KØBENHAVNS UNIVERSITETS MATEMATISKE INSTITUT

Børge Jessen

Forelæsninger over udvalgte emner fra analysen

Efterårssemestret 1967

Omfatter 76 sider
mærket
Udv. emn. fra anal. Efterår 1967 1–76

Rettet 1974

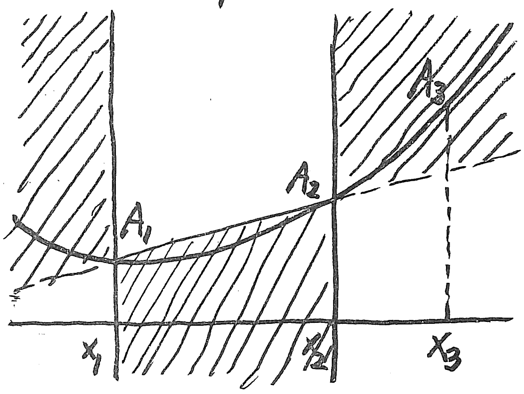
The 'seriousness' of a mathematical theorem lies, not in its practical consequences, which are usually negligible, but in the <u>significance</u> of the mathematical ideas which it connects.
HARDY

Kap. 1. Gammafunktionen.

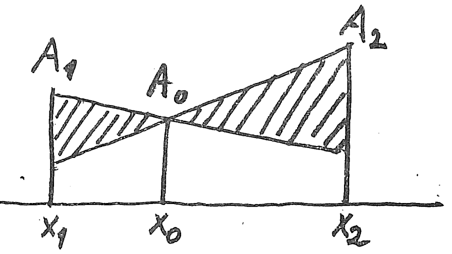
Denne af Euler indførte funktion er næst efter de elementære funktioner (eksponentialfunktion, logaritmefunktion, trigonometriske funktioner) analysens vigtigste funktion, og mangfoldige fremstillinger af dens teori er givet. Vi følger i det væsentlige den af E. Artin (Einführung in die Theorie der Gammafunktion, 1931) givne fremstilling (beroende på en fra H. Bohr og J. Mollerup stammende grundtanke), der udmærker sig ved, at de vigtigste formler opnås næsten uden regning.

Forberedende sætninger om konvekse funktioner.

En funktion $y = f(x)$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval I kaldes *konveks*, såfremt dens graf i ethvert interval $[x_1, x_2]$ ligger under eller på den ved punkterne $A_1 = (x_1, f(x_1))$ og $A_2 = (x_2, f(x_2))$ bestemte korde A_1A_2.



Heraf følger straks, at grafen uden for intervallet $[x_1, x_2]$ må ligge over eller på kordens forlængelse. Thi lå f.eks. det til et $x_3 > x_2$ svarende punkt $A_3 = (x_3, f(x_3))$ under kordens forlængelse, ville jo A_2 ligge over korden A_1A_3. — Betragtes nu for et vilkårligt x_0 punkter $x_1 < x_0$ og $x_2 > x_0$ ses, at grafen i $[x_1, x_2]$ må ligge i de to trekanter bestemt af linierne $x = x_1$, $x = x_2$, A_1A_0 og A_0A_2, hvor $A_0 = (x_0, f(x_0))$, $A_1 = (x_1, f(x_1))$, $A_2 = (x_2, f(x_2))$.



Heraf fremgår, at funktionen er kontinuert i x_0. Altså: *Enhver konveks funktion er kontinuert.*

Definitionen af konveksitet kan formuleres således: For vilkårlige $x_1 < x_2 < x_3$ skal gælde

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Heraf følger: En sum af (to eller flere) konvekse funktioner er konveks. Grænsefunktionen for en konvergent følge af konvekse funktioner er konveks. Summen af en konvergent række, hvis led er konvekse funktioner, er konveks.

Vi nævner også: Enhver lineær funktion $y = \alpha x + \beta$ er konveks.

En konveks funktion er ikke nødvendigvis differentiabel (eksempel $y = |x|$). Der gælder: En to gange differentiabel funktion $y = f(x)$ er konveks, hvis og kun hvis $f''(x) \geq 0$ for alle x.

1. Antag $f''(x) \geq 0$ for alle x. For givne $x_1 < x_2 < x_3$ er ifølge middelværdisætningen

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2),$$

hvor $\xi_1 \in]x_1, x_2[$, $\xi_2 \in]x_2, x_3[$. Fornyet anvendelse af middelværdisætningen giver

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1),$$

hvor $\xi \in]\xi_1, \xi_2[$. Altså er $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, og konveksiteten er bevist.

2. Antag $f(x)$ konveks. For givne $x_1 < x_2$ ligger grafen i $[x_1, x_2]$ under eller på korden. Heraf følger

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2).$$

Altså er $f'(x)$ monotont voksende og følgelig $f''(x) \geq 0$ for alle x.

En funktion $y = f(x)$ på et åbent (begrænset eller ubegrænset) interval I kaldes <u>logaritmisk konveks</u>, hvis $f(x) > 0$ for alle x, og $\log f(x)$ er konveks.

Af sætningerne om konvekse funktioner følger umiddelbart: <u>Enhver logaritmisk konveks funktion er kontinuert.</u> <u>Et produkt af</u> (to eller flere) <u>logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks.</u> <u>Grænsefunktionen for en konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks, hvis dens værdi overalt er > 0.</u>

Derudover gælder følgende mærkværdige sætning, som ikke følger umiddelbart af definitionen af logaritmisk konveksitet: <u>En sum af</u> (to eller flere) <u>logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks.</u>

Ved beviset er det nok at se på en sum $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ af to logaritmisk konvekse funktioner. Det er klart, at $f(x) > 0$ for alle x. Lad $x_1 < x_2$, og lad de hertil svarende korder for de konvekse funktioner $\log f_1(x)$ og $\log f_2(x)$ have ligningerne $y = \alpha_1 x + \beta_1$ og $y = \alpha_2 x + \beta_2$. Da er for $x \in [x_1, x_2]$

$$\log f_1(x) \leq \alpha_1 x + \beta_1 \qquad \text{og} \qquad \log f_2(x) \leq \alpha_2 x + \beta_2$$

og altså

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \leq e^{\alpha_1 x + \beta_1} + e^{\alpha_2 x + \beta_2} = \varphi(x),$$

hvoraf $\log f(x) \leq \log \varphi(x)$. For $x = x_1$ og $x = x_2$ gælder $\log f(x) = \log \varphi(x)$. De til x_1, x_2 svarende korder for $\log f(x)$ og $\log \varphi(x)$ er derfor samme linie. Det er derfor nok at vise, at $\log \varphi(x)$ i $[x_1, x_2]$ falder under eller på korden. Dette viser vi ved at vise, at $\log \varphi(x)$ er konveks. Nu er $\log \varphi(x)$ to gange differentiabel. Vi finder

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \varphi(x) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x) - (\varphi'(x))^2}{(\varphi(x))^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x + \beta_1 + \beta_2}}{(\varphi(x))^2},$$

som er ≥ 0 for alle x. Hermed er sætningen bevist.

Et vigtigt resultat fås ved kombination af de foranstående sætninger. Lad $f(x,t)$ være en funktion på en produktmængde $I \times [a,b]$, hvor I er et åbent interval. Vi antager, at $f(x,t_0)$ er logaritmisk konveks på I for ethvert $t_0 \in [a,b]$, og at $f(x_0,t)$ er kontinuert på $[a,b]$ for ethvert $x_0 \in I$. For ethvert n vil

$$F_n(x) = \big(f(x,a) + f(x,a+h) + \cdots + f(x,a+(n-1)h)\big)\,h\,, \qquad h = \frac{b-a}{n},$$

være logaritmisk konveks på I. For $n \to \infty$ gælder

$$F_n(x) \longrightarrow F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

Da $F(x) > 0$, slutter vi at $F(x)$ er logaritmisk konveks.

Som en anvendelse vil vi bevise: Er $\varphi(t)$ kontinuert og positiv på et åbent interval $]a,b[$, hvor $0 \le a < b \le +\infty$, og eksisterer det uegentlige integral

$$F(x) = \int_a^b \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt = \lim_{\substack{a_1 \to a \\ b_1 \to b}} \int_{a_1}^{b_1} \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt$$

for alle $x > 0$, da er $F(x)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$.

Funktionen $f(x,t) = \varphi(t)\,t^{x-1}$ er defineret på $]0,+\infty[\times]a,b[$. Endvidere er $f(x,t_0)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$ for ethvert $t_0 \in]a,b[$, idet $\log f(x,t_0)$ er en lineær funktion af x, og $f(x_0,t)$ er kontinuert på $]a,b[$ for ethvert $x_0 \in]0,+\infty[$. Følgelig er $\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt$ logaritmisk konveks for vilkårlige a_1 og b_1 $(a < a_1 < b_1 < b)$. Funktionen $F(x)$ er altså grænsefunktion for en konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner, og da $F(x) > 0$, slutter vi, at $F(x)$ er logaritmisk konveks.

Følgende udsagn er næsten indlysende: Hvis $f(x)$ er logaritmisk konveks på et vist interval og c et reelt tal $\neq 0$, da er funktionerne $f(x+c)$ og $f(cx)$ logaritmisk konvekse på de tilsvarende intervaller.

Til slut beviser vi: <u>Enhver logaritmisk konveks funktion er konveks.</u>

Lad $f(x)$ være logaritmisk konveks og lad $y = \alpha x + \beta$ være korden for $\log f(x)$ svarende til intervallet $[x_1, x_2]$. Da er $\log f(x) \leq \alpha x + \beta$ for $x \in [x_1, x_2]$, altså $f(x) \leq e^{\alpha x + \beta}$. Da $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$ for $x = x_1$ og $x = x_2$, er korden for $e^{\alpha x + \beta}$ svarende til $[x_1, x_2]$ også korde for $f(x)$. Men $e^{\alpha x + \beta}$ er konveks. Altså er $f(x)$ for $x \in [x_1, x_2]$ under eller på korden.

<u>Indskud om eksponentialfunktionen.</u>

Ved studiet af en funktion er det ofte nyttigt at kunne karakterisere funktionen ved hjælp af dens egenskaber i stedet for at benytte en formel. Som eksempel nævnes:

<u>For et givet</u> $a > 0$ <u>er</u> $f(x) = a^x$ <u>karakteriseret ved følgende egenskaber</u> (d.v.s. det er den eneste funktion, der har disse egenskaber):

1) $f(x)$ <u>er defineret og kontinuert på</u> $]-\infty, +\infty[$,

2) $f(x)$ <u>tilfredsstiller funktionalligningen</u> $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$,

3) $f(1) = a$.

Vi går ud fra, at vi kender funktionen a^x og ved, at den har disse egenskaber, og vil nu vise, at hvis en funktion $f(x)$ har disse egenskaber, er $f(x) = a^x$ for alle x.

Af 2) og 3) følger specielt $f(x+1) = a f(x)$, hvilket sammen med 3) viser, at $f(n) = a^n$ for alle hele n (positive, negative og nul).

Af $f(x) f(1-x) = f(1) = a$ ses, at $f(x) \neq 0$ for alle x. Da $f(x) = f(\frac{x}{2}) f(\frac{x}{2}) = (f(\frac{x}{2}))^2$, må gælde $f(x) > 0$ for alle x.

Af funktionalligningen følger $f(x_1 + \cdots + x_q) = f(x_1) \cdots f(x_q)$, hvoraf for vilkårligt helt p følger at $= f(p) = f(\frac{p}{q}) \cdots f(\frac{p}{q}) = (f(\frac{p}{q}))^q$. Da $f(\frac{p}{q}) > 0$, følger heraf $f(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$. Altså er $f(x) = a^x$ for alle rationale x.

Da $f(x)$ og a^x begge er kontinuert, følger af $f(x) = a^x$ for alle rationale x, at $f(x) = a^x$ for alle x.

En lidt anden formulering af sætningen er følgende:

Funktionen $f(x) = a^x$ er den eneste kontinuerte funktion på $]-\infty, +\infty[$, der interpolerer mellem værdierne $f(n) = a^n$, og som tilfredsstiller funktionalligningen $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

Definition af gammafunktionen.

Gammafunktionen løser det problem på fornuftig måde at udvide begrebet $n!$ til vilkårlige tal. Fra integralregningen kendes udtrykket (bevis følger nedenfor)

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!.$$

Det ligger derfor nær i denne formel at erstatte n med et vilkårligt reelt x. Man har imidlertid valgt at definere gammafunktionen således, at den i punktet n har værdien $(n-1)!$. Definitionen lyder derfor

(1)
$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.}$$

Det må nu undersøges, for hvilke x integralet eksisterer. Hertil skal, idet $0 < a < 1 < b < +\infty$, undersøges eksistensen af grænseværdierne

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{og} \quad \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Den første eksisterer for $x > 0$. Thi integranden er for $t > 0$ positiv og $< t^{x-1}$. Altså er

$$0 < \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_a^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

Funktionen $\varphi(a)=\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ er således begrænset, og da den er monotont aftagende, må $\lim_{a\to 0}\varphi(a)$ eksistere. Er derimod $x\leqslant 0$, eksisterer den første grænseværdi ikke. Thi for $0<t\leqslant 1$ gælder da $e^{-t}t^{x-1}\geqslant e^{-1}t^{-1}$. Altså er

$$\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}dt \geqslant \int_a^1 e^{-1}t^{-1}dt = \frac{1}{e}\log\frac{1}{a},$$

hvoraf ses, at $\varphi(a)=\int_a^1 e^{-t}t^{x-1}dt \to \infty$ for $a\to 0$.

Den anden grænseværdi eksisterer for alle x. Thi er n et helt positivt tal $\geqslant x-1$, gælder for $1\leqslant t<+\infty$ uligheden $t^{x-1}\leqslant t^n$. Af rækkeudviklingen $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ ses, at der for $t>0$ gælder $e^t>\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}$, altså $e^{-t}<\frac{(n+2)!}{t^{n+2}}$. Følgelig er

$$\int_1^b e^{-t}t^{x-1}dt < \int_1^b \frac{(n+2)!}{t^2}dt = (n+2)!-\frac{(n+2)!}{b} < (n+2)!.$$

Da funktionen $\psi(b)=\int_1^b e^{-t}t^{x-1}dt$ er voksende, ses, at $\lim_{b\to\infty}\psi(b)$ eksisterer.

<u>Ved ovenstående formel (1) er $\Gamma(x)$ således defineret for alle</u> $x>0$.

Hvis man i $\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt$ erstatter tallet $x>0$ med $x+1$ og integrerer partielt, får man

$$\int_a^b e^{-t}t^{x}dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + \int_a^b e^{-t}x\,t^{x-1}dt$$

$$= e^{-a}a^x - e^{-b}b^x + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Betegner n et helt tal $\geqslant x$, er $0<e^{-b}b^x<\frac{(n+2)!}{b^2}$, hvoraf $e^{-b}b^x\to 0$ for $b\to\infty$. Endvidere gælder $e^{-a}a^x\to 0$ for $a\to 0$. Man finder derfor

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x).} \tag{2}$$

Denne funktionalligning er grundlæggende for hele teorien. For $x=1$ fås $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$. Funktionalligningen giver derfor $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2, \cdots, \Gamma(n) = (n-1)!$. Denne ligning $\Gamma(n) = (n-1)!$ gælder også for $n = 1$, idet man sætter $0! = 1$. Funktionalligningen er en almindeliggørelse af ligningen $n! = n \cdot (n-1)!$. Kender man gammafunktionen for $0 < x \leq 1$, kan man ved funktionalligningen finde dens værdier for $1 < x \leq 2$, ud fra disse dens værdier for $2 < x \leq 3$, etc.

Almindeligt finder man for n positiv hel

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x).$$

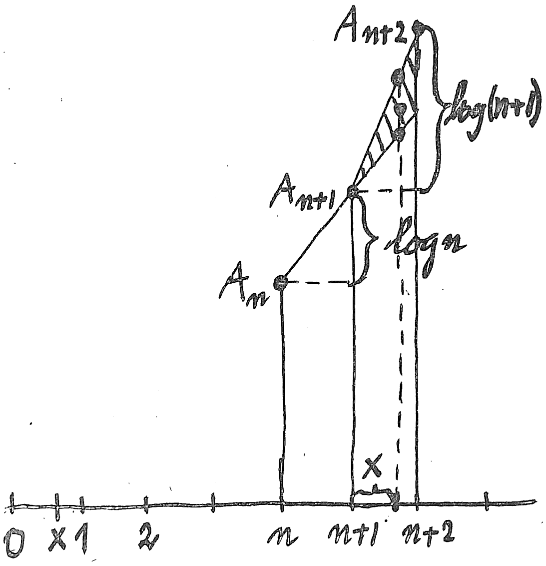
Denne betragtning viser, at der findes uendelig mange funktioner på $]0,+\infty[$, der tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = x\,f(x)$ og for hvilke $f(1) = 1$ (og følgelig $f(n) = (n-1)!$). Man kan nemlig vælge $f(x)$ ganske vilkårligt på $]0,1]$, bortset fra betingelsen $f(1) = 1$, og derefter benytte funktionalligningen til successivt at definere $f(x)$ på $]1,2]$, $]2,3]$, etc. Den således fremkomne funktion vil da tilfredsstille betingelserne.

Ifølge indledningsafsnittet har $\Gamma(x)$ den egenskab at være logaritmisk konveks. Vi vil nu vise, at denne egenskab sammen med de allerede nævnte karakteriserer gammafunktionen:

(3)

> Funktionen $f(x) = \Gamma(x)$ har følgende egenskaber:
>
> a) den er defineret på $]0,+\infty[$ og tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = x\,f(x)$.
>
> b) den er logaritmisk konveks.
>
> c) $f(1) = 1$.
>
> Den er den eneste funktion, der har disse egenskaber.

At $\Gamma(x)$ har egenskaberne er allerede vist. Lad os nu antage, at $f(x)$ har egenskaberne a) b) c). Vi vil da vise, at $f(x) = \Gamma(x)$ for alle x.



Vi har $f(n)=(n-1)!$. Vi betragter grafen af $\log f(x)$ i intervallet $[n+1, n+2]$. Den ligger under eller på korden $A_{n+1}A_{n+2}$ og over eller på forlængelsen af korden A_nA_{n+1}. Disse korder har hældningskoefficienterne $\log(n+1)$ og $\log n$. Heraf ses: Hvis $0<x\leq 1$ gælder

$$\log f(n+1+x) = \log f(n+1) + x\log n + \varepsilon(x,n),$$

hvor $0 \leq \varepsilon \leq x\log(n+1) - x\log n \leq \log\frac{n+1}{n} = \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

Altså er

$$f(n+1+x) = n!\, n^x\, e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Men $f(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\, f(x)$, da funktionen opfylder funktionalligningen. Altså er

$$f(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\, e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Da $\varepsilon(x,n)\to 0$ for $n\to\infty$, følger heraf

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Nu er $\Gamma(x)$ også en funktion, der opfylder a) b) c). Den netop udledte formel gælder altså også, når vi skriver $\Gamma(x)$ i stedet for $f(x)$. Følgelig er $f(x)=\Gamma(x)$ for $0<x\leq 1$, og da begge funktioner opfylder funktionalligningen, må det samme gælde for alle $x>0$.

Som biresultat har vi fundet

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} \qquad (4)$$

foreløbig dog kun for $0<x\leq 1$.

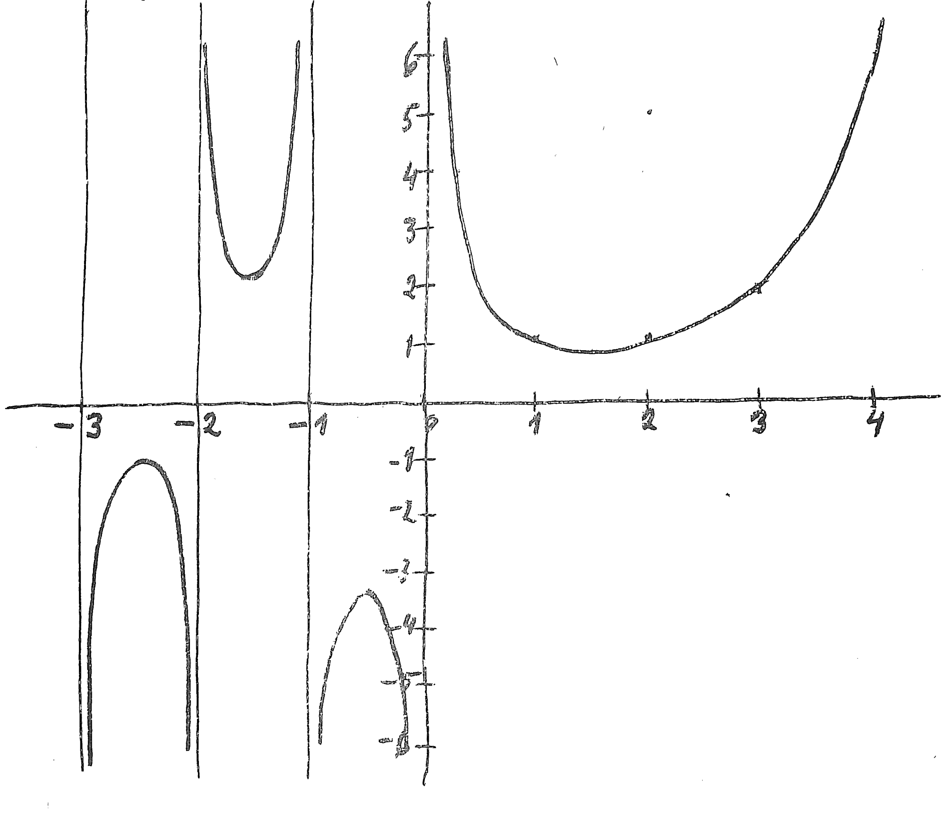
Inden vi diskuterer (4) vil vi definere $\Gamma(x)$ også for negative x. Dette kan ske på en og kun en måde, således at funktionalligningen (2) bliver opfyldt for alle x. Ud fra $\Gamma(x)$ i $0<x<1$ fås $\Gamma(x)$ succesivt for $-1<x<0$, $-2<x<-1$, etc. ved

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Man ser, at $\Gamma(x)$ bliver defineret for alle $x \neq 0, -1, -2, \ldots$. Da $\Gamma(x)$ er kontinuert og >0 for $x>0$, ser man, at $\Gamma(x)$ er kontinuert og negativ i $]-1,0[$, kontinuert og positiv i $]-2,-1[$, etc. Da $\Gamma(1)=1$, ser man, at $\Gamma(x)$ i omegnen af $x=0$ forløber omtrent som $\frac{1}{x}$, og følgelig i omegnen af $x=-1$ omtrent som $\frac{-1}{x+1}$, i omegnen af $x=-2$ omtrent som $\frac{1}{2(x+2)}$, etc., alment i omegnen af $x=-n$ omtrent som $\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. I hvert interval $]-n,-n+1[$ er $|\Gamma(x)|$ logaritmisk konveks. Thi

$$|\Gamma(x)| = \frac{\Gamma(x+n)}{|x|\,|x+1|\cdots|x+n-1|},$$

og $\frac{1}{|x-c|}$ er logaritmisk konveks for $x<c$.



Vi vil nu vise, at udtrykket (4) er gyldigt for alle x, for hvilke $\Gamma(x)$ er defineret (altså for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$). Hertil betegner vi den under limestegnet stående funktion med $\Gamma_n(x)$ og bemærker, at

$$\Gamma_n(x+1) = x\,\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1}, \qquad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\,\frac{x+n+1}{n}\,\Gamma_n(x+1).$$

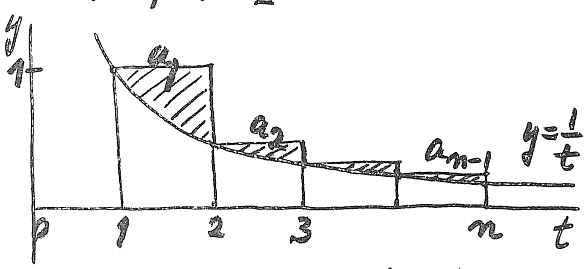
Man ser da: Hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ eksisterer, så eksisterer også $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$. Hvis omvendt $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$ eksisterer, og $x \neq 0$, så eksisterer $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$. Da grænseværdien $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ eksisterer for $0<x\leq 1$, følger heraf, at den eksisterer netop for $x \neq 0,-1,-2,\cdots$. Sætter man $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = f(x)$, ser man endvidere, at $f(x+1) = x f(x)$. Da $f(x) = \Gamma(x)$ for $0<x\leq 1$, ses, at formlen (4) gælder for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$.

Formlen (4) blev af Gauss benyttet som udgangspunkt for teorien.

Gammafunktionens produktfremstilling.

En simpel regning viser, at

$$\Gamma_n(x) = e^{x\left(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)}\,\frac{1}{x}\,\frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$



For differensen $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ har vi udtrykket $a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{1}{n}$. Da $0<a_i<\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$, er den uendelige række $a_1+a_2+\cdots$ konvergent, d.v.s. grænseværdien $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ eksisterer. Denne grænseværdi er <u>Eulers konstant</u>

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0{,}577215664901533\cdots.$$

[Det vides ikke om C (som e og π) er et transcendent tal, end ikke om C er irrationalt.] Altså finder man produktfremstillingen

(5) $$\boxed{\Gamma(x) = e^{-Cx}\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}} = e^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}}.$$

Heraf fås for $x>0$

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{i}-\log\left(1+\frac{x}{i}\right)\right)$$
$$= -Cx - \log x + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{i}-\log\left(1+\frac{x}{i}\right)\right).$$

Ved hjælp af denne rækkeudvikling vil vi vise, at $\log\Gamma(x)$, og derfor også $\Gamma(x) = e^{\log\Gamma(x)}$, er differentiabel i $]0,+\infty[$. Det vil være tilstrækkeligt at vise, at den ved ledvis differentiation fremkomne række

$$-C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x+i}\right) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x}{i(x+i)}$$

konvergerer ligeligt i intervallet $]0,k]$ for et vilkårligt $k>0$. Det følger af, at rækken i $]0,k]$ har den konvergente majoranträkke $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{i^2}$. Ifølge sætningen om ledvis differentiation har vi da i $]0,k]$, og altså i $]0,+\infty[$ da k var vilkårlig,

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{x+i}\right).$$

Herudfra slutter vi på samme måde, at $\log\Gamma(x)$ er to gange differentiabel i $]0,+\infty[$ med

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^2},$$

og ved gentagen anvendelse af ræsonnementet, at $\log\Gamma(x)$ er n gange differentiabel i $]0,+\infty[$ for ethvert n, og at

$$\frac{d^n}{dx^n}\log\Gamma(x) = (-1)^n(n-1)!\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^n} \qquad (n\geq 2).$$

Altså er også $\Gamma(x) = e^{\log\Gamma(x)}$ vilkårligt ofte differentiabel i $]0,+\infty[$, og heraf følger atter ved hjælp af funktionalligningen, at $\Gamma(x)$ er vilkårligt ofte differentiabel i ethvert af intervallerne $]-1,0[$, $]-2,-1[$, etc.

Betafunktionen.

Udgangsintegralet (1) kaldes det andet Eulerske integral. Foruden dette betragtede Euler et andet med gammafunktionen beslægtet integral, det såkaldte første Eulerske integral, der tjener til definition af betafunktionen:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Vi vil vise, at integralet eksisterer, når $x>0$ og $y>0$. Hertil skal, idet $0<a<\frac{1}{2}<b<1$, undersøges eksistensen af grænseværdierne

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad \text{og} \quad \lim_{b\to 1}\int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

I det første integral er $(1-t)^{y-1}<(1-t)^{-1}\leq 2$. Integranden er positiv. Altså er

$$0<\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < 2\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt = 2\left(\frac{(\frac{1}{2})^x}{x}-\frac{a^x}{x}\right)<\frac{2}{x}.$$

Funktionen $\varphi(a)=\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ er således begrænset, og da den er monotont aftagende, må $\lim_{a\to 0}\varphi(a)$ eksistere.

I det andet integral er $t^{x-1}<t^{-1}\leq 2$. Integranden er positiv. Altså er

$$0<\int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < 2\int_{\frac{1}{2}}^{b}(1-t)^{y-1}dt = 2\left(\frac{(\frac{1}{2})^y}{y}-\frac{(1-b)^y}{y}\right)<\frac{2}{y}.$$

Funktionen $\psi(b)=\int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ er således begrænset, og da den er monotont voksende, må $\lim_{b\to 1}\psi(b)$ eksistere.

Ved ovenstående formel er $B(x,y)$ således defineret for $x>0$, $y>0$.

Erstatter man i $\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ tallet $x>0$ med $x+1$, får man ved en omskrivning og påfølgende partiel integration

$$\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_a^b (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

$$= \left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_a^b + \int_a^b \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\, x\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$= \frac{a^x(1-a)^y - b^x(1-b)^y}{x+y} + \frac{x}{x+y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

For $a\to 0$ og $b\to 1$ følger heraf funktionalligningen

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

Vi vælger nu et <u>fast</u> $y>0$. For at få en funktion frem, der tilfredsstiller gammafunktionens funktionalligning, danner vi funktionen

$$f(x) = B(x,y)\,\Gamma(x+y).$$

For denne gælder

$$f(x+1) = B(x+1,y)\,\Gamma(x+1+y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)(x+y)\Gamma(x+y) = x\,f(x).$$

Endvidere er $f(x)$ logaritmisk konveks. Thi for fast y er $B(x,y)$ af formen $\int_0 \varphi(t)\,t^{x-1}dt$, hvor $\varphi(t) = (1-t)^{y-1}$ er kontinuert og positiv på $[0,1[$. Ifølge indledningsafsnittet er derfor $B(x,y)$ logaritmisk konveks. Det samme gælder $\Gamma(x+y)$. Altså er $f(x)$ produkt af to logaritmisk konvekse funktioner og følgelig logaritmisk konveks. Funktionen $f(x)$ tilfredsstiller altså de to første af de tre betingelser, der karakteriserer $\Gamma(x)$ på $]0,+\infty[$. Vi vil nu beregne $f(1)$. Vi finder

$$B(1,y) = \lim_{b\to 1}\int_0^b (1-t)^{y-1}dt = \lim_{b\to 1}\left[-\frac{(1-t)^y}{y}\right]_0^b = \frac{1}{y}.$$

Altså fås

$$f(1) = B(1,y)\,\Gamma(1+y) = \frac{\Gamma(1+y)}{y} = \Gamma(y).$$

Hvis en funktion $f(x)$ på $]0,+\infty[$ opfylder de to første af de tre betingelser a) b) c), der karakteriserer $\Gamma(x)$, så vil $\frac{f(x)}{f(1)}$ åbenbart opfylde alle tre betingelser, og vil altså være $=\Gamma(x)$. For funktionen $f(x)$ gælder derfor, at $f(x)=f(1)\Gamma(x)=\Gamma(y)\Gamma(x)$. Vi har hermed bevist, at der for alle positive x og y gælder formlen

$$(6) \qquad \boxed{B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$$

Sættes $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ og anvender man i integralet substitutionen $t=\sin^2\theta$, finder man

$$\left(\Gamma(\tfrac{1}{2})\right)^2=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi.$$

Da $\Gamma(\frac{1}{2})>0$, har vi hermed fundet den mærkværdige og vigtige formel

$$(7) \qquad \boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}}.$$

Heraf følger straks $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$, og alment $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots(n-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

Legendres multiplikationsformel.

Som et andet eksempel på anvendelsen af gammafunktionens karakterisering ved betingelserne a) b) c) vil vi betragte funktionen

$$f(x)=\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}).$$

Den er defineret, når hverken $\frac{x}{2}$ eller $\frac{x+1}{2}$ er et af tallene $0,-1,-2,\ldots$, d.v.s. for $x\neq 0,-1,-2,\ldots$. Vi finder

$$f(x+1)=\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x+2}{2})=\tfrac{x}{2}\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x}{2})=\tfrac{x}{2}f(x).$$

Dette er ikke gammafunktionens funktionalligning. For at blive af med 2-tallet i nævneren ganger vi $f(x)$ med 2^x, der ved erstatning af x med $x+1$ multipliceres med 2. Den herved fremkomne funktion

$$g(x)=2^x\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2})$$

vil opfylde funktionalligningen $g(x+1) = x\,g(x)$. På $]0,+\infty[$ er $g(x)$ som produkt af tre logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks. Følgelig er $\frac{g(x)}{g(1)} = \Gamma(x)$ for alle $x>0$, og i kraft af funktionalligningen må det samme gælde for ikke-positive $x \neq 0,-1,-2,\dots$. Nu er $g(1) = 2\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi}$. Vi har derfor fundet Legendres multiplikationsformel

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\,\Gamma(x).}$$

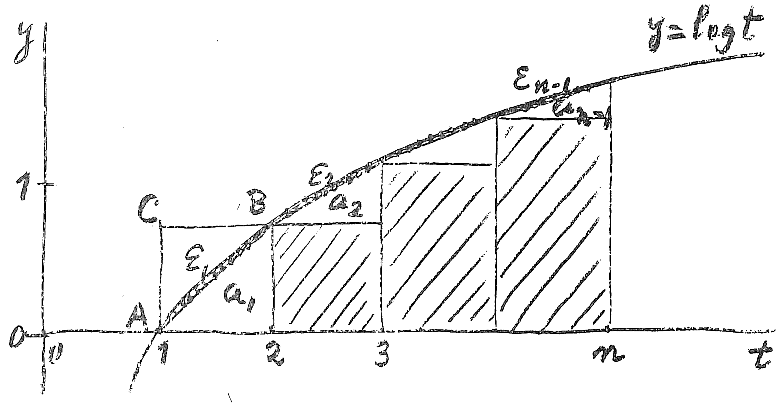
Stirlings formel.

Ved en elementær betragtning kan man finde en tilnærmet værdi til $\Gamma(n) = (n-1)!$. Vi har

$$\log\Gamma(n) = \log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1)$$

og sammenligner derfor $\log\Gamma(n)$ med integralet

$$\int_1^n \log t\,dt = \Big[t\log t - t\Big]_1^n = n\log n - n + 1.$$



Forskellen mellem integralet og $\log\Gamma(n)$ består af trekantsarealerne $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, som tilsammen er $\frac{1}{2}\log n$, og de små arealer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$, som tilsammen er $< \frac{1}{2}\log 2$, idet man let ser, at de pågældende figurer ved parallelforskydning alle kan finde plads i trekanten ABC. Man ser heraf, at

$$\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\log n - n + 1 - \tfrac{1}{2}\log 2 < \log\Gamma(n) < \left(n-\tfrac{1}{2}\right)\log n - n + 1,$$

og altså

$$\frac{e}{\sqrt{2}}\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n} < \Gamma(n) < e\cdot n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Dette giver anledning til at betragte en funktion af formen

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}, \qquad x>0.$$

Vi vil bestemme funktionen $\mu(x)$ således, at funktionen $f(x)$ opfylder betingelserne a) og b). Da vil $\Gamma(x)$ være $= a f(x)$ for et passende a.

Ved en simpel regning finder vi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \times e^{-1} e^{\mu(x+1)-\mu(x)}.$$

Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $f(x)$ opfylder a) er altså, at $\mu(x)$ opfylder funktionalligningen

$$\mu(x)-\mu(x+1) = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-1.$$

Funktionen på højre side betegnes $g(x)$. En funktion $\mu(x)$, der opfylder ligningen

$$\mu(x)-\mu(x+1) = g(x),$$

kan nu straks opskrives, nemlig

$$(*) \qquad \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n),$$

forudsat at den her optrædende række er konvergent for alle $x>0$. Vi udsætter beviset herfor et øjeblik og viser først, under antagelse af rækkens konvergens, at funktionen $f(x)$, når vi benytter den ved $(*)$ bestemte funktion $\mu(x)$, vil opfylde betingelsen b).

Funktionen $x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ er logaritmisk konveks. Thi dens logaritme er to gange differentiabel med den anden afledede $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$, som er >0. Endvidere er $e^{\mu(x)}$ logaritmisk konveks, d.v.s $\mu(x)$ er konveks. For at vise dette er det nok at vise, at hvert af leddene $g(x+n)$ i rækken $(*)$ er konveks. Hertil er det atter nok at vise, at $g(x)$ er konveks, og dette følger af, at $g(x)$ er to gange differentiabel, og at $g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$. Følgelig er $f(x)$ som produkt af logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks.

Vi mangler endnu at bevise konvergensen af rækken (*) for alle $x>0$. Samtidig med at vi beviser dette skal vi udlede et udtryk for dens sum $\mu(x)$. Vi benytter omskrivningen

$$g(x) = (x+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{x}) - 1 = \tfrac{1}{2}(2x+1)\log\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} - 1$$

og anvender den for $|y|<1$ gyldige rækkeudvikling

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \cdots .$$

Herved fås

$$g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots .$$

Heraf ses, at $g(x)>0$ for alle $x>0$. Vi forstørrer højre side, idet vi erstatter tallene $5, 7, \ldots$ med 3. Da fremkommer på højre side en kvotientrække med første led $\frac{1}{3(2x+1)^2}$ og kvotient $\frac{1}{(2x+1)^2}$. Dens sum er

$$\frac{1}{3(2x+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} .$$

Vi har således

$$0 < g(x) < \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}, \qquad x>0.$$

Rækken (*) har således for ethvert $x>0$ positive led, og den har majorantrækken $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right)$, som åbenbart er konvergent med summen $\frac{1}{12x}$. Dermed er konvergensen af rækken (*) bevist, og vi har samtidig fundet, at

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}, \qquad x>0.$$

Vi kan altså skrive

$$\mu(x) = \frac{\theta}{12x},$$

hvor θ er et af x afhængigt tal mellem 0 og 1.

Der gælder altså for et passende a

$$\Gamma(x) = a\,x^{x-\frac{1}{2}}\,e^{-x+\frac{\theta}{12x}}, \qquad x>0.$$

For at bestemme a anvender vi nu Legendres formel og får for $x>0$

$$a\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}+\mu\left(\frac{x}{2}\right)} a\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+1}{2}+\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\, a\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\mu(x)},$$

hvoraf ved forkortning

$$a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\; e^{\mu(x)-\mu\left(\frac{x}{2}\right)-\mu\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

Nu gælder som bekendt $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ for $x\to\infty$ [thi sættes $\frac{1}{x}=h$, har man $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+h)^{\frac{1}{h}}$, altså $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{\log(1+h)}{h}$, som $\to 1$ for $h\to 0$]. Følgelig gælder $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \to e^{\frac{1}{2}}$. Da ifølge det ovenstående $\mu(x)\to 0$ for $x\to\infty$, slutter vi, at

$$a=\sqrt{2\pi}.$$

Vi har hermed bevist Stirlings formel

(9)
$$\boxed{\begin{aligned}&\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\mu(x)}, \qquad x>0\\ &\mu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(x+n+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right]=\frac{\theta}{12x},\quad 0<\theta<1.\end{aligned}}$$

Sættes specielt $x=n$ og multipliceres med n, fås

(10)
$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}},}$$

hvoraf den mærkværdige formel

(11)
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.}$$

Gauss' multiplikationsformel.

Dette er en almindeliggørelse af Legendres formel.

For et vilkårligt helt $p\geq 2$ vil vi betragte funktionen

$$f(x)=\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

Den er defineret, når intet af tallene $\frac{x}{p}, \frac{x+1}{p}, \ldots, \frac{x+p-1}{p}$ er et af tallene $0,-1,-2,\ldots$, d.v.s. for $x\neq 0,-1,-2,\ldots$. Vi finder

$$f(x+1) = \Gamma\left(\tfrac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{x+p-1}{p}\right)\Gamma\left(\tfrac{x}{p}+1\right) = \tfrac{x}{p}\,f(x).$$

Følgelig tilfredsstiller funktionen

$$g(x) = p^x\,\Gamma\left(\tfrac{x}{p}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{x+p-1}{p}\right)$$

funktionalligningen $g(x+1) = x\,g(x)$. På $]0,+\infty[$ er $g(x)$ som produkt af logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks. Følgelig gælder for et passende a

$$\Gamma(x) = a\,p^x\,\Gamma\left(\tfrac{x}{p}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{x+p-1}{p}\right).$$

For at bestemme a benytter vi Stirlings formel. Vi får for $x>0$

$$\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\mu(x)} = a\,p^x\prod_{\nu=0}^{p-1}\sqrt{2\pi}\left(\tfrac{x+\nu}{p}\right)^{\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x+\nu}{p}+\mu\left(\frac{x+\nu}{p}\right)},$$

hvoraf ved forkortning

$$e^{\mu(x)} = a\,(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}p^{\frac{1}{2}}\prod_{\nu=1}^{p-1}\left(1+\tfrac{\nu}{x}\right)^{\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\nu}{p}}\,e^{\mu\left(\frac{x+\nu}{p}\right)}.$$

For $\nu=0$ er $\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\nu}{p}} = 1$. For $\nu>0$ gælder $\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x}{\nu}} \to e$ og altså $\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}} = \left[\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x}{\nu}}\right]^{\frac{\nu}{x}\left(\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}\right)} \to e^{\frac{\nu}{p}}$ for $x\to\infty$.
Da $\mu(x)\to 0$ for $x\to\infty$ får vi derfor

$$1 = a\,(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\,p^{\frac{1}{2}},$$

og har således bevist Gauss' formel

$$(12)\qquad \boxed{\Gamma\left(\tfrac{x}{p}\right)\Gamma\left(\tfrac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\tfrac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\,\Gamma(x).}$$

For $p=2$ er det Legendres formel.

Sammenhæng med sinusfunktionen.

For gammafunktionen gælder endnu en vigtig funktionalligning. For at udlede den sætter vi

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\sin\pi x.$$

Denne funktion er foreløbig kun defineret for $x \neq$ de hele tal. Når x erstattes med $x+1$, erstattes $\Gamma(x)$ med $x\,\Gamma(x)$, og $\Gamma(1-x)$ med $\Gamma(-x)=\frac{\Gamma(1-x)}{-x}$, medens $\sin\pi x$ erstattes med $-\sin\pi x$. Funktionen $\varphi(x)$ er derfor periodisk med perioden 1:

$$\varphi(x+1)=\varphi(x).$$

Hvis vi i Legendres formel

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\,\Gamma(x)$$

erstatter x med $1-x$ fås

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,2^{x}\,\Gamma(1-x).$$

Heraf følger

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$=\pi\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\sin\pi x=\pi\,\varphi(x).$$

Funktionen $\varphi(x)$ tilfredsstiller altså funktionalligningen

$$(+)\qquad \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\pi\,\varphi(x).$$

Funktionen $\varphi(x)$ er åbenbart vilkårligt ofte differentiabel. Af gammafunktionens funktionalligning ses, at

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(1+x)}{x}\,\Gamma(1-x)\sin\pi x=\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x)\,\frac{\sin\pi x}{x}.$$

Nu er den ved

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x} & \text{for } x\neq 0\\ \pi & \text{for } x=0\end{cases}$$

definerede funktion vilkårligt ofte differentiabel på $]-\infty,\infty[$. Sættes $\varphi(0)=\left(\Gamma(1)\right)^2h(0)=\pi$ ses, at den således udvidede funktion er vilkårligt ofte differentiabel på $]-1,1[$. Sætter vi $\varphi(n)=\pi$ for alle hele n, er den således udvidede funktion en periodisk funktion defineret på $]-\infty,+\infty[$, der er vilkårligt ofte differentiabel på $]-\infty,+\infty[$. For $0\leq x<1$ er $\varphi(x)>0$, det samme gælder da ifølge periodiciteten for alle x. Da funktionalligningen $(+)$

gælder for alle ikke-hele x, må den af kontinuitetsgrunde også gælde for hele x.

Vort mål er at vise, at $\varphi(x)$ er konstant. Hertil betragtes funktionen $g(x) = \log \varphi(x)$. Denne funktion er ligeledes vilkårligt ofte differentiabel. Af (†) ses, at

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(x) + \log \pi .$$

Differentieres to gange, fås

$$(\Delta) \qquad \frac{1}{4} g''\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} g''\left(\frac{x+1}{2}\right) = g''(x).$$

Lad nu M betegne $\sup |g''(x)|$. Da $g''(x)$ er kontinuert og periodisk, er $M < +\infty$. Af (Δ) ses da umiddelbart, at

$$|g''(x)| \leq \frac{1}{4} M + \frac{1}{4} M = \frac{1}{2} M$$

for alle x. Altså er $M \leq \frac{1}{2} M$, hvoraf ses, at $M = 0$. Følgelig er $g''(x) = 0$ for alle x, altså $g(x) = \alpha x + \beta$. Da $g(x)$ er periodisk, må vi have $\alpha = 0$. Altså er $g(x)$ konstant og følgelig også $\varphi(x)$ konstant. Da $\varphi(0) = \pi$, er $\varphi(x) = \pi$ for alle x.

Vi har hermed bevist følgende mærkelige formel, som skyldes Euler:

$$(13) \qquad \boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.}$$

Ved brug af gammafunktionens funktionalligning kan formlen omskrives til

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\,\Gamma(x)\,\Gamma(-x)} .$$

Anvendes her produktfremstillingen (5), hvorefter

$$\Gamma(x) = e^{-Cx} \frac{1}{x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}, \qquad \Gamma(-x) = e^{Cx} \frac{1}{-x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{\nu}}}{1-\frac{x}{\nu}},$$

fås følgende produktfremstilling for sinusfunktionen

$$(14) \qquad \boxed{\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).}$$

Anvendelser på bestemte integraler.

Sætter man i (1) $e^{-t}=\tau$, fås, idet man efter substitutionen skriver t i stedet for τ:

$$\Gamma(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt,\qquad x>0.$$

På lignende måde fås ved substitutionen $t^x=\tau$:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x}\,dt,\qquad x>0,$$

hvoraf

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_0^\infty e^{-t^x}dt,\qquad x>0.$$

For $x=2$ fås

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Sætter man i (6) $t=\frac{\tau}{\tau+1}$, henholdsvis $t=\sin^2\varphi$, fås:

$$\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

og $\qquad x>0,\ y>0.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1}d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Sætter man $y=1-x$ fås ved brug af (13)

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

$$\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi x},\qquad 0<x<1.$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi)^{2x-1}d\varphi=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Stirlings række.

For funktionen $\mu(x)$ i Stirlings formel kan vi finde andre udtryk. Man har

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)\int_0^1\frac{1}{t+x}dt-1$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{t+x}-1\right)dt=\int_0^1\frac{\frac{1}{2}-t}{t+x}dt.$$

Vi indfører nu Bernoullis polynomier $B_p(t)$ og Bernoullis tal B_p, $p=0,1,2,\dots$, ved følgende forskrift:

$$B_0(t)=1 \qquad\qquad B_0=B_0(0)=1$$

$$B_p(t)=p\int_0^t B_{p-1}(\tau)\,d\tau+B_p, \text{ hvor } B_p=B_p(0) \text{ vælges, så } \int_0^1 B_p(t)\,dt=0.$$

Man finder

$$B_1(t)=t-\tfrac{1}{2} \qquad\qquad B_1=B_1(0)=-\tfrac{1}{2}$$

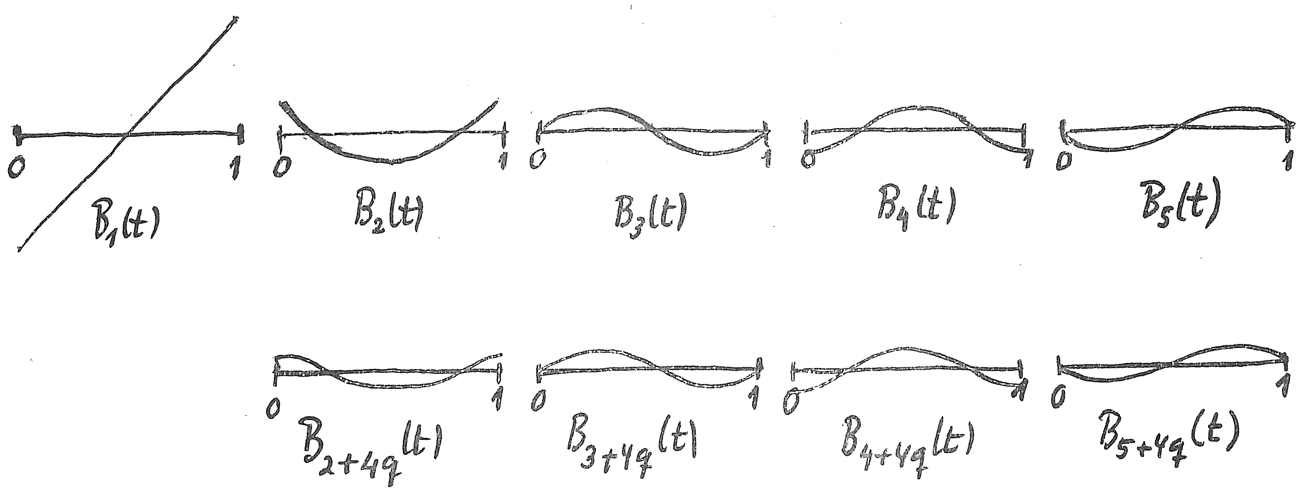
$$B_2(t)=t^2-t+\tfrac{1}{6} \qquad\qquad B_2=B_2(0)=\tfrac{1}{6}$$

$$B_3(t)=t^3-\tfrac{3}{2}t^2+\tfrac{1}{2}t \qquad\qquad B_3=B_3(0)=0$$

$$B_4(t)=t^4-2t^3+t^2-\tfrac{1}{30} \qquad\qquad B_4=B_4(0)=-\tfrac{1}{30}$$

$$B_5(t)=t^5-\tfrac{5}{2}t^4+\tfrac{5}{3}t^3-\tfrac{1}{6}t \qquad\qquad B_5=B_5(0)=0.$$

Ved simple geometriske betragtninger ser man ud fra definitionen, at forløbet i $[0,1]$ er følgende:



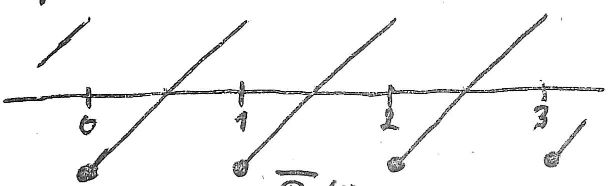
Grafen er skiftevis symmetrisk om punktet $(\frac{1}{2},0)$ og om linien $t=\frac{1}{2}$. Figurerne beskriver fortegnsvariation og monotoniintervaller. Af betydning for det følgende er: For ulige $p\geq 3$ er $B_p(0)=B_p(1)=B_p=0$. For lige $p\geq 2$ er $B_p(0)=B_p(1)=B_p$ skiftevis positiv og negativ, og differensen $B_p-B_p(t)$ er for $0<t<1$ af konstant fortegn, nemlig af samme fortegn som B_p. Fremgangsmåden ved polynomiernes dannelse viser, at alle B_p er rationale. Vi anfører en tabel over tallene B_p:

p	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
B_p	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

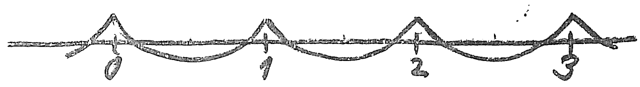
Med $\overline{B_p}(t)$ betegner vi den periodiske funktion med perioden 1, som i $[0,1[$ stemmer overens med $B_p(t)$. Da gælder åbenbart for $p \geqq 2$

$$\overline{B_p}(t) = p\int_0^t \overline{B_{p-1}}(t)\,dt + B_p \quad \text{for alle } t.$$

$\overline{B_1}(t)$ er diskontinuert, medens $\overline{B_p}(t)$ er kontinuert for $p \geqq 2$.



$\overline{B_1}(t)$



$\overline{B_2}(t)$

Udtrykket for $g(x)$ kan nu skrives

$$g(x) = \int_0^1 -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt, \quad \text{hvoraf} \quad g(x+n) = \int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt.$$

Heraf fås

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt.$$

Da integranden konvergerer mod 0 for $t \to \infty$, kan vi også skrive

$$\mu(x) = \int_0^{\infty} -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt.$$

Ved gentagen anvendelse af partiel integration fås

$$\int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}\,dt = \left[-\frac{\overline{B_2}(t)}{2(t+x)}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_2}(t)}{2(t+x)^2}\,dt$$

$$\int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_2}(t)}{2(t+x)^2}\,dt = \left[-\frac{\overline{B_3}(t)}{2\cdot 3(t+x)^2}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_3}(t)}{3(t+x)^3}\,dt$$

$\cdots$

$$\int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_{p-1}}(t)}{(p-1)(t+x)^{p-1}}\,dt = \left[-\frac{\overline{B_p}(t)}{(p-1)p(t+x)^{p-1}}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_p}(t)}{p(t+x)^p}\,dt,$$

hvoraf

$$\int_0^n -\frac{\overline{B}_1(t)}{t+x}dt = \left[-\frac{\overline{B}_2(t)}{2(t+x)}\right]_0^n + \left[-\frac{\overline{B}_3(t)}{2\cdot 3(t+x)^2}\right]_0^n + \dots + \left[-\frac{\overline{B}_p(t)}{(p-1)p(t+x)^{p-1}}\right]_0^n + \int_0^n -\frac{\overline{B}_p(t)}{p(t+x)^p}dt$$

$$= \frac{B_2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+x}\right) + \frac{B_3}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(n+x)^2}\right) + \dots + \frac{B_p}{(p-1)p}\left(\frac{1}{x^{p-1}}-\frac{1}{(n+x)^{p-1}}\right) + \int_0^n -\frac{\overline{B}_p(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

De to sidste led kan trækkes sammen til

$$\int_0^n \frac{B_p - \overline{B}_p(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Idet vi lader $n \to \infty$ fås derfor

$$\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_3}{2\cdot 3x^2} + \dots + \frac{B_{p-1}}{(p-2)(p-1)x^{p-2}} + \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{B_p - \overline{B}_p(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Da integranden konvergerer mod 0 for $t \to \infty$, kan vi også skrive

$$\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_3}{2\cdot 3x^2} + \dots + \frac{B_{p-1}}{(p-2)(p-1)x^{p-2}} + \int_0^\infty \frac{B_p - \overline{B}_p(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Tallet p antages nu lige, $=2q$. Idet det erindres, at $B_\nu = 0$ for $\nu = 3, 5, \dots$, fås da

$$\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \dots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)x^{2q-3}} + \int_0^\infty \frac{B_{2q} - \overline{B}_{2q}(t)}{2q(t+x)^{2q}}dt.$$

Idet det erindres, at B_ν for $\nu = 2, 4, \dots$ er skiftevis positiv og negativ, og at $B_{2q} - B_{2q}(t)$ har konstant fortegn i $0<t<1$, nemlig samme fortegn som B_{2q}, hvoraf følger, at integralet har samme fortegn som B_{2q}, ser vi, at leddene i summen er skiftevis positive og negative. Hermed er vist, at <u>afsnittene i Stirlings række</u>

$$\frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \dots$$

<u>er skiftevis</u> $> \mu(x)$ <u>og</u> $< \mu(x)$. Vi får derfor for hvert q

$$(15)\quad \boxed{\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \cdots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)x^{2q-3}} + \theta\frac{B_{2q}}{(2q-1)2q\,x^{2q-1}}, \quad 0<\theta<1.}$$

Tallet θ afhænger naturligvis af q og x.

For $q=1$ er det den tidligere udledte formel $\mu(x) = \frac{\theta}{12x}$.

Det var nærliggende at formode, at restleddet i den fundne formel ville gå mod 0 for $q \to \infty$, altså at Stirlings række ville være konvergent med summen $\mu(x)$. Stirlings række er imidlertid <u>divergent</u>. Formlen for $\mu(x)$ viser, at forskellen mellem $\mu(x)$ og det $(q-1)^{te}$ afsnit af Stirlings række går mod 0, ikke for $q \to \infty$ men <u>for $x \to \infty$</u>, og så stærkt, at endda forholdet mellem restleddet og det sidste led i afsnittet går mod 0. Man udtrykker dette ved at sige, at Stirlings række er en <u>asymptotisk række</u> for funktionen $\mu(x)$.

Vælger man for eksempel $q=4$, finder man

$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7}.$$

Herved har man et middel til at beregne $\Gamma(x)$ med stor nøjagtighed. For eksempel får man for $4 \leq x \leq 5$ ved at benytte dette udtryk for $\mu(x)$ (idet restleddet bortkastes) værdien af $\Gamma(x)$ med en fejl $< 10^{-6}$. Ved brug af funktionalligningen kan man herudfra finde $\Gamma(x)$ for eksempel for $1 \leq x \leq 2$ med samme nøjagtighed.

<u>Gammafunktionen for kompleks variabel.</u>

Vi vil nu vise, at den for reelt $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ definerede funktion $\Gamma(x)$ kan udvides til en meromorf funktion $\Gamma(z)$ defineret i hele $z = x+iy$-planen med poler i punkterne $0, -1, -2, \dots$. Dette kan gøres på basis af forskellige af vore formler.

Vi vælger at gå ud fra (1). Erstattes x med z får vi som definition af gammafunktionen for kompleks variabel

(1') $$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.}$$

Her og i senere formler står a^w for reelt $a>0$ og komplekst w for $e^{(\log a)w}$, hvor log er den reelle værdi af logaritmen.
Idet
$$|e^{-t}\, t^{z-1}| = e^{-t}\, t^{x-1},$$
er integralet absolut konvergent for ethvert z i halvplanen $\{z \mid x>0\}$. Sættes for $0<a<1<b<+\infty$
$$f_{a,b}(z) = \int_a^b e^{-t}\, t^{z-1}\, dt,$$
er $f_{a,b}(z)$ holomorf i $\{z \mid x>0\}$. [Thi man ser let, at $f_{a,b}(z)$ er differentiabel med den afledede $f'_{a,b}(z) = \int_a^b e^{-t}(\log t)\, t^{z-1}\, dt.$]
Vælges $0<x_0<x_1<+\infty$, finder man for $x_0 \leq x \leq x_1$
$$|\Gamma(z) - f_{a,b}(z)| = \left|\int_0^a + \int_b^\infty\right| \leq \int_0^a e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_b^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$
$$\leq \int_0^a e^{-t}\, t^{x_0-1}\, dt + \int_b^\infty e^{-t}\, t^{x_1-1}\, dt.$$
For $a \to 0$, $b \to \infty$ går højre side mod 0. Altså konvergerer $f_{a,b}(z)$ ligeligt mod $\Gamma(z)$ i strimlen $\{z \mid 0<x_0 \leq x \leq x_1<+\infty\}$. Følgelig er $\Gamma(z)$ holomorf i halvplanen $\{z \mid x>0\}$.

<u>Ved ovenstående formel (1') er funktionen</u> $\Gamma(x)$, $x>0$, <u>således udvidet til en holomorf funktion</u> $\Gamma(z)$ <u>i halvplanen</u> $\{z \mid x>0\}$.

I halvplanen $\{z \mid x>0\}$ må gælde funktionalligningen

(2') $$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).}$$

Thi $\Gamma(z+1)$ og $z\Gamma(z)$ er begge holomorfe i halvplanen, og de stemmer overens på den positive reelle akse. Ifølge identitetssætningen stemmer de da overens i hele halvplanen.

I halvplanen $\{z \mid x>0\}$ gælder altså $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Højre side fremstiller imidlertid en meromorf funktion i halvplanen $\{z \mid x > -1\}$. Ved formlen $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ udvides $\Gamma(z)$ altså til en meromorf funktion i $\{z \mid x>-1\}$. Den har åbenbart den ene pol $z=0$ af første orden med residuet 1. Efter denne udvidelse fremstiller højre side i formlen $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ en meromorf funktion i halvplanen $\{z \mid x > -2\}$. Ved formlen $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ udvides $\Gamma(z)$ altså til en meromorf funktion i $\{z \mid x>-2\}$. Foruden $z=0$ har den den ene pol $z=-1$ af første orden med residuet -1. Fortsættes således får vi $\Gamma(z)$ udvidet til en meromorf funktion i $\mathbb{C}$ med poler i punkterne $z = 0, -1, -2, \dots$ (og kun i disse punkter). Polerne er alle af første orden og residuet i $-n$ er $\frac{(-1)^n}{n!}$. For den udvidede funktion gælder (2') for alle $z \neq 0, -1, -2, \dots$.

For alle $z \neq 0, -1, -2, \dots$ gælder Legendres formel

$$(8') \qquad \boxed{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)}$$

og Gauss' formel

$$(12') \qquad \boxed{\Gamma\left(\frac{z}{p}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{z-\frac{1}{2}}}\Gamma(z),}$$

Thi i begge tilfælde står på begge sider en holomorf funktion i $\{z \mid z \neq 0, -1, -2, \dots\}$, og funktionerne stemmer overens på den reelle akse. Analogt fås for alle ikke hele z

$$(13') \qquad \boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.}$$

Vi ved på forhånd, at $\Gamma(z) \neq 0$ for reelle z. Af (13') aflæses, at $\Gamma(z) \neq 0$ for ikke-reelle z. <u>Den meromorfe funktion</u>

$\Gamma(z)$ er altså nulpunktsfri. Der gælder altså: Funktionen $\frac{1}{\Gamma(z)}$ er en i hele $\mathbb{C}$ holomorf funktion med nulpunkter i punkterne $z=0,-1,-2,\dots$ (og kun i disse punkter).

Vi vil vise, at der for $z \neq 0,-1,-2,\dots$ gælder

$$(4') \qquad \boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}}$$

$$(5') \qquad \boxed{\Gamma(z) = e^{-Cz}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{i}}}{1+\frac{z}{i}}},$$

d.v.s. at der for alle z gælder

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z} = e^{Cz} z \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}}.$$

Nærmere bestemt vil vi vise, at de sidste formler gælder med ligelig konvergens i enhver cirkelskive $K(r)=\{z \mid |z|<r\}$.

Det er nok at vise, at

$$\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z} = e^{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z} z\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}}$$

konvergerer ligeligt i enhver skive $K(r)$, thi grænsefunktionen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\, n^z} = e^{Cz} z\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}}$$

må da være holomorf i $\mathbb{C}$, og da den for reelle z stemmer overens med $\frac{1}{\Gamma(z)}$ må den være $\frac{1}{\Gamma(z)}$. Da faktoren $e^{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}$ konvergerer ligeligt mod e^{Cz} på enhver skive $K(r)$, er det nok at vise, at produktet $\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}}$ konvergerer ligeligt på skiven $K(m)=\{z \mid |z|\leq m\}$ for ethvert m. Hertil benytter vi, at for $i \geq m+1$ og $z\in K(m)$ er

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}} = e^{\log\left(1+\frac{z}{i}\right)-\frac{z}{i}},$$

hvor $\log\left(1+\frac{z}{i}\right)$ er hovedværdien. Da $\left|\frac{z}{i}\right|<1$, fås

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}} = e^{\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}\left(\frac{z}{i}\right)^q},$$

altså
$$\prod_{i=m+1}^{n}\left(1+\frac{z}{i}\right)e^{-\frac{z}{i}} = e^{\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}\left(\frac{z}{i}\right)^q}.$$

Men i $K(m)$ er for ethvert $i \geq m+1$

$$\left|\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}\left(\frac{z}{i}\right)^q\right| \leq \sum_{q=2}^{\infty}\left(\frac{m}{i}\right)^q = \left(\frac{m}{i}\right)^2\frac{1}{1-\frac{m}{i}} \leq \left(\frac{m}{i}\right)^2\frac{1}{1-\frac{m}{m+1}} = \frac{m^2(m+1)}{i^2}.$$

Da $\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ er konvergent, slutter vi, at $\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{q}\left(\frac{z}{i}\right)^q\right)$ er ligeligt konvergent i $K(m)$, og dermed det ønskede.

Betafunktionens udvidelse til komplekse variable udføres analogt med gammafunktionens. Man finder, at

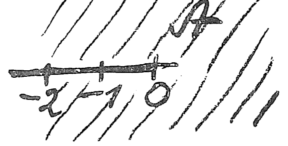
$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt$$

er defineret for komplekse $z=x+iy$ og $w=u+iv$ med $x>0$, $u>0$, og at

$$(6') \qquad \boxed{B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}}.$$

Sluttelig vil vi behandle Stirlings formel og Stirlings række. Her indtræder en forskel, idet vurderingerne opad og nedad for funktionen $\mu(x)$ nu må erstattes af vurderinger af komplekse funktioner.

Vi betragter den opskårne plan $A = \mathbb{C}\setminus\{z \mid z \text{ reel} \leq 0\}$. I denne gælder



$$(9') \qquad \Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z+\mu(z)}, \text{ hvor}$$

$$(15') \qquad \mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(z+n+\tfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{z+n}\right)-1\right]$$
$$= \frac{B_2}{2z} + \frac{B_4}{3\cdot 4 z^3} + \cdots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)z^{2q-3}} + \int_0^{\infty}\frac{B_{2q}-\overline{B}_{2q}(t)}{2q(t+z)^{2q}}\,dt.$$

Her står $z^{z-\frac{1}{2}}$ for $e^{(\log z)(z-\frac{1}{2})}$, hvor log er hovedværdien, og i udtrykket for $\mu(z)$ er log også hovedværdien; [bemærk, at $z \in A$ medfører $z+n \in A$ for alle n og dermed $1+\frac{1}{z+n} \in A$ for alle n].

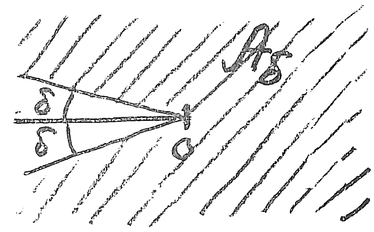
Det er nok at vise, at $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(z+n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{z+n})-1\right]$ fremstiller en holomorf funktion i A; thi da er funktionen $\sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z+\mu(z)}$ en holomorf udvidelse af $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\mu(x)}$ til A og må altså være $\Gamma(z)$, og omregningen af $\mu(z)$ ved hjælp af Bernoulli polynomierne er nøjagtig som i det reelle tilfælde.

Vi har for $z \in A$

$$g(z) = (z+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{z})-1 = \tfrac{1}{2}(2z+1)\log\frac{1+\frac{1}{2z+1}}{1-\frac{1}{2z+1}}-1,$$

$$g(z+n) = (z+n+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{z+n})-1 = \tfrac{1}{2}(2(z+n)+1)\log\frac{1+\frac{1}{2(z+n)+1}}{1-\frac{1}{2(z+n)+1}}-1.$$

Betragt for $\delta \in]0,\frac{1}{2}\pi]$ vinkelrummet $A_\delta = \{z \neq 0 \mid |\arg z| < \pi-\delta\}$. For $z \in A_\delta$ gælder $2(z+n)+1 \in (2n+1)+A_\delta$, altså $|2(z+n)+1| > (2n+1)\sin\delta$, som er >1 fra et vist trin.



Fra et vist trin kan vi derfor benytte logaritmerækken, som giver

$$g(z+n) = \frac{1}{3(2(z+n)+1)^2} + \frac{1}{5(2(z+n)+1)^4} + \cdots .$$

Fra et vist trin gælder derfor for alle $z \in A_\delta$

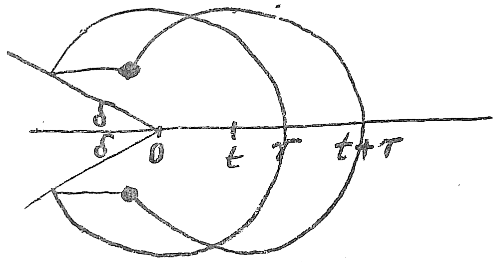
$$|g(z+n)| \leq \frac{1}{3}\left[\frac{1}{((2n+1)\sin\delta)^2} + \frac{1}{((2n+1)\sin\delta)^4} + \cdots\right] = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2\sin^2\delta - 1}.$$

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} g(z+n)$ har altså fra et vist trin en konvergent majorantrække i A_δ. Heraf fremgår det ønskede.

For restleddet $\int_0^\infty \frac{B_{2q}-\bar{B}_{2q}(t)}{2q(t+z)^{2q}}\,dt$ får vi i A_δ vurderingen

$$\left|\int_0^\infty \frac{B_{2q}-\overline{B_{2q}}(t)}{2q(t+z)^{2q}}\,dt\right| \leq \int_0^\infty \frac{|B_{2q}-\overline{B_{2q}}(t)|}{2q\,|t+z|^{2q}}\,dt \leq \frac{C_q}{2q}\int_0^\infty \frac{dt}{|t+z|^{2q}},$$

hvor $C_q = \max|B_{2q}-B_{2q}(t)|$. Af diskussionen af Bernoulli polynomiernes forløb i $[0,1]$ ser man, at maximet indtræffer for $t=\frac{1}{2}$, altså at $C_q = |B_{2q}-B_{2q}(\frac{1}{2})|$. For $z\in A_\delta$, $|z|=r$ ligger $t+z$ på den cirkelbue med centrum t og radius r, der har endepunkterne $t-r\cos\delta \pm ir\sin\delta$ og går gennem $t+r$. Heraf ses at $|t+z| \geq |t-r\cos\delta+ir\sin\delta|$, altså $|t+z|^2 \geq (t-r\cos\delta)^2+(r\sin\delta)^2$. Følgelig er



$$\int_0^\infty \frac{dt}{|t+z|^{2q}} \leq \int_0^\infty \frac{dt}{[(t-r\cos\delta)^2+(r\sin\delta)^2]^q} = \int_{-r\cos\delta}^\infty \frac{dt}{[t^2+(r\sin\delta)^2]^q}$$

$$< \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{[t^2+(r\sin\delta)^2]^q} = \frac{1}{(r\sin\delta)^{2q-1}}\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{(u^2+1)^q} = \frac{D_q}{(\sin\delta)^{2q-1}}\,\frac{1}{|z|^{2q-1}},$$

hvor (som bekendt) $D_q = \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{(u^2+1)^q} = \frac{\pi}{2^{2q-2}}\frac{(2q-2)!}{[(q-1)!]^2}$. Vi får altså i A_δ for restleddet vurderingen

$$\left|\int_0^\infty \frac{B_{2q}-\overline{B_{2q}}(t)}{2q(t+z)^{2q}}\,dt\right| < \frac{E_{q,\delta}}{|z|^{2q-1}}, \quad \text{hvor } E_{q,\delta} = \frac{C_q D_q}{2q(\sin\delta)^{2q-1}}.$$

Vi har altså i A_δ

$$(15'') \quad \boxed{\mu(z) = \frac{B_2}{2z}+\frac{B_4}{3\cdot 4z^3}+\cdots+\frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-1)z^{2q-3}}+\theta\frac{E_{q,\delta}}{z^{2q-1}}, \quad |\theta|<1.}$$

Vælges speciel $q=1$, fås, idet $C_1 = B_2 - B_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ og $D_1=\pi$, altså $E_{1,\delta} = \frac{\pi}{8\sin\delta}$, at der i A_δ gælder

$$(9'') \quad \boxed{|\mu(z)| < \frac{\frac{\pi}{8\sin\delta}}{|z|},}$$

<u>Slutbemærkning</u>. Funktionalligningen $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ kan også skrives $\log\Gamma(z+1)-\log\Gamma(z)=\log z$. En ligning af formen $F(z+1)-F(z)=G(z)$, hvor $G(z)$ er en given funktion, er det simp-

leste tilfælde af en differensligning. Gammafunktionens teori indordnes derfor naturligt under differensregningen. Det samme gælder Bernoulli polynomiernes teori. Jfr. den udførlige fremstilling i N. E. Nørlund, Differenzenrechnung. 1931.

Opgaver.

1. For hele positive tal n og m gælder

$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}dt = \frac{\Gamma(\frac{m}{n})\sqrt{\pi}}{n\,\Gamma(\frac{m}{n}+\frac{1}{2})}.$$

2. $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\sqrt{32\pi}}.$$

3. $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{16}\,\pi}.$$

4. $$\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi}.$$

5. $$\int_x^{x+1} \log\Gamma(t)\,dt = \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x \qquad (x>0).$$

6. $$\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \quad \text{(Wallis' produkt).}$$

7. $$\pi = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}.$$

8. $$\cos\pi x = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2\nu-1)^2}\right).$$

9. Idet $f(t)$ er kontinuert differentiabel på $[0,n]$, skal man vise, at

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)-\int_0^n f(t)\,dt = \int_0^n \overline{B}_1(t)\,f'(t)\,dt.$$

Udled herved under forudsætning af, at $f(t)$ er $2k$ gange kontinuert differentiabel, Euler-Maclaurins sumformel

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)-\int_0^n f(t)\,dt =$$

$$= \frac{B_2}{2!}[f'(n)-f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n)-f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]$$
$$- \int_0^n \frac{\overline{B_{2k}(t)}}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,dt.$$

Find herved ved at sætte $f(t) = \frac{1}{1+t}$ for Eulers konstant udtrykket

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k} - \int_0^\infty \frac{\overline{B_{2k}(t)}}{(1+t)^{2k+1}}\,dt,$$

og vis derved, at tallene

$$\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k}$$

er skiftevis mindre og større end C. Beregn de første af disse tal. — Prøv også at sætte $f(t) = \frac{1}{5+t}$ og find derved under brug af $\log 5 = 1,6094379\ldots$ værdien af C med 6 rigtige decimaler.

10. Vis (for eksempel ved induktion) at

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}.$$

Udtryk herved for $k = 1, 2, \ldots$ potenssummen

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

som et polynomium i n.

11. $$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_{n-\nu}\, x^\nu.$$

$$B_0 = 1, \quad B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0.$$

12. $$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < 2\pi$$

Kap. 2. Konform afbildning.

Lad A og B være åbne sammenhængende mængder i $\hat{R}^2$. Ved en konform afbildning af A på B (med bevarelse af omløbsretningen) forstås en bijektiv C^1-afbildning $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ af A på B, for hvilken den ved differentialet

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

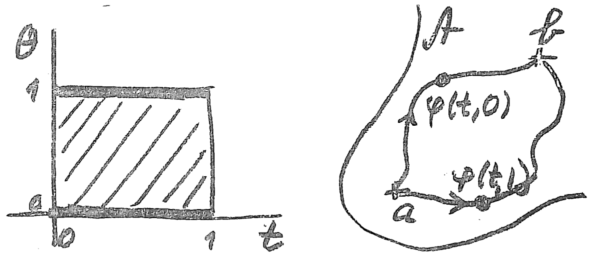
bestemte afbildning $(dx,dy) \mapsto (du,dv)$ for hvert $(x,y) \in A$ er en ligedannethed (med bevarelse af omløbsretningen), d.v.s. for hvilken funktionalmatricen for hvert $(x,y) \in A$ har formen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Opfattes $\hat{R}^2$ som $\hat{C}$ og sættes $z = x+iy$, $w = u+iv$ er dette ensbetydende med en bijektiv afbildning f af A på B ved en holomorf funktion $w = f(z)$, for hvilken $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A$. (Jfr §4; her og i det følgende er paragrafhenvisningerne til Mat. 2, MA Kap. 2.) Det sidste krav, at $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A$, er imidlertid (§15) en følge af afbildningens bijektivitet. Vi har altså: En konform afbildning af A på B er en bijektiv holomorf afbildning af A på B. En konform afbildning af A er herefter det samme som en injektiv holomorf afbildning $f: A \to \hat{C}$, thi for en sådan er billedet $B = f(A)$ en åben sammenhængende mængde.

Når A og B er åbne sammenhængende mængder i $\hat{C}$ (eller $\hat{R}^2$), kaldes A konformt ækvivalent med B, og vi skriver $A \sim B$, hvis der findes en konform afbildning af A på B. Dette er en ækvivalensrelation i mængden af åbne sammenhængende mængder, thi: 1) $A \sim A$, da den identiske afbildning er konform, 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, da den omvendte afbildning til en konform afbildning er konform, 3) $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$, thi hvis $f: A \to B$ og $g: B \to C$ er konforme, er $g \circ f$ en konform afbildning af A på C. De åbne sammenhængende mængder i $\hat{C}$ falder altså i klasser af konformt ækvivalente.

Vi vil indskrænke os til at betragte konform afbildning af enkeltsammenhængende mængder. En åben sammenhængende mængde A i $\hat{C}$ kaldes enkeltsammenhængende, hvis følgende gælder. Betragt i (t,θ)-planen kvadratet $[0,1]\times[0,1]$ og mængden $[0,1]\times\{0,1\}$ bestående af dets vandrette sider. Der forlanges nu, at enhver kontinuert afbildning $\varphi: [0,1]\times\{0,1\} \to A$, for hvilken $\varphi(0,0)=\varphi(0,1)=a$,



$\varphi(1,0)=\varphi(1,1)=b$, skal kunne udvides til en kontinuert afbildning $\varphi: [0,1]\times[0,1] \to A$, for hvilken $\varphi(0,\theta)=a$, $\varphi(1,\theta)=b$ for alle $\theta\in[0,1]$; (for nemheds skyld har vi betegnet den udvidede afbildning med samme bogstav som den oprindelige). Geometrisk udtrykt: Når to punkter a og b i A (som kan være ens eller forskellige) er forbundet i A med to kontinuerte kurver $z=\varphi(t,0)$, $t\in[0,1]$ og $z=\varphi(t,1)$, $t\in[0,1]$, skal den første kunne overføres kontinuert i den anden ved en skare af kurver $z=\varphi(t,\theta)$, $t\in[0,1]$ i A, hvor $\theta\in[0,1]$. [„Kontinuert overførsel" betyder, at $\varphi(t,\theta)$ skal være kontinuert i $[0,1]\times[0,1]$, ikke blot kontinuert i hver af de variable for fast værdi af den anden variable.] Det er klart, at hvis A er enkeltsammenhængende og A er konformt ækvivalent med B, er B også enkeltsammenhængende. Hvis en klasse af konformt ækvivalente åbne sammenhængende mængder blot indeholder een enkeltsammenhængende mængde, består den altså af lutter enkeltsammenhængende mængder.

Som eksempler på åbne enkeltsammenhængende mængder nævnes hele $\grave{C}$, enhver åben halvplan, enhver åben cirkelskive, ethvert åbent vinkelrum. En åben cirkelring er ikke enkeltsammenhængende.

Vi begynder med at vise:

Mængden $\grave{C}$ alene udgør en ækvivalensklasse. De konforme afbildninger $f: \grave{C} \to \grave{C}$ er de lineære funktioner $f(z) = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$.

1) En lineær funktion $f(z) = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$, er åbenbart en konform afbildning af $\grave{C}$ på $\grave{C}$.

2) Antag, at $f: \grave{C} \to \grave{C}$ er holomorf og injektiv. Det skal da vises, at $f(\grave{C}) = \grave{C}$, og at f har formen $f(z) = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$. — Da f er holomorf, fremstilles f ved en potensrække

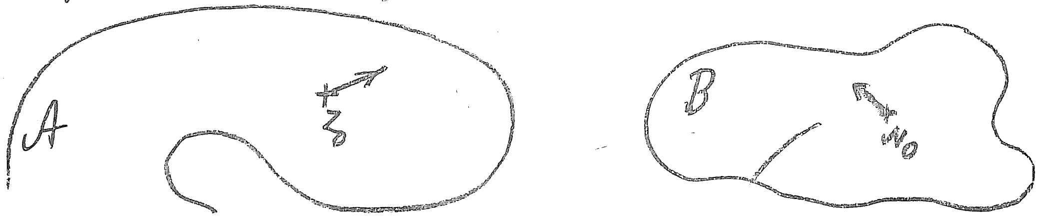
$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots .$$

Da f er injektiv, er billedet af $\{z \mid |z| < 1\}$ en åben mængde O og billedet af $\{z \mid |z| > 1\}$ dis punkt med O, altså ikke overalt tæt i $\grave{C}$, hvoraf følger (§20), at der kun er endelig mange n, for hvilke $a_n \neq 0$. Altså er f et polynomium. Følgelig er f' et polynomium. Idet f er injektiv, er $f'(z) \neq 0$ for alle z. Ifølge algebraens fundamentalsætning (§2) er f' altså en konstant $\neq 0$.

Altså er $f(z)=a_0+a_1 z$, $a_1 \neq 0$.

Tilbage er at betragte åbne enkeltsammenhængende mængder, der ikke er hele $\hat{C}$. Vi vil bevise:

Riemanns afbildningssætning. Samtlige åbne enkeltsammenhængende mængder med undtagelse af $\hat{C}$ udgør en ekvivalensklasse. Anderledes sagt: *Hvis A og B er åbne enkeltsammenhængende mængder, der ikke er $\hat{C}$, da er A konformt ækvivalent med B.* Nærmere bestemt: *Opgives i A et punkt z_0 og en retning ud fra z_0 og i B et punkt w_0 og en retning ud fra w_0, da findes en og kun en konform afbildning af A på B, der fører z_0 over i w_0 og den givne retning over i den givne retning.*



Riemann formulerede sætningen i 1851, idet han dog naturligvis kun havde mængder med simpel rand for øje. Han gav ikke noget fuldstændigt bevis. Gennem dybtgående undersøgelser af C. Neumann, Schwarz o.a., baseret på den reelle funktionsteoris metoder var man ved århundredskiftet nået til et strengt bevis i tilfælde af mængder med temmelig simpel rand. Beviser baseret alene på den komplekse funktionsteoris metoder, i hvilke randen ikke indgår og som derfor giver sætningen i dens fulde almindelighed, blev udviklet i begyndelsen af dette århundrede af Carathéodory, Koebe o.a. De forskellige beviser, man kan give, er nært beslægtede. Vi følger her i det væsentlige en af Fejér og F. Riesz angivet bevisgang.

I beviset får vi brug for en række i sig betydningsfulde resultater.

Schwarz' lemma:

Lad $\mathcal{E} = \{z \mid |z| < 1\}$, og lad $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ være en holomorf funktion, for hvilken $f(0) = 0$. Da gælder $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in \mathcal{E}$, og endda $|f(z)| < |z|$ for alle $z \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, med mindre f har formen $f(z) = az$, $|a| = 1$ [i hvilket tilfælde vi naturligvis har $|f(z)| = |z|$ for alle $z \in \mathcal{E}$].

Anderledes udtrykt: En holomorf funktion f i $\mathcal{E} = \{z \mid |z| < 1\}$, for hvilken $|f(z)| < 1$ for alle $z \in \mathcal{E}$ og $f(0) = 0$, er en kontraktion i relation til 0 $[|f(z)| \leq |z|]$ og en ægte kontraktion $[|f(z)| < |z|$ for $z \neq 0]$, med mindre afbildningen er en drejning om 0.

Bevis. Da $f(0) = 0$, er den ved

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{for } z \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{for } z = 0 \end{cases}$$

bestemte funktion $g: \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ holomorf. Da $|f(z)| < 1$ for alle $z \in \mathcal{E}$, gælder for $|z| = \rho$, hvor $0 < \rho < 1$, at $|g(z)| < \frac{1}{\rho}$. Altså er $\max\limits_{|z| = \rho} |g(z)| < \frac{1}{\rho}$. Men ifølge maksimumsprincipet (§ 15) er $\max\limits_{|z| \leq \rho} |g(z)| = \max\limits_{|z| = \rho} |g(z)|$. Altså gælder $|g(z)| < \frac{1}{\rho}$, når $|z| \leq \rho < 1$. Lader vi her $\rho \to 1$, får vi $|g(z)| \leq 1$, hvoraf $|f(z)| \leq |z|$.

Hvis $|g(z_0)| = 1$ for et $z_0 \in \mathcal{E}$ må g være konstant (da ellers en omegn af z_0 ved g ville afbildes på en omegn af $g(z_0)$ i strid med, at $|g(z)| \leq 1$ for alle $z \in \mathcal{E}$), altså

$g(z)=a$, $|a|=1$, og følgelig $f(z)=az$ for alle $z\in E$. Hvis f ikke netop har denne form, må altså gælde $|g(z)|<1$ for alle $z\in E$, altså $|f(z)|<|z|$ for alle $z\in E\setminus\{0\}$.

Konsekvens. Hvis $f: E\to E$ er holomorf og bijektiv og $f(0)=0$, har f formen $f(z)=az$, $|a|=1$ (det omvendte gælder også og er trivielt).

Thi ifølge Schwarz' lemma er $|f(z)|\le|z|$ for alle $z\in E$. Da $f^{-1}: E\to E$ også er holomorf og $f^{-1}(0)=0$, gælder også $|f^{-1}(w)|\le|w|$ for alle $w\in E$. Indsættes $w=f(z)$ ses, at $|z|\le|f(z)|$ for alle $z\in E$. Altså er $|f(z)|=|z|$ for alle $z\in E$, og følgelig er f af formen $f(z)=az$, $|a|=1$.

Normale familier.

Teorien for normale familier skyldes Montel.

Lad A være en fast åben sammenhængende mængde i $\mathbb{C}$. Med $\mathcal{H}(A)$ betegner vi mængden af alle holomorfe funktioner $f: A\to\mathbb{C}$.

Det interessante konvergensbegreb i $\mathcal{H}(A)$ er følgende: En følge (f_n) af funktioner $f_n\in\mathcal{H}(A)$ kaldes regulært konvergent, hvis den er ligeligt konvergent på enhver kompakt delmængde af A. Da tilhører grænsefunktionen f også $\mathcal{H}(A)$, og for ethvert $p\in\mathbb{N}$ er følgen $(f_n^{(p)})$ af de $p$te afledede regulært konvergent med grænsefunktionen $f^{(p)}$ (§11).

Det interessante begrænsethedsbegreb i $\mathcal{H}(A)$ er følgende: En delmængde (familie) $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}(A)$ kaldes regulært begrænset, hvis funktionerne $f\in\mathcal{F}$ er ensartet begrænsede i enhver kompakt delmængde af A, d.v.s. hvis der for enhver kompakt delmængde K af A findes et $M < +\infty$, således at $|f(z)| \leq M$ for alle $z \in K$ og alle $f \in \mathcal{F}$. [Eller kortere: Hvis $\sup_{\substack{z \in K \\ f \in \mathcal{F}}} |f(z)| < +\infty$ for enhver kompakt delmængde K af A.]

En delmængde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$ kaldes en <u>normal familie</u>, hvis hver følge (f_n) af funktioner $f_n \in \mathcal{F}$ har en delfølge (f_{n_p}), der er regulært konvergent.

[<u>Bemærkning</u>. Man kan i $\mathcal{H}(A)$ indføre en metrik, således at regulær konvergens bliver det samme som konvergens i denne metrik. En normal familie bliver da simpelthen en prekompakt delmængde af $\mathcal{H}(A)$.]

<u>Sætning</u>. <u>En familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(A)$ er normal, hvis og kun hvis den er regulært begrænset</u>, i formel:

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ normal familie} \iff \mathcal{F} \text{ regulært begrænset.}}$$

<u>Bevis</u>. $\Rightarrow$. Beviset føres indirekte. Vi antager, at $\mathcal{F}$ ikke er regulært begrænset og skal vise, at så er $\mathcal{F}$ ikke normal. At $\mathcal{F}$ ikke er regulært begrænset betyder: Der findes en kompakt delmængde K og for hvert $n \in N$ et $z_n \in K$ og et $f_n \in \mathcal{F}$, således at $|f_n(z_n)| > n$. Vi vil vise, at (f_n) ikke kan udtyndes til en regulært konvergent delfølge (f_{n_p}). Hvis den kunde, så lad f være grænsefunktionen for (f_{n_p}). Da var

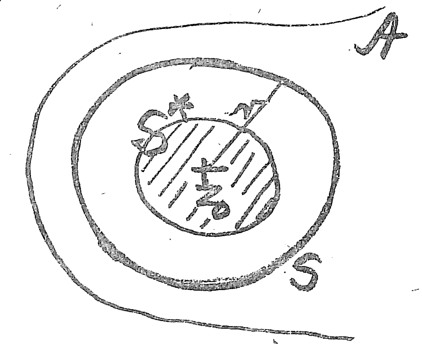
$$\sup_{z \in K} |f(z)| = H < +\infty$$

og der fandtes et p_0, så at

$$\sup_{z \in K} |f(z) - f_{n_p}(z)| \leq 1 \quad \text{for alle } p \geq p_0.$$

Altså måtte for $p \geq p_0$, $z \in K$ gælde $|f_{n_p}(z)| \leq H+1$, i strid med, at $|f_{n_p}(z_{n_p})| > n_p$.

2) $\Longleftarrow$. Beviset føres direkte. Vi antager, at $\mathfrak{F}$ er reguleart begrænset og skal, idet (f_n) er en vilkårlig følge af funktioner $f_n \in \mathfrak{F}$ konstruere en delfølge (f_{n_p}), der er reguleart konvergent. Det sker i en række skridt.



① Betragt en afsluttet cirkelskive $S = \{z \mid |z-z_0| \leq r\} \subset A$.
Da findes et $M < +\infty$, så at
$|f(z)| \leq M$ for alle $z \in S$, $f \in \mathfrak{F}$,
altså specielt $|f_n(z)| \leq M$ for alle $z \in S$, $n \in \mathbb{N}$.
I den største cirkelskive $\{z \mid |z-z_0| < R\}$ med centrum z_0, der tilhører A, og altså specielt i S, er hvert f_n fremstillet ved sin potensrække

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(z-z_0) + \dots + a_q^{(n)}(z-z_0)^q + \dots,$$

hvis koefficienter bestemmes ved

$$a_q^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{q+1}}\,d\zeta.$$

Vi har altså

$$|a_q^{(n)}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{q+1}}\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{q+1}}2\pi r = \frac{M}{r^q}.$$

For hvert $q = 0, 1, 2, \dots$ for sig er talfølgen $(a_q^{(n)})$ altså begrænset og har følgelig et fortætningspunkt a_q. Vi udtynder nu først følgen $n = 1, 2, \dots$ således, at for n løbende gennem den fortyndede følge gælder $a_0^{(n)} \to a_0$, derefter udtyndes videre således, at for n løbende gennem den yderligere fortyndede følge gælder $a_1^{(n)} \to a_1$, etc. Diagonalfølgen for de således fundne delfølger af $n=1,2,\dots$ har da den egenskab, at for n løbende gennem denne følge gælder

$$a_0^{(n)} \to a_0,\ a_1^{(n)} \to a_1,\ \dots,\ a_q^{(n)} \to a_q,\ \dots .$$

Vi har åbenbart $|a_q| \leq \frac{M}{r^q}$. Ved

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_q(z-z_0)^q + \dots$$

fremstilles derfor en holomorf funktion i $\mathring{S} = \{z \,|\, |z-z_0| < r\}$ [rækken har majorantrækken $\sum_{q=0}^{\infty} M \left|\frac{z-z_0}{r}\right|^q$]. I cirkelskiven $S^* = \{z \,|\, |z-z_0| \leq \frac{1}{2}r\}$ gælder for ethvert n og ethvert Q

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{q=0}^{\infty} (a_q - a_q^{(n)})(z-z_0)^q \right| \leq \sum_{q=0}^{\infty} |a_q - a_q^{(n)}| \left(\tfrac{1}{2}r\right)^q$$

$$\leq \sum_{q=0}^{Q} |a_q - a_q^{(n)}| \left(\tfrac{1}{2}r\right)^q + \sum_{q=Q+1}^{\infty} \frac{2M}{r^q}\left(\tfrac{1}{2}r\right)^q$$

$$= \sum_{q=0}^{Q} |a_q - a_q^{(n)}| \left(\tfrac{1}{2}r\right)^q + \frac{2M}{2^Q}.$$

Altså er for ethvert n og ethvert Q

$$\sup_{z \in S^*} |f(z) - f_n(z)| \leq \sum_{q=0}^{Q} |a_q - a_q^{(n)}| \left(\tfrac{1}{2}r\right)^q + \frac{2M}{2^Q}.$$

For et givet $\varepsilon > 0$ vælges nu <u>først</u> Q, så at $\frac{2M}{2^Q} < \frac{\varepsilon}{2}$, <u>dernæst</u> n_0, så at $\sum_{q=0}^{Q} |a_q - a_q^{(n)}| \left(\tfrac{1}{2}r\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}$ for ethvert $n \geq n_0$ fra den udtyndede følge. Da gælder for ethvert $n \geq n_0$ fra den udtyndede følge

$$\sup_{z \in S^*} |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon .$$

For n løbende gennem den udtyndede følge konvergerer f_n altså mod f ligeligt på S^*.

② Hvis $A = \grave{C}$ anvender vi først det foregående på $S_1 = \{z \,|\, |z| \leq 2\}$ og får derved en udtynding af

(f_n), der konvergerer ligeligt på $S_1^* = \{z \mid |z| \leq 1\}$; derned anvendes det foregående for den således udtyndede følge på $S_2 = \{z \mid |z| < 4\}$, hvorved fås en yderligere udtynding, der konvergerer ligeligt på $S_2^* = \{z \mid |z| \leq 2\}$; etc. Diagonalfølgen (f_{n_p}) for de således dannede følger vil da konvergere ligeligt på enhver cirkelskive $S_l^* = \{z \mid |z| \leq l\}$ og derfor på enhver kompakt mængde, og er således reguleart konvergent.

③ Hvis $A \subset \mathbb{C}$ ordner vi de $z = x+iy \in A$, for hvilke x og y er rationale, i en følge $z_1, z_2, \ldots$ og betragter for hvert t skiven $S_t = \{z \mid |z - z_t| \leq r_t\}$, hvor $r_t = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_t, \partial A)$, og den tilsvarende skive $S_t^* = \{z \mid |z - z_t| \leq \frac{1}{2} r_t\}$. Ved at fortynde skridtvis og tage diagonalfølge får vi en udtyndet følge (f_{n_p}), der konvergerer ligeligt på hvert S_t^*.

Nu bemærker vi, at A er foreningen af de åbne skiver $\mathring{S}_t^* = \{z \mid |z - z_t| < \frac{1}{2} r_t\}$. Thi disse er jo indeholdt i A, og for ethvert $z \in A$ kan vi, idet vi sætter $d = \operatorname{dist}(z, \partial A)$, finde et t, så at $|z - z_t| < \frac{1}{5} d$; da gælder $\operatorname{dist}(z_t, \partial A) > \frac{4}{5} d$, altså $r_t > \frac{2}{5} d$, og følgelig $z \in \mathring{S}_t^*$.

Er nu K en vilkårlig kompakt delmængde af A, kan K dækkes med endelig mange af skiverne $\mathring{S}_t^*$. På hver af disse er følgen (f_{n_p}) ligeligt konvergent. Altså er den også ligeligt konvergent på deres forening og altså på K.

Den udtyndede følge (f_{n_p}) er således reguleart konvergent.

En interessant konsekvens er følgende sætning af Vitali:

Hvis en følge (f_n) af funktioner $f_n \in \mathcal{H}(A)$ er regulært begrænset og konvergerer (punktvis) i en delmængde B af A, der har et fortætningspunkt i A, da konvergerer følgen regulært i A.

Bevis. Følgen (f_n) har en regulært konvergent delfølge, lad os sige med grænsefunktion f. Vi vil vise, at (f_n) konvergerer regulært mod f. Hvis ikke fandtes en kompakt delmængde K af A og et $\varepsilon > 0$, samt en følge $n_1 < n_2 < \cdots$, så at for hvert q

$$(*) \qquad \sup_{z \in K} |f(z) - f_{n_q}(z)| > \varepsilon .$$

Følgen (f_{n_q}) har en regulært konvergent delfølge, lad os sige med grænsefunktion g. Ifølge $(*)$ kan g ikke være f. Men for $z \in B$ må gælde $f(z) = g(z)$. Ifølge identitetssætningen (§15) er altså $f = g$, så at vi er nået til en modstrid.

Rouchés sætning.

Lad F være en simpel figur i A og antag, at der for to funktioner $f, g \in \mathcal{H}(A)$ gælder

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \text{for alle } z \in \partial F.$$

Da har f og g samme antal nulpunkter i F.

Bevis. For ethvert $\theta \in [0,1]$ er $h_\theta = (1-\theta) f + \theta g = f + \theta(g - f)$ en holomorf funktion i A uden nulpunkter på ∂F, og vi har $h_0 = f$, $h_1 = g$. Nulpunktsantallet N_θ for h_θ i F er (§18) bestemt ved

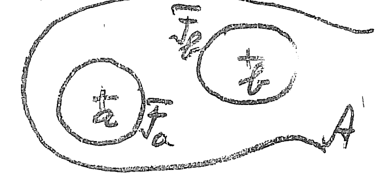
$$N_\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{h_\theta'(z)}{h_\theta(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{(1-\theta) f'(z) + \theta g'(z)}{(1-\theta) f(z) + \theta g(z)} dz .$$

Dette er en kontinuert funktion af θ, og da den kun antager heltallige værdier, må den være konstant. Altså er $N_0 = N_1$.

Af Rouchés sætning følger:

Lad (f_n) være en regulært konvergent følge af funktioner $f_n \in \mathcal{H}(A)$ med grænsefunktion f. Da gælder: Hvis hver af afbildningerne $f_n : A \to \grave{C}$ er injektiv, er også afbildningen $f : A \to \grave{C}$ injektiv, medmindre f er konstant.

Bevis. Antag at f ikke er konstant, og at f ikke er injektiv. Da findes to forskellige punkter $a, b \in A$, så at $f(a) = f(b) = w_0$. Vi kan (§ 15) vælge disjunkte cirkelskiver $F_a = \{z \mid |z-a| \leq r\}$ og $F_b = \{z \mid |z-b| \leq r\}$ i A, så at $f(z) \neq w_0$ for alle $z \in \partial F_a \cup \partial F_b$. Da er



$$m = \inf_{z \in \partial F_a \cup \partial F_b} |f(z) - w_0| > 0,$$

og der findes et n_0, så at

$$\sup_{z \in \partial F_a \cup \partial F_b} |f(z) - f_n(z)| < m \quad \text{for } n \geq n_0.$$

For $n \geq n_0$ opfylder funktionerne $f - w_0$ og $f_n - w_0$ altså for hver af figurerne F_a og F_b forudsætningerne i Rouché's sætning. Da $f - w_0$ har et nulpunkt i hver af figurerne, må følgelig også $f_n - w_0$ have et nulpunkt i hver af figurerne i strid med, at f_n er forudsat injektiv.

Argumentfunktion. Kvadratrod.

Er $h : M \to \grave{C}$ en vilkårlig kompleks funktion på en mængde M, betegner vi (§ 1) med $\arg h$ enhver funktion på M, hvis værdi for ethvert $\tau \in M$ er en af værdierne af $\arg h(\tau)$.

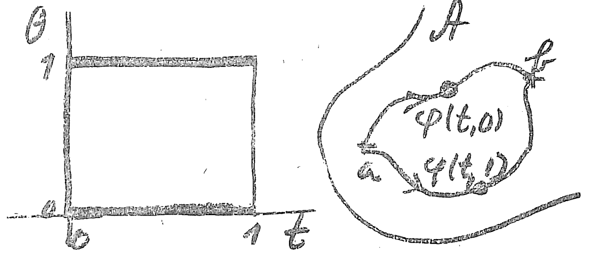
Lad $h = h(t,\theta) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en fra 0 forskellig kontinuert kompleks funktion på kvadratet $[0,1] \times [0,1]$. Da har h en kontinuert argumentfunktion $\arg h$.

Bevis. Hvis der findes et α, så at $h(t,\theta) \in \mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$ for alle $(t,\theta) \in [0,1] \times [0,1]$, er den ved $\alpha < \arg h(t,\theta) < \alpha + 2\pi$ bestemte argumentfunktion kontinuert.

Hvis intet sådant α findes, betragter vi $m = \inf_{(t,\theta) \in [0,1] \times [0,1]} |h(t,\theta)|$. Ifølge kontinuiteten af h er $m > 0$, og der findes et $\delta > 0$, så at $|h(t',\theta') - h(t'',\theta'')| < m$, når $(t',\theta'), (t'',\theta'') \in [0,1] \times [0,1]$ og $|t' - t''| < \delta$, $|\theta' - \theta''| < \delta$. Vi vælger et $n \in \mathbb{N}$, så at $\frac{1}{n} < \delta$, og opdeler $[0,1] \times [0,1]$ i de n^2 kvadrater $Q_{\mu\nu} = \left[\frac{\mu-1}{n}, \frac{\mu}{n}\right] \times \left[\frac{\nu-1}{n}, \frac{\nu}{n}\right]$, $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$. For hvert af disse findes et $\alpha_{\mu\nu}$, således at $h(t,\theta) \in \mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\alpha_{\mu\nu}} \mid r \geq 0\}$ for alle $(t,\theta) \in Q_{\mu\nu}$, og følgelig en kontinuert argumentfunktion $\arg h$ på $Q_{\mu\nu}$. Disse argumentfunktioner kan vælges således, at vi i ethvert fælles punkt (t,θ) for to kvadrater får samme værdi af $\arg h(\theta,t)$ i de to kvadrater. For at indse det går man skridtvis frem, idet kvadraterne tages i rækkefølgen $Q_{11}, Q_{21}, \dots, Q_{n1}, Q_{12}, Q_{22}, \dots, Q_{nn}$. Tilsammen giver disse funktioner det ønskede.

Heraf vil vi udlede:

Lad A være en åben enkeltsammenhængende mængde i $\mathbb{C}$ og $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en kontinuert fra 0 forskellig funktion på A. Da har f en kontinuert argumentfunktion $\arg f$.



<u>Bevis</u>. Lad a og b være to (ens eller forskellige) punkter af A og lad $\varphi: [0,1]\times\{0,1\} \to A$ være en kontinuert afbildning, således at $\varphi(0,0) = \varphi(0,1) = a$ og $\varphi(1,0) = \varphi(1,1) = b$. Denne kan udvides til en kontinuert afbildning $\varphi: [0,1]\times[0,1] \to A$, således at $\varphi(0,\theta) = a$ og $\varphi(1,\theta) = b$ for alle $\theta \in [0,1]$. Da er $f\circ\varphi$ en kontinuert afbildning af $[0,1]\times[0,1]$ ind i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ og har altså en kontinuert argumentfunktion $\arg f\circ\varphi$. Da $f\circ\varphi(0,\theta) = f(a)$ og $f\circ\varphi(1,\theta) = f(b)$ for alle $\theta\in[0,1]$, er $\arg f\circ\varphi(0,\theta)$ konstant [= en af argumentværdierne for $f(a)$] og $\arg f\circ\varphi(1,\theta)$ konstant [= en af argumentværdierne for $f(b)$]. Heraf ses, at argumentvariationen af funktionen $f\circ\varphi(t,0)$ på $[0,1]$ er lig med argumentvariationen af funktionen $f\circ\varphi(t,1)$ på $[0,1]$. For alle kontinuerte kurver $z = \psi(t)$, $t\in[0,1]$ i A, for hvilke $\psi(0)=a$, $\psi(1)=b$, er argumentvariationen af funktionen $f\circ\psi(t)$ på $[0,1]$, som vi betegner som argumentvariationen af $f(z)$ langs kurven, altså den samme. Vi betegner den $v(a,b)$.

For fast $a\in A$ kan vi finde en omegn $O=\{z \mid |z-a|<\delta\} \subseteq A$ og et α, så at $f(z)\in \mathbb{C}\setminus\{z = re^{i\alpha} \mid r\geq 0\}$ for alle $z\in O$, og følgelig en kontinuert argumentfunktion $\arg f(z)$ på O, og vi har åbenbart $v(a,b) = \arg f(b) - \arg f(a)$ for alle $b\in O$. For fast a er $v(a,b)$ som funktion af b således kontinuert i en omegn af a, og vi har $v(a,a)=0$.

For tre punkter $a,b,c\in A$ gælder åbenbart $v(a,c) = v(a,b) + v(b,c)$.

Betegner vi nu for et fast $z_0\in A$ med $\arg f(z_0)$ en bestemt af argumentværdierne for $f(z_0)$, er $\arg f(z_0) + v(z_0,z)$

åbenbart en kontinuert argumentfunktion i A.

For en kontinuert funktion $f: A \to \grave{C} \setminus \{0\}$ på en åben enkeltsammenhængende mængde A i $\grave{C}$ kaldes en kontinuert argumentfunktion $\arg f$ en <u>kontinuert gren</u> af argumentet af f. Hvis $\arg f$ er een kontinuert gren af argumentet af f, er $\arg f + p2\pi$, $p \in \grave{Z}$, ligeledes en kontinuert gren af argumentet af f, og samtlige kontinuerte grene af argumentet af f er bestemt på denne måde. Thi hvis φ_1 og φ_2 er kontinuerte grene af argumentet af f, er $\varphi_1 - \varphi_2$ en kontinuert funktion, hvis værdi i ethvert punkt af A er et helt multiplum af 2π, og den må da være konstant.

Er $h: M \to \grave{C}$ en vilkårlig kompleks funktion på en mængde M, betegner vi med $\sqrt{h}$ enhver funktion på M, hvis værdi for ethvert $\tau \in M$ er en af værdierne af $\sqrt{h(\tau)}$.

<u>Lad</u> A <u>være en åben enkeltsammenhængende mængde i</u> $\grave{C}$ <u>og</u> $f: A \to \grave{C} \setminus \{0\}$ <u>en kontinuert fra</u> 0 <u>forskellig funktion på</u> A. <u>Da har</u> f <u>en kontinuert kvadratrodsfunktion</u> $\sqrt{f}$.

<u>Bevis</u>. Lad $\arg f$ være en kontinuert argumentfunktion af f. Da er $\sqrt{|f|}\, e^{i\frac{1}{2}\arg f}$ [hvor $\sqrt{|f|}$ står for den positive kvadratrod] en kontinuert kvadratrodsfunktion.

For en kontinuert funktion $f: A \to \grave{C} \setminus \{0\}$ på en åben enkeltsammenhængende mængde A i $\grave{C}$ kaldes en kontinuert kvadratrodsfunktion $\sqrt{f}$ en <u>kontinuert gren</u> af kvadratroden af f. Hvis $\sqrt{f}$ er een kontinuert gren af kvadratroden af f, er $-\sqrt{f}$ ligeledes en kontinuert gren af kvadratroden af f, og der er ikke andre kontinuerte grene af kvadratroden af f end $\sqrt{f}$ og $-\sqrt{f}$. Thi hvis g_1 og g_2 er kontinuerte grene af kvadratroden af f, er $\frac{g_1}{g_2}$ en kontinuert funktion, hvis værdi i ethvert punkt af A er 1 eller -1, og den må da være konstant 1 eller konstant -1.

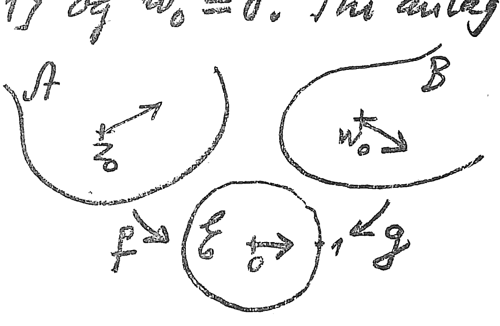
Hvis $f: A \to \grave{C} \setminus \{0\}$ er en holomorf fra 0 forskellig funktion på en åben enkeltsammenhængende mængde A i $\grave{C}$, er de to grene af kvadratroden af f ligeledes holomorfe.

Bevis. For ethvert punkt af A findes en omegn, hvori de to grene af kvadratroden af f er holomorfe.

Bevis for Riemanns afbildningssætning.

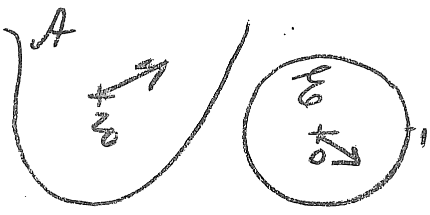
Lad A og B være vilkårlige åbne enkeltsammenhængende mængder, der ikke er $\grave{C}$, og lad der være givet et punkt z_0 i A og en retning ud fra z_0 og et punkt w_0 i B og en retning ud fra w_0. Vi skal vise, at der findes en og kun en konform afbildning af A på B, der fører z_0 over i w_0 og den givne retning over i den givne retning.

1 Det er nok at bevise dette i det tilfælde, hvor B er enhedscirklen $E = \{w \mid |w| < 1\}$ og $w_0 = 0$. Thi antag sætningen rigtig i dette tilfælde, og lad $f: A \to E$ være den konforme afbildning, der fører z_0 over i 0 og den givne retning over i den positive reelle retning ud fra 0, og lad $g: B \to E$ være den konforme afbildning der fører w_0 over i 0 og den givne retning over i den po-



sitive reelle retning ud fra 0. Da vil $g^{-1}\circ f$ være en konform afbildning af A på B, der fører z_0 over i w_0 og den givne retning over i den givne retning, og det vil være den eneste afbildning med disse egenskaber. Thi hvis h er en sådan afbildning, vil $g\circ h$ være en konform afbildning af A på $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0 og den givne retning over i den positive reelle retning ud fra 0; der må altså gælde $g\circ h = f$ og følgelig $h = g^{-1}\circ f$.

② Betragt altså nu en åben enkeltsammenhængende mængde A, der ikke er $\grave{C}$, og deri et punkt z_0 og en retning ud fra z_0, og endvidere $\mathcal{E}$ og deri punktet 0 og en retning ud fra 0.



Vi begynder med at vise: Der findes højst en konform afbildning af A på $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0 og den givne retning over i den givne retning.

Hvis f og g er sådanne afbildninger, er $g\circ f^{-1}$ en konform afbildning af $\mathcal{E}$ på $\mathcal{E}$, der fører 0 over i 0, og er altså som vist ovenfor en drejning om 0; da endvidere $g\circ f^{-1}$ fører retningen ud fra 0 over i sig selv, må $g\circ f^{-1}$ være den identiske afbildning, altså $f = g$.

③ Tilbage er at vise, at der findes mindst en konform afbildning af A på $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0 og den givne retning over i den givne retning.

Det vil være nok blot at finde en konform afbildning f af A på $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0. Thi en sådan afbildning vil føre den givne retning ud fra z_0 over i en vis retning ud fra 0, og hvis vi så med g betegner den drejning af $\mathcal{E}$ om 0, der fører denne retning over i den givne, vil $g\circ f$ være en konform afbildning af

A på $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0 og den givne retning over i den givne retning.

(4) Vi begynder med at vise, at der findes konforme afbildninger af A *ind i* $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0.

Ifølge forudsætning er A ikke $\hat{C}$. Lad $a \in \hat{C} \setminus A$. Da er $z-a$ en fra 0 forskellig holomorf funktion på A. Lad g være en holomorf gren af kvadratroden af $z-a$. Afbildningen $g: A \to \hat{C}$ er *injektiv*; thi hvis $g(z_1) = g(z_2)$ for to punkter $z_1, z_2 \in A$, er $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$, altså $z_1 - a = z_2 - a$, d.v.s. $z_1 = z_2$. Af to punkter w og $-w$ kan $g(A)$ højst indeholde det ene. Thi hvis $g(z_1) = w$ og $g(z_2) = -w$, er $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$, altså $z_1 - a = z_2 - a$, d.v.s. $z_1 = z_2$, hvilket er umuligt. De to mængder $g(A)$ og $-g(A) = \{-w \mid w \in g(A)\}$ er altså disjunkte. Nu er $g(A)$ åben, altså også $-g(A)$. Lad $b \in -g(A)$ og lad $\{w \mid |w-b| \leq \delta\}$ være en omegn af b tilhørende $-g(A)$. Da er $\frac{1}{w-b}$ en holomorf afbildning af $g(A)$ ind i den åbne cirkelskive med centrum 0 og radius $\frac{1}{\delta}$. Denne afbildning er injektiv. Altså er $h = \frac{1}{g-b}$ en injektiv afbildning af A ind i denne cirkelskive. Følgelig er $f(z) = \frac{\delta}{2}(h(z) - h(z_0))$ en injektiv holomorf afbildning af A ind i $\mathcal{E}$, for hvilken $f(z_0) = 0$.

(5) Lad nu $\mathcal{F}$ betegne familien bestående af alle injektive holomorfe afbildninger af A ind i $\mathcal{E}$, der fører z_0 over i 0. Ifølge det foranstående er $\mathcal{F}$ ikke tom. Vor opgave er at vise, at der i $\mathcal{F}$ findes mindst en funktion f, for hvilken $f(A) = \mathcal{E}$.

En funktion $f \in \mathcal{F}$, for hvilken $f(A) = \mathcal{E}$, må have følgende bemærkelsesværdige egenskab: For enhver funk-

tion $g \in \mathfrak{F}$ og ethvert $z \in A$ må gælde $|f(z)| \geq |g(z)|$, d.v.s. f må bringe ethvert $z \in A$ længst muligt bort fra 0.

Thi hvis $f \in \mathfrak{F}$, $f(A) = \mathcal{E}$, og $g \in \mathfrak{F}$, vil $g \circ f^{-1}$ være en (endda injektiv) holomorf afbildning af $\mathcal{E}$ ind i $\mathcal{E}$, der fører 0 over i 0. Ifølge Schwarz' lemma må altså for ethvert $w \in \mathcal{E}$ gælde $|g \circ f^{-1}(w)| \leq |w|$. Indsættes heri $w = f(z)$, fås $|g(z)| \leq |f(z)|$ for ethvert $z \in A$.

[Af Schwarz' lemma fremgår yderligere, at der må gælde $|g(z)| < |f(z)|$ for alle $z \in A \setminus \{z_0\}$, medmindre $g \circ f^{-1}$ har formen $g \circ f^{-1}(w) = aw$, $|a| = 1$, d.v.s. medmindre $g(z) = af(z)$, $|a| = 1$, i hvilket tilfælde vi naturligvis også har $g(A) = \mathcal{E}$. Dette får dog ikke betydning for det følgende.]

⑥ Familien $\mathfrak{F}$ er regulært begrænset (funktionerne i $\mathfrak{F}$ er endda ensartet begrænsede i hele A, ikke blot i enhver kompakt delmængde af A). Altså er den normal. Ledet af den foran påviste egenskab skaffer vi os en funktion $f \in \mathfrak{F}$ på følgende måde:

Vi vælger et fast punkt $z_1 \in A \setminus \{z_0\}$ og betragter tallet

$$\rho = \sup_{g \in \mathfrak{F}} |g(z_1)|.$$

Da $\mathfrak{F}$ ikke er tom, er $\rho > 0$. Vi vælger nu en følge (f_n) af funktioner $f_n \in \mathfrak{F}$, således at $|f_n(z_1)| \to \rho$. Da $\mathfrak{F}$ er normal, kan denne følge udtyndes til en regulært konvergent følge. Vi kan (idet vi ellers skifter betegnelser) antage, at følgen selv er regulært konvergent. Lad f være dens grænsefunktion. Da er f holomorf og $|f(z_1)| = \rho$. Endvidere er $f(z_0) = 0$, da $f_n(z_0) = 0$ for alle n. Altså er f ikke konstant. Da alle $f_n : A \to \mathcal{E}$ er injektive, er f ifølge en foran bevist sætning også injektiv. Da $|f_n(z)| < 1$ for alle $z \in A$ og alle n, gælder $|f(z)| \leq 1$ for alle $z \in A$; da $f(A)$ er åben følger heraf, at $|f(z)| < 1$ for alle $z \in A$. Funktionen f tilhører altså $\mathfrak{F}$. Vi vil vise, at $f(A) = \mathcal{E}$.

(7) Funktionen $f \in \mathfrak{F}$ er konstrueret således, at der for det valgte punkt $z_1 \in A \setminus \{z_0\}$ gælder $|f(z_1)| \geq |g(z_1)|$ for alle $g \in \mathfrak{F}$. Beviset for, at $f(A) = \mathcal{E}$, vil derfor være ført, hvis vi viser følgende:

<u>For enhver funktion</u> $f \in \mathfrak{F}$, <u>for hvilken</u> $f(A) \subset \mathcal{E}$, <u>findes en funktion</u> $g \in \mathfrak{F}$, <u>således at</u> $|g(z)| > |f(z)|$ <u>for alle</u> $z \in A \setminus \{z_0\}$.

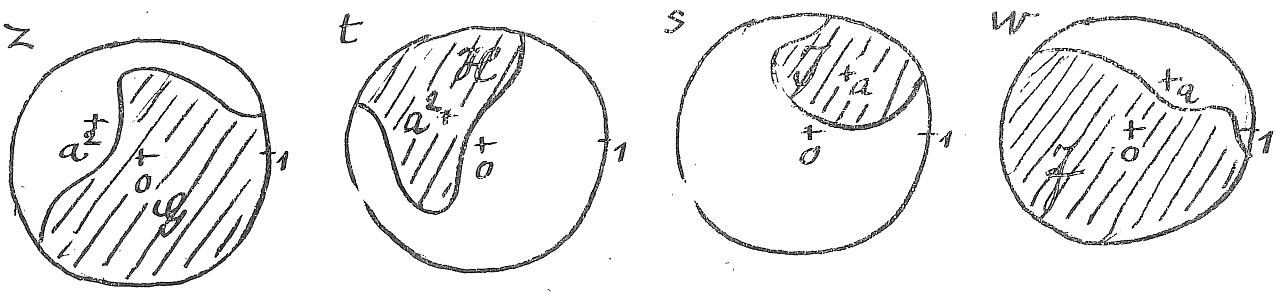
Da f er konform og $f(0) = 0$, er $\mathcal{G} = f(A)$ en åben enkeltsammenhængende ægte delmængde af $\mathcal{E}$, der indeholder 0. Det er derfor tilstrækkeligt at vise:

<u>For enhver åben enkeltsammenhængende ægte delmængde $\mathcal{G}$ af $\mathcal{E}$, der indeholder 0, findes en injektiv holomorf afbildning h af $\mathcal{G}$ ind i $\mathcal{E}$, for hvilken $h(0) = 0$ og $|h(z)| > |z|$ for alle $z \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$.</u>

Thi for et sådant h vil jo $g = h \circ f$ være en funktion i $\mathfrak{F}$, for hvilken $|g(z)| > |f(z)|$ for alle $z \in A \setminus \{z_0\}$.

Konstruktionen af en sådan funktion h udføres efter Koebe på følgende måde, idet vi for bekvemmelighedes skyld opererer med enhedscirklen $\mathcal{E}$ i fire planer, z-planen, t-planen, s-planen, og w-planen.

Da $\mathcal{G}$ ikke er hele $\mathcal{E}$, kan vi vælge et punkt i $\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}$; vi skriver det på formen a^2; da er a et punkt i $\mathcal{E} \setminus \{0\}$. Den homografiske afbildning



$t = \frac{z-a^2}{\bar{a}^2 z - 1}$ afbilder $\mathcal{E}$ konformt på $\mathcal{E}$, således at a^2 går over i 0, og 0 går over i a^2. Den afbilder altså $\mathcal{G}$ konformt på en åben enkeltsammenhængende delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{E}$, der ikke indeholder 0, men indeholder a^2. Vi betragter den gren af kvadratroden $s=\sqrt{t}$ i $\mathcal{H}$, der i a^2 har værdien a. Den afbilder $\mathcal{H}$ konformt på en åben enkeltsammenhængende delmængde J af $\mathcal{E}$, således at a^2 går over i a; vi bemærker (selv om det er uden betydning), at J ikke indeholder 0. Den homografiske afbildning $w = \frac{s-a}{\bar{a} s - 1}$ afbilder $\mathcal{E}$ konformt på $\mathcal{E}$, således at a går over i 0, og 0 går over i a. Den afbilder altså J konformt på en åben enkeltsammenhængende delmængde $\mathcal{J}$ af $\mathcal{E}$, der indeholder 0 (men ikke indeholder a). Den sammensatte afbildning $w = h(z)$ afbilder altså $\mathcal{G}$ konformt på $\mathcal{J}$, således at 0 går over i 0. Vi vil vise, at
$|h(z)| > |z|$ for alle $z \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$.

Hertil bemærkes, at de omvendte afbildninger til de foranstående bestemmes ved $z=\frac{t-a^2}{\bar{a}^2 t-1}$, $t=s^2$, $s=\frac{w-a}{\bar{a} w-1}$. Den omvendte afbildning $z= h^{-1}(w) : \mathcal{J} \to \mathcal{G}$ bestemmes ved sammensætning af disse. Ved $z=\frac{t-a^2}{\bar{a}^2 t-1}$, $t=s^2$, $s=\frac{w-a}{\bar{a} w-1}$ bestemmes imidlertid holomorfe afbildninger af $\mathcal{E}$ på $\mathcal{E}$, og disses sammensætning $z = k(w)$ er altså en holomorf afbildning

af E på E [men ikke en konform afbildning: for hvert $z \in E$ findes to værdier $w \in E$, for hvilke $k(w) = z$].
Denne afbildning $z = k(w)$ er en udvidelse af afbildningen $z = h^{-1}(w)$. Da $k(0) = 0$, og da k sikkert ikke er af formen $z = aw$, $|a| = 1$, fremgår af Schwarz' lemma, at der gælder $|k(w)| < |w|$ for alle $w \in E \setminus \{0\}$.
Specielt gælder altså $|h^{-1}(w)| < |w|$ for alle $w \in J \setminus \{0\}$.
Indsættes heri $w = h(z)$, hvor $z \in G \setminus \{0\}$, ses at $|z| < |h(z)|$ for alle $z \in G \setminus \{0\}$, hvormed beviset er fuldført.

[Vi havde ikke behøvet i ovenstående bevisførelse eksplicit at opskrive de benyttede homografiske afbildninger. Det havde været nok at benytte, at der for ethvert $c \in E$ findes en konform afbildning af E på sig selv, der fører c over i 0.

På basis af de eksplicitte udtryk kan vi indse, at $|k(w)| < |w|$ for alle $w \in E \setminus \{0\}$, uden at henvise til Schwarz' lemma. En direkte udregning giver

$$z = k(w) = \frac{\left(\frac{w-a}{\bar{a}w-1}\right)^2 - a^2}{\bar{a}^2\left(\frac{w-a}{\bar{a}w-1}\right)^2 - 1} = w\,\frac{w-b}{\bar{b}w-1}\,, \quad \text{hvor } b = \frac{2a}{1+|a|^2}.$$

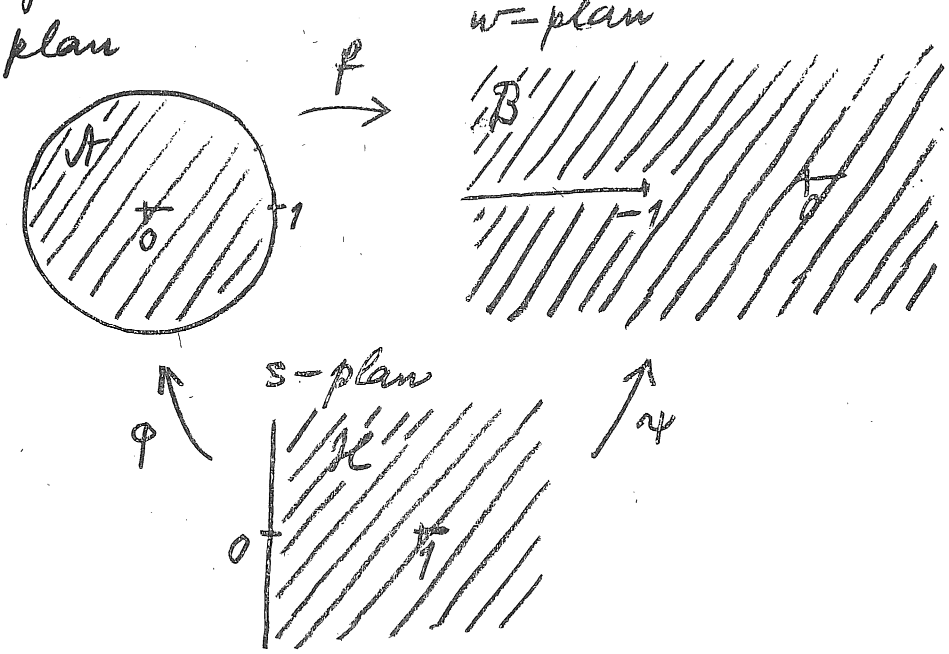
Den homografiske afbildning $w \mapsto \frac{w-b}{\bar{b}w-1}$ afbilder E på E (idet $|b| < 1$). Altså er $|k(w)| < |w|$ for alle $w \in E \setminus \{0\}$.]

Eksempler på konform afbildning.

Ud fra diskussionen af de afbildninger, der bestemmes ved de elementære funktioner (potens, eksponentialfunktion, logaritme, trigonometriske funktioner) kan man for mange par af mængder A og B

og tilhørende punkter z_0 med retning og w_0 med retning direkte opskrive den tilsvarende afbildningsfunktion.

Som eksempel vil vi opskrive den funktion f, der afbilder enhedscirklen $A = \{z \mid |z| < 1\}$ konformt på den opskårne plan $B = \mathbb{C} \setminus \{w = u + iv \mid u \leq -1,\ v = 0\}$ og fører 0 og den positive retning ud fra 0 over i 0 og den positive retning ud fra 0.



Funktionen $z = \varphi(s) = \frac{s-1}{s+1}$ afbilder halvplanen $H = \{s = \sigma + i\tau \mid \sigma > 0\}$ konformt på A og fører 1 og den positive reelle retning ud fra 1 over i 0 og den positive reelle retning ud fra 0, og funktionen $w = \psi(s) = s^2 - 1$ afbilder H konformt på B og fører 1 og den positive reelle retning ud fra 1 over i 0 og den positive reelle retning ud fra 0. Den søgte afbildningsfunktion er derfor $w = f(z) = \psi \circ \varphi^{-1}(z)$. Vi finder altså

$$w = f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1 = \frac{4z}{(1-z)^2} = 4(z + 2z^2 + \cdots + nz^n + \cdots).$$

Funktionen

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots + nz^n + \cdots$$

afbilder altså enhedscirklen $A = \{z \mid |z| < 1\}$ konformt på

$\mathbb{C} \setminus \{w = u+iv \mid u \leq -\frac{1}{4}, v = 0\}$.

I denne forbindelse nævner vi følgende formodning af Bieberbach, ifølge hvilken det anførte eksempel i en vis forstand er ekstremt: Hvis en holomorf funktion på $A = \{z \mid |z| < 1\}$ med potensrækken

$$w = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

afbilder A injektivt (d.v.s. bestemmer en konform afbildning), da gælder for alle $n = 2, 3, \dots$, at $|a_n| \leq n$. Bieberbach viste, at uligheden gælder for $n=2$, og det er senere vist, at den gælder for $n=3$ og $n=4$. Der findes en omfattende litteratur om dette problem.

Målet af billedet ved konform afbildning.

Lad A og B være åbne sammenhængende mængder i $\mathbb{C}$ ($=\mathbb{R}^2$) og $w = f(z): A \to B$ en konform afbildning af A på B. Skrives $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, er $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ en bijektiv C^1-afbildning, hvis funktionalmatrix for ethvert $(x,y) \in A$ har formen

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Vi har $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = a + ib$, altså

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = a^2 + b^2 = |f'(z)|^2.$$

Af sætningen om integraltransformation fremgår derfor, at B er målelig, hvis og kun hvis funktionen $|f'(z)|^2$ er Lebesgue integrabel over A, og at vi i så fald har

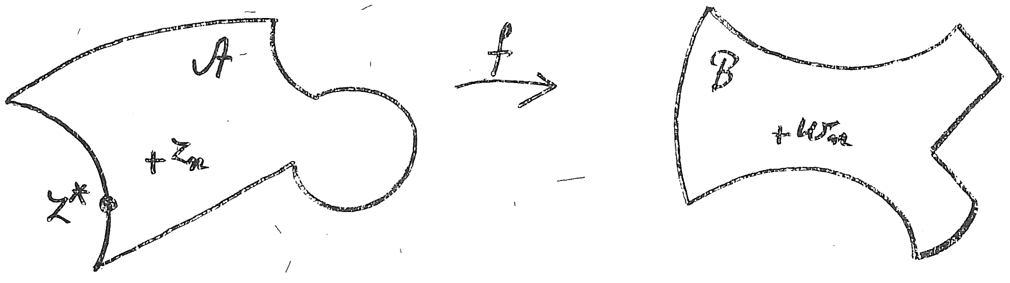
$$\boxed{m(B) = \int_A |f'(z)|^2 \, dx\, dy}.$$

Randafbildning ved konform afbildning.

Lad A og B være begrænsede åbne mængder, hver bestemt som det indre af en cirkelbuepolygon (cirkel = almindelig cirkel), og lad $f: A \to B$ være en konform afbildning.

Da kan f udvides til en bijektiv kontinuert afbildning $f^*: \overline{A} \to \overline{B}$ af afslutningen $\overline{A} = A \cup \partial A$ af A på afslutningen $\overline{B} = B \cup \partial B$ af B.

Idet to kontinuerte funktioner, der stemmer overens på A, også må stemme overens på $\overline{A}$, er udvidelsen f^* åbenbart entydigt bestemt.

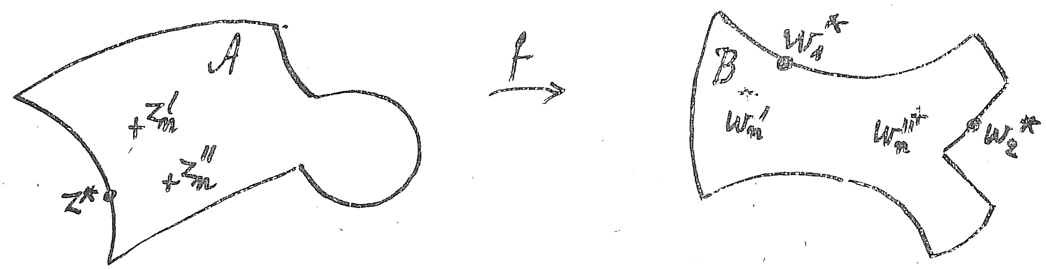


① Vi begynder med at vise: Hvis $z^* \in \partial A$, og (z_n) er en følge af punkter $z_n \in A$, så at $z_n \to z^*$, da er følgen $[w_n]$ af punkter $w_n = f(z_n) \in B$ konvergent.

Et fortætningspunkt w^* for følgen $[w_n)$ kan ikke tilhøre B og må altså tilhøre ∂B. Thi hvis en forbundet følge $[w_{n_p}]$ konvergerede mod et punkt $w^* \in B$, måtte følgen $(z_{n_p}) = [f^{-1}(w_{n_p})]$ konvergere mod punktet $f^{-1}(w^*) \in A$.

Hvis følgen $[w_n]$ ikke var konvergent, måtte den have (mindst) to fortætningspunkter. Det drejer sig derfor om at bevise følgende:

Lad $[z_n']$, $z_n' \in A$, og $[z_n'']$, $z_n'' \in A$, være to følger, der konvergerer mod samme punkt $z^* \in \partial A$, og for hvilke følgerne $[w_n'] = (f(z_n'))$ og $[w_n''] = (f(z_n''))$ er konvergente med grænsepunkter w_1^* og w_2^*. Da er $w_1^* = w_2^*$.



Beviset føres indirekte, idet vi antager $w_1^* \neq w_2^*$. Vi kan åbenbart antage, at følgerne (w_n') og (w_n'') ikke har noget fælles punkt. Vi vælger kontinuerte kurver

λ_1: $w = \lambda_1(t)$, $0 \le t \le 1$, så $\lambda_1(t) \in B$ for $0 \le t < 1$, $\lambda_1(1) = w_1^*$

λ_2: $w = \lambda_2(t)$, $0 \le t \le 1$, så $\lambda_2(t) \in B$ for $0 \le t < 1$, $\lambda_2(1) = w_2^*$,

så at $\lambda_1(1-\frac{1}{n}) = w_n'$, $\lambda_2(1-\frac{1}{n}) = w_n''$, og uden fælles punkt (dette er åbenbart muligt). Da er

$$d = \operatorname{dist}(\lambda_1, \lambda_2) = \inf_{\substack{0 \le t_1 \le 1 \\ 0 \le t_2 \le 1}} |\lambda_2(t_2) - \lambda_1(t_1)| > 0.$$

Om kurverne

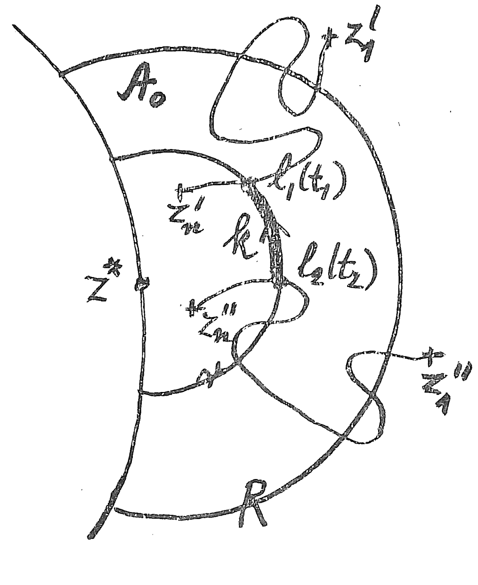
$$l_1:\ z = l_1(t) = f^{-1}(\lambda_1(t)),\ 0 \le t \underline{\le 1}$$

$$l_2:\ z = l_2(t) = f^{-1}(\lambda_2(t)),\ 0 \le t \underline{\le 1}$$

gælder da, at $l_1(1-\frac{1}{n}) = z_n'$, $l_2(1-\frac{1}{n}) = z_n''$.

Nu vælges en radius $R \le |z_1' - z^*| \wedge |z_1'' - z^*|$ så lille, at mængden $A_0 = A \cap \{z \mid |z - z^*| \le R\}$ har formen

$$A_0 = A \cap \{z \mid |z - z^*| \le R\} = \{z^* + re^{i\theta} \mid 0 < r \le R, \alpha(r) < \theta < \beta(r)\}.$$



For ethvert $r \in]0, R]$ kan vi finde et $t_1 \in [0, 1[$ og et $t_2 \in [0, 1[$, så at $|l_1(t_1) - z^*| = r$ og $|l_2(t_2) - z^*| = r$. [Vi behøver blot at vælge et n så stort, at $|z_n' - z^*| \le r$ og $|z_n'' - z^*| \le r$, da kan t_1 og t_2 findes i $[0, 1-\frac{1}{n}]$.] De to punkter $l_1(t_1)$ og $l_2(t_2)$ bestemmer en delbue k: $z = z^* + re^{i\theta}$,

$\gamma(r) \leq \theta \leq \delta(r)$, af cirkelbuen $z = z^* + re^{i\theta}$, $\alpha(r) < \theta < \beta(r)$. Vi har

$$\left| \int_k f'(z)dz \right| = |f(l_2(t_2)) - f(l_1(t_1))| = |\lambda_2(t_2) - \lambda_1(t_1)| \geq d.$$

Men
$$\left| \int_k f'(z)dz \right| = \left| \int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} f'(z^* + re^{i\theta})\, i r e^{i\theta} d\theta \right| \leq r \int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} 1 \cdot |f'(z^* + r e^{i\theta})| d\theta,$$

altså ved brug af Cauchy-Schwarz' ulighed

$$\left| \int_k f'(z)dz \right| \leq r \left[\int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} 1^2 d\theta \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} |f'(z^* + re^{i\theta})|^2 d\theta \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq r\,(2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} |f'(z^* + re^{i\theta})|^2 d\theta \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Følgelig er
$$\int_{\gamma(r)}^{\delta(r)} |f'(z^* + re^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{d^2}{2\pi r^2}.$$

Nu er imidlertid ifølge integraltransformationsformlen for polære koordinater og Lebesgue-Fubinis sætning

$$m(B) = \int_A |f'(z)|^2 dx dy > \int_{A_0} |f'(z)|^2 dx dy$$
$$= \int_0^R \left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} |f'(z^* + re^{i\theta})|^2 d\theta \right) r\, dr.$$

Ifølge det foranstående er det indre integral $\geq \frac{d^2}{2\pi r^2}$. Følgelig måtte $\frac{d^2}{2\pi r^2} r = \frac{d^2}{2\pi r}$ være integrabel over $]0, R]$. Dette er imidlertid ikke tilfældet. Vi er altså nået til en modstrid.

(2) Lad $z^* \in \partial A$. For alle følger (z_n), $z_n \in A$, med $z_n \to z^*$ må ifølge det foranstående følgen $(w_n) = (f(z_n))$ være konvergent med samme grænsepunkt $w^* \in \partial B$. Vi sætter $f^*(z^*) = w^*$, medens vi for ethvert $z \in A$ sætter $f^*(z) = f(z)$.

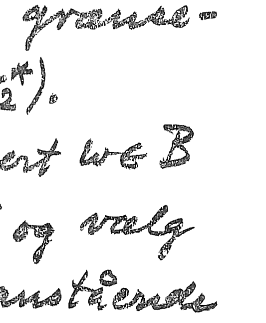
Den således definerede udvidelse $f^* : \overline{A} \to \overline{B}$ af afbildningen $f : A \to B$ er <u>kontinuert</u>. Det er klart, at f^* er kontinuert i ethvert punkt af A. Lad nu $z^* \in \partial A$.

og lad (z_n^*) være en følge af punkter $z_n^* \in \bar{A}$, så at $z_n^* \to z^*$. For de n, for hvilke $z_n^* \in A$, sætter vi $z_n = z_n^*$. For de n, for hvilke $z_n^* \in \partial A$, vælger vi et $z_n \in A$, så at $|z_n - z_n^*| < \frac{1}{n}$ og $|f(z_n) - f^*(z_n^*)| < \frac{1}{n}$. Da gælder $z_n \to z^*$, altså $f(z_n) \to f^*(z^*)$, og følgelig $f^*(z_n^*) \to f^*(z^*)$. Følgelig er f^* kontinuert i ethvert punkt af ∂A.

Afbildningen $f^*: \bar{A} \to \bar{B}$ er injektiv, d.v.s. $f^*(z_1^*) \neq f^*(z_2^*)$, når $z_1^*, z_2^* \in \bar{A}$, $z_1^* \neq z_2^*$. Dette er klart, hvis mindst et af punkterne z_1^*, z_2^* tilhører A. Antag nu, at begge tilhører ∂A, og vælg følger (z_n'), $z_n' \in A$, $z_n' \to z_1^*$ og (z_n''), $z_n'' \in A$, $z_n'' \to z_2^*$. Da gælder $w_n' = f(z_n') \to f^*(z_1^*)$ og $w_n'' = f(z_n'') \to f^*(z_2^*)$. Var nu $f^*(z_1^*) = f^*(z_2^*) = w^*$, måtte ifølge det foranstående anvendt på f^{-1} følgerne $(z_n') = (f^{-1}(w_n'))$ og $(z_n'') = (f^{-1}(w_n''))$ have samme grænseværdi. Men $z_1^* \neq z_2^*$. Altså er $f^*(z_1^*) \neq f^*(z_2^*)$.

Afbildningen $f^*: \bar{A} \to \bar{B}$ er surjektiv. Ethvert $w \in B$ er billede af et $z \in A$. Betragt nu et $w^* \in \partial B$ og vælg en følge (w_n), $w_n \in B$, $w_n \to w^*$. Ifølge det foranstående anvendt på f^{-1} må da følgen $(z_n) = (f^{-1}(w_n))$ konvergere mod et punkt $z^* \in \partial A$, og vi har derfor $f^*(z^*) = w^*$.

Hermed er sætningen bevist.



Sætningen udvides umiddelbart til det tilfælde, hvor A og B er vilkårlige åbne mængder, hver begrænset af en cirkelbuepolygon. I tilfælde af en ubegrænset mængde indeholder polygonen ∞, og de fra ∞ udgående sider er halvlinier (evt. hørende til samme linie). En ubegrænset mængde af denne art kan ved en homografi afbildes på en begrænset mængde af samme art, og sætningen henføres derfor til det foran behandlede tilfælde.

Nogle almene sætninger om holomorfe funktioner.

(a) Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ være åben og sammenhængende og lad $f: A \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Da er f holomorf, hvis og kun hvis der for ethvert i A indeholdt afsluttet akseparallelt rektangel R gælder $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.

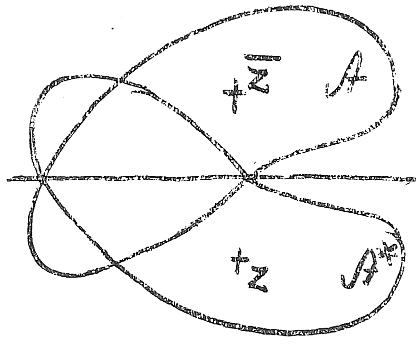
Nødvendigheden af betingelsen følger af Cauchys integralsætning. Tilstrækkeligheden følger af, at hvis betingelsen er opfyldt og $S = \{z = x+iy \mid x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\} \subset A$, må for ethvert $z = x+iy \in \mathring{S}$ gælde

$$g(z) = \int_{x_0}^{x} f(\xi + iy_0)\,d\xi + i\int_{y_0}^{y} f(x+i\eta)\,d\eta = i\int_{y_0}^{y} f(x_0+i\eta)\,d\eta + \int_{x_0}^{x} f(\xi+iy)\,d\xi\,;$$

disse udtryk viser, at g som funktion af (x,y) er en C^1-funktion på $\mathring{S}$ og at $\frac{\partial g}{\partial x} = f$, $\frac{\partial g}{\partial y} = if$; altså er g holomorf i $\mathring{S}$ og $g' = f$; følgelig er f holomorf i $\mathring{S}$.

(b) Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ være åben og sammenhængende og lad $f: A \to \mathbb{C}$ være holomorf. Lad $A^* = \{z \mid \bar{z} \in A\}$ og lad $f^*: A^* \to \mathbb{C}$ være defineret ved $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Da er f^* holomorf.

Bevis. For $z \in A^*$, $z + \Delta z \in A^*$, $\Delta z \to 0$ gælder



$$\frac{f^*(z+\Delta z) - f^*(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\overline{z+\Delta z}) - f(\bar{z})}}{\Delta z} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\overline{\Delta z}) - f(\bar{z})}{\overline{\Delta z}}\right)} \to \overline{f'(\bar{z})}.$$

Altså er f^* differentiabel i A^* med kontinuert differentialkvotient ($f^{*\prime}(z) = \overline{f'(\bar{z})}$) og følgelig holomorf.

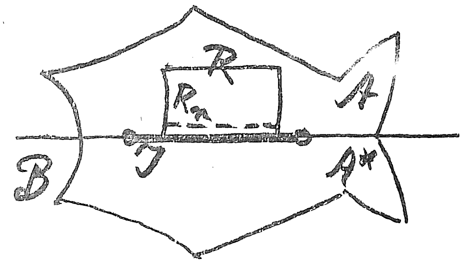
Schwarz' spejlingsprincip.

Lad $A \subseteq \{z = x+iy \mid y > 0\}$ eller $A \subseteq \{z = x+iy \mid y < 0\}$ være det indre af en simpel figur, og lad ∂A indeholde et åbent interval I på x-aksen. Lad $f: A \cup I \to \mathbb{C}$ være kontinuert og lad f være holomorf på A og reel på I. Da er den på mængden $B = A \cup I \cup A^*$, hvor $A^* = \{z \mid \bar{z} \in A\}$, definerede funktion $g : B \to \mathbb{C}$, der bestemmes ved

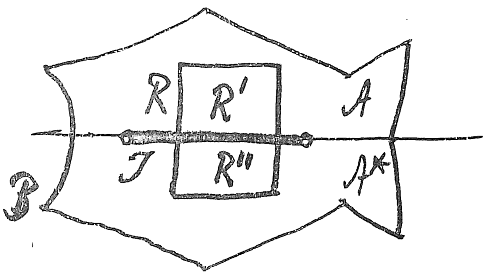
$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{for } z \in A \cup I \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{for } z \in A^*, \end{cases}$$

en holomorf funktion.

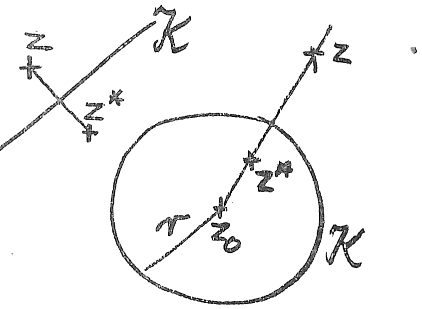
Bevis. Det er klart, at g er kontinuert. Ifølge ⓐ ovenfor er det altså nok at vise, at $\int_{\partial R} g(z)\,dz = 0$ for ethvert afsluttet rektangel $R \subset B$. Ifølge forudsætning er g holomorf i A, og ifølge ⓑ ovenfor er g holomorf i A^*. Altså er $\int_{\partial R} g(z)\,dz = 0$, hvis $R \subset A$ eller $R \subset A^*$. Hvis en side af R tilhører I, betragter vi en følge af rektangler R_n, der fremkommer af R ved afskæring af rektangler langs siden på I, hvis lodrette kanter konvergerer mod 0. Da er $\int_{\partial R_n} g(z)\,dz = 0$ for alle n, og da (som man let ser) $\int_{\partial R_n} g(z)\,dz \to \int_{\partial R} g(z)\,dz$, slutter vi, at $\int_{\partial R} g(z)\,dz = 0$.



Hvis R overskærer den reelle akse, deles R derved i to rektangler R' og R'' af den foregående type, og vi finder $\int_{\partial R} g(z)\,dz = \int_{\partial R'} g(z)\,dz + \int_{\partial R''} g(z)\,dz = 0$.



Lad K være en almindelig cirkel. Ved spejlbilledet z^* af et punkt z i K forstås det sædvanlige spejlbillede, hvis K er en ret linie, og punktet $z^* = z_0 + \dfrac{r^2}{\overline{z - z_0}}$, hvis K er cirklen med centrum z_0 og radius r. Bemærk, at hvis z^* er spejlbillede af z, er z spejlbillede af z^*.

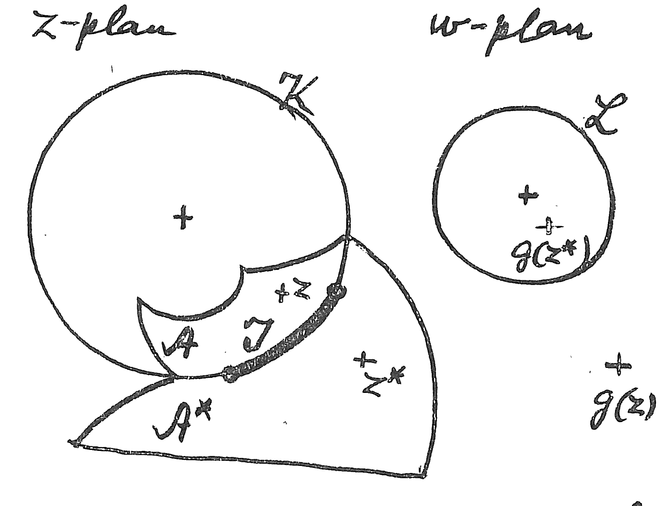


Lad A være det indre af en simpel figur i z-planen, beliggende på den ene side af en almindelig cirkel K, og lad ∂A indeholde en åben bue J af K (d.v.s. en bue uden endepunkterne). Såfremt K er en sædvanlig cirkel, må A ikke indeholde dennes centrum. Lad L være en almindelig cirkel i w-planen. Lad $f: A \cup J \to \hat{C}$ være kontinuert og lad f være holomorf på A og antag $f(z) \in L$ for $z \in J$. Såfremt L er en sædvanlig cirkel, må dennes centrum ikke være værdi for f. Lad z^* og w^* betegne spejlbilledet af et punkt z eller w i henholdsvis K og L. Lad $A^* = \{z \mid z^* \in A\}$. Da er den på mængden $B = A \cup J \cup A^*$ definerede funktion $g: B \to \hat{C}$, der bestemmes ved

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{for } z \in A \cup J \\ (f(z^*))^* & \text{for } z \in A^*, \end{cases}$$

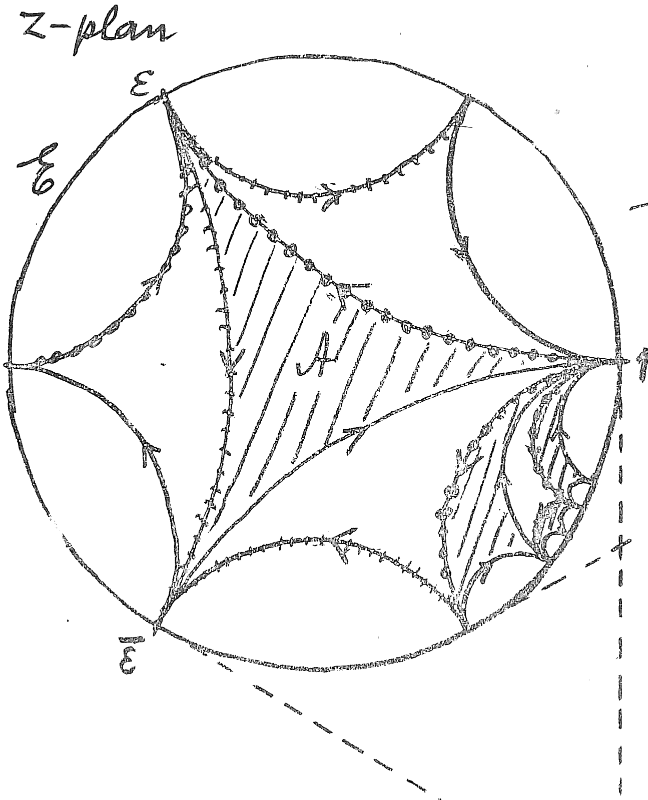
en holomorf funktion.

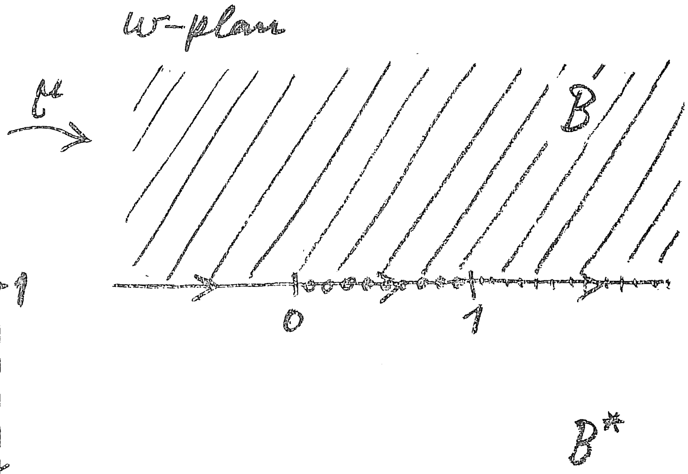
Den foregående sætning er åbenbart det specialtilfælde, hvor K og L begge er den reelle akse. Den almene sætning tilbageføres til dette tilfælde, idet z-planen og w-planen afbildes homografisk, således at K og L går over i den reelle akse, idet det benyttes, at to punkter, der er hinandens spejlbilleder i en almindelig cirkel, ved en homografi afbildes i to punkter, der er hinandens spejlbilleder i cirklens billede.



Modulfunktionen.

I enhedscirklen $\mathcal{E}=\{z \mid |z|<1\}$ betragtes cirkelbuetrekanten A begrænset af de tre ortogonalcirkelbuer til $\partial\mathcal{E}$, hvis endepunkter er punkterne 1, $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mængden A afbildes konformt på halvplanen $B=\{w=u+iv \mid v>0\}$. Afbildningen udvides til en bijektiv kontinuert afbildning af $\bar{A}$ på $\bar{B}$. Når z gennemløber ∂A i positiv retning må billedet w af z gennemløbe $\partial B=R\cup\{\infty\}$ monotont, og som man let ser i positiv retning. Vi kan antage, at billederne af $1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ er $0, 1, \infty$. Ellers betragtes sammensætningen med den homografi, der fører billederne af $1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ over i $0, 1, \infty$. Med dette krav er afbildningsfunktionen μ entydigt bestemt.





Cirkelbuerne fra 1 til ε, fra ε til $\bar{\varepsilon}$, fra $\bar{\varepsilon}$ til 1 (uden endepunkter) afbildes på $]0,1[$, $]1,\infty[$, $]-\infty,0[$. Vi anvender spejlingsprincipet på hver af dem. Ved spejling i buen fra 1 til ε

fås en holomorf forsættelse af μ i den figur, der består af A, buen fra 1 til ε, og A's spejlbillede i buen, der afbildes på halvplanen $B^* = \{w = u + iv \mid v < 0\}$ limet til B langs $]0,1[$. Ved spejling i buerne fra ε til $\bar{\varepsilon}$ og fra $\bar{\varepsilon}$ til 1 fås forsættelser af μ, ved hvilke spejlbillederne af A i disse buer afbildes på eksemplarer af B^* limet til B langs henholdsvis $]1,\infty[$ og $]-\infty,0[$. For hver af disse nye cirkelbuetrekanter betragtes nu dens spejlbilleder i de to frie sider, og vi får udvidelser af μ, hvorved disse spejlbilleder afbildes på eksemplarer af B limet til de respektive eksemplarer af B^* langs disses frie randstykker (for hver af dem to af stykkerne $]0,1[$, $]1,\infty[$, $]-\infty,0[$). Således fortsættes. Konstruktionen i z-planen forløber i $\mathcal{E}$, og man ser let, at ethvert punkt $z \in \mathcal{E}$ kommer med. Vi får derfor udvidet μ til en funktion $\mu: \mathcal{E} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, der afbilder $\mathcal{E}$ bijektivt på den uendeligbladede Riemann flade, der fremkommer ved til B at lime et eksemplar af B^* langs hvert af stykkerne $]0,1[$, $]1,\infty[$, $]-\infty,0[$, derefter til hvert af disse et eksemplar af B langs hvert af de to frie af disse stykker, o.s.v.

Denne funktion $\mu: \mathcal{E} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ kaldes <u>modulfunktionen</u>, og $\mathcal{E}$ med sin inddeling i cirkelbuetrekanter kaldes <u>modulfiguren</u>.

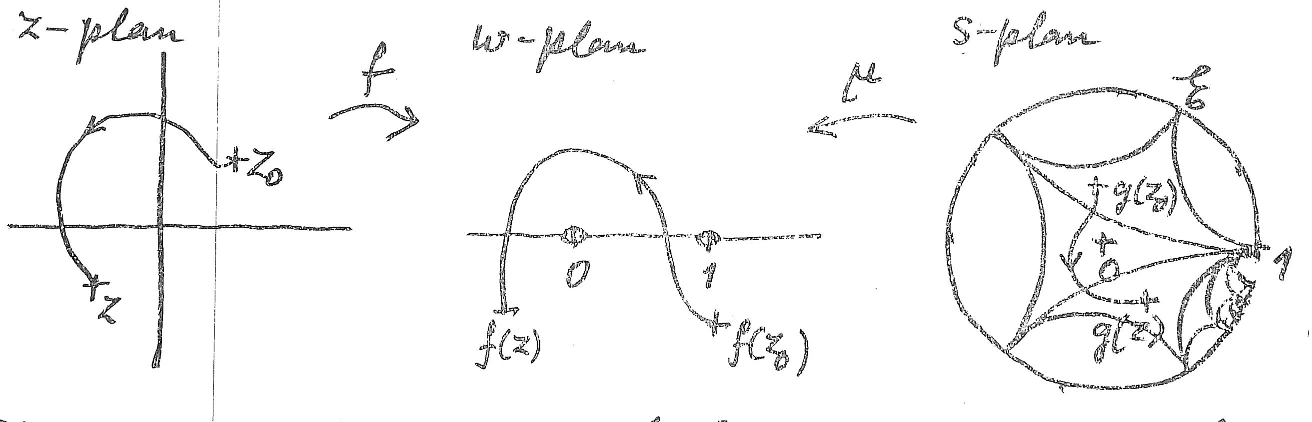
<u>Picards lille sætning.</u>

<u>Hvis</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>er holomorf og ikke konstant, er værdimængden</u> $f(\mathbb{C})$ <u>enten</u> $\mathbb{C}$ <u>eller</u> $\mathbb{C}$ <u>pånær eet punkt.</u>

Bevis. Antag, at $f : \grave{C} \to \grave{C}$ er holomorf og at $\grave{C} \setminus f(\grave{C})$ indeholder mindst to tal a og b. Vi skal da vise, at f er konstant. Vi kan antage $a=0$, $b=1$. Ellers betragtes funktionen $\frac{f-a}{b-a}$ i stedet for f. Afbildningen $f : \grave{C} \to \grave{C} \setminus \{0,1\}$ sammensættes nu med μ^{-1}. Da μ^{-1} er flertydig (opfattet som afbildning af $\grave{C} \setminus \{0,1\}$ på E, medens den er entydig opfattet som afbildning af Riemann fladen på E) kræver dette en særlig forklaring, som ganske svarer til, hvad vi tidligere har udført i forbindelse med betragtning af argument variation. Lad os fiksere betegnelserne, således at vi betegner den variable i funktionen μ med s. Vi har da funktionerne

$$w = \mu(s) : E = \{ s \mid |s| < 1 \} \to \grave{C} \setminus \{0,1\},$$

$$w = f(z) : \grave{C} \to \grave{C} \setminus \{0,1\}.$$



For at definere $s = g(z) = \mu^{-1} \circ f(z)$ vælger vi for et bestemt z_0 som $g(z_0)$ en bestemt af de uendelig mange værdier af $\mu^{-1}(f(z_0))$, svarende til, at vi betragter $f(z_0)$ som liggende i et bestemt blad af Riemann fladen. Betragtes nu et vilkårligt z og en kurve, der forbinder z med z_0, vil denne ved f afbildes i en kurve i $\grave{C} \setminus \{0,1\}$, som vi kan betragte som en kurve på Riemann fladen. Herved bliver f(z) placeret i et bestemt blad af denne, og vi får derfor en bestemt værdi af $\mu^{-1}(f(z))$. Afgørende er nu, at da $\grave{C}$ er enkelt sammenhængende, og følgelig enhver kurve fra z_0 til z kan føres kontinuert over i enhver anden, bliver $\mu^{-1}(f(z))$ uafhængig af, hvilken kurve, vi benytter. Herved er værdien af $g(z)$ bestemt.

Den således dannede funktion

$$s = g(z) = \mu^{-1} \circ f(z) : \grave{C} \to \mathcal{E}$$

er åbenbart holomorf. Ifølge Liouvilles sætning må den være konstant. Følgelig er også $f(z) = \mu \circ g(z)$ konstant.

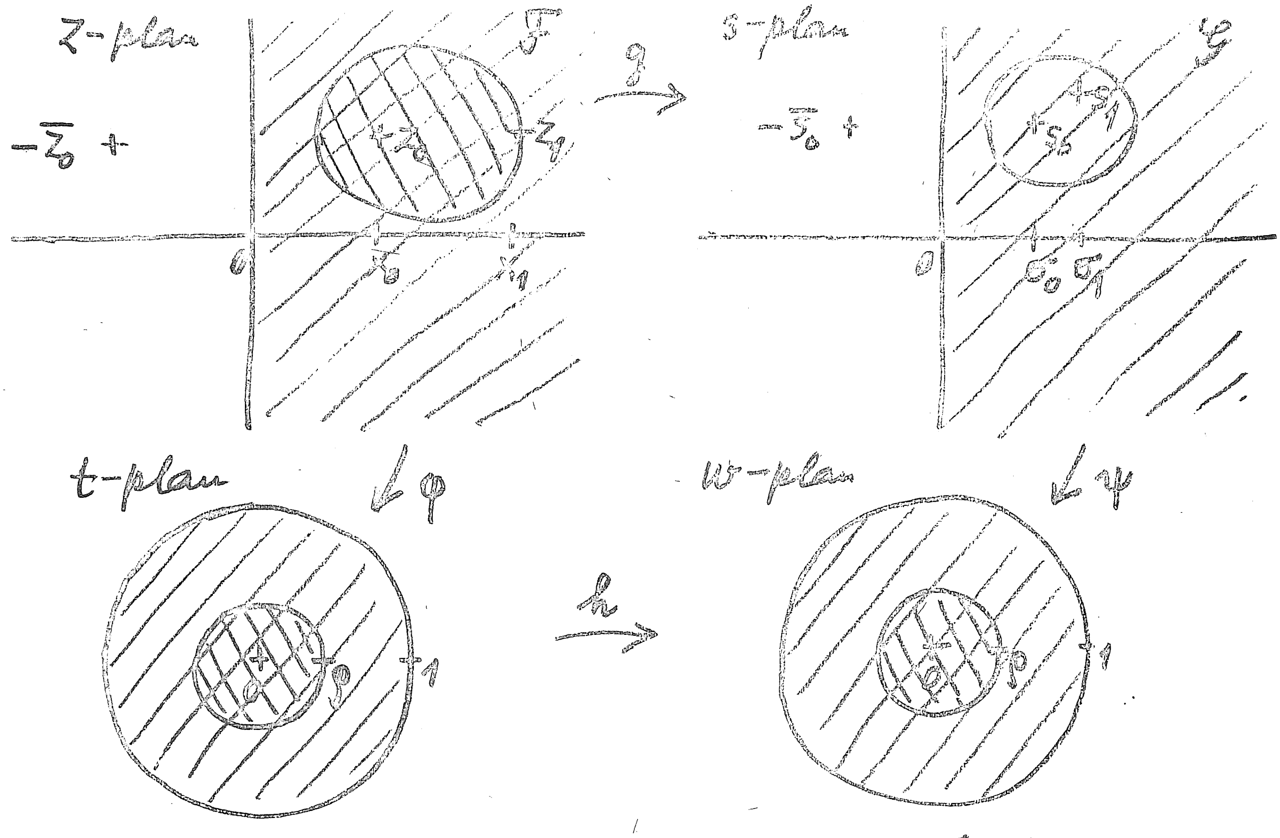
Picards store sætning.

Hvis $f : A \to \grave{C}$ er holomorf i den udprikkede cirkelskive $A = \{t \mid |t - t_0| < \varrho\}$ og har Laurentrækken $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$, og $a_n \neq 0$ for uendelig mange negative n, da er værdimængden $f(A)$ enten $\grave{C}$ eller $\grave{C}$ pånær eet punkt.

Hvis $f : A \to \grave{C}$ er holomorf i et cirkelydre $A = \{t \mid |t| > \varrho\}$ og har Laurentrækken $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n$, og $a_n \neq 0$ for uendelig mange positive n, da er værdimængden $f(A)$ enten $\grave{C}$ eller $\grave{C}$ pånær eet punkt.

De to udsagn er ensgyldige. Vi beviser det sidste. Vi får brug for nogle forberedelser.

① Betragt halvplanerne $F = \{z = x + iy \mid x > 0\}$ og $\mathcal{G} = \{s = \sigma + i\tau \mid \sigma > 0\}$ og en holomorf funktion $s = g(z) : F \to \mathcal{G}$. Lad $z_0 = x_0 + iy_0 \in F$ have billedet $s_0 = g(z_0) = \sigma_0 + i\tau_0$. Ved homografierne $t = \varphi(z) = \frac{z - z_0}{z + \bar{z}_0}$ og $w = \psi(s) = \frac{s - s_0}{s + \bar{s}_0}$ afbildes F og $\mathcal{G}$ på enhedscirklerne $\{t \mid |t| < 1\}$ og $\{w \mid |w| < 1\}$, og vi har $\varphi(z_0) = 0$, $\psi(s_0) = 0$. Funktionen $w = h(t) =$



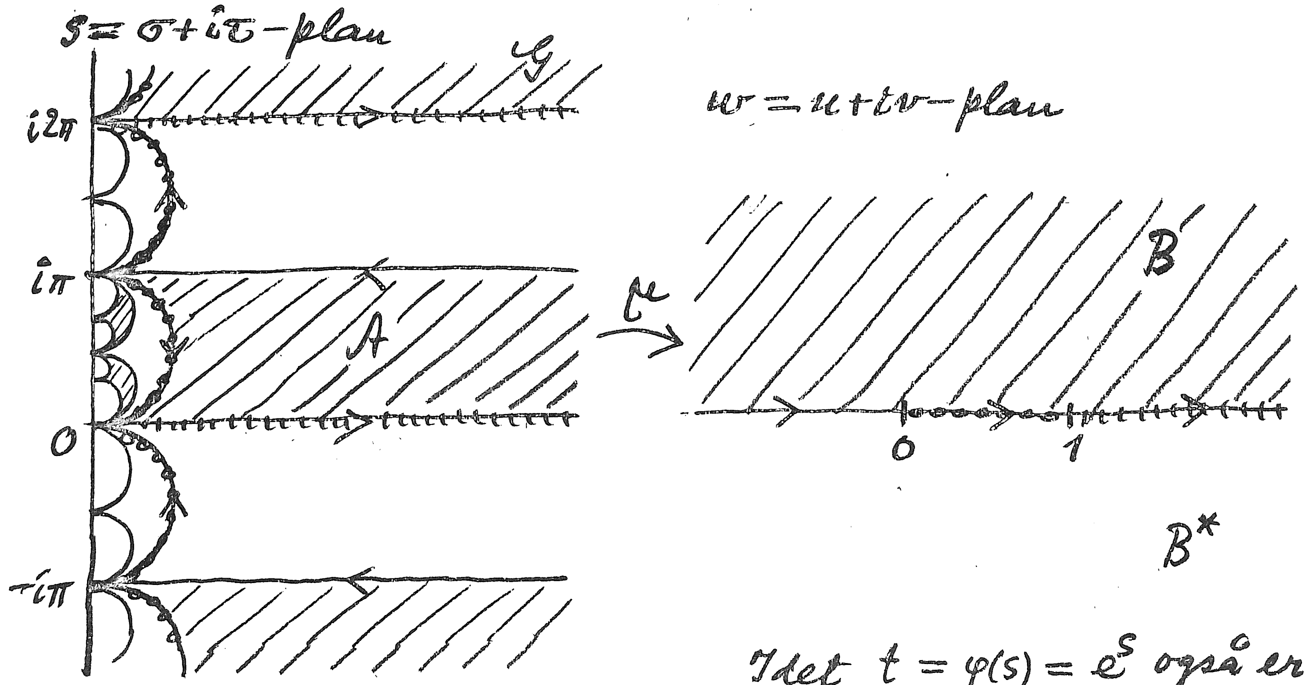
$\psi \circ g \circ \varphi^{-1}(t)$ afbilder altså $\{t \mid |t|<1\}$ ind i $\{w \mid |w|<1\}$, og vi har $h(0)=0$. Ifølge Schwarz' lemma gælder altså $|h(t)| \leq |t|$ for alle t i $\{t \mid |t|<1\}$, d.v.s. $w=h(t)$ afbilder enhver cirkelskive $\{t \mid |t| \leq \rho\}$, hvor $\rho<1$, ind i cirkelskiven $\{w \mid |w| \leq \rho\}$. Følgelig afbilder $s=g(z)$ enhver forholdscirkelskive $\{z \mid \left|\frac{z-z_0}{z+\bar z_0}\right| \leq \rho\}$, hvor $\rho<1$, ind i forholdscirkelskiven $\{s \mid \left|\frac{s-s_0}{s+\bar s_0}\right| \leq \rho\}$.

Heraf følger specielt:

Hvis $z_0=x_0+iy_0$ og $z_1=x_1+iy_0$, hvor $x_1>x_0$, har billederne $s_0=g(z_0)=\sigma_0+i\tau_0$ og $s_1=g(z_1)=\sigma_1+i\tau_1$, gælder uligheden

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \leq \frac{x_1}{x_0}}.$$

② I stedet for ved konstruktionen af modulfunktionen at gå ud fra enhedscirklen og den specielle cirkelbuetrekant bestemt ved punkterne $1, \varepsilon, \bar\varepsilon$ kunde vi være gået ud fra halvplanen $G=\{s=\sigma+i\tau \mid \sigma>0\}$ og cirkelbuetrekanten A begrænset af ortogonalcirkelbuen til den imaginære akse med endepunkter 0 og $i\pi$, den positive reelle akse, og den med den positive reelle akse parallelle halvlinie ud fra $i\pi$. Denne udgangsfigur fremgår af den tidligere ved den homografi, der fører $1, \varepsilon, \bar{\varepsilon}$ over i $i\pi, 0, \infty$. Den tilsvarende funktion, som vi atter betegner μ, bliver da en holomorf funktion $w = \mu(s) : G \to \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\}$, og modulfiguren bliver halvplanen G med dens inddeling i cirkelbuetrekanter. Den afbilder A på $B = \{w = u+iv \mid v>0\}$, buen fra $i\pi$ til 0 på $]0,1[$, den positive reelle akse på $]1,\infty[$, den anden begrænsende halvlinie på $]-\infty,0[$. Da en spejling i den første af disse halvlinier efterfulgt af en spejling i den anden er ensbetydende med en parallelforskydning $i2\pi$, er μ periodisk med perioden $i2\pi$. Da en omegn af ∞ i A afbildes på en omegn af ∞ i B, gælder $\mu(\sigma+i\tau) \to \infty$ for $\sigma \to \infty$ ligeligt i τ.



Idet $t = \varphi(s) = e^s$ også er periodisk med perioden $i2\pi$ og afbilder G på $\{t \mid |t|>1\}$, har det mening at tale om $w = \mu \circ \varphi^{-1}(t)$, som bliver en holomorf funktion fra $\{t \mid |t|>1\}$ til $\hat{C}\setminus\{0,1\}$. Lad den have Laurentrækken $\mu\circ\varphi^{-1}(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n t^n$. Der må gælde $\mu\circ\varphi^{-1}(t)\to\infty$ for $t\to\infty$. Altså er $c_n=0$ for alle $n>0$ pånær et endeligt antal. Når t gennemløber en stor cirkel $\{t \mid |t|=r\}$ en gang i positiv omløbsretning, gennemløber s et lodret liniestykke af længden 2π, hvoraf ses, at $\mu\circ\varphi^{-1}(t)$ gennemløber en kurve, der omkredser 0 en gang i positiv omløbsretning. Heraf ses, at Laurentrækken (i hvilken leddet med størst n dominerer, når $|t|$ er stor), må have formen $\mu\circ\varphi^{-1}(t)=\sum_{-\infty}^{1}c_n t^n$, $c_1\neq 0$. Følgelig er

$$\mu(s)=\sum_{-\infty}^{1}c_n e^{ns}, \quad c_1\neq 0.$$

Heraf følger, at der for alle $s=\sigma+i\tau$, for hvilke σ er $\geq$ et vist σ^*, må gælde en ulighed

$$\boxed{|\mu(s)|\leq Ke^{\sigma}}.$$

Da $\mu(s)$ er begrænset i mængden $A\cap\{s \mid \sigma\leq\sigma^*\}$, og følgelig også i den mængde, der består af $A\cap\{s \mid \sigma\leq\sigma^*\}$ og alle de mængder, denne går over i ved de successive spejlinger, slutter vi, at der må gælde en ulighed af den anførte form i hele mængden bestående af de ubegrænsede cirkelbuetrekanter i modulfiguren (d.v.s. A og de trekanter, der successivt fremkommer ved spejling i linierne $t=p\pi$, $p\in\mathbb{Z}$).

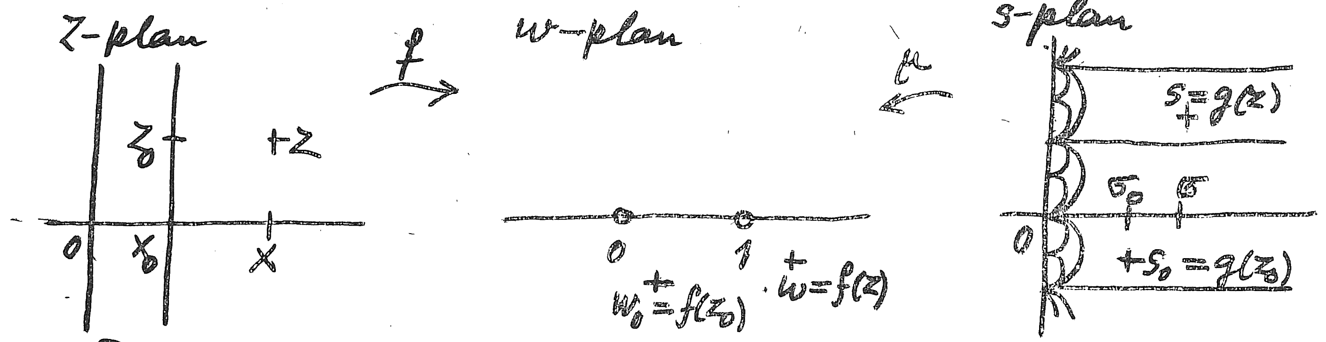
③ Vi kan nu bevise følgende sætning:

<u>Hvis</u> $w=f(z):\{z=x+iy \mid x>0\}\to\hat{C}\setminus\{0,1\}$ <u>er holomorf og er begrænset på en vis lodret linie</u> $\{z \mid x=x_0>0\}$, <u>da gælder i halvplanen</u> $\{z \mid x>x_0\}$ <u>en ulighed</u>

$$|f(z)|\leq Ke^{kx},$$

[Her er K den foran optrædende konstant, medens k er en (af f og x_0 afhængig) konstant.]

Bevis. Da halvplanen $\{z|x>0\}$ er enkeltsammenhængende, kan vi på samme måde som tidligere danne funktionen $s=g(z)=\mu^{-1}\circ f(z)$. Hertil kræves, at vi for et eller andet z vælger, hvilken af de uendelig mange værdier af $\mu^{-1}(f(z))$ vi vil benytte som $g(z)$. Herefter er g entydigt bestemt som en holomorf funktion, der afbilder $\{z|x>0\}$ på $\{s=\sigma+i\tau|\sigma>0\}$.



Betragt nu et punkt $z=x+iy$ med $x>x_0$ og punktet $z_0=x_0+iy$ (med samme ordinat). Idet $s=g(z)=\sigma+it$ og $s_0=g(z_0)=\sigma_0+it_0$, slutter vi af ①, at

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}\leq\frac{x}{x_0}.$$

Da $s=g(z)=\mu^{-1}\circ f(z)$, har vi $f(z)=\mu(s)$. Lad os nu antage, at vi (for det betragtede z) har valgt $g=\mu^{-1}\circ f$ således, at $s=g(z)=\mu^{-1}(f(z))$ tilhører en af de ubegrænsede trekanter i modulfiguren (hvilket åbenbart er muligt). Da slutter vi ved brug af ②, at

$$|f(z)|=|\mu(s)|\leq Ke^{\sigma}\leq Ke^{\frac{\sigma_0}{x_0}x}.$$

Nu er f forudsat begrænset på linien $\{z|x=x_0\}$, lad os sige $|f(x_0+iy)|\leq M$ for alle y. Da $\mu(\sigma+i\tau)\to\infty$ for $\sigma\to\infty$ ligeligt i τ, kan vi vælge et $\alpha>0$ så stort, at $|\mu(s)| > M$ for alle τ, når $\sigma > \alpha$. Da $s_0 = g(z_0) = \mu^{-1} \circ f(z_0)$, altså $f(z_0) = \mu(s_0)$, følger heraf, at $\sigma_0 \leq \alpha$. Vi har derfor

$$|f(x)| \leq K e^{\frac{\alpha}{x_0} x} = K e^{kx}, \text{ hvor } k = \frac{\alpha}{x_0}.$$

④ Vi kan nu bevise Picards store sætning.

Antag, at $f: A \to \hat{C}$ er holomorf i et cirkelydre $A = \{t \mid |t| > \rho\}$ og at $\hat{C} \setminus f(A)$ indeholder (mindst) to tal a og b. Vi skal da vise, at hvis f har Laurentrækken $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n$, findes et n_0, så at $a_n = 0$ for alle $n > n_0$.

Vi kan antage $\rho = 1$ (ellers betragtes $f(\frac{t}{\rho})$ i stedet for $f(t)$) og at $a = 0$, $b = 1$ (ellers betragtes $\frac{f-a}{b-a}$ i stedet for f). Det givne er da en holomorf funktion $w = f(t)$: $\{t \mid |t| > 1\} \to \hat{C} \setminus \{0, 1\}$, og vi skal vise, at når f har Laurentrækken $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n$, findes et n_0, så at $a_n = 0$ for alle $n > n_0$.

Vi sætter $t = e^z$, d.v.s. vi betragter funktionen $w = f(e^z)$: $\{z = x + iy \mid x > 0\} \to \hat{C} \setminus \{0, 1\}$. Den er holomorf og den er åbenbart begrænset på enhver linie $\{z = x + iy \mid x = x_0 > 0\}$, f.eks. på linien $\{z = x + iy \mid x = 1\}$. Ifølge ③ gælder da i halvplanen $\{z \mid x > 1\}$ en ulighed

$$|f(e^z)| \leq K e^{kx}.$$

Det betyder imidlertid, at der i cirkelydret $\{t \mid |t| > e\}$ gælder uligheden

$$|f(t)| \leq K |t|^k.$$

Nu gælder imidlertid for ethvert $r > 1$, idet $K(r)$ betegner cirklen $\{t \mid |t| = r\}$ med positiv omløbsretning,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K(r)} \frac{f(t)}{t^{n+1}} \, dt.$$

For $r > e$ fås altså

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{K r^k}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{K}{r^{n-k}} .$$

Heraf ses, idet vi lader $r \to \infty$, at $a_n = 0$ for $n > k$.

Blandt de mange fortrinlige lærebøger i funktionsteori anbefales særligt E. Hilles fremstilling (Analytic Function Theory I-II, 1959, 1962; – heri udførlige henvisninger til litteraturen).