KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT

Børge Jessen

Forelæsninger over udvalgte emner fra analysen

Forårssemestret 1967

Omfatter 93 sider
mærket
Udv. emn. fra anal. Forår 1967 0–92

Rettet 1974

Mathemata mathematicis scribuntur
COPERNICUS

Indhold.

§1. Elementært om primtallenes fordeling.

I Euklids elementer vises, at der er uendelig mange primtal. I studiet af primtallenes fordeling betragtes funktionen

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 , \qquad x > 0.$$

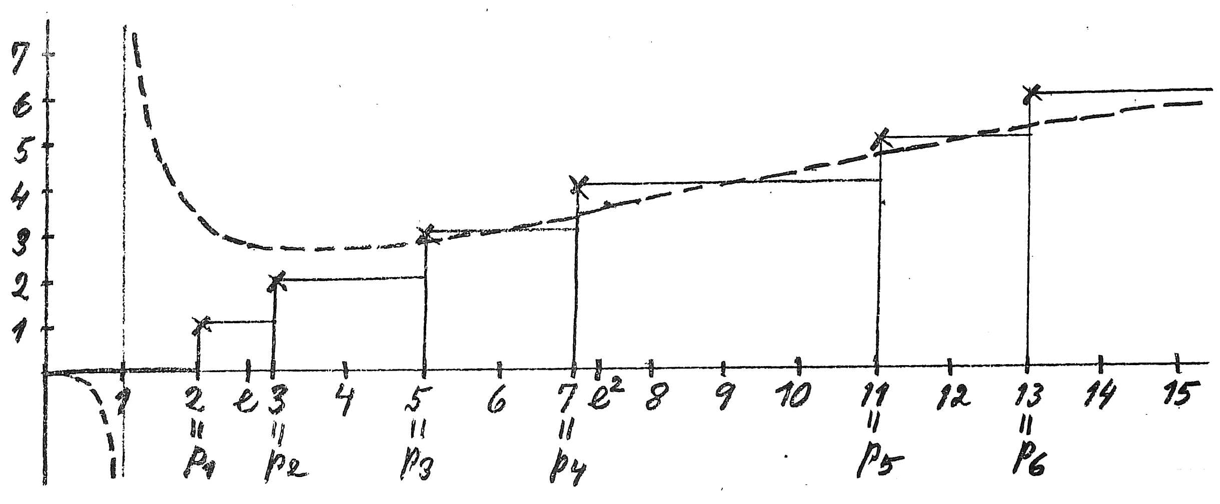
Udtrykket skal betegne en sum, hvis led alle er 1, et led for hvert primtal $p \leq x$. Idet p_n betegner det n^{te} primtal, ser man, at $\pi(x) = 0$ for $0 < x < p_1 = 2$ og $\pi(x) = n$ for $p_n \leq x < p_{n+1}$; se figuren. På grundlag af tabeller fandt Legendre (o. 1800), at $\pi(x)$ for store x tilnærmelsesvis er $\frac{x}{\log x}$. Dette resultat præciseres gennem primtalssætningen

$$\boxed{\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \to 1 \quad \text{for } x \to \infty},$$

bevist 1896 af Hadamard og de la Vallée-Poussin (uafhængigt af hinanden). Funktionen $\frac{x}{\log x}$ er indtegnet på figuren. Idet

$$\left(\frac{x}{\log x}\right)' = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}, \qquad \left(\frac{x}{\log x}\right)'' = -\frac{1}{x(\log x)^2} + \frac{2}{x(\log x)^3},$$

ser man, at den har minimum for $x = e$, og at den er konkav på $]0,1[$ og $]e^2, \infty[$, konveks på $]1, e^2[$.



Af tabellen ses, at approksimationen for $x \leq 10^9$ ikke er særligt god. En bedre approksimation fås ved at benytte integrallogaritmen

$$\mathrm{li}\, x = \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t}.$$

Da, som man let viser, $\dfrac{\mathrm{li}\,x}{\frac{x}{\log x}} \to 1$ for $x \to \infty$, er primtalsætningen ensgyldig med, at $\dfrac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,x} \to 1$ for $x \to \infty$. I den videregående primtalteori benytter man med fordel $\mathrm{li}\,x$ i stedet for $\frac{x}{\log x}$. For vort formål er det tilstrækkeligt at betragte $\frac{x}{\log x}$.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$ afr.	$\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$	$\mathrm{li}\,x$ afr.	$\dfrac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,x}$
10	4	4	0,92	6	0,65
10^2	25	22	1,15	30	0,83
10^3	168	145	1,16	178	0,94
10^4	1 229	1 086	1,13	1 246	0,98
10^5	9 592	8 686	1,10	9 630	0,996
10^6	78 498	72 383	1,08	78 628	0,9983
10^7	664 579	620 421	1,07	664 918	0,9994
10^8	5 761 455	5 428 681	1,06	5 762 209	0,99986
10^9	50 847 478	48 254 942	1,05	50 849 235	0,99996

De første bidrag til et bevis for primtalsætningen skyldes Čebyšev, som (c. 1850) blandt andet fandt de nedenfor gengivne resultater vedrørende

$$\boxed{\lambda = \liminf \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}, \quad \Lambda = \limsup \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}}.$$

Primtalsætningens udsagn er, at $\lambda = \Lambda = 1$. Foruden $\pi(x)$ betragtes

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p; \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p, \qquad x > 0.$$

Udtrykket for $\vartheta(x)$ skal betegne en sum bestående af et led af størrelsen $\log p$ for hvert primtal $p \le x$, og udtrykket for $\psi(x)$ en sum bestående af et led af størrelsen $\log p$ for hver primtalpotens $p^m \le x$. F. eks. er

$$\vartheta(10) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7, \quad \psi(10) = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7.$$

Man ser, at $\vartheta(x)$ og $\psi(x)$ begge er monotont voksende funktionen, og at begge er 0 for $0 < x < 2$. For $x > 1$ fås

$$\psi(x) = \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p,$$

hvor $[y]$ betegner det største hele tal $\le y$. Thi for et givet primtal $p \le x$ findes $\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$ potenser p^m, der er $\le x$ [da $p^m \le x$ er ensbetydende med $m \log p \le \log x$]. Vi kunde også skrive $\psi(x) = \sum_p \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p$, med summation over alle primtal p, idet $\left[\frac{\log x}{\log p}\right] = 0$, når $p > x$. Idet det benyttes, at $\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \le \frac{\log x}{\log p}$, ses, at for $x > 1$ og $0 < \alpha < 1$ gælder

$$\left(\pi(x) - x^\alpha\right) \log(x^\alpha) \le \vartheta(x) \le \psi(x) \le \pi(x) \log x,$$

altså

$$\alpha \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \le \frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{\psi(x)}{x} \le \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}.$$

Indføres tallene

$$\lambda' = \liminf \frac{\vartheta(x)}{x}, \quad \Lambda' = \limsup \frac{\vartheta(x)}{x}$$

$$\lambda'' = \liminf \frac{\psi(x)}{x}, \quad \Lambda'' = \limsup \frac{\psi(x)}{x},$$

giver disse uligheder

$$\alpha\lambda \le \lambda' \le \lambda'' \le \lambda, \qquad \alpha\Lambda \le \Lambda' \le \Lambda'' \le \Lambda.$$

Da dette gælder for alle α i $0 < \alpha < 1$, slutter vi, at

$$\lambda' = \lambda'' = \lambda, \qquad \Lambda' = \Lambda'' = \Lambda.$$

Specielt gælder altså

$$\boxed{\liminf \frac{\psi(x)}{x} = \lambda, \quad \limsup \frac{\psi(x)}{x} = \Lambda},$$

og primtalsætningen er ensgyldig med, at

$$\boxed{\frac{\psi(x)}{x} \to 1 \quad \text{for } x \to \infty}.$$

For at undersøge $\psi(x)$ indfører vi funktionen

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n, \qquad x > 0.$$

Udtrykket betegner en sum bestående af et led af størrelsen $\log n$ for hvert helt positivt tal $n \leq x$. Man ser, at $T(x) = 0$ for $0 < x < 2$. For $x \geq 1$ er

$$T(x) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log [x] = \log([x]!).$$

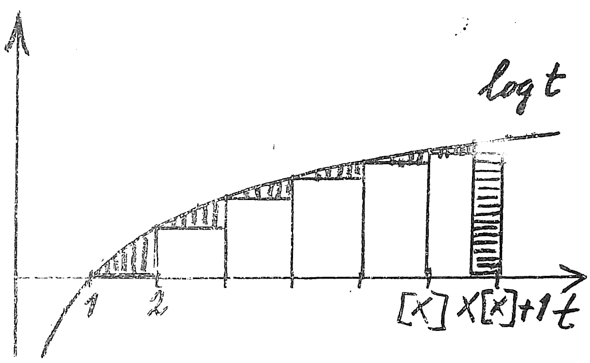
Denne funktion $T(x)$, i hvilken primtallene ikke figurerer eksplicit, bringes nu i forbindelse med funktionen $\psi(x)$ gennem omskrivningerne

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \sum_p \left\{ \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots \right\} \log p$$

$$= \sum_{np^m \leq x} \log p = \sum_n \sum_{p^m \leq \frac{x}{n}} \log p = \sum_n \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Til forklaring af disse omskrivninger bemærkes: Hvert $\log n$ er summen af tallene $\log p$ for n's primfaktorer p, idet hver primfaktor skal tælles så ofte, den forekommer i n. For at finde $\sum_{n \leq x} \log n$ skal vi altså for ethvert p tælle, hvor ofte p forekommer som primfaktor i tal $n \leq x$. Af tallene $n \leq x$ er $\left[\frac{x}{p}\right]$ delelige med p, $\left[\frac{x}{p^2}\right]$ delelige med p^2, o.s.v. Antallet er derfor $\left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \cdots$ (leddene i summen er 0 fra et vist trin). Dette giver den første omskrivning; vi har skrevet en sum over alle p, men leddene er naturligvis 0 for alle $p > x$. Herudfra fås udtrykket $\sum_{np^m \leq x} \log p$, der skal betegne en sum bestående af et led af størrelsen $\log p$ for hver gang $np^m \leq x$ for hele positive tal n og m. Thi for et bestemt p giver dette netop for $m=1$ et antal led bestemt ved, at $np \leq x$, altså $\left[\frac{x}{p}\right]$ led, for $m=2$ et antal led bestemt ved, at $np^2 \leq x$, altså $\left[\frac{x}{p^2}\right]$ led, o.s.v. Den følgende omskrivning består blot i, at vi først holder n fast og beregner summen af de led i $\sum_{np^m \leq x} \log p$, der svarer til n, og derefter summerer over alle n. Hermed er vi nået til det sidste udtryk $\sum_n \psi\left(\frac{x}{n}\right)$; naturligvis er leddene heri 0 fra et vist trin, nemlig for $n > \frac{x}{2}$.

For funktionen $T(x)$ fås let et tilnærmet udtryk. For $x \geq 1$ er $T(x)$ summen af arealerne af de på figuren viste rektangler med grundlinie 1. Altså fås $T(x)$ af $\int_1^x \log t \, dt = x \log x - x + 1$



ved at subtrahere de lodret skraverede arealer, som tilsammen er $\leq \log x$, og addere det vandret skraverede areal, som er $\leq \log x$. Følgelig er

$$T(x) = x \log x - x + 1 + R(x),$$

hvor $|R(x)| \leq \log x$. Vi får kun brug for konsekvensen

$$T(x) = x \log x - x + o(x), \quad \text{speciel} \quad \frac{T(x)}{x \log x} \to 1.$$

Nu betragtes

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_n \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2\sum_n \psi\left(\frac{x}{2n}\right)$$

$$= \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots$$

$$\qquad - 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) \qquad\qquad - 2\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \cdots$$

$$= \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right) + - \cdots$$

$$= (x \log x - x + o(x)) - 2\left(\frac{x}{2} \log \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + o\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= x \log 2 + o(x).$$

Da $\psi(x) \geq \psi(\frac{x}{2}) \geq \psi(\frac{x}{3}) \geq \psi(\frac{x}{4}) \geq \dots$, slutter vi på den ene side, at

$$\psi(x) \geq x \log 2 + o(x), \quad \text{altså} \quad \frac{\psi(x)}{x} \geq \log 2 + o(1),$$

hvoraf
$$\boxed{\lambda \geq \log 2},$$

og på den anden side, at

$$\psi(x) - \psi(\tfrac{x}{2}) \leq x \log 2 + o(x), \text{ altså } \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{2}\,\frac{\psi(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} + \log 2 + o(1),$$

hvoraf $\Lambda \leq \frac{1}{2}\Lambda + \log 2$, eller

$$\boxed{\Lambda \leq 2\log 2}.$$

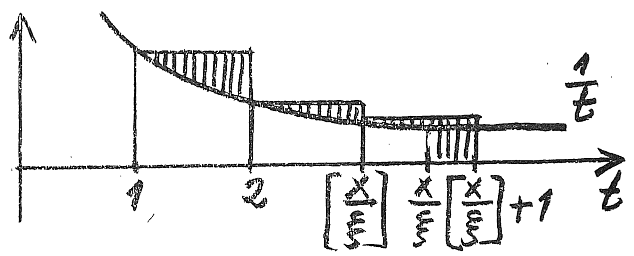
Idet således $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$, er hermed godtgjort, at <u>funktionen</u> $\pi(x)$ <u>har størrelsesordenen</u> $\frac{x}{\log x}$.

Betragtes dernæst et vilkårligt a med $0 < a < \lambda$, har vi $\frac{\psi(x)}{x} \geq a$ for alle $x \geq$ (et vist) ξ, altså $\psi(x) \geq ax$ for $x \geq \xi$. Dette giver for $x \geq \xi$

$$T(x) = \sum_n \psi(\tfrac{x}{n}) \geq \sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} a\frac{x}{n} = ax \sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} \frac{1}{n}.$$

Nu gælder, jfr. figur,

$$\sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} \frac{1}{n} \geq \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{dt}{t} = \log\frac{x}{\xi}.$$



Altså gælder

$$T(x) \geq ax \log\frac{x}{\xi} = ax\log x - ax\log\xi,$$

hvoraf
$$\frac{T(x)}{x\log x} \geq a - \frac{a\log\xi}{\log x}.$$

For $x \to \infty$ giver dette $1 \geq a$. Da dette gælder for alle a i $0 < a < \lambda$, slutter vi, at

$$\boxed{\lambda \leq 1}.$$

Betragtes dernæst et vilkårligt $A > \Lambda$, har vi $\frac{\psi(x)}{x} \leq A$ for alle $x \geq$ (et vist) ξ, altså $\psi(x) \leq Ax$

for $x \geq \xi$. Dette giver for $x \geq \xi$

$$T(x) = \sum_n \psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq \sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} A\frac{x}{n} + x\psi(\xi) = Ax\sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} \frac{1}{n} + x\psi(\xi)$$

(thi af led med $n > \frac{x}{\xi}$, som ikke er 0, er der højst så mange, som der er led overhovedet, d.v.s. højst x, og for disse n er $\psi(\frac{x}{n}) \leq \psi(\xi)$). Nu er, jfr. figuren ovenfor,

$$\sum_{n \leq \frac{x}{\xi}} \frac{1}{n} \leq \int_1^{\frac{x}{\xi}} \frac{dt}{t} + 1 = \log\frac{x}{\xi} + 1.$$

Altså gælder

$$T(x) \leq Ax\log\frac{x}{\xi} + Ax + x\psi(\xi) = Ax\log x + x(A - A\log\xi + \psi(\xi)),$$

hvoraf

$$\frac{T(x)}{x\log x} \leq A + \frac{A - A\log\xi + \psi(\xi)}{\log x}.$$

For $x \to \infty$ giver dette $1 \leq A$. Da dette gælder for alle $A > \Lambda$, slutter vi, at

$$\boxed{\Lambda \geq 1}.$$

Alt i alt har vi således

$$\boxed{0 < \underset{0{,}693}{\underset{\parallel}{\log 2}} \leq \lambda \leq 1 \leq \Lambda \leq \underset{1{,}386}{\underset{\parallel}{2\log 2}} < \infty}.$$

Af ulighederne $\lambda \leq 1 \leq \Lambda$ følger specielt, at <u>hvis $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, må det være 1.</u>

Snævrere grænser for λ og Λ blev fundet af Čebyšev ved betragtning af

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right)$$

$$= \sum_n \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_n \psi\left(\frac{x}{2n}\right) - \sum_n \psi\left(\frac{x}{3n}\right) - \sum_n \psi\left(\frac{x}{5n}\right) + \sum_n \psi\left(\frac{x}{30n}\right).$$

Tabellen viser udregningen af, hvor mange gange et bestemt $\psi(\frac{x}{n})$ vil forekomme i dette udtryk, idet det bemærkes, at der er periodicitet med perioden 30.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−		−
			−			−			−			−			−			−			−			−			−			−
					−					−					−					−					−					−
																														+
	+	0	0	0	0	−	+	0	0	−	+	−	+	0	−	0	+	−	+	−	0	0	+	−	0	0	0	0	+	−

Man ser, at udtrykket bliver

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)+-\cdots,$$

hvor leddene har skiftende fortegn. Dette er altså

$$=(x\log x-x)-\left(\frac{x}{2}\log\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x}{3}\log\frac{x}{3}-\frac{x}{3}\right)-\left(\frac{x}{5}\log\frac{x}{5}-\frac{x}{5}\right)+\left(\frac{x}{30}\log\frac{x}{30}-\frac{x}{30}\right)+o(x),$$

eller

$$=cx+o(x),\quad \text{hvor } c=\log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}.$$

Heraf sluttes på den ene side, at

$$\psi(x)\geqq cx+o(x),\ \text{altså}\ \frac{\psi(x)}{x}\geqq c+o(1),$$

hvoraf

$$\boxed{\lambda\geqq c},$$

og på den anden side, at

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)\leqq cx+o(x),\ \text{altså}\ \frac{\psi(x)}{x}\leqq\frac{1}{6}\frac{\psi\left(\frac{x}{6}\right)}{\frac{x}{6}}+c+o(1),$$

hvoraf $\Lambda\leqq\frac{1}{6}\Lambda+c$, eller

$$\boxed{\Lambda\leqq\frac{6}{5}c}.$$

Hermed har vi

$$\boxed{0<\underset{\substack{\parallel\\ 0{,}921}}{c}\leqq\lambda\leqq 1\leqq\Lambda\leqq\underset{\substack{\parallel\\ 1{,}105}}{\frac{6}{5}c}<\infty}.$$

[En lille forbedring kan opnås ved, at man benytter, at

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)\leqq cx+o(x),$$

altså

$$\frac{\psi(x)}{x}+\frac{1}{7}\frac{\psi\left(\frac{x}{7}\right)}{\frac{x}{7}}\leqq\frac{1}{6}\frac{\psi\left(\frac{x}{6}\right)}{\frac{x}{6}}+\frac{1}{10}\frac{\psi\left(\frac{x}{10}\right)}{\frac{x}{10}}+c+o(1),$$

hvoraf
$$\Lambda + \frac{1}{7}\lambda \leq \frac{1}{6}\Lambda + \frac{1}{10}\Lambda + c,$$
altså, da $\lambda \geq c$, $\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)\Lambda \leq \frac{6}{7}c$, eller $\Lambda \leq \frac{90}{77}c$.

Ad denne vej når man dog ikke frem til primtalsætningen.]

Lad p_n betegne det n^{te} primtal. Vi vil vise, at primtalsætningen er ensgyldig med, at
$$\boxed{\frac{p_n}{n\log n} \longrightarrow 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty}.$$

Vi indfører
$$\lambda^* = \liminf \frac{n\log n}{p_n}, \quad \Lambda^* = \limsup \frac{n\log n}{p_n}$$
og godtgør påstanden ved at vise, at
$$\lambda^* = \lambda, \quad \Lambda^* = \Lambda.$$

For $p_n \leq x < p_{n+1}$ er $\pi(x) = n$. Da $\frac{x}{\log x}$ er voksende for $x \geq 3$, gælder altså for $3 \leq p_n \leq x < p_{n+1}$
$$\frac{n}{\frac{p_{n+1}}{\log p_{n+1}}} < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{n}{\frac{p_n}{\log p_n}}$$
eller
$$(*) \quad \frac{n}{n+1}\,\frac{\log p_{n+1}}{\log(n+1)}\,\frac{(n+1)\log(n+1)}{p_{n+1}} < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{\log p_n}{\log n}\,\frac{n\log n}{p_n}.$$

Nu gælder for $x \geq 2$ ifølge Čebyšev
$$0 < k \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq K < \infty, \text{ altså } \log\frac{\pi(x)\log x}{x} = O(1),$$
hvoraf for $x = p_n$
$$\log\frac{n\log p_n}{p_n} = O(1), \text{ eller } \log n + \log\log p_n - \log p_n = O(1),$$
hvoraf
$$\frac{\log n}{\log p_n} \longrightarrow 1 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Vi finder derfor af (**)

$$\lambda^* \leq \lambda \leq \lambda^*, \qquad \Lambda^* \leq \Lambda \leq \Lambda^*,$$

hvoraf påstanden. Man ser, at

$$\frac{5}{6}\frac{1}{c} \leq \liminf \frac{p_n}{n\log n} \leq 1 \leq \limsup \frac{p_n}{n\log n} \leq \frac{1}{c}.$$

§2. ʻAbel sætningerʼ og ʻTauber sætningerʼ for potensrækker.

I det følgende betegner x en reel variabel, z en kompleks variabel. Hvor intet andet fremgår af sammenhængen, er $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, s o.s.v. komplekse tal.

Abels sætning (1826). Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent med sum s, og rækken $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ følgelig konvergent (i hvert fald) for $-1 < x \leq 1$, gælder $f(x) \to s = f(1)$ for $x \to 1$ fra venstre.

Anderledes sagt: Den ved $\sum_0^\infty a_n x^n$ på $-1 < x \leq 1$ definerede funktion $f(x)$ er kontinuert i punktet 1. Fra den elementære teori for potensrækker vides, at $f(x)$ er kontinuert (iøvrigt endda vilkårligt ofte differentiabel) på $-1 < x < 1$. Kontinuiteten på $-1 < x < 1$ fremgår af, at rækken for ethvert r i $0 < r < 1$ er ligeligt konvergent på $-r \leq x \leq r$. Abels sætning fås, idet vi viser:

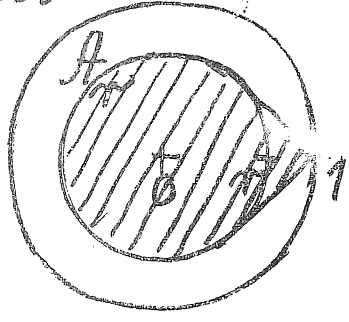
Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent, er rækken $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ for ethvert r i $0 < r < 1$ ligeligt konvergent på $-r \leq x \leq 1$.

Vi beviser noget mere (Stolz):

Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent, er rækken $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ for ethvert r i $0<r<1$ ligeligt konvergent på mængden A_r defineret som det konvekse hylster af mængden $\{z \mid |z|\leq r\}\cup\{1\}$.

Dette giver følgende skærpelse af Abels sætning:

Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent, har den ved $\sum_0^\infty a_n z^n$ på mængden $\{z \mid |z|<1\}\cup\{1\}$ definerede funktion $f(z)$ den egenskab, at for ethvert r i $0<r<1$ er dens restriktion til mængden A_r kontinuert.



Bevis. Vi skal vise, at $f(z)-\sum_0^n a_\nu z^\nu$ konvergerer ligeligt mod 0 på A_r. Vi sætter $\rho_n=\sum_n^\infty a_\nu$. Da gælder $\rho_n\to 0$ for $n\to\infty$. Endvidere er $a_n=\rho_n-\rho_{n+1}$. Ved partiel summation fås for $z\in\{z \mid |z|<1\}\cup\{1\}$

$$f(z)-\sum_0^n a_\nu z^\nu = \sum_{n+1}^\infty a_\nu z^\nu = \sum_{n+1}^\infty(\rho_\nu-\rho_{\nu+1})z^\nu$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[(\rho_{n+1}-\rho_{n+2})z^{n+1}+(\rho_{n+2}-\rho_{n+3})z^{n+2}+\cdots+(\rho_p-\rho_{p+1})z^p\right]$$

$$=\rho_{n+1}z^{n+1}+\lim_{p\to\infty}\left[\rho_{n+2}(z^{n+2}-z^{n+1})+\cdots+\rho_p(z^p-z^{p-1})-\rho_{p+1}z^p\right].$$

Men $\rho_{p+1}z^p\to 0$ for $p\to\infty$. Altså fås

$$f(z)-\sum_0^n a_\nu z^\nu = \rho_{n+1}z^{n+1}+\sum_{n+1}^\infty \rho_{\nu+1}(z^{\nu+1}-z^\nu)$$

$$=\rho_{n+1}z^{n+1}-(1-z)\sum_{n+1}^\infty \rho_{\nu+1}z^\nu.$$

For givet $\varepsilon>0$ vælges N, så at $|\rho_\nu|\leq\varepsilon$ for $\nu>N$.

For $n\geq N$ og $|z|<1$ fås da

$$\left| f(z) - \sum_0^n a_\nu z^\nu \right| \leq \varepsilon + |1-z| \sum_{n+1}^{\infty} \varepsilon |z|^\nu$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \frac{|1-z|}{1-|z|}.$$

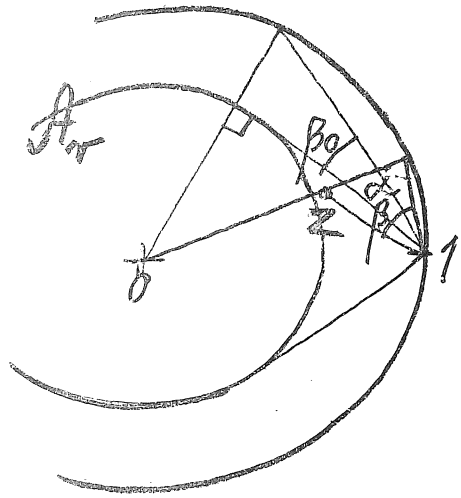
For $z \in A_r \setminus \{1\}$ gælder imidlertid

$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{1+r}{1-r}$, hvis $|z| \leq r$,

og ellers (se figur)

$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \leq \frac{1}{\sin\beta_0}$, z ikke reel,

$\frac{|1-z|}{1-|z|} = 1$, z reel,



altså i alle tilfælde

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq k = \max\left\{\frac{1+r}{1-r}, \frac{1}{\sin\beta_0}\right\}.$$

Følgelig gælder for $n \geq N$ og $z \in A_r \setminus \{1\}$

$$\left| f(z) - \sum_0^n a_\nu z^\nu \right| \leq \varepsilon(1+k).$$

Dette gælder også for $z = 1$, idet venstre side da er $|\rho_{n+1}|$. Uligheden gælder altså for $n \geq N$ og alle $z \in A_r$. Den viser, at $\sum_0^n a_\nu z^\nu$ konvergerer ligeligt mod $f(z)$ i A_r.

I tilknytning til Abels sætning indføres

<u>Abel summabilitet</u>. Rækken $\sum_0^\infty a_n$ kaldes summabel (A) med summen s, og vi skriver

$$\sum_0^\infty a_n = s \quad (A),$$

såfremt (1) potensrækken $\sum_0^\infty a_n z^n$ har konvergensradius ≥ 1 $[\text{ɔ: } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1]$ og (2) den for $|z| < 1$ ved $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ definerede funktion $f(z)$

opfylder betingelsen

$$f(x) \to s \quad \text{for} \quad z \to 1, \quad z \text{ reel.}$$

Abels sætning udsiger da:

<u>Hvis rækken</u> $\sum_0^\infty a_n$ <u>er konvergent med sum</u> s, <u>er den også summabel (A)</u> <u>med sum</u> s.

Eksemplet $\sum_0^\infty (-1)^n = 1-1+1-1+ - \cdots$ viser, at det omvendte ikke gælder. Thi for $|z|<1$ er $\sum_0^\infty (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$, og for $z \to 1$ gælder $\frac{1}{1+z} \to \frac{1}{2}$. Rækken $\sum_0^\infty (-1)^n$ er altså summabel (A) med sum $\frac{1}{2}$, men den er ikke konvergent.

<u>Opg.</u> Vis, at rækken $\sum_0^\infty (-1)^n (n+1) = 1-2+3-4+ - \cdots$ er summabel (A) og find dens sum.

Betegnelsen 'Abel sætning' benyttes alment om sætninger, der udsiger, at en egenskab ved koefficienterne i en række medfører en egenskab ved den ved rækken fremstillede funktion. En typisk sætning af denne art er følgende:

<u>Sætning beslægtet med Abels sætning.</u> <u>Hvis</u> $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ <u>opfylder betingelsen</u> $\frac{s_n}{n+1} \to A$, <u>er rækken</u> $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ <u>konvergent</u> (i hvert fald) <u>for</u> $-1<x<1$, <u>og der gælder</u> $(1-x)f(x) \to A$ <u>for</u> $x \to 1$ <u>fra venstre.</u>

<u>Eks.</u> For $a_n = 1$ for alle n er $s_n = n+1$, altså $\frac{s_n}{n+1} = 1$. Vi har her $f(x) = \frac{1}{1-x}$, altså $(1-x)f(x) = 1$.

<u>Bevis.</u> Da $\frac{s_n}{n+1} \to A$, er følgen $\frac{s_n}{n+1}$ begrænset, lad os sige $\left|\frac{s_n}{n+1}\right| \leq K$ for alle n, altså $|s_n| \leq K(n+1)$,

og følgelig $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq 2K(n+1)$. Altså er $\sum_0^\infty a_n x^n$ konvergent for $-1 < x < 1$. Det nytter ikke noget at danne $(1-x)f(x) = (1-x)\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + \sum_1^\infty (a_n - a_{n-1})x^n$; thi herved får vi ikke s_n ind i sagen. I stedet bemærker vi, at da $|s_n| \leq K(n+1)$, er $\sum_0^\infty s_n x^n$ også konvergent for $-1 < x < 1$. Vi får

$$(1-x)\sum_0^\infty s_n x^n = s_0 + \sum_1^\infty (s_n - s_{n-1})x^n = f(x).$$

Nu sættes $\frac{s_n}{n+1} = A + \varepsilon_n$. Da gælder $\varepsilon_n \to 0$. Vi får nu

$$\sum_0^\infty s_n x^n = A\sum_0^\infty (n+1)x^n + \sum_0^\infty \varepsilon_n (n+1)x^n$$

$$= \frac{A}{(1-x)^2} + R(x).$$

Da $\varepsilon_n \to 0$, findes et C, så at $|\varepsilon_n| \leq C$ for alle n, og til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $N(\varepsilon)$, så at $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ for alle $n > N(\varepsilon)$. Altså er for $0 < x < 1$

$$|R(x)| \leq C\sum_0^N (n+1)x^n + \varepsilon\sum_{N+1}^\infty (n+1)x^n$$

$$\leq C\sum_0^N (n+1)x^n + \frac{\varepsilon}{(1-x)^2},$$

hvoraf

$$(1-x)^2|R(x)| \leq (1-x)^2 C\sum_0^N (n+1)x^n + \varepsilon$$

$$\leq 2\varepsilon \quad \text{for} \quad 1 - \delta(\varepsilon) < x < 1.$$

Følgelig gælder $(1-x)^2 R(x) \to 0$ for $x \to 1$ og altså $(1-x)^2\sum_0^\infty s_n x^n \to A$ for $x \to 1$, d.v.s. $(1-x)f(x) \to A$ for $x \to 1$.

Eksemplet $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 3x^5 + \cdots$ viser, at den omvendte sætning ikke gælder; thi vi har her $(1-x)f(x) \to \frac{1}{4}$ for $x \to 1$, men $s_n = 0$ for n ulige, og $s_n = \frac{n}{2}+1$ for n lige, så at $\frac{s_n}{n+1} \not\to \frac{1}{4}$.

Normalt er den omvendte sætning til en 'Abel sætning' urigtig; men man har sætninger, der udsiger, at det omvendte udsagn er rigtigt, når koefficienterne i rækken opfylder en tillægsbetingelse. I tilfælde af Abels sætning blev sådanne betingede omvendinger fundet af Tauber (1897), og sætninger af denne art kaldes derfor 'Tauber sætninger'.

Taubers 1. sætning. Hvis $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ er konvergent for $-1 < x < 1$, og $f(x) \to s$ for $x \to 1$, og endvidere $na_n \to 0$, er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s.

Anderledes sagt: Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er summabel (A) med sum s, og $na_n \to 0$, da er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s. [Bemærk, at slutningsordene 'med sum s' ikke siger os noget nyt, thi når $\sum a_n$ er konvergent, lad os sige med sum t, skal efter Abels sætning gælde $f(x) \to t$ for $x \to 1$, og vi må altså have $t = s$.]

Bevis. Idet $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, har vi

$$s_n - f(x) = \sum_1^n a_\nu (1-x^\nu) - \sum_{n+1}^\infty a_\nu x^\nu$$

$$= (1-x)\sum_1^n a_\nu (1+x+\cdots+x^{\nu-1}) - \sum_{n+1}^\infty a_\nu x^\nu,$$

altså for $0 < x < 1$

$$|s_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_1^n \nu |a_\nu| + \sum_{n+1}^\infty |a_\nu| x^\nu$$

$$\leqq (1-x)\sum_{1}^{n} \nu|a_\nu| + \frac{1}{n}\sum_{n+1}^{\infty} \nu|a_\nu|x^\nu.$$

Da $\nu a_\nu \to 0$, er $\nu|a_\nu| < \varepsilon$ for $\nu > N(\varepsilon)$. For $n \geqq N(\varepsilon)$ gælder da

$$|s_n - f(x)| \leqq (1-x)\sum_{1}^{n} \nu|a_\nu| + \frac{1}{n}\varepsilon\frac{1}{1-x}.$$

Heri sættes $x = 1 - \frac{1}{n}$. Da fås

$$\left|s_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \nu|a_\nu| + \varepsilon \qquad \text{for } n \geqq N(\varepsilon).$$

Nu benyttes den kendte sætning, at hvis $b_n \to b$ gælder $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} b_\nu \to b$. Da $n|a_n| \to 0$, viser denne, at $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \nu|a_\nu| \to 0$. Altså fås

$$\left|s_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| \leqq 2\varepsilon \qquad \text{for } n \geqq N_1(\varepsilon),$$

d.v.s. $s_n - f(1-\frac{1}{n}) \to 0$. Men $f(1-\frac{1}{n}) \to s$. Altså gælder $s_n \to s$.

<u>Indskud</u>. <u>Hvis rækken</u> $\sum_0^\infty a_n$ <u>er konvergent</u>, <u>gælder</u>

$$\frac{0a_0 + 1a_1 + \cdots + na_n}{n} \to 0.$$

<u>Bevis</u>. Sættes $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, er

$$0a_0 + 1a_1 + \cdots + na_n = (s_n - s_0) + (s_n - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1})$$
$$= ns_n - (s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}),$$

altså

$$\frac{0a_0 + 1a_1 + \cdots + na_n}{n} = s_n - \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}.$$

Men $s_n \to s$ medfører efter den ovenfor citerede sætning, at $\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} \to s$. Altså fås $\frac{0a_0 + 1a_1 + \cdots + na_n}{n} \to s - s = 0$.

<u>Taubers 2. sætning.</u> <u>Hvis</u> $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ <u>er konvergent for</u> $-1<x<1$, <u>og</u> $f(x) \to s$ <u>for</u> $x \to 1$, <u>og endvidere</u> $\frac{0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n}{n} \to 0$, <u>er</u> $\sum_0^\infty a_n$ <u>konvergent med sum</u> s.

Anderledes sagt: Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er summabel(A) med sum s, og $\frac{0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n}{n} \to 0$, da er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s. <u>Det omvendte gælder også</u>, idet jo konvergens af $\sum_0^\infty a_n$ med sum s medfører summabilitet(A) med sum s (Abels sætning) og $\frac{0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n}{n} \to 0$ (indirekte ovenfor). I en vis forstand er Taubers 2. sætning derfor mere tilfredsstillende end 1. sætning (konvergens af $\sum_0^\infty a_n$ medfører ikke, at $na_n \to 0$). Dog har 1. sætning den fordel, at tilbetingelsen $na_n \to 0$ er simpel og let anvendelig, i modsætning til tilbetingelsen $\frac{0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n}{n} \to 0$ i 2. sætning.

Bemærk, at Taubers 1. sætning er en umiddelbar følge af 2. sætning, idet $na_n \to 0$ efter den ovenfor citerede sætning medfører $\frac{0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n}{n} \to 0$. Bevismæssigt har vi dog ikke glæde heraf, idet (som vi skal se) 1. sætning benyttes i beviset for 2. sætning.

<u>Bevis.</u> Vi sætter $b_n = 0a_0 + 1a_1 + \dots + na_n$ og har altså $\frac{b_n}{n} \to 0$. Af

$$\sum_0^N a_n x^n = a_0 + \sum_1^N \frac{b_n - b_{n-1}}{n} x^n$$

$$= a_0 + \sum_1^N b_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + \frac{b_N}{N+1} x^{N+1}$$

fås, idet $\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n - x^{n+1}}{n} + x^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,

$$(※) \quad \sum_0^N a_n x^n = a_0 + (1-x)\sum_1^N \frac{b_n}{n} x^n + x \sum_1^N \frac{b_n}{n(n+1)} x^n + \frac{b_N}{N+1} x^{N+1},$$

hvoraf (da $\frac{b_n}{n} \to 0$)

$$(§) \quad f(x) = a_0 + (1-x)\sum_1^\infty \frac{b_n}{n} x^n + x \sum_1^\infty \frac{b_n}{n(n+1)} x^n.$$

Da $\frac{b_n}{n} \to 0$, gælder $\left|\frac{b_n}{n}\right| \le \varepsilon$ for $n > N(\varepsilon)$, altså for $0 < x < 1$

$$(1-x)\left|\sum_1^\infty \frac{b_n}{n} x^n\right| \le (1-x)\sum_1^N \frac{|b_n|}{n} x^n + (1-x)\frac{\varepsilon}{1-x},$$

hvoraf
$$(1-x)\left|\sum_1^\infty \frac{b_n}{n} x^n\right| \le 2\varepsilon \quad \text{for} \quad 1-\delta(\varepsilon) < x < 1.$$

Vi har altså $(1-x)\sum_1^\infty \frac{b_n}{n} x^n \to 0$ for $x \to 1$. Da ifølge forudsætning $f(x) \to s$ for $x \to 1$, slutter vi af (§), at

$$\sum_1^\infty \frac{b_n}{n(n+1)} x^n \to s - a_0 \quad \text{for } x \to 1.$$

Men koefficienterne i denne række opfylder bibetingelsen i Taubers 1. sætning (idet $n \frac{b_n}{n(n+1)} \to 0$). Altså er rækken $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n(n+1)}$ konvergent med sum $s - a_0$. Af ligningen (※) fås imidlertid for $x = 1$

$$\sum_0^N a_n = a_0 + \sum_1^N \frac{b_n}{n(n+1)} + \frac{b_N}{N+1}.$$

Vi ser da, at $\sum_0^N a_n \to a_0 + s - a_0 = s$ for $N \to \infty$, d.v.s. rækken $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent med sum s.

Vi kommer nu til de dybereliggende 'Tauber sætninger' for potensrækker.

<u>Littlewoods sætning</u> (1910). <u>Hvis</u> $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ <u>er konvergent for</u> $-1 < x < 1$, <u>og</u> $f(x) \to s$ for $x \to 1$, <u>og endvidere</u> na_n <u>er begrænset</u>, <u>er</u> $\sum_0^\infty a_n$ <u>konvergent med sum</u> s.

Anderledes sagt: Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er summabel (A) med sum s, og na_n er begrænset, da er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s. — Sætningen indeholder Taubers 1. sætning, men følger ikke som denne af Taubers 2. sætning.

Vi beviser først en anden "Tauber sætning", der knytter sig til den foran viste med Abels sætning beslægtede sætning.

<u>Hardy-Littlewoods 1. sætning</u> (1913). <u>Hvis</u> $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ <u>er konvergent for</u> $-1 < x < 1$, <u>og</u> $(1-x) f(x) \to A$ <u>for</u> $x \to 1$, <u>og endvidere</u> $a_n \geq 0$ <u>for alle</u> n, <u>da gælder for</u> $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, <u>at</u> $\frac{s_n}{n+1} \to A$.

<u>Karamatas bevis</u> (1930). For fast helt $k \geq 0$ gælder $|x^{k+1}| < 1$, når $|x| < 1$, og $x^{k+1} \to 1$, når $x \to 1$. Følgelig gælder $(1 - x^{k+1}) f(x^{k+1}) \to A$, når $x \to 1$, eller, da $1 - x^{k+1} = (1-x)(1 + x + \cdots + x^k)$ og $1 + x + \cdots + x^k \to k+1$,

$$(1-x) \sum_0^\infty a_n x^n (x^n)^k \to \frac{A}{k+1} = A \int_0^1 t^k \, dt.$$

D.v.s. at der for funktionen $g: [0,1] \to \mathring{R}$ defineret ved $g(t) = t^k$ gælder

$$\oplus \qquad \boxed{(1-x) \sum_0^\infty a_n x^n g(x^n) \to A \int_0^1 g(t)\, dt \quad \text{for } x \to 1}.$$

Vi vil vise, at $\oplus$ må gælde for enhver Riemann integrabel funktion $g: [0,1] \to \mathring{R}$. Hertil betragter vi klassen $\mathcal{C}$ af de Riemann integrable funktioner $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, for hvilke ⊕ gælder. Om denne klasse ved vi altså:

(1) $\mathcal{C}$ indeholder for ethvert helt $k \geq 0$ restriktionen af t^k til $[0,1]$.

Endvidere har vi åbenbart:

(2) $\mathcal{C}$ er et lineært funktionsrum over $\mathbb{R}$, d.v.s., hvis $g \in \mathcal{C}$, gælder $cg \in \mathcal{C}$ for ethvert $c \in \mathbb{R}$, og hvis $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$, gælder $g_1 + g_2 \in \mathcal{C}$.

Af (1) og (2) følger, at klassen $\mathcal{C}$ indeholder restriktionen til $[0,1]$ af ethvert polynomium $c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k$.

Vi vil nu vise:

(3) Hvis g er en Riemann integrabel funktion på $[0,1]$ med den egenskab, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes funktioner $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$, således at $g_1 \leq g \leq g_2$ og $\int_0^1 (g_2(t) - g_1(t))\,dt \leq \varepsilon$, da gælder $g \in \mathcal{C}$.

For at indse det vælger vi for et $\varepsilon > 0$ to sådanne funktioner g_1 og g_2. Da gælder

$$\begin{array}{ccc}
(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g_1(x^n) & \longrightarrow & A\int_0^1 g_1(t)\,dt \\
\wedge\!| & & \wedge\!| \\
(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g(x^n) & & A\int_0^1 g(t)\,dt \\
\wedge\!| & & \wedge\!| \\
(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g_2(x^n) & \longrightarrow & A\int_0^1 g_2(t)\,dt.
\end{array}$$

Ulighederne på venstre side følger af forudsætningen $a_n \geq 0$ for alle n, og ulighederne på højre side følger af, at denne forudsætning medfører, at $A \geq 0$. Vælges nu et $\delta > 0$ således, at

$$\left.\begin{aligned}\left|(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g_1(x^n) - A\int_0^1 g_1(t)dt\right| \leq \varepsilon \\ \left|(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g_2(x^n) - A\int_0^1 g_2(t)dt\right| \leq \varepsilon\end{aligned}\right\} \text{ for } 1-\delta < x < 1,$$

ser vi, at der for $1-\delta<x<1$ gælder

$$\begin{array}{ccccc} A\int_0^1 g_1(t)dt - \varepsilon & \leq & (1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g(x^n) & \leq & A\int_0^1 g_2(t)dt + \varepsilon \\ \vee\!\!| & & & & \wedge\!\!| \\ A\int_0^1 g(t)dt - A\varepsilon - \varepsilon & & & & A\int_0^1 g(t)dt + A\varepsilon + \varepsilon. \end{array}$$

Følgelig er for $1-\delta<x<1$

$$\left|(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n g(x^n) - A\int_0^1 g(t)dt\right| \leq (A+1)\varepsilon,$$

hvormed er vist, at $g \in C$.

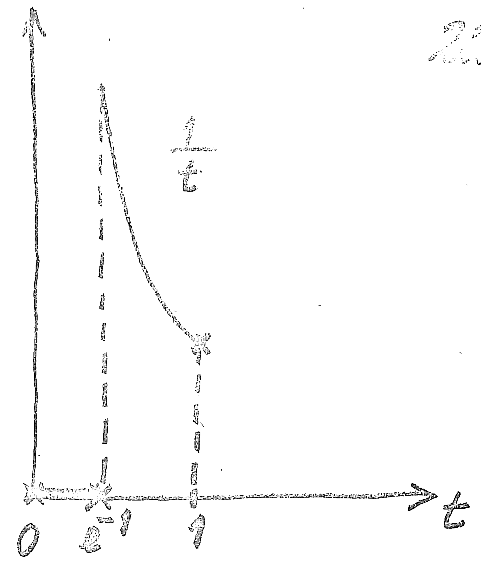
Ved hjælp af (3) kan vi nu vise, at enhver Riemann integrabel funktion g på $[0,1]$ må tilhøre C. Hertil vælges for et givet $\varepsilon>0$ først kontinuerte funktioner h_1 og h_2 på $[0,1]$, således at $h_1 \leq g \leq h_2$ og $\int_0^1 (h_2(t)-h_1(t))dt \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Dernæst vælges, under brug af Weierstrass' approksimationssætning, polynomier p_1 og p_2, således at

$$|h_1(t)-p_1(t)| \leq \tfrac{1}{8}\varepsilon \quad \text{og} \quad |h_2(t)-p_2(t)| \leq \tfrac{1}{8}\varepsilon$$

for alle $t\in[0,1]$. Sættes nu $g_1 = p_1 - \frac{1}{8}\varepsilon$ og $g_2 = p_2 + \frac{1}{8}\varepsilon$, gælder $g_1 \leq g \leq g_2$ og $g_2 - g_1 \leq h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, hvoraf $\int_0^1 (g_2(t)-g_1(t))dt \leq \varepsilon$. Da g_1 og g_2 er polynomier, gælder $g_1, g_2 \in C$. Følgelig gælder også $g \in C$.

I relationen ⊕ indsætter vi nu for g den ved

$$g(t)=\begin{cases} t^{-1} & \text{for } e^{-1}<t\le 1\\ 0 & \text{for } 0\le t\le e^{-1}\end{cases}$$



bestemte funktion. I rækken har vi da $g(x^n)=0$ for alle n, for hvilke $x^n\le e^{-1}$, medens vi for de n, for hvilke $x^n>e^{-1}$, har $g(x^n)=x^{-n}$. Integralet bliver 1. Relationen giver altså

$$(1-x)\sum_{0\le n<\frac{1}{\log(x^{-1})}} a_n \longrightarrow A \quad \text{for } x\to 1.$$

Heri kan vi vælge $x=e^{-\frac{1}{N+1}}$. Da fås

$$\left(1-e^{-\frac{1}{N+1}}\right)\sum_0^N a_n \longrightarrow A \quad \text{for } N\to\infty.$$

Men $\frac{1-e^{-h}}{h}\to 1$ for $h\to 0$, altså $\dfrac{1-e^{-\frac{1}{N+1}}}{\frac{1}{N+1}}\to 1$ for $N\to\infty$.

Følgelig gælder

$$\frac{1}{N+1}\sum_0^N a_n \longrightarrow A \quad \text{for } N\to\infty,$$

hvormed sætningen er bevist.

Corollar 1. Hvis $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ er konvergent for $-1<x<1$, og $(1-x)f(x)\to A$ for $x\to 1$, og endvidere koefficienterne a_n er reelle og ensidigt begrænsede, ɔ: enten $a_n\ge -K$ for alle n eller $a_n\le K$ for alle n, da gælder for $s_n=a_0+a_1+\dots+a_n$, at $\frac{s_n}{n+1}\longrightarrow A$.

Tilfældet $a_n\le K$ for alle n henføres til tilfældet $a_n\ge -K$ for alle n ved fortegnsskifte. Hvis $a_n\ge -K$ for alle n, tilfredsstiller $f(x)+\frac{K}{1-x}=\sum_0^\infty(a_n+K)x^n$ betingelserne i Hardy-Littlewoods 1. sætning. Blot med $A+K$ i stedet for A, og følgelig gælder $\frac{s_n+(n+1)K}{n+1} \to A+K$, altså $\frac{s_n}{n+1} \to A$.

Corollar 2. Hvis $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ er konvergent for $-1<x<1$, og $(1-x)f(x) \to A$ for $x \to 1$, og endvidere koefficienterne a_n er komplekse og begrænsede, ɔ: $|a_n| \leqslant K$ for alle n, da gælder for $s_n = a_0+a_1+\cdots+a_n$ at $\frac{s_n}{n+1} \to A$.

Dette fremgår af Corollar 1 ved at spalte i reelt og imaginært.

Hardy-Littlewoods 2. sætning (1913). Hvis $f(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ er konvergent for $-1<x<1$, og $f(x) \to s$ for $x \to 1$, og endvidere koefficienterne a_n er reelle og na_n er ensidigt begrænset, ɔ: enten $na_n \geqslant -K$ for alle n eller $na_n \leqslant K$ for alle n, da er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s.

Anderledes sagt: Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er summabel (A) med sum s, og enten $na_n \geqslant -K$ for alle n eller $na_n \leqslant K$ for alle n, er $\sum_0^\infty a_n$ konvergent med sum s.

Littlewoods sætning fås som corollar af Hardy-Littlewoods 2. sætning ved at spalte i reelt og imaginært.

Bevis. Tilfældet $na_n \leqslant K$ for alle n henføres til tilfældet $na_n \geqslant -K$ for alle n ved fortegnsskifte. Hvis $na_n \geqslant -K$ for alle n, er koefficienterne i $f'(x) = \sum_1^\infty na_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1}x^n$ alle $\geqslant -K$. Hvis vi kan vise, at $(1-x)f'(x) \to 0$ for $x \to 1$, slutter vi af corollar 1 til Hardy-Littlewoods 1. sætning, at $\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} \to 0$ for $n \to \infty$, og derefter af Taubers 2. sætning, at $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent med sum s.

For at vise, at $(1-x)f'(x) \to 0$, betragter vi $f''(x) = \sum_2^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}$. Idet $na_n \geq -K$, finder vi for $0 < x < 1$

$$f''(x) \geq -K\sum_2^\infty (n-1)x^{n-2} = -K\sum_1^\infty n x^{n-1} = -\frac{K}{(1-x)^2}.$$

Beviset vil derfor være færdigt, når vi beviser følgende

<u>Lemma.</u> Hvis $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ er en to gange differentiabel funktion, for hvilken

$$f(x) \to s \quad \text{for } x \to b$$

og

$$f''(x) \geq -\frac{K}{(b-x)^2} \quad \text{for alle } x \in]a,b[,$$

da gælder

$$(b-x)f'(x) \to 0 \text{ for } x \to b.$$

Dette er blot en sætning blandt mange, der går ud på, at man ud fra oplysninger om opførslen af en funktion og dens afledede af en vis orden kan slutte noget om opførslen af de afledede af lavere orden. Beviset for den her foreliggende sætning opnås ved en simpel anvendelse af Taylors formel. Udførelsen lettes ved, at man vælger $y = b - x$ som ny variabel. Lemmaet udsiger da (når vi omdøber y til x):

<u>Hvis</u> $f:]0,h[\to \mathbb{R}$ <u>er en to gange differentiabel funktion, for hvilken</u>

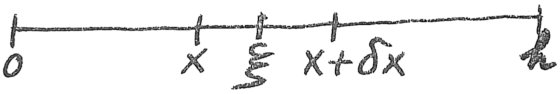
$$f(x) \to s \quad \text{for } x \to 0$$

<u>og</u>

$$x^2 f''(x) \geq -K \text{ for alle } x \in]0,h[,$$

<u>da gælder</u> $$x f'(x) \to 0 \quad \text{for } x \to 0.$$

Bevis. (1) For $\delta \in]0,1[$ og $x \in]0, \frac{1}{2}h[$ gælder $x+\delta x \in]0,h[$. Taylors formel giver



$$f(x+\delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + \tfrac{1}{2} f''(\xi)\delta^2 x^2,$$

hvor $\xi \in]x, x+\delta x[$. Da $f''(\xi) \geq -\frac{K}{\xi^2}$ og $x^2 < \xi^2$, fås

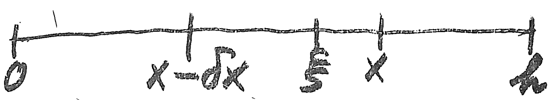
$$f(x+\delta x) \geq f(x) + f'(x)\delta x - \tfrac{1}{2}\frac{K}{\xi^2}\delta^2 x^2$$
$$\geq f(x) + f'(x)\delta x - \tfrac{1}{2}K\delta^2,$$

og altså
$$x f'(x) \leq \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta} + \tfrac{1}{2}K\delta.$$

For et givet $\varepsilon > 0$ vælges nu <u>først</u> $\delta \in]0,1[$, så at $\frac{1}{2}\delta K \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, og <u>dernæst</u> $x_1 \in]0, \frac{1}{2}h[$, så at $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ for $x \in]0, x_1[$, hvilket er muligt, da der for fast δ gælder $\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta} \to \frac{s-s}{\delta} = 0$ for $x \to 0$. Da gælder

$$x f'(x) \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{for } x \in]0, x_1[.$$

(2) For $\delta \in]0,1[$ og $x \in]0,h[$ gælder $x - \delta x \in]0,h[$. Taylors formel giver



$$f(x-\delta x) = f(x) - f'(x)\delta x + \tfrac{1}{2} f''(\xi)\delta^2 x^2,$$

hvor $\xi \in]x-\delta x, x[$. Da $f''(\xi) \geq -\frac{K}{\xi^2}$ og $x^2(1-\delta)^2 < \xi^2$, fås

$$f(x-\delta x) \geq f(x) - f'(x)\delta x - \tfrac{1}{2}\frac{K}{\xi^2}\delta^2 x^2$$
$$\geq f(x) - f'(x)\delta x - \tfrac{1}{2}K\frac{\delta^2}{(1-\delta)^2},$$

og altså
$$x f'(x) \geqq \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta} - \frac{1}{2} K \frac{\delta}{(1-\delta)^2}.$$

For et givet $\varepsilon > 0$ vælges nu <u>først</u> $\delta \in]0,1[$, så at $\frac{1}{2} K \frac{\delta}{(1-\delta)^2} \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$, og <u>dernæst</u> $x_2 \in]0,h[$, så at $\frac{f(x)-f(x-\delta x)}{\delta} \geqq -\frac{1}{2}\varepsilon$ for $x \in]0,x_2[$, hvilket er muligt, da der for fast δ gælder
$\frac{f(x)-f(x-\delta x)}{\delta} \longrightarrow \frac{s-s}{\delta} = 0$ for $x \to 0$. Da gælder
$$x f'(x) \geqq -\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon = -\varepsilon \quad \text{for} \quad x \in]0,x_2[.$$

(3) De to resultater tilsammen viser, at der til et givet $\varepsilon > 0$ findes et $x_0 \in]0,h[$, så at
$$|x f'(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in]0,x_0[,$$
altså at $x f'(x) \to 0$ for $x \to 0$, hvormed beviset er fuldført.

Bemærk, hvordan vi til trods for, at $x^2 f''(x)$ kun er forudsat ensidig begrænset, alligevel får $x f'(x)$ vurderet til begge sider ved den ene gang at benytte positiv tilvækst, den anden gang negativ tilvækst.

§3. <u>Dirichletrækker.</u>

Idet $s = \sigma + it$ er en kompleks variabel, har vi for reelt λ, at
$$e^{\lambda s} = e^{\lambda\sigma} e^{i\lambda t}, \quad |e^{\lambda s}| = e^{\lambda\sigma}, \quad \arg e^{\lambda s} = \lambda t.$$
Ved en Dirichletrække af speciel type forstås en række

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^\infty a_n e^{-(\log n)s},$$

og ved en Dirichletrække af almen type en række

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad 0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \quad \lambda_n \to +\infty.$$

Den specielle type fremgår altså af den almene type, når man vælger $\lambda_n = \log n$. Et andet vigtigt valg er $\lambda_n = n-1$. Rækken kan da skrives

$$\sum_1^\infty a_n e^{-(n-1)s} = \sum_0^\infty a_{n+1}(e^{-s})^n = \sum_0^\infty a_{n+1} z^n, \quad z = e^{-s},$$

og fremgår altså simpelthen af en potensrække ved substitutionen $z = e^{-s}$. Til en udprikket cirkelskive $\{z \mid 0 < |z| < r\}$ svarer herved halvplanen $\{s \mid \sigma > -\log r\}$.

Vi vil særligt interessere os for Dirichletrækker af speciel type, men vil dog udlede mange resultater for den almene type.

Absolut konvergens. Idet $\sum_1^\infty |a_n e^{-\lambda_n s}| = \sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$, og $e^{-\lambda_n \sigma}$ er en aftagende funktion af σ for ethvert n, ses, at hvis rækken $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ er absolut konvergent i et punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$, da har rækken i halvplanen $\{s \mid \sigma \geq \sigma_0\}$ den konvergente majorantrække $\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \sigma_0}$, og er altså absolut og ligelig konvergent i denne halvplan. Der findes altså en absolut konvergensabscisse α, $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$, således at

1) hvis $\alpha = -\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ absolut konvergent for alle s;

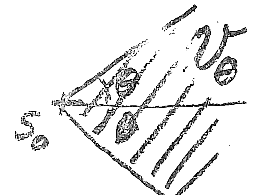
2) hvis $-\infty < \alpha < +\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ absolut konvergent for alle s i halvplanen $\{s \mid \sigma > \alpha\}$, men ikke absolut konvergent for noget s i halvpla-

nen $\{s \mid \sigma < \alpha\}$. Eftersom $\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$ er konvergent eller divergent, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ absolut konvergent i alle punkter af linien $\{s \mid \sigma = \alpha\}$ eller ikke i noget punkt af denne linie;

3) hvis $\alpha = +\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ ikke absolut konvergent for noget s.

<u>Konvergens.</u> Spørgsmålet om (ikke nødvendigvis absolut) konvergens blev først behandlet af Jensen (1884). Vi vil bevise følgende sætning, der modsvarer en for potensrækker vist sætning.

<u>Hvis $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ er konvergent i s_0, er rækken ligelig konvergent i ethvert vinkelrum V_θ bestemt ved to halvlinier ud fra s_0, der danner vinkler $\pm\theta$ med den positive reelle retning</u>, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. (Halvlinierne medregnes til vinkelrummet.)



<u>Indskud.</u> Ved beviset benyttes partiel summation. Af hensyn til andre anvendelser vælger vi følgende tilrettelæggelse. Vi indfører funktionen

$$A(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} a_n, \qquad -\infty < \lambda < +\infty.$$

Vi har altså

$$A(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{for } \lambda < \lambda_1 \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu & \text{for } \lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

For vilkårligt ξ gælder da, idet λ_q betegner det sidste λ_n, der er $\leq \xi$

$$\sum_{\lambda_n \leq \xi} a_n e^{-\lambda_n s} = A(\lambda_1) e^{-\lambda_1 s} + [A(\lambda_2) - A(\lambda_1)] e^{-\lambda_2 s} + \ldots + [A(\lambda_q) - A(\lambda_{q-1})] e^{-\lambda_q s} + [A(\xi) - A(\lambda_q)] e^{-\xi s}$$

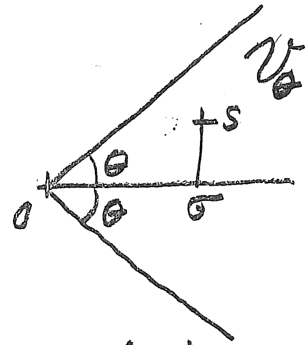
$$= A(\lambda_1)[e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_2 s}] + \dots + A(\lambda_q)[e^{-\lambda_q s} - e^{-\xi s}] + A(\xi)e^{-\xi s}$$

$$= A(\lambda_1)\, s\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s}\,d\lambda + \dots + A(\lambda_q)\, s\int_{\lambda_q}^{\xi} e^{-\lambda s}\,d\lambda + A(\xi)e^{-\xi s},$$

altså

$$(\#)\qquad \boxed{\sum_{\lambda_n \le \xi} a_n e^{-\lambda_n s} = s\int_{-\infty}^{\xi} A(\lambda) e^{-\lambda s}\,d\lambda + A(\xi)e^{-\xi s}}.$$

<u>Bevis.</u> Vi kan antage $s_0 = 0$. Ellers sættes $s = s_0 + u$. Da er vinkelrummet V_Θ bestemt ved to halvlinier ud fra 0, der danner vinkler $\pm\Theta$ med den positive reelle akse. Endvidere kan vi antage, at summen $A = \sum_1^\infty a_n$ er 0. Ellers erstattes a_1 med $a_1 - A$. Da gælder $A(\lambda) \to 0$ for $\lambda \to +\infty$.



For givet $\varepsilon > 0$ vælges $\Lambda \ge 0$ således, at $|A(\lambda)| \le \varepsilon$ for $\lambda \ge \Lambda$. For $\Lambda \le \xi < \eta$ og $s \in V_\Theta \setminus \{0\}$ gælder da ifølge (#)

$$\sum_{\xi < \lambda_n \le \eta} a_n e^{-\lambda_n s} = -A(\xi)e^{-\xi s} + s\int_{\xi}^{\eta} A(\lambda)e^{-\lambda s}\,d\lambda + A(\eta)e^{-\eta s},$$

altså

$$\Big|\sum_{\xi < \lambda_n \le \eta} a_n e^{-\lambda_n s}\Big| \le \varepsilon e^{-\xi\sigma} + |s|\int_{\xi}^{\eta} \varepsilon e^{-\lambda\sigma}\,d\lambda + \varepsilon e^{-\eta\sigma}$$

$$= \varepsilon e^{-\xi\sigma} + \varepsilon\frac{|s|}{\sigma}[e^{-\xi\sigma} - e^{-\eta\sigma}] + \varepsilon e^{-\eta\sigma}$$

$$\le \varepsilon\Big[1 + \frac{1}{\cos\Theta}\Big].$$

Denne vurdering gælder også for $s = 0$. Altså konvergerer rækken ligeligt i V_Θ.

Af sætningen følger specielt, at hvis Dirichletrækken er konvergent i $s_0 = \sigma_0 + it_0$, er den konvergent i ethvert punkt $s = \sigma + it$ med $\sigma > \sigma_0$.

Heraf ses: Der findes en <u>konvergensabscisse</u> γ, $-\infty \leq \gamma \leq +\infty$, således at

1) hvis $\gamma = -\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergent for alle s;

2) hvis $-\infty < \gamma < +\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergent for alle s i halvplanen $\{s \mid \sigma > \gamma\}$, men divergent for alle s i halvplanen $\{s \mid \sigma < \gamma\}$;

3) hvis $\gamma = +\infty$, er $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ divergent for alle s.

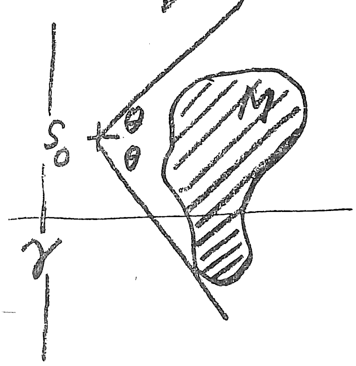
Endvidere ses: Når $\gamma < +\infty$, er den ved rækken fremstillede funktion

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad \sigma > \gamma,$$

holomorf i konvergenshalvplanen $\{s \mid \sigma > \gamma\}$ [som naturligvis for $\gamma = -\infty$ er hele planen], og dens afledede $f^{(p)}(s)$, $p = 1, 2, \ldots$, er i denne halvplan bestemt ved de i halvplanen konvergente rækker

$$f^{(p)}(s) = \sum_1^\infty a_n (-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n s}.$$

Thi for enhver kompakt delmængde M af konvergenshalvplanen kan vi finde et punkt s_0 i konvergenshalvplanen og en vinkel θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, således, at M tilhører det tilsvarende vinkelrum V_θ.



<u>Hvis $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ i et punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$ har begrænsede afsnit, er rækken konvergent i ethvert punkt $s = \sigma + it$ med $\sigma > \sigma_0$.</u>

Der gælder altså i så fald $\gamma \leq \sigma_0$, specielt $\gamma = \sigma_0$, hvis rækken er divergent i s_0.

<u>Bevis.</u> Vi kan antage $s_0 = 0$, ellers sættes $s = s_0 + u$. Vi har da $|A(\lambda)| \leq K$ for alle λ. Ved brug af (#) fås nu for ethvert punkt $s = \sigma + it$ med $\sigma > 0$, idet $\xi < \eta$,

$$\Big|\sum_{\xi<\lambda_n\leq\eta} a_n e^{-\lambda_n s}\Big| \leq K e^{-\xi\sigma} + K\frac{|s|}{\sigma}\left[e^{-\xi\sigma} - e^{-\eta\sigma}\right] + K e^{-\eta\sigma}$$

$$\leq K\left(1 + \frac{|s|}{\sigma}\right) e^{-\xi\sigma}.$$

For givet $\varepsilon > 0$ kan vi vælge Λ, så at $K(1+\frac{|s|}{\sigma})e^{-\Lambda\sigma} \leq \varepsilon$. Da gælder $\Big|\sum\limits_{\xi<\lambda_n\leq\eta} a_n e^{-\lambda_n s}\Big| \leq \varepsilon$ for $\Lambda \leq \xi < \eta$.

For en Dirichletrække $\sum\limits_1^\infty a_n e^{-(n-1)s} = \sum\limits_0^\infty a_{n+1} z^n$, $z = e^{-s}$, gælder altid $\alpha = \gamma$. Thi for en potensrække gælder jo, at konvergens i et punkt $z_0 \neq 0$ medfører absolut konvergens i ethvert punkt z med $|z| < |z_0|$. For vilkårlige Dirichletrækker $\sum\limits_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ kan man godt have $\gamma < \alpha$. Man kan endda have $\alpha = +\infty$, $\gamma = -\infty$. Dette er f. eks. tilfældet for rækken

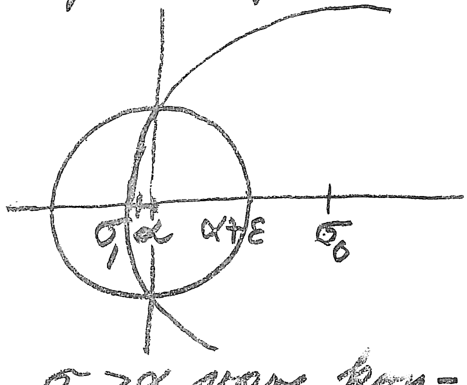
$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{1}{2}}} e^{-(\log\log n)s} = \sum_3^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(\log n)^s}.$$

Thi for ethvert positivt reelt s har man $\log n \leq n^{\frac{1}{2s}}$ fra et vist trin, og altså $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(\log n)^s} \geq \frac{1}{n}$ fra et vist trin, så at rækken ikke er absolut konvergent i s; og for ethvert negativt reelt s er funktionen $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(\log x)^s}$ som man let ser aftagende fra et vist trin, og rækken er derfor konvergent i s.

For en Dirichletrække $\sum\limits_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$, hvor alle $a_n \geq 0$, gælder $\alpha = \gamma$, idet for reelle s konvergens og absolut konvergens kommer ud på et. For sådanne rækker gælder følgende sætning af Landau (1905).

Hvis man for en række $f(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ har $a_n \geqq 0$ for alle n og $-\infty < \alpha < +\infty$, da er punktet α et singulært punkt for $f(s)$.

Bevis. Hvis α var et regulært punkt for $f(s)$, d.v.s. hvis $f(s)$ for et vist $\varepsilon > 0$ kunde udvides til en holomorf funktion på $\{s \mid \sigma > \alpha\} \cup \{s \mid |s-\alpha| < \varepsilon\}$ (som vi naturligvis også betegner $f(s)$), ville potensrækkeudviklingen for $f(s)$ ud fra et punkt $\sigma_0 > \alpha$ være konvergent i cirklen $\{s \mid |s-\sigma_0| < \sqrt{(\sigma_0-\alpha)^2+\varepsilon^2}\}$, og altså specielt i visse punkter $\sigma_1 < \alpha$.



I et sådant punkt σ_1 lyder Taylorrækken for $f(s)$ hørende til σ_0

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(\sigma_0)}{p!}(\sigma_1-\sigma_0)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\lambda_n)^p e^{-\lambda_n\sigma_0}\right)(\sigma_1-\sigma_0)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\sigma_0}\frac{[\lambda_n(\sigma_0-\sigma_1)]^p}{p!}\right).$$

Da alle leddene $a_n e^{-\lambda_n\sigma_0}\frac{[\lambda_n(\sigma_0-\sigma_1)]^p}{p!}$ er $\geqq 0$, måtte da også rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\sigma_0}\frac{[\lambda_n(\sigma_0-\sigma_1)]^p}{p!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\sigma_0}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[\lambda_n(\sigma_0-\sigma_1)]^p}{p!}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\sigma_0} e^{\lambda_n(\sigma_0-\sigma_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\sigma_1}$$

være konvergent, imod antagelsen.

Udv. emn. fra anal. Forår 1967

For en Dirichletrække $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ af den specielle type ser man, at hvis rækken er konvergent i punktet $s_0 = \sigma_0 + it_0$, og følgelig leddene $\frac{a_n}{n^{s_0}}$ er begrænsede, lad os sige $\left|\frac{a_n}{n^{s_0}}\right| = \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} \leq K$ for alle n, da er rækken absolut konvergent i ethvert punkt $s = \sigma + it$, for hvilket $\sigma > \sigma_0 + 1$, idet $\sum_1^\infty \left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{n^\sigma} = \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma - \sigma_0}}$ har den konvergente række $\sum_1^\infty \frac{K}{n^{\sigma-\sigma_0}}$ til majorantrække. Der består derfor kun følgende muligheder:

1) $\alpha = \gamma = -\infty$;

2) $-\infty < \gamma \leq \alpha < +\infty$, $\quad \alpha - \gamma \leq 1$;

3) $\alpha = \gamma = +\infty$.

§ 4. Zetafunktionen. Primtalsætningen som „Tauber sætning".

I halvplanen $\{s | \sigma > 1\}$ er zetafunktionen defineret ved den absolut konvergente række

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

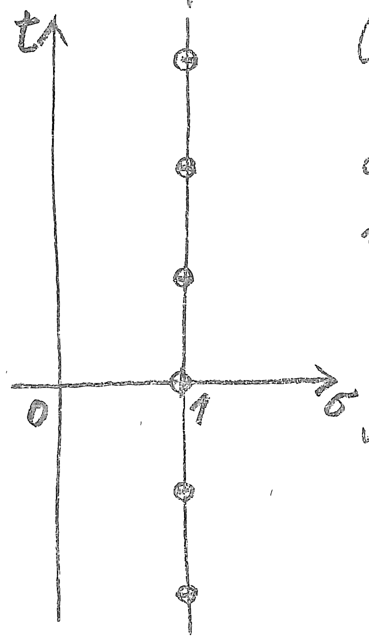
Både den absolutte konvergensabscisse og konvergensabscissen er 1. Foruden denne række betragter vi rækken

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Denne har ligeledes den absolutte konvergensabscisse 1, medens den har konvergensabscissen 0, idet rækken i punktet $s = 0$ lyder $1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$, og denne række er divergent, men har begrænsede afsnit. Funktionen $f(s)$ er således holomorf i halvplanen $\{s | \sigma > 0\}$. I halvplanen $\{s | \sigma > 1\}$ gælder

$$\zeta(s)\left(1-\frac{2}{2^s}\right) = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$
$$-\frac{2}{2^s} \quad -\frac{2}{4^s} \quad - \cdots$$
$$= \frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+-\cdots = f(s).$$

Funktionen $\varphi(s) = 1-\frac{2}{2^s} = 1-e^{-(\log 2)(s-1)}$ er holomorf i hele planen, og dens nulpunkter er bestemt ved $-(\log 2)(s-1) = p2\pi i$, $p\in\mathbb{Z}$. Det er altså punkterne $s = 1+i\frac{2\pi}{\log 2}p$, $p\in\mathbb{Z}$, se figur



(hvor der er benyttet mindre enhed på t-aksen end på σ-aksen). Da således $\varphi(s)\neq 0$ i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$, har vi i denne halvplan

$$\zeta(s) = \frac{f(s)}{\varphi(s)} = \frac{f(s)}{1-\frac{2}{2^s}}.$$

Men højre side fremstiller en i halvplanen $\{s|\sigma>0\}$ meromorf funktion. Følgelig er hermed zetafunktionen udvidet til en i denne halvplan meromorf funktion. De eventuelle poler for $\zeta(s)$ i halvplanen $\{s|\sigma>0\}$ er nulpunkterne for $\varphi(s)$, altså punkterne $s = 1+i\frac{2\pi}{\log 2}p$, $p\in\mathbb{Z}$. Da $\varphi'(s) = (\log 2)e^{-(\log 2)(s-1)} \neq 0$ i disse punkter (nemlig endda for alle s), er nulpunkterne for $\varphi(s)$ alle af orden 1. Et nulpunkt for $\varphi(s)$ er derfor pol for $\zeta(s)$, hvis og kun hvis det ikke er nulpunkt for $f(s)$, og et sådant nulpunkt s_0 vil være pol for $\zeta(s)$ af orden 1 og med residuet $\frac{f(s_0)}{\varphi'(s_0)}$. For $s_0 = 1$ finder vi

$$f(1) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots = \log 2, \quad \varphi'(1) = \log 2.$$

med residuet 1. De øvrige nulpunkter for $\varphi(s)$ er ikke poler for $\zeta(s)$. Dette kunde vises direkte, hvis vi kunde vise, at de også er nulpunkter for $f(s)$; det er de, men det kan næppe ses direkte. I stedet bemærker vi, at der i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$ også gælder

$$\zeta(s)\left(1-\frac{3}{3^s}\right) = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$
$$\qquad\qquad -\frac{3}{3^s} \qquad\qquad -\frac{3}{6^s} \quad -\cdots$$
$$= \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}-\frac{2}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{2}{6^s}++-\cdots = g(s).$$

Den her optrædende række har åbenbart den absolutte konvergensabscisse 1, medens den har konvergensabscissen 0, idet rækken i punktet $s=0$ lyder $1+1-2+1+1-2++-\cdots$, og denne række er divergent, men har begrænsede afsnit. Funktionen $g(s)$ er således holomorf i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$. Funktionen $\psi(s) = 1-\frac{3}{3^s} = 1-e^{-(\log 3)(s-1)}$ er holomorf i hele planen, og dens nulpunkter er punkterne $s = 1+i\frac{2\pi}{\log 3}q$, $q \in \mathbb{Z}$. Herved får vi, at $\zeta(s)$ i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$ også kan fremstilles ved

$$\zeta(s) = \frac{g(s)}{\psi(s)} = \frac{g(s)}{1-\frac{3}{3^s}},$$

og polerne for $\zeta(s)$ i denne halvplan må derfor være blandt punkterne $s = 1+i\frac{2\pi}{\log 3}q$, $q \in \mathbb{Z}$. Nu er imidlertid punktet 1 det eneste fælles punkt for de to mængder

$$\left\{1+i\frac{2\pi}{\log 2}p \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{og} \quad \left\{1+i\frac{2\pi}{\log 3}q \;\middle|\; q \in \mathbb{Z}\right\};$$

thi af $\frac{2\pi}{\log 2}p = \frac{2\pi}{\log 3}q$ fås $2^q = 3^p$, og dette gælder for hele p og q kun, når $p=0, q=0$. Altså har $\zeta(s)$ i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$ pånær den ene pol $s = 1$.

Zetafunktionen er for kompleks variabel først undersøgt af Riemann (1859), som viste, at den kan udvides til en i hele den komplekse plan meromorf funktion med den ene pol 1, og indgående studerede dens egenskaber, idet dog vigtige problemer blev ladt åbne, som endnu tildels er uløste. For vort formål er det tilstrækkeligt at betragte funktionen i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$.

Det Eulerske produkt. Zetafunktionens betydning i primtalteorien beror på, at $\zeta(s)$ i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$ også er fremstillet ved det Eulerske produkt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

hvor p gennemløber primtallene $2, 3, 5, \ldots, p_n, \ldots$.
Vi kalder et uendeligt produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ med faktorer u_n konvergent med værdien u, såfremt $\prod_{n=1}^{N} u_n \to u$ for $N \to \infty$, og $u \neq 0$. [Et uendeligt produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$, i hvilket en eller flere faktorer er 0, eller for hvilket alle faktorer er $\neq 0$, og $\prod_{n=1}^{N} u_n \to 0$, vil altså ikke blive kaldt konvergent.] Vi vil vise:

Det Eulerske produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}}$ er konvergent for ethvert s i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$ med værdien $\zeta(s)$. Heri er således indeholdt, at $\zeta(s) \neq 0$ for ethvert s i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$.

Bevis. (1) For ethvert s i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$

og ethvert primtal p er $\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^\sigma} \leq \frac{1}{2^\sigma} < \frac{1}{2}$. Faktorerne $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ i produktet er derfor for det første defineret (idet nævneren er $\neq 0$) og for det andet åbenbart $\neq 0$. Endvidere er ifølge kvotientrækkeformlen

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^s)^2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \cdots .$$

(2) Vi vil nu først vise, at der for ethvert s i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$ gælder

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} \longrightarrow \zeta(s) \quad \text{for } N \to \infty.$$

Ifølge sætningen om multiplikation af absolut konvergente rækker er

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{(2^2)^s}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{(3^2)^s}+\cdots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{(5^2)^s}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_N}+\frac{1}{(p_N^2)^s}+\cdots\right)$$
$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\cdots p_N^{k_N})^s}$$

(hvor det er ligegyldigt, i hvad orden leddene opskrives), altså

$$= \sum_{n=2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\cdots p_N^{k_N}} \frac{1}{n^s} ,$$

hvor summationen er udstrakt over alle n, i hvis primfaktoropløsning kun primtallene $2, 3, 5, \ldots, p_N$ optræder. Følgelig er

$$\zeta(s) - \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \sum_{n \neq 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\cdots p_N^{k_N}} \frac{1}{n^s} ,$$

hvor summen er udstrakt over de øvrige n. Idet mangden af tal n, i hvis primfaktoropløsning kun primtallene $2,3,5,\dots,p_N$ optræder, blandt andet omfatter alle tallene $1,2,\dots,p_N$, slutter vi, at

$$\left|\zeta(s)-\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}\right| \leq \sum_{n\neq 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\cdots p_N^{k_N}} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{p_N+1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}.$$

For $N\to\infty$ går højre side mod 0. Altså gælder, at $\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} \to \zeta(s)$.

(3) For dernæst at vise, at $\zeta(s)\neq 0$, betragter vi for hvert n hovedværdien af $\log(1-\frac{1}{p_n^s})$, der ifølge potensrækkeformlen for $\log(1-z)$, gyldig for $|z|<1$, fremstilles ved den absolut konvergente række

$$\log\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{(p_n^m)^s}.$$

For hvert N bestemmes da en af værdierne af $\log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ ved

$$\log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{(p_n^m)^s}$$

(hvor det er ligegyldigt, i hvad orden leddene opskrives). Nu er Dirichletrækken

$$h(s) = \sum_{p^m}\frac{1}{m}\frac{1}{(p^m)^s},$$

hvor den kortfattede skrivemåde angiver, at der skal summeres over alle primtalpotenser p^m, og at koefficienten til det til en primtalpotens p^m svarende led er $\frac{1}{m}$ [der menes altså rækken $\sum_1^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$, hvor $c_n=0$, når n ikke er en primtalpotens, og $c_n=\frac{1}{m}$, når $n=p^m$, hvor p er et primtal], åbenbart absolut konvergent i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$, idet den har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$. Følgelig fås

$$h(s) - \log \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \sum_{\substack{p^m \\ p > p_N}} \frac{1}{m} \frac{1}{(p^m)^s},$$

hvor der kun skal summeres over potenser af de primtal p, der er $> p_N$. Heraf ses, at

$$\left| h(s) - \log \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} \right| < \sum_{p_{N+1}}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Da højre side går mod 0 for $N \to \infty$, slutter vi, at $\log \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ for $N \to \infty$ konvergerer mod $h(s)$, hvoraf ses, ikke blot, at $\zeta(s) \neq 0$, men tillige, at $h(s)$ er en af værdierne af $\log \zeta(s)$. Idet vi naturligvis knytter betegnelsen $\log \zeta(s)$ til netop denne værdi af logaritmen, har vi således ikke blot bevist ovenstående sætning, men tillige fundet:

<u>I halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$ er en holomorf gren af $\log \zeta(s)$ fremstillet ved Dirichletrækken</u>

$$\log \zeta(s) = \sum_{p^m} \frac{1}{m} \frac{1}{(p^m)^s}.$$

Den pågældende gren er karakteriseret ved, at den for reelle $s > 1$ er lig den reelle værdi af logaritmen til det positive tal $\zeta(s)$.

Ved differentiation fås heraf i halvplanen $\{s \mid \sigma > 1\}$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p^m} \frac{1}{m} (-\log(p^m)) \frac{1}{(p^m)^s} = \sum_{p^m} \frac{-\log p}{(p^m)^s}$$

eller

$$\boxed{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p^m} \frac{\log p}{(p^m)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}},$$

hvor

$$\boxed{\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{når } n \text{ er en potens af primtallet } p \\ 0, & \text{når } n \text{ ikke er en primtalpotens} \end{cases}}.$$

Udnyttelsen af zetafunktionen til et bevis for primtalssætningen sker bekvemt gennem denne formel. Dette beror på, at den Čebyševske funktion $\psi(x)$ netop er

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

For enhver i en åben sammenhængende mængde A meromorf funktion $f(s)$, der ikke er identisk 0, er $\frac{f'(s)}{f(s)}$ som bekendt ligeledes meromorf i A, og $\frac{f'(s)}{f(s)}$ har poler i polerne og nulpunkterne for $f(s)$. Polerne for $\frac{f'(s)}{f(s)}$ er alle af orden 1, og residuet i en pol s_0 er $-n_0$, hvis s_0 er en pol for $f(s)$ af orden n_0, og n_0, hvis s_0 er et nulpunkt for $f(s)$ af orden n_0. Vi finder altså:

<u>Funktionen</u> $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ <u>er meromorf i halvplanen</u> $\{s \mid \sigma > 0\}$ <u>og har poler i</u> $s = 1$ <u>og i de eventuelle nulpunkter for</u> $\zeta(s)$. <u>Alle polerne er af orden 1.</u> <u>I</u> $s = 1$ <u>er residuet lig med</u> 1. <u>I et eventuelt nulpunkt</u> s_0 <u>for</u> $\zeta(s)$ <u>af orden</u> n_0 <u>er residuet lig med</u> $-n_0$.

Specielt gælder i en omegn af $s = 1$, at $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + g(s)$, hvor $g(s)$ er holomorf, hvoraf ses, at $-(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \to 1$ for $s \to 1$.

<u>En 'Abel sætning' for Dirichletrækker.</u> Gennem ovenstående er der lagt op til at behandle primtalssætningen som et specialtilfælde af en 'Tauber sætning' for Dirichletrækker. For at følge denne

linie må vi da først betragte den 'Abel sætning', hvoraf den pågældende 'Tauber sætning' er en betinget omvending.

Sætningen er analog med den for potensrækken beviste med Abels sætning beslægtede sætning, for hvilken Hardy-Littlewoods 1. sætning er en tilsvarende 'Tauber sætning':

<u>Hvis</u> $f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ <u>er konvergent i $\{s \mid \sigma > 1\}$, og der for funktionen</u> $A(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} a_n$ <u>gælder, at</u> $A(\lambda)e^{-\lambda} \to A$ <u>for</u> $\lambda \to +\infty$, <u>da vil</u> $(s-1)f(s) \to A$, <u>når</u> $s \to 1$ <u>fra højre ad den reelle akse.</u>

<u>Bevis.</u> Vi har som tidligere vist for $\xi \geq 0$

$$\sum_{\lambda_n \leq \xi} a_n e^{-\lambda_n s} = s\int_0^\xi A(\lambda)e^{-\lambda s}\,d\lambda + A(\xi)e^{-\xi s}.$$

For ethvert $s = \sigma + it$ i $\{s \mid \sigma > 1\}$ har vi $|A(\xi)e^{-\xi s}| = |A(\xi)|e^{-\xi\sigma} = |A(\xi)|e^{-\xi}\,e^{-\xi(\sigma-1)} \to A\cdot 0 = 0$ for $\xi \to +\infty$, og følgelig

$$f(s) = \lim_{\xi\to+\infty} s\int_0^\xi A(\lambda)e^{-\lambda s}\,d\lambda = s\int_0^\infty A(\lambda)e^{-\lambda s}\,d\lambda$$

$$= s\int_0^\infty A(\lambda)e^{-\lambda}\,e^{-\lambda(s-1)}\,d\lambda,$$

hvoraf, da

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(s-1)}\,d\lambda = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^\xi e^{-\lambda(s-1)}\,d\lambda = \lim_{\xi\to+\infty}\left[\frac{-e^{-\lambda(s-1)}}{s-1}\right]_0^\xi = \frac{1}{s-1},$$

fås

$$f(s) = A\frac{s}{s-1} + s\int_0^\infty \left(A(\lambda)e^{-\lambda} - A\right)e^{-\lambda(s-1)}\,d\lambda,$$

altså

$$(s-1)f(s) - A = A(s-1) + s(s-1)\int_0^\infty \left(A(\lambda)e^{-\lambda} - A\right)e^{-\lambda(s-1)}\,d\lambda.$$

Til et $\varepsilon > 0$ vælges nu $\xi_0(\varepsilon) \geq 0$, så at $|A(\lambda)e^{-\lambda} - A| \leq \varepsilon$ for $\lambda \geq \xi_0(\varepsilon)$. Da fås for ethvert reelt $s > 1$

Udv. exam. fra anal. Termin 1967

$$\left|(s-1)f(s)-A\right| \le |A|(s-1) + s(s-1)\int_0^{\xi_0}\left|A(\lambda)e^{-\lambda}-A\right|e^{-\lambda(s-1)}d\lambda$$

$$+ s(s-1)\int_0^{\infty}\varepsilon\, e^{-\lambda(s-1)}d\lambda$$

$$= |A|(s-1) + s(s-1)\int_0^{\xi_0}\left|A(\lambda)e^{-\lambda}-A\right|e^{-\lambda(s-1)}d\lambda$$

$$+ s\varepsilon.$$

For $s \to 1$ konvergerer højre side mod ε. Der findes altså et $\delta(\varepsilon)>0$, således at

$$\left|(s-1)f(s)-A\right| \le 2\varepsilon \quad \text{for} \quad 1<s<1+\delta(\varepsilon).$$

Hermed er sætningen bevist.

For en Dirichletrække $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^\infty a_n e^{-(\log n)s}$ af speciel type er $A(\lambda) = \sum_{\log n \le \lambda} a_n = \sum_{n \le e^\lambda} a_n$. Sættes $S(x) = \sum_{n\le x} a_n$, er altså $A(\lambda) = S(e^\lambda)$, og betingelsen $A(\lambda)e^{-\lambda} \to A$ for $\lambda \to +\infty$ er ensbetydende med, at $\frac{S(x)}{x} \to A$ for $x \to +\infty$. Sætningen giver derfor

Hvis $f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ er konvergent i $\{s \mid \sigma > 1\}$, og der for funktionen $S(x) = \sum_{n\le x} a_n$ gælder $\frac{S(x)}{x} \to A$ for $x \to +\infty$, da vil $(s-1)f(s) \to A$, når $s \to 1$ fra højre langs den reelle akse.

Man kunde nu forvente, at der i analogi med Hardy-Littlewoods 1. sætning vilde gælde følgende til denne 'Abel sætning' svarende 'Tauber-sætning':

'Hvis $f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ er konvergent i $\{s \mid \sigma > 1\}$, og $(s-1)f(s) \to A$ for $s \to 1$ fra højre langs den reelle akse, og desuden alle $a_n \ge 0$, da gælder for $S(x) = \sum_{n \le x} a_n$, at $\frac{S(x)}{x} \to A$ for $x \to +\infty$.'

Udv. emn. fra anal. Forår 1967

Anvendt på $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, der ifølge det ovenstående opfylder de nævnte betingelser for $A=1$, ville vi da få, at der for $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ måtte gælde $\frac{\psi(x)}{x} \to 1$ for $x \to +\infty$, altså rigtigheden af primtalsætningen.

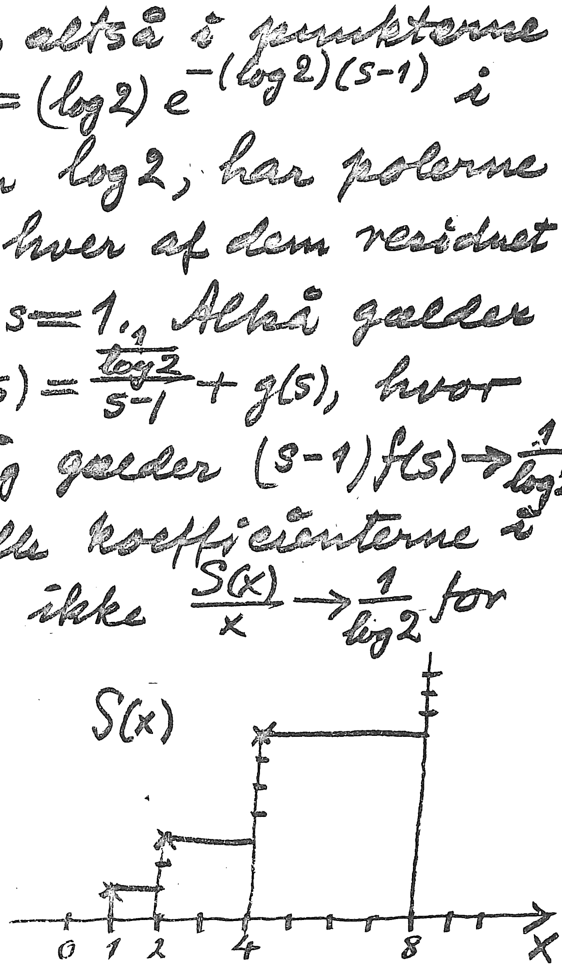
Den anførte sætning er imidlertid forkert. Dette ses af eksemplet

$$f(s) = \frac{1}{1-\frac{2}{2^s}} = \frac{1}{1^s} + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \frac{8}{8^s} + \cdots .$$

Rækken er åbenbart konvergent i $\{s \mid \sigma > 1\}$ (idet $\left|\frac{2}{2^s}\right| = \frac{2}{2^\sigma} < 1$). Funktionen $f(s)$ er meromorf i hele planen og har poler i nulpunkterne for $\varphi(s) = 1 - \frac{2}{2^s} = 1 - e^{-(\log 2)(s-1)}$, altså i punkterne $1 + i\frac{2\pi}{\log 2}p$, $p \in \mathbb{Z}$. Da $\varphi'(s) = (\log 2)\, e^{-(\log 2)(s-1)}$ i disse punkter har værdien $\log 2$, har polerne alle orden 1, og $f(s)$ har i hver af dem residuet $\frac{1}{\log 2}$. Blandt polerne er $s=1$. Altså gælder i en omegn af $s=1$, at $f(s) = \frac{\frac{1}{\log 2}}{s-1} + g(s)$, hvor $g(s)$ er holomorf, og følgelig gælder $(s-1)f(s) \to \frac{1}{\log 2}$ for $s \to 1$. Endvidere er alle koefficienterne i rækken ≥ 0. Men vi har ikke $\frac{S(x)}{x} \to \frac{1}{\log 2}$ for $x \to +\infty$. Thi vi finder

$$S(2^{n-1}) = 2^n - 1, \quad \frac{S(2^{n-1})}{2^{n-1}} \to 2$$

$$S(2^n - 1) = 2^n - 1, \quad \frac{S(2^n-1)}{2^n-1} \to 1.$$



En til den beviste 'Abel sætning' svarende 'Tauber sætning', der kan anvendes på $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, blev fundet af Landau (1909), som derved opnåede et væsentligt simplere bevis for primtalsætningen end Hadamards og de la Vallée-Poussins, der benyttede dybere liggende egenskaber ved zetafunktionen. Hele problemstillingen vedrørende "Tauber sætninger" blev taget op af Wiener (1928) i forbindelse med teorien for Fourier integraler, hvorved en ny vej til primtalsætningen blev fundet. Særligt simpelt fremtræder denne gennem Ikeharas påvisning af, at man kan undvære en af betingelserne i Landaus sætning (1931). Vi vil her følge denne vej.

Landau-Wiener-Ikeharas sætning. Hvis $f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ er konvergent i $\{s|\sigma>1\}$, og hvis

(1) $f(s)-\frac{A}{s-1}$ kan udvides til en i den afsluttede halvplan $\{s|\sigma\geqq 1\}$ kontinuert funktion (hvilket indebærer, at $(s-1)f(s)\to A$ for $s\to 1$);

(2) alle $a_n\geqq 0$;

da gælder for funktionen $A(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqq\lambda} a_n$, at $A(\lambda)e^{-\lambda}\to A$ for $\lambda\to+\infty$.

For Dirichletrækker af speciel type giver sætningen:

Hvis $f(s)=\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$ er konvergent i $\{s|\sigma>1\}$, og hvis

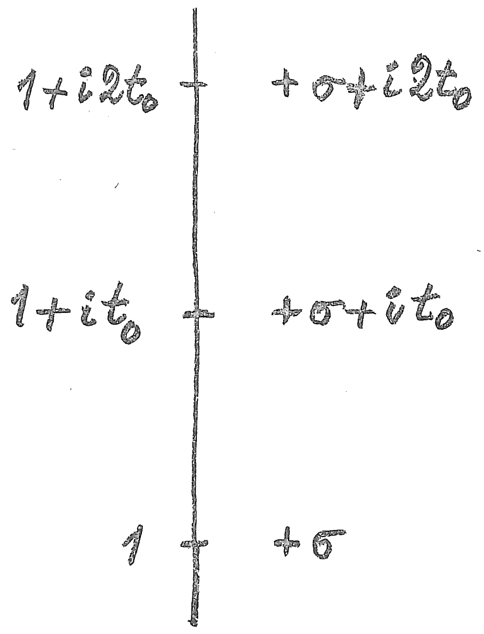
(1) $f(s)-\frac{A}{s-1}$ kan udvides til en i den afsluttede halvplan $\{s|\sigma\geqq 1\}$ kontinuert funktion;

(2) alle $a_n\geqq 0$;

da gælder for funktionen $S(x)=\sum_{n\leqq x} a_n$, at $\frac{S(x)}{x}\to A$ for $x\to+\infty$.

For $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_1^\infty\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ er betingelsen (2) trivielt opfyldt. Desuden ved vi, at $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}$ kan udvides til en meromorf funktion i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$, hvis poler er de eventuelle nulpunkter for $\zeta(s)$. For at godtgøre betingelsen (1) må vi derfor vise, <u>at</u> $\zeta(s)$ <u>ikke har noget nulpunkt på linien</u> $\{s \mid \sigma = 1\}$. Denne egenskab indgik allerede i Hadamards og de la Vallée-Poussins bevis for primtalsætningen.

Vi anstiller først en heuristisk betragtning.



Da $s=1$ er pol for $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ af orden 1 med residuet 1 gælder for $\sigma>1$ nær ved 1

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \sim \frac{1}{\sigma-1}.$$

Hvis $1+it_0$ $(t_0 \neq 0)$ var nulpunkt for $\zeta(s)$ af orden n_0, skulde $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ i $1+it_0$ have en pol af orden 1 med residuet $-n_0$. Der måtte da for $\sigma > 1$ nær ved 1 gælde

$$-\frac{\zeta'(\sigma+it_0)}{\zeta(\sigma+it_0)} = \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} e^{-i(\log n)t_0} \sim \frac{-n_0}{\sigma-1}.$$

Da de numeriske værdier $\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$ af rækkens led omtrent har summen $\frac{1}{\sigma-1}$, måtte vi have $n_0 = 1$, og faktorerne $e^{-i(\log n)t_0}$ måtte, borset fra led, hvis numeriske værdier havde en lille sum, være nær ved -1. For disse led måtte da gælde, at $\left(e^{-i(\log n)t_0}\right)^2 = e^{-i(\log n)2t_0}$ var nær ved 1. Konsekvensen heraf vilde imidlertid være, at

$$-\frac{\zeta'(\sigma+i2t_0)}{\zeta(\sigma+i2t_0)} = \sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} e^{-i(\log n)2t_0} \sim \frac{1}{\sigma-1},$$

hvilket er umuligt, da $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ ikke har nogen pol på linien $\{s|\sigma=1\}$ med positivt residuum undtagen 1.

Ved den faktiske udnyttelse af denne tankegang er det hensigtsmæssigt at operere med funktionen $\log|\zeta(s)| = \Re \log\zeta(s)$. Vi har i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$

$$\log\zeta(s) = \sum_{p^m} \frac{1}{m}\frac{1}{(p^m)^s} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^s}, \quad \text{alle } c_n \geqslant 0,$$

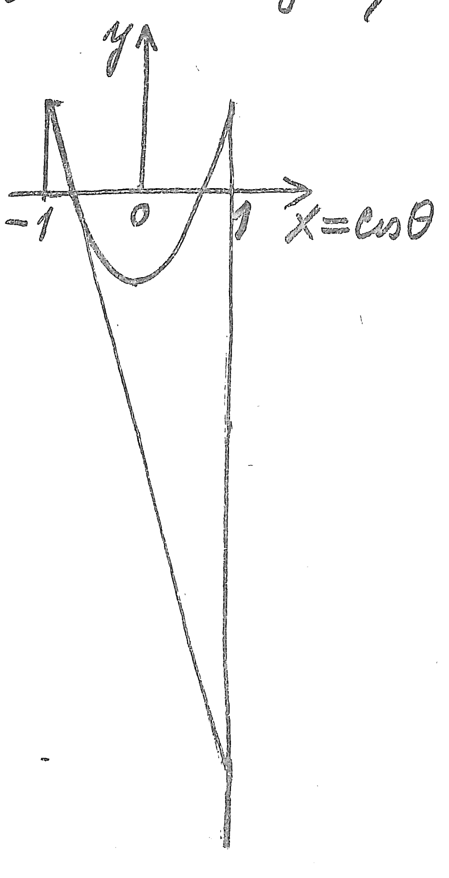
altså

$$\log|\zeta(s)| = \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^\sigma}\cos(t\log n).$$

Vi har altså

$$0 \qquad \left\{\begin{aligned} \log\zeta(\sigma) &= \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^\sigma}\cdot 1 \\ \log|\zeta(\sigma+it)| &= \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^\sigma}\cdot\cos(t\log n) \\ \log|\zeta(\sigma+i2t)| &= \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^\sigma}\cdot\cos(2t\log n). \end{aligned}\right.$$

Vi vil udnytte, at når $\cos\theta$ er nær -1, er $\cos 2\theta$ nær 1. Dette fremgår naturligvis af, at $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, men dette kan ikke så let udnyttes direkte. I stedet benytter vi den ulighed, der fås ved at erstatte parablen $y = 2x^2-1$ med sin tangent i $(-1,1)$. Dette giver



$$2x^2 - 1 \geqslant -3-4x$$

[som naturligvis også følger direkte af, at $(x+1)^2 \geqslant 0$]. Herved fås $\cos 2\theta \geqslant -3-4\cos\theta$, eller

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta \geqslant 0.$$

Denne ulighed viser ligeledes, at når $\cos\theta$ er nær -1, er $\cos 2\theta$ nær 1.

Multipliceres ligningerne ⑥ med henholdsvis 3, 4, 1 og adderes, fås under brug af den angivne ulighed (idet alle $c_n \geq 0$)

$$3 \log \zeta(\sigma) + 4 \log|\zeta(\sigma+it)| + \log|\zeta(\sigma+i2t)| \geq 0,$$

altså

$$\zeta(\sigma)^3 \cdot |\zeta(\sigma+it)|^4 \, |\zeta(\sigma+i2t)| \geq 1,$$

gældende for alle $\sigma > 1$ og alle t. Heraf fås

$$[(\sigma-1)\zeta(\sigma)]^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 (\sigma-1)|\zeta(\sigma+i2t)| \geq 1.$$

For $\sigma \to 1$ gælder $(\sigma-1)\zeta(\sigma) \to 1$, idet $\zeta(s)$ i $s=1$ har en pol af orden 1 med residuet 1. Hvis $1+it$ var et nulpunkt for $\zeta(s)$, ville gælde $\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1} \to \zeta'(1+it)$ for $\sigma \to 1$. Da $\zeta(\sigma+i2t) \to \zeta(1+i2t)$ for $\sigma \to 1$, ville venstre side i uligheden konvergere mod 0 for $\sigma \to 1$, hvilket er umuligt.

Altså har $\zeta(s)$ intet nulpunkt på linien $\{s \mid \sigma = 1\}$.

<u>Primtalsætningen vil således være bevist, når vi har bevist Landau-Wiener-Ikeharas sætning</u>

§5. <u>Fourierintegraler.</u>

Ved beviset for Landau-Wiener-Ikeharas sætning får vi brug for enkelte elementære resultater vedrørende Fourierintegraler. For ikke at præsentere disse løsrevet fra deres naturlige sammenhæng indskyder vi en behandling af det centrale afsnit af teorien for Fourierintegraler, hvortil disse resultater hører.

<u>Heuristiske betragtning.</u> Lad $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\overset{1}{R})$ være klassen af Lebesgue integrable funktioner $f: \overset{1}{R} \to \overset{1}{C}$. For en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}$ og et vilkårligt $a > 0$ betegner vi med f_a den periodiske funktion med perioden $2a$, der i intervallet fra $-a$ til a stemmer overens med f. Vi opskriver Fourierrækken for den periodiske funktion $f_a(\frac{a}{\pi}t)$ med perioden 2π:

$$f_a(\tfrac{a}{\pi}t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_{a,n} e^{int}, \text{ hvor } c_{a,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tfrac{a}{\pi}t) e^{-int} dt.$$

Idet vi sætter $t = \frac{\pi}{a}x$, kan rækken skrives

$$f_a(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_{a,n} e^{in\frac{\pi}{a}x}, \text{ hvor } c_{a,n} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-in\frac{\pi}{a}x} dx,$$

eller
$$f_a(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} g_a(n\tfrac{\pi}{a}) e^{in\frac{\pi}{a}x} \frac{\pi}{a}, \text{ hvor } g_a(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Ved formelt at lade $a \to \infty$ føres vi til <u>Fourier-integralet</u> for funktionen $f(x)$:

$$\boxed{f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy, \text{ hvor } g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx},$$

Da $f \in \mathcal{L}$, er $f(x)e^{-ixy}$ for ethvert y en Lebesgue integrabel funktion af x, så at der ikke er noget problem med hensyn til eksistensen af $g(y)$; funktionen g kaldes den <u>Fouriertransformerede</u> af f. Den spiller den analoge rolle til følgen af Fourierkonstanter i Fourierrækketeorien. Svarende til problemet i Fourierrækketeorien er problemet nu at undersøge, om, og da i hvilken forstand, funktionen f fremstilles ved sit Fourierintegral. Da der ikke nødvendigvis gælder $g \in \mathcal{L}$, har Fourierintegralet ikke på forhånd nogen mening. Det er blot et udtryk vi associerer med funktionen f. Formlen $f(x) \infty \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy$ er blot en anden skrivemåde for formlen $g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$.

Simple egenskaber ved den Fouriertransformerede.

① g er begrænset. Thi for ethvert y er

$$|g(y)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-ixy}| dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

② g er ligelig kontinuert. Thi for ethvert y og h er

$$|g(y+h) - g(y)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) [e^{-ix(y+h)} - e^{-ixy}] dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{-ixh} - 1| dx = \varphi(h).$$

For ethvert $h \in R$ har $|f(x)|\,|e^{-ixh} - 1|$ den integrable majorant $2|f(x)|$. Desuden gælder $|f(x)|\,|e^{-ixh} - 1| \to 0$ for $h \to 0$ for ethvert x. Ifølge Lebesgues sætning om absolut majoriseret konvergens gælder derfor $\varphi(h) \to 0$ for $h \to 0$, hvoraf ses, at g er ligelig kontinuert.

③ Riemann-Lebesgues lemma: $g(y) \to 0$ for $|y| \to \infty$. Hvis f er den karakteristiske funktion for et interval med endepunkter a og b, gælder (for $y \neq 0$)

$$g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ixy} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iby} - e^{-iay}}{-iy}, \quad |g(y)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2}{|y|},$$

hvoraf sætningen i dette tilfælde og dermed for enhver trappefunktion f. For et vilkårligt $f \in \mathcal{L}$

og et vilkårligt $\varepsilon > 0$ vælges en trappefunktion f_1, så at
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_1(x)|\,dx \leq \varepsilon.$$
Idet g_1 betegner den Fouriertransformerede af f_1, har vi da for alle y
$$|g(y) - g_1(y)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f_1(x)) e^{-ixy}\,dx\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |(f(x) - f_1(x)) e^{-ixy}|\,dx \leq \varepsilon.$$
Da $g_1(y) \to 0$ for $|y| \to \infty$, findes et c, så at $|g_1(y)| \leq \varepsilon$ for $|y| \geq c$. For $|y| \geq c$ gælder da $|g(y)| \leq 2\varepsilon$, hvormed er vist, at $g(y) \to 0$ for $|y| \to \infty$.

<u>Bemærkning</u>. Af Riemann-Lebesgues lemma fremgår, at der for ethvert $f \in L$ gælder
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, xy\,dx \to 0 \quad \text{for } |y| \to \infty.$$
(Benyt, at $\cos xy = \dfrac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2}$ og $\sin xy = \dfrac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{2i}$.)

Egenskaberne ① ② ③ viser, at den Fouriertransformerede g af en funktion $f \in L$ i en vis forstand er en „pæn" funktion. Men også kun i en vis forstand. Som allerede anført gælder ikke nødvendigvis $g \in L$. Fourierintegralet må derfor behandles som et uegentligt integral.

<u>Konvergens og summabilitet af integraler.</u>

Lad $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ være en (for simpelheds skyld og fordi vi ikke behøver mere i anvendelserne) kontinuert funktion. I analogi med definitionerne for uendelige rækker siger vi, at det <u>uegentlige integral</u>

$$\int_0^\infty \varphi(y)\,dy$$

er <u>konvergent</u> med værdien s, og skrives $\int_0^\infty \varphi(y)dy = s$, hvis afsnittet

$$s_p = \int_0^p \varphi(y)dy \to s \text{ for } p \to \infty,$$

og vi siger, at det er <u>summabelt</u> med værdien s, og skrives ligeledes $\int_0^\infty \varphi(y)\,dy = s$, hvis afsnitsmiddelet

$$S_p = \frac{1}{p}\int_0^p s_q\,dq \to s \text{ for } p \to \infty.$$

<u>Sætning</u>. <u>Konvergens med værdi s</u> <u>medfører</u> <u>summabilitet med værdi</u> s, <u>d.v.s.</u> $s_p \to s$ <u>medfører</u> $S_p \to s$.

<u>Bevis</u>. Lad $s_p \to s$. Til $\varepsilon > 0$ vælges $P \geq 0$, så at $|s_p - s| \leq \varepsilon$ for $p \geq P$. For $p > P$ gælder da, idet

$$S_p - s = \frac{1}{p}\int_0^p (s_q - s)\,dq,$$

at

$$|S_p - s| \leq \frac{1}{p}\int_0^p |s_q - s|\,dq = \frac{1}{p}\int_0^P |s_q - s|\,dq + \frac{1}{p}\int_P^p |s_q - s|\,dq$$
$$\leq \frac{C}{p} + \frac{\varepsilon(p-P)}{p} \leq \frac{C}{p} + \varepsilon,$$

hvoraf $|S_p - s| \leq 2\varepsilon$ for $p > \max\{P, \frac{C}{\varepsilon}\}$.

<u>Det omvendte gælder ikke</u>. Betragt f. eks. det uegentlige integral $\int_0^\infty \cos y\,dy$. Her er $s_p = \sin p$. Integralet er derfor ikke konvergent. Men $S_p = \frac{1}{p}\int_0^p \sin q\,dq = \frac{1-\cos p}{p} \to 0$ for $p \to \infty$. Integralet er derfor summabelt med værdien 0.

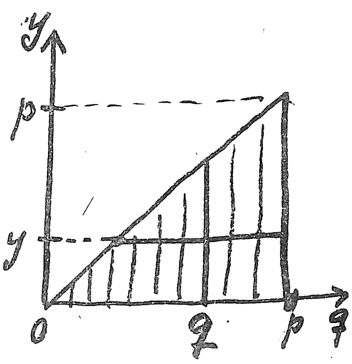
<u>Bemærkning</u>. Hvis φ er Lebesgue integrabel på $[0, +\infty[$, er det uegentlige integral $\int_0^\infty \varphi(y)dy$ konvergent, og dets værdi er lig med værdien af in-

tegralet af φ over $[0,+\infty[$, som i forvejen er betegnet $\int_0^\infty \varphi(y)\,dy$. Thi afsnittet s_p er jo integralet over $[0,+\infty[$ af den Lebesgue integrable funktion $\varphi_p = \varphi\cdot 1_{[0,p]}$. Funktionerne φ_p har den absolutte majorant $|\varphi|$, som er Lebesgue integrabel over $[0,+\infty[$. For $p\to\infty$ gælder $\varphi_p(y)\to\varphi(y)$ for ethvert y. Af Lebesgues sætning fås derfor $s_p = \int_0^\infty \varphi_p(y)\,dy \to \int_0^\infty \varphi(y)\,dy$.

Det omvendte gælder ikke. Men der gælder, at hvis det uegentlige integral $\int_0^\infty \varphi(y)\,dy$ er konvergent, og $\varphi(y)\geq 0$ for alle y, da er φ Lebesgue integrabel på $[0,+\infty[$. Thi når $\varphi(y)\geq 0$ for alle y, konvergerer φ_p for $p\to\infty$ stigende mod φ. Af $s_p = \int_0^\infty \varphi_p(y)\,dy \to s$ følger da ved brug af sætningen om monoton konvergens, at φ er integrabel over $[0,+\infty[$ med integralet s.

Omskrivning af afsnitsmiddelet. Man har

$$\sigma_p = \frac{1}{p}\int_0^p\left(\int_0^q \varphi(y)\,dy\right)dq = \frac{1}{p}\int_{\triangle}\varphi(y)\,dy\,dq$$
$$= \frac{1}{p}\int_0^p\left(\int_y^p \varphi(y)\,dq\right)dy = \frac{1}{p}\int_0^p (p-y)\varphi(y)\,dy$$
$$= \int_0^p\left(1-\frac{y}{p}\right)\varphi(y)\,dy.$$



Ligesom en uendelig række $\sum_{-\infty}^{\infty} u_n$ behandles som rækken $u_0 + \sum_1^\infty (u_n + u_{-n})$, vil vi, når $\varphi: R\to C$ er en kontinuert funktion, behandle det uegentlige integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy \qquad \text{som} \qquad \int_0^\infty(\varphi(y)+\varphi(-y))\,dy.$$

Afsnit og afsnitsmiddel bliver da

$$s_p = \int_{-p}^{p} \varphi(y)\,dy \quad \text{og} \quad \sigma_p = \frac{1}{p}\int_0^p s_q\,dq = \int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)\varphi(y)\,dy.$$

Afsnit og afsnitsmiddel af Fourierintegralet.

Af $g(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}dx$ fås, idet x erstattes med $u-t$, hvor t er den nye integrationsvariable, og u bagefter omdøbes til x,

$$g(y)\,e^{ixy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,e^{ity}dt.$$

Følgelig bliver afsnittet i Fourierintegralet

$$s_p(x) = \int_{-p}^{p} g(y)\,e^{ixy}dy = \int_{-p}^{p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,e^{ity}dt\right)dy,$$

altså ifølge Lebesgue-Fubini's sætning [idet funktionen $h(t,y) = f(x-t)\,e^{ity}$ let vises at være Lebesgue integrabel over mængden $R\times[-p,p]$ i (t,y)-planen]

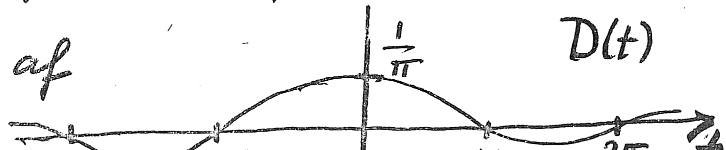
$$s_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p} e^{ity}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,D_p(t)\,dt,$$

hvor
$$D_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p} e^{ity}dy = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{itp}-e^{-itp}}{it} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin pt}{t}$$

spiller den analoge rolle til Dirichletkernen i Fourierrækketeorien og derfor er betegnet ligesådan [selv om det naturligvis nu er en anden funktion]. Bemærk, at $D_p(0) = \frac{p}{\pi}$, $D_p(-t) = D_p(t)$.

Sættes
$$D(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t}{t} = D_1(t) \quad \text{er} \quad D_p(t) = p\,D(pt).$$

Grafen af D_p fås derfor af grafen for D ved



at dividere abscisserne og gange ordinaterne med p.

Kernen $D_p(t)$ er, som man ser, den Fouriertransformerede af den karakteristiske funktion for intervallet $[-p,p]$. Den er ikke integrabel over $]-\infty,\infty[$. Det er nok for at vise dette at betragte $D(t)$. For ethvert $n \in \mathring{N}_0$ gælder i intervallet $[n\pi+\frac{1}{6}\pi, n\pi+\frac{5}{6}\pi]$ uligheden $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$, og følgelig $|D(t)| \geq \frac{1}{2\pi^2(n+1)}$. Den trappefunktion, der for ethvert $\nu \in \{0,\ldots,n-1\}$ i intervallet $[\nu\pi+\frac{1}{6}\pi, \nu\pi+\frac{5}{6}\pi]$ har værdien $\frac{1}{2\pi^2(\nu+1)}$ og ellers er 0, er altså $\leq |D(t)|$, og dens integral er $\frac{1}{3\pi}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$. Da $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \to \infty$ for $n \to \infty$, ses, at det nedre Lebesgue integral af $|D(t)|$ er $+\infty$.

Vi vil imidlertid vise, at det negentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty} D_p(t)\,dt$ for ethvert p er konvergent med værdien 1. Det er nok at vise, at det gælder for $D(t)$.

<u>Sætning.</u> <u>Det negentlige integral $\int_{-\infty}^{\infty} D(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ er konvergent og har værdien</u>

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = 1.$$

<u>Bevis.</u> Der kendes adskillige beviser for denne sætning, men ingen trivielle. Den er analog til den (trivielle) sætning, at Dirichletkernen $\sum_{-n}^{n} e^{i\nu t} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}$ i Fourierrækketeorien har middelværdien 1, og vi vil udlede den heraf.

Vi har for ethvert $n \in \mathring{N}$

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt.$$

Da $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}=\frac{\frac{1}{2}t-\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}t}$ er kontinuert på $[-\pi,0[$ og $]0,\pi]$ og har en grænseværdi for $t\to 0$ (nemlig 0), slutter vi af Riemann-Lebesgues lemma, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{\frac{1}{2}t}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt \to 0 \quad \text{for } n\to\infty.$$

Følgelig gælder

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}dt \to 1 \quad \text{for } n\to\infty.$$

Idet $s_p=\frac{1}{\pi}\int_{-p}^{p}\frac{\sin t}{t}dt$, gælder altså $s_{(n+\frac{1}{2})\pi}\to 1$ for $n\to\infty$. For $(n+\frac{1}{2})\pi\le p<(n+\frac{3}{2})\pi$ gælder imidlertid, idet $\left|\frac{1}{\pi}\frac{\sin t}{t}\right|\le\frac{1}{\pi^2 n}$ for $(n+\frac{1}{2})\pi\le|t|<(n+\frac{3}{2})\pi$, at $|s_p-s_{(n+\frac{1}{2})\pi}|\le\frac{2}{\pi n}$. Følgelig gælder $s_p\to 1$ for $p\to\infty$.

For <u>afsnitsmiddelet af Fourierintegralet</u> finder vi ved at regne som ovenfor for afsnittet

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_p(x) &= \int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)g(y)\,e^{ixy}dy\\
&= \int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,e^{ity}dt\right)dy\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)e^{ity}dy\right)dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\,K_p(t)\,dt,
\end{aligned}$$

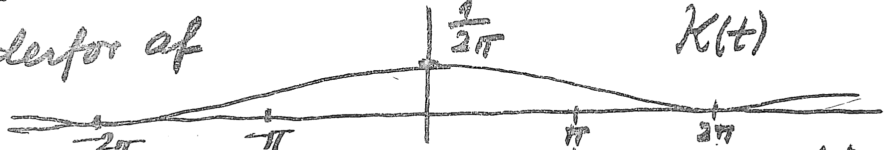
hvor $K_p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)e^{ity}dy = \frac{1}{p}\int_{0}^{p}D_q(t)\,dq =$

$$= \frac{1}{p}\int_0^p \frac{1}{\pi}\frac{\sin qt}{t}\,dq = \frac{1}{\pi}\frac{1}{p}\frac{1-\cos pt}{t^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{p}\frac{\sin^2\frac{1}{2}pt}{t^2}$$

spiller den analoge rolle til Fejérkernen i Fourierrækketeorien og derfor er betegnet lige sådan [selv om det naturligvis er en anden funktion]. Bemærk, at $K_p(0) = \frac{p}{2\pi}$, $K_p(-t) = K_p(t)$. Sættes

$$K(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}t}{t^2} = K_1(t) \text{ er } K_p(t) = pK(pt).$$

Grafen af K_p fås derfor af grafen for K ved



at dividere abscisserne og gange ordinaterne med p.

Kernen $K_p(t)$ er, som man ser, den Fouriertransformerede af den funktion, der på intervallet $[-p,p]$ er $1-\frac{|y|}{p}$ og ellers er 0. Den har den bemærkelsesværdige egenskab, at den (ligesom Fejérkernen) er ≥ 0 for alle t. Nærmere bestemt har vi

$$0 \leq K_p(t) \leq \frac{2}{\pi p t^2} \quad \text{for alle } t.$$

Desuden er $K_p(t) \leq \frac{p}{2\pi} = K_p(0)$ for alle t. Heraf ses, at $K_p(t)$ er integrabel over $]-\infty,+\infty[$. Vi vil vise, at dens integral er 1. Det er nok at vise, at det gælder for $K(t)$, altså at

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = 1.$$

Dette ses af, at for $a \to \infty$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos t}{t}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin t}{t}\,dt \to 1.$$

<u>Konvergens af Fourierintegralet.</u> Som følge af de mindre behagelige egenskaber ved kernen

$D_p(t)$ opnås konvergens af Fourierintegralet kun under ret restriktive antagelser om funktionen f. Vi vil vise følgende

Sætning. Hvis f har grænseværdier $f(x+0)$ og $f(x-0)$ fra højre og venstre i punktet x og desuden i x har en højre og en venstre afledet

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \quad \text{og} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t},$$

er Fourierintegralet konvergent i x med værdien

$$s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Bevis. Vi har

$$s_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,D_p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,D_p(-t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin pt}{t}\,dt.$$

For et fast $\delta>0$ indføres funktionen h defineret ved

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t=0 \\ \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s & \text{for } 0<|t|<\delta \\ \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} & \text{for } |t|\geq\delta. \end{cases}$$

Da fås

$$s_p(x) = \int_{-\delta}^{\delta} s\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin pt}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin pt}{t}\,dt$$

$$= s\int_{-\delta p}^{\delta p} \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{t}\,\frac{1}{\pi}\,\sin pt\,dt.$$

Det første led konvergerer mod s for $p\to\infty$. Da h i 0 har både en højre og en venstre afledet, er $\frac{h(t)}{t}$ begrænset i en omegn $[-\eta,\eta]$ af 0, og da h er integrabel over $]-\infty,+\infty[$, og $\left|\frac{h(t)}{t}\right| \leq \frac{|h(t)|}{\eta}$ uden for omegnen $[-\eta,\eta]$, ser vi, at $\frac{h(t)}{t}$ er integrabel over $]-\infty,+\infty[$. Ifølge Riemann-Lebesgues lemma konvergerer derfor det andet led mod 0 for $p\to\infty$. Altså gælder $s_p(x)\to s$ for $p\to\infty$.

<u>Summabilitet af Fourierintegralet.</u> Som følge af de behageligere egenskaber ved kernen $K_p(t)$ opnås summabilitet af Fourierintegralet under mindre restriktive antagelser om funktionen f. Vi vil vise følgende

<u>Sætning. Hvis f har grænseværdier</u> $f(x+0)$ <u>og</u> $f(x-0)$ <u>fra højre og venstre i punktet</u> x, <u>er Fourierintegralet summabelt i</u> x <u>med værdien</u>

$$s = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

<u>Bevis.</u> Vi har

$$\sigma_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_p(-t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} K_p(t)\,dt,$$

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} s\,K_p(t)\,dt,$$

altså

$$\sigma_p(x) - s = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right)K_p(t)\,dt,$$

$$|\sigma_p(x)-s| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right| K_p(t)\,dt.$$

Funktionen $\varphi(t) = \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s\right|$ har grænseværdien 0 for $t\to 0$. Vælges for et givet $\varepsilon>0$ et tal $\delta>0$, således at $\varphi(t)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ for $0<|t|<\delta$, får vi

$$|\sigma_p(x)-s| \leq \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_p(t)\,dt + \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\varphi(t)\frac{2}{\pi p t^2}\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{p},$$

hvor $C = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi(t)\frac{2}{\pi t^2}dt$. [Funktionen $\varphi(t)\frac{2}{\pi t^2}$ er integrabel over $]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[$, idet den her er $\leq \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right|\frac{2}{\pi\delta^2} + |s|\frac{2}{\pi t^2}$]. Følgelig gælder

$$|S_p(x) - s| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad p \geq \frac{2C}{\varepsilon},$$

hvormed er vist, at $S_p(x) \to s$ for $p \to \infty$.

Uden bevis nævnes: For ethvert $f \in L$ er Fourier-integralet summabelt for næsten alle x med værdien $f(x)$. Heraf følger entydighedssætningen: Hvis to funktioner $f_1 \in L$ og $f_2 \in L$ har samme Fourierintegral (d.v.s. hvis de har samme Fouriertransformerede), er $f_1(x) = f_2(x)$ for næsten alle x. Vi opnår også entydighedssætningen ved at bevise følgende i sig selv betydningsfulde

Sætning. For ethvert $f \in L$ er Fourierintegralet "stærkt summabelt" med "værdi" f, d.v.s

$$\|f - S_p\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_p(x)|\,dx \to 0 \text{ for } p \to \infty.$$

Bemærkning. At $S_p \in L$, følger af udtrykket $S_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_p(t)\,dt$ ved brug af Lebesgue-Fubinis sætning, idet funktionen $h(x,t) = f(x-t)K_p(t)$ på R^2 let ses at være Lebesgue integrabel.

Ved beviset for sætningen får vi brug for den kendte sætning, at enhver funktion $f \in L$ er "stærkt kontinuert", d.v.s $\omega(h) = \|f(x+h) - f(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|\,dx \to 0$ for $h \to 0$. [Dette er trivielt, når f er en trappefunktion, og for et vilkårligt $f \in L$ ses det ved approksimation med trappefunktioner.] Bemærk, at $\omega(-h) = \omega(h)$.

Bevis. Vi har

$$S_p(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x))\, K_p(t)\, dt,$$

altså

$$|S_p(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\, K_p(t)\, dt,$$

hvoraf

$$\|S_p - f\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\, K_p(t)\, dt \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) K_p(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(-t)\, K_p(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\, K_p(t)\, dt.$$

Som ovenfor bemærket gælder $\omega(h) \to 0$ for $h \to 0$. Desuden gælder åbenbart for alle h, at $\omega(h) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = 2\|f\|$. Lad for et givet $\varepsilon > 0$ tallet $\delta > 0$ være valgt, således at $\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $|t| \leq \delta$. Da er

$$\|S_p - f\| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} K_p(t)\, dt + \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} 2\|f\| \frac{2}{\pi p t^2}\, dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{p}, \quad \text{hvor } C = \frac{8\|f\|}{\pi\delta}.$$

Altså gælder $\|S_p - f\| \leq \varepsilon$ for $p \geq \frac{2C}{\varepsilon}$.

[Vi kunde også have sluttet således: Da $K_p(t) = pK(pt)$, har vi

$$\|S_p - f\| = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\, p\, K(pt)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\frac{t}{p}\right) K(t)\, dt.$$

For $p \to \infty$ gælder $\omega(\frac{t}{p}) K(t) \to 0$ for ethvert t. Desuden gælder $(0 \leq)\ \omega(\frac{t}{p}) K(t) \leq 2\|f\|\, K(t)$. Sætningen om absolut majoriseret konvergens viser derfor, at $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\frac{t}{p}) K(t)\, dt \to 0$ for $p \to \infty$, altså $\|S_p - f\| \to 0$ for $p \to \infty$.]

§6. Bevis for Landau-Wiener-Ikeharas sætning.

Sætningens udsagn var:

Hvis $f(s)=\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ er konvergent i $\{s|\sigma>1\}$, og hvis

(1) $f(s)-\frac{A}{s-1}$ kan udvides til en i den afsluttede halvplan $\{s|\sigma\geq 1\}$ kontinuert funktion;

(2) alle $a_n\geq 0$;

da gælder for funktionen $A(x)=\sum_{\lambda_n\leq x} a_n$, at $A(x)e^{-x}\to A$ for $x\to+\infty$.

Beviset føres i en række skridt.

① Da alle $a_n\geq 0$, har vi $f(s)\geq 0$ for alle reelle $s>1$.

Da $f(s)-\frac{A}{s-1}$ kan udvides til en i $\{s|\sigma\geq 1\}$ kontinuert funktion, gælder $(s-1)(f(s)-\frac{A}{s-1})\to 0$ for $s\to 1$, altså $(s-1)f(s)\to A$, hvoraf ses, at $A\geq 0$.

Funktionen $A(x)$ er $=0$ for $x<\lambda_1$, og da alle $a_n\geq 0$ er den monotont voksende.

② Vi har som tidligere vist

$$(\#)\qquad \sum_{\lambda_n\leq\xi} a_n e^{-\lambda_n s} = s\int_{-\infty}^{\xi} A(x)e^{-xs}dx + A(\xi)e^{-\xi s}.$$

For s indsætter vi et reelt $\sigma>1$ og får

$$\sum_{\lambda_n\leq\xi} a_n e^{-\lambda_n\sigma} = \sigma\int_{-\infty}^{\xi} A(x)e^{-x\sigma}dx + A(\xi)e^{-\xi\sigma}.$$

Da $A(x)e^{-x\sigma}\geq 0$ for alle x, er $\sigma\int_{-\infty}^{\xi} A(x)e^{-x\sigma}dx$ en stigende funktion af ξ, og da $A(\xi)e^{-\xi\sigma}\geq 0$ har vi $\sigma\int_{-\infty}^{\xi}A(x)e^{-x\sigma}dx \leq \sum_{\lambda_n\leq\xi} a_n e^{-\lambda_n\sigma}$. Her konvergerer højre side mod $f(\sigma)$, når $\xi\to+\infty$. Altså eksisterer grænseværdien $\lim_{\xi\to+\infty}\sigma\int_{-\infty}^{\xi}A(x)e^{-x\sigma}dx$ og følgelig også grænseværdien $\lim_{\xi\to+\infty}A(\xi)e^{-\xi\sigma}$. Vælges et σ_0, så at $1<\sigma_0<\sigma$, eksisterer også grænseværdien $\lim_{\xi\to+\infty}A(\xi)e^{-\xi\sigma_0}$, og da $A(\xi)e^{-\xi\sigma}=$

$A(\xi)e^{-\xi\sigma_0}e^{-\xi(\sigma-\sigma_0)}$ og $e^{-\xi(\sigma-\sigma_0)} \to 0$, slutter vi, at $\lim_{\xi\to+\infty} A(\xi)e^{-\xi\sigma} = 0$. Da $A(x)e^{-x\sigma} \geqq 0$, viser eksistensen af grænseværdien $\lim_{\xi\to+\infty} \sigma\int_{-\infty}^{\xi} A(x)e^{-x\sigma}dx$, at funktionen $A(x)e^{-x\sigma}$ er integrabel over $]-\infty,+\infty[$.

For ethvert s i $\{s|\sigma>1\}$ har vi $|A(x)e^{-xs}| = A(x)e^{-x\sigma}$. Altså er $A(x)e^{-xs}$ integrabel over $]-\infty,+\infty[$. Da $|A(\xi)e^{-\xi s}| = A(\xi)e^{-\xi\sigma} \to 0$ for $\xi \to +\infty$, slutter vi af (#), at

$$f(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{-xs}dx.$$

③ For funktionen $Ae^{-x(s-1)}$ har vi $|Ae^{-x(s-1)}| = Ae^{-x(\sigma-1)}$. Den er altså for ethvert s i $\{s|\sigma>1\}$ integrabel over $[0,+\infty[$, og vi har

$$\frac{A}{s-1} = \int_0^{\infty} Ae^{-x(s-1)}dx.$$

Vi indfører betegnelsen $A_0(x)$ for den funktion, der er A for $x \geqq 0$ og 0 for $x<0$. Da er $A_0(x)e^{-x(s-1)}$ integrabel over $]-\infty,+\infty[$, og vi har

$$\frac{A}{s-1} + A = s\int_{-\infty}^{\infty} A_0(x)e^{-x(s-1)}dx.$$

④ Ved subtraktion fås

$$f(s) - \frac{A}{s-1} - A = s\int_{-\infty}^{\infty}[A(x)e^{-x} - A_0(x)]e^{-x(s-1)}dx.$$

Den kontinuerte funktion i $\{s|\sigma \geqq 1\}$, hvortil $f(s) - \frac{A}{s-1} - A$ kan udvides, betegnes $2\pi s\, g(s)$, hvor $g(s)$ altså er kontinuert i $\{s|\sigma \geqq 1\}$. Vi har da for ethvert $s = \sigma + iy$ i $\{s|\sigma>1\}$

$$g(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(x)e^{-x} - A_0(x)]e^{-x(s-1)}dx$$

eller

$$g(\sigma+iy) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(x)e^{-x} - A_0(x)]e^{-x(\sigma-1)}e^{-ixy}dx.$$

For fast $\sigma > 1$ er funktionen $g(\sigma+iy)$ altså den Fouriertransformerede af den integrable funktion $[A(x)e^{-x} - A_0(x)]e^{-x(\sigma-1)}$. Af formulen for afsnitsmiddelet af Fourierintegralet fås derfor for ethvert $p>0$

$$\int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)g(\sigma+iy)e^{ixy}dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}[A(x-t)e^{-(x-t)} - A_0(x-t)]e^{-(x-t)(\sigma-1)}K_p(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}A(x-t)e^{-(x-t)\sigma}K_p(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty}A_0(x-t)e^{-(x-t)(\sigma-1)}K_p(t)\,dt.$$

⑤ For fast p og x lader vi nu σ gå mod 1. I integralet på venstre side konvergerer integranden for ethvert x ligeligt på $[-p,p]$ mod $\left(1-\frac{|y|}{p}\right)g(1+iy)e^{ixy}$. Venstre side konvergerer derfor mod
$$\int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)g(1+iy)e^{ixy}dy.$$

I det andet integral på højre side er integranden ≥ 0 og $\leq AK_p(t)$, og for $\sigma \to 1$ konvergerer den mod $A_0(x-t)K_p(t)$. Af sætningen om absolut majoriseret konvergens følger derfor, at det andet integral på højre side konvergerer mod
$$\int_{-\infty}^{\infty}A_0(x-t)K_p(t)\,dt = A\int_{-\infty}^{x}K_p(t)\,dt.$$

Følgelig må også det første integral på højre side have en grænseværdi, og da integranden for dalende $\sigma \to 1$ konvergerer stigende mod

$A(x-t)\,e^{-(x-t)}K_p(t)$ [for $x-t \geq 0$ stiger nemlig $e^{-(x-t)\sigma}$, når σ daler, og for $x-t<0$ er jo $A(x-t)=0$] slutter vi af sætningen om monoton konvergens, at funktionen $A(x-t)\,e^{-(x-t)}K_p(t)$ er integrabel over $]-\infty,+\infty[$, og at dens integral er lig med den nævnte grænseværdi. Grænseværdien for det første integral på højre side er altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x-t)\,e^{-(x-t)}K_p(t)\,dt.$$

For ethvert p og x har vi altså

$$\int_{-p}^{p}\left(1-\frac{|y|}{p}\right)g(1+iy)\,e^{ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} A(x-t)\,e^{-(x-t)}K_p(t)\,dt - A\int_{-\infty}^{x} K_p(t)\,dt.$$

⑥ <u>For fast</u> p <u>lader vi nu</u> x <u>gå mod</u> $+\infty$. Da konvergerer integralet på venstre side ifølge Riemann-Lebesgues lemma mod 0, og det andet integral på højre side konvergerer mod A. Altså konvergerer også det første integral på højre side mod A. Vi har således vist, at der <u>for ethvert</u> $p>0$ <u>gælder</u>

$$(\text{※})\quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} A(x-t)\,e^{-(x-t)}K_p(t)\,dt \longrightarrow A \quad \text{for } x \to +\infty}.$$

Vor opgave er at vise, at

$$A(x)\,e^{-x} \longrightarrow A \quad \text{for } x \to +\infty.$$

⑦ For et fast $\delta > 0$ erstatter vi i (※) x med $x+\delta$ og får

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x+\delta-t)e^{-(x+\delta-t)}K_p(t)\,dt \to A \quad \text{for } x \to +\infty.$$

Da integranden er ≥ 0, er integralet $\geq$ integralet over intervallet $[-\delta, \delta]$. I dette interval er $A(x+\delta-t) \geq A(x)$ og $e^{-(x+\delta-t)} \geq e^{-(x+2\delta)}$. Integralet er altså

$$\geq A(x)e^{-x}e^{-2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt.$$

Følgelig gælder

$$\left(\limsup_{x\to+\infty} A(x)e^{-x}\right)e^{-2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt \leq A.$$

Heri lader vi <u>først</u> $p \to \infty$ og får, idet

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} pK(pt)\,dt = \int_{-\delta p}^{\delta p} K(t)\,dt \to 1,$$

at

$$\left(\limsup_{x\to+\infty} A(x)e^{-x}\right)e^{-2\delta} \leq A.$$

<u>Dernæst</u> lader vi $\delta \to 0$ og får

$$\limsup_{x\to+\infty} A(x)e^{-x} \leq A.$$

⑧ Af dette resultat fremgår specielt, at $A(x)e^{-x}$ er begrænset, lad os sige $A(x)e^{-x} \leq C$ for alle x.

For fast $\delta > 0$ erstatter vi i (⁂) x med $x-\delta$ og får

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(x-\delta-t)\, e^{-(x-\delta-t)} K_p(t)\,dt \to A \quad \text{for } x \to +\infty.$$

I intervallet $[-\delta, \delta]$ er $A(x-\delta-t) \leq A(x)$ og $e^{-(x-\delta-t)} \leq e^{-(x-2\delta)}$. Uden for dette interval benytter vi, at $A(x-\delta-t)\, e^{-(x-\delta-t)} \leq C$. Integralet er altså

$$\leq A(x) e^{-x} e^{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt + C\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) K_p(t)\,dt.$$

Følgelig gælder

$$\left(\liminf_{x\to+\infty} A(x) e^{-x}\right) e^{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt + C\left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) K_p(t)\,dt \geq A.$$

Heri lader vi <u>først</u> $p \to \infty$ og får, idet

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_p(t)\,dt \to 1 \quad \text{og} \quad \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) K_p(t)\,dt \to 0,$$

at

$$\left(\liminf_{x\to+\infty} A(x) e^{-x}\right) e^{2\delta} \geq A.$$

<u>Dernæst</u> lader vi $\delta \to 0$ og får

$$\liminf_{x\to+\infty} A(x) e^{-x} \geq A.$$

(9) De to uligheder

$$\limsup_{x\to+\infty} A(x) e^{-x} \leq A \quad \text{og} \quad \liminf_{x\to+\infty} A(x) e^{-x} \geq A$$

giver tilsammen det ønskede resultat

$$A(x) e^{-x} \to A \quad \text{for } x \to +\infty.$$

§ 7. Primtal i differensrækker.

For ethvert helt $d > 1$ deles talrækken $1, 2, 3, \dots$ i d differensrækker med differens d, nemlig differensrækkerne

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \dots \qquad ,\ a \in \{1, 2, \dots, d\}$$

Hvis d har primfaktoropløsningen

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

vil primtallene $p_1, p_2, \dots, p_r$ findes i de r differensrækker, der svarer til henholdsvis $a = p_1, p_2, \dots, p_r$, og disse differensrækker indeholder hver kun dette ene primtal. En differensrække, for hvilken a er delelig med et af tallene $p_1, p_2, \dots, p_r$ uden at være et af dem, indeholder overhovedet intet primtal. Alle primtal $\neq p_1, p_2, \dots, p_r$ indeholdes derfor i de af differensrækkerne, for hvilke a og d er indbyrdes primiske. Disses antal betegnes $h = \varphi(d)$, hvor φ er den Eulerske funktion. For denne har vi udtrykket

$$h = \varphi(d) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)\, p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_r^{\alpha_r - 1}$$
$$= d\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

For at indse dette sætter vi $p_1 p_2 \cdots p_r = d'$ og $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_r^{\alpha_r - 1} = d''$. Da er $d = d'd''$. Tallene $a = 1, 2, \dots, d$ opskrives i skemaet

$$\begin{array}{llll}
1 & ,\ 2 & ,\ \dots & ,\ d' \\
1 + d' & ,\ 2 + d' & ,\ \dots & ,\ 2d' \\
\dots & & & \\
1 + (d'' - 1)d' & ,\ 2 + (d'' - 1)d' & ,\ \dots & ,\ d''d'.
\end{array}$$

I hver søjle er enten alle eller intet af tallene primisk med d. Følgelig er $\varphi(d) = k d''$, hvor k er antallet af tal blandt $1, 2, \dots, d'$, der er primisk med d, d.v.s. ikke er deleligt med noget af primtallene $p_1, p_2, \dots, p_r$. Til hvert af tallene $a = 1, 2, \dots, d'$ knytter vi talsættet $v(a) = (v_1, v_2, \dots, v_r)$, hvor v_i er den principale rest af a ved division med p_i (altså $0 \leq v_i < p_i$). Funktionen v er altså en afbildning af mængden

$$A = \{a \mid 1 \leq a \leq p_1 p_2 \cdots p_r\}$$

ind i mængden

$$B = \left\{ (v_1, v_2, \dots, v_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq v_1 \leq p_1 - 1 \\ 0 \leq v_2 \leq p_2 - 1 \\ \dots \\ 0 \leq v_r \leq p_r - 1 \end{array} \right\}.$$

Denne afbildning er injektiv. Thi hvis $v(a') = v(a'')$, hvor $a' \leq a''$, d.v.s. hvis a' og a'' har samme rest ved division med p_i for alle i, er $a'' - a'$ delelig med alle p_i, altså delelig med $p_1 p_2 \cdots p_r$, og da $0 \leq a'' - a' < p_1 p_2 \cdots p_r$ medfører dette, at $a'' - a' = 0$. De to mængder A og B indeholder imidlertid lige mange elementer. Afbildningen er følgelig bijektiv. De med d primiske blandt tallene i A er dem, for hvilke $v(a)$ tilhører mængden

$$B^* = \left\{ (v_1, v_2, \dots, v_r) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq v_1 \leq p_1 - 1 \\ 1 \leq v_2 \leq p_2 - 1 \\ \dots \\ 1 \leq v_r \leq p_r - 1 \end{array} \right\}.$$

Følgelig er $k = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)$, hvormed formlen for $\varphi(d)$ er bevist.

<u>Eks.</u> For $d = 12 = 2^2 \cdot 3$ er $h = \varphi(d) = 12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 4$, og de fra 2 og 3 forskellige primtal findes i de 4 differensrækker

$$1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, \dots$$
$$5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89, 101, 113, \dots$$
$$7, 19, 31, 43, 55, 67, 79, 91, 103, 115, \dots$$
$$11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, 107, 119, \dots .$$

Man ser, at primtallene < 120 fordeler sig med henholdsvis 6, 8, 7, 7 på de 4 rækker.

I 1837 viste Dirichlet, at <u>enhver af de $h = \varphi(d)$ differensrækker, for hvilke første tal a er primisk med differensen d, indeholder uendelig mange primtal.</u> Dirichlets undersøgelse er begyndelsen til den analytiske primtalteori. Ved at kombinere hans metode med bevismetoden for primtalsætningen fandt Hadamard og de la Vallée-Poussin i 1896, at primtalsætningen kan generaliseres til differensrækker. For ethvert $a \in \{1, 2, \dots, d\}$, der er primisk med d, betragtes funktionen

$$\pi(x; d, a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod d}} 1 \quad .$$

Udtrykket skal betegne en sum, hvis led alle er 1, et led for hvert primtal $p \le x$ tilhørende differensrækken $a, a+d, a+2d, \dots$. <u>Primtalsætningen for differensrækker</u> udsiger da, at

$$\boxed{\frac{\pi(x; d, a)}{\dfrac{x}{\log x}} \longrightarrow \frac{1}{h} \quad \text{for} \quad x \to \infty} \ .$$

For vilkårlige $a', a'' \in \{1, 2, \ldots, d\}$, der er primiske med d, gælder altså

$$\frac{\pi(x; d, a')}{\pi(x; d, a'')} \longrightarrow 1 \quad \text{for } x \longrightarrow \infty.$$

Primtallene $\neq p_1, p_2, \ldots, p_r$ er således asymptotisk ligeligt fordelt på de $h = \varphi(d)$ differensrækker, for hvilke a er primisk med d.

Vi vil her bevise primtalsætningen for differensrækker ud fra Landau-Wiener-Ikeharas sætning.

Foruden $\pi(x; d, a)$ betragtes funktionerne

$$\vartheta(x; d, a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod. d}} \log p, \qquad \psi(x; d, a) = \sum_{\substack{p^m \le x \\ p^m \equiv a \bmod. d}} \log p.$$

For $x > 1$ fås

$$\psi(x; d, a) \le \sum_{\substack{p^m \le x \\ p \equiv a \bmod. d}} \log p + \sum_{\substack{p^m \le x \\ p \not\equiv a \bmod. d \\ m > 1}} \log p$$

$$\le \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod. d}} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p + \sum_{p \le x^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p.$$

Idet det benyttes, at $\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \le \frac{\log x}{\log p}$, ses, at for $x > 1$ og $0 < \alpha < 1$ gælder

$$(\pi(x; d, a) - x^{\alpha}) \log(x^{\alpha}) \le \vartheta(x; d, a) \le$$

$$\le \psi(x; d, a) \le \pi(x; d, a) \log x + x^{\frac{1}{2}} \log x,$$

altså

$$\alpha \frac{\pi(x; d, a)}{\frac{x}{\log x}} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \le \frac{\vartheta(x; d, a)}{x} \le \frac{\psi(x; d, a)}{x} \le \frac{\pi(x; d, a)}{\frac{x}{\log x}} + \frac{\log x}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Idet vi (for givet d og a) med $\mu, M, \mu', M', \mu'', M''$ betegner lim inf og lim sup for $x \to \infty$ af henholdsvis

$$\frac{\pi(x;d,a)}{\frac{x}{\log x}}, \qquad \frac{\vartheta(x;d,a)}{x}, \qquad \frac{\psi(x;d,a)}{x},$$

finder vi altså

$$\alpha\mu \leq \mu' \leq \mu'' \leq \mu, \qquad \alpha M \leq M' \leq M'' \leq M.$$

Da dette gælder for alle α i $0<\alpha<1$, slutter vi, at

$$\mu' = \mu'' = \mu, \qquad M' = M'' = M.$$

Primtalsætningen for differensrækker udsiger, at $\mu = M = \frac{1}{h}$. Sætningen er altså ensgyldig med, at

$$\boxed{\frac{\psi(x;d,a)}{x} \longrightarrow \frac{1}{h} \quad \text{for } x \to \infty}.$$

Idet vi også her benytter den i §4 indførte funktion

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{når } n \text{ er en potens af primtallet } p \\ 0, & \text{når } n \text{ ikke er en primtalpotens,} \end{cases}$$

kan vi skrive

$$\psi(x;d,a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod. d}} \Lambda(n) = \sum_{n \leq x} 1(n;d,a)\,\Lambda(n),$$

hvor $1(\cdot;d,a)$ er den "karakteristiske funktion" for differensrækken $a, a+d, a+2d, \dots$, d.v.s.

$$1(n;d,a) = \begin{cases} 1 & \text{når } n \equiv a \bmod. d \\ 0 & \text{når } n \not\equiv a \bmod. d. \end{cases}$$

Vi ser altså:

<u>Primtalsætningen for differensrækker vil være bevist</u>, <u>hvis vi viser</u>, <u>at når</u> a <u>er primisk med</u> d, <u>op-</u>

<u>fylder</u>

$$f(s;d,a) = \sum_1^\infty \frac{1(n;d,a)\Lambda(n)}{n^s}$$

<u>betingelserne i Landau-Wiener-Ikeharas sætning svarende til $A = \frac{1}{h}$.</u>

Da koefficienterne er ≥ 0, og rækken er konvergent i $\{s|\sigma>1\}$, idet den har den konvergente majorantrække $\sum_1^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}$, kommer det an på at vise:

$f(s;d,a) - \frac{\frac{1}{h}}{s-1}$ <u>kan udvides til en i den afsluttede halvplan $\{s|\sigma\geq 1\}$ kontinuert funktion.</u>

§8. <u>Karakterer.</u>

<u>Rummet af funktioner på en endelig mængde.</u>

Idet $\mathcal{G}$ betegner en endelig mængde med h elementer, betragter vi vektorrummet V over $\mathbb{C}$ af alle funktioner $f: \mathcal{G} \to \mathbb{C}$. Det er åbenbart h-dimensionalt.

Vi definerer middelværdien af en funktion $f \in V$ som

$$\underset{x}{M}\{f(x)\} = \frac{1}{h}\sum_{x\in\mathcal{G}} f(x)$$

og det indre produkt af to funktioner $f, g \in V$ som

$$(f,g) = \underset{x}{M}\{f(x)\overline{g(x)}\} = \frac{1}{h}\sum_{x\in\mathcal{G}} f(x)\overline{g(x)}.$$

Af det indre produkt udspringer normen

$$\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\underset{x}{M}\{|f(x)|^2\}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{h}\sum_{x\in\mathcal{G}}|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Funktionerne f og g kaldes ortogonale, hvis $(f,g)=0$, og funktionen f kaldes normeret, hvis $\|f\|=1$. Et ortonormalt system i V er et system af normerede, parvis ortogonale funktioner. Et sådant system er lineært uafhængigt og indeholder altså højst h

funktioner. Hvis og kun hvis det indeholder h funktioner, er det en basis for V. Hvis $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_h\}$ er en ortonormal basis for V, har vi for ethvert $f \in V$ fremstillingen

$$f = c_1\varphi_1 + \dots + c_h\varphi_h, \quad \text{hvor} \quad c_i = (f, \varphi_i).$$

Karakterer på en endelig kommutativ gruppe.

Vi antager nu specielt, at G er en kommutativ gruppe med h elementer. Gruppekompositionen skrives som multiplikation. Det neutrale element vil blive betegnet med e. For enhver funktion $f \in V$ og ethvert $a \in G$ gælder da

$$\underset{x}{M}\{f(ax)\} = \underset{x}{M}\{f(x)\},$$

thi elementerne ax, $x \in G$, er netop alle elementerne i G. Ved en <u>karakter</u> på G forstås en funktion $\chi \in V$, der opfylder betingelserne

$$|\chi(x)| = 1 \qquad \text{for alle } x \in G$$

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y) \quad \text{for alle } x, y \in G,$$

(altså en homomorf afbildning af G ind i mængden $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ betragtet som gruppe med multiplikationen som komposition).

Et eksempel på en karakter er <u>hovedkarakteren</u> ε, der defineres ved, at $\varepsilon(x) = 1$ for alle $x \in G$. For enhver karakter χ gælder åbenbart $\chi(e) = 1$ og $\chi(x^{-1}) = \frac{1}{\chi(x)} = \overline{\chi(x)}$ for alle $x \in G$. For hovedkarakteren gælder $\underset{x}{M}\{\varepsilon(x)\} = 1$. For enhver karakter χ, der ikke er hovedkarakteren, gælder $\underset{x}{M}\{\chi(x)\} = 0$. Thi for ethvert $a \in G$ har vi

$$\underset{x}{M}\{\chi(x)\} = \underset{x}{M}\{\chi(ax)\} = \underset{x}{M}\{\chi(a)\chi(x)\} = \chi(a)\underset{x}{M}\{\chi(x)\}.$$

Hvis der findes et a, for hvilket $\chi(a) \neq 1$, må vi altså have $\underset{x}{M}\{\chi(x)\} = 0$.

For ethvert element $x \in G$ er $x^h = e$. For enhver karakter χ er følgelig $\chi(x)^h = \chi(x^h) = 1$. Værdierne af en karakter er derfor h^{te} enhedsrødder.

Hvis χ er en karakter, er den konjugerede funktion $\bar{\chi}$ også en karakter, og hvis χ og ρ er karakterer, er også produktet $\chi\rho$ og altså også $\chi\bar{\rho}$ en karakter. For enhver karakter χ er $\chi\bar{\chi}$ hovedkarakteren, og for to karakterer χ og ρ er $\chi\bar{\rho}$ kun hovedkarakteren, når $\chi = \rho$. Heraf ses, at karaktererne udgør et ortonormalt system i V. Der er altså højst h karakterer. Vi vil vise, at der er h karakterer, altså at karaktererne udgør en ortonormal basis for V.

Bevis. ① Hvis $h=1$ er sagen triviel. Hvis $h>1$ og G er cyklisk, d.v.s. der findes et frembringende element $a \in G$, så at $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{h-1}\}$, er sagen ligeledes triviel, thi hvis α er en vilkårlig af de h^{te} enhedsrødder, er den funktion χ, hvis værdier i $e, a, a^2, \dots, a^{h-1}$ er $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{h-1}$, åbenbart en karakter.

② Hvis χ er en karakter på G, og H er en undergruppe af G, er restriktionen af χ til H åbenbart en karakter på H.

③ Lad H' være en ægte undergruppe af G med h' elementer og $a \notin H'$ et element af G. Vi betragter elementerne $a, a^2, \dots, a^h = e$. Lad $a^s = b$ være det første af dem, der tilhører H'. Da er $H'' = \{xa^\nu \mid x \in H', 0 \le \nu < s\}$ en undergruppe af G og åbenbart den mindste, der indeholder H' og a.

Den siges at være frembragt af H' og a. Hvert element af H'' har kun een fremstilling xa^ν, hvor $x \in H'$, $0 \leq \nu < s$. Thi hvis $x, y \in H'$, $0 \leq \nu \leq \mu < s$ og $xa^\nu = ya^\mu$, er $a^{\mu-\nu} = xy^{-1} \in H'$, altså $\nu = \mu$ og følgelig $x = y$. Gruppen H'' har således $h'' = h's$ elementer.

Hvis χ' er en karakter på H', må vi for enhver udvidelse χ'' af χ' til en karakter på H'' have $\chi''(a)^s = \chi''(a^s) = \chi'(b)$, d.v.s. $\alpha = \chi''(a)$ må være en af rødderne i ligningen $z^s = \chi'(b)$. For ethvert element xa^ν af H'' må vi have $\chi''(xa^\nu) = \chi'(x)\alpha^\nu$. Hvis omvendt α er en vilkårlig af de s rødder i ligningen $z^s = \chi'(b)$, ser man, at den funktion χ'' på H'', der defineres ved, at vi for $x \in H'$, $0 \leq \nu < s$ har $\chi''(xa^\nu) = \chi'(x)\alpha^\nu$, er en udvidelse af χ' til en karakter på H'', for hvilken $\chi''(a) = \alpha$.

Hver karakter på H' kan altså på s måder udvides til en karakter på H''. Heraf ses, at hvis der på H' findes h' karakterer, vil der på H'' findes $h's = h''$ karakterer.

(4) Beviset for, at der på G findes h karakterer, fremgår af det foranstående ved induktion, idet vi, når $h > 1$, begynder med at vælge et element $a_1 \neq e$ af G og betragter den af dette frembragte cykliske undergruppe H_1. Hvis $H_1 = G$ er vi færdige. Ellers vælger vi et element $a_2 \notin H_1$ af G og betragter den af H_1 og a_2 frembragte undergruppe H_2. Hvis $H_2 = G$ er vi færdige. Ellers fortsætter vi. I højst $h-1$ skridt når vi G.

Man ser, at ovenstående indeholder en metode til faktisk at opskrive alle karaktererne. Man ser også, at enhver karakter på en undergruppe H af G med k elementer på $\frac{h}{k}$ måder kan udvides til en karakter på G.

<u>Karakterer på restklassegruppen</u> mod. d. For et vilkårligt helt $d>1$ betegner vi for et vilkårligt $x \in Z$ med (x) den restklasse mod. d, der indeholder x. Med kompositionerne $(a)+(b)=(a+b)$ og $(a)(b)=(ab)$ er $Z_d=\{(1)(2)\cdots(d)\}$ en ring med nulelementet (d) $(=(0))$. Den har et elementet (1). Dette er <u>restklasseringen</u> mod. d. I hver restklasse (x) er alle elementerne eller intet af elementerne primisk med d. De $h=\varphi(d)$ restklasser, hvis elementer er primiske med d, udgør med multiplikationen som komposition en gruppe G_d. Dette er <u>restklassegruppen</u> mod. d. Thi hvis $(a),(b)\in G_d$, gælder også $(ab)\in G_d$ [da ab er primisk med d, når a og b er det]; multiplikationen er altså en komposition i G_d. Og for et fast $(a)\in G_d$ er elementerne $(a)(x)$, $(x)\in G_d$, indbyrdes forskellige og er altså alle elementerne i G_d hvert én gang. Thi af $(a)(x)=(a)(y)$ følger $(a(x-y))=(0)$, d.v.s. $a(x-y)$ har d som divisor, og når d er primisk med a følger heraf, at d er divisor i $x-y$, altså at $(x)=(y)$.

De h karakterer på G_d kaldes kort <u>restklassekaraktererne</u> mod. d.

Eks. For $d = 12 = 2^2 \cdot 3$ er som tidligere bemærket $h = \varphi(d) = 12(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 4$. Restklassegruppen G_{12} består af restklasserne

$$(1)\ (5)\ (7)\ (11).$$

For at finde de 4 restklassekarakterer mod. 12 betragter vi først den cykliske undergruppe frembragt af (5). Da $(5)^2 = (25) = (1)$, består den af (1) (5). Karaktererne på denne undergruppe er, idet værdien af en karakter på (5) skal være en 2den enhedsrod, altså 1 eller -1, de to funktioner, hvis værdier på (1) (5) er henholdsvis 1, 1 og 1, -1. Hver af disse skal på 2 måder kunne udvides til en karakter på G_{12} og er derfor i nedenstående tabel skrevet 2 gange. For at finde disse udvidelser betragter vi elementet (7). Da $(7)^2 = (49) = (1)$, vil værdien af de 2 udvidelser på (7) være 1 og -1. Da $(5)\cdot(7) = (35) = (11)$ bliver restklassekaraktererne følgende:

(1)	(5)	(7)	(11)
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1.

I dette eksempel er således alle karaktererne reelle. Vi regner også nogle eksempler, hvor ikke alle karaktererne er reelle.

Eks. For $d = 5$ er $h = \varphi(5) = 5(1-\frac{1}{5}) = 4$. Restklassegruppen G_5 består af (1) (2) (3) (4). Da $(2)^2 = (4)$, $(2)^3 = (8) = (3)$, er gruppen cyklisk. De 4 karakterer bestemmes ved, at værdien på ② skal være en 4de enhedsrod. De bestemmes altså ved tabellen

①	②	④	③		①	②	③	④
1	1	1	1		1	1	1	1
1	i	-1	$-i$	eller	1	i	$-i$	-1
1	-1	1	-1		1	-1	-1	1
1	$-i$	-1	i		1	$-i$	i	-1.

Eks. For $d = 40 = 2^3 \cdot 5$ er $h = \varphi(40) = 40(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 16$. Restklassegruppen G_{40} består af

① ③ ⑦ ⑨ ⑪ ⑬ ⑰ ⑲ ㉑ ㉓ ㉗ ㉙ ㉛ ㉝ ㊲ ㊴.

Da $③^2 = ⑨$, $③^3 = ㉗$, $③^4 = (81) = ①$, har vi på undergruppen $H_1 = \{①③⑨㉗\}$ de 4 karakterer, der i nedenstående tabel hver er opført 4 gange, da hver på 4 måder kan udvides til en karakter på G_{40}. Da $⑦^2 = ㊾ = ⑨$, kan vi ved udvidelsen af hver karakter χ_1 på H_1 til en karakter χ_2 på den af H_1 og ⑦ frembragte undergruppe $H_2 = \{①③⑨㉗ ⑦㉑㉓㉙\}$ for $\chi_2(⑦)$ benytte hver af rødderne i ligningen $z^2 = \chi_1(⑨)$. Vi får herved de i tabellen angivne 8 karakterer på H_2, der hver er opført 2 gange, da hver på 2 måder kan udvides til en karakter på G_{40}. Da $⑪^2 = (121) = ①$, kan vi ved udvidelsen af hver karakter χ_2 på H_2 til en karakter χ på den af H_2 og ⑪ frembragte undergruppe, der bliver G_{40} selv, for $\chi(⑪)$ benytte hvert af tallene 1 og -1. Herved fås de 16 karakterer på G_{40}. I tabellen er elementerne i G_{40} opført i den orden, hvori vi ved denne fremgangsmåde overfor dem. Man bør naturligvis opskrive den endelige tabel svarende til at elementerne tages i den naturlige rækkefølge.

1	3	9	27	7	21	23	29	11	33	19	17	37	31	13	34
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
1	i	−1	$-i$	i	−1	$-i$	1	1	i	−1	$-i$	i	−1	$-i$	1
1	i	−1	$-i$	i	−1	$-i$	1	−1	$-i$	1	i	$-i$	1	i	−1
1	i	−1	$-i$	$-i$	1	i	−1	1	i	−1	$-i$	$-i$	1	i	−1
1	i	−1	$-i$	$-i$	1	i	−1	−1	$-i$	1	i	i	−1	$-i$	1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1
1	$-i$	−1	i	i	1	$-i$	−1	1	$-i$	−1	i	i	1	$-i$	−1
1	$-i$	−1	i	i	1	$-i$	−1	−1	i	1	$-i$	$-i$	−1	i	1
1	$-i$	−1	i	$-i$	−1	i	1	1	$-i$	−1	i	$-i$	−1	i	1
1	$-i$	−1	i	$-i$	−1	i	1	−1	i	1	$-i$	i	1	$-i$	−1.

I disse eksempler har vi ved den successive opbygning af G_d valgt frembringerelementerne svarende til den naturlige rækkefølge i G_d, således at vi i hvert skridt har valgt det første endnu ikke inddragne element. Undertiden kommer man hurtigere til ende ved andre valg.

Øvelse. Udregn karaktererne på G_d for andre værdier af d, for eksempel for $d = 4$, $d = 7$, $d = 8$, og $d = 48$.

For et givet helt $d>1$ knytter vi nu til enhver funktion $f: \mathcal{G}_d \to \grave{C}$ på restklassegruppen $\mathcal{G}_d$ en funktion på $\grave{Z}$, der ligeledes betegnes f, og som skal være defineret ved, at $f(x) = f(\textcircled{x})$, når x er primisk med d, og $f(x) = 0$, når x ikke er primisk med d. Vektorrummet af funktioner på $\mathcal{G}_d$ afbildes herved bijektivt på vektorrummet af funktioner $f: \grave{Z} \to \grave{C}$ med perioden d, for hvilke $f(x)=0$, når x ikke er primisk med d. Dette vektorrum betegner vi V_d. Det har dimensionen $h = \varphi(d)$. Middelværdien bliver nu

$$\underset{x}{\mathcal{M}}\{f(x)\} = \frac{1}{h}\sum_{x=1}^{d} f(x),$$

det indre produkt

$$(f,g) = \underset{x}{\mathcal{M}}\{f(x)\overline{g(x)}\} = \frac{1}{h}\sum_{x=1}^{d} f(x)\overline{g(x)},$$

og normen

$$\|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\underset{x}{\mathcal{M}}\{|f(x)|^2\}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{h}\sum_{x=1}^{d}|f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De til karaktererne på $\mathcal{G}_d$ svarende funktioner i V_d kaldes <u>talkaraktererne</u> mod. d. Man ser, at de udgør en ortonormal basis for V_d. For enhver talkarakter $\chi: \grave{Z} \to \grave{C}$ gælder åbenbart

$$\chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y) \qquad \text{for alle } x, y \in \grave{Z}.$$

Den til hovedkarakteren på $\mathcal{G}_d$ svarende talkarakter mod. d kaldes hovedkarakteren mod. d og betegnes ε.

<u>Eks.</u> For $d = 12$ bliver talkaraktererne de 4 funktioner med perioden 12, hvis værdier i periodeintervallet $1 \leq x \leq 12$ er angivet i følgende tabel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	−1	0	0	0	−1	0
1	0	0	0	−1	0	1	0	0	0	−1	0
1	0	0	0	−1	0	−1	0	0	0	1	0 .

§9. L-funktioner. Bevis for primtalsætningen for differensrækker.

I det følgende er d et fast helt tal >1. For en vilkårlig talkarakter χ mod. d definerer vi den tilsvarende L-funktion $L(s;\chi)$ ved Dirichlet-rækken

$$L(s;\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Rækken har åbenbart den absolutte konvergensabscisse $\alpha=1$. Thi den har majorantrækken $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\sigma}$, og rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\chi(n)|}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon(n)}{n}$ er divergent, idet den indeholder den divergente delrække $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+d}+\frac{1}{1+2d}+\cdots$. Hvis χ er hovedkarakteren, er også den sædvanlige konvergensabscisse $\gamma=1$. Hvis χ ikke er hovedkarakteren, er derimod den sædvanlige konvergensabscisse $\gamma=0$; thi for $s=0$ fås rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)$, som er divergent, da $\chi(n)\not\to 0$, men har begrænsede afsnit, da $\sum_{n\leq x}\chi(n)$ bliver periodisk med perioden d.

Som følge af, at $|\chi(x)|\leq 1$ for alle x og $\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)$ for alle x,y, får vi også for L-funktionerne en fremstilling ved et Eulersk produkt.

<u>For hver karakter χ er $L(s;\chi)$ i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$ også fremstillet ved det Eulerske produkt</u>

$$L(s;\chi)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}.$$

Heri er indeholdt, at $L(s;\chi)\neq 0$ for ethvert s i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$.

<u>Bevis.</u> Beviset kan føres nøjagtigt som for det tilsvarende resultat for zetafunktionen. Vi giver her et lidt kortere, men måske knapt så gennemskueligt, bevis baseret på "Eratosthenes' sigte".
Resultatet for zetafunktionen kunde også have været bevist på denne måde.

For ethvert s i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$ har vi

$$\begin{aligned} L(s;\chi)\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right) &= \frac{\chi(1)}{1^s}+\frac{\chi(2)}{2^s}+\frac{\chi(3)}{3^s}+\frac{\chi(4)}{4^s}+\cdots \\ &\quad -\frac{\chi(1)\chi(2)}{1^s\,2^s} \qquad -\frac{\chi(2)\chi(2)}{2^s\,2^s} \qquad -\cdots \\ &= \frac{\chi(1)}{1^s} \qquad +\frac{\chi(3)}{3^s} \qquad +\cdots, \end{aligned}$$

hvor nu kun de ulige tal optræder. Følgelig har vi

$$\begin{aligned} & L(s;\chi)\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right)\left(1-\frac{\chi(3)}{3^s}\right)= \\ &= \frac{\chi(1)}{1^s}+\frac{\chi(3)}{3^s}+\frac{\chi(5)}{5^s}+\frac{\chi(7)}{7^s}+\frac{\chi(9)}{9^s}+\frac{\chi(11)}{11^s}+\cdots \\ &\quad -\frac{\chi(1)\chi(3)}{1^s\,3^s} \qquad -\frac{\chi(3)\chi(3)}{3^s\,3^s} \qquad -\cdots \\ &= \frac{\chi(1)}{1^s} \qquad +\frac{\chi(5)}{5^s}+\frac{\chi(7)}{7^s} \qquad +\frac{\chi(11)}{11^s}+\cdots, \end{aligned}$$

hvor nu kun de tal optræder, der hverken er delelige med 2 eller 3. Efter N skridt har vi

$$L(s;\chi)\left(1-\frac{\chi(2)}{2^s}\right)\left(1-\frac{\chi(3)}{3^s}\right)\left(1-\frac{\chi(5)}{5^s}\right)\cdots\left(1-\frac{\chi(p_N)}{p_N^s}\right)=$$

$$= L(s;\chi)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right) = \sum_{\substack{n=1\\ 2\nmid n,\,3\nmid n,\,5\nmid n,\ldots,\,p_N\nmid n}}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

hvor summen er udstrakt over de n, der ikke er delelige med noget af primtallene $2,3,5,\ldots,p_N$. Idet $\chi(1)=1$ og tallene $2,3,4,\ldots,p_{N+1}-1$ er delelige med et af primtallene $2,3,5,\ldots,p_N$, begynder rækken $1+\frac{\chi(p_{N+1})}{p_{N+1}^s}+\cdots$. Vi får derfor

$$\left|L(s;\chi)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)-1\right| \leq \sum_{n=p_{N+1}}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}.$$

Her går højre side mod 0 for $N\to\infty$. Vi får altså

$$L(s;\chi)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)\longrightarrow 1,$$

hvoraf ses, at $L(s;\chi)\neq 0$ og

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}}\longrightarrow L(s;\chi).$$

<u>I halvplanen $\{s\mid\sigma>1\}$ er en holomorf gren af $\log L(s;\chi)$ fremstillet ved Dirichletrækken</u>

$$\log L(s;\chi)=\sum_{p^m}\frac{1}{m}\frac{\chi(p^m)}{(p^m)^s}.$$

<u>Bevis.</u> Ifølge potensrækkeudviklingen for $\log(1-z)$, gyldig for $|z|<1$, fremstilles hovedværdien af $\log\left(1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)$ ved

$$\log\left(1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)^m = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{\chi(p_n^m)}{(p_n^m)^s}.$$

For hvert N bestemmes da en af værdierne af $\log\prod_{n=1}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}}$ ved

$$\log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{\chi(p_n^m)}{(p_n^m)^s},$$

(hvor det er ligegyldigt, i hvad orden leddene opskrives). Nu er Dirichletrækken

$$h(s;\chi) = \sum_{p^m}\frac{1}{m}\frac{\chi(p^m)}{(p^m)^s}$$

åbenbart absolut konvergent i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$. Følgelig fås

$$h(s;\chi) - \log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}} = \sum_{\substack{p^m\\ p>p_N}}\frac{1}{m}\frac{\chi(p^m)}{(p^m)^s}.$$

Heraf ses, at

$$\left|h(s;\chi) - \log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}}\right| < \sum_{p_{N+1}}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}.$$

Følgelig konvergerer $\log\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}}$ for $N\to\infty$ mod $h(s;\chi)$, som derfor må være en af værdierne af $\log L(s;\chi)$.

Ved differentiation fås heraf i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$

$$\frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)} = \sum_{p^m}\frac{1}{m}\left(-\log(p^m)\right)\frac{\chi(p^m)}{(p^m)^s} = \sum_{p^m}\frac{-\chi(p^m)\log p}{(p^m)^s}$$

eller

$$\boxed{-\frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}}.$$

Da talkaraktererne $\chi_1, \dots, \chi_h$ mod. d er en ortonormal basis for rummet V_d, gælder for enhver funktion $x \in V_d$, at

$$x = c_1\chi_1 + \dots + c_h\chi_h \,, \quad \text{hvor} \quad c_\beta = (x, \chi_\beta).$$

Vi danner funktionen

$$f(s;x) = -c_1 \frac{\mathcal{L}'(s;\chi_1)}{\mathcal{L}(s;\chi_1)} - \dots - c_h \frac{\mathcal{L}'(s;\chi_h)}{\mathcal{L}(s;\chi_h)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

<u>Påstand</u>. <u>For ethvert $x \in V_d$ kan, idet vi sætter $A(x) = \mathop{M}_{\chi}\{x(\chi)\} = \frac{1}{h}\sum_{\chi=1}^{d} x(\chi)$, funktionen $f(s;x) - \frac{A(x)}{s-1}$ udvides til en i halvplanen $\{s \mid \sigma \geq 1\}$ kontinuert funktion.</u>

De funktioner $x \in V_d$, for hvilke udsagnet er rigtigt, udgør åbenbart et underrum af V_d. Påstandens rigtighed er derfor ensgyldig med, at udsagnet er rigtigt for et sæt af funktioner x, der udgør en basis for V_d. Et sådant sæt har vi i de karakteristiske funktioner for de h restklasser (a) mod. d, hvor $a \in \{1, 2, \dots, d\}$ er primisk med d. For et sådant x, der altså er 1 på restklassen (a) og 0 ellers, er

$$f(s;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(n;d,a)\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{og} \quad A(x) = \frac{1}{h},$$

og udsagnet for disse x er derfor netop det, hvis rigtighed ifølge § 7 vil medføre primtalsætningen for differensrækker. En anden basis er talkaraktererne. Vi har altså:

<u>Primtalsætningen for differensrækker vil være bevist, når vi beviser rigtigheden af ovenstående udsagn for talkaraktererne.</u>

<u>Hovedkarakteren.</u> Lad d have primfaktoropløsningen $d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ [hvor $p_1, p_2, \ldots, p_r$ nu ikke mere betyder de første r primtal, men primfaktorerne i d]. For hovedkarakteren ε gælder da $\varepsilon(p) = 0$ for $p = p_1, p_2, \ldots, p_r$ og $\varepsilon(p) = 1$ for alle andre primtal. Følgelig er

$$\mathcal{L}(s;\varepsilon) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon(p)}{p^s}} = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{p_1^s}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^s}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r^s}\right).$$

Da $\zeta(s)$ kan udvides til en i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$ meromorf funktion med den ene pol $s = 1$ af orden 1 med residuet 1 og uden nulpunkter på linien $\{s \mid \sigma = 1\}$, ser vi, at $\mathcal{L}(s;\varepsilon)$ kan udvides til en i halvplanen $\{s \mid \sigma > 0\}$ meromorf funktion med den ene pol $s = 1$ af orden 1 med residuet $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \frac{\varphi(d)}{d} = \frac{h}{d}$ og uden nulpunkter på linien $\{s \mid \sigma = 1\}$. Følgelig gælder:

<u>Funktionen</u> $-\frac{\mathcal{L}'(s;\varepsilon)}{\mathcal{L}(s;\varepsilon)}$ <u>kan udvides til en i halvplanen</u> $\{s \mid \sigma > 0\}$ <u>meromorf funktion, som i halvplanen</u> $\{s \mid \sigma \geq 1\}$ <u>har den ene pol</u> $s = 1$ <u>af orden 1 med residuet</u> 1.

Specielt gælder altså, at $-\frac{\mathcal{L}'(s;\varepsilon)}{\mathcal{L}(s;\varepsilon)} - \frac{1}{s-1}$ kan udvides til en i $\{s \mid \sigma \geq 1\}$ kontinuert funktion. Hermed er rigtigheden af udsagnet ovenfor godtgjort for hovedkarakteren, idet vi jo for denne har $A(\varepsilon) = \underset{x}{\mathcal{M}}\{\varepsilon(x)\} = 1$.

<u>De fra hovedkarakteren forskellige karakterer.</u> Lad dernæst χ være en fra hovedkarakteren forskellig karakter. I dette tilfælde er $A(\chi) = \underset{x}{\mathcal{M}}\{\chi(x)\} = 0$, og udsagnet er, at $-\frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)}$ kan udvides til en i $\{s|\sigma \geq 1\}$ konfinnert funktion. Da Dirichletrækken $L(s;\chi) = \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}$ i dette tilfælde er konvergent i $\{s|\sigma>0\}$, er $L(s;\chi)$ en i halvplanen $\{s|\sigma>0\}$ holomorf funktion, og $-\frac{L'(s;\chi)}{L(s;\chi)}$ er derfor en i denne halvplan meromorf funktion med poler i de eventuelle nulpunkter for $L(s;\chi)$. Det gælder derfor om at bevise følgende:

<u>For enhver fra hovedkarakteren forskellig karakter χ gælder, at</u> $L(s;\chi) \neq 0$ <u>i ethvert punkt af linien</u> $\{s|\sigma=1\}$.

<u>Bevis.</u> Vi går frem på lignende måde som ved zetafunktionen. Idet vi sætter $c_n = \frac{1}{m}$, når $n = p^m$ for et eller andet primtal, og $c_n = 0$ for alle andre n, er alle $c_n \geq 0$, og vi har i halvplanen $\{s|\sigma>1\}$

$$\log L(s;\chi) = \sum_{p^m} \frac{1}{m} \frac{\chi(p^m)}{(p^m)^s} = \sum_{n=1}^\infty c_n \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Da $\chi(n)=0$, når n ikke er primisk med d, er det nok at summere over de n, der er primisk med d. Vi angiver dette ved en stjerne på summationstegnet. Vi har altså

$$\log|L(\sigma+it;\chi)| = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \frac{c_n}{n^\sigma} \mathcal{R}(\chi(n) e^{-it\log n}).$$

Da $|\chi(n)|=1$, når n er primisk med d, kan vi skrive $\chi(n) e^{-it\log n} = e^{i\Theta_n(t)}$, hvor $\Theta_n(t)$ er reel, og har da $\chi^2(n) e^{-i2t\log n} = e^{i2\Theta_n(t)}$. Funktionen χ^2 er også en karakter. Vi har altså

$$\log L(\sigma;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \frac{c_n}{n^\sigma}$$

$$\log|L(\sigma+it;\chi)| = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \frac{c_n}{n^\sigma} \cos\Theta_n(t)$$

$$\log|L(\sigma+i2t;\chi^2)| = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \frac{c_n}{n^\sigma} \cos 2\Theta_n(t)$$

og følgelig, idet $3+4\cos\theta+\cos 2\theta \geq 0$ for alle θ,

$$3\log L(\sigma;\varepsilon) + 4\log|L(\sigma+it;\chi)| + \log|L(\sigma+i2t;\chi^2)| \geq 0,$$

altså

$$L(\sigma;\varepsilon)^3 |L(\sigma+it;\chi)|^4 |L(\sigma+i2t;\chi^2)| \geq 1,$$

gældende for alle $\sigma>1$ og alle t. Heraf fås

$$[(\sigma-1)L(\sigma;\varepsilon)]^3 \left|\frac{L(\sigma+it;\chi)}{\sigma-1}\right|^4 (\sigma-1)|L(\sigma+i2t;\chi^2)| \geq 1.$$

For $\sigma\to 1$ gælder $(\sigma-1)L(\sigma;\varepsilon)\to \frac{h}{d}$, idet $L(s;\varepsilon)$ i $s=1$ har en pol af orden 1 med residuet $\frac{h}{d}$. Hvis $1+it$ var et nulpunkt for $L(s;\chi)$, vilde gælde $\frac{L(\sigma+it;\chi)}{\sigma-1} \to L'(1+it;\chi)$ for $\sigma\to 1$. Undtager vi det tilfælde, hvor $t=0$ og χ^2 er hovedkarakteren, gælder $L(\sigma+i2t;\chi^2)\to L(1+i2t;\chi^2)$ for $\sigma\to 1$, og venstre side i uligheden vilde altså konvergere mod 0 for $\sigma \to 1$, hvilket er umuligt. Følgelig er $L(1+it;\chi) \neq 0$, hvis enten $t \neq 0$ eller χ^2 ikke er hovedkarakteren.

Vi mangler at vise, at $L(1;\chi) \neq 0$, når χ er en karakter, der ikke er hovedkarakteren, men for hvilken χ^2 er hovedkarakteren, d.v.s. når χ er en fra hovedkarakteren forskellig reel karakter. I dette tilfælde svigter det foregående ræsonnement; når χ^2 er hovedkarakteren, har vi nemlig $(\sigma-1)|L(\sigma;\chi^2)| = (\sigma-1)L(\sigma;\varepsilon) \to \frac{h}{d}$ for $\sigma \to 1$, og får kun at vide, at hvis 1 var et nulpunkt for $L(s;\chi)$ måtte gælde $\frac{h}{d}|L'(1,\chi)| \geq 1$.

Der kendes forskellige beviser for, at $L(1,\chi) \neq 0$, når χ er en fra hovedkarakteren forskellig reel karakter. Dirichlet viste det på en højst bemærkelsesværdig måde ved at bringe tallet $L(1;\chi)$ i forbindelse med et antal (klassetallet for kvadratiske former). Et meget sindrigt elementært bevis blev givet 1895 af Mertens. Det her givne bevis er en forenkling heraf, der skyldes de la Vallée-Poussin, anderledes udformet af Landau.

Lad χ være en reel karakter forskellig fra hovedkarakteren. Ideen er at multiplicere $L(s;\chi)$ med $\zeta(s)$. I halvplanen $\{s|\sigma>1\}$ finder vi ved multiplikation af de absolut konvergente rækker

$$\zeta(s)\,L(s;\chi) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_1^\infty \frac{a(n)}{n^s},$$

hvor

$$a(n) = \sum_{m|n} \chi(m).$$

Vi vil beregne $a(n)$.

1°. $a(n)$ er <u>hel</u> og $a(1) = 1$. Dette er klart.

2°. Hvis $n = n_1 n_2$, hvor n_1 og n_2 er indbyrdes primiske, er $a(n) = a(n_1)a(n_2)$. Thi samtlige m, for hvilke $m|n$, fås, hver een gang, som $m = m_1 m_2$, hvor $m_1 | n_1$ og $m_2 | n_2$. Altså er

$$a(n) = a(n_1 n_2) = \sum_{\substack{m_1|n_1 \\ m_2|n_2}} \chi(m_1 m_2) = \sum_{\substack{m_1|n_1 \\ m_2|n_2}} \chi(m_1)\chi(m_2) =$$

$$= \sum_{m_1|n_1} \chi(m_1) \sum_{m_2|n_2} \chi(m_2) = a(n_1)a(n_2).$$

3°. Det er altså nok at udregne $a(n)$, når n er en primtalpotens p^l. Vi finder

$$a(p^l) = \chi(1) + \chi(p) + \chi(p^2) + \dots + \chi(p^l) =$$

$$= 1 + \chi(p) + \chi(p)^2 + \dots + \chi(p)^l,$$

altså:

hvis $\chi(p) = 0$, er $a(p^l) = 1$,
hvis $\chi(p) = 1$, er $a(p^l) = l+1$,
hvis $\chi(p) = -1$, er $a(p^l) = \begin{cases} 1 & \text{for } l \text{ lige} \\ 0 & \text{for } l \text{ ulige.} \end{cases}$

Specielt bemærker vi, at $a(p^l)$ altid er $\geqslant 0$, og at $a(p^l)$ er $\geqslant 1$, når l er lige.

Af ovenstående uddrager vi:

I. $a(n) \geqslant 0$ for alle n;

II. $a(n) \geqslant 1$, når n er et kvadrattal.

Hvis $L(1,\chi)=0$, var funktionen $\zeta(s)\,L(s;\chi)$ holomorf i halvplanen $\{s|\sigma>0\}$ [idet nulpunktet for $L(s;\chi)$ vilde hæve polen for $\zeta(s)$]. Følgelig måtte, efter den i §3 beviste sætning af Landau om Dirichletrækker med ikke-negative koefficienter, rækken $\sum_1^\infty \frac{a(n)}{n^s}$ være absolut konvergent i halvplanen $\{s|\sigma>0\}$. Men i punktet $s=\frac{1}{2}$ er rækken sikkert divergent, idet dens led er $\geqslant 0$ og leddene i den delrække $\sum_1^\infty \frac{a(n^2)}{(n^2)^s}$, der svarer til kvadrattallene, er $\geqslant$ leddene i den harmoniske række $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$. Antagelsen $L(1,\chi)=0$ fører altså til en modstrid.

◇

Litteratur.

Henvisninger til den originale litteratur vedrørende de behandlede spørgsmål kan findes i følgende bøger, der også kan anbefales til videre studium. Som en kortfattet tekst vedrørende primtallenes fordeling anbefales særskilt Ingham's bog.

E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I–II. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1909.

A. E. Ingham. The Distribution of Prime Numbers. Cambridge University Press 1932.

D. W. Widder. The Laplace Transform. Princeton University Press 1946.

G. H. Hardy. Divergent Series. Clarendon Press, Oxford 1949.

E. C. Titchmarsh. The Theory of the Riemann Zeta-function. Clarendon Press, Oxford 1951.

K. Prachar. Primzahlverteilung. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

H. R. Pitt. Tauberian Theorems. Oxford University Press 1958.

Rettelse.

Side 6, linie 9. For af $\Lambda \leq \frac{1}{2}\Lambda + \log 2$ at kunne slutte, at $\Lambda \leq 2 \log 2$, må man først vise, at $\Lambda < +\infty$, altså at $\frac{\psi(x)}{x}$ er begrænset. Dette følger af uligheden $\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) \leq x \log 2 + o(x)$, som giver $\psi(x) - \psi(\frac{x}{2}) \leq kx$ for en vis konstant k. Erstattes x med $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots$ og adderes, fås $\psi(x) \leq 2kx$, altså det ønskede.