Københavns Universitets Matematiske Institut

M A T E M A T I K 2

1962-63

B. Jessen

Forelæsninger

over

R E E L L E F U N K T I O N E R.

Kap.1 Indledning.

Kap.2 Mål- og integralbegrebet.

Kap.3 Normerede funktionsrum.

Kap.4. Fourierrækker.

Kap. 1 Indledning.

§1. Weierstrass' approksimationssætning.

(K.Weierstrass 1815-1897; sætningen er fra 1885.)

Hvis $f(x)$ er en kontinuert funktion i det afsluttede interval $[a,b]$ og $\varepsilon > 0$, da findes et polynomium $p(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, for hvilket $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$ for alle $x \in [a,b]$.

Der findes forskellige beviser for denne fundamentale sætning. Det følgende bevis skyldes S.N.Bernstein. Vi går frem i en række skridt.

a) Det er nok at bevise sætningen for intervallet $[0,1]$. Thi antages sætningen bevist for dette interval, får vi den for et vilkårligt interval $[a,b]$ på følgende måde: Når $f(x)$ er kontinuert i $[a,b]$, er der ved $g(\xi) = f(a+(b-a)\xi)$ defineret en kontinuert funktion i $[0,1]$. Til et givet $\varepsilon > 0$ findes da ifølge antagelsen et polynomium $q(\xi) = b_0+b_1\xi+\dots+b_n\xi^n$, for hvilket

$$|g(\xi)-q(\xi)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } \xi \in [0,1].$$

Da er

$$\left|g\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)-q\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)\right| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [a,b].$$

Her er $g(\frac{x-a}{b-a}) = f(x)$ og $q(\frac{x-a}{b-a}) = b_0+b_1\frac{x-a}{b-a}+\dots+b_n(\frac{x-a}{b-a})^n$ er et polynomium $p(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Vi har altså

$$|f(x)-p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [a,b].$$

b) Vi antager nu, at intervallet er $[0,1]$. For et vilkårligt helt positivt n dannes polynomiet

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}.$$

Vi vil vise: Til $\varepsilon > 0$ findes et nummer $n_0 = n_0(\varepsilon)$, således at der for ethvert $n \geq n_0$ gælder

$$|f(x)-p_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [0,1].$$

c) Ifølge binomialformlen er

$$1 = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu} \quad \text{for alle } x,$$

altså
$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(x)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu} \quad \text{for alle } x \in [0,1].$$

Heraf fås

$$f(x)-p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu},$$

og følgelig, da $\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu} \geq 0$ for $\nu = 0,1,\dots,n$ og alle $x \in [0,1]$,

$$(*) \qquad |f(x)-p_n(x)| \leq \sum_{\nu=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\tfrac{\nu}{n}\right)\right|\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}.$$

d) For givet n og x deles summen i (*) i to, idet vi vælger et $\delta > 0$ og i den første sum tager de led, for hvilke $|x - \frac{\nu}{n}| < \delta$, og i den anden sum de, for hvilke $|x - \frac{\nu}{n}| \geq \delta$. Idet disse to summer betegnes $\sum_1$ og $\sum_2$, har vi altså

$$|f(x)-p_n(x)| \leq \sum_1 + \sum_2 .$$

Vi sætter

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = M \quad \text{og} \quad \sup_{|x_1-x_2| < \delta} |f(x_1)-f(x_2)| = \omega(\delta).$$

Da $f(x)$ er kontinuert i det afsluttede interval $[0,1]$, er $f(x)$ begrænset og ligelig kontinuert. Altså gælder $M < +\infty$ og $\omega(\delta) \to 0$ for $\delta \to 0$. Vi finder

$$\sum_1 \leq \omega(\delta) \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|<\delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leq \omega(\delta) \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \omega(\delta);$$

$$\sum_2 \leq 2M \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|\geq\delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

e) Det afgørende punkt i beviset er vurderingen af summen på højre side i den sidste ulighed. Hertil går vi ud fra binomialformlen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = (x+y)^n$$

Ved differentiation efter x og påfølgende multiplikation med x fås

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = nx(x+y)^{n-1}.$$

Gentages processen fås

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu y^{n-\nu} = nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}$$

Sættes $y = 1-x$ fås heraf

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = 1$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx + n(n-1)x^2$$

Af disse ligninger fås ved multiplikation med henholdsvis x^2, $-2x/n$, $1/n^2$ og efterfølgende addition, at

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(x-\frac{\nu}{n}\right)^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \frac{x(1-x)}{n}$$

For ethvert x er højre side $\leq 1/4n$ (idet polynomiet har sin største værdi for $x = \frac{1}{2}$). For ethvert $x \in [0,1]$ er alle leddene i summen på venstre side ≥ 0. Vi bortkaster de led, for hvilke $|x-\frac{\nu}{n}| < \delta$ og erstatter i de øvrige led $(x-\frac{\nu}{n})^2$ med δ^2. Da fås <u>Čebyševs ulighed</u>

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}|\geq\delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

f) Ved sammenfatning finder vi således

$$|f(x)-p_n(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{M}{2n\delta^2} \quad \text{for alle } x \in [0,1].$$

Til det givne $\varepsilon > 0$ vælges nu først $\delta = \delta(\varepsilon)$, således at $\omega(\delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Derefter bestemmes $n_o = n_o(\varepsilon)$, således at $\frac{M}{2n_o\delta(\varepsilon)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da gælder for ethvert $n \geq n_o$, at

$$|f(x)-p_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } x \in [0,1],$$

hvormed Weierstrass' sætning er bevist. ∎

Bemærkninger.

1) Af Čebyševs ulighed følger specielt, at der for fast $x \in [0,1]$ og fast $\delta > 0$ gælder

$$(**) \quad \sum_{\substack{\nu=0 \\ |x-\frac{\nu}{n}| \geq \delta}}^{n} \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Betragtes et spil, som der er sandsynligheden x for at vinde, og spilles spillet n gange uafhængigt af hinanden, udtrykker $\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$ sandsynligheden for at vinde netop ν af spillene, og udtrykket på venstre side i (**) er derfor sandsynligheden for, at antallet af vundne spil divideret med n afviger mindst δ fra sandsynligheden x. Grænseligningen (**), hvorefter denne sandsynlighed $\to 0$ for $n \to \infty$, er først bevist af Jaxob Bernoulli (Ars xonjectandi 1713). Den kaldes "de store tals lov" og er begyndelsen til den videregående sandsynlighedsregning.

2) Weierstrass' approksimationssætning kan også formuleres således: Hvis f(x) er en kontinuert funktion i det afsluttede interval $[a,b]$, da findes enfølge af polynomier $p_1(x), p_2(x), \ldots$ xom konvergerer ligeligt mod f(x) i $[a,b]$. - Omvendt gælder: Hvis en funktion f(x) i $[a,b]$ er grænsefunktion for en ligelig konvergent følge af polynomier $p_1(x), p_2(x), \ldots$, da er f(x) kontinuert. Eller anderledes udtrykt: Hvis en funktion f(x) i $[a,b]$ har den egenskab, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et polynomium p(x), således at $|f(x)-p(x)| \leq \varepsilon$ for alle $x \in [a,b]$, da er f(x) kontinuert.

3) For et givet afsluttet interval $[a,b]$ betegner vi med $B([a,b])$ klassen af alle begrænsede funktioner i $[a,b]$, med $C([a,b])$ klassen af alle kontinuerte funktioner i $[a,b]$, og med $P([a,b])$ klassen af alle polynomier betragtet i $[a,b]$. Da gælder $B([a,b]) \supsetneqq C([a,b]) \supsetneqq P([a,b])$. Vi sætter for $f \in B([a,b])$, $g \in B([a,b])$

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)-g(x)|.$$

$B([a,b])$ er med denne afstandsdefinition et metrisk rum. Weierstrass' sætning og dens trivielle omvendte sætning (jfr.

bemærkning 2) kan nu under et udtrykkes således: I det metriske rum B([a,b]) er C([a,b]) afslutningen af mængden P([a,b]).

§2. Newtons og Lagranges interpolationsformler.

Sætning: For givne (indbyrdes forskellige) abscisser $x_0, x_1, \ldots, x_n$ og givne ordinater $y_0, y_1, \ldots, y_n$ findes et og kun et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ af højst n'te grad, som i punkterne $x_0, x_1, \ldots, x_n$ antager værdierne $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Der kan ikke findes to forskellige sådanne polynomier; thi deres differens var da et polynomium af højst n'te grad med de n+1 nulpunkter $x_0, x_1, \ldots, x_n$, i strid med, at et egentligt polynomium højst har så mange nulpunkter som graden angiver. - Eksistensen af et polynomium af den angivne art vises ved, at man opskriver et; vi angiver to måder.

I Newtons interpolationsformel skrives

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Koefficienterne $c_0, c_1, \ldots, c_n$ bestemmes successivt, således at ligningerne $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$ bliver opfyldt. Man finder

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}, \quad c_2 = \frac{y_2 - (c_0 + c_1(x_2 - x_1))}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad \ldots,$$

$$c_n = \frac{y_n - (c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_{n-1}(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-2}))}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

I Lagranges interpolationsformel skrives

$$p(x) = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \ldots + y_n p_n(x),$$

hvor polynomierne $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ er bestemt ved, at $p_j(x)$ i x_j skal have værdien 1 og i resten af punkterne $x_0, x_1, \ldots, x_n$ værdien 0. Dette opnås for

$$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$\ldots$$

$$p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

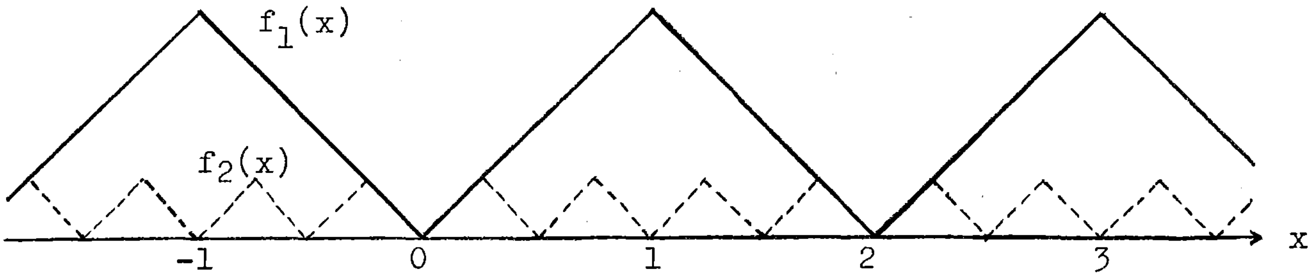
jfr. i øvrigt AG III,4,øv.15.

Bemærkning. Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion i et lukket interval $[a,b]$. For et givet n kan vi betragte det polynomium $p_n(x)$ af højst n'te grad, der i de n+1 punkter $a, a+h, a+2h, \ldots, b-h, b$, hvor $h = (b-a)/n$, antager samme værdier som $f(x)$. Man kunne tro, at følgen $p_1(x), p_2(x), \ldots$ ville konvergere ligeligt mod $f(x)$, men dette er ikke altid tilfældet.

§3. En kontinuert funktion af en reel variabel, som ikke er differentiabel i noget punkt.

Det er let at angive en kontinuert funktion af èn reel variabel, som ikke er differentiabel i eet punkt, f.eks. $f(x) = |x|$.

Det første eksempel på en funktion, som ikke er differentiabel i noget punkt, er givet af Weierstrass (1861). Følgende, noget simplere, eksempel skyldes B.L.van der Waerden.



Vi betragter funktionerne (se figuren):

$f_1(x) = |x|$ for $|x| \leq 1$, periodisk med perioden 2

$f_2(x) = |x|$ for $|x| \leq \frac{1}{4}$, periodisk med perioden $\frac{2}{4}$

...

$f_n(x) = |x|$ for $|x| \leq \frac{1}{4^{n-1}}$, periodisk med perioden $\frac{2}{4^{n-1}}$

...

Hver funktion er defineret og kontinuert for $-\infty < x < +\infty$. For ethvert n er $0 \leq f_n(x) \leq 1/4^{n-1}$ for alle x. Den uendelige række $f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$ har således den konvergente majorantrække $1 + \frac{1}{4} + \dots + 1/4^{n-1} + \dots$. Den er følgelig ligelig konvergent, og dens sum

$$f(x) = f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)+\dots$$

er en kontinuert funktion. Vi vil vise, at $f(x)$ ikke er differentiabel i noget punkt.

Lad x_0 være et givet punkt. Ved et "halvtag" for $f_n(x)$ mener vi et stykke af det grafiske billede af $f_n(x)$ fra knæk til knæk, det venstre knækpunkt medregnet, det højre ikke. Punktet x_0 ligger da under et bestemt halvtag for hver af funktionerne $f_1(x)$, $f_2(x)$,... . Disses hældningskoefficienter er alle +1 eller -1, og de er bestemt som den højre afledede i x_0 af funktionerne $f_1(x), f_2(x), \dots$, betegnet $D^+f_1(x_0)$, $D^+f_2(x_0), \dots$.

Vi bestemmer nu:

1) x_1 under samme halvtag for $f_1(x)$ som x_0, således at $|x_1-x_0| = \frac{2}{4}$ (lig med $\frac{1}{4}$ af perioden for $f_1(x)$). Dette er muligt på een måde; vi har $x_1 = x_0+\frac{2}{4}$, hvis x_0 ligger til venstre for midten af halvtaget, ellers $x_1 = x_0-\frac{2}{4}$.

2) x_2 under samme halvtag for $f_2(x)$ som x_o, således at $|x_2-x_o| = 2/4^{2^2}$ (= $\frac{1}{4}$ af perioden for $f_2(x)$). Dette er ligeledes muligt på een måde.

...

n) x_n under samme halvtag for $f_n(x)$ som x_o, således at $|x_n-x_o| = 2/4^{n^n}$ (= $\frac{1}{4}$ af perioden for $f_n(x)$). Dette er atter muligt på een måde.

...

Vi har $x_n \to x_o$ og vil nu vise, at følgen af differenskvotienter $(f(x_n) \div f(x_o))/(x_n-x_o)$ ikke har nogen grænseværdi for $n\to\infty$, hvormed vil være vist, at $f(x)$ ikke er differentiabel i punktet x_o.

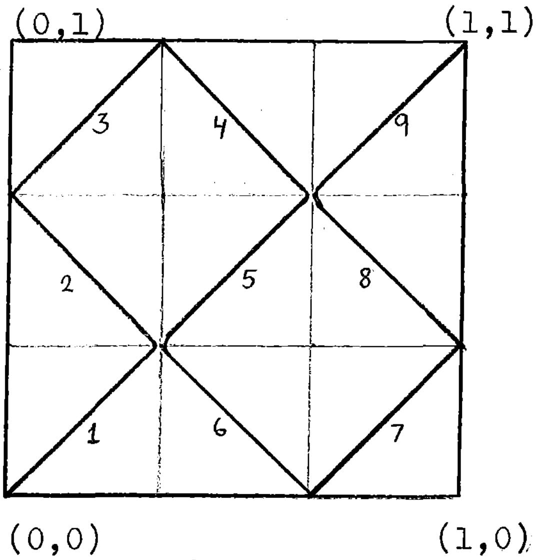
Vi har
$$f(x_n) = f_1(x_n)+\ldots+f_n(x_n)+f_{n+1}(x_n)+\ldots$$
$$f(x_o) = f_1(x_o)+\ldots+f_n(x_o)+f_{n+1}(x_o)+\ldots$$
altså
$$(*)\quad \frac{f(x_n)-f(x_o)}{x_n-x_o} = \frac{f_1(x_n)-f_1(x_o)}{x_n-x_o}+\ldots+\frac{f_n(x_n)\div f_n(x_o)}{x_n-x_o}+\frac{f_{n+1}(x_n)\div f_{n+1}(x_o)}{x_n-x_o}+\ldots$$
Da x_n ligger under samme halvtag for $f_n(x)$ som x_o, ligger x_n også under samme halvtag for hver af funktionerne $f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x)$ som x_o. Heraf ses, at hvert af leddene
$$\frac{f_1(x_n)-f_1(x_o)}{x_n-x_o},\ldots,\frac{f_n(x_n)-f_n(x_o)}{x_n-x_o}$$
er lig med hældningskoefficienten for det halvtag af den pågældende funktion, under hvilket x_o ligger. Disse led er altså lig med $D^+f_1(x_o)$, $D^+f_2(x_o),\ldots,D^+f_n(x_o)$. De følgende led i rækken (*)
$$\frac{f_{n+1}(x_n)-f_{n+1}(x_o)}{x_n-x_o},\ \frac{f_{n+2}(x_n)-f_{n+2}(x_o)}{x_n-x_o},\ldots$$
er alle 0, thi $|x_n-x_o|$ er $\frac{1}{4}$ af perioden for $f_n(x)$, altså lig med perioden for $f_{n+1}(x)$, lig med 4 gange perioden for $f_{n+2}(x)$ o.s.v.
Vi finder således
$$\frac{f(x_n)-f(x_o)}{x_n-x_o} = D^+f_1(x_o) + D^+f_2(x_o) +\ldots+ D^+f_n(x_o)$$
d.v.s. $[f(x_n)-f(x_o)]/(x_n-x_o)$ er det n'te afsnit i den uendelige række $D^+f_1(x_o)+D^+f_2(x_o)+\ldots$, hvis led alle er +1 eller -1. Følgen af differenskvotienter har derfor ingen grænseværdi for $n\to\infty$. ∎

§4. Peanos kurve.

(G.Peano 1858-1932; kurven er fra 1890.)

En kontinuert kurve $(x,y) = (f(t),g(t))$, $0 \leq t \leq 1$, som forløber i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1]\} = [0,1] \times [0,1]$ og som indeholder ethvert punkt af dette kvadrat.

Kvadratet deles i 9 kvadrater med side 1/3 og vi danner den kontinuerte kurve $(x,y) = (f_1(t),g_1(t))$, $0 \leq t \leq 1$, som består af de på fig. 1 viste diagonaler i de 9 kvadrater i den ved nummerordenen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (1,1)$ og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{9},\frac{2}{9},\ldots,\frac{8}{9}$.



fig, 1

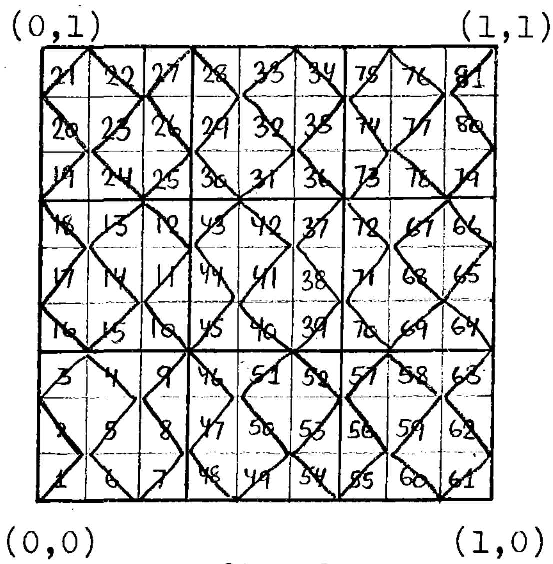


fig. 2

Hvert af de 9 kvadrater med side 1/3 deles nu i 9 kvadrater med side $1/3^2$, og vi danner den kontinuerte kurve $(x,y) = (f_2(t),g_2(t))$, $0 \leq t \leq 1$, som består af de på fig. 2 viste diagonaler i de 81 kvadrater i den ved nummerordenen bestemte rækkefølge, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0,\frac{1}{9},\frac{2}{9},\ldots,\frac{8}{9},1$ svarer de <u>samme</u> punkter som på den <u>forrige</u> kurve, og knækpunkterne svarer til $t = \frac{1}{81},\frac{2}{81},\ldots,\frac{80}{81}$.

Idet vi fortsætter således, fås i det n'te skridt en kurve $(x,y) = (f_n(t),g_n(t))$, $0 \leq t \leq 1$, sammensat af diagonaler i de 9^n kvadrater med side $1/3^n$ hvori det givne kvadrat er delt, gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0,1/9^{n-1},2/9^{n-1},\ldots,1$ svarer de samme punkter som på den forrige kurve, og knækpunkterne svarer til $t = 1/9^n, 2/9_n, \ldots, (9^n-1)/9^n$. Diagonalerne i de 9 kvadrater i den n'te deling, som udgør et af kvadraterne i den n-1'te deling, gennemløbes i den rækkefølge som er vist på fig. 3 a,b,c,d, beroende på, bvilke modstående hjørner, der skal forbindes.

3	4	9
2	5	8
1	6	7

a

9	4	3
8	5	2
7	6	1

b

1	6	7
2	5	8
3	4	9

c

7	6	1
8	5	2
9	4	3

d

fig. 3

Til et interval $(k-1)/9^n \leq t \leq k/9^n$, hvor k er hel og $1 \leq k \leq 9^n$, svarer på den n'te kurve en diagonal i et af de 9^n kvadrater med side $1/3^n$, og på enhver af de følgende kurver $(x,y) = (f_m(t),g_m(t))$, $m > n$, en polygon, der forløber i dette kvadrat. Heraf ses, at for $m > n$ er

$$|f_m(t)-f_n(t)| \leq 1/3^n \text{ og } |g_m(t)-g_n(t)| \leq 1/3^n \quad \text{for alle } t \in [0,1].$$

Til ethvert $\varepsilon > 0$ kan vi finde et $n_o = n_o(\varepsilon)$, således at $1/3^{n_o} \leq \varepsilon$. Vi ser da, at

$$|f_m(t)-f_n(t)| \leq \varepsilon \quad \text{og} \quad |g_m(t)-g_n(t)| \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } t \in [0,1]$$

når blot $m > n_o$ og $n > n_o$. Heraf følger, at funktionsfølgerne $f_1(t),f_2(t),\ldots$ og $g_1(t),g_2(t),\ldots$ er ligeligt konvergente i intervallet $0 \leq t \leq 1$. Vi betegner deres grænsefunktioner med $f(t)$ og $g(t)$. Disse er da kontinuerte funktioner og bestemmer altså en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t),g(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Dette er Peanos kurve.

Idet $0 \leq f_n(t) \leq 1$, $0 \leq g_n(t) \leq 1$ for alle $t \in [0,1]$ og alle n, har vi $0 \leq f(t) \leq 1$, $0 \leq g(t) \leq 1$ for alle $t \in [0,1]$. Peanos kurve forløber altså helt i kvadratet $[0,1] \times [0,1]$.

For $t = k/9^n$, hvor k er hel og $0 \leq k \leq 9^n$ gælder $(f_n(t),g_n(t)) = (f_{n+1}(t),g_{n+1}(t)) = \ldots$ og altså $(f(t),g(t)) = (f_n(t),g_n(t))$. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer altså på Peanos kurve punkterne $(0,0)$ og $(1,1)$ og Peanos kurve indeholder knækpunkterne for enhver af kurverne $(x,y) = (f_n(t),g_n(t))$, nemlig svarende til samme parameterværdier. Heraf følger, at Peanos kurve indeholder ethvert punkt (x_o,y_o) af kvadratet $[0,1] \times [0,1]$. Thi mængden af punkter på en kontinuert kurve med afsluttet parameterinterval er kompakt (altså afsluttet og begrænset). Nu kan vi for enhver omegn af (x_o,y_o) finde et nummer n, således at denne omegn indeholder et af de 9^n kvadrater med side $1/3^n$ fra den n'te deling. Endepunkterne for den ene af dettes diagonaler er knækpunkter for den n'te kurve (eller $(0,0)$ eller $(1,1)$) og er altså punkter af Peanos kurve tilhørende den givne omegn. Punktet (x_o,y_o) må da også tilhøre Peanos kurve. ∎

Kap. 2, Mål- og integralbegrebet.

1. Trappemængder og trappefunktioner.

Vi vil betragte reelle funktioner af en eller flere reelle variable, altså funktioner defineret på $\grave{R}$ eller $\grave{R}^k$. Funktioner som kun er defineret på en delmængde af $\grave{R}$ eller $\grave{R}^k$, vil blive behandlet, idet vi udvider dem til fundtioner defineret på R eller $\grave{R}^k$ med værdien 0 uden for den oprindelige definitionsmængde. Foreløbig betragtes kun endelige funktioner, senere vil også funktioner, der kan antage værdierne $+\infty$ og $-\infty$, blive tilladt. Vi benytter den gængse geometriske sprogbrug, idet vi taler om $\grave{R}=\grave{R}^1$ som tallinien, om $\grave{R}^2$ som talplanen, og almindeligt om $\grave{R}^k$ som det k-dimensionale talrum, om dets elementer $x = (x_1,\dots,x_k)$ som punkter, etc. Det understreges imidlertid, at teorien kun bygger på de reelle tal.

Intervaller og deres mål.

For $k = 1$, hvor talen er om x-aksen $\grave{R}$, vil vi benytte alle fire intervaltyper

afsluttet interval	$J = [a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$,	$a \leq b$
halvåbent interval	$J = [a,b[= \{x \mid a \leq x < b\}$,	$a < b$
- -	$J =]a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$,	$a < b$
åbent interval	$J =]a,b[= \{x \mid a < x < b\}$,	$a < b$

Bemærk, at et afsluttet interval kan bestå af et enkelt punkt. Tallene a og b kaldes intervallets endepunkter (de kan altså for et afsluttet interval falde sammen). Tallet $b - a$ kaldes intervallets <u>længde</u> eller <u>mål</u> og betegnes $m(J)$:

$$m(J) = b - a.$$

For $k > 1$ betegnes som et interval i $\grave{R}^k$ en mængde af formen

$$J = J_1\times\dots\times J_k = \{x \mid x_i \in J_i\}$$

hvor hvert J_i er et interval på x_i-aksen. Svarende til, at hvert J_i kan være af de fire ovennævnte typer, kan J være af 4^k typer. Intervallet er afsluttet, hvis og kun hvis hvert J_i er afsluttet, og åbent, hvis og kun hvis hvert J_i er åbent. Længderne af intervallerne J_i kaldes <u>kantlængderne</u> af J og deres produkt kaldes intervallets <u>mål</u> og betegnes $m(J)$. Hvis J_i har endepunkterne a_i og b_i er altså

$$m(J) = (b_1 - a_1)\dots(b_k - a_k)$$

NB. Det havde været mere systematisk at betegne målet af et interval i $\grave{R}^k$ med $m_k(J)$. Vi kunde da have skrevet $m_k(J) = m_1(J_1)\dots m_1(J_k)$. Da vi imidlertid i almindelighed kun betragter eet k, vil vi ikke komplicere betegnelserne på denne måde.

Bemærkning.

Lad der for $k = 1$ være givet et endeligt antal intervaller J på $\hat{R}$. Lad $x_o, x_1, \ldots, x_n$ være samtlige endepunktet for intervallerne J ordnet således, at $x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Vi betragter de $n+1$ intervaller $[x_p, x_p]$, $p = 0, \ldots, n$, og de n intervaller $]x_{p-1}, x_p[$, $p = 1, \ldots, n$. Disse $2n+1$ disjunkte intervaller betegner vi som intervallerne I. Da er hvert af de givne intervaller J foreningsmængdeeaf visse af disse intervaller I, og for hvert J er målet $m(J)$ summen af målene $m(I)$ af de I, hvoraf J er sammensat.

Lad der dernæst for $k > 1$ være givet et endeligt antal intervaller $J = \{x \mid x_i \in J_i\}$ i $\hat{R}^k$. For ethvert i bestemmer vi på den lige omtalte måde et endeligt antal disjunkte intervaller I_i på x_i-aksen, således at hvert J_i er foreningsmængde af visse I_i, og vi betragter dernæst alle intervaller $I = \{x \mid x_i \in I_i\}$, som fås ved at man for hvert i benytter et af disse I_i. (I tilfældet $k = 2$ er intervallerne I dels åbne intervaller, dels akseparallelle liniestykker uden endepunkter, og dels punkter.) Da er hvert af de givne intervaller J åbenbart foreningsmængde af visse af disse intervaller I, og for hvert J er målet $m(J)$ summen af målene $m(I)$ af de I, hvoraf J er sammensat (ifølge sætningen om, at et produkt, hvis faktorer er summer, er summen af alle produkter, hvis faktorer er een addend fra hver sum).

Trappemængder og deres mål.

En punktmængde F i $\hat{R}^k$, som er foreningsmængde af et endeligt antal disjunkte intervaller, vil vi kalde en trappemængde, og summen af intervallernes mål kaldes trappemængdens mål og betegnes $m(F)$.

Bortset fra de tilfælde, hvor F består af et endeligt antal punkter, kan en trappemængde F på mange måder fremstilles som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller. For at godtgøre, at der ved ovenstående virkelig er defineret et mål $m(F)$ for mængden F, må vi derfor vise, at hvis den samme mængde F på to forskellige måder er fremstillet som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller, er summen af disses mål i begge tilfælde det samme tal. Dette fremgår af den foranstående bemærkning, idet vi lader intervallerne J være samtlige intervaller, der forekommer i de to fremstillinger; da vil F også være foreningsmængde af visse af intervallerne I, og dekubgeb af F i disse intervaller I er en videredeling af hver af de givne delinger. Summen af målene af intervallerne i hver af disse delinger er altså lig med summen af alle $m(I)$ svarende til de I, hvoraf F består, og de to summer er altså ligestore.■

Den tomme mængde $\emptyset$ er foreningsmængde af ingen intervaller; den er altså en trappemængde, og $m(\emptyset) = 0$.

<u>Hvis F og G er trappemængder, da er også $F \cup G$, $F \cap G$, $F \setminus G$ trappemængder. Er specielt F og G disjunkte, gælder</u>

$$m(F \cup G) = m(F) + m(G).$$

Vi betragter for hver af mængderne F og G en fremstilling af mængden som foreningsmængde af endelig mange disjunkte intervaller. Idet vi lader alle de herved optrædende intervaller være intervallerne J i den foranstående bemærkning, får vi et endeligt antal disjunkte intervaller I, således at hver af mængderne F og G er foreningsmængde af visse af disse intervaller I. Heraf følger imidlertid, at også hver af mængderne $F \cup G$, $F \cap G$ og $F \setminus G$ er foreningsmængde afvisse I. Altså er de trappemængder. Den anførte relation følger umiddelbart af målets definition.■

<u>Mængdelegemer og additive mængdefunktioner.</u>

Et system $\mathcal{R}$ af delmængder af en given mængde E kaldes et <u>mængdelegeme</u>, såfremt det når

$A \in \mathcal{R}$ og $B \in \mathcal{R}$ gælder $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$ og $A \setminus B \in \mathcal{R}$

For et vilkårligt endeligt antal mængder $A_1, \ldots, A_n$ tilhørende mængdelegemet $\mathcal{R}$ gælder naturligvis, at $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{R}$ og $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{R}$. Ethvert mængdelegeme indeholder den tomme mængde $\emptyset$.

En funktion $\varphi = \varphi(A)$ defineret på et mængdesystem $\mathcal{R}$ kaldes en <u>mængdefunktion</u>. Foreløbig betragtes kun endelige reelle mængdefunktioner. Senere vil også værdierne $+\infty$ og $-\infty$ blive tilladt.

En endelig mængdefunktion φ defineret på et mængdelegeme $\mathcal{R}$ kaldes <u>additiv</u>, hvis

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

for vilkårlige disjunkte mængder $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$. Da gælder $\varphi(\emptyset) = 0$, og $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B)$, når $A \supseteq B$, og for vilkårlige mængder $A \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{R}$ gælder

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B).$$

Endvidere gælder for vilkårlige disjunkte mængder $A_1 \in \mathcal{R}, \ldots A_n \in \mathcal{R}$, at $\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n)$. Hvis φ er <u>ikke negativ</u> (d.v.s. $\varphi(A) \geq 0$ for alle $A \in \mathcal{R}$) gælder $\varphi(A) \geq (B)$, når $A \supseteq B$. I dette tilfælde gælder for vilkårlige (ikke nødvendegvis disjunkte) mængder $A_1 \in \mathcal{R}, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, at

$$\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n).$$

Thi sættes $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$, er $B_1, \ldots, B_n$ disjunkte mængder tilhørende $\mathcal{R}$, og $A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$; Endvidere er $B_1 \subseteq A_1, \ldots, B_n \subseteq A_n$. Altså er $\varphi(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(B_1) + \ldots + \varphi(B_n) \leq \varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n)$.

På grundlag af de her indførte begreber kan vi om trappemængder og deres mål udsige følgende:

Systemet af trappemængder F i $\grave{R}^k$ er er mængdelegeme og målet $m = m(F)$ er en additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.

Trappefunktioner og deres integraler.

En funktion $f = f(x)$ defineret på $\grave{R}^k$ kaldes en trappefunktion, hvis den er 0 uden for en trappemængde F, og F kan deles i et endeligt antal disjunkte trappemængder $F_1, \ldots, F_n$, i hvilke f er konstant. Betegnes værdierne af f i disse mængder med a_1, $\ldots, a_n$, kaldes summen $a_1 m(F_1) + \ldots + a_n m(F_n)$ trappefunktionens integral og betegnes I(f):

$$I(f) = a_1 m(F_1) + \ldots + a_n m(F_n)$$

Funktionen 0 er en trappefunktion, og $I(0) = 0$

For en given trappefunktion f kan vi på mange måder vælge disjunkte trappemængder, i hvilke funktionen er konstant, og uden for hvis foreningsmængde funktionen er 0. For at godtgøre, at der ved ovenstående virkelig er defineret et integral I(f) for funktionen f, må vi vise, at den omhandlede sum bliner den samme i alle tilfælde. Hertil bemærkes, at vi ifølge bemærkningen foran for to sådanne valg kan finde et endeligt antal disjunkte intervaller J - lad os benævne dem $J_1, \ldots, J_p$ - således at enhver af de optrædende trappemængder er foreningsmængde af visse af disse intervaller. Ihvert af disse intervaller er f konstant, og betegnes værdierne i intervallerne med $b_1, \ldots, b_p$ er den til hvert af de givne valg svarende sum lig med $b_1 m(J_1) + \ldots + b_p m(J_p)$.

For et vilkårligt endeligt antal trappefunktioner $f_1, \ldots, f_m$ kan vi finde et endeligt antal disjunkte intervaller, således at hver af trappefunktionerne er konstant i hvert af intervallerne og 0 uden for deres foreningsmængde. Heraf følger, at hvis $h(z_1, \ldots, z_m)$ er en vilkårlig funktion på $\grave{R}^m$ med $h(0, \ldots, 0) = 0$, da er også $h(f_1, \ldots, f_m)$ en trappefunktion.

Med henblik på det følgende fremhæves følgende umiddelbare konsekvenser af definitionerne og af den foregående bemærkning:

Hvis f er en trappefunktion, da er af, hvor a er et vilkårligt reelt tal, også en trappefunktion. Hvis f og g er trappefunktioner, da er også $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ trappefunktioner. For integralet af trappefunktioner gælder

$$\underline{I(af) = aI(f)}$$
$$\underline{I(f+g) = I(f) + I(g)}$$
$$\underline{I(f) \geq 0 \text{ hvis } f \geq 0.}$$

<u>Lineære funktionsrum. Funktionsgitre. Lineære funktionaler.</u>

En klasse K af reelle funktioner defineret på en vilkårlig mængde E kaldes et <u>lineært funktionsrum</u>, hvis

$$f \in K \text{ og } a \in \grave{R} \text{ medfører } af \in K$$
$$f \in K \text{ og } g \in K \text{ medfører } f+g \in K$$

Et lineært funktionsrum er altså et underrum i vektorrummet af alle reelle funktioner defineret på mængden E.

En klasse K af reelle funktioner der er defineret på en mængde E kaldes et <u>funktionsgitter</u>, hvis

$$f \in K \text{ og } g \in K \text{ medfører } f \vee g \in K \text{ og } f \wedge g \in K.$$

Et lineært funktionsrum K er et funktionsgitter, hvis og kun hvis $f \in K$ medfører $|f| \in K$. Nødvendigheden ses af, at $|f| = f \vee (\div f)$ og tilstrækkeligheden af at $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$, $f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$.

En funktion $\Phi = \Phi(f)$ defineret på en funktionsklasse K bestående af funktioner defineret på en mængde E kaldes en <u>funktional</u>. Foreløbig betragtes kun endelige reelle funktionaler. Senere vil også værdierne $+\infty$ og $-\infty$ blive tilladt.

En funktional Φ defineret på et lineære funktionsrum K kaldes en <u>lineær funktional</u> (eller en <u>linearform</u>), hvis

$$\Phi(af) = a\Phi(f)$$
$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g).$$

Funktionalen Φ kaldes <u>ikke negativ</u>, såfremt

$$\Phi(f) \geq 0 \text{ når } f \geq 0$$

Da gælder $\Phi(f) \geq \Phi(g)$ når $f \geq g$.

Lad Φ være en lineær funktional på et lineært funktionsrum K, som tillige er et funktionsgitter. For $f \in K$, $g \in K$ gælder da

$$\Phi(f) + \Phi(g) = \Phi(f \vee g) + \Phi(f \wedge g),$$

idet $f+g = f \vee g + f \wedge g$, så at der på begge sider står $\Phi(f+g)$. Forudsættes yderligere, at Φ er ikke negativ, gælder

$$|\Phi(f)| \leq \Phi(|f|),$$

thi $-|f| \leq f \leq |f|$, altså $-\Phi(|f|) = \Phi(-|f|) \leq \Phi(f) \leq \Phi(|f|)$.

På grundlag af disse definitioner kan de ovenfor fremhævede egenskaber ved trappefunktioner og deres integraler udtrykkes på følgende måde:

<u>Klassen af trappefunktioner f på $\grave{R}^k$ er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter, og integralet I = I(f) er en ikke</u>

negativ, lineær funktional på dette funktionsrum.

Mål- og integralteoriens problemstilling.

Systemet af trappemængder i $\grave{R}^k$ og den på dette definerede mængdefunktion m = m (F), og klassen af trapprfunktioner på $\grave{R}^k$ og den på denne definerede funktional I = I(f) udgør den elementære basis for mål- og integralteirien i $\grave{R}^k$. Dette mængdesystem og denne funktionsklasse er naturligvis utilstrækkelig for analysens behov. Teoriens videre udvikling går ud på at udvide målbegrebet til mere omfattende mængdesystemer og funktionsklasser.

Begyndelsen til den moderne udvikling blev givet ved Riemanns integralbegreb (B. Riemann 1826-66, definitionen er fra 1854), som fremkom ved en præcisering af den klassiske integraldefinition. Nøje sammenhørende hermed er det målbegreb, som vi vil betegne som Riemann målet, selv om det først er indført senere (af Peano og Jordan).

Efter en kort omtale af disse begreber skal vi betragte Lebesgues mål- og iyegralbegreb (H. Lebesgue 1875-1941; teorien er grundlagt 1902), som udmærker sig ved dels at omfatte langt flere mængder og funktioner og dels ved at der her gælder simple sætninger ikke blot vedrørende elementære operationer med mængder og funktioner men også vedrørende grænseovergang.

§2. Riemann integralet.

Øvre og nedre Riemann integral. Riemann integrable funktioner.

For en vilkårlig funktion $f = f(x)$ på $\bar{R}^k$ betegner vi som funktionens støtte afslutningen af punktmængden $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. At sige, at funktionen har begrænset støtte, er ensbetydende med at sige, at funktionen er 0 uden for et vist interval. I Riemanns integralteori betragtes udelukkende begrænsede funktioner med begrænset støtte; eller, hvad der kommer ud på det samme, funktioner f, for hvilke der findes trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, således at $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$. Klassen af disse funktioner er åbenbart et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter.

For en sådan funktion f gælder for vilkårlige trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, uligheden $I(\underline{f}) \leq I(\overline{f})$. Mængden af alle $I(\overline{f})$ er derfor nedad begrænset. Dens nedre grænse kaldes det øvre Riemann integral af f og betegnes $\overline{R}(f)$. Tilsvarende er mængden af alle $I(\underline{f})$ opad begrænset. Dens øvre grænse kaldes det nedre Riemann integral af f og betegnes $\underline{R}(f)$. Altså

$$\overline{R}(f) = \inf I(\overline{f}), \qquad \underline{R}(f) = \sup I(\underline{f})$$

Vi har
$$-\infty < \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) < +\infty$$

Er f specielt en trappefunktion, gælder åbenbart $\overline{R}(f) = I(f)$, $\underline{R}(f) = I(f)$. Vi opnår altså en udvidelse af integralbegrebet for trappefunktioner gennem følgende definition:

Når $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$, kaldes funktionen f Riemann integrabel og den fælles værdi kaldes funktionens integral og betegnes $I(f)$:

$$I(f) = \underline{R}(f) = \overline{R}(f).$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en funktion f er Riemann integrabel, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ og $I(\overline{f}-\underline{f}) < \varepsilon$.

Hvis f er 0 uden for trappemængden D, kan vi naturligvis ved bestemmelsen af $\overline{R}(f)$ og $\underline{R}(f)$ nøjes med at tage trappefunktioner $\underline{f}$ og $\overline{f}$ i betragtning, for hvilke $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, og som er 0 uden for F.

Enhver kontinuert funktion f med begrænser støtte er Riemann Integrabel.

Bevis: Lad J være et afsluttet interval, som indeholder mængden $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. Ifølge sætningen om ligeligkontinuitet findes til ethvert $\varepsilon > 0$ et $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, således at $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ for vilkårlige punkter $x = (x_1, \ldots, x_k) \in J$ og $y = (y_1, \ldots, y_k) \in J$ for hvilke $|x_1 - y_1| < \delta, \ldots, |x_k - y_k| < \delta$. Vi deler J i disjunkte intervaller $J_1, \ldots, J_n$, således at alle kantlængder i disse er $< \delta$, og vælger punkter $x_1 \in J_1, \ldots, x_n \in J_j$. Vi betragter nu de to trappefunktioner $\overline{f}$ og $\underline{f}$, der defineres ved

$$\left.\begin{array}{l}\overline{f}(x)\\ \underline{f}(x)\end{array}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in J \\ f(x_i) \pm \varepsilon & \text{for } x \in J_i,\ i = 1,\ldots,n \end{cases}$$

hvor plustegnet refererer til $\overline{f}$ og minustegnet til $\underline{f}$. Da er $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ og $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 2\varepsilon$ for $x \in J$ og $= 0$ for $x \notin J$. Altså er $I(\overline{f} - \underline{f}) = 2\varepsilon m(J)$, hvormed sætningen er bevist.∎

Dirichlets funktion:

For $k = 1$ betragter vi Dirichlets funktion f hørende til intervallet $[-1,1]$, d.v.s. den ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| > 1 \\ 0 & \text{for } |x| \leq 1,\ x \in \check{R} \setminus \check{Q} \\ 1 & \text{for } |x| \leq 1,\ x \in \check{Q} \end{cases}$$

definerede funktion. Funktionen er begrænset og har begrænset støtte. Den er diskontinuert i ethvert punkt $x \in [-1,1]$, men kontinuert i ethvert punkt $x \notin [-1,1]$. Ud fra definitionerne finder man let $\overline{R}(f) = 2$, $\underline{R}(f) = 0$; funktionen er altså ikke Riemann integrabel.

En diskontinuert Riemann integrabel funktion.

For $k = 1$ betragtes funktionen f defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{når } |x| \leq 1 \text{ og } x \text{ er en uforkortelig brøk med nævner } q > 0 \\ 0 & \text{for alle andre } x \end{cases}$$

Funktionen er begrænset og har begrænset støtte. Den er diskontinuert i ethvert rationalt punkt i $[-1,1]$, men kontinuert i alle andre punkter. For ethvert helt tal $q_0 \geq 1$ er $0 \leq f \leq \overline{f}_{q_0}$, hvor $\overline{f}_{q_0}$ er den ved

$$\overline{f}_{q_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{når } |x| \leq 1 \text{ og } x \text{ er en uforkortelig brøk med nævner } q \leq q_0 \\ \frac{1}{q_0} & \text{for alle andre } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases}$$

definerede trappefunktion. Nu er $I(\overline{f}_{q_0}) = \frac{2}{q_0}$. Vi finder altså $0 \leq \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) \leq \frac{2}{q_0}$, hvilket viser at $\underline{R}(f) = \overline{R}(f) = 0$. Funktionen f er således Riemann integrabel med integralet $I(f) = 0$.

Sætninger om Riemenn integralet.

Vi betragter udelukkende begrænsede funktioner med begrænser støtte.

Hvis $f \leq g$, er $\overline{R}(f) \leq \overline{R}(g)$ og $\underline{R}(f) \leq \underline{R}(g)$. Heraf følger: hvis f og g er Riemann integrable og $f \leq g$, er $I(f) \leq I(g)$. Specielt:

Hvis f er Riemann integrabel og $f \geq 0$, er $I(f) \geq 0$.

Hvis f er givet, og $\underline{f}$ og $\overline{f}$ er trappefunktioner, således at $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, gælder $-\overline{f} \leq -f \leq -\underline{f}$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\underline{R}(-f) = -\overline{R}(f), \qquad \overline{R}(-f) = -\underline{R}(f).$$

For $a > 0$ følger af $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, at $a\underline{f} \leq af \leq a\overline{f}$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\underline{R}(af) = a\underline{R}(f), \qquad \overline{R}(af) = a\overline{R}(f)$$

Af disse resultater aflæses:

Når f er Riemann integrabel, er af Riemann integrabel for ethvert reelt tal a, og $I(af) = aI(f)$.

Lad dernæst f og g være givne og lad $\underline{f},\overline{f},\underline{g},\overline{g}$ være trappefunktioner, således at $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ og $\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$. Da gælder

$$\underline{f}+\underline{g} \leq f+g \leq \overline{f}+\overline{g}$$

$$\underline{f} \vee \underline{g} \leq f \vee g \leq \overline{f} \vee \overline{g} \qquad \underline{f} \wedge \underline{g} \leq f \wedge g \leq \overline{f} \wedge \overline{g}$$

Heraf følger

$$I(\underline{f})+I(\underline{g}) = I(\underline{f}+\underline{g}) \leq \underline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f+g) \leq I(\overline{f}+\overline{g}) = I(\overline{f})+I(\overline{g})$$

og

$$I(\underline{f})+I(\underline{g}) = I(\underline{f} \vee \underline{g})+I(\underline{f} \wedge \underline{g}) \leq \underline{R}(f \vee g)+\underline{R}(f \wedge g)$$
$$\leq \overline{R}(f \vee g)+\overline{R}(f \wedge g) \leq I(\overline{f} \vee \overline{g})+I(\overline{f} \wedge \overline{g}) = I(\overline{f})+I(\overline{g})$$

Følgelig er

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leq \underline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f+g) \leq \overline{R}(f)+\overline{R}(g)$$

$$\underline{R}(f)+\underline{R}(g) \leq \underline{R}(f \vee g)+\underline{R}(f \wedge g) \leq \overline{R}(f \vee g)+\overline{R}(f \wedge g) \leq \overline{R}(f)+\overline{R}(g)$$

Heraf aflæses:

Når f og g er Riemann integrable, da er også $f+g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ Riemann integrable, og $I(f+g) = I(f)+I(g) = I(f \vee g)+I(f \wedge g)$.

Om Riemann integralet er hermed vist:

Klassen af Riemann integrable funktioner f på R^k er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter, og integralet $I = I(f)$ er en ikke negativ lineær funktional på dette funktionsrum.

En konsekvens heraf er:

Med f er også $|f|$ Riemann integrabel, og $|I(f)| \leq I(|f|)$.

Ligelig konvergens.

Hvis en følge af Riemann integrable funktioner $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ alle er 0 uden for en trappemængde F, og hvis følgen er ligelig konvergent, da er grænsefunktionen $f = \lim f_n$ Riemann integrabel, og talfølgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ er konvergent med grænseværdien $I(f)$.

Bevis: Grænsefunktionen f er åbenbart 0 uden for F. For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $N = N(\varepsilon)$, således at $|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$ for $n \geq N$ og alle x. Følgelig er $f_n - \varepsilon 1_F \leq f \leq f_n + \varepsilon 1_F$ for $n \geq N$. Altså er f begrænset og $I(f_n)-\varepsilon m(F) \leq \underline{R}(f) \leq \overline{R}(f) \leq I(f_n)+\varepsilon m(F)$ for $n \geq N$.

Heraf ses, at $\overline{R}(f)-\underline{R}(f) \leq 2\varepsilon m(F)$ for ethvert $\varepsilon > 0$. Altså er $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$, d.v.s. f er Riemann integrabel.
Ulighederne antager nu formen $I(f_n)-\varepsilon m(F) \leq I(f) \leq I(f_n)+\varepsilon m(F)$ for $n \geq N$. Altså konvergerer følgen $I(f_1), I(f_2), \ldots$ mod $I(f)$, hvilket skulle vises.∎

Mangler ved Riemann integralet knytter sig (bl.a.) til konvergens, der ikke er ligelig. Det er let at angive eksempler på konvergente følger $f_1, f_2, \ldots$ af Riemann integrable funktioner, hvis grænsefunktion f ikke er Riemann integrabel, simpelthen fordi den ikke er begrænset eller ikke har begrænset støtte. Dette er naturligvis ikke at betragte som en mangel ved Riemann integtalet. Men selv om alle funktionerne f_n er 0 uden for en trappemængde F og funktionerne er ensartet begrænsede, d.v.s. der findes et tal M, så at $|f_n(x)| \leq M$ for alle n og alle x, behøver grænsefunktionen f (der i dette tilfælde åbenbart er begrænset med begrænset støtte) ikke at være Riemann integrabel.

Lad f.eks. f være Dirichlets funktion hørende til intervallet $[-1,1]$. Lad $x_1, x_2, \ldots$ være samtlige rationale tal i $[-1,1]$ ordnet som en følge, og lad f_n være den funktion der er 1 i punkterne $x_1,\ldots,x_n$ og 0 for alle andre x. Da er f_n en trappefunktion, altså Riemann integrabel; alle f_n er 0 uden for $[-1,1]$, og $|f_n(x)| \leq 1$ for alle n og alle x. Og følgen $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer (endda monotont) mod f, der ikke er Riemann integrabel.

Approksimation med kontinuerte funktioner med begrænset støtte.

For enhver trappefunktion f og ethvert $\varepsilon > 0$ findes en kontinuert funktion $\overline{g} \geq f$ med begrænset støtte for hvilken $I(\overline{g}) < I(f)+\varepsilon$, og en kontinuert funktion $\underline{g} \leq f$ med begrænset støtte, for hvilken $I(\underline{g}) > I(f)-\varepsilon$.

Bevis: Vi antager først, at $f = 1_J$, hvor J er et interval $J = \{x | x_i \in J_i\}$.

Lad J_i have endepunkterne a_i og b_i. For hvert i vælger vi tal $a_i' < a_i$ og $b_i' > b_i$ og betragter på x_i-aksen den funktion $\overline{h}_i$, der er = 1 i $[a_i,b_i]$, = 0 for $x_i < a_i'$ og $x_i > b_i'$ og er lineær i $[a_i',a_i]$ og $[b_i,b_i']$. Defineres nu $\overline{g}$ ved $\overline{g}(x) = \overline{h}_1(x_1)\ldots\overline{h}_k(x_k)$, er $\overline{g}$ kontinuert med begrænset støtte, og $f = 1_J \leq \overline{g} \leq 1_{J'}$, hvor J' er intervallet $\{x | x_i \in [a_i',b_i']\}$. For passende valg af tallene a_i', b_i' opnås derfor $I(\overline{g}) < I(f)+\varepsilon$.

Hvis $a_i = b_i$ for mindst et i, vælger vi $\underline{g} = 0$. Ellers vælger vi for hvert i tal a_i'' og b_i'', således at $a_i < a_i'' < b_i'' < b_i$ og betragter på x_i-aksen den funktion $\underline{h}_i$, der er $= 1$ i $[a_i'',b_i'']$, $= 0$ for $x_i \leq a_i$ og $x_i \geq b_i$ og er lineær i $[a_i,a_i'']$ og $[b_i'',b_i]$. Defineres nu $\underline{g}$ ved $\underline{g}(x) = \underline{h}_1(x_1)\dots\underline{h}_k(x_k)$, er $\underline{g}$ kontinuert med begrænset støtte, og $1_{J''} \leq \underline{g} \leq f = 1_J$, hvor J" er intervallet $\{x \mid x_i \in [a_i'',b_i'']\}$. For passende valg af tallene a_i'',b_i'' opnås derfor $I(\underline{g}) > I(f)-\varepsilon$.

Da en vilkårlig trappefunktion kan skrives som en endelig linearkombination af funktioner af den her betragtede art, følger sætningen nu umiddelbart.∎

Af denne sætning fælger nu:

For en vilkårlig begrænset funktion f med begrænset støtte gælder

$$\overline{R}(f) = \inf I(\overline{g}), \qquad \underline{R}(f) = \sup I(\underline{g}),$$

hvor nedre og øvre grænse tages over alle kontinuerte funktioner $\overline{g}$ og $\underline{g}$ med begrænset støtte, for hvilke $\underline{g} \leq f \leq \overline{g}$.

En funktion f er derfor Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes kontinuerte funktioner $\underline{g}$ og $\overline{g}$ med begrænset støtte, for hvilke $\underline{g} \leq f \leq \overline{g}$ og $I(\overline{g}-\underline{g}) < \varepsilon$.

Riemann integrabilitet i en punktmængde.

Vi har hidtil betraftet funktioner defineret på hele $\grave{R}^k$. En funktion f, der ikke nødvendigvis er defineret på hele $\grave{R}^k$, kaldes Riemann integrabel i (eller over) en punktmængde A tilhørende funktionens definitionsmængde, såfremt den i hele $\grave{R}^k$ definerede funktion f_A, der bestemmes ved

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A \end{cases}$$

er Riemann integrabel. I så fald kaldes $I(f_A)$ integralet af f over A og betegnes også (f.eks.)

$$\int_A f(x)m(dR^k) \quad \text{eller} \quad \int_A f(x)dx \quad \text{eller} \quad \int_A f(x_1,\dots,x_k)d(x_1,\dots,x_k).$$

§3. Riemann målet.

Ydre og indre Riemann mål. Riemann målelige punktmængder.

Vi betragter begrænsede punktmængder i R^k. De udgør åbenbart et mængdelegeme. Lad A være en begrænset punktmængde. Da findes trappemængder $\underline{F}$ og $\overline{F}$, således at $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$ (f.eks. $\emptyset$ og J, hvor J er et interval, der indeholder A). For vilkårlige sådanne mængder gælder $m(\underline{F}) \leq m(\overline{F})$. Nedre grænse for mængden af alle $m(\overline{F})$ kaldes det ydre Riemann mål af A og betegnes $r_y(A)$. Øvre grænse for mængden af alle $m(\underline{F})$ kaldes det indre Riemann mål af A og betegnes $r_i(A)$.

$$r_y(A) = \inf m(\overline{F}), \qquad r_i(A) = \sup m(\underline{F}).$$

Vi har
$$0 \leq r_i(A) \leq r_y(A) < +\infty.$$

Er A specielt en trappemængde, gælder åbenbart $r_y(A) = m(A)$, $r_i(A) = m(A)$. Vi opnår altså en udvidelse af målbegrebet for trappemængder gennem følgende definition:

Når $r_i(A) = r_y(A)$, kaldes mængden A Riemann målelig, og den fælles værdi kaldes mængdens mål og betegnes m(A):

$$m(A) = r_i(A) = r_y(A).$$

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at en mængde A er Riemann målelig, er, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes trappemængder $\underline{F}$ og $\overline{F}$, for hvilke $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$ og $m(\overline{F} \setminus \underline{F}) < \varepsilon$.

Forbindelse med Riemann integralet.

For enhver begrænset punktmængde A gælder

$$r_i(A) = \underline{R}(1_A), \quad r_y(A) = \overline{R}(1_A).$$

Mængden A er altså Riemann målelig, hvis og kun hvis funktionen 1_A er Riemann integrabel, og iså fald er

$$m(A) = I(1_A).$$

Bevis: Vi beviser først, at $r_y(A) = \overline{R}(1_A)$. 1) For enhver trappemængde $\overline{F} \supseteq A$ er $1_{\overline{F}}$ en trappefunktion, og $1_{\overline{F}} \geq 1_A$. Altså er $m(\overline{F}) = I(1_{\overline{F}}) \geq \overline{R}(1_A)$, hvoraf $r_y(A) \geq \overline{R}(1_A)$. 2) For enhver trappefunktion $\overline{f} \geq 1_A$ er $\overline{F} = \{x | \overline{f}(x) \geq 1\}$ en trappemængde, og $\overline{F} \supseteq A$. Endvidere er $\overline{f} \geq 1_{\overline{F}}$. Altså er $I(\overline{f}) \geq I(1_{\overline{F}}) = m(\overline{F}) \geq r_y(A)$. Følgelig er $\overline{R}(1_A) \geq r_y(A)$.

Ve beviser dernæst, at $r_i(A) = \underline{R}(1_A)$. 1) For enhver trappemængde $\underline{F} \subseteq A$ er $1_{\underline{F}}$ en trappefunktion, og $1_{\underline{F}} \leq 1_A$. Altså er $m(\underline{F}) = I(1_{\underline{F}}) \leq \underline{R}(1_A)$, hvoraf $r_i(A) \leq \underline{R}(1_A)$. 2) For enhver trappefunktion $\underline{f} \leq 1_A$ er $\underline{F} = \{x | \underline{f}(x) > 0\}$ en trappemængde, og $\underline{F} \subseteq A$. Endvidere er $\underline{f} \leq 1_{\underline{F}}$. Altså er $I(\underline{f}) \leq I(1_{\underline{F}}) = m(\underline{F}) \leq r_i(A)$. Følgelig er $\underline{R}(1_A) \leq r_i(A)$, hvilket skulle bevises. ∎

I kraft af denne sætning henføres teorien for Riemann målet til teorien for Riemann integralet.

Elementære sætninger om Riemann målet.

For vilkårlige mængder A og B gælder

$$1_{A\cup B} = 1_A \vee 1_B, \quad 1_{A\cap B} = 1_A \wedge 1_B \qquad 1_{A\setminus B} = (1_A - 1_B)\vee 0.$$

Er A og B disjunkte, gælder

$$1_{A\cup B} = 1_A + 1_B.$$

Af egenskaberne ved Riemann integralet følger derfor straks:

Systemet af Riemann målelige punktmængder A i R^k er et mængdelegeme, og Riemann målet m = m(A) er en additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.

For $k = 1$ kan som eksempel på en begrænset, ikke Riemann målelig punktmængde nævnes mængden af rationale tal i intervallet $[-1,1]$.

Vi vil ikke på dette sted gå videre i teorien for Riemann integralet og Riemann målet, idet denne, som vi senere skal se, på sikpel måde indordnes under teorien for Lebesgue integralet og Lebesgue målet, som vi nu går over til.

§4. Fundamentale hjælpesætninger.

Hvis en dalende følge $F_1 \supseteqq F_2 \supseteqq \ldots$ af trappemængder i $\bar{R}^k$ har fællesmængden $\bigcap F_n = \emptyset$, gælder $\lim m(F_n) = 0$.

Bevis: Idet $m(F_1) \geq m(F_2) \geq \ldots \geq 0$, er det klart, at $\lim m(F_n)$ eksisterer og er ≥ 0. Vi fører beviset indirekte, og antager altså, at vi har en dalende følge $F_1 \supseteqq F_2 \supseteqq \ldots$ af trappemængder, for hvilken $\lim m(F_n) = k > 0$, og skal nu vise, at $\bigcap F_n \neq \emptyset$ (d.v.s. at mængderne har mindst et fælles punkt).

Nu er $m(F_n) \geq k$ for ethvert n. Vi betragter for ethvert n en fremstilling af F_n som foreningsmængde af andelig mange disjunkte intervaller og erstatter (hvad der åbenbart er muligt) hvert af disse med et i intervallet indeholdt <u>afsluttet</u> interval valgt således, at når G_n betegner foreningsmængden af disse afsluttede intervaller, er $m(F_n \setminus G_n) \leq k \cdot 2^{-n}$. Den herved fremkomne følge af trappemængder $G_1, G_2, \ldots$ er ikke nødvendigvis dalende. For atter at komme til en dalende følge danner vi trappemængderne

$$H_1 = G_1,\ H_2 = G_1 \cap G_2, \ldots,\ H_n = G_1 \cap \ldots \cap G_n, \ldots$$

Da er $H_1 \supseteqq H_2 \supseteqq \ldots$, og for ethvert n gælder $H_n \subseteqq G_n \subseteqq F_n$ og $F_n \setminus H_n \subseteqq (F_1 \setminus G_1) \cup \ldots \cup (F_n \setminus G_n)$ hvoraf følger, at $m(F_n \setminus H_n) \leq m(F_1 \setminus G_1) + \ldots + m(F_n \setminus G_n) \leq k\, 2^{-1} + \ldots + k\, 2^{-n} < k$. Da $m(F_n) \geq k$, ses heraf at $H_n \neq \emptyset$, men så er også $\bigcap F_n \neq \emptyset$ på grund af, at $\bigcap H_n \subseteqq \bigcap G_n \subseteqq \bigcap F_n$. Hermed er den første hjælpesøtning bevist.■

Hvis en dalende følge $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ af trappefunktioner på $\bar{R}^k$ har grænsefunktionen 0, gælder $\lim I(f_n) = 0$.

Bevis: Vi har åbenbart $f_n \geq 0$ for alle n. Da $I(f_1) \geq I(f_2) \geq \ldots \geq 0$, eksisterer $\lim I(f_n)$ og er ≥ 0

Lad F være en trappemængde, uden for hvilken f_1 er 0, og lad $M = \max\{f_1(x) \mid x \in \bar{R}^k\}$. Vi vælger et tal $\varepsilon > 0$ og betragter mængderne $F_n = \{x \mid f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Disse er åbenbart trappemængder, og vi har $F \supseteqq F_1 \supseteqq F_2 \supseteqq \ldots$ og $\bigcap F_n = \emptyset$. Ifølge den foregående søtning gælder altså $\lim m(F_n) = 0$. Nu er for ethvert n

$$0 \leq f_n \leq \varepsilon 1_{F \setminus F_n} + M \cdot 1_{F_n}$$

Følgelig er

$$0 \leq I(f_n) \leq \varepsilon m(F \setminus F_n) + M m(F_n) = \varepsilon m(F) + (M - \varepsilon) m(F_n),$$

og altså $0 \leq \lim I(f_n) \leq \varepsilon\, m(F)$. Da ε var et vilkårligt tal > 0, ses heraf at $\lim I(f_n) = 0$, hvilket skulle bevises.■

§5. Lebesgue integralet.

Medens vi ved behandlingen af Riemann integralet i $\grave{R}^k$ på forhånd måtte indskrænke os til betragtning af begrænsede funktioner med begrænset støtte, idet det øvre og nedre Riemann integral kun kunne defineres for disse funktioner, vil vi ved behandlingen af Lebesgue integralet i $\grave{R}^k$ tage vilkårlige reelle funktioner f på $\grave{R}^k$ i betragtning, og vi vil endda tillade funktionerne at antage værdierne $+\infty$ og $-\infty$. De funktioner f vi betragter, er altså afbildninger af $\grave{R}^k$ ind i $\grave{R}^*$. En funktion, som ikke antager værdierne $+\infty$ eller $-\infty$ kaldes endelig. Fordelen ved at operere med $\grave{R}^*$ er, at en vilkårlig delmængde af $\grave{R}^*$ har en øvre grænse eller supremum og en nedre grænse eller infimum, medens disse begreber for delmængder af $\grave{R}$ kun er defineret for henholdsvis opad begrænsede og nedad begrænsede mængder. Det understreges, at begrebet trappefunktion ikke ændres (for trappefunktioner tillades vedblivende kun endelige værdier).

Definitioner.

Lad $f = f(x)$ være en vilkårlig reel funktion på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier.

For en følge $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots$ af trappefunktioner vil vi skrive $\overline{f}_n\uparrow \geq f$ eller $f \leq \overline{f}_n\uparrow$, såfremt følgen er stigende, d.v.s. $\overline{f}_1 \leq \overline{f}_2 \leq \ldots$, og $\lim \overline{f}_n \geq f$. Sådanne følger findes; f.eks. kan vi sætte $\overline{f}_n = n \cdot 1_{W_n}$ (Vi benytter den faste betegnelse W_n for intervallet $\{x \mid |x_i| \leq n\}$). Idet $I(\overline{f}_1) \leq I(\overline{f}_2) \leq \ldots$, eksisterer grænseværdien $\lim I(\overline{f}_n)$; evt. er den $+\infty$. Nedre grænse for for mængden af disse grænseværdier $\lim I(\overline{f}_n)$ for alle følger af trappefunktioner $\overline{f}_n\uparrow \geq f$ kaldes det <u>øvre Lebesgue integral</u> af f og betegnes $\overline{I}(f)$; altså:

$$\overline{I}(f) = \inf \lim I(\overline{f}_n).$$

$\overline{I}(f)$ kan eventuelt være $+\infty$ eller $-\infty$.

For en følge $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots$ af trappefunktioner vil vi skrive $\underline{f}_n\downarrow \leq f$ eller $f \geq \underline{f}_n\downarrow$, såfremt følgen er dalende, d.v.s. $\underline{f}_1 \geq \underline{f}_2 \geq \ldots$, og $\lim \underline{f}_n \leq f$. Sådanne følger findes; f.eks. kan vi sætte $\underline{f}_n = -n\, 1_{W_n}$. Idet $I(\underline{f}_1) \geq I(\underline{f}_2) \geq \ldots$, eksisterer grænseværdien $\lim I(\underline{f}_n)$; evt. er den $-\infty$. Øvre grænse for mængdenaf disse grænseværdier $\lim I(\underline{f}_n)$ for alle følger af trappefunktioner $\underline{f}_n\downarrow \leq f$ kaldes det <u>nedre Lebesgue integral</u> af f og betegnes $\underline{I}(f)$ altså:

$$\underline{I}(f) = \sup \lim I(\underline{f}_n)$$

$\underline{I}(f)$ kan evt. være $+\infty$ eller $-\infty$.

Vi vil bevise, at man for enhver funktion f har $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Det gælder om at vise, at vi for to vilkårlige følger af trappefunktioner $\overline{f}_n \uparrow \geq f$ og $\underline{f}_n \downarrow \leq f$ har $\lim I(\underline{f}_n) \leq \lim I(\overline{f}_n)$. Hertil betragtes følgen af trappefunktioner $g_n = (\underline{f}_n - \overline{f}_n) \vee 0$. Idet $g_1 \geq g_2 \geq \dots$ og $\lim g_n = 0$, fås af hjælpesætningen ovenfor, at $\lim I(g_n) = 0$.

Da vi nu for alle n har $\underline{f}_n - \overline{f}_n \leq g_n$, d.v.s. $\underline{f}_n \leq \overline{f}_n + g_n$ og dermed $I(\underline{f}_n) \leq I(\overline{f}_n) + I(g_n)$, har vi som ønsket $\lim I(\underline{f}_n) \leq \lim I(\overline{f}_n)$.

For enhver funktion f gælder altså:

$$-\infty \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq +\infty$$

Hvis f er en begrænset funktion med begrænset støtte, gælder

$$\underline{R}(f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{R}(f).$$

Thi for vilkårlige trappefunktioner $\overline{f}$ og $\underline{f}$, for hvilke $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ kan vi benytte følgen $\overline{f}, \overline{f}, \overline{f}, \dots$ som følge $\overline{f}_n$ og $\underline{f}, \underline{f}, \dots$ som følge $\underline{f}_n$, hvoraf ses, at $I(\overline{f})$ kan forekomme som $\lim I(\overline{f}_n)$ og $I(\underline{f})$ som $\lim I(\underline{f}_n)$.

Heraf ses, at hvis f er Riemann integrabel, er $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = I(f)$

Vi opnår altså en udvidelse af Riemanns integralbegreb gennem følgende definition:

<u>Når</u> $-\infty < \underline{I}(f) = \overline{I}(f) < +\infty$, <u>kaldes funktionen</u> f <u>Lebesgue integrabel, og den fælles værdi af</u> $\underline{I}(f)$ <u>og</u> $\overline{I}(f)$ <u>kaldes funktionens integral og betegnes</u> $I(f)$.

Vi vil senere tilskrive visse (men ikke alle) funktioner f, for hvilke $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$, integralet $+\infty$, og analogt for $-\infty$. Sådanne funktioner vil dog ikke blive kaldt integrable i egentlig forstand (vi vil sige, at de er integrable i udvidet forstand).

<u>Enhver funktion</u> f, <u>som har værdien</u> 0 <u>uden for en endelig eller numerabel punktmængde</u> A, <u>er Lebesgue integrabel med integralet</u> $I(f) = 0$.

Bevis: Vi antager først at A er endelig. Hvis f kun antager endelige værdier, er f en trappefunktion, og af definitionen af integralet for en sådan ses, at $I(f) = 0$. Hvis f ikke kun antager endelige værdier, sætter vi $\overline{f}_n = n \cdot 1_A$ og $\underline{f}_n = -n \cdot 1_A$. Da er $\overline{f}_n$ og $\underline{f}_n$ trappefunktioner og $\overline{f}_n \uparrow \geq f$ og $\underline{f}_n \downarrow \leq f$. Følgelig er $\overline{I}(f) \leq \lim I(\overline{f}_n) = 0$ og $\underline{I}(f) \geq \lim I(\underline{f}_n) = 0$. Heraf følger påstanden.

Vi antager dernæst at A er numererbar. Lad A bestå af punkterne $x_1, x_2, \dots$ og lad A_n være trappemængden bestående af de n punkter $x_1, \dots, x_n$. Sættes nu $\overline{f}_n = n \cdot 1_{A_n}$ og $\underline{f}_n = -n \cdot 1_{A_n}$, er $\overline{f}_n$ og $\underline{f}_n$ trappefunktioner, og $\overline{f}_n \uparrow \geq f$ og $\underline{f}_n \downarrow \leq f$. Følgelig er

$\overline{I}(f) \leq \lim I(\overline{f}_n) = 0$ og $\underline{I}(f) \geq \lim I(\underline{f}_n) = 0$, hvoraf påstanden følger.∎

For eksempel ses, at Dirichlets funktion hørende til intervallet $[-1,1]$ (se side 2,2,2) er Lebesgue integrabel med integralet 0. Der findes altså begrænsede funktioner med begrænset støtte, som er Lebesgue integrable men ikke Riemann integrable.

Definition af de elementære regneoperationer i $\grave{R}^*$.

Vi definerer a+b som $+\infty$, hvis en af addenderne er $+\infty$ og den anden endelig, eller hvis begge addender er $+\infty$, og som $-\infty$, hvis en af addenderne er $-\infty$ og den anden endelig, eller hvis begge addender er $-\infty$. Endelig defineres $+\infty+(-\infty)$ og $-\infty+(+\infty)$ som 0.

Vi definerer $a \cdot b$ som $+\infty$, hvis en eller beggefaktorer er uendelig og enten begge faktorer er > 0 eller begge faktorer er < 0. Vi definerer $a \cdot b$ som $-\infty$, hvis en eller begge faktorer er uendelig og en af dem er < 0 og en af dem er > 0. Endelig defineres $(+\infty)\cdot 0$, $0\cdot(+\infty)$, $(-\infty)\cdot 0$ og $0\cdot(-\infty)$ som 0.

$a-b$ defineres som $a+(-b)$, idet vi sætter $-(+\infty) = -\infty$ og $-(-\infty) = +\infty$
a/b defineres som $a\cdot\frac{1}{b}$, idet vi sætter $1/+\infty = 0$, $1/-\infty = 0$.

En sum $a_1+\ldots+a_n$ defineres ved sukcessiv udførelse af additionerne (idet man først danner a_1+a_2, så $(a_1+a_2)+a_3$, o.s.v.). En uendelig række $a_1+a_2+\ldots$ tilskrives summen $\lim(a_1+\ldots+a_n)$, såfremt dette udtryk har mening.

Elementære sætninger om Lebesgue integralet.

Vi betragter vilkårlige reelle funktioner på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier.

Hvis f er en sådan funktion og $\underline{f}_n\downarrow \leq f \leq \overline{f}_n\uparrow$, gælder $-\overline{f}_n\downarrow \leq -f \leq -\underline{f}_n\uparrow$, og omvendt. Heraf ses, at

$$\overline{I}(-f) = -\underline{I}(f) \text{ og } \underline{I}(-f) = -\overline{I}(f).$$

For et endeligt $a > 0$ følger af $\underline{f}_n\downarrow \leq f \leq \overline{f}_n\uparrow$, at $a\underline{f}_n\downarrow \leq af \leq a\overline{f}_n\uparrow$. og omvendt. Heraf ses, at

$$\underline{I}(af) = a\underline{I}(f) \text{ og } \overline{I}(af) = a\overline{I}(f)$$

Af disse resultater aflæses:

Når f er Lebesgue integrabel gælder det samme om af for ethvert $a \in \grave{R}$, og $I(af) = aI(f)$.

Hvis $f \leq g$, er $\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$ og $\underline{I}(f) \leq \underline{I}(g)$. Heraf: Hvis f og g er Lebesgue integrable og $f \leq g$, er $I(f) \leq I(g)$. Specielt:
Hvis f er Lebesgue integrabel og $f \geq 0$, er $I(f) \geq 0$.

Lad f og g være givne funktioner med endelige øvre og nedre

Lebesgue integraler. I så fald findes følger af trappefunktioner $\overline{f}_n\uparrow \geq f$, $\underline{f}_n\downarrow \leq f$, $\overline{g}_n\uparrow \geq g$, $\underline{g}_n\downarrow \leq g$, for hvilke grænseværdierne af $I(\overline{f}_n)$, $I(\underline{f}_n)$, $I(\overline{g}_n)$, $I(\underline{g}_n)$ er endelige, og det er ved bestemmelsen af $\overline{I}(f)$, $\underline{I}(f)$, $\overline{I}(g)$, $\underline{I}(g)$ tilstrækkeligt at tage sådanne følger i betragtning.

For vilkårlige følger af den anførte art gælder nu

$$(\underline{f}_n+\underline{g}_n)\downarrow \leq f+g \leq (\overline{f}_n+\overline{g}_n)\uparrow$$

$$(\underline{f}_n\vee \underline{g}_n)\downarrow \leq f\vee g \leq (\overline{f}_n\vee \overline{g}_n)\uparrow,\quad (\underline{f}_n\wedge \underline{g}_n)\downarrow \leq f\wedge g \leq (\overline{f}_n\wedge \overline{g}_n)\uparrow.$$

Heraf fål følgende relationer, i hvilke som følge af de gjorte antagelser alle optrædende tal er endelige:

$$\lim I(\underline{f}_n)+\lim I(\underline{g}_n) = \lim I(\underline{f}_n+\underline{g}_n) \leq \underline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f+g)$$
$$\leq \lim I(\overline{f}_n+\overline{g}_n) = \lim I(\overline{f}_n)+\lim I(\overline{g}_n)$$

og

$$\lim I(\underline{f}_n) +\lim I(\underline{g}_n) = \lim I(\underline{f}_n\vee \underline{g}_n)+\lim I(\underline{f}_n\wedge \underline{g}_n)$$
$$\leq \underline{I}(f\vee g)+\underline{I}(f\wedge g) \leq \overline{I}(f\vee g)+\overline{I}(f\wedge g)$$
$$\leq \lim I(\overline{f}_n\vee \overline{g}_n)+\lim I(\overline{f}_n\wedge \overline{g}_n)$$
$$= \lim I(\overline{f}_n)+\lim I(\overline{g}_n)$$

Følgelig er

$$\underline{I}(f)+\underline{I}(g) \leq \underline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f)+\overline{I}(g),\ \text{samt}$$
$$\underline{I}(f)+\underline{I}(g) \leq \underline{I}(f\vee g)+\underline{I}(f\wedge g) \leq \overline{I}(f\vee g)+\overline{I}(f\wedge g) \leq \overline{I}(f)+\overline{I}(g).$$

Heraf aflæses:

Når f og g er Lebesgue integrable, gælder det samme om $f+g$, $f\vee g$ og $f\wedge g$, og $I(f+g) = I(f)+I(g) = I(f\vee g)+I(f\wedge g)$.

Om de endelige Lebesgue integrable funktioner er hermed specielt vist:

Klassen af endelige Lebesgue integrable funktioner f på R^k er et lineært funktionsrum og et funktionsgitter, og integralet $I = I(f)$ er en ikke negativ lineær funktional på dette vektorrum.

Klassen af samtlige Lebesgue integrable funktioner (med endelige eller uendelige værdier) er intet lineært funktionsrum. Dette ses f.eks. ved betraftning af funktionerne $f = g = (+\infty)\cdot 1_A$, $h = (-\infty)\cdot 1_A$, hvor A er en mængde bestående af eet punkt. Disse er Lebesgue integrable, men $(f+g)+h$ og $f+(g+h)$ er ikke samme funktion . Klassen er et funktionsgitter. Vi kan for denne klasse ikke sammenfatte de udledte egenskaber ved funktionalen $I =I(f)$ ved brug af gloserne "lineær og ikke negativ", idet vi kun vil tale om lineære funktionaler i forbindelse med lineære funktionsrum. For klassen af samtlige Lebesgue integrable funktioner (med endelige eller uendelige værdier) må vi derfor henholde os til de nøjagtige formuleringer af resultaterne ovenfor og kan ikke henvise til almindelige resultater om lineære funktionaler.

Specielt bemærkes:

<u>Når f er Lebesgue integrabel gælder det samme om $|f|$, og $|I(f)| \leq I(|f|)$.</u>

Thi $|f| = f \vee (-f)$ og $-|f| \leq f \leq |f|$.

Endvidere ses en ofte nyttig sætning at gælde:

<u>En funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $f \vee 0$ og $f \wedge 0$ begge er Lebesgue integrable, og i så fald er $I(f) = I(f \vee 0) + I(f \wedge 0)$.</u>

§6. Grænseovergang med Lebesgue integralet.

Vi betragter vilkårlige reelle funktioner på R^k med endelige eller uendelige værdier.

Monoton grænseovergang.

Nøglesætning: For en stigende funktionsfølge $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ gælder: Hvis blot $\overline{I}(f_1) > -\infty$ da er $\lim \overline{I}(f_n) = \overline{I}(\lim f_n)$.

Bevis: det er klart at grænsefunktionen $f = \lim f_n$ eksisterer, og da $f_n \leq f$ for alle n har vi $\overline{I}(f_1) \leq \overline{I}(f_2) \leq \ldots \leq \overline{I}(f)$. Altså eksisterer $\lim \overline{I}(f_n)$ og er $\leq \overline{I}(f)$. Vi mangler nu blot af bevise, at $\overline{I}(f) \leq \lim \overline{I}(f_n)$. Hvis $\lim \overline{I}(f_n) = +\infty$, er dette indlysende. Vi antager derfor i det følgende, at $\lim \overline{I}(f_n) < +\infty$.

Til afkortning sættes

$$\overline{I}(f_n) = a_n, \qquad \lim \overline{I}(f_n) = a$$

Vi har da

$$-\infty < a_1 \leq a_2 \leq \ldots, \qquad \lim a_n = a < +\infty.$$

Vi vælger et endeligt positivt tal ε og skriver det som sum af en konvergent række med positive led:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$$

Vi vælger dernæst følger af trappefunktioner $\overline{f}_{1p}\uparrow \geq f_1$, $\overline{f}_{2p}\uparrow \geq f_2$, $\overline{f}_{3p}\uparrow \geq f_3, \ldots$ således at $\lim_p I(\overline{f}_{1p}) \leq a_1+\varepsilon_1$, $\lim_p I(\overline{f}_{2p}) \leq a_2+\varepsilon_2$, $\lim_p I(\overline{f}_{3p}) \leq a_3+\varepsilon_3, \ldots$. Vi har således følgende skema:

$$\overline{f}_{11} \leq \overline{f}_{12} \leq \overline{f}_{13} \leq \ldots, \quad \lim_p \overline{f}_{1p} \geq f_1, \quad \lim_p I(\overline{f}_{1p}) \leq a_1+\varepsilon_1$$

$$\overline{f}_{21} \leq \overline{f}_{22} \leq \overline{f}_{23} \leq \ldots, \quad \lim_p \overline{f}_{2p} \geq f_2, \quad \lim_p I(\overline{f}_{2p}) \leq a_2+\varepsilon_2$$

$$\overline{f}_{31} \leq \overline{f}_{32} \leq \overline{f}_{33} \leq \ldots, \quad \lim_p \overline{f}_{3p} \geq f_3, \quad \lim_p I(\overline{f}_{3p}) \leq a_3+\varepsilon_3,$$

$$\ldots$$

Vi vil nu sukcessivt ændre funktionerne i anden, tredie, ... række i dette skema, således at vi når til et nyt skema, hvor vi også e hver <u>søjle</u> har en stigende funktionsfølge. Vi begynder med at ændre anden række.

For ethvert p gælder

$$\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p} + \overline{f}_{1p} \wedge \overline{f}_{2p} = \overline{f}_{1p} + \overline{f}_{2p}$$

og altså

$$I(\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p}) + I(\overline{f}_{1p} \wedge \overline{f}_{2p}) = I(\overline{f}_{1p}) + I(\overline{f}_{2p}).$$

Vi har åbenbart $\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p}\uparrow \geq f_1 \vee f_2 = f_2$ og $\overline{f}_{1p} \wedge \overline{f}_{2p}\uparrow \geq f_1 \wedge f_2 = f_1$. Af det sidste følger, at $\lim_p I(\overline{f}_{1p} \wedge \overline{f}_{2p}) \geq a_1$. Ved grænseovergang fås derfor

$\lim_p I(\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p}) + a_1 \leqq a_1 + \varepsilon_1 + a_2 + \varepsilon_2$, eller $\lim_p I(\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p}) \leqq a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
I stedet for anden række i skemaet kan vi altså skrive:

$$\overline{f}_{11} \vee \overline{f}_{21} \leqq \overline{f}_{12} \vee \overline{f}_{22} \leqq \overline{f}_{13} \vee \overline{f}_{23} \leqq \dots, \quad \lim_p \overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p} \geqq f_2,$$
$$\lim_p I(\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p}) \leqq a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Vi har altså ved forandringen blot "sat ε_1 over styr".

Nu gør vi det samme med denne nye anden række og skemaets tredie række, hvorved tredie række erstattes med

$$\overline{f}_{11} \vee \overline{f}_{21} \vee \overline{f}_{31} \leqq \overline{f}_{12} \vee \overline{f}_{22} \vee \overline{f}_{32} \leqq \overline{f}_{13} \vee \overline{f}_{23} \vee \overline{f}_{33} \leqq \dots,$$
$$\lim \overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p} \vee \overline{f}_{3p} \geqq f_3, \quad \lim_p I(\overline{f}_{1p} \vee \overline{f}_{2p} \vee \overline{f}_{3p}) \leqq a_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Idet vi fortsætter således, får vi, idet vi omdøber de i skemaet optrædende funktioner, følgende skema:

$$\begin{array}{llll}
\overline{g}_{11} \leqq & \overline{g}_{12} \leqq & \overline{g}_{13} \leqq & \dots, \quad \lim_p \overline{g}_{1p} \geqq f_1, \quad \lim_p I(\overline{g}_{1p}) \leqq a_1 + \varepsilon_1, \\
\wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \\
\overline{g}_{21} \leqq & \overline{g}_{22} \leqq & \overline{g}_{23} \leqq & \dots, \quad \lim_p \overline{g}_{2p} \geqq f_2, \quad \lim_p I(\overline{g}_{2p}) \leqq a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\
\wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \\
\overline{g}_{31} \leqq & \overline{g}_{32} \leqq & \overline{g}_{33} \leqq & \dots, \quad \lim_p \overline{g}_{3p} \geqq f_3, \quad \lim_p I(\overline{g}_{3p}) \leqq a_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\
\wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \wedge\!\! | & \\
\dots & & &
\end{array}$$

hvor vi også i hver søjle har en stigende funktionsfølge.

Vi betragter nu den i diagonalen stående følge af trappefunktioner $\overline{g}_{11}, \overline{g}_{22}, \overline{g}_{33}, \dots$. For denne gælder åbenbart
$\overline{g}_{11} \leqq \overline{g}_{22} \leqq \overline{g}_{33} \leqq \dots$, og for ethvert q finder vi $\lim_n \overline{g}_{nn} \geqq f_q$.
Følgelig er $\lim_n \overline{g}_{nn} \geqq f$, hvoraf følger $\overline{I}(f) \leqq \lim_n I(\overline{g}_{nn})$.
For ethvert n er imidlertid $I(\overline{g}_{nn}) \leqq a_n + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n < a + \varepsilon$. Vi finder derfor $\overline{I}(f) \leqq a + \varepsilon$.

Følgelig er $\overline{I}(f) \leqq a$, og beviset er fuldført. ∎

Lad nu specielt $f_1 \leqq f_2 \leqq \dots$ være en stigende følge af Lebesgue integrable funktioner og lad $f = \lim f_n$. Da er betingelsen $\overline{I}(f_1) > -\infty$ opfyldt, og vi har altså $\overline{I}(f) = \lim \overline{I}(f_n) = \lim I(f_n)$. Da vi for ethvert n har $f_n \leqq f$, og dermed $I(f_n) = \underline{I}(f_n) \leqq \underline{I}(f)$, har vi også $\lim I(f_n) \leqq \underline{I}(f)$. Vi har altså

$$-\infty < \lim I(f_n) \leqq \underline{I}(f) \leqq \overline{I}(f) = \lim I(f_n)$$

og følgelig

$$-\infty < \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \lim I(f_n)$$

Heraf følger:

<u>Grænsefunktionen $f = \lim f_n$ for en stigende følge $f_1 \leqq f_2 \leqq \dots$ af Lebesgue integrable funktioner er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(f_n) < +\infty$. I bekræftende fald er $I(f) = \lim I(f_n)$.</u>

Denne sætning har naturligvis et modstykke:

Grænsefunktionen $f = \lim f_n$ for en dalende følge $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ af Lebesgue integrable funktioner er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis $\lim I(f_n) > -\infty$. I bekræftende fald er $I(f) = \lim I(f_n)$.

Bevis: Sætningen kan fås ved at anvende den forige på den stigende funktionsfølge $-f_1 \leq -f_2 \leq \ldots$. ∎

Talfølger i $\grave{R}^*$.

Lad $x_1, x_2, \ldots$ eller $\{x_n\}$ være en følge af tal i $\grave{R}^*$. Sammen med denne betragter vi talfølgen $x_1, x_1 \vee x_2, \ldots$ eller $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$. Disse to talfølger har samme øvre grænse:

$$\sup \{x_n\} = \sup \{x_1 \vee \ldots \vee x_n\}.$$

Thi ethvert overtal for talfølgen $\{x_n\}$ er også et overtal for talfølgen $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$ og omvendt. Da talfølgen $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$ er stigende, har den en grænseværdi $\lim (x_1 \vee \ldots \vee x_n)$, og denne er netop $\sup \{x_1 \vee \ldots \vee x_n\}$. Vi har altså

$$\sup\{x_n\} = \lim (x_1 \vee \ldots \vee x_n)$$

Analogt får vi

$$\inf \{x_n\} = \inf \{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n\} = \lim (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n).$$

Sammen med talfølgen $\{x_n\}$ betragter vi nu de to talfølger $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ defineret ved

$$\begin{array}{ll} y_1 = \inf \{x_1, x_2, \ldots\} & z_1 = \sup \{x_1, x_2, \ldots\} \\ y_2 = \inf \{x_2, x_3, \ldots\} & z_2 = \sup \{x_2, x_3, \ldots\} \\ \ldots & \ldots \\ y_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} & z_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

For disse gælder

$$y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \leq \ldots \leq \ldots \leq z_n \leq \ldots \leq z_2 \leq z_1.$$

Altså eksisterer grænseværdierne $\lim y_n$ og $\lim z_n$ og vi har

$$\lim y_n \leq \lim z_n.$$

Disse to tal kaldes limes inferior og limes superior for talfølgen $\{x_n\}$ og betegnes $\lim\inf x_n$ og $\lim\sup x_n$:

$$\lim\inf x_n = \lim y_n, \quad \lim\sup x_n = \lim z_n.$$

Da vi ifølge det foranstående har

$$y_n = \lim_p (x_n \wedge \ldots \wedge x_{n+p-1}), \quad z_n = \lim_p (x_n \vee \ldots \vee x_{n+p-1}),$$

ser vi, at

$$\lim\inf x_n = \lim_n \lim_p (x_n \wedge \ldots \wedge x_{n+p-1}),$$

$$\lim\sup x_n = \lim_n \lim_p (x_n \vee \ldots \vee x_{n+p-1}).$$

Bestemmelsen af $\lim\inf x_n$ og $\lim\sup x_n$ sker altaå ved to grænseovergange. Ved $\lim\inf x_n$ dannes først for hvert n grænseværdien efter p for en dalende talfølge, hvorved fås en stigende talfølge $\{y_n\}$, hvis grænseværdi er lim inf x_n. Ved lim sup x_n dannes først for hvert n grænseværdien efter p for en stigende talfølge, hvorved fås en dalende talfølge $\{z_n\}$, hvis grænseværdi er lim sup x_n.

Definition: Talfølgen $\{x_n\}$ kaldes konvergent i $\grave{R}^*$, hvis og kun hvis lim inf x_n = lim sup x_n, og vi har da

$$\lim x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Bemærk. Hvis alle $x_n \in \grave{R}$, betegnes konvergens i $\grave{R}^*$ med grænsevværdi $+\infty$ eller $-\infty$ ofte som divergens mod $+\infty$ eller $-\infty$.

Sætninger om lim inf og lim sup for funktionsfølger.

En funktionsfølge $f_1, f_2, \ldots$ siges at have funktionen h som minorant, hvis $f_n \geq h$ for alle n. Følgen siges at have funktionen h som majorant, hvis $f_n \leq h$ for alle n.

Lad $f_1, f_2, \ldots$ være en følge af Lebesgue integrable funktioner, som har en Lebesgue integrabel minorant h, og for hvilken lim inf $I(f_n) < +\infty$. Da er også funktionen lim inf f_n Lebesgue integrabel, og $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$.

Bevis: Ifølge det foranstående har vi lim inf f_n = lim g_n, hvor $g_n = \lim_p (f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1})$.
For ethvert fast n er følgen af funktioner $f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}$, p = 1,2,3,... en dalende følge af Lebesgue integrable funktioner, og da alle funktionerne i følgen er $\geq$ h har vi for hvert p

$$I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}) \geq I(h).$$

Af sætningen om monoton konvergens (med dalende funktionsfølge) sluttes derfor, af funktionen g_n er Lebesgue integrabel, og at

$$I(g_n) = \lim_p I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}).$$

Nu er følgen $g_1, g_2, \ldots$ en stigende følge. Af sætningen om monoton konvergens (med stigende funktionsfølge) slutter vi derfor, at lim inf f_n = lim g_n er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis lim $I(g_n) < +\infty$, og at vi i så fald har

$$I(\liminf f_n) = \lim I(g_n) = \lim_n \lim_p I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}).$$

Da funktionen $f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}$ er $\leq$ hver af funktionerne $f_n, \ldots, f_{n+p-1}$, må $I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1})$ være $\leq$ hvert af tallene $I(f_n), \ldots, I(f_{n+p-1})$, d.v.s. $I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}) \leq I(f_n) \wedge \ldots \wedge I(f_{n+p-1})$.
Vi har derfor

$$\lim_n \lim_p I(f_n \wedge \ldots \wedge f_{n+p-1}) \leq \lim_n \lim_p (I(f_n) \wedge \ldots \wedge I(f_{n+p-1})).$$

men her er højre side netop lim inf $I(f_n)$, som vi har forudsat $< +\infty$. Altså er lim inf f_n Lebesgue integrabel, og $I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n)$, hvilket skulle bevises. ∎

Sætningen har naturligvis et modstykke:

Lad $f_1, f_2, \dots$ være en følge af Lebesgue integrable funktioner som har en Lebesgue integrabel majorant h, og for hvilken $\lim\sup I(f_n) > -\infty$. Da er også funktionen $\lim\sup f_n$ Lebesgue integrabel, og $I(\lim\sup f_n) \geq \lim\sup I(f_n)$.

Bevis: Sætningen fås ved at anvende den forrige på funktionsfølgen $-f_1, -f_2, \dots$.■

Et ofte benyttet specialtilfælde af den første sætning kaldes Fatous lemma:

Lad $f_1, f_2, \dots$ være en konvergent følge af ikke negative Lebesgue integrable funktioner, for hvilken $\lim\inf I(f_n) < +\infty$. Da er $\lim f_n$ Lebesgue integrabel, og $I(\lim f_n) \leq \lim\inf I(f_n)$.

Absolut majoriseret konvergens.

Vi vil nu bevise den hyppigst anvendte sætning om grænseovergang med Lebesgue integralet.

En funktionsfølge $f_1, f_2, \dots$ siges at have funktionen h (≥ 0) som absolut majorant, hvis $|f_n| \leq h$ for alle n (altså hvis følgen har h som majorant og $-h$ som minorant).

Lad $f_1, f_2, \dots$ være en konvergent følge af Lebesgue integrable funktioner, som har en Lebesgue integrabel absolut majorant h. Da er grænsefunktionen $\lim f_n$ Lebesgue integrabel og talfølgen $I(f_1), I(f_2), \dots$ er konvergent med grænseværdien $I(\lim f_n)$: $I(\lim f_n) = \lim I(f_n)$.

Bevis: Funktionsfølgen $f_1, f_2, \dots$ har den Lebesgue integrable minorant $-h$. Af sætningerne om lim inf og lim sup ses da, at både $\lim\inf f_n$ og $\lim\sup f_n$ er Lebesgue integrable og at

$$I(\lim\inf f_n) \leq \lim\inf I(f_n) \leq \lim\sup I(f_n) \leq I(\lim\sup f_n).$$

Imidlertid er følgen forudsat konvergent. Funktionerne $\lim\inf f_n$ og $\lim\sup f_n$ er altså den samme funktion, funktionen $\lim f_n$. Altså er $\lim f_n$ Lebesgue integrabel, og

$$I(\lim f_n) = \lim\inf I(f_n) = \lim\sup I(f_n),$$

hvormed sætningen er bevist.■

§7. Lebesgue målet.

Ydre og indre Lebesgue mål. Lebesgue målelige punktmængder.

Lad A være en vilkårlig punktmængde i R^k. Vi betragter alle stigende følger af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$, således at $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$. Sådanne følger findes, f.eks. $W_1, W_2, \dots$. For enhver sådan følge gælder $m(\overline{F}_1) \leq m(\overline{F}_2) \leq \dots$. Altså eksisterer grænseværdien $\lim m(\overline{F}_n)$. Eventuelt er den $+\infty$. Disse grænseværdier danner en mængde af tal ≥ 0 (evt. består mængden af $+\infty$ alene). Nedre grænse for denne talmængde kaldes det <u>ydre Lebesgue mål</u> af A og betegnes $m_y(A)$. Altså:

$$m_y(A) = \inf \lim m(\overline{F}_n).$$

Vi betragter dernæst alle dalende følger af trappemængder $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \dots$, således at $\bigcap \underline{F}_n \subseteq A$. Sådanne følger findes, f.eks. $\emptyset, \emptyset, \dots$. For enhver sådan følge gælder $m(\underline{F}_1) \geq m(\underline{F}_2) \geq \dots \geq 0$ Altså eksisterer grænseværdien $\lim m(\underline{F}_n)$ og er ≥ 0 Den er naturligvis endelig. Disse grænseværdier danner en mængde af tal ≥ 0. Øvre grænse for denne talmængde kaldes det <u>indre Lebesgue mål</u> af A og betegnes $m_i(A)$. Altså:

$$m_i(A) = \sup \lim m(\underline{F}_n).$$

Vi vil bevise, at man for enhver punktmængde A har $m_i(A) \leq m_y(A)$. Det gælder om at bevise, at vi for vilkårlige følger af trappemængder $\overline{F}_n$ og $\underline{F}_n$ af den omtalte art har $\lim m(\underline{F}_n) \leq \lim m(\overline{F}_n)$.

Hertil betragtes følgen af trappemængder $G_n = \underline{F}_n \setminus \overline{F}_n$. Idet $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$ og $\bigcap G_n = \emptyset$, fås af hjælpesætningen (2,4,1) at $\lim m(G_n) = 0$. Da vi endvidere for alle n har $\underline{F}_n \subseteq \overline{F}_n \cup G_n$ og dermed $m(\underline{F}_n) \leq m(\overline{F}_n) + m(G_n)$, har vi som ønsket $\lim m(\underline{F}_n) \leq \lim m(\overline{F}_n)$.

Vi har altså for enhver punktmængde A

$$0 \leq m_i(A) \leq m_y(A) \leq +\infty.$$

Hvis A er en begrænset punktmængde, gælder

$$r_i(A) \leq m_i(A) \leq m_y(A) \leq r\ (A).$$

Thi for vilkårlige trappemængder $\overline{F}$ og $\underline{F}$, for hvilke $\underline{F} \subseteq A \subseteq \overline{F}$, kan vi benytte følgen $\overline{F}, \overline{F}, \dots$ som følge $\overline{F}_n$ og følgen $\underline{F}, \underline{F}, \dots$ som følge $\underline{F}_n$, hvoraf ses, at $m(\overline{F})$ kan forekomme som $\lim m(\overline{F}_n)$ og $m(\underline{F})$ som $\lim m(\underline{F}_n)$. Heraf ses, at hvis A er Riemann målelig, er $m_i(A) = m_y(A) = m(A)$. Vi opnår altså en udvidelse af Riemanns målbegreb gennem følgende definition:

Når $m_i(A) = m_y(A) < +\infty$, kaldes mængden A <u>Lebesgue målelig</u>, og den fælles værdi af $m_i(A)$ og $m_y(A)$ kaldes mængdens mål og betegnes $m(A)$.

Vi vil senere tilskrive visse (men ikke alle) mængder A, for hvilke $m_i(A) = m_y(A) = +\infty$, målet $+\infty$. Sådanne mængder vil dog ikke blive kaldt målelige i egentlig forstand (vi vil kalde dem målelige i udvidetforstand).

Enhver endelig eller numerabel punktmængde A er Lebesgue målelig med målet $m(A) = 0$.

Bevis: Hvis A er endelig, er A en trappemængde, og udsagnet er indlysende. Hvis A er numererbar og består af punkterne $x_1, x_2, \dots$, sætter vi $\overline{F}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Da er $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$ en stigende følge af trappemængder, og $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$ (nemlig $\bigcup \overline{F}_n = A$). Altså er $m_y(A) \leq \lim m(\overline{F}_n) = 0$. Da $0 \leq m_i(A) \leq m_y(A)$, må så også gælde $m_i(A) = 0$.∎

For eksempel ses, at mængden af rationale tal i intervallet $[-1,1]$ (jfr. side MI 2,3,2) er Lebesgue målelig med målet 0. Der findes altså begrænsede punktmængder der er Lebesgue målelige, men ikke Riemann målelige.

Af ovenstående sætning følger specielt den kendte sætning, at et interval med positivt mål ikke er en numererbar mængde.

For enhver punktmængde A gælder $m_i(A) = \underline{I}(1_A)$, $m_y(A) = \overline{I}(1_A)$. Mængden A er altså Lebesgue målelig, hvis og kun hvis funktionen 1_A er Lebesgue integrabel, og i så fald er $m(A) = I(1_A)$.

Bevis: Vi beviser først, at $m_y(A) = \overline{I}(1_A)$. 1) For enhver følge af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$, således at $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$, er $1_{\overline{F}_1}, 1_{\overline{F}_2}, \dots$ en følge af trappefunktioner, således at $1_{\overline{F}_n} \uparrow \geq 1_A$. Altså er $\lim m(\overline{F}_n) = \lim I(1_{\overline{F}_n}) \geq \overline{I}(1_A)$, hvoraf $m_y(A) \geq \overline{I}(1_A)$.

2) For enhver følge af trappefunktioner $\overline{f}_n$, således at $\overline{f}_n \uparrow \geq 1_A$, er for ethvert $a \in]0,1[$ følgen af punktmængder $\overline{F}_p = \{x \mid \overline{f}_p(x) > a\}$ en følge af trappemængder, således at $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$ og $\bigcup \overline{F}_p \supseteq A$. For ethvert fast p gælder $\overline{f}_n \uparrow \geq a \cdot 1_{\overline{F}_p}$. Altså er $\lim_n I(\overline{f}_n) \geq I(a \cdot 1_{\overline{F}_p}) = a\, m(\overline{F}_p)$, og følgelig er $\lim_n I(\overline{f}_n) \geq a \cdot \lim_p m(\overline{F}_p) \geq a\, m_y(A)$. Da a var vilkårlig i intervallet $]0,1[$, følger heraf $\lim I(\overline{f}_n) \geq m_y(A)$, hvoraf $\overline{I}(1_A) \geq m_y(A)$.

Vi beviser dernæst, at $m_i(A) = \underline{I}(1_A)$. 1) For enhver følge af trappemængder $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \dots$, således at $\bigcap \underline{F}_n \subseteq A$, er er $1_{\underline{F}_1}, 1_{\underline{F}_2}, \dots$ er følge af trappefunktioner, således at $1_{\underline{F}_n} \downarrow \leq 1_A$. Altså er $\lim m(\underline{F}_n) = \lim I(1_{\underline{F}_n}) \leq \underline{I}(1_A)$, hvoraf $m_i(A) \leq \underline{I}(1_A)$

2) For enhver følge af trappefunktioner $\underline{f}_n$, således at $\underline{f}_n \downarrow \leq 1_A$, er for ethvert $a \in]0,1[$ følgen af punktmængder $\underline{F}_p = \{x \mid \underline{f}_p(x) > a\}$ en følge af trappemængder, således at $\underline{F}_1 \supseteq \underline{F}_2 \supseteq \dots$ og $\bigcap \underline{F}_p \subseteq A$. For ethvert fast p gælder $\underline{f}_n \downarrow \leq a \cdot 1_F + 1_{\underline{F}_p}$, hvor F er trappemængden $\{x \mid \underline{f}_1(x) > 0\}$. Altså er $\lim_n I(\underline{f}_n) \leq a \cdot m(F) + m(\underline{F}_p)$, og følgelig $\lim_n I(\underline{f}_n) \leq a \cdot m(F) + \lim_p m(\underline{F}_p) \leq a\, m(F) + m_i(A)$. Da a var vilkårlig i intervallet $]0,1[$, følger heraf $\lim_n I(\underline{f}_n) \leq m_i(A)$, hvoraf $\underline{I}(1_A) \leq m_i(A)$. Hermed er beviset fuldført.∎

I kraft af denne sætning henføres teorien for Lebesgue målet til teorien for Lebesgue integralet.

<u>Sætninger om Lebesgue målet.</u>

For vilkårlige mængder A og B gælder

$$1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B, \quad 1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B, \quad 1_{A \setminus B} = (1_A - 1_B) \vee 0.$$

Er A og B disjunkte, gælder

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B.$$

Af egenskaberne ved Lebesgue integralet følger derfor straks:

<u>Systemet af Lebesgue målelige punktmængder A i $\grave{R}^k$ er et mængdelegeme, og Lebesgue målet m = m(A) er er additiv, ikke negativ mængdefunktion på dette legeme.</u>

For en vilkårlig stigende følge af mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ gælder

$$1_{A_1} \leq 1_{A_2} \leq \dots \quad \text{og } 1_{\bigcup A_n} = \lim 1_{A_n}$$

og for en vilkårlig dalende følge af mængder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ gælder

$$1_{A_1} \geq 1_{A_2} \geq \dots \quad \text{og } 1_{\bigcap A_n} = \lim 1_{A_n}$$

Af sætningerne om monoton grænseovergang for Lebesgue integralet (MI 2,6,2) fås derfor:

<u>For en stigende følge af Lebesgue målelige mængder $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ er $A = \bigcup A_n$ Lebesgue målelig, hvis og kun hvis $\lim m(A_n) < +\infty$. I bekræftende fald er $m(A) = \lim m(A_n)$.</u>

<u>For en dalende følge af Lebesgue målelige mængder $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ er $A = \bigcap A_n$ Lebesgue målelig, og $m(A) = \lim m(A_n)$.</u>

Vi fremhæver endvidere følgende sætning:

<u>For en vilkårlig følge af Lebesgue målelige mængder $A_1, A_2, \dots$, for hvilken $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty$, er mængden $A = \bigcup A_n$ Lebesgue målelig, og $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.</u>

<u>Hvis mængderne $A_1, A_2, \dots$ specielt er parvis disjunkte, er</u>

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Bevis: Sættes

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_1 \cup A_2$$
$$\dots$$
$$B_p = A_1 \cup \dots \cup A_p$$
$$\dots$$

har vi $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, alle B_p er Lebesgue målelige, og $A = \bigcup B_p$. Endvidere er $m(B_p) \leq \sum_{n=1}^{p} m(A_n)$ og følgelig $\lim m(B_p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Altså er A Lebesgue målelig, og

$$m(A) = \lim m(B_p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

For parvis disjunkte A_n har vi endvidere $m(B_p) = \sum_{n=1}^{p} m(A_n)$, og dermed

$$m(A) = \lim_p m(B_p) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \blacksquare$$

<u>Hvis A er en åben punktmængde og B er Lebesgue målelig, da er $A \cap B$ lebesgue målelig.</u>

Bevis: Vi kan antage $A \neq \emptyset$. Til ethvert $x \in A$ kan vi finde et åbent interval $J = J_1 \dots J_k$, som er indeholdt i A og indeholder x, og hvor hvert J_j har rationale endepunkter. Altså er A foreningsmængde af sådanne intervaller, men da der af sådanne kun findes numererbart mange, er A foreningsmængde af endelig eller numererbart mange åbne intervaller. Hvis A er foreningsmængde af endelig mange åbne intervaller, er A en trappemængde, og $A \cap B$ er følgelig Lebesgue målelig. Hvis A er foreningsmængde af numererbart mange åbne intervaller $J^1, J^2, \dots$, sætter vi $A_n = J^1 \cup \dots \cup J^n$. Da er $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B \subseteq \dots$, $A \cap B = \bigcup (A_n \cap B)$, og mængderne $A_n \cap B$ er Lebesgue målelige. Endvidere er $A_n \cap B \subseteq B$ og altså $m(A_n \cap B) \leq m(B)$ for alle n, hvoraf $\lim m(A_n \cap B) \leq m(B)$. Følgelig er $A \cap B$ lebesgue målelig. $\blacksquare$

<u>Hvis A er en afsluttet punktmængde og B er Lebesgue målelig, da er $A \cap B$ Lebesgue målelig.</u>

Bevis: Dette følger umiddelbart af den forrige sætning, idet $A \cap B = B \setminus (\complement A \cap B)$, og $\complement A$ er åben. $\blacksquare$

Specielt finder vi:

<u>Alle begrænsede åbne punktmængder og alle begrænsede afsluttede punktmængder er Lebesgue målelige.</u>

<u>Nulmængder.</u>

En Lebesgue målelig mængde med målet 0 kaldes en <u>nulmængde</u>. Man ser, at en mængde A er en nulmængde, hvis og kun hvis $m_y(A) = 0$.

Hvis A og B er nulmængder, så er også $A \cup B$, $A \cap B$ og $A \setminus B$ nulmængder.

Hvis $A_1, A_2, \dots$ alle er nulmængder, så er også $\bigcup A_n$ og $\bigcap A_n$ nulmængder.

Bevis: Dette er umiddelbare konsekvenser af sætningerne ovenfor. ∎

Hvis $A \subseteq B$, og B er en nulmængde, så er også A er nulmængde.

Bevis: Dette følger af, at $0 \leq m_y(A) \leq m_y(B) = 0$, hvoraf $m_y(A) =$

Når $A \subseteq B \subseteq C$, A og C er Lebesgue målelige og $m(A) = m(C)$, da er også B Lebesgue målelig (og $m(B) = m(A) = m(C)$).

Bevis: Da $B \setminus A \subseteq C \setminus A$, ses af den foregående sætning, at $B \setminus A$ er en nulmængde, og sætningen følger af, at $B = A \cup (B \setminus A)$. ∎

Som eksempler på nulmængder kan nævnes den tomme mængde samt alle endelige eller numererbare mængder.

Nulfunktioner.

En funktion f kaldes en nulfunktion, hvis mængden $\{x \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid |f(x)| > 0\}$ er en nulmængde, altså hvis funktionen har værdien 0 pånær i en nulmængde.

En funktion f er en nulfunktion, hvis og kun hvis den er Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$.

Bevis: Antag først at f er en nulfunktion. Da er $N = \{x \mid |f(x)| > 0\}$ en nulmængde. Altså er $n \cdot 1_N$ Lebesgue integrabel med integralet $I(n \cdot 1_N) = nI(1_N) = 0$ for ethvert n. Endvidere er $1_N \leq 2 \cdot 1_N \leq \dots$ Altså er funktionen $\lim n \cdot 1_N = +\infty \cdot 1_N$ også Lebesgue integrabel, og $I(+\infty \cdot 1_N) = 0$. Da $0 \leq |f| \leq +\infty \cdot 1_N$, finder vi, at

$$0 \leq \underline{I}(|f|) \leq \overline{I}(|f|) \leq I(+\infty \cdot 1_N) = 0.$$

hvilket viser at $|f|$ er Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$.

Antag dernæst at f er Lebesgue integrabel og $I(|f|) = 0$. Da er også $n|f|$ Lebesgue integrabel og $I(n|f|) = 0$ for ethvert n. Endvidere er $|f| \leq 2|f| \leq \dots$. Altså er funktionen $\lim n|f| = +\infty \cdot |f|$ Lebesgue integrabel og $I(+\infty \cdot |f|) = 0$. Sættes $N = \{x \mid |f(x)| > 0\}$, er imidlertid $0 \leq 1_N \leq +\infty \cdot |f|$. Altså er

$$0 \leq m_y(N) = \overline{I}(1_N) \leq I(+\infty \cdot |f|) = 0,$$

hvilket viser at $m_y(N) = 0$, d.v.s. at N er en nulmængde. ∎

Ækvivalente funktioner.

Funktionen f siges at være ækvivalent med funktionen g, $f \sim g$, hvis mængden $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ er en nulmængde, d.v.s. hvis funktionen $f - g$ er en nulfunktion.

Om et udsagn med en variabel $\Phi(x)$, hvor der for den variable x kan indsættes vilkårlige punkter fra $\grave{R}^k$, siger men, at

$\Phi(x)$ er sandt for næsten alle $x \in \grave{R}^k$

eller $\Phi(x)$ gælder næsten overalt i $\grave{R}^k$,

hvis $\{x | \text{non } \Phi(x)\}$ er en nulmængde. For "næsten overalt" ser man forkortelserne p.p. (presque partout) og a.e. (almost everywhere).

Med denne sprogbrug ser ækvivalensdefinitionen således ud:

$f \sim g$, hvis $f(x) = g(x)$ næsten overalt.

Det er klart, at den indførte relation er refleksiv og symmetrisk. At den også er transitiv følger af, at man for tre vilkårlige funktioner f, g og h har

$$\{x | f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x | f(x) \neq g(x)\} \cup \{x | g(x) \neq h(x)\},$$

i forbindelse med sætninger om nulmængder. Det altså virkelig en ækvivalensrelation, således at den modsvares af en klassedeling af mængden af alle reelle funktioner på $\grave{R}^k$.

<u>Når $f \sim g$, da er enten begge funktioner Lebesgue integrable eller ingen af dem Lebesgue integrable. I første tilfælde er $I(f) = I(g)$.</u>

Bevis: Sættes $N = \{x | f(x) \neq g(x)\}$, er f_N og g_N nulfunktioner; altså er de Lebesgue integrable med integralet 0. Antages nu f.eks., at f er Lebesgue integrabel, ses af $g = (f-f_N)+g_N$, at også g er Lebesgue integrabel og at $I(g) = I(f)$. ∎

Dette resultat kan tolkes derhen, at det er muligt at opfatte Lebesgue integralet som defineret for ækvivalensklasser, ikke blot for de enkelte funktioner. Bemærk endvidere, at simple operationer som f.eks. sum og produkt anvendt på ækvivalente funktioner igen giver ækvivalente funktioner. Har man for en funktionsfølge $f_1, f_2, \ldots$ og en funktion f

$f(x) = \lim f_n(x)$ for næsten alle x,

vil det samme gælde, efter at man har erstattet hver funktion med en ækvivalent. I de fleste tilfælde har man derfor løst sagt ingen grund til at skelne mellem ækvivalente funktioner.

Det er da også muligt at inddrage funktioner, som kun er defineret næsten overalt i $\grave{R}^k$; vilkårlige udvidelser til hele $\grave{R}^k$ vil jo tilhøre samme ækvivalensklasse. Specielt: en funktion defineret næsten overalt i $\grave{R}^k$ siges at være Lebesgueintegrabel, hvis man ved at udvide den til hele $\grave{R}^k$ får en Lebesgue integrabel funktion; i bekræftende fald sættes $I(f)$ = udvidelsens integral.

<u>Enhver Lebesgue integrabel funktion f er ækvivalent med en endelig funktion.</u>

Bevis: Det gælder om at vise, at mængden $N = \{x \mid |f(x)| = +\infty\}$ er en nulmængde. For ethvert n er $\frac{1}{n}|f|$ Lebesgue integrabel, og $I(\frac{1}{n}|f|) = \frac{1}{n}I(|f|)$. Endvidere er $|f| \geq \frac{1}{2}|f| \geq \ldots$ og $\lim \frac{1}{n}|f| = +\infty \cdot 1_N$. Altså er $+\infty \cdot 1_N$ Lebesgue integrabel og $I(+\infty \cdot 1_N) = 0$. Nu er

$$0 \leq m_y(N) = \overline{I}(1_N) \leq I(+\infty \cdot 1_N) = 0,$$

hvilket viser at $m_y(N) = 0$. ∎

Sammenholdt med den foranstående bemærkning viser den sidste sætning, at det ikke vilde have betydet nogen væsentlig indskrænkning i teorien for Lebesgue integralet, om vi helt igennem havde begrænset os til at betragte endelige funktioner. Vi har tilladt uendelige værdier, fordi det i mange ræsonnementer er fordelagtigt. Hvis vi havde indskrænket os til betragtning af endelige funktioner, måtte fremstillingen på mange punkter have været formet anderledes og mere indviklet.

§8. Multipelt integral.

Lad os antage $k > 1$ og lad koordinaterne $x_1,\ldots x_k$ være delt i to klasser indeholdende henholdsvis p og q af dem, hvor $k = p+q$. Da den rækkefølge, hvori vi nævner koordinaterne, er uden betydning, kan vi for simpelheds skyld antage, at den første klasse består af $x_1,\ldots,x_p$, som vi også vil benævne $y_1,\ldots,y_p$, og og den anden af $x_{p+1},\ldots,x_k$, som vi også vil benævne $z_1,\ldots,z_q$. Foruden $\grave{R}^k = \grave{R}^{p+q}$ med $x = (x_1,\ldots,x_k)$ som variabelt punkt, kan vi da betragte de to rum $\grave{R}^p$ med $y = (y_1,\ldots,y_p)$ som variabelt punkt og $\grave{R}^q$ med $z = (z_1,\ldots,z_q)$ som variabelt punkt. Vi kan skrive

$$\grave{R}^k = \grave{R}^p \times \grave{R}^q \quad , \quad x = (y,z).$$

Idet vi således nu på en gang har forskellige dimensionstal i brug, vil vi betegne Lebesgue målet med en indeks, idet dog $m = m(A)$ som hidtil vil blive benyttet som betegnelse for målet af mængder i $\grave{R}^k$, medens $m_p = m_p(A)$ og $m_q = m_q(A)$ vil blive benyttet som betegnelse for målet af mængder i $\grave{R}^p$ og $\grave{R}^q$.

For øvre og nedre Lebesgue integral og for integral af funktioner i $\grave{R}^k$ vil vi som hidtil benytte betegnelserne $\overline{I}$, $\underline{I}$ og I, medens vi for øvre og nedre Lebesgue integral og for integral af funktioner i $\grave{R}^p$ (d.v.s. funktioner af y) og $\grave{R}^q$ (d.v.s. funktioner af z) vil benytte betegnelserne $\overline{I}_y$, $\underline{I}_y$, I_y og $\overline{I}_z$, $\underline{I}_z$, I_z.

Ethvert interval J i $\grave{R}^k = \grave{R}^p \times \grave{R}^q$ kan skrives på formen

$$J = Y \times Z$$

hvor Y og Z er intervaller i $\grave{R}^p$ og $\grave{R}^q$, og vi har åbenbart

$$m(J) = m_p(Y)m_q(Z)$$

Betegner $f = f(x) = f(y,z)$ en trappefunktion i $\grave{R}^k$, er $f(y,z)$ for fastholdt y en trappefunktion af z (d.v.s. i $\grave{R}^q$); dennes integral $I_z(f(y,z)) = g(y)$ er åbenbart en trappefunktion af y (d.v.s. i $\grave{R}^p$), og der gælder

$$I(f) = I_y(I_z(f(y,z))).$$

(Dette følger let af bemærkningen MI 2,1,2)

Lad nu $f = f(x) = f(y,z)$ være en vilkårlig reel funktion på $\grave{R}^k$ med indelige eller uendelige værdier. For en vilkårlig følge af trappefunktioner $\overline{f}_n = \overline{f}_n(x) = \overline{f}_n(y,z)$, for hvilken $\overline{f}_n \uparrow \geq f$, vil $\overline{f}_n(y,z)$ for hvert fastholdt y være en følge af trappefunktioner af z, for hvilken $\overline{f}_n(y,z)\uparrow \geq f(y,z)$, og vi har derfor

$$\overline{I}_z(f(y,z)) \leq \lim I_z(\overline{f}_n(y,z))$$

Funktionerne $\overline{g}_n(y) = I_z(\overline{f}_n(y,z))$ danner en stigende følge af trappefunktioner af y; den angivne ulighed viser, at $\overline{g}_n(y)\uparrow \geq g(y) = I_z(f(y,z))$. Følgelig er

$$\overline{I}_y(g(y)) \leq \lim I_y(\overline{g}_n(y)).$$

Da $I_y(\overline{g}_n(y)) = I_y(I_z(\overline{f}_n(y,z))) = I(\overline{f}_n)$, ser vi, at

$$\overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leq \lim I(\overline{f}_n).$$

Da dette gælder for enhver følge af trappefunktioner for hvilken $\overline{f}_n \uparrow \geq f$, ser vi, at

$$\overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leq \overline{I}(f).$$

På ganske samme måde fås

$$\underline{I}(f) \leq \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))).$$

Vi har følgelig ulighederne

$$\underline{I}(f) \leq \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) \leq \left\{\begin{matrix} \underline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \\ \overline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) \end{matrix}\right\} \leq \overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) \leq \overline{I}(f)$$

Lad os nu antage, at f er Lebesgue integrabel. Af disse uligheder aflæses da både

$$I(f) = \underline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z))) = \overline{I}_y(\overline{I}_z(f(y,z)))$$

og

$$I(f) = \underline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))) = \overline{I}_y(\underline{I}_z(f(y,z))).$$

Altså er begge funktioner $\underline{I}_z(f(y,z))$ og $\overline{I}_z(f(y,z))$ Lebesgue integrable funktioner af y, og vi har

$$I(f) = I_y(\underline{I}_z(f(y,z))) = I_y(\overline{I}_z(f(y,z)))$$

Funktionen $\overline{I}_z(f(y,z)) - \underline{I}_z(f(y,z))$ er derfor en Lebesgue integrabel funktion af y med integralet 0, og da den er ≥ 0 for alle y må den være en nulfunktion i y (jfr. MI 2,7,5). Punktmængden

$$N_o = \{y \mid \underline{I}_z(f(y,z)) \neq \overline{I}_z(f(y,z))\}$$

er altså en nulmængde i $\mathring{R}^p$. Da $\overline{I}_z(f(y,z))$ er en Lebesgue integrabel funktion af y er endvidere (jfr. MI 2,7,7) punktmængden

$$N_1 = \{y \mid |\overline{I}_z(f(y,z))| = +\infty\}$$

en nulmængde i $\mathring{R}^p$. Altså er

$$-\infty < \underline{I}_z(f(y,z)) = \overline{I}_z(f(y,z)) < +\infty$$

for næsten alle y, d.v.s, f(y,z) er en Lebesgue integrabel funktion af z for næsten alle y (nemlig for alle $y \notin N_o \cup N_1$), den næsten overalt i $\mathring{R}^p$ definerede funktion $I_z(f(y,z))$ er en Lebesgue integrabel funktion af y (jfr. MI 2,7,6) og

$$I(f) = I_y(I_z(f(y,z))).$$

Vi har hermed bevist <u>Lebesgue-Fubinis sætning</u> om fremstilling af et Lebesgue integral som dobbeltintegral:

<u>Når f = f(x) = f(y,z) er en Lebesgue integrabel funktion af x,</u>

er $f(y,z)$ for næsten alle y en Lebesgue integrabel funktion af z, dens integral $I_z(f(y,z))$ er en næsten overalt defineret Lebesgue integrabel funktion af y, og vi har $I(f) = I_y(I_z(f(y,z)))$.

I det specielle tilfælde, hvor f er den karakteristiske funktion af en målelig punktmængde A i $\grave{R}^k$ er $f(y,z)$ for fastholdt y den karakteristiske funktion af mængden $\{z \mid (y,z) \in A\}$ i $\grave{R}^q$. Sætningen antager da formen:

Når A er en Lebesgue målelig mængde i $\grave{R}^k$, er mængden $\{z \mid (y,z) \in A\}$ for næsten alle y i $\grave{R}^p$ en målelig mængde i $\grave{R}^q$, dens mål $m_q(\{z \mid (y,z) \in A\})$ er en (næsten overalt defineret) Lebesgue integrabel funktion af y, og vi har $m(A) = I_y(m_q(\{z \mid (y,z) \in A\}))$.

For $k = 2$ og $k = 3$ indeholder denne sætning klassiske sætninger om beregning af arealer og volumener ved "opdeling i strimler" eller opdeling i skiver".

Ved gentagen anvendelse giver Lebesgue-Fubinis sætning følgende sætning om multipelt integral.

Når $f = f(x) = f(x_1,\ldots,x_k)$ er en Lebesgue integrabel funktion af mere end én variabel, er $I(f) = I_{x_1}(I_{x_2}(\ldots I_{x_k}(f(x_1,x_2,\ldots,x_k))\ldots))$, hvor hver af de "indre" integrationer kan udføres for næsten alle punkter i rummet bestemt ved de resterende variable.

§9. Lebesgue målelige funktioner.

Vi har i det foregående vist, at visse operationer udført med Lebesgue integrable funktioner fører til Lebesgue integrable funktioner. Men allerede for en så enkel operation som multiplikation gælder dette ikke. Det er derfor vigtigt, at klassen af Lebesgue integrable funktioner på simpel måde kan udvides til en klasse af funktioner, der er således beskaffen, at alle sædvanlige operationer anvendt på funktioner af denne klasse fører til funktioner af klassen.

Vi begynder med at bevise:

Hvis f er en Lebesgue integrabel funktion på $\grave{R}^k$, da er mængden $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \grave{R}$.

Bevis: For ethvert n er funktionen

$$g_n = (n(f-a\cdot 1_A) \vee 0) \wedge 1_A$$

Lebesgue integrabel. Man ser, at $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ og $\lim g_n = 1_B$, hvor $B = \{x \in A \mid f(x) > a\}$. Specielt er $g_n \leq 1_A$ for alle n. Altså er $\lim I(g_n) \leq I(1_A) = m(A)$. Af sætningen om monoton grænseovergang sluttes derfor, at 1_B er Lebesgue integrabel, og B er derfor også Lebesgue målelig, hvilket skulle bevises.■

Vi indfører nu følgende definition:

En reel funktion f på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier kaldes Lebesgue målelig, hvis hver af mængderne

$$\{x \in A \mid f(x) > a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) < a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \leq a\}$$

er Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \grave{R}$.

Det bemærkes, at enhver af de fire betingelser er tilstrækkelig. Dette fremgår af at

$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) > a - \tfrac{1}{n}\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \geq a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) < a + \tfrac{1}{n}\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A \mid f(x) \leq a\}$$

Bemærk, at hvis f er Lebesgue målelig, er mængden $\{x \in A \mid f(x) = a\}$ Lebesgue målelig for enhver Lebesgue målelig mængde A og ethvert $a \in \grave{R}^*$. Thi hvis $a \in \grave{R}$ er

$$\{x \in A \mid f(x) = a\} = \{x \in A \mid f(x) \leq a\} \cap \{x \in A \mid f(x) \geq a\},$$

og endvidere er

$$\{x \in A \mid f(x) = +\infty\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) > n\} \qquad (a = +\infty)$$
$$\{x \in A \mid f(x) = -\infty\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f(x) < -n\} \qquad (a = -\infty). \blacksquare$$

Vort resultat ovenfor kan nu udtrykkes:
Enhver Lebesgue integrabel funktion er også Lebesgue målelig.
Det ses let, at det omvendte ikke er tilfældet.

Sætninger om klassen af Lebesgue målelige funktioner.

Når f er Lebesgue målelig, da er også kf for ethvert $k \in R^*$, f^2, $|f|$, $|f|^p$ for ethvert $p \in \mathring{R}_+$, $\frac{1}{f}$ alle Lebesgue målelige.

Bevis: Eksempelvis er

$$\{x \in A \mid +\infty \cdot f(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) \geq 0\} & \text{for } a < 0 \\ \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a \geq 0 \end{cases}$$

$$\{x \in A \mid f(x)^2 > a\} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A \mid f(x) < -\sqrt{a}\} & \text{for } a \geq 0 \\ A & \text{for } a < 0 \end{cases}$$

$$\{x \in A \mid 1/f(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in A \mid f(x) < 1/a\} \cap \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a > 0 \\ \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a = 0 \\ \{x \in A \mid f(x) < 1/a\} \cup \{x \in A \mid f(x) > 0\} & \text{for } a < 0. \blacksquare \end{cases}$$

Når f og g er Lebesgue målelige, da er også $f+g$, $f-g$, fg, f/g Lebesgue målelige.

At $f+g$ er Lebesgue målelig ses i det tilfælde, hvor $f(x)$ og $g(x)$ ikke for noget x er uendelige med modsat fortegn, af at

$$\{x \in A \mid f(x)+g(x) > a\} = \bigcup \left[\{x \in A \mid f(x) > r_1\} \cap \{x \in A \mid g(x) > r_2\}\right]$$

hvor foreningsmængden tages over alle rationale r_1 og r_2 med $r_1+r_2 > a$. Hvis der findes punkter x, for hvilke $f(x)$ og $g(x)$ er uendelige med modsat fortegn, skal man for $a < 0$ under $\bigcup$-tegnet tilføje de to mængder

$$\{x \in A \mid f(x) = +\infty\} \cap \{x \in A \mid g(x) = -\infty\} \qquad \text{og}$$
$$\{x \in A \mid f(x) = -\infty\} \cap \{x \in A \mid g(x) = +\infty\}.$$

Måleligheden af $f-g$, fg, f/g følger af at $f-g = f+(-g)$, $fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2$ og $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$. $\blacksquare$

Når f og g er Lebesguemålelige, da er også $f \vee g$ og $f \wedge g$ Lebesgue målelige.

Bevis:

$$\{x \in A \mid f(x) \vee g(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a\} \cup \{x \in A \mid g(x) > a\}$$
$$\{x \in A \mid f(x) \wedge g(x) > a\} = \{x \in A \mid f(x) > a\} \cap \{x \in A \mid g(x) > a\}. \blacksquare$$

For enhver følge $f_1, f_2, \ldots$ af Lebesgue målelige funktioner *er også $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ og $\liminf f_n$ Lebesgue målelige.*

Bevis:

$\{x \in A \mid \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in A \mid f_n(x) > a\}$

$\{x \in A \mid \inf f_n(x) > a\} = \bigcap_n \{x \in A \mid f_n(x) \geq a\}$

og $\limsup f_n = \inf_n g_n$, hvor $g_n = \sup_{p \geq n} f_p$, medens $\liminf f_n = \sup_n h_n$, hvor $h_n = \inf_{p \geq n} f_p$. ∎

For enhver konvergent følge $f_1, f_2, \ldots$ af Lebesgue målelige funktioner er $\lim f_n$ Lebesgue målelig.

Bevis: Dette følger af den foregående sætning, da $\lim f_n = \limsup f_n$. ∎

Når $f \sim g$, d.v.s. når $f(x) = g(x)$ for næsten alle x, da er enten begge eller ingen af funktionerne Lebesgue målelige.

Bevis: $\{x \in A \mid f(x) > a\}$ og $\{x \in A \mid g(x) > a\}$ er samtidig Lebesgue målelige, idet f.eks. den sidste mængde fås af den første ved at fjerne $\{x \in A \mid f(x) > a, g(x) \leq a\}$ og tilføje $\{x \in A \mid g(x) > a, f(x) \leq a\}$. Som delmængder af nulmængden $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ er jo disse mængder Lebesgue målelige. ∎

Også begrebet Lebesgue målelighed kan således opfattes som knyttet til ækvivalensklasser, ikke blot til de enkelte funktioner. Vi kan endvidere inddrage funktioner, som kun er definerede næsten overalt. En sådan kaldes Lebesgue målelig, hvis en (vilkårlig) udvidelse til hele rummet er Lebesgue målelig.

Vi vil nu beskæftige os med spørgsmålet om, hvilke Lebesgue målelige funktioner der er Lebesgue integrable. Vi beviser først:

En Lebesgue målelig funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis der findes Lebesgue integrable funktioner $\underline{g}$ og $\overline{g}$, således at $\underline{g} \leq f \leq \overline{g}$.

Bevis: Det er klart at betingelsen er nødvendig. ($\underline{g} = f = \overline{g}$)

Hvis $\underline{g} \leq f \leq \overline{g}$, hvor $\underline{g}$ og $\overline{g}$ er Lebesgue integrable, sætter vi $h = |\underline{g}| \vee |\overline{g}|$. Da er også h Lebesgue integrabel, og $|f| \leq h$.

For ethvert n betragter vi nu mængderne

$$A_{n,\nu} = \{x \in W_n \mid f(x) \geq \nu/n\}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n^2$$

$$A_{n,-\nu} = \{x \in W_n \mid f(x) \leq -\nu/n\}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n^2$$

Disse er alle målelige, og funktionen

$$f_n = \sum_{\nu=1}^{n^2} 1/n \cdot 1_{A_{n,\nu}} + \sum_{\nu=1}^{n^2} (-1/n) \cdot 1_{A_{n,-\nu}}$$

er derfor integrabel. Dens værdier er karakteriseret således:

For ethvert $x \notin W_n$ er $f_n(x) = 0$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $-1/n < f(x) < 1/n$, er $f_n(x) = 0$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $\nu/n \leq f(x) < (\nu+1)/n$ $(\nu = 1,2,\dots,n^2-1)$, er $f_n(x) = \nu/n$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $f(x) \geq n$, er $f_n(x) = n$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $-(\nu+1)/n < f(x) \leq -\nu/n$ $(\nu = 1,2,\dots,n^2-1)$, er $f_n(x) = -\nu/n$.

For ethvert $x \in W_n$, for hvilket $f(x) \leq -n$, er $f_n(x) = -n$.

Det ses, at funktionsfølgen $f_1, f_2, \dots$ er konvergent i hele R^k med grænsefunktionen f. Da $|f_n| \leq |f|$ for alle n, har følgen den integrable funktion h som absolut majorant. Af sætningen om absolut majoriseret konvergens (MI 2,6,5) fremgår derfor, at f er Lebesgue integrabel, hvilket skulle bevises.∎

Vi beviser dernæst:

<u>Hvis f er Lebesgue målelig og $\underline{I}(f) > -\infty$, da er enten f Lebesgue integrabel eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$.</u>

Bevis: Da $\underline{I}(f) > -\infty$ kan vi vælge en følge af trappefunktioner $\underline{f}_n \downarrow \leq f$ således at $\lim I(\underline{f}_n) > -\infty$. Vi sætter $g = \lim \underline{f}_n$. Ifølge sætningen om monoton grænseovergang (MI 2,6,3) er g Lebesgue integrabel. Endvidere er $g \leq f$. Vi sætter nu $f_n = f \wedge (n \cdot 1_{W_n})$. Da er f_n Lebesgue målelig og $g \wedge 0 \leq f_n \leq n \cdot 1_{W_n}$. Da begge funktionerne $g \wedge 0$ og $n \cdot 1_{W_n}$ er Lebesgue integrable, følger af den foregående sætning, at f_n er Lebesgue integrabel. Imidlertid er $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ og $\lim f_n = f$. Hvis nu $\lim I(f_n) < +\infty$, er f Lebesgue integrabel ifølge sætningen om monoton grænseovergang (MI 2,6,2). Hvis $\lim I(f_n) = +\infty$ er $\underline{I}(f) = +\infty$ (idet $\underline{I}(f) \geq I(f_n)$ for alle n) og altså også $\overline{I}(f) = +\infty$.∎

Ved anvendelse af sætningen på $-f$ fås følgende modstykke:

<u>Hvis f er Lebesgue målelig og $\overline{I}(f) < +\infty$, da er enten f Lebesgue integrabel eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$.</u>

Disse to sætninger kan sammenfattes på følgende måde:

<u>For en Lebesgue målelig funktion f består kun fire muligheder:</u>

1. Funktionen er Lebesgue integrabel.
2. $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$.
3. $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$.
4. $\underline{I}(f) = -\infty$, $\overline{I}(f) = +\infty$.

Funktioner med uendeligt integral.

En Lebesgue målelig funktion f, for hvilken $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$, tilskrives integralet $I(f) = +\infty$, og en Lebesgue målelig funktion f, for hvilken $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$, tilskrives integralet $I(f) = -\infty$. Sådanne funktioner kaldes dog ikke Lebesgue integrable. Vi kan sige, at de er Lebesgue integrable i udvidet forstand. Ikke-målelige funktioner, for hvilke $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = +\infty$ eller $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = -\infty$ tilskrives ikke noget integral.

Bemærk: Enhver ikke-negativ målelig funktion er enten Lebesgue integrabel eller tilskrives integralet $I(f) = +\infty$. Thi da $\underline{I}(f) \geq 0$ er de to sidste af de ovennævnte fire muligheder udelukkede.

Punktmængder med uendeligt mål.

En punktmængde U tilskrives målet $m(U) = +\infty$, såfremt den opfylder følgende to betingelser:

1. For enhver Lebesgue målelig mængde A er $U \cap A$ Lebesgue målelig.
2. $m_i(U) = m_y(U) = +\infty$.

Sådanne mængder kaldes dog ikke Lebesgue målelige. Vi kan sige, at de er Lebesgue målelige i udvidet forstand.

Mængden U tilskrives målet $m(U) = +\infty$, hvis og kun hvis funktionen 1_U tilsktives integralet $I(1_U) = +\infty$.

Bevis: Hvis $I(1_U) = +\infty$, er 1_U målelig. Altså er $1_U \wedge 1_A = 1_{U \cap A}$ for enhver målelig mængde A, og da $0 \leq 1_{U \cap A} \leq 1_A$ ses, at $1_{U \cap A}$ er integrabel. Følgelig er $U \cap A$ målelig. Endvidere er $m_i(U) = \underline{I}(1_U) = +\infty$, $m_i(U) = \overline{I}(1_U) = +\infty$ (MI 2,7,2).

Hvis $m(U) = +\infty$, er 1_U målelig. Thi for enhver målelig mængde A og ethvert $a \in \dot{R}$ er $\{x \in A \mid 1_U(x) > a\}$ enten $\emptyset$, $U \cap A$ eller A. Endvidere er $\underline{I}(1_U) = m_i(U) = +\infty$, $I(1_U) = m_y(U) = +\infty$ (MI 2,7,2). ■

§10. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for Riemann integrabilitet.

En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at en begrænset funktion f på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte er Riemann integrabel, er, at f er kontinuert næsten overalt, altså at mængden af diskontinuitetspunkter er en nulmængde.

Bemærk, at der allerede i selve betingelsen indgår et begreb fra Lebesgues teori, ligesom det følgende bevis benytter Lebesgue integralet.

Halvkontinuert funktion (R.Baire 1899).

En reel funktion f på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier kaldes opad halvkontinuert i et punkt x_0, hvis mængden $\{x|f(x) < a\}$ for ethvert $a > f(x_0)$ har x_0 som indre punkt. (Specielt, hvis $f(x_0) = +\infty$.) Funktionen kaldes nedad halvkontinuert i punktet x_0, hvis mængden $\{x|f(x) > a\}$ for ethvert $a < f(x_0)$ har x_0 som indre punkt. (Specielt, hvis $f(x_0) = -\infty$.)

Man ser, at nødvendigt og tilstrækkeligt for, at f er kontinuert i x_0 er, at f er både opad og nedad halvkonuinuert i x_0.

Funktionen f kaldes opad halvkontinuert i en mængde A, hvis den er opad halvkontinuert i ethvert $x_0 \in A$. Analogt for nedad halvkontinuert.

Det ses, at nødvendigt og tilstrækkeligt for, at f er opad halvkontinuert i $\grave{R}^k$, er, at mængden $\{x|f(x) < a\}$ er åben for ethvert $a \in \grave{R}$, og for, at f er nedad halvkontinuert i $\grave{R}^k$, er at mængden $\{x|f(x) > a\}$ er åben for ethvert $a \in \grave{R}$.

Heraf følger: Enhver halvkontinuert funktion f i $\grave{R}^k$ er Lebesmålelig. Thi lad os f.eks. antage, at f er opad halvkontinuert. For enhver målelig mængde A og ethvert $a \in R$ er da $\{x \in A|f(x) < a\}$ $= A \cap \{x|f(x) < a\}$ og dermed målelig. (MI 2,7,4)∎

Hvis f er opad halvkontinuert (i et punkt x_0 eller i en mængde A) er -f nedad halvkontinuert (i x_0 eller i A), og omvendt.

Øvre og nedre limesfunktion.

Lad f være en reel funktion på $\grave{R}^k$ med endelige eller uendelige værdier. For et vilkårligt punkt x betragter vi en vilkårlig åben mængde A, der indeholder x, og danner $\sup_{y \in A} f(y)$. Den ved

$$\tilde{f}(x) = \inf_A \sup_{y \in A} f(y)$$

definerede funktion $\tilde{f}$, hvor infimum for hvert x skal tages over alle åbne mængder A, der indeholder x, kaldes den <u>øvre limesfunktion</u> for f. Tilsvarende kaldes den ved

$$\underset{\sim}{f}(x) = \sup_A \inf_{y \in A} f(y)$$

definerede funktion $\underset{\sim}{f}$, hvor supremum for hvert x skal tages over alle åbne mængder A, der indeholder x, den <u>nedre limesfunktion</u> for f.

Lad $J(x,h)$ for ethvert $x = (x_1,\dots,x_k)$ og ethvert $h > 0$ betegne intervallet $]x_1-h,\ x_1+h[\times\dots\times]x_k-h,\ x_k+h[$. Man efterviser let, at

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h\to 0}\sup_{y\in J(x,h)} f(y),\quad \underset{\sim}{f}(x) = \lim_{h\to 0}\inf_{y\in J(x,h)} f(y)$$

hvilket ofte kort skrives

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y\to x}\sup f(y) \text{ og } \underset{\sim}{f}(x) = \lim_{y\to x}\inf f(y).$$

Dette forklarer benævnelsen: limesfunktion.

Det er klart, at

$$\underset{\sim}{f} \leq f \leq \tilde{f}.$$

Funktionen f er opad halvkontinuert i x, hvis og kun hvis $f(x) = \tilde{f}(x)$, og nedad halvkontinuert i x, hvis og kun hvis $f(x) = \underset{\sim}{f}(x)$. Altså er f kontinuert i x, hvis og kun hvis $\underset{\sim}{f}(x) = \tilde{f}(x)$, d.v.s.

<u>Mængden af diskontinuitetspunkter for f er $\{x \mid \underset{\sim}{f}(x) < \tilde{f}(x)\}$.</u> Differensen $\tilde{f}(x)-\underset{\sim}{f}(x)$ kaldes oscillationen af f i punktet x.

Den øvre limesfunktion af $\tilde{f}$ er $\tilde{f}$ selv. Thi for enhver åben mængde A gælder $\sup_{y\in A}\tilde{f}(y) = \sup_{y\in A} f(y)$. Vi har nemlig $\sup_{y\in A}\tilde{f}(y) \geq \sup_{y\in A} f(y)$, idet $\tilde{f} \geq f$, og $\sup_{y\in A}\tilde{f}(y) \leq \sup_{y\in A} f(y)$ idet $\tilde{f}(y) \leq \sup_{z\in A} f(z)$ for ethvert $y \in A$, ifølge definitionen af $\tilde{f}$.

Med andre ord: <u>$\tilde{f}$ er opad halvkontinuert i $\grave{R}^k$.</u> Yderligere gælder: Er g opad halvkontinuert i $\grave{R}^k$ og $g \geq f$, da er $g \geq \tilde{f}$. Thi af $g \geq f$ følger $\tilde{g} \geq \tilde{f}$, og da g er opad halvkontinuert, er $g = \tilde{g}$. Vi siger derfor, at <u>$\tilde{f}$ er den mindste opad halvkontinuerte majorant for f.</u>

Tilsvarende fås: $\underset{\sim}{f}$ er nedad halvkontinuert i $\grave{R}^k$. Er g nedad halvkontinuert i $\grave{R}^k$ og $g \leq f$, da er $g \leq \underset{\sim}{f}$. Vi siger derfor, at $\underset{\sim}{f}$ er den største nedad halvkontinuerte minorant for f.

Lad nu specielt f være en begrænset funktion med begrænset støtte. Da er også $\underset{\sim}{f}$ og $\tilde{f}$ begrænsede funktioner med begrænset støtte. Da de er Lebesgue målelige, er de også Lebesgue integrable. Vi vil nu bevise:

Lad f være en begrænset funktion med begrænset støtte. Da er Det øvre og nedre Riemann integral af f lig med Lebesgue integralet af den øvre og den nedre limesfunktion for f: $\underline{R}(f) = I(\underset{\sim}{f})$ og $\overline{R}(f) = I(\tilde{f})$.

Bevis: Det er nok at vise, at $\overline{R}(f) = I(\tilde{f})$, da man i så fald har $\underline{R}(f) = -\overline{R}(-f) = -I(\widetilde{-f}) = -I(-\underset{\sim}{f}) = I(\underset{\sim}{f})$

Vi viser først, at $\overline{R}(f) \geq I(f)$: For en vilkårlig trappefunktion $\overline{f} \geq f$ er $\overline{f}(x) \geq \tilde{f}(x)$ i ethvert punkt x, der er indre punkt af et konstansinterval for $\overline{f}$, altså for næsten alle x. Følgelig er $I(\overline{f}) \geq I(\tilde{f})$, og dermed også $\overline{R}(f) \geq I(\tilde{f})$.

For at vise, at $\overline{R}(f) \leq I(\tilde{f})$, betragter vi et interval J, uden for hvilket $f(x) = 0$, og foretager en følge af delinger af J, således at følgende gælder:

a) ved hver deling er J inddelt i endelig mange disjunkte intervaller;

b) den n+1'te deling er for hvert n en videredeling af den n'te deling;

c) kantlængderne i samtlige delintervaller i den n'te deling er $< 1/n$.

For ethvert n betragter vi nu den trappefunktion f_n, som er 0 uden for J, og som i hvert af delintervallerne af den n'te deling er lig med supremum af f(x) i det pågældende interval.

En simpel overvejelse viser, at $f_1 \geq f_2 \geq \ldots$ og $\lim f_n \leq \tilde{f}$. Ifølge definitionen af nedre Lebesgue integral er derfor $\lim I(f_n) \leq \underline{I}(\tilde{f})$. Da $\tilde{f}$ er Lebesgue integrabel, er følgelig $\lim I(f_n) \leq I(\tilde{f})$. På den anden side er $\overline{R}(f) \leq I(f_n)$ for alle n, og dermed $\overline{R}(f) \leq \lim I(f_n)$. Følgelig er $\overline{R}(f) \leq I(\tilde{f})$, hvilket skulle bevises. ∎

Rigtigheden af sætningen i paragraffens begyndelse indses nu, når men erindrer, at $I(\tilde{f}) = I(\underset{\sim}{f})$ hvis og kun hvis $\{x \mid \underset{\sim}{f}(x) < \tilde{f}(x)\}$ er en nulmængde.

I det specielle tilfælde, hvor f er den karakteristiske funktion af en punktmængde A, er $\tilde{f}$ den karakteristiske funktion af afslutningen $\overline{A}$ af A, og $\underset{\sim}{f}$ er den karakteristiske funktion af det indre $\mathring{A}$ af A. Dette følger umiddelbart af defifitionen af disse begreber. Af sammenhængen mellem mål og integral (MI 2,3,1 og MI 2,7,2) fås derfor:

Det ydre og indre Riemann mål af en begrænset punktmængde A i R^k er lig med Lebesgue målet af A's afslutning $\overline{A}$ og af A's indre $\mathring{A}$:

$$\underline{r_i(A) = m(\mathring{A}) \qquad r_y(A) = m(\overline{A}).}$$

<u>Følgelig er forskellen $r_y(A) - r_i(A)$ lig med Lebesgue målet af A's rand $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$:</u>

$$\underline{r_y(A) - r_i(A) = m(\partial A) = m(\overline{A} \setminus \mathring{A}).}$$

<u>Mængden er altså Riemann målelig, hvis og kun hvis dens rand er en nulmængde.</u>

§11. Lebesgue integrabilitet og Lebesgue målelighed i en punktmængde.

Vi har hidtil betragtet funktioner defineret på hele $\grave{R}^k$. En funktion f, der ikke nødvendigvis er defineret på hele $\grave{R}^k$, kaldes Lebesgue integrabel i (eller over) en punktmængde A tilhørende funktionens definitionsmængde, såfremt den i hele $\grave{R}^k$ definerede funktion f_A, der bestemmes ved

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \notin A \end{cases}$$

er Lebesgue integrabel. Iså fald kaldes $I(f_A)$ integralet af f over A og betegnes (f.eks.)

$$\int_A f(x)m(dR^k)$$

Tilsvarende kaldes f Lebesgue målelig i A, såfremt f_A er Lebesgue målelig.

I praksis har kun det tilfælde interesse, hvor A er målelig eller evt. har målet $+\infty$.

De grundlæggende sætninger om Lebesgue integrable og Lebesgue målelige funktioner overføres umiddelbart til det tilfælde, hvor talen er om funktioner defineret i en fast mængde E, som er henholdsvis integrable eller målelige i E.

Af særlig interesse for anvendelserne er følgende sætninger:

<u>Hvis f er integrabel over en mængde E, da er f også integrabel over enhver målelig delmængde A af E.</u>

Thi $f_A = f_E \cdot 1_A$ er målelig og har den integrable numeriske majorant $|f_E|$. ∎

<u>Hvis f er integrabel over en mængde E, og A og B er disjunkte målelige delmængder af E, da er</u>

$$\int_{A\cup B} f(x)m(dR^k) = \int_A f(x)m(dR^k) + \int_B f(x)m(dR^k).$$

Thi $f_{A\cup B} = f_A + f_B$. ∎

<u>Hvis f er integrabel over en mængde E, og $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ er en stigende følge af målelige delmængder af E, da er</u>

$$\int_{\cup A_n} f(x)m(dR^k) = \lim \int_{A_n} f(x)m(dR^k).$$

Thi $f_{\cup A_n} = \lim f_{A_n}$, og følgen $f_{A_1}, f_{A_2}, \ldots$ har den integrable numeriske majorant $|f_E|$. ∎

Vi nævner endvidere:

<u>Hvis f er målelig i E, da er f også målelig i enhver målelig delmængde A af E.</u>

I tilfældet K = 1 benytter vi for Lebesgueintegralet over et interval med endepunkterne a og b den sædvanlige betegnelse

$$\int_b^a f(x)dx.$$

Det volder ikke vanskelighed, at man benytter samme betegnelse, uanset hvilken af de fire intervaltyper, talen er om, idet de jo kun adskiller sig ved nulmængder. Som sædvanlig defineres for $b < a$:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Med disse betegnelser har men <u>indskudsreglen:</u>

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Det <u>ubestemte Lebesgue integral</u> af en funktion f, der er Lebesgue integrabel i E, hvor E betegner et interval eller evt. en halvlinie eller hele R, defineres ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \text{konstant},$$

hvor a betegner et punkt af E (i kraft af indskudsreglen ligegyldigt hvilket).

<u>F(x) er en kontinuert funktion.</u>

Thi lad $x_n \to x_o$. Differensen $F(x_n)-F(x_o)$ er $\pm$ integralet $I(f_{A_n})$ hvor A_n er det åbne interval med endepunkterne x_n og x_o. Følgen af funktioner f_{A_n} konvergerer mod 0 og har den integrable numeriske majorant $|f_E|$. Følgelig gælder $\lim I(f_{A_n}) = 0$.$\blacksquare$

Sluttelig anføres et par formler, der bekvemt kan udtrykkes ved hjælp af integraltegnet:

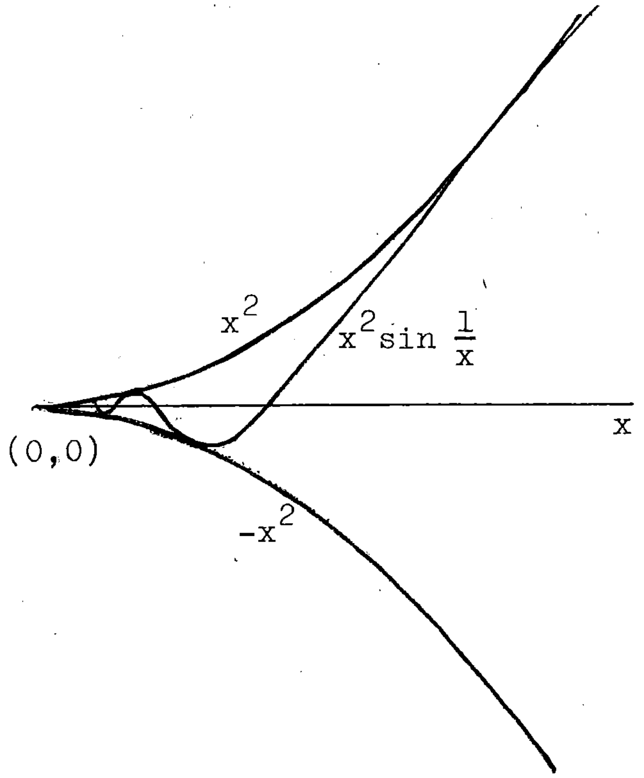
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx \quad ; \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x/k)dx.$$

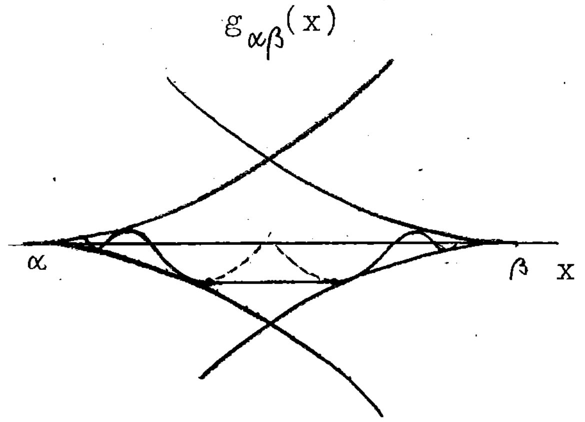
Formlernes rigtighed sluttes af, at de gælder for trappefunktioner.

Vi vil ikke her systematisk behandle generalisationer af alle integralregningens kendte regler til Lebesgue integrable funktioner. I de tilfælde, hvor vi i det følgende får brug for sådanne generalisationer, vil vi bevise dem.

§12. Differentiation og integration.

Volterras eksempel (V.Volterra 1881).





For funktionen g defineret på den positive halvakse $\grave{R}_+$ ved

$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

har vi $$g''(x) = -\cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}$$

I nærheden af $(0,0)$ svinger $y = g(x)$ uendelig ofte mellem de to $y = x^2$ og $y = -x^2$; vilkårlig tæt ved 0 har g maxima og minima. Af udtrykket for g' fremgår, at der vilkårlig tæt ved 0 findes punkter x, hvor $g'(x) = 1$, såvel som punkter x, hvor $g'(x) = -1$. Idet $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ for alle $x > 0$, ses at $|g'(x)| < 3$ for alle $x > 0$.

Med $g_{\alpha\beta}$ betegner vi den funktion på $]\alpha,\beta[$, der fås ud fra funktionen g forskudt stykket α, idet $g_{\alpha\beta}$ følger denne forskudte funktion fra α til det sidste ekstremumspunkt $\alpha+k$ før midtpunktet $\frac{\alpha+\beta}{2}$, derpå fastholder ekstremumsværdien til $\beta-k$, hvorefter definitionen fuldendes ved at vi forlanger symmetri om $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

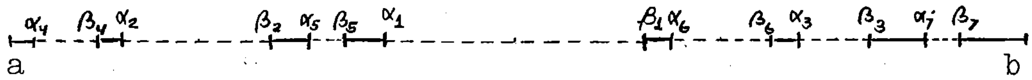
Altså:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha} & \text{for} \quad \alpha < x \leq \alpha+k \\ k^2\sin\frac{1}{k} & \text{for} \quad \alpha+k \leq x \leq \beta-k \\ (\ \ -x)^2\sin\frac{1}{\ \ -x} & \text{for} \quad \beta-k \leq x < \beta. \end{cases}$$

Da det ikke fremgår af betegnelserne, bemærkes, at k afhænger af intervallængden $\beta-\alpha$.

Funktionen $g_{\alpha\beta}$ er differentiabel og $g'_{\alpha\beta}$ kontinuert i hele $]\alpha,\beta[$, men vilkårlig tæt ved α og β findes punkter x, hvor $g'_{\alpha\beta}(x) = 1$, såvel som punkter x, hvor $g'_{\alpha\beta}(x) = -1$. For alle x i $]\alpha,\beta[$ gælder $|g''_{\alpha\beta}(x)| < 3$.

Symmetrisk om midtpunktet i et afsluttet interval $[a,b]$ tænkes nu valgt et åbent delinterval $]\alpha_1,\beta_1[$, symmetrisk om midtpunkterne i hvert af de to resterende afsluttede intervaller $[a,\alpha_1]$ og $[\beta_1,b]$ tænkes valgt åbne delintervaller $]\alpha_2,\beta_2[$ og $]\alpha_3,\beta_3[$, i næste skridt tænkes på tilsvarende måde valgt fire åbne intervaller, o.s.v. Figuren viser de første af intervallerne $]\alpha_1,\beta_1[,]\alpha_2,\beta_2[, \ldots,]\alpha_n,\beta_n[, \ldots$.



Idet vi med Z betegner mængden

$$Z = [a,b] \setminus (]\alpha_1,\beta_1[\cup]\alpha_2,\beta_2[\cup \ldots \cup]\alpha_n,\beta_n[\cup \ldots),$$

vil vi undersøge den funktion f på $[a,b]$, der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} g_{\alpha_n\beta_n}(x) & \text{for } \alpha_n < x < \beta_n,\ n = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{for } x \in Z. \end{cases}$$

Man kan danne sig en forestilling om det grafiske billede af f ved at indføre billedet af $g_{\alpha_1\beta_1}$ (med tilhørende parabelbuer) i stedet for det punkterede stykke $]\alpha_1,\beta_1[$ på figuren, o.s.v.

Det er klart, at f er differentiabel i hvert $x \in]\alpha_n,\beta_n[$, n = 1,2,.. I et vilkårligt $x \in Z$ er f differentiabel med $f'(x) = 0$. Dette ses af

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \left|\frac{f(x+h)}{h}\right| \leq |h|,$$

hvor vurderingen fremkommer således: 1) Hvis $x+h \in Z$, er $f(x+h) = 0$. 2) Hvis $x+h \notin Z$, er $x+h \in]\alpha_n,\beta_n[$ for et vist n, d.v.s. $x \leq \alpha_n < x+h < \beta_n$, idet vi eksempelvis tænker os $h > 0$; følgelig er

$$|f(x+h)| = |g_{\alpha_n\beta_n}(x+h)| \leq (x+h-\alpha_n)^2 \leq h^2.$$

Funktionen f er således differentiabel i hele $[a,b]$. Differentialkvotienten f' er begrænset, nemlig $|f'(x)| < 3$ for alle $x \in [a,b]$.

Det er klart, at f' er kontinuert for ethvert $x \in]\alpha_n,\beta_n[$, n = 1,2,... . Betragter vi derimod et vilkårligt $x \in Z$, findes for ethvert $\delta > 0$ et intervalendepunkt α_n eller β_n, hvis afstand fra x er mindre end δ, – afstanden fra x til et af punkterne α_1 og β_1 er jo mindre end $\frac{1}{2}(b-a)$, afstanden fra x til et af punkterne $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ er mindre end $\frac{1}{4}(b-a)$, o.s.v. –, og i $]\alpha_n, \beta_n[$ findes jo vilkårlig tæt ved α_n og β_n, specielt inden for afstanden δ fra x, punkter t, hvor $f'(t) = 1$, såvel som punkter t, hvor $f'(t) = -1$.

Mængden af diskontinuitetspunkter for f' er derfor Z.
Nu er $$m(Z) = (b-a) - \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n).$$
Ved at disponere således, at $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) < (b-a)$, opnår vi, at $m(Z) > 0$. Ifølge §10 vil f' da ikke være Riemann integrabel.∎

Volterras eksempel viser således, at en funktion kan være differentiabel i et interval med en begrænset differentialkvotient, uden at denne er Riemann integrabel. Denne mangel har Lebesgue integralet ikke:

Sætning. Når en funktion f er differentiabel i et afsluttet interval $[a,b]$ med en begrænset differentialkvotient f', da er f' Lebesgue integrabel og $\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$.

Bevis: Idet f tænkes udvidet, således at det grafiske billede suppleres ud over $(b,f(b))$ med tangenten i dette punkt, vil differenskvotienten
$$g_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
for fastholdt $h > 0$ være en kontinuert (endda differentiabel) funktion af x på $[a,b]$. Vælger vi en følge af positive tal $h_1, h_2, \ldots$ med $\lim h_n = 0$, vil funktionsfølgen $g_{h_1}, g_{h_2}, \ldots$ være konvergent i $[a,b]$ med f' som grænsefunktion. At f' er forudsat begrænset, sikrer nu, at vi kan anvende Lebesgues sætning om majoriseret konvergens (MI 2,6,5). Ifølge differentialregningens middelværdisætning har vi jo, at der for ethvert $x \in [a,b]$ og ethvert $h > 0$ findes et θ i $]0,1[$ for hvilket $g_h(x) = f'(x+\theta h)$; da $|f'(t)| \leq C$ for $a \leq t \leq b$ og dermed for $a \leq t < \infty$, er således også $|g_{h_n}| \leq C$ for alle n. Vi har derfor: f' er Lebesgue integrabel og $\int_a^b f'(x)dx = \lim \int_a^b g_{h_n}(x)dx$.
Beviset fuldføres nu ved følgende regning:
$$\int_a^b g_h(x)dx = \int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)dx$$
$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx \to f(b) - f(a) \quad \text{for } h \to 0,$$
(ved grænseovergangen her benyttes kontinuiteten af den udvidede funktion f i a og b).∎

<u>Tilføjelse.</u> Ved anvendelse af sætningen på et delinterval $[a,x]$ fås

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a),$$

d.v.s. under de anførte forudsætninger er <u>f et ubestemt integral af f'.</u>

Der henvises i øvrigt til kap. 5.

§13. Osgoods kurve.

<u>En kontinuert kurve $(x,y) = (f(t),g(t))$, $0 \leq t \leq 1$, uden multiple punkter, der udgør en punktmængde i planen med positivt mål.</u>

For enhver kuntinuert kurve $(x,y) = (f(t),g(t))$, $0 \leq t \leq 1$, er punktmængden $K = \{(f(t),g(t)) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ en afsluttet begrænset punktmængde i planen, altså målelig. Peanos kurve (MI 1,4,1) viser, at målet $m(K)$ kan være positivt. Peanos kurve har imidlertid multiple punkter, d.v.s. punkter, der optræder for mere end en parameterværdi. Kurver uden multiple punkter, for hvilke $m(K) > 0$, kan fås ved en simpel ændring af Peanos konstruktion. Følgende eksempel skyldes W.F.Osgood (1903).

Af kvadratet $A = [0,1] \times [0,1]$ udskæres fire strimler, således at der resterer 9 kvadrater. Med A_1 betegner vi den på fig. 1 viste afsluttede trappemængde bestående af de 9 afsluttede kvadrater og forbindende liniestykker. Vi vælger strimlerne således, at $m(A_1) > \frac{1}{2}$. Vi danner den kontinuerte kurve $(x,y) = (f_1(t),g_1(t))$, $0 \leq t \leq 1$, bestående af de viste diagonaler og de forbindende liniestykker, gennemløbet således at $t = 0$ og $t = 1$ svarer til $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (1,1)$ og $t = \frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \ldots, \frac{16}{17}$ til knækpunkterne, og således at hvert liniestykke gennemløbes med konstant hastighed.

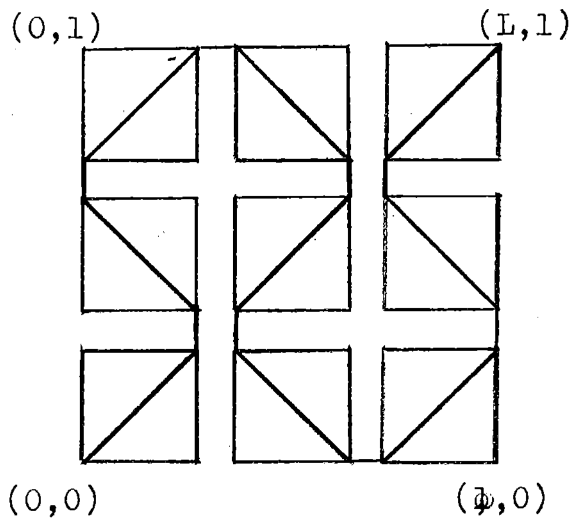


fig. 1

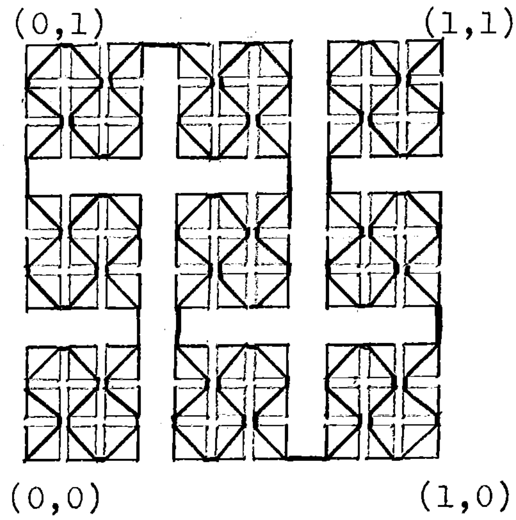


fig. 2

Af hvert af de 9 kvadrater udskærer vi nu fire strimler, således at der resterer 81 kvadrater. Med A_2 betegner vi den på fig. 2 viste afsluttede trappemængde bestående af de 81 afsluttede kvadrater og forbindende liniestykker, dels dem, der optrådte i A_1, dels nye. Vi vælger strimlerne således, at $m(A_2) > \frac{1}{2}$. Vi danner nu den kontinuerte kurve $(x,y) = (f_2(t), g_2(t))$, $0 \leq t \leq 1$, bestående af de viste diagonaler og de forbindende liniestykker, gennemløbet således, at $t = 0$ og $t = 1$ svarer til $(0,0)$ og $(1,1)$ og $t = \frac{1}{289}, \frac{2}{289}, \dots, \frac{16}{289}, \frac{1}{17}, \frac{2}{17}, \frac{35}{289}, \frac{36}{289}, \dots, \frac{50}{289}, \frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{69}{289}, \dots, \frac{288}{289}$ til knækpunkterne, og således at hvert liniestykke gennemløbes med konstant hastighed.

Idet vi fortsætter således, fås i det n'te skridt en mængde A_n med $m(A_n) > \frac{1}{2}$ og en kurve $(x,y) = (f_n(t), g_n(t))$, $0 \leq t \leq 1$, sammensat af diagonaler i 9^n kvadrater og forbindende liniestykker, hvert gennemløbet med konstant hastighed. Til $t = 0$ og $t = 1$ svarer $(0,0)$ og $(1,1)$, og i de parameterintervaller, der svarer til de forbindende liniestykker for den (n-1)"te kurve, er $(f_{n-1}(t), g_{n-1}(t)) = (f_n(t), g_n(t))$.

Idet kvadraterne i A_n har kantlængde $< 1/3^n$, ses, at for $m > n$ er

$$|f_m(t) - f_n(t)| < 1/3^n \ , \quad |g_m(t) - g_n(t)| < 1/3^n \text{ for } t \in [0,1]$$

Funktionsfølgerne $f_1(t), f_2(t), \dots$ og $g_1(t), g_2(t), \dots$ er derfor ligeligt konvergente i intervallet $0 \leq t \leq 1$. Vi betegner deres grænsefunktioner med $f(t)$ og $g(t)$. Disse er da kontinuerte funktioner og bestemmer altså en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t)g(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Dette er Osgoods kurve.

For $t_1 \neq t_2$ er $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$. Thi vælges n således, at $2/17^n < |t_2 - t_1|$, vil $(f(t_1), g(t_1))$ og $(f(t_2), g(t_2))$ enten ligge i disjunkte kvadrater af mængden A_n eller et af dem i et kvadrat af A_n, det andet på et forbindende liniestykke af A_n, eller begge på forbindende liniestykker af A_n (evt. på samme). I alle tre tilfælde må gælde $(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2))$.

Punktmængden $K = \{(f(t), g(t)) | 0 \leq t \leq 1\}$ bliver lig med $\bigcap A_n$. Thi for ethvert n er $K \subseteq A_n$. Altså er $K \subseteq \bigcap A_n$. Og hvis $(x_o, y_o) \in \bigcap A_n$, vil (x_o, y_o) enten for et vist n tilhøre et forbindende liniestykke af A_n og altså tilhøre K eller for ethvert n tilhøre et kvadrat af A_n. I sidste tilfælde kan vi for enhver omegn af (x_o, y_o) finde et nummer n, således at det kvadrat af A_n, der indeholder (x_o, y_o) tilhører denne omegn. Vi ser da, at omegnen indeholder punkter af K. Da K er afsluttet, følger heraf, at (x_o, y_o) tilhører K. Følgelig er $m(K) = \lim m(A_n)$ (jfr. MI 2,7,3), og da alle $m(A_n) > \frac{1}{2}$, ser vi, at $m(K) \geq \frac{1}{2}$. ∎

<u>Bemærkning.</u> Føjer vi til Osgoods kurve liniestykkerne fra (1,1) til (2,1), fra (2,1) til (2,-1), fra (2,-1) til (0,-1), og fra (0,-1) til (0,0) fås en <u>lukket</u> kontinuert kurve uden multiple punkter (en Jordankurve). En sådan deler planen i to sammenhængende åbne mængder (d.v.s. dens komplementærmængde består af to sammenhængende åbne mængder), en begrænset og en ubegrænset, der begge har kurven til rand (Jordans sætning). En på denne måde bestemt begrænset sammengængende åben punktmængde (et Jordanområde) er således ikke nødvendigvis Riemann målelig. (jfr. MI 2,10,4)

§14. Funktioner med komplekse værdier.

En funktion $f = f(x) = f'(x) + if''(x)$ på $\grave{R}^k$ med komplekse værdier (f' og f'' er reelle funktioner med endelige værdier) kaldes Lebesgue integrabel, hvis f' og f'' er Lebesgue integrable, og vi sætter da

$$I(f) = I(f') + iI(f'').$$

Den kaldes Lebesgue målelig, hvis f' og f'' er Lebesgue målelige.

De fleste af de tidligere sætninger kan umiddelbart overføres til komplekse funktioner. Undtaget er naturligvis sætninger om sup, inf, lim sup, lim inf, som udtrykkeligt er knyttet til det reelle. Vi nøjes med at give nogle prøver, idet det iøvrigt må overlades læseren i påkommende tilfælde at gå efter, om et for reelle funktioner udledt resultat også gælder for komplekse.

<u>Hvis $f = f'+if''$ er Lebesgue integrabel, er også den konjugerede funktion $\overline{f} = f'-if''$ Lebesgue integrabel og $I(\overline{f}) = \overline{I(f)}$.</u>

Dette er indlysende.∎

<u>Hvis $f = f'+if''$ er Lebesgue integrabel, og $a = a'+ia''$ er et vilkårligt komplekst tal, da er af Lebesgue integrabel og $I(af) = aI(f)$.</u>

Thi $af = (a'f'-a''f'') + i(a'f''+a''f')$, altså er af Lebesgue integrabel og $I(af) = I(a'f'-a''f'') + iI(a'f''+a''f')$
$= a'I(f' - a''I(f'') + i(a'I(f'') + a''I(f')) = (a'+ia'')(I(f')+iI(f''))$.∎

<u>Hvis $f = f'+if''$ og $g = g'+ig''$ er Lebesgue integrable, er $f+g$ Lebesgue integrabel, og $I(f+g) = I(f)+I(g)$.</u>

Thi $f+g = (f'+g')+i(f''+g'')$.∎

<u>Hvis $f = f'+if''$ er Lebesgue integrabel, er også $|f|$ Lebesgue integrabel og $|I(f)| \leqq I(|f|)$.</u>

Bevis: Her klarer vi os ikke med at "skille realdel og imaginærdel". Vi benytter følgende kunstgreb.

$|f| = (f'^2+f''^2)^{\frac{1}{2}}$ er sikkert Lebesgue målelig, og har den integrable absolutte majorant $|f'|+|f''|$. Altså er $|f|$ Lebesgue integrabel (jfr. MI 2,9,3). Hvis $I(f) = 0$, er åbenbart $|I(f)| \leqq I(|f|)$. Hvis $I(f) \neq 0$, vælger vi et komplekst tal a med $|a| = 1$ således, at $aI(f)$ er reelt og større end 0. Da er $|I(f)| = aI(f) = I(af)$. Sættes $af = g'+ig''$, er $I(af) = I(g')+iI(g'') = I(g')$, idet tallet er reelt. Da $g' \leqq |af| = |f|$, finder vi $|I(f)| = I(g') \leqq I(|f|)$.∎

<u>For en konvergent følge af Lebesgue integrable funktioner</u>

$f_n = f_n' + if_n''$, som har en Lebesgue integrabel absolut majorant $h \geqq 0$ er også grænsefunktionen $f = f' + if''$ Lebesgue integrabel og $I(f) = \lim I(f_n)$.

Thi h er også absolut majorant for hver af følgerne f_n' og f_n''. ∎

Ved anvendelse af de sædvanlige regneoperationer, inklusive grænseovergang, på komplekse Lebesgue målelige funktioner, fås atter Lebesgue målelige funktioner.

En funktion $f = f' + if''$ er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis den er Lebesgue målelig og har en Lebesgue integrabel absolut majorant $h \geqq 0$ (d.v.s. $|f| \leqq h$).

Betingelserne er nødvendige ifølge det foregående. Og de er tilstrækkelige, idet $|f| \leqq h$ medfører $|f'| \leqq h$ og $|f''| \leqq h$. ∎

Kap. 3. Normerede funktionsrum.

§1. Normerede lineære rum.

Ved en norm i et vektorrum eller lineært rum (det sidste navn bruges især, vår elementerne er funktioner) forstås en reel funktion $f \to \|f\|$ dedineret på hele rummet, for hvilken der gælder

1) $\|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
2) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$
3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

I betingelsen 2) refererer c til reelle eller komplekse tal, eftersom rummet er et vektorrum over det reelle eller det komplekse tallegeme (andre tilfælde vil vi ikke betragte).

Af en norm udspringer en metrik ved definitionen

$$\mathrm{dist}(f,g) = \|f-g\|;$$

man verificerer umiddelbart $\|f-g\| \geq 0$, $\|f-g\| = 0 \Leftrightarrow f=g$; $\|g-f\| = \|f-g\|$; $\|f-g\| \leq \|f-h\| + \|h-g\|$.

Et lineært rum, hvori der er valgt en norm, kaldes normeret. Et normeret lineært rum tænker man sig altid forsynet med det af normen udspringende afstandsbegreb; det er således også et metrisk rum.

$L(\grave{R}^k)$.

Klassen $L = L(\grave{R}^k)$ af endelige reelle Lebesgue integrable funktioner på $\grave{R}^k$ er et lineært funktionsrum over de reelle tals legeme (jfr. MI 2,5,4). For $f \in L(R^k)$ sætter vi

$$\|f\|_1 = I(|f|) = \int_{\grave{R}^k} |f(x)|\, m(d\grave{R}^k).$$

Vi har

$$\|cf\|_1 = |c|\,\|f\|_1 \text{ og } \|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1;$$

thi $I(|cf|) = |c|\, I(|f|)$ følger af $|cf| = |c|\,|f|$, og $I(|f+g|) \leq I(|f|) + I(|g|)$ følger af $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Endvidere gælder

$$\|f\|_1 \geq 0, \quad \|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f \sim 0;$$

thi af $|f| \geq 0$ følger $I(|f|) \geq 0$ samt (jfr. MI 2,7,5) $I(|f|) = 0$, hvis og kun hvis $f(x) = 0$ for næsten alle x.

Sålænge vi tænker os $\|f\|_1$ knyttet til den enkelte funktion f, er betingelsen 1) således ikke ganske opfyldt. Dä $\|g\|_1 = \|f\|_1$ når $g \sim f$, kan vi imidlertid opfatte $\|f\|_1$ som knyttet til klassen af funktioner ækvivalente med f (MI 2,7,5-7), og herved afbødes manglen. Strengt taget er det altså det lineære rum af ækvivalensklasser, vi har normeret; vi vil dog omtale $\|f\|_1$ som 1-normen af funktionen f, blot erindre, at ækvivalente funktioner regnes for "lige gode"; herefter er der iøvrigt intet i vejen for også at medtage Lebesgue integrable funktioner, der kan antage uendelige værdier, idet enhver sådan jo er ækvivalent med en endelig funktion (MI 2,7,6). Tilsvarende vil vi omtale

$$\|f-g\|_1 = I(|f-g|) = \int_{\grave{R}^k} |f(x)-g(x)|\, m(dR^k)$$

som afstanden mellem funktionerne f og g, skønt vi strengt taget burde tale om afstand mellem ækvivalensklasser.

Mærk: $\|f-g\|_1 = 0 \Leftrightarrow f \sim g$.

Ovenstående gælder uforandret, når vi i stedet for reelle funktioner betragter komplekse funktioner. Klassen $L = L(\grave{R}^k)$ (Vi benytter den samme betegnelse) er da et lineært rum over det komplekse tallegeme.

Betragtes kun (reelle, resp. komplekse) funktioner på en mængde A, som er Lebesgue integrable over A, fås et normeret lineært rum L(A), idet vi sætter

$$\|f\|_1 = I(|f_A|) = \int_A |f(x)|\, m(dR^k).$$

Idet vi kan identificere en funktion f på A med sin udvidelse f_A til $\grave{R}^k$, ser man at L(A) kan opfattes som et underrum af $L(\grave{R}^k)$.

Inden vi nærmere studerer $L = L(\grave{R}^k)$ samt nogle andre funktionsrum af lignende karakter, vil vi betragte nogle sinplere eksempler på normerede vektorrum.

<u>p-norm i det n-dimensionale talrum $\grave{R}^n$, resp. $\grave{C}^n$.</u>

Ved definitionerne

$$ax = (ax_1,\dots,ax_n), \qquad x+y = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

organiseres mængden $\grave{R}^n$, resp. $\grave{C}^n$, af alle reelle, resp. komplekse talsæt $x = (x_1,\dots,x_n)$ som et vektorrum over $\grave{R}$, resp. $\grave{C}$.

For alle $x \in \grave{R}^n$, resp. $\grave{C}^n$, og alle $p > 0$ sætter vi

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Det er klart, at der gælder

$$\|x\|_p \geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0} \quad \text{og} \quad \|ax\|_p = |a|\,\|x\|_p,$$

medens vi senere skal se, at (Minkowskis ulighed)

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \text{ når } p \geq 1.$$

For et vilkårligt fæstholdt $p \geq 1$ er funktionen $x \to \|x\|_p$ således en norm i $\grave{R}^n$, resp. $\grave{C}^n$; den kaldes p-normen.

<u>Bemærkning.</u> For $p < q$ gælder $\|x\|_p \geq \|x\|_q$. Thi hvis $x = \underline{0}$, er dette indlysende, og hvis $x \neq \underline{0}$, har vi med $a = \|x\|_p$, at $\sum_{\nu=1}^n |x_\nu|^p = a^p$, hvoraf $|x_\nu|/a \leq 1$ for alle $\nu = 1,\dots,n$. Heraf fås $\left(\frac{|x_\nu|}{a}\right)^q \leq \left(\frac{|x_\nu|}{a}\right)^p$, hvoraf ved summation $\sum_{\nu=1}^n \frac{|x_\nu|^q}{a^q} \leq 1$, d.v.s.

$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^q \leq a^q$, eller $\|x\|_q \leq a = \|x\|_p$.

For et fastholdt x er $\|x\|_p$ således en aftagende funktion af p (iøvrigt strengt aftagende, når blot to af koordinaterne $x_1,\dots,x_n$ er forskellige fra nul). Der gælder

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\};$$

thi sætter vi $m = \max_\nu |x_\nu|$, har vi $m^p \leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p \leq n\, m^p$, og dermed $m \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} m$, hvor $n^{1/p} \to 1$ for $p \to \infty$.

Det er da naturligt at fastsætte

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p;$$

man verificerer uden vanskelighed at $\|x\|_\infty$ er en norm i R^n, resp. C^n.

Indre produkt. For to talsæt $x = (x_1,\dots,x_n)$ og $y = (y_1,\dots,y_n)$ i R^n, resp. C^n, defineres det indre produkt $(x|y)$ ved

$$(x|y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu, \text{ resp. } (x|y) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \bar{y}_\nu.$$

Man bemærker, at 2-normen (den euklidiske eller pythagoræiske norm) i begge tilfælde udspringer af det indre produkt, idet

$$\|x\|_2 = (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

Hölders ulighed (O.Hölder1889).

$$\underline{|(x|y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q}, \text{ når } p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Hölders ulighed omfatter, svarende til $p = q = 2$, Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|(x|y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Beviset for Hölders ulighed bygger vi på uligheden $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ for $u > 0$, $v > 0$, hvor $p > 1$, $q > 1$ opfylder betingelsen $1/p + 1/q = 1$, d.v.s. $(p-1)(q-1) = 1$. Vi får denne ved at betragte kurven $\eta = \xi^{p-1}$ eller $\xi = \eta^{q-1}$ (tegn). Men ser da at $uv \leq \int_0^u \xi^{p-1} d\xi + \int_0^v \eta^{q-1} d\eta = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ (samt at betingelsen for lighedstegn er, at (u,v) er på kurven, d.v.s. at $u^p = v^q$).

Ved at anvende denne ulighed i hver koordinat får vi

$$|(x|y)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|\,|y_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{|x_\nu|^p}{p} + \frac{|y_\nu|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\|x\|_p^{\,p} + \frac{1}{q}\|y\|_q^{\,q}.$$

Hölders ulighed fås nu i tilfældet $x \neq \underline{0}$ og $y \neq \underline{0}$ ved benyttelse af dette resultat på de normerede talsæt:

$$\frac{|(x|y)|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \left|\left(\frac{x}{\|x\|_p} \,\Big|\, \frac{y}{\|y\|_q}\right)\right| \leq \frac{1}{p}\left\|\frac{x}{\|x\|_p}\right\|_p^{\,p} + \frac{1}{q}\left\|\frac{y}{\|y\|_q}\right\|_q^{\,q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

For $x = \underline{0}$ eller $y = \underline{0}$ er uligheden triviel. ∎

Som grænsetilfælde af Hölders ulighed har man

$$|(x|y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

<u>Minkowskis ulighed</u> (H.Minkowski 1896).

$$\underline{\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p}, \text{ når } p \geq 1.$$

I tilfældet p = 1 har vi

$$\|x+y\|_1 = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu + y_\nu| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| + \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

For $p > 1$ begynder vi beviset således: (Mærk: $(p-1)q = p$)

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu+y_\nu|^p = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu+y_\nu|\,|x_\nu+y_\nu|^{p-1} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|\,|x_\nu+y_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|\,|x_\nu+y_\nu|^{p-1} \\ &\leq \|x\|_p\Big(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu+y_\nu|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \|y\|_p\Big(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu+y_\nu|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

idet vi har benyttet Hölders ulighed. For $x+y \neq \underline{0}$ sluttes heraf Minkowskis ulighed, og for $x+y = \underline{0}$ er denne ulighed jo klar.■

Med beviset for Minkowskis ulighed har vi fuldført påvisningen af, at $\|x\|_p$ for fastholdt $p \geq 1$ er en norm i $\grave{R}^n$, resp. $\grave{C}^n$. Som tidligere bemærket, er også $\|x\|_\infty$ en norm. Specielt har man som grænsetilfælde af Minkowskis ulighed

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Derimod kan det oplyses, at $\|x\|_p$ for fastholdt $p < 1$ ikke er en norm.

<u>De normerede talfølgerum l_p.</u>

Ved definitionerne

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots), \quad x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$$

organiseres mængden af alle reelle, resp. komplekse, talfølger $x = (x_1, x_2, \dots)$ som et vektorrum over $\grave{R}$, resp. $\grave{C}$.

For et vilkårligt $p \geq 1$ betegner vi med l_p mængden af reelle, resp. komplekse talfølger $x = (x_1, x_2, \dots)$, for hvilke rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ er konvergent (vi benytter den samme betegnelse i begge tilfælde), altså

$$l_p = \Big\{x \,\Big|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\Big\},$$

og vi sætter for $x \in l_p$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}.$$

<u>For ethvert $p \geq 1$ er l_p et underrum i vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger ($\grave{R}^N$, resp. $\grave{C}^N$), og $\|x\|_p$ er en norm på l_p.</u>

Bevis. Det er klart, at $x \in l_p$ medfører $ax \in l_p$ for ethvert $a \in \grave{R}$, resp. $a \in \grave{C}$, medens $x \in l_p$, $y \in l_p$ medfører $x+y \in l_p$, idet $|x_n+y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq (2|x_n|) \vee (2|y_n|)$ og følgelig $|x_n+y_n|^p \leq (2|x_n|)^p \vee$

$(2|y_n|)^p \leqq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p)$.

Normbetingelserne $\|x\|_p \geqq 0$, $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = \underline{0}$ og $\|ax\|_p = |a|\,\|x\|_p$ er indlysende, og når $x \in l_p$ og $y \in l_p$ får vi for ethvert n ved benyttelse af Minkowskis ulighed

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu+y_\nu|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

og følgelig er

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu+y_\nu|^p\right)^{1/p} \leqq \|x\|_p + \|y\|_p. \blacksquare$$

<u>Bemærkning.</u> Når $p < q$ gælder $l_p \subset l_q$, og for $x \in l_p$ er $\|x\|_p \geqq \|x\|_q$. Thi når $x \in l_p$ har vi for ethvert n

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^q\right)^{1/q} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^p\right)^{1/p} \leqq \|x\|_p.$$

Altså er $l_p \subseteqq l_q$ og $\|x\|_p \geqq \|x\|_q$. At l_p er en ægte del af l_q ses af, at $x = (1, \frac{1}{2^{1/p}}, \ldots, \frac{1}{n^{1/p}}, \ldots)$ tilhører l^q men ikke l_p. $\blacksquare$

Når $x \in l_p$ eksisterer $\|x\|_q$ altså for alle $q \geqq p$ og er en aftagende funktion af q. Vi vil vise, at

$$\lim_{q\to\infty}\|x\|_p = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots\}.$$

(Eksistensen af højre side er klar, da konvergensen af $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ medfører, at $|x_n| \to 0$.) Sætter vi $m = \max_n|x_n|$, er påstanden klar for $m = 0$ (da er $x = \underline{0}$). Hvis $m > 0$, vælger vi N så stor, at $\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p \leqq m^p$. For $q > p$ gælder da

$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{1/q} \leqq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} \leqq m$. Følgelig er

$$m^q \leqq \sum_{n=1}|x_n|^q = \sum_{n=1}^{N}|x_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^q \leqq N\cdot m^q + m^q,$$

og dermed $m \leqq \|x\|_q \leqq (N+1)^{1/q}m$, hvoraf $\|x\|_q \to m$ idet $(N+1)^{1/q} \to 1$ for $q \to \infty$. $\blacksquare$

Vi definerer l_∞ som mængden af begrænsede reelle, resp. komplekse, talfølger, altså

$$l_\infty = \{x \mid \sup|x_n| < +\infty\},$$

og sætter for $x \in l_\infty$

$$\|x\|_\infty = \sup|x_n|.$$

Vi har da, at $l_p \subset l_\infty$ for alle p, og for $x \in l_p$ er $\|x\|_p \geqq \|x\|_\infty$ og $\lim_{q\to\infty}\|x\|_q = \|x\|_\infty$. Man verificerer let, at l_∞ er et underrum i vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger, og at $\|x\|_\infty$ er en norm i l_∞.

<u>Indre produkt for talfølger.</u> For to talfølger $x = (x_1, x_2, \dots)$ og $y = (y_1, y_2, \dots)$ med reelle, resp. komplekse, elementer defineres det indre produkt $(x|y)$ ved

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots \quad , \quad \text{resp.} \quad (x|y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots \quad ,$$

når den pågældende række er <u>absolut</u> <u>konvergent</u>.

<u>Hölders ulighed. Når $x \in l_p$ og $y \in l_q$, hvor $p > 1$, $q > 1$,</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, <u>eksisterer $(x|y)$ og</u>

$$\underline{|(x|y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q .}$$

Bevis. Eksistensen af $(x|y)$ følger straks af, at $|x_n \bar{y}_n| \leq \frac{|x_n|^p}{p} + \frac{|y_n|^q}{q}$ for ethvert n. Og for ethvert n er ifølge Hölders ulighed

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu y_\nu| \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^q\right)^{1/q} \leq \|x\|_p \|y\|_q ,$$

altså er

$$(x|y) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q . \blacksquare$$

Man verificerer let, at $(x|y)$ også eksisterer, når $x \in l_1$ og $y \in l_\infty$, og at man da har $|(x|y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty$.

<u>Hilbert rummet l_2.</u>

For $p = 2$ fås det reelle, resp. komplekse Hilbert rum l_2. For $x \in l_2$ og $y \in l_2$ eksisterer det indre produkt $(x|y)$. Man bemærker, at normen $\|x\|_2$ i l_2 udspringer af det indre produkt, idet

$$\|x\|_2 = (x|x)^{\frac{1}{2}} .$$

Hölders ulighed går her over i Cauchy-Schwarz' ulighed

$$|(x|y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

<u>Banach rum.</u>

Fra eksemplerne vender vi tilbage til de almene begreber. I et normeret lineært rum har vi som nævnt en metrik

$$\text{dist}(f,g) = \|f - g\| .$$

I overensstemmelse med sædvanlige definitioner i et metrisk rum siger vi, at en følge $f_1, f_2, \dots$ <u>konvergerer</u> mod f, hvis

$$\|f - f_n\| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

medens $f_1, f_2, \dots$ kaldes en <u>fundamentalfølge</u>, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et N, så

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad \text{for } n \geq N,\ m \geq N.$$

Enhver konvergent følge er en fundamentalfølge, thi hvis $\|f - f_n\| \to 0$

for $n \to \infty$, findes til ethvert $\varepsilon > 0$ et N, så $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$, og for $n \geq N$, $m \geq N$ gælder da $\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■ Hvis omvendt enhver fundamentalfølge er konvergent, kaldes det normerede lineære rum et Banach rum, eller man siger, at det er fuldstændigt.

Det n-dimensionale talrum $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, er med normen $\|x\|_p$ et Banach rum for ethvert $p \geq 1$ samt for $p = \infty$.

For følger $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1,2,\ldots$, gælder nemlig:

Nødvendigt (og tilstrækkeligt) for at følgen $x^{(m)}$, $m = 1,2,\ldots$, er en fundamentalfølge i p-norm i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, er at hver af de n koordinatfølger $x_\nu^{(m)}$, $m = 1,2,\ldots$, er en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$.

(Nødvendigt og) tilstrækkeligt for, at følgen $x^{(m)}$, $m = 1,2,\ldots$, konvergerer i p-norm mod $x = (x_1,\ldots,x_n)$, er, at det for hver koordinat gælder $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m \to \infty$.

Rigtigheden heraf indses ved hjælp af følgende vurderinger gældende for vilkårlige x og $y \in \mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$:

$$\left.\begin{matrix} |x_1 - y_1| \\ \vdots \\ |x_n - y_n| \end{matrix}\right\} \leq \|x-y\|_p \leq |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| .$$

Er nu $x^{(m)}$, $m = 1,2,\ldots$, en fundamentalfølge i p-norm i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, da er hver koordinatfølge en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, og dermed konvergent; følgelig er $x^{(m)}$, $m = 1,2,\ldots$, konvergent i p-norm. ■

Man bemærker iøvrigt, at begreberne fundamentalfølge og konvergens i p-norm i $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, ikke afhænger af, hvilket p man betragter. Dette ses også direkte af

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty .$$

Talfølgerummet l_p med norm $\|x\|_p$ er et Banach rum for ethvert $p \geq 1$ samt for $p = \infty$.

Beviset fra $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, kan ikke direkte kopieres, idet konvergens i hver koordinat, $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m \to \infty$, nok er nødvendigt, men ikke tilstrækkeligt for, at $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots) \in l_p$ konvergerer i p-norm mod $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$.

For eksempel konvergerer følgen $x^{(1)} = (1,0,0,\ldots)$, $x^{(2)} = (0,1,0,0,\ldots)$, $x^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots)$, ... i hver koordinat, men ikke i p-norm.

Beviset forløber således: Er $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots)$, $m = 1,2,\ldots$, en fundamentalfølge i l_p, slutter vi som i tilfældet $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$, at hver koordinatfølge er en fundamentalfølge i $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, og dermed konvergent, $x_\nu^{(m)} \to x_\nu$ for $m \to \infty$. At $x = (x_1, x_2, \ldots)$ virkelig tilhører l_p, og at $x^{(m)}$ konvergerer i p-norm mod x, ses, når $1 \leq p < \infty$, på følgende måde:

Til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ tænkes valgt et N så

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon \quad \text{for } n \geq N,\ m \geq N.$$

For $n \geq N$, $m \geq N$, s vilkårlig positiv, er da

$$\sum_{\nu=1}^{s} |x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}|^p \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}|^p = \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p < \varepsilon^p.$$

Ved at lade $n \to \infty$ for fastholdt $m \geq N$ og s får vi heraf

$$\sum_{\nu=1}^{s} |x_\nu - x_\nu^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p, \quad m \geq N \text{ og alle } s,$$

og heraf slutter vi først, at $\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu - x_\nu^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p$, altså $x - x^{(m)} \in l_p$ og dermed $x = x^{(m)} + (x - x^{(m)}) \in l_p$, og videre

$$\|x - x^{(m)}\|_p \leq \varepsilon \quad \text{for } m \geq N.$$

Hermed er imidlertid vist, at $\|x - x^{(m)}\|_p \to 0$ for $m \to \infty$.

I tilfældet $p = \infty$ er beviset simplere. Uligheden $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$ for $n \geq N$, $m \geq N$ giver $|x_\nu^{(n)} - x_\nu^{(m)}| < \varepsilon$ for $n \geq N$, $m \geq N$ og alle ν, hvoraf $|x_\nu - x_\nu^{(m)}| \leq \varepsilon$ for $m \geq N$ og alle ν. Heraf ses, at $x - x^{(m)} \in l_\infty$ og dermed $x = x^{(m)} + (x - x^{(m)}) \in l_\infty$, og at $\|x - x^{(m)}\|_\infty \leq \varepsilon$ for $m \geq N$, hvormed er vist, at $\|x - x^{(m)}\| \to 0$ for $m \to \infty$. ∎

Eksempler på funktionsrum.

Klassen $\hat{C}([a,b],\hat{R}) = C[a,b]$ af reelle kontinuerte funktioner af en reel variabel på et afsluttet interval $[a,b]$ (jfr. MI 1,1,3-4) er et lineært rum. En vigtig norm i $C[a,b]$ er den "ligelige" norm defineret ved

$$\|f\|_U = \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Man efterviser let, at $\|f\|_U$ virkelig er en norm i $C[a,b]$. Det tilsvarende konvergensbegreb er ligelig konvergens.

Det bemærkes at $C[a,b]$ med normen $\|f\|_U$ er et Banach rum.

En anden vigtig norm i $C[a,b]$ er p-normen defineret ved

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Man efterviser let, at dette virkelig er en norm. Specielt fås uligheden $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, idet man approksimerer integralerne med summer og anvender Minkowskis ulighed på dem. (Det er dog ikke nødvendigt at gennemføre denne betragrning, da vi nedenfor vil møde funktionsrummene $L_p[a,b]$, der har $C[a,b]$ med norm $\|f\|_p$ som underrum.)

Det bemærkes, at $C[a,b]$ med norm $\|f\|_p$ ikke for noget p, $1 \leq p < \infty$, er et Banach rum.

Teorien for normerede lineære rum skyldes især D.Hilbert ($p = 2$), F.Riesz (vilkårligt $p \geq 1$), og S.Banach.

§2. De normerede funktionsrum $L_p(\grave{R}^k)$.

Som foran vist (MI 3,1,1) defineres ved

$$\|f\|_1 = I(|f|) = \int_{\grave{R}^k} |f(x)|\, m(dR^k)$$

en norm i det lineære funktionsrum $L = L(\grave{R}^k)$ af endelige (reelle, resp. komplekse) Lebesgue integrable funktioner på $\grave{R}^k$ (når ækvivalente funktioner identificeres). Den tilhørende metrik er

$$\operatorname{dist}(f,g) = \|f - g\|_1 = I(|f-g|).$$

En følge $f_1, f_2, \dots$ af funktioner i L, der i denne metrik konvergerer mod $f \in L$, for hvilken altså

$$\|f-f_n\|_1 = \int |f(x)-f_n(x)|\, m(d\grave{R}^k) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

siges også at <u>konvergere (stærkt) mod f i L.</u>

Det understreges, at vi her står over for et helt andet begreb end konvergens næsten overalt: En følge af funktioner i L kan konvergere stærkt uden at konvergere i noget punkt, og den kan konvergere i hvert punkt mod en funktion i L uden at konvergere stærkt. Som eksempler anføres (i tilfældet k = 1) følgerne

$^1[-1,1], {}^1[-2,-1], {}^1[-1,0], {}^1[0,1], {}^1[1,2], {}^1[-3,-2\tfrac12], {}^1[-2\tfrac12,-2], \dots$

$\dots, {}^1[2\tfrac12,3], {}^1[-4,-3\tfrac34], \dots, {}^1[3\tfrac34,4], \dots$

og

$^1[0,1], {}^{2^2}[0,\tfrac12], \dots, {}^{n^2}[0,\tfrac1n], \dots$.

<u>Hovedsætning:</u>

<u>Funktionsrummet $L = L(\grave{R}^k)$ er med norm $\|f\|_1$ et Banach rum.</u>

Vi vil ikke bevise denne sætning særskilt, da den er indeholdt i en sætning om rummene $L_p = L_p(\grave{R}^k)$, $1 \leq p < \infty$, som vi nu skal indføre.

Lad $M = M(\grave{R}^k)$ betegne mængden af alle endelige reelle, resp. komplekse, funktioner på $\grave{R}^k$, der er Lebesgue målelige. Det er et lineært funktionsrum over $\grave{R}$, resp. $\grave{C}$. (Vi behandler de to tilfælde under eet under brug af samme betegnelser i de to tilfælde)

Med $L_p = L_p(\grave{R}^k)$ for $1 \leq p < +\infty$ betegner vi klassen af funktioner $f \in M$, for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel, altså

$$L_p = L_p(\grave{R}^k) = \{f \in M \mid I(|f|^p) < +\infty\},$$

og vi sætter for $f \in L_p$

$$\|f\|_p = (I(|f|^p))^{1/p} = \left(\int |f(x)|^p m(dR^k)\right)^{1/p}.$$

<u>For ethvert $p \geq 1$ er L_p et lineært funktionsrum over $\grave{R}$, resp. $\grave{C}$, og $\|f\|_p$ er en norm på L_p</u> (når ækvivalente funktioner identificeres).

Tilfældet p = 1 er allerede behandlet. Thi at f er målelig og $|f|$ integrabel er ensbetydende med, at f er integrabel, Altså er $L_1 = L$.

Det er klart, at $f \in L_p \Rightarrow af \in L_p$, medens $f \in L_p,\ g \in L_p \Rightarrow f+g \in L_p$, indses, når man benytter $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2|f|)^p + (2|g|)^p$ i forbindelse med sætningen om, at en Lebesgue målelig funktion er integrabel, hvis den har en Lebesgue integrabel absolut majorant (MI 2, 14,2).

Endvidere gælder åbenbart

$$\|f\|_p \geq 0, \quad \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$$

og

$$\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p .$$

For dernæst at bevise

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p ,$$

Minkowskys ulighed for Lebesgue integraler, går vi frem i analogi med behandlingen af den tilsvarende ulighed for summer.

<u>Hölders ulighed for Lebesgue integraler.</u>

<u>Når $f \in L_p$ og $g \in L_q$, hvor $p > 1$, $q > 1$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, da er fg integrabel og $|I(fg)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.</u>

Beviset bygger ligesom det tidligere for summer (MI 3,1,3) på uligheden

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \qquad u \geq 0,\ v \geq 0.$$

Ved at anvende denne ulighed for hvert $x \in \grave{R}^k$ får vi

$$|fg| = |f|\,|g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q},$$

hvoraf vi slutter, at fg er integrabel (fg er nemlig målelig, og uligheden viser, at fg har en integrabel absolut majorant).
Vi får endvidere

$$|I(fg)| \leq I(|fg|) \leq \frac{I(|f|^p)}{p} + \frac{I(|g|^q)}{q} = \frac{1}{p}\|f\|_p^{\,p} + \frac{1}{q}\|g\|_q^{\,q}.$$

Hölders ulighed fremgår nu i tilfældet $f \not\sim 0$ og $g \not\sim 0$ ved anvendelse af dette resultat på de normerede funktioner:

$$\frac{|I(fg)|}{\|f\|_p\|g\|_q} = \left| I\left(\frac{f}{\|f\|_p}\,\frac{g}{\|g\|_q}\right)\right| \leq \frac{1}{p}\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p^{\,p} + \frac{1}{q}\left\|\frac{g}{\|g\|_q}\right\|_q^{\,q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

For $f \sim 0$ eller $g \sim 0$ er begge sider 0 i Hölders ulighed. ∎

Af særlig interesse er tilfældet $p = q = 2$. Vi får her <u>Cauchy-Schwarz' ulighed for Lebesgue integraler:</u>

<u>Når $f \in L_2$ og $g \in L_2$, er fg integrabel og $|I(fg)| \leq \|f\|_2\|g\|_2$.</u>

Integralet $I(fg)$ af produktet af to funktioner kaldes det <u>indre produkt</u> og betegnes $(f|g)$.

<u>Minkowskis ulighed for Lebesgue integraler.</u>

<u>For $f \in L_p$ og $g \in L_p$, $p \geq 1$, gælder $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.</u>

For $p = 1$ er uligheden bevist tidligere (MI 3,1,1). For $p > 1$

begynder vi beviset således:

$$\|f+g\|_p^p = I(|f+g|^p) = I(|f+g|\,|f+g|^{p-1})$$
$$\leq I(|f|\,|f+g|^{p-1}) + I(|g|\,|f+g|^{p-1});$$

her må vi dog godtgøre, at $|f|\,|f+g|^{p-1}$ og $|g|\,|f+g|^{p-1}$ er integrable; dette følger af, at $|f| \in L_p$ og $|g| \in L_p$, medens $|f+g|^{p-1} \in L_q$, hvor $q = p/(p-1)$, og dermed $1/p + 1/q = 1$.

Ved anvendelse af Hölders ulighed får vi videre

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p(I(|f+g|^{(p-1)q}))^{1/q} + \|g\|_p(I(|f+g|^{(p-1)q}))^{1/q}$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1};$$

for $\|f+g\|_p \neq 0$ sluttes heraf Minkowskis ulighed, og for $\|f+g\|_p = 0$ er Minkowskis ulighed jo klar.∎

<u>Bemærk.</u> Medens vi for talfølgerummene fandt

$$p_1 < p_2 \Rightarrow l_{p_1} \subset l_{p_2},$$

gælder her intet tilsvarende. For $p_1 \neq p_2$ er ingen af klasserne L_{p_1} og L_{p_2} delmængde af den anden. For eksempel vil for $k = 1$ funktionen $(\frac{1}{x})_{[1,+\infty[}$ tilhøre L_2, men ikke L_1, og funktionen $(\frac{1}{\sqrt{x}})_{]0,1]}$ vil tilhøre L_1, men ikke L_2.

Den til normen $\|f\|_p$ i L_p, $p \geq 1$, hørende metrik er

$$\mathrm{dist}(f,g) = \|f-g\|_p = (I(|f-g|^p))^{1/p}.$$

En følge $f_1, f_2, \ldots$ af funktioner i L_p, der i denne metrik konvergerer mod $f \in L_p$, for hvilken altså

$$\|f-f_n\|_p = (I(|f-f_n|^p))^{1/p} \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

d.v.s.

$$I(|f-f_n|^p) = \int |f(x)-f_n(x)|^p m(d\dot{R}^k) \to 0 \quad \text{for } n \to \infty,$$

siges at <u>konvergere (stærkt) mod f i klassen L_p.</u>

<u>Hovedsætning.</u>

<u>Funktionsrummet $L_p = L_p(\dot{R}^k)$ er med norm $\|f\|_p$ et Banach rum for ethvert $p \geq 1$.</u>

Sætningen er (for funktioner af een variabel på et interval og $p = 2$) først bevist (uafhængigt af hinanden) af F.Riesz og E.Fischer (1907). Da almindeliggørelsen er ret selvfølgelig, er det rimeligt at kalde sætningen (og ikke blot det nævnte specialtilfælde)

*) <u>Riesz-Fischers sætning.</u>

Bevis (efter H.Weyl): Vi antager, at $f_1, f_2, \ldots$ er en fundamentalfølge i L_p, og skal vise, at følgen er konvergent i Lp.

Til afkortning sættes $\varepsilon_i = 1/2^i$ og $\delta_i = (\frac{1}{2^i})^{1/p}\frac{1}{2^i}$.

Da $f_1, f_2, \ldots$ er en fundamentalfølge, kan vi vælge numre $N_1 < N_2 < \ldots < N_i < \ldots$

$< \dots < N_i < \dots$ således, at

$$\|f_n - f_m\|_p < \delta_i \quad \text{for} \quad n,m \geq N_i,$$

Vi vil begynde med at bevise, at den udtyndede følge $f_{N_1}, f_{N_2}, \dots$ er konvergent næsten overalt.*)

Vi har specielt

$$\|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_p < \delta_i \qquad \text{altså} \quad I(|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p) < \delta_i^p.$$

Nu betragtes mængderne

$$A_i = \{x \mid |f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)|^p > \varepsilon_i^p\}$$
$$= \{x \mid |f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)| > \varepsilon_i\}.$$

For hvert i er A_i Lebesgue målelig, og idet $\varepsilon_i^p 1_{A_i} \leq |f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p$ er $\varepsilon_i^p m(A_i) \leq I(|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|^p)$, altså

$$m(A_i) < \frac{\delta_i^p}{\varepsilon_i^p} = \left(\frac{\delta_i}{\varepsilon_i}\right)^p = \frac{1}{2^i}.$$

Følgelig er rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

konvergent. Sættes $B_i = A_i \cup A_{i+1} \cup \dots$, er B_i Lebesgue målelig, og vi har (jfr. MI 2,7,3)

$$m(B_i) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

For ethvert $x \notin A_i$ gælder

$$|f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)| \leq \varepsilon_i = \frac{1}{2^i}.$$

Altså er leddene i rækken

$$(*) \quad |f_{N_1}(x)| + |f_{N_2}(x) - f_{N_1}(x)| + \dots + |f_{N_j}(x) - f_{N_{j-1}}(x)| + \dots$$

for ethvert $x \notin B_i$ fra leddet $|f_{N_{i+1}}(x) - f_{N_i}(x)|$ at regne $\leq$ leddene med samme nummer i den konvergente række

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{j-1}} + \dots,$$

hvoraf følger, at rækken $(*)$ er konvergent for ethvert $x \notin B_i$.

Nu gælder $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$. Vi sætter

$$D = B_1 \cap B_2 \cap \dots .$$

Da er D målelig, og $m(D) = \lim m(B_i) \leq \lim \frac{1}{2^{i-1}} = 0.$

Til ethvert $x \notin D$ findes et nummer i, således at $x \notin B_i$. Rækken $(*)$ er derfor konvergent for ethvert $x \notin D$. Rækken

$$f_{N_1}(x) + (f_{N_2}(x) - f_{N_1}(x)) + \dots + (f_{N_j}(x) - f_{N_{j-1}}(x)) + \dots$$

er da ligeledes konvergent for ethvert $x \notin D$. Da denne rækkes afsnitsfølge netop er funktionsfølgen $f_{N_1}(x), f_{N_2}(x), \dots$ slutter vi altså, at funktionsfølgen $f_{N_1}(x), f_{N_2}(x), \ldots$ er konvergent i $\grave{R}^k \setminus D$. Vi betragter nu den funktion f på $\grave{R}^k$, der defineres ved

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_{N_j}(x) & \text{for } x \notin D \\ 0 & \text{for } x \in D \end{cases}$$

Da gælder altså $f_{N_j}(x) \to f(x)$ for $j \to \infty$ pånær i en nulmængde.

Funktionen f er åbenbart målelig. Vi betragter nu for et fast i uligheden

$$\|f_n - f_m\|_p < \delta_i \quad \text{for} \quad n,m \geq N_i.$$

Heraf fås specielt

$$I(|f_{N_j} - f_m|^p) < \delta_i{}^p \quad \text{for} \quad j \geq i,\ m \geq N_i.$$

Vi holder m fast ($\geq N_i$) og lader og lader j gennemløbe tallene i, i+1, ... Vi ser da, at funktionsfølgen

$$|f_{N_i} - f_m|^p,\ |f_{N_{i+1}} - f_m|^p, \ldots$$

opfylder betingelserne i Fatous lemma (MI 2,6,5). Vi slutter derfor, at grænsefunktionen $|f-f_m|^p$ er Lebesgue integrabel, og at

$$I(|f-f_m|^p) \leq \delta_i{}^p \quad \text{for } m \geq N_i.$$

Følgelig gælder $f-f_m \in L_p$ og altså også $f = f_m + (f-f_m) \in L_p$, og vi har

$$\|f-f_m\|_p \leq \delta_i \quad \text{for } m \geq N_i.$$

Da $\delta_i \to 0$ for $i \to \infty$ viser dette, at $\|f-f_m\|_p \to 0$ for $m \to \infty$. Den givne følge $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer altså i L_p mod f. ■

<u>Approksimationssætninger.</u>

<u>For et vilkårligt $p \geq 1$ er hvert af følgende underrum overalt tæt i $L_p = L_p(\grave{R}^k)$:</u>

1) <u>klassen af begrænsede målelige funktioner med begrænset støtte;</u>

2) <u>klassen af trappefunktioner;</u>

3) <u>klassen af kontinuerte funktioner med begrænset støtte.</u>

Vi bemærker, at disse klasser åbenbart tilhører L_p for ethvert $p \geq 1$.

Vi betragter først det <u>reelle</u> L_p.

1) Vi skal vise, at hvis $f \in L_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en begrænset målelig funktion g med begrænset støtte, således at $\|f-g\|_p < \varepsilon$.

For et vilkårligt helt $n > 0$ betragtes funktionen $f_n = (f \wedge n1_{W_n}) \vee (-n1_{W_n})$. Den er åbenbart en begrænset målelig funktion med begrænset støtte og tilhører derfor L_p. For ethvert n er $|f-f_n|^p$

$\leq |f|^p$, og da $f(x) - f_n(x) \to 0$ for $n \to \infty$ for alle x følger af sætningen om absolut majoriseret konvergens (MI 2,6,5), at $I(|f-f_n|^p) \to 0$. Vi kan altså vælge n således, at $\|f-f_n\|_p < \varepsilon$.∎

2) Vi skal dernæst vise, at hvis $f \in L_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en trappefunktion g, således at $\|f-g\|_p < \varepsilon$.
Ifølge 1) og trekantuligheden er det tilstrækkeligt at vise dette i det tilfælde, hvor f er en begrænset målelig funktion med begrænset støtte. Da gælder $f \in L$. Vi betragter nu en følge af trappefunktioner $\overline{f}_n \uparrow \geq f$, således at $\lim I(\overline{f}_n) < I(f) + \delta$, hvor $\delta > 0$ vil blive angivet senere, og ser på funktionen $h = \lim \overline{f}_n$. Vi har $h \geq f$ og $h \in L$, og $I(h) = \lim I(\overline{f}_n)$, altså $I(f) \leq I(h) < I(f) + \delta$. For ethvert n er $\overline{f}_n \leq h$, og vi kan vælge n således, at $I(h) - \delta < I(\overline{f}_n) \leq I(h)$. Da gælder

$$|f-\overline{f}_n| \leq |f-h| + |h-\overline{f}_n| = (h-f) + (h-\overline{f}_n),$$

og

$$I(|f-\overline{f}_n|) \leq I(h-f) + I(h-\overline{f}_n) < 2\delta.$$

Vi benytter nu, at f er begrænset, f.eks. $|f(x)| \leq a$ for alle x. Vi sætter da $g = (\overline{f}_n \wedge a) \vee (-a)$. Dette er også en trappefunktion, og der gælder åbenbart $|f-g| \leq |f-\overline{f}_n|$. Altså er $I(|f-g|) < 2$. Da $|f-g|^p \leq |f-g|(2a)^{p-1}$, følger heraf $I(|f-g|^p) < 2\delta(2a)^{p-1}$, hvoraf $\|f-g\|_p < (2\delta(2a)^{p-1})^{1/p}$. Tænker vi os, at δ var valgt således, at $(2\delta(2a)^{p-1})^{1/p} < \varepsilon$, har vi altså $\|f-g\|_p < \varepsilon$.∎

3) Vi skal endelig vise, at hvis $f \in L_p$ og $\varepsilon > 0$, da findes en kontinuert funktion g med begrænset støtte, således at $\|f-g\|_p < \varepsilon$. Ifølge 2) og trekantuligheden er det tilstrækkeligt at vise dette i det tilfælde, hvor f er en trappefunktion. Vi vælger (jfr. MI 2,2,4) en kontinuert funktion $g \geq f$ med begrænset støtte, således at $I(g-f) < \delta$, hvor δ vil blive angivet senere. Antages $|f(x)| \leq a$ for alle x, kan vi antage, at $g(x) \leq a$ for alle x, idet vi ellers erstatter g med $g \wedge a$. (Da $g \geq f$, har vi åbenbart $g(x) \geq -a$ for alle x) Da er $(g-f)^p \leq (g-f)(2a)^{p-1}$, altså $\|g-f\|_p < (\delta(2a)^{p-1})^{1/p}$. Tænker vi os, at δ var valgt således at $(\delta(2a)^{p-1})^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, har vi altså $\|f-g\|_p < \varepsilon$.∎

Vi betragter dernæst det <u>komplekse</u> L_p.
Hvis $f = f' + if''$ L_p, gælder $f' \in L_p$ og $f'' \in L_p$. Thi f' og f'' er målelige, og $|f'| \leq |f|$, $|f''| \leq |f|$. De ønskede approksimationer af f opnås nu ved at anvende de foregående resultater på f' og f'' og derefter benytte trekantuligheden, hvorefter vi for $g = g' + ig'' \in L_p$ har $\|f-g\|_p \leq \|f'-g'\|_p + \|f''-g''\|_p$.∎

Af ovenstående følger det overraskende resultat:
For ethvert $p \geq 1$ har $L_p = L_p(\grave{R}^k)$ en numerabel overalt tæt delmængde.

Thi klassen af trappefunktioner har (i p-norm for ethvert $p \geq 1$) som overalt tæt delmængde klassen af trappefunktioner, som kun antager rationale værdier og hver værdi $\neq 0$ i en forening af et endeligt antal disjunkte intervaller $J_1 \times \ldots \times J_k$, hvor $J_1, \ldots, J_k$ har rationale endepunkter. Denne mængde er som bekendt numerabel. ∎

$L_\infty = L_\infty(\grave{R}^k)$.

For en reel funktion f på $\grave{R}^k$ siges tallet M at være et essentielt overtal, hvis $f(x) \leq M$ for næsten alle x, d.v.s. hvis $\{x \mid f(x) > M\}$ er en nulmængde. $+\infty$ er naturligvis et essentielt overtal. Blandt de essentielle overtal findes et mindste (det kan eventuelt være $+\infty$ eller $-\infty$); Dette kaldes det essentielle supremum for f og betegnes

$$\text{ess.sup } f(x) \;;$$

eksistensen indses ved, at man efterviser, at nedre grænse for mængden af essentielle overtal for f selv er et essentielt overtal.

På analog måde defineres begreberne essentielt undertal og essentielt infimum.

En reel eller kompleks funktion f på $\grave{R}^k$ siges at være essentielt begrænset, såfremt ess.sup $|f(x)| < +\infty$, og vi sætter

$$\|f\|_\infty = \text{ess.sup } |f(x)| .$$

Bemærk, at denne størrelse også kan opfattes som knyttet til klassen af funktioner ækvivalente med f. Når $f \sim g$, har f og g nemlig de samme essentielle overtal..

Med $L_\infty = L_\infty(\grave{R}^k)$ betegner vi mængden af Lebesgue målelige (reelle, resp. komplekse) essentielt begrænsede funktioner på $\grave{R}^k$. Man verificerer let:

$L_\infty = L_\infty(\grave{R}^k)$ er et lineært funktionsrum over $\grave{R}$, resp. $\grave{C}$, og $\|f\|_\infty$ er en norm på L_∞(når ækvivalente funktioner betragtes som den samme). L_∞ er et Banach rum.

Endvidere:

Når $f \in L$ og $g \in L_\infty$, da er $fg \in L$ og $I(fg) \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Betragtes kun (reelle, resp. komplekse) funktioner på en mængde A, fås for ethvert p, $1 \leq p < +\infty$, et normeret lineært rum $L_p(A)$ bestående af de funktioner, som er Lebesgue målelige i A og for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel over A, og med norm

$$\|f\|_p = (I(|f_A|^p))^{1/p} = \left(\int_A |f(x)|^p m(d\grave{R}^k)\right)^{1/p}.$$

Idet vi kan identificere en funktion f på A med sin udvidelse f_A til $\grave{R}^k$ (og iøvrigt identificerer ækvivalente funktioner), ser man, at $L_p(A)$ kan opfattes som et underrum af $L_p(R^k)$ bestående af de funktioner, der er 0 uden for A.

<u>For ethvert A er $L_p(A)$ et Banach rum.</u>

Thi er $f_1, f_2, \ldots$ en fundamentalfølge i $L_p(A)$, er $f_{1_A}, f_{2_A}, \ldots$ en fundamentalfølge i $L_p(\grave{R}^k)$, altså konvergent i $L_p(\grave{R}^k)$ mod en grænsefunktion g, som ifølge beviset for, at $L_p(\grave{R}^k)$ er et Banach rum, er defineret som grænsefunktion ved sædvanlig konvergens for en delfølge af $f_{1_A}, f_{2_A}, \ldots$ uden for en vis nulmængde D, og som 0 i denne mængde. Dette g er altså 0 uden for A, og kan altså betegnes f_A, hvor f er en funktion på A, som vil tilhøre $L_p(A)$, og vil være grænsefunktion for følgen $f_1, f_2, \ldots,$ i $L_p(A)$. $\blacksquare$

Analogt kan man betragte $L_\infty(A)$ for en vilkårlig mængde A.

I praksis har kun det tilfælde interesse, hvor A er målelig eller evt. har målet $+\infty$.

Kap.4. Fourierrækker.

§1. Definitioner.

I sine undersøgelser over varmeteori gjorde Fourier den skelsættende opdagelse, at "enhver" reel funktion $f(x)$ på R med perioden 2π kan fremstilles ved en trigonometrisk række

$$f(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

hvor

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} nx\, dx$$

(J.J.Fourier, 1768-1830; teorien er offentliggjort 1822.)

Det første strenge bevis er givet af Dirichlet (1837), som betragtede funktioner, der stykkevis er kontinuerte og monotone. Vi vil her behandle teorien for funktioner, der er Lebesgue integrable i ethvert interval (hertil er nok, at de er integrable over et periodeinterval $[a, a+2\pi[$). Det vil være hensigtsmæssigt at betragte komplekse funktioner, og foruden ovenstående skrivemåde for en trigonometrisk række at benytte skrivemåden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{eller} \quad c_o + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}).$$

Med L vil vi i det følgende betegne klassen af komplekse funktioner $f(x)$ med perioden 2π, som er Lebesgue integrable i ethvert interval. Ved <u>middelværdien</u> af en sådan funktion forstås integralet over et periodeinterval divideret med 2π:

$$M(f) = M(f(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx.$$

(Det er åbenbart ligegyldigt, hvilket periodeinterval vi benytter.). Med L_p for $p \geq 1$ vil vi betegne klassen af komplekse funktioner $f(x)$ med perioden 2π, som er Lebesgue målelige, og for hvilke $|f|^p$ er Lebesgue integrabel i ethvert interval. Da er $L_1 = L$. I L_p indføres normen

$$\|f\|_p = (M\{|f(x)|^p\})^{1/p}.$$

Da er L_p et normeret lineært rum. Vi betragter også klassen L af essentielt begrænsede periodiske funktioner med perioden 2π, med norm

$$\|f\|_\infty = \text{ess.sup}\ |f(x)|.$$

For $1 \leq p < q \leq \infty$ gælder $L_p \supseteq L_q$. For $q = \infty$ er dette indlysende, og for $q < \infty$ følger det af, at $|f|^p \leq 1 + |f|^q$, idet 1 er integrabel over ethvert interval. (Iøvrigt er $L_p \supset L_q$, idet man let kan nævne en funktion $f \in L_p \setminus L_q$.) Vi skal her foruden L_1 især betragte klassen L_2.

Hvis $f \in L$, $g \in L$, er $f\bar{g}$ sikkert målelig. Hvis $f\bar{g} \in L$, betegnes middelværdien

$$(f|g) = M\{f(x)\overline{g(x)}\}$$

som det indre produkt af f og g. Man har $(g|f) = \overline{(f|g)}$. Hvis $(f|g) = 0$ siges f at være <u>ortogonal</u> på g, i tegn $f \perp g$. Da er også $(g|f) = 0$, altså $g \perp f$, og vi kan derfor også sige, at f og g er indbyrdes ortogonale.

For $f \in L_p$, $g \in L_q$, hvor $p > 1$, $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, vil $f\bar{g} \in L$, og det indre produkt vil tilfredsstille

$$|(f|g)| \leqq \|f\|_p \|g\|_q .$$

(Dette følger straks af Hölders ulighed for integraler, idet faktorerne $\frac{1}{2\pi}$ i middelværdierne går ud.) Det samme gælder, hvis $p = 1$, $q = \infty$.

Specielt eksisterer $(f|g)$ for vilkårlige $f \in L_2$, $g \in L_2$ og

$$|(f|g)| \leqq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Normen i L_2 udspringer af det indre produkt, idet

$$\|f\|_2 = ((f|f))^{\frac{1}{2}} .$$

En funktion $f \in L_2$ kaldes <u>normeret</u>, hvis $\|f\|_2 = 1$. En mængde af funktioner i L_2 bestående af normerede parvis ortogonale funktioner kaldes et <u>normeret ortogonalsystem</u> i L_2.

Fundamentalt for teorien for trigonometriske rækker er, at <u>systemet af funktioner</u>

$$\underline{\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}}$$

<u>er et normeret ortogonalsystem</u>, det trigonometriske ortogonalsystem. Dette ses straks af, at

$$\| e^{inx} \|_2^2 = M\{|e^{inx}|^2\} = M\{1\} = 1 \text{ for alle } n$$

og

$$(e^{inx}|e^{inx}) = M\{e^{inx}\overline{e^{imx}}\} = M\{e^{i(n-m)x}\}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ for } n \neq m$$

Det ses let, at hvis man i et normeret ortogonalsystem erstatter et eller flere par af funktioner φ og ψ fra systemet med parret $\frac{\varphi + \psi}{\sqrt{2}}$, $\frac{\varphi - \psi}{\sqrt{2}}$, fremkommer der et nyt normeret ortogonalsystem. Anvendes dette på det trigonometriske system ses, at <u>systemet</u>

$$\underline{\{1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \ldots, \sqrt{2}\cos nx, \sqrt{2}\sin nx, \ldots\}}$$

<u>er et normeret ortogonalsystem</u> (det reelle trigonometriske ortogonalsystem).

<u>Heuristisk betragtning.</u>

Lad f være en vilkårlig funktion i L og lad os antage, at f (i en eller anden betydning - ikke nødvendigvis ved punktvis konvergens) er "fremstillet" ved en trigonometrisk række:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(eller, som man siger, er "opløst" i rene svingninger).
Ved multiplikation med e^{-inx} for et fast n og påfølgende middelværdidannelse fås da (under antagelse af, at denne kan foretages ledvis på højre side)

$$M\{f(x)e^{-inx}\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n M\{e^{imx}e^{-inx}\} = c_n.$$

Dette fører til følgende:

<u>Definition.</u>

For enhver funktion $f \in L$ betegnes den trigonometriske række $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvis koefficienter c_n er bestemt ved

$$c_n = (f(x)|e^{inx}) = M\{f(x)e^{-inx}\}, \quad n \in \grave{Z}$$

som <u>Fourierrækken</u> for f. Vi udtrykker dette ved at skrive

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Denne skrivemåde udtrykker altså blot, at tallene c_n er bestemt ved ovenstående formel.

Skrevet på sædvanlig rækkeform lyder rækken

$$c_o + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}),$$

idet vi på den angivne måde (bortset fra konstantleddet c_o) samler leddene parvis. Det n-te afsnit i rækken betegnes $s_n(x)$, altså

$$s_n(x) = c_o + \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu e^{i\nu x} + c_{-\nu}e^{-i\nu x}) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

Ved brug af formlerne $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ og $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ fås for det n-te led ($n = 1,2,\dots$) udtrykket:

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} &= (c_n+c_{-n})\cos nx + i(c_n-c_{-n})\sin nx \\ &= a_n \cos nx + b_n \sin nx, \end{aligned}$$

hvor

$$a_n = (c_n+c_{-n}) = M\{f(x)e^{-inx}\} + M\{f(x)e^{inx}\} = 2\cdot M\{f(x)\cos nx\}$$

$$b_n = i(c_n+c_{-n}) = i(M\{f(x)e^{-inx}\} - M\{f(x)e^{inx}\}) = 2\cdot M\{f(x)\sin nx\}.$$

Idet vi sætter $a_o = 2c_o = 2\cdot M\{f(x)\}$, antager rækken altså formen

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = 2\cdot M\left\{f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, nx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, nx\, dx; \; n = 0,1,2,\dots$$

Denne skrivemåde vil vi især benytte for reelle funktioner.

§2. Summabilitet.

Selv for kontinuerte funktioner er Fourierrækken i almindelighed ikke konvergent, og konvergensteorien for Fourierrækker er i det hele taget kompliceret. Som vist af Fejér (1900) får man en mere tilfredsstillende teori ved at benytte summabilitet. (L.Fejér, 1880-1959.)

Ved en summabilitetsmetode forstås en metode til at tilskrive uendelige rækker $u_o + u_1 + \dots + u_n + \dots$ en sum s (altså simpelthen en funktion $s = s(u_o, u_1, \dots, u_n, \dots)$ defineret på en vis delmængde i talfølgerummet). Konvergens (af afsnitsfølgen) er en sådan metode. Vi skal her kun betragte den - efter konvergens - simpleste summabilitetsmetode.

Lad $u_o + u_1 + \dots$ være en uendelig række med komplekse led. Vi betragter afsnittene

$$s_n = u_o + \dots + u_n$$

og danner det n-te <u>afsnitsmiddel</u>

$$S_n = \frac{s_o + s_1 + \dots + s_n}{n+1} .$$

Hvis $S_n \to s$ for $n \to \infty$, kaldes den givne række <u>summabel med summen s.</u>

Man viser let:

<u>Hvis rækken er konvergent med summen s, er den også summabel med samme sum.</u>

$$\begin{aligned} \text{Idet } s_o &= u_o \\ s_1 &= u_o + u_1 \\ s_2 &= u_o + u_1 + u_2 \\ &\vdots \\ s_n &= u_o + u_1 + u_2 + \dots + u_n \end{aligned}$$

får man for det n-te afsnitsmiddel S_n udtrykket

$$S_n = \frac{(n+1)u_o + nu_1 + \dots + u_n}{n+1} = \sum_{\nu=o}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) u_\nu .$$

<u>Formler for Fourierrækkens afsnit og afsnitsmiddel.</u>

Lad $\quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, hvor altså $c_n = M\{f(x)e^{-inx}\}$.

I udtrykket for c_n kan vi udføre substitutionen $x = u-t$ (med t som den nye integrationsvariabel). Herved fås $c_n = M_t\{f(u-t)e^{int}\}e^{-inu}$, hvoraf ved multiplikation med e^{inu} og erstatning af u med x

$$c_n e^{inx} = M_t\{f(x-t)e^{int}\}.$$

Af dette udtryk for Fourierrækkens n-te led ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) fås straks for dens n-te afsnit $s_n(x)$ ($n = 0,1,2,\ldots$) udtrykket

$$s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} = M_t\{f(x-t)D_n(t)\},$$

hvor

$$D_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}}$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{2(\sin\frac{1}{2}t)^2}$$

kaldes <u>Dirichlets kerne.</u>

For det n-te afsnitsmiddel

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)c_\nu e^{i\nu x}$$

fås

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)c_\nu e^{i\nu x} = M_t\{f(x-t)K_n(t)\},$$

hvor

$$K_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)e^{i\nu t} = \frac{D_0(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1 - \cos(n+1)t}{2(\sin\frac{1}{2}t)^2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2$$

kaldes <u>Fejérs kerne.</u> Man bemærker, at begge kerner er reelle funktioner med perioden 2π. Skrevet som trigonometriske polynomier på reel form er

$$D_n(t) = 1 + 2\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\cos \nu t, \qquad K_n(t) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\cos \nu t.$$

Fejérs kerne har væsentligt simplere egenskaber end Dirichlets kerne, hvilket forklarer, at summabilitetsteorien for Fourierrækker er simplere end konvergensteorien. Vi får brug for følgende:

<u>Egenskaber ved Fejérs kerne.</u>

1) $K_n(t) = K_n(-t)$ for alle t

2) $K_n(t) \geq 0$ for alle t

3) $K_n(t) \leq K_n(0) = n+1$ for alle t

4) $K_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{t^2}$ for $0 < |t| \leq \pi$

5) $M\{K_n(t)\} = 1$.

Bevis: 1) er klar. 2) ses af de to sidste udtryk for $K_n(t)$. 3) og 5) ses af det første udtryk for $K_n(t)$. 4) ses af det sidste udtryk for $K_n(t)$, idet det benyttes, at $|\sin(n+\frac{1}{2})t| \leq 1$ og at $\sin\frac{1}{2}t \geq \frac{t}{\pi}$ for $0 \leq t \leq \pi$ (benyt at $\sin\frac{1}{2}t$ er konkav i $0 \leq t \leq \pi$).

<u>Fejérs sætninger.</u>

Sætning 1. <u>I ethvert kontinuitetspunkt x for funktionen f er Fourierrækken summabel med summen f(x).</u>

Bevis. Vi finder (idet de benyttede egenskaber ved kernen markeres)

$$
\begin{aligned}
|S_n(x)-f(x)| &\overset{5)}{=} |M_t\{f(x-t)K_n(t)\} - M_t\{f(x)K_n(t)\}| \\
&= |M_t\{(f(x-t)-f(x))K_n(t)\}| \\
&\overset{2)}{\leq} M_t\{|f(x-t)-f(x)|K_n(t)\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\,K_n(t)dt
\end{aligned}
$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ vælges $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ således, at $|f(x-t)-f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ for $|t| < \delta$. Vi får da

$$
\begin{aligned}
|S_n(x)-f(x)| &\overset{2)4)}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)|f(x-t)-f(x)|\frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{\delta^2}\,dt \\
&\overset{2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt + \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\,dt \\
&\overset{5)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi^2 C}{(n+1)\delta^2}, \quad \text{hvor } C = M_t\{|f(x-t)-f(x)|\}.
\end{aligned}
$$

Vælges N så stor, at $\pi^2 C/(N+1)\delta^2 < \frac{1}{2}\varepsilon$, har vi altså

$$|S_n(x)-f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{for } n \geq N$$

hvormed sætningen er bevist.■

Sætning 2. Hvis funktionen f er kontinuert for alle x, er Fourierrækken ligeligt summabel med sum f(x), d.v.s. $S_n(x)$ konvergerer ligeligt mod f(x) for $n \to \infty$.

Bevis. Da f er fontinuert for alle x og periodisk, er f ligelig kontinuert, og vi kan derfor i ovenstående bevis for et vilkårligt $\varepsilon > 0$ benytte samme $\delta = \delta(\varepsilon)$ for alle x. Endvidere er f(x) begrænset, f.eks. $|f(x)| \leq M$ for alle x, og den i ovenstående bevis optrædende middelværdi C er da $\leq 2M$ for alle x.
Vi får derfor

$$|S_n(x)-f(x)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{2\pi^2 M}{(n+1)\delta^2} \quad \text{for alle } x.$$

Vælges N så stor, at $2\pi^2 M/(N+1)\delta^2 < \frac{1}{2}\varepsilon$ ses, at

$$|S_n(x)-f(x)| < \varepsilon \quad \text{for alle } x, \text{ når } n \geq N,$$

hvormed sætningen er bevist.■

Sætning 3. I ethvert punkt x, hvor funktionen f har grænseværdier f(x+) og f(x−) fra højre og venstre, er Fourierrækken summabel med summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$.

Bevis. Af 1) følger, at

$$S_n(x) = M_t\{f(x-t)K_n(t)\} = M_t\{f(x+t)K_n(t)\}.$$

Altså har vi

$$S_n(x) = M_t\{\tfrac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t))K_n(t)\}.$$

Indføres den ved

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(u)+f(2x-u)) & \text{for } u \neq x + p\cdot 2\pi \\ \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) & \text{for } u = x + p\cdot 2\pi \end{cases} \quad p \in \mathbb{Z}$$

bestemte funktion $g \in L$, ses at

$$S_n(x) = M_t\{g(x-t)K_n(t)\},$$

d.v.s. $S_n(x)$ er simpelthen det n-te afsnitsmiddel for Fourierrækken for g i punktet x. Funktionen g er imidlertid kontinuert i x. Alså er ifølge sætning 1

$$S_n(x) \to g(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+)+f(x-)) \quad \text{for } n \to \infty. \blacksquare$$

Sætning 2 kan også formuleres således: Når f er kontinuert for alle x, gælder

$$\|f-S_n\|_U \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Heraf følger Weierstrass' approksimationssætning for trigonometrisk approksimation: Afslutningen i $B = B]-\infty,+\infty[$ af klassen af trigonometriske polynomier $\sum_{\nu=-n}^{n} k_\nu e^{i\nu x}$ svarende til den ved normen $\|f\|_U$ bestemte metrik er klassen af kontinuerte funktioner med perioden 2π. Her betegner B vektorrummet bestående af alle begrænsede komplekse funktioner på $]-\infty,+\infty[$, forsynet med den ligelige norm $\|f\|_U = \sup|f(x)|$.

Stærk summabilitet i L_p.

Vi vil nu bevise en lignende sætning for klassen L.

For ethvert $f \in L$ er Fourierrækken (stærkt) summabel i L, d.v.s. $\|f-S_n\|_1 \to 0$ for $n \to \infty$.

Bevis. Ved beviset skal vi samtidig betragte forskellige funktioner f. Det er derfor praktisk at betegne det n-te afsnitsmiddel af Fourierrækken for f med $S_n(f)$ (og dets værdier med $S_n(f,x)$), altså

$$S_n(f,x) = M_t\{f(x-t)K_n(t)\}.$$

Det ses, at for et fast n er $f \to S_n(f)$ en lineær afbildning af L ind i sig selv. Vi vil nu vise, at afbildningen er en kontraktion, d.v.s. at

$$\|S_n(f)\|_1 \leqq \|f\|_1.$$

Hertil bemærker vi, at som følge af 2) er

$$|S_n(f,x)| = |M_t\{f(x-t)K_n(t)\}| \leqq M_t\{|f(x-t)|\,K_n(t)\} = S_n(|f|,x),$$

altså

$$\|S_n(f)\|_1 \leqq M\{S_n(|f|)\}.$$

Og $M\{S_n(|f|)$ er simpelthen det konstante led i det trigonometriske polynomium $S_n(|f|,x)$, som er lig med det konstante led i Fourierrækken for $|f|$, altså lig med $M\{|f|\} = \|f\|_1$.

Vi betragter nu en bestemt funktion $f \in L$. Ved anvendelse af approksimationssætningerne (MI 3,2,5) på $f_{[0,2\pi[}$ ses let, at der til et givet $\varepsilon > 0$ findes en kontinuert funktion g med perioden 2π, således at

$$\|f-g\|_1 < \varepsilon.$$

Da $S_n(f-g) = S_n(f) - S_n(g)$, følger heraf

$$\|S_n(f)-S_n(g)\|_1 < \varepsilon.$$

Da $S_n(g,x)$ konvergerer ligeligt mod $g(x)$, gælder åbenbart $\|S_n(g)-g\|_1 \to 0$ for $n\to\infty$. Vi kan altså til det givne ε finde et N, så at

$$\|g-S_n(g)\|_1 < \varepsilon \quad \text{for } n > N.$$

Da

$$\|f-S_n(f)\|_1 \leqq \|f-g\|_1 + \|g-S_n(g)\|_1 + \|S_n(g)-S_n(f)\|_1,$$

har vi

$$\|f-S_n(f)\|_1 < 3\varepsilon \quad \text{for } n > N,$$

hvormed sætningen er bevist.■

Af denne sætning følger en fundamental sætning:

Entydighedssætningen. To funktioner $f\in L$ og $g\in L$ har samme Fourierrække, hvis og kun hvis $f \backsim g$.

Bevis. Det er klart, at hvis $f \backsim g$, da har f og g samme Fourierrække. Antag nu, at f og g har samme Fourierrække. Da gælder $S_n(f) = S_n(g)$ for alle n. Af $\|f-S_n(f)\|_1 \to 0$ og $\|g-S_n(f)\|_1 \to 0$ for $n\to\infty$ følger da, at $\|f-g\|_1 = 0$, altså $f \backsim g$.■

Sætningen om stærk summabilitet i L kan generaliseres til L_p for $1 < p < +\infty$ (men ikke til L_∞).

For ethvert $f\in L_p$, $1 < p < \infty$, er Fourierrækken (stærkt) summabel i L_p, d.v.s. $\|f-S_n\|_p \to 0$ for $n\to\infty$.

Beviset beror på, at afbildningen $f\to S_n(f)$ opfattet som en lineær afbildning af L_p ind i sig selv er en kontraktion, d.v.s.

$$\|S_n(f)\|_p \leqq \|f\|_p.$$

For at indse dette benyttes Hölders ulighed, som (idet $1/p + 1/q = 1$) giver

$$|S_n(f,x)| = |M_t\{f(x-t)K_n(t)^{\frac{1}{p}}K_n(t)^{\frac{1}{q}}\}|$$
$$\leqq \left[M_t\{|f(x-t)|^pK_n(t)\}\right]^{1/p}\left[M\{K_n(t)\}\right]^{1/q},$$

altså

$$|S_n(f,x)|^p \leqq S_n(|f|^p,x),$$

hvoraf

$$\|S_n(f)\|_p^{\,p} \leqq M\{S_n(|f|^p)\} = M\{|f|^p\} = \|f\|_p^{\,p}.$$

Resten af beviset er som i tilfældet $p = 1$.■

Fejér-Lebesgues sætning.

Som afslutning på denne paragraf, nævner vi - uden bevis - følgende sætning af Lebesgue:

<u>For ethvert $f \in L$ er Fourierrækken summabel næsten overalt med summen $f(x)$, d.v.s. $S_n(x) \to f(x)$ for næsten alle x.</u>

§3. Konvergens.

Som foran nævnt er konvergensteorien for Fourierrækker kompliceret. Et enkelt hovedresultat kan dog fås på simpel måde ud fra summabilitetsteorien. Hertil får vi brug for følgende sætning:

Hardys sætning (G.H.Hardy 1877-1947, sætningen er fra 1909).

Hvis rækken $u_0 + u_1 + \dots$ er summabel med sum s og talfølgen (nu_n) er begrænset, da er rækken konvergent (og med samme sum).

Bevis. Vi skal vise, at hvis $S_n \to s$ og $\sup|nu_n| = K < +\infty$, da gælder $s_n \to s$.

Til $\varepsilon > 0$ findes et N, så at $|S_n - s| < \varepsilon$ for $n \geq N$. Idet vi nu betragter et vilkårligt fast $n > N$, gælder for alle $p \geq 1$

$$(n+p)S_{n+p-1} - nS_{n-1} = s_n + s_{n+1} + \dots + s_{n+p-1}$$

altså

$$(n+p)(S_{n+p-1}-s) - n(S_{n-1}-s) = p(s_n - s) + A,$$

hvor A betegner summen

$$(s_{n+1}-s_n)+\dots+(s_{n+p-1}-s_n) = u_{n+1}+(u_{n+1}+u_{n+2})+\dots+(u_{n+1}+\dots+u_{n+p-1}).$$

De her optrædende u_ν er alle numerisk $\leq K/n$, og da deres antal er $\frac{1}{2}p(p-1)$, har vi $|A| \leq \frac{1}{2}p(p-1)\frac{K}{n}$.

Da $|S_{n+p-1}-s| < \varepsilon$ og $|S_{n-1}-s| < \varepsilon$, finder vi derfor

$$p|s_n - s| < \tfrac{1}{2}p(p-1)\frac{K}{n} + (n+p)\varepsilon + n\varepsilon$$

eller

$$|s_n - s| < \frac{p-1}{2}\,\frac{K}{n} + \left(\frac{2n}{p} + 1\right)\varepsilon. \quad \text{for \underline{alle} } p \geq 1.$$

Da ovenstående ulighed specielt gælder for det hele tal p, for hvilket

$$2n\sqrt{\varepsilon} < p \leq 2n\sqrt{\varepsilon} + 1,$$

får vi

$$|s_n - s| \quad \frac{2n\sqrt{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{k}{n} + \left(\frac{2n}{2n\sqrt{\varepsilon}} + 1\right)\varepsilon = (K+1)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Til et givet $\delta > 0$ kan vi vælge ε, så at $(K+1)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon < \delta$. For et til dette ε svarende N gælder da $|s_n - s| < \delta$ for $n > N$. ∎

Vi kan nu vise:

Fourierrækken for en funktion f med perioden 2π, der er af begrænset variation på ethvert interval, er konvergent for ethvert x med summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$.

Heri er indeholdt Dirichlets resultat (MI 4,1,1), idet en reel funktion, der stykkevis er kontinuert og monoton, er af begrænset variation.

Bevis. Af Fejérs sidste sætning følger, at Fourierrækken for ethvert x er summabel med summen $\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$. Ifølge Hardys sætning er det derfor tilstrækkeligt at vise, at talfølgen $(n(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}))$ er begrænset for ethvert x. Vi viser dette ved at vise, at talmængden

$$\{nc_n | n \in \dot{Z}\}$$

er begrænset.

Ifølge forudsætningen om at f er af begrænset variation på $[0,2\pi[$ findes der et $K < +\infty$, så at

$$\sum_{j=1}^{p} |f(x_j)-f(x_{j-1})| \leq K,$$

når $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p = 2\pi$. For $n \neq 0$ er

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \left(\int_0^h + \int_h^{2h} + \dots + \int_{2\pi-h}^{2\pi} \right) f(x)e^{-inx}dx,$$

hvor h betegner <u>halvperioden</u> $\frac{\pi}{|n|}$ for e^{-inx}. Heraf fås

$$2\pi c_n = \int_0^h \left[f(x)e^{-inx} + f(x+h)e^{-in(x+h)} + \dots + f(x+(2n-1)h)e^{-in(x+(2n-1)h)} \right] dx$$

$$= \int_0^h \left[f(x)-f(x+h)+f(x+2h)-\dots-f(x+(2n-1)h) \right] e^{-inx}dx,$$

hvoraf

$$2\pi |c_n| \leq \int_0^h \left[|f(x)-f(x+h)| + \dots + |f(x+(2n-2)h)-f(x+(2n-1)h)| \right] dx$$

Her er integranden $\leq K$ for alle x i $[0,h]$. Følgelig er

$$2\pi |c_n| \leq Kh = K\frac{\pi}{|n|}$$

og altså

$$(*) \quad |nc_n| \leq \frac{K}{2}$$

hvormed sætningen er bevist. ∎

<u>Tilføjelse.</u> Sættes $\sup |f(x)| = A$ har vi for alle x

$$|S_n(x)| = |M_t\{f(x-t)K_n(t)\}| \leq M_t\{ |f(x-t)|K_n(t)\}$$

$$\leq M_t\{AK_n(t)\} = A.$$

Nu er

$$s_n(x)-S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x} - \sum_{\nu=-n}^{n} \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) c_\nu e^{i\nu x}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=-n}^{n} |\nu| c_\nu e^{i\nu x},$$

altså ifølge (*)

$$|s_n(x)-S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=-n}^{n} |\nu c_\nu| \leq \frac{1}{n+1} 2n\frac{K}{2} < K,$$

og man har derfor

$$|s_n(x)| \leq A + K \quad \text{for alle n og x.}$$

Afsnittene $s_n(x)$ i Fourierrækken for en funktion, der er af begrænset variation i ethvert interval, er således <u>ensartet begrænsede.</u>

§4. Divergens.

Et eksempel på en kontinuert funktion med perioden 2π, hvis Fourierrække er divergent i visse punkter, er først angivet af du Bois-Reymond (1876). Vi vil her gengive et eksempel af Fejér (1911).

Vi begynder med at udregne Fourierrækken for den (diskontinuerte) funktion f, der har perioden 2π, og som i $[0,2\pi[$ er bestemt ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Da funktionen er reel, udregner vi Fourierrækken i reel form:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \text{ for alle } n, \text{ da } f \text{ er ulige}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx$$

$$= \frac{2}{n} \text{ for alle } n \geq 1,$$

altså

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}.$$

Da funktionen er af begrænset variation på $[0,2\pi[$ og $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))$, gælder også

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin nx}{n}.$$

Af tilføjelsen sidst i forrige paragraf ses, at afsnittene

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\sin \nu x}{\nu}$$

er ensartet begrænsede. Der findes altså et $C < +\infty$ ($C = \pi + 2$ kan bruges), så at

$$|s_n(x)| \leq C \text{ for alle } n \text{ og } x.$$

Vi danner nu

$$f_{p,n}(x) = \sin px\ s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{2\sin px\ \sin \nu x}{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(p-\nu)x - \cos(p+\nu)x}{\nu}$$

$$= \frac{\cos(p-n)x}{n} + \dots + \frac{\cos(p-1)x}{1} - \frac{\cos(p+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos(p+n)x}{n}$$

Dette trigonometriske polynomium er altså for alle p,n og x numerisk $\leq C$, men deler vi det på midten, vil første del for sig være $\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{1}$ for $x = 0$, en størrelse, der konvergerer mod ∞. Herpå baseres Fejérs konstruktion.

Vi vælger nu tal $p_1, n_1, p_2, n_2, \dots, p_k, n_k, \dots$ så at

$$0 < p_1 - n_1,\ p_1 + n_1 < p_2 - n_2, \dots, p_{k-1} + n_{k-1} < p_k - n_k, \dots$$

og danner

$$f(x) = f_{p_1,n_1}(x) + \tfrac{1}{2}f_{p_2,n_2}(x) + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}f_{p_k,n_k}(x) + \ldots$$

eller udførligt skrevet

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \\ & \left(\frac{\cos(p_1-n_1)x}{n_1} + \ldots + \frac{\cos(p_1-1)x}{1} - \frac{\cos(p_1+1)x}{1} - \ldots - \frac{\cos(p_1+n_1)x}{n_1}\right) \\ & + \left(\frac{\cos(p_2-n_2)x}{2n_2} + \ldots + \frac{\cos(p_2-1)x}{2\,1} - \frac{\cos(p_2+1)x}{2\,1} - \ldots - \frac{\cos(p_2+n_2)x}{2n_2}\right) \\ & + \ldots \\ & + \left(\frac{\cos(p_k-n_k)x}{2^{k-1}n_k} + \ldots + \frac{\cos(p_k-1)x}{2^{k-1}\,1} - \frac{\cos(p_k+1)x}{2^{k-1}\,1} - \ldots - \frac{\cos(p_k+n_k)x}{2^{k-1}n_k}\right) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Rækken er med de anførte parenteser ligelig konvergent, edet den har den konvergente majorantrække $C + C/2 + \ldots + C/2^{k-1} + \ldots$. Den fremstiller altså en kontinuert funktion med perioden 2π. Dennes Fourierrække (skrevet på reel form) fås ved at hæve parenteserne og sætte nulled til. Thi ved multiplikation med cosnx eller sinnx fås atter en ligelig konvergent række

$$f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k,n_k}(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx;$$

altså er

$$\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2} \frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k,n_k}(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx\,dx,$$

og heraf ses, at alle $b_n = 0$, og at $a_n = 0$, undtagen hvis cosnx forekommer i et af leddene $\frac{1}{2^{k-1}} f_{p_k,n_k}(x)$, i hvilket tilfælde a_n er koefficienten til cosnx i dette led.

Vi vil nu vise, at vi kan opnå, at Fourierrækken for f(x) er divergent for x = 0. Hertil er det nok, at rækken er divergent for x = 0, når man sætter parenteser midt i hver af de ovenstående parenteser.

Gør vi det, bliver det (2k-1)-te led for x = 0 lig med

$$\frac{1}{2^{k-1}n_k} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}\,1} = \frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n_k} + \ldots + 1\right)$$

Vælger vi altså først n_k'erne således, at ovenstående uligheder bliver opfyldt, bliver Fourierrækken divergent for x = 0. $\blacksquare$

Uden bevis nævner vi, at A.Kolmogorov (f.1903) har konstrueret en funktion $f \in L$, hvis Fourierrække er divergent for alle x. Om der findes kontinuerte funktioner med denne egenskab vides ikke.

§5. Klassen L_2.

For klassen L_2 fås særligt simple og afrundede resultater. Dette hænger sammen med et resultat om endelige normerede ortogonalsystemer, som det er bekvemt at give en geometrisk iklædning.
For funktioner i L_2 gælder åbenbart

$$(g,f) = \overline{(f,g)} \qquad (af,g) = a(f,g) \qquad (f,ag) = \bar{a}(f,g)$$

$$(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g) \qquad (f,g_1+g_2) = (f,g_1) + (f,g_2)$$

Almindeligt gælder

$$(a_1f_1+\dots+a_nf_n, b_1g_1+\dots+b_mg_m) = \sum_{\nu=1}^n\sum_{\mu=1}^m a_\nu \bar{b}_\mu (f_\nu,g_\mu).$$

<u>Pythagoras' sætning. Når $f \perp g$, er $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.</u> Thi $\|f+g\|^2 = (f+g,f+g) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + (f,g) + (g,f)$, hvor $(f,g) = 0$ og altså også $(g,f) = 0$. ∎

Analogt ses: Når $f_1,\dots,f_n$ er parvis ortogonale, gælder $\|f_1+\dots+f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2$. Thi $\|f_1+\dots+f_n\|^2 = (f_1+\dots+f_n, f_1+\dots+f_n) = \sum_{\nu=1}^n\sum_{\mu=1}^n (f_\nu,f_\mu)$, hvor $(f_\nu,f_\mu) = 0$ når $\nu \neq \mu$, og $(f_\nu,f_\mu) = \|f_\nu\|^2$, når $\nu = \mu$. ∎

<u>Projektion på endelig dimensionalt underrum.</u>

Lad $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ være normerede, parvis ortogonale funktioner i L_2. Vi betragter underrummet M bestående af alle funktioner $g = a_1\varphi_1+\dots+a_m\varphi_m$ (med vilkårlige komplekse koefficienter). For en sådan funktione gælder ifølge det foranstående

$$\|g\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2.$$

En funktion $h \in L_2$ siges at være <u>ortogonal på</u> M, i tegn $h \perp M$, hvis den er ortogonal på alle $g \in M$. Hertil er åbenbart nødvendigt, at $h \perp \varphi_1,\dots,h \perp \varphi_m$. Men dette er også tilstrækkeligt. Thi af $(h,\varphi_1) = 0,\dots,(h,\varphi_m) = 0$ følger $(h,a_1\varphi_1+\dots+a_m\varphi_m) = \bar{a}_1(h,\varphi_1)+\dots+\bar{a}_m(h,\varphi_m) = 0$ for vilkårlige $a_1,\dots,a_m$.
Vi vil nu vise:

<u>For ethvert $f \in L_2$ findes en og kun een funktion $g = a_1\varphi_1+\dots+a_m\varphi_m \in M$, således at $f-g \perp M$, nemlig den, der bestemmes ved</u>

$$a_1 = (f,\varphi_1),\dots,a_m = (f,\varphi_m)$$

Den derved bestemte funktion g kaldes <u>projektionen af f på M.</u>

Bevis. Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $f-g \perp M$, er som foran vist, at $f-g \perp \varphi_1,\dots,f-g \perp \varphi_m$. Men $(f-g,\varphi_\mu) = (f,\varphi_\mu) - (g,\varphi_\mu) = (f,\varphi_\mu) - a_\mu$. Betingelsen $f-g \perp M$ er altså opfyldt når og kun når vi vælger $a_\mu = (f,\varphi_\mu)$, $\mu = 1,\dots,m$. ∎

trykket for $\|f-s_n\|^2$, at $\sum_{\nu=-n}^{n}|c_\nu|^2 \to \|f\|^2$. Hermed er vist:

For ethvert $f \in L_2$ er Fourierrækken (stærkt) konvergent i L_2 med summen f, d.v.s. $\|f-s_n\| \to 0$ for $n \to \infty$.
Endvidere er rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ konvergent, og der gælder Parsevals ligning: $\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.

Vi vil nu bevise følgende omvending:

Enhver trigonometrisk række $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$, for hvilken rækken $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ er konvergent, er Fourierrække for en funktion $f \in L_2$. (og naturligvis ifølge entydighedssætningen bortset fra ækvivalens kun for een funktion).

Som det vil fremgå af beviset, hænger sætningen nøje sammen med Riesz-Fischers sætning (MI 3,2,3) og kaldes derfor også Riesz-Fischers sætning.

Bevis. Vi betragter afsnittene $s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n}c_\nu e^{i\nu x}$.
For $m > n$ gælder

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{\nu=-m}^{-n-1}c_\nu e^{i\nu x} + \sum_{\nu=n+1}^{m}c_\nu e^{i\nu x},$$

altså

$$\|s_m-s_n\|^2 = \sum_{\nu=-m}^{-n-1}|c_\nu|^2 + \sum_{\nu=n+1}^{m}|c_\nu|^2.$$

Til et givet $\varepsilon > 0$ kan vi vælge N således, at

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 - \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 < \varepsilon^2.$$

Da gælder

$$\|s_m-s_n\| < \varepsilon \quad \text{for } m > n \geq N.$$

Følgen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ er altså en fundamentalfølge i L_2. Ifølge Riesz-Fischers sætning findes altså en funktion $f \in L_2$, således at

$$\|f-s_n\| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

Vi vil vise, at

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}.$$

For ethvert ν og ethvert n er

$$(f(x), e^{i\nu x}) - (s_n(x), e^{i\nu x}) = (f(x)-s_n(x), e^{i\nu x}),$$

altså

$$|(f(x), e^{i\nu x}) - (s_n(x), e^{i\nu x})| = |(f(x)-s_n(x), e^{i\nu x})| \leq \|f-s_n\| \cdot \|e^{i\nu x}\| = \|f-s_n\|.$$

Følgelig gælder for ethvert ν

$$(s_n(x), e^{i\nu x}) \to (f(x), e^{i\nu x}) \quad \text{for } n \to \infty.$$

Men for $n \geq |\nu|$ gælder $(s_n(x), e^{i\nu x}) = c_\nu$. Altså er $(f(x), e^{i\nu x}) = c_\nu$. ∎

Sammen med L_2 betragter vi Hilbert rummet l_2 af alle komplekse talfølger

$$(c_0, c_{-1}, c_1, c_{-2}, c_2, \dots) \quad \text{for hvilke } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Af foranstående fremgår:

Den ved Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \text{ , d.v.s. ved } c_n = M\{f(x)e^{-inx}\},$$

bestemte afbildning

$$f \to T(f) = (c_0, c_{-1}, c_1, \dots)$$

er en <u>bijektiv afbildning af L_2 på l_2.</u> Afbildningen er åbenbart lineær, d.v.s.

$$T(af) = aT(f), \quad T(f+g) = T(f) + T(g),$$

og ifølge Parsevals ligning er den <u>isometrisk</u>, d.v.s.

$$\|f\|_2 = \|T(f)\|_2.$$

Mere almindeligt gælder, at det indre produkt af to vilkårlige funktioner i L_2 er lig med det indre produkt af deres billeder i l_2. Thi hvis

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx},$$

gælder, idet vi sætter $s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$,

$$(f,g) - (s_n,g) = (f - s_n, g),$$

altså

$$|(f,g) - (s_n,g)| \leq \|f - s_n\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

hvoraf

$$(s_n, g) \to (f,g) \quad \text{for } n \to \infty.$$

Men

$$(s_n, g) = \left(\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}, g(x)\right) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu (e^{i\nu x}, g(x))$$

$$= \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \overline{(g(x), e^{i\nu x})} = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \bar{d}_\nu .$$

Altså er

$$(f,g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n = (T(f), T(g)).$$

Vi udtrykker dette kort ved at sige, at der ved Fourierrækken bestemmes en isomorf afbildning af L_2 på l_2.

Vanskelige opgaver og opgaver, hvis løsning kræver særlig opfindsomhed, er betegnet med *.

1. Bevis Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable: Hvis $f(x,y)$ er kontinuert i det afsluttede rektangel $R=\{(x,y)\mid x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ og $\varepsilon>0$, da findes et polynomium $p(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} c_{\nu\mu}x^{\nu}y^{\mu}$, for hvilket

$$|f(x,y)-p(x,y)|<\varepsilon \text{ for alle } (x,y)\in R.$$

Vink: Vis først, at gyldigheden for et vilkårligt rektangel følger af gyldigheden for kvadratet $R=\{(x,y)\mid x\in[0,1], y\in[0,1]\}$. Vis dernæst, at når $f(x,y)$ er kontinuert i dette kvadrat og

$$p_{n,m}(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} f\left(\frac{\nu}{n},\frac{\mu}{m}\right)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\binom{m}{\mu}y^{\mu}(1-y)^{m-\mu},$$

da findes til $\varepsilon>0$ tal n_0 og m_0 således, at når $n\geq n_0$ og $m\geq m_0$ er

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|<\varepsilon \text{ for alle } (x,y)\in R.$$

(Vis ved hjælp af Čebyševs ulighed, at når

$$\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=M \quad \text{og} \quad \sup_{\substack{(x_1,y_1)\in R\\(x_2,y_2)\in R\\|x_1-x_2|<\delta\\|y_1-y_2|<\delta}}|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=\omega(\delta),$$

gælder

$$|f(x,y)-p_{n,m}(x,y)|\leq\omega(\delta)+\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{M}{2m\delta^2} \quad \text{for alle } (x,y)\in R,$$

og vælg først δ og dernæst n_0 og m_0.)

Mat 2, 1962–63 MI Opg 2

2. Vis ved udregning af udtrykket på venstre side at $\sum_{\nu=0}^{n}\left(x-\frac{\nu}{n}\right)^4\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu} < \frac{1}{4n^2}$ for $0 \leq x \leq 1$.
Vis herved, at (for $\delta > 0$)

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ \left|x-\frac{\nu}{n}\right| \geq \delta}}^{n}\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu} < \frac{1}{4n^2\delta^4} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

3. Bevis Weierstrass' sætning for trigonometrisk approksimation: Hvis $f(t)$ er kontinuert i $-\infty < t < +\infty$ og har perioden 2π, da findes for ethvert $\varepsilon > 0$ et trigonometrisk polynomium

$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t),$$

for hvilket

$$|f(t) - p_n(t)| < \varepsilon \quad \text{for alle } t.$$

Vink: Betragt den i hele xy-planen ved

$$F(r\cos t, r\sin t) = r f(t) \quad (r \geq 0, -\infty < t < +\infty)$$

definerede funktion $F(x,y)$. Anvend Weierstrass' sætning (Opg. 1) på denne i kvadratet $\{(x,y) \mid x \in [-1,1], y \in [-1,1], z \in [-1,1]\}$ og sæt $(x,y) = (\cos t, \sin t)$. Benyt dernæst Eulers formler.

4. Vis, at hvis $f(x)$ er kontinuert i $-\infty < x < +\infty$, da findes en følge $\{p_n(x)\}$ af polynomier, som konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a,b]$.

5*. Idet K betegner klassen af alle kontinuerte funktioner i $-\infty < x < +\infty$, sættes for $f \in K$, $g \in K$

$$\operatorname{dist}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sup_{|x|\leq n}\{\min(|f(x) - g(x)|, 1)\}.$$

Vis, at K med denne afstandsdefinition er et metrisk rum. Vis, at når $f \in K$ og $f_n \in K$, $n = 1, 2, \cdots$, gælder $dist(f, f_n) \to 0$, hvis og kun hvis $f_n(x)$ konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i ethvert interval $[a, b]$. Udtryk derefter sætningen i opg. 4 som en egenskab ved det metriske rum.

6*. Vis, at der i klassen K af alle kontinuerte funktioner $f(x)$ i $-\infty < x < +\infty$ ikke findes nogen afstandsdefinition $dist(f, g)$, således at 1) K med denne afstandsdefinition er et metrisk rum, 2) $dist(f, f_n) \to 0$ hvis og kun hvis $f_n(x) \to f(x)$ for alle x.

Vink: Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

7*. En funktion $f(x)$ i $-\infty < x < +\infty$ siges at have et relativt minimum i punktet x_0, hvis der findes et $\varepsilon > 0$, således at $f(x) \geq f(x_0)$ for alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Vis, at hvis $f(x)$ har et relativt minimum i ethvert punkt x_0, er værdimængden for f enten endelig eller numerabel. Angiv en funktion $f(x)$ med numerabel værdimængde, som har relativt minimum i ethvert punkt x_0.

Vink: Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

8. Om en kontinuert funktion $\varphi(x)$ i $[a, b]$ vides, at

$$\int_a^b x^n \varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{for alle hele } n \geq 0.$$

Vis, at $\varphi(x) = 0$ for alle $x \in [a, b]$.

Vink: Vis, at $\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = 0$ for enhver kontinuert funktion $f(x)$ i $[a, b]$.

Mat 2, 1962-63 M I Opg 4

9. Vis, at hvis $\varphi(t)$ og $\psi(t)$ er kontinuerte funktioner i et afsluttet interval $[\alpha,\beta]$, for hvilke

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)^n dt = \int_\alpha^\beta \psi(t)^n dt \quad \text{for alle hele } n>0,$$

da gælder

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))dt$$

for enhver kontinuert funktion $f(x)$ i $-\infty<x<+\infty$. Vis herved, at φ og ψ har samme værdimængde.

Eksempel: Om en kontinuert funktion $\varphi(t)$ i $[0,1]$ vides, at

$$\int_0^1 \varphi(t)^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \text{for alle hele } n>0.$$

Find værdimængden for φ.

10. Find såvel ved Newtons som ved Lagranges interpolationsformel det polynomium af højst 3. grad, som for $x=-1,0,2,3$ antager værdierne $y=2,-1,3,1$.

11. Vis, at hvis et polynomium $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ for heltallige værdier af x antager heltallige værdier, er koefficienterne $a_0, a_1, \cdots, a_n$ rationale tal. Giv et eksempel på et polynomium af denne art, hvis koefficienter ikke er alle hele tal.

12. Betragt Peanos kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\le t\le 1$.

1) Gør rede for, at mængden af kurvepunkter svarende til et interval $\frac{k-1}{9^n}\le t\le \frac{k}{9^n}$, hvor k er et helt tal, for hvilket $1\le k\le 9^n$, er et afsluttet kvadrat med side $\frac{1}{3^n}$.

2) Vis, at der findes en og kun en parameterværdi, for hvilken a) $(f(t),g(t))=(0,1)$ b) $(f(t),g(t))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ c) $(f(t),g(t))=(1,0)$, og find disse parameterværdier.

3) Vis, at der findes netop fire parameterværdier, for hvilke $(f(t),g(t))=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, og find disse.

13. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y,z) = (f(t), g(t), h(t))$, $0 \leq t \leq 1$, i xyz-rummet, der tilhører terningen $\{(x,y,z) \mid x \in [0,1], y \in [0,1], z \in [0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af den.

14. Konstruer en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $-\infty < t < +\infty$, der indeholder ethvert punkt i xy-planen.

15. Et punkt (x_0, y_0) kaldes et multipelt punkt af en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $a \leq t \leq b$, hvis $(f(t), g(t)) = (x_0, y_0)$ for mindst to værdier af t. Vis, at hvis en kontinuert kurve indeholder alle punkter af et rektangel $R = \{(x,y) \mid x \in [x_1, x_2], y \in [y_1, y_2]\}$, da har kurven et multipelt punkt i R.

Vink: Antag, at der ikke er noget multipelt punkt i R. Sæt $M = \{t \mid (f(t), g(t)) \in R\}$. Gør rede for, at M er afsluttet (og altså kompakt). Ved $(x,y) = (f(t), g(t))$, $t \in M$, bestemmes en en-entydig kontinuert afbildning af M på R. Den omvendte afbildning er da en kontinuert afbildning af R på M. Lad den være bestemt ved $t = h(x,y)$. [Heraf ses iøvrigt, at M er et afsluttet delinterval af $[a,b]$.] Lad $h(x_1, y_1) = t_1$ og $h(x_2, y_2) = t_2$. En modstrid fremkommer nu, idet man godtgør, at der må være mindst to (endda uendelig mange) punkter i R, for hvilke $h(x,y) = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

16. Vis, at hvis $f(x)$ er defineret i en omegn af x_0 og differentiabel i x_0, gælder

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \longrightarrow f'(x_0),$$

når $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er talfølger, der konvergerer mod x_0 henholdsvis fra venstre og fra højre.

17. Betragt Peanos kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leq t\leq 1$.
Vis, at det om hver af funktionerne $f(t)$ og $g(t)$ gælder, at den ikke er differentiabel i noget punkt af intervallet $0\leq t\leq 1$.
Vink: Benyt sætningen i opg. 16.

18. Betragt Peanos kurve $(x,y)=(f(t),g(t))$, $0\leq t\leq 1$.
Vis, at hvis $H(x,y)$ er en kontinuert funktion i kvadratet $\{(x,y)\mid x\in[0,1],\ y=[0,1]\}$, gælder

$$\int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 H(f(t),g(t))\,dt.$$

Eksempel: $\displaystyle\int_0^1 f(t)^n g(t)^m dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$

for alle hele $n\geq 0$ og $m\geq 0$.

19.* Vis, at hvis to kontinuerte kurver $(x,y)=(\varphi_1(t),\psi_1(t))$ og $(x,y)=(\varphi_2(t),\psi_2(t))$ med samme parameterinterval $a\leq t\leq b$ opfylder betingelsen

$$\int_a^b \varphi_1(t)^n\psi_1(t)^m dt = \int_a^b \varphi_2(t)^n\psi_2(t)^m dt$$

for alle hele $n\geq 0$ og $m\geq 0$, da indeholder de to kurver de samme punkter.
Vink: Vis først ved hjælp af Weierstrass' approksimationssætning for funktioner af to variable (opg. 1), at hvis $H(x,y)$ er kontinuert i et afsluttet rektangel, der indeholder de to kurver, er

$$\int_a^b H(\varphi_1(t),\psi_1(t))\,dt = \int_a^b H(\varphi_2(t),\psi_2(t))\,dt.$$

20.* Vis, at hvis en kontinuert kurve $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$, $0\leq t\leq 1$, opfylder betingelsen

$$\int_0^1 \varphi(t)^n\psi(t)^m dt = \frac{1}{(n+1)(m+1)}$$

for alle hele $n\geq 0$ og $m\geq 0$, da tilhører den kvadratet $\{(x,y)\mid x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$ og indeholder ethvert punkt af dette, og ingen af funktionerne φ og ψ er differentiabel i noget punkt af intervallet $0\leq t\leq 1$.
Vink: Benyt opg. 18 og 19.

Mat 2, 1962-63 M1 Opg 7

21. Idet \$ og £ betegner hver et af tegnene $+, \cdot, \vee, \wedge$, skal man undersøge, om relationen
$$(a \mathbin{\$} b) \mathbin{£} c = (a \mathbin{£} c) \mathbin{\$} (b \mathbin{£} c)$$
er gyldig for alle reelle talsæt (a, b, c). Undersøg alle 16 tilfælde.

22. Lad $\mathcal{U}$ være en åben punktmængde i $\grave{R}^k$, der indeholder punktet x_0. Vis, at klassen af funktioner på $\mathcal{U}$, der er kontinuerte i x_0, er et funktionsgitter.

23. Navn et lineært funktionsrum, der (bortset fra funktionen 0) ikke indeholder nogen ikke negativ funktion.

24. En funktion $f(x)$ på et interval $[a, b]$ siges at være af begrænset variation, hvis der findes et tal K, således at der for vilkårlige punkter $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ gælder
$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| \leq K.$$
Vis, at klassen af funktioner, der er af begrænset variation i $[a, b]$, er et lineært funktionsrum og også et funktionsgitter.

25. Vis, at udtrykket
$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \left[\cos(\pi m! x)\right]^{2n} \right\},$$
hvor n og m gennemløber N, har mening for ethvert $x \in \grave{R}$, og find dets værdi.

26. Idet f og g er begrænsede funktioner på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at
$$\underline{R}(f) + \underline{R}(g) \leq \underline{R}(f \vee g) + \underline{R}(f \wedge g) \leq$$
$$\leq \underline{R}(f+g) \leq \left\{ \begin{matrix} \underline{R}(f) + \overline{R}(g) \\ \overline{R}(f) + \underline{R}(g) \end{matrix} \right\} \leq \overline{R}(f+g) \leq$$
$$\leq \overline{R}(f \vee g) + \overline{R}(f \wedge g) \leq \overline{R}(f) + \overline{R}(g).$$

27. Vis, at hvis f er en begrænset funktion med begrænset støtte og g er Riemann integrabel, gælder

$$\underline{R}(f)+I(g)=\underline{R}(f\vee g)+\underline{R}(f\wedge g)=\underline{R}(f+g)$$

$$\overline{R}(f)+I(g)=\overline{R}(f\vee g)+\overline{R}(f\wedge g)=\overline{R}(f+g).$$

Vink: Benyt opg 26.

28. Vis, at hvis f og g er begrænsede funktioner med begrænset støtte, og $f+g$ er Riemann integrabel, gælder

$$I(f+g)=\overline{R}(f)+\underline{R}(g)$$

Vink: Benyt opg. 26.

29. Idet h er en vilkårlig begrænset funktion på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at

$$\overline{R}(h)=\overline{R}(h\vee 0)-\underline{R}((-h)\vee 0)$$

$$\underline{R}(h)=\underline{R}(h\vee 0)-\overline{R}((-h)\vee 0).$$

Vink: Benyt foranstående opgaver.

30. Idet h er en begrænset funktion på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte, skal man vise, at h er Riemann integrabel, hvis og kun hvis $h\vee 0$ og $(-h)\vee 0$ er Riemann integrable, og at der i så fald gælder

$$I(h)=I(h\vee 0)-I((-h)\vee 0).$$

31. Angiv for $k=1$ eksempler på konvergente følger $f_1, f_2, \dots$ af Riemann integrable funktioner, som, idet grænsefunktionen betegnes f, illustrerer forskellige kombinationer af følgende muligheder:

1) Funktionsfølgen $f_1, f_2, \dots$ konvergerer ligeligt.
2) Funktionerne $f_1, f_2, \dots$ er ensartet begrænsede.
3) Funktionerne $f_1, f_2, \dots$ er alle $=0$ uden for et interval $[a,b]$,
4) f er Riemann integrabel og $I(f_n)\to I(f)$.
5) f er Riemann integrabel og $I(f_n)\not\to I(f)$.
6) f er ikke Riemann integrabel og $\lim I(f_n)$ eksisterer.

32. Vis, at en funktion f på $\grave{R}^k$ er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes kontinuerte funktioner g og $h \geqslant 0$ med begrænset støtte, således at $|f-g| \leqslant h$ og $I(h) < \varepsilon$.

33. Vis, at hvis f er Riemann integrabel over to disjunkte mængder A og B, er f også Riemann integrabel over $A \cup B$, og

$$\int_{A\cup B} f(x)\, m(d\grave{R}^k) = \int_A f(x)\, m(d\grave{R}^k) + \int_B f(x)\, m(d\grave{R}^k).$$

34. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\grave{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A) + r_i(B) \leqslant r_i(A\cup B) + r_i(A\cap B) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \begin{matrix} r_i(A) + r_y(B) \\ r_y(A) + r_i(B) \end{matrix} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant r_y(A\cup B) + r_y(A\cap B) \leqslant r_y(A) + r_y(B).$$

Vink. Anvend opg. 26.

35. Idet A og B er begrænsede punktmængder i $\grave{R}^k$, skal man vise, at

$$r_i(A) - r_y(B) \leqslant r_i(A\setminus B) - r_y(B\setminus A) \leqslant$$
$$\leqslant r_y(A\setminus B) - r_i(B\setminus A) \leqslant r_y(A) - r_i(B).$$

Vink. Anvend opg. 26 for $f = 1_A$, $g = -1_B$ og opg. 29.

36. Vis, at hvis A og B er disjunkte begrænsede punktmængder i $\grave{R}^k$, for hvilke $A \cup B$ er Riemann målelig, gælder
$$m(A\cup B) = r_i(A) + r_y(B).$$

Vink. Benyt opg. 34.

med begr. støtte?

37.* Vis, at en begrænset funktion f på $\grave{R}^k$ er Riemann integrabel, hvis og kun hvis der for enhver begrænset funktion g med begrænset støtte gælder
$$\overline{R}(g) = \overline{R}\big((g-f)\vee 0\big) + \overline{R}(f \wedge g).$$

38.* Vis, at en begrænset punktmængde A i $\grave{R}^k$ er Riemann målelig, hvis og kun hvis der for enhver begrænset punktmængde B gælder

$$r_y(B) = r_y(B \cap A) + r_y(B \setminus A).$$

39. For $k = 1$ betragtes mængden A af tal x, der fremstilles ved decimalbrøker

$$x = 0{,}a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

hvor alle decimaler a_n er 5 eller 7. Vis, at A er Riemann målelig og find dens mål. Vis også, at A er afsluttet.

40. For et givet k betragtes rummene $\grave{R}^k$ og $\grave{R}^{k+1}$. Punkterne i $\grave{R}^k$ betegnes $x = (x_1, \ldots, x_k)$ og punkterne i $\grave{R}^{k+1}$ betegnes $z = (x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y)$. Med r_y^*, r_i^*, m^* betegnes det ydre og indre Riemann mål og Riemann målet i $\grave{R}^{k+1}$.

Vis, at for en ikke negativ funktion $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ på $\grave{R}^k$ med begrænset støtte er

$$\overline{R}(f) = r_y^*(A) \quad \text{og} \quad \underline{R}(f) = r_i^*(A),$$

hvor A betegner ordinatmængden for f i $\grave{R}^{k+1}$, d. v. s. punktmængden

$$A = \{ z = (x, y) \mid 0 \leq y < f(x) \}.$$

Vis herved, at f er Riemann integrabel, hvis og kun hvis A er Riemann målelig, og at man i så fald har

$$I(f) = m^*(A).$$

41.* Vis, at hvis foreningsmængden for en følge af afsluttede punktmængder på $\grave{R}$ indeholder et interval af positiv længde, da indeholder mindst en af mængderne et sådant interval.

Vink: Før beviset indirekte.

42* Vis, at den Dirichletske funktion f på $\grave{R}$, defineret ved
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \text{ rational} \\ 0 & \text{for } x \text{ irrational} \end{cases}$$
ikke er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner.

Vink: Før beviset indirekte, og betragt, under den antagelse, at f er grænsefunktion for en konvergent følge af kontinuerte funktioner f_n, mængderne
$$B_n = \{x \mid f_n(x) \geq \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \geq \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$
og
$$C_n = \{x \mid f_n(x) \leq \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \mid f_{n+1}(x) \leq \tfrac{1}{2}\} \cap \cdots$$
og anvend sætningen i opg. 41.

43. Idet $a \in \grave{R}$, $b \in \grave{R}$, $n \in \grave{N}$ og $M \in \grave{R}$ er givne tal, for hvilke $a < b$ og $M > 0$, skal man angive et tal $P = P(a, b, n, M)$ med den egenskab, at hvis et polynomium $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $[a, b]$ opfylder betingelsen $|p(x)| \leq M$, da er $|a_\nu| \leq P$ for $\nu = 0, 1, \cdots, n$.

Idet $a \in \grave{R}$, $b \in \grave{R}$ og $n \in \grave{N}$ er givne tal, for hvilke $a < b$, ønskes ovenstående resultat formuleret som en egenskab ved funktionen
$$\varphi(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \max_{a \leq x \leq b} |a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n|.$$

44. Idet $f = f(x)$ er en vilkårlig begrænset funktion på $[a, b]$ og $n \in \grave{N}$, skal man vise, at der i mængden P_n af alle polynomier $p = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ findes mindst et polynomium $p_0 = p_0(x)$, således at
$$\operatorname{dist}(f, p) \geq \operatorname{dist}(f, p_0) \quad \text{for alle } p \in P_n,$$
hvor
$$\operatorname{dist}(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Vink: Benyt opg 43.

45.* Vis, at hvis $\grave{R} = A \cup B$, er mindst en af mængderne A og B ekvipotent med $\grave{R}$. | Betragt en bij. afb $\grave{R}^2 \to A \cup B$

Vink. Har intet med det gennemgåede stof at gøre.

46.* Vis, at hvis $\grave{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, er mindst en af mængderne A_n ekvipotent med $\grave{R}$.

Vink: Generalisation af opg. 45.

× 47. Efterprøv for hver af regnereglerne

$$a+b = b+a \qquad (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$ab = ba \qquad (ab)c = a(bc)$$
$$(a+b)c = ac + bc,$$

om den gælder i $\grave{R}^*$.

×48. Find $\underline{I}(f)$ og $\overline{I}(f)$ for funktionen f på $\grave{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x \in]0,1[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

×49. Samme opg. for funktionen f defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } x \in]0,1[\\ -\infty & \text{for } x \in]-1,0[\\ 0 & \text{for alle andre } x. \end{cases}$$

×50. Vis, at enhver funktion $f = f(x_1, x_2)$ på $\grave{R}^2$, hvis værdi er 0 i ethvert punkt (x_1, x_2) med $x_2 \neq 0$, er Lebesgue integrabel med integralet $I(f) = 0$.

×× 51. Ved opdagelsen af Mars viste det sig, at Mars-beboerne kun kender de rationale tal – af dem kaldet Mars-tal. Intervaller havde de indført (mærkeligt nok med de samme betegnelser vi benytter, men naturligvis kun med brug af Mars-tal), ligeledes trappemængder og disses mål og trappefunktioner og disses integral. Vis at sætningen: „Hvis en dalende følge af trappefunktioner f_n har grænsefunktionen 0, da konvergerer $I(f_n)$ mod 0" ikke gælder på Mars.

52. Vis, at hvis F er en trappemængde i $\grave{R}^k$, og $F_1, F_2, \ldots$ er disjunkte trappemængder i $\grave{R}^k$, således at $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, da er den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} m(F_n)$ konvergent med summen $m(F)$.

Mat 2, 1962–63 M I Opg 13

53. Lad $I_1, I_2, \dots$ være en følge af disjunkte intervaller i R^k og $a_1, a_2, \dots$ en følge af reelle tal. Vis, at den ved

$$f(x) = \begin{cases} a_n & \text{for } x \in I_n,\ n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{for } x \in R^k \setminus \bigcup I_n \end{cases}$$

bestemte funktion f er Lebesgue integrabel, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^\infty |a_n| m(I_n)$ er konvergent, og at man i så fald har

$$I(f) = \sum_1^\infty a_n m(I_n).$$

54. $\mathring{Q}$ betegner mængden af rationale tal. Vis, at der ved $x_1 \sim x_2$, når $x_1 - x_2 \in \mathring{Q}$, er defineret en ækvivalensrelation i $\mathring{R}$. Hvad er den tilsvarende klassedeling? Lad M være en mængde bestående af netop eet tal tilhørende hver ækvivalensklasse, valgt i $[-1, 1]$, og lad M_r for et vilkårligt $r \in \mathring{Q}$ betegne mængden $\{x + r \mid x \in M\}$. Vis, at mængderne M_r, $r \in \mathring{Q}$, er parvis disjunkte og har foreningen $\mathring{R}$. Vis, at M ikke er Lebesgue målelig.

Vink: Benyt, at mængderne M_r, $r \in \mathring{Q}$, er parvis kongruente, og at $[-3, 3]$ indeholder numerabelt mange af dem.

55. Vis, at hvis A er Lebesgue målelig, da findes for ethvert $\varepsilon > 0$ en åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$ således, at

$$m(B \setminus A) < \varepsilon, \qquad m(A \setminus C) < \varepsilon.$$

Vink: Betragt en følge af trappemængder $\overline{F}_1 \subseteq \overline{F}_2 \subseteq \dots$ med $\bigcup \overline{F}_n \supseteq A$, således at $\lim m(\overline{F}_n) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Vælg dernæst åbne trappemængder $F_n^* \supseteq \overline{F}_n$ således, at $m(F_n^*) < m(\overline{F}_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, og sæt $B = \bigcup F_n^*$. — Analogt for sætningens anden halvdel.

56. Vis, at en begrænset mængde A er Lebesgue målelig, hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en begrænset åben mængde $B \supseteq A$ og en afsluttet mængde $C \subseteq A$, således at

$$m(B \setminus C) < \varepsilon.$$

Vink: Benyt opg. 55.

57. Idet længden l af en kontinuert kurve $(x,y) = (f(t), g(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, defineres som $l = \sup l_{\mathcal{D}}$, hvor $l_{\mathcal{D}}$ er længden af den til en vilkårlig inddeling $\mathcal{D}$: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ svarende indskrevne polygon, skal man vise, at mængden

$$K = \{(f(t), g(t)) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$$

bestående af kurvens punkter er en nulmængde, hvis $l < +\infty$. Vis endvidere ved et eksempel, at den omvendte sætning ikke gælder.

58. Konstruer en funktion $f = f(x,y)$ på kvadratet $K = [-1,1] \times [1,1]$, for hvilken

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy \right] dx$$

eksisterer, men som ikke er Lebesgue integrabel over K.

59. Konstruer en funktion $f = f(x,y)$ på kvadratet $K = [-1,1] \times [-1,1]$, for hvilken

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dy \right] dx \quad \text{og} \quad \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx \right] dy$$

begge eksisterer, men har forskellig værdi.

60. Konstruer en funktion $f = f(x,y)$ på kvadratet $K = [-1,1] \times [-1,1]$, for hvilken

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\right]dx \quad \text{og} \quad \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right]dy$$

begge eksisterer og har samme værdi, men som ikke er Lebesgue integrabel over K.

61. Idet B er en begrænset afsluttet mængde i underrummet $\bar{R}^{k-1} = \{x \mid x_k = 0\}$ af $\bar{R}^k$, betragtes „keglen" A med „toppunkt" $t = (0,\dots,0,a)$ og „basis" B, bestemt som foreningsmængden af alle liniestykker xt, hvor $x \in B$. Vis, at

$$m_k(A) = \frac{1}{k}\, a\, m_{k-1}(B).$$

62. Angiv en begrænset funktion på $\bar{R}$ med begrænset støtte, som er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel.

63. Vis, at der for ethvert normeret lineart rum gælder at

$$\|f - f_n\| \to 0 \text{ for } n \to \infty \implies \|f_n\| \to \|f\| \text{ for } n \to \infty$$

(ɔ: $\|f\|$ er en kontinuert funktion på rummet).

64. Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der gælder lighedstegn i Hölders ulighed. Samme opgave for Minkowskis ulighed.

65. Vis, at vektorrummet af alle reelle, resp. komplekse, talfølger $x = (x_1, x_2, \dots)$ ikke kan normeres på en sådan måde, at konvergens i norm er ensbetydende med koordinatvis konvergens, ɔ: at der

ikke findes nogen norm $\|x\|$, således at, når $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots)$,

$$\|x - x^{(m)}\| \to 0 \text{ for } m \to \infty \Leftrightarrow x_i^{(m)} \to x_i \text{ for } m \to \infty \text{ og alle } i.$$

66. Vis, at det reelle, resp. komplekse, talfølgerum er et metrisk rum ifølge afstandsdefinitionen

$$\mathrm{dist}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(|x_i - y_i| \wedge \frac{1}{2^i} \right).$$

Vis, at konvergens i denne metrik er ensbetydende med koordinatvis konvergens (jfr. opg. 65). Vis, at en afsluttet mængde i rummet er kompakt, hvis og kun hvis den er delmængde af en mængde af formen

$$\{x \mid |x_i| \leq M_i, \; i = 1, 2, \dots\},$$

hvor alle $M_i < +\infty$.

67*. Vis, at der eksisterer en uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, hvis led tilhører $\mathcal{L}(\hat{R}^k)$, med den egenskab, at man for enhver funktion $f \in \mathcal{L}(\hat{R}^k)$ kan sætte parenteser i rækken på en sådan måde (d.v.s. kan vælge indices $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ således) at den derved fremkomne række

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(f_{n_{q-1}+1}(x) + \dots + f_{n_q}(x) \right)$$

konvergerer (stærkt) mod f i $\mathcal{L}(\hat{R}^k)$ (ɔ: dens afsnit konvergerer stærkt mod f).

68*. Vis, at hvis en målelig funktion f på $\hat{R}$ har vilkårligt små perioder (ɔ: der findes en følge af tal $p_n \neq 0$ med $p_n \to 0$, således at $f(x + p_n) = f(x)$ for alle

$x \in \mathring{R}$ og alle n), da er $f(x)$ konstant næsten overalt (ɔ: der findes et tal a, således at $\{x \mid f(x) \neq a\}$ er en nulmængde).

Vink: Betragt først det tilfælde, hvor f er begrænset. Behandl det tilfælde, hvor f er ubegrænset, ved at betragte $(f \wedge k) \vee (-k)$ for $k = 1, 2, \ldots$.

69. Vis, at mængden af trappefunktioner ikke er overalt tæt i $\mathcal{L}_\infty(\mathring{R}^k)$.

70. Vis, at $\mathcal{L}_\infty(\mathring{R}^k)$ ikke indeholder nogen numererbar overalt tæt delmængde.

Opgaver vedrørende periodiske funktioner med perioden 2π.

71. Vis, at når $f \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, er den ved
$$h(x) = \underset{t}{\mathcal{M}}\{f(x-t)g(t)\}$$
definerede funktion h en kontinuert funktion med perioden 2π.

72. Idet $f \in \mathcal{L}_p$, hvor $1 \leq p < \infty$, og f_h betegner den ved $f_h(x) = f(x+h)$ bestemte funktion, skal man vise, at
$$\| f - f_h \|_p \to 0 \quad \text{for } h \to 0.$$

73. Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}$ har Fourierrækken $\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, da gælder $a_n = 0$ for alle n, hvis f er ulige, og $b_n = 0$ for alle n, hvis f er lige.

74. Idet $f_k(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{inx}$ og $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}$, og $\| f - f_k \|_1 \to 0$ for $k \to \infty$, skal man vise, at $c_n^{(k)} \to c_n$ for $k \to \infty$ for alle n.

75. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \text{for } 0<x<\pi\\ -\frac{\pi}{4} & \text{for } \pi<x<2\pi\\ 0 & \text{for } x=0 \text{ og } x=\pi\end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π. Indsæt $x=\frac{\pi}{2}$.

76. Udled formlen

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 kx}{4k^2-1}.$$

Indsæt $x=\frac{\pi}{2}$.

77. Fremstil $\cos x$ i intervallet $\underline{0<x<\pi}$ ved en rækkeudvikling af formen

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

78. Find Fourierrækken for den ved

$$f(x)=\begin{cases}\pi\cos\alpha x & \text{for } 0<x<2\pi\\ \pi\,\frac{1+\cos 2\alpha\pi}{2} & \text{for } x=0\end{cases}$$

bestemte funktion med perioden 2π (hvor α er et ikke helt tal). Find herved ved at sætte $x=\pi$

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha^2-k^2} = \frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right)$$

og ved at sætte $x=0$ $\quad \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x-\pi k}+\frac{1}{x+k\pi}\right)$

$$\pi\cot\alpha\pi = \frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-k^2} = \frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right).$$

(Partialbrøkfremstillingerne for $\frac{1}{\sin}$ og cot.)

79. Vis, at når $f\in L$ har Fourierrækken $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$, gælder $c_n\to 0$ for $|n|\to\infty$.

Vink: Benyt approksimation med trappefunktioner.

80. Den periodiske funktion f med perioden 2π, der bestemmes ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{for } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{for } x = 0, \end{cases}$$

har Fourierrækken

$$f(x) \sim \sum_1^\infty \frac{2 \sin nx}{n}.$$

Vis, at grænseværdien for $s_n(\frac{\pi}{n})$ for $n \to \infty$ eksisterer og er $> \pi$ (Gibbs' fænomen).

81. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}_2$, skal man finde koefficienterne i Fourierrækken for funktionen fg.

82. Idet $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ og $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ er funktioner i $\mathcal{L}_2$, skal man finde Fourierrækken for

$$h(x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)\, g(t)\}.$$

Vink. Idet $s_k(x) = \sum_{-k}^{k} d_n e^{inx}$ betragtes følgen af funktioner

$$h_k(x) = \underset{t}{M}\{f(x-t)\, s_k(t)\}.$$

83. Cirklens isoperimetriske egenskab. En „pæn" lukket kurve i den komplekse z-plan tænkes bestemt ved $z = f(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, hvor $f(t)$ er stykkevis kontinuert differentiabel. Kurven antages uden dobbeltpunkter, og den ved parameterfremstillingen bestemte omløbsretning antages at være planens positive omløbsretning. Kurvens længde og det af den begrænsede areal er da

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} |f'(t)|\, dt \quad \text{og} \quad A = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{f'(t)}\, dt.$$

Vis, at $A \le \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$, og at lighedstegnet gælder, når og kun når kurven er en cirkel.

Vink. Vis, at hvis $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, gælder $f'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{int}$. Antag dernæst, at parameterfremstillingen er valgt således, at $|f'(t)|$ er konstant (altså $= \frac{\mathcal{L}}{2\pi}$), og følgelig $\frac{\mathcal{L}^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$. Vis, at da er $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} - A = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} (n^2 - n)|c_n|^2$, og uddrag heraf det ønskede. (A. Hurwitz.)

84. Vis, at ethvert normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ er endeligt eller numererbart.

85. Et normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$ kaldes fuldstændigt, hvis det ikke er ægte delmængde af et normeret ortogonalsystem. Vis, at et fuldstændigt, normeret ortogonalsystem er numererbart.

86. Hvis $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ er et fuldstændigt normeret ortogonalsystem i $\mathcal{L}_2$, kaldes for en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{L}_2$ rækken

$$f(x) \sim \sum_1^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \text{hvor} \quad a_n = (f, \varphi_n),$$

udviklingen for f i systemet. Vis, at en række $\sum_1^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ er udviklingen af en funktion $f \in \mathcal{L}_2$, og da kun af een funktion, hvis og kun hvis rækken $\sum_1^{\infty} |a_n|^2$ er konvergent, og at man i så fald har $\|f - s_n\|_2 \to 0$ for $n \to \infty$, hvor $s_n(x) = \sum_1^{n} a_\nu \varphi_\nu(x)$, og

$$\|f\|_2^2 = \sum_1^{\infty} |a_n|^2.$$