Mål- og integralteori
Øvelser

Tage Gutmann Madsen

Københavns Universitets Matematiske Institut
1976

M7

Øvelser til §0. *Regning med* $\pm\infty$.

0.1. 1° Hvad kunne det være naturligt at forstå ved, at

(a) en mængde $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ er omegn af et punkt $a \in \overline{\mathbb{R}}$?

(b) en mængde $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ er åben ?

Med en rimelig definition af (a) eller (b) siger man, at der er indført en *naturlig topologi* i $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$.

(Kontrol. Både $f\colon [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \overline{\mathbb{R}}$ og f^{-1} skal være kontinuerte, hvor

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{for } x = -\pi/2 \\ \tan x & \text{for } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \infty & \text{for } x = \pi/2 \end{cases} \quad .)$$

2° Overvej, at definitionen p. 8 i noterne af

$$b_n \to b \quad \text{i } \overline{\mathbb{R}} \quad \text{for } n \to \infty$$

er i overensstemmelse med topologien i $\overline{\mathbb{R}}$.

0.2. 1° Gør rede for, at grænseværdien $\lim_m b_m$ for en i $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$ konvergent følge $b_1, b_2, \ldots$ bevares ved omordning af elementerne.

2° Gør rede for, at $\liminf_m b_m$ og $\limsup_m b_m$ for enhver følge $b_1, b_2, \ldots$ i $\overline{\mathbb{R}}$ bevares ved omordning af elementerne.

0.3. For en vilkårlig følge $A_1, A_2, \ldots$ af mængder sættes

$$\liminf_m A_m = \bigcup_n \bigcap_p A_{n+p} \; , \quad \limsup_m A_m = \bigcap_n \bigcup_p A_{n+p} \; .$$

1° Vis, at

$$\liminf_m A_m \subseteq \limsup_m A_m \; .$$

mf

2° Vis, at

$$\liminf_m A_m = \{x \mid \exists n \forall p : x \in A_{n+p}\} ,$$

$$\limsup_m A_m = \{x \mid \forall n \exists p : x \in A_{n+p}\} .$$

(Bemærk, at

$\exists n \forall p : x \in A_{n+p} \Leftrightarrow$ x tilhører alle A_m fra et vist trin

$\forall n \exists p : x \in A_{n+p} \Leftrightarrow$ x tilhører mængder A_m med vilkårligt høje numre .)

3° Gør rede for, at $\liminf_m A_m$ og $\limsup_m A_m$ bevares ved omordning af $A_1, A_2, \dots$.

0.4. Bestem limes inferior og limes superior (se øvelse 0.3) for følgerne

$A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \cdots$ og $B_1 \supseteqq B_2 \supseteqq \cdots$;

$\emptyset, X, \emptyset, X, \emptyset, X, \dots$,

$C_1, C_2, \dots$, hvor $C_n =]\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[\subseteqq \mathbb{R}$.

Ved *indikatorfunktionen* (med grundmængde X) for en delmængde A af en given mængde $X \neq \emptyset$ forstås funktionen $1_A : X \to \{0,1\}$, hvor

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in \complement A = X \setminus A . \end{cases}$$

0.5. 1° Lad A og B være delmængder af en (grund)mængde X. Gør rede for, at

m7

$$1_{CA} = 1 - 1_A ,$$
$$1_{A\cup B} = \sup\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B} ,$$
$$1_{A\cap B} = \inf\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_{A\cup B} .$$

2^o Lad $(A_j)_{j\in J}$ være en familie af delmængder af X . Gør rede for, at

$$1_{\cup_j A_j} = \sup_j 1_{A_j} , \quad 1_{\cap_j A_j} = \inf_j 1_{A_j} .$$

0.6. Lad $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af delmængder af en grundmængde X . Gør rede for, at

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n} , \quad 1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n} .$$

(Se øvelse 0.3.)

– – – – – –

0.7. 1^o Idet $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ og $\emptyset \subset A \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, $\emptyset \subset B \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+$, skal man vise, at

$$\sup(a + B) = a + \sup B ,$$
$$\sup aB = a\cdot\sup B ,$$
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B ,$$
$$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B .$$

Her er

$a + B = \{a + b \mid b \in B\}$, $aB = \{ab \mid b \in B\}$,
$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Z 2^o Gælder det samme med infimum i stedet for supremum ?

0.8. Lad $(a_j)_{j\in J}$ være en familie af tal $a_j \in [0,\infty]$.

m7

1° Vis, at

$$\Sigma_{j\in J_1 \cup J_2} a_j = \Sigma_{j\in J_1} a_j + \Sigma_{j\in J_2} a_j ,$$

når $J_1, J_2 \subseteqq J$ er disjunkte, dvs. $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 0.7.)

2° Vis, at

$$\Sigma_{j\in \cup_{k=1}^{n} J_k} a_j = \Sigma_{k=1}^{n} \Sigma_{j\in J_k} a_j ,$$

når $J_1,\dots,J_n \subseteqq J$ er parvis disjunkte.

3° Vis, at

$$\Sigma_{j\in J} a_j = \Sigma_{k\in K} \Sigma_{j\in J_k} a_j ,$$

når $J = \cup_{k\in K} J_k$, hvor $(J_k)_{k\in K}$ er en familie af parvis disjunkte mængder.

0.9. Gør rede for, at reglen om dobbeltsummer p. 11_8 i noterne er et specialtilfælde af resultatet i øvelse 0.8.3° .

0.10. Vi regner i $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty]$. Gør rede for, at

1° multiplikationen er distributiv med hensyn til additionen.

2°
$$a \, \Sigma_{j\in J} b_j = \Sigma_{j\in J} ab_j ,$$

$$(\Sigma_{i\in I} a_i)(\Sigma_{j\in J} b_j) = \Sigma_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j ,$$

hvor $a \in [0,\infty]$, medens $(a_i)_{i\in I}$ og $(b_j)_{j\in J}$ er vilkårlige familier med $a_i \in [0,\infty]$, $b_j \in [0,\infty]$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 0.7.)

m7

0.11. I $\mathbb{R}$ gælder som bekendt

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y\ ,$$

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow x_n y_n \to xy\ .$$

Undersøg, om disse sætninger gælder i $[-\infty,\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$, henholdsvis i $[0,\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{0,\infty\}$. Søg i hvert benægtende tilfælde at redde sætningen ved at stille passende krav til (x,y).

MM7

Øvelser til §1. *Målelige mængder.*

1.1. Vis, at betingelse (i) i definitionen af σ-algebra p. 14 i noterne kan erstattes af $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

1.2. 1° I enhver mængde X findes ikke blot en største σ-algebra, $\mathbb{P}(X)$, men også en mindste. Angiv den.

2° Idet $A \subseteq X$, skal man angive den mindste σ-algebra $\mathbb{E}$ i X med $A \in \mathbb{E}$.

1.3. Bestem den mindste σ-algebra i X , der indeholder alle ét punkts mængder $\{x\}$ med $x \in X$.

1.4. Gennemfør beviset for, at enhver fællesmængde af σ-algebraer i X igen er en σ-algebra i X .

1.5. 1° Lad $X_1 \subseteq X$ og lad $\mathbb{E}_1$ være en σ-algebra i X_1 . Vis, at $\mathbb{E} = \{A \subseteq X \mid A \cap X_1 \in \mathbb{E}_1\}$ er en σ-algebra i X .

2° Lad $X_j \subseteq X$ og lad $\mathbb{E}_j$ være en σ-algebra i X_j , $j \in J$.

Vis, at $\mathbb{E} = \{A \subseteq X \mid \forall j \in J: A \cap X_j \in \mathbb{E}_j\}$ er en σ-algebra i X .

1.6. Idet $\mathbb{B}$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}$, der indeholder alle halvlinier $]a,\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, og $\overline{\mathbb{B}}$ er den mindste σ-algebra i $\overline{\mathbb{R}}$, der indeholder alle mængder $]a,\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, - jfr. p. 18 i noterne - , skal man vise, at

$$\overline{\mathbb{B}} = \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathbb{B}\}\ .$$

(Vink. Man kan benytte øvelse 1.5.1°.)

1.7. Lad $\mathbb{A}$ være en mængde af delmængder af en mængde X, lad $\mathbb{E}$ være den mindste σ-algebra i X, der indeholder $\mathbb{A}$, og lad $V \subseteq X$. Vis, at

$$\mathbb{D} = \{A \cap V \mid A \in \mathbb{E}\}$$

er den mindste σ-algebra i V, der indeholder $\{A \cap V \mid A \in \mathbb{A}\}$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 1.5.1°.)

Et par eksempler: $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{A} = \{]a,\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}$, $V = [0,1]$; $X = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty,\infty]$, $\mathbb{A} = \{]a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}$.

1.8. Vis, at enhver åben mængde $\mathcal{O} \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^d$ kan fås som forening af numerabelt mange (åbne) cirkelskiver.

1.9. Nævn en række eksempler på mængder $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, hvor $\mathbb{B} = \mathbb{B}_d$ er den mindste σ-algebra i $\mathbb{R}^d$, der indeholder $\mathbb{A}$. (Jfr. sætning 2 i §2.1 i noterne.)

m7

Øvelser til §2. *Målelige funktioner.*

2.1. 1° Bevis, at

$$\varphi^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J}\varphi^{-1}(B_j), \quad \varphi^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J}\varphi^{-1}(B_j),$$

hvor $\varphi: X \to Y$ og $B_j \subseteq Y$ for alle $j \in J$.

Z 2° Gælder også

$$\varphi(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I}\varphi(A_i), \quad \varphi(\cap_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I}\varphi(A_i),$$

når $A_i \subseteq X$ for alle $i \in I$?

2.2. Gælder det, at

Z

$$f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \Leftrightarrow |f| \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig},$$

når $\mathbb{E}$ er en σ-algebra i X og f er en (reel) funktion defineret på X?

2.3. Vis, at $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ er målelig med hensyn til σ-algebraen $\mathbb{E}$ i X, hvis

$$\forall r \in \mathbb{Q}: \{x \in X \mid f(x) > r\} \in \mathbb{E}.$$

(Resultatet anvendes i øvelse 3.17.)

2.4. 1° Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i X og lad $f_1, f_2, \ldots$ være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_j: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Vis, at

$$\{x \in X \mid f_1(x), f_2(x), \ldots \text{ er konvergent i } \overline{\mathbb{R}}\} \in \mathbb{E}.$$

2° Samme opgave med $\mathbb{R}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

3° Samme opgave med $\mathbb{C}$ i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

m7

Øvelser til §3. *Mål.*

3.1. Lad μ være defineret på $\mathbb{P}(X)$ ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{når } a \in E \\ 0 & \text{når } a \notin E, \end{cases}$$

hvor a er et givet punkt i X. Vis, at μ er et mål i X.

(Målet kan anskues som beskrivelse af den massefordeling i X, hvor massen 1 er anbragt i punktet a.)

3.2. Lad $\mu: \mathbb{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{for } E = \emptyset \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}.$$

Vis, at μ er et mål i X.

(Målet bruges i øvelse 8.28.)

3.3. Lad $\mu: \mathbb{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være givet ved

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{når } E \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}.$$

Vis, at μ er et mål i X.

(Målet bruges i øvelse 7.13.)

3.4. Lad $(E_j)_{j\in J}$ være en familie af parvis disjunkte Borel mængder i $\mathbb{R}$, hvor $\cup_{j\in J}E_j$ igen er en Borel mængde.

1° Vis, at $\Sigma_{j\in J}m(E_j) \leq m(\cup_{j\in J}E_j)$.

m7

2° Vis, at „ $<$ " kan forekomme. (Begrænsningen til *numerabel* additivitet i definitionen af mål har således sine gode grunde.)

3.5. Lad B være en Borel mængde i $\mathbb{R}$.

1° Vis, at funktionen

$$x \rightharpoonup m(B \cap \,]-x,x]), \; x \in \mathbb{R}_+ ,$$

er kontinuert og voksende. Bestem funktionens grænseværdi for $x \to \infty$ og for $x \to 0$.

2° Vis, at der for ethvert $a \in \mathbb{R}$, $0 \leqq a \leqq m(B)$, findes en Borel mængde $A \subseteqq B$ med $m(A) = a$.

3.6. Vis påstanden i eksempel B, p. 34 i noterne.

3.7. Vis påstanden i eksempel C, p. 34 i noterne.

3.8. Betragt en vilkårlig funktion $p\colon X \rightharpoonup [0,\infty]$ og sæt

$$\mu(E) = \Sigma_{x\in E}\, p(x)$$

for hver delmængde $E \subseteqq X$. Gør rede for, at μ er et mål i X .

Man siger, at målet μ er givet ved *vægtfunktionen* p . (Sprogbrugen svarer til, at $p(x)$ tolkes som en vægt eller masse anbragt i punktet x .)

(Øvelse 4.42 er en fortsættelse.)

3.9. Lad X være en endelig eller numerabel mængde. Gør rede for, at ethvert mål $\mu\colon \mathbb{P}(X) \rightharpoonup [0,\infty]$ svarer til en vægtfunktion (se øvelse 3.8).

m7

3.10. Lad $(X,\mathbf{E},\mu)$ være et målrum. Bevis, at

$$\mu(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \Sigma_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) ,$$

når $E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{E}$ og $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ for $i \neq j$.

(Vink. Se beviset for regel (4), p. 32 i noterne.)

3.11. Lad $\mathbf{E}$ være en σ-algebra i en mængde X og lad $\lambda: \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ være numerabelt additiv. Sæt

$$\lambda^+(E) = \sup\{\lambda(A) \mid A \subseteq E, A \in \mathbf{E}\} \quad \text{for } E \in \mathbf{E} ,$$

$$\lambda^-(E) = -\inf\{\lambda(A) \mid A \subseteq E, A \in \mathbf{E}\} \quad \text{for } E \in \mathbf{E} .$$

1° Vis, at $\lambda(E) \leqq \lambda^+(E)$ og $0 \leqq \lambda^+(E)$ for alle $E \in \mathbf{E}$.

2° Vis, at $\lambda^+(\cup_n E_n) \leqq \Sigma_n \lambda^+(E_n)$, når $E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{E}$ er parvis disjunkte.

3° Vis, at $\lambda^+(X) < \infty$. (Vink. Antag $\lambda^+(X) = \infty$ og begynd med at slutte, at der findes en mængde $A_1 \in \mathbf{E}$, hvor $|\lambda(A_1)| \geqq 1$ og $\lambda^+(X \setminus A_1) = \infty$.)

4° Vis, at λ^+ er et mål.

5° Vis, at λ^- er et mål med $\lambda^-(X) < \infty$.

6° Vis, at $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

7° Vis, at $\lambda^+ \leqq \mu$, $\lambda^- \leqq \nu$, når μ og ν er (endelige) mål defineret på $\mathbf{E}$ med $\lambda = \mu - \nu$.

Svarende til en tolkning af $\lambda(E)$ som den samlede ladning i mængden E er det naturligt at opfatte $\lambda^+(E)$ som den positive og $-\lambda^-(E)$ som den negative ladning i E.

\- - - - - -

3.12. Idet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \in]-\infty,0] \\ 1 & \text{for } x \in]0,\infty[\end{cases} ,$$

skal man vise, at der ikke findes nogen kontinuert funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, således at $f(x) = g(x)$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ med hensyn til Lebesgue målet.

3.13. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og antag $f_n \to f$ μ-n.o. , $f = h$ μ-n.o. og $\forall n$: $f_n = h_n$ μ-n.o. Vis, at $h_n \to h$ μ-n.o.

– – – – – –

Fuldstændigt mål.

3.14. Et mål $\mu: \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ i en mængde X siges at være *fuldstændigt*, hvis der for $M,N \subseteq X$ gælder

$$M \subseteq N \text{ og } N \in \mathbb{E} \text{ med } \mu(N) = 0 \Rightarrow M \in \mathbb{E} ,$$

dvs. hvis enhver μ-nulmængde tilhører $\mathbb{E}$.

Giv eksempler på

et fuldstændigt mål,
et mål, der ikke er fuldstændigt,
to mål defineret på samme σ-algebra, hvor det ene er fuldstændigt, det andet ikke.

(Hovedeksemplet er det fuldstændige Lebesgue mål i $\mathbb{R}^d$, se p. 78 og 85 i noterne samt øvelse 6.2.)

3.15. Lad $\mu: \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være et *fuldstændigt* mål i en mængde X (se øvelse 3.14). Med $f,g,f_1,f_2,\ldots$ betegnes funktioner defineret på X og med værdier i samme mængde $\overline{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$.

1° Antag $f = g$ μ-n.o. Vis da, at f er $\mathbb{E}$-målelig, hvis og kun hvis g er det.

2° Antag $f_n(x) \to f(x)$ for μ-næsten alle x. Vis, af f er $\mathbf{E}$-målelig, hvis $f_1, f_2, \ldots$ alle er det.

3° Gør rede for, at forudsætningen om fuldstændighed er nødvendig i 1° og 2°.

3.16. Lad $(X, \mathbf{E}, \mu)$ være et målrum og sæt

$$\mathbb{F} = \{F \subseteq X \mid \exists A, B \in \mathbf{E}: A \subseteq F \subseteq B \,,\ \mu(B \setminus A) = 0\} .$$

1° Vis, at en mængde $F \subseteq X$ tilhører $\mathbb{F}$, hvis og kun hvis F kan skrives $F = A \cup M$, hvor $A \in \mathbf{E}$, og M er en μ-nulmængde.

2° Vis, at $\mathbb{F}$ er en σ-algebra i X.

3° Vis, at μ på en og kun en måde kan udvides til et mål $\bar{\mu}: \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. (Vink. Benyt 1°.)

4° Vis, at nulmængderne m.h.t. μ og $\bar{\mu}$ er de samme.

5° Vis, at $\bar{\mu}$ er et fuldstændigt mål (se øvelse 3.14), og at enhver udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X også er en udvidelse af $\bar{\mu}$. (Kort: $\bar{\mu}$ er den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. Ofte kaldes $\bar{\mu}$ for *fuldstændiggørelsen* af μ.)

(Hovedeksempel: Se øvelse 6.2.)

3.17. Lad $\mu: \mathbf{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være et mål i en mængde $X \neq \emptyset$ og lad $\bar{\mu}: \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ være den snævreste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål i X. (Se øvelse 3.16.)

1° Vis, at der til enhver $\mathbb{F}$-målelig funktion $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ findes en $\mathbf{E}$-målelig funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, således at

$$f = g \quad \mu\text{-n.o.}$$

(Vink. Sæt $F_r = \{x \mid g(x) > r\}$ for hvert $r \in \mathbb{Q}$ og

m7

skriv F_r på formen $A_r \cup M_r$, hvor $A_r \in \mathbb{E}$, og M_r er en μ-nulmængde. Videre vælges $N \in \mathbb{E}$ med $\mu(N) = 0$, således at $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r \subseteq N$. Prøv så

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{for } x \in X \setminus N \\ 0 & \text{for } x \in N \end{cases},$$

idet øvelse 2.3 benyttes.)

2° Som 1°, men med $\mathbb{R}$, henholdsvis $\mathbb{C}$, i stedet for $\overline{\mathbb{R}}$.

(Hovedeksempel: Se øvelse 6.2.)

Øvelser til §4. *Integral.*

I øvelser vedrørende integraler m.h.t. Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ (Lebesgue integraler) er det ønskeligt straks fra starten foruden funktioner defineret på hele $\mathbb{R}$ at inddrage funktioner defineret f.eks. på et interval. Allerede fra øvelse 4.1 forudsættes derfor kendskab til den første side i §4.5, Integral over delmængde. (P. 53 i noterne.)
Vi bruger $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^\infty f(x)dx, \ldots$ som betegnelse for integraler m.h.t. Lebesgue målet i $]0,1]$, $]1,\infty[$, ...

Det vil senere (som korollar til infinitesimalregningens hovedsætning, §6.4 i noterne) blive vist, at

Er $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *kontinuert på et kompakt interval* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, *og er* Φ *en stamfunktion til* f, *dvs. differentiabel i* $[a,b]$ *med afledet* $D\Phi = f$, *da er*

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_{x=a}^{x=b} = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

Dette resultat, der jo knytter tråden til gymnasiematematikken, tænkes allerede nu anvendt i øvelser, hvor der er behov for det.

— — — — — —

Integral af positive funktioner.

4.1. *En begrænset funktion på et begrænset interval, som er Lebesgue integrabel, men ikke Riemann integrabel.* (Sml. øvelse 6.23.)

Påvis, at Dirichlets funktion (se p. 3 i noterne) på intervallet $]0,1]$ er en Borel funktion, og bestem dens Lebesgue integral.

4.2. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum. Vis, at hvis hvert $x \in X$ tilhører mindst k af mængderne $A_1,\ldots,A_n \in \mathbb{E}$, så er

$$\mu(A_j) \geqq \frac{k}{n}\,\mu(X) \quad \text{for mindst et } j .$$

4.3. Lad $f\colon \mathbb{R}_+ \rightharpoonup [0,\infty[$ være en Borel funktion med $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$.

1° Kan man slutte, at

$$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty \ ?$$

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ : \sup\{f(x) \mid x > a\} < \infty \ ?$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : m(\{x > a \mid f(x) > \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{for} \quad a \to \infty \ ?$$

2° Samme spørgsmål, idet f yderligere forudsættes kontinuert, henholdsvis uniformt kontinuert.

4.4. 1° Vis, at

$$\int_1^n f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \quad \text{og} \quad \int_{1/n}^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \quad \text{for} \quad n \to \infty ,$$

når $f\colon \mathbb{R}_+ \rightharpoonup [0,\infty]$ er en Borel funktion. (Vink. Benyt Lebesgues monotonisætning.)

Gælder også

$$\int_1^u f(x)dx \to \int_1^\infty f(x)dx \quad \text{og} \quad \int_u^1 f(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$$

for $u \to \infty$, henholdsvis $u \to 0$, $u \in \mathbb{R}_+$?

2° Find $\int_0^1 x^a dx$ og $\int_1^\infty x^a dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$.

(Resultaterne anvendes ofte.)

4.5. 1° Vis, at $(1-\frac{x}{n})^n \cdot 1_{]-\infty,n]}(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} e^{-x}$ for hvert $x \in \mathbb{R}$.
(Vink. Man kan benytte, at $\log$ er en konkav funktion med $D\log(1) = 1$.)

m7

2° Vis, at $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n dx \underset{n\to\infty}{\nearrow} 1$.

3° Vis, at $\int_0^n x^a (1-\frac{x}{n})^n dx \underset{n\to\infty}{\nearrow} \int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx$ for hvert $a \in \mathbb{R}$.

(Bemærk, at man ikke behøver at bekymre sig om, hvorvidt $\int_{\mathbb{R}_+} x^a e^{-x} dx < \infty$. For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er det i øvrigt tilfældet ?)

4.6 Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) = \infty$, og lad $f: X \to]0,\infty[$ være $\mathbb{E}$-målelig. Vis, at

$$\int f d\mu < \infty \Rightarrow \int \frac{1}{f} d\mu = \infty .$$

(Vink: $1 < f + \frac{1}{f}$.)

4.7. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, hvor $\mu(X) < \infty$, og lad $f_1, f_2, \ldots$ være en følge af $\mathbb{E}$-målelige funktioner $f_n: X \to [0,\infty[$, der konvergerer uniformt mod en funktion $f: X \to [0,\infty[$. Vis, at

$$f_n d\mu \to \int f d\mu .$$

(Sml. p. 49 i noterne.)

4.8. 1° Find $\int_0^1 \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} dx$.

2° Undersøg, om rækken $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ er uniformt konvergent for $0 < x < 1$.

4.9. Lad $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1° Vis, at $\frac{x^{b-1}}{1+x^a} = \Sigma_{n=0}^{\infty} (1-x^a) x^{b-1+2na}$ for $0 < x < 1$.

2° Vis, at

$$\int_0^1 \frac{x^{b-1}}{1+x^a} dx = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+2a} - \frac{1}{b+3a} + \ldots + \frac{1}{b+2na} - \frac{1}{b+(2n+1)a} + \ldots .$$

mf

4.10. Find $\int_0^1 (\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x})dx$ og $\int_1^\infty (\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x})\, dx$.
(Værdien af det sidste integral kan angives som en rækkesum.)

4.11. 1° Giv et eksempel på en dalende følge $f_1 \geqq f_2 \geqq \dots$ af Borel funktioner $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty[$, hvor

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x)dx \neq \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx .$$

2° Samme opgave med $]0,1]$ i stedet for $\mathbb{R}$.

4.12. Giv et eksempel på en familie $(f_j)_{j\in J}$ af Borel funktioner $f_j :]0,1] \to [0,\infty[$, hvor $\Sigma_{j\in J} f_j$ igen er en Borel funktion, men

$$\int_0^1 \Sigma_{j\in J} f_j(x)dx \neq \Sigma_{j\in J} \int_0^1 f_j(x)dx .$$

4.13. Vis ved eksempler, at hvert af tegnene $<$ og $=$ kan forekomme i uligheden

$$\int_0^1 \liminf_n f_n(x)dx \leqq \liminf_n \int_0^1 f_n(x)dx ,$$

og at hvert af tegnene $<$, $=$ og $>$ kan forekomme mellem

$$\int_0^1 \limsup_n f_n(x)dx \quad \text{og} \quad \limsup_n \int_0^1 f_n(x)dx ,$$

hvor $f_n :]0,1] \to [0,\infty[$, $n = 1,2,\dots,$ er Borel funktioner.

– – – – – –

MI

Integral af reelle funktioner.

4.14. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $g: X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig.

1° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, hvis der findes funktioner $f,h \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, således at $f \leqq g \leqq h$.

2° Vis, at $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ og

$$a\mu(X) \leqq \int g \, d\mu \leqq b\mu(X) ,$$

hvis $\mu(X) < \infty$ og $a \leqq g(x) \leqq b$ for alle $x \in X$, hvor $a,b \in \mathbb{R}$.

4.15. Er produktet af to integrable funktioner altid integrabelt ? (Sml. øvelse $4.22.1^\circ$.)

4.16. *Lebesgue under- og oversummer.* (Sml. Indledning, p. 4-6 i noterne.)

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f: X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset.

Svarende til et sæt P af (dele-) punkter $y_0 \leqq y_1 \leqq \cdots \leqq y_n$, hvor $\forall x \in X: y_0 < f(x) \leqq y_n$, defineres Lebesgue oversummen

$$\overline{S}(P,f) = \Sigma_{i=1}^{n} y_i \, \mu(\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqq y_i\}) .$$

og Lebesgue undersummen

$$\underline{S}(P,f) = \Sigma_{i=1}^{n} y_{i-1} \, \mu(\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqq y_i\}) .$$

Vis, at $\underline{S}(P,f) \leqq \int f d\mu \leqq \overline{S}(P,f)$,

og at $\sup_P \underline{S}(P,f) = \int f d\mu = \inf_P \overline{S}(P,f)$.

4.17. *Lebesgue middelsummer.* (Sml. Indledning, p. 4-6 i noterne.)

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $\mu(X) < \infty$, og lad $f: X \to \mathbb{R}$ være $\mathbb{E}$-målelig og begrænset.

Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et $\delta \in \mathbb{R}_+$, således at

$$|\int f d\mu - \Sigma_{i=1}^{n} \eta_i \mu(\{x \mid y_{i-1} < f(x) \leqq y_i\})| < \varepsilon ,$$

når $y_0 \leqq \eta_1 \leqq y_1 \leqq \eta_2 \leqq y_2 \leqq \dots \leqq \eta_n \leqq y_n$, $\forall x \in X: y_0 < f(x) \leqq y_n$, samt $y_i - y_{i-1} < \delta$, $i = 1,\dots,n$.

4.18. Bevis, at

$$\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

(Vink. Vis, at $\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.)

4.19. Giv eksempler på punktvis konvergente følger $f_1, f_2, \dots$ af Lebesgue integrable funktioner $f_n:]-1,1] \to \mathbb{R}$, hvor henholdsvis

(a) $f = \lim_n f_n \in \mathcal{L}(]-1,1],m)$, og talfølgen $\int_{-1}^1 f_n(x)dx$, $n = 1,2,\dots$, er konvergent, men

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \neq \lim_n \int_{-1}^1 f_n(x)dx .$$

(b) $f \in \mathcal{L}(]-1,1],m)$, men talfølgen $\int_{-1}^1 f_n(x)dx$, $n = 1,2,\dots$ er divergent.

(c) talfølgen $\int_{-1}^1 f_n(x)dx$, $n = 1,2,\dots$, er konvergent, men

$$f \notin \mathcal{L}(]-1,1],m) .$$

4.20. Samme opgave som øvelse 4.19, idet dog $]-1,1]$ erstattes med $\mathbb{R}$, og der ønskes eksempler, hvor konvergensen af følgen $f_1, f_2, \ldots$ er uniform og numerisk majoriseret af en konstant $K \in \mathbb{R}_+$.

4.21. Lad $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ være et begrænset interval og lad $f_n\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$ være en følge af begrænsede funktioner. Vis, at hvis alle f_n er Riemann integrable, og følgen $f_1, f_2, \ldots$ er uniformt konvergent, da er grænsefunktionen f igen Riemann integrabel, med

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx .$$

Integral af komplekse funktioner.

4.22 Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum.

1° Vis, af fg er μ-integrabel, når $f\colon X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel, medens $g\colon X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig og begrænset. (Sml. øvelse 4.15.)

2° Vis, at enhver begrænset, $\mathbb{E}$-målelig funktion $g\colon X \to \mathbb{C}$ er μ-integrabel, hvis $\mu(X) < \infty$. (Sml. øvelse 4.14.2°.)

4.23 1° Vis, at

$$\int_a^u f(x)dx \to \int_a^\infty f(x)dx \quad \text{for} \quad u \to \infty ,$$

når $f \in \mathcal{L}(]a,\infty[, m)$.

(Vink. Betragt en vilkårlig følge $u_1, u_2, \ldots$, $a<u_n<\infty$, med $u_n \to \infty$ og benyt Lebesgues majorantsætning.)

(Resultatet anvendes ofte.)

2° Giv et eksempel på en kontinuert funktion $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, hvor $\lim_{u\to\infty}\int_0^u f(x)dx$ eksisterer i $\mathbb{R}$, uden at f er Lebesgue integrabel over $]0,\infty[$.

(Såkaldt uegentlige integraler er omtalt i §14.2 i noterne.)

4.24. Lad $(X, \mathbb{E},\mu)$ være et målrum, antag $f \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E},\mu)$ og sæt $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \geq n\}$. Vis, at $n\mu(A_n) \to 0$ for $n \to \infty$.

4.25. Lad $(X, \mathbb{E},\mu)$ være et målrum og lad $f: X \to \mathbb{C}$ være en $\mathbb{E}$-målelig funktion. For $n \in \mathbb{N}$ og $x \in X$ sættes

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } |f(x)| \leq n \\ n\dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{når } |f(x)| > n. \end{cases}$$

1° Gør rede for, at hver af funktionerne $f_n: X \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,\ldots,$ er $\mathbb{E}$-målelig.

2° Bevis, at

$$f \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E},\mu) \Leftrightarrow \sup \int |f_n| d\mu < \infty ,$$

samt i bekræftende fald, at

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu \quad \text{for} \quad n \to \infty .$$

4.26. Lad $(X, \mathbb{E},\mu)$ være et målrum, lad $f_n: X \to \mathbb{C}$ være $\mathbb{E}$-målelig, $n = 1,2,\ldots,$ og antag, at

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

1° Vis, at rækken $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er (absolut) konvergent for μ-næsten alle $x \in X$.

m7

2° Med $f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ for μ-næsten alle $x \in X$, hvor $f: X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig, skal man dernæst vise, at $f \in \mathscr{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\int f d\mu = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu .$$

(I øvelse 7.21 betragtes samme situation i et nyt lys. Se også øvelse 8.24.)

4.27. Vis, at rækken $\Sigma_{n=1}^{\infty} g(2^n x)$ er (absolut) konvergent for næsten alle $x \in \mathbb{R}$, når $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, m)$.

Hvad viser øvelse 4.26 om summen ?

4.28 Vis, at

$$\int_0^1 \frac{z}{1+zx} dx = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots$$

for ethvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| \leq 1$, $z \neq -1$.

(Bemærk, at

$$\int_0^1 \frac{t}{1+tx} dx = \int_1^{1+t} \frac{1}{x} dx = \log(1+t)$$

for $t \in \mathbb{R} \setminus]-\infty, -1]$. – I det komplekse gælder tilvarende

$$\int_0^1 \frac{z}{1+zx} dx = \operatorname{Log}(1+z) \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1].)$$

4.29. Her forudsættes kendt, at $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (Det bliver vist i noterne, § 7.5, eksempel B.) Vis da, at

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{e^{x^2} + z e^{-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{z^2}{\sqrt{5}} - \frac{z^3}{\sqrt{7}} + \dots\right)$$

for ethvert $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Undersøg, for hvilke $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, formlen kan opretholdes.

Integral over delmængde.

4.30. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad f og g tilhøre $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og antag, at $f = g$ næsten overalt m.h.t. μ. Vis, at

$$\int f d\mu = \int g d\mu .$$

(Resultatet benyttes ofte.)

4.31. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f: X \to \mathbb{R}$ være integrabel m.h.t. μ.

1° Vis, at

$$\int_E f d\mu \geqq 0 \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \geqq 0 \quad \text{for} \quad \mu\text{-næsten alle} \quad x \in X.$$

2° Vis, at

$$\int_E f d\mu = 0 \quad \text{for alle} \quad E \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{for} \quad \mu\text{-næsten alle} \quad x \in X.$$

4.32. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $U_1, U_2 \dots \in \mathbb{E}$ være parvis disjunkte. Vis, at rækken

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} \int_{U_j} f d\mu$$

er absolut konvergent, når f er μ-integrabel over $\cup_{j=1}^{\infty} U_j$. (Jfr. (*), p. 55 i noterne.)

4.33. Lad $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ være aftagende. Vis, at

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

m7

4.34. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f: X \to [0,\infty]$ være $\mathbb{E}$-målelig med

$$\int f d\mu < \infty .$$

1° Vis, at $\mu(\{x \in X | f(x) \geq a\}) < \infty$ for hvert $a \in \mathbb{R}_+$.

2° Vis, at $\{x \in X | f(x) > 0\}$ har σ-endeligt mål, dvs. at mængden kan skrives $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, hvor $E_n \in \mathbb{E}$ og $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1,2,\ldots$.

3° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} f d\mu < \varepsilon .$$

4.35. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad f tilhøre $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$.

1° Vis, at $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ har σ-endeligt mål. (Se øvelse 4.34.)

2° Vis, at der til ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $E \in \mathbb{E}$ med $\mu(E) < \infty$, således at

$$\int_{X \setminus E} |f|\, d\mu < \varepsilon .$$

4.36. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, lad $h \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ og sæt

$$\nu(E) = \int_E h d\mu, \quad E \in \mathbb{E}.$$

Vis, at $\int f d\nu = \int f \cdot h d\mu$

for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

(Vink. Begynd med simple funktioner.)

(Øvelse 4.42 og 6.18 omhandler specialtilfælde.)

mf

4.37. 1° Vis, at

$$\liminf_n (a_n+b_n) \leq \liminf_n a_n + \limsup_n b_n \leq \limsup_n (a_n+b_n),$$

når $a_n, b_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n = 1,2,\ldots$.

$*2^\circ$ Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og lad $f_1, f_2 \ldots$ være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med grænsefunktion f. Det antages, at $\int f d\mu < \infty$, og at

$$\int f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu .$$

Vis, at $\int_E f_n d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_E f d\mu$

for enhver mængde $E \in \mathbb{E}$.

3° Vis ved et eksempel, at konklusionen i 2° ikke behøver at gælde, når forudsætningen $\int f d\mu < \infty$ udelades.

Summer $\Sigma_{j\in J}\, a_j$.

4.38. Lad $f: J \to \mathbb{C}$ være integrabel m.h.t. tællemålet μ i mængden J, altså $f \in l(J)$. Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subseteq J$, således at

$$|\int f d\mu - \Sigma_{x\in I^*} f(x)| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteq I^* \subseteq J$.

(Vink. Man kan anvende øvelse $4.35.2^\circ$.)

4.39. Gør rede for, at

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{j\in J} a_{nj} = \Sigma_{j\in J} \lim_{n\to\infty} a_{nj},$$

når $0 \leq a_{1j} \leq a_{2j} \leq \ldots$ for hvert $j \in J$.

(Eksempel: $J = \mathbb{N}$.)

4.40. Lad $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \dots$ være en stigende følge af mål, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, og sæt

$$\mu(E) = \lim_n \mu_n(E), \; E \in \mathbb{E}.$$

1° Vis, at μ er et mål. (Vink. Man kan benytte øvelse 4.39.)

2° Vis, at

$$\int f d\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} \int f d\mu$$

for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

(Vink. Begynd med simple funktioner.)

4.41. Lad $(\mu_j)_{j\in J}$ være en familie af mål μ_j, alle defineret på samme σ-algebra $\mathbb{E}$ i en mængde X, antag $a_j \in [0,\infty]$, $j \in J$, og sæt $\mu = \Sigma_{j\in J} a_j \mu_j$. (Se noterne, §3.1, eksempel D.)

Vis, at

$$\int f d\mu = \Sigma_{j\in J} a_j \int f d\mu_j$$

for enhver funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$.

(Vink. Begynd med simple funktioner og benyt derefter øvelse 4.39.)

4.42. For hver delmængde $E \subseteq X$ sættes

$$\mu(E) = \Sigma_{x\in E}\, p(x) \;,$$

hvor $p: X \to [0,\infty]$ er en given (vægt)funktion (se øvelse 3.8).

Vis, at $\int f d\mu = \Sigma_{x\in X} f(x)p(x)$

for enhver funktion $f: X \to [0,\infty]$.

(Vink. Benyt øvelse 4.36 eller 4.41.)

- - - - - -

4.43. Lad $\mathbb{E}$ og $\mathbb{F}$ være σ-algebraer i henholdsvis X og Y, hvor $X \subseteq Y$ og

$$\forall B \in \mathbb{F}: B \cap X \in \mathbb{E}.$$

Antag, at μ er et mål på $\mathbb{E}$, og gør da rede for:

1° Ved $\nu(B) = \mu(B\cap X)$, $B \in \mathbb{F}$, defineres et mål ν i Y.

2° For en $\mathbb{F}$-målelig funktion g defineret på Y kommer integration m.h.t. ν ud på et med integration af restriktionen $g|_X$ m.h.t. μ.

- - - - - -

4.44. Funktionen $F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

1° Gør rede for, at definitionen har mening.

2° Bevis, at $F(t) \to 0$ for $t \to \infty$.

3° Bevis, at F er differentiabel med

$$DF(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

(Vink. Betragt først et interval $]a,\infty[$ i stedet for $\mathbb{R}_+$. - Undervejs kan man evt. benytte, at $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.)

4° Angiv $F(t)$ eksplicit, uden brug af integraltegn.

Øvelser til §5. *Lebesgue målets indførelse.*

5.1. Betegnelsen $]a,b]$ står i denne øvelse for $\{x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leq b\}$ og benyttes kun med $a < b$, $a,b \in \mathbb{Q}$. Lemma 1 og korollar 1 i §5.1 i noterne, med beviser, gælder da med $\mathbb{Q}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

1° Vis, at $\mathbb{Q}$ for vilkårligt $\varepsilon > 0$ kan overdækkes af numerabelt mange $]c_j,d_j]$ med $\Sigma_j(d_j-c_j) < \varepsilon$. (Specielt gælder lemma 2 da ikke i $\mathbb{Q}$.)

2° Vis, at længdemåling for intervaller i $\mathbb{Q}$ ikke er numeralt additiv.

– – – – – –

5.2. Vis, at en funktion $\kappa\colon \mathbb{I}_d \to [0,\infty]$ med $\kappa(\emptyset) = 0$ er numerabelt additiv, hvis og kun hvis den er additiv og numerabelt subadditiv.

– – – – – –

5.3. Lad $\kappa\colon \mathbb{I}_d \to [0,\infty]$ være additiv med $\kappa(\emptyset) = 0$. Vis, at det i definitionen af $\kappa^*(A)$ for $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\kappa^*(A) = \inf \Sigma_n \kappa(I_n) ,$$

er nok at tage nedre grænse over alle numerable familier (I_n) af *parvis disjunkte* $I_n \in \mathbb{I}$ med $A \subseteq \cup_n I_n$.

5.4. Vis, at der for enhver mængde $A \subseteq \mathbb{R}^d$ findes en Borel mængde $B \supseteq A$ med $v^*(B) = v^*(A)$.

(Resultatet benyttes i øvelse 6.1 og 6.4.)

– – – – – –

5.5. Vis, at betingelse (ii) i definitionen af ydre mål p. 75 i noterne kan erstattes af

$$\alpha(A) \leq \alpha(B) \quad \text{når} \quad A \subseteq B \subseteq X,$$

$$\alpha(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha(A_n) \quad \text{for vilkårlige} \quad A_1, A_2, \ldots \subseteq X.$$

5.6. Lad $\alpha: \mathbb{P}(X) \to [0,\infty]$ være defineret på mængden $\mathbb{P}(X)$ af alle delmængder af en mængde X og antag $\alpha(\emptyset) = 0$. Med $\mathbb{M}$ betegnes mængden af de mængder $E \subseteq X$, hvor

$$\forall A \subseteq X: \alpha(A) = \alpha(A \cap E) + \alpha(A \setminus E).$$

Vis, at $\mathbb{M}$ er en mængdealgebra, og at

$$\alpha(E \cup F) = \alpha(E) + \alpha(F),$$

når $E \in \mathbb{M}$, $E \cap F = \emptyset$.

5.7. 1° Bestem det ydre mål κ^* i mængden X frembragt af funktionen κ med definitionsmængde $\{\emptyset, X\}$, hvor

$$\kappa(\emptyset) = 0, \quad \kappa(X) = 1.$$

2° Vis, at κ^* ikke er et mål i X (forudsat X har mindst to elementer).

3° Bestem de κ^*-målelige mængder.

5.8. Lad $\mathbb{K}$ bestå af $\emptyset$ samt alle etpunktsmængder $\{x\}$ med $x \in X$. Bestem det ydre mål κ^* i X samt mængden $\mathbb{M}$ af κ^*-målelige mængder, når

(a) $\kappa(\{x\}) = 1$ for alle $x \in X$, $\kappa(\emptyset) = 0$.

(b) $\kappa(\{x\}) = 0$ for alle $x \in X$, $\kappa(\emptyset) = 0$.

m7

5.9. Idet m^* betegner det ydre Lebesgue mål i $\mathbb{R}^d$, skal man vise, at

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B),$$

når $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}^d$, og afstanden

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\} > 0.$$

(Her betyder $d(x,y)$ den sædvanlige afstand mellem x og y.)

5.10. Lad $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ 1 & \text{for } x \geq 0, \end{cases}$$

sæt $\kappa(]a,b]) = h(b) - h(a)$ for ethvert standard interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ og sæt $\kappa(\emptyset) = 0$.

1° Bestem det af κ frembragte ydre mål κ^* i $\mathbb{R}$.

2° Idet $\mu = \kappa^*|_{\mathbb{M}}$, hvor $\mathbb{M}$ er mængden af κ^*-målelige mængder, skal man bestemme $\mathbb{M}$ og μ.

3° Bestem $\mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{M}, \mu)$ og find $\int f d\mu$ for en vilkårlig funktion $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{M}, \mu)$.

5.11. Idet $x_1, x_2, \ldots$ er en vilkårlig følge af indbyrdes forskellige reelle tal, medens $p_1, p_2, \ldots$ er en følge af positive reelle tal med $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$, vil vi her for hvert $x \in \mathbb{R}$ sætte

$$h(x) = \Sigma_{n \in J_x} p_n \quad \text{med} \quad J_x = \{n \mid x_n \leq x\}.$$

1° Gør rede for, at $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er voksende og kontinuert fra højre (også hvis f.eks. $\{x_1, x_2, \ldots\} = \mathbb{Q}$).

m7

Med $\kappa(]a,b]) = h(b) - h(a)$ for hvert standard interval $]a,b]$ i $\mathbb{R}$ og $\kappa(\emptyset) = 0$ sætter vi nu $\mu = \kappa^*|_{\mathbb{M}}$, hvor κ^* er det af κ frembragte ydre mål i $\mathbb{R}$, og $\mathbb{M}$ er mængden af κ^*-målelige mængder.

2° Bestem $\mu(\mathbb{R})$, $\mu(\{x_n\})$ og $\mu(\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2,\dots\})$.

3° Bestem $\mathbb{M}$.

4° Bestem $\mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{M},\mu)$ og find $\int f d\mu$ for en vilkårlig funktion $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R},\mathbb{M},\mu)$.

Radon mål i $\mathbb{R}^d$.

5.12. For hver Borel mængde B i $\mathbb{R}^d$ sættes $\nu(B)$ = antallet af elementer i B.

1° Gør rede for, at $\nu: \mathbb{B} \to [0,\infty]$ er et mål i $\mathbb{R}^d$, men ikke et Radon mål.

2° Påvis, at konklusionen i sætningen i §5.5 (p. 79 i noterne) ikke gælder for ν. Hvor bryder beviset sammen ?

3° Angiv to forskellige mål defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$, som stemmer overens for alle standard intervaller. (Sml. §5.5, korollar 1.)

5.13. *Tyngdepunkt for Radon mål.*

Lad l være en ret linie i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning
$$ax + by + c = 0 \quad \text{med} \quad a^2 + b^2 = 1$$
og lad os orientere normalen til l ved vektoren (a,b). For hvert $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er $ax + by + c$ da

m7

som bekendt den med fortegn regnede afstand til (x,y) fra linien l. Hvis $(x,y) \rightharpoonup ax+by+c$ er integrabel over $\mathbb{R}^2$ med hensyn til et Radon mål μ i $\mathbb{R}^2$, siges dette at have et *moment* med hensyn til l, nemlig (med den valgte orientering af normalen til l):

$$\int_{\mathbb{R}^2}(ax+by+c)d\mu(x,y).$$

Lad nu μ være et Radon mål i $\mathbb{R}^2$ med $0 < \mu(\mathbb{R}^2) = M < \infty$ og antag, at μ har momenter med hensyn til 2 hinanden skærende rette linier l_1 og l_2 i $\mathbb{R}^2$.

1° Bevis, at μ har et moment med hensyn til enhver ret linie i $\mathbb{R}^2$.

2° Bevis, at der findes et og kun et Radon mål ν, der er koncentreret i ét punkt (x_0,y_0), dvs. hvor $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}) = 0$, og som har samme moment som μ om enhver ret linie l i $\mathbb{R}^2$.

(Punktet (x_0,y_0) kaldes *tyngdepunktet* for μ.)

5.14. Angiv $\nu(B)$ for enhver Borel mængde B på $\mathbb{R}$, idet $\nu = \nu_h$ er Radon målet svarende til funktionen $h: \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ givet ved

(a) $h(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $h(x) = 0$ for $x < 0$, $h(x) = x$ for $x \geq 0$.

(c) $h(x) = x^3$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

5.15. Lad ν være et Radon mål på $\mathbb{R}$ og definer $g: \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ som på p. 82_1 i noterne. Gennemfør beviset for, at

1° g er voksende og kontinuert fra højre.

2° det til g svarende Radon mål ν_g på $\mathbb{R}$ netop er ν.

3° $\nu = \nu_h$ gælder for funktionerne $h = g + c$, $c \in \mathbb{R}$, og ikke for andre.

5.16. Lad $h: \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ være voksende og kontinuert fra højre og lad ν være det Radon mål i $\mathbb{R}$, hvor

$$\nu(]a,b]) = h(b) - h(a)$$

for ethvert standard interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Bestem $\nu(I)$ for ethvert (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og bestem $\nu(\{b\})$ for ethvert $b \in \mathbb{R}$.

5.17. Lad $g: \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ være voksende.

1° Vis, at funktionen $x \rightharpoonup g(x+0)$, $x \in \mathbb{R}$, er voksende og kontinuert fra højre. Her er

$$g(x+0) = \lim_{t \to 0_+} g(x+t) = \inf\{g(x+t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}.$$

2° Bestem $\nu(I)$ for ethvert (begrænset eller ubegrænset) interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og bestem $\nu(\{b\})$ for ethvert $b \in \mathbb{R}$, idet ν betegner Radon målet på $\mathbb{R}$ svarende til funktionen $x \rightharpoonup g(x+0)$, $x \in \mathbb{R}$.

5.18. Lad $(X,\mathbf{E},\mu)$ være et målrum, lad $\varphi: X \rightharpoonup \mathbb{R}$ være $\mathbf{E}$-målelig, antag $\mu(\{x \in X \mid a < \varphi(x) \leq b\}) < \infty$ for ethvert begrænset interval $]a,b] \subseteq \mathbb{R}$ og sæt

$$F(t) = \begin{cases} \mu(\{x \in X \mid 0 < \varphi(x) \leq t\}) & \text{for } t \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{for } t = 0 \\ -\mu(\{x \in X \mid t < \varphi(x) \leq 0\}) & \text{for } t \in \mathbb{R}_- . \end{cases}$$

m7

1° Gør rede for, at $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er voksende og kontinuert fra højre, og at

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\,dF(t) = \int_X (g \circ \varphi)\,d\mu$$

for enhver Borel funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (samtidig eksistens).

2° Udtryk specielt $\int_X \varphi\,d\mu$ ved et integral m.h.t. F. (Sml. § 16.2 i noterne.)

m7

Øvelser til §6. *Lebesgue målet og Lebesgue integralet.*

6.1. Lad E være en Lebesgue målelig mængde i $\mathbb{R}^d$.

1° Vis, at der findes en Borel mængde $B \supseteq E$, således at $\nu^*(B \setminus E) = 0$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 5.4.)

2° Vis, at der findes en Borel mængde $A \subseteq E$, således at $\nu^*(E \setminus A) = 0$.

6.2. (Fortsættelse.) Gør rede for, at det fuldstændige Lebesgue mål $\nu^*|_{\mathbb{L}}$ i $\mathbb{R}^d$ er den snævreste udvidelse af Lebesgue målet $m: \mathbb{B} \to [0,\infty]$ til et fuldstændigt mål. (Se øvelse 3.16.)

Konsekvens: *Til enhver Lebesgue målelig funktion* g *på* $\mathbb{R}^d$ *findes en Borel funktion* f, *således at* $f = g$ *næsten overalt.* (Se øvelse 3.17.)

6.3. Angiv et mål μ defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}^d$, som ikke er af form cm, men dog er invariant ved enhver isometri $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

6.4. Vis, at det ydre Lebesgue mål ν^* i $\mathbb{R}^d$ er invariant ved enhver isometri af $\mathbb{R}^d$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 5.4.)

6.5. Vis, at det fuldstændige Lebesgue mål $\overline{m} = \nu^*|_{\mathbb{L}}$ i $\mathbb{R}^d$ er invariant ved enhver isometri af $\mathbb{R}^d$.

(Vink. Man kan benytte øvelse 6.2 eller 6.4.)

m7

6.6. *En mængde* $A \subseteq \mathbb{R}$, *der ikke er Lebesgue målelig.*
(Se øvelse 6.8 for et stærkere resultat.)

Til ækvivalensrelationen $\sim$ givet ved

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

svarer en deling af $\mathbb{R}$ i klasser af form $a + \mathbb{Q}$. (Det er sideklasser til undergruppen $\mathbb{Q}$ i gruppen $(\mathbb{R},+)$.) - Hver klasse er tæt i $\mathbb{R}$; specielt har den elementer i intervallet $]0,1]$.

Lad nu A være en mængde bestående af én repræsentant for hver klasse, udtaget i $]0,1]$. (For eksistens af en sådan mængde påberåbes udvalgsprincippet.)

1° Vis, at der for hvert $x \in \mathbb{R}$ findes et og kun et $q \in \mathbb{Q}$, således at

$$x \in A + q.$$

Med andre ord: $\mathbb{R} = \cup_{q \in \mathbb{Q}}(A+q)$, med parvis disjunkte $A + q$.

2° Vis, at $\cup_{q \in \mathbb{Q} \cap]0,1]}(A+q) \subseteq]0,2]$.

3° Lad $\mu\colon \mathbb{E} \to [0,\infty]$ være et translationsinvariant mål i $\mathbb{R}$, hvor $]0,1] \in \mathbb{E}$ og $\mu(]0,1]) < \infty$. Vis, at

$$A \in \mathbb{E} \Rightarrow \mu(\mathbb{R}) = 0.$$

4° Vis, at A ikke er Lebesgue målelig.

6.7. Vis, at det ydre Lebesgue mål ν^* i $\mathbb{R}$ ikke er additivt.

(Vink. Ifølge øvelse 6.6 findes der en mængde $E \subseteq \mathbb{R}$, der ikke er Lebesgue målelig.)

m7

6.8. Lad $E \subseteq]0,1]$ være en mængde med $v^*(E) > 0$. Til ækvivalensrelationen givet ved

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$$

svarer en klassedeling af E. Lad A være en mængde bestående af én repræsentant for hver klasse. (For eksistens af en sådan mængde påberåbes udvalgsprincippet.)

1° Vis, at $E \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[} (A+q) \subseteq]-1,2[$.

2° Vis, at A ikke er Lebesgue målelig.

(Resultatet anvendes i øvelse 6.12.)

6.9. *En åben mængde i $\mathbb{R}$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.*

Antag $0 < \varepsilon < 2$ og lad F fremgå af $[0,1]$ på følgende måde: Midt i $[0,1]$ fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4$, midt i hvert af de to tiloversblevne intervaller fjernes det åbne interval af længde $\varepsilon/4^2$, osv.

1° Vis, at $G = [0,1] \setminus F$ er åben og har F som rand.

2° Bestem $m(G)$ og $m(F)$.

6.10. Angiv en sammenhængende, åben mængde (dvs. et område) i $\mathbb{R}^2$, hvis rand har positivt Lebesgue mål.

(Vink. Søg inspiration i øvelse 6.9.)

6.11. *Cantor/Lebesgues funktion.*

1° Gør rede for, at den p. 95 i noterne definerede afbildning af Cantors mængde Z over på intervallet $[0,1]$ på en og kun en måde kan udvides til en voksende funktion $f:[0,1] \to [0,1]$. (Denne kaldes *Cantor/Lebesgues funktion.*)

2° Gør rede for, at Cantor/Lebesgues funktion f er kontinuert i hele intervallet $[0,1]$, og for, at f er differentiabel med $Df(x) = 0$ i hvert $x \in [0,1] \setminus Z$, men ikke differentiabel i noget $x \in Z$.

(Cantor/Lebesgues funktion benyttes i øvelse 6.12 og 6.21.)

6.12. *En Lebesgue målelig mængde, som ikke er en Borel mængde.*

Lad $f:[0,1] \to [0,1]$ være Cantor/Lebesgues funktion (øvelse 6.11) og sæt

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}f(x), \; x \in [0,1].$$

1° Gør rede for, at g er en homeomorf afbildning af intervallet $[0,1]$ på sig selv.

2° Vis, at mængden $E = g(Z)$ har Lebesgue målet $m(E) = \tfrac{1}{2}$ (medens jo $m(Z) = 0$).

3° Ifølge øvelse 6.8 har E en delmængde A, som ikke er Lebesgue målelig. - Vis, at $g^{-1}(A)$ er Lebesgue målelig, men ikke en Borel mængde, altså at $g^{-1}(A) \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{B}$.

6.13. Gør rede for, at Lebesgue målet $m:\mathbb{B} \to [0,\infty]$ i $\mathbb{R}$ ikke er fuldstændigt.

(Vink. Se øvelse 6.12 og 6.1 eller 6.2.)

\- - - - - -

MF

Transformation af Lebesgue integraler.

6.14. Vis, at

$$\int_{K(0,R)} (x+iy)^n \, d(x,y) = 0,$$

når $K(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ og $n \in \mathbb{N}$.

(Vink. Gør rede for, at

$$\int_{K(0,R)} (x+iy)^n d(x,y) = \int_{K(0,R)} c^n (x+iy)^n d(x,y),$$

når $c \in \mathbb{C}$ og $|c| = 1$.)

6.15 Reelle tal r, λ, β kaldes *(sfærisk) polære koordinater* for punktet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, hvor

$$x = r \cos\beta \cos\lambda$$
$$y = r \cos\beta \sin\lambda$$
$$z = r \sin\beta \quad .$$

1° Beregn Jacobi determinanten for afbildningen $(r,\lambda,\beta) \rightharpoonup (x,y,z)$. Gør rede for, at restriktionen φ til det åbne interval

$$I = \{(r,\lambda,\beta) \mid 0 < r, -\pi < \lambda < \pi, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\}$$

er en bijektiv afbildning af dette på $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \leqq 0, y = 0\}$, som tillige med φ^{-1} er kontinuert differentiabel. Beskriv den geometriske betydning af r, λ og β. (Figur!)

2° Hvorledes udtrykkes et integral $\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) d(x,y,z)$ i polære koordinater ?

6.16 Det vises i §14.2 i noterne, at $t \rightharpoonup \frac{\sin t}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, ikke er Lebesgue integrabel.

1° Slut heraf, at $x \rightarrow \frac{\sin x^{-2}}{x}$, $x \in]0,1]$, heller ikke er det.

(Resultatet bruges i øvelse 6.20.)

2° Er $x \rightarrow \frac{\sin x^{-2}}{x}$, $x \in]1,\infty[$, Lebesgue integrabel ?

Ubestemt integral.

6.17. Vis, at en (Borel) funktion f defineret på $\mathbb{R}^d$ er lokalt (Lebesgue) integrabel, hvis og kun hvis hvert punkt $x \in \mathbb{R}^d$ har en omegn V, hvor $f|_V \in \mathcal{L}(V,m)$.

6.18. Gør rede for, at

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx \quad \text{(samtidig eksistens)},$$

når $f \geqq 0$ og g er Borel funktioner på $\mathbb{R}$, f er lokalt integrabel, og F er et ubestemt integral af f.

(Vink. Se øvelse 4.36.)

(Resultatet benyttes p. 247 i noterne.)

6.19. Er nulfunktionen på $\mathbb{R}$ et ubestemt integral af indikatorfunktionen 1_Z for Cantors mængde Z ? Er den stamfunktion til Z ?

6.20. Sæt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos x^{-2} & \text{for} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Gør rede for, at $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ er differentiabel, men at den afledede $Df:[0,1] \to \mathbb{R}$ ikke er Lebesgue integrabel.

(Vink. Benyt øvelse 6.16.1°.)

6.21. Lad $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ være voksende samt næsten overalt differentiabel.

1° Vis, at Df er Lebesgue integrabel i $[a,b]$, samt at

$$\int_a^b Df(x)dx \leq f(b)-f(a).$$

(Vink. Sæt $f(x) = f(b)$ for $x > b$ og betragt funktionsfølgen $g_n:[a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)) .)$$

2° Vis, at

$$\int_a^b Df(x)dx < f(b)-f(a)$$

kan forekomme, endda med f kontinuert i $[a,b]$.

(Vink. Prøv Cantor/Lebesgues funktion, øvelse 6.11.)

6.22. 1° Bevis, at

$$\int_a^b Df(x)dx = f(b)-f(a),$$

når $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er differentiabel med en begrænset afledet Df.

(Vink. Sæt $f(x) = f(b) + (x-b)Df(b)$ for $x > b$ og betragt funktionsfølgen $g_n:[a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,\ldots$, givet ved

$$g_n(x) = n(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)) \,.)$$

2° Slut heraf, at hvis en funktion $g:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der er begrænset i ethvert interval $[-n,n]$, $n = 1,2,\ldots$, har en stamfunktion G, da er denne tillige et ubestemt integral af g.

- - - - - - - -

Riemann integral og Lebesgue integral.

6.23. *En begrænset Borel funktion på et begrænset interval, som ikke stemmer overens næsten overalt med nogen Riemann integrabel funktion.* (Sml. øvelse 4.1.)

Lad E fremgå af $[0,1]$, idet der midt i $[0,1]$ fjernes et interval af længde $\frac{1}{4}$, midt i hvert af de to tiloversblevne intervaller fjernes et interval af længde $\frac{1}{4^2}$, osv.

1° Vis, at $1_{[0,1]\setminus E}$ ikke er Riemann integrabel i $[0,1]$.

2° Antag $f = 1_{[0,1]\setminus E}$ næsten overalt og vis da, at f ikke er Riemann integrabel i $[0,1]$.

(Øvelse 8.23 er en fortsættelse.)

Øvelser til §7. *Produktmål.*

7.1. Gælder

$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \Rightarrow A_1 = A_2 \text{ og } B_1 = B_2 \ ?$$
$$A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_1 = A_2 \text{ og } B_1 = B_2 \ ?$$

7.2. Antag $E \subseteq X \times Y$. Gælder

$$E = \cup_{x \in X} E_x \ ? \qquad E = \cup_{x \in X} (\{x\} \times E_x) \ ?$$

Målelighed i cartesisk produkt.

7.3. I $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$ er givet σ-algebraer $\mathscr{X}$ og $\mathscr{Y}$.

Vis, at $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ er den mindste σ-algebra i $X \times Y$, således at "projektionerne" $(x,y) \sim x$ og $(x,y) \sim y$ er målelige afbildninger af $X \times Y$ på henholdsvis X og Y.

7.4. Når $x \in X$ og $\mathscr{Y}$ er en σ-algebra i $Y \neq \emptyset$, vil

$$\mathbb{E} = \{E \subseteq X \times Y \mid E_x \in \mathscr{Y}\}$$

være en σ-algebra i $X \times Y$ (p. 104). Gør rede for, at det er et specialtilfælde af lemmaet p. 19 i noterne.

7.5. I $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$ er givet σ-algebraer $\mathscr{X}$ og $\mathscr{Y}$.

Gør rede for, at $y \rightsquigarrow (x,y)$, $y \in Y$, for givet $x \in X$ er en målelig afbildning af $(Y,\mathcal{Y})$ ind i $(X\times Y, \mathcal{X}\times\mathcal{Y})$, og slut heraf, at ethvert snit f_x i en $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-målelig funktion på $X\times Y$ er en $\mathcal{Y}$-målelig funktion (§7.1, korollar 1).

7.6. Antag $X \neq \emptyset$ og sæt $Z = \mathbb{N}\times X$.

En mængde $E \subseteq Z$ modsvares af en følge af delmængder af X, nemlig snittene $E_1, E_2, \dots$. En funktion f på Z modsvares af en følge af funktioner på X, nemlig snittene $f_1, f_2, \dots$.

Lad $\mathbb{E}$ være en σ-algebra i X og sæt $\mathbb{Z} = \mathbb{P}(\mathbb{N})\times\mathbb{E}$. Vis:

$$E \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: E_n \in \mathbb{E} ,$$

$$f \text{ er } \mathbb{Z}\text{-målelig} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: f_n \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} .$$

(Øvelse 7.21 er en fortsættelse.)

7.7. 1° Mængden $\mathbb{A} = \{A \subseteq \mathbb{R}^p \mid A\times\mathbb{R}^q \in \mathbb{B}_{p+q}\}$ er en σ-algebra i $\mathbb{R}^p$ (p. 105). Gør rede for, at det er et specialtilfælde af lemmaet p. 19 i noterne.

2° Vis, at projektionerne $(x,y) \rightsquigarrow x$ og $(x,y) \rightsquigarrow y$ af $(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q, \mathbb{B}_{p+q})$ på $(\mathbb{R}^p,\mathbb{B}_p)$ og $(\mathbb{R}^q,\mathbb{B}_q)$ er målelige, og slut heraf (se øvelse 7.3), at $\mathbb{B}_p\times\mathbb{B}_q \subseteq \mathbb{B}_{p+q}$. (Sml. p. 105 i noterne.)

7.8. 1° Vis, at $\mathbb{L}_1\times\mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_2$. (Vink. Man kan benytte øvelse 6.1.)

2° Vis, at $\mathbb{L}_1\times\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$. (Vink. Betragt $\{0\}\times A$, hvor $A \subseteq \mathbb{R}$ ikke er Lebesgue målelig. (Se øvelse 6.6.))

– – – – – – – –

7.9. Lad X være en mængde med mindst 4 elementer. Vis, at der findes en σ-klasse i X, som ikke er en σ-algebra.

– – – – – – – –

7.10. 1° Gør rede for, at ethvert Radon mål i $\mathbb{R}^d$ er σ-endeligt.

2° Angiv et σ-endeligt mål μ defineret på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvor

$$\mu(]a,b]) = \infty \quad \text{for alle} \quad a,b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

7.11. Betragt et mål $\mu : \mathbb{P}(X) \curvearrowright [0,\infty]$ givet ved en vægtfunktion $p : X \curvearrowright [0,\infty]$. (Se øvelse 3.8.) - Vis, at μ er σ-endeligt, hvis og kun hvis mængden $\{x \in X \mid p(x) > 0\}$ er højst numerabel og alle vægte $p(x)$, $x \in X$, er endelige.

Produktmål.

7.12. Lad $(X,\mathcal{X},\mu)$ og $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ være målrum, $X \neq \emptyset$, og *antag*, at funktionen $x \curvearrowright \nu(E_x)$, $x \in X$, er $\mathcal{X}$-målelig for enhver mængde $E \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. (Sml. §7.3, lemma 1.) - Gør rede for, at den ved

$$\pi(E) = \int_X \nu(E_x)\,d\mu(x), \quad E \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y},$$

definerede funktion π er et mål, og at

$$\pi(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B) \quad \text{for alle} \quad A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}.$$

7.13. Lad $\mu:\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ være målet i $\mathbb{R}$ givet ved

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{når } A \text{ er endelig eller numerabel} \\ \infty & \text{ellers} \end{cases}$$

(se øvelse 3.3) og lad $\nu:\mathbb{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ være tællemålet i $\mathbb{R}$.

1° Gør rede for, at der ved

$$\pi(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu(x), \quad \rho(E) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y)$$

defineres mål π og ρ på $\mathbb{P}(\mathbb{R})\times\mathbb{P}(\mathbb{R})$, hvor

$$\forall A,B \in \mathbb{P}(\mathbb{R}): \pi(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B) = \rho(A\times B).$$

(Vink. Benyt øvelse 7.12.)

2° Vis, at $\pi \neq \rho$. Sammenhold med Sætning om produktmål, §7.3 i noterne.

(Vink. Betragt f.eks. diagonalen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.)

7.14. $\int_a^b f(x)dx$ *som areal.*

Lad $f:\mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ være en Borel funktion.

1° Vis, at *ordinatmængden*

$$O_f = \{(x,y) = (x_1,\dots,x_d,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid 0 < y \leq f(x)\}$$

er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{d+1}$.

2° Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = m_{d+1}(O_f) .$$

(Lebesgue integralet af funktioner på $\mathbb{R}^d$ kunne således være defineret ud fra Lebesgue målet i $\mathbb{R}^{d+1}$. Specielt er "begynder"-definitionen af $\int_a^b f(x)dx$ som et areal faktisk korrekt! Sml. også Indledning, p. 1 i noterne.)

7.15. Vis, at grafen

$$G_f = \{(x,y) = (x_1,\ldots,x_d,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid y = f(x)\}$$

for en Borel funktion $f:\mathbb{R}^d \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er en Borel mængde i $\mathbb{R}^{d+1}$ med Lebesgue mål $m_{d+1}(G_f) = 0$.

– – – – – – – –

Tonellis og Fubinis sætninger.

7.16. Lad $\mathscr{X}$ være en σ-algebra i $X \neq \emptyset$, medens $\nu:\mathscr{Y} \rightsquigarrow [0,\infty]$ er et σ-endeligt mål i $Y \neq \emptyset$.

1° Antag $f \in \mathscr{M}^+(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y})$. Vis da, at funktionen

$$x \rightsquigarrow \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y), \quad x \in X,$$

tilhører $\mathscr{M}^+(X, \mathscr{X})$.

2° Lad her $f:X\times Y \rightsquigarrow \mathbb{R}$ være en $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$-målelig funktion og antag, at $A = \{x \in X \mid f_x \in \mathscr{L}(Y,\mathscr{Y},\nu)\} \neq \emptyset$. Vis da, at $A \in \mathscr{X}$, og at funktionen

$$x \rightsquigarrow \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y)d\nu(y), \quad x \in A,$$

er $\mathscr{X}$-målelig.

3° Som 2°, men med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

M7

7.17. Lad μ, ν og π være tællemålene i $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ og $X \times Y$. Gør rede for, at

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)$$

for enhver funktion $f: X\times Y \curvearrowright [0,\infty]$.

7.18. 1° Om en funktion $f: X\times Y \curvearrowright \mathbb{R}$ antages

$$\Sigma_{(x,y)\in X\times Y} |f(x,y)| < \infty .$$

Vis, at

$$\Sigma_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \Sigma_x \Sigma_y f(x,y) = \Sigma_y \Sigma_x f(x,y).$$

2° Som 1°, men med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$.

7.19. Definer a_{mn} for $m,n \in \mathbb{N}$ ved

$$a_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{når } m = n \\ -1 & \text{når } m = n+1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vis, at $\Sigma_m \Sigma_n a_{mn} \neq \Sigma_n \Sigma_m a_{mn}$. Sammenhold med Tilføjelse til Fubinis sætning (p. 118 i noterne) og med øvelse 7.18.

7.20. Sæt $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ og vis, at

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y)dm(y)d\tau(x) \neq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} 1_E(x,y)d\tau(x)dm(y),$$

når $m: \mathbb{B} \curvearrowright [0,\infty]$ er Lebesgue målet og $\tau: \mathbb{B} \curvearrowright [0,\infty]$ er restriktion af tællemålet i $\mathbb{R}$.

Sammenhold med Tilføjelse til Tonellis sætning (p. 116 i noterne).

7.21. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et vilkårligt målrum med $X \neq \emptyset$. Vi sætter $Z = \mathbb{N}\times X$, $\mathbb{Z} = \mathbb{P}(\mathbb{N})\times\mathbb{E}$ som i øvelse 7.6 og lader τ betegne tællemålet i $\mathbb{N}$.

1° Vis, at der findes et og kun et mål $\pi:\mathbb{Z} \to [0,\infty]$, således at

$$\pi(A\times B) = \tau(A)\cdot\mu(B) \quad \text{for} \quad A \subseteq \mathbb{N},\ B \in \mathbb{E},$$

nemlig

$$\pi(E) = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\mu(E_n), \quad E \in \mathbb{Z}.$$

2° Vis, at

$$(*) \int_Z f d\pi = \int_{\mathbb{N}}\int_X f(n,x)d\mu(x)d\nu(n) = \int_X\int_{\mathbb{N}} f(n,x)d\nu(n)d\mu(x),$$

dvs. $(*) \int_Z f d\pi = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n d\mu = \int_X \Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu$,

når $f \in \mathscr{M}^+(Z,\mathbb{Z})$, dvs. når $f_1, f_2, \ldots \in \mathscr{M}^+(X,\mathbb{E})$.

3° Betragt her en funktion $f:Z \to \mathbb{C}$, svarende til en følge $f_n:X \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,\ldots$. Vis, at $f \in \mathscr{L}(Z,\mathbb{Z},\pi)$, hvis og kun hvis

$$f_1, f_2, \ldots \quad \text{er } \mathbb{E}\text{-målelige og} \quad \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\int_X |f_n| d\mu < \infty .$$

Vis i bekræftende fald $(*)$. Sml. øvelse 4.26.

7.22. Lad $f,g:\mathbb{R} \to [0,\infty[$ være Borel funktioner, som er lokalt (Lebesgue) integrable, og sæt

$$\mu(B) = \int_B f(x)dx , \quad \nu(B) = \int_B g(x)dx$$

for hver Borel mængde B i $\mathbb{R}$.

Angiv $(\mu\times\nu)(E)$ for enhver Borel mængde E i $\mathbb{R}^2$.

m7

7.23. 1° Bestem det mål ν på Borel algebraen i $\mathbb{R}$, hvori Lebesgue målet i $\mathbb{R}^2$ transformeres ved projektionen $(x,y) \rightsquigarrow x$.

2° Vis, at for enhver Borel funktion $f:\mathbb{R} \rightsquigarrow [0,\infty]$ er integralet $\int_{\mathbb{R}} f d\nu$ enten 0 eller ∞.

7.24. Find

$$\int_E (x-y)^a d(x,y)$$

for ethvert $a \in \mathbb{R}$, idet $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$.

7.25. En kvadratisk form i $\mathbb{R}^d$ kan som bekendt skrives

$$x \rightsquigarrow \underline{\underline{x}}_{-}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}_{|}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

hvor $\underline{\underline{S}}$ er en symmetrisk $(d\times d)$-matrix. Idet formen forudsættes positiv definit, dvs. har værdi > 0 for ethvert $x \neq 0$, skal man vise, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\underline{\underline{x}}_{-}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{x}}_{|}}\, dx = \frac{\pi^{d/2}}{(\det \underline{\underline{S}})^{\frac{1}{2}}}\,.$$

(Vink. Der findes en ortogonal substitution $\underline{\underline{x}}_{|} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{y}}_{|}$, der fører den kvadratiske form over i

$$y \rightsquigarrow \Sigma_{i=1}^{d} \lambda_i y_i^2.$$

Benyt så $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (se p. 121 i noterne).)

7.26. Udregn Lebesgue målet af en kugle i $\mathbb{R}^3$ med radius R ved brug af polære koordinater (se øvelse 6.15).

m7

7.27. 1^o Beregn $\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} r^a d(x,y)$ for hvert $a \in \mathbb{R}$, når $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

2^o Undersøg, for hvilke $n \in \mathbb{Z}$ funktionen

$$(x,y) \curvearrowright (x+iy)^n$$

er Lebesgue integrabel i $K(0,R)\setminus\{0\}$, og find for hvert af disse n værdien af

$$\int_{K(0,R)\setminus\{0\}} (x+iy)^n \, d(x,y) .$$

(Sml. øvelse 6.14.)

7.28. For $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, er

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots .$$

Bevis, at funktionen $(x,y) \curvearrowright \operatorname{Log}(1+x+iy)$ er Lebesgue integrabel i enhedscirkelskiven $K(0,1)$ med

$$\int_{K(0,1)} \operatorname{Log}(1+x+iy) \, d(x,y) = 0 .$$

(Vink. Regn først øvelse 7.27.)

7.29. Lad $f:]0,1]\times]0,1] \curvearrowright \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & \text{for} \quad 0 < x < y \leqq 1 \\ -x^{-2} & \text{for} \quad 0 < y < x \leqq 1 \\ 0 & \text{for} \quad 0 < x = y \leqq 1 . \end{cases}$$

1^o Find værdien af hvert af dobbeltintegralerne

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx , \quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy .$$

2^o Er f Lebesgue integrabel ?

m7

7.30. Sæt $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$.

Vis, at $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}$, og find

$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$.

(Vink. For $x \neq 0$ kan integralet $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ f.eks. udregnes ved substitutionerne $y = xt$ og $t = \tan\frac{u}{2}$.)

Øvelser til §8. *Funktionsrummene* $\mathcal{L}_p$.

8.1. Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med seminorm $\| \ \|$ og antag, at rækken $\Sigma_{k=1}^{\infty} g_k$ med led $g_k \in \mathcal{V}$ er konvergent med sum $f \in \mathcal{V}$. Vis, at

$$\|f\| \leqq \Sigma_{k=1}^{\infty}\|g_k\| .$$

8.2. Vis, at der ved $\|f\| = |f(3)|$ defineres en seminorm i rummet $\mathcal{V} = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ af alle funktioner $f:\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$.

Beskriv det tilsvarende konvergensbegreb.

Gør rede for, at der findes en normbevarende, lineær bijektion af $\mathcal{V}/\mathcal{V}_0, \| \ \|$ på $\mathbb{C}, | \ |$.

8.3. Lad $f_1, f_2, \ldots$ og f tilhøre $\mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu)$, hvor $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et målrum. Vis, at

$$f_n \to f \text{ i 1-middel} \quad \Rightarrow \quad \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu \quad .$$

\- - - - - - -

Funktionsrummene $\mathcal{L}_p$.

8.4. Vis, at

$$f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f|^{p-1}f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{E},\mu) \ ,$$

når $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et målrum, $p \in \,]1,\infty[$ og $f:X \curvearrowright \mathbb{C}$.

(Glem ikke at vise, at

$$|f|^{p-1}f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \quad \Rightarrow \quad f \text{ er } \mathbb{E}\text{-målelig} \ .)$$

8.5. For et vilkårligt målrum $(X,\mathbb{E},\mu)$ med $X \neq \emptyset$ kan funktionsrummet $\mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ defineres også når $0 < p < 1$; men

$$f \curvearrowright \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

er da i almindelighed ikke en seminorm.

1° Gør rede for, at de i noterne p. 128^{12}, p. 131_{13-8}, p. 132_{11-10} og p. 133^{1-4} anførte resultater gælder, blot $p,r,s \in \mathbb{R}_+$.

2° Antag $0 < p < 1$ og angiv

(a) to talpar $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, hvor

$$\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p.$$

(b) to funktioner $f,g \in \mathcal{L}(]0,1])$, hvor

$$\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p.$$

8.6. *Hölders ulighed for positive funktioner.*

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p,q > 1$. Vis, at

$$\int fg d\mu \leqq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

for vilkårlige $f,g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

8.7. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$, med $0 < k < 1$, $l < 0$. Vis, at

$$\int fg d\mu \geqq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} \left(\int g^l d\mu\right)^{1/l}$$

for vilkårlige $f,g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. - Her regnes $\infty^s = \infty$, $\infty^{-s} = 0$ og $0^{-s} = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

Mærk, at Hölders ulighed er vendt.

(Vink. Antag $\mu(\{x|f(x)>0\}) > 0$, $\mu(\{x|g(x)=0\}) = 0$ samt $\mu(\{x|f(x)>0, g(x) = \infty\}) = 0$ og anvend øvelse 8.6 med $p = {}^1/k$ og $(fg)^k$, g^{-k} i stedet for f,g.)

8.8. *Minkowskis ulighed for positive funktioner.*

Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $1 < p < \infty$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leqq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}$$

for vilkårlige $f,g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

8.9. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $0 < k < 1$. Vis, at

$$\left(\int (f+g)^k d\mu\right)^{1/k} \geqq \left(\int f^k d\mu\right)^{1/k} + \left(\int g^k d\mu\right)^{1/k}$$

for vilkårlige $f,g \in \mathcal{M}^+(X,\mathbb{E})$. - Vi regner $\infty^s = \infty$ for $s \in \mathbb{R}_+$.

Mærk, at Minkowskis ulighed er vendt.

(Vink. Antag $0 < \int (f+g)^k d\mu < \infty$ og anvend øvelse 8.7.)

8.10. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p,q > 1$, samt $f \in \mathcal{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$.

1° Sæt $g = |f|^{p-1}\operatorname{sgn} f$ og vis, at $g \in \mathcal{L}_q(X,\mathbb{E},\mu)$,

$$f = |g|^{q-1} \operatorname{sgn} g, \qquad f\bar{g} = |f|^p = |g|^q$$

og

$$\int f\bar{g}\,d\mu = \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

2^o Vis, at

$$\|f\|_p = \max \left| \int fh\,d\mu \right|,$$

hvor maksimum tages over alle $h \in \mathscr{L}_q(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\|h\|_q \leqq 1$.

8.11. Antag $k \in \mathscr{L}_p(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y}, \mu\times\upsilon)$, hvor $\mu: \mathscr{X} \rightsquigarrow [0,\infty]$ og $\upsilon: \mathscr{Y} \rightsquigarrow [0,\infty]$ er σ-endelige mål i mængder X og Y, medens $p \in \,]1,\infty[$. Vi forudsætter $\mu(X) > 0$.

1^o Vis, at snitfunktionen $y \rightsquigarrow k(x,y)$, $y \in Y$, tilhører $\mathscr{L}_p(Y,\mathscr{Y},\upsilon)$ for μ-næsten alle $x \in X$.

Idet $g \in \mathscr{L}_q(Y,\mathscr{Y},\upsilon)$, hvor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sætter vi

$$f(x) = \int_Y k(x,y)g(y)\,d\upsilon(y)$$

for hvert $x \in X$, hvor funktionen $y \rightsquigarrow k(x,y)g(y)$, $y \in Y$, er integrabel med hensyn til υ.

2^o Begrund, at $f(x)$ er defineret for μ-næsten alle $x \in X$.

Vis, at $f \in \mathscr{L}_p(X,\mathscr{X},\mu)$, og giv en vurdering opadtil af $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

8.12. Lad $\xi_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots)$, $m = 1,2,\ldots$, være en følge af talfølger tilhørende l_p, ligesom $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$ tilhører l_p, med $p \in \mathbb{R}_+$.

m7

1° Gælder $\|\xi_m - \xi\|_p \underset{m\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_{mn} \underset{m\to\infty}{\to} x_n$?

2° Gælder det omvendte ?

8.13. Antag $0 < r < s$. Vis, at for funktioner $f_1, f_2, \ldots$ defineret på et målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $\mu(X) < \infty$ vil konvergens i s-middel medføre konvergens i r-middel med samme grænse f.

8.14. Vis, at der hverken gælder $\mathcal{L}_r(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_r(\mathbb{R})$, når $0 < r < s$.

8.15. Vis, at $\mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)$ ikke er en delmængde af $\mathcal{L}_r(X, \mathbb{E}, \mu)$, når $0 < r < s$, og $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et σ-endeligt målrum med $\mu(X) = \infty$.

8.16. Antag $J \neq \emptyset$. Vis, at $l_r(J) \subseteq l_s(J)$ for $0 < r < s$, samt at $\|x\|_r \geqq \|x\|_s$, når $x = (x_j)_{j\in J} \in l_r(J)$. (Sml. p. 132 i noterne.)
(Vink. Antag $\|x\|_r = 1$.)

8.17. Vis: (a) $l \subset \bigcap_{s>1} l_s$, (b) $\forall r \in \mathbb{R}_+: l_r \subset \bigcap_{s>r} l_s$.

8.18. Antag $f \in \mathcal{L}_q(X, \mathbb{E}, \mu) \cap \mathcal{L}_s(X, \mathbb{E}, \mu)$, hvor $(X, \mathbb{E}, \mu)$ er et målrum og $0 < q < s$.
Vis, at $f \in \mathcal{L}_r(X, \mathbb{E}, \mu)$ for ethvert $r \in]q, s[$.

8.19. For hvilke $p > 0$ er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, når

(a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x < \infty \end{cases} \quad ?$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{for } 1 < x < \infty \end{cases} \quad ?$$

8.20. Vis, at $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow p = 2$, når

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1 + |\log x|)}, \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

*8.21. Lad $G \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$ være differentiabel i $\mathbb{R}_+$ og lad DG være et ubestemt integral af $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$. Vis, at $DG \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$.
(Funktionerne kan antages reelle.)

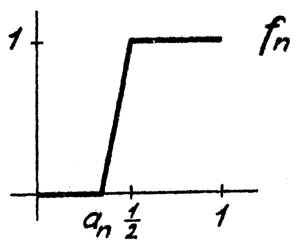
– – – – – – – –

Fuldstændighed.

8.22. Vis, at funktionsrummet $\mathscr{C}([0,1])$ af kontinuerte funktioner $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ med normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ ikke er fuldstændigt.

(Vink.

Betragt f.eks.



, $n = 2, 3, \ldots$,

med $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.)

8.23. *Rummet af Riemann integrable funktioner på* $[a,b]$ *er ufuldstændigt.*

1° Betragt følgen $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ af indikatorfunktioner for $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq [0,1]$, hvor A_n består af de intervaller, der er fjernet fra $[0,1]$ i n^{te} skridt i øvelse 6.23.

Vis, at $f_1, f_2, \ldots$ konvergerer mod $1_{\cup_n A_n}$ i 1-middel.

2° Vis, at funktionsrummet af Riemann integrable funktioner $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ med seminormen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ *ikke* er fuldstændigt.

3° Skitser en Cauchy følge i $\mathscr{C}([0,1]), \|\ \|_1$, som ikke konvergerer i 1-middel mod nogen Riemann integrabel funktion.

8.24. Gør rede for, at resultatet nederst p. 138 i noterne omfatter øvelse 4.26.

\- - - - - - -

Funktionsrummet $\mathscr{L}_\infty$.

8.25. Vis påstandene i øvelserne 8.13-8.16 og 8.18 i tilfældet $s = \infty$.

8.26. Vis: $\forall p \in \mathbb{R}_+ : \log \in \mathscr{L}_p(]0,1])$, men $\log \notin \mathscr{L}_\infty(]0,1])$,
$\forall p \in \mathbb{R}_+ : \frac{1}{\log} \notin \mathscr{L}_p(]2,\infty[)$, men $\frac{1}{\log} \in \mathscr{L}_\infty(]2,\infty[)$.

8.27. Lad $(X,\mathbb{E},\mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$ og antag $f \in \mathscr{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ for alle $p \in [p_0,\infty[$, hvor

m7

$p_0 \in \mathbb{R}_+$. Vis, at

$$\|f\|_p \to \text{ess.sup}\,|f| \quad \text{for} \quad p \to \infty.$$

(Heri ligger én motivering for definitionen af $\mathscr{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$ og $\|\ \|_\infty$.)

(Vink. Vis, at $\|f\|_p \geq a\mu(A)^{1/p}$, når $a <$ ess. sup$|f|$ og $A = \{x \mid |f(x)| > a\}$. Vis desuden, at $\|f\|_p \leq (\int |f|^{p_0} d\mu)^{1/p}$, når ess.sup $|f| = 1$.)

8.28. 1° Antag $f \in \mathscr{L}_\infty(X,\mathbb{E},\mu)$, hvor $(X,\mathbb{E},\mu)$ er et σ-endeligt målrum. Vis, at

$$\|f\|_\infty = \sup|\int fh d\mu| ,$$

hvor supremum tages over alle $h \in \mathscr{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\|h\|_1 \leq 1$.

2° Gælder dette også for målrummet i øvelse 3.2 ?

8.29. Når en delmængde $\mathcal{U} \neq \emptyset$ af et pseudometrisk rum $\mathcal{V}$ betragtes med pseudometrik påtrykt fra $\mathcal{V}$, vil vi omtale $\mathcal{U}$ som et *delrum* af $\mathcal{V}$.

1° Vis, at en afsluttet delmængde $\mathcal{U} \neq \emptyset$ af et fuldstændigt pseudometrisk rum $\mathcal{V}$ er et fuldstændigt delrum.

2° Vis, at et fuldstændigt delrum $\mathcal{U}$ af et metrisk rum $\mathcal{V}$ er en afsluttet delmængde i $\mathcal{V}$.

Eksempel. Banach rummet $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$, $\|\ \|_u$ er delrum af $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$, $\|\ \|_\infty$, men ikke afsluttet i $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$. Derimod indlejres $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ som en afsluttet del af $L_\infty(\mathbb{R})$.

Øvelser til §9. *Approksimation i middel.*

9.1. Vis, at et delrum $\mathcal{U}$ af et separabelt, pseudometrisk rum $\mathcal{V}$ igen er separabelt. (Et pseudometrisk rum kaldes *separabelt*, hvis det har en endelig eller numerabel, tæt delmængde.

(Vink. Lad følgen $y_1, y_2, \ldots$ ligge tæt i $\mathcal{V}$ og sæt

$$d_n = \inf_{x \in \mathcal{U}} d(y_n, x) .$$

Hvis $d_n > 0$, vælges $x_n \in \mathcal{U}$, så $d(y_n, x_n) < 2d_n$, og hvis $d_n = 0$, vælges $x_{n1}, x_{n2}, \ldots \in \mathcal{U}$, så $d(y_n, x_{nk}) \to 0$ for $k \to \infty$.)

9.2. Vis, at et vektorrum med seminorm, der har en endelig eller numerabel, total delmængde, er separabelt.

9.3. 1° Idet $J \neq \emptyset$, vil vi med $k(J)$ betegne mængden af familier $(a_j)_{j \in J}$ med $a_j \in \mathbb{R}$ (eller $a_j \in \mathbb{C}$), hvor $a_j \neq 0$ for højst endelig mange $j \in J$.

Vis, at $k(J)$ er tæt i $l_p(J)$ ved $\| \ \|_p$, for ethvert $p \in [1, \infty[$.

2° Vis, at $l_p = l_p(\mathbb{N})$ er separabelt for ethvert $p \in [1, \infty[$.

9.4. 1° Lad $\mathcal{V}$ være et pseudometrisk rum og antag, at der findes et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og en overnumerabel delmængde $A \subseteq \mathcal{V}$, således at

$$d(x,y) > \varepsilon, \quad \text{når} \quad x \neq y, \quad x,y \in A.$$

Vis, at $\mathcal{V}$ ikke er separabelt.

2° Vis, at $\mathcal{L}_\infty([0,1])$ og $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ikke er separable ved $\| \ \|_\infty$.

3° Vis, at $l_p(J)$ ikke er separabelt ved $\| \ \|_p$, når J er overnumerabel og $1 \leqq p \leqq \infty$.

Vis, at $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$ ikke er separabelt ved $\| \ \|_\infty$.

9.5. Med k, c_0 og c betegner vi mængden af reelle (eller komplekse) talfølger $x = (x_1, x_2, \ldots)$, hvor henholdsvis

(1) $x_n \neq 0$ for højst endelig mange $n \in \mathbb{N}$,

(2) $x_n \to 0$ for $n \to \infty$,

(3) $x_1, x_2, \ldots$ er konvergent i $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$).

1° Bestem afslutningen af k, c_0 og c i l_∞ betragtet med $\| \ \|_\infty$.

2° Hvilke af rummene k, c_0 og c er Banach rum ved $\| \ \|_\infty$?

(Vink. Se øvelse 8.29.)

3° Hvilke af rummene k, c_0 og c er separable ved $\| \ \|_\infty$?

9.6. Med $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ og $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ betegnes mængden af kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (eller $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), hvor henholdsvis

m7

(1) f har begrænset støtte,

(2) $f(x) \to 0$ for $|x| \to \infty$,

(3) f er begrænset.

1° Bestem afslutningen af $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, dels i $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ ved $\|\ \|_\infty$, dels i $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$ ved $\|\ \|_\infty$.

2° Hvilke af rummene $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ og $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ er Banach rum ved $\|\ \|_\infty$?

9.7. Eftervis rigtigheden af bemærkningen p. 152 i noterne.

Øvelser til §10. *Foldning af funktioner på* $\mathbb{R}^d$.

10.1. Angiv funktionen $1_{]0,1]} * 1_{]-1,1]}$ ved en skitse af dens graf.

10.2. Udregn $f*f$, når $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.3. Udregn $f*f$, når $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.4. Lad A og B være Borel mængder i $\mathbb{R}^d$ og antag $m(A) < \infty$.

1° Vis, at funktionen

$$x \curvearrowright m(A \cap \tau_x(B)),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

er kontinuert, og bestem $\int_{\mathbb{R}^d} m(A \cap \tau_x(B))\,dx$.

(Vink. Vis, at $1_{-B} * 1_A(x) = m(A \cap \tau_x(B))$.)

2° Vis, at mængden $A-B = \{y-z \mid y \in A,\ z \in B\}$ har indre punkter, hvis $m(A) > 0$ og $m(B) > 0$.

(Vink. Vis først, at $A \cap \tau_x(B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A-B$.)

3° Vis, at 0 er indre punkt i $B-B$, hvis $m(B) > 0$.

10.5. Lad $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ være en Borel funktion, der opfylder funktionalligningen

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ f(x+y) = f(x)+f(y).$$

1° Vis, at f er kontinuert i 0.

(Vink. For vilkårligt $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vil der blandt mængderne

$$B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid (n-1)\varepsilon < f(x) \leqq n\varepsilon\},\ n \in \mathbb{Z},$$

findes en med $m(B_n) > 0$. Øvelse 10.4.3° kan da bringes i anvendelse.)

2° Vis, at f er kontinuert overalt, og at

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = ax.$$

10.6. Lad $g: \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ være en Borel funktion, der opfylder funktionalligningen

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ g(x+y) = g(x) \cdot g(y),$$

og antag, at g ikke er identisk 0.

1° Vis, at $\forall x \in \mathbb{R}:\ g(x) > 0$.

2° Vis, at

$$\exists a \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in \mathbb{R}:\ g(x) = a^x.$$

(Vink. Anvend øvelse 10.5.)

10.7. Lad $\chi: \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$ være en Borel funktion og antag

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$$

samt $\forall x \in \mathbb{R}:\ |\chi(x)| = 1$.

1° Vis, at der findes en funktion $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, således at $\chi * g(0) \neq 0$.

2° Vis, at χ er kontinuert. (Vink. Betragt $\chi * g$.)

10.8. Lad $\varphi: \mathbb{R} \sim \mathbb{C}$ være en Borel funktion, der opfylder funktionalligningen

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ \varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

og antag, at φ ikke er identisk 0.

1° Vis, at φ er kontinuert. (Vink. Anvend de foregående øvelser.)

2° Vis, at der findes et $h \in \mathbb{R}_+$, således at $\int_0^h \varphi(t)dt \neq 0$.

3° Vis, at φ er differentiabel. (Vink.

$$\int_x^{x+h} \varphi(t)dt = \int_0^h \varphi(x+t)dt = \varphi(x)\int_0^h \varphi(t)dt \; .)$$

4° Vis, at $\exists c \in \mathbb{C}\ \forall x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = e^{cx}$. (Vink. Vis, at $D\varphi = c\varphi$.)

5° Hvad kan sluttes om c, hvis φ er begrænset ?

10.9. Antag $k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ med $\int_{\mathbb{R}^d} k(x)dx = 1$ og sæt

$$k_t(x) = t^d k(tx) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}_+, \; x \in \mathbb{R}^d .$$

Vis, at $([k_t])_{t\in\mathbb{R}_+}$ er en approksimativ enhed i $L(\mathbb{R}^d)$ ved grænseovergangen $t \to \infty$. (Her er $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ikke en Dirac familie, medmindre $k \geqq 0$.)

10.10. 1° Gør rede for, at $\left(\frac{1}{t}\cdot 1_{]-t,0]}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ er en Dirac familie for $\mathbb{R}$ ved grænseovergangen $t \to 0_+$.

2° Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{F(x+t)-F(x)}{t} - f(x)\right| dx \to 0 \quad \text{for} \quad t \to 0 ,$$

når $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, og F er et ubestemt integral af f.

10.11. Antag $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

1^{o} Idet $r \in \mathbb{R}_+$, skal man vise, at funktionen

$$x \curvearrowright \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(x,r)} f\,dm\,, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

igen tilhører $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, samt at den tillige er uniformt kontinuert og dermed (sml. øvelse 4.3) går mod 0 for $|x| \to \infty$.

2^{o} Vis, at

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(x,r)} f\,dm - f(x) \right| dx \to 0 \text{ for } r \to 0.$$

10.12. Gør rede for eksistensen af en Dirac følge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for $\mathbb{R}$, hvor hver funktion k_n tilhører $\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ og har begrænset støtte.

(Vink. Se p. 148 i noterne.)

10.13. Lad f tilhøre $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ for hvert $p \in [1,r]$, hvor $1 < r < \infty$.

Vis, at der findes en følge $g_1, g_2, \ldots$ af funktioner $g_n \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, ligeledes tilhørende $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ for hvert $p \in [1,r]$, således at

$$\forall p \in [1,r]: \|f-g_n\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

(Vink. Benyt øvelse 10.12.)

– – – – – – –

Da gruppen $(\mathbb{Z},+)$ har et translationsinvariant mål, tællemålet, kan man diskutere foldning af funktioner $a:\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C}$ (eller $a:\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$), dvs. af komplekse (eller reelle) tal"følger" $a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$. Foldningen $c = a*b$

defineres ved

$$c_i = \Sigma_{j\in\mathbb{Z}}\, a_{i-j}b_j = \Sigma_{k+j=i}\, a_k b_j,\quad i \in \mathbb{Z},$$

når de optrædende rækker er absolut konvergente.

10.14. Med $l(J)$ betegnes som bekendt mængden af integrable funktioner på J, idet mængden J betragtes med tællemålet. Eksempelvis er $l(\mathbb{Z})$ mængden af talfølger
$a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\ldots,a_{-1},a_0,a_1,\ldots)$ med
$\Sigma_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty$.

1° Vis, at $(a_{i-j}b_j)_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ tilhører $l(\mathbb{Z}^2)$, når $a,b \in l(\mathbb{Z})$.

2° Vis, at $a*b$ er defineret og tilhører $l(\mathbb{Z})$, når $a,b \in l(\mathbb{Z})$.

3° Gør rede for, at $l(\mathbb{Z})$, betragtet med sædvanlig addition, sædvanlig multiplikation med skalarer, foldning samt 1-norm, er en kommutativ Banach algebra med etelement. (Den kaldes *gruppealgebraen* for gruppen $(\mathbb{Z},+)$.)

(Øvelse 12.1 rummer en fortsættelse.)

Øvelser til §11. *Foldning af periodiske funktioner.*

11.1. Udfør beviset for, at $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ er tæt i $\mathscr{L}_p(\mathbb{T})$ betragtet med $\| \ \|_p$, når $1 \leq p < \infty$.
(Jfr. p. 169 i noterne.)

11.2. Vis, at nulreglen ikke gælder i $(\mathscr{C}(\mathbb{T}),+,*)$.

11.3. *Poissons kerne*. For hvert $r \in [0,1[$ sættes

$$P_r(x) = 1 + 2\Sigma_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1° Vis, at

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad .$$

(Vink. Man kan udnytte, at $P_r(x) = \mathscr{Re}(1+2\Sigma_1^{\infty} z^n)$ med $z = re^{ix}$.)

2° Vis, at $(P_r)_{r\in[0,1[}$ ved grænseovergangen $r \to 1_-$ er en Dirac familie af periodiske funktioner.

(Øvelse 12.18 er en fortsættelse.)

11.4. Om følgen $k_1, k_2, \ldots \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$ antages

(i) $\sup_n \|k_n\|_1 < \infty$

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(x)dx \to 1$ for $n \to \infty$

(iii) $\forall\delta,\ 0 < \delta < \pi$: $\int_{\delta<|x|<\pi} |k_n(x)|dx \to 0$ for $n \to \infty$.

Vis

$\forall f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$: $\|f*k_n - f\|_u \to 0$ for $n \to \infty$,

$\forall f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{T})$ $\forall m\in\mathbb{N}$: $\|D^m(f*k_n) - D^m f\|_u \to 0$ for $n \to \infty$,

$\forall f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{T})$: $\|f*k_n - f\|_p \to 0$ for $n \to \infty$, med $p \in [1,\infty[$.

Øvelser til §12. *Fourier rækker.*

12.1. 1° Gør rede for, at den trigonometriske række

$$c_0 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$$

er Fourier række for sin sumfunktion f, når $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots,c_{-1},c_0,c_1,\ldots)$ tilhører $l(\mathbb{Z})$, d.v.s. når $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < \infty$.

2° Bestem Fourier rækken for funktionen fg, når tillige $g(x) = d_0 + \Sigma_1^{\infty}(d_n e^{inx} + d_{-n}e^{-inx})$, $x \in \mathbb{R}$, med $d = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l(\mathbb{Z})$.

3° Udnyt resultatet i 2° til et bevis for, at foldningen $*$ i $l(\mathbb{Z})$ er associativ (se øvelsesblad 69 for definition af $*$), og gør tillige rede for, at $(l(\mathbb{Z}),+,\mathbb{C},*)$ er isomorf med en delalgebra af $(\mathscr{C}(\mathbb{T}),+,\mathbb{C},\cdot)$.

12.2. Gør rede for, at $c_0 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ er Fourier række for sin sumfunktion, når begge potensrækker $\Sigma_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ og $\Sigma_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$ har konvergensradius > 1.

12.3. Find Fourier rækken for

1° $x \rightsquigarrow e^{e^{ix}}$, $x \in \mathbb{R}$. (Vink. Benyt øvelse 12.2.)

2° $x \rightsquigarrow e^{\cos x} \cdot \sin\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

12.4. 1° Vis, at

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tfrac{\pi}{n})e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{Z},$$

når c_n betegner den n^{te} Fourier koefficient for funktionen $f \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$.

2° Vis, at

$$|c_n| \leq \tfrac{1}{2} \| f - \tau_{\pi/n} f \|_1 ,$$

og slut heraf $c_n \to 0$ for $|n| \to \infty$. (Jfr. §12.4 i noterne.)

12.5. Vis, at

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots$$

for hvert $x \in \,]0,\pi[$, og angiv summen af rækken for hvert $x \in \mathbb{R}$ ved en skitse af sumfunktionens graf. Bemærk specielt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots .$$

12.6. 1° Vis, at

$$\begin{aligned} x &= 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right) \\ &= \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 4x}{2} + \ldots + \frac{\sin 2nx}{n} + \ldots\right) \end{aligned}$$

for hvert $x \in \,]0,\pi[$, og angiv tillige summen af rækkerne for hvert $x \in \mathbb{R}$ ved skitser af sumfunktionernes grafer.

2° Vis, at

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

og

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} .$$

12.7. Idet $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}$ har periode 2π og

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < x \leqq 0 \\ \sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x} & \text{for } 0 < x \leqq \pi, \end{cases}$$

skal man vise, at Fourier rækken for f er konvergent i ethvert $x \in \mathbb{R}$.

12.8. Vis, at

$$-\log(2\sin\frac{x}{2}) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \dots + \frac{\cos nx}{n} + \dots$$

for hvert $x \in\,]0,\pi]$.

(Vink. Til udregning af $\int_0^\pi (-\log(2\sin\frac{x}{2}))\cos nx\,dx$ kan man anvende partiel integration og derpå udnytte $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$.)

12.9. *Lokaliseringsprincip.* Betragt Fourier rækkerne i et punkt $x \in \mathbb{R}$ for to funktioner $f,g \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$, der antages at stemme overens i et interval $]a,b[$, hvor $a < x < b$. Bevis:

1° Rækkerne er begge konvergente eller begge divergente.

2° Rækkerne er begge summable, eller ingen af dem er summabel.

(Vink. Betragt $g - f$.)

12.10. Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med seminorm (f.eks. $\mathbb{C}$ med $|\ |$).

1° Gør rede for, at spørgsmålet om konvergens og eventuel grænse for en følge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $s_n \in \mathcal{V}$, ikke beror på ordningen af elementerne. (Jfr. øvelse 0.2.)

2° Idet $s \in \mathcal{V}$, skal man vise, at følgerne

$$s,0,s,0,s,0,\ldots \quad \text{og} \quad s,0,0,s,0,0,\ldots$$

er limiterbare, og bestemme grænserne.

12.11. Lad $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tilhøre et vektorrum $\mathcal{V}$ med seminorm. Vis, at $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ er summabel med sum $s \in \mathcal{V}$, hvis og kun hvis $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ er summabel med sum $a_0 + s$.

12.12. Lad $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tilhøre et vektorrum med seminorm og antag, at $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ er summabel. Vis, at $\frac{a_n}{n} \to 0$ for $n \to \infty$. (Resultatet benyttes i øvelse 12.17.)

12.13. 1° Vis, at $\Sigma_{n=0}^{\infty} e^{inx}$ er summabel for hvert $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ med sum $(1-e^{ix})^{-1}$.

2° Undersøg for hvert $x \in \mathbb{R}$, om rækkerne $\Sigma_{n=0}^{\infty} \cos nx$ og $\Sigma_{n=1}^{\infty} \sin nx$ er summable, og bestem i bekræftende fald summen.

3° Er rækkerne Fourier rækker for funktioner tilhørende $\mathcal{L}(\mathbb{T})$?

m7

12.14. En trigonometrisk række $c_o + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$ er givet at være summabel i 1-middel med sum $f \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$.

Bevis, at rækken er Fourier rækken for f.

12.15. 1° Idet Fourier rækkerne for $f \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$ og $g \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$ er henholdsvis

$$c_o + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

og $$d_o + \Sigma_{n=1}^{\infty}(d_n e^{inx} + d_{-n} e^{-inx}) ,$$

skal man vise, at Fourier rækken for $f*g$ er

$$c_o d_o + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n d_n e^{inx} + c_{-n} d_{-n} e^{-inx}) .$$

(Resultatet benyttes i øvelse 13.17.)

2° Slut af resultatet i 1°, at der ikke er noget neutralt element ved foldningen $*$ hverken i $L(\mathbb{T})$ eller $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

3° Udnyt entydighedssætningen (p. 189 i noterne) til et nyt bevis for, at foldningen $*$ er associativ både i $L(\mathbb{T})$ og $\mathscr{C}(\mathbb{T})$.

4° Gør rede for, at $(L(\mathbb{T}),+,\mathbb{C},*)$ og $(\mathscr{C}(\mathbb{T}),+,\mathbb{C},*)$ er isomorfe med delalgebraer af $(c_o(\mathbb{Z}),+,\mathbb{C},\cdot)$, hvor

$$c_o(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid a_n \to 0 \text{ for } |n| \to \infty\} .$$

(Sml. §15.1 i noterne og øvelse 12.1.)

12.16. Bevis *Weierstrass' sætning om approksimation med polynomier:*

Til enhver kontinuert funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ *og ethvert* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *findes et polynomium* $a_0 + a_1x + .. + a_nx^n$, *således at*

$$\forall x \in [a,b]: |f(x) - (a_0+a_1x+...+a_nx^n)| < \varepsilon.$$

(Vink. Antag $[a,b] = [0,\pi]$, fortsæt f til en lige funktion med periode 2π og approksimer først med Fourier rækkens afsnitsmiddel σ_n med passende stort n.)

(Sætningen anvendes i øvelse 13.33 og 13.35.)

\- - - - - - -

Abel summabilitet.

En række $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$ med $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2,...,$ siges at være *Abel summabel* med sum $s \in \mathbb{C}$, hvis

(i) potensrækken $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ er konvergent for hvert $r \in [0,1[$,

(ii) $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n r^n \to s$ for $r \to 1_-$.

Der gælder: En konvergent række er Abel summabel med samme sum. (Se Abels sætning, Mat 1y, 1968-69, p. 25.21.)

12.17. 1° Vis, at rækken $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ...$ er Abel summabel og bestem summen.

2° Vis, at rækken ikke er summabel i sædvanlig forstand. (Vink. Se øvelse 12.12.)

12.18. Idet $c_o + \Sigma_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ er Fourier række for en funktion $f \in \mathscr{L}(\mathbb{T})$, sætter vi

$$\sigma_r(x) = c_o + \Sigma_{n=1}^{\infty} r^n (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

for $r \in [0,1[$.

1^o Gør rede for, at definitionen har mening.

2^o Vis, at $\sigma_r = f * P_r$ for hvert $r \in [0,1[$, idet

$$P_r(x) = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} r^n (e^{inx} + e^{-inx}).$$

(Vink. Benyt, at rækken konvergerer uniformt for fast $r \in [0,1[$.)

3^o Udnyt øvelse 11.3.2° til at opnå resultater om Fourier rækkens Abel middel σ_r, der er analoge til sætninger i noterne p. 189-190.

Øvelser til §13. *Ortogonaludviklinger.*

Skalarprodukt.

13.1. Lad $\mathcal{V}$ være et vektorrum med skalarprodukt.
Bevis *parallelogramreglen*

$$\forall x,y \in \mathcal{V}: \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2 .$$

(Summen af kvadraterne på diagonalerne i et parallelogram er lig summen af kvadraterne på de 4 sider.)

(Parallelogramreglen benyttes i øvelse 13.2 og 13.10.)

13.2. Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum og antag, at der findes to disjunkte mængder $A,B \in \mathbb{E}$ med $0 < \mu(A) < \infty$ og $0 < \mu(B) < \infty$.
Vis, at der ikke for noget $p \neq 2$, $1 \leqq p \leqq \infty$, findes et skalarprodukt i $\mathscr{L}_p(X,\mathbb{E},\mu)$ med $\| \ \|_p$ som tilsvarende seminorm.

(Vink. Benyt øvelse 13.1.)

13.3. Vis, at

$$4\langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

i et vektorrum over $\mathbb{R}$ med skalarprodukt, og at

$$4\langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2$$

i et vektorrum over $\mathbb{C}$ med skalarprodukt.

(Disse *polariseringsidentiteter* viser specielt, at skalarproduktet er bestemt ved den tilsvarende seminorm.)

– – – – – – –

Ortogonal projektion.

13.4. 1^o Bevis, at funktionerne $x \sim \sin nx$, $n = 1,2,\ldots$, er parvis ortogonale i $\mathscr{L}_2(]0,\pi])$.

2^o Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, således at

$$\int_0^\pi (\cos x - \Sigma_{n=1}^3 a_n \sin nx)^2 dx$$

får den mindst mulige værdi. Find også denne.

13.5. *Ortogonal projektion.*

Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt og lad $x \in \mathcal{V}$. En vektor $u \in \mathcal{U}$ siges da at være en *ortogonal projektion* af x på $\mathcal{U}$, hvis $x-u \perp \mathcal{U}$. (Se også øvelse 13.12.1^o. Vedr. eksistens, se øvelse 13.6, 13.10 (projektionssætningen) og 13.15.)

1^o Antag $u \in \mathcal{U}$ og $x-u \perp \mathcal{U}$. Vis

$$\forall v \in \mathcal{U}: \|x - u\| \leqq \|x - v\| ,$$

samt at der for $v \in \mathcal{U}$ gælder

$$\|x-u\| = \|x-v\| \Leftrightarrow \|u-v\| = 0 \Leftrightarrow x-v \perp \mathcal{U}.$$

(Specielt bemærkes, at en vektor i $\mathcal{V}$ har højst en ortogonal projektion på et underrum, hvori skalarproduktet er egentligt.)

2^o Antag $u \in \mathcal{U}$ og $\forall v \in \mathcal{U}: \|x-u\| \leqq \|x-v\|$. Vis

$$x - u \perp \mathcal{U}.$$

(Vink. Bemærk, at $\|x-u-\lambda e\|^2 + |\lambda|^2 = \|x-u\|^2$, når $\|e\| = 1$ og $\lambda = \langle e| x-u\rangle$.)

(Definition og 13.5.1^o benyttes ofte; 13.5.2^o benyttes i øvelse 13.10.)

13.6. I $\mathscr{L}_2(]-\pi,\pi])$ betragtes underrummene $\mathcal{V}$ og $\mathcal{U}$, hvor $\mathcal{V}$ består af alle funktioner $f \in \mathscr{L}_2(]-\pi,\pi])$, hvor

$$\forall x \in]-\pi,0]: f(x) = f(x+\pi),$$

medens $\mathcal{U}$ består af de funktioner $f \in \mathcal{V}$, der er kontinuerte på $]-\pi,\pi]$.

1° Idet h og g defineres på $]-\pi,\pi]$ ved

$$h(x) = x \qquad \text{for} \quad -\pi < x \leq \pi,$$

$$g(x+\pi) = g(x) = x + \frac{\pi}{2} \qquad \text{for} \quad -\pi < x \leq 0,$$

skal man vise, at g er en ortogonal projektion (se øvelse 13.5) af h på $\mathcal{V}$.

2° Bestem $\inf\{\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)-f(x)|^2dx \mid f \in \mathcal{U}\}$.

3° Vis, at h ikke har nogen ortogonal projektion på $\mathcal{U}$.

13.7. Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt og antag, at $x \in \mathcal{V}$ har en ortogonal projektion u på $\mathcal{U}$ med $\|u\| \neq 0$. (Se øvelse 13.5.)

Find $\qquad k = \sup\{|\langle e|x\rangle| \mid e \in \mathcal{U}, \|e\| = 1\}$

og bestem $\quad \{e \in \mathcal{U}, \|e\| = 1 \mid |\langle e|x\rangle| = k\}$.

13.8. Lad $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ være parvis ortogonale underrum af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt. For $i \neq j$ er altså $\mathcal{U}_i \perp \mathcal{U}_j$, dvs.

$$\forall v_i \in \mathcal{U}_i \ \forall v_j \in \mathcal{U}_j: v_i \perp v_j .$$

Antag endvidere, at vektoren $x \in \mathcal{V}$ har en ortogonal projektion u_j på $\mathcal{U}_j$, $j = 1,\ldots,n$. (Se øvelse 13.5.)

m7

1° Vis, at $\Sigma_{j=1}^n u_j$ er en ortogonal projektion af x på

$$\mathcal{U} = \operatorname{span} \cup_{j=1}^n \mathcal{U}_j = \{\Sigma_{j=1}^n v_j \mid v_j \in \mathcal{U}_j, j=1,\dots,n\}.$$

2° Vis, at

$$\|x-\Sigma_{j=1}^n u_j\| \leqq \|x-\Sigma_{j=1}^n v_j\|,$$

når $v_j \in \mathcal{U}_j$, $j = 1,\cdots,n$.

3° Vis, at

$$\|x-\Sigma_{j=1}^n u_j\|^2 + \Sigma_{j=1}^n \|u_j\|^2 = \|x\|^2.$$

(Jfr. p. 199 i noterne.)

13.9. Lad $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$ være en familie af parvis ortogonale underrum af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt, og lad vektoren $x \in \mathcal{V}$ have en ortogonal projektion u_j på $\mathcal{U}_j$ for hvert $j \in J$.

1° Angiv elementerne af $\mathcal{U} = \operatorname{span} \cup_{j\in J} \mathcal{U}_j$.

2° Antag her $x \in \overline{\mathcal{U}}$ og vis da, at "rækken" $\Sigma_{j\in J} u_j$ fremstiller x i følgende forstand: Til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subseteqq J$, således at

$$\|x-\Sigma_{j\in I^*} u_j\| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteqq I^* \subseteqq J$.

3° Vis, at

$$\Sigma_{j\in J} \|u_j\|^2 \leqq \|x\|^2,$$

og at

$$\Sigma_{j\in J} \|u_j\|^2 = \|x\|^2 \iff x \in \overline{\mathcal{U}}.$$

4° Antag her, at x har en ortogonal projektion u på $\overline{\mathcal{U}}$, og vis da, at "rækken" $\Sigma_{j\in J} u_j$ "fremstiller" u.

(Vink. Benyt øvelse 13.8. Jfr. p. 201,202 og bemærkningen p. 206 i noterne.)

13.10. Bevis *projektionssætningen:*

Hvis et underrum $\mathcal{U}$ *af et vektorrum* $\mathcal{V}$ *med skalarprodukt er* *fuldstændigt*, *så har ethvert* $x \in \mathcal{V}$ *en ortogonal projektion på* $\mathcal{U}$. (Se øvelse 13.5 og 13.15.)

(Vink. Lad $u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{U}$ være valgt således, at

$$\|u_n - x\| \to \inf\{\|v-x\| \mid v \in \mathcal{U}\} = d ,$$

og vis ved brug af parallelogramreglen (øvelse 13.1), at $u_1, u_2, \ldots$ er en Cauchy følge. Benyt endvidere øvelse 13.5.2°.)

(Projektionssætningen anvendes i øvelse 13.29.)

NB. Hvis $\mathcal{U}$ er et Hilbert rum, så har hvert $x \in \mathcal{V}$ netop én ortogonal projektion på $\mathcal{U}$. (Se øvelse 13.5.1°.) - Specialtilfælde: $\mathcal{U} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$, jfr. noter p. 199.

13.11. Idet A er en vilkårlig delmængde af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt, skal man vise, at

$$A^{\perp} = \{x \in \mathcal{V} \mid x \perp A\}$$

er et afsluttet underrum af $\mathcal{V}$.

13.12. Lad $\mathcal{U}$ være et underrum af et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt. Godtgør rigtigheden af følgende påstande:

1° At $x \in \mathcal{V}$ har en ortogonalprojektion u på $\mathcal{U}$, kommer ud på, at

x kan skrives $x = u + v$ med $u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{U}^\perp$.

(Jfr. definitionen i øvelse 13.5.)

2° Hvis u er en ortogonal projektion af $x \in \mathcal{V}$ på $\mathcal{U}$, så er $x - u$ en ortogonal projektion af x på $\mathcal{U}^\perp$.

13.13. Antag $g \in \mathscr{C}([-1,1])$. Vis, at der i

$$\{f \in \mathscr{C}([-1,1]) \mid \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$$

findes netop én funktion f, hvor $\|g-f\|_2$ er mindst, og angiv f.

(Vink. Se øvelse 13.5 og 13.12.)

13.14. I rummet $\mathscr{L}_2(\mathbb{T})$ af funktioner på $\mathbb{R}$ med periode 2π skal man bestemme $\mathcal{U}^\perp$, hvor $\mathcal{U}$ er underrummet af funktioner med periode π.

(Vink:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(x+\pi)}{2} + \frac{f(x)-f(x+\pi)}{2} .)$$

13.15. *Et afsluttet underrum, man ikke kan projicere på.* (Jfr. øvelse 13.10.)

I rummet $\mathscr{C}([-1,1])$ af kontinuerte reelle funktioner på $[-1,1]$ benyttes det sædvanlige skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1° Vis, at $\mathcal{U} = \{f \in \mathscr{C}([-1,1]) \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ er et afsluttet underrum.

2° Vis, at $\mathcal{U}^\perp$ består af nulfunktionen alene.

(Dermed: Ingen funktion uden for $\mathcal{U}$ har en ortogonal projektion på $\mathcal{U}$.)

– – – – – –

13.16. Antag $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l(\mathbb{Z})$, dvs. $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| < \infty$, og sæt

$$f(x) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

for hvert $x \in \mathbb{R}$. (Se §4.6 i noterne.)

1° Vis, at der til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en endelig mængde $H^* \subset \mathbb{Z}$, således at

$$\forall x \in \mathbb{R}: |f(x) - \Sigma_{n\in I^*} c_n e^{inx}| < \varepsilon$$

for enhver endelig mængde I^*, hvor $H^* \subseteqq I^* \subset \mathbb{Z}$.

2° Vis, at $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$, og at $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ er familien af Fourier koefficienter for f.

3° Sammenhold med øvelse 12.1.1°.

13.17. Lad $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{T})$ og $g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{T})$ have Fourier koefficienterne c_n, $n \in \mathbb{Z}$, og d_n, $n \in \mathbb{Z}$.

1° Gør rede for, at $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}} |c_n d_n| < \infty$.

2° Bevis, at

$$f*g(x) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} c_n d_n e^{inx}$$

for hvert $x \in \mathbb{R}$.

(Vink. Se øvelse 12.15. og 13.16.)

– – – – – –

MF

13.18. 1° Vis, at
$$\frac{\pi^2}{3} + 4\,\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2$$
for hvert $x \in [-\pi, \pi]$.

2° Vis, at $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - .. + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$

og $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + .. + \frac{1}{n^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$.

13.19. Vis, at $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .. + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$,

og at $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\log(2 \sin \frac{x}{2}))^2 dx = \frac{\pi^2}{12}$.

(Se øvelse 12.6 og 12.8.)

13.20. Lad $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ være en Borel funktion med periode 2π og lad E betegne mængden af punkter i $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$, hvis polære koordinater $r > 0$ og v opfylder betingelsen $r \leq |f(v)|$.

1° Gør rede for, at E er en Borel mængde.

2° Vis, at
$$m(E) < \infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T}) ,$$
og udtryk i bekræftende fald $m(E)$ ved Fourier koefficienterne til f.

Ortogonaludviklinger.

13.21. For vilkårligt $g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ sættes
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx , \quad n \in \mathbb{N}.$$
Gør rede for, at rækken $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ er konvergent i kvadratisk middel i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ med sum f, hvor
$$f(x) = \tfrac{1}{2}(g(x)-g(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.22. Gør rede for, at rækkerne

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2nx \text{ og } \Sigma_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin(2n-1)x$$

begge er konvergente i kvadratisk middel i $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, og bestem summer af dem, når

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}, \quad n=1,2,\dots .$$

(Samme vink som til øvelse 13.14.)

13.23. *En divergent ortogonaludvikling.*

Giv et eksempel på et vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt, en ortonormal følge $e_1, e_2, \dots$ i $\mathcal{V}$ og et $g \in \mathcal{V}$, hvor ortogonaludviklingen $\Sigma_{n=1}^{\infty} \langle e_n | g \rangle e_n$ ikke er konvergent i $\mathcal{V}$.

(Vink. Se øvelse 13.22.)

– – – – – –

Ortonormale baser.

13.24. 1° Med J betegnes en vilkårlig, ikke tom mængde. Vis, at familien $(1_{\{j\}})_{j \in J}$ er en ortonormal basis for $l_2(J)$, og bestem ortogonaludviklingen for vilkårligt $f = (\lambda_j)_{j\in J}$ i $l_2(J)$.

2° Hvorledes tager dette sig ud for $l_2 = l_2(\mathbb{N})$?

13.25. Giv et eksempel på et Hilbert rum, der ikke er separabelt.

(Vink. Se øvelse 9.4.)

13.26. Vis, at familien $(e^{2inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ og ligeledes hver af følgerne

$$1, \sqrt{2}\cos x, \ldots, \sqrt{2}\cos nx, \ldots$$

og

$$\sqrt{2}\sin x, \ldots, \sqrt{2}\sin nx, \ldots$$

er en ortonormal basis i $\mathcal{L}_2(]0,\pi], \frac{1}{\pi}m)$.

13.27. Vis, at funktionerne $(x,y) \curvearrowright e^{2\pi i(mx+ny)}$, hvor (m,n) gennemløber $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, udgør en ortonormal basis for $\mathcal{L}_2(]0,1]\times]0,1])$.

13.28. 1° Lad $(e_j)_{j\in J}$ og $(f_k)_{k\in K}$ være ortonormale familier i henholdsvis $\mathcal{L}_2(X,\mu)$ og $\mathcal{L}_2(Y,\nu)$, hvor $\mu: \mathcal{X} \curvearrowright [0,\infty]$ og $\nu: \mathcal{Y} \curvearrowright [0,\infty]$ er σ-endelige mål i henholdsvis $X \neq \emptyset$ og $Y \neq \emptyset$.

Vis, at

$$(e_j \otimes f_k)_{(j,k)\in J\times K}$$

er en ortonormal familie i $\mathcal{L}_2(X\times Y, \mu\times\nu)$.

*2° Som 1°, men læs overalt ortonormal basis i stedet for ortonormal familie.

13.29. Lad $(e_j)_{j\in J}$ være en ortonormal basis i et fuldstændigt vektorrum $\mathcal{V}$ med skalarprodukt, og lad $(f_j)_{j\in J}$ være en familie af elementer i $\mathcal{V}$. Vis, at hvis

$$\Sigma_{j\in J}\|e_j - f_j\|^2 < 1,$$

så er $\{f_j \mid j \in J\}$ total i $\mathcal{V}$.

(Vink. Antag, at $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\text{span}}\{f_j \mid j \in J\} \subset \mathcal{V}$. Der findes da (se øvelse 13.10) et $g \perp \mathcal{U}$ med $\|g\| > 0$.)

– – – – – – –

m7

13.30. Antag $\Sigma_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$ og sæt $F(z) = \Sigma_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ for ethvert $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

Vis, at der findes en funktion $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{T})$, således at

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-F(re^{ix})|^2 dx \underset{r\to 1_-}{\to} 0 .$$

– – – – – –

13.31. Idet $g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{T})$, skal man udtrykke $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xg(x)dx$ ved Fourier koefficienter til g.

13.32. 1° Idet $\mathcal{U}$ og $\mathcal{V}$ er vektorrum med skalarprodukt, skal man vise, at en seminorm-bevarende lineær afbildning af $\mathcal{U}$ ind i $\mathcal{V}$ også vil bevare skalarprodukt.

(Vink. Se øvelse 13.3.)

2° Idet $(e_j)_{j\in J}$ er en ortonormal basis i et vektorrum $\mathcal{U}$ med skalarprodukt, skal man ud fra Parsevals ligning vise Parsevals generaliserede ligning

$$\langle f|g\rangle = \Sigma_{j\in J}\overline{\langle e_j|f\rangle}\langle e_j|g\rangle \quad \text{for} \quad f,g \in \mathcal{U}.$$

– – – – – –

13.33. 1° Vis, at $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ er et polynomium af n^{te} grad, som i $\mathscr{L}_2([-1,1])$ er ortogonal på ethvert polynomium af højst $(n-1)^{te}$ grad.

2° Vis, at

$$1, \frac{d}{dx}(x^2-1), \frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \ldots$$

er en ortogonal basis i $\mathscr{L}_2([-1,1])$.

(Benyt Weierstrass' approksimationssætning, øvelse 12.16.)

3° Vis, at

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)^2dx = (2n)!\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$$
$$= (2n)!\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\,dt = \left(\frac{2^n n!}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

(Polynomierne $\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ kaldes *Legendre polynomier.*)

13.34. Lad $g: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ være voksende og kontinuert fra højre og antag, at funktionerne

$$x \rightsquigarrow 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

alle er integrable m.h.t. Radon målet μ svarende til g.

1° Vis, at funktionerne repræsenterer en lineært uafhængig følge i $L_2(\mathbb{R},g) = L_2(\mathbb{R},\mu)$, medmindre g er en trappefunktion (dvs. medmindre μ er koncentreret i et endeligt antal punkter).

(Vink. Antag, at der findes et egentligt polynomium p med $\|p\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}}|p|^2dg = 0$.)

2° Det forudsættes, at g ikke er en trappefunktion. Vis, at der findes **en og kun en** følge $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ af polynomier, som er ortonormal i $\mathscr{L}_2(\mathbb{R},g)$, og hvor p_n er af n^{te} grad med positiv ledende koefficient.

13.35. Lad $g: \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ være voksende og kontinuert fra højre og antag, at restriktionen til $[a,b]$ ikke er en trappefunktion.

Vis, at $\mathscr{L}_2([a,b],g)$ har en og kun en ortonormal basis $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, hvor p_n er et polynomium af n^{te} grad med positiv ledende koefficient.

(Vink. Benyt øvelse 13.34 og 12.16.)