Matematik 6, 1962–63

Esben Kehlet

Noter til Matematik 6

Funktionalanalyse

Indholdsfortegnelse

I	Integration		
	1 Afsluttet begrænset interval	13 s,	9 øv
	2 Åbent interval	9+7 s,	8 øv
II	Forskellige forberedelser		
	1 Hilbertrum	3 s,	2 øv
	2 Absolut kontinuitet	9 s,	6 øv
	3 Idealer af kontinuerte funktioner	5 s,	4 øv
III	Begrænsede operatorer på et Hilbertrum		
	1 Adjungerede operatorer	4 s,	4 øv
	2 Spektret for en begr. selvadj. operator	6 s,	2 øv
	3 Underrum og projektioner	4 s,	4 øv
	4 Topologier på H og L	7 s,	,4 øv
	5 Projektionsmålet	5 s,	4 øv
	6 Normale operatorer	3 s	
	7 Total kontinuerte operatorer	3 s,	5 øv
IV	Ubegrænsede operatorer		
	1 Almindelige egenskaber	5 s,	13 øv
	2 Integration af ubegrænsede funktioner	5 s,	1 øv
	3 Spektret for en selvadj. operator	4 s,	6 øv
V	Udviklingssætninger		
	1 Multiplikationsoperatorer	4 s,	4 øv
	2 Multiplicitet	5 s,	2 øv
	3 En udviklingssætning	10 s,	6 øv
VI	Differential operatorer		
	1 Plancherels sætning	5 s,	5 øv
	Øvelser	31 s	
	Rettelser	6 s	

I, 2, 9, l.7: K_m læs: $K_m \setminus K_n$

"11: $L^p_{loc,\rho}$ læs: $L^{p'}_{loc,\rho}$

III, 3, 3, "13: $(h|f_i)^2$ læs: $|(h|f_i)|^2$

IV, 1, 4, "11: en læs: ingen

V, 3, 8, " 1: $x(t)$ læs: $\overline{x(t)}$

" 5 f.n.: $u(t,\lambda)$ læs: $\overline{u(t,\lambda)}$

VI, 1, 2, 3-4 afsnit: e^{-t} og e^t er byttet om

3, l.12: For $t \dots \vee o$ læs: For $a \in R^+$ og $t \to x(t) =$

$(a-|t|)\vee 0$

" 13: $|t-a|$ læs: $(a-|t|)$

4, " 10 og 12: $|a-\lambda|$ $|b-\lambda|$ læs $(a-|\lambda|)$ $(b-|\lambda|)$

bl. øv.1, " 3: T^2 læs: T^*T

" 4: A^2 læs: A^*A

Litteraturliste til K, I, 1.

[1] Apostol: Mathematical Analysis, Chap. 8 and 9.

[2] N. Bourbaki: Integration, Chap. II et III

[3] B. Jessen: Forelæsninger over reelle funktioner (Mat. 2 1961-62).

[4] L. Loomis: Abstract harmonic analysis, Chap. III.

[5] F. Riesz et B. Sz-Nagy: Lecons d'analyse fonctionelle §§ 49-51.

I. INTEGRATION.

1. Afsluttet begrænset interval.

I denne § betragtes mængden $C(I) = C(I,\mathbb{R})$ af reelle kontinuerte funktioner på et afsluttet begrænset interval $I = [a,b] = \{t \in \mathbb{R} | a \leq t \leq b\}$, $\div\infty < a < b < \infty$, af den reelle akse. Som bekendt er $C(I)$ et lineært vektorrum over $\mathbb{R}$, og et Banachrum med hensyn til normen $f \to \|f\| = \sup \{|f(t)| \,|\, t \in I\}$. Vi vil bestemme det duale rum $C'(I)$ af kontinuerte lineære afbildninger $\alpha: C(I) \to \mathbb{R}$. Elementerne i $C'(I)$ kaldes mål på I.

Vi minder om, at en lineær funktional α på et Banachrum C er kontinuert, hvis og kun hvis den er begrænset, d.v.s. $\|\alpha\| = \sup \{|\alpha(f)| \,|\, f \in C, \|f\| \leq 1\} < \infty$, og at mængden C' af kontinuerte lineære funktionaler er et Banachrum m.h.t. normen $\alpha \to \|\alpha\|$.

Lad $BV(I)$ være rummet af reelle funktioner af begrænset variation over I. I [1] er bevist, at for vilkårligt $\alpha \in BV(I)$ og $f \in C(I)$ er Riemann-Stieltjes integralet $\int_I f(t)\, d\alpha(t)$ defineret (th. 9-26). Afbildningen $f \to \int_I f(t)\, d\alpha(t)$ er en lineær funktional på $C(I)$ (th. 9-2). Idet $V\alpha(t) = V_\alpha(a,t)$ betegner α's totale vatiation på intervallet $[a,t]$, gælder $V(\div\alpha)(t) = V_{\div\alpha}(a,t) = V_\alpha(a,t)$ i følge definitionen af $V_\alpha(a,t)$, og $V\alpha$ og $V^{\div}\alpha = \frac{1}{2}(V\alpha - \alpha)$ og derfor også $V^{+}\alpha = \frac{1}{2}(V\alpha + \alpha)$ er voksende funktioner på I (th. 8-12). Vi har så $\alpha = V^{+}\alpha \div V^{\div}\alpha$, $V\alpha = V^{+}\alpha + V^{\div}\alpha$. For $f \in C(I)$ fås $\left|\int_I f(t)\, d\alpha(t)\right| = \left|\int_I f(t)\, dV^{+}\alpha(t) \div \int_I f(t)\, dV^{-}\alpha(t)\right|$ (th. 9-3) $\leq$

$\left|\int_I f(t)\ dV^+\alpha(t)\right| + \left|\int_I f(t)\ dV^-\alpha(t)\right| \leqq$

$\int_I \left|f(t)\right|\ dV^+\alpha(t) + \int_I \left|f(t)\right|\ dV^-\alpha(t)$ (th. 9-23) $=$

$\int_I \left|f(t)\right|\ dV\alpha(t) \leqq \|f\|\ V\alpha(b)$. Vi fremhæver:

Sætning. For $f \in C(I)$, $\alpha \in BV(I)$ gælder $\left|\int_I f(t)\ d\alpha(t)\right| \leqq$

$\int_I \left|f(t)\right|\ dV\alpha(t)$; $f \to \int_I f(t)\ d\alpha(t)$ definerer en kontinuert lineær funktional α' på $C(I)$ med norm $\|\alpha'\| \leqq V\alpha(b)$.

1.2. Desuden er $C(I)$ med ordningen: $f \leqq g$ hvis $f(t) \leqq g(t)$, $\forall t \in I$, et ordnet vektorrum efter følgende definition:

En mængde C er et ordnet vektorrum over $\grave{R}$, hvis C er et vektorrum over $\grave{R}$ og en ordnet mængde, og følgende aksiomer er opfyldt: ($\grave{R}^+ = \{\lambda \in \grave{R} | \lambda > 0\}$).

OV I: $\forall f,g,h \in C : f \leqq g \Rightarrow f + h \leqq g + h$;

OV II: $\forall f \in C,\ \lambda \in \grave{R}^+ : f \geqq 0 \Rightarrow \lambda f \geqq 0$.

Og $C(I)$ er et lattice med hensyn til denne ordning, efter definitionen (jfr. [3], II, 2):

En ordnet mængde C kaldes et lattice med hensyn til den givne ordning, hvis der til $\forall a,b \in C\ \exists c = a \vee b = b \vee a$ og $d = a \wedge b = b \wedge a \in C$, så at c er det mindste element $\in C$, $\geqq a$ og $\geqq b$, og d er det største element $\in C$, $\leqq a$ og $\leqq b$.

I et vektor lattice (et ordnet vektorrum, der er et lattice m.h.t. den givne ordning) gælder åbenbart $(a+c) \vee (b+c) = (a \vee b) + c$, $(\lambda a) \vee (\lambda b) = \lambda(a \vee b)$ for $\lambda > 0$, og $a \wedge b = -((-a) \vee (-b))$ (f.eks. kan den sidste lighed bevises således: $c \leqq a \wedge b \iff c \leqq a$ og $c \leqq b \iff -a \leqq -c$ og $-b \leqq -c \iff (-a) \vee (-b) \leqq -c \iff$ $c \leqq -((-a) \vee (-b))$); vi har altså $a \vee b = (a-b) \vee 0 + b$, og $a \wedge b = -(-a) \vee (-b) = -[(a-b) \vee 0 - a] = a - (a-b) \vee 0$, d.v.s.

et ordnet vektorrum C er et lattice, hvis blot der til $a \in C$ $\exists$ et mindste element $a^+ = a \vee 0$, $\geqq a$ og $\geqq 0$. Desuden ses $a \vee b + a \wedge b = a + b$.

For $a^- = (-a) \vee 0 = -(a \wedge 0)$ fås ifølge ovenstående $a^- = 0 \vee a - a$, eller $a = a^+ - a^-$, ethvert element er differens mellem to $\geqq 0$. Desuden fås $a^+ \wedge a^- = (a+a^-) \wedge a^- = a \wedge 0 + a^- = 0$, og for $|a| = a \vee (-a)$ fås $|a| = 2a \vee 0 - a = 2a^+ - a^+ + a^- = a^+ + a^- = a^+ \vee a^- + a^+ \wedge a^- = a^+ \vee a^-$.

På mængden C^* af lineære funktionaler på et vektor lattice C defineres en ordning ved: $f \leqq g$, hvis $f(a) \leqq g(a)$, $\forall a \in C^+ = \{a \in C | a \geqq 0\}$. Herved bliver C^* et ordnet vektorrum ($f \geqq g$ og $g \geqq f \Rightarrow f(a) = g(a)$, $\forall a \in C^+ \Rightarrow f(a) = g(a)$, $\forall a \in C$, da $C = C^+ - C^+$).

<u>Lemma</u>: Lad C være et vektor lattice, f en additiv afbildning $C^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. $\exists$ en og kun een funktional $F \geqq 0$ på C, så $F_{|C^+} = f$.

Bevis: For $a \in C^+$ fås $f(na) = nf(a)$, $n \in \mathbb{N}$, og derfor $f(ra) = rf(a)$ for $r \in \mathbb{Q}^+$ og $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ for $\lambda \in \mathbb{R}^+$, da $\lambda \to f(\lambda a)$ er en monoton funktion. $a \in C$ kan skrives $a = b - c$, $b, c \in C^+$. $b - c = d - e$, $b,c,d,e \in C^+ \Rightarrow b + e = c + d$, $f(b) + f(e) = f(c) + f(d)$, $f(b) - f(c) = f(d) - f(e)$. Vi kan derfor definere $F(a) = f(b) - f(c)$ for en vilkårlig sådan opspaltning. Det vises let, at F er en lineær funktional, og åbenbart entydigt bestemt ved $F_{|C^+} = f$.

<u>Lemma</u>: Lad C være et vektor lattice, $a,b,c, \in C^+$, $a \leqq b + c$. $\exists$ d og $e \in C^+ \cup \{0\}$, så $a = d + e$, $d \leqq b$, $e \leqq c$.

Bevis: $a \leqq (a+c) \wedge (b+c) = a \wedge b + c$, sæt $d = a \wedge b$, $e = a - a \wedge b$.

1.3. For en vilkårlig delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$, betegner χ_A den karakteristiske funktion for A, $\chi_A(t) = 1$, $t \in A$, $= 0, \div \notin A$.

<u>Sætning:</u> En positiv lineær funktional α på C(I) er kontinuert med norm $\alpha(\chi_I)$.

Bevis: For $f \in C(I)$ gælder $-\|f\|\,\chi_I \leqq f \leqq \|f\|\,\chi_I$ og derfor $-\|f\|\,\alpha(\chi_I) \leqq \alpha(f) \leqq \|f\|\,\alpha(\chi_I)$; $|\alpha(f)| \leqq \|f\|\,\alpha(\chi_I)$, d.v.s. α er kontinuert og $\alpha(\chi_I) \leqq \|\alpha\| \leqq \alpha(\chi_I)$.

<u>Sætning</u>: C'(I) er et vektor lattice.

Bevis: Som delmængde af mængden $C^*(I)$ af alle lineære funktionaler på C(I) er C'(I) et ordnet vektorrum; ifølge det foregående er det derfor nok at vise, at der til $\mu \in C'(I)$ findes en mindste additiv afbildning $m\colon C^+(I) \to \dot{R}^+ \cup \{0\}$, $m \geqq \mu_{|C^+}$, idet en sådan kan udvides til et mindste element $M \in C^{*+}(I) \subseteq C'^+(I)$, $\geqq \mu$. Et sådant m må for ethvert $f \in C^+(I)$ og ethvert $g \in C(I)$, $0 \leqq g \leqq f$, opfylde $\mu(g) \leqq m(g) \leqq m(f)$, d.v.s $m(f) \geqq \sup\{\,\mu(g) \mid 0 \leqq g \leqq f\,\}$. Det er altså nok at bevise, at $f \to m(f) = \sup\{\,\mu(g) \mid 0 \leqq g \leqq f\,\}$ er additiv $C^+(I) \to \dot{R}^+ \cup \{0\}$. Da $g \in C^+(I)$, $g \leqq f_1 + f_2$, for f_1 og $f_2 \in C^+(I)$ kan skrives $g = g_1 + g_2$, $0 \leqq g_1 \leqq f_1$, $0 \leqq g_2 \leqq f_2$; $g_1, g_2 \in C(I)$, fås
$m(f_1 + f_2) = \sup\{\,\mu(g) \mid 0 \leqq g \leqq f_1 + f_2\,\} =$
$\sup\{\,\mu(g_1 + g_2) \mid 0 \leqq g_1 \leqq f_1,\ 0 \leqq g_2 \leqq f_2\,\} =$
$\sup\{\,\mu(g_1) \mid 0 \leqq g_1 \leqq f_1\,\} + \sup\{\,\mu(g_2) \mid 0 \leqq g_2 \leqq f_2\,\} =$
$m(f_1) + m(f_2)$. Desuden er $m(f) \geqq m(0) = 0$ for $f \in C^+(I)$.

1.4 I [3] er udført teorien for Lebesgue-integralet over et begrænset interval I. Lebesgue-integralet gives som en positiv lineær funktional på vektor latticet T(I) af trappefunktioner på I (II,2) og det vises, at der eksisterer et større vektor lattice L(I) af funktioner på I, og en udvidelse af integralet til en positiv lineær funktional på L(I) (II,5,4) således at Lebesgues sætning om majoriseret grænseovergang er opfyldt (II,6,6). Det er umiddelbart at se efter, at hele

udviklingen kan bygges på følgende egenskaber: Der er givet en positiv lineær funktional μ på et vektor lattice V af funktioner på I, så at følgende forudsætning (specialtilfælde af Lebesgues sætning) er opfyldt:
For en vilkårlig monotont aftagende følge $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots\ldots$ af funktioner $\in V$, der konvergerer punktvis mod 0, vil $\mu(f_n) \to 0$.
Sætning:(Dini): Hvis en følge (f_n), $n \in \dot{N}$ af kontinuerte funktioner på et afsluttet begrænset interval I konvergerer monotont og punktvis mod 0, så konvergerer f_n mod 0 ligeligt, og derfor gælder $\mu(f_n) \to 0$ for vilkårligt $\mu \in C'(I)$.
Bevis: Sæt $A_{n\varepsilon} = \{t \in I \mid f_n(t) \geqq \varepsilon\}$; $A_{n\varepsilon}$, $n \in \dot{N}$ er for fast $\varepsilon > 0$ en aftagende følge af afsluttede delmængder af I, med $\bigcap_n A_{n\varepsilon} = \emptyset$. Derfor $\exists\ n_0(\varepsilon)$, så $A_{n_0\varepsilon} = \emptyset$, d.v.s. $\|f_n\| \leqq \varepsilon$ for $n = n_0$ og derfor for $m \geqq n_0$.
For ethvert $\mu \in C'^{+}(I)$ $\exists$ altså $L_\mu(I)$, et vektor lattice afsluttet overfor m.h.t. μ majoriseret konvergens, og en udvidelse, som vi igen betegner μ, af μ til en positiv lineær funktional på $L_\mu(I)$.
Lemma: $\chi_J \in L_\mu(I)$ for ethvert interval $J \leqq I$ og ethvert $\mu \in C'^{+}(I)$, d.v.s. $T(I) \subseteqq L_\mu(I)$, $\forall \mu \in C'^{+}(I)$.
Bevis: For J åben er χ_J grænseværdi for en voksende følge af kontinuerte stykkevis lineære funktioner g, $0 \leqq g \leqq \chi_I$; for J afsluttet er χ_J grænseværdi for en tilsvarende aftagende følge. Andre typer kan fås som differencer mellem disse.
Da omvendt en kontinuert funktion f på I er (endog ligelig) grænseværdi for en følge af trappefunktioner g, med $-\|f\| \leqq g \leqq \|f\|$, få får vi den samme integrationsteori, hvad enten vi starter med C(I) eller T(I).

1.5. For $\alpha \in C'(I)$ definerer vi en udvidelse, som vi igen betegner α, ved $L_\alpha(I) = L_{\alpha^+}(I) \cap L_{\alpha^-}(I)$, $\alpha = \alpha^+|_{L_\alpha(I)} - \alpha^-|_{L_\alpha(I)}$. For $\alpha \in C'(I)$ definerer vi $\tilde{\alpha}(a) = 0$, $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\chi_{[a,t]})$, $a < t \leqq b$.

Da $\tilde{\alpha}^+$ og $\tilde{\alpha}^-$ er monotone, og $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^+ - \tilde{\alpha}^-$, er $\tilde{\alpha} \in BV(I)$. $\alpha(\chi_{[a,t]})$ er kontinuert fra højre (da $\chi_{[a,t]} = \lim\{\chi_{[a,s]} | s \to t^+\}$). $\tilde{\alpha}$ er derfor kontinuert fra højre for $a < t \leqq b$, men ikke nødvendigvis for $t = a$.

<u>Sætning</u>: $\alpha = \tilde{\alpha}'$, d.v.s. $\alpha(f) = \int_I f(t)\, d\tilde{\alpha}(t)$, $\forall f \in C(I)$. $\|\alpha\| = V\tilde{\alpha}(b)$.

Bevis: For $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_K = b$, $t_{k-1} \leqq \tau_k \leqq t_k$, $k = 1,\ldots,K$, fås

$$\alpha\Big(f(\tau_1)\, \chi_{[a,t_1]} + \sum_{k=2}^{K} f(\tau_k)\, \chi_{]t_{k-1},t_k]}\Big) =$$

$$f(\tau_1)\, \alpha(\chi_{[a,t_1]}) + \sum_{k=2}^{K} f(\tau_k)\, \alpha(\chi_{[a,t_k]} - \chi_{[a,t_{k-1}]}) =$$

$$f(\tau_1)\, \tilde{\alpha}(t_1) + \sum_{k=2}^{K} f(\tau_k)\, (\tilde{\alpha}(t_k) - \tilde{\alpha}(t_{k-1})) =$$

$$\sum_{k=1}^{K} f(\tau_k)(\tilde{\alpha}(t_k) - \tilde{\alpha}(t_{k-1})),$$

da $\tilde{\alpha}(t_0) = 0$. Ved grænseovergang m.h.t. filteret af mængder af inddelinger (med indskudte punkter) af I fås, at $\|f\|\,\chi_I$

absol. majoriseret ved

$f(\tau_1)\, \chi_{[a,t_1]} + \sum_{k=2}^{K} f(\tau_k)\, \chi_{]t_{k-1},t_k]}$ konvergerer ligeligt mod ~~[illegible]~~

$f(t)$, venstre side $\to \alpha(f)$, højre side $\to \int_I f(t)\, d\tilde{\alpha}(t)$. $V\tilde{\alpha}(b) =$

$= \tilde{\alpha}^+(b) + \tilde{\alpha}^-(b)$

$V(\tilde{\alpha}^+ - \tilde{\alpha}^-)(b) \leqq V\tilde{\alpha}^+(b) + V\tilde{\alpha}^-(b)$ ([1]th 8-9) $= |\alpha|(\chi_I) = \||\alpha|\|$;

men for $f \in C^+(I)$ gælder:

$|\alpha|(f) = (2\alpha^+ - \alpha)(f) = \sup\{2\alpha(g) | g \in C(I),\ 0 \leqq g \leqq f\}$

$- \alpha(f) = \sup\{\alpha(h) | h \in C(I),\ 0 \leqq h \leqq 2f\} - \alpha(f) =$

$\sup\{\alpha(f+g) | g \in C(I) - f \leqq g \leqq f\} - \alpha(f) =$

$\sup\{\alpha(g) | g \in C(I),\ |g| \leqq f\}$; specielt for $f = \chi_I$:

$|\alpha|(\chi_I) = \sup\{\alpha(g) \mid g \in C(I),\ \|g\| \leqq 1\} = \|\alpha\|$; vi får således: $V\tilde{\alpha}(b) \leqq \|\,|\alpha|\,\| = \|\alpha\| = \|\tilde{\alpha}'\| \leqq V\tilde{\alpha}(b)$, det sidste ifølge sætningen p. 2.

<u>Sætning</u>: Lad $\alpha \in BV(I)$. $\int_I f(t)\, d\alpha(t) = 0,\ \forall f \in C(I) \iff \alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(t)$ for alle punkter $t \in I$, hvor α er kontinuert fra højre eller fra venstre.

Bevis: 1) $\Rightarrow$. Antag, at α er kontinuert fra højre i t, $a < t < b$. Betragt en aftagende følge af kontinuerte funktioner $f_n \in C(I)$, $f_n \downarrow \chi_{[a,t]}$, $f_n \leqq \chi_I$, $f_n(s) = \chi_{[a,t]}(s)$, $s \in [a,t]$. For vilkårligt $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < b - t$ fås $0 = \int_I f_n(s)\, d\alpha(s) =$

$$\int_a^t 1\, d\alpha(s) + \int_t^b f_n(s)\, d\alpha(s) =$$

$$\alpha(t) - \alpha(a) + \int_t^{t+\varepsilon} f_n(s)\, d\alpha(s) + \int_{t+\varepsilon}^b f_n(s)\, d\alpha(s);$$

$f_n(s) \to 0$ monotont aftagende, $t + \varepsilon \leqq s \leqq b$, derfor fås $\int_{t+\varepsilon}^b f_n(s)\, d\alpha(s) \to 0$; for ~~n så stor, at $f_n(s) \leqq 1$~~, $s \in [t, t+\varepsilon]$, fås $\left|\int_t^{t+\varepsilon} f_n(s)\, d\alpha(s)\right| \leqq V\alpha(t+\varepsilon) - V\alpha(t) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, da $\alpha(s)$ kontinuert i endepunktet t af $[t,b]$ medfører $V\alpha(s) = V\alpha_{|[t,b]}(s)$ kontinuert i t ([1] th. 8-14). Derfor fås $\alpha(t) - \alpha(a) = 0$. For $t = b$ fås $0 = \int_I 1\, d\alpha(s) = \alpha(b) - \alpha(a)$. For $\alpha(t)$ kontinuert fra venstre i t kan et tilsvarende bevis bruges.

2) $\Leftarrow$: $\alpha(t)$ har højst tælleligt mange diskontinuitetspunkter. Vi kan antage $\alpha(a) = 0$. Vi ved, at der findes en funktion $\beta = \tilde{\alpha}' \in BV(I)$, kontinuert fra højre for $a < t \leqq b$, så at $\alpha' - \beta' = 0$, og derfor $\alpha = \beta = 0$ i alle kontinuitetspunkter for α og i b, d.v.s. $\beta \equiv 0$, $\alpha' = 0$.

Vi har nu vist, at der findes en isometri og isomorfi **) mellem $C'(I)$ og $\{f \in BV(I) \mid f(a) = 0,\ f(t+0) = f(t),\ a < t \leqq b\}$. *) Herved svarer en funktional $\alpha \in C'^{+}(I)$ til en monotont voksende funktion $\tilde{\alpha}$, og for en sådan kan Stieltjes-integralet udvides til et Lebesgue - Stieltjes-integral på en større funktionsklasse $L_{\alpha}(I)$, således at de for Lebesgue-integralet gældende grænseværdisætninger er gyldige; specielt bør fremhæves, at man kan definere rum $L_{\alpha}^{p}(I)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, og at disse alle er Banach-rum, $L_{\alpha}^{2}(I)$ endog et Hilbertrum. Hele udvidelsesteorien kan udføres med I erstattet med et vilkårligt kompakt Hausdorffrum (se specielt [2] og [4]).

**) at $\alpha = \tilde{\alpha}'$ betyder jo at afbildningen ~ er injektiv

*) Afbildningen $\alpha \to \tilde{\alpha}$ er <u>på</u> denne funktionsmængde, da de pågældende funktioner opfylder $f = \tilde{f}'$. Isometri refererer til normen $f \to Vf(b)$ på $BV(I)$. i følge sætningen på forrige side

1.6. Vi forudsætter i dette afsnit, at alle topologiske rum er Hausdorff rum.

Vi minder om definitionen (T,3,14): Et filter $\mathcal{F}$ på et topologisk vektorrum E er et fundamental filter, hvis der til vilkårligt $U \in \grave{U}(o)$ (filtret af omegne af o) $\exists\, a \in E$, så at $a+V \in \mathcal{F}$.

<u>Sætning</u>: Lad E være et topologisk vektorrum, $\mathcal{F}$ basis for et filter $\mathcal{F}_1$ på E. $\mathcal{F}_1$ er et fundamental filter, hvis og kun hvis der for vilkårligt $V \in \grave{U}(o)$ eksisterer $M \in \mathcal{F}$, så at $M-M \subseteq V$.

Bevis: 1) Antag, at $\mathcal{F}_1$ er et fundamental filter. Til $V_1 \in \grave{U}(o)\ \exists\ V \in \grave{U}(o)$, så at $V-V \subseteq V_1$, da subtraktionen er kontinuert. Endvidere $\exists\, a \in E$, så at $M \subseteq a+V$, og derfor $M-M \subseteq V-V \subseteq V_1$.

2) Antag, at for $V \in \grave{U}(o)\ \exists\ M \in \mathcal{F}$, så at $M-M \subseteq V$. For $a \in M$ gælder: $M-a \subseteq V$, $a+V \supseteq M \in \mathcal{F}$, og derfor $a+V \in \mathcal{F}_1$.

<u>Sætning</u>: Lad E være et topologisk rum, F en tæt delmængde ($\overline{F} = E$); for en åben delmængde A af E gælder: $\overline{A} = \overline{A \cap F}$.

Bevis: $a \in \overline{A} \iff V \cap A \neq \emptyset,\ \forall V = \mathring{V} \in \grave{U}(a)$; da F er tæt, og $V \cap A$ er åben, er $V \cap A \neq \emptyset \iff V \cap A \cap F \neq \emptyset$, og derfor $a \in \overline{A} \iff a \in \overline{A \cap F}$.

<u>Sætning</u>: Lad E og G være topologiske vektorrum, f en kontinuert, lineær afbildning $E \to G$, og $\mathcal{F} = \{M_j \mid j \in J\}$ basis for et fundamental filter på E. $f(\mathcal{F}) = \{f(M_j) \mid j \in J\}$ er basis for et fundamental filter på G.

Bevis: Lad V være en omegn af o i G; da er $f^{-1}(V)$ en omegn af o i E; der $\exists$ da $a \in E$ og $M_j \in \mathcal{F}$, så at $M_j \subseteq a+f^{-1}(V)$, og vi får: $f(M_j) \subseteq f(a+f^{-1}(V)) \subseteq f(a)+V$. Altså er $f(\mathcal{F})$ basis for et fundamental filter på G.

<u>Sætning</u>: Lad E være et topologisk vektorrum. $\grave{U}(o)$ har

en basis bestående af afsluttede mængder. (E er et regulært rum, jfr. T.2.17).

Bevis: For en vilkårlig delmængde $A \subseteq E$, og for $a \in \overline{A}$ og $U \in \dot{U}(o)$ gælder: $(a+U) \cap A \neq \emptyset$, $a \in A-U$, $\overline{A} \subseteq A-U$. Til $U \in \dot{U}(o)$ $\exists\, V \in \dot{U}(o)$, så at $V-V \subseteq U$, og dermed $\overline{V} \subseteq V-V \subseteq U$.

<u>Sætning</u>: Lad E og G være topologiske vektorrum, F et underrum $\subseteq E$, og f en kontinuert lineær afbildning: $F \to G$; det antages yderligere, at G er et fuldstændigt rum, og at F er tæt i E. Der eksisterer da en og kun én udvidelse af f til en kontinuert, lineær afbildning $g : E \to G$.

Bevis: For $a \in E$ er $\{M \cap F \mid M \in \dot{U}(a)\}$ et fundamental filter $\mathcal{F}(a)$ på F. $\{f(M \cap F) \mid M \in \dot{U}(a)\}$ er derfor basis for et filter $\mathcal{F}_1(a)$ på G, der er et fundamental filter, og derfor konvergerer mod et element $g(a) \in G$. For $a \in F$ vil $\mathcal{F}(a)$ konvergere mod a, derfor $\mathcal{F}_1(a)$ konvergere mod f(a) (jfr. T.2.8); derfor er $g_{|F} = f$. For $a \in E \setminus F$ er $\mathcal{F}(a)$ basis for et filter på E finere end $\dot{U}(a)$, d.v.s. $\mathcal{F}(a)$ konvergerer mod a. Der kan altså højst eksistere én kontinuert udvidelse af f, nemlig g.

For vilkårlig delmængde $A \subseteq F$ gælder: $g(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, thi for $a \in \overline{A}$ er $\{f(A \cap M) \mid M \in \dot{U}(a)\}$ basis for et filter finere end $\mathcal{F}_1(a)$, og derfor konvergent mod g(a), d.v.s. $g(a) \in \overline{f(A \cap M)} \subseteq \overline{f(A)}$.

Vi skal vise, at g er kontinuert, d.v.s. at til $a \in E$ og $V \in \dot{U}(g(a))$ $\exists\, U \in \dot{U}(a)$, så at $g(U) \subseteq V$. Da G er et regulært rum, kan vi antage, at V er afsluttet. Da $\mathcal{F}_1(a)$ konvergerer mod g(a), kan vi finde $M \in \dot{U}(a)$, så at $f(M \cap F) \subset V$. For $U = \mathring{M} \subseteq \dot{U}(a)$ får vi da: $g(U) \subseteq g(\overline{U}) = g(\overline{U \cap F}) \subseteq \overline{f(U \cap F)} \subseteq \overline{V} = V$.

$b \to h_a(b) = g(a+b)-g(a)-g(b)$ er, for fast $a \in F$, en kontinuert afbildning $E \to G$, så at $h_{a|F} = 0$; derfor er $h_a = 0$; derfor er, for fast $a \in E$, $h_{a|F} = 0$, og $h_a = 0$, d.v.s. $g(a+b) = g(a)+g(b)$, $\forall a, b \in E$. Tilsvarende indses, at $g(\lambda a) = \lambda g(a)$, $\forall \lambda \in \dot{R}$, $\forall a \in E$, altså ialt at g er lineær.

1.7. Vi betragter i dette afsnit et fast afsluttet, begrænset interval $I \subseteq \dot{R}$, og et fast positivt mål μ på I, $\mu \in C'^{+}(I)$. Vi vil nærmere behandle Banachrummene $L^p = L^p(I,\dot{R}) = \{f | f$ er en μ målelig afbildning: $I \to \dot{R}$, $\|f\|_p < \infty\}$, hvor $\|f\|_p = \|f\|_{p,I,\mu} = [\int_I |f|^p d\tilde{\mu}]^{\frac{1}{p}}$, $1 \leqq p < \infty$.

Sætning: For $1 \leqq p < r \leqq \infty$ gælder: $L^r \subseteq L^p$, og på L^r er $\| \ \|_r$ topologien finere end $\| \ \|_p$ topologien.

Bevis: Antag $f \in L^r$. Da gælder $|f|^r \in L^1$, og $|f|^p \in L^{\frac{r}{p}}$; for $s = \frac{r}{r-p} > 1$ gælder: $\frac{1}{s} + \frac{1}{rp^{-1}} = 1$; ved Hølders ulighed ([3], III,3,2) får vi, da $\chi_I \in L^s$: $\|f\|_p^p = \int_I |f|^p \cdot \chi_I d\tilde{\mu} \leqq \|\chi_I\|_s \cdot \||f|^p\|_{rp^{-1}} = \|\chi_I\|_s \cdot \|f\|_r^p$, altså $\|f\|_p \leqq K \cdot \|f\|_r < \infty$, hvor $K^p = \|\chi_I\|_s$. L^∞ defineres ved hjælp af $\|f\|_\infty = \inf\{\sup\{|g(t)| \,|\, t \in I\} \,|\, g: I \to \dot{R}$ er ækvivalent med $f\} = \inf\{\lambda \in \dot{R} \,|\, |f(t)| \leqq \lambda$ for næsten alle $t\}$. Ovenstående sætning bevises da også let for $r = \infty$. Vi har da umiddelbart:

Sætning: $\alpha \in L^{p'} \Rightarrow \alpha_{|L^r} \in L^{r'} \Rightarrow \alpha_{|C(I)} \in C'(I)$, $1 \leqq p < r \leqq \infty$.

For $1 \leqq p \leqq \infty$ definerer vi, som sædvanlig, $q(p) = p(p-1)^{-1}$, $1 < p < \infty$, $q(1) = \infty$, $q(\infty) = 1$.

Sætning: For $g \in L^q$, $1 \leqq q \leqq \infty$, definerer $f \to \int fg d\tilde{\mu}$ en funktional $g' \in L^{p'}$ med $\|g'\| \leqq \|g\|_q$.

Bevis: For $f \in L^p$ gælder: $|g'(f)| \leqq \int_I |fg| d\tilde{\mu} \leqq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Sætning: Lad $\alpha \in L^{p'}$, $1 \leqq p \leqq \infty$ og $g \in L^1$, og antag, at $\alpha(f) = \mu(fg)$, $\forall f \in L^\infty$. Da gælder: $g \in L^q$, $\|g\|_q = \|\alpha\|$.

Bevis: For $f \in L^\infty$ er $\alpha(f)$ defineret, da $L^\infty \subsetneqq L^p$, og $fg \in L^1$, da fg er målelig og ækvivalent med en funktion $f_o \cdot g$, så at $|f_o \cdot g| \leqq \|f\|_\infty \cdot |g| \in L^1$. ([3], II,9,7). For $1 < p$ og $g_n = |g| \wedge n$ fås: $g_n \in L^\infty$, og $\|g_n\|_q^q = \mu(g_n^q) \leqq \mu(g_n^{q-1}\mathrm{sign}(g)g) =$

$\alpha(g_n^{q-1}\mathrm{sign}(g)) \leqq \|\alpha\| \cdot \|g_n^{q-1}\|_p = \|\alpha\| \cdot \|g_n\|_q^{qp^{-1}}$, $\|g_n\|_q \leqq \|\alpha\|$; da $g_n^q \uparrow |g|^q$, fås $\|g\|_q \leqq \|\alpha\| < \infty$. ([3], II,9,8).

For $p = 1$ sætter vi $A_n = \{t \in I \mid |g(t)| \geqq \|\alpha\| + n^{-1}\}$. Da $(\|\alpha\|+n^{-1})\mu(\chi_{A_n}) \leqq \mu(|\chi_{A_n} g|) = \alpha(\chi_{A_n}\mathrm{sign}(g)) \leqq \|\alpha\| \cdot \|\chi_{A_n}\|_1 = \|\alpha\|\mu(\chi_{A_n})$, er $\mu(\chi_{A_n}) = 0$, og derfor $\{t \in I \mid |g(t)| > \|\alpha\|\} = \bigcup_n A_n$ en nulmængde, altså $\|g\|_\infty \leqq \|\alpha\|$.

Da α og g' falder sammen på den tætte mængde $L^\infty \subsetneqq L^p$, er $\alpha = g'$, og derfor også $\|\alpha\| \leqq \|g\|_q$.

Bemærkning: For $1 < p < \infty$, $0 \leqq g \in L^1$, og $a = \sup\{\mu(fg) \mid f \in C(I),\ \|f\|_p \leqq 1\} \leqq \infty$, gælder: $a = \|g\|_q$.

Bevis: Hvis $g \in L^q$, er $a = \sup\{\mu(fg) \mid f \in L^p,\ \|f\|_p \leqq 1\}$, da $C(I)$ er tæt i L^p og $g' \in L^{p'}$; $a = \|g\|_q$ følger da af ovenstående sætning. For $g \notin L^q$ gælder: $\infty = \|g\|_q = \sup_n\{\|g \wedge n\|_q\} = \sup_n\{\sup\{\mu(f(g \wedge n)) \mid f \in C(I),\ \|f\|_p \leqq 1\}\} \leqq \sup_n\{\sup\{\mu(fg) \mid f \in C(I),\ \|f\|_p \leqq 1\}\} = a$.

Vi minder om, at L^2 er et Hilbertrum (jfr. [3],3,11). Til $\alpha \in L^{2'}$ $\exists$ derfor $g \in L^2$, så at $\alpha(f) = \int_I fg\,d\tilde{\mu}$, $\forall f \in L^2$. (II,1,3 eller AG III,15,7).

<u>Sætning</u>: $L^{p'}$ er isomorft med L^q, $1 \leqq p < \infty$.

Bevis: Vi har allerede defineret en isometrisk, lineær afbildning $g \to g'$, $L^q \to L^{p'}$.

Antag nu $1 \leqq p \leqq 2$, og $\alpha \in L^{p'}$; da $\alpha_{|L^2} \in L^{2'}$ $\exists\ \tilde{\alpha} \in L^2 \subsetneqq L^1$, så at $\alpha(f) = \mu(f\tilde{\alpha})$, $\forall f \in L^2 \supsetneqq L^\infty$. Den foregående sætning viser da, at $\sim$ er en isometrisk, lineær afbildning: $L^{p'} \to L^q$, så at $\tilde{\alpha}' = \alpha$.

For $2 < p < \infty$ vil vi først vise sætningen i II, §2. I næste § vil vi dog adskillige gange anvende sætningen for vilkårligt p. I beviset i II, §2, benyttes selvfølgelig kun resultater udledt på grundlag af den allerede viste del af sætningen.

<u>Sætning</u>: Til $\alpha \in L^{p'}$ $\exists$ α^+ og $\alpha^- \in L^{p'}$, så at $\alpha^+(f) \geqq 0$ og $\alpha^-(f) \geqq 0$, $\forall f \in \overset{+}{C}(I)$, $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, og $\|\alpha^+\| \leqq \|\alpha\|$, $\|\alpha^-\| \leqq \|\alpha\|$.

Bevis: For $f \in C(I)$ fås: $|(\alpha_{|C})^+(f)| \leqq (\alpha_{|C})^+(|f|) = \sup\{\alpha(g) \mid g \in C(I),\ 0 \leqq g \leqq |f|\} \leqq \sup\{\|\alpha\| \cdot \|g\|_p \mid g \in C(I),\ 0 \leqq g \leqq |f|\} \leqq \|\alpha\| \cdot \|f\|_p$; $(\alpha_{|C})^+$ har altså én udvidelse til en lineær funktional $\alpha^+ \in L^{p'}$, med $\|\alpha^+\| \leqq \|\alpha\|$. α^- behandles tilsvarende.

1. Lad C være en partielt ordnet mængde, der er et lattice m.h.t. den givne ordning. Da gælder 1° $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$; 2° $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$; 3° $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$; 4° $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$; 5° $a \leqq b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.

Lad omvendt C være en mængde organiseret ved to binære operationer $\vee$ og $\wedge$, således at 2°, 3° og 4° er opfyldt. Vis, at der $\exists$ én partiel ordning af C, således at $\vee$ og $\wedge$ er de dertil svarende lattice operationer.

2. Lad I være et begrænset interval $\subset \dot{R}$. Lad os sige, at en positiv lineær funktional μ på T(I) opfylder betingelsen *, dersom $f_n(t) \in T(I)$, $n \in \dot{N}$, $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mu(f_n) \to 0$ (jfr. [3], II, § 4).

a) Vis, at * er ækvivalent med betingelsen **:

$$\lim_{s \to t^+} \mu(\chi_{]t,s[}) = \lim_{s \to t^-} \mu(\chi_{]s,t[}) = 0, t \in I.$$

b) Lad D være mængden af delintervaller af I. En afbildning $\mu : D \to \dot{R}_+ \cup \{0\}$ kaldes additiv, hvis: $A \in D$, $B \in D$, $A \vee B \in D$, $A \wedge B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \vee B) = \mu(A) + \mu(B)$. Til en sådan afbildning μ svarer åbenbart en positiv lineær funktional μ^* på T(I), og omvendt.*) μ kaldes numerabelt additiv, hvis: $A_n \in D$, $m \in \dot{N}$, $\bigcup_n A_n \in D$, $A_n \wedge A_m = \emptyset$, $n \neq m \Rightarrow \mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$. Vis, at μ^* opfylder *, hvis og kun hvis μ er numerabelt additiv. Giv eksempel på en positiv, additiv intervalfunktion, der ikke er numerabelt additiv.

*) $\mu^*(\chi_I) = \mu(I)$

c) Til en funktion $\rho \in BV(I)$ defineres en additiv afbildning $D \to \dot{R}$, som vi også betegner ρ, ved definitionerne: $\rho(]a,b[) = \rho(b-0) - \rho(a+0)$, $\rho(]a,b]) =$

c) $\rho(b + o) - \rho(a + o)$, $\rho([a,b[) = \rho(b - o) - \rho(a - o)$, $\rho([a,b]) = \rho(b + o) - \rho(a - o)$; Vis, at ρ^* opfylder *.

3. Lad L være et vektorrum over $\dot{R}$, L^* det algebraisk duale = $\{ f | f$ er en lineær afbildning $L \to \dot{R} \}$; lad $f_o, ---, f_n \in L^*$, så at: $f_i(g) = o, i = 1, ---, n, g \in L \Rightarrow f_o(g) = o$. Vis, at f_o kan skrives $f_o = a_1 f_1 + --- + a_n f_n$, $a_i \in \dot{R}$, $i = 1, ---, n$.

4. Definer $C_o([a,b], \dot{R}) = \{ f \in C([a,b], \dot{R}) \mid f(a) = f(b) = o \}$. $C_o([a,b], \dot{R})$ er et Banachrum m.h.t. normen $f \to \|f\| = \sup \{ |f(t)| \mid t \in [a,b] \}$. Bestem det duale rum.

5. $\chi_{\{o\}}$ betragtes som et element af $BV([-1,0])$. Vis, at $\chi_{\{o\}}$ er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel, m.h.t. $\chi_{\{o\}}$, og beregn integralet.

6. Lad A og B være to vektorrum, og $S:A \to B$ og $T:B \to A$ lineære afbildninger, så at $T \circ S(a) = a$, $\forall a \in A$. Vis, at S er 1-1, at $T_{|SA}$ er 1-1, at $S \circ T$ er idempotent og surjectiv $B \to SA$, og at B er direkte sum af $T^{-1}(0)$ og SA.

7. På BV(I) defineres en partiel ordning ved: $f \prec g$ hvis $g - f$ er monotont voksende. Vis, at BV(I) er et vektor lattice, at $f \vee o = V^+f$, (idet vi til formålet betegner de til ordningen svarende lattice operationer $\vee$ og $\wedge$), og at afbildningen $\sim$: $C'(I) \to BV(I)$ er en ordensisomorfi mellem C'(I) og dennes billedmængde.

Rettelser.

K I,1

1 1.2 f.n. : så $\alpha = V\alpha$, læs: så $\alpha = V^+\alpha$

3.1.11 f.o.: $\{\forall a \in C | a \geq 0\}$, læs: $\{a \in C | a > o\}$

øv 2.1.2 " " : en lineær, læs: en positiv lineær.

" " 1.8 " " : $\dot{R}$, læs $\dot{R}^+ \cup \{o\}$

" " 1.10 " " : en funktio-, læs en positiv lineær funktio-

K I,2

3.1.2 f.o.: $\eta(k_{v+2})$, læs $\eta(K_{v+2})$

3.1.16 " " : $\oint_I$, læs $\oint_{\dot{R}}$.

8. Antag $I \in \grave{I}$, $\mu \in C'^{+}(I)$, $1 \leqq p < \infty$. $L_{\mu}^{p'}(I)$ er et vektor lattice.

9. Vis, at for en μ målelig funktion $g \geqq 0$, $I \to \grave{R}$, $I \in \grave{I}$, $\mu \in C'^{+}(I)$, gælder $\|g\|_q = \sup\{\mu(fg) \mid f \in C(I), \|f\|_p \leqq 1\}$, $1 \leqq p \leqq \infty$.

§ 2. Åbent interval.

Da et åbent interval $\subseteq \dot{R}$ er homeomorft med $\dot{R}$, vil vi kun betragte integration over $\dot{R}$.

Vi begynder med en række betegnelser: lad $\dot{I}$ være mængden af alle begrænsede, afsluttede intervaller $\subset \dot{R}$; $C(\dot{R}) = C(\dot{R},\dot{R})$ mængden af begrænsede kontinuerte, reelle funktioner på $\dot{R}$; $C_o(I) = C_o(I,\dot{R}) = \{f \in C(\dot{R}) | f = f\chi_I\}$ for $I \in \dot{I}$; det er klart, at afbildningen $f \to f_{|I}$ er en isomorfi af $C_o(I)$ på delmængden af $C(I)$ af funktioner på $I = [a,b]$, der er o på randen af I, $f(a) = f(b) = 0$. Vi identificerer derfor ofte disse rum. $C_o(\dot{R}) = C_o(\dot{R},\dot{R}) = \{f \in C(\dot{R}) | f(t) \to 0 \text{ for } |t| \to \infty\}$; $C_o(\dot{R})$ kan betragtes som delmængden af $C(\dot{R})$ af funktioner, der er o på randen af $\dot{R}$, relativt til ét-punkts (eller til to-punkts) kompaktifiseringen af $\dot{R}$. Alle disse rum forsyner vi med den "ligelige topologi", defineret ved normen $f \to \|f\| = \sup\{|f(t)| \,\big|\, t \in \dot{R}\}$. Det vises let, at de herved bliver Banachrum. Desuden er $C_o(\dot{R}) = \overline{\bigcup\{C_o(I) | I \in \dot{I}\}}$.

Vi betragter rummet $\mathcal{D}^o = \mathcal{D}^o(\dot{R},\dot{R})$ med de samme elementer som $\bigcup\{C_o(I) | I \in \dot{I}\}$, forsynet med en lokal konveks topologi defineret med følgende system af seminormer: $p_{\{\varepsilon_n\}}(f) = \sup\{\frac{1}{\varepsilon_n}\|f\chi_{\dot{R}-K_n}\| \,\big|\, n = 0, 1, \ldots\}$, hvor $\{\varepsilon_n | n = 0, 1, \ldots\}$ er en følge af reelle tal > 0, $K_o = \emptyset$, og $K_n = [-n,n]$, $n \in \dot{N}$; en basis for omegne af o er mængderne

$$O_{\{\varepsilon_n\}} = \{f \in \mathcal{D}^o \,\big|\, p_{\{\varepsilon_n\}}(f) \leq 1\} = \{f \in \mathcal{D}^o \,\big|\, |f(t)| \leq \varepsilon_n, \ |t| > n\}.$$

Det ses let, at betingelserne v1) - v6) (Mat 6, T.3.6) er opfyldt.

Som forberedelse til det næste bevis definerer vi en følge $\{\varphi_\nu \in C_o([-\nu-1,\nu+1]) | \nu = 0,1,\ldots\}$ af funktioner ved:

$\varphi_\nu(t)$ er lige, $\nu = 0,1,\ldots$; $\varphi_o(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0, & 1 < t \end{cases}$

$$\varphi_\nu(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq t < \nu-1 \\ t-\nu+1, & \nu-1 \leqq t \leqq \nu \\ \nu+1-t, & \nu < t \leqq \nu+1 \\ 0, & \nu+1 < t \end{cases} \qquad \nu = 1,2,\ldots .$$

Vi har da $\varphi_\nu \leqq \chi_{\grave{R}\setminus[-\nu+1,\nu-1]}$, $\nu = 1,2,\ldots$; for $I \in \grave{I}$ er $\varphi_\nu\, \chi_I \equiv 0$ for alle på nær endelig mange ν; $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(t) \equiv 1$.

<u>Sætning</u>: $\mathcal{D}^o$ er forsynet med den fineste lokal konvekse topologi, der for $\forall I \in \grave{I}$ inducerer en topologi grovere end den ligelige på $C_o(I)$.

Bevis: Til $\{\varepsilon_n \in \grave{R}^+ | n = 0,1,\ldots\}$ og $I \in \grave{I}$ $\exists\ \eta > 0$, så $\{f \in C_o(I) \,|\, \|f\| < \eta\} \subseteqq O_{\{\varepsilon_n\}} \cap C_o(I)$; vi behøver blot at vælge $n_o \in \grave{N}$, så $I \subseteqq [-n_o, n_o]$, og $\eta \leqq \min(\varepsilon_o,\ldots,\varepsilon_{n_o})$; den inducerede topologi er altså grovere end den ligelige; (omvendt vil mængderne $O_{\{\varepsilon_n\}}$ med $\varepsilon_n \equiv \varepsilon > 0$ inducere den ligelige topologi på $\mathcal{D}^o$ og derfor på $C_o(I)$; $\mathcal{D}^o$ inducerer altså netop den ligelige topologi).

Lad O være en omegn af o i $\mathcal{D}^o$ i en vilkårlig lokal konveks topologi, der inducerer en topologi grovere end den ligelige på $C_o(I)$, $\forall I \in \grave{I}$. O indeholder en konveks delomegn O_1, $O_1 \cap C_o(I)$ indeholder en omegn $O_{I,\eta(I)} = \{f \in C_o(I) \,|\, \|f\| < \eta\}$, og O_1 derfor det konvekse hylster O_2 af $\bigcup\{O_{I,\eta(I)} | I \in \grave{I}\}$; vi skal vise, at O_2 indeholder en omegn $O_{\{\varepsilon_n\}}$ af o i den givne topologi på $\mathcal{D}^o$,

*) d.v.s. at der $\exists\ \{\varepsilon_n \in \grave{R}^+ | n = 0,1,\ldots\}$, så at $f \in \mathcal{D}^o$, $(\forall n \in \grave{N}_0 [\|f\, \chi_{\grave{R}\setminus K_n}\| \leqq \varepsilon_n]) \Rightarrow \exists N \in \grave{N}$, og $I_\nu \in \grave{I}$, $\alpha_\nu \geqq 0$, $f_\nu \in O_{I_\nu,\eta(I_\nu)}$, for $\nu = 0,1,\ldots,N$, så at $f = \sum_{\nu=0}^{N} \alpha_\nu f_\nu$, og $\sum_{\nu=0}^{N} \alpha_\nu \leqq 1$.

Kommentar til K I, 2, 3.

I beviset, der afsluttes 1.6, er det specielt vist, at en konveks mængde O_2, for hvilken $O_2 \cap C_o(I)$ er en omegn af o i $C_o(I)$, $\forall I \in \grave{I}$, er en omegn af o i $\overset{\circ}{D}$. Dette er nok til at bevise sætningen 1. 7-8.

Påstanden, at en mængde $O \subseteqq \overset{\circ}{D}$ er åben, hvis $O \cap C_o(I)$ er åben for alle $I \in \grave{I}$, kan bevises således:

Vi antager $O \neq \emptyset$. Lad $f \in O$, lad $J \in \grave{I}$ være et vilkårligt interval, og vælg $I \in \grave{I}$, så at $J \subseteqq I$ og $f \in C_o(I)$. $O - f = \{g - f \mid g \in O\}$ er konveks, og $(O - f) \cap C_o(I) = O \cap C_o(I) - f$ er åben i $C_o(I)$; da $C_o(I)$ inducerer den givne topologi på $C_o(J)$, er også $(O - f) \cap C_o(J) = (O - f) \cap C_o(I) \cap C_o(J)$ åben i $C_o(J)$, og indeholder o; ved hjælp af bemærkningen ovenfor slutter vi, at $O - f$ er en omegn af o i $\overset{\circ}{D}$, derfor O en omegn af f. Da dette gælder for vilkårligt $f \in O$, er O åben.

Vi sætter $I_o = K_2$, $I_\nu = K_{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\dots$, $\varepsilon_\nu = 2^{-\nu-2}\eta(K_{\nu+2})$, $\alpha_\nu = 2^{-\nu-1}$, $f_\nu = 2^{\nu+1}\varphi_\nu f$; herved fås for $f \in O_{\{\varepsilon_n\}}$: $\exists N \in \dot{N}$, så $f = f\,\chi_{K_N}$; $f = \sum_{\nu=0}^{N} \alpha_\nu f_\nu$, med $\alpha_\nu \geqq 0$, $\sum_{0=\nu}^{N} \alpha_\nu \leqq 1$, $f_\nu \in C_o(I_\nu)$, og $\|f_\nu\| \leqq 2^{\nu+1}\| f\,\chi_{\dot{R}\setminus K_{\nu-1}}\| \leqq 2^{\nu+1}\varepsilon_{\nu-1} = \eta(I_\nu)$, $\nu = 1,2,\dots$, og $\|f_o\| \leqq 2\varepsilon_o \leqq \eta\,(I_o)$, d.v.s. $f_\nu \in O_{I_\nu,\eta(I_\nu)}$, $\nu = 0,1,\dots$.

<u>Sætning</u>: En lineær funktional μ på $\mathscr{D}^o$ er kontinuert, hvis og kun hvis $\mu_{|C_o(I)}$ er kontinuert, $\forall I \in \dot{I}$.

Bevis: For $\varepsilon \in \dot{R}^+$ er $O = \mu^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ en konveks mængde $\subseteqq \mathscr{D}^o$, og derfor åben $\Longleftrightarrow O \cap C_o(I)$ er åben, $\forall I \in \dot{I}$.

<u>Definitioner</u>: Elementerne i $\mathscr{D}^{o\,\prime}$ kaldes mål på $\dot{R}$. $BV_{loc} = BV_{loc}(\dot{R},\dot{R}) = \{f | f$ er en afbildning $\dot{R} \to \dot{R}$; $f_{|I} \in BV(I)$, $\forall I \in \dot{I}\}$.

<u>Sætning</u>: $\mathscr{D}^{o\,\prime}$ er isomorf med $\{f \in BV_{loc} | f(0) = 0;\ f(t+0) = f(t),\ t \in \dot{R}\}$.

Bevis: For $\alpha \in BV_{loc}$ og $I \in \dot{I}$ er $f \to \int_I f\,d\alpha = \int_{\dot{R}} f\,d\alpha$ en kontinuert funktional på $C_o(I)$; $f \to \int_{\dot{R}} f\,d\alpha$ er altså en kontinuert funktional $\alpha' \in \mathscr{D}^{o\,\prime}$; $\alpha \to \alpha'$ er en lineær afbildning $BV_{loc} \to \mathscr{D}^{o\,\prime}$;

Lad $\mu \in \mathscr{D}^{o\,\prime}$. $\mu_{|C_o([-n,n])} \in C_o'([-n,n])$, $n \in \dot{N}$, og kan derfor udvides til et element $\mu_n \in C'([-n,n])$ (Hahn-Banachs sætning); til dette lader vi svare en funktion $\tilde{\mu}_{on} \in BV([-n,n])$, kontinuert fra højre, $t \in]-n,n]$, $\tilde{\mu}_{on}(0) = 0$, defineret ved

$$\tilde{\mu}_{on}(t) = \tilde{\mu}_n(t) - \tilde{\mu}_n(0) = \begin{cases} -\mu_n(\chi_{[-n,o]}), & t = -n \\ -\mu_n(\chi_{]t,o]}), & -n < t < 0 \\ \mu_n(\chi_{]0,t]}), & 0 \leqq t \leqq n. \end{cases}$$

Herved afhænger $\tilde{\mu}_{on}(t)$ for $t \in]-n,n[$ kun af $\mu_{|C_o([-n,n])}$, idet

$\chi_{]t,0]}$, $-n < t < 0$, og $\chi_{]0,t]}$, $0 \leqq t < n$, er grænseværdier for majoriserede følger af funktioner $\in C_0([-n,n])$; for $m > n$ er tilsvarende $\tilde{\mu}_{om}|]-n,n[= \tilde{\mu}_{on}|]-n,n[$. Vi kan derfor definere $\tilde{\mu}(t) = \tilde{\mu}_{on}(t)$ for vilkårligt $n > |t|$, og opnår $\tilde{\mu}(t+o) = \tilde{\mu}(t)$, $t \in \dot{R}$, og $\tilde{\mu}(0) = 0$.

For $f \in \mathfrak{D}^o$ og tilstrækkeligt stort $n \in \dot{N}$ gælder $\tilde{\mu}'(f) =$

$$\int_{-n}^{n} f\, d\,\tilde{\mu} = \int_{-n}^{n} f\, d\,\tilde{\mu}_{on} = \mu_n(f) = \mu(f).$$

$\alpha \in BV_{loc}$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(t+o) = \alpha(t)$, $\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha'|C_0([-n,n]) = 0$, $\forall n \in \dot{N}$, $\Rightarrow \alpha|]-n,n[\equiv 0$, $\forall n \in \dot{N}$, $\Rightarrow \alpha \equiv 0$. Herefter fuldføres beviset på triviel måde (jfr. § 1, øv. 6).

Det gælder åbenbart, at μ er en positiv funktional, hvis og kun hvis $\tilde{\mu}$ er monotont voksende.

$C_0'(\dot{R})$ er et Banachrum, der kan identificeres med et passende delrum af rummet $BV(\dot{R})$ af funktioner af begrænset variation over hele $\dot{R}$.

P. 5, l. 1 - p. 6, l. 5 erstattes med

2.2 Lad $I = [a,b]$ og $J = [c,d]$ være kompakte intervaller, $I \subseteq J \subset \dot{R}$, og ρ et positivt mål på J. Afbildningen $\chi_I \cdot \rho$ af $T(J,\dot{R})$ ind i ρ givet ved $\chi_I \cdot \rho(f) = \rho(f\chi_I)$ er da også et positivt mål på J, idet $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \rho(f_n \chi_I) \to 0$. Da enhver funktion $g \in T(I,\dot{R})$ har form $f_{|I}$ for en passende funktion $f \in T(J,\dot{R})$, og da $\chi_I \cdot \rho(f)$ kun afhænger af $f_{|I}$, definerer $g \to \rho(\chi_I f)$, $f_{|I} = g$, en lineær funktional $\rho_{|I}$ på $T(I,\dot{R})$, som let ses at være et po-sititvt mål på I. Vi har altså $\rho_{|I}(f_{|I}) = \rho(f\chi_I)$ for $f \in T(J,\dot{R})$. $f \in \{f \in L^1_\rho(J,\dot{R}) | f = f\chi_I\} \iff f = f\chi_I$ kan klemmes mellem grænseværdierne $\overline{f}$ og $\underline{f}$ for en voksende og en dalende følge af trappefunktioner, som vi gerne kan antage alle er 0 uden for I, med $\rho(\overline{f}-\underline{f}) = \chi_I \rho(\overline{f}-\underline{f})$ vilkårligt lille $\iff f_{|I}$ kan klemmes tilsvarende $\iff f_{|I} \in L^1_{\rho|I}(I,\dot{R})$, og hvis disse betingelser er opfyldt, får vi $\rho_{|I}(f_{|I}) = \rho(f\chi_I)$. Vi har hermed vist, at $f \to f_{|I}$ er en lineær isometri af $\{f \in L^1_\rho(J,\dot{R}) | f = f\chi_I\} = \{f \in L^1_{\chi_I \cdot \rho}(J,\dot{R}) | f = f\chi_I\}$ på $L^1_{\rho|I}(I,\dot{R})$; heraf følger, at for en ρ målelig mængde $A \subseteq J$ er $A \cap I$ $\rho_{|I}$ målelig, og derfor, at hvis f er en ρ målelig afbildning $J \to \dot{R}$, så er $f_{|I}$ $\rho_{|I}$ målelig.

Med samme betegnelser som p. 1,5 finder vi:

$\widetilde{\rho_{|I}}(a) = 0$, $\widetilde{\rho_{|I}}(t) = \rho_{|I}(\chi_{[a,t]}) = \rho(\chi_{[a,t]}) = \tilde{\rho}(t)$ for $c = a < t \leqq b$, og $= \rho(\chi_{[c,t]}) - \rho(\chi_{[c,a[}) = \tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(a^-)$ for $c < a < t \leqq b$ (altså evt. ikke $\tilde{\rho}_{|I} = \widetilde{\rho_{|I}}$).

Lad nu ρ være et positivt mål på $\dot{R}$. For $I = [a,b] \in \dot{I}$ definerer vi: $\rho_{|I}$ er målet på I givet ved $\widetilde{\rho_{|I}}(a) = 0$, $\widetilde{\rho_{|I}}(t) = \tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(a^-)$, $a < t \leqq b$, idet $\tilde{\rho}$ er den p. 2,3 definerede til ρ svarende funktion i $BV_{loc}(\dot{R},\dot{R})$; hvis $I \subseteq J = [c,d] \in \dot{I}$, finder vi $\widetilde{\rho_{|J|I}}(a) = 0$, $\widetilde{\rho_{|J|I}}(t) = \widetilde{\rho_{|J}}(t) = \tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(a^-)$ for $c = a < t \leqq b$, og $\widetilde{\rho_{|J|I}}(t) = \widetilde{\rho_{|J}}(t)-\widetilde{\rho_{|J}}(a^-) = \tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(c^-)-(\tilde{\rho}(a^-)-\tilde{\rho}(c^-)) =$

$\tilde{\rho}(t)-\tilde{\rho}(a^-)$ for $c < a < t \leqq b$, og derfor $\rho_{|J|I} = \rho_{|I}$.

Vi definerer nu: $f:\dot{R} \to \dot{R}$ er ρ målelig, hvis $f_{|I}$ er $\rho_{|I}$ målelig for alle $I \in \ddot{I}$. For en ρ målelig funktion f og $1 \leqq p \leqq \infty$ sætter vi $\|f\|_{p,\rho} = \sup\{\|f_{|I}\|_{p,\rho_{|I}} \,|\, I \in \ddot{I}\} \leqq \infty$ (jfr. p. 1,11), og $L^p_\rho = L^p_\rho(\dot{R},\dot{R}) = \{f|f$ er en ρ målelig afbildning $\dot{R} \to \dot{R}$, $\|f\|_{p,\rho} < \infty\}$, $L^p_{o,\rho} = L^p_{o,\rho}(\dot{R},\dot{R}) = \{f \in L^p_\rho | \exists I \in \ddot{I}$, så $f = f\chi_I\}$, og $L^p_{loc,\rho} = L^p_{loc,\rho}(\dot{R},\dot{R}) = \{f:\dot{R} \to \dot{R} | f\chi_I \in L^p_\rho$ for alle $I \in \ddot{I}\}$.

En mængde $A \subseteqq \dot{R}$ er en ρ nulmængde, hvis $\chi_A \in L^1_\rho$ og $\rho(A) = \|\chi_A\|_{1,\rho} = 0$, d.v.s. hvis $A \cap I$ er en $\rho_{|I}$ nulmængde for alle $I \in \ddot{I}$. I det følgende vil vi hyppigt, og uden at nævne det, identificere funktioner f og g, for hvilke $\{t \in \dot{R} | f(t) \neq g(t)\}$ er en ρ nulmængde (ρ ækvivalente funktioner).

De indførte funktionsrum er åbenbart vektorrum over $\dot{R}$. L^p_ρ forsynes med topologien defineret ved normen (egentlig seminormen) $f \to \|f\|_{p,\rho}$. (Det er let at vise, at der virkelig er tale om en norm, når man identificerer ækvivalente funktioner). På $L^p_{o,\rho}$ defineres en topologi ved seminormerne: $f \to p_{p,\rho,\{\varepsilon_n\}}(f) = \sup\{\varepsilon_n^{-1} \|f\chi_{\dot{R}\setminus K_n}\|_{p,\rho} \,|\, n=0,1,\dots\}$, hvor $\varepsilon_n > 0$, $n = 0,1,\dots$, $K_o = \emptyset$, og $K_n = [-n,n]$, $n \in \dot{N}$. På $L^p_{loc,\rho}$ defineres en topologi ved seminormerne $f \to p_{p,\rho,n,\varepsilon}(f) = \varepsilon^{-1}\|f\chi_{K_n}\|_{p,\rho}$, hvor $\varepsilon > 0$ og $n \in \dot{N}$. (jfr. øv. 1).

<u>Lemma</u>: $f \to f_{|I}$ er en lineær isometri af $\{f \in L^p_\rho(\dot{R},\dot{R}) | f = f\chi_I\}$ på $L^p_{\rho|I}(I,\dot{R})$.

Bevis: For en afbildning $g:I \to \dot{R}$ lader vi g_u være afbildningen $\dot{R} \to \dot{R}$ bestemt ved $g_u\chi_I = g_u$, $g_{u|I} = g$. Antag nu $g \in L^p_{\rho|I}(I,\dot{R}) \subseteqq L^1_{\rho|I}(I,\dot{R})$; for $J \supseteqq I$, $J \in \ddot{I}$, er da $g_{u|J} \in L^1_{\rho|J}(J,\dot{R})$, idet $g_{u|J}$ er urbilledet af $\dot{g}$ ved isomorfien

$f \to f_{|I}$ af $\{f \in L^1_{\rho|J}(J,\dot{R}) | f = f\chi_I\}$ på $L^1_{\rho|I}(I,\dot{R})$ $(\rho_{|J|I} = \rho_{|I})$; $g_{u|J}$ er altså $\rho_{|J}$ målelig, og så er for $K \subseteq J$, $K \in \dot{I}$, $g_{u|K}$ $\rho_{|K}$ målelig, d.v.s. g_u er ρ målelig; desuden fås af $|g|^p \in L^1_{\rho|I}(I,\dot{R})$, at $|g_{u|J}|^p \in L^1_{\rho|J}(J,\dot{R})$ og $\rho_{|J}(|g_{u|J}|^p) = \rho_{|I}(|g|^p)$, $\|g\|_{p,\rho_{|I}} = \|g_{u|J}\|_{p,\rho_{|J}}$ og $\|g_u\|_{p,\rho} = \sup\{\|g_{u|J}\|_{p,\rho_{|J}} \big| I \subseteq J \in \dot{I}\} = \|g\|_{p,\rho_{|I}}$.

For $f = f\chi_I \in L^p_\rho$ gælder $f = f_{|Iu}$, og i følge definition $f_{|I} \in L^p_{\rho_{|I}}(I,\dot{R})$, altså $\|f\|_{p,\rho} = \|f_{|I}\|_{p,\rho_{|I}}$.

Vi vil herefter hyppigt identificere funktioner g og g_u. Vi sætter $L^p_{\rho_{|I}}(I,\dot{R}) = L^p_\rho(I,\dot{R})$, og identificerer altså dette rum med $\{f \in L^p_\rho | f = f\chi_I\}$; for $f \in L^1_\rho$ sætter vi $\rho(f\chi_I) = \rho_{|I}(f_{|I}) = \int_I f\, d\tilde{\rho} = \int_I f\, d\,\widetilde{\rho_{|I}}$ (men evt. $\neq \int_I f\, d\,\tilde{\rho}_{|I}$), og $= \|f\|_{1,I,\rho}$ hvis $f \geqq 0$.

For $f \in L^p_\rho$ og $I \in \dot{I}$ gælder $\|f - f\chi_I\|^p_{p,\rho} =$ $\sup\{\rho(|f-f\chi_I|^p\chi_J) | J \in \dot{I}\} = \sup\{\rho(|f|^p(\chi_J - \chi_I)) | I \subseteq J \in \dot{J}\} =$ $\|f\|^p_{p,\rho} - \|f\chi_I\|^p_{p,\rho}$, og dette bliver vilkårligt lille for tilstrækkeligt stort I; $L^p_{o,\rho}$ er altså, betragtet som underrum i L^p_ρ, tæt i L^p_ρ.

For $f = f\chi_I \in L^1_{o,\rho}$ er $|\rho(f)| = |\rho_{|I}(f_{|I})| \leqq \rho_{|I}(|f_{|I}|) = \|f\|_{1,\rho}$; afbildningen $f \to \rho(f)$ er altså en kontinuert lineær funktional på den tætte mængde $L^1_{o,\rho} \subseteq L^1_\rho$, og har én udvidelse til en kontinuert funktional $f \to \rho(f) = \int f\, d\tilde{\rho}$ på L^1_ρ. $\rho(f) = \lim_n \rho(f\chi_{[-n,n]})$, og $\rho(f) = \|f\|_{1,\rho}$ for $f \geqq 0$.

<u>Lemma</u>: $\mathcal{D}^o$ er tæt i L^p_ρ for $1 \leqq p < \infty$.

Bevis: Lad $f \in L^p_\rho(I,\dot{R})$, og vælg $J \in \dot{I}$, så $I \subset \mathring{J}$. Da $C(J,\dot{R})$ er tæt i $L^p_\rho(J,\dot{R})$, eksisterer der en funktion $g \in C(J,\dot{R})$, så at $\|f-g\|_{p,\rho_{|J}} < \varepsilon$. Vi vælger en kontinuert funktion $h: J \to [0,1]$, så at $h \in C_o(J,\dot{R})$ og $h(t) = 1$ for $t \in I$. Da er $hg \in \mathcal{D}^o$, og $\|f-hg\|_{p,\rho} \leqq \|f-g\|_{p,\rho|J} < \varepsilon$. $\mathcal{D}^o$ er altså tæt i den tætte mængde $L^p_{o,\rho}$ i L^p_ρ.

$\rho \in \mathcal{D}^{o'}$ har altså netop én udvidelse, ρ, til en funktional $\in L^{1'}_\rho$.

2.2 Lad ρ være et positivt mål på $\dot{R}$. For vilkårligt $I \in \dot{I}$ er $f \to \int_I f \, d\, \tilde{\rho}_{|I}$ en kontinuert funktional på $C(I)$, som vi vil betegne $\rho_{|I}$.

Lad $f \in F(\dot{R},\dot{R})$

Vi definerer: f er ρ målelig, hvis $f_{|I}$ er $\rho_{|I}$ målelig, $\forall I \in \dot{I}$. For f ρ målelig, $1 \leqq p < \infty$, og $I \in \dot{I}$, kan vi danne

$$\|f\|_{p,I,\rho} = [\int_I |f|^p \, d\, \tilde{\rho}_{|I}]^{\frac{1}{p}} \leqq \infty, \text{ og } \|f\|_{p,\rho} = \sup \{\|f\|_{p,I,\rho} | I \in \dot{I}\}.$$

Vi definerer $L^p_\rho = L^p_\rho(\dot{R},\dot{R}) = \{f | f$ er en ρ målelig afbildning $\dot{R} \to \dot{R}$, $\|f\|_{p,\rho} < \infty\}$.

En mængde $A \subseteqq \dot{R}$ er en ρ nulmængde, hvis $\chi_A \in L^1_\rho$ og $\|\chi_A\|_{1,\rho} = 0$, d.v.s. hvis $A \cap I$ er en $\rho_{|I}$ nulmængde, $\forall I \in \dot{I}$.
I det følgende vil vi hyppigt, og uden at nævne det, identificere funktioner f og g, for hvilke $\{t \in R | f(t) \neq g(t)\}$ er en ρ nulmængde (ρ ækvivalente funktioner).

For $I \in \dot{I}$ er $f \to f_{|I}$ en isomorfi af $\{f \in L^p_\rho | f = f\chi_I\}$ på det velkendte Banachrum $L^p_{\rho|I}(I)$. Vi identificerer disse rum, og betegner dem $L^p_\rho(I)$. $L^p_{loc,\rho} =$

Definitioner: $L^p_{loc,\rho}(\dot{R},\dot{R}) = \{f | f\chi_I \in L^p_\rho, \forall I \in \dot{I}\}$.
$L^p_{o,\rho}(\dot{R},\dot{R}) = L^p_{o,\rho} = \{f \in L^p_\rho \mid \exists\, I \in \dot{I}, \text{ så } f = f\chi_I\}$.

L^p_ρ forsynes med topologien defineret ved normen (egentlig seminormen) $f \to \|f\|_{p,\rho}$. (Det er let at vise, at der virkelig er tale om en norm, når man identificerer ækvivalente funktioner). På $L^p_{o,\rho}$ defineres en topologi ved seminormerne:
$f \to p_{p,\rho,\{\varepsilon_n\}}(f) = \sup\{\frac{1}{\varepsilon_n}\|f\chi_{\dot{R}\setminus K_n}\|_{p,\rho} \mid n = 0,1,\ldots\}$, hvor som før $\varepsilon_n > 0$, $n = 0,1,\ldots$, $K_0 = \emptyset$, og $K_n = [-n,n]$ $n \in \dot{N}$.

På $L^p_{loc,\rho}$ defineres en topologi ved seminormerne:

$f \to p_{p,\rho,\varepsilon,n}(f) = \frac{1}{\varepsilon}\|f\chi_{K_n}\|p,\rho$, hvor $\varepsilon > 0$ og $n \in \dot{N}$(jfr. øv. 1).

Rummene L^∞_ρ, $L^\infty_{loc,\rho}$ og $L^\infty_{o,\rho}$ defineres på tilsvarende måde ud fra $L^\infty_\rho(I) = \{f \mid f$ er en $\rho_{|I}$ målelig afbildning $I \to \dot{R}, \|f\|_{\infty,I,\rho} < \infty\}$, hvor $\|f\|_{\infty,I,\rho} = \inf\{\sup\{|g(t)| \mid t \in I\} \mid g$ er $\rho_{|I}$ ækvivalent med $f\}$.

Sætning: $L^p_{o,\rho}$ er forsynet med den fineste lokal-konvekse topologi, der inducerer en topologi grovere end $\| \|p,_{I,\rho}$ topologien på $L^p_\rho(I)$, $\forall I \in \dot{I}$.

Bevis: Da beviset for den tilsvarende sætning p.2 næsten ordret kan overføres, vil vi her kun betragte den afgørende del af beviset. Lad der være givet en afbildning η: $\dot{I} \to \dot{R}^+$. Vi definerer en følge $\{\varphi_n \in L^p_\rho(K_n) \mid n \in \dot{N}\}$ ved: φ_n er lige,

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0, & 1 < t, \end{cases} \qquad \varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq t \leqq n-1 \\ 1, & n-1 < t \leqq n \\ 0, & n < t \end{cases},$$

og har da: $0 \leqq \varphi_n \leqq \chi_{\dot{R}\setminus K_{n-1}}$; for $I \in \dot{I}$ er $\varphi_n \chi_I \equiv 0$ for alle på nær endelig mange n; $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \equiv 1$.

Vi sætter $I_n = K_n$, $\varepsilon_n = 2^{-n-1}\eta(K_{n+1})$, $\alpha_n = 2^{-n}$, $f_n = 2^n f\varphi_n$; herved fås for $f \in \{f \in L^p_{o,\rho} \mid p_{p,\rho,\{\varepsilon_n\}}(f) < 1\}$:

$\exists\, N \in \dot{N}$, så $f = f\chi_{K_N}$; $f = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n f_n$ med $\alpha_n \geqq 0$, $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leqq 1$;

$f_n \in L^p_\rho(I_n)$; $\|f_n\|_{p,\rho} \leqq 2^n \|f\chi_{\dot{R}\setminus K_{n-1}}\| \leqq \eta(I_n)$, $n \in \dot{N}$;

dvs. $f \in$ det konvekse hylster af $\cup\{\{f \in L^p_\rho(I) \mid \|f\|_{p,I,\rho} \leqq \eta(I)\} \mid I \in \dot{I}\}$.

Af denne sætning slutter vi (jfr. p.3), at en lineær funktional μ på $L^p_{o,\rho}$ er kontinuert, hvis og kun hvis $\mu_{|L^p_\rho(I)}$ er kontinuert, $\forall\, I \in \dot{I}$.

L 12-24 ændres til

For $\alpha \in L^q_{loc,\rho}$ og $f = f\chi_I \in L^p_{o,\rho}$ fås $|\rho(f\alpha)| = |\rho(f\chi_I\alpha)| \leq \|f\|_{p,\rho} \cdot \|\alpha\chi\|_I\|_{q,\rho}$ (Hölders ulighed for intervallet I); $f \to \rho(f\alpha)$ er derfor en kontinuert funktional $\alpha' \in L^{p'}_{o,\rho}$

For $\mu \in L^{p'}_{o,\rho}$ og $n \in \mathring{N}$ vil $\mu|_{L^p_\rho([-n,n])} \in L^p_\rho([-n,n])'$; derfor eksisterer der en funktion $\tilde{\mu}_n \in L^q_\rho([-n,n])$, så at $\mu(f) = \rho(f\tilde{\mu}_n)$ for $f \in L^p_\rho([-n,n])$ (jfr. 1,12).

Idet vi igen benytter funktionerne φ_n indført p. 6, definerer vi $\tilde{\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}_n \varphi_n$; for $I \in \mathring{I}$ er $\tilde{\mu}|_I$ en sum af endelig mange funktioner $\in L^q_\rho(I)$, så $\tilde{\mu} \in L^q_{loc,\rho}$. For $f \in L^p_{o,\rho}$ fås:

$f = \sum_{\nu=1}^{n} f\varphi_\nu$ får passende $n \in \mathring{N}$;

$$\rho(f\tilde{\mu}) = \sum_{\nu=1}^{n} \rho(f\varphi_\nu\tilde{\mu}) = \sum_{\nu=1}^{n} \rho(f\tilde{\mu}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(f\varphi_\nu) = \mu(f),$$

idet $\tilde{\mu}\varphi_\nu = \tilde{\mu}_\nu\varphi_\nu$ og $f\varphi_\nu \in L^p_\rho([-\nu,\nu])$. Vi har vist, at for $\mu \in L^{p'}_{o,\rho}$ eksisterer der $\tilde{\mu} \in L^q_{loc,\rho}$, så at $\tilde{\mu}' = \mu$.

For $\alpha \in L^q_{loc,\rho}$ er $\rho(f\tilde{\alpha'}) = \alpha'(f) = \rho(f\alpha)$ for alle $f \in L^p_{o,\rho}$, specielt for alle $f \in L^p_\rho(I)$, $I \in \mathring{I}$. $\alpha|_I$ og $\tilde{\alpha'}|_I$ bestemmer derfor samme funktional $\in L^p_\rho(I)'$, og er derfor ens ρ næsten overalt i I, for ethvert $I \in \mathring{I}$, d.v.s. α og $\tilde{\alpha'}$ er ρ ækvivalente funktioner i $L^q_{loc,\rho}$.

Heraf fås, at $\alpha \to \alpha'$ er en bijektiv afbildning.

<u>Sætning</u>: $L^p_{loc,\rho}$ er forsynet med den groveste topologi, for hvilken, for vilkårligt $I \in \dot{I}$, afbildningen $f \to f_{|I}$ af $L^p_{loc,\rho}$ på $L^p_\rho(I)$ er kontinuert.

Bevis: Som basismængder for topologien er netop valgt urbillederne ved de nævnte afbildninger af mængder, der udgør baser for topologierne på $L^p_\rho(I)$.

For $1 \leqq p \leqq \infty$ definerer vi, som sædvanlig, $q = q(p) = p(p-1)^{-1}$, $1 < p < \infty$, $q(\infty) = 1$, $q(1) = \infty$.

<u>Sætning</u>: $L^p_{o,\rho}{}'$ er isomorf med $L^q_{loc,\rho}$, $1 \leqq p < \infty$.

Bevis: Idet vi henviser til det tilsvarende bevis p.3, nøjes vi her med følgende skitsering:

For $\alpha \in L^q_{loc,\rho}$ er $f \to \int_{\dot{R}} \alpha f d\rho$ er en kontinuert funktional $\alpha' \in L^p_{o,\rho}{}'$.

Til $\mu \in L^p_{o,\rho}{}'$ og $n \in \dot{N} \ \exists \ \tilde{\mu}_n \in L^q_\rho(K_n)$, så at $\mu(f) = \int_{K_n} f\tilde{\mu}_n d\tilde{\rho}$, $\forall \ f \in L^p_\rho(K_n)$. For $m > n$ gælder

$\tilde{\mu}_{m|K_n} = \tilde{\mu}_n$, da $\mu(f) = \int_{K_m} f\tilde{\mu}_m d\tilde{\rho}_{|K_m} = \int_{K_n} f\tilde{\mu}_{m|K_n} d\tilde{\rho}_{|K_m}$ $\int_{K_m} \tilde{\mu}_n d\tilde{\rho}_{|K_m}$

$\forall \ f \in L^p_\rho(K_n) = \{ f \in L^p_\rho(K_m) \mid f = f\chi_{K_n} \}$. Vi kan derfor definere $\tilde{\mu}(t) = \tilde{\mu}_n(t)$ for $n-1 \leqq |t| < n$, og opnår $\tilde{\mu} \in L^q_{loc,\rho}$ og $\int_{\dot{R}} f\tilde{\mu} d\rho = \mu(f)$, $\forall \ f \in L^p_{o,\rho}$. (Vi minder om, at vi identificerer ρ ækvivalente funktioner. $\tilde{\mu}$ afhænger som funktion af, hvilke funktioner $\tilde{\mu}_n$ vi lader repræsentere de tilsvarende elementer i $L^q_\rho(K_n)$, men dens ækvivalensklasse er velbestemt). Vi får for $\mu \in L^p_{o,\rho}{}'$: $\tilde{\mu}' = \mu$, og for $\alpha \in L^q_{loc,\rho}$ og $f \in L^p_\rho(K_n)$:

$\int_{K_n} f\tilde{\alpha}' d\rho = \alpha'(f) = \int_{K_n} f\alpha d\rho$, derfor $\alpha_{|K_n} = \tilde{\alpha}'_{|K_n}$, og $\alpha = \tilde{\alpha}'$.

<u>Sætning</u>: L^p_ρ er et Banachrum, $1 \leqq p \leqq \infty$.

L. 13-17 ændres til

For $\alpha \in L^q_\rho$, $f \in L^p_\rho$, og $I \in \grave{I}$ er αf ρ målelig, $\alpha\chi_I \in L^q_\rho(I)$, $f\chi_I \in L^p_\rho(I)$, så at $\alpha f \chi_I \in L^1_\rho(I)$ og $|\rho(f\alpha\chi_I)| \leqq \rho(|f\alpha\chi_I|) \leqq \|f\chi_I\|_{p,\rho} \cdot \|\alpha\chi_I\|_{q,\rho} \leqq \|f\|_{p,\rho} \cdot \|\alpha\|_{q,\rho}$, og derfor $f\alpha \in L^1_\rho$ og $|\rho(f\alpha)| \leqq \|f\alpha\|_{1,\rho} \leqq \|f\|_{p,\rho} \cdot \|\alpha\|_{q,\rho}$. $f \to \rho(f\alpha)$ definerer altså en funktional $\alpha' \in L^{p'}_\rho$ med $\|\alpha'\| \leqq \|\alpha\|_{q,\rho}$.

L. 19 og 23 ændres M til $L^p_{o,\rho}$.

Herefter kan II,2,1 l. 11-13, l. 4fn - 2 l. 3 og 3, l. 12 - 4 l. 9 udelades.

Bevis: Lad $\{f_n \in L^p_\rho \mid n \in \dot{N}\}$ være en fundamentalfølge i L^p_ρ; da er, for $\nu \in \dot{N}$, $(f_n\chi_{K_\nu})$en fundamentalfølge i $L^p_\rho(K_\nu)$, og konvergerer derfor mod en funktion $h_\nu \in L^p_\rho(K_\nu)$.

Da $f_n \chi_{K_\nu} = f_n\chi_{K_\mu} \chi_{K_\nu}$, $\mu > \nu$, er $h_\nu = \chi_{K_\nu} h_\mu$.

Vi definerer $h(t) = h_\nu(t)$, $\nu-1 \leqq |t| < \nu$; h er ρ målelig, og

$\|h-f_n\|_{p,\rho} = \sup\{\|h-f_n\|_{p,K_\nu,\rho} \mid \nu \in \dot{N}\} \leqq$

$\sup\{\sup\{\|f_m-f_n\|_{p,K_\nu,\rho} \mid m > n\} \mid \nu \in \dot{N}\} =$

$\sup\{\sup\{\|f_m-f_n\|_{p,K_\nu,\rho} \mid \nu \in \dot{N}\} \mid m > n\} =$

$\sup\{\|f_m-f_n\|_{p,\rho} \mid m > n\} \to 0,\ n \to \infty.$

$\|h\|_{p,\rho} \leqq \|h-f_n\|_{p,\rho} + \|f_n\|_{p,\rho} \leqq \|f_n\|_{p,\rho} + \varepsilon < \infty$

for passende $n \in \dot{N}$.

<u>Sætning</u>: $L^{p\,\prime}_\rho$ er isomorf og isometrisk med L^q_ρ, $1 \leqq p < \infty$.

Sæt $M = \bigcup\{L^p_\rho(I) \mid I \in \dot{I}\}$, forsynet med $\|\ \|_{p,\rho}$ topologien. M er et tæt underrum i L^p_ρ, derfor er $M' = L^{p\,\prime}_\rho$. For $\alpha \in L^q_\rho$, $f \in M$, $f = f\chi_I$, fås $\left|\int_I f\alpha d\rho\right| \leqq \|f\|_{p,\rho}\cdot\|\alpha\|_{q,I,\rho} \leqq \|f\|_{p,\rho}\cdot\|\alpha\|_{q,\rho}$, d.v.s. $f \to \int_{\dot{R}} f\alpha d\rho$ definerer en funktional $\alpha' \in M'$ med

$\|\alpha'\| \leqq \|\alpha\|_{q,\rho}$.

$\mu \in L^{p\,\prime}_\rho \Rightarrow \mu_{|L^p_{o,\rho}} \in L^{p}_{o,\rho}{}' \Rightarrow \exists\tilde{\mu} \in L^q_{loc,\rho}$, så at

$\mu(f) = \int_{\dot{R}} f\tilde{\mu}d\rho$, $\forall\ f \in M$. Antag $p > 1$, og definer $g_n =$

$\tilde{\mu}^{q-1}\operatorname{sign}(\tilde{\mu})\chi_{K_n}$, $n \in \dot{N}$, $f_n = 0$ for $g_n = 0$, og $f_n = \|g_n\|_{p,\rho}^{-1}\, g_n$ ellers. Vi får da $\|g_n\|^p_{p,\rho} = \int_{K_n} |\tilde{\mu}|^q d\rho = \|\tilde{\mu}\chi_{K_n}\|^q_{q,\rho}$, $f_n \in M$,

$\|f_n\| \leqq 1$, og $\|\mu\| \geqq |\mu(f_n)| \underset{\text{0 eller}}{=} \|g_n\|^{-1}_{p,\rho}\int_{K_n}|\tilde{\mu}|^q d\rho = \|\tilde{\mu}\chi_{K_n}\|_{q,\rho}$, $n \in \dot{N}$,

$\Rightarrow \|\tilde{\mu}\|_{q,\rho} \leqq \|\mu\| < \infty$. $\tilde{\mu}' = \mu$, da M er tæt i L^p_ρ.

For $p = 1$ må beviset modificeres. Dette overlades læseren.

<u>Sætning</u>: $L^{p}_{loc,\rho}{}'$ er isomorf med $L^{q}_{o,\rho}$, $1 \leqq p < \infty$.

Bevis: For $\alpha \in L^{q}_{o,\rho}$, $\alpha = \alpha\chi_{K_n}$, er $f \to \int_{K_n} f\alpha d\rho$ en lineær funktional α' på $L^{p}_{loc,\rho}$, kontinuert, da $|\int_{K_n} f\alpha d\rho| \leqq \|f\chi_{K_n}\|_{p,\rho} \cdot \|\alpha\|_{q,\rho} < \varepsilon$, når blot $\|f\chi_{K_n}\|_{p,\rho}$ er tilstrækkeligt lille.

$\mu \in L^{p}_{loc,\rho}{}' \Rightarrow \mu|L^{p}_{o,\rho} \in L^{p}_{o,\rho}{}' \Rightarrow \exists\ \tilde{\mu} \in L^{q}_{loc,\rho}$, så $\mu(f) = \int_{\dot{R}} f\tilde{\mu}d\rho$, $\forall f \in L^{p}_{o,\rho}$. Til $1\ \exists\ n \in \dot{N}$ og $\varepsilon > 0$, så $\|f\|_{p,K_n,\rho} < \varepsilon \Rightarrow \mu(f) < 1$. For $A_{\eta,m} = \{t \in K_m \setminus K |\ \tilde{\mu}(t) > \eta\}$, $\eta > 0$, $m > n$, og for $p \in \dot{N}$, fås $1 > \mu(p\chi_{A_{\eta,m}}) = p\int_{A_{\eta,m}} \tilde{\mu}d\rho \geqq p\eta\int_{A_{\eta,m}} 1d\rho$, og derfor at $A_\eta = \bigcup\{A_{\eta,m}|m > n\}$ er en ρ nulmængde. Tilsvarende er $B_\eta = \{t \in \dot{R}\setminus K_n|\tilde{\mu}(t) < -\eta\}$, $\eta > 0$ og $\{t \in \dot{R}\setminus K_n|\tilde{\mu}(t) \neq 0\} = \bigcup\{A_p{-1} \cup B_p{-1}|p \in \dot{N}\}\rho$ nulmængder, d.v.s. $\tilde{\mu} \in L^{q}_{o,\rho}$. $\tilde{\mu}' = \mu, \mu \in L^{p}_{loc,\rho}{}'$ og $\tilde{\alpha}' = \alpha$, $\alpha \in L^{q}_{o,\rho}$, indses som i de foregående beviser.

1. Lad L være et vektorrum over $\dot{R}$, J en indeksmængde, og $\{ p_j | j \in J\}$ en mængde af seminormer defineret på L. Hvilke betingelser skal $\{ p_j | j \in J\}$ opfylde, for at $\{ O_j | j \in J \}$, hvor $O_j = \{ f \in L | p_j(f) < 1 \}$, opfylder betingelserne v 1) - v 6) (Mat. 6. T. 3. 6.)?
Vis, at en vilkårlig lokal konveks topologi på et topologisk vektorrum kan defineres ved en mængde af seminormer. (Brug AG III, 14, øv.4).

*2. Vis, at topologien på $\mathfrak{D}^{o}$ er den fineste topologi, med hensyn til hvilken $\mathfrak{D}^{o}$ er et topologisk vektorrum, og som inducerer en topologi grovere end den ligelige på $C_o(I)$, $\forall I \in \dot{I}$. (Lad V_o være en omegn af o i $\mathfrak{D}^{o}$ i en topologi, med hensyn til hvilken $\mathfrak{D}^{o}$ er et topologisk vektorrum. Udnyt, at der $\exists$ en følge V_n, $n \in \dot{N}$, af omegne af o i denne topologi, så at $V_n + V_n \subsetneq V_{n-1}$, $n \in \dot{N}$).

3. Vis, at topologien på $\mathfrak{D}^{o}$ kan defineres ved mængden af seminormer: $\{ p_{\varphi} | \varphi \in C_o(\dot{R}), \varphi(t) > 0, t \in \dot{R} \}$, hvor $p_{\varphi}(f) = \|\varphi^{-1} f\|$.

*4. Vis, at $\mathfrak{D}^{o}$ er fuldstændigt.

5. a) Lad $\{L_j \mid j \in J\}$ være en vilkårlig mængde af fuldstændige, lokal konvekse, topologiske vektorrum over $\dot{R}$. Vis, at deres produkt L på naturlig måde kan betragtes som et vektorrum over $\dot{R}$, der, forsynet med produkt topologien, er et fuldstændigt, lokal konvekst, topologisk vektorrum.

b) Find L'. (Betragt først det tilfælde, at J er en endelig mængde).

6. a) Vis, at $\mathrm{dist}((a_n),(b_n)) = \sum_{n \in \dot{N}} 2^{-n} \mid b_n - a_n \mid (1+|b_n-a_n|)^{-1}$ definerer en metrik på $\dot{R}^{\dot{N}}$, og at den tilsvarende topologi er produkt topologien.

b) Udstyr det duale rum L til $\dot{R}^{\dot{N}}$ med en topologi, således at L bliver et fuldstændigt, lokal konvekst, topologisk vektorrum, og L' bliver isomorft med $\dot{R}^{\dot{N}}$.

c) Vis, at produktrummet af nummererbart mange metriserbare, rum er metriserbart.

7. Vis, at $L^p_{o,\rho}$ er fuldstændigt, $1 \leqq p \leqq \infty$, $\rho \in \mathcal{D}^{o'+}$. ?

8. Lad L være et normeret vektorrum over $\dot{R}$. Vis, at L' er et Banachrum.

II. Forskellige forberedelser

1. Hilbertrum

En mængde H kaldes et <u>komplekst quasi præ Hilbertrum</u>, dersom det opfylder følgende aksiomer:

A: H er et <u>vektorrum</u> over de <u>komplekse tals legeme</u> $\mathbb{C}$.

B: Der er givet en afbildning $(f,g) \to (f|g)$, $H^2 \to \mathbb{C}$, (det indre produkt eller skalarproduktet), så at:

1. $\forall_{\mathbb{C}} a, \forall_H f, g : (af|g) = a(f|g)$;
2. $\forall_H f, g, h : (f + g|h) = (f|h) + (g|h)$;
3. $\forall_H f, g : (g|f) = \overline{(f|g)}$ (stregen angiver kompleks konjugering)
4. $\forall_H f : (f|f) \geq 0$.

H kaldes et <u>præ Hilbertrum</u>, hvis yderligere:

5. $\forall_H f : (f|f) = 0 \Rightarrow f = 0$

<u>Sætning</u>: I et quasi præ Hilbertrum gælder Schwarz' ulighed: $|(f|g)|^2 \leq (f|f)\cdot(g|g), \forall_H f, g.$

I et præ Hilbertrum gælder = kun, hvis f og g er lineært afhængige.

Bevis: Sæt $(f|g) = se^{it}$, $s \geq 0$, For $a \in \mathbb{R}$ gælder:

$0 \leq (f + ae^{it}g|f + ae^{it}g) = (f|f) + 2as + a^2(g|g)$, og derfor $s^2 = |(f|g)|^2 \leq (f|f) \cdot (g|g)$; = gælder kun, hvis $(g|g) = 0$, eller hvis der $\exists\, b \in \mathbb{C}$, så $(f + bg|f + bg) = 0$.*) ?

<u>Sætning</u>: I et præ Hilbertrum er $f \to \|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}}$ en norm.

Bevis: $0 \leq \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + (f|g) + (g|f) + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2$. De øvrige norm egenskaber vises endnu lettere.

Af beviset ses, at $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ kun kan gælde, hvis $g = 0$, eller $f = ag$, $a \geq 0$.

Ved udregning vises relationerne: $4(f|g) = \sum_{n=0}^{3} i^n\|f + i^n g\|^2$, og $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$ (parallelogram loven)

*) sættes $(f|g) = a$ og $(g|g) = b$ har vi altså $|a|^2 \leq (f|f)\,b$ vi udregner nu $(bf - ag|bf - ag) = b\bar{b}(f|f) - b\bar{a}(f|g) - \bar{b}a(g|f) + a\bar{a}(g|g) =$ [illegible]
$|a|^2$ [illegible]

Idet H forsynes med normtopologien, og derefter H^2 med produkttopologien, gælder: (f,g) → (f|g) er kontinuert: $H^2 \to \mathbb{C}$, idet $|(f|g)-(h|k)| = |(f-h|g-k)+(f-h|k)+(h|g-k)| \leqq \|f-h\|\cdot\|g-k\|+\|f-h\|\cdot\|k\|+\|h\|\|g-k\|$.

Definition: Et normeret rum H kaldes ligelig konvekst, hvis der $\exists$ en funktion $\delta:]0,2] \to \mathbb{R}^+$, så at: $f \in H$, $g \in H$, $\|f\| \leqq 1, \|g\| \leqq 1$, $\|f-g\| \geqq \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\frac{1}{2}(f+g)\| \leqq 1-\delta(\varepsilon)$.

Det følger let af parallelogramloven, at et præ Hilbertrum er ligelig konvekst.

Sætning: En konveks, fuldstændig delmængde F af et ligelig konvekst rum H indeholder ét element med mindst norm.

Bevis: Sæt $d = \inf\{\|f\| \mid f \in F\}$. Hvis $d = 0$, indeholder F, der er fuldstændig og derfor afsluttet, 0. Antag $d > 0$, og sæt, for $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon = F \cap \{f \in H \mid \|f\| \leqq d+\varepsilon\}$. Hvis $\|f_0\| = d$, vil $f_0 \in \bigcap\{\overline{F}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$. Da et fundamentalfilter på F har ét fortætningspunkt, er det nok at vise, at $\{F_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ er basis for et fundamentalfilter, altså indeholder mængder af vilkårlig lille diameter. Vi antager, at der $\exists\ \eta \in]0,2]$, så at der for vilkårligt $\varepsilon \in]0,1]$ $\exists$ f_ε og $g_\varepsilon \in F_\varepsilon$ med $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\| \geqq \eta$ og derfor $\|(d+\varepsilon)^{-1}(f_\varepsilon - g_\varepsilon)\| \geqq \eta(d+\varepsilon)^{-1} \geqq \eta(d+1)^{-1}$; dette medfører, at $\|\frac{1}{2}(f_\varepsilon + g_\varepsilon)\| \leqq (1-\delta(\eta(d+1)^{-1}))\cdot(d+\varepsilon)$, hvilket for tilstrækkeligt lille $\varepsilon > 0$ er i modstrid med, at $d \leqq \|\frac{1}{2}(f_\varepsilon + g_\varepsilon)\|$, da den konvekse mængde F indeholder $\frac{1}{2}(f_\varepsilon + g_\varepsilon)$.

Definition: Lad H være et præ Hilbertrum, f og $g \in H$, F og $G \subseteq H$; $f \perp g$, hvis $(f \mid g) = 0$; $f^\perp = \{g \in H \mid g \perp f\}$; $F^\perp = \bigcap\{f^\perp \mid f \in F\}$; $F \perp G$, hvis $G \subseteq F^\perp$; ($\perp$ læses vinkelret eller ortogonal).

For $F \subseteq H$ er $F^\perp$ afsluttet, da det indre produkt er kontinuert.

Sætning: Lad F være et fuldstændigt underrum i et præ Hilbertrum H, f et element $\in$ H. f kan entydigt skrives $f = f_1 + f_2$, med $f_1 \in F$, $f_2 \perp F$.

Bevis: $\{f-g \mid g \in F\}$ er konveks og fuldstændig, og indeholder derfor et element $f_2 = f - f_1, f_1 \in F$, af mindst norm. For $g \in F \setminus \{0\}$, $\|g\| = 1$, fås: $0 \overset{*)}{\leqq} \|f_2 - (f_2|g)\cdot g\|^2 - \|f_2\|^2 = -\overline{(f_2|g)}\cdot(f_2|g) - (f_2|g)\cdot(g|f_2) + |(f_2|g)|^2 = -|(f_2|g)|^2$, $f_2 \perp g$; vi har altså $f_2 \perp F$.

$f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, $f_1, g_1 \in F$, $f_2, g_2 \perp F$, $\Rightarrow$

$f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

1.2 Et <u>præ Hilbertrum H</u> er et <u>Hilbertrum</u>, hvis det opfylder aksiomet:

<u>C: H er et fuldstændigt rum.</u>

Lad H være et præ Hilbertrum; for $g \in H$ er $f \to (f|g)$ en kontinuert funktional $g' \in H'$, og $\|g\| = g'(\|g\|^{-1}g) \leqq \|g'\| \leqq \|g\|$, idet $|(f|g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$. Omvendt har vi:

<u>Sætning</u>: Lad H være et Hilbertrum, $\alpha \in H'$. $\exists\, \tilde{\alpha} \in H$, så $\alpha(f) = (f|\tilde{\alpha})$, $\forall f \in H$. $\|\tilde{\alpha}\| = \|\alpha\|$.

Bevis: $\alpha^{-1}(o) = F$ er et afsluttet, derfor fuldstændigt, underrum $\subseteq H$; hvis $F = H$, er $\alpha(f) = (f|0)$, $\forall f \in H$. $F \neq H \Rightarrow$ $\exists k \in H \setminus F \Rightarrow \exists h \in F^{\perp}$, med $\alpha(h) = 1$. For $\tilde{\alpha} = \|h\|^{-2}h$ og vilkårligt $d \in H$ gælder: $d - \alpha(d)h \in F$, $(d|\tilde{\alpha}) = \alpha(d)\ (h|\tilde{\alpha}) = \alpha(d)$.

For afbildningen $g \to g'$ gælder: $(f+g)' = f' + g'$, $(ag)' = \bar{a}g'$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in H$. Vi udtrykker dette i: **)

<u>Sætning</u>: H' er isometrisk og konjugeret isomorf med H.

**) afbildningen ' er inj. da $g_1' = g_2' \Rightarrow \forall f \in H\,[(f|g_1) = (f|g_2)] \Rightarrow$
$\forall f \in H\,[(f|g_1 - g_2) = 0] \Rightarrow \|g_1 - g_2\|^2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2$

*) Vi bemærker at at for $a = (f_2|g)$ har vi $f_2 - ag \in K$ og derfor:
$\|f_2\|^2 \leqq \|f_2 - ag\|^2 = \|f_2\|^2 - a(g|f_2) - \bar{a}(f_2|g) + |a|^2\|g\| \Rightarrow$
$0 \leqq -|a|^2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f_2 \perp g$. For $g \in F \setminus \{0\}$ har vi
altså $f_2 \perp \frac{g}{\|g\|} \Rightarrow f_2 \perp g$ q.e.d.

1. Lad H være et præ Hilbertrum; sæt $B(f,a) = \{g \in H \mid \|g-f\| \leqq a\}$, for $a \in \mathring{R}^+$, $f \in H$. Lad A være en konveks mængde $\subseteqq B(0,d+\delta) \setminus B(0,d)$, hvor $0 \leqq \delta < d$. Vis, at diameteren for A er $\leqq \sqrt{12d\delta}$.

2. a) Vis følgende sætninger om komplekse tal z og w, idet $1 < p < \infty$:

   a_1) Til $\varepsilon \in]0,2]$ $\exists\ \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, så at $|z| \leqq |w| = 1$,

   $$|z-w| \geqq \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1+|z|^p}{2} - \left|\frac{w+z}{2}\right|^p\right)\left(\frac{1+|z|^p}{2}\right)^{-1} \geqq \delta_1.$$

   a_2) Til $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, så at $|w-z| \geqq \varepsilon \cdot \sup\{|z|,|w|\} \Rightarrow$

   $$\frac{|w|^p+|z|^p}{2} - \left|\frac{w+z}{2}\right|^p \geqq \cancel{\left|\frac{w+z}{2}\right|}^p \frac{|w|^p+|z|^p}{2}\,\delta_2$$

   b) Lad $\mu \in \mathscr{D}^{\circ\prime +}$, og lad f og g være funktioner: $\mathring{R} \to \mathring{C}$, med μ målelige realdele og imaginærdele, og så at $\int_{\mathring{R}} |f|^p d\tilde{\mu} \leqq 1$,

   $\int_{\mathring{R}} |g|^p d\tilde{\mu} \leqq 1$, $\int_{\mathring{R}} |f-g|^p d\tilde{\mu} \geqq \varepsilon^p > 0$. Idet $A =$

   $\{t \in \mathring{R} \mid |f-g|^p \geqq \frac{\varepsilon^p}{4}(|f|^p+|g|^p)\}$, skal det vises, at $\int_A |f-g|^p d\tilde{\mu} \geqq (\frac{\varepsilon}{2})^p$, at $\int_A (|f|^p+|g|^p) d\tilde{\mu}$

   $\geqq \sup\{\int_A |f|^p d\tilde{\mu}, \int_A |g|^p d\tilde{\mu}\} \geqq (\frac{\varepsilon}{4})^p$, og at

   $$\tfrac{1}{2}\int_A (|f|^p+|g|^p)d\tilde{\mu} - \int_A \left|\tfrac{1}{2}(f+g)\right|^p d\tilde{\mu} \geqq \delta_2(\tfrac{\varepsilon}{4}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{\varepsilon}{4})^p.$$

   c) Idet vi for en funktion f+ig, hvor f og $g \in L^p_\mu(\mathring{R},\mathring{R})$, definerer $\|f+ig\|_{p,\mu} = \||f+ig|\|_{p,\mu}$, skal det vises, at $L^p_\mu(\mathring{R},\mathring{C}) = \{f+ig \mid f,g \in L^p_\mu(\mathring{R},\mathring{R}),\ \|f+ig\|_{p,\mu} < \infty\}$ er et ligelig konvekst rum.

§ 2. Absolut kontinuitet.

Vi minder om, at $\grave{I}$ betegner mængden af afsluttede begrænsede delintervaller af $\grave{R}$. $\mathcal{D}^o = \bigcup\{C_o(I) \mid I \in \grave{I}\}$ forsynet med en lokal konveks topologi, sådan at en funktional μ på $\mathcal{D}^o$ er kontinuert, hvis og kun hvis $\mu_{|C_o(I)}$, er kontinuert, $\forall I \in \grave{I}$.

Vi definerer $T_o = \{f : \grave{R} \to \grave{R} \mid \exists I \in \grave{I}$, så at $f = f\chi_I$, og $f_{|I} \in T(I)\}$; T_o består altså af alle endelige linearkombinationer af karakteristiske funktioner for begrænsede intervaller.

I det følgende vil vi ved integration over hele $\grave{R}$ udelade angivelse af integrations intervallet.

For et positivt mål ν på $\grave{R}$, d.v.s. for $\nu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, og for en mængde $A \subseteq \grave{R}$, så at $\chi_A \in L^1_\nu$, definerer vi $\nu(A) = \|\chi_A\|_{1,\nu}$. Til et sådant ν svarer en monotont voksende funktion $\tilde{\nu} : \grave{R} \to \grave{R}$.

<u>Sætning</u>: Lad $I \in \grave{I}$, og lad μ være et positivt mål på I, $\mu \in C^{\prime +}(I)$; lad f være en funktion: $I \to \grave{R}$, og lad der til vilkårligt $\varepsilon > 0$ eksistere funktioner φ og $\psi \in L^1_\mu(I)$, så at $\psi \leqq f \leqq \varphi$ og $\int_I (\varphi-\psi)d\tilde{\mu} < \varepsilon$. Da vil $f \in L^1_\mu$.

Sætningen bevises på samme måde som de tilsvarende sætninger om Riemann integrabilitet ([3], II,3,5) og om Lebesgue målelighed af mængder ([3], IV,2,2): Til φ og ψ $\exists$ $\{\varphi_n \in T(I) \mid n \in \grave{N}\}$ og $\{\psi_n \in T(I) \mid n \in \grave{N}\}$, så at $\varphi_n \uparrow \geqq \varphi \geqq f$, $\psi_n \downarrow \leqq \psi \leqq f$, og $\mu(\varphi) - 2\varepsilon \leqq \mu(\psi) - \varepsilon \leqq \lim_n \mu(\psi_n) \leqq \mu(\psi) \leqq \mu(\varphi) \leqq \lim_n \mu(\varphi_n) \leqq \mu(\varphi) + \varepsilon$; men dette medfører $f \in L^1_\mu(I)$, i følge definitionen af $L^1_\mu(I)$ ([3], II,5).

<u>Sætning</u>: For $\lambda \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $1 \leqq p < \infty$, er $\mathcal{D}^o$ tæt i L^p_λ.

Bevis: Til $f \in L^p_\lambda$ og $\varepsilon \in \grave{R}^+$ $\exists$ $I = [a,b] \in \grave{I}$, så at $\|f-f\chi_I\|^p_{p,\lambda} = \|f\|^p_{p,\lambda} - \|f\chi_I\|^p_{p,\lambda} < \varepsilon^p$; endvidere $\exists$ $g \in C(I_1)$, $I_1 = [a-1,b+1]$, så at $\|f\chi_I - g\|_{p,I_1,\lambda} < \varepsilon$. Lad h være en afbildning:

$\dot{R} \to [0,1]$, så at $h(t) \equiv 1, t \in I$, og $h\chi_I = h \in C_0(I_1)$; da gælder $hg \in C_0(I_1)$, $|f\chi_I - hg| \leqq |f\chi_I - g|$, og $\|f - hg\|_{p,\lambda} \leqq \|f - f\chi_I\|_{p,\lambda} + \|f\chi_I - hg\|_{p,\lambda} < \varepsilon + \|f\chi_I - g\|_{p,I_1,\lambda} < 2\varepsilon$.

2.2. Lad μ være et positivt mål på $\dot{R}$, $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, og lad $h \geqq 0$ være en funktion $\in L^1_{loc,\mu}$; for $f \in \mathcal{D}^o$, $f = f\chi_I$, $I \in \dot{I}$, er fh μ målelig, og $|fh| \leqq \|f\| \cdot |h\chi_I| \in L^1_\mu(I)$; (idet $\|f\| = \sup\{|f(t)|\,|\,t \in \dot{R}\}$); derfor gælder $fh \in L^1_\mu(I)$, ([3], II,9,7), og $|\int fhd\tilde{\mu}| \leqq \int_I |fh|d\tilde{\mu} \leqq \|f\| \cdot \|h\chi_I\|_{1,\mu}$; $f \to \int fhd\tilde{\mu}$ definerer altså en lineær funktional $\nu = h \cdot \mu$ på $\mathcal{D}^o$, sådan at $\nu|_{C_0(I)}$ er kontinuert, $\forall I \in \dot{I}$; da endvidere $f \in \mathcal{D}^o$, $f \geqq 0 \Rightarrow \int fhd\tilde{\mu} \geqq 0$, vil $\nu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$.

Lad nu, for et interval $I \in \dot{I}$, $\{\varphi_n \in C_0(I)\,|\,n \in \dot{N}\}$ være en følge af funktioner, sådan at $\varphi_n \uparrow \varphi$, og sådan at der eksisterer $K \in \dot{R}$, så $\nu(\varphi_n) < K$; da gælder $\varphi \in L^1_\nu$, og $\int \varphi d\tilde{\nu} = \lim_n \int_I \varphi_n\, d\tilde{\nu}$, ([3], II,9,8); tilsvarende gælder $h\varphi_n \uparrow h\varphi$, $h\varphi_n \in L^1_\mu(I)$, og $\int h\varphi_n d\tilde{\mu} = \int \varphi_n d\tilde{\nu} < K$, og derfor $h\varphi \in L^1_\mu$ og $\int \varphi\, d\tilde{\nu} = \int h\varphi d\tilde{\mu}$. *)

Da mængden M af funktioner $f \in L^1_\nu$, for hvilke $fh \in L^1_\mu$ og $\int fd\tilde{\nu} = \int fhd\tilde{\mu}$, er et underrum, kan vi slutte, at $T_0 \subseteqq M$; thi ifølge det ovenstående vil $\chi_A \in M$ for vilkårligt åbent eller afsluttet interval A med $\overline{A} \in \dot{I}$.

<u>Sætning</u>: Lad $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h \cdot \mu$.

$$\tilde{\nu}(t) = \int_{]0,t]} hd\tilde{\mu},\ t \geqq 0,\quad \tilde{\nu}(t) = -\int_{]t,0]} hd\tilde{\mu},\ t < 0.$$

Bevis: Dette følger af definitionen af afbildningen $\nu \to \tilde{\nu}$ (se I,2, p. 3 og 4; $\tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}_{on}(t)$ for vilkårligt $n > |t|$)..

<u>Sætning</u>: Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h \cdot \mu$.

$$f \in L^1_{loc,\nu} \Rightarrow f \cdot h \in L^1_{loc,\mu},\ \text{og} \int_I fd\tilde{\nu} = \int_I fhd\tilde{\mu},\ \forall I \in \dot{I}.$$

*) For aftagende følger gælder en tilsvarende sætning.

Bevis: Til $f \in L^1_{loc,\nu}$, $I \in \dot{I}$, og $\varepsilon \in \dot{R}^+$ $\exists$ $\{\varphi_n \in T(I) | n \in \dot{N}\}$ og $\{\psi_n \in T(I) | n \in \dot{N}\}$, så at $\varphi_n \uparrow \varphi \geqq f\chi_I$, $\psi_n \downarrow \psi \leqq f\chi_I$, og $\int f\chi_I d\tilde{\nu} - \varepsilon \leqq \int_I \psi d\tilde{\nu} \leqq \int_I \varphi d\tilde{\nu} \leqq \int f\chi_I d\tilde{\nu} + \varepsilon$, ifølge definitionen af Lebesque-Stieltjes integralet på I. Idet vi igen udnytter sætningen ([3], II,9 p. 8), samt at sætningen ovenfor er vist for trappefunktioner, får vi: $h\varphi_n \uparrow h\varphi \geqq hf\chi_I$, $h\psi_n \downarrow h\psi \leqq hf\chi_I$, $h\varphi \in L^1_\mu(I)$ med $\int_I h\varphi d\tilde{\mu} = \lim \int_I h\varphi_n d\tilde{\mu} = \int_I \varphi d\tilde{\nu}$, og $h\psi \in L^1_\mu(I)$ med $\int_I h\psi d\tilde{\mu} = \int_I \varphi d\tilde{\nu}$. Da yderligere $\int_I (h\varphi - h\psi) d\tilde{\mu} = \int_I (\varphi - \psi) d\tilde{\nu} < 2\varepsilon$, kan vi slutte, ved en sætning vist p.1, at $hf\chi_I \in L^1_{loc,\mu}$, og at $\int f\chi_I d\tilde{\nu} - \varepsilon \leqq \int_I \psi d\tilde{\nu} = \int_I h\psi d\tilde{\mu} \leqq \int hf\chi_I d\tilde{\mu} \leqq \int_I h\varphi d\tilde{\mu}$ $= \int_I \varphi d\tilde{\nu} \leqq \int f\chi_I d\tilde{\nu} + \varepsilon$, og derfor $\int_I hf d\tilde{\mu} = \int_I f d\tilde{\nu}$.

Definition: Lad $\mu \in \mathcal{D}^{\circ\,\prime +}$, og lad M være $\mathcal{D}^\circ$ forsynet med $\| \|_{1,\mu}$ topologien; da $|\mu(f)| \leqq \mu(|f|) = \|f\|_{1,\mu}$, $\forall f \in \mathcal{D}^\circ$, vil $\mu \in M'$; da M er tæt i L^1_μ, kan μ på éntydig måde udvides til en funktional, som vi igen betegner $\mu \in L^{1\prime}_\mu$. Vi definerer for $f \in L^1_\mu$: $\int f d\tilde{\mu} = \int_{\dot{R}} f d\tilde{\mu} = \mu(f)$.

Bemærkning: Tidligere har vi kun defineret, og kun benyttet, $\int f d\tilde{\mu}$ for funktioner $f \in \bigcup \{L^1_\mu(I) \mid I \in \dot{I}\}$. Da derved $f \to \int f d\tilde{\mu}$ blev en kontinuert funktional på dette underrum af L^1_μ, forsynet med den inducerede topologi, er den nye definition virkelig en udvidelse af den tidligere. Da $f\chi_{[-n,n]} \to f$ i L^1_μ, får vi: $\int f d\tilde{\mu} = \lim_n \int_{[-n,n]} f d\tilde{\mu}$, og for $f \geqq 0$: $\int f d\tilde{\mu} = \|f\|_{1,\mu}$.

Det er først ved hjælp af denne definition, at en del af de tidligere beviste sætninger får deres egentlige indhold. F.eks.

kan vi først nu bevise, at L^2_μ er et (reelt) Hilbertrum, idet vi benytter følgende præcisering af sætningen (I,2, p. 8), at $L^{p'}_\mu$ er isomorft med L^q_μ:

<u>Sætning</u>: Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o'+}$, $1 \leqq p < \infty$, $\alpha \in L^{p'}_\mu$, $g \in L^q_\mu$, så at $\alpha(f) = \int fg d\tilde{\mu}$, $\forall f \in L^p_{0,\mu}$. Da gælder $fg \in L^1_\mu$, og $\alpha(f) = \int fg d\tilde{\mu}$, $\forall f \in L^p_\mu$.

Bevis: $fg \in L^1_\mu$, da fg er μ målelig, og $\|fg\chi_I\|_{1,\mu} \leqq \|f\chi_I\|_{p,\mu} \cdot \|g\chi_I\|_{q,\mu} \leqq \|f\|_{p,\mu} \cdot \|g\|_{q,\mu} < \infty$, $\forall I \in \dot{I}$. $\mu(fg) = \lim_n \mu(fg\chi_{[-n,n]}) = \lim_n \alpha(f\chi_{[-n,n]}) = \alpha(f)$.

<u>Sætning</u>: Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o'+}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h\cdot\mu$. $f \in L^1_\nu \Rightarrow fh \in L^1_\mu$ og $\int f d\tilde{\nu} = \int fh d\tilde{\mu}$.

Bevis: $fh\chi_I \in L^1_\mu$, og $\|fh\chi_I\|_{1,\mu} = \|f\chi_I\|_{1,\nu} \leqq \|f\|_{1,\nu} < \infty$, $\forall I \in \dot{I}$. Derfor gælder: $fh \in L^1_\mu$, og $\mu(fh) = \lim_n \mu(fh\chi_{[-n,n]})$ $\lim_n \nu(f\chi_{[-n,n]}) = \nu(f)$, da $f\chi_{[-n,n]} \in L^1_{loc,\nu}$ og $[-n,n] \in \dot{I}$, $\forall n \in \dot{N}$.

<u>Sætning</u>: Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o'+}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h\cdot\mu$. Til $\varepsilon \in \dot{R}^+$ og $I \in \dot{I} \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, I) \in \dot{R}^+$, så at $\nu(A) \leqq \varepsilon$ for enhver μ målelig og ν målelig mængde $A \subseteq I$, der opfylder $\mu(A) \leqq \delta$.

Bevis: Lad der være givet $\varepsilon > 0$ og $I \in \dot{I}$. Hvis $\mu(I) = 0$, er $\int h\chi_A d\tilde{\mu} = 0$ for vilkårlig $A \subseteq I$. Hvis $\mu(I) > 0$, $\exists n \in \dot{N}$, så at $\|h - h \wedge n\|_{1,I,\mu} < \varepsilon(2\mu(I))^{-1}$, ([3],II,9,6); for $A \subseteq I$, μ målelig og ν målelig, og $\mu(A) \leqq \delta = \varepsilon'2n)^{-1}$, gælder: $0 \leqq \nu(A) = \int \chi_A d\tilde{\nu}$ $= \int \chi_A \cdot (h \wedge n) d\tilde{\mu} + \int \chi_A (h - h \wedge n) d\tilde{\mu} \leqq n \int \chi_A d\tilde{\mu} + \varepsilon(2\mu(I))^{-1} \int \chi_A d\tilde{\mu}$ $\leqq n\mu(A) + \varepsilon(2\mu(I))^{-1}\mu(I) \leqq \varepsilon$. (Jfr. [3],II,11, p. 5-6).

2.3. <u>Definition:</u> Lad ν og $\mu \in \mathcal{D}^{o'+}$; $\nu \prec \mu$, ν er lokalt absolut kontinuert m.h.t. μ, hvis der til $\varepsilon \in \dot{R}^+$ og $I \in \dot{I} \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, I) \in \dot{R}^+$, så at $\nu(A) \leqq \varepsilon$ for enhver mængde $A \subseteq I$, der er foreningsmængde af endeligt mange intervaller og opfylder $\mu(A) \leqq \delta$.

Følgende to sætninger følger direkte af definitionen og af den foregående sætning:

Sætning: Antag μ og $\nu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$; $\nu \prec \mu$, hvis der $\exists$ $n \in \dot{N}$, så $\nu \leqq n\mu$.

Sætning Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h\cdot\mu$. $\nu \prec \mu$.

Definition: Lad ν og $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$; ν er nulmængde tro m.h.t. μ, hvis enhver μ nulmængde også er en ν nulmængde. d.v.s. hvis $\chi_A \in L^1_\mu$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \chi_A \in L^1_\nu$, $\nu(A) = 0$.

Sætning: Antag ν og $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$; $\nu \prec \mu \Rightarrow \nu$ er nulmængde tro m.h.t. μ.

Bevis: Lad A være givet, således at $\chi_A \in L^1_\mu$ og $\mu(A) = 0$. For $I \in \dot{I}$ og $\varepsilon > 0$ $\exists$ en relativt til I åben mængde G med $\mu(G) \leqq \delta(\varepsilon, I)$ og $A \cap I \subseteqq G \subseteqq I$ ([3], IV,2,1). Da G er foreningsmængde af højst nummererbart mange disjunkte, relativt til I åbne intervaller B_n, $G = \bigcup_n B_n$, ([3], II,8,4), gælder, for $C_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, $\chi_{C_n} \uparrow \chi_G$, $\mu(\chi_{C_n}) \leqq \mu(\chi_G) \leqq \delta$, derfor $0 \leqq \nu(\chi_G) = \lim_n \nu(\chi_{C_n}) \leqq \varepsilon$; altså er (jrf. sætningen p. 1) $\nu(A \cap I) = 0$, $\forall I \in \dot{I}$, og derfor $\chi_A \in L^1_\nu$, $\nu(A) = 0$.

Sætning: Antag $\nu, \mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, ν nulmængde tro m.h.t. μ. Enhver μ målelig mængde er ν målelig, og derfor enhver μ målelig funktion ν målelig.

Bevis: Lad A være en μ målelig mængde. Til $I \in \dot{I}$ og $n \in \dot{N}$ $\exists$ en afsluttet mængde F_n og en relativt til I åben mængde G_n, så at $F_n \subseteqq A \cap I \subseteqq G_n \subseteqq I$ og $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. For $F = \bigcup\{F_n | n \in \dot{N}\}$ og $G = \bigcap\{G_n | n \in \dot{N}\}$ gælder $F \subseteqq A \cap I \subseteqq G \subseteqq I$, og $\mu(G \setminus F) \leqq \mu(G_n \setminus F_n)$, $\forall n \in N$, altså $\mu(G \setminus F) = 0$, og derfor $\nu(G \setminus F) = 0$, $\nu(F) = \nu(G)$. Da F og G er ν målelige, er $A \cap I$ ν målelig, $\forall I \in \dot{I}$, og A ν målelig ([3], II,8,8).

2.4. Sætning: Lad ν og λ være mål på $\dot{R}$, $0 \leqq \nu \leqq \lambda$. Da $\exists g \in L^1_{loc,\lambda}$, med $0 \leqq g \leqq 1$ næsten overalt m.h.t. λ, så at

$\nu = g\cdot\lambda$ og $\lambda-\nu = (1-g)\cdot\lambda$.

Bevis: Da $|\nu(f)| \leqq \nu(|f|) \leqq \lambda(|f|) = \|f\|_{1,\lambda}$, $\forall f \in \mathcal{D}^\circ$, definerer $f \to \nu(f)$ en funktional ν' med norm $\leqq 1$ på $\mathcal{D}^\circ$ forsynet med $\| \;\|_{1,\lambda}$ topologien. ν' har da én fortsættelse til en funktional ν'' med norm $\leqq 1$ på L^1_λ. Der $\exists$ derfor $g \in L^\infty_\lambda \subseteqq L^1_{loc,\lambda}$, med $\|g\|_{\infty,\lambda} \leqq 1$, så at $\nu(f) = \lambda(fg)$, $\forall f \in \mathcal{D}^\circ$, d.v.s. så at $\nu = g\cdot\lambda$. Da g er entydigt bestemt i L^∞_λ, og da $0 \leqq \lambda-\nu \leqq \lambda$, og $(\lambda-\nu)(f) = \lambda(f(1-g))$, $\forall f \in \mathcal{D}^\circ$, og $1-g \in L^\infty_\lambda \subseteqq L^1_{loc,\lambda}$, gælder også $\lambda-\nu = (1-g)\cdot\lambda$ og $\|1-g\|_{\infty,\lambda} \leqq 1$, altså næsten overalt m.h.t. λ: $-1 \leqq \left\{\begin{matrix} g \\ 1-g\end{matrix}\right\} \leqq 1$, og derfor $0 \leqq g \leqq 1$.

Sætning: Antag, at ν og $\mu \in \mathcal{D}^{\circ\,\prime +}$, og at ν er nulmængde tro m.h.t. μ. $\exists h \in L^1_{loc,\mu}$, $0 \leqq h$, så at $\nu = h\cdot\mu$.

Bevis: Sæt $\lambda = \nu+\mu$; så er $0 \leqq \nu \leqq \lambda$ og $0 \leqq \mu = \lambda-\nu \leqq \lambda$, derfor $\exists g \in L^1_{loc,\lambda}$, med $0 \leqq g \leqq 1$ næsten overalt m.h.t. λ, så at $\nu = g\cdot\lambda$ og $\mu = (1-g)\cdot\lambda$; dette medfører, ifølge sætning p. 4, at $f \in L^1_\nu \Rightarrow fg \in L^1_\lambda$ og $\nu(f) = \lambda(fg)$, og at $f \in L^1_\mu \Rightarrow f(1-g) \in L^1_\lambda$ og $\mu(f) = \lambda(f(1-g))$. For $A = \{t \in \dot{R} | g(t) = 1\}$ og vilkårligt $I \in \dot{I}$ gælder: $A \cap I$ er λ målelig, derfor μ målelig; da $0 \leqq \chi_{A\cap I} \leqq \chi_I \in L^1_\mu$, er $\chi_{A\cap I} \in L^1_\mu$ ([3], II,9,7), og $\mu(A \cap I) = \lambda(\chi_{A\cap I}(1-g)) = 0$; A er altså en μ nulmængde, derfor en ν nulmængde og en λ nulmængde; vi kan derfor, uden at ændre noget af de i betragtning kommende integraler, ændre g således på en λ nulmængde, at vi opnår $0 \leqq g(t) < 1$, $\forall t \in \dot{R}$. Da er $h = g(1-g)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} g^n$ defineret overalt; da, for vilkårligt $I \in \dot{I}$ og $n \in \dot{N}$, g^n er λ målelig, derfor μ målelig, og $0 \leqq g^n\chi_I \leqq \chi_I \in L^1_\mu$, vil $g^n\chi_I \in L^1_\mu$, og $\mu(\chi_I\cdot(\sum_{\nu=1}^{n} g^\nu)) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda(\chi_I\cdot g^\nu\cdot(1-g)) =$

Bevis: I det foregående er vist, at d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ g), og at e) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d). Vi mangler blot at vise, at g) $\Rightarrow$ d): hvis ν opfylder g), er $\tilde{\nu} = \widetilde{h \cdot \mu}$, og derfor $\nu = h \cdot \mu$, da $\sim$ afbilder $\mathfrak{D}^{o'}$ enentydigt på dens billede i B V_{loc}.

Entydigheden af h følger af entydigheden af g (p 6), eller vises let direkte ud fra f): antag $\nu = h_1 \cdot \mu = h_2 \cdot \mu$, h_1 og $h_2 \in L^1_{loc,\mu}$; for $h = h_1 - h_2 \in L^1_{loc,\mu}$ gælder da: $\mu(fh) = 0$, $\forall f \in L^1_\nu$; for $A = \{t \in I \mid h(t) > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $I \in \dot{I}$, er χ_A sign (h) $\in L^1_\nu$, og $0 \leqq \varepsilon\mu(A) \leqq \mu(|h\chi_A|) = 0$; heraf fås let, at h (t) er nul næsten overalt m.h.t. μ.

2.6 I dette afsnit betragter vi et interval $I \in \dot{I}$ og et positivt mål μ på I, $\mu \in C'^+(I)$. Vi vil omsider bevise sætningen (jfr.I,1,12), at $L^{p'}_\mu(I)$ er isomorft med $L^q_\mu(I)$, $1 < p < \infty$, $q = p(p-1)^{-1}$. Ifølge udviklingen i I, afsnit 1.6, er det nok at vise følgende:

<u>Sætning:</u> Antag $\alpha \in L^{p'}_\mu(I)$, $\alpha_{|C(I)} \in C'^+(I)$. Der eksisterer en funktion $\tilde{\alpha} \in L^1_\mu(I)$, $\tilde{\alpha} \geqq 0$, så at $\alpha(f) = \mu(\tilde{\alpha}f)$, $\forall f \in C(I)$.

Thi en vilkårlig funktional $\in L^{p'}_\mu(I)$ er differens mellem to med positiv sammentrækning til C(I), og $\alpha(f) = \mu(\tilde{\alpha}f)$, $\forall f \in C(I)$, med $0 \leqq \tilde{\alpha} \in L^1_\mu(I)$, sikrer at $\tilde{\alpha} \in L^q$ med $\|\tilde{\alpha}\|q = \|\alpha\|$, og $\tilde{\alpha}' = \alpha$, da C(I) er tæt i $L^p_\mu(I)$.

Bevis for sætningen: $f \to \mu(f_{|I})$ definerer en funktional $\mu_u \in \mathfrak{J}^{o'+}$. $f \to \alpha(f_{|I})$ definerer en funktional $\alpha_u \in L^{p'}_{\mu_u}$, så at $\beta = \alpha_{u|\mathfrak{D}^o} \in \mathfrak{J}^{p'+}$. Lad A være en μ_u nulmængde, $A \subseteqq J \in \dot{I}$. Til $\varepsilon > 0 \ \exists \ \{\varphi_n \in \mathfrak{J}^{o+} \mid n \in \dot{N}\}$, så at $1 \geqq \varphi_n \uparrow \geqq \chi_A$, og $\mu_u(\varphi_n) \leqq \|\alpha\|^{-p}\varepsilon^p$, $\forall n \in \dot{N}$ (jfr. beviset p 1-2); $\beta(\varphi_n) = \alpha(\varphi_{n|I}) \leqq \|\alpha\| \cdot \|\varphi_{n|I}\|_{p,\mu} \leqq \|\alpha\| \cdot \|\varphi_n^p\|^{p^{-1}}_{1,\mu_u} \leqq \|\alpha\| \cdot \|\varphi_n\|^{p^{-1}}_{1,\mu_u} \leqq \varepsilon$. A er altså en β nulmængde, og β er lokalt absolut kontinuert m.h.t. μ_u. Derfor $\exists \ h \in L^1_{loc,\mu_u}$, så at $\beta(f) = \mu_u(fh)$, altså $\alpha(f_{|I}) =$

$\mu((fh)_{|I})$, $\forall f \in \mathfrak{A}^o$; for $\tilde{\alpha} = h_{|I}$ gælder: $\tilde{\alpha} \in L^1_\mu(I)$, og $\alpha(f) = \mu(f\tilde{\alpha})$, $\forall f \in C(I)$.

1. a) Vis, at $C_0'(I)$ er et vektor lattice. (Benyt f.eks. I,1, øv. 4 og øv. 3).

   b) Vis, at $\mathcal{D}^{o\,'}$ er et vektor lattice. (Vis, at $f \to \sup\{\nu(g) \mid 0 \leqq g \leqq f\}$ definerer en afbildning $\nu^+ : \mathcal{D}^{o+} \to \dot{R}^+$, så at $(\nu^+)_{|C_0(I)} = (\nu_{|C_0(I)})^+$).

2. For $F \in BV_{loc}$ defineres: $VF(t)$ = den totale variation af F over $]0,t]$, $t \geqq 0$, og = - den totale variation af F over $]t,0]$, $t < 0$.

   I [3], 11, p. 16 er defineret begrebet absolut kontinuitet for en funktion $F : I \to \dot{R}$, $I \in \dot{I}$.

   Vis, at hvis F er en funktion $\dot{R} \to \dot{R}$, og $F_{|[-n,n]}$ er absolut kontinuert på $[-n,n]$, $\forall n \in \dot{N}$, så er F kontinuert og $\in BV_{loc}$ og $VF_{|[-n,n]}$ er absolut kontinuert på $[-n,n]$; lad ν være den til VF svarende funktional $\in \mathcal{D}^{o\,'+}$; så er ν absolut kontinuert m.h.t. Lebesgue målet m.

   Hvis omvendt $\nu \in \mathcal{D}^{o\,'+}$ er absolut kontinuert m.h.t. m, så er $\tilde{\nu}_{|I}$ absolut kontinuert på I, $\forall I \in \dot{I}$.

   Giv eksempel på en begrænset, monotont voksende, kontinuert funktion, der ikke er absolut kontinuert.

   (Definer $f(t) = 0$, $t \leqq 0$, $f(t) = 1$, $t \geqq 1$, $f(t) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$, $f(t) = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{9} \leqq t \leqq \frac{2}{9}$, o.s.v., jfr. Cantors ternære mængde).

3. Lad μ være et positivt mål på $\dot{R}$, h en μ målelig funktion; vis, at $h \in L^1_{loc,\mu}$, hvis og kun hvis $hf \in L^1_\mu$, $\forall f \in \mathcal{D}^o$.

4. Antag $\nu,\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $0 \leqq h \in L^1_{loc,\mu}$, $\nu = h\cdot\mu$; vis, at en mængde $A \subseteqq \dot{R}$ er ν målelig, hvis og kun hvis $A \cap \{t \in \dot{R} | h(t) \neq 0\}$ er μ målelig.

5. Antag $\nu,\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$; vis, at $\nu \prec \mu$, hvis og kun hvis der til $g \in \mathcal{D}^{o+}$ og $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, så at $f \in \mathcal{D}^o$, $0 \leqq f \leqq g$, $\mu(f) \leqq \delta$ medfører $\nu(f) \leqq \varepsilon$.

6. Antag $\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $h \in L^1_{loc,\mu}$.
   a) $f \to \mu(hf)$ definerer en funktional $\nu = h\cdot\mu \in \mathcal{D}^{o\,\prime}$.
   b) $\lambda \in \mathcal{D}^{o\,\prime +}$, $\lambda \leqq (h\vee 0)\cdot\mu$, $\lambda \leqq (-h\wedge 0)\cdot\mu$ medfører $\lambda = 0$.
   c) $(h\cdot\mu)^+ = (h\vee 0)\cdot\mu$; $|h\cdot\mu| = |h|\cdot\mu$ (jfr. øv. 1).

§3. Idealer af kontinuerte funktioner.

En algebra A over $\dot{R}$ er en mængde, der er organiseret ved regningsarter $+ : A \times A \to A$, $\cdot : A \times A \to A$, og $\cdot : \dot{R} \times A \to A$, så at A m.h.t. + og $\cdot$ er en ring, og m.h.t. + og $\cdot$ et vektorrum over $\dot{R}$, og så at følgende aksiom er opfyldt:

$\forall_{\dot{R}} \lambda, \forall_A a,b : \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Som eksempel kan nævnes den på sædvanlig måde organiserede mængde af alle $n \times n$ matricer af reelle tal.

En normeret algebra A er en algebra forsynet med en afbildning $a \to \|a\|$, $A \to \dot{R}$, så at A's underliggende vektorrum er et normeret vektorrum, og så at:

$\underline{\forall_A\ a,b: \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|}$.

En Banachalgebra er en normeret algebra, hvis underliggende normerede vektorrum er et Banachrum.

En delmængde $\underline{i}$ af en algebra A kaldes et venstre (højre, tosidet) ideal i A, hvis $\underline{i}$ er et underrum i det underliggende vektorrum, og $\underline{i}$ er et venstre (højre, tosidet) ideal i den underliggende ring.

Det følger, at fællesmængde for en vilkårlig mængde af idealer af samme type er et ideal af samme type.

Et ideal $\underline{i}$ kaldes egentligt, hvis $\{o\} \neq \underline{i} \neq A$. $\underline{i}$ kaldes maksimalt (minimalt), hvis det er egentligt, og ethvert egentligt ideal af samme type $\underline{j} \supseteq \underline{i}$ $(\underline{j} \subseteq \underline{i})$ er $= \underline{i}$.

En homomorfi af en algebra A_1 ind i en algebra A_2 er en ring homomorfi, der samtidig er lineær. For en sådan homomorfi p er $p^{o-1}(o)$ et ideal (kernen af p), og $p(A_1)$ er isomorf med kvotient algebraen $A_1/p^{o-1}(o)$. (jfr. Mat. 2, 1961-62, AT. 1,9-10).

3.2 Lad T være et kompakt Hausdorff rum. T er da et normalt rum (T 2.20) : til ethvert par af disjunkte, afsluttede delmængder F_1 og $F_2 \subseteq T$ $\exists$ disjunkte åbne mængder G_1 og G_2, så at $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$ (T.2.17). Vi minder om, at et Hausdorff rum T er normalt, hvis og kun hvis der til et vilkårligt par af disjunkte, afsluttede delmængder A og $B \subseteq T$ $\exists$ en kontinuert afbildning $f: T \to [0,1]$, så at $f(t) = 0$ for $t \in A$ og $f(t) = 1$ for $t \in B$. (Urysohns lemma, T. 2.18).

Vi minder desuden om sætningen: Lad A være en afsluttet delmængde af et normalt rum T, f en kontinuert afbildning af A ind i et kompakt interval $I \subset \dot{R}$; der eksisterer en afbildning $g: T \to I$, så at $g_{|A} = f$. (T.2.19).

Lad $C(T) = C(T,\dot{R})$ betegne mængden af kontinuerte, reelle funktioner på T. Det forudsættes bekendt, at C(T) er en normeret algebra m.h.t. de sædvanlige regneregler: f + g er afbildningen $t \to f(t) + g(t)$, og tilsvarende, og normen $f \to \|f\| = \sup \{|f(t)| \mid t \in T\}$. Det er let at vise, at C(T) er en Banach algebra.

Det følger direkte af definitionerne, at for en vilkårlig afsluttet delmængde $A \subseteq T$ er afbildningen: $f \to f_{|A}$ en norm formindskende homomorfi af C(T) ind i C(A).

3.3 Definition: Lad t være et punkt $\in T$, A en delmængde $\subseteq T$, $\underline{i}$ en delmængde $\subseteq C(T)$; $M_t = \{f \in C(T) \mid f(t) = 0\}$; k(A) = kernen af A (ikke at sammenblande med begrebet kernen af en homomorfi !) $= \{f \in C(T) \mid f(t) = 0, \forall t \in A\} = \bigcap \{M_t \mid t \in A\}$; $h(\underline{i})$ = $\underline{i}$'s hylster $= \{t \in T \mid f(t) = 0, \forall f \in \underline{i}\} = \bigcap \{f^{o-1}(o) \mid f \in \underline{i}\}$.

den er [illegible]

Da $f \to f(t)$ for fast $t \in T$ er en kontinuert homomorfi af C(T) på den normerede algebra $\dot{R}$ over $\dot{R}$ med kernen M_t, er M_t et afsluttet ideal i C(T); for vilkårlig delmængde $A \subseteq T$ er derfor også k(A) et afsluttet ideal i C(T). Da, for $f \in C(T)$, $f^{o-1}(0)$ er en afsluttet delmængde af T, er $h(\underline{i})$ en afsluttet delmængde af T for vilkårlig delmængde $\underline{i} \subseteq C(T)$. Desuden følger direkte af definitionerne, at $A \subseteq h(k(A))$ og $\underline{i} \subseteq k(h(\underline{i}))$.

Sætning: For vilkårligt $t \in T$ er M_t et maksimalt ideal i $C(T)$.

Bevis: Lad N være et ideal $\subseteq C(T)$, så at $N \supset M_t$. Lad $f \in N \setminus M_t$, d.v.s $f(t) \neq 0$. En vilkårlig funktion $g \in C(T)$ kan skrives $g = g_1 + g_2$, hvor $g_1 = g(t)[f(t)]^{-1} f \in N$, og $g_2 \in M_t$, idet $g_1(t) = g(t)$; heraf følger, at $g \in N$, altså $N = C(T)$.

Sætning: Lad $\underline{i}$ være et ideal $\subseteq C(T)$, og B en kompakt delmængde af T, disjunkt med $h(\underline{i})$. $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$ for alle $t \in B$.

Bevis: Til $t \in B \; \exists f_t \in \underline{i}$, så at $f_t(t) \neq 0$ (ellers ville $t \in h(\underline{i})$); da vil også $(f_t)^2 \in \underline{i}$, og $|f_t|^2(t)$ er > 0; t har derfor en åben omegn V_t, så at $(f_t)^2(s)$ er > 0, $\forall s \in V_t$. $\{V_t \mid t \in B\}$ udgør en overdækning af B med åbne mængder; vi kan udvælge endelig mange punkter $t_1, \ldots, t_n$, så at $B \subseteq \cup \{V_{t_v} \mid v = 1, \ldots, n\}$. Som det søgte g kan vi benytte $\sum_{v=1}^{n} (f_{t_v})^2$.

Sætning: Til ethvert maksimalt ideal $M \subset C(T)$ eksisterer der et punkt $t \in T$, så at $M = M_t$.

Bevis: $h(M)$ kan ikke indeholde to forskellige punkter s og $t \in T$, da M_s så ville være et større, egentligt ideal (i følge Urysohns lemma indeholder $C(T)$ jo en funktion f, så at $f(s) = 0$ og $f(t) \neq 0$).

Vi antager $h(M) = \emptyset$. Vi kan da anvende den foregående sætning med $B = T$. M indeholder altså en funktion g, der er > 0 overalt; da $\frac{1}{g} \in C(T)$, vil M indeholde enhver funktion $f = \frac{f}{g} \cdot g \in C(T)$. Denne modstrid viser, at $h(M)$ består af ét punkt t.

Da M_t er det største egentlige ideal med $h(M) = \{t\}$, er $M = M_t$.

I det næste bevis får vi brug for det følgende simple topologiske

<u>Lemma</u>: Lad S og T være topologiske rum, $\{G_j \mid j \in J\}$ en mængde af åbne delmængder af S, så at $S \subseteq \bigcup \{G_j \mid j \in J\}$, og f en afbildning: $S \to T$, så at $f_{|G_j}$ er kontinuert, $\forall j \in J$. f er kontinuert.

Bevis: Lad $s \in S$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}(f(s))$; $V = (f_{|G_j})^{o-1}(\mathfrak{U}) = f^{o-1}(\mathfrak{U}) \cap G_j$ er da en omegn af s relativt til G_j og derfor, da G_j er en omegn af s, en omegn af s, og $f(V) \subseteq \mathfrak{U}$.

<u>Sætning</u>: Lad $\underline{i}$ være et ideal $\subseteq C(T)$. <u>$\underline{i}$ indeholder enhver funktion, der er nul i en omegn af $h(\underline{i})$.</u>

Bevis: Lad $f \in C(T)$, så at $h(\underline{i})$ er indeholdt i den åbne kerne A af $f^{o-1}(0)$, $h(\underline{i}) \subseteq A = \mathring{A} \subseteq \bar{A} \subseteq f^{o-1}(0)$. Vi ved, fra en tidligere sætning, at $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$, $\forall t \in B = T \setminus A$. Idet $D = g^{o-1}(0)$, er A og $T \setminus D$ åbne mængder, og $A \cup (T \setminus D) = T$, da $B \subseteq T \setminus D$. Vi definerer en funktion d ved:

$$d(t) = f(t)[g(t)]^{-1}, \ t \in T \setminus D, \ d(t) = 0, \ t \in D.$$

Da er $d_{|A} \equiv 0$, og $d_{|A}$ og $d_{|T \setminus D}$ kontinuerte, derfor $d \in C(T)$; da $f = d \cdot g$, vil $f \in \underline{i}$.

<u>Sætning: Lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal $\subseteq C(T)$. $\underline{i} = k(h(\underline{i}))$.</u>

Bevis: Da $\underline{i} \subseteq k(h(\underline{i}))$, er det nok at vise, at $\underline{i}$ indeholder enhver funktion f, der er nul i ethvert punkt, hvor samtlige funktioner i $\underline{i}$ er nul. Da $\underline{i}$ er afsluttet, er det i følge det foregående nok at vise, at vi til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ kan finde en funktion g, der er nul i en omegn af $h(\underline{i})$, og så at $\|f-g\| < \varepsilon$.

Sæt $F_1 = \{t \in T \mid |f|(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, $F_2 = \{t \in T \mid |f|(t) \geq \varepsilon\}$; da gælder $h(\underline{i}) \subseteq \mathring{F}_1 \subseteq F_1 = \bar{F}_1 \subseteq T \setminus F_2$. Til de disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 kan vi finde en funktion $d: T \to [0,1]$, så at $d(t) = 0$, $t \in F_1$, og $d(t) = 1$, $t \in F_2$. Da d er nul i en omegn af $h(\underline{i})$, vil $d \in \underline{i}$, og $g = f \cdot d$ opfylder: $g \in \underline{i}$, $f(t) = g(t)$ for

[illegible] $h(i) \subseteq f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}(]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[) \subseteq f^{-1}([-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]) = F_1$ hvilket viser at F_1 er en omegn af $h(i)$

$t \in F_2$, $|f(t)-g(t)| \leqq \varepsilon|1-d(t)| \leqq \varepsilon$ for $t \in T \setminus F_2$, altså $\|f-g\| \leqq \varepsilon$.

3.4. Sætning: Lad p være en kontinuert homomorfi af C(T) ind i en normeret algebra, og lad p's kerne være idealet $\underline{i}$. p(C(T)) er isomorf med C(h($\underline{i}$)).

Bevis: Da p er kontinuert, er $\underline{i}$ afsluttet. h($\underline{i}$) er en afsluttet delmængde af T, derfor selv et kompakt Hausdorff rum.

Da p(C(T)) er isomorf med C(T) / $\underline{i}$, er det nok at vise, at der eksisterer en homomorfi af C(T) på C(h($\underline{i}$)) med kernen $\underline{i}$.

Det er klart, at $f \to f_{|h(\underline{i})}$ definerer en homomorfi af C(T) ind i C(h($\underline{i}$)). Hvis g er kontinuert: $h(\underline{i}) \to \mathring{R}$, $\exists$ a og $b \in \mathring{R}$, så at g afbilder h($\underline{i}$) ind i [a,b]; der $\exists$ da en kontinuert afbildning $f : T \to [a,b]$, så at $f_{|h(\underline{i})} = g$. Den betragtede homomorfi afbilder altså på C(h($\underline{i}$)). Kernen af homomorfien består netop af alle funktioner, der er nul på h($\underline{i}$), er altså $= k(h(\underline{i})) = \underline{i}$, da $\underline{i}$ er afsluttet.

Mat. 6, 1962-63 K II, 3, øv. 1-4

1. Lad T være et kompakt Hausdorff rum, $A \subseteq T$; vis, at $\bar{A} = h(k(A))$.

2. Vis, at $\bigcup\{k(U) \mid U \in \mathcal{U}(t)\}$ er det mindste ideal i $C(T)$ med hylstret $\{t\}$.

3. a) Lad $A \subseteq T$ være fællesmængde for numerabelt mange åbne mængder $\subseteq T$, og lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal $\subseteq C(T)$, så at $h(\underline{i}) \subseteq A$. Vis, at $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$ for $t \notin A$.

b) Lad T være en mængde af ordinaltal med et største element Ω, og således at venstre afsnittet $V_T(\Omega)$ ikke er numerabelt, men $V_T(a)$ er numerabelt for ethvert $a < \Omega$ (jfr. T 1, øv. 1). På T defineres en topologi (ordens topologien), idet vi som basis for de åbne mængder vælger mængderne: $\{x \in T \mid x < b\}$, $\{x \in T \mid a < x\}$, $\{x \in T \mid a < x < b\}$, for vilkårlige a og $b \in T$. Vis, at T herved bliver et kompakt Hausdorff rum (udnyt, at T er velordnet). Vis, at enhver omegn af Ω indeholder over nummererbart mange elementer, og at enhver funktion $\in M_\Omega$ er nul i en omegn af Ω.

4. Vis, at mængden af kontinuerte, reelle, periodiske funktioner på $\mathbb{R}$ med samme periode $a > 0$ udgør en normeret algebra m.h.t. sædvanlig (punktvis) addition og multiplikation med skalarer, en ringe multiplikation $*$ defineret ved $f * g(x)$

$$= \int_0^a f(y)g(\overset{x-y}{y^{-1}x})dy, \text{ og normen } f \to \|f\| = \int_0^a |f(x)|dx.$$

Formuler og bevis en tilsvarende sætning om $\mathcal{D}^\circ$.

III. Begrænsede operatorer på et Hilbertrum.

1. Adjungerede operatorer.

Vi skal i denne § indlede en undersøgelse af strukturen af mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H,H)$ af <u>kontinuerte, lineære afbildninger</u> af et givet (komplekst) Hilbertrum H ind i H.

<u>Sætning:</u> <u>$\mathcal{L}$ er en Banach algebra over $\grave{C}$.</u> (jfr. II,3,1).

Bevis: For S og $T \in \mathcal{L}$ og $\lambda \in \grave{C}$ definerer vi S+T som afbildningen: $f \to S(f)+T(f)$, λS som: $f \to \lambda\cdot S(f)$, og ST som: $f \to S(T(f))$, $\forall f \in H$. Herved bliver $\mathcal{L}$ en (ikke kommutativ) algebra med enhedsoperatoren $E: f \to f$, som etelement.

I det følgende vil vi, for $S \in \mathcal{L}$ og $f \in H$, altid skrive Sf i stedet for S(f). Vi definerer endvidere, for $f \in H$ og $a \in \grave{R}$: $B(f,a) = \{g \in H \mid \|g-f\| \leqq a\}$, $B_a = B(0,a)$.

På $\mathcal{L}$ defineres en norm $S \to \|S\|$, ved <u>$\|S\| = \sup\{\|Sf\| \mid f \in B_1\}$</u> $= \inf\{\lambda \in \grave{R} \mid \forall f \in H : \|Sf\| \leqq \lambda\|f\|\}$. (At afbildningen er en norm vises let; f.eks. gælder: $\|S\| = 0 \iff \|Sf\| = 0, \forall f \in B_1$ $\iff \|Sf\| = 0, \forall f \in H \iff S = 0$, idet 0 betegner nuloperatoren: $f \to 0$; jfr. også AG III,14,9). Herved bliver $\mathcal{L}$ en normeret algebra, idet $\|ST\| = \sup\{\|STf\| \mid f \in B_1\} \leqq \sup\{\|S\|\cdot\|Tf\| \mid f \in B_1\}$ $\leqq \|S\|\cdot\|T\|$, og $\mathcal{L}$ bliver en Banach algebra; dette vises på samme måde som den sætning, at det norm-duale rum til et normeret vektorrum er et Banachrum (AG III,14,14): Lad $\{S_n \in \mathcal{L} \mid n \in \grave{N}\}$ være en fundamental følge, lad der altså til $\varepsilon > 0$ være givet $n \in \grave{N}$, så at $\|S_m - S_n\| \leqq \varepsilon$ for n og $m \in N$; da er $S_n x$ en fundamentalfølge i H, $\forall x \in H$, og derfor konvergent med en grænseværdi Sx; af $S_n(\lambda x+y) = \lambda S_n x + S_n y$ følger ved grænseovergang, at S er lineær; $\|S_n x - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for $n,m \geqq N$ og $x \in B_1$ medfører $\|Sx - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for $m \geqq N$ og $x \in B_1$, og $\|S - S_m\| \leqq \varepsilon$, $m \geqq N$, altså at S_n konvergerer mod S; da $\|S\| = \|S - S_N + S_N\| \leqq \|S - S_N\| + \|S_N\| \leqq \varepsilon + \|S_N\| < \infty$, vil $S \in \mathcal{L}$.

Bemærkning: For to vilkårlige topologiske vektorrum over $\mathbb{C}$, H og K, betegner $\mathscr{L}(H,K)$ mængden af kontinuerte, lineære afbildninger: $H \to K$; (f.eks. er $H' = \mathscr{L}(H,\mathbb{C})$). Vi har da åbenbart: $\mathscr{L}(H,K)$ er et vektorrum, $\mathscr{L}(H,H)$ er en algebra over $\mathbb{C}$; hvis H og K er normerede vektorrum, er $\mathscr{L}(H,K)$ et normeret vektorrum og $\mathscr{L}(H,H)$ en normeret algebra; hvis H er et normeret vektorrum og K et Banachrum, er $\mathscr{L}(H,K)$ et Banachrum og $\mathscr{L}(K,K)$ en Banach algebra.

1.2. For $S \in \mathscr{L}$ og $g \in H$ definerer: $f \to (Sf|g)$ en lineær funktional på H, kontinuert med norm a $\leqq \|S\| \cdot \|g\|$, da $|(Sf|g)| \leqq$
av K II,1,3
$\|Sf\| \cdot \|g\| \leqq \|S\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|$. Derfor eksisterer der et element $S^*g \in H$, med norm a $\leqq \|S\| \cdot \|g\|$, så at $(Sf|g) = (f|S^*g)$, $\forall f \in H$.

<u>Sætning</u>: <u>$S^* \in \mathscr{L}$; $S^{**} = S$; $\|S^*\| = \|S\|$.</u>

Bevis: Da $(Sf|\lambda g) = \bar{\lambda}(Sf|g) = \bar{\lambda}(f|S^*g) = (f|\lambda S^*g)$ og tilsvarende $(Sf|g+h) = (f|S^*g+S^*h)$, $\forall_{\mathbb{C}}\lambda$, $\forall_H f,g,h$, er S^* lineær; da $\|S^*g\| \leqq \|S\| \cdot \|g\|$, er $S^* \in \mathscr{L}$ med $\|S^*\| \leqq \|S\|$. Da $(f|Sg) = (S^*f|g) = (f|S^{**}g)$, $\forall_H f,g$, er $S = S^{**}$, og $\|S\| = \|S^{**}\| \leqq \|S^*\|$, altså $\|S\| = \|S^*\|$.

<u>Sætning</u>: <u>$(S+T)^* = S^*+T^*$, $(\lambda S)^* = \bar{\lambda}S^*$, $(ST)^* = T^*S^*$, $\|S^*S\| = \|S\|^2$.</u>

Bevis: De to første relationer følger af identiteten: $((\lambda S+T)f|g) = \lambda(Sf|g)+(Tf|g) = \lambda(f|S^*g)+(f|T^*g) = (f|(\bar{\lambda}S^*+T^*)g)$. $(STf|g) = (Tf|S^*g) = (f|T^*S^*g)$ viser, at $(ST)^* = T^*S^*$. Da $\|Sf\|^2 = (Sf|Sf) = (S^*Sf|f)$, gælder: $\|S\|^2 = [\sup\{\|Sf\| \mid f \in B_1\}]^2 = \sup\{\|Sf\|^2 \mid f \in B_1\} = \sup\{(S^*Sf|f) \mid f \in B_1\} \leqq \|S^*S\| \leqq \|S^*\| \cdot \|S\| = \|S\|^2$.

1.3. Definition: <u>$S \in \mathscr{L}$ er selvadjungeret, hvis $S = S^*$</u>, d.v.s. hvis $(Sf|g) = (f|Sg)$, $\forall_H f,g$.

Hvis S er selvadjungeret, er $\overline{(Sf|f)} = (f|Sf) = (Sf|f)$, altså $(Sf|f)$ reel, $\forall f \in H$.

Definition: <u>$S \geqq 0$ hvis S er selvadjungeret, og $(Sf|f) \geqq 0$</u>, $\forall_H f$. $S \geqq T$, hvis $S-T \geqq 0$.

<u>Sætning</u>: <u>De selvadjungerede operatorer $\in \mathcal{L}$ udgør et ordnet vektorrum over $\mathbb{R}$.</u>

Bevis: De selvadjungerede operatorer udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$, da afbildningen: $S \to S^*$ er konjugeret lineær.

$A \leqq B$, $B \leqq C \iff ((B-A)f|f) \geqq 0$ og $((C-B)f|f) \geqq 0$, $\forall_H f \Rightarrow ((C-A)f|f) \geqq 0$, $\forall_H f \iff A \leqq C$. $A \leqq B$, $B \leqq A$, $C = A-B$, $\Rightarrow (Cf|f) = 0$, $\forall_H f \overset{*)}{\Rightarrow} 4(Cf|g) = \sum_{n=0}^{3} i^n(C(f+i^n g)|f+i^n g) = 0 \Rightarrow C = 0$. Der er altså virkelig defineret en ordning, som umiddelbart ses at være i overensstemmelse med vektorrum strukturen: $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $A \leqq B \Rightarrow \lambda A \leqq \lambda B$, og $A \leqq B \Rightarrow A+C \leqq B+C$.

<u>Sætning</u>: <u>$A \in L$, $B \geqq 0 \Rightarrow A^*BA \geqq 0$.</u>

Bevis: A^*BA er selvadjungeret og $(A^*BAf|f) = (BAf|Af) \geqq 0$, $\forall_H f$, da $B \geqq 0$.

Heraf følger: For $A \in L$ er A^*A og $AA^* \geqq 0$; da $I \geqq 0$
$A \geqq 0 \Rightarrow A^n \geqq 0, \forall n \in \mathbb{N}$; A selvadjungeret $\Rightarrow A^{2n} \geqq 0$, $n \in \mathbb{N}$; hvis A og B er kommuterende selvadjungerede operatorer og $A \geqq 0$, så er $AB^2 \geqq 0$.

For $A \in L$ defineres <u>$\mathrm{Re}A = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $\mathrm{Im}A = \frac{1}{2i}(A-A^*)$.</u>

<u>Sætning</u>: $A \in L$ kan på én måde skrives $A = B+iC$, hvor B og C er selvadjungerede.

Bevis: $A = \mathrm{Re}A + i\,\mathrm{Im}A$ er en sådan opspaltning. $A = B+iC$, $B = B^*, C = C^* \Rightarrow A^* = B-iC$, $B = \frac{1}{2}(A+A^*) = \mathrm{Re}A$, $C = \frac{1}{2i}(A-A^*) = \mathrm{Im}A$.

Definition: <u>En operator $A \in L$ er normal, hvis $AA^* = A^*A$.</u>

<u>Sætning</u>: <u>$A \in L$ er normal, hvis og kun hvis ReA og ImA kommuterer.</u>

Bevis: Sæt $B = \mathrm{Re}A, C = \mathrm{Im}A, AA^* = A^*A \iff$

$(Cf|g) = (Cf+Cg|g) = (Cf+Cg|f+g) - (Cf+Cg|f) = (Cf+Cg|f) = -(Cg|f)$

Erstattes nu g med ig fås: $-i(Cf|g) = -i(Cg|f)$: dvs. $(Cg|f) = 0$

$(B+iC)(B-iC) = (B-iC)(B+iC) \Longleftrightarrow B^2-iBC+iCB+C^2 = B^2+iBC-iCB+C^2 \Longleftrightarrow$ $BC = CB$.

Sætning: Produktet af to selvadjungerede operatorer A og B er selvadjungeret, hvis og kun hvis A og B kommuterer.

Bevis: $A = A^*, B = B^* \Rightarrow (AB)^* = B^*A^* = BA$.

1. Vis, at $S \in \mathscr{L}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis $(Sf|f)$ er reel for alle $f \in H$.

2. Vis, at de selvadjungerede operatorer i $\mathscr{L}$ udgør et Banachrum over $\dot{R}$. Brug da $(S_n f|f) \to (Sf|f)$

3. Vis, at $A \in \mathscr{L}$ er normal, hvis og kun hvis $\|Af\| = \|A^* f\|$, $\forall f \in H$.

4. Antag, at følgen $\{S_n \in \mathscr{L} \mid n \in \dot{N}\}$ konvergerer mod $S \in \mathscr{L}$. Vis, at $\|S_n\|$ konvergerer mod $\|S\|$.

5. Lad H_1 og H_2 være Hilbertrum. Lad T være en kontinuert lineær afbildning $H_1 \to H_2$. Vis, at der eksisterer en kontinuert, lineær afbildning $T^*: H_2 \to H_1$, så at $(Tf|g) = (f|T^*g)$, $\forall f \in H_1$, $g \in H_2$. Hvilke egenskaber har afbildningen $T \to T^*$?

6. Lad H_1 og H_2 være Hilbertrum.

a) Vis, at $\{(f_1,f_2) \mid f_1 \in H_1,\ f_2 \in H_2\}$ er et Hilbertrum $H_1 \oplus H_2$ m.h.t. det indre produkt: $((f_1,f_2),(g_1,g_2)) \to (f_1|g_1) + (f_2|g_2)$, og at der eksisterer en isometri og isomorfi U_i af H_i på et afsluttet underrum $\subseteq H$, $i = 1,2$, så at $(U_1H_1)^{\perp} = U_2H_2$.

b) Bestem U_i^*, $i = 1,2$.

c) En operator $T \in \mathcal{L}(H_1 \oplus H_2,\ H_1 \oplus H_2)$ beskrives naturligt ved en matrix $\begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{Bmatrix}$, hvor $T_{ij} = U_i^* \circ T \circ U_j$.

Find omvendt T udtrykt ved matricen, og beskriv matricen for T^*.

§ 2. Spektret for en begrænset selvadjungeret operator.

Vi minder om den algebraiske definition af ringen (egentlig algebraen) $M[X]$ af polynomier over et kommutativt legeme M (vi skal her kun beskæftige os med tilfældet $M = \mathbb{R}$ og $M = \mathbb{C}$): $M[X] = \{(a_n) = \{a_n \in M \mid n = 0,1,\cdots\} \mid \exists\, N \in \mathbb{N},$ så at $a_n = 0$ for $n > N\}$, organiseret ved regnereglerne:

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$, $(a_n)\cdot(b_n) = (c_n)$,

hvor $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ (jfr AT 2,2, eller H. Cartan : Theorie des fonctions analytiques, chap. 1).

Lad L være en algebra over M med ételement E, A et element $\in L$. Til $P \in M[X]$, $P = (a_n)$, kan vi lade svare elementet $P(A) = a_0A^0 + \cdots + a_NA^N \in L$, idet vi definerer $A^0 = E$. Det følger da umiddelbart af regnereglerne, at afbildningen: $P \to P(A)$ er en homomorfi af $M[X]$ på en kommutativ delalgebra af L.

Lad f.eks. D være en delmængde af $\mathbb{C}$, $L = C(D,M)$, og A den funktion, der til $z \in D$ lader svare z. $P(A)$ bliver da sammentrækningen P_D til D af den sædvanlige polynomiums funktion, der til vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ lader svare $P(z)$. (jfr. AT 2,14). Hvis D har et fortætningspunkt i $\mathbb{C}$, vides det, at afbildningen: $P \to P_D$, $M[X] \to \mathbb{C}(D,M)$, er en isomorfi; thi en polynomiums funktion er nul i en sådan mængde, hvis og kun hvis alle koefficienter er nul.

2.2 Vi betragter i det følgende et fast Hilbertrum H, og en fast begrænset, selvadjungeret operator A på H.

Lemma: $-\|A\|\cdot E \leqq A \leqq \|A\|\cdot E$.

Bevis: Da $|(Af \mid f)| \leqq \|Af\|\cdot\|f\| \leqq \|A\|\cdot\|f\|^2$ $= (\|A\|\cdot f \mid f)$, $\forall f \in H$, gælder $(-\|A\|Ef \mid f) \leqq (Af \mid f) \leqq (\|A\|Ef \mid f)$, $\forall f \in H$.

Vi vælger et kompakt interval $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, så at $aE \leqq A \leqq bE$ (f.eks. $a = -\|A\|$, $b = \|A\|$, hvis $A \neq 0$).

Vi sammensætter isomorfien, der til $P_I \in C(I,\mathbb{C})$ lader svare

$P \in \mathring{C}[X]$ med homomorfien, der til P lader svare $P(A) \in \mathcal{L}$. Herved får vi en homomorfi p af mængden af polynomier på I på en kommutativ algebra $\subseteqq \mathcal{L}$. Da et polynomium P, for hvilket P_I kun antager reelle værdier, har reelle koefficienter, svarer et sådant til en selvadjungeret operator; heraf følger også, at $p(\overline{P}_I) = p(P_I)^*$ *)

<u>Lemma</u>: <u>Lad P være et polynomium, så at $P_I \geqq 0$. Der eksisterer polynomier Q_i, $i = 1,2,3$, så at hvert Q_i er en sum af kvadrater på polynomier $\in \mathring{R}[X]$, og så at $P(t) = Q_1(t)+(t-a)Q_2(t)+(b-t)Q_3(t)$, $\forall t \in \mathring{R}$.</u>

Bevis: Da $P(t) \geqq 0$, $t \in [a,b]$, har P reelle koefficienter, og P kan ikke have nulpunkter af ulige orden i $]a,b[$; vi har

[illegible] nulpunkter [illegible] $]a,b[$ ... nulpunkter $\leq a$ ... nulpunkter $\geq b$

derfor : $P(t) \equiv k\prod_{\lambda=1}^{l} [(t-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2]\cdot\prod_{\mu=1}^{m} (t-a+\gamma_\mu)\cdot\prod_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu+b-t)$,

hvor $k,\gamma_1,\dots\gamma_m,\delta_1,\dots,\delta_n \geqq 0$; vi omskriver: $P(t) \equiv$

$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu,\nu}\,(t-a)^{\mu}(b-t)^{\nu}\cdot Q_4(t)$, hvor $k_{\mu,\nu} \geqq 0$ og Q_4 er en sum af kvadrater; $P(t) \equiv Q_5(t)+(t-a)Q_6(t)+(b-t)Q_7(t)+(t-a)(b-t)Q_8(t)$, hvor $Q_5,\dots,Q_8$ er summer af kvadrater, idet lige potenser af $(t-a)$ og $(b-t)$ kan "opsuges" i de tilsvarende Q led. Det er altså nok at vise, at $(t-a)(b-t)$ har den ønskede form:

$$(t-a)(b-t) = (b-a)^{-1}(b-t+t-a)(t-a)(b-t) =$$
$$(t-a)[(b-a)^{-\frac{1}{2}}(b-t)]^2+(b-t)[(b-a)^{-\frac{1}{2}}(t-a)]^2.$$

<u>Sætning: $P_I \geqq 0 \Rightarrow P(A) \geqq 0$.</u>

Bevis: $I = [a,b]$ er valgt således, at $A-aE \geqq 0$ og $bE-A \geqq 0$. Ifølge lemma kan P(A) skrives: $P(A) = Q_1(A)+(A-aE)Q_2(A)+(bE-A)Q_3(A)$, hvor $Q_i(A)$ er en sum af kvadrater på selvadjungerede operatorer; sætningen følger da af en bemærkning p. 1,3.

<u>Lemma</u>: For $A \in L$ gælder: $\|A\| = \inf\{\lambda \in \mathring{R}^+ \mid A^*A \leqq \lambda^2 E\}$.

*) vi har jo $p(P_I) = p\left(\frac{P_I+\overline{P}_I}{2}\right) + i\,p\left(\frac{P_I-\overline{P}_I}{2i}\right)$, $A+iB$; da $\frac{P_I+\overline{P}_I}{2}$ og $\frac{P_I-\overline{P}_I}{2i}$ er reelle polyn. er A og B selvadjungerede d.v.s. $p(P_I)^* = (A+iB)^* = A-iB = p(\overline{P_I})$

Bevis: $A^*A \leqq \lambda^2 E \iff (A^*Af|f) \leqq \lambda^2(f|f),\ \forall f \in H \iff \|Af\|^2 \leqq \lambda^2\|f\|^2,\ \forall f \in H \iff \|A\| \leqq \lambda$.

<u>Sætning: p er norm formindskende.</u>

Bevis: For $P \in \check{C}[X]$ gælder: $0 \leqq \|P_I\|^2 - |P_I|^2 = \|P_I\|^2 - \overline{P}_I P_I$, derfor $0 \leqq \|P_I\|^2 \cdot E - p(|P_I|^2) = \|P_I\|^2 \cdot E - [P(A)]^* P(A)$, altså $\|P(A)\| \leqq \|P_I\|$. iflg. det foregående lemma

<u>Sætning: p kan på en og kun én måde udvides til en norm formindskende homomorfi, som vi igen betegner p, af $C(I,\check{C})$ ind i $\mathscr{L}$. $p(\overline{f}) = [p(f)]^*$, $\forall f \in C(I,\check{C})$.</u>

Bevis: p er en kontinuert, lineær afbildning af et tæt underrum i $C(I,\check{C})$ ind i det fuldstændige rum $\mathscr{L}$ (i følge Weierstrass' approksimationssætning). p kan da på én måde udvides til en kontinuert afbildning p af $C(I,\check{C})$ ind i $\mathscr{L}$ (I,1,10). Den udvidede afbildning er igen lineær og (ved et tilsvarende bevis) multiplikativ og opfylder $p(\overline{f}) = [p(f)]^*$; det følger let af kontinuiteten, at den udvidede afbildning også bliver norm formindskende.

<u>Sætning</u>: Der eksisterer en kompakt mængde $\sigma(A) \subseteq I$ og en isomorfi af $C(\sigma(A),\check{C})$ på en delalgebra af $\mathscr{L}$, så at, for $f \in C(I,\check{C})$, billedet af $f_{|\sigma(A)} = p(f)$; specielt gælder, at billedet af $P_{\sigma(A)} = P(A)$, og at billederne af konjugerede funktioner er adjungerede operatorer.

Bevis: Sætningen følger af sætningen og beviset II,3,p.5, idet $\sigma(A) = h(p^{o-1}(o))$.

Definition: Lad $f \in C(\sigma(A),\check{C})$; $f(A)$ er billedet af f ved den ovenfor indførte isomorfi.

<u>Sætning</u>: <u>Lad $f \in C(\sigma(A),\check{C})$. $f(A) \geqq 0 \iff f \geqq 0$.</u>

Bevis: $f \geqq 0 \Rightarrow f^{\frac{1}{2}} \in C(\sigma(A),\check{R}) \Rightarrow f(A) = [f^{\frac{1}{2}}(A)]^2 \geqq 0$. Lad os nu antage, at $f(A) \geqq 0$, og at f ikke er $\geqq 0$. Da $f(A)$ er selvadjungeret, er f reel. Da f ikkeer $\geqq 0$, er $f^- = -(f \wedge 0) \neq 0$, derfor er $0 \neq -(f^-)^3 = f(f^-)^2 < 0$, og $f(A)(f^-(A))^2 \leqq 0$, i modstrid med antagelsen $f(A) \geqq 0$.

Sætning: $\|f(A)\| = \|f\|$.

Bevis: $\|f\| \leqq \lambda \in \dot{R}^+ \iff \bar{f}\, f \leqq \lambda^2 \iff [f(A)]^* f(A) \leqq \lambda^2 E$ $\iff \|f(A)\| \leqq \lambda$, da, for $S \in \mathscr{L}$, $\|S\| = \inf\{\lambda \in \dot{R}^+ \mid S^*S \leqq \lambda^2 E\}$.

Vi sammenfatter afsnittet i

Sætning: Til en begrænset, selvadjungeret operator A på et Hilbertrum H eksisterer der en kompakt mængde $\sigma(A) \subset \dot{R}$ og en isomorfi og isometri af $C(\sigma(A),\dot{C})$ på den mindste, A og E omfattende, afsluttede delalgebra af $\mathscr{L}$, så at, for et polynomium P, $P_{\sigma(A)}$ afbildes i P(A), konjugerede funktioner afbildes i adjungerede operatorer, og så at sammentrækningen til $C(\sigma(A),\dot{R})$ er en ordens isomorfi med en algebra over $\dot{R}$ af selvadjungerede operatorer.

Bevis: Da algebraen af kontinuerte funktioner af A er isometrisk med $C(\sigma(A),\dot{C})$, er den et fuldstændigt underrum af det fuldstændige rum $\mathscr{L}$, derfor afsluttet i $\mathscr{L}$, og den er det afsluttede hylster af mængden af polynomier af A, da mængden af polynomiums funktioner $P_{\sigma(A)}$ er tæt i $C(\sigma(A),\dot{C})$. Den er derfor den mindste afsluttede delalgebra af $\mathscr{L}$, der indeholder A og E. Resten af sætningen er bevist i det foregående.

Sætning: Algebraen af kontinuerte funktioner af A er kommutativ og består af normale operatorer. Enhver begrænset operator, der kommuterer med A, kommuterer med enhver funktion af A.

Bevis: Da algebraen er isomorf med en kommutativ algebra, er den kommutativ. Dens elementer er normale, da de har kommuterende real- og imaginærdele. Hvis B kommuterer med A, kommuterer B også med ethvert polynomium i A. Sætningen følger da af

Lemma: $S_n \in \mathscr{L}$, $n \in \dot{N}$, $S_n \to S \in \mathscr{L}$, $B \in \mathscr{L}$, $BS_n = S_nB$, $\forall n \in \dot{N} \Rightarrow BS = SB$.

Bevis: Da B er begrænset, vil $BS_n \to BS$ og $S_nB \to SB$.

1.3. Definition: Lad $T \in \mathscr{L}$; T's spektrum = $\{\lambda \in \dot{C} \mid T-\lambda E$ har ingen invers i $\mathscr{L}\}$.

<u>Sætning</u>: Lad $T \in \mathscr{L}$, og antag, at der eksisterer en følge $\{S_n \in \mathscr{L} \mid n \in \grave{N}\}$, så at $\|S_n\| = 1$, $\forall n \in \grave{N}$, og $T \cdot S_n$ konvergerer mod 0. T's spektrum indeholder 0.

Bevis: Antag, at T har en invers $B \in \mathscr{L}$, $T \cdot S_n \to 0 \Rightarrow BTS_n = S_n \to 0$, i modstrid med $\|S_n\| = 1$.

<u>Sætning:</u> Lad A være en selvadjungeret operation $\in \mathscr{L}$. A's spektrum er $= \sigma(A)$.

Bevis: $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow$ funktionen f, der til $t \in \sigma(A)$ lader svare $(t-\lambda)^{-1}$, tilhører $C(\sigma(A)\grave{C}) \Rightarrow f(A) \in \mathscr{L}$ er invers til $A-\lambda E \Rightarrow \lambda \notin$ A's spektrum.

$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists\ \varphi_n \in C(\sigma(A),\grave{C})$, $\|\varphi_n\| = 1$, så at $\sup\{|\varphi_n(t)\cdot(t-\lambda)| \,\big|\, t \in \sigma(A)\} \to 0$, thi disse krav opfyldes af $\varphi_n : t \to (1-n\cdot|t-\lambda|) \vee 0$ ($t \to |\varphi_n(t)\cdot(t-\lambda)|$ har størsteværdi $(4n)^{-1}$ for $|t-\lambda| = (2n)^{-1}$) $\Rightarrow \exists\ S_n = \varphi_n(A) \in \mathscr{L}$, så at $\|S_n\| = 1$ og $(A-\lambda)S_n$ konvergerer mod $0 \Rightarrow \lambda \in$ A's spektrum.

<u>Sætning</u>: Lad A være en selvadjungeret operator $\in \mathscr{L}$, $f \in C(\sigma(A),\grave{C})$. Spektret for f(A) er $f(\sigma(A))$

Bevis: $\lambda \notin f(\sigma(A)) \Rightarrow g = (f-\lambda)^{-1} \in C(\sigma(A),\grave{C}) \Rightarrow g(A) \in \mathscr{L}$ er invers til $f(A)-\lambda E \Rightarrow \lambda \notin$ spektret for f(A).

$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \exists \varphi_n \in C(\sigma(A),\grave{C})$ så at $\|\varphi_n\| = 1$ og $\|\varphi_n(f-f(\lambda))\| \to 0$, f.eks. $\varphi_n = (1-n|f-f(\lambda)|) \vee 0 \Rightarrow$ (som før) $f(\lambda) \in f(A)$'s spektrum.

<u>Sætning</u>: Lad A være selvadjungeret $\in \mathscr{L}$, $f \in C(\sigma(A),\grave{R})$, $g \in C(f(\sigma(A)),\grave{C})$. $g \circ f(A) = g(f(A))$.

Bevis: Vi har $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$; mængden af polynomier $P_{\sigma(f(A))}$ er tæt i $C(\sigma(f(A)),\grave{C})$ (for $\sigma(f(A)) \subsetneqq I \in \grave{I}$ er mængden af polynomier P_I tæt i $C(I,\grave{C})$, og afbildningen $f \to f_{|\sigma(f(A))}$ af $C(I,\grave{C})$ på $C(\sigma(f(A)),\grave{C})$ er kontinuert). Sætningen følger ved grænseovergang af den algebraiske relation: $P_{f(\sigma(A))} \circ f(A) = P(f(A))$, idet $g_n \in C(\sigma(f(A)),\grave{C}), n = 0,1,\ldots, \|g_n - g_o\|_{\sigma(f(A))} \to$

1. Lad μ være et positivt mål på $\dot{R}$.

a) Vis, at for $f \in L^{\infty}_{\mu}$ definerer afbildningen: $g \to fg$ en operator $T_f \in \mathcal{L}_{\mu} = \mathcal{L}(L^2_{\mu}, L^2_{\mu})$; find $T_f{}^*$; find spektret for T_f.

b) Vis, at hvis f er μ målelig, og $g \to fg$ definerer en begrænset, lineær operator på L^2_{μ}, så er $f \in L^{\infty}_{\mu}$.

*c) Vis, at en begrænset operator, der kommuterer med enhver operator T_f, $f \in L^{\infty}_{\mu}$, selv har form T_f.

d) Lad m betegne Lebesgue målet, og sæt $H = L^2_m([0,1])$; til $f \in L^{\infty}_m([0,1])$ lader vi svare $S_f \in \mathcal{L}(H \oplus H, H \oplus H)$ defineret ved $S_f((g,h)) = (fg, fh)$. Vis, at operatoren $P: (f,g) \to (f,0)$, kommuterer med enhver operator af form S_f.

2. Vis, at en positiv operator har én positiv kvadratrod.

Lad $B \geq 0$, $B^2 = A$ og sæt $C = A^{\frac{1}{2}} - B$. Da $AB = B^2 B = B B^2 = BA$
er $BA^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}B$ (III, 2, 4) og derved $(A^{\frac{1}{2}}Cx|Cx) + (BCx|Cx) =$
$((A - A^{\frac{1}{2}}B + BA^{\frac{1}{2}} - B^2)x|Cx) = (0|Cx) = 0$. Da $A^{\frac{1}{2}} \geq 0$ og $B \geq 0$ følger
$(A^{\frac{1}{2}}Cx|Cx) = 0$ og $(BCx|Cx) = 0$
d.v.s. $\|(A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}Cx\|^2 = (A^{\frac{1}{2}}Cx|Cx) = 0$ og $\|B^{\frac{1}{2}}Cx\|^2 = (BCx|Cx) = 0$,
d.v.s. $A^{\frac{1}{2}}Cx = (A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}Cx = 0$ og $BCx = B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}Cx = 0$
Altså er
$\|Cx\|^2 = (C^2x|x) = (A^{\frac{1}{2}}Cx|x) - (BCx|x) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow B = A^{\frac{1}{2}}$

§ 3. Underrum og projektioner.

Lad H være et Hilbertrum. I II,1 er det vist, at for et vilkårligt afsluttet (og derfor fuldstændigt) underrum $F \subseteq H$ kan enhver vektor $h \in H$ skrives $h = f + g$, hvor $f \in F$ og $g \in F^{\perp}$. Afbildningen $h \to f$ kaldes en (ortogonal) projektion og betegnes P_F, eller blot P. P er åbenbart en lineær afbildning $H \to H$, og hvis $F \neq \{0\}$ er $\|P\| = 1$, idet $\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \geq \|Ph\|^2$ og $Pf = f$. $E - P_F = P_{F^{\perp}}$.

Lemma: Lad F og G være ortogonale underrum i H. En vilkårlig vektor $h \in H$ kan skrives $h = f + g$ med $f \in F$ og $g \in G$, hvis og kun hvis $G = F^{\perp}$ og $F = G^{\perp}$.

Bevis: Hvis $G = F^{\perp}$ og $F = G^{\perp}$, er F og G afsluttede, og muligheden af opspaltningen følger af ovenstående.

Når F og G er ortogonale, er $F \subseteq G^{\perp}$ og $G \subseteq F^{\perp}$. Lad nu $h = f + g$ være opspaltningen af en vektor $h \in F^{\perp}$; da $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \|h\|^2 = (h|f + g) = (h|g) = \|g\|^2$, er $f = 0$ og $h \in G$, dvs. $G = F^{\perp}$. På samme måde vises $F = G^{\perp}$.

For underrum G og $F \subseteq G$ i H gælder $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$; da $G^{\perp}$ er afsluttet, har vi $F \subseteq \bar{F} \subseteq F^{\perp\perp}$, og derfor $F^{\perp\perp\perp} \subseteq \bar{F}^{\perp} \subseteq F^{\perp} \subseteq F^{\perp\perp\perp}$, altså $\bar{F}^{\perp} = F^{\perp} = F^{\perp\perp\perp}$; da $h \in H$ kan skrives $h = f + g$ med $f \in \bar{F}$ og $g \in F^{\perp}$, er $\bar{F} = F^{\perp\perp}$.

For vilkårlige underrum F_ν, $\nu = 1,\dots,n$, sætter vi $F_1 + \dots + F_n$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu = \{f_1 + \dots + f_n | f_\nu \in F_\nu, \nu = 1,\dots,n\};$$
da $h \perp \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \iff h \perp F_\nu$ for $\nu = 1,\dots,n \iff h \in \bigcap\{F_\nu^{\perp} \mid \nu = 1,\dots,n\}$ er
$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu\Big)^{\perp} = \bigcap\{F_\nu^{\perp} \mid \nu = 1,\dots,n\};$$
erstatter vi her F_ν med $F_\nu^{\perp}$ og antager F_ν afsluttet, får vi $\Big(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{\perp}\Big)^{\perp} = \bigcap\{F_\nu \mid \nu = 1,\dots,n\}$, og

$(\bigcap\{F_\nu \mid \nu=1,\dots n\})^\perp = \overline{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^\perp}$. Hvis F_1 og F_2 er ortogonale afsluttede underrum, kan $h \in H$ skrives $h = f_1+f_3$ med $f_1 \in F_1$ og $f_3 \in F_1^\perp$, og $f_3 = f_2+f_0$ med $f_2 \in F_2 \subseteqq F_1^\perp$ og $f_0 = f_3-f_2 \in F_2^\perp$ og $\in F_1^\perp$, altså $h = f_0+f_1+f_2$ med $f_1+f_2 \in F_1+F_2$ og $f_0 \in F_1^\perp \cap F_2^\perp \subseteqq (F_1+F_2)^\perp$; ifølge lemmaet er da $F_1+F_2 = (F_1^\perp \cap F_2^\perp)^\perp = \overline{F_1+F_2}$, og $P_{F_1+F_2} = P_{F_1}+P_{F_2}$. For ikke ortogonale, afsluttede underrum behøver F_1+F_2 ikke at være afsluttet. For vilkårligt endeligt mange parvis ortogonale, afsluttede underrum $F_1,\dots,F_n$ fås ved induktion, at $F_1+\dots+F_n$ er afsluttet, og $P_{F_1+\dots+F_n} = P_{F_1}+\dots+P_{F_n}$.

Lad nu $\{F_i \mid i \in I\}$, hvor I er en indeksmængde, være en mængde af parvis ortogonale underrum $\subseteqq H$, og sæt for $h \in H$ og $i \in I$ $P_{F_i} h = h_i$. For en vilkårlig delmængde $J \subseteqq I$ er $h = \sum_{j\in J} h_j+g$ med $g \perp \sum_{j\in J} F_j$, og derfor $\sum_{j\in J} \|h_j\|^2 = \|h\|^2-\|g\|^2 \leqq \|h\|^2$; $\{i \in I \mid \|h_i\| \geqq n^{-1}\}$ må da være endelig for $n \in \mathbb{N}$, og $\{i \in I \mid \|h_i\| > 0\}$ endelig eller nummererbar; hvis den er nummererbar, nummererer vi dens elementer $i_1, i_2,\dots$, og får $\sum_{\nu=1}^{n} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og derfor $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2$ (Bessels ulighed); $h_{i_1}, h_{i_1}+h_{i_2},\dots$ er da en fundamentalfølge, og har en grænseværdi, som vi vil betegne $\sum_{\nu=1}^{\infty} h_{i_\nu} = \sum_{i\in I} h_i$ i det mindste afsluttede underrum F, der indeholder alle F_i. Da det indre produkt er kontinuert, er

$(\sum\{h_{i_\nu} \mid \nu \in N \text{ og } i_\nu \neq j\} \mid f) = \lim_{n\to\infty} \sum\{(h_{i_\nu} \mid f) \mid \nu = 1,\dots,n,\ i_\nu \neq j\} = 0$

for $f \in F_j$, og derfor $P_{F_j}(\sum_{i\in I} h_i) = h_j$ og $h_0 = h - \sum_{i\in I} h_i \perp F_i$ for alle $i \in I$, $h_0 \perp F$, og $P_F h = \sum_{i\in I} h_i$. Hermed er også godtgjort, at $\sum_{i\in I} h_i$ ikke afhænger af den foretagne nummerering af elementerne i $\{i \in I \mid \|h_i\| > 0\}$. $\sum_{i\in I} \|h_i\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|h_{i_\nu}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}\|^2 = \|\sum_{i\in I} h_i\|^2 = \|h\|^2-\|h_0\|^2$, og er $= \|h\|^2$, hvis og kun hvis $h_0 = 0$, $h \in F$. Vi skriver $P_F = \sum_{i\in I} P_{F_i}$.

Vi vil særligt fremhæve tilfældet, hvor alle F_i, $i \in I$, er éndimensionale, frembragt af enhedsvektorerne f_i, $F_i = \{\lambda f_i | \lambda \in \mathfrak{C}\}$. For $h \in H$ og $i \in I$ er $h - (h|f_i)f_i \perp F_i$, derfor $h_i = (h|f_i)f_i$ og $\|h_i\| = |(h|f_i)|$.

<u>Sætning</u>: Lad $\{f_i | i \in I\}$ være en mængde af parvis ortogonale, normerede vektorer i H (et ortonormalsystem), og lad F være det mindste afsluttede underrum $\subseteq H$, der indeholder alle f_i. For $h \in H$ er $(h|f_i) = 0$ for alle på nær endeligt eller nummererbart mange $i \in I$, $\sum_{i \in I} |(h|f_i)|^2 \leqq \|h\|^2$, og $\sum_{i\in I} (h|f_i)f_i$ er konvergent med summen $P_F h$.

Følgende betingelser er ækvivalente:

1) $F = H$, 2) $h = \sum_{i\in I} (h|f_i)f_i$ for alle $h \in H$, 3) $(h|g) = \sum_{i\in I} (h|f_i)(f_i|g)$ for alle $h,g \in H$, 4) $\|h\|^2 = \sum_{i\in I} |(h|f_i)|^2$ for alle $h \in H$. (Parsevals relation).

Bevis: Første del og ækvivalensen af 1), 2) og 4) er vist; 2) $\Rightarrow$ 3) på grund af kontinuiteten af det indre produkt, og 4) er specialtilfældet $g = h$ af 3).

3.2 <u>Lemma</u>: $P \in \mathcal{L}$ er en projektion, hvis og kun hvis $P^* = P = P^2$, P er selvadjungeret og idempotent.

Bevis: For et afsluttet underrum $F \subseteq H$, $P = P_F$ og $f,g \in H$ gælder $0 = (Pf|(E-P)g) = (f|(P^*-P^*P)g)$, derfor $P^* = P^*P = (P^*P)^* = P$.

Hvis $P^* = P = P^2$ sætter vi $F = \{f \in H | Pf = f\}$; for $h \in H$ er $h = Ph + (E-P)h$ med $Ph \in F$, da $PPh = Ph$, og $(E-P)h \perp F$, da $((E-P)h|f) = (h|f)-(h|P^*f) = 0$ for $f \in F$. P er altså projektionen på F.

For en projektion P og $f \in H$ gælder $\|Pf\|^2 = (Pf|Pf) = (Pf|f)$; da $0 \leqq \|Pf\|^2 \leqq \|f\|^2$, er $0 \leqq P \leqq E$; da $f \in PH \Longleftrightarrow \|f\| = \|Pf\|$, er $PH = \{f \in H | (Pf|f) = (f|f)\}$.

<u>Sætning</u>: For to projektioner P og Q er følgende betingelser ækvivalente:

1) $P \leqq Q$, 2) $PH \subseteqq QH$, 3) $(E-Q)P = 0$, 4) $P = QP$, 5) $P = PQ$.

Bevis: 1) $\Rightarrow$ 2): $f \in PH \Rightarrow (f|f) = (Pf|f) \leqq (Qf|f) \leqq (f|f) \Rightarrow (Qf|f) = (f|f) \Rightarrow f \in QH$. 2) $\Rightarrow$ 3): for $f,g \in H$ er $((E-Q)Pf|g) = (Pf|(E-Q)g) = 0$, da $PH \subseteqq QH \Rightarrow (E-Q)H = (QH)^{\perp} \subseteqq (PH)^{\perp}$. 3) $\iff$ 4) $\iff$ 5) da $(E-Q)P = 0 \iff P = QP \iff P^* = P^*Q^*$. 5) $\Rightarrow$ 1): $(Pf|f) = \|Pf\|^2 = \|PQf\|^2 \leqq \|Qf\|^2 = (Qf|f)$ for alle $f \in H$.

<u>Sætning</u>: Hvis P og Q er kommuterede projektioner, er PQ den største projektion $\leqq$ P og Q, og $P + Q - PQ$ den mindste projektion $\geqq$ P og Q.

Bevis: Da $PQ = QP$ er PQ selvadjungeret, og $PQPQ = P^2Q^2 = PQ$. $P \leqq E \Rightarrow QP \leqq Q$ og tilsvarende $\leqq P$. Hvis R er en projektion $\leqq$ P og Q, kommuterer R med P og Q, og $R = PR \leqq PQ$.

Hvis S er den mindste projektion $\geqq$ P og Q, er E-S den største projektion $\leqq$ E-P og E-Q, og $S = E-- (E-P)(E-Q) = P+Q - PQ$.

<u>Sætning</u>: En operator $A \in \mathscr{L}$ kommuterer med projektionen P, hvis og kun hvis $APH \subseteqq PH$ og $A(PH)^{\perp} \in (PH)^{\perp}$.

Bevis: $APH \subseteqq PH$ er ensbetydende med $AP = PAP$, og $A(PH)^{\perp} \subseteqq (PH)^{\perp}$ tilsvarende med $(E-P)A(E-P) = A(E-P)$, eller $PA(E-P) = 0$, $PA = PAP$. $AP = PAP$ og $PA = PAP \Rightarrow AP = PA \Rightarrow PAP = PPA = PA$ og $AP = APP = PAP$.

Hvis A er selvadjungeret, er betingelsen $APH \subseteqq PH$ tilstrækkelig, thi $AP = PAP \Rightarrow PA^* = PA^*P$.

1. Idet vi benytter betegnelserne p. 2, og antager, at I er uendelig, skal det vises, at filtret med basis $\{\{\sum_{i\in K} h_i \mid K$ er en endelig delmængde af I, $K \supseteq J\} \mid J$ er en endelig delmængde af $I\}$ er konvergent med grænseværdien $\sum_{i\in I} h_i$.

2. Lad P og P_n, $n \in \mathbb{N}$ være projektioner, og antag, at $\|P-P_n\| \to 0$, $n \to \infty$, og at PH har endelig dimension. Vis, at der $\exists$ $N \in \mathbb{N}$, så at P_nH har samme dimension som PH for $n \geq N$.

3. Lad $\{H_i \mid i \in I\}$ være en mængde af Hilbertrum. Sæt $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ $= \{x \in \prod_{i\in I} H_i \mid I_x = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ er højst nummererbar, og $\sum_{i\in I_x} \|x_i\|^2 < \infty\}$. Vis, at H er et vektorrum, og at $(x,y) \to$ $(x|y) = \sum_{i\in I_x \cap I_y} (x_i|y_i)$ er et indre produkt, m.h.t. hvilket H er et Hilbertrum. (Udnyt, at l^2 er et Hilbertrum, og Schwarz' ulighed). Vis, at $\{x \in \prod_{i\in I} H_i \mid I_x$ er endelig$\}$ er en tæt delmængde af H. H kaldes Hilbertsummen af rummene H_i; hvis I er højst nummererbar, skrives $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$. Med betegnelserne p. 2 er F isomorft med $\bigoplus_{i\in I} F_i$.

4. Et lattice L, med operationerne $\wedge$ og $\vee$, kaldes distributivt, hvis $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ og $a \wedge (b \vee c) =$ $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ for alle $a,b,c \in L$. (ex. ?) L kaldes modulært, hvis $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ for $a,b,c \in L$, $a \leq c$ (og dermed $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ for $c \leq a$). Vis, at et distributivt lattice er modulært.

Vis, at latticet af afsluttede underrum af et Hilbertrum H, med sædvanlig inclusion som partiel ordning, er distributivt, hvis og kun hvis H er éndimensionalt, og modulært, hvis og kun hvis H er endelig dimensionalt. (Brug f.eks. III, 4, øv. 4).

§ 4. Topologier på H og $\mathcal{L}$.

Da ethvert element $g \in H$ definerer en afbildning $f \to (f|g)$ af H ind i $\mathbb{C}$, og herved forskellige elementer forskellige afbildninger, kan H opfattes som en delmængde af rummet $\mathbb{C}^H = \Pi\{\mathbb{C}_f | f \in H\}$, hvor $\mathbb{C}_f = \mathbb{C}$ for alle $f \in H$, af alle afbildninger af H ind i $\mathbb{C}$. Den topologi, der induceres på H af produkttopologien på $\mathbb{C}^H$, kaldes den svage topologi; den kan også karakteriseres som den svageste topologi på H, m.h.t. hvilken alle afbildningerne $f \to (f|g)$, $f,g \in H$, er kontinuerte. Heraf følger, at den svage topologi er svagere end normtopologien, som også hyppigt betegnes den stærke topologi. Som basis for filtret af omegne af 0 i den svage topologi kan vælges mængderne $O_S = \{f \in H \mid |(f|g)| \leqq 1, \forall g \in S\}$, hvor S er en vilkårlig endelig delmængde af H. Det ses let, at kravene v1)...v6) (T.3.6.) er opfyldt, så at H forsynet med den svage topologi er et lokalt konvekst, topologisk vektorrum. (Jfr. I,2, øv. 5a)).

Hvis en følge $\{f_n \in H | n \in \mathbb{N}\}$ konvergerer mod 0 i den svage topologi ("konvergerer svagt"), vil $(f_n|g) \to 0$, $\forall g \in H$; thi omegnen af 0 bestemt ved $\{\varepsilon^{-1}g\}$, $\varepsilon > 0$, vil indeholde alle f_n fra et vist nummer. Hvis omvendt $(f_n|g) \to 0$, $\forall g \in H$, d.v.s. hvis der til $\varepsilon > 0$ og $g \in H \ \exists \ N = N(\varepsilon,g) \in \mathbb{N}$, så at $|(f_n|g)| \leqq \varepsilon$ for $n \geqq N$, og hvis S er en vilkårlig endelig delmængde af H, så vil $f_n \in O_S$ for $n \geqq \max\{N(1,g) | g \in S\}$, altså f_n konvergerer mod 0 i den svage topologi.

Hvis H ikke er endelig dimensionalt, findes der en følge $\{f_n \in H | n \in \mathbb{N}\}$, så at $(f_n|f_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m, \end{cases}$
et numerabelt "ortonormalsystem" (jfr. AG III,15,16); det følger af Bessels ulighed, at en sådan følge konvergerer svagt mod 0. Heraf ses, at den svage og den stærke topologi er for-

skellige, hvis (og åbenbart kun hvis) H ikke er endelig dimensionalt.

1.2. <u>Sætning</u>: $B_1 = \{f \in H \mid \|f\| \leqq 1\}$ er kompakt i den svage topologi.

Bevis: For $f \in H$ og $g \in B_1$ vil $(f|g) \in C_f = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqq \|f\|\}$. Idet vi opfatter H som en delmængde af $\mathbb{C}^H$, er B_1 en delmængde af $\Pi\{C_f \mid f \in H\}$; denne sidste er kompakt i produkttopologien i følge Tychonoffs sætning (T.2.14). Det er derfor nok at vise, at B_1 er en afsluttet delmængde. For vilkårlige $\lambda \in \mathbb{C}$, $f,g \in H$, er afbildningen $\alpha(\lambda,f,g):\mathbb{C}^H \to \mathbb{C}$, givet ved $\alpha(\lambda,f,g)(u) = u(\lambda f+g)-\lambda u(f)-u(g)$, kontinuert. Da delmængden $H^* \subseteqq \mathbb{C}^H$ af lineære afbildninger $H \to \mathbb{C}$ er $= \bigcap\{\alpha(\lambda,f,g)^{\circ -1}(0) \mid \lambda \in \mathbb{C}, f,g \in H\}$, er den afsluttet. For vilkårligt $f \in H$ er afbildningen $pr_f:\mathbb{C}^H \to \mathbb{C}$, givet ved $pr_f(u) = u(f)$, kontinuert. Da delmængden $B_1 \subseteqq H^*$ er $= \bigcap\{pr_f^{\circ -1}(\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqq 1\}) \mid f \in B_1\} \cap H^*$, er B_1 afsluttet.

1.3. $\mathcal{L}(H,H) = \mathcal{L}$ kan betragtes som en delmængde af H^H. Lad H_σ betegne H forsynet med den svage topologi, og H_τH forsynet med den stærke topologi. Vi vil anvende følgende betegnelser: Den ligelige topologi på $\mathcal{L}$ er topologien induceret af normen; den stærke topologi på $\mathcal{L}$ er topologien induceret af produkttopologien på $H_\tau^{\,H}$; den svage topologi på $\mathcal{L}$ er topologien induceret af produkttopologien på $H_\sigma^{\,H}$.

Som basis for filtret af omegne af 0 i den stærke topologi kan vælges mængderne $\{T \in \mathcal{L} \mid \|Tf\| \leqq 1, \forall f \in S\}$, hvor S er en vilkårlig endelig delmængde af H. Den stærke topologi kan karakteriseres som den svageste topologi, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to Tf$, $f \in H$, af $\mathcal{L}$ ind i H_τ er kontinuerte. Den er derfor svagere end den ligelige topologi.

Som basis for filtret af omegne af 0 i den svage topologi kan vælges mængderne $\{T \in \mathcal{L} \mid |(Tf|g)| \leqq 1, \forall f \in S, \forall g \in S_f\}$, hvor S er en vilkårlig endelig delmængde af H, og hvor, for hvert $f \in S$, S_f er en endelig delmængde af H. Disse mængder kan lige så godt beskrives som $\{T \in \mathscr{L} \mid |(Tf_\nu|g_\nu)| \leqq 1, \nu = 1,\dots,n\}$, hvor $n \in \dot{N}$ og $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n \in H$, idet hvert $f \in S$ skrives et antal gange, der er lig antallet af elementer i S_f. Som basismængder er det nok at benytte delsystemet af mængder $\{T \in \mathscr{L} \mid |(Th_\nu|h_\nu)| \leqq 1, \nu = 1,\dots,n\}$, hvor $n \in \dot{N}$ og $h_1,\dots,h_n \in H$; thi $\{T \in \mathscr{L} \mid |(Tf_\nu|g_\nu)| \leqq 1, \nu = 1,\dots,n\} \supseteqq \{T \in \mathscr{L} \mid |(T(f_\nu+i^\mu g_\nu)|f_\nu+i^\mu g_\nu)| \leqq 1, \nu = 1,\dots,n, \mu = 0,\dots,3\}$, idet, for vilkårlige $T \in \mathscr{L}$, $f,g \in H$, $4(Tf|g) = \sum_{\mu=0}^{3} i^\mu(T(f+i^\mu g)|f+i^\mu g)$. Den svage topologi kan karakteriseres som den svageste topologi på $\mathscr{L}$, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to Tf$, $f \in H$, af $\mathscr{L}$ ind i H_σ er kontinuert, eller som den svageste topologi på $\mathscr{L}$, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to (Tf|g)$, $f,g \in H$, af $\mathscr{L}$ ind i $\dot{C}$ er kontinuerte. Den er derfor svagere end den stærke topologi (jfr. øv. 3).

Det ses let, at $\mathscr{L}$ er et lokal konveks t, topologisk vektorrum med hensyn til hver af de omtalte topologier (jfr. T.3.6); lad os f.eks. bevise v 4) og v 6) for den svage topologi: til $f_1,\dots,f_n$, $g_1,\dots,g_n \in H$ og $T \in \mathscr{L}$ $\exists\, \lambda \in \dot{R}^+$, så at $T \in \{\lambda S \mid |(Sf_\nu|g_\nu)| \leqq 1, \nu = 1,\dots,n\}$, f.eks. $\lambda = \sup\{\|T\|\cdot\|f_\nu\|\cdot\|g_\nu\| \mid \nu = 1,\dots,n\}$; hvis $T \in \mathscr{L}$ tilhører enhver svag omegn af 0, er $|(Tf|\varepsilon^{-1}g)| \leqq 1$, $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, f,g \in H$, derfor $(Tf|g) = 0, \forall f,g \in H$, og $T = 0$.

1.4. Vi definerer $\mathscr{L}_n = \{T \in \mathscr{L} \mid \|T\| \leqq n\}$, for $n \in \dot{R}^+$.

<u>Sætning</u>: $\mathscr{L}_1$ er kompakt i den svage topologi.

Bevis: For $f \in H$ og $T \in \mathscr{L}_1$ vil $Tf \in B_f = \{g \in H \mid \|g\| \leqq \|f\|\}$; derfor er $\mathscr{L}_1 \subseteqq \Pi\{B_f \mid f \in H\}$, som er en kompakt delmængde af $H_\sigma^{\,H}$, idet B_f er en kompakt delmængde af H_σ.

Det er derfor nok at vise, at $\mathcal{L}_1$ er en afsluttet delmængde. Dette følger af, at afbildningerne $u \to u(\lambda f+g)-\lambda u(f)-u(g)$ og $u \to u(f)$ er kontinuerte $H_\sigma^H \to H_\sigma$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f,g \in H$ (jfr. beviset p.2).

Lad $\mathcal{L}_\lambda$, $\mathcal{L}_\tau$ og $\mathcal{L}_\sigma$ betegne $\mathcal{L}$ forsynet med den ligelige, henholdsvis den stærke og den svage topologi.

<u>Sætning</u>: For $B \in \mathcal{L}$ er $A \to AB$ og $A \to BA$ kontinuerte afbildninger $\mathcal{L}_\sigma \to \mathcal{L}_\sigma$.

Bevis: Lad en omegn U af 0 i den svage topologi være givet ved $\{f_1,\ldots,f_n\}$ og $\{g_1,\ldots,g_n\}$.

$A \in \{S \in \mathcal{L} \mid |(SBf_\nu|g_\nu)| \leqq 1,\ \nu = 1,\ldots,n\} \Rightarrow AB \in U$, og

$A \in \{S \in \mathcal{L} \mid |(Sf_\nu|B^*g_\nu)| \leqq 1,\ \nu = 1,\ldots,n\} \Rightarrow BA \in U$.

Bemærkning: En tilsvarende sætning gælder i den stærke topologi (jfr. øv. 2).

<u>Sætning</u>: Lad N være en vilkårlig delmængde $\subseteq \mathcal{L}$.
$N^\dagger = \{T \in \mathcal{L} \mid TA = AT,\ \forall A \in N\}$ er afsluttet i den svage topologi.

Bevis: For $A \in \mathcal{L}$ er $T \to TA-AT$ en kontinuert afbildning $\gamma_A : \mathcal{L}_\sigma \to \mathcal{L}_\sigma$. Derfor er $N^\dagger = \cap\{\gamma_A^{o-1}(0) \mid A \in N\}$ afsluttet i den svage topologi.

<u>Sætning</u>: Afbildningen $A \to A^*$ er kontinuert $\mathcal{L}_\sigma \to \mathcal{L}_\sigma$. Mængden af selvadjungerede operatorer $\in \mathcal{L}$ er svagt afsluttet.

Bevis: Kontinuiteten følger let af, at $|(A^*g|f)| \leqq 1 \Rightarrow |(Af|g)|$
$\leqq 1$. Derfor er $\beta : A \to A^*-A$, en kontinuert afbildning $\mathcal{L}_\sigma \to \mathcal{L}_\sigma$, og mængden af selvadjungerede operatorer $\in \mathcal{L} = \beta^{o-1}(0)$ er svagt afsluttet.

Bemærkning: $A \to A^*$ er ikke kontinuert $\mathcal{L}_\tau \to \mathcal{L}_\tau$ (jfr. øv. 3).

<u>Sætning</u>: Lad B være en selvadjungeret operator $\in \mathcal{L}$.
$\{A \in \mathcal{L} \mid A \geqq B\}$ og $\{A \in \mathcal{L} \mid A \leqq B\}$ er afsluttede i den svage topologi.

Bevis: Afbildningen $\alpha_f : A \to ((A-B)f|f)$ er kontinuert $\mathscr{L}_\sigma \to \mathring{C}$, derfor er $\cap\{\alpha_f^{\circ -1}(\mathring{R}^+ \cup \{0\}) | f \in H\}$ og $\cap\{\alpha_f^{\circ -1}(\mathring{R} \setminus \mathring{R}^+) | f \in H\}$ svagt afsluttede.

1.5. Definition: En delmængde N af en partielt ordnet mængde M er opad filtrerende, hvis mængderne $N_B = \{A \in N | A \geqq B\}$, $B \in N$, udgør en basis for et filter $\mathscr{F}_N$ på N. Betingelsen er åbenbart ækvivalent med følgende: til A og $B \in N$ $\exists C \in N$, så at $C \geqq A$ og $C \geqq B$. Tilsvarende defineres begrebet nedad filtrerende.

<u>Sætning</u>: Lad N være en opad filtrerende mængde af selvadjungerende operatorer $\in \mathscr{L}$. Hvis $A \in \mathscr{L}$ er en majorant for N, og A tilhører det svagt afsluttede hylster af N, så er A den mindste majorant for N, og $\mathscr{F}_N$ konvergerer mod A i den stærke topologi.

Bevis: For B selvadjungeret $\in \mathscr{L}$ er $\{S \in \mathscr{L} | S \leqq B\}$ svagt afsluttet. $S \leqq B$, $\forall S \in N$, medfører derfor $A \leqq B$, d.v.s. A er den mindste majorant for N.

Vi vælger $R \in N$. En vilkårlig omegn af A i den svage topologi vil have ikke tom fællesmængde med N_R. For $S \in N_R$ gælder: $-\|R\| \cdot E \leqq R \leqq S \leqq A \leqq \|A\| \cdot E$, derfor $0 \leqq A-S \leqq aE$ for $a \geqq \|R\|+\|A\|$, og, da produktet af to kommuterende, positive operatorer er positivt, $0 \leqq (A-S)^2 \leqq a \cdot (A-S)$.

Lad U være en omegn af A i den stærke topologi,
$U = \{T \in \mathscr{L} \,|\, \|(T-A)f_\nu\| \leqq 1,\ \nu = 1,\dots,n\}, n \in \mathring{N}, f_1,\dots,f_n \in H$;
$V = \{T \in \mathscr{L} \,\big|\, |((T-A)f_\nu | f_\nu)| \leqq a^{-1},\ \nu = 1,\dots,n\}$ er da en omegn af A i den svage topologi, derfor $\exists T \in N_R \cap V$. For $S \in N_T \subseteqq N_R$

gælder: $\|(A-S)f_\nu\|^2 = ((A-S)^2 f_\nu|f_\nu) \leqq a((A-S)f_\nu|f_\nu) \leqq a((A-T)f_\nu|f_\nu) \leqq 1$, $\nu = 1,\ldots,n$, altså $S \in U$. Vi har $N_T \subseteq U$, derfor $U \in \mathcal{F}_N$, $\mathcal{F}_N$ er finere end filtret af omegne af A i den stærke topologi, d.v.s. $\mathcal{F}_N$ konvergerer mod A i den stærke topologi.

Sætning: En opad begrænset, opad filtrerende mængde N af selvadjungerede operatorer $\in \mathscr{L}$ har én mindste majorant sup N. $\mathcal{F}_N$ konvergerer mod sup N i den stærke topologi.

Bevis: Vi vælger $R \in N$ og en majorant B for N. For $S \in N_R$ og $b = \max\{\|R\|,\|B\|\}$ gælder $-bE \leqq S \leqq bE$, derfor $\|S\| \leqq b$. Da $\{T \in \mathscr{L} \mid \|T\| \leqq b\}$ er kompakt i den svage topologi, har filtret med basis $\{N_S | S \in N_R\}$ et fortætningspunkt A, d.v.s. A tilhører det svagt afsluttede hylster af N_S $\forall S \in N_R$, og derfor det svagt afsluttede hylster af N. Da $\{C \in \mathscr{L} | C \geqq S\}$ er svagt afsluttet og $\supseteq N_S$, vil den indeholde A, d.v.s. $A \geqq S, \forall S \in N_R$. Til $T \in N \ \exists\ S \geqq T, S \in N_R$, og vi har $T \leqq S \leqq A$. Sætningen følger nu af den foregående.

En tilsvarende sætning gælder om nedad begrænsede, nedad filtrerende mængder af selvadjungerende operatorer $\in \mathscr{L}$. Den største minorant for en sådan mængde N vil vi betegne inf N.

Sætning: Lad N og P være opad begrænsede, opad filtrerende mængder af selvadjungerede operatorer $\in \mathscr{L}$.

1) $-N = \{-S|S \in N\}$ er nedad begrænset og nedad filtrerende; $\inf(-N) = -\sup(N)$.

2) For $\lambda \in \mathring{R}^+$ er $\lambda N+P = \{\lambda S+T|S \in N, T \in P\}$ opad begrænset og opad filtrerende; $\sup(\lambda N+P) = \lambda \sup N + \sup P$.

3) Antag yderligere, at $S \geqq 0$, $T \geqq 0$, og $ST = TS$, for $\forall S \in N$, $\forall T \in P$. $N \cdot P = \{ST \mid S \in N, T \in P\}$ er opad begrænset og opad filtrerende; $\sup(N \cdot P) = (\sup N) \cdot (\sup P)$.

Bevis: 3) N.P er opad filtrerende; thi $S_3 \geqq S_1$, $S_3 \geqq S_2$, $T_3 \geqq T_1$, $T_3 \geqq T_2$, $S_i \in P$, $T_i \in P$, $i = 1,2,3$, medfører $S_3T_3 \geqq S_3T_1 \geqq S_1T_1$ og tilsvarende $S_3T_3 \geqq S_2T_2$, d.v.s. at S_1T_1 og S_2T_2 har den fælles majorant $S_3T_3 \in N.P$.

Da sup N tilhører N's svagt afsluttede hylster, kommuterer sup N med $T, \forall T \in P$; tilsvarende kommuterer sup P med $S, \forall S \in N$. $S \in N, T \in P \Rightarrow ST \leqq (\sup N).(\sup P) \Rightarrow \sup(N.P) \leqq (\sup N).(\sup P)$. $S \in N$, $T \in P \Rightarrow ST \leqq \sup(N.P) \Rightarrow S.\sup P \leqq \sup(N.P)$, da $S.\sup P$ tilhører det svagt afsluttede hylster af $\{ST \mid T \in P\} \Rightarrow (\sup N).(\sup P) \leqq \sup(N.P)$.

1) og 2) vises tilsvarende.

For nedad begrænsede, nedad filtrerende mængder gælder tilsvarende sætninger.

1. Vis, at hvis en følge $\{f_n \in H \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergerer i den svage topologi mod $f \in H$, og $\|f_n\| \to \|f\|$, så konvergerer (f_n) mod f i den stærke topologi.

2. Sæt $\mathcal{L}_n = \{T \in \mathcal{L} \mid \|T\| \leq n\}$. Vi forsyner $\mathcal{L}$ med den stærke topologi. Vis, at afbildningerne $(A,B) \to AB$ og $(A,B) \to BA$, af $\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}$ ind i $\mathcal{L}$, er kontinuerte.

3. Sæt $H = l^2 = \{\{a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\} \mid \Sigma a_n^2 < \infty\}$; lad e_n betegne den følge $\in H$, der har 1 på den n'te plads, og 0 på alle andre. Lad $U_n \in \mathcal{L}$ være defineret ved $U_n x = (x \mid e_n) e_1$. Find U_n^*. Vis, at $U_n \to 0$ i den stærke topologi, men ikke i den ligelige, og at $U_n^* \to 0$ i den svage topologi, men ikke i den stærke.

4. Lad F være det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder e_1 og e_{2n}, $\forall n \in N$; lad G være det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder $e_{2n} + \lambda_n e_{2n+1}$, $\forall n \in N$, hvor $(\lambda_n) \in l^2$, og $\lambda_n > 0$, $\forall n \in N$. Vis, at det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder F og G, er l^2, men at ikke $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_{2n+1} \in l^2$ kan skrives f+g, med $f \in F$, $g \in G$. (Vis, at $\lambda_n^{-1} \|f+g\|^{-1} (f+g \mid e_{2n+1}) \to 0$).

§5. Projektionsmålet.

Vi betragter, som i § 2, en fast selvadjungeret operator $A \in \mathcal{L}$ på et Hilbertrum H, og a,b $\in \dot{R}$, a < b, så at $\sigma(A) \subseteq [a,b] = I$.

Vi har da en normformindskende ordenstro homomorfi $p: C(I,\dot{R}) \to \mathcal{L}$.

Lad f være en vilkårlig begrænset reel funktion på I. For en begrænset følge $\{\overline{f}_n \in C(I,\dot{R}) | n \in \dot{N}\}$, for hvilken $\overline{f}_n \uparrow \geqq f$, vil $\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}$ være en begrænset, opad filtrerende mængde af selvadjungerede operatorer, og derfor have en mindste majorant. Mængden af sådanne majoranter er begrænset og nedad filtrerende, idet $\sup\{p(\overline{f}_n \wedge \overline{g}_n) | n \in \dot{N}\} \leqq \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}$ og $\leqq \sup\{p(\overline{g}_n) | n \in \dot{N}\}$, og har derfor en største minorant, som vi vil betegne $\overline{p}(f)$. (Jfr. [3],II,§5). Tilsvarende defineres $\underline{p}(f)$ som $\sup\{\inf\{p(\underline{f}_n) | n \in \dot{N}\}\}$, hvor supremum tages over alle begrænsede følger $\{\underline{f}_n \in C(I,\dot{R}) | n \in \dot{N}\}$, for hvilke $\underline{f}_n \downarrow \leqq f$.

Sætning: $\underline{p}(f) \leqq \overline{p}(f)$.

Bevis: Det skal vises, at $\underline{f}_n \downarrow \leqq f, \overline{f}_n \uparrow \geqq f$, hvor $\{\underline{f}_n \in C(I,\dot{R}) | n \in \dot{N}\}$ og $\{\overline{f}_n \in C(I,\dot{R}) | n \in \dot{N}\}$ er begrænsede følger, medfører $\inf\{p(\underline{f}_n) | n \in \dot{N}\} \leqq \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}$. For $g_n = (\underline{f}_n - \overline{f}_n) \vee 0 \in C(I,\dot{R})$ gælder: $g_n \downarrow 0$, derfor $\|g_n\| \to 0$ (Dinis sætning,I,1,5), $\|p(g_n)\| \to 0$, og $\inf\{p(g_n) | n \in \dot{N}\} = 0$. $p(\underline{f}_n) \leqq p(\overline{f}_n) + p(g_n) \Rightarrow \inf\{p(\underline{f}_n) | n \in \dot{N}\} \leqq p(\underline{f}_n) \leqq p(\overline{f}_n) + p(g_n) \leqq \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\} + p(g_n)$, $\forall\, n \in \dot{N} \Rightarrow \inf\{p(\underline{f}_n) | n \in \dot{N}\} \leqq \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}$.

Sætning: $f \in C(I,\dot{R}) \Rightarrow \underline{p}(f) = \overline{p}(f) = p(f)$.

Bevis: $\overline{p}(f) \leqq p(f)$, da $f_n = f, \forall n \in \dot{N} \Rightarrow f_n \uparrow \geqq f$ og $\sup\{p(f_n) | n \in \dot{N}\} = p(f)$. Tilsvarende fås $p(f) \leqq \underline{p}(f)$.

Definition: En reel funktion f på I er p-integrabel, hvis f er begrænset, og $\underline{p}(f) = \overline{p}(f)$. I dette tilfælde sætter vi $p(f) = \underline{p}(f) = \overline{p}(f)$.

Sætning: Lad $f \geqq 0$ og $g \geqq 0$ være p-integrable funktioner på I. fg er p-integrabel, og $p(fg) = p(f)p(g)$.

Bevis: For vilkårlige følger af positive, begrænsede, kontinuerte funktioner på I $\overline{f}_n \uparrow \geqq f$ og $\overline{g}_n \uparrow \geqq g$ gælder $(\overline{f}_n\overline{g}_n) \uparrow \geqq f\cdot g$ og derfor $\overline{p}(fg) \leqq \sup\{p(\overline{f}_n\overline{g}_n) | n \in \dot{N}\} \leqq \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}\cdot\sup\{p(\overline{g}_n) \mid n \in \dot{N}\}$, og
$\overline{p}(fg) \leqq \inf \sup\{p(\overline{f}_n) | n \in \dot{N}\}\cdot\inf \sup\{p(\overline{g}_n) | n \in \dot{N}\} = \overline{p}(f)\cdot\overline{p}(g)$.
Tilsvarende fås $\underline{p}(f)\cdot\underline{p}(g) \leqq \underline{p}(fg)$.

På samme måde overføres de øvrige beviser i [3],II, §5: Mængden af p-integrable funktioner er et vektor lattice, $f \to p(f)$ er lineær og ordenstro.

Sætning: Lad f og g være reelle, p-integrable funktioner på I. fg er p-integrabel, og $p(fg) = p(f)\cdot p(g)$.

Bevis: f^+, f^-, g^+ og g^- er p-integrable, derfor også $fg = f^+g^+ - f^+g^- - f^-g^+ + f^-g^-$, og $p(fg) = p(f^+)\cdot p(g^+) - p(f^+)\cdot p(g^-) - p(f^-)\cdot p(g^+) + p(f^-)\cdot p(g^-) = (p(f^+) - p(f^-))\cdot(p(g^+) - p(g^-)) = p(f)\cdot p(g)$.

Ialt har vi:

Sætning: Der eksisterer en mængde $L_p^\infty(I,\dot{R}) \supseteqq C(I,\dot{R})$ af begrænsede, reelle funktioner på I, og en udvidelse af homomorfien $p : C(I,\dot{R}) \to \mathcal{L}$, til en afbildning, som vi igen betegner $p : L_p^\infty(I,\dot{R}) \to \mathcal{L}$, så at

1) $L_p^\infty(I,\dot{R})$ er et vektor lattice og en normeret algebra over $\dot{R}$, m.h.t. normen $f \to \|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in I\}$.

2) p er en normformindskende, ordenstro homomorfi af $L_p^\infty(I,\dot{R})$ ind i den mindste, A og E indeholdende, stærkt afsluttede delalgebra over $\dot{R}$ af $\mathcal{L}$.

Bevis: p er normformindskende følger, ligesom i § 2, af, at p er ordenstro. Da den stærke topologi på $\mathcal{L}$ er svagere end den ligelige topologi, vil den mindste, A og E indeholdende, stærkt afsluttede delalgebra over $\dot{R}$ af $\mathcal{L}$ indeholde $p(C(I,\dot{R}))$. På den anden side har vi under udvidelsen stedse kun tilføjet grænsepunkter m.h.t. den stærke topologi.

p udvides herefter, idet vi definerer $p(f + ig) = p(f) + ip(g)$ for f og $g \in L_p^\infty(I,\dot{R})$, til $L_p^\infty = L_p^\infty(I,\dot{C}) = \{f + ig \mid f,g \in L_p^\infty(I,\dot{R})\}$.

5.2 For x og $y \in H$ definerer $f \to (p(f)x|y)$ en kontinuert lineær funktional på L_p^∞, idet $|(p(f)x|y)| \leqq \|f\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$. Sammentrækningen $\nu(x,y)$ af denne funktional til $C(I,\dot{C})$ er altså et (komplekst) mål på I.

<u>Sætning</u>: $f \in L_p^\infty(I,\dot{C}) \iff$ f er begrænset og $\nu(x,x)$ integrabel, $\forall x \in H \Rightarrow \nu(x,y)(f) = (p(f)x|y)$, $\forall\, x,y \in H$.

Bevis: Det er åbenbart nok at bevise sætningen for reelle f.

Hvis f er p-integrabel, vil der til $x \in H$ og $\varepsilon \in \dot{R}^+$ $\exists$ begrænsede følger $\{\bar{f}_n \in C(I,\dot{R}) \mid n \in \dot{N}\}$, $\bar{f}_n \uparrow \geqq f$, og $\{\underline{f}_n \in C(I,\dot{R}) \mid n \in \dot{N}\}$, $\underline{f}_n \downarrow \leqq f$, så at $((\sup\{p(\bar{f}_n) \mid n \in \dot{N}\} - p(f))x|x) \leqq \varepsilon$ og $((p(f) - \inf\{p(\underline{f}_n) \mid n \in \dot{N}\})x|x) \leqq \varepsilon$, og derfor $(p(f)x|x) - \varepsilon \leqq \inf\{(p(\underline{f}_n)x|x) \mid n \in \dot{N}\} \leqq \underline{\int} f d\nu(x,x) \leqq \overline{\int} f d\nu(x,x) \leqq \sup\{(p(\bar{f}_n)x|x) \mid n \in \dot{N}\} \leqq (p(f)x|x) + \varepsilon$, d.v.s. f er $\nu(x,x)$ integrabel, og $\nu(x,x)(f) = (p(f)x|x)$.

Antag nu, at f er begrænset og $\nu(x,x)$ integrabel, $\forall x \in H$, og lad $U = \{T \in \mathcal{L} \mid |(Tx_v|x_v)| \leqq 1,\ v = 1,\dots,n\}$, $n \in \dot{N}$, $x_1,\dots,x_n \in H$, være en omegn af 0 i den svage topologi. Vi kan finde begrænsede følger $\{\bar{f}_{m,v} \in C(I,\dot{R}) \mid m \in \dot{N}\}$, $\bar{f}_{m,v} \uparrow \geqq f$, og $\{\underline{f}_{m,v} \in C(I,\dot{R}) \mid m \in \dot{N}\}$, $\underline{f}_{m,v} \downarrow \leqq f$, så at $\sup\{(p(\bar{f}_{m,v} - \underline{f}_{m,v})\, x_v|x_v) \mid m \in \dot{N}\} = ((\sup\{p(\bar{f}_{m,v}) \mid m \in \dot{N}\}$

$- \inf\{p(\underline{f}_{m,v}) \mid m \in \dot{N}\})x_v|x_v) \leqq 1$, $v = 1,\dots,n$. Vi sætter $\underline{f}_m = \underline{f}_{m,1} \vee\dots\vee \underline{f}_{m,n}$ og $\bar{f}_m = \bar{f}_{m,1}\wedge\dots\wedge \bar{f}_{m,n}$, og får $\inf\{p(\underline{f}_m) \mid m \in N\} \leqq \underline{p}(f) \leqq \bar{p}(f) \leqq \sup\{p(\bar{f}_m) \mid m \in \dot{N}\}$ og $((\bar{p}(f) - \underline{p}(f))x_v|x_v) \leqq 1$, $v = 1,\dots,n$. Vi har hermed vist, at $\bar{p}(f) - \underline{p}(f)$ tilhører en vilkårlig svag omegn af 0; da $\mathcal{L}$ er et Hausdorff rum i den svage topologi, er f p-integrabel.

$\nu(x,y)\ (f) = \sum_{n=0}^{3} i^n \nu(x + i^n y, x + i^n y)(f)$ for $f \in C(I,\dot{C})$, derfor også for $f \in L^\infty_p(I,\dot{C})$, i følge definitionen af udvidelsen af sådanne mål (I, 1, 5).

<u>Sætning:</u> Lad $\{f_n \in L^\infty_p(I,\dot{C}) \mid n \in \dot{N}\}$ være en begrænset funktionsfølge, der konvergerer punktvis mod en funktion f. $f \in L^\infty_p$, og $p(f_n)$ konvergerer mod $p(f)$ i den svage topologi, dvs. $(p(f_n)x|y) \to (p(f)x|y)$, $\forall x,y \in H$.

Bevis: For $x \in H$ vil $f \in L^\infty_{\nu(x,x)}(I,\dot{C})$, og $(p(f_n)x|x) \to (p(f)x|x) = \nu(x,x)(f)$ i følge sætningen om majoriseret konvergens([3], II, 6, 6)

<u>Sætning</u>: Lad $G \subseteq I$ have relativt til $\sigma(A)$ åben fællesmængde med $\sigma(A)$. $\chi_G \in L^\infty_p$, og $p(\chi_G) = 0$, hvis og kun hvis $G \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Bevis: $G \cap \sigma(A) = \emptyset \iff G \subseteq I\setminus\sigma(A)$. Da I er et metriskt rum, er $I\setminus\sigma(A)$ foreningsmængde af numerabelt mange afsluttede mængder F_n. I følge Urysohns lemma $\exists\ f_n \in C(I,[0,1])$, så at $f_{n|F_n} = \chi_{F_n}$, $f_{n|\sigma(A)} = 0$. For $g_n = f_1\vee\dots\vee f_n$ gælder: $g_{n|\sigma(A)} = 0$, $g_n \uparrow \chi_{I\setminus\sigma(A)} \geqq \chi_G$. $0 \leqq \underline{p}(\chi_G) \leqq \bar{p}(\chi_G) \leqq \sup\{p(g_n) \mid n \in \dot{N}\} = 0$, altså $\chi_G \in L^\infty_p$ og $p(\chi_G) = 0$.

$G \cap \sigma(A)$ åben relativt til $\sigma(A) \Rightarrow \chi_{G\cap\sigma(A)} \in L^\infty_p$; da også $\chi_{G\cap(I\setminus\sigma(A))} \in L^\infty_p$, gælder $\chi_G \in L^\infty_p$. Antag yderligere $G \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Til $t_0 \in G \cap \sigma(A)$ og $\sigma(A) \setminus (G \cap \sigma(A))\ \exists\ f \in C(\sigma(A),[0,1])$, så at $f(t_0) = 1$ og $f(t) = 0$ for $t \in \sigma(A)\setminus(G \cap \sigma(A))$. Vælg $g \in C(I,\dot{R})$, så at $g_{|\sigma(A)} = f$. $0 \leqq f(A) = p(g)\cdot E = p(g)\cdot p(\chi_{\sigma(A)}) = p(g\cdot\chi_{\sigma(A)}) \leqq p(\chi_G)$, og $0 \neq f(A)$, derfor $0 \neq p(\chi_G)$.

5.3 For $G \subseteqq I$, så at $\chi_G \in L_p^\infty$, er $p(\chi_G) = (p(\chi_G))^* = (p(\chi_G))^2$, altså $p(\chi_G)$ en projektion $P_A(G)$. Vi definerer en afbildning $P_A : \dot{R} \to \mathcal{L}$, ved: $P_A(t) = 0, t < a$, $P_A(t) = p(\chi_{[a,t]})$, $a \leqq t < b$, $P_A(t) = E, b \leqq t$. Denne funktion er voksende, og for $x \in H$ er $t \to (P_A(t)x|x)$ en monotont voksende, begrænset, reel funktion på $\dot{R}$, kontinuert fra højre, og konstant uden for et kompakt interval.

Har man omvendt givet en sådan projektions funktion, kan man konstruere et operator-integral af trappefunktioner, og en operator-Lebesgue-Stieltjes teori. Man skriver hyppigt, for $f \in L_p^\infty$, $p(f) = f(A) = \int f(t)dP_A(t)$, eller lignende. For kontinuert f kan dette integral opfattes som et Riemann-Stieltjes integral, konvergent i den ligelige topologi på $\mathcal{L}$.

1. Vis, at en vilkårlig ligeligt afsluttet algebra over $\mathring{R}$ af selvadjungerede operatorer er et vektor lattice.

2. Giv, for $H = \mathring{R}^2$, geometrisk fortolkning af ordningsrelatio-
de selvadj. operat.
nen mellem positive, selvadjungerede operatorer. Vis, at $\mathcal{L}$ ikke er et lattice m.h.t. denne ordning.

3. Vis, at L_p^∞ er en Banach algebra.

4. Lad $T \in \mathcal{L}$. Vis, at T har en invers i $\mathcal{L}$, hvis og kun hvis $\sigma(T^*T) \cup \sigma(TT^*) \subset \mathring{R}^+$.

Rettelser.

K I, 1,

3 l. 4 f.n.: $e \leqq d$ læs: $e \leqq c$.

11 l. 11 : L^r, læs: L^r, $r < \infty$.

II, 2

7 l. 7 f.n.: $\Rightarrow f \in L^1_\mu$ læs: $\Rightarrow fh \in L^1_\mu$.

øv. 4 : $h(t) = 0$ læs: $h(t) \neq 0$.

3

øv. 3 : $t \in A$ læs: $t \notin A$.

øv. 4 : $\int_0^a f(y)g(y^{-1}x)dy$ læs: $\int_0^a f(y)g(x-y)dy$.

III, 2

5 l.10 f.n.: $\Rightarrow \varphi_n$ læs: $\Rightarrow \exists\varphi_n$.

4

øv. 2 : afbildningerne (A,B)...BA læs: afbildningen $(A,B) \to AB$, men ikke $(A,B) \to BA$.

§ 6. Normale operatorer.

Lad A og B være to kommuterende selvadjungerede begrænsede operatorer på et Hilbertrum H, $N = A + iB$. Lad $a, b, c, d \in \dot{R}$ opfylde $a < b$, $c < d$, $\sigma(A) \subseteq [a,b] = I$, $\sigma(B) \subseteq [c,d] = J$; lad p_A og p_B være de tilsvarende homomorfier: $L^\infty_{p_A}(I,\mathfrak{C}) \to \mathscr{L}$ og $L^\infty_{p_B}(J,\mathfrak{C}) \to \mathscr{L}$, P_A og P_B de tilsvarende projektionsmål.

<u>Sætning</u>: $f \in L^\infty_{p_A}$, $g \in L^\infty_{p_B} \Rightarrow p_A(f)p_B(g) = p_B(g)p_A(f)$.

Bevis: Mængden af operatorer, der kommuterer med B, er svagt afsluttet og indeholder A og E, og derfor også $p_A(L^\infty_{p_A})$. Mængden af operatorer, der kommuterer med enhver operator $\in p_A(L^\infty_{p_A})$, er svagt afsluttet og indeholder B og E, derfor også $p_B(L^\infty_{p_B})$.

For $I_1 \subseteq I$, $J_1 \subseteq J$ definerer vi $P_N(I_1 \times J_1) = P_A(I_1)\cdot P_B(J_1)$ Som produkt af kommuterende projektioner er $P_N(I_1 \times J_1)$ en projektion. For $I_1, I_2 \subseteq I$, $J_1, J_2 \subseteq J$, fås: $P_N(I_1 \times J_1)\cdot P_N(I_2 \times J_2)$ $= P_A(I_1)\cdot P_A(I_2)\cdot P_B(J_1)\cdot P_B(J_2) = p_A(\chi_{I_1}\cdot\chi_{I_2})\cdot p_B(\chi_{J_1}\cdot\chi_{J_2}) =$ $P_A(I_1 \cap I_2)\cdot P_B(J_1 \cap J_2) = P_N((I_1 \times J_1) \cap (I_2 \times J_2))$, idet $(I_1 \times J_1) \cap (I_2 \times J_2) = (I_1 \cap I_2) \times (J_1 \cap J_2)$; specielt fås, at disjunkte rektangler svarer til projektioner på ortogonale underrum.

Ved linearitet udvides "Rektangel funktionen" P_N til en lineær afbildning p, der let ses også at blive multiplikativ, af algebraen og vektor latticet $T(I \times J)$ af trappefunktioner på $I \times J$ ind i $\mathscr{L}$. (Jfr. [3], V,§1). Herved svarer positiv funktion til positiv operator, idet en trappefunktion er positiv, hvis og kun hvis den har en kvadratrod, der igen er en trappefunktion. Det følger da, som p. 2,3, at p er normformindskende.

<u>Sætning</u>: Lad $\{f_n \in T(I \times J) \mid n \in \dot{N}\}$ konvergere punktvis og

monotont mod 0. $\inf\{p(f_n)|n \in \dot{N}\} = 0$.

Bevis: Det er nok at vise, at $\inf\{(p(f_n)x|x)|n \in \dot{N}\} = 0$, $\forall x \in H$. Hertil er det nok at vise, at vi til $\varepsilon \in \dot{R}^+$ og vilkårligt interval $I_1 \times J_1 \subseteq I \times J$ kan finde et kompakt interval $I_2 \times J_2 \subseteq I_1 \times J_1$, således at $(p(\chi_{I_1 \times J_1})x|x) - (p(\chi_{I_2 \times J_2})x|x) < \varepsilon$ (jfr. beviset [3], II,§4). Hertil igen er det nok, at, for $a \in I$ og $J_1 \subseteq J$, $\inf\{(p(]a,b[\times J_1)x|x)|b \in I,\ b > a\} = 0$, og tre analoge. Men $(p(]a,b[\times J_1)x|x) = (P_A(]a,b[)P_B(J_1)x|x) \to 0$ for $b \to a^+$, da sætningen om monoton konvergens gælder for p_A.

Herefter kan vi, som i §5, udføre Lesbesgue teorien: p kan udvides til en ordenstro, derfor normformindskende, lineær, multiplikativ funktional på en normeret algebra og vektor lattice L_p^∞, sådan at sætningen om monoton konvergens er opfyldt. Man skriver hyppigt $p(f) = \int f(z)dP_N(z)$, eller lignende, og sætter $p(\chi_G) = P_N(G)$ for $\chi_G \in L_p^\infty$.

6.2. For kontinuerte funktioner på $I \times J$ kan udvidelsen endog fås som et ligeligt konvergent Riemann-Stieltjes integral. Sammentrækningen af funktionen $z \to \operatorname{Re} z$ til $I \times J$ kan approksimeres ligeligt med trappefunktioner af form $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{I_\nu \times J}$, hvor $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{I_\nu}$ ligeligt approksimerer sammentrækningen til I af funktionen $x \to x$. $p\left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{I_\nu \times J}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu p_A(\chi_{I_\nu})E$ approksimerer da A i den ligelige topologi. Derfor gælder $A = \int \operatorname{Re} z \, d\, P_N(z)$; tilsvarende fås $B = \int \operatorname{Im} z \, d\, P_N(z)$, og $N = \int z \, d\, P_N(z)$, eller generelt for et polynomium i to variable Q: $Q(N,N^*) = \int Q(z,\bar{z}) \, d\, P_N(z)$.

Herefter kan man vise, som i § 2, at der eksisterer $\sigma(N) \subseteq I \times J$, så at $C(\sigma(N), \mathbb{C})$ er isomorf og isometrisk med den mindste, N, N^* og E indeholdende, ligeligt afsluttede delalgebra over $\mathbb{C}$ af $\mathscr{L}$. $\sigma(N)$ = spekret for N, og mere almindeligt: $\sigma(f(N)) = f(\sigma(N))$ for $f \in C(\sigma(N), \mathbb{C})$. Også sætningen om sammensætning af kontinuerte funktioner overføres umiddelbart.

6.3. Definition: $U \in \mathscr{L}$ er unitær, hvis $U^*U = UU^* = E$.

Det følger straks, at en unitær operator er normal, og at den er en isometri af H på H.

Sammentrækningen f af funktionen $z \to z$ til $\sigma(U)$, U unitær, må opfylde $f\overline{f} = 1$. Vi slutter:

<u>Sætning</u>: En normal operator U er unitær, hvis og kun hvis $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

§ 7. Total kontinuerte operatorer.

Definition: En operator $K \in \mathscr{L}$ er total kontinuert, hvis enhver begrænset følge $\{f_n \in H \mid n \in \mathring{N}\}$ har en delfølge (f_{n_ν}), så at (Kf_{n_ν}) er stærkt konvergent.

<u>Sætning</u>: En total kontinuert operator K afbilder en vilkårlig begrænset følge, der konvergerer svagt mod 0, i en følge, der konvergerer stærkt mod 0.

Bevis: Lad $\{f_n \in H|n \in \mathring{N}\}$ opfylde: $\|f_n\| \leqq c$, $(f_n|g) \to 0$, $\forall g \in H$. Antag, at Kf_n ikke konvergerer stærkt mod 0, d.v.s. at der $\exists\ \varepsilon > 0$ og delfølge $(g_\nu), g_\nu = f_{n_\nu}$, så at $\|Kg_\nu\| > \varepsilon, \forall \nu \in \mathring{N}$; (g_ν) har en delfølge (h_μ), $h_\mu = g_{\nu_\mu}$, så at Kh_μ konvergerer stærkt mod et element $h \in H$; $(h|h) = \lim\{(Kh_\mu|h)|\mu \in \mathring{N}\} = \lim\{(h_\mu|K^*h)|\mu \in \mathring{N}\} = 0$, da h_μ konvergerer svagt mod 0; derfor får vi $\|Kh_\mu\| \to 0$, i modstrid med, at $\|Kh_\mu\| > \varepsilon$.

<u>Lemma</u>: Lad K være en total kontinuent operator, $\lambda \in \mathring{C}$, $\lambda \neq 0$, $\{f_n \in H|n \in N\}$ et numerabelt ortonormalsystem. $((K-\lambda E)f_n)$ er ikke stærkt konvergent.

Bevis: $(K-\lambda E)f_n \to g$ i den stærke topologi $\Rightarrow f_n \to \lambda^{-1}g$, da $Kf_n \to 0$.

7.2. Vi vil lidt nærmere undersøge spekret for en operator $T \in \mathscr{L}$.

Definition: For $\lambda \in \mathring{C}$ kaldes $(T-\lambda E)^{\circ -1}(0)$ egenrummet for λ. Hvis egenrummet er $\neq \{0\}$, kaldes λ en egenværdi for T, og ethvert element $\neq 0$ i egenrummet kaldes en egenvektor svarende til λ. Dimensionen af egenrummet kaldes λ's multiplicitet.

Enhver egenværdi λ for $T \in \mathscr{L}$ tilhører spektret for T, da $(T-\lambda E)f = (T-\lambda E)0$ viser, at $T-\lambda E$ ikke engang er en-entydig.

<u>Sætning</u>: Lad N være en normal operator $\in \mathscr{L}$, $\lambda \in \mathring{C}$ et isoleret punkt af $\sigma(N)$. λ er egenværdi for N.

Bevis: I følge antagelsen har λ en omegn U, så at $U \cap \sigma(N) = \{\lambda\}$; $\chi_{\{\lambda\}} \in C(\sigma(N),\mathring{R})$, og for den tilsvarende projektion $P_N(\{\lambda\}) \neq 0$ gælder $NP_N(\{\lambda\}) = \lambda P_N(\{\lambda\})$, da $z\chi_{\{\lambda\}}(z) = \lambda\chi_{\{\lambda\}}(z)$ for $z \in \sigma(N)$. λ er derfor egenvektor for N med egenrummet $P_N(\{\lambda\})H$.

<u>Sætning</u>: Lad N være en normal operator $\in \mathscr{L}$. $\lambda \in \mathring{C}$ er fortætningspunkt for $\sigma(N)$, eller egenværdi for N med multiplicitet ∞, hvis og kun hvis der eksisterer et numerabelt ortonormalsystem $\{f_n \in H | n \in \mathring{N}\}$, så at $(N-\lambda E)f_n \to 0$ i den stærke topologi.

Bevis: Sæt $C_a = \{z \in \mathring{C} \,\big|\, |z-\lambda| < a\}$, $P_a = P_N(C_a)$.

Hvis $\lambda \in \mathring{C}$ er egenværdi for N med multiplicitet ∞, kan vi finde et numerabelt ortonormalsystem (f_n), så at $(N-\lambda E)f_n = 0 \to 0$. Antag nu, at λ er fortætningspunkt for $\sigma(N)$. Der $\exists$ da $\{a_n \in \mathring{R}^+ | n \in \mathring{N}\}$, $a_n \to 0$, så at $U_n = (C_{a_n} \setminus \overline{C_{a_{n+1}}}) \cap \sigma(N) \neq \emptyset$; vi vælger enhedsvektorer $f_n \in P_N(U_n)H \neq \{0\}$, idet $U_n \cap \sigma(N)$ er åben relativt til $\sigma(N)$ og $\neq \emptyset$(jfr. 5,4), og får herved et ortonormalsystem, for hvilket $\|(N-\lambda E)f_n\| = \|(N-\lambda E)P_N(U_n)f_n\| \leqq \|(N-\lambda E)P_N(U_n)f_n\| \leqq \|(N-\lambda E)P_N(U_n)\| \leqq \sup\{|z-\lambda| \,\big|\, z \in \sigma(N), |z-\lambda| < a_n\} \to 0$.

Hvis λ ikke er fortætningspunkt for $\sigma(N)$, og ikke er egenværdi med multiplicitet ∞, $\exists$ $a > 0$, så at $P_aH = P_N(\{\lambda\})H$, og dette rum er endelig dimensionalt. For et vilkårligt numerabelt ortonormalsystem (f_n) gælder da: $(f_n|g) \to 0$, $\forall g \in H$, specielt $(P_af_n|g) = (f_n|P_ag) \to 0$, $\forall g \in H \supseteq P_aH$, d.v.s. $P_af_n \to 0$ i den svage topologi på P_aH, og derfor i den stærke topologi, da P_aH er endelig dimensionalt. Derfor fås: $\|(N-\lambda E)f_n\|^2 = ((N^*-\bar{\lambda}E)(N-\lambda E)f_n|f_n) \geqq a^2(P_N(\mathring{C}\setminus C_a)f_n|f_n) = a^2((E-P_a)f_n|f_n) = a^2(1-\|P_af_n\|^2) \to a^2$, $(N-\lambda E)f_n$ konvergerer ikke mod 0 i den stærke topologi.

7.3. Sætning: Lad K være en total kontinuent, normal operator. $\sigma(K)$ er en højst numerabel punktmængde, der ikke har fortætningspunkt i noget punkt $\neq 0$. Ethvert punkt $\in \sigma(K)\setminus\{0\}$ er egenværdi for K med endelig multiplicitet.

Bevis: For vilkårligt $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, og vilkårligt numerabelt ortonormalsystem (f_n) er $(K-\lambda E)f_n$ ikke stærkt konvergent; λ er derfor ikke fortætningspunkt for $\sigma(K)$, og ikke egenværdi med multiplicitet ∞.

Bemærkning: De total kontinuerte operatorer kan også karakteriseres ved følgende egenskaber: $\overline{KB_1}$ er kompakt i den stærke topologi på H; K tilhører det ligeligt afsluttede hylster af mængden af begrænsede operatorer med endelig dimensionalt værdiområde. For K normal vises dette i øvelserne.

1. Vis, at en kontinuert lineær afbildning af H forsynet med den svage topologi ind i H forsynet med den stærke topologi er begrænset og afbilder på et endelig dimensionalt underrum af H.

2. Lad G være en delmængde af et fuldstændigt metrisk rum M. Vis, at $\overline{G}$ er kompakt, hvis og kun hvis ~~M~~ G for vilkårligt $\varepsilon > 0$ kan overdækkes med endeligt mange kugler med radius $\leqq \varepsilon$.

3. Definition: $K \in \mathcal{L}$ er kompakt, hvis $\overline{KB_1}$ er kompakt i den stærke topologi.
   Vis, at en kompakt operator er totalt kontinuert.
   Vis, at en operator, der kan approksimeres vilkårligt godt i den ligelige topologi med kompakte operatorer, selv er kompakt. (Brug øvelse 2.).
   Vis, at en normal, totalt kontinuert operator er kompakt.

4. Lad M være et metrisk rum, T et topologisk rum. Vis, at en afbildning $f: M \to T$ er kontinuert i et punkt $x_0 \in M$, hvis og kun hvis det, for en vilkårlig følge $\{x_n \in M \mid n \in \mathbb{N}\}$, der konvergerer mod x_0, gælder, at $f(x_n) \to f(x_0)$.

5. Vis, at filtret af omegne af 0 i den svage topologi har tællelig basis, hvis og kun hvis H er endelig dimensionalt.

Bemærkning til K III,7, øv. 5:

Øvelsen forudsætter følgende sætning (princippet om ligelig begrænsning): Lad H og K være Banachrum, $\{A_n \in \mathscr{L}(H,K) \mid n \in \mathbb{N}\}$ en følge af begrænsede lineære afbildninger af H ind i K, således at der til hvert $x \in H$ eksisterer et reelt tal $c(x)$, så at $\|A_n x\| \leqq c(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Der eksiterer da en konstant c, så at $\|A_n\| < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Det er praktisk først at bevise lemma:

Der eksisterer $C \in \mathbb{R}$, så at $\|A_n\| < C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, hvis og kun hvis der eksisterer en kugle $B = \{x \in H \mid \|x-x_0\| < a\}$, $a > 0$, og $D \in \mathbb{R}$, så at $\|A_n x\| \leqq D$ for alle $x \in B$. og $n \in \mathbb{N}$

Derefter føres beviset indirekte. Vi vælger ved induktion en følge af kugler $B(x_\nu, \rho_\nu) = \{x \in H \mid \|x-x_\nu\| < \rho_\nu\}$, og voksende følge af indices (n_ν), $\nu = 0,1,\ldots$, så at $x_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $\rho_\nu \leqq 2^{-\nu}$, $B(x_{\nu+1}, \rho_{\nu+1}) \subset B(x_\nu, \rho_\nu)$, og $\|A_{n_\nu} x\| > \nu$. For $x \in \cap\{B(x_\nu, \rho_\nu) \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ fås en modstrid.

Kap. IV. Ubegrænsede operatorer.

§ 1. Almindelige egenskaber.

Vi betragter et fast Hilbertrum H.

En (lineær) operator på H er en lineær afbildning T af et underrum $D(T) \subseteq H$ (definitionsområdet for T) ind i H. To operatorer S og T regnes for ens, hvis og kun hvis $D(S) = D(T)$ og $S(f) = T(f), \forall f \in D(S)$.

For operatorer S og T på H og $\lambda \in \mathbb{C}$ definerer vi operatorer λS, $S+T$, og ST ved: $D(\lambda S) = D(S)$, $(\lambda S)(f) = \lambda S(f)$, $\forall f \in D(\lambda S)$; $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$, $(S+T)(f) = S(f)+T(f)$, $\forall f \in D(S+T)$; $D(ST) = \{f \in D(T) | T f \in D(S)\} = D(T) \cap T^{\circ -1}(D(S))$, $(ST)(f) = S(T(f))$, $\forall f \in D(ST)$.

I det følgende skriver vi Sf i stedet for S(f).

Man bemærker, at man <u>ikke</u> kan regne på sædvanlig måde; f.eks. er OS lig sammentrækningen af 0-operatoren til D(S), altså $\neq 0$, hvis $D(S) \neq H$.

Det vises let, at $H^2 = \{(f,g) | f \in H, g \in H\}$ er et Hilbertrum m.h.t. det indre produkt: $((f_1,g_1),(f_2,g_2)) \to (f_1|f_2)+(g_1|g_2)$. (Jfr. III,1, øv. 6, og II,2). En operator S på H kan beskrives fuldstændigt ved sin graf $G(S) = \{(x,y) \in H^2 | x \in D(S),\ y = Sx\}$. $S \to G(S)$ er en enentydig afbildning af mængden af operatorer på H ind i mængden af lineære underrum i H^2. Et underrum $G \subseteq H^2$ er herved graf for en operator, hvis og kun hvis: $(x,y) \in G$ og $(x,z) \in G$ medfører $y = z$, eller ækvivalent hermed (da G er et underrum) hvis og kun hvis: $(0,y) \in G$ medfører $y = 0$.

For to operatorer S og T definerer vi: $S \subseteq T$ (S er indeholdt i T, T er en udvidelse af S), hvis $D(S) \subseteq D(T)$, og $Sf = Tf$, $\forall f \in D(S)$; da mængden af underrum af H^2 er partielt ordnet m.h.t. sædvanlig inclusion, og da $S \subseteq T$, hvis og kun hvis $G(S) \subseteq G(T)$, bliver mængden af operatorer på H partielt ordnet m.h.t. $\subseteq$.

En operator S på H kaldes afsluttet, hvis G(S) er afsluttet i den stærke topologi på H^2; da H^2 er et metriserbart rum, er G(S) afsluttet, hvis og kun hvis G(S) indeholder grænsepunkterne for alle konvergente følger af elementer $\in G(S)$; S er derfor afsluttet, hvis og kun hvis: $\{x_n \in D(S) | n \in \dot{N}\}$, $x_n \to x \in H$, $Sx_n \to y \in H$ medfører $x \in D(S)$, $Sx = y$.

En operator S kan afsluttes, hvis og kun hvis der eksisterer en operator $\bar{S}$, afslutningen af S, så at $G(\bar{S}) = \overline{G(S)}$, d.v.s. hvis og kun hvis $\overline{G(S)}$ ikke indeholder noget element af form $(0,y)$, $y \neq 0$, d.v.s. hvis og kun hvis: $\{x_n \in D(S) | n \in \dot{N}\}$, $x_n \to 0$, $Sx_n \to y$ medfører $y = 0$. Ikke alle operatorer kan afsluttes (jfr. øv. 1).

Der gælder den vigtige sætning, som vi ikke vil vise, at en afsluttet operator S, for hvilken $D(S) = H$, er begrænset, altså $\in \mathcal{L}$.

En operator S kaldes tæt defineret, hvis $\overline{D(S)} = H$.

En operator S kaldes symmetrisk, hvis $(Sx|y) = (x|Sy)$, $\forall x,y \in D(S)$.

1.2. Lad S være en tæt defineret operator på H. For vilkårligt $y \in H$ er $x \to (Sx|y)$ en lineær funktional på D(S); hvis denne funktional er kontinuert, d.v.s. hvis der eksisterer $k \in \dot{R}^+$, så at $|(Sx|y)| \leq k\|x\|$, $\forall x \in D(S)$, kan den på én måde udvides til en funktional på H (da D(S) er tæt i H), og der eksisterer ét element $S^*y \in H$, så at $(Sx|y) = (x|S^*y)$, $\forall x \in D(S)$. Herved defineres en afbildning S^*, der let ses at blive en operator. Vi har altså: $D(S^*) = \{y \in H | \exists y^* \in H$, så at $(Sx|y) = (x|y^*)$ for $\forall x \in D(S)\}$, et sådant y^* er entydigt bestemt, og $S^*y = y^*$.

Lad S være en operator på H.

Lad $V \in \mathcal{L}(H^2, H^2)$ være givet ved: $V(x,y) = (-y,x)$; da er

$(VG(S))^{\perp} = V(G(S)^{\perp})$, da $(u,v) \perp (-Sx,x)$, $\forall x \in D(S) \Longleftrightarrow$ $(v,-u) \perp (x,Sx)$, $\forall x \in D(S)$, og dette afsluttede underrum $\subseteq H^2$ er en graf, hvis og kun hvis S er tæt defineret; thi $(0,y) \perp (-Sx,x)$, $\forall x \in D(S)$, medfører $y = 0$, hvis og kun hvis $D(S)^{\perp} = \{0\}$. Hvis S er tæt defineret, er operatoren med graf $(VG(S))^{\perp}$ netop S^*, da $(u,v) \in (VG(S))^{\perp} \Longleftrightarrow 0 = ((u,v)|(-Sx,x)) = (u|-Sx)+(v|x)$, $\forall x \in D(S) \Longleftrightarrow (Sx|u) = (x|v)$, $\forall x \in D(S) \Longleftrightarrow u \in D(S^*)$, $S^*u = v$.

Det følger straks, at hvis S og T er operatorer, S tæt defineret, og $S \subseteq T$, så er $T^* \subseteq S^*$.

Antag, at S er en tæt defineret operator. $(S^*)^* = S^{**}$ er defineret, hvis og kun hvis S^* er tæt defineret, eller hvis og kun hvis $(VG(S^*))^{\perp} = (V\,V(G(S)^{\perp}))^{\perp} = (G(S)^{\perp})^{\perp} = \overline{G(S)}$ er en graf, d.v.s. hvis og kun hvis S kan afsluttes; i dette tilfælde gælder $\overline{S} = S^{**}$. Derfor er også S^{***} defineret, og $S^{***} = \overline{S^*} = S^*$.

En tæt defineret operator S er symmetrisk, hvis og kun hvis $S \subseteq S^*$; en sådan operator har altså altid en afslutning S^{**}, og denne er igen symmetrisk, da $S \subseteq S^*$ medfører $S^{**} \subseteq S^* = S^{***}$.

Hvis en operator S er enentydig, hvis altså $x \in D(S)$, $Sx = 0$ medfører $x = 0$, definerer vi en operator S^{-1}, den inverse operator til S, ved: $D(S^{-1}) = SH$, $S^{-1}Sf = f$ for $f \in D(S)$, altså $Sf \in D(S^{-1})$.

<u>Sætning</u>: Lad S være en afsluttet, symmetrisk operator og $\lambda \in \mathring{C} \setminus \mathring{R}$. $S - \lambda E$ har en invers, der er defineret på et afsluttet underrum $\subseteq H$, og opfylder $\|(S-\lambda E)^{-1}f\| \leqq |\mathrm{Im}(\lambda)|^{-1}\|f\|$, $\forall f \in D((S-\lambda E)^{-1})$.

Bevis: Sæt $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathring{R}$, og $S-\alpha E = T$; $\|(T-i\beta E)f\|^2 = (Tf|Tf) + i\beta(Tf|f) - i\beta(f|Tf) + \beta^2(f|f) = \|Tf\|^2 + \beta^2\|f\|^2 \geqq \beta^2\|f\|^2$, $\forall f \in D(T) = D(S)$; $T-i\beta E$ er derfor enentydig, og har derfor en invers, der opfylder $\|(T-i\beta E)^{-1}g\| \leqq |\beta|^{-1}\|g\|$, $\forall g \in (T-i\beta E)H$.

$y \in \overline{(T-i\beta E)H} \Rightarrow \exists\{x_n \in D(S) \mid n \in \dot{N}\}$, så at $(T-i\beta E)x_n \to y$ $\Rightarrow ((T-i\beta E)x_n)$ er en fundamentalfølge $\Rightarrow (x_n)$ er en fundamentalfølge $\Rightarrow (x_n)$ konvergerer mod et element $x \in H \Rightarrow Sx_n = (T - i\beta E)x_n + \lambda x_n \to y + \lambda x$. Da S er afsluttet, vil $x \in D(S)$, og $Sx = y + \lambda x$, $(S - \lambda E)x = y$, $y \in (T - i\beta E)H = D((S - \lambda E)^{-1})$.

Definition: En operator A er selvadjungeret, hvis A er tæt defineret, og $A = A^*$.

Spektret for en ubegrænset operator T defineres, ligesom for en begrænset operator, som $\{\lambda \in \dot{C} \mid T - \lambda E$ har en invers $\in \mathcal{L}\}$

Sætning: En selvadjungeret operator A har reelt spektrum.

Bevis: Vi skal vise, at $A - \lambda E$ har en invers $\in \mathcal{L}$, for $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$; da A specielt er symmetrisk og afsluttet, mangler vi kun at vise, at $(A - \lambda E)H$ er tæt i H: $((A - \lambda E)f|g) = 0, \forall f \in D(A) \Rightarrow g \in D(A^*)$, $A^*g = \bar{\lambda}g \Rightarrow (A - \bar{\lambda}E)g = 0 \Rightarrow g = 0$, da $A - \bar{\lambda}E$ er enentydig; $((A - \lambda E)H)^{\perp} = \{0\}$.

1.3 Antag, at A,B og A + B er tæt definerede operatorer; for $f \in D(A + B)$, $g \in D(A^* + B^*)$ fås: $((A + B)f|g) = (Af|g) + (Bf|g) = (f|A^*g + B^*g)$, og derfor $g \in D((A + B)^*)$, $(A + B)^*g = (A^* + B^*)g$; vi har vist, at $A^* + B^* \subseteq (A + B)^*$. Hvis specielt $A \in \mathcal{L}$, gælder: $B = (A + B) + (-A)$, $B^* \supseteq (A + B)^* - A^*$, $A^* + B^* \supseteq (A + B)^*$, altså $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Antag, at A,B, og AB er tæt definerede operatorer; for $f \in D(AB)$, $g \in D(B^*A^*)$ fås: $(ABf|g) = (Bf|A^*g) = (f|B^*A^*g)$, $g \in D((AB)^*)$, $(AB)^*g = B^*A^*g$; vi har vist, at $B^*A^* \subseteq (AB)^*$. Hvis specielt $A \in \mathcal{L}$, gælder $(AB)^* = B^*A^*$; thi $f \in D(B)$, $g \in D((AB)^*)$ medfører $(Bf|A^*g) = (ABf|g) = (f|(AB)^*g)$, $A^*g \in D(B^*)$, derfor $g \in D(B^*A^*)$, og $B^*A^*g = (AB)^*g$.

1. Lad m være Lebesgue målet på $\dot{R}$, $H = L^2_m(\dot{R},\dot{C})$, $g \neq 0$ en funktion $\in H$. En operator A defineres ved: $D(A) = \mathcal{D}^\circ$, $Af = f(o)\cdot g$ for $f \in D(A)$. Vis, at A ikke kan afsluttes; find A^*; bestem afslutningen af $G(A)$.

2. Vis følgende regneregler for operatorer på et Hilbertrum H: $T_1+T_2 = T_2+T_1$, $(T_1+T_2)+T_3 = T_1+(T_2+T_3)$, $OT \subseteqq O$, $(T_1\ T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$, $(T_1+T_2)T_3 = T_1T_3+T_2T_3$, $T_1(T_2+T_3) \supseteqq T_1T_2+T_1T_3$, $T_1(T_2+T_3) = T_1T_2+T_1T_3$ hvis $D(T_1) = H$; giv eksempel på operatorer, så at $T_1(T_2+T_3) \neq T_1T_2+T_1T_3$; vis, at hvis T_1 og T_2 er enentydige, er T_1T_2 enentydig og $(T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$; hvad kan man slutte om T_1 og T_2, hvis det er givet, at T_1T_2 er enentydig?

3. Lad B_1, B_2, T_1, T_2 være operatorer på et Hilbertrum H, B_1 og $B_2 \in \mathcal{L}$, så at B_i kommuterer med T_j, $i,j = 1,2$. Vis, at T_1 kommuterer med B_1+B_2 og med B_1B_2, og at B_1 kommuterer med T_1+T_2 og med T_1T_2.

4. Lad A være en symmetrisk operator. Vis, at for $n \in \dot{N}$ og $x \in D(A^n)$ er $\|Ax\|^n \leqq \|A^nx\|\cdot\|x\|^{n-1}$, og at = gælder, hvis og kun hvis x er egenvektor for A^2 eller 0, eller n = 1. Vis, at A^n er afsluttet, hvis A er afsluttet.

5. Lad A og B være operatorer, så at $AB = BA$ og $B^{-1} \in \mathcal{L}$. Vis, at A kommuterer med B^{-1}.

6.a) En operator $T \in \mathcal{L}(H \oplus H, H \oplus H)$ beskrives ved en matrix (T_{ij}), $i,j = 1,2$, hvor T_{ij} naturligt kan identificeres med en operator $\in \mathcal{L}(H,H)$ (jfr. III,1,øv. 6).

Lad for en afsluttet, tæt defineret operator S på H, P(S) betegne projektionen på G(S). Find matricen for $P(S^*)$ udtrykt ved matricen for P(S). Find matricen for P(S) udtrykt ved S. (løsning: $\begin{Bmatrix} (E+S^*S)^{-1} & S^*(E+SS^*)^{-1} \\ S(E+S^*S)^{-1} & SS^*(E+SS^*)^{-1} \end{Bmatrix}$; udnyt, at enhver vektor(f,0) kan skrives

$(f,0) = (u,Su)+(-S^*v,v)$, til at vise, at $E+S^*S$ afbilder på H).

b) Vis, at S^*S er selvadjungeret.

7. Lad S være en tæt defineret, afsluttet operator.

a) Vis, at $(x,y) \in G(S) \cap G(S_{|D(S^*S)})^{\perp} \Rightarrow x = 0$.

b) Vis, at S er afslutningen af sin sammentrækning til $D(S^*S)$.

c) Lad T være en tæt defineret, afsluttet operator, så at $T^*T = S^*S$. Vis, at $D(T) = D(S)$, og at $\|Tx\| = \|Sx\|$ for $x \in D(T)$ (S og T er metrisk ens).

8. En tæt defineret afsluttet operator N kaldes normal, hvis $N^*N \supseteq NN^*$. Vis, at N er normal, hvis og kun hvis N^* er normal, og hvis og kun hvis: $D(N)=D(N^*)$, $\|Nx\| = \|N^*x\|$ for $x \in D(N)$.

9. For en vilkårlig tæt defineret, afsluttet operator T og $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder: $(T^* - \lambda E)^{0-1}(0) = [(T - \bar{\lambda}E)D(T)]^{\perp}$.

10. Lad $\mathfrak{V}$ betegne mængden af operatorer V, så at D(V) er et afsluttet underrum i H, V er isometrisk, og $(E-V)D(V)$ er tæt i H. Lad $\mathfrak{S}$ betegne mængden af tæt definerede, symmetriske, afsluttede operatorer.

Vis, at $V \in \mathfrak{V} \Rightarrow$ V har ikke egenværdien 1, $-i(E+V)(E-V)^{-1} \in \mathfrak{S}$. Vis, at $V \to i(E+V)(E-V)^{-1}$ er en en-entydig afbildning af $\mathfrak{V}$ på $\mathfrak{S}$ med den omvendte afbildning $S \to (S+iE)(S-iE)^{-1}$ (Cayley transformering). Vis, at $S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$. Dette giver en metode til at få overblik over mængden af afsluttede, symmetriske udvidelser af en given operator $\in \mathfrak{S}$.

Vis, at $D(V)^{\perp} = (S^* + iE)^{0-1}(0)$, og $(VD(V))^{\perp} = (S^* - iE)^{0-1}(0)$. Vis, at S er selvadjungeret, hvis og kun hvis V er unitær. Dimensionerne af $D(V)^{\perp}$ og $(VD(V))^{\perp}$ kaldes defekt indices for V og for S. S har altså en selvadjungeret udvidelse, hvis og kun hvis defekt indices er lige store.

11. Lad A være en vilkårlig operator, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \in H$, så at $A^2x = \lambda^2 x$. Vis, at $x = u+v$, hvor $Au = \lambda u$ og $Av = -\lambda v$.

$u = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{\lambda}Ax)$

$v = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{\lambda}Ax)$

12. Vi betragter igen mængden $\check{S}$ af tæt definerede, afsluttede, symmetriske operatorer. Antag $S \in \check{S}$. Vis, at $(x,y) \in G(S^*) \cap G(S)^{\perp} \Rightarrow x \in D(S^{*2})$, $S^{*2}x = -x$. Vis, at $G(S^*)$ er sum af tre ortogonale underrum: $G(S)$, $\{(x,ix) \mid x \in D(S^*), S^*x = ix\}$, og $\{(x,-ix) \mid x \in D(S^*), S^*x = -ix\}$. Vis, at $D(S^*)$ er direkte sum af $D(S)$, $(S^*-iE)^{0-1}(0)$ og $(S^*+iE)^{0-1}(0)$.

Hvis $T \in \check{S}$ er en udvidelse af S, $S \subsetneqq T \subsetneqq T^* \subsetneqq S^*$, består $D(T)$ af vektorer af form $x+y+z$, $x \in D(S)$, $S^*y = iy$ $S^*z = -iz$. Vis, at til et givet y, $S^*y = iy$, findes højst ét z, $S^*z = -iz$, så at $y+z \in D(T)$ (udnyt, at alle egenværdier for T er reelle). Vis, at den herved definerede afbildning er en lineær isometri af et afsluttet underrum af $(S^*-iE)^{0-1}(0)$ ind i $(S^*+iE)^{0-1}(0)$, og at der omvendt til enhver sådan isometri svarer en udvidelse $T \supsetneqq S$, $T \in \check{S}$.

13. Udtryk den Cayley transformerede af en projektion P som linearkombination af P og $E-P$.

§2. Integration af ubegrænsede funktioner.

Lad $S_1 \subseteq \dot{R}^2$ betegne enhedscirklen: $S_1 = \{(x,\mu) \in \dot{R}^2 | x^2 + \mu^2 = 1\}$; lad $\dot{R}_\infty$ betegne foreningsmængden af $\dot{R}$ og et enkelt punkt ∞; vi forsyner $\dot{R}_\infty$ med den entydigt bestemte topologi, m.h.t. hvilken afbildningen:

$$(x,\mu) \to \begin{cases} x(1-\mu)^{-1}, & \mu \neq 1 \\ \infty & , \mu = 1, \end{cases} \qquad \text{er en homeomorfi}$$

af S_1 på $\dot{R}_\infty$. $\dot{R}_\infty$ inducerer åbenbart den sædvanlige topologi på $\dot{R}$; som basis for omegnene af ∞ kan f.eks. vælges komplementærmængderne til mængderne $K_n = \{t \in \dot{R} | \; |t| \leq n\}$, $n \in \dot{N}$. $\dot{R}_\infty$ er kompakt, og kaldes et punkts kompaktificeringen af $\dot{R}$. (Jfr. indførelsen af Riemann kuglen, Cartan: Fonctions analytique, p.90-91).

En delmængde $A \subseteq \dot{R}_\infty$ kaldes et interval, hvis A eller $\dot{R}_\infty \setminus A$ er $\subseteq \dot{R}$ og er et sædvanligt (eventuelt ubegrænset) interval i $\dot{R}$. Herefter kan vi definere mængden $T(\dot{R}_\infty, \dot{C})$ af trappefunktioner på $\dot{R}_\infty$ som mængden af endelige komplekse linearkombinationer af karakteristiske funktioner for intervaller $\subseteq \dot{R}_\infty$.

Lad der være givet en homomorfi $p: T(\dot{R}_\infty, \dot{C}) \to \mathcal{L}$, så at $p(\bar{f}) = p(f)^*$, så at $\inf\{p(f_n) | n \in \dot{N}\} = 0$ for en vilkårlig følge af trappefunktioner, der konvergerer punktvis, monotont aftagende mod 0, og så at $p(\chi_{\{\infty\}}) = 0$ og $p(\chi_{\dot{R}_\infty}) = E$. $p(\chi_{]-\infty,t]})$ er da en monotont voksende afbildning af $\dot{R}$ ind i mængden af projektioner i $\mathcal{L}$, kontinuert fra højre i den svage topologi på $\mathcal{L}$, og så at $\lim\{p(\chi_{]-\infty,t]}) | t \to -\infty\} = 0$, $\lim\{p(\chi_{]-\infty,t]}) | t \to +\infty\} = E$. Omvendt kan man ud fra en sådan funktion konstruere sig en homomorfi med de ønskede egenskaber.

p er positiv og kan under udnyttelse af den ligelige topologi på $\mathcal{L}$, udvides til $C(\dot{R}_\infty, \dot{C})$ og, under udnyttelse af den stærke topologi på $\mathcal{L}$, til en normeret algebra af begrænsede funktioner $L_p^\infty(\dot{R}_\infty,\dot{C})$, således at den udvidede afbildning p er en normformindskende homomorfi ind i $\mathcal{L}$, hvis sammentrækning til $L_p^\infty(\dot{R}_\infty,\dot{R})$ er en ordenstro afbildning af dette vektorlattice ind i mængden af selvadjungerede operatorer i $\mathcal{L}$, og således at en sætning om majoriseret konvergens er opfyldt.

En funktion $f \in C(\dot{R},\dot{C})$ kan på højst én måde udvides til en funktion $\in C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$; udvidelsen er mulig, netop hvis $\lim\{f(t)|t \to -\infty\}$ og $\lim\{f(t)\big| t \to +\infty\}$ eksisterer og er lige store; vi vil i det følgende hyppigt identificere sådanne funktioner med deres udvidelser; f.eks. vil vi betragte $\mathcal{R}^\circ(\dot{R},\dot{C})$ som en delmængde af $C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$.

For $x \in H$ definerer afbildningen $\nu(x,x):\mathcal{R}^\circ \to \dot{R}$, givet ved $\nu(x,x)(f) = (p(f)x|x)$, et positivt mål på $\dot{R}$. $L_p^\infty(\dot{R}_\infty,\dot{C})$ udgøres netop af alle begrænsede funktioner f, for hvilke $f_{|\dot{R}}$ er $\nu(x,x)$ målelig for alle $x \in H$.

2.2. Lad nu f være en reel funktion på $\dot{R}_\infty$, således at $f_{|\dot{R}}$ er målelig med hensyn til $\nu(x,x)$, $\forall x \in H$, og sæt $I_n = \{t \in \dot{R}\big| |f(t)| \leqq n\}$, for $n \in \dot{N}$, og $P_n = p(\chi_{I_n})$; vi kræver yderligere, at $\sup\{P_n|n \in \dot{N}\} = E$. Disse krav er specielt opfyldt, hvis $f_{|\dot{R}}$ er kontinuert, og derfor begrænset på enhver kompakt delmængde af $\dot{R}$; thi da er $\sup\{P_n|n \in \dot{N}\} = p(\chi_{\dot{R}}) = E$, fordi $p(\chi_{\{\infty\}}) = 0$.

Vi sætter $A_n = p(f\chi_{I_n})$, og definerer en operator $A_{|n}$ ved: $D(A_{|n}) = P_nH$, $A_{|n}f = A_n f$ for $f \in D(A_{|n})$. A_n er selvadjungeret $\in \mathcal{L}$, $A_n = P_nA_m$, og $A_{|n} \subseteqq A_{|m}$ for $n,m \in \dot{N}$, $n \leqq m$.

$\bigcup\{G(A_{|n})\big|n \in \dot{N}\}$ er graf for en vis operator A_0; thi $(0,y) \in \bigcup\{G(A_{|n})\big|n \in \dot{N}\} \Rightarrow \exists\ n \in \dot{N}$, så at $(0,y) \in G(A_{|n}) \Rightarrow y = 0$, og $\bigcup\{G(A_{|n})\big|n \in \dot{N}\}$ er et underrum $\subseteqq H^2$, som foreningsmængde for en voksende følge af underrum. $D(A_0) = \bigcup\{D(A_{|n})\big|n \in \dot{N}\} =$ /

$\bigcup\{P_nH \mid n \in \mathring{N}\}$; $x \in D(A_0) \Rightarrow \exists n \in \mathring{N}$, så at $x \in P_nH$, og $A_0x = A_{|m}x = A_mx$ for $m \geq n$; $A_0P_n = A_n$, $\forall n \in \mathring{N}$.

$D(A_0)$ er tæt i H, da $\sup\{P_n | n \in \mathring{N}\} = E$, og derfor $P_nx \to x$, $\forall x \in H$. Desuden er A_0 symmetrisk, thi $x,y \in D(A_0) \Rightarrow \exists n \in \mathring{N}$, så at $x,y \in P_nH$, og $(A_0x|y) = (A_nx|y) = (x|A_ny) = (x|A_0y)$. A_0 har derfor en afslutning $\overline{A}_0 = A_0^{**} \subseteq A_0^*$.

$\{x \in H | (A_nx)$ er en fundamentalfølge$\}$ er åbenbart et underrum i H; hvis $A_nx \to y \in H$, vil $x_n = P_nx \to x$ og $\overline{A}_0x_n = A_nx \to y$, derfor vil $x \in D(\overline{A}_0)$, og $\overline{A}_0x = y$. Vi kan definere en operator $A \subseteq \overline{A}_0$ ved $D(A) = \{x \in H | (A_nx)$ er en fundamentalfølge$\}$, $Ax = \lim A_nx$ for $x \in D(A)$. For $x \in P_{n_0}H$ vil $A_nx \to A_{n_0}x$, $x \in D(A)$ og $Ax = A_{n_0}x = A_0x$; d.v.s. $A_0 \subseteq A$.

Vi har: $A_{|n} \subseteq A_0 \subseteq A \subseteq \overline{A}_0 \subseteq \overline{A}_0^* = A_0^* \subseteq A^* \subseteq A_0^*$; desuden $P_nA^* \subseteq P_nA_0^* \subseteq (A_0P_n)^* = A_n^* = A_n$. For $y \in D(A^*) = D(P_nA^*)$ fås $A_ny = P_nA^*y \to A^*y$, $y \in D(A)$, $Ay = A^*y$.

Hermed er vist, at $A = \overline{A}_0 = A_0^*$ er selvadjungeret. Vi definerer $p(f) = A$; dette er i overensstemmelse med den tidligere definition, hvis f er begrænset. $p(f)$ afhænger ikke af $f(\infty)$.

For $\lambda \in \mathring{C}$, så at $(f-\lambda)^{-1} \in L_p^\infty(\mathring{R}_\infty, \mathring{C})$, f.eks. for $\lambda \in \mathring{C} \setminus \mathring{R}$, fås for vilkårligt $x \in H$: $A_np((f-\lambda)^{-1})x = (A_n - \lambda P_n)p((f-\lambda)^{-1})x + \lambda P_np((f-\lambda)^{-1})x = p((f-\lambda)\chi_{I_n})p((f-\lambda)^{-1})x + \lambda P_np((f-\lambda)^{-1})x = p(\chi_{I_n})x + \lambda P_np((f-\lambda)^{-1})x = P_n(E+\lambda p((f-\lambda)^{-1}))x \to (E+\lambda p((f-\lambda)^{-1}))x$, og derfor $p((f-\lambda)^{-1})x \in D(A)$, $(A-\lambda E)p((f-\lambda)^{-1})x = x$, altså $A-\lambda E = p((f-\lambda)^{-1})^{-1}$, og $(A-\lambda E)^{-1} = p((f-\lambda)^{-1})$.*)

$A = p(f)$ kommuterer derfor med enhver operator $\in \mathcal{L}$, der kommuterer med $p((f-\lambda)^{-1})$, specielt med enhver operator $p(g)$, $g \in L_p^\infty(\mathring{R}_\infty, \mathring{C})$.

*) idet også $x \in D(A) \Rightarrow p((f-\lambda)^{-1})(A-\lambda E)x = p((f-\lambda)^{-1}) \lim_m (A_m - \lambda P_m)x = \lim_m P_m x = x$.

Da $A_n - A_m = A_n(P_n-P_m)$ for $n \geqq m$, er $(A_n-A_m)^2 = A_n^2(P_n-P_m) = A_n^2 - A_m^2$. For en funktion f, af den type vi her betragter, og $x \in H$, gælder: $f_{|\dot{R}} \in L^2_{\nu(x,x)}(\dot{R},\dot{R}) \iff$
$\infty > \int |f_{|\dot{R}}|^2 d\tilde{\nu}(x,x) = \{\sup \int (f_{|\dot{R}})^2 \chi_{I_n} d\tilde{\nu}(x,x) \,|\, n \in \dot{N}\}$
$= \sup\{(p((f_{|\dot{R}}\chi_{I_n})^2)x|x) \,|\, n \in \dot{N}\} = \sup\{(A_n^2 x|x) \,|\, n \in \dot{N}\}$
$\iff ((A_n^2-A_m^2)x|x) = ((A_n-A_m)^2 x|x) = \|A_n x - A_m x\|^2 \to 0$,
$n > m$, $n,m \to \infty \iff (A_n x)$ er en fundamentalfølge $\iff x \in D(A)$, og i dette tilfælde gælder: $\int |f_{|\dot{R}}|^2 d\,\tilde{\nu}(x,x) = \sup\{\|A_n x\|^2 \,|\, n \in \dot{N}\}$ $= \|Ax\|^2$.

2.3. p(f) ville have fået samme værdi, $p(f) = \lambda E + p((f-\lambda)^{-1})^{-1}$ for vilkårligt $\lambda \in \dot{C} \setminus \dot{R}$, hvis vi i stedet for følgen (I_n) havde udnyttet en vilkårlig opad filtrerende (med hensyn til $\subseteqq$) mængde $\{I_j \,|\, j \in J\}$ af delmængder af $\dot{R}$, $\nu(x,x)$ målelige for $\forall x \in H$, så at $f_{|I_j}$ er begrænset for $\forall j \in J$, og $\sup\{p(\chi_{I_j}) \,|\, j \in J\} = E$. D(p(f)) bliver herved karakteriseret som $\{x \in H \,|\, \{\{p(f\chi_{I_j})x \,|\, j \in J,\ I_j \supseteqq I_k\} \,|\, k \in J\}$ er basis for et fundamentalfilter$\}$. (Dette kan altså igen skrives om til $\{x \in H \,|\, f_{|\dot{R}} \in L^2_{\nu(x,x)}(\dot{R},\dot{R})\}$).

Lad nu f_1 og f_2 være reelle funktioner på $\dot{R}_\infty$, så at $f_{i|\dot{R}}$ er $\nu(x,x)$ målelig for $\forall x \in H$, og sæt $I_{i,n} = \{t \in \dot{R} \,|\, |f_i(t)| \leqq n\}$, $I_n = I_{1,n} \cap I_{2,n}$, $P_{i,n} = p(\chi_{I_{i,n}})$, og $P_n = P_{1,n} \cdot P_{2,n}$, $i = 1,2, n \in \dot{N}$. Da $\{t \in \dot{R} \,|\, |f_1(t)+f_2(t)| \leqq 2n\} \supseteqq I_n$, og $\{t \in \dot{R} \,|\, |f_1(t)\ f_2(t)| \leqq n^2\} \supseteqq I_n$, er $(f_1+f_2)_{|I_n}$ og $(f_1 \cdot f_2)_{|I_n}$ begrænsede; desuden er $\{I_n \,|\, n \in \dot{N}\}$ opad filtrerende, og $\sup\{P_n \,|\, n \in \dot{N}\} = \sup\{P_{1,n} \,|\, n \in \dot{N}\} \cdot \sup\{P_{2,n} \,|\, n \in \dot{N}\} = E$ (jfr. III,4,6). $p(f_1+f_2)$ og $p(f_1 \cdot f_2)$ er derfor definerede, og $D(p(f_1+f_2)) =$ $\{x \in H \,|\, (p((f_1+f_2)\chi_{I_n})x)$ er en fundamentalfølge$\}$, og tilsvarende for $D(p(f_1 \cdot f_2))$, og for $D(p(f_i))$, $i = 1,2$.

Vi vil vise, at $p(f_1+f_2) \supseteqq p(f_1) + p(f_2)$, $D(p(f_1)+p(f_2)) = D(p(f_1+f_2)) \cap D(p(f_2))$, og $p(f_1f_2) \supseteqq p(f_1)\cdot p(f_2)$, $D(p(f_1)\cdot p(f_2)) = D(p(f_1f_2)) \cap D(p(f_2))$.

For $x \in D(p(f_1)+p(f_2))$ gælder: $P_nx \in P_{1,n}H \cap P_{2,n}H \subseteqq D(p(f_1)) \cap D(p(f_2))$, og $p(f_i)P_nx = P_np(f_i)x$, da P_n kommuterer med $p(f_i)$, $i = 1,2$; $p((f_1+f_2)\chi_{I_n})x = p(f_1\chi_{I_n})x+p(f_2\chi_{I_n})x = p(f_1\chi_{I_{1,n}})P_nx + p(f_2\chi_{I_{2,n}})P_nx = p(f_1)P_nx+p(f_2)P_nx = P_n(p(f_1)+p(f_2))x \to (p(f_1)+p(f_2))x$; d.v.s. $x \in D(p(f_1+f_2))$, $p(f_1+f_2)x = (p(f_1)+p(f_2))x$.

For $x \in D(p(f_1)\cdot p(f_2))$ gælder:

$$p(f_1f_2\chi_{I_n})x = p(f_1\chi_{I_{1,n}})P_np(f_2\chi_{I_{2,n}})P_nx = p(f_1)P_np(f_2)P_nx = P_np(f_1)p(f_2)x \to p(f_1)p(f_2)x;$$ d.v.s. $p(f_1\cdot f_2) \supseteqq p(f_1)\cdot p(f_2)$.

$x \in D(p(f_1+f_2)) \cap D(p(f_2)) \Rightarrow p(f_1\chi_{I_n})x = p((f_1+f_2)\chi_{I_n}-f_2\chi_{I_n})x \to p(f_1+f_2)x-p(f_2)x$, $x \in D(p(f_1)) \cap D(p(f_2)) = D(p(f_1)+p(f_2))$.

$x \in D(p(f_1\cdot f_2)) \cap D(p(f_2)) \Rightarrow p(f_1\chi_{I_n})p(f_2)x = p(f_1\chi_{I_n})P_np(f_2)x = p(f_1\chi_{I_n})p(f_2\chi_{I_n})x = p(f_1f_2\chi_{I_n})x \to p(f_1\cdot f_2)x$; d.v.s. $x \in D(p(f_2))$ og $p(f_2)x \in D(p(f_1))$, altså $x \in D(p(f_1)\cdot p(f_2))$.

1. Lad, med paragraffers betegnelser, f og g være to reelle funktioner, så at $p(f)$ og $p(g)$ er definerede. Vis, at $(p(f)x \mid p(g)x)$ er reel for $x \in D(p(f)) \cap D(p(g))$. Vis, at $\|(p(f)+ip(g))x\|^2 = \|p(f)x\|^2 + \|p(g)x\|^2$. Vis, at $p(f)+ip(g)$ er normal (jfr. 1, øv. 8).

§ 3. Spektret for en selvadjungeret operator.

En brudden, rational funktion, der er defineret og begrænset på $\dot{R}$, kan skrives PQ^{-1}, hvor P og Q er polynomier, Q ikke har reelle nulpunkter, og P har lavere grad end Q. PQ^{-1} kan identificeres med en funktion $\in C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$.

<u>Lemma</u>: Mængden af brudne, rationale funktioner, definerede og begrænsede på $\dot{R}$, er tæt i $C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$.

Bevis: Lad $g \in C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$; $g-g(\infty)\chi_{\dot{R}_\infty}$ kan approksimeres ligeligt med en funktion $f \in \mathcal{D}^\circ$. Antag, at $f(t) \equiv 0$ for $|t| \geqq a-1$; vi bestemmer et polynomium P, så at $|f(t)-P(t)| \leqq \varepsilon$ for $|t| \leqq a+1$. For $n \in 2\dot{N}$ sætter vi $Q_n(t) = (1+(ta^{-1})^n)^{-1}$; $Q_n(t) \to \chi_{[-a,a]}(t)$ for $t \in \dot{R}_\infty \setminus \{a,-a\}$, monotont i hvert af intervallerne $]-a,a[$ og $\dot{R}_\infty \setminus [-a,a]$, ligeligt over kompakte delmængder. Vi vælger $m \in 2\dot{N}$, $>$ graden af P, og $K \in \dot{R}^+$, så at $|P(t)Q_m(t)| \leqq \varepsilon$ for $|t| \geqq K$. Sæt $B = \max\{\sup\{|f(t)| \mid t \in [-a,a]\}, \sup\{|P(t)| \mid a \leqq |t| \leqq K\}\}$, og vælg $n \in 2\dot{N}$, $n \geqq m$, så at $Q_n(t) \geqq 1-\varepsilon B^{-1}$ for $|t| \leqq a-1$, og $Q_n(t) \leqq \varepsilon B^{-1}$ for $|t| \geqq a+1$. For $|t| \leqq a-1$ gælder: $|f(t)-P(t)Q_n(t)| \leqq Q_n(t)|f(t)-P(t)| + |f(t)||1-Q_n(t)| \leqq 1\cdot\varepsilon+B\cdot\varepsilon B^{-1} = 2\varepsilon$; for $a-1 \leqq |t| \leqq a+1$ gælder: $|f(t)-P(t)Q_n(t)| = |P(t)Q_n(t)| \leqq |f(t)-P(t)| \leqq \varepsilon$; for $a+1 \leqq |t| \leqq K$ gælder: $|f(t)-P(t)Q_n(t)| \leqq B\cdot\varepsilon B^{-1} = \varepsilon$; for $|t| \geqq K$ gælder: $|f(t)-P(t)Q_n(t)| \leqq |P(t)Q_m(t)| \leqq \varepsilon$.

3.2. Vi betragter i det følgende en fast selvadjungeret operator A på et Hilbertrum H.

Vi har åbenbart $D(A) \supseteq D(A^2) \supseteq D(A^3) \supseteq \ldots$; for $\alpha_0,\ldots,\alpha_n,\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \dot{C}$, $\alpha_n \neq 0$, er $D(\alpha_n A^n+\ldots+\alpha_0 E) = D(A^n) \cap\ldots\cap D(E) = D(A^n) = D(\alpha_n(A-\gamma_1 E)\cdot\ldots\cdot(A-\gamma_n E))$, idet $D(A-\gamma_\nu E) = D(A)$; hvis $P(t) \equiv \alpha_n t^n+\ldots+\alpha_0 \equiv \alpha_n(t-\gamma_1)\cdot\ldots\cdot(t-\gamma_n)$, er $\alpha_n A^n+\ldots+\alpha_0 E = \alpha_n(A-\gamma_1 E)\cdot\ldots\cdot(A-\gamma_n E)$, og denne operator betegner vi $P(A)$. For to polynomier P og Q gælder da: $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, da graden af PQ er = (graden af P) $\cdot$(graden af Q), og $(P+Q)(A) \supseteq P(A) + Q(A)$. Hvis $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \check{C} \setminus \check{R}$ er $P(A)$ enentydig og $P(A)^{-1} = \alpha_n^{-1}(A-\gamma_n E)^{-1}\cdots\cdot(A-\gamma_1 E)^{-1} \in$ (jfr. IV,1,øv.2); specielt ses, at alle operatorer $(A-\gamma E)^{-1}$, $\gamma \notin \check{R}$, kommuterer; da $(\alpha_1 A-\alpha_o E)(A-\gamma E)^{-1} = (\alpha_1 A-\alpha_1\gamma E+(\alpha_1\gamma-\alpha_o)E)(A-\gamma E)^{-1} = \alpha_1(A-\gamma E)(A-\gamma E)^{-1}+(\alpha_1\gamma-\alpha_o)(A-\gamma E)^{-1} = \alpha_1 E+(\alpha_1\gamma-\alpha_o)(A-\gamma E)^{-1} \in \mathscr{L}$, kommuterer alle operatorer af denne form.

For en rational funktion PQ^{-1}, hvor Q ikke har reelle nulpunkter og graden af P er $\leqq$ graden af Q, d.v.s. så at $PQ^{-1} \in C(\check{R}_\infty,\check{C})$, definerer vi $p(PQ^{-1}) = P(A)Q(A)^{-1}$; $p(PQ^{-1}) \in \mathscr{L}$, da $p(PQ^{-1})$ kan skrives som produkt af kommuterende faktorer af formen $(\alpha_1 A-\alpha_o E)(A-\gamma E)^{-1}$.

For to sådanne funktioner $P_1Q_1^{-1}$ og $P_2Q_2^{-1}$ fås: $p(P_1Q_1^{-1}\cdot P_2Q_2^{-1}) = p(P_1P_2(Q_1Q_2)^{-1}) = (P_1P_2)(A)(Q_1Q_2)(A)^{-1} = P_1(A)P_2(A)Q_2(A)^{-1}Q_1(A)^{-1} = P_1(A)Q_1(A)^{-1}P_2(A)Q_2(A)^{-1} = p(P_1Q_1^{-1})p(P_2Q_2^{-1})$, og $p(P_1Q_1^{-1}+P_2Q_2^{-1}) = p((P_1Q_2+P_2Q_1)(Q_1Q_2)^{-1}) = (P_1Q_2+P_2\,Q_1)(A)(Q_1Q_2)(A)^{-1} \supseteq (P_1(A)Q_2(A)+P_2(A)Q_1(A))Q_1(A)^{-1}$ $Q_2(a)^{-1} = P_1(A)Q_1(A)^{-1} + P_2(A)Q_2(A)^{-1}$; men da begge sider $\in \mathscr{L}$, er $p(P_1Q_1^{-1}+P_2Q_2^{-1}) = p(P_1Q_1^{-1})+p(P_2Q_2^{-1})$.

Da $((A-\gamma E)^{-1})^* = ((A-\gamma E)^*)^{-1} = (A-\bar{\gamma}E)^{-1}$, er $p(\overline{PQ}^{\,-1}) = p(PQ^{-1})^*$. Desuden er $p(\lambda PQ^{-1}) = \lambda p(PQ^{-1})$.

Hvis en rational funktion $PQ^{-1} \in C^+(\check{R}_\infty,\check{C})$, er $P\overline{Q}(t) \geqq 0$, $\forall t \in \check{R}$, og derfor $= |P_1|^2$ for et passende polynomium P_1; derfor er $p(PQ^{-1}) = p(|P_1Q^{-1}|^2) = p(P_1Q^{-1})^*p(P_1Q^{-1}) \geqq 0$. Det følger nu ordret som i III,§ 2, at p er normformindskende og på en og kun én måde kan udvides til en normformindskende homomorfi p af $C(\check{R}_\infty,\check{C})$ ind i $\mathscr{L}$, og at der eksisterer en kompakt delmængde $\sigma(A) \subsetneqq \dot{R}_\infty$, så at $C(\sigma(A),\dot{C})$ er isomorf og isometrisk med den mindste ligeligt afsluttede delalgebra af $\mathcal{L}$, der indeholder E og $(A-\gamma E)^{-1}$ for alle $\gamma \notin \dot{R}$, sådan at for en funktion $f \in C(\dot{R}_\infty,\dot{C})$ er billedet af $f_{|\sigma(A)} = p(f)$.

Endvidere vises det som i III,§ 5, at p kan udvides til en positiv , normformindskende homomorfi p af en normeret algebra $L_p^\infty(\dot{R}_\infty,\dot{C})$ af begrænsede funktioner på $\dot{R}_\infty$ ind i $\mathcal{L}$. L_p^∞ består herved af alle begrænsede funktioner, der er integrable med hensyn til samtlige mål $\nu(x,x):f \to (p(f)x|x)$. Specielt gælder $T(\dot{R}_\infty,\dot{C}) \subsetneqq L_p^\infty(\dot{R}_\infty,\dot{C})$.

For $\lambda \in \dot{C} \setminus \dot{R}$ gælder: $\chi_{\{\infty\}}(t)\cdot(t-\lambda)^{-1} \equiv 0$; derfor er $p(\chi_\infty)(A-\lambda E)^{-1} = 0$, $(A-\lambda E)^{-1}H = D(A) \subsetneqq p(\chi_\infty)^{0-1}(0)$; da A er tæt defineret, kan vi slutte, at $p(\chi_\infty) = 0$. Vi kan derfor benytte den i § 2 udviklede integrationsteori. Specielt er $p(P)$ defineret for ethvert reelt polynomium P. Vi viser, at $p(P) = P(A)$; for $\lambda \notin \dot{R}$ sætter vi $P_\lambda = P-\lambda$, og får $p(P) = p(P_\lambda^{-1})^{-1} + \lambda E = (P_\lambda(A)^{-1})^{-1} + \lambda E = P_\lambda(A)+\lambda E = P(A)$. Dette giver specielt sætningen:

Et vilkårligt reelt polynomium af en selvadjungeret operator er selvadjungeret.

<u>Sætning</u>: A's spektrum er $= \sigma(A) \setminus \{\infty\}$.

Bevis (jfr. III,2,5): Lad f betegne den identiske afbildning af $\dot{R}_\infty$ på $\dot{R}_\infty$. For $\lambda \in \dot{R} \setminus \sigma(A)$ er $p((f-\lambda)^{-1}) \in \mathcal{L}$, *) $(A-\lambda E)$ $p((f-\lambda)^{-1}) = p(f-\lambda)p((f-\lambda)^{-1}) = p(\chi_{\dot{R}_\infty}) = E$, og $p((f-\lambda)^{-1})(A-\lambda E) \subsetneqq E$ med $D(p((f-\lambda)^{-1}(A-\lambda E)) = D(E) \cap D(p(f-\lambda)) = D(A)$(jfr. IV,2,5), d.v.s. $(A-\lambda E)^{-1} = p((f-\lambda)^{-1}) \in \mathcal{L}$.

Antag $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{\infty\}$, $(A-\lambda E)^{-1} \in \mathcal{L}$. For $\varphi_n = (1-n|f-\lambda|) \vee 0$ fås: $\sup\{|\varphi_n(t)| \mid t \in \sigma(A)\} = 1$, $\sup\{|(f(t)-\lambda)\varphi_n(t)| \mid t \in \sigma(A)\} \to 0$, derfor $p((f-\lambda)\varphi_n) =$

$(A-\lambda E)p(\varphi_n) \to 0$, og $1 = \|p(\varphi_n)\| = \|(A-\lambda E)^{-1}p((f-\lambda)\varphi_n)\| \leqq \|(A-\lambda E)^{-1}\|$
$\cdot \|p(f-\lambda)\varphi_n)\| \to 0$.

*) For tilstrækkeligt lille $\delta > 0$ er $p(\chi_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}) = 0$, og man finder ved anvendelse af definitionen $p((f-\lambda)^{-1}) =$
$p((f-\lambda)^{-1}\chi_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}) \in \mathscr{L}$.

1. Antag, at A og B er kommuterende operatorer, A afsluttet og $B \in \mathcal{L}$. Vis, at hvis $A^* B^* \in \mathcal{L}$, eller hvis A og B er selvadjungerede, gælder $\overline{BA} = \overline{AB}$. Specielt gælder for polynomier P og Q, så at $PQ^{-1} \in C(\dot{R}_\infty, \dot{R})$, at $p(PQ^{-1})$ er afslutningen af $Q^{-1}(A)P(A)$.

2. Vis, at $p(\chi_{\sigma(A)}) = E$. Vis, at $\infty \notin \sigma(A)$, hvis og kun hvis $A \in \mathcal{L}$.

3. Lad f være en reel funktion på $\dot{R}_\infty$, så at $f_{|\dot{R}}$ er kontinuert. Find $\sigma(p(f))$.

4. En selvadjungeret operator A kaldes positiv, $A \geqq 0$, hvis $(Ax|x) \geqq 0, \forall x \in D(A)$. Vis, at $A \geqq 0 \iff \sigma(A) \setminus \{\infty\} \subseteq \dot{R}^+ \cup \{0\}$. Vis, at der eksisterer én positiv operator B, så at $B^2 = A$.

5. Lad T være en tæt defineret afsluttet operator. $T^{0-1}(0)$ er da et afsluttet underrum i H; projektionen P på det dertil ortogonale underrum kaldes T's støtte projektion. Projektionen Q på $\overline{TD(T)}$ kan vi kalde T's værdiprojektion.

Vis, at $T = QTP$, og at T^* har støtteprojektion Q og værdiprojektion P, T^*T tilsvarende P og P, og TT^* Q og Q.

Hvis $T \in \mathcal{L}$ og T afbilder PH isometrisk på QH, kaldes T en partiel isometri. Dette sker, hvis og kun hvis $T^*T = P$, eller $TT^* = Q$; T^* er da igen en partiel isometri.

Vis, at en vilkårlig tæt defineret, afsluttet operator T på én måde kan skrives $T = U|T|$, hvor $|T| \geqq 0$ og U er en partiel isometri med samme støtte som T, og at $|T| = U^*T$, $|T^*| = U|T|U^*$.

Vis, at T kan skrives $T = U|T|$, med $|T| \geqq 0$ og U unitær, hvis og kun hvis $(PH)^\perp$ og $(QH)^\perp$ har samme dimension, og at dette specielt gælder, hvis T er normal.

6. Vis, f.eks. ved hjælp af øvelse 5, at en begrænset operator er total kontinuert, hvis og kun hvis den er kompakt. (jfr. III,7,øv.3).

V. Udviklingssætninger.

§ 1. Multiplikationsoperatorer.

Lad μ være et positivt mål på $\dot{R}$, $H_\mu = L^2_\mu(\dot{R},\dot{C})$.

Til et interval $I \subseteq \dot{R}$ lader vi svare operatoren $p(\chi_I): f \to \chi_I \cdot f$, der åbenbart er en projektion $\in \mathscr{L}$. p udvides til en homomorfi $T(\dot{R}_\infty,\dot{C}) \to \mathscr{L}$, på hvilken vi kan anvende den i IV, § 2 udviklede integrationsteori.

For $x \in H_\mu$ og $f \in T_0(\dot{R},\dot{C})$ er $\nu(x,x)(f) = (p(f)x|x) = \mu(fx\bar{x}) = |x|^2\mu(f)$, d.v.s. $\nu(x,x) = |x|^2 \cdot \mu$, idet $|x|^2 \in L^1_\mu$ (jfr. II,2,7). En funktion f er derfor $\nu(x,x)$ målelig for alle $x \in H_\mu$, hvis og kun hvis f er μ målelig. Da $\nu(x,x)(\chi_{\dot{R}}) =$ $\sup\{\nu(x,x)(\chi_{[-n,n]}) \mid n \in \dot{N}\} = \sup\{\mu(|x|^2\chi_{[-n,n]}) \mid n \in \dot{N}\} = \|x\|^2 < \infty$, er enhver begrænset $\nu(x,x)$ målelig funktion $\nu(x,x)$ integrabel, $L^\infty_p = L^\infty_\mu$ (jfr. III,5,3), og for $f \in L^\infty_p$ er $(p(f)x \mid x) = \nu(x,x)(f) = \mu(f|x|^2)$ og derfor også $(p(f)x|y) = \mu(fx\bar{y})$ for alle $x,y \in H_\mu$, dette viser, at for vilkårligt $f \in L^\infty_p$ er p(f) operatoren: $x \to fx$.

Lad nu f være en reel, μ målelig, μ næsten overalt endelig funktion på $\dot{R}$, og for $n \in \dot{N}$ $I_n = \{t \in \dot{R} \mid |f(t)| \leqq n\}$, $P_n = p(\chi_{I_n})$; da er $I_\infty = \dot{R} \setminus \bigcup_n I_n$ en μ nulmængde, og for $x \in H_\mu$ fås $\|x - P_n x\|^2 = \mu(|x|^2\chi_{\dot{R}\setminus I_n}) \to \mu(|x|^2\chi_{I_\infty}) = 0$. Derfor er p(f) defineret; $D(p(f)) = \{x \in H_\mu \mid f \in L^2_{\nu(x,x)}\} = \{x \in H_\mu \mid \mu(|f|^2|x|^2) < \infty\}$ $= \{x \in H_\mu \mid f\cdot x \in H_\mu\}$, og for $x \in D(p(f))$ fås $p(f)x = \lim\{p(f\chi_{I_n})x \mid n \to \infty\} = \lim\{f\chi_{I_n}x \mid n \to \infty\} = f\cdot x$ (konvergens i H_μ, og μ næsten overalt).

Specielt vil vi betegne den til funktionen $t \to t$ svarende selvadjungerede operator Λ_μ.

<u>Sætning</u>: $\lambda \in \dot{R}$ tilhører spektret for Λ_μ, hvis og kun hvis $\mu([a,b]) \neq 0$ for $a < \lambda < b$; λ er egenværdi for Λ_μ, hvis og kun

hvis $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$.

Bevis: Hvis $\mu([\lambda-\delta, \lambda+\delta]) = 0$ for et tal $\delta > 0$, får vi for vilkårligt $x \in D(\Lambda_\mu)$: $\|(\Lambda_\mu-\lambda E)x\|^2 = \int_{\dot{R}\setminus[\lambda-\delta,\lambda+\delta]} |t-\lambda|^2|x(t)|^2 d\tilde{\mu} \geq \delta^2\|x\|^2$; derfor er $\Lambda_\mu-\lambda E$ invertibel, og den inverse er begrænset og selvadjungeret (da $A^{-1*} = A^{*-1}$, når blot en af siderne er defineret), derfor tæt defineret og afsluttet; det ses let, at en tæt defineret, afsluttet, begrænset operator er overalt defineret, altså $\in \mathscr{L}$.

Hvis $\mu([\lambda-\delta,\lambda+\delta]) = a_\delta \neq 0$ for alle $\delta > 0$, får vi for enhedsvektorerne $x_\delta = a_\delta^{-\frac{1}{2}}\chi_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]}$: $\|(\Lambda_\mu-\lambda E)x_\delta\|^2 = a_\delta^{-1}\int_{[\lambda-\delta,\lambda+\delta]} |t-\lambda|^2 d\tilde{\mu} \leq \delta^2$, og derfor, at $\Lambda_\mu-\lambda E$ ikke kan have nogen invers $\in \mathscr{L}$.

λ er egenværdi, hvis og kun hvis der $\exists x \in H_\mu$, så at $\Lambda_\mu x = \lambda x$ og $x \neq 0 \iff \int|t-\lambda|^2|x(t)|^2 d\tilde{\mu} = 0$ og $\int|x|^2 d\tilde{\mu} \neq 0 \iff$ $x = 0$ μ næsten overalt i $R \setminus \{\lambda\}$, men ikke μ næsten overalt i $\dot{R} \iff \mu(\{\lambda\}) \neq 0$.

1.2. Vi betragter en afbildning $\underline{\underline{\mu}}$ af $\dot{R}$ ind i mængden af $n \times n$ komplekse matricer med følgende egenskaber:

1) For $\lambda \in \dot{R}$ er $\underline{\underline{\mu}}(\lambda)$ hermitesk, d.v.s. $\mu_{ij}(\lambda) = \bar{\mu}_{ji}(\lambda)$, $i,j=1,\dots,n$

2) For $\lambda_1 < \lambda_2$ er $\underline{\underline{\mu}}(\lambda_2)-\underline{\underline{\mu}}(\lambda_1)$ positiv semidefinit, d.v.s. for $\underline{\xi} \in \mathbb{C}^n$ er $\underline{\xi}\_(\underline{\underline{\mu}}(\lambda_2)-\underline{\underline{\mu}}(\lambda_1))\underline{\xi}_| \geq 0$.

Af 1) følger, at funktionerne μ_{ii} er reelle, af 2) fås, at de er monotont voksende.

Endvidere fås, idet vi skriver $\underline{\underline{\mu}}'$ for $\underline{\underline{\mu}}(\lambda_2)-\underline{\underline{\mu}}(\lambda_1)$:

$$\begin{vmatrix} \mu'_{ii} & \mu'_{ij} \\ \mu'_{ji} & \mu'_{jj} \end{vmatrix} \geq 0,$$

$(\mathrm{Re}\mu'_{ij})^2+(\mathrm{Im}\mu'_{ij})^2 = |\mu'_{ij}|^2 \leq \mu'_{ii}\mu'_{jj} \leq \frac{1}{4}(\mu'_{ii}+\mu'_{jj})^2$; det ses, at $\mathrm{Re}\mu_{ij}$ og $\mathrm{Im}\mu_{ij}$ er af lokalt begrænset variation. Stieltjes integralet $\int f d\mu_{ij}$ er derfor defineret for en vilkårlig stykkevis kontinuert funktion, der er nul uden for en kompakt mængde.

Vi definerer en intervalfunktion $\underline{\underline{\mu}}$ ved $\underline{\underline{\mu}}([a,b]) = \underline{\underline{\mu}}(b^+)-\underline{\underline{\mu}}(a^-)$, $\underline{\underline{\mu}}(]a,b]) = \underline{\underline{\mu}}(b^+)\ \mu\ a^+)$, $\underline{\underline{\mu}}([a,b[) = \underline{\underline{\mu}}(b^-)-(a^-)$, $\underline{\underline{\mu}}(]a,b[) = \underline{\underline{\mu}}(a^+)\ \ -\underline{\underline{\mu}}(b^-)$. $\underline{\underline{\mu}}(I)$ er da positiv semidefinit for ethvert begrænset interval I.

Lad $C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ være mængden af funktioner $\underline{f}:\dot{R} \to \dot{C}^n$, så at f_n er stykkevis kontinuert og nul uden for en kompakt mængde;

$$(\underline{f},\underline{g}) \to (\underline{f}|\underline{g}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i \bar{g}_j d\mu_{ij}$$ er en <u>hermitesk</u> form på $C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$, d.v.s. $(a\underline{f}+\underline{g}|\underline{h}) = a(\underline{f}|\underline{h})+(\underline{g}|\underline{h})$ og $(\underline{g}|\underline{f}) = \overline{(\underline{f}|\underline{g})}$.

For en funktion i $C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ af form $\chi_I\xi$, hvor I er et begrænset interval og $\xi \in \dot{C}^n$, er $(\chi_I\xi|\chi_I\xi) = \xi\,\underline{\underline{\mu}}(I)\bar{\xi}_| \geq 0$; for disjunkte intervaller I_1 og I_2 og vilkårlige vektorer ξ_1 og ξ_2 er $(\chi_{I_1}\xi_1|\chi_{I_2}\xi_2) = \xi_1\underline{\underline{\mu}}(I_1 \cap I_2)\bar{\xi}_{2|} = 0$, og derfor også $(\chi_{I_1}\xi_1+\chi_{I_2}\xi_2|\chi_{I_1}\xi_1+\chi_{I_2}\xi_2) \geq 0$. Da enhver funktion $\underline{f} \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ kan approksimeres ligeligt med funktioner af typen $\Sigma\ \chi_{I_\nu}\xi_\nu$, med $I_\nu \cap I_\mu = \emptyset$ for $\nu \neq \mu$ og nul uden for et fast interval, er $(\underline{f}|\underline{f}) \geq 0$ for alle $\underline{f}$. $C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ er derfor et quasi præ Hilbertrum med hensyn til det indre produkt $(\cdot|\cdot)$.

Vi vil uden bevis benytte følgende:

<u>Sætning</u>: Til et vilkårligt quasi præ Hilbertrum H findes et og på nær isomorfi kun ét Hilbertrum H og en ~~homomorfi~~ lineær afbildning α af H_o på et tæt underrum i H, således at ~~$\alpha^{0-1}(0) = \{f \in H_o \mid \|f\| = 0\}$~~ *)

Rummet H kan betragtes som bestående af ækvivalensklasser af fundamentalfølger af elementer fra H_o, jfr. Cantors indførelse af de reelle tal.

*) $(\alpha f|\alpha g) = (f|g)$ for alle $f,g \in H_o$

Bemærkning til K V, 1,4, andet afsnit.

Afsnittets påstande følger let af:

Lemma: Lad H være et Hilbertrum, H_o et tæt underrum; enhver begrænset lineær afbildning $A : H_o \to H$, kan på én måde udvides til en operator $u(A) \in \mathcal{L}$, $u(A) = \bar{A}$. For to sådanne afbildninger A og B gælder: $u(A + B) = u(A) + u(B)$, og hvis $AH_o \subseteqq H_o$ $u(BA) = u(B)\,u(A)$; hvis A er symmetrisk, er u(A) selvadjungeret; hvis en følge A_n er ensartet begrænset ($\exists$ c, så $\|A_n\| \leqq c$, $\forall n \in \dot{N}$) og $A_n x \to Bx$, $\forall x \in H_o$, hvor $B \in \mathcal{L}$, så vil $u(A_n) \to B$ i den stærke topologi på H.

Bevis: I, 1, 10 er det bevist, at A har en udvidelse u(A), som let ses at have samme norm som A. Vilkårligt $x \in H$ er grænseværdi for en følge $\{x_n \in H_o | n \in \dot{N}\}$; (Ax_n) er da fundamentalfølge, derfor konvergent; $\bar{A}$ er derfor overalt defineret, og må være $= u(A)$. Da $Ax_n \to \bar{A}x = u(A)x$, $Bx_n \to u(B)x$, $(A + B)x_n \to u(A)x + u(B)x$ og $BAx_n \to u(B)u(A)x$, gælder $u(A + B) = u(A) + u(B)$, $u(BA) = u(B)u(A)$.

Antag nu, at $A_n x \to Bx$, $\forall x \in H_o$, $B \in \mathcal{L}$, $\|A_n\| \leqq c$; for $y \in H$ og $\varepsilon > 0$ og passende $x \in H_o$ fås $\|(A_n - B)y\| \leqq \|(A_n - B)(y - x)\| + \|(A_n - B)x\| \leqq (c + \|B\|)\|y - x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ for tilstrækkeligt store n.

Hvis A er symmetrisk, er $\bar{A}$ symmetrisk og $\in$, altså selvadjungeret.

Det således til $C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}^n)$ svarende Hilbertrum vil vi betegne $H_{\underline{\mu}}$. Idet vi, som sædvanlig, identificerer funktioner $\underline{f}$ og $\underline{g}$ med $\|\underline{f}-\underline{g}\| = 0$, identificerer vi $C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}_n)$ med et tæt underrum i $H_{\underline{\mu}}$.

Til et interval $I \in \grave{R}$ lader vi svare en operator $:\underline{f} \to \chi_I \cdot \underline{f}$, der er en begrænset operator på $C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}^n)$, hvis afslutning er en begrænset projektion $p(\chi_I) \in \mathscr{L} = \mathscr{L}(H_{\underline{\mu}},H_{\underline{\mu}})$(da $p(\chi_I)H_{\underline{\mu}}$ og $p(\chi_I)^{0-1}(0)$ er ortogonale og udspænder $H_{\underline{\mu}}$). p udvides til en homomorfi $T(\grave{R}_\infty,\grave{C}) \to \mathscr{L}$, og vi kan igen anvende integrationsteorien.

For $\underline{x}$ og $\underline{y} \in C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}^n)$ og $f \in T_o(\grave{R},\grave{C})$ er $\nu(\underline{x},\underline{y})(f) = (p(f)\underline{x}|\underline{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int f x_i \bar{y}_j \, d\mu_{ij}$; dette gælder da også for funktioner f, der er stykkevis kontinuerte og begrænsede på $\grave{R}$; for sådanne er altså $p(f)\underline{x} = f\cdot\underline{x}$; $p(f)$ er afslutningen af operatoren $\underline{x} \to f\cdot\underline{x}$.

Lad f være en reel stykkevis kontinuert funktion på $\grave{R}$, og for $n \in \grave{N}$ $I_n = \{t \in \grave{R} \,|\, |f(t)| \leq n\}$, $P_n = p(\chi_{I_n})$; da er $p(f)$ defineret, og $D(p(f)) \supseteq \cup\{P_n H_{\underline{\mu}} | n \in \grave{N}\} \supseteq C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}^n) \supseteq T_o(\grave{R},\grave{C}^n)$; for $\underline{x} = \chi_{I_n}\underline{x} \in C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}_n)$ er $p(f)\underline{x} = p(f\chi_{I_n})\underline{x} = f\chi_{I_n}\underline{x} = f\underline{x}$. Afslutningen af $p(f\chi_{I_n})$'s sammentrækning til $T(I_n,\grave{C}^n)$ indeholder sammentrækningen af $p(f\chi_{I_n})$ til $P_n H_{\underline{\mu}}$, da $T(I_n,\grave{C}^n)$ er tæt i $P_n H_{\underline{\mu}}$, og $p(f\chi_{I_n})$ er begrænset; derfor er også afslutningen af sammentrækningen af $p(f)$ til $T_o(\grave{R},\grave{C}^n) = p(f)$, da $p(f)$ er den mindste afsluttede udvidelse af alle $p(f\chi_{I_n})|P_n H_{\underline{\mu}}$.

Specielt betegner vi den til funktionen $t \to t$ svarende operator $\Lambda_{\underline{\mu}}$.

Funktionen $\underline{\mu}$ kaldes et n-dimensionalt matrixmål.

Bemærkning til K V, 1,4, andet afsnit.

Afsnittets påstande følger let af:

Lemma: Lad H være et Hilbertrum, H_o et tæt underrum; enhver begrænset lineær afbildning $A : H_o \to H$, kan på én måde udvides til en operator $u(A) \in \mathcal{L}$, $u(A) = \bar{A}$. For to sådanne afbildninger A og B gælder: $u(A + B) = u(A) + u(B)$, og hvis $AH_o \subseteq H_o$ $u(BA) = u(B) u(A)$; hvis A er symmetrisk, er $u(A)$ selvadjungeret; hvis en følge A_n er ensartet begrænset ($\exists$ c, så $\|A_n\| \leqq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$) og $A_n x \to Bx$, $\forall x \in H_o$, hvor $B \in \mathcal{L}$, så vil $u(A_n) \to B$ i den stærke topologi på H.

Bevis: I, 1, 10 er det bevist, at A har en udvidelse $u(A)$, som let ses at have samme norm som A. Vilkårligt $x \in H$ er grænseværdi for en følge $\{x_n \in H_o | n \in \mathbb{N}\}$; (Ax_n) er da fundamentalfølge, derfor konvergent; $\bar{A}$ er derfor overalt defineret, og må være $= u(A)$. Da $Ax_n \to \bar{A}x = u(A)x$, $Bx_n \to u(B)x$, $(A + B)x_n \to u(A)x + u(B)x$ og $BAx_n \to u(B)u(A)x$, gælder $u(A + B) = u(A) + u(B)$, $u(BA) = u(B)u(A)$.

Antag nu, at $A_n x \to Bx$, $\forall x \in H_o$, $B \in \mathcal{L}$, $\|A_n\| \leqq c$; for $y \in H$ og $\varepsilon > 0$ og passende $x \in H_o$ fås $\|(A_n - B)y\| \leqq \|(A_n - B)(y - x)\| + \|(A_n - B)x\| \leqq (c + \|B\|)\|y - x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ for tilstrækkeligt store n.

Hvis A er symmetrisk, er $\bar{A}$ symmetrisk og $\in$, altså selvadjungeret.

1. Lad μ være et positivt mål på $\dot{R}$, $H_\mu = L^2_\mu(\dot{R},\dot{C})$, p den tilsvarende homomorfi $L^\infty_p \to \mathcal{L}$. Vis, at et positivt mål ρ, der er absolut kontinuert m.h.t. μ, har . form $\nu(x,x)$ for en vektor $x \in H_\mu$, hvis og kun hvis $\chi_{\dot{R}} \in L^1_\rho$.

2. **Lad K være en endelig delmængde af $\dot{R}$; lad et matrix mål** $\underline{\underline{\mu}}$ opfylde: $\underline{\underline{\mu}}(I) = 0$ for ethvert interval I, så at $I \cap K = \emptyset$. Beskriv $H_{\underline{\underline{\mu}}}$. Find specielt udtryk for dimensionen af $H_{\underline{\underline{\mu}}}$.

3. Lad et to dimensionalt matrix mål $\underline{\underline{\mu}}$ være bestemt ved: $\underline{\underline{\mu}}(I) = 0$ for ethvert interval I, så at $I \cap \dot{N} = \emptyset$,

$$\underline{\underline{\mu}}(\{n\}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - n^{-2} \\ 1 - n^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \dot{N}.$$

Find en begrænset, kontinuert vektorfunktion $\underline{f}$, så at $(\underline{f}\, \chi_{[-n,n]})$ er en fundamentalfølge i $H_{\underline{\underline{\mu}}}$, men f_1 og f_2 er ikke integrable m.h.t. alle målene $\mu_{i,j}$, $i,j = 1,2$.

*4. Beskriv spektret for $\mathcal{A}_{\underline{\underline{\mu}}}$ i forhold til $\underline{\underline{\mu}}$'s vækst-egenskaber. (Det vanskeligste punkt er vist at vise, at $\underline{\underline{\mu}}(\{\lambda\})$ er $\neq 0$ for enhver egenværdi λ).

§ 2. Multiplicitet.

Vi betragter et Hilbertrum H og en selvadjungeret operator A på H med spektralmålet $p(\chi_I) = P(I)$.

Et afsluttet underrum $F \subseteq H$ siges at være et frembringende underrum for A, hvis $\{P(I)x \mid \bar{I} \in \mathfrak{I}, x \in F\}$ udspænder H ($\mathfrak{I}$ betegner mængden af kompakte intervaller $\subset \mathbb{R}$), d.v.s. hvis enhver vektor $\in$ H kan approksimeres med vektorer af formen $p(f_1)x_1 + \dots + p(f_n)x_n, f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), x_1, \dots, x_n \in F$.

Da $P([-n,n])x \to x$, $n \to \infty$, for ethvert $x \in H$, er H et frembringende underrum for A.

Definition: A har multiplicitet n, hvis: 1) A har et n-dimensionalt frembringende underrum, 2) ethvert frembringende underrum har dimension $\geq n$.

Hvis underrummet i H frembragt af vektorerne $x_1, \dots, x_n$ er et frembringende underrum for A, kalder vi $x_1, \dots, x_n$ en frembringende basis for A.

Definition: En lokalt defineret n-dimensional frembringende basis for A med definitionsmængde $\mathfrak{J}$ er n afbildninger $J \to x_\nu(J)$, $\nu = 1, \dots, n$, af en mængde $\mathfrak{J}$ af begrænsede intervaller $\subset \mathbb{R}$ ind i H, så at

1) $\mathbb{R} \subseteq \bigcup\{\mathring{J} \mid J \in \mathfrak{J}\}$, 2) $\bar{I} \in \mathfrak{I}$, $I \subseteq J \in \mathfrak{J} \Rightarrow I \in \mathfrak{J}$,

3) $P(I)x_\nu(J) = x_\nu(I \cap J)$ for $\nu = 1, \dots, n$, $\bar{I} \in \mathfrak{I}$, $J \in \mathfrak{J}$,

4) $\{x_\nu(J) \mid \nu = 1, \dots, n, J \in \mathfrak{J}\}$ udspænder H.

Bemærkning: Hvis $J_1 \cup J_2 \in \mathfrak{J}$ og $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, gælder $x_\nu(J_1 \cup J_2) = P(J_1 \cup J_2)x_\nu(J_1 \cup J_2) = (P(J_1)+P(J_2))x_\nu(J_1 \cup J_2) = x_\nu(J_1)+x_\nu(J_2)$. En given lokalt defineret basis kan på en og kun én måde udvides til en ny med definitionsmængde bestående af alle begrænsede intervaller; thi ethvert begrænset interval I kan skrives som foreningsmængde af endeligt mange disjunkte in-

tervaller $\in \mathfrak{J}$; hvis dette er gjort på to måder, $I = J_1 \cup \ldots \cup J_l = K_1 \cup \ldots \cup K_k$, har vi:
$\sum_{\lambda=1}^{l} x_\nu(J_\lambda) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\kappa=1}^{k} x_\nu(J_\lambda \cap K_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{k} x_\nu(K_\kappa)$; definitionen $I \to x_\nu(I) = \sum_{\lambda=1}^{l} x_\nu(J_\lambda)$ giver den søgte udvidelse.

Sætning: A har multiplicitet $\leqq n$, hvis og kun hvis A har en lokalt defineret n dimensional frembringende basis.

Bevis: Hvis F er et n dimensionalt frembringende underrum for A, og $x_1,\ldots,x_n$ er lineært uafhængige vektorer i F, er afbildningerne $I \to x_\nu(I) = P(I)x_\nu$, $\nu = 1,\ldots,n$, definerede for $\overline{I} \in \mathfrak{I}$, en lokalt defineret frembringende basis.

Hvis A har en sådan basis, kan vi antage, at den er defineneret for alle begrænsede intervaller. Lad $K_1', K_2', \ldots$ være numerabelt mange disjunkte begrænsede intervaller, der overdækker $\mathring{R}$, og lad $K_{\nu 1}, K_{\nu 2}, \ldots$ være de højst numerabelt mange af disse, for hvilke $x_\nu(K_{\nu l}) \neq 0$; rækken $\sum_{l} 2^{-l} \|x_\nu(K_{\nu l})\|^{-1} x_\nu(K_{\nu l})$ er da konvergent i H, vi kalder summen x_ν; $x_1,\ldots,x_n$ er da en frembringende basis, og underrummet i H udspændt af $x_1,\ldots,x_n$ er højst n dimensionalt.

Sætning: Lad $\underline{\mu}$ være et n dimensionalt matrixmål på $\mathring{R}$. $\Lambda_{\underline{\mu}}$ har multiplicitet $\leqq n$.

Bevis: Lad $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ være den sædvanlige basis for $\mathring{C}^n$. Afbildningerne $I \to \chi_I \underline{e}_\nu$ af mængden af begrænsede intervaller $\subset \mathring{R}$ ind i $H_{\underline{\mu}}$ er en lokalt defineret frembringende basis for A, da $T_0(\mathring{R}, \mathring{C}^n)$ er tæt i $H_{\underline{\mu}}$.

2.2. Lemma: Lad φ_0 være en lineær isometrisk afbildning af et tæt underrum H_0 i et Banachrum H på et tæt underrum K_0 i et Banachrum K. φ_0 kan på én måde udvides til en lineær isometrisk afbildning af H på K.

Bevis: φ_0 kan på én måde udvides til en kontinuert lineær afbildning φ af H ind i K. For $A = \{x \in H_0 | \|x\| \leqq 1\}$ fås: $\overline{A} = \{x \in H | \|x\| \leqq 1\}$, $\varphi(\overline{A}) \subset \overline{\varphi(A)} \subseteq \{x \in K | \|x\| \leqq 1\}$, d.v.s. φ er normformindskende. φ_0^{-1} udvides tilsvarende til en normformindskende lineær afbildning ψ af K ind i H. $\varphi\psi$ og $\psi\varphi$ er da kontinuerte udvidelser af de identiske afbildninger af K_0 og H_0, og er derfor de identiske afbildninger af K og H, d.v.s. $\psi = \varphi^{-1}$, φ afbilder H på K, og φ og ψ er isometrier.

En lineær isometri φ af et Hilbertrum H på et andet K bevarer også det indre produkt: $(\varphi x|\varphi y) = (x|y)$, da $(x|y) = \sum_{n=0}^{3} i^n \|x+i^n y\|^2$, og bevarer derfor alle Hilbertrum teoretiske begreber. Afbildningen $A \to \varphi \circ A \circ \varphi^{o-1}$ er da en afbildning af mængden af operatorer på H på mængden af operatorer på K, der bevarer alle de i det foregående indførte begreber; f.eks. er A og $\varphi \circ A \circ \varphi^{o-1}$ samtidigt selvadjungerede.

Hvis der for en operator A på et Hilbertrum H og en operator B på et Hilbertrum K eksisterer en lineær isometri φ af H på K, så at $B = \varphi \circ A \circ \varphi^{o-1}$, siges A og B at være rumligt isomorfe eller unitært ækvivalente (selv om φ som regel kun kaldes unitær, hvis H = K).

Vi vil vise, at en selvadjungeret operator A med endelig multiplicitet på et Hilbertrum H er rumligt isomorf med en multiplikationsoperator.

Lad da A have multiplicitet $\leqq n$, og lad $x_1,\dots,x_n$ være en lokalt defineret frembringende basis, som vi gerne kan antage defineret for alle begrænsede intervaller.

Vi definerer en matrixfunktion $\underline{\mu}$ på $\dot{R}$ ved

$$\mu_{ij}(t) = \begin{cases} (x_i(]0,t]|x_j(]0,t])) & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -(x_i(]t,0])|x_j(]t,0]) & t < 0 \end{cases} \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

Herved defineres et matrix mål, idet for $\underline{\xi} \in \mathring{C}^n$ og $t_1 < t_2$ $\underline{\xi}\,\_(\underline{\underline{\mu}}(t_2)-\underline{\underline{\mu}}(t_1))\overline{\underline{\xi}}| = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(x_i(]t_1,t_2])|x_j(]t_1,t_2]))\overline{\xi}_j = \|\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i(]t_1,t_2])\|^2 \geqq 0.$

Lad p være den til A svarende homomorfi $L_p^\infty \to \mathcal{L}$. Vi minder om, at en majoriseret, punktvis konvergent følge af funktioner overføres i en følge af operatorer, der konvergerer i den svage topologi på $\mathcal{L}$, og hvis konvergensen er monoton, endog i den stærke topologi på $\mathcal{L}$. Heraf fås, at $(x_i(I)|x_j(I)) = \mu_{ij}(I)$ for $i,j = 1,\dots,n$ og vilkårligt begrænset interval I.

Vi ønsker at definere en lineær isometri ψ af $H_{\underline{\underline{\mu}}} = L^2_{\underline{\underline{\mu}}}(\mathring{R},\mathring{C}^n)$ på H. For $\underline{\xi} \in \mathring{C}^n$ og begrænset interval I sætter vi $\psi(\underline{\xi}\chi_I) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x_\nu(I) = \sum_{\nu=1}^{n} p(\xi_\nu \chi_I)x_\nu(J)$ for vilkårligt begrænset interval $J \supseteqq I$; $\|\psi(\chi_I\underline{\xi})\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\mu_{ij}(I)\overline{\xi}_j = \|\chi_I\underline{\xi}\|^2$. ψ udvides ved linearitet til en isometri: $\underline{f} = \underline{f}\,\chi_I \to \sum_{i=1}^{n} p(f_\nu)x_\nu(I)$ af $T_o(\mathring{R},\mathring{C}^n)$ på et underrum $H_o \subset H$, der er tæt i H, da $x_1,\dots,x_n$ er en lokalt defineret frembringende basis for A. Da også $T_o(\mathring{R},\mathring{C}^n)$ er tæt i $H_{\underline{\underline{\mu}}}$, kan ψ udvides til en isometri af $H_{\underline{\underline{\mu}}}$ på H.

En funktion $\underline{g} = \underline{g}\chi_I \in C_{o,st}(\mathring{R},\mathring{C}^n)$ kan approksimeres ligeligt med en følge $\underline{f}_m = \underline{f}_m\chi_I$ af trappefunktioner; så gælder $\underline{f}_m \to \underline{g}$ i $H_{\underline{\underline{\mu}}}$ og $p(f_{m,i}) \to p(g_i)$, $i = 1,\dots,n$, og $\psi(\underline{g}) = \lim\psi(\underline{f}_m) = \lim \sum_{i=1}^{n} p(f_{m,i})x_i(I) = \sum_{i=1}^{n} p(g_i)x_i(I)$.

Lad $p_{\underline{\underline{\mu}}}$ være den til $\Lambda_{\underline{\underline{\mu}}}$ svarende homomorfi; for en stykkevis kontinuert, reel funktion f er $p_{\underline{\mu}}(f)$ afslutningen af operatoren $\underline{g} \to f\underline{g}$ defineret på $T_o(\dot{R},\dot{C}^n)$. For $\underline{g} = \underline{g}\chi_I \in T_o(\dot{R},\dot{C}^n)$ fås: $\psi \circ p_{\underline{\mu}}(f)\underline{g} = \psi(f\underline{g}) = \sum_{i=1}^{n} p(fg_i)x_i(I) = \sum_{i=1}^{n} p(f)p(g_i)x_i(I) =$

$p(f)\circ\psi\underline{g}$. Afbildningen $(\underline{g},\underline{h}) \to (\psi\underline{g},\psi\underline{h})$ fører en tæt mængde i $G(p_{\underline{\mu}}(f))$ ind i $G(p(f))$, idet $(\psi\underline{g},\psi\circ p_{\underline{\mu}}(f)\underline{g}) = (\psi\underline{g},p(f)\circ\psi\underline{g})$ for $\underline{g} \in T_o(\dot{R},\dot{C}^n)$, og derfor $G(p_{\underline{\mu}}(f))$ ind i $G(p(f))$; d.v.s. $\psi\circ p_{\underline{\mu}}(f)\circ\psi^{o-1} \subseteq p(f)$; da begge sider er selvadjungerede, er $\psi\circ p_{\underline{\mu}}(f)\circ\psi^{o-1} = p(f)$ (da $B \subseteq C \Rightarrow C^* \subseteq B^*$). $p_{\underline{\mu}}(f)$ og $p(f)$ er altså rumligt isomorfe. Specielt er $\psi\circ\Lambda_{\underline{\mu}} = A\circ\psi$.

<u>Sætning</u>: Lad A være en selvadjungeret operator på et Hilbertrum H, $x_1,\ldots,x_n$ en lokalt defineret frembringende basis, p den til A svarende homomorfi. Der eksisterer et matrix mål $\underline{\mu}$ og en lineær isometri ψ af $H_{\underline{\mu}}$ på H, så at $\psi(\underline{g}) = \sum_{i=1}^{n} p(g_i)x_i(I)$ for $\underline{g} = \underline{g}\chi_I \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$, og så at $p(f) = \psi\circ p_{\underline{\mu}}(f)\circ\psi^{o-1}$ for enhver stykkevis kontinuert, reel funktion f på $\dot{R}$.

1. Lad A være en selvadjungeret operator med multiplicitet n. Vis, at A har en frembringende basis $x_1, \ldots, x_n$, så at det tilsvarende matrix mål $\underline{\mu}$ har diagonalform. Vis, at der eksisterer n projektioner $P_1, \ldots, P_n$ på parvis ortogonale underrum i H, kommuterende med A, så at $E = P_1 + \ldots + P_n$, og så at A's sammentrækning til $P_\nu H$, opfattet som operator på $P_\nu H$, har multiplicitet én, $\nu = 1, \ldots, n$.

2. Et afsluttet underrum $F \subseteq H$ siges at være separerende for en mængde $\mathcal{B}$ af operatorer, hvis $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2 \Rightarrow \exists x \in F$, så $B_1 x \neq B_2 x$. Vis, at F er et frembringende underrum for den selvadjungerede operator A, hvis og kun hvis F er separerende for $\{B \in \mathcal{L} \mid BA \subseteq AB\}$.

§3. En udviklingssætning.

I denne § bevises en sætning, der er den Hilbertrum teoretiske kerne af en sætning om differentialoperatorer (jfr. Naimark: Lineare Differentialoperatoren, specielt § 21).

Vi antager givet et Hilbertrum H, et tæt underrum H_o, en selvadjungeret operator **A** med tilsvarende homomorfi p, og en lineær afbildning $\underline{\Phi}$ af H_o ind i mængden af afbildninger: $\grave{R} \to \grave{C}^n$, så at

1) $\underline{\Phi}(f)$ er kontinuert for ethvert $f \in H_o$,

2) til $f \in H_o$ og $\lambda \in \grave{R}$, så at $\underline{\Phi}(f)(\lambda) = 0$, eksisterer der $v \in H_o \cap D(A)$, så at $(A - \lambda E)v = f$,

3) til $\lambda \in \grave{R}$ eksisterer der $f_1,\ldots,f_n \in H_o$, så at vektorerne $\underline{\Phi}(f_1)(\lambda),\ldots,\underline{\Phi}(f_n)(\lambda) \in \grave{C}^n$ er lineært uafhængige, dvs. så at determinanten $\det(\Phi_j(f_i)(\lambda)) \neq 0$.

Lad, for et vilkårligt interval $I \subset \grave{R}$, $m(I)$ betegne længden af I.

<u>Lemma:</u> Lad $\lambda \in \grave{R}$ og $w \in H_o$ opfylde $\underline{\Phi}(w)(\lambda) = 0$; der eksisterer $\delta > 0$, så at $\|p(\chi_I)w\| \leqq m(I)$ for ethvert interval I, der opfylder $\lambda \in I \subseteqq [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$.

Bevis: Lad e betegne funktionen : $t \to t$, defineret for $t \in \grave{R}$. I følge egenskab 2) eksisterer der $v \in H_o \cap D(A)$, så at $(A - \lambda E)v = w$. Da $\chi_{[\lambda - \delta,\lambda + \delta]} \downarrow \chi_{\{\lambda\}}$ for $\delta \to 0^+$, konvergerer $p(\chi_{[\lambda - \delta,\lambda + \delta] \setminus \{\lambda\}})$ mod 0 i den stærke topologi på $\mathcal{H}$; specielt kan vi finde $\delta > 0$, så at $\|p(\chi_{[\lambda - \delta,\lambda + \delta] \setminus \{\lambda\}})v\| \leqq 1$. For et interval I, så at $\lambda \in I \subseteqq [\lambda - \delta,\lambda + \delta]$, fås $\|p(\chi_I)w\| = \|p(\chi_I)\, p(e - \lambda)w\| = \|p((e - \lambda)\chi_I)p(\chi_{[\lambda - \delta,\lambda + \delta] \setminus\{\lambda\}})v\| \leqq \|p((e - \lambda)\chi_I)\| \leqq \sup\{|t - \lambda| \mid t \in I\} \leqq m(I)$.

<u>Sætning</u>: Lad I være et kompakt interval. Antag, at $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in H_o$ opfylder: $\det(\Phi_j(\alpha_i)(\lambda)) \neq 0$ for $\lambda \in I$; lad $\underline{\underline{\Psi}}(\lambda)$ være den in-

verse matrix til $(\Phi_j(\alpha_i)(\lambda))$ for $\lambda \in I$, og $\underline{\underline{\Psi}}(\lambda) = 0$ for $\lambda \notin I$; definer $g_i(I) = \sum_{j=1}^{n} p(\Psi_{i,j}\chi_I)\,\alpha_j$, $i = 1,\dots,n$. For et interval $J \subseteqq I$ og $f \in H_0$ gælder $p(\chi_J)f = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)g_i(I)$.

Bevis: $\underline{\underline{\Psi}}$'s komponenter $\Psi_{i,j}$ er stykkevis kontinuerte og opfylder $\sum_{j=1}^{n} \Psi_{i,j}\Phi_k(\alpha_j) = \delta_{i,k}\chi_I$ ($\delta_{i,k} = 1$ for $i = k$, $= 0$ ellers).

Vi antager først, at J er kompakt, og vælger $a \in \dot{R}^+$, $a \geqq m(J)$.

Vi sætter $\sum_{i=1}^{n} \Psi_{i,j}\,\Phi_i(f)\chi_J = F_j$, $j = 1,\dots,n$; herved fås

$$\sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)g_i(I) = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J) \sum_{j=1}^{n} p(\Psi_{i,j}\,\chi_I)\alpha_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} p\Big(\sum_{i=1}^{n} \Psi_{i,j}\,\Phi_i(f)\chi_J\Big)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} p(F_j)\alpha_j$$; for $\lambda \in J$ finder vi:

$$\Phi_l\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda)\alpha_j\Big)(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \Psi_{i,j}(\lambda)\,\Phi_i(f)(\lambda)\chi_J(\lambda)\Phi_l(\alpha_j)(\lambda) =$$

$\sum_{i=1}^{n}\delta_{i,l}\,\Phi_i(f)(\lambda) = \Phi_l(f)(\lambda)$, $l = 1,\dots,n$, altså $\underline{\Phi}(f - \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda)\alpha_j)(\lambda) = 0$.

$F_{j|J}$ er ligelig kontinuert; til $\varepsilon > 0$ kan vi finde $\delta > 0$, så at det for en vilkårlig inddeling af J i disjunkte intervaller $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ med indskudte punkter $\lambda_i \in \Delta_i$, så at $\max\{m(\Delta_i) \mid i = 1,\dots,r\} \leqq \delta$, gælder $\|p(F_j) - \sum_{i=1}^{r} F_j(\lambda_i)p(\chi_{\Delta_i})\| \leqq$

$\sup\{|F_j(\lambda) - \sum_{i=1}^{r} F_j(\lambda_i)\chi_{\Delta_i}(\lambda)| \,|\, \lambda \in J\} \leqq \varepsilon(2n \max\{\|\alpha_v\| \,|\, v = 1,\ldots,$ $n\})^{-1}$, $j = 1,\ldots,n$, og derfor $\|\sum_{j=1}^{n} p(F_j)\alpha_j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} F_j(\lambda_i)p(\chi_{\Delta_i})$ $\alpha_j\| \leqq \sum_{j=1}^{n}\|p(F_j) - \sum_{i=1}^{r} F_j(\lambda_i)p(\chi_{\Delta_i})\|\cdot\|\alpha_j\| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$.

For $\lambda \in J$ og $w_\lambda = f - \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda)\alpha_j \in H_o$ har vi vist $\underline{\Phi}(w_\lambda)(\lambda) =$ 0. I følge lemmaet findes der til hvert $\lambda \in J$ et $\delta(\lambda) > 0$, som vi yderligere vil underkaste betingelsen $\delta(\lambda) \leqq \min\{\frac{1}{2}\delta, \varepsilon^2(4a)^{-1}\}$, så at $\|p(\chi_{I_\lambda})w_\lambda\| \leqq m(I)$ for $\lambda \in I_\lambda \subseteqq [\lambda - \delta(\lambda), \lambda + \delta(\lambda)]$. Da J er kompakt, kan vi vælge endelig mange punkter $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in J$, så at $J \subseteqq \cup\{]\lambda_i - \delta(\lambda_i), \lambda + \delta(\lambda_i)[\,|\, i = 1,\ldots,r\}$; vi kan da også vælge r disjunkte intervaller Δ_i, så at $\lambda \in \Delta_i \subseteqq]\lambda_i - \delta(\lambda_i),$ $\lambda_i + \delta(\lambda_i)[$, $i = 1,\ldots,r$, og så at $J = \cup\{\Delta_i \,|\, i = 1,\ldots,r\}$. For dette valg fås: $\|p(\chi_J)f - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} F_j(\lambda_i)p(\chi_{\Delta_i})\alpha_j\|^2 =$

$$\|\sum_{i=1}^{r} p(\chi_{\Delta_i})(f - \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda_i)\alpha_j)\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\|p(\chi_{\Delta_i})w_{\lambda_i}\|^2 \leqq$$

$$\sum_{i=1}^{r} m(\Delta_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{r} m(\Delta_i)\cdot\varepsilon^2(4a)^{-1} = \varepsilon^2(4a)^{-1}\, m(J) \leqq (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2.$$

Da $m(\Delta_i) \leqq 2\delta(\lambda_i) \leqq \delta$, $i = 1,\ldots,r$, får vi ialt

$\|p(\chi_J)f - \sum_{j=1}^{n} p(F_j)\alpha_j\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ for vilkårligt $\varepsilon > 0$, derfor

$$p(\chi_J)f = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)\, g_i(I).$$

Da begge sider af ligheden afhænger additivt af J, og da de halvåbne og de åbne delintervaller af I kan dannes udfra de kompakte ved differensdannelse, gælder ligheden for ethvert interval $J \subseteqq I$.

3.2 For vilkårligt interval $I_1 \subseteqq I$ definerer vi: $g_i(I_1) = p(\chi_{I_1}) g_i(I)$, $i = 1,\ldots,n$. For $f \in H_o$ og $J \subseteqq I_1$ fås da $p(\chi_J)f = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)\, g_i(I) = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)\, p(\chi_{I_1}) g_i(I) = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)$ $g_i(I_1)$.

Lad k være et begrænset interval, og antag, at $\beta_1,\ldots,\beta_n \in H_o$ opfylder: $\det(\Phi_j(\beta_i)(\lambda)) \neq 0$ for $\lambda \in \bar{k}$; lad $\Psi'(\lambda)$ være invers til $(\Phi_j(\beta_i)(\lambda))$ for $\lambda \in \bar{k}$, og $\Psi'(\lambda) = 0$ for $\lambda \notin \bar{k}$; sæt $g_i'(k) = \sum_{j=1}^{n} p(\Psi'_{i,j}\chi_k)\beta_j$. For et interval J, så at $J \cap k \subseteqq I$, gælder $p(\chi_J)g_i'(k) = \sum_{j=1}^{n} p(\Psi'_{i,j}\,\chi_k) p(\chi_{J\,\cap\,k})\beta_j = \sum_{j=1}^{n} p(\Psi'_{i,j}\chi_k)$ $\sum_{l=1}^{n} p(\Phi_l(\beta_j)\, \chi_{J\,\cap\,k}) g_l(I) = \sum_{l=1}^{n} p(\sum_{j=1}^{n} \Psi'_{i,j}\, \Phi_l(\beta_j)\, \chi_{k\,\cap\,J}) g_l(I) =$ $\sum_{l=1}^{n} p(\delta_{i,l}\, \chi_{k\cap J}) g_l(I) = p(\chi_{k\cap J}) g_i(I) = g_i(k \cap J)$. Dette viser for $J \subseteqq k \cap I$, at $p(\chi_J)g_i'(k) = g_i(J)$, dvs. $g_i(J)$ afhænger ikke af det kompakte interval $I \supseteqq J$ og elementerne $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in H_o$, men kun af J. Vi kan derfor trygt sætte $g_i'(k) = g_i(k)$. Da $p(\chi_J)g_i(k) = g_i(k \cap J)$ for $J \cap k \subseteqq I$, og vi som I kan vælge $\bar{k}$, gælder $p(\chi_J)g_i(k) = g_i(k \cap J)$ for ethvert interval.

Lad $\mathfrak{J}$ være mængden af begrænsede intervaller $k \subset \mathring{R}$, for hvilke der eksisterer $\beta_1,\ldots,\beta_n \in H_o$ med $\det(\Phi_j(\beta_i)(\lambda)) \neq 0$ for

$\lambda \in \bar{k}$; det er klart, at $\bar{I} \in \mathfrak{I}$, $I \subseteq J \in \mathfrak{J} \Rightarrow I \in \mathfrak{J}$, og egenskaberne 1) og 3) ved $\underline{\Phi}$ viser, at $\dot{R} = \bigcup\{\mathring{J} \mid J \in \mathfrak{J}\}$.

Formlen $p(\chi_J)f = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)g_i(I)$, $J \subseteq I \in \mathfrak{J}$, $f \in H_o$, viser, at ethvert element i $p(\chi_I)H_o$ kan approksimeres med linearkombinationer af elementer af form $g_i(k)$, $k \in \mathfrak{J}$, $i = 1,\dots,n$, (da funktionen $\Phi_i(f)\chi_J$ kan approksimeres ligeligt med trappefunktioner.) Derfor er rummet udspændt af alle $g_i(I)$, $I \in \mathfrak{J}$, $i = 1,\dots,n$, tæt i H_o og dermed i H.

Vi har vist, at $g_1,\dots,g_n$ er en lokalt defineret n-dimensional frembringende basis for A med definitionsområde $\mathfrak{J}$.

Vi udvider $g_1,\dots,g_n$ til en frembringende basis, som vi igen betegner $g_1,\dots,g_n$, med definitionsområde bestående af alle begrænsede intervaller $\subset \dot{R}$ (jfr. bemærkning V, 2, p. 1). Da udvidelsen sker ved linearitet, får formlen $p(\chi_J)f = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(f)\chi_J)g_i(I)$ gyldighed for $f \in H_o$ og vilkårlige begrænsede intervaller I og J.

Vi ved nu, at der eksisterer et n-dimensionalt matrix mål $\underline{\mu}$ og en lineær isometri Ψ af $H_{\underline{\mu}}$ på H, så at $\Psi(\underline{f}) = \sum_{i=1}^{n} p(f_i)g_i(I)$ for $f = f\chi_I \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$, og $p(f)\circ\Psi = \Psi\circ p_{\underline{\mu}}(f)$ for enhver stykkevis kontinuert funktion $f : \dot{R} \to \dot{R}$.

For $x \in H_o$ og begrænset interval $I \subset \dot{R}$ gælder $\underline{\Phi}(x)\chi_I \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n) \subseteq H_{\underline{\mu}}$, og $\Psi(\underline{\Phi}(x)\chi_I) = \sum_{i=1}^{n} p(\Phi_i(x)\chi_I)g_i(I) = p(\chi_I)x$;

$\{\{p(\chi_J)x \mid J \text{ er et begrænset interval} \supseteq I\} \mid I \text{ er et begrænset interval}\}$ er basis for et fundamentalfilter på H med grænseværdi x, hvilket vi vil skrive $x = \lim\{p(\chi_I)x \mid I \to \grave{R}\}$; da Ψ er en isometri, er også $\{\{\underline{\Phi}(x)\chi_J \mid J \supseteq I\} \mid I\}$ basis for et fundamentalfilter, og $x = \lim\{\Psi(\underline{\Phi}(x)\chi_I) \mid I \to \grave{R}\}$.

I tilfældet n = 1 gælder $\sup\{\mu(|\Phi(x)\chi_I|^2) \mid I\} = \sup\{\|p(\chi_I)x\|^2 \mid I\} = \|x\|^2$, derfor $\Phi(x) \in L^2_\mu(\grave{R},\grave{C})$, og $x = \Psi(\Phi(x))$.

<u>Sætning</u>: Under de p. 1 nævnte forudsætninger har A multiplicitet $\leq$ n. Der eksisterer et n-dimensionalt matrix mål $\underline{\mu}$ og en lineær isometri $\Psi : H_{\underline{\mu}}$ på H, så at $\Psi \circ \Lambda_{\underline{\mu}} = A \circ \Psi$ og $x = \lim\{\Psi(\underline{\Phi}(x)\chi_I) \mid I \to \grave{R}\}$ for $x \in H_o$. For n = 1 er Φ sammentrækningen af Ψ^{o-1} til H_o.

3.3 Vi må udlede et specialtilfælde af Fubinis sætning (jfr. [3], V, § 2).

Definition: Lad S, T og Q være vilkårlige mængder, u en afbildning: $S \times T \to Q$; for fast $t \in T$ er $u(\cdot,t)$ afbildningen $s \to u(s,t)$; for fast $s \in S$ er $u(s,\cdot)$ afbildningen $t \to u(s,t)$.

Lad ρ og μ være positive mål på henholdsvis I og $J \in \grave{I}$; vi definerer en rektangel funktion $\rho \times \mu$ ved $\rho \times \mu\ (I_1 \times J_1) = \rho(I_1)\cdot\mu(J_1)$ for $I_1 \subseteq I$, $J_1 \subseteq J$. Det ses let, at $\rho \times \mu$ kan udvides til et mål, som vi igen betegner $\rho \times \mu$ (jfr.[3], og III,§6). De i [3], V, § 1-2 beviste sætninger om Lebesgue målet på et interval $\subset \grave{R}^2$ ses let at gælde også for $\rho \times \mu$; vi minder specielt om Fubinis sætning: Hvis $f \in L^1_{\rho\times\mu}$, så vil $f(s,\cdot) \in L^1_\mu$ for ρ næsten alle s, $s \to \int_J f(s,t)d\mu(t) \in L^1_\rho$, og $\int_I\int_J f(s,t)d\mu(t)\, d\rho(s) = \rho \times \mu(f)$.

<u>Sætning</u>: Antag, at $f: I \times J \to \grave{R}$ er $\rho \times \mu$ målelig, at $|f(s,\cdot)| \in L^1_\mu$ for ρ næsten alle $s \in I$, og at $s \to \int_J |f(s,t)|d\mu(t) \in L^1_\rho$; da vil $f \in L^1_{\rho\times\mu}$, og derfor $\rho \times \mu(f) = \int_I\int_J f(s,t)d\mu(t)d\rho(s)$.

Bevis: Vi sætter $f_n = |f| \wedge n$; for ρ næsten alle $s \in I$ gælder $f_n(s,\cdot) \in L^1_\mu$ og $f_n(s,\cdot) \uparrow |f(s,\cdot)|$, derfor $g_n(s) = \int_J f_n(s,t)d\mu(t) \uparrow \int_J |f(s,t)|d\mu(t) = g(s)$, og $\infty > \int_I g(s)d\rho(s) = \sup_n\{\int_I g_n(s)d\rho(s)\} = \sup_n\{\int_I \int_J f_n(s,t)d\mu(t)d\rho(s)\} = \sup_n\{\rho \times \mu(f_n)\}$, da $f_n \in L^1_{\rho\times\mu}$ ([3], II, 9, 5). Altså er $f \in L^1_{\rho\times\mu}$ ([3], II, 9, 6).

Sætningen kan specielt anvendes på en $\rho \times \mu$ målelig funktion f, for hvilken der eksisterer $g \in L^1_\rho$ og $h \in L^1_\mu$, så at $|f(s,t)| \leqq g(s)\cdot h(t)$.

Hvis $A \subseteqq I$ er ρ målelig, findes der til $\varepsilon > 0$ en afsluttet mængde F og en relativt til I åben mængde O, så at $F \subseteqq A \subseteqq O$ og $\rho(\chi_{O\setminus F})\cdot\mu(J) < \varepsilon$; da er $F \times J$ en afsluttet og $O \times J$ en rel. til $I \times J$ åben mængde, så at $F \times J \subseteqq A \times J \subseteqq O \times J$ og $\rho \times \mu(O \times J \setminus F \times J) < \varepsilon$; dette viser, at $A \times J$ er $\rho \times \mu$ målelig. Heraf følger straks, at hvis $f: I \to \dot{R}$ er ρ målelig, så er $(s,t) \to f(s)$ $\rho \times \mu$ målelig.

3.4 Vi antager nu, at $H = L^2_\rho(\dot{R},\dot{C})$, hvor ρ er et positivt mål på $\dot{R}$; desuden at $H_o \subseteqq L^2_{o,\rho}$, og at H_o er tæt i $L^2_{o,\rho}$ (jfr. I, 2, 5); dette gælder, hvis og kun hvis der til vilkårligt $I \in \dot{I}$ eksisterer $J \in \dot{I}$, så at $\{f \in H_o | f = f\chi_J\}$ er tæt i $\{f \in H | f = f\chi_I\}$ (jfr. øv.5); specielt er betingelsen opfyldt, hvis $\mathfrak{L}^o \subseteqq H_o$. Desuden antager vi givet en kontinuert afbildning $\underline{u}: \dot{R}^2 \to \dot{C}^n$, således at $\Phi_\nu(x)(\lambda) = \int x(t)u_\nu(t,\lambda)d\rho(t)$ for $x \in H_o$, $\nu = 1,\dots,n$, eller kort $\underline{\Phi}(x)(\lambda) = \int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t)$. Vi antager stadig, at $\underline{\Phi}$ opfylder betingelserne 2) og 3) p. 1; betingelsen 1) er opfyldt, da $\underline{u}$ er kontinuert og x er nul uden for en kompakt mængde (jfr. Mat. 2, 1961-62, DL I, 2, 2).

For $x \in H_o$ og $\underline{f} = \underline{f}\chi_I \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ gælder:

$\int \Psi(\underline{f})(t)\overline{x(t)}d\rho(t) = (\Psi(\underline{f})|x) = (\Psi(p_{\underline{\mu}}(\chi_I)\underline{f})|x) = (p(\chi_I)\Psi(\underline{f})|x) =$
$(\Psi(\underline{f})|p(\chi_I)x) = (\underline{f}|\chi_I\underline{\Phi}(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\chi_I(\lambda) \overline{\int x(t)u_j(t,\lambda)d\rho(t)}$
$d\mu_{i,j}(\lambda)$, idet $\Psi\cdot p_{\underline{\mu}}(\chi_I) = p(\chi_I)\circ\Psi$, Ψ er en isometri, og $\Psi(\chi_I\underline{\Phi}(x))$ $= p(\chi_I)x$; $(t,\lambda) \to f_i(\lambda)\overline{\chi_I(\lambda)x(t)u_j(t,\lambda)}$ er nul uden for et kompakt interval $\subset \dot{R}^2$, produkt af funktioner, der er $\rho \times \nu$ målelige for ethvert mål ν på I, og numerisk $\leq k|x(t)|\cdot|f_i(\lambda)|$; da $|x| \in L^2_{o,\rho} \subseteq L^1_\rho$ og $|f_{i|I}| \in L^1_\nu$, kan vi anvende Fubinis sætning, og derfor ombytte rækkefølgen af integrationerne: $(\Psi(\underline{f})|x) =$
$\int \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\chi_I(\lambda) \overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)\overline{x(t)}d\rho(t)$. Da $\Psi(\underline{f}) \in L^2_\rho$ og
$t \to \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)$ er kontinuert, tilhører begge funktioner $L^2_{loc,\rho} = L^{2\,\prime}_{o,\rho}$. Da H_o er tæt i $L^2_{o,\rho}$, kan vi slutte, at de to funktioner bestemmer samme element i $L^{2\,\prime}_{o,\rho}$, og derfor er ens ρ næsten overalt. Da vi gerne kan ændre $\Psi(\underline{f})$ på en ρ nulmængde, har vi vist: For $\underline{f} \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ er $\Psi(\underline{f})(t) =$
$\sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)$ (jfr. øv. 6).

For $n = 1$ lyder formlen $\Psi(f)(t) = \int f(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda)$; i dette tilfælde fungerer det ovenstående bevis, når blot $f \in L^2_{o,\mu}$. For vilkårligt $f \in L^2$ fås da $\Psi(f) = \lim\{\Psi(f\chi_I)|I \to \dot{R}\} =$
$\lim\{t \to \int f(\lambda)\chi_I(\lambda)u(t,\lambda)d\mu(\lambda)|I \to \dot{R}\}$, hvor grænseværdien skal tages i $L^{2\,\prime}_\rho$'s topologi, dvs. $\lim\{ \int | \Psi(f)(t) -$
$\int f(\lambda)\chi_I(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda)|^2 d\rho(t) \mid I \to \dot{R}\} = 0$.

Hvis $n = 1$ og u er begrænset, $|u(t,\lambda)| \leq k$ for alle $(t,\lambda) \in \dot{R}^2$, og $f \in L^2_\mu \cap L^1_\mu$, er også $f\overline{u(t,\cdot)} \in L^1_\mu$ for ethvert

$t \in \dot{R}$; hvis vi sætter $\varphi(t) = \int f(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda)$, konvergerer $\Psi(\chi_I f)(t)$ mod $\varphi(t)$, ligeligt for $t \in R$, når $I \to \dot{R}$, idet $|\int f(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda) - \int \chi_I(\lambda)f(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda)| \leq k\int |f(\lambda)|\chi_{\dot{R}\setminus I}(\lambda)$ $d\mu(\lambda) \to 0$. Da $\Psi(\chi_I f) \to \Psi(f)$ i L^2_ρ, vil også for vilkårligt $\Delta \in \dot{I}$ $\chi_\Delta \Psi(\chi_I f) \to \chi_\Delta \Psi(f)$ i L^2_ρ; samtidigt ved vi, at $\chi_\Delta \Psi(\chi_I f) \to \chi_\Delta\varphi$ ligeligt, og derfor også i L^2_ρ; heraf følger, at $\chi_\Delta \Psi(f)$ og $\chi_\Delta\varphi$ er ρ ækvivalente, og vi kan vælge $\Psi(f) = \varphi$.

For $x \in L^2_{o,\rho}$, $\underline{f} \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ og $I \in \dot{I}$ gælder: $(\underline{f}|\Psi^{o-1}(p(\chi_I)x)) = (\Psi(\underline{f})|p(\chi_I)x) = (\Psi(\chi_I\underline{f})|x) =$

$$\int \sum_{i,j=1}^{n}\int f_i(\lambda)\chi_I(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)\overline{x(t)}d\rho(t) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{\chi_I(\lambda)\int x(t)u_j(t,\lambda)d\rho(t)}d\mu_{i,j}(\lambda);$$ da

$\Psi^{o-1}(p(\chi_I)x) \in H_{\underline{\mu}}$, og $\lambda \to \chi_I(\lambda)\int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t) \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n) \subseteq H_{\underline{\mu}}$, og da $C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ er tæt i $H_{\underline{\mu}}$, kan vi slutte, at de to funktioner er ens $\underline{\mu}$ næsten overalt. Da vi gerne kan ændre $\Psi^{o-1}(p(\chi_I)x)$ på en $\underline{\mu}$ nulmængde, har vi vist:

For $x \in L^2_{o,\rho}$ er $\Psi^{o-1}(p(\chi_I)x)(\lambda) = \chi_I(\lambda)\int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t)$, og $\Psi^{o-1}(x) = \lim\{\lambda \to \chi_I(\lambda)\int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t) | I \to \dot{R}\}$.

For $n = 1$ og $x \in L^2_{o,\rho}$ fås: $\lambda \to \int x(t)u(t,\lambda)d\rho(t) \in L^2_\mu$, $\Psi^{o-1}(x)(\lambda) = \int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t)$.

På samme måde som ovenfor kan vi også, dersom u er begrænset, vise, at for $x \in L^2_\rho \cap L^1_\rho$ er $\Psi^{o-1}(x)$ kontinuert, $\Psi^{o-1}(x)(\lambda) = \int x(t)u(t,\lambda)d\rho(t)$.

Vi resumerer hovedpunkterne:

<u>Sætning</u>: For $\underline{f} \in C_{o,st}(\dot{R},\dot{C}^n)$ er $\Psi(\underline{f})(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}$ $d\mu_{i,j}(\lambda)$; for $x \in L^2_{o,\rho}$ og $I \in \dot{I}$ er $\Psi^{o\,-1}(p(\chi_I)x)(\lambda) = \chi_I(\lambda) \int x(t)\underline{u}(t,\lambda)d\rho(t)$. For n = 1 gælder for $f \in L^2_\mu$: $\Psi(f) = \lim\{t \to \int f(\lambda)\chi_I(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda) \,|\, I \to \dot{R}\}$, og for $x \in L^2_\rho$: $\Psi^{o\,-1}(x) = \lim\{\lambda \to \int x(t)\chi_I(t)u(t,\lambda)d\rho(t) \,\Big|\, I \to \dot{R}\}$, idet grænseværdierne skal tages i norm topologierne på L^2_ρ og L^2_μ. For n = 1 og u begrænset gælder for $f \in L^2_\mu \cap L^1_\mu$: $\Psi(f)(t) = \int f(\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\mu(\lambda)$, og for $x \in L^2_\rho \cap L^1_\rho$: $\Psi^{o-1}(x)(\lambda) = \int x(t)u(t,\lambda)d\rho(t)$.

1. Lad to funktioner f og ρ:k = $[0,1] \times [0,1] \to \dot{R}$, opfylde: $\rho(\cdot,\lambda)$ er af begrænset variation for hvert λ, $f(t,t) = 0$ for $(t,t) \in k$, og f opfylder en Lipschitz-betingelse i k m.h.t. t, ligeligt i λ (jfr. DL I, 4, 2) $\supset$: $\exists k \in \dot{R}^+$, så at
$|f(t_1,\lambda) - f(t_2,\lambda)| \leqq k|t_1 - t_2|$ for (t_1,λ) og $(t_2,\lambda) \in k$.
Vis, at $\liminf \sum_{i=1}^{r} \int |f(t,\lambda_i)| \chi_{\Delta_i} d\rho(t,\lambda_i) = 0$, idet lim inf tages over alle opspaltninger af $[0,1]$ i endelig mange disjunkte intervaller $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ med indskudte punkter $\lambda_i \in \Delta_i$.

2. Lad $t \to h(t)$ være en afbildning: $\dot{R} \to H$, så at $\lim\{\delta^{-1}\|h(t+\delta) - h(t)\| \mid \delta \to 0\} = 0$ for alle $t \in \dot{R}$. Vis, at $h(t) = h(0)$ for alle $t \in \dot{R}$.

3. Lad A være en selvadjungeret operator på H, H_o et tæt underrum i H, $\underline{\Phi}$ en lineær afbildning af H_o ind i mængden af funktioner: $\dot{R} \to \dot{C}^n$, så at

1) $\Phi_\nu(f)(\lambda)$ er analytisk for $\nu = 1,\ldots,n$, $f \in H_o$
2) $\underline{\Phi}(f)(\lambda) = 0 \Rightarrow \exists v \in H_o \cap D(A)$, så at $(A - \lambda E)v = f$
3) $\exists\lambda \in \dot{R}$ og $f_1,\ldots,f_n \in H_o$, så at $\det(\Phi_j(f_i)(\lambda)) \neq 0$
4) $A(H_o \cap D(A)) \subseteqq H_o$
5) for $\lambda \in \dot{R}$ og $f \in H_o \cap D(A)$ gælder $\underline{\Phi}(Af)(\lambda) = \lambda\underline{\Phi}(f)(\lambda)$.

Bevis, at til $I \in \dot{I}$ eksisterer $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, så at $\det(\Phi_j(\alpha_i)(\lambda)) \neq 0$ for $\lambda \in I$.

4. 1) Bevis Fubinis sætning for to vilkårlige positive mål på $\dot{R}$.
2) Vis, at $f,g \in L^1_m(\dot{R},\dot{C})$ medfører: $t \to f(t)g(s-t) \in L^1_m$ for næsten alle $s \in \dot{R}$, $s \to f * g(s) = \int f(t)g(s-t)dt \in L^1_m$. Find $\|f * g\|_{1,m}$.

5. 1) Vis, at hvis en følge $\{f_n \in \overset{\circ}{\mathcal{D}} \mid n \in \grave{N}\}$ konvergerer mod 0 i $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, eksisterer der $I \in \grave{I}$, så at $f_n = f_n \chi_I$ for alle $n \in \grave{N}$. Vis den tilsvarende sætning for $L^2_{o,\rho}$.

2) Vis, at et underrum $H_o \subsetneqq L^2_{o,\rho}$ er tæt i $L^2_{o,\rho}$, hvis og kun hvis der til $I \in \grave{I}$ eksisterer $J \in \grave{I}$, så at $\{f \in H_o \mid f = f\chi_J\}$ er tæt i $\{f \in L^2_{o,\rho} \mid f = f\chi_I\}$

6. Vis ligheden p.8: $\Psi(\underline{f})(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)$,

$\underline{f} \in C_{o,st}(\grave{R},\grave{C}^n)$, direkte ud fra forudsætningen om H_o formuleret i øv. 5, 2). (Udnyt, at $t \to \chi_J(t) \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(t)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda) \in L^2_\rho$,

til at vise, at $(\Psi(\underline{f})\mid x) = \int \sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)\overline{x(t)}d\rho(t)$

for alle $x = x\chi_I \in L^2_\rho$, og derfor $\Psi(\underline{f})(t)\chi_I(t) =$
$\sum_{i,j=1}^{n} \int f_i(\lambda)\overline{u_j(t,\lambda)}d\mu_{i,j}(\lambda)$ ρ næsten overalt i I).

VI Differentialoperatorer.

§ 1. Plancherels sætning.

I denne § vil vi til den sædvanlige differentiations operator D, eller rettere til i D, knytte forskellige operatorer på Hilbertrummet $H = L^2_m(\dot{R}, \dot{C})$, hvor m betegner Lebesgue målet på $\dot{R}$.

For $n \in \dot{N}$ definerer vi: $\mathcal{D}^n = \{f \in \mathcal{D}^o \mid f$ er n gange differentiabel, $D^n f \in \mathcal{D}^o\}$.

<u>Lemma</u>: $\mathcal{D}^n$ er tæt i $L^2_{o,m}$.

Bevis: Det er nok at vise, at for ethvert interval $I = [a,b] \in \dot{I}$ kan enhver trappefunktion på I approksimeres med n gange differentiable funktioner, der er nul i a og b. Hertil igen er det nok at vise, at $\chi_{\dot{R}^+}$ kan approksimeres i $L^2_m([-1,1],\dot{R})$ med n gange differentiable funktioner. For $a \in]0,1]$ definerer vi en funktion φ_a ved

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -a \\ k_a \int_{-a}^{t} (a^2 - s^2)^n ds, & -a \leq t \leq a \\ 1 & a \leq t \end{cases},$$

hvor $k_a^{-1} = \int_{-a}^{a} (a^2 - s^2)^n ds$. φ_a er n gange differentiabel, og $|\chi_{\dot{R}^+} - \varphi_a| \leq \chi_{[-a,a]}$, derfor $\|\chi_{\dot{R}^+} - \varphi_a\|^2 \leq m([-a,a]) = 2a \to 0$ for $a \to 0$.

Vi definerer en operator A_o ved: $D(A_o) = \mathcal{D}^1$, $A_o f = i Df$ for $f \in D(A_o)$. A_o er veldefineret; thi hvis to kontinuerte funktioner har afstanden 0 i H, er de identiske. A_o er tæt defineret og symmetrisk, idet $(A_o f|g) = \int i\, D\, f(t)\overline{g(t)}dt = i[f(b)g(b) - f(a) g(a) - \int f(t)\,\overline{Dg(t)}dt] = \int f(t)\,\overline{i\, D\, g(t)}dt = (f|A_o g)$ for f og $g = g\,\chi_{[a,b]} \in \mathcal{D}^1$.

A_o har derfor en afslutning $A = \overline{A_o} = A_o^{**}$, $A = \bar{A} \subsetneqq A^* = A_o^*$.

Vi betragter nærmere differentialligningen i $Dx = \lambda x + y$, eller $Dx = -i\lambda x - iy$, for $y \in \mathfrak{D}^o$ og $\lambda \in \mathring{C}$. For $y = 0$ har ligningen den fuldstændige løsning $x(t) = c\,e^{-i\lambda t}$, $c \in \mathring{C}$; den inhomogene ligning har da den fuldstændige løsning $x(t) = -i\,e^{-i\lambda t}\int_{-\infty}^{t} y(s)\,e^{i\lambda s}ds + c\cdot e^{-i\lambda t}$, som tilhører $\mathfrak{D}^1$, hvis og kun hvis $c = 0$ og $\int y(s)\,e^{i\lambda s}\,ds = 0$; ligningen har altså en løsning $x \in \mathfrak{D}^1 = D(A_o)$, hvis og kun hvis $\int y(s)\,e^{i\lambda s}ds = 0$; d.v.s. $(A_o - \lambda E)D(A_o) = \{y \in \mathfrak{D}^o \mid \int y(s)\,e^{i\lambda s}ds = 0\}$.

Vi kan nu vise, at $A^* - iE$ er injektiv. Lad $f \in D(A^*)$ opfylde $A^*f = if$; da gælder for $x \in D(A_o)$ $0 = (x|(A^* - iE)f) = ((A_o + iE)x|f)$; d.v.s. $\int y(t)\overline{f(t)}dt = 0$ for enhver funktion $y \in \mathfrak{D}^o$, for hvilken $\int y(t)e^{-t}dt = 0$. Vi vælger en funktion $y_1 \in \mathfrak{D}^o$, for hvilken $\int y_1(t)e^{-t}dt = 1$; en vilkårlig funktion $y \in \mathfrak{D}^o$ kan da skrives $y = y_2 + y_1 \cdot \int y(s)e^{-s}ds$, med $y_2 \in \mathfrak{D}^o$ og $\int y_2(t)e^{-t}dt = 0$; derfor er $\int y(t)\overline{f(t)}dt =$

$$\int y_1(t)\overline{f(t)}dt\cdot\int y(t)e^{-t}dt = \int y(t)\overline{k\,e^{-t}}dt,\ \bar{k} = \int y_1(t)\overline{f(t)}dt.$$

Da for ethvert interval $I \in \mathring{I}$ $f\chi_I$ og $t \to k\,e^{-t}\chi_I(t) \in H$, og $\{y \in \mathfrak{D}^o | y = y\chi_I\}$ er tæt i $\{y \in H | y = y\chi_I\}$, er $f(t)\chi_I(t) = k\,e^{-t}\chi_I(t)$ næsten overalt, og $f(t) = k\,e^{-t}$ næsten overalt (eller kortere: da f og $t \to k\,e^{-t} \in L^2_{loc,m}$, og $\mathfrak{D}^o$ er tæt i $L^2_{o,m}$, er $f(t) = k\,e^{-t}$n.o. Da $f \in H$ og $t \to e^{-t} \notin H$, er $k = o$ og $f = o$.

Tilsvarende vises, at $A^* + iE$ er injektiv, idet også $t \to e^{t} \notin H$. Det følgende lemma viser, at A er selvadjungeret.

<u>Lemma</u>: En tæt defineret, afsluttet, symmetrisk operator A er selvadjungeret, hvis og kun hvis $A^* - iE$ og $A^* + iE$ er injektive.

Bevis: "Kun hvis" er tidligere vist (en selvadjungeret operator har reelt spektrum).

$D((A + iE)^{-1})$ er et afsluttet underrum $\subseteq H$(IV, 1, 3); da $(A^* - iE)^{-1} = (A + iE)^{*-1}$ er defineret, er også $(A + iE)^{-1*}$ defineret, altså $(A + iE)^{-1}$ tæt defineret (IV, 1, 5); derfor er $D((A + iE)^{-1}) = H$. $A^* \supseteq A \Rightarrow (A^* + iE)^{-1} \supseteq (A + iE)^{-1} \Rightarrow (A^* + iE)^{-1} = (A + iE)^{-1} \Rightarrow A^* = A$. (jfr. IV, 1, øv. 12).

1.2 Forudsætningerne i V § 3 er opfyldt, idet $n = 1$, $H_o = \mathfrak{D}^o$, og $u(t,\lambda) = e^{i\lambda t}$, altså $\Phi(x)(\lambda) = \int x(t)e^{i\lambda t}dt$; thi 1), V, 3, 1, er opfyldt, da u er kontinuert; 2) udsiger det allerede viste, at $(A_o - \lambda E)x = y$ kan løses, hvis $y \in \mathfrak{D}^o$ og $\int y(t)e^{i\lambda t}dt = \Phi(y)(\lambda) = 0$. For $a \in \dot{R}^+$ og $t \to x(t) = |t - a| \vee 0$ finder vi $\Phi(x)(\lambda) =$

$$\int_{-a}^{a} |t - a|e^{i\lambda t}dt = 2\int_{0}^{a} (a - t)\cos\lambda t dt = 2\lambda^{-2}(1 - \cos a\lambda),\ \lambda \neq 0,$$

og $= a^2$ for $\lambda = 0$; idet vi for givet $\lambda \in \dot{R}$ vælger $a < 2\pi|\lambda|^{-1}$, $a > 0$, opnår vi $\Phi(x)(\lambda) \neq 0$, d.v.s. 3).

Da også u er begrænset, kan vi anvende hele den i V, § 3 udviklede teori. Vi ved altså, at der findes et positivt mål μ på $\dot{R}$, så at Φ kan udvides til en lineær isometri Ψ^{o-1} af H på L^2_μ, og så at $\Psi(f)(t) = \int f(\lambda)e^{-i\lambda t}d\mu(\lambda)$ for $f \in L^2_\mu \cap L^1_\mu$, og

$\Psi^{o-1}(x)(\lambda) = \int x(t)e^{i\lambda t}dt$ for $x \in H \cap L^1_m$. Vi vil vise, at $\mu = c\cdot m$, $c \in \dot{R}^+$.

For $\gamma \in \dot{R}$ og afbildning $x:\dot{R} \to \dot{C}$ definerer vi: $S_\gamma x(t) = x(t)\cdot e^{i\gamma t}$, $T x(t) = x(t + \gamma)$. For $x \in H \cap L^1_m$ finder vi da

$\Psi^{o-1}(S_\gamma x)(\lambda) = \int x(t)e^{i\gamma t}e^{i\lambda t}dt = \Psi^{o-1}(x)(\lambda + \gamma)$, altså $\Psi^{o-1}(S_\gamma x) = T_\gamma \Psi^{o-1}(x)$, og $\|T_\gamma \Psi^{o-1}(x)\| = \|S_\gamma x\| = [\int |x(t)e^{i\gamma t}|^2 dt]^{\frac{1}{2}} = \|x\| = \|\Psi^{o-1}(x)\|$.

Lad, for $0 < a < b$, $\varphi(a,b,\cdot)$ være den stykkevis lineære funktion med færrest knæk, der er 1 på $[-a,a]$ og 0 udenfor $]-b,b[$; vi finder en funktion $x(a,b,\cdot) \in H \cap L^1_m$, så at $\Psi^{o-1}(x(a,b,\cdot)) = \varphi(a,b,\cdot)$.

For $d \in \dot{R}$ og $x(d,t) = t^{-2}(1 - \cos dt)$ (singulariteten i 0 lappes trivielt), fås $x(d,\cdot) \in H \cap L^1_m$, og

$$\int_0^\infty x(d,t)dt = \int_0^\infty t^{-2}\, 2\sin^2(\tfrac{1}{2}dt)dt = |d| \int_0^\infty u^{-2}\sin^2 u\, d\, u = k\cdot|d|;$$

$$\Psi^{o-1}(x(a,\cdot))(\lambda) = 2\int_0^\infty t^{-2}(1 - \cos a t)\cos\lambda t dt =$$

$$\int_0^\infty t^{-2}(1 - \cos(a + \lambda)t + 1 - \cos(a - \lambda)t - 2(1 - \cos\lambda t)dt =$$

$k(|a + \lambda| + |a - \lambda| - 2|\lambda|) = 2k(a - |\lambda|) \vee 0$. For $x(a,b,\cdot) = (2k(b - a))^{-1}(x(b,\cdot) - x(a,\cdot))$ er derfor $\Psi^{o-1}(x(a,b,\cdot))(\lambda) = (b - a)^{-1}((b - |\lambda|) \vee 0 - (a - |\lambda|) \vee 0) = \varphi(a,b,\lambda)$ (jfr., at $\Psi^{o-1}(\varphi(a,b,\cdot)) = 2(b - a)^{-1}(x(b,\cdot) - x(a,\cdot)))$.

For $\gamma \in \dot{R}$ har vi nu $\int \varphi(a,b,\lambda + \gamma)^2 d\mu(\lambda) = \int \varphi(a,b,\lambda)^2 d\mu(\lambda)$. For $a \to b^-$ fås $\varphi(a,b,\cdot)^2 \uparrow \chi_{]-b,b[}$; for $b \to a^+$ fås $\varphi(a,b,\cdot)^2 \downarrow \chi_{[-a,a]}$ derfor gælder $\mu(]-b - \gamma, b - \gamma[) = \mu(]-b,b[)$ og $\mu([-a - \gamma, a - \gamma]) = \mu([-a,a])$; ved differens dannelse fås tilsvarende ligheder for vilkårlige intervaltyper. Idet $\mu(]0,1]) = c$, findes $\mu(0,q^{-1}]) = c\, q^{-1}$, $\mu(]0,p\,q^{-1}]) = c\,p\,q^{-1}$ for $p,q \in \dot{N}$, og derfor for vilkårligt interval I : $\mu(I) = c\,m\,(I)$, altså $\mu = c\cdot m$.

For $t \to x(t) = e^{-|t|} \in L^1_m \cap H$ fås let $\lambda \to \Psi^{o-1}(x)(\lambda) = 2(1 + \lambda^2)^{-1} \in L^1_\mu \cap L^2_\mu$, $1 = x(0) = \Psi(\Psi^{o-1}(x))(0) = \int 2(1 + \lambda^2)^{-1}\, c\, d\, t = 2c\pi$, $c = (2\pi)^{-1}$.

Vi har altså vist, at for $x \in L^2_m$ gælder

$$\int |x(t)|^2 dt = (2\pi)^{-1} \int | \Psi^{o-1}(x)(t)|^2 dt = \int | (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Psi^{o-1}(x)(t)|^2$$

dt, og $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int |x(t)|^2 dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int |(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Psi^{o-1}(x)(t)|^2 dt.$

Sætning (Plancherel, 1910): Afbildningen, der til $x \in L^1_{\alpha\cdot m} \cap L^2_{\alpha\cdot m}$ $(\alpha = (2\pi)^{-\frac{1}{2}})$ lader svare den kontinuerte funktion $\lambda \to \int x(t) e^{i\lambda t} \alpha dt$, kan udvides til en unitær operator $\mathcal{F}$ (Fourier-Plancherel operatoren) på $L^2_{\alpha\cdot m}$. Herved overføres differential-operatoren A (afslutningen af operatoren $f \to iDf$ definèret for $f \in {}^1$) i multiplikations operatoren $\Lambda_{\alpha m}$. $\mathcal{F}^{-1}(x)(\lambda) = \int x(t) e^{-i\lambda t} \alpha dt = \mathcal{F}(x)(-\lambda)$ for $x \in L^1_{\alpha\cdot m} \cap L^2_{\alpha\cdot m}$.

1. Lad q være en kontinuert funktion $\dot{R} \to \dot{R}$; lad A_o være operatoren på $L^2_m(\dot{R},\dot{C})$ defineret ved $D(A_o) = \mathcal{D}^1$, $A_o x = i\,Dx + qx$ for $x \in D(A_o)$. Vis, at $\overline{A_o}$ er rumligt isomorf med $\Lambda_{c\cdot m}$ for en passende konstant $c \in \dot{R}^+$.

2. Find $\int_o^\infty u^{-2} \sin^2 u du$.

3. Bestem en funktion $f \in L^2_m(\dot{R},\dot{C})$, så at
$\lim\{\int | f(\lambda) - \int t^{-1} \sin(at)\chi_I(t)e^{i\lambda t}dt|^2 d\lambda \mid I \to \dot{R}\} = 0.$

4. Vis, at $\sigma(\mathcal{F}) = \{i, -1, -i, 1\}$. (Udnyt, at $\mathcal{F}^{o-1}(f)(t) = \mathcal{F}(f)(-t)$ for $f \in L^2_m \cap L^1_m$).

5. Sæt $\mathcal{F}(g)(\lambda) = \sqrt{(2\pi)}^{-1} \int g(t)e^{i\lambda t}dt$ også for $g \in L^1_m$.

1) Vis, at $\int |f(\lambda + h) - f(\lambda)|d\lambda \to 0$ for $h \to 0$, når $f \in L^1_m$. (Udnyt, at $\mathcal{D}^o$ er tæt i L^1_m).

2) Vis, at $\lim\{\mathcal{F}(x)(\lambda) \mid |\lambda| \to \infty\} = 0$ for $x \in L^1_m$ (Riemanns lemma). (For $\mathcal{F}(x) = f$ gælder:
$f(\lambda) = \frac{1}{2} \sqrt{(2\pi)}^{-1} \left(\int x(t)e^{i\lambda t}dt + \int x(t + h)e^{i\lambda t}e^{i\lambda h}dt\right)$. Sæt $h = \lambda^{-1} \pi$ og udnyt 1)).

3) Vis, at $\mathcal{F}(\sqrt{(2\pi)}^{-1} f * g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$ for $f,g \in L^1_m$ (jfr. V, 3, øv. 4)

4) Vis, at $L^1_{\sqrt{(2\pi)}^{-1}m}$ er en Banach algebra m.h.t. sædvanlig addition, multiplikation med skalarer, og norm, og en ring multiplikation defineret ved $(f,g) \to \sqrt{(2\pi)}^{-1} f * g$, og at $\mathcal{F}$ er en normformindskende homomorfi $L^1_m(\dot{R},\dot{C}) \to C_o(\dot{R},\dot{C})$. (Det kan vises, at $\mathcal{F}$ er injektiv).

1. Lad $\mathcal{B}$ være basis for et filter på $\mathcal{L}$, konvergent i den stærke topologi med grænseværdi A. Vis, at filtret med basis $\{\{T^*T \mid T \in B\} \mid B \in \mathcal{B}\}$ er konvergent i den svage topologi med grænseværdi A^*A.

   Vis, at mængden af projektioner $\in \mathcal{L}$ er afsluttet i den stærke topologi.

2. Lad $\mathcal{F}$ være et filter på $\mathcal{L}$ med en basis af mængder af projektioner, og antag, at $\mathcal{F}$ konvergerer i den svage topologi mod en projektion $P \neq 0$. Vis, at $\mathcal{F}$ konvergerer mod P i den stærke topologi.

3. Lad N være en opad filtrerende mængde af projektioner. Vis, at den mindste majorant for N er en projektion.

4. Lad $\{P_i \mid i \in I\}$ være en uendelig mængde af projektioner på parvis ortogonale underrum. Vis, at filtret med basis $\{\{\sum_{i\in K} P_i \mid K$ er en endelig delmængde af $I,\ K \supseteq J\} \mid J$ er en endelig delmængde af $I\}$ konvergerer mod $\sum_{i\in I} P_i$ i den stærke topologi.

5. Vis, at hvis en operator A opfylder $0 \leqq A \leqq E$, vil A^n konvergere i den stærke topologi for $n \to \infty$ mod projektionen på $\{f \in H \mid Af = f\}$.

   Lad P og Q være to projektioner. Vis, at projektionen på $PH \cap QH$ er $= \lim_{n\to\infty} (PQ)^n = P \lim_{n\to\infty} (QPQ)^n$, idet grænseværdierne tages i den stærke topologi.

6. Vis, at en selvadjungeret operator A er en projektion, hvis og kun hvis der $\exists\, n \in \mathbb{N}$, så at $A^{2n} = A$.

7. Vis, at mængden af projektioner $\in \mathcal{L}$ ikke er afsluttet i den svage topologi. (Konstruer f.eks. først en følge af enhedsvektorer, der i den svage, men ikke i den stærke, topologi på H har en grænseværdi $\neq 0$).