DIFFERENTIALGEOMETRI

MATEMATIK 3GE

1996

Hans Plesner Jakobsen

Indhold

Forord

Disse noter udgør stort set det teoretiske grundlag for kurset Matematik 3GE, som det har set ud siden foråret 1992. I første omgang blev benyttet et sæt noter udarbejdet af Lars Hörmander til et doktorandkursus ved Lunds Universitet ([3]). Disse viste sig dog at være lovligt kortfattet skrevet og forudsatte endvidere et vist kendskab til differentialgeometri. Alligevel var (er) der meget godt i disse noter og deres måde at gribe sagerne an på, og dette er søgt bevaret i de nuværende noter. Nogle ganske få steder er der faktisk skrevet direkte af. I øvrigt tilhører emnerne jo den matematiske “arv” og måden at præsentere dem på er en del af “folkloren”, som formentlig er næsten umulig at spore tilbage til deres rødder. Jeg vil derfor ikke nævne flere kilder her, uden jeg af den grund tager noget af æren. Ansvaret for eventuelle fejl påtager jeg mig dog.

Matematisk Institut, januar 1993

Vedrørende ’96-udgaven: I forhold til de tidligere udgaver er nummereringen forbedret, der er tilføjet nogle bemærkninger, eksempler og opgaver, trykfejl er rettede og noget stof er revideret og/eller omorganiseret.

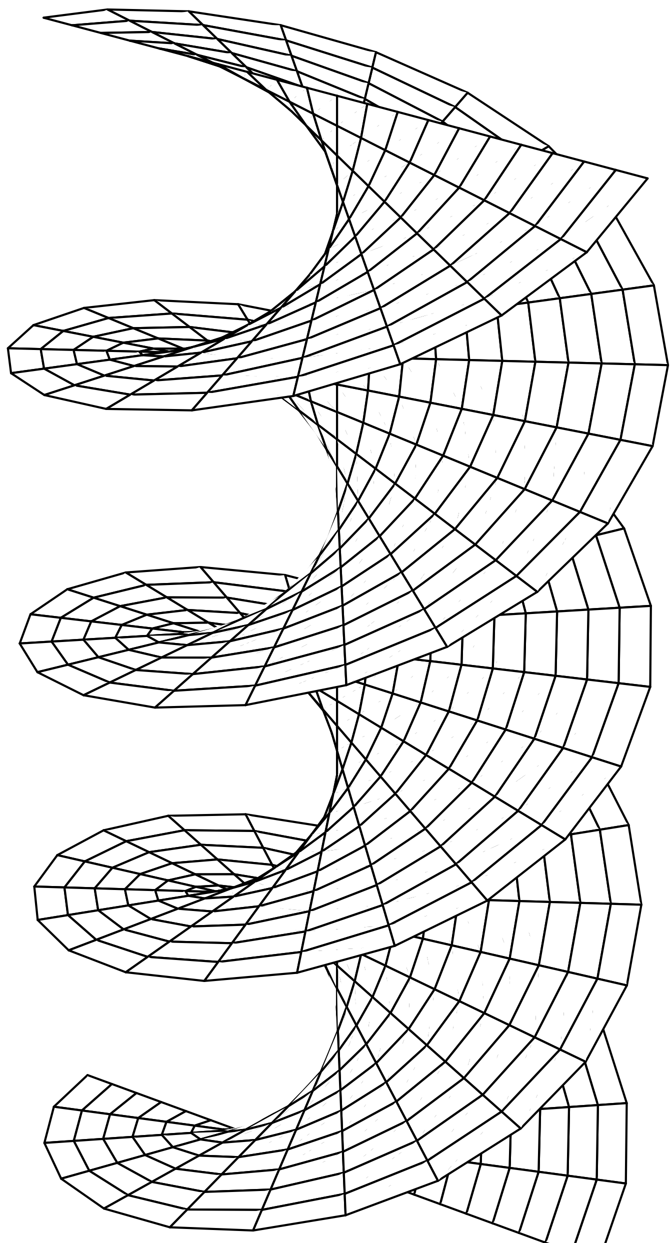
I den forbindelse takkes de mange studerende og instruktorer, der har bidraget til forbedring af noterne. En speciel tak til Morten Krogh.

Konventioner

I disse noter betyder ordet **differentiabel**, med mindre andet eksplicit fremgår, fra næste punktum af og til sidste side *uendeligt ofte differentiabel.* Ordet **glat** vil blive brugt i betydningen differentiabel. Alle funktioner, afbildninger, kurver etc. kan antages at være differentiable (med mindre andet eksplicit fremgår).

De kurver $t \to \alpha(t)$, der betragtes, antages at have egenskaben: $\forall t : \alpha'(t) \neq 0$, med mindre andet eksplicit fremgår.

Alle omegne antages at være åbne.



En vindelflade.

KAPITEL I

Kurver

1. Krumning

Lad V være et endeligt-dimensionalt reelt vektorrum med sædvanligt euklidisk indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ og norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Definition I.1. *En **kurve** α i V er en afbildning*

$$I \ni t \xrightarrow{\alpha} \alpha(t) \in V, \tag{1}$$

hvor I er et åbent interval i $\mathbb{R}$. Vi vil altid antage, at α er differentiabel. Punktmængden

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha = \{\alpha(t) \mid t \in I\} \tag{2}$$

*kaldes **sporet** af kurven. Kurven kaldes **regulær** såfremt*

$$\boxed{\forall t \in I : \alpha'(t) \neq 0\ .} \tag{3}$$

Med mindre andet eksplicit nævnes, er det en stående antagelse, at de kurver vi betragter, er regulære.

Vi minder om, at kurvelængden målt ud fra et punkt $\alpha(t_0)$ på kurven er givet ved

$$\boxed{s(t) = \textstyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du\ .} \tag{4}$$

Det er en almindelig konvention at betegne den omvendte (inverse) funktion til $t \to s(t)$ med $s \to t(s)$. Det gælder således, at

$$\frac{dt}{ds}(s) = \|\alpha'(t(s))\|^{-1}, \tag{5}$$

og kurven $s \to \beta(s) = \alpha(t(s))$ opfylder således ligningen

$$\boxed{\forall s : \|\beta'(s)\| = 1\ .} \tag{6}$$

DEFINITION I.2. *En kurve, der opfylder (6), siges at være parametriseret ved* ***kurvelængde*** *eller ved* ***buelængde****.*

Enhver regulær kurve α kan klart **omparametriseres** (erstattes af en kurve β som ovenfor) til kurvelængde. Sporet af den omparametriserede kurve er klart det samme, som for den oprindelige.

Den følgende observation er meget nyttig:

LEMMA I.3. *Antag $s \to \beta(s)$ er en kurve, der er parametriseret ved kurvelængde. Da er*

$$\boxed{\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle = 0} \tag{7}$$

for alle s i definitionsintervallet.

BEVIS. Differentieres ligningen $\|\beta'(s)\|^2 = 1$ fås

$$\langle \beta''(s), \beta'(s) \rangle + \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle = 0, \tag{8}$$

hvilket, da det indre produkt er symmetrisk, straks giver det ønskede. $\square$

DEFINITION I.4. *Hvis $s \to \beta(s)$ er en kurve i V parametriseret ved buelængde, da kaldes $\beta'(s)$* ***enhedstangentvektoren*** *til kurven i $\beta(s)$. Man kalder*

$$\boxed{k(s) = \|\beta''(s)\|} \tag{9}$$

for kurvens ***krumning****. Hvis krumningen $k(s) \neq 0$ kaldes enhedsvektoren $n(s) = \beta''(s)/\|\beta''(s)\|$ for kurvens* ***hovednormal*** *og $1/k(s)$ kaldes for* ***krumningsradius****. I dette tilfælde, hvor altså $\beta''(s) = k(s) \cdot n(s)$, kaldes cirklen med centrum i $\beta(s) + n(s)/k(s)$, radius $1/k(s)$ og beliggende i planen udspændt af $\beta'(s)$ og $n(s)$, for den* ***oskulerende cirkel****.*

En del af denne terminologi har sin forklaring gennem følgende eksempel

EXEMPEL I.5. *Lad $\beta(s) = (x(s), (y(s))$ være kurven i $\mathbb{R}^2$ givet ved*

$$x(s) = x_0 + r \cdot \cos(\frac{s}{r}), \qquad og \qquad y(s) = y_0 + r \cdot \sin(\frac{s}{r}). \tag{10}$$

Da er $\beta'(s) = (-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r}))$ og $\beta''(s) = (-\frac{1}{r}\cos(\frac{s}{r}), -\frac{1}{r}\sin(\frac{s}{r}))$. Krumningen af en cirkel med radius r er således konstant og lig med $\frac{1}{r}$, og hovednormalen i et punkt peger ind mod cirklens centrum.

Lad nu α være en vilkårlig kurve, og lad β være den tilsvarende kurve parametriseret ved kurvelængde. Da er altså $\alpha(t) = \beta(s(t))$ og dermed bliver

$$\alpha'(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right) \cdot \beta'(s) \quad \text{og} \quad \alpha''(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \beta''(s) + \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) \cdot \beta'(s). \tag{11}$$

Eftersom $\beta''(s)$ er vinkelret på $\beta'(s)$ fås således

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \beta''(s) = \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), \beta'(s)\rangle \beta'(s), \tag{12}$$

og dermed med de fundne udtryk bliver

$$\boxed{\beta''(s) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{\alpha'(t)\langle\alpha''(t),\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^4}\ .} \tag{13}$$

2. Kurver i planen

For kurver i planen $\mathbb{R}^2$ kan vi give krumningen af en kurve et fortegn. Mere specifikt indfører vi

Definition I.6. *Lad $s \to \beta(s)$ være en kurve i $\mathbb{R}^2$ parametriseret ved buelængde. Lad for alle s $\beta'_-(s)$ betegne den positivt orienterede tværvektor til $\beta'(s)$. Der gælder m.a.o. at sættet $\{\beta'(s), \beta'_-(s)\}$ er en positivt orienteret orthonormalbasis for $\mathbb{R}^2$. Der gælder da*

$$\boxed{\beta''(s) = k_\sigma(s) \cdot \beta'_-(s)\ ,} \tag{14}$$

*hvor vi klart har, at $|k_\sigma(s)| = k(s)$, med $k(s)$ den tidligere definerede krumning. Vi kalder $k_\sigma(s)$ for **krumningen med fortegn** eller blot krumningen, når det er klart fra sammenhængen, hvad vi mener.*

Hvis krumningen $k_\sigma(s)$ er positiv, betyder det, at når man går fremad på kurven, da vil kurven ligge til venstre for tangenten.

Definition I.7. *Ved en **simpel lukket kurve** i $\mathbb{R}^2$ forstås en **periodisk** kurve $\mathbb{R} \ni t \to \alpha(t)$, der ikke skærer sig selv. Mere konkret skal der eksistere et positivt reelt tal T så*

- $\forall t \in \mathbb{R} : \alpha(t + T) = \alpha(t)$.
- *Hvis $0 < t_1 < t_2 \leq T$ er vilkårlige, da er $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.*

Bemærkning I.8. *Hvis den simple lukkede kurve er parametriseret ved buelængde, da er T lig **længden** L af kurven.*

Lad os nu betragte en simpel lukket kurve $s \to \beta(s) = (x(s), y(s))$ parametriseret ved buelængde. Per antagelse gælder

$$\beta'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \tag{15}$$

og det er ikke svært at se, at vi lokalt kan vælge en differentiabel funktion $s \to \theta(s)$, der opfylder (15). Det er endvidere klart, at $\theta(s)$ kun er bestemt op til heltallige multipla af 2π.

Hvis vi nu differentierer i (15) fås:

$$\beta''(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s)\beta'_{-}(s). \tag{16}$$

Der gælder således, at

$$\boxed{\theta'(s) = k_\sigma(s)\ ,} \tag{17}$$

og dermed er $\theta'(s)$ altså givet ved en globalt defineret, kontinuert funktion. Lad os nu for simpeltheds skyld antage, at $\beta'(0)$ peger ud af den positive x-akse. Funktionen

$$\mathbb{R} \ni s \to \Theta(s) = \int_0^s k_\sigma(u)\, du \tag{18}$$

må da være lig $\theta(s)$ (+ evt. multiplum af 2π) i en omegn af 0. Men det følger faktisk (overvej), at

$$\forall s : \beta'(s) = (\cos\Theta(s), \sin\Theta(s)). \tag{19}$$

Specielt må der således gælde:

$$\Theta(L) - \Theta(0) = \int_0^L k_\sigma(s)\, ds = 2\pi \cdot I \tag{20}$$

for et eller andet $I \in \mathbb{Z}$. (Bemærk, at den foregående diskussion kun udnytter, at kurven er periodisk, altså at den løber tilbage i sig selv).

Definition I.9. *Tallet $I \in \mathbb{Z}$ i (20) kaldes kurvens* ***rotationsindex****.*

Sætning I.10. *Rotationsindex for en simpel lukket kurve er ± 1, med plus hvis der findes en tangentlinie, så kurven helt ligger på venstre side, når man bevæger sig i den positive retning.*

Bevis. Betragt enhedsvektoren pegende fra et punkt på sporet af kurven til et andet:

$$x(t,s) = \frac{\beta(t) - \beta(s)}{\|\beta(t) - \beta(s)\|}, \quad 0 \le s < t \le L \text{ og } (t,s) \ne (L,0). \tag{21}$$

Hvis vi definerer $x(s,s) = \beta'(s)$ og $x(L,0) = -\beta'(0)$, bliver dette en kontinuert funktion på trekanten $T = \{(t,s) \mid 0 \le s \le t \le L\}$. Eftersom T er **enkeltsammenhængende** (se bemærkning nedenfor) kan vi finde en kontinuert funktion $\phi(t,s)$ i T, så

$$\begin{aligned} \phi(s,s) &= \Theta(s) \text{ for } 0 \le s \le L \text{ og} \\ x(t,s) &= (\cos\phi(t,s), \sin\phi(t,s)) \text{ for } (t,s) \in T. \end{aligned} \tag{22}$$

Vi ønsker at udregne

$$\Theta(L) - \Theta(0) = (\phi(L,L) - \phi(L,0)) + (\phi(L,0) - \phi(0,0)). \tag{23}$$

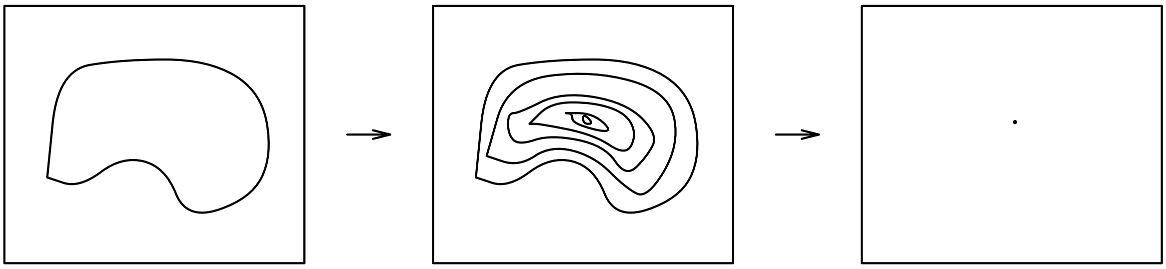
Her er den første parantes på højresiden forskellen mellem værdierne i endepunkterne L og 0 af funktionen $s \xrightarrow{a} \phi(L,s)$ og den anden parantes den tilsvarende forskel for funktionen $s \xrightarrow{b} \phi(s,0)$. Nu gælder der klart, at $x(L,s) = -x(s,0)$ og derfor må der gælde, at $b(s) = a(s) + (\pi + 2p\pi)$ for et eller andet $p \in Z$, der ikke afhænger af s. Det er derfor klart, at de to paranteser er lige store, og vi får

$$\Theta(L) - \Theta(0) = 2(\phi(L,0) - \phi(0,0)). \tag{24}$$

Vores kurve er jo periodisk, og vi får derfor det samme resultat, hvad enten vi integrerer k_σ over $[0,L]$ eller over $[s_0, s_0+L]$ for et vilkårligt s_0. Vi kan derfor antage uden indskrænkning, at andenkoordinaten $y(s)$ til punktet på kurven antager sit minimum (et af dem) for $s = 0$, og dette minimum kan sættes til $y = 0$. Kurven ligger så "ovenover" x-aksen og vektoren $x(s,0)$ har en ikke-negativ andenkoordinat. Funktionen $b(s) = \phi(s,0)$ varierer dermed mellem 0 og π. Hvis $\beta'(0)$ peger i den positive x-akses retning bliver variationen π, og hvis den peger i den negative retning bliver variationen $-\pi$. Da vi jo skal gange med 2 i (24) følger resultatet fra dette. □

BEMÆRKNING I.11. *Ovenfor benyttes, at en lukket trekant er enkeltsammenhængende (eller simpeltsammenhængende). Løst sagt er definitionen på, at et topologisk rum er enkeltsammenhængende, at enhver lukket kontinuert kurve kan trækkes kontinuert sammen til et punkt. Se tegningen (Figur* I.1*).*

En anden populær måde at sige det på er, at der ikke er nogle "huller" i mængden. I den konkrete situation er der givet en vinkel ϕ i et hvert punkt af trekanten. Uheldigvis er vinkler jo kun bestemte op til addition af $2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. Men det er klart, at vi i små omegne kan vælge ϕ kontinuert (bruge "samme $2p\pi$"). Det følger af dette, at vi langs kontinuerte kurver kan vælge vinklen kontinuert. Vælg et fast punkt P i trekanten, og en fast repræsentant for vinklen i dette punkt. Definer nu værdien i et vilkårligt andet punkt Q i trekanten ved at a) forbinde P med Q via en kontinuert kurve α, b) vælge den kontinuerte vinkelfunktion langs α, der stemmer overens med den givne vinkel i P og c) definere værdien



FIGUR I.1. Kontraktion

i Q til at være værdien af denne vinkelfunktion i Q. Herved fås en definition af værdien i Q, der i første omgang afhænger af valget af kurve fra P til Q. Men hvis en anden kurve fra P til Q giver en anden vinkel i Q, da må denne jo afvige med et helt multiplum af 2π*, og det er klart, at "nærtliggende" kurver vil give samme vinkel. Her kan man så bruge at rummet er enkeltsammenhængende til at slutte, at vinklen ikke afhænger af vejen.*

Vil man vide mere om f. eks. enkeltsammenhængende rum, overlejringsrum, etc. henvises man til disciplinen "(algebraisk) topologi". (Se f. eks. E. Spanier: "Algebraic Topology", eller mere jordnært, M. Goto: "An Introduction to Topological Groups".)

3. Frenets Formler

Vi betragter nu en kurve β, parametriseret ved buelængde, i et endeligt-dimensionalt vektorrum. Hvis kurvens krumning $k(s)$ er forskellig fra nul i et punkt $\beta(s_0)$, kan vi tale om hovednormalen $n(s)$ og dermed også $n'(s)$ for s i en omegn om s_0. Eftersom $\langle n(s), n(s)\rangle = 1$ bliver, ved differentiation, $2\langle n'(s), n(s)\rangle = 0$. Hvis vi ligeledes differentierer identiteten $\langle \beta'(s), n(s)\rangle = 0$, fås

$$\langle n'(s), \beta'(s)\rangle + \langle n(s), \beta''(s)\rangle \quad = \quad 0 \Rightarrow \tag{25}$$

$$\langle n'(s), \beta'(s)\rangle = -k(s). \tag{26}$$

LEMMA I.12.

$$n'(s) + k(s)\cdot\beta'(s) - \mathrm{Span}\{\beta', n(s)\}. \tag{27}$$

BEVIS. I følge det ovenstående står $n(s)$ vinkelret på begge vektorerne i (27). Påstanden vedrørende β' følger derimod fra (26), idet $\beta'(s)$ jo per antagelse er en enhedsvektor. □

For et vilkårligt endeligt-dimensionalt vektorrun V defineres **torsionen** som længden af vektoren i Lemma I.12. I det specielle tilfælde, hvor V er 3-dimensional kan vi dog tilordne torsionen et fortegn. I resten af dette afsnit antager vi, at vi er i den situation. Bemærk, at nedenstående definition kun gælder dette tilfælde, og at sidste del giver mening p.g.a. Lemma I.12.

DEFINITION I.13. *Vektoren*

$$b(s) = \beta'(s) \times n(s) \tag{28}$$

kaldes ***binormalvektoren*** *og tallet* $\tau(s)$ *defineret ved ligningen*

$$\tau(s) \cdot b(s) = n'(s) + k(s) \cdot \beta'(s) \tag{29}$$

kaldes ***torsionen*** *i punktet* $\beta(s)$.

BEMÆRKNING I.14. *Der gælder, at* $\{\beta'(s), n(s), b(s)\}$ *er et positivt orienteret orthonormalsystem for* V. *Dette kaldes somme tider* ***Frenets treben***.

PROPOSITION I.15 (FRENETS FORMLER).

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \beta''(s) & = & k(s) \cdot n(s) \\ n'(s) & = & -k(s) \cdot \beta'(s) + \tau(s) \cdot b(s) \\ b'(s) & = & -\tau(s) \cdot n(s) \end{array} ,} \tag{30}$$

eller, hvis vi sætter $e(s) = \beta'(s)$,

$$\boxed{\begin{pmatrix} e'(s) \\ n'(s) \\ b'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} ,} \tag{31}$$

hvor $k(s), \tau(s)$ *og selv* 0*-et i ovenstående matrix er en forkortelse for disse tal ganget på den identiske* 3×3*-matrix.*

BEVIS. De første to ligninger er definitionerne af henholdsvis krumningen og torsionen. Ligningen for $b'(s)$ følger ved differentiation af de tre ligninger

$$\langle b(s), \beta'(s)\rangle = 0, \quad \langle b(s), n(s)\rangle = 0 \quad \text{og} \quad \langle b(s), b(s)\rangle = 1. \tag{32}$$

Den første giver

$$\langle b'(s), \beta'(s)\rangle + \langle b(s), \beta''(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle b'(s), \beta'(s)\rangle = 0, \tag{33}$$

eftersom $b(s)$ er vinkelret på $\beta''(s) = k(s) \cdot n(s)$. Ved differentiation af den sidste ligning i (32) fås (som sædvanligt), at $b'(s)$ er vinkelret på $b(s)$. Sammenholdt med (33) følger det så, at $b'(s)$ må være proportional med $n(s)$, d.v.s. $b'(s) = c(s) \cdot n(s)$. Faktoren $c(s)$ kan nu findes ved differentiation af den midterste ligning i (32):

$$\begin{array}{rcl} \langle b(s), n'(s)\rangle + \langle b'(s), n(s)\rangle & = & 0 \Rightarrow \\ \langle b(s), -k(s) \cdot \beta'(s) + \tau(s) \cdot b(s)\rangle + c(s) & = & 0. \end{array} \tag{34}$$

Heraf følger klart, at $c(s) = -\tau(a)$. □

Bemærkning I.16. *Matricen i (31) er tydeligvis skæv-symmetrisk. Dette er ikke en tilfældighed—se næste afsnit.*

4. Bevægende rammer—den orthogonale gruppe

For en kurve β, parametriseret ved kurvelængde, i et tre-dimensionalt vektorrum V, udgør Frenets treben $\{\beta'(s), n(s), b(s)\}$ i hvert punkt $\beta(s)$, hvor krumningen $k(s) \neq 0$, en orthonormal basis. Dette er et specialtilfælde af en meget mere generel situation.

Vi vil i dette afsnit, af historiske grunde, bruge ordet **ramme** (fra det engelske *frame*) i betydningen "basis". Lad V være et euklidisk vektorrum med $\dim(V) = n < \infty$. Lad $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegne det indre produkt.

Definition I.17. *$F(V)$ betegner mængden af orthonormale rammer $\{e_1, \dots, e_n\}$ i V.*

Der gælder jo, at $F(V) \subset V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n}$, og dermed er $F(V)$ en delmængde af et endeligt-dimensionalt vektorrum (af dimension n^2). Vi kan da definere en kurve $I \ni t \to e(t) \in F(V)$ til at være *differentiabel*, såfremt den er differentiabel i sædvanlig forstand som afbildning ind i V^n. Med andre ord, en differentiabel kurve i $F(V)$ er en differentiabel kurve i V^n, der forløber helt indenfor $F(V)$.

Lad nu $e(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t))$ være en sådan kurve. Der gælder m.a.o.

$$\forall i, j = 1, \dots, n : \langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{i,j}. \tag{35}$$

Betragt nu $\frac{de_i(t)}{dt}$. Eftersom $\{e_1, \dots, e_n\}$ jo er en basis, må der findes reelle tal $\omega_{ij}(t)$ så

$$\boxed{e_i'(t) = \frac{de_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t) e_j(t)\ .} \tag{36}$$

Lemma I.18.

$$\boxed{\forall i, j = 1, \dots, n : \omega_{ij}(t) = -\omega_{ji}(t)\ .} \tag{37}$$

Bevis. Ved differentiation af (35) fås

$$\langle \frac{de_i(t)}{dt}, e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), \frac{de_j(t)}{dt} \rangle = 0, \tag{38}$$

og på grund af orthogonaliteten (og symmetrien af det indre produkt) gælder jo

$$\langle \frac{de_i(t)}{dt}, e_j(t) \rangle = \omega_{ij}(t) = \langle e_j(t), \frac{de_i(t)}{dt} \rangle. \qquad \square \tag{39}$$

BEMÆRKNING I.19. *Der gælder således, at matricen* $\omega(t) = \{\omega_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$ *er skævsymmetrisk.*

Vi kan fortolke dette relativt til en fast men vilkårlig basis $f = (f_1, \ldots, f_n) \in F(V)$ for V som følger:
Hvis $e = (e_1, \ldots, e_n) \in F(V)$, findes der konstanter O_{ij} således at

$$\forall i = 1, \ldots, n : e_i = \sum_{k=1}^{n} O_{ik} f_k, \tag{40}$$

og der gælder

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k,l=1}^{n} O_{ik} O_{jl} \langle f_k, f_l \rangle = \sum_{k=1}^{n} O_{ik} O_{jk}, \tag{41}$$

hvor vi i det sidste lighedstegn udnyttede, at $\langle f_k, f_l \rangle = \delta_{jk}$. Hvis vi lader O betegne matricen, hvis ij-te koefficient er O_{ij}, da gælder så i følge denne udregning, at $O^t O = I$ eller, ækvivalent, $OO^t = I$ (begge ligninger er ensbetydende med, at $O^{-1} = O^t$).

DEFINITION I.20. *En $n \times n$ matrix O, der opfylder ligningen $O^t O = I$, kaldes* ***orthogonal****. Videre sættes*

$$\boxed{O(n) = \{n \times n \ \textit{matricer}\ O \mid O^t O = I\}}\ , \tag{42}$$

og denne mængde kaldes den ***orthogonale gruppe****.*

BEMÆRKNING I.21. *Det er let at indse, at $O(n)$ virkelig* er *en gruppe. Endvidere gælder*

$$O \in O(n) \Leftrightarrow \forall x, y \in V : \langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle, \tag{43}$$

for sidstnævnte ligning kan jo skrives

$$\forall x, y \in V : \langle (O^t O - I)x, y \rangle = 0. \tag{44}$$

Observer endelig, at $F(V) = O(n)f$, og at der gælder: $O_1 f = O_2 f \Leftrightarrow O_1 = O_2$. $F(V)$ og $O(n)$ kan således identificeres som mængder.

Lad os betegne situationen i ligning (40) med $e = O * f$ (se i øvrigt Opgave 2.1). Hvis vi nu, hvor f stadig holdes fast, betragter en kurve $e(t)$ i $f(V)$, får vi således $e(t) = O(t) * f$, og $t \to O(t)$ bliver en differentiabel kurve i $O(n)$ (sidstnævnte opfattet som delmængde af $\mathbb{R}^{n^2}$). Således bliver $O'(t) = \{O'_{ij}(t)\}$.

Korollar I.22.

$$O'(t) = \omega(t) \cdot O(t) \quad \textit{(matrix multiplikation)}, \tag{45}$$

hvor ω har samme betydning som i Bemærkning I.19.

Bevis. Hvis vi indsætter (40) i (36) fås

$$e_i'(t) = \sum_{j,k=1}^{n} \omega_{ij}(t) O_{jk}(t) f_k, \tag{46}$$

hvorimod en direkte differentiation af (40) (med $e = e(t)$) giver

$$e_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} O_{ik}'(t) f_k. \tag{47}$$

En sammenligning af de to udtryk giver nu det ønskede. □

Ligning (45) er navnlig interessant, når kurven $t \to O(t)$ i $O(n)$ er defineret i en omegn af 0 og opfylder at $O(0) = I$. Dette kan f. eks. forekomme, hvis kurven $e(t) = O(t)f$ er defineret i en omegn af 0, og vi vælger $f = e(0)$. Vi opnår da straks følgende

Korollar I.23. *Hvis $u \to O(u)$ er en kurve i $O(n)$ med $O(0) = I$, da er $O'(0)$ skævsymmetrisk.*

Vi kan bevise dette på to måder:

BEVIS #1: Vi har jo, at

$$O'(0) = \omega(0) \cdot O(0) = \omega(0), \tag{48}$$

og vi har tidligere indset, at $\omega(u)$ er skævsymmetrisk for alle u. □

BEVIS #2: Da kurven forløber i $O(n)$ gælder for alle u:

$$O(u)^t O(u) = I, \tag{49}$$

og dermed, ved differentiation,

$$(O'(0))^t \cdot O(0) + O(0)^t \cdot O'(0) = 0, \tag{50}$$

hvorfra det ønskede direkte kan aflæses. □

For direkte at bevise, at der omvendt gælder, at der til enhver skævsymmetrisk matrix ω findes en kurve $O(t)$ i $O(n)$ med $O'(0) = \omega$, indfører vi først et nyt begreb:

DEFINITION I.24. *En differentiabel afbildning* $\mathbb{R} \ni t \to O(t) \in Gl(n,\mathbb{R}) = \{n \times n \text{ matricer } m \mid \det m \neq 0\}$ *kaldes en* ***1-parametergruppe*** *såfremt*

$$\boxed{\forall s, t \in \mathbb{R} : O(s+t) = O(s) \cdot O(t)\ .} \tag{51}$$

Hvis yderligere $\forall t \in \mathbb{R} : O(t) \in O(n)$, *da kaldes afbildningen en 1-parametergruppe i* $O(n)$.

Ved differentiation af (51) efter s fås, at

$$O'(t) = \omega \cdot O(t), \tag{52}$$

med $\omega = O'(0)$, hvilket i tilfældet, hvor $O(t)$ løber i $O(n)$, (naturligvis) er et specialtilfælde af (45), nemlig svarende til $t \to \omega(t)$ konstant. Med baggrund i (52) definerer vi nu

DEFINITION I.25. *Lad* m *være en* ***vilkårlig*** $n \times n$ *matrix. Da sættes*

$$\boxed{\exp(m) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{m^j}{j!}\ .} \tag{53}$$

Funktionen $m \to \exp(m)$ *kaldes* ***exponentialfunktionen*** *eller* ***exponentialafbildningen (for matricer)***, *og betegnes også somme tider* e^m.

BEMÆRKNING I.26. *Vi vil ikke her bevise, at summen i (53) konvergerer, og at funktionen* $m \to \exp(m)$ *er uniformt kontinuert (og* C^∞*) på kompakte mængder, men blot tage dette som fakta. Som exempel nævnes at i dimension 2 gælder*

$$m = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow exp(m) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Hvis vi begrænser os til matricer af formen $m = t \cdot \omega$ med ω skævsymmetrisk og t et reelt tal, kan man udnytte, at sådanne matricer kan diagonaliseres (over de komplekse tal) til forholdvis direkte at bevise, at $\exp(m)$ i (53) er konvergent (se Opgave 1.17).

LEMMA I.27. *Hvis* ω *er skævsymmetrisk, da er* $O_\omega : t \to \exp(t \cdot \omega)$ *en 1-parametergruppe i* $O(n)$, *og der gælder*

$$O'_\omega(t) = (\exp(t \cdot \omega))' = \omega \cdot (\exp(t \cdot \omega)) = \omega \cdot O_\omega(t). \tag{55}$$

Dermed kan enhver skævsymmetrisk matrix fås som den afledede af en kurve i $O(n)$ *gennem* I.

BEVIS. *Eftersom* $O_\omega(t)^t = (\exp(t \cdot \omega))^t = (\exp(t \cdot \omega^t)) = (\exp(-t \cdot \omega)) = O_\omega(-t) = O_\omega(t)^{-1}$, *følger det, at* $O_\omega(t) \in O(n)$. $\square$

BEMÆRKNING I.28. *Vi skal senere indse, at dette resultat sammen med Korollar* I.23 *betyder, at tangentrummet til $O(n)$ i punktet I er lig med mængden $o(n)$ af skævsymmetriske matricer;*

$$\boxed{o(n) = \{n \times n \ \mathit{matricer}\, \omega \mid \omega^t = -\omega\}\ .} \tag{56}$$

KAPITEL II

Differentiable mangfoldigheder

1. De første definitioner

Vi starter med den generelle definition:

DEFINITION II.1. *Lad M være et topologisk rum. Ved en* ***differentiabel struktur på*** **M** ***(af dimension*** **n***) forstås en familie $\mathcal{A} = \{(f_i, O_i)\}_{i\in I}$, hvor I er en indexmængde, så*

(1) *$\forall i \in I : O_i$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f_i(O_i)$ er en åben delmængde af M.*
(2) *$\forall i \in I : f_i$ er en homeomorfi af O_i på $f_i(O_i)$ (sidstnævnte udstyret med sportopologien fra M).*
(3) *$M = \cup_{i\in I} f_i(O_i)$.*
(4) *$\forall i, j \in I$ er $f_i^{-1} \circ f_j : f_j^{-1}(f_i(O_i) \cap f_j(O_j)) \to f_i^{-1}(f_i(O_i) \cap f_j(O_j))$ en C^∞-afbildning.*

BEMÆRKNING II.2. *Egentligt er det en "differentiabel struktur af klasse C^∞", vi herved har defineret. Man kan på tilsvarende vis definere strukturer af klasse C^k for alle $k = 0, 1, \ldots,$ men vi vil her kun interessere os for tilfældet C^∞. I øvrigt vil vi ofte udelade referencen til dimensionen og blot kalde M for en differentiabel mangfoldighed.*

DEFINITION II.3. *Hvis M er et anden-tælleligt Hausdorff topologisk rum med en differentiabel struktur $\mathcal{A} = \{(f_i, O_i)\}_{i\in I}$ (af dimension n), da kaldes M en (n-dimensional) differentiabel mangfoldighed. Endvidere kaldes $\mathcal{A}$ et* ***atlas*** *og de enkelte elementer (f_i, O_i) kaldes for* ***kort****. Man omtaler også ofte et par (f_i, O_i) som "lokale koordinater på M", eller "en lokal parametrisering af M" og kalder $f_i(O_i)$ en koordinatomegn. Endelig omtales tallet n i definitionen som M's dimension. Vi vil til tider bruge den meget gængse notation M^n for en n-dimensional mangfoldighed M.*

BEMÆRKNING II.4. *Mængden af atlas på M har en naturlig partiel ordning: $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Specielt vil ethvert atlas være indeholdt i et maksimalt atlas, og man kunne således allerede i Definition* II.1 *have krævet, at $\mathcal{A}$ skulle være maksimal, hvad da også mange føler, er det rigtige. Vi mener dog, at dette er et unødvendigt krav.*

Vi vil i det følgende hente det meste af vores intuition fra en speciel type mangfoldigheder, som vi nu definerer:

DEFINITION II.5. *Lad V være et endeligt-dimensionalt vektorrum af dimension N. En ikke-tom delmængde M af V kaldes en* ***n-dimensional indlejret delmangfoldighed*** *såfremt M, når den udstyres med sportopologien, opfylder en af følgende ækvivalente betingelser:*

(1) *Til hvert $m_0 \in M$ findes en omegn U (som altid antaget åben) af m_0 i V og en afbildning $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{N-n})$ så F'_m er surjektiv for alle $m \in M \cap U$ og $M \cap U = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$.*
(2) *Til hvert $m_0 \in M$ findes en omegn U af m_0 i V, en omegn O af et punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, samt en afbildning $f \in C^\infty(O, V)$ så:*
- *$f(x_0) = m_0$.*
- *f'_x er injektiv for alle $x \in O$.*
- *f er en homeomorfi af O på $M \cap U$.*

Vi vil ofte blot omtale sådanne mangfoldigheder som delmangfoldigheder, og et hvert par (f, O), der for et eller andet $x_0 \in \mathbb{R}^n$ opfylder de tre punkter i (2), kalder vi for et ***kort på delmangfoldigheden****.*

I definitionen er jo indbygget en påstand, nemlig, at de to betingelser er ækvivalente. Vi viser dette nedenfor, men gør dog først et par generelle bemærkninger:

Vi arbejder i definitionen ovenfor med et vektorrum V og vi taler om differentiable afbildninger og differentialer på V. Dette betyder "blot" at vi i en given basis $\{e_i\}_{i=1}^N$ kan identificere V med $\mathbb{R}^N$ via

$$\mathbb{R}^N \ni (x_1, \ldots, x_N) \leftrightarrow x = \sum_{i=1}^N x_i e_i. \tag{57}$$

Via dette bliver en afbildning på V til en afbildning på $\mathbb{R}^N$ (and vice versa). Differentiabilitetsegenskaber viser sig at være uafhængige af den valgte basis.

Ved af arbejde mere abstrakt med vekturrum i stedet for $\mathbb{R}^N$ opnår man bl.a. den fordel, at man kan vente med at indføre en basis til et belejligt tidspunkt.

SÆTNING II.6. *De to betingelser i Definition* II.5 *er ækvivalente.*

Bevis. (1) $\Rightarrow$ (2): Lad os kigge på et punkt $m_0 \in M$. Vi ved da, at differentialet $F'(m_0)$ er en *surjektiv* lineær afbildning fra V til $\mathbb{R}^{N-n}$. Kernen $K(m_0)$ (også kaldet nulrummet) for $F'(m_0)$ er da et underrum af dimension n. Vælg nu en "snedig" basis $\{e_i\}_{i=1}^N$ for vektorrummet V ved at kræve, at $\{e_i\}_{i=1}^n$ skal være en basis for $K(m_0)$. (Overvej, at man kan gøre dette, og at det ikke påvirker antagelserne om F.) I denne basis får $F'(m_0)$ da udseendet

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_N} \end{pmatrix}, \tag{58}$$

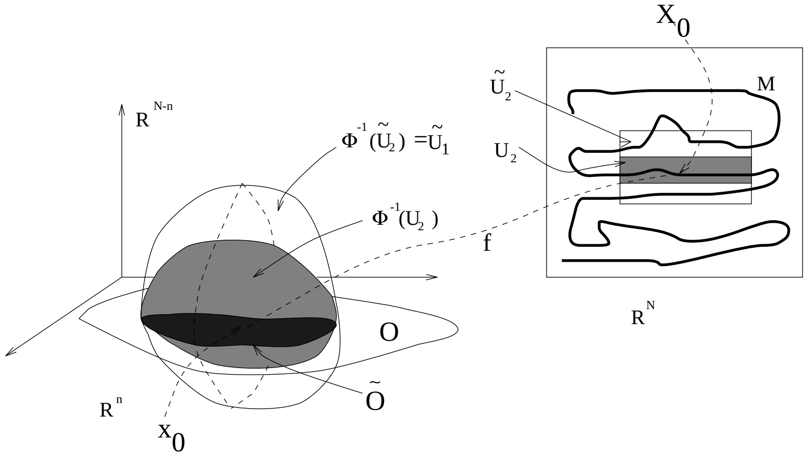
evalueret i m_0. Lad G betegne projektionen ned på $K(m_0)$. Denne har følgende differential i m_0 (og i alle andre punkter):

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

hvor 1-tallerne skal antyde, at de første n søjler svarer til den identiske afbildning (enhedsmatricen). Betragt afbildningen (G, F) defineret i en åben omegn af m_0 i V. (G, F) har nu differentialet

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{N-n}}{\partial x_N} \end{pmatrix} \tag{60}$$

i m_0, og dette har klart en determinant, der er forskellig fra 0. Dermed findes, da determinant-afbildningen såvel som F' og G' er kontinuerte, en hel omegn om m_0, hvor differentialet af (G, F) har determinant forskellig fra 0. Der findes da i fgl. sætningen om den inverse funktion en omegn $\tilde{U}$ om m_0 i V og en omegn W om $(x_0, 0) = (G(m_0), F(m_0))$ således at (G, F) afbilder $\tilde{U}$ bijektivt på W. Lad Φ betegne den inverse funktion og lad specielt $f(x) = \Phi(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$ betegne restriktionen af Φ til den åbne delmængde $O = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x, 0) \in W\}$. På grund af F's egenskaber kan vi antage, at $\tilde{U} \cap M = \{X \in \tilde{U} \mid F(X) = 0\}$. Det følger heraf, at $(G, F)(\tilde{U} \cap M) = O \times \{0\}$, og f afbilder O bijektivt på $\tilde{U} \cap M$. Skriv nu $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$ og observer, at vi dels har, at G er projektionen



på de første n koordinater, dels per definition at $G(f(x)) = x$. Af dette følger, at

$$(f_1(x), \ldots, f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots, f_N(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f_{n+1}(x), \ldots, f_N(x)) \tag{61}$$

og $\tilde{U} \cap M$ er hermed en (generaliseret) graf for funktionen $x \to (f_{n+1}(x), \ldots, f_N(x))$. Det følger let fra dette, at f er en homeomorfi med f' injektiv.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vi er givet et kort (f, O), et punkt $x_0 \in O$ så $f(x_0) = m_0 \in M$ samt en åben delmængde U_1 af V, som opfylder, at $f(O) = M \cap U_1$. Vi skal finde et par (F, U_2), der opfylder (1).

Da vi ved, at $f'(x_0)$ er injektiv, vælger vi en (orthogonal) basis $\{e_i\}_{i=1}^N$ for V, således, at $\{e_i\}_{i=1}^n$ er en basis for $f'(x_0)(\mathbb{R}^n)$. Samtidig betragter vi funktionen $g : \mathbb{R}^{N-n} \to V$ givet ved

$$g(y_1, \ldots, y_{N-n}) = \sum_{i=1}^{N-n} y_i e_{n+i} \leftrightarrow (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, y_1, \ldots, y_{N-n}). \tag{62}$$

Endelig betragter vi funktionen

$$O \times \mathbb{R}^{N-n} \ni (x, y) \to \Phi(x, y) = f(x) + g(y) \in V. \tag{63}$$

Denne funktion er per konstruktion differentiabel og opfylder, at det $\Phi'(x_0, 0) \neq 0$ (samme type argument som ovenfor). Ifølge sætningen om den inverse funktion findes da en åben omegn $\tilde{U}_2$ om m_0 i V og en åben omegn $\tilde{U}_1$ om $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^N$, således at Φ er en diffeomorfi af $\tilde{U}_1$ på $\tilde{U}_2$. (Når vi her og andre steder skriver punkter i $\mathbb{R}^N$ som par, er det naturligvis via opsplitningen $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$.) Lad nu $\tilde{O} = \{x \in O \mid (x, 0) \in \tilde{U}_1\}$. Dette er klart en åben delmængde af O og $x_0 \in \tilde{O}$. Da endvidere f er en homeomorfi, findes en åben delmængde U_2, som vi uden indskrænkning kan antage opfylder $U_2 \subseteq \tilde{U}_2$ (hvorfor?), således at $f(\tilde{O}) = M \cap U_2$.

Endvidere gælder, per konstruktion, at

$$\begin{aligned} \tilde{O} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,0) \in \Phi^{-1}(U_2)\}, \text{ og} \\ \{(x,0) \mid x \in \tilde{O}\} &= \Phi^{-1}(U_2 \cap M). \end{aligned} \tag{64}$$

Vi betragter herefter kun restriktionen af Φ^{-1} til U_2 og skriver her

$$\Phi^{-1} = (G, F). \tag{65}$$

Det er nu let at indse, at (F, U_2) har de ønskede egenskaber. Bemærk også, at

$$\forall x \in \tilde{O} : G(f(x)) = x, \tag{66}$$

altså at f^{-1} fremkommer som restriktionen til $f(\tilde{O})$ af den differentiable afbildning G. $\square$

Som det fremgik hen mod slutningen af beviset for (1) $\Rightarrow$ (2) gælder

KOROLLAR II.7. *En n-dimensional indlejret delmangfoldighed M er lokalt en graf, d.v.s. for ethvert $m \in M$ findes en åben omegn U af m i V, en åben delmængde O af $\mathbb{R}^n$ samt $N - n$ funktioner $f_{n+1}, \ldots, f_N$, således at man i en passende basis for V har*

$$M \cap U = \{(x_1, \ldots, x_n, f_{n+1}(x), \ldots, f_N(x)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in O\}. \tag{67}$$

Udfra dette er det er ikke svært at se, at følgende også gælder (vi udelader detaljerne):

KOROLLAR II.8 (DEN IMPLICITTE FUNKTIONSSÆTNING). *Lad $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ være åben og lad $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{N-n})$. Skriv koordinaterne på $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ som $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{N-n})$. Antag, at i punktet $m_0 = (x_0, y_0)$ gælder*

$$F(m_0) = F(x_0, y_0) = 0 \tag{68}$$

og at matricen

$$\left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\}_{i,j=1}^{N-n} \tag{69}$$

er ikke-singulær. Da findes en omegn O om x_0 i $\mathbb{R}^n$ og en omegn W om y_0 i $\mathbb{R}^{N-n}$ så $O \times W \subset U$, og der findes en C^∞-afbildning f, således at

$$\forall (x, y) \in O \times W : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x). \tag{70}$$

En anden interessant observation, som bl.a. forklarer, hvorfor vi tillader os at tale om del*mangfoldigheder* er følgende:

PROPOSITION II.9. *En (n-dimensional) indlejret delmangfoldighed M er en (n-dimensional) differentiabel mangfoldighed.*

BEVIS. Vi skal med andre ord vise, at hvis M opfylder Definition II.5, da opfylder M også Definition II.1. Lad os derfor antage, at (2) i Definition II.5 er opfyldt. Vi har da for hvert $m \in M$ et par (f_m, O_m), hvor bl.a. O_m er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, $f_m \in C^\infty(O_m, V)$ og $m \in f_m(O_m)$. Vi hævder, at familien

$$\mathcal{A} = \{(f_m, O_m) \mid m \in M\} \tag{71}$$

opfylder Definition II.1, altså, at $\mathcal{A}$ er et atlas. Det er nu klart, at vi kun behøver at vise (4) i Definition II.1. Men dette følger direkte af den bemærkning i de sidste linier i beviset for Sætning II.6, der godtgør, at ethvert f_m^{-1} fremkommer som restriktion af en differentiabel afbildning. At M endelig er et anden-tælleligt Hausdorff topologisk rum følger, da M har sportopologien af en topologi, der har disse egenskaber (overvej). $\square$

BEMÆRKNING II.10. *Det kan meget vel forekomme, at $(f_{m_1}, O_{m_1}) = (f_{m_2}, O_{m_2})$ for to forskellige elementer $m_1, m_2 \in M$. I sådanne tilfælde kan vi nøjes med at tælle sættet med en gang. Observer også, at hvad vi i Definition* II.5 *kaldte for kort på delmangfoldigheden i følge (*71*) faktisk* ***er** kort.* ***Vi vil i øvrigt altid, når vi har med kort på delmangfoldigheder at gøre med mindre andet udtrykkeligt antages benytte os af den specielle slags fra (71).***

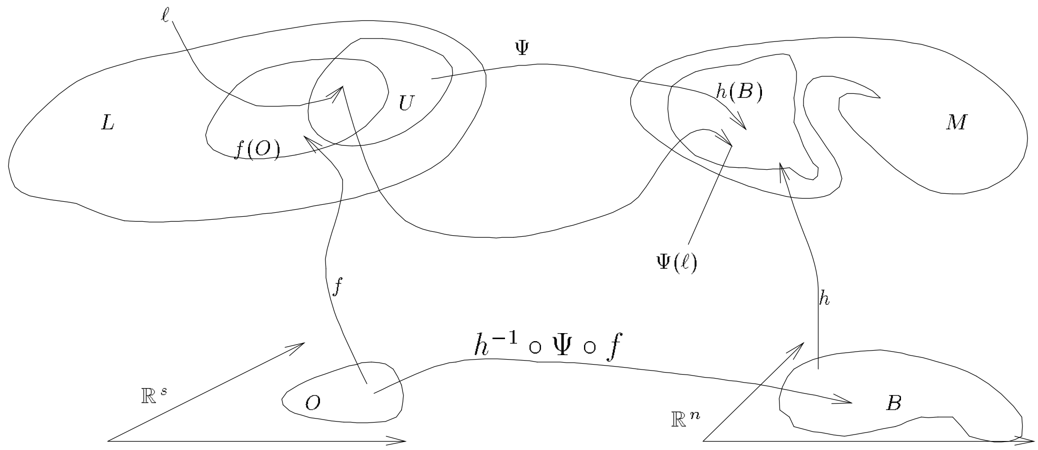
Vi skal i det følgende generalisere en del begreber bl.a. fra differential- og integralregningen til mangfoldigheder. Den mest brugte metode er først at benytte lokale koordinater (f, O) for derefter at vise, at man får "det samme" for forskellige valg af sådanne. Man siger så, at begrebet er "uafhængigt af valg af lokale koordinater". De følgende definitioner er gode eksempler på dette:

DEFINITION II.11. *Lad M være en differentiabel mangfoldighed og lad $m \in M$. En funktion ϕ defineret i en omegn af m siges at være uendeligt ofte differentiabel i m, såfremt der findes et kort (f, O) med $m \in f(O)$ således, at $\phi \circ f$ er uendeligt ofte differentiabel i en omegn af $f^{-1}(m)$.*

Hvis $\tilde{U}$ er en åben delmængde af M, og hvis en funktion $\phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ er uendeligt ofte differentiabel i ethvert punkt i $\tilde{U}$, da siges ϕ at være uendeligt ofte differentiabel på $\tilde{U}$. Mængden af sådanne funktioner betegnes $C^\infty(\tilde{U})$. Specielt kan $\tilde{U}$ jo være M.

DEFINITION II.12. *Lad L og M være differentiable mangfoldigheder (ikke nødvendigvis af samme dimension) og lad U være en åben delmængde af L. En afbildning $\Psi : U \to M$ siges at være af klasse C^∞ i et punkt $\ell \in U$, såfremt der findes et lokalt koordinatsystem (f, O) på L med $\ell \in f(O)$, og et lokalt koordinatsystem (h, B) på M med $\Psi(\ell) \in h(B)$, således at afbildningen*

$$\tilde{\Psi} : f^{-1}\left(U \cap f(O) \cap \psi^{-1}(h(B))\right) \overset{h^{-1}\circ\Psi\circ f}{\rightarrow} B \tag{72}$$



FIGUR II.2. Definition af differentiabel afbildning

er defineret og af klasse C^∞ i en omegn af $f^{-1}(\ell)$. Hvis Ψ er af klasse C^∞ for alle $\ell \in U$, siges Ψ at være en C^∞-afbildning på U. Mængden af sådanne betegnes $C^\infty(U, M)$, og elementerne i denne mængde omtales som de differentiable afbildninger fra U til M.

Det er nu vigtigt at eftervise, at begge definitioner er uafhængige af valg af lokale parametriseringer. Vi nøjes med at gøre dette for Definition II.12:

Lad os da antage, at $\tilde{\Psi} = h^{-1} \circ \Psi \circ f$ er uendeligt ofte differentiabel i $\ell \in U \subseteq L$. Antag, at (f_1, O_1) er et andet kort på L med $\ell \in f_1(O_1)$ og tilsvarende, at (h_1, B_1) er et andet kort på M med $\Psi(\ell) \in h_1(B_1)$. Da gælder, at

$$\tilde{\Psi}_1 = h_1^{-1} \circ \Psi \circ f_1 = (h_1^{-1} \circ h) \circ (h^{-1} \circ \Psi \circ f) \circ (f^{-1} \circ f_1) \tag{73}$$

$$= (h_1^{-1} \circ h) \circ \tilde{\Psi} \circ (f^{-1} \circ f_1) \tag{74}$$

i en omegn af ℓ, og da både $h_1^{-1} \circ h$ og $f^{-1} \circ f_1$ per antagelse er C^∞, er $\tilde{\Psi}_1$ præcist lige så mange gange differentiabel som $\tilde{\Psi}$.

Følgende definition er egentligt et specialtilfælde af Definition II.12, men vi medtager den for klarhedens skyld.

DEFINITION II.13. *En **kurve** α i en differentiabel mangfoldighed m er en afbildning af en åben delmængde U af $\mathbb{R}$ ind i M. Kurven α er differentiabel i et punkt $t \in U$, såfremt der findes et $\delta > 0$ og et kort (f, O) på M med $\alpha(]t - \delta, t + \delta[) \subset f(O)$ og således at $]t - \delta, t + \delta[\ni \tilde{t} \to f^{-1}(\alpha(\tilde{t}))$ er differentiabel i t. Kurven $x(t) = f^{-1}(\alpha(t))$ ($\Leftrightarrow \alpha(t) = f(x(t))$) kaldes kurvens koordinatudtryk med hensyn til kortet (f, O). Der gælder med andre ord, at α er differentiabel, hvis og kun hvis alle dens koordinatudtryk er differentiable.*

Hvis vi anvender Definitionerne II.11, II.12 og II.13 på indlejrede delmangfoldigheder, er der nu en teoretisk mulighed for, at vore nye definitioner ikke stemmer overens med, hvad vores intuition siger os, at differentiabilitet skal være. Det er f. eks. ikke klart, at en differentiabel kurve α i vektorrummet V, der helt forløber indenfor en indlejret delmangfoldighed m af V, er en differentiabel kurve i henhold til Definition II.13. En nærmere undersøgelse viser dog, at alt alligevel er i den skønneste orden. Til bl.a. at afklare sådanne spørgsmål er følgende lemma meget nyttig.

Lemma II.14. *Lad M_1 være en indlejret delmangfoldighed af V_1 og M_2 en indlejret delmangfoldighed af V_2. Lad U være en åben delmængde af V_1 med $M_1 \subseteq U$, lad $F : U \to V_2$ være en differentiabel (i den sædvanlige forstand) afbildning og antag, at $F(M_1) \subseteq M_2$. Da er restriktionen af F til M_1 en afbildning fra M_1 til M_2, der er differentiabel med hensyn til Definition* II.12.

Bevis. Detaljerne overlades til læseren. Man kan f. eks. udnytte, at en delmangfoldighed lokalt kan skrives som en graf (Korollar II.7). Det er vigtigt, at man gør sig klart, at der her virkeligt er noget, der skal bevises. □

2. Tangentrummet, 1.ste udgave

Vi lægger ud med at indføre en del begreber for indlejrede delmangfoldigheder, så i afsnit 2 betegner M altid en sådan, af dimension n, indlejret i et fast vektorrum V.

Definition II.15. *Lad $m \in M$. Tangentrummet $T_m(M)$ til M i m defineres som*

(75)
$$\boxed{\begin{gathered} T_m(M) = \\ \{v \in V \mid \exists \text{ kurve } \alpha : I \xrightarrow{\alpha} M \text{ og et } t_0 \in I \text{ så } \alpha(t_0) = m \text{ og } \alpha'(t_0) = v\}\ , \end{gathered}}$$

hvor I betegner et åbent interval (som afhænger af α) i $\mathbb{R}$.

Hvis vi har lokale koordinater (f, O) som i Definition II.5(2) på M får vi for hvert $m \in f(O)$ en naturlig basis for $T_m(M)$:

Sætning II.16. *$T_{m_0}(M)$ er et vektorrum af dimension n. Hvis (f, O) er et kort på M med $f(x_0) = m_0$ for et $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \in O$, da gælder*

$$\boxed{\{f_{x_i}(x_0)\}_{i=1}^n \text{ er en basis for } T_{m_0}(M)\ ,} \tag{76}$$

hvor, for alle $i = 1, \ldots, n$, $f_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f$.

Bevis. Lad (f, O) være det givne kort. Bemærk først at kravet i Definition II.5, at f'_{x_0} skal være injektiv, netop betyder, at f_{x_i}-erne er lineært uafhængige. Til en kurve α i m med $\alpha(t_0) = m_0$ svarer en kurve $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ i O, defineret i et passende interval $i =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, så $\forall t \in i : \alpha(t) = f(x(t))$. Det følger da af kædereglen for differentiation at

$$\alpha'(t_0) = x'_1(t_0) f_{x_1}(x_0) + \cdots + x'_n(t_0) f_{x_n}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} x'_i(t_0) f_{x_i}(x_0). \tag{77}$$

Det følger således, at f_{x_i}-erne udspænder et vektorrum, der indeholder $T_{m_0}(M)$. Betragt nu for en vilkårlig vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ kurven α_v defineret ved

$$\alpha_v(t) = f(x_0 + t \cdot v) = f(x_{0,1} + t \cdot v_1, \ldots, x_{0,n} + t \cdot v_n), \tag{78}$$

defineret i et passende interval omkring 0. Dette er klart en differentiabel kurve i M med $\alpha_v(0) = m_0$. Der gælder derfor, per definition, at $\alpha'_v(0) = v_1 f_{x_1} + \cdots + v_n f_{x_n} \in T_{m_0}(M)$. □

Definition II.17. *Kurverne* $\alpha_{e_i}, i = 1, \ldots, n$ *kaldes koordinatkurverne.*

Følgende er en nyttig observation

Lemma II.18. *Hvis F er en funktion, der opfylder (1) i Definition* II.5*, da gælder*

$$\boxed{T_{m_0}(M) = \ker F'_{m_0}\ .} \tag{79}$$

Bevis. Hvis α er en kurve i $M \cap U$ med $\alpha(t_0) = m_0$ gælder jo $F(\alpha(t)) = 0$ for alle t i definitionsområdet for α. Det følger da af kædereglen, at

$$F'_{m_0}(\alpha'(t_0)) = 0. \tag{80}$$

Af dette fås, at $T_{m_0}(M) \subseteq \ker F'_{m_0}$. Men F'_{m_0} er en surjektiv afbildning fra $\mathbb{R}^N$ til $\mathbb{R}^{N-n}$, så $\dim(\ker F'_{m_0}) = n$. □

Bemærkning II.19. *Vores intuitive fornemmelse er jo, at tangentplanen til M i m skal være en plan, der netop rører ved M i m. Med vores definition af tangentrummet har vi opnået, at dette altid bliver et vektorrum, og det er yderst nyttigt. Derimod vil den kun "tangere" M i m_0 såfremt nulpunktet i V (nulvektoren) falder i m_0. Man kan ofte tillade sig at flytte nulpunktet hen i m_0 uden at ændre væsentligt på en given situation, men helt generelt gælder, at vi skelner mellem tangentplanen og tangentrummet og*

$$\boxed{\textit{tangentplanen i } m = m + T_m(M)\ .} \tag{81}$$

Tangentbundtet $T(M)$ defineres som følgende $2n$-dimensionale delmangfoldighed af $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$:

$$T(M) = \{(m, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid m \in M \text{ og } v \in T_m(M)\}. \tag{82}$$

Det følger forholdsvis direkte fra definitionerne, at $T(M)$ virkelig *er* en delmangfoldighed. Faktisk gælder (overvej), at hvis (f, O) er et kort på M, da er $(\tilde{f}, \tilde{O})$, hvor $\tilde{f}(x,t) = (f(x), f'(x)(t))$ for $(x,t) \in \tilde{O} = O \times \mathbb{R}^n$ et kort på $T(M)$. Ligeledes kan et par (F, U) som i betingelse (1) for M gøres til et tilsvarende sæt $(\tilde{F}, \tilde{U})$ for $T(M)$ ved forskriften

$$\tilde{F}(u_1, u_2) = (F(u_1), F'(u_1)(u_2)) \text{ for } (u_1, u_2) \in \tilde{U} = U \times \mathbb{R}^N. \tag{83}$$

Normalbundtet $\mathcal{N}(M)$ defineres som følgende delmangfoldighed af $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$:

$$\mathcal{N}(M) = \{(m, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid m \in M \text{ og } v \in T_m(M)^-\}, \tag{84}$$

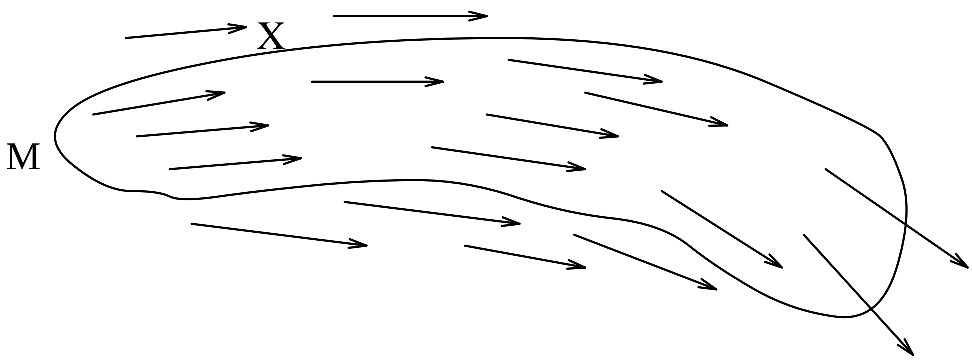
hvor $T_m(M)^- = N_m(M)$ kaldes normalplanen til M i m. Dimensionen af normalbundtet er N.

Differentialet af en afbildning. Lad ψ være en differentiabel afbildning fra en delmangfoldighed M_1 af $\mathbb{R}^{N_1}$ til en delmangfoldighed M_2 af $\mathbb{R}^{N_2}$. Hvis $m \in M_1$, inducerer ψ en afbildning $\psi'(m) = \psi'_m$, kaldet differentialet af ψ i m, fra $T_m(M_1)$ til $T_{\psi(m)}(M_2)$ ved følgende opskrift:

$$\boxed{\psi'_m(v) = \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\psi(\alpha(t)))\right)(t_0) = (\psi \circ \alpha)'(t_0)\ ,} \tag{85}$$

hvor $t \to \alpha(t)$ er den kurve, der repræsenterer v som i Definition II.15. Man indser (check!), at ψ'_x er en veldefineret lineær afbildning mellem de respektive tangentrum. Se i øvrigt Definition II.49 og følgende sider. I det specielle tilfælde hvor $M_2 = \mathbb{R}$ (og ψ altså er en funktion) bruges betegnelsen $\psi'_m = d\psi_m$ (den bruges også ofte i den generelle situation). I dette tilfælde bliver $d\psi_m$ et *lineært funktional* (se i øvrigt Definition B.1) på $T_m(M)$.

Kotangentrummet=1-formerne. De lineære funktionaler på $T_m(M)$ kaldes *1-formerne* på M i m eller *ko-tangentvektorerne* til M i m. Vektorrummet de udspænder betegnes $T^*_m(M)$.



3. Vektorfelter, 1.ste udgave

DEFINITION II.20 (INTUITIV DEFINITION). *Lad U_1 være en åben delmængde af et endelig-dimensionalt vektorrum V_1 med* $\dim(V_1) = N_1$. *Et vektorfelt X på V_1 er da simpelthen en afbildning $X : U_1 \to V_1$ (altid antaget C^∞). Hvis M er en delmangfoldighed af V_1 og $M \subseteq U_1$ siges restriktionen af X til M at være et vektorfelt på M, såfremt $\forall m \in M : X(m) \in T_m(M)$ ($X(s)$* tangerer *M* overalt*).*

Da $X(u)$ for et givet vektorfelt X er en vektor i V_1 for alle $u \in U_1$, kan man antyde vektorfeltet ved af afsætte vektoren $X(u)$ med fodpunkt i u. Man kan f.eks. forestille sig, at punkterne i U_1 af en eller anden grund bevæger sig rundt og at $X(m)$ angiver hastigheden i punktet m. Bevægelsen af et punkt vil da være beskrevet ved en kurve $u(t)$, der skal opfylde: $\forall t : u'(t) = X(u(t))$. Sådanne kurver kaldes *baner* for X.

Vi kan også benytte tangentbundtet til at give en definition af vektorfelter, der ikke direkte refererer til vektorrummet V_1:

DEFINITION II.21. *Et (glat) vektorfelt på en delmangfoldighed M er en (C^∞) afbildning $M \to T(M)$, $m \to (\psi(m), X(m))$ så $\forall m \in M : \psi(m) = m$. Afbildningen har m.a.o. udseendet*

$$m \to (m, X(m)). \tag{86}$$

Generelt kaldes en sådan afbildning for et *snit* i tangentbundtet og meget ofte vil vi bruge betegnelsen X_m for $X(m)$ og, og vi vil ligeledes ofte blot angive et vektorfelt ved en tilordning $m \to X_m$. Vi vender tilbage til sådanne afbildninger senere. Følgende nyttige observation skal dog gøres:

LEMMA II.22. *Lad $m \to (m, X(m)) \equiv X_m$ være et vektorfelt på en delmangfoldighed (Definition* II.21*). Lad (f, O) være lokale koordinater. Da findes i følge Sætning* II.16 *entydigt bestemte funktioner $a_1, \ldots, a_n$ på O således, at*

$$\boxed{\forall m = f(x) \in f(O) : X_m = \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x) f_{x_i}(x)\ .} \tag{87}$$

Vektorfeltet X er C^∞ hvis og kun hvis funktionerne $a_1, \dots, a_n$ er C^∞ for samtlige parametriseringer (f, O) i det givne atlas.

Bevis. Dette er næsten definitionen af at være C^∞. Bruges kortet $\tilde{f}(x,t) = (f(x), f'(x)(t))$ (se side 22) får vektorfeltet følgende udseende i disse lokale koordinater (overvej dette):

$$(x_1, \dots, x_n) \to ((x_1, \dots, x_n), (a_1(x), \dots, a_n(x))). \qquad \square$$

Bemærkning II.23. *Hvis $\tilde{X}$ er et vektorfelt på en koordinatomegn $f(O)$ på en delmangfoldighed som i Definition* II.21 *fås via (87) et vektorfelt $X(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ på O som i Definition* II.20 *og vice versa.*

Vi benytter lejligheden til at definere, for delmangfoldigheder, begrebet **et vektorfelt langs en kurve**:

Definition II.24. *Lad $\mathbb{R} \supseteq I \xrightarrow{\alpha} M$ være en kurve på en delmangfoldighed. Et vektorfelt v langs α er da en afbildning $v : I \to T(M)$, der opfylder: $\forall t \in I$: $v(t) = (\alpha(t), \tilde{v}(t))$, hvor $\tilde{v}(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$.*

Lad os nu for en tid glemme delmangfoldigheder og blot antage, at U_1 er en åben delmængde af V_1, og at X er et vektorfelt på U_1.

Givet et sådant vektorfelt X og et punkt $u_0 \in U_1$ kan vi definere en afbildning $X_{u_0} : C^\infty(U_1) \to \mathbb{R}$ ved opskriften

$$\boxed{C^\infty(U_1) \ni \psi \to X_{u_0}(\psi) \overset{\text{Def.}}{=} \left(\tfrac{d}{dt}\psi(u_0 + t \cdot X(u_0))\right)_{t=0} .} \tag{88}$$

$X_{u_0}(\psi)$ er med andre ord den retningsafledede af ψ i retningen $X(u_0)$. Endvidere kan vi definere en afbildning $X : C^\infty(U_1) \to C^\infty(U_1)$ ved

$$\forall u \in U_1 : (X(\psi))(u) \overset{\text{Def.}}{=} X_u(\psi). \tag{89}$$

Det kan måske synes uheldigt, at vi også benytter symbolet X_{u_0} til dette formål, men det er der en grund til (se senere).

Exempel II.25. *Antag, at U_1 er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ og at punktet $u_0 = (3,5)$ ligger i U_1. Antag yderligere, at vi er givet et vektorfelt X på U_1 således, at $X(u_0) = (17, -6)$. Da bliver, med ψ en passende pæn funktion,*

$$\begin{aligned} X_{u_0}(\psi) &= \frac{d}{dt}(\psi(3 + 17 \cdot t, 5 - 6 \cdot t))_{t=0} \\ &= \left(17\frac{\partial \psi}{\partial x_1} - 6\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right)(3,5). \end{aligned} \tag{90}$$

Antag, at vi i et koordinatsystem for V_1 har vektorfeltet X givet ved $X(u) = (a_1(u), \dots, a_{N_1}(u))$.

LEMMA II.26. *Lad u være et fast, men vilkårligt, punkt i U_1. Der gælder*

$$i) \quad \forall\psi, \phi \in C^\infty(U_1), \forall\lambda \in \mathbb{R} : X_u(\psi + \lambda \cdot \phi) = X_u(\psi) + \lambda \cdot X_u(\phi).$$

$$ii) \quad \forall\psi, \phi \in C^\infty(U_1) : X_u(\psi \cdot \phi) = X_u(\psi) \cdot \phi(u) + \psi(u) \cdot (X_u\phi).$$

$$iii) \quad \forall\psi \in C^\infty(U_1) : X_u(\psi) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} a_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)(u).$$

Endvidere gælder, som identiteter i $C^\infty(U_1)$,

$$iv) \quad \forall\psi, \phi \in C^\infty(U_1), \forall\lambda \in \mathbb{R} : X(\psi + \lambda \cdot \phi) = X(\psi) + \lambda \cdot X(\phi).$$

$$v) \quad \forall\psi, \phi \in C^\infty(U_1) : X(\psi \cdot \phi) = X(\psi) \cdot \phi + \psi \cdot (X\phi).$$

BEVIS. De første to formler følger, fordi almindelig differentiation efter en enkelt variabel, t, opfylder linearitet og produktreglen, og X_u svarer jo netop i henhold til (88) til differentiation efter t (i en bestemt retning). Formlerne iv) og v) er blot omformuleringer af i) og ii), og endelig følger iii) af kædereglen. □

DEFINITION II.27. *For fastholdt $u \in U_1$ kaldes en afbildning $\delta_u : C^\infty(U_1) \to \mathbb{R}$, der opfylder i) og ii) i Lemma* II.26*, en* ***lineær derivation*** *af $C^\infty(U_1)$* ***i*** *u.*

DEFINITION II.28. *En afbildning $\delta : C^\infty(U_1) \to C^\infty(U_1)$, der opfylder iv) og v) i Lemma* II.26*, kaldes en* ***lineær derivation*** *af $C^\infty(U_1)$.*

Formel iii) viser, at vektorfeltet X svarer til en homogen første-ordens differentialoperator, og da omvendt enhver homogen første-ordens differentialoperator har et udseende som i iii), kan vi tilordne et vektorfelt til en sådan udfra koefficientfunktionerne $a_1, \dots, a_{N_1}$. Videre viser Lemma II.26 at et vektorfelt på U_1 (i et punkt u) giver anledning til en derivation af $C^\infty(U_1)$ (i et punkt u). Ifølge det kommende Lemma II.29 samt Korollar II.30 kan vi endvidere gå fra derivationer (i et punk) til første-ordens homogene differentialoperatorer (i et punkt) og dermed, ifølge det foregående, til et vektorfelt. Der gælder med andre ord at disse tre typer objekter kan identificeres. Det vi så ofte også gøre.

LEMMA II.29. *Lad $\delta_{\overline{x}}$ være en lineær derivation af $C^\infty(U_1)$ i $\overline{x}$. Da findes konstanter $b_1, \dots, b_{N_1} \in \mathbb{R}$ så*

$$\forall\psi \in C^\infty(U_1) : \delta_{\overline{x}}(\psi) = (\sum_{i=1}^{N_1} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\psi)(\overline{x}). \tag{91}$$

BEVIS. Vi gør først en simpel, men alligevel alt afgørende observation:

- Hvis $\mathbf{1} \in C^\infty(U_1)$ betegner funktionen, der er konstant lig 1, da gælder:

  $$\delta_{\overline{x}}(\mathbf{1}) = \delta_{\overline{x}}(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\overline{x})\cdot\delta_{\overline{x}}(\mathbf{1}) + \delta_{\overline{x}}(\mathbf{1})\cdot\mathbf{1}(\overline{x}) = 2\cdot\delta_{\overline{x}}(\mathbf{1}), \tag{92}$$

  da $\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}$. Altså er $\delta_{\overline{x}}(\mathbf{1}) = 0$.

Det følger dernæst af lineariteten, at $\delta_{\overline{x}}$ er nul på alle konstante funktioner i $C^\infty(U_1)$. For at tage næste skridt benytter vi følgende kendsgerning, der følger let ved Taylorudvikling:

- Lad $\psi \in C^\infty(U_1)$. Lad $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{N_1})$. Da findes C^∞-funktioner $\psi_1, \ldots, \psi_{N_1}$ på U_1 således, at

  $$\forall x \in U_1 : \psi(x) = \psi(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{N_1}(x_i - \overline{x}_i)\cdot\psi_i(x). \tag{93}$$

Vi kan her opfatte $\psi(\overline{x})$ som en konstant funktion på U_1, så $\delta_{\overline{x}}((\psi(\overline{x})) = 0$. Da vi ligeledes kan opfatte hver af funktionerne $(x_i - \overline{x}_i)$ som C^∞-funktioner $x \to (x_i - \overline{x}_i)$ på U_1, har $\delta_{\overline{x}}$ en værdi på disse: $\delta_{\overline{x}}((x_i - \overline{x}_i)) = b_i \in \mathbb{R}$ for $i = 1, \ldots, N_1$. Der gælder endvidere klart, at

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j - \overline{x}_j) = \delta_{i,j}. \tag{94}$$

Anvendes nu $\delta_{\overline{x}}$ på (93) fås, idet $\forall i = 1, \ldots, N_1 : (x_i - \overline{x}_i)(\overline{x}) = 0$, at $\delta_{\overline{x}}(\psi) = \sum_{i=1}^{N_1} b_i \cdot \psi_i(\overline{x})$. Men dette er *præcist* det samme som man får via (91), når b_i'erne er definerede som ovenfor. □

KOROLLAR II.30. *Enhver derivation af $C^\infty(U_1)$ bestemmer entydigt en homogen første-ordens differentialoperator.*

BEVIS. Dette følger let fra Lemma II.29: Hvis $\delta : C^\infty(U_1) \to C^\infty(U_1)$ er en lineær derivation, da er det klart, at for ethvert $x \in U_1$ er afbildningen $\delta_x : \psi \to (\delta(\psi))(x)$ en lineær derivation af $C^\infty(U_1)$ i x. Det følger da umiddelbart, at der findes funktioner $b_1(x_1, \ldots, x_{N_1}), \ldots, b_{N_1}(x_1, \ldots, x_{N_1})$ således, at

(95)

$$\boxed{\forall \psi \in C^\infty(U_1) : (\delta(\psi))(x_1, \ldots, x_{N_1}) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} b_i(x_1, \ldots, x_{N_1})\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)(x_1, \ldots, x_{N_1})\,.}$$

Vi mangler blot at indse, at de indgående funktioner $b_1, \ldots, b_{N_1}$ tilhører $C^\infty(U_1)$, men det følger fra, at $\forall i : b_i = \delta(x_i)$. □

BEMÆRKNING II.31. *Hvis U_1 og U_2 er åbne mængder så $x \in U_1 \cap U_2$, da er (overvej) mængden af derivationer af $C^\infty(U_1)$ i x lig med mængden af derivationer af $C^\infty(U_2)$ i x. Observer også, at hvis $U_2 \subseteq U_1$ er en åben delmængde, da definerer enhver derivation af $C^\infty(U_1)$ en derivation af $C^\infty(U_2)$, for det gælder jo klart, at $b_i \in C^\infty(U_1) \Rightarrow b_i \in C^\infty(U_2)$ (sammenlign med (95)).*

BEMÆRKNING II.32. *Hvis M er en delmangfoldighed af V, hvis (f,O) er en lokal parametrisering, hvis $m_0 = f(x_0)$ og hvis $\sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(x_0) \in T_{m_0}(M)$, da defineres en derivation af $C^\infty(V)$ i m_0 ved*

$$C^\infty(V) \ni \psi \to \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x_i}. \tag{96}$$

Dette er præcist den retningsafledede af ψ i m_0 i retningen $\sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(x_0)$. Resultatet afhænger kun af værdien af ψ på M (ja kun af værdien af ψ i $f(\tilde{O})$, hvor $\tilde{O}$ er en (lille) omegn af x_0 i O).

Hvorledes kan vi udvide ovenstående omformulering af begrebet vektorfelt til også at omfatte vektorfelter på delmangfoldigheder? Ja, et intuitivt svar kunne være, at vi skal nøjes med at differentiere funktioner i retninger svarende til tangentrummene. Men så kan vi lige så godt nøjes med at se på funktioner, der er definerede på M. I næste afsnit fortsættes denne tankegang, samtidig med at den udvides til generelle mangfoldigheder.

4. Vektorfelter, 2.den udgave

Konklusionen på Lemma II.26, Lemma II.29 og Corollar II.30 er, at der er en lineær bijektiv forbindelse mellem på den ene side vektorfelter givet på formen $x \to (a_1(x), \ldots, a_{N_1}(x))$ og på den anden side derivationer. Denne korrespondance går via første-ordens homogene differentialoperatorer $\sum_{i=1}^{N_1} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Det nyttige ved denne observation kommer frem, når man skal generalisere begreberne tangentrum og vektorfelt til en vilkårlig mangfoldighed. Her kan man ikke gøre det geometrisk som i Definition II.20. Til nøds kunne man måske generalisere begrebet homogen første-ordens differentialoperator, men det, der umiddelbart er det letteste, er at generalisere begrebet derivation:

DEFINITION II.33. *Lad U være en åben delmængde af en mangfoldighed M. Lad $m \in M$. En afbildning $\delta_m : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, der opfylder i) og ii) i Lemma* II.26, *kaldes en **lineær derivation** af $C^\infty(U)$ **i** m. En afbildning $\delta : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, der opfylder iv) og v) i Lemma* II.26, *kaldes en **lineær derivation** af $C^\infty(U)$.*

Vi kan herefter give de generelle definitioner: Lad M være en differentiabel mangfoldighed, U en åben delmængde af M og lad $m \in M$.

DEFINITION II.34 (TANGENTRUM). *Tangentrummet $T_m(M)$ til $m \in M$ er*

$$\boxed{T_m(M) = \{\delta_m \mid \delta_m \text{ er en lineær derivation af } C^\infty(M) \text{ i } m\}\ .} \tag{97}$$

DEFINITION II.35 (VEKTORFELT). *Lad δ være en derivation af $C^\infty(U)$. Vi siger da, at δ er et (differentiabelt eller glat) **vektorfelt** på U. Vi vil ofte benytte bogstaverne X, Y, Z til at betegne vektorfelter.*

Bemærk, at hvis δ er en lineær derivation af $C^\infty(U)$ og hvis $m \in U$, da er δ_m defineret ved

$$\delta_m(\phi) = \delta(\phi)(m) \tag{98}$$

en lineær derivation af $C^\infty(U)$ i m.

Vi vil nu benytte lejligheden til at indføre en meget fundamental struktur:

Definition II.36 (Lieparentes). *Hvis X, Y er vektorfelter på U, defineres Lieparentesen $[X, Y]$ af X og Y som følgende afbildning $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$:*

$$\boxed{[X, Y](\psi) = X(Y(\psi)) - Y(X(\psi))} \tag{99}$$

Proposition II.37. *Lieparentesen $[X, Y]$ af to vektorfelter er igen et vektorfelt.*

Bevis: Lad $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(U)$. Da er

$$\begin{gathered}[X,Y](\psi_1 \cdot \psi_2) = \\ X(Y(\psi_1 \cdot \psi_2)) - Y(X(\psi_1 \cdot \psi_2)) = \\ X(Y(\psi_1) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot Y(\psi_2)) - Y(X(\psi_1) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot X(\psi_2)) = \\ X(Y(\psi_1)) \cdot \psi_2 + Y(\psi_1) \cdot X(\psi_2) + X(\psi_1) \cdot Y(\psi_2) + \psi_1 \cdot X(Y(\psi_2)) \\ -Y(X(\psi_1)) \cdot \psi_2 - X(\psi_1) \cdot Y(\psi_2) - Y(\psi_1) \cdot X(\psi_2) - \psi_1 \cdot Y(X(\psi_2)) = \\ X(Y(\psi_1)) \cdot \psi_2 - Y(X(\psi_1)) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot X(Y(\psi_2)) - \psi_1 \cdot Y(X(\psi_2)) = \\ [X,Y](\psi_1) \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot [X,Y](\psi_2). \quad \square\end{gathered} \tag{100}$$

Der gælder endvidere

Proposition II.38. *Lieparantesen opfylder, for vilkårlige vektorfelter X, Y, Z og reelle tal a, b:*

skævsymmetri: $[Y, X] = -[X, Y]$.
bilinearitet: $[X, a \cdot Y + b \cdot Z] = a \cdot [X, Y] + b \cdot [X, Z]$.
Jacobi-identiteten: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

Bevis. Dette overlades til læseren.
For videre at kunne arbejde med derivationer er følgende en nyttig observation:

Proposition II.39. *Lad V være en omegn om $m \in M$. Da findes omegne V_1 og V_2 om m i M og en funktion $\psi \in C^\infty(M)$ således, at $\overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq V$, $\overline{V_2}$ er kompakt og så*

- $\psi|_{V_1} = 1$.
- $\forall \tilde{m} \in M : 0 \leq \psi(\tilde{m}) \leq 1$.
- *ψ er identisk 0 på $M \setminus \overline{V_2}$.*

BEVIS. Dette følger let ved brug af et lokalt kort (f, O) omkring m, idet det er velkendt, at en tilsvarende sætning gælder i $\mathbb{R}^n$. (Vælg "små" kugler omkring $f^{-1}(m)$). I første omgang kan man så konstruere en funktion, der er C^∞ på $f(O)$ og er 0 udenfor en *kompakt* delmængde $\overline{V_2} \subset V \cap f(O)$, og som opfylder det ønskede på $f(O)$. Udvides denne til hele M ved at definere den til at være 0 på $M \setminus f(O)$ fås en C^∞-funktion (overvej). $\square$

LEMMA II.40. *Lad X være et vektorfelt på M og lad $m \in M$. Hvis $\varphi \in C^\infty(M)$ opfylder: Der findes en åben omegn V af m så $\varphi|_V \equiv 0$, da er $X_m(\varphi) = 0$.*

BEVIS. For at vise dette, kan man tage en C^∞-funktion ψ som i Proposition II.39 med $\psi(m) = 1$ og $\psi = 0$ udenfor V, valgt for passende åbne delmængder V_1, V_2. Da er $\varphi \cdot \psi = 0$, og dermed er $0 = X_m(0) = X_m(\varphi \cdot \psi) = \varphi(m) \cdot X_m(\psi) + X_m(\varphi) \cdot \psi(m) = X_m(\varphi)$. $\square$

Det er præcist denne observation, der sikrer, at vi kan opfatte et X_m defineret på $C^\infty(M)$ som en derivation af $C^\infty(U)$ i m for enhver åben delmængde U af M, der indeholder m:

DEFINITION II.41. *Lad U være en åben omegn om $m \in M$. Lad ψ_U være en funktion som i Proposition* II.39 *for passende omegne V_1 og V_2 af $m \in U$. En derivation X_m af $C^\infty(M)$ i m gøres til en derivation af $C^\infty(U)$ i m ved følgende forskrift:*

$$\forall \phi \in C^\infty(U) : X_m(\phi) \stackrel{Def.}{=} X_m(\psi_U \cdot \phi). \tag{101}$$

BEMÆRKNING II.42. *Det er venstresiden, der defineres ud fra højresiden. For ikke at gøre notationen for tung, benytter vi også betegnelsen X_m for den nye afbildning. Dette er rimeligt, da den tidligere definition jo er indeholdt i den nye (for $U = M$). Man skal selvfølgelig nu overbevise sig om, at højresiden overhovedet er defineret, d.v.s., at $\psi_U \cdot \phi$ kan opfattes som en C^∞-funktion på M. Dernæst, at man får det samme for forskellige valg af funktionen ψ_U og endelig, at det definerede virkelig er en derivation af $C^\infty(U)$ i m. Vi overlader dette til læseren.*

Lad (f, O) være et kort på M. Da gælder

$$\psi \in C^\infty(f(O)) \Leftrightarrow \psi \circ f \in C^\infty(O). \tag{102}$$

Vi har derfor

LEMMA II.43. *Hvis δ er en derivation af $C^\infty(O)$, da defineres ved*

$$C^\infty(f(O)) \ni \psi \xrightarrow{\tilde{\delta}} (\delta(\psi \circ f)) \circ f^{-1} \tag{103}$$

en derivation $\tilde{\delta}$ af $C^\infty(f(O))$, og enhver derivation af $C^\infty(f(O))$ fremkommer således.

BEMÆRKNING II.44. *Det er klart, at enhver derivation af $C^\infty(U)$ i m kan udvides til en derivation af $C^\infty(M)$ i m, da vi jo har en naturlig afbildning $C^\infty(M) \to C^\infty(U)$ (restriktionsafbildningen).*

I fortsættelse af Lemma II.43 og Lemma II.26 introduceres følgende notation:

DEFINITION II.45. *Lad (f, O) være et kort. Vektorfeltet $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}$ defineret, for $i = 1, \ldots, n$, ved $\forall m \in f(O), \forall \psi \in C^\infty(f(O))$:*

$$\boxed{\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\right)_m(\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{f^{-1}(m)}(\psi \circ f) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\psi \circ f)\right)(f^{-1}(m))} \tag{104}$$

kaldes det i-te koordinatfelt. Vi vil i øvrigt tillade os at undlade tilden, når det er klart fra sammenhængen, hvorvidt $\frac{\partial}{\partial x_i}$ betragtes som et vektorfelt på $f(O)$ eller på O. Endvidere kaldes funktionerne $\tilde{x}_i : f(O) \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ givne ved ligningen

$$\begin{aligned} \forall m \in f(O) : f^{-1}(m) &= (\tilde{x}_1(m), \ldots, \tilde{x}_n(m)) \Leftrightarrow \\ \forall m \in f(O) : m &= f((\tilde{x}_1(m), \ldots, \tilde{x}_n(m))) \end{aligned} \tag{105}$$

for koordinatfunktionerne, og vi vil referere til en bestemt af disse, svarende til et fast index i, som "den i-te koordinatfunktion" $\tilde{x}_i$. Også her vil vi droppe tilderne.

LEMMA II.46. *Tangentrummet $T_m(M)$ til $m \in M$ er et vektorrum. Hvis (f, O) er et kort, da gælder for hvert $m \in f(O)$,*

$$\boxed{\left\{\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\right)_m\right\}_{i=1}^n \text{ er en basis for } T_m(M)\ ,} \tag{106}$$

og ethvert vektorfelt X på $f(O)$ har formen $X = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}$ for visse $C^\infty(f(O))$-funktioner $a_1, \ldots, a_n$. Specielt gælder, at tangentrummet $T_m(M)$ til $m \in M$ er givet ved

$$\boxed{T_m(M) = \{X_m \mid X_m = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \cdot \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\right)_m\}\ .} \tag{107}$$

BEVIS. Dette følger let fra Lemmaerne II.29 og II.43. □

Vi kan nu få kontakt med den tidligere definition (Definition II.15) af tangentrummet til en mangfoldighed i et punkt (se i denne forbindelse også Bemærkning II.32 side 27:

DEFINITION II.47. *Lad I være et åbent interval i $\mathbb{R}$ og lad $\alpha : I \to M$ være en kurve. Vi sætter da, for $t_0 \in I$, $\alpha'(t_0)$ til at være følgende lineære derivation af $C^\infty(M)$ i $\alpha(t_0)$:*

$$\forall \psi \in C^\infty(M) : (\alpha'(t_0))(\psi) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}(\psi(\alpha(t)). \tag{108}$$

Vi får da

PROPOSITION II.48.

$$\boxed{T_m(M) = \{\alpha'(t_0) \mid \alpha : I \xrightarrow{\alpha} M \textit{ er en kurve, } t_0 \in I \textit{ og } \alpha(t_0) = m\} .}$$

BEVIS. Dette følger let fra Lemma II.46 ved brug af lokale koordinater, cf. beviset for Korollar II.30. □

Vi kan endvidere generalisere begrebet *differentialet* F'_m af en differentiabel afbildning $F : M \to N$ i et punkt $m \in M$ til også at gælde, når M og N er vilkårlige differentiable mangfoldigheder.

DEFINITION II.49. *F'_m er den lineære afbildning $T_m(M) \to T_{F(m)}(N)$ givet ved en af følgende ækvivalente beskrivelser:*

derivation: $\forall \delta_m \in T_m(M) \forall \psi \in C^\infty(N) : (F'_m(\delta_m))_{F(m)}(\psi) = \delta_m(\psi \circ F)$.

tangentvektor: $\forall \alpha'(t_0) \in T_m(M) : (F'_m(\alpha'(t_0)) = (F \circ \alpha)'(t_0)$.

BEMÆRKNING II.50. *Vi overlader det til læseren at generalisere ovenstående begreb til at omfatte funktioner F, der kun er definerede i en omegn af m.*

Lad (f, O) og $(\check{f}, \check{O})$ være lokale koordinater på henholdsvis M og N så $m \in f(O)$ og $F(m) \in \check{f}(\check{O})$. Antag, at $O \subseteq \mathbb{R}^r = \{(x_1, \ldots, x_r) \mid \forall i = 1, \ldots, r : x_i \in \mathbb{R}\}$ og at $\check{O} \subseteq \mathbb{R}^s = \{(y_1, \ldots, y_s) \mid \forall i = 1, \ldots, s : y_i \in \mathbb{R}\}$. Lad F være en C^∞-afbildning fra en omegn om $m \in M$ til N. Afbildningen

$$\check{F} = \check{f}^{-1} \circ F \circ f \tag{109}$$

er da en C^∞-afbildning fra en omegn af $x = f^{-1}(m)$ ind i $\mathbb{R}^s$. Den har således s koordinatfunktioner; $\check{F}_1, \ldots, \check{F}_s$, d.v.s.

$$\begin{aligned} \check{F}(x_1, \ldots, x_r) &= (\check{F}_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, \check{F}_s(x_1, \ldots, x_r)) \\ &= (y_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, y_s(x_1, \ldots, x_r)), \end{aligned} \tag{110}$$

hvor den sidste linie er den gængse notation, når det er klart, hvilken funktion F, der er tale om.

Vi kan nu give endnu en formulering af F'_m:

PROPOSITION II.51.

$$\boxed{F'_m(\textstyle\sum_{i=1}^r a_i \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}) = \sum_{j=1}^s b_j \frac{\tilde{\partial}}{\partial y_j}\ ,} \tag{111}$$

hvor, for alle $j = 1, \ldots, s$,

$$\boxed{b_j = \textstyle\sum_{i=1}^r \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i\ ,} \tag{112}$$

eller, i matrixform,

$$\boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}} . \tag{113}$$

BEVIS. I formel (111) betegner $\sum_{i=1}^r a_i \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}$ naturligvis et element i $T_m(M)$. Da F'_m per definition afbilder ind i $T_{F(m)}(N)$ findes, i følge Lemma II.46, reelle tal $b_1, \ldots, b_s$, så ligningen passer. Vi kan endvidere finde disse b_j-er ved at anvende begge sider af (111) på koordinatfunktionerne $y_j, j = 1, \ldots, s$. Resultatet følger umiddelbart fra dette. □

Vi kan nu definere **tangentbundtet** $T(M)$ hørende til en abstrakt mangfoldighed M:

DEFINITION II.52.

$$\begin{aligned} T(M) &= \cup_{m \in M} T_m(M) \\ &= \{X_m \mid m \in M \text{ og } X_m \in T_m(M)\}. \end{aligned} \tag{114}$$

BEMÆRKNING II.53. *For alle $m \in M$ er $T_m(M)$ et vektorrum. $T(M)$ er således et eksempel på et* ***vektorbundt****. Bemærk i øvrigt, at for $m_1 \neq m_2$ er $T_{m_1}(M) \cap T_{m_2}(M) = \emptyset$.*

Faktisk har vi nu kun defineret tangentbundtet som punktmængde, men man kan gøre det bedre end dette:

PROPOSITION II.54. *Man kan udstyre $T(M)$ med en topologi, således at det bliver en 2n-dimensional mangfoldighed. Givet et atlas $\mathcal{A} = \{(f_\alpha, O_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ for M bliver $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{f}_\alpha, \tilde{O}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, hvor, $\forall \alpha \in I : \tilde{O}_\alpha = O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ og $\forall (x, v) = ((x_1, \ldots, x_n), (v_1, \ldots, v_n)) \in O_\alpha \times \mathbb{R}^n$:*

$$\tilde{f}_\alpha(x, v) = \sum_{j=1}^n v_j \cdot (\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j})_{f_\alpha(x)} \tag{115}$$

et atlas for $T(M)$.

BEVIS. [Skitseret] Hvis alle de ovenstående par $(\tilde{f}_\alpha, \tilde{O}_\alpha)$, som jo er meget naturlige (sammenlign i øvrigt med afsnittet om delmangfoldigheder), skal være kort på $T(M)$ så skal, for alle $\alpha \in I$, $\tilde{f}_\alpha$ være en homeomorfi, d.v.s. for alle åbne delmængder $B_j \subseteq O_\alpha$ og $C_j \subseteq \mathbb{R}^n$ skal $\tilde{f}_\alpha(B_j \times C_j)$ være en åben delmængde af $T(M)$. Vi definerer derfor topologien på $T(M)$ ud fra dette krav. Det overlades til læseren at overbevise sig om, at dette ikke alene bliver en topologi, men, da både M og $\mathbb{R}^n$ er det, at denne bliver Hausdorfsk og anden-tællelig.

Lad nu $\alpha, \beta \in I$. Sæt $\tilde{J}_{\alpha\beta} = f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$. Da bliver (brug bl.a. Proposition II.51 med $M = N$ og F lig med den identiske afbildning),

$$(\tilde{f}_\beta)^{-1} \circ (\tilde{f}_\alpha)(x, v) = (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(x), (\tilde{J}_{\alpha\beta})'_x(v)), \tag{116}$$

hvor, når punkterne y i O_β betegnes med $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$(\tilde{J}_{\alpha\beta})'_x(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Dette er klart C^∞. $\square$

DEFINITION II.55. *Afbildningen $\pi : T(M) \to M$ givet ved*

$$\forall X_m \in T(M) : \pi(X_m) = m \tag{118}$$

*kaldes den **kanoniske projektion** af $T(M)$ på M.*

DEFINITION II.56. *En afbildning $s : M \to T(M)$, som opfylder*

$$\forall m \in M : \pi(s(m)) = m, \tag{119}$$

*kaldes et **snit** i tangentbundtet. Vi lader $\mathcal{D}^1(M)$ betegne mængden af glatte snit, hvor differentiabilitet er i betydningen af en afbildning fra en mangfoldighed til en anden.*

Vi har da endnu en alternativ (og nyttig) måde at betragte vektorfelter på:

LEMMA II.57. *$\mathcal{D}^1(M)$ kan identificeres med mængden af (differentiable) vektorfelter på M.*

BEVIS. Begge typer objekter svarer jo naturligt til første-ordens differentialoperatorer. Det overlades til læseren at indse, at differentiabiliteten af snit netop er den samme som for vektorfelter. $\square$

BEMÆRKNING II.58. *Da et snit s i et punkt m tager værdi i et vektorrum, har vi en interessant mulighed for at gange et snit med et element $\psi \in C^\infty(M)$: Vi definerer simpelthen $(\psi \cdot s)(m) = \psi(m) \cdot s(m)$. Dette giver altså en afbildning*

$$C^\infty(M) \times \mathcal{D}^1(M) \to \mathcal{D}^1(M). \tag{120}$$

Sagt mere abstrakt bilver $\mathcal{D}^1(M)$ herved et modul over $C^\infty(M)$.

LEMMA II.59. *Lad $\psi : M \to N$ være en differentiabel afbildning. Da er differentialet ψ' af ψ en differentiabel afbildning fra $T(M)$ til $T(N)$.*

BEVIS. Dette følger let fra Definition II.49 samt Proposition II.51. $\square$

Vi har tidligere (i Afsnit 2) indført det duale $T^*_m(M)$. Vi vil også i det generelle tilfælde omtale elementerne af dette rum som *1-formerne* på M i m eller *kotangentvektorerne* til M i m, og vektorrummet, de udspænder, kaldes kotangentrummet til M i m.

DEFINITION II.60.

$$T^*_m(M) = \{v^* : T_m(M) \to \mathbb{R} \mid v^* \text{ } er \text{ } lineær\}. \tag{121}$$

I det specielle tilfælde, hvor vi har at gøre med en funktion ψ fra en åben delmængde U af M til $\mathbb{R}$, definerer vi differentialet $d\psi_m$, for $m \in U$, så det bliver et element af $T^*_m(M)$:

DEFINITION II.61. *$(d\psi)_m \in T^*_m(M)$ er givet ved, for alle $X_m \in T_m(M)$:*

$$\boxed{\boxed{(d\psi)_m(X_m) = X_m(\psi)\ .}} \tag{122}$$

BEMÆRKNING II.62. *Vi har tidligere defineret differentialet af en afbildning $\psi : M \to N$ (Definition* II.49*). I tilfældet hvor $N = \mathbb{R}$ har vi nu to definitioner, dels når vi betragter ψ som en* afbildning *og dels, når den betragtes som en* funktion*. De to definitioner er dog nært beslægtede (det overlades til læseren at overveje dette). Vi vil alligevel nu vedtage, at når $N = \mathbb{R}$, så er det altid Definition* II.61*, vi benytter.*

Lad os nu antage, at (f, O) er et kort på M. Hver af koordinatfunktionerne $\tilde{x}_i = x_i, i = 1, \ldots, n$, er da C^∞-funktioner på $f(O)$ og har derfor differentialer i hvert punkt $m \in f(O)$.

PROPOSITION II.63.

$$\boxed{\{(d\tilde{x}_i)_m\}_{i=1}^n} \tag{123}$$

er en basis for $T^*_m(M)$. Der gælder faktisk

$$\boxed{\forall i, j = 1, \ldots, n : (d\tilde{x}_i)_m\Big(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j}\Big)_m = \delta_{i,j}} \tag{124}$$

og

$$\forall F \in C^\infty(f(O)) : \boxed{(dF)_m = \textstyle\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} F\Big) \cdot (d\tilde{x}_i)_m\ .} \tag{125}$$

BEVIS. Det følger let fra (124) og Lemma II.46, at $(d\tilde{x}_i)_m$-erne udgør en basis, når i løber fra 1 til n, så lad os vise denne formel: Vi skal altså undersøge $(d\tilde{x}_i)_m(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j})$, hvor vi minder om, at tilderne betyder, at det er funktioner og vektorfelter på $f(O)$, vi har at gøre med. Vi erindrer om, at $\tilde{x}_i(m) = (f^{-1}(m))_i$ og $(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i})(F) = (\frac{\partial}{\partial x_i})(F \circ f)$. Altså fås

$$(126) \qquad (d\tilde{x}_i)_m(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j}) = (\frac{\partial}{\partial x_j})(f^{-1} \circ f(x_1, \ldots, x_n))_i = (\frac{\partial}{\partial x_j})(x_i) = \delta_{i,j}.$$

Hvis $F \in C^\infty(f(O))$ kan vi nu skrive

$$(127) \qquad (dF)_m = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (d\tilde{x}_i)_m$$

for visse reelle konstanter $a_1, \ldots, a_n$. Vi kan finde værdien af disse ved at lade begge siderne i (127) virke på $(\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j})$ for $j = 1, \ldots, n$ under brug af Definition II.61 og (123). Dette giver klart det påståede. □

OBS: Fra nu af dropper vi tilderne på $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_j}$, $d\tilde{x}_i$ etc., idet det vil (bør) være klart fra sammenhængen, hvorvidt vi tænker på dem som objekter på $f(O)$ eller på O.

I analogi med vektorfelterne indfører vi nu kotangentbundtet $T^*(M)$:

DEFINITION II.64.

$$(128) \qquad T^*(M) = \{\omega_m \mid m \in M \text{ og } \omega_m \in T^*_m(M)\}.$$

Ligesom for tangentbundtet bliver dette en $2n$-dimensional differentiabel mangfoldighed. Vi udelader detaljerne og anfører blot:

PROPOSITION II.65. *Man kan udstyre $T^*(M)$ med en topologi, således at det bliver en $2n$-dimensional mangfoldighed. Givet et atlas $\mathcal{A} = \{(f_\alpha, O_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ for M bliver $\check{\mathcal{A}} = \{(\check{f}_\alpha, \check{O}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, hvor, $\forall \alpha \in I : \check{O}_\alpha = O_\alpha \times \mathbb{R}^n$ og $\forall (x, v) = ((x_1, \ldots, x_n), (v_1, \ldots, v_n)) \in O_\alpha \times \mathbb{R}^n$:*

$$(129) \qquad \check{f}_\alpha(x, v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (dx_j)_{f_\alpha(x)}$$

et atlas for $T^*(M)$.

Definition II.66. *Lad U være en åben delmængde af M. En* ***1-form*** *ω på U er da et (differentiabelt) snit i $T^*(U)$, d.v.s. en afbildning $U \to T^*(U)$, der opfylder*

$$\forall m \in U : \omega_m \in T_m^*(U), \tag{130}$$

hvor vi, i standard notation, betegner værdien i m af snittet ω med ω_m. Mængden af 1-former betegnes $\mathcal{E}^1(U)$.

Det er klart, at $\mathcal{E}^1(U)$ er et vektorrum når sum og skalar multiplikation defineres punktvis. Det er også klart, at vi kan multiplicere 1-former med elementer fra $C^\infty(U)$. Der gælder endvidere følgende:

Proposition II.67. *Givet elementer $X \in \mathcal{D}^1(U)$ og $\omega \in \mathcal{E}^1(U)$ defineres et element $\omega(X) \in C^\infty(U)$ ved $\forall m \in U : \omega(X)(m) = \omega_m(X_m)$. Der gælder endvidere, at afbildningen $\mathcal{E}^1(U) \times \mathcal{D}^1(U) \to C^\infty(U)$ således defineret er bilineær og opfylder*

(131)
$$\forall \omega \in \mathcal{E}^1(U) \forall X \in \mathcal{D}^1(U) \forall \psi \in C^\infty(U) : \omega(\psi \cdot X) = (\psi \cdot \omega)(X) = \psi \cdot (\omega(X))$$

Endelig gælder naturligvis følgende i analogi med Lemma II.46:

Lemma II.68. *Enhver 1-form på $f(O)$, hvor (f, O) er et kort på M, har formen*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot dx_i, \tag{132}$$

hvor, for alle $i = 1, \ldots, n$, $b_i \in C^\infty(f(O))$.

5. Videregående teori

Med formalismen fra Afsnit 4 til vores disposition kan vi nu indføre en del interessante begreber og strukturer.

Lad os begynde med at generalisere begrebet indlejret delmangfoldighed. Vi erstatter simpelthen det endeligt-dimensionale vektorrum V i Definition II.5 med en vilkårlig mangfoldighed. Alle indgående begreber er da definerede gennem Afsnit 4.

Definition II.69. *Lad V være en endelig-dimensional mangfoldighed af dimension N. En delmængde M af V kaldes en* ***n-dimensional indlejret delmangfoldighed*** *såfremt M, når den udstyres med sportopologien, opfylder en af følgende ækvivalente betingelser:*

(1) *Til hvert $m_0 \in M$ findes en omegn U (som altid antaget åben) af m_0 i V og en afbildning $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{N-n})$ så F'_m er surjektiv for alle $m \in M \cap U$ og $M \cap U = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$.*

(2) *Til hvert* $m_0 \in M$ *findes en omegn* U *af* m_0 *i* V, *en omegn* O *af et punkt* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *samt en afbildning* $f \in C^\infty(O, V)$ *så:*
- $f(x_0) = m_0$.
- f'_x *er injektiv for alle* $x \in O$.
- f *er en homeomorfi af* O *på* $M \cap U$.

Også her vil vi ofte blot bruge betegnelsen delmangfoldighed for en sådan M.

Vi går herefter over til at se på virkningen af differentiable afbildninger på vektorfelter. Mere præcist, lad $\psi : M \to N$ være en differentiabel afbildning fra en mangfoldighed M til en mangfoldighed N og lad X være et vektorfelt på M. Der gælder så **ikke**, at $\psi'(X)$ nødvendigvist er et vektorfelt på N (eller på billedet $\psi(M)$). Vi indfører da følgende begreb, der benytter formuleringen af et vektorfelt som et snit i tangentbundtet:

DEFINITION II.70. *Vektorfelterne* X *på* M *og* Y *på* N *siges at være* ***ψ-relaterede*** *såfremt*

$$\boxed{\psi' \circ X = Y \circ \psi\,.} \tag{133}$$

PROPOSITION II.71. *Lad* $\psi : M \to N$. *Lad vektorfelterne* X_i *være* ψ*-relaterede til vektorfelterne* Y_i *for* $i = 1, 2$. *Da er Lieparantesen* $[X_1, X_2]$ ψ*-relateret til* $[Y_1, Y_2]$.

BEVIS. Dette følger ved at vikle definitionerne ud og overlades til læseren. □

Vi slutter af med et kik på Liegrupper.

DEFINITION II.72. *En gruppe* G, *der samtidig er en differentiabel mangfoldighed, kaldes en* ***Liegruppe*** *såfremt afbildningen*

$$G \times G \ni (a, b) \to a \cdot b^{-1} \tag{134}$$

er differentiabel.

DEFINITION II.73. *Lad* $a \in G$. *Afbildningen*

$$\boxed{L_a : G \to G : L_a(g) = a \cdot g} \tag{135}$$

kaldes ***venstretranslation ved a***. *Dette er klart en bijektiv afbildning af* G *på* G.

Et vektorfelt X *på* G *kaldes* ***venstreinvariant*** *såfremt*

$$\begin{aligned} \forall a, g \in G : L'_a(X_g) &= X_{a \cdot g} \Leftrightarrow \\ \forall a \in G : L'_a \circ X = X \circ L_a. \end{aligned} \tag{136}$$

Med andre ord, X er venstreinvariant, hvis og kun hvis det er L_a-relateret til sig selv for ethvert $a \in G$. Vi sætter

$$\mathfrak{g} = \{X \mid X \text{ er et venstreinvariant vektorfelt på } G\}, \tag{137}$$

og kalder $\mathfrak{g}$ for ***Liealgebraen hørende til G****. Denne er klart et vektorrum.*

Det følger fra (136), at et venstreinvariant vektorfelt er fuldstændigt bestemt ved sin værdi i $X_e \in T_e(G)$. Omvendt kan man med lidt mere besvær overbevise sig om, at der ved opskriften

$$X_a = L'_a(X_e) \tag{138}$$

defineres et *differentiabelt* venstreinvariant vektorfelt på G for enhver vektor $X_e \in T_e(G)$. Alt ialt betyder dette, at vi har:

Lemma II.74. *Afbildningen*

$$\mathfrak{g} \ni X \to X_e \in T_e(G) \tag{139}$$

er en lineær isomorfi. Specielt har G og $\mathfrak{g}$ samme dimension (nemlig dimensionen af $T_e(G)$).

Det følger endvidere fra (136) og Proposition II.71 at Lieparantesen mellem to venstreinvariante vektorfelter igen er venstreinvariant. Liealgebraen $\mathfrak{g}$ hørende til G er med andre ord et vektorrum $\mathfrak{g}$ udstyret med en bilinearform

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni X, Y \to [X, Y] \in \mathfrak{g}, \tag{140}$$

der opfylder $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$[X, Y] = -[Y, X] \qquad \text{og} \tag{141}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \qquad \text{(Jacobi)} \tag{142}$$

Definition II.75. *Et vektorrum $\mathfrak{g}$ udstyret med en bilinearform*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni X, Y \to [X, Y] \in \mathfrak{g}, \tag{143}$$

der opfylder (141) og (142), kaldes en ***Liealgebra****.*

KAPITEL III

Riemannske mangfoldigheder

1. Delmangfoldigheder

Vi vender her tilbage til det tilfælde, hvor M er en indlejret delmangfoldighed i et endelig-dimensionalt vektorrum V. Vi vil i det følgende vælge et fast euklidsk indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ på V. Dette er per definition:

bilineært: Afbildningen$V \times V \ni v, w \to \langle v, w \rangle_V \in \mathbb{R}$ er lineær både i v og i w.

symmetrisk: $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle_V = \langle w, v \rangle_V$.

positiv definit: $\langle v, v \rangle_V \geq 0$ og $\langle v, v \rangle_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Definition III.1. *En afbildning $Q : V \to \mathbb{R}$ kaldes en kvadratisk form, hvis det for alle vektorer $v_1, \dots, v_r \in V$ (r vilkårligt) gælder, at*

$$\mathbb{R}^r \ni (t_1, \dots, t_r) \to Q(t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r) \tag{144}$$

er et homogent anden-grads polynomium.

Da specielt $Q(tv) = t^2 Q(v)$, er det nok at kende Q's værdi på enhedsvektorer. Der gælder endvidere følgende sætning fra lineær algebra:

Proposition III.2. *Enhver kvadratisk form Q har formen*

$$v \to \langle A_Q(v), v \rangle_V \tag{145}$$

for en symmetrisk lineær afbildning $A_Q : V \to V$.

Den første fundamentalform. Eftersom det for ethvert $m \in M$ gælder, at $T_m(M) \subseteq V$, kan vi lade $T_m(M)$ arve det indre produkt fra V. Derved bliver $T_m(M)$ selv et euklidisk vektorrum. Vi vil ind imellem betegne dette indre produkt med $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_m(M)}$, eller blot $\langle \cdot, \cdot \rangle$, når det er klart fra sammenhængen, hvad vi mener. Vi vil fra tid til anden holde øje med, hvordan de størrelser, vi konstruerer, afhænger af dette indre produkt.

Definition III.3. *Den kvadratiske form I_m på $T_m(M)$ defineret ved*

$$\forall v \in T_m(M) : \boxed{I_m(v) = \langle v, v\rangle_{T_m(M)}} \quad (= \langle v, v\rangle_V) \tag{146}$$

kaldes den ***første fundamentalform*** *på M i m.*

Lad (f, O) være et kort på M. Det er nu naturligt at udtrykke den første fundamentalform med hensyn til dette.

Definition III.4. *Lad $m = f(x)$. Størrelserne $g_{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$, givet ved*

$$\boxed{g_{ij}(x) = \langle f_{x_i}, f_{x_j}\rangle_{T_m(M)}\ ,} \tag{147}$$

kaldes ***koefficienterne af den første fundamentalform*** *i m med hensyn til parametriseringen (f, O).*

Proposition III.5. *Der gælder for alle $i, j = 1, \ldots, n$, at funktionen $x \to g_{ij}(x)$ tilhører $C^\infty(O)$. Værdierne af disse funktioner i et punkt $x \in O$ bestemmer tilsammen fuldstændigt den første fundamentalform i $f(x)$.*

Bevis. Eftersom f jo per antagelse er en C^∞ funktion fra O til V, er det klart, at g_{ij}-erne også bliver C^∞. Da endvidere en vilkårlig vektor $v \in T_m(M)$ entydigt kan skrives som en linearkombination $v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_{x_i}$, med $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, og eftersom det indre produkt er bilineært, følger resten af påstanden også let. □

Bemærkning III.6. *Proposition* III.5 *viser, at tilordningen til $m \in M$ af det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{T_m(M)}$ i en passende forstand er differentiabel som funktion af m. Bemærk iøvrigt, at et begreb som kurvelængde kun afhænger af den første fundamentalform på M:*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} (I_{\alpha(u)}(\alpha'(u)))^{1/2} du. \tag{148}$$

Den anden fundamentalform. Ved at se på kurvers krumning, dels som kurver i V og dels som kurver på M, fås flere interessante størrelser. Lad $\alpha(t) = f(x(t)) =$

$f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ være en kurve på M, forløbende indenfor en koordinatomegn $f(O)$. Vi har nu (cf. (77))

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} f_{x_j}(x(t)) \quad \text{og} \\ \alpha''(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2 x_j}{dt^2} f_{x_j}(x(t)) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} f_{x_j x_k}(x(t)), \end{aligned} \tag{149}$$

hvor $f_{x_j x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f$. Vi indfører nu betegnelsen

$$\boxed{h_{jk} = Proj_{N_{f(x)}(M)}(f_{x_j x_k}) = Proj_{-}(f_{x_j x_k})} \tag{150}$$

for projektionen af $f_{x_j x_k}$ på normalplanen $N_{f(x)}(M)$ til M i $f(x)$. Observer, at $h_{jk} = h_{kj}$.

Definition III.7. *Lad $v \in T_m(M)$. Lad α være en kurve med $\alpha(t_0) = m$ og $\alpha'(t_0) = v$. Lad*

$$\boxed{H(v) = Proj_{-}\alpha''(t_0)\ .} \tag{151}$$

*Afbildningen $v \to H(v)$ kaldes den **anden fundamentalform** på M i m.*

Sætning III.8 (Meusniers Sætning). *Lad $v = \sum_{i=1}^{n} v_i f_{x_i} \in T_m(M)$. Lad α være en kurve på M med $\alpha(t_0) = m$ og $\alpha'(t_0) = v$. Da er*

$$\boxed{H(v) = \textstyle\sum_{j,k=1}^{n} v_j v_k h_{jk}(x)\ .} \tag{152}$$

Specielt er $H(v)$ altså veldefineret. Videre gælder, hvis kurvens krumning $k_\alpha(m)$ i m er forskellig fra 0, at

$$\boxed{H(v) = k_\alpha(m) \cdot \|v\|^2 \cdot Proj_{-}(n_\alpha(m))\ ,} \tag{153}$$

hvor $n_\alpha(m)$ betegner kurvens hovednormal. Hvis $k_\alpha(m) = 0$ er $H(v) = 0$.

Bevis. Bemærk, at det første led i $\alpha''(t)$ i (149) ligger i $T_{\alpha(t)}(M)$. Formel (152) følger da direkte fra (149) og (150). Endelig følger (153) og de efterfølgende bemærkninger direkte fra definitionen i forbindelse med (13) side 3. □

Bemærkning III.9. *Det "overraskende" er dels, at H er kvadratisk i v og dels, at det er en krumningsstørrelse, der kun afhænger af kurvens tangentvektor i punktet. Den tilsvarende bilinearform $H(\cdot,\cdot) : T_m(M) \times T_m(M) \to N_n(M)$ er også* *uafhængig af den valgte lokale parametrisering og er givet, for* $v^a = \sum_{i=1}^n v_i^a f_{x_i}$ *og* $v^b = \sum_{j=1}^n v_j^b f_{x_j}$ *i* $T_m(M)$*, ved*

$$H(v^a, v^b) = H(\sum_{i=1}^n v_i^a f_{x_i}, \sum_{j=1}^n v_j^b f_{x_j}) = \sum_{i,j=1}^n v_i^a v_j^b h_{ij}. \tag{154}$$

Christoffelsymboler. Vi fortsætter med at se på et fast kort (f, O) på vores delmangfoldighed M og går nu i gang med at undersøge tangentialkomponenterne af α''. Til dette formål observerer vi følgende:

LEMMA III.10. *Givet* $i, j \in \{1, \dots n\}$*, findes funktioner* $?_{ij}^k \in C^\infty(O)$*,* $k = 1, \dots, n$*, så*

$$\forall x \in O : \boxed{f_{x_i x_j}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) f_{x_k}(x) + h_{ij}(x)\ .} \tag{155}$$

BEVIS. Dette følger, fordi $T_m(M)$ og $N_m(M)$ er orthogonale og tilsamme udspænder hele rummet, og fordi $\{f_{x_i}(x)\}_{i=1}^n$ er en basis for $T_{f(x)}(M)$ for alle $x \in O$. □

DEFINITION III.11. *Funktionerne* $?_{ij}^k$ *kaldes* ***Christoffelsymbolerne af første art*** *(med hensyn til parametriseringen* (f, O)*). Endvidere kaldes funktionerne*

$$\forall i, j, k = 1, \dots, n : \boxed{\Gamma_{ijk} = \langle f_{x_i x_j}, f_{x_k} \rangle} \tag{156}$$

for ***Christoffelsymbolerne af anden art*** *(med hensyn til parametriseringen* (f, O)*).*

BEMÆRKNING III.12. *I den ældre litteratur er notationen for disse* $[ij, k] \equiv ?_{ijk}$ *og* $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \equiv ?_{ij}^k$*. Bemærk, at* $?_{ij}^k = ?_{ji}^k$ *og* $?_{ijk} = ?_{jik}$*.*

PROPOSITION III.13. *Christoffelsymbolerne er fuldstændigt bestemte ud fra koefficienterne til den første fundamentalform. Helt konkret gælder*

$$\boxed{\begin{aligned} ?_{ijk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right) \\ ?_{ij}^r &= \sum_{l=1}^n g^{rl} ?_{ijl}\ , \end{aligned}} \tag{157}$$

hvor (g^{ij}) *betegner den* <u>*inverse*</u> *matrix til* (g_{ij}). *Endelig gælder*

(158) $$\boxed{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}\ .}$$

Bevis. Hvis vi tager det indre produkt med f_{x_l} i (155) får vi:

(159) $$\sum_{k=1}^{n} ?_{ij}^{k} g_{kl} = ?_{ijl}.$$

Multipliceres denne ligning med g^{rl} og summes derefter over l fås:

(160) $$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} ?_{ij}^{k} g_{kl} g^{rl} &= \sum_{l=1}^{n} g^{rl} ?_{ijl} \Rightarrow \\ ?_{ij}^{r} &= \sum_{l=1}^{n} g^{rl} ?_{ijl}, \end{aligned}$$

eftersom

(161) $$\sum_{l=1}^{n} g_{kl} g^{rl} = \sum_{l=1}^{n} g_{kl} g^{lr} = \delta_{k,r}$$

per definition af den inverse matrix og under brug af, at g_{ij}-erne, og dermed også g^{ij}-erne, er symmetriske i i, j.

Vi mangler stadig at beregne $?_{ijk}$. Til det formål betragter vi følgende tre ligninger:

(162) $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\langle f_{x_i}, f_{x_j}\rangle = \langle f_{x_k x_i}, f_{x_j}\rangle + \langle f_{x_i}, f_{x_k x_j}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\langle f_{x_j}, f_{x_k}\rangle = \langle f_{x_i x_j}, f_{x_k}\rangle + \langle f_{x_j}, f_{x_i x_k}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\langle f_{x_k}, f_{x_i}\rangle = \langle f_{x_j x_k}, f_{x_i}\rangle + \langle f_{x_k}, f_{x_j x_i}\rangle. \end{aligned}$$

Lægges de to nederste sammen, og trækkes den øverste fra dette, fås resultatet, da der jo gælder, at $f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j}$ for alle $j, k = 1, \ldots, n$. Formel (158) følger, da g_{jl} er symmetrisk i j, l. □

Vi kan nu opsummere formlen for α'' som

(163)
$$\boxed{\frac{d^2 f}{dt^2}(x(t)) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_{ik}^{j} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}\Big) f_{x_j} + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt} h_{jk}(x(t))\ .}$$

Kovariant afledet; geodæt.

SÆTNING III.14. *Lad $s \to \beta(s)$ være en kurve parametriseret ved kurvelængde; $\forall s : \|\beta'(s)\| = 1$. Da er*

(164)
$$\boxed{k_\beta \cdot Proj_{T_{\beta(s)}(M)}(n_\beta(s)) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d^2 x_j}{ds^2} + \sum_{i,k=1}^n \Gamma^j_{ik} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{ds}\right) f_{x_j}\ ,}$$

hvor k_β betegner kurvens krumning og n_β betegner kurvens hovednormal (hvis $k_\beta = 0$ sættes venstresiden til 0). Specielt er højresiden uafhængig af parametriseringen (f, O).

BEVIS. Da $\beta''(s) = k_\beta(s) \cdot n_\beta(s)$, følger dette af (163) med $\beta(s) = f(x(s))$. □

DEFINITION III.15. *Længden af vektoren på venstresiden af (164) kaldes den **geodætiske krumning**[1] og betegnes $k_g(s)$. Retningen af vektoren kaldes den **geodætiske hovednormalretning**. Endvidere sættes $k_n(s) = \|H(\beta'(s))\|$, og denne størrelse kaldes **normalkrumningen**[2].*

LEMMA III.16.

(165)
$$\boxed{k^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s)\ .}$$

BEVIS. Dette er blot Pythagoras. □

DEFINITION III.17. *Følgende kurver kaldes **geodæter**,:*
⋆ En kurve $I \ni s \to \beta(s)$, parametriseret ved kurvelængde, såfremt den geodætiske krumning er identisk nul;

(166)
$$\forall s \in I : k_g(s) = 0.$$

⋆⋆ Kurver af formen $\beta_k(s) = \beta(k \cdot s)$, med $k \neq 0$ en reel konstant, såfremt $\beta = \beta_1$ opfylder ⋆.
⋆⋆⋆ Konstante kurver γ_m, hvor $\forall t : \gamma_m(t) = m$.

BEMÆRKNING III.18. *Det geometriske indhold af den geodætiske krumning er, at det er den del af krumningen af kurven, der kan "mærkes" på delmangfoldigheden. (Hvis vi forestiller os et væsen, der lever på denne—somme tider kaldet et* fladedyr*—kan dette ikke mærke normalkomponenten af accelerationen $\beta''(s)$.)*

*I fortsættelse af dette er det naturligt at definere de objekter på M, der skal svare til de rette linier i euklidiske vektorrum, som de kurver, der ingen acceleration har, **set fra delmangfoldigheden**. De geodætiske kurver er således en naturlig generalisation af de rette linier. Det kan yderligere vises (se Bemærkning* III.68

[1] For kurver på hyperflader i $\mathbb{R}^3$ kan vi tilordne denne et fortegn.
[2] For orienterede hyperflader kan denne også tilordnes et fortegn.

side 62), at den kortest mulige vej fra p til q er givet ved en geodæt (men der kan godt være flere forskellige geodæter fra p til q).

At tilfældene $\star\star$ og $\star\star\star$ medtages er måske i sig selv rimeligt nok, men der er faktisk også en mere konkret begrundelse, der har at gøre med det næste Lemma:

LEMMA III.19 (GEODÆT). *Lad $I \ni t \to \alpha(t) = f(x(t))$ være en kurve på M, løbende i en koordinatomegn $f(O)$ (I er et interval). Antag*

$$\boxed{\forall t \in I : \forall j = 1, \dots, n : \tfrac{d^2 x_j}{dt^2} + \textstyle\sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_{ik}^{j} \tfrac{dx_i}{dt} \tfrac{dx_k}{dt} = 0\ .} \tag{167}$$

Da er α en geodæt.

BEVIS. Enten er α konstant, og så er $\star\star\star$ jo opfyldt, eller også findes et interval $\tilde{I}$, så $\forall t \in \tilde{I} : \alpha'(t) \neq 0$. Ifølge (163) medfører (167), at α'' står vinkelret på tangentplanen. Der gælder derfor, at

$$\forall t \in \tilde{I} : \frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 2 \cdot \langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle = 0, \tag{168}$$

og dermed er $\|\alpha'\| = k$, hvor k er en konstant, der nødvendigvis må være forskellig fra 0. Det følger fra dette ved kontinuitet, at $\|\alpha'\| = k$ på hele definitionsintervallet. Vi kan derfor betragte kurven $\beta(s) = \alpha(\frac{s}{k})$, som klart er parametriseret ved buelængde og har $k_g \equiv 0$ (overvej!). $\square$

Ideen med at projicere afledede ned på tangentplanen kan generaliseres til den situation, hvor vi har et vilkårligt vektorfelt $v(t)$ langs en kurve $\alpha(t)$ (det tidligere betragtede svarer så til $v(t) = \alpha'(t)$). Derved får vi defineret begrebet kovariant afledet :

DEFINITION III.20. *Hvis $v(t)$ er et vektorfelt langs en kurve $\alpha(t) = f(x(t))$, defineres den kovariant afledede af v m.h.t. $\alpha(t)$ som*

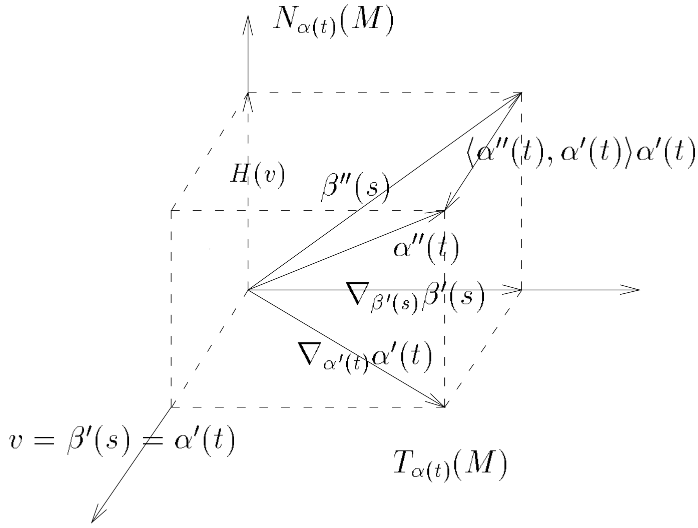
$$\boxed{\nabla_{\alpha'(t)} v(t) = Proj_{T_{\alpha(t)}}(\tfrac{dv}{dt})} \quad (\in T_{\alpha(t)}(M)), \tag{169}$$

hvor $Proj_{T_{\alpha(t)}}$ betegner projektion på tangentplanen til M i $\alpha(t)$.

Hvis $m \in M$, $X_m \in T_m(M)$ og v er et vektorfelt på M, defineret i en omegn af m, definerer vi

$$\boxed{\nabla_{X_m} v = \left(\nabla_{\alpha'(t)} v(t)\right)(t_0) \quad (\in T_m(M))\ ,} \tag{170}$$

hvor α er en kurve, der opfylder: $\alpha(t_0) = m$ og $\alpha'(t_0) = X_m$ (og $v(t) = v(\alpha(t))$).



FIGUR III.3. Den kovariant afledede af tangentfeltet til en kurve α og den kovariant afledede til tangentfeltet kurven β, svarende til en omparametrisering af α til kurvelængde, er normalt forskellige, også selvom $\alpha'(t)$ i det betragtede punkt har længde 1. Der gælder dog, at $\nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = 0 \Rightarrow \nabla_{\beta'(t)}\beta'(t) = 0$. Bemærk i øvrigt, at $\nabla_{\beta'(t)}\beta'(t)$ er vinkelret på v (hvorfor?)

BEMÆRKNING III.21. *Observer, at dette er en* invariant *definition (uden reference til et kort). Bemærk også, at i et givet punkt på kurven $\alpha(t)$ afhænger (169) kun af $\alpha'(t)$ (samt naturligvis af vektorfeltet v—sidstnævnte skal være kendt i en hel omegn, da det jo differentieres).*

PROPOSITION III.22. *Hvis $v(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) \cdot f_{x_i}(x(t))$, da er*

(171)
$$\boxed{\begin{aligned} \nabla_{\alpha'(t)} v(t) &= (\sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt} f_{x_i}) + (\sum_{i=1}^{n} v_i (\sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{dt} (\sum_{j=1}^{n} ?^{j}_{ik} f_{x_j}))) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dv_j}{dt} + \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{dt} ?^{j}_{ik} \right) f_{x_j}. \end{aligned}}$$

BEVIS. Vi har

(172)
$$v'(t) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt} f_{x_i}) + (\sum_{i=1}^{n} v_i (\sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{dt} f_{x_i x_k})).$$

Den første formel følger da let fra (155). Den anden er blot en omskrivning af den første. □

Indføres for et øjeblik notationen $e_i = e_i(t) = f_{x_i}(x(t))$ kan vi skrive $\alpha'(t) = \sum_j \tau_j e_j$, hvor $\forall j : \tau_j = \frac{dx_j}{dt}$ og $v(t) = \sum_i v_i e_i$. Derved får første linie i (171) formen

(173)
$$\nabla_{\alpha'(t)} v(t) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{dv_i}{dt} e_i) + (\sum_{i=1}^{n} v_i (\sum_{k=1}^{n} \tau_k (\sum_{j=1}^{n} ?^{j}_{ik} e_j))),$$

hvilket viser, at den kovariant afledede kun afhænger af den første fundamentalform på M, hvilket jo er noget overraskende, eftersom vi jo brugte det omkringliggende rum til at projicere fra.

I det vigtige specialtilfælde hvor $v(t) = \alpha'(t)$ fører en sammenligning af udtrykkene i (171) og (167) let til følgende vigtige karakterisation af geodæter:

KOROLLAR III.23 (GEODÆT). *Lad $I \ni t \to \alpha(t) = f(x(t))$ være en kurve på M, løbende i en koordinatomegn $f(O)$ (I er et interval). Da er α en geodæt, hvis og kun hvis α' er kovariant konstant, altså hvis og kun hvis*

(174)
$$\boxed{\forall t \in I : \nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0\ .}$$

Gaussligningerne. Efter at have studeret tangentialkomponenterne af de afledede af vektorfelter, som jo selv er tangentielle, går vi nu i gang med at studere felter af vektorer, der står vinkelret på delmangfoldigheden M.

DEFINITION III.24. *Et* ***normalfelt*** *n på m er tilordningen til hvert punkt $m \in M$ af en vektor $n(m)$ i normalplanen $N_m(M)$ til M i m. Et normalfelt er med andre ord et snit i normalbundtet.*

LEMMA III.25. *Lad n være et normalfelt defineret i en koordinatomegn $f(O)$. Betragt funktionen $x \to n(x) = n(f(x))$ (notationsmæssigt skelner vi som sædvanlig ikke mellem funktionen på $f(O)$ og funktionen på O). Der gælder*

(175)
$$\boxed{\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n : Proj_{T_{f(x)}M}\left(\frac{\partial n}{\partial x_i}(x)\right) &= \sum_{k=1}^{n} n_{ik} f_{x_k}(x) \text{ hvor} \\ n_{ik} &= -\sum_{j=1}^{n} \langle h_{ij}, n\rangle g^{kj} . \end{aligned}}$$

BEVIS. Det er klart, at den første linie i (175) gælder for visse funktioner n_{ik}— $\{f_{x_k}(x)\}_{k=1}^{n}$ udgør jo en basis for $T_{f(x)}M$ i hvert punkt $f(x)$. Endvidere gælder, at $\langle n, f_{x_j}\rangle \equiv 0$. Differentieres denne ligning fås

(176)
$$\langle \frac{\partial n}{\partial x_i}(x), f_{x_j}\rangle + \langle n, f_{x_i x_j}\rangle = 0,$$

og dermed ved indsættelse af (175) samt brug af (155),

(177)
$$\sum_{k=1}^{n} n_{ik} g_{kj} = -\langle h_{ij}, n\rangle.$$

Udtrykket for n_{ik} følger let fra dette (se iøvrigt beviset for Proposition III.13 side 42). □

Vi definerer nu to nærtbeslægtede størrelser med 4 indices. Vi skal senere se, at de svarer til to 4-tensorer, som har fundamental betydning.

DEFINITION III.26.

(178)
$$\boxed{\begin{aligned} R^{p}_{ijk} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\langle h_{ik}, h_{jl}\rangle - \langle h_{ij}, h_{kl}\rangle\right) g^{lp}, \quad \text{og} \\ R_{lijk} &= \langle h_{ik}, h_{jl}\rangle - \langle h_{ij}, h_{kl}\rangle. \end{aligned}}$$

BEMÆRKNING III.27. *Vi kan gå frem og tilbage mellem de to slags R'er ved at hæve (eller sænke) et index via $\{g^{ij}\}$ ($\{g_{ij}\}$). Observer også, at R-erne afhænger kraftigt af den anden fundamentalform.*

SÆTNING III.28.

$$
\boxed{\begin{aligned}
R^p_{ijk} &= \frac{\partial ?^{\,p}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial ?^{\,p}_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{n}(?^{\,l}_{ik}?^{\,p}_{lj} - ?^{\,l}_{ij}?^{\,p}_{lk}) \\
R_{lijk} &= \frac{\partial ?_{ikl}}{\partial x_j} - \frac{\partial ?_{ijl}}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^{n}(?^{\,p}_{ij}?_{klp} - ?^{\,p}_{ik}?_{jlp}).
\end{aligned}} \tag{179}
$$

BEVIS. Vi kan beregne $f_{x_k x_i x_j} = \frac{\partial f_{x_i x_j}}{\partial x_k}$ ud fra (155). Vi vil specielt interessere os for tangentialkomponenterne og kan ved differentiationen af h_{ij} benytte Lemma III.25, idet h_{ij} jo er er normalfelt. Derved fås

$$
f_{x_k x_i x_j} = \sum_{p=1}^{n}(\frac{\partial ?^{\,p}_{ij}}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{n} ?^{\,l}_{ij}?^{\,p}_{lk} - \sum_{l=1}^{n}\langle h_{ij}, h_{kl}\rangle g^{lp})f_{x_p} \quad \mathrm{mod}\ N_{f(x)}(M), \tag{180}
$$

hvor "mod $N_{f(x)}(M)$" betyder, at højresiden og venstresiden har samme tangentialkomponent. Eftersom $f_{x_k x_i x_j} = f_{x_j x_i x_k}$ får vi n ligninger (en fra hver f_{x_p}), der forbinder h_{ij}-er med $?^{\,k}_{lp}$-er. Ved omgruppering af disse fås den første ligning i (179) let.

For at vise den anden ligning minder vi om, at $?_{ikl} = \langle f_{x_i x_k}, f_{x_l}\rangle$ ((156)), og dermed bliver

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}?_{ikl} - \frac{\partial}{\partial x_k}?_{ijl} &= \langle f_{x_j x_i x_k}, f_{x_l}\rangle + \langle f_{x_i x_k}, f_{x_j x_l}\rangle - \langle f_{x_k x_i x_j}, f_{x_l}\rangle - \langle f_{x_i x_j}, f_{x_k x_l}\rangle \\
&= \langle f_{x_i x_k}, f_{x_j x_l}\rangle - \langle f_{x_i x_j}, f_{x_k x_l}\rangle.
\end{aligned} \tag{181}
$$

Indsættes (155) i dette følger ligningen direkte. □

DEFINITION III.29. *Den 4-lineære form*

$$
\boxed{R(v^a, v^b, v^c, v^d) = \textstyle\sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{lijk} v^a_l v^b_i v^c_j v^d_k\ ,} \tag{182}
$$

*defineret på $T_m(M) \times T_m(M) \times T_m(M) \times T_m(M)$ og med værdier i $\mathbb{R}$ og hvor, som sædvanlig, nedre indices refererer til vektorens koordinater med hensyn til den kanoniske basis $\{f_{x_i}\}_{i=1}^n$, kaldes **Riemanns krumningstensor**.*

LEMMA III.30. *Riemanns krumningstensor afhænger ikke af den valgte parametrisering, men kun af tangentvektorerne. Den er antisymmetrisk i parret v^a, v^b og i parret v^c, v^d, men er symmetrisk hvis disse par byttes om.*

BEVIS. Det følger fra Definition III.26 (se også (154)) at

$$
R(v^a, v^b, v^c, v^d) = \langle H(v^a, v^c), H(v^b, v^d)\rangle - \langle H(v^a, v^d), H(v^b, v^c)\rangle. \tag{183}
$$

Påstandene følger direkte fra denne formel. $\square$

DEFINITION III.31.

$$R_{jl} = \sum_{i,k=1}^{n} R_{ijkl} g^{ik} = \sum_{k=1}^{n} R^k_{jkl} = \sum_{k=1}^{n} R^k_{lkj}. \tag{184}$$

Den tilsvarende bilinearform

$$T_m(M) \ni v^a, v^b \to \sum_{j,l=1}^{n} R_{jl} v^a_j v^b_l = Ric(v^a, v^b) \tag{185}$$

*kaldes **Ricci tensoren**. Endelig kaldes*

$$S = \sum_{j,l} g^{jl} R_{jl} \tag{186}$$

*for **skalarkrumningen** eller **krumningsinvarianten**.*

LEMMA III.32. *Ricci tensoren og skalarkrumningen er uafhængige af den valgte parametrisering.*

BEVIS. Dette går tilbage til, at Riemann tensoren samt metrikken $\{g_{ij}\}$ er invariant definerede. Endvidere fremkommer de ved *kontraktion* (sum over det samme øvre og nedre index), hvilket er en invariant (basis-uafhængig) operation. Se i øvrigt appendixet om tensorer. $\square$

2. Krumningen af hyperflader

DEFINITION III.33. *Lad V være et vektorrum af dimension $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$). En hyperflade M i V er da en indlejret delmangfoldighed af V af dimension n.*

Vi bemærker, at normalplanen i hvert punkt er 1-dimensional—specielt er der i hvert punkt $m \in M$ præcist to enhedsvektorer $\pm N(m)$, der "står vinkelret" på M.

DEFINITION III.34. *En hyperflade kaldes **orienterbar** såfremt der findes et differentiabelt felt N af enhedsnormalvektorer til M,*

$$\boxed{\forall m \in M : N(m) \in N_m(M) \text{ og } \|N(m)\| = 1\ .} \tag{187}$$

I det følgende vil vi antage, at vore hyperflader er orienterbare med en fast valgt funktion N. Faktisk vil vi det meste af tiden benytte et fast (men vilkårligt) kort (f, O), og man kan vise, at $f(O)$ altid er orienterbar. Bemærk i øvrigt, at $\forall m \in M : N(m) \in S^n$.

DEFINITION III.35. *Betragtet som afbildning $M \xrightarrow{N} S^n$ kaldes N for **Gaussafbildningen**.*

I den givne situation bliver $H(v)$ (side 41) proportional med N. Der er da tradition for også at kalde proportionalitetsfaktoren for den anden fundamentalform:

DEFINITION III.36. *For en hyperflade M kaldes også*

$$\mathrm{II}_m(v) = \langle H(v), N(m)\rangle \tag{188}$$

for ***den anden fundamentalform*** *på M.*

Vender vi nu tilbage til funktionerne h_{ij} ((150) side 41), kan vi definere

DEFINITION III.37.

$$\boxed{\begin{aligned} l_{ij}(x) &= \langle h_{ij}(x), N(x)\rangle \quad (\Leftrightarrow h_{ij} = l_{ij}\cdot N) \\ &= \langle f_{x_i x_j}, N(x)\rangle, \quad \textit{og} \\ l_i^k &= \sum_{j=1}^{n} g^{kj} l_{ij}. \end{aligned}} \tag{189}$$

Funktionerne l_{ij} kaldes ***koefficienterne af den anden fundamentalform*** *og funktionerne l_i^k kaldes* ***koefficienterne af den anden fundamentaltensor*** *(med hensyn til de lokale koordinater (f, O)). Bemærk i øvrigt, at l_{ij} er symmetrisk i i, j, hvorimod l_i^k normalt ikke er er symmetrisk i i, k.*

PROPOSITION III.38. *Differentialet dN_m kan betragtes som en lineær afbildning $T_m(M) \to T_m(M)$. Som sådan er det en symmetrisk afbildning. Med andre ord,*

$$\boxed{\forall v^a, v^b \in T_m(M) : \langle dN_m(v^a), v^b\rangle = \langle v^a, dN_m(v^b)\rangle\ .} \tag{190}$$

BEVIS. Lad os udregne differentialet af N m.h.t. vores kort (f, O):

$$dN(f_{x_i}) = \frac{d}{dt} N(f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n)) = \frac{\partial}{\partial x_i} N. \tag{191}$$

Af observationen $(N, \frac{\partial}{\partial x_i} N) = 0$ fås, at første linie i (175) kan skærpes til

$$\frac{\partial}{\partial x_i} N = -\sum_{l,k=1}^{n} \langle h_{il}, N\rangle g^{kl} f_{x_k} = -\sum_{l,k=1}^{n} l_{il} g^{kl} f_{x_k} = -\sum_{k=1}^{n} l_i^k f_{x_k}, \tag{192}$$

(altså ikke blot “modulo noget”). Vi ser, at resultatet er en vektor i $T_{f(x)}(M)$, hvilket vi nu også kunne have forudset, da tangentplanen til $N(x) \in S^n$ jo netop er parallel med tangentplanen til $f(x) \in M$. Da vi per linearitet har, at $dN(\sum_{i=1}^n t_i f_{x_i}) = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_i} N$ fås nu

$$\langle dN(\sum_{i=1}^{n} t_i f_{x_i}), \sum_{j=1}^{n} s_j f_{x_j}\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l,k=1}^{n} t_i s_j l_{il} g^{kl} g_{kj} = -\sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} t_i s_j. \tag{193}$$

Symmetrien fremgår klart af dette. □

BEMÆRKNING III.39. *Ligningen* (190) *er definitionen på, at en lineær afbildning er symmetrisk. I en* <u>*orthonormal*</u> <u>*basis*</u> $\{e_i\}_{i=1}^n$ *bliver matricen symmetrisk.*

Vi minder nu om en velkendt sætning fra lineær algebra, der siger, at enhver symmetrisk matrix kan diagonaliseres.

DEFINITION III.40. *Lad* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *være en orthonormalbasis i* $T_m(M)$ *således, at*

$$\boxed{\forall i = 1, \ldots, n : -dN_m(e_i) = K_i e_i \ .} \tag{194}$$

Retningerne bestemt af vektorerne $e_i, i = 1, \ldots, n$, *kaldes* ***hovedretningerne*** *og egenværdierne* $K_1, \ldots, K_n$ *kaldes de tilsvarende* ***hovedkrumninger***. *Videre defineres* ***Gausskrumningen*** K *og* ***middelkrumningen*** A *ved*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} K = \det(-dN) & = & \prod_i K_i \ \ og \\ A = \dfrac{1}{n}\cdot \operatorname{tr}(-dN) & = & \dfrac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} K_i. \end{array}} \tag{195}$$

PROPOSITION III.41. *Udtrykt i vores basis* $\{f_{x_i}\}_{i=1}^n$ *er* $dN \equiv -\{l_i^k\}$. *Specielt er derfor*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} K = \det(\{l_i^k\}) & = & \det(\{l_{ij}\})/\det(\{g_{ij}\}) \ \ og \\ A = \dfrac{1}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n} l_i^i & = & \dfrac{1}{n}\cdot \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} l_{ij}. \end{array}} \tag{196}$$

BEVIS. Det følger af (191) og (192), at matricen for dN er givet ved at have den ik-te koefficient givet ved $-\sum_{l=1}^n l_{il} g^{kl}$. Men dette er jo i følge (189) netop det angivne. Det resterende følger direkte fra Definition III.40. □

DEFINITION III.42. *Lad* e *betegne en enhedsvektor i* $T_m(M)$. *Da definerer* e *sammen med* $N(m)$ *en to-dimensional plan. Snittet mellem denne og* M *er (lokalt) en regulær kurve* α_e *(overvej) som, når den parametriseres ved buelængde* s *ud fra* m, *opfylder:* $\alpha_e(0) = m$, $\alpha_e'(0) = e$ *og* $\alpha_e''(0) \propto N(m)$ *(proportionale). (Den sidste* *observation følger fra, at $\alpha_e''(0)$ dels er vinkelret på e, dels ligger i planen udspændt af $\{e, N(m)\}$—for her ligger hele kurven α_e jo per definition). Denne kurve kaldes* ***normalsnittet*** *bestemt af e. Vi har altså $\alpha_e''(0) = k_n(e) \cdot N(m)$ hvor $\|k_n(e)\|$ er lig normalsnittets krumning. Vi kalder $k_n(e)$* ***normalkrumningen*** *i e's retning.*

Vi har nu følgende geometriske tolkning af den anden fundamentalform:

PROPOSITION III.43. *Lad $e \in T_m(M)$ være en enhedsvektor. Da er*

$$\boxed{\mathrm{II}_m(e) = k_n(e)\,.} \tag{197}$$

BEVIS. Det følger fra (193) kombineret med (189), at der gælder

$$\forall v \in T_m(M) : \mathrm{II}_m(v) = -\langle dN(v), v\rangle = \langle H(v), N\rangle \tag{198}$$

og derfor specielt for enhedsvektorer. Påstanden vedrørende krumningen følger fra Meusniers Sætning side 41. $\square$

Vi vender os nu mod Riemann tensoren. Vi kan give en særlig simpel formel for denne ved benyttelse af vektorerne $\{e_i\}_{i=1}^n$ fra Definition III.40:

SÆTNING III.44.

(199)

$$\boxed{R(v^a, v^b, v^c, v^d) = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^n K_i K_j \begin{vmatrix} \langle v^a, e_i\rangle & \langle v^a, e_j\rangle \\ \langle v^b, e_i\rangle & \langle v^b, e_j\rangle \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \langle v^c, e_i\rangle & \langle v^c, e_j\rangle \\ \langle v^d, e_i\rangle & \langle v^d, e_j\rangle \end{vmatrix}}$$

BEVIS. Vi begynder med at observere, at

$$\forall v^x, v^y \in T_m(M) : H(v^x, v^y) = -\langle dN_m(v^x), v^y\rangle \cdot N, \tag{200}$$

hvilket følger fra (154) sammenholdt med (193). Hvis vi udvikler en vektor v^x på vores basis $\{e_i\}_{i=1}^n$ fås

$$v^x = \sum_{i=1}^n \langle v^x, e_i\rangle \cdot e_i \text{ og dermed } -dN_m(v^x) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot \langle v^x, e_i\rangle \cdot e_i. \tag{201}$$

Indsættes dette i (183) fås

(202)

$$R(v^a, v^b, v^c, v^d) = \\ \textstyle\sum_{i,j=1}^n K_i K_j (\langle v^a, e_i\rangle\langle v^c, e_i\rangle\langle v^b, e_j\rangle\langle v^d, e_j\rangle - \langle v^a, e_i\rangle\langle v^d, e_i\rangle\langle v^b, e_j\rangle\langle v^c, e_j\rangle),$$

og dermed, p.g.a. symmetrien,

(203)

$$R(v^a, v^b, v^c, v^d) = \\ \textstyle\sum_{j,i=1}^n K_j K_i (\langle v^a, e_j\rangle\langle v^c, e_j\rangle\langle v^b, e_i\rangle\langle v^d, e_i\rangle - \langle v^a, e_j\rangle\langle v^d, e_j\rangle\langle v^b, e_i\rangle\langle v^c, e_i\rangle).$$

Lægges de to ligninger sammen og ganges resultatet med $\frac{1}{2}$, fås det ønskede. $\square$

I tilfældet $n = 2$ er

$$\left|\begin{matrix} \langle v^x, e_1\rangle & \langle v^x, e_2\rangle \\ \langle v^y, e_1\rangle & \langle v^y, e_2\rangle \end{matrix}\right|^2 = \langle v^x, v^x\rangle\langle v^y, v^y\rangle - \langle v^x, v^y\rangle^2, \tag{204}$$

og denne størrels angiver kvadratet på arealet af parallellogrammet udspændt af v^x og v^y.

SÆTNING III.45. (GAUSSES TEOREMA EGREGIUM[3]) *For en hyperflade i* $\mathbb{R}^3$ *afhænger Gausskrumningen K kun af den første fundamentalform. Helt præcist gælder, at $K = R(v^x, v^y, v^x, v^y)$, hvis v^x, v^y er et par vinkelrette enhedsvektorer i tangentplanen.*

BEVIS. Der gælder her, at $K = K_1K_2$. Endvidere behøver man kun at summere over $i \neq j$ i (199), og det giver i vores tilfælde to identiske led. Resultatet følger nu af (204). $\square$

BEMÆRKNING III.46. *Det overraskende og "ypperlige" ved denne sætning er, at selvom krumning er defineret i forhold til det omkringliggende rum, så findes der en krumningsstørrelse, K, som kun afhænger af forhold på selve fladen. Den kan således bestemmes af et "fladedyr".*

LEMMA III.47. *For en hyperflade M gælder*

$$\begin{aligned} Ric(v^b, v^d) &= \sum_{i\neq j} K_iK_j\langle v^b, e_j\rangle\langle v^d, e_j\rangle \ \text{ og} \\ S &= \sum_{i\neq j} K_iK_j = \left(\sum_{i=1}^n K_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n K_i^2. \end{aligned} \tag{205}$$

Når specielt $\dim(M) = 2$ *er*

$$Ric(v^b, v^d) = K \cdot \langle v^b, v^d\rangle \ \text{ og } S = 2K. \tag{206}$$

BEVIS. Resultatet vedrørende Ric fås fra (199) ved at sætte $v^a = v^c = e_k$ og derefter summe over k. Se i øvrigt (185) og bemærk, at eftersom $\{e_i\}_{i=1}^n$ er en orthonormalbasis, svarer $\{g^{ij}\}$ til identiteten. Endelig fås S ved at sætte $v^b = v^d = e_l$ og summe over l. $\square$

[3]Egregium: Udsøgt, ypperligt.

DEFINITION III.48. *Lad v^a, v^b være to orthogonale enhedsvektorer i $T_m(M)$. Da kaldes*

$$R(v^a, v^b, v^a, v^b) \tag{207}$$

snitkrumningen *af snittet bestemt at v^a, v^b. Vi siger, at M er positivt (negativt) krummet i m, hvis alle snitkrumninger er positive (negative).*

BEMÆRKNING III.49. *Fællesmængden mellem rummet udspændt af $\{N_m, v^a, v^b\}$ og M er lokalt en 2-dimensional delmangfoldighed. Snitkrumningen er præcist Gausskrumningen af denne delmangfoldighed i m (se i øvrigt Teorema Egregium). Det er klart, at denne kun afhænger af planen udspændt af v^a, v^b.*

DEFINITION III.50. *Bilinearformen på $T_m(M)$ givet ved*

$$E(v^a, v^b) = Ric(v^a, v^b) - \frac{1}{2}S \cdot \langle v^a, v^b \rangle \tag{208}$$

kaldes ***Einstein tensoren*** *i m.*

BEMÆRKNING III.51. *Metrikken $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skal erstattes med et såkaldt Lorentz indre produkt (eller Lorentz metrik),$\{g_{ij}\} \to \{e_{ij}\}$*

$$e_{11} = 1, e_{22} = \cdots = e_{nn} = -1 \text{ og } e_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j, \tag{209}$$

og dimensionen af M skal være fire, for at vi får den "rigtige" Einstein tensor.

For hyperflader i $\mathbb{R}^3$ benyttes følgende terminologi:

DEFINITION III.52. *Et punkt m kaldes*

- elliptisk *hvis* $\det(dN_m) > 0$.
- hyperbolsk *hvis* $\det(dN_m) < 0$.
- parabolsk *hvis* $\det(dN_m) = 0$ *men* $\operatorname{tr}(dN_m) \neq 0$.
- planært *hvis* $dN_m = 0$.

Disse tilfælde er disjunkte og udtømmer samtlige muligheder (overvej).

3. Abstrakte mangfoldigheder

Vi skal her betragte abstrakte mangfoldigheder udstyrede med en metrik. Vi vil forsøge at generalisere så mange begreber som muligt fra tilfældet med en delmangfoldighed.

DEFINITION III.53. *En (abstrakt) Riemannsk mangfoldighed er en differentiabel mangfoldighed udstyret med en metrik g, hvor vi med metrikken g forstår tilordningen til hvert tangentrum $T_m(M)$ af en symmetrisk, positiv definit bilinearform*

$g_m(\cdot,\cdot)$ (ofte også betegnet $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ eller blot $\langle\cdot,\cdot\rangle$) på en sådan måde, at i et vilkårligt kort (f,O) er samtlige funktioner

$$\boxed{\forall i,j=1,\dots,n: g_{ij}(x) \overset{Def.}{=} g_{f(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)} \tag{210}$$

uendeligt ofte differentiable på O. Hvis X og Y er vektorfelter på M er funktionen $m \to g_m(X_m,Y_m) = \langle X_m,Y_m\rangle$ således en C^∞-funktion. Denne vil oftest blive betegnet $\langle X,Y\rangle$.

Fra nu af betegner M altid en vilkårlig Riemannsk mangfoldighed af dimension n. $\mathcal{D}^1(M)$ betegner også her mængden af glatte vektorfelter på M. Vi starter med at udnævne en tidligere sætning (Proposition III.13) til at være en definition:

Definition III.54. ***Christoffelsymbolerne af første art*** *og* ***af anden art*** *(med hensyn til parametriseringen (f,O)) er givet ved, henholdsvis,*

$$\boxed{\begin{aligned} ?_{ijk} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ik}+\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right) \quad \textit{og} \qquad (211)\\ ?^r_{ij} &= \sum_{l=1}^n g^{rl}?_{ijl}, \end{aligned}}$$

hvor (g^{ij}) betegner den inverse matrix til (g_{ij}).

Vores første generalisation er nu

Definition III.55. *Lad X og Y være vektorfelter på M. Den* ***kovariant afledede*** *$\nabla_X Y$ af Y i X's retning er da det vektorfelt, der, når i lokale koordinater*

$$X=\sum_{j=1}^n X^j\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \textit{og} \quad Y=\sum_{i=1}^n Y^i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{212}$$

er givet ved

$$\boxed{\nabla_X Y = \textstyle\sum_{j=1}^n\left(X(Y^j)+\sum_{i,k=1}^n\Gamma^j_{ik}X^kY^i\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\ .} \tag{213}$$

Denne definition er direkte overtaget fra den anden linie i (171) side 47, hvor led af typen $\frac{dv_i}{dt}$ netop er lig $(dv_i(\alpha'(t))) = (\alpha'(t))(v_i)$, og hvor den sidste ligning er definitionen på, hvorledes vektorfelter virker på funktioner—eller 1-former af typen $d\psi$ virker på vektorfelter. Se i øvrigt Definition II.47. Vi kan endvidere også overføre definitionen af den kovariant afledede af et vektorfelt langs en kurve ved simpelthen at erstatte leddene med $f_{x_i}(i=1,\dots,n)$ i Proposition III.22 side 47 med $\frac{\partial}{\partial x_i}(i=1,\dots,n)$.

Definitionen er ved første øjekast ganske afhængig af valget af lokale koordinater. At den alligevel til syvende og sidst er uafhængig af disse følger umiddelbart fra den næste sætning.

PROPOSITION III.56. *Den lineære differentialoperator defineret i lokale koordinater gennem (213) opfylder for alle vektorfelter X, Y, Z følgende ligninger:*

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (214) & \nabla_X Y - \nabla_Y X & = & [X,Y] \quad \textit{og} \\ (215) & \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle & = & Z(\langle X,Y\rangle)\,. \end{array}}$$

En afbildning ∇, der opfylder (214) og (215), er entydigt bestemt.

BEVIS. Da Christoffelsymbolet $?^i_{jk}$ er symmetrisk i j, k, følger det fra (213), at venstresiden i (214) er givet ved

$$\sum_{j=1}^{n}(X(Y^j) - Y(X^j))\frac{\partial}{\partial x_j} = [X,Y]. \tag{216}$$

Lad nu $Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Vi har da

$$\begin{aligned}
(217)\ \langle \nabla_Z X, Y\rangle &= \sum_{j,l=1}^{n}(Z(X^j) + \sum_{i,k=1}^{n} ?^j_{ik} Z^k X^i) g_{jl} Y^l \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} g_{jl} Z(X^j) Y^l + \sum_{i,k,l=1}^{n} ?_{ikl} Z^k X^i Y^l, \\
(218)\ \langle \nabla_Z Y, X\rangle &= \sum_{j,l=1}^{n}(Z(Y^j) + \sum_{i,k=1}^{n} ?^j_{ik} Z^k Y^i) g_{jl} X^l \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} g_{jl} Z(Y^j) X^l + \sum_{i,k,l=1}^{n} ?_{ikl} Z^k Y^i X^l, \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} g_{jl} Z(Y^l) X^j + \sum_{i,k,l=1}^{n} ?_{lki} Z^k Y^l X^i, \text{ og} \\
(219)\quad Z\langle X, Y\rangle &= \sum_{k=1}^{n} Z_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j,l} g_{jl} X^j Y^l \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} g_{jl}(Z(X^j)Y^l + Z(Y^l)X^j) + \sum_{j,k,l=1}^{n} Z^k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{jl}\right) X^j Y^l \\
&= \sum_{j,l=1}^{n} g_{jl}(Z(X^j)Y^l + Z(Y^l)X^j) + \sum_{i,k,l=1}^{n} Z^k \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{il}\right) X^i Y^l.
\end{aligned}$$

Bemærk, at den tredje linie i (218) og i (219) fremkommer fra den anden ved ombytning af summationsindices. Da det indre produkt $\langle X, Y\rangle$ er symmetrisk i X, Y, følger (215) nu fra disse formler på grund af (158) side 43, som stadig gælder, jævnfør (211).

Entydigheden fås som følger: Antag, at vi har ∇^1 og ∇^2, der opfylder (214) og (215) og lad $\tilde{\nabla} = \nabla^1 - \nabla^2$. Vi har da:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_Y X \text{ og } \langle \tilde{\nabla}_Z X, Y\rangle = -\langle X, \tilde{\nabla}_Z Y\rangle. \tag{220}$$

Dermed bliver

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle &= -\langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\rangle = -\langle Y, \tilde{\nabla}_Z X\rangle = \langle \tilde{\nabla}_Z Y, X\rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y Z, X\rangle = -\langle Z, \tilde{\nabla}_Y X\rangle = -\langle Z, \tilde{\nabla}_X Y\rangle. \end{aligned} \tag{221}$$

Altså er $\tilde{\nabla}$ identisk 0. □

BEMÆRKNING III.57. *Man kan faktisk angive en formel for* $\langle \nabla_Z X, Y\rangle$. *Se Opgave* 1.113.

KOROLLAR III.58. *Der gælder* $\forall \psi, \psi_1, \psi_2 \in C^\infty(M) \forall X_1, X_2, Y \in \mathcal{D}^1(M)$*:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \nabla_X \textit{ er en lineær afbildning } \mathcal{D}^1(M) \to \mathcal{D}^1(M) \\ \bullet\ \nabla_{(\psi_1 \cdot X_1 + \psi_2 \cdot X_2)} Y = \psi_1 \cdot \nabla_{X_1} Y + \psi_2 \cdot \nabla_{X_2} Y \quad \textit{og} \\ \bullet\ \nabla_X(\psi \cdot Y) = \psi \cdot \nabla_X Y + (X(\psi)) \cdot Y. \end{array}} \tag{222}$$

BEVIS. Dette følger direkte fra (213). □

DEFINITION III.59. *En tilordning* ∇*, der opfylder* (222), kaldes en **affin sammenhæng**. For fastholdt X kaldes ∇_X for **kovariant differentiation** mht. X.

Lad os for et øjeblik indføre en funktion F defineret på tripler af vektorfelter og med værdier i mængden af vektorfelter:

$$F(X, Y, Z) \stackrel{Def.}{=} (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}) Z. \tag{223}$$

LEMMA III.60. *Lad* $\psi \in C^\infty(M)$. *Da er*

$$F(\psi \cdot X, Y, Z) = F(X, \psi \cdot Y, Z) = F(X, Y, \psi \cdot Z) = \psi \cdot F(X, Y, Z). \tag{224}$$

BEVIS. Betragt først $\psi \cdot X$: Vi har at $[\psi \cdot X, Y] = \psi \cdot [X, Y] - (Y(\psi)) \cdot X$. Derfor bliver de "overflødige led" henholdsvis $(Y(\psi) \cdot \nabla_X Z$ (fra $\nabla_Y(\psi \cdot \nabla_X Z)$ og

$-(Y(\psi)\cdot\nabla_X Z$ (fra $\nabla_{-(Y(\psi))\cdot X}Z$). Dermed er $F(\psi\cdot X,Y,Z)=\psi\cdot F(X,Y,Z)$. Beviset for Y går naturligvis tilsvarende. Lad os endelig betragte $\psi\cdot Z$:

$$
\begin{aligned}
& F(X,Y,\psi\cdot Z)= \\
& \nabla_X(\psi\cdot\nabla_Y Z+(Y(\psi))\cdot Z)-\nabla_Y(\psi\cdot\nabla_X Z+(X(\psi))\cdot Z) \\
- & ([X,Y](\psi))\cdot Z-\psi\cdot\nabla_{[X,Y]}Z \\
= & \psi\cdot F(X,Y,Z)+(X(\psi))\cdot(\nabla_Y Z-\nabla_Y Z) \\
+ & (Y(\psi))\cdot(\nabla_X Z-\nabla_X Z)+(X(Y(\psi))-Y(X(\psi))-[X,Y](\psi))\cdot Z \\
= & \psi\cdot F(X,Y,Z).
\end{aligned}
\tag{225}
$$

□

KOROLLAR III.61. *Værdien $F(X,Y,Z)(m)$ af $F(X,Y,Z)$ i et punkt m afhænger kun af værdien af X_m, Y_m og Z_m.*

BEVIS. Dette er et generelt fænomen ved afbildninger, der er "lineære over $C^\infty(M)$", se i øvrigt opgaverne. □

BEMÆRKNING III.62. *Afbildningen $T_m(M)\times T_m(M)\times T_m(M)\ni X_m,Y_m,Z_m\to F(X_m,Y_m,Z_m)(m)\in T_m(M)$ er klart multilineær. Det er derfor et element i rummet $L(T_m(M)\otimes T_m(M)\otimes T_m(M),T_m(M))\cong T_m^*(M)\otimes T_m^*(M)\otimes T_m^*(M)\otimes T_m(M)$. Afbildningen $m\to F(\cdot,\cdot,\cdot)(m)$ er således et tensorfelt af type* $(1,3)$.

Vi definerer nu symbolerne R^p_{ijk} udfra ligningen (179) side 49. Samtidigt definerer vi symbolerne R_{pjkl} som anført (derved slipper vi for at vise, at denne formel gælder, hvis vi definerer disse symboler som i anden linie i (179):

$$
R^j_{rkl} \overset{Def.}{=} \frac{\partial ?^j_{rl}}{\partial x_k}-\frac{\partial ?^j_{rk}}{\partial x_l}+\sum_{i=1}^n(?^i_{rl}?^j_{ik}-?^i_{rk}?^j_{il}) \tag{226}
$$

$$
R_{prkl} \overset{Def.}{=} \sum_{j=1}^n g_{jp}R^j_{rkl}. \tag{227}
$$

Vi kan da vise:

PROPOSITION III.63. *Der gælder*

$$\boxed{\begin{array}{llcl}
(228) & (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z & = & \displaystyle\sum_{j,k,r,l=1}^{n} R^j_{rkl}X^kY^lZ^r\frac{\partial}{\partial x_j} \\
(229) & \langle(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z, W\rangle & = & \displaystyle\sum_{p,r,k,l=1}^{n} R_{prkl}X^kY^lZ^rW^p \\
 & & = & -R(X,Y,Z,W).
\end{array}}$$

BEVIS. Vi gør følgende observation, som gør beviset meget lettere: Eftersom værdien af venstresiden af (228) i et punkt p kun afhænger af værdierne af X, Y, Z i dette punkt, kan vi erstatte X, Y, Z med vektorfelter $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$, hvis koefficientfunktioner $\tilde{X}^k, \tilde{Y}^l, \tilde{Z}^j$ er konstante og lig de tilsvarende værdier af X, Y og Z's koefficientfunktioner i p. Vi gør dette, idet vi samtidigt dropper tilderne. Vi har så $\forall i = 1, \ldots, n : Y(X^i) = 0$, og tilsvarende med X og Y byttet om. Specielt er Lieparantesen $[X, Y] = 0$. Endelig kan vi benytte (213) to gange til at udregne

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y Z &= \nabla_X \sum_{j,r,l} ?^{\,j}_{rl} Y^l Z^r \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j,k,r,l}^{n} \left(\frac{\partial ?^{\,j}_{rl}}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} ?^{\,i}_{rl} ?^{\,j}_{ik} \right) X^k Y^l Z^r \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{230}$$

Hvis vi trækker det tilsvarende udtryk for $\nabla_Y\nabla_X Z$ fra og benytter (226) fås (228). Under brug af (227) følger (229) direkte fra dette. □

Hvis vi vender tilbage til definitionen af den kovariant afledede, kan vi se, at vi overtog formlerne direkte fra tilfældet af en delmangfoldighed. Det er således klart, at vi kan udvide $(\nabla_X Y)(p)$ til at gælde for vektorfelter Y, der er definerede på en kurve α gennem p, der har X_p som tangentvektor i p, og vi kan direkte generalisere begreberne **geodætisk krumning** og **geodætisk hovednormal**. Mere vigtigt er følgende:

DEFINITION III.64. *Lad $I \ni t \to X(t)$ være et vektorfelt langs en kurve $\alpha(t)$ i M. Vi siger, at X er **parallelt langs α**, eller at X er et **parallelfelt**, såfremt*

$$\boxed{\forall t \in I : \nabla_{\alpha'(t)} X(t) = 0\ .} \tag{231}$$

Hvis vektorfeltet $X(t) = \alpha'(t)$ langs $\alpha(t)$ er parallelt, kaldes α en geodæt.

$$\boxed{\alpha \ \textit{geodæt} \Leftrightarrow \nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) \equiv 0\ .} \tag{232}$$

Lad $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$ og $\alpha(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ i lokale koordinater (f, O). Det følger da direkte fra (171) side 47 at

Proposition III.65 (Parallelfelt). *Y er et parallelfelt langs α hvis og kun hvis*

$$\boxed{\forall j = 1, \ldots, n : \frac{dY^j(t)}{dt} + \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_{ik}^{j}(\alpha(t)) \frac{dx^k(t)}{dt} Y^i(t) = 0\ .} \tag{233}$$

Proposition III.66 (Geodæt). *Kurven α er en geodæt hvis og kun hvis*

$$\boxed{\forall t \in I : \forall j = 1, \ldots, n : \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma_{ik}^{j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 0\ .} \tag{234}$$

Givet et punkt $m \in M$ og en vektor $v_m \in T_m(M)$ da findes en entydig (maksimal) geodæt β med $\beta(0) = m$ og $\beta'(0) = v_m$. Givet et kurve α i M med $\alpha(t_1) = p$ og $\alpha(t_2) = q$ og givet en vektor $Y_p \in T_p(M)$, da findes et entydigt bestemt parallelfelt $Y(t)$ langs α således, at $Y(t_1) = Y_p$. (Vi vil ikke bevise disse sætninger).

Definition III.67. *Lad notationen være som ovenfor. Med $Y_p \to \mathcal{P}_{\alpha}^{q}(Y_p) = Y(q)$ betegner vi den afbildning $T_{\alpha(t_1)} \to T_{\alpha(t_2)}$, der til et $Y_{t_1} \in T_{\alpha(t_1)}$ knytter værdien i q af det entydige parallelfelt $Y(t)$ langs α, der opfylder, at $Y(t_1) = Y_{t_1}$. $\mathcal{P}_{\alpha}^{q}$ kaldes* ***paralleltransport*** *langs α fra $\alpha(t_1)$ til $\alpha(t_2)$.* ***Der gælder, at dette er en lineær isometri.*** *(Se opgaverne)*

Exempel: Lad $M = S^2$ og $f(\varphi, \theta) = (\sin\theta \cdot \cos\varphi, \sin\theta \cdot \sin\varphi, \cos\theta)$ for $\varphi \in]0, 2\pi[, \theta \in]0, \pi[$. Lad os se på parallelfelter langs første-koordinatkurverne $t \xrightarrow{\alpha} f(t, \theta) = (\sin\theta \cos t, \sin\theta \sin t, \cos\theta)$: I lokale koordinater er $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t, \theta)$, og derfor er $\frac{dx_2}{dt} = 0$ og $\frac{dx_1}{dt} = 1$. Ligningen for et parallelfelt bliver i denne situation således (233):

$$\frac{dY^j(t)}{dt} + \sum_i ?_{i1}^{\,j} Y^i(t) = 0. \tag{235}$$

Første trin på vejen er nu at udregne de involverede Christoffelsymboler. Dette gøres via Proposition III.13 eller (211). Vi udelader regnerierne. Resultatet kan skrives på matrixform som

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Y^\varphi \\ Y^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta / \sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^\varphi \\ Y^\theta \end{pmatrix}. \tag{236}$$

Denne differentialligning kan enten løses ved at differentiere en gang til og isolere Y^φ (hhv. Y^θ) eller ved brug af formlen $Y(t) = (e^{A \cdot t}) \cdot Y(0)$ for løsningen til

$Y'(t) = A \cdot Y(t)$—som også gælder, når A er en konstant matrix. Sæt $\mu = \cos\theta$, da er

$$\begin{pmatrix} Y^\varphi(t) \\ Y^\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu t & -\sin\mu t/\sin\theta \\ \sin\theta\sin\mu t & \cos\mu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^\varphi(0) \\ Y^\theta(0) \end{pmatrix}. \tag{237}$$

Det tilsvarende resultat for kurverne $\varphi = \varphi_0 =$ konstant er følgende:

$$\begin{pmatrix} Y^\varphi(\varphi_0,\theta) \\ Y^\theta(\varphi_0,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^\varphi(\varphi_0,\frac{\pi}{2}) \\ Y^\theta(\varphi_0,\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}. \tag{238}$$

Hvis vi indsætter dette resultat i formlen $Y^\varphi \cdot f_\varphi + Y^\theta \cdot f_\theta$ fås et ganske simpelt resultat, hvilket hænger sammen med, at kurverne $\varphi =$ konstant er geodæter. (Se opgaverne).

Bemærkning III.68. *En af de centrale egenskaber ved rette linier er, at de angiver den korteste vej mellem to punkter. Vi skal her se, at geodæter har samme egenskab, i det mindste lokalt.*
Lad os derfor betragte kurver, der løber helt indenfor en koordinatomegn $f(O)$: Betragt to punkter x_0, x_1 i $f(O)$ og samtlige kurver $\alpha : I = [0,1] \to f(O)$ med $\alpha(o) = x_0$ og $\alpha(1) = x_1$. Blandt alle disse vil vi nu søge den kurve, der har den mindste kurvelængde,

$$s = \int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt. \tag{239}$$

Vi kan ligeså godt forsøge at minimere s^2. Nu gælder

$$s^2 = \langle \|\alpha'\|, 1\rangle^2_{L^2([0,1])} \le \int_0^1 \|\alpha'\|^2 dt, \tag{240}$$

med lighed hvis og kun hvis $\|\alpha'\| = c$, altså hvis og kun hvis kurveparametren er proportional med kurvelængde. Vi kan derfor ligeså godt antage dette. Men herved bliver vores problem ækvivalent med at minimere integralerne

$$I(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\|^2 dt \tag{241}$$

over den samme mængde af α-er som før.
*Antag nu, at $\alpha(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = f(x(t))$ er en (**den**) kurve for hvilken minimum opnås. Lad $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ være en vilkårlig kurve i O med $y(0) = y(1) = 0$ og betragt $f(x(t) + \epsilon \cdot y(t))$ for ϵ tilstrækkelig lille. Der må da*

gælde:

(242)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 g_{ij}(x(t)+\epsilon\cdot y(t)) \frac{d(x_i(t)+\epsilon\cdot y_i(t))}{dt}\frac{d(x_j(t)+\epsilon\cdot y_j(t))}{dt}dt &= 0 \Leftrightarrow \\
\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_0^1 y_l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt}dt + 2\sum_{i,j}^{n}\int_0^1 g_{ij}\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dy_j(t)}{dt}dt &= 0 \Leftrightarrow \\
\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_0^1 y_l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt}dt - 2\sum_{i,l}^{n}\int_0^1 \frac{d(g_{il}x_i'(t))}{dt}y_l(t)dt &= 0,
\end{aligned}$$

hvor det sidste led fremkommer ved delvis integration efterfulgt af skift af summationsindex. Eftersom denne ligning skal gælde for alle kurver y*, må der gælde*

$$\forall l : \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt} - 2\sum_{i}^{n}\frac{d(g_{il}x_i'(t))}{dt} = 0. \tag{243}$$

Udføres differentiationen i det sidste led fås, efter en omgruppering,

$$\forall l : 2\sum_{i}^{n} g_{il}\frac{d^2x_i(t)}{dt^2} + \sum_{i,j}^{n}(2\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l})\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt} = 0. \tag{244}$$

På grund af, at $\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt}$ *er invariant under ombytning af* i *og* j*, ændres det sidste led ikke, hvis vi erstatter parantesen med* $\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} = ?_{ijl}$*. Gøres dette, efterfulgt af multiplikation med* g_{lk} *og sum over* l *fås*

$$\forall k : \frac{d^2x_k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j}^{n} ?_{ij}^{k}\frac{dx_i(t)}{dt}\frac{dx_j(t)}{dt} = 0. \tag{245}$$

Dette er præcist ligningerne for en geodæt (Proposition III.66*).*

KAPITEL IV

Differentialformer

1. Generelle tensorfelter

Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed og lad $m \in M$.

DEFINITION IV.1.

$$\boxed{T_m^{r,s}(M) = \underbrace{T_m(M) \otimes \cdots \otimes T_m(M)}_{r} \otimes \underbrace{T_m^*(M) \otimes \cdots \otimes T_m^*(M)}_{s} \ .} \tag{246}$$

I fortsættelse af Definition II.52 side 32 definerer vi nu

DEFINITION IV.2.

$$\boxed{T^{r,s}(M) = \{w_m \mid m \in M \ \ og \ w_m \in T_m^{r,s}(M)\} \ .} \tag{247}$$

Specielt kaldes bundtet $T^{0,1}(M)$ for ***kotangentbundtet****, og betegnes også ofte $T^*(M)$. Endvidere er $T^{1,0}(M) = T(M)$. Generelt kaldes $T^{r,s}(M)$ for* ***bundtet af (r,s)-tensorer****, eller* ***bundtet af tensorer af type r,s****.*

PROPOSITION IV.3. *Lad (f, O) være et kort på M. Da udgør*

$$\boxed{\{(\tfrac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \tfrac{\partial}{\partial x_{j_r}}) \otimes (dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_s}) \mid 1 \leq j_1, \ldots, j_r, i_1, \ldots, i_s \leq n\}} \tag{248}$$

en basis for $T_m^{r,s}(M)$ for hvert $m \in f(O)$.

BEVIS. Dette følger direkte fra Proposition B.13. □

Vi vil ikke her bevise, at $T^{r,s}(M)$ er en differentiabel mangfoldighed, men nøjes med at henvise til diskussionen side 32. Vi kan nu udvide Definition II.55 og Definition II.56 til

Definition IV.4. *Afbildningen* $\pi : T^{r,s}(M) \to M$ *givet ved*

$$\boxed{\forall w_m \in T(M) : \pi(w_m) = m} \tag{249}$$

kaldes den ***kanoniske projektion*** *af* $T^{r,s}(M)$ *på* M.

Definition IV.5. *En afbildning* $s : M \to T^{r,s}(M)$*, som opfylder*

$$\boxed{\forall m \in M : \pi(s(m)) = m\ ,} \tag{250}$$

kaldes et ***snit*** *i bundtet* $T^{r,s}(M)$*. Vi lader* $\mathcal{D}^{r,s}(M)$ *betegne mængden af glatte snit, hvor differentiabilitet er i betydningen af en afbildning fra en mangfoldighed til en anden. Elementerne i* $\mathcal{D}^{r,s}(M)$ *kaldes* ***tensorfelter af type r,s***.

Exempel IV.6. *Metrikken* g *kan opfattes som et tensorfelt af type* $(0,2)$*. Riemanns krumningstensor er et tensorfelt af type* $(0,4)$.

2. Differentialformer

I analogi med det foregående definerer vi

Definition IV.7.

$$\boxed{\wedge^k T^*(M) = \{\omega_m \mid m \in M \ \text{og}\ \omega_m \in \wedge^k T^*_m(M)\}\ ,} \tag{251}$$

og $\pi : \omega_m \to m$ *betegner den* ***kanoniske projektion*** *af* $\wedge^k T^*(M)$ *på* M*. Rummet* $\wedge^k T^*(M)$ *kaldes* ***det k-te ydre bundt over M***.

Vi få let fra Proposition B.20, at

Proposition IV.8. *Lad* (f,O) *være et kort på* M*. Da udgør*

$$\boxed{\{(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}} \tag{252}$$

en basis for $\wedge^k T^*_m(M)$ *for hvert* $m \in f(O)$.

Definition IV.9. *Et* ***snit*** ω *i* $\wedge^k T^*(M)$ *kaldes en* ***k-form*** *eller en* ***differentialform*** *af grad* k*. Rummet af glatte* k*-former betegnes* $\Omega^k(M)$*. Endelig betegnes med*

$$\boxed{\Omega(M) = \oplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)} \tag{253}$$

rummet af ***differentialformer*** *på* M*, hvor vi sætter* $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

En (glat) differentialform ω af grad k er altså en tilordning til hvert punkt $m \in M$ af et element $\omega_m \in \wedge^k T_m^*(M)$ (på en glat måde), altså tilordningen til hvert $m \in M$ af en k-lineær alternerende form ω_m på $T_m(M)$.

LEMMA IV.10. *I lokale koordinater (f, O) har et element $\omega \in \Omega^k(M)$ formen*

$$\boxed{\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,} \tag{254}$$

for visse C^∞-funktioner $a_{i_1,\ldots,i_k}$.

BEVIS. Dette følger direkte fra Proposition IV.8. □

BEMÆRKNING IV.11. *Vi er sådan set allerede begyndt på at regne med det* ***ydre produkt*** *mellem differentialformer, men lad os for god ordens skyld nævne, at vi definerer det ydre produkt mellem to differentialformer ω^a og ω^b punktvis, d.v.s. $(\omega^a \wedge \omega^b)_m \stackrel{Def}{=} \omega^a_m \wedge \omega^b_m$, hvor det sidste "$\wedge$" er det, der er defineret i Proposition* B.23. *Endelig bemærkes, at hvis φ er en funktion (altså en 0-form) og ω er en vilkårlig form, da udelades $\wedge$ sædvanligvis i $\varphi \wedge \omega$, således at sidstnævnte skrives som $\varphi\omega$.*

3. Pull-back

Vi skal her indføre en alt afgørende operation på differentialformer:

DEFINITION IV.12. *Lad M^r og N^n være differentiable mangfoldigheder, lad $F : M \to N$ være en differentiabel afbildning, og lad ω være en k-form på N; $\omega \in \Omega^k(N)$.* ***Pull-backet*** *$F^*\omega \in \Omega^k(M)$ af ω defineres da punktvis via formlen*

(255)

$$\boxed{\forall v_1, \ldots, v_k \in T_m(M) : (F^*\omega)_m(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(m)}(F'_m(v_1), \ldots, F'_m(v_k))\ .}$$

BEMÆRKNING IV.13. *Bemærk, at hvis ω er en 0-form, altså en funktion $\omega = \phi \in C^\infty(N)$, da er $F^*\phi = \phi \circ F$. Hvis endvidere $G : N^n \to P^s$ er en differentiabel afbildning og ω er en differentialform på P^s, da er*

$$(G \circ F)^*\omega = (F^* \circ G^*)\omega. \tag{256}$$

EXEMPEL IV.14. *Lad situationen være som i Definition* IV.12. *Antag, at ω lokalt er givet ved*

$$\omega = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}. \tag{257}$$

Der gælder da, at

$$\boxed{(F^*\omega)_m(\tfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}) = \det\left((dy_{i_r}, F'_m(\tfrac{\partial}{\partial x_{j_s}}))_{F(m)}\right)^k_{r,s=1}\ .} \tag{258}$$

Endvidere er

$$(dy_{i_r}, F'_m(\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}))_{F(m)} = (d(y_{i_r} \circ F))_m\,(\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}) = \frac{\partial F_{i_r}}{\partial x_{j_s}}. \tag{259}$$

EXEMPEL IV.15. *Betragt en 2-dimensional delmangfoldighed M af $\mathbb{R}^3$ med inklusionsafbildningen $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Lad $m \in M$ være vilkårligt. Antag, at tangentplanen $T_m(M)$ er udspændt af to orthogonale enhedsvektorer $v = (v^x, v^y, v^z)$ og $w = (w^x, w^y, w^z)$. Definer*

$$\forall t_1, t_2 \in T_m(M) : \check{\omega}_m(t_1, t_2) = \det \begin{pmatrix} \langle v, t_1\rangle & \langle w, t_1\rangle \\ \langle v, t_2\rangle & \langle w, t_2\rangle \end{pmatrix}. \tag{260}$$

Der gælder jo, at $dx(t^x, t^y, t^z) = t^x$ for en vilkårlig vektor $(t^x, t^y, t^z) \in \mathbb{R}^3$ med tilsvarende formler for dy og dz. Det følger af dette, at pullbacket af en vilkårlig 2-form $\Omega = (f^x dy \wedge dz + f^y dz \wedge dx + f^z dx \wedge dy)$ til $T_m(M)$ opfylder, når $n = (n^x, n^y, n^z) = v \times w$,

$$\begin{aligned} (i^*\Omega)_m(v, w) = \;& (f^x dy \wedge dz + f^y dz \wedge dx + f^z dx \wedge dy)(i'v, i'w) \\ &= (f^x dy \wedge dz + f^y dz \wedge dx + f^z dx \wedge dy)(v, w) \\ &= n^x f^x + n^y f^y + n^z f^z. \end{aligned} \tag{261}$$

Af dette følger (overvej), at

$$(i^*\Omega)_m = (n^x f^x + n^y f^y + n^z f^z)\check{\omega}_m. \tag{262}$$

LEMMA IV.16. *Lad $F : M^r \to N^n$ være som i Definition IV.12, lad $O \ni (x_1, \ldots, x_r) \to f(x_1, \ldots, x_r)$ og $\tilde{O} \ni (y_1, \ldots, y_n) \to \tilde{f}(y_1, \ldots, y_n)$ være lokale koordinater på henholdsvis M og N. Lad endvidere, for $i = 1, \ldots, n$, $F_i : f(O) \to \mathbb{R}$ være den i-te koordinatfunktion for F, d.v.s. $F_i(x_1, \ldots, x_r) \equiv F_i(f(x_1, \ldots, x_r)) = \Big((\tilde{f})^{-1}(F(x_1, \ldots, x_r))\Big)_i = (\tilde{y}_i \circ F)(x_1 \ldots, x_r)$ og lad*

$$\boxed{\omega_y = \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_k \le n} b_{i_1,\ldots,i_k}(y) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}\ ,} \tag{263}$$

for visse C^∞-funktioner $b_{i_1,\ldots,i_k}$. Da er

$$\boxed{(F^*\omega)_x = \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_k \le n} b_{i_1,\ldots,i_k}(F(x)) dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}\ ,} \tag{264}$$

hvor $\forall i = 1, \ldots, n$, dF_i er en sædvanlig 1-form på $f(O)$ fremkommet fra en C^∞-funktion F_i (cf. Definition II.61)—m.a.o., $dF_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j$.

BEVIS. Lad $\psi_1, \ldots, \psi_k$ være funktioner på N. Det er da klart, på grund af definitionen af $\wedge$-produktet, at

$$F^*(d\psi_1 \wedge \cdots \wedge d\psi_k) = (F^* d\psi_1) \wedge \cdots \wedge (F^* d\psi_k). \tag{265}$$

Endvidere gælder den **fundamentale ligning**

$$\boxed{F^*d\psi = d(F^*\psi) \quad (= d(\psi \circ F))\ .} \tag{266}$$

Resultatet følger let ved at benytte disse to observationer på funktioner af formen $\psi_j = y_{i_j}$, så beviset er slut, når vi har bevist (266):
Vi benytter her definitionerne dels af F^* og dels af F' (cf. Definition II.49 side 31 og Definition II.61 side 34):

(267)

$$(F^*d\psi)_m(v_m) = d\psi_{F(m)}(F'_m(v_m)) = (v_m)(\psi \circ F) = d(\psi \circ F)(v_m) = d(F^*\psi)(v_m).$$

□

KOROLLAR IV.17. *Lad F være som i Lemma* IV.16 *og lad ω_1, ω_2 være differentialformer på N^n. Da gælder*

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*\omega_1 \wedge F^*\omega_2. \tag{268}$$

BEVIS. Dette følger let fra (264). Detaljerne overlades til læseren. □

4. Ydre differentiation

Vi skal her etablere eksistensen af en vigtig afbildning $\Omega(M) \to \Omega(M)$. Den er faktisk også entydig, så selvom vi ikke vil bevise dette i alle detaljer (se evt. opgaverne), medtager vi det i formuleringen af sætningen:

SÆTNING IV.18. *Der findes en entydig lineær afbildning d, kaldet* ***ydre differentiation***

$$\boxed{\Omega(M) \xrightarrow{d} \Omega(M)\ ,} \tag{269}$$

som opfylder

- $\forall k : d(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+1}(M)$.
- $\forall \omega^p \in \Omega^p(M), \omega^q \in \Omega^q(M) : d(\omega^p \wedge \omega^q) = (d\omega^p) \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge (d\omega^q)$.
- $d^2 = 0$.
- *For $\psi \in C^\infty$ er $d\psi$ det tidligere indførte differential af ψ.*

Hvis F er en afbildning fra M til N, og hvis d_M og d_N betegner ydre differentiation på henholdsvis M og N, da gælder

$$\boxed{F^*d_N(\omega) = d_M(F^*\omega)} \tag{270}$$

for alle $\omega \in \Omega(N)$.

Bevis. Lad os straks vise, at d må være **lokal**, d.v.s., opfylder

(271) Hvis $\omega = 0$ i en åben omegn U, da er også $d\omega = 0$ på U.

Dette indses som følger, i stærk analogi med beviset for Lemma II.40 side 29: Lad $m \in U$ og vælg $\psi \in C^\infty(M)$ således at $\psi \equiv 1$ i en omegn $V \subset U$ af m og således at $\psi \cdot \omega = 0$ på M. På grund af lineariteten og (anti-)derivationsegenskaben af d fås da

(272) $$0 = d(\psi \cdot \omega) = d\psi \wedge \omega + \psi \cdot (d\omega).$$

Da endvidere ψ er konstant (og lig 1) i en omegn om m er $d\psi$ lig med 0 i m, og det følger, at $d\omega$ er 0 i m.

Lad os nu sideløbende definere $d\omega$ i en koordinatomegn $f(O)$ og i $O \subseteq \mathbb{R}^n$ ved

(273)
$$d(\sum_{i_1<\cdots<i_k\leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i_1<\cdots<i_k\leq n} (da_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Vi påstår, at denne definition opfylder alle punkterne i sætningen, og altså giver en lokal løsning. Det er umiddelbart klart, at det første og det sidste punkt er opfyldt. Lad os da se på det andet punkt: Her er det på grund af lineariteten nok at betragte $\omega^p = adx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ og $\omega^q = bdx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$. Idet vi klart har (overvej)

(274) $$d(a \cdot b) = bda + adb$$

får vi altså

$$\begin{aligned} d(\omega^p \wedge \omega^q) &= d(abdx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}) \\ &= bda \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &\quad +adb \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\ &= (d\omega^p) \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge (d\omega^q), \end{aligned}$$

hvor faktoren $(-1)^p$ opstår ved at bytte db om med de første p led $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$. Vi kan naturligvis udvide denne formel til at give os $d(\omega^{p_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{p_r})$ for vilkårligt r. Det følger af dette, at vores lokale d er fuldstændigt bestemt ved dens virkning på 1-former, og det er videre klart, at for at vise $d^2 = 0$ er det nok at vise, at $d^2\psi = 0$ for alle funktioner $\psi \in C^\infty(O)$ (resp. $C^\infty(f(O))$). Lad os regne:

(275) $$d^2(\psi) = d(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_j) = \sum_{k,j=1}^n (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j}) dx_k \wedge dx_j = 0,$$

eftersom $dx_k \wedge dx_j = -dx_l \wedge dx_k$ og $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}$.

Ved brug af de etablerede punkter følger det nu direkte, at vores lokalt definerede d opfylder, at hvis $\psi_0, \ldots, \psi_k$ er vilkårlige C^∞-funktioner, da er

$$d(\psi_0 d\psi_1 \wedge \ldots d \wedge \psi_k) = d\psi_0 \wedge d\psi_1 \wedge \cdots \wedge d\psi_k. \tag{276}$$

Ovenstående bevis og analyse viste bl.a., at d er entydigt bestemt på en åben delmængde O af $\mathbb{R}^n$.

Lad os nu betragte en differentiabel afbildning $F : \tilde{O} \to O$, hvor $\tilde{O}$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Da bliver

(277)

$$F^*(\sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(y) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(F(x)) dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k},$$

hvor x betegner et punkt i $\tilde{O}$. Betragt nu $d_x(F^*\omega)$, hvor d_x betegner en ydre differentiation defineret udfra koordinaterne $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\tilde{O}$. Da bliver, eftersom alle ydre differentiationer i hvert tilfælde stemmer overens på funktioner,

$$\begin{aligned} d_x(F^*\omega) &= d(\sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(F(x)) \wedge dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(F^* a_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}. \end{aligned} \tag{278}$$

På den anden side er det klart, at

$$F^*(d\omega) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq n} F^*(da_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dF_{i_1} \wedge \cdots \wedge dF_{i_k}, \tag{279}$$

og hvis vi sammenholder dette med (266), får vi

$$d_x(F^*\omega) = F^*(d\omega) \qquad (= F^*(d_y\omega)). \tag{280}$$

I første omgang kan vi nu tænke på F som et koordinatskifte, og (280) siger så, at d på $\mathbb{R}^n$ (eller åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$) er uafhængig af valget af koordinater. Men dette medfører umiddelbart, at den lokale definition på M også er uafhængig af valget af koordinater. Endelig er det klart ifølge (280), at (270) gælder. Det følger derfor let, at vi kan "strikke" en globalt defineret afbildning d sammen fra de lokalt definerede, og at denne opfylder alle kravene. Vi mangler nu kun at vise entydigheden. Dette følger f.eks ved at bruge, at d er en lokal operator (271). Vi overlader dette til læseren. □

5. Kohomologi

DEFINITION IV.19. *En form $\omega \in \Omega$ kaldes **lukket** såfremt $d\omega = 0$ og **eksakt** såfremt $\exists \tilde{\omega} \in \Omega : d\tilde{\omega} = \omega$. Den **k-te de Rham kohomologigruppe** $H^k(M)$ er givet som kvotienten*

$$\boxed{H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ er lukket }\}/\{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ er eksakt }\}\ .} \tag{281}$$

BEMÆRKNING IV.20. *Denne kvotient er veldefineret fordi $d^2 = 0$, hvilket medfører, at eksakte former automatisk er lukkede. Kvotienten er således et vektorrum modulo et underrum. De definerede kohomologigrupper indeholder information bl. a. om topologien af M samt muligheden for at konstruere bundter over M.*

Vi kan ikke gå i detaljer her, men nøjes med at vise, at konvekse åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ i denne henseende er trivielle:

SÆTNING IV.21 (POINCARÉ LEMMA). *Lad K være en åben konveks delmængde i $\mathbb{R}^n$. Lad $\omega \in \Omega^{k+1}(K)$ være lukket ($k \geq 0$). Da er ω eksakt.*

BEVIS. Vi kan uden tab af generalitet antage, at $0 \in K$. Da er $\tilde{K} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t \cdot x \in K\}$ en åben delmængde, der indeholder $K \times [0,1]$, og $F(x,t) = t \cdot x$ er en C^∞-afbildning fra $\tilde{K}$ til K. Vi har da

$$F^*\omega = F_t^*\omega + dt \wedge \hat{\omega}, \tag{282}$$

hvor $F_t^*\omega$ er pull-backet af ω, når t betragtes som en (fast) parameter, således at denne differentialform ikke indeholder $\wedge$-faktorer af dt. Det gør $\hat{\omega}$ heller ikke, men naturligvis afhænger både denne form og $F_t^*\omega$ af t. Eftersom $d\omega = 0$, følger det nu fra (270) at $dF^*\omega = 0$, hvilket medfører, at

$$0 = dt \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t}(F_t^*\omega) - d_x\hat{\omega}\right) + \dots, \tag{283}$$

hvor ... betyder, at her står en form, der ikke indeholder nogen faktor af dt (faktisk er denne del identisk 0, men det betyder ikke så meget her). Endvidere er $d_x\hat{\omega}$ differentialet af $\hat{\omega}$ for fastholdt t. Det følger, at

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_t^*\omega) = d_x\hat{\omega}, \tag{284}$$

og integration fra 0 til 1 giver da

$$F_1^*\omega - F_0^*\omega = d\tilde{\omega} \text{ hvor } \tilde{\omega} = \int_0^1 \hat{\omega}dt. \tag{285}$$

Men $F_1^*\omega = \omega$ da F_1 er identiteten og $F_0^*\omega = 0$ da F_0 afbilder K i 0, og resultatet følger. Integrationen af en form $a(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$ med hensyn til t er defineret som

$$\int_0^1 (a(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r})\, dt = \left(\int_0^1 a(x,t)dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}, \tag{286}$$

og integration af en generel form er defineret ved linearitet ud fra dette. Det er klart, at integration over t kommuterer med d_x. $\square$

Exempel IV.22. *I dette eksempel gennemregner vi mere detaljeret Poincarés Lemma i tilfældet $n = 2$. Lad*

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy \tag{287}$$

og antag, at ω er lukket. Eftersom

$$d(\omega) = a_x dx \wedge dx + a_y dy \wedge dx + b_x dx \wedge dy + b_y dy \wedge dy \tag{288}$$

$$= (-a_y + b_x) dx \wedge dy, \tag{289}$$

er dette ækvivalent med, at $a_y = b_x$.
Vi lader F være som i beviset for Poincaré Lemma side 72, m.a.o.

$$F(x,y,t) = (t \cdot x, t \cdot y). \tag{290}$$

Lad os beregne $F'(\frac{\partial}{\partial x})$: Ifølge Definition II.49 *på side 31 gælder, at hvis ψ er en C^∞-funktion på $\mathbb{R}^2$, da er*

$$F'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\psi \circ F) \tag{291}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\psi(tx,ty)) = \left(t \frac{\partial}{\partial x} \psi\right)(tx,ty). \tag{292}$$

Ligeledes er $F'(\frac{\partial}{\partial y}) = t\frac{\partial}{\partial y}$. Endelig følger det ved at betragte $\frac{\partial}{\partial t}(\psi(tx,ty))$, at $F'(\frac{\partial}{\partial t}) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Bemærk, at F' som en afbildning fra rummet af derivationer på $\mathbb{R}^3$ med en basis bestående af derivationerne $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}$ til rummet af derivationer på $\mathbb{R}^2$ med en basis bestående af $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ præcist (som forudsagt af teorien) er givet ved matricen

$$F'_{(x,y,t)} = \begin{pmatrix} t & 0 & x \\ 0 & t & y \end{pmatrix} \tag{293}$$

Lad os nu udregne pull-back'et:

$$(F^*(\omega))_{(x,y,t)}(\frac{\partial}{\partial x}) = (a(tx,ty)dx + b(tx,ty)dy)(t\frac{\partial}{\partial x}) = t \cdot a(tx,ty). \tag{294}$$

Tilsvarende er

$$(F^*(\omega))_{(x,y,t)}(\frac{\partial}{\partial y}) = t \cdot b(tx, ty). \tag{295}$$

Endelig fås

$$\begin{aligned}(F^*(\omega))_{(x,y,t)}(\frac{\partial}{\partial t}) &= (a(tx,ty)dx + b(tx,ty)dy)(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}) \\ &= x \cdot a(tx,ty) + y \cdot b(tx,ty).\end{aligned} \tag{296}$$

Det følger fra dette, at

$$F^*\omega = t \cdot a(tx,ty)dx + t \cdot b(tx,ty)dy + (x \cdot a(tx,ty) + y \cdot b(tx,ty))dt. \tag{297}$$

Med notationen som i (282) side 72 er $F_t^*\omega = t \cdot a(tx,ty)dx + t \cdot b(tx,ty)dy$ *og* $\hat{\omega} = (x \cdot a(tx,ty) + y \cdot b(tx,ty))$. *Betragt nu 0-formen*

$$G(x,y) = \int_0^1 (x \cdot a(tx,ty) + y \cdot b(tx,ty))d\mu(t). \tag{298}$$

(Vi betegner for et øjeblik integralet af en funktion $\psi(t)$ *fra 0 til 1 med* $\int_0^1 \psi(t)d\mu(t)$, *fordi vi allerede har benyttet det sædvanlige "dt" i* $\int_0^1 \psi(t)dt$ *til at betegne en 1-form).*

Vi beviser nu, at $dG = \omega$, *hvilket fuldfører det konstruktive bevis for, at* ω *er eksakt. I udregningen benyttes, at* $a_y = b_x$.

$$\begin{aligned} & d_{x,y}G \\ = & \int_0^1 \left(\Big(a(tx,ty) + txa_x(tx,ty) + tyb_x(tx,ty)\Big)dx\right) d\mu(t) \\ + & \int_0^1 \left(\Big(b(tx,ty) + tyb_y(tx,ty) + txa_y(tx,ty)\Big)dy\right) d\mu(t) \\ = & \int_0^1 \left(\Big(\frac{\partial}{\partial t}ta(tx,ty)\Big)dx + \Big(\frac{\partial}{\partial t}tb(tx,ty)\Big)dy\right) d\mu(t) \\ = & [ta(tx,ty)]_0^1 dx + [tb(tx,ty)]_0^1 dy = \omega. \end{aligned} \tag{299}$$

Observer i øvrigt, at

$$dF^*\omega = \tag{300}$$
$$\begin{aligned} & dt \wedge \left(\left[\frac{\partial}{\partial t}(t \cdot a(tx, ty)) \right] dx + \left[\frac{\partial}{\partial t}(t \cdot b(tx, ty)) \right] dy \right) \\ + \quad & dt \wedge \left[-\frac{\partial}{\partial x}\Big(x \cdot a(tx, ty) + y \cdot b(tx, ty)\Big) \right] dx \\ - \quad & dt \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y}\Big(x \cdot a(tx, ty) + y \cdot b(tx, ty)\Big) \right] dy \\ + \quad & \Big[-t^2 a_y(tx, ty) + t^2 b_x(tx, ty) \Big] dx \wedge dy \\ = \quad & 0. \end{aligned}$$

6. Stokes Formel

Vi begynder med en hjælpedefinition:

DEFINITION IV.23. *En familie af delmængder $\{A_\alpha\}$ af et topologisk rum M (her: en mangfoldighed) kaldes* ***lokalt endelig****, såfremt der for hvert $m \in M$ findes en omegn W_m af m, således at $W_m \cap A_\alpha \neq \emptyset$ for højst endeligt mange α.*

DEFINITION IV.24 (DELING AF ENHEDEN). *Ved en* ***deling af enheden på en mangfoldighed*** *M forstås en samling $\{\phi_i \mid i \in I\}$ af C^∞-funktioner på M, som opfylder*

- *Familien bestående af støtterne $\{\operatorname{supp} \phi_i \mid i \in I\}$ er lokalt endelig.*
- *$\forall m \in M : \sum_{i \in I} \phi_i(m) = 1$ og $\forall p \in M, \forall i \in I : \phi_i(p) \geq 0$.*

Den vigtigste (men ret elememtære) sætning om disse er følgende, hvor—som sædvanlig—M er en Hausdorf, anden-tællelig mangfoldighed:

SÆTNING IV.25 (EXISTENS AF DELING AF ENHEDEN). *Givet et vilkårligt atlas $\mathcal{A} = \{(b_\alpha, B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ på M. Da findes en tællelig deling af enheden $\{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ således, at $\forall i \in \mathbb{N} : \operatorname{supp} \phi_i$ er kompakt og indeholdt i mindst en af mængderne $b_\alpha(B_\alpha)$.*

Vi kan nu definere begrebet orientering for generelle mangfoldigheder. Vi vil ikke gøre forsøg på at vise, at dette begreb stemmer overens med det tidligere indførte for hyperflader (side 50) (men det gør det).

DEFINITION IV.26. *En n-dimensional mangfoldighed M kaldes* ***orienterbar****, såfremt der findes en "intetstedsforsvindende" n-form ω^o:*

$$\boxed{M \text{ orienterbar} \Leftrightarrow \exists \omega^o \in \Omega^n(M) \text{ så } \forall m \in M : {\omega^o}_m \neq 0.} \tag{301}$$

Givet en sådan form ω^o kaldes et koordinatsystem (f, O) ***positivt orienteret*** *såfremt, når koordinaterne i O betegnes $x_1, \ldots, x_n$, n-formen $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ er proportional med ω^o* ***med en positiv konstant****.*

LEMMA IV.27. *M er orienterbar, hvis og kun hvis der findes et (del-)atlas $\mathcal{A} = \{(f_j, O_j)\}_{j \in J}$, der opfylder*

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) > 0 \tag{302}$$

for hvert par $(f_{j_1}, O_{j_1}), (f_{j_2}, O_{j_2})$ af elementer i $\mathcal{A}$, hvor de variable i O_{j_1} er angivet ved x_i-er, og de variable i O_{j_2} er angivet ved y_j-er. Sagt i ord: Jacobideterminanterne for koordinatskiftene er alle positive.

BEVIS. Lad $\mathcal{A}$ være et atlas med de foreskrevne egenskaber. Lad $(f_j, O_j) \in \mathcal{A}$ og angiv koordinaterne i O_j som $x_1, \ldots x_n$. Da definerer $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ en n-form ω_j på $f_j(O_j)$. Eftersom

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{303}$$

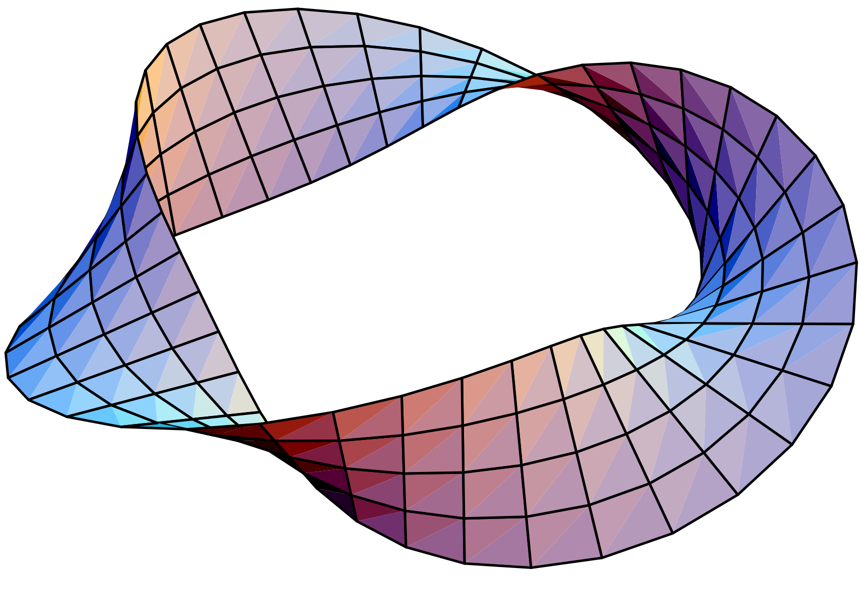
(overvej) "peger" to vilkårlige af disse former, ω_i og ω_j i samme retning i de punkter, hvor de begge er definerede. Lad nu $\{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ være en deling af enheden som i Sætning IV.25 og definer

$$\omega^o = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i \omega_{j(i)}, \tag{304}$$

hvor $j(i)$ for hvert i vælges som et index for hvilket $supp\, \phi_i \subseteq f_{j(i)}(O_{j(i)})$. Derved defineres klart en n-form med de ønskede egenskaber.
Hvis vi omvendt har en intetstedsforsvindende n-form ω^o og et vilkårligt atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{f}_j, \tilde{O}_j)\}_{j \in J}$, da kan vi omdanne det til et atlas $\mathcal{A}$ med de ønskede egenskaber, som følger: Lad os fra nu antage, at alle mængderne $\tilde{O}_j$ er sammenhængende (kan altid opnås, evt. ved at erstatte indexmængden J med en anden). Der gælder da, at

$$d\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_n = \psi \cdot \omega^o \text{ på } \tilde{f}_j(\tilde{O}_j), \tag{305}$$

hvor ψ er en C^∞-funktion, der nødvendigvis enten altid er positiv, eller altid er negativ. Hvis denne funktion er positiv sætter vi $\mathcal{A} \ni (f_j, O_j) = (\tilde{f}_j, \tilde{O}_j)$. Hvis derimod funktionen er negativ lader vi $(f_j, O_j) \in \mathcal{A}$ være det lokale kort, der svarer til, at vi har byttet om på $\tilde{x}_1$ og $\tilde{x}_2$ (hvorved n-formen jo skifter fortegn). Hvis $P_{1,2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er den nævnte afbildning, da er m.a.o. $O_j = P_{1,2}(\tilde{O}_j)$ og $f_j = \tilde{f}_j \circ P_{1,2}$. Det er klart, at det konstruerede atlas opfylder kravet. $\square$



FIGUR IV.4. Et Möbius bånd.

Vi kan nu definere integralet af en n-form over M:

DEFINITION IV.28. *Lad D være en delmængde af M således, at $f^{-1}(D \cap f(O))$ er målelig for ethvert koordinatsystem (f, O). Lad ω være en n-form på M med kompakt støtte indeholdt i et positivt orienteret koordinatsystem (f, O). Da gælder at $\omega = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, og vi definerer*

$$\boxed{\textstyle\int_D \omega = \int_{f^{-1}(D \cap f(O))} a(x) d\mu_n(x)\ ,} \tag{306}$$

hvor $d\mu_n = dx_1 \ldots dx_n$ betegner Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$. Hvis ω ikke har kompakt støtte i en enkelt koordinatomegn, kan vi bruge en deling af enheden til at definere

$$\boxed{\textstyle\int_D \omega = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_M \phi_i \cdot \omega\ .} \tag{307}$$

BEMÆRKNING IV.29. *Det er ikke umiddelbart klart, at denne definition er uafhængig af valget af lokale koordinater og af deling af enheden. Imidlertid gælder, at sammenhængen mellem en forms udseende i et y-koordinatsystem og i et x-koordinatsystem er givet ved (cf. (303))*

$$\begin{aligned} b(y)dy_1 \wedge \cdots \wedge y_n &= b(y(x))dy(x)_1 \wedge \cdots \wedge dy(x)_n \\ &= \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) b(y(x))dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \end{aligned} \tag{308}$$

hvilket giver det ønskede lokalt, fordi determinanten er positiv. Med hensyn til delingen af enheden kan man, hvis man benytter en anden deling $\{\psi_k\}_{k \in N}$, lave en videreopdeling givet ved $\phi_i \cdot \psi_k$. Her vil integralet af $\phi_i \cdot \psi_k \cdot \omega$ have en veldefineret værdi, uafhængigt af om vi bruger koordinatsystemet, der svarer til ϕ_i, eller det, der svarer til ψ_k. Men derved bliver summerne også uafhængige.

DEFINITION IV.30. *Lad M og N være orienterede mangfoldigheder med orienteringer hhv. ω_M^o og ω_N^o. Antag, at $\dim M = \dim N$ og lad F være en diffeomorfi fra M til N. Vi siger da, at F er **orienteringsbevarende** såfremt*

$$\boxed{F^* \omega_N^o = \psi \cdot \omega_M^o\ ,} \tag{309}$$

*hvor ψ er en **positiv** C^∞-funktion på M.*

En del af forklaringen på, hvorfor det er så nyttigt at formulere integration via differentialformer, er følgende:

PROPOSITION IV.31. *Lad M og N være mangfoldigheder af samme dimension n, lad F være en orienteringsbevarende diffeomorfi fra M til N og lad ω være en n-form på N med kompakt støtte. Da er*

$$\boxed{\textstyle\int_N \omega = \int_M F^* \omega\ .} \tag{310}$$

BEVIS. Hvis (f,O) er et positivt orienteret lokalt koordinatsystem på M så $supp(\omega) \subseteq F(f(O))$, da er $(F \circ f, O)$ et positivt orienteret koordinatsystem på N, og koordinatudtrykket for ω bliver i dette koordinatsystem præcist det samme som for $F^*\omega$ i (f,O), og derfor bliver integralerne naturligvis også de samme. Det generelle tilfælde følger let fra dette (cf. Bemærkning IV.29.). $\square$

Indtil nu har vi defineret integralet af former kun for det tilfælde, hvor graden af formen er den samme som dimensionen af mangfoldigheden for. Hvis vi nu har en k-form på M, med $k \leq n-1$, kan vi evt. integrere den over k-dimensionale delmangfoldigheder. Navnlig når $k = n-1$, kommer der noget interessant ud af dette.

DEFINITION IV.32. *Lad N være en indlejret k- dimensional delmangfoldighed af M (se Definition* II.69*) med indlejring $i : N \hookrightarrow M$. Lad ω være en differentialform* ***af grad k*** *på M således at $i^*\omega$ har kompakt støtte. Vi definerer da integralet af ω over N til*

$$\boxed{\int_{i(N)} \omega = \int_N i^*\omega\ .} \tag{311}$$

Sædvanligvis skrives integralet blot $\int_N \omega$. Endelig sættes integralet over N af en differentialform $\tilde{\omega}$ på M af en grad, der er forskellig fra dimensionen af N, til 0.

Før vi går i gang med Stokes Sætning, viser vi et vigtigt teknisk lemma:

LEMMA IV.33. *Lad B^n være enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$, $B^n_- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n \mid x_1 < 0\}$ og $B^n_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n \mid x_1 = 0\}$. Hvis $\omega \in \Omega^{n-1}(B^n)$ har kompakt støtte, da gælder*

$$\boxed{\int_{B^n_0} \omega = \int_{B^n_-} d\omega\ .} \tag{312}$$

BEVIS. Vi kan skrive

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{313}$$

Det er da klart, at kun leddet med a_1 overlever, når ω bliver pull-backed til B^n_0. Idet vi lader $x' = (x_2, \dots, x_n)$ løbe over enhedskuglen B^{n-1} i $\mathbb{R}^{n-1}$ bliver herved

$$\int_{B^n_0} \omega = \int_{B^{n-1}} a_1(0,x') d\mu_{n-1}(x'). \tag{314}$$

På den anden side er

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \tag{315}$$

og dermed

$$\int_{B^n_-} d\omega = \int_{B^n_-} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_j} d\mu_n(x) \tag{316}$$
$$= \int_{B^n_-} \frac{\partial a_1(x)}{\partial x_1} d\mu_n(x)\,,$$

da leddene fra $j = 2$ til $j = n$ giver 0, fordi a_j har kompakt støtte indeholdt i B^n. Leddet med a_1 forsvinder af samme grund i den nedre grænse, hvorimod den øvre grænse jo netop giver $a_1(0, x')$. $\square$

BEMÆRKNING IV.34. *I en vis forstand reduceres formlen således til $\int_a^b \psi'(t)dt = \psi(b) - \psi(a)$ samt teorien for itererede integraler. Bemærk i øvrigt, at $\int_{B^n} d\omega = 0$ (hvorfor?).*

Vi begynder nu på detaljerne omkring Stokes Sætning: Vi vil betragte åbne delmængder D af M for hvilke den topologiske rand ∂D er en indlejret $(n-1)$-dimensional delmangfoldighed. Omkring ethvert punkt m på randen kan vi da indføre et lokalt positivt orienteret koordinatsystem (f, O), således at $O = B^n$, $\partial D \cap f(O) = f(B^n_0)$ og $D \cap f(O) = f(B^n_-)$. Vi indfører nu den **konvention**, at ∂D er orienteret således, at i de ovenfor givne koordinater gælder, at f restringeret til B^n_0 er et positivt orienteret koordinatsystem for ∂D.

SÆTNING IV.35 (STOKES SÆTNING). *Med D og ∂D som ovenfor og ω en $(n-1)$-form på M med kompakt støtte, er*

$$\boxed{\textstyle\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega\ .} \tag{317}$$

BEVIS. Hvis støtten for ω er indeholdt i et koordinatsystem ude ved randen som ovenfor, da følger det af Lemma IV.33 (se også Proposition IV.31). Det generelle tilfælde følger ved at bruge en deling af enheden til at skrive $\omega = \sum \omega_j$, hvor alle ω_j-erne har kompakt støtte indeholdt i koordinatomegne $f_j(O_j)$, der opfylder: $\forall j : O_j = B^n$ samt yderligere, at hvis $f_j(B^n) \cap \partial D \neq \emptyset$, da er (f_j, O_j) af den ovenfor anførte type. $\square$

Når man har en orienteret Riemannsk mangfoldighed, kan man integrere funktioner i stedet for n-former ved brug af den såkaldte volumenform ω^{vol}:

DEFINITION IV.36. *På en orienteret n-dimensional Riemannsk mangfoldighed M betegner ω^{vol} den n-form, der opfylder:*

$$\boxed{\omega^{vol}_m(e_1, \ldots, e_n) = 1} \tag{318}$$

for enhver orienteret orthonormal basis $\{e_i\}_{i=1}^n$ for $T_m(M)$.

DEFINITION IV.37. *Vi definerer integralet på M som det lineære funktionale $\psi \to \int_M \psi dvol_M$ på rummet $C_c^\infty(M)$ af uendeligt ofte differentiable funktioner med kompakt støtte, som opfylder*

$$\boxed{\forall \psi \in C_c^\infty(M) : \textstyle\int_M \psi dvol_M = \int_M \psi \cdot \omega^{vol} \, .} \tag{319}$$

BEMÆRKNING IV.38. *Dette integral er identisk med det, der defineres ved det euklidiske volumenelement (se Opgave* 1.65*). Der gælder m.a.o. i lokale koordinater* (f, O)

$$\int_{f(O)} \psi dvol_M = \int_O \psi(f(x))\sqrt{g(x)} d\mu_n(x), \tag{320}$$

hvor $d\mu_n$ betegner det sædvanlige Lebesgue mål på $\mathbb{R}^n$, og hvor altså højre side i formlen er (Riemann) integralet af funktionen $(\psi \circ f)\sqrt{g}$.

Lad nu D være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og antag, at randen ∂D er en orienteret Riemannsk delmangfoldighed. Lad os endvidere betragte en $(n-1)$-form

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{321}$$

Pull-backet af denne til ∂D er da givet ved (cf. opgaver)

$$i^*(\omega) = \sum_{j=1}^n b_j(x) \cdot n_j \cdot \omega_{\partial D}^{\mathrm{vol}} = \langle b, n \rangle \omega_{\partial D}^{\mathrm{vol}}, \tag{322}$$

hvor $\omega_{\partial D}^{\mathrm{vol}}$ betegner volumenformen på ∂D, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ er vektorfunktionen hørende til ω, og $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_n)$ er den udadrettede normal til ∂D.
Hvis, som sædvanlig, divergensen $div\, \vec{b}$ defineres som funktionen

$$\boxed{div\, \vec{b} = \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \, ,} \tag{323}$$

og $\vec{b} \cdot \vec{n}$ betegner det indre produkt mellem $\vec{b}$ og $\vec{n}$, da får Stokes formel følgende udseende

PROPOSITION IV.39. *Lad $\vec{b}$ være en vektorfunktion på $\mathbb{R}^n$ med kompakt støtte. Da er, med symbolerne overfor,*

$$\boxed{\textstyle\int_{\partial D} (\vec{b} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{dvol}_{\partial D} = \int_D (div\, \vec{b}) \, d\mu_n \, .} \tag{324}$$

BEVIS. Dette følger let fra Sætning IV.35, jævnfør (313) og (316). $\square$

APPENDIX A

Den inverse funktions sætning

Vi begynder med at minde om definitionen af differentiabilitet for funktioner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definition A.1. *Lad $f : U \to \mathbb{R}^n$ være en funktion defineret på en åben delmængde U af $\mathbb{R}^n$ og lad $x_0 \in U$. Vi siger, at f er* ***differentiabel*** *i x_0, såfremt én af følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:*

(I) Der findes en lineær afbildning A, således at

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{325}$$

(II) Der findes en lineær afbildning A og en epsilon-funktion $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ således, at

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot \underline{\epsilon}(x - x_0). \tag{326}$$

(III) Der findes en matrix-funktion $x \to \Psi(x)$, der er kontinuert i x_0, således at

$$f(x) - f(x_0) = \Psi(x)(x - x_0). \tag{327}$$

Vi sætter $f'(x_0) = A = \Psi(x_0)$ og kalder denne for differentialet (eller Jacobimatricen) af f i x_0.

Bemærkning A.2. *$f'(x_0)$, der i øvrigt ofte betegnes f'_{x_0} er den matrix, der på den ij-te plads har $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, når $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Vi vil ikke bevise, at de tre betingelser er ækvivalente, dog kan vi oplyse, at hvis vi har (II) opfyldt, da er funktionen Ψ*

i (III) givet ved at have den ij-te koefficient givet som

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) + \epsilon_i((x - x_0)) \cdot \frac{(x - x_0)_j}{\|x - x_0\|} \ . \tag{328}$$

SÆTNING A.3. *Lad D være en* åben kugle *i $\mathbb{R}^n$ og $F : D \to \mathbb{R}$ en differentiabel funktion. Givet punkter x og y i D, da eksisterer et punkt z på linestykket, der forbinder x med y, så*

$$\boxed{F(y) - F(x) = \langle F'(z), y - x\rangle \ .} \tag{329}$$

Bevis: Betragt den differentiable kurve

$$\ell : \mathbb{R} \to D \tag{330}$$

givet ved $\ell(t) = x + (y - x)t$. Den sammensatte funktion $F \circ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er differentiabel. I følge den sædvanlige middelværdisætning på $[0, 1]$ findes et $\theta \in \,]0, 1[$, så

$$F(y) - F(x) = \langle F'(x + (y - x)\theta), y - x\rangle. \tag{331}$$

Sæt $z = x + (y - x)\theta$.

SÆTNING A.4 (DEN INVERSE FUNKTIONS SÆTNING). *Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ og $f : U \to \mathbb{R}^n$ en kontinuert differentiabel afbildning, så for alle $x \in U$*

$$\boxed{\det f'(x) \neq 0 \quad ; \; x \in U \ .} \tag{332}$$

Da gælder følgende

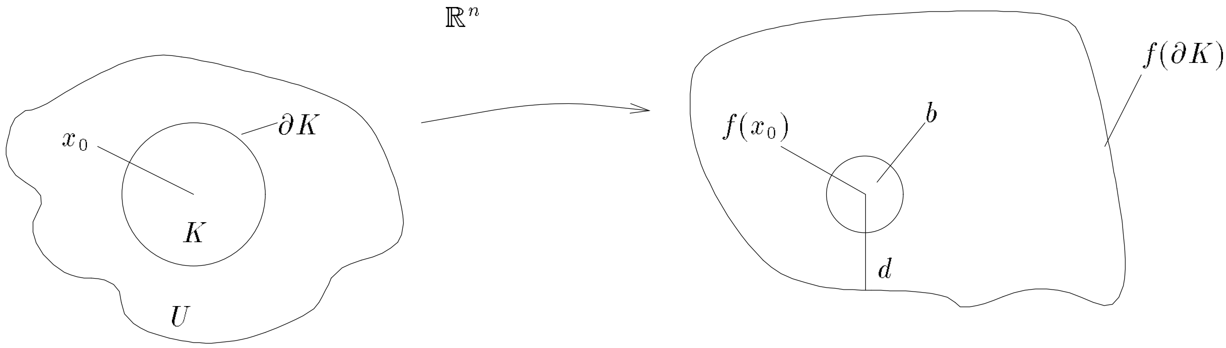
I: Billedet $f(U)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$.

II: Afbildningen f er *lokalt* injektiv, i.e. ethvert punkt $x_0 \in U$ har en omegn, hvori f er injektiv.

III: *Hvis* f er *injektiv på* U, da er f^{-1} kontinuert differentiabel på $f(U)$ og $(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$ for $y \in f(U)$.

Bevis: Gennem hele beviset er det en stående hypotese, at det $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in U$. Det er afgørende, at II) bevises først. *Bevis II:* Givet $x_0 \in U$. Vi skal først finde en omegn D af x_0, så restriktionen af f til D er injektiv. Lad $D \subseteq U$ være en åben kugle med centrum i x_0. Vi kan nu anvende middelværdisætningen på f's i'te koordinatfunktion f_i. For $x, y \in D$ kan vi finde et z_i på liniestykket, der forbinder x med y, så

$$f_i(y) - f_i(x) = \langle \text{ grad } f_i(z_i), y - x\rangle, \tag{333}$$



hvilket samlet kan skrives

$$f(y) - f(x) = \begin{Bmatrix} \text{grad } f_1(z_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{grad } f_n(z_n) \end{Bmatrix} (y - x). \tag{334}$$

Det er nu tilstrækkeligt at vise, at der findes en åben omegn W af x_0, så matricen

$$\begin{Bmatrix} \text{grad } f_1(w_1) \\ \text{grad } f_2(w_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{grad } f_n(w_n) \end{Bmatrix} \tag{335}$$

har determinant $\neq 0$ for alle $w_1, \cdots, w_n \in W$. Lad $d(w_1, \ldots, w_n)$ betegne determinanten af matricen ovenfor. Vi kan interpretere denne som en kontinuert funktion på $U \times U \times \cdots \times U$ (n faktorer). Idet $d(x_0, \ldots, x_0) \neq 0$ følger påstanden umiddelbart.

Bevis for I: Påstanden I kan reformuleres: *For ethvert $x_0 \in U$ gælder, at $f(U)$ indeholder en åben kugle med centrum i $f(x_0)$.*

Hertil betragter vi en kompakt kugle $K \subseteq U$ med centrum i x_0, valgt så lille at restriktionen af f til K er injektiv. Vi lader $d =$ dist $(f(x_0), f(\partial K))$; afstanden fra $f(x_0)$ til $f(\partial K)$.

Vi vil vise, at kuglen $D(f(x_0), \frac{1}{3}d)$ er helt indeholdt i $f(K)$, i.e. at ethvert $b \in D(f(x_0), \frac{1}{3}d)$ kan rammes med et punkt fra K. For et sådant b anlægger vi følgende strategi: Lad $\varphi_b : K \to \mathbb{R}$ betegne funktionen givet ved

$$\varphi_b(x) = \|f(x) - b\|^2 \quad ; \; x \in K. \tag{336}$$

Eftersom φ_b er kontinuert, og K er kompakt, har denne funktion et minimum.

Vi bemærker, at minimum ikke kan antages på ∂K: For $x \in \partial K$ har vi $\|f(x)-b\| > \frac{2}{3}\,d$ og dermed

$$\varphi_b(x) > \frac{4}{9}\,d^2 \quad ;\ x \in \partial K. \tag{337}$$

Idet $|f(x_0) - b| < \frac{1}{3}\,d$ har vi

$$\varphi_b(x_0) < \frac{1}{9}\,d^2. \tag{338}$$

Altså funktionen $\varphi_b\ K \to \mathbb{R}$ antager sit minimum i et indre punkt x af K. I et sådant punkt har vi $\varphi_b'(x) = 0$. I følge formlen (340) nedenfor, hvor $\varphi_b'(x)$ og $(f(x) - b)$ er rækkevektorer, gælder

$$\varphi_b'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = b, \tag{339}$$

og dermed har vi ramt $b \in \mathbb{R}^n$ med $x \in K$.

$$\varphi_b'(x) = 2(f(x) - b)f'(x). \tag{340}$$

Bevis for (340):

$$\frac{\partial \varphi_b}{\partial x_r}(x) \quad = \quad \sum_s \frac{\partial}{\partial x_r}(f_s(x) - b_s)^2 \tag{341}$$

$$= 2\sum_s (f_s(x) - b_s)\frac{\partial f_s}{\partial x_r}(x) \quad = \quad 2\sum_s \frac{\partial f_s}{\partial x_r}(x)(f_s(x) - b_s). \tag{342}$$

Bevis III: Det antages altså, at $f : U \to \mathbb{R}^n$ er injektiv. I følge I) gælder, at $f(U)$ er åben; men af samme grund gælder:

(343) For enhver åben delmængde V af U gælder, at

(344) $f(V)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$.

Denne specielle egenskab ved f implicerer umiddelbart, at $f^{-1} : f(U) \to U$ er kontinuert: Givet $y_0 \in f(U)$ og en åben omegn V af $f^{-1}(y_0)$ i U; da er $f(V)$ en åben omegn af y_0 i $f(U)$, der afbildes ind i V af f^{-1}.
Vi skal nu vise, at f^{-1} er differentiabel i $y_0 = f(x_0)$.
Da f er differentiabel kan vi skrive (overvej)

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0)\,;\ x \in U, \tag{345}$$

hvor $\Phi(x)$ er en $n \times n$ matrix af funktioner på U, kontinuerte i x_0. Idet $\Phi(x_0) = f'(x_0)$ og det $f'(x_0) \neq 0$ kan vi vælge en åben omegn V af x_0 i U, så det $\Phi(x) \neq 0$ for $x \in V$. Af ovenstående fås med $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \Phi(f^{-1}(y))^{-1}(y - y_0)\,;\ y \in f(V). \tag{346}$$

Det følger nu let, at f^{-1} er differentiabel i y_0 med

$$(f^{-1})'(y_0) = f'(f^{-1}(y_0))^{-1}. \tag{347}$$

Af dette udtryk følger, at Jacobimatricen for f^{-1} varierer kontinuert, når y_0 varieres. □

APPENDIX B

Videregående lineær algebra

1. Tensorer

Vi betragter i dette appendix et fast vektorrum V over $\mathbb{R}$ af endelig dimension n (men alle de følgende konstruktioner og resultater kan umiddelbart overføres til f.eks. komplekse vektorrum).

DEFINITION B.1. *Det* ***duale vektorrum****, oftest betegnet V^*, defineres til*

$$\boxed{V^* = \{v^* \mid v^* \text{ er en lineær afbildning af } V \text{ ind i } \mathbb{R}\}\ .} \tag{348}$$

For $v^* \in V^*$ og $v \in V$ vil vi skrive

$$\boxed{v^*(v) = (v^*, v)\ ,} \tag{349}$$

og vi gør V^* til et vektorrum ved ligningen

$$\boxed{\forall v_1^*, v_2^* \in V^*, \forall a \in \mathbb{R} : (v_1^* + a \cdot v_2^*, v) = (v_1^*, v) + a \cdot (v_2^*, v)\ .} \tag{350}$$

Elementerne i V^* kaldes ***de lineære funktionaler*** *på V.*

PROPOSITION B.2. *V^* har samme dimension som V. Hvis $\{e_i\}_{i=1}^n$ er en basis for V, udgør de n lineære funktionaler*

$$\boxed{(\varepsilon_j, \textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i) = x_j \quad (j = 1, \ldots, n)} \tag{351}$$

en basis for V^*. Denne basis opfylder specielt

$$\boxed{(\varepsilon_j, e_i) = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \ldots, n)} \tag{352}$$

og er entydigt bestemt ved dette.

Bevis. Det er klart, at de definerede ε_j-er faktisk ligger i V^*. Hvis nu v^* er et vilkårligt element i V^*, så er det entydigt bestemt udfra sine værdier (v^*, e_i) for $i = 1, \ldots, n$. Det følger så direkte, at

$$v^* = \sum_{j=1}^{n}(v^*, e_j) \cdot \varepsilon_j. \tag{353}$$

Hvis endelig

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \varepsilon_j = 0 \tag{354}$$

for visse reelle konstanter $a_1, \ldots, a_n$, da er

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad (\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \varepsilon_j, e_i) = a_i = 0. \tag{355}$$

Dermed er det vist, at de n ε_i-er udspænder V^* og er lineært uafhængige. Resten er oplagt. $\square$

Definition B.3. *Givet en basis $\{e_i\}_{i=1}^n$ for V, da kaldes den basis $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$ for V^*, der opfylder (352), for den* ***duale basis****.*

Der er flere gode grunde til at indføre det duale vektorrum. Én er, at vektorerne har forskellige "transformationsregler", hvilket afspejles i følgende

Proposition B.4. *Lad $(\{e_i\}_{i=1}^n, \{\varepsilon_j\}_{j=1}^n)$ og $(\{f_i\}_{i=1}^n, \{\varphi_j\}_{j=1}^n)$ være to par af duale baser for (V, V^*). Der findes da matricer $A = \{a_{ij}\}$ og $C = \{c_{ij}\}$ så*

$$\forall i = 1, \ldots, n: \quad e_i \quad = \quad \sum_{l=1}^{n} a_{li} f_l \tag{356}$$

$$\forall j = 1, \ldots, n: \quad \epsilon_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \varphi_k, \tag{357}$$

og der gælder:

$$C = (A^t)^{-1}. \tag{358}$$

Bevis. Indsættes de to højresider i ligningen $(e_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ fås, da $(f_l, \varphi_k) = \delta_{l,k}$,

$$\forall i, j = 1, \ldots, n: \sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_{kj} = \delta_{i,j}. \tag{359}$$

Dette er præcist indholdet af (358). $\square$

Lemma B.5. $\boxed{V^{**} \cong V\ .}$

BEVIS. Ligningen (349) kan jo fortsættes til

$$v^*(v) = (v^*, v) = v(v^*) = (v, v^*), \tag{360}$$

hvilket giver en afbildning af V ind i V^{**}. Men det er klart, på grund af eksistensen af duale baser, at denne afbildning er en bijektion. □

BEMÆRKNING B.6. *Vi identificerer herefter V^{**} med V og siger, at V **er** det duale til V^*. Herved bliver $(v_1, v_2^*) = (v_2^*, v_1)$ per definition.*

Vi kan i forbifarten nævne

DEFINITION B.7. *Hvis $T : V_1 \to V_2$ er en lineær afbildning, da findes en entydig lineær afbildning $T^t : V_2^* \to V_1^*$, kaldet **den adjungerede** af T, defineret ved*

$$\boxed{\forall v \in V_1 \forall \eta \in V_2^* : (Tv, \eta) = (v, T^t \eta)\ .} \tag{361}$$

BEMÆRKNING B.8. *Hvis vi skriver T på matrix form (b_{ij}) ved hjælp af baser for hhv. V_1 og V_2, og hvis vi skriver matricen (d_{ij}) for T^t med hensyn til de duale baser, da gælder det, at $d_{ij} = b_{ji}$.*

DEFINITION B.9. *Lad V, W være to endeligt-dimensionale vektorrum. Sæt*

$$\mathcal{B}(V, W) = \{B : V \times W \to \mathbb{R} \mid B \text{ er en bilineær afbildning}\}, \quad \text{og} \tag{362}$$

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ er en lineær afbildning}\}. \tag{363}$$

*Elementerne i $\mathcal{B}(V, W)$ kaldes ofte **bilinearformer**.*

Det er klart, at $\mathcal{B}(V, W) \equiv \mathcal{B}(W, V)$. Evdvidere kan afbildningen $T \to T^t$ benyttes til at lave en kanonisk isomorfi $\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{L}(W^*, V^*)$. Begge typer rum gøres til vektorrum gennem de naturlige, punktvise operationer, f.eks.

$$(B_1 + a \cdot B_2)(v, w) = B_1(v, w) + a \cdot B_2(v, w). \tag{364}$$

PROPOSITION B.10. *Afbildningen $\mathcal{B}(V, W) \ni B \to T_B \in \mathcal{L}(V, W^*)$ defineret ved*

$$\boxed{(T_B(v), w) = B(v, w)} \tag{365}$$

etablerer en lineær isomorfi mellem disse afbildningsrum.

BEVIS. Det er klart, at den definerede afbildning faktisk er lineær. For at vise bijektiviteten vil vi nu konstruere en afbildning $\mathcal{L}(V, W^*) \ni T \to B_T \in \mathcal{B}(V, W)$:

$$\boxed{B_T(v, w) \stackrel{Def.}{=} (T(v), w)\ .} \tag{366}$$

Det er klart, i følge (365), at dette er den inverse til $B \to T_B$. □

DEFINITION B.11. *Lad V og W være to endeligt-dimensionale vektorrum. Vi definerer da* ***tensor-produktet af*** V ***og*** W *til*

$$\boxed{V \otimes W = \mathcal{B}(V^*, W^*) \qquad (= \mathcal{L}(V^*, W))\ .} \tag{367}$$

For $v \in V$ og $w \in W$ defineres elementet $v \otimes w$ i $V \otimes W$ ved

$$\boxed{(v \otimes w)(v^*, w^*) = (v^*, v)(w^*, w)\ .} \tag{368}$$

LEMMA B.12. *Afbildningen $V \times W \ni v, w \xrightarrow{\imath} v \otimes w \in V \otimes W$ er bilineær. Der gælder nemlig*

- $\forall v \in V, \forall w \in W, \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot (v \otimes w) = (a \cdot v) \otimes w = v \otimes (a \cdot w)$.
- $\forall v_1, v_2 \in V, \forall w \in W : (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$.
- $\forall v \in V, \forall w_1, w_2 \in W : v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

Den til $\imath(v, w) = v \otimes w$ svarende afbildning $V^* \to W$ betegnes $T_{v,w}$ eller $T_{v\otimes w}$ og er givet ved

$$\boxed{T_{v,w}(v^*) = T_{v\otimes w}(v^*) = (v^*, v)w\ .} \tag{369}$$

BEVIS. Den til (368) svarende afbildning opfylder per definition:

$$(T_{v,w}(v^*), w^*) = (v^*, v)(w, w^*) = ((v^*, v)w, w^*), \tag{370}$$

hvor den sidste ligning følger ved linearitet. De resterende påstande følger let. □

PROPOSITION B.13. *Lad $\{e_i\}_{i=1}^n$ og $\{f_i\}_{i=1}^N$ være baser for henholdsvis V og W. Da udgør*

$$\boxed{\{e_i \otimes f_j\}_{(i,j)=(1,1)}^{(n,N)}} \tag{371}$$

en basis for $V \otimes W$. Specielt er

$$\dim(V \otimes W) = n \cdot N. \tag{372}$$

BEVIS. Lad $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$ og $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ være de duale baser til de givne baser. Vilkårlige elementer ξ og η i henholdsvis V^* og W^* kan da udvikles på disse baser (overvej disse formler):

$$\xi = \sum_{i=1}^n (\xi, e_i)\varepsilon_i \quad \text{og} \quad \eta = \sum_{j=1}^N (\eta, f_j)\varphi_j. \tag{373}$$

Lad nu B være en vilkårlig bilinearform på $V^* \times W^*$. Da er, på grund af bilineariteten,

$$B(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}(\xi,e_i)(\eta,f_j)B(\varepsilon_i,\varphi_j) \tag{374}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}B(\varepsilon_i,\varphi_j)(\xi,e_i)(\eta,f_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}B(\varepsilon_i,\varphi_j)(e_i\otimes f_j)(\xi,\eta).$$

Dette siger præcist, at

$$B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}B(\varepsilon_i,\varphi_j)(e_i\otimes f_j). \tag{375}$$

Den letteste måde at vise, at de forskellige $e_i\otimes f_j$-er er lineært uafhængige er nok ved at observere, at $V\otimes W = \mathcal{L}(V^*,W)$, og det sidste rum (tænk blot på matricer) har jo dimension $n\cdot N$. Da vi ovenfor har fundes et sæt af $n\cdot N$ vektorer, der udspænder $V\otimes W$, må dette således være en basis. $\square$

Lemma B.14 (Sporet af en lineær afbildning). *Der findes en entydig lineær afbildning $\mathcal{L}(V,V) = V^*\otimes V \xrightarrow{tr} \mathbb{R}$, således at*

$$\boxed{\forall\xi\in V^*\forall v\in V : \operatorname{tr}(T_{\xi,v}) = \operatorname{tr}(T_{\xi\otimes v}) = (\xi,v)\ .} \tag{376}$$

Hvis $\{T_{ij}\}$ er matricen for $T\in\mathcal{L}(V,V)$ med hensyn til en eller anden basis, da er

$$\boxed{tr(T) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} T_{ii}\ .} \tag{377}$$

*For $T\in\mathcal{L}(V,V)$ kaldes $tr(T)$ for **sporet** af T.*

Bevis. Hvis $(\{e_i\}_{i=1}^n,\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n)$ er duale baser for V og V^* og $T\in\mathcal{L}(V,V)$, er

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i,v)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i,v)T(e_i) = \sum_{i=1}^{n}T_{\varepsilon_i,T(e_i)}(v), \tag{378}$$

for $v\in V$. Hvis (376) skal holde, må der altså gælde:

$$tr(T) = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i,T(e_i)). \tag{379}$$

Vi definerer nu $tr(T)$ ved (379). Lad v og ξ være vilkårlige elementer i hhv. V og V^*. Da er

$$tr(T_{\xi,v}) = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i, (\xi, e_i)v) = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i, v)(\xi, e_i) = (\xi, \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i, v)e_i) = (\xi, v). \tag{380}$$

Den konstruerede afbildning har således den ønskede egenskab. Men denne egenskab er uafhængig af valg af basis, og det er tr således også. □

Hvis $\tilde{S}$ er en lineær afbildning af $V \otimes W$ ind i et vektorrum Z, da er det klart, at $S = \tilde{S} \circ \imath : V \times W \to Z$ er en lineær afbildning (se i øvrigt Lemma B.12). Det interessante er, at det omvendte også gælder:

Proposition B.15 (Tensor-produktets universelle egenskab). *Til en given bilineær afbildning S af $V \times W$ ind i Z findes en entydig lineær afbildning $\tilde{S} : V \otimes W \to Z$, således at $S = \tilde{S} \circ \imath$.*

Bevis. Vi definerer simpelthen

$$\tilde{S}(e_i \otimes f_j) = S(e_i, f_j) \tag{381}$$

og udvider denne til generelle vektorer ved linearitet. Hvis $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V$ og $w = \sum_{k=1}^{n} y_k f_k \in W$ da bliver, på grund af S's bilinearitet,

$$S(v, w) = \sum_{j,k=1,1}^{n,N} x_j y_k \tilde{S}(e_j \otimes f_k) = \tilde{S}(\sum_{j,k=1,1}^{n,N} x_j y_k (e_j \otimes f_k)) = \tilde{S}((\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) \otimes (\sum_{k=1}^{N} y_k f_k)) = \tilde{S}(v \otimes w). \tag{382}$$

Altså er $S = \tilde{S} \circ \imath$. □

Man kan nu fortsætte med at definere højere-ordens tensorer. Hvis f.eks. V_1, V_2, V_3 er vektorrum, kan vi betragte både $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ og $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Det er ikke vanskeligt at se, at disse vektorrum er isomorfe. Mere generelt kan man definere

$$\boxed{V_1 \otimes \cdots \otimes V_r = \mathcal{B}(V_1^*, \ldots, V_r^*)}\ , \tag{383}$$

hvor rummet på højresiden betegner mængden af multilineære afbildninger $V_1^* \times \cdots \times V_r^* \to \mathbb{R}$. Man har også her en universel egenskab, se Figur B.5. Endelig kan $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ identificeres med $\mathrm{Mult}(V_1^*, \ldots, V_{r-1}^*; V_r)$, d.v.s. med rummet af multilineære afbildninger fra $V_1^* \times \cdots \times V_{r-1}^*$ til V_r.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \arrow[drr, dashed, "\tilde{S}"] & & \\
V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[u, "\imath"] \arrow[rr, "S"] & & Z
\end{tikzcd}$$

FIGUR B.5. Tensorproduktets universelle egenskab: Lad $\imath$ betegne den multilineære afbildning $(v_1, \ldots, v_r) \to v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ af $V_1 \times \cdots \times V_r$ ind i $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$. For ethvert vektorrum Z og hver multilineær afbildning $S : V \times \cdots \times V_r \to Z$ findes en entydig lineær afbildning $\tilde{S} : V \otimes \cdots \otimes V_r \to Z$, så diagrammet kommuterer.

DEFINITION B.16. *Afbildningen $W \otimes V^* \otimes V \to W$ svarende til den trilineære afbildning*

$$W \times V^* \times V \ni w, \xi, v \to (\xi, v)w \in W \tag{384}$$

*kaldes **kontraktionen** af $W \otimes V^* \otimes V$ langs V^*, V. Dette kan naturligvis generaliseres til højere-ordens tensorer. Se i øvrigt opgaverne.*

BEMÆRKNING B.17. *I Riemannsk geometri bliver $V = T_m(M)$ og $V^* = T_m^*(M)$. Elementerne i V kaldes **kovariante vektorer** og elementerne i V^* for **kontravariante vektorer**.*

2. Den ydre algebra

DEFINITION B.18. *$\bigwedge^k(V)$ betegner rummet af k-lineære **alternerende** former på V^*, d.v.s. k-lineære former $L : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$ som opfylder*

$$\boxed{\forall \xi_1, \ldots, \xi_k \in V^* : L(\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(k)}) = sgn(\pi) L(\xi_1, \ldots, \xi_k)\ ,} \tag{385}$$

for alle permutationer $\pi \in \mathcal{S}_k$. Hvis $v_1, \ldots, v_k \in V$, da betegner $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ formen

$$\boxed{(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \det((\xi_i, v_j)_{i,j=1}^k)\ .} \tag{386}$$

I det ovenstående betegner $\mathcal{S}_k$ *permutationsgruppen af k bogstaver* (eller den *symmetriske gruppe i k bogstaver*), og $sgn(\sigma)$ for $\sigma \in \mathcal{S}_k$ betegner som sædvanligt *fortegnet* af σ (d.v.s.: hvis σ kan skrives som sammensætningen af s *transpositioner* (ombytninger af to elementer), da er $sgn(\sigma) = (-1)^s$).

Følgende observation er meget nyttig.

LEMMA B.19. *Lad L være en k-lineær alternerende form på V^*. Betragt et sæt af k vektorer fra V^*, $(\xi_1, \ldots \xi_{j-1}, \xi, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{i-1}, \xi, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_k)$, hvor elementet på den j-te plads er lig med elementet på den i-te plads. Da gælder*

$$L(\xi_1, \ldots \xi_{j-1}, \xi, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{i-1}, \xi, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_k) = 0. \tag{387}$$

BEVIS. Det anførte sæt af k vektorer er klart uændret under ombytning af elementet på den j-te plads med elementet på den i-te plads, men eftersom L er alternerende skal Lværdi på det ombyttede sæt være (-1) gange værdien på det oprindelige sæt. Dette er kun muligt, hvis denne værdi er 0. □

PROPOSITION B.20. *Lad $\{e_i\}_{i=1}^n$ være en basis for V. Vektorerne $e_{r_1} \wedge \cdots \wedge e_{r_k}$, hvor $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$, udgør en basis for $\bigwedge^k(V)$. Specielt er*
$\dim(\bigwedge^k(V)) = \binom{n}{k}$*, hvor sidstnævnte defineres til 0 for $k > n$.*

BEVIS. Det er let at se, at de nævnte elementer er lineært uafhængige og at $\dim(\bigwedge^k(V)) = 0$ for $k > n$. Lad $\mathcal{P}_k^n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_k) \mid \forall i = 1, \ldots, k : r_i \in \mathbb{N}$ og $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n\}$. Med $L \in \wedge^k(V)$ og $\{\epsilon_j\}_{j=1}^n$ den duale basis for V^* bliver

$$\begin{aligned}
L(\xi_1, \ldots, \xi_k) &= L(\sum_{j_1=1}^n (\xi_1, e_{j_1})\epsilon_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^n (\xi_k, e_{j_k})\epsilon_{j_k}) && (388)\\
&= \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^n (\xi_1, e_{j_1}) \cdots (\xi_k, e_{j_k}) L(\epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{j_k}) && (389)\\
&= \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_k) \in \mathcal{P}_k^n \\ \sigma \in \mathcal{S}_k}} (\xi_1, e_{r_{\sigma(1)}}) \ldots (\xi_k, e_{r_{\sigma(k)}}) L(\epsilon_{r_{\sigma(1)}}, \ldots, \epsilon_{r_{\sigma(k)}}) && (390)\\
&= \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_k) \in \mathcal{P}_k^n \\ \sigma \in \mathcal{S}_k}} (\xi_1, e_{r_{\sigma(1)}}) \ldots (\xi_k, e_{r_{\sigma(k)}}) \cdot sgn(\sigma) \cdot L(\epsilon_{r_1}, \ldots, \epsilon_{r_k}) && (391)\\
&= \sum_{(r_1,\ldots,r_k) \in \mathcal{P}_k^n} \det(\xi_i, e_{r_j})_{i,j=1}^k \cdot L(\epsilon_{r_1}, \ldots, \epsilon_{r_k}) && (392)\\
&= \sum_{(r_1,\ldots,r_k) \in \mathcal{P}_k^n} L(\epsilon_{r_1}, \ldots, \epsilon_{r_k})(e_{r_1} \wedge \cdots \wedge e_{r_k})(\xi_1, \ldots, \xi_k). && (393)
\end{aligned}$$

Denne udregning forløber således: Man kommer fra (388) til (389) ved linearitet. For at komme til (390) bemærkes, at en vilkårlig følge $j_1, j_2, \ldots, j_k$ af forskellige positive tal på præcist *en* måde kan omordnes (altså permuteres), så de står ordnet efter størrelse (i "nummerorden"). Herefter følger (391) let, da L jo er alternerende, og endelig er (392) jo en direkte følge af formlen for determinant. $\square$

BEMÆRKNING B.21. *Ovenstående formel bliver særlig simpel når $k = n$:*

$$\boxed{L(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det(\xi_i, e_j)_{i,j=1}^n \cdot L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)\ .} \tag{394}$$

Afbildningen

$$\boxed{V^k \ni v_1, \dots, v_k \xrightarrow{\imath} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k} \tag{395}$$

er tydeligvis multilineær og alternerende. Sammensættes denne med en lineær afbildning $\tilde{S} : \bigwedge^k(V) \to W$ fås naturligvis en multilineær alternerende afbildning $S = \tilde{S} \circ \imath : V_1 \times \cdots \times V_r \to W$. Ligesom for tensor-produktet har vi her også det omvendte:

PROPOSITION B.22 (DET YDRE PRODUKTS UNIVERSELLE EGENSKAB). *Til en given alternerende multilineær afbildning S af $V \times \cdots \times V$ ind i W findes en entydig lineær afbildning $\tilde{S}$ af $\bigwedge^k(V)$ ind i W, således at $S = \tilde{S} \circ \imath$.*

BEVIS. Definer simpelthen

$$\tilde{S}(e_{r_1} \wedge \cdots \wedge e_{r_k}) = S(e_{r_1}, \dots, e_{r_k}), \tag{396}$$

og udvid ved linearitet. Dette er den eneste chance for $\tilde{S}$. Omvendt er det klart, at denne definition virker. $\square$

PROPOSITION B.23. *Der findes en entydigt defineret bilineær afbildning*

$$\boxed{\wedge^k(V) \times \wedge^l(V) \ni \omega_1, \omega_2 \to \omega_1 \wedge \omega_2 \in \wedge^{k+l}(V)\ ,} \tag{397}$$

således at for alle $v_1, \dots, v_k, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_l \in V$

$$\boxed{(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \wedge (\tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_l) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge \tilde{v}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_l\ .} \tag{398}$$

Denne afbildning kaldes det ydre produkt. Den gør

$$\boxed{\bigwedge(V) = \textstyle\sum_{k=0}^n \wedge^k(V)\ ,} \tag{399}$$

hvor per definition $\wedge^0(V) = \mathbb{R}$, til en associativ algebra, kaldet den ***ydre algebra****.*

BEVIS. Holdes v_i-erne fast i (398) fås en alternerende multilineær afbildning $T(v_1, \dots, v_k)$ af $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{l}$ ind i $\bigwedge^{k+l}(V)$. Denne kan via Proposition B.22 udvides til $\bigwedge^l(V)$. Endvidere er, for fastholdt $\omega_2 \in \bigwedge^l(V)$, afbildningen $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \ni v_1, \dots, v_k \to T(v_1, \dots, v_k)\omega_2$ multilineær og alternerende og kan derfor, igen på grund af Proposition B.22, udvides til $\bigwedge^k(V)$. Påstanden følger let fra dette. $\square$

Bemærkning B.24. *Den ydre algebra er ikke kommutativ. Der gælder faktisk (overvej)*

$$\boxed{\omega_k \wedge \omega_l = (-1)^{k \cdot l} \omega_l \wedge \omega_k \quad \textit{hvis } \omega_k \in \wedge^k(V) \textit{ og } \omega_l \in \wedge^l(V)\ .} \tag{400}$$

APPENDIX C

Topologi

Vi minder her om nogle af de mest grundlæggende topologiske begreber.

DEFINITION C.1. *En mængde X kaldes et topologisk rum med topologien $\mathcal{T}$, såfremt der findes en familie $\mathcal{T}$ af delmængder af X, der opfylder:*

- $X \in \mathcal{T}$ *og* $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- $O_1, \ldots, O_r \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap \cdots \cap O_r \in \mathcal{T}$.
- *Hvis* $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}$, *da er* $\cup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$.

Elementerne i $\mathcal{T}$ kaldes de ***åbne*** *delmængder.*
Hvis $x \in X$, er ***en omegn om x*** *per definition en åben delmængde O, så $x \in O$.*
Rummet X kaldes et ***Hausdorffsk*** *rum såfremt*

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X : \exists O_1, O_2 \in \mathcal{T} : x_1 \in O_1, x_2 \in O_2 \text{ og } O_1 \cap O_2 = \emptyset. \tag{401}$$

En mængde X kan altid gøres til et topologisk rum ved at vælge $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Dette kaldes den **trivielle** topologi. I den anden yderlighed kal man vælge $\mathcal{T}$ som familien af alle delmængder. Den dur heller ikke til meget. Vi vil skrive $(X, \mathcal{T})$ når vi har situationen i Definition C.1.

DEFINITION C.2. *Lad $(X_1, \mathcal{T}_1)$ og $(X_2, \mathcal{T}_2)$ være topologiske rum. En afbildning $f : X_1 \to X_2$ kaldes* ***kontinuert*** *(med hensyn til de betragtede topologier) såfremt*

$$\forall U \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1. \tag{402}$$

DEFINITION C.3. *En delfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ kaldes en* ***basis for topologien*** *eller en* ***basis for de åbne mængder****, såfremt ethvert $O \in \mathcal{T}$ kan skrives som foreningsmængden af visse elementer i $\mathcal{B}$. Rummet X siges at være* ***anden-tællelig****, såfremt der findes en tællelig basis for de åbne mængder.*

DEFINITION C.4. *Et topologisk rum* $(X, \mathcal{T})$ *siges at være* ***usammenhængende****, såfremt der findes to åbne ikke-tomme delmængder* O_1, O_2 *af* X *så*

$$X = O_1 \cup O_2 \text{ og } O_1 \cap O_2 = \emptyset. \tag{403}$$

Hvis X *ikke er usammenhængende, da kaldes* X *for* ***sammenhængende****.*

DEFINITION C.5. *Hvis* $(X, \mathcal{T})$ *er et topologisk rum og* $Y \subset X$*, definerer*

$$\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\} \tag{404}$$

en topologi på Y *kaldet* ***sportopologien****.*

OPGAVER

Opgave 1.1. *Lad $t \to \alpha(t)$ være en vilkårlig regulær kurve.*

- *Udregn eksplicit krumningen.*
- *Vis, at tangentialkomponenten af $\alpha''(t)$ er lig med d^2s/dt^2 gange enhedstangentvektoren og at komponenten i retningen af hovednormalen er givet ved $(ds/dt)^2 \cdot k$ gange hovednormalen.*

Opgave 1.2. *Vis, at hvis $t \to \alpha(t)$ er en simpel lukket kurve i $\mathbb{R}^2$ med periode T, da er størrelsen*

$$\mathcal{L} = \int_0^T |\det(\alpha'(t), \alpha''(t))|^{\frac{1}{3}} dt$$

uafhængig af parametriseringen. Det kaldes den affine længde. Vis, at $\mathcal{L}^3/A$ er invariant under affine transformationer, hvis A er arealet af mængden omsluttet af kurven.

Opgave 1.3. *Betragt kurven x i $\mathbb{R}^3$ (kaldet skruelinien eller helixen):*

$$x(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), s \in \mathbb{R}, \tag{405}$$

hvor a, b, c er positive reelle tal og $c^2 = a^2 + b^2$.

- *Vis, at s er buelængde.*
- *Bestem krumningen og torsionen af x.*
- *Bestem den oskulerende cirkel.*
- *Vis, at linien bestemt af $n(s)$ gennem $x(s)$ skærer z-aksen i vinklen $\pi/2$.*
- *Bevis, at tangentlinierne til x danner en konstant vinkel med enhedsvektoren i z-aksens retning.*

Opgave 1.4. *Den plane kurve*

$$x(t) = (t, \cosh t)\,, t \in \mathbb{R} \tag{406}$$

kaldes katenoiden. Bevis, at krumningen med fortegn er givet ved

$$k(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}. \tag{407}$$

Opgave 1.5. *Lad $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ være en plan kurve. Bevis, at krumningen med fortegn er givet ved*

$$k_\sigma(t) = \frac{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}{((x_1')^2 + (x_2')^2)^{3/2}}. \tag{408}$$

Opgave 1.6. *Lad $x : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ være en regulær kurve. Antag, at der findes et punkt $t_0 \in (a, b)$, således at $|x(t)|$ har et lokalt maximum i t_0. Bevis, at $|k(t_0)| \geq 1/|x(t_0)|$.*
Antag nu, at x er en lukket kurve, der løber inden i en cirkelskive med radius r. Bevis, at der findes et $t \in (a, b)$ således, at krumningen i punktet $x(t)$ opfylder: $|k(t)| \geq 1/r$.

Opgave 1.7. *Antag, at $\beta'(0)$ i beviset for Sætning* I.10 *peger i den positive x-akses retning. Lad y ligge i komplementærmængden $\mathcal{C}^c$ til $\mathcal{C}$. Definer variationen $d(y)$ som værdien $\phi_y(L) - \phi_y(0)$, hvor $\phi_y(s)$ er vinklen, som enhedsvektoren $(\beta(s) - y)/\|\beta(s) - y\|$ fra y til $\beta(s)$ danner med en fast retning—f.eks. $\beta'(0)$. Bevis, at $d(y)$ altid enten er 0 eller 2π. Vis videre, at $\mathcal{C}_e = \{y \in \mathcal{C}^c \mid d(y) = 0\}$ er en ubegrænset åben sammenhængende mængde—det ydre af kurven—hvorimod $\mathcal{C}_i = \{y \in \mathcal{C}^c \mid d(y) = 2\pi\}$—det indre af kurven—er en begrænset åben sammenhængende mængde. (Dette er (den differentiable) Jordans kurvesætning). Vink: Undersøg først en omegn af $\beta(0)$, dernæst en omegn af kurven.*

Opgave 1.8. *Bevis, at cylinderen $\{(x, y, s) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ er en delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$ og find lokale parametriseringer, der tilsammen dækker den.*
Tilsvarende spørgsmål for delmængden $\{(x, y, z, s, t) \in \mathbb{R}^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ af $\mathbb{R}^5$.

Opgave 1.9. *Bevis, at enhedskugleoverfladen $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

er en delmangfoldighed. Konstruer et kort.

Opgave 1.10. *Delmængden $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 = z + y^2 - x^2\}$ er en 2-dimensional delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$ (hvorfor?). Check, at de to nedenfor anførte funktioner er kort på S:*

- $f(u,v) = (u+v, u-v, 4uv), (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
- $g(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2), (u,v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

OPGAVE 1.11. *Angiv et atlas for den to-bladede hyperboloide* $\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_1^2 - \cdots - x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$.

OPGAVE 1.12. *Bevis, at en åben delmængde af en delmangfoldighed selv er en delmangfoldighed.*

OPGAVE 1.13. *Bevis påstanden i (*54*) side 11.*

OPGAVE 1.14. *Bevis, at den orthogonale gruppe* $O(2)$ *er en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^4$. *Prøv at formulere hvorledes den "globalt" ser ud.*
For tilsvarende at bevise, at $O(3)$ *er en 3-dimensional delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^9$ *kan man evt. forsøge med følgende program:*

- *Find 6 "naturlige" funktioner på mængden af* 3×3*-matricer* ($\equiv \mathbb{R}^9$)*, der tilsammen er en kandidat til funktionen "F" i definitionen (2) side 14.*
- *Bevis, at* F' *er surjektiv i punktet* $I \in O(3)$.
- *Udnyt gruppestrukturen i* $O(3)$ *til at konkludere, at* F' *også er surjektiv i ethvert andet punkt i* $O(3)$.
- *Konkluder det ønskede.*

OPGAVE 1.15. *Lad*

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{409}$$

og lad $\theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$. *Udnyt, at* $\omega(\theta) = 0$ *til at bevise, at* $\exp(t\omega)$ *er en rotation gennem vinklen* $t\|\theta\|$ *omkring* θ.
Vis, at der findes matricer A, B, C *således at*

$$\exp(t\omega) = A + B\cos(t\|\theta\|) + C\sin(t\|\theta\|), \tag{410}$$

og bestem disse. Benyt dette til at finde alle kurver β *i* $\mathbb{R}^3$*, hvor torsionen og krumningen er givne konstanter (og sidstnævnte* $\neq 0$*), og således at* $\beta(0) = 0 \in \mathbb{R}^3$*, og de tre vektorer* $\beta'(0), n(0)$ *og* $b(0)$ *netop udgør det sædvanlige orthonormalsystem for* $\mathbb{R}^3$.

OPGAVE 1.16. *Bevis, at hvis* n *er ulige og* S *er en reel skævsymmetrisk* $n\times n$ *matrix, da har ligningen* $S\theta = 0$ *mindst én løsning* $\theta \neq 0$ *og vis, at* $\exp(tS)\theta = \theta$. *Vis for et vilkårligt* n*, at hvis* $S \neq 0$ *er en skævsymmetrisk* $n\times n$ *matrix, da findes et 2-dimensionalt underrum* $W \subset \mathbb{R}^n$ *således, at både* W *og dets vinkelrette komplement* W^- *er invariante under* S *og dermed også under* $\exp(tS)$. *Beskriv strukturen af* S *og* $\exp(tS)$ *geometrisk. Vink: Når* S *er skævsymmetrisk og* n *er* *ulige, så er det karakteristiske polynomium* $\det(t \cdot I - S)$ *en ulige funktion i* t .... *For at komme igang med det 2-dimensionale underrum kan man tænke på, at* S*–som jo har* reelle *koefficienter–har en imaginær egenværdi hørende til en vektor* w *med komplekse koefficienter–for* $i \cdot S$ *er en selvadjungeret (hermitisk) matrix. Skrives* w *som* $v_1 + i \cdot v_2$*, hvor* v_1 *og* v_2 *har reelle koefficienter, dukker en naturlig kandidat til det ønskede underrum op.*

OPGAVE 1.17. *Lad* m *og* a *være komplekse* $n \times n$ *matricer og antag, at* a *er invertibel. Bevis, at*

$$\exp(a \cdot m \cdot a^{-1}) = a \cdot \exp(m) \cdot a^{-1}. \tag{411}$$

Brug (411) *samt at en hermitisk eller skæv-hermitisk matrix* m *(i.e.* $m^* = m$ *eller* $m^* = -m$*) kan diagonaliseres over* $\mathbb{C}$ *til at bevise, at den uendelige række i definitionen af* $\exp(m)$ *konvergerer, hvis* m *er hermitisk eller skæv-hermitisk. Specielt konvergerer den, hvis* m *er reel og skæv-symmetrisk.*

OPGAVE 1.18. *Betragt en åben delmængde* ω *af* $\mathbb{R}^n$*. Opfat den som indlejret i* $\mathbb{R}^N$ $(N > n)$ *som "de sidste* n *koordinater";* $\tilde{\omega} \equiv \{(0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \omega\}$*. Bevis, at* $\tilde{\omega}$ *derved bliver en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^N$*. Angiv konkrete funktioner* F *og* G *som i beviset for Sætning* II.6*, der kan bruges i denne situation.*

OPGAVE 1.19. *Lad* v_1 *og* v_2 *være to lineært uafhængige vektorer i* $\mathbb{R}^5$*. Lad* $M = \{x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$*. Bevis, at* M *er en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^5$ *og angiv funktioner* F *og* G *som i beviset side 14.*

OPGAVE 1.20. *Betragt følgende (generaliserede) graf:* $M = \{(x, y, x + x^2y^2, y + y^2) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$*. Angiv (lokalt) en funktion* F_1*, der opfylder (1) side 14. Suppler denne op til en funktion "*Ψ_1^{-1}*" og diskuter funktionen* $f_1(x) = \Psi_1(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$*. Angiv tilsvarende en funktion* f*, der opfylder (2) side 14 og suppler denne op til en funktion* Ψ*. Diskuter funktionen* F *i (lokalt)* $(F, G) = \Psi^{-1}$*.*

OPGAVE 1.21. *Betragt* $\mathbb{R}^3$ *med koordinater* (x, y, z)*. Lad* $I \ni v \to (0, f(v), g(v))$ *betegne en simpel regulær (ikke nødvendigvis lukket) kurve i* yz*-planen, og antag, at* $\forall v \in I : f(v) > 0$*. Antag endvidere, at* $\{(0, f(v), g(v)) \mid v \in I\}$ *er en 1-dimensional delmangfoldighed af denne plan. Drejes denne kurve en hel omgang om* z*-aksen fås en flade* M*, hvor et vilkårligt punkt har formen* $(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ *for et passende* u, v*. Bevis, at* M *er en 2-dimensional delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^3$*—en såkaldt* ***omdrejningsflade****.*

OPGAVE 1.22. *Konstruer en diffeomorfi mellem en ellipsoide* $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ *og kugleoverfladen* S^2 *i* $\mathbb{R}^3$*.*

Opgave 1.23. *Antag, at* $\psi : U_1 \to U_2$ *er en differentiabel afbildning af en åben delmængde* $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{N_1}$ *ind i en åben delmængde* $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$*. Antag yderligere, at* M_1 *og* M_2 *er delmangfoldigheder af hhv.* $\mathbb{R}^{N_1}$ *og* $\mathbb{R}^{N_2}$*, der opfylder, at* $M_1 \subseteq U_1$ *og* $\psi(M_1) \subseteq M_2$*. Bevis, at* ψ *er differentiabel som afbildning fra* M_1 *ind i* M_2*.*

Opgave 1.24 (Stereografisk projektion). *Lad* N *betegne "nordpolen" i* S^n*,* $N = (0, \dots, 0, 1)$ *og lad tilsvarende* $S = (0, \dots, 0, -1)$ *betegne "sydpolen". For et vilkårligt punkt* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *defineres* $\pi_N \in S^n$ *til at være det entydige punkt der både ligger i* S^n *og på linien fra* $(x_1, \dots, x_n, 0)$ *til* N*. Bevis, at* $(\pi_N, \mathbb{R}^n)$ *er et kort på* S^n*. Definer nu tilsvarende* π_S *baseret på "projektion" fra sydpolen. Angiv explicitte udtryk for*

$$\pi_S^{-1} \circ \pi_N \ \text{og} \ \pi_N^{-1} \circ \pi_S. \tag{412}$$

Opgave 1.25. *Lad notationen være som i Opgave 1.24, idet vi dog nu sætter* $n = 2$ *og opfatter* $\mathbb{R}^2$ *som* $\mathbb{C}$*. Lad* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *være et ikke-konstant komplekst polynomium, d.v.s., der findes et* $r \geq 1$ *og for alle* $i = 0, \dots, r$ *komplekse konstanter* a_i *med* $a_r \neq 0$ *så*

$$P(\zeta) = a_r\zeta^r + \cdots + a_1\zeta + a_0. \tag{413}$$

Definer en afbildning $\psi : S^2 \to S^2$ *ved*

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \pi_N \circ P \circ \pi_N^{-1} \ \text{hvis} \ p \in S^2 - \{N\} \\ \psi(N) &= N. \end{aligned} \tag{414}$$

Bevis, at ψ *er en differentiabel afbildning.*

Opgave 1.26. *Skitsèr et bevis for, at* $O(n)$ *er en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^{n^2}$*. Bevis dernæst, at hvis* g *er et vilkårligt element i* $O(n)$*, da er begge afbildningerne* $O(n) \ni o \to g \cdot o$ *og* $O(n) \ni o \to o \cdot g$ *diffeomorfier af* $O(n)$ *på* $O(n)$*.*

Opgave 1.27. *Lad* M_1 *være en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^{N_1}$ *og lad* M_2 *være en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^{N_2}$*. Bevis, at*

$$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1 \ \text{og} \ m_2 \in M_2\} \tag{415}$$

er en delmangfoldighed af $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$*, og at projektionerne* $\pi_1 : (m_1, m_2) \to m_1$ *og* $\pi_2 : (m_1, m_2) \to m_2$ *er differentiable afbildninger.*

Opgave 1.28. *Bevis, at* $SO(2) = \{o \in O(2) \mid \det o = 1\}$ *som delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^4$ *er diffeomorf med* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*. Bevis yderligere, at afbildningen* $S^1 \times S^1 \to S^1 : (z_1, z_2) \to \frac{z_1}{z_2}$ *er differentiabel (se Opgave 1.27).*

Opgave 1.29. *Bevis, at afbildningen* $O(n) \times O(n) \to O(n) : (o_1, o_2) \to o_1 \cdot o_2^{-1}$ *er differentiabel. (Dette viser, at* $O(n)$ *er en Liegruppe.)*

OPGAVE 1.30. *Lad* $F : U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *være en differentiabel funktion. Antag, at* $\forall X \in M = F^{-1}(a) : grad F(X) \neq 0$. *Bevis, at* M *(hvis den er forskellig for den tomme mængde) er en* $N-1$ *dimensional delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^N$. *Bevis yderligere, at tangentrummet i et punkt* $X_0 \in M$ *er givet ved ligningen*

$$\langle grad F(X_0), X\rangle = 0, \tag{416}$$

og at den plan, der tangerer M *i* X_0*, som delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^N$*, er givet ved ligningen*

$$\langle grad F(X_0), X - X_0\rangle = 0. \tag{417}$$

OPGAVE 1.31. *Vi vil sige, at to delmangfoldigheder* M_1 *og* M_2 *i* $\mathbb{R}^3$ *skærer hinanden orthogonalt, såfremt normalerne* $N_1(p)$ *og* $N_2(p)$ *til ethvert punkt* $p \in M_1 \cap M_2$ *svarende til til tangentplanerne hhv.* M_1 *og* M_2 *er vinkelrette. Bevis, at hver af ligningerne (hvor* $a, b, c \neq 0$*)*

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = by$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = cz$$

definerer delmangfoldigheder af $\mathbb{R}^3$*, og at de skærer hinanden orthogonalt.*

OPGAVE 1.32. *Lad* f *og* g *være differentiable funktioner på* $\mathbb{R}^2$. *Lad* M_f *og* M_g *betegne graferne (delmangfoldigheder af* $\mathbb{R}^3$*) for hhv.* f *og* g. *Antag* $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $grad f(x) \neq grad g(x)$*, og at* $M_f \cap M_g \neq \emptyset$. *Bevis, at* $M_f \cap M_g$ *er en 1-dimensional delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^3$.

OPGAVE 1.33. *Find koefficienterne* $g_{jk}(x)$ *til den første fundamentalform for følgende delmangfoldigheder med hensyn til et kort.*

- S^2 *m.h.t. til et kort af typen* $(x, y, (1 - x^2 - y^2)^{1/2})$.
- *En plan i* $\mathbb{R}^4$ *gennem et punkt* X_0 *og udspændt af tre lineært uafhængige vektorer* v_1, v_2, v_3.
- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. *Vælg selv et kort.*
- *En omdrejningsflade i* $\mathbb{R}^3$ *med hensyn til et naturligt kort. (Se Opgave* 1.21*).*
- S^n *m.h.t. stereografisk projektion (hvad betyder resultatet?).*
- *Helicoiden* $\{(v\cos u, v\sin u, au) \mid u, v \in \mathbb{R}$ *og* $a \neq 0$ *en konstant*$\}$ *m.h.t. naturligt kort.*

OPGAVE 1.34. *Lad* M_i *for* $i = 1, 2$ *være* n*-dimensionale delmangfoldigheder af* $\mathbb{R}^N$. *Antag at* $2n - N > 0$ *og at* $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. *Vis, at der generelt gælder at* $\dim(T_m(M_1) \cap T_m(M_2)) \geq 2n - N$. *Antag nu følgende:* $\forall m \in M_1 \cap M_2$: $\dim(T_m(M_1) \cap T_m(M_2)) = 2n - N$. *Bevis, at* $M_1 \cap M_2$ *er en* $2n - N$ *dimensional delmangfoldighed.*

OPGAVE 1.35. *Lad J være en $n \times n$ matrix med følgende diagonal:* $(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q})$ $(p+q=n)$ *og nuller uden for diagonalen. Definer en bilinearform* $(\cdot,\cdot)_J$ *på* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *ved*

$$(x,y)_J = (Jx,y)_e, \tag{418}$$

hvor $(\cdot,\cdot)_e$ *betegner det sædvanlige (euklidiske) indre produkt på* $\mathbb{R}^n$. *Definer den* pseudo-orthogonale gruppe $O(p,q) = \{n \times n \text{ matricer } m \mid \forall x,y \in \mathbb{R}^n : (mx,my)_J = (x,y)_J\}$. *Skitsér et bevis for, at* $O(p,q)$ *er en delmangfoldighed af et passende endeligt-dimensionalt reelt vektorrum. Hvad er dens dimension?*

OPGAVE 1.36. *Bevis, at det er ligegyldigt hvorvidt man i betingelse* (1) *side* 14 *kræver, at* F' *er surjektiv på hele* U *eller blot at* F' *er surjektiv på* $M \cap U$.

OPGAVE 1.37. *Antag givet, for den* <u>samme</u> *åbne delmængde* U *af* V, *både et par* (F,U) *som i* (1) *og et par* (f,O) *som i* (2) *(begge side 14). Udnyt disse afbildninger, samt velkendte sætninger om kernen for en lineær afbildning* L *sammenholdt med billedet for* L^t, *til at konstruere kandidater til kort på normalbundtet. Vis dernæst, at normalbundtet er en delmangfoldighed af* $\mathbb{R}^{2N}$, *og at dimensionen er* N.

OPGAVE 1.38. *Lad* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *være givet ved* $\psi(X) = \|X - X_0\|^2$ *for et fast punkt* $X_0 \in \mathbb{R}^N$. *Angiv et udtryk for* $d\psi_X(v)$ *for* $v \in T_X(M)$.

OPGAVE 1.39. *Lad* $X \in M$ *og antag givet to kort* (f^1, O_1) *og* (f^2, O_2) *således, at* $X \in f^1(O_1) \cap f^2(O_2)$. *Lad os videre angive punkter i* O_1 *som n-tupler* $(x_1,\dots,x_n)$ *og punkter i* O_2 *som n-tupler* $(y_1,\dots,y_n)$. *En vilkårlig vektor* $v \in T_X(M)$ *kan da skrives*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \tau_i f^1_{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \rho_j f^2_{y_j}. \tag{419}$$

Antag, at $X = f^1(x_0)$. *Bevis, at*

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x_0)\right)(\tau), \tag{420}$$

hvor vi, i standard notation, opfatter y_j*-erne som funktioner af* x_i*-erne via* $y = (f^2)^{-1} \circ f^1(x)$.

OPGAVE 1.40. *Et* ***kritisk punkt*** *for en differentiabel afbildning* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *er et punkt* $m \in M$ *hvor* $d\psi_m = 0$. *(Når mere generelt* ψ *er en afbildning fra* M *til* N, *er det et punkt* m, *hvor* $d\psi_m$ *ikke har maksimal rang.)*

- *Lad* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *være givet ved* $\psi(m) = \|m - m_0\|$, *hvor* $m_0 \notin M$. *Bevis, at* m *er et kritisk punkt for* ψ *hvis og kun hvis* $m - m_0 \in T_m(M)^-$.
- *Lad* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *være givet ved* $\phi(m) = \langle m, v\rangle$ *for en fast enhedsvektor* $v \in \mathbb{R}^N$. *Vis, at* m *er et kritisk punkt for* ϕ *hvis og kun hvis* $v \in T_m(M)^-$.

OPGAVE 1.41. *Lad* $\psi : M \to \mathbb{R}$ *være en differentiabel funktion på en (kurve-)sammenhængende delmangfoldighed* M. *Antag, at* $d\psi_m = 0$ *for alle* $m \in M$. *Bevis, at* ψ *er konstant.*

OPGAVE 1.42. *Fuldfør detaljerne i Bemærkning* II.42 *side 29.*

OPGAVE 1.43. *Betragt lokale kort* (f^i, O_i), $i = 1, 2$ *på* S^2 *givet ved*

$$\begin{aligned} f^1(\phi,\theta) &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),\ \phi \in]0, 2\pi[\,,\ \theta \in]0, \pi[\text{ and} \\ f^2(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}),\quad x_1^2 + x_2^2 < 1. \end{aligned}$$

Betragt funktionerne $C_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$ *og* $C_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$ *restringeret til* S^2 *og udregn* $\frac{\tilde\partial}{\partial\phi}, \frac{\tilde\partial}{\partial\theta}, \frac{\tilde\partial}{\partial x_1}$, *og* $\frac{\tilde\partial}{\partial x_2}$ *af disse.*
—Hvilke af vektorfelterne $(\sin^n\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}, n = 0, 1, 2, \ldots,$ *kan udvides til* S^2, *i.e. to* $C^\infty(S^2)$*?*

OPGAVE 1.44. *Find samtlige Christoffelsymboler både af første og af anden art for følgende delmangfoldigheder med hensyn til et kort.*

- *En plan i* $\mathbb{R}^4$ *gennem et punkt* X_0 *og udspændt af tre lineært uafhængige vektorer* v_1, v_2, v_3.
- $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. *Vælg selv et kort.*
- *En omdrejningsflade i* $\mathbb{R}^3$ *med hensyn til et naturligt kort.*
- S^n *m.h.t. stereografisk projektion.*
- *Helicoiden* $\{(v\cos u, v\sin u, au) \mid u, v \in \mathbb{R}$ *og* $a \neq 0$ *en konstant*$\}$ *m.h.t. naturligt kort.*

OPGAVE 1.45. *Lad* $M \subseteq R^6$ *være den 3-dimensionale delmangfoldighed givet ved*

$$M = \{(x, y, z, x, y, xz) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Bestem alle Christoffelsymbolerne af både den første og af den anden art.

OPGAVE 1.46. *Udregn alle Christoffelsymbolerne på torus (Opgave* 1.72*) med hensyn til en parametrisering som i Opgave* 1.85*, ligning (*437*). Løs dernæst Opgave* 1.85*. Udfør endelig den del af Opgave* 1.86*, der har med torus at gøre.*

OPGAVE 1.47. *Bevis, at afbildningen ψ defineret i opgave* 1.25 *kun har endeligt mange kritiske punkter. (Altså hvor determinanten af Jacobimatricen er 0, se i øvrigt Opgave* 1.40*).*

OPGAVE 1.48. *Betragt restriktionen af exponentialafbildningen* exp *til vektorrummet* $\{\omega \in Mat(r, \mathbb{R}) \mid \omega + \omega^t = 0\}$. *Denne afbildning (også betegnet med* exp*) afbilder ind i $O(r)$, og er stadig givet ved*

$$\exp(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j}{j!}. \tag{421}$$

Det antages bevist, at afbildningen er veldefineret og differentiabel. Hvad er differentialet $\exp'_0$ *af* exp *i* 0*?.*

OPGAVE 1.49 (GEODÆTISK KRUMNING MED EN VILKÅRLIG PARAMETRISERING). *Betragt en regulær kurve $t \to \alpha(t)$ på en delmangfoldighed M. For at finde den geodætiske krumning og den geodætiske hovednormal skal kurven omparametriseres til buelængde, $s \to \beta(s)$, og $\beta''(s)$ skal derefter projiceres ned på tangentplanen. Brug f.ex. formel (*13*) til at vise, at den geodætiske hovednormal er vinkelret på $\alpha'(t)$ og angiv videre de geodætiske størrelser i termer af projektionen af $\alpha''(t)$ på normalplanen. Besvar endelig spørgsmålene side 46.*

OPGAVE 1.50. *Betragt funktionen $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved $\psi(x, y) = (x^2y, y^2x)$ og lad $M_\psi = M \subseteq \mathbb{R}^4$ være grafen for ψ.*

- *Lad $f(x, y) = (x, y, x^2y, y^2x)$ være et kort på M, defineret på hele $\mathbb{R}^2$. Angiv den anden fundamentalform langs en vilkårlig kurve $t \to f(x(t), y(t))$.*
- *Bevis, at $(x, y, z, w) \to (z, w, 2xyz + wx^2, zy^2 + 2xyw)$ ved restriktion definerer et vektorfelt X på M.*
- *Udregn den kovariant afledede af X langs en kurve af formen $t \to f(a \cdot t + x_0, b \cdot t + y_0)$, for vilkårlige reelle konstanter a, b, x_0, y_0.*
- *Lad $\alpha(t) = f(t, t)$. Find den geodætiske krumning og hovedretning.*

OPGAVE 1.51. *Lad $v_1(t)$ og $v_2(t)$ være vektorfelter langs en kurve $\alpha(t)$ på en delmangfoldighed M. Antag, at begge vektorfelter opfylder, at den kovariant afledede langs kurven er identisk nul. Bevis, at $\langle v_1(t), v_2(t)\rangle$ er uafhængig af t.*

OPGAVE 1.52. *(Se i øvrigt Opg.* 1.39*) Lad $m \in M$ og antag givet to kort (f^1, O_1) og (f^2, O_2) således, at $m \in f^1(O_1) \cap f^2(O_2)$. Lad os videre angive punkter i O_1 som n-tupler $(x_1, \ldots, x_n)$ og punkter i O_2 som n-tupler $(y_1, \ldots, y_n)$. En vilkårlig vektor $v \in T_m(M)$ kan da skrives $v = \sum_{i=1}^n \tau_i f^1_{x_i} = \sum_{j=1}^n \rho_j f^2_{y_j}$. Lad os for klarhedens skyld skrive $g^x = \{g_{x_i x_j}\}$, hvor $g_{x_i x_j} = \langle f_{x_i}, f_{x_j}\rangle$ og tilsvarende $g^y = \{g_{y_i y_j}\}$ med*

$g_{y_k y_l} = \langle f_{y_k}, f_{y_l}\rangle$. *Bevis, at* $g_{x_i x_j} = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} g_{y_k y_l}$, *altså, i mere kompakt notation, at*

$$g^x = j^t g^y j, \tag{422}$$

hvor vi opfatter y_j*-erne som funktioner af* x_i*-erne via* $y = (f^2)^{-1} \circ f^1(x)$, *og hvor* $j = (\frac{\partial y}{\partial x})$ *betegner Jacobimatricen for koordinatskiftet.*

Opgave 1.53. *Lad* (f, O) *være et lokalt kort på en delmangfoldighed* M. *Udregn den kovariant afledede af vektorfeltet* f_{x_j} *langs en kurve af formen* $t \to f(x_0 + t \cdot e_i)$, *hvor* e_i *betegner den* i*-te basisvektor i* $\mathbb{R}^n$ *og* $x_0 \in O$.

Opgave 1.54. *Lad* Φ *være en differentiabel afbildning fra en delmangdoldighed* M *til en delmangfoldighed* N. *Bevis, at afbildningen* $d\Phi : T(M) \ni (m, v) \to d\Phi_m(v) \in T(N)$ *er differentiabel.*

Opgave 1.55. *Bevis, i fortsættelse af Opgave* 1.52, *at*

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j. \tag{423}$$

Opgave 1.56. *Formuler og bevis en generalisation af "Sætningen om den Inverse Funktion" til afbildninger mellem delmangfoldigheder af den samme dimension. Bevis dernæst, i fortsættelse af Opg.* 1.48, *at der findes en omegn* Ω *af 0 i* $\{\omega \in Mat(r, \mathbb{R}) \mid \omega + \omega^t = 0\}$, *således at* $(\exp, \Omega)$ *er et lokalt kort på* $O(r)$ *(*$\exp$ *restringeret til* Ω*) med* $I \in \exp(\Omega)$. *Bevis endelig, at hvis* $o \in O(r)$, *da er såvel* $(o \cdot \exp(\cdot), \Omega)$ *som* $(\exp(\cdot) \cdot o, \Omega)$ *lokale kort på* $O(r)$ *omkring* o.

Opgave 1.57. *Bevis, at symmetriske* $r \times r$ *matricer er vinkelrette på skævsymmetriske* $r \times r$ *matricer i det indre produkt* $\langle m_1, m_2\rangle = \mathrm{tr}\,(m_1 m_2^t)$. *Bevis dernæst, at kurverne* $t \to \exp t\omega$ *i* $O(r)$ *(*$\omega^t = -\omega$*) overalt har geodætisk krumning 0.*

Opgave 1.58. *I tilfældet* $n = 2$, *lav en liste over de symboler* R_{ijkl}, *der* altid *er 0.*

Opgave 1.59. *Lad* f *og* g *tilhøre* $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, *lad* $\psi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ *og lad* $M_\psi = M \subseteq \mathbb{R}^4$ *være grafen for* ψ. *Udregn samtlige symboler* R_{ijkl}.

Opgave 1.60. *Lad* $M_\psi = M \subseteq \mathbb{R}^4$ *være grafen for funktionen* $\psi(x, y) = (x^2 - y^2, 4xy)$.

- *Find samtlige Christoffelsymboler af 2.den art.*
- *Find Ricci tensoren samt den skalære krumning i det punkt, der svarer til* $(x, y) = (0, 0)$.

OPGAVE 1.61. • *Lad* $\mathfrak{o}(r) = \{\omega \in Mat(r, \mathbb{R}) \mid \omega^t = -\omega\}$. *Bevis, at afbildningen*

$$\mathfrak{o}(r) \times O(r) \ni (\omega, o) \to (o, o \cdot \omega) \in T(O(r)) \tag{424}$$

er en diffeomorfi. (Tangentbundtet kan m.a.o. trivialiseres. *Dette gælder altid for Liegrupper, men er ellers meget usædvanligt).*

- *For fastholdt* $\tilde{o} \in O(r)$ *inducerer afbildningen*

$$Mat(r, \mathbb{R}) \times Mat(r, \mathbb{R}) \ni (m_1, m_2) \to (m_1 \cdot \tilde{o}, m_2 \cdot \tilde{o}) \in Mat(r, \mathbb{R}) \times Mat(r, \mathbb{R}) \tag{425}$$

ved restriktion en differentiabel bijektion $T(O(r)) \to T(O(r))$. *(Begrund.) Via* (424) *fås derved en afbildning* $\mathfrak{o}(r) \times O(r) \to \mathfrak{o}(r) \times O(r)$. *Beskriv denne.*

OPGAVE 1.62. *Lad* M *være en hyperflade i vektorrummet* V. *Betragt afbildningen* $G_k : V \ni v \to k \cdot v \in V$, *hvor* k *er en reel konstant,* $k \neq 0$. *Lad* $M_k = G_k(M)$. *Udtryk middelkrumning og Gauss krumning på* M_k *i et punkt* $k \cdot m$ *ved de tilsvarende størrelser i* $m \in M$.

OPGAVE 1.63. *For hver af følgende grafer ønskes hovedkrumningerne og hovedretningerne i punktet svarende til* $(x, y) = (0, 0)$:

- $z = x^2 + y^2$.
- $z = x^3 - 3y^2 x$.
- $z = x^2 - by^2 - ay$, *hvor* a, b *er reelle konstanter.*

OPGAVE 1.64. *Beskriv geodæterne* γ *på en cylinderflade i* $\mathbb{R}^3$. *(De må have* γ'' *vinkelret på tangentplanen). Vis, at to vilkårlige punkter på cylinderfladen* ***i forskellig højde*** *kan forbindes med uendeligt mange forskellige geodæter.*

OPGAVE 1.65. *(Se Opgave* 1.52*). På en delmangfoldighed* M, *lad* ψ *være en* C^∞-*funktion med kompakt støtte* S *indenfor en koordinatomegn* $f(\omega) \subseteq M$. *Definer*

$$\int_S \psi dM = \int_{f^{-1}(S)} (\psi \circ f)(x)\sqrt{g(x)}dx, \tag{426}$$

hvor dx *betegner det sædvanlige Lebesguemål på* $\mathbb{R}^n$ *og* $g(x) = \det g_{ij}(x)$. *Bevis, at* (426) *er uafhængig af parametrisering i den forstand, at hvis* S *også ligger indenfor en anden koordinatomegn* $\tilde{f}(\tilde{\omega})$, *da fås samme resultat i* (426) *når* f *erstattes med* $\tilde{f}$. *Faktisk kan* (426) *udvides til mængden af* C^∞-*funktioner på* M *med kompakt støtte, og videre helt ud til mængden af målelige funktioner på* M. *Antyd hvorledes. Det derved opnåede mål kaldes det* ***euklidiske volumenelement på M****.*

Opgave 1.66. *Bevis, at når* $g(x) = \det g_{ij}(x)$*, da er* $\frac{\partial g(x)}{\partial x_l} = 2g(x)\sum_i ?^{\,i}_{\,il}$ *og dermed* $\frac{\partial\sqrt{g(x)}}{\partial x_l} = \sqrt{g(x)}\sum_i ?^{\,i}_{\,il}$.

Opgave 1.67. *Bevis, med notationen som i Opgave* 1.66*, at*

$$R_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial ?^{\,j}_{\,ik}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\log g + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} ?^{\,l}_{\,ik}\frac{\partial \log g(x)}{\partial x_l} - \sum_{l,j=1}^{n} ?^{\,l}_{\,ij}?^{\,j}_{\,lk}. \tag{427}$$

Opgave 1.68 (Fortsættelse af Opgave 1.35). *Lad* I *betegne den identiske afbildning. Beskriv tangentrummet* $T_I(O(p,q))$*. Regn derefter opgaven svarende til Opgave* 1.61 *for* $O(p,q)$.

Opgave 1.69. *Bevis, evt. under brug af Opgave* 1.30*, at der altid findes et lokalt defineret differentiabelt felt af enhedsnormalvektorer på en hyperflade* M.

Opgave 1.70. *Lad* M *være en hyperflade i* V*. Lad* $m \in M, v \in T_m(M)$ $(v \neq 0)$*, lad* $N(m)$ *være en normalvektor til* M *i* m *(dvs. til* $T_m(M)$*) og lad endelig* $\mathcal{P}(v, N(m))$ *være planen frembragt af* $\{v, N(m)\}$ ***gennem m****. Bevis, at fællesmængden* $\mathcal{P}(v, N(m)) \cap M$ *i en omegn af* m *kan fremkomme som sporet af en regulær kurve* $t \to \alpha(t)$ *med* $\alpha(0) = m$ *og* $\alpha'(0) = v$*. (Altså, at der findes en omegn* U *om* m *således, at* $U \cap \mathcal{P}(v, N(m)) \cap M = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ *for et passende interval* I*.) Gennemfør derefter et bevis for en tilsvarende påstand, men hvor restriktionen om, at* M *er en hyperflade, fjernes. Bevis endelig, at hvis* $\|v\| = 1$ *og den konstruerede kurve er parametriseret ved buelængde, da gælder*

$$\alpha''(0) \in N_m(M). \tag{428}$$

Opgave 1.71. *Angiv explicit formlerne for middelkrumningen og den totale krumning for en hyperflade af formen* $\{(x_1, \ldots, x_n, \phi(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$*, hvor* ϕ *er en differentiabel funktion. Bemærk, at formlerne får et særligt simpelt udseende i et punkt* $\check{x}$ *hvor* $\forall i = 1, \ldots, n : (\partial\phi/\partial x_i)(\check{x}) = 0$ *og* $\forall i, j,\ i \neq j : (\partial^2\phi/\partial x_i \partial x_j)(\check{x}) = 0$*. Bevis, at man for en vilkårlig hyperflade* M *og et vilkårligt punkt* $m \in M$ *kan finde en funktion* ϕ *(og et retvinklet koordinatsystem med koordinater* $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$*) således, at* M *i en omegn af* m *er lig grafen for* ϕ *og således, at* ϕ *opfylder disse extra krav i punktet* $\check{x}$ *for hvilket* $m = (\check{x}, \phi(\check{x}))$.

Opgave 1.72. *Find, under brug af Opgave* 1.65 *arealet (eller "volumenet" som det generelt kaldes) af følgende flader:*

- *Torus i* $\mathbb{R}^3$*: En cirkel i* yz *planen med radius* r *og centrum i* $(0, a, 0)$ $(a > r > 0)$ *drejet en hel omgang om* z*-aksen.*
- S^n *(enten ved induktion eller ved brug af stereografisk projektion).*

OPGAVE 1.73 (LAMBERT'S PROJEKTION). *Betragt overfladen af en kugle med radius R i $\mathbb{R}^3$ og lad $f : (\phi, \theta) \to (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)$ være et sædvanligt kort med θ og ϕ i passende intervaller.*
En lodret cylinder med radius R placeres nu, så den omslutter kuglen (kuglen og cylinderen rører hinanden på ækvator). Lad os sige, at cylinderen står parallelt med z aksen. Herefter projiceres punkter på kugleoverfladen over på cylinderen som følger:

$$f(\theta, \phi) \to (R\cos\phi, R\sin\phi, R\cos\theta). \tag{429}$$

Endelig klippes cylinderen op efter en lodret linie, og resultatet foldes ud. Indlægges passende retvinklede koordinater x_1, x_2 på den udfoldede cylinderflade kan man opnå:

$$x_1 = R\phi \qquad \text{og} \qquad x_2 = R\cos\theta. \tag{430}$$

Beskriv afbildningen geometrisk. Bevis dernæst, at den omvendte afbildning til (430), med passende begrænsninger på x_1, x_2, er en kort-afbildning på den givne kugleoverflade. Lad os kalde dette kort for $(\tilde{f}, \tilde{O})$. Bevis, at dette kort er ***arealtro****: En (målelig) delmængde S af $\tilde{f}(\tilde{O})$ har samme areal som $\tilde{f}^{-1}(S)$.*

OPGAVE 1.74. *Lad $I \ni v \to (0, f(v), g(v))$ være en regulær kurve i yz-planen således, at $\forall v \in I : f(v) > 0$. Antag yderligere, at $\{(0, f(v), g(v)) \mid v \in I\}$ er en delmangfoldighed af yz-planen og lad $\mathcal{O}$ være omdrejningsfladen, der fremkommer ved at dreje denne kurve om z-aksen.*

- *Angiv hovedkrumninger og hovedretninger i et vilkårligt punkt.*
- *Angiv Gauss-krumningen og middelkrumningen.*
- *En* ***meridian*** *er en kurve på $\mathcal{O}$, der kan fremkomme fra den oprindelige frembringerkurve i yz-planen ved en drejning on z-aksen. Bevis, at disse er regulære kurver, der, hvis de parametriseres ved buelængde, er geodæter.*
- *En* ***parallel*** *er en kurve, der fremkommer ved skæring mellem $\mathcal{O}$ og en plan parallel med xy-planen. Disse er kun geodæter under meget specielle forhold.—Hvilke?*

OPGAVE 1.75. *Vi vil sige, at to delmangfoldigheder M_1 og M_2 rører hinanden langs en kurve $\alpha : I \to M_1 \cap M_2$ såfremt*

$$\forall t \in I : T_{\alpha(t)}(M_1) = T_{\alpha(t)}(M_2). \tag{431}$$

Lad $t \to v(t)$ være et vektorfelt (altid antaget C^∞) langs α således at $\forall t \in I : v(t) \in T_{\alpha(t)}(M_1)$. Bevis, at den kovariant afledede af v langs kurven er den samme, hvad enten den udregnes på M_1 eller M_2. Bevis specielt, at hvis α er en geodæt på M_1, da er den det også på M_2 (og vice versa).

Opgave 1.76. *Lad M være en* kompakt *(lukket, begrænset) hyperflade i V. Bevis, f.eks. ved brug af bl.a. Opg.* 1.6 *og Opg.* 1.40*, at der findes mindst et punkt $m \in M$, i hvilket alle hovedkrumningerne har samme fortegn.*

Opgave 1.77. *Lad M_0 være en åben delmængde af hyperfladen M som afbildes diffeomorft på sit billede $N(M_0) \subset S^n$ ved Gaussafbildningen N. Antag, at ψ er en kontinuert funktion med støtte indenfor $N(M_0)$. Vis, at*

$$\int \psi dS = \int (\psi \circ N) \mid K \mid dM, \tag{432}$$

hvor dS og dM er de euklidiske volumenelementer på henholdsvis S^n og M.

Opgave 1.78. *Lad M være en hyperflade i $\mathbb{R}^3$. Lad (f, O) være et kort på M med $0 \in O$ og lad $f(0) = m_0$. Antag, at der findes et differentiabelt felt N af enhedsnormalvektorer på $f(O)$. Lad $(\tilde{f}, \tilde{O})$ være et kort på S^2 således, at $0 \in \tilde{O}$ og $\tilde{f}(0) = N(m_0)$. Antag endelig, at for $i = 1, 2 : f_{x_i}(0) = \tilde{f}_{x_i}(0)$.*

- *Det oplyses, at*
$$\begin{aligned} N(f(t, 4t)) &= \tilde{f}(t, -4t) \text{ og} \\ N(f(-t, -2t)) &= \tilde{f}(-3t, -2t), \end{aligned}$$
for $|t|$ tilstrækkelig lille. Bestem Gauss-krumningen og middelkrumningen af M i m_0.
- *I et punkt $m_1 = f(x_1, x_2) \neq m_0$ angiver $f_{x_1}(x_1, x_2) + 2f_{x_2}(x_1, x_2)$ en hovedretning med tilhørende hovedkrumning 8. Endvidere er $g_{11} = 4, g_{22} = 1, g_{12} = 0$ og Gauss-krumningen er 4 i dette punkt. Bestem den anden hovedretning og hovedkrumning.*

Opgave 1.79. *Benyt (*95*) og Lemma* II.43 *til at udregne Lieparentesen $[\delta_1, \delta_2]$ af to vektorfelter i en kort-omegn (f, O).*

Opgave 1.80. *Lad (f, O) være et lokalt kort på en hyperflade M i $\mathbb{R}^3$. Bevis, at $N(f(x)) = \frac{f_{x_1} \times f_{x_2}}{\|f_{x_1} \times f_{x_2}\|}$ er et differentiabelt felt af enhedsnormalvektorer på $f(O)$.*

Opgave 1.81. *Betragt en hyperflade M i $\mathbb{R}^3$ af formen $M = \{(x, y, \phi(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ med $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, og lad f betegne kortet $f(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ defineret på hele $\mathbb{R}^2$. I det følgende opfattes vektorfelter som derivationer af relevante rum af funktioner.*

- *Bevis, at vektorfelterne $(\partial/\partial x)_m$ og $(\partial/\partial y)_m$ kan udvides til derivationer af $C^\infty(\mathbb{R}^3)$.*
- *Beskriv de mest generelle udvidelser af disse vektorfelter.*
- *Formuler kravet til et vektorfelt på $\mathbb{R}^3$ for, at det kan restringeres til en derivation af $C^\infty(M)$.*

- *Lad δ_1 og δ_2 være to vektorfelter på $\mathbb{R}^3$, der kan restringeres til vektorfelter på M. Har $[\delta_1, \delta_2]$ nødvendigvis samme egenskab?*

OPGAVE 1.82 (BIANCHI). *Bevis den første Bianchi-identitet:*

$$R(t^1, t^2, t^3, t^4) + R(t^1, t^4, t^2, t^3) + R(t^1, t^3, t^4, t^2) = 0. \tag{433}$$

OPGAVE 1.83. *Lad m_1, m_2 være to vilkårlige $r\times r$-matricer med reelle koefficienter. Svarende til disse defineres to derivationer δ_1, δ_2 af $C^\infty(Mat(r, \mathbb{R}))$ ved:*

$$(\delta_i \phi)(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi(m \cdot \exp tm_i) \quad (i = 1, 2) \tag{434}$$

- *Udregn explicit disse derivationer (start f.eks. med eksemplet $r = 1$).*
- *Lad m_0 være en invertibel $r \times r$ matrix. Definer $L_{m_0} : C^\infty(Mat(r, \mathbb{R})) \to C^\infty(Mat(r, \mathbb{R}))$ ved $(L_{m_0}\phi)(m) = \phi(m_0 \cdot m)$. Bevis, at $\delta_i \circ L_{m_0} = L_{m_0} \circ \delta_i$ $(i = 1, 2)$.*
- *Udregn $[\delta_1, \delta_2]$.*

OPGAVE 1.84. *Lad ψ være funktionen*

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}, \tag{435}$$

og lad $g(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(t)+\psi(1-t)}$. Lad $\check{x} \in \mathbb{R}^n$ være givet, og lad $0 < R_1 < R_2$. Bevis, at for velvalgte konstanter α og β gælder, med $\tilde{\phi}$ defineret ved $x \xrightarrow{\tilde{\phi}} g(\alpha + \beta \cdot \|x - \check{x}\|)$, at $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ og

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in K(\check{x}, R_1) \\ 0 & \text{for } x \notin K(\check{x}, R_2) \end{cases}. \tag{436}$$

Benyt dette til at fuldføre beviset for Proposition II.39 *side 28.*

OPGAVE 1.85 (FLAD TORUS). *Betragt S^1 som hyperflade i $\mathbb{R}^2$ og lad $T_{flad} = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.*

- *Udregn den første fundamentalform på T_{flad} m.h.t. et kort af formen $(u, v) \to \tilde{f}(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$. Diskuter alle krumningsstørrelser.*
- *Benyt det explicitte udseende af et lokalt kort (f, O) på en torus T i $\mathbb{R}^3$ (cf. Opgave* 1.72*),*

  $$f(u, v) = ((a + r \cos v) \cos u, (a + r \cos v) \sin u, r \sin v) \quad (u, v \in]0, 2\pi[), \tag{437}$$

  til at konstruere en diffeomorfi mellem T og T_{flad}.

OPGAVE 1.86. *Betragt en torus T i $\mathbb{R}^3$ med et lokalt kort (f,O) som i* (437). *Bevis, at vektorfelterne f_u og f_v kan udvides til vektorfelter på hele torus. Angiv dernæst en derivation af $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, der restringerer til f_u. Betragt nu det lokale kort (f^1,O_1) på S^2 givet ved*

$$f^1(\phi,\theta)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta),\ \phi\in]0,2\pi[\,,\ \theta\in]0,\pi[. \tag{438}$$

Gælder et tilsvarende resultat for f^1_ϕ, f^1_θ?—Hvilke af vektorfelterne $(\sin^n\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}$ kan udvides til $C^\infty(S^2)$?

OPGAVE 1.87. *Lad $v(x)=(v_1(x),\ldots,v_n(x))$ være et vektorfelt på en åben delmængde U af $\mathbb{R}^n$. En kurve $I\ni t\to x(t)$ kaldes en* <u>bane</u> *for v gennem $\check{x}$ såfremt $0\in I$, $x(0)=\check{x}$ og $\forall t\in I: x'(t)=v(x(t))$. Følgende resultat er en konsekvens af sætninger om existens og entydighed af løsninger til ordinære differentialligninger:*

- *Givet et element $\check{x}$ af U findes et største åbent interval I omkring 0 og en bane $x_{\check{x}}$ for v gennem $\check{x}$ defineret på I. Denne bane er entydig på følgende måde: Hvis $J\ni t\to\tilde{x}(t)$ er en anden bane for v gennem $\check{x}$, defineret på et åbent interval J, da gælder, at $J\subseteq I$ og $\tilde{x}$ er restriktionen til J af $x_{\check{x}}$.*

Bevis, at $x(t)$ er en bane for et vektorfelt v hvis og kun hvis

$$\forall t\in I,\forall\psi\in C^\infty(U): \frac{d}{dt}(\psi(x(t))=\sum_{i=1}^n v_i(x(t))(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi)(x(t)). \tag{439}$$

Det oplyses, at afbildningen $B_t:\check{x}\to x_{\check{x}}(t)$ altid opfylder: $B_{s+t}(\check{x})=B_s(B_t(\check{x}))$ (videregående opgave).
Udregn banerne for følgende vektorfelter på $\mathbb{R}^2$:

$$(y,-x),(x,y)\ \text{og}\ (y,x), \tag{440}$$

og eftervis i hvert tilfælde explicit påstanden om B_t.

OPGAVE 1.88. *Betragt afbildningen $O(3)\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ givet ved*

$$(o,x)\to o\star x\overset{Def.}{=}o(x). \tag{441}$$

Bevis, at afbildningen er uendeligt ofte differentiabel og at $o_1\star(o_2\star x)=(o_1o_2)\star x$. Karakteriser mængderne $\{o\star x\mid o\in O(3)\}$ for $x\in\mathbb{R}^3$. Bevis, at for et fast $x_0\in\mathbb{R}^3$ er $\{o\in O(3)\mid o\star x=x\}$ en undergruppe af $O(3)$ og beskriv denne.
Lad ω være en 3×3 matrix med $\omega^t=-\omega$. Bevis, at $(\delta^\omega\psi)(x)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(exp(t\omega)\star x)$ definerer en derivation δ^ω af $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Bevis, at δ^ω restringerer til en derivation af $C^\infty(S^2_R)$ (overfladen af en kugle med radius R i $\mathbb{R}^3$) for vilkårligt R. Lad specielt $\omega=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Udregn δ^ω for dette ω på $\mathbb{R}^3$ samt restriktionen til $C^\infty(S^2_R)$ m.h.t. et kort som i (438).

OPGAVE 1.89. *Udnyt entydigheden af løsningen i Opgave* 1.87 *til at vise den manglende påstand (lokalt).*

OPGAVE 1.90. *Udfør så meget som muligt af Opgave* 1.88*, men med* $O(3)$ *erstattet af* $O(1,2)$ *(eller* $O(1,3)$ *hvis I har lyst). Erstat evt.* ω *med* $\tilde{\omega} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Hvad erstatter* S^2*? ...*

OPGAVE 1.91. *(Se Proposition* B.4.*) Hvorledes transformerer koordinaterne til et element i* $V \otimes V$ *under basisskifte i* V*?— og, helt generelt, til et element i* $V \otimes V^*$*?—i*

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s}? \tag{442}$$

OPGAVE 1.92. *Lad* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *og* $\{\epsilon_j\}_{j=1}^n$ *være duale baser for hhv.* V *og* V^*. *Ved fastsættelsen* $V \ni x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \to \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$ *defineres en lineær bijektion* T_1 *af* V *på* V^*. *Bevis, at et andet valg af duale baser kan give en lineær bijektion* T_2*, der er forskellig fra* T_1.

OPGAVE 1.93. *Lad* V *være et 2-dimensionalt reelt vektorrum. Lad* $\{e_1, e_2\}$ *og* $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ *være duale baser for* V *og* V^*.
En lineær afbildning $T : V \to V$ *er givet ved:* $T(e_1) = 2e_1 + e_2$ *og* $T(e_2) = 3e_1 + 4e_2$.

- *Bestem den tilhørende bilinearform på* $V^* \times V$ *i termer af basen* $\{\epsilon_i \otimes e_j \mid i, j = 1, 2\}$.
- *Bestem den tilhørende bilinearform på* $V \times V^*$ *og derfra den tilhørende lineære afbildning* $V^* \to V^*$.
  Lad en bilinearform på $V^* \times V$ *være givet ved*

$$B(y_1\epsilon_1 + y_2\epsilon_2, x_1e_1 + x_2e_2) = 12y_1x_1 + 2y_1x_2 - 42y_2x_1$$

Beskriv de tilhørende lineære afbildninger $T_B^1 : V \to V$ *og* $T_B^2 : V^* \to V^*$.

OPGAVE 1.94. *Lad* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *og* $\{\epsilon_j\}_{j=1}^n$ *være duale baser for hhv.* V *og* V^* *og antag, at* $n = 3$. *Lad* $L = e_1 \wedge e_2 + 2 \cdot e_1 \wedge e_3 \in \wedge^2(V)$. *Lad* $\xi_1 = x_1^*\epsilon_1 + x_2^*\epsilon_2 + x_3^*\epsilon_3$ *og* $\xi_2 = y_1^*\epsilon_1 + y_2^*\epsilon_2 + y_3^*\epsilon_3$. *Find et explicit udtryk for* $L(\xi_1, \xi_2)$.

OPGAVE 1.95. *Bevis, at* ***sporet*** *netop er den lineære afbildning af* $L(V, V) = V^* \otimes V$ *der svarer til afbildningen*

$$V^* \times V \ni \xi, v \to (\xi, v) \in \mathbb{R}. \tag{443}$$

OPGAVE 1.96. *Hvis* $T_{ijk}, i = 1, \ldots, N, j, k = 1, \ldots, n$*, er koordinaterne af et element i* $W \otimes V^* \otimes V$ *med hensyn til en basis* $\{f_i\}_{i=1}^N$ *af* W *og duale baser* $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$, $R\{e_k\}_{k=1}^n$ *i* V^*, V*, da er kontraktionen af elementet den vektor i* W*, hvis i-te koordinat er givet ved* $\sum_{j=1}^n T_{ijj}$.

OPGAVE 1.97. *Lad* $\mathcal{P}oly_k(\mathbb{R}^n)$ *betegne mængden af homogene polynomier på* $\mathbb{R}^n$ *af grad* k *og lad* $\mathcal{D}iff_k(\mathbb{R}^n)$ *betegne mængden af homogene differentialoperatorer med konstante koefficienter på* $\mathbb{R}^n$ *af orden* k. *(Et element* $D \ni \mathcal{D}iff_k(\mathbb{R}^n)$ *er altså et homogent polynomium* D *af grad* k *i variablene* $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$.*) Bevis, at*

$$\mathcal{D}iff_k(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}oly_k(\mathbb{R}^n) \ni (D, P) \to \langle D, P\rangle = (D(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})P)(0) \tag{444}$$

definerer en ikke-degenereret bilinearform.

OPGAVE 1.98. *Lad* $V = \mathbb{R}^3$. *Vis, at* $S^3(V) \oplus \wedge^3(V) \subsetneqq V \otimes V \otimes V$. *(Det kan benyttes uden bevis, at* $S^k(V)$ *kan identificeres med homogene polynomier på* V^* *af grad* k.*)*

OPGAVE 1.99. *Bevis, at sættet* $\alpha = \{v_1, \ldots, v_r\}$ *i vektorrummet* V *er lineært uafhængigt, hvis og kun hvis* $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0$. *Bevis, at hvis* α *er lineært uafhængigt, da er* $span\{v_1, \ldots, v_r\} = \{v \in V \mid v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0\}$.

OPGAVE 1.100. *Bevis, at to lineært uafhængige sæt* $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *og* $\{w_1, \ldots, w_r\}$ *er baser for* ***det samme*** *underrum af et vektorrum* V, *hvis og kun hvis* $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = c \cdot w_1 \wedge \cdots \wedge w_r$, *hvor (nødvendigvis)* $c \neq 0$. *Vis videre, at i det tilfælde er* $c = \det A$, *hvor* A *er matricen med koefficienterne* a_{ij} *fra ligningerne* $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j, i = 1, \ldots, n$.

OPGAVE 1.101. *Lad* $\varphi \in C^\infty(M)$, *hvor* M *er en* n*-dimensional delmangfoldighed af vektorrummet* V. *Antag, at* $\forall m \in M : d\varphi_m \neq 0$.

- *Bevis, at hvis* $\varphi^{-1}(a) \neq \emptyset$ *for et* $a \in \mathbb{R}$, *da er* $M_a = \varphi^{-1}(a)$ *en* $(n-1)$*-dimensional delmangfoldighed af* V.
- *Bevis, at* $\forall m \in M_a : T_m(M_a) \subset T_m(M)$.
- *Via det indre produkt på* $T_m(M)$ *kan* $T_m^*(M)$ *afbildes bijektivt på* $T_m(M)$. *Derved fås fra afbildningen* $m \to d\varphi_m$ *et vektorfelt* $m \to grad_m\varphi$, *kaldet* <u>*gradientfeltet hørende til* φ</u>. *Bevis, at dette er uendeligt ofte differentiabelt.*
- *Bevis, at* $\forall m \in M : grad_m\varphi \in (T_m(M_a))^- \quad (a = \varphi(m))$.

OPGAVE 1.102. *Lad* $\mathbb{R}_k[x_1, \ldots, x_n]$ *betegne mængden af homogene polynomier af grad* k *på* $\mathbb{R}^n$. *Bestem dette rums dimension ved følgende opskrift:*
Betragt leddene af k*-te orden i*

$$(1 + x_1 + \cdots + x_1^s \cdots) \cdot (1 + x_2 + \cdots + x_2^s \ldots) \cdot \cdots \cdot (1 + x_n + \cdots + x_n^s \cdots). \tag{445}$$

Sæt nu $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = t$ *og udregn udtrykket ovenfor explicit for* $|t| < 1$. *Dimensionen er da koefficienten til* t^k *i potensrækken udfra 0 for denne funktion.*

Opgave 1.103. *Benyt, at determinantafbildningen essentielt er entydig til at bevise, at*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B), \tag{446}$$

for vilkårlige $n \times n$ matricer A og B.

Opgave 1.104. *Lad A være en lineær afbildning $V \to V$ og lad B være en lineær afbildning $W \to W$. Bevis, at*

$$V \otimes W \ni v \otimes w \to Av \otimes Bw \tag{447}$$

på naturlig måde kan udvides til en lineær afbildning $A \otimes B : V \otimes W \to V \otimes W$. Hvordan ser denne afbildning ud, når vi benytter identifikationen $V \otimes W \equiv L(W^*, V)$? Bevis endelig, at $A \otimes B$ er en bijektion, hvis både A og B er det.

Opgave 1.105. *Besktiv koordinatskiftet $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ for to kort på*

- $T^*(M)$
- $T_{r,s}(M)$
- $\wedge^r(T^*(M))$

Opgave 1.106. *Lad $X(t)$ og $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$ være paralleltransporterne af henholdsvis X_0 og Y_0 i $T_{\gamma(0)}M$ langs kurven γ. Bevis, at $\langle X(t), Y(t)\rangle = \langle X_o, Y_0\rangle$.*

Opgave 1.107. *Skriv ligningerne for en geodæt explicit ned for en hyperflade i $\mathbb{R}^3$. Betragt derefter en omdrejningsflade, hvor frembringerkurven (en meridian) er parametriseret ved buelængde. Bevis ved udregning, at meridianerne er geodæter. Hvornår er en parallel en geodæt?*

Opgave 1.108. *Betragt den torus T, der fremkommer ved drejning af en cirkel i yz-planen med centrum i $(0,2,0)$ og radius 1 omkring z-aksen. Punkterne $P_1 = (2,0,1), P_2 = (2,0,-1), P_3 = (0,2,-1)$ og $P_4 = (0,2,1)$ ligger således på T. Lad γ være en lukket kurve på T: $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$, således at γ udelukkende består af paralleller og meridianer. Beskriv paralleltransportafbildningen langs γ. Giver forskellige sådanne veje forskellige afbildninger?*

Opgave 1.109. *Lad S^2 som sædvanligt betegne enhedskuglen i $\mathbb{R}^3$ med nordpolen N liggende i $(0,0,1)$. Lad $Q_1 = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ og $Q_2 = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Lad v være en enhedsvektor i $T_N(S^2)$ pegende ud langs meridianen fra N til Q_1. Transporter denne langs meridianen til Q_1, dernæst langs parallellen til Q_2 og endelig tilbage til N langs meridianen fra Q_2 til N. Hvilken vinkel danner den derved fremkomne vektor med v?—diskuter grænsetilfældene $\theta \to \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$.*

Opgave 1.110. *Lad X, Y være vektorfelter (altså snit i tangentbundtet) på en mangfoldighed M. Antag, at X og Y er givet i et lokalt kort som hhv.*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ og } Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{448}$$

Bevis, at i det samme kort er

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} X(Y)^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^{n} Y(X^i) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{449}$$

Opgave 1.111. *Lad $\mathcal{D}^1(M)$ betegne vektorrummet af C^∞-vektorfelter på M.*

- *Lad $X \in \mathcal{D}^1(M)$ og $\phi \in C^\infty(M)$. Bevis, at $\phi \cdot X \in \mathcal{D}^1(M)$. Hvad er $[X, \phi \cdot X]$?*
- *Lad $\Omega \in \lambda^2(M)$ være en (ydre) 2-form. Bevis, at da er afbildningen*

  $$\mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M) \ni X, Y \to \Omega(X, Y) \in C^\infty(M) \tag{450}$$

  bilineær, alternerende og opfylder yderligere

  $$\forall \psi_1, \psi_2 \in C^\infty(M), \forall X, Y \in \mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M) : \\ \Omega(\psi_1 \cdot X, \psi_2 \cdot Y) = \psi_1 \psi_2 \cdot \Omega(X, Y) \tag{451}$$

- *Bevis omvendt, at en afbildning $\Omega : \mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M) \to C^\infty(M)$, der har disse egenskaber, svarer til en ydre 2-form.*
- *Lad $\psi \neq 0$ være et fast element i C^∞. Kommer afbildningen*

  $$\mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M) \ni X, Y \to [X, Y]\psi \tag{452}$$

  fra en ydre 2-form ?
- *Lad $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty$ være fast2. Udtryk 2-formen*

  $$\mathcal{D}^1(M) \times \mathcal{D}^1(M) \ni X, Y \to X(\varphi_1) \cdot Y(\varphi_2) - Y(\varphi_1) \cdot X(\varphi_2) \tag{453}$$

  i lokale koordinater.

Opgave 1.112. *Lad M være en 2–dimensional Riemannsk mangfoldighed. Antag, at der findes et enkelt kort (f, ω) således, at $M = f(\omega)$ og at den første fundamentalform m.h.t. dette er givet ved*

$$\{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} (h(x_1))^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(h(x_1))^2} \end{pmatrix}, \tag{454}$$

hvor h er en positiv C^∞-funktion på $\mathbb{R}$.

- *Find samtlige Christoffelsymboler af 1. og 2. art.*
- *Vis, at enhver 1. koordinatkurve $t \to f(t, x_2)$ kan omparametriseres til at være en geodæt.*

- *Lad* γ_{x_1} *betegne 2. koordinatkurven svarende til et fastholdt* x_1 *og lad* $X_{x_1}(t)$ *betegne det parallelfelt langs* γ_{x_1}*, der til* $t = 0$ *har værdien* $X_{x_1}(0) = f_{x_1}$*. Bevis, at* $X_{x_1}(t)$ *er drejet vinklen* $\frac{h'(x_1)}{(h(x_1))^3} \cdot t$ *i forhold til* $f_{x_1}(x_1, t)$*.*

OPGAVE 1.113. *Bevis den følgende formel og beskriv, hvorledes den fuldstændigt bestemmer den kovariant afledede:*

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle \;=\; & \frac{1}{2}\Big(\langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle \\ & + X(\langle Y, Z\rangle) + Y(\langle X, Z\rangle) - Z(\langle X, Y\rangle)\Big). \end{aligned} \tag{455}$$

OPGAVE 1.114. *Lad* $\omega : X \to \omega(X)$ *være en afbildning fra rummet* $\mathcal{D}^1(M)$ *af* C^∞*-vektorfelter til rummet* $C^\infty(M)$ *af* C^∞*-funktioner på en mangfoldighed* M*. Antag, at*

$$\forall \psi \in C^\infty(M) : \omega(\psi \cdot X) = \psi \cdot \omega(X). \tag{456}$$

Bevis, at man i dette tilfælde kan definere, for hvert $m \in M$*, en lineær afbildning* $\omega_m : T_m(M) \to \mathbb{R}$ *ved forskriften*

(457) $\omega_m(v) = (\omega(X))(m)$ *hvis* X *er et vektorfelt på* M *således, at* $X_m = v$*.*

Der gælder m.a.o. $(\omega(X))(m) = \omega_m(X_m)$*.*
Bevis, at hvis Y *er et fast vektorfelt (forskelligt fra 0), da har afbildningen* $X \to \omega([X,Y])$ ***ikke*** *denne egenskab.*

OPGAVE 1.115. *Lad* M *være en mangfoldighed med en ikke-degenereret (ydre) 2-form* Ω*. Der gælder m.a.o., at* Ω *opfylder* $\forall m \in M$*:*

$$\forall X_m \in T_m(M) \setminus \{0\} \exists Y_m \in T_m(M) : \Omega_m(X_m, Y_m) \neq 0. \tag{458}$$

Bevis, at M*'s dimension er* ***lige****.*
Via (456) *kan vi definere en afbildning* $F : T_m(M) \to T_m^*(M)$ *ved* $(F(X_m), Y_m) = \Omega_m(Y_m, X_m)$*, hvor* $(\cdot, \cdot)$ *betegner* ***dualitetet*** *mellem* $T_m(M)$ *og* $T_m^*(M)$*. Bevis, at* F *er en lineær bijektion.*
Lad $H \in C^\infty(M)$*. Bevis, at* $F^{-1}(dH) \in \mathcal{D}^1(M)$*.*
Bevis, at $F^{-1}(dH)$ *er det vektorfelt* ξ^H*, der opfylder:* $\forall Y : \Omega_m(Y_m, \xi_m^H) = Y_m(H)$*.*

OPGAVE 1.116. *Gennemfør detaljerne i forbindelse med resultatet* (238) *på side 62 – både geometrisk og ved at løse differentialligningerne for paralleltransport.*

OPGAVE 1.117. *Udregn* $d\Omega$ *for følgende differentialformer på* $\mathbb{R}^3$*:*

- $\Omega = 3x^2 + 4xy$
- $\Omega = (\sin x + \cos xy)dx + log(1 + x^2 z^2)dy + (xy + z^{44})dz$
- $\Omega = (\cos xyz)dx \wedge dy + (x^3 + xy + yz)dy \wedge dz$
- $\Omega = (xy + yz)dx \wedge dy \wedge dz$

OPGAVE 1.118. *Lad $I \ni t \to x(t) \in \mathbb{R}^2$ være en regulær kurve og antag, at $\mathcal{C} = \{x(t) \mid t \in I\}$ er en delmangfoldighed af $\mathbb{R}^2$. Lad i betegne inklusionsafbildningen $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Bestem $i^*(f_2dx + f_1dy)$ for vilkårlige C^∞-funktioner f_1, f_2 på $\mathbb{R}^2$. Lad os nu betragte formerne Ω_i på $\mathbb{R}^n$ givet ved*

$$\Omega_i = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n; i = 1, \ldots, n. \tag{459}$$

Lad endvidere P være en plan gennem et punkt x, udspændt af $n-1$ orthogonale enhedsvektorer $y_1, \ldots, y_{n-1}$ og vælg en enhedsvektor y_n vinkelret på P. Lad (igen) i betegne inklusionsafbildningen $P \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Bestem $i^*(\Omega_i)$. (Man kan f.eks. indføre den matrix A, hvis kl-te koefficient a_{kl} er givet ved y_l's k-te koordinat. Resultatet kan da udtrykkes ved visse koefficienter til A^{-1} og har en geometrisk tolkning).

OPGAVE 1.119. *Lad M være en differentiabel mangfoldighed. Gør rede for, at der til enhver derivation og/eller første-ordens differentialoperator uden konstant led δ i et punkt m kan findes en kurve $I \ni t \to x(t)$ således, at*

$$\forall \varphi \in C^\infty_{lok(M)} : \delta_m(\varphi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(x(t)). \tag{460}$$

Lad nu N være en anden mangfoldighed og lad $f : M \to N$ være en differentiabel afbildning. Gør rede for, hvorledes differentialet $f'_m : T_m(M) \to T_{f(m)}(N)$ kan defineres i analogi med definitionen i tilfældet, hvor M og N er delmangfoldigheder af euklidiske rum. Formuler endvidere f'_m direkte som en afbildning fra et rum af derivationer til et andet tilsvarende. Giv endeligt et eksplicit udtryk for f'_m via lokale parametriseringer og første-ordens differentialoperatorer.

OPGAVE 1.120. *Lad (M, g) og $(N, \tilde{g})$ være Riemannske mangfoldigheder af samme dimension. En afbildning $\Phi : M \to N$ siges at være **isometrisk i m**, såfremt*

$$\forall v_1, v_2 \in T_m(M) : \tilde{g}_{\Phi(m)}\langle \Phi'_m v_1, \Phi'_m v_2\rangle = g_m\langle v_1, v_2\rangle. \tag{461}$$

Hvis Φ er isometrisk i m for alle $m \in M$ kaldes den en isometri. N siges at være lokalt isometrisk med M, såfremt der til hvert $n \in N$ findes en åben delmængde U af M og en isometri Φ_U defineret på U, således at $\Phi_U(U)$ er en åben omegn af n i N. Bevis, at i dette tilfælde er afbildningen Φ_U lokalt injektiv, og at der faktisk gælder, at ethvert $n \in N$ ligger i en kortomegn af formen $\tilde{f}(O)$, hvor $\tilde{f} = \tilde{\Phi} \circ f$ for en passende (lokalt defineret) isometri $\tilde{\Phi}$. Bevis videre, at der i de lokale koordinater (f, O) og $(\tilde{f}, O)$ gælder, at

$$g_{ij}(x) = \tilde{g}_{ij}(x)\ \forall i, j = 1, \ldots, n \text{ og } x \in \omega. \tag{462}$$

Antag omvendt givet kort (f, O) og $(\tilde{f}, O)$ på henholdsvis M og N, således at (460) gælder. Bevis, at da er $f(O)$ isometrisk med $\tilde{f}(O)$.

Lad nu N være lokalt isometrisk med M. Diskuter sammenhængen mellem geodæter, paralleltransport, krumningsstørrelser og lignende på M og N.
Bevis, ved at betragte kort af formen henholdsvis $(\theta, \rho) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ og $(\theta, \rho) \to (\rho \cdot \sin\psi \cdot \cos\frac{\theta}{\sin\psi}, \rho \cdot \sin\psi \cdot \sin\frac{\theta}{\sin\psi}, \rho \cdot \cos\psi)$ at kegler af formen $\mathcal{K}_k = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = k^2 z^2, z > 0\}$ er lokalt isometriske med $\mathbb{R}^2$ ($k^2 = \tan^2(\psi)$).

OPGAVE 1.121. *Lad*

$$\begin{aligned} \Omega = \ & B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ & + E_1 dx_1 \wedge dt + E_2 dx_2 \wedge dt + E_3 dx_3 \wedge dt \end{aligned} \tag{463}$$

være en 2-form på $\mathbb{R}^4$, hvor vi i øvrigt betegner punkterne med (x_1, x_2, x_3, t). Skriv explicit de differentialligninger ned, som $B_1, \ldots, E_3$ skal opfylde, for at $d\Omega = 0$.

OPGAVE 1.122. *Lad*

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{464}$$

være en differentiabel afbildning. Bestem $F^*(dx)$, $F^*(dy)$ og $F^*(dx \wedge dy)$ udtrykt ved dx, dy, and $dx \wedge dy$.
Lad

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to \tilde{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(x \cdot y) \\ \exp(x \cdot y) + z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \tag{465}$$

Angiv en formel for $\tilde{F}^*(dx)$ og $\tilde{F}^*(dy)$ i termer af dx, dy og dz.

OPGAVE 1.123. *i) Bevis, at på S^1 er volumenformen $d\theta$ (θ er vinklen på S^1) ikke **eksakt**. Findes der andre 1-former på S^1, der ikke er eksakte?*
ii) (Sammenlign med Opgave 1.86) Betragt lokale kort (f^i, O_i), $i = 1, 2$ på S^2 givne ved

$$\begin{aligned} f^1(\phi, \theta) &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \ \phi \in]0, 2\pi[\,, \ \theta \in]0, \pi[\ \textit{og} \\ f^2(x_1, x_2) &= (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}), \quad x_1^2 + x_2^2 < 1. \end{aligned}$$

Hvilke af differentialformerne $\sin^n\theta d\theta$ og $\sin^n\theta d\phi$ ($n = 0, 1, \ldots$) kan udvides til C^∞ former på hele S^2?
iii) Benyt Stokes Sætning til at argumentere for, at volumenformen på S^2 ikke kan være eksakt.

FLERE OPGAVER

OPGAVE 2.1. *For* $f \in F(V)$ *og* $O \in O(n)$ *defineres* $e = O * f \in F(V)$ *udfra ligning (*40*) side 9, altså*

$$e_i = (O * f)_i = \sum_{k=1}^{n} O_{ik} f_k. \tag{466}$$

Vis, at dette er en ***virkning****, altså at følgende to betingelser er opfyldt:*

- $I * f = f$.
- $\forall O_1, O_2 \in O(n) : O_1 * (O_2 * f) = (O_1 O_2) * f$.

OPGAVE 2.2. *Lad* $s \in \mathbb{R}$. *Betragt* 2×2*-matricerne*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Udregn $\exp A$, $\exp B$, $\exp(A + B)$, $\exp A \cdot \exp B$ *og* $\exp B \cdot \exp A$.

Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 7. juni kl. 10 på Matematisk Institus kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 8. juni kl. 15, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Hver opgave tildeles 25 points. Hver opgave indeholder 4 spørgsmål, dog kan man udelade det sidste spørgsmål i to af opgaverne (efter eget valg).

Opgave 1

På torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ betragtes tre lokale kort, $(f, O), (f_+, O_+)$ og (f_-, O_-), givet ved, respektivt,

- $f(\theta, \phi) = ((a + r\sin\theta)\cos\phi, (a + r\sin\theta)\sin\phi, r\cos\theta)$, $\quad O = \{(\theta, \phi) \mid 0 < \theta, \phi < 2\pi\}$.
- $f_\pm(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \pm\sqrt{r^2 - (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2})$, $\quad O_\pm = \{(x_1, x_2) \mid a - r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a + r\}$.

Som sædvanlig antages, at $0 < r < a$. Observer også en mindre ændring i forhold til Opgave 78.

På S^2 betragtes også tre lokale kort, $(\tilde{f}, \tilde{O}), (\tilde{f}_+, \tilde{O}_+)$ og $(\tilde{f}_-, \tilde{O}_-)$, definede ved

- $\tilde{f}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) = (\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\phi}, \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\phi}, \cos\tilde{\theta})$, $\quad \tilde{O} = \{(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \mid 0 < \tilde{\theta} < \pi, 0 < \tilde{\phi} < 2\pi\}$.
- $\tilde{f}_\pm(y_1, y_2) = (y_1, y_2, \pm\sqrt{1 - (y_1^2 + y_2^2)})$, $\quad \tilde{O}_\pm = \{(y_1, y_2) \mid 0 \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 1\}$.

En kontinuert afbildning $F : T \to S^2$ afbilder $T \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ på $S^2 \cap \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 > 0\}$, og ligeledes afbilder F mængden af punkter i T, hvor $x_3 < 0$, på mængden af punkter i S^2, hvor $y_3 < 0$. Antag, at vi har følgende lokale udtryk:

(1)
$$\tilde{f}_-^{-1} \circ F \circ f_-(x_1, x_2) =$$
$$\tilde{f}_+^{-1} \circ F \circ f_+(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a}{r\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \cdot (x_1, x_2).$$

Når vi nedenfor refererer til de lokale koordinater (y_1, y_2) betyder det, at vi benytter de lokale kort $(\tilde{f}_\pm, \tilde{O}_\pm)$ og tilsvarende for de andre lokale koordinater.

1°: Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial x_1})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial x_2})$ ved hjælp af de lokale koordinater y_1, y_2 i punktet $m_1 = F \circ f_+(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}) \in S^2$.

2°: Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial \theta})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial \phi})$ ved hjælp af de lokale koordinater y_1, y_2 i punktet $m_2 = F \circ f(\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}) \in S^2$.

 Opgave 1 fortsættes på side 2

3°: Lad $\check{f}_+ : (\check{y}_1, \check{y}_2) \to S^2$ være et lokalt kort på S^2, defineret for $0 < \sqrt{\check{y}_1^2 + \check{y}_2^2} < 1$. Antag, at $\check{f}_+(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = m_2$, og at Jacobimatricen for koordinatskiftet mellem $\check{f}_+$ og $\tilde{f}_+$ opfylder

$$\left(\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial \check{y}_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \check{y}_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \check{y}_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \check{y}_2} \end{matrix}\right)_{(\check{y}_1, \check{y}_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial\theta})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial\phi})$ ved hjælp af koordinaterne $\check{y}_1, \check{y}_2$ i $(\check{y}_1, \check{y}_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4°: Beskriv afbildningen F ved hjælp af koordinaterne (θ, ϕ) på T og koordinaterne $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ på S^2 og angiv præcist den delmængde af O, hvor $\tilde{f}^{-1} \circ F \circ f$ er defineret. Bevis, at F er en differentiabel afbildning fra T til S^2.

Opgave 2

Lad (f, O) være et lokalt kort på en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M. Lad g_{11}, g_{21}, g_{12} og g_{22} være koefficienterne til den første fundamentalform. Det må antages, at M er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$, og at (f, O) er en af de sædvanlige lokale parametriseringer (som i Definition II.3.). Antag, at g_{12} er identisk nul. Lad de variable i O være betegnede med x_1, x_2. Antag, at koefficienterne kun er funktioner af x_1 (d.v.s. $g_{11}(x_1, x_2) = h_1(x_1)$ og $g_{22}(x_1, x_2) = h_2(x_1)$ for visse funktioner h_1, h_2).

1°: Udregn alle Christoffelsymbolerne af første og af den anden art ud fra (afledede af) funktionerne g_{11}, g_{22}.

2°: Bevis, at hvis $\alpha(t) = f(x_1(t), x_2)$ er en regulær kurve langs en første koordinatkurve, da er

$$I(\alpha'(t)) = g_{11}(x_1(t), x_2) \cdot (x_1'(t))^2, \tag{3}$$

hvor, som sædvanligt, I betegner den første fundamentalform.

3°: Nedskriv ligningerne som α in 2° skal opfylde for at være en geodæt. Bevis, at de er ækvivalente med, at funktionen $t \to I(\alpha'(t))$ er konstant. Konkluder, at en kurve α som i 2° kan omparametriseres til at være en geodæt.

4°: Antag nu, at $g_{11}(x_1, x_2) = x_1^2$ og $g_{22}(x_1, x_2) = x_1^4$. Antag, at $O = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Anfør, og løs, ligningerne for et parallelfelt langs andenkoordinatkurven $f(1, t)$.

Opgave 3

Betragt en 1-form $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ på $\mathbb{R}^3$. Lad $v = (v_1, v_2, v_3)$ være en enhedsvektor og $\check{v}$ en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^3$. Lad $L_{v,\check{v}} = \{\check{v} + s \cdot v \mid s \in \mathbb{R}\}$ og lad i betegne inklusionsafbildningen $i : L_{v,\check{v}} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Opgave 3 fortsættes på side 3

1°: Beskriv, hvorledes tangentrummet til ethvert punkt på $L_{v,\check{v}}$ er udspændt af den ene vektor v. Bevis, at

$$i^*\omega = (P \cdot v_1 + Q \cdot v_2 + R \cdot v_3)ds, \tag{4}$$

hvor ds er 1-formen på $L_{v,\check{v}}$, der antager værdien 1 på v i tangentrummet til hvert punkt på $L_{v,\check{v}}$.

2°: Lad α være en regulær kurve i $\mathbb{R}^3$ således, at $L_\alpha = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ er en 1-dimensional indlejret delmangfoldighed. Det må benyttes uden bevis, at (α, I) er et globalt kort på L_α. Generaliser 1° til dette tilfælde.

Betragt afbildningen $(x, y, z) \ni \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} (u, v) = (e^z x, e^z y) \in \mathbb{R}^2$. Lad $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

3°: Udregn $F^*(a(u, v)du + b(u, v)dv)$.

4°: Udregn $F^*(c(u, v)du \wedge dv)$.

Opgave 4

Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed og lad X være et vektorfelt på M. Lad (f, O) være et lokalt kort på M.

1°: Bevis, at hvis i disse koordinater $X = \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, da er

$$\forall i = 1, \dots, n : a_i(x) = dx_i(X). \tag{5}$$

2°: Lad $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ være vilkårlige. Lad $Y_1 = b\frac{\partial}{\partial x_j}$ og $Y_2 = c\frac{\partial}{\partial x_k}$ med b og c vilkårlige C^∞-functioner på $f(O)$. Bestem

$$Y_1(dx_i(Y_2)). \tag{6}$$

3°: Lad ω være en vilkårlig 1-form på M og lad Z_1, Z_2 være vilkårlige vektorfelter på M. Bevis, at

$$d\omega(Z_1, Z_2) = Z_1(\omega(Z_2)) - Z_2(\omega(Z_1)) - \omega([Z_1, Z_2]). \tag{7}$$

4°: (Uafhængig af det foregående) Betragt 2-formen $dp \wedge dq$ på $\mathbb{R}^2 = \{(p, q) \mid p \text{ og } q \in \mathbb{R}\}$. Lad $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Angiv eksplicit vektorfeltet ξ_ψ for hvilket

$$\text{For alle vektorfelter } Y \text{ on } \mathbb{R}^2 : \quad (dp \wedge dq)(\xi_\psi, Y) = Y(\psi). \tag{8}$$

Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 3. juni kl. 10:00 på Matematisk Institus kontor, og besvarelsen afleveres sammen med den udleverede "på tro og love" erklæring ved hovedindgangen til H.C. Ørsted Institutet senest den 4. juni kl. 15:00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Der er ialt 20 spørgsmål. Alle spørgsmål tildeles samme vægt ($6\frac{1}{4}\%$). Det samlede resultat fremkommer som summen af de 16 bedste.

Opgave 1

Der betragtes en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M samt et kort (f, O) på denne. Det antages, at $O = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0\}$ samt at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givne ved

$$g_{11}(x_1, x_2) = x_1^2, \quad g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = 0 \text{ og } g_{22}(x_1, x_2) = x_2^2.$$

1°: Find samtlige Christoffelsymboler både af første og af anden art (mht. (f, O)).

2°: Bevis, at $R_{prkl} = 0$ for alle $p, r, k, l \in \{1, 2\}$.

3°: Lad $t \to \alpha(t) = f(x_1(t), x_2(t))$ være en kurve i $f(O)$ defineret i et interval I, der indeholder 0. Bevis, at et vektorfelt $Y(t) = Y^1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + Y^2(t)\frac{\partial}{\partial x_2}$ langs α er parallelt langs α, netop hvis

$$\forall t \in I : Y^1(t) = \frac{Y^1(0)}{x_1(t)} \text{ og } Y^2(t) = \frac{Y^1(0)}{x_2(t)},$$

og bevis herved, at paralleltransport mellem to punkter $p, q \in f(O)$ er uafhængig af, hvilken kurve fra p til q der paralleltransporteres langs.

4°: Lad $p = f(1, 1)$ og lad $X_p = \frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} \in T_p(M)$. Find paralleltransporten $X_q = \mathcal{P}_\alpha^q(X_p)$ af X_p til $T_q(M)$, hvor $q = f(2, 3)$, langs en kurve α i $f(O)$ fra p til q, og bevis ved eksplicit udregning, at

$$\|X_p\|_{T_p(M)} = \|X_q\|_{T_q(M)}.$$

5°: Antag, at $\beta(s) = f(x_1(s), x_2(s))$ er en geodæt. Bevis, at funktionen $x_1 \cdot x_1'$ er konstant.

6°: Find det generelle udtryk i $f(O)$ for en geodæt $s \to \beta(s)$, der opfylder, at $\beta(0) = f(1, 1)$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

1°: Lad $N = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 = y_1^2 y_2^2 + 1\}$. Bevis, at N er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$.

Lad $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \neq 0\}$. Funktionen $F : U \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4 - 1, x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_4}).$$

2°: Lad $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0)\}$. Bevis, at M er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$.

3°: Lad $O_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0 \text{ og } x_1 x_2 \neq -1\}$, og lad $f_1 : O_1 \to \mathbb{R}^4$ være givet ved

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \frac{-(x_1 + x_2)}{1 + x_1 x_2}, \frac{-(1 + x_1 x_2)}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}).$$

Bevis, at (f_1, O_1) er et kort på M (altså, at f_1 og O_1 for et vilkårligt $m_0 \in f_1(O_1)$ kan bruges som hhv. "f" og "O" i betingelse (2) på side 14 i noterne).

4°: Lad $O_2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_1 \neq 0, w_2 \neq 0, w_1 + w_2 \neq 0 \text{ og } w_1 w_2 \neq -1\}$, og lad $f_2 : O_2 \to \mathbb{R}^4$ være givet ved

$$f_1(w_1, w_2) = (w_1, \frac{-(w_1 + w_2)}{1 + w_1 w_2}, w_2, \frac{-(1 + w_1 w_2)}{w_1 w_2 (w_1 + w_2)}).$$

Så er (f_2, O_2) også et kort på M. Betragt $p = (2, 1, -1, -\frac{1}{2}) \in M$, og lad $X_p \in T_p(M)$ være givet i de lokale koordinater (f_1, O_1) ved

$$X_p = 2\frac{\partial}{\partial x_1} - 4\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Angiv X_p udtrykt ved (f_2, O_2).

5°: Bevis, at funktionen $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$\psi(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 z_3 z_4, z_2 z_3 z_4, (z_3 z_4)^2 + 1)$$

ved restriktion til M definerer en differentiabel afbildning af M ind i N.

6°: På mangfoldigheden N betragtes kortet $\tilde{f}(y_1, y_2) = (y_1, y_2, y_1^2 y_2^2 + 1)$. Lad p og X_p være som i 4°. Find $\psi_p'(X_p)$ udtrykt ved $(\tilde{f}, \mathbb{R}^2)$.

7°: Lad $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ betegne inklusionsafbildningen, dvs. $i(m) = m$ for alle $m \in M$. Angiv $i_p'(T_p(M))$ med p som i 4°. Vælg selv, om det skal være som et rum af retningsafledede eller som et underrum af vektorrummet $\mathbb{R}^4$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 3

1°: Lad $v^* \in \bigwedge^1(V^*)$ og lad $\omega_r \in \bigwedge^r(V^*)$. Bevis, at

$$\forall v_1, \ldots, v_{r+1} \in V : (v^* \wedge \omega_r)(v_1, \ldots, v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} v^*(v_i)\omega_r(v_1, \ldots, \check{v}_i, \ldots, v_{r+1}),$$

hvor en ˇ over et led betyder, at dette skal udelades.

2°: Lad $\omega_2 \in \bigwedge^2(V^*)$. Lad $\{e_i\}_{i=1}^n$ være en basis for for V og $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$ den duale basis for V^*. Da ω_2 specielt er en bilinearform, svarer der til ω_2 en lineær afbildning $T_{\omega_2} : V \to V^*$. Lad a_{ij}, for $i, j = 1, \ldots, n$, være bestemt ved

$$T_{\omega_2}(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}\varepsilon_j.$$

Bevis, at $\forall i, j = 1, \ldots, n : a_{ij} = -a_{ji}$.

3°: Opfat ω_2 som element i $V^* \otimes V^*$, og angiv udviklingen af ω_2 på den basis for $V^* \otimes V^*$, der svarer til den givne basis for V^*, idet notationen fra spørgsmål 2° skal benyttes.

4°: (Uafhængigt.) Lad $\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_2 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ være en 2-form på $\mathbb{R}^3$, og lad $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$, for givne funktioner $f_1, f_2, f_3, a_1, a_2, a_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Gør rede for, at tilordningen

$$\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^3) \ni Y \to \omega(X, Y)$$

definerer en 1-form på $\mathbb{R}^3$, og find et eksplicit udtryk for denne.

Opgave 4

En funktion G fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ er givet ved

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to G(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = (x_2 \sin x_1, x_2 \cos x_1, x_1 x_2).$$

1°: Lad $\omega_1 = (y_1 dy_2) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ og $\omega_2 = (y_3^2 dy_2 \wedge dy_3 + y_3 y_1 dy_1 \wedge dy_2) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Bestem $G^*\omega_1$ og $G^*\omega_2$.

2°: Bestem $d\omega_1, d\omega_2, G^*(d\omega_1)$ og $G^*(d\omega_2)$.

3°: Betragt afbildningen $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ defineret ved

$$\forall (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : \ S(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 + z_4, z_2 + z_4, z_3 + z_4).$$

Bestem $S^*\omega_1, S^*\omega_2$ og $d(S^*\omega_2)$.

Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 8. juni kl. 10:00 på Matematisk Institus kontor, og besvarelsen afleveres sammen med den udleverede "på tro og love" erklæring samme sted senest den 9. juni kl. 15:00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Der er ialt 19 spørgsmål. Alle spørgsmål tildeles samme vægt ($6\frac{1}{4}\%$). Det samlede resultat fremkommer som summen af de 16 bedste.

Opgave 1

Der betragtes en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M samt et kort (f, O) på denne. Det antages, at $O \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0\}$, at $(1,1) \in O$ samt at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givet ved

$$g_{11}(x_1, x_2) = \phi^2(x_2), \quad g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = \psi^2(x_1) \text{ og } g_{22}(x_1, x_2) = \phi^2(x_2),$$

hvor $x_1 \to \psi(x_1)$ er en C^∞-funktion, der opfylder: $\forall x_1 : 0 \leq \mid \psi(x_1) \mid < 1$ og $x_2 \to \phi(x_2)$ er en C^∞-funktion, der opfylder: $\forall x_2 : 1 \leq \phi(x_2)$.

1°: Find samtlige Christoffelsymboler både af første og af anden art (mht. (f, O)).

2°: Find R_{1212}. Begrund, at Riemanns krumningstensor derved er fuldstændig beskrevet.

3°: Antag her, at $\psi(x_1)$ er forskellig fra 0 for alle punkter (x_1, x_2) i O. Bevis, at en andenparameterkurve $t \to f(a, t)$ netop er en geodæt hvis ϕ (lokalt) er konstant, og at en førsteparameterkurve $t \to f(t, b)$ er en geodæt såfremt ψ (lokalt) har formen $\psi(x_1) = \pm\sqrt{cx_1 + d}$, hvor konstanten $c = \phi(b)\phi'(b)$.

4°: Antag, at M med de angivne størrelser er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$. Antag, at i et punkt (x_1^0, x_2^0) er middelkrumningen $H = 0$ og $v = 6 \cdot f_{x_1} - 12 \cdot f_{x_2}$ angiver en hovedretning med tilhørende hovedkrumning $k_1 = 4$. Angiv den anden hovedkrumning k_2 og find $c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ så den anden hovedretning ligger i retningen $c_1 \cdot f_{x_1} + d_1 \cdot f_{x_2}$.

5°: Antag nu, at $\phi \equiv 1$, at $\psi(x_1) = \cos(x_1)$ og at $|\cos x_1| \neq 1$ på hele O. Betragt kurven $\alpha : t \to f(e^{-t}, e^{-t})$. Find længden af et kurvestykke $\mathcal{C}$ fra $\alpha(0)$ til $\alpha(t_1)$, hvor $t_1 > 0$ og $\mathcal{C} \subset f(O)$. (Brug evt. en passende substitution).

Opgave 2

1°: Bevis, at $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$ er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2°: Angiv eksplicit et atlas $\mathcal{A}$ bestående af præcist to kort.

3°: Lad $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 1\}$. Bevis, at også dette er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$ og begrund, at også her findes et atlas bestående af præcist 2 kort.

4°: Bevis, at afbildningen $M \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \frac{1}{2}(x_1 + x_4, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$ er en diffeomorfi af M på N.

5°: Vi betragter nu M som en indlejret Riemannsk delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$, hvor $\mathbb{R}^4$ udstyres med metrikken hørende til det sædvanlige indre produkt $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$. Find den første fundamentalform på M, udtrykt ved hjælp af kortene i det fundne atlas $\mathcal{A}$.

Opgave 3

Lad V være et n-dimensionalt reelt vektorrum udstyret med et positivt definit indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Lad $\{e_1, \ldots, e_n\}$ være en orthonormal basis for V. Definer et indre produkt på $\bigwedge^r(V)$ ved at sætte

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_r\rangle = \det(\langle v_i, w_j\rangle)$$

og så udvide ved linearitet. (Det ønskes ikke bevist, at dette er veldefineret).

1°: Bevis, at

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid (i_1, \ldots, i_r) \in \mathcal{P}_r^n\}$$ [1]

udgør en orthonormal basis.

2°: Antag, at M er en indlejret orienteret 2-dimensional delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$. Lad $\{v_1, v_2\}$ være en orthonormal basis for tangentrummet $T_m(M)$ til et fast punkt $m \in M$. Bevis, at 2-formen ω_{v_1,v_2} defineret ved

$$\forall w_1, w_2 \in T_m(M) : \omega_{v_1,v_2}(w_1, w_2) = \det\langle v_i, w_j\rangle = \langle v_1, w_1\rangle\langle v_2, w_2\rangle - \langle v_1, w_2\rangle\langle v_2, w_1\rangle$$

op til et fortegn er lig med volumenformen på M i m.

3°: Antag nu, at ω_{v_1,v_2} faktisk er volumenformen i m. Lad i betegne inklusionsafbildningen $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Lad endelig ω være en vilkårlig 2-form på $\mathbb{R}^4$. Bevis, at

$$(i^*\omega)_m = \langle \omega_m, \omega_{v_1,v_2}\rangle \cdot \omega_{v_1,v_2}.$$

4°: Lad $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ og $v_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Lad endelig ω^1 være 1-formen

$$\omega^1 = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3 + f_4dx_4$$

[1] Se evt. side 96 i noterne

Opgave 3 fortsættes på side 3

på $\mathbb{R}^4$, hvor $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Da er $(i^* d\omega^1)_m = c \cdot \omega_{v_1, v_2}$. Bestem c i termer af de givne størrelser $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, f_1, \ldots, f_4$.

5° (Uafhængigt): Lad $\tilde{M}$ være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed og lad $G : \tilde{M} \to \mathbb{R}^N$ være en differentiabel afbildning. Antag, at $G(\tilde{M}) \subseteq Q$, hvor Q er en indlejret r-dimensional delmangfoldighed af $\mathbb{R}^N$. Lad ω være en $(r+s)$-form på $\mathbb{R}^N$ med $s > 0$. Bevis, at $G^*\omega = 0$.

Opgave 4

Lad M være en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed. Betragt to kort på M, (f_1, O_1) og (f_2, O_2). Lad koordinaterne i O_1 være beskrevne ved x_1, x_2 og koordinaterne i O_2 ved y_1, y_2. Antag, at Jacobi-matricen $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ hørende til koordinatskiftet

$$(x_1, x_2) \to (f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)),$$

i et fast givet punkt (x_1^0, x_2^0) for hvilket $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0) \in f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$, er givet ved

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°: Vektorfeltet X har i punktet $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0)$ følgende udseende med hensyn til kortet (f_1, O_1):

$$X_{m_0} = 5\frac{\partial}{\partial x_1} - 8\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Angiv X_{m_0} ved hjælp af kortet (f_2, O_2).

2°: I lighed med det første spørgsmål ønskes følgende former i m_0 udtrykt ved hjælp af (f_2, O_2):

$$\omega^1_{m_0} = 30 \cdot dx_1 - 40 \cdot dx_2 \quad \text{og} \quad \omega^2_{m_0} = 200 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

3°: Det oplyses nu, at

$$(f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (e^{x_1 + x_2^2}, x_1 x_2).$$

Angiv dy_1, dy_2, og $dy_1 \wedge dy_2$ ved hjælp af (x_1, x_2)-koordinaterne i $f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$.

4°: Der betragtes nu en differentiabel afbildning F fra M ind i en 2-dimensional mangfoldighed N. Der betragtes et kort $(\tilde{f}, \tilde{O})$ på N, og koordinaterne i $\tilde{O}$ betegnes z_1, z_2. Med m_0 som tidligere antages nu, at $F(m_0) \in \tilde{f}(\tilde{O})$. Videre antages, med X_{m_0} som før, at

$$F'(X_{m_0})\psi = 3\frac{\partial}{\partial z_1}\psi + 6\frac{\partial}{\partial z_2}\psi$$

for alle $\psi \in C^\infty(N)$. Endelig antages, at

Opgave 4 fortsættes på side 4

$$F(f_1(x_1^0 - t, x_2^0)) = \tilde{f}(z_1^0 + t, z_2^0 + 2t)$$

for t tilstrækkelig lille. Her er $\tilde{f}(z_1^0, z_2^0) = F(m_0)$. Bestem $F'(\frac{\partial}{\partial x_1} - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2})$.

Stikordsregister

Litteraturhenvisninger

[1] V. Lundsgaard Hansen, *Den geometriske dimension*, Nyt Nordisk Forlag 1989 (populærfremstilling).

[2] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press 1962 (eller en nyere udgave med ca. samme titel).

[3] L. Hörmander, *Riemannian Geometry*, Forelæsningsnoter fra Lunds Universitet 1990.

[4] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Greuer 1982.

[5] S. Kobayashi og K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. I–II*, Interscience 1963, 1969.

[6] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott–Foreman 1971 (ny udgave vistnok hos Springer Verlag).