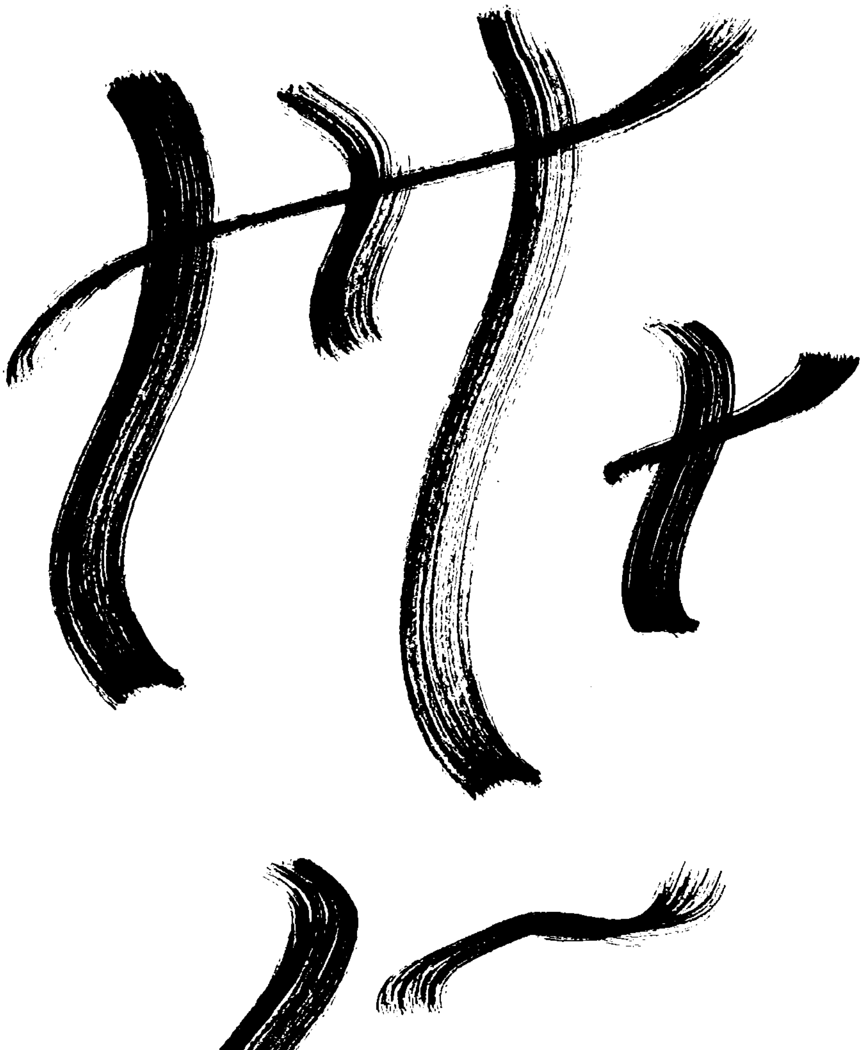
Matematik 322, 1978

Chr. U. Jensen

Forelæsninger over Homologisk Algebra

PK 322



78.06/150

MATEMATIKFAGRÅDETS
NOTETRYKKERI
MATEMATISK INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 Ø

KAPITEL I. MODULER

Lad Λ være en associativ ring med etelement 1.

Definition. En venstre Λ-modul er en additiv abelsk gruppe $(M,+)$ forsynet med en afbildning $\Lambda \times M \to M$ betegnet $\lambda \circ m$ (kaldt multiplikation med λ) så følgende axiomer gælder:

1) $(\lambda_1+\lambda_2)\circ m = \lambda_1 \circ m + \lambda_2 \circ m$, $\forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$, $m \in M$

2) $\lambda\circ(m_1+m_2) = \lambda\circ m_1 + \lambda\circ m_2$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$, $m_1,m_2 \in M$

3) $(\lambda_1\lambda_2)\circ m = \lambda_1\circ(\lambda_2\circ m)$, $\forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$, $m \in M$

4) $1\cdot m = m \quad \forall\ m \in M$.

Definition. En højre Λ-modul er en additiv abelsk gruppe $(M,+)$ forsynet med en afbildning $M\times\Lambda \to M$ betegnet $m\circ\lambda$ så følgende gælder

1) $m\circ(\lambda_1+\lambda_2) = m\circ\lambda_1 + m\circ\lambda_2 \quad \forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$, $m \in M$

2) $(m_1+m_2)\circ\lambda = m_1\circ\lambda + m_2\circ\lambda \quad \forall\ \lambda \in \Lambda$, $m_1,m_2 \in M$

3) $m\circ(\lambda_1\lambda_2) = (m\circ\lambda_1)\circ\lambda_2 \quad \forall\ \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$, $m \in M$

4) $m\circ 1 = m \quad \forall\ M \in M$.

Bemærkning. For kommutative ringe er det uvæsentligt om multiplikationen skrives fra venstre eller højre. Bet. 3) gør en skelnen mellem højre og venstre nødvendig for ikke-kommutative ringe.

Eksempel. Hvis Λ er et kommutativt legeme er Λ-modul det samme som vektorrum over Λ.

Eksempel. Venstre idealerne i Λ er med oplagt $+$ og $\circ$ venstre Λ-moduler.

Eksempel. Enhver abelsk gruppe $(M,+)$ er en modul over Z, ringen af hele tal.

Definition. En delmængde N af en (venstre) Λ-modul M kaldes undermodul, hvis N er undergruppe i $(M,+)$ og $\lambda \circ u \in N$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $u \in N$. (Betingelserne 1)-4) er da automatisk opfyldt).

Eksempel. Λ er med regneoperationerne i Λ både en venstre- og en højre Λ modul. Undermodulerne i Λ som venstre (højre) Λ-modul er netop venstre (højre) idealerne i Λ.

<u>Sætning.</u> A og B undermoduler i (venstre Λ-modulen M. Da er $A \cap B$ og $A + B \underset{\text{def.}}{=} \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ også undermoduler.

Bevis. Umiddelbart.

Definition. Lad N være en undermodul i Λ-modulen M. Mængden af sideklasser $(m) = \{m + n \mid n \in N\}$ udgør en Λ-modul ved $(m_1) + (m_2) = (m_1 + m_2)$ $\lambda \circ (m) = (\lambda \circ m)$. Denne modul betegnes M/N og kaldes faktor modulen af M m.h.t. N.

Definition. Lad S være vilkårlig delmængde af en Λ-modul M. S kaldes frembringersystem for M, hvis ethvert $m \in M$ kan skrives som Λ-linearkombination af endeligt mange elementer i S. M kaldes endeligt (resp. tælleligt) frembragt, hvis M har et endeligt (resp. tælleligt) frembringersystem.

Eksempel. $\Lambda = Z$. En endelig abelsk gruppe er endeligt frembragt som Z-modul. Q ej endelig frembragt. $\mathbb{R}$ ej tælleligt frembragt.

Eksempel. For et vilkårligt integritetsområde Λ med kvotientlegeme (Brøklegeme) K gælder: K endeligt frembragt Λ-modul $\Longleftrightarrow K = \Lambda$.

Eksempel. $C(X)$ ej tælleligt frembragt $C[X]$-modul.

Definition. En endelig delmængde $t_1, \cdots, t_n$ af en (venstre) Λ-modul M kaldes uafhængig, hvis
$\lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_n t_n = 0, \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda, \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$
En vilkårlig delmængde T of M kaldes uafhængig, hvis enhver endelig delmængde af T er uafhængig i.h.t. ovenstående.

Definition. En (venstre) Λ-modul M kaldes fri, hvis den har et uafhængigt frembringersystem $\{e_\alpha, \alpha \in I\}$. Et sådant uafhængigt frembringersystem kaldes en basis.

$M = 0$ ("Nulmodulen") regnes for fri med $\emptyset$ som basis.

Sætning. Λ = skævlegeme ("divisionsring") $\Rightarrow$ enhver (venstre og højre) Λ-modul M er fri.

Bevis. Vi kan antage $M \neq 0$.

Lad $\mathcal{T}$ være mængden af alle uafhængige delmængder af M. $\mathcal{T}$ ordnes ved mængdeteoretisk inklusion. $\mathcal{T}$ bliver herved induktivt ordnet, så $\mathcal{T}$ ifl. Zorns lemma indeholder et maximalt element $\mathfrak{M}$. Antag $\mathfrak{M} = \{m_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Vi påstår $\{m_\alpha \mid \alpha \in I\}$ er bevis for M. Behøver kun vise, at $\mathfrak{M}$ er frembringersystem for M, d.v.s. at ethvert $m \in M$

er (venstre) Λ-linearkombination af endeligt mange elementer i $\mathfrak{M}$. To muligheder

I) $m \in \mathfrak{M}$.

II) $m \notin \mathfrak{M}$.

ad I) Hvis $m = m_\alpha$ er $m = 1m_\alpha$

ad II) $\{m\} \cup \mathfrak{M} \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}$. På grund af $\mathfrak{M}$'s maximalitet er $\{m\} \cup \mathfrak{M}$ ej uafhængig $\supset$: der findes endelig delmængde af $\{m\} \cup \mathfrak{M}$ der ej er uafhængig $\supset$: der findes en ikke-triviel Λ-linearkombination

$$\lambda m + \lambda_1 m_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n m_{\alpha_n} = 0,$$

hvor λ må være $\neq 0$. Da Λ er skævlegeme fås heraf:

$$m = \lambda^{-1}\lambda_1 m_{\alpha_1} + \cdots + \lambda^{-1}\lambda_n m_{\alpha_n}. \quad \blacksquare$$

Vi skal senere se, at i ovennævnte sætning faktisk gælder "$\Longleftrightarrow$". I det kommutative tilfælde er dette let at vise:

<u>En kommutativ ring Λ er et legeme, hvis enhver Λ-modul er fri.</u>

Bevis. Lad $a \in \Lambda$, $a \neq 0$. I faktormodulen $\Lambda/\Lambda a$ findes ingen uafhængige elementer, da $a \cdot \lambda = 0$ for alle $\lambda \in \Lambda/\Lambda a$. Altså må, da $\Lambda/\Lambda a$ er fri, $\Lambda/\Lambda a = 0 \supset$: $\Lambda \in \Lambda a$ og dermed findes et $\lambda \in \Lambda$ så $1 = \lambda a$. Ethvert $a \in \Lambda \setminus \{0\}$ har således et inverst d.v.s. Λ er et legeme.

Eksempel. En uendelig cyklisk gruppe er fri som $\mathbb{Z}$-modul. En endelig abelsk gruppe $\neq 0$ er ej fri som $\mathbb{Z}$-modul.

Eksempel. Q som $\mathbb{Z}$-modul er ikke fri.

For vektorrum er det velkendt at hvilkesomhelst to baser har samme elementantal. Den tilsvarende sætning er rigtig for frie moduler over en kommutativ ring Λ.

Eksempel. Der eksisterer ikke-kommutative ringe Λ for hvilke der findes en fri Λ-modul M med egenskaben, at der til ethvert naturligt tal n findes en basis for M med n elementer. Hvis V betegner et tælleligt dimensionalt vektorrum over et legeme, f.eks. $\mathbb{R}$ vil ringen af alle endomorfier for V være en ring af ovennævnte type.

Som nævnt gælder:

<u>Sætning.</u> Hvilkesomhelst to baser for en fri modul over en kommutativ ring Λ har samme elementantal.

<u>Bevis.</u> Λ har et maximalt ideal I. (Anvendelse af Zorn's lemma.) Lad M være fri Λ-modul. Med IM betegner vi undermodulen bestående af alle elementer af formen $a_1m_1 + \cdots + a_tm_t$, $a_1, \cdots a_t \in I$ $m_1, \cdots, m_t \in M$. Faktormodulen M/IM er en modul over Λ/I ved fastsættelsen $(\lambda) \cdot (m) = (\lambda \cdot m)$, hvor λ er repræsentant for (λ) og m repræsentant for (m). Dette er en tilladelig definition; thi $\lambda_1 - \lambda_2 \in I$, $m_1 - m_2 \in IM \Rightarrow \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)m_1 + \lambda_2(m_1 - m_2) \in IM$. Man verificerer let, at modulaksiomerne virkelig er opfyldte ved ovennævnte definition. M/IM er således et vektorrum over legemet Λ/I. (Da I maximalt, er Λ/I et legeme).

Påstand: Hvis $\{\ell_\alpha \mid \alpha \in A\}$ er en basis for Λ-modulen M er $\{(\ell_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ en basis for vektorrummet (over Λ/I)

M/IM. Klart, at $\{\bar{e}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ er frembringersystem for Λ/I-modulen M/IM. Lad

$$\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{e}_{\alpha_1} + \cdots + \bar{\lambda}_n \cdot \bar{e}_{\alpha_n} = 0.$$

Ved at indsætte repræsentanter for sideklasserne fås

$$\lambda_1 e_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n e_{\alpha_n} \in IM, \quad \text{d.v.s.}$$

$$\lambda_1 e_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n e_{\alpha_n} = \sum_j a_j e_{\alpha_j}, \quad a_i \in I$$

Da $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ er basis for M, må $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in I$ d.v.s. $\bar{\lambda}_1 = \cdots = \bar{\lambda}_n = 0$.

Da sætning gælder for vektorrum, viser ovennævnte påstand

Sætn. for vilkårlige Λ. ∎

For et integritetsområde Λ (d.v.s. Λ kommutativ og uden nuldivisorer) indføres følgende:

Definition. For en modul M over et integritetsområde Λ defineres torsionen M_T ved $M_T = \{m \in M \mid \exists \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ så $\lambda \cdot m = 0\}$. Man ser let, at M_T er undermodul i M.

Definition. M kaldes torsionsfri, hvis $M_T = 0$.
M kaldes en torsionsmodul, hvis $M = M_T$

Bem. For enhver modul M er M/M_T torsionsfri.

Bem. Enhver endelig abelsk gruppe er qua $\mathbb{Z}$-modul en torsionsmodul.

Sætning. Enhver fri Λ-modul M er torsionsfri.

Bevis. Kan antage $M \neq 0$. Lad $\{\ell_\alpha \mid \alpha \in I\}$ være en basis. Lad $m \in M$. m kan skrives $m = \lambda_1 \ell_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n \ell_{\alpha_n}$, $\lambda_i \in \Lambda$. Lad $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$. Antag $\lambda m = 0$. Da er:

$$0 = \lambda m = \lambda\lambda_1 \ell_{\alpha_1} + \cdots + \lambda\lambda_n \ell_{\alpha_n}$$

Da $\{\ell_\alpha \mid \alpha \in I\}$ er en basis, følger heraf:
$\lambda\lambda_1 = \cdots = \lambda\lambda_n = 0$ og dermed da $\lambda \neq 0$ og Λ er uden nuldivisorer: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ d.v.s. $m = 0$. ∎

Eksempel. Den omvendte sætning gælder ej. $\mathbb{Q}$ er som $\mathbb{Z}$-modul, torsionsfri men ej fri.

Nyt Afsnit

Lad nu Λ være vilkårlig og M og N (venstre) Λ-moduler. En afbildning $f\colon M \to N$ kaldes en $\mathbb{Z}$-homomorfi hvis $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2)$ $\forall m_1, m_2 \in M$.

Mængden $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$ af alle $\mathbb{Z}$-homomorfier fra M til N udgør ved oplagt sum definition en $\mathbb{Z}$-modul.

En afbildning $f\colon M \to N$ kaldes Λ-homomorfi hvis den er en $\mathbb{Z}$-homomorfi og $f(\lambda m) = \lambda f(m)$ $\forall \lambda \in \Lambda$, $m \in M$. Mængden $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ af alle Λ-homomorfier fra M til N udgør en $\mathbb{Z}$-modul (undermodul i $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$).

Hvis Λ er kommutativ bliver $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ en Λ-modul ved: $(\lambda \circ f)(m) = \lambda(f(m))$.

Bemærkning. Hvis Λ er kommutativ, er for enhver Λ-modul M den ved $m \to \lambda m$ (λ fast) definerede homoteti for M en Λ-homomorfi. Tilsvarende gælder normalt ej for ikke-kommutative ringe.

Nyt Afsnit

For vilkårlig $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ defineres

$$\mathrm{Ker}(f)\colon \{m \mid f(m) = 0\}, \quad \mathrm{Im}\, f = \{n \in N \mid \exists m \in M \text{ så } f(m) = n\}$$

$\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}f$. Da gælder:

f injektiv $\iff \ker f = 0$; f surjektiv $\iff \mathrm{Im}f = N \iff \mathrm{Coker}\, f = 0$

Lemma. Lad $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$. Da gælder: f er isomorfi fra M på N (d.v.s. f bijektiv) $\iff \exists\, g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N,M)$ så $f \circ g$ = identiteten 1_N på N og $g \circ f$ = identiteten 1_M på M.

Bevis. $\Rightarrow$ Da f bijektiv findes invers afbildning, der automatisk bliver Λ-homomorfi. Denne kan bruges som g

$\Leftarrow$ $f(g(n)) = n$ indebærer $N = \mathrm{Im}f$

$g(f(m)) = m$ indebærer $0 = \mathrm{Ker}\, f$. ∎

Et "diagram" er en (endelig eller uendelig) mængde af moduler og homomorfier mellem disse. Et diagram kaldes kommutativt, såfremt hvilkesomhelst to kæder af homomorfier forbindende en modul til en anden har samme sammensætning.

Eksempel.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
& & E \\
D \arrow[uu, "\delta"] \arrow[r, "\gamma"'] & C \arrow[uu, "\beta"'] \arrow[ur, "\zeta"'] &
\end{tikzcd}$$

Kommutativitet af ovenstående diagram betyder her:

$$\alpha\delta = \beta\gamma \quad \text{og} \quad \varepsilon\beta = \zeta.$$

Homomorfisætning. Lad f være surjektiv homomorfi fra M til N. Da gælder $N \simeq M/\mathrm{Ker}\, f$. Mere præcist: Hvis H betegner den kanoniske homomorfi fra M til $M/\mathrm{Ker}\, f$ (H sender et $m \in M$ i den ved m bestemte sideklasse (m) i $M/\mathrm{Ker}\ f$), da findes netop én isomorfi g fra $M/\mathrm{Ker}\ f$ til N så diagrammet

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa"] & N \\ M/\mathrm{Ker}\ f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

Bevis. Lad $(m) \in M/\mathrm{Ker}\ f$. Hvis $(m) = \kappa m$ definerer vi afbildning g: $M/\mathrm{ker}\ f \to N$ ved $g(m) = fm$. (Lovlig def.!). Man efterviser let, at $\mathrm{Ker}\ g = 0$ og $\mathrm{Img} = N$. Da $(m) = \kappa m$, fås $g\kappa m = fm$, d.v.s. g er isomorfi så $g\kappa = f$. At der ikke findes andre isomorfier end g med ovennævnte egenskab følger af, at κ er surjektiv. ∎

Noethers isomorfisætning. Lad A og B være undermoduler i Λ-modulen M. Da gælder $A+B/B \cong A/A\cap B$.

Bevis. Lad κ være den kanoniske homomorfi fra M på M/B. Lad $\kappa_1 = \kappa_{\mathrm{Res},A}$ og $\kappa_2 = \kappa_{\mathrm{Res},A+B}$.

Da gælder $\mathrm{Im}\ \kappa_1 = \mathrm{Im}\ \kappa_2$. Her er $\mathrm{Im}\ \kappa_1 \subseteq \mathrm{Im}\ \kappa_2$ klar. Den modsatte inklusion følger af: For $x \in \mathrm{Im}\ \kappa_2$ findes $a \in A$ og $b \in B$ så $x = \kappa_2(a+b) = \kappa(a+b) = \kappa(a) \in \mathrm{Im}\ \kappa_{\mathrm{Res},A} = \mathrm{Im}\ \kappa_1$. $\mathrm{Ker}\ \kappa_1 = \{a \in A \mid a \in \mathrm{Ker}\ \kappa\} = A \cap B$. Ifølge homomorfisætningen er da: $\mathrm{Im}\ \kappa_1 \simeq A/A\cap B$.

$\mathrm{Ker}\ \kappa_2 = B$, hvorfor $\mathrm{Im}\ \kappa_2 \simeq A+B/B$. Da $\mathrm{Im}\ \kappa_1 = \mathrm{Im}\ \kappa_2$, fås herved den ønskede isomorfi. ∎

Vi giver nu en række eksempler på bestemmelse af $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ i visse explicitte tilfælde.

Eksempel. For vilkårligt Λ vil afbildningen Φ: $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M) \to M$ defineret ved $\Phi(f) = f(1)$ for

$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)$ være en $\mathbb{Z}$-isomorfi fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)$ på M. Hvis Λ er kommutativ, bliver Φ en Λ-isomorfi.

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ (A abelsk gruppe), er A's "karaktergruppe".

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q,\mathbb{Z}) = 0$.

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q,Q/\mathbb{Z})$ har ikke-tællelig mange elementer.

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,Q) = 0$ for enhver endelig abelsk gruppe A.

Eksempel. Lad n og m være naturlige tal, og $\mathbb{Z}/(n)$, resp. $\mathbb{Z}/(m)$ være den (additive) cykliske gruppe af orden n, resp. m. Da gælder: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),\mathbb{Z}/(m)) \simeq \mathbb{Z}/(d)$, hvor d betegner største fælles divisor for n og m.

NOETHERSKE MODULER.

Sætning. For en (venstre) Λ-modul M er følgende betingelser ækvivalente:

1) Enhver undermodul i M er endelig frembragt.

2) M tilfredsstiller opstigende kædes egenskab (a.c.c.) d.v.s. enhver voksende følge af undermoduler $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ er stationær (d.v.s. fra et vist trin er $A_n = A_{n+1} \forall_n$).

<u>Bevis</u>. 1) $\Rightarrow$ 2). Lad $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ være voksende følge af undermoduler. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ er undermodul af M, der ifølge 1) er endelig frembragt. Lad $b_1,\cdots,b_t$ være frembringersystem for $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Da findes n_0 så $b_1,\cdots,b_t \in A_{n_0}$. Følgelig må $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteqq A_{n_0}$, hvorfor $A_n = A_{n_0}$ $\forall n \geqq n_0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Lad A være vilkårlig undermodul i M. Vælge $a_1 \in A$. Hvis $A = \Lambda a_1$ færdig; ellers vælge $a_2 \in A \setminus \Lambda a_1$. Hvis $A = \Lambda a_1 + \Lambda a_2$ færdig; ellers vælge $a_3 \in A \setminus (\Lambda a_1 + \Lambda a_2)$. Hvis $A = \Lambda a_1 + \Lambda a_2 + \Lambda a_3$ færdig; ellers etc.

Da $\Lambda a_1 \subsetneqq \Lambda a_1 + \Lambda a_2 \subsetneqq \Lambda a_1 + \Lambda a_2 + \Lambda a_3 \subsetneqq$ må ovennævnte proces standse efter endelig mange skridt. D.v.s. $\exists n$ så $A = \Lambda a_1 + \cdots + \Lambda a_n$. A altså endelig frembragt. ∎

Definition. En Λ-modul M kaldes Noethersk, hvis den tilfredsstiller en og dermed begge betingelser i ovennævnte sætning.

Eksempel. $\mathbb{Z}$ er Noethersk $\mathbb{Z}$-modul. Q ej Noethersk $\mathbb{Z}$-modul.

Definition. En ring Λ kaldes venstre (resp. højre) Noethersk, hvis Λ som venstre (resp. højre) Λ-modul er Noethersk.

Eksempel. $\mathbb{Z}$ er en Noethersk ring.

Eksempel. Ringen af alle kontinuerte funktioner på [0,1] ej Noethersk.

Eksempel. Ringen af alle (2×2) matricer af formen $\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b,c \in Q$ er højre Noethersk, men ej venstre Noethersk.

<u>Sætning.</u> Lad Λ være vilkårlig ring. Da gælder Λ venstre Noethersk $\iff$ enhver endelig frembragt venstre Λ-modul er Noethersk.

<u>Bevis.</u> $\Leftarrow$ fås umiddelbart ved at betragte Λ som venstre Λ-modul. Ny Linie $\Rightarrow$ skal vise, at alle undermodulerne i enhver endelig frembragt Λ-modul M er endelig frembragte.

Da M er endelig frembragt, findes endelig mange elementer $m_1,\cdots,m_n \in M$ så $M = \Lambda m_1 + \Lambda m_2 +\cdots+ \Lambda m_n$. Induktion efter n.

<u>$n = 1$:</u> $M = \Lambda m_1$. Lad A være undermodul i M. Da er $\mathcal{I} = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda m_1 \in A\}$ et venstre ideal i Λ. Dette er ifølge forudsætning endelig frembragt:

$\mathcal{I} = \Lambda\alpha_1 +\cdots+ \Lambda\alpha_s$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_s \in I$. Da bliver

$A = \Lambda\alpha_1 m_1 +\cdots+ \Lambda\alpha_s m_1$ endelig frembragt.

<u>$n - 1 \to n$:</u> Lad A være undermodul i M. $A+\Lambda m_n/\Lambda m_n$ er undermodul i $M/\Lambda m_n = \Lambda m_1 +\cdots+ \Lambda m_{n-1}$, der er frembragt af $(n-1)$ elementer. $A+\Lambda m_n/\Lambda m_n$ er således endelig frembragt ifølge induktionsantagelsen. På grund af Noethers isomorfisætning er $A+\Lambda m_n/\Lambda m_n \simeq A/A\cap\Lambda m_n$. Sidstnævnte modul derfor også endelig frembragt. $A \cap \Lambda m_n$ er ifølge induktionsstarten endelig frembragt.

Beviset er derfor fuldført modulo følgende almene

<u>Lemma.</u> Lad B være undermodul i modulen A. Hvis B og A/B er endelig frembragte, da er også A endelig

frembragt.

Bevis. Lad $b_1,\cdots,b_\nu$ være frembringere for B, og $\alpha_1,\cdots\alpha_\mu$ frembringere for A/B. Hvis $\alpha_1,\cdots,\alpha_\mu$ er elementer i A repræsenterende $a_1,\cdots,a_\mu$, vil $a_1,\cdots,a_\mu$, $b_1,\cdots,b_\nu$ være et frembringersystem for A. Thi til ethvert $a \in A$ findes $\lambda_1,\cdots,\lambda_\mu \in \Lambda$ så $a = \lambda_1 a_1 +\cdots+ \lambda_\mu a_\mu$; da er $a-\lambda_1 a_1 -\cdots- \lambda_\mu a_\mu \in B$, hvorfor $a-\lambda_1 a_1 -\cdots- \lambda_\mu a_\mu = \lambda_1' b_1 +\cdots+ \lambda_\nu' b_\nu$ for passende $\lambda_1',\cdots,\lambda_\nu' \in \Lambda$. Følgelig er a Λ-linearkombination af $a_1,\cdots,a_\mu$ og $b_1,\cdots,b_\nu$. ∎

Uden bevis nævner vi her nogle sætninger vedrørende permanensegenskaber for Noetherske ringe.

Hilberts basissætning. Λ venstre Noethersk $\Rightarrow \Lambda[X]$ venstre Noethersk.

Korollar. For et vilkårligt legeme K er polynomiumringen $K[X_1,\cdots,X_n]$ Noethersk.

Tilsvarende sætninger gælder for potensrækkeringe.

Følger af Homomorfier.

En følge af homomorfier (endelig eller uendelig):

$$\underline{M}: \cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

kaldes nulfølge (eller kompleks), hvis $f_n f_{n+1} = 0 \forall n$, det vil sige hvis $\operatorname{Ker} f_n \supseteqq \operatorname{Im} f_{n+1} \; \forall_n$.

Faktormodulen $H_n(\underline{M}) = \operatorname{Ker} f_n / \operatorname{Im} f_{n+1}$ kaldes den n^{te} homologimodul for nulfølgen (komplekset) $\underline{M}$.

Bemærkning. En nulfølge hvor homomorfierne "går mod voksende indices"

$$\underline{M} \qquad \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow[f^{n-1}]{} M^n \xrightarrow[f^n]{} M^{n+1} \cdots$$

kaldes kokompleks og $H^n(\underline{M}) = \operatorname{Ker} f^n / \operatorname{Im} f^{n-1}$ betegnes n^{te} kohomologimodul.

Definition. En nulfølge kaldes exakt, hvis $\operatorname{Ker} f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ $\forall n$ (d.v.s. hvis alle homologimodulerne forsvinder).

Eksempel: $A \xrightarrow[f]{} B \to 0$ exakt $\iff$ f surjektiv

$0 \to A \xrightarrow[f]{} B$ exakt $\iff$ f injektiv

$0 \to A \xrightarrow[f]{} B \to 0$ exakt $\iff$ f isomorfi.

Hvis B undermodul i modulen A, er

$$0 \to B \xrightarrow[i]{} A \xrightarrow[\kappa]{} A/B \to 0 \qquad (*)$$

exakt, hvor i er den naturlige injektion af B i A og κ den kanoniske homomorfi af A på A/B.

Definition. En kort exakt følge er en exakt følge af formen:

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 .$$

Definition. To komplekser (nulfølger)

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

$$\cdots \to M'_{n+1} \xrightarrow{f'_{n+1}} M'_n \xrightarrow{f'_n} M'_{n-1} \to \cdots$$

kaldes isomorfe, hvis der findes isomorfier $\varphi_n : M_n \to M'_n$

så $f'_n \varphi_n = \varphi_{n-1} f_n \ \forall_n$ d.v.s. så diagrammet

$$\begin{tikzcd} \to M_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & M_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \to \cdots \\ \to M'_{n+1} \arrow[r, "f'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "f'_n"'] & M'_{n-1} \to \cdots \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

<u>Sætning</u>. Enhver kort-exakt følge er isomorf med en af formen (*).

Bevis. Diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Imf} \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "\kappa"'] & M/\mathrm{Imf} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{(exakt)}$$

hvor φ_1 er defineret ved $\varphi_1(\ell) = f(\ell) \forall \ell \in L$, i den naturlige injektion af Imf i M, κ den kanoniske homomorfi af M på M/Imf, φ_2 den (jfr. homomorfisætningen) ved $\varphi_2 g = \kappa$ bestemte isomorfi på N på M/Imf, viser at den øverste kort-exakte følge er isomort med den nederste, der er af formen (*). ∎

<u>De kort exakte følger er byggesten for samtlige exakte følger.</u>

Vi viser først at enhver exakt følge kan "splittes op" i kort exakte følger:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & 0 & \\
 & & \mathrm{Imf}_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr, "i"] & & & & \mathrm{Imf}_{n-1} \arrow[u] & \\
{} \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[ur, "f'_{n+1}"] \arrow[rr, "f_{n+1}"'] & & M_n \arrow[rr, "f_n"'] \arrow[dr, "f'_n"'] & & M_{n-1} \arrow[ur, "f_{n-1}"] \arrow[rr, "f_{n-1}"'] & & M_{n-2} \arrow[r] & {} \\
 & & & & \mathrm{Imf}_n \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr] & & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

I ovenstående diagram, hvor $M_{n+1} \xrightarrow[f_{n+1}]{} M_n \xrightarrow[f_n]{} M_{n-1} \to \cdots$ er den givne exakte følge, er "tværfølgerne"

$0 \to \mathrm{Imf}_{n+1} \xrightarrow[i]{} M_n \to \mathrm{Imf}_n \to 0$ etc. kort exakte.

Hvis man omvendt har givet kort-exakte følger ("på tværs")

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & L_n \arrow[ur] \arrow[dr, "g_n"] & & & & L_{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr, "g_{n-2}"] & & & \\
M_{n+1} \arrow[ur, "h_{n+1}"] & & M_n \arrow[dr, "h_n"] & & M_{n-1} \arrow[ur, "h_{n-1}"] & & M_{n-2} \arrow[dr, "h_{n-2}"] & & \\
 & & & L_{n-1} \arrow[ur, "g_{n-1}"] \arrow[dr] & & & & L_{n-3} \arrow[dr] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

vil følgen $\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow[f_{n+1}]{} M_n \xrightarrow[f_n]{} M_{n-1} \to \cdots$, hvor $f_n = g_{n-1}h_n \ \forall n$, være exakt. ▮

Vi skal nu give nogle eksempler på sætninger der vises ved såkaldt "diagram chasing".

"Fem-lemmaet". Antag diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \xrightarrow[\beta_1]{} & B_2 & \xrightarrow[\beta_2]{} & B_3 & \xrightarrow[\beta_3]{} & B_4 & \xrightarrow[\beta_4]{} & B_5 \end{array}$$

er kommutativt og at rækkerne er exakte.

Da gælder f_1, f_2, f_4, f_5 isomorfier $\Rightarrow f_3$ isomorfi. Lidt mere præcist gælder: i) f_2, f_4 injektiv, f_1 surjektiv $\Rightarrow f_3$ injektiv

ii) f_2, f_4 surjektiv, f_5 injektiv $\Rightarrow f_3$ surjektiv.

Bevis ad i). Vi skal vise $\operatorname{Ker} f_3 = 0$. Lad $a_3 \in \operatorname{Ker} f_3$. Da er $0 = \beta_3 f_3(a_3) = f_4\alpha_3(a_3)$. f_4 er injektiv, hvorfor: $\alpha_3(a_3) = 0$ $a_3 \in \operatorname{Ker} \alpha_3 = \operatorname{Im} \alpha_2$ da øverste række er exakt. D.v.s. $a_3 = \alpha_2(a_2)$ for passende $a_2 \in A_2$

$0 = f_3\alpha_2(a_2) = \beta_2 f_2(a_2)$ d.v.s. $f_2(a_2) \in \operatorname{Ker} \beta_2 = \operatorname{Im} \beta_1$
(nederste række exakt)

$f_2(a_2) = \beta_1(b_1)$ for passende $b_1 \in B_1$. Idet f_1 er forudsat surjektiv, har vi $f_2(a_2) = \beta_1(b_1) = \beta_1 f_1(a_1)$ for passende $a_1 \in A_1$. Idet $f_2\alpha_1 = \beta_1 f_1$ fås heraf $f_2(a_2 - \alpha_1 a_1) = 0$.

Da f_2 injektiv, må $a_2 - \alpha_1 a_1 = 0$, d.v.s. $a_2 = \alpha_1 a_1$ $a_3 = \alpha_2(a_2) = \alpha_2\alpha_1 a_1 = 0$ da øverste række specielt er en nulfølge.

ii). Overlades til læseren. ∎

Vi giver (uden bevis) endnu nogle eksempler på resultater der vises ved diagram chasing:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\ B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \end{tikzcd}$$

være kommutativt diagram med exakte rækker. Da gælder:

f_1 surjektiv, f_2 og f_4 injektiv $\Rightarrow$ f_3 injektiv

f_4 injektiv, f_1 og f_3 surjektiv $\Rightarrow$ f_2 surjektiv.

Eksempel. Lad

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[d, "f_3"] \\ B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \end{tikzcd}$$

være kommutativt med exakte rækker. Hvis f_3 er injektiv, er $\mathrm{Im}(f_2) \cap \mathrm{Im}\,\beta_1 = \mathrm{Im}\, f_2\alpha_1 = \mathrm{Im}\,\beta_1 f_1$.

Eksempel. Lad nedenstående diagram være kommutativt med exakte rækker:

$$\begin{tikzcd} & (\mathrm{I}) & (\mathrm{II}) & (\mathrm{III}) & \\ & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[d, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "g_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "g_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[d] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

da gælder ("3×3 lemmaet")

(I) og (II) exakte $\Rightarrow$ (III) exakt

(II) og (III) exakte $\Rightarrow$ (I) exakt

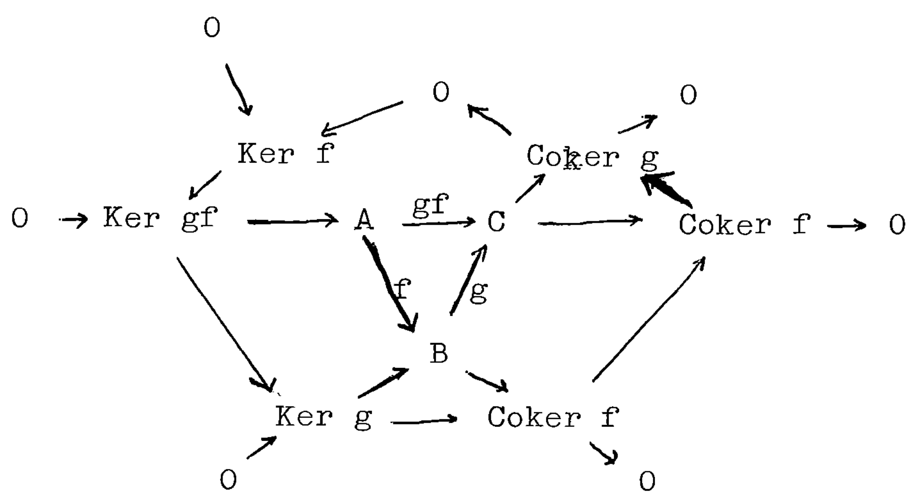
$\left.\begin{array}{l}\text{(I) og (III) exakt} \\ \quad\text{(II) nulfølge}\end{array}\right\} \Rightarrow$ (II) exakt

Eksempel. Lad nedenstående være et kommutativt diagram hvor alle rækker og søjler er exakte:

$$
\begin{tikzcd}
& & & & 0 \arrow[d] \\
& & & 0 \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& & A_1 \arrow[r]\arrow[d] & A_2 \arrow[r]\arrow[d] & A_3 \arrow[r]\arrow[d] & 0 \\
& B_0 \arrow[r]\arrow[d] & B_1 \arrow[r]\arrow[d] & B_2 \arrow[r]\arrow[d] & B_3 \\
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r]\arrow[d] & C_1 \arrow[r]\arrow[d] & C_2 \\
& Y \arrow[d] & 0 \\
& 0
\end{tikzcd}
$$

Da er X og Y isomorfe.

Eksempel. ("Vejrmølle-diagrammet"). Lad f være homomorfi fra A til B og g være homorfi fra B til C. Med oplagte afbildninger er nedenstående et kommutativt exakt diagram:



Direkte produkt og direkte sum.

Lad A_α, $\alpha \in I$ være en (endelig eller uendelig) familie af Λ-moduler. Det direkte produkt $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ er det kartesiske produkt af A_α'erne med komponentvis sum og multiplikation:

$$\{a_\alpha\} + \{b_\alpha\} = \{a_\alpha + b_\alpha\}$$
$$\lambda\{a_\alpha\} = \{\lambda a_\alpha\}$$

ΠA_α bliver herved en Λ-modul.

Den direkte sum (eller koprodukt) er undermodulen $\sum_{\alpha\in I} A_\alpha$ (eller $\coprod_{\alpha\in I} A_\alpha$) i ΠA_α bestående af alle elementer, som har "næsten alle" koordinater $= 0$ (d.v.s. alle på nær endelig mange).

(Af hensyn til det følgende vil vi ofte betegne den her indførte direkte sum som den ydre direkte sum).

Hvis I endelig er $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \sum_{\alpha\in I} A_\alpha$, og man skriver ofte $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, hvis $I = \{1,\cdots n\}$. Hvis alle $A_\alpha =$ fast modul betegner man $\sum_{\alpha\in I} A_\alpha = A^{(I)}$ og $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = A^I$.

For ΠA_α og ΣA_α defineres p_α som projektionen på α^{te} koordinat og $i_\alpha : A_\alpha \to \Pi A_\alpha$ (resp. ΣA_α) som $i_\alpha(a_\alpha) =$ elementet i ΠA_α (resp. ΣA_α) hvis α^{te} koordinat er a_α og samtlige øvrige koordinater er 0. Da gælder

$$p_\alpha i_\beta = \begin{cases} 1_{A\alpha} & \text{for } \alpha = \beta \\ 0 & \text{for } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Lad M være Λ-modul og A_α, $\alpha \in I$ en familie af undermoduler i M. M kaldes den indre direkte sum af A_α'erne, hvis ethvert $m \in M$ entydigt kan skrives som sum af endelig mange a_α'er.

Vi viser nu at indre og ydre direkte sum i det væsentlige er det samme:

Sætning i). Hvis M indre direkte sum af A_α, $\alpha \in I$ da er $M \simeq \sum_\alpha A_\alpha$ (ydre direkte sum).

ii) Hvis $M = \Sigma A_\alpha$ (ydre direkte sum) er M indre direkte sum af $i_\alpha A_\alpha$, $\alpha \in I$; her vil $i_\alpha A_\alpha \simeq A_\alpha$.

Bevis. ad i) Afbildningen Φ fra ΣA_α til M defineret ved

$$\Phi(\{a_\alpha\}) = \sum_\alpha a_\alpha \quad \text{er en isomorfi}$$

ad ii) følger umiddelbart af definitionerne. ∎

Bemærkning. Hvis M er indre direkte sum af A_α, $\alpha \in I$ skriver man $M = \sum_\alpha A_\alpha$ (ligesom for ydre direkte sum) og $M = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, hvis I er endelig, $I = \{1,\cdots,n\}$.

Sætning. $\mathrm{Hom}_\Lambda(\sum_{\alpha\in I} A_\alpha, M) \simeq \prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha, M)$ for vilkårlig indexmængde I.

Bevis. Vi har en homomorfi Φ fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(\sum_\alpha A_\alpha, M)$ til $\prod_\alpha \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha, M)$ givet ved $\Phi(f) = \{fi_\alpha\}$, (idet $\sum_\alpha A_\alpha$ her står for den ydre direkte sum) og en homomorfi ψ fra $\prod_\alpha \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha, M)$ til $\mathrm{Hom}_\Lambda(\sum_\alpha A_\alpha, M)$ givet ved $\psi(\{f_\alpha\})\,[\{a_\alpha\}] = \sum_\alpha f_\alpha(a_\alpha)$. (Veldefineret da $a_\alpha = 0$ for næsten alle α). Man efterviser umiddelbart at $\psi \cdot \Phi = 1_{\mathrm{Hom}_\Lambda(\sum_\alpha A_\alpha, M)}$ og $\Phi \cdot \psi = 1_{\prod_\alpha \mathrm{Hom}(A_\alpha, M)}$. Dette giver den ønskede isomorfi. ∎

Analogt fås

Sætning. $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\prod_\alpha A_\alpha) \simeq \prod_\alpha \mathrm{Hom}_\Lambda(M,A_\alpha)$ for vilkårlig indexmængde I.

Bemærkning. De ovennævnte isomorfier er $\mathbb{Z}$-isomorfier for generelle Λ og Λ-isomorfier for kommutative Λ.

I de følgende eksempler nogle egenskaber ved direkte summer der umiddelbart eftervises ud fra definitionerne.

Eksempel. A_α fri $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow \sum_\alpha A_\alpha$ fri

Eksempel. Hvis Λ er et integritetsområde, gælder $(A_\alpha)_T = A_\alpha \;\forall\, \alpha \Rightarrow (\sum_\alpha A_\alpha)_T = \sum_\alpha A_\alpha$.

Eksempel. I almindelighed gælder ej A_α fri $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow \prod_\alpha A_\alpha$ fri, idet vi senere viser $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ej fri. Endvidere: $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ er torsionsgruppe for alle $n \in \mathbb{N}$, men $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ er ikke torsionsgruppe.

Vi viser nu en sætning der udgør udgangspunktet for et af hovedemnerne i den homologiske algebra.

Sætning. Enhver Λ-modul M er homomorft billede af en fri Λ-modul.

Bevis. Lad S være et frembringersystem for M (f.eks. $S = M$). Lad F være mængden af alle (mængdeteoretiske) afbildninger fra S til Λ der er 0 for næsten alle elementer i S. F bliver Λ-modul ved for $f,g \in F$ at sætte

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$(\lambda f)(s) = \lambda f(s)$$

Da vil $f+g$, $\lambda \cdot f \in F$ og modulaxiomerne ses umiddelbart at være opfyldte. For et vilkårligt $s \in S$ betegner vi med e_s den afbildning fra F der er bestemt ved

$$e_s(s') = \begin{cases} 1 & \text{for } s = s' \\ 0 & \text{for } s \neq s'. \end{cases}$$

Elementerne $\{e_s\}$, $s \in S$ er basis for F, der således er en fri modul. Thi $\{e_s\}$ er uafhængigt:

$$\lambda_1 e_{s_1} + \cdots + \lambda_n e_{s_n} = 0 \Rightarrow \lambda_1 e_{s_1}(s) + \cdots + \lambda_n e_{s_n}(s) = 0 \forall s;$$

ved successivt at indsætte $s = s_1, \cdots, s_n$ fås $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

For et vilkårligt $f \in F$ gælder

$f = f(s_1)e_{s_1} + \cdots + f(s_n)e_{s_n}$, hvor $s_1, \cdots, s_n$ er de endelig mange elementer i S på hvilke f ikke er 0. D.v.s. $\{e_s\}$, $s \in S$ er frembringersystem for F.

Vi definerer nu en Λ-homomorfi φ fra F til M ved

$$\varphi(f) = \sum_{s \in S} f(s)s, \quad (f \in F)$$

φ veldefineret, da $f(s) = 0$ for næsten alle s. φ ses umiddelbart at være en Λ-homomorfi. $\varphi(e_s) = s$ d.v.s. $\varphi(F) \supseteq S$. Da S frembringer M bliver $\varphi(F) = M$. φ således surjektiv. M er altså homomorft billede af den frie Λ-modul F. ∎

Bemærkning 1. Elementerne e_s, $s \in S$ er i (1-1) forbindelse med elementerne i s. Ofte betegnes e_s med $\boxed{s}$, og elementerne $\boxed{s}$ er altså en basis for den frie modul F. F betegnes ofte som den frie Λ-modul af "endelige

formelle Λ-linear kombinationer af elementerne fra S".
Man skriver $F = \Lambda^{(S)}$.

Bemærkning 2. Betegnelsen $F = \Lambda^{(S)}$ er i overensstemmelse med den på p. 20 indførte. F kunne også være defineret som $\sum_{s\in S} \Lambda_s$ med $\Lambda_s = \Lambda$ $\forall s \in S$; og afbildningen φ være defineret ved $\varphi\{\lambda_s\} = \sum_s \lambda_s s$.

Bemærkning 3. Hvis M er endeligt frembragt, kan S vælges som endelig delmængde i M. $F = \Lambda^{(S)}$ bliver da endelig frembragt fri Λ-modul. Enhver endelig frembragt modul er således homomorft billede af en endelig frembragt fri Λ-modul.

<u>Sætning.</u> Til enhver Λ-modul M findes en exakt følge

$$\cdots \to F_n \xrightarrow[\varphi_n]{} \cdots \to F_2 \xrightarrow[\varphi_2]{} F_1 \xrightarrow[\varphi_1]{} M \to 0 \qquad (*)$$

hvor $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ er Λ-homomorfier og $F_1, \cdots, F_n$ er frie Λ-moduler.

Bevis. Ifølge foregående sætning findes exakt følge

$$F_1 \xrightarrow[\varphi_1]{} M \to 0$$

hvor F_1 er fri. Ker φ_1 kan skrives som homomorft billede af en fri Λ-modul:

$$F_2 \to \operatorname{Ker} \varphi_1 \to 0$$

Heraf

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[dr] & & F_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] & M \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Ker}\varphi_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Kernen for homomorfien fra F_2 til $\mathrm{Ker}\ \varphi_1$ er homomorft billede af en fri Λ-modul F_3. Ved fortsættelse af denne proces fås ved konstruktionen p. 16 en exakt følge af den ønskede art.

Definition. En exakt følge af formen (*) kaldes en fri resolution af M. Ved anvendelse af ovenstående konstruktion, Bemærkning 3 og sætning på p. 12 fås

Sætning. Hvis Λ er (venstre) Noethersk, har enhver endelig frembragt Λ-modul en fri resolution bestående af endelig frembragte frie Λ-moduler.

Direkte summand.

Definition. En undermodul A i Λ-modulen M siges at være direkte summand i M, hvis der eksisterer en undermodul K i M så M er (indre) direkte sum af A og K: $M = A \oplus K$. K kaldes i så fald et komplement til A.

Sætning. Hvis A er direkte summand i M, er komplementet entydigt bestemt på nær isomorfi, idet det vil være $\simeq M/A$.

Bevis. Lad $M = A \oplus K$. Afbildningen $m = a+k \to k$ fra M til K er surjektiv med A som kerne, hvorfor homomorfisætningen giver den ønskede isomorfi. ∎

Bemærkning. Komplementet er normalt ej entydigt bestemt som undermodul i M. Man kan f.eks. betragte tilfældet, hvor M er et 2-dimensionalt vektorrum over et legeme og A et 1-dimensionalt underrum. Ethvert fra A forskelligt 1-dimensionalt underrum er et komplement.

Eksempel 1). $M = \mathbb{Z}$, $A = 2\mathbb{Z}$, A ej direkte summand i M.

2) $M = Q$ $A = \mathbb{Z}$ A ej direkte summand i M.

Bemærkning. Hvis $M = A \oplus K$ er $A \cap K = \{0\}$.

Hvis A, C er moduler og $A \oplus C$ ydre direkte sum findes afbildninger $A \xrightarrow[i_A]{} A \oplus C$: $i_A(a) = (a,0)$; $C \xrightarrow[i_C]{} A \oplus C$: $i_C(c) = (0,c)$ $A \oplus C \xrightarrow[p_C]{} C$: $p_C(a,c) = c$; $A \oplus C \xrightarrow[p_A]{} A$ $p_A(a,c) = a$ for hvilke:

$$p_A \circ i_A \equiv 1_A \quad p_C \circ i_C = 1_C \quad p_A \circ i_C = 0 \quad p_C \circ i_A = 0$$

$$i_A \circ p_A + i_C \circ p_C = 1_{A \oplus C}$$

Åbenbart er $0 \to A \xrightarrow[i_A]{} A \oplus C \xrightarrow[p_C]{} C \to 0$ kort exakt.

Nu en karekterisering af ovennævnte følger.

Sætning. For en kort exakt følge

$$(*) \qquad 0 \to A \xrightarrow[\alpha]{} B \xrightarrow[\beta]{} C \to 0$$

er følgende betingelser ækvivalente:

1) $\alpha(A) = \operatorname{Im} \alpha$ er direkte summand i B
2) $\exists$ homomorfi $f: B \to A$ så $f \circ \alpha = 1_A$
3) $\exists$ homomorfi $g: C \to B$ så $\beta \circ g = 1_C$
4) $\exists$ homomorfier $f: B \to A$, $g: C \to B$ så $f \circ \alpha = 1_A$, $\beta \circ g = 1_C$, $\alpha \circ f + g \circ \beta = 1_B$
5) $(*)$ er isomorf med den kort exakte følge

$$0 \to A \underset{i_A}{\to} A \oplus C \underset{p_C}{\to} C \to 0.$$

Bevis. Vi viser

1) $\Rightarrow$ 4), 4) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 1), 2) $\Rightarrow$ 5), 5) $\Rightarrow$ 2)

4) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 4): Lad $B = \alpha A \oplus K$.

Da er $\beta_{\text{Res},K}: K \to C$ surjektiv, da $\beta\alpha A = 0$ d.v.s. $\beta_{\text{Res},K}$ er isomorfi fra K på C. Lad g være dennes inverse d.v.s. $\beta \circ g = 1_C$ og $g(\beta(k)) = k \ \forall \ k \in K$.

Ethvert $b \in B$ kan entydigt skrives på formen $b = \alpha a + k$, $a \in A$, $k \in K$. Følgelig findes afbildning $f: B \to A$ så $f(b) = a$. f er homomorfi.

Her gælder $f\alpha a = a \ \forall \ a \in A$ d.v.s. $f \circ \alpha = 1_A$.

For $b = \alpha a + k$ er $(\alpha \circ f + g \circ \beta)(\alpha a + k) = \alpha f \alpha a + \alpha f k + g\beta\alpha a + g\beta k = \alpha a + 0 + 0 + k$; d.v.s. $\alpha \circ f + g \circ \beta = 1_B$

4) dermed opfyldt.

4) $\Rightarrow$ 2) og 4) $\Rightarrow$ 3) trivielle.

2) $\Rightarrow$ 1): Ker f er undermodul i B og $B = \alpha A \oplus \text{Ker } f$; thi $b = \alpha(fb) + (b - \alpha fb)$, $b - \alpha fb \in \text{Ker } f$ idet $f(b - dfb) = fb - fb = 0$

$$0 = \alpha a + x, \quad x \in \text{Ker } f \Rightarrow$$

$$0 = f\alpha a + fx = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0.$$

3) $\Rightarrow$ 1): analogt med 2) $\Rightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 5) Vi søger en homomorfi φ så diagrammet

$$0 \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & B & \xrightarrow[\beta]{} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle 1_C} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[i_A]{} & A\oplus C & \xrightarrow[p_C]{} & C & \to & 0 \end{array}$$

bliver kommutativt. Ifl. 5-lemmaet bliver φ da automatisk en isomorfi. P.gr. af 2) findes $f: B \to A$ som $f\circ\alpha = 1_A$; vi definerer nu: $\varphi = i_A f + i_C\beta$ (med benævnelserne p. 26). Da eftervises let:

$$\varphi\alpha = i_A \quad \text{og} \quad \beta = p_C\varphi.$$

5) ⇒ 2) Vi antager der findes isomorfier $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ så diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & B & \xrightarrow[\beta]{} & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[i_A]{} & A\oplus C & \xrightarrow[p_C]{} & C & \to & 0 \end{array}$$

er kommutativt.

For $f = \varphi_1^{-1} p_A \varphi_2$ gælder $f\alpha = \varphi_1^{-1} p_A \varphi_2 \alpha = \varphi_1^{-1} p_A i_A \varphi_1 = 1_A$. ∎

Bemærkning: Af beviset for ovenstående sætning fremgår, at hvis 5) gælder vil (∗) være isomorf med $0 \to A \xrightarrow[i_A]{} A\oplus C \xrightarrow[p_C]{} C$ med isomorfierne fra A til A og C til C værende 1_A og 1_C.

Definition. En kort exakt følge $0 \to A \xrightarrow[\alpha]{} B \xrightarrow[\beta]{} C \to 0$ kaldes split-exakt hvis en og dermed alle egenskaberne 1) - 5) i ovennævnte sætning gælder.

<u>Tilføjelse til sætning.</u> Hvis $0 \to A \underset{\alpha}{\to} B \underset{\beta}{\to} C \to 0$ er en (apriori ej nødvendig exakt) følge af homomorfier så betingelsen 4) er opfyldt, da bliver denne følge exakt (og dermed endog split-exakt).

Bevis. $f\alpha = 1_A \Rightarrow \alpha$ injektiv; $\beta g = 1_C \Rightarrow \beta$ surjektiv. Af $\alpha f + g\beta = 1_B$ fås $\alpha f(b) + g\beta(b) = b$ og videre $\beta\alpha f(b) + \beta g\beta(b) = \beta(b)$; idet $\beta g = 1_C$ følger $\beta\alpha f(b) = 0 \ \forall\, b \in B$. Da f surjektiv på grund af $f\alpha = 1_A$, bliver $\beta\alpha = 0$, d.v.s. $\operatorname{Ker}\beta \supseteq \operatorname{Im}\alpha$.

Den omvendte inklusion $\operatorname{Ker}\beta \subseteq \operatorname{Im}\alpha$ følger af $\alpha(f(b)) + g(\beta(b)) = b \quad \forall\, b \in B$.

Bemærkning. Af ovenstående tilføjelse ses, at hvis $0 \to A \underset{\alpha}{\to} B \underset{\beta}{\to} C \to 0$ er split-exakt, og f og g er afbildninger tilfredsstillende betingelse 4) bliver $0 \leftarrow A \underset{f}{\leftarrow} B \underset{g}{\leftarrow} C \leftarrow 0$ exalt. pg dermed også split-exakt. Split-axakte følger kan altså i en vis forstand vendes om, og kaldes derfor også undertiden invertible følger.

Bemærkning. I sætningen er de i betingelse 4) nævnte afbildninger normalt ej entydigt bestemte. (Betragt f.eks. vektorrum).

Bemærkning. På grund af betingelse 5) i sætningen gælder $B \simeq A \oplus C$ for en split-exakt følge.

Eksempel. Der findes kort-exakte følger

$$0 \to A \underset{\alpha}{\to} B \underset{\beta}{\to} C \to 0$$

der ikke er split-exakte, men $B \simeq A \oplus C$. Man kan (med passende valgte α og β) tage $A = \mathbb{Z}_{(2)}^{\mathbb{N}}$ og $B = \prod_{n=1}^{\infty}(\mathbb{Z}_{(2^n)})^{\mathbb{N}}$.

Opgave. Vis, at $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ ej er direkte summand i $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. (For den exakte følge $0 \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to 0$ findes intet $f\colon \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ så $f \circ i = 1_{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}}$).

Sætning. Enhver kort-exakt følge

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} F \to 0$$

hvor F er en fri modul, er split-exakt.

Bevis. Lad $\{e_i\}$, $i \in I$ være en basis for F. For hvert e_i vælges $b_i \in B$ så $\beta(b_i) = e_i$. Da findes (netop) een Λ-homomorfi $g\colon F \to B$ så $g(e_i) = b_i$. For g gælder da $\beta g(e_i) = e_i \ \forall i \in I$, og derfor $\beta g = 1_F$. ∎

Ovennævnte vil gælde alment for en vigtig klasse af moduler indeholdende de frie moduler.

Definition. En (venstre) Λ-modul P kaldes projektiv, hvis der til ethvert diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & C & \to & 0 \end{array}$$

findes en homomorfi $\psi\colon P \to B$ så $\varphi = \beta\psi$.

Sætning. Enhver fri modul F er projektiv.

Bevis. For diagrammet

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\varphi"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

konstrueres et $\psi : F \to B$ ved: Lad $\{e_i\}$, $i \in I$ være basis for F og $b_i \in B$ være elementer så $\beta(b_i) = \varphi(e_i)$. Definerer ψ ved $\psi(e_i) = b_i$. Da gælder $\beta\psi(e_i) = \varphi(e_i)$ $\forall e_i$ og dermed $\beta\psi = \varphi$. ∎

Sætning. Lad

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} P \to 0$$

være exakt. Hvis P er projektiv, er følgen split-exakt.

Bevis. Ved betragtning af

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "1_P"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ses, at der findes $g: P \to B$ så $\beta g = 1_P$. ∎

Sætning. Enhver direkte summand i en projektiv modul er projektiv.

Bevis. Antag $P = M \oplus N$ og P projektiv. Betragt et diagram

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\varphi"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

og i tilslutning hertil

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "p_M"] \arrow[ddl, dashed, "f"'] & \\ & M \arrow[d, "\varphi"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P projektiv $\Rightarrow \exists f\colon P \to B$ så $\beta f = \varphi \circ p_M$ hvoraf $\beta f i_M = \varphi \circ P_M \circ i_M = \varphi$. D.v.s. $f i_M$ er den søgte homomorfi fra M til B. ∎

Sætning. En modul P er projektiv hvis og kun hvis P er direkte summand i en fri modul.

Bevis. "hvis" følger af sidste sætning, idet enhver fri modul er projektiv. "Kun hvis" P skrives som homomorft billede af en fri modul F.

$$0 \to \operatorname{Ker} \beta \xrightarrow[i]{} F \xrightarrow[\beta]{} P \to 0$$

Ifølge sætning på p. 31 er denne følge split-exakt hvorfor $F \simeq P \oplus \operatorname{Ker} \beta$. ∎

Af det foregående følger umiddelbart:

Sætning. En modul P er projektiv hvis og kun hvis enhver kort-exakt følge af formen

$$0 \to A \xrightarrow[\alpha]{} B \xrightarrow[\beta]{} P \to 0$$

er split-exakt.

Eksempel. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}/(6)$. I idealet $\Lambda 2$ J idealet $\Lambda 3$. Her er $\Lambda = I \oplus J$; d.v.s. I og J er projektive Λ-moduler, men I og J ej frie Λ-moduler.

<u>Sætning</u>. ("Eilenbergs svindel"). Til enhver projektiv modul P findes en fri modul F så $P\oplus F$ er fri, endog $P\oplus F \approx F$.

<u>Bevis</u> Da P projektiv, findes en Modul K så $P\oplus K$ er fri. Da er:

$$(P\oplus K)\oplus(P\oplus K)\oplus(P\oplus K)\oplus\cdots = P\oplus(K\oplus P)\oplus(K\oplus P)\oplus(K\oplus P)\oplus\cdots$$

$(P\oplus K)\oplus(P\oplus K)\oplus\cdots$ er en fri modul F og $P\oplus F \simeq F$. ∎

<u>Sætning</u>. Enhver direkte sum af projektive moduler er projektiv.

<u>Bevis</u>. Lad P_i, $i \in I$ være projektive moduler. Lad K_i være moduler så $P_i\oplus K_i$ er fri. Da er

$$(\Sigma P_i)\oplus(\Sigma K_i) \simeq \Sigma(P_i\oplus K_i) \quad \text{fri}$$

d.v.s. ΣP_i er direkte summand i fri modul. ∎

Bemærkning. Normalt er direkte produkt af projektive moduler ej projektiv. Eksempler kommer senere.

For en vigtig klasse af ringe Λ er enhver projektiv Λ-modul fri. Vi viser først en almen sætning om såkaldte hereditære ringe.

Definition. Λ kaldes venstre (resp. højre) hereditær hvis ethvert venstre (resp. højre) ideal i Λ betragtet som venstre (resp. højre) Λ-modul er projektiv.

Eksempel. $\mathbb{Z}$ er hereditær og mere alment er enhver P.I.D. (Komm. integritetsområde hvor ethvert ideal er hoved-ideal) hereditær.

Sætning. Hvis Λ er venstre hereditær, er enhver undermodul i en fri (venstre) Λ-modul, isomorf mere en direkte sum af venstre idealer i Λ.

Bevis. Se Rotman: Notes on homological algebra pp. 73-74.

Korollar. Λ P.I.D. $\Rightarrow$ enhver undermodul i en fri Λ-modul er fri.

Ny Linie

Ovennævnte implikation kan vendes om for kommutative ringe.

Sætning. For en kommutativ ring Λ gælder

Λ P.I.D $\Longleftrightarrow$ enhver undermodul i en fri Λ-modul er fri.

Bevis. Nok at vise $\Leftarrow$:
Viser først at Λ er nuldivisorfri: $a \in \Lambda$, $a \neq 0$ antager $b \in \Lambda$ $ab = 0$. Skal godtgøre $b = 0$:
$\Lambda a \subseteq \Lambda$; Λa fri med basis på (nødvendigvis) eet element e
$e = \lambda a$ $ba = 0 \Rightarrow be = 0 \Rightarrow b = 0$. Endvidere, da et frit ideal i en kommutativ ring er hovedideal, bliver Λ P.I.D. ∎

Af korollaret følger

Sætning. Hvis Λ er P.I.D. er enhver projektiv Λ-modul fri.

Vi kan nu give et (tidligere omtalt) eksempel der viser direkte produkt af projektive moduler normalt ej er projektivt. Vi tager $\Lambda = \mathbb{Z}$ hvor "projektiv" er det samme som "fri".

<u>Sætning</u>. (Baer). $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ej fri $\mathbb{Z}$-modul.

<u>Bevis</u>. For ethvert $h \in \mathbb{Z}$ defineres

$$v(h) = \begin{cases} \infty & \text{for } h = 0 \\ n & \text{hvis } 2^n \mid h, \text{ men } 2^{n+1} \nmid h \end{cases}$$

Da gælder $v(h_1+h_2) \geqq \min(v(h_1),v(h_2))$.

$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ opfattes som mængden af alle følger $(h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots)$ med koordinatvis addition. Antag $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ var fri. Lad U være undermodulen i $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ bestående af alle følger $(h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots)$ for hvilke $v(h_n) \to \infty$ for $n \to \infty$. På grund af korollaret p.34 er U fri. U indeholder alle følgerne $(\pm 2,\pm 2^2,\cdots,\pm 2^n,\pm\cdots)$ og dermed er U ej tællelig. Hvis $\{e_\alpha \mid \alpha \in I\}$ er basis for U, må denne derfor være ikke-tællelig. I faktorgruppen U/2U er $e_\alpha \neq e_\beta$ for $\alpha \neq \beta$. Derfor er U/2U ej tællelig.

På den anden side findes til enhver følge $(h_1,h_2,\cdots,h_n,\cdots) \in U$ et t så $2 \mid h_n$ for $\forall n > t$. Vi kan derfor skrive

$$(h_1,h_2,\cdots) = (h_1,\cdots,h_t,0,0,0,0\cdots) + 2(0,\cdots 0,\tfrac{1}{2}h_{t+1}\cdots),$$

hvor $(0,\cdots 0,\frac{1}{2}h_{t+1}) \in U$ d.v.s. $2(0,\cdots 0,\frac{1}{2}h_{t+1},\cdots) \in 2U$. I U/2U gælder altså $(h_1,h_2,\cdots) = (h_1,\cdots h_t,000)$, hvoraf følger at ethvert element i U/2U kan repræsenteres af de tællelige mange følger, der har lutter nuller fra et vist trin, specielt U/2U er tællelig. Antagelsen $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ fri har altså ført til en modstrid. ∎

P.32 gav et eksempel på ikke-frie projektive moduler. Nu nogle mindre trivielle eksempler.

Eksempel 1. $\Lambda = \mathbb{Z}[1,\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$
$I = \{a+b\sqrt{-5} \mid a \equiv b \pmod 2\}$ er ideal i Λ. I ej hovedideal, d.v.s. I som Λ-modul ej fri. Men I er projektiv Λ-modul, idet $I \oplus I \simeq \Lambda \oplus \Lambda$. En isomorfi $\varphi\colon \Lambda\oplus\Lambda \to I\oplus I$ fås ved $\varphi(\lambda_1,\lambda_2) = (2\lambda_1+(1+\sqrt{-5})\lambda_2, (1-\sqrt{-5})\lambda_1+2\lambda_2)$.

Eksempel 2. $\Lambda = \mathbb{R}[X,Y,Z)/I$, hvor $I = \Lambda(X^2+Y^2+Z^2-1)$.
Vi kan skrive $\Lambda = \mathbb{R}[X, Y, Z]$ hvor
$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Vi har en exakt følge:

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\varphi} \Lambda^3 \to M \to 0 \quad (M = \operatorname{coker} \varphi = \Lambda^3/\varphi\Lambda),$$

hvor $\varphi(\lambda) = (X\lambda, Y\lambda, Z\lambda)$. Denne følge er split-exakt, idet afbildningen $\psi\colon \Lambda^3 \to \Lambda$ defineret ved
$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z$, har egenskaben:
$\psi\circ\varphi = 1_\Lambda$. Derfor er M projektiv Λ-modul. Vi får nu brug for et alment lemma for at vise at M ikke er fri.

<u>Lemma</u>. Lad Λ være en kommutativ ring og F en fri Λ-modul med basis $e_1,\dots,e_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Lad $m_1,\dots,m_n$ være n elementer i F; da er

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_n \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{A}}(n\times n) \text{ matrix med elementer i } \Lambda.$$

Her gælder $(m_1,\dots,m_n)$ er basis for $F \iff \det \underline{\underline{A}}$ invertibelt element i Λ.

Bevis. "$\Rightarrow$" $e_1,\dots,e_n$ da Λ-linearkombinationer af $m_1,\dots,m_n$ d.v.s. $\exists(n\times n)$ matrix $\underline{\underline{B}}$ med elementer i Λ
så $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_n \end{Bmatrix}$ hvoraf $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{BA}} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_n \end{Bmatrix}$ d.v.s. $\underline{\underline{BA}} = \underline{\underline{E}}$

og dermed $\det \underline{\underline{B}} \cdot \det \underline{\underline{A}} = 1$ $\det \underline{\underline{A}}$ altså invertibelt element

"$\Leftarrow$" viser først, at $m_1,\cdots,m_n$ er uafhængige. Antag $\lambda_1 m_1+\cdots+\lambda_n m_n = 0$. Hvis $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1\le i j\le n}$, fås da $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\cdot \underline{\underline{A}} \begin{matrix} e_1 \\ e_n \end{matrix} = 0$ eller

$\lambda_1 a_{ij} + \lambda_2 a_{ij} +\cdots+ \lambda_n a_{nj} = 0 \quad \forall j = 1,2,\cdots,n$ d.v.s.: $(\lambda_1\cdots\lambda_n)\,\underline{\underline{A}} = (0,\cdots,0)$

og da det $\underline{\underline{A}}$ invertibel $\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$ eksisterer fås $(\lambda_1\cdots\lambda_n) = (0,\cdots,0)$. Da $\underline{\underline{A}}^{-1}$ eksisterer, er $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_n \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}}^{-1} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_n \end{Bmatrix}$, hvoraf følger at $m_1,\cdots,m_n$ er frembringersystem for F. $m_1,\cdots,m_n$ således en basis.

Vi kan nu vise, at M ikke er fri. Antag M fri; på grund af $\Lambda^3 \simeq M\oplus\Lambda$ måtte en basis for M have 2 elementer. Λ^3 er indre direkte sum af $\varphi\Lambda$ og en modul $\simeq M$, d.v.s. under vores antagelse skulle $\varphi(1) = (X, Y, Z)$ kunne suppleres op med endnu to elementer til en basis for Λ^3. På grund af lemmaet ville det betyde at der findes $f_1(x,y,z)$, $f_2(x,y,z)$ $f_3(x,y,z)$ og $g_1(x,y,z)$, $g_2(x,y,z)$ $g_3(x,y,z) \in \Lambda$ som

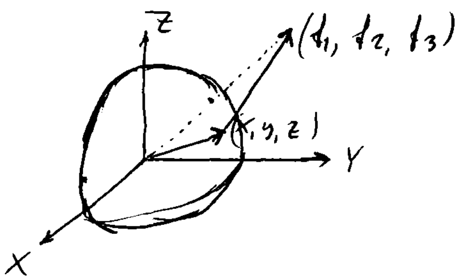
$$d = \begin{vmatrix} x & f_1(x,y,z) & g_1(x,y,z) \\ y & f_2(x,y,z) & g_2(x,y,z) \\ z & f_3(x,y,z) & g_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \text{invertibelt element i } \Lambda.$$

Ved at erstatte sidste søjle med $d^{-1}g_1$ $d^{-1}g_2$ $d^{-1}g_3$, kan vi antage $d = 1$. Ved at gå tilbage i polynomiumsringen $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ fås af ovenstående, at

$$\begin{vmatrix} x & f_1(X,Y,Z) & g_1(X,Y,z) \\ y & f_2(X,Y,Z) & g_2(X,Y,Z) \\ z & f_3(X,Y,Z) & g_3(X,Y,Z) \end{vmatrix} = 1 + (X^2+Y^2+Z^2-1)h(X,Y,Z)$$

for polynomier $f_1, f_2, f_3, \cdots h \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$.

På enhedskuglen $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ skulle (X,Y,Z) og $(f_1(x,y,z)f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)$ således være lineært uafhængige



Ved radialprojektion som antydet på figuren ville man herved få en kontinuert fixpunktfri afbildning af kugleoverfladen S^2 ind i sig selv, men dette strider mod Hopf's fixpunktsætning.

Mere almènt kan man for ethvert n over $\Lambda_n = \mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/(x_1^2+\cdots+,x_n^2 -1)$ betragte den splitexakte følge

$$0 \to \Lambda_n \xrightarrow{\varphi} \Lambda_n^n \to M_n \to 0 \qquad \varphi(\lambda) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

hvor M_n bliver projektiv Λ_n-modul.

M_n kan vises (langt fra trivielt!) at være fri netop mår $n = 1,2,4,8$.

Vi skal nu kort omtale nogle almene begreber og sætninger for kommutative integritetsområder Λ. Hvis A og B er idealer i Λ, indføres $A \cdot B$ som mængden af elementer i Λ af formen $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $n \in \mathbb{N}$. $A \cdot B$ ses let at være ideal i Λ. Et ideal

$A \neq 0$ kaldes invertibelt, hvis der findes et ideal B så $A \cdot B$ = hovedideal $\neq 0$. Da gælder (Rotman p. 82).

Et ideal $A \neq 0$ er invertibelt $\Leftrightarrow A$ er projektiv Λ-modul.

Man vise følgende sætning vedrørende hereditære integritetsområder.

<u>Sætning</u>. For et integritetsområde Λ er følgende betingelser ækvivalente:

1) Λ er hereditær

2) Ethvert ideal $\neq 0$ i Λ er invertibelt

3) Λ "klassisk" idealteori, d.v.s. ethvert ideal $\neq 0$ kan entydigt skrives som produkt af primidealer.

4) Λ tilfredsstiller
   - i) Λ er Noethersk
   - ii) Ethvert primideal $\neq 0$ er maximalt
   - iii) Ethvert α i Λ's brøklegeme, der er rod i et polynomium af formen $x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \cdots + \lambda_n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$, tilhører Λ.

(Bevis se f.eks. Zariski-Samuel: Commutative algebra I.)

Definition. En ring der tilfredsstiller een og dermed alle betingelser i ovennævnte sætning kaldes en Dedekind ring.

Eksempel. Man kan vise, at den i Eksempel 1 p. 36 betragtede ring er Dedekindsk. Endvidere gælder, at ethvert ideal $(\neq 0)$ i Λ enten er hovedideal, d.v.s. $\simeq \Lambda$

eller (qua Λ-modul) $\simeq$ I. På grundlag af dette kan let vises, at enhver ej endelig frembragt projektiv Λ-modul er fri. (Brugt sætningen om arvelige ringe p.34.)

Der gælder en mere almen sætning ifølge hvilken enhver ej endelig frembragt projektiv modul over et (kommutativt) Noethersk integritetsområde er fri.

Ringe for hvilke enhver (venstre)modul er projektiv.

Først alment begreb: Lad $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n$ være n vilkårlige ringe. Den (ydre) direkte sum indføres som $\Lambda_1\times\cdots\times\Lambda_n$ med komponentvis addition og multiplikation:

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \stackrel{+}{\cdot} (\lambda_1',\cdots,\lambda_n') = (\lambda_1 \stackrel{+}{\cdot} \lambda_1',\cdots,\lambda_n \stackrel{+}{\cdot} \lambda_n')$$

$\Lambda_1\times\cdots\times\Lambda_n$ bliver herved en associativ ring med 1-element og betegnes $\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_n$.

Nu nogle vigtige modulteoretiske begreber.

Definition. En Λ-modul M kaldes simpel, hvis $M \neq 0$ og M kun har trivielle undermoduler (d.v.s. 0 og M). M kaldes semi-simpel, hvis M er direkte sum af (endelig eller uendelig mange) simple moduler.

Sætning. (Rotman p. 69). En modul M er semi-simpel $\Longleftrightarrow$ enhver undermodul i M er direkte summand i M.

Korollar. Enhver undermodul og ethvert homomorft billede af en semi-simpel modul er semi-simpel.

<u>Sætning.</u> For en vilkårlig ring Λ er følgende betingelser ækvivalente:

1) Enhver venstre Λ-modul er projektiv

2) Enhver kort-exakt følge af venstre Λ-moduler er split-exakt.

3) Λ er semi-simpel qua venstre Λ-modul.

<u>Bevis.</u> Følger af det foregående.

De i sætningen beskrevne ringe kaldes (venstre) semi-simple.

Ved hjælp af Wedderburns struktursætning fås, at en ring er venstre semi-simpel hvis og kun hvis den er højre semi-simpel. Sådanne ringe betegnes da blot semi-simple.

Med det nu beviste kan vi vende en tidligere sætning p.3 om:

<u>Sætning.</u> Lad Λ være vilkårlig. Da gælder: Λ er skævlegeme $\Longleftrightarrow$ enhver venstre Λ-modul er fri.

<u>Bevis.</u> Nok at vise $\Leftarrow$. Idet specielt enhver venstre Λ-modul er projektiv, er Λ en semi-simpel venstre Λ-modul d.v.s. $\Lambda = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, hvor $I_1, \cdots, I_n$ er simple venstre idealer. (Da Λ har et element må Λ være en endelig direkte sum af simple venstre moduler). Vi påstår, at $n = 1$. $I_1, \cdots, I_n$ er ifølge forudsætningen frie Λ-moduler. Da de er simple, må hver af de tilsvarende baser bestå af netop et element. Lad e_ν være basis for I_ν, $1 \leqq \nu \leqq n$. Antag $n \geqq 2$. Da e_2 er en basis for I_2 må $e_1 e_2 \neq 0$, hvorfor $\Lambda e_1 e_2 = \Lambda e_2$ d.v.s. $e_2 = \lambda e_1 e_2$ for passende $\lambda \in \Lambda$, d.v.s. $(1-\lambda e_1)e_2 = 0$ hvoraf (igen da e_2 er basis for I_2)

$1 - \lambda e_1 = 0$ hvilket medfører $e_2 = e_2\lambda e_1$. d.v.s. $0 \neq e_2 = e_2 \lambda e_1 \in I_1 \cap I_2$; modstrid!

Λ må således være en simpel venstre Λ-modul. Hvis $a \in \Lambda$ $a \neq 0$ er da $\Lambda = \Lambda a$ d.v.s. $1 = \lambda a$ for passende $\lambda \in \Lambda$. Da ethvert element $\neq 0$ således har et venstre inverst, må Λ være et skævlegeme. ∎

Bemærkning. Af ovenstående fremgår specielt, at enhver venstre Λ-modul er fri hvis og kun hvis enhver højre Λ-modul er fri.

Vi skal nu karakterisere de kommutative semi-simple ringe.

<u>Sætning</u>. En kommutativ ring Λ er semi-simpel hvis og kun hvis Λ er isomorf med den direkte sum af (endelig mange) legemer.

<u>Bevis</u>: "hvis": Antag $\Lambda = K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$, $K_1, \cdots, K_n$ legemer. Idealerne $I_1 = (K_1 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0)$, $\cdots$ $I_n = (0 \oplus \cdots \oplus K_n)$ er simple idealer i Λ og Λ er (indre) direkte sum af disse.

"kun hvis". Antag $\Lambda = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$, hvor $I_1, \cdots, I_n$ er simple idealer i Λ. Hver enkelt I_ν er et legeme: Lad $a_\nu \in I_\nu$, $a_\nu \neq 0$. Da er $I_\nu = \Lambda a_\nu$, hvis $b_\nu \in I_\nu$ er $b_\nu = \lambda a_\nu$ for passende $\lambda \in \Lambda$. λ kan skrives

$\lambda = c_1 + \cdots + c_n$, $c_\nu \in I_\nu$

$b_\nu = (c_1 + \cdots + c_n)a_\nu = c_\nu a_\nu$, da $c_\mu a_\nu = 0$ for $\mu \neq \nu$.

I_ν er derfor et legeme. En isomorfi fra den ydre direkte sum af disse legemer på Λ fås ved:

$(a_1, \cdots, a_n) \to a_1 + \cdots + a_n \in \Lambda$. $(a_\nu \in I_\nu)$.

Eksempel. Hvis $n \in \mathbb{N}$ har primopløsningen $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ gælder ("kinesiske restklassesætning."). $\mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(p_1^{a_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/(p_r^{a_r})$. Dette indebærer, at $\mathbb{Z}/(n)$ er semi-simpel, hvis og kun hvis n er kvadratfri. (Ved godtgørelsen af "kun hvis" benyttes at en kommutativ semi-simpel ring ikke har nulpotente elementer, d.v.s. ingen fra 0 forskellige elementer med en potens = 0.)

Lidt om homologisk dimension.

Lad Λ være vilkårlig ring, og A og B vilkårlige (venstre) Λ-moduler.

Definition. A og B kaldes projektivt ækvivalente (skriver $A \overset{\sim}{\sim} B$) hvis der findes projektive Λ-moduler P og Q så $A \oplus P \simeq B \oplus Q$.

Bemærkning. Man viser let, at "projektiv ækvivalens" virkelig er en ækvivalensrelation.

Af en sætning p.31 følger umiddelbart, at en modul A er projektiv hvis og kun hvis A er projektivt ækvivalent med 0.

<u>Schanuel's lemma.</u> Lad A være en Λ-modul og

$$0 \to K \to P \xrightarrow{f} A \to 0$$
$$0 \to K_1 \to P_1 \xrightarrow{g} A \to 0$$

exakte følger med P og P_1 projektive moduler. Da er

$P \oplus K_1 \simeq K \oplus P_1$; specielt er $K \sim K_1$.

Bevis. Da P er projektiv, findes en homomorfi $h: P \to P_1$ så $gh = f$. Vi identificerer $\operatorname{Ker} f$ og $\operatorname{Ker} g$ med K og K_1. Lad C være undermodulen i $P \oplus P_1$ bestående af $\{(p,p_1) \mid f(p) = g(p_1)\}$. Definerer homomorfi $\psi: P \oplus K_1 \to C$ ved $\psi(p,k_1) = (p, h(p)+k_1)$. $\psi(p,k_1)$ tilhører virkelig C, da $f(p) = g(h(p)+k_1)$. ψ surjektiv; thi for hvert (p,p_1) er $(p,p_1) = \psi(p, \quad +p_1-h(p))$ og $p_1 - h(p) \in \operatorname{Ker} g$, da $g(p_1-h(p)) = g(p_1) - gh(p) = g(p_1) - f(p) = 0$.

Endvidere er ψ injektiv, da $\psi(p,k_1) = (p, h(p)+k_1) = (0,0) \Rightarrow p = 0$ og $k_1 = 0$. Altså er $C \simeq P \oplus K_1$; analogt er $C \simeq P_1 \oplus K$ hvoraf $P \oplus K_1 \simeq P_1 \oplus K$. ∎

Korollar. Lad A og A_1 være proj. ækvivalente moduler og

$$0 \to K \to P \to A \to 0$$
$$0 \to K_1 \to P_1 \to A_1 \to 0$$

exakte følger med P og P_1 projektive moduler. Da er $K \sim K_1$.

Bevis. Der findes projektive moduler Q og Q_1 så $A_1 \oplus Q_1 \simeq A \oplus Q$. Herved fås kort exakte følger

$$0 \to K \longrightarrow P \oplus Q \to A \oplus Q \to 0$$
$$0 \to K_1 \longrightarrow P_1 \oplus Q_1 \to A_1 \oplus Q_1 \to 0$$

På grund af Schanuel's lemma er $K \oplus P_1 \oplus Q_1 \simeq K_1 \oplus P \oplus Q$, d.v.s. $K \sim K_1$.

Vi er nu i stand til at indføre begrebet projektiv dimension (homologisk dimension). For en modul A betegner vi med (A) den projektive ækvivalens klasse indeholdende A. [Dette er forbundet med visse logiske vanskeligheder]. Vi definerer $R((A))$ ved (K), hvor $0 \to K \to P \to A \to 0$ er exakt følge og $A \in (A)$. På grund af ovenstående korollar er $R((A))$ veldefineret (uafhængig af valget af A og P). Vi bemærker, at $R((0)) = (0)$.

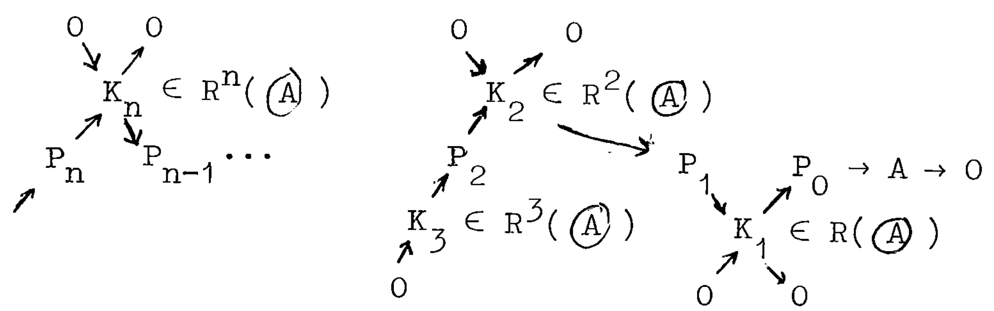
Vi definerer $R^n((A))$ ved

$$R^n((A)) = \begin{cases} (A) & \text{for } n = 0 \\ R(R(\cdots(R((A))))) & \text{hvor } R \text{ successivt er anvendt } n \text{ gange.} \end{cases}$$

Definition. Den projektive (homologiske) dimension af en venstre Λ-modul A er det mindste n for hvilket $R^n((A)) = (0)$. Hvis intet sådant n findes, siges den projektive dimension at være ∞. Den projektive dimension betegnes $1.dh_\Lambda(A)$. ("l" for "left"). Analogt indføres $r.dh_\Lambda(A)$ for højre Λ-moduler.

Bemærkning. For en venstre Λ-modul A gælder: $1.dh_\Lambda(A) = 0 \iff A$ projektiv.

Lad A være en vilkårlig (venstre) Λ-modul. Vi konstruerer en projektiv resolution for A successivt:



Af ovenstående diagram aflæses let:

Sætning. For en (venstre) Λ-modul A er følgende betingelser ækvivalente

1) $l.dh_{\Lambda}(A) \leqq n$

2) Der findes en projektiv resolution for A af formen

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

3) For enhver exakt følge

$$0 \to K_n \to P_n-1 \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

med $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ projektive moduler er K_n projektiv.

Eksempel. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}/4\ \mathbb{Z}$ og $A = \Lambda 2$; da findes en exakt følge, der ikke splitter

$$0 \to A \to \Lambda \to A \to 0 ,$$

hvorfor $dh_{\Lambda}(A) = \infty$.

Global dimension.

Definition. For en ring Λ defineres
$l.gl.dim\ \Lambda = \sup\{l.dh_{\Lambda}(A)\}$, hvor A gennemløber samtlige venstre Λ-moduler.

Analogt indføres $r.gl.dim\ \Lambda$ via højre Λ-modulerne. For en kommutativ ring Λ er $l.gl.dim\ \Lambda = r.gl.dim\ \Lambda$, og man skriver da blot $gl.dim\ \Lambda$. Ved hjælp af sætningen på p. 41 fås:

Sætning. $\text{l.gl.dim}\ \Lambda = 0 \iff$ alle venstre Λ-moduler er projektive $\iff \Lambda$ (venstre) semi-simpel.

Bemærkning. Wedderburn's struktursætning indebærer at $\text{l.gl.dim}\ \Lambda = 0 \iff \text{r.gl.dim}\ \Lambda = 0$. I almindelighed vil $\text{l.gl.dim}\ \Lambda$ og $\text{r.gl.dim}\ \Lambda$ ikke stemme overnes. (For den i eksemplet øverst p.12 angivne ring, gælder $\text{l.gl.dim}\ \Lambda = 2$, $\text{r.gl.dim}\ \Lambda = 1$.)

På grund af sætningen på p.34 vedrørende hereditære ringe ses, at Λ venstre hereditær $\Rightarrow \text{l.gl.dim}\ \Lambda \leqq 1$. Anvendes sætningen på p.46 på $A = \Lambda/I$, I venstre ideal i Λ, fås

<u>Sætning</u>. Λ venstre hereditær $\iff \text{l.gl.dim}\ \Lambda \leqq 1$. Specielt er $\text{gl.dim}\ \Lambda \leqq 1$ hvis Λ P.I.D. Hvis Λ P.I.D., men Λ ej legeme er $\text{gl.dim}\ \Lambda = 1$.

Eksempel. $\text{gl.dim}\ \mathbb{Z} = 1$ og $\text{gl.dim}\ K[X] = 1$ for ethvert legeme K.

<u>Sætning</u>. For $\Lambda = \mathbb{Z}/(n)$, $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\text{gl.dim}\ \Lambda = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ kvadratfri} \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bevis. Hvis n kvadratfri, er (jfr. Eksempel på p.43) $\mathbb{Z}/(n)$ semi-simpel, hvorfor $\text{gl.dim}\ \Lambda = 0$.

Hvis n ej kvadratfri, kan n skrives $n = p^2 n_1$, hvor p er et primtal. Alment defineres for en delmængde B i en Λ-modul A (Λ kommutativ)

$\text{Ann}(b) = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda b = 0 \quad \forall b \in B\}$. $\text{Ann}\ B$ er ideal i Λ.

For (p) i $\Lambda = \mathbb{Z}/(n)$ gælder $\mathrm{Ann}((p)) = \Lambda(n_1 p)$, og $\mathrm{Ann}((n_1 p)) = \Lambda(p)$. Specielt er $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\,\Lambda(p)) = \Lambda(p)$.

Idet φ er homomorfien: $\Lambda \to \Lambda(p)$ $\varphi(\lambda) = \lambda\cdot(p)$ fås exakt følge

$$0 \to \mathrm{Ann}((p)) \to \Lambda \xrightarrow{\varphi} \Lambda\cdot(p) \to 0 \qquad (*)$$

hvor $\mathrm{Ann}((p)) = \Lambda(n_1 p)$. Analogt med ovenstående fås endnu en exakt følge

$$0 \to \underset{\Lambda((p))}{\underset{\|}{\mathrm{Ann}((n_1 p))}} \to \Lambda \to \Lambda(n_1 p) \to 0$$

Følgelig er $R^2((\Lambda(p))) = (\Lambda\cdot(p))$

$(*)$ er ej split-exakt, da $(n_1 p)$ i så fald skulle annihilere ethvert element i Λ. Deffor er $\Lambda(p)$ ikke en projektiv Λ-modul, d.v.s. den projektive ækvivalensklasse $(\Lambda(p)) \neq (0)$. Altså er $R^{2n}((\Lambda(p))) \neq (0)$ $\forall n$, og dermed er $\mathrm{dh}_\Lambda \Lambda(p) = \infty$, d.v.s. $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = \infty$.

Eksempel. Af sætningen på p. 42 fremgår specielt, at $Q \oplus \cdots \oplus Q$ (endelig direkte sum) er en ring med global dimension 0. Hvis man betragter $\Lambda = Q^{\mathbb{N}}$ (alle følger af rationale tal med komponentvis sum og produkt) fås en ring hvis globale dimension ikke kan bestemmes ved de sædvanlig axiomsystemer, idet man kan vise, at $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda \geqq 2$ og $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = n+1 \iff 2^{\aleph_0} = \aleph_n$. (Jfr. P.J. Cohens resultat vedrørende kontinuumshypotesen).

Kapitel II. Kategorier og Funktorer.

Vi skal her kun indføre kategorier "ad hoc". De vil i det væsentlige blot tjene som en bekvem sprogbrug.

Lad Λ være en vilkårlig ring. Ved en kategori af (venstre) Λ-moduler vil vi forstå en klasse $\mathcal{C}$ af Λ -moduler og alle homomorfierne mellem disse, således at enhver undermodul og ethvert homomorft billede af en modul i $\mathcal{C}$ igen tilhører $\mathcal{C}$.

Det vigtigste eksempel (for vore formål) er klassen af samtlige (venstre) Λ-moduler og Λ-homomorfier. Denne kategori betegner mod Λ. Andre eksempler på kategorier er:

Eks. 1. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde. Alle Torsions moduler og homomorfier mellem disse udgør en kategori.

Eks. 2. Lad Λ være en venstre Noethersk ring. Alle endelig frembragte venstre Λ-moduler og homomorfier mellem disse udgør en kategori. (Jfr. sætning p. 12)

Eks. 3. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$. Alle endelige abelske grupper og homomorfier mellem disse udgør en kategori.

Eks. 4. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$. Alle cykliske grupper og homomorfier mellem disse udgør en kategori.

Lad nu $\mathcal{C}$ være en kategori af Λ-moduler og $\mathcal{D}$ en kategori af Γ-moduler. (Λ og Γ vilkårlige men faste ringe).

Ved en (kovariant) funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ forstås en afbildning fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$, så: T(modul i $\mathcal{C}$) = modul i $\mathcal{D}$ og T(homomorfi i $\mathcal{C}$) = homomorfi i $\mathcal{D}$ således at $T(f)$, hvor f er homomorfi fra modulen A til modulen B (begge i $\mathcal{C}$) er en homomorfi fra $T(A)$ til $T(B)$. Endvidere skal følgende axiomer gælde:

1) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ (Alment betegner 1_M identiteten på M)

2) $T(f\,g) = T(f)\,T(g)$ hvis $f: A \to B$; $g: B \to C$ (indenfor $\mathcal{C}$)

Bemærkning. Axiomerne 1) og 2) indebærer, at T(isomorfi i $\mathcal{C}$) = isomorfi i $\mathcal{D}$. Thi lad $f: A \to B$ være isomorfi i $\mathcal{C}$. Da findes $g: B \to A$ så $f\,g = 1_B$ og $g\,f = 1_A$.

Anvendes 1) og 2) fås $T(f): T(A) \to T(B)$ $T(g): T(B) \to T(A)$ og $1_{T(B)} = T(1_B) = T(f) \cdot T(g)$ og $1_{T(A)} = T(g)\,T(f)$. Ifølge tidligere sætning p.8 medfører dette, at $T(f)$ er isomorfi fra $T(A)$ på $T(B)$.

Bemærkning. Ved hjælp af 2) ses let, at et kommutativt diagram i $\mathcal{C}$ ved T føres over i et kommutativt diagram i $\mathcal{D}$.

Eks. 1. Hvis $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ er identiteten en funktor.

Eks. 2. Lad $\mathcal{C}$ = Mod Λ og $\mathcal{D}$ = Mod $\mathbb{Z}$. Ved til enhver Λ-modul at lade svare den underliggende additive abelske gruppe og til enhver Λ-homomorfi at lade svare den tilsvarende $\mathbb{Z}$-homomorfi fåes en funktor ("den glemsomme funktor") fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. (" Funktoren glemmer strukturen som Λ-modul") .

Eks. 3. Lad $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = Mod $\mathbb{Z}$. Til enhver abelsk gruppe A lader vi svare torsionsundermodulen A_T , og til enhver $\mathbb{Z}$-homomorfi $A \xrightarrow{f} B$ lader vi svare $f_{\text{Res } A_T} : A_T \to B_T$ (Bemærk, at $f(A_T) \subseteq B_T$) . Herved fås en funktor fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$.

Eks. 4. Lad $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = Mod $\mathbb{Z}$. Vi definerer funktor T fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$ ved $T(A) = A/2A$ og for $f: A \to B$ defineres $T(f) : A/2A$ til $B/2B$ ved $T(f)(a) = f(a)$ (er lovlig definition da $f(2A) \subseteq 2B$) . Hvis i betegner den naturlige injektion fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Q}$ vil $T(i) : T(\mathbb{Z}) \to T(\mathbb{Q})$. Da $T(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ og $T(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}/2\mathbb{Q} = 0$ er T(i) ej injektiv. Specielt vil T ikke fører undermoduler over i undermoduler.

Eks. 5. Lad $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = Mod $\mathbb{Z}$. Vi definerer funktor T fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$ ved $T(A) = \mathbb{Z} \oplus A$ og for $f : A \to B$ defineres $T(f)$ som $1_{\mathbb{Z}} \oplus f : \mathbb{Z} \oplus A \to \mathbb{Z} \oplus B$. T (nulmodulen) $= \mathbb{Z} \neq 0$ og T (nulhomomorfi) $\neq 0$.

Lad nu igen $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være vilkårlige kategorier af Λ-moduler og Γ-moduler. En funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ kaldes additiv, hvis det for vilkårlige homomorfier f og $g: A \to B$ (indenfor $\mathcal{C}$) gælder $T(f+g) = T(f) + T(g)$.

Idet 0 og o betegner henholdsvis nulmoduler og nulhomomorfier gælder

Sætning $T\,0 = 0$ og $T\,o = o$ for enhver additiv funktor.

Bevis. $T(o) = T(o + o) = T(o) + T(o) \Rightarrow T(o) = o$

Idet $o = 1_0$, er $o = T(1_0) = 1_{T(0)}$, hvorfor $T(0) = 0$. ∎

Sætning. En additiv funktor T fører en split-exakt følge over i en split-exakt følge.

Bevis. Lad

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

være split exakt følge (i $\mathcal{C}$) . Da findes $f: B \to A$ og $g: C \to B$ så $f\alpha = 1_A$, $\beta g = 1_C$ og $\alpha f + g\beta = 1_B$. Anvendes T , fås $T(f) \cdot T(\alpha) = 1_{T(A)}$. $T(\beta) \cdot T(g) = 1_{T(C)}$ og $1_{T(B)} = T(\alpha f + g\beta) = T(\alpha)\, T(f) + T(g)\, T(\beta)$. Ifølge tidligere sætning (p. 26) er

$$0 \to T(A) \xrightarrow{T(\alpha)} T(B) \xrightarrow{T(\beta)} T(C) \to 0$$

split-exakt. ∎

<u>Korollar</u>. T additiv $\Rightarrow T(A \oplus C) \simeq T(A) \oplus T(C)$

<u>Eks.</u> Funktorerne i Eks. 1, 2, 3, 4 p. 51 er additive. Funktoren i Eks. 5 er ej additiv. For funktoren i Eks. 3 gælder, at den exakte følge

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} / \mathbb{Z} \to 0$$

ej føres over i exakt følge. Tilsvarende for funktorerne i Eks. 4 og 5.

<u>Definition.</u> En funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ kaldes exakt, hvis T fører enhver exakt følge i $\mathcal{C}$ over i exakt følge i $\mathcal{D}$.

<u>Sætning</u>. T exakt $\Rightarrow T(0) = 0$ og $T(o) = o$

<u>Bevis</u>. $0 \xrightarrow[1_0]{} 0 \xrightarrow[1_0]{} 0$ er exakt, hvorfor

$$T0 \xrightarrow[1_{T0}]{} T0 \xrightarrow[1_{T0}]{} T0$$ også er exakt.

Derfor er $0 = \operatorname{Ker} 1_{T0} = \operatorname{Im} 1_{T0} = T0$.

Endvidere gælder for nulhomomorfien, at

$$A \xrightarrow[o]{} B \xrightarrow[1_B]{} B$$

er exakt, hvorfor

$$TA \xrightarrow{T\sigma} TB \xrightarrow{1_{TB}} TB$$

også er exakt, d.v.s. $0 = \operatorname{Ker} 1_{TB} = \operatorname{Im} T\sigma$. Derfor er $T\sigma = \sigma$

∎

<u>Sætning</u>. En funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ er exakt $\Leftrightarrow$ T fører enhver kort-exakt følge i $\mathcal{C}$ over i en kort-exakt følge i $\mathcal{D}$.

<u>Bevis</u>. $\Rightarrow$ følger umiddelbart af ovenstående.

$\Leftarrow$ Nok at se på en exakt følge af formen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.
Denne kan sammensættes af kort-exakt følger:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \arrow[ur] \arrow[dr, "i_2"] & & & \\
 & A \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"] & & C \\
\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "i_1"] & & & & \operatorname{Im} g \arrow[ur, "i_3"] \arrow[dr] & \\
0 \arrow[u] & & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

hvor $i_2 f' = f$, $i_3 g' = g$. Da T (kort-exakt følge) = kort-exakt følge vil T specielt føre injektiv, resp. surjektiv afbildning over i injektiv, resp. surjektiv afbildning. Derfor er $T(i_3)$ injektiv og $T(f')$ surjektiv. Iflg. forudsætningen bliver $\operatorname{Ker} Tg' = \operatorname{Im} T(i_2)$. Da $T(i_3)$ injektiv, er $\operatorname{Ker} Tg' = \operatorname{Ker} T\, i_3\, Tg' = \operatorname{Ker} Tg$. Da $T(f')$ surjektiv, er $\operatorname{Im} T(i_2) = \operatorname{Im} T(i_2) \cdot Tf' = \operatorname{Im} Tf$. D.v.s. $\operatorname{Ker} Tg = \operatorname{Im} Tf$

∎

<u>Eks.</u> Ingen af funktorerne i Eks. 3, Eks. 4, Eks. 5 p. 51 er exakte. Funktoren $T : \text{Mod}\,\Lambda \to \text{Mod}\,\Lambda$ defineret ved $T(A) = A \oplus A$, og for $f : A \to B$ $T(f) = f \oplus f : A \oplus A \to B \oplus B$ er exakt.

Hvis Λ er semi-simpel (f. eks. et legeme) er enhver additiv funktor fra $\text{Mod}\,\Lambda$ til $\text{Mod}\,\Lambda$ exakt. (Hvorfor?)

<u>Definition.</u> En funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ kaldes venstre-exakt, hvis det for enhver kort-exakt følge i $\mathcal{C}$: $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ gælder, at $0 \to T(A) \xrightarrow{Tf} T(B) \xrightarrow{Tg} T(C)$ er exakt i $\mathcal{D}$.

<u>Sætning.</u> T venstre-exakt $\Rightarrow$ $T0 = 0$ og $To = o$.

<u>Bevis.</u> $0 \to 0 \xrightarrow{1_0} 0 \xrightarrow{1_0} 0 \to 0$ er kort-exakt, så

$0 \to T0 \xrightarrow{1_{T0}} T0 \xrightarrow{1_{T0}} T0$ er exakt, hvilket indebærer

$T0 = \text{Im}\, 1_{T0} = \text{Ker}\, 1_{T0} = 0$. For nulhomomorfien o : $A \to B$ kan vi skrive

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "o"] \arrow[dr, "o_1"'] & & B \\ & 0 \arrow[ur, "o_2"'] & \end{tikzcd}$$

, så $To = To_2\, To_1$.

Da $T0 = 0$ må $To_2 = o$ og derfor $To = o$. ∎

<u>Sætning.</u> T venstre exakt $\Rightarrow$ T (injektiv afbildning) = injektiv afbildning

<u>Bevis</u> Hvis f er injektiv, $f: A \to B$, anvendes T på den kort-exakte følge: $0 \to A \xrightarrow{f} B \to B/_{\text{Im}f} \to 0$ ∎

<u>Sætning</u>. Hvis T er venstre exakt, vil det for enhver exakt følge (i $\mathscr{C}$) af formen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ (*)

gælde, at $0 \to TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC$ er exakt.

<u>Bevis.</u> (*) kan omformes til:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & C \\
& & & \operatorname{Im} g \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

$g = i\,g'$

Da $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g'} \operatorname{Im} g \to 0$ er kort-exakt, er

$0 \to TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg'} T(\operatorname{Im} g)$ exakt.

Altså er Tf injektiv, og $\operatorname{Ker} Tg' = \operatorname{Im} Tf$; men her er $\operatorname{Ker} Tg = \operatorname{Ker} Ti\,Tg' = \operatorname{Ker} Tg'$, idet Ti iflg. ovenstående sætning er injektiv. Altså er $\operatorname{Im} Tf = \operatorname{Ker} Tg$

▮

<u>Definition.</u> En funktor T fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{D}$ kaldes højre-exakt, hvis det for enhver kort-exakt følge i $\mathscr{C}$:
$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ gælder, at $TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC \to 0$ er exakt i $\mathscr{D}$.

Analogt til sætningerne om venstre-exakte funktorer gælder:

<u>Sætning</u>. T højre exakt $\Rightarrow T0 = 0$ og $To = o$.

Sætning. T højre exakt $\Rightarrow$ T (surjektiv afbildning) = surjektiv afbildning.

Sætning. Hvis T er højre exakt, vil det for enhver exakt følge (i $\mathcal{C}$) af formen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ gælde, at

$$TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC \to 0 \quad \text{er exakt} \quad (\text{i } \mathcal{D}) .$$

Bemærkning

Åbenbart gælder, at T exakt $\Leftrightarrow$ T venstre exakt og højre exakt.

Definition. En funktor T fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ kaldes halv-exakt, hvis det for enhver kort-exakt følge i $\mathcal{C}$ $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ gælder, at $TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC$ er exakt i $\mathcal{D}$.

Der gælder følgende sætning, (hvis bevis udelades)

Sætning. T halv-exakt $\Rightarrow$ T additiv.

Vi har altså følgende skema af (ægte) implikationer

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& T \text{ exakt} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
T \text{ venstre-exakt} \arrow[dr, Rightarrow] & & T \text{ højre-exakt} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& T \text{ halv-exakt} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& T \text{ additiv} &
\end{tikzcd}$$

Eksempel. Lad $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = Mod $\mathbb{Z}$ og T funktoren fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ defineret ved $TA = 2A$ og for $f: A \to B$ $Tf = f_{\text{Res } 2A} : TA \to TB$. Da er T additiv, men ej halvexakt.

Oversigt over tidligere eksempler: For Eks. 1 - Eks. 5 p. 57 gælder:

	additiv	halv-exakt	venstre-exakt	højre-exakt	exakt
Eks.1	+	+	+	+	+
Eks.2	+	+	+	+	+
Eks.3	+	+	+	÷	÷
Eks.4	+	+	÷	+	÷
Eks.5	÷	÷	÷	÷	÷

Vi kommer nu til et af de vigtigste eksempler på funktorer, idet $\text{Hom}_\Lambda(A,X)$ kan opfattes som funktor T fra Mod Λ til Mod $\mathbb{Z}$: Vi sætter $T(X) = \text{Hom}_\Lambda(A,X)$ og for $f: X \to Y$ $T(f): T(X) \to T(Y)$ defineret ved
$T(f)[\alpha] = f \circ \alpha$ for $\alpha \in \text{Hom}_\Lambda(A,X)$. Ved direkte udregning ses, at axiomerne 1) og 2) i Def. p. 50 er opfyldte.
Hvis Λ er kommutativ, vil T være funktor fra Mod Λ til Mod Λ (simpel verifikation).
For $f: X \to Y$ betegnes den ovenfor definerede afbildning Tf ved $\text{Hom}(1_A,f)$ og T betegnes ofte ved $\text{Hom}_\Lambda(A,-)$

Sætning. $\text{Hom}_\Lambda(A,-)$ er additiv.

Bevis. Umiddelbar verifikation.

Sætning. $T = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)$ er venste-exakt.

Bevis. Lad $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$

være exakt. Vi skal godtgøre, at

$$0 \to TX \xrightarrow{Tf} TY \xrightarrow{Tg} TZ \qquad \text{er exakt}$$

Lad $\alpha \in TX = \mathrm{Hom}_\Lambda(A,X)$; $Tf(\alpha) = f\circ\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha(a)) = 0 \ \forall a \in A$

Da f er injektiv, betyder dette, at $\alpha(a) = 0 \ \forall a \in A$, $\supset:$ $\alpha = 0$, og Tf er dermed injektiv.

Da T er additiv og $g f = 0$, er (jfr. Sætn. p. 52) $TgTf = 0$, eller $\mathrm{Ker}\, Tg \supseteq \mathrm{Im}\, Tf$. Lad nu omvendt $\beta \in \mathrm{Ker}\, Tg$, $\supset:$ $\beta \in \mathrm{Hom}(A,Y)$ så $g \circ \beta = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & A & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\ 0 & \to & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Idet $\beta(a) \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ for $\forall a$, d.v.s. $\beta(a) = f(x)$ for et (p Gr. af f's injektivitet) entydig bestemt $x \in X$. Ved til $a \in A$ at lade svare dette $x \in X$ fås en Λ-homomorfi α , hvor $\alpha(a) = x$ eller $\beta(a) = f(\alpha(a))$ $\forall a \in A$ $\supset:$ $\beta = f\alpha$ $\supset:$ $\beta \in \mathrm{Im}\, Tf$

Bemærkning. T normalt ej exakt. Modeksempel: $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$; thi

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

føres ved $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}\,2}, -)$ over i $0 \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}\,2}$.

Sætning. A er projektiv Λ-modul $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,-)$ er exakt

Bevis. " $\Rightarrow$ " nok at vise (p.gr. af foregående sætning) at $\mathrm{Hom}(\Lambda,-)$ fører surjektiv afbildning over i surjektiv afbildning. Antag

$$Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

er exakt ($\supset$: g surjektiv) . Vi skal vise, at ethvert $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,Z)$ kommer fra et $\beta \in \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,Y)$. Men da A er projektiv, findes et β så diagrammet

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommuterer. $\supset$: $\gamma = \mathrm{Hom}\,(1_A, g) \circ (\beta)$.

" $\Leftarrow$ " Vi skal vise, at der for ethvert diagram

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

findes et $\beta : A \to Y$ så $\gamma = g\,\beta$. Som tidligere bemærket fører en exakt funktor surjektive afbildninger over i surjektive afbildninger, d.v.s.

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A,Y) \xrightarrow[TG]{} \mathrm{Hom}_\Lambda(A,Z)$$

er surjektiv, hvorfor der findes $\beta \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,Y)$ så $\gamma = Tg\,(\beta) = g \cdot \beta$.

Naturlige transformationer og naturlig isomorfi

Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være to kategorier og T og U funktorer fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. En naturlig transformation (eller naturlig homomorfi) fra T til U er en familie $\{\mu_A\}$, A gennemløbende modulerne i $\mathcal{C}$, af homomorfier i $\mathcal{D}$ fra TA til UA , således at for enhver homomorfi f (i $\mathcal{C}$) : $A \to B$, diagrammet

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "\mu_A"'] \arrow[d, "Tf"] & UA \arrow[d, "Uf"] \\ TB \arrow[r, "\mu_B"'] & UB \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

Hvis μ_A er isomorfi for alle $A \in \mathcal{C}$ kaldes μ_A en naturlig isomorfi.

<u>Eksempel</u>. Som tidligere vist (p.9) findes en $\mathbb{Z}$-isomorfi fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,A)$ på A for enhver Λ-modul A . Denne isomorfi μ_A er givet ved $\mu_A(f) = f(1)$. μ_A bestemmer en naturlig isomorfi fra funktoren $\mathrm{Hom}(\Lambda,-)$ på den "glemsomme" funktor (jfr. Eks. 2 p. 51)

Eksempel. Lad $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ = kategorien af endelige cykliske grupper (opfattet som $\mathbb{Z}$-moduler) . Lad T være den i eks. 4 p. 51 definerede funktor, og U funktoren defineret ved $U(A) = \mathrm{Ann}(2, A)$ [$\supset$: $\mathrm{Ann}(2,A) = \{a \in A \mid 2a = 0\}$] og for $f: A \to B$ $\mathcal{U}(f) = f_{\mathrm{Res},\ \mathrm{Ann}(2,A)}$. Da gælder:

i) $\forall A \in \mathcal{C}$ $\exists$ isomorfi mellem TA og UA

ii) T og U ej naturligt isomorfe funktorer.

ad i) Ved direkte udregning findes $TA = UA = 0$ hvis A har ulige orden og $TA \simeq UA \simeq \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2}$ hvis A har lige orden. Lad $f: \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2} \to \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}4}$ homomorfien defineret ved $f(1_2) = 2_4$. Da er $T f = 0$ og $U(f) \neq 0$. Det betyder, at der ikke findes isomorfier $\mu_{\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2}}$ og $\mu_{\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}4}}$ så

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2}) \arrow[r, "\mu_{\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2}}"'] \arrow[d, "T(f)"'] & U(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}2}) \arrow[d, "U(f)"] \\
T(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}4}) \arrow[r, "\mu_{\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}4}}"'] & U(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}4})
\end{tikzcd}$$

kommuterer . D.v.s. T og U ej naturligt isomorfe.

Eksempel. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}},-)$ og U er naturligt isomorfe, idet μ_A: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}, A) \to \mathrm{Ann}(2,A)$ defineret ved

$\mu_A(f) = f(\textcircled{1}_2)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}, A)$ er en naturlig isomorfi mellem $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}, -)$ og U .

Eksempel. Lad $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\,\Lambda$ og $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$, og M_α, $\alpha \in I$ en mængde af Λ-moduler. Da er funktorerne $\mathrm{Hom}(\sum_\alpha \oplus M_\alpha, -)$ og $\prod_\alpha \mathrm{Hom}(M_\alpha, -)$ naturligt isomorfe (jfr. sætning p. 21) .

Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være to kategorier og T og U funtorer fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. Da udgør mængden af naturlige homomorfier fra T til U en additiv abelsk gruppe $\mathrm{Nat}(T,U)$. (Hvis μ_X, ν_X $(X \in \mathcal{C})$ er naturlige homomorfier er $(\mu + \nu)_X$ defineret som $\mu_X + \nu_X$).

Sætning. Lad $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\,\Lambda$ og $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ og lad T være en additiv funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. Da er for $A \in \mathcal{C}$:

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-), T) \simeq T(A) \quad .$$

Bevis. For $\mu \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-), T)$ er μ_A $\mathbb{Z}$-homomorfi fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A)$ til $T(A)$. Vi definerer nu afbildning Φ fra $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-), T)$ til TA ved: $\Phi(\mu) = \mu_A(1_A)$ Φ er oplagt en $\mathbb{Z}$-homomorfi.

Φ er injektiv. Lad $\mu \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-), T)$ og antag $\Phi(\mu) = 0$, d.v.s. $\mu_A(1_A) = 0$. Lad X være vilkårlig modul i $\mathcal{C}$ og f vilkårlig i $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,X)$.

På grund af det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A) \arrow[r, "\mu_A"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1_A,f)"] & TA \arrow[d, "Tf"] \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(A,X) \arrow[r, "\mu_X"'] & TX
\end{tikzcd}$$

fås $\mu_X(\mathrm{Hom}(1_A,f) \cdot 1_A = \mu_X(f) = Tf\ \mu_A\ (1_A) = Tf \cdot 0 = 0$

$\supset$: $\mu_X = 0$ for alle $X \in \mathcal{C}$; altså $\mu = 0$.

<u>Φ er surjektiv.</u> Lad α være vilkårlig i TA . Hertil defineres for ethvert $X \in \mathcal{C}$ en afbildning fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,X)$ til TX ved $\mu_X(f) = Tf(\alpha)$ $(f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,X))$. Da T er additiv, bliver μ_X en $\mathbb{Z}$- homomorfi. μ eftervises let at være en naturlig homomorfi fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)$ til T . For μ gælder $\Phi(\mu) = \mu_A(1_A) = T(1_A) \cdot \alpha = 1_{TA}\alpha = \alpha$. Altså er Φ surjektiv. ∎

<u>Bemærkning</u>. Ved modifikation af ovenstående fås, at $\mathrm{Nat}(1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda}, 1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda}) \simeq \Lambda$ hvor $1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda}$ er identitetsfunktoren for kategorien af Λ-moduler, og Λ er kommutativ. Her er $\mathrm{Nat}(1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda}, 1_{\mathrm{Mod}\,\Lambda})$ en ring, og den nævnte isomorfi bliver også en ringisomorfi.

Definition. To kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ kaldes ækvivalente, hvis der findes funktorer T og U , $T: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $U: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, så TU er naturligt isomorf med $1_{\mathcal{D}}$ og UT naturligt isomorf med $1_{\mathcal{C}}$.

Eksempel. Hvis $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er ækvivalente kategorier, vil $\mathrm{Nat}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$ og $\mathrm{Nat}(1_{\mathcal{D}}, 1_{\mathcal{D}})$ være isomorfe ringe. Ved hjælp af bemærkningen p 64 ses, at for kommutative ringe Λ og Γ vil Mod Λ og Mod Γ være ækvivalente $\Leftrightarrow$ Λ og Γ er isomorfe ringe.

Eksempel. I det ikke-kommutative tilfælde kan ikke-isomorfe ringe have ækvivalente modulkategorier. Således gælder for enhver ring Λ , at Mod Λ er ækvivalent med Mod $M_n(\Lambda)$, hvor $M_n(\Lambda)$ er ringen af $(n \times n)$ metricer over Λ . Skitseret bevis: Vi definerer funktorer T: Mod $\Lambda \to$ Mod $M_n(\Lambda)$ og U: Mod $M_n(\Lambda) \to$ Mod Λ ved: $TM = M \oplus \cdots \oplus M$ (n addender) og for en matrix $\underline{\underline{A}} \in M_n(\Lambda)$ gives TM struktur som $M_n(\Lambda)$-modul ved $\underline{\underline{A}} \cdot (m_1, \cdots m_n) =$

$$A \begin{Bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix}.$$

For $f: M \to N$ defineres $(Tf)(m_1, \cdots m_n)$ som $(fm_1, \cdots, fm_n)$ T bliver da en funktor fra Mod $\Lambda \to$ Mod $M_n(\Lambda)$. U defineres ved $U(M) = e_{11}M$, (hvor alment e_{ij} betegner matricen med 0'er overalt undtagen 1 på plads nr. (i,j)) og for $g: M \to N$ defineres $U(g) = g \text{ Res } e_{11}M$. U bliver da en funktor fra Mod $M_n(\Lambda)$ til Mod Λ . Det er let at se, at UT er nat-isomorf med

$1_{\mathrm{mod}\,\Lambda}$. For en $M_n(\Lambda)$-modul M er $TU(M) = e_{11}M \oplus \cdots \oplus e_{11}M$. En naturlig isomorfi $\mu_M \colon M \to TUM$ fås ved at sætte $\mu_M(m) = (e_{11}m, e_{12}m, \cdots, e_{1n}m)$ (som invers kan bruges $(e_{11}m_1, e_{11}m_2, \cdots, e_{11}m_n) \to e_{11}m_1 + e_{21}m_2 + \cdots + e_{n1}m_n)$. Idet man ret let kan vise, at det generelt for ringe Λ og Γ med ækvivalente modulkategorier gælder l.gl.dim Λ l.gl.dim Γ, fås specielt af ovenstående, at

l.gl.dim $M_n(\Lambda)$ = l.gl.dim Λ .

<u>Kontravariante funktorer</u>.

Idet $\mathscr{C}$ betegner en kategori af Λ-moduler og $\mathscr{D}$ en kategori af Γ-moduler, forstås ved en <u>kontravariant</u> funktor (i modsætning til de hidtige kovariant funktorer) en afbildning T fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{D}$ så T(modul i $\mathscr{C}$) = modul i $\mathscr{D}$ og T(homomorfi i $\mathscr{C}$) = homomorfi i $\mathscr{D}$ og hvis $f\colon A \to B$ er homomorfi i $\mathscr{C}$, vil Tf være homomorfi fra TB til TA . Endvidere skal følgende axiomer gælde:

1) $T(1_A) = 1_{TA}$

2) $T(fg) = T(g)\,T(f)$ hvor $g\colon A \to B$, $f\colon B \to C$ er homomorfier i $\mathscr{C}$.

Da gælder en række sætninger analoge med sætningen for kovariante funktor, der løst sagt fås ved "at vende pilene".

Vi nævner her kun de vigtigste.

En kontravariant funktor T kaldes venstre exakt, hvis

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \quad \text{exakt (i } \mathcal{C}\text{)} \Rightarrow$$

$$0 \to TC \to TB \to TA \quad \text{exakt (i } \mathcal{D}\text{)}.$$

Da gælder for en venstre-exakt kontravariant funktor T at

$$A \to B \to C \to 0 \quad \text{exakt i } \mathcal{C} \quad \Rightarrow 0 \to TC \to TB \to TA \quad \text{exakt i } \mathcal{D}.$$

Tilsvarende gælder for højre-exakt kontravariante funktorer. En kontravariant funktor T kaldes additiv, hvis $T(f + g) = T(f) + T(g) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}$. Da gælder analogt med det kovariante tilfælde, at en additiv funktor fører en split-exakt følge over i en split-exakt følge.

Det vigtigste eksempel på en kontravariant funktor er $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,A)$ (A fast venstre Λ-modul), der på følgende måde kan opfattes som en funktor T fra $\mathrm{Mod}\ \Lambda$ til $\mathrm{Mod}\ \mathbb{Z}$. For en modul $X \in \mathrm{Mod}\ \Lambda$ defineres $T(X)$ som $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,A)$ og for en homomorfi $f\colon X \to Y$ defineres Tf fra TY til TX ved $Tf(\alpha) = \alpha \circ f$ for $\alpha \in TY = \mathrm{Hom}_\Lambda(Y,A)$. Tf betegnes ofte $\mathrm{Hom}_\Lambda(f,1_A)$. T vises let at være kontravariant additiv funktor.

<u>Sætning</u>. $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,A)$ er venstre-exakt.

<u>Bevis.</u> Lad $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ være exakt. Vi skal godtgøre, at $0 \to TZ \xrightarrow{Tg} TY \xrightarrow{Tf} TX$ er exakt.

Lad $\beta \in TZ = \mathrm{Hom}_\Lambda(Z,A)$ tilhøre Ker Tg ; $\supset$: $\beta g = 0$. Da $\beta(g(y)) = 0 \ \forall y \in Y$, og g er surjektiv, er $\beta = 0$. D.v.s. Tg er injektiv. Da T er additiv, vil $T(f)\,T(g) = 0$ $\supset$: $\mathrm{Ker}\ Tf \supseteq \mathrm{Im}\ Tg$. Lad $\alpha \in TY$ tilhøre Ker Tf . $\supset$: $\alpha \in \mathrm{Hom}(Y,A)$ og $\alpha f = 0$. Altså er $\alpha(f(x)) = 0$ α forsvinder således på $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Ker}\ g$. Dette indebærer, at $z \in Z$, $z = g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow \alpha(y_1) = \alpha(y_2)$. For ethvert $z \in Z$ findes $y \in Y$ med $z = g(y)$. På grund af ovenstående fås en homomorfi $\beta : Z \to A$ ved at sætte $\beta(z) = \alpha(y)$, når $z = g(y)$. For β gælder $\beta g = \alpha$, og hermed $\alpha \in \mathrm{Im}\ Tg$ ∎

<u>Eksempel.</u> $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,A)$ normalt ikke exakt. Lad $\Lambda = \mathbb{Z} = A$. Den exakte følge

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}} \to 0$$

føres ved $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ over i

$$0 \to \underset{\substack{\Vert \\ 0}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})} \to \underset{\substack{\Vert \\ 0}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})} \to \underset{\substack{\Vert \\ \mathbb{Z}}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}$$

hvor sidste afbildning ej er surjektiv.

I lighed med overvejselserne p. 60 fås

<u>Sætning.</u> For en Λ-modul A gælder: $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,A)$ er

exakt $\Leftrightarrow$ til ethvert diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \\ & A & \end{tikzcd}$$

med den vandrette række exakt
findes $\psi: Y \to A$ så $\varphi = \Psi \circ f$.

<u>Definition</u> En Λ-modul A for hvilken ovennævnte gælder kaldes injektiv.

<u>Bemærkning.</u> Det er i ovenstående ingen indskrænkning at antage at f er en inklusion. D.v.s. en Λ-modul A er injektiv, hvis og kun hvis for enhver modul Y og undermodul X og homomorfi $\varphi: X \to A$ findes $\psi: Y \to A$ så $\psi_{\mathrm{Res},I} = \varphi$.

<u>Sætning</u>. (Baer) En venstre Λ-modul A er injektiv, hvis og kun hvis der for ethvert venstre ideal $I \subseteqq \Lambda$ og enhver homomorfi $\varphi: I \to A$ findes $\psi: \Lambda \to A$ så $\psi_{\mathrm{Res},I} = \varphi$.

<u>Bevis</u>. Rotman: Notes on homological algebra p.49.

For et integritetsområde Λ kaldes en Λ-modul M delelig, hvis der for ethvert $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ og ethvert $m \in M$ findes $x \in M$ med $m = \lambda X$.

<u>Sætning.</u> Hvis Λ er integritetsområde, er enhver injektiv Λ-modul delelig.

Bevis. Lad $\lambda_o \neq o$, $\lambda_o \in \Lambda$, $m \in M$. Da findes homomorfi $\varphi:\Lambda\lambda_o$ til M defineret ved $\varphi(\lambda\lambda_o) = \lambda m$. Da M er injektiv, kan φ fortsættes til homomorfi $\psi: \Lambda \to M$. Da er $\lambda_o\psi(1) = m$. ∎

Sætning. Hvis Λ PID gælder for enhver Λ-modul M , at M injektiv $\Leftrightarrow$ M delelig.

Bevis. Rotman: Notes on homological Algebra p. 51.

Sætning. For en torsionsfri Λ-modul M over et integritetsområde Λ gælder M injektiv $\Leftrightarrow$ M delelig.

Bevis. Skal blot vise $\Leftarrow$.

Lad I være ideal $\neq 0$ i Λ og φ en homomorfi fra I til M . Lad $a \neq o$ være element i I . Da M delelig, findes $x \in M$ så $\varphi(a) = ax$. Vi påstår, at homomorfien ψ fra Λ til M defineret ved $\psi(\lambda) = \lambda x$ er en fortsættelse af φ . Lad a' være vilkårligt element i I . Da er

$$a\psi(a') = aa'x = a'\varphi(a) = \varphi(a'a) = a\varphi(a') \; ; \quad \text{eller}$$
$$a[\psi(a') \div \varphi(a')] = 0 \, . \quad \text{Da} \quad M_T = o \, , \quad \text{er} \quad \psi(a') = \varphi(a')$$

Eksempel. Lad $\Lambda = K[X,Y]$, hvor K er et legeme, og $M = K(X,Y)/\Lambda$. Da er M delelig, men ej injektiv; Lad $I = \{f(X,Y) \in \Lambda \mid f(o,o) = o\}$. I er åbenbart ideal i Λ . Vi definerer nu homomorfi φ fra I til M som ikke kan fortsættes til Λ . $\varphi(f(x,y)) = \frac{f(x,o)}{xy}$ (mod Λ) .

Klart at φ er $\mathbb{Z}$-homomorfi .

φ også Λ-homomorfi:

$$\varphi(g(x,y)\cdot f(x,y)) = \frac{g(x,o)\cdot f(x,o)}{xy}$$

$$g(x,y)\cdot \varphi(f(x,y)) = g(x,y)\cdot \frac{f(x,o)}{xy} \quad \text{og}$$

$$g(x,y)\,\frac{f(x,o)}{xy} \div g(x,o)\,\frac{f(x,o)}{xy} = \frac{f(x,o)}{x}\cdot\frac{g(x,y)-g(x,o)}{y} \in \Lambda \qquad \supset:$$

$$\varphi(g(x,y)f(x,y)) = g(x,y)\cdot\varphi(f(x,y)) \ .$$

Antag φ kunne fortsættes til homomorfi $\psi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)$.
Da ville $\varphi(X) = \frac{1}{Y} = X\frac{h(X,Y)}{k(X,Y)}$, og $\varphi(Y) = 0 \div Y\frac{h(X,Y)}{k(X,Y)}$
hvor $\psi(1) = \frac{h(X,Y)}{k(X,Y)}$, h og k antages
indbyrdes primiske.

Da $Y\,\psi(1) = 0$, må $k(X,Y) \mid Y$ $\supset$: $k(X,Y)$ = konstant
eller $k(X,Y) = Y\cdot$(konstant). Men ingen af disse muligheder
er forenelige med $\frac{1}{Y} = X\frac{h(X,Y)}{k(X,Y)}$.

<u>Sætning</u>. Enhver kort-exakt følge $0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$,
hvor A er injektiv, er split-exakt.

<u>Bevis.</u> Der findes en homomorfi $f\colon B \to A$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[dl, "f"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

er kommutativt, d.v.s. $f \circ \alpha = 1_A$ I

Korollar. En injektiv modul er direkt summand i enhver modul, der indeholder den som undermodul.

Sætning. En direkte summand i en injektiv modul er injektiv.

Bevis. Analogt med beviset for tilsvarende sætning for projektive moduler.

Vi skal senere vise, at enhver modul kan indlejres i en injektiv modul. Ved hjælp af denne sætning fås, at korollaret ovenfor karakteriserer injektive moduler.

Eksempel på anvendelse af injektive moduler.

Vi vil vise, at enhver endelig abelsk gruppe er direkte sum af cykliske grupper. Først et lemma.

Lemma . Enhver endelig frembragt undergruppe i $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ er cyklisk og har formen $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{n}\right)$ for passende $n \in \mathbb{N}$.

Bevis. 1° For $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$ gælder $\mathbb{Z}\left(\frac{p}{q}\right) = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right)$; klart, at $\mathbb{Z}\left(\frac{p}{q}\right) \subseteq \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right)$. For at vise den modsatte inklusion bemærkes, at $1 = hp + kq$ for passende h og $k \in \mathbb{Z}$. Følgelig $\frac{1}{q} = h\,\frac{p}{q} + k$ eller $\left(\frac{1}{q}\right) = h\left(\frac{p}{q}\right)$ hvoraf $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right) \subseteq \mathbb{Z}\left(\frac{p}{q}\right)$.

$\underline{2^{\circ}}$ $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_1}\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_2}\right) = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right)$, hvor q er mindste fælles multiplum af q_1 og q_2. Klart, at $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_1}\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_2}\right) \subseteq \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right)$. For at vise den modsatte inklusion benyttes at $q_1 q_2 = q \cdot d$, hvor $d = (q_1, q_2)$ er største fælles divisor for q_1 og q_2. Følgelig er $d = hq_1 + kq_2$ for passende h og $k \in \mathbb{Z}$; heraf:

$\frac{1}{q} = \frac{h}{q_2} + \frac{k}{q_1}$; $\supset$: $\left(\frac{1}{q}\right) = h\left(\frac{1}{q_2}\right) + k\left(\frac{1}{q_1}\right)$ hvoraf

$\mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_1}\right) + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q_2}\right) = \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}\right)$.

$\underline{3^{\circ}}$ Successiv anvendelse af $\underline{1^{\circ}}$ og $\underline{2^{\circ}}$ viser lemmaet ∎

Lemmaet indebærer, at der til hvert $n \in \mathbb{N}$ findes netop en (nødvendigvis cyklisk) undergruppe i $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ af orden n, nemlig $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lad nu A være en endelig abelsk gruppe. Lad a være et element i A af størst orden n. Da findes en isomorfi φ fra $\mathbb{Z}a$ på undergruppen $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{n}\right)$ af $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, defineret ved $\varphi(ha) = \left(\frac{h}{n}\right)$, $h \in \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ er delelig og dermed en injektiv $\mathbb{Z}$-modul (jfr. sætning p 70), findes homomorfi ψ fra A til $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}a \arrow[rr, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \arrow[dl, "\psi"] \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

så $\psi_{\text{Res}, \mathbb{Z}a} = \varphi$. Åbenbart er $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi(\mathbb{Z}a) \subseteq \psi(A)$.

$\psi(A)$ er endelig og dermed iflg. lemmaet af formen $\mathbb{Z}\left(\frac{1}{m}\right)$, hvor $n \leqq m$. Idet $\frac{1}{m} = \psi(a')$ for passende $a' \in A$, vil $m \leqq \text{orden}(a')$ Da a havde størst mulig orden er orden $a' \leqq n$, hvoraf $n = m$, og dermed $\varphi(\mathbb{Z}\, a) = \psi(A)$. $\varphi^{\div 1}\psi$ er således en homomorfi fra A til $\mathbb{Z}a$ hvis restriktion til $\mathbb{Z}a$ er $1_{\mathbb{Z}a}$. $\mathbb{Z}a$ er da direkte summand (i A ⊃: $\mathbb{Z}a \oplus A' \cong A$, hvor $\mathbb{Z}a$ cyklisk og A' har mindre orden end A. Denne proces gentages på A', hvorved man – da A er endelig – efter endelig mange skridt får skrevet A som direkte sum af cykliske grupper. ▮

Bemærkning. Vi skal senere se den præcise form af delelige abelske grupper. Hvis p er et primtal, og $\mathbb{Z}_p$ den additive undergruppe i $(\mathbb{Q},+)$ bestående af alle rationale tal, hvis nævner er en potens af p, vil $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ være en delelig abelsk gruppe, der betegnes $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Man kan vise, at enhver delelig abelsk gruppe er direkte sum af eksemplarer af $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{Z}(p^\infty)$, hvor p gennemløber primtallene. Eksempelvis er $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \coprod_p \mathbb{Z}(p^\infty)$

Direkte produkt og sum af injektive moduler.

Sætning. Det direkte produkt af enhver familie $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$ af injektive moduler er injektiv.

Bevis. Betragt diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & N \arrow[d] \\ & & \prod_{\alpha\in I} A_\alpha \end{tikzcd}$$

hvor $f = \{f_\alpha\}$, $f_\alpha ; M \to A_\alpha$. Da hver f_α kan løftes til homomorfi $g_\alpha : N \to A_\alpha$ så $g_\alpha j = f_\alpha$ vil afbildningen $g = \{g_\alpha\}$ tilfredsstille $g \circ j = f$ ∎

Tilsvarende sætning gælder normalt ej for direkte sum.

<u>Eksempel</u> Lad $\Lambda = \mathbb{Q}^N$ = mængden af alle rationale talfølger med koordinatvis sum og produkt. Idealet i Λ $A_i = \{\{q_n\} \mid q_n = 0 \text{ for } n \neq i\}$ er injektiv Λ-modul . For at vise dette benyttes Baer's kriterium p. 69:

Lad I være et ideal i Λ og f homomorfi $I \to A_i$. f skal vises at have en fortsættelse til Λ . To muligheder:

<u>1°</u> $\underline{\forall \{q_n\} \in I , \text{ er } q_i = 0}$. Lad $\underline{u}$ være følgen i Λ der har 0 på i-te koordinat og 1 ellers. Da er $\{q_n\} = \underline{u} \cdot \{q_n\}$ og $f(\{q_n\}) = \underline{u} \cdot f(\{q_n\})$. Da vil $f(\{q_n\}) \in A_i$; men $f(\{q_n\})_i = 0$. Men da klart, at f kan fortsættes til Λ .

<u>2°</u> $\underline{\exists \{q_n\} \in I \text{ så } q_i \neq 0}$. Da vil følgen ℓ_i , der har 1 på i-te koordinat og 0 ellers, tilhøre idealet I . Vi påstår:

$$\{q_n\}\, f(\ell_i) = f(\{q_n\}) \quad \text{for alle} \quad \{q_n\} \in I$$

Da venstre og højre side tilhører A_i er det nok at vise:

$$\{q_n\}\, f(\ell_i) \cdot \ell_i = f(\{q_n\})\, \ell_i$$

hvilket er indlysende. Afbildningen $g\colon \Lambda \to A_i$ defineret ved $g(\lambda) = \lambda\, f(\ell_i)$ er da en fortsættelse af f til Λ.

Hvert af idealerne A_i, $i \in \mathbb{N}$, er således en injektiv Λ-modul. Den (indre) direkte sum af idealerne A_i er idealet J bestående af alle følger $\{q_n\}$ der er 0 fra et vist trin. J er ej Λ-injektiv, da J ellers var direkte summand i Λ og dermed et hovedideal. Imidlertid gælder:

Sætning. Λ venstre Noethersk $\Rightarrow$ Enhver direkte sum af injektive venstre Λ-moduler er injektiv.

Bevis. Lad A_α, $\alpha \in U$ være en familie af injektive Λ-moduler, og lad I være et venstre ideal i Λ. Vi skal godtgøre, at enhver Λ-homomorfi $f\colon I \to \coprod A_\alpha$ kan løftes til Λ.

Da Λ er venstre Noethersk, er I endelig frembragt, f. eks. $I = \Lambda\lambda_1 + \cdots + \Lambda\lambda_n$. For hvert λ_i, $1 \leqq i \leqq n$, er $f(\lambda_i)$'s koordinater i $\coprod A_\alpha$ næsten alle 0. Følgelig er $f(I) \subseteq \coprod_j A_{\alpha_j}$, hvor α_j gennemløber endelig indexmængde; men da er $\coprod_j A_{\alpha_j}$ injektiv og f kan løftes til homomorfi fra Λ til $\coprod_j A_{\alpha_j} \subseteq \coprod_\alpha A_\alpha$ ∎

Bemærkning. Vi skal senere vise, at ovennævnte sætning kan vendes om så man herved får en karakterisering af vestre Neotherske ringe. For kommutative ringe gælder

gælder en "dual" sætning for projektive moduler, idet det kan vises, at en kommutativ ring Λ tilfredsstiller den nedstigende Kædebetingelse for idealer $\Leftrightarrow$ ethvert direkte produkt af projektive Λ-moduler er projektivt.

Begrebet injektivitet bringes nu i forbindelse med begrebet "semi-simpel" (jfr. p. 41).

<u>Sætning.</u> For en vilkårlig ring Λ er følgende betingelser ækvivalent

1) Λ er (venstre) semi-simpel.

2) Enhver kort-exakt følge af venstre Λ-moduler er split-exakt.

3) Enhver venstre Λ-modul er projektiv.

4) Enhver venstre Λ-modul er injektiv.

<u>Bevis</u>. 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) vist tidligere.

4) $\Rightarrow$ 2) følger af sætning p. 71 nederst.

2) $\Rightarrow$ 4) Lad $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ være injektiv homomorfi . Da er

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} B/_{\mathrm{Im}\,\alpha} \to 0 \qquad (*)$$

exakt, og dermed split exakt. Lad M være vilkårlig venstre Λ-modul og φ Λ-homomorfi: $A \to M$. Da (*) er split-exakt findes $f\colon B \to A$ så $f \circ \alpha = 1_A$. Da er $\varphi \circ f$ løftning af f til B , idet $(\varphi \circ f) \circ \alpha = \varphi$.

∎

<u>Bemærkning.</u> På grund af Wedderburn's struktursætning er betingelserne i ovenstående sætning ensbetydende med dem, der fås ved at erstatte "venstre" med "højre" .

<u>Definition.</u> En venstre Noethersk ring Λ , for hvilken Λ som venstre Λ-modul er injektiv, kaldes en Quasi-Frobenius ring, (kort QF)

<u>Bemærkn.</u> Man kan vise, at Λ QF $\Rightarrow$ Λ højre Noethersk og Λ injektiv som højre Λ-modul.

<u>Sætning.</u> Λ QF $\Rightarrow$ Enhver (venstre) projektiv Λ-modul er injektiv.

<u>Bevis.</u> Da enhver projektiv modul er direkte summand af en fri modul, er det nok at vise, at enhver fri (venstre) Λ-modul er injektiv. Idet en fri (venstre) Λ -modul er direkte sum af eksemplarer af Λ , følger sætningen af sætning p. 76 ▮

<u>Bem.</u>. Man kan vise, at for en vilkårlig ring Λ er følgende betingelser ensbetydende:

1) Λ er QF

2) Enhver projektiv venstre Λ-modul er injektiv.

3) Enhver injektiv venstre Λ-modul er projektiv.

Grupperingen for endelig gruppe over et vilkårligt legeme kan vises at være QF.

<u>Sætning</u>. En venstre Λ-modul over en QF-ring Λ har enten projektiv dimension ∞ eller projektiv dimension 0 .

<u>Bevis</u>. Vi skal vise for en Λ-modul A at $\mathrm{l.dh}_\Lambda(A) < \infty \Rightarrow A$ er projektiv. Lad

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & K_{n\div 2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & & \\
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n\div 1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{n\div 2} \arrow[rr] \arrow[ur] & & P_{n\div 3} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \\
 & & & K_{n\div 1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & K_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

være en projektiv resolution for A af endelig længde. Da P_n iflg. sætning p. 78 (midten) er injektiv er $P_{n\div 1} \simeq P_n \oplus K_{n\div 1}$ hvorfor $K_{n\div 1}$ er injektiv. Ved successiv fortsættelse af dette ræsonnement ses at A er projektiv. ∎

<u>Korollar</u>. For en QF-ring Λ gælder $\mathrm{l.gl.dim}\,\Lambda = 0$ eller ∞ .

<u>Bemærkning.</u> Ved benyttelse af den her ikke-beviste bemærkning p. 78 gælder tilsvarende for $\mathrm{r.gl.dim}\ \Lambda$, idet $\mathrm{l.gl.dim}\,\Lambda = \mathrm{r.gl.dim}\,\Lambda$ for QF-ringe.

<u>Eksempel</u>. $\Lambda = \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ er QF for ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Klart at Λ er Noethersk. For at vise at Λ er selvinjektiv

betragtes en Λ-homomorfi f fra et ideal I til Λ $\supset$: $f\colon I \to \Lambda$. I har formen $\Lambda(d)$, hvor $d \mid n$.
Da $\left(\frac{n}{d}\right) \cdot (d) = (0)$, må $\left(\frac{n}{d}\right) \cdot f((d)) = (0)$,
$\supset$: $f((d)) \in \Lambda(d)$, eftersom $\operatorname{Ann}\left(\left(\frac{n}{d}\right)\right) = \Lambda(d)$.
Følgelig er $f((d)) = \bar{\lambda}(d)$ for et passende $\bar{\lambda} \in \Lambda$.
Den ved $g(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}$ definerede Λ-homomorfi fra Λ til Λ er da en fortsættelse af f .

Bevis. Herved fås nyt bevis for sætning p. 47 nederst.

BLANDEDE EKSEMPLER OG OPGAVER TIL KAP. II.

1. Lad T være en aditiv funktor fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$. Vis, at T (endelig abelsk gruppe) er en torsionsgruppe. Giv eksempel på en funktor T fra hvilken $T(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ er uendelig.

2. Lad Λ være kommutative Noethersk og M og N endelig frembragte Λ-moduler. Vis, at $\operatorname{Hom}(M,N)$ er en endelig frembragt Λ-modul. (Skriv M som homomorft billede af en endelig frembragt fri Λ-modul og anvend sætning p. 67) .

3. Lad T være en kovariant højre exakt funktor fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$. Vis, at T (delelig gruppe) er delelig.

4. Lad T være en kontravariant venstre exakt funktor fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$. Vis, at T (delelig gruppe) er en torsionsfri gruppe.

5. Lad $\mathcal{C}$ være kategorien af endelig frembragte Λ-moduler over en kommutativ Noethersk ring, og T være en kontravariant additiv funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{C}$. Da findes en naturlig transformation μ fra T til $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,T\Lambda)$ defineret ved, for $X \in \mathcal{C}$,:
$\mu_X\colon TX \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, T\Lambda)$ $\mu_X(a)(x) = T(\cdot x)[a]$, hvor $a \in TX$ og $\cdot x$ betegner homomorfien fra Λ til X defineret ved $\lambda \to \lambda \cdot x$. μ vil naturlig isomorfi $\Leftrightarrow$ T er venstre exakt.

6. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde, og lad M være en injektiv Λ-modul. Vis, at M_T er en injektiv Λ-modul.

7. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde (der ikke er et legeme) og M en delelig Λ-modul. Vis, at M ikke er endelig frembragt, undtagen hvis $M = 0$. (Betragt M/M_T som vektorrum over Λ's kvotientlegeme) Specielt er en endelig frembragt injektiv Λ-modul nødvendigvis 0.

8. Lad A og B være (venstre) Λ-moduler for hvilke $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)$ og $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,-)$ er naturligt isomorfe. Vis, at A og B må være isomorfe Λ-moduler.
($\mu_A(1_A)$ vil være isomorfe fra B til A, idet μ_X er den naturlige isomorfi fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,X)$ til $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,X)$) .

9. Vis, at $\Lambda = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (Mængden af alle rational talfølger med komponentvis addition og multiplikation) er selv-injektiv, Er Λ Q F ? .

10. Lad K være et legeme og V et endelig dimensionalt vektorrum $(\neq 0)$ over K. $K \times V$ udstyres ved addition og multiplikation ved:

$$(k_1,v_1)+(k_2,v_2) = (k_1+k_2,\ v_1+v_2) \qquad k_1, k_2 \in K$$
$$(k_1\cdot v_1)\cdot(k_2,v_2) = (k_1k_2\ ,\ k_1v_2+k_2v_1) \qquad v_1, v_2 \in V$$

$K \times V$ bliver herved kommutativ ring med 1-element. Vis, at $K \times V$ er Noethersk. Vis, at $K \times V$ er QF $\Leftrightarrow$ V er 1-dimensionalt vektorrum. Vis, at for ethvert V er den globale dimension af $K \times V$ uendelig.
(Betragt f.eks. V som modul over $K \times V$)

Kapitel III. Tensorprodukt.

Lad os til indledning betragte moduler over en kommutativ ring Λ. En afbildning f fra $A \times B$ til C, hvor A,B og C er Λ-moduler kaldes Λ-bilineær, hvis

1) $f(a_1+a_2,b) = f(a_1,b) + f(a_2,b) \qquad a_1,a_2 \in A, \quad b \in B$
2) $f(\lambda a,b) = \lambda f(a,b)$
3) $f(a,b_1+b_2) = f(a,b_1) + f(a,b_2) \qquad a \in A, \quad b_1,b_2 \in B$
4) $f(a,\lambda b) = \lambda f(a,b)$.

På oplagt måde udgør mængden af Λ-bilineære afbildninger f fra $A \times B$ til C en Λ-modul som betegnes $\mathrm{Bil}_\Lambda(A \times B,C)$.

Eksempel. Hvis Λ er et legeme og A og B Λ-vektorrum af dimension henh. m og n er $\mathrm{Bil}_\Lambda(A \times B;\Lambda)$ vektorrummet af alle $(m \times n)$ matricer over Λ.

<u>Sætning.</u> For moduler A,B og C over en kommutativ ring Λ gælder: $\mathrm{Bil}_\Lambda(A \times B;C) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\mathrm{Hom}_\Lambda(B,C)) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(B,\mathrm{Hom}_\Lambda(A,C))$.

<u>Bevis.</u> Af symmetri grunde nok at vise den første isomorfi. Til enhver Λ-bilineær afbildning f lader vi svare Φf i $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\mathrm{Hom}_\Lambda(B,C)$ defineret ved $\Phi f(a)[b] = f(a,b)$. Φ ses let at være en Λ-isomorfi. ∎

Tensorproduktet M af modulerne A og B vil blive indført som en modul for hvilken $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,C) \simeq \mathrm{Bil}_\Lambda(A \times B;C)$ for enhver modul C.

Men forinden indfører vi en modifikation af begrebet bilineær, der kan anvendes i det almene tilfælde for moduler over en ikke nødvendigvis kommutativ ring Λ.

Lad hertil A være en højre Λ-modul, B en venstre Λ-modul og C en $\mathbb{Z}$-modul. En afbildning f fra $A\times B$ til C kaldes svagt Λ-bilineær såfremt:

1) $f(a_1+a_2,b) = f(a_1,b) + f(a_2,b)$

2) $f(a\lambda,b) = f(a,\lambda b)$ $\qquad a,a_1,a_2 \in A$

3) $f(a,b_1+b_2) = f(a,b_1) + f(a,b_2)$ $\qquad b,b_1,b_2 \in B$

På oplagt måde udgør mængden af svagt Λ-bilineær afbildninger fra $A\times B$ til C en $\mathbb{Z}$-modul som betegnes $\mathrm{Sv.Bil}_\Lambda(A\times B;C)$.

Vi søger en $\mathbb{Z}$-modul M så $\mathrm{Sv.Bil}_\Lambda(A\times B;C) \simeq \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,C)$ for alle $\mathbb{Z}$-moduler C.

<u>Sætning.</u> Lad A være en højre Λ-modul og B en venstre Λ-modul. Da findes (på nær isomorfi) netop een $\mathbb{Z}$-modul M og en svagt Λ-bilineær afbildning φ fra $A\times B$ til M så følgende gælder:

1) $\varphi(A\times B)$ er frembringersystem for M

2) til enhver $\mathbb{Z}$-modul C og enhver svagt Λ-bilineær afbildning f fra $A\times B$ til C findes en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{f}$ fra M til C så $f = \bar{f}\circ\varphi$.

<u>Bevis.</u> Først <u>entydigheden</u> af M. Antag M_1 med tilhørende φ_1 havde egenskaberne 1) og 2). Vi har da situationen

$$\begin{tikzcd} & A\times B \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\ M & & M_1 \end{tikzcd}$$

og der måtte de findes $\mathbb{Z}$-homomorfier $\bar{\varphi}$ og $\bar{\bar{\varphi}}_1$, $\bar{\varphi}: M_1 \to M$ $\bar{\varphi}_1: M \to M_1$ så $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1 \circ \varphi$ og $\varphi = \bar{\varphi} \circ \varphi_1$, hvoraf $\varphi = \bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}_1 \circ \varphi$ d.v.s. $\bar{\varphi} \circ \bar{\varphi}_1$ = identiteten på $\varphi(A\times B)$ og dermed ifl. 1) på hele M og analogt $\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi} = 1_{M_1}$. Følgelig er M og M_1 isomorfe $\mathbb{Z}$-moduler.

Nu eksistensen af M. Lad $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ være den fri $\mathbb{Z}$-modul med elementer (a,b), $a \in A$, $b \in B$ som basis, d.v.s. $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ består af alle formelle summer $\sum_i h_i(a_i,b_i)$, $h_i \in \mathbb{Z}$, i gennemløbende en endelig indeksmængde. Med N betegnes undermodulen i $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ frembragt af alle elementer af en af følgende former:

$$(a_1+a_2,b) - (a_1,b) - (a_2,b) \qquad a\ a_1 a_2 \in A$$
$$(a,b_1+b_2) - (a,b_1) - (a,b_2) \qquad b\ b_1 b_2 \in B$$
$$(a,\lambda b) - (a\lambda,b) \qquad \lambda \in \Lambda$$

M defineres om $\mathbb{Z}^{(A\times B)}/N$. Idet $\bigcirc$ betegner sideklasse med henhold til N kan ethvert element i M skrives $\sum_i h_i (a_i,b_i)$.

Vi definerer en afbildning φ fra $A\times B$ til M ved $\varphi(a,b) \doteq (a,b)$, som på grund af M's definition bliver svagt Λ-bilineær. Endvidere klart, at $\varphi(A\times B)$ frembringer M d.v.s. 1) er opfyldt.

For at vise 2) betragtes en svagt Λ-bilineær afbildning f fra $A\times B$ til en $\mathbb{Z}$-modul C. Lad f^* være $\mathbb{Z}$-homomorfien fra $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ til C, der er bestemt ved $f^*((a,b)) = f(a,b)$. Da f er svagt Λ-bilineær, forsvinder f^* på N. Følgelig inducerer f^* en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{f}: \mathbb{Z}^{(A\times B)}/N \to C$ ved: $\bar{f}(\sum_i h_i (a_i,b_i)) = \sum_i h_i f(a_i,b_i)$. Specielt er $\bar{f}\varphi(a,b) = = \bar{f}(a,b) = f(a,b)$. ∎

Definition. Den i sætningen entydigt bestemte $\mathbb{Z}$-modul M kaldes tensorproduktet og betegnes $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$. $\varphi(a,b)$ skrives $a \otimes b$.

Bemærkning. Da $\varphi(A\times B)$ frembringer M (d.v.s. $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$), er den i omstående sætning 2) nævnte $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{f}$ entydigt bestemt ved f. (I sætningen kunne man have udelagt 1), hvis man i 2) krævede $\bar{f}$ entydigt bestemt ved f).

Dette indebærer, at $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\underset{\Lambda}{\otimes}B, C)$ ved $\bar{f} \to \bar{f}\circ\varphi$ afbildes isomorft på $\mathrm{Sv.Bil}_{\Lambda}(A\times B;C)$. Hvis $\mathrm{Sv.Bil}_{\Lambda}(A\times B;C)$ på oplagt måde opfattes som en (kovariant) funktor fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$, bliver ovennævnte isomorfi naturlig i C. På grund af 8 p.82 fås herved:

Sætning. $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$ er den på nær isomorfi entydigt bestemte $\mathbb{Z}$-modul M for hvilken $\mathrm{Sv.Bil}_{\Lambda}(A\times B;C)$ og $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,C)$ er naturligt isomorfe i C, C gennemløbende Mod $\mathbb{Z}$.

— —

Nu nogle små sætninger vedrørende tensorproduktet. På grund af φ's svage Λ-bilinearitet fås følgende regneregler.

$(a_1+a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + (a_2\otimes b)$

$a \otimes(b_1+b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$

$a\lambda \otimes b = a \otimes \lambda b$;

heraf specielt:

$0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$ for all $a \in A$, $b \in B$.

$n(a\otimes b) = na \otimes b = a \otimes nb \quad n \in \mathbb{Z}$.

Sætning. For enhver venstre Λ-modul B og enhver højre Λ-modul A gælder $\Lambda \underset{\Lambda}{\otimes} B \simeq B$ og $A \otimes_{\Lambda} \Lambda \simeq A$, (hvor $\simeq$ her er $\mathbb{Z}$-isomorfi).

Bevis. Viser kun den første isomorfi, da den anden efter vises analogt. Ved $h(\lambda,b) = \lambda b$ defineres en svagt Λ-bilineær afbildning fra $\Lambda \times B$ til B, idet Λ her betragtes som højre Λ-modul. Ifølge definition af tensorprodukt inducerer h en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{h}$ fra $\Lambda \otimes_\Lambda B$ til B: $\bar{h}(\lambda \otimes b) = \lambda b$. $\bar{h}$ er klart surjektiv. På grund af ovenstående regneregler kan ethvert element i $\Lambda \otimes_\Lambda B$ skrives på formen $1 \otimes b$; men $\bar{h}(1 \otimes b) = 1 \cdot b = b = 0 \Rightarrow 1 \otimes b = 0$; d.v.s. $\bar{h}$ er også injektiv. ∎

Sætning. Lad A være en højre Λ-modul og F en fri venstre Λ-modul med Basis $\{\ell_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Da kan ethvert element i $A \otimes_\Lambda F$ entydigt skrives på formen:
$\sum_\alpha a_\alpha \otimes \ell_\alpha$, $a_\alpha \in A$, kun endelig mange $a_\alpha \neq 0$.

Bevis. Eksistensen af en fremstilling af den omtalte form følger af regnereglerne for tensorprodukter og af at $\{\ell_\alpha\}$ frembringer F.

For at vise entydigheden betragtes for ethvert $\alpha \in I$ afbildningen h_α fra $A \times F$ defineret ved $h_\alpha(a,x) = a(x\text{'s koefficient til } \ell_\alpha)$, $x \in F$. h_α ses umiddelbart at være svagt Λ-bilineær og definerer da en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{h}_\alpha$ fra $A \otimes_\Lambda F$ til A (betragtet som $\mathbb{Z}$-modul). For at godtgøre entydighedsudsagnet i sætningen er det nok at vise at $\sum a_\alpha \otimes \ell_\alpha = 0 \Rightarrow a_\alpha = 0 \quad \forall\, \alpha \in I$. Men anvendes for et α' $\bar{h}_{\alpha'}$ på begge sider, fås

$$0 = \bar{h}_{\alpha'}(\sum a_\alpha \otimes \ell_\alpha) = \sum \bar{h}_{\alpha'}(a_\alpha \otimes \ell_\alpha) = \bar{h}_{\alpha'}(a_{\alpha'} \otimes \ell_{\alpha'}) = a_{\alpha'}.$$

∎

Lad os nu antage, at Λ er kommutativ, hvorved distinktionen mellem højre og venstre moduler falder bort. Benævnelserne refererer til de på p. 83 indførte

Sætning. Lad Λ være en kommutativ ring og A og B Λ-moduler. Da findes pånær isomorfi netop een Λ-modul M og Λ-bilineær afbildning φ fra $A\times B$ til M så følgende gælder:

1) $\varphi(A\times B)$ frembringer M

2) til enhver Λ-modul C og enhver Λ-bilineær afbildning f fra $A\times B$ til C findes en Λ-homomorfi $\bar{f}$ fra M
r til C så $f = \bar{f}\circ\varphi$.

Bevis. Entydigheden analogt med tilsvarende sætning p. 84. For at vise eksistensen godtgør vi at den i omtalte sætning på p. 85 angivne $\mathbb{Z}$-modul M kan udstyres med en struktur som Λ-modul, så den får de ønskede egenskaber. Da Λ er kommutativ kan vi f.eks. skrive A og B som venstre Λ-moduler. For ethvert $\lambda \in \Lambda$ defineres $g_\lambda(a,b) = \lambda a\otimes b (= a\otimes\lambda b)$ som let ses at være en svagt Λ-bilineær afbildning fra $A\times B$ til M og derfor inducerer en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{g}_\lambda$ fra $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$ til M $(= A\underset{\Lambda}{\otimes}B)$ ved $\bar{g}_\lambda(a\otimes b) = \lambda a\otimes b$. For et vilkårligt $m \in M$ definerer vi

$$\lambda\circ m = \bar{g}_\lambda(m)$$

og påstår, at M herved bliver en Λ-modul, d.v.s. de sædvanlig modul axiomer er opfyldte.

Da $\bar{g}_\lambda$ er en $\mathbb{Z}$-homomorfi fås $\lambda\circ(m_1+m_2) = \lambda\circ m_1 + \lambda\circ m_2$

umiddelbart. For at vise $\lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ m) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot m$ er (igen på grund af $\bar{g}_\lambda$'s $\mathbb{Z}$-linearitet) nok at vise det for m af formen $a \otimes b$, i hvilket tilfælde det er klart. Ligeledes er det for at eftervise $(\lambda_1 + \lambda_2) \circ m = \lambda_1 \circ m + \lambda_2 \circ m$ nok at se på $m = a \otimes b$. Men her følger rigtigheden af regnereglerne for tensorprodukter. Unitaritetsaksiomet ses umiddelbart at være opfyldt.

$A \otimes_\Lambda B$ er altså en Λ-modul ved fastsættelsen:

$$\lambda \circ (\Sigma\, a_i \otimes b_i) = \Sigma(\lambda a_i \otimes b_i) = \Sigma(a_i \otimes \lambda b_i)$$

Den på p. 84-85 indførte (svagt Λ-bilineære) afbildning φ bliver åbenbart Λ-bilineær.

Lad C være en vilkårlig Λ-modul og f en Λ-bilineær afbildning fra $A \times B$ til C. Da f specielt er svagt Λ-bilineær findes en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{f}$ fra $A \otimes B$ til C så $f(a,b) = \bar{f} \circ \varphi(a,b)$ $(= \bar{f}(a \otimes b))$. Vi mangler blot at vise, at $\bar{f}$ er Λ-lineær. Men det følger af $\bar{f}(\lambda \circ (a \otimes b)) = \bar{f}(\lambda a \otimes b) = f(\lambda a, b) = \lambda f(a,b) = \lambda \cdot \bar{f}(a \otimes b)$, idet ethvert element i $A \otimes B$ kan skrives $\Sigma\, a_i \otimes b_i$ og $\bar{f}$ er $\mathbb{Z}$-lineær. ∎

Bemærkning. Ganske som på p. 86 gælder, at den i sætning 2) nævnte Λ-homomorfi $\bar{f}$ er entydig bestemt ved f. Dette indebærer, at $\mathrm{Bil}_\Lambda(A \times B; C) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes_\Lambda B, C)$, og isomorfien er endda naturlig i C når man til $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes_\Lambda B, C)$ lader svare $\bar{f} \circ \varphi$. Ganske som på p. 86 fås herved en karakterisering af $A \otimes_\Lambda B$ (qua Λ-modul).

Vi betragter nu nogle tilfælde, hvor tensorproduktet kan bestemmes explicit.

Sætning. (jfr. p.86) For en kommutativ ring Λ og enhver Λ-modul A er $\Lambda \otimes A \simeq A$, hvor $\simeq$ betegner Λ-isomorfi.

Bevis. Den i tilsvarende bevis p.87 angivne afbildning h bliver her Λ-bilineær, og den inducerede homomorfi $\bar{h}$ derfor en Λ-isomorfi. ∎

Sætning. For en kommutativ ring Λ og vilkårlige Λ-moduler A og B gælder $A \otimes_\Lambda B \simeq B \otimes_\Lambda A$ ($\simeq$ angiver her isomorfi som Λ-moduler).

Bevis. Ved $f(a,b) = b \otimes a$ defineres en Λ-bilineær afbildning fra $A \times B$ til $B \otimes_\Lambda A$. f inducerer en Λ-homomorfi $\bar{f}$ fra $A \otimes_\Lambda B$ til $B \otimes_\Lambda A$ så $\bar{f}(a \otimes b) = b \otimes a$. Analogt fås en Λ-homomorfi $\bar{g}$ fra $B \otimes_\Lambda A$ til $A \otimes_\Lambda B$ så $\bar{g}(b \otimes a) = a \otimes b$. Da er $\bar{g} \circ \bar{f}(a \otimes b) = a \otimes b \quad \forall\, a \in A$, $b \in B$. Da $a \otimes b$, $a \in A$, $b \in B$ frembringer $A \otimes_\Lambda B$ vil $\bar{g} \circ \bar{f} = 1_{A \otimes_\Lambda B}$. Analogt: $\bar{f} \circ \bar{g} = 1_{B \otimes_\Lambda A}$. Heraf fås at $\bar{f}$ er en Λ-isomorfi fra $A \otimes_\Lambda B$ til $B \otimes_\Lambda A$. ∎

Sætning. Lad $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ være idealer i en kommutativ ring Λ. Da er $\Lambda/\mathfrak{a} \otimes_\Lambda \Lambda/\mathfrak{b} = \Lambda/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, hvor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ betegner idealet i Λ bestående af alle elementer af formen $a + b$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$.

Bevis. Vi definerer en Λ-bilineær afbildning f fra $\Lambda/\mathfrak{a} \times \Lambda/\mathfrak{b}$ til $\Lambda/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ ved $f((\lambda)_{\mathfrak{a}}, (\mu)_{\mathfrak{b}}) = (\lambda\mu)_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ (Her må eftervises, at f er veldefineret d.v.s. uafhængig af de valgte repræsentanter λ og μ for $(\lambda)_{\mathfrak{a}}$ og $(\mu)_{\mathfrak{b}}$).

f inducerer en Λ-homomorfi $\bar{f}$ $\Lambda/\mathfrak{a} \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda/\mathfrak{b} \to \Lambda/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ ved $\bar{f}(\lambda_{\mathfrak{a}} \otimes \mu_{\mathfrak{b}}) = (\lambda\mu)_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$. $\bar{f}$ er klart surjektiv. For at vise injektiviteten bemærkes, at $\lambda_{\mathfrak{a}} \otimes \mu_{\mathfrak{b}} = \lambda\, 1_{\mathfrak{a}} \otimes \mu_{\mathfrak{b}} = 1_{\mathfrak{a}} \otimes (\lambda\mu)_{\mathfrak{b}}$, hvilket indebærer, at ethvert element i $\Lambda/\mathfrak{a} \otimes \Lambda/\mathfrak{b}$ kan skrives på formen $1_{\mathfrak{a}} \otimes \lambda_{\mathfrak{b}}$. Heraf $\bar{f}(1_{\mathfrak{a}} \otimes \lambda_{\mathfrak{b}}) = \lambda_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = 0 \Rightarrow \lambda = a + b$ for passende $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$ og derfor $1_{\mathfrak{a}} \otimes \lambda_{\mathfrak{b}} = 1_{\mathfrak{a}} \otimes a_{\mathfrak{b}} = a_{\mathfrak{a}} \otimes 1_{\mathfrak{b}} = 0$ ∎

Eksempel. For $\Lambda = \mathbb{Z}$ får vi specielt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, hvor n og m er naturlige tal og $d = (m,n)$ er største fælles divisor for n og m.

Eksempel. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde, A og B Λ-moduler, hvor $A_T = A$ og B er delelig. Da er $A \otimes_\Lambda B = 0$.

Nok at vise $a \otimes b = 0$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Idet $a \in A_T$ findes $\lambda \neq 0$ så $\lambda a = 0$; da B delelig findes $b' \in B$ så $b = \lambda b'$. Følgelig $a \otimes b = a \otimes \lambda b' = \lambda a \otimes b' = 0$.

Eksempel. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

Sætning. Lad Λ være kommutativ og A og F frie Λ-moduler med baser $\{a_\alpha\}$, $\alpha \in I$, $\{e_\gamma\}$, $\gamma \in J$. Da er $A \underset{\Lambda}{\otimes} F$ en fri Λ-modul med $\{(a_\alpha \otimes e_\gamma)\}$, $\alpha \in I$, $\gamma \in J$ som basis.

Bevis. Klart at $\{(a_\alpha \otimes e_\gamma)\}$ frembringer $A \underset{\Lambda}{\otimes} F$. For at vise uafhængigheden antag

$$\sum_{\alpha,\gamma} \lambda_{\alpha\gamma}(a_\alpha \otimes e_\gamma) = 0$$

Da er

$$\sum_\gamma(\sum_\alpha \lambda_{\alpha\gamma}a_\alpha)\otimes \mathbf{e}_\gamma = 0$$

Ifølge sætningen på p.87 nederst er $\sum_\alpha \lambda_{\alpha\gamma}a_\alpha = 0$ for alle γ. Da $\{a_\alpha\}$ er basis for A fås $\lambda_{\alpha\gamma} = 0$ $\forall\alpha$, $\forall\gamma$. ∎

Eksempel. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$.

Sætning. Lad $\mathfrak{a}$ være et ideal i en kommutativ ring Λ. For enhver Λ-modul M gælder $(\Lambda/\mathfrak{a}) \otimes_\Lambda M \simeq M/\mathfrak{a}M$, hvor $\mathfrak{a}M$ betegner undermodulen i M bestående af alle elementer af formen $\Sigma\, a_i m_i$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $m_i \in M$.

Bevis. Vi definerer en Λ-bilineær afbildning f fra $\Lambda/\mathfrak{a} \times M$ til $M/\mathfrak{a}M$ ved $f((\lambda), m) = (\lambda m)$, hvor første $(\ )$ betegner sideklasse m.h.t. $\mathfrak{a}$, og anden $(\ )$ betegner sideklasse m.h.t. $\mathfrak{a}M$.

(f er virkelig veldefineret). f inducerer da Λ-homomorfi $\bar{f}$ fra $\Lambda/\mathfrak{a} \otimes_\Lambda M$ til $M/\mathfrak{a}M$ ved $\bar{f}((\lambda)\otimes m) = (\lambda m)$. $\bar{f}$ er klart surjektiv. For at vise injektiviteten af $\bar{f}$ bemærkes, at ethvert element i $(\Lambda/\mathfrak{a})\otimes M$ kan skrives $(1) \otimes m$. Da fås: $\bar{f}((1)\otimes m) = (1\cdot m) = 0 \Rightarrow m \in \mathfrak{a}M \Rightarrow m = a_1m_1+\cdots+a_tm_t$, (for passende $a_1,\dots,a_t \in \mathfrak{a}$ og $m_1,\dots,m_t \in M$) $\Rightarrow (1)\otimes m =$
$= (1) \otimes \sum_{i=1}^t a_i m_i = \sum_{i=1}^t (a_i) \otimes m_i = (0)$. ∎

Tensorprodukt af homomorfier.

Lad Λ være en vilkårlig (ej nødvendigvis kommutativ) ring og f en Λ-homomorfi fra højre Λ-modulen A til højre Λ-modulen A', g en Λ-homomorfi fra venstre Λ-modulen B til venstre Λ-modulen B'. Da defineres ved $\psi\colon A\times B \to A' \otimes_\Lambda B'$ $\psi(a,b) = f(a) \otimes g(b)$ en svagt Λ-bilineær afbildning. Denne inducerer en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{\psi}$ fra $A \otimes_\Lambda B$ til $A' \otimes_\Lambda B'$.
Dette $\bar{\psi}$ betegnes $f\otimes g$.

Regneregler for tensorprodukt af homomorfier:

Lad A, A', A'' være højre Λ-moduler, f Λ-homomorfi $A \to A'$, f' Λ-homomorfi fra $A' \to A''$.

Lad B, B', B'' være venstre Λ-moduler, g Λ-homomorfi $B \to B'$, g' Λ-homomorfi fra B' til B''. Da ses umiddelbart (nok at betragte værdierne på elementer $a \otimes b$):

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Desuden, hvis f_1 og f_2 er Λ-homomorfier fra A til A' og g_1 og g_2 er Λ-homomorfier fra B til B', gælder

$$(f_1+f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$$
$$f \otimes (g_1+g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2.$$

Hvis Λ forudsættes kommutativ, gælder

$$\lambda(f \otimes g) = \lambda f \otimes g = f \otimes \lambda g$$

Bemærkning og eksempel. I ovennævnte er $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A')$ og $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B')$ og $f \otimes g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_\Lambda B, A' \otimes_\Lambda B')$. For kommutativt Λ er desuden $f \otimes g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B;\ A' \otimes B')$. I sidstnævnte tilfælde havde det været nærliggende at betragte $f \otimes g$ som element i $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A') \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B')$. Her finder man (ved som sædvanligt at gå via en Λ-bilineær afbildning) en Λ-homomorfi Φ fra $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A') \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B')$ til $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes_\Lambda B, A' \otimes_\Lambda B')$ for hvilken $\Phi\ (f \otimes g) = f \otimes g$ opfattet som element i $\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes_\Lambda B,\ A' \otimes_\Lambda B')$, I almindelighed er Φ hverken injektiv eller surjektiv, som eksemplet $\Lambda = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $A = B = \Lambda/2\Lambda$ $A' = B' = \Lambda$ viser, hvor

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A \otimes B,\ A' \otimes B') \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(A,A') \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B')\ ,$$

men $\Phi = 0$. I det kommutative tilfælde er benævnelsen $f \otimes g$ således tvetydig, men betydningen vil altid fremgå af sammenhængen.

Tensorproduktet som funktor.

Lad A være fast højre Λ-modul. Vi definerer en funktor T fra kategorien af venstre Λ-moduler til mod $\mathbb{Z}$ ved: $TX = A \otimes_\Lambda X$ og for $f\colon X \to Y$ $Tf = 1_A \otimes f$. T eftervises let ved at være en (kovariant) funktor, der på grund af omstående regneregler) er additiv. Hvis Λ er kommutativ bliver T en funktor fra mod Λ til mod Λ.

Analogt kan man for en fast venstre Λ-modul A definere en funktor T fra kategorien af højre Λ-moduler til mod $\mathbb{Z}$ ved $TX = X \otimes_\Lambda A$ og for $f\colon X \to Y$ $Tf = f \otimes 1_A$. Hvis Λ er kommutativ, hvor distinktionen mellem højre og venstre bortfalder, vil de to funktorer være naturligt isomorfe, idet isomorfien i sætningen på p. 90 øverst er naturlig.

Inden vi nærmere undersøger tensorproduktets funktoregenskaber, giver vi en lille anvendelse af ovenstående.

Sætning. Lad P_1 og P_2 være projektive moduler oven en kommutativ ring Λ. Da er $P_1 \otimes_\Lambda P_2$ en projektiv Λ-modul.

Bevis. P_1 og P_2 er direkte summander i frie Λ-moduler F_1 og F_2, og følgelig findes Λ-homomorfier i_1, p_1 $i_1\colon P_1 \to F_1$, $p_1\colon F_1 \to P_1$ så $p_1 \circ i_1 = 1_{P_1}$ og i_2, p_2, $i_2\colon P_2 \to F_2$, $p_2\colon F_2 \to P_2$ så $p_2 \circ i_2 = 1_{P_2}$. Men da er (ifl. de regneregler, der sikrer at tensorproduktet er en funktor) $(p_1 \otimes p_2) \circ (i_1 \otimes i_2) = (p_1 \circ i_1) \otimes (p_2 \circ i_2) = 1_{P_1} \otimes 1_{P_2}$ $= 1_{p_1 \otimes p_2}$, hvilket betyder at $P_1 \otimes_\Lambda P_2$ er en direkte summand i $F_1 \otimes F_2$, som ifølge sætningen på p. 91 er fri. Følgelig er $P_1 \otimes_\Lambda P_2$ projektiv.

Sætning. Lad Λ være vilkårlig og A en højre Λ-modul. Da er $TX = A \otimes_\Lambda X$ en højre-exakt funktor fra kategorien af venstre Λ-modulen til mod $\mathbb{Z}$.

Bevis. Lad $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$

være exakt. Vi skal godtgøre, at

$$A \otimes_\Lambda X \xrightarrow{Tf} A \otimes_\Lambda Y \xrightarrow{Tg} A \otimes_\Lambda Z \to 0$$

er exakt.

1) Tg surjektiv, idet $\forall z \in Z \; \exists y \in Y$ så $z = g(y)$ og dermed $a \otimes z = Tg(a \otimes y)$. Endvidere benyttes at ethvert element i $A \otimes_\Lambda Z$ er $\mathbb{Z}$-lineærkombination af elementer af formen $a \otimes z$.

2) $\operatorname{Ker} Tg \supseteq \operatorname{Im} Tf$, idet $g \circ f = 0$ medfører (T er additiv) at $TgTf = 0$ og dermed $\operatorname{Ker} Tg \supseteq \operatorname{Im} Tf$.

3) $\operatorname{Ker} Tg = \operatorname{Im} Tf$. Da $\operatorname{Ker} Tg \supseteq \operatorname{Im} Tf$, findes homomorfi $\widetilde{Tg}$, så

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\Lambda Y \arrow[r, "Tg"] \arrow[d, "\kappa"'] & A \otimes Z \\
A \otimes_\Lambda Y/\operatorname{Im} Tf \arrow[ur, "\widetilde{Tg}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommuterer. κ er den kanoniske homomorfi fra $A \otimes_\Lambda Y$ på

$A \otimes_\Lambda Y/\mathrm{Im}\, Tf$. Vi angiver nu en svagt Λ-bilineær afbildning ρ fra $A \times Z$ til $A \otimes_\Lambda Y/\mathrm{Im}\, Tf$ ved $\rho(a,z) = a \otimes y$ modulo $\mathrm{Im}\, Tf$, hvor y er et element i Y med $g(y) = z$. Dette er virkelig lovlig definition; thi antag $g(y_1) = g(y_2) = z$; da var $y_1 - y_2 \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$ d.v.s. $y_1 - y_2 = f(x)$ og dermed $a \otimes y_1 - a \otimes y_2 = a \otimes f(x) = (1_A \otimes f)(a \otimes x) = T(f)(a \otimes x)$. ρ inducerer $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar{\rho}: A \otimes_\Lambda Z \to A \otimes_\Lambda Y/\mathrm{Im}\, Tf$ ved $\bar{\rho}(a \otimes z) = a \otimes y$ modulo $\mathrm{Im}\, Tf$, hvor $y \in Y$ så $g(y) = z$.

Åbenbart gælder $\bar{\rho} \circ \widetilde{Tg} = 1_{A \otimes_\Lambda Y/\mathrm{Im}\, Tf}$, hvoraf sluttes, at $\widetilde{Tg}$ er injektiv. Idet $Tg = \widetilde{Tg} \cdot \kappa$, fås således $\mathrm{Ker}\, Tg = \mathrm{Ker}\, \kappa = \mathrm{Im}\, Tf$. ∎

Eksempel. Tensorproduktet normalt ej exakt funktor. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$ og betragt den exakte følge

$$0 \to \mathbb{Z} \to Q \to Q/\mathbb{Z} \to 0$$

der ved $TX = (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \otimes X$ føres over i

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \otimes \mathbb{Z} & \to & (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \otimes Q & \to & (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2) \otimes Q/\mathbb{Z} \to 0 \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 & & 0 & & 0 \end{array}$$

hvor første homomorfi ikke er injektiv.

<u>Definition</u>. En højre Λ-modul A kaldes flad, hvis $A \otimes -$ er en exakt funktor fra kategorien af venstre Λ-moduler til mod $\mathbb{Z}$. Tilsvarende indføres flade venstre Λ-moduler.

<u>Bemærkning</u>. Analogt med hvad der gælder projektive og injektive moduler er en modul flad, netop når den ved tensorering fører injektive homomorfier over i injektive homomorfier.

Sætning. For en vilkårlig Ring Λ gælder; fri $\Rightarrow$ flad.

Bevis. Lad F være en fri højre Λ-modul med basis $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in I$, og lad $h\colon X \to Y$ være en injektiv homomorfi fra venstre Λ-modulen X til venstre Λ-modulen Y. Vi skal godtgøre, at $1_F \otimes h$ er injektiv. Ifølge tidligere sætning på p. 91 kan ethvert element ξ i $F \otimes X$ skrives entydigt $\xi = \sum_\alpha e_\alpha \otimes x_\alpha$; $(1_F \otimes h)(\xi) = \sum_\alpha e_\alpha \otimes h(x_\alpha) = 0 \Rightarrow x_\alpha = 0 \ \forall\alpha \Rightarrow \xi = 0$. ∎

Sætning. For en vilkårlig ring Λ gælder: projektiv $\Rightarrow$ flad.

Bevis. Lad P være en projektiv højre Λ-modul. P er direkte summand i en fri Λ-modul F; d.v.s. der findes Λ-homomorfier $i\colon P \to F$ og $p\colon F \to P$ så $p \circ i = 1_P$. Lad

$$0 \to X \underset{h}{\to} Y$$

være exakt følge af venstre Λ-moduler. Vi skal godtgøre at $1_P \otimes h$ er injektiv. Diagrammet

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_\Lambda X \arrow[r, "1_P \otimes h"'] \arrow[d, "i \otimes 1_X"'] & P \otimes_\Lambda Y \arrow[d, "i \otimes 1_Y"] \\
F \otimes_\Lambda X \arrow[r, "1_F \otimes h"'] \arrow[d, "p \otimes 1_X"'] & F \otimes_\Lambda Y \\
P \otimes_\Lambda X &
\end{tikzcd}$$

er kommutativt ifølge regnereglerne (p. 93). Lad $\xi \in \operatorname{Ker}(1_P \otimes h)$. Da er $(1_F \otimes h)\circ(i \otimes 1_X)(\xi) = 0$; idet F ifølge foregående sætning er flad, fås $(i \otimes 1_X)(\xi) = 0$, og dermed $(p \otimes 1_X)\circ(i \otimes 1_X)(\xi) = 0$; men $(p \otimes 1_X)\circ(i \otimes 1_X) = 1_P \otimes 1_X = 1_{P\otimes X}$; hvorfor $\xi = 0$. ∎

For Λ = integritetsområde giver vi nu en nødvendig betingelse for fladhed.

Sætning. For Λ = (kommutativt) integritetsområde gælder flad $\Rightarrow$ torsionsfri.

Bevis. Lad A være flad Λ-modul, og lad K være Λ's kvotientlegeme. Antag $A_T \neq 0$ og lad $a \in A_T$, $a \neq 0$. For et passende $\lambda \neq 0$ gælder da $\lambda a = 0$. Lad i være den kanoniske injektion af Λ i K. $a \otimes 1$ er $\neq 0$ som element i $A \otimes_\Lambda \Lambda$. Men $(1_A \otimes i)(a \otimes 1) = a \otimes 1$ som element i $A \otimes_\Lambda K$. Men indenfor $A \otimes_\Lambda K$ gælder $a \otimes 1 = a \otimes \lambda\cdot\frac{1}{\lambda} = \lambda a \otimes \frac{1}{\lambda} = 0 \otimes \frac{1}{\lambda} = 0$. $1_A \otimes i$ ville således ikke være injektiv, og A dermed ikke flad. ∎

Eksempel. Ovennævnte nødvendige betingelse er normalt ej tilstrækkelig.

Lad $\Lambda = \mathbb{R}[X,Y]$, I = idealet $\{f(x,y) \in \Lambda \mid f(0,0) = 0\}$. I er en torsionsfri Λ-modul, men I er ikke en flad Λ-modul. For at vise dette bemærkes at $\mathbb{R}$ er en Λ-modul via: $\lambda(x,y)\cdot r = \lambda(0,0)\cdot r$.

Ved $\psi(f,g) = f'_x(0,0)\cdot g'_y(0,0)$ defineres en Λ-bilineær afbildning fra $I\times I \to \mathbb{R}$ (simpel udregning). ψ inducerer en Λ-homomorfi $\bar{\psi}: I \otimes_\Lambda I \to \mathbb{R}$ for hvilken $\bar{\psi}(f\otimes g) = f'_x(0,0)\cdot g'_y(0,0)$. $\bar{\psi}(x\otimes y - y\otimes x) = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \neq 0$; følgelig er $x\otimes y - y\otimes x \neq 0$ (som element i $I \otimes_\Lambda I$). Indenfor $I \otimes_\Lambda \Lambda$ er imidlertid $x\otimes y - y\otimes x = xy\otimes 1 - yx\otimes 1 = 0$. Dette indebærer, at man ved tensorering med I ud fra

$$0 \to I \to \Lambda$$

får en ikke-injektiv homomorfi: $I \otimes_\Lambda I \to I \otimes_\Lambda \Lambda$.

— — —

Lad $A' \subseteq A$ være højre Λ-moduler og $B' \subseteq B$ venstre Λ-moduler. Lad $a_1 \cdots a_n \in A'$, $b_1 \cdots b_n \in B'$. Hvis $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$ som element i $A' \otimes_\Lambda B'$ da er $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = 0$ som element i $A \otimes_\Lambda B$. Det omvendte er (som det blandt andet fremgår af ovenstående) normalt ej rigtigt. Imidlertid gælder:

<u>Sætning</u>. Lad A og B være en højre (resp. venstre) Λ-modul, og lad $\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n \in A$, $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_n \in B$ og antag $\bar{a}_1 \otimes \bar{b}_1 + \cdots + \bar{a}_n \otimes \bar{b}_n = 0$ inden for $A \otimes_\Lambda B$. Da findes en endelig frembragt undermodul A' af A indeholdende $\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n$ og en endelig frembragt undermodul B' af B indeholdende $\bar{b}_1\cdots,\bar{b}_n$ så $\bar{a}_1 \otimes \bar{b}_1 + \cdots + \bar{a}_n \otimes \bar{b}_n = 0$ som element i $A' \otimes_\Lambda B'$.

<u>Bevis.</u> $A \otimes_\Lambda B$ var (ved existensbeviset) konstrueret som $\mathbb{Z}^{(A \times B)}/N$, hvor N var frembragt af alle elementer af formerne

i) $(a_1+a_2,b) - (a_1,b) - (a_2,b)$

ii) $(a,b_1+b_2) - (a,b_1) - (a,b_2)$

iii) $(a\lambda,b) - (a,\lambda b)$

$\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_1 \otimes \bar{b}_1) = 0$ indenfor $A \otimes_\Lambda B$ betyder, at

$\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_i,\bar{b}_i) = \mathbb{Z}$-linearkombination af el. af formerne

i), ii) iii) (*)

Lad A' være undermodulen i A frembragt af $\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_n$ og de endelig mange a'er som indgår i højre side af fremstillingen (*), og lad analogt B' være undermoduler i B frembragt af $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_n$ og de endelig mange b'er som indgår i højre side af fremstillingen (*).

A' og B' da endelig frembragte undermoduler i A og B. $A' \otimes_\Lambda B'$ er $\mathbb{Z}^{(A' \times B')}/N'$, hvor N' er modulen frembragt af elementer i), ii), iii) med a, a_1, a_2 etc. i A' og b, b_1, b_2 ect. i B'; $\Sigma\, \bar{a}_i \otimes \bar{b}_i$ som element i $A' \otimes_\Lambda B'$ er det homomorfe billede af $\sum_i (\bar{a}_i, \bar{b}_i)$ i $\mathbb{Z}^{(A' \otimes B')}/N'$ og derfor ifølge konstruktionen af A' og $B' = 0$. ∎

<u>Sætning</u>. Lad Λ være (kommutativt) integritetsområde A Λ-modul; da er $A_T = \ker \varphi$, hvor φ er Λ-homomorfien $\varphi\colon A \to A \otimes_\Lambda K$ $\varphi(a) = a \otimes 1$, og hvor K betegner Λ's kvotientlegeme.

<u>Bevis</u>. Klart, at $\ker \varphi \supseteq A_T$ (jvf. beviset for sætningen øverst på side 98). For at vise $\ker \varphi \subseteq A_T$ betragtes $\hat{a} \in \ker \varphi$, d.v.s. $\hat{a} \otimes 1 = 0$ indenfor $A \otimes_\Lambda K$. Ifølge ovenstående sætning findes endelig frembragte undermoduler $A' \subseteq A$ $K' \subseteq K$, $\hat{a} \in A'$, $1 \in K'$ så $\hat{a} \otimes 1 = 0$ indenfor $A' \otimes_\Lambda K'$. Vi kan her lade $A' = A$, og hvis $K' = \Lambda \frac{\lambda_1}{\lambda_1'} + \cdots + \Lambda \frac{\lambda_r}{\lambda_r'}$ vil $\hat{a} \otimes 1$ også være 0 i $A \otimes_\Lambda \Lambda \frac{1}{\lambda_1' \cdots \lambda_r'}$. Sæt $\tilde{\lambda} = \lambda_1' \cdots \lambda_r'$. Lad f være den ved $f(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}) = \lambda$ definerede homomorfi (isomorfi) fra $\Lambda \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ på Λ.

Da er $(1_A \otimes f)(\hat{a} \otimes 1) = \hat{a} \otimes \tilde{\lambda}$

som element i $A \otimes_\Lambda \Lambda \frac{1}{\tilde{\lambda}}$; som element i $A \otimes_\Lambda \Lambda$.

Lad ψ være den isomorfe afbildning $A \otimes_\Lambda \Lambda \to A$ defineret ved $\psi(a\otimes\lambda) = \lambda a$. Da er $0 = \psi\cdot(1_A\otimes f)(\hat{a}\otimes 1) = \bar{\lambda}\hat{a}$ d.v.s. $\hat{a} \in A_T$. ▮

Vi giver nu nogle simple anvendelser af ovenstående.

Sætning. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde. Da kan enhver endelig frembragt torsionsfri Λ-modul A indlejres i en fri, endelig frembragt Λ-modul.

Bevis. Lad K være kvotientlegemet for Λ, og $\varphi: A \to A \otimes_\Lambda K$ $\varphi(a) = a\otimes 1$ den ifølge foregående sætning injektive Λ-homomorfi fra A ind i $A \otimes_\Lambda K$. A kan identificeres med $\varphi(A)$ = undermodulen i $A \otimes_\Lambda K$ bestående af alle elementer af formen $a\otimes 1$ d.v.s. $\varphi(A) = \{a\otimes 1 \mid a \in A\}$.

$A\otimes_\Lambda K$ kan gives struktur som K-modul. Betragt hertil for ethvert $k' \in K$ den Λ-bilineære afbildning $g_{k'}: A\times K \to A \otimes_\Lambda K$ $g_{k'}(a,k) = a\otimes kk'$ $g_{k'}$ inducerer Λ-homomorfi $\bar{g}_{k'}: A \otimes_\Lambda K \to A \otimes_\Lambda K$ så $\bar{g}_{k'}(a\otimes k) = a\otimes kk'$. For et vilkårlig $\xi \in A \otimes_\Lambda K$ definerer vi $k'\circ\xi = \bar{g}_{k'}(\xi)$. Da eftervises let (jfr. beviset pp. 88-89) at $A \otimes_\Lambda K$ bliver K-modul. Ved restriktion af K til Λ genvindes herved den oprindelige struktur (ved tensorproduktets definition) af $A \otimes_\Lambda K$ som Λ-modul.

Eksplicit skrevet ud, gælder for $A \otimes_\Lambda K$ som K-modul (d.v.s. vektorrum over K) $k'\circ(\Sigma\, a_i\otimes k_i) = \Sigma(a_i\otimes k_i k')$.

A var ifølge forudsætning endelig frembragt, d.v.s. vi kan skrive $A = \Lambda a_1+\cdots+\Lambda a_n$ og dermed $\varphi(A) = \Lambda(a_1\otimes 1)+ \Lambda(a_2\otimes 1)+\cdots+\Lambda(a_n\otimes 1)$. Med den indførte struktur af $A \otimes_\Lambda K$ som K-modul (K-vektorrum) ses let, at $a_1\otimes 1,\cdots,a_n\otimes 1$

K-frembringer $A \otimes_\Lambda K$. En (ægte eller uægte) delmængde af disse vil da være en basis for $A \otimes_\Lambda K$ som K-vektorrum Efter eventuel omnummerering kan vi antage, at $a_1\otimes 1, \cdots, a_m\otimes 1$ $1 \leqq m \leqq n$ er en K-basis for $A \otimes_\Lambda K$. Da gælder

$$a_i\otimes 1 = k_{i1}(a_1\otimes 1)+\cdots+k_{im}(a_m\otimes 1) \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

Lad $\bar{\lambda} \in \Lambda$, $\bar{\lambda} \neq 0$ være element så $\bar{\lambda}\, k_{ij} \in \Lambda$ $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$. Da er:

$$a_i\otimes 1 = (\bar{\lambda}k_{ij})(a_1\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}})+\cdots+(\bar{\lambda}k_{im})(a_m\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}}) \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

hvorfor $\varphi(A) \subseteq \Lambda(a_1\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}})+\cdots+\Lambda(a_m\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}})$. $(a_1\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}}),\cdots,(a_m\otimes\frac{1}{\bar{\lambda}})$ er K-uafhængige, specielt Λ-uafhængige. Følgelig er $\varphi(A)$ indeholdt i endelig frembragt fri Λ-modul. ∎

Bemærkning. Antagelse at A er endelig frembragt væsentlig. (Betragt $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$.)

Korollar 1. En endelig frembragt torsionsfri modul over en P.I.D er fri.

Bevis. Benyt foregående sætning og Korollar p.34 ∎

Korollar 2. Enhver endelig frembragt abelsk gruppe ($\mathbb{Z}$-modul) er direkte sum af cykliske grupper.

Bevis. Lad A være endelig frembragt $\mathbb{Z}$-modul, og A_T dennes torsion. A/A_T er da endelig frembragt torsionsfri $\mathbb{Z}$-modul, og derfor ifølge Korollar 1 en fri $\mathbb{Z}$-modul. Den exakte følge

$$0 \to A_T \xrightarrow[\text{injektion}]{\text{naturlige}} A \longrightarrow A/A_T \to 0$$

er derfor split-exakt, hvorfor $A \simeq A_T \oplus A/A_T$. A_T er en endelig frembragt torsionsmodul over Z og derfor endelig. Som tidligere vist er en endelig abelsk gruppe direkte sum af cykliske grupper Den frie modul A/A_T er direkte sum af eksemplarer af $\mathbb{Z}$, hvorfor alt i alt $A \simeq A_T \oplus A/A_T$ er direkte sum af cykliske grupper. ∎

Inden vi giver endnu en anvendelse af sætningen på p.99 indføres begrebet "filtrerende foreningsmængde".

Definition. Lad M være en (venstre) Λ-modul og $\mathcal{S} = \{M_\alpha\}$ en familie af undermoduler i M. M siges at være den filtrerende foreningsmængde af modulerne i $\mathcal{S}$, hvis

i) $\quad M = \bigcup_{M_\alpha \in \mathcal{S}} M_\alpha$

ii) $\quad \forall M_\alpha, M_\beta \in \mathcal{S} \ \exists\, M_\gamma \in \mathcal{S}$ så $M_\alpha + M_\beta \subseteq M_\gamma$.

Eksempel 1. Lad M være en vilkårlig modul. Da er M filtrerende foreningsmængde af alle endelig frembragte undermoduler i M.

Eksempel 2. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde. Da er kvotientlegemet K filtrerende foreningsmængde af alle undermoduler af formen $\Lambda \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$.

Sætning. Lad M være en (venstre) Λ-modul og antag M er filtrerende foreningsmængde af en familie $\mathcal{S} = \{M_\alpha\}$ af flade undermoduler i M. Da er M en flad Λ-modul.

Bevis. Lad $0 \to A \xrightarrow{i} B$ være en injektiv homomorfi af højre Λ-moduler; vi skal godtgøre at $A \otimes_\Lambda M \to B \otimes_\Lambda M$ er injektiv. Uden indskrænkning kan vi antages at være en naturlig injektion så A er undermodul i B. Vi skal da vise, at et element $\xi = \sum_{j=1}^{t} a_j \otimes m_j$ der er 0 som element i $B \otimes_\Lambda M$ også er 0 som element i $A \otimes_\Lambda M$.

Ifølge sætningen på p. 99 findes endelig frembragt undermodul M' af M indeholdende m_j, $1 \leq j \leq t$, så $\sum a_j \otimes m_j = 0$ indenfor $B \otimes_\Lambda M'$. Da M er filtrerende foreningsmængde af M_α'erne, er $M' \subseteq M_\alpha$ for passende α. Da er $\sum a_j \otimes m_j = 0$ indenfor $B \otimes_\Lambda M_\alpha$, og dermed $\sum a_j \otimes m_j = 0$ i $A \otimes_\Lambda M_\alpha$, idet M_α er flad. Følgelig er $\sum a_j \otimes m_j = 0$ som element i $A \otimes_\Lambda M$. ∎

Korollar 1. Lad Λ være P.I.D. Da er en Λ-modul M flad $\Longleftrightarrow M_T = 0$.

Bevis. "$\Rightarrow$" følger af sætningen på p. 98 øverst.
"$\Leftarrow$" Antag M er torsionsfri: M er (jfr. Eks. 1 p.103) filtrerende foreningsmængde af sine endelig frembragte undermoduler. Hver af disse er ifølge korollar 1 p.102 fri. Da fri $\Rightarrow$ flad, fås korollar 1 nu af ovenstående sætning. ∎

Korollar. 2. Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde. Da er kvotientlegemet K en flad Λ-modul.

Bevis. K er (jfr. Eksempel 2 p.103) filtrerende foreningsmængde af modulerne $\Lambda\frac{1}{\lambda}$, der er frie. ∎

Bemærkning. Ved hjælp af ovenstående fås let eksempler på flade moduler, der ikke er projektive. (F.eks. $\mathbb{Q}$ som

$\mathbb{Z}$-modul). Implikationstegnene i

$$\text{fri} \Rightarrow \text{projektiv} \Rightarrow \text{flad}$$

kan altså i almindelighed ikke vendes om.

Til slut endnu en anvendelse af sætning p. 99

<u>Korollar 3.</u> Enhver direkte sum $\coprod_{\alpha\in I} M_\alpha$ af flade moduler M_α er flad. (Ringen Λ kan her være vilkårlig.)

<u>Bevis.</u> $\coprod_{\alpha\in I} M_\alpha$ er filtrerende foreningsmængde af de undermoduler der er direkte sum af endelig mange M_α'er. Derfor nok at vise påstanden for endelige direkte summer. Dette overlades til læseren som en øvelse (Reducerer til direkte sum af to moduler). ∎

Inden næste sætning bemærker vi følgende: Lad $\mathfrak{a}$ være et højreideal i Λ og M en venstre Λ-modul. Da er $\mathfrak{a}M = \{\Sigma\, a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M\}$ en additiv abelsk gruppe.

<u>Sætning.</u> Lad Λ være vilkårlig N en venstre Λ-modul og M en undermodul i N. Hvis N/M er en flad modul, gælder $\mathfrak{a}M = \mathfrak{a}N \cap M$ for ethvert højreideal $\mathfrak{a}$ i Λ.

<u>Bevis.</u> Klart, at $\mathfrak{a}M \subseteq \mathfrak{a}N \cap M$. Den modsatte inklusion ses på følgende måde: Lad $M \xrightarrow{i} N$ og $\mathfrak{a} \xrightarrow{j} \Lambda$ være de naturlige injektioner. Ud fra den exakte følge

$$0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\kappa} N/M \to 0$$

fås det kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \otimes_\Lambda M \arrow[r, "1_{\mathfrak{a}}\otimes i"'] \arrow[d, "j\otimes 1_M"] & \mathfrak{a} \otimes_\Lambda N \arrow[r, "1_{\mathfrak{a}}\otimes \kappa"'] \arrow[d, "j\otimes 1_N"] & \mathfrak{a} \otimes_\Lambda N/M \arrow[r] \arrow[d, "j\otimes 1_{N/M}"] & 0 \\
\Lambda \otimes_\Lambda M \arrow[r, "1_\Lambda\otimes i"'] & \Lambda \otimes_\Lambda N \arrow[r, "1_\Lambda\otimes\kappa"'] & \Lambda \otimes_\Lambda N/M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

hvor rækkerne er exakte og sidste søjle injektiv, da N/M er flad. Ved diagram-chasing fås da:

$$(\mathrm{Im}(1_\Lambda \otimes i)) \cap \mathrm{Im}(j\otimes 1_N) = \mathrm{Im}(1_\Lambda\otimes i)\circ(j\otimes 1_M) = \mathrm{Im}(j\otimes i).$$

Lad $m \in M \cap \mathfrak{a} N$; da kan m skrives $m = \sum_\nu a_\nu n_\nu$, $a_\nu \in \mathfrak{a}$ $n_\nu \in N$. Opfattet som element i $\Lambda \otimes_\Lambda N$ tilhører $1 \otimes m$ $\mathrm{Im}(1_\Lambda \otimes i)$ og $\mathrm{Im}(j\otimes 1_N)$, da $1 \otimes m = \Sigma(a_\nu \otimes n_\nu) =$ (el. i $\Lambda_\Lambda \otimes N$)

$(j\otimes 1_N)(\Sigma(a_\nu \otimes n_\nu))$
el. i $\Lambda \otimes_\Lambda N$.

Derfor vil $1 \otimes m \in \mathrm{Im}(j\otimes i)$ d.v.s. $1 \otimes m = (j\otimes i)(\Sigma\, a'_\mu \otimes m'_\mu)$, $a'_\mu \in \mathfrak{a}$, $m'_\mu \in M$. Følgelig gælder indenfor $\Lambda \otimes_\Lambda N =$
$1 \otimes m = \Sigma\, a'_\mu \otimes m'_\mu = 1 \otimes \Sigma\, a'_\mu m'_\mu$, hvoraf: $m = \Sigma\, a'_\mu m'_\mu \in \mathfrak{a} M$. ∎

Vi giver to anvendelser af denne sætning.

<u>Definition</u>. En ring Λ kaldes von Neumann regulær, hvis ligningen $a = axa$ for ethvert $a \in \Lambda$ har en løsning $x \in \Lambda$.

<u>Sætning</u>. Hvis allle venstre Λ-moduler er flade, er Λ von Neumann regulær.

<u>Bevis</u>. Lad $a \in \Lambda$ og lad i sætningen på p. 105
$N = \Lambda$ $M = \Lambda a$, $\mathfrak{a} = a\Lambda$ $a \in \mathfrak{a} N \cap M$, hvorfor
$a \in a\Lambda\cdot\Lambda a = \{a\lambda a \mid \lambda \in \Lambda\}$. ∎

Bemærkning. Vi skal senere vise at ovennævnte sætning kan vendes om. Da begrebet "von Neumann regulær" er venstre-højre symmetrisk, fås spec. for en vilkårlig ring Λ: alle venstre Λ-moduler er flade $\iff$ alle højre Λ-moduler er flade.

Eksempel. For et vilkårligt legeme K og vilkårlig indeksmængde I er K^I von Neumann regulær. For et vilkårlig (ej nødvendigvis endelig dimensionalt) vektorrum V over et legeme K er endomorfiringen $\mathrm{End}_K(V)$ von Neumann regulær.

Sætning. Lad Λ være venstre Noethersk og A en endelig frembragt flad venstre Λ-modul. Da er A projektiv.

Bevis. Der findes en exakt følge af formen:

$$0 \to K \xrightarrow[i]{} F \to A \to 0 \qquad (*)$$

hvor F er en endelig frembragt fri Λ-modul, basis $e_1,\cdots,e_n$ og K en endelig frembragt Λ-modul (da Λ er venstre Noethersk) i opfattes som den naturlige injektion.

Lad k være et element i K. Dette skrives $k = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n$. Lad $\mathfrak{a} = \lambda_1\Lambda+\cdots+\lambda_n\Lambda$. $\mathfrak{a}$ er højre ideal i Λ. Da er $k \in \mathfrak{a}F \cap K = \mathfrak{a}K$ ifølge sætningen på p. 105, følgelig kan k skrives $k = \sum_{i=1}^{m} a_i k_i$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $k_i \in K$. Udtrykkes hvert a_i som (højre) Λ-linearkomb. af $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ fås $k = \lambda_1 k_1'+\cdots+\lambda_n k_n'$ for passende $k_1',\cdots,k_n' \in K$. Der findes nu en Λ-homomorfi $\bar{u}\colon F \to K$ defineres ved $\bar{u}(e_i) = k_i'$ $1 \le i \le n$. For denne gælder $\bar{u}(k) = \bar{u}(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n) = \lambda_1 k_1'+\cdots+\lambda_n k_n' = k$.

Vi påstår nu: Til vilkårlige t elementer $\bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_t \in K$ findes en Λ-homomorfi $\varphi\colon F \to K$ så $\varphi(\bar{k}_i) = \bar{k}_i$ $1 \le 1 \le t$.

Dette godtgøres ved induktion efter t.

$t = 1$: lige bevist.

$t-1 \Rightarrow t$: Ifølge det lige viste findes en Λ-homomorfi $u\colon F \to K$ så $\bar{u}(\bar{k}_t) = \bar{k}_t$; anvendes induktionsantagelsen på de $t-1$ elementer $\bar{k}_1 - \bar{u}(\bar{k}_1), \dots, \bar{k}_{t-1} - \bar{u}(\bar{k}_{t-1})$, findes en Λ-homomorfi $v\colon f \to K$ så $v(\bar{k}_i - \bar{u}(\bar{k}_i)) = \bar{k}_i - \bar{u}(\bar{k}_i)$ $1 \leq i \leq t-1$. $\varphi = \bar{u} + v - v \circ \bar{u}$ er en Λ-homomorfi: $F \to K$, for hvilken $\varphi(\bar{k}_i) = \bar{k}_i$ $1 \leqq i \leqq t$.

Vælges $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_t$ som frembringere for den endelig frembragte modul K ses at $\varphi_{\mathrm{Res},K} = 1_K$ d.v.s.: $\varphi \circ i = 1_K$, hvorfor $(*)$ splitter, og A er derfor projektiv. ∎

Vi slutter af med en nødvendig betingelse for fladhed, der løst sagt udtaler at enhver lineær relation mellem elementer i en flad modul er konsekvens af en lineær relation mellem elementer i grundringen Λ.

Sætning. Lad M være en flad venstre Λ-modul. Enhver lineær ligning $a_1m_1 + \dots + a_tm_t = 0$, $a_1 \dots a_t \in \Lambda$, $m_1 \dots m_t \in M$ kan "løses" på følgende måde: Der existerer elementer $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_s \in M$ og elementer $\lambda_{ij} \in \Lambda$, $1 \leqq i \leqq t$, $1 \leqq j \leqq s$ så

$$m_1 = \lambda_{11}\bar{m}_1 + \dots + \lambda_{1s}\bar{m}_s$$

$$m_t = \lambda_{t1}\bar{m}_1 + \dots + \lambda_{ts}\bar{m}_s$$

og $a_1\lambda_{1j} + \dots + a_t\lambda_{tj} = 0 \quad \forall j.\ 1 \leq j \leq s$.

Bevis. Lad I være højreidealet i Λ frembragt af $a_1, \dots, a_t$ d.v.s. $I = a_1\Lambda + \dots + a_t\Lambda$. Da M er flad, er den kanoniske afbildning $I \otimes_\Lambda M \to \Lambda \otimes_\Lambda M$ injektiv, hvorfor $\sum_{i=1}^{t} a_i \otimes m_i = 0$ indenfor $I \otimes_\Lambda M$.

Der findes en kort exakt følge:

$$0 \to K \to F \underset{\varphi}{\to} I \to 0$$

hvor F er den endelig frembragte fri højre Λ-modul med basis $e_1, \cdots, e_t$ og $\varphi(e_i) = a_i$ $1 \leq i \leq t$ og K er kernen for φ.

Da tensorproduktet er en højre-exakt funktor, er

$$K \otimes_\Lambda M \longrightarrow F \otimes_\Lambda M \xrightarrow{\varphi\otimes 1_M} I \otimes_\Lambda M \to 0$$

exakt.

Da $\sum_{i=1}^{t} e_i \otimes m_i \in \ker(\varphi \otimes 1_M)$, fås en fremstilling:

$$\sum_{i=1}^{t} e_i \otimes m_i = \sum_{j=1}^{s} k_j \otimes \bar{m}_j, \quad k_j \in K, \quad \bar{m}_j \in M$$

Hvert k_j kan skrives

$$k_j = \sum_{i=1}^{t} e_i \lambda_{ij} \quad (1 \leq j \leq s), \quad \text{hvor} \quad \sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_{ij} = 0.$$

Vi får da

$$\sum_{i=1}^{t} e_i \otimes m_i = \sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{t} e_i \lambda_{ij}\Big) \otimes \bar{m}_j = \sum_{i=1}^{t} e_i \otimes \Big(\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \bar{m}_j\Big).$$

Ifølge sætningen på p. 87 fås heraf:

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \bar{m}_j, \quad 1 \leq i \leq t, \quad \text{hvor} \quad \sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_{ij} = 0. \quad \blacksquare$$

<u>Bemærkning</u>. Vi skal i næste kapitel vise, at den i sætningen nævnte nødvendige betingelse for fladhed også er tilstrækkelig.

Eksempler og opgaver til Kapitel III.

Eksempel 1. Lad A og B være endelige abelske grupper. Vis, at $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \simeq A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. (ej naturlig isomorfi).

Eksempel 2. Lad A være en undergruppe i den abelske gruppe B. A kaldes "ren undergruppe" i B, hvis $nA = nB \cap A$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Lad

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

være exakt følge af abelske grupper. Da er

$$0 \to A \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\alpha\otimes 1_M} B \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\beta\otimes 1_M} C \otimes_{\mathbb{Z}} M \to 0$$

exakt for alle $\mathbb{Z}$-moduler M hvis og kun hvis αA er ren undergruppe i B.

Eksempel 3. Lad A og B være moduler over en P.I.D. Λ. Hvis A og B er torsionsfrie, er $A \otimes_{\Lambda} B$ også torsionsfri. Forudsætningen at Λ er P.I.D. er væsentlig (betragt $\Lambda = \mathbb{R}[X,Y]$).

Kapitel IV. Injektive moduler.

Lidt om duale moduler.

Lad B være en venstre Λ-modul og C en $\mathbb{Z}$-modul. Da er $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,C)$ en $\mathbb{Z}$-modul, der via:

$$f\circ\lambda(b) = f(\lambda b) \quad (f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,C))$$

bliver en højre Λ-modul. (Umiddelbar verifikation).

Tilsvarende gælder, at $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,C)$ har struktur som venstre modul for enhver højre Λ-modul A.

Vi har i kapitel III vist, at for en højre Λ-modul A, venstre Λ-modul B og en $\mathbb{Z}$-modul C gælder

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_{\Lambda}B,C) \simeq \mathrm{Sv.Bil}_{\Lambda}(A\times B,C)$$

Opfattes ovenstående som (kontravariante) funktorer i A, bliver disse naturligt isomorfe.

Analogt med sætningen på p. 83 gælder (naturligt i A):

$$\mathrm{Sv.Bil}_{\Lambda}(A\times B,C) \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,C)).$$

Følgelig fås alt i alt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_{\Lambda}B,C) \simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,C)) \qquad (*)$$

(naturligt i A).

Definition. For en venstre Λ-modul M kaldes højre Λ-modulen $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ den til M duale modul.

For enhver (venstre) Λ-modul M findes kanonisk afbildnin ψ fra M til $\hat{M}$ defineret ved

$$\psi(m)[\alpha] = \alpha(m) \quad \text{for} \quad \alpha \in \hat{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Det ses let, at ψ er en Λ-homomorfi, idet for $\alpha \in \hat{M}$ og $m \in M$:

$$\psi(\lambda m)[\alpha] = \alpha(\lambda m)$$
$$\lambda \cdot \psi(m)[\alpha] = \psi(m)[\alpha\lambda] = (\alpha\lambda)[m] = \alpha(\lambda m).$$

Lemma. For enhver venstre Λ-modul M er ψ injektiv.

Bevis. Skal godtgøre, at der til ethvert $m \in M$, $m \neq 0$ findes en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\alpha\colon M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ så $\alpha(m) \neq 0$.

Vi skelner mellem to tilfælde

1) Ordenen af m som element i M's additive gruppe er endelig.

2) Ordenen af m som element i M's additive gruppe er uendelig.

ad 1) Antag $\mathrm{Ord}\, m = n$; da findes $\mathbb{Z}$-homomorfi $f\colon \mathbb{Z}m \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ defineret ved $f(hm) = \left(\frac{h}{n}\right)$, $h \in \mathbb{Z}$

ad 2) her findes $\mathbb{Z}$-homomorfi $f\colon \mathbb{Z}m \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ defineret ved (f.eks.) $f(hm) = (h\cdot\sqrt{2})$, $h \in \mathbb{Z}$.

I begge tilfælde findes et $\mathbb{Z}$-homomorfi $f\colon \mathbb{Z}m \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ så $f(m) \neq 0$. Da $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ er $\mathbb{Z}$-delelig og $\mathbb{Z}$ er P.I.D, er $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en injektiv $\mathbb{Z}$-modul; derfor kan f fortsætte til $\mathbb{Z}$-homomorfi $\alpha\colon M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ og $\alpha(m) = f(m) \neq 0$ ∎

Vi er nu i stand til at vise

Sætning. Lad M være en venstre Λ-modul. Da gælder

$$M \text{ flad} \Leftrightarrow \hat{M} \text{ injektiv (højre) } \Lambda\text{-modul}.$$

<u>Bevis.</u> "$\Rightarrow$" Skal godtgøre, at der til ethvert system af (højre) Λ-moduler og Λ-homomorfier

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[dl, dashed] \\ & \hat{M}' & \end{tikzcd}$$

findes et $g: B \to \hat{M}$ så $gi = f$ eller, at

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\hat{M}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\hat{M})$$

er surjektiv.

Da M er flad, er

$$A \otimes_\Lambda M \xrightarrow{i\otimes 1_M} B \otimes_\Lambda M$$

injektiv afbildning. Idet $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ er $\mathbb{Z}$-injektiv, fås at

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(B\otimes_\Lambda M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A\otimes_\Lambda M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

bliver surjektiv.

Ved brug af den naturlige isomorfi (*) p. 111 fås et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(B\otimes_\Lambda M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A\otimes_\Lambda M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(B,\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z})) & \to & \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,\ \mathbb{R}/\mathbb{Z})) \end{array}$$

hvor det lodrette pile er isomorfier. Da øverste række er surjektiv, bliver nederste række også surjektiv.

"$\Leftarrow$" Antag M ikke er flad. Da fandtes en injektiv homomorfi af (højre) Λ-moduler

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

så

$$A \otimes_\Lambda M \xrightarrow{i\otimes 1_M} B \otimes_\Lambda M$$

ikke var injektiv. Lad k være et element $\neq 0$ i $\mathrm{Ker}(i\otimes 1_M)$. Ved samme argument som i beviset for lemmaet på p. 112 findes $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_\Lambda M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ så $f(k) \neq 0$. For ethvert $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B\otimes_\Lambda M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ gælder $g\circ(i\otimes 1_M)(k) = 0$. Følgelig er afbildningen

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B\otimes_\Lambda M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes_\Lambda M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

ej surjektiv ($f \notin$ billedet ved afbildningen). Som før ses ved hjælp af (*) på p. 111, at

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\hat{M}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,\hat{M})$$

ikke er surjektiv, d.v.s. $\hat{M}$ er ikke injektiv. ∎

Ved benyttelse af Baer's kriterium for injektivitet på p. 69 fås nu let:

<u>Korollar</u>. En venstre Λ-modul M er flad hvis (og kun hvis) for ethvert højreideal $\mathfrak{a}$ i Λ med kanonisk injektion $\mathfrak{a} \xrightarrow[i]{} \Lambda$ afbildningen $i\otimes 1_M: \mathfrak{a} \otimes_\Lambda M \to \Lambda \otimes_\Lambda M$ er injektiv.

Vi er nu istand til at vise tilstrækkeligheden i fladhedskriteriet på p. 108.

<u>Sætning</u>. Lad M være en venstre Λ-modul for hvilket enhver lineær relation $a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_tm_t = 0$ kan "løses" d.v.s. der findes elementer $\lambda_{ij} \in \Lambda$, $\bar{m}_j \in M$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq s$, så

$$m_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \bar{m}_j, \quad 1 \leq i \leq t$$

og $\sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_{ij} = 0, \quad 1 \leq j \leq s.$ da er M flad.

Bevis. På grund af korollaret er det nok at godtgøre $\mathfrak{a} \otimes_\Lambda M \to \Lambda \otimes_\Lambda M$ er injektiv for ethvert højreideal $\mathfrak{a}$. Lad $a_1 \otimes m_1 + \cdots + a_t \otimes m_t$ være elementer i $\ker(\mathfrak{a} \otimes_\Lambda M \to \Lambda \otimes_\Lambda M)$. Da må åbenbart $\sum_{i=1}^{t} a_i m_i = 0$. Følgelig kan vi skrive: $m_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \bar{m}_j$, hvor $\sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_{ij} = 0$ og derfor $\sum_{i=1}^{t} a_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^{t} a_i \otimes (\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} \bar{m}_j) = \sum_{j=1}^{t} (\sum_{i=1}^{t} a_i \lambda_{ij}) \otimes \bar{m}_j = 0$. Altså er $\ker(\mathfrak{a} \otimes_\Lambda M \to \Lambda \otimes_\Lambda M) = 0$. ∎

Vi kommer nu til hovedanvendelsen af sætningen på p.112

Sætning. Enhver (venstre) Λ-modul M kan indlejres i en injektiv modul.

Bevis. $\hat{M}$ er en homomorft billede af en fri (højre) Λ-modul F:

$$F \to \hat{M} \to 0$$

Ved overgang til duale moduler fås injektiv afbildning,

$$0 \to \hat{\hat{M}} \to \hat{F}$$

som let eftervises at være en Λ-homomorfi. Ifølge Lemmaet på p.112 fås: M kan indlejres i $\hat{\hat{M}}$, der kan indlejres i $\hat{F}$. Ifølge sætningen på p.112 er $\hat{F}$ en injektiv (venstre) Λ-modul. ∎

Vi giver nu nogle anvendelser af denne sætning.

Sætning. En venstre Λ-modul M er injektiv, hvis og kun hvis M er direkte summand i enhver modul der indeholder M.

Bevis. På grund af korollaret på p.72 nok at vise "hvis". Lad N være en injektiv modul indeholdende M. M er da direkte summand i N og derfor injektiv (jfr. sætningen på p.72). ∎

Sætning. En ring Λ er venstre Noethersk $\Longleftrightarrow$ enhver direkte sum af injektive Λ-moduler er injektiv.

Bevis. På grund af sætningen på p.76 nok at vise "$\Leftarrow$".

Antag Λ ej venstre Noethersk. Da findes strengt voksende kæde af venstreidealer $\mathfrak{a}_1 \subsetneqq \mathfrak{a}_2 \subsetneqq \mathfrak{a}_3 \subsetneqq \cdots$; $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$. For hvert $\mathfrak{a}_n$ vælges indlejring $0 \to \Lambda/\mathfrak{a}_n \xrightarrow[i_n]{} M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$, hvor $M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$ er injektiv. Beviset vil være afsluttet, når vi har vist at $\sum_{n=1}^{\infty}\oplus M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$ ikke er injektiv. Lad κ_n være den kanoniske homomorfi $\Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a}_n$. Lad f være afbildningen fra $\mathfrak{a}$ til $\sum_{n=1}^{\infty}\oplus M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$ defineret ved $f(a) = (\cdots, i_n\kappa_n(a), \cdots)$; idet hvert $a \in \mathfrak{a}$ tilhører næsten alle $\mathfrak{a}_n$, er $f(a)$'s koordinater næsten alle 0 d.v.s. $f(a)$ er virkelig element i $\sum_{n=1}^{\infty}\oplus M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$. f er klart en Λ-homomorfi. Vi skal godtgøre, at f ej kan fortsættes til en homomorfi $g\colon \Lambda \to \sum_{n=1}^{\infty}\oplus M(\Lambda/\mathfrak{a}_n)$. For en sådan fortsættelse g måtte gælde:

$g(1) = (m_1, m_2, \cdots, m_t, 0, 0, 0\cdots)$ for et passende t $(m_i \in M(\Lambda/\mathfrak{a}_i),\ 1 \leqq i \leqq t)$. For ethvert $a \in \mathfrak{a}$ måtte da $f(a) = g(a) = ag(1) = (am_1, \cdots, am_t, 0, 0\cdots, 0, \cdots)$. For $a \in \mathfrak{a}\setminus\mathfrak{a}_{t+1}$ er imidlertid $f(a) = (\cdots, i_t\kappa_t(a), i_{t+1}\kappa_{t+1}(a), \cdots)$

Da $a \notin \mathfrak{a}_{t+1}$, er $(t+1)^{te}$ koordinat for $f(a) \neq 0$. Modstrid! ∎

I analogi med sætningen om projektive resolutioner fås af indlejringssætningen på p. 115 :

Sætning. Til enhver Λ-modul M findes en injektiv resolution, d.v.s. en exakt følge (normalt uendelig) af formen

$$0 \to M \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_n \to \cdots$$

hvor $Q_0, Q_1, \cdots$ er injektive moduler.

Man kan på denne baggrund i analogi med projektiv dimension indføre

Definition. Lad M være (venstre) Λ-modul. Den injektive dimension af M, $\mathrm{l.i.d.}_\Lambda(M)$ indføres ved l.i.d. $\mathrm{l.i.d.}_\Lambda(M) \leqq n \iff M$ har en injektiv resolution af længde n af formen: $0 \to M \to Q_0 \to \cdots \to Q_n \to 0$.

Eksempel. Schanuel's lemma kan dualiseres til injektive moduler: Lad $0 \to M \to Q \to K$ og $0 \to M \to Q' \to K' \to 0$ være exakt med Q og Q' injektive. Da er $Q \oplus K' \simeq Q' \oplus K$. Man kan da indføre "injektive ækvivalens" etc. og derved indføre injektiv dimension på tilsvarende måde som for projektiv dimension.

Eksempel. $\mathrm{i.d.}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = 0 \quad \mathrm{i.d.}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = 1$.

Essentielle udvidelser.

Definition. Lad B være (venstre) Λ-modul og A undermodul i B. B kaldes essential udvidelse af $A, (A \underset{\text{ess}}{\subseteq} B)$, hvis $M \subseteq B$, $M \neq 0 \Rightarrow A \cap M \neq 0$.

Dette kan også formuleres: $\forall b \in B \setminus \{0\}$ $\exists \lambda \in \Lambda$ så $\lambda b \in A \setminus \{0\}$.

Eksempel. Lad A være direkte summand i B, da er $A \underset{\text{ess}}{\subseteq} B$ hvis og kun hvis $A = B$.

Eksempel. $\mathbb{Z} \underset{\text{ess}}{\subseteq} \mathbb{Q}$.

Definition. Lad α være injektiv homomorfi $\alpha: A \to B$, α kaldes essentiel, hvis $\alpha A \underset{\text{ess}}{\subseteq} B$.

Bemærkning. Man ser let at relationen "er essentiel udvidelse af" er transitiv. For injektive afbildning α og β indebærer dette at α ess, og β ess $\Rightarrow \beta \circ \alpha$ ess.

Endvidere gælder:

$$A \subseteq B \subseteq C, \quad A \underset{\text{ess}}{\subseteq} C \quad \Rightarrow \quad A \underset{\text{ess}}{\subseteq} B \quad \text{og} \quad B \underset{\text{ess}}{\subseteq} C$$

Sætning. Lad $\alpha: A \to B$ være essentiel injektion og Q en injektiv modul. Lad f være injektiv homorfi $A \to Q$ da vil ethvert g for hvilket

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha", "\text{ess}"'] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

kommuterer, være injektiv. (Da Q injektiv, findes sådanne g'er).

Bevis. $f = g\alpha \Rightarrow 0 = \ker f = \alpha \ker f = \alpha A \cap \ker g \Rightarrow \ker g = 0$. ∎

Definition. Lad $\alpha: A \to B$ være essentiel injektion. α kaldes triviel, hvis $\alpha A = B$.

Sætning. For enhver (venstre) Λ-modul M gælder: M injektiv $\Longleftrightarrow$ enhver essentiel injektion $\beta: M \to N$ er triviel.

Bevis. "$\Rightarrow$" klart. (Benyt, at βM er direkte summand i N samt eksemplet på p. 118) "$\Leftarrow$": M indlejres i injektiv modul: $0 \to M \xrightarrow{i} A$, A injektiv. Lad $\mathcal{S}$ = mængden af undermoduler S af A så $S \cap iM = 0$. $\mathcal{S}$ ordnes ved mængdeteoretisk inklusion. $\mathcal{S}$ bliver herved induktivt ordnet, så $\mathcal{S}$ ifølge Zorn's lemma har et max. element A_0. Den sammensatte afbildning κi: $M \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\kappa} A/A_0$ (hvor κ er den kanoniske homomorfi af A på A/A_0) er injektiv, da $\ker \kappa i =$ $\operatorname{Ker} \kappa i = M \cap i^{-1}A_0 \simeq iM \cap A_0 = 0$. κi er essentiel:

Lad $L \subseteq A/A_0$, $L \neq 0$. $\kappa^{-1}(L) \geqq A_0$, hvorfor på grund af A_0's maximalitet i $\mathcal{S}$, $\kappa^{-1}(L) \cap iM \neq 0$. Lad $x \in \kappa^{-1}(L) \cap iM$, $x \neq 0$. Da gælder: $\kappa x \neq 0$, idet $iM \cap A_0 = 0$. Følgelig $0 \neq \kappa x \in L \cap \kappa iM$, d.v.s. $\kappa iM \underset{ess}{\subseteq} A/A_0$. Ifølge forudsætningen er κi da surjektiv, d.v.s. en isomorfi. Lad $\alpha = (\kappa i)^{-1}$. Nu er $1_M = \alpha(\kappa i) = (\alpha\kappa)i$ hvorfor $0 \to M \xrightarrow{i} A$ splitter, og M er som direkte summand i den injektive modul A selv injektiv. ∎

Injektivt hylster.

Sætning. Enhver (venstre) Λ-modul M kan indlejres essentielt i en injektiv modul, d.v.s. $\exists$ injektiv modul A så $A \underset{ess}{\supseteq} M$.

Bevis. M kan indlejres i en injektiv modul Q; $M \subseteq Q$. Lad $\mathcal{S} = \{A \mid M \subseteq A \subseteq Q,\ M \underset{ess}{\subseteq} A\}$. $\mathcal{S}$ ordnes ved mængdeteoretisk inklusion. $\mathcal{S}$ bliver herved induktivt ordnet: Hvis $\{A_\alpha\}$ er totalt ordnet delmængde i $\mathcal{S}$ er $\cup A_\alpha$ en majorant [bevis: $\cup A_\alpha \underset{ess}{\supseteq} M$, idet $S \subseteq \cup A_\alpha$,
$S \cap M = 0 \Rightarrow (S\cap M) \cap \cup A_\alpha = \cup(S \cap A_\alpha \cap M) = 0 \Rightarrow$
$S \cap A_\alpha \cap M = 0 \quad \forall\alpha \Rightarrow S \cap A_\alpha = 0$, da $A_\alpha \underset{ess}{\supseteq} M \Rightarrow \cup(S\cap A_\alpha) = 0$
$\Rightarrow S \cap (\cup A_\alpha) = 0 \Rightarrow S = 0$]. Ifølge Zorn's lemma findes da max. elementer i $\mathcal{S}$. Lad A være en sådan modul. Sætningen viser nu ved at godtgøre at A er injektiv. Hertil benyttes sætningen på p. 119.

Lad $A \xrightarrow{\alpha} B$ være essentiel injektion. Idet $M \subseteq A \subseteq Q$ og Q er injektiv findes afbildning $\beta\colon B \to Q$ så $\beta\alpha = 1_A$, hvor β ifølge (~~øvelse~~) sætningen på p. 118 er injektiv. Vi har altså følgende situation;

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Q \\
A \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

$\alpha A \underset{ess}{\subset} B \Rightarrow \beta\alpha A \underset{ess}{\subset} \beta B$ eller $A \underset{ess}{\subset} \beta B$. Da $M \underset{ess}{\subset} A$ fås $M \underset{ess}{\subset} \beta B$. Da A max. i $\mathcal{S}$ følger heraf: $\beta B = A$. αA er således direkte summand i B og, idet $\alpha A \underset{ess}{\subset} B$, fås $\alpha A = B$; d.v.s. α er triviel. ∎

Sætning. Antag $M \xrightarrow[\alpha]{} A$ ess. injektion, A injektiv modul og $M \xrightarrow[\beta]{} B$ ess. injektion, B injektiv modul, da findes isomorfi $\varphi: A \to B$ så $\varphi\alpha = \beta$.

Bevis. Da B injektiv findes $\varphi: A \to B$ så $\varphi \circ \alpha = \beta$. Da α essentiel, vil φ være injektiv (jfr. sætningen på p. 118 nederst). Da $\alpha M \underset{ess}{\subset} A$ vil $\underset{\beta M}{\overset{\varphi\alpha M}{\shortparallel}} \underset{ess}{\subset} \varphi A \subseteq B$

Da $\beta M \underset{ess}{\subset} B$ er $\varphi A \underset{ess}{\subset} B$. Idet $A \simeq \varphi A$, er φA injektiv modul, hvorfor φA er direkte summand i B. Følgelig er $\varphi A = B$, d.v.s. φ også surjektiv. φ altså isomorfi. ∎

Definition. Den ifølge det ovennævnte (pånær isomorfi) entydig bestemte injektive modul, der indeholder M som essentiel undermodul, kaldes M's injektive hylster og betegnes E(M).

Vi giver nu en alternativ karakterisering af E(M):

Sætning. Lad A være en injektiv modul indeholdende M. Da er A injektivt hylster for M $\iff$ A minimal injektiv modul indeholdende M (d.v.s. ingen ægte undermodul i A indeholdende M er injektiv).

Bevis. "$\Rightarrow$" Hvis $M \underset{ess}{\subset} A$ og $\tilde{A} \supseteq M$, $\tilde{A} \subseteq A$, $\tilde{A}$ injektiv, da er $A \underset{ess}{\supset} \tilde{A}$ og $\tilde{A}$ direkte summand i A, hvorfor $\tilde{A} = A$.

"$\Leftarrow$" Lad $\tilde{A}$ være en maximal essentiel udvidelse af M inden for A. Ifølge beviset for sætningen på p. 120 er $\tilde{A}$ da injektiv. På grund af forudsætningen er da $A = \tilde{A}$ d.v.s. A er injektivt hylster for M. ∎

<u>Bemærkning</u>. Det kan vises, at $E(M)$ i almindelighed ikke er "funktoriel" i M.

<u>Indekomposable injektive moduler.</u>

<u>Definition</u>. En (venstre) Λ-modul M kaldes indekomposable, hvis 0 og M er de eneste direkte summander i M.

<u>Bemærkning</u>. Hvis M er en fra 0 forskellig injektiv modul er M indekomposable netop når M ikke indeholder injektive undermoduler $\neq 0$ og M.

<u>Definition</u>. (0) kaldes irreducibel i modulen M, hvis $(0) = A \cap B$, A,B undermoduler i $M \Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$.

<u>Sætning</u>. Lad M være (venstre) Λ-modul og $E(M)$ det injektive hylster. M betragtes som undermodul i $E(M)$. Da er følgende betingelser ækvivalente

1) (0) irreducibel i M

2) (0) irreducibel i $E(M)$

3) $E(M)$ indekomposabel.

<u>Bevis</u>. Kan åbenbart antage M og $E(M) \neq 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Antag $0 = A \cap B$; $A,B \subseteq E(M)$. Da er $0 = (A \cap M) \cap (B \cap M)$. Idet (0) irreducibel i M, er $A \cap M = 0$ eller $B \cap M = 0$; da $M \underset{ess}{\subseteq} E(M)$, er derfor $A = 0$ eller $B = 0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Hvis $E(M) = A \oplus B$ (indre direkte sum) er $A \cap B = 0$ hvorfor $A = 0$ eller $B = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1). Antag $0 = A \cap B$, $A, B \subseteq M$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. En max. essentiel udvidelse af A inden for $E(M)$ er injektiv (jfr. bevis på p. 120), derfor (jfr. bemærkning på p. 122) lig $E(M)$. D.v.s. $A \subseteq_{ess} E(M)$. Følgelig er $A \cap B \neq 0$. Modstrid. ∎

<u>Injektive moduler over venstre Noetherske ringe.</u>

<u>Lemma.</u> Lad Λ være venstre Noethersk og A en endelig frembragt venstre Λ-modul $\neq 0$. Da indeholder A en fra 0 forskellig undermodul hvori (0) er irreducibel.

<u>Bevis.</u> Indirekte. Da kan (0) skrives $(0) = A_1 \cap A_2$, $A_1 A_2$ undermoduler $\neq 0$ i A

(0) reducibel i A_2 d.v.s. $(0) = A_3 \cap A_4$, $A_3, A_4 \subsetneq A_2$, $A_3, A_4 \neq 0$

(0) reducibel i A_3 d.v.s. $(0) = A_5 \cap A_6$, $A_5, A_6 \subsetneq A_3$, $A_5, A_6 \neq 0$

ect.

Vi har situationen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
A_1 \arrow[rr, dash, dashed] & & A_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
& A_3 & & A_4 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
& & A_5 & & A_6 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& & & A_7 & & A_8
\end{tikzcd}$$

A_1 og A_3 danner direkte sum.

A_1 og A_3 og A_5 danner direkte sum. Etc.

Følgelig gælder: $A_1 \subsetneq A_1 \oplus A_3 \subsetneq A_1 \oplus A_3 \oplus A_5 \subsetneq \cdots \subseteq A$. Dette strider mod, at A er Noethersk (jfr. sætningen på p 12). ∎

Korollar. Lad M være en injektiv venstre modul $\neq 0$ over en venstre Noethersk ring Λ. Da indeholder M en indekomposabel injektiv undermodul $\neq 0$.

Bevis. Ifølge lemmaet på p. 123 findes en undermodul $K \neq 0$ i M, hvori (0) er irreducibel. (Anvend lemmaet på en endeligt frembragt undermodul $A \neq 0$, $A \subseteq M$). En max. essential udvidelse af K inden for M er injektivt hylster for K og derfor ifølge sætningen på p. 122 indekomposabel. ∎

Sætning. Enhver injektiv venstre modul M $(\neq 0)$ over en venstre Noethersk ring Λ er direkte sum af indekomposable injektive moduler.

Bevis. Først en (ad hoc) definition:

Definition. 1°. En endelig familie $M_1, \cdots, M_n$ af undermoduler $(\neq 0)$ af M kaldes uafhængig, hvis $M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ (indre direkte sum).

2°. En vilkårlig familie $\{M_i\}$ af undermoduler $(\neq 0)$ af M kaldes uafhængig, hvis enhver endelig delmængde af M_i'erne er uafhængig i henhold til 1°.

Lad $\mathcal{G}$ være mængden af alle uafhængige familier af injektive indekomposable undermoduler $(\neq 0)$ af M. $\mathcal{G} \neq \emptyset$ ifølge korollaret. $\mathcal{G}$ ordnes ved inklusion. $\mathcal{G}$ bliver herved induktivt ordnet. Ifølge Zorn's lemma findes en maximal uafhængig familie $\{M_i\}$ af injektive indekomposable undermoduler af M. Da gælder $\Sigma M_i = \Sigma\oplus M_i \subseteq M$. Vi vil vise $\Sigma\oplus M_i = M$. Antag $\Sigma\oplus M_i \subsetneq M$. Da Λ venstre Noethersk, er (jfr. sætningen på p.76) $\Sigma\oplus M_i$ injektiv og derfor direkte summand i M d.v.s. $M = (\Sigma\oplus M_i) \oplus K$; $K \neq 0$. Ifølge korollaret indeholder K en injektiv indekomposabel undermodul $M^* \neq 0$. Da er $\{M_i\} \cup \{M^*\}$ uafhængige familier af injektive indekomposable undermoduler, d.v.s. $\{M_i\} \cup \{M^*\} \in \mathcal{J}$ og $\{M_i\} \subsetneq \{M_i\} \cup \{M^*\}$ i strid med maximaliteten af $\{M_i\}$. ∎

Injektive moduler over kommutative Noetherske ringe.

Vi har set, at de indekomposable injektive moduler er byggesten for de injektive moduler over venstre Noetherske ringe. For kommutative Noetherske ringe kan disse indekomposable injektive moduler angives præcist:

Sætning. Lad Λ være kommutativ og Noethersk, og M en injektiv Λ-modul $\neq 0$. Da er følgende to betingelser ækvivalente:

i) M indekomposabel

ii) $M = E(\Lambda/P)$, hvor P er et primideal i Λ.

Bevis. i)⇒ii). Vi betragter alle idealer i Λ af formen $\mathrm{Ann}(\bar{x})$, $x \in M/\{0\}$, hvor $\mathrm{Ann}\, x$ betegner $\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda x = 0\}$. Da Λ er Noethersk, findes et maximalt blandt disse. Lad $P = \mathrm{Ann}(x)$ være et sådant. P må være primideal. Thi antag $\lambda_1 \notin P$, $\lambda_2 \notin P$, man $\lambda_1\lambda_2 \in P$; da ville $\lambda_1 x \neq 0$ og $\lambda_2 \in \mathrm{Ann}(\lambda_1 x)$, og dermed $\mathrm{Ann}(\lambda_1 x) \supseteq P$, $\mathrm{Ann}(\lambda_1 x) \ni \lambda_2$ d.v.s. $\mathrm{Ann}(\lambda_1 x) \supsetneq P$ i strid med maximaliteten af P.

Ud fra afbildningen $\Lambda \to \Lambda x$ defineret ved $\lambda \to \lambda x$ ses, at $\Lambda x \simeq \Lambda/P$. En max. essentiel udvidelse af Λx indenfor

M er injektiv og derfor på grund af i) $= M$. Følgelig er $M = E(\Lambda x) = E(\Lambda/P)$.

ii) $\Rightarrow$ i). På grund af sætningen på p. 122 nok at vise at (0) er irreducibel i Λ/P. Antag $A, B \subseteq \Lambda/P$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Lad $a \in A$ $a \neq 0$, $b \in B$ $b \neq 0$. For repræsentanter a og b for a, resp. b gælder da, $a \notin P$, $b \notin P$, og da P er primideal, $ab \notin P$. Men følgelig er $ab = a\,b \neq 0$ og $a\,b \in A \cap B$. ∎

<u>Sætning.</u> For primidealer P og Q i en kommutativ Noethersk ring Λ gælder

$$P = Q \iff E(\Lambda/P) \simeq E(\Lambda/Q)$$

<u>Bevis</u> "$\Rightarrow$". Triviel.

"$\Leftarrow$". Betragt $M = E(\Lambda/P)$ som essentiel udvidelse af Λ/P

og $M_1 = E(\Lambda/Q)$ som essentiel udvidelse af Λ/Q.

$$\begin{array}{ccc} M = E(\Lambda/P) & \overset{\varphi}{\to} & M_1 = E(\Lambda/Q) \\ \cup\!\shortparallel \text{ ess} & & \cup\!\shortparallel \text{ ess} \\ \Lambda/P & \xrightarrow[\varphi_{\mathrm{Res}, \Lambda/P}]{} & \Lambda/Q \end{array}$$

For en isomorfi φ fra M på M_1 gælder $\varphi(\Lambda/P) \underset{\text{ess}}{\subseteq} \varphi M = M_1$. $\varphi(\Lambda/P) \cap (\Lambda/Q) \neq 0$.

For ethvert $\lambda \in (\Lambda/P)\setminus\{0\}$ gælder $\mathrm{Ann}(\lambda) = P$.

For ethvert $\lambda \in (\Lambda/Q)\setminus\{0\}$ gælder $\mathrm{Ann}(\lambda) = Q$.

Dette indebærer $P = Q$. ∎

Ved sammenfatning af sætningerne pp. 124-126 fås:

Sætning. Enhver injektiv modul M over en kommutativ Noethersk ring Λ kan skrives på formen:

$$M = \sum_p \oplus (E(\Lambda/P))^{(n_p)}$$

hvor P gennemløber alle primidealer i Λ pg n_p et kardinaltal (evt. 0) afhængigt af P.

Man kan vise at n_p'erne er entydigt bestemte ved M. Vi vil her kun eftervise dette i det specielle tilfælde hvor $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Lad os hertil først bestemme de indekomposable injektive moduler over $\mathbb{Z}$. Primidealerne i $\mathbb{Z}$ er (0) og $\mathbb{Z}p$, p = primtal.

Det ses let, at $E(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. For at bestemme $E(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)$ betragter vi undergruppen $\mathbb{Z}_p$ af $\mathbb{Q}$ bestående af alle tal af formen $\frac{a}{p^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Da vil $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ være delelig og dermed injektiv $\mathbb{Z}$-modul. $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ betegnes ofte $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Undergruppen U_p af $\mathbb{Z}(p^\infty)$ bestående af elementerne $\left(\frac{a}{p}\right)$, $a \in \mathbb{Z}$ er cyklisk af orden p. Endvidere er $\mathbb{Z}(p^\infty)$ en essentiel udvidelse af U_p. Følgelig: $\mathbb{Z}(p^\infty) = E(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)$.

Vi har derfor

Sætning. Enhver delelig $\mathbb{Z}$-modul M kan skrives

$$M = \mathbb{Q}^{(n_o)} \oplus \sum_p \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(n_p)} \qquad (*)$$

hvor p gennemløber alle primtal.

Entydighedssætning. Exponenterne n_o, n_p i $(*)$ entydigt bestemte ved M.

<u>Bevis for entydighedssætning</u>. Antag M har to fremstillinger

$$M = \mathbb{Q}^{(n_0)} \oplus \sum_p \oplus \mathbb{Z}(p\infty)^{(n_p)}$$

$$M = \mathbb{Q}^{(t_0)} \oplus \sum_p \oplus \mathbb{Z}(p\infty)^{(t_p)} .$$

Ved at betragte M_T og M/M_T ses at

$$\mathbb{Q}^{(n_0)} = \mathbb{Q}^{(t_0)} \qquad \text{(I)}$$

og

$$\sum_p \oplus \mathbb{Z}(p\infty)^{(n_p)} \simeq \sum \oplus \mathbb{Z}(p\infty)^{(t_p)} \qquad \text{(II)}$$

Ud fra (I) sluttes, at $n_0 = t_0$ da dimensionen af et vektorrum er entydigt bestemt. For primtal p og q gælder

$$\mathrm{Ann}(q,\mathbb{Z}(p\infty)) = \begin{cases} U_p & \text{for } p = q \\ 0 & \text{for } p \neq q. \end{cases}$$

Følgelig fås

$$\mathrm{Ann}(q, \sum_p \oplus \mathbb{Z}(p\infty)^{(n_p)}) = U_q^{(n_q)} .$$

Anvendes dette på hver side af (II), fås

$$U_p^{(n_p)} \simeq U_p^{(t_p)} \quad \text{for alle } p.$$

Idet $U_p^{(n_p)}$ (og $U_p^{(t_p)}$) er vektorrum over $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ ses som før, at $u_p = t_p$. ∎

<u>Bemærkning</u>. Det ses let, at enhver ægte undergruppe i $\mathbb{Z}(p\infty)$ er endelig. Omvendt gælder, at en uendelig abelsk

gruppe hvori enhver ægte undergruppe er endelig er isomorf med $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (for et passende primtal p). [Man bemærker først, at en sådan gruppe må være en delelig torsionsgruppe. Dernæst anvendes den viste struktursætning.]

Opgave. Vis, at $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \sum_p \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$

Opgave. Vis, at tensorproduktet af to injektive moduler over et (kommutativt) integritetsområde er en injektiv modul.

Kapitel V. Direkte og projektive limites.

Definition. En partielt ordnet mængde I kaldes filtrerende, hvis der for alle $\alpha, \beta \in I$ findes $\gamma \in I$ så $\gamma \geqq \alpha$, $\gamma \geqq \beta$.

Definition. Lad Λ være en vilkårlig ring, og I en filtrerende (index)-mængde. Ved et I-direkte system forsås én familie $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$, af Λ-moduler og Λ-homomorfier $f_{\beta\alpha} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha, A_\beta)$, $\alpha \leq \beta$ så

1) $f_{\alpha\alpha} = 1_{A_\alpha}$

2) $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \cdot f_{\beta\alpha}$ for $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

Vi søger nu en modul M og Λ-homomorfier $f_\alpha \colon A_\alpha \to M$, $\alpha \in I$, så i) $f_\beta f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ $\forall \alpha \leq \beta$

ii) Hvis $\{N, g_\alpha\}$, $g_\alpha \in \mathrm{Hom}(A_\alpha, M)$, $\alpha \in I$ opfylder

$$g_\beta f_{\beta\alpha} = g_\alpha \quad \forall \alpha \leqq \beta$$

findes netop een Λ-homomorfi $\varphi \colon M \to N$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] \arrow[drr, "g_\alpha"'] & A_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[dr, "g_\beta"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
 & & N
\end{tikzcd}$$

er kommutativt.

Bemærkning. Hvis der findes et M med egenskaberne i) og ii) er det ent. bestemt på nær isomorfi. [Her benyttes entydigheden af φ.]

Vi vil nu vise, at der virkelig findes en Λ-modul M tilfredsstillende i) og ii).

Lad $i_\alpha \colon A_\alpha \to \coprod_{\alpha \in I} A_\alpha$ være homomorfien bestemt ved

$i_\alpha a_\alpha = (0,\cdots 0,\ a_\alpha,\ 0,\ 0\cdots)$, hvor α^{te} koordinat er a_α og alle øvrige er 0. Lad K være undermodulen i A_α defineret ved $K = \sum_{\alpha\leq\beta}\Lambda(i_\alpha a_\alpha - i_\beta f_{\beta\alpha} a_\alpha)$, hvor summationen udstrækkes over alle par (α,β) med $\alpha \leq \beta$.

Vi definerer nu $M = \coprod_{\alpha\in I} A_\alpha / K$ og κ den kanoniske homomorfi fra $\coprod_\alpha A_\alpha$ på $\coprod_\alpha A_\alpha/K$. Endvidere defineres $f_\alpha = \kappa\circ i_\alpha$.

Via nogle lemmaer vises at M og $\{f_\alpha\}$ $\alpha \in I$ opfylder i) og ii).

<u>Lemma 1.</u> $f_\beta f_{\beta\alpha} = f_\alpha \quad \forall\alpha \leq \beta$.

<u>Bevis.</u> $\kappa i_\beta f_{\beta\alpha} - \kappa i_\alpha = 0 \quad \forall\alpha \leq \beta$. ∎

<u>Lemma 2.</u> $\forall m \in M \quad \exists\alpha \in I$, så $m = f_\alpha(a_\alpha)$ for passende $a_\alpha \in A_\alpha$ ["f_α'er lokalt surjektiv homomorfifamilie"].

<u>Bevis.</u> m kan skrives: $m = \kappa(\sum_{\nu=1}^{n} i_{\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu})$, $a_{\alpha_\nu} \in A_{\alpha_\nu}$. Da I filtrerende, findes $\beta \in I$ så $\beta \geq \alpha_1,\cdots,\alpha_n$. Elementet $\sum_{\nu=1}^{n}(i_\beta f_{\beta\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu} - i_{\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu})$ tilhører K, hvorfor

$$m = \kappa(\sum_{\nu=1}^{n} i_\beta f_{\beta\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu} - i_{\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu}) + \kappa(\sum_{\nu=1}^{n} i_{\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu}) = \kappa\ i_\beta(\sum_{\nu=1}^{n} f_{\beta\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu}) =$$

$f_\beta(a_\beta)$ hvor $a_\beta \in \sum_{\nu=1}^{n} f_{\beta\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu}$. ∎

<u>Lemma 3.</u> Lad $a_\alpha \in A_\alpha$. Da gælder: $f_\alpha a_\alpha = 0 \iff \exists\beta \geq \alpha$ med $f_{\beta\alpha} a_\alpha = 0$.

<u>Bevis.</u> "$\Leftarrow$" klart, da $f_\alpha = f_\beta f_{\beta\alpha}$ (Lemma 1).

"$\Rightarrow$" $f_\alpha a_\alpha = \kappa i_\alpha a_\alpha = 0$ indebærer at $i_\alpha a_\alpha \in K$, og $i_\alpha a_\alpha$ kan derfor skrives: $i_\alpha a_\alpha = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \beta_\nu \geq \alpha_\nu}}^{n} (i_{\beta_\nu} f_{\beta_\nu\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu} - i_{\alpha_\nu} a_{\alpha_\nu})$. Der findes et $\gamma \in I$ så $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta_\nu$, $1 \leq \nu \leq n$. Vi definerer en homomorfi $\coprod_{\beta \leq \gamma} A_\beta \xrightarrow{u} A_\gamma$ ved $u(i_\beta a_\beta) = f_{\gamma\beta}a_\beta$. Anvendes u på ovenstående udtryk for $i_\alpha a_\alpha$, fås

$$f_{\gamma\alpha}a_\alpha = \Sigma(f_{\gamma\beta_\nu}f_{\beta_\nu\alpha_\nu}a_{\alpha_\nu} \div f_{\gamma\alpha_\nu}a_{\alpha_\nu}) = 0. \blacksquare$$

Lemma 4. Lad $a_\alpha \in A_\alpha$, $a_\beta \in A_\beta$. Da gælder $f_\alpha a_\alpha = f_\beta a_\beta \iff \exists \gamma \geq \alpha,\beta$ så $f_{\gamma\alpha}a_\alpha = f_{\gamma\beta}a_\beta$.

Bevis. "$\Leftarrow$" $f_\alpha a_\alpha = f_\gamma f_{\gamma\alpha}a_\alpha = f_\gamma f_{\gamma\beta}a_\beta = f_\beta a_\beta$.
"$\Rightarrow$" Først vælges vilk. $\gamma \geq \alpha,\beta$. Da gælder $f_\gamma f_{\gamma\alpha}a_\alpha = f_\gamma f_{\gamma\beta}a_\beta$. Anvendes Lemma 3 på $f_{\gamma\alpha}a_\alpha - f_{\gamma\beta}a_\beta$, fås $f_{\delta\gamma}(f_{\gamma\alpha}a_\alpha - f_{\gamma\beta}a_\beta) = 0$ for et passende $\delta > \gamma$. Hermed fås $f_{\delta\alpha}a_\alpha = f_{\delta\beta}a_\beta$. $\blacksquare$

Vi kan nu vise, at M, $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in I$ opfylder i) og ii).
i) er netop udsagnet i Lemma 1.
For at vise ii) betragtes endnu en modul N, og homomorfier $g_\alpha: A_\alpha \to N$ så $g_\beta f_{\beta\alpha} = g_\alpha$ $\forall \alpha \leq \beta$. Vi søger $\varphi: M \to N$ så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"'] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"] \arrow[drr, "g_\alpha"'] & A_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[dr, "g_\beta"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
 & & N
\end{tikzcd}$$

er kommutativt.

Ethvert $m \in M$ kan (Lemma 2) skrives $m = f_\alpha a_\alpha$ for passende α og $a_\alpha \in A_\alpha$. For et φ med ovennævnte egenskab må da $\varphi m = \varphi f_\alpha a_\alpha = g_\alpha(a_\alpha)$ Altså: højst et φ så diagrammet kommuterer. Dernæst: der findes et φ så diagrammet kommuterer. Antag $m = f_\alpha a_\alpha = f_\beta a_\beta$; da er (Lemma 4) $f_{\gamma\alpha}a_\alpha = f_{\gamma\beta}a_\beta$ for passende $\gamma \geq \alpha,\beta$. Følgelig er $g_\alpha(a_\alpha) = g_\gamma f_{\gamma\alpha}a_\alpha = g_\gamma f_{\gamma\beta}a_\beta = g_\beta(a_\beta)$. Altså findes der en veldefineret afbildning φ så $\varphi(m) = g_\alpha(a_\alpha)$ for m $m = f_\alpha(a_\alpha)$. φ ses let at være en Λ-homomorfi. Vi har således vist, at der findes netop et φ så ovenstående diagram er kommutativt. ∎

Definition. Den på nær isomorfi entydigt bestemte modul M kaldes den direkte limes for systemet $\{M_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ og betegner $\varinjlim_{\alpha\in I}\{M_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ eller blot $\varinjlim_I M_\alpha$.

Eksempel 1. Lad A være filtrerende foreningsmængde af undermodulerne A_α. Disse udgør med de naturlige injektioner $i_{\beta\alpha}: A_\alpha \to A_\beta$, hvor $A_\alpha \subseteq A_\beta$ for $\alpha \leq \beta$ et direkte system. Da gælder $A \simeq \lim A_\alpha$.

Eksempel 2. Lad A_α, $\alpha \in I$ være vilkårlig familie af moduler. Lad D(I) være mængden af endelige delmængder af I. D(I) bliver en filtrerende mængde ved mængdeteoretisk inklusion. Modulerne $\coprod_{\alpha\in I_o} A_\alpha$, hvor I_o gennemløber D(I), udgør et direkte system med D(I) som indexmængde, idet man for $I_o \subseteq J_o$ $(\in D(I))$ definerer $f_{J_o I_o}: \coprod_{\alpha\in I_o} A_\alpha \to \coprod_{\alpha\in J_o} A_\alpha$. Ved $f_{J_o I_o}(\{a_\alpha\}_{\alpha\in I_o}) = \{b_\alpha\}$, $\alpha \in J_o$, hvor

$$b_\alpha = \begin{cases} a_\alpha & \text{for } \alpha \in I_o \\ 0 & \text{for } \alpha \notin I_o \end{cases}.$$

$$\text{Da gælder } \varinjlim_{J\in D(I)} \coprod_{\alpha\in J} A_\alpha \simeq \coprod_{\alpha\in I} A_\alpha .$$

Eksempel 3. $I = \mathbb{N}$ $A_\alpha = \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ $f_{\beta\alpha}(a) = p^{\beta-\alpha}a$ $\alpha \leq \beta$ (p = primtal) d.v.s. det direkte system er:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \cdots$$

Tilhørende direkte limes bliver $\mathbb{Z}_{\hat{p}}$ (defineret p. 127)

Eksempel 4. $I = \mathring{N}$, $A_\alpha = \mathbb{Z}(p^\infty)$, $\alpha \in N$ $f_{\beta\alpha}(a) = p^{\beta-\alpha}a$ $a \leqq \beta$ (p = primtal). D.v.s. det direkte system er:

$$\mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \cdots \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \cdots$$

Tilhørende direkte limes er 0 (skønt alle afbildninger $f_{\beta\alpha}$ er surjektive).

Eksempel 5. Enhver projektiv modul P er direkte limes for et (tælleligt) direkte system af frie moduler. Antag $P \oplus K$ = fri modul F. Lad π betegne den kanoniske projektion af F på P. Da er P den direkte limes for systemet ($\mathring{N}$ = indexmængden)

$$F \xrightarrow{\pi} F \xrightarrow{\pi} F \xrightarrow{\pi} \cdots \to F \xrightarrow{\pi} F \to \cdots .$$

Eksempel 6. Lad Λ være (kommutativt) integritetsområde. Da er $\varinjlim$(torsionsfrie moduler) torsionsfri.

Eksempel 7. Lad Λ være (kommutativt) integritetsområde, og lad I væremængden af idealer $\mathfrak{a} \neq 0$ i Λ ordnes ved omvendt inklusion. Da udgør $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{a},\Lambda)$ et I-direkte system med Λ'S kvotientlegeme som $\varinjlim$.

$\varinjlim$ som funktor.

Lad I være en fast filtrerende (index)-mængde og lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ og $\{B_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ være to I-direkte systemer af Λ-moduler og Λ-homomorfier. Ved en homomorfi fra I-systemet $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ til I-systemet $\{B_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ forstås en familie $\{u_\alpha\}$, $\alpha \in I$, af Λ-homomorfier $A_\alpha \to B_\alpha$ så $g_{\beta\alpha} u_\alpha = u_\beta f_{\beta\alpha}$ $\forall \alpha \leq \beta$. Hvis f_α (resp. g_α) betegner den kanoniske homomorfi af A_α (resp. B_α) ind i $\varinjlim A_\alpha$ (resp. $\varinjlim B_\alpha$), findes ifølge definitionen af direkte limes netop een Λ-homomorfi $\varphi\colon \varinjlim A_\alpha \to \varinjlim B_\alpha$ så $\varphi \circ f_\alpha = g_\alpha u_\alpha$ for alle $\alpha \in I$, d.v.s så følgende diagram er kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "u_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] & A_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "u_\beta"] & \varinjlim A_\alpha \arrow[d, "\varphi"] \\
B_\alpha \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g_{\beta\alpha}"', "g_\alpha"] & B_\beta \arrow[r, "g_\beta"] & \varinjlim B_\alpha
\end{tikzcd}$$

φ kaldes direkte limes af $\{u_\alpha\}$ og betegner $\varphi = \varinjlim u_\alpha$

$\varinjlim$ er herved blevet en afbildning fra klassen (kategorien) af I- direkte systemer (af Λ-moduler) og homomorfierne mellem disse over i klassen (kategorien) af Λ-moduler og homomorfierne mellem disse.

$\varinjlim$ har de sædvanlige funktoregenskaber:

1) $u_\alpha = 1_{A_\alpha}$ $\forall \alpha \Rightarrow \varinjlim u_\alpha = 1_{\varinjlim A_\alpha}$

2) Hvis $\{u_\alpha\}$ er homomorfi fra $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ til $\{B_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ og $\{v_\alpha\}$ er homomorfi fra $\{B_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ til $\{C_\alpha, h_{\beta\alpha}\}$ da gælder $\varinjlim(v_\alpha \circ u_\alpha) = (\varinjlim v_\alpha) \circ (\varinjlim u_\alpha)$

En følge af homomorfier af direkte systemer kaldes exakt, hvis de tilsvarende følger af (sædvanlige modul)-homomorfier er exakte for ethvert $a \in$ indexmængden I. Her gælder:

<u>Sætning</u>. $\varinjlim$ er exakt funktor fra kategorien af direkte systemer til kategorien af moduler.

<u>Bevis</u>. Lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\} \xrightarrow[\{u_\alpha\}]{} \{B_\alpha, g_{\beta\alpha}\} \xrightarrow[\{v_\alpha\}]{} \{C_\alpha, h_{\beta\alpha}\}$ være exakt. Da er

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"'] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] \arrow[d, "u_\alpha"] & A_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "u_\beta"] & \lim A_\alpha \arrow[d, "\varinjlim u_\alpha"] \\
B_\alpha \arrow[r, "g_{\beta\alpha}"'] \arrow[rr, bend right, "g_\alpha"'] \arrow[d, "v_\alpha"] & B_\beta \arrow[r, "g_\beta"] \arrow[d, "v_\beta"] & \lim B_\alpha \arrow[d, "\varinjlim v_\alpha"] \\
C_\alpha \arrow[r, "h_{\beta\alpha}"'] \arrow[rr, bend right, "h_\alpha"'] & C_\beta \arrow[r, "h_\beta"] & \lim C_\alpha
\end{tikzcd}$$

kommutativt, og $A_\alpha \xrightarrow[u_\alpha]{} B_\alpha \xrightarrow[v_\alpha]{} C_\alpha$ er exakt for alle $\alpha \in I$. Vi skal vise, at $\varinjlim A_\alpha \xrightarrow[\varinjlim u_\alpha]{} \varinjlim B_\alpha \xrightarrow[\varinjlim v_\alpha]{} \varinjlim C_\alpha$ er exakt.

Da $v_\alpha u_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$, er det klart, at $(\varinjlim v_\alpha) \circ (\varinjlim u_\alpha) = 0$. Mangler da at vise at $\operatorname{Ker}(\varinjlim v_\alpha) \subseteqq \operatorname{Im}(\varinjlim u_\alpha)$. Lad $x \in \varinjlim B_\alpha$, hvor $(\varinjlim v_\alpha)(x) = 0$. x kan skrives $x = g_\alpha(b_\alpha)$ for passende $\alpha \in I$ og $b_\alpha \in B_\alpha$. Da er $0 = (\varinjlim v_\alpha)x = (\varinjlim v_\alpha)g_\alpha(b_\alpha) = h_\alpha v_\alpha(b_\alpha)$. Følgelig er (Lemma 3 p. 131) $h_{\beta\alpha} v_\alpha(b_\alpha) = 0$ for passende $\beta \geq \alpha$. Men $0 = h_{\beta\alpha} v_\alpha(b_\alpha) = v_\beta g_{\beta\alpha}(b_\alpha)$ ⊃: $g_{\beta\alpha}(b_\alpha) \in \operatorname{Ker} v_\beta = \operatorname{Im} u_\beta$, hvorfor $g_{\beta\alpha}(b_\alpha) = u_\beta(a_\beta)$ for et $a_\beta \in A_\beta$. For $y = f_\beta(a_\beta) \in \varinjlim A_\alpha$ gælder nu:

$(\varinjlim u_\alpha)y = g_\beta u_\beta(a_\beta) = g_\beta g_{\beta\alpha}(b_\alpha) = g_\alpha(b_\alpha) = x.$ D.v.s $x \in \operatorname{Im}(\varinjlim u_\alpha).$ ∎

Lad T være en kovariant funktor fra kategorien af (venstre) Λ-moduler til kategorien af $\mathbb{Z}$-moduler. Lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$, $\alpha \in I$ være et I-direkte system af Λ-moduler. Da ses $\{TA_\alpha, Tf_{\beta\alpha}\}$ et I-direkte system af $\mathbb{Z}$-moduler. Lad g_α være den kanoniske $\mathbb{Z}$-homomorfi fra TA_α til $\varinjlim TA_\alpha$. Vi har da et kommutativt diagrem:

$$\begin{tikzcd}
TA_\alpha \arrow[r, "Tf_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "g_\alpha"'] \arrow[drr, "Tf_\alpha"'] & TA_\beta \arrow[r, "g_\beta"] \arrow[dr, "Tf_\beta"] & \lim TA_\alpha \arrow[d, "\varphi"] \\
& & T(\lim A_\alpha)
\end{tikzcd}$$

og der findes en entydigt bestemt $\mathbb{Z}$-homomorfi $\varphi\colon \varinjlim TA_\alpha \to T(\varinjlim A_\alpha)$ så $Tf_\alpha = \varphi g_\alpha$.

<u>Definition.</u> Hvis ovenstående φ er en isomorfi (for ethvert direkte system af Λ-moduler) siges T at kommutere med direkte limes.

<u>Eksempel 1.</u> Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$, $TA = A^{\mathbb{N}}$, da kommuterer T ej med direkte limes.

Thi betragt systemet

$$\mathbb{Z} \to \tfrac{1}{2}\mathbb{Z} \to \tfrac{1}{4}\mathbb{Z} \to \cdots \to \tfrac{1}{2^n}\mathbb{Z} \to \cdots \quad \text{med } \varinjlim = \mathbb{Z}_2$$

anvendes T på dette bliver det tilsvarende φ ej surjektiv (mere injektiv).

<u>Eksempel 2.</u> Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$ $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty),-)$. Betragt det direkte system

$$\mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}(p^\infty) \to \cdots \quad \text{med} \quad \varinjlim = 0.$$

Anvendes T på dette system bliver $\varinjlim(T\mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} T\mathbb{Z}(p^\infty) \xrightarrow{\cdot p} \cdots) \neq 0$ så bliver det tilsvarende φ surjektiv, men ej injektiv. T kommuterer altså ikke med $\varinjlim$.

<u>Sætning.</u> For en vilkårlig højre Λ-modul M kommuterer $M\otimes_\Lambda -$ med direkte limes.

<u>Bevis.</u> Vi har kommutative diagrammer, hvor $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ er et vilkårligt direkte system af (venstre) Λ-moduler.

$$\begin{tikzcd}
A_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "f_\alpha"'] & A_\beta \arrow[r, "f_\beta"] & \varinjlim A_\alpha
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_\Lambda A_\alpha \arrow[r, "1_M\otimes f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "g_\alpha"'] \arrow[drr, "1_M\otimes f_\alpha"'] & M\otimes_\Lambda A_\beta \arrow[r, "g_\beta"] \arrow[dr, "1_M\otimes f_\beta"] & \varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha) \arrow[d, "\varphi"] \\
 & & M\otimes_\Lambda(\varinjlim A_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Skal godtgøre, at φ er en isomorfi.

Definerer en svagt Λ-bilineær afbildning ψ fra $M\times(\varinjlim A_\alpha)$ til $\varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha)$ ved: Lad $y \in \varinjlim A_\alpha$ og skriv $y = f_\alpha(a_\alpha)$ for passende $\alpha \in I$, $a_\alpha \in A_\alpha$ og lad $m \in M$, da er $g_\alpha(m\otimes a_\alpha)$ et veldefineret element i $\varinjlim M\otimes A_\alpha$. Vi sætter (med ovenstående benævnelser) $\psi(m,y) = g_\alpha(m\otimes a_\alpha)$. ψ er da en svagt Λ-bilineær afbildning, og inducerer følgelig en $\mathbb{Z}$-homomorfi $\bar\psi$ fra $M\otimes_\Lambda(\varinjlim A_\alpha)$ til $\varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha)$ ved $\bar\psi(m\otimes y) = g_\alpha(m\otimes a_\alpha)$.

Lad x være vilkårligt element i $\varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha)$; $x = g_\alpha(\Sigma\, m_\nu\otimes a_\alpha^\nu)$ for passende $\alpha \in I$. Da er $\varphi x = (1_M\otimes f_\alpha)(\Sigma\, m_\nu\otimes a_\alpha^\nu) = \Sigma\, m_\nu\otimes f_\alpha(a_\alpha^\nu)$. Ifølge definitionen af $\bar\psi$ er $\bar\psi\varphi x = g_\alpha(\Sigma\, m_\nu\otimes a_\alpha^\nu) = x$ $\supset$: $\bar\psi\cdot\varphi = 1_{\varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha)}$. For at vise $\varphi\circ\bar\psi = 1_{M\otimes_\Lambda(\varinjlim A_\alpha)}$ er det nok at godtgøre $\varphi\bar\psi(m\otimes y) = m\otimes y$ for alle $m \in M$, $y \in \varinjlim A_\alpha$. Hertil skrives $y = f_\alpha(a_\alpha)$, $a_\alpha \in A_\alpha$ $\bar\psi(m\otimes y) = g_\alpha(m\otimes a_\alpha)$. Da er $\varphi\bar\psi(m\otimes y) = \varphi(g_\alpha(m\otimes a_\alpha)) = (1_M\otimes f_\alpha)(m\otimes a_\alpha) = m\otimes f_\alpha(a_\alpha) = m\otimes y$. Af $\varphi\circ\bar\psi = 1_{M\otimes(\varinjlim A_\alpha)}$ og $\bar\psi\varphi = 1_{\varinjlim(M\otimes A_\alpha)}$ ses, at φ er en isomorfi. ∎

Vi har således for hver højre Λ-modul M en kanonisk isomorfi φ_M: $\varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha) \to M\otimes_\Lambda(\varinjlim A_\alpha)$. Vi påstår nu, at φ_M er naturlig i M.

Hertil betragtes Λ-homomorfi u fra højre Λ-modulen M til højre Λ-modulen M^*. For hvert α har vi følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_\Lambda A_\alpha \arrow[rr, "g_\alpha"] \arrow[dr, "1_M\otimes f_\alpha"] \arrow[dd, "u\otimes 1_{A_\alpha}"'] & & \varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha) \arrow[dl, "\varphi_M"'] \arrow[dd, "\varinjlim(u\otimes 1_{A_\alpha})"] \\
& M\otimes_\Lambda \varinjlim A_\alpha \arrow[dd, "u\otimes 1_{\varinjlim A_\alpha}"] & \\
M^*\otimes_\Lambda A_\alpha \arrow[rr, "g_\alpha^*"] \arrow[dr, "1_{M^*}\otimes f_\alpha"'] & & \varinjlim(M^*\otimes_\Lambda A_\alpha) \arrow[dl, "\varphi_{M^*}"] \\
& M^*\otimes_\Lambda \varinjlim A_\alpha &
\end{tikzcd}$$

hvor alle "sideflader" undtagen a priori "h øjre sideflade" er kommutative. Da $\bigcup_\alpha \operatorname{Im} g_\alpha = \varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha)$, følger ved diagram chasing at også denne højre sideflade er kommutativ. Men dette betyder netop, at φ er naturlig i M.

<u>Korollar</u>. Enhver direkte limes at flade (venstre) Λ-moduler er flad.

<u>Bevis</u>. Lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ være direkte system af flade venstre Λ-moduler. Lad $u\colon M \to M^*$ være injektiv homomorfi af højre Λ-moduler. Da er $u\otimes 1_{A_\alpha}$ injektiv for alle $\alpha \in$ indexmængden I. Da $\varinjlim$ er exakt funktor føres injektive afbildninger over i injektiv afbildning $\supset$: $\varinjlim(u\otimes 1_{A_\alpha})$ er injektiv. Af det kommutative diagram (φ's naturlighed)

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_\Lambda \varinjlim A_\alpha \arrow[r, "\varphi_M"'] \arrow[d, "u\otimes 1_{\varinjlim A_\alpha}"] & \varinjlim(M\otimes_\Lambda A_\alpha) \arrow[d, "\varinjlim(u\otimes 1_{A_\alpha})"] \\
M^*\otimes_\Lambda \varinjlim A_\alpha \arrow[r, "\varphi_{M^*}"'] & \varinjlim(M^*\otimes_\Lambda A_\alpha)
\end{tikzcd}$$

følger, at $u\otimes 1_{\varinjlim A_\alpha}$ er injektiv. ∎

<u>Bemærkning</u>. Korollaret indebærer specielt, at $\varinjlim$ (frie moduler) er flad). Dette resultat er "bedst muligt", idet man kan vise, at omvendt enhver flad modul kan skrives som $\varinjlim$ (endelig frembragte frie moduler) for et passende direkte system.

Vi afslutter afnittet om $\varinjlim$ med en sætning om bevarelse af injektive moduler:

Sætning. For en venstre Noethersk ring Λ er enhver direkte limes af injektive venstre Λ-moduler injektiv.

Bevis. Lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ være et direkte system af injektive venstre Λ-moduler. Vi skal godtgøre, at for ethvert venstre ideal B i Λ og enhver Λ-homomorfi $u: B \to \varinjlim A_\alpha$ findes en Λ-homomorfi fra Λ til $\varinjlim A_\alpha$ hvis restriktion til B er u.

Da Λ er venstre Noethersk findes en kort exakt følge

$$0 \to K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\kappa} B \to 0$$

hvor F er en endelig frembragt fri Λ-modul og K en endelig frembragt Λ-modul.

Da F endelig frembragt og $\varinjlim A_\alpha = \bigcup_\alpha \operatorname{Im} f_\alpha$ findes et $\alpha \in I$ så $\operatorname{Im} f_\alpha \supseteq \operatorname{Im} u\kappa$. Idet F specielt er projektiv, findes homomorfi $v: F \to A_\alpha$ så $f_\alpha v = u\kappa$. Da $f_\alpha vi = 0$ findes et $\beta \geqq \alpha$ så $f_{\beta\alpha} vi = 0$. $f_{\beta\alpha} v$ forsvinder således på $\operatorname{Ker} \kappa$ og inducerer hermed en homomorfi $v^*: B \to A_\beta$ så $v^*\kappa = f_{\beta\alpha} v$. Da er $f_\beta v^* \kappa = f_\beta f_{\beta\alpha} v = f_\alpha v = u\kappa$ og følgelig $f_\beta v^* = u$. Men da A_β ifølge antagelsen er en injektiv modul, kan v^* fortsættes til homomorfi ψ fra Λ til A_β; $f_\beta \psi$ er da en udvidelse af u til Λ. ∎

Ved kombination af ovenstående med tidligere resultater fås nu:

Korollar. For en ring Λ er følgende betingelser ækvivalente

1) Λ er venstre noethersk

2) Enhver direkte sum af injektive venstre Λ-moduler er injektiv.

3) Direkte limes af ethvert direkte system af injektive venstre Λ-moduler er injektiv.

Bemærkning. Man kan vise følgende modsvarighed for $\varinjlim$ af projektive moduler: For en ring Λ gælder: Enhver direkte limes af projektive venstre Λ-moduler er projektiv $\Longleftrightarrow$ Λ tilfredsstiller den nedstigende kædebetingelse for endelig frembragte højre idealer.

Sådanne ringe kaldes venstre perfekte.

Vi skal nu betragte det til $\varinjlim$ duale begreb, der fås ved løst sagt at "vende alle pilene", i det foregående.

Projektiv limes.

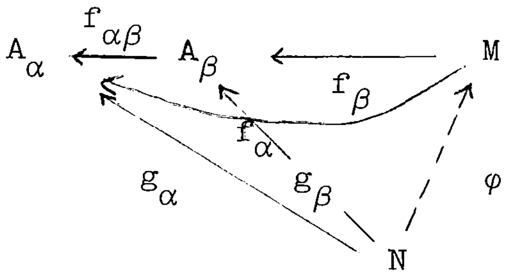
Lad I være en partielt ordnet indexmængde (filtrerende), og lad Λ være en vilkårlig ring. Ved et I-projektivt system forstås en familie $\{A_\alpha\}$ $\alpha \in I$ af Λ-moduler og Λ-homomorfier $f_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\beta, A_\alpha)$, $\alpha \leqq \beta$ så

1) $f_{\alpha\alpha} = 1_{A_\alpha}$

2) $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma}$ for $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$

Vi søger en Λ-modul M og Λ-homomorfier $f_\alpha \colon M \to A_\alpha$ så i) $f_\alpha = f_{\alpha\beta} f_\beta \quad \forall\ \alpha \leq \beta$

ii) Hvis $\{N, g_\alpha\}$, $g_\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N, A_\alpha)$, $\alpha \in I$, opfylder $g_\alpha = f_{\alpha\beta} g_\beta \quad \forall\ \alpha \leq \beta$ findes netop een Λ-homomorfi $\varphi \colon N \to M$ så diagrammet



er kommutativt.

Sætning. Der findes pånær isomorfi netop et sådant M.

Bevis. Entydigheden som p. 130

Eksistens: Vi sætter M lig undermodulen i $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ bestående af de elementer (a_α), $\alpha \in I$ for hvilke $a_\alpha = f_{\alpha\beta}a_\beta$ for alle par (α,β), $\alpha \leqq \beta$. Endvidere sættes $f_\alpha = p_\alpha$, Res, M, hvor p_α er projektionen af $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ på den α^{te} koordinat. Da klart, at i) er opfyldt.

Hvis N modul og $g_\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(N,A_\alpha)$ tilfredsstiller $g_\alpha = f_{\alpha\beta}g_\beta$ findes højest en Λ-homomorfi $\varphi: N \to M$ så $g_\alpha = f_\alpha\varphi$. Thi $f_\alpha\varphi(n) = g_\alpha(n)$ indebærer, at α^{te} koordinat i $\varphi(n)$ må være $g_\alpha(n)$.

Virkelig et φ: Vi definerer $\varphi: N \to M$ ved $\varphi(n) = \{g_\alpha(n)\}$. $\varphi(n)$ ligger da ikke blot i $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ men også i M, eftersom $g_\alpha(n) = f_{\alpha\beta}g_\beta(n)$. φ er da en Λ-homomorfi fra N til M der tilfredsstiller $g_\alpha = f_{\alpha\beta}g_\beta$ $\forall\alpha,\beta$. ∎

Definition. M kaldes projektive limes for systemet $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ og betegnes $\lim\limits_{\substack{\leftarrow\\ \alpha\in I}}\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ eller blot $\lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha$.

Eksempel. Lad A være en Λ-modul og I en filtrerende mængde. Lad A_α, $\alpha \in I$, være en mængde af undermoduler i A så $A_\beta \subseteq A_\alpha$ hvis $\alpha \geq \beta$. Med de naturlige injektioner udgør $\{A_\alpha\}$ et I-projektivt system med $\varprojlim A_\alpha = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$.

<u>Eksempel</u>. Lad I være en vilkårlig mængde og A_α, $\alpha \in I$, en familie af undermoduler. Lad $D(I)$ være familien af endelige delmængder af I, ordnet ved inklusion. $D(I)$ er da filtrerende. For $J \in D(I)$ sættes $A_J = \prod_{\alpha\in J} A_\alpha$; hvis $J' \subseteq J'' \in D(I)$ defineres en afbildning $f_{J'J''}: A_{J''} \to A_{J'}$ ved naturlig projektion (restriktion). $\{A_J\}$ udgør herved et $D(I)$-projektivt system med $\varprojlim_{J\in D(I)} A_J = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$.

<u>Vigtigt eksempel</u>. Lad p være et primtal. Vi betragter det $\mathbb{N}$-projektive system

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

hvor afbildningerne er de kanoniske homomorfier. For at bestemme $\varprojlim$ bemærker vi, at enhver restklasse i $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ har netop een repræsentant af formen $a_0+a_1p+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}$, $0 \leqq a_i \leqq p-1$, $i = 0,1,\cdots,n-1$.

Lad os betragte en følge af restklasser mod $p^n\mathbb{Z}$ definerende et element i $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Hvis $m \leqq n$ og $a_0'+a_1'p+\cdots+a_{m-1}'p^{m-1}$, $0 \leqq a_i' \leqq p-1$ og $a_0+a_1p+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}$, $0 \leqq a_i \leqq p-1$, er repræsentanter for det m^{te}, resp. n^{te}, element i den betragtede følge, må $a_0' = a_0$, $a_1' = a_1,\cdots,a_{m-1}' = a_{m-1}$. Der findes således en (mængdeteoretisk) bijektion mellem $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ og alle formelle udtryk $a_0+a_1p^n+\cdots$, $0 \leqq a_i \leqq p-1$. Specielt har $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ netop $2^{\aleph_0}$ elementer (kontinuets mægtighed) $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ kan vises at have en naturlig ringstruktur og kaldes ringen af hele p-adiske tal. Vi benævner den $\hat{\mathbb{Z}}_p$. Det kan vises, at $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}[[X]]/(X-p)$.

Hvis man for ethvert $h \in \mathbb{Z}$ definerer

$$v(h) = \begin{cases} 0 & \text{for } h = 0 \\ p^{-n} & \text{hvis } p^n | h, \text{ men } p^{n+1} \nmid h \end{cases}$$

vil der ved $d(x,y) = v(x-y)$, $x,y \in \mathbb{Z}$ bestemmes en metrik på $\mathbb{Z}$. I den tilsvarende topologi bliver $\mathbb{Z}$ en ikke-fuldstændig topologisk ring, hvis kompletion kan vises at være $\hat{\mathbb{Z}}_p$.

Alment, lad A være en gruppe med nedad filtrerende familie af undergrupper, d.v.s. I filtrerende indexmængde A_α undergruppe i A, $\alpha \in I$ $A_\alpha \supseteq A_\beta$ for $\alpha \leqq \beta$ og antag $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = 0$. Da findes topologi på A med $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$ som basis for omegnene af 0. A bliver et Hausdorffrum. Grupperne $\{A/A_\alpha\}$, $\alpha \in I$ udgør et projektivt system med $f_{\alpha\beta}\colon A/A_\beta \to A/A_\alpha$ værende den kanoniske homomorfi, $\varprojlim A/A_\alpha$ er da A's kompletion m.h.t. ovennævnte topologi.

<u>$\varprojlim$ som funktor:</u>

Lad $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ og $\{B_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ være to I-projektive systemer (af Λ-moduler). En homomorfi fra $\{A_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ til $\{B_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ er en familie $\{u_\alpha\}$, $\alpha \in I$ af Λ-homomorfier fra A_α til B_α som tilfredsstiller $u_\alpha f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\ u_\beta$ for alle $\alpha \leqq \beta$. Idet f_α(resp. g_α) betegner de kanoniske homomorfier fra $\varprojlim A_\alpha$ til $\varprojlim B_\alpha$ så $g_\alpha \varphi = u_\alpha f_\alpha$ for alle $\alpha \in I$. Denne homomorfi φ betegnes $\varprojlim u_\alpha$. Tilsvarende som for $\varinjlim$ kan $\varprojlim$ herved opfattes som funktor fra "kategorien" af I-projektive systemer til kategorien af

Λ-moduler.

En følge af homomorfier af I-projektive systemer kaldes exakt, hvis den tilsvarende følge af Λ-homomorfier (sædvanlige modul homomorfier) er exakt for ethvert $\alpha \in I$.

<u>Sætning</u>. $\varprojlim$ er venstre exakt funktor fra kategorien af I-projektive systemer til kategorien af Λ-moduler.

<u>Bevis</u>. Lad os betragte nedenstående exakte følge af I-projektive systemer:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
A_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"'] \arrow[d, "u_\alpha"] \arrow[rrr, bend right, "f_\alpha"'] & A_\beta \arrow[rr, "f_\beta"] \arrow[d, "u_\beta"] & & \varprojlim A_\alpha \arrow[d, "\varprojlim u_\alpha"] \\
B_\alpha \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] \arrow[d, "v_\alpha"] \arrow[rrr, bend right, "g_\alpha"'] & B_\beta \arrow[rr, "g_\beta"] \arrow[d, "v_\beta"] & & \varprojlim B_\alpha \arrow[d, "\varprojlim v_\alpha"] \\
C_\alpha \arrow[r, "h_{\alpha\beta}"'] \arrow[rrr, bend right, "h_\alpha"'] & C_\beta \arrow[rr, "h_\beta"] & & \varprojlim C_\alpha
\end{tikzcd}$$

Vi skal da godtgøre at $0 \to \varprojlim A_\alpha \xrightarrow[\varprojlim u_\alpha]{} \varprojlim B_\alpha \xrightarrow[\varprojlim v_\alpha]{} \varprojlim C_\alpha$ er exakt. Det er klart, at $\varprojlim u_\alpha$ er injektiv (hvorfor?) Da $v_\alpha u_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in I$ vil $\varprojlim(v_\alpha u_\alpha) = (\varprojlim v_\alpha)(\varprojlim u_\alpha) = 0$, hvorfor $\ker(\varprojlim v_\alpha) \supseteq \operatorname{Im}(\varprojlim u_\alpha)$. Lad omvendt $x = \{b_\alpha\} \in \ker(\varprojlim v_\alpha)$. $(\varprojlim v_\alpha)\{b_\alpha\} = 0 \Rightarrow v_\alpha b_\alpha = 0 \ \forall \alpha$ hvorfor $b_\alpha = u_\alpha(a_\alpha)$ for et på grund af u_α's injektivitet entydig bestemt $a_\alpha \in A_\alpha$. Hvis $\{a_\alpha\}$ tilhører $\varprojlim A_\alpha$

er det klart, at $(\varprojlim u_\alpha)(\{a_\alpha\}) = \{b_\alpha\} = x$. Mangler derfor blot at eftervise $\{a_\alpha\} \in \varprojlim A_\alpha$ d.v.s. $a_\alpha = f_{\alpha\beta}a_\beta$ for alle (α,β), $\alpha \leqq \beta$.

Da u_α er injektiv, nok at godtgøre $u_\alpha a_\alpha = u_\alpha f_{\alpha\beta}a_\beta$. Men $u_\alpha f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}u_\beta$, hvorfor $u_\alpha f_{\alpha\beta}a_\beta = g_{\alpha\beta}u_\beta a_\beta = g_{\alpha\beta}b_\beta$ d.v.s. $u_\alpha a_\alpha = b_\alpha$ og $u_\alpha f_{\alpha\beta}a_\beta = g_{\alpha\beta}b_\beta$. Da $\{b_\alpha\} \in \varprojlim B_\alpha$, er $b_\alpha = g_{\alpha\beta}b_\beta$ hvoraf den ønskede relation $u_\alpha a_\alpha = u_\alpha f_{\alpha\beta}a_\beta$ følger. ∎

<u>Eksempel.</u> $\varprojlim$ normalt ej exakt, idet $\varprojlim$ (surjektive afbildninger) i almindelighed ikke er surjektiv. Betragt systemerne

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[d, "\kappa"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot 3"'] \arrow[d, "\kappa"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot 3"'] \arrow[d, "\kappa"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot 3"'] \arrow[d, "\kappa"] \\
\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 & \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \arrow[l, "1_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2}"] & \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \arrow[l, "1_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2}"] & \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2 \arrow[l, "1_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2}"]
\end{tikzcd}$$

hvor κ betegner den kanoniske homomorfi for $\mathbb{Z}$ på $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$; κ er surjektiv, men $\varprojlim \kappa$ er ikke surjektiv (hvorfor?).

<u>Forbindelse mellem $\varprojlim$ og $\varinjlim$.</u>

Lad $\{A_\alpha, f_{\beta\alpha}\}$ være et I-direkte system af Λ-moduler og T en kontravariant funktor fra Λ-moduler til $\mathbb{Z}$-moduler. Da er $TA_\alpha \xleftarrow[Tf_{\beta\alpha}]{} TA_\beta \leftarrow \cdot$ et I-projektivt system. Vi har da følgende diagram

$$\begin{tikzcd}
TA_\alpha & TA_\beta \arrow[l, "Tf_{\beta\alpha}"'] & & \varprojlim TA_\alpha \arrow[ll, "p_\beta"'] \arrow[lll, "p_\alpha"] \\
& & T(\varinjlim A_\alpha) \arrow[ull, "Tf_\alpha"] \arrow[ul, "Tf_\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

hvori der findes et entydig bestemt φ fra $T(\varinjlim A_\alpha)$ til $\varprojlim TA_\alpha$ så alt kommuterer. (p_α betegner den "kanoniske projektion" fra $\varprojlim TA_\alpha$ i TA_α).

<u>Sætning</u>. Hvis $T = \mathrm{Hom}(-,M)$, M (venstre) Λ-modul, bliver ovenstående φ en isomorfi.

<u>Bevis</u>. Vi har følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha,M) & \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\beta,M) \arrow[l, "\mathrm{Hom}(f_{\beta\alpha},1_M)"'] & & \varprojlim \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha,M) \arrow[ll, "p_\beta"'] \arrow[lll, "p_\alpha"] \\
& & \mathrm{Hom}_\Lambda(\varinjlim A_\alpha,M) \arrow[ull, "\mathrm{Hom}(f_\alpha,1_M)"] \arrow[ul, "\mathrm{Hom}(f_\beta,1_M)"'] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

For et $u \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\varinjlim A_\alpha,M)$ er $\varphi u = \{uf_\alpha\}$.

<u>1° φ er surjektiv</u>. Antag $\varphi u = \{uf_\alpha\} = 0$ d.v.s. $uf_\alpha = 0$ $\forall\alpha$. Da vil u forsvinde på $\mathrm{Im}\, f_\alpha$ for alle $\alpha \in I$ og dermed på $\bigcup_\alpha \mathrm{Im}\, f_\alpha = \varinjlim A_\alpha$ d.v.s. $u = 0$.

<u>2° φ er surjektiv</u>. Lad $\{u_\alpha\} \in \varprojlim \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha,M)$. Da gælder $u_\alpha = \mathrm{Hom}(f_{\beta\alpha},1_M)\cdot u_\beta = u_\beta f_{\beta\alpha}$ for alle (α,β), $\alpha \leqq \beta$.

Vi definerer nu et $u: \varinjlim A_\alpha \to M$ ved $u(x) = u_\alpha(a_\alpha)$, hvis $x = f_\alpha(a_\alpha)$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $\alpha \in I$. Dette bestemmer virkelig en afbildning; thi $x = f_\alpha(a_\alpha) = f_\beta(a_\beta) \Rightarrow f_{\gamma\alpha}(a_\alpha) = f_{\gamma\beta}(a_\beta)$ for passende $\gamma \geqq \alpha,\beta$ (se lemma 4 p.132)

$\Rightarrow u_\alpha(a_\alpha) = u_\gamma f_{\gamma\alpha}(a_\alpha) = u_\gamma f_{\gamma\beta}(a_\beta) = u_\beta(a_\beta)$.

u ses da videre (på sædvanlig vis) at blive en Λ-homomorfi.

Vi har nu kun tilbage at vise, at $\varphi u = \{u_\alpha\}$.

$\varphi u = uf_\alpha$; for et $a_\alpha \in A_\alpha$ gælder ifølge definitionen af u:

$$u(f_\alpha(a_\alpha)) = u_\alpha(a_\alpha) \quad \text{d.v.s.} \quad uf_\alpha = u_\alpha \quad \forall\alpha \in I.$$

■

Bemærkning. Ovenstående sætning udtaler - løst sagt - at det duale af $\varinjlim$ er $\varprojlim$ (duale).

Som en anvendelse vil vi nu bestemme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty))$.

Sætning. For ethvert primtal p gælder

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty)) \simeq \varprojlim_{n\in N} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \quad (= \text{" de hele p-adiske tal"}).$$

Bevis. $\mathbb{Z}(p^\infty)$ er $\varinjlim$ for det direkte system

$$\frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \frac{1}{p^2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \cdots \to \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to$$

hvor afbildningerne er de naturlige injektioner. Følgelig bliver $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty))$ den projektive $\varprojlim$ for systemet.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tfrac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^\infty)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tfrac{1}{p^2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^\infty)) \leftarrow \cdots \qquad (*)$$

For $u_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^\infty))$ gælder $u_n(\frac{1}{p^n}) = \frac{a}{p^n}$ mod $\mathbb{Z}$, hvor a er entydig bestemt restklasse modulo p^n. Herved fås en isomorfi - for hvert n - fra

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}(p^\infty))$ til $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ kommuterende med afbildningerne i (*). Følgelig er $\varprojlim$ for systemet (*) = $\varprojlim$ for systemet

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

hvor afbildningerne er de kanoniske homomorfier. ∎

<u>Opgave</u>. Lad I være filtrerende mængde og Λ et legeme. Vis, at $\varprojlim$ er exakt funktor på kategorien af I-projektive systemer af endelig dimensionale vektorrum over Λ. (Benyt, at et endelig dimensionalt vektorrum er naturligt isomorft med sit dobbelt udale (m.h.t. Λ).)

Kap. VI. Homologi og komplekser.

Et kompleks $\underline{K}$ er en følge af Λ-moduler K_n, og homomorfier d_n

$$\underline{K} \quad \cdots \to K_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K_n \xrightarrow{d_n} K_{n-1} \to \cdots$$

så $d_n d_{n+1} = 0 \ \forall n$. Homomorfierne d_n kaldes differentialerne, elementerne i $\operatorname{Ker} d_n$ "cyklerne", elementerne i $\operatorname{Im} d_n$ "randene". $H_n(\underline{K}) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$ kaldes n^{te} homologimodul for $\underline{K}$. Tilsvarende defineres et kokomplex som en følge af moduler og homomorfier af formen ("afbildningerne går mod større indices")

$$K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1}$$

Her kaldes elementerne i $\operatorname{Ker} d^n$ "kocykler" og elementerne i $\operatorname{Im} d^n$ "korandene". $H^n(\underline{K})$ kaldes n^{te} kohomologimodul for $\underline{K}$.

Indtil videre vil vi holde os til komplekser.

En <u>translation</u> fra komplekset (K_n, d_n) til komplekset (K_n', d_n') er en følge $\{f_n\}$ af homomorfier fra K_n til K_n', så diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & K_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & K_n & \xrightarrow{d_n} & K_{n-1} & \to \\
 & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\to & K'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & K'_n & \xrightarrow[d'_n]{} & K'_{n-1} & \to
\end{array}$$

er kommutativt.

Idet $f_n(\text{Ker } d_n) \subseteq \text{Ker } d'_n$ og $f_n\ (\text{Im } d_{n+1}) \subseteq \text{Im } d'_{n+1}$, definerer translationen $\underline{f} = \{f_n\}$ en homomorfi $H_n(\underline{f}): H_n(\underline{K}) \to H_n(\underline{K}')$. Hvis $\{f_n\} = \{1_{K_n}\}$ bliver $H_n(\underline{f}) = 1_{H_n(\underline{K})}$, og hvis $\underline{g} = \{g_n\}$ er en translation fra komplekset $\underline{K}' = \{K'_n\}$ til komplekset $\underline{K}'' = \{K''_n\}$, bliver $\underline{g} \cdot \underline{f} = \{g_n\ f_n\}$ en translation fra $\underline{K}$ til $\underline{K}''$ for hvilken $H_n(\underline{g}\ \ \underline{f}) = H_n(\underline{g})\ H_n(\underline{f})$. D.v.s H_n er en funktor fra "kategorien" af komplekser (og translationerne mellem disse) til kategorien af Λ-moduler.

Sætning. H_n er halv-exakt funktor fra kategorien af komplekser til kategorien af Λ-moduler.

Bevis. Betragt nedenstående kort exakte følge af komplekser ("exakt for ethvert (fast) n") :

$$\begin{tikzcd}
\underline{0} \arrow[r] & \underline{A} \arrow[r, "\underline{f}"] & \underline{B} \arrow[r, "\underline{g}"] & \underline{C} \arrow[r] & \underline{0}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "f_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "g_{n-1}"'] & C_{n-1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[u, "\alpha_n"'] \arrow[r, "f_n"'] & B_n \arrow[u, "\beta_n"'] \arrow[r, "g_n"'] & C_n \arrow[u, "\gamma_n"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[u, "\alpha_{n+1}"'] \arrow[r, "f_{n+1}"'] & B_{n+1} \arrow[u, "\beta_{n+1}"'] \arrow[r, "g_{n+1}"'] & C_{n+1} \arrow[u, "\gamma_{n+1}"'] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Det skal da godtgøres, at $H_n(\underline{A}) \xrightarrow{H_n(\underline{f})} H_n(\underline{B}) \xrightarrow{H_n(\underline{g})} H_n(\underline{C})$

er exakt (for alle n) . Klart, at $\operatorname{Ker} H_n(\underline{g}) \supseteqq \operatorname{Im} H_n(\underline{f})$. Lad omvendt b_n repræsentere et element i $\operatorname{Ker} H_n(\underline{g})$. Da vil $\beta_n(b_n) = 0$ og $g_n(b_n) \in \operatorname{Im} \gamma_{n+1} \supset: g_n(b_n) = \gamma_{n+1}(c_{n+1})$ for et passende c_{n+1} . c_{n+1} kan skrives $c_{n+1} = g_{n+1}(b_{n+1})$ for passende $b_{n+1} \in B_{n+1}$. Da gælder $b_n - \beta_{n+1} b_{n+1} \in \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n$, hvorfor $b_n - \beta_{n+1} b_{n+1} = f_n a_n$ for passende $a_n \in A_n$. Her er $\alpha_n a_n = 0$, da f_{n-1} injektiv og $f_{n-1} \alpha_n a_n = \beta_n f_n a_n = \beta_n b_n - \beta_n \beta_{n+1} b_{n+1} = 0$. Indenfor $H_n(\underline{B})$ er $b_n = b_n - \beta_{n+1} b_{n+1} = H_n(\underline{f}) \cdot a_n$, (idet $a_n \in \operatorname{Ker} \alpha_n$ og derfor bestemmer element i $H_n(\underline{A})$) . Altså

$\operatorname{Ker} H_n(\underline{g}) \subseteqq \operatorname{Im} H_n(\underline{f})$ ∎

Lad T være en exakt kovariant exakt funktor fra Λ-moduler til $\mathbb{Z}$-moduler, og lad

$\cdots \to K_{n+1} \xrightarrow[d_{n+1}]{} K_n \xrightarrow[d_n]{} K_{n-1} \to \cdots$ være et kompleks af Λ-moduler og Λ-homomorfier . Da er

$$T\underline{K}: \cdots \to TK_{n+1} \xrightarrow{Td_{n+1}} TK_n \xrightarrow{Td_n} TK_{n-1} \to \cdots$$

et kompleks af $\mathbb{Z}$-moduler og $\mathbb{Z}$-homomorfier.

<u>Sætning.</u> Under ovenstående forudsætninger gælder $H_n\, T\underline{K} \simeq T(H_n(\underline{K}))$.

<u>Bevis</u>. Lad $B_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, $C_n = \operatorname{Ker} d_n$ $\supset$: $H_n(\underline{K}) = C_n/B_n$

Med oplagte afbildninger har man da et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B_n \arrow[u] \arrow[r, "i"] & C_n \arrow[r, "H"] \arrow[d, "j"] & H_n(\underline{K}) \arrow[r] & 0 \\
 & K_{n+1} \arrow[u, "d'_{n+1}"] \arrow[r, "d_{n+1}"] & K_n \arrow[d, "d_n"] & & \\
 & & K_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

(hvor d'_{n+1} er den ved d_{n+1} bestemte afbildning fra K_{n+1} på B_n) . Alle rækker og søjler er exakte. Da T er exakt, bliver

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & TB_n \arrow[u] \arrow[r, "Ti"] & TC_n \arrow[r, "T\mathrm{H}"] \arrow[d, "T(j)"] & TH_n(\underline{K}) \arrow[r] & 0 \\
 & TK_{n+1} \arrow[u, "T(d'_{n+1})"] \arrow[r, "Td_{n+1}"] & TK_n \arrow[d, "Td_n"] & & \\
 & & TK_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

et kommutativt diagram med exakte rækker og søjler. Ved diagram-chasing fås en homomorfi fra $H_n(T\underline{K}) = \operatorname{Ker} Td_n / \operatorname{Im} Td_{n+1}$ til $TH_n(K)$ som let (også ved diagram chasing) ses at være en isomorfi. ∎

Homologifunktoren og $\varinjlim$

Vi betragter nu et I-direkte system af <u>komplekser</u> (I er som sædvanlig en filtrerende indexmængde):

$$\begin{tikzcd}
\underline{K}_\alpha \arrow[r, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "f_\alpha"'] & \underline{K}_\beta \arrow[r, "f_\beta"] & \varinjlim \underline{K}_\alpha
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
K_{\alpha,n+1} \arrow[r, "f_{\beta\alpha,n+1}"] \arrow[d, "d_{\alpha,n+1}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "f_{\alpha,n+1}"'] & K_{\beta,n+1} \arrow[r, dashed, "f_{\beta,n+1}"] \arrow[d, "d_{\beta,n+1}"] & \varinjlim K_{\alpha,n+1} \arrow[d, "\varinjlim d_{\alpha,n+1}"] \\
K_{\alpha,n} \arrow[r, "f_{\beta\alpha,n}"] \arrow[d, "d_{\alpha,n}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "f_{\alpha,n}"'] & K_{\beta,n} \arrow[r, dashed, "f_{\beta,n}"] \arrow[d, "d_{\beta,n}"] & \varinjlim K_{\alpha,n} \arrow[d, "\varinjlim d_{\alpha,n}"] \\
K_{\alpha,n-1} \arrow[r, "f_{\beta\alpha,n-1}"] \arrow[d] \arrow[rr, dashed, bend right, "f_{\alpha,n-1}"'] & K_{\beta,n-1} \arrow[r, dashed, "f_{\beta,n-1}"] \arrow[d] & \varinjlim K_{\alpha,n-1} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

hvor alt kommuterer, søjlerne er komplekser og $K_{\alpha,n}$, $\alpha \in I$, for hvert n er et I-direkte system. For hvert n har vi et I-direkte system:

$$\begin{tikzcd}
H_n(\underline{K}_\alpha) \arrow[r, "H_n(\underline{f}_{\beta\alpha})"] \arrow[drr, "g_{\alpha,n}"'] & H_n(\underline{K}_\beta) \arrow[dr, "g_{\beta,n}"] & \\
& & \underrightarrow{\lim}\, H_n(\underline{K}_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Ifl. definitionen af $\underrightarrow{\lim}$ findes et entydigt bestemt φ_n som diagrammet

$$\begin{tikzcd}
H_n(\underline{K}_\alpha) \arrow[r, "H_n(\underline{f}_{\beta\alpha})"] \arrow[drr, "g_{\alpha,n}"] \arrow[ddr, "H_n(\underline{f}_\alpha)"'] & H_n(\underline{K}_\beta) \arrow[dr, "g_{\beta,n}"] \arrow[dd, "H_n(\underline{f}_\beta)"] & \\
& & \underrightarrow{\lim}\, H_n(\underline{K}_\alpha) \arrow[dl, "\varphi_n"] \\
& H_n(\underrightarrow{\lim}\, \underline{K}_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

<u>Sætning</u>. Ovenstående φ_n er en isomorfi for ethvert n ; d.v.s. homologifunktoren kommuterer med $\varinjlim$

<u>Bevis</u>. φ_n's injektivitet følger af, at $H_n(\underline{f}_\alpha)x = 0$, $x \in H_n(\underline{K}_\alpha)$, medfører $H_n(\underline{f}_{\beta\alpha})x = 0$ for passende $\beta \geqq \alpha$. Sidstnævnte overlades som en øvelse til læseren.

For at vise φ_n surjektiv nok at godtgøre $H_n(\varinjlim \underline{K}_\alpha) = \bigcup_\alpha \operatorname{Im} H_n(\underline{f}_\alpha)$. Lad $x \in \varinjlim K_{\alpha,n}$, $x \in \operatorname{Ker} \varinjlim d_{\alpha,n}$, repræsentere et element i $H_n(\varinjlim \underline{K}_\alpha)$. x kan skrives $f_{\alpha,n}(a_{\alpha,n})$ for passende $\alpha \in I$, $a_{\alpha,n} \in K_{\alpha,n}$. Idet $f_{\alpha,n-1}(d_{\alpha,n}\, a_{\alpha,n}) = 0$ vil $d_{\beta,n}(f_{\beta\alpha,n}\, a_{\alpha,n}) = 0$ for passende $\beta \geqq \alpha$, hvorfor $x = H_n(\underline{f}_\beta) \cdot ((f_{\beta\alpha,n}(a_{\alpha,n})))$ hvor $(f_{\beta\alpha,n}(a_{\alpha,n}))$ er det ved $f_{\beta\alpha,n}\varphi_{\alpha,*}$ repræsenterede element i $H_n(\underline{K}_\beta)$. Ethvert $x \in H_n(\varinjlim \underline{K}_\beta)$ tilhører altså $\bigcup_{\alpha\in I} \operatorname{Im} H_n(\underline{f}_\alpha)$. ∎

— — — —

Vi betragter nu nogle vigtige specielle typer af translationer mellem komplekser. Lad $\underline{K}$ og $\underline{K}'$ være to komplekser og antag vi har homomorfier $\varepsilon_n : K_n \to K'_{n+1}$:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & K_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon_{n-1}"'] & K_{n-2} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon_{n-2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "d'_n"] & K_{n-1} \arrow[r] & K_{n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

hvor det ikke forudsættes kommutativitet.

Ved $f_n = \varepsilon_{n-1}\, d_n + d'_{n+1}\, \varepsilon_n$ defineres en translation $\underline{f} = \{f_n\}$ fra $\underline{K}$ til $\underline{K}'$. En translation af denne form kaldes nulhomotop. For en nulhomotopi $\underline{f} = \{f_n\}$ gælder $f_n(\ker d_n) \subseteqq \operatorname{Im} d'_{n+1}$ og derfor $H_n(\underline{f}) = 0 \ \forall n$. Nulhomotopierne udgør en undergruppe i den additive gruppe af translationer fra $\underline{K}$ til $\underline{K}'$. To translationer $\underline{f} = \{f_n\}$ og $\underline{g} = \{g_n\}$ fra $\underline{K}$ til $\underline{K}'$ kaldes homotope, hvis de ligger i samme sideklasser m.h.t. nulhomotopierne, d.v.s. hvis $\underline{f} - \underline{g}$ er nulhomotop. $\underline{f}$ og $\underline{g}$ homotope skrives $\underline{f} \sim \underline{g}$. Åbenbart gælder, at $\underline{f} \sim \underline{g} \Rightarrow H_n(\underline{f}) = H_n(\underline{g}) \ \forall n$.

Eksempel. Lad $0 \to A \to B \to C \to 0$ være kort-exakt følge opfattet som et komplex $\underline{K}$ (ved tilføjelse af 0'er). Da gælder i translationer $1_{\underline{K}}$ bestående af identitetsafbildningerne er nulhomotop hvis og kun hvis den kort exakte følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ er split-exakt.

Forbindende Homomorfi.

Lad $0 \to \underline{A} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{B} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{C} \to 0$ være exakt følge af komplekser:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"'] \arrow[d, "\beta_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"'] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "g_n"'] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"'] \arrow[d] & B_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"'] \arrow[d] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$\supset$: søjlerne er nulfølger, Rækkerne exakte og alt kommuterer.

Da H_n er halv-exakt har vi for ethvert n en exakt følge

$$H_n(\underline{A}) \xrightarrow{H_n(\underline{f})} H_n(\underline{B}) \xrightarrow{H_n(\underline{g})} H_n(\underline{C})$$

Vi konstruerer nu homomorfier Δ: $H_n(\underline{C}) \to H_{n-1}(\underline{A})$ så ovennævnte følger splejses sammen til én lang exakt følge.

Lad $c_n \in \operatorname{Ker} \gamma_n$. Da g_n er surjektiv, kan vi skrive $c_n = g_n(b_n)$ for passende $b_n \in B_n$;
$\beta_n \, b_n \in \operatorname{Ker} g_{n-1} = \operatorname{Im} f_{n-1}$ $\supset$: $\beta_n \, b_n = f_{n-1} \, a_{n-1}$ for et

på grund af f_{n-1} 's injektivitet entydig bestemt $a_{n-1} \in A_{n-1}$. Vi definerer nu

Φ: Ker $\gamma_n \to$ Ker α_{n-1} / Im α_n = $H_{n-1}(\underline{A})$ ved

$\Phi(c_n) = a_{n-1}$ modulo Im α_n , med ovennævnte benævnelser.

Hertil må først vises, at $a_{n-1} \in$ Ker α_{n-1} , hvilket følger af: $\beta_n b_n = f_{n-1} a_{n-1} \Rightarrow f_{n-2} \alpha_{n-1} a_{n-1} = \beta_{n-1} \beta_n b_n = 0$, og $f_{n-2} \alpha_{n-1} a_{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{n-1} a_{n-1} = 0$, idet f_{n-2} er injektiv. Ved fremstillingen $c_n = g_n(b_n)$ indgår et frit valg. Antag $c_n = g_n(b_n) = g_n(b_n')$. Lad $\beta_n b_n' = f_{n-1} a_{n-1}'$; idet $b_n - b_n' \in$ Ker g_n = Im f_n kan vi skrive $b_n - b_n' = f_n a_n$. Heraf $f_{n-1} \alpha_n a_n = \beta_n f_n a_n = \beta_n b_n - \beta_n b_n' = f_{n-1}(a_{n-1} - a_{n-1}')$ og derfor $a_{n-1} - a_{n-1}' \in$ Im α_n $\supset$: $a_{n-1} = a_{n-1}'$ modulo Im α_n .

Φ er således veldefineret og ses derefter på sædvanlig måde at være en homomorfi. Vi påstår nu, at Φ forsvinder på Im γ_{n+1} : Lad $c_n = \gamma_{n+1} c_{n+1}$ og skriv $c_{n+1} = g_{n+1} b_{n+1}$ for passende $b_{n+1} \in B_{n+1}$. Da er $c_n = g_n(\beta_{n+1} b_{n+1})$, hvorfor $\beta_n \beta_{n+1} b_n = 0$ og derfor $\Phi(c_n) = 0$. Men Φ forsvinder på Im $\gamma_{n+1} \Rightarrow \Phi$ inducerer en homomorfi Δ_n fra $H_n(\underline{C})$ = Ker γ_n / Im $\gamma_{n+1} \to H_{n-1}(\underline{A})$. Denne homomorfi kaldes <u>den forbindende homomorfi</u> fra $H_n(\underline{C})$ til $H_{n-1}(\underline{A})$.

Ved diagram chasing eftervises

Sætning. Med ovenstående benævnelser er

$$\cdots \to H_n(\underline{B}) \xrightarrow[H_n(\underline{g})]{} H_n(\underline{C}) \xrightarrow[\Delta_n]{} H_{n-1}(\underline{A}) \xrightarrow[H_{n-1}(\underline{f})]{} H_{n-1}(\underline{B})$$

$$\xrightarrow[H_{n-1}(\underline{g})]{} H_{n-1}(\underline{C}) \xrightarrow[\Delta n-1]{} H_{n-2}(\underline{B}) \to \cdots$$

exakt.

Korollar. Lad $0 \to \underline{A} \to \underline{B} \to \underline{C} \to 0$ være exakt følge af komplekser. Hvis to af disse er exakte følger, da også det tredie.

Tilføjelse til sætningen. Den forbindende homomorfi er naturlig $\supset$: antag følgende diagram af komplexer og translationer

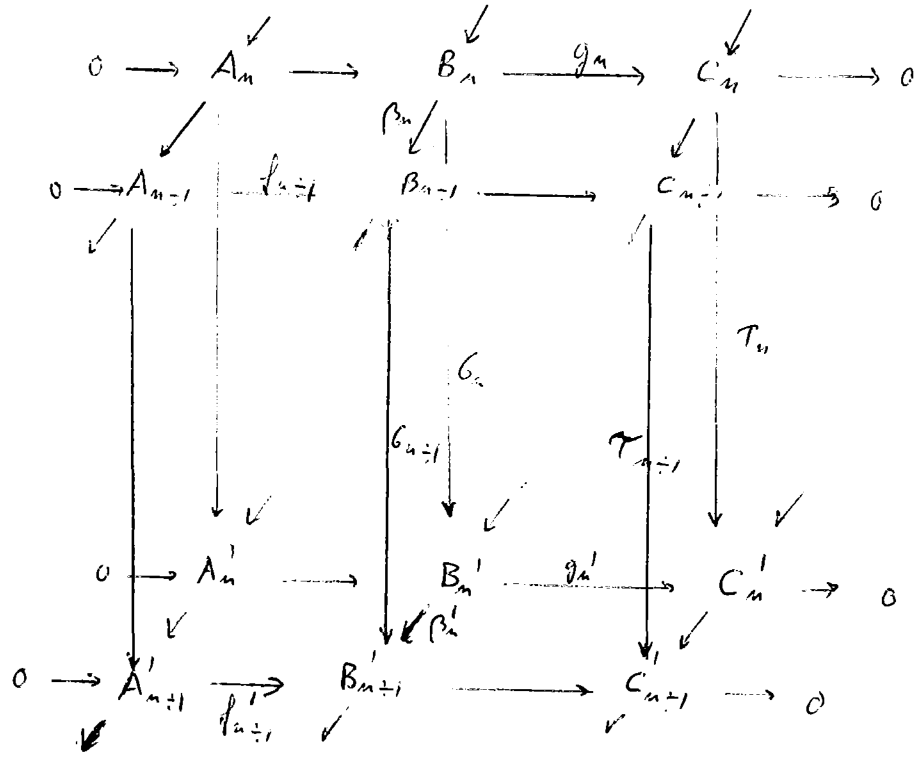
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \underline{A} & \xrightarrow{\underline{f}} & \underline{B} & \xrightarrow{\underline{g}} & \underline{C} & \to & \underline{0} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\varphi}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{\tau}} & & \\
0 & \to & \underline{A}' & \xrightarrow[\underline{f}']{} & \underline{B}' & \xrightarrow[\underline{g}']{} & \underline{C}' & \to & 0
\end{array}$$

er kommutativt og rækkerne er exakte. Da er diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
H_n(\underline{C}) & \xrightarrow{\Delta_n} & H_{n-1}(\underline{A}) \\
\downarrow{\scriptstyle H_n(\underline{\tau})} & & \downarrow{\scriptstyle H_{n-1}(\underline{\rho})} \\
H_n(\underline{C}') & \xrightarrow{\Delta'_n} & H_{n-1}(\underline{A}')
\end{array} \qquad (*)$$

kommutativt.

<u>Bevis</u>. Nedenstående diagram er kommutativt:



Lad $c_n \in C_n$ repræsentere et element i $H_n(\underline{C})$. Lad b_n , b_{n-1} a_{n-1} være de elementer der indgår ved bestemmelsen $\Delta_n(c_n)$. Ved udregning af $\Delta'_n(\tau_n c_n)$ kan vi lade "projektioner på nedre plan" af b_n , b_{n-1} og a_{n-1} være de elementer der indgår i beregningen. Dette viser, at (*) er kommutativt. ∎

Idet H_n er en funktor kan vi sammenfattende - med benævnelserne p. 161 formulere:

Lad

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{A} \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\underline{\rho}"] & \underline{B} \arrow[r, "\underline{g}"] \arrow[d, "\underline{\sigma}"] & \underline{C} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\tau}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{A}' \arrow[r, "\underline{f}'"'] & \underline{B}' \arrow[r, "\underline{g}'"'] & \underline{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

være et kommutativt diagram af komplexer og translationer.

Da er

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\Delta_{n-1}"] & H_n(\underline{A}) \arrow[r, "H_n(\underline{f})"] \arrow[d, "H_n(\underline{\rho})"] & H_n(\underline{B}) \arrow[r, "H_n(\underline{g})"] \arrow[d, "H_n(\underline{\sigma})"] & H_n(\underline{C}) \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "H_n(\underline{\tau})"] & H_{n-1}(\underline{A}) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\underline{\rho})"] & {} \\
{} \arrow[r, "\Delta'_{n-1}"] & H_n(\underline{A}') \arrow[r, "H_n(\underline{f}')"'] & H_n(\underline{B}') \arrow[r, "H_n(\underline{g}')"'] & H_n(\underline{C}') \arrow[r, "\Delta'_n"] & H_{n-1}(\underline{A}') \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

kommutativt med exakte rækker.

Projektive resolutioner.

Først et nyttigt hjælperesultat:

<u>Lemma.</u> Lad P være en projektiv modul og $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ exakt. Lad $f: P \to B$ være homomorfi så $\beta \circ f = 0$, da findes $g: P \to A$ så $f = \alpha g$ d.v.s. så diagrammet

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

<u>Bevis.</u> $\beta f = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$. Dernæst blot definitionen af projektivitet ∎

Lad os betragte en projektiv resolution af en modul A , en projektiv resolution af en modul A' og en homomorfi $f: A \to A'$:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] & \cdots\cdots \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 & \underline{P} \\ & P'_n \arrow[r, "d'_n"] & \cdots\cdots \arrow[r, "d'_2"] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"] & A' \arrow[r] & 0 & \underline{P}' \end{tikzcd}$$

<u>Sætning.</u> Med ovenstående benævnelser kan f fortsættes til translation $\underline{f}$ fra $\underline{P}$ til $\underline{P}'$. En

sådan fortsættelse af en entydig bestemt på nær homotopi.

<u>Bevis</u>. 1) <u>Eksistens</u> . Da P_0 projektiv findes f_0 så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "f\,d_0"] & \\
P'_0 \arrow[r, "d'_0"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Iflg. lemmaet findes f_1 så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[d, "f_0 d_1"] & \\
P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"'] & A
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Ved successiv anvendelse af denne konstruktion fås den ønskede translation.

2) <u>Entydighed</u>. Ved overgang til differenser nok at vise:

Hvis

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2' \arrow[r, "d_2'"'] & P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "d_0'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er kommutativt er translationen $\underline{f}$ nulhomotop. Lad $\varepsilon_{-1} : A \to P_0'$ være 0 . Da P_0 projektiv, findes $\varepsilon_0 \colon P_0 \to P_1'$ så $f_0 = d_1'\varepsilon_0 = d_1'\varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}d_0$.

Dernæst anvendes lemma p. 164 på

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[d, "(f_1 - \varepsilon_0 d_1)"] & \\
P_2' \arrow[r, "d_2'"'] & P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0'
\end{tikzcd}$$

Idet $d_1'(f_1 - \varepsilon_0 d_1) = f_0 d_1 - d_1'\varepsilon_0 d_1 = d_1'\varepsilon_0 d_1 - d_1'\varepsilon_0 d_1 = 0$ findes $\varepsilon_1 \colon P_1 \to P_2'$ så $d_2'\varepsilon_1 = f_1 - \varepsilon_0 d_1$ eller $f_1 = d_2'\varepsilon_1 + \varepsilon_0 d_1$.

Nu kan processen fortsættes:

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \arrow[d, "(f_2 - \varepsilon_1 d_2)"] & \\
P_3' \arrow[r, "d_3'"'] & P_2' \arrow[r, "d_2'"'] & P_1'
\end{tikzcd}$$

idet $d_2'(f_2 - \varepsilon_1 d_2) = f_1 d_2 - d_2'\varepsilon_1 d_2 = (d_2'\varepsilon_1 + \varepsilon_0 d_1)d_2 - d_2'\varepsilon_1 d_2 = 0$. Da findes $\varepsilon_2 : P_2 \to P_3'$ så $d_3'\varepsilon_2 = f_2 - \varepsilon_1 d_2$: $f_2 = d_3'\varepsilon_2 + \varepsilon_1 d_2$.

Nu fortsættes efter dette skema

Hvis

$$\to P_2 \xrightarrow[d_2]{} P_1 \xrightarrow[d_1]{} P_0 \xrightarrow[d_0]{} A \to 0$$

er projektiv resolution af A , vil vi ved det til denne resolution svarende "projektive komplex" forstå komplexet

$$\to P_2 \xrightarrow[d_2]{} P \xrightarrow[d_1]{} P_0 \to 0 \to 0 \cdots$$

der betegnes $\underline{P_A}$.

Beviset for den lige viste sætning indebærer:

<u>Tilføjelse til sætning</u>. Lad $\underline{f}$ og $\underline{f}^*$ være to translationer fra $\underline{P}$ til $\underline{P}'$ (med benævnelserne p. 164 der er fortsættelser af f . Da er de tilsvarende translationer for de til $\underline{P}$ og $\underline{P}'$ svarende "projektive komplekser" $\underline{P_A}$ og $\underline{P'_{A'}}$ homotope.

<u>Sætning.</u> Lad $0 \to A \xrightarrow[\varphi]{} B \xrightarrow[\psi]{} C \to 0$ være exakt følge af moduler og lad $\underline{P}$: $\to P_n \xrightarrow[d_n]{} P_{n-1} \xrightarrow[d_{n-1}]{} P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \xrightarrow[d_0]{} A \to 0$

og

$$\hat{\underline{P}}:\ \hat{P}_n \xrightarrow[\hat{d}_n]{} \hat{P}_{n-1} \xrightarrow[\hat{d}_{n-1}]{} \hat{P}_{n-2} \to \cdots \to \hat{P}_0 \xrightarrow[\hat{d}_C]{} C \to 0$$

være projektive resolutioner af A og C. Da findes projektiv resolution $\underline{P}'$ af B og translationer $\underline{f}: \underline{P} \to \underline{P}'$ og $\underline{g}: \underline{P}' \to \hat{\underline{P}}$ så

$$0 \to \underline{P} \xrightarrow[\underline{f}]{} \underline{P}' \xrightarrow[\underline{g}]{} \hat{\underline{P}} \to 0$$

er exakt og $\underline{f}$ (resp. $\underline{g}$) er en fortsættelse af φ (resp. ψ).

<u>Bevis.</u> Da en kort-exakt følge med en projektiv modul på sidste plads splitter må n^{te} modul i $\underline{P}'$, (hvis den findes) være $P_n \oplus \hat{P}_n$. Opgaven bliver derfor i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & C \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[u, "d_0"] \arrow[r, "i_0"'] & P_0 \oplus \hat{P}_0 \arrow[r, "\pi_0"'] & \hat{P}_0 \arrow[u, "\hat{d}_0"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[u, "d_1"] \arrow[r, "i_1"'] & P_1 \oplus \hat{P}_1 \arrow[r, "\pi_1"'] & \hat{P}_1 \arrow[u, "\hat{d}_1"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[u, "d_2"] \arrow[r, "i_2"'] & P_2 \oplus \hat{P}_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & \hat{P}_2 \arrow[u, "\hat{d}_2"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(hvor i_n og π_n er de kanoniske injektioner og projektioner) at konstruere $d_0' : P_0 \oplus \hat{P}_0 \to B$, $d_1' : P_1 \oplus \hat{P}_1 \to P_0 \oplus \hat{P}_0$, $d_2' : P_2 \oplus \hat{P}_2 \to P_1 \oplus \hat{P}_1$ etc

så alt kommuterer og den midterste søjle bliver exakt.
P. gr. af korollaret p. 161 nok at sørge for at den midterste søjle er en nulfølge.

Da $\hat{P}_0$ er projektiv, findes $\sigma_0 : \hat{P}_0 \to B$ så $\psi\,\sigma_0 = \hat{d}_0$. Da vil den ved $d_0' : P_0 \oplus \hat{P}_0 \to B$, $d_0'(p_0, \hat{p}_0) = (\varphi d_0 p_0 + \sigma_0 \hat{p}_0)$ definerede homomorfi få de øverste to kvadrater til at kommutere.

Anvendes lemmaet p. 164 på diagrammet

$$\begin{tikzcd} & \hat{P}_1 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\div\sigma_0\hat{d}_1"] & \\ P_0 \arrow[r, "\varphi d_0"'] & B \arrow[r, "\psi"'] & C \end{tikzcd}$$

findes $\sigma_1 : \hat{P}_1 \to P_0$ så $\varphi d_0\, \sigma_1 = -\sigma_0 \hat{d}_1$. For homomorfien d_1' $P_1 \oplus \hat{P}_1 \to P_0 \oplus \hat{P}_0$, defineret ved $d_1'(p_1, \hat{p}_1) = (d_1 p_1 + \sigma_1 \hat{p}_1, \hat{d}_1 \hat{p}_1)$ gælder $d_0' d_1' = 0$ og de næstøverste kvadrater kommuterer.

Nu ses som før af diagrammet

$$\begin{tikzcd} & \hat{P}_2 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\div\sigma_1\hat{d}_2"] & \\ P_1 \arrow[r, "d_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varphi d_0"'] & B \end{tikzcd}$$

at der findes $\sigma_2 : \hat{P}_2 \to P_1$ så $d_1\sigma_2 = -\sigma_1\hat{d}_2$. Homomorfien $d_2' : P_2 \oplus \hat{P}_2 \to P_1 \oplus \hat{P}_1$ defineret ved $d_2'(p_2,\hat{p}_2) = (d_2p_2 + \sigma_2\hat{p}_2 \, , \, \hat{d}_2\hat{p}_2)$ vil opfylde de stillede betingelser.

For $n > 2$ betragter vi successivt

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{P}_n \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "-\sigma_{n-1}\hat{d}_n"] & \\
P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & P_{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"'] & P_{n-3}
\end{tikzcd}$$

hvor der findes $\sigma_n : \hat{P}_n \to P_{n-1}$ så $d_{n-1}\sigma_n = \sigma_{n-1}\hat{d}_n$.

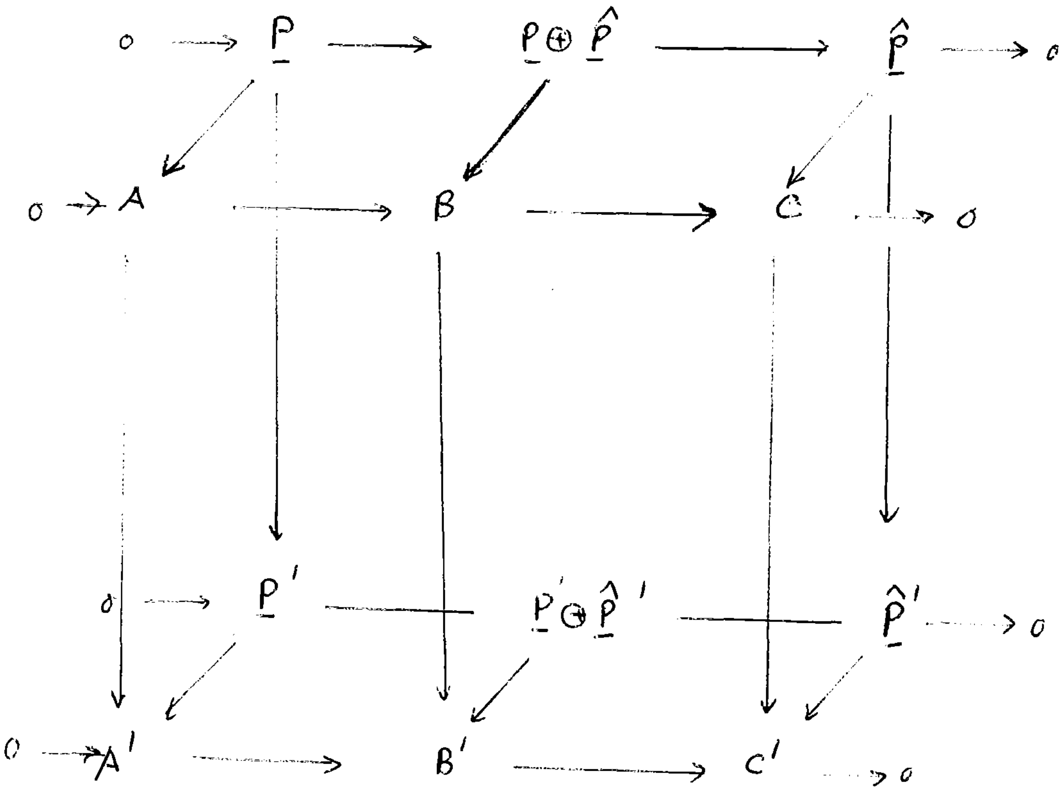
Som $d_n' : P_n \oplus \hat{P}_n \to P_{n-1} \oplus \hat{P}_{n-1}$ kan vi bruge

$d_n'(p_n, \hat{p}_n) = (d_np_n + \sigma_n\hat{p}_n \, , \, \hat{d}_n\hat{p}_n)$. ∎

<u>Sætning.</u> Lad der være givet projektive resolutioner $\underline{P}$ $\hat{\underline{P}}$ $\underline{P} \oplus \hat{\underline{P}}$ af hhv. A, C, B og $\underline{P}'$, $\hat{\underline{P}}'$, $\underline{P}' \oplus \hat{\underline{P}}'$ af hhv. A' C' , B' hvor

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er kommutativt med exakte rækker, og translationer mellem resolutionerne så (med lidt ukorrekte benævnelser)



kommuterer. Da findes translation ψ fra $\underline{P} \oplus \hat{\underline{P}}$ til $\underline{P}' \oplus \hat{\underline{P}}'$ så alt kommuterer.

<u>Bevis</u>. (Se f.eks. Northcott: "Homological Algebra" p. 85).

- - - - - - - - - - - - -

Der findes naturligvis helt tilsvarende sætninger for injektive moduler. Formuleringen og beviserne for disse overlades til læseren.

Kapitel VII. Deriverede funktorer.

Først en hjælpesætning.

Lemma. Lad T være en additiv kovariant funktor fra kategorien af (venstre) Λ-moduler til $\mathbb{Z}$-moduler, og lad $\underline{f}$ og $\underline{g}$ være translationer fra et komplex $\underline{K}$ til et komplex $\underline{K}'$ af Λ-moduler. Hvis $\underline{f}$ og $\underline{g}$ er homotope, da er $T\underline{f}$ og $T\underline{g}$ homotope translationer fra $T\underline{K}$ til $T\underline{K}'$.

Bevis. Følger umiddelbart af definitionen på homotopi og T's additivitet. ∎

Lad A være en (venstre) Λ-modul. For projektive resolutioner af A vil vi (i modsætning til kap. VI) benytte følgende notation:

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow[d_2]{} P_1 \xrightarrow[d_1]{} P_0 \xrightarrow[\varepsilon]{} A \to 0$$

hvor ε kaldes agumentationsafbildningen. Det tilsvarende "projektive komplex" (jfr. p. 167) betegnes $\underline{P_A}$, og vi bruger her notationen

$$\underline{P_A}: \quad \cdots \to P_2 \xrightarrow[d_2]{} P_1 \xrightarrow[d_1]{} P_0 \xrightarrow[d_0]{} 0 \to 0$$

Lad T være additiv kovariant funktor fra Λ-moduler til $\mathbb{Z}$-moduler. For ethvert $n \in \mathbb{Z}$ definerer vi en funktor L_nT fra Λ-moduler til $\mathbb{Z}$-moduler på følgende måde:

1) For hvert $A \in \operatorname{Mod} \Lambda$ vælges projektiv resolution

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow[d_2]{} P_1 \xrightarrow[d_1]{} P_0 \xrightarrow[\varepsilon]{} A \to 0$$

med tilhørende komplex $\underline{P_A}$

2) For enhver Λ-homomorfi $f: A \to B$ vælges en translation $\underline{f}$ fra $\underline{P_A}$ til $\underline{P_B}$ der fortsætter f. Hvis $f = 1_A$ vælges $\underline{f}$ som $1_{\underline{P_A}}$.

Vi definerer da

For en Λ-modul A: $L_n T(A) = H_n(T \underline{P_A})$ og for en Λ-homomorfi f: $L_nF(f) = H_n(T\underline{f})$.

Vi godtgør nu, at herved er defineret en funktor fra $\operatorname{Mod} \Lambda$ til $\operatorname{Mod} \mathbb{Z}$. Lad $f: A \to B$, $g: B \to C$ være Λ-homomorfier. Lad $\underline{P_A}$, $\underline{P_B}$, $\underline{P_C}$ være de projektive komplekxer fra 1) svarende til A, B og C. Lad $\underline{f}$ (resp. $\underline{g}$, resp. $\underline{u}$) være translationer fra 2) fra $\underline{P_A}$ til $\underline{P_B}$ (resp. $\underline{P_B}$ til $\underline{P_C}$, resp. $\underline{P_A}$ til $\underline{P_C}$) der fortsætter f (resp. g, resp. gf). Ifl. sætning p. 164-165 er $\underline{u}$ homotop med $\underline{g}\ \underline{f}$, hvorfor (p. 172) $T(\underline{u}) \sim T(\underline{g}\ \underline{f}) = T\underline{g}\ T\underline{f}$ og følgelig $H_nT(\underline{u}) = H_nT(\underline{g})\ H_nT(\underline{f})$, $\supset$: $L_nT(g\ f) = L_nT(g)\ L_nT(f)$.

Da endvidere (på grund af 2)) $L_nT(1_A) = 1_{L_nTA}$ er L_nT således en funktor. Ved at benytte sætningen p. 164-165 endnu en gang ses let, at L_nT er additiv for alle n. Åbenbart gælder, at $L_nT \equiv 0$ for alle $n < 0$.

Lad os nu betragte endnu et system af:

1) En projektiv resolution

$$\cdots \to \hat{P}_1 \xrightarrow[d_1]{} \hat{P}_0 \xrightarrow[\varepsilon]{} A \to 0$$

($\underline{\hat{P}}_A$ tilhørende komplex) for enhver Λ-modul A

samt

2) for enhver Λ-homomorfi $f: A \to B$ en translation $\underline{\hat{f}}$ fra $\underline{\hat{P}}_A$ til $\underline{\hat{P}}_B$ der fortsætter f. Hvis $f = 1_A$, da $\underline{\hat{f}} = 1_{\underline{\hat{P}}_A}$

For hvert n fås herved en funktor $\hat{L}_nT$ fra ModΛ til Mod $\mathbb{Z}$.

<u>Påstand</u>. For ethvert n er $\hat{L}_nT$ og L_nT naturligt isomorfe.

<u>Bevis</u>. For enhver modul A findes translation $\underline{\varphi_{(A)}}$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A,n}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"'] \arrow[d, "\varphi_{A,1}"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\varphi_{A,0}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
{} \arrow[r] & \hat{P}_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \hat{P}_1 \arrow[r, "\hat{d}_1"'] & \hat{P}_0 \arrow[r, "\hat{\varepsilon}"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

og en translation $\underline{\psi_{(A)}}$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \hat{P}_n \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{A,n}"] & \cdots \arrow[r] & \hat{P}_1 \arrow[r, "\hat{d}_1"'] \arrow[d, "\psi_{A,1}"] & \hat{P}_0 \arrow[r, "\hat{\varepsilon}"'] \arrow[d, "\psi_{A,0}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
{} & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"'] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Her gælder: $\underline{\psi_A} \circ \underline{\varphi_A} \sim 1_{\underline{P_A}}$ og $\underline{\varphi_A} \circ \underline{\psi_A} \sim 1_{\underline{\hat{P}_A}}$ og

følgelig, da T er additiv: $T(\underline{\psi_A}) \circ T(\underline{\varphi_A}) \sim 1_{T\,\underline{P_A}}$ og

$$T(\varphi_A) \circ T(\underline{\psi_A}) \sim 1_{T\,\underline{\hat{P}_A}}$$

og heraf: $H_n(T\,\underline{\psi_A}) \cdot H_n(T\,\underline{\varphi_A}) = 1_{H_nT\underline{P_A}} = 1_{L_nTA}$

$$H_n(T\,\underline{\varphi_A}) \cdot H_n(T\,\underline{\psi_A}) = 1_{H_nT\underline{\hat{P}_A}} = 1_{\hat{L}_nTA}$$

$H_n(T\,\underline{\varphi_A})$ er således en isomorfi fra L_nTA på $\hat{L}_nTA$. Denne isomorfi er naturlig i A. Lad nemlig $f\colon A \to B$ være Λ-homomorfi. Vi har da følgende diagram af komplexer og translationer:

$$\begin{tikzcd} \underline{P_A} \arrow[r, "\underline{\varphi_A}"'] \arrow[d, "\underline{f}"'] & \underline{\hat{P}_A} \arrow[d, "\underline{\hat{f}}"] \\ \underline{P_B} \arrow[r, "\underline{\varphi_B}"'] & \hat{P}_B \end{tikzcd}$$

Da både $\underline{\hat{f}}\ \underline{\varphi_A}$ og $\underline{\varphi_B}\ \underline{f}$ er translationer, der fortsætter $f\colon A \to B$, er disse homotope, hvorfor: $T\underline{\hat{f}}\ T\underline{\varphi_A} \sim T\underline{\varphi_B}\ T\underline{f}$ og derfor $H_n\ T\underline{\hat{f}}\ \ H_n(T\ \underline{\varphi_A}) = H_n(T\ \underline{\varphi_B})H_n\ T\underline{f}$ eller

$$\hat{L}_n\ T\underline{f}\ \ H_n(T\ \underline{\varphi_A}) = H_n(T\ \underline{\varphi_B})L_n\ T\underline{f}$$

∎

Svarende til forskellige systemer af projektive resolutioner og translationer mellem disse fås altså for hvert n naturligt isomorfe funktorer, som vi (mere eller mindre explicit) vil identificere og regne for én funktor L_nT, kaldes den n^{te} venstre deriverede funktor af T.

Som allerede tidligere bemærket er L_nT additiv og $L_nT = 0$ for $n < 0$. Endvidere klart at $L_n\ TA = 0$

for $n > 0$ når A er projektiv.

Lad nu $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ være (kort)-exakt følge af Λ-moduler.

Som vist p. 167-168 findes projektive resolutioner

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[u] \arrow[r] & P'_0 \arrow[u] \arrow[r] & P''_0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

så rækkerne er exakte og alt kommuterer. Den tilsvarende følge af projektive komplexer $0 \to \underline{P_A} \xrightarrow{\underline{f}} \underline{P_B} \xrightarrow{\underline{g}} \underline{P_C} \to 0$

er kort exakt. Da hver række er split-exakt, og den additive funktor bevarer split-exakte følger, fås en lang exakt følge:

$$H_{n+1} T \underline{P_C} \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n T\underline{P_A} \to H_n T\underline{P_B} \to H_n T\underline{P_C} \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1} T\underline{P_A} \to$$

eller

$$L_{n+1}TC \xrightarrow{\Delta_{n+1}} L_nTA \to L_nTB \to L_nTC \xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}TA \to L_{n-1}TB \to$$

$$\to L_1TC \to L_1TB \to L_1TA \xrightarrow{\Delta_1} L_0TA \to L_0TB \to L_0TC \to 0$$

<u>Bevis.</u> På grund af sætning p. 170 er Δ naturlig.

<u>Sætning</u>. L_0T naturligt isomorf med $T \Leftrightarrow T$ er højre-exakt.

<u>Bevis.</u> " $\Rightarrow$ " følger umiddelbart af ovenstående, da L_0T er højre exakt for enhver funktor T .

" $\Leftarrow$ " Lad

$$\cdots \to P_1 \xrightarrow[d_1]{} P_0 \xrightarrow[\varepsilon]{} A \to 0$$

være en projektiv resolution af A . Da T højre exakt, er

$$TP_1 \xrightarrow[Td_1]{} TP_0 \xrightarrow[T\varepsilon]{} TA \to 0$$

exakt. Lad μ være den kanoniske homomorfi fra TP_0 på $H_0(T\underline{P}) = TP_0/_{\mathrm{Ker}\ T\varepsilon}$. Da findes netop en isomorfi φ : $TA \to L_0TA$, så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
TP_0 \arrow[rr, "\mu"'] \arrow[dr, "T\varepsilon"'] & & H_0(TP) = L_0TA \\
& TA \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

er kommutativt. Lad $A \xrightarrow[f]{} A'$ være Λ-homomorfi og

$\cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1'} P_0 \xrightarrow{\varepsilon'} A' \to 0$ projektiv resolution og

$\underline{f} = \{f_0, f_1 \cdots\}$ en translation fortsættende f:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "d1"'] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Idet, $\varkappa'$ er den kanoniske homomorfi fra TP_0' på $H_0T\underline{P}' = L_0TA'$ og φ' isomorfier $TA' \to L_0TA'$, viser diagrammet

$$\begin{tikzcd}
TP_0 \arrow[rr, "\varkappa"'] \arrow[dr, "T\varepsilon"'] \arrow[dd, "Tf_0"'] & & L_0TA \arrow[dd, "L_0T(f)"] \\
& TA \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[dd, "Tf"] & \\
TP_0' \arrow[rr, "\varkappa'"] \arrow[dr, "T\varepsilon'"'] & & L_0TA' \\
& TA' \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

hvor a priori alt kommuterer undtagen "højre sidevæg".

Ved "diagram chasing" ses, at også denne del af diagrammet kommuterer hvorfor φ: TA $\to L_0$TA er naturlig.

∎

<u>Eksempel</u>. Lad T: Mod $\mathbb{Z} \to$ Mod $\mathbb{Z}$ være funktoren TA = 2A . Her er $L_0T = 1_{\text{Mod } \mathbb{Z}}$ og $L_nT = 0$ for $n > 0$.

<u>Eksempel 2.</u> I almindelighed er $L_{m+n}T \neq L_mL_nT$. Betragt T: Mod $\Lambda \to$ Mod $\mathbb{Z}$ hvor $\Lambda = \mathbb{R}[x,y]$ og TA = $A/_{IA}$, I = identitet $\{f(x,y) \in \Lambda \mid f(0,0) = 0\}$ Da er $L_2T(\Lambda/_I) \neq 0$, men $L_1L_1T = 0$ (hvorfor?)

<u>Eksempel</u>. For enhver additiv funktor T fra Mod $\mathbb{Z}$ til Mod $\mathbb{Z}$ gælder $L_nT = 0 \;\forall\; n > 1$, idet enhver $\mathbb{Z}$-modul har en projektiv resolution af længde $\leqq 1$.

Analogt med venstre deriverede indføres for en additiv kovariant funktor T fra Mod Λ til Mod $\mathbb{Z}$ de højre deriverede R^nT ved $R^nT\,A = H^n(T\underline{Q_A})$, hvor $\underline{Q_A}$ er det ko-komplex der svarer til en injektiv resolution af A: $0 \to A \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots$.

$\underline{Q_A}$: $0 \to 0 \to Q^0 \to Q^1 \to Q^2 \to$

For en Λ-homomorfi f: A $\to$ B defineres R^nTf (analogt med L_nTf) via en translation $\underline{Q_A} \to \underline{Q_B}$ der fortsætter f. Da gælder (analogt med L_nT) :

R^nT er additiv funktor for $\forall_n$ og $R^nT = 0 \quad \forall n < 0$
Endvidere findes for enhver kort-exakt følge af Λ-moduler

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

en lang exakt følge

$$0 \to R^0TA \to R^0TB \to R^0TC \underset{\Delta}{\to} R^1TA \to R^1TB \to R^1TC \underset{\Delta}{\to}$$

$$\to \cdots R^nTA \to R^nTB \to R^nTC \underset{\Delta}{\to} R^{n+1}TA \to R^{n+1}TB \to \cdots$$

hvor de forbindende homomorfier Δ er naturlige.
Helt analogt med sætningen p. 178 gælder

<u>Sætning.</u> R^0T naturligt isomorf med $T \Leftrightarrow T$ er venstre-exakt.

Tilsvarende indføres venstre og højre deriverede funktorer for kontravariante funktorer T fra Mod Λ til Mod $\mathbb{Z}$. Da venstre deriverede indføres via injektive resolutioner og de højre deriverede via projektive resolutioner. For de højre deriverede R^nT gælder: For enhver kort exakt følge af Λ-moduler

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

findes lang exakt følge:

$$0 \to R^0TC \to R^0TB \to R^0TA \underset{\Delta}{\to} R^1TC \to R^1TB \to R^1TA \to$$

$$\cdots\ R^nTC \to R^nTB \to R^nTA \underset{\Delta}{\to} R^{n+1}TC \to R^{n+1}TB$$

endvidere:

$R^0 T$ nat. isomorf med $T \Leftrightarrow T$ er venstre exakt.

Indførelse af Tor_n

Lad A være højre Λ-modul og B en venstre Λ-modul. $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$ kan på oplagt måde opfattes som funktor i to variable, A i kategorien af højre Λ-moduler, B i kategorien af venstre Λ-moduler, til Mod $\mathbb{Z}$.

For fastholdt B er $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$ en additiv (kovariant) funktor fra højre moduler til Mod $\mathbb{Z}$ og har således venstre deriverede funktorer. Disse sidste kan opfattes som funktorer i både A og B på følgende vis:

For hvert A lad $\underline{P_A}$ være det projektive komplex svarende til en projektiv resolution af A og sæt $T_n(A,B) = H_n(\underline{P_A} \underset{\Lambda}{\otimes} B)$. Lad $A \underset{f}{\to} A'$, $B \underset{g}{\to} B'$ være Λ-homomorfier. For en translation $\underline{f}$: $\underline{P_A} \to \underline{P_{A'}}$ fortsættende f er $\underline{f} \underset{\Lambda}{\otimes} g$ en translation $\underline{P_A} \underset{\Lambda}{\otimes} B \to \underline{P_{A'}} \underset{\Lambda}{\otimes} B'$. Det ses let, at for translationer $\underline{f}$ og $\underline{\tilde{f}}$ fra $\underline{P_A} \to \underline{P_{A'}}$

der fortsætter f vil $\underline{f} \otimes g$ og $\tilde{\underline{f}} \otimes g$ være homotope. Dette retfærdiggør at definere $T_n(f,g) = H_n(\underline{f} \otimes g)$. Nu efterevises uden vanskeligheder:

For $f: A \to A'$ $f': A' \to A''$ og $g: B \to B'$ $g': B' \to B''$

gælder $T_n(f'f\ ,\ g'g) = T_n(f',g')T_n(f,g)$.

Ganske som p.174-176 ses, at T_n , bortset fra naturlig isomorfi, er uafhængig af de projektive resolutioner for modulerne A .

Lad

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1' \arrow[r, "\varphi'"'] & A_2' \arrow[r, "\psi'"'] & A_3' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

være kommutativt diagram med exakte rækker. Man kan vælge projektive resolutioner af de indgående moduler og translationer mellem de tilsvarende komplexer fortsættende modulhomomorfierne så:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{P_{A_1}} \arrow[r, "\underline{\varphi}"'] \arrow[d, "\underline{\alpha_1}"] & \underline{P_{A_2}} \arrow[r, "\underline{\psi}"'] \arrow[d, "\underline{\alpha_2}"] & \underline{P_{A_3}} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\alpha_3}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{P_{A_1'}} \arrow[r, "\underline{\varphi'}"'] & \underline{P_{A_2'}} \arrow[r, "\underline{\psi'}"'] & \underline{P_{A_3'}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er kommutativt med exakte rækker. Lad $g: B \to B'$ være Λ-homomorfi. Da $-\otimes-$ er additiv funktor, bliver

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{P_{A_1}} \underset{\Lambda}{\otimes} B \arrow[r, "\underline{\varphi}\otimes 1_B"'] \arrow[d, "\underline{\alpha}_1\otimes g"] & \underline{P_{A_2}} \underset{\Lambda}{\otimes} B \arrow[r, "\underline{\psi}\otimes 1_B"'] \arrow[d, "\underline{\alpha}_2\otimes g"] & \underline{P_{A_3}} \underset{\Lambda}{\otimes} B \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\alpha}_3\otimes g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{A'} \underset{\Lambda}{\otimes} B' \arrow[r, "\underline{\varphi}'\otimes 1_{B'}"'] & \underline{P_{A_2'}} \underset{\Lambda}{\otimes} B' \arrow[r, "\psi'\otimes 1_{B'}"'] & \underline{P_{A_3'}} \underset{\Lambda}{\otimes} B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativt med exakte rækker. Ved overgang til homologi og forbindende homomorfi fås:

$$\begin{tikzcd}
T_{n+1}(A_2,B) \arrow[r] \arrow[d, "T_{n+1}(\alpha_2,g)"] & T_{n+1}(A_3,B) \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[d, "T_{n+1}(\alpha_3,g)"] & T_n(A_1,B) \arrow[r] \arrow[d, "T_n(\alpha_1,g)"] & T_n(A_2,B) \arrow[d] \\
T_{n+1}(A_2',B') \arrow[r] & T_{n+1}(A_3',B') \arrow[r, "\Delta'"'] & T_n(A_1',B') \arrow[r] & T_n(A_2',B')
\end{tikzcd}$$

hvor rækkerne er exakte og alt kommuterer.

Lad nu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1' \arrow[r, "\varphi'"'] & B_2' \arrow[r, "\psi'"'] & B_3' \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

være kommutativt diagram med exakte rækker.

Lad $A \xrightarrow[f]{} A'$ være Λ-homomorfi og $\underline{f}$ en translation mellem de tilsvarende projektive komplexer $\underline{f}$: $\underline{P_A} \to \underline{P_{A'}}$. Da projektive moduler er flade, bliver rækkerne i det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{P_A} \otimes B_1 \arrow[r, "1_{\underline{P_A}} \otimes \varphi"] \arrow[d, "\underline{f} \otimes \beta_1"] & \underline{P_A} \otimes B_2 \arrow[r, "1_{\underline{P_A}} \otimes \psi"] \arrow[d, "\underline{f} \otimes \beta_2"] & \underline{P_A} \otimes B_3 \arrow[r] \arrow[d, "\underline{f} \otimes \beta_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{P_{A'}} \otimes B_1' \arrow[r, "1_{\underline{P_{A'}}} \otimes \varphi'"'] & \underline{P_{A'}} \otimes B_2' \arrow[r, "1_{\underline{P_{A'}}} \otimes \psi'"'] & \underline{P_{A'}} \otimes B_3' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakte. Herved fås som før

$$\begin{tikzcd}
T_{n+1}(A,B_2) \arrow[r] \arrow[d] & T_{n+1}(A,B_3) \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[d, "T_{n+1}(f,\beta_3)"] & T_n(A,B_1) \arrow[r] \arrow[d, "T_n(f,\beta_1)"] & T_n(A,B_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
T_{n+1}(A',B_2') \arrow[r] & T_{n+1}(A',B_3') \arrow[r, "\Delta'"'] & T_n(A',B_1') \arrow[r] & T_n(A',B_2') &
\end{tikzcd}$$

hvor rækkerne er exakte og alt kommuterer.

Endelig påstår vi: $\underline{T_0(A,B) \text{ nat. isomorf med } A \otimes_\Lambda B}$ (qua funktorer i A og B) .

Lad hertil $A \xrightarrow{f} A'$ og $B \xrightarrow{g} B'$ være Λ-homomorfier og betragt projektive resolutioner og A og A', og tilsvarende translationer

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$- \otimes B$ er højre exakt, hvorfor

$$P_1 \otimes_\Lambda B \xrightarrow[d_1 \otimes 1_B]{} P_0 \otimes_\Lambda B \xrightarrow[\varepsilon \otimes 1_B]{} A \otimes_\Lambda B \to 0$$

er exakt.

Lad $H_{A,B}$ være den kanoniske homomorfi fra $P_0 \otimes B$ på $P_0 \otimes B/_{Im(d_1 \otimes 1_B)}$ ~~$P_0 \otimes B/_{Im(d_1 \otimes 1_B)}$ på $A \otimes B$~~. Da findes netop een isomorfi $\varphi_{A,B}: A \otimes B \to P_0 \otimes B/_{Im(d_1 \otimes 1_B)} = T_0(A,B)$ så

$$\begin{tikzcd}
P_0 \otimes B \arrow[rr, "H_{A,B}"'] \arrow[dr, "\varepsilon \otimes 1_B"'] & & T_0(A,B) \\
& A \otimes B \arrow[ur, "\varphi_{A,B}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

Idet tilsvarende $\kappa_{A',B'}$ er den kanoniske homomorfi fra $P_0' \otimes B'$ på $P_0' \otimes B'/_{\mathrm{Im}(d_1' \otimes 1_{B'})}$ og $\varphi_{A',B'}$ den tilsvarende isomorfi $\varphi_{A',B'} : A' \otimes B' \to$ $P_0' \otimes B'/_{\mathrm{Im}(d_1' \otimes 1_{B'})} = T_0(A',B')$ vil i diagrammet

$$\begin{tikzcd}
P_0 \otimes B \arrow[rr, "\kappa_{A,B}"] \arrow[dr, "\varepsilon \otimes 1_B"'] \arrow[dd, "f \otimes g"'] & & T_0(A,B) \arrow[dd, "T_0(f,g)"] \\
& A \otimes B \arrow[ur, "\varphi_{A,B}"'] \arrow[dd] & \\
P_0' \otimes B' \arrow[rr, "\kappa_{A',B'}"] \arrow[dr, "\varepsilon' \otimes 1_{B'}"'] & & T_0(A',B') \\
& A' \otimes B' \arrow[ur, "\varphi_{A',B'}"'] &
\end{tikzcd}$$

a priori alt kommutere på nær "højre sidevæg". Ved "diagram chasing" ses, at denne da også er kommutativ, hvilket indbærer, at $\varphi_{A,B}$ er naturlig isomorfi mellem $A \underset{\Lambda}{\otimes} B$ og $T_0(A,B)$

∎

Ganske analogt kan dannes $U_n(A,B) = H_n(A \underset{\Lambda}{\otimes} \underline{P_B})$ ved en projektiv resolution for B . Herved fås en funktor i A og B med egenskaber analoge til T_n's egenskaber.

Vi vil nu vise

<u>Sætning.</u> $T_n(A,B)$ naturlig isomorf med $U_n(A,B)$ som funktorer i A og B .

<u>Bevis</u>. Først et

<u>Lemma.</u> For $n > 0$ er $T_n(A,B) = U_n(A,B) = 0$ hvis A eller B projektiv.

<u>Bevis.</u> Af symmetrigrunde nok at se på $T_n(A,B)$. Hvis A projektiv, er det umiddelbart klart, at $T_n(A,B) = 0$ $n > 0$. Hvis B er projektiv bliver $\underline{P_A} \otimes B$ exakt $\supset$: med forsvindende homologi for $n > 0$, idet B specielt er flad. ▮

Nu beviset for sætningen. Induktion efter n .

<u>$n = 0$</u> klar, da $T_0(A,B)$ og $U_0(A,B)$ begge er naturligt isomorfe med $A \otimes B$. Lad $\varphi^0_{A,B}$ være naturlig isomorfi fra $T_0(A,B)$ på $U_0(A,B)$

<u>$n = 1$</u> Lad $0 \to K \to P \to A \to 0$ være exakt med P projektiv. Ifl. lemmaet er $T_1(P,B) = U_1(P,B) = 0$

Vi har exakte rækker i

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1(A,B) \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[d, dashed] & T_0(K,B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0_{K,B}"] & T_0(P,B) \arrow[d, "\varphi^0_{P,B}"] \\
0 \arrow[r] & U_1(A,B) \arrow[r, "\Delta"'] & U_0(K,B) \arrow[r] & U_0(P,B)
\end{tikzcd}$$

Ved diagram chasing ses, at der er netop én homomorfi $\varphi^1_{A,B} : T_1(A,B) \to U_1(A,B)$ så ovenstående diagram bliver kommutativt $\varphi^1_{A,B}$ bliver en isomorfi. ($\varphi^1_{A,B}$ kan vises ikke at afhænge af den valgte exakte følge $0 \to K \to P \to A \to 0$. Her er dette dog ikke væsentligt, idet vi tænker os, at der for hver modul A vælges en fast exakt følge af ovennævnte form).

$\varphi^1_{A,B}$ er naturlig i A og B

Lad $f: A \to A'$ $g: B \to B'$ være Λ-homomorfier.

Der findes homomorfier f_0 , f_1 så diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & P' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

er kommutativt. Vi får da følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & T_1(A,B) \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dl, "T_1(f,g)"'] \arrow[dd, "\varphi^1_{A,B}"] & & T_0(K,B) \arrow[dl, "T_0(f_1,g)"'] \arrow[dd, "\varphi^0_{K,B}"] \\
0 \arrow[r] & T_1(A',B') \arrow[rr, "\Delta'"] \arrow[dd, "\varphi^1_{A',B'}"'] & & T_0(K',B') \arrow[dd, "\varphi^0_{K',B'}"] & \\
& 0 \arrow[r] & U_1(A,B) \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dl, "U_1(f,g)"] & & U_0(K,B) \arrow[dl, "U_0(f_1,g)"] \\
0 \arrow[r] & U_1(A',B') \arrow[rr, "\Delta'"] & & U_0(K',B') &
\end{tikzcd}$$

hvor a priori alt kommuterer undtagen "venstre sidevæg" .
Ved "daigram chasing" ses da, at også denne kommuterer.
$\supset$: $\varphi^1_{A,B}$ er naturlig isomorfi.

<u>$n > 1$</u> Antager, at vi har konstrueret naturlig isomorfi $\varphi^{n-1}_{A,B}$ fra $T_{n-1}(A,B) \to U_{n-1}(A,B)$. Lad $0 \to K \to P \to A \to 0$ være exakt følge med P projektiv.

Da $n - 1 > 0$ er $T_n(P,B) = U_n(P,B) = T_{n-1}(P,B) = U_{n-1}(P,B) = 0$

Vi har derfor diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_n(A,B) \arrow[r, "\Delta"] & T_{n-1}(K,B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_{K,B}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_n(A,B) \arrow[r, "\Delta"'] & U_{n-1}(K,B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

med exakte rækker. Der findes da isomorfi $\varphi^n_{A,B}: T_n(A,B) \to U_n(A,B)$ så ovenstående kommuterer. $\varphi^n_{A,B}$ ses som før at være naturlig. ▮

Vi har altså nu set, at $T_n(A,B)$ naturlig isomorf med $U_n(A,B)$ og vi definerer (på nær naturlig isomorfi)

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A,B) = T_n(A,B) \quad (\text{eller } U_n(A,B))$$

Vi opskriver de vigtigste egenskaber for Tor^Λ_n

1). $\mathrm{Tor}^\Lambda_0(A,B)$ naturlig isomorf med $A \otimes_\Lambda B$

2). $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A,B) = 0$ for $n > 0$ hvis A eller B projektiv.

3). Hvis $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ exakt findes exakt følge.

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A_3,B) \xrightarrow[\Delta_n]{} \mathrm{Tor}^\Lambda_{n-1}(A_1,B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda_{n-1}(A_2,B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda_{n-1}(A_3,B) \xrightarrow[\Delta_{n-1}]{} \cdots$$

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_1(A_1,B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda_1(A_2,B) \to \mathrm{Tor}^\Lambda_1(A_3,B) \xrightarrow[\Delta]{} A_1 \otimes_\Lambda B \to A_2 \otimes_\Lambda B \to A_3 \otimes_\Lambda B \to 0$$

og tilsvarende for fast A og B varierende . Δ er naturlig.

4). For Λ kommutativ, er $- \otimes -$ en funktor fra Mod Λ til Mod Λ og $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(-,-)$ ses let også at blive funktor fra Mod Λ til Mod Λ . For Λ-homomorfier $f: A \to A'$, $g: B \to B'$ vil da

$\lambda \operatorname{Ton}_n^\Lambda(f,g) = \operatorname{Tor}_n^\Lambda(\lambda f,g) : \operatorname{Tor}_n^\Lambda(f,\lambda g)$ for $\lambda \in \Lambda$

<u>5).</u> <u>For Λ kommutativ,</u> gælder $\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A,B) \underset{\text{naturlig}}{\simeq} \operatorname{Tor}_n^\Lambda(B,A)$

<u>6).</u> <u>For Λ vilkårlig,</u> vil $\operatorname{Tor}_n^\Lambda$ (opfattet som funktor i A eller B) kommutere med $\varinjlim$

<u>Bevis</u>. Lad $A_\alpha \underset{f\beta\alpha}{\rightarrow} A_\beta \rightarrow \cdots$ være direkte system af Λ-moduler.

Vi skal vise, at den entydigt bestemte homomorfi φ så alt i

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tor}_n^\Lambda(A\alpha,B) \arrow[r, "\operatorname{Tor}_n(f_{\beta\alpha},1_B)"] \arrow[drr] \arrow[ddrr] & \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A_\beta,B) \arrow[dr] \arrow[ddr] & \\
& & \varinjlim \operatorname{Tor}_n^\Lambda(A_\alpha,B) \arrow[d, "\varphi"] \\
& & \operatorname{Tor}_n^\Lambda(\varinjlim A_\alpha,B)
\end{tikzcd}$$

kommuterer, er en isomorfi.

Lad $\underline{P_B}$ være komplexet svarende til en projektiv resolution af B φ kan da fås som $\tau \cdot \sigma$:

$$\begin{tikzcd}
H_n(A_\alpha \otimes \underline{P_B}) \arrow[r] \arrow[drr] \arrow[ddrr] \arrow[dddrr] & H_n(A_\beta \otimes \underline{P_B}) \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & \\
 & & \varinjlim H_n(A_\alpha \otimes \underline{P_B}) \arrow[d, "\sigma"] \\
 & & H_n(\varinjlim(A_\alpha \otimes \underline{P_B})) \arrow[d, "\tau"] \\
 & & H_n((\varinjlim A_\alpha) \otimes \underline{P_B})
\end{tikzcd}$$

hvor σ er en isomorfi ifl. sætning p. 157 og

τ er en isomorfi ifl. sætning 188, 189 (den p. 189 nævnte naturlighed benyttes til at vise τ er H_n(translation af isomorfier)). φ er derfor selv en isomorfi.

∎

Fladhed og Tor

Sætning. Lad Λ være vilkårlig ring og A en højre Λ-modul. Da er følgende betingelser ækvivalente

1) A er flad

2) $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,X) = 0$ for alle $n \geqq 1$ og alle venstre Λ-moduler X.

3) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X.

4) $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(A,\Lambda/\mathfrak{a}) = 0$ for ethvert endelig frembragt venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ.

Bevis. 1) $\Rightarrow$ 2) Følger af $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,X) = H_n\ (A \otimes_{\Lambda} \underline{P_X})$, hvor P_X er komplexet svarende til en projektiv resolution af X .

2) $\Rightarrow$ 3) og 3) $\Rightarrow$ 4) trivielle

4) $\Rightarrow$ 1) . Vi viser først, at 4) $\rightarrow$ $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A, \Lambda/\mathfrak{B}) = 0$ for ethvert venstre ideal $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ er filtrerende foreningsmængde af end. fremf. venstre ideal $\mathfrak{a}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$;
$\supset$: $B = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha = \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha$.

For hvert α findes kort exakt følge

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}_\alpha \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda/\mathfrak{a}_\alpha \rightarrow 0 \qquad (*)$$

for $\alpha \leqq \beta$ har vi kononiske afbildninger af $\mathfrak{a}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{a}_\beta$ og $\Lambda/\mathfrak{a}_\alpha \rightarrow \Lambda/\mathfrak{a}_\beta$; (*) er da eksakt følge af direkte systemer hvorfor:

$$0 \rightarrow \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha \rightarrow \Lambda \rightarrow \varinjlim \Lambda/\mathfrak{a}_\alpha \rightarrow 0 \quad .$$

Følgelig er $\Lambda/\mathfrak{B} = \varinjlim_\alpha \Lambda/\mathfrak{a}_\alpha$. Da $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A,-)$ kommuterer med $\varinjlim$, er derfor $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A, \Lambda/\mathfrak{B}) = 0$.

Ud fra den exakte følge

$$0 \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda/\mathfrak{B} \rightarrow 0$$

fås lang exakt følge:

$$\to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, \Lambda/B) \to A \underset{\Lambda}{\otimes} B \to A \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda \to A \otimes \Lambda/B \to 0$$

Da $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, \Lambda/B) = 0$ er A flad ifl. sætning p.114. ∎

<u>Korollar</u>. Lad $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ være exakt følge af (højre) Λ-moduler; da gælder A_1 flad og A_3 flad $\Rightarrow$ A_2 flad.

Vi beviser nu en sætning der bl.a. begrunder Tor's Navn.

<u>Sætning.</u> Lad Λ være et (kommutativt) integritetsområde med kvotientlegeme K. Da gælder for enhver Λ-modul A: $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, K/_\Lambda) \simeq A_T$.

<u>Bevis</u>. Som tidligere vist er K en flad Λ-modul.

Ud fra $0 \to \Lambda \to K \to K/_\Lambda \to 0$

fås exakt følge

$$\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, K) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, K/_\Lambda) \to A \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda \to A \underset{\Lambda}{\otimes} K \quad .$$

Da $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, K) = 0$ bliver

$$\operatorname{Tor}_1^\Lambda(A, K/_\Lambda) \simeq \operatorname{Ker}(A \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda \to A \underset{\Lambda}{\otimes} K) \simeq \operatorname{Ker}(A \to A \underset{\Lambda}{\otimes} K) \quad ,$$

hvor afbildningen $A \to A \underset{\Lambda}{\otimes} K$ er den sædvanlige $a \to a \otimes 1$. Som tidligere vist p.100 er $\operatorname{Ker}(A \to A \underset{\Lambda}{\otimes} K)$ netop A_T . ∎

Endnu en sætning retfærdiggør Tor's navn.

<u>Sætning</u>. Lad Λ være (kommutativt) integritetsområde. Da er $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)$ en Torsionsmodul for alle A, B og alle $n > 0$.

<u>Bevis</u>. <u>1^o</u> . Vi viser først sætningen i det tilfælde, hvor B er cyklisk $\supset$: af formen $\Lambda/\mathfrak{b}$ for et passende ideal $\mathfrak{b}$ i Λ . Hvis $\mathfrak{b} = 0$, er $B = \Lambda$ og $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B) = 0$ for alle $n > 0$ og alle A ifl. sætning p. 193. Hvis $\mathfrak{b} \neq 0$ findes $b \neq 0$, $b \in \mathfrak{b}$ og $b \cdot (\Lambda/\mathfrak{b}) = 0$. $b \cdot 1_{\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,\Lambda/\mathfrak{b})} = b \cdot \mathrm{Tor}_n^\Lambda(1_A, 1_{\Lambda/\mathfrak{b}}) =$ $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(1_A , b \cdot 1_{\Lambda/\mathfrak{b}}) = 0$ (jfr. pp. 191 - 192).

<u>2^o</u> . Vi viser så, at $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)$ er en torsionsmodul for enhver endelig frembragt Λ-modul i B . Antag B er frembragt af t elementer $b_1,\cdots,b_t$ $\supset$: $B = \Lambda b_1+\cdots+\Lambda b_t$. Bevis ved induktion efter t .

<u>$t=1$</u> er klaret ved <u>1^o</u>

<u>$t - 1 \to t$</u> $(t > 1)$. Lad $B' = \Lambda b + \cdots + \Lambda b_{t-1}$; da er $B/_{B'}$ frembragt af sideklassen b_t modulo B' , altså cyklisk. Ifl. <u>1^o</u> og induktionsantagelsen er $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B/_{B'})$ og $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B')$ Torsionsmoduler. Da Tor_n^Λ er halv-exakt fås ud fra

$$0 \to B' \to B \to B/_{B'} \to 0$$

den exakte følge

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B') \to \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B) \to \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B/B')$$

heraf følger, at $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B)$ er en torsionsmodul (hvorfor?).

3°. B vilkårlig B er filtrerende foreningsmængde af endelig frembragte undermoduler B_α og kan altså skrives $B = \varinjlim B_\alpha$. Da Tor kommuterer med $\varinjlim$, fås

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B) = \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, \varinjlim B_\alpha) \simeq \varinjlim \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B_\alpha) \quad .$$

Da $\varinjlim$(Torsionsmoduler) er en Torsionsmodul (bevis?) er $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A,B)$ en Torsionsmodul.

∎

Svag homologisk dimension

I kap. II indførte vi homologiske dimension af en modul som et mål for afvigelsen fra projektivitet. Vi indfører nu tilsvarende en dimension $\mathrm{l.w.dh}_\Lambda$ (resp. $\mathrm{r.w.dh}_\Lambda$) , den svage homologiske dimension for en venstre (resp. højre) Λ-modul som et mål for afvigelsen fra fladhed.

Definition. Lad A være en højre Λ -modul . Da indfører vi $\mathrm{r.w.dh}_\Lambda(A) \leqq n \Leftrightarrow \exists$ exakt følge af flade (højre) Λ-moduler F_i :

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

Det er da klart, hvad det skal betyde, at $r.w.dh_\Lambda(A) = n$ (resp. $r.w.dh_\Lambda(A) = \infty$) .

For venstre moduler indføres $l.w.dh_\Lambda$ analogt. Åbenbart gælder, at A er flad $\Leftrightarrow r.w.dh_\Lambda(A) = 0$.

Sætning. For en højre Λ-modul A er følgende betingelser ækvivalente:

1) $r.w.dh_\Lambda(A) \leqq n$

2) $Tor_m^\Lambda(A,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X og alle $m > n$

3) $Tor_{n+1}^\Lambda(A,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X .

4) $Tor_{n+1}^\Lambda(A, \Lambda/\mathfrak{a}) = 0$ for ethvert endelig frembragt venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ .

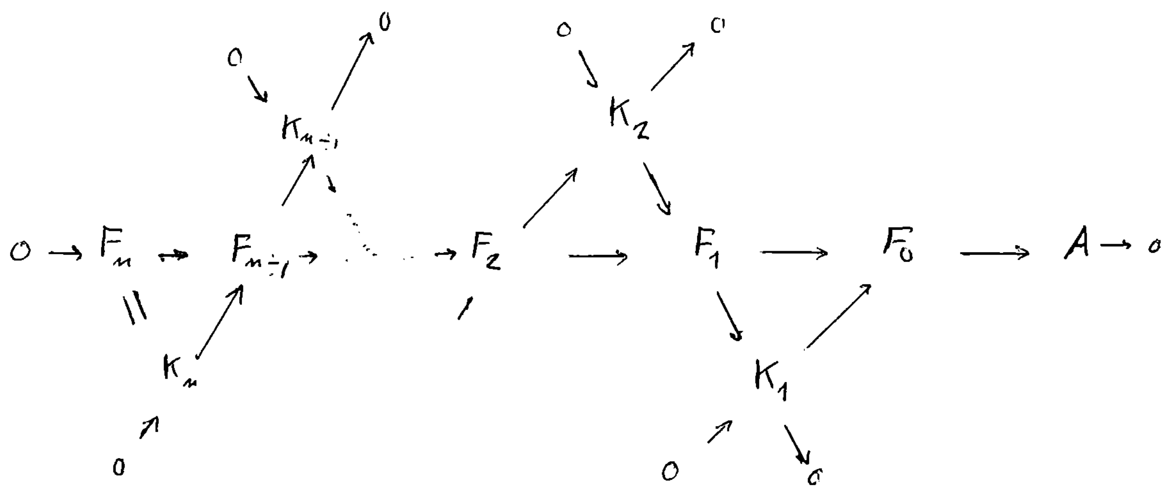
Bevis. For $n = 0$ er sætningen identisk med sætning p. 193 .

Vi kan derfor nu antage $n > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2) A har ifl. forudsætningen en flad resolution af længde n .

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

Denne følge splitter vi på sædvanlig vis op i kort-exakte følger:



Ud fra

$$0 \to K_1 \to F_0 \to A \to 0$$

fås exakt følge:

$$\mathrm{Tor}^{\wedge}_m(F_0,X) \to \mathrm{Tor}^{\wedge}_m(A,X) \to \mathrm{Tor}^{\wedge}_{m-1}(K_1,X) \to \mathrm{Tor}^{\wedge}_{m-1}(F_0,X)$$

Da F_0 er flad, er $\mathrm{Tor}^{\wedge}_m(F_0,X) = \mathrm{Tor}^{\wedge}_{m-1}(F_0,X) = 0$ d.v.s.

$$\mathrm{Tor}^{\wedge}_m(A,X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}^{\wedge}_{m-1}(K_1,X)$$

Analogt fås

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m-1}(K_1,X) \simeq \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m-2}(K_2,X)$$

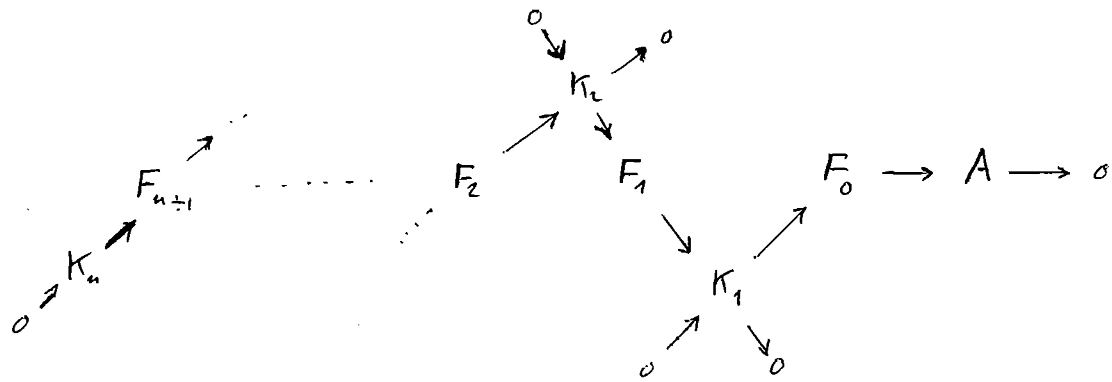
(o.s.v.)

Ialt: $\mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m}(A,X) \simeq \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m-n}(K_n,X) \simeq \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{m-n}(F_n,X) = 0$,

da F_n er flad.

2) $\Rightarrow$ 3) og 3) $\Rightarrow$ 4) er trivielle.

<u>4) $\Rightarrow$ 1)</u> Vi konstruerer en fri resolution for A



Ved anvendelse af de forbindende homomorfier for Tor fås som ovenfor, idet F_0, $F_1,\cdots,F_{n-1}$ er frie (specielt flade), at

$$0 = \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{n+1}(A,\Lambda/\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{1}(K_n,\Lambda/\mathfrak{a})$$

for ethvert end.fr. venstre ideal $\mathfrak{a}$. Ifl. sætning p. 193 er K_n flad, og

$$0 \to K_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

er en flad resolution af længde $\leqq n$ $\supset$: $r.w.dh_{\Lambda}(A) \leqq n$

Bemærkning. Af ovenstående følger specielt for en højre-Λ-modul A med $r.w.dh_{\Lambda}(A) \leqq n$ at for enhver exakt følge $0 \to K_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to A \to 0$ hvor $F_0, \cdots, F_{n-1}$ er flade, vil K_n være flad.

Tilsvarende gælder naturligvis for venstre Λ-moduler.

I anlogi med den globale dimension for en ring indfører vi nu den svage globale dimension $l.w.gl.\dim \Lambda$, (resp. $r.w.gl.\dim \Lambda$).

Definition. $l.w.gl.\dim \Lambda = \sup l.w.dh_{\Lambda}(B)$, B gennemløbende alle venstre Λ-moduler; og

$$r.w.gl.\dim \Lambda = \sup r.w.dh_{\Lambda}(A), \quad A \text{ gennemløbende alle højre } \Lambda\text{-Moduler}$$

Ved hjælp af ovenstående sætning fås

$r.w.gl.\dim \Lambda \leqq n \Leftrightarrow r.w.dh_{\Lambda}(A) \leqq n$ $\forall$ højre Λ-moduler $A \Leftrightarrow$ $Tor_m^{\Lambda}(A,B) = 0$ $\forall$ $m > n$, $\forall$ højre Λ-moduler A, $\forall$ venstre Λ-moduler $B \Leftrightarrow Tor_{n+1}^{\Lambda}(A,B) = 0$ $\forall$ højre Λ-moduler A, $\forall$ venstre Λ-moduler $B \Leftrightarrow l.w.dh_{\Lambda}(B) \leqq n$ $\forall$ venstre Λ-moduler $B \Leftrightarrow l.w.gl.\dim \Lambda \leqq n \Leftrightarrow Tor_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a}, B) = 0$ for $\forall$ venstre moduler B $\forall$ end. frembr. højre idealer $\mathfrak{a} \Leftrightarrow r.w.dh_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a}) \leqq n$ $\forall$ end. frembr. højre idealer $\mathfrak{a} \Leftrightarrow Tor_{n+1}^{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a}, \Lambda/\mathfrak{b}) = 0$ $\forall$ end. frembr. højre idealer $\mathfrak{a}$ og $\forall$ end. frembr. venstre idealer $\mathfrak{b}$ $\Leftrightarrow l.w.dh_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{b}) \leqq n$ $\forall$ end. frembr. venstre ideal $\mathfrak{b}$.

Korollar 1. $\text{l.w.gl.dim}\,\Lambda = \text{r.w.gl.dim}\,\Lambda$.

Idet følgende skriver vi derfor blot $\text{w.gl.dim}\,\Lambda$.

Korollar 2. $\text{w.gl.dim}\,\Lambda = \sup \text{l.w.dh}_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{b}) \leqq n$, hvor $\mathfrak{b}$ gennemløber alle endelig frembragte venstre idealer. (Tilsvarende for højre idealer).

Vi karakteriserer nu ringene Λ af $\text{w.gl.dim} = 0$.

Sætning. For en vilkårlig ring Λ er følgende betingelser ækvivalente

1) Λ er von Neumann regulær ($\supset$: $\forall \lambda \in \Lambda \; \exists x \in \lambda$ så $\lambda = \lambda x \lambda$)

2) Enhver venstre Λ-modul er flad

3) Enhver højre Λ-modul er flad

4) $\text{w.gl.dim}\,\Lambda = 0$

Bevis. Klart at 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) . Har tidligere vist 2) $\Rightarrow$ 1) (p. 106) Mangler blot at godtgøre

1) $\Rightarrow$ 4) Nok at vise at $\Lambda/\mathfrak{a}$ er flad for ethvert end. frembr. venstre Λ-ideal $\mathfrak{a}$. Vi viser hertil, at ethvert end. fr. venstre ideal $\mathfrak{a}$ er direkte summand i Λ (qua venstre Λ-modul) $\supset$: $\Lambda/\mathfrak{a}$ er projektiv for ethvert end. fr. venstre ideal $\mathfrak{a}$.

1° . Vi godtgør først at dette gælder hvis $\mathfrak{a}$ er (venstre) hovedideal frembragt af en idempotent e ($\supset$: Element e for hvilket $e^2 = e$).

$\Lambda = \Lambda e \oplus \Lambda(1-e)$, idet $1 = 1 \cdot e + 1(1-e)$ og

$\lambda_1 e + \lambda_2(1-e) = 0 \Rightarrow \lambda_1 e^2 + \lambda_2(1-e)e = \lambda_1 e = 0$

$\underline{2^o}$ Ethvert hovedideal Λa er frembragt af en idempotent:

Da Λ von Neumann regulær findes $x \in \Lambda$ for hvilket $a = axa$; xa er idempotent og $\Lambda a = \Lambda xa$

$\underline{3^o}$ Ethvert venstre ideal $\mathfrak{a} = \Lambda a + \Lambda b$ frembragt af 2 elementer er hovedideal

Ifl. $\underline{2^o}$ findes idempotenter e og f som $\Lambda a = \Lambda e$ og $\Lambda b = \Lambda f$ $\Lambda a + \Lambda b = \Lambda e + \Lambda f = \Lambda e + \Lambda(f-fe)$. Her er $(f-fe)e = 0$. Ifl. $\underline{2^o}$ er $\Lambda(f-fe) = \Lambda u$, u idempotent. Da $u \in \Lambda(f-fe)$ er $ue = 0$. Idet $u = u(e+u-eu)$ og $e = e(e+u-eu)$ er $\Lambda a + \Lambda b = \Lambda e + \Lambda f = \Lambda e + \Lambda u = \Lambda(e+u-eu)$

$\underline{4^o}$ Ethvert end. frembragt venstre ideal er hovedideal. Dette fås umiddelbart ved induktion ud fra $\underline{3^o}$

$1^o + 2^o + 3^o + 4^o$ giver nu $1) \Rightarrow 4)$. ▯

Ext-funktorerne

For en (venstre- Λ -modul A indføres de højre deriverede dunktorer af $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,-)$ ved $T^n(X) = H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\underline{Q}_X)$, hvor $\underline{Q}_X$ er det til en injektiv resolution af X svarende kokomplex . For en (venstre)- Λ-modul B indføres de højre deriverede funktorer af $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$ ved $U^n(Y) = H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{P}_Y, B))$, hvor $\underline{P}_Y$ er det til en projektiv resolution af Y svarende komplex .

I analogi med betragtningerne ved indførelsen af Tor_n gælder her:

$H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\underline{Q}_B))$ er funktor i A og B .

$H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{P}_A,B))$ er funktor i A og B .

Disse kan vises at være natuligt isomorfe. Definer da:

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) \simeq H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,\underline{Q}_B)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(\underline{P}_A,B))$$

$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)$ er kontravariant i A og kovariant i B .

De vigtigste egenskaber for Ext^n:

(i) $\mathrm{Ext}^0_\Lambda(A,B) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B)$ naturligt i A og B .

(ii) $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B) = 0$ for $n \geq 1$ og A projektiv eller B injektiv.

(iii) Hvis $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ exakt, da findes lang exakt følge:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_3,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_2,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A_1,B) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_3,B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_2,B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_1,B) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathrm{Ext}^2_\Lambda(A_3,B) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A_2,B) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A_1,B) \to \cdots$$

hvor de forbindende homomorfier Δ er naturlige i A og B .

(iv) Hvis $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ exakt, da findes lang exakt følge:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B_1) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B_2) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B_3) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B\ ) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B_2) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B_3) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\mathrm{Ext}^2_\Lambda(A,B\ ) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A,B_2) \to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A,B_3) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

hvor Δ'erne er naturlige i A og B .

<u>Extension af en modul med en anden modul.</u>

I det følgende er A og B to faste (venstre) Λ - moduler . En kort exakt følge $0 \to B \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ (E) kaldes en extension af A med B .

Lad (E) : $0 \to B \xrightarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} A \to 0$

(E') : $0 \to B \xrightarrow{\psi'} X' \xrightarrow{\varphi'} A \to 0$

være to extensioner af A med B .

E kaldes ækvivalent med E' hvis der findes homomorfi f fra X til X' så

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_B"] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi'"'] & X' \arrow[r, "\varphi'"'] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

er kommutativt. Ifl. 5-lemmaet bliver f en isomorfi. Det betyder, at ovenstående virkelig er en ækvivalensrelation.

Hvis E ækv. m. E' (Skrives $E \sim E'$), er altså $X \simeq X'$. Det omvendte gælder ikke, idet en extension normalt ej er fastlagt ved den midterste modul. (afbildningen er afgørende) som nedenstående eksempel viser.

<u>Eksempel</u>. Lad $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = B = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$, $X = \mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}}$

Vi definerer $\psi((b)_3) = (3b)_9$ (veldefineret!)

$\varphi((x)_9) = (x)_3$ (")

da er

$$0 \to \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \xrightarrow[\psi]{} \mathbb{Z}/_{9}\mathbb{Z} \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \to 0$$

exakt. Vi påstår nu, at ovenstående extension ej er ækvivalent med

$$0 \to \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \xrightarrow[-\psi]{} \mathbb{Z}/_{9}\mathbb{Z} \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \to 0$$

Thi antag der fandtes f så nedenstående diagram var kommutativt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Z}/_{9}\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \arrow[r, "-\psi"] & \mathbb{Z}/_{9}\mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{Z}/_{3}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da var $f(1_9) = c_9$; $\varphi = \varphi f$ giver $\varphi(1_9) = \varphi(f(1_9))$ d.v.s. $1_3 = c_3$ $c \equiv 1 \mod 3$.
$f\psi = -\psi$ giver $f(\psi(1_3)) = -\psi(1_3)$ eller $(3c)_9 = (-3)_9$ $\supset$: $3c \equiv -3 \mod 9$ i strid med $c \equiv 1 \mod 3$. ▮

Vi skal nu angive en (1-1)-forbindelse mellem klasserne af ækvivalente extensioner af A med B og elementerne i $\mathrm{Ext}^1(A,B)$. (Dette motiverer navnet Ext)

Betragt extensionen $E: 0 \to B \underset{\psi}{\to} X \underset{\varphi}{\to} A \to 0$.
Ifl. (iii) p. 205 findes exakt følge:

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \underset{\Delta}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \to \cdots$$

Elementet $\Delta(1_B) \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)$ kaldes E's karakteristiske klasse og benævnes $\chi(E)$.

Den (1-1) forbindelse mellem extensionerne af A med B og elementerne i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)$ udtrykkes i

<u>Sætning.</u> Lad E_1 og E_2 være extensionerne af A med B . Da gælder:

1) $E_1 \sim E_2 \Leftrightarrow \chi(E_1) = \chi(E_2)$.

2) Til ethvert $\xi \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)$ findes extension E med $\chi(E) = \xi$.

<u>Bevis.</u> <u>1^o</u> vi viser $\Rightarrow$ hos 1)

Lad $E_1 \sim E_2$ $\supset$: $\exists$ kommutativt diagram

$$\begin{array}{cccccccccc}
(E_1) & 0 & \to & B & \underset{\psi_1}{\to} & X_1 & \underset{\varphi_1}{\to} & A & \to & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle 1_B} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\
(E_2) & 0 & \to & B & \underset{\psi_2}{\to} & X_2 & \underset{\varphi_2}{\to} & A & \to & 0
\end{array}$$

Da forbindende homomorfi Δ er naturlig, er

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(X_2,B) \arrow[r] \arrow[d, "{\mathrm{Hom}(f,1_B)}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \arrow[r, "\Delta_2"'] \arrow[d, "1"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \arrow[d, "1"] \\
\mathrm{Hom}\ (X_1,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \arrow[r, "\Delta_1"'] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)
\end{tikzcd}$$

kommutativt. D.v.s $\chi(E_2) = \Delta_2(1_B) = \Delta_1(1_B) = \chi(E_1)$

$\underline{2^{\mathrm{o}}}$. Vi viser udsagnet 2) . Vi vælger en (<u>fast</u>) exakt følge

$$0 \to K \xrightarrow[\beta]{} P \xrightarrow[\alpha]{} A \to 0$$

hvor P er en projektiv modul. Ifl. (iii) p. 205 haves exakt følge:

$$\to \mathrm{Hom}_\Lambda(K,B) \xrightarrow[\delta]{} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B) = 0$$

(da P projektiv)

$\supset$: δ er surjektiv. (For at undgå forveksling betegnes forb. homomorfi for ovennævnte følge med δ)

Vælg $\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(K,B)$ så $\delta(\gamma) = \xi$

Lad $X = (P \oplus B)/_Y$, hvor $Y = \{(\beta k, -\gamma k) \mid k \in K\}$

Vi definerer nu ψ og φ i

$$0 \to B \xrightarrow[\psi]{} X \xrightarrow[\varphi]{} A \to 0 \qquad (*)$$

ved $\psi b = (0,b)$ (modulo Y)

$\varphi((p,b)) = \alpha\, p$ (veldefineret da $\alpha\beta = 0$)

Nu eftervises let, at (*) er exakt.

Lad $\tau\colon p \to X$ være defineret ved $\tau(p) = (p,o)$.
Da bliver

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\gamma"'] & P \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\tau"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\psi"'] & X \arrow[r, "\varphi"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativt.

Da forbindende homomorfier er naturlige, bliver

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\gamma,1_B)"'] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \arrow[d, "1_{\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)}"] \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(K,B) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \end{tikzcd}$$

også kommutativ.

$\xi = \delta\gamma = \delta\ \mathrm{Hom}(\gamma,\ 1_B)\ 1_B = \Delta(1_B) = \chi(E)$, hvor

$E = (*)$

$\underline{3^o}$ Vi viser nu $\Leftarrow$ i 1) . Som under $\underline{2^o}$ vælges nu fast

$$0 \to K \underset{\beta}{\to} P \underset{\alpha}{\to} A \to 0 \qquad (\dagger)$$

Vi betragter to udvidelser E_i , $i = 1,2$, med samme $\mathfrak{X}$:

$$(E_i) \quad 0 \to B \underset{\psi_i}{\to} X_i \underset{\varphi_i}{\to} A \to 0 \quad .$$

Der findes afbildninger γ_i, τ_i $i = 1,2$, så nedenstående kommuterer:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & P & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_i} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_i} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\ 0 & \to & B & \underset{\psi_i}{\to} & X_i & \underset{\varphi_i}{\to} & A & \to & 0 \end{array}$$

Den forbindende homomorfi anvendes på $(\dagger)$:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \underset{\mathrm{Hom}(\beta,1_B)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_\Lambda(K,B) \underset{\delta}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B) \to 0, \ (\dagger\dagger)$$

som set under $\underline{2^o}$ er $\mathfrak{X}\, E_i = \delta\, \gamma_i$, $i = 1,2$.

Vi definerer nu afbildningen μ_i, π_i , $i = 1,2$.

$$0 \to K \underset{\mu_i}{\to} P \oplus B \underset{\pi_i}{\to} X_i \to 0 \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

ved $\mu_i(k) = (\beta k, -\gamma_i k)$, $\pi_i(p,b) = (\tau_i p + \psi_i b)$ $(\dagger\dagger\dagger)$ vil da være exakt (eftervises direkte)

Exaktheden af (++) indebærer, at $\gamma_1 - \gamma_2 = \omega\beta$ for passende $\omega \in \mathrm{Hom}(P,B)$. I diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[d, "1_K"] & P \oplus B \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[d, "\Omega"] & X_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\mu_2"'] & P \oplus B \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

defineres Ω ved

$$\Omega(p,b) = (p, b + \omega p) \quad .$$

Ω er åbenbart en isomorfi (klart, at Ω injektiv; Ω surjektiv, idet $(p,b) = \Omega(p, b - \omega p))$.

Endvidere er $\mu_2 = \Omega\,\mu_1$, idet

$\Omega\,\mu_1 k = \Omega(\beta\, k, -\gamma_1 k) = (\beta k, -\gamma_1\, k + \omega\beta k) =$
$(\beta k, -\gamma_1\, k + (\gamma_1 - \gamma_2)k) = (\beta k, -\gamma_2 k) = \mu_2 k$.

Ved diagram chasing ses, at der findes netop én afbildning Φ fra X_1 til X_2 så $(*)$ kommuterer. Φ bestemmes ved følgende forskrift

$$x_1 \in X_1 \ , \ x_1 = \pi_1(p,b) \ , \ \Phi\, x_1 = \pi_2\, \Omega(p,b) \ .$$

Det herved bestemte Φ gør diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & B & \underset{\psi_1}{\to} & X_1 & \underset{\varphi_1}{\to} & A & \to & 0 & & (E_1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1_B} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & & & \\ 0 & \to & B & \underset{\psi_2}{\to} & X_2 & \underset{\varphi_2}{\to} & A & \to & 0 & & (E_2) \end{array}$$

kommutativt, thi:

$\Phi\psi_1 = \psi_2$: $\Phi\ \psi_1 b = \Phi\ \pi_1(0,b) = \pi_2\Omega(0,b) = \pi_2(0,b) = \psi_2 b$.

og $\varphi_1 = \varphi_2\ \Phi$, idet $x_1 \in X_1$ skrives $x_1 = \pi_1(p,b) =$ $\tau_1 p + \psi_1 b$. Da gælder $\varphi_2\ \Phi\ x_1 = \varphi_2\ \pi_2\ \Omega(p,b) =$ $\varphi_2\ \pi_2(p,b+\omega p) = \varphi_2(\tau_2 p + \psi_2(b+\omega p)) = \varphi_2\ \tau_2\ p + 0 =$ $\alpha\ p = \varphi_1\ \tau_1\ p = \varphi_1\ \tau_1\ p + \varphi_1\ \psi_1\ b = \varphi_1\ x_1$.

Altså er E_1 og E_2 ækvivalente ∎

<u>Tilføjelse til sætning</u>.

$\mathfrak{X}\ E = 0 \Leftrightarrow E$ er split-exakt.

<u>Bevis</u>. " ⇐ " Lad E: $0 \to B \underset{\psi}{\to} X \underset{\varphi}{\to} A \to 0$ være split-exakt, da $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,B)$ er additiv, er

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,B) \underset{\mathrm{Hom}(\psi,1_B)}{\to} \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \to 0$$

split-exakt; specielt er $\mathrm{Hom}(\psi,1_B)$ surjektiv. Men det betyder, at Δ i

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B,B) \underset{\Delta}{\to} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)$$

må være 0 $\supset$: $\chi(E) = \Delta(1_B) = 0$.

" $\Leftarrow$ " $\chi E = 0$ medfører, at E og $0 \to B \to B \oplus A \to A \to 0$ har samme χ , hvorfor E ifl. det lige viste er ækvivalent med $0 \to B \to B \oplus A \to A \to 0$ $\supset$: E split-exakt. ∎

Ext og Tor for abelske grupper

I dette afsnit betragter vi tilfældet $\Lambda = \mathbb{Z}$. Vi har tidligere set, at $\mathrm{gl.dim}\,\mathbb{Z} = 1$ og dermed (idet enhver projektiv modul er flad) er $\mathrm{w.gl.dim}\,\mathbb{Z} \leqq 1$. Da Λ ej von Neumann regulær, er $\mathrm{w.gl.dim}\,\mathbb{Z} = 1$. Altså er $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ for $n > 1$ Idet følgende betegnes $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ blot som $\mathrm{Tor}(A,B)$.

Endvidere er $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\underline{P_A}, B))$; da A har en projektiv resolution af længde $\leqq 1$ er $H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\underline{P_A}, B)) = 0$ for $n > 1$ og dermed $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ for $n > 1$ I det følgende betegnes $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,B)$ blot som $\mathrm{Ext}(A,B)$.

Først et par småsætninger ang. explicit bestemmelse af Ext og Tor.

<u>Sætning.</u> For enhver $\mathbb{Z}$-modul A gælder $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}) = \mathrm{Ann}(n,A)$ ($\supset$: $\{a \in A \mid na = 0\}$. (n antages $\neq 0$)

Bevis. Ud fra

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to 0 \qquad (*)$$

fås

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}) \arrow[r] & A \otimes \mathbb{Z} \arrow[r, "1_A \otimes \cdot n"] \arrow[d, "\wr"] & A \otimes \mathbb{Z} \arrow[d, "\wr"] \\
& & A \arrow[r, "\cdot n"] & A
\end{tikzcd}$$

hvor de lodrette pile er isomorfierne $a \otimes h \to ha$;

alt kommuterer, hvorfor $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}) = \mathrm{Ker}(1_A \otimes \cdot n) = \mathrm{Ker}(n \cdot 1_A) \simeq \{a \mid na = 0\} \simeq \mathrm{Ann}(n,A)$. ∎

Analogt fås:

Sætning. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}, A) = A/_{nA}$

Bevis. Anvend forbindende homomorfier for Hom og Ext på (*) ∎

For $A = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ $(m \neq 0)$ gælder

$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}, \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}m}) \simeq \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}})$

$\simeq (\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n}) \otimes (\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}m}) \simeq \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}d}$, hvor d = st. fælles divisor for m og n .

Da enhver endelig abelsk gruppe er direkte sum af cykliske grupper og optrædende funktorer er additive, fås:

$\mathrm{Ext}(A,B) \simeq \mathrm{Tor}(A,B) \simeq \mathrm{Hom}(A,B) \simeq A \otimes B$ for endelige abelske grupper A og B. De ovenstående isomorfier er ikke naturlige (hvorfor?) og isomorfierne gælder ikke for uendelige cykliske grupper.

Opgave Vis, at $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}})$ for enhver torsionsgruppe A.

Realisable grupper

Vi antager stadig $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Definition. En abelsk gruppe G kaldes realisabel, hvis $G \simeq \mathrm{Ext}(A,B)$ for passende abelske grupper A og B.

Sætning. Enhver endelig abelsk gruppe A er realisabel.

Bevis. A kan skrives $A \simeq \Sigma \oplus \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n_i}$; (endelig direkte sum $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(\Sigma \oplus \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n_i}, \mathbb{Z}) =$

$\Sigma \oplus \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n_i}, \mathbb{Z}) \simeq \Sigma \oplus \mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}n_i} = A$. A altså realisabel ∎

Sætning. For vilkårlige abelske grupper A, B og C gælder

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Tor}(A,B),C) \simeq \mathrm{Ext}(A, \mathrm{Ext}(B,C)) .$$

Lemma 1. $\mathrm{Ext}(-,M)$, M fast, er højre exakt.

Bevis. Ud fra den exakte følge $0 \to A \to B \to C \to 0$ fås den exakte følge.

$$\mathrm{Ext}(C,M) \to \mathrm{Ext}(B,M) \to \mathrm{Ext}(A,M) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(C,M) = 0$$

Lemma 2. For ethvert kokompleks $\underline{X}$ findes en homomorfi μ_A : $H^n(\mathrm{Hom}(A,\underline{X})) \to \mathrm{Hom}(A,H^n(\underline{X}))$, der er naturlig i A og er en isomorfi når A er projektiv.

Bevis. Lad $C^n = \mathrm{Ker}\, d^n$, (hvor $\underline{X}$: $\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$) $B^n = \mathrm{Im}\, d^{n-1}$ og $H^n(\underline{X}) = C^n/B^n$. Da findes kommutativt diagram med exakte rækker og søjler

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B^n \arrow[u] \arrow[r] & C^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "i"] & H^n(\underline{X}) \arrow[r] & 0 \\
 & X^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "d^{n-1}"'] & X^n \arrow[d, "d^n"] & & \\
 & & X^{n+1} & &
\end{tikzcd}$$

Da $T = \mathrm{Hom}(A,-)$ er venstre exakt, bliver rækkerne og søjlerne i

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & TB^n \arrow[r] & TC^n \arrow[r, "TH"] \arrow[d, "Ti"] & TH^n(\underline{X}) \\
 & TX^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "Td^{n-1}"'] & TX^n \arrow[d, "Td^n"] & \\
 & & TX^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

exakte. En afbildning fra $H^n(T\underline{X})$ = Ker Td^n/Im Td^{n-1} til $TH^n(\underline{X})$ defineres ved: Lad $\xi \in$ Ker Td^n = Im Ti, da er $\xi = Ti\,\eta$ (Element i TC^n) Vi sætter da $\mu_A(\xi) = TH \cdot \eta$.

μ_A er veldefineret (Diagram chasing) og μ_A er naturlig i A (ses på sædvanlig måde) .

Hvis A er projektiv, er $T = \mathrm{Hom}(A,-)$ exakt, og μ_A en isomorfi. (Diagram chasing jfr. pp. 154-155 ∎

<u>Lemma 3</u>. $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ naturlig i A , B og C . vist tidligere. ∎

Nu beviset for sætning p. 216:

Lad $0 \to C \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$

være injektiv resolution for C (kan øvrigt antage længden ≤ 1) og lad som sædvanlig $\underline{Y} = 0 \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$

Ifl. Lemma 3 gælder følgende isomorfi (for kokomplekser p. grund af naturlighed):

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, \underline{Y}) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,\underline{Y}))$$

Da isomorfe kokomplekser har samme kohomologigrupper, fås:

$$\mathrm{Ext}^n(A \otimes B, C) \simeq H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,\underline{Y}))$$

Anvendes lemma 2 på $\underline{X} = \mathrm{Hom}(B,\underline{Y})$, fås en (i A) naturlig homomorfi: ν_A: $\mathrm{Ext}^n(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A,H^n(\mathrm{Hom}(B,\underline{Y}))) = \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Ext}^n(B,C))$.

ν_A er isomorfi, når A er projektiv.

Der findes projektiv resolution af længde $\leqq 1$ for A:

$$0 \to P \to F \to A \to 0$$

V. hj. af forb.homomorfi fås exakte følger:

$$\mathrm{Hom}(F, \mathrm{Ext}^1(B,C)) \to \mathrm{Hom}(P,\mathrm{Ext}^1(B,C)) \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathrm{Ext}^1(B,C)) \to 0$$

~~og~~

$$\cancel{0 \to \mathrm{Tor}_1(A,B) \to P \otimes B \to F \otimes B \to A \otimes B \to 0}$$

~~Da $\mathrm{Ext}^1(-,C)$ ifl. lemma 1 er højre exakt, fås nu exakt følge.~~

$$\cancel{\mathrm{Ext}^1(F \otimes B,C) \to \mathrm{Ext}^1(P \otimes B, C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(A,B), C) \to 0}$$

og

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A,B) \to P \otimes B \to F \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

Da $\mathrm{Ext}^1(-,C)$ ifl. lemma 1 er højre exakt, fås nu exakt følge:

$$\mathrm{Ext}^1(F \otimes B,C) \to \mathrm{Ext}^1(P \otimes B,C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(A,B),C) \to 0$$

Anvendelse af ν_F og ν_P giver kommutativt diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}^1(F \otimes B,C) & \to & \mathrm{Ext}^1(P \otimes B,C) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(A,B),C) & \to & 0 \\
\downarrow \nu_F & & \downarrow \nu_P & & & & \\
\mathrm{Hom}(F,\mathrm{Ext}^1(B,C)) & \to & \mathrm{Hom}(P,\mathrm{Ext}^1(B,C)) & \to & \mathrm{Ext}^1(A,\mathrm{Ext}^1(B,C)) & \to & 0
\end{array}$$

ν_F og ν_P er isomorfier; diagram chasing giver en isomorfi $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tor}_1(A,B),C) \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathrm{Ext}^1(B,C))$ som forlangt ∎

Vi viser nu:

Sætning. Ingen fri abelsk gruppe $\neq 0$ er realisabel.

Bevis. Vi bemærker først at for en realisabel gruppe G gælder $\mathrm{Ext}(A,G) = 0$ $\forall$ torsionsfri A. Thi da G er realisabel, er $G = \mathrm{Ext}(B,C)$ for passende B og C, hvorfor (ifl. sætning p. 216) $\mathrm{Ext}(A,G) \simeq \mathrm{Ext}(A,\mathrm{Ext}(B,C)) \simeq \mathrm{Ext}(\mathrm{Tor}(A,B),C) = 0$. Vi har her udnyttet at $\mathrm{Tor}(A,B) = 0$ for enhver torsionsfri abelsk gruppe A.

Lad nu $\mathbb{Z}_p = \{\frac{d}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$ p Primtal.

Vi behøver p. grund af ovenstående bemærkning blot vise, at $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \neq 0$; thi enhver fri abelsk gruppe $F \neq 0$ kan skrives $F = \mathbb{Z} \oplus H$, og da er $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, F) \simeq \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, H) \neq 0$.

Antag $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = 0$; ud fra den exakte følge

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}(p\infty) \to 0 \qquad (*)$$

fås den exakte følge

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}(p\infty)) \to \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}) = 0$$

$\supset:$ α surjektiv. Dette ville medføre:

$$\operatorname{Kard}(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}(p\infty)) \leqq \operatorname{Kard}(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p \ , \mathbb{Z}_p)) \ . \qquad (1)$$

Der findes afbildning $\psi\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p$ defineret ved $\psi(f) = f(1)$. Her gælder:

$f(1) = 0 \Rightarrow p^n f(\frac{a}{p^n}) = f(a) = af(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{a}{p^n}) = 0$

$(\forall \ a \in \mathbb{Z}) \supset:$ Ker $\psi = 0$. ψ er altså injektiv, hvorfor:

$$\operatorname{Kard}(\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p))) \leqq \operatorname{Kard}(\mathbb{Z}_p) = \aleph_0 \qquad (2)$$

På den anden side fås ved anvendelse af $\operatorname{Hom}(-, \mathbb{Z}(p\infty))$ på $(*)$ exakt følge

$$0 \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/p\infty), \mathbb{Z}(p\infty) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}(p\infty))$$

og dermed

$$\mathrm{Kard}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty),\ \mathbb{Z}(p^\infty))) \leqq \mathrm{Kard}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}(p^\infty)) \quad (3)$$

Som tidligere vist er $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(p^\infty),\ \mathbb{Z}(p^\infty)) \simeq$ hele p-adiske tal, der har $2^{\aleph_0}$ elementer. Ulighederne (1), (2) og (3) giver da den ønskede modstrid. ∎

Uden bevis nævner vi følgende generelle resultat for en vilkårlig P.I.D. Λ. Idet en Λ-modul kaldes realisabel, hvis den har formen $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,B)$ for passende Λ-moduler A og B, kan vises

Λ realisabel $\Leftrightarrow$ Λ fuldstændig i den topologi der som bevis for omegnens af 0 har idealerne i Λ.

Kapitel VIII. Dimensionsteori for ringe.

I det følgende betegner Λ en vilkårlig ring. Vi starter med:

<u>Lemma</u>. For en venstre Λ-modul P er følgende betingelser ækvivalente:

1) P er projektiv
2) $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(P,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X og alle $m > 0$
3) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X.

Bevis. 1) $\Rightarrow$ 2) ifølge definition af Ext
2) $\Rightarrow$ 3) triviel
3) $\Rightarrow$ 1) lad

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

være en exakt følge af venstre Λ-moduler. Da er også

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(P,C) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,A) = 0$$

exakt. $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,-)$ er altså exakt funktor d.v.s. P er projektiv. ∎

<u>Sætning</u>. For en venstre Λ-modul A er følgende betingelser ækvivalente. (n betegner et fast helt tal $\geqq 0$)

1) $\mathrm{l.dh}_\Lambda(A) \leqq n$
2) $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(A,X) = 0$ for all venstre Λ-moduler X og alle $m > n$
3) $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(A,X) = 0$ for alle venstre Λ-moduler X.

<u>Bevis</u>. 1) ⇒ 2) ifølge definition af Ext

2) ⇒ 3) triviel

3) ⇒ 1) Konstruer en resolution hvor $P_0, \cdots, P_{n-1}$ er projektive:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & A_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & A_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & & \\
0 \arrow[rr] & & A_n \arrow[rr] & & P_{n-1} \arrow[ur] & & \cdots & & P_2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & P_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr] & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & A_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

Ved anvendelse af forbindende homomorfier for Ext fås (jfr. bevis pp. 199-200)

$$\mathrm{Ext}^m_\Lambda(A,X) \simeq \mathrm{Ext}^{m-1}_\Lambda(A_1,X) \simeq \cdots \simeq \mathrm{Ext}^{m-n}_\Lambda(A_m,X)$$

for $m > n$. Sættes specielt $m = n+1$, fås $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_n,X) = 0$ for alle X og derfor (ifølge lemmaet) er A_n projektiv. Følgelig har A en projektiv resolution af længde $\leqq n$, d.v.s. $\mathrm{l.dh}_\Lambda(A) \leqq n$. ∎

<u>Bemærkning</u>. Af ovenstående følger (jfr. p. 201) for en venstre Λ-modul med $\mathrm{l.dh}_\Lambda(A) \leqq n$, at for enhver exakt følge $0 \to K_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$, hvor $P_0, \cdots, P_{n-1}$ er projektive, vil K_n være projektiv.

Nu en karakterisering af injektive moduler:

<u>Lemma</u>. For en venstre Λ-modul Q er følgende betingelser ækvivalente

1) Q er injektiv

2) $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(Y,Q) = 0$ for alle venstre Λ-moduler Y og alle $m > 0$

3) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y,Q) = 0$ for alle venstre Λ-moduler Y.

4) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a},Q) = 0$ for ethvert venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ.

Bevis. 1) ⇒ 2) er definition af Ext

2) ⇒ 3) og 3) ⇒ 4) er trivielle

4) ⇒ 1) Lad $\mathfrak{a}$ være vilkårligt venstre ideal i Λ. Vi har exakt følge

$$0 \to \mathfrak{a} \to \Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a} \to 0$$

hvoraf vi ved anvendelse af forbindende homomorfier for $\mathrm{Ext}^i(-,Q)$ får exakt følge

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,Q) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{a},Q) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a},Q) = 0$$

d.v.s. enhver Λ-homomorfi fra $\mathfrak{a}$ til Q kan fortsættes til homomorfi fra Λ til Q. Ifølge Baers kriterium er Q injektiv. ∎

Definition. En venstre Λ-modul A siges at have injektiv dimension $\leqq n$ ($\mathrm{l.i.d.}_\Lambda(A) \leqq n$), hvis der findes injektiv resolution af længde $\leqq n$:

$$0 \to A \to Q^0 \to \cdots \to Q^n \to 0 \quad (Q^0,\cdots,Q^n \text{ injektive moduler}).$$

Det er da klart, hvad det betyder, at $\mathrm{l.i.d.}_\Lambda(A) = n$. Analogt findes injektiv dimension (r.i.d.) for højre Λ-moduler. Analogt med sætningen for projektive dimensioner vises:

Sætning. For en venstre Λ-modul B er følgende betingelser ækvivalente, (n betegner et fast helt tal)

1) $l.i.d._{\Lambda}B \leqq n$
2) $\mathrm{Ext}^m_{\Lambda}(Y,B) = 0$ for alle venstre Λ-moduler Y og alle $m > n$
3) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(Y,B) = 0$ for alle venstre Λ-moduler Y.
4) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a},B) = 0$ for ethvert venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ
5) For enhver exakt følge $0 \to B \to Q^0 \to \cdots \to Q^{n-1} \to C^n \to 0$ med injektive Λ-moduler $Q^0,\cdots,Q^{n-1}$ er C^n injektiv.

Eksempel. For en given modul er $l.dh_{\Lambda}$ og $l.i.d._{\Lambda}$ normalt helt forskellige:

$dh_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = 0 \quad i.d._{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = 1$ (hvorfor?)

$dh_{\mathbb{Z}}(Q) = 1 \quad i.d._{\mathbb{Z}}(Q) = 0.$

Vi skal nu vise, at supremum (over alle venstre Λ-moduler) for $l.dh_{\Lambda}$ og $l.i.d_{\Lambda}$ stemmer overens. Ud fra ovenstående fås, idet vi minder om at $l.gl.dim_{\Lambda} = \sup(l.dh_{\Lambda}A)$, A gennemløbende venstre Λ-modulerne:

$l.gl.dim\ \Lambda \leqq n \iff l.dh_{\Lambda}A \leqq n$ for alle venstre Λ-moduler $A \iff$
$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(A,B) = 0$ $\forall$ venstre Λ-moduler A og $B \iff$
$l.i.d_{\Lambda}(B) \leqq n$ for alle venstre Λ-moduler $B \iff$
$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a},B) = 0$ for alle venstre Λ-moduler B og alle venstre idealer $\mathfrak{a}$ $\iff l.dh_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a}) \leqq n$ for alle venstre Λ-idealer $\mathfrak{a}$.

Vi kan nu notere

Sætning. (Auslander) $l.gl.\dim \Lambda = \sup l.i.d_{\Lambda}(B)$, B gennemløbende alle venstre Λ-moduler.

Sætning. (Auslander) $l.gl.\dim_{\Lambda} = \sup l.dh_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}$ gennemløbende alle venstre idealer i Λ.

Lad os også notere:

Sætning. For en ring Λ er følgende betingelser ækvivalente:

1) $l.gl.\dim \Lambda \leqq n$

2) $\mathrm{Ext}^m_{\Lambda}(A,B) = 0$ for alle venstre Λ-moduler A og B og alle $m > n$

3) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda}(A,B) = 0$ for alle venstre Λ-moduler A og B.

For vilkårlige ringe gælder normalt ikke, at $l.gl.\dim \Lambda = \sup l.i.d_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}$ venstre ideal i Λ. For venstre Noetherske ringe gælder imidlertid:

Sætning. For en venstre Noethersk ring Λ er $l.gl.\dim \Lambda = \sup l.i.d_{\Lambda}(\Lambda/\mathfrak{a})$ hvor $\mathfrak{a}$ gennemløber venstre idealerne i Λ.

Bevis. Først et lemma.

Lemma. For en endelig frembragt venstre Λ-modul P, hvor Λ er venstre Noethersk, er følgende betingelser ækvivalente:

1) P er projektiv

2) $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(P,\Lambda/\mathfrak{a}) = 0$ for alle venstre idealer $\mathfrak{a}$ i Λ

3) $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(P,B) = 0$ for alle endelig frembragte venstre Λ-moduler B.

<u>Bevis for Lemma</u>: 1) $\Rightarrow$ 2) er triviel.

2) $\Rightarrow$ 3) Antag B er frembragt af n elementer $b_1,\cdots,b_n$ d.v.s. $B = \Lambda b_1+\cdots+\Lambda b_n$. n kan vælges $= 1$ netop hvis $B = \Lambda/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ venstre ideal i Λ. (Hvorfor?) Beviset føres ved induktion efter n.

For $n = 1$ gælder udsagnet i 3)

$n-1 \to n$ Lad $B = \Lambda b_1+\cdots+\Lambda b_n$. Sæt $B' = \Lambda b_1+\cdots+\Lambda b_{n-1}$. B/B' er da frembragt af et element (b_n). Vi ved nu, at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B') = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B/B') = 0$. Af den exakte følge

$$0 \to B' \to B \to B/B' \to 0$$

fås exakt følge

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B') \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B/B')$$

hvoraf ses, at $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B) = 0$

3) $\Rightarrow$ 1) Da P endelig frembragt, findes exakt følge

$$0 \to B \to F \to P \to 0 \qquad (*)$$

med F endelig frembragt fri. Da Λ er venstre Noethersk, er også B endelig frembragt. Dermed er $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,B) = 0$. $(*)$ er en udvidelse af P med B, hvis karakteristiske klasse χ er 0 d.v.s. $(*)$ splitter og P er isomorf med en direkte summand i F og således projektiv. ▮

Efter dette lemma vender vi nu tilbage til beviset for sætningen. Det er øjensynligt nok at vise, at
$\sup \mathrm{l.i.d.}_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a}) = n < \infty \Rightarrow \mathrm{l.dh}_\Lambda(A) \leqq n$ for enhver venstre Λ-modul A.

På grund af Auslanders sætning p. 227 øverst er det nok at vise, at $1.dh_\Lambda(A) \leqq n$ for enhver endelig frembragt venstre Λ-modul A. Hertil konstrueres en resolution,

$$0 \to A_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0 \qquad (\diamondsuit)$$

hvor $F_0, \cdots, F_{n-1}$ er endelig frembragte frie Λ-moduler og A_n er endelig frembragt. (Her benyttes, at Λ er venstre Noethersk). Ved successiv anvendelse af forbindende homomorfi for Ext fås $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_n, \Lambda/\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}(A, \Lambda/\mathfrak{a})$ for ethvert venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ. Da $1.i.d._\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a}) \leqq n$ er $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(A, \Lambda/\mathfrak{a}) = 0$, hvorfor ifølge lemmaet A_n er projektiv. $(\diamondsuit)$ er således en projektiv resolution af A af længde $\leqq n$ d.v.s. $1.dh_\Lambda(A) \leqq n$ og sætningen er hermed vist. ∎

Om forbindelsen mellem $w.gl.dim\ \Lambda$ og $1.gl.dim\ \Lambda$ viser vi

<u>Sætning.</u> For enhver venstre Noethersk ring Λ gælder $w.gl.dim\ \Lambda = 1.gl.dim\ \Lambda$.

Bevis. Som tidligere vist er $w.gl.dim\ \Lambda = \sup(1.w.dh_\Lambda \Lambda/\mathfrak{a})$ hvor $\mathfrak{a}$ gennemløber de (endelig frembragte) venstre idealer $\mathfrak{a}$ i Λ og $1.gl.dim\ \Lambda = \sup(1.dh_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a}))$ hvor $\mathfrak{a}$ gennemløber venstre idealerne i Λ.

Det er derfor nok at vise $1.w.dh_\Lambda(A) = 1.dh_\Lambda(A)$ for enhver endelig frembragt venstre Λ-modul A. Da alment enhver projektiv modul er flad, er $l.w.dh_\Lambda(A) \leqq l.dh_\Lambda(A)$

For at vise den modsatte ulighed kan vi antage $l.w.dh_\Lambda(A) = n < \infty$.

Da Λ er venstre Noethersk, kan vi konstruere en resolution

$$0 \to A_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$$

hvor $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ er endelig frembragte frie moduler og A_n endelig frembragt. Da $l.w.dh_\Lambda(A) = n$ følger af bemærkningen på p.201 at A_n er flad. Da A_n er endelig frembragt og Λ venstre Noethersk giver sætningen på p.107 at A_n er projektiv. Altså har A en projektiv resolution af længde $\leqq n$, d.v.s. $l.dh_\Lambda(A) \leqq n$. $\blacksquare$

Ved benyttelse af tilsvarende for højre dimensioner fås (jfr. p.202)

<u>Korollar.</u> Lad Λ være en venstre og højre Noethersk ring. Da er $l.gl.dim\ \Lambda = r.gl.dim\ \Lambda$ $(= w.gl.dim\ \Lambda)$.

<u>Bemærkning.</u> Forudsætningen om at Λ er (venstre og højre) Noethersk er vigtig for rigtigheden af sætningen og dens korollar.

<u>Eksempel</u> $\Lambda = Q^N$ har $w.gl.dim\ \Lambda = 0$ og $gl.dim\ \Lambda \geqq 2$ ($= 2$ hvis og kun hvis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

<u>Eksempel.</u> Lad Λ = ringen af alle følger af rationale tal der er konstante fra et vist tring (afhængig af følgen). Da er $w.gl.dim\ \Lambda = 0$ og $gl.dim\ \Lambda = 1$.

Opgave. Giv eksempel på kommutativ ikke-Noethersk ring Λ for hvilken gl.dim Λ = w.gl.dim $\Lambda = 1$.

Vi minder om, at en ring Λ kaldes venstre hereditær, hvis et hvert venstre ideal i Λ er en projektiv Λ-modul Her gælder

Sætning. For en ring Λ er følgende betingelser ækvivalente

1) Λ er venstre hereditær

2) l.gl.dim $\Lambda \leqq 1$

3) Enhver undermodul i en projektiv venstre Λ-modul er projektiv.

Bevis. 1) $\Rightarrow$ 2) Af $0 \to \mathfrak{a} \to \Lambda \to \Lambda/\mathfrak{a} \to 0$ følger $\mathrm{l.dh}_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{a}) \leqq 1$ for ethvert venstre ideal $\mathfrak{a}$ i Λ. På grund af Auslander's sætning (p.227) er da l.gl.dim $\Lambda \leqq 1$.

2) $\Rightarrow$ 3) Lad A være undermodul i projektiv venstre Λ-modul P. Vi har da exakt følge

$$0 \to A \to P \to P/A \to 0.$$

Idet $\mathrm{l.dh}_\Lambda(P/A) \leqq 1$ følger af bemærkning p.224, at A er projektiv.

3) $\Rightarrow$ 1) Ethvert venstre ideal er undermodul i den projektive (venstre) Λ-modul Λ. ∎

Uden bevis nævner vi

Sætning. For et (kommutativt) integritetsområde Λ er følgende betingelser ækvivalente:

1) Λ er hereditær

2) Enhver delelig Λ-modul er injektiv.

3) Ethvert fra (0) forskelligt ideal i Λ kan entydigt skrives som produkt af primidealer.

3') Ethvert fra (0) forskelligt ideal i Λ kan skrives som produkt af primidealer.

4) Til ethvert ideal $\mathfrak{a}$ i Λ findes ideal $\mathfrak{b} \neq 0$ så $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ = hovedideal.

5) Λ opfylder i) Λ er Noethersk

ii) Ethvert primideal $\neq (0)$ er maximalt.

iii) Hvis x er element i Λ's kvotientlegeme der er rod i ligning af formen $x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\cdots+\lambda_n = 0$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$, da tilhører $x \in \Lambda$.

Definition. Ringe, der opdylder en og der med alle betingelser 1)-5) kaldes Dedekind ringe.

Øvelse. Vis direkte, at 1) $\Longleftrightarrow$ 2)

Dedekind ringe spiller en central rolle i den algebraiske talteori.

Eksempel. Klart, at Λ PID $\Rightarrow \Lambda$ Dedekind.

$\Lambda = \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ er eksempel på en Dedekind ring der ikke er P.I.D.

Et vigtigt hjælpemiddel i det følgende er

Sætning. Lad $0 \to A \to B \to C \to 0$ være exakt følge af venstre Λ-moduler (Λ vilkårlig). Da gælder

1) $l.dh_\Lambda(A) < l.dh_\Lambda(B) \Rightarrow l.dh_\Lambda(B) = l.dh_\Lambda(C)$

2) $l.dh_\Lambda(A) = l.dh_\Lambda(B) \Rightarrow l.dh_\Lambda(C) \leqq 1 + l.dh_\Lambda(A)$

3) $l.dh_\Lambda(A) > l.dh_\Lambda(B) \Rightarrow l.dh_\Lambda(C) = 1 + l.dh_\Lambda(A)$.

Bevis. Da beviserne for 1), 2) og 3) forløber analogt, nøjes vi med at gennemføre 1).

Sæt $n = l.dh_\Lambda B$. Antag først $n < \infty$. Da findes X så

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(B,X) \neq 0 \quad \text{og} \quad \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(B,-) = 0.$$

Ved hjælp af de forb. homomorfier for Ext fås exakt følge:

$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(C,X) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(B,X) \to \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(C,X) \to$
$\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(B,X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(A,X)$.

Da $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,X) = 0$, er $\mathrm{Ext}^n(C,X) \neq 0$ d.v.s. $l.hd_\Lambda(C) \geqq n$. Den omstående exakte følge gælder for alle X.

Da $\mathrm{Ext}^{n+1}_\Lambda(B,-) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,-) = 0$, er $\mathrm{Ext}^{n+1}(C,-) = 0$ d.v.s. $l.dh_\Lambda(C) \leqq n$. Alt i alt $l.dh_\Lambda(C) = n$.

Hvis $l.dh_\Lambda(B) = \infty$ findes for ethvert m en Λ-modul X så $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(B,X) \neq 0$, hvoraf ses, at $\mathrm{Ext}^m_\Lambda(C,X) \neq 0$ d.v.s. $l.dh_\Lambda C \geqq m$ $\forall m$ d.v.s. $l.dh_\Lambda(C) = \infty$. ∎

Ovenstående sætning giver specielt

Korollar. Hvis $0 \to A \to B \to C \to 0$ er exakt og B er projektiv og C ikke er projektiv, da gælder $l.dh_\Lambda(A) = l.dh_\Lambda(C) - 1$.

Vi får endvidere brug for

<u>Sætning.</u> Lad A og B være venstre Λ-moduler. Da gælder

$$\text{l.dh}_\Lambda(A) \leqq n \text{ og } \text{l.dh}_\Lambda(B) \leqq n \iff \text{l.dh}_\Lambda(A\oplus B) \leqq n$$

<u>Bevis.</u> $\operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A\oplus B,X) \simeq \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A,X) \oplus \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(B,X)$ for $\forall X$ hvoraf $\operatorname{Ext}^{n+1}(A\oplus B,-) = 0 \iff \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(A,-) = \operatorname{Ext}^{n+1}_\Lambda(B,-) = 0$. ∎

Inden vi viser hovedsætningen i dette afsnit, giver vi en lille sætning, der kan illustrere de foregående begreber og sætninger.

<u>Sætning.</u> Lad Λ være en kommutativ Noethersk ring med $\text{gl.dim}\,\Lambda \leqq 2$. Da er den duale modul $\operatorname{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$ af enhver endelig frembragt Λ-modul A projektiv.

<u>Bevis.</u> Da A er endelig frembragt og Λ er Noethersk, findes exakt følge

$$F_1 \xrightarrow[\alpha_1]{} F_0 \xrightarrow[\alpha_0]{} A \longrightarrow 0,$$

hvor F_0 og F_1 er endelig frembragte frie Λ-moduler. $\operatorname{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$ er venstre exakt, hvorfor vi har exakt følge

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(A,\Lambda) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(F_o,\Lambda) \xrightarrow[\operatorname{Hom}(\alpha_1,1_\Lambda)]{} \operatorname{Hom}_\Lambda(F_1,\Lambda) \to \operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_\Lambda(\alpha_1,1_\Lambda)) \to 0$$

Da F_o og F_1 er endelig frembragte og frie, er $\operatorname{Hom}_\Lambda(F_o,\Lambda)$ og $\operatorname{Hom}_\Lambda(F_1,\Lambda)$ frie-moduler (Hvorfor?). Da

Da $\text{gl.dim}\,\Lambda \leqq 2$ er $dh_\Lambda(\text{Coker}(\text{Hom}_\Lambda(\alpha_1, 1_\Lambda)) \leqq 2$ og derfor er (Bem.p.224) $\text{Hom}_\Lambda(A,\Lambda)$ projektiv. ∎

<u>Bemærkning.</u> Ovenstående sætning kan vendes om, idet man kan vise for en kommutativ Noethersk ring Λ, at $\text{gl.dim}\,\Lambda \leqq 2 \iff$ den duale modul af enhver endelig frembragt Λ-modul er projektiv.

\- - - - - -

Vi styrer nu mod

<u>Hovedsætning.</u> For en vilkårlig ring Λ gælder $\text{l.gl.dim}\,\Lambda[X] = \text{l.gl.dim}\,\Lambda + 1$.

Inden beviset nogle forberedelser; først et lemma:

<u>Ringskiftesætning.</u> Lad Λ være vilkårlig ring, og x et centralt element i Λ, der ej er invertibelt i Λ og ej nuldivisor i Λ. Sæt $\Lambda^* = \Lambda/(x)$ (hvor (x) er det tosidede hovedideal frembragt af x). Lad A være en (venstre) Λ^*-modul $\neq 0$ og antag $\text{l.dh}_{\Lambda^*}(A) < \infty$. Da er $\text{l.dh}_\Lambda A = 1 + \text{d.dh}_{\Lambda^*}A$ idet A er (venstre) Λ-modul via $\lambda \cdot a = \lambda a$.

<u>Bevis for ringskiftesætning:</u> Sæt $\text{l.dh}_{\Lambda^*}A = n$; Beviset føres ved induktion efter n.

Vi bemærker først alment, at $\text{l.dh.}_\Lambda A > 0$; thi A Λ-projektiv $\Rightarrow$ A undermodul i fri Λ-modul F. Antag F har basis $\{e_i\}$. Lad $a \in A$, $a \neq 0$ og betragt a's fremstilling $a = \Sigma\lambda_i e_i$

$$0 = xa = \Sigma(x\lambda_i)e_i \Rightarrow x\lambda_i = 0\ \forall i \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \Rightarrow a = 0 \text{ Modstrid!}$$

<u>n = 0</u>: A Λ^*-projektiv $\supset$: $\exists$ Λ^*-modul B så $A \oplus B = \coprod \Lambda^* = \coprod \Lambda/_{(x)}$. Da x ikke er nuldivisor, er føl-

gen

$$0 \to \coprod \Lambda \xrightarrow{\cdot x} \coprod \Lambda \to \coprod \Lambda/(x) \to 0$$

exakt; $\supset$: $\mathrm{l.dh}(\coprod \Lambda/(x)) = \mathrm{l.dh}_\Lambda(A \oplus B) \leqq 1$ og derfor (p.234) $\mathrm{l.dh}_\Lambda\ A \leqq 1$. Ifølge indledende bemærkning er $\mathrm{l.dh}_\Lambda\ A > 0$ $\supset$: $\mathrm{l.dh}_\Lambda\ A = 1$.

<u>$n = 1$.</u> Lad $0 \to K \twoheadrightarrow F \to A \to 0$ være exakt med F fri Λ-modul. Da $xA = 0$, er $xF \subseteqq K$ og følgen

$$0 \to K/xF \to F/xF \to A \to 0 \qquad (+)$$

bliver exakt.

F/xF er på oplagt måde en Λ^*-modul, endda fri Λ^*-modul, idet $\{e_i\}$ er basis for F/xF hvis $\{e_i\}$ er Λ-basis for F.

Da $\mathrm{l.dh}_{\Lambda^*}A = n = 1$ giver korollaret (p.233) at $\mathrm{l.dh}_{\Lambda^*}(K/xF) = n - 1 = 0$ d.v.s. K/xF er Λ^*-projektiv.

$K/xF \neq 0$, da på grund af $(+)$ A ellers var Λ^*-fri i strid med $\mathrm{l.dh}_{\Lambda^*}(A) = 1$.

Ifølge det allerede viste tilfælde $n = 0$ er derfor $\mathrm{l.dh}_\Lambda(K/xF) = 1$ og sætning side 233 (anvendt på $(+)$) giver $\mathrm{l.dh}_\Lambda A \leqq 2$, altså $\mathrm{l.dh}_\Lambda A = 0,1$ eller 2. $\mathrm{l.dh}_\Lambda A = 0$ er udelukket på grund af indledende bemærkning på omstående side. $\mathrm{l.dh}_\Lambda A = 1$ ville medføre $\mathrm{l.dh}_\Lambda K = 0$ $\supset$: $\exists \Lambda$-modul K' så $K \oplus K'$ Λ-fri og dermed $(K \oplus K')/x(K \oplus K') \simeq K/xK \oplus K'/xK'$ Λ^*-fri $\supset$: K/xK Λ^*-projektiv.

Da x ej nuldivisor er de lodrette afbildninger i

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x"] & A \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & xK \arrow[r] & xF \arrow[r] & xF/xK \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

isomofier; følgelig findes isomorfi $A \simeq xF/xK$.

Da K/xF er Λ^*-projektiv, er den exakte følge af Λ^*-moduler

$$0 \to A \simeq xF/xK \to K/xK \to K/xF \to 0$$

split-exakt; d.v.s. $K/xK \simeq K/xF \oplus A$; da K/xK er Λ^*-projektiv, bliver A Λ^*-projektiv $\supset$: $1.dh_{\Lambda^*}A = 0$; Modstrid!

<u>$n - 1 \to n$</u> $(n>1)$. Lad

$$0 \to K^* \to F^* \to A \to 0$$

være exakt med F^* Λ^*-fri. Dermed er $1.dh_\Lambda(F^*) = 1$ Sætningen p.233 medfører $1.dh_{\Lambda^*}K^* = n - 1$. Ifølge induktionsantagelsen (bemærk $K^* \neq 0$) er $1.dh_\Lambda K^* = n$. Da $1.dh_\Lambda K^* = n \gg 1 = 1.dh_\Lambda F^*$ giver sætningen p.233 at $1.dh_\Lambda A = 1+n$. Hermed er ringskiftesætningen vist. ∎

<u>Eksempel</u>. Forudsætningen $1.dh_{\Lambda^*}A < \infty$ i ringskiftesætningen er væsentlig. Thi lad $\Lambda = \mathbb{Z}$ $x = 4$ $\Lambda^* = \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\,2$ har som Λ^*-modul $dh_{\Lambda^*}(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}) = \infty$, men $dh_\Lambda\, \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} = 1$.

Af ringskiftesætningen fås umiddelbart (med $\Lambda[x]$ som Λ og x som den "variable" i $\Lambda[x]$):

<u>Hvis $1.gldim\,\Lambda < \infty$, er $1.gl.dim\,\Lambda[x] \geq 1 + 1.gl.dim\,\Lambda$</u>

For at fuldføre beviset for hovedsætningen får vi brug for nogle generelle overvejelser.

Lad os for kortheds skyld skrive $\Lambda[x] = S$. S er både venstre og højre Λ-modul pånaturlig måde. I begge tilfælde er S Λ-fri, idet $1, x, x^2, \cdots$ udgør Λ-basis.

Lad M være en venstre Λ-modul. $S\otimes_\Lambda M$ vil da (ved argumenter analoge til dem p.88-89) være venstre S-modul ved fastsættelsen $s(\sum_i s_i \otimes m_i) = \sum_i (s s_i) \otimes m_i$. Hvis $f: M \to M'$ er Λ-homomorfi fra venstre Λ-moduler M til venstre Λ-moduler M', vil $(1_S \otimes f)$ være S-homomorfi fra $S\otimes_\Lambda M'$. Vi har således en funktor $T = S\otimes_\Lambda -$ fra kategorien af venstre Λ-moduler (og homomorfierne mellem disse) til kategorien af venstre S-moduler (og homomorfierne mellem disse). Da S er flad højre Λ-modul, bliver T exakt funktor.

<u>Lemma 1.</u> M projektiv (venstre) Λ-modul $\Rightarrow TM = S\otimes_\Lambda M$ projektiv (venstre) S-modul.

<u>Bevis.</u> T er additiv og fører Λ-direkte summer over i S-direkte summer. Derfor er det nok at godtgøre M Λ-fri $\Rightarrow T(M)$ S-fri. Ved sædvanlige regneregler i tensorprodukt ses, at $\{m_i\}$ Λ-basis for $M \Rightarrow \{1\otimes m_i\}$ S-basis for $T(M) = S\otimes_\Lambda M$. ∎

Da Λ er delring af S (med samme etelement) er enhver S-modul på oplagt vis en Λ-modul ("Restriktion af Operatorerne") og enhver S-homomorfi mellem S-moduler bliver Λ-homomorfi mellem de tilsvarende Λ-moduler. Vi har således en funktor R (" Restriktionsfunktor") fra (venstre) S-moduler til (venstre) Λ-moduler.

<u>Lemma 2.</u> P projektiv (venstre) S-modul $\Rightarrow R(P)$ projektiv (venstre) Λ-modul.

<u>Bevis.</u> Som ovenfor nok at vise P S-fri $\Rightarrow R(P)$ Λ-fri. Dette ses af, at $\{e_i\}$ S-basis for $P \Rightarrow \{x^\nu e_i\}$ $\nu=0,1,2,\cdots$ Λ-basis for $R(P)$. ∎

Lemma 3. Lad M være (venstre) Λ-modul. Hvis $T(M) = S\otimes_\Lambda M$ er S-projektiv, er M Λ-projektiv.

Bevis. Ifølge lemma 2 er $R(S\otimes_\Lambda M)$ Λ-projektiv $\supset$: $S\otimes_\Lambda M$ projektiv betragtet som Λ-modul.

Ethvert element i S er et polynomium $s(x) = \lambda_o + \lambda_1 \cdot x + \cdots$. Ved $s \to s(o) = \lambda_o$ defineres afbildning fra S til Λ.

Vi definerer nu afbildning $\varphi: S\otimes_\Lambda M \to M$ ved $\varphi(\sum_i s_i \otimes m_i) = \sum_i s_i(0)m_i$. Det ses let, at φ er en Λ-homomorfi ($S\otimes_\Lambda M$ her betragtet som venstre Λ-modul $\supset$: $R(S\otimes_\Lambda M)$); $\psi: M \to S\otimes_\Lambda M$ defineret ved $\psi(m) = 1\otimes m$ bliver også Λ-homomorfi, og åbenbart gælder $\varphi \cdot \psi = 1_M$. Følgelig er M Λ-direkte summand i (venstre) Λ-modulen $S\otimes_\Lambda M$. Da $S\otimes_\Lambda M$ er Λ-projektiv, bliver M Λ-projektiv. ∎

Lemma 4 For enhver venstre Λ-Modul M gælder: $l.dh_\Lambda M \leq n \Rightarrow l.dh_S(S\otimes_\Lambda M) \leq n$.

Bevis. Da $l.dh_\Lambda M \leqq n$ findes exakt følge (af Λ-homomorfier)

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_o \to M \to 0$$

hvor $P_o, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n$ er projektive Λ-moduler. Idet $T = S\otimes_\Lambda -$ er exakt funktor fra venstre Λ-moduler til venstre S-moduler og $T(\Lambda\text{-proj modul}) = S\text{-proj.modul}$ (ifølge lemma 1) er

$$0 \to T(P_n) \to T(P_{n-1}) \to \cdots \to T(P_1) \to T(P_o) \to TM \to 0$$

en S-projektiv resolution af længde n af $TM = S\otimes_\Lambda M$

Lemma 5. For enhver venstre Λ-modul M gælder $l.dh_S(S\otimes_\Lambda M) \leqq n \Rightarrow l.dh_\Lambda M \leqq n$.

Bevis. Vælg exakt følge (af Λ-homomorfier)

$$0 \to K_n \to P_{n-1} \quad \dots \to P_1 \to P_o \to M \to 0 \qquad (\Phi)$$

hvor P_o, P_1, $\dots$, P_{n-1} er projektive. Anvendes T på denne følge fås axakt følge (af S-homomorfier)

$0 \to T(K_n) \to T(P_{n-1}) \to \dots \to T(P_1) \to T(P_o) \to TM \to 0$ hvor TP_o, TP_1, $\dots$, TP_{n-1} er projektive (ifølge lemma 1). Da $1.dh_S\ TM = 1.dh_S(S \otimes_\Lambda M) \leqq n$ er (jævnfør bem. p. 224) $T(K_n)$ S-projektiv. På grund af lemma 3 er K_n da Λ-projektiv, og (Φ) er således en projektiv resolution af længde n for M. ∎

Sammenfattende har vi dermed vist:

Hjælpesætning. For enhver venstre Λ-modul M er $1.dh_\Lambda M = 1.dh_S(S \otimes_\Lambda M)$ (specielt hvis den ene demension er ∞, er den anden også).

Korollar til hjælpesætning.

$1.gl \dim \Lambda = \infty \Rightarrow 1.gl \dim \Lambda[x] = \infty$

Bevis. $1.gl \dim \Lambda = \infty \Rightarrow \exists$ Λ-moduler af vilkårligt store (evt. ∞) dimensioner. Hjælpesætningen leverer da også $\Lambda[x]$-moduler af vilkårlig store dimensioner. ∎

For beviset af hovedsætningen p. 235 er nu kun tilbage at godtgøre at $1.gl.\dim \Lambda = n < \infty \Rightarrow 1.gl.\dim \Lambda[x] \leqq n+1$.

Lad A være en vilkårlig venstre $\Lambda[x]$-modul; A er da specielt en venstre Λ-modul og vi får herved en venstre $\Lambda[x]$-modul : $\Lambda[x] \otimes_\Lambda A$ (med benævnelserne pp. 238-239 har vi dannet $T(R(A))$).

Hvis vi kan konstruere $\Lambda[x]$-homomorfier φ og ψ, så

$$0 \to \Lambda[x]\otimes_\Lambda A \xrightarrow{\varphi} \Lambda[x]\otimes_\Lambda A \xrightarrow{\psi} A \to 0 \qquad (+)$$

bliver exakt (hvor den sidste modul A er $\Lambda[x]$-modul som oprindelig givet) er vi færdige. Thi

$$\text{l.gl.dim}\,\Lambda = n \Rightarrow \text{l.dh}_\Lambda A \leqq n \underset{(\text{Lemma } 4)}{\Rightarrow} \text{l.dh}_{\Lambda[x]}(\Lambda[x]\otimes_\Lambda A) \leqq n \underset{(\text{sætn.p.}232\text{-}2)}{\Rightarrow}$$

$$\text{l.dh}_{\Lambda[x]} A \leqq n + 1.$$

~~Dette gælder for enhver venstre $\Lambda[x]$-modul, hvorfor l.gl.dim $\Lambda[x]$-homomorfier φ og ψ, så~~

$$\cancel{0 \to \Lambda[x]\otimes_\Lambda A \xrightarrow{\varphi} \Lambda[x]\otimes_\Lambda A \xrightarrow{\psi} A \to 0 \qquad (+)}$$

~~bliver exakt (hvor den sidste modul A er $\Lambda[x]$-modul som oprindelig givet) er vi færdige. Thi~~

$$\cancel{\text{l.gl.dim}\Lambda = n \Rightarrow \text{l.dh}_\Lambda A \leqq n \underset{(\text{lemma } 4)}{\Rightarrow} \text{l.dh}_{\Lambda[x]}(\Lambda[x]\otimes_\Lambda A) \leqq n \Rightarrow}$$

$$\cancel{\text{l.dh}_{\Lambda[x]}(\Lambda[x]\otimes_\Lambda A) \leqq n \underset{(\text{sætn.p.})}{\Rightarrow} \text{l.dh}_{\Lambda[x]}A \leqq n + 1.}$$

Dette gælder for enhver venstre $\Lambda[x]$-modul, hvorfor l.gl.dim$\Lambda[x] \leqq n + 1$.

Altså nok at konstruere φ og ψ som angivet ovenfor.

Da $\Lambda[x]$ fri højre Λ-modul med basis $1, X, X^2, \cdots$, kan ethvert element i $\Lambda[x]\otimes_\Lambda A$ entydigt skrives på formen

$$1\otimes a_o + x\otimes a_1 + x^2\otimes a_2 + \cdots + x^m\otimes a_m \quad (a_o, \cdots a_m \in A)$$

Vi definerer nu $\psi(\sum_i x^i\otimes a_i) = \sum_i x^i a_i$,

hvor vi i højre side benytter A's (oprindelige) struktur som $\Lambda[x]$-modul.

Ved direkte udregning verificeres at ψ bliver $\Lambda[x]$-homomorfi. ψ er surjektiv, da $a = \psi(1\otimes a)$ $(\forall a \in A)$

Definition af φ: $\varphi(\sum_{i=0}^{m} x^i \otimes a_i) = \sum_{i=0}^{m}(x^i \otimes xa_i - x^{i+1} \otimes a_i) =$ $1\otimes a_o + x\otimes(xa_1 - a_o) + x^2\otimes(xa_2 - a_1) + \cdots + x^m\otimes(xa_m - a_{m-1}) +$ $x^{m+1}\otimes(-a_m)$.

Det eftervises umiddelbart, at φ er en $\Lambda[x]$-homomorfi. På grund af den ovenfor nævnte entydige fremstilling af elementerne i $\Lambda[X] \otimes_\Lambda A$ er $\ker \varphi = 0$ (Start bagfra med a_m etc.) Da $\psi(x^i \otimes xa_i - x^{i+1} \otimes a_i) = x^i(xa_i) - x^{i+1}a_i = 0$ er $\mathrm{Im}\ \varphi \subseteqq \ker \psi$.

For omvendt at vise $\ker \psi \subseteqq \mathrm{Im}\ \varphi$ betragter vi element i $\mathrm{Ker}\ \psi$: $1 \otimes b_0 + x \otimes b_1 + \cdots + x^m \otimes b_m$; vi har da:

$$\psi(1\otimes b_0 + \cdots + x^m \otimes b_m) = b_0 + xb_1 + \cdots + x^m b_m = 0$$

Vi søger element $1\otimes a_0 + \cdots + x^m \otimes a_m$ så $\varphi(1\otimes a_0 + \cdots + x^m \otimes a_m) = 1\otimes b_0 + \cdots + x^m \otimes b_m$ d.v.s.

$$\begin{aligned}
xa_0 &= b_0 \\
xa_1 - a_0 &= b_1 \\
xa_2 - a_1 &= b_2 \\
&\cdots\cdots \\
xa_{m-2} - a_{m-3} &= b_{m-2} \\
xa_{n-1} - a_{m-2} &= b_{m-1} \\
xa_m - a_{m-1} &= b_m \\
- a_m &= 0
\end{aligned} \qquad (*)$$

Dette ligningsssystem kan løses i a'erne, idet

$$
\begin{aligned}
a_m &= 0 \\
a_{m-1} &= -\, b_m \\
a_{m-2} &= -\, b_{m-1} - b_m x \\
a_{m-3} &= -\, b_{m-2} - b_{m-1} - b_m x^2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_1 &= -b_2 - b_3 x - \cdots - b_m x^{m-2} \\
a_0 &= -\, b_1 - b_2 x - \cdots - b_m x^{m-1}
\end{aligned}
$$

der tilfredsstiller alle ligningerne i $(*)$ eventuelt på-når den første $(xa_0=b_0)$. Men denne gælder også, da $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m = 0$ medfører

$$b_0 - xa_0 = b_0 - x(-b_1-b_2x- \cdots -b_mx^{m-1}) = 0!$$

Hermed altså eftervist, at ($\dagger$) p. 241 exakt, hvorved hoved-sætningen er vist. ∎

Korollar 1. For et legeme K er gl.dim $K[x_1,\cdots,x_n] = n$

Korollar 2. gl.dim $\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_n] = n+1$.

Opgave. Vis, at for enhver ring Λ er
gl.dim $\Lambda[x_1,x_2,\cdots] = \infty$ (uendelig mange variable.)

Hilberts Syzygiekædesætning

Først nogle definitioner:

Lad K være et legeme, og $\Lambda = K[X_1,\dots,X_n]$. Hvis vi sætter Λ^0 = mængden af 0^{te} gradspolynomier ("konstanter"), Λ^i = Mængden af homogene i^{te}-Gradspolynomier, da er hvert Λ^i undergruppe i Λ's additive gruppe, og der gælder (stadig som additiv gruppe) $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda^i \oplus \cdots$ (indre direkte sum) og $\Lambda^i\Lambda^j \subseteq \Lambda^{i+j}$ $\forall\ i,j$.

Generelt kaldes en (kommutativ) Ring Λ en gradueret ring hvis der findes additive undergrupper Λ^i i Λ $(i = 0,1,2,\dots)$ så

1) $\Lambda = \sum_{i\geq 0} \oplus \Lambda^i$ (indre direkte sum)

2) $\Lambda^i\Lambda^j \subseteq \Lambda^{i+j}$ $\forall i,j \geq 0$

<u>Opgave.</u> Vis, at Λ's etelement må ligge i Λ^0 og at Λ^0 er underring i Λ.

Lad Λ være en gradueret ring og M en Λ-modul M kaldes en gradueret Λ-modul hvis der findes additive undergrupper M^i af M $(i = 0,1,2,\dots)$ så

1) $M = \sum_{i\geq 0} \oplus M^i$ (indre direkte sum)

2) $\Lambda^i M^j \subseteq M^{i+j}$ $\forall i,j \geq 0$.

Lad M være en gradueret Λ-modul og N en undermodul i M. N kaldes homogen undermodul, hvis det for ethvert n i N gælder, at n's komponenter svarende til M's opspaltning i $\sum_{i\geq 0} \oplus M^i$ alle tilhører N. I så fald bliver N selv en gradueret Λ-modul idet $N = \sum_{i\geq 0} \oplus (M^i \cap N)$.

Lad nu M og L være to graduerede Λ-moduler. En Λ-homomorfi f fra M til L kaldes homogen hvis $f(M^i) \subseteq L^i \ \forall i \geq 0$.

Sætning. Lad f være homogen Λ_homomorfi fra M til L hvor M og L er graduerede Λ-moduler, da er Ker f en homogen undermodul i M og Imf en homogen undermodul i L.

Bevis. Simpel øvelse. ∎

Hvis M er gradueret Λ-modul og N homogen undermodul, kan M/N på naturlig måde gøres til gradueret Λ-modul, idet man sætter $(M/N)^i = \{\overline{m} \mid m \in M^i\}$. Da N er homogen, ses let, at herved virkelig fås graduering (axiomerne 1) og 2) opfyldt).

Lad os i det følgende for korthed skyld for en gradueret modul M kaldes elementerne i M^i $(i \geq 0)$ for de homogene elementer.

Definition. En gradueret Λ-modul M kaldes fri, hvis den har en Λ-basis bestående af homogene elementer.

Opgave. Hvis M fri gradueret med basis $\{e_s^{\alpha_s}\}$, $s \in I$, $e_s^{\alpha_s} \in M^{\alpha_s}$ og $m = \Sigma \lambda_s e_s^{\alpha_s}$, da gælder: $m \in M^i \Leftrightarrow \lambda_s \in \Lambda^{i-\alpha_s} \ \forall s$ (idet man sætter $\Lambda^j = 0$ for $j < 0$)

Sætning. Enhver gradueret modul M er homomorft billede af en fri gradueret modul F (d.v.s. $\exists$ fri gradueret modul F og homogen surjektiv homomorfi $\varphi: F \to M$).

Bevis. Lad $m_s^{\alpha_s}$ være homogene frembringere for M. Lad F være den fri Λ-modul med $e_s^{\alpha_s}$ som basiselementer og lad φ være Λ-homomorfien fra F til M defnnerer ved $\varphi(e_s^{\alpha_s}) = m_s^{\alpha_s}$.

Sæt $F^i = \{\Sigma\lambda_s e_s^{\alpha_s} | \lambda_s \in \Lambda^{i-\alpha_s}\}$; da bliver $F = \sum_{i \geqq 0} \oplus F^i$ så F bliver fri gradueret Λ-modul med de homogene elementer $e_s^{\alpha_s}$ som basiselementer d.v.s. F fri gradueret Λ-modul. Endvidere gælder: $\varphi(F^i) \subseteqq M^i$ $\forall i$ d.v.s. φ homogen. ∎

Vi kan nu formulere:

Hilberts syzygiekædesætning.

Lad K = legeme og $\Lambda = K[x_1, \cdots, x_n]$ gradueret på oplagt måde. For enhver gradueret Λ-modul M findes resolution af fri, graduerede Λ-moduler F_ν, $o \leq \nu \leq n$, og homogene Λ-homomorfier

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

Bevis. På sædvanlig vis kan vi finde exakt følge

$$0 \to A \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

hvor $F_0, \cdots, F_{n-1}$ er frie graduerede Λ-moduler og alle optrædende homomorfier er homogene. Da gl.dim $\Lambda = n$, er $dh_\Lambda M \leqq n$ d.v.s. A er Λ-projektiv (uden hensyn til graduering). Specielt er A Λ-flad. A er kerne for en homogen homomorfi, og derfor homogen undermodul i F_{n-1}; specielt er A en gradueret Λ-modul. Det er derfor nok at vise:

<u>En gradueret Λ-modul for hvilken $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A,\Lambda/\mathfrak{m}) = 0$ er fri gradueret.</u> (Her er $\mathfrak{m}$ det maximale ideal $\mathfrak{m} = \{f(x_1,\dots,x_n) \in \Lambda \mid f(0,\dots,0) = 0\}$)

Først et lemma

<u>Nakayama's Lemma.</u> Lad N være gradueret Λ-modul så $N = \mathfrak{m}N$. Da er $N = 0$.

<u>Bevis.</u> $N = \mathfrak{m}N$ medfører, at ethvert element i N kan skrives på formen $\Sigma\lambda_j n_j$, $\lambda_j \in \mathfrak{m}$, $n_j \in N$. Antag $N \neq 0$; da N er gradueret Λ-modul, er $N = \Sigma\oplus N^i$. Lad i_0 være det mindste i for hvilket $N^i \neq 0$. Lad $\hat{a} \in N^{i_0}$ $\hat{a} \neq 0$. $\hat{a}$ kan skrives $\hat{a} = \Sigma_t \lambda_t n^{(t)}$ med homogene $n^{(t)}$ af grad $\geq i_0$ og λ_t homogene i Λ af grad ≥ 1. Men da er graden af hvert led $(\lambda_t n^{(t)})$ mindst i_0+1 d.v.s. $\Sigma\lambda_t n^{(t)}$ tilhører $\Sigma\oplus_{i \geq i_0+1} N^i$, samtidig med $\hat{a} = \Sigma_t \lambda_t n^{(t)} \in N^{i_0}$.

Modstrid!

Vi er nu i stand til at vise påstanden øverst på siden. Lad $\{a_\nu\}$ være homogent frembringersystem for A. Da vil $\{\bar{a}_\nu \text{ modulo } \mathfrak{m}A\}$ være frembringersystem for $A/\mathfrak{m}A$. Nu er $A/\mathfrak{m}A$ et vektorrum over $\Lambda/\mathfrak{m}$ $(\simeq K)$.

Lad $\{\bar{a}_\mu\}$ være en delmængde af $\{\bar{a}_\nu\}$ så $\{\bar{a}_\mu\}$ udgør en basis or $(\Lambda/\mathfrak{m})$-vektorrummet $A/\mathfrak{m}A$.

Vi påstår nu, at $\{a_\mu\}$ udgør en Λ-basis for A

<u>1. $\{a_\mu\}$ frembringer A.</u> Lad $\bar{A}$ være den undermodul af A, der Λ-frembringes af $\{a_\mu\}$. Da $\{\bar{a}_\mu\}$ er $(\Lambda/\mathfrak{m})$-Basis for $A/\mathfrak{m}A$ kan ethvert $a \in A$ skrives:

$$a = \Sigma\lambda_\mu a_\mu + (\text{El i } \mathfrak{m}A).$$

Følgelig er $A/\bar{A} = \mathfrak{m}(A/\bar{A})$ og derfor (Nakayama's Lemma) $A/\bar{A}=0$ eller $A = \bar{A}$.

2. $\{a_\mu\}$ er uafhængige over Λ. Lad F være den fri graduerende Λ-modul med basiselementer e_μ og Ψ den homogene Λ-homomorfi fra F til A bestemt ved $\Psi(e_\mu) = a_\mu$. Ifølge 1. bliver Ψ surjektiv og vi har en exakt følge.

$$0 \to N \to F \xrightarrow{\Psi} A \to 0$$

hvor N er homogen undermodul i F (N altså gradueret Λ-modul). Vi får da exakt følge:

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/\mathfrak{m}, A) \to (\Lambda/\mathfrak{m})\otimes_\Lambda N \to (\Lambda/\mathfrak{m})\otimes_\Lambda F \to (\Lambda/\mathfrak{m})\otimes_\Lambda A \to 0.$$

Da A Λ-flad, er $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\Lambda/\mathfrak{m}, A) = 0$, og da der findes naturlig Isomorfi $(\Lambda/\mathfrak{m})\otimes_\Lambda X \simeq X/\mathfrak{m}X$, har vi altså exakt følge:

$$(*) \qquad 0 \to N/\mathfrak{m}N \to F/\mathfrak{m}F \xrightarrow{\tilde{\Psi}} A/\mathfrak{m}A \to 0.$$

Endvidere bliver $\tilde{\Psi}$ injektiv, idet:

$$\tilde{\Psi}(\Sigma \lambda_\mu e_\mu) = 0 \Rightarrow \Sigma \lambda_\mu a_\mu = 0 \Rightarrow \lambda_\mu = 0 \ \forall \mu.$$

Men p.gr. af den exakte følge $(*)$ er

$$N/\mathfrak{m}N \simeq \mathrm{Ker}\,\tilde{\Psi} = 0,$$

hvorfor $N = 0$ ifølge Nakayama's lemma d.v.s. $A \simeq F$ og A altså fri gradueret. Hermed er Syzygiekædesætningen vist ∎

Inden vi giver en lille anvendelse af Hilberts Syzygiekædesætning, indskyder vi to små Lemmaer.

Lemma 1. Lad

$$0 \to A_1 \to A_2 \to \dots \to A_n \to 0$$

være en exakt følge af endelig dimensionale vektorrum over et legeme K. Da gælder

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim_K A_i = 0$$

Bevis. Induktion efter n.

n = 1,2 Klart. n = 3:

$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ exakt $\Rightarrow$

$A_2 \simeq A_1 \oplus A_3 \Rightarrow \dim_k A_2 = \dim_k A_1 + \dim_k A_3$

eller $\dim_k A_1 - \dim_k A_2 + \dim_k A_3 = 0$

$n - 1 \to n$ Vi foretager opspaltning af den exakte følge, så vi får

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_{n-2} \arrow[dr] & & A_{n-1} \arrow[r] & A_n \arrow[r] & 0 \\
& & & & B \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Da gælder ifølge induktionsantagelsen

$$-\dim_k A_1 + \dim_k A_2 - \cdots + (-1)^{n-2}\dim_k A_{n-2} + (-1)^{n-1}\dim_k B = 0$$

$$(-1)^n \dim_k B + (-1)^{n-1} \dim_k A_{n-1} + (-1)^n \dim_k A_n = 0.$$

Ved addition fås det ønskede. ∎

Lemma 2. Antallet af potensprodukter $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ af grad d $(= a_1 + \cdots + a_n)$ er $\binom{n+d-1}{d}$.

Bevis. Vi bestemmer først antallet af potens-produkter $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ for hvilke $a_1 + \cdots + a_n \leqq d$. Dette antal er = antallet af ordnede n-tupler $(a_1, \ldots, a_n)$ med $a_1 + \cdots + a_n \leqq d$ og $a_1, \ldots, a_n$ hele ikke-negative tal. Afbildningen $(a_1, \ldots, a_n) \to$ $(a_1+1, a_1+a_2+2, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_i+i, \ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n+n)$ giver (1-1) forbindelse mellem de førnævnte n-tupler og alle (ikke-ordnede) sæt af n tal blandt $\{1, 2, \ldots, n+d\}$. d.v.s. antallet af potensprodukter af grad $\leqq d$ er $\binom{n+d}{n}$

Antallet af potensprodukter af grad d bliver da

$$\binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{d} \qquad \blacksquare$$

Vi får endvidere brug for

Hilberts basissætning. For ethvert legeme K er $\Lambda = K[X_1, \ldots, X_n]$ Noethersk.

Bevis. enhver lærebog i Algebra.

Vi giver nu en anvendelse af Hilberts Syzygiekædesætning. Λ betegner stadig $K[X_1, \ldots, X_n]$, (K er et vilkårligt legeme). Lad M være en endelig frembragt gradueret Λ-modul. Da er M^i et vektorrum over K. Forudsætningen om M indebærer, at M har et endeligt homogent frembringersystem. Lad $\{m_s^{\alpha_s}\}$; $m_s^{\alpha_s} \in M^{\alpha_s}$, ($\{s\}$ endelig,) være et sådant.

Ethvert element $m \in M^i$ kan skrives $m = \sum_s \lambda_s^j m_s^{\alpha_s}$; $j+\alpha_s = i$.
Lad Λ^j være K-vektorrummet bestående af alle homogene j^{te}-gradspolynomier. Her er Λ^j endelig dimensionalt (endda ved vi ifølge lemme 2, at $[\Lambda^j:K] = \binom{n+j-1}{j}$).
Følgelig bliver M^i et endeligdimensionalt vektorrum over K.

$\varphi_M(i) = [M^i:K]$ kaldes M's karakteristiske funktion.

<u>Sætning.</u> Lad M være en endelig frembragt gradueret Λ-modul, hvor $\Lambda = K[X_1, \cdots, X_n]$. Da er $\varphi_M(i) = [M^i:K]$ et polynomium i i for alle tilstrækkelig store i. Dette polynomiums grad er $\leqq n-1$.

<u>Bevis.</u> Ifølge Hilberts basissætning er Λ Noethersk og derfor er undermoduler i endelig frembragte Λ-moduler selv endelig frembragte. P. gr. af Syzygiekædesætningen findes exakt følge

$$(*) \quad 0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

hvor $F_0, \cdots, F_n$ er endelig frembragte fri graduerede Λ-moduler og de optrædende homomorfier er homogene.

Lad $F_\nu (0 \leqq \nu \leqq n)$ have basis $e_{\nu,s}^{\alpha_{\nu,s}} \in F_\nu^{\alpha_{\nu,s}}$, $1 \leqq s \leqq t(\nu)$

Lad $i > \max. (\alpha_{\nu,s})$ Ethvert element i F_ν^i kan entydigt skrives $\sum_{\substack{j+\alpha_{\nu,s} = i \\ 1 \leq s \leq t(\nu)}} \lambda_s^j e_{\nu,s}^{\alpha_{\nu,s}}$, $(\lambda_s^j \in \Lambda^j)$

Da $i > \alpha_{\nu,s}$ $\forall s$ bliver $j > 0$ og derfor er

$$[F_\nu^i : K] = \sum_{s=1}^{t(\nu)} \binom{n+i-\alpha_{\nu,s}-1}{i-\alpha_{\nu,s}} = \sum_{s=1}^{t(\nu)} \binom{n+i-\alpha_{\nu,s}-1}{n-1}$$

d.v.s. $[F_\nu^i : K]$ er polynomium i i af grad $n-1$

Da homomorfierne i $(*)$ er homogene, bliver

$$0 \to F_n^i \to F_{n-1}^i \to \dots \to F_1^i \to F_o^i \to M^i \to 0$$

en exakt følge (af Vektorrum over K) for ethvert i.

Ifølge lemma 1 er

$$[M^i : K] = [F_o^i : K] - [F_1^i : K] + [F_2^i : K] - \dots + (-1)^n [F_n^i : K]$$

For $i > \max. (\alpha_{\nu,s})$ er hvert led på højre side et $(n-1)^{\text{te}}$-gradspolynomium af i. D.v.s. $[M^i : K]$ = Polynomium af i med grad $\leqq n-1$. ∎

Specielt kan fremhæves tilfældet, hvor M er et homogent ideal $\mathfrak{a}$ i Λ eller $M = \Lambda/\mathfrak{a}$, hvor $\mathfrak{a}$ er et homogent ideal. $\varphi_{\mathfrak{a}}(i)$ er da antallet af uafhængige homogene i^{te} gradsformer der tilhører $\mathfrak{a}$, og $\varphi_{\Lambda/\mathfrak{a}}(i)$ antallet af modulo $\mathfrak{a}$ lineært uafhængige former af grad i.

Af disse er polynomier af i for store i vistes 1890 af Hilbert i det grundlæggende arbejde: "Uber die Theorie der algebraischen Formen" Mathematische Annalen 36. $\varphi_{\Lambda/\mathfrak{a}}(i)$ kaldes ofte $\mathfrak{a}$'s Hilbert Funktion.