Matematik 2, 1962–63

Børge Jessen

Forelæsninger over differentianlligninger

og implicit givne funktioner

Kapitel 1. Variationsregning.

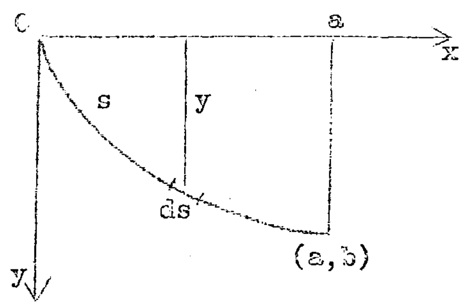
I variationsregningen behandles maksimums- og minimumsopgaver for funktionaler.

I 1696 stiller Johann Bernoulli (1667-1748) den opgave at finde Brachistochronen (kurven for mindst faldtid, jfr. nedenfor). Den blev bl. a. løst af broderen Jacob Bernoulli (1654-1705). Medens Johann Bernoullis løsning var af speciel karakter, idet den bragte problemet i sammenhæng med en lysstråles vej i et medium med variabelt brydningsforhold og udnyttede Fermats princip, at lysstrålerne i et sådant medium går ud ad de hurtigste veje, var Jacob Bernoullis løsning af almen karakter og anvendelig på mange andre lignende opgaver. Han er dermed grundlægger af variationsregningen. Den udvikledes især af Leonhard Euler (1707-1783) og J.-L. Lagranges (1736-1813).

Blandt de mange bøger om emnet anbefales som en moderne, ikke for omfattende fremstilling: G. Grüss: Variationsrechnung. 2. Aufl. 1955.

Eksempler på variationsopgaver.

1. Brachistochronen.



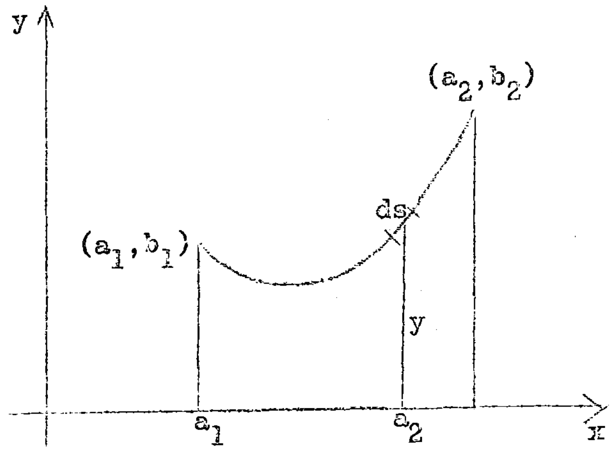
På en gnidningsfri kurve $y = f(x)$, $0 \leqq x \leqq a$, der forbinder $(0,0)$ med (a,b), falder en partikel med udgangsfarten v_0. x og y er funktioner af tiden t. Med gængse betegnelser er $v = \frac{ds}{dt}$, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy$, altså $v^2 = v_0^2 + 2gy$, hvoraf fås faldtiden

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gy}}\,dx.$$

Opgaven er at vælge $y = f(x)$, $0 \leqq x \leqq a$, med $f(0) = 0$, $f(a) = b$, således at T er minimum.

2. Omdrejningsflade med minimalt areal.

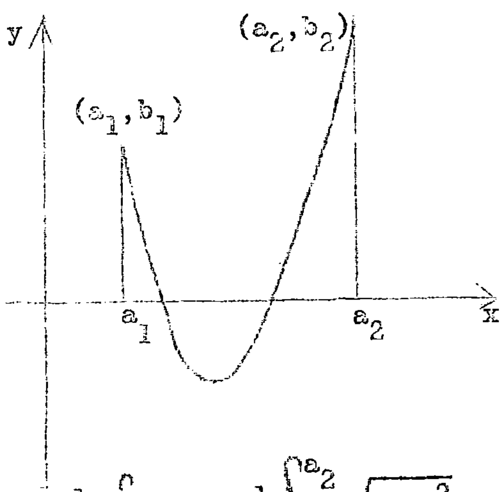
To givne punkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $y \geqq 0$ forbindes med en kurve $y = f(x) \geqq 0$. Ved drejning om x-aksen fås en omdrejningsflade med arealet



$$F = \int 2\pi y\,ds = 2\pi\int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Opgaven er at vælge $y = f(x) \geqq 0$ med $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, således at F er minimum.

3. Kædelinie.

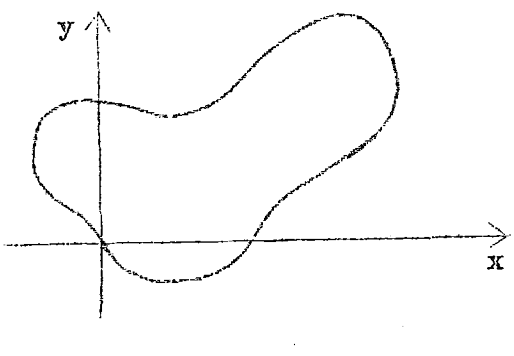


En fuldstændig bøjelig, homogen snor af længde L ophænges i punkterne (a_1,b_1) og (a_2,b_2). Opgaven er at finde ligevægtsstillingen $y = f(x)$, der er bestemt ved, at tyngdepunktet ligger lavest muligt. Idet ϱ er massen pr. længdeenhed, fås for en vilkårlig stilling $y = f(x)$ af kurven, at tyngdepunktets ordinat er $y^* = \frac{1}{L\varrho}\int \varrho y\,ds = \frac{1}{L}\int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Opgaven er, at vælge $y = f(x)$ således at y^* bliver minimum, d.v.s. således at $I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ bliver minimum, idet $y = f(x)$ skal opfylde $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, samt den yderligere betingelse, at $\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L$.

Problemet er således af en mere kompliceret art end de foregående, idet der ud over endepunktsbetingelserne optræder den sidste betingelse.

4. Det isoperimetriske problem.

Blandt alle lukkede kurver i planen med given længde L søges de,



der omslutter det største areal. Vi kan nøjes med at betragte kurver, der indeholder $(0,0)$. Enhver kurve kan da (på mange måder) bestemmes ved en parameterfremstilling $(x,y) = (f(t),g(t))$,

$0 \leqq t \leqq 1$, hvor $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$. Opgaven er at vælge $x = f(t)$ og $y = g(t)$ således, at arealet

$$A = \int (xdy - ydx) = \int_0^1 (xy' - yx')dt$$

bliver maksimum, idet $x = f(t)$, $y = g(t)$ skal opfylde $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, samt den yderligere betingelse $\int_0^1 \sqrt{x'^2+y'^2}dt = L$.

5. Geodætiske linier.

På en given flade søges kurver, der er korteste forbindelse mellem to punkter.

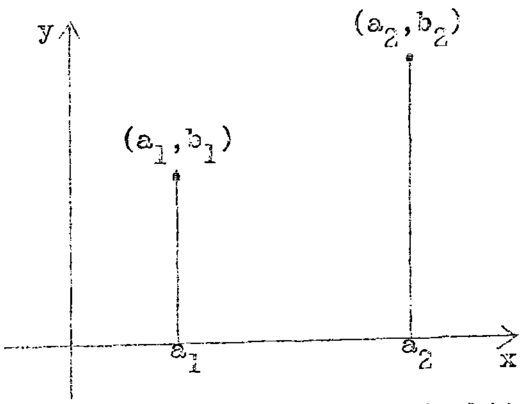
6. Plateaus problem.

For en eller flere lukkede kurver i rummet søges en flade med den eller disse kurver som rand, der har minimalt areal.

—

Det simpleste problem.

Lad $F(x,y,p)$ være en funktion defineret på et område (en åben, sammenhængende mængde) i (x,y,p)-rummet. Lad (a_1,b_1) og (a_2,b_2) med $a_1 < a_2$ være punkter i (x,y)-planen. En tilladt funktion er en funktion $y = f(x)$ på $[a_1,a_2]$, for hvilken $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$. Vi må naturligvis antage, at Ω, (a_1,b_1), (a_2,b_2) er sådan, at der findes tilladte funktioner.



For enhver tilladt funktion betragtes integralet

$$I_f = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx.$$

Vi siger, at I_f har (lokalt) minimum for funktionen f, såfremt der findes et $\rho_0 > 0$, således at $I_{f_1} \geqq I_f$ for alle tilladte funktioner f_1, der opfylder betingelsen $|f_1(x) - f(x)| < \rho_0$ for alle $x \in [a_1,a_2]$.

Analogt defineres (lokalt) maksimum.

[Bemærk. Der er her tale om såkaldt stærkt minimum og maksimum. Man definerer svagt minimum ved, at der findes et $\rho_0 > 0$ og et $\rho_1 > 0$ således, at $I_{f_1} \geqq I_f$ for alle tilladte funktioner f_1, der opfylder betingelserne $\left.\begin{array}{l} |f_1(x) - f(x)| < \rho_0 \\ |f_1'(x) - f'(x)| < \rho_1 \end{array}\right\}$ for alle $x \in [a_1, a_2]$.

Svagt maksimum defineres analogt. Vi får ikke brug for dette.]

Vi mangler nøjere at præcisere kontinuitets- og differentiabilitets-forudsætningerne. Det er ovenfor stiltiende forudsat, at de tilladte funktioner er differentiable. Vi får brug for at forlange dem to gange kontinuert differentiable. Det er endvidere forudsat, at I_f eksisterer for enhver tilladt funktion f. Dette er i hvert fald tilfældet, når F er kontinuert. Vi får brug for at forlange F to gange kontinuert differentiabel (d.v.s. F er kontinuert og har kontinuerte partielle afledede af 1. og 2. orden).

Under disse forudsætninger søger vi tilladte funktioner f, for hvilke I_f har lokalt minimum eller maksimum.

Indskud. Opgaven er analog med opgaven, at bestemme minimums- og maksimumspunkter for en differentiabel funktion h(x) på et åbent interval. Vi har her den nødvendige betingelse $h'(x) = 0$. Denne er som bekendt ikke tilstrækkelig. For to gange differentiabelt h(x) er $h'(x) = 0$ og $h''(x) > 0$ tilstrækkeligt for minimum (men ikke nødvendigt) og $h'(x) = 0$ og $h''(x) < 0$ tilstrækkeligt for maksimum (men ikke nødvendigt). Vi vil for variationsproblemet kun udlede en til betingelsen $h'(x) = 0$ analog nødvendig betingelse for minimum eller maksimum, men ikke gå ind på det væsentlig vanskeligere spørgsmål om tilstrækkelige betingelser.

Betegnelse. For et helt tal $n \geqq 0$ betegner vi med $C^n[a_1, a_2]$ mængden af n gange kontinuert differentiable funktioner på $[a_1, a_2]$. For n = 0 menes hermed mængden af kontinuerte funktioner på $[a_1, a_2]$. De tilladte funktioner er altså mængden af funktioner $f \in C^2[a_1, a_2]$, for hvilke $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$.

Udledelse af nødvendig betingelse.

Vi antager at I_f har lokalt minimum for funktionen $f \in C^2[a_1, a_2]$. Nu vælges en vilkårlig funktion $g \in C^2[a_1, a_2]$, for hvilken $g(a_1) = 0$ og $g(a_2) = 0$. Da Ω er åben, vil der findes en omegn af tallet 0, således at funktionen $f+\varepsilon g$ er tilladt for alle ε i denne omegn. I denne omegn af 0 betragtes funktionen

$$I(\varepsilon) = I_{f+\varepsilon g} = \int_{a_1}^{a_2} F(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x))dx.$$

Da har $I(\varepsilon)$ minimum for $\varepsilon = 0$. Nu er $I(\varepsilon)$ differentiabel med

$$I'(\varepsilon) = \int_{a_1}^{a_2} \left\{F_y(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x))g(x)+F_p(x, f(x)+\varepsilon g(x), f'(x)+\varepsilon g'(x)) \cdot g'(x)\right\}dx.$$

Altså er $I'(0) = 0$, d.v.s.

$$0 = \int_{a_1}^{a_2} \left\{F_y(x, f(x), f'(x))g(x)+F_p(x, f(x), f'(x))g'(x)\right\}dx.$$

Ved delvis integration fås [idet $F_p(x, f(x), f'(x))$ er kontinuert differentiabel ifølge de gjorte forudsætninger, jfr. udregningen nedenfor]

$$\int_{a_1}^{a_2} F_p(x, f(x), f'(x))g'(x)dx = \Big[F_p(x, f(x), f'(x))g(x)\Big]_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2}\left\{\frac{d}{dx}F_p(x, f(x), f'(x))\right\}g(x)dx.$$

Her er første led på højre side 0, da $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 0$. Betingelsen $I'(0) = 0$ bliver derfor:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{F_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, f(x), f'(x))\right\} g(x) = 0.$$

Den i parentesen optrædende funktion

$$h(x) = F_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, f(x), f'(x))$$

er kontinuert ($h \in C^0[a_1, a_2]$). Ved udregning fås

$$h(x) = F_y(x, f(x), f'(x)) - F_{xp}(x, f(x), f'(x)) - F_{yp}(x, f(x), f'(x))f'(x) - F_{pp}(x, f(x), f'(x))f''(x).$$

Vi indskyder nu:

<u>Lemma</u>. Hvis en funktion $h \in C^0[a_1, a_2]$ for et helt tal $n \geq 0$ har den egenskab, at

$$\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx = 0$$

for ethvert $g \in C^n[a_1, a_2]$, da er $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$.

<u>Bevis</u>. Indirekte. Hvis der fandtes et $x_0 \in [a_1, a_2]$, for hvilket f. eks. $h(x_0) > 0$, da fandtes der ifølge kontinuiteten et delinterval $]x_1, x_2[$ af $[a_1, a_2]$, hvori $h(x) > \frac{1}{2} h(x_0)$. Nu vælges $g \in C^n[a_1, a_2]$ således, at $g(x) = 0$ for $x \in [a_1, x_1]$ og $x \in [x_2, a_2]$, og $g(x) > 0$ for $x \in]x_1, x_2[$. Dette er muligt, f. eks.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in [a_1, x_1] \text{ og } x \in [x_2, a_2] \\ (x-x_1)^{n+1}(x_2-x)^{n+1} & \text{for } x \in]x_1, x_2[. \end{cases}$$

Da er $\int_{a_1}^{a_2} h(x)g(x)dx > 0$ i modstrid med antagelsen.

Ved anvendelse af dette lemma fås nu som <u>nødvendig betingelse for minimum</u>, at $y = f(x)$ tilfredsstiller

<u>Eulers differentialligning</u>

$$\boxed{F_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x,f(x),f'(x)) = 0}$$

eller udførligt

$$\boxed{\begin{aligned} F_y(x,f(x),f'(x)) - F_{xp}(x,f(x),f'(x)) - F_{yp}(x,f(x),f'(x))f'(x) \\ - F_{pp}(x,f(x),f'(x))f''(x) = 0 \end{aligned}}$$

Kortere skrives ligningen

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0$$

eller

$$F_y(x,y,y') - F_{xy'}(x,y,y') - F_{yy'}(x,y,y')y' - F_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0.$$

Ved denne (lidt farlige) skrivemåde optræder y' i to forskellige betydninger, nemlig dels inden for parenteserne som afledet af funktionen $y = f(x)$, og dels som indeks som betegnelse for den tredje variable p i funktionen F.

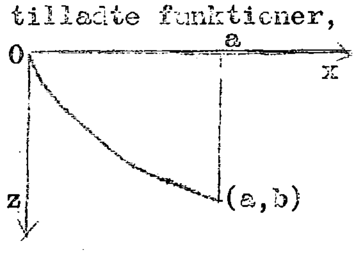
Eulers differentialligning er naturligvis også en <u>nødvendig betingelse for maksimum</u>.

Løsningerne til Eulers differentialligning kaldes <u>ekstremaler</u> for det betragtede problem, uanset om de giver minimum eller maksimum.

Da vi her ikke vil studere tilstrækkelige betingelser, kan vi i de følgende eksempler til begrundelse for, at vi virkelig løser de stillede opgaver, kun henvise til en plausibilitetsbetragtning.

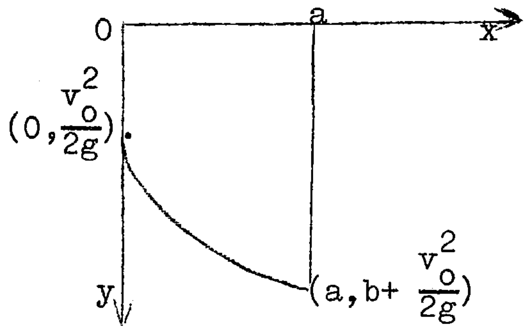
<u>Brachistochronen.</u>

Idet vi skriver z i stedet for y skal vi bestemme $z = z(x)$ blandt de tilladte funktioner, således at



$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gz}}\, dx \quad \text{bliver minimum.}$$

Vi parallelforskyder i z-aksens retning, idet vi sætter $z = y - \frac{v_o^2}{2g}$.



Opgaven er da at bestemme $y = y(x)$ blandt de tilladte funktioner, således at

$$I = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

er minimum. Bemærk, at begyndelsesfarten v_o netop er den fart, der opnås ved et fald fra en udgangsstilling (i hvile) på x-aksen.

Funktionen F er altså

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

og området Ω er halvrummet $\{(x,y,p) \mid y > 0\}$.

Vi er her i den bemærkelsesværdige situation, at F <u>ikke afhænger af x</u>. Vi multiplicerer da Eulers differentialligning med y' og får ligningen

$$F_y(x,y,y')y' - \left(\frac{d}{dx}F(x,y,y')\right)y' = 0$$

eller

$$\frac{d}{dx}(F(x,y,y') - F_{y'}(x,y,y')y') = 0.$$

[Thi når F ikke afhænger af x er $\frac{d}{dx}F(x,y,y') = F_y(x,y,y')y' + F_{y'}(x,y,y')y''$, og endvidere er $\frac{d}{dx}(F_{y'}(x,y,y')y') = (\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y'))y' + F_{y'}(x,y,y')y''$.]

Ved integration fås derfor

$$\boxed{F(x,y,y') - F_{y'}(x,y,y')y' = \text{konst.}}$$

Denne differentiallignings løsninger må være løsninger til Eulers differentialligning og funktionerne $y = $ konst. (bestemt ved $y' = 0$).

I det foreliggende tilfælde bliver ligningen

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.}$$

eller

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.}$$

Funktionerne $y = $ konst. tilfredsstiller ikke Eulers differentialligning. [Thi tages denne i dens udregnede form $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$, ses, at indsætning af $y = $ konst. i venstre side giver $F_y(x,y,0) = \frac{1}{2\sqrt{y^3}} \neq 0.]$ Løsningerne til Eulers differentialligning er derfor de ikke konstante løsninger til

$$y(1+y'^2) = \text{konst.}$$

Vi ser bort fra finesser. Ligningen skrives

$$y(1+y'^2) = 2\alpha, \qquad (\alpha > 0).$$

Vi indfører en ny variabel t ved $y' = \cot\frac{t}{2}$. Da fås

$$y = \frac{2\alpha}{1+y'^2} = 2\alpha\sin^2\frac{t}{2} = \alpha(1-\cos t).$$ Af $\frac{dy}{dx} = \cot\frac{t}{2}$ og

$$\frac{dy}{dt} = \alpha\sin t \quad \text{fås} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\sin t}{\cot\frac{t}{2}} = 2\alpha\sin^2\frac{t}{2} = \alpha(1-\cos t)$$

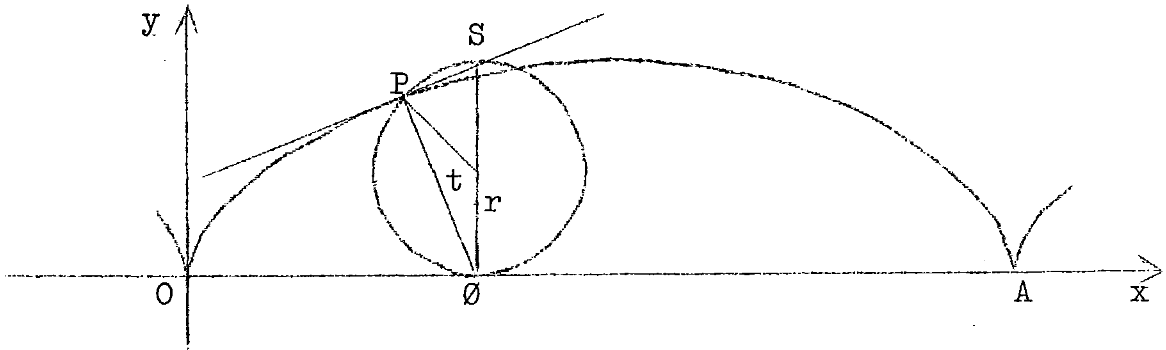
hvoraf $x = \alpha(t - \sin t) + \beta$. Ialt har vi således

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \alpha(t - \sin t) + \beta \\ y &= \alpha(1 - \cos t), \end{aligned}} \qquad (\alpha > 0 \quad \beta \text{ vilkårlig})$$

som (jfr. nedenfor) fremstiller samtlige cykloider frembragt ved rulning af en cirkel af vilkårlig størrelse på x-aksen.

Hver cykloide består af buer, der hver for sig er bestemt ved en ligning $y = f(x)$ hvor f er vilkårligt ofte differentiabel (ses ved elimination af t). Ved prøve kan eftervises, at de er løsninger til $y(1+y'^2) = \text{konst.}$

Vi indskyder en diskussion af cykloiden, som har spillet en betydningsfuld rolle i differential- og integralregningens tidlige historie.



Som beskrivende punkt P af den rullende cirkel med radius r betragter vi det, som er i O, når røringspunktet Ø er i O. Betegner t drejningsvinklen (svarende til, at vi som positiv omløbsretning tager den modsatte af den sædvanlige) fås koordinaterne for P:

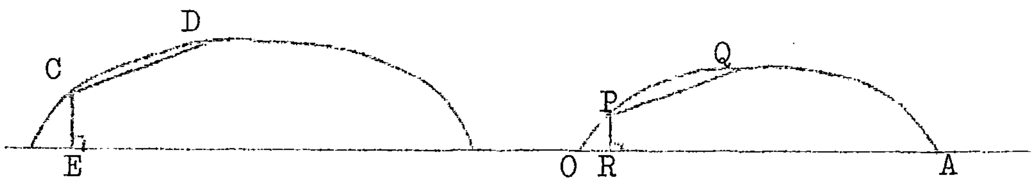
$$x = r(t - \sin t)$$
$$y = r(1 - \cos t).$$

For $0 \leq t \leq 2\pi$ fås en bue OA. Hele kurven fås ved periodisk gentagelse. Der er symmetri om OA's midtnormal. Af L'Hospitals regel ses, at $\frac{x}{y} \to 0$ for $t \to 0$. Der er altså spids i O. Man ser, at x er en voksende funktion af t. Af

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t)$$
$$\frac{dy}{dt} = r \sin t$$

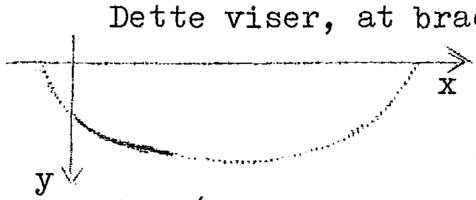
ses, at tangenten i P går gennem det øverste punkt S af den rullende cirkel, normalen altså gennem Ø. Tangenten drejer derfor stadig i samme retning, buen OA er konkav.

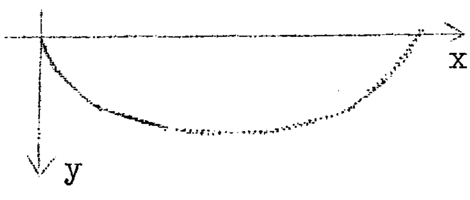
Cykloidebuer for forskellige r er ligedannede. Gennem to vilkårlige punkter C og D i halvplanen $y > 0$ går en og kun én cykloidebue. Det ses ved ligedannethed idet vi (se figuren) for



en fast cykloidebue OA skaffer en trekant PQR ligedannet med CDE ved at lade korden PQ variere parallelt med CD. Forholdet $\frac{PQ}{PR}$ varierer da monotont fra 0 til ∞ og har altså for netop én stilling værdien $\frac{CD}{CE}$.

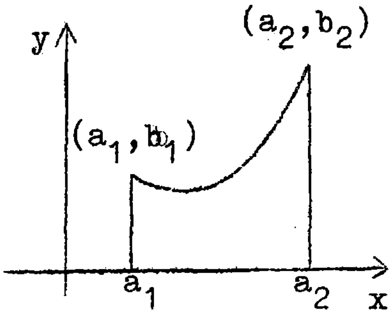
Dette viser, at brachistochroneproblemet for givne endepunkter har netop én løsning. Bemærk, at endepunktet kan ligge over begyndelsespunktet (udgangshastigheden er tilstrækkelig til, at partiklen kan nå helt op til x-aksen). I grænsetilfældet $v_0 = 0$ fås en bue regnet fra en spids. Kurven er da ikke bestemt ved en tilladt funktion. Ved grænseovergang kan ses, at den løser problemet.





Omdrejningsflade med minimalt areal.

Vi skal bestemme $y = f(x) > 0$ blandt de tilladte funktioner, således at



$$I = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

bliver minimum. Funktionen F er altså

$$F(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2},$$

som ikke afhænger af x.

Da F ikke afhænger af x, multiplicerer vi Eulers differentialligning med y' og får efter integration

$$F(x,y,y') - F_{y'}(x,y,y')y' = \text{konst.}$$

eller
$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha.$$

Funktionen y = konst. tilfredsstiller ikke Eulers differentialligning [ses ligesom i forrige eksempel]. Løsningerne til Eulers differentialligning er derfor de ikke konstante løsninger til

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha \qquad (\alpha > 0).$$

I forrige eksempel fandt vi løsningen til en sådan ligning (af typen $G(y,y') = \alpha$) ved en passende substitution. Den almindelige metode er at løse ligningen after y'. Vi viser metoden i det foreliggende tilfælde. Vi finder

$$\frac{1+y'^2}{y^2} = \alpha^{-2}, \quad \frac{y'}{\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}} = \pm 1 \text{ eller } \frac{\frac{dy}{\alpha}}{\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}} = \pm\frac{dx}{\alpha}.$$

Heraf fås ved integration

$$\int \frac{\frac{dy}{\alpha}}{\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}} = \pm\frac{x-\beta}{\alpha} \quad \text{eller} \quad \log\left(\frac{y}{\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1}\right) = \pm\frac{x-\beta}{\alpha},$$

$$\frac{y}{\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1} = e^{\pm\frac{x-\beta}{\alpha}} \quad \text{hvoraf} \quad \frac{y}{\alpha} - \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-1} = e^{\mp\frac{x-\beta}{\alpha}}$$

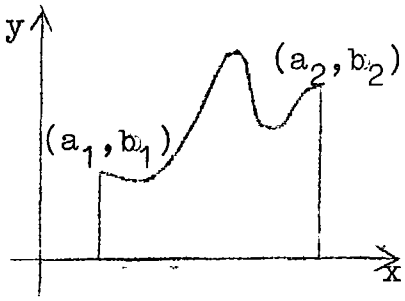
og altså (idet de dobbelte fortegn forsvinder ved additionen)

$$y = \alpha\frac{e^{\frac{x-\beta}{\alpha}} + e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}}{2} = \alpha\cosh\frac{x-\beta}{\alpha}.$$

Løsningerne er således samtlige kædelinier med x-aksen som ledelinie.

Gennem to vilkårlige punkter (a_1,b_1), (a_2,b_2) i halvplanen $y > 0$ (hvor $a_1 < a_2$) går 0,1 eller 2 kædelinier. Vi udelader beviset herfor, som er noget indviklet (omend ganske elementært).

Korteste forbindelse mellem to punkter.



Vi skal her bestemme $y = f(x)$, så at $I = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}dx$ bliver minimum. Vi går frem som før, idet vi udelader teksten. $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$. Eulers differentialligning (efter multiplikation med y') bliver

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst}.$$

Funktionerne y = konst. tilfredsstiller i dette tilfælde Eulers ligning. Dennes løsninger bestemmes derfor ved y' = konst. Løsningerne er altså de rette linier $y = \alpha x + q$. For de givne punkter (a_1,b_1), (a_2,b_2) har man én løsning.

Afkald på den ene eller på begge randbetingelser.

Vi betragter det simpleste problem, idet vi giver afkald på en af randbetingelserne, f.eks. på randbetingelsen $f(a_2) = b_2$. De tilladte funktioner er altså nu alle funktioner $y = f(x) \in C^2[a_1,a_2]$, for hvilke $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for $x \in [a_1,a_2]$, og som opfylder randbetingelsen $f(a_1) = b_1$. Vi siger naturligvis atter, at

$$I_f = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx$$

har (lokalt) minimum for funktionen f, såfremt der findes et $\rho_0 > 0$, således at $I_{f_1} \geq I_f$ for alle tilladte funktioner f_1, der opfylder betingelsen $|f_1(x) - f(x)| < \rho_0$ for alle $x \in [a_1,a_2]$. Ordlyden er den samme som før, men indholdet af definitionen er et andet end tidligere, idet de tilladte funktioner nu er en større klasse. Analogt defineres lokalt maksimum. Vi søger atter nødvendige betingelser.

Vi antager, at I_f har lokalt minimum for den tilladte funktion $y = f(x)$. Nu vælges en vilkårlig funktion $g - \hat{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilken blot $g(a_1) = 0$ (medens $g(a_2)$ kan være $\neq 0$). Da er åben, findes en omegn af tallet 0, således at funktionen f+ g er tilladt for alle i denne omegn. I denne omegn af 0 betragtes funktionen

$$I(\ ) = I_{f+\ g} = {}_{a_1}^{a_2} F(x,f(x)+\ g(x),f'(x)+\ g'(x))dx.$$

Da er $I'(0) = 0$. Vi foretager den samme udregning som foran, men får nu et led hidrørende fra $g(a_2)$. Vi finder

$$I'(0) = F_p(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2) - {}_{a_1}^{a_2} F_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F_p(x,f(x),f'(x))\ g(x)dx = 0.$$

Dette skal gælde for alle $g - \hat{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilke $g(a_1) = 0$. Det må da specielt gælde for de $g - \hat{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilke vi tillige har $g(a_2) = 0$. Funktionen $y = f(x)$ må altså opfylde betingelsen

$${}_{a_1}^{a_2} F_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x,f(x),f'(x))\ g(x)dx = 0$$

for alle sådanne g. Men heraf følger, at $y = f(x)$ må tilfredsstille Eulers differentialligning

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0.$$

Betingelsen $I'(0) = 0$ giver derfor

$$F_p(a_2,f(a_2),f'(a_2))g(a_2) = 0.$$

Da vi kan vælge g således, at $g(a_2) \neq 0$, giver dette

$$F_p(a_2,f(a_2),f'(a_2)) = 0.$$

Vi ser altså, at når vi ikke selv stiller en randbetingelse $f(a_2) = b_2$ svarende til endepunktet a_2, vil problemet selv give anledning til en sådan randbetingelse, nemlig den anførte, som derfor kaldes en naturlig randbetingelse.

Vi har altså som nødvendig betingelse for minimum, at $y = f(x)$ tilfredsstiller Eulers differentialligning, samt den natur-

<u>lige randbetingelse</u>

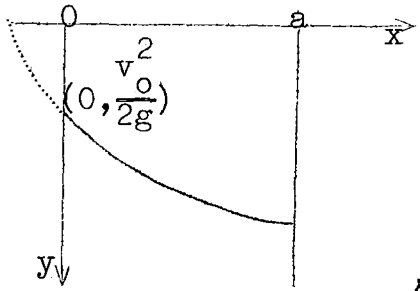
$$F_{y'}(a_2, f(a_2), f'(a_2)) = 0.$$

Disse betingelser er naturligvis også <u>nødvendige betingelser for maksimum</u>.

Analogt finder vi, at hvis vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_1) = b_1$, erstattes denne med den naturlige randbetingelse

$$F_{y'}(a_1, f(a_1), f'(a_1)) = 0.$$

<u>Brachistochronen</u> med fri faldhøjde.



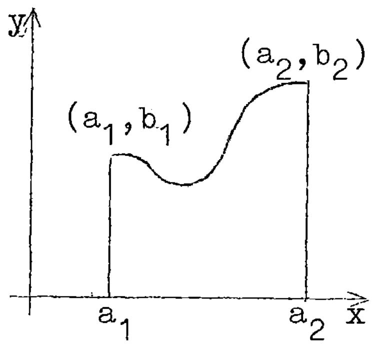
Vi søger en kurve $y = f(x)$ udgående fra $(0,\frac{v_0^2}{2g})$, ad hvilken en partikel med udgangsfarten v_0 falder hurtigst muligt til et punkt af linien $x = a$.

Idet $F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$, altså $F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$, bliver den naturlige randbetingelse

$$\frac{f'(a)}{\sqrt{f(a)}\sqrt{1+(f'(a))^2}} = 0,$$

altså $f'(a) = 0$. Løsningen er altså en cykloïdebue gennem $(0,\frac{v_0^2}{2g})$, der har toppunkt på linien $x = a$. (Man ser let, at der kun er én sådan.)

<u>Problem med bibetingelser</u>.



Lad $F_0(x,y,p)$, $F_1(x,y,p),\cdots$, $F_n(x,y,p)$ være to gange kontinuert differentiable funktioner på et område Ω i (x,y,p)-rummet. Tilladte funktioner skal atter være funktioner $y = f(x) \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, der opfylder randbetingelserne $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, og for hvilke $(x,f(x), f'(x)) \in \Omega$ for $x \in [a_1,a_2]$. Vi siger, at

$$I_{0f} = \int_{a_1}^{a_2} F_0(x,f(x),f'(x))dx$$

har lokalt minimum for funktionen f <u>under bibetingelserne</u>

$$\begin{cases} I_{1f} = \int_{a_1}^{a_2} F_1(x,f(x),f'(x))dx = c_1 \\ \cdots \\ I_{nf} = \int_{a_1}^{a_2} F_n(x,f(x),f'(x))dx = c_n, \end{cases}$$

hvor $c_1,\cdots,c_m$ er givne tal, såfremt f er en tilladt funktion, der opfylder bibetingelserne, og der findes et $\rho_0 > 0$ således, at $I_{0f_1} \geqq I_{0f}$ for alle tilladte funktioner f_1, for hvilke $|f_1(x) - f(x)| < \rho_0$ for alle $x \in [a_1,a_2]$, og som ligeledes opfylder bibetingelserne. Lokalt maksimum af I_{0f} under bibetingelserne $I_{1f} = c_1,\cdots, I_{nf} = c_n$ defineres analogt.

Indskud om minimum og maksimum af funktioner af flere variable med bibetingelser.

Hvis $f(x_0,x_1,\cdots,x_m)$ er en kontinuert differentiabel funktion på en åben punktmængde A i $(x_0,x_1,\cdots,x_m)$-rummet, har vi som nødvendig betingelse for, at f har lokalt minimum eller maksimum i et punkt $(a_0,a_1,\cdots,a_m) \in A$, at

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

[hvor talen er om de partielle afledede værdier i punktet $(a_0, a_1,\cdots,a_m)$]. Dette følger straks af, at hvis vi betragter f som funktion af en bestemt af de variable, f.eks. x_i, idet vi sætter $x_j = a_j$ for alle $j \neq i$, da har f lokalt minimum eller maksimum for $x_i = a_i$. Punkter $(a_0,a_1,\cdots,a_m)$, for hvilke $(*)$ er opfyldt, kaldes stationære punkter for f. Naturligvis behøver f ikke at have lokalt minimum eller maksimum i et sådant punkt.

Eksempler. 1) $f(x,y) = x^2+y^2$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$ giver $(x,y) = (0,0)$ som eneste stationære punkt. Det er åbenbart et minimumspunkt. 2) $f(x,y) = xy$. $\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$ giver $(x,y) = (0,0)$ som eneste stationære punkt. Det er åbenbart hverken et minimumspunkt eller et maksimumspunkt, idet $f(x,y)$ i enhver omegn af $(0,0)$ antager både positive og negative værdier.

Lad nu $f_0(x_0,x_1,\cdots,x_m)$, $f_1(x_0,x_1,\cdots,x_m)$, $\cdots$, $f_n(x_0,x_1,\cdots$

$\ldots,x_m)$ være kontinuert differentiable funktioner på en åben punktmængde A i $(x_0,x_1,\ldots,x_m)$-rummet. Vi siger, at

$$f_0(x_0,x_1,\ldots,x_m)$$

har lokalt minimum i punktet $(a_0,a_1,\ldots,a_m) \in A$ under bibetingelserne

$$\begin{cases} f_1(x_0,x_1,\ldots,x_m) = c_1 \\ \ldots \\ f_n(x_0,x_1,\ldots,x_m) = c_n, \end{cases}$$

hvor $c_1,\ldots,c_n$ er givne tal, såfremt $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ opfylder bibetingelserne, og der findes en omegn af $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ således, at $f(x_0,x_1,\ldots,x_m) \geq f(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ for ethvert punkt $(x_0,x_1,\ldots$ $\ldots,x_m)$ i denne omegn, der opfylder bibetingelserne. Analogt defineres lokalt maksimum af f_0 under bibetingelserne $f_1 = c_1,\ldots,$ $f_n = c_n$. Vi vil bevise følgende sætning:

En nødvendig betingelse for, at f_0 har lokalt minimum eller maksimum i punktet $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ under bibetingelserne $f_1 = c_1,$ $\ldots,f_n = c_n$, er, at rangen ρ af matricen

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{matrix}\right\}$$

[hvor de afledede skal tages i $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$] er $\leq n$.

Bemærk: Hvis $n = 0$, d.v.s. hvis der ingen bibetingelser er, består matricen kun af en række. Betingelsen er da, at rangen er $= 0$, d.v.s. at $\frac{\partial f_0}{\partial x_0} = 0$, $\frac{\partial f_0}{\partial x_1} = 0$, $\ldots,$ $\frac{\partial f_0}{\partial x_m} = 0$.

Bevis. Vi antager, at f_0 har lokalt minimum i $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ under bibetingelserne $f_1 = c_1, \ldots, f_n = c_n$, og skal vise, at $\rho \leq n$.

1) $\underline{n > m}$. Da antallet af søjler er $m+1$, er $\rho \leq m+1$, altså $\rho \leq n$.

2) $\underline{n = m}$. Matricen har da $m+1$ rækker, og påstanden er, at $\rho \leq m$, d.v.s. at rækkerne er lineært afhængige. Dette er indly-

sende, hvis allerede de sidste m rækker er lineært afhængige. Vi antager nu, at dette ikke er tilfældet. Da kan ifølge en sætning om implicit givne funktioner samtlige løsninger $(x_0,x_1,\cdots,x_m)$ til ligningerne $f_1 = c_1, \cdots, f_m = c_m$ i en vis omegn af $(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ bestemmes ved en parameterfremstilling

$$(+) \qquad (x_0,x_1,\cdots,x_m) = (\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)),$$

hvor t gennemløber et interval omkring 0, funktionerne $\varphi_\mu(t)$ er kontinuert differentiable, og

$$(\varphi_0(0),\varphi_1(0),\cdots,\varphi_m(0)) = (a_0,a_1,\cdots,a_m)$$
$$(\varphi_0'(0),\varphi_1'(0),\cdots,\varphi_m'(0)) \neq (0,0,\cdots,0).$$

Indsættes (+) i f_0 fås en kontinuert differentiabel funktion $F(t) = f_0(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))$, som må have lokalt minimum for $t = 0$. Altså er

$$F'(0) = \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\varphi_0'(0) + \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\varphi_1'(0) + \cdots + \frac{\partial f_0}{\partial x_m}\varphi_m'(0) = 0.$$

Indsættes (+) i f_ν $(\nu = 1,\cdots,m)$ fås c_ν for alle t. Altså er

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_0}\varphi_0'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\varphi_1'(0) + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\varphi_m'(0) = 0$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial x_0}\varphi_0'(0) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\varphi_1'(0) + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\varphi_m'(0) = 0.$$

Følgelig er søjlerne i matricen $\left\{\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right\}$ lineært afhængige, hvoraf $\rho \leqq m$, altså $\rho \leqq n$.

3) <u>$n < m$</u>. For at vise, at $\rho \leqq n$, skal vi vise, at hvilke som helst n+1 søjler i matricen er lineært afhængige, altså at rangen af enhver delmatrix bestående af n+1 søjler er $\leqq n$. Dette er imidlertid en umiddelbar følge af det foran beviste. Thi da f_0 har lokalt minimum i $(a_0,a_1,\cdots,a_m)$ under bibetingelserne $f_\nu = c_\nu$ $(\nu = 1,\cdots,n)$, gælder det samme, når vi går over til et problem med kun n+1 variable ved at sætte $x_\mu = a_\mu$ for m-n af de variable.

<u>Lagranges multiplikatorer</u>. At rangen af matricen $\left\{\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right\}$ er $\leqq n$ er ensbetydende med, at matricens n+1 rækker er lineært afhængige, altså med eksistensen af et talsæt

$$(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq (0,0,\cdots,0)$$

således at $\lambda_0\frac{\partial f_0}{\partial x_\mu} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + \cdots + \lambda_n\frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} = 0$ for $\mu = 0,1,\cdots,m$.

Sættes $$f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

står her simpelthen ligningerne

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ \cdots \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0.$$

Den fundne nødvendige betingelse er altså ensbetydende med, at for et eller andet talsæt $(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq (0,0,\cdots,0)$ funktionen $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ er stationær i $(a_0,a_1,\cdots,a_m)$. En minimumsopgave med bibetingelser henføres altså til bestemmelsen af stationære punkter for en funktion af de frie variable x_0, $x_1,\cdots,x_m$, hvori der indgår parametrene $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. Man søger de stationære punkter udtrykt ved parametrene, og må da bagefter bestemme disse således, at bibetingelserne bliver opfyldt. Tallene $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ kaldes Lagranges multiplikatorer.

<u>Eksempel</u>. Vi søger et retvinklet parallelepipedum med given overflade O og maksimalt volumen V. Betegnes kanterne x,y,z, gælder det om i $\{(x,y,z)\,|\,x > 0, \ y > 0, \ z > 0\}$ at finde maksimum for $$V = x\cdot y\cdot z$$

under bibetingelsen

$$2(xy + xz + yz) = O.$$

Som nødvendig betingelse finder vi, at

$$\text{rang}\begin{Bmatrix} yz & xz & xy \\ 2(y+z) & 2(x+z) & 2(x+y) \end{Bmatrix} < 2$$

altså $$\frac{y+z}{yz} = \frac{x+z}{xz} = \frac{x+y}{xy},$$

hvoraf $x = y = z$, hvilket sammen med bibetingelsen giver $x = y = z = \sqrt{\frac{1}{6}O}$. Løsningen er altså terningen med denne kantlængde.

Ved brug af Lagranges multiplikatorer går vi således frem: Vi danner for $(\lambda_0,\lambda_1) \neq (0,0)$

$$f = \lambda_0 xyz + \lambda_1 2(xy + xz + yz)$$

og opstiller ligningerne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

$\lambda_0 = 0$ kommer ikke i betragtning. Thi ligningerne bliver da $y+z = 0$, $x+z = 0$, $x+y = 0$, som kun har løsningen $(x,y,z) = (0,0,0)$. Vi kan derfor vælge $\lambda_0 = 1$. Ligningerne bliver da, idet vi erstatter λ_1 med λ,

$$yz + 2\lambda(y+z) = 0,\quad xz + 2\lambda(x+z) = 0,\quad xy + 2\lambda(x+y) = 0,$$

som giver $x = y = z = -4\lambda$. Kun værdier $\lambda < 0$ kommer i betragtning. Indsættelse i bibetingelsen giver nu $96\lambda^2 = 0$, altså $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{96}0}$, og endelig $x = y = z = -\sqrt{\frac{1}{6}0}$.

Efter dette indskud vil vi nu behandle den stillede variationsopgave.

Vi antager, at I_{0f} har lokalt minimum for funktionen $f \in \mathcal{C}^2[a_1,a_2]$. Nu vælges funktioner $g_0, g_1, \cdots, g_n \in \mathcal{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilke $g_\nu(a_1) = 0$ og $g_\nu(a_2) = 0$ $(\nu = 0,1,\cdots,n)$. Da findes en omegn af punktet $(0,0,\cdots,0)$ i $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$-rummet, således at $f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_n g_m$ er tilladt for alle $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ i denne omegn. Da har funktionen

$$I_0(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) = I_{0f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_n g_n}$$

lokalt minimum i $(0,0,\cdots,0)$ under bibetingelserne

$$\begin{cases} I_1(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) = I_{1f+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_n g_n} = c_1 \\ \cdots \\ I_n(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) = I_{nf+\varepsilon_0 g_0+\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_n g_n} = c_n. \end{cases}$$

Nu er funktionerne $I_\nu(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ $(\nu = 0,1,\cdots,n)$ kontinuert differentiable. Af den ovenstående sætning fremgår da, at rangen af matricen

$$\left\{\frac{\partial I_\nu}{\partial \varepsilon_\mu}\right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial I_0}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial I_0}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial I_0}{\partial \varepsilon_n} \\ \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial I_n}{\partial \varepsilon_n} \end{Bmatrix}$$

[hvor de afledede skal tages i punktet $(0,0,\cdots,0)$] er $\leq n$.

Ved beregningen af et bestemt af tallene $\frac{\partial I_\nu}{\partial \varepsilon_\mu}$ skal vi sætte de øvrige ε_j lig 0, og beregne differentialkvotienten af $I_{\nu f+\varepsilon_\mu g_\mu}$ for $\varepsilon_\mu = 0$. Dette er den samme regning, vi har udført tidligere.

Vi finder
$$\frac{\partial I_\nu}{\partial \varepsilon_\mu} = \int_{a_1}^{a_2}\left\{F_{\nu y}(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F_{\nu p}(x,f(x),f'(x))\right\}g_\mu(x)dx$$

Idet vi til afkortning sætter
$$h_\nu(x) = F_{\nu y}(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}F_{\nu p}(x,f(x),f'(x))$$

har vi altså, at matricen
$$\left\{\begin{matrix} \int_{a_1}^{a_2}h_o(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2}h_o(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2}h_o(x)g_n(x)dx \\ \int_{a_1}^{a_2}h_1(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2}h_1(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2}h_1(x)g_n(x)dx \\ \cdots & & & \\ \int_{a_1}^{a_2}h_n(x)g_o(x)dx & \int_{a_1}^{a_2}h_n(x)g_1(x)dx & \cdots & \int_{a_1}^{a_2}h_n(x)g_n(x)dx \end{matrix}\right\}$$

for vilkårlige funktioner $g_o, g_1, \cdots, g_n \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilke $g_\nu(a_1) = 0$ og $g_\nu(a_2) = 0$ $(\nu = 0,1,\cdots,n)$, har en rang $\leqq n$, d.v.s. dens søjler er lineært afhængige.

Vi betragter nu mængden M af alle vektorer
$$\left\{\begin{matrix} z_o \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \int_{a_1}^{a_2}h_o(x)g(x)dx \\ \int_{a_1}^{a_2}h_1(x)g(x)dx \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2}h_n(x)g(x)dx \end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix}\text{hvor } g \in \hat{C}^2[a_1,a_2] \\ \text{og } g(a_1) = 0,\ g(a_2) = 0.\end{matrix}$$

Ifølge det ovenstående er hvilke som helst n+1 vektorer i mængden M lineært afhængige. Dimensionen af M er altså $\leqq n$, hvoraf følger, at der findes et n-dimensionalt underrum af $(z_o,z_1,\cdots,z_n)$-rummet, der indeholder M. Et sådant er bestemt ved en ligning
$$\lambda_o z_o+\lambda_1 z_1+\cdots+\lambda_n z_n = 0, \text{ hvor } (\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,0,\cdots,0).$$

Vi ser altså, at der må findes et talsæt $(\lambda_o,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,0,\cdots,0)$ således at
$$\int_{a_1}^{a_2}(\lambda_o h_o(x)+\lambda_1 h_1(x)+\cdots+\lambda_n h_n(x))g(x)dx = 0$$
for alle $g \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, for hvilke $g(a_1) = 0$, $g(a_2) = 0$.

Ifølge det tidligere lemma gælder da

$h(x) = \lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \cdots + \lambda_n h_n(x) = 0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$. Sætter vi

$$F(x,y,p) = \lambda_0 F_0(x,y,p) + \lambda_1 F_1(x,y,p) + \cdots + \lambda_n F_n(x,y,p),$$

er
$$h(x) = F_y(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x,f(x),f'(x)).$$

Ligningen $h(x) = 0$ for alle $x \in [a_1, a_2]$ er derfor simpelthen Eulers differentialligning svarende til funktionen $F(x,y,p)$. Hermed har vi bevist:

En <u>nødvendig betingelse</u> for, at I_{0f} har lokalt minimum for funktionen $y = f(x)$ under bibetingelserne $I_{1f} = c_1, \cdots, I_{nf} = c_n$, er, at der findes et talsæt $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at $y = f(x)$ er ekstremal for problemet

$$I_f = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x),f'(x))dx = \text{minimum}$$

(uden bibetingelser), hvor

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n.$$

[NB. Hermed er ikke sagt, at en løsning til minimumsproblemet med bibetingelser er et lokalt minimum for I_f. Vi har kun vist, at den er ekstremal for dette problem, altså tilfredsstiller Eulers ligning for dette problem. Den behøver ikke at være lokalt minimum for I_f.]

Ved løsning af en minimumsopgave med bibetingelser søger man at bestemme ekstremalerne for I_f for vilkårlige værdier af parametrene $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Derefter må parametrene $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ og de øvrige i løsningen optrædende parametre bestemmes således, at bibetingelserne $I_{1f} = c_1, \cdots, I_{nf} = c_n$ og randbetingelserne $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ bliver opfyldt. Tallene $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ kaldes atter <u>Lagranges multiplikatorer</u>.

<u>Kædelinie</u>.

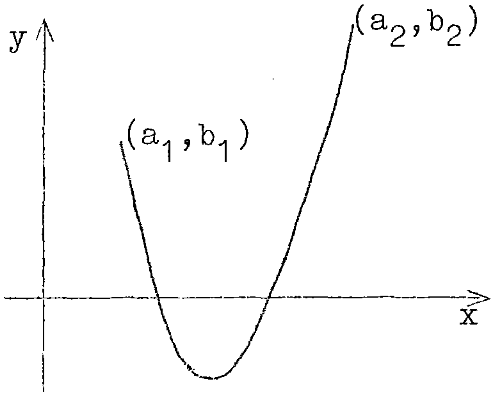
Vi skal bestemme $y = f(x)$ blandt de tilladte funktioner, således at $I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}dx$ er minimum under bibetingelsen

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+y'^2}dx = L.$$

Vi må naturligvis antage $L \leqq L_0 = \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2}$.

Vi danner for $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$

$$I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (\lambda_0 y + \lambda_1)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$



For $\lambda_0 = 0$ er ekstremalerne svarende hertil (jfr. ovenfor) funktionerne $y = \alpha x + \beta$ (betragtet i $[a_1,a_2]$). Den rette linie fra (a_1,b_1) til (a_2,b_2) tilfredsstiller kun bibetingelsen, når $L = L_0$, og er da åbenbart løsning til vort problem [den er nemlig for $L = L_0$ den eneste tilladte funktion, der opfylder bibetingelsen]. Når $L > L_0$ kan vi altså antage $\lambda_0 \neq 0$, og kan da vælge $\lambda_0 = 1$, så at det drejer sig om integralet

$$I = I_0 + \lambda I_1 = \int_{a_1}^{a_2} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Dette er netop integralet fra problemet om omdrejningsflade med minimal overflade, blot med $y+\lambda$ i stedet for y (vi har jo $y' = (y+\lambda)'$). Ekstremalerne er derfor bestemt ved

$$y + \lambda = \alpha \cosh \frac{x-\beta}{\alpha}$$

(hvor nu både positive og negative α skal tages i betragtning). Dette er systemet af alle kædelinier med vandret ledelinie. Ved indsættelse i bibetingelsen og randbetingelserne finder man let ligninger til bestemmelse af α, β, λ. Der bliver to kurver, en med $\alpha > 0$ og en med $\alpha < 0$. Kun den første løser opgaven (for den anden er I_0 maksimum under bibetingelsen $I_1 = L$).

Problem med bibetingelser og med afkald på randbetingelse.

Ændrer vi det foran behandlede problem derved, at vi giver afkald på randbetingelsen $f(a_2) = b_2$, finder vi som nødvendig betingelse for lokalt minimum, at mængden af alle vektorer

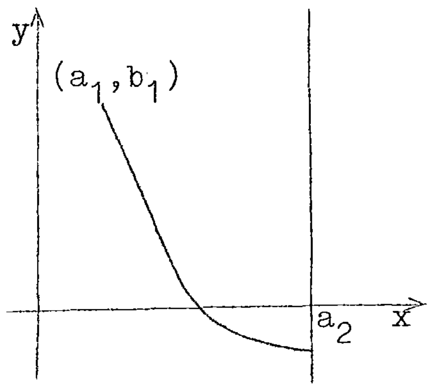
$$\begin{Bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{0p}(a_2,f(a_2),f'(a_2)) + \int_{a_1}^{a_2} h_0(x)g(x)dx \\ F_{1p}(a_2,f(a_2),f'(a_2)) + \int_{a_1}^{a_2} h_1(x)g(x)dx \\ \vdots \\ F_{np}(a_2,f(a_2),f'(a_2)) + \int_{a_1}^{a_2} h_n(x)g(x)dx \end{Bmatrix}$$

hvor $g \in C^2[a_1,a_2]$ og $g(a_1) = 0$, har en dimension $\leqq n$. Dette fører til, at der må findes et talsæt $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,0,\dots,0)$, således, at når vi sætter

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n$$

tilfredsstiller $y = f(x)$ Eulers differentialligning svarende til funktionen $F(x,y,p)$ samt den naturlige randbetingelse $F_p(a_2,f(a_2),f'(a_2)) = 0$.

Ligevægtsstilling af kæde med fri ende.



En snor af længde L ophænges med det ene endepunkt i (a_1,b_1) medens det andet endepunkt (f.eks. ved hjælp af en ring) kan glide på linien $x = a_2$.

Med de ved behandlingen af kædelinien benyttede betegnelser må ligevægtsstillingen $y = f(x)$ for et talpar $(\lambda_0,\lambda_1) \neq (0,0)$ være ekstremal svarende til $I = \lambda_0 I_0 + \lambda_1 I_1$ med den naturlige randbetingelse

$$(\lambda_0 f(a_2) + \lambda_1)\cdot\frac{f'(a_2)}{\sqrt{1+(f'(a_2))^2}} = 0.$$

Hvis $\lambda_0 = 0$, giver dette $f'(a_2) = 0$, og da løsningen i dette tilfælde er lineær, må den være konstant, altså $y = b_1$. Dette vil indtræffe når og kun når $L = a_2 - a_1$. Hvis $\lambda_0 \neq 0$, kan vi antage $\lambda_0 = 1$; sættes $\lambda_1 = \lambda$ er løsningen en kædelinie

$$y + \lambda = \alpha\cosh\frac{x-\beta}{\alpha}.$$

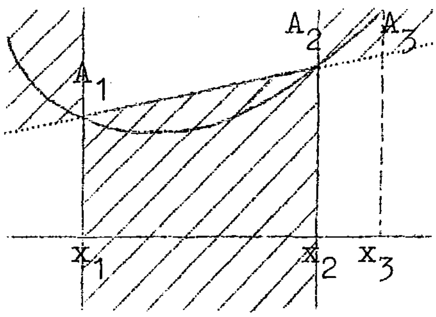
Følgelig er $f(a_2) + \lambda \neq 0$, og vi må som før have $f'(a_2) = 0$. Kædelinien har altså sit toppunkt på linien $x = a_2$.

Kapitel 2. Gammafunktionen.

Denne af Euler indførte funktion er næst efter de elementære funktioner (trigonometriske funktioner og deres omvendte, eksponentialfunktion, logaritmefunktion) analysens vigtigste funktion, og mangfoldige fremstillinger af dens teori er givet. Vi følger den af E. Artin (Einführung in die Theorie der Gammafunktion, 1931) givne fremstilling (beroende på en fra H. Bohr og J. Mollerup stammende grundtanke), der udmærker sig ved, at de vigtigste formler opnås næsten uden regning.

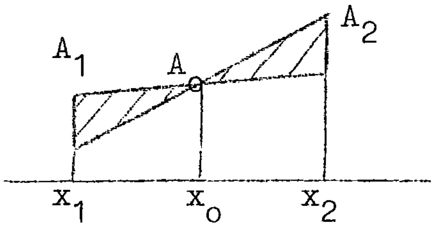
Hjælpesætning om konvekse funktioner.

En funktion $y = f(x)$ på et (åbent, endeligt eller uendeligt) interval I kaldes konveks, såfremt dens geometriske billede i ethvert interval $[x_1, x_2]$ ligger under eller på den ved punkterne $A_1 = (x_1, f(x_1))$ og $A_2 = (x_2, f(x_2))$ bestemte korde A_1A_2.



Heraf følger straks, at det geometriske billede uden for intervallet $[x_1, x_2]$ må ligge over eller på kordens forlængelse. Thi lå f.eks. det til et $x_3 > x_2$ svarende punkt $A_3 = (x_3, f(x_3))$ under kordens forlængelse, ville A_2 jo ligge over korden A_1A_3.

Betragtes nu for et vilkårligt x_0 punkter $x_1 < x_0$ og $x_2 > x_0$, ses, at det geometriske billede i $[x_1, x_2]$ må ligge i de to trekanter bestemt af linierne $x = x_1$, $x = x_2$, A_1A_0 og A_0A_2 (se figur). Heraf fremgår, at funktionen er kontinuert i x_0.



Altså: Enhver konveks funktion er kontinuert.

Definitionen af konveksitet kan formuleres således: For vilkårlige $x_1 < x_2 < x_3$ skal gælde

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Heraf følger: En sum af (to eller flere) konvekse funktioner er konveks. Grænsefunktionen for en konvergent følge af konvekse funktioner er konveks. Summen af en konvergent række, hvis led er konvekse funktioner, er konveks.

Vi nævner også: Enhver lineær funktion $y = \alpha x + \beta$ er konveks.

En konveks funktion er ikke nødvendigvis differentiabel (eksempel $y = |x|$). Der gælder:

En to gange differentiabel funktion $y = f(x)$ er konveks, hvis og kun hvis $f''(x) \geqq 0$ for alle x.

1. Antag $f''(x) \geqq 0$ for alle x. For givne $x_1 < x_2 < x_3$ er ifølge middelværdisætningen

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2),$$

hvor $\xi_1 \in]x_1, x_2[$ og $\xi_2 \in]x_2, x_3[$. Fornyet anvendelse af middelværdisætningen giver

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1),$$

hvor $\xi \in]\xi_1, \xi_2[$. Altså er $f'(\xi_1) \leqq f'(\xi_2)$, og konveksiteten er bevist.

2. Antag $f(x)$ konveks. For givne $x_1 < x_2$ ligger det geometriske billede i $[x_1, x_2]$ under eller på korden. Heraf følger

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq f'(x_2).$$

Altså er $f'(x)$ monotont voksende og følgelig $f''(x) \geqq 0$ for alle x.

I det følgende spiller et med konveksitet nært sammenhørende begreb en afgørende rolle.

En funktion $y = f(x)$ på et (åbent, endeligt eller uendeligt) interval I kaldes logaritmisk konveks hvis $f(x) > 0$ for alle x, og $\log f(x)$ er konveks.

Af sætningerne om konvekse funktioner følger umiddelbart: Enhver logaritmisk konveks funktion er kontinuert. Et produkt af (to eller flere) logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks. Grænsefunktionen for en konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks, hvis dens værdi overalt er > 0.

Derudover gælder følgende mærkværdige sætning, som ikke følger umiddelbart af definitionen af logaritmisk konveksitet:

En sum af (to eller flere) logaritmisk konvekse funktioner er logaritmisk konveks.

Bevis: Det er nok at se på en sum $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ af to logaritmisk konvekse funktioner. Det er klart, at $f(x) > 0$ for alle x.

Lad $x_1 < x_2$, og lad de hertil svarende korder for de konvekse funktioner $\log f_1(x)$ og $\log f_2(x)$ have ligningerne $y = \alpha_1 x + \beta_1$ og $y = \alpha_2 x + \beta_2$. Da er for $x \in [x_1, x_2]$

$$\log f_1(x) \leqq \alpha_1 x + \beta_1 \text{ og } \log f_2(x) \leqq \alpha_2 x + \beta_2$$

og altså $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \leqq e^{\alpha_1 x + \beta_1} + e^{\alpha_2 x + \beta_2} = \varphi(x)$, hvoraf $\log f(x) \leqq \log \varphi(x)$. For $x = x_1$ og $x = x_2$ gælder $\log f(x) = \log \varphi(x)$. De til x_1 og x_2 svarende korder for $\log f(x)$ og $\log \varphi(x)$ er derfor samme linie. Det er derfor nok at vise, at $\log \varphi(x)$ i $[x_1, x_2]$ falder under korden. Dette viser vi ved at vise, at $\log \varphi(x)$ er konveks. Nu er $\log \varphi(x)$ to gange differentiabel. Vi finder

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \varphi(x) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x + \beta_1 + \beta_2}}{\varphi(x)^2};$$

som er $\geqq 0$ for alle x. Hermed er sætningen bevist.

Et vigtigt resultat fås ved kombination af de foranstående sætninger. Lad $f(x,t)$ være en funktion på en produktmængde $I \times [a,b]$, hvor I er et åbent interval. Vi antager, at $f(x,t_0)$ er logaritmisk konveks på I for ethvert $t_0 \in [a,b]$, og at $f(x_0,t)$ er kontinuert på $[a,b]$ for ethvert $x_0 \in I$. Følgelig er $f(x,t) > 0$ på $I \times [a,b]$. For ethvert n vil

$$F_n(x) = \{f(x,a) + f(x,a+h) + \cdots + f(x,a+(n-1)h)\}h$$
$$(h = \frac{b-a}{n})$$

være logaritmisk konveks på I. For $n \to \infty$ gælder

$$F_n(x) \to F(x) = \int_a^b f(x,t)dt.$$

Da $F(x) > 0$, slutter vi, at $F(x)$ er logaritmisk konveks.

Som en anvendelse vil vi bevise:

Er $\varphi(t)$ kontinuert og positiv på et åbent interval $]a,b[$, hvor $0 \leq a < b \leq +\infty$ og eksisterer det uegentlige integral

$$F(x) = \int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt = \lim_{\substack{a_1 \to a \\ b_1 \to b}} \int_{a_1}^{b_1} \varphi(t)t^{x-1}dt$$

for alle $x > 0$, da er $F(x)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$.

Thi sættes $f(x,t) = \varphi(t)t^{x-1}$ er $f(x,t)$ defineret på $]0,+\infty[\times]a,b[$. Endvidere er $f(x,t_0)$ logaritmisk konveks på $]0,+\infty[$ for ethvert $t_0 \in]a,b[$, idet $\log f(x,t_0)$ er en lineær funktion af x, og $f(x_0,t)$ er en kontinuert funktion på $]a,b[$ for ethvert $x_0 \in]0,+\infty[$. Følgelig er $\int_{a_1}^{b_1} \varphi(t)t^{x-1}dt$ logaritmisk konveks for vilkårlige a_1 og b_1 $(a < a_1 < b_1 < b)$. Funktionen $F(x)$ er altså grænsefunktion for en konvergent følge af logaritmisk konvekse funktioner, og da $F(x) > 0$, slutter vi, at $F(x)$ er logaritmisk konveks.

Følgende udsagn er næsten indlysende:

Hvis $f(x)$ er logaritmisk konveks på et vist interval og c et reelt tal $\neq 0$, da er funktionerne $f(x+c)$ og $f(cx)$ logaritmisk konvekse på de tilsvarende intervaller.

Til slut beviser vi: Enhver logaritmisk konveks funktion er konveks.

Lad $f(x)$ være logaritmisk konveks og lad $y = \alpha x + \beta$ være korden for det geometriske billede af $\log f(x)$ svarende til intervallet $[x_1,x_2]$. Da er $\log f(x) \leq \alpha x + \beta$ for $x \in [x_1,x_2]$, altså $f(x) \leq e^{\alpha x+\beta}$. Da $f(x) = e^{\alpha x+\beta}$ for $x = x_1$ og $x = x_2$, er korden for $e^{\alpha x+\beta}$ svarende til $[x_1,x_2]$ også korde for $f(x)$. Men $e^{\alpha x+\beta}$ er konveks. Altså er $f(x)$ for $x \in [x_1,x_2]$ under eller på korden.

Indskud om eksponentialfunktionen.

Ved studiet af en funktion er det ofte nyttigt at kunne karakterisere funktionen ved hjælp af dens egenskaber i stedet for at benytte en formel. Som eksempel nævnes:

<u>For et givet</u> $a > 0$ <u>er</u> $f(x) = a^x$ <u>karakteriseret ved følgende egenskaber (d.v.s. det er den eneste funktion, der har disse egenskaber)</u>:

1) $f(x)$ <u>er defineret og kontinuert på</u> $]-\infty,+\infty[$.

2) $f(x)$ <u>tilfredsstiller funktionalligningen</u>

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2).$$

3) $f(1) = a$.

Vi går ud fra, at vi kender funktionen a^x og ved, at den har disse egenskaber, og vil nu vise, at hvis en funktion $f(x)$ har disse egenskaber, er $f(x) = a^x$ for alle x.

Af 2) og 3) følger specielt $f(x+1) = a\cdot f(x)$, hvilket sammen med $f(1) = a$ viser, at $f(n) = a^n$ for alle hele tal n (positive, negative og nul).

Af $f(x)\cdot f(1-x) = f(1) = a$ ses, at $f(x) \neq 0$ for alle x. Da $f(1) > 0$ viser 1), at $f(x) > 0$ for alle x.

Af funktionalligningen følger

$$f(x_1 + \cdots + x_q) = f(x_1)\cdot \cdots \cdot f(x_q),$$

hvoraf (for vilkårligt helt p)

$$a^p = f(p) = f(\tfrac{p}{q})\cdot \cdots \cdot f(\tfrac{p}{q}) = (f(\tfrac{p}{q}))^q.$$

Da $f(\frac{p}{q}) > 0$, følger heraf $f(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$. Altså er $f(r) = a^r$ for alle rationale r.

Da $f(x)$ og a^x begge er kontinuerte, følger af $f(x) = a^x$ for alle rationale x, at $f(x) = a^x$ for alle x.

En lidt anden formulering af sætningen er følgende:

<u>Funktionen</u> $f(x) = a^x$ <u>er den eneste kontinuerte funktion på</u> $]-\infty,+\infty[$, <u>der interpolerer mellem værdierne</u> $f(n) = a^n$, <u>og som tilfredsstiller funktionalligningen</u> $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$.

<u>Bemærkning</u>. Hvis man ikke i forvejen kender funktionen a^x, (undtagen for hele x), kan man tage egenskaberne 1)2)3) som ret-

tesnor ved indførelsen af a^x for vilkårligt x. Man søger da en funktion f(x), der opfylder 1)2)3). Idet man går frem ligesom ovenfor, ser man, at den eneste mulighed er at definere f(n) som a^n for n hel, og $f(\frac{p}{q})$ for q positiv hel og p hel som $\sqrt[q]{a^p}$. Dette bliver dog kun en definition af f(r) for r rational, når man efterviser, at resultatet er det samme, ligegyldigt hvilken brøkfremstilling for r man benytter. Derefter er den eneste mulighed for definition af f(x) for irrationalt x at sætte $f(x) = \lim f(r_n)$, idet r_n er en følge af rationale tal, der konvergerer mod x, men hertil kræves naturligvis, at man viser, at grænseværdien eksisterer og er uafhængig af, hvilken følge man benytter. Om den funktion f(x), man ad denne vej får defineret, kan man vise, at den opfylder 1)2)3), og det fremgår af ræsonnementet, at det er den eneste, der gør det. Man definerer derefter a^x for vilkårligt x som f(x).

<u>Anvendelse</u>. Som eksempel på udnyttelsen af ovenstående sætning vil vi bevise sætningen

$$(a^p)^q = a^{pq} \qquad (a > 0).$$

Hertil betragtes for fast p funktionen $f(x) = a^{px}$. For denne gælder: 1) den er defineret og kontinuert på $]-\infty,+\infty[$. 2) $f(x_1+x_2) = a^{p(x_1+x_2)} = a^{px_1+px_2} = a^{px_1}\cdot a^{px_2} = f(x_1)\cdot f(x_2)$. 3) $f(1) = a^p$. Ifølge sætningen gælder derfor $f(x) = (a^p)^x$.

<u>Definition af gammafunktionen</u>.

Gammafunktionen løser det problem på fornuftig måde at udvide begrebet n! til vilkårlige tal. Fra integralregningen kendes udtrykket (bevis følger nedenfor)

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!.$$

Det ligger derfor nær i denne formel at erstatte n med et vilkårligt reelt x. Man har imidlertid valgt, at definere gammafunktionen således, at den i punktet n har værdien (n-1)!. Definitio-

nen lyder derfor
(1)
$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.}$$

Det må nu undersøges, for hvilke x integralet eksisterer. Hertil skal (idet $0 < a < 1 < b < +\infty$) undersøges eksistensen af grænseværdierne
$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{og} \quad \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Den første eksisterer for $x > 0$. Thi integranden er for $t > 0$ positiv og $< t^{x-1}$. Altså er
$$0 < \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_a^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

Funktionen $\varphi(a) = \int_a^1 e^{t} t^{x-1} dt$ er således begrænset, og da den er monotont aftagende, må $\lim_{a \to 0} \varphi(a)$ eksistere. Er derimod $x \leqq 0$ eksisterer den første grænseværdi ikke. Thi for $t \in]0,1]$ gælder da $e^{-t} t^{x-1} \geqq e^{-1} t^{-1}$. Altså er
$$\int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt \geqq \int_a^1 \frac{1}{et} dt = \frac{1}{e} \log \frac{1}{a},$$
hvoraf ses, at $\varphi(a) = \int_a^1 e^{-t} t^{x-1} dt \to \infty$ for $a \to 0$.

Den anden grænseværdi eksisterer for alle x. Thi er n et helt positivt tal $\geqq x-1$, gælder for $t \in [1,\infty[$ uligheden $t^{x-1} \leqq t^{n}$. Af rækkeudviklingen $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ ses, at der for $t > 0$ gælder $e^t > \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}$, altså $e^{-t} < \frac{(n+2)!}{t^{n+2}}$. Følgelig er
$$\int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt < \int_1^b \frac{(n+2)!}{t^2} dt = (n+2)! - \frac{(n+2)!}{b} < (n+2)!$$

Da funktionen $\psi(b) = \int_1^b e^{-t} t^{x-1} dt$ er voksende, ses, at $\lim_{b \to \infty} \psi(b)$ eksisterer.

<u>Ved ovenstående formel er</u> $\Gamma(x)$ <u>således defineret for alle</u> $x > 0$.

Erstatter man i $\int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt$ tallet $x > 0$ med $x+1$ og integrerer delvis, får man
$$\int_a^b e^{-t} t^{x} dt = \Big[-e^{-t} t^{x}\Big]_a^b + \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt =$$

$$e^{-a}a^x - e^{-b}b^x + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Betegner n et helt tal $\geq$ x er $0 < e^{-b}b^x < \frac{(n+2)!}{b^2}$, hvoraf $e^{-b}b^x \to 0$ for $b \to \infty$. Endvidere gælder $e^{-a}a^x \to 0$ for $a \to 0$. Man finder derfor

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x).} \tag{2}$$

Denne funktionalligning er grundlæggende for hele teorien. For x = 1 fås $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$. Funktionalligningen giver derfor $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\cdots$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Denne ligning $\Gamma(n) = (n-1)!$ gælder også for n = 1 idet man sætter $0! = 1$. Funktionalligningen er en almindeliggørelse af ligningen $n! = n\cdot(n-1)!$. Kender man gammafunktionen for $0 < x \leq 1$, kan man ved funktionalligningen finde dens værdier for $1 < x \leq 2$, ud fra disse dens værdier for $2 < x \leq 3$, etc.

Almindeligt finder man for n positiv, hel

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x).$$

Denne betragtning viser, at der findes uendelig mange funktioner på $]0,\infty[$, der tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = xf(x)$ og for hvilke $f(1) = 1$ (og følgelig $f(n) = (n-1)!$). Mam kan nemlig vælge f(x) ganske vilkårligt på $]0,1]$, bortset fra betingelsen $f(1) = 1$, og derefter benytte funktionalligningen til sukcessivt at definere f(x) på $]1,2]$, $]2,3]$, etc. Den således fremkomne funktion vil da tilfredsstille betingelserne.

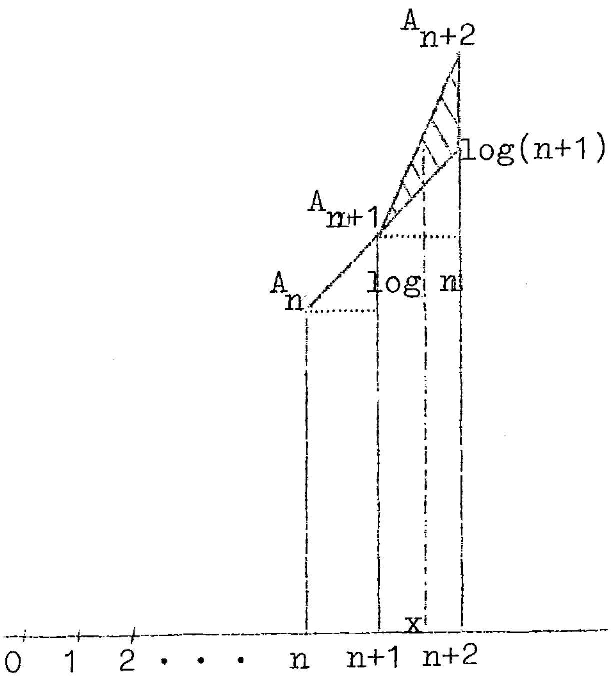
Ifølge indledningsafsnittet har $\Gamma(x)$ den egenskab at være logaritmisk konveks. Vi vil nu vise, at denne egenskab sammen med de allerede nævnte karakteriserer gammafunktionen:

(3)

Funktionen $f(x) = \Gamma(x)$ har følgende egenskaber:
a) den er defineret på $]0,+\infty[$ og tilfredsstiller funktionalligningen $f(x+1) = x\cdot f(x)$.
b) den er logaritmisk konveks.
c) $f(1) = 1$.
Den er den eneste funktion, der har disse egenskaber.

At $\Gamma(x)$ har egenskaberne er allerede vist. Lad os nu antage, at $f(x)$ har egenskaberne a)b)c). Vi vil da vise, at $f(x) = \Gamma(x)$ for alle x.

Vi har $f(n) = (n-1)!$. Vi betragter det geometriske billede af $\log f(x)$ i $[n+1, n+2]$.



Det ligger under eller på korden $A_{n+1}A_{n+2}$ og over eller på forlængelsen af korden A_nA_{n+1} (se figur). Disse korder har hældningskoefficienterne $\log(n+1)$ og $\log n$. Heraf ses:

Hvis $0 < x \leq 1$, gælder $\log f(n+1+x) = \log f(n+1) + x \cdot \log n + \varepsilon(x,n)$, hvor $0 < \varepsilon < x \log(n+1) - x \log n$, altså $0 < \varepsilon < \log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. Altså er

$$f(n+1+x) = n! \cdot n^x \cdot e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Men $f(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)xf(x)$, da funktionen opfylder funktionalligningen. Altså er

$$f(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot e^{\varepsilon(x,n)}.$$

Da $\varepsilon(x,n) \to 0$ for $n \to \infty$, følger heraf

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Nu er $\Gamma(x)$ også en funktion, der opfylder a)b)c). Den netop udledte formel gælder altså også, når vi skriver $\Gamma(x)$ i stedet for $f(x)$. Følgelig er $f(x) = \Gamma(x)$ for $0 < x \leq 1$, og da begge funktioner tilfredsstiller funktionalligningen, må det samme gælde for alle $x > 0$.

Som biresultat har vi fundet

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}} \tag{4}$$

foreløbig dog kun for $0 < x \leq 1$.

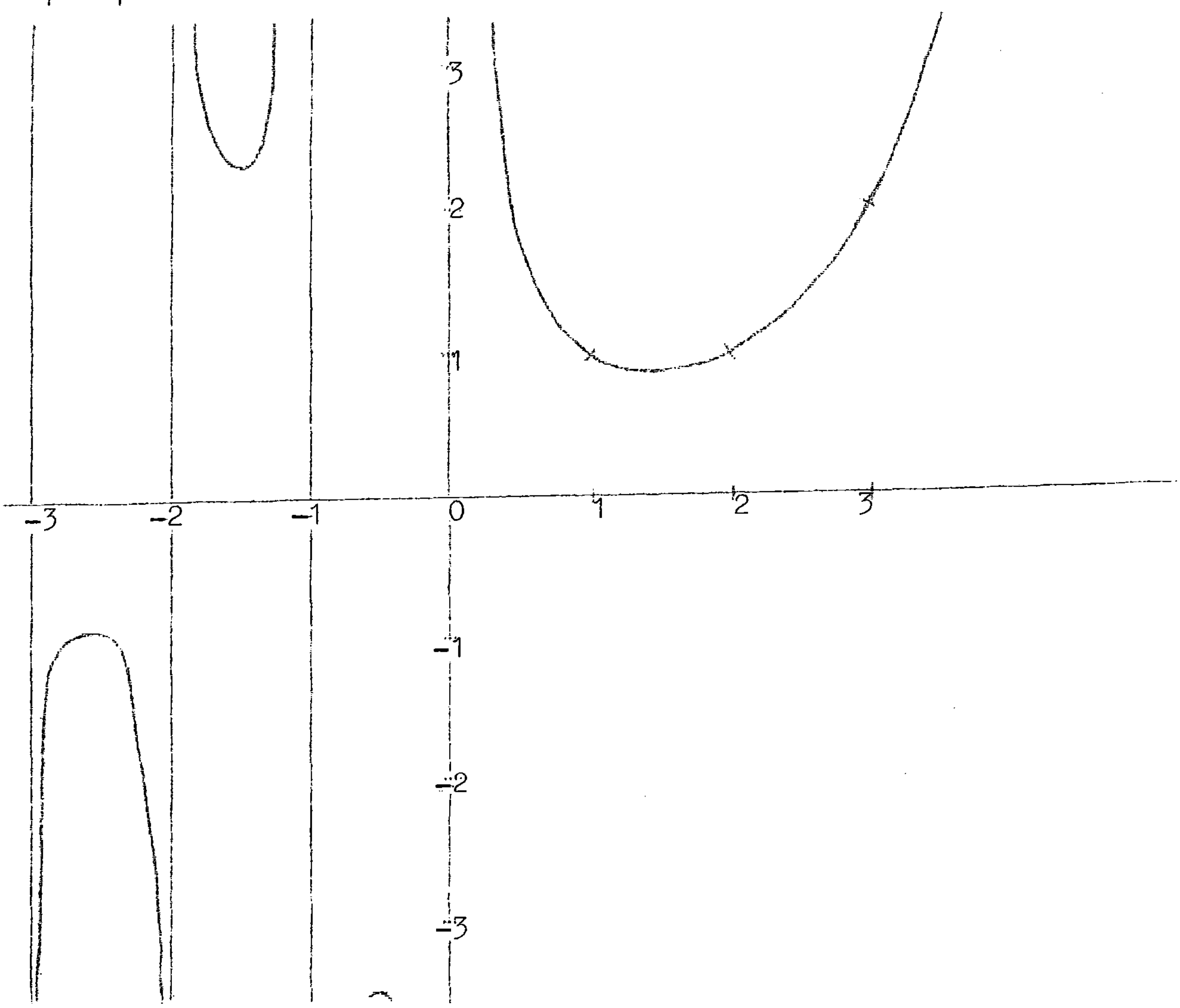
Inden vi diskuterer (4) vil vi definere $\Gamma(x)$ også for negative x. Dette kan på en og kun ém måde ske således, at funktionalligningen (2) bliver opfyldt for alle x. Udfra værdierne for $0 < x \leqq 1$ fås $\Gamma(x)$ sukcessivt for $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$, ved

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Man ser, at $\Gamma(x)$ bliver defineret for alle $x \neq 0,-1,-2,\dots$. Da $\Gamma(x)$ er kontinuert og > 0 for $x > 0$, ser man, at $\Gamma(x)$ er kontinuert og negativ i $]-1,0[$, kontinuert og positiv i $]-2,-1[$, etc. Da $\Gamma(1) = 1$, ser man, at $\Gamma(x)$ i omegnen af $x = 0$ forløber omtrent som $\frac{1}{x}$, og følgelig i omegnen af $x = -1$ omtrent som $\frac{-1}{x+1}$, i omegnen af $x = -2$ omtrent som $\frac{1}{2(x+2)}$, etc., almindeligt i omegnen af $x = -n$ omtrent som $\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. I hvert interval $]-n,-n+1[$ er $|\Gamma(x)|$ logaritmisk konveks. Thi

$$|\Gamma(x)| = \frac{\Gamma(x+n)}{|x|\cdot|x+1|\cdots|x+n-1|}$$

og $\frac{1}{|x-c|}$ er logaritmisk konveks for $x < c$.



Vi vil nu vise, at udtrykket (4) er gyldigt for alle x, for hvilke $\Gamma(x)$ er defineret (altså for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$). Hertil betegner vi den under limestegnet stående funktion med $\Gamma_n(x)$ og bemærker, at

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1}\ ;\quad \Gamma_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x+n+1}{n}\Gamma_n(x+1).$$

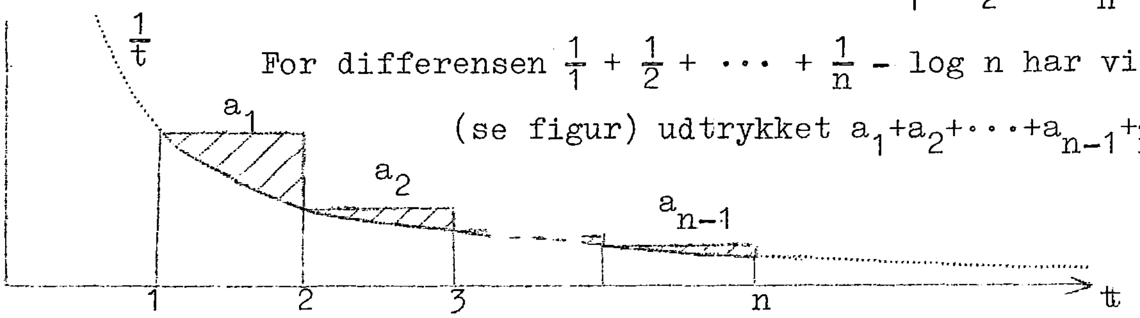
Man ser da: Hvis grænseværdien $\lim_{n\to\infty}\Gamma_m(x)$ eksisterer, så eksisterer også $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$. Hvis omvendt $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)$ eksisterer og $x \neq 0$, så eksisterer $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$. Da grænseværdien $\lim_{m\to\infty}\Gamma_n(x)$ eksisterer for $0 < x \leqq 1$, følger heraf, at den eksisterer netop for $x \neq 0,-1,-2,\cdots$. Sætter man $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = f(x)$, ser man endvidere, at $f(x+1) = xf(x)$. Da $f(x) = \Gamma(x)$ for $0 < x \leqq 1$, ses, at formlen (4) gælder for alle $x \neq 0,-1,-2,\cdots$.

Formlen (4) blev af Gauss benyttet som udgangspunkt for teorien.

Gammafunktionens produktfremstilling.

En simpel regning viser, at

$$\Gamma_n(x) = e^{x(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$



For differensen $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ har vi (se figur) udtrykket $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{1}{n}$.

Da $0 < a_i < \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, er den uendelige række $a_1+a_2+\cdots$ konvergent. Dens sum er Eulers konstant $C = 0{,}577215664901533\ldots$.

Altså finder man

$$(5)\qquad \boxed{\Gamma(x) = e^{-Cx}\cdot\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}} = e^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}}$$

der kaldes Weierstrass' produktfremstilling for $\Gamma(x)$.

Heraf fås for $x > 0$

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{i} - \log\left(1+\frac{x}{i}\right)\right) =$$
$$-Cx - \log x + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x}{i} - \log\left(1+\frac{x}{i}\right)\right).$$

Ved hjælp af denne rækkeudvikling vil vi vise, at $\log \Gamma(x)$ er differentiabel i $]0,+\infty[$.

Det vil være tilstrækkeligt at vise, at den ved ledvis differentiation fremkomne række

$$-C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{x+i}\right) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x}{i(x+i)}$$

konvergerer ligeligt i intervallet $]0,k]$ (for et vilkårligt $k > 0$). Det følger af, at rækken i $]0,k]$ har den konvergente majoranträkke $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{i^2}$. Ifølge sætningen om ledvis differentiation har vi da i $]0,k]$, og altså i $]0,\infty[$ (da k var vilkårlig)

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Ved hjælp heraf slutter vi på samme måde, at $\log \Gamma(x)$ er to gange differentiabel i $]0,+\infty[$ med

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^2},$$

og heraf, ved gentagen anvendelse af ræsonnementet, at $\log \Gamma(x)$ er n gange differentiabel i $]0,+\infty[$ for ethvert n, og at

$$\frac{d^n}{dx^n}\log\Gamma(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)!}{(x+i)^n} \qquad (n \geqq 2).$$

Altså er også $\Gamma(x) = e^{\log \Gamma(x)}$ vilkårligt ofte differentiabel i $]0,+\infty[$, og heraf følger atter ved hjælp af funktionalligningen, at $\Gamma(x)$ er vilkårligt ofte differentiabel i ethvert af intervallerne $]-k,-k+1[$ (k positiv hel).

Betafunktionen.

Udgangsintegralet (1) kaldes det andet Eulerske integral. Foruden dette betragtede Euler et andet med gammafunktionen beslægtet integral, det såkaldte første Eulerske integral, der tjener til definition af betafunktionen:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Vi vil vise, at integralet eksisterer, når $x > 0$ og $y > 0$. Hertil skal (idet $0 < a < \frac{1}{2} < b < 1$) undersøges eksistensen af grænseværdierne

$$\lim_{a \to 0}\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \text{ og } \lim_{b \to 0}\int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

I det første integral er $(1-t)^{y-1} < (1-t)^{-1} \leq 2$. Integranden er positiv. Altså er

$$0 < \int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < 2\int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt = \frac{2^{1-x}}{x} - \frac{2a^x}{x} < \frac{2}{x}.$$

Funktionen $\varphi(a) = \int_a^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ er således begrænset, og da den er monotont aftagende, må $\lim_{a\to 0} \varphi(a)$ eksistere.

I det andet integral er $t^{x-1} < t^{-1} < 2$. Integranden er positiv. Altså er

$$0 < \int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt < 2\int_{\frac{1}{2}}^{b}(1-t)^{y-1}dt = \frac{2^{1-y}}{y} - \frac{2(1-b)^y}{y} < \frac{2}{y}.$$

Funktionen $\psi(b) = \int_{\frac{1}{2}}^{b} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ er således begrænset, og da den er monotont voksende, må $\lim_{b\to 1}\psi(b)$ eksistere.

<u>Ved ovenstående formel er</u> $B(x,y)$ <u>således defineret for</u> $x > 0$, $y > 0$.

Erstatter man i $\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ tallet $x > 0$ med $x+1$, får man ved en omskrivning og påfølgende delvis integration

$$\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}dt = \int_a^b (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt =$$

$$\left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_a^b + \int_a^b \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\cdot x\cdot\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\,dt =$$

$$\frac{(1-a)^y a^x-(1-b)^y b^x}{x+y} + \frac{x}{x+y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

For $a \to 0$ og $b \to 1$ følger heraf funktionalligningen

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\cdot B(x,y).$$

Vi vælger nu et <u>fast</u> $y > 0$. For at få en funktion frem, der tilfredsstiller gammafunktionens funktionalligning, danner vi funktionen $\quad f(x) = B(x,y)\Gamma(x+y)$.

For denne gælder

$$f(x+1) = B(x+1,y)\Gamma(x+1+y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)(x+y)\Gamma(x+y) = xf(x).$$

Endvidere er $f(x)$ logaritmisk konveks. Thi for fast y er $B(x,y)$ af formen $\int_0^1 \varphi(t)t^{x-1}dt$, hvor $\varphi(t) = (1-t)^{y-1}$ er kontinuert og positiv på $]0,1[$. Ifølge indledningsafsnittet er derfor $B(x,y)$ logaritmisk konveks. Det samme gælder $\Gamma(x+y)$. Altså er $f(x)$ produkt af to logaritmisk konvekse funktioner og følgelig logaritmisk konveks. Funktionen f(x) tilfredsstiller altså de to første af de tre betingelser, der karakteriserer $\Gamma(x)$ på $]0,+\infty[$. Vi vil nu beregne f(1). Vi finder

$$B(1,y) = \lim_{b \to 1} \int_0^b (1-t)^{y-1} dt = \lim_{b \to 1} \left[-\frac{(1-t)^y}{y} \right]_0^b = \frac{1}{y}.$$

Altså fås

$$f(1) = B(1,y)\Gamma(1+y) = \frac{\Gamma(1+y)}{y} = \Gamma(y).$$

Hvis en funktion f(x) på $]0,+\infty[$ opfylder de to første af de tre betingelser a)b)c), der karakteriserer $\Gamma(x)$, så vil $\frac{f(x)}{f(1)}$ åbenbart opfylde alle tre betingelser, og vil altså være $= \Gamma(x)$. For funktionen f(x) gælder derfor, at $f(x) = f(1)\Gamma(x) = \Gamma(y)\Gamma(x)$. Vi har hermed bevist, at der for alle positive x og y gælder formlen

(6)
$$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

Sættes $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ og anvender man i integralet substitutionen $t = \sin^2\theta$, finder man

$$(\Gamma(\tfrac{1}{2}))^2 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

Da $\Gamma(\frac{1}{2})$ er positiv, har vi hermed fundet den mærkværdige og vigtige formel

(7)
$$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.}$$

Heraf følger straks $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$, og almindeligt $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots(n - \frac{1}{2})\sqrt{\pi}$.

Legendres multiplikationsformel.

Som et andet eksempel på anvendelsen af gammafunktionens karakterisering ved betingelserne a)b)c) vil vi betragte funktionen

$$f(x) = \Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}).$$

Den er defineret, når hverken $\frac{x}{2}$ eller $\frac{x+1}{2}$ er et af tallene 0,-1, -2,.... Vi finder

$$f(x+1) = \Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x+2}{2}) = \tfrac{x}{2}\cdot\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{x}{2}) = \tfrac{x}{2}\cdot f(x).$$

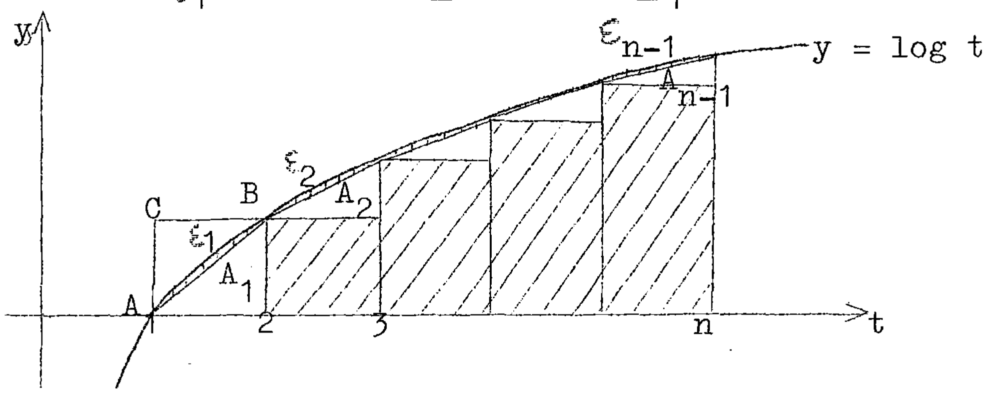
Dette er ikke gammafunktionens funktionalligning. For at blive

af med 2-tallet i nævneren ganger vi $f(x)$ med 2^x, der ved erstatning af x med $x+1$ multipliceres med 2. Den herved fremkomne funktion
$$g(x) = 2^x \cdot \Gamma(\tfrac{x}{2})\,\Gamma(\tfrac{x+1}{2})$$
vil opfylde funktionalligningen $g(x+1) = x \cdot g(x)$. På $]0,+\infty[$ er $g(x)$ som produkt af tre logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks. Følgelig er $\frac{g(x)}{g(1)} = \Gamma(x)$ for alle $x > 0$, og i kraft af funktionalligningen må det samme da gælde for negative $x \neq -1, -2, \cdots$. Nu er $g(1) = 2 \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(1) = 2\sqrt{\pi}$. Vi har derfor fundet Legendres multiplikationsformel

$$\boxed{\Gamma(\tfrac{x}{2})\,\Gamma(\tfrac{x+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \cdot \Gamma(x).} \tag{8}$$

Stirlings formel.

Ved en elementær betragtning kan man finde en tilnærmet værdi til $\Gamma(n) = (n-1)!$. Vi har
$$\log \Gamma(n) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1)$$
og sammenligner derfor $\log \Gamma(n)$ med integralet
$$\int_1^n \log t \, dt = \Big[t \log t - t\Big]_1^n = n \log n - n + 1.$$



Forskellen mellem integralet og $\log \Gamma(n)$ består af trekantsarealerne $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$, som tilsammen er $\frac{1}{2}\log n$, og de små arealer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$, som tilsammen er $< \frac{1}{2}\log 2$, idet man let ser, at de pågældende figurer ved parallelforskydning alle kan finde plads i trekanten ABC. Man ser heraf, at
$$(n-\tfrac{1}{2})\log n - n + 1 - \tfrac{1}{2}\log 2 < \log \Gamma(n) < (n-\tfrac{1}{2})\log n - n +$$
og altså
$$\frac{e}{\sqrt{2}}\, n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} < \Gamma(n) < e \cdot n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Dette giver anledning til at betragte en funktion af formen

$$f(x) = x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}\, e^{\mu(x)} \qquad (x > 0).$$

Vi vil bestemme funktionen $\mu(x)$ således, at $f(x)$ opfylder betingelserne a) og b). Da vil $\Gamma(x)$ være $= a\cdot f(x)$ for et passende a.

Ved simpel regning finder vi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = (1 + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}\, x\, e^{-1}\, e^{\mu(x+1) - \mu(x)}.$$

Nødvendigt og tilstrækkeligt for, at $f(x)$ opfylder a) er altså, at $\mu(x)$ opfylder funktionalligningen

$$\mu(x) - \mu(x+1) = (x + \frac{1}{2}) \log (1 + \frac{1}{x}) - 1.$$

Funktionen på højre side betegnes $g(x)$. En funktion $\mu(x)$, der opfylder ligningen

$$\mu(x) - \mu(x+1) = g(x),$$

kan nu straks opskrives, nemlig

$$(*) \qquad \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n),$$

forudsat at den her optrædende række er konvergent for alle $x > 0$. Vi udsætter beviset herfor et øjeblik og viser først, under antagelse af rækkens konvergens, at funktionen $f(x)$, når vi benytter den ved $(*)$ bestemte funktion $\mu(x)$, vil opfylde betingelsen b)

Funktionen $x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}$ er logaritmisk konveks. Thi dens logaritme er to gange differentiabel med den anden afledede

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2},$$

som er > 0. Endvidere er $e^{\mu(x)}$ logaritmisk konveks, altså $\mu(x)$ konveks. For at vise dette er det nok at vise, at hvert af leddene $g(x+n)$ i rækken $(*)$ er konveks. Hertil er det atter nok at vise, at $g(x)$ er to gange differentiabel, og at

$$g''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0.$$

Vi mangler endnu at bevise konvergensen af rækken $(*)$ før alle $x > 0$. Samtidig med, at vi beviser dette, vil vi udlede et udtryk for rækkens sum $\mu(x)$. Vi benytter omskrivningen

$$g(x) = (x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x}) - 1 = \frac{1}{2}(2x+1)\log \frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} - 1$$

og anvender den for $|y| < 1$ gyldige rækkeudvikling

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \cdots.$$

Herved fås

$$g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots.$$

Heraf ses, at $g(x) > 0$ for alle $x > 0$. Vi forstørrer højre side, idet vi erstatter tallene $5,7,9,\cdots$ med 3. Da fremkommer på højre side en uendelig kvotientrække med første led $\frac{1}{3(2x+1)^2}$ og kvotient $\frac{1}{(2x+1)^2}$. Dens sum er

$$\frac{1}{3(2x+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}.$$

Vi har således
$$0 < g(x) < \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)} \qquad (x > 0).$$

Rækken $(*)$ har således for ethvert $x > 0$ positive led, og den har majorantrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right),$$

som åbenbart er konvergent med summen $\frac{1}{12x}$. Dermed er konvergensen af rækken $(*)$ bevist, og vi har samtidig fundet, at

$$0 < \mu(x) < \frac{1}{12x} \qquad (x > 0).$$

Vi kan også skrive
$$\mu(x) = \frac{\theta}{12x},$$
hvor θ er et af x afhængigt tal mellem 0 og 1.

Der gælder altså for et passende a

$$\Gamma(x) = ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}} \qquad (x > 0).$$

For at bestemme a anvender vi nu Legendres formel og får for $x > 0$

$$a\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}+\frac{\theta_1}{6x}}\,a\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x+1}{2}+\frac{\theta_2}{6(x+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\,ax^{x-\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12x}},$$

hvoraf ved forkortning

$$(**) \qquad a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\,e^{\frac{\theta}{12x}-\frac{\theta_1}{6x}-\frac{\theta_2}{6(x+1)}}.$$

Nu gælder som bekendt $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ for $x \to \infty$ [thi sættes $\frac{1}{x} = h$, har man $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+h)^{\frac{1}{h}}$, altså $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{\log(1+h)}{h}$, som $\to 1$ for $h \to 0$]. Følgelig gælder $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \to e^{\frac{1}{2}}$. Ved grænseovergangen $x \to \infty$ fås derfor af $(**)$

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

Vi har hermed bevist Stirlings formel

(9)
$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x+\mu(x)} && (x > 0) \\ &\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n+\tfrac{1}{2})\left(\log\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right) = \frac{\theta}{12x} && (0 < \theta < 1) \end{aligned}}$$

Sættes specielt $x = n$ og multipliceres med n, fås

(10)
$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\frac{\theta}{12n}},}$$

hvoraf den mærkværdige formel

(11)
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} = \sqrt{2\pi}\,.}$$

Gauss' multiplikationsformel.

Dette er en almindeliggørelse af Legendres formel.

For et vilkårligt helt $p \geqq 2$ vil vi betragte funktionen

$$f(x) = \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

Den er defineret, når intet af tallene $\frac{x}{p}, \frac{x+1}{p}, \ldots, \frac{x+p-1}{p}$ er et af tallene $0,-1,-2,\ldots$, d.v.s. for $x \neq 0,-1,-2,\ldots$. Vi finder

$$f(x+1) = \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x}{p}+1\right) = \frac{x}{p}\cdot f(x).$$

Følgelig tilfredsstiller funktionen

$$g(x) = p^x\, \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)$$

funktionalligningen $g(x+1) = xg(x)$. På $]0,+\infty[$ er $g(x)$ som produkt af logaritmisk konvekse funktioner logaritmisk konveks. Følgelig gælder for et passende a

$$\Gamma(x) = a\, p^x\, \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

For at bestemme a benytter vi Stirlings formel. Vi får for $x > 0$:
$$\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{\theta}{12x}} = a p^x \prod_{\nu=0}^{p-1} \sqrt{2\pi}\left(\frac{x+\nu}{p}\right)^{\frac{x+\nu}{p}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x+\nu}{p}+\frac{\theta_\nu p}{12(x+\nu)}},$$

hvoraf ved forkortning

$$e^{\frac{\theta}{12x}} = a(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^{p-1} \left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x+\nu}{p}} e^{-\frac{\nu}{p}}\, e^{\frac{\theta_\nu p}{12(x+\nu)}}.$$

Nu gælder $\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x}{\nu}} \to e$, og altså $\left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x+\nu}{p}} = \left(1+\frac{\nu}{x}\right)^{\frac{x}{\nu}\cdot\frac{x+\nu}{px}\nu} \to e^{\frac{\nu}{p}}$, for $x \to \infty$. Vi får derfor

$$1 = a\,(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\, p^{\frac{1}{2}},$$

og har således bevist Gauss' formel

(12)
$$\boxed{\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\cdot\Gamma(x).}$$

For $p=2$ er det Legendres formel.

Sammenhæng med sinusfunktionen.

For gammafunktionen gælder endnu en vigtig funktionalligning. For at udlede den sætter vi

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x.$$

Denne funktion er foreløbig kun defineret for $x \neq$ de hele tal. Når x erstattes med x+1, erstattes $\Gamma(x)$ med $x\Gamma(x)$, og $\Gamma(1-x)$ med $\Gamma(-x) = \frac{\Gamma(1-x)}{-x}$, medens $\sin \pi x$ erstattes med $-\sin \pi x$. Funktionen $\varphi(x)$ er derfor periodisk med perioden 1:

$$\varphi(x+1) = \varphi(x).$$

Vi benytter nu Legendres formel

$$\Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(\tfrac{x+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\cdot\Gamma(x).$$

Erstattes x med 1-x fås

$$\Gamma(\tfrac{1-x}{2})\Gamma(1-\tfrac{x}{2}) = \sqrt{\pi}\; 2^{x}\;\Gamma(1-x).$$

Heraf følger

$$\varphi(\tfrac{x}{2})\varphi(\tfrac{x+1}{2}) = \Gamma(\tfrac{x}{2})\Gamma(1-\tfrac{x}{2})\sin\tfrac{\pi x}{2}\;\Gamma(\tfrac{x+1}{2})\Gamma(\tfrac{1-x}{2})\cos\tfrac{\pi x}{2}$$
$$= \pi\,\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x = \pi\,\varphi(x).$$

Funktionen $\varphi(x)$ tilfredsstiller altså funktionalligningen

$$(\diamond)\qquad \varphi(\tfrac{x}{2})\varphi(\tfrac{x+1}{2}) = \pi\;\varphi(x).$$

Funktionen $\varphi(x)$ er åbenbart vilkårligt ofte differentiabel. Af gammafunktionens funktionalligning ses, at

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(1+x)}{x}\,\Gamma(1-x)\sin \pi x = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\,\frac{\sin \pi x}{x}.$$

Nu er den ved

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ \pi & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

definerede funktion vilkårligt ofte differentiabel på $]-\infty,+\infty[$. Sættes $\varphi(0) = \Gamma(1)^2\pi = \pi$ ses, at den således udvidede funktion $\varphi(x)$ er vilkårligt ofte differentiabel på $]-1,1[$. Sætter vi $\varphi(n) = \pi$ for alle (positive og negative) hele n, er den således udvidede funktion en periodisk funktion defineret på $]-\infty,+\infty[$, som er vilkårligt ofte differentiabel på $]-\infty,+\infty[$. For $0 \leqq x < 1$ er $\varphi(x) > 0$; det samme gælder da ifølge periodiciteten for alle x. Da funktionalligningen $(\diamond)$ gælder for alle ikke-hele x, må den af kontinuitetsgrunde også gælde for hele x.

Vort mål er at vise, at $\varphi(x)$ er konstant. Hertil betragtes funktionen $g(x) = \log\varphi(x)$. Denne funktion er ligeledes vilkårligt ofte differentiabel. Af $(\diamond)$ ses, at

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(x) + \log \pi .$$

Differentieres to gange, fås

$$(\diamond\,\diamond) \qquad \frac{1}{4}\, g''\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\, g''\left(\frac{x+1}{2}\right) = g''(x).$$

Lad nu M betegne $\sup|g''(x)|$. Da $g''(x)$ er kontinuert og periodisk, er $M < +\infty$. Af $(\diamond\,\diamond)$ ses da umiddelbart, at

$$|g''(x)| \leqq \frac{1}{4} M + \frac{1}{4} M = \frac{1}{2} M$$

for alle x. Altså er $M \leqq \frac{1}{2} M$, hvoraf ses, at $M = 0$. Følgelig er $g''(x) = 0$ for alle x, altså $g(x) = \alpha x + \beta$. Da $g(x)$ er periodisk, må vi have $\alpha = 0$. Altså er $g(x)$ konstant, og følgelig også $\varphi(x)$ konstant. Da $\varphi(0) = \pi$, er $\varphi(x) = \pi$ for alle x.

Vi har hermed bevist følgende mærkelige formel, som skyldes Euler:

$$(13) \qquad \boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.}$$

Ved brug af gammafunktionens funktionalligning kan formlen omskrives til

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\,\Gamma(x)\,\Gamma(-x)}.$$

Anvendes her produktfremstillingen (5), hvorefter

$$\Gamma(x) = e^{-Cx}\,\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}, \qquad \Gamma(-x) = e^{Cx}\,\frac{1}{-x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{\nu}}}{1-\frac{x}{\nu}},$$

fås følgende produktfremstilling for sinusfunktionen

$$(14) \qquad \boxed{\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right)}$$

<u>Anvendelser på bestemte integraler</u>.

Sætter man i (1) $e^{-t} = \tau$, fås, idet man efter udførelsen af substitutionen skriver t i stedet for τ:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt. \qquad (x > 0)$$

På lignende måde fås ved substitutionen $t^x = \tau$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{x}\, dt \qquad (x > 0)$$

hvoraf $\Gamma(1+\frac{1}{x}) = \int_0^{\infty} e^{-t^x} dt.$ $\qquad (x > 0)$

For $x = 2$ fås $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$

Sætter man i (6) $t = \frac{\tau}{\tau+1}$, henh. $t = \sin^2\varphi$, fås:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ \text{og} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1} d\varphi &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} x > 0 \\ y > 0 \end{pmatrix}$$

Sætter man $y = 1-x$ fås ved brug af (13)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \\ \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\varphi)^{2x-1} d\varphi &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < 1)$$

"<u>Stirlings række</u>".

For fejlen $\mu(x)$ i Stirlings formel kan vi finde andre udtryk. Man har

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{t + x}\, dt = (x + \tfrac{1}{2}) \log (1 + \tfrac{1}{x}) - 1,$$

altså

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} - t}{t+n+x}\, dt.$$

Vi indfører nu <u>Bernoullis polynomier</u> $B_p(t)$ og <u>Bernoullis tal</u> B_p, $p = 0,1,2,\cdots$, ved følgende forskrifter:

$B_0(t) = 1$ $\qquad\qquad B_0 = 1$

$B_p(t) = p\int_0^t B_{p-1}(\tau)d\tau + B_p$, hvor B_p vælges således, at $\int_0^t B_p(t)dt = 0$

Man finder

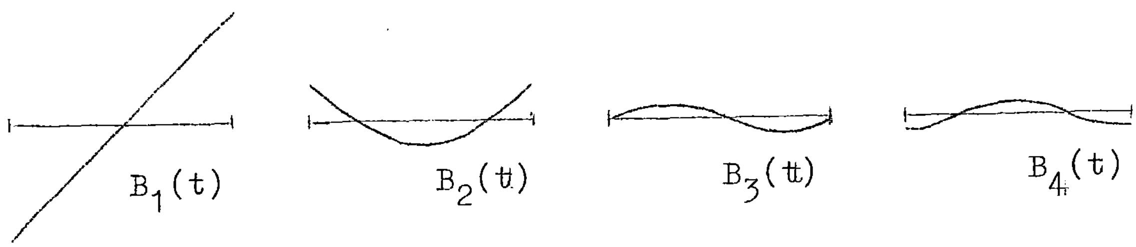
$B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad B_1 = -\frac{1}{2}$

$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ $\qquad\qquad B_2 = \frac{1}{6}$

$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$ $\qquad\qquad B_3 = 0$

$B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$ $\qquad\qquad B_4 = -\frac{1}{30}.$

Af definitionen ses, at forløbet i $[0,1]$ er:



Således går det videre. Af betydning for det følgende er: For ulige $p \geqq 3$ er $B_p(0) = B_p(1) = B_p = 0$. For lige $p \geqq 2$ er $B_p(0) = B_p(1) = B_p$. Disse tal er rationale og er skiftevis positive og negative og differensen $B_p - B_p(t)$ er for $0 < t < 1$ af konstant fortegn, nemlig af samme fortegn som B_p. Vi anfører en tabel over tallene B_p:

p	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
B_p	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$

Med $\overline{B_p}(t)$ betegner vi den periodiske funktion med perioden 1, som i $[0,1[$ stemmer overens med $B_p(t)$. Da gælder åbenbart

$$\overline{B_p}(t) = p\int_0^1 \overline{B_{p-1}}(\tau)d\tau + B_p \qquad \text{for alle } t.$$

Udtrykket for $\mu(x)$ kan nu skrives

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{-B_1(t)}{t+n+x}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1} -\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{-\overline{B_1}(t)}{t+x}dt.$$

Da integranden konvergerer mod 0 for $t \to \infty$, kan vi også skrive

$$\mu(x) = -\int_0^{\infty}\frac{\overline{B_1}(t)}{t+x}dt.$$

Ved gentagen anvendelse af delvis integration fås

$$\int_0^n \frac{-\overline{B_1}(t)}{t+x}dt = \left[\frac{-\overline{B_2}(t)}{2(t+x)}\right]_0^n + \left[\frac{-\overline{B_3}(t)}{2\cdot 3(t+x)^2}\right]_0^n + \cdots + \left[\frac{-\overline{B_p}(t)}{(p-1)p(t+x)^{p-1}}\right]_0^n$$

$$+ \int_0^n \frac{-\overline{B_p}(t)}{p(t+x)^p}dt,$$

hvoraf, idet $\overline{B_\nu}(0) = \overline{B_\nu}(n) = B_\nu$ og $B_\nu = 0$ for $\nu = 3, 5, \cdots$, for $n \to \infty$

$$\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \cdots + \frac{B_p}{(p-1)px^{p-1}} - \int_0^{\infty}\frac{\overline{B_p}(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Tallet p antages nu lige. De to sidste led er tilsammen

$$(\S) \qquad \int_0^{\infty}\frac{B_p - \overline{B_p}(t)}{p(t+x)^p}dt.$$

Da $B_p - \overline{B_p}(t)$ har konstant fortegn, nemlig samme fortegn som B_p, ses, at integralet (§) har samme fortegn som B_p, altså modsat fortegn af B_{p-2}, idet jo tallene $B_2, B_4, \cdots$ er skiftevis positive og negative. Hermed er vist, at afsnittene i den uendelige række

$$(\S\S) \qquad \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4x^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6x^5} + \cdots$$

er skiftevis $> \mu(x)$ og $< \mu(x)$. Vi får derfor som slutresultat

"Stirlings række" (15)

$$\boxed{\mu(x) = \frac{B_2}{2x} + \frac{B_4}{3\cdot 4\cdot x^3} + \cdots + \frac{B_{2q-2}}{(2q-3)(2q-2)x^{2q-3}} + \theta\frac{B_{2q}}{(2q-1)2qx^{2q-1}} \quad (0 < \theta < 1)}$$

Tallet θ afhænger naturligvis af q og x.

For q = 1 fås den tidligere udledte formel $\mu(x) = \frac{\theta}{12x}$

Det var nærliggende at formode, at restleddet i den fundne formel ville gå mod 0 for $q \to \infty$, altså at den uendelige række (§§) ville være konvergent med summen $\mu(x)$. Denne række er imidlertid divergent. Formlen for $\mu(x)$ viser, at forskellen mellem $\mu(x)$ og det $(q-1)^{te}$ afsnit af rækken (§§) går mod 0, ikke for $q \to \infty$ men for $x \to \infty$, og så stærkt, at endda forholdet mellem restleddet og det sidste led i afsnittet går mod 0. Man udtrykker dette ved at sige, at (§§) er en asymptotisk række for funktionen $\mu(x)$.

Vælger man f.eks. q = 4 finder man

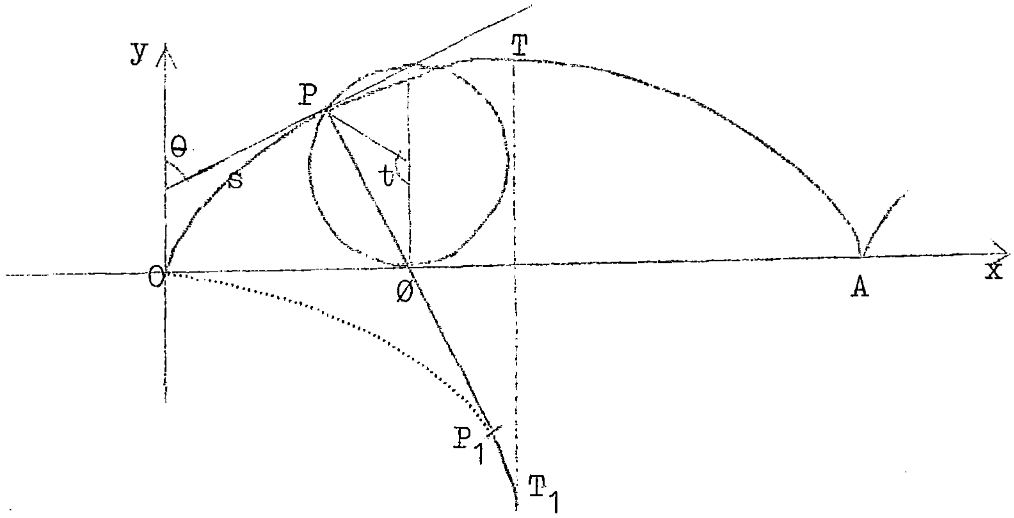
$$\mu(x) = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{\theta}{1680x^7}.$$

Herved har man et middel til at beregne $\Gamma(x)$ med stor nøjagtighed. For eksempel får man for $4 \leq x \leq 5$ ved at benytte dette udtryk for $\mu(x)$ (idet restleddet bortkastes) værdien af $\Gamma(x)$ med en fejl $< 10^{-6}$. Ved brug af funktionalligningen kan man herudfra finde $\Gamma(x)$ for eksempel for $1 \leq x \leq 2$ med samme nøjagtighed.

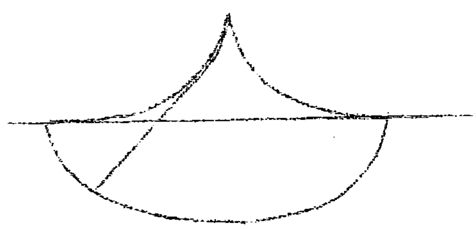
Slutbemærkning.

Funktionalligningen $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ kan for $x > 0$ også skrives $\log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x$. En ligning af formen $F(x+1) - F(x) = G(x)$, hvor $G(x)$ er en given funktion, er det simpleste tilfælde af en differensligning (analogt til differentialligningen $F'(x) = G(x)$). For (x) fandt vi en ligning af samme type, nemlig $\mu(x+1) - \mu(x) = -(x + \frac{1}{2}) \log (1 + \frac{1}{x}) + 1$. Gammafunktionens teori indordnes derfor naturligt under differensregningen (jfr. N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, 1929).

Opgaver vedrørende cykloïden.



1. Bestem buelængden fra O til P som funktion af parameteren t.
2. Vis, at det til P med hensyn til Ø symmetriske punkt P_1 beskriver en cykloidebue OT_1 kongruent med OT, og at denne i P_1 har tangenten PP_1.
3. Vis, at længden af buen OP_1 på denne er lig med PP_1.
4. Udtryk s som funktion af tangentens drejningsvinkel θ, og vis herved, at krumningsradius $\frac{ds}{d\theta}$ er $= PP_1$, d.v.s. P_1 er krumningscentrum.
5. Find arealet af den af cykloidebuerne OT, OT_1 og liniestykket TT_1 begrænsede mængde.
6. Vis Huygens sætning. For et cykloidependul (se figur) er svingningstiden uafhængig af udsvinget.



Opgaver analoge med brachistochronopgaven.

7. For vilkårlige endepunkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) i halvplanen $y > 0$ skal man bestemme $y = f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at
$$I = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx \quad \text{er minimum.}$$

8. Ved en stereografisk projektion, d.v.s. en centralprojektion fra sydpolen $(0,0,-1)$, afbildes jordkuglen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eksklusive sydpolen på ækvators plan $z = 0$. Bestem længden af den kurve på jorden, som i kortet svarer til det geometriske billede af en kontinuert differentiabel funktion $y = f(x)$, $a_1 \leqq x \leqq a_2$. Løs dernæst for givne endepunkter (a_1,b_1), (a_2,b_2) minimumsopgaven for det pågældende integral.

9. For givet endepunkt (a_1,b_1) skal man finde $y = f(x) > 0$ i $[a_1,a_2]$, således at den ved omdrejning om x-aksen frembragte flade har minimalt areal.

10. For givet endepunkt (a_1,b_1) skal man finde $y = f(x)$ i $[a_1,a_2]$, således at kurvens længde er minimal.

11. For vilkårlige endepunkter (a_1,b_1) og (a_2,b_2) skal man bestemme $y = f(x)$ blandt de tilladte funktioner således, at

$$I = \int_{a_1}^{a_2} \left[xy' + (y'^2-1)^2\right] dx \text{ er minimum.}$$

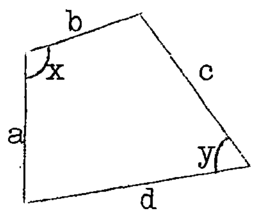
12. Samme opgave med

$$I = \int_{a_1}^{a_2} x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

13. Find et retvinklet parallelepipedum med given kantsum K og given overflade O og med maksimalt volumen.

14. Find en trekant med given omkreds 2s og maksimalt areal T.

15. Blandt alle konvekse firkanter med givne sider a,b,c,d søges en med maksimalt areal. [Vink: Udtryk arealet som funktion af vinklerne x og y, og opskriv den bibetingelse, disse må opfylde.]



16. For givne endepunkter (a_1,b_1), (a_2,b_2) i halvplanen $\{(x,y) \mid y > 0\}$ søges $y = f(x) > 0$ blandt de tilladte funktioner, således at

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y^2 dx \quad \text{er minimum under bibetingelsen}$$

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx = A \text{ (et givet tal).}$$

Find betingelserne for at problemet har en løsning.

17. Samme opgave med

$$I_0 = \int_{a_1}^{a_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} y\,dx = A.$$

Opstil en differentialligning til bestemmelse af løsningerne.

18. Variationsopgave med to funktioner. Lad $F(t,x,y,x',y')$ være to gange kontinuert differentiabel i området Ω i (t,x,y,x',y')-rummet. Et tilladt funktionspar er et par af funktioner $x = f(t) \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, $y = g(t) \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, som for $t = a_1$ og $t = a_2$ antager foreskrevne værdier, og for hvilke $(t,f(t),g(t), f'(t),g'(t)) \in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis integralet

$$\int_{a_1}^{a_2} F(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt$$

har lokalt minimum for funktionsparret (f,g), da tilfredsstiller dette de to differentialligninger (Eulers ligninger)

$$F_x(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F_{x'}(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0$$

$$F_y(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) - \frac{d}{dt}F_{y'}(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) = 0$$

19. Variationsopgave med to funktioner og bibetingelser. Lad $F_0(t,x,y,x',y')$, $F_1(t,x,y,x',y'),\cdots$, $F_n(t,x,y,x',y')$ være to gange kontinuert differentiable funktioner i et område Ω i (t,x,y,x',y')-rummet. Et tilladt funktionspar er et par af funktioner $x = f(t) \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, $y = g(t) \in \hat{C}^2[a_1,a_2]$, som for $t = a_1$ og $t = a_2$ antager foreskrevne værdier, og for hvilke $(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t)) \in \Omega$ for alle $t \in [a_1,a_2]$. Vis, at hvis $I_0 = \int_{a_1}^{a_2} F_0(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt$ har lokalt minimum eller maksimum for funktionsparret (f,g) under bibetingelserne

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} F_1(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt = c_1$$

$$\cdots$$

$$I_n = \int_{a_1}^{a_2} F_n(t,f(t),g(t),f'(t),g'(t))\,dt = c_n,$$

hvor $c_1,\cdots,c_n$ er givne tal, da findes der et talsæt

$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0,0,\cdots,0)$, således at når man sætter

$$F = \lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n$$

opfylder parret (f,g) de to ligninger

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0 \quad \text{og} \quad F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0.$$

20. Det isoperimetriske (græsk af isos, lig i tal, og perimetros, den omkredsen dannende linie) problem. Søg $f \in \mathcal{C}^2[0,1]$ og $g \in \mathcal{C}^2[0,1]$, således at f(0), f(1), g(0), g(1) alle er 0, og således at $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (xy'-yx')dt$ er maksimum under bibetingelsen

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = L.$$

Vis, at løsningerne bestemmer cirkler i (x,y)-planen.

Opgaver vedrørende konvekse funktioner (herunder opgaver vedrørende middelværdier).

21. Vis, at hvis f(x) er konveks på $]a,b[$, indtræffer et af følgende seks tilfælde:
   1) f(x) er konstant;
   2) f(x) er strengt voksende;
   3) f(x) er strengt aftagende;
   4) der findes et $x_0 \in]a,b[$, så at f(x) er konstant på $]a,x_0]$ og strengt voksende på $[x_0,b[$;
   5) der findes et $x_0 \in]a,b[$, så at f(x) er strengt aftagende på $]a,x_0]$ og konstant på $[x_0,b[$;
   6) der findes $x_1 \in]a,b[$, $x_2 \in]a,b[$, $x_1 \leqq x_2$, så at f(x) er strengt aftagende på $]a,x_1]$, konstant på $[x_1,x_2]$, og strengt voksende på $[x_2,b[$.

22. Vis, at hvis f(x) er konveks og begrænset på $]-\infty,+\infty[$, da er f(x) konstant.

23. Vis, at f(x) er konveks på $]a,b[$, hvis og kun hvis der til ethvert $x_0 \in]a,b[$ findes (mindst) en lineær funktion (støttelinie) $y = f(x_0) + \alpha(x-x_0)$, så at $f(x_0) + \alpha(x-x_0) \leqq f(x)$ for alle $x \in]a,b[$.

24.* Idet $r_1, r_2, \cdots$ betegner de rationale tal i $]a,b[$, og $a_1, a_2, \cdots$ en følge af positive tal, så at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, betragtes den ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |x - r_n|$ definerede funktion på $]a,b[$. Vis, at $f(x)$ er konveks, og at $f(x)$ ikke er differentiabel i noget rationalt punkt af $]a,b[$. Undersøg, om $f(x)$ er differentiabel for irrationale x.

25. Vis Jensens ulighed [J. L. W. V. Jensen, 1859-1925, grundlagde 1905 den almene teori for konvekse funktioner og uligheder mellem middelværdier]: Hvis $f(x)$ er konveks på $]a,b[$, $x_1, \cdots, x_m$ er punkter af $]a,b[$ og $p_1, \cdots, p_n$ er positive tal med sum 1 (vægte), da gælder

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \leqq p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n).$$

[Vink. Anvend resultatet fra opg. 23 for $x_0 = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$ eller induktion efter n.]

26. Hvis $x_1, \cdots, x_n$ er givne tal og $p_1, \cdots, p_n$ positive tal med sum 1, kaldes

$$A = A(x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$$

det aritmetiske middeltal af $x_1, \cdots, x_n$ med vægtene $p_1, \cdots, p_n$. Hvis $\varphi(x)$ er kontinuert og strengt voksende eller strengt aftagende på $]a,b[$, kaldes

$$A_\varphi = A_\varphi(x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n) =$$
$$= \varphi^{-1}(A(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n); p_1, \cdots, p_n))$$

det ved φ transformerede aritmetiske middeltal af $x_1, \cdots, x_n$ med vægtene $p_1, \cdots, p_n$. Vis, at

$$A \leqq A_\varphi$$

for vilkårlige tal $x_\nu \in]a,b[$ og vægte p_ν, hvis og kun hvis φ er konveks (i tilfældet φ voksende) eller φ er konkav (i tilfældet φ aftagende).

27. Vis, at $A_\varphi = A_{\alpha\varphi+\beta}$ for vilkårligt $\alpha \neq 0$ og β og vilkårlige $x_1, \cdots, x_n \in]a,b[$ og vilkårlige vægte $p_1, \cdots, p_n$.

28. Vis, at der for kontinuerte strengt voksende φ og ψ på $]a,b[$ gælder
$$A_\varphi \leq A_\psi$$
for vilkårlige $x_\nu \in]a,b[$ og vilkårlige vægte p_ν, hvis og kun hvis $\psi\varphi^{-1}$ er konveks på $\varphi(]a,b[)$.

29. Ved den k–te potensmiddelværdi
$$M_k(x_1,\cdots,x_n;p_1,\cdots,p_n)$$
af de positive tal x_ν med vægten p_ν forstås
$$M_k = \begin{cases} (\sum p_\nu x_\nu^k)^{\frac{1}{k}} & \text{for } k \neq 0 \\ \prod x_\nu^{p_\nu} & \text{for } k = 0. \end{cases}$$
Vis, at M_k er en voksende, kontinuert funktion af k på $]-\infty,+\infty[$. M_1 er det aritmetiske, M_0 kaldes det geometriske, og M_{-1} det harmoniske middeltal.

[Vink: Benyt, at $M_k = A_{\varphi_k}$, hvor
$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x^k-1}{k} & \text{for } k \neq 0 \\ \log x & \text{for } k = 0, \end{cases}$$
og anvend opg. 28.]

30. Vis, at $M_k \to \max x_\nu$ for $k \to +\infty$ og $M_k \to \min x_\nu$ for $k \to -\infty$.

31. For en kontinuert positiv funktion f(x) på et afsluttet interval $[a,b]$, og en kontinuert positiv funktion p(x) på $[a,b]$ med $\int_a^b p(x)dx = 0$ (en vægtfunktion) defineres den k–te potensmiddelværdi af f med vægtfunktionen p ved
$$M_k(f;p) = \begin{cases} \left[\int_a^b f(x)^k p(x)dx\right]^{\frac{1}{k}} & \text{for } k \neq 0 \\ e^{\int_a^b (\log f(x))p(x)dx} & \text{for } k = 0. \end{cases}$$
Vis, at M_k er en voksende, kontinuert funktion af k på $]-\infty,+\infty[$, og at $M_k \to \max f(x)$ for $k \to +\infty$ og
$$M_k \to \min f(x) \text{ for } k \to -\infty.$$

Opgaver i gammafunktionen.

32. For hele positive tal n og m gælder
$$\int_0^1 \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^n}}\, dt = \frac{\Gamma(\frac{m}{n})\sqrt{\pi}}{n\cdot\Gamma(\frac{m}{n}+\frac{1}{2})}.$$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\sqrt{32\pi}}.$

34. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{(\Gamma(\frac{1}{3}))^3}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16}\pi}.$

35. $\displaystyle\int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log\sqrt{2\pi}.$

36. $\displaystyle\int_x^{x+1} \log \Gamma(t)\, dt = \log\sqrt{2\pi} + x \log x - x \qquad (x > 0).$

37. $\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$ (Wallis' produkt).

38. $\displaystyle\pi = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}.$

39. $\displaystyle\cos \pi x = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2}\right).$

40. Idet $f(t)$ er kontinuert differentiabel på $[0,n]$, skal man vise, at

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)dt = \int_0^n \overline{B_1}(t)f'(t)dt.$$

[Vink. Anvend for $\nu=0,1,\cdots,n-1$ delvis integration på $\displaystyle\int_\nu^{\nu+1} \overline{B_1}(t)f'(t)dt.$]

Udled herved under forudsætning af, at $f(t)$ er $2k$ gange differentiabel, Euler-MacLaurins sumformel

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)dt = \frac{B_2}{2!}(f'(n)-f'(0)) + \frac{B_4}{4!}(f'''(n)-f'''(0)) + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)) - \int_0^n \frac{\overline{B_{2k}}(t)}{(2k)!}f^{(2k)}(t)dt.$$

Find herved ved at sætte $f(t) = \frac{1}{1+t}$ for Eulers konstant udtrykket $C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k} - \displaystyle\int_0^\infty \frac{\overline{B_{2k}}(t)}{(1+t)^{2k+1}}dt,$

og vis derved, at tallene

$$\frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \cdots + \frac{B_{2k}}{2k}$$

er skiftevis mindre og større end C. Beregn de første af disse tal. - Prøv også at sætte $f(t) = \frac{1}{5+t}$ og find derved under brug af $\log 5 = 1{,}6094379\cdots$ værdien af C med 6 rigtige decimaler.

41. Sæt $f(t) = t^k$ i Euler-MacLaurins sumformel. Opskriv resultatet for $k = 1,2,3,4,5$.

42. I $\mathring{R}^k$ med norm $||x|| = (x_1^2+\cdots+x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ betragtes kuglen $S_k(r) = \{x \mid ||x|| \leqq r\}$. Vis, at dens mål er

$$m_k(S_k(r)) = A_k \cdot r^k, \text{ hvor } A_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}.$$

Udregn A_k for $k = 1,2,3,4,5$.

Vink. Benyt induktion og anvend Lebesgue Fubinis sætning.

43. For en funktion f med perioden $p > 0$, der er Lebesgue integrabel over ethvert interval, defineres middelværdien ved $M\{f\} = \frac{1}{p}\int_a^{a+p} f(x)dx$ og Fourier rækken ved

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2}{p}\pi x} \text{ eller } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{2\pi}{p}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{p}x)$$

hvor $c_n = M\{f(x)e^{-in\frac{2\pi}{p}x}\}$ og $\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = 2M\left\{f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\frac{2\pi}{p}x\right\}$.

Resultaterne for $p = 2\pi$ overføres umiddelbart til et vilkårligt p.

Find Fourierrækken for funktionerne $\overline{B_k}(x)$ og find herved summen af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ for lige $k \geqq 2$. Indsæt $k = 2,4,6,8,10$

44. Vis ved induktion, at

$$B_n(x) = B_0 x^n + B_1\binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + B_k\binom{n}{k}x^{n-k} + \cdots + B_n.$$

45.* Vis, at $$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}t^n$$

for alle t i en omegn af 0 [Formlen gælder for $|t| < 2\pi$].

46.* Find samtlige par af kontinuerte funktioner f(x) og g(x) på $\mathring{R}$, der tilfredsstiller funktionalligningerne

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$
$$g(x-y) = g(x)f(y) - f(x)g(y).$$

47.* Samme opgave med ligningerne

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$
$$g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y).$$

48.* Samme opgave med ligningerne

$$f(x-y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$
$$g(x-y) = g(x)f(y) - f(x)g(y).$$

side 1 linie 13. Lagranges læs: Lagrange

\- 1 - 2-3 f.n. } $\geqq$ læs: $>$

\- 2 - 2. }

\- 2 figur 1: a_2 flyttes 10 mm til højre.

\- 3 linie 3. Læs: $A = \frac{1}{2}\int(xdy-ydx) = \frac{1}{2}\int_0^1(xy'-yx')dt$

\- 13-14. et område $(\cdots)$ læs: en åben mængde Ω

\- 18. $,a_2]$. læs: $,a_2]$ og som opfylder randbetingelserne $f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2$.

\- 4 - 5 f.n. Tilføj: og $(x,f(x),f'(x)) \in \Omega$ for alle $x \in [a_1,a_2]$.

\- 5 - 16 f.n. $g(x) =$ læs: $g(x)dx =$

\- 6 f.n. , da læs: , for hvilken $g(a_1) = 0,\ g(a_2) = 0$, da

\- 6 - 6 minimum læs: (lokalt) minimum

\- 10 f.n. maksimum læs: (lokalt) maksimum

\- 7 - 15 f.n. $(\frac{d}{dx} F(x,y,y'))$ læs: $(\frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y'))$

\- 8 - 1. 1 læs: -1

\- 10. $(\alpha > 0\ \beta$ vilkårlig) læs: $(\alpha > 0,\ \beta$ vilkårlig)

\- 10 - 8 f.n. after læs: efter

\- 12 - 3,12,13. - læs: $\in$

\- 4. Da læs: Da Ω

\- 5. f+ g læs: $f+\varepsilon g$

\- 6. alle i læs: alle ε i

\- 7. Læs: $I(\varepsilon) = I_{f+\varepsilon g} = \int_{a_1}^{a_2} F(x,f(x)+\varepsilon g(x),f'(x)+\varepsilon g'(x))d$

\- 10,16. $\begin{matrix}a_2\\ \\ a_1\end{matrix}$ F_y læs: $\int_{a_1}^{a_2}\{F_y$

\- 11,16. $f'(x))\ g(x)$ læs: $f'(x))\}g(x)$

\- 13 - 3. for læs: for (lokalt)

\- 7 f.n. et område læs: en åben mængde

\- 19. Tilføj over linie 9 f.n: M er åbenbart et vektorrum.

\- 21 linie 1. $L \leqq L_0$ læs: $L \geqq L_0$

\- 6. $[a_1,a_2]$ læs: $[a_1,a_2])$.

\- 22 - 1,2,3. $f'(a_2)) +$ læs: $f'(a_2))g(a_2) +$

side 29 linie 1 f.n. $\int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt$ læs: $\int_a^b e^{-t} x t^{x-1} dt$

- 31 - 15,16. $0 < \varepsilon <$ læs: $0 \leqq \varepsilon \leqq$

- 34 - 1. Tilføj: , og derfor også $\Gamma(x) = e^{\log \Gamma(x)}$,

- 1 f.n. $b \to o$ læs: $b \to 1$

- 36 - 8 f.n. Tilføj: (A.-M. Le Gendre 1752-1833)

- 37 - 11. Tilføj: (J. Stirling 1696-1770)

- 2 f.n. $n +$ læs: $n + 1$

- 38 - 6 f.n. er to læs: er konveks, og dette følger af, at $g(x)$ er to

- 39 - 8 f.n. $a(\frac{x}{2})^{\frac{x}{2}-1}$ læs: $a(\frac{x}{2})^{\frac{x-1}{2}}$

- 40 - 3. $(x+n+\frac{1}{2})(\log$ læs: $((x+n+\frac{1}{2})\log$

- 8. Tilføj: (C. F. Gauss 1777-1855)

- 43 - 18. $\int_0^t B_p(t)dt = 0$ læs: $\int_0^1 B_p(t)dt = 0$.

- 44 - 10. $\int_0^1$ læs: $\int_0^t$

- 45 - 4 f.n. For (x) læs: For $\mu(x)$

- 1 f.n. Tilføj: (N. E. Nörlund f. 1885)

Opgave 6. C. Huygens (1629-1695).

- 24. 1. linie, i det endelige interval $]a,b[$,

- 29. 3. linie, vægten, læs: vægtene

- 31. 3. linie, 0, læs: 1

- 40. 6. linie; læs: ··· er 2k gange kontinuert differen···

MI Rettelser

side 111 linie 9. $|f|^q$ læs: $|f|^p$

- 10. $\leqq 1 + |f|^p$ læs: $\leqq 1 + |f|^q$

- 116 - 13. $c\nu e^{i\nu t}$ læs: $c\nu e^{i\nu x}$

15. $(n + \frac{1}{2})$ læs: $(\frac{n+1}{2})$

Implicit givne funktioner.

(Efter E.J.McShane og T.A.Botts: Real Analysis)

Lad $O \times U$ være en åben mængde i $\grave{R}^m \times \grave{R}^n$, for hvis punkter vi benytter betegnelsen $(\underline{x},\underline{y}) = (x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$.

Lad der endvidere være givet n kontinuerte funktioner $f_1,\dots,f_n$ på denne mængde, for hvilke de partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ eksisterer og er kontinuerte i $O \times U$.

Hvis $(\underline{a},\underline{b}) \in O \times U$ er et løsningspunkt til ligningerne

$$(*)\quad f_1(\underline{x},\underline{y}) = 0,\dots,f_n(\underline{x},\underline{y}) = 0,$$

har vi sætningen:

Såfremt $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{a},\underline{b})\right] \neq 0$, eksisterer der et tal $k > 0$, således at der til ethvert $\varepsilon \in \,]0,k[$ svarer en kugleomegn $K(\underline{a},\delta)$ i $\grave{R}^m$ med den egenskab, at ligningerne $f_1(\underline{x},\underline{y}) = 0,\dots,f_n(\underline{x},\underline{y}) = 0$ for ethvert $\underline{x} \in K(\underline{a},\delta)$ har en og kun een løsning i kugleomegnen $K(\underline{b},k)$ i $\grave{R}^n$, og denne løsning tilhører endda omegnen $K(\underline{b},\varepsilon)$.

Den derved bestemte løsningsfunktion $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ er kontinuert i $K(\underline{a},\delta)$.

Bevis: 1) Bemærkning. Idet afbildningen $\det: \grave{R}^{n^2} \to \grave{R}$ defineret ved $(a_{ij}) \to \det[a_{ij}]$ er kontinuert, ses det, at afbildningen af $(O \times U)^{n^2}$ ind i $\grave{R}$, defineret ved til de n^2 (ordnede) talsæt $(\underline{x}^{ij},\underline{y}^{ij})$ $i,j = 1,\dots,n$ at lade svare

$$\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^{ij},\underline{y}^{ij})\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\underline{x}^{11},\underline{y}^{11}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\underline{x}^{1n},\underline{y}^{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\underline{x}^{n1},\underline{y}^{n1}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\underline{x}^{nn},\underline{y}^{nn}) \end{vmatrix},$$

er kontinuert.

Da vi ifølge forudsætningerne har $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{a},\underline{b})\right] \neq 0$, medfører dette, at der findes tal $r,k > 0$ så at

$$(\underline{x}^{ij},\underline{y}^{ij}) \in 0 \times U \quad i,j = 1,\dots,n \quad \text{og} \ \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^{ij},\underline{y}^{ij})\right] \neq 0$$

når blot $\underline{x}^{ij} \in K(\underline{a},r)$ og $\underline{y}^{ij} \in K(\underline{b},k)$ $(i,j = 1,\dots,n)$.

2) Entydighed. Lad $\underline{x} \in K(\underline{a},r)$ være et fast punkt, og lad $\underline{y}^1,\underline{y}^2 \in K(\underline{b},k)$ være punkter, der begge tilfredsstiller ligningerne (*); altså

$$f_i(\underline{x},\underline{y}^1) = 0, \quad f_i(\underline{x},\underline{y}^2) = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Da kan vi ifølge middelværdisætningen (jfr. MA 10.28) til hvert $i = 1,\dots,n$ finde et $\Theta_i \in]0,1[$ så at

$$(**) \quad 0 = f_i(\underline{x},\underline{y}^2) - f_i(\underline{x},\underline{y}^1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x},\underline{y}^1+\Theta_i(\underline{y}^2-\underline{y}^1))\cdot(y_j^2-y_j^1)$$

Af bemærkningen følger nu $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x},\underline{y}^1+\Theta_i(\underline{y}^2-\underline{y}^1))\right] \neq 0$, men så er $\underline{y}^2 = \underline{y}^1$ (betragt de n ligninger (**) som et lineært ligningssystem med de n ubekendte $y_j^2-y_j^1$, $j = 1,\dots,n$).

Altså har ligningerne (*) for ethvert $\underline{x} \in K(\underline{a},r)$ højst een løsning.

3) Eksistens. Lad $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < k)$ være opgivet. For et $\underline{y}$ med $\mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) = \varepsilon$ er $\underline{y} \neq \underline{b}$, og da $f_i(\underline{a},\underline{b}) = 0$, $i = 1,\dots,n$, følger det af entydigheden, at $f_i(\underline{a},\underline{y}) \neq 0$ for mindst et i, og dermed at funktionen

$$\varphi(\underline{a},\underline{y}) = f_1(\underline{a},\underline{y})^2 + \dots + f_n(\underline{a},\underline{y})^2 > 0.$$

Da $\{\underline{y} \in \mathring{R}^n \mid \mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) = \varepsilon\}$ er kompakt, findes der følgelig et tal $h > 0$, så at

$$\varphi(\underline{a},\underline{y}) \geqq h \text{ for alle } \underline{y} \text{ med } \mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) = \varepsilon.$$

Afbildningen $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = f_1(\underline{x},\underline{y})^2 + \dots + f_n(\underline{x},\underline{y})^2$ defineret på den kompakte mængde $\{(\underline{x},\underline{y}) \mid \mathrm{dist}(\underline{a},\underline{x}) \leqq r \wedge \mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) \leqq \varepsilon\}$ er kontinuert, og dermed ligelig kontinuert, på denne mængde; der findes derfor et $\delta > 0$ $(\delta < r)$ så at

$$|\varphi(\underline{x},\underline{y})-\varphi(\underline{a},\underline{y})| < \frac{h}{3} \text{ for } \underline{x} \in K(\underline{a},\delta) \text{ og alle } \underline{y} \text{ med } \mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) \leqq \varepsilon.$$

Lad der nu være givet et fast $\underline{x} \in K(\underline{a},\delta)$. Funktionen $\psi(\underline{y}) = \varphi(\underline{x},\underline{y})$, defineret på den kompakte mængde $\{\underline{y} \in R^n | \mathrm{dist}(\underline{b},\underline{y}) \leq \varepsilon\}$, antager da sin mindsteværdi i (mindst) et punkt $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$.
For $\mathrm{dist}(\underline{y},\underline{b}) = \varepsilon$ er $\varphi(\underline{a},\underline{y}) \geq h$ og $|\varphi(\underline{x},\underline{y}) - \varphi(\underline{a},\underline{y})| < \frac{h}{3}$, hvoraf følger $\psi(\underline{y}) = \varphi(\underline{x},\underline{y}) > \frac{2}{3}h$. På den anden side er $\psi(\underline{b}) = \varphi(\underline{x},\underline{b}) = \varphi(\underline{x},\underline{b}) - \varphi(\underline{a},\underline{b}) < \frac{h}{3}$. Disse betragtninger viser, at $\underline{g}(\underline{x}) \in K(\underline{b},\varepsilon)$.

Da denne mængde er åben, har vi $\frac{\partial\psi}{\partial y_j}(\underline{g}(\underline{x})) = 0$, $j = 1,\ldots,n$, d.v.s.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))\, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x},\underline{g}(\underline{x})) = 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Af bemærkningen ses, at $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))\right] \neq 0$, men så er $f_i(\underline{x},\underline{g}(\underline{x})) = 0$, $i = 1,\ldots,n$.

4) Kontinuitet. Det fremgår af beviset til 3), at $\underline{g}$ er kontinuert i $\underline{a}$; men da et punkt $(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))$ for $\underline{x} \in K(\underline{a},\delta)$ tilfredsstiller den forudsætning, som antages opfyldt i $(\underline{a},\underline{b})$, fås heraf, at $\underline{g}$ er kontinuert i $\underline{x}$.

Hermed er beviset for sætningen fuldført.

Vi udbygger nu sætningen med følgende tilføjelse:

Hvis de partielle afledede $\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}$ $(i = 1,\ldots,n;\ \mu = 1,\ldots,m)$ er definerede og kontinuerte i $O \times U$, er løsningsfunktionen $\underline{g}(\underline{x}) = (g_1(\underline{x}),\ldots,g_n(\underline{x}))$ kontinuert differentiabel i en omegn af $\underline{a}$ (d.v.s. de partielle afledede $\frac{\partial g_i}{\partial x_\mu}$ $(i = 1,\ldots,n:\ \mu = 1,\ldots,m)$ er definerede og kontinuerte; jfr. MA 10.20.1)

Bevis: Lad k, ε og δ have samme betydning som i den foregående sætning, lad $\underline{x} \in K(\underline{a},\delta)$ være et fast punkt og vælg et $h > 0$ så lille, at $\underline{\xi} = (x_1+h,x_2,\ldots,x_m) \in K(\underline{a},\delta)$.

Vi kan da (jfr. middelværdisætningen) til $i = 1,\ldots,n$ finde et $\theta_i \in]0,1[$, så at vi med betegnelserne $(\underline{x}^i(h),\underline{y}^i(h)) =$

$(\underline{x} + \theta_i(\underline{\xi}-\underline{x}), \underline{g}(\underline{x}) + \theta_i(\underline{g}(\underline{\xi})-\underline{g}(\underline{x}))$ kan skrive

$$0 = f_i(\underline{\xi}, \underline{g}(\underline{\xi})) - f_i(\underline{x}, \underline{g}(\underline{x}))$$
$$= h\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h)) + \sum_{j=1}^n (g_j(\underline{\xi})-g_j(\underline{x}))\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h))$$

og dermed

$$(***) \quad \sum_{j=1}^n \frac{g_j(\underline{\xi})-g_j(\underline{x})}{h}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h)) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h));$$

Nu er $\underline{x}^i(h) \in K(\underline{a},\delta)$ og $\underline{y}^i(h) \in K(\underline{b},\varepsilon)$ d.v.s. $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h))\right] \neq 0$ (jfr. bemærkningen 1)).

Altså er (Cramers formler)

$$\frac{g_j(\underline{\xi}) - g_j(\underline{x})}{h} = \frac{\det \Delta_j(h)}{\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h))\right]},$$

hvor $\Delta_j(h)$ betegner matricen $(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h))$ med elementerne i den j-te søjle erstattet med $-\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\underline{x}^i(h), \underline{y}^i(h))$, $i = 1,\ldots,n$.

Da $\underline{g}$ er kontinuert i $\underline{x}$ gælder $\underline{x}^i(h) \to \underline{x}$ og $\underline{y}^i(h) \to \underline{g}(\underline{x})$ for $h \to 0$. Heraf ses, at grænseværdien på højre side af ligningen eksisterer, d.v.s. $\frac{\partial g_j}{\partial x_1}$ $(j = 1,\ldots,n)$ eksisterer, og af udtrykket for denne grænseværdi ses, at $\frac{\partial g_j}{\partial x_1}$ $(j = 1,\ldots,n)$ er kontinuert.

Idet de andre variable $x_2,\ldots,x_m$ kan behandles analogt, er beviset hermed fuldført.

<u>Bemærkning.</u> Ved grænseovergangen $h \to 0$ får vi af ligningerne (***): $\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_1}\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_1}$. Analogt får vi for hver variabel x_μ $(\mu = 1,\ldots,m)$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \quad i = 1,\ldots,n \quad \mu = 1,\ldots,m,$$

eller på matrixform

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_\mu} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \vdots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_\mu} \end{pmatrix} \quad \mu = 1,\ldots,m.$$

Ved multiplikation med dx_μ og efterfølgende summation får vi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dg_1 \\ \vdots \\ dg_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 - \cdots - \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m \\ \vdots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 - \cdots - \frac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m \end{pmatrix}.$$

Da vi ved differentiation af ligningerne $f_1(\underline{x},\underline{y}) = 0,\ldots,$ $f_n(\underline{x},\underline{y}) = 0$ får de lineære ligninger

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}dy_n = 0 \\ &\vdots \\ df_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial f_n}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}dy_n = 0 \end{aligned}$$

ses det af matrixligningen, at for løsningsfunktionen $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ gælder: koordinatafbildningerne $y_i = g_i(\underline{x})$ $i = 1,\ldots,n$ har differentialer, der fås ved at løse det lineære ligningssystem med hensyn til $dy_1,\ldots,dy_n$. NB. De partielle afledede tænkes for g_i's vedkommende taget i et fast punkt $\underline{x} \in K(\underline{a},\delta)$, for f_i's vedkommende i det "tilsvarende" punkt $(\underline{x},\underline{g}(\underline{x}))$, $i = 1,\ldots,$ n.