en konstant M så $\|y_j(t)\| < M$ for alle $t \in [0, \infty[$ og alle $j = 1, \dots, n$. Idet $x_0(t) = \sum c_j y_j(t)$, er

$$x_0(0) = \sum c_j y_j(0) = \sum c_j e_j = (c_1, \dots, c_n),$$

og derfor er $\|x_0(0)\| = \sum |c_j|$ og $\|x_0(t)\| = \|\sum c_j y_j(t)\| \leq \sum |c_j| M$.

Altså indser vi, ganske som ovenfor, at hvis $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ er givet og hvis vi lader $\delta := \varepsilon/M$, så vil $\|x_0(0)\| < \delta$ medføre at $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle

$t \in [0, \infty[$. Det beviser Liapunov-stabiliteten af c: hvis x er en løsning til (*) for hvilken $\|c - x(0)\| < \delta$, kan vi skrive $x = c + x_0$.

Funktionen x_0 er da en løsning til den homogene ligning, for hvilken

$\|x_0(0)\| < \delta$. Altså er $\|x_0(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Derfor er

$\|c - x(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \in [0, \infty[$. Det var den sidste implikation og dermed er sætningen bevist.

BEMÆRKNING OM STABILITET AF EN N. TE ORDENS LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING

Betragt en n.te ordens lineær differentialligning med konstante reelle koefficienter

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = b, \quad t \in [0, \infty[\quad (**)$$

Liapunov's stabilitet: Hvis (*) har ligevægtstilstanden a og hvis det om a gælder, at enhver løsning $x(t)$, hvis begyndelsesværdier (initialværdier) ligger nær a , "holder sig i nærheden af a " for alle $t > 0$, siger vi at a er Liapunov-stabilt.

Anvendelsen af navnet Liapunov nødvendiggør to checks:

1) Hvis $n = 1$ bør begrebet stemme overens med det allerede indførte.

Det er klart, at dette er tilfældet, hvis vi blot bruger den præcise definition som den står formuleret på s. 8.10.

2) Anderledes kan det tage sig ud hvis $n > 1$, thi så involverer begyndelsesbetingelserne på en løsning x jo de afledede $x^{(j)}(0)$, for $j = 0, \dots, n-1$. Ligningen (**) kan oversættes til et førsteordens system med n ligninger; det vil være rimeligt om en ligevægtstilstand a til (**) er Liapunov stabil præcis når a (eller rettere $(a, 0, \dots, 0)$) er en Liapunov stabil tilstand for det oversatte system.

Lad (**) være oversat til

$$\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (***)$$

hvor som sædvanlig

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

En løsning til (***) er af formen $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$, og (**) løses af første-koordinaten $x(t)$. Og omvendt.

For (***) er Liapunov stabilitet følgende: Ligevægtstilstanden $(a, 0, \dots, 0)$ er Liapunov-stabil hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $\delta \in \mathbb{R}_+$ så det om enhver løsning $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ til (***) gælder at hvis

$$|(a-x)^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

så er

$$|a-x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

(den valgte form af ulighederne svarer til at ∞ -normen er blevet brugt i $\mathbb{C}^n$).

Ud fra ønsket om at en ligevægtstilstand a til (**) bør være Liapunov stabil præcis når $(a, 0, \dots, 0)$ er en Liapunov stabil tilstand for det oversatte system (***), definerer vi som følger:

Ligevægtstilstanden a for (**) er Liapunov-stabil hvis der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $\delta \in \mathbb{R}_+$ så det om enhver løsning $x(t)$ til (**) gælder at hvis

$$|a-x(0)| < \delta, \quad |x^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n-1$$

så er

$$|a-x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Trods den tilsyneladende komplicerede formulering af betingelserne kan vi udnytte bevisideerne i sætning 8.18 til at vise følgende

SÆTNING En ligevægtstilstand for (**) er Liapunov stabil hvis og kun hvis enhver løsning til den homogene ligning

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty[$$

er begrænset på $[0, \infty[$.

BEVIS: Lad L_0 være det n -dimensionale løsningsrum til den homogene ligning.

Så ved vi at løsningsmængden L til den givne ligning (**) opfylder

$$L = \{a\} + L_0.$$

Hvis a er Liapunov-stabil, og hvis y er en vilkårlig given løsning til

den homogene ligning så er $a + \tau y \in L$ for ethvert $\tau \in \mathbb{R}_+$. Til givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ giver Liapunov-stabiliteten os et $\delta \in \mathbb{R}_+$. Det er klart at for tilstrækkeligt lille τ vil ulighederne

$$|a - (a + \tau x)^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

alle kunne opfyldes. Fasthold et sådant positivt τ . Konklusionen bliver så at

$$|\tau x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Det betyder åbenbart specielt at der findes $m \in \mathbb{R}_+$ så $|x(t)| < m$ for alle $t \in \mathbb{R}_+$: vi kan jo lade $m := \varepsilon/\tau$. Dermed har vi vist at Liapunov-stabilitet af a tvinger L_0 til at indeholde lutter begrænsede funktioner.

Hvis det omvendt er forudsat at alle funktioner i L_0 er begrænsede, og hvis vi udnytter vor viden om udseendet af disse funktioner, nemlig at L_0 udspændes af funktionerne $t^j e^{\lambda t}$, hvor λ gennemløber rodsmængden til det karakteristiske polynomium, og j værdierne $0, \dots, (\text{rodmultiplisiteten af } \lambda) - 1$, så er altså alle disse funktioner $t^j e^{\lambda t}$ begrænsede. Hvis λ er en simpel rod, er der kun den ene funktion $e^{\lambda t}$ at betragte, og vi slutter at $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$; hvis λ er en multipel rod, slutter vi at $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Bemærk at enhver afledet af en sådan funktion også er begrænset på hele $\mathbb{R}_+$.

Vælg en basis $\{y_j\}$ for L_0 der opfylder at $y_j(0) = e_j$. Her er e_j det j .te element i standardbasen i $\mathbb{C}^n$, som sædvanlig. Betegnelsen y_j står for vektoren $(y_j, y_j', \dots, y_j^{(n-1)})$, ganske som vi brugte understregningen da vi indførte ligningssystemet (**). Basiselementet y_j er altså valgt så dets $(j-1)^{\text{ste}}$ afledede i 0 har værdien 1, mens alle øvrige afledede i 0 er lig 0. Lad også tallet M være valgt så $|y_j^{(k)}(t)| < M$, for alle $t \in \mathbb{R}_+$, alle $j = 1, \dots, n$ og alle $k = 0, 1, \dots, n-1$. Denne begrænsethedsbetingelse kan, som nævnt, opfyldes, da løsningerne har den ovenfor nævnte form - overvej dette; det er en væsentlig pointe.

Lad $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ være givet. For at checke Liapunov-stabilitet skal vi finde $\delta \in \mathbb{R}_+$ der opfylder at hvis x er en løsning til (**) for hvilken

$$|a - x(0)| < \delta, \quad |x^{(j)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

så er

$$|a - x(t)| < \varepsilon, \quad |x^{(j)}(t)| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \text{alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Da $z := x - a$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning for

hvilken

$$|z^{(j-1)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n,$$

og da $z = \sum c_j y_j$, gælder der altså at $z^{(j-1)}(0) = c_j y_j^{(j-1)}(0) = c_j$,
dvs betingelsen $|z^{(j-1)}(0)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n$ kan udtrykkes som betingelsen

$$|c_j| < \delta, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dermed er vi i en situation vi har set tilsvarende før: Idet $|z(t)| \leq \sum |c_j| |y_j(t)| \leq \sum \delta M = n \delta M$, kan vi ved at vælge $\delta := \epsilon/(nM)$ opnå det ønskede resultat, at vores betingelse for Liapunov stabilitet er opfyldt.

*Det måske suppleres med
faserummet drøjes*

9. PERRONS SÆTNING

MOTIVERENDE EKSEMPEL 9.1 ("Subsidieproblemet"). Et antal producenter, f.eks. k ialt, indgår i en statsstøttet samproduktion, hvor hver producent gør brug af både sin egen og de andres produktion i forarbejdningsprocessen. Den samlede statsstøtte ligger fast og for dette støttebeløb, som vi vil kalde σ , ønsker staten størst mulig totalproduktion. De samarbejdende producenter ønsker støttemidlerne fordelt retfærdigt, dvs. ingen producent ønsker at bruge en større andel af subsidierne til dækning af egne produktionsomkostninger end den del af subsidierne han modtager ved salg til de øvrige producenter. Alle firmaerne er villige til at overholde de produktionskvoter, som en sådan retfærdig fordeling af støtten måtte give anledning til. Kan en retfærdig fordeling af statsstøtten foretages?

Producenterne fordeler støtten efter følgende princip: For at "få lov til" at deltage i samproduktionen betaler producent nr. j et vist beløb, kaldet c_{ij} , til producent nr. i for hver produceret enhed af sit eget produkt, nr. j . Bruger vi betegnelsen u_i for den i .te producents årlige totalproduktion, får vi at producent nr. j afgiver ialt (pr. år)

$$\sum_i c_{ij} u_j = (\sum_i c_{ij}) u_j = \gamma_j u_j,$$

hvor vi har indført $\gamma_j := \sum_i c_{ij}$. Tilsvarende modtager producent nr. j fra de andre

$$\sum_i c_{ji} u_i,$$

Nettoforbruget af støttemidler for producent nr. j bliver altså

$$\nu_j := \gamma_j u_j - \sum_i c_{ji} u_i.$$

Da ingen producent ønsker at udbetale mere end den modtagne statsstøtte, må vi have at hvert $\nu_j = 0$, altså at

$$u_j = \sum_i (c_{ji}/\gamma_j) u_i \quad (a)$$

for hvert $j = 1, \dots, k$. Endvidere må vi have at

$$u_j > 0 \text{ for hvert } j = 1, \dots, k. \quad (b)$$

Endelig vil kravet om størst mulig produktion kunne formuleres som kravet at

$$\sum u_j \geq \sum x_j \quad (c)$$

for enhver "retfærdig" produktion $(x_1, \dots, x_k)$, dvs. enhver produktion der også opfylder kravet om optimal subsidiefordeling:

$$0 < x_j = \sum_i (c_{ji}/\gamma_j) x_i.$$

Selv om ligningssystemet (a) skulle have ikke-trivielle løsninger, er det ikke forlods klart at der er positive løsninger. Og kravet (c) om størst mulig produktion gør ikke sagen spor bedre.

Ikke desto mindre skal vi i dette afsnit bevise en sætning (som blev vist af den tyske matematiker Perron i 1905), der er svaret på alle vore bønner. Hans sætning siger følgende: Hvis der foreligger en matrix A med luttet positive indgange a_{ij} (og det gør der her, med $a_{ij} := c_{ij}/\gamma_i$), så er spektralradius $r(A)$ for denne matrix nødvendigvis en egen værdi, dvs. A har nødvendigvis en "stor" positiv egen værdi. Yder-

mere er denne positive egenverdis egenrum 1-dimensionalt, og - allerbedst, næsten - der findes en egenvektor $u = (u_1, \dots, u_k)$ med luttet positive koordinater hørende til denne egenverdi.

Disse udsagn kan vi oversætte til en løsning på subsidieproblemet. Vi lader altså $A := [a_{ij}]$ være den $k \times k$ matrix for hvilken $a_{ij} = c_{ij}/\gamma_j$. Da samtlige matrixindgange er positive, fortæller Perron os at ligningen $Au = r(A)u$ har en positiv løsning $u := (u_1, \dots, u_k)$, dvs. $u_j > 0$ for alle $j = 1, \dots, k$. Hvad er $r(A)$ her?

Multipliserer vi ligningen $Au = r(A)u$ fra venstre med rækkevektoren $g' := (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ får vi $g'Au = r(A)g'u$. Da

$$(g'A)_i = \sum_{j=1}^k \gamma_j (c_{ji}/\gamma_j) = \sum_{j=1}^k c_{ji} = \gamma_i,$$

ser vi at $g'A = g'$, så $g'Au = g'u$. Altså er $g'u = r(A)g'u$. Da skalar $g'u \neq 0$ slutter vi at $r(A) = 1$. Men det betyder jo netop at u er en løsning til (a), som også opfylder (b).

Perron fortæller os også at egenrummet $\ker(A-I)$ er 1-dimensionalt, dvs. enhver løsning til (a) og (b) er et positivt multiplum af den vektor u vi lige har fundet. Lader vi derfor x betegne en vilkårlig produktion (altså en løsning til (a) og (b)) vil der gælde at $x = \tau u$ for et eller andet $\tau > 0$. Totalproduktionen vil være

$$\sum_i x_i = \sum_i \tau u_i$$

og dens totalomkostninger vil være $\sum_i \gamma_i \tau u_i$. Dette tal må ikke overstige totalstøtten σ . Altså vil den optimale produktion opfylde at

$$\sum_i \gamma_i \tau u_i = \tau \sum_i \gamma_i u_i = \sigma,$$

og derfor er hvert x_i bestemt ved at

$$x_i = \tau u_i = (\sigma / \sum_i \gamma_i u_i) u_i.$$

I denne fordeling modtager producent nr. i altså en statsstøtte af størrelsen $\gamma_i x_i$.

Vi ser altså at Perron har givet os den fuldstændige løsning på subsidieproblemet: der er altid en løsning, og det endda uanset hvad enhedsudligningsbeløbene c_{ij} er.

DEFINITION 9.2 af positiv og ikke-negativ $k \times l$ matrix: Hvis M og N er reelle matricer, af samme dimension $k \times l$, skriver vi $M \geq N$ hvis $m_{ij} \geq n_{ij}$ for alle $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, og $M > N$ hvis $m_{ij} > n_{ij}$ for alle $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Hvis $M \geq 0$ siger vi at M er ikke-negativ. Gælder at $M > 0$ kaldes M positiv.

Det vil altså f.eks. sige at $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er positiv, mens $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ er ikke-negativ (men ikke positiv). En ikke-negativ, men ikke positiv matrix behøver altså ikke være null!

LEMMA 9.3 Hvis $0 \neq x \geq 0$ er en $k \times 1$ matrix (altså en søjlevektor) og $A > 0$ er en $n \times k$ matrix, så er $Ax > 0$.

BEVIS: Lad a' være en af rækkerne i matrixen A . Så er a' en positiv rækkevektor. Hvis $x \geq 0$, så er $a'x = \sum_j a_j x_j \geq 0$, og denne sum er $= 0$ hvis og kun hvis hvert led $a_j x_j = 0$. Da $a_j > 0$, sker dette hvis og kun hvis hvert $x_j = 0$.

SÆTNING 9.4 Hvis $A > 0$ er en $k \times k$ matrix med spektralradius $r(A)$, så er $r(A) > 0$, $r(A) \in \sigma(A)$ og der findes en positiv egenvektor svarende til egenværdien $r(A)$.

BEVIS: Vi ved der findes $\lambda \in \mathbb{C}$ med $|\lambda| = r(A)$ for hvilket $Ax = \lambda x$ for passende valgt $x \neq 0$. Hvis $x = (x_1, \dots, x_k)$ definerer vi

$$p := (|x_1|, \dots, |x_k|)$$

og påstår at p er en egenvektor hørende til $r(A)$. Da $Ax = \lambda x$, ved vi at for hvert $i = 1, \dots, k$ gælder at

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j,$$

og derfor at

$$r(A)p_i = \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} |x_j| = \sum_{j=1}^k a_{ij} p_j = (Ap)_i.$$

Dermed har vi vist at $r(A)p \leq Ap$ og altså at

$$z := (A - r(A))p \geq 0.$$

Hvis $z \neq 0$ får vi af lemma 9.3 at $Az > 0$ og da $Ap \geq 0$ kan vi ved at gange Ap med et passende lille positivt ϵ antage at $Az \geq \epsilon Ap$, altså at $\epsilon Ap \leq A(A - r(A))p = A^2 p - r(A)Ap$. Af denne ulighed får vi at

$$A^2 p \geq (r(A) + \epsilon)Ap.$$

Dette kan også skrives som uligheden

$$A/(r(A) + \epsilon) Ap \geq Ap.$$

Sætter vi $B := A/(r(A) + \epsilon)$, har vi altså en positiv matrix B for hvilken

$$B Ap \geq Ap.$$

Heraf følger at $B^2 Ap \geq B Ap \geq Ap$, og et lige-ud-ad-landevejen induktionsargument viser at

$$B^n Ap \geq Ap \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ifølge Sætning 8.8 gælder at $B^n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, altså at $B^n Ap \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$, hvoraf $Ap = 0$, og derfor også $r(A)p = 0$, idet jo $0 \leq r(A)p \leq Ap$. Vi er dermed ramlet ind i en modstrid med antagelsen

om at $z \neq 0$. Altså slutter vi at $(A - r(A))p = 0$ og har således indset at $r(A)$ er en egenværdi. Da $r(A)p = Ap > 0$ er $p > 0$ og $r(A) > 0$ og sætningen er bevist.

LEMMA 9.5 Hvis $|\sum z_j| = \sum |z_j|$, så er alle $z_j = |z_j| e^{i\theta}$, hvor θ ikke afhænger af j . Tallene z_j er altså ensrettede.

BEVIS: Tegn et vektordiagram: læg vektorerne z_j i forlængelse af hinanden og sammenlign længder! Se også opgave 76.

SÆTNING 9.6 Antag at $A > 0$. Hvis $r(A) \neq \lambda \in \sigma(A)$, så er $|\lambda| < r(A)$.

BEVIS: Vi skal vise at hvis $\lambda \in \sigma(A)$ og $|\lambda| = r(A)$, så er $\lambda = r(A)$.

Vi kan starte ganske som i beviset for Sætning 9.4: Hvis $|\lambda| = r(A)$ og vi har en egenvektor $x = (x_1, \dots, x_k)$ for hvilken $Ax = \lambda x$, definerer vi

$$p := (|x_1|, \dots, |x_k|)$$

og får at $Ap = r(A)p$. Heraf fås for f.eks. den første koordinat p_1 at

$$\begin{aligned} r(A)p_1 &= |\lambda x_1| = \left| \sum a_{1j} x_j \right| \\ &\leq \sum a_{1j} |x_j| = \sum a_{1j} p_j = (Ap)_1 = r(A)p_1. \end{aligned}$$

Men så må $\leq$ i midten være et lighedstegn, altså

$$\left| \sum a_{1j} x_j \right| = \sum a_{1j} |x_j|.$$

Af lemma 9.5 følger så at $x_j = e^{i\tau} |x_j|$ for alle $j = 1, \dots, k$, dvs. de to vektorer x og p er proportionale. Da begge er egenvektorer, den ene hørende til λ , den anden til $r(A)$, må $\lambda = r(A)$. Dermed er sætningen bevist.

DEFINITION 9.7 af power bounded: En kvadratisk $k \times k$ matrix $A = [a_{ij}]$ er power bounded hvis der findes en konstant C for hvilken det om alle potenser $A^n = [a_{ij}^{(n)}]$ gælder at

$$|a_{ij}^{(n)}| \leq C \text{ for alle } i, j = 1, \dots, k \text{ og alle } n \in \mathbb{N}.$$

SÆTNING 9.8 Hvis en Jordanblok med λ i diagonalen er power bounded så er $|\lambda| \leq 1$. Hvis specielt $|\lambda| = 1$ er blokken en 1×1 blok.

BEVIS: Dette er lemma 8.9.

LEMMA 9.9 Hvis P og R er similære $k \times k$ matricer, så er P power bounded hvis og kun hvis R er power bounded.

BEVIS: Vi kan vurdere direkte på matrixprodukternes indgange, idet

$$P = Q R Q^{-1}$$

medfører

$$P^n = Q R^n Q^{-1}.$$

For elementet

$$(P^n)_{i,j} = \sum_p Q_{i,p} (R^n Q^{-1})_{p,j} = \sum_p Q_{i,p} \left(\sum_q (R^n)_{p,q} (Q^{-1})_{q,j} \right)$$

får vi da, at hvis

$$C := \max_{i,p,q,j} (|Q_{i,p}|, |(Q^{-1})_{q,j}|),$$

og hvis

$$(R^n)_{p,q} \leq M, \text{ for alle } p,q = 1, \dots, k \text{ og alle } n \in \mathbb{N},$$

så er

$$|(P^n)_{i,j}| \leq \sum_p C \left(\sum_q M C \right) = k^2 M C^2,$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $i,j = 1, \dots, k$.

KOROLLAR 9.10 Hvis $A > 0$ og $r(A) = 1$ så er A power bounded.

BEVIS: Vi ved at 1 er en egenværdi og at der findes en positiv egenvektor $y := (y_1, \dots, y_k)$ hørende til 1. Af $Ay = y$ slutter vi straks at $A^n y = y$ for alle $n = 1, 2, \dots$. Lad $y_{\max}$, hhv. $y_{\min}$, betegne den største, hhv. mindste, af koordinaterne til y . Så har vi følgende vurdering, som åbenbart gælder for alle $i = 1, \dots, k$, for alle $n \in \mathbb{N}$ og for alle $m = 1, \dots, k$:

$$y_{\max} \geq y_i = \sum_j (A^n)_{ij} y_j \geq \sum_j (A^n)_{ij} y_{\min} \geq (A^n)_{im} y_{\min}.$$

Altså er

$$(A^n)_{im} \leq y_{\max} / y_{\min}$$

for alle $i, m = 1, \dots, k$ og alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er korollaret vist.

BEMÆRK at det af korollar 9.10 følger at hvis $B > 0$ så er matrixfølgen $\{B^n / r(B)^n\}$ begrænset.

KOROLLAR 9.11 Hvis $A \geq 0$ har $r(A) = 1$, er A^n konvergent.

BEVIS: Vi har lige indset at A er power bounded. Lad J være Jordanformen for A , og antag at $A = Q J Q^{-1}$. Så er J power bounded, ifl. lemma 9.9. Hvis

$$J = J_1 \oplus \dots \oplus J_s$$

er opspaltningen af J i dens Jordanblokke, er

$$J^n = J_1^n \oplus \dots \oplus J_s^n,$$

så hver blok J_j er klart power bounded. Derfor kan sætning 9.8 bruges. Heraf ses at enten er J_j en 1×1 blok bestående af et tal λ_j for hvilket $|\lambda_j| = 1$, eller også har J_j en konstant diagonal λ_j med $|\lambda_j| < 1$. Da $A \geq 0$ og $r(A) = 1$, ved vi at den eneste egen værdi med numerisk værdi $r(A)$ er $r(A)$ selv. De 1×1 blokke J_j med $|\lambda_j| = 1$, som J eventuelt indeholder, har altså $\lambda_j = 1$.

Af $J^n = J_1^n \oplus \dots \oplus J_s^n$ ser vi at for blokkene J_j med $|\lambda_j| < 1$ vil $J_j^n \rightarrow 0$, for $n \rightarrow \infty$, mens 1×1 blokkene J_j^n er konstante, uanset n . Altså vil J^n konvergere mod en matrix K der har et diagonalelement 1 på disse 1×1 blokkes plads og 0 på alle øvrige pladser. Men så er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = Q K Q^{-1}.$$

Antallet af 1×1 blokke bestående af et 1-tal er tydeligvis dimensionen af egenrummet $\ker(A-I)$. Vi skal straks se at denne dimension er 1, således at der faktisk i ovenstående kun forekommer én sådan 1×1 blok.

KOROLLAR 9.12 Hvis $A \geq 0$ så er $A^n/r(A)^n$ konvergent.

Faktisk er power bounded og " $r(A) \leq 1$ " ensbetydende for positive matrixer. Den manglende implikation kommer her:

SÆTNING 9.13 Hvis $A \geq 0$ er power bounded, så er $r(A) \leq 1$.

BEVIS: Antagelsen om A er at der findes et tal M så alle potenser A^n opfylder at $|(A^n)_{i,j}| \leq M$, $i, j = 1, \dots, k$. Hvis vi benytter den norm $\|A\|$, der blev indført i beviset for Sætning 8.14, ser vi at

$$\|A^n\| \leq kM \text{ for alle } n \in \mathbb{N}. \text{ Altså er } \|A^n\|^{1/n} \leq (kM)^{1/n}, \text{ så}$$

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (kM)^{1/n} = 1.$$

SÆTNING 9.14 Hvis $A > 0$ er egenrummet $\ker(A - r(A)I)$ 1-dimensionalt.

BEVIS: Hvis x er en egenvektor hørende til den positive egenværdi $r(A)$, så er $Ax = r(A)x$ og derfor er $A(\operatorname{Re} x) + i A(\operatorname{Im} x) = r(A)\operatorname{Re} x + i r(A)\operatorname{Im} x$, hvor vi tager realdel og imaginærdel i hver koordinat af x . Da alle indgange i A er reelle (endda positive) er $A(\operatorname{Re} x) = r(A)\operatorname{Re} x$ og $A(\operatorname{Im} x) = r(A)\operatorname{Im} x$; altså er både $\operatorname{Re} x$ og $\operatorname{Im} x$ egenvektorer hørende til egenværdien $r(A)$.

Lad nu x betegne en vilkårlig *reel* egenvektor for A , hørende til egenværdien $r(A)$. Ved evt. at gange med -1 kan vi forudsætte at mindst en af koordinaterne x_i er positiv.

Lad p være en *positiv* egenvektor hørende til $r(A)$. Lad $t := \max_i x_i/p_i$. Så er $t > 0$ og da $t p_i \geq x_i$ for hvert $i = 1, \dots, k$ (med $=$ for mindst en værdi af i), har vi at $tp - x \geq 0$, men at mindst en af koordinaterne i $tp - x$ er lig 0 . Hvis $tp - x \neq 0$, slutter vi af lemma 9.3 at $A(tp - x) > 0$, altså at $A(tp - x) = r(A)(tp - x) > 0$; dettet strider imod at mindst en koordinat i $tp - x$ er nul. Det vil sige at $tp - x = 0$, altså at x er et multiplum af p .

Vender vi tilbage til den oprindelige (muligvis komplekse) egenvektor x , ser vi at $\operatorname{Re} x$ og $\operatorname{Im} x$, og derfor x , er multipla af p . Hermed er sætningen vist: Egenrummet hørende til egenværdien $r(A)$ er af dimension 1.

Dermed har vi hele Perron's sætning: Den består af sætning 9.4, sætning 9.6 og sætning 9.14. Vi formulerer den eksplicit:

PERRON'S SÆTNING Lad $A > 0$ være en positiv $k \times k$ matrix med spektralradius $r(A)$. Så er $r(A) > 0$, $r(A)$ er en egenværdi og der findes en positiv egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$. Egenrummet $\ker(A - r(A)I)$ er en-dimensionalt. Alle andre egenværdier λ opfylder at $|\lambda| < r(A)$.

Vi skal se hvorledes Perron's sætning kan bruges til at skaffe information om det asymptotiske forløb af potenser af en positiv matrix (med spektralradius 1). Det viser sig at de "store" egenverdier for A og dens transponerede A' (samt disses positive egenvektorer) dominerer i det lange løb. Mere præcist har vi følgende sætning.

SÆTNING 9.15 Hvis $A > 0$ og $p > 0$ er en positiv egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$, mens $q > 0$ er en positiv egenvektor for $A' > 0$ hørende til egenværdien $r(A') = r(A)$, så er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n / r(A)^n = p q' / q' p.$$

BEVIS: Lad $B := A/r(A)$. Så er $B > 0$ og $r(B) = 1$; af korollar 9.12 fås derfor at $L := \lim_{n \rightarrow \infty} B^n$ eksisterer. Da $BL = \lim_{n \rightarrow \infty} B^{n+1} = L$, ser vi at hver søjle i L er en egenvektor for B , svarende til egenværdien 1. Hver søjle i L er således et multiplum af p . Vi kan skrive

$$L = \begin{bmatrix} r_1 p_1 & r_2 p_1 & \dots & r_k p_1 \\ r_1 p_2 & r_2 p_2 & \dots & r_k p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1 p_k & r_2 p_k & \dots & r_k p_k \end{bmatrix} = p r', \text{ hvor } r := \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}.$$

Da $A'q = r(A')q = r(A)q$, er $B'q = q$, således at $B'^n q = q$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(B')^n = (B^n)'$ (idet det jo generelt gælder at $(TS)' = S'T'$), ser vi at $B^n \rightarrow L'$, og dette, kombineret med det lige observerede, medfører at $L'q = q$. Ved transponering heraf får vi $q' = q'L$, og kombinerer vi dette med $L = p r'$, får vi at $q' = q'L = q' p r'$. Da $q' p$ er en skalar, er $r' = q' / (q' p)$. Altså er

$$L = p q' / (q' p).$$

Hermed er sætningen vist.

Der er en væsentlig pointe i dette, som vi trækker explicit frem:

SPECIALTILFÆLDE 9.16 Hvis A er en overgangsmatrix ($A > 0$ og alle søjlesummer er lig 1), så kan $q = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ bruges i ovenstående. Altså: for en vilkårlig $k \times k$ overgangsmatrix A gælder at A' har vektoren $q = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ som en positiv egenvektor hørende til egenværdien 1.

Vort føljetoneksempel kan illustrere anvendeligheden af ovenstående.

EKSEMPEL 9.17 Mejerimarkedets ligevægtstilstand for $t \rightarrow \infty$.

Vi bruger igen det tredimensionale mejerimarked som eksempel, jvf. 2.3. Tidligere er fundet at egenværdierne er 1, 0.6 og 0.5. Ifølge sætning 9.15 er $\lim A^n = pq'/q'p$, hvor p er en positiv egenvektor for A hørende til 1, mens $q' = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Som p kan vi bruge $\langle 9, 7, 4 \rangle$. Altså vil

$$A^n \rightarrow 1/20 \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

for $n \rightarrow \infty$. Bemærk at det er den "normerede" positive egenvektor hørende til 1 ("normeret" hentyder til at søjlesummen er 1), der forekommer i alle søjlerne. Bemærk også at sådan må det altid være for overgangsmatricer, fordi egenvektoren q da har denne specielle form.

Hvis markedets initialsituation er givet ved vektoren $v := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, vil udviklingen være beskrevet ved $A^n v$, $n = 1, 2, \dots$ og vil derfor i det lange løb konvergere mod

$$1/20 \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 1/20 \begin{bmatrix} 9(v_1 + v_2 + v_3) \\ 7(v_1 + v_2 + v_3) \\ 4(v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix}.$$

Det er således kun markedets samlede størrelse i begyndelsen, der betyder noget i det lange løb. Initialfordelingen imellem agenterne er uden betydning. Denne konklusion er almen for overgangsmatricer.

Vi tager to generalisationer af Perron's sætning med.

DEFINITION 9.18 Primitiv matrix: En ikke-negativ $k \times k$ matrix $A \geq 0$ er *primitiv* hvis der findes $n \in \mathbb{N}$ for hvilket $A^n > 0$.

BEMÆRKNING 9.19 Hvis $A^m > 0$, så er $A^k > 0$ for alle $k \geq m$. Dette følger af lemma 9.3.

SÆTNING 9.20 (udvidelse af Perron til primitiv A) Hvis A er en primitiv $k \times k$ matrix, så har A positiv spektralradius $r(A)$.

Spektralradius $r(A)$ er en egenværdi, der findes en positiv egenvektor hørende til $r(A)$, og egenrummet $\ker(A - r(A)I)$ er 1-dimensionalt. Alle andre egenværdier λ opfylder $|\lambda| < r(A)$.

BEVIS: Lad os antage at $A^n > 0$. Ifølge 8.3 er $r(A^n) = r(A)^n$, og da $A^n > 0$ er $r(A)^n$ en egenværdi for A^n . Hvis $\lambda \in \sigma(A)$, så er $\lambda^n \in \sigma(A^n)$, ifl. lemma 8.2. Hvis specielt $\lambda \in \sigma(A)$ er valgt så $|\lambda| = r(A)$, så er $|\lambda^n| = r(A^n)$, og derfor $\lambda^n = r(A)^n$, fordi $A^n > 0$; dette følger af Perron's sætning. Da også $A^{n+1} > 0$, får vi tilsvarende at $\lambda^{n+1} = r(A)^{n+1}$; kombination af disse udsagn giver at $\lambda^{n+1} = \lambda^n r(A)$, så vi slutter at $\lambda = r(A)$, altså at $r(A)$ er en egenværdi for A . Endvidere ser vi at $r(A) > 0$, da $r(A^n) > 0$.

Da $Ax = r(A)x$ medfører at $A^n x = r(A)^n x$, ser vi at $\ker(A - r(A)I) \subseteq \ker(A^n - r(A)^n I)$. Sidstnævnte rum er 1-dimensionalt og de to egenrum må derfor være ens. Specielt vil A have en positiv egenvektor hørende til egenværdien $r(A)$.

BEMÆRKNING 9.21 Det kan bevises at hvis A er en primitiv $k \times k$ matrix, så er $A^n > 0$ for alle $n \geq (k-1)^2 + 1$.

LEMMA 9.22 Hvis $0 \leq A < B$, så er $r(A) \leq r(B)$.

BEVIS: Vi starter med at bemærke at hvis $0 \leq A < B$, så er $A^n < B^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ (dette er en simpel sag, som kan vises ved induktion: $B^{n+1} - A^{n+1} = B^n B - B^n A + B^n A - A^n A = B^n(B - A) + (B^n - A^n)A > 0$, ifl. lemma 9.3).

Specielt følger heraf at $A^n/r(B)^n < B^n/r(B)^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Derfor er $A/r(B)$ power bounded, da jo $B/r(B)$ er power bounded (korollar 9.10). Af sætning 9.13 følger så at $r(A/r(B)) \leq 1$, og altså $r(A) \leq r(B)$.

SÆTNING 9.23 Hvis $A \geq 0$ så er $r(A)$ en egenværdi for A og A har en ikke-negativ egenvektor hørende til $r(A)$.

BEVIS: Med $B_n := A + T/n$, hvor T består af lutter 1-taller, vil $r(A) \leq r(B_{n+1}) \leq r(B_n)$, ifl. lemma 9.22. Følgen $(r(B_n))$ er altså

dalende, nedad begrænset og derfor konvergent; specielt gælder at

$$r(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} r(B_n) =: \lambda.$$

Hver af matricerne B_n har en positiv egenvektor x_n hørende til egenværdien $r(B_n)$. Vi kan udstyre $\mathbb{C}^k$ med ℓ^1 normen $\| \cdot \|_1$, defineret for $a := (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^k$ ved $\|a\|_1 := \sum |a_j|$. Normerer vi så alle egenvektorerne x_n så $\|x_n\| = 1$, for alle $n \in \mathbb{N}$, og bevarer vi betegnelsen x_n , kan vi af $\mathbb{C}^k$ -enhedskuglens kompakthed slutte at følgen (x_n) har en konvergent delfølge (x_{n_p}) , altså at der findes $x \in \mathbb{C}^k$ for hvilket $x_{n_p} \rightarrow x$, for $p \rightarrow \infty$. Da alle vektorerne x_{n_p} er positive vil x være ikke-negativ. Da $\|x_{n_p}\| = 1$, for alle p , vil også $\|x\| = 1$. Specielt er altså $x \neq 0$.

Vi påstår at $Ax = \lambda x$, hvor $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} r(B_n)$ blev indført før. Ved indskydning af led har vi umiddelbart følgende vurdering:

$$\begin{aligned} \|Ax - \lambda x\| &\leq \\ &\|(A - B_{n_p})x\| + \|B_{n_p}x - B_{n_p}x_{n_p}\| \\ &+ \|B_{n_p}x_{n_p} - r(B_{n_p})x\| + \|r(B_{n_p})x - \lambda x\|. \end{aligned}$$

For $\|(A - B_{n_p})x\|$ får vi umiddelbart at $\|(A - B_{n_p})x\| \leq 1/n_p \|T\| \|x\|$.

Det andet led kan også direkte vurderes:

$$\|B_{n_p}x - B_{n_p}x_{n_p}\| \leq (\|A\| + 1/n_p \|T\|) \|x - x_{n_p}\|.$$

For tredje led bruger vi at $B_{n_p}x_{n_p} = r(B_{n_p})x_{n_p}$ og får således

$$\|B_{n_p}x_{n_p} - r(B_{n_p})x\| \leq r(B_{n_p}) \|x - x_{n_p}\|.$$

Endelig giver vurderingen af fjerde led $\|r(B_{n_p})x - \lambda x\|$ sig selv og

vi får alt i alt at $\|Ax - \lambda x\| \leq$

$$1/n_p \|T\| \|x\| + (\|A\| + 1/n_p \|T\|) \|x - x_{n_p}\| + r(B_{n_p}) \|x - x_{n_p}\| + (r(B_{n_p}) - \lambda) \|x\|.$$

Hver af disse fire led konvergerer mod 0 når $p \rightarrow \infty$. Altså er $Ax = \lambda x$. Da $x \neq 0$ betyder det at $\lambda \in \sigma(A)$, og altså at $|\lambda| \leq r(A)$.

Den anden ulighed $r(A) \leq \lambda$ blev bemærket tidligere, og derfor har vi at $\lambda = r(A)$ er en egenværdi for A og at $x \geq 0$ er en egenvektor for A hørende til denne egenværdi. Dermed er sætningen bevist.

Denne sidstnævnte generalisation af Perron's sætning har et berømt og nyttigt specialtilfælde.

KOROLLAR 9.24 (Sætningen om endelige Markov processer) Lad A være en ikke-negativ overgangsmatrix. Så har A en ikke-negativ egenvektor hørende til egenværdien 1.

BEMÆRKNING Korollar 9.24 kan også udledes af Farkas' alternativsætning (Sætning 7.3 i 20Ks Optimeringsnoter). Korollar 9.24 påstår at hvis $A = [a_{ij}] \geq 0$ så findes der $x \geq 0$ for hvilket $(A - I)x = 0$. Vi kan

selvfølgelig yderligere antage at $x := (x_1, \dots, x_k)$ opfylder at $\sum x_j =$

1. Det er den eksplicite tilføjelse af denne sidste betingelse, der er ideen i beviset. De to betingelser, altså at der findes en ikke-negativ løsning x til $(A - I)x = 0$ for hvilken $\sum x_j = 1$, kan opfattes som

alternativ (I) i Farkas' sætning, i følgende formulering: Den matrix A der er nævnt i Farkas' sætning erstatter vi med en $(k+1) \times k$ matrix A , der i de første k rækker har de tilsvarende rækker i $A - I$ (hvor vi bruger "vores" A), mens den nederste række indeholder luter 1-taller; B vælger vi som søjlevektoren $(0, \dots, 0, 1)$ af "længde" $k+1$. For at have et bevis for korollar 9.24 skal vi altså udelukke den anden mulighed i Farkas' sætning. Den får her udseendet

$$A'y \leq 0$$

$$\text{sampt } B'y > 0$$

for et eller andet $y = (y_1, \dots, y_{k+1}) \geq 0$. Betingelsen $B'y > 0$ betyder simpelthen $y_{k+1} > 0$, mens $A'y = (y'A)' \leq 0$ betyder $y'A \leq 0$.

Udfører vi sidstnævnte matrixmultiplikation får vi

$$\sum_{j=1}^k y_j a_{ji} - y_1 + y_{k+1} \leq 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, k,$$

hvoraf

$$\sum_{j=1}^k y_j a_{ji} + y_{k+1} \leq y_1 \quad \text{for } i = 1, \dots, k.$$

Vi ser heraf at $y_1 > 0$ for $i = 1, \dots, k$. For det mindste y_1 får

vi, da A er en overgangsmatrix, at

$$\min y_1 \leq \sum_{j=1}^k y_j a_{ji} < \sum_{j=1}^k y_j a_{ji} + y_{k+1} \leq y_1 \quad \text{for } i = 1, \dots, k,$$

en absurditet! Altså må alternativ (II) forkastes og korollaret er bevist.

HOMOGENE MARKOV-KÆDER

En vektor $p \geq 0$ siges at være *stokastisk* hvis koordinatsummen er

1. En *stokastisk* matrix er en matrix med stokastiske søjler.

Lad os antage vi har et system $\mathcal{S}$, som kan befinde sig i k

forskellige tilstande $s_1, \dots, s_k$ til hvert af tidspunkterne $t_1, t_2, \dots$

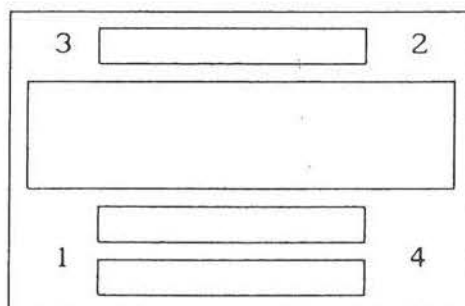
Lad os også forudsætte at systemet med sandsynlighed p_{ij} slår over fra

tilstand s_j til tilstand s_i i løbet af en tidsenheds forløb. Bemærk

at vi forudsætter at overgangssandsynlighederne p_{ij} ikke er tidsafhængige.

Hvis systemet $\mathcal{Y}$ i begyndelsen befinder sig i tilstand s_1 med sandsynlighed $p_1^{(0)}$, er vektoren $\langle p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)} \rangle$ (eller rettere den tilsvarende søjlevektor $p_0 := \langle p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)} \rangle'$) en beskrivelse af systemet til initialtidspunktet t_0 . Lader vi overgangsmatricen $P := [p_{ij}]$, fås at $P p_0$ er sandsynlighedsfordelingen af systemets tilstande til tiden t_1 , ..., at $p_n := P^n p_0$ er sandsynlighedsfordelingen af systemets tilstande til tiden t_n , $n = 1, 2, \dots$. Herved er defineret en (homogen) *Markov-kæde*.

EKSEMPEL I en "labyrint" med fire kamre, forbundet med adskillige gange, befinder sig en forsøgsrotte:



Alle udgange fra alle kamre er ens, så ingen udgang foretrækkes af rotten frem for nogen anden. Vi antager endvidere at sandsynligheden for at rotten i en given tidsenhed *forbliver* i et kammer er den samme som sandsynligheden for at rotten forlader kamret gennem en af gangene.

Overgangsmatricen P for dette system $\mathcal{Y}$ vil derfor være

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.6 & 0.25 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Placeres rotten til at begynde med f.eks. i kammer nr. 3, er $p_0 = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle'$, og rottens bevægelser kan derefter beskrives ved Markov-kæden $P^n \langle 0, 0, 1, 0 \rangle'$.

Man kalder en Markov-kæde *regulær* hvis der findes en tid t_N efter hvilken systemet kan være i enhver af sine tilstande med positiv sandsynlighed, uanset initialtilstanden. Altså: Systemet $\mathcal{Y}$ med stokastisk overgangsmatrix P er regulært hvis der findes et $N \in \mathbb{N}$ for hvilket $P^n p_0 > 0$ for alle $n > N$ og for ethvert valg af initialsandsynlighedsfordeling p_0 .

Der gælder da følgende lille

SÆTNING 9.25 En homogen Markovkæde $\mathcal{P}$ med stokastisk overgangsmatrix P er regulær hvis og kun hvis P er primitiv.

BEVIS: Det er klart at hvis P er primitiv, altså hvis der findes $N \in \mathbb{N}$ for hvilket $P^N > 0$, så er for ethvert tal $n \geq N$ $P^n p_0 > 0$ for vilkårlig stokastisk vektor p_0 .

Og omvendt, hvis $A \geq 0$ er en given matrix, der opfylder at $Ax > 0$ for alle $x \geq 0$, $x \neq 0$, så vil $A > 0$: betragt de kanoniske basisvektorer e_j og erindr at $Ae_j > 0$ angiver den j .te søjle i A . Overbevis dig om at dette udsagn giver beviset for sætningen.

Ifølge eksamensopgave 1, sommeren 1992, kan man for en regulær Markovkæde $\mathcal{P}$ slutte at sandsynlighedsfordelingen for $n \rightarrow \infty$ vil konvergere mod en bestemt fordeling, uafhængig af initialfordelingen. Detaljerne vil blive dyrket i opgaver.

En Markovkæde kaldes *ergodisk* hvis det for enhver initialfordeling p_0 og enhver tilstand s_j gælder at der findes et tidspunkt t_n for hvilket $p^{(n)}_j > 0$, altså $(P^n p_0)_j > 0$.

SÆTNING 9.26 En homogen Markovkæde $\mathcal{P}$ med stokastisk overgangsmatrix P er ergodisk hvis og kun hvis der findes $n \in \mathbb{N}$ således at

$$\sum_{j=1}^n P^j > 0.$$

BEVIS: (øvelse)

Bemærk at enhver regulær Markov-kæde er ergodisk. Det omvendte gælder ikke.

EKSEMPEL Antag at rotten i forsøget fra før ikke forbliver i det kammer den befinder sig i. Et lille elektrisk stød kan sørge for dette! I så fald er den stokastiske fordelingsmatrix for vort system givet ved

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0.67 & 0.25 \\ 0.25 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.33 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det er ikke svært at se at rotten med sandsynlighed 1 vil skifte mel-

lem kamrene $\{1, 2\}$ og kamrene $\{3, 4\}$. Der kan derfor ikke blive tale om at sandsynlighedsfordelingen vil konvergere mod nogen grænseværdi; dette system kan derfor ikke være regulært. Men det er ergodisk, som vi skal se i opgaverne.

OPGAVER TIL IMPLICITTE OG OMVENDTE FUNKTIONER

1. Betragt afbildningen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x,y) := (e^x \sin y, e^x \cos y).$$

Vis at f afbilder cirklen $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ på en åben mængde.

a) Er f injektiv på $\mathbb{R}^2$?

b) Find alle løsninger (x,y) til ligningen $f(x,y) = (0,1)$.

c) Vis at f er injektiv i en passende omegn af $(0,0)$, og find funktionalmatricen Dg i punktet $(0,1)$ for den omvendte afbildning g til restriktionen af f til en sådan omegn.

2. Gør rede for at ligningen $e^{x+y} + \sin(x-z) - \cos(y-z) = 0$ i en omegn af $(0,0,0)$ bestemmer z som en C^∞ funktion $z = g(x,y)$ af (x,y) , og bestem ved implicit differentiation $g'_x(0,0)$ og $g'_y(0,0)$.

3. Betragt afbildningen $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x,y) := (x - xy, xy).$$

a) Find funktionalmatricen Df og dennes determinant, og vis at Df altid er regulær.

b) Find billedmængden $f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ - det er en halvplan.

c) Vis at f er injektiv. Følger dette af a)?

d) Find den omvendte afbildning f^{-1} til f .

e) Find på to måder funktionalmatricen $D(f^{-1})$.

Vink: Det gælder jo i b) om at finde mængden af $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ for hvilke $f(\underline{x}) = \underline{y}$ har mindst én løsning $\underline{x} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; og det gælder i c) om at vise at denne ligning altid har højst én løsning.

4. Gør rede for at ligningen $5x - \sin x = 2$ har netop én løsning, ved at omskrive ligningen til $T(x) = x$, hvor $T(x) := (2 + \sin x)/5$. Vis at T er en kontraktion og at $1/5$ er en tilhørende kontraktionskonstant. Anvend dernæst iterationsmetoden (lommeregner!) f.eks.

med start i $x_0 = 0$ eller $x_0 = 1$. Bestem $x_5 = T^5(x_0)$ og vurder fejlen der begås ved at standse efter 5 iterationer.

5. Gør rede for at ligningen $x^3 + 3xy + y^3 = -13$ i en omegn af $(1, -2)$ fastlægger y som en C^∞ funktion $y = g(x)$ af x . Bestem $g'(1)$ og $g''(1)$ og opskriv Taylor's grænseformel til 2.orden for g ud fra udviklingspunktet 1.

6. Lad $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2) := (x_1 + 1/x_2, x_1 - 1/x_2).$$

Vis at f er injektiv og find billedmængden. Bestem den omvendte afbildning $g := f^{-1}$. Find funktionalmatricen Dg i punktet $(2, 0)$, dels direkte, dels vhja. T.4, sætning 2.

7. Gør rede for at ligningen $e^{x+y} \sin y + x \cos y = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, i nærheden af $(0, 0)$ fastlægger y som en C^∞ funktion $y = g(x)$ af x , og find $g'(x)$ udtrykt explicit ved x og $g(x)$. Bestem specielt $g'(0)$.

8. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 &= -4 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 &= -8 \end{aligned}$$

i en omegn af $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$ fastlægger u og v som C^∞ funktioner $u := g_1(x, y)$ og $v := g_2(x, y)$ af x og y , og bestem disse to funktioners første partielle afledede i $(2, -1)$

9. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2 &= 10 \\ xyz &= 6 \end{aligned}$$

i en omegn af $(2, 3, 1)$ fastlægger x og y som C^∞ funktioner af z , og beregn disses afledede i punktet 1.

10. Lad $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$F(x, y) := (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y).$$

a) Begrund at der for hvert punkt $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ findes en åben omegn U omkring (x_0, y_0) , således at F afbilder U injektivt på

en åben omegn $F(U)$ omkring $F(x_0, y_0)$, og således at den inverse afbildning $G : F(U) \rightarrow U$ til restriktionen af F til U er en C^∞ afbildning.

b) Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(1,2)$.

11. Gør rede for at ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^u - u^2 + v - x^2 - y^2 &= 1 \\ u^3 - u + v^2 - xy \sin u &= 1 \end{aligned}$$

i en omegn af $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ fastlægger u og v som C^∞ funktioner $u = g_1(x, y)$ og $v = g_2(x, y)$ af x og y .

Lad $g := (g_1, g_2)^{tr}$ og beregn funktionalmatricen Dg .

12. Lad $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$F(x, y) := (e^{-2y} + x(1+y), 2e^{xy} - 3y).$$

a) Begrund at der findes en åben omegn U omkring $(2, 0)$, således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $F(U)$ omkring $F(2, 0)$, og således at den inverse afbildning $G : F(U) \rightarrow U$ til restriktionen af F til U er en C^∞ afbildning.

b) Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(2, 0)$.

13. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 2x_2 - x_3 - 2, x_1^2 - x_2x_3)$

Udfør følgende række af "ordrer":

- i) fastlæg definitionsområdet og afgør om denne er åben.
- ii) fastlæg billedrum
- iii) hvor mange variable muliggør sætn. om impl. fkt. lokalt fastlæggelse af, som funktion af de øvrige?
- iv) konstater at $f(1, 1, 1) = 0$ (dette 0 er en vektor)
- v) udregn $(D_{x_i} f)(1, 1, 1)$ for alle i .
- vi) hvilke variable kan så fastlægges som funktion af de øvrige, i nærheden af det faste punkt?
- vii) Vælg én af de i vi) fundne muligheder, formuler sætningen om implicit funktion præcist for denne situation og regn et udtryk for Dg ud.

14. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (3x_1 - 4x_2^2 + 6x_3 - 5, -x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 2)$.

Gentag proceduren fra opgave 13.

15. Lad $f(x_1, x_2, x_3) := (3x_1 - 4x_2 + 6x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$. Gentag proceduren fra opg. 13 med punktet $(16, 9, -2)$. Sammenlign med det sidste afsnit på s. T.3.15.

16. Lad $f(x, y) := (y^4 + xy)/x$. Gentag proceduren fra opg. 13; brug punktet $(-1, 1)$. Slut af med at opskrive det 1. grads Taylorpolynomium for g , der tilnærmer g i nærheden af $x^0 = -1$.

17. Lad $f(x_1, x_2) := (x_1 x_2, x_2^2 - x_1^2)$. Angiv den naturlige definitions-
mængde for f . Gør nøje rede for at sætning T.4.1 kan anvendes på f , angiv de punkter i definitions-
mængden, som sætningen udtaler sig om og hvad sætningen siger, incl. angivelse af funktionalmatricen for den lokale inverse. Er f injektiv på sin definitions-
mængde? Find, om muligt, den (globale) inverse. Lad til slut $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ være et punkt hvor $Df(\alpha, \beta)$ ikke er regulær (hvis et sådant findes). Kan du sige noget om injektivitet af f på nogen åben omegn af (α, β) ?

Følg opskriften i opg. 17 i de følgende opgaver:

18. $f(x_1, x_2) := (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

19. $f(x_1, x_2) := (\cos(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_2))$

20. $f(x_1, x_2) := (x_1 x_2, x_2^2 + x_1^2)$.

21. Lad $f(x_1, x_2) := (\exp(x_1) \cos x_2, \exp(x_1) \sin x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Gør rede for at billedmængden $f(\mathbb{R}^2)$ er åben. Find den. Vis at funktionalmatricen Df er overalt regulær, men at f ikke er injektiv. Skitser kurverne $f(c, x_2)$ og $f(x_1, c)$, hvor c er fastholdt.

22. For $(x, y) \in \Omega := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ lader vi $f(x, y) := x^2 y - 3xy^2$. Gør rede for at $f(\Omega)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}$.

23. For $(x, y) \in \Omega := (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ lader vi

$$f(x, y) := \exp(xy) - \exp(-xy).$$

Gør ordentligt rede for at $f(\Omega)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}$.

[Pusseløjerlighed om denne opgave: Ved dannelse af Ω er den positi-

ve x-akse blevet fjernet fra højre halvplan. Hvis vi føjer den til, får vi som definitionsområde den højre halvplan i $\mathbb{R}^2$. Derved er billedmængden blevet øget med et punkt. Hvilket? Kan du på grundlag af den oplysning gøre rede for at for alle tilstrækkelig små $\varepsilon > 0$ vil både ε og $-\varepsilon$ være i den oprindelige $f(\Omega)$? Måske kunne det indses mere direkte?]

OPGAVER OM LINEÆRE AFBILDNINGER

24. Betragt rummet $\mathbb{P}^3$ af polynomier af grad højst 3. Gør rede for at polynomierne $\{1, t-1, t^2-1, t^3+t+2\}$ udgør en basis. Er følgende udsagn sandt: Hvis et sæt polynomier indeholder ét polynomium af hver af graderne j , $j = 0, 1, \dots, n$, så er dette sæt en basis for $\mathbb{P}^n$.

25. Brug Matlab til at afgøre om sættet $\beta := \{(0, 1, 3, 4), (1, -1, 1, 1), (2, 0, 0, 3), (6, -11, 1, 0)\}$ udgør en basis for $\mathbb{C}^4$.

26. Hvad er beskrivelsen i økonomiske vendinger af standardbasen i $\mathbb{R}^3$ i føljetoneksemplet?

27. Med α sat til standardbasen i $\mathbb{C}^4$ og β som i opg. 25 skal $\alpha \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \beta$ opstilles. Find dernæst (Matlab) $\beta \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \alpha$.

28. Videreførelse af opg. 25 og 27: Med $\alpha := \{e_1, \dots, e_4\}$ definerer vi en lineær afbildning $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ved at $f(e_j) := e_1 + e_j - 4e_{5-j}$, $j = 1, \dots, 4$. Opskriv $\alpha[f]_\alpha$. Beregn (Matlab) $\beta[f]_\beta$.

29. Lad os antage at enhver persons uddannelse kan rubriceres som enten faglært, ufaglært eller "videreuddannet". Vi antager også at det er et veletableret faktum at blandt børnene af videreuddannede er 70% selv videreuddannede, 20% er faglærte og 10% er ufaglærte. For de faglærtes børns vedkommende er 20% videreuddannede, 60% er faglærte og 20% ufaglærte, mens ufaglærtes børn er for 20% vedkommende videreuddannede, 30% er faglærte, mens 50% er ufaglærte. Vi antager videre at befolkningstallet er konstant, samt at der i den nuværende generation er 35% videreuddannede, 35% faglærte og 30% ufaglærte.

a) Opskriv overgangsmatricen A .

b) Find befolkningsfordelingen efter én generations, og efter to generationers, forløb.

c) Benyt Matlab til eksperimentelt at undersøge om der i det lange løb vil indtræffe nogen ligevægtstilstand i befolkningens uddannelsesmæssige fordeling.

d) Kan Matlab give noget fingerpeg om forløbet af A^n for $n \rightarrow \infty$?

30. Hvis $f : U \rightarrow U$ er en lineær afbildning der opfylder at $f^2 := f \circ f = f$, siger vi at f er en *projektion*. Et finere(?) ord for f er *idempotent*. Vis at 0-afbildningen og identiteten I er (trivielle) projectioner. Vis at eksempel 1.1 b) er en projektion.

31. a) Lad $f \neq I$ være en projektion. Vis at $\ker f \neq \{0\}$. (Hvis $\ker f = \{0\}$, er f invertibel...) Dermed har vi én egen værdi for en projektion. I løbet af opg. 31-36 finder vi alle egen værdierne for en projektion.

b) Lad $f \neq I$ være en projektion. Kan f være surjektiv? (Søg evt. inspiration i a) og Dimensionsformlen.

32. De her nævnte matricer skal opfattes som matrixrepræsentationer i standardbasen for lineære afbildninger på komplekse vektorrum. Find egen værdierne:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{R}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (bc \neq 0)$$

33. Find alle egenrum for afbildningen længst til venstre i opg. 32. Er denne afbildning diagonaliserbar?

34. Lad f være den lineære afbildning, hvis matrixrepræsentation i standardbasen α udtrykt i Matlab sprog er $\langle 2/3 \ -1/3 \ -1/3; -1/3 \ 2/3 \ -1/3; -1/3 \ -1/3 \ 2/3 \rangle$. Opskriv på sædvanlig form ${}_{\alpha}[f]_{\alpha}$. Vis at f er en projektion; find den plan, f projicerer rummet på - jvf. analogien til eks. 1.1 b).

35. Vis at hvis f er en projektion, er $f(U)$ et egenrum. Hvad er egen værdien?

36. Vis at hvis f er en projektion er $U = \ker f \oplus f(U)$. (Vink: $x = f(x) + x - f(x)$). Hvor mange egenverdier har altså en projektion?

37. For de to afbildninger til højre i opg. 32 skal egenrummene findes. Hvilke af afbildningerne er diagonaliserbare?

38. Er enhver projektion diagonaliserbar?

OPGAVER OM DUALITET ETC.

39. Lad $\beta := \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$. Vis at β er en basis for $\mathbb{C}^3$. Find den duale basis β' , udtrykt ved hjælp af standardbasen (sådan som β jo er)

40. Lad $\beta = \{u_1, u_2, u_3\} := \{(0,1,-1), (1,1,1), (-1,1,0)\}$. Gør rede for at β er en basis for $\mathbb{C}^3$. Find den duale basis $\beta' := \{u_1', u_2', u_3'\}$ (på koordinatform, udtrykt i standardbasen) - gerne vha. Matlab, men du skal forklare hvad du gør. Lad $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ være en lineær afbildning hvis virkning er givet ved $f(u_1) := u_3$, $f(u_2) := u_3$, $f(u_3) := u_1 - u_2$. Find ${}_{\beta}[f]_{\beta}$. Kan f diagonaliseres? Udregn direkte $f'(u_j')$ og check efter at ${}_{\beta'}[f']_{\beta'}$ har det udseende den skal have.

41. Lad A være matricen $\langle 1 \ -1 \ 4; 3 \ 2 \ -1; 2 \ 1 \ -1 \rangle$. Find ved håndkraft p_A og kontroller at $p_A(A) = 0$.

42. Antag A er invertibel og at det karakteristiske polynomium er $p_A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. Forklar hvorfor a_0 må være forskellig fra 0. (Vink: hvordan finder man egenverdierne for A ? Og er 0 en egenverdi for A ?)

43. (fortsat fra 42) Brug at $A^{-1}p_A(A) = 0$ til at lave en formel for A^{-1} , udtrykt ved hjælp af $I, A, \dots, A^{n-1}$.

44. Check dit resultat i 43 af på matricen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ og på $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

45. For de nedenfor nævnte matricer skal Jordan-formen findes.

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

46. Hvis det endelig-dimensionale vektorrum V er spaltet op i g -invariante underrum $V = U \oplus W$, så g er nilpotent på U og bijektiv på W , og hvis $S \subseteq V$ er et g -invariant underrum, hvorpå g er bijektiv, så gælder at $S \subseteq W$.

47. (fortsat fra opg. 46): Hvis $U = S \oplus T$, hvor g er nilpotent på T og bijektiv på S , så er $T = U$.

48. Brug Cayley-Hamilton til at udregne den inverse til $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

49. Find Jordan-formen for

$$\begin{bmatrix} 0 & -18 & -7 \\ 1 & -12 & -4 \\ -1 & 25 & 9 \end{bmatrix}.$$

50. Lad $A := \begin{bmatrix} 2+\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & 2-\varepsilon \end{bmatrix}$. Regn ud i hånden hvad Jordan-formen er, når $\varepsilon \neq 0$ og når $\varepsilon = 0$. Regn også Jordan-formen ud hvis der i diagonalen står 2 (og de to andre led er $\pm\varepsilon \neq 0$). Læg mærke til hvad dette viser om hvor følsom Jordan-formen er overfor småændringer i indgangene. Dette har regnetekniske konsekvenser.

OPGAVER OM INDRE PRODUKTER ETC. (Se også afsnittet med blandede opgaver)

51. Undersøg om følgende definitioner giver et indre produkt $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ i det reelle vektorrum $\mathbb{R}^2$: (her er $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ vilkårlige vektorer i $\mathbb{R}^2$)

a) $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1 y_2 + x_2 y_1$

b) $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$

52. Lad V være et reelt vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $x \perp y$ hvis og kun hvis $\|x+y\| = \|x-y\|$. Tegn!

53. Lad V være et *komplekst* vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $x \perp y$ hvis og kun hvis $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ for alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

54. Lad V være et vektorrum med indre produkt. Vis at for $x, y \in V$ gælder at $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Tegn!

55. Lad $\{e_1, e_2, e_3\}$ være en ortonormalbasis i et tre-dimensionalt rum V . Lad $U := \text{span}\{e_1 + e_2 + e_3\}$. Find en ortonormalbasis for $U^\perp$.

56. Lad a, b, c være vektorer i et rum V med indre produkt. Forudsæt at a og b er lineært uafhængige. Find ortogonalprojektionen af c på $\text{span}\{a, b\}$.

57. Lad U_1, U_2 være underrum af et endelig dimensionalt vektorrum V med indre produkt. Vis at

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

og at

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

58. a) Vis at hvis en projektion P er en positiv afbildning (i den forstand at dens matrixrepræsentation i en eller anden basis er en positiv matrix), så er billedrummet PV 1-dimensionalt.

b) I hvilke rum er identitesafbildningen positiv (i samme forstand som i a))?

59. Vis at en lineær afbildning $A : V \rightarrow V$, hvor V er et endelig dimensionalt vektorrum med indre produkt, hvori der er givet en ONB α , er en ortogonalprojektion hvis og kun hvis ${}_\alpha[A]_\alpha = [a_{ij}]$, hvor $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, for alle i, j ($\bar{}$ er kompleks konjugering) og $a_{ij} = \sum_p a_{ip} a_{pj}$, for alle i, j .

60. I $\mathbb{R}^2$ med sædvanligt indre produkt og med standardbasen som ONB skal du opskrive matrixrepræsentationen (i standardbasen) for ortogonalprojektion på vinkelhalveringslinien i 1. & 3. kvadrant.

61. a) Find ved mindste kvadraters metode den linearkombination af $(1,1,2)$ og $(1,-1,-1)$, der ligger nærmest ved $(3,1,2)$.

b) Samme spørgsmål, men med det indre produkt $(\cdot, \cdot)$, hvis matrix D er følgende:

$$D := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hvad er (x,y) i dette indre produkt?

62. Som opg. 61: find den linearkombination af $(1,2,1,0)$, $(2,0,-1,1)$, $(2,-1,0,-1)$, der er nærmest ved $(0,3,0,0)$

OPGAVER OM DIFFERENTIALLIGNINGER

63. Find først alle løsninger til systemet

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = x_1.$$

og opskriv den fundamentalmatrix der til $t = 0$ er enhedsmatricen.

Find derefter den løsning til

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = x_1 + t,$$

for hvilken $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0)$.

64. Find alle løsninger til systemet

$$x' = x + y + z$$

$$y' = y + z$$

$$z' = z.$$

(der er to lidt forskellige måder at angribe denne opgave på).

65. Find alle løsninger til systemet $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$.

66. Find alle løsningerne til dette system:

$$x' = -x + y + z$$

$$y' = x - y + z$$

$$z' = x + y + z.$$

67. Find samtlige løsninger til systemet

$$x' = 8x + 4y,$$

$$y' = -x + 12y$$

ved først at finde koefficientmatricens Jordan-form.

OPGAVER OM DIFFERENSLIGNINGER

68. Lad $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ være koefficientmatricen for et homogent system af lineære førsteordens differensligninger. Find den løsning $X(t)$, der opfylder at $X(0) = (1, 1, 0)'$.

69. Lad $A := \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ være koefficientmatricen for et system

$X(t+1) = A X(t) + (t, 2, t^2)'$, $t = 0, 1, \dots$ af lineære førsteordens differensligninger. Brug en bekvem løsningsmetode til at finde den løsning $X(t)$, der opfylder at $X(0) = (1, 1, 0)'$. Er ligningen stabil? Er den der står i opgave 68 stabil?

OPGAVER OM POSITIVE MATRICER OG LIGN.

70. Tidligere har vi fundet spektret for en projektion f . Hvad er altså $r(f)$? Find et udtryk for $R(\lambda)$ for en projektion f , $|\lambda| > 1$.

71. Lad A være en nilpotent afbildning af et endelig dimensionalt vektorrum U ind i sig selv. Hvad er spektralradius $r(A)$? Hvorfor er der ingen konvergensproblemer for $R(\lambda)$, $\lambda \neq 0$? Opskriv et udtryk for $R(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, hvis $A^n = 0$ for $n \geq 3$.

72. Gør rede for at matrixkonvergens er koordinatvis konvergens, dvs. lad A_n , $A \in \mathcal{L}(U)$, $n = 1, 2, \dots$ og betegn matrixindgangene med $(A)_{i,j}$, hhv. $(A_n)_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, k$. Vis så at $A_n \rightarrow A$ ($\mathcal{L}(U)$) hvis og kun hvis

$$(A_n)_{i,j} \rightarrow (A)_{i,j} \text{ for } n \rightarrow \infty, \text{ for alle } i, j = 1, \dots, k.$$

73. Lad $A \in \mathcal{L}(U)$ og lad $\lambda \in \sigma(A)$. Vælg en egenvektor x svarende til λ . Lad $\|A\|$ betegne den sædvanlige operator-norm på $\mathcal{L}(U)$. Gør rede for at $\|\lambda x\| \leq \|A\| \|x\|$ og slut heraf at $r(A) \leq \|A\|$.

74. Find et eksempel på en ikke-negativ matrix $A \neq 0$ og en ikke-negativ vektor $x \neq 0$ for hvilke $Ax = 0$.

75. Vis at hvis $A > 0$ og $z \geq w$, så er $Az \geq Aw$ og at der her gælder lighedstegn hvis og kun hvis $z = w$. Hvornår gælder = i en enkelt koordinat?

76. Lemma 9.5 for to tal: Lad z og $w \in \mathbb{C}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ (altså > 0). Antag at $|\alpha z + \beta w| = \alpha|z| + \beta|w|$. Gør først kål på den mulighed, at et af tallene z, w er nul. Hvis både z og $w \neq 0$, kan vi gå sådan frem:

- omskriv til $|(\alpha|z|)(z/|z|) + (\beta|w|)(w/|w|)| = \alpha|z| + \beta|w|$.
- divider ligningen med højresiden; gør rede for at der nu på venstre side står den numeriske værdi af en konveks kombination af to komplekse tal af enhedslængde. Tegn!
- på højresiden står der 1, så hvad kan du slutte om retningen af de to komplekse tal?

77. Betragt en 3×3 diagonalmatrix A med diagonal $1, \alpha, \beta$, hvor $|\alpha|, |\beta| < 1$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Generaliser dette til en Jordanmatrix, der indeholder en 1×1 blok bestående af et 1-tal, samt Jordanblokke α og β med diagonal numerisk < 1 .

78. Bevis: 'Hvis $A \geq 0$ og λ er en reel egenværdi med egenvektor x , så er også den kompleks konjugerede vektor $\bar{x}$ en egenvektor. Derfor er også $x + \bar{x}$ en egenvektor.'

79. Lad $A := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Find $r(A)$. Find også $\lim_{n \rightarrow \infty} (A/r(A))^n$.

Udregn $v := A^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Brug v som en tilnærmelse til en egenvektor.

Hvorfor kan gennemsnittet $\sum_{i=1}^3 (Av)_i / v_i$ bruges som en tilnærmelse til $r(A)$?

80. Samme opgave som opg. 79, men med $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

81. Gør rede for at hvis A er en overgangsmatrix (altså $A > 0$ og alle søjlesummer er $= 1$) så er $\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle'$ en egenvektor svarende til egenværdien 1 for A' .

82. Udregn, med mejerieksemplets A (noternes s. 1.4, eks. 1.3), størrelsen $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ og giv en økonomisk fortolkning af resultatet.

83. Vis at hvis $A := [a_{ij}]$ er en $k \times k$ matrix, og $\lambda \in \sigma(A)$, så er $|\lambda| \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|$.

84. Lad M være en vilkårlig kvadratisk matrix og lad λ være en egenværdi for M med multiplicitet ℓ . Lad $n \in \mathbb{N}$.

a) Vis at λ^n er en egenværdi for M^n .

b) Vis at multipliciteten af λ^n som egenværdi for M^n er mindst ℓ .

85. Tag Bemærkning 6.21 for gode varer og brug så Matlab til at afgøre om nedennævnte matricer er primitive:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

86. Vis at hvis $0 \leq A < C$ (hvor A og C er givne kvadratiske matricer), så er $r(A) \leq r(C)$.

87. Lad $C := [c_{ij}]$ være en positiv kvadratisk matrix med alle søjlesummer $= 1$. Gør rede for at der findes en positiv vektor p for hvilken det for enhver vektor v gælder at

hvis $\sum v_i = \alpha > 0$ så er $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n v = \alpha p$.

Hvad kan vi sige hvis α ikke nødvendigvis er positiv?

89. Vil en 2×2 positiv matrix altid have to forskellige reelle egenverdier, med forskellige numeriske værdier?

BLANDEDE OPGAVER, EKSAMENSOPGAVER

1. Lad $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Find Jordanformen for A .

a) Betragt differentialligningssystemet $dx/dt = A x$,

hvor $x(t) := \langle x_1(t), x_2(t), x_3(t) \rangle'$, $t \in \mathbb{R}$. Find den fuldstændige løsning.

b) Løs differensligningssystemet $x(t+1) = A/4 x(t)$, $t \in \mathbb{N}$,

c) Undersøg om den i b) nævnte ligning er stabil.

2. Lad $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at A er primitiv. Gør rede for at 2 er en egenverdi og at det tilhørende egenrum er et en-dimensionalt under- rum udspændt af en positiv vektor. Find en positiv udspændende vektor.

3. Lad $A := \begin{bmatrix} .2 & .4 & .5 \\ .6 & .4 & .2 \\ .2 & .2 & .3 \end{bmatrix}$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x$, for vilkårlig $x \in \mathbb{R}^3$.

4. Løs differensligningen $x_{t+1} - p x_t = q$, $t = 1, 2, \dots$

hvor p og q er givne reelle konstanter. Husk specialtilfældene.

5. Find den fuldstændige løsning til differensligningen

$$y_{t+2} - 2 y_{t+1} + y_t = 2^t(t-1), \quad t \in \mathbb{N}.$$

6. Lad V være et vektorrum med indre produkt og lad V_1 og V_2 være underrum af V . Lad P_1 være ortogonalprojektion på V_1 og P_2 være ortogonalprojektion på V_2 . Vis at $V_1 \perp V_2$ hvis og kun hvis $P_1 P_2 = 0$.

7. Find et udtryk for ortogonalprojektion af $\mathbb{R}^3$ på det af $(1, 0, 2)$ og $(1, 1, 0)$ udspændte underrum, idet sædvanligt indre produkt benyttes. Opskriv en 3×3 matrixrepræsentation (i standardbasen) for denne projektion.

8. Idet $2x + y - 3z - 2u = 0$ og $x + 2y + z + u = 0$ skal det begrundes at (x,y) i en passende åben omegn af punktet $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,0,0,0)$ er en C^∞ -funktion af (z,u) .

9. Lad $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 + v^2 = 1$, $x^2 - y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 21$.

a) Find $D(u,v)$ i punktet $(1,1,2,3,2)$.

b) Kan vi slutte at (u,v) i en omegn af $(1,1,2,3,2)$ er en C^1 -funktion g af (x,y) ?

c) Hvad er $Dg(1,1)$?

10. Lad $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning hvis matrixrepræsentation i standardbasen er givet ved $(A^2 - A)/2$, hvor

$$A := (1/9) \begin{bmatrix} 7 & 10 & -2 \\ 10 & 4 & -8 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vis at g er en ortogonalprojektion.

11. Vis at matricen $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ er diagonaliserbar. Løs dernæst differentialligningssystemet $x' = Ax$.

12. Som 11, men med $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

13. Lad $\alpha := \{(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,-1)\} \subseteq \mathbb{C}^3$.

a) Vis at α er en basis for $\mathbb{C}^3$.

Lad $\alpha' := \{y_1, y_2, y_3\}$ betegne den duale basis. Betragt $x := (0,1,0)$.

b) Find $y_i(x)$ for $i = 1,2,3$.

14. I en model for lager-analyse er man nået frem til følgende differensligning

$$y_{t+2} - 2\beta y_{t+1} + \beta y_t = v_0, \quad t = 0,1,2,\dots$$

(hvor β, v_0 er ikke-negative konstanter). Løs denne ligning, også specialtilfældene.

15. Lad V være et normeret vektorrum med normen betegnet med $\|\cdot\|$. Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning. Hvis $\|f(x)\| = \|x\|$ for alle $x \in V$, kaldes f en *isometri*.

a) Vis at med sædvanlig operatornorm ($\|f\| := \sup\|f(x)\|$, med x gennemløbende mængden hvor $\|x\| \leq 1$) gælder at hvis f er en isometri, så er $\|f\| = 1$.

b) Vis at hvis f er en isometri, så er f^2 også en isometri (her er f^2 som sædvanlig betegnelsen for den sammensatte afbildning: $f^2(x) := f(f(x))$ for alle $x \in V$).

c) Vis at hvis f er en isometri, så er $r(f) = 1$, hvor $r(f)$ er spektralradius.

d) Antag nu yderligere at V er et rum med indre produkt og at f er en ortogonalprojektion. Kan f være en isometri?

16. Lad A være en $n \times n$ matrix og B være en $m \times m$ matrix. Så kan A opfattes som matrixrepræsentationen (mht en foreliggende basis) af en afbildning $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, og tilsvarende kan B opfattes som matrixrepræsentationen (mht en given basis) af en afbildning $g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Afbildningen $f \oplus g : \mathbb{C}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ er som sædvanlig givet ved

$$f \oplus g(x, y) := (f(x), g(y)), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad y \in \mathbb{C}^m.$$

a) Opskriv med brug af A og B en matrixrepræsentation for $f \oplus g$.

Lad p_f , p_g og $p_{f \oplus g}$ betegne de karakteristiske polynomier.

b) Antag at A og B er trekantsmatricer. Vis at $p_{f \oplus g} = p_f p_g$.

c) Vis at $p_{f \oplus g} = p_f p_g$ uden trekantsmatrix-antagelsen.

d) Vis at $\sigma(f \oplus g) = \sigma(f) \cup \sigma(g)$.

17 Betragt det endelig dimensionale komplekse Hilbert rum $H = \mathbb{C}^n$, med det hermitiske skalarprodukt $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$, hvor $u = (u_1, \dots, u_n)$ og $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ (eksempel 1.2). Vis, at når vi definerer $e^{(1)}$ ved $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e^{(n)} = (0, 0, \dots, 1)$, så er $\{e^{(i)}\}_{i=1}^n$ en ortonormal basis for H .

18 Vis, at $\{\sin n\theta\}_{n \in \mathbb{N}}$ udgør et ortonormalsystem i $L_2([0, \pi])$.

19 Lad os definere polynomier $p_0(x), p_1(x), \dots$ ved at kræve, at $p_n(x)$ er et polynomium af grad n i én variabel, koefficienten for x^n er 1 og $\{p_n\}$ er et ortogonalsystem i $L_2([0,1])$. Find $p_0(x)$, $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

20 Lad V være et indre produkt rum. Vis, at det indre produkt kan udvides til fuldstændiggørelsen $\hat{V}$, og at $\hat{V}$ også er et indre produkt rum.

21 Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, således at $\int_0^\pi |\cos \theta - \sum_{n=1}^3 a_n \sin n\theta|^2 d\theta$ får den mindst mulige værdi.

22 Vis, at $\{\sin(n - \frac{1}{2})\theta\}_{n \in \mathbb{N}}$ udgør et ortogonalsystem i $L_2([0, \pi])$.

23 Vis, at det indre produkt kan fås fra normen gennem polariseringsidentiteten.

$$(u, v) = \frac{1}{4} [\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2)] .$$

24 Lad X være et underrum af et Hilbert rum H . Vis, at $X^\perp$, ortogonalkomplementet til X , er et afsluttet underrum, og at $(X^\perp)^\perp$ er afslutningen af X (også betegnet $\bar{X}$).

25 Vis, at $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \log \theta \sin n\theta d\theta = 0$.

(Vink. Dette kan fås som et korollar til Bessels ulighed, i forbindelse med ortogonalsystemet i Opg. 18)

26 Lad $\{e_i\}_{i \in I}$ være en ortonormal basis for Hilbert rummet H . Vis at følgende generalisering af Parsevals ligning gælder, for alle $x, y \in H$: $\sum_{i \in I} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} = (x, y)$.

27 Lad H være et Hilbert rum og $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H . Antag, at $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er et ortonormalt system som opfylder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty .$$

Undersøg om $\{f_n\}$ er en ortonormal basis for H . (Vink. Vis, at

$(e_j - f_j, e_i) = (e_i - f_i, f_j)$ for alle i og j . Udnyt dette til at vise, at

$$\sum_j |(e_i - f_i, f_j)|^2 = \|e_i - f_i\|^2$$

for alle i , og slut heraf, at

$$\sum_j (e_i - f_i, f_j) f_j = e_i - f_i \quad \text{for alle } i.)$$

Bemærkning. Yderligere oplysninger kan findes i en artikel af N.Tsao "Approximate bases in a Hilbert space" Amer. Math. Monthly 75 (1968) s.750.

28 Lad V betegne vektorrummet af komplekse følger $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ som er 0 fra et vist trin. Definér $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ved

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

(a) Gør rede for at V er et vektorrum og at $(\cdot, \cdot)$ er et indre produkt på V .

(b) Lad $\|\cdot\|$ betegne normen i V , som induceres af $(\cdot, \cdot)$ og sæt

$$M = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in V \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{1}{n} = 0 \}.$$

Vis, at M er et afsluttet underrum af $(V, \|\cdot\|)$, og at $M \oplus M^\perp \neq V$.

(c) I forbindelse med dekompositionssætningen vises det, at hvis H er et Hilbert rum og X er et afsluttet underrum af H , så vil

$$H = X \oplus X^\perp.$$

Undersøg, om dette resultat er sandt i et indre produkt rum.

29 Sæt $V = \{f \in C([0,1]) \mid f(1) = 0\}$, $M = \{f \in V \mid \int_0^1 xf(x)dx = 1\}$

Vis, at

1° $(V, \|\cdot\|_u)$ er et Banach rum.

2° M er en afsluttet, konveks og ikke tom delmængde.

3° For alle $\phi \in M$ gælder at

$$\|\phi\| > \inf\{\|f - 0\|_u \mid f \in M\}.$$

Lad H være et Hilbert rum, M en afsluttet konveks, ikke tom delmængde

af G , og $u \in H$. Så findes ifølge Lemma 1.10 en entydigt bestemt vektor $v \in M$ tættest ved u . Undersøg, om dette resultat gælder i et Banach rum.

30 Lad H være et Hilbert rum, og $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en ortonormal basis for H . Antag, at $A: H \rightarrow H$ er lineær, og at

$$\sum_n \|Ae_n\| < \infty$$

Undersøg, om A er kontinuert.

31 Den generaliserede polariseringsidentitet.

Lad H være et Hilbert rum over $\mathbb{C}$.

Antag $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $a^n = 1$ og $a^2 \neq 1$. Vis, at

$$(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x + a^k y\|^2 a^k$$

32 Et ikke-separabelt Hilbert rum.

Lad E betegne vektorrummet over $\mathbb{C}$ af alle reelle funktioner f af formen

$$f(t) = a_1 e^{ib_1 t} + \dots + a_n e^{ib_n t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Vis, at

$$(f, g) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^M f(t) \overline{g(t)} dt$$

eksisterer og er et indre produkt på E . Vis, at hvis f er som i (*), så vil

$$\|f\|^2 = (f, f) = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2.$$

Vis endelig, at fuldstændiggørelsen af E er et ikke-separabelt Hilbert rum.

33 Lad m være restriktionen af Lebesgue målet til

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Vis, at $1, z, z^2, \dots$ er ortogonale vektorer i $L_2(D_1, m)$. Bestem $\|z^n\|$.

Lad $e_n = \frac{z^n}{\|z^n\|}$. Undersøg, om $\{e_0, e_1, \dots\}$ er en ortonormal basis for $L_2(D_1, m)$.

34 Lad V være et normeret komplekst vektorrum, dvs. et komplekst vektorrum med en norm $\|\cdot\|$ som opfylder

$$1) \quad \|u\| \geq 0; \text{ og } \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0;$$

$$2) \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|;$$

$$3) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|;$$

når $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{C}$. Vis at V er et indre produktrum hvis normen $\|\cdot\|$ opfylder parallellogramloven

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

(Vink. Benyt polariseringsidentiteten (jvf. side 1.4) til definition af et indre produkt, som skal vises at opfylde Definition 1.1. Eftersvis først (S i) og (S(iv), og dernæst (Sii) (tag realdelen først); slut heraf (Siii) for rationale α og benyt kontinuiteten af normen.)

Differentialligningsopgaver

35. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \cos t - x_2 \sin t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \sin t + x_2 \cos t \end{aligned} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

Vink. Betragt $z = x_1 + ix_2$

36. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \cos t \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cos t \end{aligned} \quad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$

37. Vis, at hvis $\phi_1(t)$ er en løsning til den lineære, homogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt},$$

og $\phi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t),$$

hvor

$$\phi_2(t) = \phi_1(t) \int \frac{1}{\phi_1(t)^2} \left(\exp \int p_1(t) dt \right) dt$$

[Overalt står $\int \dots dt$ for en vilkårligt valgt af de uendelig mange stamfunktioner til den pågældende funktion.]

Vis, at hvis $\phi_1(t), \phi_2(t)$ er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den lineære, inhomogene differentialligning af anden orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\phi_1(t) + a_2\phi_2(t) - \phi_1(t) \int \frac{\phi_2(t)}{W(t)} q(t) dt + \phi_2(t) \int \frac{\phi_1(t)}{W(t)} q(t) dt,$$

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

38. Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x) \frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$. Find endelig samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \mathbb{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x) \frac{dy}{dx} + 2y \cos^3 x = \cos^2 x \sin^3 x.$$

Vink. Benyt opg.37.

39. Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$\left(1-t^2\right) \frac{d^2x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad t \in]-1,1[,$$

idet det opgives, at $x = t$ er en løsning.

EKSAMEN SOMMEREN 1991

1. Betragt differensligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= (3/5) x_1(t) + (1/5) x_2(t) \\x_2(t+1) &= (1/5) x_1(t) + (3/5) x_2(t),\end{aligned}$$

for $t \in \mathbb{N}$.

- Gør rede for at koefficientmatricen A i dette system er diagonaliserbar.
- Vis at med $Q := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ er $A = Q D Q^{-1}$, hvor D er en diagonal-matrix.
- Løs systemet $z(t+1) = D z(t)$, $t \in \mathbb{N}$ og find derudfra løsningen til det først givne system.
- Gør rede for at det først givne system er stabilt.

2. For $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ betragtes ligningerne

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_2^3 + x_3^2 &= 1 \\4x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 3\end{aligned}$$

- Gør rede for at disse ligninger i en omegn af punktet $(1,1,1)$ fastlægger (x_1, x_2) som C^∞ -funktioner (g_1, g_2) af x_3 .
- Find $g_2'(1)$.

3. Lad $A := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$.

- Gør rede for at spektralradius for A er 1.
- Gør rede for at 1 er en egen værdi for A og at A har en ikke-negativ egenvektor hørende til denne egen værdi.

4. Lad $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- Vis at spektret $\sigma(A) = \{1, 2\}$.
- Vis at egenrummet hørende til egen værdien 2 er én-dimensionalt.

Det oplyses at egenrummet hørende til egenværdien 1 også er én-dimensionalt.

c) Gør rede for at Jordan-formen for A er

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lad $r(A)$ betegne spektralradius for A .

d) Opskriv Jordanformen for $A/r(A)$

e) Er $A/r(A)$ power bounded?

5. Lad V være et vektorrum med indre produkt og lad P og Q betegne to ortogonalprojektioner i V .

a) Vis at $\|Px\| \leq \|x\|$ for alle $x \in V$.

b) Vis at $\|x\|^2 = \|Qx\|^2 + \|(I-Q)x\|^2$ for alle $x \in V$, hvor I betegner identitetsafbildningen i V .

Antag i resten af opgaven at $\|Px\| \leq \|Qx\|$ for alle $x \in V$.

c) Vis at for ethvert $x \in PV$ gælder at $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$.

d) Vis at for ethvert $x \in PV$ gælder at $\|(I-Q)x\| = 0$.

e) Vis at for ethvert $x \in PV$ gælder at $x \in QV$.

6. Lad V være et endelig dimensionalt vektorrum og $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning.

a) Antag der findes en basis α således at matrixrepræsentationen

${}_{\alpha}^{[f]}_{\alpha}$ er en positiv matrix. Er ${}_{\beta}^{[f]}_{\beta} > 0$ for enhver basis β ?

Lad nu $V := \mathbb{C}^3$ og lad β være standardbasen. Antag at

$${}_{\beta}^{[f]}_{\beta} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

b) Findes der en basis α så ${}_{\alpha}^{[f]}_{\alpha} > 0$?

c) Findes der en basis α så ${}_{\alpha}^{[f]}_{\alpha} \geq 0$?

EKSAMEN SOMMEREN 1992

1. Lad A være en $k \times k$ matrix med spektrum $\sigma(A)$ og spektralradius $r(A)$. Det er givet at $B := iA$ er primitiv.

- Gør rede for at der findes $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ for hvilket $A^n > 0$.
- Beskriv mængden $\sigma(A) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r(A)\}$.
- Gør rede for at $L := \lim_{n \rightarrow \infty} (B/r(B))^n$ eksisterer; angiv L .
- Kan man slutte at $\{(A/r(A))^n\}$ er konvergent?

2. Lad U være et endelig dimensionalt vektorrum med dualt rum U' . For $T \in \mathcal{L}(U)$ betegner $T' \in \mathcal{L}(U')$ den duale afbildning.

- Vis at et underrum $W \subseteq U$ er T -invariant hvis og kun hvis W^0 er T' -invariant.
- Gør rede for at $\ker T' = (T(U))^0$.
- Vis at hvis $S \in \mathcal{L}(U)$, så er $(ST)' = T'S'$.
- Gør rede for at hvis T er invertibel, så er T' invertibel og $(T^{-1})' = (T')^{-1}$.
- Vis at S og T er similære hvis og kun hvis T' og S' er similære.

3. Betragt et endelig dimensionalt normeret vektorrum $(U, \|\cdot\|)$ og dets rum $\mathcal{L}(U)$ af lineære afbildninger.

Lad også $\|\cdot\|$ være betegnelsen for en norm på $\mathcal{L}(U)$ som opfylder

$$(*) \quad \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \text{ for alle } A \in \mathcal{L}(U), x \in U.$$

- Vis at med $r(\cdot)$ som betegnelse for spektralradius gælder at $r(A) \leq \inf_n \|A^n\|^{1/n}$, for alle $A \in \mathcal{L}(U)$.

Lad $U := \mathbb{C}^k$ for et givet $k \in \mathbb{N}$. Definer sup-normen $\|\cdot\|_\infty$ på $\mathbb{C}^k$ ved $\|(x_1, \dots, x_k)\|_\infty := \sup_{j=1, \dots, k} |x_j|$. For $A \in \mathcal{L}(U)$ defineres så $\|A\|_\infty := \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty$. Det tages for givet at der herved er defineret normer.

- Vis at hvis $A \in \mathcal{L}(U)$ og hvis A har matrixrepræsentationen $[a_{ij}]$ i standardbasen, så er $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.
- Vis at normerne $\|\cdot\|_\infty$ opfylder (*).

4. Lad $A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ og betragt det lineære differentiaallignings-system

$$x'(t) = A x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Find $\sigma(A)$; find også en basis for $\mathbb{R}^2$ af egenvektorer for A .

b) Gør rede for at $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en ligevægtstilstand for det givne system.

c) Afgør om dette ligevægtspunkt besidder Lyapunov-stabilitet.

d) Find mængden af løsninger $x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ for hvilke $y(t) \rightarrow 1$ og $z(t) \rightarrow 1$ for $t \rightarrow \infty$.

5. Betragt rummet ℓ^∞ af begrænsede reelle følger $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Udstyr ℓ^∞ med supremumsnorm og koordinatvis ordning.

Lad $u := (u_1, u_2, \dots) \in \ell^\infty$ være en given begrænset ikke-negativ følge.

Lad β være en given konstant, $\beta \in [0, 1[$.

For ethvert element $w := (w_1, w_2, \dots) \in \ell^\infty$ defineres en følge Tw ved for hvert $i \in \mathbb{N}$ at sætte

$$(Tw)_i := \max_{1 \leq j \leq i} (u_{i+1-j} + \beta w_j).$$

a) Vis at $Tw \in \ell^\infty$.

b) Vis at den derved definerede afbildning $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ opfylder at hvis $(x_n) \leq (y_n)$ i den koordinatvise ordning så er $(T(x_n)) \leq (T(y_n))$, samt at hvis (c) er en konstant følge af positive tal så er $(T(x_n + c)) \leq (T(x_n)) + \beta(c)$.

c) Gør rede for at der findes en begrænset følge (v_n) for hvilken

$$v_i = \max_{1 \leq j \leq i} (u_{i+1-j} + \beta v_j),$$

for alle $i \in \mathbb{N}$.