201. Vis, idet $z = x+iy$, at den ved

$$h(z) = z^{1003} + i\,|z|^{300\pi} + (2-3i)\sin^{37}(x+y) + 10^{25}$$

definerede funktion $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ antager værdien 0 for mindst en værdi af z.

Beviset for algebraens fundamentalsætning kalkeres.

Antag $h(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

h er kontinuert.

For ethvert $r \geq 0$ betragtes funktionen $f_r(t) = h(re^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Idet f_r er kontinuert og $\neq 0$, og $f_r(0) = f_r(2\pi)$, har f_r et omløbstal om 0; vi betegner dette omløbstal $n(r)$.

Som i beviset for algebraens fundamentalsætning vises, at $n(r)$ er konstant i $[0, +\infty[$.

For $r = 0$ er $f_r(t) = h(0) = 10^{25}$ for alle $t \in [0, 2\pi]$.

Følgelig er $n(0) = 0$. Vi har altså $n(r) = 0$ for alle r.

Nu betragter vi

$$h(z) - z^{1003} = g(z) = i\,|z|^{300\pi} + (2-3i)\sin^{37}(x+y) + 10^{25}.$$

For $|z| = r$ har vi

$$|z^{1003}| = r^{1003}, \quad |g(z)| \leq r^{300\pi} + \sqrt{13} + 10^{25}.$$

Da $300\pi < 1003$, kan vi vælge $r > 0$, således at

$$r^{300\pi} + \sqrt{13} + 10^{25} < r^{1003}.$$

Der gælder da for $|z| = r$, at

$$|h(z) - z^{1003}| < |z^{1003}|.$$

Altså gælder

$$|f_r(t) - r^{1003}e^{i1003t}| < r^{1003}e^{i1003t} \text{ for alle } t \in [0, 2\pi].$$

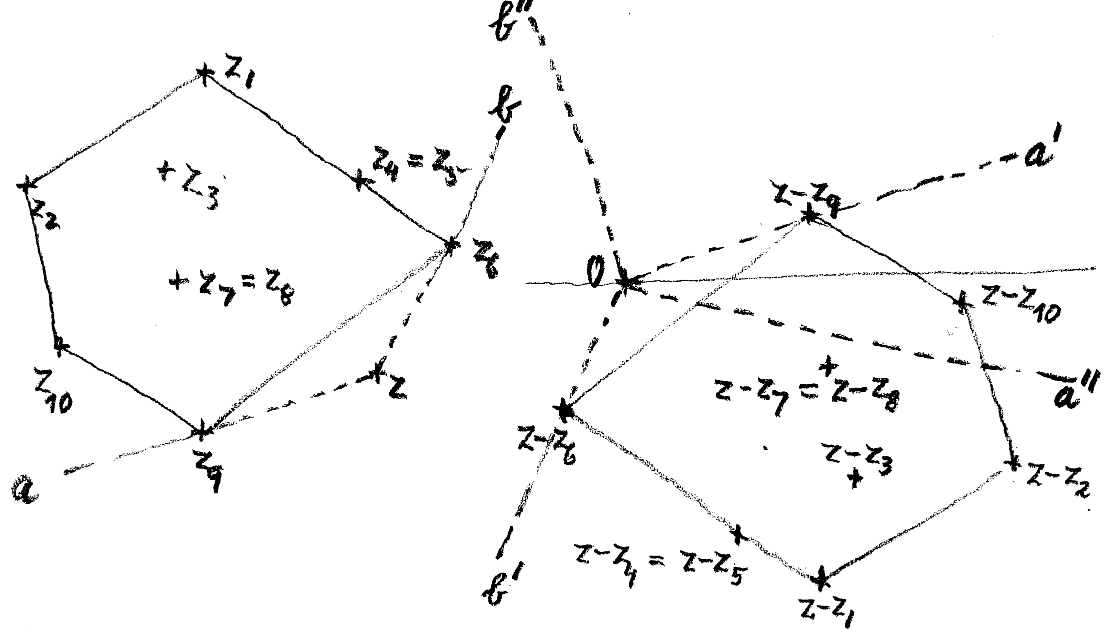
Heraf ses, at $f_r(t)$ har samme omløbstal om 0 som $r^{1003}e^{i1003t}$, altså $n(r) = 1003$, i strid med at $n(r) = 0$.

202. Vis, at hvis $P(z)$ er et polynomium af grad $\geqq 2$, ligger rødderne for polynomiet $P'(z)$ i den mindste konvekse polygon, der indeholder rødderne for $P(z)$. [Polygonen kan evt. udarte.] (Gauss.)

Vink. Idet $P(z) = a(z-z_1)\cdots(z-z_n)$, finder man for $z \neq z_1, \dots, z_n$

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}.$$

Antages, at z ikke tilhører polygonen, ligger $z-z_1, \dots, z-z_n$ i et vinkelrum $< \pi$ med toppunkt 0. Det samme gælder da $\frac{1}{z-z_1}, \dots, \frac{1}{z-z_n}$, og heraf ses, at $P'(z) \neq 0$.



Figuren svarer til en ligning af grad 10. Da z ligger udenfor den mindste konvekse polygon, der indeholder rødderne z_ν, tilhører disse et vinkelrum $< \pi$ med toppunkt z, betegnet $a\,z\,b$. Da ligger tallene $z-z_\nu$ i et vinkelrum $< \pi$ med toppunkt 0, betegnet $a'\,0\,b'$, og tallene $\frac{1}{z-z_\nu}$ følgelig i det med hensyn til den reelle akse symmetriske vinkelrum $a''\,0\,b''$. Heraf $\sum \frac{1}{z-z_\nu} \neq 0$.

203. En kvadratisk matrix $\underline{\underline{A}} = \{a_{rs}\}$ med komplekse elementer a_{rs} kaldes hermitesk, når $a_{rs} = \overline{a_{sr}}$ for alle (r, s). Vis, at for en hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ af n^{te} orden har polynomiet

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

kun reelle rødder.
Vink. Benyt, at hvis $\lambda \in \mathbb{C}$ er rod i polynomiet, findes der en egentlig vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, for hvilken $\underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \lambda \underline{x}$, og dan $\underline{\overline{x}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$, hvor $\overline{x}$ betegner vektoren $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$.

Hvis $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$, er matricen $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ singulær, altså findes egentlig vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, så at $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\, \underline{x} = \underline{0}$, d.v.s. $\underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \lambda \underline{x}$.
Nu dannes tallet

$$\underline{\overline{x}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = (\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} \overline{x}_r x_s .$$

Da $a_{rs} = \overline{a_{sr}}$ for alle (r, s), er dette tal = sit konjugerede, altså er det reelt.

Men $\underline{\overline{x}}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{\overline{x}}\, \lambda \underline{x} = \lambda(\overline{x}_1 x_1 + \dots + \overline{x}_n x_n)$

$= \lambda(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$,

og $|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0$, da $\underline{x} \neq \underline{0}$. Altså er λ reel.

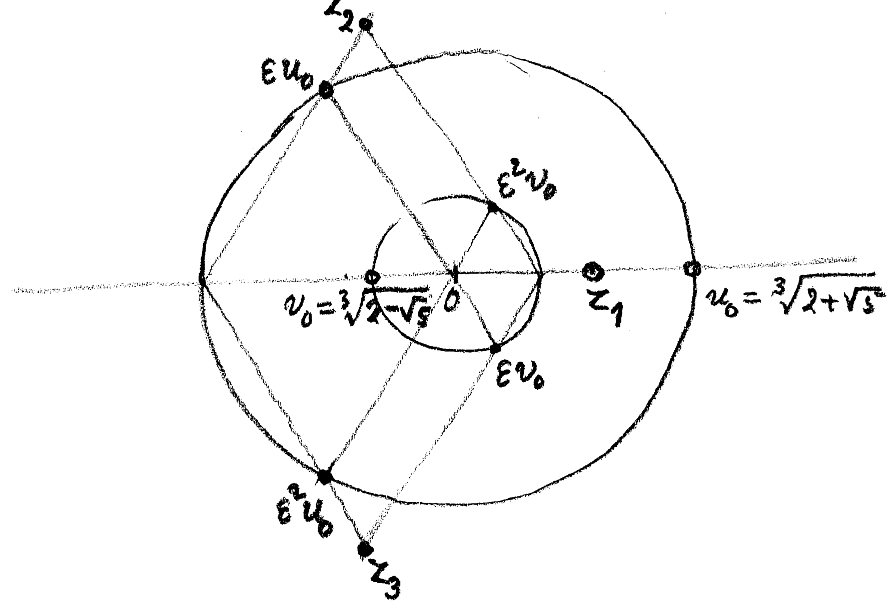
204. Løs ligningen $z^3+3z-4=0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

---

1. I Cardanos formel indsættes $p=3$, $q=-4$.
Vi har $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = 4+1 = 5>0$, og får en reel og to konjugeret komplekse rødder, nemlig

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}\right\} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \begin{cases} u_0+v_0 \\ \varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0 \\ \varepsilon^2 u_0+\varepsilon v_0, \end{cases}$$

hvor u_0 og v_0 er de reelle værdier af kubikrødderne.
Roddernes konstruktion er vist på figuren.



2. Man bemærker, at ligningen har roden 1.

$$\begin{array}{l} z-1)\; z^3+3z-4\;(z^2+z+4. \\ \quad\;\; \underline{z^3-z^2} \\ \qquad\;\; z^2+3z \\ \qquad\;\; \underline{z^2-z} \\ \qquad\qquad 4z-4 \end{array}$$

$z^2+z+4=0$ har rødderne

$$-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-4} = -\frac{1}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Altså er
$$\left.\begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}\right\} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Specielt i det reelle: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$ (!)
Ses direkte af, at $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

205. Løs ligningen $z^3-6z+4=0$ ved Cardanos formel og på anden måde.

---

1. I Cardanos formel indsættes $p=-6$, $q=4$.
Vi har $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = 4-8 = -4<0$, og får tre reelle rødder, nemlig

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2+i2}+\sqrt[3]{-2-i2}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{8}\,(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)} + \sqrt[3]{\sqrt{8}\,(\cos 135^\circ - i\sin 135^\circ)}$$

$$= \begin{cases} u_0+v_0 \\ \varepsilon u_0+\varepsilon^2 v_0 \\ \varepsilon^2 u_0 + \varepsilon v_0 \end{cases}$$, hvor en brugbar kombination u_0, v_0 er

$$\left.\begin{matrix} u_0 \\ v_0 \end{matrix}\right\} = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ \pm \sin 45^\circ) = \begin{cases} 1+i \\ 1-i, \end{cases}$$ altså

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1+i+1-i = 2 \\ \varepsilon(1+i)+\varepsilon^2(1-i) = \varepsilon+\varepsilon^2+i(\varepsilon-\varepsilon^2) = -1+i\,i\sqrt{3} = -1-\sqrt{3} \\ \varepsilon^2(1+i)+\varepsilon(1-i) = \varepsilon+\varepsilon^2-i(\varepsilon-\varepsilon^2) = -1-i\,i\sqrt{3} = -1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

[Tekstens færdige resultat giver, idet $\varphi = 135^\circ$,

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 45^\circ = 2 \\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 165^\circ = -2\sqrt{2}\cos 15^\circ \\ 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 285^\circ = 2\sqrt{2}\sin 15^\circ. \end{cases}$$]

2. Man gætter roden 2.

$$\begin{array}{l} z-2)\; z^3 - 6z + 4\;(z^2+2z-2 \\ \quad\;\; \underline{z^3-2z^2} \\ \quad\;\; 2z^2-6z \\ \quad\;\; \underline{2z^2-4z} \\ \quad\;\; -2z+4 \end{array}$$

$z^2+2z-2=0$ har rødderne $-1\pm\sqrt{3}$.

Altså er
$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{matrix}\right\} = \begin{cases} 2 \\ -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3}. \end{cases}$$

206. Fjerdegradsligningen. (1) Reducer ligningen
$$a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_4 \neq 0,$$
til en ligning af formen
$$z^4 + p z^2 + q z + r = 0.$$
(2) Løs en ligning af sidstnævnte form med $q \neq 0$ ved at skrive den
$$(z^2+t)^2 - [(2t-p)z^2 - qz + t^2 - r] = 0,$$
idet t vælges således, at leddet $[\cdots]$ får formen $(az+b)^2$.

(3) Eksempel:
$$z^4 - 27z^2 - 14z + 120 = 0$$

---

(1) I $P(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ sættes $z = w + a$.
Vi får $P(z) = a_4(w+a)^4 + a_3(w+a)^3 + a_2(w+a)^2 + a_1(w+a) + a_0$
$$= a_4 w^4 + (4a_4 a + a_3)w^3 + \cdots.$$
Vælges $a = -\frac{a_3}{4a_4}$, fås altså $P(z) = a_4 Q(w)$, hvor $Q(w)$ har formen $Q(w) = w^4 + pw^2 + qw + r$. Hvis Q har rødderne w_1, w_2, w_3, w_4, altså $Q(w) = (w-w_1)(w-w_2)(w-w_3)(w-w_4)$, fås $P(z) = a_4(z-w_1-a)(z-w_2-a)(z-w_3-a)(z-w_4-a)$, og P har altså rødderne $z_1 = w_1 + a$, $z_2 = w_2 + a$, $z_3 = w_3 + a$, $z_4 = w_4 + a$.

(2) Omskrivningen triviel. $[\cdots]$ med $t \neq \frac{p}{2}$ får formen $(az+b)^2$, hvis og kun hvis $[\cdots]$ har dobbeltrod, altså $4(2t-p)(t^2-r) - q^2 = 0$. Denne tredjegradsligning har rod $t \neq \frac{p}{2}$. Herefter omskrives ligningen til

$(z^2+t)^2 - (az+b)^2 = 0$

$(z^2+t+az+b)(z^2+t-az-b) = 0$

og rødderne kan findes som rødder i andengradsligninger.

(3) $(z^2+t)^2 - [(2t+27)z^2 + 14z + t^2 - 120] = 0$

$4(2t+27)(t^2-120) - 14^2 = 0$ har roden $t = 11$.

$(z^2+11)^2 - [49z^2 + 14z + 1] = 0 \qquad (z^2+11)^2 - (7z+1)^2 = 0$

$(z^2+7z+12)(z^2-7z+10) = 0$

$(z+3)(z+4)(z-2)(z-5) = 0$

Rødderne er $z = -3, -4, 2, 5$.

207. Bestem samtlige holomorfe funktioner i $\mathbb{C}$ af formen $\quad f(z) = f(x+iy) = \varphi(x) + i\,\psi(y)$.

Antag, at f har den angivne form.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ giver $\varphi'(x) = \psi'(y)$ for alle (x,y),

altså $\varphi'(x)$ og $\psi'(y)$ lig med samme konstant a,

altså $\varphi(x) = ax+p$, $\psi(y) = ay+q$, og dermed

$f(z) = a(x+iy) + p + iq = az + b$ (a reel).

Hvis omvendt f har denne form, har f den forlangte form.

[Det er underforstået at φ og ψ er reelle funktioner. Tillades komplekse funktioner φ og ψ, indtræder blot den forskel, at a, p, q kan være komplekse.]

208. Bestem samtlige polynomier
$$P(z) = P(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
for hvilke $u(x,y)$ har formen
$$u(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

---

1. Antag, at P har den angivne form, og at $u(x,y)=0$ for alle (x,y).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$ giver da $\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0$ for alle (x,y), altså v konstant $= v_0$, $P(z) = iv_0$.

Det omvendte er indlysende.

2. Antag, at P har den angivne form, og at der findes (x_0,y_0), så $u(x_0,y_0) \neq 0$. Da er $\varphi(x_0)\neq 0$, $\psi(y_0) \neq 0$, og af $u(x,y_0) = \varphi(x)\psi(y_0)$, $u(x_0,y) = \varphi(x_0)\psi(y)$ ses, at φ og ψ er polynomier.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{giver} \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \varphi'(x)\psi(y) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = \varphi''(x)\psi(y) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\varphi(x)\psi'(y) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\varphi(x)\psi''(y), \end{aligned}\right.$$

$$\varphi''(x)\psi(y) = -\varphi(x)\psi''(y).$$

$y=y_0$ giver $\varphi''(x) = \text{konst}\cdot\varphi(x)$ $\qquad \varphi(x) = \alpha x+\beta \quad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$

$x = x_0$ giver $\psi''(y) = \text{konst}\cdot\psi(y)$ $\qquad \psi(y) = \gamma y+\delta \quad (\gamma,\delta)\neq(0,0)$,

$$u(x,y) = \alpha\gamma xy + \alpha\delta x + \beta\gamma y + \beta\delta,$$

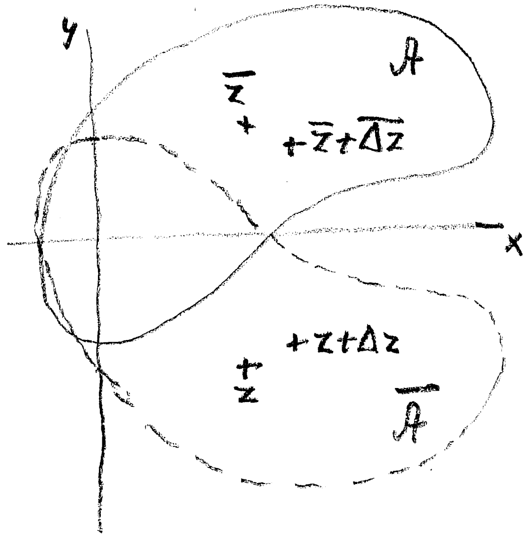
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\gamma y + \alpha\delta \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha\gamma x - \beta\gamma \end{aligned}\right\} v(x,y) = -\frac{\alpha\gamma}{2}x^2 + \frac{\alpha\gamma}{2}y^2 - \beta\gamma x + \alpha\delta y + v_0,$$

$$P(z) = -i\frac{\alpha\gamma}{2}(x^2+2ixy-y^2) + \alpha\delta(x+iy) - i\beta\gamma(x+iy) + \beta\delta + iv_0$$

$$= -i\frac{\alpha\gamma}{2}z^2 + (\alpha\delta - i\beta\gamma)z + \beta\delta + iv_0.$$

Omvendt fås for et polynomium af denne form $P(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, hvor $u(x,y) = (\alpha x+\beta)(\gamma y+\delta)$, altså $u(x,y)$ er af den forlangte form.

209. Vis, at når $f: A \to \mathbb{C}$ er holomorf i A, vil den ved $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ definerede funktion $g: \overline{A} \to \mathbb{C}$ på mængden $\overline{A} = \{z \mid \overline{z} \in A\}$ være holomorf i $\overline{A}$.

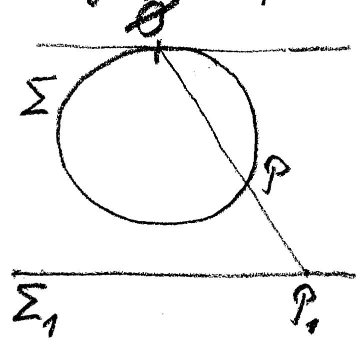


$$\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\overline{z+\Delta z})}-\overline{f(\overline{z})}}{\Delta z} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{\Delta z})-f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\right)}$$

$$\to \overline{f'(\overline{z})} \quad \text{for } \Delta z \to 0.$$

Altså er g differentiabel i $\overline{A}$ med den kontinuerte differentialkvotient $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$.

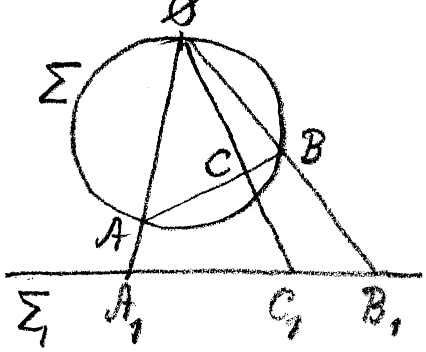
210. <u>Stereografisk projektion</u>. En kugleflade Σ projiceres fra et øjepunkt Ø på kuglen på en plan Σ_1 parallel med tangentplanen i Ø. Planen tilskrives eet uendelig fjernt punkt, der betragtes som billede af Ø.



(1) Vis, at en kurve ud fra et fra Ø forskelligt punkt P af Σ med en halvtangent i P projiceres i en kurve ud fra det tilsvarende punkt P_1 af Σ_1 med en halvtangent i P_1 og omvendt.
Vis, at afbildningen er <u>vinkeltro</u>, d.v.s. vinklen mellem halvtangenterne til to kurver ud fra P er lig med vinklen mellem halvtangenterne til de tilsvarende kurver ud fra P_1.

(2) Vis, at afbildningen er <u>cirkeltro</u>, d.v.s. cirklerne på Σ svarer til de almindelige cirkler i Σ_1 (d.v.s. cirklerne og de rette linier med tilføjelse af det uendelig fjerne punkt i Σ_1).
Vink. Benyt relationen (se figur)

$$\frac{AC\cdot BC}{\text{Ø}C^2} = \frac{A_1C_1\cdot B_1C_1}{\text{Ø}C_1^2}.$$

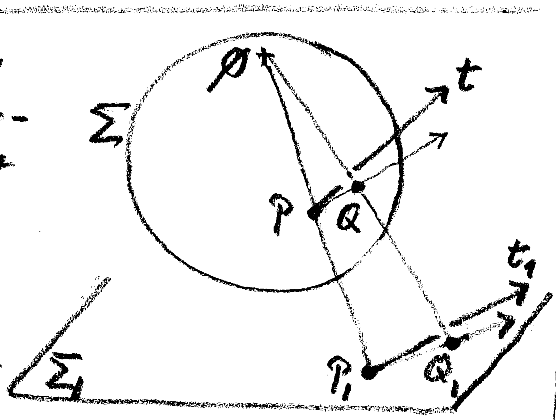


(3) Vis, at centrum for en egentlig cirkel i Σ_1 er billede ved projektionen fra Ø af toppunktet i den omdrejningskegle, der rører Σ langs den tilsvarende cirkel (subs., hvis denne cirkel er en storcirkel, skæringspunktet mellem Σ_1 og den på storcirklens plan vinkelrette linie gennem Ø).

(4) Den østlige halvkugle tænkes projiceret stereografisk fra midtpunktet af den vestlige halvkugle. Skitser billederne af længde- og breddecirkler.

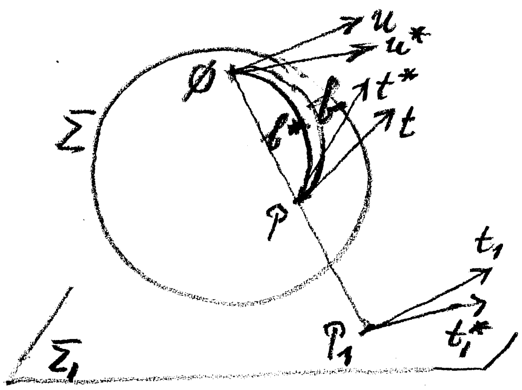
---

(1) Hvis $Q(\neq P)$ på Σ konvergerer mod P, så at halvlinien PQ konvergerer mod halvlinien t, vil billedet Q_1 af Q konvergere mod P_1 og halvlinien QQ_1 mod billedet t_1 af t ved projektion fra Ø. Kurve



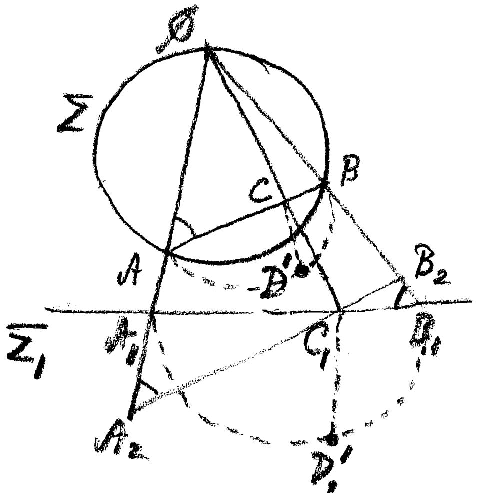
210 fortsat (a)

på Σ med halvtangent t projiceres altså i kurve i Σ_1 med halvtangent t_1. For kurve på Σ uden halvtangent i P kan findes to følger Q_n' og Q_n'', der konvergerer mod P, så at halvlinierne PQ_n' og PQ_n'' konvergerer mod forskellige halvlinier t' og t''. Halvlinierne P_1Q_{n1}' og P_1Q_{n1}'' vil da konvergere mod forskellige halvlinier t_1' og t_1''. Kurve på Σ uden halvtangent i P projiceres altså i kurve i Σ_1 uden halvtangent i P_1. — $ØPP_1tt_1$ bestemmer en halvplan, der skærer tangentplanen i $Ø$ i den med t_1 parallelle halvlinie u og Σ i en cirkelbue b med endepunktshalvtangenterne t og u. For en anden kurve på Σ med halvtangent t^* har billedet halvtangent t_1^*, og vi får cirkelbuen b^* med endepunktshalvtangenter t^* og u^*, hvor u^* er parallel med t_1^*. Altså er $\angle tt^* = \angle uu^* = \angle t_1t_1^*$, hvoraf vinkeltroskaben.



(2) Ved vinkelbetragtning ses, at firkant $A_1A_2B_1B_2$ er indskrivelig. Altså er

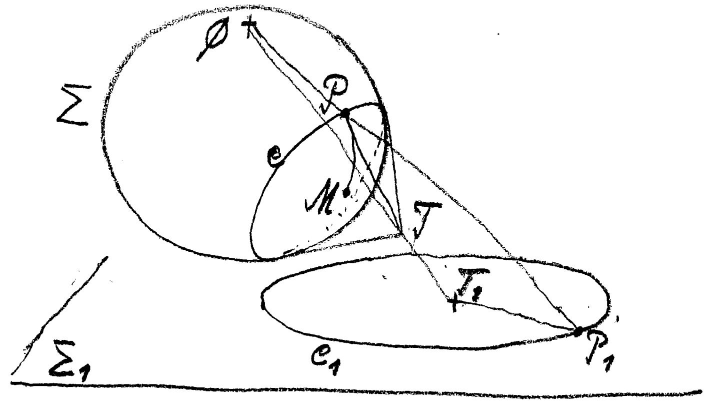
$$\frac{AC\cdot BC}{ØC^2} = \frac{A_2C_1\cdot B_2C_1}{ØC_1^2} = \frac{A_1C_1\cdot B_1C_1}{ØC_1^2}.$$



Cirklerne på Σ og i Σ_1 med diametre AB og A_1B_1 betragtes (halvcirklerne er vist i nedlægning). For de punkter D og D_1 på disse, der ligger over C og C_1 (vist i nedlægning som D' og D_1') er $CD = CD' = \sqrt{AC\cdot BC}$, $C_1D_1 = C_1D_1' = \sqrt{A_1C_1\cdot B_1C_1}$. Altså er $\frac{CD}{ØC} = \frac{C_1D_1}{ØC_1}$, hvilket viser, at D_1 er billedet af D ved den stereografiske projektion. Heraf cirkeltroskaben (idet cirkler på Σ gennem $Ø$ åbenbart svarer til de rette linier i Σ_1 med tilføjelse af det uendelig fjerne punkt).

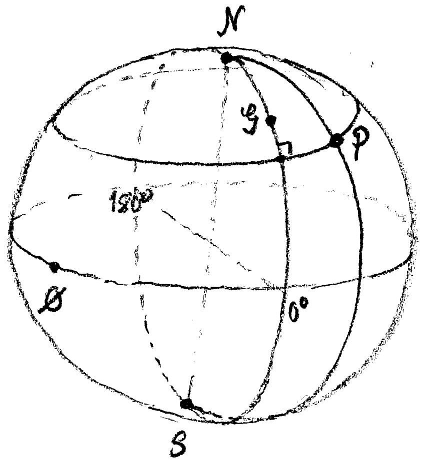
210 fortsat (b)

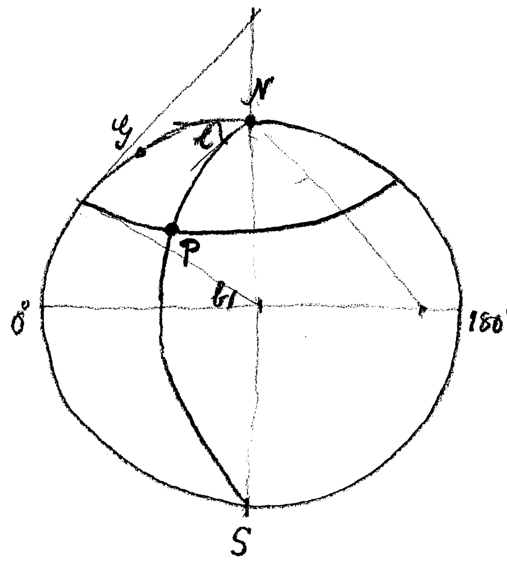
(3) Betragt først lillecirkel c på Σ, der ikke går gennem Ø, med sfærisk centrum M. Lad T være toppunktet i den rørende kegle.



Billedet er en cirkel c_1. En sfærisk radius $\widehat{MP}$ har til tangent i P keglefrembringeren PT, hvis billede P_1T_1 altså er tangent til $\widehat{MP}$'s billede. Vinkeltroskaben viser, at P_1T_1 er ortogonal på c_1. Altså er T_1 centrum i c_1. Betragt dernæst en storcirkel på Σ, der ikke går gennem Ø. Her erstattes keglen med den omskrevne cylinder, og T_1 bliver skæringspunktet mellem Σ_1 og linien gennem Ø parallel med frembringerne.

(4) Cirkeltroskab og vinkeltroskab benyttes.





N er nordpolen, S sydpolen, G Greenwich.
Øjepunktet Ø er midtpunktet af den vestlige halvkugle. Som billedplan kan benyttes meridianplanen NSG bestemt ved længdecirklerne 0° og 180°. Billedet er tegnet som det ses af en iagttager på modsat side af billedplanen. Konstruktionen af punktet P med længde l og bredde b er vist.

211. Bestem for afbildningen $w = f(z) = \dfrac{z+4}{2z-2}$ billedet af

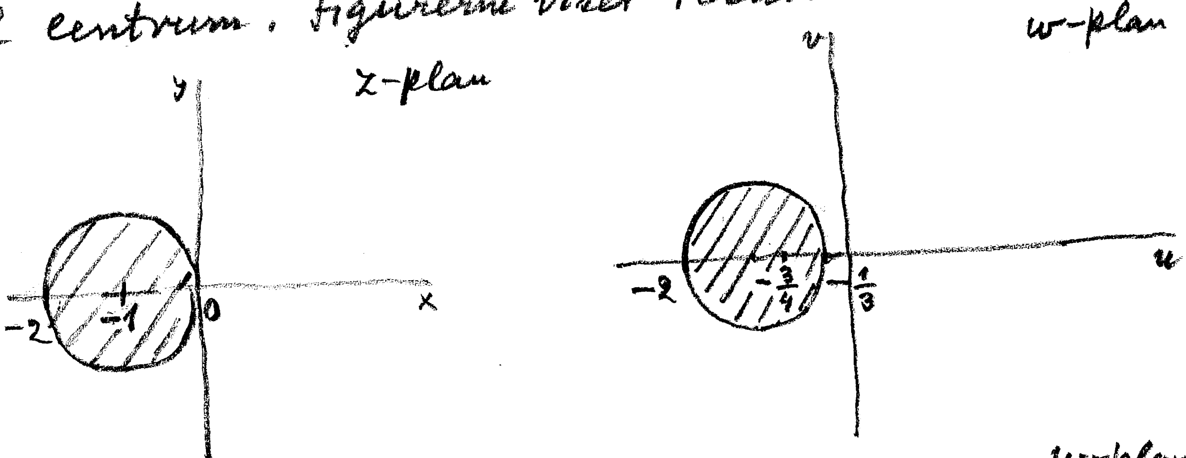
(a) cirklen $\{z \mid |z+1| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z+1| \leq 1\}$,

(b) cirklen $\{z \mid |z-1| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z-1| \leq 1\}$,

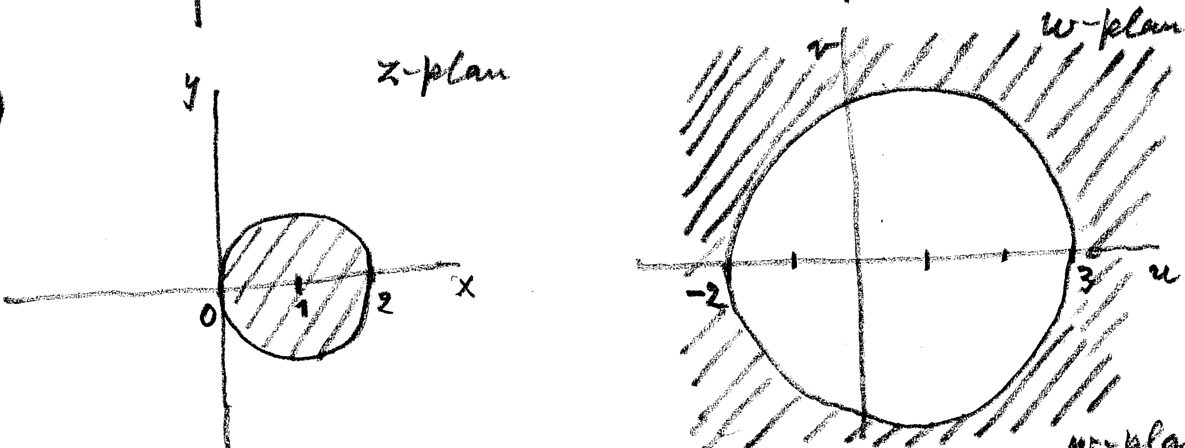
(c) cirklen $\{z \mid |z| = 1\}$ og cirkelskiven $\{z \mid |z| \leq 1\}$.

$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. Billedet af en med hensyn til x-aksen symmetrisk mængde er derfor symmetrisk med hensyn til x-aksen. Cirklernes billeder er almindelige cirkler; de kan findes ved at finde billederne af punkterne på x-aksen. Cirkelskivernes billeder kan derefter findes ved at man (f. eks.) finder billedet af centrum. Figurerne viser resultatet.

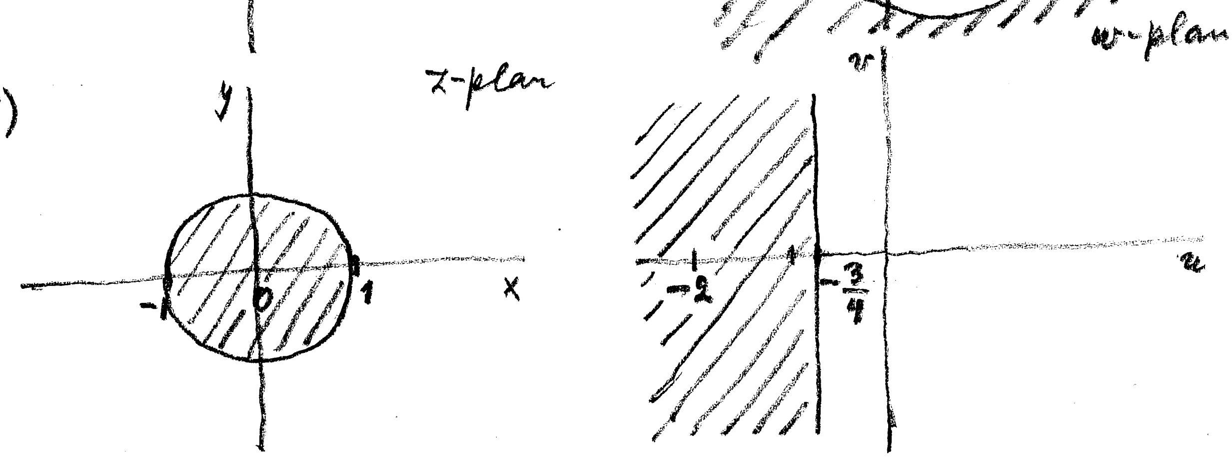
(a)



(b)



(c)



212. Diskuter afbildningen $w = \frac{1}{z}$.

(1) Gør rede for beliggenheden af w for givet z.

(2) Find fixpunkterne. Tegn de tilsvarende systemer af synsvinkelcirkler og forholdscirkler og vis, at hver cirkel i disse systemer ved afbildningen går over i sig selv.

---

(1) $z = 0$ giver $w = \infty$, $z = \infty$ giver $w = 0$

$z \neq 0, \infty$: w bestemmes ved $|w| = \frac{1}{|z|}$, $\arg w = -\arg z$.

(2) $w = z$ ɔ: $z = \frac{1}{z}$, $z^2 = 1$ fås for $z = 1, -1$.

Afbildningen bestemmes derfor også ved

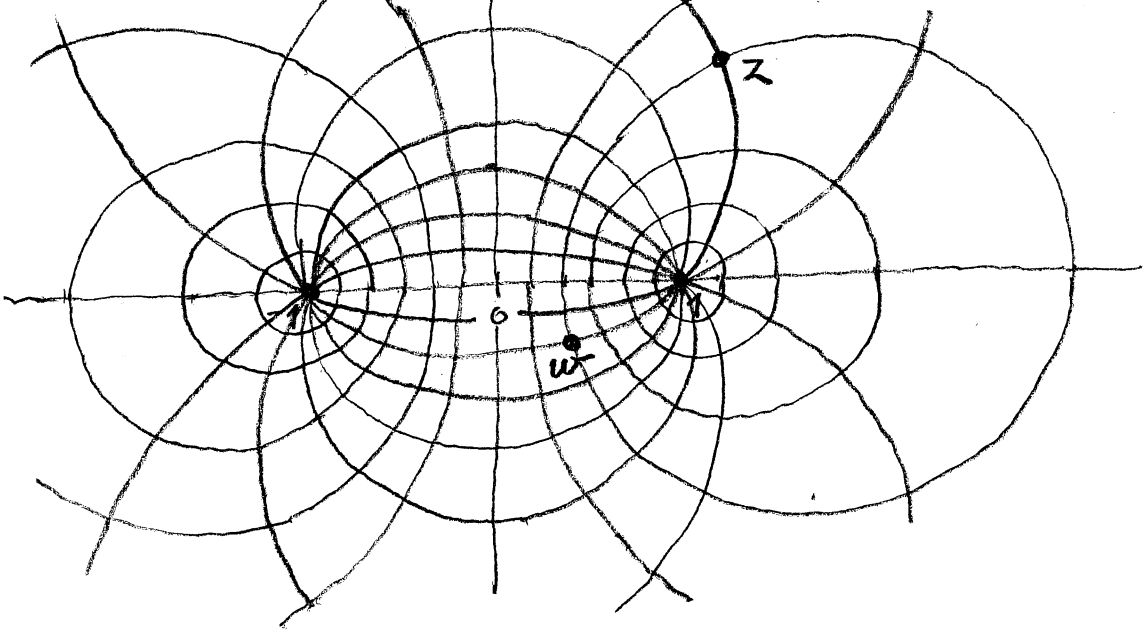
$$\frac{w-1}{w+1} = a\,\frac{z-1}{z+1} \quad \text{for et vist } a.$$

$z = 0$ skal give $w = \infty$, altså $1 = a(-1)$, $a = -1$.

Afbildningen bestemmes altså ved $\frac{w-1}{w+1} = -\frac{z-1}{z+1}$.

Da $|a| = 1$ går hver forholdscirkel over i sig selv.

Da a er reel og < 0 går hver synsvinkelbue over i den modsatte synsvinkelbue (afbildningen er både elliptisk og hyperbolsk).



213. Vis, at en homografi er sin egen omvendte, hvis og kun hvis den enten er den identiske afbildning eller har to fixpunkter og bestemmes ved $w-z_0=a(z-z_0)$ eller $\dfrac{w-z_1}{w-z_2}=a\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, hvor $a=-1$. Vis, at en homografi bestemt ved $\dfrac{w-z_1}{w-z_2}=(-1)\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ også bestemmes ved $(w-p)(z-p)=q^2$, hvor $p=\dfrac{z_1+z_2}{2}$, $q=\dfrac{z_1-z_2}{2}$.

Klart, at den identiske afbildning er sin egen omvendte.

Betragt dernæst en homografi f med ét fixpunkt z_0.

Hvis $z_0=\infty$, er f en parallelforskydning $w=z+b$, $b\neq 0$, og f^{-1} er parallelforskydningen $w=z-b$, altså $f\neq f^{-1}$.

Hvis $z_0\neq\infty$, bestemmes f ved $\dfrac{1}{w-z_0}=\dfrac{1}{z-z_0}+b$, hvor $b\neq 0$, og f^{-1} altså ved $\dfrac{1}{w-z_0}=\dfrac{1}{z-z_0}-b$, så at $f\neq f^{-1}$.

Betragt endelig en homografi f med to fixpunkter z_1 og z_2.

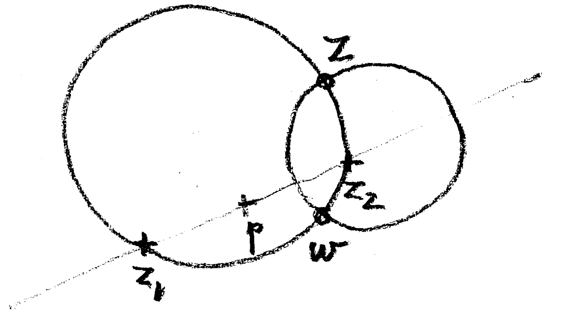
Hvis $z_2=\infty$, er f en ligedannethed $w-z_1=a(z-z_1)$, $a\neq 0,1$, og f^{-1} er ligedannetheden $w-z_1=\dfrac{1}{a}(z-z_1)$, altså $f=f^{-1}$, hvis og kun hvis $a=-1$.

Hvis z_1, z_2 begge er $\neq\infty$, bestemmes f ved $\dfrac{w-z_1}{w-z_2}=a\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, hvor $a\neq 0,1$, og f^{-1} altså ved $\dfrac{w-z_1}{w-z_2}=\dfrac{1}{a}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, så at $f=f^{-1}$, hvis og kun hvis $a=-1$.

$\dfrac{w-z_1}{w-z_2}=-\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ og $(w-p)(z-p)=q^2$

[eller $w=p+\dfrac{q^2}{z-p}$]

bestemmer samme homografi, idet der i begge tilfælde til $z=z_1, z_2, p$ svarer $w=z_1, z_2, \infty$.



[Jfr. beskrivelsen af specialtilfældet $w=\dfrac{1}{z}$ i opg. 212.]

214. Vis, at en homografi afbilder halvplanen $\{z=x+iy \mid y>0\}$ på sig selv, hvis og kun hvis den har formen $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, hvor $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ er reelle og $\det\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}>0$. Vis, at disse homografier danner en undergruppe i gruppen af alle homografier. Vis, at en sådan homografi er enten (1) den identiske afbildning, eller (2) elliptisk med to komplekst konjugerede fixpunkter, eller (3) hyperbolsk med to reelle fixpunkter (det ene evt. ∞), eller (4) parabolsk med reelt fixpunkt (evt. ∞).

(a) Antag $w=f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, hvor $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ er reelle og $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ er regulær. Da afbilder f åbenbart $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ på $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Vi får $f(i)=\frac{\alpha i+\beta}{\gamma i+\delta}=\frac{(\alpha i+\beta)(-\gamma i+\delta)}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+i(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\gamma^2+\delta^2}$. Altså afbilder f halvplanen $\{z=x+iy \mid y>0\}$ på sig selv, hvis og kun hvis $\alpha\delta-\beta\gamma>0$.

(b) Antag, at en homografi f afbilder halvplanen $\{z=x+iy \mid y>0\}$ på sig selv. Da afbilder den $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ på $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Vælg tre punkter $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}$ med billeder $w_1,w_2,w_3\in\mathbb{R}$. Da bestemmes f ved $[w\,w_1\,w_2\,w_3]=[z\,z_1\,z_2\,z_3]$. Løsning giver $w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ med reelle $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ og $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ regulær, og (a) viser, at $\alpha\delta-\beta\gamma>0$.

(c) Klart, at disse homografier udgør undergruppe.

(d) Antag $w=f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ af den omhandlede art og ikke den identiske afbildning. Hvis $\gamma=0$ fås $w=az+b$ med a,b reelle, $a>0$; for $a=1$ altså $w=z+b$ (parabolsk, fixpunkt ∞), for $a\neq1$ altså $w-z_0=a(z-z_0)$, hvor $z_0=\frac{b}{1-a}$ (hyperbolsk, fixpunkter z_0 og ∞). Hvis $\gamma\neq0$ fås fixpunkterne af $\gamma z^2+(\delta-\alpha)z-\beta=0$, andengradsligning med reelle koefficienter. Tre muligheder: To komplekst konjugerede rødder z_0,z_1; da er $\frac{w-z_0}{w-z_1}=a\frac{z-z_0}{z-z_1}$, hvor vi må have $|a|=1$, da $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ går over i $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (elliptisk). To reelle rødder z_0,z_1; da er $\frac{w-z_0}{w-z_1}=a\frac{z-z_0}{z-z_1}$, hvor vi må have a reel (hyperbolsk). Een reel rod z_0; da er $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+b$, hvor vi må have b reel (parabolsk).

215. Vis, at de homografier

$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, for hvilke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ er hele tal og $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, udgør en undergruppe i gruppen af alle homografier.

216. To indbyrdes forskellige punkter z_1 og z_2 i $\hat{C}^*$ kaldes symmetriske med hensyn til en almindelig cirkel c, hvis enten

(1) c er en ret linie, z_1 og z_2 er $\neq \infty$ og z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til c i sædvanlig forstand,

(2) c er en cirkel med centrum z_0 og radius r, z_1 og z_2 er $\neq z_0$ og $\neq \infty$ og beliggende på samme halvlinie ud fra z_0, og $|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = r^2$, eller

(3) c er en cirkel med centrum z_0 og radius r, og $z_1 = z_0$, $z_2 = \infty$ eller $z_1 = \infty$, $z_2 = z_0$.

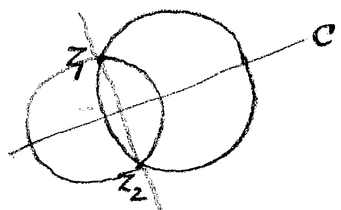
Vis, at punkterne z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til den almindelige cirkel c, hvis og kun hvis enhver almindelig cirkel gennem z_1 og z_2 skærer c ortogonalt.

Vis herved, at hvis z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til den almindelige cirkel c, og $w = f(z)$ er en homografi, er $f(z_1)$ og $f(z_2)$ symmetriske med hensyn til $f(c)$.

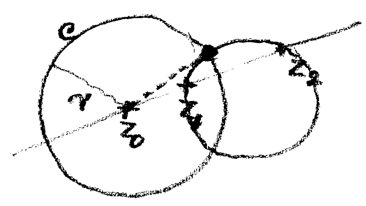
---

1. spørgsmål.

(1) c ret linie. Hvis z_1 og z_2 er symmetriske med hensyn til c, skærer enhver alm. cirkel gennem z_1 og z_2 linien c ortogonalt, da det enten er linien z_1z_2 eller en cirkel med centrum på c. Det omvendte følger af, at ortogonalcirklerne til c gennem et punkt z_1 mødes anden gang i det til z_1 symmetriske punkt z_2.



(2) c cirkel. Hvis z_1 og z_2 er $\neq z_0$ og $\neq \infty$ og er symmetriske med hensyn til c, skærer enhver alm. cirkel gennem z_1 og z_2 cirklen c ortogonalt, da det enten er linien z_1z_2 eller en cirkel, med hensyn til hvilken z_0 har potensen r^2, så at tangentstykket fra z_0 er r. Det omvendte følger af, at ortogonalcirklerne til c gennem et punkt z_1 mødes anden gang i det til z_1 symmetriske punkt (ses af sætn. om punkts potens).



(3) c cirkel, $z_1 = z_0$, $z_2 = \infty$ eller omvendt. Klart.

2. spørgsmål.

Følger af homografiens cirkeltroskab og vinkeltroskab.

217. Vis, at to komplekse tal z_1 og z_2 for
hvilke $z_1 \overline{z_2} = -1$, på Riemanns kugle
svarer til to diametralt
S
modsatte punkter p_1 og p_2. Vis, at synsvinkel-
cirklerne og forholdscirklerne hørende til z_1 og z_2
svarer til storcirklerne og lillecirklerne hørende
til p_1 og p_2. Vis herved, at en elliptisk homo-
$\frac{w-z_1}{w-z_2} = a\frac{z-z_1}{z-z_2}$, $|a| = 1$,
grafi
med fixpunkterne z_1 og z_2 svarer til en drejning
af S om diameteren p_1p_2.
Vink: Benyt opg. 215.

218. Vis, at en homografi afbilder cirkelskiven $\{z \mid |z| \leq 1\}$ på sig selv, hvis og kun hvis den har formen $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha}$, hvor $|\beta| < |\alpha|$.

---

(1) Hvis $w = f(z) = az + b$ afbilder $\{z \mid |z| \leq 1\}$ på sig selv, må åbenbart gælde $|a| = 1$, $b = 0$. Er $a = e^{i\theta}$ og sættes $\alpha = e^{i\frac{\theta}{2}}$, er $a = \dfrac{\alpha}{\bar\alpha}$, altså $w = \dfrac{\alpha z + 0}{0 z + \bar\alpha}$, d.v.s. afbildningen har den ønskede form med $\beta = 0$. — Omvendt: En afbildning $w = f(z) = \dfrac{\alpha z + 0}{0 z + \bar\alpha}$, hvor $|\alpha| > 0$, eller $w = az$, hvor $|a| = \left|\dfrac{\alpha}{\bar\alpha}\right| = 1$, afbilder $\{z \mid |z| \leq 1\}$ på sig selv.

(2) Hvis $w = f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\gamma \neq 0$, afbilder $\{z \mid |z| \leq 1\}$ på sig selv, må vi have $|f(\infty)| = \left|\dfrac{\alpha}{\gamma}\right| > 1$, altså specielt $\alpha \neq 0$. f må afbilde cirklen $\{z \mid |z| = 1\}$ på sig selv, og ifølge opg. 216 må $f(0)$ være det til $f(\infty) = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ symmetriske punkt med hensyn til cirklen. Følgelig er $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ og $f(0) = \dfrac{\beta}{\delta} = \dfrac{1}{\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)}} = \dfrac{\bar\gamma}{\bar\alpha}$, eller

$\dfrac{\bar\gamma}{\beta} = \dfrac{\bar\alpha}{\delta}$. Da $z = f^{-1}(w) = \dfrac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}$ må afbilde $\{w \mid |w| \leq 1\}$ på sig selv, må også gælde $\dfrac{\bar\gamma}{\beta} = \dfrac{\overline{-\delta}}{-\alpha} = \dfrac{\bar\delta}{\alpha}$. Altså er $\dfrac{\bar\alpha}{\delta} = \dfrac{\bar\delta}{\alpha}$, $\alpha\bar\alpha = \delta\bar\delta$, $|\alpha|^2 = |\delta|^2$. Følgelig er

$\dfrac{\bar\gamma}{\beta} = \dfrac{\bar\delta}{\alpha} = e^{i2\theta}$ for et vist θ, altså $\gamma = e^{-i2\theta}\bar\beta$, $\delta = e^{-i2\theta}\bar\alpha$,

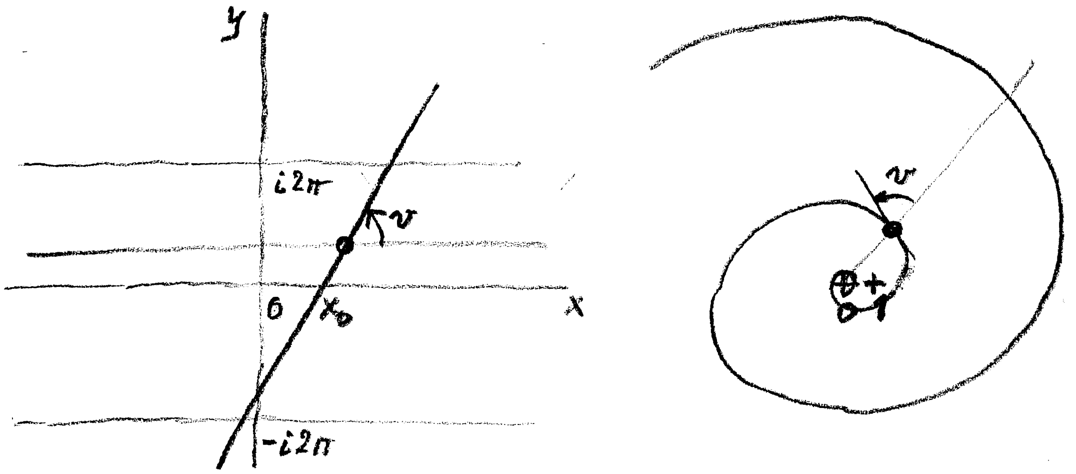
og $w = f(z) = e^{i2\theta}\dfrac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha} = \dfrac{e^{i\theta}\alpha z + e^{i\theta}\beta}{e^{-i\theta}\bar\beta z + e^{-i\theta}\bar\alpha} = \dfrac{\alpha' z + \beta'}{\bar\beta' z + \bar\alpha'}$.

Af $|f(\infty)| = \left|\dfrac{\alpha'}{\bar\beta'}\right| > 1$ følger $|\beta'| < |\alpha'|$. Afbildningen har altså den ønskede form. — Omvendt: En afbildning $w = f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha}$, hvor $\beta \neq 0$, $|\beta| < |\alpha|$, afbilder $\{z \mid |z| \leq 1\}$ på sig selv, da $|f(0)| = \left|\dfrac{\beta}{\bar\alpha}\right| < 1$, og

$$|f(e^{i2\theta})| = \left|\frac{\alpha e^{i2\theta} + \beta}{\bar\beta e^{i2\theta} + \bar\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta}}{\bar\beta e^{i\theta} + \bar\alpha e^{-i\theta}}\right| = 1.$$

219. Ved afbildningen $w = \exp z$ afbildes en ret linie $x = x_0 + \beta y$ $(\beta \neq 0)$ i $z = x+iy$-planen i en såkaldt logaritmisk spiral $r = r_0 \exp \beta\theta$ i $w = r \exp i\theta$-planen. Vis herved, at en logaritmisk spiral skærer halvlinierne ud fra $w=0$ under konstant vinkel.

$z = x+iy$ - plan $\qquad\qquad$ $w = r \exp i\theta$ - plan



$$w = \exp z = \exp(x_0+\beta y + iy) = \exp(x_0+\beta y)\exp iy$$
$$= r \exp i\theta$$

altså $\quad \theta = y$, $r = \exp(x_0+\beta y)$

⸪ ligningen i polære koordinater er $r = \exp(x_0+\beta\theta)$

eller $\quad r = r_0 \exp\beta\theta$, hvor $r_0 = \exp x_0$.

Linierne $y =$ konst. i z-planen går over i linierne $\theta =$ konst. i w-planen. Vinkeltroskaben giver påstanden.

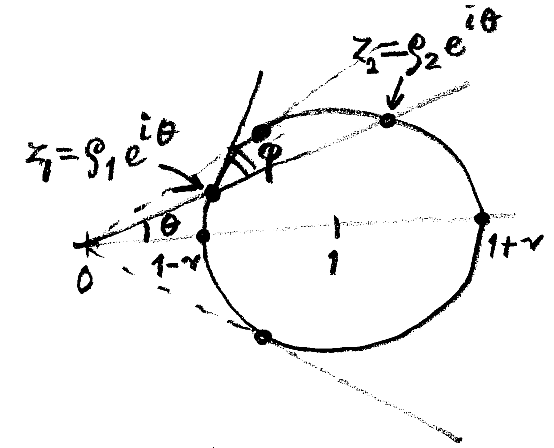
Skæringsvinklen v bestemmes af $\cot v = \beta$.

Benyttes efter sigende i hakkelsesmaskiner.

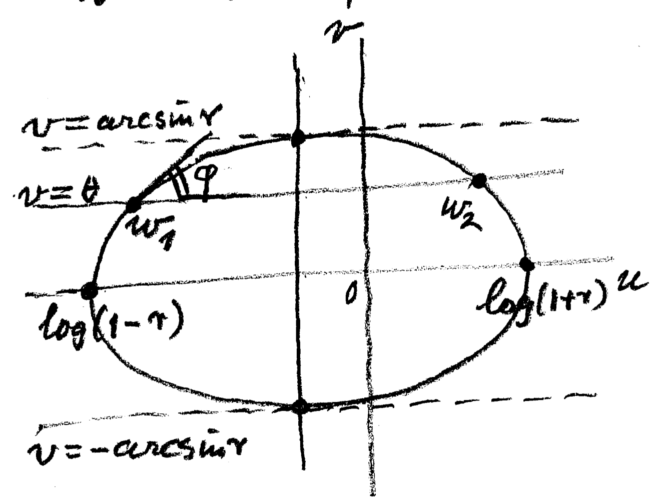
220. Vis, at billedet af en cirkel $\{z \mid |z-1| = r < 1\}$ ved afbildningen $w = \log z$, hvor log betegner hovedværdien, er en konveks kurve med to symmetriakser.

Vink. Benyt polære koordinater i z-planen og anvend sætningen om punkts potens og afbildningens vinkeltroskab.

$z = \rho e^{i\theta}$-plan



$w = u + iv$-plan



Til $z = \rho e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta < \pi$, svarer $w = \log \rho + i\theta$.

Når z gennemløber cirklen, gennemløber θ (to gange) intervallet $[-\arcsin r, \arcsin r]$.

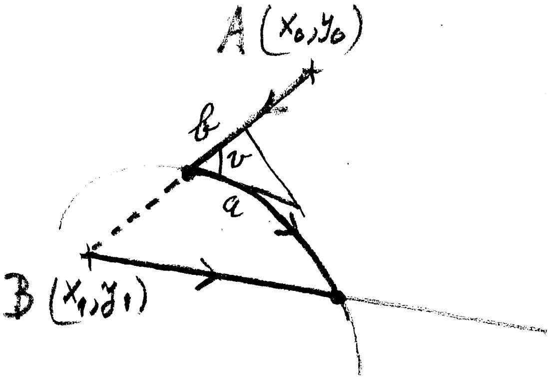
Billedkurven har åbenbart symmetriaksen $v = 0$.

For to cirkelpunkter $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ og $z_2 = \rho_2 e^{i\theta}$ med samme θ gælder $\rho_1 \rho_2 = (1-r)(1+r) = 1-r^2$. For de tilsvarende punkter $w_1 = \log \rho_1 + i\theta$ og $w_2 = \log \rho_2 + i\theta$ gælder altså $\frac{1}{2}(\log \rho_1 + \log \rho_2) = \frac{1}{2}\log(1-r^2)$. Billedkurven har altså også symmetriaksen $u = \frac{1}{2}\log(1-r^2)$.

Når θ gennemløber intervallet $[0, \arcsin r]$, aftager den på figurerne viste vinkel φ fra $\frac{1}{2}\pi$ til 0.

Heraf ses, at billedkurven er konveks.

221. Verdenshavet tænkes som en plan med sædvanlige retvinklede koordinater. Det er tæt tåge. Et navigerbart skib A, der sejler med den konstante fart a, modtager på positionen (x_0, y_0) følgende SOS melding: „Skib B på position (x_1, y_1). Alle instrumenter ødelagt. Sejler med konstant fart b efter ret linie med ukendt kurs." Idet $a > b$, skal man vise, at A kan undsætte B.



$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

A skifter om nødvendigt straks kurs, så han sejler ad liniestykket, der forbinder (x_0, y_0) med (x_1, y_1). Efter tiden $\frac{d}{a+b}$ er A og B lige langt fra (x_1, y_1). Nu ændrer A kurs, så han sejler udad langs den logaritmiske spiral svarende til polen (x_1, y_1), der skærer halvlinierne udfra (x_1, y_1) under den ved $\cos v = \frac{b}{a}$ bestemte vinkel v (jfr. opg. 219). Projektionen af A's hastighed på halvlinien fra (x_1, y_1) gennem A har da den konstante størrelse b. Følgelig vil A stadig have samme afstand fra (x_1, y_1) som B og må derfor møde B.

222. Find alle værdier af $\log(-1)$ og alle værdier af i^i.

$$\log(-1) = \log|-1| + i\arg(-1),$$

$$|-1| = 1\,, \quad \arg(-1) = \pi + p2\pi\,, \quad p \in \mathbb{Z},$$

altså

$$\log(-1) = i(\pi + p2\pi)\,, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = \exp(i \log i),$$

$$\log i = \log|i| + i \arg i,$$

$$|i| = 1, \quad \arg i = \tfrac{1}{2}\pi + p2\pi, \quad p \in \mathbb{Z},$$

altså

$$\log i = i(\tfrac{1}{2}\pi + p2\pi),$$

$$i \log i = -(\tfrac{1}{2}\pi + p2\pi),$$

$$i^i = \exp(-\tfrac{1}{2}\pi + p2\pi)\,, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

223. Find alle værdier af z, der tilfredsstiller ligningen
$$\cos z + \sin z = i.$$

$$e^{iz} = w, \quad e^{-iz} = \frac{1}{w}.$$

$$\frac{w + \frac{1}{w}}{2} + \frac{w - \frac{1}{w}}{2i} = i.$$

$$iw + i\frac{1}{w} + w - \frac{1}{w} = -2.$$

$$(1+i)w - (1-i)\frac{1}{w} = -2.$$

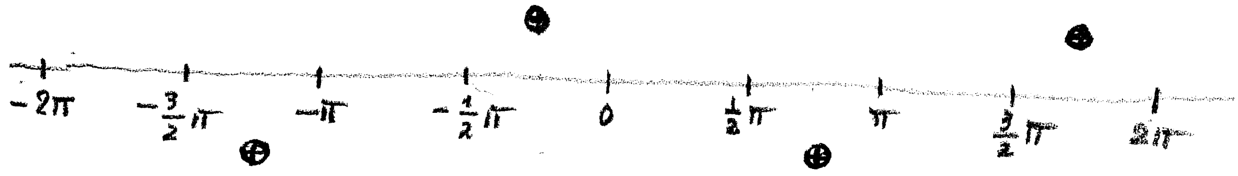
$$(1+i)w^2 + 2w - (1-i) = 0. \quad \text{ganger med } \frac{1-i}{2}.$$

$$w^2 + (1-i)w + i = 0.$$

$$w = -\frac{1-i}{2} \pm \sqrt{-\frac{i}{2} - i} = -\frac{1-i}{2} \pm \sqrt{3}\,\frac{1-i}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-i). \end{cases}$$

$$iz = \begin{cases} \log \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) = \log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{4}\pi + p2\pi\right) \\ \log -\frac{\sqrt{3}+1}{2}(1-i) = \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{3}{4}\pi + p2\pi\right) \end{cases} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

$$z = \begin{cases} -\frac{1}{4}\pi + p2\pi - i\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\pi + p2\pi + i\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4}\pi + p2\pi - i\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad p \in \mathbb{Z}.$$



224. Find samtlige løsninger til hver af ligningerne

$$\operatorname{tg} z = 2i \quad \text{og} \quad \operatorname{tg} z = 1-i.$$

For givet w bestemmes løsningerne til ligningen

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = w \quad \text{ved}$$

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{i-w}{i+w} \quad ,$$ idet man skal tage alle værdier af logaritmen i betragtning.

1) $w = 2i$ giver

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{-i}{3i} = \frac{1}{2i}\left(\log\tfrac{1}{3} + i(2p+1)\pi\right)$$

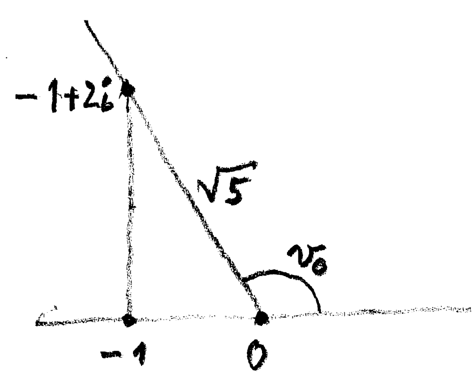
$$= \left(p+\tfrac{1}{2}\right)\pi + i\,\tfrac{1}{2}\log 3 \,, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$

2) $w = 1-i$ giver

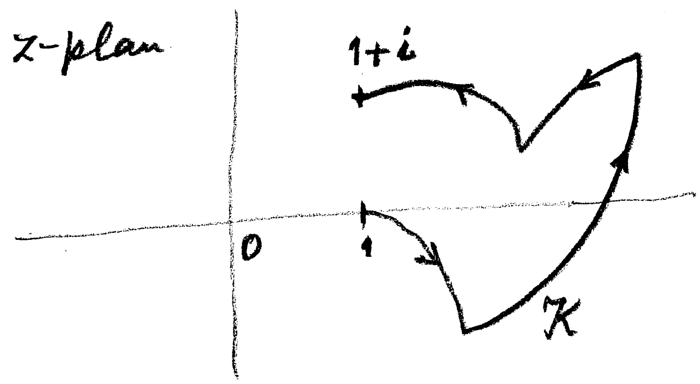
$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{-1+2i}{1} = \frac{1}{2i}\left(\log\sqrt{5} + i(v_0 + 2p\pi)\right),$$

hvor v_0 er den vinkel i $]\tfrac{1}{2}\pi, \pi[$,
for hvilken $\operatorname{tg} v_0 = -2$ (se figur nedenfor),
altså

$$z = \frac{v_0}{2} + p\pi - i\,\tfrac{1}{4}\log 5 \,, \qquad p \in \mathbb{Z}.$$



225. Find $\int_K (2+3z^2+4z^3)\,dz$, idet K betegner en C^1-kurve, der forbinder 1 med $1+i$.



Funktionen $2+3z^2+4z^3$ har stamfunktionen $2z+z^3+z^4$.

Altså fås (uafhængigt af valget af K)

$$\int_K (2+3z^3+4z^4)\,dz = \left[2z+z^3+z^4\right]_1^{1+i}$$

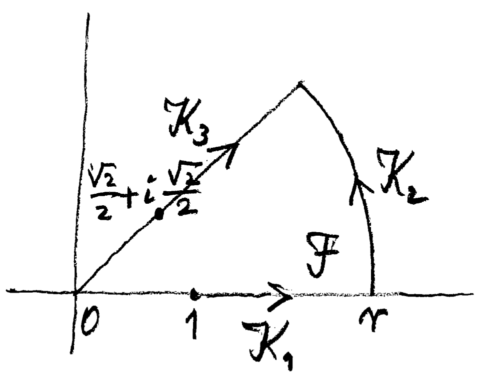
$$= 2(1+i)+(1+i)^3+(1+i)^4-4$$

$$= 2+2i+(-2+2i)-4-4 = -8+4i.$$

226. Integrer $\exp(-z^2)dz$ langs randen af cirkeludsnittet $\{z \mid |z| \leq r,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{1}{4}\pi\}$. Find dernæst ved at foretage grænseovergangen $r \to \infty$ Fresnels integraler

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt.$$

Vink. Integralet langs cirkelbuen konvergerer mod 0 for $r \to \infty$. Ved beviset herfor kan man med fordel benytte, at $\cos 2\theta$ for $\theta \in [0, \frac{1}{4}\pi]$ er $\geq 1 - \frac{4}{\pi}\theta$.



Cirkeludsnittet kaldes F.
Da er $\partial F = K_1 + K_2 - K_3$.
$\exp(-z^2)$ er holomorf i $\mathbb{C}$.
Følgelig er $\int_{\partial F} \exp(-z^2)\,dz = 0$.

For K_1, K_2, K_3 benyttes parameterfremstillingerne

K_1: $z = t$, $0 \leq t \leq r$

K_2: $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$

K_3: $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t$, $0 \leq t \leq r$.

For $z = \rho e^{i\theta}$ er $z^2 = \rho^2 e^{i2\theta} = \rho^2\cos 2\theta + i\rho^2 \sin 2\theta$.

Altså fås

$$\int_{K_1} \exp(-z^2)\,dz = \int_0^r \exp(-t^2)\,dt$$

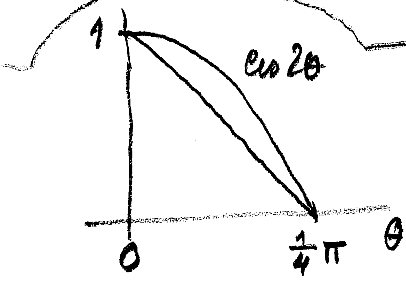
$$\int_{K_2} \exp(-z^2)\,dz = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left[\exp(-r^2\cos 2\theta - ir^2\sin 2\theta)\right] ire^{i\theta}\,d\theta = I_2$$

$$\int_{K_3} \exp(-z^2)\,dz = \int_0^r \left[\exp(-it^2)\right]\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dt.$$

Heraf $\displaystyle\int_0^r e^{-t^2}\,dt - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^r e^{-it^2}\,dt + I_2 = 0.$

(fortsættes)

226 (fortsat)



Da $\cos 2\theta$ er konkav i $[0, \frac{1}{4}\theta]$,

gælder dér $\cos 2\theta \geq 1 - \frac{4}{\pi}\theta$.

Heraf

$$|I_2| \leq \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \left| \left[\exp(-r^2\cos 2\theta - i r^2 \sin 2\theta)\right] i r e^{i\theta} \right| d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-r^2\cos 2\theta}\, r\, d\theta \leq \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-r^2(1-\frac{4}{\pi}\theta)}\, r\, d\theta$$

$$= r e^{-r^2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{r^2\frac{4}{\pi}\theta}\, d\theta = r e^{-r^2} \left[\frac{e^{r^2\frac{4}{\pi}\theta}}{r^2\frac{4}{\pi}} \right]_0^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$= r e^{-r^2} \frac{e^{r^2}-1}{r^2\frac{4}{\pi}} < r e^{-r^2} \frac{e^{r^2}}{r^2\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{4r}.$$

Heraf ses, at $I_2 \to 0$ for $r \to \infty$.

Da endvidere for $r \to \infty$ (jfr. opg. 117)

$$\int_0^r e^{-t^2} dt \longrightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

ses, at

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int_0^r e^{-it^2} dt \longrightarrow \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

eller (ved multiplikation med $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$\int_0^r e^{-it^2} dt \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

(idet $e^{-it^2} = \cos(t^2) - i\sin(t^2)$),

d.v.s.

$$\int_0^r \cos(t^2) dt \to \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad \int_0^r \sin(t^2) dt \to \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Følgelig er

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

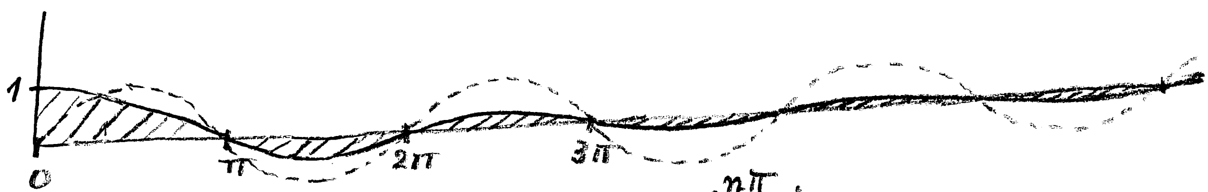
227. Integrer $\frac{\exp iz}{z}$ langs randen af figuren $\{z \mid r \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$. Vis dernæst ved at foretage grænseovergangen $R \to \infty$, $r \to 0$, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Jfr. opg 94, 290

Forbemærkning om $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ til-

71 lægges naturligvis for $x = 0$ værdien 1.



Sættes $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = a_n$ er $\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Leddene i rækken $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ har skiftende fortegn og $a_1 > |a_2| > a_3 > |a_4| > \cdots$, $a_n \to 0$ for $n \to \infty$. Altså er rækken konvergent, lad os sige med sum s, d.v.s. $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ eksisterer og er $= s$. For $n\pi \leq p < (n+1)\pi$ er $\int_0^p \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \theta a_{n+1}$, $\theta \in [0,1[$.

Altså eksisterer $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{p\to\infty} \int_0^p \frac{\sin x}{x}\,dx$ og er $= s$

Derimod er $\lim_{p\to\infty} \int_0^p \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$. Thi

$$\int_{(n-1)\pi+\frac{1}{6}\pi}^{n\pi-\frac{1}{6}\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx > \frac{\frac{1}{2}}{n\pi}\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3n}.$$

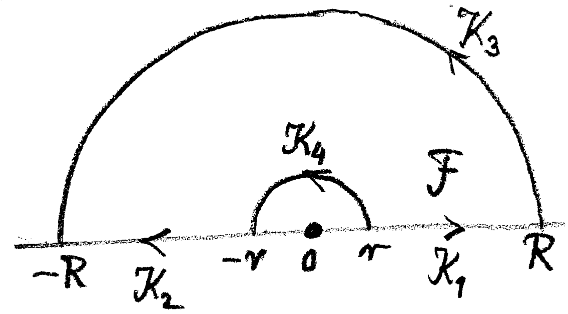
Altså er

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx > \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Funktionen $\frac{\exp iz}{z}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Figuren $F = \{z \mid r \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ tilhører $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(fortsættes)

227 fortsat



Altså er ifølge Cauchys integralsætning

$$\int_{\partial F} \frac{\exp iz}{z}\,dz = 0.$$

Vi har $\partial F = K_1 - K_2 + K_3 - K_4$. For K_1, K_2, K_3, K_4 benyttes parameterfremstillingerne

$K_1 : z = t,\ r \leq t \leq R$ $\quad$ $K_2 : z = -t,\ r \leq t \leq R$

$K_3 : z = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$ $\quad$ $K_4 : z = re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$.

Vi får

$$\underbrace{\int_r^R \frac{e^{it}}{t}dt}_{= I_1} - \underbrace{\int_r^R \frac{e^{-it}}{-t}(-dt)}_{= I_2} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta}_{= I_3} - \underbrace{\int_0^\pi \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}}_{= I_4} = 0.$$

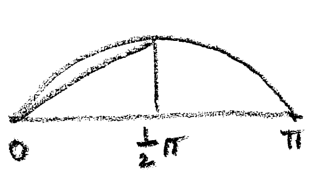
$$I_1 - I_2 = \int_r^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t}dt = 2i\int_r^R \frac{\sin t}{t}dt.$$

$Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$, altså

$$|I_3| = \left|\int_0^\pi e^{-R\sin\theta + iR\cos\theta}d\theta\right| \leq \int_0^\pi \left|e^{-R\sin\theta + iR\cos\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta,$$ som $\to 0$ for $R \to \infty$ ifølge Lebesgue's sætning om majoriseret konvergens. Uden brug af denne ses det af, at $\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta$

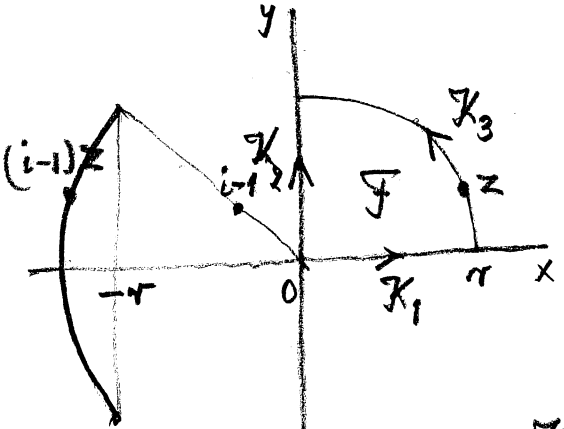
$$\leq 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta = 2\left[\frac{e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}}{-R\frac{2}{\pi}}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} < \frac{\pi}{R}.$$



$$I_4 = i\int_0^\pi e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta}d\theta \to i\int_0^\pi 1 \cdot d\theta = i\pi,$$ da $e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta}$ $\to 1$ for $r \to 0$ ligeligt i $[0,\pi]$ $\quad$ $[e^{iz} \to 1$ for $z \to 0]$.

Altså $2i\int_r^R \frac{\sin t}{t}dt \to i\pi$ for $r \to 0, R \to \infty$, $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

228. Anvend Cauchys integralsætning på
$$\int_{\partial F} z^{4n+3} e^{(i-1)z}\,dz, \quad n\in \mathbb{N},$$
hvor F er kvartcirklen $\{z=x+iy \mid |z|\leq r,\ x\geq 0, y\geq 0\}$.
Udled herved formlen
$$\int_0^\infty x^n \exp(-\sqrt[4]{x})\sin\sqrt[4]{x}\,dx = 0.$$

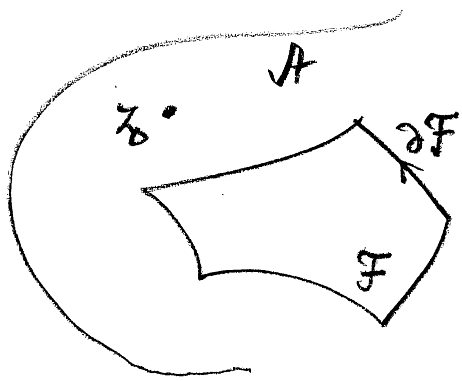


Da $f(z) = z^{4n+3}e^{(i-1)z}$ er holomorf på $\mathbb{C}$, er $\int_{\partial F} f(z)\,dz = 0$. Vi har $\partial F = K_1 - K_2 + K_3$, hvor K_1, K_2, K_3 har parameterfremstillingerne $K_1:\ z=t,\ 0\leq t\leq r$, $K_2:\ z=it,\ 0\leq t\leq r$, $K_3:\ z=re^{i\theta},\ 0\leq\theta\leq\frac{1}{2}\pi$. Vi får
$$\int_0^r t^{4n+3}e^{(i-1)t}dt - \int_0^r (it)^{4n+3}e^{(i-1)it}\,i\,dt + \int_{K_3} f(z)\,dz = 0,$$
$$\int_0^r t^{4n+3}e^{-t}e^{it}dt - \int_0^r t^{4n+3}e^{-t}e^{-it}dt + \int_{K_3} f(z)\,dz = 0,$$
$$\int_0^r t^{4n+3}e^{-t}\,2i\sin t\,dt = -\int_{K_3} f(z)\,dz.$$
Vi har $i-1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\theta}$. For $z = re^{i\theta}\in K_3$ ligger $(i-1)z$ altså på kvartcirklen $\{\sqrt{2}re^{i\varphi} \mid \frac{3}{4}\pi\leq\varphi\leq\frac{5}{4}\pi\}$. For $z\in K_3$ gælder derfor $\mathrm{Re}((i-1)z)\leq -r$, altså $|e^{(i-1)z}|\leq e^{-r}$.
Følgelig er $\left|\int_{K_3} f(z)\,dz\right| \leq r^{4n+3}e^{-r}\,r\,\frac{1}{4}\pi$, hvoraf
$\int_{K_3} f(z)\,dz \to 0$ for $r\to\infty$, eller $\int_0^r t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt \to 0$
for $r\to 0$, eller $\int_0^\infty t^{4n+3}e^{-t}\sin t\,dt = 0$. Substitutionen
$t^4 = x$, $4t^3dt = dx$ giver $\int_0^\infty x^n e^{-\sqrt[4]{x}}\sin\sqrt[4]{x}\,dx = 0.$

229. Find værdien af det i Cauchys integralformel for en holomorf funktion optrædende integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

når z_0 er et punkt, der ikke tilhører den figur F, langs hvis rand der integreres.



Idet $f(z)$ er holomorf i A, er $\frac{f(z)}{z-z_0}$ holomorf i $A\setminus\{z_0\}$. Når $z_0 \notin F$, er F en simpel figur i $A\setminus\{z_0\}$. Ifølge Cauchys integralsætning gælder derfor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

(Bemærk, at z_0 ikke behøver at tilhøre A.)

230. Find ved brug af binomialformulen integralet

$$\int_K \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz,$$

hvor $n \in \dot{N}$, og K betegner cirklen $\{z \mid |z|=1\}$ med positiv omløbsretning. Udtryk også integralet ved for K at benytte parameterfremstillingen $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, og find herved $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta$.

$$(1+z^2)^{2n} = 1 + \binom{2n}{1} z^2 + \binom{2n}{2} z^4 + \cdots + \binom{2n}{2n} z^{4n}.$$

Alle led undtagen $\binom{2n}{n} z^{2n}$ giver bidrag 0. Altså

$$\int_K \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz = \binom{2n}{n} \int_K \frac{dz}{z} = \binom{2n}{n} 2\pi i.$$

[Ses også af, at $\frac{(2n)!}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z^{2n+1}}\,dz = f^{(2n)}(0)$, hvor $f(z) = (1+z^2)^{2n}$.]

Ved at benytte parameterfremstillingen fås

$$\int_K \frac{(1+z^2)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{(1+e^{2i\theta})^{2n}}{e^{(2n+1)i\theta}}\, i e^{i\theta}\, d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} (e^{-i\theta} + e^{i\theta})^{2n}\, d\theta = i\, 2^{2n} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta.$$

Altså

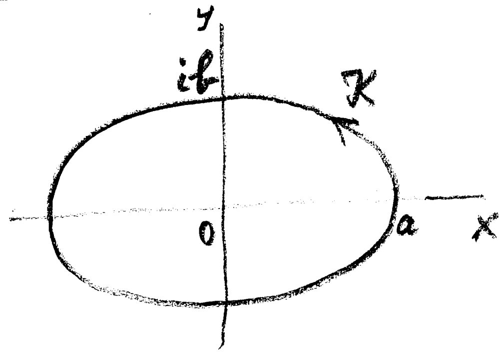
$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\, d\theta = 2\pi \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}} = 2\pi \frac{1\cdot 2 \cdots (2n)}{(2\cdot 4 \cdots (2n))^2}$$

$$= 2\pi \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}.$$

231. Vis, at der for $a>0, b>0$ gælder

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Vink. Udregn integralet $\int_K \frac{dz}{z}$, idet K er ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, under brug af en passende parameterfremstilling.



Ifølge Cauchys integralformel anvendt på funktionen 1 er $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{z} = 1$.

For K benyttes parameterfremstillingen

$z = a\cos t + ib\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Idet

$\frac{dz}{dt} = -a\sin t + ib\cos t$, fås

$$2\pi i = \int_K \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a\sin t + ib\cos t)(a\cos t - ib\sin t)}{(a\cos t + ib\sin t)(a\cos t - ib\sin t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a^2+b^2)\cos t\sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt.$$

Realdelen må være 0 (da værdien er $2\pi i$). Altså

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt$$, hvormed det ønskede.

232. Vis ved udregning af

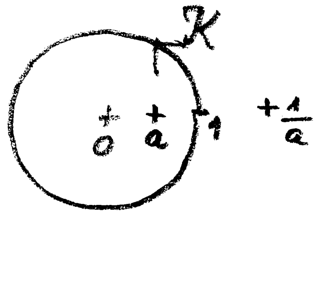
$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}, \quad a>0,\ a\neq 1,$$

hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=1\}$ med positiv omløbsretning, at

$$J(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}\,d\theta = \begin{cases} 1 & \text{for } 0<a<1 \\ -1 & \text{for } a>1. \end{cases}$$

---

1) $0<a<1$, altså $\frac{1}{a}>1$.

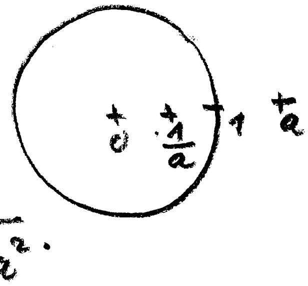


$f(z) = \dfrac{1}{z-\frac{1}{a}}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{a}\}$.

Altså er

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a) = \frac{1}{a-\frac{1}{a}} = \frac{a}{a^2-1}.$$

2) $a>1$, altså $0<\frac{1}{a}<1$.



$g(z) = \dfrac{1}{z-a}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

Altså er

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-\frac{1}{a}}\,dz = g\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{\frac{1}{a}-a} = \frac{a}{1-a^2}.$$

I begge tilfælde fås ved for K at benytte parameterfremstillingen $z=e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$:

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{(e^{i\theta}-a)(e^{i\theta}-\frac{1}{a})}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta}+1-ae^{i\theta}-\frac{1}{a}e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a}{a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-a^2-1}\,d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a}{1+a^2-2a\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{a}{a^2-1}\,J(a).$$

Altså

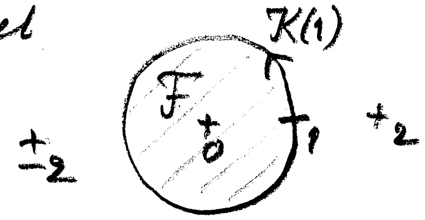
$$J(a) = \frac{a^2-1}{a}\,I(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0<a<1 \\ -1 & \text{for } a>1. \end{cases}$$

233. Find integralet $\int_{K(r)} \frac{dz}{z^2-4}$, hvor $K(r)$ er cirklen $\{z \mid |z| = r\}$ med positiv omløbsretning, (1) for $r=1$, (2) for $r=3$.

Nævneren z^2-4 er 0 for $z=2$ og $z=-2$.
Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ er derfor holomorf på

$$A = \mathbb{C} \setminus \{2, -2\}.$$

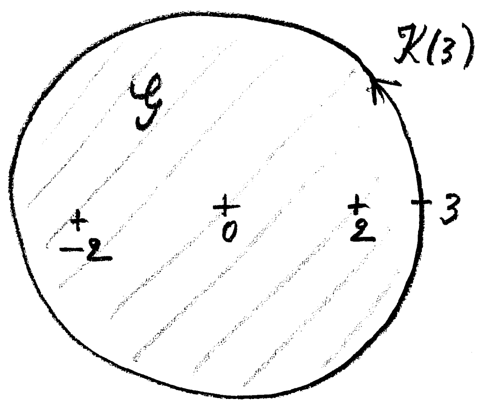
(1) $F = \{z \mid |z| \leq 1\}$ er en simpel figur i A.



Altså er ifølge Cauchys integralsætning

$$\int_{K(1)} \frac{dz}{z^2-4} = \int_{\partial F} f(z)\,dz = 0.$$

(2) Brøken dekomponeres:



$$f(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{z-2} + \frac{\frac{1}{4}}{z+2}.$$

Altså er ifølge Cauchys integralformel anvendt på funktionen 1 og den simple figur $\mathcal{G} = \{z \mid |z| \leq 3\}$

$$\int_{K(3)} \frac{dz}{z^2-4} = \int_{K(3)} \frac{-\frac{1}{4}}{z-2}dz + \int_{K(3)} \frac{\frac{1}{4}}{z+2} = -\frac{1}{4}\int_{\partial \mathcal{G}} \frac{1}{z-2}dz + \frac{1}{4}\int_{\partial \mathcal{G}} \frac{1}{z+2}dz$$

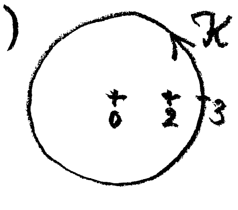
$$= -\frac{1}{4} \cdot 2\pi i + \frac{1}{4} \cdot 2\pi i = 0.$$

234. Udregn integralet $\int_K f(z)\,dz$, hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=3\}$ med positiv omløbsretning, for hver af funktionerne

$$\frac{z^3+1}{z(z-2)}, \qquad \frac{z(z-2)}{z^3+1}, \qquad \frac{z^2-1}{z^2-4z}.$$

---

(1)



$$\begin{array}{l} z^2-2z\,)\; z^3+1 \;(\,z+2 \\ \quad\;\; \underline{z^3-2z^2} \\ \quad\;\; 2z^2+1 \\ \quad\;\; \underline{2z^2-4z} \\ \quad\;\; 4z+1 \end{array}$$

altså $\dfrac{z^3+1}{z(z-2)} = z+2+\dfrac{4z+1}{z(z-2)}$

$$\frac{4z+1}{z(z-2)} = \frac{a}{z}+\frac{b}{z-2}$$

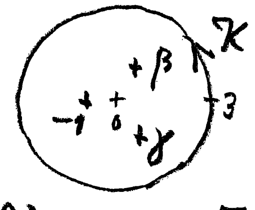
$$4z+1 = a(z-2)+bz$$

$z=0$ giver $a=-\frac{1}{2}$, $z=2$ giver $b=\frac{9}{2}$. Altså

$$\int_K \frac{z^3+1}{z(z-2)}\,dz = \int_K (z+2)\,dz + \int_K \frac{-\frac{1}{2}}{z}\,dz + \int_K \frac{\frac{9}{2}}{z-2}\,dz$$

$$= 0 + 2\pi i\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 2\pi i\,\tfrac{9}{2} = 8\pi i.$$

(2)



$$\frac{z(z-2)}{z^3+1} = \frac{z(z-2)}{(z+1)(z-\beta)(z-\gamma)} = \frac{k}{z+1}+\frac{l}{z-\beta}+\frac{m}{z-\gamma},$$

hvor k, l, m fås af ligningen

$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

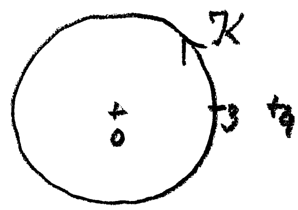
$$z^2-2z = k(z-\beta)(z-\gamma)+l(z+1)(z-\gamma)+m(z+1)(z-\beta).$$

Det viser sig overflødigt at udregne k, l, m. Vi får

$$\int_K \frac{z(z-2)}{z^3+1}\,dz = \int_K \frac{k}{z+1}\,dz + \int_K \frac{l}{z-\beta}\,dz + \int_K \frac{m}{z-\gamma}\,dz = 2\pi i(k+l+m) = 2\pi i,$$

idet ligningen viser, at $k+l+m=1$.

(3)



$$\frac{z^2-1}{z^2-4z} = \frac{g(z)}{z}, \text{ hvor } g(z) = \frac{z^2-1}{z-4}.$$

g er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{4\}$, og $\{z \mid |z|\le 3\}$ er en simpel figur i $\mathbb{C}\setminus\{4\}$.

Altså

$$\int_K \frac{z^2-1}{z^2-4z}\,dz = \int_K \frac{g(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, g(0) = 2\pi i\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\pi i.$$

[Også i dette tilfælde kunde man have benyttet dekomposition.]

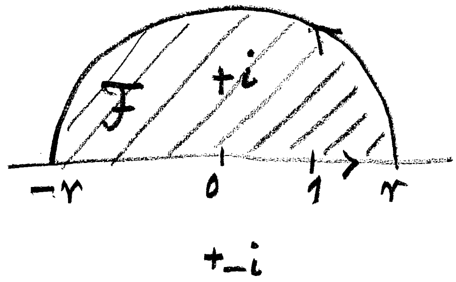
235. Find for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$ integralet

$$I = \int_{\partial F} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}},$$

hvor F betegner halvcirklen $\{z = x+iy \mid |z| \leq r, y \geq 0\}$, $r > 1$. Udled heraf ved at foretage grænseovergangen $r \to \infty$ formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

Vink. Skriv $\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ på formen $\dfrac{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}}{(z-i)^{n+1}}$, og benyt Cauchys integralformel for den n^{te} afledede af en holomorf funktion.



Funktionen $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{n+1}}$ er holomorf i mængden $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, der indeholder den simple figur F. Denne indeholder i.

Altså er

$$I = \int_{\partial F} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \int_{\partial F} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(i).$$

Nu er $\quad f^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^n (n+1)(n+2) \cdots (2n)}{(z+i)^{2n+1}}.$

Altså

$$I = 2\pi i \frac{(-1)^n (n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n! \, (2i)^{2n+1}} = \pi \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n! \, 2^{2n}}$$

$$= \pi \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n)}{(2 \cdot 4 \cdots 2n)^2} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$$

(fortsættes)

∂F består af liniestykket $\mathcal{L}$: $z = x$, $-r \leq x \leq r$, og halvcirklen $\mathcal{H}$: $z = r e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Altså er

$$I = \int_{\mathcal{L}} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} + \int_{\mathcal{H}} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + J, \text{ hvor } J = \int_{\mathcal{H}} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}.$$

Når z gennemløber $\mathcal{H}$, gennemløber z^2 cirklen med centrum 0 og radius r^2, og $1+z^2$ altså cirklen med centrum 1 og radius r^2. Det til 0 nærmeste punkt på denne er punktet $1-r^2$, hvis afstand fra 0 er r^2-1. For $z \in \mathcal{H}$ gælder altså $|1+z^2| \geq r^2-1$, og følgelig

$$\left|\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{(r^2-1)^{n+1}}.$$ Vi får altså

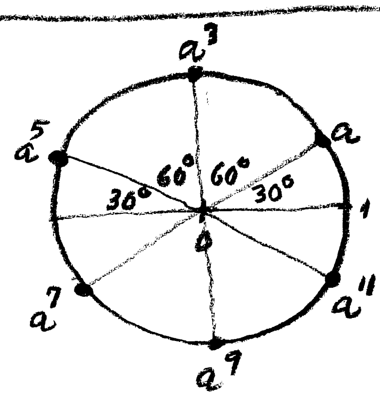
$$|J| \leq \frac{1}{(r^2-1)^{n+1}} \cdot \pi r,$$ hvoraf $J \to 0$ for $r \to \infty$.

Heraf $$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \longrightarrow I = \pi \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}$$ for $r \to \infty$,

altså $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}.$$

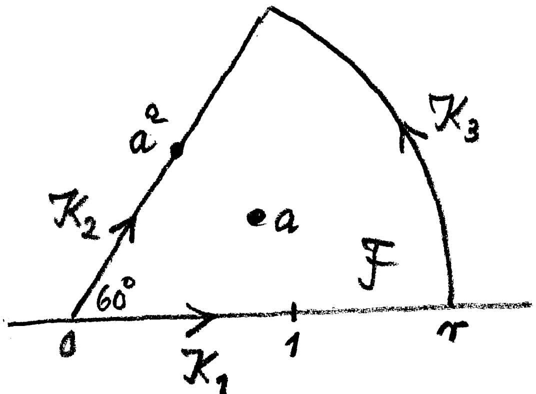
236. Find integralet $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$.

$z^6+1 = z^6-(-1)$ har nulpunkterne $a, a^3, a^5, a^7, a^9, a^{11}$, hvor $a = e^{i\frac{1}{6}\pi}$.



Betragt figuren

$F = \{z \mid |z| \leqslant r, 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{1}{3}\pi\}$, $r > 1$.



Heri har z^6+1 kun det ene nulpunkt a.

$$z^6+1 = z^6-a^6$$
$$=(z-a)(z^5+az^4+a^2z^3+a^3z^2+a^4z+a^5).$$

Altså $$\int_{\partial F} \frac{dz}{z^6+1} = \int_{\partial F} \frac{\frac{1}{z^5+az^4+a^2z^3+a^3z^2+a^4z+a^5}}{z-a}\,dz = 2\pi i \frac{1}{6a^5},$$

idet tælleren er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{a^3,a^5,a^7,a^9,a^{11}\}$, og F er en simpel figur i denne mængde.

For K_1 og K_2 benyttes parameterfremstillingerne

$K_1: z = t, 0 \leqslant t \leqslant r$, $\quad K_2: z = a^2 t, 0 \leqslant t \leqslant r$.

Vi får $$\int_{\partial F} \frac{dz}{z^6+1} = \int_0^r \frac{dt}{t^6+1} - \int_0^r \frac{a^2\,dt}{t^6+1} + J,$$

hvor $J = \int_{K_3} \frac{dz}{z^6+1}$. På K_3 er $|z^6+1| \geqslant r^6-1$.

Heraf $|J| \leqslant \frac{1}{r^6-1}\frac{1}{3}\pi r$, hvoraf $J \to 0$ for $r \to \infty$.

Altså $$(1-a^2)\int_0^r \frac{dt}{t^6+1} \longrightarrow 2\pi i \frac{1}{6a^5} \text{ for } r \to \infty,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi i}{6a^5(1-a^2)} = \frac{\pi i}{3(a^5-a^7)} = \frac{\pi i}{3\cdot 2i\sin 30°} = \frac{\pi}{3}.$$

237. Udregn integralet $\int_0^a \frac{3x}{x^3+1}\,dx$ ved at skrive $\frac{3x}{x^3+1}$ på formen $\frac{k}{x+1}+\frac{lx+m}{x^2-x+1}$, og find herved integralet

$$\int_0^\infty \frac{3x}{x^3+1}\,dx.$$

Udregn også sidstnævnte integral ved at betragte $\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{3z}{z^3+1}\,dz$, hvor $\mathcal{F}=\{z \mid |z|\le r,\ \frac{2}{3}\pi\le \arg z\le \frac{4}{3}\pi\}$.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, altså $\frac{3x}{x^3+1}=\frac{k}{x+1}+\frac{lx+m}{x^2-x+1}$, hvor k,l,m bestemmes af $3x=k(x^2-x+1)+(lx+m)(x+1)$. $x=-1$ giver $k=-1$. Altså $(lx+m)(x+1)=x^2+2x+1$, hvoraf $l=1$, $m=1$. Følgelig

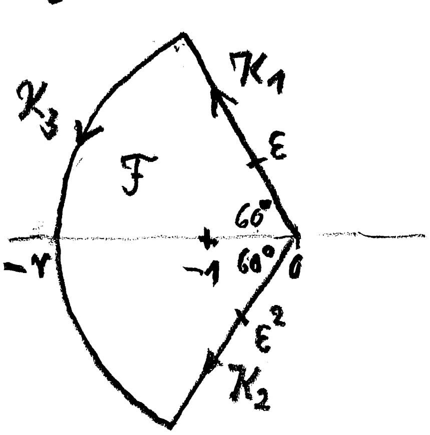
$$\frac{3x}{x^3+1}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}=\frac{-1}{x+1}+\frac{x-\frac12}{x^2-x+1}+\frac{\frac32}{\frac34+(x-\frac12)^2}$$

$$=\frac{-1}{x+1}+\frac12\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\sqrt3\,\frac{\frac{2}{\sqrt3}}{1+\left[\frac{2}{\sqrt3}(x-\frac12)\right]^2},$$

$$\int_0^a\frac{3x}{x^3+1}dx=-\log(a+1)+\tfrac12\log(a^2-a+1)+\sqrt3\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{2}{\sqrt3}(a-\tfrac12)-\sqrt3\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac12\log\frac{a^2-a+1}{(a+1)^2}+\sqrt3\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt3}(a-\tfrac12)+\sqrt3\,\frac{\pi}{6},$$

$$\int_0^\infty\frac{3x}{x^3+1}dx=\lim_{a\to\infty}\int_0^a\frac{3x}{x^3+1}dx=\sqrt3\,\frac{\pi}{2}+\sqrt3\,\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{\sqrt3}.$$



z^3+1 har rødderne -1, $\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}$, $\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}$, af hvilke de to sidste ligger uden for $\mathcal{F}$. Vi skriver

$$\frac{3z}{z^3+1}=\frac{\frac{3z}{z^2-z+1}}{z+1}=\frac{f(z)}{z+1}.$$

Da er $f(z)$ holomorf i $\dot{\mathbb{C}}\setminus\{\frac12+i\frac{\sqrt3}{2},\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\}$, og $\mathcal{F}$ er en simpel figur i denne mængde. Altså er for $r>1$

(fortsættes)

237 fortsat

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{3z}{z^3+1}\,dz = 2\pi i\, f(-1) = -2\pi i .$$

$\partial\mathcal{F} = \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3$. For $\mathcal{K}_1$ og $\mathcal{K}_2$ benyttes parameterfremstillingerne

$\mathcal{K}_1: \; z = \varepsilon t,\ 0 \le t \le r, \qquad \mathcal{K}_2: \; z = \varepsilon^2 t,\ 0 \le t \le r,$

hvor $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vi får

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{3z}{z^3+1}\,dz = \int_0^r \frac{3\varepsilon t}{t^3+1}\,\varepsilon\,dt - \int_0^r \frac{3\varepsilon^2 t}{t^3+1}\,\varepsilon^2\,dt + I$$

$$= (\varepsilon^2 - \underset{\varepsilon}{\underset{\parallel}{\varepsilon^4}}) \int_0^r \frac{3t}{t^3+1}\,dt + I = -i\sqrt{3}\int_0^r \frac{3t}{t^3+1}\,dt + I,$$

hvor $I = \int_{\mathcal{K}_3} \frac{3z}{z^3+1}\,dz$.

På $\mathcal{K}_3$ er $\left|\frac{3z}{z^3+1}\right| \le \frac{3r}{r^3-1}$. Altså er $|I| \le \frac{3r}{r^3-1}\,\frac{2\pi r}{3}$,

hvoraf $I \to 0$ for $r \to \infty$.

Altså

$$-i\sqrt{3}\int_0^r \frac{3t}{t^3+1}\,dt \to -2\pi i \quad \text{for } r \to \infty,$$

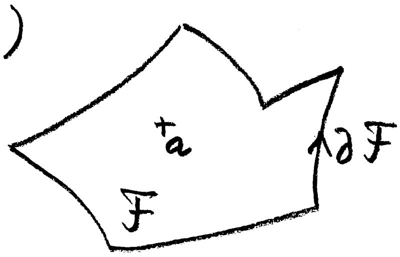
$$\int_0^\infty \frac{3t}{t^3+1}\,dt = \frac{-2\pi i}{-i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} .$$

238. Udregn integralet

$$\int_{\partial F} \frac{\exp z - \exp a}{z-a}\,dz,$$

når F er en simpel figur og $a \notin \partial F$, dels (1) når a tilhører F, dels (2) når a ikke tilhører F.

(1)



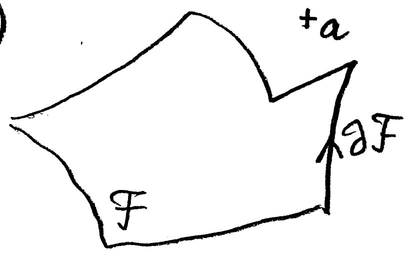
$f(z) = \exp z - \exp a$

er holomorf i $\grave{\mathbb{C}}$. Altså

$$\int_{\partial F} \frac{\exp z - \exp a}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a) = 0,$$

ifølge Cauchys integralformel.

(2)



$$g(z) = \frac{\exp z - \exp a}{z-a}$$

er holomorf i $\grave{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$, og F er en simpel figur i $\grave{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$.

Altså

$$\int_{\partial F} \frac{\exp z - \exp a}{z-a}\,dz = 0,$$

ifølge Cauchys integralsætning.

239. Bevis for reelt a formlerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|a|}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-|a|}.$$

For $a=0$ er formlerne kendt.

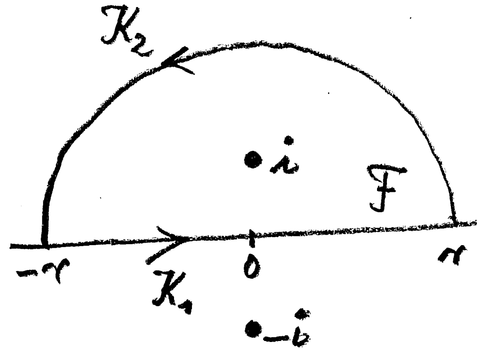
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + i\sin ax}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx,$$

idet $\frac{\sin ax}{1+x^2}$ er ulige og $\frac{\cos ax}{1+x^2}$ er lige.

De to formler er derfor ensgyldige, og gyldigheden for $a<0$ følger af gyldigheden for $a>0$.

Det er altså nok at bevise den første formel for $a>0$. I det følgende antages $a>0$.

$F = \{z \mid |z| \leq r, 0 \leq \arg z \leq \pi\}, r>1.$



$$\int_{\partial F} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}dz = \int_{\partial F} \frac{\frac{e^{iaz}}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i \frac{e^{iai}}{i+i} = \pi e^{-a},$$

da $\frac{e^{iaz}}{z+i}$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, og F er en simpel figur i $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

$$\int_{\partial F} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}dz = \int_{K_1} + \int_{K_2} = \int_{-r}^{r} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx + J,$$

hvor $J = \int_{K_2} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}dz$. $\quad |e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay} \leq 1$ når $|y| \geq 0$.

På K_3 er derfor $\left|\frac{e^{iaz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{r^2-1}$. Heraf $|J| \leq \frac{1}{r^2-1}\pi r$.

Altså $J \to 0$ for $r\to\infty$, hvoraf $\int_{-r}^{r} \frac{e^{iax}}{1+x^2}dx \longrightarrow \pi e^{-a}$ for $r\to\infty$.

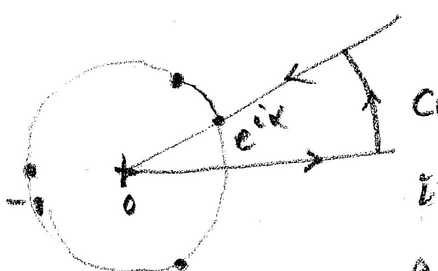
240. Vis, at integralet

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^3}, \quad \arg z = \alpha,$$

(defineret ved $\lim_{r\to\infty} \int_{K(r,\alpha)} \frac{dz}{1+z^3}$, hvor $K(r,\alpha)$ betegner liniestykket $z = te^{i\alpha}$, $0 \le t \le r$) har mening, når α ikke er et ulige multiplum af $\frac{1}{3}\pi$. Vis, at I_α kun antager tre forskellige værdier, og find disse.

$1+z^3=0$ for $z=-1, e^{i\frac{1}{3}\pi}, e^{-i\frac{1}{3}\pi}$. For α ikke ulige multiplum af $\frac{1}{3}\pi$ er

$$\int_{C(r,\alpha)} \frac{dz}{1+z^3} = \int_0^r \frac{e^{i\alpha}\,dt}{1+e^{3i\alpha}t^3}$$



integranden numerisk $\le \frac{1}{t^3-1}$ for $t>1$ giver eksistens af I_α.

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} \qquad I_{\frac{2}{3}\pi} = e^{i\frac{2}{3}\pi} I_0 = \left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) I_0$$

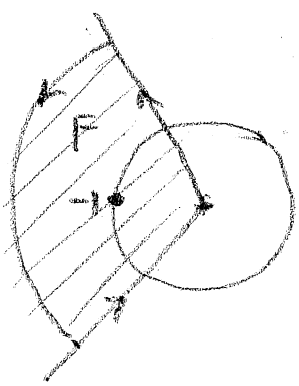
$$I_{-\frac{2}{3}\pi} = e^{-i\frac{2}{3}\pi} I_0 = \left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) I_0 .$$

For $|\alpha| < \frac{1}{3}\pi$ er $I_\alpha = I_0$

thi $\left| \int_{C(r,0)} - \int_{C(r,\alpha)} \right| \le r|\alpha| \frac{1}{r^3-1}$ for $r>1$.

Analogt: For $|\alpha - \frac{2}{3}\pi| < \frac{1}{3}\pi$ er $I_\alpha = I_{\frac{2}{3}\pi}$

For $|\alpha + \frac{2}{3}\pi| < \frac{1}{3}\pi$ er $I_\alpha = I_{-\frac{2}{3}\pi}$



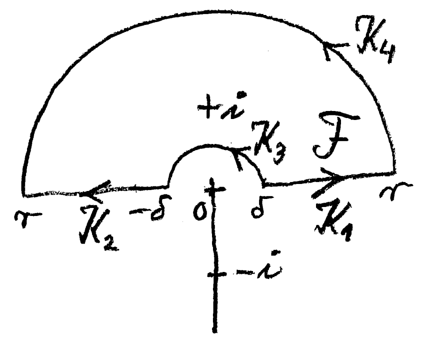
$$\int_{\partial F} \frac{dz}{1+z^3} = \int_{\partial F} \frac{\frac{1}{z^2-z+1}}{z+1}\,dz = \frac{2\pi i}{3} \quad \text{giver}$$

$$I_{\frac{2}{3}\pi} - I_{-\frac{2}{3}\pi} = 2\pi i \qquad i\sqrt{3}\,I_0 = 2\pi i \qquad I_0 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

241. Beregn integralet

$$\underline{I} = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Vink. Anvend Cauchys integralformel på en passende funktion for figuren $\mathcal{F} = \{z \mid \delta \leq |z| \leq r,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.



Betragt den langs den negative imaginære akse opskårne plan
$A = \{z = re^{i\theta} \mid r > 0,\ -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi\}$.
Heri er $\mathcal{F}$ en simpel figur og

$$\log z = \log r + i\theta \quad \text{holomorf.}$$

Tag $\delta < 1 < r$. Da er i et indre punkt af $\mathcal{F}$.

$$f(z) = \frac{\log z}{(z+i)^2} \quad \text{er holomorf i } A.$$

Anvendelse af Cauchys integralformel giver

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{\partial\mathcal{F}} \frac{f(z)}{(z-i)^2} = 2\pi i\, f'(i).$$

$$f'(z) = \frac{-2\log z}{(z+i)^3} + \frac{1}{z(z+i)^2}, \qquad f'(i) = \frac{-2i\frac{1}{2}\pi}{(2i)^3} + \frac{1}{i(2i)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}.$$

Altså

$$\int_{K_1} - \int_{K_2} - \int_{K_3} + \int_{K_4} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\int_{K_1} = \int_\delta^r \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\,dt, \qquad \int_{K_2} = \int_\delta^r \frac{\log t + i\pi}{[(-t)^2+1]^2}(-dt)$$

$$\left|\int_{K_3}\right| \leq \frac{|\log\delta| + \pi}{(1-\delta^2)^2}\pi\delta, \qquad \left|\int_{K_4}\right| \leq \frac{\log r + \pi}{(r^2-1)^2}\pi r.$$

Altså $\int_{K_3} \to 0$ for $\delta \to 0$, $\int_{K_4} \to 0$ for $r \to \infty$.

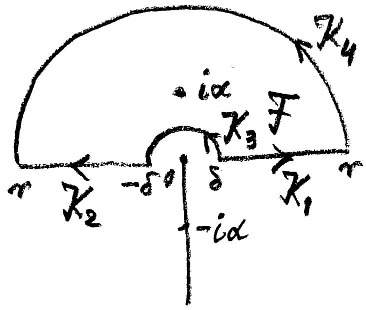
Heraf

$$\int_0^\infty \frac{2\log t + i\pi}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{2}, \qquad I = \int_0^\infty \frac{\log t}{(t^2+1)^2}\,dt = -\frac{\pi}{4}.$$

242. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}\,(x^2+\alpha^2)}\,dx, \qquad \alpha > 0.$$

Vink. Anvend Cauchys integralformel på en passende funktion for figuren $F = \{z \mid \delta \leq |z| \leq r,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$.



Betragt den langs den negative imaginære akse opskårne plan

$$A = \{z = re^{i\theta} \mid r>0,\ -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < \tfrac{3}{2}\pi\}.$$

Heri er F en simpel figur og

$$\log z = \log r + i\theta \quad \text{og} \quad \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{1}{2}\theta}$$

holomorfe. Tag $\delta < \alpha < r$. Da er $i\alpha$ et indre punkt af F.

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}\,(z+i\alpha)} \quad \text{er holomorf i } A.$$

Anvendelse af Cauchys integralformel giver

$$\int_{\partial F} \frac{\log z}{\sqrt{z}\,(z^2+\alpha^2)}\,dz = \int_{\partial F} \frac{f(z)}{z-i\alpha}\,dz = 2\pi i\, f(i\alpha) = 2\pi i \frac{\log\alpha + i\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{\alpha}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,2i\alpha}$$

$$= \pi \frac{\log\alpha + i\frac{1}{2}\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\log\alpha + \frac{1}{2}\pi + i(\frac{1}{2}\pi - \log\alpha)}{\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

Altså

$$\int_{K_1} - \int_{K_2} - \int_{K_3} + \int_{K_4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\log\alpha + \frac{1}{2}\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}} + i\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\frac{1}{2}\pi - \log\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

$$\int_{K_1} = \int_\delta^r \frac{\log t}{\sqrt{t}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt, \qquad \int_{K_2} = \int_\delta^r \frac{\log t + i\pi}{i\sqrt{t}\,[(-t)^2+1]}(-dt),$$

$$\left|\int_{K_3}\right| \leq \frac{|\log\delta| + \pi}{\sqrt{\delta}\,(\alpha^2-\delta^2)}\,\pi\delta, \qquad \left|\int_{K_4}\right| \leq \frac{|\log r| + \pi}{\sqrt{r}\,(r^2-\alpha^2)}\,\pi r.$$

Altså $\int_{K_3} \to 0$ for $\delta \to 0$, $\int_{K_4} \to 0$ for $r \to \infty$.

Heraf

$$\int_0^\infty \frac{\log t + \pi}{\sqrt{t}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt - i\int_0^\infty \frac{\log t}{\sqrt{t}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\log\alpha + \frac{1}{2}\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}} + i\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\frac{1}{2}\pi - \log\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}},$$

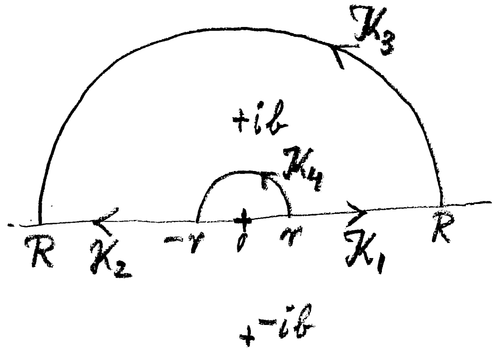
$$I = \int_0^\infty \frac{\log t}{\sqrt{t}\,(t^2+\alpha^2)}\,dt = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\log\alpha - \frac{1}{2}\pi}{\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

243. Beregn integralet
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx, \quad a>0,\ b>0.$$

Vink. Gå frem på lignende måde som i opg. 227.

$$\frac{\exp iaz}{z(z^2+b^2)} = \frac{f(z)}{z-ib}, \text{ hvor } f(z) = \frac{\exp iaz}{z(z+ib)}.$$

Betragt figuren $F = \{z \mid r \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, $0<r<b<R$.



Funktionen f er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0, -ib\}$, og F er en simpel figur i denne mængde. Punktet ib er et indre punkt af F. Altså gælder ifølge Cauchys integralformel

$$\int_{\partial F} \frac{\exp iaz}{z(z^2+b^2)}\,dz = 2\pi i\, f(ib) = 2\pi i \frac{\exp(-ab)}{ib\,(2ib)} = -i\frac{\pi}{b^2}e^{-ab}.$$

Benyt parameterfremstillinger som i opg. 227. Vi får

$$\int_{K_1} = \int_r^R \frac{e^{iat}}{t(t^2+b^2)}\,dt, \qquad \int_{K_2} = \int_r^R \frac{e^{-iat}}{-t(t^2+b^2)}(-dt),$$

altså
$$\int_{K_1} - \int_{K_2} = \int_r^R \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{t(t^2+b^2)}\,dt = 2i\int_r^R \frac{\sin at}{t(t^2+b^2)}\,dt.$$

For $z = x+iy$ er $|\exp iaz| = |\exp(-ay+iax)| = \exp(-ay)$. For $y \geq 0$, og specielt altså på K_3, er derfor $|\exp iaz| \leq 1$.

Heraf $\left|\int_{K_3}\right| \leq \frac{1}{R(R^2-b^2)}\pi R$, hvoraf $\int_{K_3} \to 0$ for $R \to \infty$.

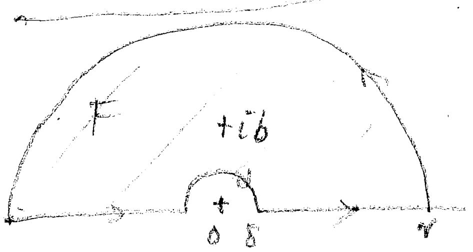
$$\int_{K_4} = \int_0^\pi \frac{\exp(re^{i\theta})}{re^{i\theta}(r^2e^{2i\theta}+b^2)}\,ire^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi \frac{\exp(re^{i\theta})}{(r^2e^{2i\theta}+b^2)}\,d\theta \to i\frac{\pi}{b^2} \text{ for } r\to 0,$$

da integranden $\to \frac{1}{b^2}$ ligeligt på $[0,\pi]$. Altså

$$2i\int_r^R \frac{\sin at}{t(t^2+b^2)}\,dt \to i\frac{\pi}{b^2} - i\frac{\pi}{b^2}e^{-ab} \text{ for } r\to 0,\ R\to\infty. \quad I = \frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right).$$

244. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx. \qquad a>0,\ b>0.$$



$0<\delta<b<r$

$$\frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iaz}}{z} = \frac{\dfrac{(z^2-b^2)\,e^{iaz}}{(z+ib)\,z}}{z-ib} = \frac{f(z)}{z-ib}$$

$$\int_{\partial F} \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\,\frac{e^{iaz}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(ib)$$

$$\int_\delta^r \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{iax}}{x}\,dx + \int_\delta^r \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{e^{-iax}}{-x}\,dx + I_\delta + I_r = 2\pi i\,\frac{-2b^2}{2ib}\,\frac{e^{-ab}}{ib}$$

$$= 2\pi i\, e^{-ab}$$

$$I_\delta = -\int_0^\pi \frac{\delta^2 e^{2i\theta}-b^2}{\delta^2 e^{2i\theta}+b^2}\,\frac{e^{ia\delta e^{i\theta}}}{\cancel{\delta e^{i\theta}}}\, i\,\cancel{\delta e^{i\theta}}\, d\theta \longrightarrow i\pi$$

$$|I_r| \leq \frac{r^2+b^2}{r^2-b^2} \int_0^\pi e^{-ar\sin\theta}\,d\theta \qquad I_r \to 0$$

$$\int_\delta^r \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{2i\sin ax}{x}\,dx \longrightarrow -i\pi + 2\pi i\, e^{-ab}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)$$

Anden løsning ved opg. og

$$I = \int_0^\infty \left(1-\frac{2b^2}{x^2+b^2}\right)\frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 2b^2\,\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

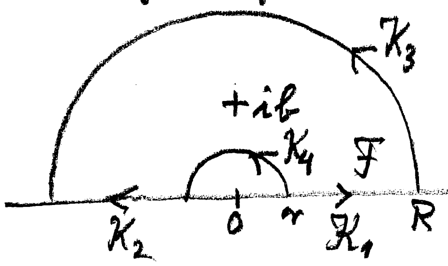
$$= \pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right).$$

245. Beregn integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}\,dx, \quad a>0,\ b>0.$$

$$\frac{\exp iaz}{z(z^2+b^2)^2} = \frac{f(z)}{(z-ib)^2}, \quad \text{hvor } f(z) = \frac{\exp iaz}{z(z+ib)^2}.$$

Betragt figuren $\mathcal{F} = \{z \mid r \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, $0<r<b<R$.



Funktionen f er holomorf i $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, -ib\}$, og $\mathcal{F}$ er en simpel figur i denne mængde. Punktet ib er et indre punkt af $\mathcal{F}$. Ifølge Cauchys integralformel gælder altså

$\pm ib$

$$\int_{\partial \mathcal{F}} \frac{\exp iaz}{z(z^2+b^2)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(ib) = -2\pi i\, e^{-ab}\frac{ab+2}{4b^4}$$

[udregningen af $f'(ib)$ er her udeladt].

Benyt parameterfremstillinger som i opg. 227. Vi får

$$\int_{K_1} = \int_r^R \frac{e^{iat}}{t(t^2+b^2)^2}\,dt, \qquad \int_{K_2} = \int_r^R \frac{e^{-iat}}{-t(t^2+b^2)^2}(-dt),$$

altså

$$\int_{K_1} - \int_{K_2} = \int_r^R \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{t(t^2+b^2)^2}\,dt = 2i\int_r^R \frac{\sin at}{t(t^2+b^2)^3}\,dt.$$

For $z = x+iy$ er $|\exp iaz| = |\exp(-ay+iax)| = \exp(-ay)$. er derfor $|\exp iaz| \leq 1$.
For $y \geq 0$, og specielt altså på K_3,
Heraf $\left|\int_{K_3}\right| \leq \frac{1}{R(R^2-b^2)^2}\pi R$, hvoraf $\int_{K_3} \to 0$ for $R \to \infty$.

$$\int_{K_4} = \int_0^\pi \frac{\exp(iare^{i\theta})}{re^{i\theta}(r^2e^{2i\theta}+b^2)^2}\, ire^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^\pi \frac{\exp(iare^{i\theta})}{(r^2e^{2i\theta}+b^2)^2}\,d\theta \to i\frac{\pi}{b^4} \text{ for } r\to 0,$$

da integranden $\to \frac{1}{b^4}$ ligeligt på $[0,\pi]$. Altså

$$2i\int_r^R \frac{\sin at}{t(t^2+b^2)^2}\,dt \to i\frac{\pi}{b^4} - 2\pi i\, e^{-ab}\frac{ab+2}{4b^4} \text{ for } r\to 0,\ R\to\infty.$$

$$I = \frac{\pi}{2b^4}\left[1 - e^{-ab}\left(\frac{ab}{2}+1\right)\right].$$

246. Lad K være en vilkårlig C^1-kurve i $\mathbb{C}$ og $\varphi : M \to \mathbb{C}$ en vilkårlig kontinuert funktion på den kompakte mængde, der udgøres af punkterne af K. Vis, at der ved formlen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin M,$$

bestemmes en funktion, der er holomorf i hver af de åbne sammenhængende mængder, hvori $\mathbb{C} \setminus M$ kan deles.

247. Gives en funktion $f : A \to \mathbb{C}$ på en åben sammenhængende mængde A, der indeholder punkter af den reelle akse $\mathbb{R}$. Det antages, at

(1) f er kontinuert i A,

(2) f er differentiabel i $A \setminus \mathbb{R}$.

Vis, at f er holomorf i A.

Vink. Vis at integralet $\int_{\partial R} f(z)\,dz$ er 0 for et hvert akseparallelt rektangel R i A.

247. Givet en funktion $f: A \to \mathbb{C}$ på en åben sammenhængende mængde A, der indeholder punkter af den reelle akse $\mathbb{R}$. Det antages, at

(1) f er kontinuert i A,

(2) f er differentiabel i $A \setminus \mathbb{R}$.

Vis, at f er holomorf i A.

Vink. Vis, at integralet $\int_{\partial R} f(z)\,dz$ er 0 for ethvert akseparallelt rektangel R i A.

248. Schwarz' spejlingsprincip. En funktion $f: A \to \mathbb{C}$ på mængden $A = \{z \mid a < x < b,\ 0 \le y < c\}$ antages at opfylde følgende betingelser:

(1) f er kontinuert i A,

(2) f er holomorf i $A^o = \{z \mid a < x < b,\ 0 < y < c\}$,

(3) f er reel på $A \setminus A^o = \{z \mid a < x < b,\ y = 0\}$.

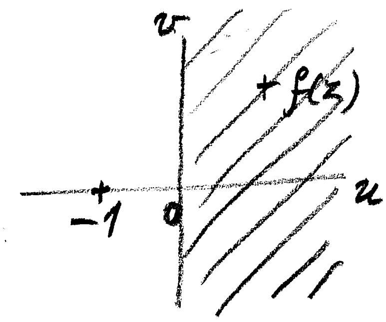
Vis at funktionen $g: B \to \mathbb{C}$ på mængden $B = \{z \mid a < x < b,\ -c < y < c\}$, defineret ved

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{for } z \in A \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{for } z \in B \setminus A, \end{cases}$$

er holomorf i B.

Vink: Benyt opg. 209 og 247.

249. Funktionen $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ antages holomorf i $\grave{C}$. Vis, at hvis $u(x,y) \geq 0$ for alle (x,y), er f konstant.



For ethvert z gælder

$$|f(z)+1| = |f(z)-(-1)| \geq 1.$$

Funktionen

$$g(z) = \frac{1}{f(z)+1}$$ er derfor holomorf

i $\grave{C}$, og $|g(z)| \leq 1$ for alle z.

Ifølge Liouvilles sætning er g konstant.

Altså er f konstant.

250. Funktionen f antages holomorf i $\grave{C}$ og ikke konstant. Vis, at $f(\grave{C})$ er overalt tæt i $\grave{C}$.

Ellers fandtes et $w_0 \in \grave{C}$ og et $\delta > 0$, således at

$$|f(z) - w_0| \geqslant \delta \quad \text{for alle } z \in \grave{C}.$$

Da var funktionen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ holomorf i $\grave{C}$,

og $|g(z)| \leqslant \frac{1}{\delta}$ for alle $z \in \grave{C}$.

Altså var g konstant ifølge Liouvilles sætning, altså f konstant, imod antagelsen.

251. Lad A være en åben sammenhængende mængde i $\dot{C}$ og $f(z,t): A\times[a,b]\longrightarrow \dot{C}$ en kontinuert funktion med den egenskab, at $f(z,t_0)$ for ethvert $t_0\in[a,b]$ er holomorf i A. Vis, at funktionen

$$g(z)=\int_a^b f(z,t)\,dt$$

er holomorf i A, at $f_z'(z,t)$ er kontinuert i $A\times[a,b]$, og at

$$g'(z)=\int_a^b f_z'(z,t)\,dt.$$

$[a,b]$ deles i n lige store dele ved $a=t_0,t_1,\dots,t_n=b$.

$g_n(z)=\frac{1}{n}\{f(z,t_1)+\dots+f(z,t_n)\}$ er holomorf.

For B kompakt del af A sættes $\sup\limits_{\substack{z\in B\\ |t'-t''|\le\delta}}|f(z,t')-f(z,t'')|=\omega(\delta)$ $\quad \omega(\delta)\to 0$ for $\delta\to 0$

Da gælder

$|g(z)-g_n(z)|\le\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)(b-a)$ for alle $z\in B$.

Altså konvergerer $g_n(z)$ mod $g(z)$ ligeligt på ethvert B.

Altså er g holomorf, og $g_n'(z)$ konvergerer ligeligt mod $g'(z)$ på ethvert B.

I smågle kugler F er $f_z'(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F}\frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$.

For $z_n\to z_0\in F\setminus\partial F$ og $t_n\to t_0$ konvergerer $\frac{f(\zeta,t_n)}{(\zeta-z_n)^2}$ ligeligt på ∂F mod $\frac{f(\zeta,t_0)}{(\zeta-z_0)^2}$. Altså konvergerer $f_z'(z_n,t_n)$ mod $f_z'(z_0,t_0)$. $\therefore$ $f_z'(z,t)$ er kontinuert.

$g_n'(z)=\frac{1}{n}\{f_z'(z,t_1)+\dots+f_z'(z,t_n)\}\longrightarrow\int_a^b f_z'(z,t)\,dt$,

hermed formlen for $g'(z)$.

252. Vis, at funktionen $u(x,y) = 2x - 2xy$ er harmonisk. Find den holomorfe funktion $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, for hvilken $v(0,0)=0$.

---

u er C^2 (endda C^∞).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2 - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$ altså $\Delta u = 0$, d.v.s. u er harmonisk.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= 2 - 2y + i2x = 2 + 2i(x+iy) = 2 + 2iz.$$

$$f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = 0.$$

Altså

$$f(z) = 2z + iz^2$$

$$= 2x + 2iy + i(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$= (2x - 2xy) + i(2y + x^2 - y^2).$$

253. Vis, at funktionen $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y$ er harmonisk og angiv dens konjugerede.

---

u er C^2 (endda C^∞).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x \end{aligned}\right\}$$ altså $\Delta u = 0$, d.v.s. u er harmonisk.

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ holomorf,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= 3x^2 - 3y^2 - i(-6xy + 1)$$ også holomorf.

For $y = 0$ fås $3x^2 - i$. Dette fås også af $3z^2 - i$ ved at sætte $y = 0$. De holomorfe funktioner $f'(z)$ og $3z^2 - i$ stemmer altså overens på x-aksen. Altså er de identiske.

$f'(z) = 3z^2 - i$ giver

$$f(z) = z^3 - iz + (a + ib)$$

$$= (x + iy)^3 - i(x + iy) + (a + ib)$$

$$= x^3 - 3xy^2 + y + a + i(3x^2y - y^3 - x + b),$$

altså $a = 0$. De konjugerede er således funktionerne

$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Anden løsning ved at benytte, at $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

$$= -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = (6xy + 1)dx + (3x^2 - 3y^2)dy.$$

254. Vis, at funktionen $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ er harmonisk. Find den holomorfe funktion $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, for hvilken $v(0,0) = 0$.

---

w er C^2 (endda C^∞).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(-x\sin y + y\cos y + \sin y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-x}(x\sin y - y\cos y - \sin y - \sin y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= e^{-x}(-x\sin y + y\cos y + \sin y + \sin y) \end{aligned}\right\}$$ altså $\Delta u = 0$, d.v.s. u er harmonisk.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= e^{-x}\left[x(-\sin y - i\cos y) + y(\cos y - i\sin y) + \sin y + i\cos y\right].$$

$f'(z)$ er holomorf og $y = 0$ giver $f'(x) = e^{-x}(-ix + i)$.
Altså gælder for alle z ifølge identitetssætningen

$$f'(z) = e^{-z}(-iz + i)$$

[Kan naturligvis også ses ved omskrivning af udtrykket for $f'(z)$.]

$f(z)$ er altså den stamfunktion til $e^{-z}(-iz+i)$, der for $z = 0$ har værdien $u(0,0) = 0$. Altså

$$f(z) = e^{-z}\,i z.$$

Kontrol:

$$f(z) = e^{-x}(\cos y - i\sin y)\,i\,(x + iy)$$

$$= e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + i\,e^{-x}(x\cos y + y\sin y).$$

255. Vis, at en kompleks funktion $f(z)$ på en åben sammenhængende mængde A er holomorf i A, hvis og kun hvis begge funktionerne $f(z)$ og $z f(z)$ er harmoniske i A.

1) Antag $f(z)$ holomorf. Da er $z f(z)$ også holomorf. Følgelig er $f(z)$ og $z f(z)$ harmoniske.

2) Antag $f(z)$ og $z f(z)$ harmoniske. Da er $f(z)$ og $z f(z)$, opfattet som funktioner af x og y, C^2-funktioner (endda C^∞-funktioner) og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z f(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z f(z)}{\partial y^2} = 0.$$

Vi får

$$\frac{\partial z f(z)}{\partial x} = f(z) + z\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z f(z)}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial z f(z)}{\partial y} = i f(z) + z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z f(z)}{\partial y^2} = i\frac{\partial f}{\partial y} + i\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

altså

$$\frac{\partial^2 z f(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z f(z)}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Følgelig gælder $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

eller $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}.$

Altså er f holomorf.

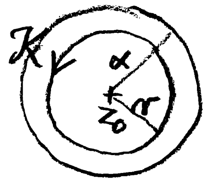
256. Vis, at hvis f er harmonisk i cirkelskiven $\{z \mid |z-z_0|<\alpha\}$, gælder for $0 \leq r < \alpha$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Vink. Vis først ved hjælp af Cauchys integralformel, at formlen gælder, når f er holomorf i cirkelskiven. Vis herved, at formlen gælder for en reel harmonisk funktion, og herved endelig, at den gælder for en kompleks harmonisk funktion.

---

(1) f holomorf. Anvendelse af Cauchys integralformel for cirklen K: $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r>0$, og punktet z_0 giver



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

Formlen er triviel for $r=0$.

(2) u reel harmonisk, v en konjugeret. Da er $f = u + iv$ holomorf, altså

$$u(z_0) + iv(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u(z_0+re^{i\theta}) + iv(z_0+re^{i\theta})\right]d\theta.$$

Tages realdel på begge sider fås

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

(3) f kompleks harmonisk $= f_1 + if_2$ (f_1 og f_2 reelle). Da er f_1 og f_2 harmoniske, altså

$$f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(z_0+re^{i\theta})\,d\theta, \quad f_2(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0 f_2(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

Heraf

$$f(z_0) = f_1(z_0) + if_2(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f_1(z_0+re^{i\theta}) + if_2(z_0+re^{i\theta})\right]d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta.$$

257. Idet f antages harmonisk i en cirkelskive $\{ z \mid |z| < 1+\delta \}$, hvor $\delta > 0$, og $f(0) = 1$, skal man udregne

$$\int_{\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}} f(x+iy)\, dx\, dy .$$

Vink. Benyt opg. 256.

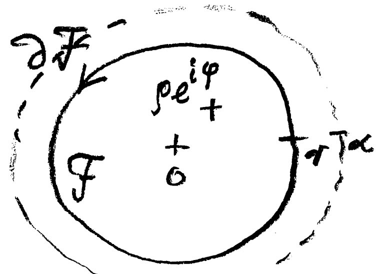
258. <u>Poissons formel.</u> Vis, at hvis f er harmonisk i cirkelskiven $\{z \mid |z|<\alpha\}$, gælder for $0 \leq \rho < r < \alpha$

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{r\rho}(\varphi-\theta)\, f(re^{i\theta})\, d\theta,$$

hvor $K_{r\rho}(\varphi)$ er Poissons kerne

$$K_{r\rho}(\varphi) = \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi}.$$

Vink. Når f er holomorf, fremkommer formlen ved anvendelse af Cauchys integralformel på funktionen $\dfrac{(r^2-\rho^2)f(z)}{r^2-\rho e^{-i\varphi}z}$. Derefter gås frem som i opg. 256.



(1) Antag f holomorf.

$\dfrac{(r^2-\rho^2)f(z)}{r^2-\rho e^{-i\varphi}z}$ er da holomorf i mængden $\{z \mid |z|<\alpha\} \setminus \{\frac{r^2}{\rho}e^{i\varphi}\}$, der indeholder cirkelskiven $F=\{z \mid |z|\leq r\}$, hvori $\rho e^{i\varphi}$ er indre punkt.

Altså

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} \frac{(r^2-\rho^2)f(z)}{(r^2-\rho e^{-i\varphi}z)(z-\rho e^{i\varphi})}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-\rho^2)f(re^{i\theta})\, ire^{i\theta}}{(r^2-\rho e^{-i\varphi}re^{i\theta})(re^{i\theta}-\rho e^{i\varphi})}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r^2-\rho^2)f(re^{i\theta})}{(re^{-i\theta}-\rho e^{-i\varphi})(re^{i\theta}-\rho e^{i\varphi})}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)}\, f(re^{i\theta})\, d\theta.$$

(2) Ved at tage realdelen fås, idet $K_{r\rho}$ er reel, samme formel for en reel harmonisk funktion.

(3) Heraf følger den for en kompleks harmonisk funktion.

259. Vis, at hvis koefficienterne i potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ alle er $\neq 0$, og $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \alpha$ for $n \to \infty$, har potensrækken konvergensradius $\frac{1}{\alpha}$.

For $z \neq 0$: $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \to |\alpha z|$.

1) $|\alpha z| > 1$. Da er $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| > 1$ fra et vist trin,

$$|a_{n+1} z^{n+1}| > |a_n z^n| \quad : \quad \text{rækken er } \underline{\text{divergent}}$$

2) $|\alpha z| < 1$. k så at $|\alpha z| < k < 1$.

Da er $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| < k$ for $n \geq n_0$

$$|a_{n_0} z^{n_0}| = A, \; |a_{n_0+1} z^{n_0+1}| \leq Ak, \dots, |a_{n_0+p} z^{n_0+p}| \leq Ak^p, \dots :$$

rækken er <u>abs. konvergent</u>.

260. Find konvergensradius for følgende potensrækker:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} z^n , \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n .$$

Vink. Benyt opg. 259.

---

1) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!^2} = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n}$, $n \geqslant 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n+2)}{1\cdot 2\cdots (n+1)} \; \frac{1\cdot 2\cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4 \quad \text{for } n\to\infty .$$

Konvergensradius $= \frac{1}{4}$.

2) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, $n \geqslant 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} \quad \text{for } n \to \infty .$$

Konvergensradius $= e$.

261. Find summen af rækken
$$1 + \frac{r\cos\theta}{1!} + \frac{r^2\cos 2\theta}{2!} + \cdots + \frac{r^n\cos n\theta}{n!} + \cdots .$$

For ethvert $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

og ethvert $n = 0, 1, 2, \ldots$ er
$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta,$$

altså
$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$
$$= A + iB$$
hvor
$$A = 1 + \frac{r\cos\theta}{1!} + \frac{r^2\cos 2\theta}{2!} + \cdots + \frac{r^n\cos n\theta}{n!} + \cdots$$
$$B = \frac{r\sin\theta}{1!} + \frac{r^2\sin 2\theta}{2!} + \cdots + \frac{r^n\sin n\theta}{n!} + \cdots .$$

Men
$$\exp z = e^{r\cos\theta}\left(\cos(r\sin\theta) + i(r\sin\theta)\right).$$

Altså
$$A = e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$$
(som var det, der var spurgt om) og desuden
$$B = e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta).$$

262. Vis, at $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to \exp z$ for $n \to \infty$ ligeligt i enhver cirkelskive $\{z \mid |z| \leq r\}$.

Ifølge binomialformlen er

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{z}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{z^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{z^3}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{z^n}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{n}{n}\frac{z}{1!} + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{z^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n^n}\frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} \frac{z^k}{k!},$$

hvor $0 \leq a_k^{(n)} \leq 1$, og der for hvert k gælder $a_k^{(n)} \to 1$ for $n \to \infty$. Endvidere er

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\text{; altså er}$$

$$\exp z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-a_k^{(n)}\right)\frac{z^k}{k!}.$$

Vælg et fast r og et $\varepsilon > 0$.

I $\{z \mid |z| \leq r\}$ fås

$$\left|\exp z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-a_k^{(n)}\right)\frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-a_k^{(n)}\right)\frac{r^k}{k!}.$$

Vælg nu <u>først</u> k_0, så at

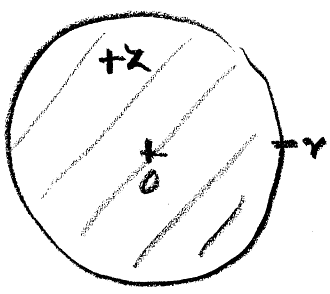
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{r^k}{k!} < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$ <u>dernæst</u> n_0, så at

$$\sum_{k=0}^{k_0}\left(1-a_k^{(n)}\right)\frac{r^k}{k!} < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$ for $n \geq n_0$. For $n \geq n_0$ gælder da

$$\left|\exp z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| < \varepsilon \text{ for alle } z \text{ i } \{z \mid |z| \leq r\}.$$

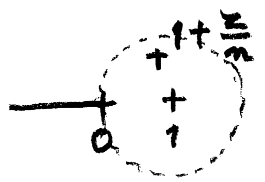
262. Vis, at $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to \exp z$ for $n \to \infty$ ligeligt i enhver cirkelskive $\{z \mid |z| \leq r\}$.

Vælg et fast r. For $n > r$ gælder i $\{z \mid |z| \leq r\}$, at $\left|\frac{z}{n}\right| < 1$, altså



$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp\left[n \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]$,

hvor log betegner hovedværdien



$$\log\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{z}{n} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3} - \cdots$$

Sæt $n \log\left(1+\frac{z}{n}\right) = z_n$, altså

$$z_n = z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2} - \cdots$$

Da er

$$|z - z_n| = \left| \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2} + \cdots \right|$$
$$\leq |z| \left(\left|\frac{z}{n}\right| + \left|\frac{z}{n}\right|^2 + \cdots \right)$$
$$\leq r \left(\frac{r}{n} + \left(\frac{r}{n}\right)^2 + \cdots \right) = r \frac{\frac{r}{n}}{1-\frac{r}{n}} = \frac{r^2}{n-r}.$$

Til $\varepsilon > 0$ findes $\delta \leq 1$, så at

$|\exp a_1 - \exp a_2| \leq \varepsilon$ for alle $a_1, a_2 \in \{z \mid |z| \leq r+1\}$,

for hvilke $|a_1 - a_2| \leq \delta$.

Vælg $n_0 > r$, således at $\frac{r^2}{n_0 - r} \leq \delta$.

For ethvert z med $|z| \leq r$ og ethvert $n \geq n_0$ gælder da $|z - z_n| \leq \delta$, altså $|z_n| \leq r+1$, og vi har $|\exp z - \exp z_n| \leq \varepsilon$ $\therefore$ $\left|\exp z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \varepsilon$.

263. Vis, at der for ethvert $R > 0$ findes et helt positivt tal N således, at polynomiet

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

ikke har noget nulpunkt i cirkelskiven $\{z \mid |z| \leq R\}$, når $n \geq N$.

$$|\exp z| = |e^x e^{iy}| = e^x, \text{ altså } \inf_{\{z \mid |z| \leq R\}} |\exp z| = e^{-R}.$$

$P_n(z) \to \exp z$ ligeligt på enhver kompakt mængde, specielt på $\{z \mid |z| \leq R\}$, d.v.s.

$$\sup_{\{z \mid |z| \leq R\}} |\exp z - P_n(z)| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Der findes altså et N, så at

$$\sup_{\{z \mid |z| \leq R\}} |\exp z - P_n(z)| < e^{-R} \quad \text{for } n \geq N.$$

For dette N gælder det forlangte.

Et brugbart N kan findes ved at benytte at for $|z| \leq R$

$$|\exp z - P_n(z)| = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots \right|$$

$$\leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{R^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots = e^R - P_n(R) = \frac{e^{\theta R}}{(n+1)!} < \frac{e^R}{(n+1)!}.$$

Det er altså nok at vælge N således at

$$\frac{e^R}{(N+1)!} \leq e^{-R}, \quad \text{d.v.s.} \quad (N+1)! \geq e^{2R}.$$

264. En funktion $f(z)$ er givet i cirklen $\{z \mid |z| < \alpha\}$ ved potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Udregn integralet

$$\int_{\{z \mid |z| \leq r\}} |f(z)|^2 \, dx\, dy, \quad 0 < r < \alpha.$$

265. Vis, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ er konvergent for ethvert $z \in \grave{\mathbb{C}}$, for hvilket $|z| \neq 1$. Find et udtryk for rækkens sum, dels i $\{z \mid |z|<1\}$, dels i $\{z \mid |z|>1\}$.

Vink. $\frac{z}{1-z^2} = \frac{z}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^2}$.

Forbemærkning. Alle nulpunkter for nævnerne $1-z^{2^{n+1}}$ ligger på $\{z \mid |z|=1\}$. Leddene i rækken er derfor alle defineret i $\grave{\mathbb{C}} \setminus \{z \mid |z|=1\}$.

Vinket: $\frac{z}{1-z^2} = \frac{z(1+z)}{1-z^2} - \frac{z^2}{1-z^2} = \frac{z}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^2}$.

Vi får

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^N}}{1-z^{2^{N+1}}}$$

$$= \left[\frac{z}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^2}\right] + \left[\frac{z^2}{1-z^2} - \frac{z^4}{1-z^4}\right] + \cdots + \left[\frac{z^{2^N}}{1-z^{2^N}} - \frac{z^{2^{N+1}}}{1-z^{2^{N+1}}}\right]$$

$$= \frac{z}{1-z} - \frac{z^{2^{N+1}}}{1-z^{2^{N+1}}} \longrightarrow \begin{cases} \frac{z}{1-z} & \text{for } |z|<1 \\ \frac{z}{1-z} + 1 = \frac{1}{1-z} & \text{for } |z|>1. \end{cases}$$

Rækken er altså konvergent i $\{z \mid |z|<1\}$ med sum $\frac{z}{1-z}$ og i $\{z \mid |z|>1\}$ med sum $\frac{1}{1-z}$.

266. Bernoulli tallene B_n kan defineres ved formlen

$$\frac{z}{e^z-1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n + \cdots, \quad |z| < 2\pi.$$

Vis, at $B_0 = 1$, $B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$,

og udled herved $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$. Vis, at $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z\coth\frac{1}{2}z$, og udled herved $B_n = 0$ for ulige $n \geq 3$. Udled

$$\coth z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots + \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi,$$

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \cdots + (-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad 0 < |z| < \pi,$$

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \cdots, \quad |z| < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Vink. $\operatorname{tg} z = \cot z - 2\cot 2z$.

$e^z - 1 = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$ er holomorf i $\grave{C}$ og har nulpunkterne $p2\pi i$, $p \in \grave{Z}$.

$\frac{e^z-1}{z} = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n!} + \cdots$ er derfor holomorf i $\grave{C}$ og har nulpunkterne $p2\pi i$, $p \in \grave{Z}\setminus\{0\}$. [$\frac{e^z-1}{z}$ er ikke defineret for $z=0$, men tillægges naturligvis for $z=0$ værdien 1.]

$\frac{z}{e^z-1}$ er derfor holomorf i $\grave{C} \setminus \{p2\pi i \mid p \in \grave{Z}\setminus\{0\}\}$. Den største åbne cirkelskive med centrum 0 tilhørende denne mængde er $\{z \mid |z| < 2\pi\}$. I denne fremstilles $\frac{z}{e^z-1}$ ved en potensrække, som vi skriver $B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \cdots + \frac{B_n}{n!}z^n + \cdots$. Man siger, at $f(z) =$

(fortsættes)

$\frac{z}{e^z-1}$ er <u>frembringende funktion</u> for Bernoulli tallene.
Da potensrækken er Taylorrækken, er $B_n = f^{(n)}(0)$. Til beregning af tallene er denne formel upraktisk.

Vi finder for $|z|<2\pi$

$$1=\left(\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots\right)\left(B_0+\frac{B_1}{1!}z+\frac{B_2}{2!}z^2+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+\cdots\right).$$

I $\{z \mid |z|<2\pi\}$ er begge rækker absolut konvergente, så at vi kan benytte multiplikationssætningen. Vi får

$$1=\frac{B_0}{1!}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_0}{n!}+\frac{B_1}{1!(n-1)!}+\frac{B_2}{2!(n-2)!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!\,1!}\right)z^{n-1}.$$

Heraf ved koefficientsammenligning

$$B_0=1\,,\quad \frac{B_0}{n!}+\frac{B_1}{1!(n-1)!}+\frac{B_2}{2!(n-2)!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!\,1!}=0.$$

Gang sidste formel med $n!$ og den ønskede formel fremkommer. Heraf successivt de anførte værdier for $B_1,\dots,B_8$.

$\frac{z}{e^z-1}+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}z\,\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{1}{2}z\coth\frac{1}{2}z$ er en lige funktion og $=B_0+\frac{B_2}{2!}z^2+\frac{B_3}{3!}z^3+\cdots+\frac{B_n}{n!}z^n+\cdots$

for $|z|<2\pi$. For en lige funktion har de ulige led i potensrækken koefficient 0, altså $B_n=0$ for ulige $n\geqslant 3$. Ved i $\frac{1}{2}z\coth\frac{1}{2}z$ at erstatte z med $2z$ fås for $|z|<\pi$

$$z\coth z=B_0+\frac{B_2}{2!}(2z)^2+\frac{B_4}{4!}(2z)^4+\cdots+\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2z)^{2n}+\cdots,$$

hvoraf den ønskede række for $\coth z$.

$\cot z = i\coth iz$ giver den ønskede række for $\cot z$.

$\operatorname{tg} z=\cot z-2\cot 2z$ giver den ønskede række for $\operatorname{tg} z$ for $0<|z|<\frac{1}{2}\pi$, og for 0 er den trivielt rigtig.

267. Find en strimmel $\{z=x+iy \mid |y|<\alpha\}$, hvori rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{2^n}$$
er konvergent. Hvad er det største brugbare α? Vis, at rækken fremstiller en holomorf funktion i strimlen, og find et simpelt udtryk for denne.

$$\cos nz = \frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}.$$

Kvotientrækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inz}}{2^n}$ er konvergent for
$$\left|\frac{e^{iz}}{2}\right| = \frac{e^{-y}}{2}<1,\ \text{d: } y>-\log 2 \quad \text{med sum } \frac{e^{iz}}{2}\frac{1}{1-\frac{e^{iz}}{2}},$$
og divergent for $\left|\frac{e^{iz}}{2}\right|\geq 1$, d: $y\leq -\log 2$.

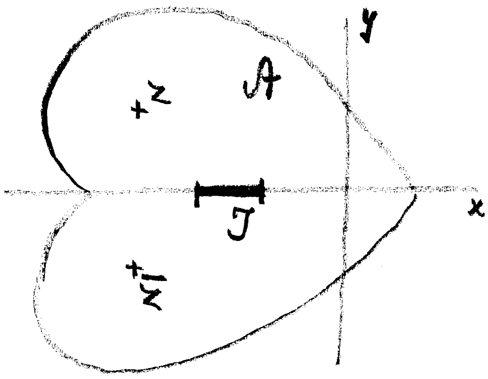
Kvotientrækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-inz}}{2^n}$ er konvergent for
$$\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right| = \frac{e^{y}}{2}<1,\ \text{d: } y<\log 2 \quad \text{med sum } \frac{e^{-iz}}{2}\frac{1}{1-\frac{e^{-iz}}{2}},$$
og divergent for $\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right|\geq 1$, d: $y\geq \log 2$.

Altså er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{2^n}$ konvergent i strimlen $\{z=x+iy \mid |y|<\log 2\}$ og divergent i ethvert punkt, som ikke er i denne strimmel, så at $\log 2$ er det største brugbare α. Summen er holomorf som sum af to holomorfe funktioner. Vi finder at den bliver

$$\frac{1}{2}\left[\frac{e^{iz}}{2-e^{iz}}+\frac{e^{-iz}}{2-e^{-iz}}\right] = \frac{1}{2}\frac{2e^{iz}-1+2e^{-iz}-1}{(2-e^{iz})(2-e^{-iz})} = \frac{1}{2}\frac{4\cos z-2}{5-4\cos z}$$
$$= \frac{2\cos z-1}{5-4\cos z}.$$

268. Vis, at hvis $f: A \to \dot{C}$ er holomorf i en med hensyn til den reelle akse symmetrisk åben sammenhængende mængde A, og $f(z)$ er reel på et til A hørende interval på den reelle akse, da er $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ for ethvert $z \in A$.

Vink. Benyt opg. 209 og identitetssætningen.



Ifølge opg. 209 er den ved $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ definerede funktion på A holomorf. Ifølge antagelse er f reel på et interval $J \subset A$ på den reelle akse.

For $z \in J$ gælder altså $g(z) = f(z)$.

Ifølge identitetssætningen gælder da $g(z) = f(z)$ for alle $z \in A$, altså $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ for alle $z \in A$, altså $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ for alle $z \in A$.

Konsekvens. $f(z)$ er reel for ethvert reelt $z \in A$.

269. Vis, at hvis $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ er holomorf i $\mathbb{C}$ og $u(x,y)$ er et polynomium i x og y, da er $f(z)$ et polynomium i z.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$ er et polynomium i x og y

Sættes $y = 0$ ses, at

$f'(x)$ er et polynomium i x, lad os sige $p(x)$.

$f'(z)$ og $p(z)$ er holomorfe i $\mathbb{C}$ og stemmer overens på den reelle akse.

Ifølge identitetssætningen gælder da $f'(z) = p(z)$ for alle z.

$f'(z)$ er altså et polynomium i z.

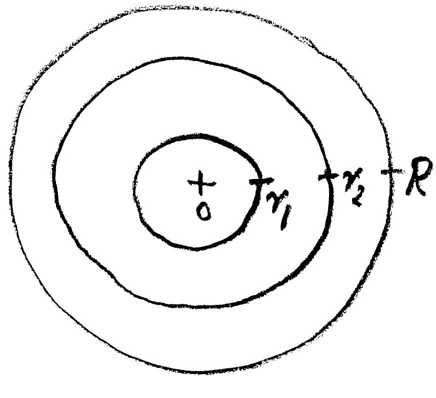
Stamfunktionen $f(z)$ er da også et polynomium i z.

270. Vis, at når f er holomorf i cirkelskiven $\{z \mid |z|<R\}$ og ikke konstant, er funktionen

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R,$$

en (i streng forstand) voksende funktion (d.v.s. $M(r_1) < M(r_2)$, når $r_1 < r_2$).

Vink. Benyt maksimumsprincipet.



Da $\{z \mid |z|=r\}$ er kompakt og f er kontinuert, antages supremum.

Ifølge maksimumsprincipet er

$$M(r_2) = \sup_{|z| \leq r_2} |f(z)|$$

og for alle z med $|z| < r_2$ gælder $|f(z)| < M(r_2)$.

Følgelig er $M(r_1) < M(r_2)$.

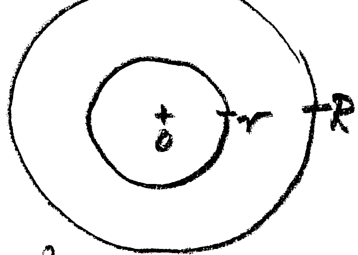
271. Vis, at hvis f er holomorf og $\neq 0$ i cirkelskiven $\{z \mid |z| < R\}$ og ikke konstant, er funktionen

$$m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < R,$$

en (i streng forstand) aftagende funktion. Vis herved påny algebraens fundamentalsætning.

Vink. Benyt opg. 270.

Da $\{z \mid |z| = r\}$ er kompakt og f er kontinuert, antages infimum (som følgelig er >0).



$\frac{1}{f}$ er ligeledes holomorf i $\{z \mid |z| < R\}$.

Sættes
$$M(r) = \sup_{|z|=r} \left|\frac{1}{f(z)}\right|.$$

ser man, at
$$m(r) = \frac{1}{M(r)}.$$

Da $M(r)$ ifølge opg. 270 er voksende (i streng forstand), må $m(r)$ være aftagende (i streng forstand).

Algebraens fundamentalsætning. Antag, at polynomiet

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad n \geq 1,\ a_n \neq 0,$$

ikke havde noget nulpunkt. Da f er holomorf i $\mathbb{C}$ skulde ifølge sætningen $m(r)$ være aftagende.

Men for $|z| = r$ er
$$|f(z)| \geq |a_n| r^n - |a_{n-1}| r^{n-1} - \cdots - |a_0|.$$

Altså er
$$m(r) \geq |a_n| r^n - |a_{n-1}| r^{n-1} - \cdots - |a_0|,$$

hvoraf $m(r) \to \infty$ for $r \to \infty$. Dette er en modstrid.

272. <u>Schwarz' lemma.</u> Vis, at hvis f er holomorf i cirkelskiven $A = \{z \mid |z| < 1\}$ og opfylder betingelserne

$$f(0) = 0, \qquad |f(z)| < 1 \quad \text{for alle } z \in A,$$

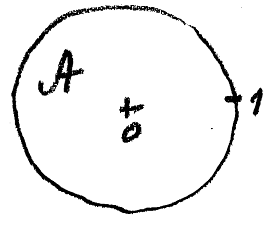
da gælder $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in A$, og hvis blot $|f(z_0)| = |z_0|$ for eet $z_0 \neq 0$ i A, gælder $f(z) = az$ for alle $z \in A$ for et vist a med $|a| = 1$.

Vink. Betragt den ved

$$g(z) = \begin{cases} f'(0) & \text{for } z = 0 \\ \dfrac{f(z)}{z} & \text{for } z \in A \setminus \{0\} \end{cases}$$

definerede funktion. Vis, at g er holomorf i A og anvend opg. 270.

I A fremstilles f ved sin potensrække



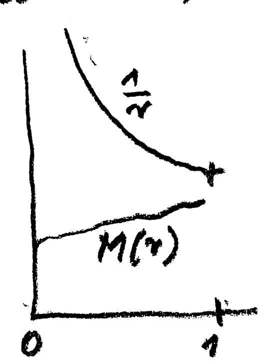
$$f(z) = f'(0)z + a_2 z^2 + \cdots$$

Følgelig fremstilles g i A ved

$$g(z) = f'(0) + a_2 z + \cdots$$

og er altså holomorf. Vi har $f(z) = z\,g(z)$ for alle $z \in A$.

Sæt $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |g(z)|$, $0 \leq r < 1$. Ifølge antagelse er $M(r) < \frac{1}{r}$ for $0 < r < 1$. — Hvis g er konstant, er $M(r)$ konstant. Hvis g ikke er konstant, er $M(r)$ ifølge opg. 270 voksende. I begge tilfælde ses (jfr. figur), at $M(r) \leq 1$ for $0 \leq r < 1$.

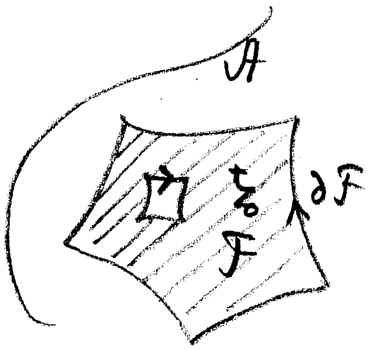


Altså er $|g(z)| \leq 1$ for alle $z \in A$, og følgelig $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in A$. Hvis $|f(z_0)| = |z_0|$ for blot eet $z_0 \neq 0$ i A, er $|g(z_0)| = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$; altså er ifølge maksimumsprincippet g konstant $= a$, hvor $a = \frac{f(z_0)}{z_0}$. Følgelig er $f(z) = az$, hvor $|a| = 1$.

273. Vis, at hvis f er holomorf i cirkelskiven $A = \{z \mid |z| < 1\}$ og $f(0) = 0$, og f afbilder A <u>bijektivt</u> på sig selv, da har f formen $f(z) = az$, hvor $|a| = 1$.
Vink. Benyt opg. 272.

Ifølge opg. 272 gælder $|f(z)| \leq |z|$ for alle $z \in A$. Funktionen f^{-1} afbilder A bijektivt på sig selv og $f^{-1}(0) = 0$; endvidere er f^{-1} holomorf. Altså gælder ifølge opg. 272 $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ for alle $w \in A$, og følgelig $|z| = |f^{-1} \circ f(z)| \leq |f(z)|$ for alle $z \in A$. Altså er $|f(z)| = |z|$ for alle $z \in A$. Ifølge opg. 272 har f altså formen $f(z) = az$, hvor $|a| = 1$.

274. Lad $f: A \to \dot{C}$ være holomorf, F en simpel figur i A, og $\sup_{z \in \partial F} |f(z)| = M$. Vis ved at anvende Cauchys integralformel på f^n, $n \in \dot{N}$, at $|f(z)| \leq M$ for ethvert $z \in F$.



Sætningen er hovedindholdet af maksimumsprincipet, som imidlertid udsiger lidt mere, nemlig at hvis f ikke er konstant, gælder ikke blot $|f(z_0)| \leq M$, men endda $|f(z_0)| < M$, for ethvert indre punkt af F. Her vises kun $|f(z_0)| \leq M$.

Cauchys integralformel giver (da f^n er holomorf)

$$f(z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{f(z)^n}{z - z_0} dz.$$

Lad $\operatorname{dist}(z_0, \partial F) = d$. For $z \in \partial F$ er da $\left| \frac{f(z)^n}{z - z_0} \right| \leq \frac{M^n}{d}$.

Altså fås

$$|f(z_0)^n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{d} \lambda(\partial F), \text{ hvoraf}$$

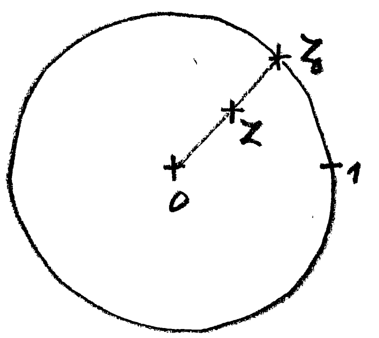
$$|f(z_0)| \leq M \sqrt[n]{\frac{\lambda(\partial F)}{2\pi d}}.$$

For $n \to \infty$ gælder $\sqrt[n]{\frac{\lambda(\partial F)}{2\pi d}} \to 1$. Altså gælder

$$|f(z_0)| \leq M.$$

275. Vis, at potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ har konvergensradius 1. Vis dernæst, at den ved potensrækken i cirkelskiven $\{z \mid |z|<1\}$ fremstillede funktion $f(z)$ ikke kan fortsættes analytisk.
Vink. Vis, at $f(z) \to \infty$, når z langs en radius konvergerer mod et punkt af formen $e^{ik2^{-p}2\pi}$, $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Skrives rækken $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, har vi $a_m = 1$ for $m = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ og $a_m = 0$ for alle andre m. Altså er $\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1$. Konvergensradius er derfor 1.



Lad z_0 være et punkt på konvergenscirklen af formen

$$z_0 = e^{ik2^{-p}2\pi}, \quad p \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Et punkt z på den tilsvarende radius skrives da

$$z = r z_0, \quad 0 < r < 1.$$

Vi finder

$$f(z) = \underbrace{z + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^{p-1}}}_{g(z)} + z^{2^p} + z^{2^{p+1}} + \dots$$

$$= \qquad g(z) \qquad + r^{2^p} + r^{2^{p+1}} + \dots .$$

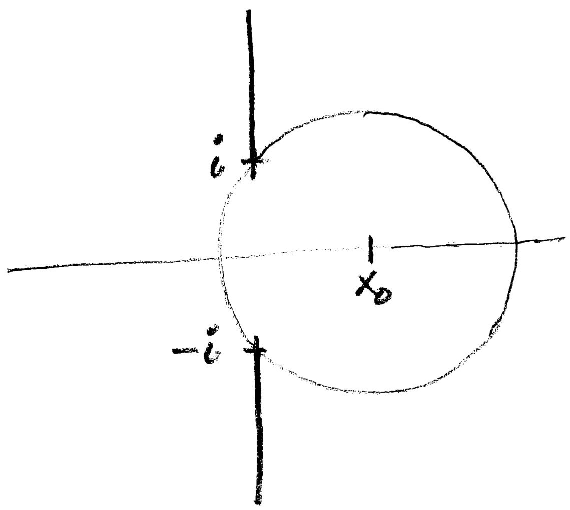
For $r \to 1$ gælder $g(z) \to g(z_0)$. Endvidere gælder $r^{2^p} + r^{2^{p+1}} + \dots \to \infty$, thi $r^{2^p} + r^{2^{p+1}} + \dots$ er for ethvert $q \in \mathbb{N}$ større end $r^{2^p} + r^{2^{p+1}} + \dots + r^{2^{p+q}}$, som $\to q+1$ for $r \to 1$. Altså gælder $f(z) \to \infty$.

Punktmængden $\{e^{ik2^{-p}2\pi} \mid p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ er overalt tæt i $\{z \mid |z| = 1\}$. Følgelig kan f ikke fortsættes analytisk.

276. Find (uden at udregne rækkens koefficienter!) konvergensradius for Taylorrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

for funktionen $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (hovedværdien) for et vilkårligt $x_0 \in \mathbb{R}$.



I $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy \mid x=0, |y| \geq 1\}$ betragtes den gren af arctg z, som på $\mathbb{R}$ er hovedværdien. Den er holomorf og i og $-i$ er singulære randpunkter (jfr. diskussionen af arctg i §8, B).

Taylorrækken hørende til x_0 har derfor konvergensradius $\sqrt{1+x_0^2}$, og den fremstiller arctg z i cirklen $\{z \mid |z-x_0| < \sqrt{1+x_0^2}\}$. Specielt fremstiller den arctg x i intervallet $\{x \mid |x-x_0| < \sqrt{1+x_0^2}\}$.

277. Betragt klassen $\mathcal{T}$ af funktioner $f: \mathring{R} \to \mathring{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \mathcal{P}(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor $\mathcal{P}$ er et polynomium med koefficienter i $\mathring{R}$. Vis, at $\mathcal{T} \subset C^\infty(\mathring{R})$. Fremstilles en funktion $f \in \mathcal{T}$ i en omegn af 0 ved sin Taylorrække $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

Eksempel: $$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases} \quad \text{(Cauchy.)}$$

Betragt den til polynomiet $\mathcal{P}$ hørende funktion $f \in \mathcal{T}$. I $\mathring{R} \setminus \{0\}$ er f åbenbart differentiabel med differentialkvotienten $f'(x) = \left[\mathcal{P}(\frac{1}{x}) \frac{2}{x^3} + \mathcal{P}'(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})\right] \exp(-\frac{1}{x^2})$.

I 0 er f differentiabel med differentialkvotienten $f'(0) = 0$. Thi for $x \neq 0$ er $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \mathcal{P}(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2})$, og $y\,\mathcal{P}(y) \exp(-y^2) \to 0$ for $y \to \infty$. Altså er

$$f'(x) = \begin{cases} Q(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

hvor Q er polynomiet bestemt ved $Q(y) = \mathcal{P}(y) 2y^3 - \mathcal{P}'(y) y^2$. f' er altså simpelthen den til polynomiet Q hørende funktion $\in \mathcal{T}$. Men så er også f' differentiabel og $f'' \in \mathcal{T}$, o.s.v. Altså er $\mathcal{T} \subseteq C^\infty(\mathring{R})$, og $\mathcal{T}$ er åbenbart ikke $= C^\infty(\mathring{R})$.

For ethvert $f \in \mathcal{T}$ er $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, o.s.v. Taylorrækken $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ er altså rækken $\sum_0^\infty 0 x^n$, som er konvergent for alle x med summen 0. For den til nulpolynomiet hørende funktion fremstiller Taylorrækken naturligvis funktionen for alle x. For den til et egentligt polynomium $\mathcal{P}$ hørende funktion f er rækkens sum kun $= f(x)$ for $x = 0$ og for de endelig mange $x \neq 0$ for hvilke $\mathcal{P}(\frac{1}{x}) = 0$, i en passende omegn af 0 altså kun for $x = 0$.

278. Vis, at den ved $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^3x}{n^n}$ definerede funktion $f:\mathring{R}\to\mathring{R}$ tilhører $C^\infty(\mathring{R})$, og at dens Taylorrække $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ er divergent for alle $x\neq 0$.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^3x}{n^n}$ har den konvergente majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ og er derfor ligelig konvergent. Summen f tilhører derfor $C^0(\mathring{R})$.

Den ledvis differentierede række $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin n^3x}{n^{n-3}}$ har den konvergente majorantrække $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n-3}}$ og er derfor ligelig konvergent. Følgelig er $f\in C^1(\mathring{R})$ og $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin n^3x}{n^{n-3}}$.

Ved gentagelse af ræsonnementet ses, at $f\in C^\infty(\mathring{R})$, idet $f''(x), f'''(x),\dots$ fremstilles ved de ved fortsat ledvis differentiation dannede rækker, der alle er ligelig konvergente. Af

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^3x}{n^n}$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin n^3x}{n^{n-3}}$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos n^3x}{n^{n-6}}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^3x}{n^{n-9}}$$

etc.

fås $f^{(p)}(0)=0$ for ulige p

$$f^{(p)}(0)=(-1)^{\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n-3p}}\quad\text{for lige } p.$$

Heraf for lige $p>0$

$$\left|f^{(p)}(0)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{n-3p}}>\frac{1}{p^{p-3p}}=p^{2p}$$

$$\left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|>\frac{p^{2p}}{p!}>p^p$$

$$\sqrt[p]{\left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|}>p.$$

Følgelig gælder $\limsup\sqrt[p]{\left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right|}=\infty$.

Taylorrækken $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ har derfor konvergensradius 0, ɔ: den er kun konvergent for $x=0$.

279. Find $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{2}z^2-\cos z}{\sin^4 z}$.

For alle z er

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots,$$

altså

$$1-\frac{1}{2}z^2-\cos z = -\frac{z^4}{24} + \cdots,$$

og

$$(\sin z)^4 = \left(z - \frac{z^3}{6} + \cdots\right)^4 = z^4 + \cdots.$$

Følgelig gælder i $\{z \mid \sin z \neq 0\}$

$$\frac{1-\frac{1}{2}z^2-\cos z}{\sin^4 z} = \frac{z^4\left(-\frac{1}{24}+\cdots\right)}{z^4(1+\cdots)} = \frac{-\frac{1}{24}+\cdots}{1+\cdots}.$$

Følgelig er

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\frac{1}{2}z^2-\cos z}{\sin^4 z} = -\frac{1}{24}.$$

Plomberes i 0 med værdien $-\frac{1}{24}$ bliver funktionen holomorf i $\{z \mid \sin z \neq 0\} \cup \{0\}$.

280. Find residuet for funktionen $f(z)=\frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ svarende til polen 1.

$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, hvor $g(z)=\frac{z^3+5}{z}$, $h(z)=(z-1)^3$.

$g(z)$ er holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. De første led i potensrækkeudviklingen ud fra 1 bestemmes.

$$g(z)=z^2+\frac{5}{z} \qquad g(1)=6$$

$$g'(z)=2z-\frac{5}{z^2} \qquad g'(1)=-3$$

$$g''(z)=2+\frac{10}{z^3} \qquad g''(1)=12.$$

Altså i omegn af 1 [nemlig i $\{z\mid |z-1|<1\}$]

$$g(z)=6-3(z-1)+6(z-1)^2+\cdots$$

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{6-3(z-1)+6(z-1)^2+\cdots}{(z-1)^3}$$

$$=\frac{6}{(z-1)^3}-\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{6}{z-1}+\cdots$$

Altså $\operatorname{Res}(f,1)=6$.

Den principale del hørende til polen er

$$\frac{6}{(z-1)^3}-\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{6}{z-1}.$$

281. Find den principale del af $\frac{1}{\exp z - 1}$ svarende til polen 0.

$\exp z - 1$ er holomorf i $\grave{\mathbb{C}}$ og har nulpunktsmængden $\{ip2\pi \mid p \in \grave{\mathbb{Z}}\}$. Altså er $\frac{1}{\exp z - 1}$ meromorf i $\grave{\mathbb{C}}$ og har polmængden $\{ip2\pi \mid p \in \grave{\mathbb{Z}}\}$.

$$\exp z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

I en omegn af polen 0 haves derfor

$$\frac{1}{\exp z - 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} = \frac{1}{z}\left(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots .$$

Den principale del svarende til polen 0 er derfor $\frac{1}{z}$.

282. Find residuet af funktionen $\frac{\cot z \coth z}{z^3}$ i 0.

Vink. Benyt opg. 266.

Funktionen er åbenbart meromorf i $\dot{\mathbb{C}}$. Punktet $z=0$ er pol både for $\cot z$ og $\coth z$, og derfor sikkert også for funktionen.

I en omegn af 0 gælder ifølge opg. 266

$$f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3} = \frac{z\cot z \cdot z\coth z}{z^5}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4+\cdots\right)}{z^5}$$

$$= \frac{1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)z^2+\left(-\frac{1}{45}-\frac{1}{9}-\frac{1}{45}\right)z^4+\cdots}{z^5}$$

$$= \frac{1}{z^5}+\frac{-\frac{7}{45}}{z}+\cdots .$$

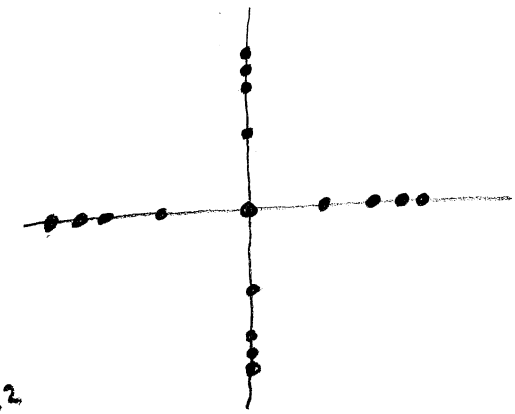
Altså er $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{7}{45}$.

283. Vis, at funktionen $f(z)=\frac{1}{\sin(z^2)}$ har een pol af anden orden og uendelig mange poler af første orden, og find residuerne.

Funktionen er meromorf i $\mathbb{C}$, og dens poler er nævnerens nulpunkter. Polmængden er altså

$$\{z \mid \sin(z^2)=0\} = \{z \mid z^2 = p\pi,\ p\in \mathbb{Z}\}$$

$$=\{0\} \cup \{z=\pm\sqrt{p\pi} \mid p\in \mathbb{N}\} \cup \{z=\pm i\sqrt{p\pi} \mid p\in\mathbb{N}\}.$$



1) $z_0=0$. I en omegn af 0

er $$f(z)=\frac{1}{z^2-\frac{z^6}{6}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{z^4}{6}+\cdots}$$

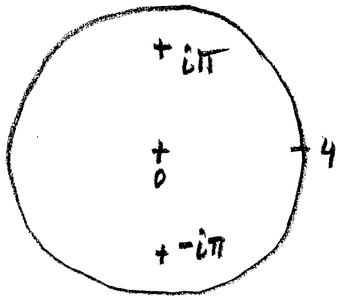
$$=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{z^4}{6}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{z^2}{6}+\cdots.$$

Altså er $z_0=0$ pol af anden orden, og $\mathrm{Res}(f,0)=0$.

2) $z_0=\pm\sqrt{p\pi}$, $p\in\mathbb{N}$. For $h(z)=\sin(z^2)$ fås $h'(z)=2z\cos(z^2)$, altså $h'(z_0)=\pm 2\sqrt{p\pi}\cos(p\pi)$ $=\pm(-1)^p 2\sqrt{p\pi}$. Altså er $z_0=\pm\sqrt{p\pi}$ pol af første orden, og $\mathrm{Res}(f,\pm\sqrt{p\pi})=\pm\frac{(-1)^p}{2\sqrt{p\pi}}$.

3) $z_0=\pm i\sqrt{p\pi}$, $p\in\mathbb{N}$. Her er $h'(z_0)=\pm 2i\sqrt{p\pi}\cos(-p\pi)$ $=\pm(-1)^p 2i\sqrt{p\pi}$. Altså er $z_0=\pm i\sqrt{p\pi}$ pol af første orden og $\mathrm{Res}(f,\pm i\sqrt{p\pi})=\pm\frac{(-1)^p}{2i\sqrt{p\pi}}$.

284. Find $I = \int_K \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\,dz$, hvor K er cirklen $\{z \mid |z|=4\}$ med positivt omløb.



$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$$ er meromorf i $\mathbb{C}$

og har polerne $i\pi$ og $-i\pi$.

Altså er ifølge residuesætningen

$$I = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f, i\pi) + \mathrm{Res}(f, -i\pi)\right].$$

For at finde $\mathrm{Res}(f, i\pi)$ skrives

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i\pi)^2}, \text{ hvor } g(z) = \frac{e^z}{(z+i\pi)^2}.$$ Vi får da

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = g'(i\pi). \qquad g'(z) = \frac{(z+i\pi)^2 e^z - 2(z+i\pi)e^z}{(z+i\pi)^4}.$$

Altså

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \frac{-(2i\pi)^2 + 4i\pi}{(2i\pi)^4} = \frac{\pi + i}{4\pi^3}.$$

For at finde $\mathrm{Res}(f, -i\pi)$ skrives

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z+i\pi)^2}, \text{ hvor } h(z) = \frac{e^z}{(z-i\pi)^2}.$$ Vi får da

$$\mathrm{Res}(f, -i\pi) = h'(-i\pi). \qquad h'(z) = \frac{(z-i\pi)^2 e^z - 2(z-i\pi)e^z}{(z-i\pi)^4}.$$

Altså

$$\mathrm{Res}(f, -i\pi) = \frac{-(-2i\pi)^2 - 4i\pi}{(-2i\pi)^4} = \frac{\pi - i}{4\pi^3}.$$

Altså

$$I = 2\pi i\,\frac{2\pi}{4\pi^3} = \frac{i}{\pi}.$$

285. Beregn integralet

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2}\;,\qquad \alpha>0.$$

Vink. Anvend residuesætningen på funktionen

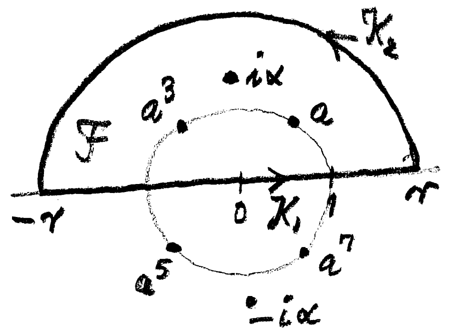
$\frac{1}{(z^4+1)(z^2+\alpha^2)^2}$ og figuren $F=\{z \mid |z|\leq r,\ y\geq 0\}$, $r>\max\{1,\alpha\}$.

$f(z)=\frac{1}{(z^4+1)(z^2+\alpha^2)^2}$ er rational (altså meromorf i $\mathbb{C}$)

og har polerne $a=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, a^5, a^7, $i\alpha$, $-i\alpha$,

hvoraf ingen ligger på ∂F. I F ligger polerne

a, a^3, $i\alpha$.



1) $f(z)=\dfrac{\frac{1}{(z^2+\alpha^2)^2}}{z^4+1}$.

I a og a^3 er tælleren $\neq 0$,

nævneren $=0$, og nævnerens

differentialkvotient $4z^3$ er $\neq 0$.

Altså er a og a^3 poler af første orden og

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{\frac{1}{(a^2+\alpha^2)^2}}{4a^3}=\frac{1}{4a^3(\alpha^2+i)^2}=-\frac{a(\alpha^2-i)^2}{4(\alpha^4+1)^2}$$

$$\operatorname{Res}(f,a^3)=\frac{\frac{1}{(a^6+\alpha^2)^2}}{4a^9}=\frac{1}{4a\,(\alpha^2-i)^2}=-\frac{a^3(\alpha^2+i)^2}{4(\alpha^4+1)^2}.$$

2) $f(z)=\dfrac{\frac{1}{(z^4+1)(z+i\alpha)^2}}{(z-i\alpha)^2}=\dfrac{g(z)}{(z-i\alpha)^2}$.

$g(i\alpha)\neq 0$. Altså er $i\alpha$ pol af anden orden og

$\operatorname{Res}(f,i\alpha)=g'(i\alpha)$. $\quad g'(z)=-\frac{2}{(z^4+1)(z+i\alpha)^3}-\frac{4z^3}{(z^4+1)^2(z+i\alpha)^2}$

$$\operatorname{Res}(f,i\alpha)=-\frac{2}{(\alpha^4+1)(2i\alpha)^3}-\frac{4(i\alpha)^3}{(\alpha^4+1)^2(2i\alpha)^2}=$$

(fortsættes)

285 fortsat

$$= -\left[\frac{1}{(\alpha^4+1)4\alpha^3} + \frac{\alpha}{(\alpha^4+1)^2}\right] i.$$

$$\mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,a^3) = -\frac{a(\alpha^4-2i\alpha^2-1)+a^3(\alpha^4+2i\alpha^2-1)}{4(\alpha^4+1)^2}$$

$$= -\frac{(a+a^3)(\alpha^4-1)-(a-a^3)2i\alpha^2}{4(\alpha^4+1)^2} = -\frac{\sqrt{2}(\alpha^4-1)-2\sqrt{2}\alpha^2}{4(\alpha^4+1)^2} i.$$

Residuesætningen giver

$$\int_{\partial F} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,a^3)+\mathrm{Res}(f,i\alpha)\right)$$

$$= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}(\alpha^4-2\alpha^2-1)}{4(\alpha^4+1)^2} + \frac{1}{(\alpha^4+1)4\alpha^3} + \frac{\alpha}{(\alpha^4+1)^2}\right].$$

$$\int_{\partial F} = \int_{K_1} + \int_{K_2} \quad \text{og} \quad \int_{K_1} = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2},$$

$$\left|\int_{K_2}\right| \leq \sup_{z\in K_2} |f(z)|\,\pi r \leq \frac{\pi r}{(r^4-1)(r^2-\alpha^2)^2}.$$

Heraf $\int_{K_2} \to 0$ for $r \to \infty$. Altså

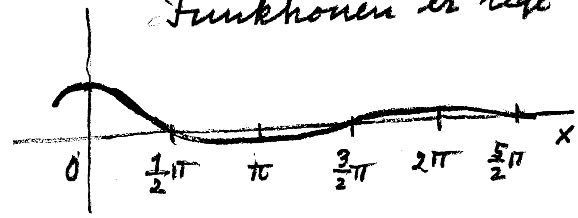
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+\alpha^2)^2} = 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}(\alpha^4-2\alpha^2-1)}{4(\alpha^4+1)^2} + \frac{1}{(\alpha^4+1)4\alpha^3} + \frac{\alpha}{(\alpha^4+1)^2}\right]$$

$$= \pi\,\frac{\sqrt{2}\alpha^3(\alpha^4-2\alpha^2-1) + 5\alpha^4+1}{2\alpha^3(\alpha^4+1)^2}.$$

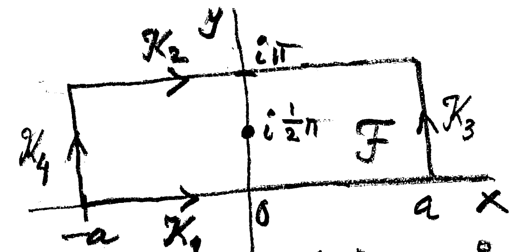
286. Beregn integralet $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx$.

Vink. Anvend residuesætningen på funktionen $\frac{e^{iz}}{\cosh z}$ og figuren $F = \{z \mid |x| \leq a, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Funktionen er lige



Da $|\cos x| \leq 1$ og $\cosh x \geq \frac{1}{2}e^{|x|}$ er $\left|\frac{\cos x}{\cosh x}\right| \leq 2e^{-|x|}$, så at eksistensen af integralet er klar.



$\cosh z$ $(= \cos iz)$ har nulpunkterne $i(\frac{1}{2}+p\pi)$, $p \in \mathbb{Z}$. Altså er $f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z}$ meromorf i $\mathbb{C}$ med disse punkter som poler. Ingen af dem ligger på ∂F og i F ligger kun den ene pol $i\frac{1}{2}\pi$. Man finder

$$\operatorname{Res}(f, i\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{e^{i\,i\frac{1}{2}\pi}}{\sinh(i\frac{1}{2}\pi)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi}}{i}, \quad \text{altså}$$

$$\int_{\partial F} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\tfrac{1}{2}\pi) = 2\pi e^{-\frac{1}{2}\pi}.$$

$$\int_{K_1} = \int_{-a}^{a} \frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx, \quad \int_{K_2} = \int_{-a}^{a} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\,dx = -e^{-\pi}\int_{-a}^{a}\frac{e^{ix}}{\cosh x}\,dx,$$

idet $\cosh(x+i\pi) = -\cosh x$.

Altså

$$\int_{K_1} - \int_{K_2} = (1+e^{-\pi})\int_{-a}^{a}\frac{\cos x + i\sin x}{\cosh x}\,dx = (1+e^{-\pi})\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx,$$

da $\frac{\sin x}{\cosh x}$ er lige.

På K_3 er $|e^{iz}| = |e^{i(a+iy)}| = |e^{ia-y}| = e^{-y} \leq 1$ og

$|\cosh z| = \left|\frac{e^{a+iy} + e^{-a-iy}}{2}\right| \geq \frac{e^{a}-e^{-a}}{2}$. Det samme fås på K_4.

Altså er

$$\left|\int_{K_3}\right| \leq \frac{2}{e^{a}-e^{-a}}\pi, \quad \left|\int_{K_4}\right| \leq \frac{2}{e^{a}-e^{-a}}\pi, \text{ hvoraf } \int_{K_3} \to 0 \text{ og } \int_{K_4} \to 0 \text{ for } a \to \infty.$$

Altså $(1+e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = 2\pi e^{-\frac{1}{2}\pi}$. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{2\pi}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}} = \frac{\pi}{\cosh(\frac{1}{2}\pi)}$.

287. Lad $f: A \to \dot{C}^*$ være meromorf i A og lad F være en simpel figur i A, på hvis rand ∂F der ikke ligger nulpunkter eller poler for f. Lad g være holomorf i A. Vis, at når $a_1, \dots, a_n$ er nulpunkterne og $b_1, \dots, b_p$ polerne for f i F, hver skrevet så ofte, som multipliciteten angiver, gælder

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial F} g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{n} g(a_j) - \sum_{k=1}^{p} g(b_k).$$

Det vides, at $\frac{f'}{f}$ er meromorf i A, og at dens poler er nulpunkterne og polerne for f. Endvidere at polerne for $\frac{f'}{f}$ alle er simple, og at residuet $\mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, z_0)$ i en pol z_0 er q, hvis z_0 er nulpunkt for f af orden q, og $-q$, hvis z_0 er pol for f af orden q.
Heraf følger, at $g\frac{f'}{f}$ er meromorf i A, og at dens poler er de poler for $\frac{f'}{f}$, som ikke netop er nulpunkt for g, samt at residuet $\mathrm{Res}(g\frac{f'}{f}, z_0)$ i en sådan pol er $g(z_0)q$, hvis z_0 er nulpunkt for f af orden q, og $-g(z_0)q$, hvis z_0 er pol for f af orden q. Thi i en omegn af en pol z_0 for $\frac{f'}{f}$ er

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left(q + c_1(z-z_0)+\cdots\right), \text{ henh.}$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left(-q + c_1(z-z_0)+\cdots\right), \text{ og}$$

(fortsættes)

287 fortsat

$$g(z) = g(z_0) + d_1(z-z_0) + \cdots ,$$

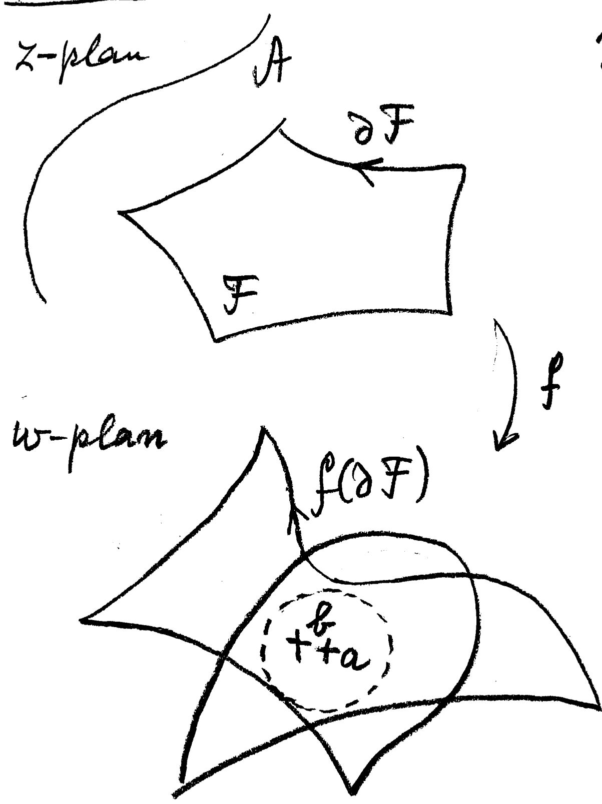
altså

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left(g(z_0)q + e_1(z-z_0) + \cdots \right), \text{ hensh.}$$

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left(-g(z_0)q + e_1(z-z_0) + \cdots \right).$$

Heraf følger sætningen.

288. Lad $f: A \to \grave{C}$ være en holomorf funktion. Et punkt $z \in A$ kaldes et a-punkt for f med multiplicitet n, hvis det er et nulpunkt for $f-a$ med multiplicitet n. Idet $\mathcal{F}$ er en simpel figur i A, skal man opskrive et udtryk for antallet N_a af a-punkter for f i $\mathcal{F}$, når $f(z) \neq a$ for $z \in \partial\mathcal{F}$. Vis, at N_a er konstant i hver af de åbne sammenhængende mængder, hvori $\grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$ kan deles.



Udtrykket er

$$N_a = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

$f(\partial\mathcal{F})$ er en afsluttet (endda kompakt) mængde, $\grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$ er derfor åben og kan derfor (på een måde) deles i disjunkte åbne sammenhængende mængder.

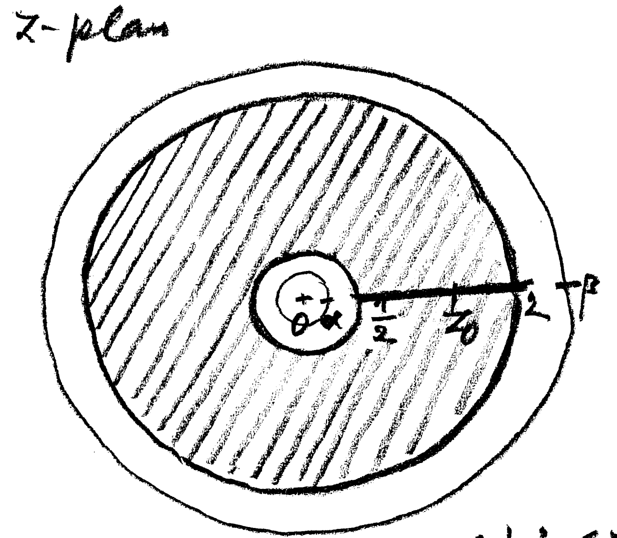
Lad $a \in \grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$, sæt $\operatorname{dist}(a, f(\partial\mathcal{F})) = d$. For ethvert b med $|a-b| < \frac{1}{2}d$ gælder da $b \in \grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$.

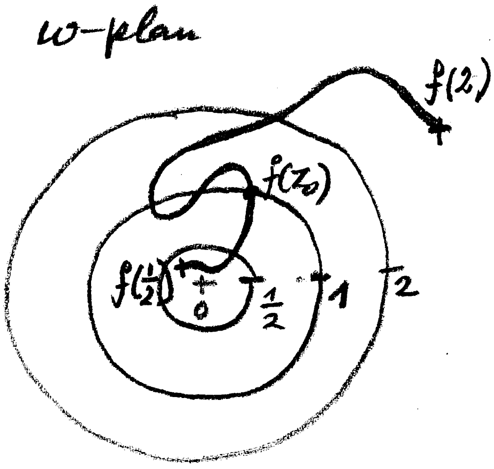
Vi får $N_a - N_b = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{F}} \frac{f'(z)\,(a-b)}{(f(z)-a)(f(z)-b)}\,dz$, hvoraf

$$|N_a - N_b| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sup_{z\in\partial\mathcal{F}} |f'(z)|}{d\,\frac{1}{2}d}\,|a-b|.$$ Følgelig er N_a kontinuert i $\grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$. Da den er heltallig, er den konstant i hver åben sammenhængende del af $\grave{C} \setminus f(\partial\mathcal{F})$.

289. Funktionen f antages holomorf i en cirkelring $\{z \mid \alpha < |z| < \beta\}$, hvor $\alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > 2$. På cirklen $\{z \mid |z| = \frac{1}{2}\}$ antages $|f(z)| \leq \frac{1}{2}$, og på cirklen $\{z \mid |z| = 2\}$ antages $|f(z)| \geq 2$. Vis, at f i ringen $\{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ antager værdien 1.

Vink. Benyt opg. 288.





Liniestykket $\{z \text{ reel} \mid \frac{1}{2} \leq z \leq 2\}$ afbildes ved f i en kontinuert kurve, der forbinder punkterne $f(\frac{1}{2})$ og $f(2)$. Da $|f(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2}$ og $|f(2)| \geq 2$, må der på liniestykket findes (mindst) et z_0, for hvilket $|f(z_0)| = 1$.

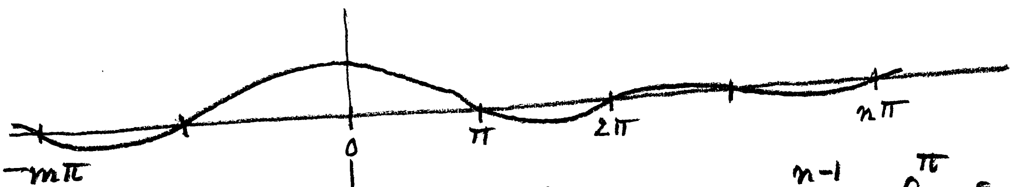
Opg 288 anvendes for $F = \{z \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 2\}$.

Cirklen $\{w \mid |w| = 1\}$ tilhører $\hat{\mathbb{C}} \setminus f(\partial F)$.

Altså er N_a konstant på cirklen $\{w \mid |w| = 1\}$, og da f i F antager værdien $f(z_0)$ på cirklen, må f også antage værdien 1 i F.

290. Vis, at $\displaystyle\int_{-m\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\sum_{p=-m}^{n-1}\frac{(-1)^p}{x+p\pi}\,dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, og herved under brug af partialbrøkfremstillingen for $\frac{1}{\sin x}$, at $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}\int_{-m\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$. Vis herved, at

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi .$$



$$\int_{-m\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{p=-m}^{m-1}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{p=-m}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(x+p\pi)}{x+p\pi}\,dx$$

$$= \sum_{p=-m}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{(-1)^p\sin x}{x+p\pi}\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\sum_{p=-m}^{n-1}\frac{(-1)^p}{x+p\pi}\,dx .$$

Sættes $\displaystyle\frac{1}{\sin x} - \sum_{p=-m}^{n-1}\frac{(-1)^p}{x+p\pi} = h_{m,n}(x)$, gælder ifølge partialbrøkfremstillingen for $\frac{1}{\sin x}$ (det er ligegyldigt, om der står $x+p\pi$ eller $x-p\pi$ i nævnerne), at $h_{n,m}(x) \to 0$ for $m, n \to \infty$ ligeligt på ethvert interval, specielt på $[0,\pi]$. Da

$$\int_{-m\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\left(\frac{1}{\sin x} - h_{m,n}(x)\right)dx = \pi - \int_0^{\pi}\sin x\, h_{m,n}(x)\,dx,$$

og $\sin x$ er begrænset, så at vi også har $\sin x\, h_{m,n}(x) \to 0$ ligeligt på $[0,\pi]$, slutter vi at $\displaystyle\int_{-m\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \to \pi$ for $m, n \to \infty$. Heraf, da $\frac{\sin x}{x}$ er lige $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \to \tfrac{1}{2}\pi$ for $n \to \infty$, hvoraf (jfr. løsn. til opg. 227) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$.

291. Udled partialbrøk fremstillingen

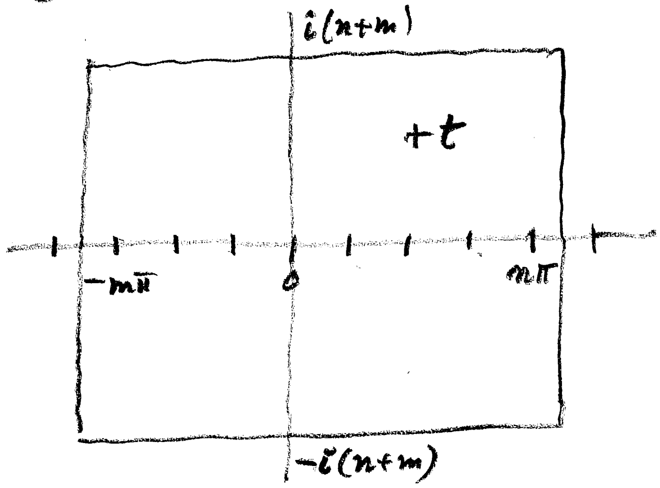
$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-p\pi)^2}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{-m}^{n}.$$

Forbemærkning. $\frac{1}{\sin^2 z}$ er meromorf og har polerne $p\pi$, $p \in \grave{Z}$. Den har perioden π. For at finde den principale del hørende til polen $p\pi$ benyttes

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{\left[(z-p\pi) - \frac{1}{6}(z-p\pi)^3 + \cdots\right]^2} = \frac{1}{(z-p\pi)^2}\,\frac{1}{\left[1 - \frac{1}{6}(z-p\pi)^2 + \cdots\right]^2}$$

$$= \frac{1 + a_1(z-p\pi)^2 + \cdots}{(z-p\pi)^2} = \frac{1}{(z-p\pi)^2} + a_1 + \cdots,$$

gældende i en omegn af $p\pi$. Den principale del er altså $\frac{1}{(z-p\pi)^2}$, altså netop p^{te} led i den ønskede fremstilling.



For et fast $t \notin \{p\pi, p \in \grave{Z}\}$ betragtes funktionen

$$g(z) = \frac{1}{(z-t)\sin^2 z}.$$

Denne funktion er meromorf i $\grave{C}$ og har poler i t og i punkterne $p\pi$, $p \in \grave{Z}$.

For residuerne fås

$$\operatorname{Res}(g,t) = \frac{1}{\sin^2 t}, \qquad \operatorname{Res}(g,p\pi) = -\frac{1}{(t-p\pi)^2}.$$

Det første er klart. Det andet ses således: I en omegn af $p\pi$ er som ovenfor vist $\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{(z-p\pi)^2} + a_1 + \cdots$, og (efter Taylor) $\frac{1}{z-t} = \frac{1}{p\pi - t} - \frac{1}{(p\pi-t)^2}(z-p\pi) + \cdots$, altså

$$g(z) = \frac{\frac{1}{p\pi - t}}{(z-p\pi)^2} - \frac{\frac{1}{(p\pi-t)^2}}{z-p\pi} + b_0 + b_1(z-p\pi) + \cdots$$

fortsættes

Nu vælger for F rektanglet

$$F = \{ z = x + iy \mid -(m+\tfrac{1}{2})\pi \leq x \leq (n+\tfrac{1}{2})\pi,\ |y| \leq n+m \},$$

hvor n og m er så store, at t er indre punkt af F. Residuesætningen giver da

$$I_{n,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} \frac{dz}{(z-t)\sin^2 z} = \frac{1}{\sin^2 t} - \sum_{p=-m}^{n} \frac{1}{(t-p\pi)^2}.$$

Opgaven er altså at vise, at $I_{n,m} \to 0$ for $n \to \infty, m \to \infty$. Ifølge behandlingen af partialbrøkfremstillingen af $\frac{1}{\sin z}$ gælder på de lodrette sider af F uligheden $|\sin z| > \frac{1}{2} e^{|y|}$ og på de vandrette sider af F uligheden $|\sin z| \geq \sinh(n+m)$. Herved fås

$$|I_{n,m}| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in \partial F} \frac{1}{|z-t|} \left[2 \int_{-(n+m)}^{n+m} 4 e^{-2|y|} dy + 2 \frac{1}{\sinh^2(n+m)} \pi(n+m+1) \right].$$

Nu gælder for $n \to \infty, m \to \infty$, at

$$\sup_{z \in \partial F} \frac{1}{|z-t|} \to 0, \quad \int_{-(n+m)}^{n+m} e^{-2|y|} dy \to 1, \quad \frac{n+m+1}{\sinh^2(n+m)} \to 0.$$

Følgelig gælder $I_{n,m} \to 0$.

Bemærkning. På tilsvarende måde som ved partialbrøkfremstillingen af $\frac{1}{\sin z}$ vises, at

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{p=-m}^{n} \frac{1}{(z-p\pi)^2}$$

konvergerer ligeligt mod 0 på enhver kompakt mængde i $\mathbb{C}$, når $n \to \infty, m \to \infty$.

292. Idet en stjerne på et summationstegn betyder, at der kun skal summeres over ulige værdier af summationsindex, skal man udlede partialbrøkfremstillingen

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = \sum_{p=-\infty}^{\infty}{}^{*}\frac{1}{p-z}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{*} = \lim_{n\to\infty}\sum_{-n}^{n}{}^{*},$$

og derved formlen

$$A(z) = z^3\sum_{p=1}^{\infty}{}^{*}\frac{1}{p^4+z^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sinh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z - \sin\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z}{\cosh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z + \cos\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z},$$

samt en lignende formel for

$$B(z) = z\left(1 - \frac{8}{\pi^2}z^4\sum_{p=1}^{\infty}{}^{*}\frac{1}{p^2(p^4+z^4)}\right).$$

Find grænseværdierne af $A(z)$ og $B(z)$, når $z\to\infty$ langs den positive reelle akse.

Vi har $\cot z = \lim\sum_{-n}^{n}\frac{1}{z-p\pi}$,

altså $\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}z = \lim\sum_{-n}^{n}\frac{1}{z-2p}$, hvoraf

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}(1-z) = \lim\sum_{-n}^{n}\frac{1}{(1-2p)-z}$$

$$= \lim\left(\frac{1}{(2n+1)-z} + \dots + \frac{1}{-(2n-1)-z}\right).$$

Men $\frac{1}{(2n+1)-z}\to 0$ for $n\to\infty$. Altså

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = \lim\sum_{-2n}^{2n}{}^{*}\frac{1}{p-z},$$ hvilket er det ønskede.

Heraf

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = \sum_{1}^{\infty}{}^{*}\left(\frac{1}{p-z}+\frac{1}{-p-z}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}^{*}\frac{2z}{p^2-z^2}.$$

Altså ved brug af dekomposition og med afkortningen $w = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}z$, idet det erindres, at $\operatorname{tg} iw = i\operatorname{tgh} w$

forts\ættes

$$A(z) = \sum_1^{\infty}{}^* \frac{z^3}{p^4+z^4} = \sum_1^{\infty}{}^* \frac{\frac{1}{2}iz}{p^2+iz^2} - \sum_1^{\infty}{}^* \frac{\frac{1}{2}iz}{p^2-iz^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \sum_1^{\infty}{}^* \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2})z}{p^2-[(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2})z]^2}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \sum_1^{\infty}{}^* \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2})z}{p^2-[(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2})z]^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-i\tfrac{1}{2}\sqrt{2})z$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+i\tfrac{1}{2}\sqrt{2})z$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\Big[(1-i)\operatorname{tg}(w-iw)+(1+i)\operatorname{tg}(w+iw)\Big]$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\left[\frac{(1-i)(\operatorname{tg}w - i\operatorname{tgh}w)}{1+i\operatorname{tg}w\operatorname{tgh}w} + \frac{(1+i)(\operatorname{tg}w+i\operatorname{tgh}w)}{1-i\operatorname{tg}w\operatorname{tgh}w}\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\operatorname{tgh}w(1+\operatorname{tg}^2 w)-\operatorname{tg}w(1-\operatorname{tgh}^2 w)}{1+\operatorname{tg}^2 w\operatorname{tgh}^2 w}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\frac{\sinh w}{\cosh w}\frac{1}{\cos^2 w}-\frac{\sin w}{\cos w}\frac{1}{\cosh^2 w}}{1+\frac{\sin^2 w}{\cos^2 w}\frac{\sinh^2 w}{\cosh^2 w}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sinh w\cosh w-\sin w\cos w}{\cos^2 w\cosh^2 w+\underbrace{\sin^2 w\sinh^2 w}_{\substack{\shortparallel\\(1-\cos^2 w)(\cosh^2 w-1)}}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sinh 2w-\sin 2w}{2\cosh^2 w+2\cos^2 w-2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sinh 2w-\sin 2w}{\cosh 2w+\cos 2w}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,\frac{\sinh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z-\sin\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z}{\cosh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z+\cos\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z}.$$

fortsættes

292. fortsat (2)

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_1^{\infty}{}^* \frac{1}{p^2}, \text{ da } T = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_1^{\infty}{}^* \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4}\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_1^{\infty}{}^* \frac{1}{p^2} + \frac{1}{4}T.$$

$$B(z) = z\left(1 - \frac{8}{\pi^2} z^4 \sum_{p=1}^{\infty}{}^* \frac{1}{p^2(p^4+z^4)}\right) = \frac{8}{\pi^2} z\left(\sum_1^{\infty}{}^* \frac{1}{p^2} - \sum_1^{\infty}{}^* \frac{z^4}{p^2(p^4+z^4)}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi^2} z \sum_1^{\infty}{}^* \frac{p^4}{p^2(p^4+z^4)} = \frac{8}{\pi^2} \sum_1^{\infty}{}^* \frac{p^2 z}{p^4+z^4}$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left[\sum_1^{\infty}{}^* \frac{\frac{1}{2}z}{p^2+iz^2} + \sum_1^{\infty}{}^* \frac{\frac{1}{2}z}{p^2-iz^2}\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \sum_1^{\infty}{}^* \frac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z}{p^2-\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z\right]^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \sum_1^{\infty}{}^* \frac{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z}{p^2-\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z\right]^2}\right]$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)z\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[(1+i)\operatorname{tg}(w-iw) + (1-i)\operatorname{tg}(w+iw)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\frac{(1+i)(\operatorname{tg}w - i\operatorname{tgh}w)}{1+i\operatorname{tg}w\operatorname{tgh}w} + \frac{(1-i)(\operatorname{tg}w + i\operatorname{tgh}w)}{1-i\operatorname{tg}w\operatorname{tgh}w}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\operatorname{tgh}w(1+\operatorname{tg}^2w) + \operatorname{tg}w(1-\operatorname{tgh}^2w)}{1+\operatorname{tg}^2w\operatorname{tgh}^2w}$$

$= \dots$ (som før, blot $+$ istedet for $-$ i andet tallerled)

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sinh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z + \sin\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z}{\cosh\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z + \cos\frac{\pi\sqrt{2}}{2}z}.$$

fortsættes

Da $\cos z$ og $\sin z$ er begrænsede for reelt z, medens $\cosh z \to +\infty$ og $\dfrac{\sinh z}{\cosh z} \to 1$ for $z \to \infty$ langs den positive reelle akse, fås

$$\left.\begin{aligned} A(z) &\to \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \\ B(z) &\to \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}\right\} \text{ for } z \to \infty \text{ langs den positive reelle akse.}$$

[Opgaven stillet af prof. K. U. Linderstrøm-Lang på Carlsberg Laboratoriet i forbindelse med undersøgelse af den Cartesiske dykker.]

293. Find Laurentrækken for funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

i (a) $\{z \mid 0<|z|<1\}$, (b) $\{z \mid 1<|z|<2\}$, (c) $\{z \mid |z|>2\}$.

Vink. Dekomponer brøken.

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2} \quad \text{(ses ved hovedregning).}$$

(a) $$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}z} \qquad 0<|z|<1$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{z} + (1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots)$$
$$- \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}z^2 + \cdots + \tfrac{1}{2^n}z^n + \cdots\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}z + \frac{15}{16}z^2 + \cdots + \frac{2^n-1}{2^n}z^n + \cdots .$$

(b) $$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}z} \qquad 1<|z|<2$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{4}z^2 + \cdots\right)$$

$$= \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{16}z^2 - \cdots$$

(c) $$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{2}}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \qquad |z|>2$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{7}{z^5} + \cdots + \frac{2^{n-2}-1}{z^n} + \cdots .$$

294. Beregn integralet

$$I = \int_{K} z^2 \log \frac{z+1}{z-1}\, dz,$$

hvor K er cirklen $\{z \mid |z| = 2\}$ med positiv omløbsretning, og log betegner hovedværdien.
Vink. Funktionen under integraltegnet er holomorf i ringen $\{z \mid |z| > 1\}$. Find dens Laurentrække.

Homografien $w = \frac{z+1}{z-1}$ afbilder $A = \{z \mid |z| > 1\}$ på halvplanen $\{w = u + iv \mid u > 0\}$. (Ses f.eks. af, at den fører $z = 1, i, -1, \infty$ over i $w = \infty, -i, 0, 1$.) Hovedværdien af $\log \frac{z+1}{z-1}$ er altså holomorf i A. Vi får

$$\log \frac{z+1}{z-1} = \log \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{z}\right),$$

hvor også $\log(1 + \frac{1}{z})$ og $\log(1 - \frac{1}{z})$ er hovedværdierne. (Thi $w_1 = 1 + \frac{1}{z}$ og $w_2 = 1 - \frac{1}{z}$ ligger i $\{w \mid |w-1| < 1\}$; gælder derfor for hovedværdierne af $\arg w_1$ og $\arg w_2$ $|\arg w_1| < \frac{1}{2}\pi$, $|\arg w_2| < \frac{1}{2}\pi$, og altså $|\arg w_1 - \arg w_2| < \pi$.)

Heraf

$$\log \frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{5}\frac{1}{z^5} - \cdots$$

$$+ \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{5}\frac{1}{z^5} + \cdots$$

$$= 2\frac{1}{z} + \frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{2}{5}\frac{1}{z^5} + \cdots,$$

$$z^2 \log \frac{z+1}{z-1} = 2z + \frac{2}{3}\frac{1}{z} + \frac{2}{5}\frac{1}{z^3} + \cdots,$$

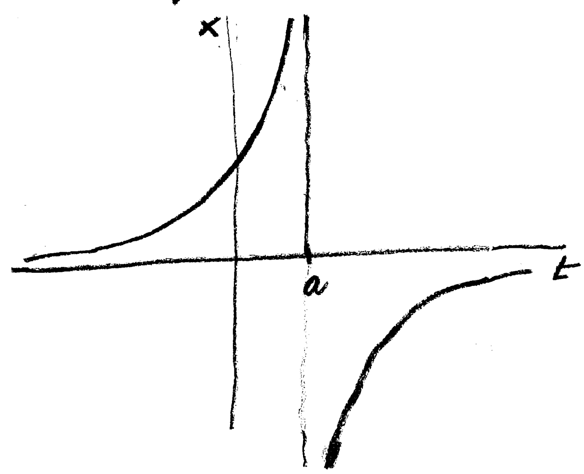
$$I = \frac{2}{3} 2\pi i = \frac{4}{3}\pi i.$$

401. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \qquad (t,x) \in \grave{R}^2,$$

lokalt opfylder en Lipschitz betingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

$f(t,x) = x^2$ har efter x den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, som er kontinuert. Altså opfylder f lokalt en Lipschitzbetingelse. Gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in \grave{R}^2$ går altså en og kun een maksimal løsning.



$x = 0$ er løsning.
For enhver anden løsning $x = \varphi(t), t \in J$, gælder altså $\varphi(t) \neq 0$ for alle $t \in J$ og følgelig [da $\varphi'(t) = [\varphi(t)]^2$] $\varphi'(t) > 0$ for alle $t \in J$. Altså er $\varphi(J)$ et interval, φ afbilder J bijektivt på $\varphi(J)$, og den omvendte funktion $t = \varphi^{-1}(x) : \varphi(J) \to \grave{R}$ er differentiabel med den afledede $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x^2}$.
Heraf $t = -\frac{1}{x} + a$, eller $x = -\frac{1}{t-a}$. Omvendt ses, at for ethvert $a \in \grave{R}$ er $x = -\frac{1}{t-a}$ betragtet på et interval J, der ikke indeholder a, løsning til den givne ligning. De maksimale løsninger er derfor:

$$x = 0, \qquad x = -\frac{1}{t-a}, \; t \in]-\infty, a[,$$

$$x = -\frac{1}{t-a}, \; t \in]a, +\infty[.$$

402. Gør rede for, at højre side af differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}, \qquad (t,x) \in \grave{R} \times \,]-1,1[$$

lokalt opfylder en Lipschitzbetingelse, og find samtlige maksimale løsninger.

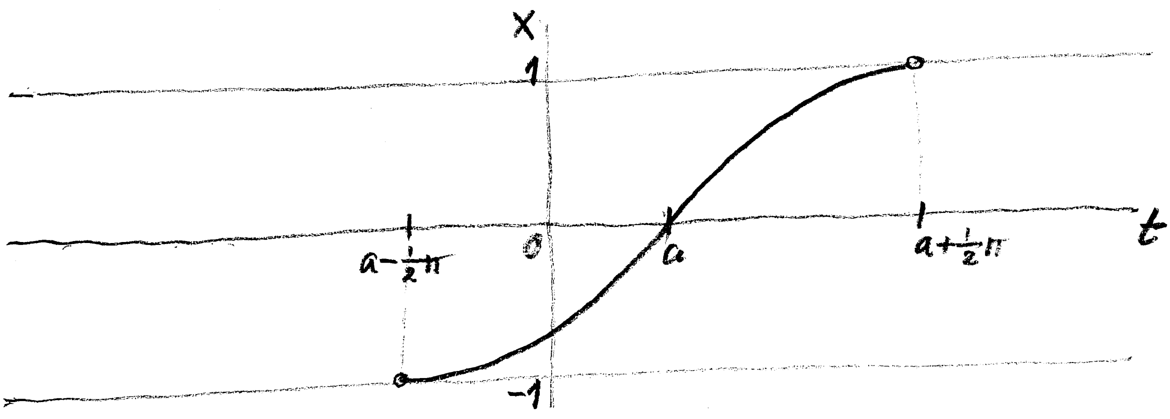
$f(t,x) = \sqrt{1-x^2}$ har efter x den partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, som er kontinuert. Altså opfylder f lokalt en Lipschitzbetingelse. Gennem hvert punkt $(t_0, x_0) \in \grave{R} \times \,]-1,1[$ går altså en og kun een maksimal løsning.

For enhver løsning $x = \varphi(t)$, $t \in J$, er $\frac{dx}{dt} > 0$. Altså er $\varphi(J)$ et interval, φ afbilder J bijektivt på $\varphi(J)$, og den omvendte funktion $t = \varphi^{-1}(x) : \varphi(J) \to \grave{R}$ er differentiabel med den afledede $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Heraf

$t = \arcsin x + a$ (hvor arcsin er hovedværdien).

Altså er $J \subseteq \,]a-\frac{1}{2}\pi, a+\frac{1}{2}\pi[$ og $x = \sin(t-a)$. Omvendt ses, at for ethvert $a \in \grave{R}$ er $x = \sin(t-a)$ betragtet på et $J \subseteq \,]a-\frac{1}{2}\pi, a+\frac{1}{2}\pi[$ en løsning. De maksimale løsninger er derfor

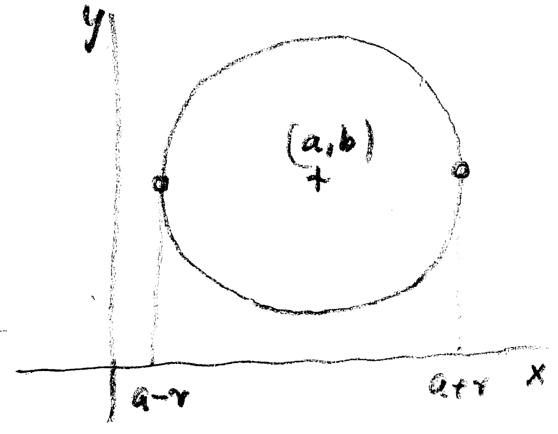
$$x = \sin(t-a), \qquad t \in \,]a-\tfrac{1}{2}\pi, a+\tfrac{1}{2}\pi[.$$



Bemærk: Punkterne på linierne $x = \pm 1$ er ikke med.

403. Vis, at enhver halvcirkel
$$y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \quad x \in]a-r, a+r[,$$
tilfredsstiller differentialligningen
$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}.$$
Find samtlige maksimale løsninger til denne ligning.
Vink. Differentier ligningen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ tre gange og eliminer a, b, r.

De betragtede funktioner $y=\varphi(x)$ er åbenbart vilkårligt ofte differentiable. De to til a, b, r hørende funktioner opfylder
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$
altså
$$(x-a)+(y-b)y'=0$$
$$1+y'^2+(y-b)y''=0$$
$$3y'y''+(y-b)y'''=0.$$
Da $y \neq b$ er $y'' \neq 0$, altså $y-b=-\frac{1+y'^2}{y''}$, $3y'y''-\frac{(1+y'^2)y'''}{y''}=0$,
hvoraf den ønskede ligning.



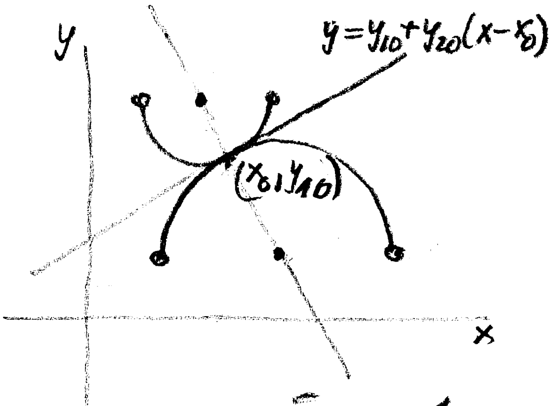
De betragtede funktioner $y=\varphi(x)$ er åbenbart maksimale løsninger til differentialligningen [de er ikke ægte restriktioner af differentiable funktioner]. Differentialligningen har endvidere, som man straks ser, som løsninger alle lineære funktioner $y=\alpha x+\beta$, $x \in \mathbb{R}$. Og disse er åbenbart også maksimale. Vi vil vise, at funktionerne $y = b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$, $x \in]a-r, a+r[$, og de lineære funktioner $y=\alpha x+\beta$, $x \in \mathbb{R}$, er samtlige maksimale løsninger.

Vi skriver ligningen $y'''=f(x,y,y',y'')$, hvor $f(x,y_1,y_2,y_3) = \frac{3y_2y_3^2}{1+y_2^2}$. Denne funktion (defineret på hele $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$) har

403 fortsat.

kontinuerte partielle afledede. For hvert punkt $(x_0, y_{10}, y_{20}, y_{30})$ i $\mathring{R}\times\mathring{R}^3$ findes altså en og kun en maksimal løsning $y=\varphi(x), x\in J$, for hvilken $x_0\in J$ og $\varphi(x_0)=y_{10}$, $\varphi'(x_0)=y_{20}$, $\varphi''(x_0)=y_{30}$. Det drejer sig derfor blot om at vise, at der for ethvert $(x_0, y_{10}, y_{20}, y_{30})$ blandt de ovenfor angivne maksimale løsninger $y=\varphi(x)$, $x\in J$, findes en, for hvilken $x_0\in J$ og $\varphi(x_0)=y_{10}$, $\varphi'(x_0)=y_{20}$, $\varphi''(x_0)=y_{30}$.

Hvis $y_{30}=0$, er den lineære funktion $y=y_{10}+y_{20}(x-x_0)$, $x\in\mathring{R}$, en sådan løsning.



Hvis $y_{30}\neq 0$, er de funktioner $y=\varphi(x)=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, for hvilke $x_0\in\,]a-r, a+r[$ og $\varphi(x_0)=y_{10}$, $\varphi'(x_0)=y_{20}$, bestemt ved, at centrum (a,b) for den pågældende cirkel kan være et vilkårligt punkt på normalen til linien $y=y_{10}+y_{20}(x-x_0)$ i punktet (x_0, y_{10}), blot ikke (x_0, y_{10}), d.v.s. b kan være et vilkårligt tal $\neq y_{10}$. Nu finder vi af den tredje af de i begyndelsen fundne ligninger, at $y''=-\frac{1+y'^2}{y-b}$. Ved at benytte det b, for hvilket $y_{30}=-\frac{1+y_{20}^2}{y_{10}-b}$ (ɔ: $b=y_{10}+\frac{1+y_{20}^2}{y_{30}}$), får vi altså en løsning $y=\varphi(x)$, for hvilken $\varphi''(x_0)=y_{30}$.

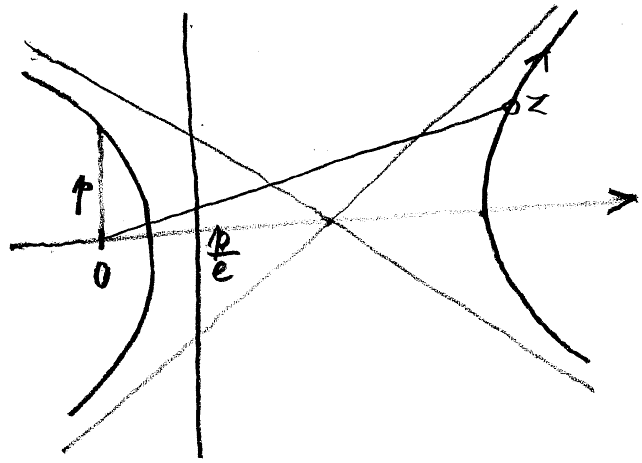
404. Idet O er det ene brændpunkt af en hyperbelgren, bevæger en partikel P sig på den hyperbelgren, der vender hulheden bort fra O, således at det af liniestykket OP i et tidsinterval beskrevne areal er proportionalt med tidsintervallets længde. Vis, at partiklen bevæger sig, som om den var frastødt fra O med en kraft omvendt proportional med afstandens kvadrat.

Opgaven behandles efter mønster af teksten (§4), hvorfor løsningen gives uden forklaringer.

$$z = r e^{i\theta}$$

$$\frac{1}{2} r^2 \theta' = c$$

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\theta}$$



$$r' = \frac{pe\sin\theta}{(-1+e\cos\theta)^2}\,\theta' = \frac{2ce\sin\theta}{p}$$

$$r'' = \frac{2ce\cos\theta}{p}\,\theta' = \frac{2c\left(\frac{p}{r}+1\right)}{p}\,\frac{2c}{r^2} = \frac{4c^2}{r^3} + \frac{\frac{4c^2}{p}}{r^2}$$

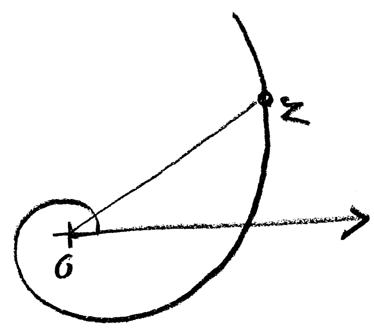
$$r\theta'^2 = r\left(\frac{2c}{r^2}\right)^2 = \frac{4c^2}{r^3}$$

$$r'' - r\theta'^2 = \frac{\frac{4c^2}{p}}{r^2}$$

$$z'' = \frac{\frac{4c^2}{p}}{r^2}\, e^{i\theta}.$$

405. En partikel bevæger sig i den komplekse $z = re^{i\theta}$ - plan på en logaritmisk spiral $r = ae^{b\theta}$ med den konstante arealhastighed $\frac{1}{2} r^2 \theta' = c$. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af 0 med en kraft omvendt proportional med r^3.

Opgaven behandles efter mønster af teksten (§4), hvorfor løsningen gives uden forklaringer.



$$z = re^{i\theta}$$

$$\frac{1}{2} r^2 \theta' = c$$

$$r = ae^{b\theta}$$

$$r' = ab\, e^{b\theta}\, \theta' = br \frac{2c}{r^2} = \frac{2bc}{r}$$

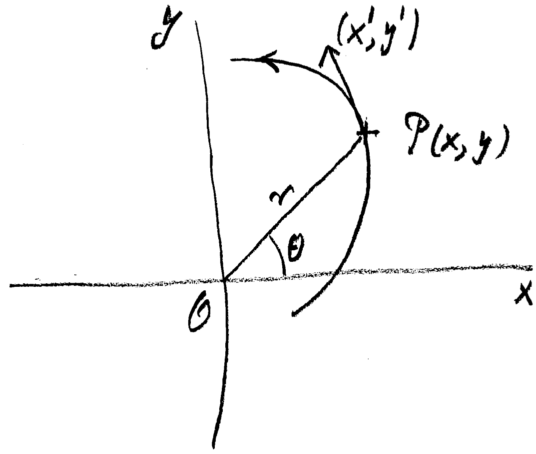
$$r'' = -\frac{2bc}{r^2} r' = -\frac{4b^2c^2}{r^3}$$

$$r\theta'^2 = r\left(\frac{2c}{r^2}\right)^2 = \frac{4c^2}{r^3}$$

$$r'' - r\theta'^2 = -\frac{4(b^2+1)c^2}{r^3}$$

$$z'' = -\frac{4(b^2+1)c^2}{r^3} e^{i\theta}.$$

406. I et retvinklet koordinatsystem med begyndelsespunkt O bevæger en partikel P sig således, at $\overrightarrow{OP}$ stadig drejer sig i positiv retning. Bevægelsen bestemmes ved, at P's koordinater x og y er funktioner af tiden. Vis, at arealhastigheden i forhold til O er $\frac{1}{2}(-yx' + xy')$.



Benyttes polære koordinater, er

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$

altså

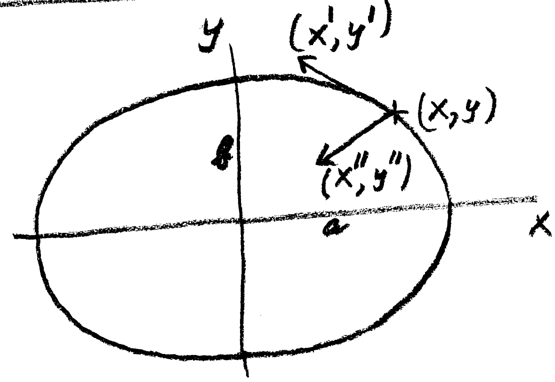
$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta\ \theta'$$
$$y' = r'\sin\theta + r\cos\theta\ \theta',$$

hvoraf

$\frac{1}{2}(-yx' + xy') = \frac{1}{2}r^2\theta'$, som er arealhastigheden.

407. En partikel med massen 1 bevæger sig på ellipsen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var tiltrukket af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2}r$.

Vink. Benyt opg. 406.



Det gælder om at vise, at accelerationen er bestemt ved

$$(x'',y'') = -\frac{4c^2}{a^2b^2}(x,y).$$

Af $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ fås $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$.

Ifølge opg. 406 er $-yx'+xy'=2c$.

Ved løsning af disse ligninger fås

$$x' = -2c\frac{y}{b^2} \qquad x'' = -2c\frac{y'}{b^2} = -\frac{4c^2}{a^2b^2}x$$

hvoraf

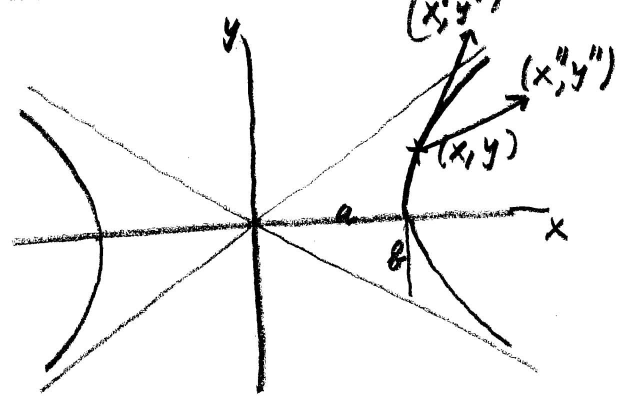
$$y' = 2c\frac{x}{a^2}, \qquad y'' = 2c\frac{x'}{a^2} = -\frac{4c^2}{a^2b^2}y.$$

408. En partikel med massen 1 bevæger sig på hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ med konstant arealhastighed c i forhold til centrum. Vis, at den bevæger sig, som om den var frastødt af centrum med en kraft, der i afstanden r fra centrum har størrelsen $\frac{4c^2}{a^2b^2} r$.

Vink. Benyt opg. 406.

Det gælder om at vise, at accelerationen er bestemt ved

$$(x'', y'') = \frac{4c^2}{a^2b^2}(x, y).$$



Af $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fås $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0$.

Ifølge opg. 406 er $-yx' + xy' = 2c$.

Ved løsning af disse ligninger fås

$$x' = 2c\frac{y}{b^2}, \quad y' = 2c\frac{x}{a^2},$$

hvoraf

$$x'' = 2c\frac{y'}{b^2} = \frac{4c^2}{a^2b^2}x$$

$$y'' = 2c\frac{x'}{a^2} = \frac{4c^2}{a^2b^2}y.$$

409. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos t - x_2 \sin t \qquad (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3.$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin t + x_2 \cos t$$

Vink. Betragt $z = x_1 + ix_2$.

Systemet er ensgyldigt med den ene ligning

$$\frac{dz}{dt} = (x_1 \cos t - x_2 \sin t) + i(x_1 \sin t + x_2 \cos t) \quad , \text{ d.v.s.}$$

$$\frac{dz}{dt} = (x_1 + ix_2)\cos t + (ix_1 - x_2)\sin t \quad , \text{ d.v.s}$$

$$\frac{dz}{dt} = z \cos t + iz \sin t \quad , \text{ d.v.s}$$

$$\frac{dz}{dt} = z e^{it} \qquad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

Samtlige (maksimale) løsninger til denne er bestemt ved

$$z = c \exp \int e^{it} dt = c \exp \frac{e^{it}}{i} = c \exp(\sin t - i\cos t), \quad t \in \mathbb{R}$$

hvor c er et vilkårligt komplekst tal, altså

$$z = (a + ib)\, e^{\sin t}(\cos(\cos t) - i \sin(\cos t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Samtlige (maksimale) løsninger til det givne system er derfor bestemt ved

$$\begin{cases} x_1 = a\, e^{\sin t} \cos(\cos t) + b\, e^{\sin t} \sin(\cos t) \\ x_2 = -a\, e^{\sin t} \sin(\cos t) + b\, e^{\sin t} \cos(\cos t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

410. Uddrag af sætningerne om en lineær differentialligning af k^{te} orden følgende resultater vedrørende tilfældet $k=2$.

Hvis $\varphi_1(t)$ er løsning til den homogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt},$$

og $\varphi_1(t) \neq 0$ for alle t i det betragtede interval, er samtlige løsninger bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t)$$

hvor

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}\left(\exp\int p_1(t)\,dt\right)dt.$$

Hvis φ_1, φ_2 er en basis for løsningsrummet til den homogene ligning, er samtlige løsninger til den inhomogene ligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p_0(t)x + p_1(t)\frac{dx}{dt} + q(t)$$

bestemt ved

$$x = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\int\frac{\varphi_2(t)}{W(t)}q(t)\,dt + \varphi_2(t)\int\frac{\varphi_1(t)}{W(t)}q(t)\,dt,$$

$$W(t) = \det\begin{bmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{bmatrix}.$$

[Her står $\int$-tegnet for en vilkårligt valgt af de uendeligt mange stamfunktioner til den pågældende funktion]

411. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 \cos t \qquad\qquad (t, x_1, x_2) \in \grave{R}^3 .$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \cos t$$

Vi betragter $z = x_1 + i x_2$.
Systemet er ensgyldigt med den ene ligning

$$\frac{dz}{dt} = -x_2 \cos t + i x_1 \cos t \ , \quad \text{d.v.s.}$$

$$\frac{dz}{dt} = i(x_1 + i x_2)\cos t \ , \quad \text{d.v.s.}$$

$$\frac{dz}{dt} = i z \cos t \qquad (t, z) \in \grave{R} \times \grave{C} .$$

Samtlige (maksimale) løsninger til denne er bestemt ved

$$z = c \exp \int i \cos t \, dt = c \exp(i \sin t) , \qquad t \in \grave{R},$$

hvor c er et vilkårligt komplekst tal, altså

$$z = (a + ib)\left(\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)\right) , \qquad t \in \grave{R},$$

hvor a og b er vilkårlige reelle tal. Samtlige (maksimale) løsninger til det givne system er derfor bestemt ved

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(\sin t) - b \sin(\sin t) \\ x_2 = a \sin(\sin t) + b \cos(\sin t) , \end{cases} \qquad t \in \grave{R} .$$

En basis for løsningsrummet udgøres af løsningerne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sin t) \\ \sin(\sin t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\sin t) \\ \cos(\sin t) \end{bmatrix} .$$

412. Vis, at differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = 0$$

har løsningen $y = \sin x$. Find derefter samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \bar{R}$. Find endelige samtlige løsninger i $]0, \frac{1}{2}\pi[\times \bar{R}$ til differentialligningen

$$\cos x \sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x)\frac{dy}{dx} + 2y\cos^3 x = \cos^2 x \sin^3 x .$$

Vink. Benyt opg. 410.

Ved indsætning ses, at $y = \sin x$ er løsning.

I $]0, \frac{1}{2}\pi[$ er $\cos x \sin^2 x \neq 0$, så at ligningen kan skrives

$$y'' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} y + \left[-\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\sin x}\right] y' .$$

Samtlige løsninger bestemmes ved $y = a\sin x + b\,\varphi(x)$, hvor

$$\varphi(x) = \sin x \int \frac{1}{\sin^2 x}\left(\exp\int\left[-\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\sin x}\right]dx\right)dx$$

$$= \sin x \int \frac{1}{\sin^2 x} \exp(\log\cos x + 2\log\sin x)\,dx$$

$$= \sin x \int \cos x\,dx = \sin^2 x .$$

Samtlige løsninger er altså bestemt ved $y = a\sin x + b\sin^2 x$.

Den inhomogene ligning kan skrives

$$y'' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} y + \left[-\frac{\sin x}{\cos x} + 2\frac{\cos x}{\sin x}\right] y' + \cos x \sin x .$$

Udfra basis $\sin x$, $\sin^2 x$ for løsningsrummet til den homogene ligning fås Wronski determinanten

$$W(t) = \det\begin{bmatrix} \sin x & \sin^2 x \\ \cos x & 2\sin x\cos x \end{bmatrix} = \sin^2 x \cos x .$$

Samtlige løsninger til den homogene ligning er da bestemt ved $y = a\sin x + b\sin^2 x + \psi(x)$, hvor

$$\psi(x) = -\sin x \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos x}\cos x \sin x\,dx + \sin^2 x \int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x}\cos x \sin x\,dx$$

$$= -\sin x(-\cos x) + \sin^2 x \cdot x = \sin x\cos x + x\sin^2 x .$$

413. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad (t, x_1, x_2) \in R^3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \quad ,$$

og opskriv den fundamentalmatrix $\underline{\underline{\Phi}}(t)$ for systemet, som for $t=0$ er enhedsmatrix. Find dernæst den løsning $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + t^2 \qquad (t, x_1, x_2) \in R^3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + t,$$

for hvilken $(\psi_1(0), \psi_2(0)) = (-1, 2)$.

Vink. Opgaven skal tjene til illustration af de i teksten givne metoder og bør derfor løses ved brug af disse, uanset at man i et simpelt tilfælde som dette kan nå resultaterne hurtigere ved gætning.

Ligningssystemet skrives $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Vi har

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{A}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}$, altså $\underline{\underline{A}}^3 = \underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}^4 = \underline{\underline{E}}$, o.s.v.

Heraf

$$\exp(\underline{\underline{A}}t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t^2 + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t^3 + \cdots$$
$$= \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

Samtlige løsninger er derfor bestemt ved

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Da $\exp(\underline{\underline{A}}0) = \underline{\underline{0}}$, er den søgte fundamentalmatrix netop $\exp(\underline{\underline{A}}t)$, altså

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

fortsættes

Wronski determinanten bliver

$$W(t) = \det \underline{\underline{\Phi}}(t) = 1, \text{ og vi får } \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

Den søgte løsning til det inhomogene ligning er derfor bestemt ved

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Phi}}(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{\Phi}}(t)\int_0^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(\tau)\begin{bmatrix} \tau^2 \\ \tau \end{bmatrix} d\tau .$$

Udregningen af integralet kunde foretages ved, at man først udførte matrixmultiplikationen og derefter integrerede de fremkomne funktioner $\tau^2\cosh\tau - \tau\sinh\tau$ og $-\tau^2\sinh\tau + \tau\cosh\tau$, men det er nok så hensigtsmæssigt at gøre det med bevarelse af matrixskrivemåden.
Vi får da ved brug af partiel integration

$$\int \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(t)\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} \sinh t & -\cosh t \\ -\cosh t & \sinh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} - \int \begin{bmatrix} \sinh t & -\cosh t \\ -\cosh t & \sinh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} dt$$

$$= \text{første led} - \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} \sinh t & -\cosh t \\ -\cosh t & \sinh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sinh t & -\cosh t \\ -\cosh t & \sinh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = A$$

Heraf

$$\int_0^t \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(\tau)\begin{bmatrix} \tau^2 \\ \tau \end{bmatrix} d\tau = A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = A + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Phi}}(t)\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + A\right) = \underline{\underline{\Phi}}(t)\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cosh t + 5\sinh t - 3t \\ -\sinh t + 5\cosh t - t^2 - 3 \end{bmatrix}.$$

414. Find samtlige løsninger til differentialligningssystemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \qquad (t, x_1, x_2, x_3) \in R^4,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_2 \qquad ,$$

og find den fundamentalmatrix for systemet, som for $t=0$ er enhedsmatrix.

Vink. Anvend en transformation, der fører systemet over i et system med diagonalmatrix.

Systemet skrives $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, hvor $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

En regulær matrix $\underline{\underline{S}}$ søges bestemt, så at $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,S$ er en diagonalmatrix. Vi udregner

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Egenvektorerne hørende til $\lambda = 1$ og $\lambda = 2$ søges.

$\lambda = 1.$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Matricen har rang 2. Løsningsrummet er endimensionalt. Vi benytter løsningen $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda = 2.$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Matricen har rang 1. Løsningsrummet er todimensionalt. Vi benytter løsningerne $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Følgelig opnås transformation til diagonalform ved at benytte

$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, som giver $\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Udregning giver $\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Idet vi sætter

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, hvormed $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}$, transformeres systemet

fortsættes

til
$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{ eller } \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \\ y_3' &= 2y_3 . \end{aligned}$$

Samtlige løsninger hertil er bestemt ved
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix},$$
og samtlige løsninger til det givne system

altså ved
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}}\begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix}, \text{ eller}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{t} + (-c_2 + c_3) e^{2t} \\ x_2 = 2c_1 e^{t} + (c_2 + c_3) e^{2t} \\ x_3 = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} . \end{cases}$$

Vi har
$$\begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Indsættes $t=0$ og henholdsvis
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

fås henholdsvis
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Den søgte fundamentalmatrix har som søjler de tilsvarende løsninger og er altså

$$\begin{bmatrix} e^{t} & -e^{t}+e^{2t} & 2e^{t}-2e^{2t} \\ 2e^{t}-2e^{2t} & -2e^{t}+3e^{2t} & 4e^{t}-4e^{2t} \\ e^{t}-e^{2t} & -e^{t}+e^{2t} & 2e^{t}-e^{2t} \end{bmatrix}.$$

415. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} \qquad + 4x = -2e^{-t}, \quad (t,x)\in \mathbb{R}^2,$$

for hvilken man for $t=0$ har $\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = (-1,-2,10)$.

$x = e^{-t}$ ses at være løsning.

$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-4)$ har rødderne $\lambda = \begin{cases} 1 \\ 2+\sqrt{8} \\ 2-\sqrt{8}\,. \end{cases}$

Samtlige løsninger til ligningen er derfor

$$x = c_1 e^{t} + c_2 e^{(2+\sqrt{8})t} + c_3 e^{(2-\sqrt{8})t} + e^{-t}.$$

Heraf

$$\frac{dx}{dt} = c_1 e^{t} + (2+\sqrt{8})c_2 e^{(2+\sqrt{8})t} + (2-\sqrt{8})c_3 e^{(2-\sqrt{8})t} - e^{-t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c_1 e^{t} + (2+\sqrt{8})^2 c_2 e^{(2+\sqrt{8})t} + (2-\sqrt{8})^2 c_3 e^{(2-\sqrt{8})t} + e^{-t}$$

For $t=0$ skal haves $\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = (-1,-2,10)$.

Det giver til bestemmelse af c_1, c_2, c_3 ligningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 &+ c_2 &&+ c_3 &&+ 1 = -1 \\ c_1 &+ (2+\sqrt{8})\,c_2 &&+ (2-\sqrt{8})\,c_3 &&- 1 = -2 \\ c_1 &+ (12+2\sqrt{8})c_2 &&+ (12-2\sqrt{8})\,c_3 &&+ 1 = 10. \end{aligned}$$

Man bemærker, at første + tredje − 2·anden ligning giver

$$9c_2 + 9c_3 + 4 = 13.$$

Heraf $c_2 + c_3 = 1$, $c_1 = -3$. Anden ligning giver nu $c_2 = c_3$. Altså fås $(c_1, c_2, c_3) = (-3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, og den søgte løsning er

$$x = -3e^{t} + \tfrac{1}{2} e^{(2+\sqrt{8})t} + \tfrac{1}{2} e^{(2-\sqrt{8})t} + e^{-t}.$$

416. Find samtlige løsninger til differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -2\cos t \qquad (t,x)\in \mathbb{R}^2,$$

og den løsning $\varphi(t)$, for hvilken $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\pi$. Skitser det geometriske billede af φ i intervallet $0\leq t\leq 2\pi$, og påvis, at det er symmetrisk om linien $t=\pi$.

Find Fourierrækken for den periodiske funktion $f(t)$ med perioden 2π, der i intervallet $0\leq t\leq 2\pi$ stemmer overens med $\varphi(t)$.

Vink. Løsningerne kan findes ved brug af de i teksten givne formler. Man kan med fordel benytte, at enhver løsning også er løsning til den ligning, der fås ved at addere den to gange differentierede ligning.

Med afkortet skrivemåde er ligningen $x''+x=-2\cos t$. For en løsning gælder altså $x''=-x-2\cos t$, hvoraf ses at x er vilkårligt ofte differentiabel. Den tilfredsstiller altså også den to gange differentierede ligning, d.v.s. $x^{(4)}+x''=2\cos t$, og dermed den ved addition dannede ligning $x^{(4)}+2x''+x=0$. Ligningen $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$ eller $(\lambda^2+1)=0$ har rødderne $i, i, -i, -i$. Samtlige løsninger til $x^{(4)}+2x''+x=0$ er altså

$$x = a_1\cos t + a_2 t\cos t + a_3\sin t + a_4 t\sin t.$$

Heraf

$$x' = -a_1\sin t + a_2\cos t - a_2 t\sin t + a_3\cos t + a_4\sin t + a_4 t\cos t$$

$$x'' = a_1\cos t - 2a_2\sin t - a_2 t\cos t - a_3\sin t + 2a_4\cos t - a_4 t\sin t$$

$x''+x = -2a_2\sin t + 2a_4\cos t$, dette $= -2\cos t$ når og kun når $a_2=0$, $a_4=-1$. Samtlige løsninger til den givne ligning er altså

$$x = a_1\cos t + a_3\sin t - t\sin t.$$

fortsættes

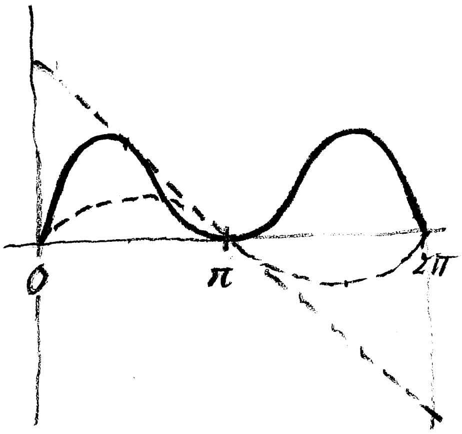
416 fortsat (1)

$\varphi(t) = a_1\cos t + a_3 \sin t - t\sin t$ $\qquad \varphi(0) = a_1 = 0$

$\varphi'(t) = -a_1 \sin t + a_3 \cos t - \sin t - t\cos t$ $\qquad \varphi'(0) = a_3 = \pi.$

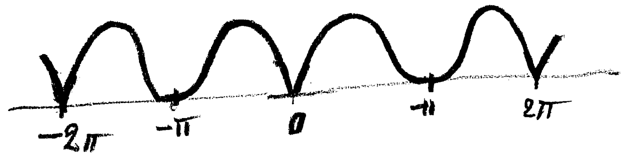
Den søgte løsning er altså

$\varphi(t) = (\pi - t)\sin t.$



Figuren viser forløbet af $\pi - t$ og $\sin t$, og dermed af $\varphi(t)$. Da faktorerne $\pi - t$ og $\sin t$ hver for sig har modsatte værdier i punkter, der ligger symmetrisk om $t = \pi$, er det geometriske billede af $\varphi(t)$ symmetrisk om denne linie. Bemærk: Kurven rører linien $\pi - t$ i det til $t = \frac{\pi}{2}$ svarende punkt.

Af symmetrien af $\varphi(t)$ om $t = \pi$ følger, at funktionen $f(t)$ bliver lige. Dens Fourierrække lyder derfor



$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$, hvor

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt.$$

<u>$n=0$</u> $\quad \frac{\pi}{2}a_0 = \int_0^{\pi}(\pi - t)\sin t\,dt = \Big[(\pi - t)(-\cos t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos t\,dt = \pi,$

altså $\underline{a_0 = 2.}$

<u>$n=1$</u> $\quad \frac{\pi}{2}a_1 = \int_0^{\pi}(\pi - t)\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin 2t\,dt$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\pi - t)\Big(-\frac{\cos 2t}{2}\Big)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt = \frac{1}{4}\pi,$$

altså $\underline{a_1 = \frac{1}{2}.}$

fortsættes

$n > 1$ $$\frac{\pi}{2}a_n = \int_0^\pi \varphi(t)\cos nt\,dt$$

$$= \underbrace{\left[\varphi(t)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \int_0^\pi \varphi'(t)\frac{\sin nt}{n}\,dt$$

$$= \left[\varphi'(t)\frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi''(t)\frac{\cos nt}{n^2}\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{n^2} + \int_0^\pi (\varphi(t) + 2\cos t)\frac{\cos nt}{n^2}\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{n^2} + \frac{1}{n^2}\frac{\pi}{2}a_n \qquad \left(\text{da } \int_0^\pi \cos t\cos nt\,dt = 0\right),$$

$$(n^2-1)\frac{\pi}{2}a_n = -\pi, \text{ altså } a_n = -\frac{2}{n^2-1}.$$

Fourierrækken lyder derfor:

$$f(t) \sim 1 + \tfrac{1}{2}\cos t - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cos nt}{n^2-1}.$$

[Forsøger man en løsning baseret på formel regning — i håb om, at dette vilde være lovligt — finder man af

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nt$$

$$f''(t) \sim \sum_1^\infty -n^2 a_n \cos nt,$$

altså

$$f''(t) + f(t) \sim \frac{a_0}{2} - \sum_2^\infty (n^2-1)a_n \cos nt,$$

som man ikke kan få til at blive $= -2\cos t$.]

419. Lad I være et begrænset eller ubegrænset åbent interval på $\mathring{R}$, og lad $f(t,x): I \times \mathring{R} \to \mathring{R}$ være en kontinuert funktion, der lokalt opfylder en Lipschitz betingelse. Vis, at hvis $\varphi:]a,b[\to \mathring{R}$ er en maksimal løsning til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

og hvis $b \in I$, da gælder $\varphi(t) \to +\infty$ eller $\varphi(t) \to -\infty$ for $t \to b$ fra venstre.

420. Vis, at der for $k \times k$ matricer gælder

$$\exp \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{E}}$$

$$\exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = (\exp \underline{\underline{A}})(\exp \underline{\underline{B}}), \text{ når } \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$$

$$\exp \underline{\underline{A}} \text{ er regulær og } (\exp \underline{\underline{A}})^{-1} = \exp(-\underline{\underline{A}})$$

$$\underline{\underline{S}}(\exp \underline{\underline{A}})\underline{\underline{S}}^{-1} = \exp(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}), \text{ når } \underline{\underline{S}} \text{ er regulær.}$$

Vis, at hvis $\underline{\underline{A}}$ er en trekantmatrix (d.v.s. alle elementer under hoveddiagonalen er 0) med diagonalelementer $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, da er $\exp \underline{\underline{A}}$ en trekantmatrix med diagonalelementer $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_k}$.

Vis, at hvis $F(\lambda) = (-1)^k(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_k)$ er det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$, da er $G(\lambda) = (-1)^k(\lambda - e^{\lambda_1})\cdots(\lambda - e^{\lambda_k})$ det karakteristiske polynomium for $\exp \underline{\underline{A}}$.

Vis, at $\det(\exp \underline{\underline{A}}) = \exp(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})$.

417. Vis, at funktionen $f(t,x) = |x|$, $(t,x) \in \bar{R}^2$, opfylder en Lipschitz betingelse i hele $\bar{R}^2$, og find samtlige maksimale løsninger til differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = |x|.$$

Samme opgave for funktionen $f(t,x) = |\sin x|$.

418. Ved en traktrice forstås grafen af en funktion $f :]a,+\infty[\to \bar{R}$, der opfylder betingelserne (1) $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ for alle $x \in]a,+\infty[$, (2) $f(x) \to 1$ for $x \to a$ fra højre, (3) for ethvert punkt P af grafen er $PN = 1$, hvor N er tangentens skæringspunkt med x-aksen. Vis, at der gennem hvert punkt af strimlen $\{(x,y) \mid 0 < y < 1\}$ går en og kun een traktrice.

For hvilken skare af kurver i strimlen gælder, at tangenten i et vilkårligt punkt P af en kurve i skaren står vinkelret på tangenten til traktricen gennem P.

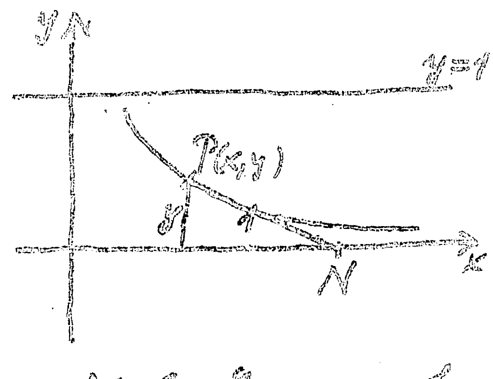
Vis, at tangenterne til den halve kædelinie $y = \cosh x$, $x > 0$, skærer den til intervallet $]0,+\infty[$ hørende traktrice under ret vinkel, samt at afstanden QP fra et punkt Q af kædelinien til tangentens skæringspunkt P med traktricen er lig med buelængden fra $(0,1)$ til P på kædelinien (traktricen er kædeliniens afvikler).

418. (1) En differentiabel funktion $y = f(x)$ opfylder betingelserne (1) og (3), hvis og kun hvis

$$y' < 0 \quad \text{og} \quad y = -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d.v.s. hvis og kun hvis

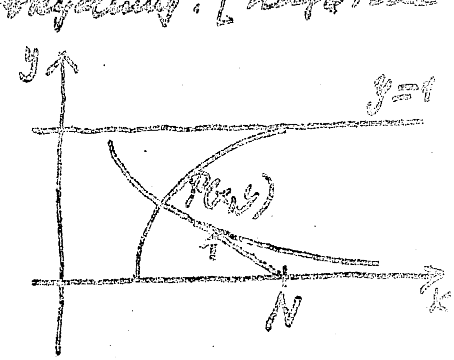
$$0 < y < 1 \quad \text{og} \quad y' = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$



Funktionen $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ har kontinuert afledet. Altså går gennem hvert punkt af strimlen $\mathring{R} \times]0,1[$ en og kun en maksimal løsning. At enhver maksimal løsning må have et definitionsinterval af formen $]a, +\infty[$, ses ved at tage y som variabel. Da fås ligningen $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Højre side er kontinuert i $]0,1]$ og forholder sig for $y \to 0$ som $-\frac{1}{y}$. Stamfunktionerne bestemmes altså ved $x = a - \int_1^y \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} d\eta$, som går mod $+\infty$ for $y \to 0$. Værdimængden for den til a hørende stamfunktion for $0 < y \leq 1$ er $]a, +\infty[$. Bemærk, at traktrixen hørende til a fremgår af traktrixen hørende til 0 ved parallelforskydning. [Udførelse af integrationen er unødvendig]

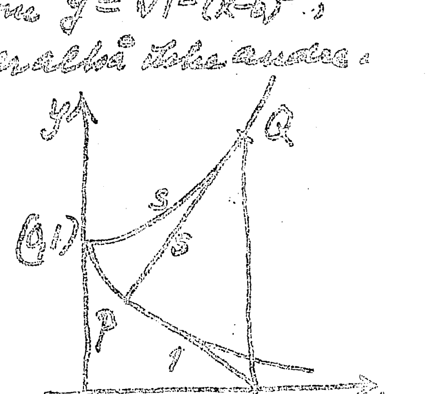
(2) Grafen for en differentiabel funktion $y = g(x)$ i strimlen $\mathring{R} \times]0,1[$ skærer traktrixen gennem et vilkårligt af dens punkter P under ret vinkel, hvis og kun hvis

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$



Funktionen $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ har kontinuert afledet. Altså går gennem hvert punkt af strimlen en og kun en maksimal løsning. Af ligningens geometriske betydning ses, at kvartcirklerne $y = \sqrt{1-(x-b)^2}$, $b-1 < x < b$, er maksimale løsninger. Der er altså ikke andre.

(3) Buelængden på kædelinien fra $(0,1)$ til $Q:(t, \cosh t)$ er $s = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2 t}\, dt = \sinh t$. Afsættes stykket $-s$ ud ad tangenten i Q fås punktet $P:(t, \cosh t) - \sinh t \frac{(1, \sinh t)}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t})$. P beskriver altså kurven med parameterfremstillingen $x = t - \tanh t$, $y = \frac{1}{\cosh t}$.



Denne kurves tangent bestemmes ved vektoren $(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}, -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t})$, altså også ved vektoren $\vec{PN} = (\tanh t, -\frac{1}{\cosh t})$, hvor N er punktet $(t,0)$. En regning giver $PN = 1$. Da $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$ ses, at vinklen QPN er ret.

419. Vi betragter

$$M = \limsup_{t \to b \text{ fra venstre}} \varphi(t)$$

$$m = \liminf_{t \to b \text{ fra venstre}} \varphi(t).$$

Hvis $m < M$, vælges x_0 og $r > 0$ således at

$$m < x_0 - r, \quad x_0 + r < M.$$

Nu findes et $\varepsilon_0 > 0$, således at $[b-\varepsilon_0, b] \subset I$, og således at ethvert interval $]b-\varepsilon, b[$ med $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ indeholder punkter t_1 og t_2 med

$$\varphi(t_1) \geq x_0 + r, \quad \varphi(t_2) \leq x_0 - r.$$

Nu kan vi (kontinuitetsbetragtning, middelværdisætningen) finde t_0 mellem t_1 og t_2, så at

$$|\varphi(t_0) - x_0| \leq r, \quad |\varphi'(t_0)| \geq \frac{2r}{\varepsilon}.$$

Da $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, strider det mod kontinuiteten af f på $[b-\varepsilon_0, b] \times [x_0 - r, x_0 + r] \subset I \times \mathbb{R}$.

Altså er $m = M$.

At $m = M$ ikke kan være endelig, følger af eksistenssætningen.

419. Vi betragter

$$M = \limsup_{t \to b \text{ fra venstre}} \varphi(t)$$

$$m = \liminf_{t \to b \text{ fra venstre}} \varphi(t).$$

Hvis $m < M$, vælges x_0 og $r > 0$ således at

$$m < x_0 - r, \quad x_0 + r < M.$$

Nu findes et $\varepsilon_0 > 0$, således at $[b-\varepsilon, b] \subset I$, og således at ethvert interval $]b-\varepsilon, b[$ med $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ indeholder punkter t_1 og t_2 med

$$\varphi(t_1) \geq x_0 + r, \quad \varphi(t_2) \leq x_0 - r.$$

Nu kan vi (kontinuitetsbetragtning, middelværdisætningen) finde t_0 mellem t_1 og t_2, så at

$$|\varphi(t_0) - x_0| \leq r, \quad |\varphi'(t_0)| \geq \frac{2r}{\varepsilon}.$$

Da $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, strider det mod kontinuiteten af f på $[b-\varepsilon_0, b] \times [x_0 - r, x_0 + r] \subset I \times \mathbb{R}$.

Altså er $m = M$.

At $m = M$ ikke kan være endelig, følger af eksistenssætningen.

4.20. $\exp \underline{A} = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{E} + \frac{1}{1!}\underline{A} + \dots + \frac{1}{n!}\underline{A}^n \right)$.

(1) $\exp \underline{0} = \underline{E} + \underline{0} + \underline{0} + \dots = \underline{E}$

(2) $\exp(\underline{A}+\underline{B}) = \exp \underline{A} \exp \underline{B}$, når $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}$, thi da udregnes $(\underline{A}+\underline{B})^r$ ved binomialformlen, og påstanden bevises ganske som når man viser funktionalligningen for $\exp x$ (eller i hvert fald, næsten ganske).

(3) Da $\underline{A}$ og $-\underline{A}$ er ombyttelige, er $\exp \underline{A} \exp(-\underline{A}) = \exp \underline{0} = \underline{E}$.

(4) Da afbildningen $\underline{A} \mapsto \underline{S}\,\underline{A}\,\underline{S}^{-1}$ er kontinuert, er

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(\exp \underline{A})\underline{S}^{-1} &= \underline{S}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\underline{E} + \dots + \frac{1}{n!}\underline{A}^n\right)\right)\underline{S}^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underline{S}\left(\underline{E} + \dots + \frac{1}{n!}\underline{A}^n\right)\underline{S}^{-1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\underline{S}\,\underline{E}\,\underline{S}^{-1} + \dots + \frac{1}{n!}\underline{S}\,\underline{A}^n\underline{S}^{-1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\underline{E} + \dots + \frac{1}{n!}(\underline{S}\,\underline{A}\,\underline{S}^{-1})^n\right) \\
&= \exp(\underline{S}\,\underline{A}\,\underline{S}^{-1}).
\end{aligned}
$$

(5) Udsagnet om trekantmatricer er indlysende.

(6) Udsagnet om det karakteristiske polynomium følger for trekantmatricer af (5), og dermed i det almindelige tilfælde af (4) ved transformation på trekantform (f. eks. Jordans normalform).

(7) Vi har $\det(\exp \underline{A}) = e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr}\underline{A}}$.
Eller: $\exp t\underline{A}$ er fundamentalmatrix for ligningssystemet $\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y}$, hvoraf
$\det(\exp t\underline{A}) = \det(\exp \underline{0}) \cdot \exp \int_0^t \operatorname{tr}\underline{A}\, d\tau$.

4.20. $\exp \underline{\underline{A}} = \lim_{n\to\infty}\left(\underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}} + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n\right)$.

(1) $\exp \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{0}} + \underline{\underline{0}} + \cdots = \underline{\underline{E}}$

(2) $\exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \exp \underline{\underline{A}} \exp \underline{\underline{B}}$, når $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$, thi da udregnes $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^n$ ved binomialformlen, og påstanden bevises ganske som når man viser funktionalligningen for $\exp x$ (eller i hvert fald „næsten ganske").

(3) Da $\underline{\underline{A}}$ og $-\underline{\underline{A}}$ er ombyttelige, er $\exp \underline{\underline{A}} \exp(-\underline{\underline{A}}) = \exp \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{E}}$.

(4) Da afbildningen $\underline{\underline{A}} \mapsto \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er kontinuert, er

$$\underline{\underline{S}}(\exp \underline{\underline{A}})\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\underline{\underline{E}} + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n\right)\right)\underline{\underline{S}}^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underline{\underline{S}}\left(\underline{\underline{E}} + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{A}}^n\right)\underline{\underline{S}}^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}^n\underline{\underline{S}}^{-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\underline{\underline{E}} + \cdots + \frac{1}{n!}(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1})^n\right)$$

$$= \exp(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}).$$

(5) Udsagnet om trekantmatricer er indlysende.

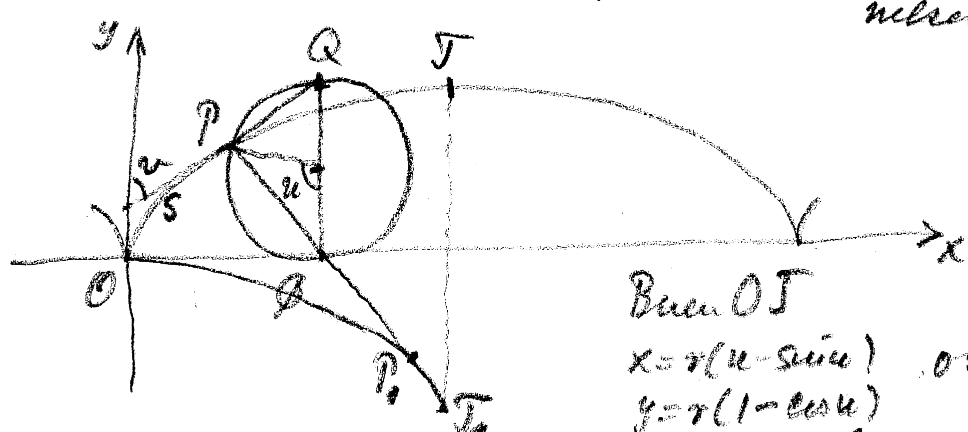
(6) Udsagnet om det karakteristiske polynomium følger for trekantmatricer af (5), og dermed i det almene tilfælde af (4) ved transformation på trekantform (f.eks. Jordans normalform).

(7) Vi har $\det(\exp \underline{\underline{A}}) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_k} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} = e^{\operatorname{tr} \underline{\underline{A}}}$

Eller: $\exp t\underline{\underline{A}}$ er fundamentalmatrix for ligningssystemet $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$, hvoraf

$\det(\exp t\underline{\underline{A}}) = \det(\exp \underline{\underline{0}}) \cdot \exp \int_0^t \operatorname{tr} \underline{\underline{A}}\, d\tau$.

501. Opgave vedrørende Cykloiden. Se fig. vedr. betegnelser



Buen OT

$x = r(u - \sin u)$ $\quad 0 \le u \le \pi$

$y = r(1 - \cos u)$

a) Vis, at tangenten i P går gennem Q, og at normalen i P går gennem Ø.

b) Bestem buelængden s fra O til P som funktion af parameteren u.

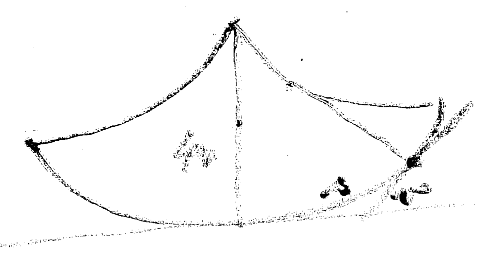
c) Vis, at det til P med hensyn til Ø symmetriske punkt P_1 beskriver en cykloidebue OT_1 kongruent med OT, og at denne i P_1 har tangenten PP_1.

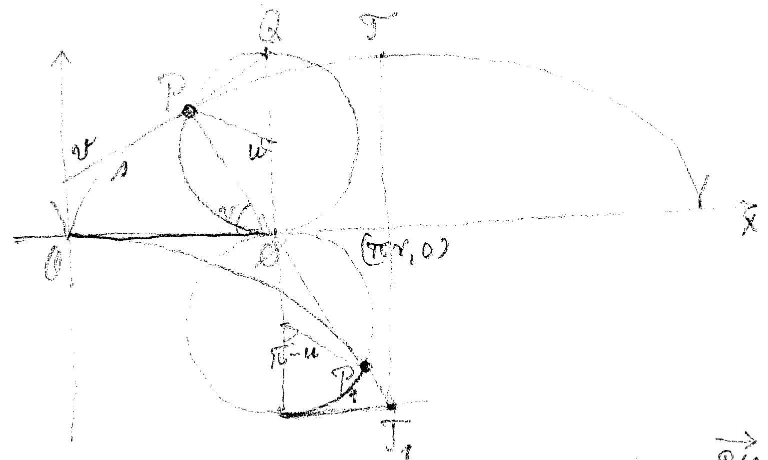
d) Vis, at længden af buen OP_1 på denne er lig med PP_1.

e) Udtryk s som funktion af tangentens drejningsvinkel v og vis herved, at krumningsradius $\frac{ds}{dv}$ er lig med PP_1, d.v.s. at P_1 er krumningscentrum.

f) Find arealet af den af cykloidebuerne OT, OT_1 og linestykket TT_1 begrænsede mængde.

g) Vis Huygens' erkendelse: For et cykloidependul er svingningstiden uafhængig af udsvinget. Vink. Udtryk s som funktion af v. Opskriv herefter, at tangentialaccelerationen er tyngdens projektion på tangenten (idet massen sættes lig 1).





a) $x = r(u - \sin u)$ $\quad x' = r(1-\cos u)$ $\quad \vec{PQ} = (r\sin u,\ r(1+\cos u))$

$y = r(1-\cos u)$ $\quad y' = r\sin u$ $\quad \frac{\sin u}{1-\cos u} = \frac{1+\cos u}{\sin u}$

Altså Tangenten gennem Q, normalen gennem O

b) $s = \int_0^u \sqrt{x'^2 + y'^2}\,du = r\int_0^u \sqrt{2-2\cos u}\,du$

$= r\int_0^u 2\sin\frac{u}{2}\,du = 4r\left(1-\cos\frac{u}{2}\right)$

c) Klart at P_1 beskriver cykloidebue, og at tangenten i P_1 er PP_1.

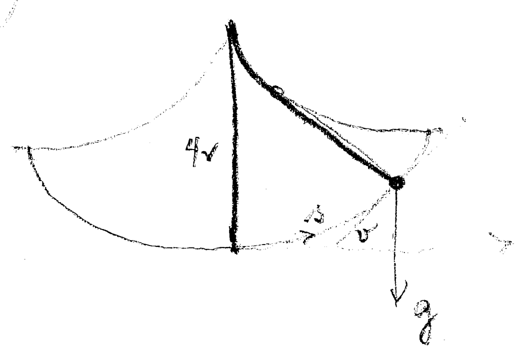
d) $\widehat{OT} = 4r$. $\quad \widehat{OP_1} = 4r - 4r\left(1-\cos\frac{\pi-u}{2}\right) = 4r\sin\frac{u}{2} = PP_1$.

e) $v = \frac{u}{2}$ $\quad s = 4r(1-\cos v)$ $\quad \frac{ds}{dv} = 4r\sin v = 4r\sin\frac{u}{2} = PP_1$

altså P_1 krumningscentrum.

f) Areal OTT, åbenbart $= \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$.

g)



$s = 4r - 4r\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\right) = 4r\sin v$

gælder hele cykloidebuen når vi regner s og v med fortegn.

$\ddot{s} = -g\sin v = -\frac{g}{4r}s$

$\ddot{s} + \frac{g}{4r}s = 0$. $\quad \lambda^2 + \frac{g}{4r} = 0$ rødder $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{4r}}$

Fuldst. løsn $\quad s = a_1\cos\sqrt{\frac{g}{4r}}\,t + a_2\sin\sqrt{\frac{g}{4r}}\,t$

eller $\quad s = \alpha\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4r}}(t-t_0)\right)$.

Svingetid $\quad 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$.

502. For vilkårlige endepunkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y)\mid y>0\}$ skal man bestemme $y=f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I=\int_{a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$$

er minimum.

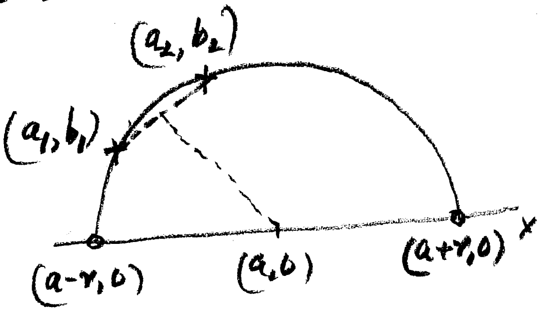
Idet tekstens betegnelser følges, har vi $\Omega=\{(x,y,p)\mid y>0\}$, $F(x,y,p)=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{y}$, og Eulers differentialligning bliver
$F'_y(x,y,y')-\dfrac{d}{dx}F'_p(x,y,y')=0$ eller $-\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=0$,

som ved udregning giver $1+y'^2+yy''=0$.

Denne lignings maksimale løsninger kendes fra teksten (kap. 4, §4). Det er funktionerne

$$y=\sqrt{r^2-(x-a)^2},\quad x\in\,]a-r,a+r[\qquad (a\in\mathbb{R},\ r\in\mathbb{R}_+),$$

der fremstiller alle halvcirkler i $\{(x,y)\mid y>0\}$ med centrum på x-aksen. Gennem de givne punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) går netop een sådan. Eulers ligningen har altså for givne endepunkter netop denne ene løsning. At I er minimum for denne funktion har vi naturligvis ikke bevist.



Forudsættes ikke kendskab til differentialligningens løsninger, må vi gå frem som ved de i teksten behandlede eksempler. Da F ikke afhænger af x, giver Eulers ligning multipliceret med y' ligningen

$F(x,y,y')-F'_p(x,y,y')y'=\text{konst.}$ eller $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\dfrac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=\text{konst.},$

fortsættes

eller $\dfrac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}$ = konst., eller

$y\sqrt{1+y'^2} = \alpha$, som må være >0, eller

$y^2(1+y'^2) = \alpha^2$. For en løsning hertil må gælde $0<y\leq\alpha$.

Ligningen omskrives til $y'^2 = \dfrac{\alpha^2}{y^2} - 1 = \dfrac{\alpha^2-y^2}{y^2}$ eller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}.$$

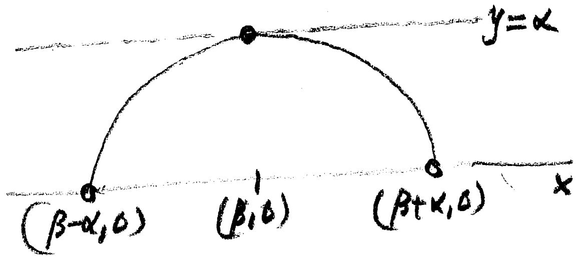
Vi søger først løsninger, for hvilke $0<y<\alpha$. For en sådan må y' have konstant fortegn. Vi har altså enten

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}$ eller $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}$ For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel og få da

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$ eller $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$, som har løsningerne

$$x = -\sqrt{\alpha^2-y^2}+\beta \quad \text{og} \quad x = \sqrt{\alpha^2-y^2}+\beta \qquad (0<y<\alpha),$$

der fremstiller kvartcirklerne i $\{(x,y)\,|\,0<y<\alpha\}$ af cirklerne $(x-\beta)^2+y^2=\alpha^2$.



Desuden løses ligningen

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\pm\sqrt{\alpha^2-y^2}}{y}$ af $y=\alpha$.

Samtlige løsninger fås ved sammensætning af kvartcirkler og linestykker, resp. halvlinier, på $y=\alpha$, men da de sidste ikke er løsninger til Euler ligningen selv, får denne som (maksimale) løsninger præcis halvcirklerne.

503. For givet endepunkt (a_1, b_1) skal man finde $y = f(x) > 0$ i $[a_1, a_2]$ således, at den ved omdrejning om x-aksen frembragte flade har minimalt areal.

Jfr. teksten drejer det sig om integralet

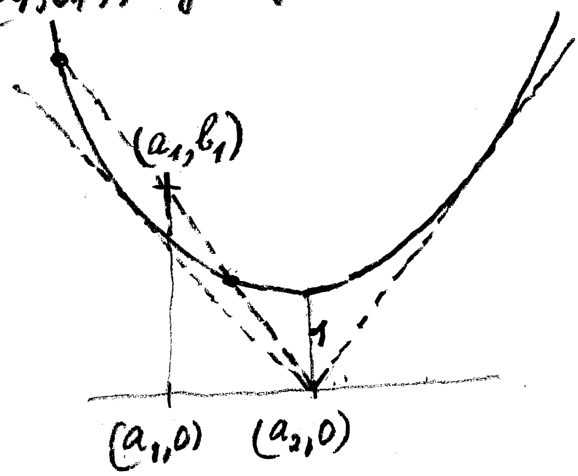
$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \,. \qquad F(x,y,p) = y\sqrt{1+p^2}. \quad \mathcal{B} = \{(x,y,p) \mid y > 0\}.$$

Løsningerne til Eulers differentialligning er

$$y = \alpha \cosh\frac{x-\beta}{\alpha}, \quad -\infty < x < \infty \qquad (\alpha > 0,\ -\infty < \beta < \infty).$$

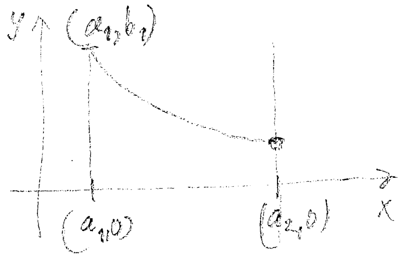
Den naturlige randbetingelse $F'_p(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0$ bliver, idet $F'_p(x,y,p) = y\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, betingelsen $f'(a_2) = 0$, d.v.s. $(a_2, f(a_2))$ skal være kædeliniens toppunkt (β, α), altså $\beta = a_2$.

Det må herefter undersøges, om der for givet punkt (a_1, b_1) og abscisse $a_2 > a_1$ findes en kædelinie $y = \alpha\cosh\frac{x-a_2}{\alpha}$ gennem (a_1, b_1), og i givet fald hvor mange. Kædelinierne $y = \alpha\cosh\frac{x-a_2}{\alpha}$ er ligedannede, idet de fremgår af en bestemt af dem, f. eks. $y = \cosh(x - a_2)$, ved homotheti ud fra $(a_2, 0)$. Denne



lægges, og man ser, at der bliver 0, 1 eller 2 løsninger, eftersom (a_1, b_1) ligger under, på eller over tangenterne fra $(a_2, 0)$.

504. For givet endepunkt (a_1, b_1) skal man finde $y=f(x)$ i $[a_1, a_2]$ således, at kurvens længde er minimal.



$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad F(x,y,p) = \sqrt{1+p^2}$

$F'_y - \frac{d}{dx} F'_p = 0$ giver $\frac{d}{dx} F'_p = 0$

$F'_p =$ konst $\quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} =$ konst

$y' =$ konst

Naturlig randbetingelse i $F'_p(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0$.

Her altså $y' = 0$. (Også på forhånd klart.)

505. Find (idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid y>0, |p|<1\}$) samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet $I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{y}\sqrt{1-y'^2}\,dx$.

Idet tekstens betegnelser følges, har vi $F(x,y,p) = \sqrt{y}\sqrt{1-p^2}$, og Eulers differentialligning bliver $F_y'(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_p'(x,y,y') = 0$ eller $\frac{\sqrt{1-y'^2}}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{y}\cdot y'}{\sqrt{1-y'^2}} = 0$, som ved udregning giver $1-y'^2+2yy''=0$, en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Vi må derfor gå frem som ved de i teksten behandlede eksempler. Da F ikke afhænger af x, giver Eulers ligning multipliceret med y' ligningen $F(x,y,y') - F_p'(x,y,y')\,y' = \text{konst.}$, eller $\sqrt{y}\sqrt{1-y'^2} + \frac{\sqrt{y}\,y'^2}{\sqrt{1-y'^2}} = \text{konst.}$, eller $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y'^2}} = \text{konst.}$, eller $\frac{y}{1-y'^2} = \alpha$, som må være >0. For en løsning hertil må gælde $0<y\leq\alpha$. Ligningen omskrives til $y'^2 = 1-\frac{y}{\alpha}$ eller $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}$. Vi søger først løsninger, for hvilke $0<y<\alpha$. For en sådan må y' have konstant fortegn. Vi har altså enten $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}$ eller $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}$. For en sådan løsning kan vi benytte y som uafhængig variabel og får da $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}}$ eller $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}}$, som har løsningerne

$$x = -2\alpha\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}+\beta \quad \text{og} \quad x = 2\alpha\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}+\beta \quad (0<y<\alpha),$$

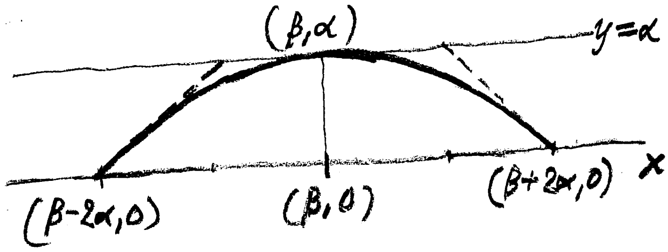
der fremstiller buerne i $\{(x,y) \mid 0<y<\alpha\}$ af parablerne $(x-\beta)^2 = 4\alpha^2\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)$ eller $y = \alpha - \frac{(x-\beta)^2}{4\alpha}$.

Parablen $y = \alpha - \frac{(x-\beta)^2}{4\alpha}$ har lodret akse, toppunkt i maksimumspunktet $(x,y) = (\beta,\alpha)$, og skærer x-aksen

fortsættes

505 fortsat

i punkterne $(x,y) = (\beta \pm 2\alpha, 0)$. Heraf følger, at den har brændpunktet $(x,y) = (\beta, 0)$. Desuden løses ligningen $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}$ af $y=\alpha$. Samtlige løsninger fås ved sammensætning af parabelbuer og liniestykker, resp. halvlinier, på $y=\alpha$, men da de sidste ikke er løsninger til Euler ligningen selv, får denne som (maksimale) løsninger precis parabelbuerne



$$y = \alpha - \frac{(x-\beta)^2}{4\alpha}, \quad \beta-2\alpha < x < \beta+2\alpha \qquad (-\infty < \beta < \infty).$$

Idet α gennemløber $0<\alpha<\infty$, ser man, at man får alle buer i $\{(x,y) \mid y>0\}$ af parabler med lodret akse, hulhed nedad, og brændpunkt på x-aksen.

Bemærk, at tangentens hældningskoefficient i skæringspunkterne mellem en sådan parabel og x-aksen er 1 eller -1.

Tilføjelse. Gennem to punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ med $a_1<a_2$ går een løsning, hvis $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right| < 1$, og ingen løsning, hvis $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right| \geq 1$.

Det er klart ud fra middelværdisætningen, at $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right| < 1$ er en nødvendig betingelse for løsning. At den også er tilstrækkelig, og at der er een løsning, når den er opfyldt, kan ses geometrisk (jfr. tekstens behandling af cykloide-tilfældet) eller ved regning.

505. Find (idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid y>0, |p|<1\}$) samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet
$$I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{y}\,\sqrt{1-y'^2}\,dx.$$

Går med i ny udg.

Vis, at der gennem to punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ med $a_1<a_2$ går een løsning, hvis $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right|<1$, og ingen løsning, hvis $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right| \geq 1$.

$F(x,y,p) = \sqrt{y}\,\sqrt{1-p^2}$

$F'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0$ giver $\frac{\sqrt{1-y'^2}}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{1-y'^2}} = 0$

giver ved udregning
$1-y'^2+2yy''=0$

Snalt med y.

$F - F'_p y' =$ konst

$\sqrt{y}\,\sqrt{1-y'^2} + \frac{\sqrt{y}\,y'^2}{\sqrt{1-y'^2}} =$ konst

$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y'^2}} =$ konst

$1-\left(\frac{x-\beta}{2\alpha}\right)^2 + 2\left(\alpha-\frac{(x-\beta)^2}{4\alpha}\right)\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)$

$\frac{y}{1-y'^2} = \alpha > 0 \quad 0<y\leq\alpha$

$y'^2 = 1-\frac{y}{\alpha} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}$

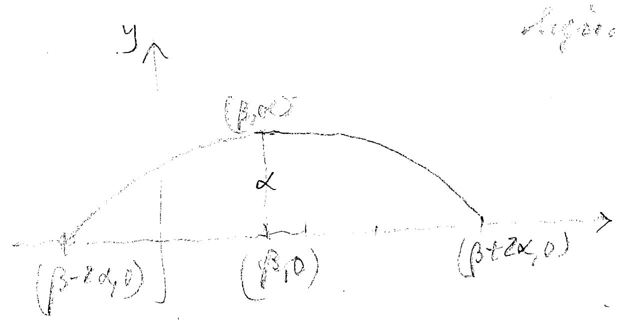
Først $0<y<\alpha$: $\frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}}$

$x = \pm\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}}}\,dy = \mp 2\alpha\sqrt{1-\frac{y}{\alpha}} + \beta$

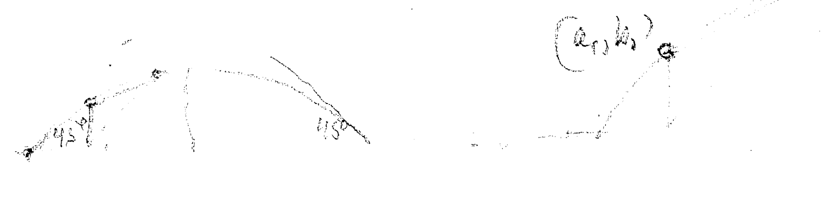
$(x-\beta)^2 = 4\alpha^2\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)$

$y = \alpha - \frac{(x-\beta)^2}{4\alpha}$

Parabelbuer. Forenes ved tilføjelse af toppunkt (konstante ytterbuer ikke med, da de ikke passer i ligningen) NB: Brændpunkt $(\beta,0)$, Toppunkt (β,α)



Klart, at $\left|\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right|<1$ nødv. tilstrækkelig følger konstr.



506. Find (idet $\Omega = \{(x,y,p) \mid |p|<1\}$) samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1-y'^2}\,dx.$$

Idet tekstens betegnelser følges, har vi $F(x,y,p) = y\sqrt{1-p^2}$, og Eulers differentialligning bliver

$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F'_p(x,y,y')=0$ eller $\sqrt{1-y'^2} + \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1-y'^2}} = 0$,

som ved udregning giver $1-y'^2+yy''=0$, en ligning, som vi ikke uden videre kan løse.

Vi må derfor gå frem som ved de i teksten behandlede eksempler. Da F ikke afhænger af x, giver Eulers ligning multipliceret med y' ligningen

$F(x,y,y') - F'_p(x,y,y')\,y' =$ konst., eller $y\sqrt{1-y'^2} + \frac{yy'^2}{\sqrt{1-y'^2}} =$ konst.,

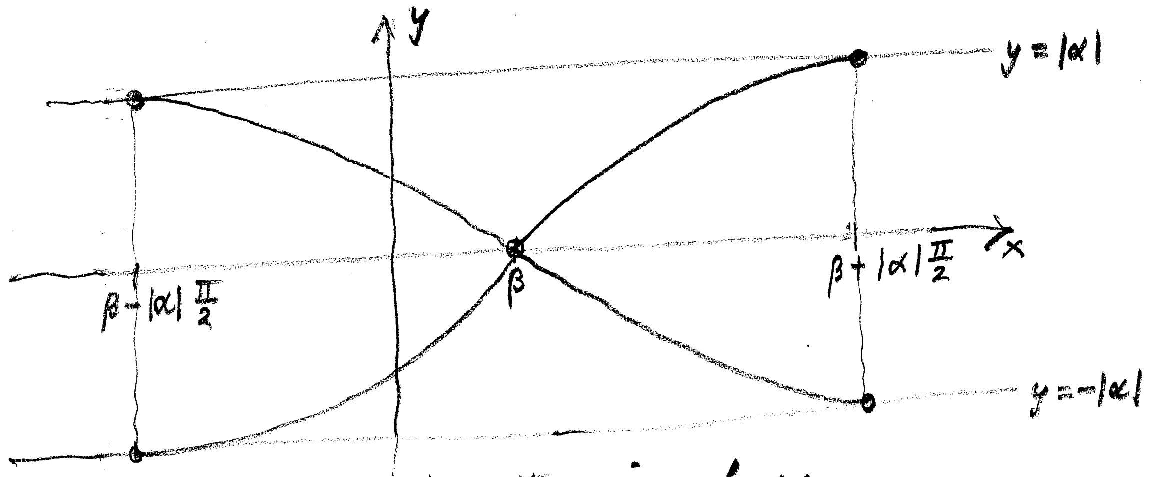
eller $\frac{y}{\sqrt{1-y'^2}} = \alpha$. Denne ligning har løsningen $y = \alpha$, som ikke tilfredsstiller Euler ligningen. For $\alpha=0$ har den kun løsningen $y=0$. Vi skal altså kun betragte værdier $\alpha \neq 0$ og løsninger, som ikke er konstant i noget interval. Sådanne vil også være løsninger til Euler ligningen. En løsning y har samme fortegn som α. Det drejer sig derfor om at søge løsningerne til $\frac{y^2}{1-y'^2} = \alpha^2$, $\alpha \neq 0$, eller $y'^2 = 1-\frac{y^2}{\alpha^2}$. For en løsning må gælde $0<|y|\leq|\alpha|$. For $0<|y|<|\alpha|$ må y' have konstant fortegn, og vi får

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{|\alpha|}$ eller $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\alpha^2-y^2}}{|\alpha|}$. Benyttes y som uafhængig variabel fås $\frac{dx}{dy} = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$ eller $\frac{dx}{dy} = -\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2-y^2}}$,

som har løsningerne

$$x = |\alpha|\,\mathrm{Arcsin}\frac{y}{|\alpha|} + \beta \quad \text{og} \quad x = -|\alpha|\,\mathrm{Arcsin}\frac{y}{|\alpha|} + \beta,$$

fortsættes



der fremstiller de kvarte sinusbuer

$$y = |\alpha| \sin\frac{x-\beta}{|\alpha|} \quad \text{og} \quad y = -|\alpha| \sin\frac{x-\beta}{|\alpha|}, \quad 0<|x-\beta|<|\alpha|\frac{\pi}{2}.$$

På sædvanlig måde sættes disse sammen i toppunkterne til halve sinusbuer. Det samlede resultat kan herefter skrives simplere (uden det besværlige $|\alpha|$) således: Løsningerne til Eulerligningen er samtlige halve sinusbuer, der fås ved af kurverne

$$y = \alpha \sin\frac{x-\beta}{\alpha}$$

at fjerne skæringspunkterne med x-aksen. Bemærk, at det er alle sinuskurver, der skærer x-aksen under vinkler på 45°.

[Eulerligningen $1-y'^2+yy''=0$ har som løsninger sinuskurverne inklusive punkterne på x-aksen. Disse kommer ikke med på grund af betingelsen $|y'|<1$.]

507. Find samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I=\int_{a_1}^{a_2}\left[xy'+(y'^2-1)^2\right]dx.$$

Vink. (1) Opskriv differentialligningen, og vis, at den giver $x+4y'^3-4y'=\alpha$. (2) Vis, at denne ligning spaltes i tre ligninger $y'=\varphi_1(x)$, $x-\alpha\geqslant -\frac{8}{3\sqrt{3}}$; $y=\varphi_2(x)$, $|x-\alpha|\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}$; $y'=\varphi_3(x)$, $x-\alpha\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}$ (funktionerne $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ skal ikke udregnes). (3) Vis ved at benytte y' som parameter, at integralerne til de tre ligninger bestemmes ved parameterfremstillingen $x=4t-4t^3+\alpha$, $y=2t^2-3t^4+\beta$ svarende til intervallerne $t\leqslant-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|t|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skitser forløbet.

---

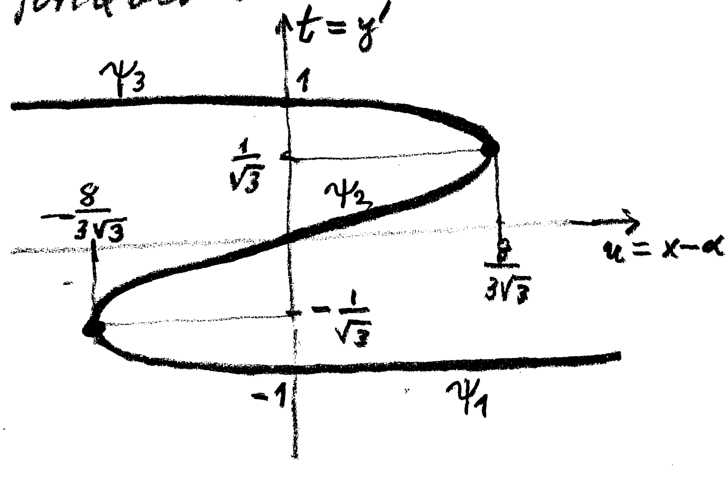
(1) Idet tekstens betegnelser følges, har vi $\Omega=\mathring{R}^3$ og $F(x,y,p)=xp+(p^2-1)^2$. Man ser, at F er uafhængig af y. Eulers ligning $F'_y-\frac{d}{dx}F'_p=0$ bliver derfor $\frac{d}{dx}F'_p=0$, som er ensbetydende med $F'_p=$ konst. $=\alpha$, altså $x+2(y'^2-1)2y'=\alpha$ eller

$$x+4y'^3-4y'=\alpha.$$

(2) Sæt $x-\alpha=u$ og $y'=t$. Ligningen lyder da

$$4t^3-4t+u=0,$$

eller $u=4t-4t^3$. Heraf $\frac{du}{dt}=4-12t^2$ og man ser, at forløbet er som vist på figuren. Ligningen



$$4t^3-4t+u=0$$

spaltes i de tre ligninger

$$t=\psi_1(u),\quad u\geqslant-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$t=\psi_2(u),\quad |u|\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$t=\psi_3(u),\quad u\leqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

507 fortsat (1)

Ligningen $x+4y'^3-4y'=\alpha$ spaltes altså i de tre ligninger

$$y'=\varphi_1(x)=\psi_1(x-\alpha),\quad x-\alpha\geqq-\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$y'=\varphi_2(x)=\psi_2(x-\alpha),\quad |x-\alpha|\leqq\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$y'=\varphi_3(x)=\psi_3(x-\alpha),\quad x-\alpha\leqq\frac{8}{3\sqrt{3}},$$

hvis løsninger er

$$y=\int\varphi_1(x)dx=\int\psi_1(x-\alpha)dx$$
$$y=\int\varphi_2(x)dx=\int\psi_2(x-\alpha)dx$$
$$y=\int\varphi_3(x)dx=\int\psi_3(x-\alpha)dx.$$

(3) For at bestemme stamfunktionerne til $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ tager vi $y'=t$ som parameter. Vi har da

$$x=4t-4t^3+\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=t(4-12t^2)=4t-12t^3,\ \text{hvoraf}$$
$$y=2t^2-3t^4+\beta.$$

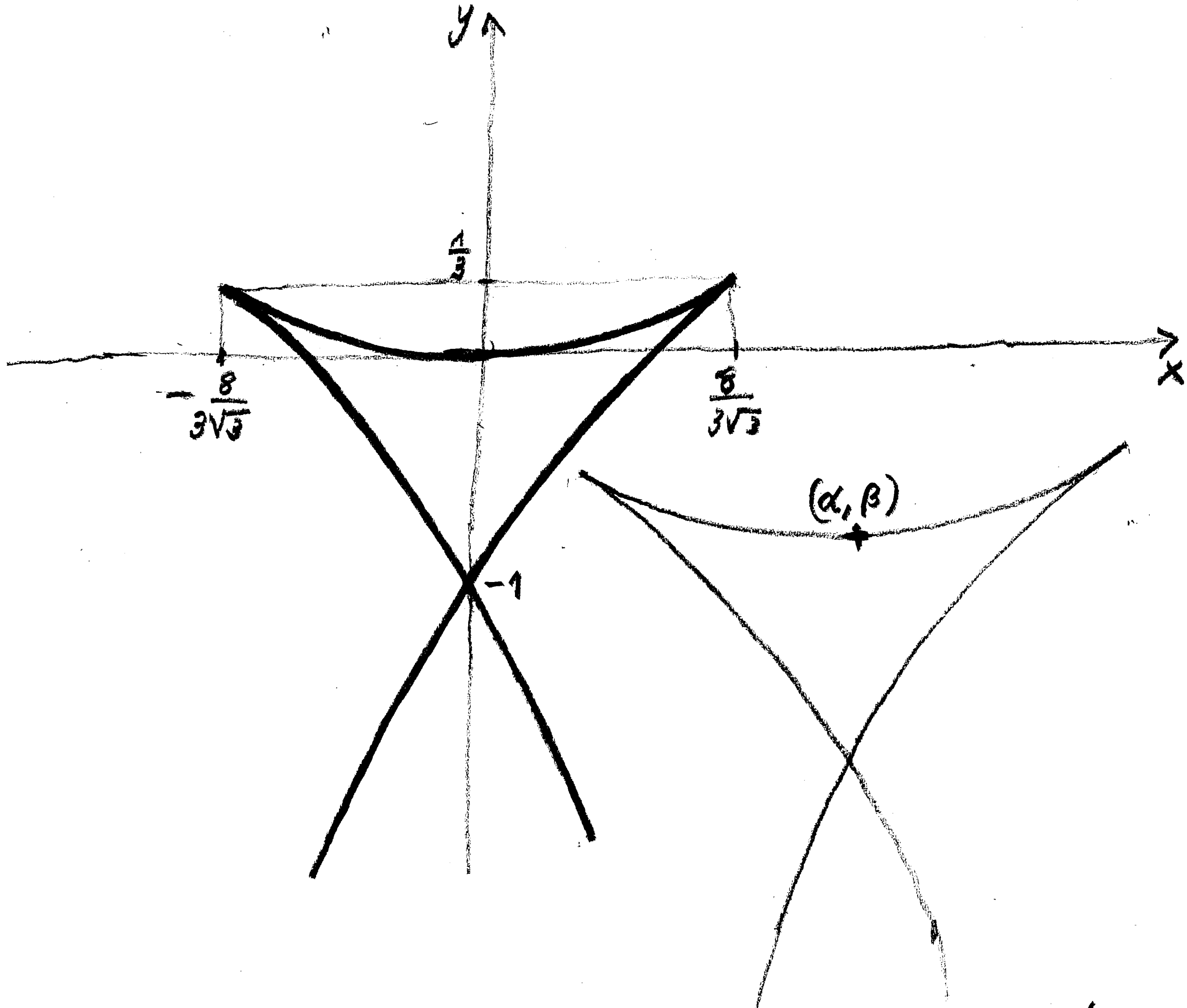
Stamfunktionerne bestemmes altså ved parameterfremstillingen

$$x=4t-4t^3+\alpha,\quad y=2t^2-3t^4+\beta$$

svarende til intervallerne $t\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $|t|\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

For $(\alpha,\beta)=(0,0)$ fås forløbet på basis af ovenstående figur. Idet $t=0$ giver $(x,y)=(0,0)$, fås den stamfunktion til ψ_2, der er 0 for $x=0$. Da ψ_2 er en voksende funktion, er den konveks. Da ψ_2 er ulige er den lige. Til $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ svarer $(x,y)=\left(\pm\frac{8}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right)$. I disse punkter er $y'=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi har jo $y'=t$). Dernæst fås til ψ_1 den stamfunktion, der er $\frac{1}{3}$ for $x=-\frac{8}{3\sqrt{3}}$. Da ψ_1 er en aftagende funktion, er den konkav.

Til $t=-1$ svarer $(x,y)=(0,-1)$. Endelig fås for ψ_3 den stamfunktion, der er $\frac{1}{3}$ for $x=\frac{8}{3\sqrt{3}}$. Da ψ_3 er en aftagende funktion, er den konkav. Til $t=1$ svarer $(x,y)=(0,-1)$. Da graferne af ψ_1 og ψ_3 er symmetriske til hinanden med hensyn til $(0,0)$, er graferne til stamfunktionerne symmetriske til hinanden med hensyn til y-aksen. I sammensætningspunkterne kommer spidser.



For vilkårligt (α, β) fås forløbet ved parallelforskydning.

508. Find samtlige løsninger til Eulers differentialligning svarende til integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$F(x,y,p) = x\sqrt{1+p^2} \qquad \Omega = \mathbb{R}^3$

$F'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0$ giver $F'_p = \text{konst}$

$$x\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha$$

$$x^2y'^2 = \alpha^2(1+y'^2)$$

$y'^2(x^2-\alpha^2) = \alpha^2 \qquad \underline{\alpha = 0}$ giver $y' = 0$ (af kontinuitetsgrunde også for $x = 0$)

$$y = \beta$$

$\underline{\alpha > 0}$ giver

$$y' = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

1) $x > \alpha \qquad y = \pm\int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,dx \qquad$ sætter $x = \alpha\cosh t \quad t>0$

$$= \pm\int \frac{\alpha}{\alpha\sinh t}\,\alpha\sinh t\,dt = \pm\alpha t + \beta$$

$$x = \alpha\cosh\frac{\pm(y-\beta)}{\alpha} = \alpha\cosh\frac{y-\beta}{\alpha} \qquad y \neq \beta$$

2) $x < -\alpha \qquad y = \pm\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}\,dx \qquad$ sætter $x = -\alpha\cosh t \quad t>0$

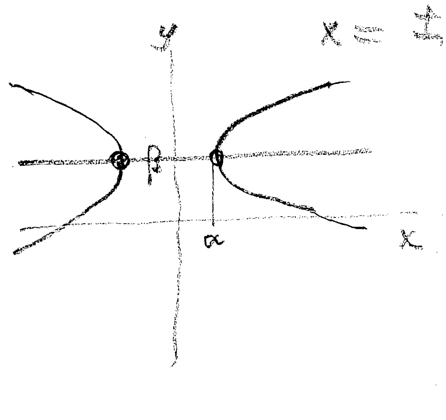
$$= \pm\int\frac{\alpha}{\alpha\cosh t}(-\alpha\sinh t)\,dt = \mp\alpha t + \beta$$

$$x = -\alpha\cosh\frac{\mp(y-\beta)}{\alpha} = -\alpha\cosh\frac{y-\beta}{\alpha} \qquad y\neq\beta$$

$\alpha < 0$ giver intet nyt
(dækket ved at vi har $\pm$ ovenfor).

<u>Resultat</u> $\qquad y = \beta \qquad\qquad\qquad\qquad \beta$ vilk.

$$x = \pm\alpha\cosh\frac{y-\beta}{\alpha} \qquad y\neq\beta \qquad \beta \text{ vilk}, \ \alpha>0$$



Ikke forbavsende, da πI for fkt $y = f(x)$ i int $0 < a_1 \le x \le a_2$ er arealet af fladen, der fås ved drejning om y-aksen.

509. For givne endepunkter (a_1, b_1), (a_2, b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y>0\}$ søges $y = f(x) > 0$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y^2 dx$$

er minimum under bibetingelsen

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} y\, dx = A,$$

hvor A er et givet positivt tal.

Vink. Benyt variationsregningen til at vise, at problemet kun kan have en konstant funktion til løsning, og efterviis direkte, at hvis der findes en konstant funktion, der opfylder randbetingelserne og bibetingelsen, er den en løsning.

Idet tekstens betegnelser følges, har vi $\Omega = \{(x,y,p) \mid y>0\}$, $k=1$, $F_0 = y^2$, $F_1 = y$. Nødvendig betingelse for, at I_0 er minimum under bibetingelsen $I_1 = A$ for funktionen $y = f(x)$, er at der findes et par $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$ af Lagrangeske multiplikatorer, således at når man sætter $F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1$ gælder Euler ligningen $F'_y - \frac{d}{dt} F'_p = 0$,

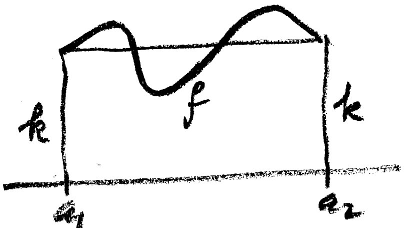
d.v.s. $$\lambda_0 2y + \lambda_1 = 0.$$

Man ser, at $\lambda_0 = 0$ er umuligt. Altså fås $y = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_0}$, så at y er konstant.

Nødvendigt for eksistensen af en konstant funktion, der opfylder randbetingelserne og bibetingelsen, er at $b_1 = b_2 = \frac{A}{a_2 - a_1}$. Antag dette, og sæt $b_1 = b_2 = \frac{A}{a_2 - a_1} = k$.

Da skal vises: For ethvert tilladt $y = f(x)$ med $f(a_1) = f(a_2) = k$ og $\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx = k(a_2 - a_1)$ gælder

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)^2 dx \geq k^2 (a_2 - a_1).$$



Sæt $f(x) = k + g(x)$.

Da er $\int_{a_1}^{a_2} g(x)\,dx = 0$.

forsættes

509 forts.

Endvidere er $f(x)^2 = k^2 + 2k\,g(x) + g(x)^2$, altså
$\int_{a_1}^{a_2} f(x)^2 dx = k^2(a_2 - a_1) + \int_{a_1}^{a_2} g(x)^2 dx$, hvoraf ses, at
$\int_{a_1}^{a_2} f(x)^2 dx \geq k^2(a_2 - a_1)$ [og iøvrigt $\int_{a_1}^{a_2} f(x)^2 dx = k^2(a_2 - a_1)$
kun, når $g(x)$ er konstant $= 0$, altså $f(x)$ konstant $= k$].

510. Variationsproblem med to funktioner. Lad $F(t,x,y,p,q) \in C^2(\Omega)$, hvor Ω er en åben mængde i (t,x,y,p,q)-rummet. Et tilladt funktionspar (f,g) er et par af funktioner $x = f(t) \in C^1([a_1,a_2])$, $y = g(t) \in C^1([a_1,a_2])$, som for $t=a_1$ og $t=a_2$ antager foreskrevne randværdier, og for hvilke $(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) \in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis integralet

$$I = \int_{a_1}^{a_2} F(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t))\,dt$$

har lokalt ekstremum for funktionsparret (f,g), da tilfredsstiller disse de to Eulerske differentialligninger

$$F'_x(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) - \frac{d}{dt} F'_p(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) = 0$$

$$F'_y(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) - \frac{d}{dt} F'_q(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) = 0.$$

Trivielt, da vi har lokalt ekstremum for problemet i den ene af funktionerne, når den anden holdes fast.

511. Variationsproblem med to funktioner og bibetingelser. Lad $F_0(t,x,y,p,q)$, $F_1(t,x,y,p,q)$, …, $F_k(t,x,y,p,q) \in C^2(\Omega)$, hvor Ω er en åben mængde i (t,x,y,p,q)-rummet. Et tilladt funktionspar (f,g) er et par af funktioner $x=f(t)$ $\in C^2([a_1,a_2])$, $y=g(t) \in C^2([a_1,a_2])$, som for $t=a_1$ og $t=a_2$ antager foreskrevne randværdier, og for hvilke $(t, f(t), f'(t), g(t), g'(t))$ $\in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} F_0(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t))\, dt$$

har lokalt ekstremum for funktionsparret (f,g) under bibetingelserne

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} F_1(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t))\, dt = c_1$$

$$\cdots$$

$$I_k = \int_{a_1}^{a_2} F_k(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t))\, dt = c_k,$$

hvor $c_1, \ldots, c_k$ er givne tal, da findes der et sæt af Lagrangeske multiplikatorer $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0,0,\ldots,0)$, således at når man sætter

$$I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 + \cdots + \lambda_k I_k = \int_{a_1}^{a_2} F(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t))\, dt,$$

hvor $$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_k F_k,$$

opfylder parret (f,g) de to til I hørende Eulerske differentialligninger

$$F'_x - \frac{d}{dt} F'_p = 0, \quad F'_y - \frac{d}{dt} F'_q = 0.$$

Det er (formentlig) nødvendigt at kalkere behandlingen af problemet med en funktion og bibetingelser. Antag, at I_0 har lokalt ekstremum for parret (f,g) under bibetingelserne $I_1 = c_1, \ldots, I_k = c_k$. Vælg funktioner

fortsættes

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_k \in C^2([a_1, a_2])$, som er 0 i a_1 og a_2.
Da er parret $(f+\varepsilon_0\varphi_0+\varepsilon_1\varphi_1+\dots+\varepsilon_k\varphi_k, g+\eta_0\psi_0+\eta_1\psi_1+\dots+\eta_k\psi_k)$ tilladt for alle punkter $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$ i en vis omegn af punktet $(0, \dots, 0)$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k$-rummet.
Sæt

$$\Phi_\nu(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_k)$$
$$= I_\nu(f+\varepsilon_0\varphi_0+\varepsilon_1\varphi_1+\dots+\varepsilon_k\varphi_k, g+\eta_0\psi_0+\eta_1\psi_1+\dots+\eta_k\psi_k)$$
$$(\nu = 0, 1, \dots, k).$$

Da har Φ_0 lokalt ekstremum i $(0, \dots, 0)$ under bibetingelserne $\Phi_1 = c_1, \dots, \Phi_k = c_k$, og følgelig gælder

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_0}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\Phi_0}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_0}{\partial\varepsilon_k} & \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta_0} & \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_0}{\partial\eta_k} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varepsilon_k} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_0} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi_k}{\partial\varepsilon_0} & \frac{\partial\Phi_k}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_k}{\partial\varepsilon_k} & \frac{\partial\Phi_k}{\partial\eta_0} & \frac{\partial\Phi_k}{\partial\eta_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_k}{\partial\eta_k} \end{pmatrix} \leq k,$$

hvor de afledede er taget i $(0, \dots, 0)$. Disse afledede er

$$\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial\varepsilon_\mu} = \int_{a_1}^{a_2} \underbrace{\left[F'_{\nu_x} - \frac{d}{dt}F'_{\nu_p}\right]}_{H_\nu} \varphi_\mu \, dt, \quad \frac{\partial\Phi_\nu}{\partial\eta_\mu} = \int_{a_1}^{a_2} \underbrace{\left[F'_{\nu_y} - \frac{d}{dt}F'_{\nu_q}\right]}_{K_\nu} \psi_\mu \, dt.$$

Altså gælder: Ethvert sæt af $k+1$ vektorer af formen

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} H_0 \varphi \, dt \\ \int_{a_1}^{a_2} H_1 \varphi \, dt \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} H_k \varphi \, dt \end{pmatrix}, \text{ hvor } \varphi \in C^2([a_1, a_2]), \varphi(a_1)=0, \varphi(a_2)=0,$$

eller

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} K_0 \psi \, dt \\ \int_{a_1}^{a_2} K_1 \psi \, dt \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} K_k \psi \, dt \end{pmatrix}, \text{ hvor } \psi \in C^2([a_1,a_2]), \ \psi(a_1)=0, \ \psi(a_2)=0,$$

er lineært afhængigt. Mængden M af alle sådanne vektorer udspænder altså et underrum i $z_0, z_1, \dots, z_k$-rummet af dimension $\leq k$ og er derfor indeholdt i en hyperplan. Lad $\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_k z_k = 0$, hvor $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0,0,\dots,0)$, være ligningen for en hyperplan, der indeholder M, og sæt

$$\mathcal{F} = \lambda_0 \mathcal{F}_0 + \lambda_1 \mathcal{F}_1 + \dots + \lambda_k \mathcal{F}_k .$$

Vi slutter da, at

$$\int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_k H_k) \varphi \, dt = 0, \quad \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 K_0 + \lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_k K_k) \psi \, dt = 0,$$

d.v.s.

$$\int_{a_1}^{a_2} \left[\mathcal{F}'_x - \frac{d}{dt} \mathcal{F}'_p \right] \varphi \, dt = 0 \quad , \quad \int_{a_1}^{a_2} \left[\mathcal{F}'_y - \frac{d}{dt} \mathcal{F}'_q \right] \psi \, dt = 0,$$

henholdsvis for alle $\varphi \in C^2([a_1,a_2])$ med $\varphi(a_1)=0$, $\varphi(a_2)=0$ og alle $\psi \in C^2([a_1,a_2])$ med $\psi(a_1)=0$, $\psi(a_2)$. Følgelig gælder for alle $t \in [a_1,a_2]$

$$\mathcal{F}'_x - \frac{d}{dt} \mathcal{F}'_p = 0 \quad , \quad \mathcal{F}'_y - \frac{d}{dt} \mathcal{F}'_q = 0,$$

d.v.s. parret (f,g) opfylder de to til $\mathcal{F}$ hørende Eulerske differentialligninger.

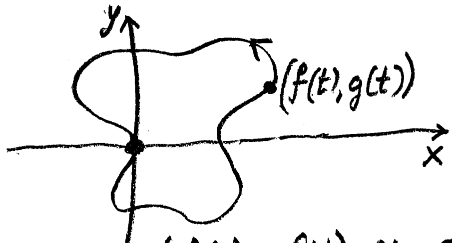
512. Det isoperimetriske problem. Søg $f\in C^2([0,1])$ og $g\in C^2([0,1])$ således, at $f(0), f(1), g(0), g(1)$ alle er 0, og $f'(t)^2+g'(t)^2>0$ for alle $t\in[0,1]$, og således at

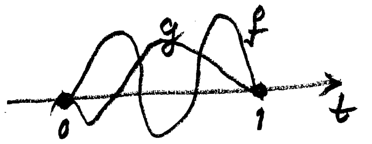
$$I_0=\frac{1}{2}\int_0^1(xy'-yx')\,dt$$

er maksimum for parret $(x,y)=(f(t),g(t))$ under bibetingelsen

$$I_1=\int_0^1\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\mathcal{L}.$$

Med betegnelserne fra opg. 511 er $\Omega=\{(t,x,y,p,q)\mid p^2+q^2>0\}$, $k=1$, $F_0=\frac{1}{2}(xq-yp)$, $F_1=\sqrt{p^2+q^2}$.





Nødvendig betingelse for, at I_0 er maksimum for parret $(x,y)=(f(t),g(t))$ under bibetingelsen $I_1=\mathcal{L}$ er, at der findes et par $(\lambda_0,\lambda_1)\neq(0,0)$ af Lagrangeske multiplikatorer, således at når man sætter $F=\lambda_0F_0+\lambda_1F_1$ gælder Euler ligningerne

$$F'_x-\frac{d}{dt}F'_p=0,\qquad F'_y-\frac{d}{dt}F'_q=0,$$

d.v.s.

$$\frac{1}{2}\lambda_0y'-\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\lambda_0y+\lambda_1\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_0x'-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\lambda_0x+\lambda_1\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=0$$

eller

$$\lambda_0y-\lambda_1\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\text{konst.}=\beta$$

$$-\lambda_0x-\lambda_1\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\text{konst.}=-\alpha.$$

Man ser, at $\lambda_0=0$ er umuligt, idet det, når buelængden s tages som parameter, ville give $\frac{dx}{ds}=$ konst., $\frac{dy}{ds}=$ konst., altså, under brug af endepunktsværdierne, $x=0$, $y=0$. Vi kan derfor tage $\lambda_0=1$, og idet vi i stedet for λ_1 skriver λ lyder ligningerne

fortsættes

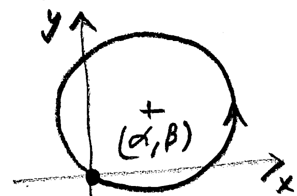
$$y-\beta = \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$x-\alpha = -\lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Man ser, at $\lambda = 0$ er umuligt, idet det, under brug af endepunktsværdierne, ville give $x=0, y=0$. Kvadrering og påfølgende addition giver

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \lambda^2. \qquad (\alpha^2+\beta^2=\lambda^2).$$

Bevægelsen $(x,y) = (f(t), g(t))$ forløber altså på den ved denne ligning bestemte cirkel.



Betingelsen $f'(t)^2 + g'(t)^2 > 0$ viser,
at cirklen gennemløbes mono-
tont. Betingelsen $I_1 = \mathcal{L}$ giver $2\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \mathcal{L}$. Man
ser, at positiv gennemløbsretning giver $I_0 = \pi(\alpha^2+\beta^2)$,
negativ gennemløbsretning giver $I_0 = -\pi(\alpha^2+\beta^2)$, og
skønner herefter, at positiv gennemløbsretning
giver maksimum, negativ gennemløbsretning
minimum af I_0 under bibetingelsen $I_1 = \mathcal{L}$.
Man ser, at maksimum indtræffer for uendelig
mange par $(f(t), g(t))$, idet (α,β) blot skal opfylde
betingelsen $\alpha^2+\beta^2 = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi^2}$, og, for givet (α,β), cirklen
med positivt gennemløb kan parametriseres på
mange måder. — Udregning af I_0 giver

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\alpha - \lambda\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)y' - \left(\beta + \lambda\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)x'\right]dt = -\frac{1}{2}\lambda\mathcal{L}.$$

Til positivt gennemløb svarer derfor negativt λ.