1. Bevis Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable: Hvis $f(x,y)$ er kontinuert i det afsluttede rektangel $R=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$ og $\varepsilon>0$, da findes et polynomium $p(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} c_{\nu\mu}x^\nu y^\mu$, for hvilket

$$|f(x,y)-p(x,y)|\leq\varepsilon \quad \text{for alle } (x,y)\in R.$$

Vink. Vis først, at gyldigheden for et vilkårligt rektangel følger af gyldigheden for kvadratet $R=\{(x,y)\mid x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$. Vis dernæst, at når $f(x,y)$ er kontinuert i dette kvadrat, og

$$p_{n,m}(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} f\left(\tfrac{\nu}{n},\tfrac{\mu}{m}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\binom{m}{\mu}y^\mu(1-y)^{m-\mu},$$

da findes til $\varepsilon>0$ tal n_0 og m_0 således, at når $n\geq n_0$ og $m\geq n_0$ er

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leq\varepsilon \quad \text{for alle } (x,y)\in R$$

[Vis ved brug af Čebyševs ulighed, at når

$$\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=M \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in R,\,(x_2,y_2)\in R\\ |x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta}}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=\omega(\delta),$$

gælder

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leq\omega(\delta)+\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{M}{2m\delta^2} \quad \text{for alle } (x,y)\in R$$

og vælg først δ og dernæst n_0 og m_0.]

$g(\xi,\eta)=f(a+(b-a)\xi,\ c+(d-c)\eta)$ pol $q(\xi,\eta)$ så $|g(\xi,\eta)-q(\xi,\eta)|<\varepsilon$ for alle $(\xi,\eta)\in\{(\xi,\eta)\mid \xi\in[0,1],\ \eta\in[0,1]\}$. Da $\left|f(x,y)-q\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-c}{d-c}\right)\right|\leq\varepsilon$ for alle $(x,y)\in\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\}$.

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\binom{m}{\mu}y^\mu(1-y)^{m-\mu}=1$$

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leq\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}\left|f(x,y)-f\left(\tfrac{\nu}{n},\tfrac{\mu}{m}\right)\right|\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}\binom{m}{\mu}y^\mu(1-y)^{m-\mu}$$

$$\leq\sum\sum_{\{(\nu,\mu)\mid |x-\frac{\nu}{n}|<\delta,\ |y-\frac{\mu}{m}|<\delta\}}\cdots+\sum\sum_{\{(\nu,\mu)\mid |x-\frac{\nu}{n}|\geq\delta\}}\cdots+\sum\sum_{\{(\nu,\mu)\mid |y-\frac{\mu}{m}|\geq\delta\}}\cdots$$

$$\leq\omega(\delta)+\frac{2M}{2n\delta^2}+\frac{2M}{2m\delta^2}=\omega(\delta)+\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{M}{2m\delta^2}.$$

Først $\delta>0$ så $\omega(\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$, dernæst n_0 og m_0 så $\frac{M}{2n_0\delta^2}\leq\frac{\varepsilon}{4}$, $\frac{M}{2m_0\delta^2}\leq\frac{\varepsilon}{4}$

2. Vis, at hvis $f(x)$ er kontinuert i $[0,1]$ og har en kontinuert differentialkvotient $f'(x)$, vil, idet

$$p_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu},$$

følgen af polynomier $p_n'(x)$ konvergere ligeligt mod $f'(x)$ i $[0,1]$.

Vink. Vis, at
$$p_n'(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{\nu+1}{n}\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu},$$
og vurder differensen mellem $p_n'(x)$ og
$$q_{n-1}(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1} f'\left(\frac{\nu}{n-1}\right)\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}.$$

$$p_n'(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}\nu x^{\nu-1}(1-x)^{n-\nu}-\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}(n-\nu)x^{\nu}(1-x)^{n-\nu-1}$$

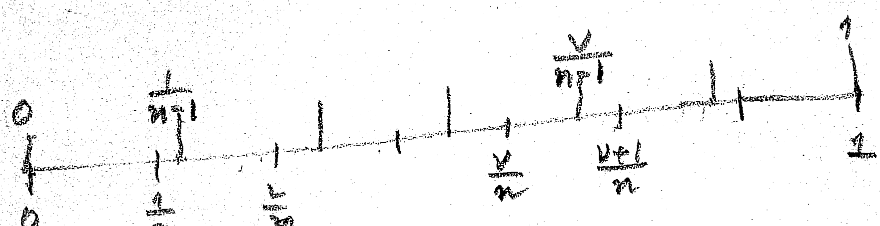
$$=\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu+1}{n}\right)\underbrace{\binom{n}{\nu+1}(\nu+1)}_{\frac{n!(\nu+1)}{(\nu+1)!(n-\nu-1)!}=n\binom{n-1}{\nu}}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}-\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\underbrace{\binom{n}{\nu}(n-\nu)}_{\frac{n!(n-\nu)}{(n-\nu)!\,\nu!}=n\binom{n-1}{\nu}}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{\nu+1}{n}\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}$$

$$|p_n'(x)-q_{n-1}(x)|\le\sum_{\nu=0}^{n-1}\left|\underbrace{\frac{f\left(\frac{\nu+1}{n}\right)-f\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{=f'(\xi_{\nu n})}-f'\left(\frac{\nu}{n-1}\right)\right|\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}.$$

$\frac{\nu}{n}<\xi_{\nu n}<\frac{\nu+1}{n}$

$\frac{\nu}{n}\le\frac{\nu}{n-1}\le\frac{\nu}{n+1}$



$$\omega_1(\delta)=\sup_{\substack{\xi\in[0,1]\\ \eta\in[0,1]\\ |\xi-\eta|<\delta}}|f'(\xi)-f'(\eta)|\to 0 \text{ for } \delta\to 0$$

$$|p_n'(x)-q_{n-1}(x)|\le\sum_{\nu=0}^{n-1}\omega_1\left(\tfrac{1}{n}\right)\binom{n-1}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-1-\nu}=\omega_1\left(\tfrac{1}{n}\right).$$

Heraf $p_n'(x)-q_{n-1}(x)\to 0$ ligeligt i $[0,1]$ når $n\to\infty$

Desuden $q_{n-1}(x)\to f'(x)$

Altså $p_n'(x)\to f'(x)$ ligeligt i $[0,1]$ når $n\to\infty$

3. Vis ved udregning af udtrykket på venstre side, at

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left(x-\frac{\nu}{n}\right)^4\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}<\frac{1}{4n^2}\quad\text{for } 0\le x\le 1.$$

Vis herved, at (for $\delta>0$)

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ |x-\frac{\nu}{n}|\ge\delta}}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}<\frac{1}{4n^2\delta^4}\quad\text{for } 0\le x\le 1.$$

Vis herved den stærke form af de store tals lov": Spilles et spil, som der er sandsynligheden x for at vinde, gentagne gange uafhængigt af hinanden, og betegner $\nu(n)$ antallet af vundne spil blandt de n første spil, da vil sandsynligheden for at samtlige forhold $\frac{\nu(n)}{n}, \frac{\nu(n+1)}{n+1}, \dots, \frac{\nu(n+p)}{n+p}$ afviger mindre end δ fra x, være nær 1, når blot n er stor (uafhængig hvor stor p er).

Vink: Udtrykket er et polynomium i x af grad 4, som er 0 både for $x=0$ og $x=1$. Det har derfor $x(1-x)$ som divisor.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & \sum_0^n\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}=(x+y)^n\\
-4\frac{x^3}{n} & \sum\nu\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}=nx(x+y)^{n-1}\\
6\frac{x^2}{n^2} & \sum\nu^2\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}=nx(x+y)^{n-1}+n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}\\
-4\frac{x}{n^3} & \sum\nu^3\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}=nx(x+y)^{n-1}+3n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}+n(n-1)(n-2)x^3(x+y)^{n-3}\\
\frac{1}{n^4} & \sum\nu^4\binom{n}{\nu}x^\nu y^{n-\nu}=nx(x+y)^{n-1}+7n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}+6n(n-1)(n-2)x^3(x+y)^{n-3}\\
 & \qquad +n(n-1)(n-2)(n-3)x^4(x+y)^{n-4}
\end{array}$$

$y=1-x$

Da $\left(x-\frac{\nu}{n}\right)^4=x^4-4\frac{x^3}{n}\nu+6\frac{x^2}{n^2}\nu^2-4\frac{x}{n^3}\nu^3+\frac{1}{n^4}\nu^4$

$$\sum_0^n\left(x-\frac{\nu}{n}\right)^4\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}=\frac{1}{n^3}\left(x^4(3n-6)+x^3(-6n+12)+x^2(3n-7)+x\right)$$

$$=\frac{x(1-x)}{n^3}\left(1+(3n-6)x(1-x)\right)$$

for $n\ge 2$ $\quad <\dfrac{\frac14}{n^3}\left(1+(3n-6)\frac14\right)=\dfrac{\frac{3}{16}n-\frac18}{n^3}<\dfrac{3}{16n^2}<\dfrac{1}{4n^2}$

for $n=1$ $\quad =x(1-x)(1-3x(1-x))<\frac14=\frac{1}{4n^2}$

Heraf

$$\delta^4\sum_{\substack{\nu=0\\ |x-\frac{\nu}{n}|\ge\delta}}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}<\frac{1}{4n^2\delta^4}$$

Heraf: Sandsynligheden for at mindst et af tallene

$\frac{v(n)}{n}, \frac{v(n+1)}{n+1}, \dots, \frac{v(n+p)}{n+p}$ afviger mindst δ fra x er

$$< \frac{1}{4n^2\delta^4} + \frac{1}{4(n+1)^2\delta^4} + \dots + \frac{1}{4(n+p)^2\delta^4}$$

$$< \frac{1}{4\delta^4} \sum_{\nu=n}^{n+p} \frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{4\delta^4} \int_{n-1}^{n+p-1} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{4\delta^2}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p-1}\right] < \frac{1}{4\delta^2(n-1)}$$

altså lille for alle p når blot n er stor.

<u>Variant</u> ved frembringende funktion.

$$\sigma_p = n^p \sum_{\nu=0}^{n} \left(x - \frac{\nu}{n}\right)^p \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (nx-\nu)^p \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} [(n-\nu)x - \nu(1-x)]^p \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

$$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p \frac{t^p}{p!} = \sum_{\nu=0}^{n} e^{[(n-\nu)x - \nu(1-x)]t} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left[x e^{-(1-x)t}\right]^\nu \left[(1-x) e^{xt}\right]^{n-\nu}$$

$$= \left\{x e^{-(1-x)t} + (1-x) e^{xt}\right\}^n$$

$$= \Big\{ x\left[1 - \frac{1-x}{1!}t + \frac{(1-x)^2}{2!}t^2 - \frac{(1-x)^3}{3!}t^3 + \frac{(1-x)^4}{4!}t^4 \dots\right]$$
$$+ (1-x)\left[1 + \frac{x}{1!}t + \frac{x^2}{2!}t^2 + \frac{x^3}{3!}t^3 + \frac{x^4}{4!}t^4 + \dots\right]\Big\}^n$$

$$= \left\{1 + \frac{x(1-x)}{2!}t^2 + \frac{x(1-x)(2x-1)}{3!}t^3 + \frac{x(1-x)(1-3x(1-x))}{4!}t^4 + \dots\right\}^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{x(1-x)}{2!}t^2 + \dots\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x(1-x)}{2!}t^2 + \dots\right)^2 + \dots$$

$$\frac{\sigma_4}{4!} = \binom{n}{1}\frac{x(1-x)(1-3x(1-x))}{4!} + \binom{n}{2}\left(\frac{x(1-x)}{2!}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_4}{n^4} = \sum_{\nu=0}^{n}\left(x - \frac{\nu}{n}\right)^4 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \frac{1}{n^4}\left(n\, x(1-x)(1-3x(1-x)) + n(n-1)\,3\,(x(1-x))^2\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n^3}\left(1 - 3x(1-x) + 3(n-1)x(1-x)\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n^3}\left(1 + (3n-6)x(1-x)\right)$$

4. Bevis Weierstrass' sætning for trigonometrisk approksimation: Hvis $f(t)$ er kontinuert i $]-\infty,+\infty[$ og har perioden 2π, da findes for ethvert $\varepsilon>0$ et trigonometrisk polynomium

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t),$$

for hvilket $\quad |f(t) - p(t)| \le \varepsilon$ for alle t.

Vink. Betragt den i hele xy-planen ved

$$F(r\cos t, r\sin t) = r f(t) \qquad (r \ge 0, -\infty < t < +\infty)$$

definerede funktion $F(x,y)$. Anvend Weierstrass' sætning på denne i kvadratet $\{(x,y) \mid x\in[-1,1], y\in[-1,1]\}$, (Mr. opg. [illegible]) og sæt $(x,y) = (\cos t, \sin t)$. Benyt dernæst formlerne for omskrivning af et produkt af to trigonometriske funktioner til en sum eller differens af to sådanne.

F åbenbart defineret (da f perioden 2π), åbenbart kontinuert for $(x,y) \neq (0,0)$. Også for $(x,y) = 0$, thi $\sup|f(t)| = M < \infty$, og $|f(x,y)| \le rM < \eta$ når $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\delta}{M}$.

Til $\varepsilon > 0$ findes altså $p(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu$ så

$|F(x,y) - p(x,y)| \le \varepsilon$ for alle $(x,y) \in \{(x,y) \mid x\in[-1,1], y\in[-1,1]\}$

specielt

$|F(\cos t, \sin t) - p(\cos t, \sin t)| \le \varepsilon$ for alle t eller

$$\Big|f(t) - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} \cos^\nu t \sin^\mu t}_{c_0 + \sum_{\lambda=1}^{n+m}(c_\lambda \cos\lambda t + d_\lambda \sin\lambda t)}\Big| \le \varepsilon \quad \text{for alle } t.$$

ved successiv brug af $\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$

$\cos u \sin v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) - \sin(u-v))$

$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) - \cos(u-v))$

5. Vis, at en funktion $f(x)$ på $]-\infty,+\infty[$ er kontinuert, hvis og kun hvis der findes en følge $\{p_n(x)\}$ af polynomier der konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a,b]$

"hvis" klart

"kun hvis": $p_n(x)$ så at $|f(x)-p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ i $[-n,n]$.

For givet $[a,b]$ gælder da for $n \geq \max\{|a|,|b|\}$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-p_n(x)| \leq \sup_{x\in[-n,n]} |f(x)-p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

altså konvergerer $\{p_n(x)\}$ ligeligt mod $f(x)$ på $[a,b]$.

6. Idet K betegner klassen af alle funktioner på $]-\infty,+\infty[$, sættes for $f\in K, g\in K$

$\mathrm{dist}(f,g)=\|f-g\|$, hvor $\|f\|=\sup_{x\in R}\{|f(x)|\wedge\frac{1}{x^2+1}\}$.

Vis, at K med denne afstandsdefinition er et metrisk rum.

Vis, at når $f\in K$ og $f_n\in K$, $n=1,2,\dots$, gælder $\mathrm{dist}(f,f_n)\to 0$, hvis og kun hvis $f_n(x)$ konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a,b]$.

[Sætningen i opg. 5 kan derfor udtrykkes således: I det metriske rum (K,dist) er klassen af alle kontinuerte funktioner afslutningen af klassen af alle polynomier.]

Klart, at $0\leq\|f\|\leq 1$ for alle $f\in K$, og $\|f\|=0$ hvis og kun hvis $f=0$. Klart, at $\|-f\|=\|f\|$.

$\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$. Thi sættes $\|f\|=\alpha$ og $\|g\|=\beta$

er $|f(x)|\leq\alpha$ når $\frac{1}{x^2+1}>\alpha$

$|g(x)|\leq\beta$ når $\frac{1}{x^2+1}>\beta$

altså $|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|\leq\alpha+\beta$ når $\frac{1}{x^2+1}>\alpha+\beta$

altså $\|f+g\|\leq\alpha+\beta$.

Heraf ses, at (K,dist) er metrisk rum.

Skal vise: $\mathrm{dist}(f,f_n)\to 0 \Leftrightarrow f_n(x)\to f(x)$ ligeligt på ethvert $[a,b]$.

Ensbetydende med

$\|f_n\|\to 0 \Leftrightarrow f_n(x)\to 0$ ligeligt på ethvert ~~$[a,b]$~~ $[-c,c]$

Sæt $\|f\|_c=\sup_{x\in[-c,c]}|f(x)|$.

Skal vise $\|f_n\|\to 0 \Longleftrightarrow \|f_n\|_c\to 0$ for alle c

Klart, at $\|f\|\leq\|f\|_c\vee\frac{1}{c^2+1}$

Antag $\|f_n\|_c\to 0$ for alle c. Vælg c så $\frac{1}{c^2+1}<\varepsilon$ og N så $\|f_n\|_c<\varepsilon$ for $n\geq N$. Da er $\|f\|<\varepsilon$ for $n\geq N$

altså $\|f\|\to 0$.

Klart, at $\|f\|\geq\sup_{[-c,c]}(|f(x)|\wedge\frac{1}{c^2+1})=\|f\|_c\wedge\frac{1}{c^2+1}$

Antag $\|f_n\|\to 0$. Da fås $\|f_n\|_c\to 0$

7. Vis, at der i klassen K af alle funktioner på $]-\infty,+\infty[$ ikke findes nogen afstandsdefinition $\mathrm{dist}(f,g)$ således at 1) (K, dist) er et metrisk rum; 2) $\mathrm{dist}(f, f_n) \to 0$ hvis og kun hvis $f_n(x) \to f(x)$ for alle x.

Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

Antaget, at $\mathrm{dist}(f,g)$ var en sådan afstandsfunktion.

For et vilkårligt ξ sættes $f_\xi = 1_{\{\xi\}}$ d: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = \xi \\ 0 & \text{for } x \neq \xi. \end{cases}$

For ethvert $a > 0$ må mængden $\{\xi \mid \mathrm{dist}(f_\xi, 0) \geq a\}$ være endelig. Thi var den uendelig, indeholdt den en følge $\xi_1, \xi_2, \dots$. $f_{\xi_n}(x) \to 0$ for ethvert x, altså $\mathrm{dist}(f_{\xi_n}, 0) \to 0$, modstrid.

Men: $\mathrm{dist}(f_\xi, 0) > 0$ for ethvert ξ. Altså

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi \mid \mathrm{dist}(f_\xi, 0) \geq \tfrac{1}{n}\}$$ endelig eller numerabel,

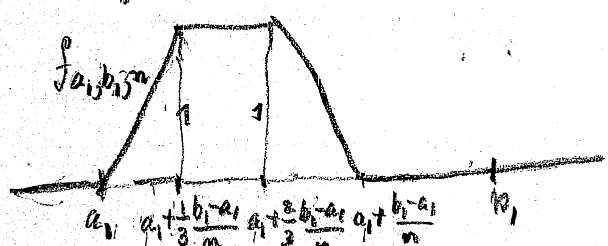
modstrid.

NB: Resultatet følger også af opg. 8.

8*. Vis, at der i klassen C af alle kontinuerte funktioner på $]-\infty,+\infty[$ ikke findes nogen afstandsfunktion $\operatorname{dist}(f,g)$, således at 1) (C,dist) er et metrisk rum; 2) $\operatorname{dist}(f,f_n)\to 0$ hvis og kun hvis $f_n(x)\to f(x)$ for alle x.

Antages, at $\operatorname{dist}(f,g)$ var en sådan afstandsdefinition:

For givne a_1, b_1 $a_1<b_1$ betragtes den viste følge.



$f_{a_1,b_1,n}(x)\to 0$ for alle x, altså $\operatorname{dist}(f_{a_1,b_1,n},0)\to 0$

Kan vælge n_1 så $|\operatorname{dist}(f_{a_1,b_1,n_1},0)|\leq 1.$

Sætter $a_1+\frac{1}{3}\frac{b_1-a_1}{n_1}=a_2$, $a_1+\frac{2}{3}\frac{b_1-a_1}{n_2}=b_2$.

Kan vælge n_2 så $|\operatorname{dist}(f_{a_2,b_2,n_2},0)|\leq \frac{1}{2}$

etc. For følgen (f_{a_p,b_p,n_p}) gælder da $\operatorname{dist}(f_{a_p,b_p,n_p},0)\to 0$

altså $f_{a_p,b_p,n_p}(x)\to 0$ for alle x.

Men $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$ har fælles punkt x.

I dette er $f_{a_p,b_p,n_p}(x)=1$ for alle x. Modstrid.

9. Om en kontinuert funktion $\varphi(x)$ på $[a,b]$ vides, at
$$\int_a^b x^n \varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{for alle hele } n \geq 0.$$
Vis, at $\varphi(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.
Vink: Vis, at $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$ for enhver kontinuert funktion $f(x)$ på $[a,b]$.

For polynomium $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ er $\int_a^b p(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_a^b x^n \varphi(x)\,dx = 0$.

For vilkårligt kontinuert $f(x)$ på $[a,b]$ vælges følge af polynomier $p_n(x)$, så $p_n(x) \to f(x)$ ligeligt på $[a,b]$.
Da $\varphi(x)$ kontinuert på $[a,b]$ altså begrænset følger
$$p_n(x)\varphi(x) \to f(x)\varphi(x) \text{ ligeligt på } [a,b].$$
altså
$$\underbrace{\int_a^b p_n(x)\varphi(x)\,dx}_{=0} \to \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$
hvoraf $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$.

Vælg $f = \varphi$. Da fås $\int_a^b \varphi(x)^2\,dx = 0$. Da φ kontinuert giver det $\varphi(x) = 0$ for alle $x \in [a,b]$.

10. Vis, at hvis $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ er kontinuerte funktioner på et interval $[\alpha,\beta]$, for hvilke
$$\int_\alpha^\beta [\varphi(t)]^n\,dt = \int_\alpha^\beta (\psi(t))^n\,dt \quad \text{for alle hele } n \geq 0,$$
da gælder
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,dt$$
for enhver kontinuert funktion $f(x)$ på $]-\infty,+\infty[$. Vis herved, at φ og ψ har samme værdimængde.

Eksempel: Om en kontinuert funktion $\varphi(t)$ på $[0,1]$ vides, at
$$\int_0^1 (\varphi(t))^n\,dt = \frac{1}{n+1} \quad \text{for alle hele } n \geq 0.$$
Find værdimængden for φ.

For ethvert polynomium $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ fås
$$\int_\alpha^\beta p(\varphi(t))\,dt = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_\alpha^\beta (\varphi(t))^n\,dt = \sum_{n=0}^{N} a_n \int_\alpha^\beta (\psi(t))^n\,dt = \int_\alpha^\beta p(\psi(t))\,dt.$$
Hvis $p_n(x) \to f(x)$ ligeligt på ethvert interval, specielt ligeligt på $\varphi([\alpha,\beta])$ og $\psi([\alpha,\beta])$, altså $p_n(\varphi(t))$ ligeligt mod $f(\varphi(t))$ og $p_n(\psi(t))$ ligeligt mod $f(\psi(t))$ på $[\alpha,\beta]$. Følgelig
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt = \lim \int_\alpha^\beta p_n(\varphi(t))\,dt = \lim \int_\alpha^\beta p_n(\psi(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,dt.$$

$\varphi([\alpha,\beta]) = [c,d]$. Vælg $f(x) = \mathrm{dist}(x,[c,d])$.

Da er $f(\varphi(t)) = 0$ for alle t, altså
$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,dt = 0. \quad \text{Men } f(\psi(t)) \text{ kont.} \geq 0,$$
altså $f(\psi(t)) = 0$ for alle t, $\therefore$ $\psi([\alpha,\beta]) \subseteq [c,d] = \varphi([\alpha,\beta])$

Ved bogstavombytning: $\varphi([\alpha,\beta]) \subseteq \psi([\alpha,\beta])$.

Altså $\varphi([\alpha,\beta]) = \psi([\alpha,\beta])$.

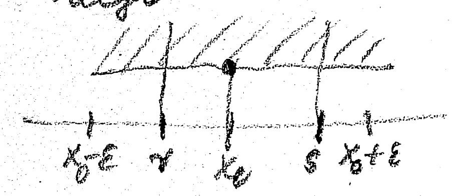
Eksempel. For $\psi(t) = t^n$ på $[0,1]$ er $\int_0^1 (\psi(t))^n\,dt = \frac{1}{n+1}$.

Altså $\varphi([0,1]) = \psi([0,1]) = [0,1]$.

11*. En funktion $f(x)$ på $]-\infty,+\infty[$ siges at have et lokalt minimum i punktet x_0, hvis der findes et $\varepsilon > 0$, således at $f(x) \geq f(x_0)$ for alle $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$. Vis, at hvis $f(x)$ har et lokalt minimum i ethvert punkt x_0, er værdimængden for f enten endelig eller numerabel. Angiv en funktion $f(x)$ med numerabel værdimængde, som har lokalt minimum i ethvert punkt x_0.

Vink: Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

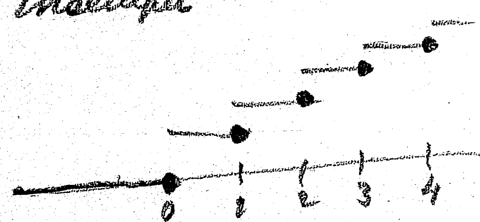
Til x_0 vælges $\varepsilon > 0$. Rationale tal $r \in]x_0-\varepsilon, x_0[$ og $s \in]x_0, x_0+\varepsilon[$ vælges:



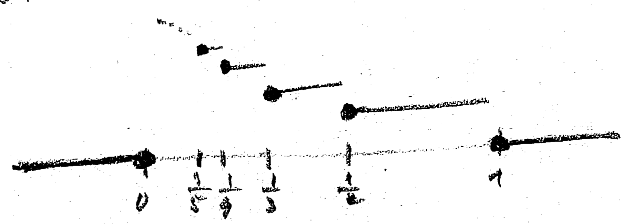
Da er $f(x_0) = \inf_{x \in [r,s]} f(x)$.

Men $\{\inf_{x\in[a,b]} f(x) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a<b\}$ er endelig eller numerabel.

Eksempel

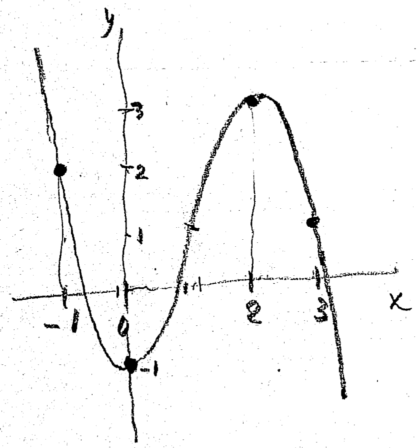


eller



12. Find såvel ved Newtons som ved Lagranges interpolationsformel det polynomium af højst 3. grad, som for $x = -1, 0, 2, 3$ antager værdierne $y = 2, -1, 3, 1$

$x =$	-1	0	2	3
$y =$	2	-1	3	1



Newton (Beg. m. $(0,-1)$)

$$y = -1 + c_1 x + c_2 x(x+1) + c_3 x(x+1)(x-2)$$

$x = -1$ $\quad 2 = -1 - c_1$ $\qquad c_1 = -3$

$x = 2$ $\quad 3 = -1 - 6 + c_2 6$ $\qquad c_2 = \frac{5}{3}$

$x = 3$ $\quad 1 = -1 - 9 + 20 + c_3 12$ $\qquad c_3 = -\frac{3}{4}$

$$y = -1 - 3x + \frac{5}{3}(x^2 + x) - \frac{3}{4}(x^3 - x^2 - 2x)$$

$$= -1 + \frac{1}{6}x + \frac{29}{12}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Lagrange

$2 \quad \frac{x(x-2)(x-3)}{-12} = -\frac{1}{12}(x^3 - 5x^2 + 6x \quad)$

$-1 \quad \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{6} = \frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 + x + 6)$

$3 \quad \frac{(x+1)\,x\,(x-3)}{-6} = -\frac{1}{6}(x^3 - 2x^2 - 3x \quad)$

$1 \quad \frac{(x+1)\,x\,(x-2)}{12} = \frac{1}{12}(x^3 - x^2 - 2x \quad)$

$$y = \frac{1}{12}(-9x^3 + 29x^2 + 2x - 12)$$

$$= -\frac{3}{4}x^3 + \frac{29}{12}x^2 + \frac{1}{6}x - 1$$

Graph: $y' = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{29}{6}x + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}(27x^2 - 58x - 2) = 0$

for $x = \frac{58 \pm \sqrt{3580}}{54} = \text{ca } \frac{58 \pm 60}{54} = \text{ca} \begin{cases} -\frac{1}{27} \\ \frac{59}{27} \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 58^2 = 2504 \\ 86 \\ \hline 3364 \\ + \quad 216 \\ \hline 3580 \end{array}$$

13. Vis, at hvis et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ for heltallige værdier af x antager heltallige værdier, er koefficienterne $a_0, a_1, \ldots, a_n$ rationale tal. Giv nogle eksempler på polynomier af denne art, hvis koefficienter ikke alle er hele tal.

---

p er bestemt ved tabel

$x =$	0	1	2	$\cdots$	n
$y =$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

hvor $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ er hele. Newton's eller Lagranges interpolationsformel viser, at $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er rationale.

$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$ er hel for hele x

$\frac{x(x+1)(x+2)}{3!} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ er hel for hele x

$\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{n!} = \cdots + \frac{1}{n!}x^n$ er hel for hele x.

thi $= 0$ for $x = -(n-1), \ldots, -2, -1, 0$.

for x hel > 0 $= \binom{x+n-1}{n}$

for x hel $< -(n-1)$ $= (-1)^n \frac{(-x)(-x-1)\cdots(-x-n+1)}{n!}$

$= (-1)^n \binom{-x}{n}$.

For p primtal

$\frac{x^p - x}{p}$ hel for hele x ("lille Fermat")

14. Betragt Peanos kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $0 \le t \le 1$.

1) Gør rede for, at mængden af kurvepunkter svarende til et interval $\frac{k-1}{9^n} \le t \le \frac{k}{9^n}$, hvor k er et fast tal, for hvilket $1 \le k \le 9^n$, er et afsluttet kvadrat med side $\frac{1}{3^n}$.

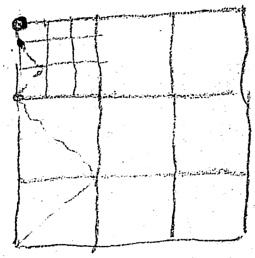
2) Vis, at der findes en og kun en parameterværdi, for hvilken a) $(f(t), g(t)) = (0,1)$ b) $(f(t), g(t)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ c) $(f(t), g(t)) = (1,0)$, og find disse parameterværdier.

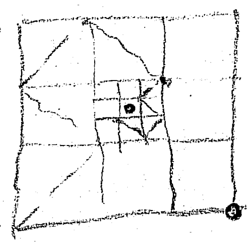
3) Vis, at der findes netop fire parameterværdier, for hvilke $(f(t), g(t)) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, og find disse.

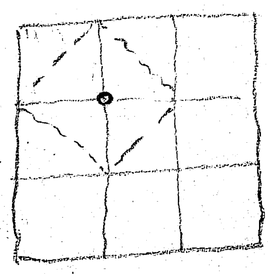
---

1) Klart

2) Entydighed klar

a) 

b) 



a) $\frac{2}{9} \le t \le \frac{3}{9}$, $\frac{2}{9} + \frac{2}{81} \le t \le \frac{2}{9} + \frac{3}{81}$, etc

$$t = \frac{2}{9} + \frac{2}{81} + \cdots = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$$

b) $\frac{4}{9} \le t \le \frac{5}{9}$, $\underbrace{\frac{4}{9} + \frac{4}{81}}_{\frac{40}{81}} \le t \le \underbrace{\frac{4}{9} + \frac{5}{81}}_{\frac{41}{81}}$, etc

$$t = \frac{1}{2}$$

c) $t = \frac{3}{4}$, som a) bagfra.

3) Sæt t i hvert af int $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$, $]\frac{2}{9}, \frac{3}{9}[$, $]\frac{3}{9}, \frac{4}{9}[$, $[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]$

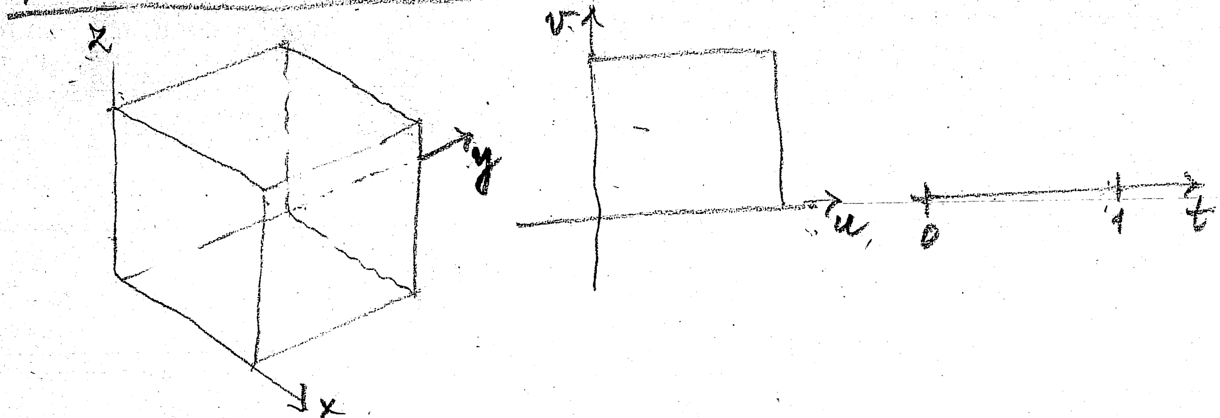
nemlig $t = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$ (jf a))

$t = \frac{2}{9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{11}{36}$ (jf c))

$t = \frac{3}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$ (jf a))

$t = \frac{4}{9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{19}{36}$ (jf c)).

15. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y,z) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $0 \le t \le 1$, i (x,y,z)-rummet, der tilhører terningen $\{(x,y,z) \mid x \in [0,1], y \in [0,1], z \in [0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af den.

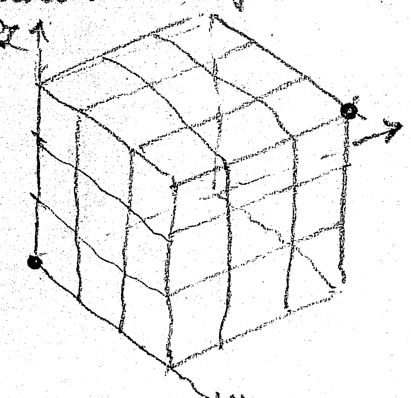


(f, g) parret fra Peanos kurve

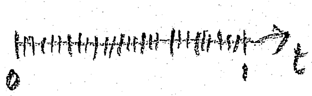
$$\begin{pmatrix} x = f(u) \\ y = g(u) \\ z = v \end{pmatrix} \circ \begin{cases} u = f(t) \\ v = g(t) \end{cases} = \begin{pmatrix} x = f(f(t)) \\ y = g(f(t)) \\ z = g(t) \end{pmatrix}$$

afbilder $[0,1]^2$ på $[0,1]^3$ — afbilder $[0,1]$ på $[0,1]^2$ — afbilder $[0,1]$ på $[0,1]^3$

Anden mulighed: Imitere konstruktionen af Peanos kurve



Dele i 27 terninger kant $\frac{1}{3}$ og i 27 intervaller længde $\frac{1}{27}$.



Nummerere:

Nederste lag

3	4	9
2	5	8
1	6	7

Mellemste lag

16	15	10
17	14	11
18	13	12

Øverste lag

21	22	27
20	23	26
19	24	25

Herved fra hjørne til modsat hjørne.

etc.

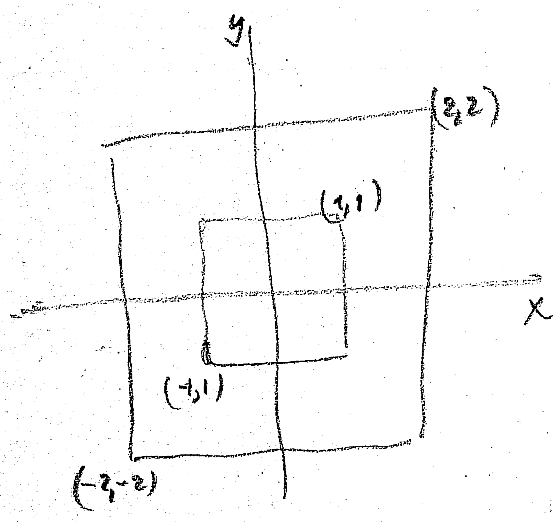
16. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $-\infty<t<+\infty$, der indeholder ethvert punkt i xy-planen.

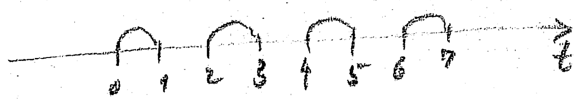
(φ,ψ) parret fra Peanos kurve.

$$(f(t),g(t)) = (-1+2\varphi(t), -1+2\psi(t)) \qquad 0\le t\le 1$$
$$(f(t),g(t)) = (-2+4\varphi(t-2), -2+4\psi(t-2)) \qquad 2\le t\le 3$$

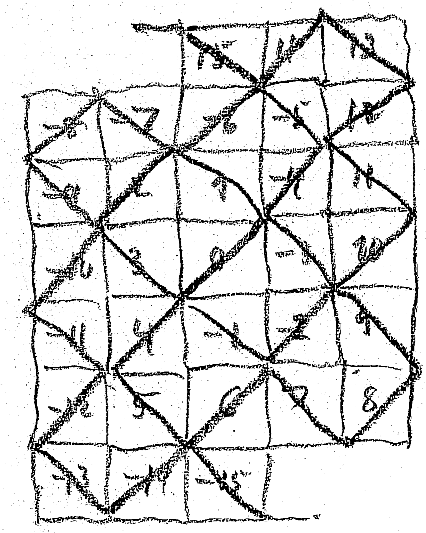
etc

konst for $t<0$, lineær i $1\le t\le 2$, $3\le t\le 4$, etc



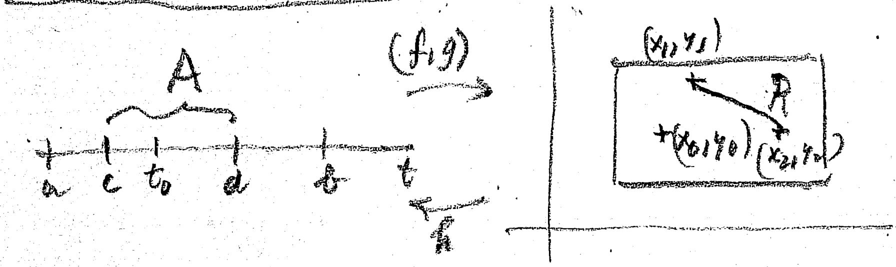


Anden mulighed. I hvert interval $[k,k+1]$ Peano-kurve i kvadrat med side 1 svarende til viste nummerering



— pos numre
— neg numre

17. Et punkt (x_0,y_0) kaldes et multipelt punkt af en kontinuert kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $a\le t\le b$, hvis $(f(t),g(t))=(x_0,y_0)$ for mindst to værdier af t. Vis, at hvis en kontinuert kurve indeholder alle punkter af et rektangel $R=\{(x,y)\mid x\in[x_1,x_2],\ y\in[y_1,y_2]\}$, da har kurven et multipelt punkt i R [og følgelig også i ethvert delrektangel af R, d.v.s. de multiple punkter ligger overalt tæt i R.]



Antage intet multipelt punkt i R.

$A=(f,g)^{-1}(R)$ er kompakt del af $[a,b]$.

$(f,g)|_A$ afbilder A ~~kontinuert~~ og bijektivt på R.

$h=((f,g)_A)^{-1}$ afbilder R kontinuert og bijektivt på A

følgelig A afsluttet delinterval $[c,d]$ af $[a,b]$

<u>1. version.</u> Vælg punkt $(x_0,y_0)\in R$ og sæt $t_0=h(x_0,y_0)$

$h|_{R\setminus\{(x_0,y_0)\}}$ afbilder $R\setminus\{(x_0,y_0)\}$ kontinuert på $[c,d]\setminus\{t_0\}$

en sammenhængende mængde på en usammenhængende. Modstrid.

<u>2. version.</u> Lad $(f,g)(c)=(x_1,y_1)$, $(f,g)(d)=(x_2,y_2)$ og betragt h på linjestykket (x_1,y_1), (x_2,y_2), d.v.s

$j(\tau)=h(x_1+(x_2-x_1)\tau,\ y_1+(y_2-y_1)\tau)$, $0\le\tau\le 1$. Værdimængden for j må da være $[c,d]$. Modstrid.

18. Betragt Peanos kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $0 \leq t \leq 1$.

Vis, at det om enhver af funktionerne $f(t)$ og $g(t)$ gælder, at den hverken er differentiabel fra højre eller fra venstre i noget punkt af intervallet $0 \leq t \leq 1$.

For ethvert $t \in [0,1[$ er f og g ikke differentiable fra højre

— $t \in]0,1]$ venstre

$t \in [0,1[$ n så stor, at $\frac{2}{9^n} \leq 1-t$ k så at $\frac{k}{9^n} \leq t < \frac{k+1}{9^n}$

som er $< \frac{k+2}{9^n} \leq 1$.

Til $\frac{k+1}{9^n}$ og $\frac{k+2}{9^n}$ svarer på Peanos kurve modsatte hjørner i et kvadrat af $n$te deling. Følgelig er

$$\left| f\left(\frac{k+2}{9^n}\right) - f\left(\frac{k+1}{9^n}\right) \right| = \frac{1}{3^n}.$$

For $t_n =$ enten $\frac{k+1}{9^n}$ eller $\frac{k+2}{9^n}$ haves da

$$|f(t_n) - f(t)| \geq \frac{\frac{1}{2}}{3^n} \qquad 0 < t_n - t \leq \frac{2}{9^n}.$$

Heraf $t_n \to t$ fra højre

$$\left| \frac{f(t_n) - f(t)}{t_n - t} \right| \geq \frac{\frac{1}{2}}{3^n} \frac{9^n}{2} = \frac{3^n}{4} \quad \text{altså} \left| \frac{f(t_n) - f(t)}{t_n - t} \right| \to \infty \text{ for } n \to \infty.$$

Følgelig f ikke differentiabel fra højre i t.

Analogt g

Analogt for venstre.

Eller benytte $f(t) = 1 - f(1-t)$, $g(t) = 1 - g(1-t)$.

19. Betragt Peanos kurve $(x,y) = (f(t), g(t)), 0 \leq t \leq 1$.

Vis, at der for enhver kontinuert funktion $H(x,y)$ i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ gælder

$$\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 H(f(t), g(t))\,dt.$$

Eksempel: $\int_0^1 f(t)^n g(t)^m\,dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$

for alle hele $n \geq 0$ og $m \geq 0$.

$$\int_0^1 H(f(t), g(t))\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{q^n-1} H\left(f\left(\frac{k}{q^n}\right), g\left(\frac{k}{q^n}\right)\right)\cdot\frac{1}{q^n}$$

Men $\left(f\left(\frac{k}{q^n}\right), g\left(\frac{k}{q^n}\right)\right)$ ligger i det k^{te} kvadrat af den n^{te} deling, hvis areal er $\frac{1}{q^n}$

$$\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{q^n-1} H\left(f\left(\frac{k}{q^n}\right), g\left(\frac{k}{q^n}\right)\right)\frac{1}{q^n}.$$

Heraf formlen.

20. Vis, at hvis to kontinuerte kurver $(x,y) = (\varphi_1(t), \psi_1(t))$ og $(x,y) = (\varphi_2(t), \psi_2(t))$ med samme parameterinterval $a \leq t \leq b$ opfylder betingelsen

$$\int_a^b \varphi_1(t)^n \psi_1(t)^m dt = \int_a^b \varphi_2(t)^n \psi_2(t)^m dt$$

for alle hele $n \geq 0$ og $m \geq 0$, da indeholder de to kurver de samme punkter.

Vink. Vis først ved hjælp af Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable, (kr. opg. 9), at hvis $\mathcal{H}(x,y)$ er kontinuert i et afsluttet rektangel, der indeholder de to kurver, er

$$\int_a^b \mathcal{H}(\varphi_1(t), \psi_1(t))dt = \int_a^b \mathcal{H}(\varphi_2(t), \psi_2(t))dt$$

For polynomium $p(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu$ er

$$\int_a^b p(\varphi_1(t), \psi_1(t))dt = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} \int_a^b \varphi_1(t)^\nu \psi_1(t)^\mu dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu} \int_a^b \varphi_2(t)^\nu \psi_2(t)^\mu dt = \int_a^b p(\varphi_2(t), \psi_2(t))dt$$

$(p_n(x,y))$ følge af pol. der konvergerer ligeligt mod $\mathcal{H}(x,y)$ i rektanglet. Da konvergerer følgen $p_n(\varphi_j(t), \psi_j(t))$ ligeligt mod $\mathcal{H}(\varphi_j(t), \psi_j(t))$ i $a \leq t \leq b$. Altså

$$\int_a^b \mathcal{H}(\varphi_1(t), \psi_1(t))dt = \lim \int_a^b p_n(\varphi_1(t), \psi_1(t))dt$$

$$= \lim \int_a^b p_n(\varphi_2(t), \psi_2(t))dt = \int_a^b \mathcal{H}(\varphi_2(t), \psi_2(t))dt.$$

$A_j = \{(\varphi_j(t), \psi_j(t)) \mid a \leq t \leq b\}$ er kompakt.

$\mathcal{H}(x,y) = \operatorname{dist}((x,y), A_1)$. Da er $\int_a^b \mathcal{H}(\varphi_1(t), \psi_1(t))dt = 0$, altså $\int_a^b \underbrace{\mathcal{H}(\varphi_2(t), \psi_2(t))}_{\geq 0} dt = 0$ altså $\mathcal{H}(\varphi_2(t), \psi_2(t)) = 0$ for alle $t \in [a,b]$, d.v.s. $A_2 \subseteq A_1$. Analogt $A_1 \subseteq A_2$

Altså $A_1 = A_2$.

21*. Vis, at hvis en kontinuert kurve $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$, $0\leq t\leq 1$, opfylder betingelsen

$$\int_0^1 \varphi(t)^n \psi(t)^m \, dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$$

for alle hele $n\geq 0$ og $m\geq 0$, da tilhører den kvadratet $\{(x,y) \mid x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af dette, og ingen af funktionerne φ og ψ er differentiabel i noget punkt af intervallet $0\leq t\leq 1$.

Opg 19 og opg 20 viser, at kurven indeholder de samme punkter som Peanos kurve. Endvidere, at

$$\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 H(\varphi(t),\psi(t))\,dt$$

for enhver kontinuert funktion $H:[0,1]\times[0,1]\to \mathbf{R}$.

Lad $t\in[0,1[$ og $0<h\leq 1-t$, og sæt

$$\alpha = \sup_{u\in[t,t+h]} |\varphi(u)-\varphi(t)| \quad , \quad \beta = \sup_{v\in[t,t+h]} |\psi(v)-\psi(t)| .$$

Vælg $\varepsilon>0$ og lad $H:[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$ være en kontinuert funktion, der er ≥ 0 på $[0,1]\times[0,1]$, er $=1$ på $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \mid |x-\varphi(t)|\leq\alpha,\ |y-\psi(t)|\leq\beta\}$, og for hvilken

$$\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy < 4\alpha\beta+\varepsilon .$$

Da er $H(\varphi(\tau),\psi(\tau))\geq 0$ på $[0,1]$ og $=1$ på $[t,t+h]$, altså

$$\int_0^1 H(\varphi(\tau),\psi(\tau))\,d\tau \geq h .$$

Følgelig er $h< 4\alpha\beta+\varepsilon$, og altså, da $\varepsilon>0$ var vilkårlig,

$$h\leq 4\alpha\beta .$$

Specielt er $\alpha>0$, $\beta>0$. Lad $u,v\in[t,t+h]$ være valgt således at

$$|\varphi(u)-\varphi(t)|=\alpha , \quad |\psi(v)-\psi(t)|=\beta .$$

Da $\alpha>0$, $\beta>0$ gælder $u,v\in\,]t,t+h]$. Vi får

$$\left|\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\right| \geq \frac{\alpha}{h} \geq \frac{1}{4\beta} \quad , \quad \left|\frac{\psi(v)-\psi(t)}{v-t}\right| \geq \frac{\beta}{h} \geq \frac{1}{4\alpha} .$$

Men $\alpha\to 0$ og $\beta\to 0$ for $h\to 0$. Altså er hverken φ eller ψ differentiabel fra højre i t. Analogt vises, at hverken φ eller ψ er differentiabel fra venstre i et punkt $t\in\,]0,1]$.

22. Idet \$ og £ betegner hver et af tegnene +, •, ∨, ∧, skal man undersøge, om relationen

$$(a \,\$\, b) \,£\, c = (a \,£\, c) \,\$\, (b \,£\, c)$$

er gyldig for alle reelle talsæt (a,b,c). Undersøg alle 16 tilfælde og anfør resultatet i en tabel med dobbelt indgang.

£ \ \$	+	•	∨	∧
+	Nej	Nej	Ja	Ja
•	Ja	Nej	Nej	Nej
∨	Nej	Nej	Ja	Ja
∧	Nej	Nej	Ja	Ja

\$ £

$+\ +\ \cancel{(a+b)+c = (a+c)+(b+c)}$

$\cdot\ +\ \cancel{(a\cdot b)+c = (a+c)\cdot(b+c)}$

$\vee\ +\ (a\vee b)+c = (a+c)\vee(b+c)$

$\wedge\ +\ (a\wedge b)+c = (a+c)\wedge(b+c)$

$+\ \cdot\ (a+b)\cdot c = ac+bc$

$\cdot\ \cdot\ \cancel{(a\cdot b)\cdot c = ac\cdot bc}$

$\vee\ \cdot\ \cancel{(a\vee b)\cdot c = ac\vee bc}$

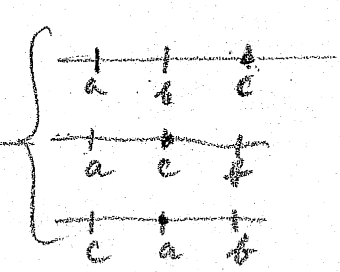
$\wedge\ \cdot\ \cancel{(a\wedge b)\cdot c = ac\wedge bc}$

$+\ \vee\ \cancel{(a+b)\vee c = (a\vee c)+(b\vee c)}$

$\cdot\ \vee\ \cancel{(a\cdot b)\vee c = (a\vee c)\cdot(b\vee c)}$

$\vee\ \vee\ (a\vee b)\vee c = (a\vee c)\vee(b\vee c)$

$\wedge\ \vee\ (a\wedge b)\vee c = (a\vee c)\wedge(b\vee c)$



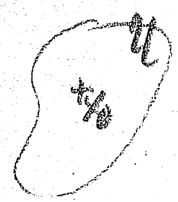
$+\ \wedge\ \cancel{(a+b)\wedge c = (a\wedge c)+(b\wedge c)}$

$\cdot\ \wedge\ \cancel{(a\cdot b)\wedge c = (a\wedge c)\cdot(b\wedge c)}$

$\vee\ \wedge\ (a\vee b)\wedge c = (a\wedge c)\vee(b\wedge c)$

$\wedge\ \wedge\ (a\wedge b)\vee c = (a\wedge c)\wedge(b\wedge c)$

23. Lad U være en åben punktmængde i R^k, der indeholder punktet x_0. Vis, at klassen af funktioner på U, der er kontinuerte i x_0, er et funktionsgitter. Gælder det også, hvis U ikke er åben?



f kont i x_0 $\Longrightarrow$ kf kont i x_0

f, g —— $\Longrightarrow$ $f+g$ ——

f —— $\Longrightarrow$ $|f|$ ——

Altså endda både lineære funktionsrum og funktionsgitter.

Gælder også, når U ikke er åben.

24. Nævn et lineært funktionsrum, der (bortset fra funktionen 0) ikke indeholder nogen ikke negativ funktion.

Funktioner på $\mathbb{R}$ $\{ax \mid a \in \mathbb{R}\}$

andet eks $\{a \sin x \mid a \in \mathbb{R}\}$

25. En funktion $f(x)$ på et interval $[a,b]$ siges at være af begrænset variation, hvis der findes et tal K, således at der for vilkårlige punkter $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ gælder

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leq K.$$

Vis, at klassen af funktioner, der er af begrænset variation på $[a,b]$, er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter.

---

f af begr. var. K hørende tal

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} |k f(x_\nu) - k f(x_{\nu-1})| \leq |k| K \quad \text{altså } kf \text{ af begr. var.}$$

f, g —— K, L ——

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} |(f+g)(x_\nu) - (f+g)(x_{\nu-1})|$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| + \sum_{\nu=1}^{n} |g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})|$$

altså $f+g$ af begr. var.

$$\leq K + L$$

f af begr. var. K hørende tal

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n} ||f(x_\nu)| - |f(x_{\nu-1})||$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leq K \quad \text{altså } |f| \text{ af begr. var.}$$

26. Vis, at udtrykket

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n} \right\},$$

hvor n og m gennemløber $\mathbb{N}$, har mening for ethvert $x \in \mathbb{R}$ og find dets værdi.

---

1) x og m givet.

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} [\cos(\pi m! x)]^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{for } |\cos(\pi m! x)| = 1 \quad \Leftrightarrow\ x = \frac{p}{m!},\ p \text{ hel} \\ 0 & \text{for } |\cos(\pi m! x)| < 1 \quad \Leftrightarrow\ \text{ellers}. \end{cases}$$

2) x givet.

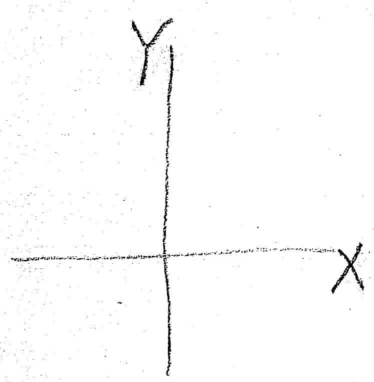
$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \text{ rational} \\ 0 & \text{for } x \text{ irrational}. \end{cases}$$

27*. Vis, at hvis $\grave{R} = A \cup B$, er mindst en af mængderne A og B equipotent med $\grave{R}$.

Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre

$\grave{R}$ er equipotent med $\grave{R}^2$. Udsagnet derfor ensbetydende med:

$\grave{R}^2 = A \cup B \Rightarrow$ mindst en af mængderne A og B equipotent med $\grave{R}$.



A's projektion på x-aksen X: A_x

B's ——— Y: B_y.

Hvis $A_x \subset X$ og $B_y \subset Y$

findes $x_0 \notin A_x$, $y_0 \notin B_y$.

Da er $(x_0, y_0) \notin A$, $(x_0, y_0) \notin B$

$(x_0, y_0) \notin A \cup B$ modstrid.

Altså enten $A_x = X$ eller $B_y = Y$.

Kan antage $A_x = X$. Da er $\grave{R}$ ækvivalent med delmængde af A. Tillige A ækvivalent med delmængde af $\grave{R}$. Altså A ækvivalent med $\grave{R}$.

28. Idet f og g er begrænsede funktioner på $\bar{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leq \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g) \leq$$
$$\leq \underline{R}(f+g) \leq \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(f)+\overline{R}(g) \\ \overline{R}(f)+\underline{R}(g) \end{matrix} \right\} \leq \overline{R}(f+g) \leq$$
$$\leq \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g) \leq \overline{R}(f)+\overline{R}(g).$$

Ifølge teksten er

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leq \underline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f)+\overline{R}(g)$$

og $\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leq \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g) \leq \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g) \leq \overline{R}(f)+\overline{R}(g)$.

I første sæt uligheder erstattes f og g med $f\vee g$ og $f\wedge g$.

Da $f\vee g + f\wedge g = f+g$ fås

$$\underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g) \leq \underline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g).$$

Herefter mangler

$$\underline{R}(f+g) \leq \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(f)+\overline{R}(g) \\ \overline{R}(f)+\underline{R}(g) \end{matrix} \right\} \leq \overline{R}(f+g).$$

I første linie erstattes f med $f+g$ og g med $-g$. Da fås

$$\underline{R}(f+g)+\underline{R}(-g) \leq \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) \leq \overline{R}(f+g)+\overline{R}(-g)$$

eller $\underline{R}(f+g)-\overline{R}(g) \leq \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) \leq \overline{R}(f+g)-\underline{R}(g)$

hvoraf det ønskede.

29. Vis, at hvis f er en begrænset funktion med begrænset støtte og g er Riemann integrabel, gælder

$$\underline{R}(f)+I(g)=\underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g)=\underline{R}(f+g)$$

$$\overline{R}(f)+I(g)=\overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g)=\overline{R}(f+g).$$

Vink. Benyt opg. 28.

Opg. 28 giver

$$\begin{aligned}\underline{R}(f)+\overline{I}(g) &\le \underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g)\le\\ &\le \underline{R}(f+g)\le\left\{\begin{matrix}\underline{R}(f)+I(g)\\ \overline{R}(f)+I(g)\end{matrix}\right\}\le\overline{R}(f+g)\le\\ &\le\overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g)\le\overline{R}(f)+I(g)\end{aligned}$$

hvoraf det ønskede.

30. Vis, at hvis f og g er begrænsede funktioner med begrænset støtte, og $f+g$ er Riemann integrabel, gælder

$$I(f+g) = \overline{R}(f) + \underline{R}(g).$$

Vink. Benyt opg. 28.

Opg. 28 giver (bl. a.)

$$I(f+g) \leq \left\{ \begin{matrix} \overline{R}(f) + \underline{R}(g) \\ \underline{R}(f) + \overline{R}(g) \end{matrix} \right\} \leq I(f+g),$$

hvoraf det ønskede.

31. Idet h er en begrænset funktion på R^* med begrænset støtte, skal man vise, at

$$\overline{R}(h) = \overline{R}(h \vee 0) - \underline{R}((-h) \vee 0)$$
$$\underline{R}(h) = \underline{R}(h \vee 0) - \overline{R}((-h) \vee 0).$$

Vink. Benyt opg. 29.

Løsning. Opg. 29 giver for $f = h$ og $g = 0$

$$\underline{R}(h) = \underline{R}(h \vee 0) + \underline{R}(h \wedge 0)$$
$$\overline{R}(h) = \overline{R}(h \vee 0) + \overline{R}(h \wedge 0),$$

altså

$$\underline{R}(h) = \underline{R}(h \vee 0) - \overline{R}(-(h \wedge 0))$$
$$\overline{R}(h) = \overline{R}(h \vee 0) - \underline{R}(-(h \wedge 0)),$$

hvilket er det ønskede, da $-(h \wedge 0) = (-h) \vee 0$.

32. Idet h er en begrænset funktion på $\mathbb{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at h er Riemann integrabel, hvis og kun hvis $h \vee 0$ og $(-h) \vee 0$ er Riemann integrable, og at der i så fald gælder

$$\underline{I(h) = I(h \vee 0) - I((-h) \vee 0).}$$

---

1) „hvis" klart, da $h = (h \vee 0) - ((-h) \vee 0)$.
Relationen da også klar.
2) „kun hvis". klart.

33. Angiv en Riemann integrabel funktion på $\mathbb{R}^k$, hvis værdimængde er mængden af rationale tal i $[0,1]$.

Hvis $k > 1$ kan benyttes funktionen defineret ved

$$f(\xi, 0, \dots, 0) = \xi \quad \text{når } \xi \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \quad \text{for alle andre punkter.}$$

Hvis $k = 1$. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ er numerabel

$$= \{r_1, r_2, \dots\}.$$

Vi kan benytte funktionen defineret ved

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = r_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = 0 \quad \text{for alle andre punkter.}$$

34. (a) Angiv en ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n på $\bar{\mathbb{R}}$, hvis grænsefunktion f er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \dots$ ikke er konvergent.

(b) Angiv en ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n på $\bar{\mathbb{R}}$, hvis grænsefunktion f ikke er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \dots$ er konvergent.

(c) Angiv en konvergent, men ikke ligelig konvergent følge af Riemann integrable funktioner f_n, hvis grænsefunktion f er Riemann integrabel, og for hvilken talfølgen $I(f_1), I(f_2), \dots$ er konvergent med grænseværdien $I(f)$.

(a) $f_n = \frac{1}{n}{}_{[-n^2, n^2]}$. ligelig konv. grænsefkt $f = 0$.
R-int

$I(f_n) = 2n$ divergent

(b) $f_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{4^\nu}{}_{[-2^\nu, 2^\nu]}$ ligelig konv. grænsefkt $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^\nu}{}_{[-2^\nu, 2^\nu]}$
ikke R-int

$I(f_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{4^\nu} 2 \cdot 2^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^{\nu-1}}$ konvergent (grv. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu-1}} = 2$)

(c) $f_n = n_{]0, \frac{1}{n}]} - n_{[-\frac{1}{n}, 0[}$ konv. men ikke ligelig konv.
grænsefkt. $f = 0$
R-int $I(f) = 0$

$I(f_n) = 0$ konv. med grv $I(f)$.

35. Vis, at en funktion f på $\bar{R}^k$ er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes kontinuerte funktioner g og $h \geq 0$ med begrænset støtte, således at $|f-g| \leq h$ og $I(h) < \varepsilon$.

1) „hvis" For ethvert $\varepsilon > 0$ findes kont. g og h med begr. støtte så $|f-g| \leq h$ og $I(h) < \varepsilon$.

$\underline{g} = g - h \leq f \leq g + h = \overline{g}$

$\underline{g}$ og $\overline{g}$ har begr. støtte $\quad I(\overline{g} - \underline{g}) = I(2h) < 2\varepsilon$

Altså f Riemann integrabel.

2) „kun hvis" f er Riemann integral. For $\varepsilon > 0$ vælges $\underline{g}$ og $\overline{g}$ kont. med begr. støtte, så $\underline{g} \leq f \leq \overline{g}$. Sætter $g = \frac{1}{2}(\overline{g} + \underline{g})$ og $h = \frac{1}{2}(\overline{g} - \underline{g})$

er g og h kont. med begr. støtte,

$g - h \leq f \leq g + h$, ɔ: $|f-g| \leq h$

og $I(h) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Altså betingelsen opfyldt.

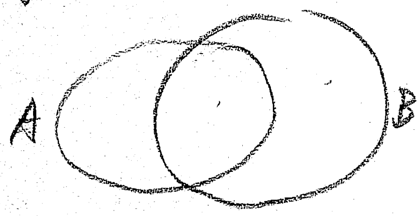
36. Vis, at hvis f er Riemann integrabel over to mængder A og B, er f også Riemann integrabel over $A\cup B$, $A\cap B$ og $A\setminus B$, og at der, når A og B er disjunkte, gælder

$$\int_{A\cup B} f(x)\, m(dR^k) = \int_A f(x)\, m(dR^k) + \int_B f(x)\, m(dR^k).$$

---

f er defineret i mængde, der indeholder $A\cup B$.

f_A og f_B er Riemann integrable.



1) Hvis $f \geq 0$:

$$\left.\begin{aligned} f_{A\cup B} &= f_A \vee f_B \\ f_{A\cap B} &= f_A \wedge f_B \\ f_{A\setminus B} &= f_A \vee f_B - f_B \end{aligned}\right\} \text{R-int.}$$

2) Alment. $\qquad g \geq 0,\ h \geq 0$.

$f = g - h$ hvor $g = f\vee 0$, $h = -(f\wedge 0)$.

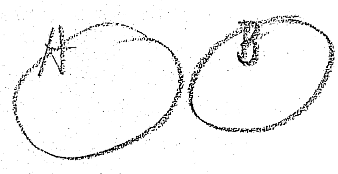
$$\left.\begin{aligned} g_A &= f_A \vee 0 & g_B &= f_B \vee 0 \\ h_A &= -(f_A \wedge 0) & h_B &= -(f_B\wedge 0) \end{aligned}\right\} \text{R-int.}$$

Altså
$$\left.\begin{matrix} g_{A\cup B} & g_{A\cap B} & g_{A\setminus B} \\ h_{A\cup B} & h_{A\cap B} & h_{A\setminus B} \end{matrix}\right\} \text{R-int.}$$

og følgelig
$$\left.\begin{aligned} f_{A\cup B} &= g_{A\cup B} - h_{A\cup B} \\ f_{A\cap B} &= g_{A\cap B} - h_{A\cap B} \\ f_{A\setminus B} &= g_{A\setminus B} - h_{A\setminus B} \end{aligned}\right\} \text{R-int.}$$

Hvis A og B disjunkte $\quad f_{A\cup B} = f_A + f_B$

$$I(f_{A\cup B}) = I(f_A) + I(f_B),$$



hvilket er formlen.

37. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\bar{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A)+r_i(B) \le r_i(A\cup B)+r_i(A\cap B) \le$$

$$\le \begin{Bmatrix} r_i(A)+r_y(B) \\ r_y(A)+r_i(B) \end{Bmatrix} \le$$

$$\le r_y(A\cup B)+r_y(A\cap B) \le r_y(A)+r_y(B).$$

Vink. Anvend opg 28.

I opg. 28 sættes $f = 1_A$, $g = 1_B$ og leddene $\underline{R}(f+g)$, $\overline{R}(f+g)$ overspringes.

38. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\bar{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A) - r_y(B) \leq r_i(A \setminus B) - r_y(B \setminus A) \leq$$
$$\leq r_y(A \setminus B) - r_i(B \setminus A) \leq r_y(A) - r_i(B).$$

Vink. Anvend opg. 26 for $f = 1_A$, $g = -1_B$ og opg. 21.

Løsning. Opg. 26 for $f = 1_A$ og $g = -1_B$ giver

$$r_i(A) - r_y(B) \leq \cdots \leq$$
$$\underline{R}(1_A - 1_B) \leq \cdots \leq \overline{R}(1_A - 1_B) \leq$$
$$\leq \cdots \leq r_y(A) - r_i(B).$$

Men $(1_A - 1_B) \vee 0 = 1_{A \setminus B}$ og $(-(1_A - 1_B)) \vee 0 = 1_{B \setminus A}$.

Opg. 31 giver da

$$\underline{R}(1_A - 1_B) = \underline{R}(1_{A \setminus B}) - \overline{R}(1_{B \setminus A}) = r_i(A \setminus B) - r_y(B \setminus A)$$
$$\overline{R}(1_A - 1_B) = \overline{R}(1_{A \setminus B}) - \underline{R}(1_{B \setminus A}) = r_y(A \setminus B) - r_i(B \setminus A)$$

hvormed det ønskede.

39. Vis, at hvis A og B er disjunkte begrensede punktmengder i $\bar{R}^k$, for hvilke $A \cup B$ er Riemann målelig, gjelder

$$m(A \cup B) = m_i(A) + m_y(B).$$

Vink. Benytt oppg. 37.

Oppg. 37 gir, da $A \cap B = \emptyset$ og $m_i(A \cup B) = m_y(A \cup B) = m(A \cup B)$

$$m(A \cup B) \leq m_i(A) + m_y(B) \leq m(A \cup B),$$

altså det ønskede.

40*. Vis, at en begrænset funktion f på $\mathring{R}^k$ med begrænset støtte er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for enhver begrænset funktion g med begrænset støtte gælder

$$\overline{R}(g) = \overline{R}((g-f)\vee 0) + \overline{R}(f\wedge g).$$

---

1) „hvis". Vælg g Riemann integrabel og $\geq f$. Da gælder relationen

$$I(g) = \overline{R}(g-f) + \overline{R}(f),$$

Ifølge opg. 30 er

$$I(g) = \overline{R}(g-f) + \underline{R}(f).$$

Altså er

$$\underline{R}(f) = \overline{R}(f).$$

Altså er f Riemann integrabel.

2) „kun hvis". Antag f Riemann integrabel. For ethvert g fås ved opg. 29

$$\overline{R}(g) = \overline{R}(g-f+f) = \overline{R}(g-f) + I(f),$$

altså ved opg. 29 $= \overline{R}((g-f)\vee 0) + \overline{R}((g-f)\wedge 0) + I(f)$

altså ved opg. 27 $= \overline{R}((g-f)\vee 0) + \overline{R}(((g-f)\wedge 0) + f)$

hvilket er det ønskede, da $((g-f)\wedge 0) + f = f\wedge g$.

41*. Vis, at en begrænset punktmængde A i R^k er Riemann målelig, hvis og kun hvis der for enhver begrænset punktmængde B gælder

$$\nu_y(B) = \nu_y(B \setminus A) + \nu_y(B \cap A).$$

---

1) „hvis". Vælg $\bar{B}$ Riemann målelig og $\supseteq A$. Da giver relationen

$$m(B) = \nu_y(B \setminus A) + \nu_y(A).$$

Men opg. 39 giver

$$m(B) = \nu_y(B \setminus A) + \nu_i(A).$$

Altså er

$$\nu_i(A) = \nu_y(A),$$

d.v.s. A er Riemann målelig.

2) „kun hvis". Antag A Riemann målelig. I opg. 40 sættes $f = 1_A$, $g = 1_B$. Da fås

$$\nu_y(B) = \nu_y(B \setminus A) + \nu_y(B \cap A)$$

42. I $\mathbb{R}$ betragtes mængden A af tal x, der fremstilles ved decimalbrøker

$$x = 0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

hvor alle decimaler a_n er 5 eller 7. Vis, at A er Riemann målelig og find dens mål. Vis også, at A er afsluttet.

Samme opgave, når decimalerne er 0 eller 1. Vis, at de to mængder er ligedannede.

Vink. Betragt mængderne $A_1 = [\frac{5}{10}, \frac{6}{10}] \cup [\frac{7}{10}, \frac{8}{10}]$, $A_2 = [\frac{55}{100}, \frac{56}{100}] \cup [\frac{57}{100}, \frac{58}{100}] \cup [\frac{75}{100}] \cup [\frac{77}{100}, \frac{78}{100}]$, ...

$A = \{x \mid \text{alle } a_n = 5 \text{ eller } 7\}$

$A_1 = \{x \mid a_1 = 5 \text{ eller } 7\} = [\frac{5}{10}, \frac{6}{10}] \cup [\frac{7}{10}, \frac{8}{10}]$

$A_2 = \{x \mid a_1, a_2 = 5 \text{ eller } 7\} = [\frac{55}{100}, \frac{56}{100}] \cup [\frac{57}{100}, \frac{58}{100}] \cup [\frac{75}{100}, \frac{76}{100}] \cup [\frac{77}{100}, \frac{78}{100}]$

etc.

$A_1, A_2, \ldots$ er trappemængder, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ og $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$

Specielt er $A \subset A_n$ for alle n, altså $\overline{m}(A) \leq m(A_n) = \frac{2^n}{10^n} = (\frac{1}{5})^n$. Heraf $\overline{m}(A) = 0$, altså A Riemann målelig og $m(A) = 0$. Da alle A_n er afsluttede, er $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ også afsluttet.

$B = \{x \mid \text{alle } a_n = 0 \text{ eller } 1\}$

$B_1 = \{x \mid a_1 = 0 \text{ eller } 1\} = [0, \frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, \frac{2}{10}] = [0, \frac{2}{10}]$

$B_2 = \{x \mid a_1, a_2 = 0 \text{ eller } 1\} = [0, \frac{1}{100}] \cup [\frac{1}{100}, \frac{2}{100}] \cup [\frac{10}{100}, \frac{11}{100}] \cup [\frac{11}{100}, \frac{12}{100}]$

$= [0, \frac{2}{100}] \cup [\frac{10}{100}, \frac{12}{100}]$

etc.

Samme ræsonnement som før giver B Riemann målelig, $m(B) = 0$, B afsluttet.

Betragt funktionen $f(x) = 0{,}55\ldots + 2x = \frac{5}{9} + 2x$.

For $x = 0{,}a_1a_2\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots$ fås $f(x) = \frac{5+2a_1}{10} + \frac{5+2a_2}{10} + \cdots$;

Funktionen (som er en ligedannethed) afbilder altså B på A.

43. I $\dot{R}$ betragtes mængden B af tal x, der fremstilles ved decimalbrøker

$$x = 0,a_1a_2\dots a_n\dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots,$$

hvor ingen af decimalerne er 9. Vis, at B er Riemann målelig og find dens mål. Vis også, at B er afsluttet.

Vink. Se vinket til opg. 42.

$B = \{x \mid \text{alle } a_n = 0, 1, \dots, 8\}$

$B_1 = \{x \mid a_1 = 0, 1, \dots, 8\} = [0, \frac{9}{10}]$

$B_2 = \{x \mid a_1, a_2 = 0, 1, \dots, 8\} = [0, \frac{9}{100}] \cup [\frac{10}{100}, \frac{19}{100}] \cup \dots \cup [\frac{80}{100}, \frac{89}{100}]$

etc. $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ og $B = B_1 \cap B_2 \cap \dots$

$B_1, B_2, \dots$ er trappemængder,

Specielt er $B \subset B_n$ for alle n, altså $m_y(B) \le m(B_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

Heraf $m_y(B) = 0$, altså B Riemann målelig og $m(B) = 0$. Da alle B_n er afsluttede, er $B = B_1 \cap B_2 \cap \dots$ også afsluttet.

45.* Vis, at hvis $\grave{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, er mindst en af mængderne A_n equipotent med $\grave{R}$.
Vink. Generalisation af opg. 27.

Talfølgerummet
$\grave{R}^{\grave{N}} = \grave{R} \times \grave{R} \times \cdots = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_n \in \grave{R},\ n \in \grave{N}\}$
er equipotent med $\grave{R}$. Udsagnet derfor ensbetydende med

$\grave{R}^{\grave{N}} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \Rightarrow$ mindst en af mængderne A_n er equipotent med $\grave{R}$.

A_1's projektion på x_1-aksen (ɔ: mængden af x_1, for hvilke der findes $x_2, x_3, \cdots$, så $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in A_1$) kaldes A_1^*,

A_2's projektion på x_2-aksen (ɔ: mængden af x_2, for hvilke der findes $x_1, x_3, \cdots$, så $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in A_2$) kaldes A_2^*,

etc.

Hvis $A_1^* \subset \grave{R}$, $A_2^* \subset \grave{R}$, etc., findes $x_1 \notin A_1^*$, $x_2 \notin A_2^*$ etc. Da gælder $(x_1, x_2, \cdots) \notin A_1$, $(x_1, x_2, \cdots) \notin A_2$, etc. altså $(x_1, x_2, \cdots) \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, modstrid.

Altså $A_n^* = \grave{R}$ for mindst et n. Da er $\grave{R}$ ækvivalent med delmængde af A_n. Tillige er A_n ækvivalent med delmængde af R. Altså er A_n ækvivalent med $\grave{R}$.

46*. Vis, at hvis foreningsmængden for en følge af afsluttede punktmængder på R indeholder et interval af positiv længde, da indeholder mindst én af mængderne et sådant interval.

Vink. Før beviset indirekte.

Lad $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ være mængderne og I intervallet. Vi kan antage, at I er et afsluttet interval $[a,b]$. Antag, at ingen af mængderne A_n indeholder et interval af positiv længde. Da gælder specielt, at A_1 ikke indeholder $[a,b]$. Der findes altså et punkt i $[a,b]$, som ikke tilhører A_1, og følgelig, da A_1 er afsluttet, et interval $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$ af positiv længde, så at $[a_1,b_1] \cap A_1 = \emptyset$. Da A_2 ikke indeholder $[a_1,b_1]$ findes et punkt i $[a_1,b_1]$, som ikke tilhører A_2, og følgelig, da A_2 er afsluttet, et interval $[a_2,b_2]$ af positiv længde, så at $[a_2,b_2] \cap A_2 = \emptyset$. Fortsættes således, finder vi intervaller af positiv længde

$$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \cdots,$$

så at $[a_n,b_n] \cap A_n = \emptyset$. Disse intervaller har (mindst) et fælles punkt x. Om dette må gælde $x \notin A_n$ for alle n, altså

$$x \notin A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

På den anden side er $x \in [a,b]$, altså

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots,$$

hvilket er en modstrid.

47*. Vis, at den Dirichletske funktion f på $\grave{R}$, defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \text{ rational} \\ 0 & \text{for } x \text{ irrational,} \end{cases}$$

ikke er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner.

Vink. Før beviset indirekte, og betragt, under den antagelse, at f er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner f_n, mængderne

$$B_n = \{x \mid f_n(x) \geq \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \geq \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$

og

$$C_n = \{x \mid f_n(x) \leq \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \leq \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$

og anvend sætningen i opg. 46.

For ethvert m er $\{x \mid f_m(x) \geq \frac{1}{2}\}$ og $\{x \mid f_m(x) \leq \frac{1}{2}\}$ afsluttede mængder, da f_m er kontinuert. Følgelig er for hvert n mængderne B_n og C_n afsluttede.

Hvis x er rational, gælder $f_n(x) \to 1$. Altså findes et n, så at $f_p(x) \geq \frac{1}{2}$ for $p \geq n$, d.v.s. så at $x \in B_n$.

Hvis x er irrational gælder $f_n(x) \to 0$. Altså findes et n, så at $f_p(x) \leq \frac{1}{2}$ for $p \geq n$, d.v.s. så at $x \in C_n$.

Følgelig er

$$\grave{R} = B_1 \cup C_1 \cup B_2 \cup C_2 \cup \cdots \cup B_n \cup C_n \cup \cdots.$$

Ifølge sætningen i opg. 46 må da (mindst) en af mængderne $B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots$ indeholde et interval $[a,b]$ af positiv længde. Men $B_n \supseteq [a,b]$ er umuligt, da B_n ikke kan indeholde noget irrationalt x (i et sådant er jo $f_p(x) < \frac{1}{2}$ for alle p fra et vist trin), og $C_n \supseteq [a,b]$ er umuligt, da C_n ikke kan indeholde noget rationalt x (i et sådant er jo $f_p(x) > \frac{1}{2}$ for alle p fra et vist trin).

49. Idet $a\in\dot{R}$, $b\in\dot{R}$, $n\in\dot{N}$ og $M\in\dot{R}$ er givne tal, for hvilke $a<b$ og $M>0$, skal man angive et tal $P=P(a,b,n,M)$ med den egenskab, at hvis et polynomium $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ i $[a,b]$ opfylder betingelsen $|p(x)|\le M$, da er $|a_\nu|\le P$ for $\nu=0,1,\dots,n$.

Idet $a\in\dot{R}$, $b\in\dot{R}$ og $n\in\dot{N}$ er givne tal, for hvilke $a<b$, ønskes ovenstående resultat formuleret som en egenskab ved funktionen

$$\varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)=\max_{a\le x\le b}|a_0+a_1x+\dots+a_nx^n|.$$

Sæt $a+\frac{\nu}{n}(b-a)=x_\nu$, $\nu=0,1,\dots,n$, og betragt polynomierne

$$p_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}=c_{00}+c_{01}x+\dots+c_{0n}x^n$$

$$p_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}=c_{10}+c_{11}x+\dots+c_{1n}x^n$$

$$p_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}=c_{n0}+c_{n1}x+\dots+c_{nn}x^n.$$

Sæt $C=\max\limits_{\substack{\nu=0,\dots,n\\ \mu=0,\dots,n}}|c_{\nu\mu}|$. Hvis $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ har vi $p(x)=p(x_0)p_0(x)+p(x_1)p_1(x)+\dots+p(x_n)p_n(x)$, altså

$$a_0=p(x_0)c_{00}+p(x_1)c_{10}+\dots+p(x_n)c_{n0}$$
$$a_1=p(x_0)c_{01}+p(x_1)c_{11}+\dots+p(x_n)c_{n1}$$
$$a_n=p(x_0)c_{0n}+p(x_1)c_{1n}+\dots+p(x_n)c_{nn}$$

når $|p(x)|\le M$ i $[a,b]$, Sættes $P=(n+1)CM$ gælder altså, at $|a_\nu|\le P$ for $\nu=0,1,\dots,n$.

Resultatet kan også formuleres således:

$$\forall a,b,n\ \forall M\ \exists P:\ \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)\le M \Rightarrow \max_{\nu=0,1,\dots,n}|a_\nu|\le P$$

eller

$$\forall a,b,n\ \forall M\ \exists P:\ \max_{\nu=0,1,\dots,n}|a_\nu|>P \Rightarrow \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)>M$$

eller

$$\forall a,b,n:\ \varphi(a_0,a_1,\dots,a_n)\to+\infty \text{ når } \max_{\nu=0,1,\dots,n}|a_\nu|\to+\infty$$

50. Idet $f = f(x)$ er en vilkårlig begrænset funktion på $[a,b]$ og $n \in N$, skal man vise, at der i mængden P_n af alle polynomier $p = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ findes mindst et polynomium $p_0 = p_0(x)$, således at

$$\operatorname{dist}(f,p) \geq \operatorname{dist}(f,p_0) \quad \text{for alle } p \in P_n,$$

hvor $$\operatorname{dist}(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Vink. Benyt opg. 49

Sæt $\operatorname{dist}(f,0) = A$. $\quad \operatorname{dist}(p,0) = \varphi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$

For ethvert $p \in P_n$ er $\operatorname{dist}(f,p) + \operatorname{dist}(f,0) \geq \operatorname{dist}(p,0)$

altså $\operatorname{dist}(f,p) \geq \varphi(a_0,a_1,\ldots,a_n) - A$.

Følgelig gælder $\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n) = \operatorname{dist}(f,p) \to +\infty$

for $\max\limits_{\nu=0,1,\ldots,n} |a_\nu| \to +\infty$.

Men for to polynomier $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$
$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$

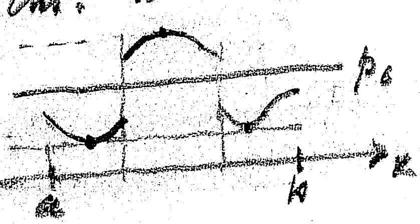
gælder $|\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n) - \psi(b_0,b_1,\ldots,b_n)| =$
$|\operatorname{dist}(f,p) - \operatorname{dist}(f,q)| \leq \operatorname{dist}(p,q)$

$$= \sup_{a \leq x \leq b} |(a_0-b_0) + (a_1-b_1)x + \cdots + (a_n-b_n)x^n|$$

$$\leq \Big(\sup_{\nu=0,1,\ldots,n} |a_\nu - b_\nu|\Big) \cdot D \quad \text{hvor } D = 1+|a|+|b|+\cdots+|a|^n+|b|^n$$

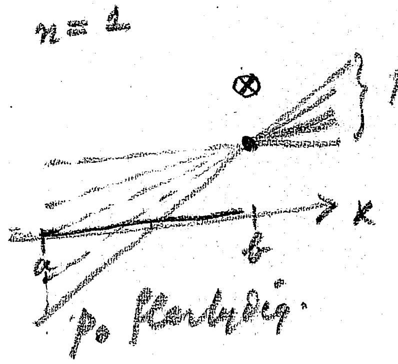
Følgelig er $\psi(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ en kontinuert funktion på R^{n+1}. Altså antager ψ sin nedre grænse.

Eks. $n=0$



p_0 entydig

$n=1$



p_0 flertydig

Bemærkning: Hvis f er kontinuert er p_0 entydig. Se f.eks. de la Vallée Poussin

51. Efterprøv for hver af regnereglerne

$$a+b=b+a \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$
$$ab=ba \qquad (ab)c=a(bc)$$
$$(a+b)c=ac+bc$$

om den gælder i R^*.

1) $a+b=b+a$ ja

2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ nej

$$(1+(+\infty))+(-\infty)=(+\infty)+(-\infty)=0$$
$$1+((+\infty)+(-\infty))=1+0=1$$

3) $ab=ba$ ja

4) $(ab)c=a(bc)$ ja

5) $(a+b)c=ac+bc$ nej

$$(2+(-1))\cdot(+\infty)=1\cdot(+\infty)=+\infty$$
$$2\cdot(+\infty)+(-1)\cdot(+\infty)=(+\infty)+(-\infty)=0.$$

52. Find $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ for den funktion f på $\overline{R}$, der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x \in]0,1[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

Sætter $f_n = n \cdot 1_{]0,1[}$, er f_n trappefunktion og $f_n \leq f$. Altså $I(f_n) \leq \underline{I}(f)$, d.v.s. $n \leq \underline{I}(f)$. Altså er $\underline{I}(f) = +\infty$ og følgelig også $\overline{I}(f) = +\infty$

53. Find $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ for den funktion f på $\mathring{R}$ der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x \in \,]0,1[\\ -\infty & \text{for } x \in \,]-1,0[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

Lad $(\overline{f_n})$ være vilkårlig stigende følge af trappefunktioner, for hvilken $\lim \overline{f_n} \geq f$.

Da gælder for ethvert $p > 0$, at $\lim \overline{f_n} \geq \overline{f_1} + p \cdot 1_{]0,1[}$

(Thi for $x \in \,]0,1[$ er $\lim \overline{f_n}(x) \geq f(x) = +\infty$

og for $x \notin \,]0,1[$ er $\lim \overline{f_n}(x) \geq \overline{f_1}(x)$.)

Altså er $\lim I(\overline{f_n}) \geq \overline{I}(\overline{f_1} + p \cdot 1_{]0,1[})$.

Men $\overline{f_1} + p \cdot 1_{]0,1[}$ er trappefunktion. Altså er

$\overline{I}(\overline{f_1} + p \cdot 1_{]0,1[}) = I(\overline{f_1} + p \cdot 1_{]0,1[}) = I(\overline{f_1}) + p$.

Altså er $\lim I(\overline{f_n}) \geq I(\overline{f_1}) + p$.

Altså er $\lim I(\overline{f_n}) = +\infty$.

Altså er $\overline{I}(f) = +\infty$.

Lad $(\underline{f_n})$ være vilkårlig dalende følge af trappefunktioner, for hvilken $\lim \underline{f_n} \leq f$.

Da gælder for ethvert $p > 0$, at $\lim \underline{f_n} \leq \underline{f_1} - p \cdot 1_{]-1,0[}$

Altså er $\lim I(\underline{f_n}) \leq \underline{I}(\underline{f_1} - p \cdot 1_{]-1,0[})$.

Men $\underline{f_1} - p \cdot 1_{]-1,0[}$ er trappefunktion. Altså er

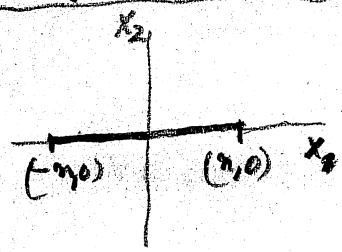
$\underline{I}(\underline{f_1} - p \cdot 1_{]-1,0[}) = I(\underline{f_1} - p \cdot 1_{]-1,0[}) = I(\underline{f_1}) - p$.

Altså er $\lim I(\underline{f_n}) \leq I(\underline{f_1}) - p$.

Altså er $\lim I(\underline{f_n}) = -\infty$.

Altså er $\underline{I}(f) = -\infty$.

54. Vis, at enhver funktion $f = f(x_1,x_2)$ på $\grave{R}^2$, hvis værdi er 0 for ethvert punkt (x_1,x_2) med $x_2 \neq 0$, er Lebesgue integrabel med integralet $\mathrm{I}(f) = 0$.



Lad J_n betegne intervallet
$$\{(x_1,x_2) \mid x_1 \in [-n,n],\ x_2 = 0\}.$$
Vi har $m(J_n) = 0$.

$(n \cdot 1_{J_n})$ er en stigende følge af trappefunktioner og
$$\lim n \cdot 1_{J_n}(x_1,x_2) = \begin{cases} +\infty & \text{for alle } (x_1,x_2) \text{ med } x_2 = 0 \\ 0 & \text{for alle } (x_1,x_2) \text{ med } x_2 \neq 0, \end{cases}$$
altså $\lim n \cdot 1_{J_n} \geq f$, og følgelig
$$\overline{\mathrm{I}}(f) \leq \lim \mathrm{I}(n \cdot 1_{J_n}) = 0.$$
$(-n \cdot 1_{J_n})$ er en dalende følge af trappefunktioner og
$$\lim (-n \cdot 1_{J_n})(x_1,x_2) = \begin{cases} -\infty & \text{for alle } (x_1,x_2) \text{ med } x_2 = 0 \\ 0 & \text{for alle } (x_1,x_2) \text{ med } x_2 \neq 0, \end{cases}$$
altså $\lim(-n \cdot 1_{J_n}) \leq f$, og følgelig
$$\underline{\mathrm{I}}(f) \geq \lim \mathrm{I}(-n \cdot 1_{J_n}) = 0.$$
Altså er $\quad 0 \leq \underline{\mathrm{I}}(f) \leq \overline{\mathrm{I}}(f) \leq 0$, hvoraf
$$\underline{\mathrm{I}}(f) = \overline{\mathrm{I}}(f) = 0.$$
Altså er f Lebesgue integrabel med integralet $\mathrm{I}(f) = 0$.

55. Ved opdagelsen af Mars viste det sig, at Mars-beboerne kun kender de rationale tal — af dem kaldet Mars-tal. Intervaller havde de indført (med de samme betegnelser vi benytter, men naturligvis kun med brug af Mars-tal), ligeledes trappemængder og disses mål og trappefunktioner og disses integrale. Vis, at sætningen: „Hvis en dalende følge (f_n) af trappefunktioner har grænsefunktionen 0, da konvergerer talfølgen $(I(f_n))$ mod 0" ikke gælder på Mars. Kan Mars-beboerne indføre et integral med Lebesgue integralets egenskaber?

Mars-tallene tilhørende $]-1,1[$ ordnes i følge $x_1, x_2, \dots$. Altså (på Mars) $]-1,1[= \{x_1, x_2, \dots\}$.

For hvert n er den ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in]-1,1[\setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

bestemte funktion en trappefunktion. Tænker vi os (for fast n) $x_1, x_2, \dots, x_n$ i voksende rækkefølge betegnet $y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{nn}$, er f_n på intervallerne $]-1, y_{1n}[$, $]y_{1n}, y_{2n}[, \dots,]y_{n-1,n}, y_{n,n}[,]y_{nn}, 1[$ lig med 1 og ellers 0. Altså er $I(f_n) = 2$. Følgen (f_n) er dalende og $\lim f_n = 0$. Den anførte sætning gælder derfor ikke på Mars.

Mars-beboerne kan derfor ikke indføre et integral med Lebesgue integralets egenskaber uden først at udvide talbegrebet.

57. Lad $J_1, J_2, \dots$ være en følge af disjunkte intervaller i $\dot{R}^k$ og $a_1, a_2, \dots$ en følge af reelle tal. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} a_n & \text{for } x \in J_n,\ n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{for } x \in \dot{R}^k \setminus \bigcup J_n \end{cases}$$

definerede funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$ er konvergent, og at man i så fald har

$$I(f) = \sum_1^\infty a_n m(J_n).$$

Betragt for $n = 1, 2, \dots$ den ved

$$f_n(x) = \begin{cases} a_\nu & \text{for } x \in J_\nu,\ \nu = 1, \dots, n \\ 0 & \text{for } x \in \dot{R}^k \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} J_\nu \end{cases}$$

definerede trappefunktion.

Følgen $(|f_n|)$ er en stigende følge af trappefunktioner og $\lim |f_n| = |f|$. Altså er $|f|$ Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(|f_n|) < +\infty$, og i så fald er $I(|f|) = \lim I(|f_n|)$. Men $I(|f_n|) = \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| m(J_\nu)$. Altså er $|f|$ Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$ er konvergent, og i så fald er $I(|f|) = \sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$. Herefter:

1) Hvis f er Lebesgue integrabel, er $|f|$ det også, altså $\sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$ konvergent.

2) Hvis $\sum_1^\infty |a_n| m(J_n)$ er konvergent, er $|f|$ Lebesgue integrabel. Men $|f|$ er absolut majorant for følgen (f_n), som er konvergent med grænsefunktionen $\lim f_n = f$. Altså er f Lebesgue integrabel og $I(f) = \lim I(f_n)$. Men $I(f_n) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu m(J_\nu)$.
Altså er $I(f) = \sum_1^\infty a_n m(J_n)$.

58. $\dot{Q}$ betegner mængden af rationale tal. Vis, at der ved $x_1 \sim x_2$, når $x_1 - x_2 \in \dot{Q}$, er defineret en ækvivalensrelation i $\dot{R}$. Lad M være en mængde bestående af netop ét tal tilhørende hver ækvivalensklasse, valgt i $[-1,1]$, og lad M_r for et vilkårligt $r \in \dot{Q}$ betegne mængden $\{x+r \mid x \in M\}$. Vis, at mængderne M_r er parvis disjunkte og har foreningen $\dot{R}$. Vis, at M ikke er Lebesgue målelig.

Vink. Benyt, at mængderne M_r er parvis kongruente, og at $[-3,3]$ indeholder numerabelt mange af dem.

$x \sim x$, da $x - x = 0 \in \dot{Q}$.

$x_1 \sim x_2 \Rightarrow x_2 \sim x_1$ da $x_1 - x_2 \in \dot{Q} \Rightarrow x_2 - x_1 \in \dot{Q}$

$x_1 \sim x_2,\ x_2 \sim x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3$ da $x_1 - x_2 \in \dot{Q},\ x_2 - x_3 \in \dot{Q} \Rightarrow x_1 - x_3 \in \dot{Q}$.

Altså er $\sim$ en ækvivalensrelation, og definerer derfor klassedeling.

Mængderne M_r er parvis disjunkte, thi hvis $r_1, r_2 \in \dot{Q}$ og $r_1 \neq r_2$, og $y \in M_{r_1} \cap M_{r_2}$, måtte findes $x_1 \in M$, så $y = x_1 + r_1$, og $x_2 \in M$, så $y = x_2 + r_2$. Altså var $x_1 + r_1 = x_2 + r_2$, $x_1 - x_2 = r_2 - r_1 \in \dot{Q}$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \neq x_2$. Altså var x_1, x_2 to forskellige elementer af M tilhørende samme ækvivalensklasse, i strid med definitionen af M.

$\dot{R} = \bigcup_{r \in \dot{Q}} M_r$, thi for ethvert $y \in \dot{R}$ findes $x \in M$, så $y \sim x$, altså $y - x = r \in \dot{Q}$, $y = x + r$, $y \in M_r$.

Kongruente mængder har åbenbart samme ydre og indre Lebesgue mål og er derfor samtidig Lebesgue målelige og da med samme mål. Antag M Lebesgue målelig. Da er alle M_r Lebesgue målelige med mål $m(M)$. Lad $\dot{Q} \cap [-2,2] = \{r_1, r_2, \dots\}$. For hvert n er $M_{r_n} \subseteq [-3,3]$. Altså $M_{r_1} \cup \dots \cup M_{r_n} \subseteq [-3,3]$, $m(M_{r_1}) + \dots + m(M_{r_n}) \leq 6$, Altså $n \cdot m(M) \leq 6$, $m(M) \leq \frac{6}{n}$. Heraf $m(M) = 0$. Altså $\dot{R} = \bigcup M_r$ forening af numerabelt mange nulmængder. Altså $\dot{R}$ nulmængde. Modstrid.

59. Vis, at hvis A er Lebesgue målelig, da findes for ethvert $\varepsilon>0$ en åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at $m(B\setminus A)<\varepsilon$, $m(A\setminus C)<\varepsilon$.

Vink. Betragt en følge af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$ med $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$, således at $\lim m(\overline{F}_n) < m(A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Vælg dernæst åbne trappemængder $F_n^* \supseteq \overline{F}_n$, således at $m(F_n^*) < m(\overline{F}_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ og sæt $B=\bigcup F_n^*$. — Analogt for sætningens anden halvdel.

---

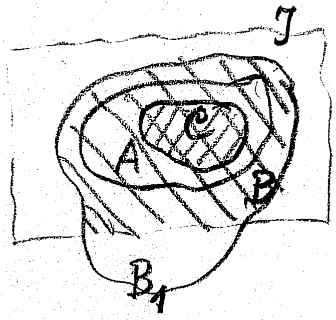
1) Mængderne $\overline{F}_n$, F_n^*, B vælges som angivet. Da er B åben (som foreningsmængde af åbne mængder), $B\supseteq A$.
Sættes $\overline{\overline{F}}_n = F_1^*\cup\dots\cup F_n^*$, er $\overline{\overline{F}}_n$ åben trappemængde,
$\overline{\overline{F}}_1 \subseteq \overline{\overline{F}}_2\subseteq\dots$, og $B=\bigcup\overline{\overline{F}}_n$.
Da $\overline{\overline{F}}_n \subseteq \overline{F}_n \cup (F_1^*\setminus\overline{F}_1)\cup\dots\cup(F_n^*\setminus\overline{F}_n)$,
er $m(\overline{\overline{F}}_n) < m(\overline{F}_n)+\frac{\varepsilon}{2^2}+\dots+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$,
altså $\lim m(\overline{\overline{F}}_n)\le \lim m(\overline{F}_n)+\frac{\varepsilon}{2}$.
Altså er $B=\bigcup\overline{\overline{F}}_n$ målelig og $m(B)=\lim m(\overline{\overline{F}}_n)<m(A)+\varepsilon$,
$m(B\setminus A)=m(B)-m(A)<\varepsilon$.

2) Betragt en følge af trappemængder $\underline{F}_1\supseteq\underline{F}_2\supseteq\dots$ med $\bigcap \underline{F}_n\subseteq A$, således at $\lim m(\underline{F}_n)>m(A)-\frac{\varepsilon}{2}$. Vælg dernæst afsluttede trappemængder $F_n^{**}\subseteq\underline{F}_n$, således at $m(F_n^{**})>m(\underline{F}_n)-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, og sæt $C=\bigcap F_n^{**}$. Da er C afsluttet (som fællesmængde af afsluttede mængder), $C\subseteq A$.
Sættes $\underline{\underline{F}}_n = F_1^{**}\cap\dots\cap F_n^{**}$, er $\underline{\underline{F}}_n$ afsluttet trappemængde,
$\underline{\underline{F}}_1\supseteq\underline{\underline{F}}_2\supseteq\dots$, og $C=\bigcap\underline{\underline{F}}_n$.
Da $\underline{F}_n \subseteq \underline{\underline{F}}_n\cup(\underline{F}_1\setminus F_1^{**})\cup\dots\cup(\underline{F}_n\setminus F_n^{**})$,
er $m(\underline{F}_n)<m(\underline{\underline{F}}_n)+\frac{\varepsilon}{2^2}+\dots+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$,
altså $\lim m(\underline{\underline{F}}_n)\ge\lim m(\underline{F}_n)-\frac{\varepsilon}{2}$.
Altså er $C=\bigcap\underline{\underline{F}}_n$ målelig og $m(C)=\lim m(\underline{\underline{F}}_n)>m(A)-\varepsilon$,
$m(A\setminus C)=m(A)-m(C)<\varepsilon$.

60. Vis, at en begrænset mængde A er Lebesgue målelig, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en begrænset åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at $m(B \setminus C) < \varepsilon$.

Vink. Benyt opg. 59.

1) „kun hvis". Antag A Lebesgue målelig og begrænset, f.eks. $A \subseteq J$, hvor J er et åbent interval.



Antag $\varepsilon > 0$ givet. Ifølge opg. 59 findes åben mængde $B_1 \supseteq A$ og afsluttet mængde $C \subseteq A$, så at $m(B_1 \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$ og $m(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sæt $B = B_1 \cap J$. Da er B åben og begrænset, $B \supseteq A$ og $B \setminus C \subseteq (B_1 \setminus A) \cup (A \setminus C)$, altså

$$m(B \setminus C) \leq m(B_1 \setminus A) + m(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) „hvis". Antag A begrænset, og at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en begrænset åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at $m(B \setminus C) < \varepsilon$.

Lad (ε_n) være følge af positive tal der konvergerer mod 0 (f. eks. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$) og vælg for hvert n åben begrænset mængde $B_n \supseteq A$ og afsluttet mængde $C_n \subseteq A$, således at $m(B_n \setminus C_n) < \varepsilon_n$.

$B_1, B_1 \cap B_2, \dots, B_1 \cap \dots \cap B_n, \dots$ er dalende følge af målelige mængder. Altså er $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_1 \cap \dots \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ Lebesgue målelig. Klart, at $H \supseteq A$.

For ethvert n gælder $H \setminus A \subseteq B_n \setminus C_n$, altså $m_y(H \setminus A) \leq m(B_n \setminus C_n) \leq \varepsilon_n$. Altså er $m_y(H \setminus A) = 0$. Altså er $H \setminus A$ nulmængde. Altså er $A = H \setminus (H \setminus A)$ Lebesgue målelig.

61. Idet længden l af en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, defineres som $l = \sup l_D$, hvor l_D er længden den til en vilkårlig inddeling D af parameterintervallet svarende indskrevne polygon, skal man vise, at mængden

$$K = \{(f(t), g(t)) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

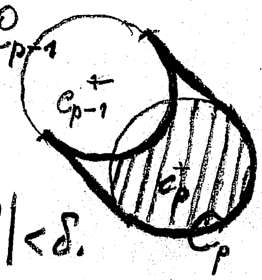
af kurvens punkter er en nulmængde, hvis $l < +\infty$. Vis endvidere ved et eksempel, at den omvendte sætning ikke gælder.

Hjælpesætning: Givet $n+1$ afsluttede cirkelskiver $C_0, C_1, \dots, C_n$ med samme radius r og centrer $c_0, c_1, \dots, c_n$. Da er

$$m(C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n) \leq \pi r^2 + 2r(\overline{c_0c_1} + \overline{c_1c_2} + \dots + \overline{c_{n-1}c_n}).$$

Bevis. $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n \subseteq C_0 \cup (C_1 \setminus C_0) \cup \dots \cup (C_n \setminus C_{n-1})$ og

$m(C_p \setminus C_{p-1}) \leq 2r\, \overline{c_{p-1}c_p}$ (se figur).



Nu: Til givet $r > 0$ vælges $\delta > 0$, så

$\operatorname{dist}((f(t'), g(t')), (f(t''), g(t''))) < r$ når $|t' - t''| < \delta$.

Dernæst vælges deling D: $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, så alle $t_\nu - t_{\nu-1} < \delta$. Vælges nu $c_\nu = (f(t_\nu), g(t_\nu))$ og betegnes med C_ν den afsluttede cirkelskive med centrum c_ν og radius r, gælder $K \subseteq C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$. Da K er kompakt, er K målelig. Altså fås

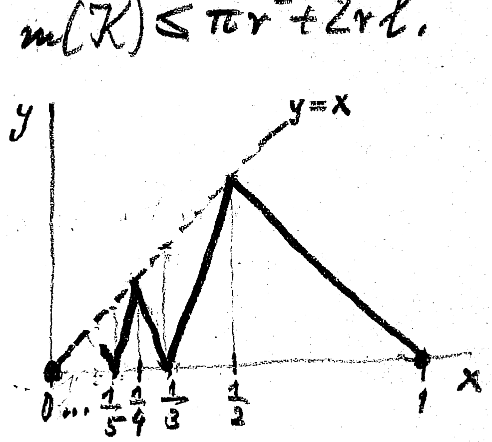
$m(K) \leq \pi r^2 + 2r\, l_D$, hvoraf $m(K) \leq \pi r^2 + 2rl$.

Altså er $m(K) = 0$.

Omvendt sætning gælder ikke.

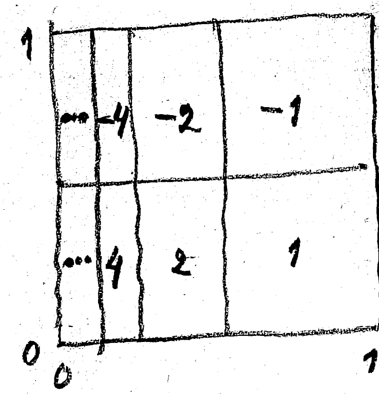
Ses af eksemplet

$(x, y) = (t, f(t))$, $0 \leq t \leq 1$, hvor f er den på figuren viste funktion



62. En funktion $f = f(x,y)$ på $\mathbb{R}^2$ er, se fig., defineret ved, at

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^n & \text{for } x \in \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right],\ y \in \left[0, \frac{1}{2}\right[,\ n \in \mathbb{N}_0 \\ -2^n & \text{for } x \in \left]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right],\ y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

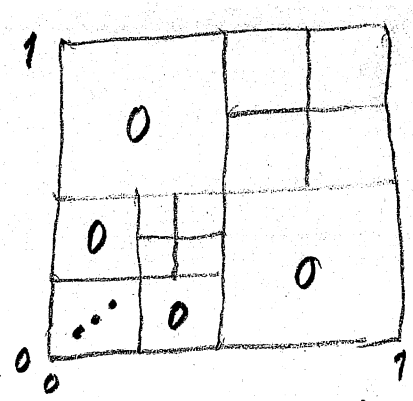


Vis, at $I_y(I_x(f(x,y)))$ ikke eksisterer, medens $I_x(I_y(f(x,y)))$ eksisterer.

For $y \in [0, \frac{1}{2}[$ er $f(x,y)$ som funktion af x ikke Lebesgue integrabel, idet rækken $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots$ ikke er konvergent. (Jfr. opg. 57.) Altså eksisterer $I_y(I_x(f(x,y)))$ ikke.

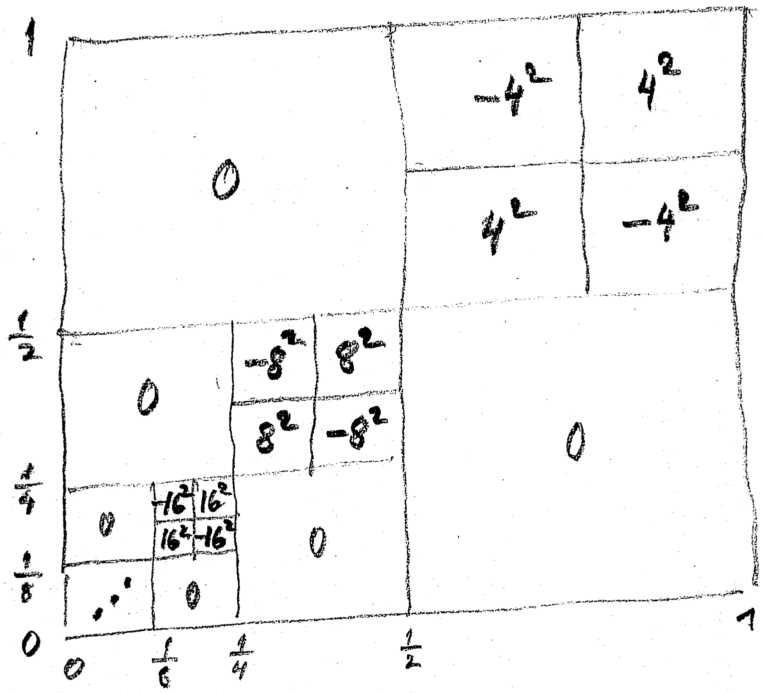
For ethvert x er $f(x,y)$ som funktion af y Lebesgue integrabel (nemlig endda trappefunktion) med integralet $I_y(f(x,y)) = 0$. Altså eksisterer $I_x(I_y(f(x,y)))$ og er $= 0$.

63. Konstruer en funktion $f = f(x,y)$ på $\bar{R}^2$, for hvilken $I_y(I_x(f(x,y)))$ og $I_x(I_y(f(x,y)))$ begge eksisterer og er lige store, men som ikke er Lebesgue integrabel.



Vink. Vælg $f(x,y)=0$ uden for enheds-kvadratet, og vælg værdierne i enhedskvadratet ved udfyldning af fig.

Vi udfylder som angivet på figuren.



Funktionen er (jfr. opg. 57) ikke Lebesgue integrabel, idet rækken

$$4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+8^2\left(\frac{1}{8}\right)^2+8^2\left(\frac{1}{8}\right)^2+8^2\left(\frac{1}{8}\right)^2+8^2\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots$$

ikke er konvergent.

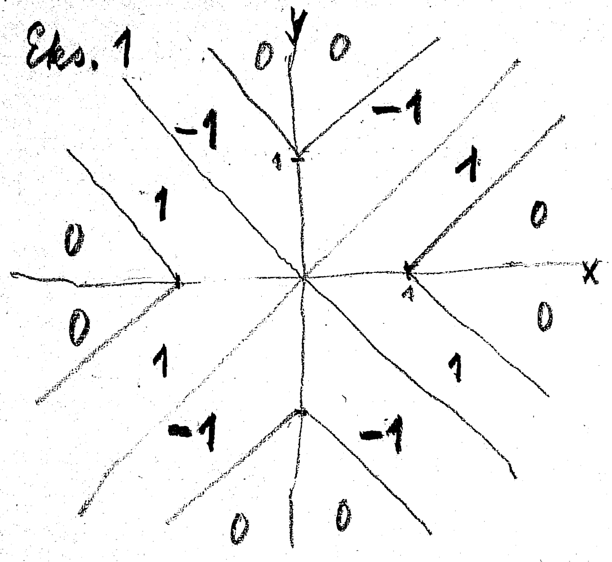
Men for ethvert x eksisterer $I_x(f(x,y))$ og er $=0$

og —— y —— $I_y(f(x,y))$ og er $=0$.

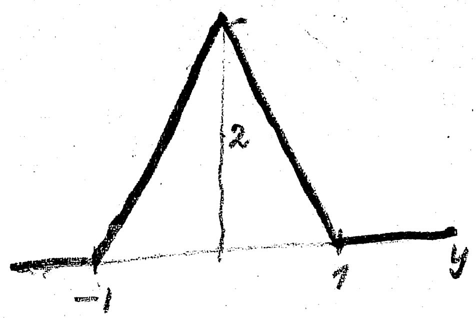
Altså eksisterer $I_y(I_x(f(x,y)))$ og $I_x(I_y(f(x,y)))$ og er begge $=0$.

64. Konstruer en funktion $f = f(x,y)$ på $\bar{R}^2$, for hvilken $I_y(I_x(f(x,y)))$ og $I_x(I_y(f(x,y)))$ begge eksisterer og har forskellig værdi.

Eks. 1



$I_x(f(x,y))$ bliver

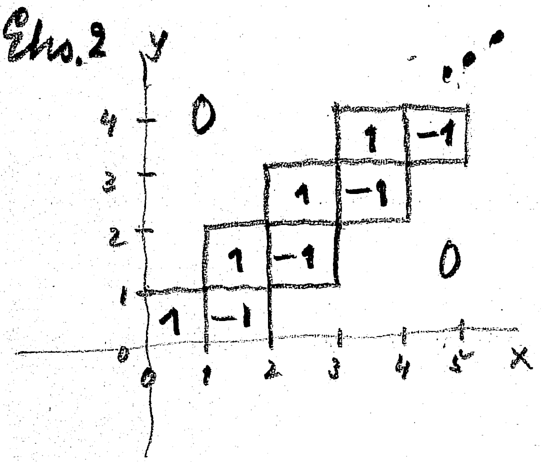


altså

$I_y(I_x(f(x,y))) = 2$

analogt fås $I_x(I_y(f(x,y))) = -2.$

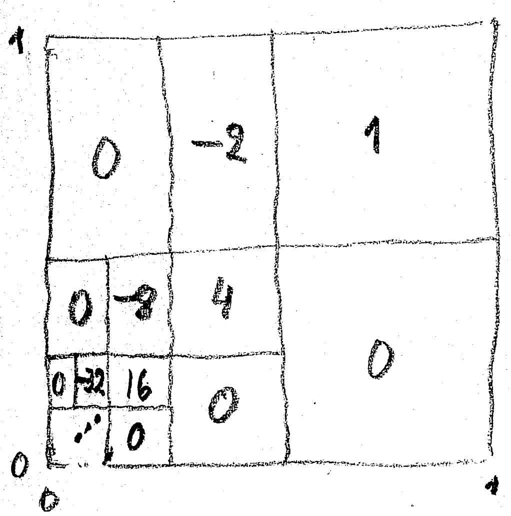
Eks. 2



$I_y(I_x(f(x,y))) = 0$

$I_x(I_y(f(x,y))) = 1.$

Eks. 3



$I_y(I_x(f(x,y))) = 0$

$I_x(I_y(f(x,y))) = \frac{1}{4}.$

65. Find $m_k(\{x \mid x_1^2+\cdots+x_k^2<r^2\})$.
Vink. Det søgte mål er $= C_k r^k$, hvor C_k kun afhænger af k. Vis dette og find C_k ved induktion.

Mængden $S_k(r)=\{x \mid x_1^2+\cdots+x_k^2<r^2\}$ er den åbne kugle om 0 i R^k med radius r. Som åben begrænset mængde er den målelig. Det drejer sig om formlen $m_k(S_k(r))=C_k r^k$.

$k=1$. Her er $S_1(r)=]-r,r[$, altså $m_1(S_1(r))=2r$, altså formlen rigtig med $\underline{C_1=2}$.

$k\geq 2$. Antag formlen $m_{k-1}(S_{k-1}(r))=C_{k-1}r^{k-1}$ rigtig. Vi anvender Lebesgue-Fubinis sætning, idet vi skriver $R^k=R^{k-1}\times R$

$$\{(x_1,\dots,x_{k-1}) \mid (x_1,\dots,x_{k-1},x_k)\in S_k(r)\}=\begin{cases} S_{k-1}(\sqrt{r^2-x_k^2}) & \text{når } |x_k|<r \\ \emptyset & \text{når } |x_k|\geq r.\end{cases}$$

Altså
$$m_k(S_k(r))=\int_{-r}^{r} m_{k-1}(S_{k-1}(\sqrt{r^2-x_k^2}))\,dx_k=\int_{-r}^{r} C_{k-1}(\sqrt{r^2-x_k^2})^{k-1}\,dx_k.$$

Substitution $x_k=r\cos\theta$ giver
$$m_k(S_k(r))=C_{k-1}\int_0^\pi \sin^k\theta\,d\theta\; r^k.$$

Altså er formlen $m_k(S_k(r))=C_k r^k$ rigtig med $C_k=\alpha_k C_{k-1}$, hvor $\alpha_k=\int_0^\pi \sin^k\theta\,d\theta$. Ved bestemmelsen af α_k for $k\geq 2$ får vi brug for $\alpha_0=\pi$, $\alpha_1=2$ (trivielle).

For $k\geq 2$ fås ved partiel integration
$$\alpha_k=\int_0^\pi \sin^{k-1}\theta\,\sin\theta\,d\theta=\left[-\sin^{k-1}\theta\cos\theta\right]_0^\pi+\int_0^\pi (k-1)\sin^{k-2}\theta\,\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=(k-1)\alpha_{k-2}-(k-1)\alpha_k, \qquad \alpha_k=\frac{k-1}{k}\alpha_{k-2}.$$

Heraf
$$\alpha_k=\frac{k-1}{k}\,\frac{k-3}{k-2}\cdots\begin{cases}\cdot\frac{1}{2}\pi & \text{for } k \text{ lige}\\ \cdot\frac{2}{3}2 & \text{for } k \text{ ulige}\end{cases}$$
Specielt $\alpha_2=\frac{1}{2}\pi$ hvoraf $\underline{C_2=\pi}$.

$C_k=\alpha_k C_{k-1}=\alpha_k\alpha_{k-1}C_{k-2}=\frac{2\pi}{k}C_{k-2}$. Heraf

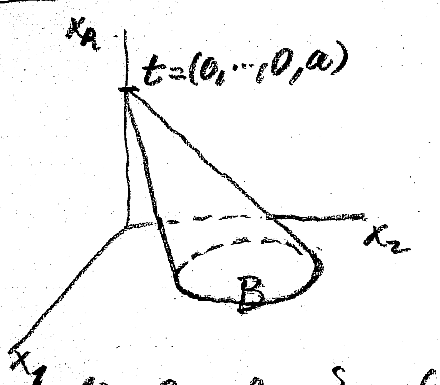
k ulige $\quad C_k=\frac{2\pi}{k}\,\frac{2\pi}{k-2}\cdots\frac{2\pi}{3}C_1=\dfrac{2^{\frac{k+1}{2}}\pi^{\frac{k-1}{2}}}{1\cdot3\cdot5\cdots k}$

k lige $\quad C_k=\frac{2\pi}{k}\,\frac{2\pi}{k-2}\cdots\frac{2\pi}{4}C_2=\dfrac{\pi^{\frac{k}{2}}}{1\cdot2\cdots\frac{k}{2}}$

$$\Bigg\}=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$$

$k=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C_k=$	2	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$	$\frac{16}{105}\pi^3$	$\frac{1}{24}\pi^4$	$\frac{32}{945}\pi^4$	$\frac{1}{120}\pi^5$

66. Idet B er en begrænset afsluttet mængde i underrummet $R^{k-1} = \{x \mid x_k = 0\}$ af R^k, betragtes „keglen" A med „toppunkt" $t = (0,\cdots,0,a)$ og „basis" B, bestemt som foreningsmængden af alle linjestykker xt, hvor $x \in B$. Vis, at
$$m_k(A) = \frac{1}{k}\,|a|\,m_{k-1}(B).$$



Afbildningen
$x = (x_1,\cdots,x_{k-1},x_k) \to x' = (x_1,\cdots,x_{k-1},-x_k)$
fører åbenbart en målelig mængde over i en målelig mængde med samme mål. Vi kan derfor antage $a > 0$.

Vi har $A = \{x = (\alpha y_1,\cdots,\alpha y_{k-1},(1-\alpha)a) \mid (y_1,\cdots,y_{k-1}) \in B,\ 0 \le \alpha \le 1\}$

Altså er A billedet ved afbildningen
$$(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k) = (\alpha y_1,\cdots,\alpha y_{k-1},\ x_k = (1-\alpha)a)$$
af mængden $\{(y_1,\cdots,y_{k-1},\alpha) \mid (y_1,\cdots,y_{k-1}) \in B,\ 0 \le \alpha \le 1\} = B \times [0,1]$ i $(y_1,\cdots,y_{k-1},\alpha)$-rummet. Denne er kompakt og afbildningen er kontinuert. Altså er A kompakt, og følgelig målelig.

Lebesgue-Fubinis sætning giver
$$m_k(A) = \int_0^a m_{k-1}(\{(x_1,\cdots,x_{k-1}) \mid (x_1,\cdots,x_{k-1},x_k) \in A\})\,dx_k.$$

For $0 \le x_k < a$ er
$$\{(x_1,\cdots,x_{k-1}) \mid (x_1,\cdots,x_{k-1},x_k) \in A\}$$
$$= \{((1-\tfrac{x_k}{a})y_1,\cdots,(1-\tfrac{x_k}{a})y_{k-1}) \mid (y_1,\cdots,y_{k-1}) \in B\}.$$

En homoteti $y = (y_1,\cdots,y_{k-1}) \to y' = (\alpha y_1,\cdots,\alpha y_{k-1})$, $\alpha > 0$, i $(y_1,\cdots,y_{k-1})$-rummet fører åbenbart en målelig mængde over i en målelig mængde, hvis mål er α^{k-1} gange målet af mængden. Vi får altså
$$m_k(A) = \int_0^a \left(1-\frac{x_k}{a}\right)^{k-1} m_{k-1}(B)\,dx_k \qquad [\text{sæt } x_k = a(1-\alpha)]$$
$$= \int_0^1 \alpha^{k-1}\,a\,m_{k-1}(B)\,d\alpha = \frac{1}{k}\,a\,m_{k-1}(B).$$

67. Vis, at der for ethvert normeret lineært rum gælder, at

$$\|f-f_n\| \to 0 \text{ for } n\to\infty \Rightarrow \|f_n\| \to \|f\| \text{ for } n\to\infty$$

(ɔ: $\|f\|$ er en kontinuert funktion på rummet).

Af $f=(f-f_n)+f_n$ fås

$$\|f\| \leq \|f-f_n\|+\|f_n\|$$

altså $$\|f\|-\|f_n\| \leq \|f-f_n\|.$$

Af $f_n=(f_n-f)+f$ fås

$$\|f_n\| \leq \|f_n-f\|+\|f\|$$

altså $$\|f\|-\|f_n\| \geq -\|f_n-f\| = -\|f-f_n\|.$$

Altså gælder $$\big|\, \|f\|-\|f_n\| \,\big| \leq \|f-f_n\|,$$

hvoraf sætningen.

68. Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der gælder lighedstegn i Hölders ulighed. Samme opgave for Minkowskis ulighed.

---

1. Hölders ulighed. Hvis $a_1, \dots, a_n$ er komplekse tal gælder i uligheden $\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|$ lighedstegn, hvis og kun hvis tallene a_ν har samme argument [argumentet af 0 kan vælges vilkårligt]. — I uligheden $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$, hvor $u \geq 0, v \geq 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, gælder ifølge beviset lighedstegn, hvis og kun hvis $u^p = v^q$.
Følgelig gælder i

$$|(x,y)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \bar{y}_\nu\right| \underset{ⓐ}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu \bar{y}_\nu| \underset{ⓑ}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{|x_\nu|^p}{p} + \frac{|y_\nu|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$$

lighedstegn, hvis og kun hvis ⓐ tallene $x_\nu \bar{y}_\nu$ har samme argument, ⓑ $|x_\nu|^p = |y_\nu|^q$ for alle ν. For $x \neq \underline{0}, y \neq \underline{0}$ gælder derfor i Hölders ulighed, d.v.s. i

$$\frac{|(x,y)|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \left|\left(\frac{x}{\|x\|_p}, \frac{y}{\|y\|_q}\right)\right| \leq \frac{1}{p}\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p^p + \frac{1}{q}\left\|\frac{y}{\|y\|_q}\right\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

lighedstegn, hvis og kun hvis ⓐ tallene $\frac{x_\nu \bar{y}_\nu}{\|x\|_p \|y\|_q}$ har samme argument, ⓑ $\frac{|x_\nu|^p}{\sum |x_\nu|^p} = \frac{|y_\nu|^q}{\sum |y_\nu|^q}$ for alle ν, d.v.s. hvis og kun hvis ⓐ tallene $x_\nu \bar{y}_\nu$ har samme argument, ⓑ talsættene $(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p)$ og $(|y_1|^q, \dots, |y_n|^q)$ er proportionale. —
For $x = \underline{0}$ eller $y = \underline{0}$ gælder lighedstegn.
Gældende i alle tilfælde fås derfor:
Der gælder lighedstegn i Hölders ulighed $|(x,y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, hvis og kun hvis tallene $x_\nu \bar{y}_\nu$ har samme argument og talsættene $(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p)$ og $(|y_1|^q, \dots, |y_n|^q)$ er lineært afhængige.

(fortsættes)

2. Minkowskis ulighed. I Minkowskis ulighed for $\underline{p=1}$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu+y_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu| + \sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu| = \|x\|_1+\|y\|_1$$

gælder lighedstegn, hvis og kun hvis $|x_\nu+y_\nu| = |x_\nu|+|y_\nu|$ for hvert ν, d.v.s. hvis og kun hvis x_ν og y_ν har samme argument for hvert ν.

Minkowskis ulighed for $\underline{p>1}$ blev for $x+y \neq \underline{0}$ bevist ud fra

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu+y_\nu||x_\nu+y_\nu|^{p-1} \underset{a}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu||x_\nu+y_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu||x_\nu+y_\nu|^{p-1}$$

$$\underset{b}{\leq} \|x\|_p\|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p\|x+y\|_p^{p-1}.$$

b beroede på Hölders ulighed. Lighedstegn fås, hvis og kun hvis a x_ν og y_ν har samme argument for ethvert ν, for hvilket $x_\nu+y_\nu \neq 0$, b talsættene $(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p)$ og $(|y_1|^p, \dots, |y_n|^p)$ er hver for sig en konstant gange talsættet $(|x_1+y_1|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}, \dots, |x_n+y_n|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}) = (|x_1+y_1|^p, \dots, |x_n+y_n|^p)$, d.v.s. hvis og kun hvis

a x_ν og y_ν har samme argument for ethvert ν,

b talsættene $(|x_1|^p, \dots, |x_n|^p)$ og $(|y_1|^p, \dots, |y_n|^p)$ er lineært afhængige, d.v.s. hvis og kun hvis et af af talsættene $(x_1, \dots, x_n)$ og $(y_1, \dots, y_n)$ fremgår af det andet ved multiplikation med en konstant ≥ 0.

Hvis $x+y=\underline{0}$ gælder lighedstegn, hvis og kun hvis $x=\underline{0}$, $y=\underline{0}$.

Gældende i alle tilfælde fås derfor:

Der gælder lighedstegn i Minkowskis ulighed $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$ for $p>1$, hvis og kun hvis et af talsættene $(x_1, \dots, x_n)$ og $(y_1, \dots, y_n)$ fremgår af det andet ved multiplikation med en konstant ≥ 0.

69. Vis, at vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger $x=(x_1,x_2,\dots)$ ikke kan normeres på en sådan måde, at konvergens i norm er ensbetydende med koordinatvis konvergens, ɔ: at der ikke findes nogen norm $\|x\|$, således at, når $x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\dots)$,

$$\|x-x^{(m)}\|\to 0 \text{ for } m\to\infty \iff x_i^{(m)}\to x_i \text{ for } m\to\infty \text{ og alle } i.$$

70? 66. $x = (x_1, x_2, \dots)$

$N(x) = \sup(|x_i| \wedge \frac{1}{i})$

(1) $0 \leq N(x) \leq 1$

$N(x) = 0 \iff x = 0$

(2) $N(-x) = N(x)$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$|x_i + y_i| \wedge \frac{1}{i} \leq (|x_i| + |y_i|) \wedge \frac{1}{i} \leq (|x_i| \wedge \frac{1}{i}) + (|y_i| \wedge \frac{1}{i})$

$\leq \|x\| + \|y\|$ heraf res.

$\therefore$ $dist(x,y) = N(x-y)$ er metrik.

$dist(x, x_n) \to 0 \iff x_{ni} \to x_i$ for alle i

$\therefore$ $N(x_n) \to 0 \iff x_{ni} \to 0$ for alle i

(1) givet $N(x_n) \to 0$

Vælg $\varepsilon > 0$ og i. Til ε findes N så $N(x_n) \leq \varepsilon$ for $n \geq N$

da er $|x_{ni}| \wedge \frac{1}{i} \leq \varepsilon$ for $n \geq N$

$\therefore$ $|x_{ni}| \leq \varepsilon$ for $n \geq N$ hvis $\varepsilon \leq \frac{1}{i}$

$\therefore$ $x_{ni} \to 0$ for $n \to \infty$.

(2) givet $x_{ni} \to 0$ for $n \to \infty$ for alle i.

Vælg $\varepsilon > 0$ i så $\frac{1}{i} \leq \varepsilon$

N_1 så $|x_{n1}| \leq \varepsilon$ for $n \geq N_1$

N_i så $|x_{ni}| \leq \varepsilon$ for $n \geq N_i$

$N = \max(N_1, \dots, N_i)$.

Da er $N(x_n) \leq \varepsilon$ for $n \geq N$.

70. Vis, at det reelle, resp. komplekse, talfølgerum med afstandsdefinitionen

$$\mathrm{dist}(x,y) = \sup_i \left(|x_i - y_i| \wedge \frac{1}{i}\right)$$

er et metrisk rum. Vis, at konvergens i denne metrik er ensbetydende med koordinatvis konvergens (jfr. opg. 69).
Vis, at en mængde i rummet er prekompakt, hvis og kun hvis den er delmængde af en mængde af formen

$$\{x \mid |x_i| \le M_i, \quad i = 1,2,\ldots\},$$

hvor alle $M_i < +\infty$.

71*. Vis, at der eksisterer en uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hvis led tilhører $\mathcal{L}(\grave{R}^k)$, med den egenskab, at man for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(\grave{R}^k)$ kan sætte parenteser i rækken på en sådan måde (d.v.s. kan vælge indices $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ således), at den derved fremkomne række

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(f_{n_{q-1}+1}(x) + \dots + f_{n_q}(x) \right)$$

konvergerer (stærkt) mod f i $\mathcal{L}(\grave{R}^k)$ (d.v.s. dens afsnit konvergerer stærkt mod f).

I $\mathcal{L}(\grave{R}^k)$ vælges en numererbar overalt tæt delmængde $\{h_1, h_2, \dots\}$. Vi sætter

$s_1 = h_1$
$s_2 = h_1, s_3 = h_2$
$s_4 = h_1, s_5 = h_2, s_6 = h_3$
etc.

Følgen $s_1, s_2, \dots$ har således den egenskab, at enhver af funktionerne $h_1, h_2, \dots$ forekommer uendelig ofte i den.

Vi sætter endvidere

$f_1 = s_1$
$f_n = s_n - s_{n-1}$ for $n > 1$.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ har da afsnitsfølgen $s_1, s_2, \dots$.

Er nu f en vilkårlig funktion i $\mathcal{L}(\grave{R})$ findes numre $p_1, p_2, \dots$, så at $\|f - h_{p_q}\| \to 0$ for $q \to \infty$.

Nu vælges n_1, så at $s_{n_1} = h_{p_1}$,
dernæst $n_2 > n_1$, så at $s_{n_2} = h_{p_2}$,
etc.

Afsnitsfølgen i rækken $\sum_{q=1}^{\infty} (f_{n_{q-1}+1} + \dots + f_{n_q})$ er da $s_{n_1}, s_{n_2}, \dots$, altså netop $h_{p_1}, h_{p_2}, \dots$, og rækken konvergerer altså stærkt mod f i $\mathcal{L}(\grave{R}^k)$.

73*. Vis, at hvis en målelig funktion f på $\grave{R}$ har vilkårligt små perioder (ɔ: der findes en følge af tal $p_n \neq 0$ med $p_n \to 0$, således at $f(x+p_n) = f(x)$ for alle $x \in \grave{R}$ og alle n), da er $f(x)$ konstant næsten overalt (ɔ: der findes et tal a, således at $\{x \mid f(x) \neq a\}$ er en nulmængde).

Vink. Betragt først det tilfælde, hvor f er begrænset. Behandl det tilfælde, hvor f er ubegrænset, ved at betragte funktionen $\varphi \circ f$, hvor φ er den funktion på $\grave{R}^*$, der defineres ved, at $\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ for $x \in \grave{R}$, $\varphi(+\infty) = 1$ og $\varphi(-\infty) = -1$.

Kan antage alle $p_n > 0$.

(1) f begrænset ≥ 0, $\leq M$. Betragt interval J med $m(J) > 0$. Del $\grave{R}$ i intervallerne $[(\nu-1)p_n, \nu p_n[$, $\nu \in \grave{Z}$. Hvis a_n af dem ligger i J, haves, idet $\pi_n = I(f_{[0,p_n[})$,

$$|I(f_J) - a_n \pi_n| \leq 2p_n M, \qquad 0 \leq m(J) - a_n p_n \leq 2p_n.$$

Heraf fås $a_n p_n \to m(J)$, $a_n \pi_n \to I(f_J)$, altså $\frac{\pi_n}{p_n} \to \frac{I(f_J)}{m(J)}$. Altså er $\frac{I(f_J)}{m(J)} = c$ uafhængig af J.

Heraf $I(f_J) = c\, m(J)$ for alle intervaller J, også dem med $m(J) = 0$.

Heraf $I(fh) = c\, I(h)$ for enhver trappefunktion h.

For fast interval J vælges følge $(h_n) \in \sigma(f_J)$. Da er $f_J^2 \leq \lim f h_n$, altså $I(f_J^2) \leq \lim I(f h_n) = c \lim I(h_n)$, hvoraf $I(f_J^2) \leq c\, I(f_J) = c^2 m(J)$. Heraf

$$I((f-c)_J^2) = I(f_J^2) - 2c\, I(f_J) + c^2 m(J) \leq (c^2 - 2c^2 + c^2)\, m(J) = 0,$$

hvoraf $I((f-c)_J^2) = 0$, altså $f_J(x) = c$ næsten overalt.

Heraf $\{x \mid f(x) \neq c\}$ er nulmængde.

(2) f begrænset, $|f| \leq M$. Anvendelse af (1) på $f+M$ viser, at der findes c, så $\{x \mid f(x) \neq c\}$ er nulmængde.

(3) f vilkårlig. Anvendelse af (2) på $\varphi \circ f$ giver sætningen.

74. Under brug af decimalbrøker (betegnet ${}^{10}0,\dots$) og dualbrøker (betegnet ${}^{2}0,\dots$) defineres en funktion $f:[0,1]\to[0,1]$ således: Hvis

$$x = {}^{10}0,a_1a_2\dots a_n a_{n+1}a_{n+2}\dots = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\dots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{10^{n+2}}+\dots$$

hvor $a_n = 2$, $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ alle er 0 eller 1, sættes

$$f(x) = {}^{2}0,a_{n+1}a_{n+2}\dots = \frac{a_{n+1}}{2}+\frac{a_{n+2}}{2^2}+\dots .$$

Ellers sættes $f(x)=0$. Vis, at der for ethvert interval $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ med $\alpha<\beta$ gælder $f([\alpha,\beta])=[0,1]$. Vis endvidere, at f er en nulfunktion.

$[\alpha,\beta]$ indeholder et interval

$$[{}^{10}0,a_1a_2\dots a_{n-1}2\,,\ {}^{10}0,a_1a_2\dots a_{n-2}3].$$

Ethvert $x = {}^{10}0,a_1a_2\dots a_{n-1}2\,a_{n+1}a_{n+2}\dots$, hvor alle $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ er 0 eller 1, ligger altså i $[\alpha,\beta]$.

$f([\alpha,\beta])$ indeholder altså alle tal $y = {}^{2}0,a_{n+1}a_{n+2}\dots$, hvor alle $a_{n+1},a_{n+2},\dots$ er 0 eller 1, d.v.s. $f([\alpha,\beta])$ indeholder $[0,1]$. Omvendt er $f([\alpha,\beta])$ åbenbart indeholdt i $[0,1]$.

$\{x \mid f(x)\neq 0\}$ er indeholdt i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, hvor

$$A_n = \{x = {}^{10}0,a_1a_2\dots \mid a_1,\dots,a_n = 0,1,\dots,9;\ a_{n+1},a_{n+2},\dots = 0,1\}$$

$10^n A_n = \{0,1,2,\dots,10^n-1\} + B$, hvor

$$B = \{y = {}^{10}0,b_1b_2\dots \mid \text{alle } b_n = 0 \text{ eller } 1\}.$$

Ifølge opg. 42 er B en nulmængde. Altså er $10^n A_n$ en nulmængde, altså A_n, og altså $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

75. Vis, at mængden af trappefunktioner <u>ikke</u> er overalt tæt i $\mathcal{L}_\infty(R^k)$

$\mathcal{L}_\infty(R^k)$ indeholder funktionen 1.
For enhver trappefunktion f er $\|f-1\|_\infty \geq 1$.
Heraf udsagnet.

76. Vis, at $\mathcal{L}_\infty(\grave{R}^k)$ ikke indeholder nogen numererbar overalt tæt delmængde.

For ethvert $a \in \grave{R}$ gælder $g_a = 1_{[a,+\infty[^k} \in \mathcal{L}_\infty(\grave{R})$.

For $a \neq b$ gælder $\|g_a - g_b\| = 1$.

Kuglerne $K_a = \{ f \in \mathcal{L}_\infty(\grave{R}) \mid \|f - g_a\| < \frac{1}{2} \}$ er derfor parvis disjunkte.

Hvis $S \subseteq \mathcal{L}_\infty(\grave{R}^k)$ er overalt tæt i $\mathcal{L}_\infty(\grave{R}^k)$, må der for hvert a findes et $f_a \in S$, som tilhører K_a. Disse f_a vil være parvis forskellige.

Altså er S ikke numererbar.

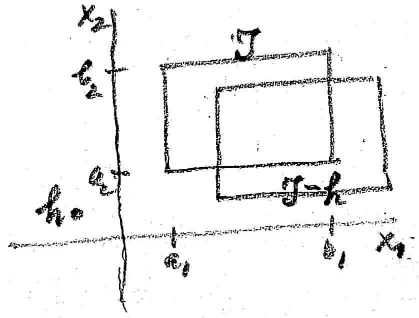
77. Idet $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$, hvor $1 \leq p < +\infty$, og f_h betegner den ved $f_h(x) = f(x+h)$ bestemte funktion ($h \in \mathbb{R}^k$), skal man vise, at

$$\| f - f_h \|_p \to 0 \quad \text{for } h \to 0.$$

Vink. Bevis først udsagnet for en trappefunktion og approksimer dernæst en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$ med en trappefunktion.

---

(1) $f = 1_J$, hvor $J = J_1 \times \cdots \times J_k$
endepkt $a_1, b_1 \; \dots \; a_k, b_k$



Så er $f_h = 1_{J-h}$, altså

$$f - f_h = 1_{J \setminus (J-h)} - 1_{(J-h)\setminus J}$$

$$\| f - f_h \|_p^p = m(J \setminus (J-h)) + m((J-h)\setminus J)$$
$$= 2m(J) - 2m(J \cap (J-h)) \to 0 \quad \text{for } h \to 0.$$

(2) f trappefunktion $= a_1 1_{J_1} + \cdots + a_n 1_{J_n} = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.

$f_h = a_1 f_{1h} + \cdots + a_n f_{nh}$. $\quad f - f_h = a_1(f_1 - f_{1h}) + \cdots + a_n(f_n - f_{nh})$.

$\| f - f_h \|_p \leq |a_1| \, \| f_1 - f_{1h} \|_p + \cdots + |a_n| \, \| f_n - f_{nh} \| \to 0$ for $h \to 0$.

(3) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^k)$. Til $\varepsilon > 0$ vælges trappefunktion g,

så at $\| f - g \|_p < \varepsilon$.

For ethvert h er $\| f_h - g_h \| = \| f - g \|$, altså

$$\| f_h - g_h \|_p < \varepsilon.$$

Sættes $h = (h_1, \dots, h_k)$, findes $\delta > 0$ så at

$$\| g - g_h \|_p < \varepsilon, \quad \text{når } \max\{|h_1|, \dots, |h_k|\} < \delta.$$

For $\max\{|h_1|, \dots, |h_k|\} < \delta$ gælder da

$$\| f - f_h \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - g_h \|_p + \| g_h - f_h \|_p$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Altså gælder $\| f - f_h \|_p \to 0$ for $h \to 0$.

78. Vis, at når $f \in \mathcal{L}_p(\mathring{R}^k)$, $g \in \mathcal{L}_q(\mathring{R}^k)$, hvor $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, er den ved

$$h(x) = I_t(f(x-t)g(t))$$

definerede funktion h en kontinuert funktion på $\mathring{R}^k$.

Vink. Benyt opg. 77 og Hölders ulighed.

For hvert fast x er $f(x-t)$ som funktion af t en funktion i $\mathcal{L}_p(\mathring{R}^k)$. Altså eksisterer integralet for ethvert x.

Af Hölders ulighed fås for et vilkårligt Δx

$$|h(x+\Delta x)-h(x)| = |I_t((f(x+\Delta x-t)-f(x-t))g(t))|$$
$$\leq I_t(|f(x+\Delta x-t)-f(x-t)|^p)^{\frac{1}{p}}\, I(|g(t)|^q)^{\frac{1}{q}}$$
$$= I_u(|f(u+\Delta x)-f(u)|^p)^{\frac{1}{p}}\, I(|g(t)|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Ifølge opg. 77 gælder $I_u(|f(u+\Delta x)-f(u)|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Altså gælder $h(x+\Delta x)-h(x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$, d.v.s. funktionen h er kontinuert i x.

[Da $I_u(|f(u+\Delta x)-f(u)|^p)^{\frac{1}{p}}\, I(|g(t)|^q)^{\frac{1}{q}}$ er uafhængigt af x, ses endda, at funktionen h er ligelig kontinuert i $\mathring{R}^k$.]

Bemærk: h kaldes foldningen af f og g og man skriver $h = f * g$.

79. Vis, at hvis $f \in L$ har Fourierrækken
$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, da gælder $a_n = 0$ for alle n, hvis f er ulige, og $b_n = 0$ for alle n, hvis f er lige.

$$a_n = 2\,\mathcal{M}\{f(x)\cos nx\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = 2\,\mathcal{M}\{f(x)\sin nx\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Hvis f er ulige, er $f(x)\cos nx$ ulige, altså

$$a_n = 0 \text{ for alle } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hvis f er lige, er $f(x)\sin nx$ ulige, altså

$$b_n = 0 \text{ for alle } n = 1, 2, \ldots.$$

80. Idet $f_k(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{inx}$ og $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}$, og $\|f - f_k\|_1 \to 0$ for $k \to \infty$, skal man vise, at $c_n^{(k)} \to c_n$ for $k \to \infty$ for alle n og endda ligeligt i n.

$$c_n = \mathcal{M}\{f(x)e^{-inx}\}$$

$$c_n^{(k)} = \mathcal{M}\{f_k(x)e^{-inx}\},$$

altså

$$c_n - c_n^{(k)} = \mathcal{M}\{(f(x) - f_k(x))e^{-inx}\}$$

$$|c_n - c_n^{(k)}| \leq \mathcal{M}\{|f(x) - f_k(x)| \cdot 1\} = \|f - f_k\|_1,$$

altså $c_n^{(k)} \to c_n$ for $k \to \infty$ for alle n.

Endda

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n - c_n^{(k)}| \leq \|f - f_k\|_1,$$

altså $c_n^{(k)} \to c_n$ for $k \to \infty$ ligeligt i n.

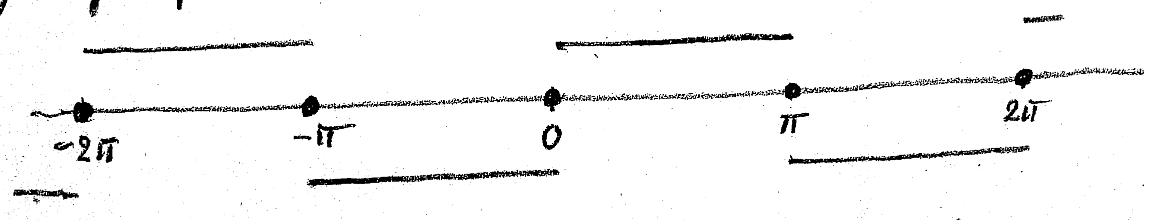
81. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{for } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{for } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0 \text{ og } x = \pi \end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π. Udled herved formlen $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$.

---

f's graf:



Man ser, at f er ulige. Altså er $a_n = 0$ for alle n.
Vi får

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{2n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & \text{for } n \text{ lige,} \end{cases}$$

altså

$$f(x) \sim \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots.$$

Da f er af begrænset variation på ethvert interval, er rækken konvergent for ethvert x med summen $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, som her er $= f(x)$, altså

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \quad \text{for alle } x.$$

$x = \frac{\pi}{2}$ giver

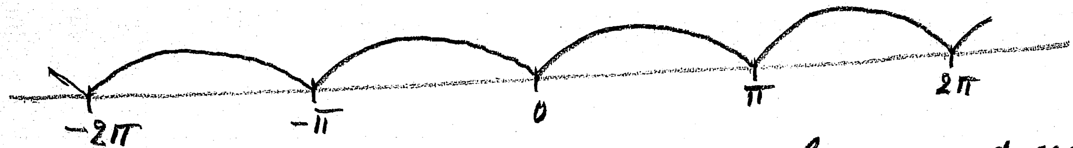
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \quad \text{(Leibniz' række)}$$

82. Udled formulen

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kx}{4k^2-1}.$$

Indsæt $x = \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = |\sin x|$ er lige og har perioden 2π (endda π).



Endvidere er f kontinuert og af begrænset variation på ethvert interval. Altså er Fourierrækken konvergent for alle x med summen $f(x)$.

Da f er lige, er $b_n = 0$ for alle n.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } n=1 \\ \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ ulige} \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}. & \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Altså

$a_n = 0$ for n ulige, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_{2k} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$ for $k = 1, 2, \dots$.

Altså

$$f(x) = |\sin x| \underset{\underline{\underline{\text{og}}}}{\sim} \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

$x=0$ giver $\quad 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$ (ses også let direkte)

Altså

$$f(x) = |\sin x| = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2kx}{4k^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kx}{4k^2-1}.$$

$x = \frac{\pi}{2}$ giver $\quad 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \cdots\right)$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ulige}}}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots\right)$$

83. Fremstil $\cos x$ i intervallet $\underline{0<x<\pi}$ ved en rækkeudvikling af formen

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Betragt en ulige funktion $f(x)$ med perioden 2π, som i $0<x<\pi$ er $= \cos x$. Hvilke værdier vi giver den i punkterne 0 og π er for den stillede opgave uden betydning. Det er fornuftigt at sætte $f(x)=0$ i disse punkter.

Da er

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } 0<x<\pi \\ -\cos x & \text{for } -\pi<x<\pi \\ 0 & \text{for } x=0 \text{ og } x=\pi. \end{cases}$$

[Man ser, at f endda har perioden π.] Man ser, at f er af begrænset variation på ethvert interval og at $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = f(x)$ for alle x. Altså er Fourier-rækken konvergent for alle x med summen $f(x)$.

Da f er ulige er $a_n = 0$ for alle n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right] dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } n=1 \\ \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ ulige} \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{n}{n^2-1} & \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Altså

$b_n = 0$ for n ulige, $b_{2k} = \frac{8}{\pi}\frac{k}{4k^2-1}$ for $k = 1, 2, \dots$.

Altså

$$f(x) \underset{\text{og}}{\approx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi}\frac{k}{4k^2-1} \sin 2kx.$$

Heraf

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin 2x + \frac{2}{15}\sin 4x + \cdots\right) \text{ for } 0<x<\pi.$$

84. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi \sin \alpha x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ \frac{1}{2}\pi \sin 2\alpha\pi & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

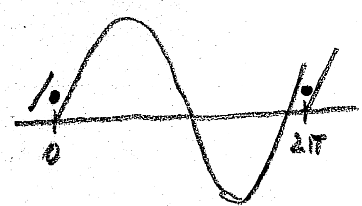
bestemte funktion med perioden 2π (hvor α er et ikke helt tal). Udled herved ved at sætte $x=\pi$

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right)$$

og ved at sætte $x=0$

$$\pi \cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2-n^2} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right).$$

(Partialbrøksfremstillingerne for funktionerne $\frac{1}{\sin}$ og cot; tallet α kan være reelt eller komplekst, blot ikke helt.)



f er af begrænset variation på ethvert interval, og $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = f(x)$ for alle x. Altså er Fourierrækken konvergent for alle x med summen $f(x)$.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \pi \sin \alpha x \, e^{-inx}\,dx = \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi} \left(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}\right) e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{4i}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(\alpha-n)x} - e^{-i(\alpha+n)x}\right)dx = \frac{1}{4i}\left[\frac{e^{i(\alpha-n)x}}{i(\alpha-n)} + \frac{e^{-i(\alpha+n)x}}{i(\alpha+n)}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i2\alpha\pi}-1}{\alpha-n} + \frac{e^{-i2\alpha\pi}-1}{\alpha+n}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\alpha\pi}}{\alpha-n} - \frac{e^{-i\alpha\pi}}{\alpha+n}\right) 2i\sin\alpha\pi .$$

$$c_0 = -\frac{1}{4}\,\frac{e^{i\alpha\pi}-e^{-i\alpha\pi}}{\alpha}\,2i\sin\alpha\pi = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha}.$$ Altså

$$f(x) \underset{\underset{=}{og}}{\sim} \frac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i\sin\alpha\pi}{2}\left(\left(\frac{e^{i\alpha\pi}}{\alpha-n} - \frac{e^{-i\alpha\pi}}{\alpha+n}\right)e^{inx} + \left(\frac{e^{i\alpha\pi}}{\alpha+n} - \frac{e^{-i\alpha\pi}}{\alpha-n}\right)e^{-inx}\right)$$

$x=\pi$ giver

$$\pi\sin\alpha\pi = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i\sin\alpha\pi}{2}(-1)^n\left(\frac{2i\sin\alpha\pi}{\alpha-n} + \frac{2i\sin\alpha\pi}{\alpha+n}\right)$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^2\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha-n} + \frac{1}{\alpha+n}\right),$$

$x=0$ giver

$$\pi\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi = \frac{\sin^2\alpha\pi}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\alpha\pi\left(\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right),$$

hvoraf de ønskede formler ved division med $\sin^2\alpha\pi$ (som er $\neq 0$ da α ikke er hel).

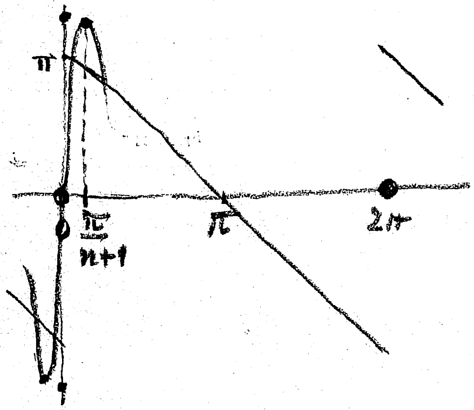
85. Den periodiske funktion f med perioden 2π, der bestemmes ved

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x & \text{for } 0<x<2\pi\\ 0 & \text{for } x=0\end{cases}$$

har Fourierrækken

$$f(x)\sim\sum_1^\infty \frac{2\sin nx}{n}.$$

Vis, at grænseværdien for $s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ for $n\to\infty$ eksisterer og er $>\pi$. (Gibbs' fænomen.)

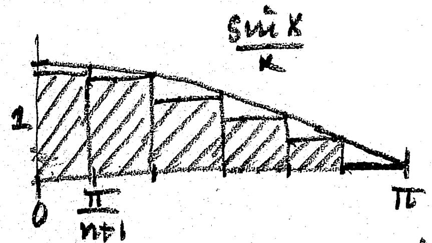


$$s_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\sin\nu x}{\nu}$$

$$s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\sin\nu\frac{\pi}{n+1}}{\nu}$$

$$=2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu\frac{\pi}{n+1}}{\nu\frac{\pi}{n+1}}\cdot\frac{\pi}{n+1}$$

$$=2\sum_{\nu=1}^{n+1}h\left(\nu\frac{\pi}{n+1}\right)\cdot\frac{\pi}{n+1},$$

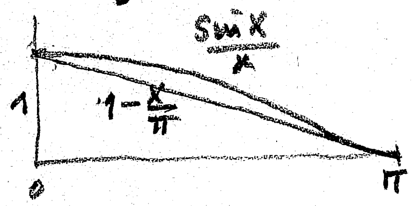


hvor h er funktionen

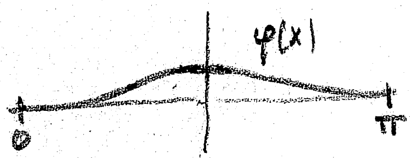
$$h(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad (h(0)=1).$$

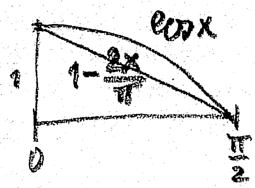
Altså gælder $s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\longrightarrow 2\int_0^\pi h(x)\,dx=2\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx.$

Men $\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx>\frac{\pi}{2}$, idet $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x}{\pi}$ for $0<x<\pi$.



Denne ulighed $\sin x>x-\frac{x^2}{\pi}$ eller $\varphi(x)=\sin x-x+\frac{x^2}{\pi}>0$ for $0<x<\pi$ følger f. eks. af, at $\varphi(x)=\varphi(\pi-x)$, $\varphi(0)=0$ og $\varphi'(x)=\cos x-1-\frac{2x}{\pi}>0$ i $0<x<\frac{\pi}{2}$ som følge af, at $\cos x$ er konkav i $0<x<\frac{\pi}{2}$.





Beregning giver $2\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx=\pi\cdot 1{,}17\ldots$

Bemærk. $s_n(x)$ er ligesom $f(x)$ ulige. For $n\to\infty$ gælder $s_n(x)\to f(x)$ for ethvert x. Man kan vise, at $s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ er den største værdi af $s_n(x)$. Man ser, at $s_n(x)$ nær 0 svinger ca. 17% ud over værdien af $f(x)$.

86. For en funktion f på $\mathring{R}$ med perioden 1 defineres Fourierrækken ved

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx} \quad\text{eller}\quad f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

hvor $c_k=\int_0^1 f(x)e^{-i2\pi kx}$, $\left.\begin{matrix}a_k\\ b_k\end{matrix}\right\} = 2\int_0^1 f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, 2\pi kx\,dx$,

altså som Fourierrækken for den ved $g(y)=f(\frac{y}{2\pi})$ definerede funktion med perioden 2π, når der i denne for y skrives $2\pi x$.

<u>De Bernoulliske polynomier</u> $B_n(x)$ og de <u>Bernoulliske tal</u> B_n, $n=0,1,2,\dots$ defineres ved, at $B_0(x)=B_0=1$, og for $n>0$

$$B_n(x)= n\int_0^x B_{n-1}(\xi)\,d\xi + B_n,$$

hvor B_n vælges således, at $\int_0^1 B_n(x)\,dx=0$. Bestem $B_n(x)$ for $n=1,2,3,4$. Vis, at den periodiske funktion $\overline{B_n}(x)$ med perioden 1, som i $[0,1[$ stemmer overens med $B_n(x)$, for $n\geq 1$ har Fourierrækken

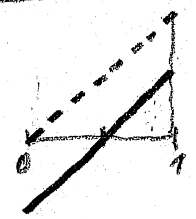
$$\overline{B_n}(x)\sim \frac{n!}{(2\pi)^n}\cdot\frac{-1}{i^n}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i2\pi kx}}{k^n} \quad\text{eller}\quad \overline{B_n}(x)\sim\begin{cases}\dfrac{n!}{(2\pi)^n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}\,2\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^n}\\[2ex] \dfrac{n!}{(2\pi)^n}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\,2\displaystyle\sum_1^{\infty}\frac{\sin 2\pi kx}{k^n},\end{cases}$$

eftersom n er lige eller ulige [Σ' betegner, at $k=0$ skal overspringes]. Vis, at rækkerne er konvergente med summen $\overline{B_n}(x)$ undtagen for $n=1$ og x hel. Find herved udtryk for B_n for $n\geq 2$. [For ulige $n\geq 2$ fås $B_n=0$.]

$B_0(x) = B_0 = 1$

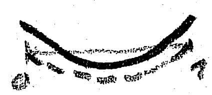
$B_1(x) = x + B_1$ $\qquad\qquad \frac{1}{2}+B_1=0$

$\quad\;\; = \underline{x-\frac{1}{2}}$ $\qquad\qquad \underline{B_1=-\frac{1}{2}}$



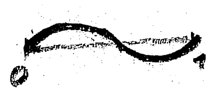
$B_2(x) = x^2-x+B_2$ $\qquad\qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_2=0$

$\quad\;\; = \underline{x^2-x+\frac{1}{6}}$ $\qquad\qquad \underline{B_2=\frac{1}{6}}$



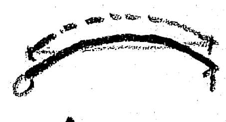
$B_3(x) = x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+B_3$ $\qquad\qquad \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+B_3=0$

$\quad\;\; = \underline{x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x}$ $\qquad\qquad \underline{B_3=0}$



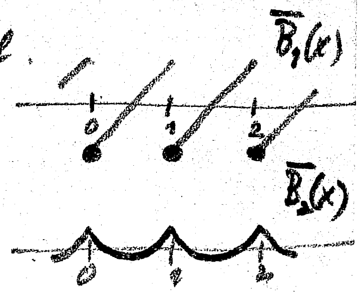
$B_4(x) = x^4-2x^3+x^2+B_4$ $\qquad\qquad \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+B_4=0$

$\quad\;\; = \underline{x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}}$ $\qquad\qquad \underline{B_4=-\frac{1}{30}}$



(forbætte)

86. (fortsat)



Man ser: $\overline{B}_1(x)$ er diskontinuert for x hel.

For $n \geq 2$ er

$B_n(1) = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx + B_n = B_n = B_n(0)$, altså

$\overline{B_n}(x)$ er kontinuert for alle x.

Da $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$ for $n \geq 1$ er konstantleddet i Fourier-rækken for $\overline{B}_n(x)$ lig med 0 for alle $n \geq 1$.

$$\overline{B}_1(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k e^{i2\pi kx} \qquad c_k = \int_0^1 \left(x-\tfrac{1}{2}\right) e^{-i2\pi kx}\,dx$$

$$= \left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\frac{e^{-i2\pi kx}}{-i2\pi k}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k}\,dx$$

$$= \frac{1}{-i2\pi k}, \text{ altså}$$

$$\overline{B}_1(x) \sim \frac{1}{2\pi}\,\frac{-1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i2\pi kx}}{k}.$$

Antag

$$\overline{B}_{n-1}(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' d_k e^{i2\pi kx}$$

$$\overline{B}_n(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}{}' e_k e^{i2\pi kx}$$

Da fås $e_k = \int_0^1 \overline{B}_n(x) e^{-i2\pi kx}\,dx$

$$= \left[B_n(x)\frac{e^{-i2\pi kx}}{-i2\pi k}\right]_0^1 + \int_0^1 n B_{n-1}(x)\frac{e^{-i2\pi kx}}{i2\pi k}\,dx$$

$$= \frac{n}{2\pi i}\,\frac{d_k}{k}.$$

Heraf ved induktion for alle $n \geq 1$

$$\overline{B_n}(x) \sim \frac{n!}{(2\pi)^n}\,\frac{-1}{i^n}\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{i2\pi kx}}{k^n} \text{ eller } \overline{B}_n(x) \sim \begin{cases} \dfrac{n!}{(2\pi)^n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}\, 2\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{k^n} & n \text{ lige} \\ \dfrac{n!}{(2\pi)^n}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi kx}{k^n} & n \text{ ulige} \end{cases}$$

Hvert $\overline{B}_n(x)$ er af begrænset variation på ethvert interval. Altså gælder formlen med $=$ i stedet for $\sim$ undtagen for $n = 1$ og x hel. Heraf

$$B_n = \overline{B}_n(0) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(2\pi)^n}(-1)^{\frac{n+2}{2}}\, 2\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{k^n} & \text{for } n \text{ lige} \geq 2 \\ 0 & \text{for } n \text{ ulige} \geq 2. \end{cases}$$

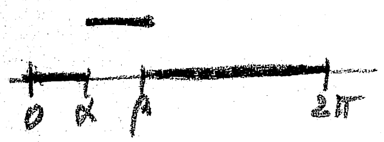
$n = 2$ giver $\frac{2}{(2\pi)^2}\,2\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}$ eller $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$n = 4$ giver $\frac{24}{(2\pi)^4}(-1)\,2\sum_1^\infty \frac{1}{k^4} = -\frac{1}{30}$ eller $\sum_1^\infty \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

87. Vis, at når $f \in \mathcal{L}$ har Fourierrækken $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ gælder $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$.

Vink. Benyt approksimation med trappefunktioner.

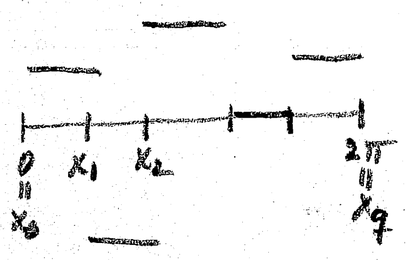
Hvis f på periodeintervallet $[0, 2\pi[$ er 1 på et delinterval med endepunkter α og β og ellers 0, er



for $n \neq 0$
$$c_n = \int_\alpha^\beta e^{-inx} dx = \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_\alpha^\beta = \frac{e^{-in\beta} - e^{-in\alpha}}{-in},$$

altså $|c_n| \leq \frac{2}{|n|}$, hvoraf $c_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Hvis f er en trappefunktion, der på periodeintervallet $[0, 2\pi[$ med inddelingen $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_q = 2\pi$ har værdien a_p i $]x_{p-1}, x_p[$, er for $n \neq 0$



$$c_n = \sum_{p=1}^{q} a_p \int_{x_{p-1}}^{x_p} e^{-inx} dx, \text{ altså}$$

$$|c_n| \leq \left(\sum_{p=1}^{q} |a_p| \right) \frac{2}{|n|}, \text{ hvoraf } c_n \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Hvis $f \in \mathcal{L}$ og $\varepsilon > 0$, vælges trappefunktion g, så at $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Hvis $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ haves

$$|c_n - d_n| = \left| \mathcal{M}\{(f(x) - g(x)) e^{-inx}\} \right| \leq \mathcal{M}\{|f(x) - g(x)| \cdot 1\}$$
$$= \|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Ifølge det foregående findes n_0, så at $|d_n| < \varepsilon$ for $|n| \geq n_0$. Altså er $|c_n| < 2\varepsilon$ for $|n| \geq n_0$. Der gælder altså $c_n \to 0$ for $n \to \infty$.

88. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i L_2, skal man finde koefficienterne i Fourierrækken for fg.

Af $f \in L_2$, $g \in L_2$ følger $fg \in L$.

Lad $f(x)g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} e_n e^{inx}$.

Da er $e_n = M\{f(x)g(x)e^{-inx}\} = (f(x), \overline{g(x)e^{inx}})$.

For fast n gælder $\overline{g(x)}e^{inx} \in L_2$.

Lad $\overline{g(x)}e^{inx} \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} p_\nu e^{i\nu x}$.

Da er $p_\nu = M\{\overline{g(x)}e^{inx}e^{-i\nu x}\} = M\{\overline{g(x)}e^{i(n-\nu)x}\}$

$$= \overline{M\{g(x)e^{-i(n-\nu)x}\}} = \overline{d_{n-\nu}}.$$

Af formlen for det indre produkt af to funktioner i L_2 fås derfor

$$e_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu d_{n-\nu}.$$

Bemærkning. For to følger

$$c = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots),\quad d = (\dots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \dots)$$

i l_2 kaldes den ved formlen

$$e_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu d_{n-\nu}$$

bestemte følge

$$e = (\dots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots)$$

foldningen af c og d og betegnes $e = c * d$. Resultatet kan derfor udtrykkes således: Fourierkoefficientfølgen for produktet af to funktioner i L_2 er foldningen af de to funktioners Fourierkoefficientfølger.

89. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i L_2, skal man finde Fourierrækken for funktionen
$$h(x) = \mathop{M}_{t}\{f(x-t)\,g(t)\},$$
og vise, at den er absolut konvergent med summen $h(x)$.

For fast x er $f(x-t)$ som funktion af t en funktion i L_2. Middelværdien eksisterer altså. Klart, at $h(x)$ har perioden 2π.
[Ved at kalkere beviset i opg. 78 ser man, at $h(x)$ er kontinuert. Vi behøver imidlertid ikke at vide dette på forhånd.]
Lad $s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu e^{i\nu x}$. Da er
$$h_n(x) = \mathop{M}_{t}\{f(x-t)\,s_n(t)\} = \sum_{\nu=-n}^{n} d_\nu \mathop{M}_{t}\{f(x-t)e^{i\nu t}\}$$
$$= \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu d_\nu e^{i\nu t}.$$
Men
$$|h(x)-h_n(x)| \leq \left|\mathop{M}_{t}\{f(x-t)(g(t)-s_n(t))\}\right|$$
$$\leq \|f\|_2 \, \|g-s_n\|_2 .$$
Altså gælder $h_n(x) \to h(x)$ ligeligt i x. Følgelig er $h(x)$ kontinuert. Lad
$$h(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} q_\nu e^{i\nu t}. \quad \text{Da er}$$
$$q_\nu = M\{h(x)e^{-i\nu t}\} = \lim_{n\to\infty} M\{h_n(t)e^{-i\nu t}\}.$$
Men $M\{h_n(t)e^{-i\nu t}\} = c_\nu d_\nu$ når $n \geq |\nu|$. Altså er
$$q_\nu = c_\nu d_\nu . \quad \text{Altså} \quad h(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu d_\nu e^{i\nu x}.$$
Da $h_n(x)$ er rækkens afsnit og $h_n(x) \to h(x)$ er rækken konvergent med sum $h(x)$. Den er absolut konvergent, da $|c_\nu d_\nu| \leq \frac{1}{2}|c_\nu|^2 + \frac{1}{2}|d_\nu|^2$ og $\sum_{-\infty}^{\infty}(|c_\nu|^2+|d_\nu|^2)$ er konvergent.

Alternativ

89. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i L_2, skal man finde Fourierrækken for funktionen

$$h(x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)\, g(t)\}$$

og vise, at den er absolut konvergent med summen $h(x)$

x fast   t den variable

$$h(x) = (f(x-t), \overline{g(t)}).$$

$$f(x-t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} q_n e^{int}$$

$$q_n = \underset{t}{M}\{f(x-t)\, e^{-int}\} \underset{t=x-u}{=} \underset{u}{M}\{f(u)\, e^{-inx} e^{inu}\} = c_n e^{-inx}$$

$$\overline{g(t)} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} r_n e^{inx}$$

$$r_n = \underset{t}{M}\{\overline{g(t)}\, e^{-inx}\} = \overline{\underset{t}{M}\{g(t)\, e^{inx}\}} = d_{-n}$$

altså

$$h(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} d_n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n d_n e^{inx}$$

rækken absolut konv. da $|c_n d_n| \leq \frac{1}{2}|c_n|^2 + \frac{1}{2}|d_n|^2$.

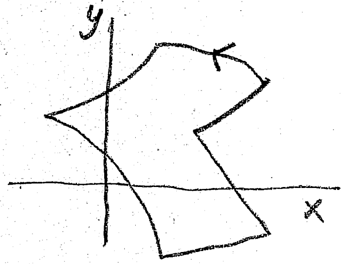
Følgelig er den også Fourierrække for $h(x)$.

90. <u>Cirklens isoperimetriske egenskab.</u> En „pæn" lukket kurve i den komplekse z-plan tænkes bestemt ved $z=f(t)$, $0\le t\le 2\pi$, hvor $f(t)$ er stykkevis kontinuert differentiabel. Kurven antages uden dobbeltpunkter, og den ved parameterfremstillingen bestemte omløbsretning antages at være planens positive omløbsretning. Kurvens længde og det af den begrænsede areal er da

$$\mathcal{L}=\int_0^{2\pi}|f'(t)|\,dt \quad \text{og} \quad A=\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{f'(t)}\,dt.$$

Vis, at $A\le \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$, og at lighedstegnet gælder, når og kun når kurven er en cirkel.

Vink. Vis, at hvis $f(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, gælder $f'(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{int}$. Antag dernæst, at parameterfremstillingen er valgt således, at $|f'(t)|$ er konstant (altså $=\frac{\mathcal{L}}{2\pi}$), og følgelig $\frac{\mathcal{L}^2}{2\pi}=\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt$. Vis, at da er $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}-A=\pi\sum_{-\infty}^{\infty}(n^2-n)|c_n|^2$, og uddrag heraf det ønskede. (A. Hurwitz.)



Formlen for længden er kendt. Formlen for arealet følger af, at (idet $z=x+iy$)

$$\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} z\,\overline{z'}\,dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(x+iy)(x'-iy')\,dt$$

$$=\frac{i}{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{(xx'+yy')}_{\frac12(x^2+y^2)'}dt + \frac12\int_0^{2\pi}(-yx'+xy')\,dt = \frac12\int_{t=0}^{2\pi}(-y\,dx+x\,dy),$$

og at $\int_{t=0}^{2\pi}-y\,dx = A$, $\int_{t=0}^{2\pi}x\,dy=A$.

Lad $0=t_0<t_1<\dots<t_q=2\pi$ være sådan, at $f(t)$ er kontinuert differentiabel på hvert $[t_{p-1},t_p]$. Idet $f(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, fås

$$M\{f'(t)e^{-int}\} = \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{2\pi}\int_{t_{p-1}}^{t_p} f'(t)e^{-int}\,dt$$

$$=\sum_{p=1}^{q}\left(\frac{1}{2\pi}\Big[f(t)e^{-int}\Big]_{t_{p-1}}^{t_p}+\frac{1}{2\pi}in\int_{t_{p-1}}^{t_p}f(t)e^{-int}\,dt\right)=inc_n,$$

altså $f'(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} inc_ne^{int}$. Når $|f'(t)|$ konstant, da $=\frac{\mathcal{L}}{2\pi}$, følgelig $\frac{\mathcal{L}^2}{2\pi}=\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt = 2\pi\|f'\|_2^2 = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} n^2|c_n|^2$.

$$A = i\pi(f,f') = i\pi\sum_{-\infty}^{\infty} c_n\overline{inc_n} = \pi\sum_{-\infty}^{\infty} n|c_n|^2, \text{ altså}$$

$\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}-A=\pi\sum_{-\infty}^{\infty}(n^2-n)|c_n|^2\ge 0$, og $=0$ hvis og kun hvis $c_n=0$ for $n\ne 0,1$, d.v.s. $f(t)=c_0+c_1e^{it}$.

91. Vis, at ethvert normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ er endeligt eller numererbart.

Lad $S \subseteq \mathcal{L}_2$ være et normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$.
For $\varphi, \psi \in S$, $\varphi \neq \psi$, gælder ifølge Pythagoras' sætning

$$\|\varphi - \psi\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 = 2$$

altså $\|\varphi - \psi\|_2 = \sqrt{2}$.

Kuglerne $K_\varphi = \{ f \in \mathcal{L}_2 \mid \|f - \varphi\|_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} \}$, $\varphi \in S$,
er derfor parvis disjunkte.

Lad $T = \{f_1, f_2, \dots\}$ være en numererbar overalt tæt delmængde af $\mathcal{L}_2$.

I hver kugle K_φ, $\varphi \in S$, ligger da mindst et element af T. Lad $f_{n(\varphi)}$ være det element af T med lavest nummer, der tilhører K_φ.

Da hvert element af T højst ligger i en af kuglerne K_φ er afbildningen

$$\varphi \longmapsto n(\varphi)$$

en injektiv afbildning af S ind i $\mathbb{N}$.

Altså er S endelig eller numererbar.

92. Et normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ kaldes fuldstændigt, hvis det ikke er ægte delmængde af et normeret ortogonalsystem. Vis, at et fuldstændigt, normeret ortogonalsystem er numererbart.

Da ifølge opg. 91 ethvert normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ er endeligt eller numererbart, gælder det om at bevise, at et endeligt normeret ortogonalsystem ikke kan være fuldstændigt, altså at hvis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ er et endeligt normeret ortogonalsystem, findes en normeret funktion ψ, så at $\psi \perp \varphi_1, \dots, \psi \perp \varphi_n$. — Vælg $n+1$ lineært uafhængige funktioner $f_1, \dots, f_{n+1}$ i $\mathcal{L}_2$ [f. eks. kan man tage $n+1$ disjunkte delintervaller $[\alpha_1, \beta_1[, \dots, [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}[$ af $[0, 2\pi[$ og lade f_ν være den periodiske funktion med perioden 2π, der er 1 i $[\alpha_\nu, \beta_\nu[$ og 0 i $[0,2\pi[\setminus [\alpha_\nu, \beta_\nu[$). Funktionerne $f_1, \dots, f_{n+1}$ kan da ikke alle tilhøre det n-dimensionale vektorrum $M = \{a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n \mid a_1 \in \mathbb{C}, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$. Antag at $f_\nu \notin M$. Da er

$f_\nu = (f_\nu, \varphi_1)\varphi_1 + \dots + (f_\nu, \varphi_n)\varphi_n + g$, hvor $g \neq 0$.

Men $g \perp M$. Altså gælder for den normerede funktion $\psi = \dfrac{g}{\|g\|_2}$, at $\psi \perp \varphi_1, \dots, \psi \perp \varphi_n$.

93. Hvis $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ er et normeret, fuldstændigt ortogonalt system i $\mathcal{L}_2$, kaldes for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_2$ rækken
$$f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x), \quad \text{hvor } a_n = (f, \varphi_n),$$
udviklingen for f i systemet. Vis, at en række $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ er udviklingen af en funktion $f \in \mathcal{L}_2$, og da kun af een funktion, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^\infty |a_n|^2$ er konvergent, og at man i så fald har $\|f - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$, hvor $s_n(x) = \sum_1^n a_\nu \varphi_\nu(x)$, og
$$\|f\|_2^2 = \sum_1^\infty |a_\nu|^2.$$
Vis også, at man for to funktioner $f \in \mathcal{L}_2$ og $g \in \mathcal{L}_2$ med udviklingerne $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ og $g(x) \sim \sum_1^\infty b_n \varphi_n(x)$ har
$$(f, g) = \sum_1^\infty a_n \bar{b}_n.$$

---

(1) Betragt en række $\sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, hvor $\sum_1^\infty |a_n|^2$ er konvergent. Sæt $s_n(x) = \sum_1^n a_\nu \varphi_\nu(x)$. For $m > n$ gælder da $\|s_m - s_n\|_2^2 = \sum_{n+1}^m |a_\nu|^2$. Følgen $s_1, s_2, \dots$ er altså en fundamentalfølge i $\mathcal{L}_2$. Der findes altså et $f \in \mathcal{L}_2$, så at $\|f - s_n\|_2 \to 0$. For ethvert ν haves $|(f, \varphi_\nu) - (s_n, \varphi_\nu)| = |(f - s_n, \varphi_\nu)| \leq \|f - s_n\|_2 \cdot 1$. Altså gælder $(s_n, \varphi_\nu) \to (f, \varphi_\nu)$ for $n \to \infty$. Men $(s_n, \varphi_\nu) = a_\nu$ når $n \geq \nu$. Altså gælder $(f, \varphi_\nu) = a_\nu$, d.v.s. $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$.

(2) Fortsættelse af (1): Der findes kun eet $f \in \mathcal{L}_2$, for hvilket $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$. Thi gjaldt $f \neq g$ og $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ og $g(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, havde vi $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$ for ethvert n, d.v.s. $f - g \perp \varphi_n$ for ethvert n. Følgelig var den normerede funktion $\frac{f-g}{\|f-g\|_2}$ ortogonal på alle φ_n, i strid med

(fortsættes)

at systemet $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ er fuldstændigt.

③ Hvis $f \in \mathcal{L}_2$ har udviklingen $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, er rækken $\sum_1^\infty |a_n|^2$ konvergent. Thi for hvert n er

(*) $\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_1^n |a_n|^2$,

altså $\sum_1^n |a_n|^2 \leq \|f\|_2^2$. Rækken $\sum_1^\infty |a_n|^2$ har altså begrænsede afsnit.

④ Fortsættelse af ③. Efter således at have set, at $\sum_1^\infty |a_n|^2$ er konvergent, benytter vi først ①, som viser, at $s_1, s_2, \dots$ er en fundamentalfølge i $\mathcal{L}_2$, og at der for det $g \in \mathcal{L}_2$, for hvilket $\|g - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$, gælder $g(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$, og dernæst ②, som viser, at dette g må være det givne f. Følgelig gælder $\|f - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$. Af (*) sluttes så, at $\sum_1^n |a_n|^2 \to \|f\|_2^2$ for $n \to \infty$, altså $\|f\|_2^2 = \sum_1^\infty |a_n|^2$.

⑤ Antages, at $f \in \mathcal{L}_2$ og $g \in \mathcal{L}_2$ har udviklingerne $f(x) \sim \sum_1^\infty a_n \varphi_n(x)$ og $g(x) \sim \sum_1^\infty b_n \varphi_n(x)$, har vi, idet vi sætter $s_n(x) = \sum_1^n a_\nu \varphi_\nu(x)$

$$(s_n, g) = \sum_1^n a_\nu (\varphi_\nu, g) = \sum_1^n a_\nu \overline{(g, \varphi_\nu)} = \sum_1^n a_\nu \overline{b_\nu}.$$

Men

$$|(f, g) - (s_n, g)| = |(f - s_n, g)| \leq \|f - s_n\|_2 \|g\|_2.$$

Da $\|f - s_n\|_2 \to 0$ fås $(s_n, g) \to (f, g)$, altså

$$(f, g) = \sum_1^\infty a_\nu \overline{b_\nu}.$$

94. Idet $D_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}$ er Dirichlets kerne, har man

$$\pi = \int_0^\pi D_n(t)\,dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\,dt + \int_0^\pi \left[\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{\frac{1}{2}t}\right]\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt.$$

Vis herved, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Vis, at dette medfører, at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^\infty \dots = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \dots .$$

Vink. Anvend opg. 87 på den ved $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ for $0 < t \leq \frac{1}{2}\pi$, $g(t) = 0$ for $\frac{1}{2}\pi < t \leq 2\pi$ definerede funktion med perioden 2π.

$g(t)$ er kontinuert i $0 < t \leq \frac{1}{2}\pi$, og har, da

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t},$$ grænseværdien 0 for $t \to 0$.

Følgelig er $g \in L$. Skrives $g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, fremgår af opg. 87, at $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ for $n \to \infty$.

Nu er

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(2n+1)t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\sin(2n+1)t\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u} - \frac{1}{\frac{1}{2}u}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})u\,du.$$

Dette integral går altså mod 0 for $n \to \infty$. Følgelig gælder

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\frac{1}{2}t}\,dt \to \pi \quad \text{d:} \quad \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \to \tfrac{1}{2}\pi \text{ for } n \to \infty.$$

Da $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, gælder for $a \in [(n+\frac{1}{2})\pi, (n+\frac{3}{2})\pi[$ at

$$\left|\int_0^{(n+\frac{3}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \left|\int_a^{(n+\frac{3}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{\pi}{a}.$$

Følgelig gælder $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx \to \frac{1}{2}\pi$ for $a \to \infty$.

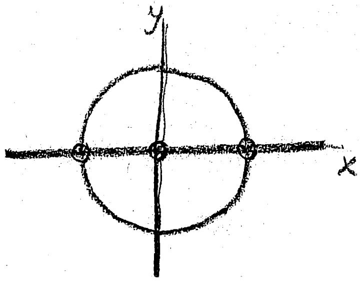
101. Find de stationære punkter for funktionen

$$z = f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}x^2 - y^2$$

og afgør, om de er lokale, resp. globale ekstremumspunkter.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} - x = \frac{x(1-x^2-y^2)}{1+x^2+y^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} - 2y = \frac{-2y(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} = 0$$



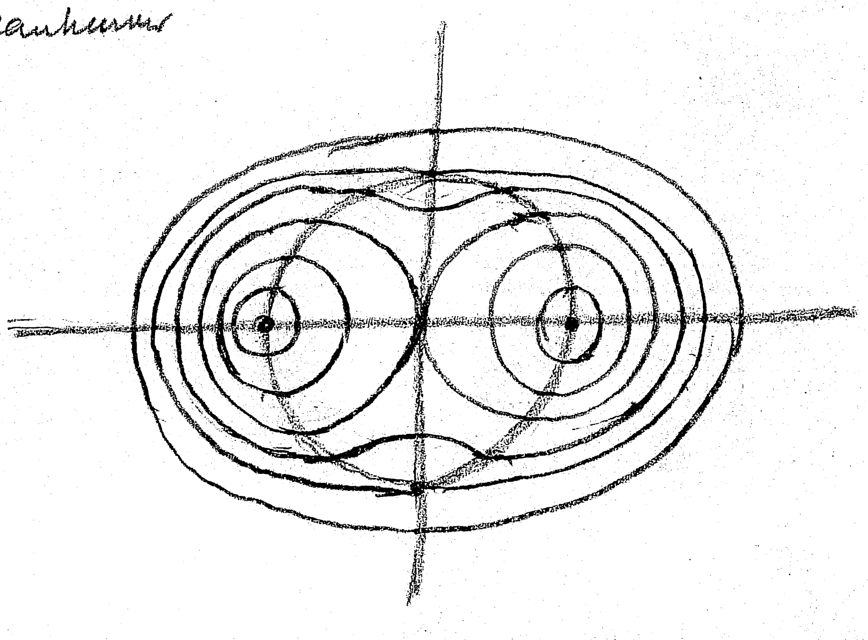
Stationære punkter $(x,y) = (0,0), (-1,0), (1,0)$.

$(0,0)$ $\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(x,0) = \log(1+x^2) - \tfrac{1}{2}x^2 > 0 \text{ i omegn} \\ f(0,y) = \log(1+y^2) - y^2 < 0 \text{ i omegn} \end{array}\right\}$ intet ekstr.

$\left.\begin{array}{l} (-1,0) \\ (1,0) \end{array}\right\}$ Må være globale maks.pkt da $f(x,y) \to -\infty$ for $x^2+y^2 \to -\infty$.

$$f(-1,0) = f(1,0) = \log 2 - \tfrac{1}{2}$$

Niveaukurver

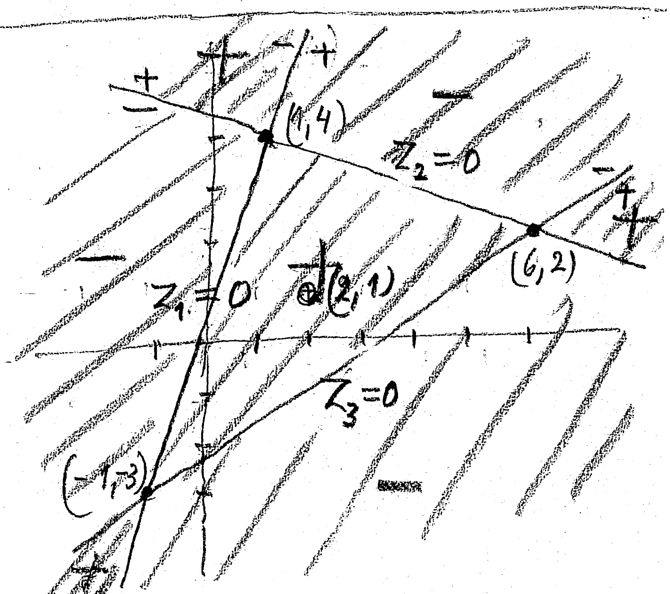


102. Angiv på en figur de mængder, hvori funktionen
$$z = f(x,y) = (7x-2y+1)(2x+5y-22)(5x-7y-16)$$
er positiv, nul, og negativ, og vis herved, at $f(x,y)$ har mindst et lokalt maksimumspunkt.

Vis dernæst, at $f(x,y)$ har netop et lokalt ekstremumspunkt (x_0, y_0), og find punktet.

Vink. Sæt $7x-2y+1 = z_1$, $2x+5y-22 = z_2$, $5x-7y-16 = z_3$, og benyt, at
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 7z_2z_3 + 2z_1z_3 + 5z_1z_2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2z_2z_3 + 5z_1z_3 - 7z_1z_2.$$

Skæringspunkterne mellem linierne $z_1=0$, $z_2=0$, $z_3=0$ findes.



$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

giver

$$\frac{z_2z_3}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}} = \frac{z_1z_3}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{z_1z_2}{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} \quad \text{d.v.s.} \quad \frac{z_2z_3}{-39} = \frac{z_1z_3}{39} = \frac{z_1z_2}{39}$$

$z_1=0$ giver $z_2=0$ eller $z_3=0$

$z_2=0$ — $z_1=0$ eller $z_3=0$

$z_3=0$ — $z_1=0$ eller $z_2=0$

giver vinkelspidserne som ikke er lokale ekstremumspunkter

$z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$ giver $-z_1 = z_2 = z_3$

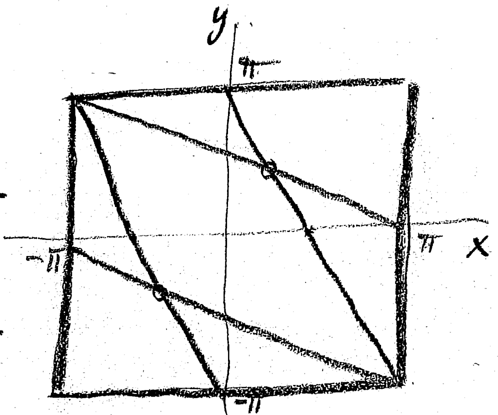
$z_1 + z_2 = 9x+3y-21 = 0$ $\quad 3x+y-7=0$

$z_1 + z_3 = 12x-9y-15 = 0$ $\quad 4x-3y-5=0$

Løsning $(x_0, y_0) = (2,1)$.

103. Find globalt minimum og maksimum for
$$z = f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$
Vink. Benyt, at f er periodisk med perioden 2π såvel i x som i y, og betragt intervallet $[-\pi,\pi]^2$.

$z=0$ på randen.



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 2\cos\frac{y}{2}\cos\left(x+\frac{y}{2}\right) = \underline{0}$$

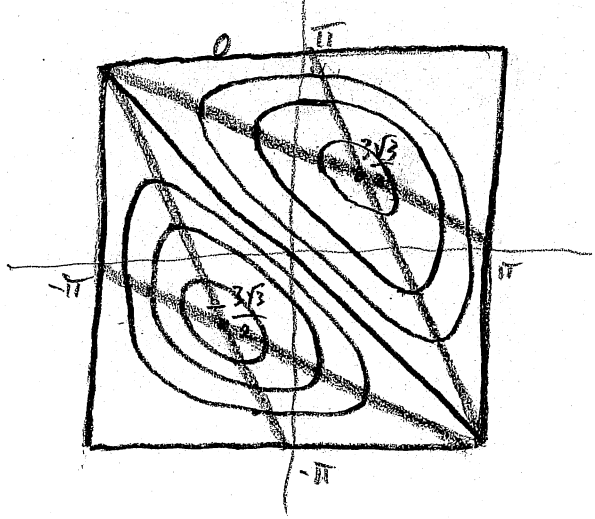
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 2\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+y\right) = \underline{0}$$

$(x,y) = \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right)$ $\quad z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ globalt max

$(x,y) = \left(-\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi\right)$ $\quad z = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ globalt min.

$$z = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

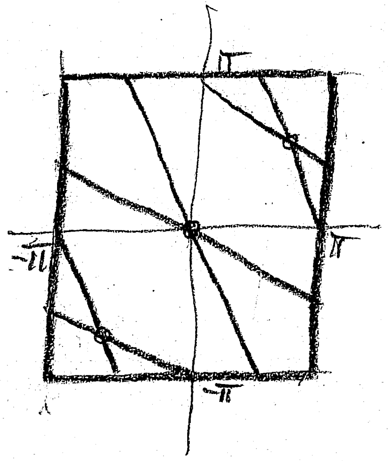
Niveaukurver



104. Find globalt minimum og maksimum for
$z = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$.

Betragter $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.

$z = -1$ på randen



$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x - \sin(x+y) = -2\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)\cos\frac{y}{2} = \underline{0}$$

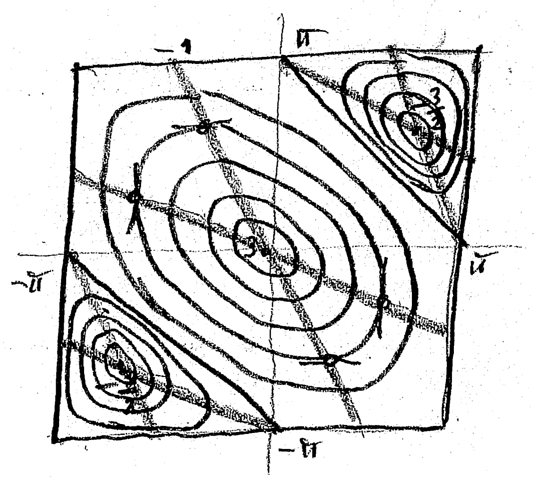
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y - \sin(x+y) = -2\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)\cos\frac{x}{2} = \underline{0}$$

$(x,y) = (0,0)$ $\quad z = 3$ $\quad$ globalt max

$(x,y) = \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ $\quad z = -\frac{3}{2}$
$(x,y) = \left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right)$ $\quad z = -\frac{3}{2}$ $\Big\}$ globalt min

$$z+1 = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos^2\frac{x+y}{2} = 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

Niveaukurver

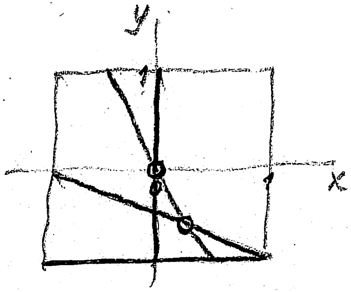


105. Find globalt minimum og maksimum for

$$z = \det\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 1 & y+1 & -x-y \\ 1 & y+2 & 0 \end{pmatrix}$$

i $[-1,1]^2$.

$$\begin{aligned} z &= -x(x+y) + y+2 - (y+1) + x(y+2)(x+y) \\ &= -x^2 - xy + y + 2 - y - 1 + x^2y + xy^2 + 2x^2 + 2xy \\ &= x^2y + xy^2 + x^2 + xy + 1 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 + 2x + y = (2x+y)(y+1) \;\underline{=0}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + x \quad = x(x+2y+1) \;\underline{=0}$$

I det indre: $z(0,0) = 1$

$$z(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}) = -\frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{26}{27}.$$

Randen: $z(-1,y) = y - y^2 + 1 - y + 1 = 2 - y^2.$

$z(1,y) = y + y^2 + 1 + y + 1 = y^2 + 2y + 2 = (y+1)^2 + 1$

$z(x,-1) = -x^2 + x + x^2 - x + 1 = 1$

$z(x,1) = x^2 + x + x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2x + 1 = 2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}.$

Verdierne i det indre kan ikke bruges.

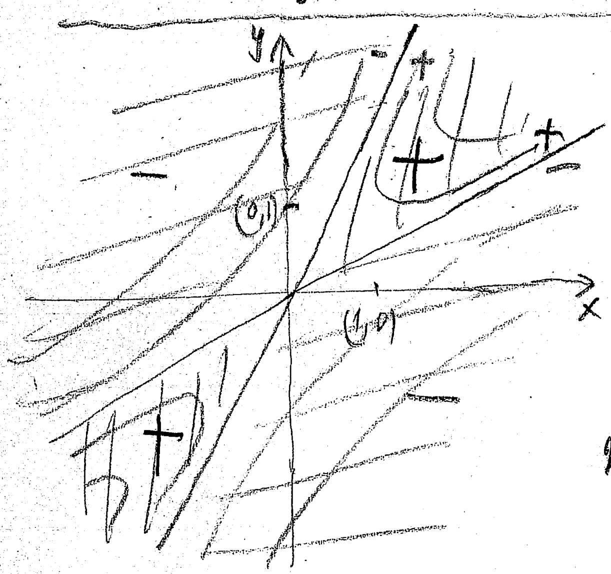
Globalt min: $\frac{1}{2}$ ant i $(-\frac{1}{2}, 1)$

– max: 5 ant i $(1,1)$.

106. Konstruer en funktion $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ uden lokale ekstrema, men med mindst et stationært punkt, for hvilken

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x,y) \to -\infty$ for $|y| \to \infty$

$\forall y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x,y) \to -\infty$ for $|x| \to \infty$.



$$f(x,y) = (2x-y)(2y-x)$$
$$= -2x^2 + 5xy - 2y^2.$$

$$f'_x(x,y) = -4x + 5y = 0 \qquad (x,y) = (0,0)$$
$$f'_y(x,y) = 5x - 4y = 0$$

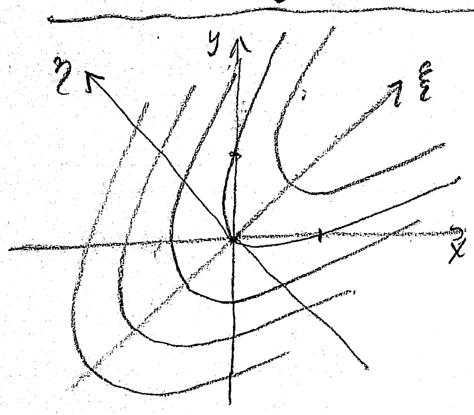
Hyperbolsk paraboloide.

Almindeligere: $\quad f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

$a < 0 \quad c < 0 \quad b^2 - ac > 0.$

107. Konstruer en funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uden stationære punkter, for hvilken

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |y| \to \infty$$
$$\forall y \in \mathbb{R}: \quad f(x,y) \to -\infty \text{ for } |x| \to \infty.$$



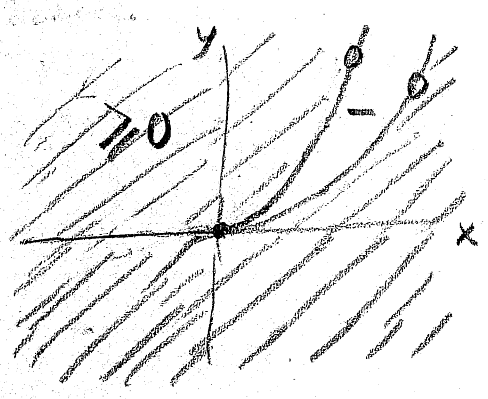
$$f(x,y) = (x+y) - (x-y)^2$$
$$= x + y - x^2 + 2xy - y^2.$$
$$f'_x(x,y) = 1 - 2x + 2y = 0 \quad \text{Ingen}$$
$$f'_y(x,y) = 1 + 2x - 2y = 0 \quad \text{løsn.}$$

Parabolsk cylinder

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \qquad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \qquad \Big| \qquad f(x,y) = \sqrt{2}\,\xi - \eta^2.$$

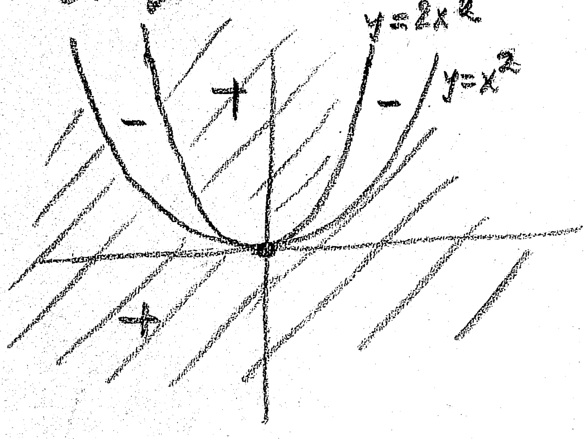
108. Afgør, om følgende udsagn er sandt:
„Hvis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og det for vilkårligt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gælder, at $\varphi(t) = f(at, bt)$ har lokalt minimum i $t=0$, da har f lokalt minimum i $(0,0)$."

Udsagnet er falsk, som den antydede funktionstype viser.



Eksplicit eksempel: $z = (y-2x^2)(y-x^2)$

$= 2x^4 - 3x^2y + y^2.$



For givet (a,b) få

$\varphi(t) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$

altså $\varphi'(0)$, $\varphi''(0) = 2b^2$.

Altså min i 0 hvis $b \neq 0$ og hvis $b=0$ få

$\varphi(t) = 2a^4t^4$, som også har min i 0.

109. I planen er givet en trekant $A_1A_2A_3$, hvis vinkler alle er $< 120°$. Idet P betegner et vilkårligt punkt i planen, betragtes funktionen

$$z = f(P) = A_1P + A_2P + A_3P.$$

Vis, at f har globalt minimum i eet punkt P_0, nemlig det punkt i trekantens indre, for hvilket vektorerne $\overrightarrow{P_0A_1}, \overrightarrow{P_0A_2}, \overrightarrow{P_0A_3}$ danner vinkler på $120°$.

Vink. (a) Slut ud fra kontinuitet m.v., at f har globalt minimum i mindst et punkt. (b) Indfør retvinklede koordinater, og vis herved, at f i planen eksklusive A_1, A_2, A_3 har det ene stationære punkt P_0. (c) Vis, at $f(P_0)$ er mindre end $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$; [Benyt f.eks., at i en trekant HIJ, hvori vinklen ved I er $120°$, er $HJ > \frac{1}{2}HI + IJ$].

(a) klar.

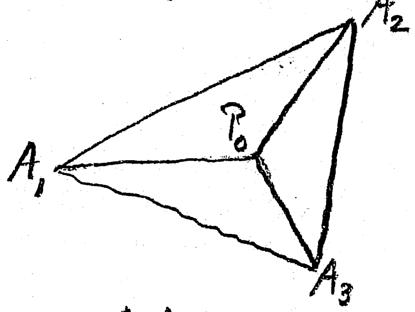
(b) $A_i = (x_i, y_i)$, $P = (x, y)$

$$f(P) = f(x,y) = \sum_1^3 \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$ er C^1 i planen ekskl. A_1, A_2, A_3

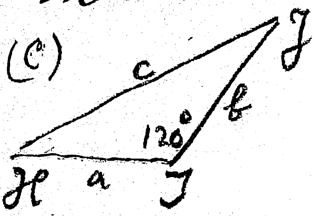
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_1^3 \frac{x - x_i}{PA_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_1^3 \frac{y-y_i}{PA_i}$$

$$\text{d: } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \sum_1^3 \frac{\overrightarrow{PA_i}}{PA_i}$$ som er $= \underline{0}$ når og kun når $\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}, \overrightarrow{PA_3}$ danner vinkler på $120°$.

Åbenbart eet sådant punkt P_0, og P_0 ligger i trekantens indre.



(c)



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$$
$$> \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b^2 + ab}$$
$$= \tfrac{1}{2}a + b$$

$$f(A_1) = A_1A_2 + A_1A_3$$
$$> \tfrac{1}{2}A_1P_0 + P_0A_2 + \tfrac{1}{2}A_1P_0 + P_0A_3 = f(P_0)$$

og analogt for $f(A_2)$ og $f(A_3)$.

110 *. Vis, at den kvadratiske form $\underline{x}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1$ med den symmetriske matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

er positiv definit, hvis og kun hvis de k determinanter

$$\det(a_{11}),\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ \ldots,\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

alle er positive, og negativ definit, hvis og kun hvis disse determinanter er skiftevis negative og positive (d.v.s. den første negativ, den anden positiv, o.s.v.).

Sætn. om neg def følge af sætn om pos def ved fortegnsskifte. Se på pos.
Nødv. klar. Tilstr: Induktion. Klar for $k=1$. Antaget for $k-1$.
Da ortogonal substitution

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}_1$$

som giver $\underline{x}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{y}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{y}_1$ hvor

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & b_{k-1\,k-1} & \vdots \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_k \end{bmatrix},$$

alle $b_{11}, \ldots, b_{k-1\,k-1} > 0$ og $\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}} > 0$

$$\det \underline{\underline{B}} = \begin{vmatrix} b_{11} & & 0 & b_1 \\ 0 & \ddots & b_{k-1\,k-1} & b_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_k - \frac{b_1^2}{b_{11}} - \cdots - \frac{b_{k-1}^2}{b_{k-1\,k-1}} \end{vmatrix}$$

Altså
$$P = b_k - \frac{b_1^2}{b_{11}} - \cdots - \frac{b_{k-1}^2}{b_{k-1\,k-1}} > 0$$

Men
$$\underline{y}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{y}_1 = b_{11}y_1^2 + \cdots + b_{k-1\,k-1}y_{k-1}^2 + 2b_1y_1y_k + \cdots + 2b_{k-1}y_{k-1}y_k + b_ky_k^2$$
$$= b_{11}\left(y_1 + \frac{b_1}{b_{11}}y_k\right)^2 + \cdots + b_{k-1\,k-1}\left(y_{k-1} + \frac{b_{k-1}}{b_{k-1\,k-1}}y_k\right)^2 + P y_k^2$$

altså $\underline{y}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{y}_1 \geq 0$ og $= 0$ kun når $(y_1, \ldots, y_k) = \underline{0}$.

111. Undersøg, om funktionen

$$f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2-z^2) + 2\cos(y-z) + 2(x+z)^2$$

har lokalt ekstremum i $(0,0,0)$.

$$z = 1 + x^2+y^2-z^2 + 2 + y^2-2yz+z^2 + 2x^2+4xz+2z^2 + \cdots$$

$$= 3 + 3x^2+2y^2+2z^2-2yz+4xz + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det[3] = 3 > 0$

$\det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 6 > 0$

$\det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12-8-3 = 1 > 0$

Positiv definit. Altså lokalt minimum.

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2 + 4(\lambda-2) + \lambda - 3$$

$$= -(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+4) + 5\lambda - 11 = -\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda+3\lambda^2-12\lambda+12+5\lambda-11$$

$$= -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+1$$

$\lambda = 0$	$+1$
$\lambda = 1$	-4
$\lambda = 3$	4
$\lambda \to +\infty$	$\to -\infty$

Altså tre positive rødder. Altså lokalt minimum.

192. Lad $f(x,y) \in C^2(A)$, og lad $(x_0,y_0) \in A$ være et punkt, hvori $f(x_0,y_0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Der findes da en omegn $\{(x,y) \mid |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\} \subset A$ og en funktion $y = g(x) \in C^2([x_0-a, x_0+a])$ med værdier henhørende $[y_0-b, y_0+b]$, således at samtlige løsninger til ligningen $f(x,y) = 0$ i den nævnte omegn er bestemt ved $y = g(x)$, $|x-x_0| \leq a$. Vis, at

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

og

$$g''(x) = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} + 2\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} - \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Ved implicit differentiation fås

$$f'_x + f'_y\, y' = 0 \qquad \text{hvoraf} \quad y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$f''_{x^2} + f''_{xy}\, y' + \left(f''_{xy} + f''_{y^2}\, y'\right) y' + f'_y\, y'' = 0 \qquad \text{hvoraf}$$

$$y'' = -\frac{f''_{x^2}}{f'_y} - 2\,\frac{f''_{xy}}{f'_y}\, y' - \frac{f''_{y^2}}{f'_y}\, y'^2,$$

som ved indsætning af $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$ giver resultatet.

113. En kvadrik i $\mathbb{R}^2$ er givet ved en ligning

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Det antages, at (x_0, y_0) er et punkt af kvadrikken, og at det er et regulært punkt, d.v.s.

$$(ax_0 + by_0 + d,\ bx_0 + cy_0 + e) \neq (0,0).$$

Vis, at kvadrikken i en omegn af (x_0, y_0) kan fremstilles enten ved en ligning $y = \varphi(x)$ eller ved en ligning $x = \psi(y)$ [evt. på begge måder], hvor funktionerne er C^∞, og at tangenten i (x_0, y_0) har ligningen

$$axx_0 + b(xy_0 + x_0 y) + cyy_0 + d(x + x_0) + e(y + y_0) + f = 0.$$

Triviel.

114. Vis, at ligningen

$$2\exp(x+y+z) - \sin(x+2y+z) + x^2 + 3y^2 - 2 = 0$$

i en omegn af $(0,0,0)$ bestemmer z implicit som en funktion af (x,y) med kontinuerte partielle afledede af vilkårlig orden. Beregn koefficienterne i Taylors grænseformel for denne funktion i punktet $(x,y)=(0,0)$ idet leddene af 2. grad medtages.

Venstre side kaldes $f(x,y,z)$ 1) $f(0,0,0) = 0$

2) $\frac{\partial f}{\partial z} = 2\exp(x+y+z) - \cos(x+2y+z) = 1 \neq 0.$

Implicit differentiation giver

$$2\exp(x+y+z)(1+z'_x) - \cos(x+2y+z)(1+z'_x) + 2x = 0$$

$$2\exp(x+y+z)(1+z'_y) - \cos(x+2y+z)(2+z'_y) + 6y = 0$$

$$2\exp(x+y+z)\left[(1+z'_x)^2 + z''_{x^2}\right] + \sin(x+2y+z)(1+z'_x)^2 - \cos(x+2y+z)\, z''_{x^2} + 2 = 0$$

$$2\exp(x+y+x)\left[(1+z'_x)(1+z'_y) + z''_{xy}\right] + \sin(x+2y+z)(1+z'_x)(2+z'_y)$$
$$- \cos(x+2y+z)\, z''_{xy} = 0$$

$$2\exp(x+y+z)\left[(1+z'_y)^2 + z''_{y^2}\right] + \sin(x+2y+z)(2+z'_y)^2 - \cos(x+2y+z)\, z''_{y^2} + 6 = 0$$

For $(x,y,z) = (0,0,0)$ med betegnelser p, q, r, s, t,

	$p = -1$
$2(1+p) - 1(1+p) = 0$	$q = 0$
$2(1+q) - 1(2+q) = 0$	$r = -2$
$2r - 1r + 2 = 0$	$s = 0$
$2s - 1s = 0$	$t = -8$
$2[1+t] - 1t + 6 = 0$	

$$z = -x + \tfrac{1}{2}(-2x^2 - 8y^2) + o(x^2+y^2) = -x - x^2 - 4y^2 + o(x^2+y^2).$$

115. Vis, at ligningerne

$$f(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 - z^3 - 6xy - z = 0$$
$$g(x,y,z) = x^3y + z^4 - x^2 - 3yz = 2$$

begge tilfredsstilles af $(x,y,z) = (2,1,1)$, og at de hver for sig i en omegn af dette punkt bestemmer en flade, der kan fremstilles ved en ligning $z = \varphi(x,y)$, hvor φ er C^∞. Find tangentplanerne til de to flader i punktet. Vis, at de to ligninger tilsammen i en omegn af punktet bestemmer en kurve, der kan fremstilles ved et ligningspar $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, hvor ψ og χ er C^∞. Find kurvens tangent i punktet.

$(2,1,1)$ passer.	i punktet	tangentplan
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 + 3y^2 - 6y$	5	$5(x-2) \quad -4(z-1) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 6x$	0	$\therefore\ 5x \quad -4z = 6$
$\frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2 - 1$	$-4 \neq 0$	
$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y - 2x$	8	$8(x-2) + 5(y-1) + z - 1 = 0$
$\frac{\partial g}{\partial y} = x^3 - 3z$	5	$\therefore\ 8x + 5y + z = 22$
$\frac{\partial g}{\partial z} = 4z^3 - 3y$	$1 \neq 0$	

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$ regulær. Tangent skæringslinien.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{x-2}{20} = \frac{y-1}{-37} = \frac{z-1}{25}$$ eller

$$(x,y,z) = (2,1,1) + (20,-37,25)t$$

116. Lad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 betegne volumen, tryk, temperatur, energi, entropi af et termodynamisk system. En tilstand af systemet identificeres med talsættet $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Mængden F af tilstande antages bestemt ved tre tilstandsligninger

$$f_1(\underline{x}) = 0, \quad f_2(\underline{x}) = 0, \quad f_3(\underline{x}) = 0,$$

hvor f_1, f_2, f_3 er C^1-funktioner i en vis åben mængde i R^5. Det antages, at alle funktionalmatricer $\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_k, x_l, x_m)}$ er regulære i ethvert punkt $\underline{x}_0$ af F. Vælges to af de variable x_i, x_j, vil da i en omegn af ethvert punkt $\underline{x}_0$ af F de øvrige variable x_k, x_l, x_m være bestemt som C^1-funktioner af x_i, x_j. Man siger, at systemet har to frihedsgrader. Sættes f.eks. $x_k = g(x_i, x_j)$, $x_l = h(x_i, x_j)$ betegnes de partielle afledede $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ og $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ med $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_j}$ og $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}$, og funktionalmatricen $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x_i, x_j)}$ betegnes $\frac{\partial(x_k, x_l)}{\partial(x_i, x_j)}$.

Vis, at værdierne af de partielle afledede i ethvert punkt $\underline{x}_0 \in F$ tilfredsstiller følgende ligninger, hvor i, j, k, l, m står for vilkårlige forskellige indices:

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)_{x_i} = 1$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i} \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_k}\right)_{x_i} = \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i}$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)_{x_j} = -1$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_l} \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i} = \det \frac{\partial(x_k, x_l)}{\partial(x_i, x_j)}$$

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\right)_{x_m} \det \frac{\partial(x_l, x_m)}{\partial(x_i, x_j)} = \det \frac{\partial(x_k, x_m)}{\partial(x_i, x_j)}.$$

Vi betragter

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} dx_4 + \frac{\partial f_1}{\partial x_5} dx_5 = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} dx_4 + \frac{\partial f_2}{\partial x_5} dx_5 = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} dx_4 + \frac{\partial f_3}{\partial x_5} dx_5 = 0,$$

hvor de afledede er taget i $\underline{x}_0$. Efter forudsætning er enhver determinant

116 fortsat (a)

$$[k\,l\,m] = \det \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x_k,x_l,x_m)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} & \frac{\partial f_2}{\partial x_l} & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_k} & \frac{\partial f_3}{\partial x_l} & \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

dannet af tre af søjlerne i koefficientmatricen $\neq 0$. Differentialerne af x_k, x_l, x_m betragtet som funktioner af de to andre variable x_i, x_j fås ved at løse ligningssystemet.

Vi får

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_1}{\partial x_l} dx_l + \frac{\partial f_1}{\partial x_m} dx_m = -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_2}{\partial x_l} dx_l + \frac{\partial f_2}{\partial x_m} dx_m = -\frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_3}{\partial x_l} dx_l + \frac{\partial f_3}{\partial x_m} dx_m = -\frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j,$$

altså efter Cramers sætning

$$dx_k = \frac{\det\begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j & \frac{\partial f_1}{\partial x_l} & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j & \frac{\partial f_2}{\partial x_l} & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ -\frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i - \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_j & \frac{\partial f_3}{\partial x_l} & \frac{\partial f_3}{\partial x_m} \end{pmatrix}}{[k\,l\,m]}$$

$$= -\frac{[i\,l\,m]}{[k\,l\,m]} dx_i - \frac{[j\,l\,m]}{[k\,l\,m]} dx_j,$$

hvoraf aflæses reglen

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_j} = -\frac{[i\,l\,m]}{[k\,l\,m]}. \quad [\text{Bemærk: } \neq 0.]$$

De angivne formler kan nu efterprøves ved indsætning, idet de simpelthen bliver identiteter vedrørende de 3x3 determinanter, der hører til en 3 x 5 matrix.

De tre første formler fås således:

(1) $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)_{x_i} = \left(-\frac{[j\,l\,m]}{[k\,l\,m]}\right)\cdot\left(-\frac{[k\,l\,m]}{[j\,l\,m]}\right) = 1,$

(2) $\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_l}{\partial x_k}\right)_{x_i} = \left(-\frac{[j\,l\,m]}{[k\,l\,m]}\right)\cdot\left(-\frac{[k\,m\,j]}{[l\,m\,j]}\right) = -\frac{[j\,k\,m]}{[l\,k\,m]} = \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i},$

116 fortsat (b)

(3) $$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)_{x_j}=\left(-\frac{[jlm]}{[klm]}\right)\left(-\frac{[ilm]}{[jlm]}\right)\left(-\frac{[klm]}{[ilm]}\right)=-1.$$

[(1) og (2) følger iøvrigt også af kendte sætninger for funktioner af en variabel. Thi for fastholdt x_i er $x_k=\varphi(x_j)$, altså $x_j=\varphi^{-1}(x_k)$ og $x_k=\varphi(x_j)$, $x_l=\psi(x_k)$, altså $x_l=\psi\circ\varphi(x_j)$.].

For de to sidste formler bliver determinantrelationerne mere indviklede. Vi viser derfor også en anden metode. Først for formlerne (1)–(3).

Antag at vi har fundet

$$dx_k=\alpha\,dx_i+\beta\,dx_j\ , \quad \text{altså } \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\beta.$$

Da er

$$dx_j=-\frac{\alpha}{\beta}dx_i+\frac{1}{\beta}dx_k\ , \quad \text{altså } \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right)_{x_i}=\frac{1}{\beta}\ , \text{ hvoraf (1).}$$

Analogt:

$$dx_k=\alpha\,dx_i+\beta\,dx_j \qquad \text{altså } \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\beta$$
$$dx_l=\gamma\,dx_i+\delta\,dx_k\ , \qquad \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_k}\right)_{x_i}=\delta,$$

giver

$$dx_l=\gamma\,dx_i+\delta(\alpha\,dx_i+\beta\,dx_j)$$
$$=(\gamma+\delta\alpha)dx_i+\delta\beta\,dx_j\ , \quad \text{altså } \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\delta\beta\ , \text{ hvoraf (2).}$$

Analogt:

$$dx_k=\alpha\,dx_i+\beta\,dx_j \qquad \text{altså } \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\beta,$$

giver

$$dx_j=-\frac{\alpha}{\beta}dx_i+\frac{1}{\beta}dx_k \qquad \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_{x_k}=-\frac{\alpha}{\beta}$$
$$\text{altså}$$
$$dx_i=-\frac{\beta}{\alpha}dx_j+\frac{1}{\alpha}dx_k\ , \qquad \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)_{x_j}=\frac{1}{\alpha}\ , \text{ hvoraf (3).}$$

Nu den fjerde formel:

$$dx_k=\alpha\,dx_i+\beta\,dx_l \qquad \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_l}=\alpha$$
$$\text{altså}$$
$$dx_l=\gamma\,dx_i+\delta\,dx_j\ , \qquad \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\delta,$$

giver

$$dx_k=\alpha\,dx_i+\beta(\gamma\,dx_i+\delta\,dx_j)$$
$$=(\alpha+\beta\gamma)dx_i+\beta\delta\,dx_j \quad \text{altså } \frac{\partial(x_k,x_l)}{\partial(x_i,x_j)}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta\gamma & \beta\delta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix},$$

hvoraf

(4) $$\left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i}\right)_{x_l}\left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j}\right)_{x_i}=\alpha\delta=\det\begin{bmatrix}\alpha+\beta\gamma & \beta\delta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\det\frac{\partial(x_k,x_l)}{\partial(x_i,x_j)}.$$

116 fortsat (c)

Endelig den femte formel:

$$\begin{aligned} dx_k &= \alpha\, dx_i + \beta\, dx_j \\ dx_l &= \gamma\, dx_i + \delta\, dx_j \\ dx_m &= \varepsilon\, dx_i + \eta\, dx_j \end{aligned} \quad \text{giver} \quad \det\begin{bmatrix} dx_k & \alpha & \beta \\ dx_l & \gamma & \delta \\ dx_m & \varepsilon & \eta \end{bmatrix} = 0$$

eller

$$\det\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix} dx_k - \det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix} dx_l + \det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} dx_m = 0,$$

altså

$$dx_k = \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix}} dx_l - \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix}} dx_m ,$$

hvoraf

$$(5) \quad \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\right)_{x_m} = \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \eta \end{bmatrix}} = \frac{\det \dfrac{\partial(x_k, x_m)}{\partial(x_i, x_j)}}{\det \dfrac{\partial(x_l, x_m)}{\partial(x_i, x_j)}} .$$

117. (a) Omskriv integralet

$$I(r) = \int_{S(r)} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy, \qquad S(r) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\},$$

under brug af polære koordinater, og vis herved, at

$$I(r) \to \pi \quad \text{for } r \to \infty.$$

(b) Vis, at der for integralet

$$J(r) = \int_{K(r)} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy, \qquad K(r) = \{(x,y) \mid |x| \le r, |y| \le r\},$$

gælder $I(r) \le J(r) \le I(r\sqrt{2})$, og at følgelig

$$J(r) \to \pi \quad \text{for } r \to \infty.$$

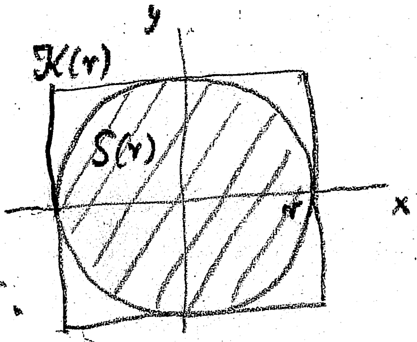
(c) Vis herved, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(a) $$I(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^r e^{-r^2}\, r\,dr$$

$$= 2\pi \left[-\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^r = \pi\left(1 - e^{-r^2}\right) \to \pi.$$



(b) trivielt.

(c) $$J(r) = \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-r}^{r} e^{-y^2}\left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx\right)dy$$

$$= \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-r}^{r} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \to \pi$$

altså $\displaystyle\int_{-r}^{r} e^{-x^2}\,dx \to \sqrt{\pi}$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

118. Udregn integralet

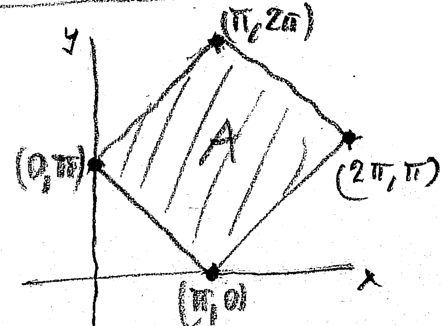
$$I = \int_A (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dx\, dy,$$

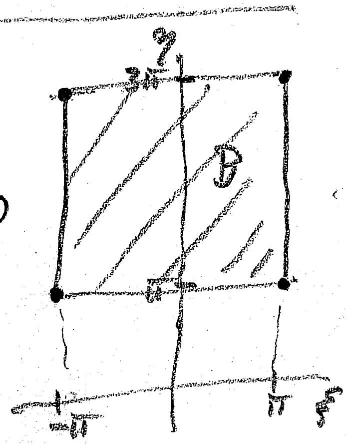
hvor A er parallelogrammet med hjørner $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$, ved at anvende en passende lineær afbildning.

$$x - y = \xi$$
$$x + y = \eta$$

$$x = \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{2}\eta$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{2}\eta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{determ} = \tfrac{1}{2}$$





$$I = \int_B \xi^2 \sin^2\eta\, \tfrac{1}{2}\, d\xi\, d\eta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 d\xi \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2\eta\, d\eta = \tfrac{1}{2}\cdot 2\,\frac{\pi^3}{3}\,\pi = \frac{\pi^4}{3}.$$

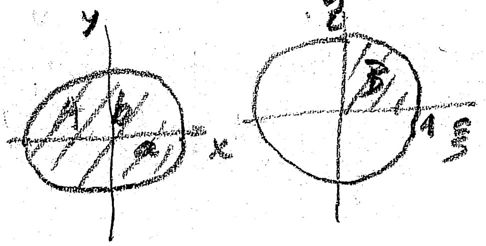
119. Find integralet

$$I = \int_A \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

hvor A er ellipsen $\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$.

Vink. Anvend transformationen $(x,y)=(a\xi, b\eta)$ og udregn det fremkomne integral ved brug af polære koordinater i (ξ,η)-planen.

$$I = 4\int_B \frac{\xi\eta}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2}}\, a^2b^2\,d\xi\,d\eta,$$ hvor $B=\{(\xi,\eta)\mid \xi^2+\eta^2<1, \xi>0, \eta>0\}$



$$= 4a^2b^2\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 4a^2b^2\int_0^1 r^2\,dr \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\,d\theta}_{J} = 4a^2b^2\frac{1}{3}J$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)+b^2\sin^2\theta}}\,d\sin\theta = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t^2}}\,dt$$

$$= \left[\frac{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t^2}}{b^2-a^2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b}.$$

Passer også hvis $a=b$.

Altså $I = \frac{4}{3}\frac{a^2b^2}{a+b}$.

120. Vis, at der ved

$$x = \xi + \eta$$
$$y = -\xi^2 + \eta$$

bestemmes en bijektiv afbildning af $\{(\xi,\eta) \mid \xi > -\frac{1}{2}\}$ på $\{(x,y) \mid y < x + \frac{1}{4}\}$. Find det $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$. Skitser billedet S af trekanten $T = \{(\xi,\eta) \mid \xi > 0, \eta > 0, \xi + \eta < 2\}$.

Find arealet (målet) af S direkte og ved at udtrykke det som integralet af det $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$ over T.

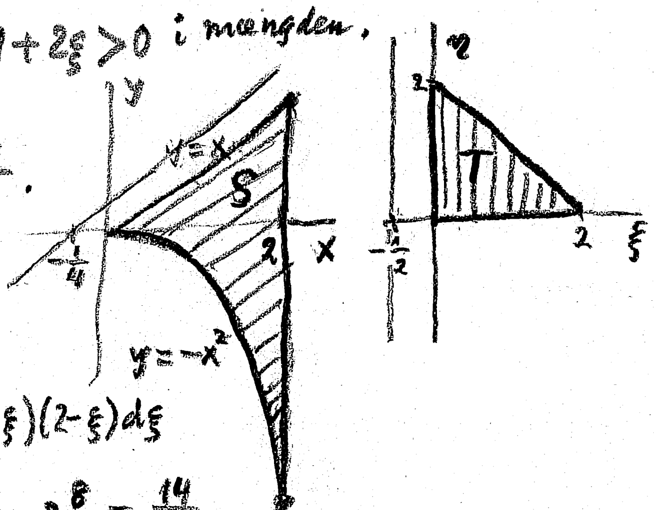
Find endvidere integralet

$$I = \int_S \frac{1}{(x-y+1)^2}\,dx\,dy$$

ved at udtrykke det som et integral over T.

$\{(\xi,\eta) \mid \xi > -\frac{1}{2}\}$ afbildes ind i mgd. best. ved $x - y = \xi + \xi^2 = (\xi + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} > -\frac{1}{4}$. Bijektiv, da vi for (x,y) i denne mængde får $\xi = -\frac{1}{2} + \sqrt{x - y + \frac{1}{4}}$, $\eta = x - \xi$.

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2\xi & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2\xi > 0 \text{ i mængden.}$$



$$m(S) = \int_0^2 (x + x^2)\,dx = \frac{4}{2} + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$m(S) = \int_T (1+2\xi)\,d\xi\,d\eta$$
$$= \int_0^2 \left[\int_0^{2-\xi} (1+2\xi)\,d\eta\right] d\xi = \int_0^2 (1+2\xi)(2-\xi)\,d\xi$$
$$= \int_0^2 (2 + 3\xi - 2\xi^2)\,d\xi = 4 + 3\frac{4}{2} - 2\frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$I = \int_T \frac{1}{(\xi^2+\xi+1)^2}(1+2\xi)\,d\xi\,d\eta = \int_0^2 \left[\int_0^{2-\eta} \frac{1+2\xi}{(\xi^2+\xi+1)^2}\,d\xi\right] d\eta$$

$$= \int_0^2 \left[-\frac{1}{\xi^2+\xi+1}\right]_0^{2-\eta} d\eta = \int_0^2 d\eta - \int_0^2 \frac{1}{1+t+t^2}\,dt = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^2 \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2})\right)^2 + 1}$$

$$= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\operatorname{arctg} u\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{5}{\sqrt{3}}}.$$

121. Find integralet

$$I = \int_A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

hvor A er ellipsoiden $\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$.
Vink. Anvend transformationen $(x,y,z) = (a\xi, b\eta, c\zeta)$, og udregn det fremkomne integral ved brug af polære koordinater i (ξ,η,ζ)-rummet.

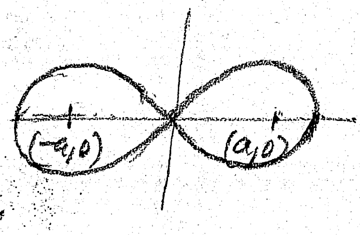
$$I = \int_B (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, abc\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad , \text{hvor } B = \{(\xi,\eta,\zeta) \mid \xi^2+\eta^2+\zeta^2 < 1\}$$

$$= abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= abc\, 2\pi \int_0^1 r^4\, dr \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = abc\, 2\pi\, \frac{1}{5}\, 2 = \frac{4}{5} abc\, \pi.$$

122. Find arealet af lemniskaten

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\,\sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2.$$



Vink. Benyt polare koordinater.

$$(x^2+y^2+a^2-2ax)(x^2+y^2+a^2+2ax) = a^4$$

$$(x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

$$(r^2+a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = a^4$$

$$r^4+2a^2r^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = 0$$

$$r^2\left[r^2+2a^2(1-2\cos^2\theta)\right] = 0.$$

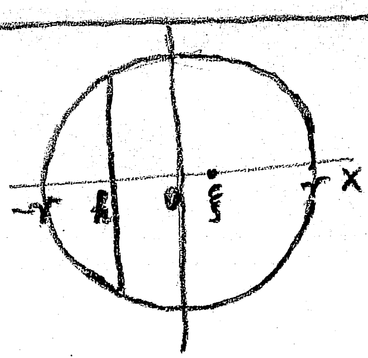
$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$, giver dobbeltpunktstangenter $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

$$A = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = 2a^2.$$

123. Find tyngdepunktet af et kugleafsnit

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2, (-r<) h \leq x \leq r\}$

med konstant massetæthed.



$$V = \int_h^r \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_h^r (r^2-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_h^r$$

$$= \pi\left[\tfrac{2}{3}r^3 - r^2h + \tfrac{1}{3}h^3\right].$$

$$S = \int_h^r \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 x\,dx = \pi\int_h^r (r^2x - x^3)\,dx$$

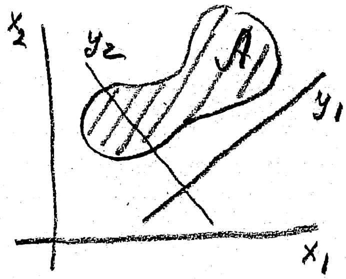
$$= \pi\left[\tfrac{1}{2}r^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_h^r$$

$$= \pi\left[\tfrac{1}{4}r^4 - \tfrac{1}{2}r^2h^2 + \tfrac{1}{4}h^4\right].$$

Tyngdepunkt $(\xi, 0, 0)$, hvor

$$\xi = \frac{\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}r^2h^2 + \frac{1}{4}h^4}{\frac{2}{3}r^3 - r^2h + \frac{1}{3}h^3};$$ for $h=0$: $\xi = \frac{3}{8}r$.

124. Lebesguemålet er indført for mængder i talrummet $\bar{R}^k$. For at anvende definitionen på en mængde A i et euklidisk rum af k dimensioner må man først vælge et koordinatsystem, ɔ: et begyndelsespunkt og k normerede parvis ortogonale basisvektorer. Vis, at måleligheden af A og målets værdi ikke afhænger af valget af koordinatsystemet.
Vis også, at hvis A er målelig, er enhver med A kongruent mængde målelig med samme mål.



1) I det ene koordinatsystem bestemmes A ved en mængde A_x af talsæt $\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)$, i det andet system ved en mængde A_y af talsæt $\underline{y}=(y_1,\dots,y_k)$. Forbindelsen mellem talsæt $\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ og $\underline{y}=(y_1,\dots,y_k)$, der bestemmer samme punkt er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad \text{eller } \underline{x} = \varphi(\underline{y}),$$

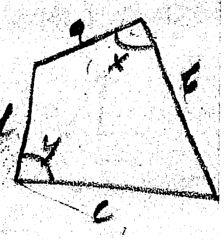
hvor $[\alpha_{rs}]$ er ortogonal. Lad f være den karakteristiske funktion for A_x. Da er $f \circ \varphi$ den karakteristiske funktion for A_y. Da $\underline{\underline{D}}\,\varphi(\underline{y}) = [\alpha_{rs}]$ er $|\det \underline{D}\,\varphi(\underline{y})| = 1$. Vi ser da: f er integrabel, hvis og kun hvis $f \circ \varphi$ er integrabel, og der gælder da

$$\int_{\bar{R}^k} f(\underline{x})\, m_k(d\bar{R}^k) = \int_{\bar{R}^k} f \circ \varphi(\underline{y})\, m_k(d\bar{R}^k),$$

d.v.s. A_x er målelig, hvis og kun hvis A_y er målelig, og der gælder da $m_k(A_x) = m_k(A_y)$.

2) Hvis A i et koordinatsystem bestemmes ved mængden $A_x \subseteq \bar{R}^k$, vil en med A kongruent mængde i et andet koordinatsystem bestemmes ved samme mængde $A_x \subseteq \bar{R}^k$ og vil derfor være målelig, hvis A er det, og med samme mål.

125. En konveks firkant med sider a, b, c, d antages forsynet med hængsler i vinkelspidserne. Den antages i en stilling med maksimalt areal. Vis, at den er indskrivelig.



Vink. Udtryk arealet som funktion af vinklerne x og y, og opskriv den betingelse, disse må opfylde.

$$A = \tfrac{1}{2}ab\sin x + \tfrac{1}{2}cd\sin y$$

$$a^2+b^2-2ab\cos x - c^2-d^2+2cd\cos y = 0.$$

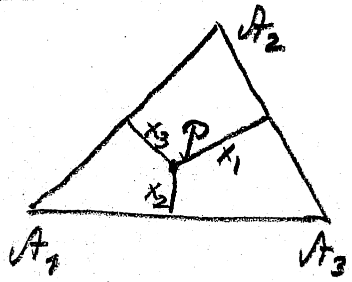
$$\text{rang}\begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}ab\cos x & \tfrac{1}{2}cd\cos y \\ -2ab\sin x & -2cd\sin y \end{pmatrix} \leq 1.$$

$$abcd\left[\cos x\sin y + \sin x\cos y\right] = 0.$$

$\sin(x+y) = 0$, $\quad 0<x<\pi \quad 0<y<\pi \quad 0<x+y<2\pi$

altså $x+y=\pi$.

126. I planen betragtes en afsluttet trekantskive $A_1A_2A_3$. Højderne fra A_1, A_2, A_3 betegnes h_1, h_2, h_3, og for et vilkårligt punkt P af trekantskiven betegnes med x_1, x_2, x_3 afstandene til linierne A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Vis, at der gælder
$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1.$$
Vis herved, at produktet $x_1x_2x_3$ er størst, når P er medianernes skæringspunkt.



Siderne betegnes a_1, a_2, a_3, arealet T.

$$\begin{aligned} 2T &= h_1a_1 = h_2a_2 = h_3a_3 \\ &= x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \\ &= x_1\frac{2T}{h_1} + x_2\frac{2T}{h_2} + x_3\frac{2T}{h_3}, \end{aligned}$$

altså $\dfrac{x_1}{h_1} + \dfrac{x_2}{h_2} + \dfrac{x_3}{h_3} = 1$.

$x_1x_2x_3$ kontinuert på kompakt mængde
$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1\right\},$$
$= 0$ når mindst et x_i er $= 0$, ellers > 0.

Globalt maksimum altså i et punkt af
$$\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0,\ \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1\right\}.$$

Betragter altså $x_1x_2x_3$ i mængden $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1>0, x_2>0, x_3>0\}$.

Nødvendig betingelse for lokalt maksimum af $x_1x_2x_3$ under bibetingelsen $\dfrac{x_1}{h_1} + \dfrac{x_2}{h_2} + \dfrac{x_3}{h_3} = 1$ er

$$\text{rang}\begin{bmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} \end{bmatrix} \leq 1, \quad \text{o:}\ h_1x_2x_3 = h_2x_1x_3 = h_3x_1x_2,$$

o: $\dfrac{x_1}{h_1} = \dfrac{x_2}{h_2} = \dfrac{x_3}{h_3}$, o: $\dfrac{x_1}{h_1} = \dfrac{x_2}{h_2} = \dfrac{x_3}{h_3} = \dfrac{1}{3}$,

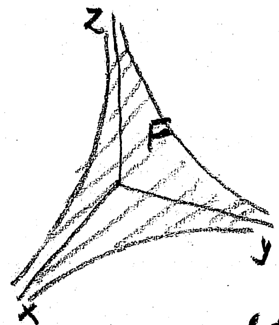
o: P er medianernes skæringspunkt. Dette må altså give globalt maksimum for $x_1x_2x_3$.

127. For et egentligt eller udartet parallelepipedum med kantlængder $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ betragtes

overfladen $S = 2yz + 2xz + 2xy$

volumenet $V = xyz$.

Hvilke værdier kan V antage for et givet $S > 0$?



Det drejer sig om at bestemme værdimængden for $V = xyz$ på mængden

$F = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,\ 2yz + 2xz + 2xy = S\}$.

F er sammenhængende og afsluttet, men ikke kompakt.

V er $= 0$ i ethvert punkt af F, der ligger i en af koordinatplanerne, > 0 for alle andre punkter af F.

For $(x,y,z) \in F$, $z > 0$ haves $x + y \leq \frac{S}{z}$, $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} \leq \frac{S}{z}$,

altså $V \leq \frac{S^2}{z^2} z = \frac{S}{z}$. Heraf $V \to 0$ for $z \to \infty$.

Analogt $V \to 0$ for $x \to \infty$ eller $y \to \infty$.

Globalt maksimum af V altså i et punkt af

$\{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0,\ 2yz + 2xz + 2xy = S\}$.

Betragter altså V i mængden $\{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$

Nødvendig betingelse for lokalt maksimum af V under bibetingelsen $2yz + 2xz + 2xy = S$ er

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ y+z & x+z & x+y \end{bmatrix} \leq 1, \quad ɔ: \ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

ɔ: x, y, z ligestore, ɔ: $(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}, \sqrt{\frac{S}{6}}\right)$.

I dette punkt er $V = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3$. Dette er altså globalt maksimum. Da F er sammenhængende, er værdimængden sammenhængende. Det er altså intervallet $\left[0, \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3\right]$.

128. For givne ikke negative tal $x_1,\dots,x_k$ og givne vægte $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ (positive tal med sum 1) betegnes

$$G = x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k} \quad \text{og} \quad A = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$$

henholdsvis som det geometriske og det aritmetiske middeltal af $x_1,\dots,x_k$ med vægtene $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Bevis, at der gælder uligheden

$$G \leq A,$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $x_1,\dots,x_k$ er ligestore.

Vink. For givne vægte og givet $A_0 \geq 0$ søges globalt maksimum af G under bibetingelsen $A = A_0$.

---

1) $A_0 = 0$ giver $(x_1,\dots,x_k) = (0,\dots,0)$ og $G = 0$.

2) $A_0 > 0$. Skal søge globalt maksimum af G i den kompakte mængde

$$\{(x_1,\dots,x_k) \mid x_1 \geq 0,\dots, x_k \geq 0,\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = A_0\}.$$

$G = 0$, når mindst et $x_i = 0$. $G > 0$ når alle $x_i > 0$.
Det globale maksimum antages altså i mængden

$$\{(x_1,\dots,x_k) \mid x_1 > 0,\dots, x_k > 0,\ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = A_0\}.$$

Betragter altså A og G i $\{(x_1,\dots,x_k) \mid x_1 > 0,\dots,x_k > 0\}$.
Nødvendig betingelse for lokalt maksimum af G under bibetingelsen $A = A_0$ er

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial x_k} \\ \frac{\partial A}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial x_k}\end{pmatrix} \leq 1 \quad \text{o:} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} \alpha_1 \frac{G}{x_1} & \cdots & \alpha_k \frac{G}{x_k} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix} \leq 1,$$

o: alle x_i ligestore, o: alle $x_i = A_0$, da $G = A_0$.
Dette må altså være det globale maksimum.

129. For givne positive tal $x_1, \dots, x_k$ og givne vægte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (positive tal med sum 1) betegnes for et vilkårligt $p \in \mathbb{R}$

$$M_p = \begin{cases} (\alpha_1 x_1^p + \dots + \alpha_k x_k^p)^{\frac{1}{p}} & \text{for } p \neq 0 \\ x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k} & \text{for } p = 0 \end{cases}$$

som den p^{te} potensmiddelværdi af $x_1, \dots, x_k$ med vægtene $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Bevis, at der for $p < q$ gælder uligheden

$$M_p \leq M_q,$$

og at lighedstegnet gælder, når og kun når tallene $x_1, \dots, x_k$ er lige store. Vis endvidere, at M_p er en kontinuert funktion af p, og at

$$\lim_{p \to +\infty} M_p = \max\{x_1, \dots, x_k\}, \quad \lim_{p \to -\infty} M_p = \min\{x_1, \dots, x_k\}.$$

Vink: Ved beviset for, at M_p er kontinuert i punktet $p = 0$, benyttes for $p \neq 0$ omskrivningen

$$\log M_p = \frac{1}{p} \log\left(1 + \alpha_1(x_1^p - 1) + \dots + \alpha_k(x_k^p - 1)\right).$$

130. $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ betegner en sandsynlighedsvektor, d.v.s. $p_\nu \geq 0$, $\nu = 1, \dots, n$, og $\sum p_\nu = 1$. Vi definerer entropien af $\underline{p}$ ved
$$H(\underline{p}) = -\sum p_\nu \log p_\nu,$$
hvor funktionen $x \log x$ er defineret ved kontinuitet for $x = 0$, d.v.s. $0 \log 0 = 0$. [Denne størrelse kan man opfatte som et mål for den usikkerhed, der hersker om udfaldet af et forsøg med n mulige udfald, hvor det ν^{te} udfald har sandsynligheden p_ν.] Bevis, at
$$H(\underline{p}) \leq H(\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}) = \log n.$$
[Usikkerheden er størst, når de mulige udfald er lige sandsynlige.]
Vink. (1) Vis, at H har et globalt maksimum i $A = \{\underline{p} \mid p_\nu \geq 0, \nu = 1, \dots, n; \text{ og } \sum p_\nu = 1\}$. (2) Vis gyldigheden for $n = 1$. (3) Vis under antagelse af gyldigheden for $n-1$, at det globale maksimum må antages i $A \cap \{\underline{p} \mid p_\nu > 0, \nu = 1, \dots, n\}$, og anvend derefter sætningen om ekstremum med bibetingelser.

---

(1) trivielt, da A er kompakt og H er kontinuert.

(2) trivielt.

(3) Gyldigheden for $n-1$ giver $H(\underline{p}) \leq \log(n-1)$, når mindst et $p_\nu = 0$. Da $H(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \log n$, må det globale maksimum antages i et punkt, hvor alle $p_\nu > 0$.
Betragter altså $-\sum p_\nu \log p_\nu$ i $\{(p_1, \dots, p_n) \mid p_\nu > 0, \nu = 1, \dots, n\}$
Nødvendig betingelse for maksimum under bibetingelsen $\sum p_\nu = 1$ er
$$\text{rang}\begin{bmatrix} 1 + \log p_1 & \cdots & 1 + \log p_n \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \leq 1 \quad \text{ɔ: alle } p_\nu \text{ ligestore,}$$
ɔ: alle $p_\nu = \frac{1}{n}$. Altså globalt maksimum i punktet $\underline{p} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

131. Bevis Hadamards determinantvurdering

$$\left|\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{bmatrix}\right| \leq \sqrt{a_{11}^2+\cdots+a_{k1}^2}\cdots\sqrt{a_{1k}^2+\cdots+a_{kk}^2},$$

og afgør, hvornår lighedstegnet gælder.

Vink. Søg globalt minimum og maksimum af determinanten (opfattet som funktion af de k^2 variable a_{ij}) under bibetingelserne

$$a_{11}^2+\cdots+a_{k1}^2 = c_1$$
$$\cdots$$
$$a_{1k}^2+\cdots+a_{kk}^2 = c_k,$$

hvor $c_1,\dots,c_k$ er givne ikke negative tal.

---

1) Mindst et $c_i = 0$ medfører determinanten $= 0$.

2) Alle $c_i > 0$. $\det[a_{ij}] = f(a_{11},\dots,a_{kk})$ er kontinuert funktion på kompakt mængde bestående af de $(a_{11},\dots,a_{kk})$ i R^{k^2} der opfylder bibetingelserne, har altså globalt minimum og maksimum. Nødvendig betingelse for lokalt ekstremum, idet A_{ij} er komplementet til a_{ij}, er

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{k1} & A_{12}\cdots A_{k2} & \cdots & A_{1k}\cdots A_{kk} \\ a_{11}\cdots a_{k1} & 0 \quad 0 & \cdots & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & a_{12}\cdots a_{k2} & \cdots & 0\cdots 0 \\ \cdots & & & \\ 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & \cdots & a_{1k}\cdots a_{kk}\end{bmatrix} \leq k,$$

ɔ: rækkerne lineært afhængige, men de k sidste rækker er lineært uafhængige, altså første række linearkombination af de k sidste, ɔ: $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_k$ så

$(A_{11},\dots,A_{k1}) = \lambda_1(a_{11},\dots,a_{k1}), \quad \dots \quad, (A_{1k},\dots,A_{kk}) = \lambda_k(a_{1k},\dots,a_{kk})$.

Heraf $\det(a_{ij}) = A_{1i}a_{1i}+\cdots+A_{ki}a_{ki} = \lambda_i c_i$ og

for $i \neq j$ $\quad 0 = A_{1i}a_{1j}+\cdots+A_{ki}a_{kj} = \lambda_i(a_{1i}a_{1j}+\cdots+a_{ki}a_{kj})$.

a) $\det[a_{ij}] = 0$. Uligheden skarpt opfyldt ($<$)

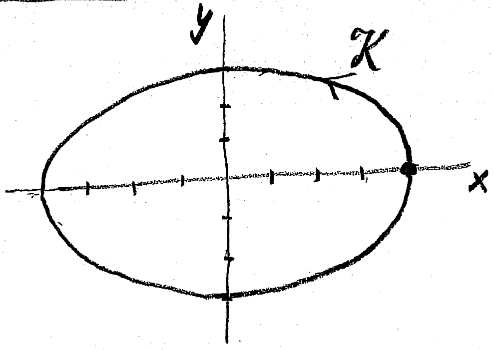
b) $\det[a_{ij}] \neq 0$, da alle $\lambda_i \neq 0$, søjlerne ortogonale, følgelig $\det[a_{ij}] = \pm\sqrt{c_1}\cdots\sqrt{c_n}$ ($\pm$ eftersom matricen er egentlig eller uegentlig ortogonal).

Hermed vurderingen, og $=$ når og kun når $[a_{ij}]$ ortogonal.

132. Udregn kurveintegralet

$$\int_{K} (x+2y)\,dx + (y-2x)\,dy,$$

idet K er ellipsen $(x,y) = (4\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Definitionen af kurveintegral anvendes, og vi får

$$\int_{K} (x+2y)\,dx + (y-2x)\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(4\cos t + 6\sin t)(-4\sin t) + (3\sin t - 8\cos t)\,3\cos t\right] dt$$

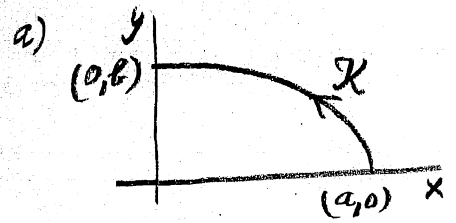
$$= \int_0^{2\pi} \left[-7\cos t\sin t - 24\right] dt = -48\pi .$$

133. Udregn kurveintegralet

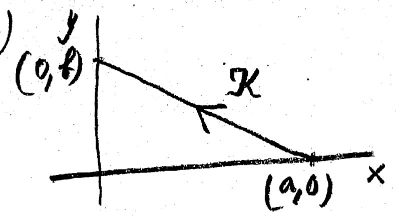
$$\int_{\mathcal{K}} (x^2-y^2)\,dx - (x+y)\,dy,$$

dels når $\mathcal{K}$ er ellipsebuen $(x,y) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$, dels når $\mathcal{K}$ er dennes korde $(x,y) = (a-at, bt)$, $0 \leq t \leq 1$.

a)



b)



Kald integralet I.

a) Definitionen giver

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a^2\cos^2 t - b^2\sin^2 t)(-a\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (a\cos t + b\sin t)\,b\cos t\,dt.$$

I stedet for at udregne dette ved at regne videre trigonometrisk, benytter vi i det første led $x = a\cos t$ og i det andet led $y = b\sin t$ som ny integrationsvariabel, og får

$$I = -\int_0^a \left[x^2 - b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right] dx - \int_0^b x\,dy - \int_0^b y\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)a^3 + b^2 a - \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}b^2$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{1}{4}\pi ab - \frac{1}{2}b^2.$$

[I det andet integral er $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, men vi har nøjedes med at skrive x, da integralet jo straks ses at være $\frac{1}{4}$ gange ellipsens areal πab.]

b) Definitionen giver

$$I = \int_0^1 \left(\left[(a-at)^2 - (bt)^2\right](-a) - [a - at + bt]\,b\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(-a^3 + 2a^3 t - a(a^2-b^2)t^2 - ab + (a-b)bt\right) dt$$

$$= -a^3 + a^3 - \frac{1}{3}a(a^2-b^2) - ab + \frac{1}{2}(a-b)b$$

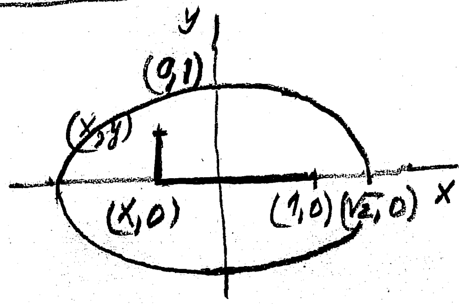
$$= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}ab^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2.$$

Man får forskelligt integral for de to kurver. Formen er altså ikke eksakt, hvilket også let ses direkte.

134. Vis, at differentialformen

$$\omega = \left(\frac{-2x}{2-x^2-2y^2} + \frac{-x}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dx + \left(\frac{-4y}{2-x^2-2y^2} + \frac{-2y}{\sqrt{2-x^2-2y^2}}\right)dy$$

er eksakt i mængden $\{(x,y) \mid x^2+2y^2<2\}$, og find den funktion på mængden, som har formen til differential og i punktet $(1,0)$ har værdien 0.



Man ser måske straks, at $\omega = df$, hvor

$$f(x,y) = \log(2-x^2-2y^2) + \sqrt{2-x^2-2y^2} + k.$$

Betingelsen $f(1,0)=0$ opfyldes for $k=-1$.

Ser man det ikke straks, kan man gå således frem: Hvis $\omega = df$, hvor $f(1,0)=0$, må vi for ethvert (x,y) i mængden have $f(x,y) = \int_K \omega$, hvor K er vinkellinien $(1,0),(x,0),(x,y)$, altså

$$f(x,y) = \int_1^x \left(\frac{-2\xi}{2-\xi^2} + \frac{-\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}\right)d\xi + \int_0^y \left(\frac{-4\eta}{2-x^2-2\eta^2} + \frac{-2\eta}{\sqrt{2-x^2-2\eta^2}}\right)d\eta$$

$$= \left[\log(2-\xi^2) + \sqrt{2-\xi^2}\right]_1^x + \left[\log(2-x^2-2\eta^2) + \sqrt{2-x^2-2\eta^2}\right]_0^y$$

$$= \log(2-x^2) + \sqrt{2-x^2} - 1 + \log(2-x^2-2y^2) + \sqrt{2-x^2-2y^2}$$

$$- \log(2-x^2) - \sqrt{2-x^2}$$

$$= \log(2-x^2-2y^2) + \sqrt{2-x^2-2y^2} - 1.$$

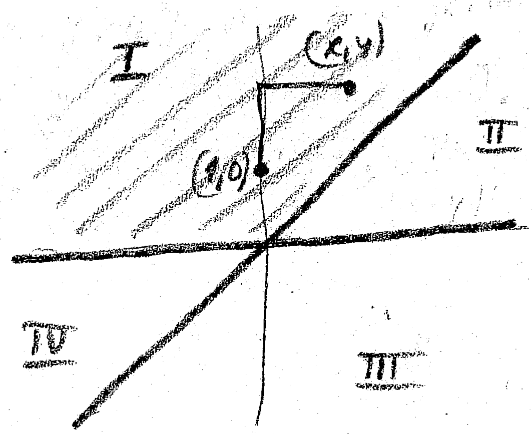
Prøve viser nu, at for dette f er $\omega = df$.

135. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{x}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2}\,dy$$

er eksakt i ethvert af de ved linierne $x = y$ og $y = 0$ bestemte vinkelrum.

Find for hvert af disse vinkelrum samtlige funktioner i vinkelrummet, der har formen til differential.



$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x^2}{y(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2(-2x)+x^2\,2(x-y)}{y\,(x-y)^4}$$

$$= \frac{2x}{(x-y)^3}\,\frac{(x-y)(-1)+x}{y} = \frac{2x}{(x-y)^3}$$

I $\quad f(x,y) = \int_1^y 0\,d\eta + \int_0^x \frac{\xi}{(\xi-y)^2}\,d\xi$

$$= \int_0^x \frac{\xi-y}{(\xi-y)^2}\,d\xi + y\int_0^x \frac{1}{(\xi-y)^2}\,d\xi = \Big[\log(y-\xi)\Big]_0^x + y\left[\frac{1}{y-\xi}\right]^x$$

$$= \log\frac{y-x}{y} + y\left[\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y}\right] = \log\frac{y-x}{y} + \frac{y}{y-x} - 1. \;(+\text{konst})$$

II $\quad f(x,y) = \log\frac{x-y}{y} + \frac{y}{y-x} \quad (+\text{Konst})$

III som I

IV som II

Fælles: $\quad f(x,y) = \log\left|\frac{x-y}{y}\right| + \frac{y}{y-x} + \text{Konst.}$

136. Vis, at differentialformen

$$\omega = 2xz\exp(x^2+y^2)dx + 2yz\exp(x^2+y^2)dy + \exp(x^2+y^2)dz$$

er eksakt, og find en funktion, der har den til differential.

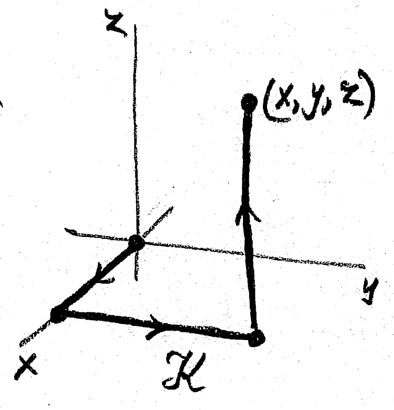
Formen skrives $\omega = L\,dx + M\,dy + N\,dz$.

Koefficienterne er $C^1(\mathbb{R}^3)$ (endda $C^\infty(\mathbb{R}^3)$).

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4xyz\exp(x^2+y^2) = \frac{\partial M}{\partial x}\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2x\exp(x^2+y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}\\
\frac{\partial M}{\partial z} &= 2y\exp(x^2+y^2) = \frac{\partial N}{\partial y}
\end{aligned}\right\}$$ altså er formen eksakt.

Vi har $\omega = df$, hvor $f(x,y,z) = \int_K \omega$, idet K er

vinkellinien $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(x,y,0)$, (x,y,z), altså



$$f(x,y,z) = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y 0\,dy + \int_0^z \exp(x^2+y^2)dz$$

$$= z\exp(x^2+y^2).$$

Prøve:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = L,\ \frac{\partial f}{\partial y} = M,\ \frac{\partial f}{\partial z} = N.$$

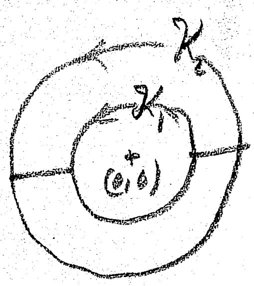
137. Lad $L(x,y)$ og $M(x,y)$ være to funktioner på mængden $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ med kontinuerte partielle afledede, der opfylder betingelsen $L'_y(x,y) = M'_x(x,y)$. Idet $K(r)$ betegner cirklen

$$(x,y) = (r\cos t,\ r\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

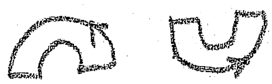
skal det vises, at kurveintegralet

$$\int_{K(r)} L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy$$

er uafhængigt af r.



$$\int_{K_2} - \int_{K_1} = \int + \int = 0+0=0.$$



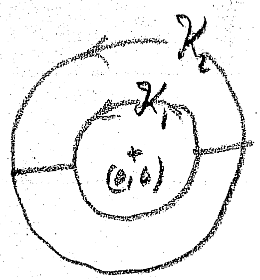
137. Lad $L(x,y)$ og $M(x,y)$ være to funktioner på mængden $\{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ med kontinuerte partielle afledede, der opfylder betingelsen $L'_y(x,y) = M'_x(x,y)$. Idet $K(r)$ betegner cirklen

$$(x,y) = (r\cos t, r\sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

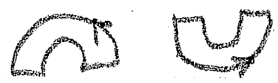
skal det vises, at kurveintegralet

$$\int_{K(r)} L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy$$

er uafhængigt af r.



$$\int_{K_2} - \int_{K_1} = \int + \int = 0 + 0 = 0.$$



138. Vis, at differentialformen

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

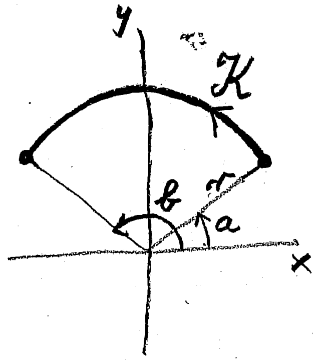
er lokalt eksakt i mængden $A = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.

Find dens integral langs en vilkårlig cirkelbue $(x,y) = (r\cos t, r\sin t)$, $a \leq t \leq b$. Er ω eksakt i A?

Vis, at formen er eksakt i mængden $B = \{(x,y) = (r\cos t, r\sin t) \mid r > 0, -\pi < t < \pi\}$, og angiv en funktion i denne mængde, der har den til differential.

Formen skrives $\omega = L\,dx + M\,dy$. Koefficienterne er $C^1(A)$ (endda $C^\infty(A)$).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2)(-1) + y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{(x^2+y^2)1 - x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\}$$ altså er formen lokalt eksakt.

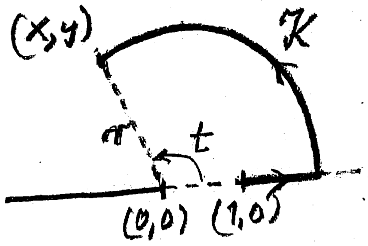


Cirkelbuen betegnes K.

$$\int_K \omega = \int_a^b \left[\frac{-r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2} r\cos t\right] dt$$

$$= \int_a^b dt = b - a.$$

For en hel cirkel ($b = a + 2\pi$) altså 2π. Formen er derfor ikke eksakt i A.



For et vilkårligt $(x,y) = (r\cos t, r\sin t)$ i B fås, idet K er kurven sammensat af liniestykket fra $(1,0)$ til $(r,0)$ og cirkelbuen med centrum $(0,0)$ fra $(r,0)$ til (x,y)

$\int_K \omega = \int_1^r 0\,dx + t = t$. Vi prøver derfor med funktionen t.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\} \text{ giver } \left.\begin{aligned} dx &= \cos t\,dr - r\sin t\,dt \\ dy &= \sin t\,dr + r\cos t\,dt \end{aligned}\right\},$$

hvoraf $dt = -\frac{\sin t}{r}dx + \frac{\cos t}{r}dy = \frac{-y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy = \omega.$

139. Vis, at differentialformen

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{x_1^2+\cdots+x_k^2}\, dx_j$$

er eksakt i mængden $\mathring{R}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}$, og angiv en funktion i denne mængde, der har den til differential.

Man ser måske straks, at $\omega = df$, hvor

$$f(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{2}\log(x_1^2+\cdots+x_k^2).$$

Ser man det ikke straks, kan man gå således frem: Hvis $\omega = df$, hvor $f(1,0,\dots,0)=0$, må man for ethvert $(x_1,\dots,x_k)$ i $\{(x_1,\dots,x_k) \mid x_1>0\}$ have $f(x_1,\dots,x_k) = \int_K \omega$, hvor K er vinkellinien $(1,0,\dots,0), (x_1,0,\dots,0), (x_1,x_2,0,\dots,0), \dots, (x_1,\dots,x_k)$, altså

$$f(x_1,\dots,x_k) = \int_1^{x_1} \frac{\xi_1}{\xi_1^2}\, d\xi_1 + \int_0^{x_2} \frac{\xi_2}{x_1^2+\xi_2^2}\, d\xi_2 + \int_0^{x_3} \frac{\xi_3}{x_1^2+x_2^2+\xi_3^2}\, d\xi_3 + \cdots$$

$$+ \int_0^{x_k} \frac{\xi_k}{x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2+\xi_k^2}\, d\xi_k$$

$$= \left[\frac{1}{2}\log \xi_1^2\right]_1^{x_1} + \left[\frac{1}{2}\log(x_1^2+\xi_2^2)\right]_0^{x_2} + \left[\frac{1}{2}\log(x_1^2+x_2^2+\xi_3^2)\right]_0^{x_3} + \cdots$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\log(x_1^2+\cdots+x_{k-1}^2+\xi_k^2)\right]_0^{x_k}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x_1^2+\cdots+x_k^2).$$

Ved dette udtryk er imidlertid defineret en funktion i $\mathring{R}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}$, for hvilken $\omega = df$.