Abstrakt harmonisk analyse.

Forelæsninger af T. Gutmann Madsen

1969 - 70

IV. Fourier transformation.

§1. Karaktergruppen.

§2. Fourier transformation.

V. Bevis for den harmoniske analyses hovedsætninger.

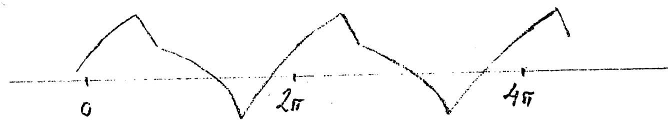
§1. Ess. begrænsede, lokalt integrable fktner.

§2. Bevis for Bochners sætning.

Litteratur s. 77 og 175

Indledning.

Harmonisk analyse vedr. oprindelig period. fkt.r $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
for simpelheds skyld tænke på fkt.r med periode 2π.



Fkt. af form $t \to \rho\cos(t-\varphi)$ omtales som „grundsvingning", „grundtone"
- - - - - - $t \to \rho\cos(nt-\varphi)$ - - - - - - „oversvingning", „overtone"

og harmonisk analyse af given periodisk fkt. f består i at søge f.s „fremstillet":

$$f(t) = \text{const.} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nt-\varphi_n)$$

som „superposition" af grundsvingn. og oversvingninger.

Ofte bekvemt at skrive „oversvingn." $\rho_n\cos(nt-\varphi_n)$ på form $a_n\cos nt + b_n \sin nt$

hvor $\begin{aligned}\rho_n\cos\varphi_n &= a_n \\ \rho_n \sin\varphi_n &= b_n\end{aligned}$ (mærk: for givet (a_n,b_n) findes (ρ_n,φ_n), som opf. lign.)

herved a_n, b_n entyd. bestemt, $n=1,2,\dots$

Der søges da „fremstilling" $f(t) = \text{const.} + \sum_1^\infty (a_n\cos nt + b_n \sin nt)$ (1)

Som bekendt er Fourier rækken for f løsning, – når „fremstilling" tillægges passende betydning afh. af, hvilken fkt.sklasse, der tages i betragtning.
I stedet for harmonisk analyse tales derfor også om Fourier analyse

Oversvingn. $a_n\cos nt + b_n \sin nt$ kan også skrives $c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}$

med $\begin{aligned}a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n})\end{aligned}$, dvs. $\begin{aligned}c_n &= \tfrac12(a_n - ib_n) \\ c_{-n} &= \tfrac12(a_n+ib_n)\end{aligned}$, hvor $n\in\mathbb{N}$

De komplekse koeffic. c_n og c_{-n} er altså konjug. for en reel svingning.

Det har vist sig fordelagtigt at studeren kompl. period. fkt.r $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ og samtidig tillade kompl. a_n og b_n i (1), – skønt man her umiddelbart kunne dele i reelt og imaginært. Fordelen ligger i, at man nu kan søge fremstillingen på formen $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

uden bånd på de komplekse koeffic. c_n

Også ud over de periodiske fkt.ners område har man søgt fremstillinger ved „superposition" af rene svingninger. Idet vi straks formulerer for kompl. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, menes fremstillinger

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iut} du.$$

Denne teori for Fourier integraler hører også under den harmoniske analyse.

For begge den klassiske harmoniske analyses område gælder, at man studerer fkt.ner defineret på komm. grupper, nemlig henh. $(\mathbb{R} (\mathrm{mod}\, 2\pi), +)$ og $(\mathbb{R}, +)$. For periodiske fkt.ner er der nemlig ingen grund til at skelne mellem argumenter, der afviger med hele multipla af 2π, dvs. de kan opfattes som defineret på $\mathbb{R} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, eller om man vil på en cirkelperiferi. Vi vil omtale $(\mathbb{R} (\mathrm{mod}\, 2\pi), +)$ som cirkelgruppen.

Omkring 1940 viste det sig, at de væsentligste resultater i den harmoniske analyse kunne overføres fra $\mathbb{R} (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ og $\mathbb{R}$ til en vilk. kommutativ lokalt kompakt topologisk gruppe, endda kunne André Weil i sin banebrydende bog [ ] sige: (s. 111) „Les groupes abéliens, localement compacts, forment le domaine naturel de l'analyse harmonique"

Herom i det følgende.

I. Integration i lokalt kompakte rum.

§1. Kontinuerte funktioner på kompakte og lokalt kompakte rum.

Topologisk rum.

En topologi i en mgd. X kan bestemmes ved at foreskrive de åbne mgd.r under forudsætningerne:

en foreningsmgd. af åbne mgd.r er altid åben
en fællesmgd. af endelig mange åbne mgd.r er altid åben
$\emptyset$ og X er åbne

Topologien kan også bestemmes ved at foreskrive relationen
U er en omegn af a for $U \subseteq X$, $a \in X$

under forudsætningerne

X er omegn af ethv. a
U er omegn af a og $V \supseteq U \Rightarrow V$ er omegn af a
U er omegn af $a \Rightarrow a \in U$
U og V er omegne af $a \Rightarrow U \cap V$ er omegn af a
U er omegn af $a \Rightarrow$ omegn V af a findes, så U omegn af ethv. $b \in V$

I stedet for U er en omegn af a siges også a er indre pkt. i U.

Samspillet mellem de to begreber åben mgd. og omegn kan udtrykkes

U er en omegn af $a \iff$ åben mgd. A findes, så $a \in A \subseteq U$
A er åben $\iff$ ethv. $a \in A$ er indre pkt. i A

Det forudsættes bekendt, hvorledes begreber som afsluttet mgd., afslutning af m.t. kontaktpkt.r for mgd. osv. kan indføres, når en topologi er givet, ligeså kontinuitet af en afbildn. af mgd. med topologi ind i mgd. med topologi.

Vi vil i det følgende stedse forudsætte, at
$a, b \in X$, $a \neq b \Rightarrow$ omegne U og V af a og b findes med $U \cap V = \emptyset$,

altså tale om topologisk rum i betydningen Hausdorff rum.

Topol. rum er altså en mgd. X med en (Hausdorff) topologi T. Vi vil betegne det (X,T) eller, mindre korrekt, blot med X lige som mgd. selv. NB: At Y er en delmgd. af et topol. rum X betyder blot $Y \subseteq X$; at Y er delrum af X betyder, at Y tillige er udstyret med spordtopologien, hvor

for $B \subseteq Y$ gælder:

B er åben i Y $\Leftrightarrow$ der findes åben mgd. A i X, så $B = A \cap Y$

eller, udtrykt ved omegne,

for $b \in Y$, $V \subseteq Y$ gælder:

V er omegn af b i Y $\Leftrightarrow$ der findes omegn U af b i X, så $B = U \cap Y$.

Kompakte mgd.r.

En delmgd. A af et topolog. rum X kaldes kompakt, hvis for enhver overdækning af A med åbne mgd.r allerede endelig mange af mgd.rne overdækker A.

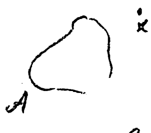
Begrebet er dukket op, derved at man blev klar over, at nævnte egenskab er karakteristisk for de afsluttede, begr. mgd.r, når det topologiske rum er $\mathbb{R}^n$ med sædv. topologi (Borels overdækningssætning).

Foreningen af to kompakte mgd.r er kompakt.

En afsluttet delmgd. af en kompakt mgd. er kompakt

Billedet af en kompakt mgd. ved en kontin. afbildn. er kompakt

Er A en kompakt mgd. i et topologisk rum X og $x \notin A$, da findes åbne mgd.r $U \supseteq A$ og $V \ni x$ med $U \cap V = \emptyset$.



(Hertil benyttes, at Hausdorffs betingelse er opfyldt)

Corollar: En kompakt mgd. A er afsluttet i X

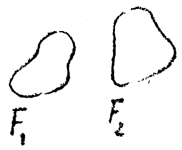
Thi $\complement A$ er åben

Ved en kontin. afbildn. $f: X \to Y$, hvor X er kompakt, afbildes afsluttet mgd. i afsluttet mgd.

Corollar: Er $f: X \to Y$ kontin. og bijektiv samt X kompakt, da er også f^{-1} kontinuert (altså f homeomorf)

Er A_1 og A_2 kompakte mgd.r i et topol. rum X med $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, da findes åbne mgd.r $U_1 \supseteq A_1$ og $U_2 \supseteq A_2$ med $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Et topologisk rum kaldes <u>normalt</u>, hvis til vilk. afsluttede mgdr F_1 og F_2 med $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ findes åbne mgdr $\mathcal{U}_1 \supseteq F_1$ og $\mathcal{U}_2 \supseteq F_2$ med $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.



<u>Et kompakt rum er normalt</u>

Kontin. reelle og kompl. fktner defin. på et topologisk rum spiller en afgørende rolle i det følgende. Vi har brug for eksistenssætninger.

<u>Urysohns lemma</u>.

<u>Er</u> $F \subseteq \mathcal{U}$, F <u>afsluttet og</u> $\mathcal{U}$ <u>åben i et normalt rum</u> X, <u>da findes en kontin. fkt.</u> $f: X \to [0,1]$, <u>så</u>

$$\forall x \in F: \ f(x) = 1 \quad \underline{\text{og}} \quad \forall x \in \complement\mathcal{U}: \ f(x) = 0$$

I kraft af denne sætn. kan man undertiden „approximere" den karakteristiske fkt. for en afsluttet mgd. med kontin. fktr.

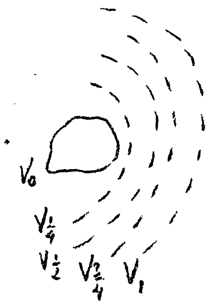
Bevis. Hellere søge f, så $\forall x \in F: f(x) = 0$ og $\forall x \in \complement\mathcal{U}: f(x) = 1$

Vi sætter $V_0 = F$, $V_1 = \mathcal{U}$.

Iflg. forudsætn. findes åben mgd. $V_{\frac{1}{2}}$, så $\overline{V_0} = F \subseteq V_{\frac{1}{2}}$, $\overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathcal{U} = V_1$

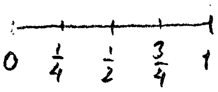
Videre findes åbne mgdr $V_{\frac{1}{4}}$ og $V_{\frac{3}{4}}$, så $\overline{V_0} \subseteq V_{\frac{1}{4}}, \overline{V_{\frac{1}{4}}} \subseteq V_{\frac{1}{2}}$ og $\overline{V_{\frac{1}{2}}} \subseteq V_{\frac{3}{4}}, \overline{V_{\frac{3}{4}}} \subseteq V_1$

I n^{te} trin tænkes tilsv. valgt åbne mgdr $V_{\frac{1}{2^n}}, V_{\frac{3}{2^n}}, \dots V_{\frac{2^n-1}{2^n}}$



Successivt bliver herved til hver „dualbrøk" $r \in [0,1]$ valgt en mgd. V_r, åben for $r > 0$, så

$$\overline{V_r} \subseteq V_s \quad \text{for } r < s$$



Herudfra defineres $f: X \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in V_r\} & \text{for } x \in V_1 = \mathcal{U} \\ 1 & \text{for } x \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

Der er kun kontinuiteten at eftervise.

Først bemærke:

(1) $f(x) < r \Rightarrow x \in V_r$ dvs. (1') $x \notin V_r \Rightarrow f(x) \geq r$

(2) $x \in \overline{V_r} \Rightarrow f(x) \leq r$ dvs. (2') $f(x) > r \Rightarrow x \notin \overline{V_r}$

Ad (2): Klart, at $x \in V_s \Rightarrow f(x) \leq s$. Vi kan antage $r < 1$, derpå udnytte, at $x \in \overline{V_r}$ medf. $x \in V_s$ for enhv. dualbrøk s, $r < s < 1$.

For $0<b\leqq 1$ gælder nu $\quad f(x)<b \iff \exists r<b: x\in V_r$, dvs. $f^{-1}([0,b[)=\bigcup_{r<b} V_r$

„$\Rightarrow$" fås af (1), „$\Leftarrow$" er klart

For $0\leqq a<1$ gælder $\quad f(x)>a \iff \exists r>a: x\notin \overline{V}_r$, dvs. $f^{-1}(]a,1])=\bigcup_{r>a} \complement\overline{V}_r$

Thi er $f(x)>a$, findes dualbrøk r, hvor $f(x)>r>a$
og dermed iflg. (2) $x\notin\overline{V}_r$

medens $x\notin\overline{V}_r$ for et $r>a$ medf. $x\notin V_r$, dermed $f(x)\geqq r>a$ iflg. (1')

Det fremgår, at $f^{-1}([0,b[)$ og $f^{-1}(]a,1])$ er åben i X. Det samme gælder da enhver originalmgd. $f^{-1}(]a,b[)$, som fællesmgd. af to åbne, og ligeledes enhver originalmgd. $f^{-1}(A)$, A åben i $[0,1]$, som forening af åbne.

NB. Det er gentagne gange benyttet, at dualbrøkerne ligger tæt i $[0,1]$.

Stone / Weierstrass' approximationssætn.

Weierstrass' approximationssætn. (1885) siger, at til hver kontin. fkt. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ og hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes et reelt polyn. p, så

$$\forall x \in [a,b]: \ |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Denne sætn. har M.H. Stone generaliseret (1948).

Ved beviset for Stones resultat får vi brug for Weierstrass' for det spec. tilfælde, at f er fkt.nen $t \to |t|$, $t \in [-c,c]$. Her kan vi åbenbart yderligere holde os til polynomier p med $p(0) = 0$, dvs. uden konst. led. (Dette speciel-le tilfælde af Weierstrass' appr. sætn. kan iøvrigt vises direkte på forsk. måde, se f.ex. Loomis s. 9, beviset for 4 D, eller Neumark s. 46)

En mgd. $\mathcal{A}$ af fkt.r $f: X \to \mathbb{R}$ def. på samme mgd. X kaldes som bekendt et lin. fktsrum eller vektorrum af fkt.r, hvis

$$f+g \in \mathcal{A} \text{ når } f,g \in \mathcal{A}, \qquad cf \in \mathcal{A} \text{ når } c \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{A}.$$

Gælder tillige

$$fg \in \mathcal{A} \text{ når } f,g \in \mathcal{A},$$

kaldes $\mathcal{A}$ en algebra af fkt.r.

Gælder $\quad f \vee g \in \mathcal{A}$ og $f \wedge g \in \mathcal{A}$, når $f,g \in \mathcal{A}$,

kaldes $\mathcal{A}$ et fktsgitter. Her er $f \vee g$ fkt.nen $x \to \max(f(x), g(x))$, $x \in X$.

Et lin. fkt.srum $\mathcal{A}$ er tillige et fktsgitter da og kun da, hvis

$$|f| \in \mathcal{A} \quad \text{når } f \in \mathcal{A}$$

Det kaldes da et lineært fktsgitter. Påstanden følger af

$$|f| = f \vee (-f) \qquad \begin{aligned} f \vee g &= \tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|) \\ f \wedge g &= \tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|) \end{aligned}$$

Lin. fkt.srum og algebra, men naturligvis ikke fktsgitter, har også mening med $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$. Skelne ved at sige „over $\mathbb{R}$", henh. „over $\mathbb{C}$".

Mgd. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ af begr. (reelle ell. kompl.) fkt.r med mgd.en X som def. mgd. er en algebra, i det reelle tilfælde tillige et gitter. Er X et topologisk rum, gælder det samme for mgd. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$ af kontin. fkt.r def. på X. Er X spec. kompakt, er $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$.

Ved

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

definures en norm på $\mathcal{B}$, kaldet den uniforme ell. ligelige norm, idet det tilsv. konvergsbegreb er uniform konvergens. [Den tilsv. metrik er fuldstændig.] [ ]

Er X et kompakt rum, da er $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$ en afsluttet del af $\mathcal{B}(X)$, idet et „kontaktpkt." for $\mathcal{C}$, dvs. en fkt., der kan approximeres uniformt med vilk. nöjagtighed med kontin. fktr, selv er en kontin. fkt. [Også på $\mathcal{C}$ er metrikken da fuldst.] [ ]

Stone / Weierstrass' sætning

Lad $\mathcal{A}$ være en algebra af kontinuerte fktr $f: X \to \mathbb{R}$ def. på et kompakt rum X, hvor $\mathcal{A}$ „skiller pktrne", dvs.

for ethv. $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ findes fkt. $f \in \mathcal{A}$ med $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Findes nu et pkt. $x \in X$, så $\forall f \in \mathcal{A}: f(x) = 0$ (to sådanne pktr er umuligt), da er afslutningen af $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}(X)$ med uniforme norm

$$\bar{\mathcal{A}} = \{ f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0 \},$$

ellers er $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X)$, altså $\mathcal{A}$ tæt i $\mathcal{C}(X)$ ved uniforme norm.

Weierstrass' sætn. er indeholdt heri for $\mathcal{A}$ = mgd. af reelle polyn., betragtet på $[a,b]$. 7.69

Bevis.

I Vi betragter først tilfældet $\forall x \in X\ \exists f \in \mathcal{A}: f(x) \neq 0$.

a. Til vilk. $x, y \in X$, $x \neq y$, og vilk. $a, b \in \mathbb{R}$ findes $f \in \mathcal{A}$ med $f(x) = a$, $f(y) = b$.

Det er nok at betragte $(a,b) = (1,0)$, thi derpå bytte om og udnytte $\mathcal{A}$ lineært.

Nu: Først søge $g \in \mathcal{A}$ med både $g(x) \neq 0$, $g(x) \neq g(y)$

Der findes g_1 med $g_1(x) \neq 0$ og g_2 med $g_2(x) \neq g_2(y)$;
er ingen af dem brugbare, så er $g_1 + g_2$ det!

Derpå: hvis $g(y) \neq 0$ erstatte g med $\frac{g}{g(y)} - \left(\frac{g}{g(y)}\right)^2$,
herved fkt. $h \in \mathcal{A}$ med $h(x) \neq 0$, $h(y) = 0$, sætte $f = \frac{h}{h(x)}$.

b. $\bar{\mathcal{A}}$ er en algebra af fkt.r.
At vise f.eks. $fg \in \bar{\mathcal{A}}$ når $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$ (det vanskeligste af kravene) kan gøres ved
af $\|f - f_n\| \to 0$, $\|g - g_n\| \to 0$ at slutte $\|fg - f_n g_n\| \to 0$
idet så f_n, g_n vælges tilh. $\mathcal{A}$.

c. $\bar{\mathcal{A}}$ er tillige et funktionsgitter.
Iflg. s.7 nok at vise $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$ for $f \in \bar{\mathcal{A}}$.

Da $\bar{\mathcal{A}}$ afsluttet: nok for vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ at finde $g \in \bar{\mathcal{A}}$ med $\||f| - g\| \leqq \varepsilon$
Vælge $c \in \mathbb{R}_+$ så $\forall x \in X: |f(x)| \leqq c$.
Idet $t \to |t|$, $t \in [-c, c]$, approksimeres med reelt polyn. p uden konst. led (se s.7),
$$\forall t \in [-c, c]: \ ||t| - p(t)| \leqq \varepsilon$$
har vi da
$$\forall x \in X: \ ||f(x)| - p(f(x))| \leqq \varepsilon$$
dvs.
$$\||f| - p \circ f\| \leqq \varepsilon,$$
hvor $p \circ f = a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_n f^n \in \bar{\mathcal{A}}$, da $\bar{\mathcal{A}}$ er en algebra.

d. På $\bar{\mathcal{A}}$ anvendes
Lemma: For et gitter $\mathcal{G}$ af fkt.r $f \in \mathcal{C}(X)$, X kompakt, der har den i a. nævnte egenskab, er $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{C}(X)$.

Lad $f \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
For hvert $x, y \in X$, $x \neq y$, tænkes valgt fkt. $g_{xy} \in \mathcal{G}$ med
$$g_{xy}(x) = f(x), \quad g_{xy}(y) = f(y).$$

Da er $\mathcal{U}_{xy} = \{z \in X \mid g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon\}$ åben omegn af x (og y)
$V_{xy} = \{z \in X \mid f(z) - \varepsilon < g_{xy}(z)\}$ åben omegn af y (og x)
For fast x kan tænkes valgt end. mange $y_1, y_2, \cdots y_n$, så $\bigcup_j V_{xy_j} = X$.
Vi sætter $g_x = g_{xy_1} \vee \cdots \vee g_{xy_n}$ og $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_{xy_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{xy_n}$, hvorved
$$g_x \in \mathcal{G}, \quad \forall z \in X: f(z) - \varepsilon < g_x(z), \quad \forall z \in \mathcal{U}_x: g_x(z) < f(z) + \varepsilon.$$
Nu tænkes end. mange $x_1, x_2, \ldots, x_m$ valgt, så $\bigcup_i \mathcal{U}_{x_i} = X$,
og vi sætter $g = g_{x_1} \wedge \cdots \wedge g_{x_m}$, hvorved
$$g \in \mathcal{G}, \quad \forall z \in X: f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon.$$

II Tilfældet, hvor $\forall f \in \mathcal{A}: f(a) = 0$ for et vist $a \in X$.

Opg. er for vilk. $g \in \mathcal{C}(X)$ med $g(a) = 0$ og vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ at finde $f \in \mathcal{A}$, så $\|g - f\| < \varepsilon$.

Vi udnytter I:

$\mathcal{A}' = \{f + c \mid f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}\}$ er en algebra, som skiller pkt.rne i X og falder under I.

Altså findes $f + c$ med $\|g - (f+c)\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ved at betragte værdier i a ses $|c| < \frac{\varepsilon}{2}$, følgelig $\|g - f\| < \varepsilon$.

Stone/Weierstrass' sætning gælder også for en algebra $\mathcal{A}$ af kont. fkt.r $f: X \to \mathbb{C}$, som med f indeholder $\bar{f}$.

Thi $f = f' + if'' \in \mathcal{A}$, f', f'' reelle, medf. $f' = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$, $f'' = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in \mathcal{A}$.

Med $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ = mgd. af reelle $f \in \mathcal{A}$ har vi da $\mathcal{A} = \{f' + if'' \mid f', f'' \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\}$. Den reelle algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ skiller derfor pkt.r, og vi behøver blot på $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ at anvende sætn. s. 8.

Lokalt kompakt rum.

Et topol. rum X siges at være lokalt kompakt, hvis hvert $x \in X$ har en kompakt omegn.

Et kompakt rum er tillige lokalt kompakt. Det omv. gælder ikke i
1.9.69 alm., eks. $\mathbb{R}^n$; imidlertid kan man da ofte udnytte den såkaldte

Ét pkts kompaktificering

Lad X være et lokalt kompakt, men ikke kompakt rum (f. ex. tænke på planen med sædv. topologi).

Vi vælger et vilk. objekt, som ikke tilh. X; lad os kalde det ∞. Vi sætter $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ og gør X_∞ til et topologisk rum, nemlig med

dels de åbne mgd.r i X

dels mgd.rne af form $(X \setminus K) \cup \{\infty\} = X_\infty \setminus K$, K kompakt i X,

som åbne mgd.r. Bemærk: en åben mgd. i X_∞ af første type indeh. ikke ∞, men en af anden type gør.

Ligetil at verificere, at kravene til åbne mgd.r opfyldt (s. 3); man må dele i tilfælde. Bemærk videre

$$U \text{ omegn af } \infty \iff \text{kompl.mgd. til } U \text{ indeh. i kompakt mgd } K \subseteq X,$$

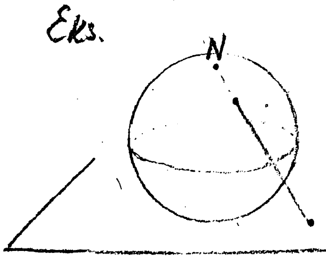
Idet vilk. $x \in X$ har kompakt omegn K i X, ses, at også x og ∞ kan skilles med disj. omegne, nemlig K og $X_\infty \setminus K$, således at X_∞ er et Hausdorff rum.

Ligetil at verificere, at X_∞ er kompakt: for vilk. overdækning med åbne mgd.r tage én ud, som indeholder ∞; de øvrige og dermed allerede endelig mange af dem overdækker den kompakte kompl.mgd.

Klart, at X delrum af X_∞.

$X_\infty = X \cup \{\infty\}$ med den angivne topologi kaldes ét pkts kompaktificeringen af X (skyldes Alexandroff), og $\{\infty\}$ kaldes det uend. fjerne pkt.

Eks.



Ved stereografisk projektion fra „nordpolen" N på tangentplanen i „sydpolen" fås, idet vi til N lader svarer $\{\infty\}$, en homeomorf afbildn. af kuglefladen på $\mathbb{R}^2 \cup \infty$.

Tilsv. er $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ homeomorf m. cirkellinie
$\mathbb{R}^n_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ homeomorf m. n-dim. kugleflade.

(I spec tilfælde kan andre kompaktificeringer byde sig til, således kan man udvide $\mathbb{R}$ med to pkt.r $-\infty$ og $+\infty$, så $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ homeomorf med interval $[0,b]$, f. eks. med tg som afbildning.)

For hvert pkt. x i et lokalt kompakt rum X udgør de kompakte omegne af x en basis for alle omegne af x, dvs. hver omegn af x indeholder en kompakt omegn af x.

Sætningen er indeholdt i mere almen. Først for delmgdr $\mathcal{U}$ og A af top. rum definere

$\mathcal{U}$ omegn af $A \underset{\text{def}}{\iff} A \subseteq$ åben mgd. $\subseteq \mathcal{U} \iff A \subseteq \mathring{\mathcal{U}} \iff$ hvert pkt. af A er indre pkt. af $\mathcal{U}$ dvs. $\mathcal{U}$ er omegn af hv. pkt. af A

En omegn $\mathcal{U}$ af en kompakt mgd. K i et lokalt kompakt rum X indeholder altid en kompakt omegn af K.

Bevis. Vi kan antage $\mathcal{U}$ åben.
Er X kompakt, så også normalt, og der findes altså åben mgd. V med $K \subseteq V$, $\overline{V} \subseteq \mathcal{U}$. (s. 5). Her er $\overline{V}$ som ønsket.
Er X ikke kompakt, ræsonnerer vi blot i ét pkts kompaktificering.

To klasser af kontin. fktr på et lokalt kompakt rum.

Vi kan udnytte Urysohns lemma (s. 5):

Er $\mathcal{U}$ en omegn af en komp. mgd. K i et lokalt kompakt rum X, da findes en kontin. fkt. $f: X \to [0,1]$, så
$$\forall x \in K: f(x) = 1 \quad \text{og} \quad \forall x \in \complement\mathcal{U}: f(x) = 0.$$

Er X kompakt og dermed normal, kan vi direkte anvende Urysohns lemma, idet $\mathcal{U}$ kan antages åben.
Er X ikke kompakt, anvender vi resultatet på X_∞ og finder endda en kontin. fkt. $f: X_\infty \to [0,1]$.

NB. Den kontin. fkt. $f: X \to [0,1]$ i sætningen kan findes, så støtten, dvs. afslutningen af $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, er kompakt.
Hertil behøver vi blot i kraft af foregående sætn. at erstatte $\mathcal{U}$ med en kompakt omegn V af K, $V \subseteq \mathcal{U}$.

Mgd. af kontin. fkt.r $f: X \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte, def. på et lokalt kompakt topol. rum X vil vi betegne $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$. Er X spec. kompakt, omfatter $\mathcal{K}$ naturligvis alle kontin. fkt.r, $\mathcal{K} = \mathcal{C}$.

Vi skal omtale endnu en klasse af fkt.r. på et lokalt kompakt rum X, der ligeledes kun har selvst. interesse, når X ej kompakt. Lad os da først forudsætte det.

En fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ kan vi opfatte som defin. på $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ med ∞ udprikket. At

$$f(x) \to a \quad \text{for } x \to \infty$$

har da mening, nemlig at f, når vi udvider ved at sætte $f(\infty) = a$, bliver kontin. i ∞, dvs.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon\}) \text{ er omegn af } \infty,$$

altså

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \text{ kompakt mgd. } K \subseteq X \ \forall x \in X \setminus K : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Med $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(X)$ $= \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ betegner vi mgd. af kontin. fkt.r $f: X \to \mathbb{C}$ med

$$f(x) \to 0 \quad \text{for } x \to \infty.$$

Den kan „identificeres" med $\{f \in \mathcal{C}(X_\infty) \mid f(\infty) = 0\}$, dvs. der består en naturlig enentydig korrespondance.

Heraf fremgår straks, at $\mathcal{C}_0$ er en algebra af fkt.ner, at $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{B}(X)$, altså at hvert $f \in \mathcal{C}_0$ er begr., og at $\mathcal{C}_0$ er afsluttet i $\mathcal{B}$ ved den uniforme norm [dermed fuldstændig].

Idet $f \in \mathcal{K}(X)$ betyder, at $f: X \to \mathbb{C}$ er kontin. og

$$\exists \text{ kompakt mgd. } K \subseteq X \ \forall x \in X \setminus K : f(x) = 0,$$

er det klart, at $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{C}_0(X)$. Vi vil vise, at $\mathcal{K}(X)$ er tæt i $\mathcal{C}_0(X)$ ved uniforme norm:

Lad da $f \in \mathcal{C}_0(X)$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Først findes kompakt mgd. $K \subseteq X$, så

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{for } x \in X \setminus K.$$

Derpå findes g tilh. $\mathcal{K}(X)$ med $g: X \to [0,1]$ og $g(x) = 1$ for hvert $x \in K$ (s. 12). Da er $fg \in \mathcal{K}$ og

$$|f(x) - f(x)g(x)| = |f(x)|\,(1 - g(x)) < \varepsilon \quad \text{for hvert } x \in X.$$

.69 Øvelse. Ved at gå over til X_∞ eksempel på Stone/Weierstrass' sætning (s. 8), dog først erstatte $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}$.

Vi noterer:

For lokalt kompakt topologisk rum X betegner $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X) \overset{= \mathcal{K}(X,\mathbb{C})}{\vee}$ mgd. af kont. fktr $f: X \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte, dvs $\exists$ komp. $K \subseteq X$ $\forall x \in X \setminus K: f(x) = 0$,

medens $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(X) \overset{= \mathcal{C}_0(X,\mathbb{C})}{\vee}$ betegner mgd. af kont. $f: X \to \mathbb{C}$, som „forsvinder i ∞", dvs

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \text{ komp. } K \subseteq X \ \forall x \in X \setminus K: |f(x)| < \varepsilon.$$

$\mathcal{C}_0$ er afsluttet (i $\mathcal{B}(X)$) ved uniforme norm, og $\mathcal{K}$ er tæt i $\mathcal{C}_0$, altså $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{C}_0$.

Er X kompakt, gælder $\mathcal{K} = \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$.

Er X ikke kompakt, går $\mathcal{C}_0(X)$ ved plombering af hvert $f \in \mathcal{C}_0(X)$ ved fastsættelsen $f(\infty) = 0$ over i mgd. $\{f \in \mathcal{C}(X_\infty) \mid f(\infty) = 0\}$.

I ovenstående kan $\mathbb{C}$ erstattes med $\mathbb{R}$. Da er $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ og $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ ikke blot algebraer over $\mathbb{R}$, men tillige fkt.sgitre.

Kontin. fktr med kompakt støtte vil komme til at spille lign. rolle som trappefktrne i Mat. 2.

§2. Radon integraler.

Definition af positive og af begrænsede Radon integraler.

Lad X være et lokalt kompakt rum.

Ved et positivt Radon integral på X forstås en positiv $\mathbb{R}$-lineær fkt.nal I defineret på mgd.en $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ af kontin. reelle fkt.ner med kompakt støtte, dvs. en fkt. $I : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, hvor

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \quad I(cf) = c\,I(f) \quad \text{for } f,g \in \mathcal{K},\ c \in \mathbb{R},$$
$$I(f) \geqq 0 \quad \text{for } f \geqq 0,\ f \in \mathcal{K}.$$

*)

Undertiden bekvemt at udvide I til $\mathbb{C}$-lineær fkt.nal $\mathcal{K}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Dette kan gøres på entydig måde. Udvidelsen betegnes også med I.

Mere generelt gælder nemlig:

En $\mathbb{C}$-lineær fkt.nal $J : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ def. på $\mathbb{C}$-lineært fkt.srum $\mathcal{V}$ af kompl. fkt.r, altså for $f,g \in \mathcal{V}$, $c \in \mathbb{C}$ gælder

$$f+g \in \mathcal{V},\ cf \in \mathcal{V}, \quad J(f+g) = J(f) + J(g), \quad J(cf) = c\,J(f),$$

f) nok er, når tillige $\mathcal{R}(f), \mathcal{I}(f) \in \mathcal{V}$ for $f \in \mathcal{V}$, bestemt ved sin restriktion $I = J \mid \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, hvor $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ består af de reelle fkt.r tilh. $\mathcal{V}$.

Her kan $I : \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ foreskrives vilk. under forudsætningerne

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \quad I(cf) = c\,I(f) \quad \text{for } f,g \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}},\ c \in \mathbb{R},$$

altså som en $\mathbb{R}$-lineær, men gerne kompleks fkt.nal på $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$.

Bevis. Klart, at J givet ved sin restriktion: idet $f \in \mathcal{V}$ skrives $f = f' + i f''$, $f', f'' \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, har vi $J(f) = J(f') + i\,J(f'')$.

For foreskrevet I defin. J ved $J(f) = I(f') + i\,I(f'')$. Klart, at J er en udvidelse og $\mathbb{R}$-lineær, men J er også $\mathbb{C}$-lineær:

Idet $cf = (c' + ic'')(f' + if'') = (c'f'' - c''f') + i(c'f'' + c''f')$, $\quad c', c'', f', f''$ reelle,

haves
$$J(cf) = I(c'f'' - c''f') + i\,I(c'f'' + c''f')$$
$$= c'I(f'') - c''I(f') + i(c'I(f'') + c''I(f')) = (c' + ic'')(I(f') + i\,I(f''))$$
$$= c\,J(f).$$

---

*) Eks. $X = \mathbb{R}^n$, $\quad I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dm$, sædv. Riemann (ell. Lebesgue) integral

$X = \mathbb{R}^n$, vælge $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $h \geqq 0$, $\quad I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f h\,dm$.

$X = \mathbb{R}^n$, vælge $a \in \mathbb{R}^n$, $\quad I(f) = f(a)$.

På den anden side er et positivt Radon integral I på X bestemt ved sin restriktion til mgd. $\mathcal{K}_+ = \{f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R}) \mid f \geq 0\}$

Mere generelt:

Lad $\mathcal{G}$ være et lin. fktsgitter (af reelle fkt.r!) og $\mathcal{G}_+ = \{f \in \mathcal{G} \mid f \geq 0\}$.
En (gerne kompleks) additiv fkt.nal $I: \mathcal{G} \to \mathbb{C}$, altså

$$I(f+g) = I(f) + I(g) \quad \text{for } f, g \in \mathcal{G},$$

er da bestemt ved sin restriktion $J = I \mid \mathcal{G}_+$.
Her kan J foreskrives under forudsætningen

$$J(f+g) = J(f) + J(g) \quad \text{for } f, g \in \mathcal{G}_+,$$

altså som en additiv fkt.nal på $\mathcal{G}_+$.

I er $\mathbb{R}$-lineær, netop hvis J er positivt homogen, dvs.

$I(cf) = c\,I(f)$ gælder for hvert $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{G}$,
blot det gælder for $c \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{G}_+$

Bevis. Hvert $f \in \mathcal{G}$ kan skrives $f = h - g$ med $h, g \in \mathcal{G}_+$, f.eks. $h = f^+ = f \vee 0$, $g = f^- = -(f \wedge 0)$; dermed $I(h) = I(f) + I(g)$, dvs. $I(f) = I(h) - I(g)$.

Lad nu additiv $J: \mathcal{G}_+ \to \mathbb{C}$ være givet.
Først bemærke, at $J(h) - J(g)$ er det samme for alle fremstillinger $f = h - g$ af givet $f \in \mathcal{G}$ ved $g, h \in \mathcal{G}_+$;
thi af $h - g = h' - g'$, dvs. $h + g' = h' + g$
følger $J(h) + J(g') = J(h') + J(g)$, dvs. $J(h) - J(g) = J(h') - J(g')$

Vi kan da sætte
$$I(f) = J(h) - J(g) \quad \text{for } f = h - g,\ g, h \in \mathcal{G}_+.$$

Klart, at I udv. af J, thi for $f \in \mathcal{G}_+$ er $I(f) = J(f) - J(0)$
(at $J(0) = 0$ følger af, at $0 = 0 + 0$, dermed $J(0) = J(0) + J(0)$)

Klart, at I additiv.

Klart, at I er pos. homogen, når J er det. Men dermed er I også $\mathbb{R}$-lineær, idet $I(cf) = c\,I(f)$ for $c = 0$ og $c = -1$ følger af additiviteten.

Det kommer altså ud på et at betragte

$$\begin{array}{rl} \mathbb{C}\text{-lin. fkt.naler} & \mathcal{K}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ \mathbb{R}\text{-lin. fkt.naler} & \mathcal{K}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \text{pos. homog., additive fkt.naler} & \mathcal{K}_+(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \end{array}$$

idet overgangen sker ved restriktion ell. entydig udvidelse. Vi benytter samme betegnelse, f. eks. I, ligegyldigt under hvilken af de tre former en fkt.nal betragtes.

Vi kalder I reel, hvis $I(f) \in \mathbb{R}$ for hvert $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$,
nok for hvert $f \in \mathcal{K}_+(X,\mathbb{R})$

I positiv, hvis $I(f) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ for hvert $f \in \mathcal{K}_+(X,\mathbb{R})$ *)

I sidste tilfælde har vi også indført navnet positivt Radon integral.

Begrebet vilk. Radon integral mere speget. Først et mere spec. begreb, som vi får mere anvendelse for.

Et fkt.nal I på en af de tre former øverst på siden kaldes et begrænset Radon integral, hvis $k \in \mathbb{R}_+$ findes, så

$$|I(f)| \leq k \|f\|_\infty$$

for hvert $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$, hvert $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ eller blot $f \in \mathcal{K}_+(X,\mathbb{R})$.

De tre krav er ensbetydende, idet:
Er k brugbart for $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$, så er $2k$ brugbart for $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$
- - - - - - - - - - - - - - $\mathcal{K}_+(X,\mathbb{R})$, - - - - $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$

Thi for $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ benytte $f = f' + i f''$, hvormed $I(f) = I(f') + i I(f'')$
og $|I(f)| \leq |I(f')| + |I(f'')| \leq k\|f'\| + k\|f''\| \leq k(\|f\| + \|f\|)$
For $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ benytte $f = f^+ - f^-$, hvormed $I(f) = I(f^+) - I(f^-)$
og $|I(f)| \leq |I(f^+)| + |I(f^-)| \leq k\|f^+\| + k\|f^-\| \leq k(\|f\| + \|f\|)$

Eks. $X = \mathbb{R}^n$, $I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dm$. Her er I et positivt, men ikke et begr. Radon int.
$X = \mathbb{R}^n$, vælge $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, så $\int_{\mathbb{R}^n} |h|\,dm$ exist., $I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fh\,dm$
$|I(f)| \leq \int |f||h|\,dm \leq \|f\|_\infty \int |h|\,dm$.
Altså: I et begr., men ikke nødv. pos. Radon integr.
$X = \mathbb{R}^n$, vælge $a \in \mathbb{R}^n$, $I(f) = -f(a)$.

*) En pos., additiv fkt.nal på $\mathcal{K}_+$ (ell. mere generelt $\mathcal{G}_+$, s. 16) er i øvrigt automatisk pos. homogen (se f.ex. Dinculeanu „Vector Measures" s. 392)

Begrænsede lineære operatorer.

Først som et indskud nogle simple generelle begreber og resultater.

Lad V og W være vektorrum med norm, $T: V \to W$ lineær.

Def. T kaldes begrænset, hvis
$$M_T = \sup\{\|T(x)\| \mid x \in V,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$$
dvs. hvis
$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\ \forall x \in V: \quad \|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

M_T er da mindste brugbare M, kaldes normen af T.

Hertil bemærke, at brugbare M netop er majoranter til $\{\|T(x)\| \mid x \in V,\ \|x\| \leq 1\}$.
Er nemlig M majorant, så for $x \neq 0$: $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$, altså $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.
9.69 Omv. klart.

T er (ligeligt) kontin., blot T er kontin. i ét pkt.

Thi idet $\|T(x+h) - T(x)\| = \|T(h)\|$ og $\|x+h-x\| = \|h\|$, ses, at T er samtidig kontin. i 0 og x.

T er kontin., netop hvis T er begrænset.

Thi er T begrænset, så åbenbart kontin. i 0.
Omv. Antag T kontin. (i 0). Til $\varepsilon = 1$ findes δ, så $\|T(x)\| \leq 1$ for $\|x\| < \delta$
dermed $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$ for $\|x\| < 1$

Lad U og W være vektorrum, V et underrum af U, $T: V \to W$ lineær (T siges da at være en operator fra U til W.) U og dermed V, samt W forudsættes med norm.

Klart, at $\overline{V}$ underrum af U ($x_n \to x$, $y_n \to y$ medf. $x_n + y_n \to x + y$, $cx_n \to cx$, benytte $x_n, y_n \in V$).

Sætning. Hvis W er et Banach rum (dvs. metrikken fuldst.), og hvis T er begrænset, da kan T udvides til en begr. lineær afbildn. af $\overline{V}$ ind i W og kun på én måde. Herved ændres normen af T ikke.

I beviset læse $\overline{V}$ i stedet for U.

Bevis. Klart, at højst én kontin. udvid., da V er tæt i $\mathcal{U}$: til hvert $x \in \mathcal{U}$ findes følger
13.3.69 $x_n \to x$, $x_n \in V$.

Eksistens

Betragt vilk. $x \in \mathcal{U}$.
Lad $x_n \to x$, $x_n \in V$. Idet $\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_m - x_n)\| \leq M_T \|x_m - x_n\|$, ses at $T(x_n)$, $n \in N$ er fundam.følge, altså konverg.
Grænsepktet er uafh. af valgte følge x_n; thi er også $y_n \to x$, $y_n \in V$, kan vi blande $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, og $T(x_1), T(y_1), \ldots$ konvergerer.
Vi kan da sætte $T'(x) = \lim_n T(x_n)$ for $x_n \to x$, $x_n \in V$.

$T' : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ en udvid. af T. Klart: for $x \in V$ benytte $x_n = x$.

T' lineær. Klart: Er $x = \lim x_n$, $x_n \in V$ og $y = \lim y_n$, $y_n \in V$
så er $x + y = \lim (x_n + y_n)$, $x_n + y_n \in V$
dermed $T'(x+y) = \lim T(x_n + y_n) = \lim (T(x_n) + T(y_n)) = \lim T(x_n) + \lim T(y_n) = T'(x) + T'(y)$
og $T'(ax) = \qquad = aT'(x)$

Endelig begrænsetheden: Lad $x_n \to x$, $x_n \in V$. For hvert n er $\|T(x_n)\| \leq M_T \|x_n\|$,
og da $\|T'(x)\| = \|\lim_n T(x_n)\| = \lim_n \|T(x_n)\|$
$\|x\| = \lim_n \|x_n\|$, sluttes $\|T'(x)\| \leq M_T \|x\|$

En første anvendelse:

At en $\mathbb{C}$-lineær fkt.nal $I: \mathcal{K}(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ er et begr. Radon integral i det lokalt kompakte rum X vil netop sige, at I er begr. som lin. operator, dvs. kontin., idet vi for $\mathcal{K}$ og $\mathbb{C}$ som norm benytter $\| \ \|_\infty$, henh. $| \ |$; *)

Idet $\overline{\mathcal{K}(X,\mathbb{C})} = \mathcal{C}_0(X,\mathbb{C})$, s. 14, , har I da netop én udvidelse til begr. lin. afbildn. $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, idet $\| \ \|_\infty$, henh. $| \ |$ benyttes. Stadig benytte betegnelsen I. „Normen" af I er uforandret.

Restriktionen til $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ er naturligvis $\mathbb{R}$-lineær og kontin., dermed udvidelsen af $I: \mathcal{K}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ °). Dette især af interesse for I reel (s. 17).

°) jfr. sætn. s. 19 med $W = \mathbb{C}$ opf. som vektorr. over $\mathbb{R}$.

Ovenstående kan resumeres:

Begr. Radon integral vil sige elem. i duale rum til $\mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ ell. $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{C})$,
begr. reelt " " " " " " " " $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$ ell. $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$, **)
idet uniforme norm benyttes.

Klart, at de begr. Radon integraler på X udgør vektorrum, betegne $\mathcal{M}^1(X)$ (ell. $\mathcal{M}^1(X,\mathbb{C})$, henh. $\mathcal{M}^1(X,\mathbb{R})$).

---

*) dette kommer ud på gyldigheden af $I(f_n) \to I(f)$ for $\|f - f_n\|_\infty \to 0$.

**) for et <u>reelt</u> Radon integral I er

$$\sup\{|I(f)| \mid f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R}), |f| \leq 1\} = \sup\{|I(f)| \mid f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C}), |f| \leq 1\}$$

altså ikke blot $I \in \mathcal{M}^1(X,\mathbb{R}) \Leftrightarrow I \in \mathcal{M}^1(X,\mathbb{C})$, men i begge fald med samme norm.

Thi for vilk. $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ er med passende $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$

$$|I(f)| = c\,I(f) = I(cf) = I((cf)') + i\,I((cf)'') = I((cf)'), \quad \text{hvor } |(cf)'| \leq |f|$$

Definition af vilk. Radon integral.

Et positivt Radon integral I i lokalt komp. rum X er ikke i alm. begr., dvs. kont., ved brug af $\| \|_\infty$ i $\mathcal{K}(X)$.

Imidlertid: lad os for vilk. komp. $K \subseteq X$ med $\mathcal{K}_K(X)$ betegne mgd. af kontin. fkt.r med støtte indeholdt i K. Klart, at $\mathcal{K}_K$ algebra, spec. lin. fkt.srum, afsluttet (i $\mathcal{B}$) ved $\| \|_\infty$. Nu:

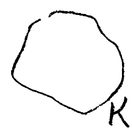
<u>For hver kompakt mgd.</u> $K \subseteq X$ <u>er restriktionen af</u> I <u>til</u> $\mathcal{K}_K(X)$ <u>begr.</u>, <u>dvs. kontin.</u>, <u>altså</u>

$$(*) \quad \forall \text{komp } K \subseteq X \; \exists k \in \mathbb{R}_+ \; \forall f \in \mathcal{K}_K : \; |I(f)| \leq k \|f\|_\infty .$$

<u>Dette kommer ud på gyldigheden af</u>

$I(f_n) \to I(f)$ <u>for</u> $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, <u>alle</u> f_n (og dermed f) <u>med støtte indenfor samme komp. mgd.</u> K

Bevis. Lad komp. $K \subseteq X$ være givet. Vælge (jfr. s. 12) $g \in \mathcal{K}(X)$, $g : X \to [0,1]$ med $\forall x \in K : g(x) = 1$.


K

Nok at betragte $f \in \mathcal{K}_{K+}$. Da: $\quad 0 \leq f \leq g \|f\|_\infty$,

dermed, idet I pos., $\quad 0 \leq I(f) \leq I(g) \|f\|_\infty$.

Defin. En fkt.nal I som s. 17 kaldes et <u>Radon integral</u>, hvis I har den i ovennævnte sætn. nævnte egenskab.

Bemærk: Nævnet positivt Radon integral retfærdiggjort. Det spec. for begr.
2.9.69 Radon integral, at k kan findes uafh. af K.

Klart, at Radon integralerne på X udgør vektorrum, betegne $\mathcal{M}(X)$ (ell. $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$, henh. $\mathcal{M}(X, \mathbb{R})$).

Spaltning i pos. Radon integraler.

Mange spørgsmål vedr. (begr.) Radon integraler kan føres tilbage til pos. (begr.) Radon integraler.

Først: Funktional I som s. 17 har entydig fremstill. $I = I' + iI''$, hvor I' og I'' reelle (defin. s. 17). Er I (begr.) Radon integral, så også I' og I''.

Bevis. Bekvemt at tage I på formen $I: \mathcal{K}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Betingelsen

$$I(f) = I'(f) + i I''(f) \quad \text{med} \quad I'(f), I''(f) \in \mathbb{R}$$

nødvendiggør $I' = \mathcal{R} \circ I$, $I'' = \mathcal{I} \circ I$, hvor $\mathcal{R}$ er afbild. $z \to \mathcal{R}z$, $z \in \mathbb{C}$, og anal. Da $\mathcal{R}$ og $\mathcal{I}$ er $\mathbb{R}$-lineære og kontin., sikrer dette omvendt, at I' og I'' er $\mathbb{R}$-lineære og med I kontinuerte på hvert $\mathcal{K}_K(X, \mathbb{R})$, K komp.

Derpå: Sætn. Reelt (begr.) Radon integral I kan skrives som diff. mellem to positive (begr.) Radon integraler.

Bevis. Her tage I på formen $I: \mathcal{K}_+(X) \to \mathbb{R}$. Erindre $\forall K \exists k \forall f \in \mathcal{K}_K^+ \; |I(f)| \leq k \|f\|_\infty$.
Som fingerpeg inden egt. bevis: tænkes I fremst. som ønsket, $I = R - Q$, da har vi for $g \leq f$, $g, f \in \mathcal{K}_+$

$$I(g) = R(g) - Q(g) \leq R(g) \leq R(g) + R(f-g) = R(f)$$

Nu: for $f \in \mathcal{K}_+(X)$ sætte

$$I^+(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}^+, g \leq f} I(g)$$

1° $I^+(f) \leq k \cdot \|f\|_\infty$, for $f \in \mathcal{K}_K^+$
thi $I(g) \leq |I(g)| \leq k \|g\|_\infty \leq k \|f\|_\infty$.

2° $I^+(f) \geq 0$, thi 0 blandt mulige g

3° $I^+(f) \geq I(f)$ thi f selv blandt mulige g

4° $I^+(cf) = c I^+(f)$ for $f \in \mathcal{K}^+$, $c \in \mathbb{R}_+$. Oplagt.

5° $I^+(f_1 + f_2) \geq I^+(f_1) + I^+(f_2)$

Ligeud: Til vilk. $\varepsilon > 0$ findes $g_1 \leq f_1$, $g_1 \in \mathcal{K}_+$ med $I(g_1) > I^+(f_1) - \varepsilon$
og $g_2 \leq f_2$, $g_2 \in \mathcal{K}_+$ med $I(g_2) > I^+(f_2) - \varepsilon$

men da er $g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, $g_1 + g_2 \in \mathcal{K}_+$, dermed $I^+(f_1 + f_2) \geq I(g_1 + g_2) > I^+(f_1) + I^+(f_2) - 2\varepsilon$.

6° $I^+(f_1 + f_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$

thi hvert $g \leq f_1 + f_2$, $g \in \mathcal{K}_+$ kan skrives $g = g_1 + g_2$ med $g_1 \leq f_1$, $g_2 \leq f_2$, $g_1, g_2 \in \mathcal{K}$
nemlig med $g_1 = g \wedge f_1$, idet da $g_2 = g - (g \wedge f_1) \leq f_2$,
nemlig $g \leq (g \wedge f_1) + f_2 = (g + f_2) \wedge (f_1 + f_2)$;

følgelig $I(g) = I(g_1) + I(g_2) \leq I^+(f_1) + I^+(f_2)$

$1^\circ, 2^\circ, 4^\circ - 6^\circ$ viser, at I^+ pos. (begr.) Radon integral.
$I^- = I^+ - I$ er da også (begr.) Radon integral, pos. iflg. 3°. Færdig: $I = I^+ - I^-$.

Den i beviset fundne fremstilling $I = I^+ - I^-$ er ikke den eneste: addition af samme pos. Radon integral P til I^+ og I^- vil påny give en fremst.,

$$(*) \qquad I = (I^+ + P) - (I^- + P)$$

<u>Sætn.</u> <u>Enhver fremstilling af reelt Radon integral I som diff. mellem to positive har formen</u> $(*)$, <u>hvor I^+, I^- er de ovenfor konstruerede og P et pos. Radon integral.</u>

Bevis. Lad $I = R - Q$ være vilk. fremst. Vi skal vise, at Radon integralet $R - I^+ = Q - I^-$ er positivt, dvs. $I^+(f) \leqq R(f)$ for $f \in \mathcal{K}_+$. Følger af (jfr. s. 22), at for hvert $g \leqq f$, $g \in \mathcal{K}^+$ gælder $I(g) \leqq R(f)$.

Resultatet kan udtrykkes lidt anderledes ved hjælp af (reflexiv) ordningsrelation i mgd. $\mathcal{M}(X, R)$ af reelle Radon integraler $I \leqq J \iff J - I$ pos.

<u>For reelt Radon integral I er I^+ og I^- de mindste, der kan optræde i fremstillinger</u> $I = R - Q$, <u>R, Q pos. Radon integraler</u>

Bemærk, at I^+ og I^- bestemt herved. Omtale dem som <u>pos.</u> og <u>neg. del</u> af I. og fremstillingen $I = I^+ - I^-$ som spaltningen i mindste pos. eller som <u>Jordan</u> spaltningen.

<u>Corollar</u>: $(-I)^+ = I^-$, $(-I)^- = I^+$.
Fremstillingen $-I = I^- - I^+$ er nemlig spaltningen i mindste pos. integr., thi for vilk. $-I = R - Q$ haves jo $I = Q - R$, dermed $I^- \leqq R$, $I^+ \leqq Q$

<u>Corollar</u>: <u>Som modstykke til</u> $I^+(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}_+, g \leqq f} I(g)$ for $f \in \mathcal{K}_+$

<u>haves</u> $I^-(f) = -\inf_{g \in \mathcal{K}_+, g \leqq f} I(g)$

Nemlig $I^-(f) = (-I)^+(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}_+, g \leqq f} -I(g)$.

NB. Reelt Radon integral kunne defineres som differens mellem to pos., vilk. ved $I' + iI''$, I', I'' reelle.

5.9.64 ~~I kraft af dette afsnit~~ foreløbig koncentrere os om <u>pos.</u> Radon integraler.

§3. Udvidelse af Radon integral.

Fundamentale egenskaber ved pos. Radon integral.

Lad I være pos. Radon integral i lokalt kompakt rum X.

Noterer os

Def.: Fkt.nal I som s. 17 med $I(f) \geq 0$ for $f \in \mathcal{K}_+$.

(i) $I(f) \in \mathbb{R}$ for $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$. – Vi kaldte I reel (s. 17)

(ii) $I(f) \leq I(g)$ for $f, g \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R}),\ f \leq g$

Klart, idet $I(g) - I(f) = I(g-f) \geq 0$

nyttes 33 (iii) $|I(f)| \leq I(|f|)$ for hvert $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$.

Bevis. Skriv $|I(f)| = c\,I(f) = I(cf)$ med $|c| = 1$,

sætte $cf = g' + ig''$ med $g', g'' \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$,

da: $|I(f)| = I(g') + i\,I(g'') = I(g') \leq I(|g'|) \leq I(|f|)$.

(iv) „Kontinuitets-" ell. „begrænsethedsegenskaben" s. 21

(v) Er $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}_+$ nedad filtrerende, dvs. $\forall f, g \in \mathcal{A}\ \exists h \in \mathcal{A}: h \leq f, h \leq g$, med

$$\inf_{f \in \mathcal{A}} f = 0, \quad \text{dvs. } \forall x \in X: \inf_{f \in \mathcal{A}} f(x) = 0,$$

da er $\inf_{f \in \mathcal{A}} I(f) = 0$.

Dette er en generalisering af $f_n \searrow 0,\ f_n \in \mathcal{K}_+ \Rightarrow I(f_n) \searrow 0$.
(sml. fundam. hjælpesætn. MI s. 33)

Bevis. Vælge et $f_0 \in \mathcal{A}$.

Hertil kompakt $K \subseteq X$, så $f_0(x) = 0$ for $x \notin K$;

egnes X=R videre iflg. (iv) $k \in \mathbb{R}_+$, så $|I(f)| \leq k\, \|f\|_\infty$ for $f \in \mathcal{K}_K$.

Nu for vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$:

De åbne mgdr $\{x \mid f(x) < \varepsilon\}$, $f \in \mathcal{A}$, overdækker X, spec. K

altså vil end. mange, svarende til $f_1, f_2, \dots, f_n$, overdække K

Idet $\mathcal{A}$ nedad filtrerende, findes $f \in \mathcal{A}$, så $f \leq f_0, f_1, \dots, f_n$

Nu: $f \in \mathcal{K}_K$, $\|f\|_\infty < \varepsilon$, følgelig $I(f) \leq k\varepsilon$.

(v') Er $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ opad filtrerende og $\sup_{f \in \mathcal{A}} f = g \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$, da er $I(g) = \sup_{f \in \mathcal{A}} I(f)$.

Hertil anvende (v) på $\{g - f \mid f \in \mathcal{A}\}$.

Nedad halvkontin. fkt.ner.

Fdet I er et pos. Radon integral i X, skal vi tilskrive enhver pos. fkt. $f: X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ et övre integral $\overline{I}(f)$ m.h.t. I.

For $X = \mathbb{R}^n$ kunne vi direkte kopiere M1 ved at sætte $\overline{I}(f) = \inf \lim_n I(f_n)$, hvor nedre grænse tages over alle voksende följer $f_n \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^n)$ med $\lim f_n \geqq f$. Svarende til, at to grænseovergange er involveret, kan man dele i to trin, nemlig först definere $\overline{I}$ for fkt.ner g, der kan fremstilles $g = \lim f_n$ med $f_1 \leqq f_2 \leqq \dots$, $f_n \in \mathcal{K}_+$. Disse fkt.ner er, som man kan vise (se f.eks. Taylor s. 315) netop de nedad halvkontinuerte.

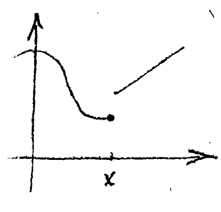
Når $\mathbb{R}^n$ erstattes med vilk. lokalt kompakt rum X, vil första trin ved kopieringen af M1 i alm. före til en for beskeden fkt.sklasse. Således vil enhver fkt. $g = \lim f_n$ med $f_1 \leqq f_2 \leqq \dots$, $f_n \in \mathcal{K}_+$ åbenbart være 0 uden for en σ-kompakt mgd (dvs. en foren. af numerabelt mange kompakte). Er rummet „stort", vil derfor enhv. konst. fkt. > 0 få (övre) integral $= \infty$; dette er urimeligt f.eks. for ... givet ved $I(f) = f(a)$, $f \in \mathcal{K}$, svarende til et valgt pkt. $a \in X$.

Det fornuftige viser sig at være at benytte de nedad halvkontin. fkt.r i första trin.

(Medens vi kun, med lige nævnte modifikation, vil fölge M1 i def. af övre integral for positive fkt.r, kan M1 faktisk i sin helhed ret nöje overföres, se Edwards: Radon measures on locally compact spaces, Acta Math. 89 (1953).)

Lad X være et topol. rum.
En fkt. $h: X \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kaldes nedad halvkontin., hvis $\forall x \in X\ \forall a \in \mathbb{R}$:

$$h(x) > a \text{ medf. } h(y) > a \text{ for hvert } y \text{ i en omegn af } x.$$



Ved ombytn. af kvantorerne lyder kravet:

$$\forall a \in \mathbb{R}: \{x \mid h(x) > a\} \text{ åben}$$

(Faktisk er der tale om kontin., når $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ udstyres med anden topologi end sædv., nemlig med totalmgd, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ samt „intervaller" $]a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}$, som de åbne mgd.r (Ej Hausdorff!).)

Tilsv. defineres opad halvkontin. For fkt. $f: X \to \mathbb{R}$ gælder åbenbart

$$f \text{ kontin} \iff f \text{ opad og nedad halvkontin.}$$

Vi betegner mgd. af nedad halvkont. fkt.r på X med $\mathcal{I} = \mathcal{I}(X)$, mgd. af positive med $\mathcal{I}_+ = \mathcal{I}_+(X)$

(i) $ah \in \mathcal{I}$ når $h \in \mathcal{I}$, $a \in \mathbb{R}_+$

(ii) $h_1 \wedge h_2 \in \mathcal{I}$ når $h_1, h_2 \in \mathcal{I}$ (brug defin.)

(iii) For vilk. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ er $\sup\limits_{h \in \mathcal{A}} \in \mathcal{I}$ (brug defin.)

(iv) $h_1 + h_2 \in \mathcal{I}$ når $h_1, h_2 \in \mathcal{I}$ og $\{h_1(x), h_2(x)\}$ aldrig $\{-\infty, \infty\}$.

spec. når $h_1, h_2 \in \mathcal{I}_+$.

thi er $a > h_1(x) + h_2(x)$, $a \in \mathbb{R}$, findes $a_1 > h_1(x)$ og $a_2 > h_2(x)$ med $a_1 + a_2 = a$.

(v) $\sum\limits_{i \in \mathcal{J}} h_i \in \mathcal{I}_+$, når alle $h_i \in \mathcal{I}_+$.

Bemærke, at $\sum\limits_{i \in \mathcal{J}} a_i$, hvor alle $a_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, betyder $\sup \sum\limits_{i \in \mathcal{J}'} a_i$, övre grænse taget over endelige $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$.

(v) følger da af (iii) og (iv)

Iflg. (iii) er $\mathcal{I}_+(X)$ afrundet overfor supremum-dannelse. Når X lokalt kompakt, er det den mindste supremum-afrundede fkt.smgd. $\supseteq \mathcal{K}_+(X)$, endda:

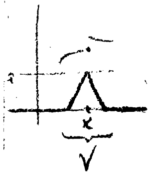
Sætn. <u>Når X er lokalt kompakt</u>, <u>gælder for hvert</u> $h \in \mathcal{I}_+$: $\quad h = \sup\limits_{f \in \mathcal{K}_+,\, f \le h} f$

Bevis. Lighed klar i pkt. x, hvor $h(x) = 0$.

For pkt. x, hvor $h(x) > 0$: betragte vilk. a, $0 < a < h(x)$;
søge $f \le h$, $f \in \mathcal{K}_+$ med $f(x) \ge a$

Imidlertid findes omegn V af x, så $h(y) > a$ for $y \in V$
derpå (Urysohn, s. 12) $f' \in \mathcal{K}$, $f' : X \to [0,1]$ med $f'(x) = 1$ og $f'(y) = 0$ for $y \notin V$

$f = af'$ brugbar.



1.9.69

Øvre integral for halvkontin. fkt.r

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt komp. rum X.

med hensyn til I

Det øvre integral $\overline{I}(h)$ af en fkt. $h \in \mathcal{F}_+(X)$, altså pos., nedad halvkont. fkt., defineres ved

$$\overline{I}(h) = \sup_{f \in \mathcal{K}_+,\, f \leqq h} I(f)$$

(motivering: (v') s. 24, sætn. s. 26)

(i) $\quad \overline{I}(h) = I(h)$ når $h \in \mathcal{K}_+$ (iflg. (ii), s. 24)

(ii) $\quad 0 \leqq \overline{I}(h) \leqq +\infty$.

(iii) $\quad \overline{I}(h_1) \leqq \overline{I}(h_2)$ når $h_1 \leqq h_2$,

(iv) $\quad \overline{I}(ch) = c\,\overline{I}(h)$ når $h \in \mathcal{F}_+$, $c \in R_+$

num. ...ok 21 n.

Sætn. 1. $\overline{I}(\sup_{h \in \mathcal{A}} h) = \sup_{h \in \mathcal{A}} \overline{I}(h)$ når $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_+(X)$ er opad filtrerende.

Sml. (v'), s. 24. Iflg. (iii), s. 26 er $\sup h \in \mathcal{F}_+$.

Bevis. „$\geqq$" klart iflg. (iii). Dermed

Opgave: for vilk. $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leqq \sup h$ vise $I(g) \leqq \sup_{\mathcal{A}} \overline{I}(h)$.

Bourbaki s. 105 Neumark s. 130 Nachbin s. 26

tegne f

For hvert $h \in \mathcal{A}$ sætte $\Phi_h = \{f \in \mathcal{K}_+ \mid f \leqq h\}$, derpå $\Phi = \bigcup_{h \in \mathcal{A}} \Phi_h$

Φ er opad filtrerende; endda gælder $f_1 \vee f_2 \in \Phi$, når $f_1, f_2 \in \Phi$
thi $f_1 \leqq h_1$, $f_2 \leqq h_2$, dermed $f_1, f_2 \leqq h \in \mathcal{A}$ idet $\mathcal{A}$ opad filtrer.

$$\sup_{f \in \Phi} f = \sup_{h \in \mathcal{A}} \sup_{f \in \Phi_h} f = \sup_{h \in \mathcal{A}} h \quad \text{iflg. sætn. s. 26.}$$

Hermed, idet g inddrages: $\sup_{f \in \Phi}(f \wedge g) = (\sup_{f \in \Phi} f) \wedge g = g$

Da $\{f \wedge g \mid f \in \Phi\} \subseteq \mathcal{K}_+$ er opad filtr. og $g \in \mathcal{K}_+$, får vi ved (v'), s. 24

$$I(g) = \sup_{f \in \Phi} I(f \wedge g) \leqq \sup_{f \in \Phi} I(f) = \sup_{h \in \mathcal{A}} \sup_{f \in \Phi_h} I(f) = \sup_{h \in \mathcal{A}} \overline{I}(h).$$

...yttes (v), s. 29 ..., s. 35

Sætn. 2. $\overline{I}(h_1 + h_2) = \overline{I}(h_1) + \overline{I}(h_2)$ når $h_1, h_2 \in \mathcal{F}_+$ („$\geqq$" er let at vise)

Bevis. Bemærke: (*) $\sup_{a_1 \in A_1,\, a_2 \in A_2} (a_1 + a_2) = \sup_{a_1 \in A_1} a_1 + \sup_{a_2 \in A_2} a_2$ for $A_1, A_2 \subseteq R$.

(højre side er majorant for $a_1 + a_2$, men mindre tal er ikke (splitte det).

Nu: $\overline{I}(h_1) + \overline{I}(h_2) = \sup_{f_1 \in \Phi_{h_1}} I(f_1) + \sup_{f_2 \in \Phi_{h_2}} I(f_2)$ med $\Phi_{h_1} = \{f \in \mathcal{K}_+ \mid f \leqq h_1\}$ og anal.

$$= \sup_{f_1 \in \Phi_{h_1},\, f_2 \in \Phi_{h_2}} (I(f_1) + I(f_2)) \quad \text{iflg. (*)}$$

$$= \sup_{f_1 \in \Phi_{h_1},\, f_2 \in \Phi_{h_2}} I(f_1 + f_2) = \sup_{f \in \mathcal{A}} I(f)$$

med $A = \{ f_1 + f_2 \mid f_1, f_2 \in \mathcal{K}_+ ,\ f_1 \leq h_1,\ f_2 \leq h_2 \}$.

Da A er opad filtrerende,

idet $f_1 + f_2$ og $f_1' + f_2'$ ligger under $(f_1 \vee f_1') + (f_2 \vee f_2')$

og $\sup\limits_{f \in A} f = h_1 + h_2$,

idet for hvert x: $\sup\limits_{f \in A} f(x) = \sup\limits_{f_1 \in \Phi_{h_1},\, f_2 \in \Phi_{h_2}} (f_1(x) + f_2(x))$

$$= \sup_{f_1 \in \Phi_{h_1}} f_1(x) + \sup_{f_2 \in \Phi_{h_2}} f_2(x) \quad \text{iflg. } (*)$$

$$= h_1(x) + h_2(x) \quad (\text{sætn. s. 26}),$$

giver <u>sætn. 1</u>: $\quad \overline{I}(h_1 + h_2) = \sup\limits_{f \in A} I(f)$.

nyttes
ppe
rende
1, bem.)

<u>Corollar</u> $\quad \overline{I}(\sum\limits_{i \in J} h_i) = \sum\limits_{i \in J} \overline{I}(h_i)$, <u>når alle</u> $h_i \in \mathcal{I}_+$.

(til sætn. 1 og 2)

Bevis. $\sum\limits_{i \in J} h_i = \sup\limits_{g \in A} g$, hvor $A = \{ \sum\limits_{i \in J'} h_i \mid J' \text{ end.} \subseteq J \}$, iflg. defin.

Da A åbenbart er opad filtrerende, fås ved sætn. 1

$$\overline{I}(\sum_{i \in J} h_i) = \sup_{g \in A} \overline{I}(g) = \sup_{J'} \overline{I}(\sum_{i \in J'} h_i)$$

og videre ved sætn. 2 $\quad = \sup\limits_{J'} \sum\limits_{i \in J'} \overline{I}(h_i) = \sum\limits_{i \in J} \overline{I}(h_i)$

($\sup\limits_{J'}$ taget over alle end. $J' \subseteq J$).

<u>Øvre integral for pos. fktner.</u>

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt komp. rum X.

m.h.t. I

Det <u>øvre integral</u> $\overline{I}(f)$ af en fkt. $f: X \to \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, kort: pos. fkt., defineres ved

$$\overline{I}(f) = \inf_{h \in \mathcal{F}_+,\, h \geq f} \overline{I}(h)$$

Sådanne h findes, nemlig i hvert fald konstanten $+\infty$.

(i) Idet $\overline{I}$ som defin. her, er <u>udvidelse</u> af $\overline{I}$ som tidligere defin. (i kraft af (iii), s.27) har vi benyttet samme betegnelse.

(ii) $0 \leq \overline{I}(f) \leq \infty$

(iii) $\overline{I}(f_1) \leq \overline{I}(f_2)$ når $f_1 \leq f_2$.

(iv) $\overline{I}(cf) = c\,\overline{I}(f)$ når $c \in \mathbb{R}_+$

<u>Sætn. 1.</u> $\overline{I}(f_1 + f_2) \leq \overline{I}(f_1) + \overline{I}(f_2)$ NB. <u>En ulighed!</u>

thi klart for h.s. $= \infty$;
ellers findes for vilk. ε fkt. $h_1 \in \mathcal{F}_+$, $h_1 \geq f_1$ med $\overline{I}(h_1) < \overline{I}(f_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ og anal.;
idet $f_1 + f_2 \leq h_1 + h_2$ har vi da

$$\overline{I}(f_1 + f_2) \leq \overline{I}(h_1 + h_2) \underset{\text{iflg. sætn. 2, s.27}}{=} \overline{I}(h_1) + \overline{I}(h_2) < \overline{I}(f_1) + \overline{I}(f_2) + \varepsilon.$$

<u>Sætn. 2.</u> $\overline{I}(\sup_n f_n) = \sup_n \overline{I}(f_n)$ <u>for enhver stigende følge af pos. fkt.r,</u> $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$

Sml. <u>nøglesætn.</u> MI s.41.

Her simplere bevis (men større forarbejde).

„$\geq$" klar iflg. (iii). Vise „$\leq$", kan antage $\sup_n \overline{I}(f_n) < \infty$

Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, skrive det $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ med $\varepsilon_n > 0$.

For hvert n vælge $h_n \in \mathcal{F}_+$, $h_n \geq f_n$ med $\overline{I}(h_n) < \overline{I}(f_n) + \varepsilon_n$

Sætte $g_n = h_1 \vee \ldots \vee h_n$ for at opnå stigende følge $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$

m. bytte g og h

Klart, at $g_n \in \mathcal{F}_+$, $g_n \geq f_n$, skal se: $\overline{I}(g_n) < \overline{I}(f_n) + \varepsilon$

Endda $\overline{I}(g_n) < \overline{I}(f_n) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, bevis ved induktion

1) Klart for $n = 1$

2) antag påstanden for n, vise for $n+1$,

benytte $g_{n+1} + g_n \wedge h_{n+1} = g_n \vee h_{n+1} + g_n \wedge h_{n+1} = g_n + h_{n+1}$,

iflg. sætn. 2, s.27: $\overline{I}(g_{n+1}) + \overline{I}(g_n \wedge h_{n+1}) = \overline{I}(g_n) + \overline{I}(h_{n+1})$

heraf, idet $f_n \leqq g_n$ og $f_n \leqq f_{n+1} \leqq h_{n+1}$:

$$\bar{I}(g_{n+1}) + \bar{I}(f_n) \leqq \bar{I}(g_n) + \bar{I}(h_{n+1}) < \bar{I}(f_n) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \bar{I}(f_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}.$$

Ved brug af sætn. 1, s. 27, fås nu

$$\bar{I}(\sup_n f_n) \leqq \bar{I}(\sup_n g_n) = \sup_n \bar{I}(g_n) \leqq \sup_n\left(\bar{I}(f_n) + \varepsilon\right) = \sup_n \bar{I}(f_n) + \varepsilon.$$

?.10.69

NB. Sætningen gælder også med en numerabel opad filtrerende mgd. $\mathcal{A}$ af pos. fkt.r i stedet for en stigende følge (ej så svært at vise som corollar), men forudsætningen om numerabilitet kan ikke slettes:

Eks. $X = \mathbb{R}^n$, I sædv. integral, $\mathcal{A}$ = mgd.en af karakt. fkt.r for end. mgd.r. *)

Corollar (til sætn. 1 og 2) $\bar{I}(\sum_n f_n) \leqq \sum_n \bar{I}(f_n)$ for num. mange pos. fkt.r f_n

thi $\sum_n f_n = \sup_n \sum_{i=1}^{n} f_i$, dermed

$$\bar{I}(\sum_n f_n) \underset{\text{sætn. 2}}{=} \sup_n \bar{I}(\sum_{i=1}^{n} f_i) \underset{\text{sætn. 1}}{\leqq} \sup_n \sum_{i=1}^{n} \bar{I}(f_i) = \sum_n \bar{I}(f_n)$$

*) For $X = \mathbb{R}^n$, I sædv. integr., stemmer det øvre integral (for pos. fkt.ner) overens med det i MI definerede (ej vise her, udført i noter Integralteori 1967/68 s. 5).

Ydre mål.

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt kompakt rum X.

Det ydre mål $\bar{\mu}(A)$ m.h.t. I af en mgd. $A \subseteq X$ defineres ved $\bar{\mu}(A) = \bar{I}(1_A)$, hvor 1_A karakteristiske fkt. for A

(i) $0 \leq \bar{\mu}(A) \leq \infty$

(ii) $\bar{\mu}(A_1) \leq \bar{\mu}(A_2)$ når $A_1 \subseteq A_2$ thi $1_{A_1} \leq 1_{A_2}$

(iii) $\bar{\mu}(\bigcup_n A_n) = \sup_n \bar{\mu}(A_n)$ for stigende følge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

Af sætn. 2, s.29 idet $1_{\bigcup_n A_n} = \sup_n 1_{A_n}$, hvor $1_{A_1} \leq 1_{A_2} \leq \dots$

(iv) $\bar{\mu}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \bar{\mu}(A_n)$ for end ell. numer. mange A_n

Thi idet $1_{\bigcup_n A_n} \leq \sum_n 1_{A_n}$, er $\bar{\mu}(\bigcup_n A_n) \leq \bar{I}(\sum_n 1_{A_n}) \leq \sum_n \bar{\mu}(A_n)$

sætn.1, s.29, corollar s. 30

Bemærkning. Idet 1_A er nedad halvkontin $\iff$ A er åben,

gælder kraftigere resultater om åbne mgd.r:

$\bar{\mu}(\bigcup_{A \in \mathcal{O}} A) = \sup_{A \in \mathcal{O}} \bar{\mu}(A)$ for mgd. $\mathcal{O}$ af åbne mgd.r, filtrerende ved $\subseteq$. (iflg. sætn. 1, s. 27)

$\bar{\mu}(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathcal{J}} \bar{\mu}(A_i)$ når alle A_i åbne, $\mathcal{J}$ vilk.

$=$ når A_i er tillige parvis disj. (iflg. corollar s. 28)

(v) $\bar{\mu}(K) < \infty$ når $K \subseteq X$ er kompakt

thi $f \in \mathcal{K}_+(X)$ findes, så $1_K \leq f$ (s.12), dermed $\bar{\mu}(K) \leq \bar{I}(f) = I(f)$.

(vi) For hver mgd. $A \subseteq X$ er $\bar{\mu}(A) = \inf_{U \text{ åben}, U \supseteq A} \bar{\mu}(U)$

Bevis. „$\leq$" klart. Vise „$\geq$", vi kan antage $\bar{\mu}(A) < \infty$.
For vilk. ε, $0 < \varepsilon < 1$, findes da $f \in \mathcal{J}_+$, $f \geq 1_A$, så $\bar{I}(f) < \bar{\mu}(A) + \varepsilon$
Med $U = \{x \mid f(x) > 1-\varepsilon\}$ er da U åben (s.25), $U \supseteq A$
og idet $(1-\varepsilon) 1_U \leq f$, er $\bar{\mu}(U) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \bar{I}(f) < \frac{1}{1-\varepsilon}(\bar{\mu}(A) + \varepsilon)$.

(vii) $\bar{\mu}(X) < \infty \iff I$ er begr. I bekr. fald er $\bar{\mu}(X)$ = normen af I.

Fås af definitioner samt $|I(f)| \leq I(|f|)$, $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, (iii), s. 24. Øvelse.

$$\left[\ \underset{\text{def.}}{\bar{\mu}(X)} = \underset{\text{def.}}{\bar{I}(1)} = \underset{\text{(iii), s.24.}}{\sup_{f \in \mathcal{K}_+, f \leq 1} I(f)} = \underset{\text{def., s.18.}}{\sup_{f \in \mathcal{K}, \|f\|_\infty \leq 1} |I(f)|} = M_I \right.$$

Nulmængder og nulfunktioner.

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt komp. rum X

En mgd. $A \subseteq X$ kaldes en nulmgd. m.h.t. I, hvis $\bar{\mu}(A)=0$

(i) Hvis $A \subseteq B$ og B nulmgd, så er A nulmgd. iflg. (ii), s. 31

(ii) Hvis $A_1, A_2, \dots$ er nulmgdr, så også $\bigcup_n A_n$ iflg. (iv), s. 31

(iii) For pos. fkt.r f gælder: $\bar{I}(f)<\infty \Rightarrow N=\{x \mid f(x)=\infty\}$ er en nulmgd.

Thi $1_N \leq cf$, dermed $\bar{\mu}(N) \leq c\,\bar{I}(f)$ for hvert $c \in \mathbb{R}_+$.

Def. For prædikat $\Phi(x)$ med variabel x refererende til X udtrykkes „$\{x \mid \neg\Phi(x)\}$ er en nulmgd." også „$\Phi(x)$ for næsten alle $x \in X$"
løsere „$\Phi(x)$ næsten overalt", „$\Phi(x)$ p.p." el. lign.

Eks. (iii) $\bar{I}(f)<\infty \Rightarrow f(x)<\infty$ for næsten alle x (m.h.t. I).

(iv) For pos. fkt.r f gælder: $\bar{I}(f)=0 \iff f(x)=0$ for næsten alle x.

Bevis. Sætte $N=\{x \mid f(x)>0\}$.

1) Antag $\bar{I}(f)=0$. Idet $1_N \leq \infty \cdot 1_N = \sup_n nf$, ses ved sætn. 2, s. 29

$$\bar{\mu}(A) \leq \bar{I}(\sup_n nf) = \sup_n \bar{I}(nf) = \sup_n n\,\bar{I}(f) = 0.$$

2) Antag $\bar{\mu}(N)=0$. Idet $f \leq \infty \cdot 1_N = \sup_n n1_N$, ses tilsv.

$$\bar{I}(f) \leq \bar{I}(\sup_n n1_N) = \sup_n \bar{I}(n1_N) = \sup_n n\bar{\mu}(N)=0.$$

Def. En fkt. f, hvor $\bar{I}(|f|)=0$, dvs. $f(x)=0$ for næsten alle x, kaldes en nulfkt.

(v) For pos. fkt.r f,g gælder: $f(x)=g(x)$ for næsten alle $x \Rightarrow \bar{I}(f)=\bar{I}(g)$.

Bevis. Med $N=\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ er $f \leq g+\infty\cdot 1_N$

dermed, når N nulmgd., $\bar{I}(f) \leq \bar{I}(g+\infty\cdot 1_N) \underset{\text{sætn. 1, s. 29}}{\leq} \bar{I}(g)+\bar{I}(\infty\cdot 1_N) \underset{\text{(iv)}}{=} \bar{I}(g)$

og analogt

Def. To fkt.ner f og g kaldes ækv. m.h.t. I, skrive $f \underset{I}{\sim} g$ ell. blot $f \sim g$, hvis $f(x)=g(x)$ for næsten alle $x \in X$.

Ækvivalensrelation. Fkt.ner, der kun er defin. næsten overalt, kan inddrages (da det er uden betydn. for ækv.klassen, hvorledes en sådan fkt. udvides).

Er $f_n \sim g_n$, $n=1,2,\dots$, da findes iflg. (ii) nulmgd. N, så

$$\forall x \notin N\ \forall n \in \mathbb{N}: f_n(x)=g_n(x)$$

.10..9

<u>Udvidelse af pos. Radon integral.</u>

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt kompakt rum X.

For hver kompleks fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ sættes $\|f\| = \|f\|_1 = \bar{I}(|f|)$. Idet (se s. 29)

$$0 \leqq \bar{I}(|f|) \leqq \infty, \qquad\qquad 0 \leqq \|f\|_1 \leqq \infty$$
$$\bar{I}(|cf|) = \bar{I}(|c||f|) = |c|\,\bar{I}(|f|) \quad \text{for } c \in \mathbb{C}, \qquad\qquad \|cf\|_1 = |c|\,\|f\|_1$$
$$\bar{I}(|f+g|) \leqq \bar{I}(|f|+|g|) \underset{\text{sætn. 1, s. 29}}{\leqq} \bar{I}(|f|) + \bar{I}(|g|), \qquad\qquad \|f+g\|_1 \leqq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

ses, at $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I^1(X,\mathbb{C}) = \{f: X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_1 = \bar{I}(|f|) < \infty\}$ er et $\mathbb{C}$-lin. fkt.srum, og at $\|\ \|_1$ på $\mathcal{F}$ er en seminorm.

Fkt.nerne $f: X \to \mathbb{C}$ kan deles i klasser ved ækviv.relationen
$$f \sim g \iff \|f-g\|_1 = \bar{I}(|f-g|) = 0.$$
Herved går $\mathcal{F}^1, \|\ \|_1$ over i et <u>normeret</u> vektorrum $F^1 = F_I^1(X,\mathbb{C}), \|\ \|_1$, idet $\sim$ harmonerer med add. og mult. m. konst., og idet $f \sim g \Rightarrow \|f\|_1 = \|g\|_1$.

NB. Ækv.relationen stemmer med den s. 32 indførte, idet
$$\bar{I}(|f-g|) = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0 \text{ for næsten alle } x \in E \qquad \text{(iv), s. 32.}$$
$$\iff f(x) = g(x) \quad \text{for næsten alle } x \in E$$
Spec. kan inddrages fkt.ner, der kun er defin. næsten overalt i X.

Definitionen af de m.h.t. I integrable fkt.r og deres integraler skal nu gives ved hjælp af sætn. s. 18 om udvidelse af begr. lineær afbildn., nemlig:

$U = F^1(X,\mathbb{C})$, som norm benyttes $\|\ \|_1$

$W = \mathbb{C}$, som norm benyttes $|\ |$

$V = \{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})\}$, hvor $\tilde{f}$ betegner klassen repræsenteret af f

$T: V \to W$ defin. ved $\quad T(\tilde{f}) = I(f) \quad$ for $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$.

Hertil bemærke, at samme klasse meget vel kan repr. af flere $f \in \mathcal{K}$, men
$$f, g \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C}),\ f \underset{I}{\sim} g \quad \text{medf.} \quad I(f) = I(g),$$
thi $|I(f) - I(g)| = |I(f-g)| \underset{\text{(iii), s.24}}{\leqq} I(|f-g|) = \bar{I}(|f-g|)$.

T er åbenbart lineær og tillige begr., med norm $\leqq 1$, idet
$$|I(f)| \underset{\text{(iii), s.24}}{\leqq} I(|f|) = \bar{I}(|f|) = 1 \cdot \|f\|_1 \qquad \text{når } f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$$

Iflg. nævnte sætn. har T netop en udvidelse til begr. lin. afbildn. $T': \overline{V} \to \mathbb{C}$; denne har samme norm som T.

Definition. Fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ (evt. blot def. næsten overalt) kaldes <u>integrabel</u> m.h.t. I, hvis $\tilde{f} \in \overline{V}$, og vi sætter da <u>integralet af f m.h.t. I</u>,
$$\int_X f\,dI = \int f\,dI = T'(\tilde{f}).$$

Mgden af integr. fkt.ner betegnes $\mathcal{L} = \mathcal{L}^1_I(X)$, mgd. $\overline{V}$ af ækv.klasser $L = L^1_I(X)$.

Med andre ord: $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \exists g \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C}): \|f-g\|_1 < \varepsilon$ (*)

og for $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$:
(**) $\int_X f\,dI = \lim_n I(g_n)$ for vilk. følger $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ med $\|f-g_n\|_1 \to 0$.

Notere:

(i) Når $f \underset{I}{\sim} g$, vil begge ell. ingen tilh. $\mathcal{L}$. I bekr. fald: $\int f\,dI = \int g\,dI$.

(ii) $\int f\,dI \in \mathbb{C}$ for hvert $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$

(iii) $\mathcal{K}(X,\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ og $\int f\,dI = I(f)$ for $f \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$.

(iv) $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ er et $\mathbb{C}$-lin.fkt.srum og $\int (f+g)\,dI = \int f\,dI + \int g\,dI$, $\int cf\,dI = c\int f\,dI$ for $f,g \in \mathcal{L}, c \in \mathbb{C}$.

(v) $\left|\int f\,dI\right| \leqq \|f\|_1 = \overline{I}(|f|)$ for $f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$

I det foregående kan vi overalt erstatte $\mathbb{C}$ med $\mathbb{R}$.

(vi) En fkt. $f: X \to \mathbb{R}$ vil samtidig tilh. $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ og $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, og i bekr. fald med samme integral.

Thi når f er reel, er det uden betydn., om man i (*) benytter $\mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ ell. $\mathcal{K}(X,\mathbb{R})$: for vilk. $g \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ skrive $g = g' + ig''$, hvorved $f - g = (f-g') + ig''$,
dermed $|f-g'| \leqq |f-g|$, altså $\|f-g'\|_1 = \overline{I}(|f-g'|) \leqq \overline{I}(|f-g|) = \|f-g\|_1$.

I (**) kan nu benyttes $g_1', g_2', \ldots \in \mathcal{K}(X,\mathbb{R})$.

(vii) $f = f' + if''$, f', f'' reelle, er integrabel, netop hvis f' og f'' er det.

Thi $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ er jo $\mathbb{C}$-lin. rum, og omv. benytte (*):
$\|f'-g'\|_1 = \overline{I}(|f'-g'|) \leqq \overline{I}(|f-g|) = \|f-g\|_1$, ligeså $\|f''-g''\|_1 \leqq \|f-g\|_1$,
når $g = g' + ig''$, g', g'' reelle.

(viii) Er f integrabel, så også $|f|$, og der gælder $\|f\|_1 = \int |f|\,dI$.

Bemærke, at for $g \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ vil $|g| \in \mathcal{K}_+$ og $\|g\|_1 = \overline{I}(|g|) = I(|g|)$.

Vælge $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ med $\|f-g_n\|_1 \to 0$

Idet $||f|-|g_n|| \leqq |f-g_n|$ og dermed $\||f|-|g_n|\|_1 \leqq \|f-g_n\|_1$
sluttes $|f|$ integr. og $\int |f|\,dI = \lim I(|g_n|)$.
Idet $|\|f\|_1 - \|g_n\|_1| \leqq \|f-g_n\|_1$ gælder $\|f\|_1 = \lim \|g_n\|_1$.

Bemærk:

(v) Kan altså suppleres: $|\int f dI| \leq \|f\|_1 = \bar{I}(|f|) = \int |f| dI$ for $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$.

For $f \in \mathcal{L}_+(X)$, dvs. $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}), f \geqq 0$, er $\int f dI = \bar{I}(f)$.

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ er et lin. fktsgitter (s. 7).

For reelle fkt.ner undertiden bekvemt at tillade ∞ og $-\infty$ som værdier. Det er ret uskyldigt, idet allerede $f \in \mathcal{F}^1(X, \mathbb{R})$, dvs. $\|f\|_1 = \bar{I}(|f|) < \infty$, medf., at ∞ og $-\infty$ kun antages i nulmgd.

(ix) En fkt. $h \in \mathcal{F}_+$ med $\bar{I}(h) < \infty$ er integrabel (med $\int h dI = \bar{I}(h)$).

Thi til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $g \in \mathcal{K}_+$, $g \leqq h$ med $I(g) > \bar{I}(h) - \varepsilon$.

Idet også $h - g = h + (-g)$ er nedad halvkont., (iv) s. 26, fås ved sætn. 2, s. 27:

1.10.69 $\bar{I}(h) = \bar{I}((h-g)+g) = \bar{I}(h-g) + I(g)$, altså $\|h-g\|_1 = \bar{I}(h-g) = \bar{I}(h) - I(g) < \varepsilon$.

Spec. En kontin. fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ med $\|f\|_1 < \infty$ er integrabel.

Thi linearkomb. af fire pos. kontin. fkt.r med seminorm $\leqq \|f\|_1$.

<u>Udvidelse af vilk. Radon integral.</u>

Lad J være et vilk. Radon integral i lokalt kompakt rum X.

<u>Sætn.</u> Der findes <u>pos.</u> Radon integraler I, så $|J(f)| \leqq I(|f|)$ for $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$ og blandt disse et mindste $|J|$ defin. ved

$$|J|(f) = \sup_{g \in \mathcal{K}, |g| \leqq f} |J(g)| \quad \text{for } f \in \mathcal{K}_+ . \quad {}^{*)}$$

Bevis. Klart, at $|J|(f) \leqq I(f)$ for $f \in \mathcal{K}_+$, når I har egenskaben.
Klart, at $|J(f)| \leqq |J|(|f|)$ for $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, idet f selv blandt mulige g.
Beviset for $|J| : \mathcal{K}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $|J|$ pos. homog. og additiv i grove træk som $1^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ s. 22. Additiviteten (5° og 6°) kræver dog forfining:

5° $|J|(f_1 + f_2) \geqq |J|(f_1) + |J|(f_2)$

Til vilk. $\varepsilon > 0$ findes $g_1 \in \mathcal{K}$, $|g_1| \leqq f_1$ med $J(g_1) > |J|(f_1) - \varepsilon$
og $g_2 \in \mathcal{K}$, $|g_2| \leqq f_2$ med $J(g_2) > |J|(f_2) - \varepsilon$,
idet num. streger om $J(g_1)$, $J(g_2)$ kan undgås ved at multip. g_1, g_2 med kompl. fortegn,
men da er $g_1 + g_2 \in \mathcal{K}$, $|g_1 + g_2| \leqq |g_1| + |g_2| \leqq f_1 + f_2$, dermed

$$|J|(f_1 + f_2) \geqq J(g_1 + g_2) = J(g_1) + J(g_2) > |J|(f_1) + |J|(f_2) - 2\varepsilon .$$

6° $|J|(f_1 + f_2) \leqq |J|(f_1) + |J|(f_2)$

Thi hvert $g \in \mathcal{K}$, $|g| \leqq f_1 + f_2$ kan skrives $g = g_1 + g_2$ med $g_1, g_2 \in \mathcal{K}$, $|g_1| \leqq f_1$, $|g_2| \leqq f_2$
nemlig først skrive $|g| = h_1 + h_2$, $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_+$, $h_1 \leqq f_1$, $h_2 \leqq f_2$ (se s. 22)
derpå sætte $g_1(x) = \begin{cases} \frac{h_1(x)}{|g(x)|} g(x) & \text{for } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{for } g(x) = 0 \end{cases}$, g_2 anal.
(Kontin. klar i åbne mgd $\{x \mid g(x) \neq 0\}$, i pkt. x med $g(x) = 0$ straks af $|g_1| \leqq |g|$)

Følgelig $|J(g)| = |J(g_1) + J(g_2)| \leqq |J(g_1)| + |J(g_2)| \leqq |J|(f_1) + |J|(f_2)$

$\cdot g(x)$

$\cdot g_1(x)$

...mplere:
$...(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_2(x)} g(x)$

...urbaki, 2. éd
...54.

„Integration" m.h.t. J bygges på $|J|$. NB. Øvre integral (og ydre mål) kun mening for <u>pos.</u> Radon integraler.

Hvis J er positiv, bliver $|J| = J$ (benyt (iii), s. 24). Følgende defin. derfor tilladelige.

---

*) for J <u>reel</u> er $\sup\{|J(g)| \mid g \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C}), |g| \leqq f\} = \sup\{|J(g)| \mid g \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R}), |g| \leqq f\}$, ligesom $|J(f)| \leqq I(|f|)$ for alle $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, blot for alle $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$. Jvf. **), s. 20

Def. Nulmgd., nulfkt. m.h.t. J samme som m.h.t. $|J|$
Dermed $f \underset{J}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{|J|}{\sim} g$.

Def. $\|f\|_1$ m.h.t. J samme som m.h.t. $|J|$
Dermed $\mathcal{F}_J^1 = \mathcal{F}_{|J|}^1$, $\mathcal{L}_J^1 = \mathcal{L}_{|J|}^1$

For kortheds skyld sætte $I = |J|$. Idet $|J(f)| \leq I(|f|) = \bar{I}(|f|) = 1 \cdot \|f\|_1$ for $f \in \mathcal{K}$, kan J (ligesom I) udvides til $\mathcal{L}^1$ ved kontinuitet:

$$\int f \, dJ = \lim_n J(g_n) \quad \text{for vilk. følger } g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K} \text{ med } \|f - g_n\|_1 \to 0$$

Herved (i)–(vii), s. 34 uforandret med J i stedet for I, i (viii) må vi blive ved $\|f\|_1 = \int |f| \, d|J|$ for $f \in \mathcal{L}_1$ og dermed ved $|\int f \, dJ| \leq \int |f| \, d|J|$.

(ix) Fkt. $h \in \mathcal{F}_+$ med $\|h\|_1 < \infty$ er integrabel.
Kontin. fkt. f med $\|f\|_1 < \infty$ er integrabel.

Øvelse. $I = |J|$ er begr., netop hvis J er det; i bekr. fald har de samme norm. Vis det.

Er J begr. med norm M_J, da:
$\forall f \in \mathcal{K}_+$: $I(f) \leq M_J \|f\|_\infty$, thi for $g \in \mathcal{K}$, $|g| \leq f$ er $|J(g)| \leq M_J \|g\|_\infty \leq M_J \|f\|_\infty$
$\forall f \in \mathcal{K}$: $|I(f)| \leq I(|f|) \leq M_J \|f\|_\infty$.
Er I begr. med norm M_I, da:
$\forall f \in \mathcal{K}$: $|J(f)| \leq I(|f|) \leq M_I \|f\|_\infty$.

Når J er begr., da er enhv. <u>begr.</u> kont. fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ integrabel m.h.t. J.
thi $\|f\|_1 = \bar{I}(|f|) \leq \bar{I}(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty \bar{\mu}(X) < \infty$, når f begr. (s. 31)

Når J begr., er da spec. $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{L}$. Øvelse: vis $\int f \, dJ = J(f)$ for $f \in \mathcal{C}_0$ (se s. 20)

Benytte $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \bar{\mu}(X)$ når f begr.
For $f \in \mathcal{C}_0$ findes $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}$ med $\|f - g_n\|_\infty \to 0$ (s. 14), dermed $J(f) = \lim J(g_n)$
Idet også $\|f - g_n\|_1 \to 0$, har vi $f \in \mathcal{L}$ og $\int f \, dJ = \lim J(g_n)$.

<u>Grænseovergang med integrable funktioner.</u>

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt kompakt rum X.

I $\mathcal{K}(X)$ har vi da med $\|f\|_1 = I(|f|)$ en seminorm; ved om fornødent at samle fkt.nerne i klasser har vi et normeret vektorrum. Dette har vi ved hjælp af konstruktionerne i det foregående indlejret som tæt underrum i et norm. vektorrum $\mathcal{L}^1(X)$. Som første hovedpkt. her skal vi se, at $\mathcal{L}^1(X)$ er fuldst., altså et Banach rum.

<u>Sætn. 1.</u> <u>Lad</u> $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}^1(X)$ <u>og</u> $\sum_n \|f_n\|_1 < \infty$.

(1) <u>Rækken</u> $\sum_n f_n(x)$ <u>er da absolut konverg.</u> <u>for næsten alle</u> x <u>m.h.t.</u> I.

Sætte $f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & \text{når rækken abs konv.} \\ 0 & \text{ellers (uvæs.)} \end{cases}$

(2) $f \in \mathcal{F}^1(X)$ og $\|f - \sum_{i=1}^n f_i\|_1 \to 0$ (rækken $\sum_n f_n$ konv. m. sum f i seminorm $\|\ \|_1$).

Bevis.

(1). $\bar{I}(\sum_n |f_n|) \leq \sum_n \bar{I}(|f_n|) = \sum_n \|f_n\|_1 < \infty$ (corollar s. 30),

følgelig er $\sum_n |f_n(x)| < \infty$ for næsten alle x (iii), s. 32.

(2). $|f| \leq \sum_n |f_n|$, dermed $\|f\|_1 = \bar{I}(|f|) \leq \bar{I}(\sum_n |f_n|) < \infty$, altså $f \in \mathcal{F}^1(X)$.

For hvert n: $|f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)| \leq \sum_{n+1}^\infty |f_i(x)|$ for næsten alle x

$\|f - \sum_1^n f_i\|_1 = \bar{I}(|f - \sum_1^n f_i|) \leq \bar{I}(\sum_{n+1}^\infty |f_i|) \leq \sum_{n+1}^\infty \bar{I}(|f_i|) = \sum_{n+1}^\infty \|f_i\|_1$

3.10.69

<u>Sætn.</u> 2. Rummet $F^1(X)$, $\|\ \|_1$ er fuldst., altså et Banach rum.

Dvs. for $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}^1(X)$ gælder: $\|f_m - f_n\|_1 \to 0$ medf. $\exists f \in \mathcal{F}^1(X)$: $\|f - f_n\|_1 \to 0$

Bevis. Vælge delfølge $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots$, så $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \infty$, f.eks. $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$.

Iflg. sætn. 1 er da $f_{n_1}(x) + \sum_k (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ konverg. for næsten alle x,

dvs. $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots$ " " " " x,

summen/grænsefkt.nen $f \in \mathcal{F}^1(X)$ og $\|f - f_{n_k}\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Men hermed $\|f - f_n\|_1 \to 0$.

(Riesz/Fischer).

<u>Teorem.</u> <u>Rummet</u> $\mathcal{L}^1(X)$, $\|\ \|_1$ <u>er fuldst.</u>, <u>altså et Banach rum.</u>

Thi F^1 er fuldst., og $\mathcal{L}^1$ er iflg. sin defin. afsluttet i F^1.

<u>Bemærkning.</u> Beviset for sætn. 2 giver også:
<u>Er</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}^1(X)$, $f \in \mathcal{F}^1(X)$ <u>og</u> $\|f - f_n\|_1 \to 0$, <u>da findes delfølge</u> $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$, <u>så</u>
$$f_{n_k}(x) \to f(x) \quad \text{for næsten alle } x \in X.$$

Det foregående gælder såvel for kompl. som for reelle fkt.ner. Nu et par sætninger om reelle fkt.r. Bygge på sætn. 3. for pos. fkt.ner.

<u>Sætn. 3.</u> <u>Er</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}(X)$ <u>og</u> $\sum_n \int |f_n| dI < \infty$, <u>da er</u> $\sum_n f_n \in \mathcal{L}$ <u>og</u>
$$\int \Big(\sum_n f_n\Big) dI = \sum_n \int f_n \, dI.$$

Iflg. <u>sætn. 1</u> er nemlig $f = \sum_n f_n \in \mathcal{F}^1$ og $\|f - \sum_{i=1}^{n} f_n\|_1 \to 0$
Heraf påstanden, idet $\mathcal{L}$ er afsluttet i $\mathcal{F}$ og $\int$ kontin.

<u>Sætn. 4.</u> <u>Er</u> $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, <u>alle</u> $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ <u>og</u> $\sup_n \int f_n \, dI < \infty$, <u>da er</u> $\sup_n f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ og
$$\int (\sup f_n) dI = \lim \int f_n \, dI.$$

Vi kan antage alle f_n endel. Videre $f_1 = 0$, ellers erstatte f_n med $f_n - f_1$. Da:
$$\sup f_n = \sum_1^{\infty} (f_{n+1} - f_n), \qquad \int f_n \, dI = \sum_{i=1}^{n-1} \int (f_{i+1} - f_i) dI$$
og sætn. 3 giver det ønskede.

<u>Corollar.</u> <u>Er</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ <u>og findes</u> $h \geq 0$ <u>med</u> $\|h\|_1 < \infty$, <u>så</u> $\forall n: f_n \leq h$, <u>da er</u> $\sup_n f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.
Hertil anvende sætn. 4 på $g_n = f_1 \vee \dots \vee f_n$. $\int g_n \, dI \leq \int (g_n \vee 0) dI = \bar{I}(g_n \vee 0) \leq \|h\|_1$

÷ Øvelse. Vis sætn. 4 ved teoremet og den følgende bemærkn.

<u>Sætn. 5.</u> <u>Er</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, <u>findes</u> $h \geq 0$ <u>med</u> $\|h\|_1 < \infty$ <u>så</u> $\forall n: f_n \leq h$, <u>og er</u> $\lim_n \sup \int f_n \, dI > -\infty$,
<u>da er</u> $\lim \sup f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ <u>og</u> $\quad \int \lim \sup f_n \, dI \geq \lim \sup \int f_n \, dI$.

<u>Bemærkn.</u> Ganske tilsv. gælder eksempelvis om dobbeltfølger (f_{mn}), $m, n \in \mathbb{N}$ med
$$\lim \sup f_{mn} = \inf_{p,q} \sup_{m \geq p, n \geq q} f_{mn} = \inf_p \sup_{m,n \geq p} f_{mn}$$

Bevis (eksempelvis for dobbeltfølge):
Iflg. corollar til sætn. 4 er $g_p = \sup_{m,n \geq p} f_{mn} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$.
Klart: $\int g_p \geq \sup_{m,n \geq p} \int f_{m,n}$, dermed $\inf_p \int g_p \geq \inf_p \sup_{m,n \geq p} \int f_{mn} = \lim_{m,n} \sup \int f_{m,n} > -\infty$.

På $g_1 \geq g_2 \geq \dots$ anvende analoge til sætn. 4:
$$\lim_{m,n} \sup f_{mn} = \inf_p g_p \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \text{ og } \int \inf g_p = \lim_p \int g_p \geq \lim_{m,n} \sup \int f_{m,n}$$

Nu påny reelle ell. kompl. fkt'r uden forskel, f. ex. skrive for kompl.

<u>Lebesgues sætn. om majoriseret grænseovergang.</u>

<u>Er</u> $f(x) = \lim_n f_n(x)$ <u>for (næsten) alle</u> x, <u>hvor</u> $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$, <u>og findes</u> $h \geqq 0$ <u>med</u> $\|h\|_1 < \infty$,
<u>så</u> $\forall n: |f_n| \leqq h$, <u>da er</u>

$$f \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C}), \quad \|f - f_n\|_1 \to 0 \quad \text{og } \underset{(v), s.34}{\underline{\text{dermed}}} \quad \int f\,dI = \lim_n \int f_n\,dI.$$

Bevis. På dobbeltfølgen $g_{mn} = |f_m - f_n|$ kan vi anvende bemærkn. til sætn. 5,
idet $g_{mn} \leqq 2h$. Herved $\limsup_{m,n} \int |f_m - f_n|\,dI \leqq \int \limsup_{m,n} |f_m - f_n|\,dI$.

Da $f_1(x), f_2(x), \dots$ konv., så også Cauchy følge, <u>altså</u> $|f_m(x) - f_n(x)| \to 0$ for $m,n \to \infty$,
dvs. $\limsup_{m,n} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$.

Følgelig $\limsup_{m,n} \|f_m - f_n\|_1 = 0$, dvs. $f_1, f_2, \dots$ Cauchy følge i $\mathcal{L}(X,\mathbb{C})$.
<u>Da</u> $L(X,\mathbb{C})$ <u>fuldst.</u> (Riesz/Fischer, s. 36), findes $g \in \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, så $\|g - f_n\|_1 \to 0$.
Og da delfølge $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots \to g$ næsten overalt (bem., s. 37), må $g \underset{I}{\sim} f$.

.10.69

Sætn. 1, 2, Riesz/Fischers teorem, bemærkning samt Lebesgues sætn. gælder uforandret for vilk. Radon mål J. (Alle indgående begreber sammenfaldende for J og $|J|$. Undtagelse: $\int f\,dJ = \lim_n \int f_n\,dJ$ i Lebesgues sætn., hvad imidlertid følger af $\|f - f_n\|_1 \to 0$.)

I sætn. 3 ændre forudsætn. til $\sum_n \|f_n\|_1 = \sum_n \int |f_n|\,d|J| < \infty$, i sætn. 4 tilsv. til $\sup_n \int |f_n|\,d|J| < \infty$ (så fungerer beviserne). Sætn. 5 falder bort.

<u>Integrable mgdr.</u>

Lad J være et Radon integr. i lokalt kompakt rum X.

En mgd. $A \subseteq X$ kaldes <u>integrabel</u> m.h.t. J, hvis $1_A \in \mathcal{L}^1_J(X)$.

Mgden $\mathcal{G}$ af integrable mgdr er en δ-<u>ring</u>, dvs.

1° $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{G}$

2° $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$; $\quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$, alle $A_n \subseteq$ samme $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

Bevis: $\quad 1_{A \cup B} = 1_A \vee 1_B$, $1_{A \cap B} = 1_A \wedge 1_B$, $\ 1_{A \setminus B} = 1_A \vee 1_B - 1_B$.

For $\bigcap A_n$ kan antages $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ (ellers erstatte A_n med $A_1 \cap \dots \cap A_n$).

Da er $1_{\bigcap A_n} = \lim_n 1_{A_n}$ og grænseoverg. majoriseret af 1_{A_1}.

For $\bigcup A_n$ kan antages $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$.

For $A \in \mathcal{G}$ kaldes $\nu(A) = \int 1_A \, dJ$ <u>målet</u> af A m.h.t. J.

ν er additiv:

$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$, når $A, B \in \mathcal{G}$, $A \cap B = \emptyset$.

thi $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$.

ν er fuldstændig additiv:

$\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$, når $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{G}$, parvis disj. <u>og</u> $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$

thi $1_{\bigcup A_n} = \sum_n 1_{A_n}$ (benyt sætn. 3 s. 39-40, ell. Lebesgues sætn. på afsnittene)

Også bemærke: $\quad \nu(A_n) \to \nu(\bigcup_n A_n)$, når $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, alle $A_n \in \mathcal{G}$ og $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$

$\nu(A_n) \to \nu(\bigcap_n A_n)$, når $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, alle $A_n \in \mathcal{G}$.

Nu inddrage pos. Radon integral $I = |J|$ med tilh. mål $\mu = |\nu|$ og ydre mål $\bar{\mu}$.

For hvert $A \subseteq X$ er da $\|1_A\|_1 = \bar{I}(1_A) = \bar{\mu}(A)$,

for $A \in \mathcal{G}$ tillige $\bar{I}(1_A) = \int 1_A \, dI = \mu(A)$. $\qquad$ (s. 35)

Er $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$ og $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, da er $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$

Bevis. Idet $1_{A_n} \leq h$, hvor $h = \sum_n 1_{A_n}$ har $\|h\|_1 = \bar{I}(h) \leq \sum \bar{I}(1_A) < \infty$ (coroll. s. 30),

fås $1_{\bigcup A_n} = \sup_n 1_{A_n} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ iflg. coroll. til sætn. 4, s. 39.

Er $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, alle $A_n \in \mathcal{G}$ og $\sup \mu(A_n) < \infty$, da er $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$

Af sætn. 4, s. 39.

$N \subseteq X$ er nulmgd, netop hvis $N \in \mathcal{G}$ med $\mu(N) = 0$

Nødv. ses af $1_N \sim 0$.

En åben mgd. A er integrabel, netop hvis $\bar{\mu}(A) < \infty$. Spec. er åben mgd. integr., hvis dens afslutn. er kompakt

Af (ix) s. 35, idet $1_A \in \mathcal{J}_+$. Tilføjelsen af (v), s. 31.

En afsluttet mgd. A er integrabel, netop hvis $\bar{\mu}(A) < \infty$. Spec. er en kompakt mgd. integrabel.

Thi 1_A er opad halvkontin, nemlig $1_A = -1_{CA} + 1_X$, og der gælder:

En pos., opad halvkont. fkt. f med $\bar{I}(f) < \infty$ er integrabel.

Bevis. Der findes $h \in \mathcal{J}_+$, $h \geq f$ med $\bar{I}(h) < \infty$; dermed $h \in \mathcal{L}$ ((ix), s. 35).

Idé: udnytte $f \sim h - (h-f)$, vise $h - f \in \mathcal{L}$

nemlig $f(x) = h(x) - (h(x) - f(x))$ når $h(x) < \infty$,
altså for næsten alle x, da $\bar{I}(h) < \infty$ ((iii), s. 32)

$h - f = h + (-f)$ er nedad halvkont. i åbne mgd $\{x \mid f(x) < \infty\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \{x \mid f(x) < a\}$, hvilken værdi vi end benytter i pkt.r x med $f(x) = \infty$ (hvormed $h(x) = \infty$)

valg af 0 sikrer $h - f \in \mathcal{J}_+$.

Nu: $h - f \in \mathcal{J}_+$, $\bar{I}(h-f) \leq \bar{I}(h) < \infty$, følgelig $h - f \in \mathcal{L}$ ((ix), s. 35).

sml. (iv), s. 26

27. 10. 69

Totalmgden X er integrabel (dvs. de konstante fkt.r integrable), netop hvis J er begrænset. I bekr. fald: $|\nu|(X)$ = normen af J.

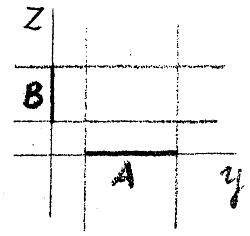
Bevis. J begr. $\underset{\text{øvelse s. 37}}{\Longleftrightarrow}$ I begr. $\underset{\text{øvelse s. 31}}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{\mu}(X) < \infty$ $\underset{X \text{ åben}}{\Longleftrightarrow}$ X integr.

I bekr. fald: $\mu(X) = \bar{\mu}(X) \underset{\text{s. 31}}{=}$ normen af I $\underset{\text{s. 37}}{=}$ normen af J.

§4. Produktintegral.

Produkttopologi.

Givne topologier i mgd.r Y og Z giver anledning til en topologi i det cartesiske produkt $Y \times Z$, bestemt ved, at projektionerne $(y,z) \xrightarrow{\pi_1} y$ og $(y,z) \xrightarrow{\pi_2} z$ ønskes kontin. og topologien i øvrigt grovest mulig.



Dvs.: Så få åbne mgd.r som muligt omfattende
enhv. mgd. $A \times Z$, A åben i Y
enhv. mgd. $Y \times B$, B åben i Z.
Mgd.r $A \times B$, A åben i Y, B åben i Z og alle foreningsmgd.r af sådanne må altså med – og dermed stoppes.

Hermed: W omegn af $(y,z) \iff \exists\, A \times B$, A åben i Y, B åben i Z : $(y,z) \in A \times B \subseteq W$
$\iff \exists$ omegn U af y $\exists$ omegn V af z : $U \times V \subseteq W$.

Navn: Produkttopologien. $Y \times Z$ med produkttopologi: produktrum.
NB. Når de givne topologier er Hausdorff, så også produkttopologien.

Fkt. $f: Y \times Z \to$ topol. rum kontin. i (y,z) netop hvis
$\forall$ omegn W af $f(y,z)$ $\exists$ omegne U af y, V af z $\forall \eta \in U, \zeta \in V$: $f(\eta,\zeta) \in W$.

Eks. $\mathbb{R}^{p+q}$ med sædv. topologi er produktrum af $\mathbb{R}^p$ og $\mathbb{R}^q$.

Med $A \subseteq Y$ og $B \subseteq Z$ er også $A \times B$ åben, hhv. afsluttet,
thi $A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$

Tillige gælder

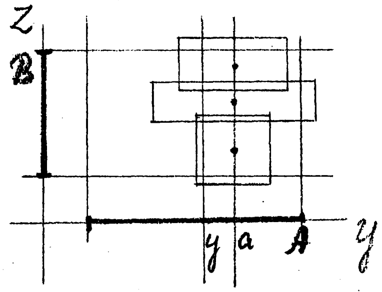
Trivielle Tychonoff sætn.: Med $A \subseteq Y$ og $B \subseteq Z$ er også $A \times B$ kompakt.
Bevis: se f.eks. Nachbin: The Haar integral, s. 42

Corollar: Med Y og Z er også $Y \times Z$ lokalt kompakt.

Dobbeltintegral.

Lad I og J være vilk. Radon integraler i lokalt komp. rum Y og Z, og lad $f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$.

Vi vil vise, at v.s. og h.s. har mening og at $\quad I_y J_z f(y,z) = J_z I_y f(y,z)$.



Vælge kompakte mgd. $A \subseteq Y$ og $B \subseteq Z$, så
$f(y,z) = 0$ for $(y,z) \notin A \times B$

(Støtten $C \subseteq Y \times Z$ for f er kompakt, vi kan benytte $A = \pi_y(C)$, $B = \pi_z(C)$.)

Vi ved, at $k, l \in \mathbb{R}_+$ findes, så
$\forall g \in \mathcal{K}_A(Y): |I(g)| \leq k \|g\|_\infty$ og anal.

For vilk. $y \in Y$ klart at $f(y,\cdot) \in \mathcal{K}_B(Z)$, spec. eksisterer $J_z f(y,z)$.

Vise $J_z f(\cdot, z)$ kontin. i vilk. $a \in Y$:

Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. For hvert (a,z), $z \in B$, tænkes valgt åben omegn $U_z \times V_z$, hvori oscillationen af f højst ε. Videre end. mange $z_i \in B$, så $B \subseteq \bigcup_i V_{z_i}$
(B er jo kompakt)

Da er $U = \bigcap_i U_{z_i}$ omegn af a,
og for hvert $y \in U$ gælder $\quad \forall z: |f(y,z) - f(a,z)| \leq \varepsilon$,
altså $\|f(y,\cdot) - f(a,\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon$,

dermed, idet støtte $\subseteq B$,
$$|J_z f(y,z) - J_z f(a,z)| = |J(f(y,\cdot) - f(a,\cdot))| \leq l\varepsilon$$

Hermed $J_z f(\cdot, z) \in \mathcal{K}_A(Y)$, spec. exist. $I_y J_z f(y,z)$.

Analogt $J_z I_y f(y,z)$

Mangler $=$, det vanskeligste. Bygge beviset på simpelt specialtilfælde:

<u>Er</u> $g \in \mathcal{K}(Y)$, $h \in \mathcal{K}(Z)$, <u>da vil</u> $(y,z) \to g(y)h(z)$ <u>tilh.</u> $\mathcal{K}(Y \times Z)$ <u>og</u>
$$I_y J_z(g(y)h(z)) = I(g)J(h) = J_z I_y(g(y)h(z)).$$

Diskutere approksimation af f med sådanne fktner. Benytte Stone/Weierstrass' sætning.

Dog først bemærke:

<u>Funktionalen</u> $f \to I_y J_z f(y,z)$, $f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$ <u>er Radon integral i</u> $Y \times Z$. (<u>Tilsv. gælder</u> $f \to J_z I_y f(y,z)$.)

Bevis. Betegne fkt.nalen med K Klart, at linear.

Vi skal for vilk. komp. $C \subseteq Y \times Z$ finde $m \in \mathbb{R}_+$, så $\forall f \in \mathcal{K}_C : |K(f)| \leqq m \|f\|_\infty$.

Bemærk $C \subseteq A \times B$, A, B komp. Til A, B konstanter $k, l \in \mathbb{R}_+$ (se s. 44)

For $f \in \mathcal{K}_{A \times B}$:

For hvert $y \in Y$ er $f(y,\cdot) \in \mathcal{K}_B(Z)$, dermed $|J_z f(y,z)| \leqq l \|f(y,\cdot)\|_\infty \leqq l \|f\|_\infty$

altså $\|J_z f(\cdot, z)\|_\infty \leqq l \|f\|_\infty$

30.10.69. Da nu $J_z f(\cdot, z) \in \mathcal{K}_A(Y)$, har vi $|I_y J_z f(y,z)| \leqq k \|J_z f(\cdot, z)\|_\infty \leqq kl \|f\|_\infty$

Dieudonnés approximationssætning.

Er A og $\mathcal{B}$, dermed også $A\times\mathcal{B}$, kompakte rum, da vil fkt.nerne af form

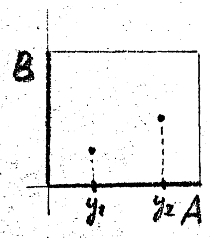
$$(y,z)\to\sum_i g_i(y)h_i(z),\quad \text{end. sum},\quad g_i\in\mathcal{C}(A),\ h_i\in\mathcal{C}(B)$$

ligge tæt i $\mathcal{C}(A\times B)$ ved uniforme norm $\|\ \|_\infty$.

Bevis. Tilstrækkeligt at betragte reelle tilfælde.
De nævnte fkt.ner udgør en algebra $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}(A\times B,\mathbb{R})$, spec. er

$$\Big(\sum_i g_i(y)h_i(z)\Big)\Big(\sum_j g_j'(y)h_j'(z)\Big)=\sum_{i,j} g_i(y)g_j'(y)\cdot h_i(z)h_j'(z).$$

Klart, at $\mathcal{A}$ skiller pkt.rne. Er nemlig $(y_1,z_1)\neq(y_2,z_2)$, f.eks. $y_1\neq y_2$,

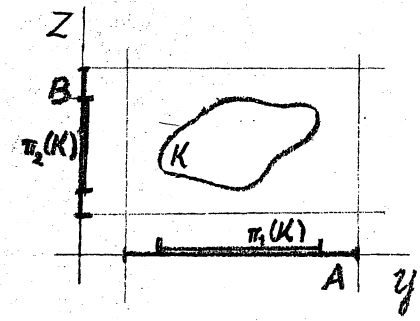


findes jo $g\in\mathcal{C}(A)$ med $g(y_1)=1$, $g(y_2)=0$ (Urysohn, s.5)
og $(y,z)\to g(y)\cdot 1$ skiller.
Da jo ikke alle fkt.nerne 0 i samme pkt. (konstante fkt.r med),
følger påstanden af Stone/Weierstrass' sætn. (s.8)

Af resultatet kan sluttes

Approximationssætn. Lad Y og Z være lokalt kompakte rum, $A\subseteq Y$ og $B\subseteq Z$ kompakte og $f\in\mathcal{K}_{A\times B}(Y\times Z)$.
Til hvert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes da end. mange $g_1,\dots,g_n\in\mathcal{K}_A(Y)$ og $h_1,\dots,h_n\in\mathcal{K}_B(Z)$, så

$$\forall y\in Y\ \forall z\in Z:\ \Big|f(y,z)-\sum_{i=1}^n g_i(y)h_i(z)\Big|\leq\varepsilon.$$



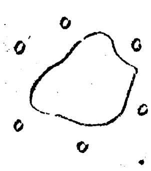
Bevis. A og B betragtes med sportopol. fra Y og Z, er da kompakte rum.
For $A\times B$ kommer på tale dels produkttopol. af lige nævnte, dels sportopol. fra $Y\times Z$. Identiske!

Idet $f|_{A\times B}\in\mathcal{C}(A\times B)$, findes iflg. foregående sætn. $G_1,\dots,G_n\in\mathcal{C}(A)$ og $H_1,\dots,H_n\in\mathcal{C}(B)$, så

$$\forall y\in A\ \forall z\in B:\ \Big|f(y,z)-\sum_i G_i(y)H_i(z)\Big|<\varepsilon$$

Problem: modificere G_i'erne, så udvidelse med værdi 0 udenfor A fører til kontin. fkt.r på Y. Indskyde

Lemma. Lad A være en afsluttet del af topol. rum Y og $G\in\mathcal{C}(A)$. Udvidelsen af G med værdi 0 udenfor A betegnes g. Da:



$$g\in\mathcal{C}(Y)\iff \forall y\in \operatorname{fr}A:\ G(y)=0.$$

Her betegner $\operatorname{fr}A=\overline{A}\cap\overline{\complement A}$ randen af A i Y. NB: $\operatorname{fr}A\subseteq A$.

"⇒", klar. "⇐", klart at g kontin. i indre og ydre pkt.r for A; gå randpkt. efter.

Tilbage til bevis for approx. sætn.: nok at modificere G_i'er, så de er 0 i hvert pkt. af randen fr A af A i Y, og tilsv. H_i'erne.

Mgd. $K = \{(y,z) \mid |f(y,z)| \geqq \varepsilon\}$ er kompakt, nemlig afsluttet og del af $A \times B$.
$A \times B$ er omegn af K i $Y \times Z$, nemlig $K \subseteq \underbrace{\{(y,z) \mid f(y,z) \neq 0\}}_{\text{åben}} \subseteq A \times B$

Da er også $\pi_1(K)$ kompakt og $A = \pi_1(A \times B)$ en omegn heraf i Y
(projektion π_1 er kontin. og åben),
hvorfor (Urysohn, s.12) kontin. $u: Y \to [0,1]$ findes, så
$\forall y \in \pi_1(K): u(y) = 1$ og $\forall y \in \complement A: u(y) = 0$;
det sidste medf. $\forall y \in \text{fr}\, A: u(y) = 0$. Sætte $U = u|_A$.

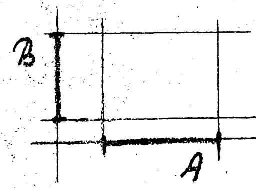
Tilsv. findes kontin. $V: B \to [0,1]$, så $\forall z \in \pi_2(K): V(z) = 1$, $\forall z \in \text{fr}\, B: V(z) = 0$.

Nu for hvert $y \in A, z \in B$ dels $|f(y,z)U(y)V(z) - \sum_i G_i(y)U(y)H_i(z)V(z)| < \varepsilon$
dels $|f(y,z)U(y)V(z) - f(y,z)| < \varepsilon$
idet $0 \leqq U(y)V(z) \leqq 1$ sikrer første uligh., samt sidste når $(y,z) \in A \times B \setminus K$,
medens $U(y)V(z) = 1$ når $(y,z) \in \pi_1(K) \times \pi_2(K) \supseteq K$

Altså: $G_i \cdot U$ og $H_i \cdot V$, $i = 1, \dots, n$ ønskede modifikationer (svarende til 2ε)

Corollar. To Radon integraler H og K i $Y \times Z$ er identiske, blot de stemmer overens på enhver fkt.
$(y,z) \to g(y)h(z)$, $y,z \in Y \times Z$,
med $g \in \mathcal{K}(Y)$, $h \in \mathcal{K}(Z)$, endda nok for $g \in \mathcal{K}^+(Y)$, $h \in \mathcal{K}^+(Z)$.

Bevis. Betragte vilk. $f \in \mathcal{K}(Y \times Z, \mathbb{R})$, vise $H(f) = K(f)$.



Vælge kompakte mgd.r $A \subseteq Y$ og $B \subseteq Z$, så $f \in \mathcal{K}_{A \times B}$ (sm. s. 44).
Derpå til $A \times B$ konst. $c, d \in \mathbb{R}_+$, så
$|H(\varphi)| \leqq c\|\varphi\|_\infty$, $|K(\varphi)| \leqq d\|\varphi\|_\infty$ for hvert $\varphi \in \mathcal{K}_{A \times B}$

Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{K}_A(Y, \mathbb{R})$ og $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{K}_B(Y, \mathbb{R})$, så
$(y,z) \to f(y,z) - \sum_i g_i(y)h_i(z)$ har uniform norm $\leqq \varepsilon$ (s.46)

Da denne fkt.s støtte $\subseteq A\times B$, følger

$$|H_{y,z}(f(y,z)-\sum_i g_i(y)h_i(z))| = |H(f)-\sum_i H_{y,z}(g_i(y)h_i(z))| \leqq c\varepsilon$$

og ligeledes
$$|K(f)-\sum_i K_{y,z}(g_i(y)h_i(z))| \leqq d\varepsilon,$$

altså $|H(f)-K(f)| \leqq (c+d)\varepsilon.$

Indskrænkningen til pos. g og h begrundes ved

$$g(y)h(z) = g^+(y)h^+(z) - g^+(y)h^-(z) - g^-(y)h^+(z) + g^-(y)h^-(y)$$

med $g^+ = g\vee 0$, $g^- = -(g\wedge 0)$ og anal.

Produktintegral.

Lad I og J være vilk. Radon integraler i lokalt komp. rum Y og Z.

Som vist s. 45 er funktionalerne H og K defin. ved dobbeltintegralerne

$$H(f) = I_y J_z f(y,z), \quad K(f) = J_z I_y f(y,z) \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$$

Radon integraler i $Y \times Z$, og de stemmer overens for fktner $g(y)h(z)$, $g \in \mathcal{K}(Y)$, $h \in \mathcal{K}(Z)$. De er da iflg. corollar s. 47 identiske:

Sætning. For hvert $f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$ er $\quad I_y J_z f(y,z) = J_z I_y f(y,z)$

Defin. Radon integralet $f \to I_y J_z f(y,z) = J_z I_y f(y,z)$, $f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$ i $Y \times Z$ kaldes produktet af I og J, det betegnes $I \otimes J$.

Altså $\quad (I \otimes J)(f) = I_y J_z f(y,z) = J_z I_y f(y,z), \quad f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$.

Er I og J reelle, henh. pos., så også $I \otimes J$. Klart.

Er I og J begr., så også $I \otimes J$, og $M_{I \otimes J} = M_I M_J$. Øvelse.

Ræsonnement som s. 45 viser $|I_y J_z f(y,z)| \leq M_I M_J \|f\|_\infty$

Ved at tage $g \in \mathcal{K}(Y)$, $\|g\|_\infty \leq 1$ med $|I(g)|$ nær M_I
$h \in \mathcal{K}(Z)$, $\|h\|_\infty \leq 1$ med $|J(h)|$ nær M_J, fås $|I(g) J(h)|$ nær $M_I M_J$.

11.69

Generelt gælder: $|I \otimes J| = |I| \otimes |J|$.

Bevis.

1° $\forall f \in \mathcal{K}(Y \times Z)$: $|(I \otimes J)(f)| \leq (|I| \otimes |J|)(|f|)$,
altså (s. 36): $|I \otimes J| \leq |I| \otimes |J|$.

Thi for hvert $y \in Y$: $|J_z f(y,z)| \leq |J|_z (|f(y,z)|)$,

dermed $|I_y J_z f(y,z)| \leq |I|_y (|J_z f(y,z)|) \leq |I|_y |J|_z (|f(y,z)|)$

2° Iflg. corollaret s. 47 alt i alt nok at vise
$$|I \otimes J|(f) = (|I| \otimes |J|)(f) = |I|(g)\, |J|(h)$$
for f af form $(y,z) \to g(y)h(z)$ med $g \in \mathcal{K}^+(Y)$, $h \in \mathcal{K}^+(Z)$.
Her har vi $\leq$ i kraft af 1°. Etablere $\geq$ ved

3° For vilk. $g^* \in \mathcal{K}(Y)$, $|g^*| \leq g$ og $h^* \in \mathcal{K}(Z)$, $|h^*| \leq h$ er
$$|I(g^*)|\,|J(h^*)| \leq |I \otimes J|_{y,z}(g(y)h(z))$$
Dette følger imidlertid af $g^*(y)h^*(z) \in \mathcal{K}(Y \times Z)$, $|g^*(y)h^*(z)| \leq g(y)h(z)$
idet $\quad (I \otimes J)_{y,z}(g^*(y)h^*(z)) = I(g^*)\, J(h^*)$.

Med henblik på Lebesgue/Fubini et par lemmaer vedr. pos. I og J.

1° For hvert $h \in \mathcal{F}_+(Y\times Z)$ er $\overline{I\otimes J}(h) = \overline{I}_y \underbrace{\overline{J}_z h(y,z)}_{\text{(nedad halvkont. fkt. af } y)}$

2° For hver fkt. $f: Y\times Z \to \{0\}\cup\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ er $\overline{I\otimes J}(f) \geq \overline{I}_y \overline{J}_z f(y,z)$.

Bevis for 1° ved $h = \sup_{f\in\mathcal{K}_+, f\leq h} f$ (s.26). Sætn. 1, s.27 anvendes et par gange.

2° næsten umiddelbart ved def. af øvre integral. (Neumark s. 158, I og II). ej udføre.

<u>Lebesgue/Fubinis sætn.</u> <u>For</u> $f \in \mathcal{L}_{I\otimes J}(Y\times Z)$ <u>er</u>

$f(y,\cdot) \in \mathcal{L}_J(Z)$ <u>for næsten alle</u> $y \in Y$ <u>m.h.t.</u> I,

$y \to \int f(y,\cdot)\,dJ = \int f(y,z)\,dJ(z)$ tilh. $\mathcal{L}_I(Y)$ (kun defin. p.p. m.h.t. I),

~~og~~ $\int f\,d\,I\otimes J = \int\left(\int f(y,z)\,dJ(z)\right)dI(y) = \int\left(\int f(y,z)\,dI(y)\right)dJ(z)$

Her er I og J atter vilk. Radon integraler.

Bevis. Vælge $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{K}(Y\times Z)$ med $\|f-f_n\|_1 = \overline{|I\otimes J|}(|f-f_n|) \to 0$

hvormed $\int f\,d(I\otimes J) = \lim_n I\otimes J(f_n)$.

tage linie fra h. mod v.

$a_n = \overline{|I|}_y \overline{|J|}_z (|f(y,z)-f_n(y,z)|) \overset{2°}{\leq} \overline{|I|\otimes|J|}(|f-f_n|) = \overline{|I\otimes J|}(|f-f_n|)$, altså $a_n \to 0$.

Nu $a_n = \|\,\overline{|J|}_z(|f(\cdot,z)-f_n(\cdot,z)|) - 0\,\|_1$. Ved udtynding kan vi da opnå (s.39), at

for næsten ethv. $y \in Y$: $\overline{|J|}_z(|f(y,z)-f_{n_k}(y,z)|) = \|f(y,\cdot)-f_{n_k}(y,\cdot)\|_1 \to 0$,

dermed $f(y,\cdot) \in \mathcal{L}_J(Z)$.

Dernæst $\|\int f(\cdot,z)\,dJ(z) - J_z f_n(\cdot,z)\|_1$

$= \overline{|I|}_y\left(\left|\int (f(y,z)-f_n(y,z))\,dJ(z)\right|\right) \leq \overline{|I|}_y\left(\int |f(y,z)-f_n(y,z)|\,d|J|(z)\right) = a_n \to 0$,

hvormed $\int f(\cdot,z)\,dJ(z) \in \mathcal{L}_I(Y)$ og $\int\left(\int f(y,z)\,dJ(z)\right)dI(y) = \lim_n I_y J_z f_n(y,z)$.

Færdig, idet $I\otimes J(f_n) = I_y J_z f_n(y,z)$.

§1. Invariant integral i lokalt kompakt gruppe.

Topologisk gruppe

Mgd. G med gruppekompos. $\cdot$ og (Hausdorff) topologi kaldes en topologisk gruppe, hvis

kompositionen $(x,y) \to xy$ og inversafb. $x \to x^{-1}$ er kontinuerte

$G \times G \to G$ $\qquad\qquad$ $G \to G$

Eks. (1) $\mathbb{R}^n$ med $+$ og sædv. topologi

6.11.69 (2) Cirkelgruppen $\mathbb{R}(\text{mod } 2\pi) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ med $+$ og sædv. topologi. Kan opfattes som (dvs. er iso- og homeomorf med): $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ med $\cdot$ og sædv. topologi.

(3) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ med $\cdot$ og sædv. topologi, tilsv. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ell. $\mathbb{R}_+$.

(4) Mgd. $Gl(n, \mathbb{R})$ af regul. $(n \times n)$-matricer med matrixmultipl. og topologi induceret fra $\mathbb{R}^{n^2}$. Tilsv. $Gl(n, \mathbb{C})$. Undergrupper heraf, f.eks. ortogonale, henh. unitære gruppe.

Lad nu G være en topolog. gruppe.

Venstre translationen $x \xrightarrow{L_a} ax$, $x \in G$, med vilk. $a \in G$, er homeomorf afbildn. af G på sig selv.

thi bijektiv og tillige med sin omvendte $L_{a^{-1}}$ kontinuert

Billedet $L_a(A)$ af mgd. $A \subseteq G$ betegnes også aA.
For fkt. f def. på G sættes $L_a f = f \circ (L_a)^{-1} = f \circ L_{a^{-1}}$, altså

$$L_a f(x) = f(a^{-1}x), \quad x \in G$$

(Kunne have fæstet opmærksomhed ved højre translationer.)

Inversafbildn. $x \xrightarrow{inv} x^{-1}$ er homeomorf G på sig selv
thi bijektiv, kontin. og sin egen inverse. $\qquad$ Billedet af $A \subseteq G$ betegnes A^{-1}.

En topologisk gruppe, hvor topologien er (lokalt) kompakt kaldes en (lokalt) kompakt gruppe.

Eks. I (1), (2), (3), (4) lutter lokalt kompakte grupper.
Cirkelgruppen kompakt. Det samme gælder ortogon. og unitære grupper (nemlig begr. og afsluttet i $\mathbb{R}^{n^2}$, henh. $\mathbb{C}^{n^2}$, iflg. defin. ligninger i elementerne $|x_{11}|^2 + \ldots + |x_{n1}|^2 = 1$ osv.)

Bemærk: nok at neutrale elem. e (eller et andet pkt.) har komp. omegn, altså at der findes komp. mgd. med et indre pkt. $\qquad$ (Thi translationer homeomorfe)

Ligelig Kontinuitet.

Lad G være en topologisk gruppe.

Idet aV omegn af $a \Leftrightarrow V$ omegn af e kan man ved venstre translationer sammenkoble omegne af forsk. pkt.r. Dermed er der mulighed for at definere venstre ligelig kontin. af fkt. $f: G \to \mathbb{C}$, nemlig ved betingelsen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \text{omegn } V \text{ af } e \ \forall x,y \in G: \ y \in xV \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon,$$

hvor $y \in xV$ ensbetyd. med $x^{-1}y \in V$ (for komm. gruppe med add. skrivemåde $y - x \in V$).

V. ligelig kontin. medf. naturligvis kontin., men ej omv. (ombytning af kvantorer)

Tilsv. defineres højre ligelig kontin. !

Sætning. Enhver kontin. fkt. $f: G \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte er venstre (og højre) ligeligt kontinuert. (Nødv. for eksistens af $f \neq 0$ at G lokalt kompakt: støtte komp. med indre pkt.r.)

Bevis. Omskrive defin. ovenfor til

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \text{omegn } V \text{ af } e \ \forall x \in G \ \forall s \in V: \ |f(xs) - f(x)| < \varepsilon;$$

med $s = x^{-1}y$ er jo $y \in xV \Leftrightarrow s \in V$, og $y = xs$. (Forståeligt, at ordene venstre og højre ombyttet f.ex. hos A. Weil.)

Lad $K \subseteq G$ være kompakt, så $f(x) = 0$ for $x \notin K$. Betragte vill. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Søge omegne V', V'' af e, så

$$1^\circ \quad \forall x \in K \ \forall s \in V': \quad |f(xs) - f(x)| < \varepsilon$$

$$2^\circ \quad \forall x \in G \setminus K \ \forall s \in V'': \quad |f(xs) - f(x)| = |f(xs)| < \varepsilon;$$

da er $V = V' \cap V''$ brugbar.

1° For hvert $a \in G$ har den kontin. fkt. $(x,s) \to f(xs) - f(x)$ værdien 0 i (a,e); vi kan da tænke os valgt omegne U_a af a, V_a af e, så

$$|f(xs) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{for } x \in U_a, \ s \in V_a.$$

Allerede end. mange $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ dækker kompakte mgd. K

Som V' benytte $V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$.

2° Sætte $\{y \in G \mid |f(y)| \geq \varepsilon\} = B$

Søger V'', så $xs = y$, dvs. $x = ys^{-1}$ ikke indtræffer for noget $x \notin K, s \in V'', y \in B$;

altså: søge $W = (V'')^{-1}$ så $BW = \{yt \mid y \in B, t \in W\} \subseteq K$

Nu er $\underset{\text{afsl.}}{B} \subseteq \underset{\text{åben}}{\{y \mid f(y) \neq 0\}} \subseteq \underset{\text{komp.}}{K}$, altså B kompakt og K omegn af B

For hvert $b \in B$ tænkes valgt omegne V_b af b, W_b af e, så $yt \in K$ for $y \in V_b, t \in W_b$.
(K er jo omegn af $b = be$)

Allerede end. mange $V_{b_1}, \dots, V_{b_n}$ dækker B

Som W benytte $W_{b_1} \cap \dots \cap W_{b_n}$.

Noter os, at 2° faktisk afsluttedes med bevis for:

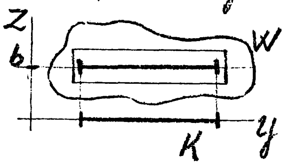
Er U omegn af kompakt mængde B i topologisk gruppe, da findes omegn W af e, så $BW \subseteq U$.

0.11.69

Øvelse. Beviset herfor og betragtningen i 1° har fælles træk. Vis, at man kunne undgå gentagelsen ved at bevise og anvende følgende lemma:

Lemma 1. Er Y og Z topol. rum og W en omegn af $K \times \{b\}$ i $Y \times Z$, hvor K kompakt, $\subseteq Y$ og $b \in Z$, da findes omegne U og V af K og b, så

$$U \times V \subseteq W \quad (\text{spec. } K \times V \subseteq W).$$



[Bevis. Tænkes for hvert $y \in K$ valgt åbne omegne U_y af y, V_y af b, så $U_y \times V_y \subseteq W$, da vil allerede end. mange $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$ overdække K. Brugbare er $U = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$, $V = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$.

1° Mgd. $\{(x,s) \in G \times G \mid |f(xs) - f(x)| < \varepsilon\}$ er åben omegn af $K \times \{e\}$.
Iflg. lemma 1 findes da omegn V' af e, så $K \times V'$ indeholdt deri.

Lemma 2. Er K omegn af kompakt mgd. A i topol. gruppe, da findes omegn V af e, så $AV = \{xs \mid x \in A, s \in V\} \subseteq K$

Thi K kan antages åben; da er $\{(x,s) \in G \times G \mid xs \in K\}$ åben omegn af $A \times \{e\}$.
Iflg. lemma 1 findes omegn V af e, så $A \times V$ indeholdt deri.

2° Sætte $\{y \in G \mid |f(y)| \geq \varepsilon\} = A$.
Søge V'', så $xs = y$, dvs. $x = ys^{-1}$ ikke indtræffer for noget $x \notin K$, $s \in V''$, $y \in A$, altså: søge omegn $(V'')^{-1}$ af e, så $A(V'')^{-1} \subseteq K$. Findes iflg. lemma 2, idet $\underset{\text{afsl.}}{A} \subseteq \underset{\text{åben}}{\{y \mid f(y) \neq 0\}} \subseteq \underset{\text{komp.}}{K}$, altså A komp. og K omegn af A.

Invariant integral.

Lad Φ være en homeomorf afbildn. af lokalt kompakt rum X på sig selv.
Med $A \subseteq X$ er også $\Phi(A)$ åben, afsluttet, kompakt og omv.
Med f er også $\Phi f = f \circ \Phi^{-1} \in \mathscr{C}, \mathscr{C}_0, \mathcal{K}, \mathcal{K}_+, \mathcal{F}, \mathcal{F}_+ \dots$ og omv.

Et Radon integral J i X kaldes <u>invariant</u> ved Φ, hvis $J(\Phi f) = J(f)$ for ethv. $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ ell. blot $\mathcal{K}_+(X)$.

I så fald:

$I = |J|$ er invariant (iflg. defin. s. 36)

$\bar{I}(\Phi f) = \bar{I}(f)$ for hvert $f \in \mathcal{F}^+$ (s. 27), videre for hver pos. fkt. f (s. 29)

$\bar{\mu}(\Phi A) = \bar{\mu}(A)$ for hvert $A \subseteq X$,

nulmgd., nulfkt. går i nulmgd., nulfkt.; ækv. fktner går i ækv. ved Φ

$\|\Phi f\|_1 = \|f\|_1$ for hver fkt. f, afstand $\|\Phi f - \Phi g\|_1 = \|f - g\|_1$.

Med f er også $\Phi f \in \mathcal{F}, \mathcal{L}$ — i sidste tilfælde $\int \Phi f \, dJ = \int f \, dJ$

(*), s. 34 (**), s. 34

Med A er også ΦA integrabel og $\nu(\Phi) = \nu(A)$.

Eks. $X = \mathbb{R}^n$; sædv. integral er invariant ved enhver affin afbildn. med determinant $= \pm 1$, spec. ved alle translationer.

<u>Hovedsætning</u> (Eksistens: A. Haar 1933 (separabel gruppe); Entydighed: J. v. Neumann 1936 (" "), A. Weil 1938 (generelt))

<u>I enhver lokalt kompakt gruppe G findes et og, pånær en konstant faktor, kun et fra 0 forsk. Radon integral, som er invariant ved alle venstre translationer. Det er</u> med passende normering <u>positivt</u> og kaldes da gruppens (venstre inv.) <u>Haar integral.</u>

Der findes naturligvis tilsv. et højre inv. De er i almindelighed forsk.

Bevis efter H. Cartan (1940) i næste §. Bygger på Weils metode, der bevarer det væsentlige i Haars oprindelige idé, men går på fktner i stedet for delmgdr.

På grund af dets simpelhed vil vi dog straks give et bevis for <u>entydigheden</u> i tilfælde af, at gruppen er <u>kommutativ</u> (hvilket forudsættes i senere kapitler).

Først et par bemærkninger om vilk. lokalt komp. gruppe G.

1° Er $A, B \subseteq G$ kompakte, så også $AB = \{yz \mid y \in A, z \in B\}$
thi AB er billede af $\underset{\text{kompakt}}{A \times B}$ ved $\underset{\text{kontin.}}{\text{kompositionen}}$ $(y,z) \to yz$.

2° Er $f \in \mathcal{K}_A(G)$, $g \in \mathcal{K}_B(G)$, hvor $A, B \subseteq G$ kompakte, da vil
$$(y,z) \to f(z)g(z^{-1}y) \quad \text{tilh.} \quad \mathcal{K}_{AB \times A}(G \times G)$$
Er yderligere J et (venstre inv.) Radon integral i G, gælder
$$y \to J_z(f(z)g(z^{-1}y)) \quad \text{tilh.} \quad \mathcal{K}_{AB}(G).$$
Bemærkning. For givet J har vi altså en komposition $*$ i $\mathcal{K}(G)$ givet ved
$$f*g\,(y) = J_z(f(z)g(z^{-1}y)), \quad y \in G.$$
Den kaldes <u>foldning</u> og spiller en fundamental rolle i de følgende kapitler.

Bevis. $f(z)g(z^{-1}y) \neq 0 \Rightarrow z \in A \wedge z^{-1}y \in B \Rightarrow y = z(z^{-1}y) \in AB \quad \wedge z \in A$

3° Venstre invarians af Radon integral J betyder i lidt anden symbolik
$$\forall a \in G\ \forall f \in \mathcal{K}: \ J_x f(x) = J_x f(a^{-1}x).$$
$$\forall a \in G\ \forall f \in \mathcal{L}_I: \ \int f(x)\,dJ(x) = \int f(a^{-1}x)\,dJ(x).$$
Det indebærer

Man kan altså ved integration mht. x erstatte x med $a^{-1}x$ (eller med ax).

Eksempel: I udtrykket for $f*g(y)$ kan z erstattes med f.eks. yz, herved
$$f*g\,(y) = J_z(f(yz)\,g(z^{-1}))$$

Nu entydighedsbeviset i kommutative tilfælde:

Lad I og J være vilk. fra 0 forsk., translationsinv. Radon integraler i kommutativ, lokalt komp. gruppe G (I og J ej nødvendigvis positive).

Vise $J = cI$ for et $c \in \mathbb{C}$.

Benytte additiv skrivemåde. For $f, g \in \mathcal{K}(G)$:

$$f *_J g\,(y) = J_z(f(z)g(-z+y)) = J_z(f(y+z)g(-z)) \qquad (J \text{ invar.})$$

Funktionen $(y,z) \to f(z)g(-z+y)$ tilh. $\mathcal{K}(G \times G)$ (s. 53, 2°),

analogt $(y,z) \to f(y+z)g(-z)$ tilh. $\mathcal{K}(G \times G)$.

Iflg. sætn. s. 49 (lille Fubini)

$$\text{dels } I(f *_J g) = I_y J_z(f(z)g(-z+y)) = J_z I_y = J_z(f(z) I_y g(-z+y)) \underset{(I \text{ invar.})}{=} I(g)J(f)$$

$$\text{dels } I(f *_J g) = I_y J_z(f(y+z)g(-z)) = J_z I_y = J_z(g(-z) I_y f(y+z)) \underset{(I \text{ højre invar.})}{=} I(f)J(\check{g}),$$

med $\check{g} = g \circ$ inversafbildn., $\check{g}(z) = g(-z)$.

Altså $\forall f, g \in \mathcal{K}(G)$: $I(g)J(f) = J(\check{g})I(f)$.

Ved at benytte et fast g med $I(g) \neq 0$ fremgår

$\forall f \in \mathcal{K}(G)$: $J(f) = \frac{J(\check{g})}{I(g)} I(f)$, dvs. $J = cI$ med $c = \frac{J(\check{g})}{I(g)}$.

Tillige bemærke: benyttes $I = J$ samt fast f med $J(f) \neq 0$ fremgår

$\forall g \in \mathcal{K}(G)$: $J(g) = J(\check{g})$, dvs. J invar. ved inversafbildn. $x \to x^{-1}$.

Notere:

<u>I en komm., lokalt kompakt gruppe findes, pånær en konstant faktor, højst et translationsinvar. Radon integral. Et sådant er tillige inversinvariant.</u>

<u>For et venstre inv. Radon integral J i vilk. lokalt komp. gruppe gælder:</u>

1° $\forall f \in \mathcal{K}$: $J(f *_J g) = J(f)J(g)$ — indicerer allerede interesse i kompos. *

2° J <u>højre invar.</u> $\Leftrightarrow$ J <u>inversinvar.</u>

1° og 2°, $\Rightarrow$ af ovenstående ved at holde rede på venstre og højre.

2°, $\Leftarrow$ beror på, at højre transl. R_a kan sammensættes af venstre transl. og inversafbild. $\mathrm{inv}: x \to x^{-1}$, nemlig $x \xrightarrow{\mathrm{inv}} x^{-1} \xrightarrow{L_a^{-1}} a^{-1}x^{-1} \xrightarrow{\mathrm{inv}} xa$, $R_a = \mathrm{inv} \circ L_{a^{-1}} \circ \mathrm{inv}$.

Regning kan opskrives $J_x(f(x)) \underset{\mathrm{inv}}{=} J_x(f(x^{-1})) \underset{L_{a^{-1}}}{=} J_x(f((ax)^{-1})) = J_x(f(x^{-1}a^{-1})) \underset{\mathrm{inv}}{=} J_x(f(xa^{-1}))$

3.11.69

Eksempler.

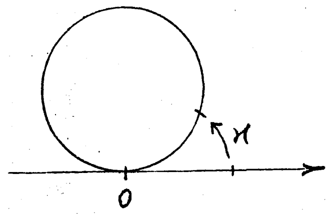
1° $\mathbb{R}^n$ med + og sædv. topologi.

Sædv. integral translationsinv.: $\int f(x)dx = \int f(x-a)dx$.

Iflg. ovenstående: eneste, pånær konst. faktor

inversinv.: $\int f(x)dx = \int f(-x)dx$

2° Cirkelgruppen $\mathbb{R}(\text{mod } 2\pi) = \mathbb{T}$ med + og sædv. topologi.



Med $\varkappa$ betegne „oprulningen": $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$.

(Realiseres $\mathbb{T}$ som komplekse enhedscirkel, er $\varkappa(x) = e^{ix}$.)

Defin. I ved $\quad I(f) = \int_0^{2\pi} f\circ\varkappa$, $\quad f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$

Bemærk: $f\circ\varkappa$ kontin. og periodisk

Gerne integr. over andet interval af længde 2π, da sædv. integral er translat.inv.!

I er pos. Radon integral i $\mathbb{T}$ (dvs. lineært og $I(f)\geq 0$ for $f \geq 0$), translationsinv.

For $h \in \mathcal{I}_+(\mathbb{T})$ er $(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} \in \mathcal{I}_+(\mathbb{R})$ og $\bar I(h) = \bar\int (h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$.

Thi $h = \sup_{f\in\mathscr{C}^+, f\leq h} f$, dermed $(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} = \sup_{f\in\mathscr{C}^+(\mathbb{T}), f\leq h} (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

og $\bar I(h) = \sup I(f) = \sup \bar\int (f\circ\varkappa)\cdot 1_{]0,2\pi[} \underset{\text{sætn. 1, s. 27}}{=} \bar\int \sup = \bar\int (h\circ\varkappa)\cdot 1_{]0,2\pi[}$

For $f: \mathbb{T}\to \{0\}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ er $\bar I(f) = \bar\int (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

„$\geq$": For hvert $h\in\mathcal{I}_+$, $h\geq f$ er $(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} \geq (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$,
dermed $\bar I(h) = \bar\int(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} \geq \bar\int (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

„$\leq$": Kan antage $f(0)=0$. For hvert $H\in\mathcal{I}_+(\mathbb{R})$, $H\geq (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$
er $H \geq H\cdot 1_{]0,2\pi[} \geq (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

Nu $H\cdot 1_{]0,2\pi[}$ falder i $[0,2\pi]$ sammen med vis period. fkt, dvs. fkt. $h\circ\varkappa$; her er $h\circ\varkappa\in\mathcal{I}^+(\mathbb{R})$, dvs. $h\in\mathcal{I}^+$; tillige $h\geq f$. Dermed
$\bar\int H \geq \bar\int H\cdot 1_{]0,2\pi[} = \bar\int(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} = \bar I(h) \geq \bar I(f)$.

Dermed for vilk. fkt. f på $\mathbb{T}$: $\|f\|_1$ (m.h.t. I) $= \|(f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}\|_1$

Videre: $f\in\mathcal{L}_I \Leftrightarrow (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, i bekr. fald $\int f\,dI = \int (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

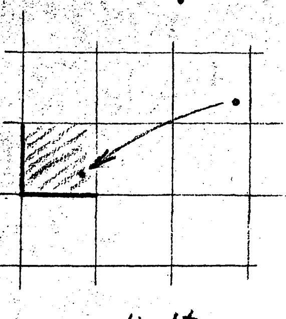
„⇒" Vælges $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ med $\|f-g_n\|_1 \to 0$,
da er $(g_n\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ og $\|(f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} - (g_n\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}\|_1 = \|f-g_n\|_1 \to 0$.
Dermed $f\in\mathcal{L}_I$ og $\int f\,dI = \lim I(g_n) = \lim \int (g_n\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} = \int (f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}$

„⇐" Til vilk. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes $H\in\mathcal{K}(\mathbb{R})$, så $\|(f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} - H\|_1 < \varepsilon$
dermed $\|(f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} - H\cdot 1_{]0,2\pi[}\|_1 < \varepsilon$

Vi kan antage $f \geqq 0$, videre tænke os valgt $H \geqq 0$.
Nu: $H\cdot 1_{]0,2\pi[}$ falder i $[0,2\pi]$ sammen med period. fkt. $h\circ\varkappa$,
her er $h\circ\varkappa \in \mathcal{J}^+(\mathbb{R})$, dvs. $h\in\mathcal{J}^+$
og $\bar{I}(h) = \bar{\int}(h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} = \bar{\int} H\cdot 1_{]0,2\pi[} \leqq \int H < \infty$, altså $h\in\mathcal{L}_I$.
Tillige er $\|f-h\|_1 = \|(f\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[} - (h\circ\varkappa)1_{]0,2\pi[}\|_1 < \varepsilon$.

I alm. bekvemt i stedet at benytte $I(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\circ\varkappa$.

3° $\mathbb{T}^n$ med + og produkttopologi (n-dim. torus)

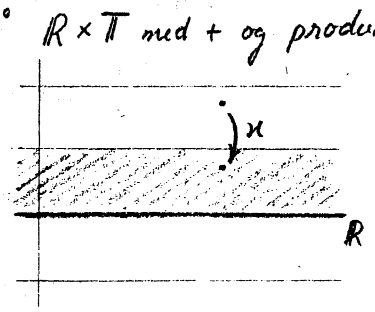


Tegning antyder opskåret eksemplar samt overdækningsafbildn. $\varkappa: \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$
Def. I_n ved $I_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\blacksquare} f\circ\varkappa$, $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T}^n)$.
Da kan 2° gentages ord til andet.
I øvrigt er $I_n = I\otimes\ldots\otimes I$ med I fra 2°. Kan verificeres direkte, men følger også af, at begge er transl.invariante.

Generelt gælder: Er G og H lokalt kompakte grupper, da er $G\times H$ med produkttopologi og kompos. $(y_1,z_1)\cdot(y_2,z_2) = (y_1y_2, z_1z_2)$ det ligeledes.
<u>Er videre I og J venstre inv. Radon integraler i G og H, da er $I\otimes J$ det i $G\times H$.</u>

For $f\in\mathcal{K}(G\times H)$, $(s,t)\in G\times H$ er nemlig
$$(I\otimes J)_{y,z} f((s,t)^{-1}\cdot(y,z)) = I_y(J_z f(s^{-1}y, t^{-1}z)) = I_y J_z f(s^{-1}y, z)$$
$$= (I\otimes J)_{y,z} f(s^{-1}y, z) = J_z(I_y f(s^{-1}y, z)) = J_z I_y f(y,z) = (I\otimes J) f.$$

4° $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ med + og produkttopologi (cylinder).



Tegning antyder opskåret eksemplar samt overdækningsafbildn. $\varkappa: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\times\mathbb{T}$
Kan gentage 3° med $I_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\blacksquare} f\circ\varkappa$, $f\in\mathcal{K}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$;
her er $I_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} = I_{\mathbb{R}}\otimes I_{\mathbb{T}}$.
Ganske tilsv.: $\mathbb{R}^m\times\mathbb{T}^n$.

Øvelse. Find „translationsinv." Radon integral I i $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, på form

11.69 $$I(f) = \int_{\mathbb{R}_+} ? \; dx, \quad f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+)$$

Svar: $I(f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \frac{1}{x} dx$. Thi

1) For vilk. $a \in \mathbb{R}_+$ fås ved substitutionen $x = at$:

$$\underline{I(f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \tfrac{1}{x} dx} = \int_{\mathbb{R}_+} f(at) \tfrac{1}{at} a \, dt = \underline{\int_{\mathbb{R}_+} f(at) \tfrac{1}{t} dt} = \int_{\mathbb{R}_+} L_{a^{-1}} f(t) \cdot \tfrac{1}{t} dt = I(L_{a^{-1}} f)$$

eller 2) $\exists(\mathbb{R},+)$ er sædv. integral invar., og $t \to e^t$ er homeomorf isomorfi af $(\mathbb{R},+)$ på $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Følgelig

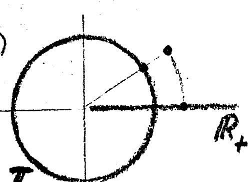
$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(e^t) dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \tfrac{1}{x} dx$$

Øvelse.

(a) Vis, at $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ er et eksemplar af $(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, +)$.

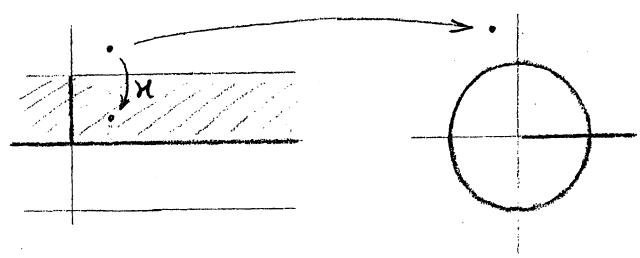
(b) Find „translationsinv." Radon integral I i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ på form $I(f) = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}} ? \; dx dy$

(a)



$z \to (|z|, \operatorname{sign} z)$, henh. $z \to (\log|z|, \operatorname{sign} z)$ er hom. isomorfi $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$, henh. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

(b) Når $(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, +)$ således realiseres som $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, går overdækningen $\varkappa$ (se 4°, s. 58) over i kompl. ekspon.fkt. $(x,y) \to e^{x+iy}$.



Dermed iflg. 4°: $\qquad I(f) = \iint_{▨} f(e^{x+iy}) \, dx dy$

Funktionaldeterm. for $(x,y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$ er e^{2x}, dermed

$$\underline{\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}} f(u+iv) \frac{1}{u^2+v^2} \, du dv} = \iint_{▨} f(e^{x+iy}) \frac{1}{e^{2x}} e^{2x} \, dx dy = I(f)$$

Andre metoder:

„Translation" med $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er $\mathbb{R}$-lineær med determ. $|a|^2$. Med $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ har vi da

$$I(f) = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}} f(z) \frac{1}{|z|^2} dx dy = \iint f(a\zeta) \frac{1}{|a\zeta|^2} |a|^2 d\xi d\eta = \iint L_{a^{-1}} f(\zeta) \cdot \frac{1}{|\zeta|^2} d\xi d\eta = I(L_{a^{-1}} f)$$

Regning i polære koord. mere elementær

$$I(f) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} f(re^{i\theta}) \frac{1}{r} \, dr d\theta = \ldots$$

5° En vilk. mgd. X er med den diskrete topologi et lokalt kompakt rum (enhv. mgd. $A \subseteq X$ er åben, A kompakt $\Leftrightarrow$ A end., enhv. fkt. $f: G \to \mathbb{C}$ kontin.)

Sætte $I(f) = \sum_{f(x)\neq 0} f(x)$ for $f \in \mathcal{K}(X)$

end. sum, gerne summere over flere x

Klart, at I pos. Radon integral, invar. ved enhver bijektiv afb. $\Phi: G \to G$.

Enhver fkt. $f: X \to \{0\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tilh. $\mathcal{F}_+$, hvorfor

$$\overline{I}(f) = \sup_{J \text{ end}, J \subseteq X} \sum_{x \in J} f(x) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{x \in X} f(x)$$

Ej andre nulmgdr. end $\emptyset$, dermed $f \sim g \Leftrightarrow f = g$.

Der gælder $f \in \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \|f\|_1 = \overline{I}(|f|) = \sum_{x \in X} |f(x)| < \infty$,

i bekr. fald betegnes $\int f\,dI$ også $\sum_{x \in X} f(x)$.

Bemærk: $f \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \{x \mid f(x) \neq 0\}$ højst numerabel

thi for hvert n er $\{x \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ endelig. Altså er talen i virkeligheden om absolut konvergens af rækker

Spec.: en vilk. gruppe G er med den diskrete topol. en lokalt kompakt gruppe; Radon integralet I er spec. venstre, højre og invers invariant.

Øvelse.

(a) Vis, at $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ er et eksemplar af $(\mathbb{Z}(\text{mod } 2) \times \mathbb{R}, +)$.

(b) Find „translationsinv" Radon integral I i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(a) I stedet benytte $(\{1,-1\}, \cdot)$ og $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Da er $(s,x) \to sx$, $s = \pm 1$, $x \in \mathbb{R}_+$ homeomorf isomorfi.

(b) $I(f)$ = produktintegral af $(s,x) \to f(sx)$

$$= \text{dobbeltintegral } \sum_{s=\pm 1} \int_0^\infty f(sx)\frac{1}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(x)\frac{1}{|x|}\,dx.$$

§2. Konstruktion af Haar integralet.

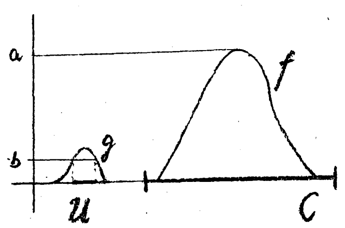
Lad G være en lokalt kompakt gruppe. Vi søger at konstruere et (venstre invariant) Haar integral, dvs. et fra 0 forsk. pos. Radon integral I i G, som er invariant ved alle venstre translationer.

Venstre invariante pseudointegraler.

For vilk. $f,g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$ findes end. mange $s_1,\dots,s_n \in G$ og tilsv. $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}_+$,
så
$$f \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i L_{s_i} g, \quad \text{dvs.} \quad \forall x \in G:\ f(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} c_i\, g(s_i^{-1}x).$$

Bevis. Lad C være komp. mgd., så $f(x)=0$ for $x \notin C$. Sætte $\sup_{x\in G} f(x) = a$ (f er begr.).

Lad $0<b<\sup_{x\in G} g(x)$. Da er $\mathcal{U} = \{x \in G \mid g(x) > b\}$ åben, ej tom.



Nu: De åbne mgdr $s\mathcal{U}$, $s \in G$ overdækker C; følgelig findes end. mange $s_1,\dots,s_n$, så $C \subseteq \bigcup_i^n s_i\mathcal{U}$.
Dermed er $\sum_i L_{s_i} g(x) > b$ for $x \in C$,
thi $L_{s_i} g(x) > b$ for $x \in s_i\mathcal{U}$;

altså $\sum_i \frac{a}{b} L_{s_i} g \geqq a 1_C \geqq f$.

Defin. For $f,g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$ sætter vi efter A. Weil $(f:g) = \inf \sum_i c_i$, hvor nedre grænse tages over alle sæt af end. mange (ej nødv. forsk.) $s_i \in G$ og tilsv. tal $c_i \geqq 0$, for hvilke $f \leqq \sum_i c_i L_{s_i} g$.

Bemærkning. Er I et Haar integral i G, da medf. $f \leqq \sum_i c_i L_{s_i} g$ at
$I(f) \leqq I(\sum_i) = \sum_i c_i I(L_{s_i} g) = I(g) \sum_i c_i$.
Dette viser
$I(g) > 0$ for $g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$ thi $I(g)=0$ ville medf. $I=0$.

Omtale Haars idé.
$\dfrac{I(f)}{I(g)} \leqq (f:g)$ for $f,g \in \mathcal{K}^+$, $g \neq 0$ („=" er sjældent).

Egenskaber ved $(f:g)$. Herved forudsætte $f,g,h \in \mathcal{K}_+(G)$, $g\neq 0$, $h \neq 0$, $a \in \mathbb{R}_+$, $t \in G$.

1° $(0:g) = 0$, $(f:g) > 0$ for $f \neq 0$

2° $(af:g) = a(f:g)$

3° $((f_1+f_2):g) \leqq (f_1:g) + (f_2:g)$

4° $(f_1:g) \leqq (f_2:g)$ når $f_1 \leqq f_2$

5° $(L_t f : g) = (f:g)$

6° $(f:h) \leqq (f:g)(g:h)$.

Bevis.

1° $(f:g) \geq \frac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}$, thi $\forall x: f(x) \leq \sum_i c_i g(s_i^{-1}x) \leq \|g\|_\infty \sum_i c_i$ medf. $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \sum_i c_i$

2°, 4° Klart

3° Er $f_1 \leq \sum_i c_i L_{s_i} g$, $f_2 \leq \sum_j d_j L_{t_j} g$, da er $f_1+f_2 \leq \sum_i c_i L_{s_i} g + \sum_j d_j L_{t_j} g$,
dermed $((f_1+f_2):g) \leq \sum_i c_i + \sum_j d_j$. Heraf påstanden.

5° følger af $f \leq \sum_i c_i L_{s_i} g \iff L_t f \leq \sum_i c_i L_{ts_i} g$

6° Er $f \leq \sum_i c_i L_{s_i} g$, $g \leq \sum_j d_j L_{t_j} h$,
dermed $c_i L_{s_i} g \leq \sum_j c_i d_j L_{s_i t_j} h$, da er $f \leq \sum_{i,j} c_i d_j L_{s_i t_j} h$,
følgelig $(f:h) \leq \sum_{i,j} c_i d_j = (\sum_i c_i)(\sum_j d_j)$. Heraf påstanden

Tænke os valgt en funktion $f_0 \in \mathcal{K}^+(G)$, $f_0 \neq 0$; den fastholdes i hele §.

For hvert $g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$ definere funktional $I_g : \mathcal{K}^+(G) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ved $I_g(f) = \frac{(f:g)}{(f_0:g)}$

<u>Egenskaber ved</u> $I_g(f)$.

1° $I_g(0) = 0$, $I_g(f) > 0$ for $f \neq 0$

2° $I_g(af) = a I_g(f)$

3° $I_g(f_1+f_2) \leq I_g(f_1) + I_g(f_2)$

4° $I_g(f_1) \leq I_g(f_2)$ når $f_1 \leq f_2$

5° $I_g(L_t f) = I_g(f)$

6° $\frac{1}{(f_0:f)} \leq I_g(f) \leq (f:f_0)$ for $f \neq 0$

1°-5° er blot en gentagelse af 1°-5° s. 61

6° ved to anvendelser af 6° s. 61:

$(f_0:g) \leq (f_0:f)(f:g)$ og $(f:g) \leq (f:f_0)(f_0:g)$.

Havde vi haft „=" i 4°, ville I_g have været et venstre inv., pos. Radon integral som ønsket. Nu omtale I_g som venstre inv. pseudointegral (intet behov for præcis definition af ordet).

Vi skal imidlertid se, at I_g er „nær ved" at være additiv, når støtten af g er „lille". Herom følgende –

Sætning. Er $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{K}^+(G)$, da findes til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en omegn V af det neutrale elem. e i G, så

$$I_g\Big(\sum_{i=1}^n f_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n I_g(f_i) < I_g\Big(\sum_{i=1}^n f_i\Big) + \varepsilon$$

for ethv. $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, (dvs. $g \in \mathcal{K}(G)$ og $g(x) = 0$ for $x \notin V$), $g \neq 0$.

Først

Lemma. (A. Weil). Er $f, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{K}^+(G)$ og $\sum_i h_i \leq 1$, da findes til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ en omegn V af e, så

$$\sum_{i=1}^n I_g(f h_i) \leq I_g(f)\,(1+\varepsilon)$$

for ethv. $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, $g \neq 0$.

Bevis. Da $h_1, \dots, h_n$ er (venstre) ligeligt kontin. (s 52), findes til givet ε en omegn V af e, så

$$|h_i(x) - h_i(s)| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \qquad \text{når } x \in sV$$

(egt. haves omegne $V_1, \dots, V_n$, men $V = \bigcap_i V_i$ er da brugbart for alle h_i).

Vi skal se, at V er som ønsket. Hertil betragte vilk. $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, $g \neq 0$.

Først bemærke: for hvert $s \in G$ er $\quad h_i \cdot L_s g \leq (h_i(s) + \frac{\varepsilon}{n}) \cdot L_s g$, $\quad i = 1, \dots, n$

thi for $x \in sV$ er spec. $h_i(x) < h_i(s) + \frac{\varepsilon}{n}$
og for $x \notin sV$ er $L_s g(x) = 0$

20.11.69 Er nu $f \leq \sum_j c_j L_{s_j} g$, har vi for $i = 1, \dots, n$

$f h_i \leq \sum_j c_j h_i L_{s_j} g \leq \sum_j c_j (h_i(s_j) + \frac{\varepsilon}{n}) L_{s_j} g$, dermed $(f h_i : g) \leq \sum_j c_j (h_i(s_j) + \frac{\varepsilon}{n})$,

altså $\sum_i (f h_i : g) \leq \sum_i \sum_j c_j (h_i(s_j) + \frac{\varepsilon}{n})$

$$= \sum_j \sum_i = \sum_j \Big(c_j \sum_{i=1}^n (h_i(s_j) + \tfrac{\varepsilon}{n})\Big) \overset{\sum h_i \leq 1}{\leq} (1+\varepsilon) \sum_j c_j.$$

Følgelig $\sum_i (f h_i : g) \leq (1+\varepsilon)(f : g)$, dvs. $\sum_i I_g(f h_i) \leq (1+\varepsilon)\, I_g(f)$.

Bemærkning. Lemmaet gælder også, når uligheden erstattes med

$$\sum_{i=1}^n I_g(f h_i) < I_g(f) + \varepsilon,$$

thi iflg. 6°, s. 62 er for hvert $g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$

$$I_g(f) \cdot (1+\varepsilon') = I_g(f) + \varepsilon' \cdot I_g(f) \leq I_g(f) + \varepsilon' \cdot (f : f_0);$$

påstanden fås da ved at gå ind i opr. lemma med et ε', hvor $\varepsilon' \cdot (f : f_0) < \varepsilon$.

Beviset for sætningen bygger herpå. Første ulighed gælder generelt (3°, s. 62), kun se på sidste.

Lad da $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}^+(G)$.
Vælge kompakt $C \subseteq G$, så $f_1, \dots, f_n$ alle er 0 uden for C.
Vælge $F \in \mathcal{K}^+(G)$, så $F(x) \geq 1$ for $x \in C$ (s. 12, Urysohn)
Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, søge V.

Hertil for tilpas lille $\delta \in \mathbb{R}_+$ (specificere senere) sætte $f = \sum_i f_i + \delta F$.

Videre defin. $h_1, \dots, h_n$ ved
$$h_i(x) = \begin{cases} f_i(x)/f(x) & \text{for } x \in C \\ 0 & \text{for } x \notin C \end{cases}$$

Klart at $f \in \mathcal{K}^+(G)$, $\sum_i h_i < 1$ og $f h_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$.
At h_i kontin. og dermed $h_i \in \mathcal{K}_C^+(G)$, $i = 1, \dots, n$, ses f. eks. af $h_i = \frac{f_i}{f \vee \delta}$.

Iflg. lemma (bemærkning) findes nu omegn V af e, så for hvert $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, $g \neq 0$ gælder
$$\sum_i I_g(f h_i) < I_g(f) + \delta,$$
dermed
$$\sum_i I_g(f_i) < I_g(f) + \delta \underset{2°,3°}{\leq} I_g\Big(\sum_i f_i\Big) + \delta I_g(F) + \delta \underset{6°}{\leq} I_g\Big(\sum_i f_i\Big) + \delta\big((F : f_0) + 1\big).$$

Hermed er sætningen bevist, idet vi kan benytte δ givet ved $\delta((F : f_0) + 1) = \varepsilon$.

Vi får brug for sætningen i en generaliseret form:

<u>Er</u> $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{K}^+(G)$ <u>og</u> $a \in \mathbb{R}_+$, <u>da findes til hvert</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ <u>en omegn</u> V <u>af</u> e, <u>så</u>
$$I_g\Big(\sum_{i=1}^n a_i f_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n a_i I_g(f_i) < I_g\Big(\sum_{i=1}^n a_i f_i\Big) + \varepsilon$$
<u>for ethv.</u> $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, $g \neq 0$ <u>og ethv. sæt</u> $a_1, \dots, a_n$ <u>med</u> $0 \leq a_i \leq a$, $i = 1, \dots, n$.

Bevis. Generelt gælder $I_g\Big(\sum_{i=1}^n a_i f_i\Big) \leq \sum_i I_g(a_i f_i) = \sum_i a_i I_g(f_i)$, blot $a_i \geq 0$.

Til anden ulighed udnytte $I_g\Big(\sum_i (a - a_i) f_i\Big) \leq \sum_i (a - a_i) I_g(f_i)$ blot $a_i \leq a$.

Ved at anvende sætningen s. 63 på $af_1, \dots, af_n$ findes til vilk. ε et V, så for $g \in \mathcal{K}_V^+$ og $0 \leq a_i \leq a$ gælder
$$\sum_i a_i I_g(f_i) + \sum_i (a - a_i) I_g(f_i) = \sum_i I_g(af_i) < I_g\Big(\sum_i af_i\Big) + \varepsilon$$
$$\leq I_g\Big(\sum_i a_i f_i\Big) + I_g\Big(\sum (a - a_i) f_i\Big) + \varepsilon \leq I_g\Big(\sum_i a_i f\Big) + \sum (a - a_i) I_g(f_i) + \varepsilon.$$

Cartans approximationssætning.

Vi begynder med en sætning vedr. „deling af enheden", hvilket går ud på at udtrykke den konstante fkt. 1 som sum af positive med „små" støtter. Formålet er i alm. at føre globale problemer tilbage til lokale.

Sætning („Deling af enheden", Dieudonné 1937,*) Lad X være et lokalt kompakt rum, C en kompakt mgd. og $U_1, \ldots, U_n$ åbne mgd.r i X, så $C \subseteq \bigcup_i U_i$. Der findes da fkt.r $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{K}^+(X)$, så

$$h_i(x) = 0 \text{ for } x \notin U_i \qquad \text{og} \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \begin{array}{l} = 1 \text{ for } x \in C \\ \leq 1 \text{ for } x \in X. \end{array}$$

(Tilfældet $n = 1$: se s. 12.)

Bevis. Sættes $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{K}^+(X) \mid \exists i : \{x \mid f(x) > 0\} \subseteq U_i\}$, da vil $(\{x \mid f(x) > 0\})_{f \in \mathcal{A}}$ være åbne mgd.r, der overdække C. Hvert $x \in C$ tilh. jo et U_i og iflg. s. 12 (Urysohn) findes da en fkt. $f \in \mathcal{K}^+$, $f : X \to [0,1]$, som har værdien 1 i x og 0 uden for U_i.

Da C kompakt, vil allerede mgd.rne $\{x \mid f_j(x) > 0\}$ svarende til end. mange $f_j \in \mathcal{A}$ overdække C, dvs.

$$\sum_j f_j(x) > 0 \quad \text{for } x \in C$$

Ved at addere f_j'erne gruppevis kan vi opnå fkt.r $f_1^*, \ldots, f_n^* \in \mathcal{K}^+$ med samme sum, hvor $f_i^*(x) = 0$ for $x \notin U_i$ (evt. visse $f_i^* = 0$).

Idet fkt.nen $x \to \sum_i f_i^*(x) = \sum_j f_j(x)$ på C har mindsteværdi $m > 0$ (billedet af C er jo kompakt), er åbenbart $h_i = \dfrac{f_i^*}{m \vee \sum_j f_j}$, $i = 1, \ldots, n$, som ønsket.

4.11.69

Lad stadig G være en lok. kompakt gruppe.
Ovenstående sætn. benyttes til bevis for

Lemma. Er $g \in \mathcal{K}^+(G)$ og C en kompakt mgd. i G, da findes til hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ end. mange pkt.r $s_1, \ldots, s_n \in C$ og tilsv. fkt.r $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{K}^+(G)$ (med $\sum_{i=1}^{n} h_i(x) = 1$ for $x \in C$), så

$$\| L_x g - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) L_{s_i} g \|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{for ethv. } x \in C.$$

Bevis. Udnytte, at g er højre ligeligt kontin. (s. 52): Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes åben omegn V af e, så

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{når } y \in Vx, \text{ dvs. } yx^{-1} \in V$$

---

*) Comptes Rendus 205, 1937, s. 593. Direkte formål et bevis for approx.sætn. s. 46!

Idet de åbne mgd.r sV, $s \in C$, overdækker kompakte mgd. C, findes end. mange

$s_1, \ldots, s_n \in C$, så $C \subseteq \bigcup_i s_i V$.

Videre findes („deling af enhed", s. 65) fkt.r. $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{K}^+(G)$, så $h_i(x) = 0$ for $x \notin s_i V$ og $\sum_i h_i(x) = 1$ for $x \in C$.

Skal se, at $s_1, \ldots, s_n$ og $h_1, \ldots, h_n$ opfylder betingelsen:

Er $x \in s_i V$, da er $s_i^{-1} x = s_i^{-1} y y^{-1} x \in V$, altså $s_i^{-1} y \in V x^{-1} y$,

og dermed $\quad g(x^{-1}y) - \varepsilon \leqq g(s_i^{-1} y) \leqq g(x^{-1}y) + \varepsilon \quad$ for ethv. $y \in G$,

altså $\quad L_x g - \varepsilon \leqq L_{s_i} g \leqq L_x g + \varepsilon$

Følgelig er $\quad h_i(x)(L_x g - \varepsilon) \leqq h_i(x) L_{s_i} g \leqq h_i(x)(L_x g + \varepsilon) \quad$ for ethv. x

Ved addition af ulighederne for $i = 1, \ldots, n$ fås for $x \in C$

$$L_x g - \varepsilon \leqq \sum_i h_i(x) L_{s_i} g \leqq L_x g + \varepsilon.$$

<u>Cartans approximationssætn.</u> (H. Cartan 1940. Sætningen var kendt, men Cartan viste den uden at benytte eksistens af Haar integral.)

<u>Lad</u> $f \in \mathcal{K}^+(G)$, <u>hvor</u> G <u>stadig vilk. lokalt kompakt</u> gruppe, <u>lad</u> $0 < \delta < \varepsilon$ <u>og lad videre</u> V <u>være en omegn af det neutrale elem.</u> e <u>i</u> G, <u>så</u>

$$|f(y) - f(x)| \leq \delta \quad \underline{\text{når}} \quad x^{-1} y \in V \qquad \text{(eksistens af } V \text{ vist s. 52)}.$$

<u>Da findes til enhv. fkt.</u> $g \in \mathcal{K}_V^+(G)$, $g \neq 0$ <u>end. mange pkt.r.</u> $s_1, \ldots, s_n$ <u>tilh. støtten</u> C <u>for</u> f <u>og tilsv. tal</u> $c_1, \ldots, c_n \geqq 0$, <u>så</u>

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i L_{s_i} g \|_\infty < \varepsilon.$$

Bevis. Betragte vilk. $g \in \mathcal{K}_V^+$, $g \neq 0$, søge $s_1, \ldots, s_n$ og $c_1, \ldots, c_n$.
I kraft af lemmaet kan vi, svarende til et $\gamma \in \mathbb{R}_+$ valgt ud fra det foreliggende som angivet senere, tænke os valgt $s_1, \ldots, s_n \in C$ og $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{K}^+(G)$, så

$$\forall x \in C\ \forall y \in G: |g(x^{-1}y) - \sum_i h_i(x) L_{s_i} g(y)| \leqq \gamma,$$

dermed $\quad \forall x, y \in G: |f(x) g(x^{-1}y) - \sum_i f(x) h_i(x) L_{s_i} g(y)| \leqq \gamma f(x).$

Da nu $|f(y) - f(x)| \leqq \delta$ for $x^{-1}y \in V$ og $g(x^{-1}y) = 0$ for $x^{-1}y \notin V$,

dermed $\quad \forall x, y \in G: |f(y) g(x^{-1}y) - f(x) g(x^{-1}y)| \leqq \delta g(x^{-1}y),$

har vi $\quad \forall x, y \in G: |f(y) g(x^{-1}y) - \sum_i f(x) h_i(x) L_{s_i} g(y)| \leqq \delta g(x^{-1}y) + \gamma f(x)$

dvs. $\quad (1) \quad \forall y \in G: |f(y) L_y \check{g} - \sum_i L_{s_i} g(y) \cdot f h_i| \leqq \delta \cdot L_y \check{g} + \gamma f,$

hvor som sædv. $\check{g}(z) = g(z^{-1})$, således at $g(x^{-1}y) = \check{g}(y^{-1}x) = L_y \check{g}(x)$.

Lad nu φ være en foreløbig vilk. fkt. tilh. $\mathcal{K}^+(G)$, $\varphi \neq 0$.

Af (1) følger $\quad \forall y \in G: |f(y)\, I_\varphi(\check{g}) - I_\varphi(\sum_i L_{s_i} g(y) \cdot fh_i)| \leqq \delta\, I_\varphi(\check{g}) + \gamma\, I_\varphi(f).$

thi af 3° og 4° s. 62 fås generelt for $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{K}^+(G)$

$$|f_1 - f_2| \leqq f_3 \quad \Rightarrow \quad |I_\varphi(f_1) - I_\varphi(f_2)| \leqq I_\varphi(f_3)$$

idet $|f_1 - f_2| \leqq f_3 \Leftrightarrow -f_3 \leqq f_1 - f_2 \leqq f_3 \Leftrightarrow f_2 \leqq f_1 + f_3 \wedge f_1 \leqq f_2 + f_3$ og anal.

Desuden benytte 2° og 5° (transl. inv.)

Da $I_\varphi(\check{g}) > 0$ (1° s. 62) kan vi dividere hermed, hvorved fås

$$(2) \qquad \forall y \in G: \left|f(y) - I_\varphi\left(\sum_i \frac{L_{s_i} g(y)}{I_\varphi(\check{g})} fh_i\right)\right| \leqq \delta + \gamma(f:\check{g}),$$

idet $\dfrac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\check{g})} = \dfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \dfrac{(f_0:\varphi)}{(\check{g}:\varphi)} \leqq \dfrac{(f:\check{g})(\check{g}:\varphi)}{(\check{g}:\varphi)} = (f:\check{g})$ iflg. 6°, s. 61.

Tænke os γ valgt, så $\delta + \gamma(f:\check{g}) < \varepsilon$.

Bemærk: Hvis I_φ var additivt, ville vi være færdig, nemlig med $c_i = \dfrac{I_\varphi(fh_i)}{I_\varphi(\check{g})}$.

Faktisk har vi imidlertid den generaliserede sætn. s. 64 til rådighed.

Vi anvender den på fkt.nerne $fh_1, \dots, fh_n \in \mathcal{K}^+(G)$ med $a = (f_0:\check{g})\,\|g\|_\infty$

og tænker os omegn $\mathcal{U}$ af e valgt svarende til $\beta = \varepsilon - (\delta + \gamma(f:\check{g})) > 0$.

Blot $\varphi \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G)$, $\varphi \neq 0$ (eksistens, s. 12), har vi da

$$|I_\varphi(\sum_i a_i fh_i) - \sum_i a_i I_\varphi(fh_i)| < \beta \quad \text{for ethv. } a_1, \dots, a_n \text{ med } 0 \leqq a_i \leqq (f_0:\check{g})\,\|g\|_\infty$$

og dermed $\quad \forall y \in G: \left| I_\varphi\left(\sum_i \dfrac{L_{s_i} g(y)}{I_\varphi(\check{g})} fh_i\right) - \sum_i \dfrac{L_{s_i} g(y)}{I_\varphi(\check{g})} I_\varphi(fh_i)\right| < \beta,$

idet jo $L_{s_i} g(y) \leqq \|g\|_\infty$ og $I_\varphi(\check{g}) \geqq 1/(f_0:\check{g})$ (6°, s. 62).

Sammen med (2) giver dette

$$\forall y \in G: \left|f(y) - \sum_i \frac{I_\varphi(fh_i)}{I_\varphi(\check{g})} L_{s_i} g(y)\right| < \varepsilon, \quad \text{færdig}$$

(idet sup antages)

Ved hjælp af Cartans approx.sætn. skal vi se, at pseudointegralerne I_g, $g \in \mathcal{K}^+(G)$, har en grænsefkt.nal svarende til, at støtten af g svinder ind. Grænsefkt.nalen er et Haar integral.

Cartans approx.sætn. kan også udnyttes til entydighedsbevis.

Der er fælles træk i de to anvendelser. Vi begynder med den letteste.

Haar integralets entydighed.

Vi betragter stadig en vilk. lokalt kompakt gruppe G.

<u>Entydighedssætn.</u> <u>Er</u> J_1 <u>og</u> J_2 <u>fra</u> 0 <u>forsk.</u> (<u>ej nødv. positive</u>) <u>venstre inv. Radon integraler i</u> G, <u>da er</u> $J_1 = c\,J_2$ <u>for et</u> $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Bevis. Der findes fkt. $f_* \in \mathcal{K}^+(G)$, hvor $J_1(f_*) \neq 0$ og $J_2(f_*) \neq 0$.

Thi $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^+(G)$ findes med $J_1(f_1) \neq 0$ og $J_2(f_2) \neq 0$.
Hvis hverken f_1 eller f_2 som ønsket, da er $f_1 + f_2$ det.

Vi kan antage $J_1(f_*) = J_2(f_*) = 1$, idet vi ellers „normerer".
Vise: $J_1 = J_2$, dvs. for vilk. $f \in \mathcal{K}^+(G)$ vise $J_1(f) = J_2(f)$.
Metode: for vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vise $|J_1(f) - J_2(f)| < \varepsilon$.
Mere bekvemt: .... $\delta \in \mathbb{R}_+$ .... $< \delta \cdot \text{const.}$

1° Vælge kompakt mgd. K, så $f(x) = 0$ for $x \notin K$; vælge kompakt omegn W af e.
Idet KW kompakt (s. 55), kan videre vælges $F \in \mathcal{K}^+(G)$ med
$F(x) \geq 1$ for $x \in KW$ (Urysohn, s. 12)

$KW = \bigcup_{s \in K} sW$

Bestemme $\gamma \in \mathbb{R}_+$, så $\gamma(\,|J_1|(F) \vee |J_2|(F)\,) < \delta$.
Lad $h \in \mathcal{K}^+_W$, $h \neq 0$ være fkt., hvor $s_1, \dots, s_n \in K$ og $c_1, \dots, c_n \geq 0$ findes, så
$$\Big|f - \sum_{i=1}^n c_i L_{s_i} h\Big| < \gamma$$
(Iflg. Cartans approx. sætn. kan benyttes hvilken som helst fkt. $h \in \mathcal{K}^+$, $h \neq 0$, som er 0 uden for vis omegn $W' \subseteq W$ af e.)

Bemærke, at $f - \sum_i c_i L_{s_i} h$ er 0 uden for KW,
thi for et x, hvor værdi $\neq 0$ må $f(x) \neq 0$, dermed $x \in K \subseteq KW$
eller et $L_{s_i}h(x) \neq 0$, dermed $x \in s_i W \subseteq KW$.

Følgelig $$\Big|f - \sum_{i=1}^n c_i L_{s_i} h\Big| \leq \gamma \cdot 1_{KW} \leq \gamma F.$$

Hermed for $\nu = 1, 2$
$$|J_\nu(f) - J_\nu(\textstyle\sum_i c_i L_{s_i} h)| = |J_\nu(f - \sum \quad)| \leq |J_\nu|(|f - \sum \quad|) \leq \gamma\,|J_\nu|(F) < \delta.$$
Idet $J_\nu(\sum_i c_i L_{s_i} h) = \sum_i c_i J_\nu(L_{s_i} h) = J_\nu(h) \sum_i c_i$, har vi altså med $c = \sum_i c_i \geq 0$
$$|J_\nu(f) - c\,J_\nu(h)| < \delta \qquad \text{for } \nu = 1, 2$$

2° Gentagelse med f_* i stedet for f.
Pointe: vi kan tænke os <u>samme</u> fkt. h benyttet i 1° og 2°
(nemlig hvilken som helst fkt. $h \in \mathcal{K}^+$, $h \neq 0$, som er 0 uden for vis omegn $W' \cap W'_*$ af e; eksistens iflg. Urysohn).

Vi finder tal $c_* \geqq 0$, så

$$|J_\nu(f_*) - c_* J_\nu(h)| < \delta \quad \text{for } \nu = 1,2. \qquad \text{Og her er } J_1(f_*) = J_2(f_*) = 1.$$

3° For $\nu = 1,2$ har vi da $\quad |J_\nu(f) - \frac{c}{c_*}| < \delta + \frac{c}{c_*}\delta$,

blot $\delta \leqq 1$, hvormed $c_* > 0$.

Af $\quad c\,|J_1(h)| < |J_1(f)| + \delta$

og $\quad c_*\,|J_1(h)| > 1 - \delta \qquad$ fås $\frac{c}{c_*} < 2\,|J_1(f)| + 1$, blot $\delta \leqq \frac{1}{2}$;

dermed $\quad |J_1(f) - J_2(f)| < 2\cdot(2\,|J_1(f)| + 2)\,\delta$, $\qquad$ færdig.

:12.69
ÕÕ. s. 59

Haar integralets eksistens.

Vi betragter stadig en vilk. lokalt komp. gruppe G.

Vi skal nu se, at for vilk. $f, f_0 \in \mathcal{K}^+(G)$, $f_0 \neq 0$, vil $\dfrac{(f:g)}{(f_0:g)}$,

dannet for fkt.n $g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$, gå mod en grænseværdi, når støtten af g svinder ind (præciseres senere).

Idet vi kan tænke os, at f_0 er den faste fkt., vi valgte s. 62, skal vi med andre ord se, at

for hvert $f \in \mathcal{K}^+(G)$ vil $I_g(f)$ konvergere, når støtten af g svinder ind.

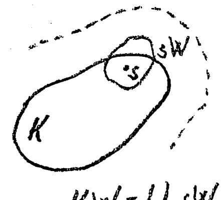
Metode (Cauchy): $|I_{g_1}(f) - I_{g_2}(f)| \to 0$, når støtterne af g_1 og g_2 svinder ind.

__Lemma.__ __Lad__ $f \in \mathcal{K}^+(G)$. __Da:__

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists \text{ omegn } \mathcal{U} \text{ af } e \ \forall g_1, g_2 \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G), g_1 \neq 0, g_2 \neq 0 : \ |I_{g_1}(f) - I_{g_2}(f)| < \varepsilon.$$

Bevis. Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Bestemme δ ved $\delta = \frac{1}{2} \wedge \dfrac{\varepsilon}{4((f:f_0)+1)}$.

1° Vælge kompakt mgd. K, så $f(x) = 0$ for $x \notin K$, vælge kompakt omegn W af e.
Idet KW kompakt (s. 55), kan videre vælges $F \in \mathcal{K}^+(G)$ med
$F(x) \geq 1$ for $x \in KW$ (Urysohn, s. 12)



$KW = \bigcup_{s \in K} sW$

Bestemme γ ved $\gamma((F:f_0)+1) = \delta$.

Lad $h \in \mathcal{K}^+_W$, $h \neq 0$ være fkt., hvor $s_1, \dots, s_n \in K$ og $c_1, \dots, c_n \geq 0$ findes, så
$$|f - \sum_{i=1}^n c_i L_{s_i} h| < \gamma$$

(Iflg. Cartans approx.sætn. kan benyttes hvilken som helst fkt. $h \in \mathcal{K}^+$, $h \neq 0$, som er 0 uden for vis omegn $W' \subseteq W$ af e.)

Bemærke, at $f - \sum_i c_i L_{s_i} h$ er 0 uden for KW
thi for et x, hvor værdi $\neq 0$, må $f(x) \neq 0$, dermed $x \in K \subseteq KW$,
eller et $L_{s_i} h(x) \neq 0$, dermed $x \in s_i W \subseteq KW$

Følgelig $\quad |f - \sum_{i=1}^n c_i L_{s_i} h| \leq \gamma \cdot 1_{KW} \leq \gamma F$,

dermed (se s. 67) for hvert $g \in \mathcal{K}^+$, $g \neq 0$
$$|I_g(f) - I_g(\sum_i c_i L_{s_i} h)| \leq \gamma\, I_g(F) \leq \gamma (F:f_0)$$

Iflg. sætningen s. 63 anvendt på $c_i L_{s_i} h$, $i = 1, \dots, n$, findes imidlertid en omegn V af e, så
$$|I_g(\sum_i c_i L_{s_i} h) - \sum_i I_g(c_i L_{s_i} h)| < \gamma$$

for hvert $g \in \mathcal{K}^+_V$, $g \neq 0$.

Idet $\sum_i I_g(c_i L_{s_i} h) = \sum c_i I_g(L_{s_i} h) = I_g(h) \sum_i c_i$, har vi altså med $c = \sum_i c_i$
$$\forall g \in \mathcal{K}^+_V, g \neq 0 : \ |I_g(f) - c I_g(h)| < \gamma (F:f_0) + \gamma = \delta$$

2° Gentagelse med f_0 i stedet for f.
Pointe: vi kan tænke os sammen fkt. h benyttet i 1° og 2°
(nemlig hvilken som helst fkt. $h \in \mathcal{K}^+$, $h \neq 0$, som er 0 udenfor vis omegn $W' \cap W'_0$ af e; eksistens iflg. Urysohn).
Vi finder omegn V_0 af e og tal $c_0 \geqq 0$, så
$$\forall g \in \mathcal{K}^+_{V_0}, g \neq 0: \; |I_g(f_0) - c_0 I_g(h)| < \delta. \qquad \text{Og her er } I_g(f_0) = \frac{(f_0:g)}{(f_0:g)} = 1.$$

3° For hvert $g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}$, $g \neq 0$, hvor $\mathcal{U} = V \cap V_0$ er omegn af e, har vi da
$$|I_g(f) - \frac{c}{c_0}| < \delta + \frac{c}{c_0}\delta,$$
blot $\delta \leqq 1$, hvormed $c_0 > 0$.
Af $c I_g(h) < I_g(f) + \delta \leqq (f:f_0) + \delta$
og $c_0 I_g(h) > 1 - \delta$
fås $\frac{c}{c_0} < 2(f:f_0) + 1$, blot $\delta \leqq \frac{1}{2}$.
For vilk. $g_1, g_2 \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}$, $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ har vi da
$$|I_{g_1}(f) - I_{g_2}(f)| < 2\,(2(f:f_0) + 2)\,\delta < \varepsilon$$

<u>Sætning</u>. <u>Lad</u> $f \in \mathcal{K}^+(G)$. <u>Der findes da et og kun et tal</u> a, <u>så</u>
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \text{ omegn } \mathcal{U} \text{ af } e \; \forall g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G), g \neq 0: \; |I_g(f) - a| < \varepsilon.$$

Bevis. Højst et a klart, thi har a_1 og a_2 begge egenskaben, findes til hvert ε et $g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2}$, $g \neq 0$ (Urysohn), hvormed $|a_1 - a_2| < 2\varepsilon$.

Eksistens følger af lemmaet, f. eks. således:
Forsøge $a = \inf\limits_{\text{omegn } W \text{ af } e} \; \sup\limits_{g \in \mathcal{K}^+_W, g \neq 0} I_g(f)$ (dvs. $a = \limsup\limits_{g} I_g(f)$).
(Idet $0 \leqq I_g(f) \leqq (f:f_0)$, gælder også $0 \leqq a \leqq (f:f_0) < \infty$.)
Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ dels omegn W af e, så $\sup\limits_{g \in \mathcal{K}^+_W, g \neq 0} I_g(f) < a + \varepsilon$,

dels iflg. lemma omegn V af e, så
$$|I_g(f) - I_h(f)| < \varepsilon, \text{ spec. } I_g(f) > I_h(f) - \varepsilon \quad \text{for } g, h \in \mathcal{K}^+_V, g, h \neq 0$$
dermed $$I_g(f) \geqq \sup_{h \in \mathcal{K}^+_V, h \neq 0} I_h(f) - \varepsilon \geqq a - \varepsilon \quad \text{for } g \in \mathcal{K}^+_V, g \neq 0$$

For $g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}$, $g \neq 0$ med $\mathcal{U} = V \cap W$ er da $a - \varepsilon \leqq I_g(f) < a + \varepsilon$.

<u>Defin.</u> Det ved sætningen bestemte tal a betegnes $\lim\limits_g I_g(f) = \lim\limits_g \frac{(f:g)}{(f_0:g)}$.

Pseudointegralerne I_g har altså en grænsefkt.nal $I: \mathcal{K}^+(G) \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, nemlig
$$I(f) = \lim_{g \in \mathcal{K}_+, g \neq 0} I_g(f), \quad f \in \mathcal{K}^+(G).$$

Det er nu ligetil ud fra egenskaber ved pseudointegralerne I_g (s. 62 og sætn. s. 63) at verificere, at I er et pos., venstre inv. Radon integral i G:

$I(0) = 0, \quad I(f) > 0 \qquad$ for hvert $f \in \mathcal{K}^+, f \neq 0$.

Thi: $I(f)$ er kontaktpkt. for $\{I_g(f) \mid g \in \mathcal{K}^+, g \neq 0\} \subseteq [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)]$, iflg. 6° (s. 62)

$I(af) = a I(f) \quad$ for $f \in \mathcal{K}^+, a \in \mathbb{R}_+$

Thi iflg. 2° (s. 62) gælder $\quad |I_g(af) - a I(f)| < a\varepsilon \iff |I_g(f) - I(f)| < \varepsilon$.

$I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) \quad$ for $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^+$.

Thi til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes omegne $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ af e, så
$$|I_g(f_1) - I(f_1)| < \varepsilon \text{ og } |I_g(f_2) - I(f_2)| < \varepsilon \text{ for } g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}_1}, \text{ hhv. } \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}_2}, \; g \neq 0,$$
samt iflg. sætn. s. 63 en omegn V af e, så
$$|I_g(f_1 + f_2) - (I_g(f_1) + I_g(f_2))| < \varepsilon \text{ for } g \in \mathcal{K}^+_V, g \neq 0.$$
Med $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap V$ er da
$$|I_g(f_1 + f_2) - (I(f_1) + I(f_2))| < 3\varepsilon \text{ for } g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}, g \neq 0.$$

$I(\mathcal{L}_s f) = I(f) \quad$ for $f \in \mathcal{K}^+, s \in G$

12.69 Umiddelbar følge af $I_g(\mathcal{L}_s f) = I_g(f)$, 5° (s. 62)

Eksistenssætning. I vilk. lokalt kompakt gruppe G findes et venstre inv. Radon integral I med $I(f) > 0$ for hvert $f \in \mathcal{K}^+(G), f \neq 0$, nemlig givet ved
$$I(f) = \lim_{g \in \mathcal{K}^+, g \neq 0} \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}, \quad f \in \mathcal{K}^+(G),$$

dvs. $\qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists$ omegn $\mathcal{U}$ af e $\forall g \in \mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G), g \neq 0: \; \left| \frac{(f : g)}{(f_0 : g)} - I(f) \right| < \varepsilon,$

hvor $f_0 \neq 0$ er vilk. fast fkt. tilh. $\mathcal{K}^+(G)$.

Det givne eksistensbevis, der skyldes H. Cartan (Comptes Rendus 211 (1940), s. 759-62) udmærker sig fremfor tidligere (Haar, Weil) derved, at eksistensen af et inv. integral påvises ved explicit angivelse („konstruktion"). Dette er en rimelig vej at gå, især i betragtning af, at der kun er det samme; at benytte Cantors diagonalmetode (Haar) eller (en konsekvens af) udvalgsaxiomet (Weil) er da lidt besynderligt.
Cartans bevis er længere end Weils. Til gengæld fik vi entydigheden undervejs.

§3. Egenskaber ved Haar integralet.

Egenskaber ved Haar integralet

Lad I være Haar integralet i en lokalt kompakt gruppe G, dvs. I er det fra 0 forsk., venstre invar. Radon integral i G, normeret så det er positivt. Herved er I kun bestemt pånær pos. konstant faktor, som vi imidlertid tænker os disponeret over (på vilk. måde).

Notere:

$$\left.\begin{array}{l} I(f)>0 \ \underline{\text{for}}\ f\in\mathcal{K}^+(G), f\neq 0 \\ \dfrac{I(f)}{I(g)} \leqq (f:g) \ \underline{\text{for}}\ f,g\in\mathcal{K}^+(G),\ g\neq 0 \end{array}\right\} \text{(se bemærkning s. 61)}$$

$\underline{\text{For}}$ $f,g\in\mathcal{K}^+(G)$, $g\neq 0$, $\underline{\text{er}}$ $\quad \dfrac{I(f)}{I(g)} = \lim\limits_{h\in\mathcal{K}^+, h\neq 0} \dfrac{(f:h)}{(g:h)}$

dvs. $\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+\ \exists$ omegn $\mathcal{U}$ af e $\forall h\in\mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G), h\neq 0:\ \left|\dfrac{(f:h)}{(g:h)} - \dfrac{I(f)}{I(g)}\right| < \varepsilon$.

Thi er I det i det foregående konstruerede Haar integral svarende til $f_0 = g$ som fastholdt fkt., er påstanden rigtig (se eksistenssætn. s. 72), idet åbenbart da $I(g) = I(f_0) = 1$
Og kvotienten $I(f)/I(g)$ er jo ens for alle Haar integraler (entydssætn.)

Vi vil omtale $\overline{I}$ som øvre Haar integral og ligeledes tale om ydre Haar mål $\overline{m}$ og Haar mål m. Integraler m.h.t. I betegnes sædvanligvis $\int f(x)dx$ eller lign., ligesom $\mathcal{F}(G)$, $F(G)$, $\mathcal{L}(G)$, $L(G)$ står for $\mathcal{F}_I(G)$, $F_I(G)$, $\mathcal{L}_I(G)$, $L(G)$, og „næsten overalt", „ækvivalent", „integrabel" uden nærmere angivelse underforstår „m.h.t. Haar integralet".

Fra den generelle teori (s. 42) ved vi, at enhver kompakt mgd. $K\subseteq G$ er integrabel, spec. $\overline{m}(K) = m(K) < \infty$. Her gælder videre:

$\overline{m}(\mathcal{U}) > 0$, $\underline{\text{når}}$ $\mathcal{U}\subseteq G$ $\underline{\text{er åben}}$, $\mathcal{U}\neq\emptyset$.

Thi da findes jo (Urysohn) fkt. $f: G\to[0,1]$ tilh. $\mathcal{K}^+_{\mathcal{U}}(G)$, $f\neq 0$,
og idet $1_{\mathcal{U}} \geqq f$, følger $\overline{m}(\mathcal{U}) = \overline{I}(1_{\mathcal{U}}) \geqq \overline{I}(f) = I(f) > 0$.

Vi skal se, hvorledes egenskaber ved topologien afspejler sig i Haar integralet I:

1) I $\underline{\text{er begrænset}} \Leftrightarrow \overline{m}(G)<\infty \Leftrightarrow G$ $\underline{\text{er integrabel}} \Leftrightarrow G$ $\underline{\text{er kompakt}}$.

Vi skal kun vise sidste „$\Leftrightarrow$" (s. 42); her er endda „$\Leftarrow$" klar.

Antage $\bar{m}(G)<\infty$, vise G kompakt.

Vælge kompakt omegn V af e. Benytte, at $m(V)>0$ (nemlig $m(V)\geqq m(\mathring{V})>0$):

For end. mange $s_1,\dots,s_n\in G$ med $s_1V,\dots,s_nV$ parvis disj. er

$$\bar{m}(G)\geqq m(s_1V\cup\dots\cup s_nV)=n\cdot m(V),\quad \text{altså } n\leqq \bar{m}(G)/m(V).$$

Tænke os $s_1,\dots,s_n$ valgt, så antallet størst muligt. Da:

For hvert $s\in G$ findes da et i, så $sV\cap s_iV\neq\emptyset$; dette kommer ud på $s\in s_iVV^{-1}$, thi betydn. er: der findes $x,y\in V$, så $sx=s_iy$, henh. $s=s_ixy^{-1}$.

Altså er $G=\bigcup_{i=1}^{n}s_iVV^{-1}$; og da VV^{-1} er kompakt (s.55, 1°), så også G.

I en kompakt gruppe G vil det ofte være bekvemt at normere Haar integralet I, så $m(G)=$ normen af $I=1$ (se s. 31 (vii), s.42). Da kan $\int f(x)dx$ opfattes som middelværdi af f (jfr. ex. 2° og 3°, s. 57).

2) $m(\{e\})>0 \iff$ <u>topologien i G er den diskrete</u>.

Vi skal kun vise „$\Rightarrow$" (s. 73).

Antage $m(\{e\})>0$, vise $\{e\}$ er omegn af e.

Betragte kompakt omegn V af e. For enhv. end. del $\{s_1,\dots,s_n\}\subseteq V$, $s_i\neq s_j$, er

$$m(V)\geqq m(\{s_1,\dots,s_n\})=n\cdot m(\{e\}),\quad \text{altså } n\leqq m(V)/m(\{e\}).$$

Følgelig er V endelig, $V=\{e,s_2,\dots,s_n\}$.

Nu: $\{e\}=V\cap G\setminus\{s_2\}\cap\dots\cap G\setminus\{s_n\}$ er omegn af e.

I en diskret gruppe G vil det ofte være bekvemt at normere Haar integralet som i eks. 5°, s. 60, dvs. så $m(\{e\})=1$.

Notere (se s. 58):

<u>Er G og H og dermed $G\times H$ lokalt kompakte grupper, da er med passende normering Haar integralet i $G\times H$ produktet af Haar integralerne i G og H.</u>

<u>Fubini's formel skrives her</u>

$$\int_{G\times H}f(y,z)\,d(y,z)=\int_G\int_H f(y,z)\,dz\,dy,$$

<u>gældende for</u> $f\in\mathcal{L}(G\times H)$.

Venstre og højre invarians.

Lad G være en vilk. lokalt kompakt gruppe. Da vi i følgende kapitler kun betragter komm. grupper, vil vi indskrænke os til at nævne det mest iøjnefaldende vedr. spil mellem venstre og højre. Med I fortsat betegne (vilk. normeret) venstre invar. Haar integral.

Vi bygger her afgørende på entydigheden.

Først et nyt bevis (sml. s. 56) for

I højre invar. $\Leftrightarrow$ I invers invar.

1.12.69 Ved $J(f) = I(\check{f})$, dvs. $J_x f(x) = I_x f(x^{-1})$ defineres et højre invar. Haar integral.

Idet $\mathrm{inv} \circ R_s = L_{s^{-1}} \circ \mathrm{inv}$ og dermed $(R_s f)^\vee = L_{s^{-1}} \check{f}$ har vi nemlig

$$J(R_s f) = I(L_{s^{-1}} \check{f}) = I(\check{f}) = J(f) \qquad \text{for vilk. } s \in G$$

Nu: I inv. invar. $\Leftrightarrow$ $I = J$
og i kraft af entyd.hed af højre inv. Haar integral: I højre inv. $\Leftrightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R}_+ : I = aJ$.

Påstanden følger nu af, at $a = 1$ er eneste mulighed. Er nemlig $I = aJ$, har vi

$$I(f) = aJ(f) = aI(\check{f}) = a^2 J(\check{f}) = a^2 I(f), \quad \text{altså } a^2 = 1.$$

For hvert $s \in G$ findes et og naturligvis kun et tal $\Delta(s) \in \mathbb{R}_+$, så

$$\forall f \in \mathcal{K}(G): \; I(R_s f) = \Delta(s) \cdot I(f), \qquad \text{dvs. } I_x f(xs^{-1}) = \Delta(s) \cdot I_x f(x).$$

Defin: fkt.nen $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ kaldes gruppens højre modul (evt. skrive Δ_r).

Bevis. For givet s defineres ved $J(f) = I(R_s f) = I_x f(xs^{-1})$ et venstre inv. Haar integral.

Thi i kraft af assoc. lov er $R_s \circ L_t = L_t \circ R_s$ og dermed

$$J(L_t f) = I(R_s(L_t f)) = I(L_t(R_s f)) = I(R_s f) = J(f) \qquad \text{for } t \in G, f \in \mathcal{K}(G).$$

Påstanden følger da straks af entydighedssætningen.

Bemærk: Fkt.r f og $R_s f$ vil samtidig tilhøre $\mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$, og under relevante forudsætning er

$$\bar{I}(R_s f) = \Delta(s)\, \bar{I}(f), \quad \| R_s f \|_1 = \Delta(s) \| f \|_1, \quad \int f(xs^{-1})\,dx = \Delta(s) \int f(x)\,dx$$

Tilsv. for delmgdr A og As, $\quad \bar{m}(As) = \Delta(s)\, \bar{m}(A), \quad m(As) = \Delta(s)\, \bar{m}(A).$

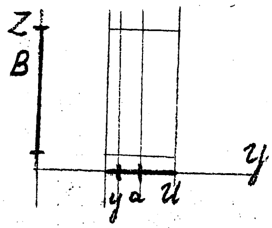
Højre modulen Δ er en kontin. homomorfi af G ind i $\mathbb{R}_+$ med multiplik.

Bevis. At $\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t)$ fremgår, idet $R_{st} = R_t \circ R_s$, altså $R_{st}f = R_t(R_s f)$, hvormed for $f \in \mathcal{K}(G)$:

$$\Delta(st)\cdot I(f) = I(R_{st}f) = I(R_t(R_s f)) = \Delta(t)\cdot I(R_s f) = \Delta(t)\Delta(s)\,I(f).$$

Indskyde generel bemærkning. Ræsonnementet i indledn. af afsnit om dobbelt-integral (s. 44) viser:

For Y og Z lok. kompakte rum og J et vilk. Radon integral i Z, medens g er en fkt. defineret på (en del af) $Y \times Z$ gælder:



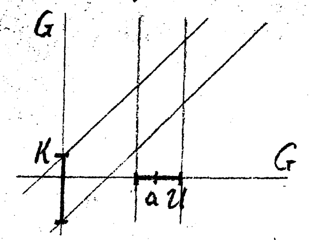
Findes en omegn U af $a \in Y$ og en kompakt mgd. $B \subseteq Z$, så g er kontin. i $U \times Z$ og $g(y,z) = 0$ for $y \in U, z \notin B$, da er

$$y \to J_z\, g(y,z) \quad \text{kontin. i } a.$$

Nu bevis for, at Δ kontin. i vilk. $a \in G$:

For fast $f \in \mathcal{K}(G)$ med $I(f) = 1$ er $\quad \Delta(y) = I(R_y f) = I_z f(zy^{-1}), \quad y \in G.$

Fkt.nen $(y,z) \to f(zy^{-1})$ er kontin. på $G \times G$, men har ikke kompakt støtte (så måtte også Δ have det, jfr. s. 44) medmindre G er kompakt.



Imidlertid: vælges kompakt mgd. $K \subseteq G$, så $f(x) = 0$ for $x \notin K$ og kompakt omegn U af $a \in G$,

da har vi for $y \in U$:

$$f(zy^{-1}) \neq 0 \Rightarrow zy^{-1} \in K \Rightarrow z \in Ky \Rightarrow z \in KU,$$

og idet KU kompakt, kan vi anvende bemærkn. med $B = KU$.

I en kompakt gruppe falder venstre og højre invar. Haar integral sammen.

Thi for hvert $s \in G$ er $m(Gs) = \Delta(s)\, m(G)$,

og da jo $Gs = G$ samt $m(G) > 0$, sluttes $\Delta(s) = 1$.

Da sammenfald af venstre og højre inv. Haar integral kommer ud på $\Delta = 1$, kaldes grupper, hvor det er tilfældet, ofte unimodulære. Her er Haar integralet tillige invers invariant (s. 56, s. 75).

Eks. Lokalt kompakt Abelsk gruppe. Kompakt gruppe.

Halvplanen $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ med sædv. topologi og kompos. svarende til sammensætning ved korrespondancen $\quad (a_1, a_2)$ modsv. fkt.nen $t \to a_1 t + a_2,\ t \in \mathbb{R}$

er ikke unimodulær (Øvelse)

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Kompos. er } (a_1,a_2)\circ(b_1,b_2) = (a_1b_1,\ a_1b_2+a_2), & \\ L_{(s_1,s_2)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\s_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s_1 & 0\\0 & s_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, & I_\ell(f) = \int f(x_1,x_2)\frac{1}{x_1^2}\,dx_1dx_2, \\ R_{(s_1,s_2)}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1 & 0\\s_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, & I_r(f) = \int f(x_1,x_2)\frac{1}{x_1}\,dx_1dx_2. \end{array}\right.$$

Litteratur. L. Nachbin: The Haar integral, Princeton, N.J. 1965.
N. Bourbaki.

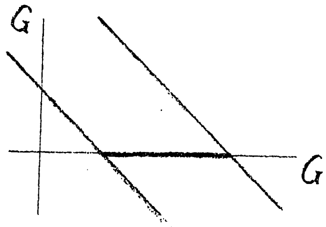
III. Foldning.

§1. Foldning af begrænsede Radon integraler.

__Foldning af begr. Radon integraler__

Lad G være en lokalt kompakt gruppe. Vi skal indføre en komposition, foldning, i mgd. $\mathcal{M}^1(G)$ af __begr.__ (reelle ell.) kompl. Radon integraler i G.

Idet I og $J \in \mathcal{M}^1(G)$, vil produktintegr. $I \otimes J$ være begr. med norm $M_{I\otimes J} = M_I M_J$ (s.49).



For $f \in \mathcal{K}(G)$ vil $f \circ$ komp., dvs. $(y,z) \to f(yz)$ være kontin. og begr., dermed integr. m.h.t. $I \otimes J$ (s.37).

Z Støtten i alm. ej kompakt, eks. $G = \mathbb{R}$ m. addition.

5.12.69 Ved $$I * J(f) = \int_{G\times G} (f \circ \text{komp})\, d\, I\otimes J = \int_{G\times G} f(yz)\, d\, I\otimes J(y,z)$$

defineres da et begr. Radon integral $I * J : \mathcal{K}(G) \to \mathbb{C}$, __foldningen__ af I og J, __med norm__ $M_{I*J} \leqq M_I M_J$.

Thi klart, at $I * J$ lineær, og for hvert $f \in \mathcal{K}(G)$ med $\|f\|_\infty \leqq 1$ er

$$|I*J(f)| \leqq \int_{G\times G} |f \circ \text{komp}|\, d\,|I\otimes J| \leqq \int_{G\times G} 1\, d\,|I\otimes J| = (\text{ydre})\text{ mål af } G\times G \text{ m.h.t. } |I\otimes J|$$

$$\underset{\text{s.31}}{=} M_{|I\otimes J|} \underset{\text{s.37}}{=} M_{I\otimes J} = M_I M_J .$$

Iflg. Lebesgue/Fubini's sætn. (s.50) er, for $f \in \mathcal{K}(G)$,

$$I*J(f) = \int_{G\times G} f(yz)\, d\, I\otimes J(y,z) = \int_G \int_G f(yz)\, dI(y)\, dJ(z) = \int_G \int_G f(yz)\, dJ(z)\, dI(y).$$

. Bemærk, at for hvert y er $f(y\cdot) = L_{y^{-1}} f \in \mathcal{K}(G)$ og anal., altså

$$I*J(f) = \int_G I(R_{x^{-1}} f)\, dJ(x) = \int_G J(L_{x^{-1}} f)\, dI(x).$$

Derimod er f.eks. $y \to J(L_{y^{-1}} f) = \int_G f(yz)\, dJ(z)$ nok kontin. og begr., nemlig af $M_J \cdot \|f\|_\infty$, men har ikke i alm. kompakt støtte.

(Kontin. ses ganske som for Δ, s.76, blot har vi her for $y \in \mathcal{U}$:
$f(yz) \neq 0 \Rightarrow yz \in K \Rightarrow z \in y^{-1}K \Rightarrow z \in \mathcal{U}^{-1}K$.)

Klart, at __kompositionen__ $*$ __i__ $\mathcal{M}^1(G)$ __er kommutativ__, __hvis__ G __er det__.

Generelt gælder:

Kompos. $*$ i $\mathcal{M}^1(G)$ er assoc.

dvs. for $H, I, J \in \mathcal{M}^1(G)$ er $(H*I)*J = H*(I*J)$.

Thi for hvert $f \in \mathcal{K}(G)$ er

2) $$H*(I*J)(f) = \int_G I*J(L_{x^{-1}}f)\,dH(x) = \int_G \int_{G\times G} L_{x^{-1}}f(yz)\,dI\otimes J(y,z)\,dH(x)$$

$$= \int_{G\times G\times G} f(xyz)\,d\,H\otimes(I\otimes J)(x,y,z),$$ idet $(x,y,z) \to f(xyz)$ kontin. og begr., dermed integr. m.h.t. $H\otimes(I\otimes J)$

$$= \int_G \int_G \int_G f(xyz)\,dH(x)\,dI(y)\,dJ(z)$$

1) $$(H*I)*J\ (f) = \int_G H*I(R_{z^{-1}}f)\,dJ(z) = \int_G \int_{G\times G} R_{z^{-1}}f(xy)\,d\,H\otimes I(x,y)\,dJ(z)$$

$$= \int_G \int_G \int_G f(xyz)\,dH(x)\,dI(y)\,dJ(z)$$ (Lebesgue / Fubini).

Notere: $$H*I*J\ (f) = \int_{G\times G\times G} f(xyz)\,d\,H\otimes I\otimes J\,(x,y,z) = \int_G\int_G\int_G f(xyz)\,dH(x)\,dI(y)\,dJ(z)$$

Dirac integralet δ_e svarende til det neutrale elem. e i G er neutralt ved .

Defin.: $\delta_e(f) = f(e)$, $f \in \mathcal{K}(G)$. Analogt defin. δ_s for vilk. $s \in G$.

Klart, at hvert δ_s er pos., begr. Radon integral med norm $M_{\delta_s} = 1$

Bevis. Idet $I \in \mathcal{M}^1(G)$, gælder for hvert $f \in \mathcal{K}(G)$

$$\delta_e * I\ (f) = \int_G\int_G f(yz)\,d\delta_e(y)\,dI(z) = \int_G f(z)\,dI(z) = I(f)$$

$$I*\delta_e\ (f) = \int_G\int_G f(yz)\,d\delta_e(z)\,dI(y) = \int_G f(y)\,dI(y) = I(f),$$ altså $\delta_e * I = I$. $I*\delta_e = I$.

Defin. Også tale om venstre og højre translaterede $L_s I$ og $R_s I$ af Radon integral I i G, bestemt ved $L_s I(L_s f) = I(f)$ ell. $L_s I(f) = I(L_{s^{-1}}f)$, $f \in \mathcal{K}(G)$

og analogt. Klart, at atter Radon integraler.

NB. I venstre invar. $\iff \forall s \in G:\ L_s I = I$.

Der gælder: $\delta_s * I = L_s I$, $I*\delta_s = R_s I$,

thi for $f \in \mathcal{K}(G)$ er

$$\delta_s * I(f) = \int_G\int_G f(yz)\,d\delta_s(y)\,dI(z) = \int_G f(sz)\,dI(z) = I(L_{s^{-1}}f) = L_s I(f),$$ og anal.

Spec. $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$. (Bemærk iøvrigt $\delta_s \otimes \delta_t = \delta_{(s,t)}$.)

Altså er $s \to \delta_s$, $s \in G$, en isomorf indlejring af $(G,\cdot)$ i $(\mathcal{M}^1(G), *)$. (Afbildn. er injektiv, thi for $s \neq t$ findes (Urysohn) fkt. $f \in \mathcal{K}(G)$ med $f(s) \neq f(t)$, dvs. $\delta_s(f) \neq \delta_t(f)$.)

Spec. bemærk: Kompos $*$ i $\mathcal{M}^1(G)$ er kun kommutativ, hvis G er det.

Banach algebraen af begr. Radon integraler.

Idet V og W er vektorrum over $\mathbb{C}$ (eller $\mathbb{R}$) med norm, danner mgd. $\mathcal{L}(V,W)$ af begr., dvs. kontin. lin. afbildinger $T: V \to W$ påny et vektorrum. Vi har s.18 tilskrevet hvert $T \in \mathcal{L}(V,W)$ en norm $M_T \geqq 0$.

Det verificeres umiddelbart, at $T \to M_T$ virkelig er en norm i $\mathcal{L}(V,W)$. Videre gælder:

Er W et Banach rum (dvs. metrikken fuldstændig), så også $\mathcal{L}(V,W)$.

Bevis: Mat. 6 (1965-66), F 4.6, eller Neumark „Normierte Ringe" s. 89, IV.

Ved det duale rum V' til et normeret vektorrum V forstås vektorrummet $V' = \mathcal{L}(V,\mathbb{C})$ af begr., dvs. kontin. lineære fktner på V med ovennævnte norm. Det er altså et Banach rum. (I $\mathbb{C}$ benyttes $|\ |$ som norm.)

Lad nu X være et lokalt kompakt rum.

Det duale rum til vektorrummet $\mathcal{K}(X,\mathbb{C})$ af kontin. fktr med kompakt støtte, betragtet med uniforme norm $\|\ \|_\infty$, er netop vektorrummet $\mathcal{M}^1(X,\mathbb{C})$ af begr. Radon integr. i X (jfr. s. 20), betragtet med normen $I \to M_I$, hvor

$$M_I = \sup_{f \in \mathcal{K}, |f| \leqq 1} |I(f)|, \quad \text{dvs. } M_I \text{ mindste tal} \geqq 0, \text{ så } \forall f \in \mathcal{K}(G,\mathbb{C}): |I(f)| \leqq M_I \|f\|_\infty,$$

som tidligere defineret.

12.69 $\mathcal{M}^1(X,\mathbb{C})$ er altså, med nævnte norm, et Banach rum. (Iflg. sætn. s. 20 kan $\mathcal{M}^1(X,\mathbb{C})$ identificeres med duale rum til $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{C})$ med $\|f\|_\infty$, som selv er fuldst.)

Endelig: Lad G være en lokalt kompakt gruppe.

For mgd. $\mathcal{M}^1(G,\mathbb{C})$ af begr. Radon integr. i G betragter vi nu foruden add., multiplikation med skalar og norm også kompositionen $*$, foldning. Da gælder:

Sætning. $\mathcal{M}^1(G,\mathbb{C})$ er en Banach algebra med δ_e som etelement. Den er kommutativ netop hvis G er det. Dvs.:

1° $(\mathcal{M}^1, +, \mathbb{C}, *)$ er en algebra, dvs. $(\mathcal{M}^1, +, \mathbb{C})$ er et vektorrum, hvor $*$ er bilineær: $(I_1 + I_2) * J = I_1 * J + I_2 * J$, $(cI) * J = c(I * J)$ og anal.,

Thi for $f \in \mathcal{K}(G)$ er

$$(I_1 + I_2) * J\,(f) = \int_G (I_1 + I_2)(R_{x^{-1}} f)\, dJ(x)$$
$$= \int_G I_1(R_{x^{-1}} f)\, dJ(x) + \int_G I_2(R_{x^{-1}} f)\, dJ(x) = I_1 * J(f) + I_2 * J(f)$$

og anal.

2° Algebraen er <u>assoc.</u>, dvs. $*$ er assoc.
   1°, 2° indebærer, at $(\mathcal{M}', +, *)$ er en ring.

3° Algebraen har et <u>etelement</u>, nemlig δ_e, dvs. δ_e er neutralt ved $*$.

4° $I \to M_I$ er en <u>norm i algebraen</u> $\mathcal{M}'$, dvs. norm i vektorrummet $(\mathcal{M}', +, \mathbb{C})$ samt

$$\forall I, J \in \mathcal{M}': M_{I*J} \leqq M_I M_J \qquad \text{og} \quad M(\delta_e) = 1.$$

(For algebraer uden etelem. udelades sidste krav.)

5° Den til normen svarende <u>metrik</u> M_{I-J} <u>er fuldst.</u>
   dvs. $(\mathcal{M}', +, \mathbb{C})$ er, med normen, et Banach rum.

6° Algebraen er kommutativ $\underset{\text{defin.}}{\Longleftrightarrow}$ $*$ er komm. $\Longleftrightarrow$ G er kommutativ.

Vi har tidligere (s. 7) talt om <u>algebraer af fkt.r</u> def. på mgd. X. En sådan, $\mathcal{A}$, er med sædv. add., multipl. m. konstanter og sædv. multipl. en komm. og assoc. algebra. Der er et etelement, nemlig fkt.nen med værdi 1 i hvert $x \in X$, hvor $\exists f \in \mathcal{A}: f(x) \neq 0$, 0 ellers, netop hvis denne fkt. tilh. $\mathcal{A}$.

I enhver algebra $\mathcal{A} \neq \{0\}$ af <u>begr.</u> fkt.r er $\| \ \|_\infty$ en (algebra) norm.

Eks. For et lokalt kompakt rum X er $\mathcal{C}_0(X)$ en komm. Banach algebra. Der er etelement (konstante fkt. m. værdi 1) hvis X er kompakt, ellers ikke.

§2. Foldning med funktion.

Begr. Radon integraler med tæthed.

Lad her I være et pos. Radon integral i et lokalt kompakt rum X.

Keiter s.51 (vii)

For $h \in \mathcal{L}_I$ defineres ved

$$hI(f) = \int fh\,dI, \quad f \in \mathcal{K}(X).$$

et begr. Radon integral hI i X med norm $M_{hI} = \|h\|_1 = \int |h|\,dI$.

Det kaldes Radon integralet med tæthed h m.h.t. I.

Bevis.

1° For vilk. $f \in \mathcal{K}(X)$ vil $fh \in \mathcal{L}_I$ (beviset benytter kun f kontin. og begr.)

Thi for $g \in \mathcal{K}(X)$ vil $fg \in \mathcal{K}(X)$; nu findes g, så $\|h-g\|_1$ er så lille, man vil; idet f begr., $|f| \leq K \in \mathbb{R}_+$, fås påstanden af

$$\|fh - fg\|_1 = \bar{I}(|f||h-g|) \leq \bar{I}(K\cdot|h-g|) = K\,\bar{I}(|h-g|) = K\,\|h-g\|_1$$

2° Funktionalet hI er lineært (klart) og begrænset med norm $M_{hI} \leq \|h\|_1$.

Thi for hvert $f \in \mathcal{K}$ er

$$|hI(f)| = \left|\int fh\,dI\right| \leq \int |f||h|\,dI \leq \|f\|_\infty \int |h|\,dI = \|h\|_1 \|f\|_\infty$$

3° $M_{hI} = \|h\|_1$ for $h \in \mathcal{K}(X)$.

Nok at vise „$\geq$". Kan antage $h \neq 0$.

For $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ sættes $f_n(x) = \left(\frac{|h(x)|}{\|h\|_\infty}\right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn} \overline{h(x)}$.

Da er hvert $f_n \in \mathcal{K}$, nemlig kontin. i hvert pkt. (dels i tilfælde $h(x) \neq 0$, $h(x) = 0$) og 0 i samme pkt.r som h,

og $|f_n| \leq 1$.

Videre haves $f_n(x)h(x) = \left(\frac{|h(x)|}{\|h\|_\infty}\right)^{\frac{1}{n}} |h(x)| \nearrow |h(x)|$ for $n \to \infty$, dermed

Først her betydn. at I pos.

(iflg. (v') s.24, sætn. 4 s.39 ell. majoriseringssætn. s 40) $\quad I(|h|) = \sup_n I(f_n h)$.

Altså, idet $hI(f) = \int fh\,dI = I(fh)$:

$$M_{hI} = \sup_{f\in\mathcal{K},\, |f|\leq 1} |I(fh)| \geq \sup_n I(f_n h) = I(|h|) = \|h\|_1$$

4° $M_{hI} = \|h\|_1$ for hvert $h \in \mathcal{L}_I$.

Hertil bemærke, at $h \to hI$, $h \in \mathcal{L}_I$ er en lineær og iflg. 2° begr. operator fra $\mathcal{L}_I(X)$, $\|\ \|_1$ til rummet $\mathcal{M}^1(X)$ af begr. Radon integraler m. sædv. norm.

For vilk. $h \in \mathcal{L}_I$ findes jo $h_1, h_2, \ldots \in \mathcal{K}$, så $\|h - h_n\|_1 \to 0$.

Dermed $M_{hI - h_n I} = M_{(h-h_n)I} \to 0$.

Da nu $M_{hI} = \lim M_{h_n I}$
ligesom $\|h\|_1 = \lim \|h_n\|_1$ og $M_{h_n I} = \|h_n\|$ iflg. 3°, har vi $M_{hI} = \|h\|_1$.

5.2.70.

Vi noterer:

Idet I er et pos. Radon integral i lokalt kompakt rum X, er afbildningen

$$h \to hI, \quad h \in \mathcal{L}_I(X)$$

lineær og isometrisk fra $\mathcal{L}_I(X), \|\ \|_1$ til rummet $\mathcal{M}^1(X)$ af begr. Radon integraler i X med sædv. norm (s. 80).

Ved overgang til klasser af m.h.t. I ækv. fktner har vi en isometrisk isomorfi, „indlejring" af $L_I(X)$ i $\mathcal{M}^1(X)$.

Da $L_I(X)$ er fuldst. (s. 38), bliver det indlejret som afsluttet underrum af $\mathcal{M}^1(X)$.

Iflg. definitionen af hI, hvor $h \in \mathcal{L}_I(X)$, gælder

$$\int f\, dhI = \int fh\, dI \qquad \text{for } f \in \mathcal{K}(X).$$

Desværre er forholdene vedr. gyldighed af denne formel for mere omfattende fktsklasser end $\mathcal{K}(X)$ i alm. komplicerede (se f.eks. Edwards: Functional analysis s. 222-227).

Vi indskrænker os til at konstatere formlens rigtighed, når f er kontin. og begr.:

Da er $f \in \mathcal{L}_{hI}$, idet hI begr. (s. 37)
og $fh \in \mathcal{L}_I$, jfr. 1°, s. 82, så både v. og h. side har mening.

1° Først betragte tilfældet $h \in \mathcal{K}(X)$.

Bemærk, at kompl. mgd. til støtten C for h er nulmgd. m.h.t. hI (øvelse 2, s. 84)

Med et $H: X \to [0,1]$ tilh. $\mathcal{K}$ med $H(x) = 1$ for $x \in C$ (Urysohn) har vi derfor

$$H \underset{hI}{\sim} 1_X, \quad \text{dermed } fH \underset{hI}{\sim} f,$$

$$\text{altså } \int f\, dhI = \int fH\, dhI \underset{fH \in \mathcal{K}}{=} \int fHh\, dI \underset{Hh = h}{=} \int fh\, dI$$

2° For vilk. $h \in \mathcal{L}_I(X)$:

Vælge $h_1, h_2, \ldots \in \mathcal{K}$, så $\|h - h_n\|_1 = \int |h - h_n|\, dI \to 0$

Da vil $\int f\, dh_nI \to \int f\, dhI$

thi med brug af følgende øvelse 3 har vi

$$\left|\int f\, dhI - \int f\, dh_nI\right| = \left|\int f\, d(h-h_n)I\right| \leqq \int |f|\, d|(h-h_n)I|$$

$$\leqq \|f\|_\infty \int 1_X\, d|(h-h_n)I| \underset{s.42}{=} \|f\|_\infty M_{(h-h_n)I} = \|f\|_\infty \|h-h_n\|_1$$

Ligeledes $\int fh_n\, dI \to \int fh\, dI$

thi $\left|\int fh\, dI - \int fh_n\, dI\right| = \left|\int f(h-h_n)\, dI\right| \leqq \int |f||h-h_n|\, dI \leqq \|f\|_\infty \|h-h_n\|_1$

Men $\int f\, dh_nI = \int fh_n\, dI$ iflg. 1°.

Øvelser.

1. Lad $h \in \mathcal{L}_I$. Vis $|hI| \leq |h|I$, dvs. $|hI|(f) \leq \int f|h|\,dI$ for $f \in \mathcal{K}^+$.
(Faktisk gælder $|hI| = |h|I$, Bourbaki: Intégration, chap. V, 2. éd. p. 44)

[For $g \in \mathcal{K}$, $|g| \leq f$ er $|hI(g)| = |\int gh\,dI| \leq \int |gh|\,dI \leq \int f|h|\,dI$.
„=" kan for $h \in \mathcal{K}(X)$ fås som i 3°, s. 82, blot med f som ekstra faktor på fkt.ner

2. For $h \in \mathcal{K}(X)$ er kompl. mgd. til støtten C for h en nulmgd. m.h.t. hI.

[Thi $X \setminus C$ er åben, dvs. $1_{X\setminus C}$ nedad halvkont, dermed ydre mål af $X \setminus C$
$$= \overline{|hI|}(1_{X\setminus C}) = \sup_{f \in \mathcal{K}^+;\, f \leq 1_{X\setminus C}} |hI|(f)$$
Her er iflg. øvelse 1: $|hI|(f) \leq |h|I(f) = \int f|h|\,dI = 0$, idet $f|h| = 0$.

3. Idet I og J er Radon integraler i X og $f \in \mathcal{L}_{|I|+|J|}$, skal man vise
$$\int f\,d(I+J) = \int f\,dI + \int f\,dJ.$$

[En følge $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}$, der konverg. mod f i 1-norm m.h.t. $|I|+|J|$,
gør det nemlig også m.h.t. både $I+J$, I og J $\quad (|I+J| \leq |I|+|J|)$.

Vi får brug for nogle resultater vedr. produktrum $Y \times Z$ af lokalt kompakte rum Y og Z med Radon integraler I og J.

For fktner g på Y og h på Z vil vi betegne fktnen $(y,z) \to g(y)h(z)$ på $Y \times Z$ med $g \otimes h$.

…t. s.49 (1) <u>For</u> $g \in \mathcal{F}^1_I(Y)$, $h \in \mathcal{F}^1_J(Z)$ <u>vil</u> $g \otimes h \in \mathcal{F}^1_{I\otimes J}(Y \times Z)$ <u>og</u> $\|g \otimes h\|_1 = \|g\|_1 \|h\|_1$

Bevis. Idet $|I \otimes J| = |I| \otimes |J|$, s.49, kan vi antage I og J pos. Nu:

For $g \in \mathcal{F}^+(Y)$, $h \in \mathcal{F}^+(Z)$ er $g \otimes h \in \mathcal{F}^+(Y \times Z)$, umiddelbart at kontrollere, og iflg. 1°, s.50

$$\overline{I \otimes J}(g \otimes h) = \bar{I}_y\, \bar{J}_z\,(g(y)h(z)) \underset{g(y)<\infty \text{ p.p.}}{=} \bar{I}_y\,(g(y)\,\bar{J}(h)) \underset{\bar{J}(h)<\infty}{=} \bar{I}(g)\,\bar{J}(h)$$

For $g, h \geqq 0$ (stadig $\in \mathcal{F}^1$) er også $\overline{I \otimes J}(g \otimes h) = \bar{I}(g)\bar{J}(h)$

thi samme regning, blot med „$\geqq$" i stedet for første „$=$" ($2°$ s.50) giver „$\geqq$", og med passende $\tilde{g} \geqq g$, $\tilde{g} \in \mathcal{F}^+(Y)$ og $\tilde{h} \geqq h$, $\tilde{h} \in \mathcal{F}^+(Z)$ er

$$\overline{I \otimes J}(g \otimes h) \leqq \overline{I \otimes J}(\tilde{g} \otimes \tilde{h}) = \bar{I}(\tilde{g})\,\bar{J}(\tilde{h}) < \bar{I}(g)\,\bar{J}(h) + \varepsilon$$

Endelig for $g \in \mathcal{F}^1(Y)$, $h \in \mathcal{F}^1(Z)$:

$$\|g \otimes h\|_1 = \bar{I}(|g \otimes h|) = \bar{I}(|g| \otimes |h|) = \bar{I}(|g|)\,\bar{J}(|h|) = \|g\|_1 \|h\|_1 .$$

(2) <u>For</u> $g \in \mathcal{L}^1_I(Y)$, $h \in \mathcal{L}^1_J(Z)$ <u>vil</u> $g \otimes h \in \mathcal{L}^1_{I \otimes J}(Y \times Z)$

En konsekvens af (1): vælges $g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{K}(Y)$ med $\|g - g_n\|_1 \to 0$
og $h_1, h_2, \ldots \in \mathcal{K}(Z)$ med $\|h - h_n\|_1 \to 0$,

da vil $\|g \otimes h - g_n \otimes h_n\|_1 \to 0$, idet

$$\|g \otimes h - g_n \otimes h_n\|_1 = \|(g - g_n) \otimes h + g_n \otimes (h - h_n)\|_1$$
$$\leqq \|(g - g_n) \otimes h\|_1 + \|g_n \otimes (h - h_n)\|_1 = \|g - g_n\|_1 \|h\|_1 + \|g_n\|_1 \|h - h_n\|_1 .$$

<u>Lad nu</u> I <u>og</u> J <u>være pos. Radon integraler i lokalt kompakte rum</u> Y <u>og</u> Z, <u>og lad</u> $g \in \mathcal{L}_I(Y)$, $h \in \mathcal{L}_J(Z)$. <u>Da gælder</u>

$$(g \otimes h)(I \otimes J) = gI \otimes hJ.$$

Bevis. Iflg. corollar s.47 til Dieudonnés approx.sætn. nok at vise, at de to Radon integraler stemmer overens på enhver fkt. $f_1 \otimes f_2$ med $f_1 \in \mathcal{K}(Y)$, $f_2 \in \mathcal{K}(Z)$. Nu:

9.2.70

…hoi·
…spiller
…rolle

$$\int (f_1 \otimes f_2)(g \otimes h)\, d(I \otimes J) = \iint f_1(y) f_2(z) g(y) h(z)\, dI(y)\, dJ(z) = \int \Big(f_2(z) h(z) \int f_1(y) g(y)\, d\bar{I}(y)\Big) dJ(z)$$
$$= \int f_1 g\, dI \cdot \int f_2 h\, dJ = gI(f_1) \cdot hJ(f_2) = (gI \otimes hJ)(f_1 \otimes f_2).$$

Foldning med funktion

Lad G være en kommutativ lokalt komp. gruppe

Med I betegnes Haar integralet i G med vilk. valgt normering; i øvrigt benyttes betegnelser som s. 73-74.

Ved afbildningen $h \to hI$, $h \in \mathcal{L}(G)$, indlejres $L(G)$ isometrisk som et afsl. underrum af $\mathcal{M}^1(G)$, se s. 82-83. Ofte tillader man sig at skrive $L(G) \subseteq \mathcal{M}^1(G)$.

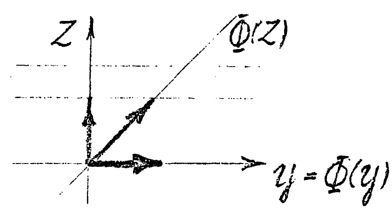
Meget af det følgende kunne også udvikles uden forudsætn. om kommutativitet, men der må da (medmindre gruppen er unimodulær) træffes et valg mellem det venstre og det højre inv. Haar integral, og vi ville få en del besvær med at holde styr på faktorernes orden.

Vi går over til additiv skrivemåde for gruppekomp. Neutrale elem. betegnes 0.

Først et lemma bl.a. vedr. Haar integralet i $G \times G$, som jo (s. 58, 74) med passende normering er $I \otimes I$.

Bemærk, at $\Phi : (y,z) \to (u,v)$ med $\begin{matrix} u = y+z \\ v = z \end{matrix}$ er en homeomorf afbild. af $G \times G$ på sig selv med $\Phi^{-1}(u,v) = (u-v, v)$

Eks. $G = \mathbb{R}$ med add.:



Lemma. Haar integralet i $G \times G$ er invariant ved Φ. (se s. 54)

Mere generelt: Ethv. integral $I \otimes J$, hvor J er vilk. Radon integral (og I stadig Haar integralet) i G, er invariant ved Φ.

Bevis. Vi skal for vilk. $f \in \mathcal{K}(G)$ vise $I \otimes J(\Phi f) = I \otimes J(f)$.

Nu: $I \otimes J(\Phi f) = I \otimes J(f \circ \Phi^{-1}) = J_z(I_y f(y-z, z)) = J_z(I_y f(y,z)) = I \otimes J(f)$.

ved inderste integration kan y erstattes med $y+z$

Konsekvens (s. 54). Vilk. $f : G \times G \to \mathbb{C}$ er ved integration m.h.t. $I \otimes J$ ganske ensstillet med $\Phi f : (y,z) \to f(y-z, z)$; „man kan erstatte y med $y-z$"

Og naturligvis y med $y+z$

Øvelse: Vis, at „man kan erstatte y med $-y$", ɔ: $f(-y,z)$ og $f(y,z)$ ensstillet ved integration m.h.t. $I \otimes J$.

Guichardet s.24

<u>Sætning.</u> <u>Ved foldning af et vilk. begr. Radon integral J i G og et Radon integral gI med tæthed $g \in \mathcal{L}$ m.h.t. Haar integralet fås påny et integral med tæthed, nemlig</u> –

$$y \to \int g(y-z)\,dJ_z, \quad y \in G.$$

Bevis. For vilk. $f \in \mathcal{K}(G)$ søges udtryk for $gI * J\,(f)$:

$$gI * J\,(f) = \int f(y+z)\,d(gI_y \otimes J_z) = \iint f(y+z)\,dgI_y\,dJ_z = \iint f(y+z)\,g(y)\,dy\,dJ_z.$$

Den sidste omskrivning er triviel, thi for fast z vil $y \to f(y+z)$ tilh. $\mathcal{K}(G)$.

I integranden kan vi nu erstatte y med $y-z$: $\qquad \iint f(y)\,g(y-z)\,dy\,dJ_z$

Imidlertid: $(y,z) \to g(y)$ tilhører $\mathcal{L}_{I\otimes J}$

thi vi kan anvende (2), s. 85. Funktionen er nemlig $g \otimes 1_G$

og $1_G \in \mathcal{L}_J$, da J er <u>begr.</u> (s. 42), medens $g \in \mathcal{L}_I$

Iflg. lemma s. 86 vil da også $(y,z) \to g(y-z)$ tilh. $\mathcal{L}_{I\otimes J}$

Dermed også $\qquad (y,z) \to f(y)\,g(y-z)$, idet $f \otimes 1_G$ kont. og begr. (1°, s. 82)

Ved Fubini: $\quad \iint f(y)\,g(y-z)\,dy\,dJ_z = \int f(y)\,g(y-z)\,d(I_y \otimes J_z) = \iint f(y)\,g(y-z)\,dJ_z\,dy$

Nu: da $g(y-z)$ tilh. $\mathcal{L}_{I\otimes J}$ vil, ligeledes iflg. Fubini

1) $z \to g(y-z)$ tilh. $\mathcal{L}_J$ for næsten alle y

2) $y \to \int g(y-z)\,dJ_z$ være integrabel

Iflg. 1) har vi endelig $\qquad gI*J\,(f) = \int \left(f(y) \int g(y-z)\,dJ_z \right) dy,$

således at $gI*J$ er Radon integralet med den i 2) givne fkt. som tæthed. –

Vi noterer

<u>Når g er integrabel m.h.t. Haar integralet I i komm. lokalt kompakt gruppe G og J er et begr. Radon integral på G,</u> altså $g \in \mathcal{L}(G)$ <u>og</u> $J \in \mathcal{M}^1(G)$,

<u>da vil</u> $(y,z) \to g(y-z)$ <u>tilh.</u> $\mathcal{L}_{I\otimes J}(G \times G)$.

<u>Vi definerer $g*J$ som fkt.nen</u> $\qquad y \to \int g(y-z)\,dJ(z) = \int L_y \check{g}\,dJ,$

defin. for næsten alle $y \in G$,

<u>hvorved</u> $g*J \in \mathcal{L}(G)$ <u>og</u>

$$gI*J = (g*J)I.$$

<u>Ved afbildningen $g \to gI$, $g \in \mathcal{L}(G)$, indlejres $L(G)$ isometrisk som et afsluttet ideal i Banach algebraen $\mathcal{M}^1(G)$ af begr. Radon integraler på G</u> (se s. 83).

Ordet foldning, ty. Faltung, eng. fr. convolution, kan være inspireret af integrandens variation med y i udtrykket for $g*J(y)$. (Tænk på $\mathbb{R}$ med +.)

Vi bruger betegnelserne $J*g$ og $g*J$ i flæng. (Her er det naturligvis væsentligt, at G er komm.)

<u>Øvelse</u>: vis $\int g*J\,dI = \int g(y)dy \cdot \nu(G)$, hvor ν er målet sv. til J

$$\begin{aligned}\iint g(y-z)\,dJ_z\,dy &= \int_{G\times G} g(y-z)\,d\,I\otimes J \quad , \text{ Fubini}\\ &= \int_{G\times G} g(y)\,d\,I\otimes J \quad , \ y \text{ erstattet med } y+z, \text{ lemma s. 86}\\ &= \iint g(y)\,dy\,dJ_z = \int g(y)dy \cdot \int 1_G\,dJ.\end{aligned}$$

For vilk. $s \in G$ gælder $g*\delta_s = L_s g$, spec. $g*\delta_0 = g$,

idet $\int g(y-z)\,d\delta_s(z) = g(y-s) = L_s g(y)$, sml s. 79.

2. 70

Gruppealgebraen $\mathcal{L}(G)$.

Lad G være en komm. lokalt komp. gruppe, I Haar integralet i G (vilk. normeret).

Sætning. Ved foldning af Radon integraler gI og hI med tætheder g og $h \in \mathcal{L}(G)$ m.h.t. Haar integralet fås påny et integral med tæthed, nemlig –

$$y \to \int_G g(y-z)h(z)\,dz, \quad y \in G.$$

Bemærk: Sætningen s. 87 indeholder denne påstand, blot med ydtrykket

$$y \to \int_G g(y-z)\,d\,hI_z\,, \quad y \in G$$

for tætheden. Vi har imidlertid ingen hjemmel for at omskrive til det anførte –, sml. s. 83. Derfor:

Bevis. For vilk. $f \in \mathcal{K}(G)$ søges udtryk for $gI * hI\,(f)$:

$$gI * hI\,(f) = \int_{G\times G} f(y+z)\,d(gI \otimes hI)_{y,z} \underset{\text{se s. 85}}{=} \int_{G\times G} f(y+z)\,d((g\otimes h)(I\otimes I))_{y,z}$$

$$= \int_{G\times G} f(y+z)g(y)h(z)\,d(y,z), \quad \text{idet } f(y+z) \text{ kontin. og begr. (s. 83)}$$

$$= \int_{G\times G} f(y)\,g(y-z)h(z)\,d(y,z), \quad y \text{ er erstattet med } y-z \text{ jvf. lemma s. 86}$$

$$= \int_G \int_G f(y)g(y-z)h(z)\,dz\,dy, \quad \text{iflg. Fubini.}$$

Da $g\otimes h$, dvs. $g(y)h(z)$, tilh. $\mathcal{L}(G\times G)$, s. 85, så også $g(y-z)h(z)$, iflg. lemma s. 86
Iflg. Fubini vil da

1) $z \to g(y-z)h(z)$ være integrabel for næsten alle y
2) $y \to \int_G g(y-z)h(z)dz$ være integrabel

Iflg. 1) har vi endelig $\quad gI * hI\,(f) = \int_G \left(f(y) \int_G g(y-z)h(z)dz\right)dy$,
således at $gI * hI$ er Radon integralet med den i 2) givne fkt. som tæthed.

Vi noterer
Når g og h er integrable m.h.t. Haar integralet I i komm. lokalt komp. gruppe G, altså $g, h \in \mathcal{L}(G)$, da vil $(y,z) \to g(y-z)h(z)$ tilh. $\mathcal{L}(G\times G)$.
Vi definerer $g*h$ som fkt.nen $\quad y \to \int g(y-z)h(z)dz = \int L_y\check{g}\cdot h\,dI$,
defin. for næsten alle $y \in G$,

hvorved $g*h \in \mathcal{L}(G)$ og

$$gI * hI = (g*h)I.$$

Endvidere er $\int g*h\,dI = \int g\,dI \cdot \int h\,dI$.

thi $\int g*h\,dI \underset{\text{fuldstændi anv. af Fubini}}{=} \int_{G\times G} g(y-z)h(z)\,d(y,z) \underset{\text{s. 85}}{=} \int_{G\times G} g(y)h(z)\,d(y,z) = \int g(y)dy \cdot \int h(z)dz$

Vi bemærker, at $g*h$ bliver helt den samme fkt., når g og h udskiftes med ækvivalente, thi da I er invariant ved inversafb. (s. 56, 75) og translation, vil så for hvert y også $L_y\check{g}\cdot h$ blot udskiftes med en ækvivalent.

Skelnes ikke mellem ækv. fktner, dvs går vi over til $L(G)$, ved vi, at $h \to hI$ giver en isometrisk vektorrumsisomorfi (s. 83) til et afsluttet underrum af $\mathcal{M}^1(G)$. Dette er i kraft af sætn. s. 89 en delalgebra (i kraft af sætn. s. 87 endda et ideal) i $\mathcal{M}^1(G)$. Foldningen i $L(G)$ er nu netop defineret, så overgangen til Radon integraler med tæthed også er isomorf ved $*$. Dermed:

Hovedsætning. I en komm. lokalt kompakt gruppe G er $L(G)$ med add., multipl. m. skalar, $\|\,\|_1$ og foldning en komm. Banach algebra.
Den kaldes gruppealgebraen for G.
Afbildningen $h \to hI$, $h \in \mathcal{L}(G)$, giver en isometrisk algebraisomorfi af $L(G)$ på et afsluttet ideal (en „indlejring" som afsluttet ideal) i Banach algebraen $\mathcal{M}^1(G)$ af begr. Radon integraler i G. Ofte skrives $L(G) \subseteq \mathcal{M}^1(G)$.

Banach algebraen $\mathcal{M}^1(G)$ har flere fortrin frem for $L(G)$:
Definitionen af foldning i $\mathcal{M}^1(G)$ er mere naturlig. Den implicerer slet ikke Haar integralet, er dermed uafh. af dettes normering, ligesom valg af venstre eller højre Haar integral ikke kom for i ikke-komm. grupper.
$\mathcal{M}^1(G)$ er en Banach algebra med etelement δ_0, medens:

Sætning. Medmindre G er diskret, har algebraen $L(G)$ intet etelement. Specielt er da Dirac integralet δ_0 ikke med tæthed m.h.t. Haar integralet I (ikke en „funktion"), og $L(G)$ altså en ægte „del" af $\mathcal{M}^1(G)$.

Inden beviset indskyde bemærkninger vedr. vilk. Radon integral J i lokalt kompakt rum X:

Er $f, g \in \mathcal{L}_J(X)$ og f begr., da er $fg \in \mathcal{L}_J(X)$

Vi kan her antage J pos. For $h \in \mathcal{K}(X)$ ved vi $fh \in \mathcal{L}_J$ iflg. 1°, s. 82.
Påstanden fås da af
$$\|fg - fh\|_1 = \bar{J}(|f||g-h|) \leq \bar{J}(\text{const}\cdot|g-h|) = \text{const}\cdot\|g-h\|_1 \quad \text{(sml. 1°, s. 82)}.$$

For $f \in \mathcal{L}_J(X)$ og $A \subseteq X$, A integr. m.h.t. J er da spec. $f\cdot 1_A \in \mathcal{L}_J$.
Vi definerer
$$\int_A f\,dJ = \int f\cdot 1_A\,dJ.$$

Bevis for sætn.

1° Er $A_1, A_2, \dots \subseteq G$ integrable mgdr med Haar mål $m(A_n) \to 0$ og er $f \in \mathcal{L}(G)$, da vil
$$\int_{A_n} f(x)dx \to 0.$$

(beviset benytter kun, at I pos. integral i lokalt komp. rum).

Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Vælge $g \in \mathcal{K}$, så $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Sætte $\|g\|_\infty = c$.
For hvert $n \in \mathbb{N}$ er da:
$$\left|\int_{A_n} f - \int_{A_n} g\right| \leqq \int_{A_n} |f-g| \leqq \int_G |f-g| = \|f-g\|_1 < \varepsilon,$$
$$\left|\int_{A_n} g\right| \leqq \int_{A_n} |g| \leqq \int_{A_n} c = c\, m(A_n);$$
dermed $\left|\int_{A_n} f\right| < c\, m(A_n) + \varepsilon \qquad < 2\varepsilon$ fra et vist trin.

2° Nu vise sætningens påstand: G ej diskret $\Rightarrow$ $L(G)$ har intet etelement.

At G ej diskret er iflg. 2) s. 74 ensbet. med $m(\{0\}) = 0$
Idet $m(\{0\}) = \inf\{\overline{m}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \text{ åben}, \mathcal{U} \ni 0\}$, s. 31 (vi), findes da en følge af åbne mgdr $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n \ni 0$ med $\overline{m}(\mathcal{U}_n) = m(\mathcal{U}_n) \to 0$
(vi kan antage alle $\overline{m}(\mathcal{U}_n) < \infty$, dvs. $\mathcal{U}_n$ integrabel (s. 42))

Betragte vilk. $f \in \mathcal{L}(G)$. Vise, at tilsv. ækv.klasse ej etelement i $L(G)$
Da Haar integralet er invers invar. (s. 56, 75) er $\check{f} \in \mathcal{L}(G)$, dermed $|\check{f}| \in \mathcal{L}$.
Iflg. 1° vil derfor $\int_{\mathcal{U}_n} |\check{f}| \to 0$, spec.:

Der findes åben omegn $\mathcal{U}$ af 0 med $\int_{\mathcal{U}} |\check{f}| < 1$.
Videre findes åben omegn V af 0 med $V - V \subseteq \mathcal{U}$ (idet $(x,y) \to x-y$ kont. i $(0,0)$).
For hvert $x \in V$ er nu $f * 1_V(x) = \int L_x\check{f} \cdot 1_V = \int_V L_x \check{f} = \int_{V-x} \check{f}$

og dermed, idet $V - x \subseteq \mathcal{U}$, $|f * 1_V(x)| \leqq \int_{V-x} |\check{f}| \leqq \int_{\mathcal{U}} |\check{f}| < 1$

Dette udelukker imidlertid $f * 1_V \sim 1_V$ (idet jo $m(V) > 0$, s. 73).

<u>For en diskret gruppe</u> G <u>er derimod</u> $L(G) = \mathcal{M}^1(G)$, dvs. ethv. begr. Radon integral J i G har en tæthed $h \in \mathcal{L}(G)$, $J = hI$. Spec. har $L(G)$ et etelement.

Lad os nemlig normere Haar integralet som i eks. 5°, s. 60, og defin. h ved
$$h(x) = J(1_{\{x\}}), \quad x \in G.$$

Gelfand, Raikow, Schilow s. 164, Satz 2.

Da er $|J|(1_{\{x\}}) = |h(x)|$

thi $|J|(1_{\{x\}}) = \sup_{f\in\mathcal{K},\, |f|\leq 1_{\{x\}}} |J(f)| = \sup_{c\in\mathbb{C},\, |c|\leq 1} |J(c1_{\{x\}})| = |h(x)|$

Idet $1_G = \sum_{x\in G} 1_{\{x\}}$, hvor jo alle $1_{\{x\}} \in \mathcal{I}_+$, har vi ved corollar s. 28 (eller bemærkn. s. 31)

$$\sum_{x\in G} |h(x)| = \sum_{x\in G} |J|(1_{\{x\}}) = \overline{|J|}(1_G) < \infty$$

(vii), s. 31, $|J|$ er begr. iflg. s. 37.

Altså er $h \in \mathcal{L}(G)$.

For vilk. $f\in\mathcal{K}(G)$, dvs. $f(x)\neq 0$ for højst end. mange $x\in G$, er $f = \sum_{f(x)\neq 0} f(x)1_{\{x\}}$,

dermed $J(f) = \sum_{f(x)\neq 0} f(x) J(1_{\{x\}}) = \sum_{f(x)\neq 0} f(x)h(x) = \int fh\, dI = hI(f)$.

Altså er $J = hI$.

NB. Beviset for, at begr. Radon integral J i G har tæthed $h\in\mathcal{L}(G)$ m.h.t. I benytter kun, at G er mgd. m diskrete topologi og I Radon integralet fra eks. 5°, s. 60.

Noter:

For en diskret gruppe G er $\mathcal{L}(G)$ „=" $L(G)$ „=" $\mathcal{M}^1(G)$, $\quad h\in\mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \sum_{x\in G} |h(x)| < \infty$.

Med Haar integralet I normeret, så $m(\{0\}) = 1$, er (s. 60)

for $g, h\in\mathcal{L}(G)$: $\quad g*h(y) = \sum_{z\in G} g(y-z)h(z)$,

etelement i $\mathcal{L}(G)$ er $1_{\{0\}}$, mere generelt

for $s\in G$, $h\in\mathcal{L}(G)$: $\quad 1_{\{s\}} * h = L_s h$.

Den sidste påstand følger af $1_{\{s\}}I = \delta_s$ og $\delta_s * h = L_s h$, hvormed

$$(1_{\{s\}}*h)I = 1_{\{s\}}I * hI = \delta_s * hI = (\delta_s * h)I = L_s h\, I,$$

men er i øvrigt umiddelbar at regne efter: $h*1_{\{s\}}(y) = \sum_z h(y-z)1_{\{s\}}(z) = h(y-s)$.

Specielt bemærke $1_{\{s\}} * 1_{\{t\}} = 1_{\{s+t\}}$ (som blot et andet udtryk for $\delta_s * \delta_t = \delta_{s+t}$):
Afbildningen $s \to 1_{\{s\}}$ indlejrer således G isomorft blandt de invertible elementer i $\mathcal{L}(G), *$.

Idet $f\in\mathcal{K}(G)$ betyder $f(x)\neq 0$ for højst end. mange x og $f = \sum_{f(x)\neq 0} f(x)1_{\{x\}}$

omtales fktnerne $f\in\mathcal{K}(G)$ undertiden som „formelle linearkombinationer af elem. i G", svarende til at $1_{\{x\}}$ identificeres med x.

For G endelig udgør disse „formelle linearkombin." jo samtlige fkt.ner på G, spec. er $\mathcal{K}(G) = \mathcal{L}(G)$. Historisk har foldning og gruppealgebra deres udspring i „regningen":

$$\sum_{x\in G} g(x)x \cdot \sum_{z\in G} h(z)z = \sum_{x,z\in G} g(x)h(z)xz = \sum_{y\in G}\Big(\sum_{xz=y} g(x)h(z)\Big)y = \sum_{y\in G}\Big(\sum_{z\in G} g(yz^{-1})h(z)\Big)y$$

Vigtigt eks. på diskret gruppe: $\mathbb{Z}$ med addition.

Her skrives ofte ℓ^1 for $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, og fktner skrives som følger $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$:

$(c_n)\in\ell^1 \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|<\infty$, $(a_n)=(b_n)*(c_n)$ er givet ved $a_n=\sum_{p\in\mathbb{Z}} b_{n-p}c_p = \sum_{m+p=n} b_m c_p$.

For ikke-diskret gruppe G er δ_0 og dermed δ_s for vilk. $s\in G$ ikke med tæthed (s. 90).

Isomorfien $s\to\delta_s$, $s\in G$ går altså tabt, når vi arbejder med $L(G)$ i st. f. $\mathcal{M}^1(G)$.

Bemærk, at fktnerne $1_{\{s\}}$ er helt uden interesse, idet jo $m(\{s\})=0$, altså $1_{\{s\}}\sim 0$, hvormed $1_{\{s\}}*h=0$ for ethv. h.

Vende tilbage til vilk. komm. lokalt kompakt gruppe G.

For $g,h\in\mathcal{K}(G)$ vil også $g*h\in\mathcal{K}(G)$, se s. 55.

Nu er overgangen $\mathcal{L}(G)\to L(G)$ injektiv på $\mathcal{K}(G)$, $g\neq h \Rightarrow g\nsim h$ for $g,h\in\mathcal{K}(G)$, thi $|g-h|\in\mathcal{K}^+$, $|g-h|\neq 0$, dermed $\|g-h\|_1 = I(|g-h|)>0$, s. 61, 73.

Følgelig:

<u>$\mathcal{K}(G)$ er med add., multipl. m. konst., foldning og $\|\ \|_1$ en normeret algebra.</u>
<u>Ved overgangen $\mathcal{L}(G)\to L(G)$ indlejres den isometrisk og isomorft som tæt delalgebra i Banach algebraen $L(G)$.</u>

NB. $\mathcal{L}(G)$ er i alm. ikke selv en algebra. Således er for $f,g,h\in\mathcal{L}(G)$ nok

$(f*g)*h \sim f*(g*h)$, men i alm. ikke $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Øvelse. Vis $f*g*h\,(x) = \int_{G\times G} f(x-y)g(y-z)h(z)\,d(y,z)$ for næsten alle x.

[Man kan kopiere s. 89
eller benytte udtrykket for foldning af fktn samt Fubini
(herved endda vise $(f*g)*h\,(x) = $ h.s. i hvert x hvor begge exist.
$f*(g*h)\,(x) = $ h.s. " " " " " ")

Vis $g*h=h*g$ for $g,h\in\mathcal{L}(G)$.

[$\int g(y-z)h(z)\,dz \underset{z \text{ erstattes med } -z}{=} \int g(y+z)h(-z)\,dz \underset{z \text{ erstattes med } z-y}{=} \int g(z)h(y-z)\,dz$, samtidig eksistens

Bemærk: Hver af algebraerne $\mathcal{M}^1(G)$, $L(G)$ og $\mathcal{K}(G)$ kan opfattes som generalisering af gruppealgebraen for en end. gruppe – og dermed gøre krav på navnet.

Approximativ enhed.

I en normeret algebra $\mathcal{A}$ (jfr. 1°, 2°, 4° s. 80) er multipl. $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ kontin.

thi $fg - f_0g_0 = (f-f_0)(g-g_0) + f_0(g-g_0) + (f-f_0)g_0$,

9.2.76 dermed $\|fg - f_0g_0\| \leq \|f-f_0\|\,\|g-g_0\| + \|f_0\|\,\|g-g_0\| + \|f-f_0\|\,\|g_0\|$.

Er $\mathcal{A}$ med etelement ε, og er (ε_n) en følge af elem. i $\mathcal{A}$ (ell. blot indic. mgd. af elem. i $\mathcal{A}$ med opad filtrerende indexmgd.), gælder der for

$$\|\varepsilon - \varepsilon_n\| \to 0 \iff \forall f\in\mathcal{A}: \|f - \varepsilon_n f\| \to 0$$

idet jo „$\Leftarrow$" er klar.

Har $\mathcal{A}$ intet etelement, kan der dog findes følger eller generalis. følger (ε_n) med egenskaben $\quad \forall f\in\mathcal{A}: \|f - \varepsilon_n f\| \to 0 \qquad (*)$

En sådan evt. generaliseret følge kaldes en <u>approximativ enhed</u> i $\mathcal{A}$.

Lad nu G være en komm. lokalt kompakt gruppe, I Haar integralet.

$\mathcal{M}^1(G)$ har etelement δ_0, men medmindre G er diskret, har $L(G)$ intet etelement. Der findes heller ingen generaliseret følge (ε_n) med $\varepsilon_n \in \mathcal{L}(G)$, så $\varepsilon_n I$ konvergerer mod δ_0 i $\mathcal{M}^1(G)$; ved $h \to hI$ indlejres jo $L(G)$ som en <u>afsluttet</u> del af $\mathcal{M}^1(G)$. Alligevel har Banach algebraen $L(G)$, som vi skal se, altid en approximativ enhed.

<u>For ethvert</u> $f\in\mathcal{L}(G)$ <u>giver</u> $s\to L_sf$, $s\in G$, <u>en ligelig kontinuert afbildn. af</u> G <u>ind i</u> $L(G), \|\ \|_1$:

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+ \ \exists \text{omegn } V \text{ af } 0 \ \forall s,t\in G: s-t\in V \Rightarrow \|L_sf - L_tf\|_1 < \varepsilon.$$

Bevis. På grund af Haar integralets translinv. er $\|L_sf - L_tf\|_1 = \|L_{s-t}f - f\|_1$.

Påstanden kommer altså ud på $\quad \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+ \ \exists \text{omegn } V \text{ af } 0 \ \forall s\in V: \|L_sf - f\|_1 < \varepsilon$.

1° For $f\in\mathcal{K}(G)$:

Iflg. s.52 er f <u>ligeligt kontin.</u>: Til vilk. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes omegn V af 0, så

$$\forall x\in G\ \forall s\in V: |f(x-s) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{dvs. } \forall s\in V: |L_sf - f| < \varepsilon$$

Idet K er støtten for f og $\mathcal{U}$ en kompakt omegn af 0 er $K+\mathcal{U}$ kompakt (s.55);

Vi vælger $V \subseteq \mathcal{U}$. For $s\in V$ er da L_sf og f begge 0 uden for $K+\mathcal{U}$,

dermed $\quad |L_sf - f| \leq \varepsilon 1_{K+\mathcal{U}}$ og $\|L_sf - f\|_1 = I(|L_sf - f|) \leq \varepsilon\, m(K+\mathcal{U}) = \varepsilon\cdot\text{const.}$

2° For $f \in \mathcal{L}(G)$:

Til $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ først $g \in \mathcal{K}(G)$, så $\|g - f\|_1 < \varepsilon$; dernæst iflg. 1° omegn V af o, så for $s \in V$ gælder $\|L_s g - g\|_1 < \varepsilon$, og dermed

$$\|L_s f - f\| \leq \|L_s f - L_s g\| + \|L_s g - g\| + \|g - f\| < 3\varepsilon.$$

Sætning. Lad $\mathfrak{U}$ være basis for omegnene af det neutrale elem. o i G (dvs. hver omegn V af o indeholder et $U \in \mathfrak{U}$), og lad for hver omegn $U \in \mathfrak{U}$ være givet en pos. integrabel fkt. ε_U med

$$\varepsilon_U(x) = 0 \text{ for } x \notin U \qquad \text{og} \quad \int \varepsilon_U(x)\,dx = 1.$$

Idet $\mathfrak{U}$ ordnes ved $\supseteq$, er da $(\varepsilon_U)_{U \in \mathfrak{U}}$ en approximativ enhed i $L(G)$, dvs.

$$\forall f \in \mathcal{L}(G): \quad \|\varepsilon_U * f - f\|_1 \to 0$$

Bevis. Idet $f(y) = \int f(y)\,\varepsilon_U(z)\,dz$ har vi for næsten alle y

$$\varepsilon_U * f(y) - f(y) = \int (f(y-z) - f(y))\,\varepsilon_U(z)\,dz,$$

dermed $\quad |\varepsilon_U * f(y) - f(y)| \leq \int |f(y-z) - f(y)|\,\varepsilon_U(z)\,dz,$

altså $\quad \|\varepsilon_U * f - f\|_1 \leq \bar{I}_y\left(\int |f(y-z) - f(y)|\,\varepsilon_U(z)\,dz\right).$

Da nu $f(y)\varepsilon_U(z)$ og dermed $f(y-z)\varepsilon_U(z)$ tilh. $\mathcal{L}(G \times G)$, se s. 85, 86, kan vi anvende Fubini:

$$\|\varepsilon_U * f - f\|_1 \leq \iint \ldots dz\,dy = \int_{G \times G} \ldots d(y,z) = \iint \ldots dy\,dz$$

$$= \int \left(\varepsilon_U(z) \int |L_z f(y) - f(y)|\,dy\right) dz = \int \varepsilon_U(z)\,\|L_z f - f\|_1\,dz.$$

til kan ngt $\varepsilon_U \in \mathcal{L}^+$, $\int \varepsilon_U = 1$.

Til vilk. $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes nu iflg. s. 94 omegn V af o, så $\|L_z f - f\|_1 < \delta$ for $z \in V$.
For hvert $U \in \mathfrak{U}$, $U \subseteq V$ er da sidste integrand $\leq \delta\,\varepsilon_U(z)$ for alle $z \in G$,

dermed $\|\varepsilon_U * f - f\|_1 \leq \int \delta\,\varepsilon_U(z)\,dz = \delta.$

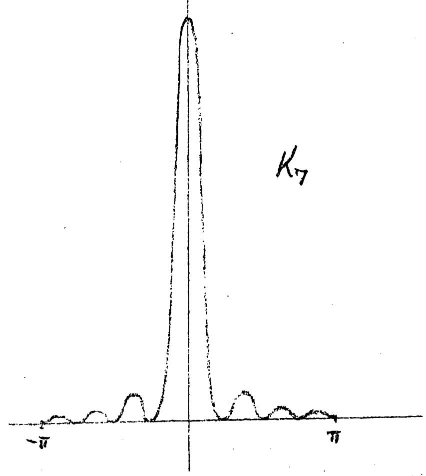
Bemærk: Med sætningen er vist eksistens af approximativ enhed. F. eks. kan man lade $\mathfrak{U}$ bestå af alle integrable åbne omegne (eller alle kompakte omegne) af o og sætte $\varepsilon_U = \frac{1}{m(U)} 1_U$. Iflg. Urysohn kan ε_U også tænkes valgt $\in \mathcal{K}(G)$. — Idet U trækker sig sammen, kommer ε_U til at minde om Diracs forestilling om en „δ-fkt." (dog ved vi, s. 94, at $\varepsilon_U I$ ikke konvergerer mod δ_0).

Eks. I teorien for Fourier rækker optræder forsk. approximative enheder i $L(\mathbb{R}/2\pi)$, således Fejérs kerne $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defin. ved $K_n(x) = n^{\text{te}}$ afsnitsmiddel af $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x}$ (mat. 2). De faldes ofte (som Fejérs kerne) ind under:

En (evt. generaliseret) følge (ε_n) af fktr $\varepsilon_n \in \mathcal{L}^+(G)$ med $\int_G \varepsilon_n(x)\,dx = 1$,
hvor for hver integr. omegn V af o gælder

$$\int_{G-V} \varepsilon_n(x)\,dx \to 0,$$

er en approximativ enhed i $L(G)$.



Øvelse: vis den netop formulerede sætning.

[$\|\varepsilon_n * f - f\|_1 \leq \int_G \varepsilon_n(z)\|L_z f - f\|_1\,dz$,
nu dele i $\int_V$ og resten $\int_{G\setminus V}$

Minde om, hvorledes Fejers kerne dukker op:

For n^{te} afsnit s_n i Fourier række for $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi)$

haves $s_n(y) = \sum_{-n}^{n} c_\nu e^{i\nu y} = \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-i\nu z}\,dz\, e^{i\nu y} = \sum_{-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu(y-z)} f(z)\,dz$,

altså $s_n = \sum_{-n}^{n}(f * e_\nu) = f * \sum_{-n}^{n} e_\nu = f * D_n$

Dermed for n^{te} afsnitsmiddel: $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{0}^{n} s_\nu = \frac{1}{n+1}\sum(f * D_\nu) = f * \frac{1}{n+1}\sum D_\nu = f * K_n$.

At (K_n) er en approx. enhed i $L(\mathbb{R}/2\pi)$, altså $\|f * K_n - f\|_1 \to 0$, betyder således:

Fourier række for vilk. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi)$ er summabel i $\mathcal{L}(\mathbb{R}/2\pi)$, $\|\ \|_1$ med sum f.

3.2.70

Translation og foldning.

Lad G være en komm., lokalt kompakt gruppe, I Haar integralet (vilk. normeret)

Først bemærke:

$L_s g * h = L_s(g*h)$, samme fkt., for $s \in G$, $g, h \in \mathcal{L}(G)$

nemlig $\int L_s g(y-z)h(z)dz = \int g(y-s-z)h(z)dz = (g*h)(y-s)$

Tilsvarende gælder $L_s g * J = L_s(g*J) = g * L_s J$, samme fkt for $s \in G$, $g \in \mathcal{L}(G)$, $J \in \mathcal{M}(G)$

og $L_s H * J = L_s(H*J)$ for $s \in G$, $H, J \in \mathcal{M}^1(G)$

Øvelse: vis det.

[Bemærk: idet naturligvis $(L_s g) . I = L_s(gI)$ følger alle øvrige påstande med $\sim$ i stedet for $=$ af den sidste. Men $=$ kræver efterregning i hvert tilfælde

Første $=$ som ovenfor eller $\int L_y (L_s g)^\vee dJ = \int L_y L_{-s} \check{g}\, dJ = g*J(y-s)$,

andet $=$ $\int L_y \check{g}\, dL_s J = \int L_{-s} L_y \check{g}\, dJ = g*J(y-s)$.

Sidste påstand: $(L_s H * J)(f) = \int L_s H(L_{-x} f) dJ(x) = \int H(L_{-s} L_{-x} f) dJ(x)$

$= \int H(L_{-x} L_{-s} f)\, dJ(x) = H*J(L_{-s} f) = L_s(H*J)(f)$.

Vi ved, at $L_s g = \delta_s * g$ for $s \in G$, $g \in \mathcal{L}(G)$. Nu benytte existens af approx. enhed (s. 95) til at vise

---

Enhver translateret $L_s g$ af en fkt. $g \in \mathcal{L}(G)$ tilh. afslutningen af $\{f*g \mid f \in \mathcal{L}(G)\}$ i $L(G)$.

Da $*$ er kontin. (s. 94), er det nok at lade f gennemløbe tæt del af $\mathcal{L}(G)$, f.ex. $\mathcal{K}(G)$.

Bevis. Med approx. enhed (ε_i) haves for vilk. $s \in G$:

$$\|L_s g - L_s \varepsilon_i * g\|_1 = \|L_s g - L_s(\varepsilon_i * g)\|_1 = \|g - \varepsilon_i * g\|_1 \to 0.$$

Omvendt gælder:

Foldningen $f*g$, hvor $f, g \in \mathcal{L}(G)$, tilhører det afsluttede underrum af $L(G)$ frembragt af de translaterede af g.

Bevis. Underrummet U_g frembragt af de translaterede af g består af alle end. linear-kombinationer $\sum c_n L_{s_n} g$, det afsluttede er $\overline{U_g}$.

1° Nok at betragte tilfældet $f \in \mathcal{K}(G)$.

thi da $f \to f*g$, $f \in \mathcal{L}(G)$ er kontin. (s. 94), er originalmgd. til $\overline{U_g}$ afsluttet og omfatter derfor hele $\mathcal{L}(G)$, såfremt den omfatter den tætte del $\mathcal{K}(G)$.

2° For $f\in\mathcal{K}(G)$, $g\in\mathcal{L}(G)$ giver $z\to f(z)L_z g$ en ligelig kontin. afbildn. af G ind i $\mathcal{L}(G)$, $\|\ \|_1$

thi f er ligel. kont. (s. 52), $z\to L_z g$ er ligel. kont. (s. 94)

og $\quad f(s)L_s g - f(t)L_t g = (f(s)-f(t))(L_s g - L_t g) + f(t)(L_s g - L_t g) + (f(s)-f(t))L_t g$,

dermed $\|f(s)L_s g - f(t)L_t g\|_1 \leqq |f(s)-f(t)|\,\|L_s g - L_t g\|_1 + \|f\|_\infty \|L_s g - L_t g\|_1 + |f(s)-f(t)|\,\|g\|_1$

3° Selve påstanden for $f\in\mathcal{K}(G)$, $g\in\mathcal{L}(G)$: til vilk. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes linearkomb. $\sum_{i=1}^{n} c_i L_{t_i} g$ så $\|f*g - \sum_i c_i L_{t_i} g\|_1 < \varepsilon$.

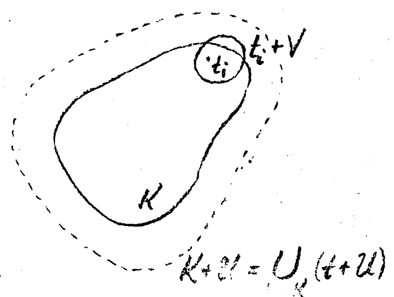
Lad K være støtten for f og $\mathcal{U}$ en komp. omegn af 0. Da er $K+\mathcal{U}$ kompakt.

Til ε vælge åben omegn V af 0, $V\subseteq\mathcal{U}$, så

$\|f(s)L_s g - f(t)L_t g\|_1 < \varepsilon$ for $s-t\in V$ (iflg. 2°)

Da de åbne mgd.er $t+V$, $t\in K$ overdækker komp. K

findes $t_1,\dots,t_n\in K$, så $\quad K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(t_i+V)$.



Videre findes (deling af enheden, s. 65) $h_1,\dots,h_n\in\mathcal{K}^+$,

så $\quad h_i(z)=0$ for $z\notin t_i+V \quad$ og $\quad \sum_{i=1}^{n} h_i(z) \begin{cases} =1 & \text{for } z\in K \\ \leqq 1 & \text{for } z\in G\end{cases}$

Da er $f=\sum_i f h_i$, dermed $f*g(y) = \int g(y-z)f(z)\,dz = \int\left(\sum_{i=1}^{n} g(y-z)f(z)h_i(z)\right)dz$

Sammenholde $f*g$ med fktnen $y\to\int\left(\sum_{i=1}^{n} g(y-t_i)f(t_i)h_i(z)\right)dz = \sum_{i=1}^{n}\left(g(y-t_i)f(t_i)I(h_i)\right)$,

som er linearkombin. $\sum_{i=1}^{n} c_i L_{t_i} g$ med $c_i = f(t_i)I(h_i)$:

Idet $(y,z)\to |g(y-z)f(z)h_i(z) - g(y-t_i)f(t_i)h_i(z)|$ tilh. $\mathcal{L}(G\times G)$, $i=1,\dots,n$, (s. 85, 86), har vi

$$\begin{aligned}
\|f*g - \sum_i c_i L_{t_i} g\|_1 &= \int\left|\int\sum_{i=1}^{n}\left((g(y-z)f(z) - g(y-t_i)f(t_i))h_i(z)\right)dz\right|dy \\
&\leqq \iint\sum_i\left(|g(y-z)f(z) - g(y-t_i)f(t_i)|\,h_i(z)\right)dz\,dy \\
&= \sum_i\iint\dots dz\,dy = \sum_i\int\dots d(y,z) = \sum_i\iint\dots dy\,dz \\
&= \sum_i\int\left(h_i(z)\int|f(z)L_z g(y) - f(t_i)L_{t_i} g(y)|\,dy\right)dz \\
&= \sum_i\int h_i(z)\,\|f(z)L_z g - f(t_i)L_{t_i} g\|_1\,dz \\
&\leqq \sum_i\int h_i(z)\,\varepsilon\,dz = \varepsilon\int\sum_i h_i(z)\,dz \leqq \varepsilon\, m(K+\mathcal{U}) = \text{const}\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

De to resultater s. 97 kan samles i

Sætning. For hvert $g \in \mathcal{L}(G)$ falder afslutningen af $\{f*g \mid f \in \mathcal{L}(G)\}$ i $L(G)$ sammen med det afsluttede underrum $\bar{\mathcal{U}}_g$ af $L(G)$ frembragt af de translaterede af g.

Thi $\{f*g \mid f\in\mathcal{L}(G)\}$ er et underrum, afslutningen altså et afsl. underrum af $L(G)$, som iflg. s. 97 omfatter alle translaterede af g og dermed $\bar{\mathcal{U}}_g$.

Omvendt omfatter $\bar{\mathcal{U}}_g$ iflg. s. 97 mgd. $\{f*g \mid f\in\mathcal{L}(G)\}$ og dermed dens afslutning.

Corollar. Et afsluttet underrum af $L(G)$ er et ideal i $L(G)$, netop hvis det er invariant ved translation.

Thi det er et ideal, henh. invariant v. transl., netop hvis det med fkt. g indeholder det i sætn. nævnte afsl. underrum.

NB. $\bar{\mathcal{U}}_g$ er et afsl. ideal, thi 1) $\{f*g \mid f\in\mathcal{L}(G)\}$ og dermed afslutningen er ideal i $L(G)$
ell. 2) $\mathcal{U}_g$ og dermed $\bar{\mathcal{U}}_g$ er inv. v. translation.

Eks. $G = \mathbb{R}/2\pi$ m. add.

For vilk. $n\in\mathbb{Z}$ betegnes med e_n fkt.nen $x \to e^{inx}$.

s. 270 Idet $e^{in(x-y)} = e^{-iny}e^{inx}$, har vi $L_y e_n = e^{-iny}e_n$; de translat. af e_n er blot multipla af e_n. Da $\{ce_n \mid c\in\mathbb{C}\}$ er afsluttet i $L(\mathbb{R}/2\pi), \|\ \|_1$ (nemlig fuldstændigt), er det $\bar{\mathcal{U}}_{e_n}$; specielt et ideal, som også direkte ses

$$f*e_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)}f(y)\,dy = e^{inx}\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy} \quad (n^{te}\text{ Fourier Koeff.})$$

tvivlde bugnet 96

Involution.

En *involution* i en algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ er en afbildn. $f \to f^*$ af $\mathcal{A}$ ind i sig selv med egenskaberne $f^{**} = f$ (afbildn. er involutorisk)

$$(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (cf)^* = \bar{c} f^*, \quad (fg)^* = g^* f^*$$

Er $\mathcal{A}$ normeret forlanges tillige $\|f^*\| = \|f\|$, så afbildingen er isometrisk.

Vi kalder f^* *adjungeret* til f. Er $f^* = f$, kaldes f *selvadj.* ell. *Hermitesk*

Eks. $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $c^* = \bar{c}$.

Lad G være en kommutativ, lokalt komp. gruppe, I Haar integralet (m. vilk. normering).

For $f: G \to \mathbb{C}$ defineres $f^*: G \to \mathbb{C}$ ved $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, altså $f^* = \check{\bar{f}} = \bar{\check{f}}$.

Afbildn $f \to f^*$, $f \in \mathcal{L}(G)$ *giver da en involution i gruppealgebraen* $L(G)$.

Thi med $f = f' + if'' \in \mathcal{L}(G)$ er $f', f'' \in \mathcal{L}(G)$, s. 34, (vii), dermed $f' - if'' \in \mathcal{L}(G)$ og videre $f^* = (\bar{f})^\vee \in \mathcal{L}(G)$, da I invers inv.

I invers invar. sikrer også $f^* \sim g^*$, når $f \sim g$.

Kun $(g*h)^* = g^* * h^*$ kræver efterregning: (faktisk $=$, ej blot $\sim$)

Idet $(g*h)(-y) = \int g(-y-z)h(z)dz$,

har vi $(g*h)^*(y) = \int \overline{g(-y-z)}\,\overline{h(z)}\,dz = \int g^*(y+z)h^*(-z)dz$

$$= \int g^*(z)h^*(y-z)dz = g^* * h^*(y)$$

Endelig: idet $|f^*| = |\check{f}|$, er $\|f^*\|_1 = \|\check{f}\|_1 = \|f\|_1$, idet I er invers invar.

Bemærk, at $\int f^*(x)dx = \int \overline{f(-x)}dx = \int \overline{f(x)}dx$ er kompl. konjug. til $\int f(x)dx$ for $f \in \mathcal{L}(G)$.

Involutionen i $L(G)$ *har en naturlig „udvidelse" til* $\mathcal{M}^1(G)$:

Lad os for $g \in \mathcal{L}(G)$ betragte g^*I:

For hvert $f \in \mathcal{K}(G)$ er $g^*I(f) = \int f g^* dI$ kompl. konj. til $\int f^* g\, dI = gI(f^*)$.

For vilk. fkt.nal $J: \mathcal{K}(G) \to \mathbb{C}$ sætter vi $J^*(f) = \overline{J(f^*)}$.

Da er $(gI)^* = g^*I$, altså foreligger en „udvidelse". Bemærk $I^* = I$.

Med J er også J^* et (begr.) Radon integral i G (med $M_{J^*} = M_J$), ligetil at verificere.

Der gælder da: $|J^*| = |J|^*$ (nok at kontroll. $|J^*|(f^*) = |J|(f)$ for $f \in \mathcal{K}^+(G)$),

$f^* \in \mathcal{L}_{J^*} \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}_J$, i bekr. fald: $\int f^* dJ^*$ er kompl. konjug. til $\int f dJ$.

Afbildingen $J \to J^*$, $J^* \in \mathcal{M}^1(G)$, er en involution i Banach algebraen $\mathcal{M}^1(G)$.

$(H*J)^* = H^* * J^*$ kræver efterregning:

Først bemærke $(g\otimes h)^* = g^*\otimes h^*$, nemlig værdi $\overline{g(-y)}\,\overline{h(-z)}$ i (y,z).

Derpå $(H\otimes J)^* = H^*\otimes J^*$, thi nok at vise overensst. på $g\otimes h$ med $g,h\in\mathcal{K}(G)$ (s. 47)

$(H\otimes J)^*(g\otimes h)$ er kompl. konj. til $(H\otimes J)(g\otimes h)^* = H(g^*)\cdot J(h^*)$,

altså $= H^*(g)\cdot J^*(h) = (H^*\otimes J^*)(g\otimes h)$.

Endelig for vilk. $f\in\mathcal{K}(G)$:

$(H*J)^*(f^*)$ er kompl. konj. til $(H*J)(f) = \int f(y+z)\,d(H\otimes J)_{y,z}$

altså $= \int \overline{f(-y-z)}\,d(H\otimes J)^*_{y,z} = \int f^*(y+z)\,d(H^*\otimes J^*)_{y,z} = (H^* * J^*)(f^*)$

Øvelse: Vis $(g*J)^* = g^* * J^*$ for $g\in\mathcal{L}(G)$, $J\in\mathcal{M}^1(G)$ (NB: $=$)

$\Big[$ $(g*J)^*(y)$ er komp. konj. til $(g*J)(-y) = \int g(-y-z)\,dJ(z)$

$g^* * J^*(y) = \int g^*(y-z)\,dJ^*(z) = \int \overline{g(-y+z)}\,dJ^*(z)$ ligeledes

Eksempel. Mgd. af $(n\times n)$-matricer $\underline{\underline{A}}_{n,n} = (a_{ij})$ med $a_{ij}\in\mathbb{C}$ er med add., multipl. med konst. og matrixmultipl. en algebra.

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \rightarrow \underline{\underline{A}}^* = (\overline{a_{ji}})$ er en involution.

$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ Hermitesk betyder $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i,j = 1,\dots,n$.

§3. Positiv definit funktion.

Positiv definit matrix.

En kvadr. matrix $\underline{\underline{A}}_{n,n} = (a_{ij})$ med $a_{ij} \in \mathbb{C}$ vil vi kalde positiv definit (normalt siges positiv semidefinit), hvis

$$\overline{\underline{\underline{z}}}_{-} \underline{\underline{A}}_{n,n} \underline{\underline{z}}_{1} = \sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j \geqq 0 \quad \text{for hvert } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Bemærk: diagonalelem. $\geqq 0$

Kan tolkes som indre produkt af $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{z}}$ og $\underline{\underline{z}}$ i $\mathbb{C}^n$.

§ III, 2.54 $\underline{\underline{A}}$ kaldes Hermitesk, hvis $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$. Dette er nødv. og tilstr. for, at $\sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}$ for hvert $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Tilstr.: Ved konjugering går $a_{ij} \bar{z}_i z_j$ over i $\bar{a}_{ji} \bar{z}_j z_i$, summen er altså uændret.

170 Nødv.: $z = (0,..1,\dots 0)$ giver $a_{ii} \in \mathbb{R}$,

$z = (0,.. 1 .. z_j .. 0)$ giver $a_{ii} + a_{jj}|z_j|^2 + a_{ij} z_j + a_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$ for $i \neq j$

Da nu $\quad a_{ij} z_j + a_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$

og selvfølg. $\quad \bar{a}_{ji} z_j + a_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$, har vi $(a_{ij} - \bar{a}_{ji}) z_j \in \mathbb{R}$ for hvert $z_j \in \mathbb{C}$.

følgelig $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

En pos. defin. matrix er altså spec. Hermitesk.

$\overline{\underline{\underline{S}}}^t = \underline{\underline{S}}^{-1}$

For enhv. Hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en (i alm. mange) unitær matrix $\underline{\underline{S}}$, så man ved i $\sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j$ at indsætte $\underline{\underline{z}}_1 = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{u}}_1$ får

$$\overline{\underline{\underline{u}}}_{-} \overline{\underline{\underline{S}}}^t \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{u}}_1 = \alpha_1 |u_1|^2 + \dots + \alpha_n |u_n|^2.$$

Her er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ rødderne (med multiplicitet) i karakteristiske polyn. $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$, dvs. egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$. (AS III, §5, s. 31)

Mærk: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ er alle reelle, dermed også alle koeff. i karakterist. polyn. for $\underline{\underline{A}}$

En Hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ er pos. def., netop hvis alle egenværdier $\alpha_i \geqq 0$.

Mærk: for $\underline{\underline{A}}$ pos. defin. er $\det \underline{\underline{A}} \geqq 0$ (idet $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$).

Positiv definit fkt. (Bochner 1932, Mathias 1922 (Mat. Zeitschr. 16)

Lad G være en komm. topologisk gruppe.

Defin. En kontin. fkt. $f: G \to \mathbb{C}$ kaldes positiv definit, hvis matricen $(f(x_i - x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ er pos. definit for ethv. end. sæt $x_1, \dots, x_n \in G$, dvs. hvis

(i) $\sum_{i,j} f(x_i - x_j)\bar{c}_i c_j \geqq 0$ for alle end. sæt $x_1, \dots, x_n \in G$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$

I så fald gælder spec.:

$f(0) \geqq 0$ thi „matricen" $(f(0))$ er pos. defin.

$f(x) = \overline{f(-x)}$, dvs. f selvadj., $f = f^*$, ved involutionen s. 100, sige f besidder Hermitesk symmetri;

thi $\begin{pmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{pmatrix}$ er Hermitesk matrix

$|f(x)| \leqq f(0)$, altså f begr. med $\|f\|_\infty = f(0)$

thi matricen har determinant $f(0)^2 - |f(x)|^2 \geqq 0$

Bemærk, at med f_1 og f_2 er også $f_1 + f_2$ pos. definit
med f er også af pos. definit for vilk. $a \in \mathbb{R}_+$

klart, at (i) bevares ved grænseovergang, dermed

De kontin., pos defin. fkt.r på G danner en konveks kegle $\mathcal{P}^+(G)$, afsluttet ved ligelig grænseovergang.

Lad nu G være komm., lokalt komp. gruppe, I Haar integralet (med vilk. normering).

Sætning. For en kontin., begr. fkt. $f: G \to \mathbb{C}$ er følgende påstande ensbetyd.:

(i), dvs. f pos. definit

(ii) $\int_{G\times G} f(y-z)\, d(\bar{J}(y) \otimes J(z)) \geqq 0$ for hvert begr. Radon integral J i G, dvs. $J \in \mathcal{M}^1(G)$

(iii) $\int_{G\times G} f(y-z)\overline{g(y)}g(z)\, d(y,z) \geqq 0$ for hvert $g \in \mathcal{L}(G)$

(iv) ——— " ——— " " $g \in \mathcal{K}(G)$

Ad (ii): $J \in \mathcal{M}^1(G)$ har entydig fremstilling $J = J' + iJ''$, J', J'' reelle (s. 22)
$\bar{J}$ naturligvis defin. ved $\bar{J} = J' - iJ''$.

$\int \underbrace{f(y-z)}_{\text{idet begr., kont}}\, d\underbrace{(\bar{J}(y) \otimes J(z))}_{\text{begr.}}$ eksist.

NB. Sammenh. må vises, om $\bar{J}$ står for konjug. eller for øvre integral

Ad (iii): Integralet exist., idet $\bar{g} \otimes g \in \mathcal{L}(G\times G)$, s. 85, og $f(y-z)$ begr. og kont. (s. 82, 1°)

Klart, at (i) er indeholdt i (ii):

For vilk. $\begin{matrix} x_1,\dots,x_n \\ c_1,\dots,c_n \end{matrix}$ sætte $J = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i}$ („masse c_i anbragt i x_i, $i=1,\dots,n$");

da er $\bar{J} \otimes J = \sum_i \bar{c}_i \delta_{x_i} \otimes \sum_j c_j \delta_{x_j} = \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j (\delta_{x_i} \otimes \delta_{x_j}) = \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \delta_{(x_i,x_j)}$,

dermed $\int f(y-z)\, d(\bar{J}(y) \otimes J(z)) \underset{3.\,s.84}{=} \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \int f(y-z) \delta_{(x_i,x_j)}(y,z) = \sum_{i,j} f(x_i - x_j) \bar{c}_i c_j$.

Hovedpunktet er:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Vi antager (i). Betragter vilk. $J \in \mathcal{M}^1(G)$.

Da J' og J'' kan skrives som differens mellem pos. Radon integraler, er det klart, at J kan skrives $J = \sum_1^4 c_i P_i$ med $P_i \in \mathcal{M}^1_+(G)$, $\int 1\, dP_i = 1$.

A. Weil, 3.21 For vilk. $n \in \mathbb{N}$ betragtes nu funktionen $F_n : \underset{\substack{i=1,\dots,4 \\ \mu=1,\dots,n}}{\times} G \to \mathbb{C}$, dvs. den kompl. fkt. i $4n$ variable $x_{i\mu} \in G$, givet ved

$$(x_{i\mu})_{\substack{i=1,\dots,4 \\ \mu=1,\dots,n}} \to \sum_{i,j,\mu,\nu} f(x_{i\mu} - x_{j\nu}) \bar{c}_i c_j = \dots + f(x_{27} - x_{31}) \bar{c}_2 c_3 + \dots$$

summen har $16 n^2$ led

Iflg. (i) er $F_n \geqq 0$,

3.70 tillige er F_n kontin. og begr.

I produktrummet $\underset{i,\mu}{\times} G$ betragtes nu produktintegralet $P_n = \underset{i,\mu}{\otimes} P_i$ svarende til, at P_i benyttes på „akserne" med indices $i1,\dots,in$.

P_n er pos. begr. Radon integral, dermed F_n integr. m.h.t. P_n med $\int F_n\, dP_n \geqq 0$.

Nu $\int F_n\, dP_n = \sum_{i,j,\mu,\nu} \int f(x_{i\mu} - x_{j\nu}) \bar{c}_i c_j\, d \underset{k,\lambda}{\otimes} P_k(x_{k\lambda}) = \sum_{i,j} \bar{c}_i c_j \sum_{\mu,\nu} \int f(x_{i\mu} - x_{j\nu})\, d \underset{k,\lambda}{\otimes} P_k(x_{k\lambda})$

For $i\mu \neq j\nu$ er $\int f(x_{i\mu} - x_{j\nu})\, d \underset{k,\lambda}{\otimes} P_k(x_{k\lambda}) \underset{\text{Fubini}}{=} \int f(x_{i\mu} - x_{j\nu})\, d(P_i(x_{i\mu}) \otimes P_j(x_{j\nu}))$
$= \int f(y-z)\, d(P_i(y) \otimes P_j(z))$,

for $i\mu = j\nu$ er $\int f(0)\, dP_n = f(0)$. NB. Normeringen af P'erne bruges her.

Dermed $\sum_{\mu,\nu} \dots = \begin{cases} n^2 \int f(y-z)\, d(P_i(y) \otimes P_j(z)) & \text{for } i \neq j \\ (n^2 - n) \int f(y-z)\, d(P_i(y) \otimes P_j(z)) + n f(0) & \text{for } i = j \end{cases}$, altså

$$0 \leqq \sum_{i,j} (n^2 - \delta_{ij} n)\, \bar{c}_i c_j \int f(y-z)\, d(P_i(y) \otimes P_j(z)) + n f(0) \sum_i \bar{c}_i c_i .$$

Men n var vilk. Ved division med n^2, derpå grænseovergang $n \to \infty$ fås
$0 \leqq \sum_{i,j} \int f(y-z)\, d(\bar{c}_i P_i(y) \otimes c_j P_j(z)) = \int f(y-z)\, d(\sum_{i,j} \bar{c}_i P_i(y) \otimes c_j P_j(z))$ (3. s.84),
færdig, idet $\bar{J} \otimes J = (\sum_i \bar{c}_i P_i) \otimes (\sum_j c_j P_j) = \sum_{i,j} (\bar{c}_i P_i \otimes c_j P_j)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

har ligesom (ii) $\Rightarrow$ (i) karakter af specialisering, denne gang til integraler med tæthed:

Idet $\bar{g}\bar{I} = \overline{gI}$, er iflg. s.85 $\bar{g}\otimes g$ tæthed for $\overline{gI}\otimes gI$ m.h.t. $\bar{I}\otimes I$,

og da jo $f(y-z)$ kont. og begr. har vi (s.83)

$$\int f(y-z)\overline{g(y)}g(z)\,d(y,z) = \int f(y-z)\,d(\overline{gI}(y)\otimes gI(z))$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) er triviel

(iv) $\Rightarrow$ (i)

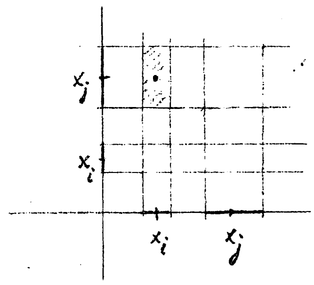
For vilk. end. sæt $\begin{matrix} x_1,\dots,x_n\in G \\ c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C}\end{matrix}$ vise, at til hvert $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ findes $g\in\mathcal{K}(G)$, så

$$\Big|\sum_{i,j} f(x_i-x_j)\bar{c}_i c_j - \int f(y-z)\overline{g(y)}g(z)\,d(y,z)\Big| < \varepsilon.$$

Betragt vilk. ε.

Først udnytte kontin. af $(y,z)\to f(y-z)$ til at skaffe (ej nødv. disj) omegne $W_1,\dots,W_n$ af $x_1,\dots,x_n$, så

$$|f(y-z)-f(x_i-x_j)|<\varepsilon \quad \text{for } y\in W_i,\ z\in W_j.$$



Hertil for hvert (i,j) omegn U_{ij} af x_i og V_{ij} af x_j, så

$|f(y-z)-f(x_i-x_j)|<\varepsilon$ for $y\in U_{ij}$, $z\in V_{ij}$, idet $f(y-z)$ kontin. i (x_i,x_j);

da er $W_i = \bigcap_{j=1}^{n} U_{ij} \cap \bigcap_{j=1}^{n} V_{ji}$ brugbar, $i=1,\dots,n$.

Derpå vælge $g_1,\dots,g_n\in\mathcal{K}^+(G)$, så $g_i(y)=0$ for $y\notin W_i$ og $\int g_i\,dI = 1$ (Urysohn)

Med $g=\sum_i c_i g_i$ har vi da:

$$\int f(y-z)\overline{g(y)}g(z)\,d(y,z) = \int f(y-z)\sum_i \bar{c}_i g_i(y)\sum_j c_j g_j(z)\,d(y,z) = \sum_{i,j}\int f(y-z)\bar{c}_i c_j g_i(y)g_j(z)\,d(y,z)$$

Idet $\int g_i(y)g_j(z)\,d(y,z)=1$, er

$$\Big|\int f(y-z)\bar{c}_i c_j g_i(y)g_j(z)\,d(y,z) - f(x_i-x_j)\bar{c}_i c_j\Big|$$

$$\leqq \int |f(y-z)-f(x_i-x_j)||\bar{c}_i c_j| g_i(y)g_j(z)\,d(y,z) \leqq \int \varepsilon|\bar{c}_i c_j| g_i(y)g_j(z)\,d(y,z) = \varepsilon|c_i||c_j|$$

Altså: $\Big|\int f(y-z)\overline{g(y)}g(z)\,d(y,z) - \sum_{i,j} f(x_i-x_j)\bar{c}_i c_j\Big| \leqq \sum_{i,j}\varepsilon|c_i||c_j| = \varepsilon\big(\sum_i|c_i|\big)^2.$

Betingelserne (ii), (iii), (iv) i sætn. s. 103 har <u>varianter</u>.

Først bemærke, at konjugeringsstregen kan flyttes til sidste faktor

(eksempelvis for (iii): med g vil jo også $\bar{g}$ gennemløbe $\mathcal{L}(G)$.)

A propos: konsekvens: med f er også $\tilde{f} = \bar{f}$ positiv definit

<u>Ad</u> (iii) <u>og</u> (iv): $\int_{G\times G} f(y-z)g(y)\overline{g(z)}\,d(y,z) = \int_{G\times G} f(y+z)g(y)g^*(z)\,d(y,z) = \int_G f\cdot(g*g^*)\,dI$.

Thi første „=" fås ved at erstatte z med $-z$.(s.86) Erstattes videre y med $y-z$ (s.86), fås

$$\iint f(y)g(y-z)g^*(z)\,dz\,dy = \int\Big(f(y)\int g(y-z)g^*(z)\,dz\Big)dy = \int f\cdot(g*g^*)\,dI.$$

<u>Ad</u> (ii): $\int_{G\times G} f(y-z)\,d(J(y)\otimes\bar{J}(z)) = \int_{G\times G} f(y+z)\,d(J(y)\otimes J^*(z)) = \int_G f\,d(J*J^*)$.

Thi $\int_G f(y-z)\,d\bar{J}(z)$ er konjug. til $\int_G \overline{f(y-z)}\,dJ(z)$,

altså lig $\int_G f(y+z)\,dJ^*(z)$, s. 100. Heraf første „=" (Fubini).

Sidste „=" rigtigt i kraft af <u>sætning</u>, som vi ikke har vist:

$\int_G f\,d(H*J) = \int_{G\times G} f(y+z)\,d(H\otimes J)(y,z)$ <u>for</u> $f: G\to\mathbb{C}$ <u>kontin. og begr.</u>, $H, J \in \mathcal{M}^1(G)$

Øvelse: Vis det.

[Føre tilbage til f, H og J positive. Da er

$$\int f\,d(H*J) = \sup_{g\in\mathcal{K}_+,\, g\le f} H*J(g) = \sup_{g\in\mathcal{K}_+,\, g\le f} \int g(y+z)\,d(H\otimes J)(y,z) \underset{\text{sætn. 1, s. 27}}{=} \int \sup$$

Dette fører til

<u>For en kontin., begr. fkt. $f: G\to\mathbb{C}$ er følgende udsagn ensbetydende</u>

(i) f <u>er pos. definit</u>

(ii) <u>ved</u> $\langle H,J\rangle = \int f\,d(H*J^*)$ <u>defineres en positiv Hermitesk form i</u> $\mathcal{M}^1(G)$ *)

(iii) " $\langle g,h\rangle = \int f\cdot(g*h^*)\,dI$ " " " " " " " $\mathcal{L}(G)$

(iv) " " " " " " " " " " " $\mathcal{K}(G)$

Thi kravene (ii), (iii), (iv) omfatter $\langle J,J\rangle \ge 0$, resp. $\langle g,g\rangle \ge 0$, dvs. betingelserne (ii), resp. (iii), (iv) i sætningen s. 103.

Omvendt:

*) positiv Hermitesk form vil sige „indre produkt, dog <u>uden</u> kravet $\langle J,J\rangle > 0$ for $J \neq 0$".

For vilk. kontin., begr. f eksisterer $\langle H, J\rangle$ og $\langle g, h\rangle$;

i övrigt $\langle g,h\rangle \underset{s.83}{=} \int f\, d(g*h^*)I = \int f\, d(gI*(hI)^*) = \langle gI, hI\rangle$

idet $(g*h^*)I \underset{s.89}{=} gI*h^*I \underset{s.100}{=} gI*(hI)^*$

dvs. overgang fra $\mathcal{M}'$ til L (og videre til $\mathcal{K}$) ved „restriktion".

$\langle\ ,\ \rangle$ er lin. på første plads, additiv på anden og $\langle H, cJ\rangle = \bar{c}\langle H, J\rangle$ o. anal.

dvs. $\langle\ ,\ \rangle$ er sesquilinear form

Bemærk $|\langle H,J\rangle| \leqq \|f\|_\infty M_{H*J^*} \leqq \|f\|_\infty M_H M_J$,

nemlig $|\int f\, d(H*J^*)| \leqq \int |f|\, d|H*J^*| \leqq \|f\|_\infty \int 1\, d|H*J^*| =$

$= \|f\|_\infty M_{|H*J^*|} = \|f\|_\infty M_{H*J^*} \leqq \|f\|_\infty M_H M_{J^*}$

Specielt $|\langle g,h\rangle| \leqq \|f\|_\infty \|g\|_1 \|h_1\|$.

Dette indebærer, at $\langle\ ,\ \rangle$ er kontin.

også klart ved sammensætn. $(H,J) \to H*J^* \to \int f\, dH*J^*$ og anal.

Er $f^* = f$, da er $\langle\ ,\ \rangle$ en Hermitesk form: $\langle H,J\rangle = \overline{\langle J,H\rangle}$ og anal.

thi $\int f\, d(H*J^*)$ er konjug. til $\int f^*\, d(H*J^*)^* = \int f^*\, d(J*H^*)$, s. 100.

Endelig: f pos. definit medf. $f^* = f$ (s. 103). samt $\langle J,J\rangle \geqq 0$ (sætn. s. 103).

IV. Fourier transformation.

§1. Karaktergruppen.

Gruppekarakterer.

Lad G være en (komm.) topologisk gruppe.

Def. Ved en karakter for G forstås en kontin. homomorf afbildn. af G ind i gruppen af kompl. tal med modul 1 (cirkelgruppen). Altså en kontin. fkt.

$\chi : G \to \mathbb{C}$, hvor $\forall x,y \in G: \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$ og $\forall x \in G: |\chi(x)| = 1$.

Bemærk: sidste betingelse kan erstattes af χ begr. og aldrig 0 (benyt $\chi(nx) = (\chi(x))^n$).

Eksempler:

1° $(\mathbb{R}, +$, sædv. topologi$)$. Idet vi med e_c betegner fkt.nen $x \to e^{icx}$, er karaktererne netop e_a, $a \in \mathbb{R}$.

Thi disse er åbenbart karakterer.

Omvendt: Antag $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kontin. og homomorf. Da: *)

a) χ er differentiabel.

Af $\chi(x+t) = \chi(x)\chi(t)$ fås $\int_0^h \chi(x+t)\,dt = \chi(x)\int_0^h \chi(t)\,dt$.

Vi benytter fast h, så $\int_0^h \chi(t)\,dt \neq 0$ (muligt, da $\chi(0) = 1$ og χ kontin.),

og skal da se, at $\int_0^h \chi(x+t)\,dt = \int_x^{x+h} \chi(t)\,dt$ er diff. fkt. af x

Klart, nemlig $= F(x+h) - F(x)$, hvor F stamfkt til χ.

b) Med $ic = D\chi(0)$ er $D\chi = ic\chi$.

Thi $\frac{\chi(x+t)-\chi(x)}{t} = \frac{\chi(x)\chi(t)-\chi(x)}{t} = \frac{\chi(t)-1}{t}\chi(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} ic\chi(x)$

c) Af $D\chi = ic\chi$ og $\chi(0) = 1$ følger (diff. lign) $\forall x: \chi(x) = e^{icx}$, dvs $\chi = e_c$.

Er χ tillige begr., sluttes $c \in \mathbb{R}$.

Geometrisk (for $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$): når x gennemløber intervallængde $\frac{2\pi}{|a|}$, løber e^{iax} en omgang.

2° Cirkelgruppen $(\mathbb{R}(\mathrm{mod}\, 2\pi), +$, sædv. topologi$)$

Idet $\varkappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ betegn. sædv. overdækningsafbildn., giver $f \to f\circ\varkappa$ bijektiv overgang fra funktionerne på „cirkellinien" $\mathbb{T} = \mathbb{R}(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ til funktionerne på $\mathbb{R}$ med periode 2π, de kontin. går i de kontin.

---

*) Der findes også elementære beviser uden diff.regning (f. eks. Guichardet, s. 35)

Der gælder: f homomorf $\Leftrightarrow$ $f\circ\varkappa$ homomorf

$\Rightarrow$ Klar, idet $\varkappa$ homom.

$\Leftarrow$: $f(\varkappa(x)+\varkappa(y)) = f(\varkappa(x+y)) = f\circ\varkappa\,(x+y) = f(\varkappa(x))\cdot f(\varkappa(y))$

Karaktererne på $\mathbb{T} = \mathbb{R}(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ modsvarer derfor karaktererne på $\mathbb{R}$ med periode 2π, dvs. (se 1°) fkt.nerne e_n, $n\in\mathbb{Z}$.

Med $\mathbb{T}$ realiseret som $\{c\in\mathbb{C} \mid |c|=1\}$ er $\varkappa: x\to e^{ix}$. Karakteren τ_n med $\tau_n\circ\varkappa = e_n$, dvs. $\forall x\in\mathbb{R}: \tau_n(e^{ix}) = e^{inx} = (e^{ix})^n$, er da $c\to c^n$, $|c|=1$.

(At de kontin. homomorfe afbildinger af cirkelgruppen ind i sig selv er af form $c\to nc$ (add. skrivemåde), kan vises direkte (f. eks. Pontrjagin II, s. 18, 19).)

3° $(\mathbb{Z},+,$ diskr. topologi$)$.

En homomorf afbildn. $\zeta: \mathbb{Z}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ er bestemt ved $c=\zeta(1)$, nemlig $\zeta: n\to c^n$.

Karaktererne fås for $|c|=1$.

4° I en direkte sum (add. ord for produkt) $G_1\oplus G_2$ af topolog. grupper G_1 og G_2 er karaktererne netop fkt.nerne $\chi_1\otimes\chi_2$ med χ_1 karakter i G_1, χ_2 karakter i G_2. (Ligeså med flere addender.)

Thi klart, at $(x_1,x_2)\to\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$ kontin. og

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \to \chi_1(x_1+y_1)\chi_2(x_2+y_2) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)\chi_1(y_1)\chi_2(y_2)$

Omv: For vilk. karakter χ i $G_1\oplus G_2$ er $\chi_1: x_1\to\chi(x_1,0_2)$, $\chi_2: x_2\to\chi(0_1,x_2)$ karakterer i G_1, henh. G_2, og $\chi = \chi_1\otimes\chi_2$

.3.70

Produktet af to karakterer ξ og η for en topol. gruppe G (sædv. punktvis produkt af funktioner) er påny en karakter: $\xi(x+y)\eta(x+y) = \xi(x)\xi(y)\eta(x)\eta(y) = \xi(x)\eta(x)\xi(y)\eta(y)$.

Med denne komposition er mgd. $\hat{G}$ af karakterer en kommutativ gruppe. Det neutrale elem. 1 er den trivielle karakter $x\to 1$, $x\in G$. Bemærk $\xi^{-1} = \overline{\xi}$.

Vi skal nu indføre en topologi i $\hat{G}$, så vi får en topologisk gruppe. (Bemærk: $\|\ \|_\infty$ giver diskrete topologi, ej så interessant)

Uniform konvergens på kompakte mgd.r.

Vi betragter mgden $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ af kontin. kompl. fkt.r på et topol. rum X (Hausdorff).

Vi sætter $W_{K,\varepsilon}(f) = \{g \in \mathcal{C} \mid \forall x \in K : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ for $f \in \mathcal{C}$, K komp., $K \subseteq X$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

og definerer relation

U omegn af $f \iff \exists$ komp. $K \subseteq X$ $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : W_{K,\varepsilon}(f) \subseteq U$ for $U \subseteq \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$.

Da er betingelserne s. 3 opfyldt; spec. benytte

$$W_{K,\varepsilon}(f) \subseteq W_{K',\varepsilon'}(f) \cap W_{K'',\varepsilon''}(f) \quad \text{med } K = K' \cup K'', \; \varepsilon = \varepsilon' \wedge \varepsilon''.$$

$$g \in W_{K,\varepsilon}(f) \Rightarrow W_{K,\varepsilon}(g) \subseteq W_{K,2\varepsilon}(f)$$

Er $f \neq g$, altså $f(x) \neq g(x)$ i et $x \in X$, da er $W_{\{x\},\varepsilon}(f) \cap W_{\{x\},\varepsilon}(g) \neq \emptyset$ for $2\varepsilon < |f(x) - g(x)|$

Relationen definerer således en (Hausdorff) topologi i $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$. Mgd.rne $W_{K,\varepsilon}(f)$ med K kompakt, $K \subseteq X$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ udgør en basis for omegnene af f.

Konvergens $f_i \to f$ vil sige uniform konvergens på enhv. kompakt mgd.

thi $f_i \to f$ betyder $\forall K \, \underbrace{\forall \varepsilon : f_i \in W_{K,\varepsilon}(f) \text{ „fra et vist trin"}}_{\text{og dette er uniform konvergens på } K}$

Topologien kaldes derfor topologien for uniform konvergens på kompakte mgd.r.

Vi bemærker, at ovenstående gælder uforandret med mgd. af alle fkt.ner $f : X \to \mathbb{C}$ i stedet for $\mathcal{C}$. Er X lokalt kompakt, vil $\mathcal{C}$ da være afsluttet.

Øvelse: Vis det (Vis kontaktfkt. kontin. i vilk. $x \in X$ ved valg af kompakt omegn af x, derpå „3ε-metoden".)

Oplagt at $f,g \to f+g$ og $f \to -f$ kontin. (dermed topolog. gruppe!)

idet $W_{K,\varepsilon}(f) + W_{K,\varepsilon}(g) \subseteq W_{K,2\varepsilon}(f+g)$, henh. $-W_{K,\varepsilon}(f) = W_{K,\varepsilon}(-f)$

I $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ er $(f,g) \to fg$ kontin. og i $\mathcal{C}(X, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ er $f \to \frac{1}{f}$ kontin.

Vise kontin. i (f_0, g_0):

For vilk. kompakt $K \subseteq X$ er restriktionerne $f_0|_K$, $g_0|_K$ begr. numerisk af $a \in \mathbb{R}_+$.

Dermed $|f(x)g(x) - f_0(x)g_0(x)| \leq |f(x) - f_0(x)||g(x) - g_0(x)| + |f_0(x)||g(x) - g_0(x)| + |f(x) - f_0(x)||g_0(x)|$

$\leq \delta^2 + 2a\delta$ for $f \in W_{K,\delta}(f_0)$, $g \in W_{K,\delta}(g_0)$ og $x \in K$,

altså $W_{K,\delta}(f_0) \cdot W_{K,\delta}(g_0) \subseteq W_{K,\varepsilon}(f_0 g_0)$, blot $\delta^2 + 2a\delta \leq \varepsilon$

Vise $f \to \frac{1}{f}$ kontin. i f_0:

For vilk. kompakt $K \subseteq X$ er $f_0|_K$ numerisk $\geq a \in \mathbb{R}_+$

Med $\delta \leq \frac{a}{2}$ er da $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_0(x)}\right| \leq \frac{|f_0(x)-f(x)|}{|f(x)||f_0(x)|} < \frac{\delta}{\frac{a}{2}a}$ for $f \in W_{K,\delta}(f_0)$ og $x \in K$,

altså $(W_{K,\delta}(f_0) \cap \mathcal{C}(X, \mathbb{C}\setminus\{0\}))^{-1} \subseteq W_{K,\varepsilon}(\frac{1}{f_0})$, blot $\delta \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2}a^2$.

Hermed: <u>$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ er, med sædv. produkt af fktner og topologien for uniform konvergens på kompakte mgdr, en topologisk gruppe.</u>

Bemærkning. Benyttes ved defin. af topologien for fktr $f: X \to \mathbb{C}$ end. mgdr K i stedet for kompakte, fås en grovere topologi (færre omegne, færre åbne, færre afsl. mgd.r), nemlig <u>topologien for punktvis konvergens</u>. (Det er i øvrigt den samme som produkt-topologien svarende til, at fktner $f: X \to \mathbb{C}$ opfattes som punkter i $\mathbb{C}^X$.) For X diskret sammenfald.

Benyttes i stedet for kompakte mgdr K kun X selv, altså

$$\mathcal{U} \text{ omegn af } f \iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \{g \mid \forall x \in X : |g(x)-f(x)| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U},$$

fås en finere topologi, <u>topologien for uniform konvergens</u>. For X kompakt sammenfald.

Øvelse: Vis, at topologien for uniform konvergens på kompakte mgdr er den groveste topologi på <u>$\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$</u>, hvor

$$\{f \in \mathcal{C} \mid f(K) \subseteq \mathcal{U}\} \text{ er åben for ethv. kompakt } K \subseteq X, \text{ åben } \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}.$$

Topologien kaldes derfor også <u>kompakt-åben topologien</u> i $\mathcal{C}$.

Når $f \in \mathcal{C}$ og $f(K) \subseteq \mathcal{U}$, dvs. $\underset{\text{komp.}}{f(K)} \cap \underset{\text{afsl.}}{\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}} = \emptyset$, har $f(K)$ pos. afstand ε fra $\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}$

For $g \in W_{K,\varepsilon}(f)$ er da også $g(K) \subseteq \mathcal{U}$.

Omv. Betragte vilk. topologi med nævnte egenskab. For vilk. $f \in \mathcal{C}$, komp. $K \subseteq X$ og $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$:

Til hvert $x \in K$ tænkes valgt åben omegn V, så $f(V) \subseteq B(f(x), \frac{\varepsilon}{6})$, kugle.

Endelig mange $x_1, \dots, x_n$ udtages, så $K \subseteq \bigcup_i V_i$

$K_i = K \setminus \bigcup\{V_k \mid V_k \cap V_i = \emptyset\}$ er kompakt, $K \cap V_i \subseteq K_i$, dermed $K = \bigcup_i K_i$.

Vi har $f(K_i) \subseteq B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2})$, thi hvert $x \in K_i$ tilh. et V_j som har pkt. fælles med V_i.

Altså $f \in \bigcap_i \{g \mid g(K_i) \subseteq B(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2})\}$, som er åben i betragtede topologi.

Denne mgd. er indeh. i $W_{K,\varepsilon}(f)$.

Til f. af [illegible]

Lad Y og Z være topologiske rum (Hausdorff).

Afbildningen $(f,g) \to f \otimes g$, $f \in \mathscr{C}(Y,\mathbb{C})$, $g \in \mathscr{C}(Z,\mathbb{C})$ af $\mathscr{C}(Y) \times \mathscr{C}(Z)$ ind i $\mathscr{C}(Y \times Z)$ er kontinuert, idet $\mathscr{C}(Y)$, $\mathscr{C}(Z)$ og $\mathscr{C}(Y \times Z)$ udstyres med topologien for uniform konvergens på kompakte mgdr, $\mathscr{C}(Y) \times \mathscr{C}(Z)$ derpå med produkttopologien.

Vise kontin. i (f_0, g_0):

Vilk. omegn af $f_0 \otimes g_0$ indeholder en af typen $W_{K_1 \times K_2, \varepsilon}(f_0 \otimes g_0)$, K_1, K_2 kompakte, $K_1 \subseteq Y$, $K_2 \subseteq Z$; thi for K komp., $K \subseteq Y \times Z$ er $K \subseteq proj_1(K) \times proj_2(K)$.

Restriktionerne $f_0|_{K_1}$, $g_0|_{K_2}$ er begr. num. af $a \in \mathbb{R}_+$.

For $f \in W_{K_1,\delta}(f_0)$, $g \in W_{K_2,\delta}(f_0)$ har vi nu for $y \in K_1$, $z \in K_2$:

$$|f(y)g(z) - f_0(y)g_0(z)| \leq |f(y) - f_0(y)||g(z) - g_0(z)| + |f_0(y)||g(z) - g_0(z)| + |f(y) - f_0(y)||g_0(z)| < \delta^2 + 2a\delta,$$

altså $f \otimes g \in W_{K_1 \times K_2, \varepsilon}(f_0 \otimes g_0)$ blot δ er valgt så $\delta^2 + 2a\delta < \varepsilon$.

Vi noterer også at afbildningen er homomorf, når vi benytter sædv. produkt af fktner i henholdsvis Y, Z og $Y \times Z$:
$$(f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2) = (f_1 \otimes g_1) \cdot (f_2 \otimes g_2).$$

Thi sammenhold værdi i $(y,z) \in Y \times Z$:
$$f_1(y) f_2(y) \cdot g_1(z) g_2(z) = f_1(y) g_1(z) \cdot f_2(y) g_2(z)$$

Karaktergruppen.

Lad G være en (komm.) topologisk gruppe.

Mgden $\hat{G}$ af karakterer for G er med sædv. pktvis produkt af fktner og med topologien for uniform konvergens på kompakte mgdr en kommutativ topologisk gruppe. Den kaldes Karaktergruppen eller den duale gruppe til G og betegnes også $\hat{G}$.

Karaktergruppen er en afsluttet undergruppe af $\mathcal{C}(G \to \mathbb{C}\setminus\{0\})$.

Klart, at undergruppe.

For vilk. $x, y \in G$ er $\{f: G \to \mathbb{C} \mid f(x+y) = f(x)f(y)\}$ afsluttet allerede i topologien for pkt.vis konvergens

Thi lad g være kontaktfkt. For vilk. ε har vi da:

$W_{\{x,y,x+y\},\varepsilon}(g)$ indeh. fkt. f med $f(x+y) = f(x)f(y)$

$|f(x+y) - g(x+y)| < \varepsilon$

$$|f(x)f(y) - g(x)g(y)| \leq |f(x)-g(x)||f(y)-g(y)| + |g(x)||f(y)-g(y)| + |f(x)-g(x)||g(y)|$$
$$< \varepsilon \cdot \varepsilon + |g(x)|\,\varepsilon + \varepsilon\,|g(y)|,$$

altså $|g(x+y) - g(x)g(y)| < \varepsilon^2 + (1 + |g(x)| + |g(y)|)\,\varepsilon$.

For vilk. $x \in G$ er $\{f: G \to \mathbb{C} \mid |f(x)| = 1\}$ afsluttet allerede i topologien for pktvis konv.

Thi lad g være kontaktfkt. For vilk. ε har vi da:

$W_{\{x\},\varepsilon}(g)$ indeh. fkt. f med $|f(x)| = 1$, dermed
$$\big||g(x)| - 1\big| \leq |g(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Som fællesmgd er da $\{f: G \to \mathbb{C} \mid \forall x,y \in G: f(x+y) = f(x)f(y) \wedge \forall x \in G: |f(x)| = 1\}$ ligeledes afsluttet allerede i topologien for pkt.vis konvergens.

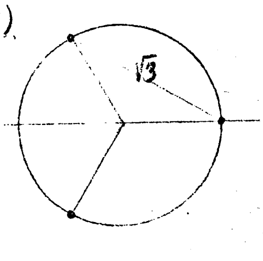
Inden for $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ gælder det samme da for snittet, som netop er $\hat{G}$

NB. Er G lokalt kompakt, dermed $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ afsluttet i $\mathbb{C}^G$ ved topologien for uniform konvergens på komp. mgdr, så er ligeledes $\hat{G}$ afsluttet i $\mathbb{C}^G$ ved denne topologi.

Er G kompakt, da er $\hat{G}$ diskret.

Thi topologien i $\hat{G}$ er da topologien for uniform konvergens (s. 111).

Men for en karakter $\chi \neq 1$ er $\|\chi - 1\|_\infty \geq \sqrt{3}$ (benyt $\chi(nx) = (\chi(x))^n$)



Inden eksempler bemærke:

En homomorf afbildning $f: G_1 \to G_2$ af en topologisk gruppe ind i en topologisk gruppe er kontinuert, blot den er kontin. i ét pkt.

Thi for vilk. $x \in G_1$ er $f = L_{f(x)} \circ f \circ L_{-x}$

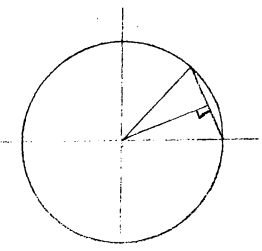
Da translation kontin., ses: f kontin. i a medf. f kontin. i $x + a$

Eksempler.

1° ($\mathbb{R}$, +, sædv. topologi)

Iflg. s. 108 er $a \to e_a$, $a \in \mathbb{R}$ en bijektiv afbildning af $\mathbb{R}$ på $\hat{\mathbb{R}}$.

Den er isomorf, $e_{a+b} = e_a e_b$, idet jo $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^{i(a+b)x} = e^{iax} e^{ibx}$.



Undersøge kontin. i 0:

Bestemme originalmgd. til $W_{K,\varepsilon}(1_{\mathbb{R}})$ med $K = [-l, l]$, $\varepsilon < 2$:

$e_a \in W_{K,\varepsilon}(1) \iff \forall x \in [-l, l] : |e^{iax} - 1| < \varepsilon \iff |a| l < 2 \operatorname{Arc} \sin \frac{\varepsilon}{2}$

Orig.mgd. er $]-\delta, \delta[$ med $\delta = \frac{2}{l} \operatorname{Arc} \sin \frac{\varepsilon}{2}$, voila.

For den omv. afbildn. $e_a \to a$ bemærke: til givet δ benytte l med $\delta l < \pi$ og $\varepsilon = 2 \sin \frac{\delta l}{2}$.

Notere:

1.3.70 Afbildngen $a \to e_a$, $a \in \mathbb{R}$ er en homeomorf isomorfi af $\mathbb{R}$ på karaktergruppen $\hat{\mathbb{R}}$.

2° Cirkelgruppen ($\mathbb{T}$, $\cdot$, sædv. topologi)

Med $\tau_n : c \to c^n$, giver $n \to \tau_n$ en bijektiv afbildn. af $\mathbb{Z}$ på $\hat{\mathbb{T}}$ (2°, s. 109)

Den er isomorf, $\tau_{m+n} = \tau_m \tau_n$, idet jo $\forall c : c^{m+n} = c^m c^n$. Idet $\hat{\mathbb{T}}$ diskret (s. 112), har vi:

Afbildngen $n \to \tau_n$, $n \in \mathbb{Z}$ er en homeomorf isomorfi af ($\mathbb{Z}$, +, diskr. topologi) på $\hat{\mathbb{T}}$.

3° ($\mathbb{Z}$, +, diskr. topologi)

Med $\zeta_c : n \to c^n$, giver $c \to \zeta_c$ en bijektiv afbildn. af $\mathbb{T} = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ på $\hat{\mathbb{Z}}$.

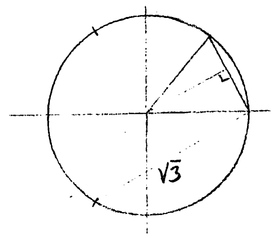
Den er isomorf, $\zeta_{cd} = \zeta_c \zeta_d$, idet jo $\forall n \in \mathbb{Z}$: $(cd)^n = c^n d^n$.

Undersøge kontin. i $1 \in \mathbb{T}$:

Bestemme originalmgd. til $W_{K,\varepsilon}(1_{\mathbb{Z}})$ med $K = \{-n, \dots, 0, \dots, n\}$, $\varepsilon < \sqrt{3}$:

$\zeta_c \in W_{K,\varepsilon} \iff |c^\nu - 1| < \varepsilon$ for $|\nu| \leq n$

$\iff n |\operatorname{Arg} c| < 2 \operatorname{Arc} \sin \frac{\varepsilon}{2}$



Orig.mgd. er $\{c \in \mathbb{T} \mid |\operatorname{Arg} c| < \delta\}$ med $\delta = \frac{2}{n} \operatorname{Arc} \sin \frac{\varepsilon}{2}$.

For den omv. afbildn. $\zeta_c \to c$ bemærke: til givet $\delta < \frac{2\pi}{3}$

benytte n med $n\delta < \frac{2\pi}{3}$, f.ex. $n = 1$, og $\varepsilon = 2 \sin \frac{n\delta}{2}$.

Afbildngen $c \to \zeta_c$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$ er en homeomorf isomorfi af cirkelgruppen på $\hat{\mathbb{Z}}$.

Bekvemt at sammenknytte ε, $0 < \varepsilon \leq 2$, med ε', $0 < \varepsilon' \leq \pi$ ved $\frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{\varepsilon'}{2}$

kordelængde $\leftrightarrow$ buelængde

I 1°: $W_{[-l,l]',\varepsilon}(1_{\mathbb{R}})$ modsv. $]-\delta', \delta'[$ med $\delta' = \frac{\varepsilon'}{l}$ forudsat $\varepsilon' \leq \pi$

I 3°: $W_{\{-n,\dots,0,\dots,n\},\varepsilon}(1_{\mathbb{Z}})$ modsv. $\{c \in \mathbb{T} \mid |\operatorname{Arg} c| < \delta'\}$ med $\delta' = \frac{\varepsilon'}{n}$ forudsat $\varepsilon' \leq \frac{2\pi}{3}$

Lad G_1 og G_2 være topologiske grupper.
Da er $G_1 \times G_2$ med produkttopologi og kompos. $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ ligeledes en topologisk gruppe (med additiv betegnelse også direkte sum $G_1 \oplus G_2$).

<u>Afbildningen $(\chi_1,\chi_2) \to \chi_1 \otimes \chi_2$ er en homeomorf isomorfi af $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ på $(G_1 \times G_2)^\wedge$, karaktergruppen for $G_1 \times G_2$.</u>

Bevis. I 4° s. 109 er regnet efter, at afbildningen er surjektiv $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ til $(G_1 \times G_2)^\wedge$.
Det er oplagt, at den er injektiv:
$$\chi = \chi_1 \otimes \chi_2 \quad\Rightarrow\quad \forall x_1: \chi_1(x_1) = \chi_1(x_1)\chi_2(o_2) = \chi(x_1,o_2) \ \text{ og } \ \forall x_2: \chi_2(x_2) = \chi(o_1,x_2).$$
Umiddelbart regnes efter, at afbildningen isomorf: $(\xi_1\eta_1)\otimes(\xi_2\eta_2) = (\xi_1 \otimes \xi_2)\cdot(\eta_1 \otimes \eta_2)$ (se s. 112).
Vi ved, at afbild. er kontin. (s. 112).
Mgl. at vise omv. afbildn. $\chi \to (\chi_1,\chi_2)$ kontin.
nok at vise kontin. i $1_{G_1 \times G_2}$ (s. 113 nederst),
ensbetydende med $\chi \to \chi_1$, $\chi \to \chi_2$ kontin. i $1_{G_1 \times G_2}$
(iflg. generel regel om afbildn. til produktrum)
f. eks. $\chi \to \chi_1$:
originalmgd. til $W_{K_1,\varepsilon}(1_{G_1}) = \{\chi_1 \in \hat{G}_1 \mid \forall x_1 \in K_1: |\chi_1(x_1)-1| < \varepsilon\}$
er $W_{K_1 \times \{o_2\},\varepsilon}(1_{G_1 \times G_2}) = \{\chi \in (G_1 \times G_2)^\wedge \mid \forall x_1 \in K_1: |\chi(x_1,o_2)-1| < \varepsilon\}$

Eksempler.

$(\mathbb{R}^2)^\wedge$. Da $a \to e_a$ er homeomorf isomorfi af $\mathbb{R}$ på $\hat{\mathbb{R}}$, så er
$(a,b) \to (e_a,e_b)$ " " " $\mathbb{R}^2$ på $\hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}}$, dermed
$(a,b) \to e_a \otimes e_b$ " " " $\mathbb{R}^2$ på $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^\wedge = (\mathbb{R}^2)^\wedge$
Her er $e_a \otimes e_b$ fkt.nen $(x,y) \to e^{iax}e^{iby} = e^{i(ax+by)}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{T}^2)^\wedge$. $(m,n) \to \tau_m \otimes \tau_n$ er homeomorf isomorfi af $\mathbb{Z}^2$ på $(\mathbb{T}^2)^\wedge$
$\tau_m \otimes \tau_n$ er fkt.nen $(c,d) \to c^m d^n$, $c,d \in \mathbb{C}$, $|c|, |d| = 1$.

$(\mathbb{Z}^2)^\wedge$. $(c,d) \to \zeta_c \otimes \zeta_d$ er homeomorf isomorfi af $\{c \in \mathbb{C} \mid |c|=1\}^2$ på $(\mathbb{Z}^2)^\wedge$
$\zeta_c \otimes \zeta_d$ er fkt.nen $(m,n) \to c^m d^n$, $m,n \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{T})^\wedge$. $(a,n) \to e_a \otimes \tau_n$ er homeomorf isomorfi af $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ på $(\mathbb{R} \times \mathbb{T})^\wedge$
$e_a \otimes \tau_n$ er fkt.nen $(x,c) \to e^{iax}c^n$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $|c|=1$.

osv.

Øvelse.

1. Bestem karaktergruppen for $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ med $\cdot$ og sædv. topologi.
2. Angiv en isomorf homeomorfi af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ på en karaktergruppe.

$z \to (\log|z|, \operatorname{sgn} z)$ giver en isomorf homeomorfi af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ på $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$

1. $e_a \otimes \zeta_n$ overføres i $z \to e^{ia\log|z|}(\operatorname{sgn} z)^n = |z|^{ia}(\operatorname{sgn} z)^n,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$
   Afbildningen: $(a,n) \to$ nævnte fkt. giver da isomorf homeomorfi af $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ på $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^\wedge$.

2. $(a,c) \to e_a\otimes\zeta_c$ er isomorf homeomorfi af $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ på $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})^\wedge$, følgelig
   $z \to e_{\log|z|}\otimes\zeta_{\operatorname{sgn} z}$ isomorf homeomorfi af $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ på $(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})^\wedge$
   $e_{\log|z|}\otimes\zeta_{\operatorname{sgn} z}$ er fkt.nen $(x,n) \to |z|^{ix}(\operatorname{sgn} z)^n,\quad x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}$.

NB. Eksemplerne peger mod en dualitet. Herom mere senere.

Vi vil gerne vise, at er G lokalt kompakt, så også $\hat{G}$. Herved kan jeg ikke længere udskyde anvendelsen af „transfinite metoder" (velordning, Zorns lemma, ultrafiltre el. lign.) I følgende bevis indgår de gennem Tychonoffs sætning:

Et produktrum er kompakt, når hver faktor er kompakt.

Ej gennemgå bevis. (Udført f.eks. Mat. 6, T 2.12, Nachbin s. 102, Loomis s. 11)

Anvendelse: I mgd. $\mathbb{C}^X$ af kompl. fkt.ner på mgd. X er produkttopologien identisk med topologien for pkt.vis konvergens (s. 111). For vilk. kompakt mgd. $K\subseteq\mathbb{C}$ udgør fkt.rne $f: X\to\mathbb{C}$ med $\forall x\in X: f(x)\in K$ iflg. Tychonoff en kompakt mgd., nemlig K^X.

Karaktergruppen $\hat{G}$ for en diskret gruppe G er kompakt.

Thi i mgd. af fkt.ner $f: G\to\mathbb{C}$ falder topologien for uniform konvergens på kompakte mgd.r sammen med topologien for pkt.vis konvergens (s. 111)

Videre er $\hat{G} = \underbrace{\{f: G\to\mathbb{C} \mid \forall x,y\in G: f(x+y)=f(x)f(y)\}}_{\text{afsluttet, s. 113}} \cap \underbrace{\{f: G\to\mathbb{C} \mid \forall x\in G: |f(x)|=1\}}_{\text{kompakt iflg. Tychonoff}}$

Karaktergruppen $\hat{G}$ for en lokalt komp. gruppe G er igen lokalt kompakt. Konkret:

se s. 156

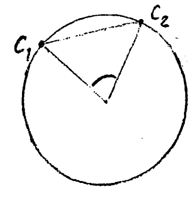
Er C en kompakt omegn af $0\in G$ og $0<\delta<\sqrt{3}$, da er $W=\{\chi\in\hat{G} \mid \forall x\in C: |\chi(x)-1|\leq\delta\}$ en kompakt omegn af 1_G i karaktergruppen $\hat{G}$.

Klart, at W omegn af 1_G, nemlig $W \supseteq W_{C,\delta}(1_G)$. Opgaven er altså at vise, at W er kompakt i topologien for uniform konv. på kompakte mgd.r.

Bevis. 0°. $\widehat{G} = \{f: G \to \mathbb{C} \mid \forall x,y \in G: f(x+y) = f(x)f(y),\ \forall x \in G: |f(x)| = 1\}$ er kompakt i topologien for pkt.vis konvergens (men ikke i alm. i „rigtige" finere topologi). Se foregående bevis (Tychonoff afgørende). NB: $\hat{G} = \widehat{G} \cap \mathcal{C}(G)$.

1° Sammenknytte ε, $0 < \varepsilon \leqq 2$, med ε', $0 < \varepsilon' \leqq \pi$, ved

$\varepsilon = 2 \sin \frac{\varepsilon'}{2}$ (Kordelængde $\leftrightarrow$ centervinkel)



For c_1, c_2 på enhedscirkel gælder da: $|c_1 - c_2| < \varepsilon \Leftrightarrow |\mathrm{Arg}\,\frac{c_1}{c_2}| < \varepsilon'$ og tilsv. med $=$, $\leqq$, osv.

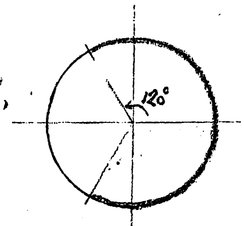
(korde)afstand   bueafstand

Eks. $W = \{\chi \in \hat{G} \mid \forall x \in C: |\mathrm{Arg}\,\chi(x)| \leqq \delta'\}$.

2° Gælder for et c på enhedscirkel, at

$c, c^2, \dots, c^N$ alle tilh. åbne røde bue, dvs. $|\mathrm{Arg}\,c^n| < \frac{2\pi}{3}$, $n = 1, \dots, N$,

da er $|\mathrm{Arg}\,c| < \frac{1}{N} \cdot \frac{2\pi}{3}$



Thi ligger c f.eks. på øvre halvbue, må alle gøre det.

3° Ethv. $f \in \widehat{G}$, hvor $|\mathrm{Arg}\,f(x)| < \frac{2\pi}{3}$ for x tilh. omegn $\mathcal{U}$ af $o \in G$, er kontinuert.

Iflg. s. 113 nok at vise f kontin. i $o \in G$.

Til vilk. $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+$ først vælge $N \in \mathbb{N}$, så $\frac{1}{N} \frac{2\pi}{3} \leqq \varepsilon'$

Da $(x_1, \dots, x_N) \to x_1 + \dots + x_N$ kontin. i $(o, \dots, o)$ med værdi o, findes omegn V af $o \in G$, så $V + \dots + V \subseteq \mathcal{U}$ (N addender).

For hvert $x \in V$ er nu $x, 2x, \dots, Nx \in \mathcal{U}$,

dermed $|\mathrm{Arg}\,f(nx)| < \frac{2\pi}{3}$, dvs. $|\mathrm{Arg}\,(f(x))^n| < \frac{2\pi}{3}$, $n = 1, \dots, N$

altså iflg. 2°: $|\mathrm{Arg}\,f(x)| < \frac{1}{N} \frac{2\pi}{3} \leqq \varepsilon'$.

4° $W = \{f \in \widehat{G} \mid \forall x \in C: |\mathrm{Arg}\,f(x)| \leqq \delta'\} = \widehat{G} \cap \{f: G \to \mathbb{C} \mid \forall x \in C: |f(x) - 1| \leqq \delta\}$

Iflg. definition er nemlig $W = \mathcal{C}(G) \cap \widehat{G} \cap \{ \dots\dots \}$

og iflg. 3° er, idet C omegn af o, $\widehat{G} \cap \{ \dots\dots \} \subseteq \mathcal{C}(G)$

benyttes, omegn

5° W er kompakt i topologien for pkt.vis konvergens.

Thi i denne topologi er $\widehat{G}$ kompakt, se 0°,

og $\{f: G \to \mathbb{C} \mid \forall x \in C: |f(x) - 1| \leqq \delta\}$ afsluttet,

idet for vilk. $x \in G$: $\{f: G \to \mathbb{C} \mid |f(x) - 1| \leqq \delta\}$ er afsluttet.

Hertil sædv. ræsonnement (sml. s. 113): betragte vilk. kontaktfkt. g.

For hvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ indeh. $W_{\{x\},\varepsilon}(g)$ fkt. f med $|f(x) - 1| \leqq \delta$

hvorfor $|g(x) - 1| < \delta + \varepsilon$.

Beviset afsluttes nu ved

6° På W falder topologierne for uniform konv. på komp. mgdr og for punktvis konvergens sammen.

Idet vi nu holder os til fkt.r tilh. W, skal hertil vises:

Vilk. $W_{K,\varepsilon}(\chi) = \{\xi \in W \mid \forall x \in K : |\xi(x) - \chi(x)| < \varepsilon\}$

$= \{\xi \in W \mid \forall x \in K : |\mathrm{Arg}\, \xi(x)/\chi(x)| < \varepsilon'\}$ med K komp. $\subseteq G$, $0 < \varepsilon \leq 2$,

indeh. et $W_{\{s_1,\dots,s_p\},\gamma}(\chi)$. — Det omv. er jo oplagt.

Hertil starte som i 3°:

Først vælge $N \in \mathbb{N}$, så $\frac{1}{N}\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\varepsilon'}{3}$,

derpå åben omegn V af $0 \in G$, så $V + \dots + V$ (N addender) $\subseteq C$.

Da er $|\mathrm{Arg}\, \xi(v)| < \frac{\varepsilon'}{3}$ for ethv. $\xi \in W$, $v \in V$.

Idet K kompakt og $K \subseteq \bigcup_{s \in G}(s+V)$, findes $s_1, \dots, s_p$, så $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p}(s_i + V)$.

Nu: med $\gamma' = \frac{\varepsilon'}{3}$ er $\forall \chi \in W$: $W_{\{s_1,\dots,s_p\},\gamma}(\chi) \subseteq W_{K,\varepsilon}(\chi)$,

dvs. for $\chi, \xi \in W$:

$$|\mathrm{Arg}\, \xi(s_i)/\chi(s_i)| < \frac{\varepsilon'}{3},\ i = 1,\dots,p \quad \Rightarrow \quad \forall x \in K : |\mathrm{Arg}\, \xi(x)/\chi(x)| < \varepsilon'.$$

Thi vilk. $x \in K$ kan skrives $x = s_i + v$ med $v \in V$; dermed

$$|\mathrm{Arg}\, \xi(x)/\chi(x)| \leq |\mathrm{Arg}\, \xi(x)/\xi(s_i)| + |\mathrm{Arg}\, \xi(s_i)/\chi(s_i)| + |\mathrm{Arg}\, \chi(s_i)/\chi(x)|$$
$$= |\mathrm{Arg}\, \xi(v)| + |\mathrm{Arg}\, \xi(s_i)/\chi(s_i)| + |\mathrm{Arg}\, \chi(v)|$$

Bemærkning.

Er h en kontin. homomorfi af en (komm.) topolog. gruppe G_1 ind i (komm.) top. gruppe G_2, da giver $\chi_2 \to \chi_2 \circ h$, $\chi_2 \in G_2$ en kontin. homomorfi af $\hat{G}_2$ ind i $\hat{G}_1$.

Thi klart, at $\chi_2 \circ h$ karakter i G_1.

Afbildn. homomorf: $(\chi_2 \xi_2) \circ h = (\chi_2 \circ h) \cdot (\xi_2 \circ h)$.

Afbildn. kontin: $W_{h(K),\varepsilon}(\chi_2)$ afbildes inden for $W_{K,\varepsilon}(\chi_2 \circ h)$.

Er $h : G_1 \to G_2$ en homeomorf isomorfi, da giver $\chi_2 \to \chi_2 \circ h$ homeom. isomorfi $\hat{G}_2$ på $\hat{G}_1$.

Duale grupper.

Først nogle betegnelser vedr. afbildn. f defin. på produktmgd. $Y \times Z$:

For vilk. $y \in Y$ betegner $f(y,\cdot)$ afbildningen $z \to f(y,z)$, $z \in Z$. Anal. $f(\cdot,z)$.

Med $f_{1\cdot}$ betegnes afbildningen $y \to f(y,\cdot)$, $y \in Y$. Altså $f_{1\cdot}(y) = f(y,\cdot)$, $f_{1\cdot}(y)(z) = f(y,z)$.

Med $f_{\cdot 2}$ betegnes afbildningen $z \to f(\cdot,z)$, $z \in Z$. Altså $f_{\cdot 2}(z) = f(\cdot,z)$, $f_{\cdot 2}(z)(y) = f(y,z)$.

Definition. En fkt. $f: G \times \Gamma \to \mathbb{C}$ siges at bringe to (komm.) topologiske grupper G og Γ i dualitet, hvis

(i) $f_{\cdot 2}$ er en homeomorf isomorfi af Γ på karaktergruppen $\hat{G}$,
(ii) $f_{1\cdot}$ er en homeomorf isomorfi af G på karaktergruppen $\hat{\Gamma}$.

Ofte skrives $\langle x,\xi \rangle$ for $f(x,\xi)$.

Eksempler:	$\langle x,a \rangle = e^{iax}$	bringer $\mathbb{R}$	i dualitet med sig selv
	$\langle c,n \rangle = c^n$	bringer $\mathbb{T} = \{c \in \mathbb{C} \mid \lvert c\rvert = 1\}$	i dualitet med $\mathbb{Z}$
	$\langle (x,y),(a,b) \rangle = e^{i(ax+by)}$	bringer $\mathbb{R}^2$	i dualitet med sig selv
	$\langle (c,d),(m,n) \rangle = c^m d^n$	bringer $\mathbb{T}^2$	i dualitet med $\mathbb{Z}^2$
	$\langle (x,c),(a,n) \rangle = e^{iax} c^n$	bringer $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$	i dualitet med $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
	$\langle z,(a,n) \rangle = \lvert z\rvert^{ia} (\operatorname{sgn} z)^n$	bringer $\mathbb{C} \setminus \{0\}$	i dualitet med $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ (övelsen)

s. 116

Vi bemærker: Er G og Γ i dualitet ved $g: G \times \Gamma \to \mathbb{C}$, H og Δ i dual. ved $h: H \times \Delta \to \mathbb{C}$, da er $G \times H$ og $\Gamma \times \Delta$ i dualitet ved $\langle (x,y),(\xi,\eta) \rangle = g(x,\xi) \cdot h(y,\eta)$.

Thi f. eks. vise (i):
At $(\xi,\eta) \to \langle \cdot,(\xi,\eta) \rangle = g(\cdot,\xi) \otimes h(\cdot,\eta)$ er homeom. isomorfi $\Gamma \times \Delta \to (G \times H)^\wedge$ fås af,
at $(\xi,\eta) \to (g(\cdot,\xi), h(\cdot,\eta))$ er homeom. isomorfi $\Gamma \times \Delta \to \hat{G} \times \hat{H}$,
idet sidstnævnte afbildn. sammensættes m. homeom. isomorfi $\hat{G} \times \hat{H} \to (G \times H)^\wedge$ s. 115

I en dualitet kan en af grupperne udskiftes med et nyt eksemplar, nöjagtigt:

Lad de topol. grupper G og Γ være i dualitet ved fktnen f og lad $h: \Delta \to \Gamma$ være en homeomorf isomorfi fra topol. gruppe Δ.
Da er G og Δ i dualitet ved $g: G \times \Delta \to \mathbb{C}$ givet ved $g(x,\eta) = f(x,h(\eta))$

Thi for vilk. $\eta \in \Delta$ er $g(\cdot,\eta) = f(\cdot,h(\eta))$, altså $g_{\cdot 2} = f_{\cdot 2} \circ h$. Dermed (i)

Og for vilk. $x \in G$ er $g(x,\cdot) = f(x,\cdot) \circ h$

Ved sammensætn. af $x \to f(x,\cdot)$, $x \in G$ og $\gamma \to \gamma \circ h$, $\gamma \in \hat{\Gamma}$,
altså af $f_{1\cdot}: G \to \hat{\Gamma}$ og homeo. isom. $\hat{\Gamma} \to \hat{\Delta}$ (bemærkn. s. 118),
fås derfor $g_{1\cdot}: G \to \hat{\Delta}$. Hermed (ii).

Eksempler.

$\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ kan udskiftes med $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ved substitution $(x,c) = (\log|z|, \operatorname{sgn} z)$;
herved går $e^{iax}c^n$ over i $|z|^{ia}(\operatorname{sgn} z)^n$. sml. ovenfor.

$\mathbb{R}$ kan udskiftes med sig selv ved substitution $a = \text{const}\cdot b$, henh. m. $\mathbb{R}_+$ ved $a = \log b$;
herved går e^{iax} over i $e^{i\,\text{const}.bx}$, henh. i $e^{i(\log b)x} = b^{ix}$.

$G\times\Gamma\to\mathbb{C}$ $\uparrow f_{\cdot 2}^{-1}$ $\hat{G}$

Er topol. grupper G og Γ i dualitet ved $f: G\times\Gamma\to\mathbb{C}$, da kan Γ udskiftes med $\hat{G}$ ved substitutionen $f_{\cdot 2}^{-1}: \hat{G}\to\Gamma$. Herved går $f(x,\xi)$ over i

$$g(x,\chi) = f(x, f_{\cdot 2}^{-1}(\chi)) = \chi(x)$$

thi $f_{\cdot 2}^{-1}(\chi)$ er det $\xi\in\Gamma$, hvor $f(\cdot,\xi)=\chi$, altså $f(\cdot, f_{\cdot 2}^{-1}(\chi)) = \chi$.

Vi har således:
Hvis en topologisk gruppe G overhovedet er i dualitet med en topol. gruppe, så også med sin egen karaktergruppe $\hat{G}$ ved fkt.nen $\langle x,\chi\rangle = \chi(x)$.

I bekræftende fald gælder:
En fkt. $f: G\times\Gamma\to\mathbb{C}$ bringer G i dualitet med topol. gruppe Γ, blot (i) er opfyldt.

$\hat{G}\to\mathbb{C}$ $\uparrow f_{\cdot 2}$ Γ

Thi ved udskiftning af $\hat{G}$ med Γ ved $f_{\cdot 2}: \Gamma\to\hat{G}$, altså ved substitutionen $\chi = f_{\cdot 2}(\xi) = f(\cdot,\xi)$, går $\langle x,\chi\rangle = \chi(x)$ over i $f(x,\xi)$.

Entydighed: Er topol. grupper G og Γ i dualitet ved $f: G\times\Gamma\to\mathbb{C}$, henh. G og Δ i dualitet ved $g: G\times\Delta\to\mathbb{C}$, da findes en og kun en homeomorf isomorfi $h: \Delta\to\Gamma$, så

(*) $$g(x,\eta) = f(x,h(\eta))$$

Thi for $\eta\in\Delta$, $\xi\in\Gamma$ gælder:

$$[\forall x\in G:\ g(x,\eta) = f(x,\xi)] \iff g(\cdot,\eta) = f(\cdot,\xi) \iff g_{\cdot 2}(\eta) = f_{\cdot 2}(\xi) \iff \xi = f_{\cdot 2}^{-1}(g_{\cdot 2}(\eta)).$$

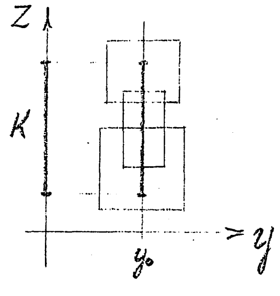
Ligningen (*) er derfor opfyldt med og kun med $h = f_{\cdot 2}^{-1}\circ g_{\cdot 2}$
Og denne fkt. er homeomorf isomorfi

NB. Entydighedssætningen benytter kun betingelse (i) i dualitetsdefin.; ikke (ii)

Dualitetsbetingelserne (i) og (ii) s. 119 har en betydelig overlapning. Først en mere generel bemærkning:

Lad $f: Y\times Z \to \mathbb{C}$ være fkt. defineret på produktrum. For $\mathcal{C}(Z)$ benyttes topol. for uniform konverg. på kompakte mgd.r. Da:

$$f \text{ kontin.} \Rightarrow f_{1\cdot}: Y \to \mathcal{C}(Z) \text{ kontin.}$$

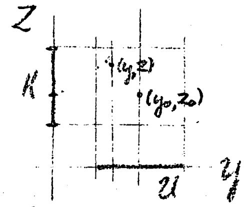


Thi for vilk. $y_0\in Y$, kompakt $K\subseteq Z$ og $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ overdække $\{y_0\}\times K$ med end. mange åbne „rektangler", hvori f oscillerer mindre end ε. Da er spec.

$$\forall z\in K: |f(y,z)-f(y_0,z)|<\varepsilon, \quad \text{dvs } f_{1\cdot}(y)\in W_{K,\varepsilon}(f_{1\cdot}(y_0)),$$

når y tilh. fællesmgd. af „rektangel"-projektioner.

Når Z er lokalt kompakt, gælder også omv. implikation.



Thi vise kontin. i (y_0,z_0). Betragte vilk. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$.

o. omegne bis, s. 12 — Da $f_{1\cdot}(y_0)=f(y_0,\cdot)\in\mathcal{C}(Z)$, findes komp. omegn K af $z_0\in Z$ (s. 12), så

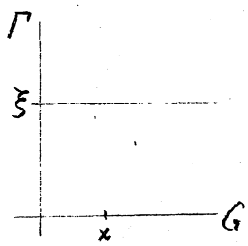
$$|f(y_0,z)-f(y_0,z_0)|<\varepsilon \text{ for } z\in K$$

Da $f_{1\cdot}$ kontin., findes videre omegn U af $y_0\in Y$, så $f(y,\cdot)\in W_{K,\varepsilon}(f(y_0,\cdot))$ for $y\in U$.

:70 For $y\in U$, $z\in K$ er da $|f(y,z)-f(y_0,z_0)|<2\varepsilon$.

Nu studere fkt. $f: G\times\Gamma\to\mathbb{C}$, hvor G og Γ er (komm.) topol. grupper, G lok. kompakt. For $f(x,\xi)$ skriver vi også $\langle x,\xi\rangle$. Der gælder:

$f_{\cdot 2}$, altså afbildningen $\xi\to\langle\cdot,\xi\rangle$, er en kontin. homomorfi af Γ ind i karaktergruppen $\hat{G}$ da og kun da, hvis



$$(*)\quad \begin{cases} f \text{ er kontin.} \\ |\langle x,\xi\rangle| = 1 \quad \text{for alle } x\in G,\ \xi\in\Gamma \\ \langle x+y,\xi\rangle = \langle x,\xi\rangle\cdot\langle y,\xi\rangle \quad \text{for alle } x,y\in G,\ \xi\in\Gamma \\ \langle x,\xi+\eta\rangle = \langle x,\xi\rangle\cdot\langle x,\eta\rangle \quad \text{for alle } x\in G,\ \xi,\eta\in\Gamma \end{cases}$$

I bekræft. fald er $f_{1\cdot}$, altså afbildningen $x\to\langle x,\cdot\rangle$, en kontin. homomorfi af G ind i $\hat{\Gamma}$.

Thi f kontin. iflg. foregående bemærkn. ensbetyd. med $f_{\cdot 2}: \Gamma\to\mathcal{C}(G)$ kontin.
(henholdsv. med $f_{1\cdot}: G\to\mathcal{C}(\Gamma)$ kontin.)

Anden betingelse ensbet. med alle $f_{\cdot 2}(\xi)$ (henh. $f_{1\cdot}(x)$) har deres værdier på enhedscirklen.
Tredje betingelse ensbet. med alle $f_{\cdot 2}(\xi)$ homomorfe (henh. $f_{1\cdot}$ homomorf)
Fjerde betingelse ensbet. med $f_{\cdot 2}$ homomorf (henh. alle $f_{1\cdot}(x)$ homomorfe)

Som supplement noteres: Dualitetsbetingelse (i) s. 119 er ensbetydende med følgende sæt af betingelser

$f_{\cdot 2}$ er en kontin. homomorfi af Γ ind i karaktergruppen $\hat{G}$

$\forall \xi \in \Gamma, \xi \neq 0 \;\; \exists x \in G: \langle x, \xi \rangle \neq 1$

Hvert $\chi \in \hat{G}$ kan skrives $\langle \cdot, \xi \rangle$ med $\xi \in \Gamma$

Til hver omegn V af $0 \in \Gamma$ findes komp. $K \subseteq G$ og $\varepsilon \in R_+$, så hvert $\chi \in W_{K,\varepsilon}(1_G)$, dvs. $\chi \in \hat{G}$ med $|\chi(x) - 1| < \varepsilon$ for $x \in K$, kan skrives $\langle \cdot, \xi \rangle$ med $\xi \in V$.

Tilsv. gælder naturligvis (ii).

Thi 2. betingelse (som tillæg til 1.) udtrykker, at $f_{\cdot 2}$ er injektiv

nemlig: $f_{\cdot 2}$ injektiv kommer ud på, at for hvert $\xi \in \Gamma$, $\xi \neq 0$ er

$f_{\cdot 2}(\xi) = \langle \cdot, \xi \rangle$ forsk. fra $1_G \in \hat{G}$, dvs. $x \in G$ findes, så $\langle x, \xi \rangle \neq 1$

3. betingelse udtrykker, at $f_{\cdot 2}: \Gamma \to \hat{G}$ er surjektiv.

4. betingelse (som tillæg til øvrige) udtrykker $f_{\cdot 2}^{-1}: \hat{G} \to \Gamma$ kontin, nemlig i 1_G

Den siger jo, at orig.mgd. $f_{\cdot 2}(V) = \{\langle \cdot, \xi \rangle \mid \xi \in V\}$ til V indeholder et $W_{K,\varepsilon}(1_G)$

<u>Pontrjagins dualitetssætning.</u>

<u>Enhver komm.</u>, <u>lokalt kompakt</u> <u>gruppe</u> G <u>har en dual</u>, <u>dvs. der findes topol. gruppe</u> Γ <u>og fkt.</u> $f: G \times \Gamma \to C$, <u>der bringer</u> G <u>og</u> Γ <u>i dualitet</u>.

Dette er iflg. s. 120 ensbetydende med: G <u>bringes i dualitet med sin egen karaktergruppe</u> $\hat{G}$ <u>ved</u>

$$\langle x, \chi \rangle = \chi(x) \quad , \qquad x \in G, \; \chi \in \hat{G}.$$

Denne hovedsætning vist af Pontrjagin 1934 for kompakte og diskrete grupper med numerabel basis (2. tællelighedsaksiom, separable), generelt af van Kampen 1935, A. Weil 1938.

Vi vil ikke bevise sætningen, men dog se, hvor langt vi kan komme, før vanskelighederne melder sig:

Lad G være en komm. lokalt kompakt gruppe. Vi definerer $f: G \times \hat{G} \to C$ ved $f(x, \chi) = \chi(x)$.

Dualitetskrav (i), s. 119, er da opfyldt, idet $f_{\cdot 2}$ simpelthen er den identiske afb. af $\hat{G}$.

Vi har nemlig $f_{\cdot 2}(\chi) = f(\cdot, \chi) = \chi$, som man ser ved at tage værdi i vilk. $x \in G$.

Ad (ii). Da (i) er opfyldt og G lokalt kompakt, ved vi (s. 121), at $f_{1\cdot}$ er en kontin. homomorfi af G ind i $\hat{\hat{G}}$.

Def.: Denne afbildn. $f_{1\cdot}$, altså afbildningen, der til hvert $x \in G$ knytter karakteren $\chi \to \chi(x)$ på $\hat{G}$, kaldes den <u>kanoniske morfi</u> af G ind i $\hat{\hat{G}}$

I beviset for Pontrjagins dualitetssætning mangler vi således at vise, at den kanoniske morfi af G ind i $\hat{\hat{G}}$ er

injektiv, surjektiv og den omvendte kontinuert

dvs. de 3 betingelser s. 122 øverst med $\hat{G}, G$ i stedet for G, Γ.

De kendte beviser er lange og benytter hjælpemidler fra andre områder af matematikken.

Blot nævne, at injektivitet af den kanoniske morfi kommer ud på, at <u>karaktererne for G skiller punkterne i G</u>,

$$\forall x, y \in G, x \neq y \quad \exists \chi \in \hat{G}: \quad \chi(x) \neq \chi(y)$$

dvs. $$\forall x \in G, x \neq 0 \quad \exists \chi \in \hat{G}: \quad \chi(x) \neq 1$$

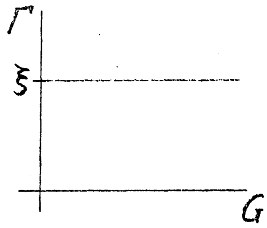
Smlg. s. 122. (Første betingelse fås af sidste anvendt på $x-y$.)

Denne egenskab udtrykkes ofte: G har tilstr. mange karakterer. – Herfor er det væsentligt, at G er <u>kommutativ</u>.

§2. Fourier transformation.

Fourier transformation af begr. Radon integral.

Lad G og Γ være komm. top. grupper, G lokalt kompakt, med fkt. $d: G\times\Gamma \to \mathbb{C}$.
For $d(x,\xi)$ skrives også $\langle x,\xi\rangle$. Vi forudsætter



$d_{\cdot 2}$, altså $\xi \to \langle\cdot,\xi\rangle$, er en kontin. homomorfi af Γ ind i $\hat{G}$,
dvs. (s. 121): d kontin., $|\langle x,\xi\rangle| = 1$
$\langle x+y,\xi\rangle = \langle x,\xi\rangle\cdot\langle y,\xi\rangle$, $\langle x,\xi+\eta\rangle = \langle x,\xi\rangle\langle x,\eta\rangle$.

Da er ligeledes $d_{1\cdot}$, $x \to \langle x,\cdot\rangle$ en kontin. homomorfi af G ind i $\hat{\Gamma}$.

Notere konsekv. af algebraiske egenskaber: $\langle 0,\xi\rangle = 1 = \langle x,0\rangle$
$\langle -x,\xi\rangle = \langle x,\xi\rangle^{-1} = \overline{\langle x,\xi\rangle} = \langle x,-\xi\rangle$

Defin. Ved den Fourier transformerede $\mathfrak{F}J$ af et begr. Radon integral J på G, $J \in \mathcal{M}^1(G)$, forstås fkt.nen
$$\xi \to \int_G \overline{d_{\cdot 2}(\xi)}\,dJ = \int_G \overline{\langle x,\xi\rangle}\,dJ(x), \quad \xi\in\Gamma$$

For hvert $\xi\in\Gamma$ er $\overline{d_{\cdot 2}(\xi)}$ en karakter, spec. kont. og begr., dermed integr. m.h.t. J.
$\mathfrak{F}J$ er sammensat af $d_{\cdot 2}: \Gamma \to \hat{G}$ og $\chi \to \int\overline{\chi}\,dJ$, $\chi\in\hat{G}$.

Eks. For $\mathbb{R}$ i dualitet med sig selv ved $\langle x,\xi\rangle = e^{i\xi x}$ har vi
$$\mathfrak{F}J\,(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\,dJ(x).$$

Her kaldes $\mathfrak{F}J$ også Fourier-Stieltjes integralet af J
eller, når J modsv. fordelingsfkt. (dvs. J pos. med mål af $]-\infty,\infty[$ lig 1),
70 blandt sandsynlighedsteoretikere: karakterist. funktion for J.

Eks. Den Fourier transform. $\mathfrak{F}\delta_s$ af Dirac integral δ_s i G er karakteren $\overline{d_{1\cdot}(s)} = \overline{\langle s,\cdot\rangle}$ i Γ,
nemlig $\mathfrak{F}\delta_s(\xi) = \int_G \overline{\langle x,\xi\rangle}\,d\delta_s(x) = \overline{\langle s,\xi\rangle}$.

<u>Den Fourier transform.</u> $\mathfrak{F}J: \Gamma \to \mathbb{C}$ <u>af vilk.</u> $J\in\mathcal{M}^1(G)$ <u>er ligelig kontin. og begr.</u> <u>med</u> $\|\mathfrak{F}J\|_\infty \leq M_J$.

Bevis. Begr.: for hvert $\chi\in\hat{G}$ er $|\int\overline{\chi}\,dJ| \leq \int|\overline{\chi}|\,d|J| = \int_G 1\,d|J| \underset{s.31}{=} M_{|J|} \underset{s.37}{=} M_J$ (s. 42).

Ligelig kont.: Benytter
<u>Idet J begr. Radon integral i lokalt komp. rum X, findes til hvert $\varepsilon\in R_+$ en komp. mgd. $K\subseteq X$, så</u>
$$\int_{X\setminus K} 1\,d|J| < \varepsilon.$$

Thi $\int_X 1\,d|J| = \sup_{f\in\mathcal{K}_+, f\leqq 1} |J|(f)$,,
der findes altså et $f\in\mathcal{K}_+$, $f\leqq 1$, så $\int_X 1\,d|J| - \varepsilon < |J|(f)$;
med K = støtten for f er da $\int_X 1\,d|J| - \varepsilon < \int f\,d|J| \leqq \int_K 1\,d|J|$

Er nemlig $\int_{G\setminus K} 1\,d|J| \leqq \varepsilon M_J$ med Komp. $K\subseteq G$, har vi for $\chi,\psi\in\hat{G}$ med $\chi\psi^{-1}\in W_{K,\varepsilon}(1_G)$, dvs. $|\chi(x)/\psi(x) - 1| = |\chi(x)-\psi(x)| < \varepsilon$ for $x\in K$, at

$$\left|\int\bar{\chi}\,dJ - \int\bar{\psi}\,dJ\right| = \left|\int(\bar{\chi}-\bar{\psi})\,dJ\right| \leqq \int|\chi-\psi|\,d|J|$$
$$= \int_K|\chi-\psi|\,d|J| + \int_{G\setminus K}|\chi-\psi|\,d|J|$$
$$\leqq \varepsilon\int_K 1\,d|J| + \int_{G\setminus K} 2\,d|J| \leqq 3M_J\cdot\varepsilon.$$

Og for $\xi,\eta\in\Gamma$ med $\xi-\eta\in d_{.2}^{-1}(W_{K,\varepsilon}(1))$ er da $|\mathfrak{F}J(\xi) - \mathfrak{F}J(\eta)| \leqq 3M_J\cdot\varepsilon$.

<u>Den Fourier transform $\mathfrak{F}J:\Gamma\to\mathbb{C}$ af vilk. pos. $J\in\mathcal{M}^1(G)$ er en pos. defin fkt.</u> (s. 103) *)

Bevis. Benytte defin. (s. 103). For vilk. $\xi_1,\dots,\xi_n\in\Gamma$, $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C}$ er

$$\sum_{i,j}\mathfrak{F}J(\xi_i-\xi_j)\bar{c}_i c_j = \sum_{i,j}\bar{c}_i c_j\int_G\overline{\langle x,\xi_i-\xi_j\rangle}\,dJ(x) = \int_G\Big(\sum_{i,j}\overline{\langle x,\xi_i-\xi_j\rangle}\,\bar{c}_i c_j\Big)dJ(x) \geqq 0,$$

idet $\sum_{i,j} = \sum_{i,j}\overline{\langle x,\xi_i\rangle}\langle x,\xi_j\rangle\bar{c}_i c_j = \left|\sum_i\langle x,\xi_i\rangle c_i\right|^2 \geqq 0$ for hvert $x\in G$

Bemærkning. En karakter χ på en komm topol. gruppe er pos. definit. Foregående linie kan læses som beviset i tilfældet $\chi = d_1(x)$. Generelt:

$$\sum_{i,j}\chi(x_i-x_j)\bar{c}_i c_j = \sum_{i,j}\chi(x_i)\chi(x_j)^{-1}\bar{c}_i c_j = \sum_{i,j}\chi(x_i)\overline{\chi(x_j)}\bar{c}_i c_j = \left|\sum_i\bar{c}_i\chi(x_i)\right|^2 \geqq 0.$$

· Efter at have undersøgt egenskaber ved Fourier <u>transformerede</u> $\mathfrak{F}J$ går vi nu over til at betragte Fourier <u>transformationen</u> $\mathfrak{F}:\mathcal{M}^1(G)\to\mathcal{C}_b(\Gamma)$.

Først bemærke: Mgd. $\mathcal{C}_b(X)$ af kontin. begr. fktr $f:X\to\mathbb{C}$ på et topol. rum er med sædv. add., multipl. m. konstanter og sædv. multipl. samt $\|\ \|_\infty$ en Banach algebra (sml. s. 7, s. 81) med $f\to\bar{f}$ som involution (sml. s. 100), fkt. 1 som etelement.

<u>Sætning.</u> <u>Fourier transformationen $\mathfrak{F}:\mathcal{M}^1(G)\to\mathcal{C}_b(\Gamma)$ er en kontin. homomorfi af Banach algebraen $\mathcal{M}^1(G)$ med involution ind i $\mathcal{C}_b(\Gamma)$.</u> Dvs.

1° $\mathfrak{F}J\in\mathcal{C}_b(\Gamma)$ for hvert J (s. 124)

2° $\mathfrak{F}$ er lineær: $\mathfrak{F}(J_1+J_2) = \mathfrak{F}J_1 + \mathfrak{F}J_2$, $\mathfrak{F}(cJ) = c\mathfrak{F}J$

thi $\int\overline{\langle x,\xi\rangle}\,d(J_1+J_2)(x) = \int\overline{\langle x,\xi\rangle}\,dJ_1(x) + \int\overline{\langle x,\xi\rangle}\,dJ_2(x)$, s. 84 öv. 3, o. anal.

3° $\mathfrak{F}$ er kontin., nemlig begr., endda $\|\mathfrak{F}J\|_\infty \leqq 1\cdot M_J$ (s. 124)

---

*) For pos. $J\in\mathcal{M}^1(G)$ også bemærke $\|\mathfrak{F}J\|_\infty = M_J$, idet $\mathfrak{F}J(0) = \int_G 1\,dJ = M_J$

4° $\mathcal{F}(H * J) = \mathcal{F}H \cdot \mathcal{F}J$.

Denne egenskab har særlig interesse: den komplicerede komposition $*$ modsvares af sædv. multipl. af fkts (I sandsynl.regn. giver $*$ fordelings-fkt. for sum af uafh. stokastiske variable.)

Bevis. $\mathcal{F}(H*J)(\xi) = \int_G \overline{\langle \cdot, \xi \rangle}\, d(H*J) = \int_{G\times G} \overline{\langle x+y, \xi\rangle}\, d(H\otimes J)(x,y)$

s. 106, $\overline{\langle \cdot, \xi\rangle}$ er jo kont., begr.

$$= \int_{G\times G} \overline{\langle x,\xi\rangle}\,\overline{\langle y,\xi\rangle}\, d(H\otimes J)(x,y) = \int_G \overline{\langle x,\xi\rangle}\, dH(x) \cdot \int_G \overline{\langle y,\xi\rangle}\, dJ(y) = \mathcal{F}H(\xi)\cdot \mathcal{F}J(\xi)$$

Fubini

5° $\mathcal{F}(J^*) = \overline{\mathcal{F}J}$.

Thi $\mathcal{F}(J^*)(\xi) = \int_G \overline{\langle x, \xi\rangle}\, dJ^*(x)$ er (s. 100) konjug. til $\int_G \langle -x, \xi\rangle\, dJ(x) = \mathcal{F}J(\xi)$.

Desuden bemærke, at etelementet δ_0 i $\mathcal{M}^1(G)$ har $\mathcal{F}\delta_0 = 1$.

470. Direkte: $\int_G \chi\, d\delta_0 = \chi(0) = 1$ for $\chi \in \hat{G}$. Også spec. tilfælde af $\mathcal{F}\delta_s = \overline{\langle s, \cdot\rangle}$

Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(G) \to \mathcal{C}_b(\Gamma)$ er især af interesse, <u>når</u> den er <u>injektiv</u>, dvs. <u>når</u> der gælder

<u>Entydighedssætning:</u> $\mathcal{F}J = 0 \Rightarrow J = 0$.

Ved $\mathcal{F}$ afbildes mgd. $\mathcal{M}^1_+(G)$ af <u>pos.</u> begr. Radon integraler på G inden for den konvekse kegle $\mathcal{P}^+(\Gamma)$ af pos. definite fkts på Γ (s. 125)

Da $\mathcal{F}$ er lineær, og ethv. $J \in \mathcal{M}^1(G)$ er lin. kombin. af positive (s. 22), afbildes $\mathcal{M}^1(G)$ inden for det lin. fktsrum $\mathcal{P}(\Gamma) \subseteq \mathcal{C}_b(\Gamma)$ udsp. af $\mathcal{P}^+(\Gamma)$.

Under passende forudsætninger, nemlig når Γ er lokalt kompakt og $d_1: G \to \hat{\Gamma}$ er homeomorf isomorfi, gælder både entydighedssætn. og den fundamentale

<u>Bochners sætning.</u> <u>Enhver pos. definit fkt. på Γ er Fourier transformeret af et pos. begr. Radon integral på G</u>

Altså $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1_+(G) \to \mathcal{P}^+(\Gamma)$ bijektiv, $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(G) \to \mathcal{P}(\Gamma)$ bijektiv.

Tilfældet $G = \Gamma = \mathbb{R}$ med $\langle x, \xi\rangle = e^{i\xi x}$, tilsv. $\mathbb{R}^n$: S. Bochner 1932,

tilfældet $G = \mathbb{T}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ med $\langle c, n\rangle = c^n$: G. Herglotz 1911,

alment A. Weil 1938

Bemærkning. Når Γ lokalt kompakt og $d_1: G \to \hat{\Gamma}$ homeom. isomorfi, sluttes af Pontrjagins dualitetssætn. s. 122 sammen med resultat s. 120, at G og Γ står i dualitet ved d. Interessen i de kun tilsyneladende svagere forudsætninger for Bochners sætn. ligger i, at der herigennem er en vej til bevis netop for Pontrjagins dualitetssætn.

Ved beviset for entydighedssætn. og Bochners sætn. (samt anvendelse i bevis for Pontrjagins sætn.) er det bekvemt at lade G og Γ bytte rolle, altså betragte Fourier transformation $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(\Gamma) \to \mathcal{C}_b(G)$. Formuleringen er da:

Om $d: G \times \Gamma \to \mathbb{C}$ med G, Γ komm., top. grupper, G lokalt komp., forudsætte $d_2: \Gamma \to \hat{G}$ homeom. isomorfi.

Iflg. s. 116 er nu $\hat{G}$ og dermed Γ lokalt komp., dermed Fourier transform. $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(\Gamma) \to \mathcal{P}(G) \subseteq \mathcal{C}_b(G)$ defin.

<u>Entyd. sætn.</u> $\mathcal{F}J = 0 \Rightarrow J = 0$ (for $J \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$)

<u>Bochners sætn.</u> Enhv. pos. defin. fkt. på G er Fourier transf. af et $J \in \mathcal{M}^1_+(\Gamma)$.

Bemærk: Forudsætn. opfyldt for vilk. komm., lok. komp G med $\Gamma = \hat{G}$, $\langle x, \chi \rangle = \chi(x)$ (idet d_2 identiske afbildn. af $\hat{G}$, s. 122), – afviger generelt kun herfra ved „udskiftning" af $\hat{G}$ med nyt eksemplar Γ.

Def. Ved den Fourier cotransformerede $\overline{\overline{\mathcal{F}}}J$ af $J \in \mathcal{M}^1(G)$, henh. $\mathcal{M}^1(\Gamma)$, forstås fkt.nen
$$\xi \to \int_G \langle x, \xi \rangle \, dJ(x), \quad \text{henh. } x \to \int_\Gamma \langle x, \xi \rangle \, dJ(\xi).$$
Åbenbart er $\overline{\overline{\mathcal{F}}}J(\xi) = \mathcal{F}J(-\xi)$. $\mathcal{F}$ og $\overline{\overline{\mathcal{F}}}$ er „lige gode".

Fourier transformation af integr. fkt.

Forudsætninger som s. 124. I G har vi Haar integral I (vilk. normering).

Defin. Ved den Fourier transformerede $\mathcal{F}f$ af fkt. $f \in \mathcal{L}(G)$ forstås fkt.nen

$$\xi \to \int_G f(x)\overline{\langle x,\xi\rangle}dx, \quad \xi \in \Gamma,$$

altså $\mathcal{F}f = \mathcal{F}(fI)$, hvor fI er Radon integralet med tæthed f m.h.t. I.

Vi har jo $\int_G \overline{\langle x,\xi\rangle}\, d(fI)(x) = \int_G \overline{\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$, idet $\overline{\langle \cdot,\xi\rangle}$ kont., begr. (s. 83).

Med andre ord: Fourier transformationen $\mathcal{F}$ på $\mathcal{L}(G)$, eller om man vil på $L(G)$, fås ved sammensætn. af indlejringen $f \to fI$ og Fourier transformat. på $\mathcal{M}^1(G)$.

Da $f \to fI$ jo giver en isometrisk indlejring af $L(G)$ som Banach algebra med involution i $\mathcal{M}^1(G)$, s. 83, 89, 100, har vi fra det foregående afsnit:

Fourier transformationen $\mathcal{F}$ på $L(G)$ er en kontin. homomorfi af $L(G)$ som Banach algebra med involution (gruppealgebraen) ind i $\mathcal{C}_0(\Gamma)$, med $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Spec. bemærke: $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$, $\quad \mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}f}$

Videre: For hvert $f \in \mathcal{L}(G)$ er $\mathcal{F}f$ uniformt kontin.

For $f \geqq 0$, $f \in \mathcal{L}(G)$, er $\mathcal{F}f : \Gamma \to \mathbb{C}$ pos. definit og $\|\mathcal{F}f\|_\infty = \mathcal{F}f(0) = \int f(x)dx = \|f\|_1$.

NB. Fourier transformationen $\mathcal{F}: L(G) \to \mathcal{C}_0(\Gamma)$ afh. af Haar integralets normering.

Eksempler.

1° $\mathbb{R}$ i dualitet med sig selv ved $\langle x,\xi\rangle = e^{ix\xi}$, med benyttelse af Lebesgue integralet.

$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$, dvs. $\mathcal{F}f$ er den sædv. Fourier transform. af f.

2° $\mathbb{T} = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ i dualitet med $\mathbb{Z}$ ved $\langle c,n\rangle = c^n$.

Idet Haar integralet I på $\mathbb{T}$ normeres, så $m(\mathbb{T}) = 1$, har vi med opruln. $\varkappa: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $\varkappa(x) = e^{ix}$: $\quad \int_{\mathbb{T}} f\,dI = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\circ\varkappa$ (sædv. Lebesgue integral), s. 57.

Altså $\mathcal{F}f(n) = \int_{\mathbb{T}} f(c)\,\overline{c}^n dc = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix})\,e^{-inx}dx$,

dvs. $\mathcal{F}f$ er følgen af Fourier koeffic. for den period. fkt. $f\circ\varkappa$, $x \to f(e^{ix})$.

3° Vi lader $\mathbb{T}$ og $\mathbb{Z}$ bytte rolle i 2° og normerer Haar integralet i $\mathbb{Z}$, så $m(\{0\}) = 1$ (s. 60, 93).

For $f = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$ er her $\overline{\mathcal{F}}f(c) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)c^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n c^n$ (abs. konvergens)

Overføres $\overline{\mathcal{F}}f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ til period. fkt. $\overline{\mathcal{F}}f\circ\varkappa$, fås $\quad x \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$,

dvs. de Fourier transform. af $\ell^1 = L(\mathbb{Z})$ „=" $\mathcal{M}^1(\mathbb{Z})$ (s. 92) overføres i summerne af abs. konverg. trigon. rækker.

Bochners sætning (s. 126) siger her i eks. 3°:

De positiv definite fktn $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med periode 2π er netop summerne $x \to \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ med $a_n \geqq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n < \infty$.

Thi, bortset fra overførslen fra $\mathbb{T}$ til $\mathbb{R}$, er summerne jo de Fourier cotransformerede af $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1_+ = \text{"}\mathcal{M}^1_+(\mathbb{Z})\text{"}$.

Og for $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ gælder f kontin $\Leftrightarrow f \circ e$ kontin., f pos. defin. $\Leftrightarrow f \circ e$ pos. definit.

47. se også s. 47 i [illegible] Fourier rækker [illegible]

Øvelse. Bevis Bochners sætn. for eks. 3°.

„$\supseteq$" vides generelt. Omv.:

For vilk. kont. period. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h = f \circ e$, er Fourier rækken $\sum_n a_n e^{inx}$ summabel i hvert pkt. med sum $h(x)$ (Fejér). Den n^{te} Four. koeff. $a_n = \mathcal{F}f(n) = \int_{T \times T} f(s/t) \bar{s}^n t^n \, d(s,t)$.

Er nu h pos. definit, da er hvert $a_n \geqq 0$ iflg. s. 103 (iii)

Endvidere $\sum_n a_n < \infty$, thi i modsat fald $\frac{1}{n+1} \sum_0^n s_\nu \to \infty$ i strid med Fejér.

For hvert x må summen $\sum_n a_n e^{inx}$ (abs konv.) være $h(x)$ iflg. Fejér.

Øvelse. Vis for kont. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$: f pos. definit $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}f \geqq 0$, dvs. alle Fourier koeffic. for $f \circ e$ positive.

Dele foregående bevis i to!

Vende tilbage til generelle forudsætn.ger (s. 124). Supplere med et par regler:

$\mathcal{F}\bar{f} = (\mathcal{F}f)^*$, $\quad \mathcal{F}\check{f} = (\mathcal{F}f)^\vee$. (Sammenhold værdier i $\xi \in \Gamma$)

$\mathcal{F}(L_s f) = \overline{d_{1\cdot}(s)} \cdot \mathcal{F}f = \overline{\langle s, \cdot \rangle}\, \mathcal{F}f$,

thi $\int_G f(x-s) \overline{\langle x, \xi \rangle} dx = \int_G f(x) \overline{\langle x+s, \xi \rangle} dx = \overline{\langle s, \xi \rangle} \int_G f(x) \overline{\langle x, \xi \rangle} dx$

$\mathcal{F}(f \cdot d_{\cdot 2}(\sigma)) = \mathcal{F}(f \langle \cdot, \sigma \rangle) = L_\sigma(\mathcal{F}f)$,

thi $\int_G f(x) \langle x, \sigma \rangle \overline{\langle x, \xi \rangle} dx = \int_G f(x) \overline{\langle x, \xi - \sigma \rangle} dx = \mathcal{F}f(\xi - \sigma)$.

Defin. Fourier cotransformeret $\bar{\mathcal{F}}f$ er fktnen $\xi \to \int_G f(x) \langle x, \xi \rangle dx$, $\xi \in \Gamma$ (jfr. eks 3°)

Åbenbart er $\bar{\mathcal{F}}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)$, $\quad \bar{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}(\bar{f})}$.

<u>Hovedsætninger</u> om Fouriertransformationen $\mathfrak{F}$ af $\mathcal{L}(G)$, foreløbig uden bevis:

Herved om $d: G\times\Gamma \to \mathcal{C}$ med G, Γ komm. top. grupper, G lokalt kompakt, forudsætte $d_2: \Gamma \to \hat{G}$ homeom. isomorfi

Bemærkninger:

Af Pontrjagins dualitetssætn. s. 122 sammen med resultat s. 120 sluttes, at G og Γ er i dualitet ved d. Vi vil imidlertid ikke bygge på Pontrjagins dualitetssætn. (smd. s. 126 nederst)

Forudsætn. opfyldt for vilk. komm., lok. komp. G med $\Gamma = \hat{G}$, $\langle x,\chi\rangle = \chi(x)$ (s. 122) – afviger generelt kun herfra ved „udskiftning" af $\hat{G}$ med nyt eksemplar Γ.

Iflg. s. 116 er $\hat{G}$ og dermed Γ lokalt komp.

<u>Riemann/Lebesgues sætning:</u> <u>For hvert</u> $f \in \mathcal{L}(G)$ <u>er</u> $\mathfrak{F}f \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$.

I forvejen ved vi $\mathfrak{F}f$ kontin. (og begr.). Det nye altså, at $\mathfrak{F}f$ forsvinder i ∞ (s. 14), som det kendes fra klassisk harm. analyse, eks. 1° og 2° s. 128:

$$\mathfrak{F}f(\xi) \to 0 \text{ for } |\xi| \to \infty, \text{ henh. } \mathfrak{F}f(n) \to 0 \text{ for } |n| \to \infty.$$

Hermed $\mathfrak{F}: \mathcal{L}(G) \to \mathcal{C}_0(\Gamma)$ kont. homomorfi, hvor også $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ Banach alg. (s. 13) m. invol.

Billedet $A(\Gamma) = \mathfrak{F}(\mathcal{L}(G))$ er en algebra af fkt.r, som med φ indeh. $\overline{\varphi}$. Det samme gælder $\mathfrak{F}(\mathcal{K}(G))$, og allerede sidstnævnte skiller pkt.rne i Γ:

for $\xi, \eta \in \Gamma$, $\xi \neq \eta$ findes $f \in \mathcal{K}(G)$, så $\mathfrak{F}f(\xi) \neq \mathfrak{F}f(\eta)$

Thi da d_2 inj., medf. $\xi \neq \eta$ at $\langle\cdot,\xi\rangle \neq \langle\cdot,\eta\rangle$, dvs. $s \in G$ findes, så $\langle s,\xi\rangle \neq \langle s,\eta\rangle$.

Videre findes nu (Urysohn) $g \in \mathcal{K}^+(G)$ med $g(s) > 0$,

og med $f = g\cdot\overline{(\langle\cdot,\xi\rangle - \langle\cdot,\eta\rangle)} \in \mathcal{K}$ er

$$\mathfrak{F}f(\xi) - \mathfrak{F}f(\eta) = \int_G f(x)(\langle x,\xi\rangle - \langle x,\eta\rangle)\,dx = \int_G g(x)\,|\langle x,\xi\rangle - \langle x,\eta\rangle|^2\,dx > 0,$$

idet integrand $\neq 0$ tilh. $\mathcal{K}^+(G)$, s. 73

Videre findes for hvert $\xi \in \Gamma$ et $f \in \mathcal{K}(G)$, så $\mathfrak{F}f(\xi) \neq 0$.

Thi med $f = g\cdot\overline{\langle\cdot,\xi\rangle}$, $g \in \mathcal{K}^+(G)$, $g \neq 0$ er $\mathfrak{F}f(\xi) = \int g(x)|\langle x,\xi\rangle|^2 dx = I(g) > 0$

Er Γ kompakt, følger da ved anvendelse af Stone/Weierstrass' sætn. (s. 10) at $\mathfrak{F}(\mathcal{K}(G))$ er tæt i $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}_0(\Gamma)$ ved uniforme norm $\|\ \|_\infty$.

Er Γ ikke kompakt, kan <u>i kraft af</u> <u>Riemann/Lebesgues sætn.</u> hver fkt. $\mathfrak{F}f$ tænkes udvidet til kontin. fkt. på det <u>kompakte rum</u> $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$ ved at sætte $\mathfrak{F}f(\infty) = 0$ (s. 13). Algebraen $\mathfrak{F}(\mathcal{K}(G))$ skiller nu pkt.rne i Γ_∞, og vi kan atter anvende Stone/Weierstrass' sætning. Hermed generelt:

$\mathfrak{F}(\mathcal{K}(G))$ <u>og dermed</u> $A(\Gamma) = \mathfrak{F}(\mathcal{L}(G))$ <u>er tæt i</u> $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ <u>ved uniforme norm</u> $\|\ \|_\infty$.

NB. I modsætning til $\mathfrak{F}(\mathcal{M}^1)$ har man, selv i de klassiske tilfælde, ingen simpel karakterisering af $\mathfrak{F}(L) = A$

1.4.70

Under de anførte forudsætninger (s 130) gælder endvidere, at Fourier transformation er injektiv på $L(G)$, dvs.

<u>Entydighedssætn.</u> $\mathfrak{F}f = 0 \Rightarrow f \sim 0$ (for $f \in \mathcal{L}(G)$).

Endvidere:

<u>Omvendingssætn.</u> Med passende normering af Haar integralet i Γ, afh. af normeringen af Haar integralet i G, gælder:

$$\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f) \sim f, \quad \underline{\text{når}}\ f \in \mathcal{L}(G)\ \underline{\text{og}}\ \underline{\text{tillige}}\ \mathfrak{F}f \in \mathcal{L}(\Gamma).$$

Entydighedssætn. er indeholdt i omvendsætn.

Bemærk. Når G <u>diskret</u>, dermed $\hat{G}$ og altså Γ kompakt (s. 116), gælder $\mathfrak{F}f \in \mathcal{C}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma)$ og dermed iflg. omv.sætn. $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f) = f$ for <u>hvert</u> $f \in \mathcal{L}(G)$.

Men i alm. er fkt. $f \in \mathcal{L}(G)$ slet ikke en Fourier transformeret; vi har jo $\overline{\mathfrak{F}}(\mathcal{L}(\Gamma)) \subseteq \mathcal{P}(G) \subseteq \mathcal{C}_b(G)$, iflg. Pontrjagin og Riemann/Lebesgue endda $\subseteq \mathcal{P}(G) \cap \mathcal{C}_0(G)$. Allerede hermed kraftige nødv. betingelser for omv. formlen $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f) \sim f$ (og dermed iflg. omv. sætn. for $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}(\Gamma)$).

Vedr. <u>normering</u> af Haar integraler i omv.sætn.:

(i) Når G diskr., dermed Γ kompakt, hører til $m(\{0_G\})=1$ normeringen $m(\Gamma)=1$.

(ii) Når G komp., dermed Γ diskret (s. 113), hører til $m(G)=1$ normeringen $m(\{0_\Gamma\})=1$.

Ad (i). Med $f = 1_{\{0_G\}}$ er $\mathfrak{F}f = 1$ (const), idet $\sum_{x \in G} f(x)\overline{\langle x,\xi\rangle} = \overline{\langle 0,\xi\rangle} = 1$ for alle ξ.

Og $f(0) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}f)(0) = \int_\Gamma 1 \langle 0,\xi\rangle d\xi = m(\Gamma)$ kræver $m(\Gamma) = 1$.

Indskyde: <u>For vilk. karakter</u> $\chi \neq 1$ <u>i kompakt gruppe</u> er $\int \chi(x)dx = 0$

Thi for vilk. gruppelem. s er

$$\chi(s)\int\chi(x)dx = \int\chi(s)\chi(x)dx = \int\chi(s+x)dx = \int\chi(x)dx$$

hvoraf påstanden, idet s findes med $\chi(s) \neq 1$.

Ad (ii). Med $f = 1$ (const.) er $\mathfrak{F}f = 1_{\{0_\Gamma\}}$, idet $\int_G 1 \cdot d_2\langle\xi\rangle dI = \begin{cases} 1 & \text{for } \xi = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Og $f(x) \underset{p.p.}{=} \int_\Gamma \mathfrak{F}f(\xi)\langle x,\xi\rangle d\xi = \int_{\{0_\Gamma\}} 1\, d\xi = m(\{0_\Gamma\})$ kræver $m(\{0_\Gamma\}) = 1$.

Nævne: Med $\langle x,\xi\rangle = e^{i\xi x}$ vil til Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ svare $\frac{1}{2\pi}\cdot$Lebesgue-målet

" $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot$Lebesgue målet " $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot$Lebesgue målet,

med $\langle x,\xi\rangle = e^{i2\pi\xi x}$ " " Lebesgue målet på $\mathbb{R}$ svare Lebesgue målet.

Lad os prøve at skrive omvendingsformlen $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) \sim f$ ud:

Idet $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(y) = \int_\Gamma \mathcal{F}f(\xi)\langle y,\xi\rangle d\xi = \int_\Gamma \langle y,\xi\rangle \int_G f(x)\overline{\langle x,\xi\rangle}\,dx\,d\xi$

er påstanden: $\int_\Gamma \int_G f(x)\langle y-x,\xi\rangle\,dx\,d\xi = f(y)$ for næsten alle $y \in G$.

Udskrivningen giver ikke megen hjælp til bevis, i alm. kan ikke engang ombyttes til $\int_G \int_\Gamma$

Øvelse: Vis omvendingsformlen for $G = \mathbb{Z}$, $\Gamma = \mathbb{T}$ med $\langle n,c\rangle = c^n$.

[Her kan ombyttes $\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \langle p-n,\xi\rangle\right) d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-n)x}\,dx = a_p$,

idet integrand approximeres uniformt i ξ af end. sum („majorantrække" $\sum |a_n| < \infty$)]

Eks. I øvelsen s. 129 er omvendingsformlen faktisk vist i tilfældet $G = \mathbb{T}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ med med $\langle c,n\rangle = c^n$, nemlig

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(e^{ix}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f(n)\,e^{inx} = f(e^{ix})$$

endda for hvert $f \in \mathcal{P}^+(\mathbb{T})$, dermed for hvert $f \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$.

Også for vilk. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ gælder omv. formler, men med summabilitet i st. f. absolut konv.
Noget tilsv. haves for sædv. Fourier integral på $\mathbb{R}$.
Dette generaliseres ikke, derimod den kønne teori for kvadr. integr. fkt.r (Parseval, Plancherel), se s.

Kvadratisk integrable fkt.ner

Lad I være et Radon integral i lokalt komp. rum X. Vi antager I pos.; i modsat fald refereres det følgende blot til $|I|$.

For vilk. pos. fkt.r f, g på X er $\bar{I}(fg) \leqq (\bar{I}(f^2))^{\frac{1}{2}} \cdot (\bar{I}(g^2))^{\frac{1}{2}}$.

Thi vi kan antage $0 < \bar{I}(f^2), \bar{I}(g^2) < \infty$ (s. 32, (iv)), endda $\bar{I}(f^2) = \bar{I}(g^2) = 1$.

Og af $fg \leqq \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}g^2$ følger da $\bar{I}(fg) \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

3.70 For hver fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ sættes $\|f\|_2 = (\bar{I}(|f|^2))^{\frac{1}{2}}$. Da er

$$0 \leqq \|f\|_2 \leqq \infty, \quad \|cf\|_2 = |c|\,\|f\|_2 \text{ for } c \in \mathbb{C}, \quad \|f+g\|_2 \leqq \|f\|_2 + \|g\|_2 \text{ (trekantsuligh.)}$$

Thi trekantsulighed fås af

$$\|f+g\|_2^2 = \bar{I}(|f+g|^2) \leqq \bar{I}((|f|+|g|)^2) \leqq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\bar{I}(|f||g|)$$
$$\leqq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

Følgelig er $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_I^2(X, \mathbb{C}) = \{f: X \to \mathbb{C} \mid \|f\|_2 < \infty\}$ et $\mathbb{C}$-lin. fkt.rum med seminorm $\|\ \|_2$.
Ved samling af ækv. fkt.ner i klasse fås normeret vektorrum $F_I^2(X, \mathbb{C})$, $\|\ \|_2$. Sml. s. 33

Defin. Fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ kaldes <u>kvadr. integrabel</u> m.h.t. I, hvis f tilh. afslutn. af $\mathcal{K}(X, \mathbb{C})$ i $\mathcal{F}^2$. Mgd. af kvadr. integr. fkt.r betegnes $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_I^2(X, \mathbb{C})$, af klasser $L^2 = L_I^2(X, \mathbb{C})$.

Altså: $f \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists g \in \mathcal{K}: \|f - g\|_2 < \varepsilon$. Sml. s. 34

Vi vil vise, at L^2 er fuldst., altså et Banach rum. Først bemærke:

<u>For vilk.</u> $f_1, f_2, \dots \geqq 0$ <u>er</u> $\|\sum_1^\infty f_n\|_2 \leqq \sum_1^\infty \|f_n\|_2$

Med $\|\sum_1^\infty f_n\|_2$ menes selvfølg. $(\bar{I}(\sum_1^\infty f_n)^2)^{\frac{1}{2}}$, der har mening uanset om $\sum_1^\infty f_n$ endelig.

Bevis. Med $g_n = \sum_1^n f_\nu$ har vi $0 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \dots$ og $\sup_n g_n = \sum_1^\infty f_\nu$
og dermed $0 \leqq g_1^2 \leqq g_2^2 \leqq \dots$ og $\sup_n g_n^2 = (\sum_1^\infty f_\nu)^2$.

Iflg. sætn. 2, s. 29 er da $\bar{I}((\sum_1^\infty f_\nu)^2) = \sup_n \bar{I}(g_n^2)$
og dermed $\|\sum_1^\infty f_\nu\|_2 = \sup_n \|g_n\|_2 = \sup_n \|\sum_1^n f_\nu\|_2$
videre ved trekantsulighed: $\leqq \sup_n \sum_1^n \|f_\nu\|_2 = \sum_1^\infty \|f_\nu\|_2$

Herefter kan sætninger og beviser s. 38 vedr. $\|\ \|_1$ kopieres. Specielt har vi, at F^2, $\|\ \|_2$ er fuldst. og dermed:

<u>Riesz / Fischers sætn.</u> <u>Rummet $L_I^2(X, \mathbb{C})$ er fuldstændigt.</u>

Bemærk: $\mathcal{K}(X, \mathbb{C})$ er tæt i $\mathcal{L}_I^2(X, \mathbb{C})$ iflg. defin. af sidstnævnte.

Som konsekvens af $\|fg\|_1 = \bar{I}(|f||g|) \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ (s. 133 øverst) har vi

<u>For</u> $f, g \in \mathcal{L}^2$ <u>er</u> $fg \in \mathcal{L}$. Spec: for $f \in \mathcal{L}^2$ er $|f|^2 = f\bar{f} \in \mathcal{L}$.

Thi $\|f_k g_k - fg\|_1 \leq \|f_k - f\|_2 \|g_k - g\|_2 + \|f\|_2 \|g_k - g\|_2 + \|f_k - f\|_2 \|g\|$

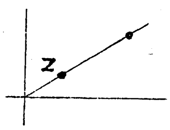
<u>Seminormen</u> $\| \ \|_2$ <u>i</u> $\mathcal{L}^2_I(X, \mathbb{C})$ <u>udspringer af skalarprodukt</u> $(f|g) = \int_X f\bar{g}\, dI$,

altså $\|f\|_2^2 = (f|f)$.

<u>Hermed er da</u> $L^2_I(X, \mathbb{C})$ <u>et Hilbertrum</u>.

<u>De kvadr. integrable fkt.ner kan karakteriseres ved:</u> $f \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow |f|f \in \mathcal{L}$.

Bevis. „$\Rightarrow$". Er $f \in \mathcal{L}^2$, så også $|f| \in \mathcal{L}^2$, følgelig $|f|f \in \mathcal{L}$.



Bemærk: Fkt.nen $|f|f$ kan fås som f fulgt af afb.
$z \to |z|z$, $z \in \mathbb{C}$, der bevarer arg. og kvadrerer num. værdi.
For $|z|z$ skrive $z^{(2)}$. Tilsv. skrive omv. afb. $z \to z^{(\frac{1}{2})}$.

„$\Leftarrow$" Påstanden er $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f^{(\frac{1}{2})} \in \mathcal{L}^2$.

Følge $s_1, s_2, \ldots \in \mathcal{K}$ med $\|f - s_n\|_1 \to 0$ tænkes udtyndet, så $s_n \to f$ p.p., ved at sørge for $\sum_2^\infty \|s_n - s_{n-1}\|_1 < \infty$, jfr. bevis for sætn. 2, s. 38.

Idet $\sum_1^\infty f_n$ er tilsv. række, altså $s_n = \sum_1^n f_\nu$, har vi $|s_n| \leq \sum_1^\infty |f_\nu|$, hvor $\bar{I}(\sum_1^\infty |f_\nu|) \leq \sum_1^\infty \bar{I}(|f_\nu|) = \sum_1^\infty \|f_\nu\|_1 < \infty$.

Nu: $s_n^{(\frac{1}{2})} \to f^{(\frac{1}{2})}$ p.p. og $|s_n^{(\frac{1}{2})}| = |s_n|^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_1^\infty |f_\nu|)^{\frac{1}{2}}$, hvor $\|(\sum_1^\infty |f_\nu|)^{\frac{1}{2}}\|_2 < \infty$.

Heraf følger $f^{(\frac{1}{2})} \in \mathcal{L}^2$ (og $\|f^{(\frac{1}{2})} - s_n^{(\frac{1}{2})}\|_2 \to 0$) ved Lebesgues sætn. om majoriseret grænseovergang for $\mathcal{L}^2$ (som ej er vist; beviset er i grove træk analog til $\mathcal{L}^1$; henv.: Bourbaki)

30.4.70

Bemærk:

f integr. og begr. $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^2$ (se s. 90)

Konstante fkt.r tilh. $\mathcal{L}^2_I \Leftrightarrow I$ begr. Thi $1 \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow 1 \in \mathcal{L}$ (se s. 42)

I øvrigt: Er I begr., da er $\mathcal{L}^2_I \subseteq \mathcal{L}_I$.

Med $m(X) = \dot{M}_I = 1$ gælder endda $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$. Thi $\|f\|_1 \leq \|1\|_2 \|f\|_2$.

Eks. For X diskr. og $I(f) = \sum_x f(x)$ for $f \in \mathcal{K}$ gælder $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{L}^2_I$. Således $\ell^1(\mathbb{Z}) \subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$.

For Lebesgue integralet på $\mathbb{R}$ ingen inclusion mellem $\mathcal{L}$ og $\mathcal{L}^2$.

Fourier/Plancherel transformation.

Om $d: G\times\Gamma \to \mathbb{C}$ med G, Γ komm. topol. grupper, G lokalt komp., forudsætte $d_2 : \Gamma \to \hat{G}$ homeomorf isomorfi.

Plancherels sætning. Med passende normering*) af Haar integralet i Γ, afh. af normeringen af Haar integralet i G, gælder
Der findes en (og kun en) isomorfi $f \leftrightarrow \varphi$ mellem Hilbert rummene $\mathcal{L}^2(G)$ og $\mathcal{L}^2(\Gamma)$, dvs. entydig korrespondance, lineær og med egenskaben

$$f \leftrightarrow \varphi,\ g \leftrightarrow \psi \Rightarrow (f|g) = (\varphi|\psi),$$

hvor: når $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G)$, $f \leftrightarrow \varphi$, da er $\varphi \sim \mathfrak{F}f$
når $\varphi \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(\Gamma)$, $f \leftrightarrow \varphi$, da er $f \sim \overline{\mathfrak{F}}\varphi$

Vi bemærker, at kravet vedr. skalarprodukt ikke blot medf. isometri: $\|f\|_2 = \|\varphi\|_2$, men kan erstattes heraf, idet $4(f|g) = \sum_1^4 i^\nu \|f + i^\nu g\|_2^2$.

Entydigheden er oplagt allerede ved, at afbildn. $f \to \varphi$ af $\mathcal{L}^2(G)$ ind i $\mathcal{L}^2(\Gamma)$ er begr. lin. operator, foreskrevet på tætte delrum $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G)$, (allerede $\mathcal{K}(G)$ havde været nok).

Plancherels sætn. kommer da ud på:

(i) For $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G)$ er $\mathfrak{F}f \in \mathcal{L}^2(\Gamma)$ med $\|\mathfrak{F}f\|_2 = \|f\|_2$,
altså $\mathfrak{F}: \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G) \to \mathcal{L}^2(\Gamma)$ isometrisk ved $\| \ \|_2$.

Da $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ tæt underrum af $\mathcal{L}^2$ (idet $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$), og da $\mathcal{L}^2$ fuldst., har $\mathfrak{F}: \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G) \to \mathcal{L}^2(\Gamma)$ nu netop én udvidelse til begr. lin operator $\mathfrak{FP}: \mathcal{L}^2(G) \to \mathcal{L}^2(\Gamma)$, s. 18.
Den kaldes Fourier Plancherel transformationen.

Den er isometrisk, spec. injektiv, thi med $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(G)$, $\|f - g_n\|_2 \to 0$ haves $\|\mathfrak{FP}f - \mathfrak{F}g_n\|_2 \to 0$ og videre $\|\mathfrak{FP}f\|_2 = \lim \|\mathfrak{F}g_n\|_2 = \lim \|g_n\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) Fourier Plancherel transformationen $\mathfrak{PF}: \mathcal{L}^2(G) \to \mathcal{L}^2(\Gamma)$ er surjektiv.

(iii) Den omv. er en udvidelse af Fourier cotransformationen $\overline{\mathfrak{F}}$ af $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(\Gamma)$
betegnes så $\overline{\mathfrak{FP}}$.

---

*) den samme som i omv. sætn. s. 131

Eks. $G = \mathbb{T}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ med $\langle c, n \rangle = c^n$.

Da $\mathbb{T}$ kompakt, dvs. Haar integr. begr. (s. 73), har vi forenkling $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, altså $\mathcal{FP}$ blot restriktion af $\mathcal{F}$.

(i) + (ii) er da Riesz/Fischers sætn. (1907):

$\sum a_n e^{inx}$ er Fourier række for fkt. till $L^2(\mathbb{T})$ netop hvis $\sum |a_n|^2 < \infty$

For $f \in L^2(\mathbb{T})$ er $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{ix})|^2 dx = \sum |a_n|^2$ (Parsevals ligning)

(iii) er ikke dyb: når $\sum |a_n| < \infty$, er $\sum a_n e^{inx}$ Fourier række for sin sum.

ligelig konvergens, Weierstrass.

For en vilk. komm. kompakt gruppe G udgør karaktererne et fuldst. ortonormalsystem (Peter Weyls sætn.), hvorfor tilf. $G = \mathbb{T}$ kan kopieres

For $G = \Gamma = \mathbb{R}$ med $\langle x, \xi \rangle = e^{i\xi x}$ skyldes sætn. Plancherel (1910), alment A. Weil (1938).

Rækkefølge i bevis for hovedsætninger.

	Pontrjagins dualitetssætn.	Entydighedssætn. for $\mathcal{F}$ af $M(\Gamma)$	Bochners sætn. " " " "	Riemann/Lebesgues sætn.	Entydighed for $\mathcal{F}$ af $L(G)$	Omv. sætn.	Plancherels sætn.
Weil 1938	1		5	3		4	2
Raikov 1940-45 (Loomis 1953, Neumark 1956)	6	3		1	2	4	5
Cartan/Godement 1947	6	2	3	1		4	5
Gelfand/Raikov/Schilov 1960 (Bourbaki 1967)	5	6		1	2	(3)	4
Guichardet 1968	3		2	1		4	5

Weil bygger på struktur af lokalt komp. gruppe (reduktion til simple typer)
Cartan/Godement på konveksitetssætn. af Krein/Milman
5.76 De øvrige på Gelfands teori for komm. Banach algebraer.

V. Bevis for den harmoniske analyses hovedsætninger.

§1. Ess. begrænsede, lokalt integrable fktr.

Ess. begr., lokalt integr. fktner. L^∞.

Lad I være et Radon integral i lok. komp. rum X. Vi antager I pos, ellers blot referere det følgende til $|I|$.

Minde om: Er $f \in \mathcal{L}_I$, vil $fg \in \mathcal{L}_I$ for hvert $g \in \mathcal{K}$, s. 82, endda for hvert begr. $g \in \mathcal{L}_I$, s. 90, spec. $f \cdot 1_A \in \mathcal{L}_I$ for A integr.

Def. Fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ kaldes lokalt integrabel m.h.t. I,

hvis $\quad fg \in \mathcal{L}_I$ for hvert $g \in \mathcal{K}$

eller ensbet. hermed $\quad f \cdot 1_C \in \mathcal{L}_I$ for hver komp. mgd. $C \subseteq X$.

En integr. fkt. opfylder åbenbart begge betingelser. Det kan vi udnytte til bevis for, at betingelser ensbet.:

„$\Downarrow$": For vilk. komp. $C \subseteq X$ findes $g \in \mathcal{K}$ med $\forall x \in C: g(x) = 1$ (Urysohn).
Benytte $f \cdot 1_C = (fg) \cdot 1_C$.

„$\Uparrow$" Med C = støtten for g har vi $fg = (f \cdot 1_C) g$.

Def. En mgd. $N \subseteq X$ kaldes en lokal nulmgd. m.h.t. I, hvis
$N \cap C$ nulmgd. for hver komp. mgd. $C \subseteq X$.

En nulmgd. m.h.t. I er også lokal nulmgd., men i alm. ej omv. (dog altid, når X er σ-kompakt, dvs. foren. af num. mange komp mgd.r, eks. $X = \mathbb{R}$).

Delmgd. og numerabel foren. af lokale nulmgd.r er igen lokal nulmgd.

„$\Phi(x)$ lokalt næsten overalt", „$\Phi(x)$ loc. p.p.", ...
betyder: $\{x \mid \neg\Phi(x)\}$ er lokal nulmgd.

Def. To fktner f og g kaldes lokalt ækviv. m.h.t. I, hvis $f(x) = g(x)$ loc. p.p.
Ækvivalensrelation. $\quad$ ($f \underset{I}{\sim} g$ medf. f lok ækv. m. g m.h.t. I, i alm. ej omv.).

Def. For fkt. $f: X \to \mathbb{R}$ (værdier $\pm\infty$ kan også tillades) sættes

$$\underset{x \in X}{\text{ess. sup.}}\, f(x) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a \text{ loc. p.p.}\}$$
$$= \min\{a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid f(x) \leq a \text{ loc. p.p.}\}, \text{ mindste ess. majorant.}$$

(Værdien er mindre end vi ville få med $f(x) \leq a$ p.p.).

Def. For fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ sættes $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$

Er $\|f\|_\infty < \infty$, dvs. findes $a \in \mathbb{R}_+$, så $|f(x)| \leq a$ loc. p.p., siges f at være <u>i det væsentl. begr.</u>, skrive: <u>ess. begr.</u>

Def. <u>Mgd. af ess. begr.</u>, <u>lokalt integr. fkt'er</u> $f: X \to \mathbb{C}$ <u>betegnes</u> $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_I(X, \mathbb{C})$.

$\mathcal{L}^\infty$ er et lin. fktsrum, hvor $\|\ \|_\infty$ er seminorm.

Thi $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ næsten klart:

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{loc. p.p.}$$

Øvelse. Vis, at konvergens i $\mathcal{L}^\infty$ af <u>følge</u>, $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, kommer ud på $f_n(x) \to f(x)$ uniformt for $x \notin$ lokal nulmgd. (Se Bourbaki s.206)

Når f lok. ækv. med g m.h.t. I, da vil f og g samtidig tilh. $\mathcal{L}^\infty$
thi $f \cdot 1_C \sim g \cdot 1_C$ for komp. $C \subseteq X$, og $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$.

$\|f-g\|_\infty = 0 \iff f$ og g lok. ækv., dvs. $\|f\|_\infty = 0 \iff \{x \mid |f(x)| > 0\}$ er lok. nulmgd.

0 mindste ess. major. $\underset{\text{Klar}}{\iff}$ 0 er ess. major. for $|f|$.

Overgangen fra $\mathcal{L}^\infty$, $\|\ \|_\infty$ til vektorrum $L^\infty = L^\infty_I(X, \mathbb{C})$ med <u>norm</u> $\|\ \|_\infty$ sker da ved at samle lok. ækv. fkt'ner i klasser.

<u>L^∞, $\|\ \|_\infty$ er et Banach rum, altså fuldst.</u>

Bevis. Betragt Cauchy følge $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^\infty$, altså $\|f_r - f_s\|_\infty \to 0$

Til hvert $n \in \mathbb{N}$ vælge $k_n \in \mathbb{N}$, så $\|f_r - f_s\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ for $r, s \geq k_n$

Da er $A_n = \bigcup_{r,s \geq k_n} \{x \mid |f_r(x) - f_s(x)| > \frac{1}{n}\}$ en lok. nulmgd., ligeså $N = \bigcup_n A_n$.

Indføres g_n ved $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{for } x \notin N \\ 0 & \text{for } x \in N \end{cases}$, har vi g_n lok. ækv. f_n

samt $|g_r(x) - g_s(x)| \leq \frac{1}{n}$ blot $r, s \geq k_n$, altså g_n konv. uniformt mod grænsefkt. f

Nu: f er lok. integr., thi for komp. $C \subseteq X$ har vi $g_n \cdot 1_C \in \mathcal{L}^1$ og

$$\|f \cdot 1_C - g_n \cdot 1_C\|_1 = \bar{I}(|f - g_n| \cdot 1_C) \leq m(C) \cdot \sup_x |f(x) - g_n(x)|,$$ følgelig $f \cdot 1_C \in \mathcal{L}^1$.

f er ess. begr., thi $|f - g_{k_1}| \leq 1$.

Altså $f \in \mathcal{L}^\infty$, $\|f - f_n\|_\infty \to 0$.

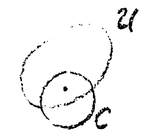
NB. $\mathcal{K}(X, \mathbb{C})$ er i alm. ej tæt i $\mathcal{L}^\infty_I(X, \mathbb{C})$, se næste side.

Enhv. kont. fkt. $f: X \to \mathbb{C}$ er naturligvis lok. integr., idet jo $fg \in \mathcal{K}$ for $g \in \mathcal{K}$.
Enhv. kont., begr. fkt. f tilh. altså $\mathcal{L}^\infty$, og $\|f\|_\infty \leq \sup_x |f(x)|$
i alm. ej =

Z

Hvis ydre mål $\overline{m}(U) > 0$ for enhv. åben mgd. $U \neq \emptyset$, som det jo er tilfældet for Haar integralet (s. 73), gælder dog

1° Ingen åben mgd. $U \neq \emptyset$ er lokal nulmgd.



Thi for komp. omegn C af pkt. tilh. U er $U \cap C$ ej nulmgd.

2° $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ for f kont.

Thi er $f(x) \leq a$ loc p.p., da er $\{x \mid f(x) > a\}$ en lok. nulmgd., tillige åben, altså $\emptyset$, dvs. $f(x) \leq a$ for alle x.

3° For f, g kontin.: f lok. ækv. $g \Rightarrow f = g$.

Thi $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ er åben (hvert pkt. indre), benytte 1°.
Eller benytte 2°: f lok. ækv. $g \Leftrightarrow \|f-g\|_\infty = \sup_x |f(x) - g(x)| = 0$.

Ved 2° og 3° ses: Overgangen til klasser af lok. ækv. fkt. giver en isometrisk indlejring af Banach rummet $\mathcal{C}^b(X, \mathbb{C})$ af begr. kontin. fktner med uniforme norm i $\mathcal{L}^\infty$, $\| \ \|_\infty$.

Da $\mathcal{C}^b$ fuldst., indlejres det som afsl. underrum af $\mathcal{L}^\infty$, i alm. ægte.
Afslutn. gen $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ af $\mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, se s. 13, er afsluttet underrum af $\mathcal{C}^b(X, \mathbb{C})$, ægte
19.70 når X ej kompakt

Eks. <u>For enhv. lokalt integr. fkt. f er</u> $\operatorname{sgn} f \in \mathcal{L}^\infty$.

Hertil for vilk. komp. C vise $\operatorname{sgn} f \cdot 1_C \in \mathcal{L}$.
Nu $f \cdot 1_C, f^{(\frac{1}{2})} \cdot 1_C, f^{(\frac{1}{4})} \cdot 1_C, \dots \to \operatorname{sgn} f \cdot 1_C$ (vedr. betegnelse se p. 134);
her er $f \cdot 1_C \in \mathcal{L}$

$$f^{(\frac{1}{2})} \cdot 1_C = (f \cdot 1_C)^{(\frac{1}{2})} \cdot 1_C \in \mathcal{L}, \text{ idet } (f \cdot 1_C)^{(\frac{1}{2})} \text{ og } 1_C \in \mathcal{L}^2 \text{ (s. 134)}$$
$$f^{(\frac{1}{4})} \cdot 1_C = (f^{(\frac{1}{2})} 1_C)^{(\frac{1}{2})} \cdot 1_C \in \mathcal{L}, \text{ idet } (f^{(\frac{1}{2})} 1_C)^{(\frac{1}{2})} \text{ og } 1_C \in \mathcal{L}^2,$$
$$\vdots$$

og $|f \cdot 1_C| \vee 1_C \in \mathcal{L}$ er majorant; Lebesgues sætn. kan anvendes

Multiplikation med fkt. tilh. $\mathcal{L}_I^\infty$.

Først bemærke: Når $f \in \mathcal{L}_I^1$, så findes en følge $C_1, C_2, \ldots$ af komp. mgdr samt en nulmgd. N m.h.t. I, så
$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subseteq N \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$$

Thi lad $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{K}$ og $\|f - f_n\|_1 \to 0$.
Efter passende udtynding gælder $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots \to f(x)$ for $x \notin$ nulmgd. N (s. 39),
og med C_k = støtten for f_{n_k} har vi $0 = f_{n_1}(x) = f_{n_2}(x) = \ldots$ for $x \notin \bigcup_k C_k$.

Videre: For fkt. f med $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subseteq N \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, N nulmgd. m.h.t. I, $C_1, C_2, \ldots$ komp., og vilk. fkt. g gælder
$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\, \|g\|_\infty \text{ for næsten alle } x, \qquad \text{dermed } \|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Thi $\{x \mid |f(x)g(x)| > |f(x)|\, \|g\|_\infty\} = \{x \mid f(x) \neq 0\} \cap \underbrace{\{x \mid |g(x)| > \|g\|_\infty\}}_{\text{idet lokal nulmgd.}}$ nulmgd. m.h.t I

Sætn. For $f \in \mathcal{L}_I$, $g \in \mathcal{L}_I^\infty$ er $fg \in \mathcal{L}_I$ med $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Thi for $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{K}$ med $\|f - f_n\|_1 \to 0$ har vi
$$\|fg - f_n g\|_1 = \|(f - f_n)g\|_1 \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|f - f_n\|_1} \|g\|_\infty \qquad \text{idet } g \text{ ess. begr., dvs. } \|g\|_\infty \text{ end.}$$

Da nu $f_n g \in \mathcal{L}$, idet g lok. integr., følger $fg \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ er jo afsluttet)

NB. Ved tilsv. anvendelse af ulighed fremgår: Erstattes $f \in \mathcal{L}_I$ med ækv. fkt. eller $g \in \mathcal{L}_I^\infty$ med lok. ækv. fkt., da går fg over i ækv. fkt. Afbildngen $(f,g) \to fg$ bestemmer derfor en afbildn. $L_I \times L_I^\infty \to L_I$

Ligeledes bestemmer $(f,g) \to \int fg\, dI$ en bilinear fkt. $L_I \times L_I^\infty \to \mathbb{C}$. Der gælder
$$\left|\int fg\, dI\right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \qquad \text{(uanset om } I \text{ pos.)}$$

For fast $g \in \mathcal{L}_I^\infty$ giver $f \to \int fg\, dI$, $f \in \mathcal{L}_I$ derfor begr. lin. fkt. på L_I med norm $\leq \|g\|_\infty$, altså element i duale til L_I. Herom mere senere (s. 150 ff).

Ved brug af sætn. s. 141 fås yderligere:

<u>For</u> $f, g \in \mathcal{L}_I^\infty$ <u>er</u> $fg \in \mathcal{L}_I^\infty$ <u>med</u> $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Altså: L_I^∞ er en komm. Banach algebra. (For etelem., repr. af konst. fkt. 1, er $\|1\|_\infty = 1$, medmindre $I = 0$.)

Thi ulighed klar, og for vilk. $h \in \mathcal{K}$ er $(fg)h = \underset{\in \mathcal{L}^\infty}{f}\underset{\in \mathcal{L}}{(gh)} \in \mathcal{L}$ iflg. sætn. s. 141.

Også vist: $f \in \mathcal{L}_I^\infty$, g lok. integr. $\Rightarrow$ fg lok. integr.

<u>For</u> $f \in \mathcal{L}_I^2$, $g \in \mathcal{L}_I^\infty$ <u>er</u> $fg \in \mathcal{L}_I^2$ <u>med</u> $\|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_\infty$.

Hertil bemærke $|g| \in \mathcal{L}^\infty$, nemlig $\||g|\|_\infty = \|g\|_\infty$ og $g \cdot 1_C \in \mathcal{L}$ medf. $|g| \cdot 1_C = |g \cdot 1_C| \in \mathcal{L}$.

Vise $fg \in \mathcal{L}^2$ ved $|fg|\,fg = \underbrace{|f|f}_{\in \mathcal{L}}\ \underbrace{|g|g}_{\in \mathcal{L}_\infty} \in \mathcal{L}$ (s. 134). Benytte sætn. s. 141: iflg. foregående.

Idet $f^2 \in \mathcal{L}$ (s. 134) og $g^2 \in \mathcal{L}^\infty$, har vi $\|f^2 g^2\|_1 \leq \|f^2\|_1 \|g^2\|_\infty$,
dvs. $\|fg\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \|g\|_\infty^2$.

Kan svækkes — kan udelades

Lad os spec. betragte tilfældet I <u>begr.</u>

<u>Begreberne nulmgd. og lokal nulmgd. falder her sammen.</u>

Det samme gælder da p.p. og loc.p.p., ækv. og lokal ækvivalens.

Vi skal vise, at lokal nulmgd. er nulmgd. (det omv. gælder generelt).
Hertil anv. bemærkn. s. 141 øverst på 1_X, som jo integr. (s. 42):

$$X = N \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots, \quad N \text{ nulmgd. m.h.t. } I,\ C_1, C_2, \ldots \text{ komp.}$$

$\mathcal{L}_I^\infty \subseteq \mathcal{L}_I$. Endda: $f \in \mathcal{L}_I^\infty \Leftrightarrow f$ integr. og ess. begr.

„$\Rightarrow$" fås af sætn. s. 141, idet $f = f \cdot 1_X$ med $1_X \in \mathcal{L}$, da I begr.

„$\Leftarrow$" gælder generelt (s. 138)

$\mathcal{L}_I^\infty \subseteq \mathcal{L}_I^2 \subseteq \mathcal{L}_I$.

Første inclusion: $f = f \cdot 1_X$ med $1_X \in \mathcal{L}^2$, da I begr. Anden incl. vist s. 134.

Øvelse. Vis, at med $m(X) = M_I = 1$ gælder $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, blot f har egenskab i bemærkn. øverst s. 141

Eks. X diskr. og $I(f) = \sum_x f(x)$ for $f \in \mathcal{K}$.

Enhv. fkt. er kontin., spec. lok. integr.

Der er ikke andre lok. nulmgdr end $\emptyset$, dermed $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$.

Altså $L_I^\infty = \mathcal{L}_I^\infty$ = mgd. af begr. fktner, $\mathcal{L}_I^1 \underset{\text{s. 134}}{\subseteq} \mathcal{L}_I^2 \subseteq \mathcal{L}_I^\infty$.

4.9.70 For Lebesgue integralet på $\mathbb{R}$ ingen inclusion mellem $\mathcal{L}, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^\infty$.

Foldning

Lad her I være Haar integralivilk. komm. lokalt kompakt gruppe G.

For $g, h \in \mathcal{L}(G)$ har vi defin. $g*h$ som <u>fktnen</u> $y \rightsquigarrow \int g(y-z)h(z)dz = \int L_y\check{g} \cdot h\,dI$,

defineret for næsten alle $y \in G$ (s. 89).

Man taler også om $g*h$ uden forudsætn. $g, h \in \mathcal{L}(G)$. Det kan naturligvis indtræffe, at defin. mgd. $\{y \mid L_y\check{g} \cdot h \in \mathcal{L}(G)\}$ er tom. Generelt gælder

$$g*h(y) = \int g(y-z)h(z)dz = \int g(-z)h(z+y)dz = \int h(y-z)g(z)dz = h*g(y),$$

samtidig eksistens.

<u>Er</u> $g \in \mathcal{L}(G)$, $h \in \mathcal{L}^\infty(G)$, <u>da er</u> $g*h$ <u>defin i hele</u> G, ligelig <u>kontin.</u> og begr. med

$$\|g*h\|_\infty \underset{\text{s. 140}}{=} \sup_y |g*h(y)| \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty.$$

Thi for hvert y er $L_y\check{g} \in \mathcal{L}$, dermed $L_y\check{g} \cdot h \in \mathcal{L}$,

og $|g*h(y)| = \left|\int L_y\check{g} \cdot h\,dI\right| \leq \|L_y\check{g}\|_1 \|h\|_\infty = \|g\|_1 \|h\|_\infty$

Den ligelige kontinuitet ses af

$$|g*h(s) - g*h(t)| = \left|\int (L_s\check{g} - L_t\check{g})h\,dI\right| \leq \|L_s\check{g} - L_t\check{g}\|_1 \|h\|_\infty$$

ved brug af resultat s. 94.

Radon / Nikodyms sætn.

Idet I er et pos. Radon integral i lok. komp. rum X har vi s. 82 ff. for $h \in \mathcal{L}_I$ defin. og studeret Radon integralet $hI \in \mathcal{M}'(X)$ m tæthed h m.h.t. I,

$$hI(f) = \int fh \, dI, \quad f \in \mathcal{K}(X).$$

Spec. så vi, at $h \to hI$ giver isometrisk indlejring af $\mathcal{L}_I$ i $\mathcal{M}'$ (s. 83)

At indlejringen er injektiv, kommer ud på:

For givet $J \in \mathcal{M}'(X)$ findes højst et $h \in \mathcal{L}_I$, pånær ækv. m.h.t. I, så $J = hI$.

Vi skal nu karakterisere de $J \in \mathcal{M}'(X)$, der kan skrives hI med $h \in \mathcal{L}_I$. Herved dog holde os til tilfældet I begr.

Radon / Nikodyms sætn. (Radon 1913 for I = sædv. integral i $\mathbb{R}^n$, Nikodym 1930)

Idet I og J er begr. Radon integr. i lokalt kompakt rum X, I pos., gælder:
Der findes fkt. $h \in \mathcal{L}_I(X)$, så $J = hI$, dvs. $J(f) = \int fh \, dI$ for $f \in \mathcal{K}(X)$,
da og kun da hvis enhver nulmgd. m.h.t. I også er nulmgd. m.h.t. J.

Def. Sidstnævnte egenskab udtrykkes: J er absolut kontin. m.h.t. I.

Straks vise lette del af sætn., nødvendigheden.
Lad da J have tæthed $h \in \mathcal{L}_I$ m.h.t. I, altså $J = hI$, hvor I pos. Radon integr.
Det er uden betydn. her, om I er begr.

Vise J abs. kontin. m.h.t. I.

Vi kan antage $h \geqq 0$ (ellers erstatte h med $|h|$, idet $|hI| \leqq |h| I$ (s. 84)).

Da er $\bar{J}(g) \leqq \bar{I}(gh)$ for $g \in \mathcal{F}^+$,

thi $\bar{J}(g) = \sup\limits_{f \in \mathcal{K}^+, f \leq g} J(f)$, hvor $J(f) = \int fh \, dI \leq \bar{I}(gh)$.

Nu for vilk. nulmgd. N m.h.t. I, altså $\bar{I}(1_N) = 0$, vise $\bar{J}(1_N) = 0$.

Idet $\bar{I}(1_N) = \inf\limits_{g \in \mathcal{F}^+, g \geqq 1_N} \bar{I}(g)$, findes $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ med $g_n \in \mathcal{F}^+$, $g_n \geqq 1_N$, $\bar{I}(g_n) < \frac{1}{n}$.

Vi kan antage $1 \geqq g_1 \geqq g_2 \geqq \ldots$ (ellers erstatte g_n med $1 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_n$).

Da $\|g_n\|_1 = \bar{I}(g_n) \to 0$, $\underset{\text{s. 39}}{\text{findes}}$ delfølge $g_{n_1} \geqq g_{n_2} \geqq \ldots$, så $g_{n_k} \searrow 0$ p.p. m.h.t. I.

Vi har nu ligeledes $g_{n_k} h \searrow 0$ p.p. m.h.t. I

Her er $g_{n_k} h \in \mathcal{L}_I$, idet $g_{n_k}, h \in \mathcal{L}_I$, g_{n_k} begr.;
iflg. sætn. 4, s. 39 (ell. Lebesg. sætn, major. h) har vi da $\int g_{n_k} h \, dI \to 0$.

Af $\bar{J}(1_N) \leq \bar{J}(g_{n_k}) \leq \bar{I}(g_{n_k} h)$, $k = 1, 2, \ldots$, følger så $\bar{J}(1_N) = 0$.

rbigå

Beviset for tilstr. føres vi efter en idé af von Neumann (Ann. of Math. 41, 1940, p. 127).
Det bygger på sætn. gen:
Til enhver begr. lin. fktnal $f: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ på et Hilbert rum $\mathcal{H}$ findes et (og kun et) $a \in \mathcal{H}$, så $\forall x \in \mathcal{H}: f(x) = (x|a)$ (Frechet / F. Riesz 1907 for $L^2(\mathbb{R})$).

Faktisk tilvejebringes herved isometrisk isomorfi mellem $\mathcal{H}$ og det duale rum.
Bevis f. eks. Mat. 6, HR 17, ell. Neumark s. 101, Riesz/Nagy s. 61.

Sætngen anvendes på $L^2_K(X, \mathbb{R})$ for passende Radon integral K. Men først

Indskud.
Idet I er et Radon integral i lokalt komp. rum X, gælder:
Er $f \in \mathcal{L}_I(X, \mathbb{R})$ og $a \in \mathbb{R}_+$, da er $A = \{x \mid f(x) \geqq a\}$ en m.h.t. I integrabel mgd.

Bevis. Vi kan antage $a = 1$ (ellers erstatte f med $\frac{1}{a} f$).
Vi kan antage $f \geqq 0$ (ellers bemærke $A = \{x \mid f^+(x) \geqq 1\}$, hvor $f^+ = f \vee 0 = \frac{1}{2}(f + |f|) \in \mathcal{L}_I$).

Nu $f \wedge 1 \in \mathcal{L}_I(X, \mathbb{R})$, thi for vilk. $g \in \mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ er $|f\wedge 1 - g \wedge 1| \leq |f - g|$, dermed $\| f \wedge 1 - \underbrace{g \wedge 1}_{\in \mathcal{K}} \|_1 \leqq \| f - g \|_1$

Da $f \wedge 1$ integr. og begr., fås ved induktion $(f \wedge 1)^n \in \mathcal{L}_I$, $n = 1, 2, \ldots$
Idet $(f \wedge 1)^n \searrow 1_A$, fås af sætn. 4, s. 39 (ell. Lebesgues sætn., major. $f \wedge 1$), at $1_A \in \mathcal{L}_I$.

Også $\{x \mid f(x) > a\}$ er integr. for $a \in \mathbb{R}_+$ (major. forening svarende til $a_n \searrow a$).
Derimod væsentligt, at $a > 0$.

Naimark, s. 133

Nu beviset for dybere del af Radon/Nikodyms sætn., tilstr.

Det begr. Radon integral J antages abs. kontin. m.h.t pos, begr. Radon integral I i lokalt komp. rum X. Vi søger $h \in \mathcal{L}_I$, så $J = hI$.

Vi kan antage J reel, thi ellers skrive $J = J' + iJ''$ med reelle J', J''. Der gælder nemlig $|J'| \leqq |J|$, $|J''| \leqq |J|$ (Bourbaki, chap. III, s. 55), hvorfor J', J'' abs. kontin. m.h.t. I.

Vi kan endda antage J pos., thi ellers udnytte $J = J^+ - J^-$ (s. 22). Der gælder nemlig $J^+ \leqq |J|$, $J^- \leqq |J|$ (iflg. formler for $J^+(f)$, $J^-(f)$, $|J|(f)$; $f \in \mathcal{K}^+$).

Nu med K betegne pos. begr. Radon integral $K = I + J$.

1° $f \rightsquigarrow \int f\,dJ$, $f \in \mathcal{L}^2_K(X, \mathbb{R})$ giver begr. lin. fkt.nal på $L^2_K(X, \mathbb{R})$.

Thi $\int f\,dJ$ exist., da $\mathcal{L}^2_K \subseteq \mathcal{L}_K \subseteq \mathcal{L}_J$
idet K begr. (s. 134) og $J \leqq K$,

og $|\int f\,dJ| \leqq \int |f|\,dJ \leqq \int |f|\,dK = \|f \cdot 1\|_1 \overset{s.134}{\leqq} \|f\|_2 \|1\|_2$.

2° Der findes (pånær ækv. m.h.t. K netop) en fkt. $k \in \mathcal{L}^2_K(X, \mathbb{R})$, så $\int f\,dJ = \int fk\,dK$, dvs.

$$(1) \qquad \int f(1-k)\,dJ = \int fk\,dI, \qquad \text{for } f \in \mathcal{L}^2_K(X, \mathbb{R}).$$

Fås af Frechet/Riesz' sætn. (s. 145) for Hilbert rummet $L^2_K(X, \mathbb{R})$.
Vedr. omregning $\int fk\,d(I+J) = \int fk\,dI + \int fk\,dJ$ se öv. 3, s. 84.

Vi kan antage $k \geqq 0$, thi i hv. fald gælder $k(x) \geqq 0$ næsten overalt m.h.t. K.

For vilk. $a < 0$ er nemlig $A = \{x \mid k(x) \leqq a\}$ integr. m.h.t. K iflg. indskud s. 145, endda $1_A \in \mathcal{L}^2_K$ (s. 134).

Følgelig $0 \leqq \int 1_A\,dJ = \int 1_A k\,dK \leqq a \int 1_A\,dK \leqq 0$,
altså $\int 1_A\,dK = 0$, A er nulmgd. m.h.t. K. Benytte $a = -\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Vi kan videre antage $k < 1$, thi $k(x) < 1$ næsten overalt m.h.t. K.

Hertil nok at vise, at $N = \{x \mid k(x) \geqq 1\}$ er nulmgd. m.h.t. I,
thi iflg. forudsætn. er N da også nulmgd m.h.t J, dermed m.h.t. $I + J = K$.
(For pos. Radon integraler I og J gælder generelt $\overline{(I+J)}(f) = \bar{I}(f) + \bar{J}(f)$ for enhv. pos. fkt. f; triviel verifikation med $\leqq$, henh. $\geqq$, først for $f \in \mathcal{J}^+$.)

Imidlertid er N integr. m.h.t. K iflg. indskud s. 145, endda $1_N \in \mathcal{L}^2_K$,
idet 1_N jo begr. (s. 134)

Følgelig $\quad 0 \geqq \int 1_N (1-k)\, dJ = \int 1_N k\, dI \geqq \int 1_N\, dI \geqq 0$,
altså $\int 1_N\, dI = 0$, N er nulmgd. m.h.t. I.

$k \in \mathcal{L}^\infty_K$.
Thi k er begr. og, som enhv. fkt. tilh. $\mathcal{L}^2$, lokalt intgr. ($kg \in \mathcal{L}_K$ for ethv. $g \in \mathcal{K}$, nemlig endda for ethv $g \in \mathcal{L}^2_K$ (s. 134)).

Resumé: Der findes fkt. $k \in \mathcal{L}^\infty_K$, $0 \leqq k < 1$, så

(1) $\int f(1-k)\, dJ = \int fk\, dI$ for hvert $f \in \mathcal{L}^2_K(X, \mathbb{R})$.

3° For vilk. $f \in \mathcal{L}^2_K$, $f \geqq 0$ anvendes nu (1) på $f(1+k+\ldots+k^{n-1})$ i stedet for f.
Muligt, idet $(1+k+\ldots+k^{n-1}) \in \mathcal{L}^\infty_K$, dermed $f(1+k+\ldots+k^{n-1}) \in \mathcal{L}^2_K$ (s. 142).
Herved fås:
$$\int f(1-k^n)\, dJ = \int f \frac{k}{1-k}(1-k^n)\, dI, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Da nu $k^n \searrow 0$, således at begge integrander vokser med n, og alle integraler $\leqq \int f\, dJ$, får vi ved to anvendelser af sætn. 4, s. 39:
$$f\frac{k}{1-k} \in \mathcal{L}_I \qquad \text{og} \qquad \int f\, dJ = \int f \frac{k}{1-k}\, dI$$
Nu dels bemærke, at $f = 1$ giver $\frac{k}{1-k} \in \mathcal{L}_I$,
dels bemærke, at grundet på linearitet i f gælder resultatet for ethv. $f \in \mathcal{L}^2_K(X, \mathbb{C})$, spec. for $f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$, dvs. $\quad J(f) = \int f \frac{k}{1-k}\, dI, \quad f \in \mathcal{K}(X, \mathbb{C})$

Altså $h = \frac{k}{1-k}$ er som ønsket.

Supplement til Radon/Nikodyms sætn.: Til pos. J findes pos. h, dermed til reelt J reelt h.

Bemærkning. Tilstrækkelighedsbeviset i Radon/Nikodyms sætn. kan føres betydeligt enklere i tilfældet $|J| \leqq \text{const} \cdot I$ og samtidig give en ekstra oplysning, afgørende i næste afsnit. Først notere:

Er I og J Radon integraler i lokalt komp. rum X, I pos. samt $|J| \leq k I$, hvor $k \in \mathbb{R}_+$, dvs. $|J(f)| \leq k\, I(|f|)$ for $f \in \mathcal{K}$, da:

(a) For enhv. fkt. $f \geq 0$ er $\overline{|J|}(f) \leq k\, \bar{I}(f)$, — klart

(b) Enhver (lokal) nulmgd. m.h.t. I er også (lokal) nulmgd. m.h.t. J — af (a)

(c) For enhv. fkt f er $\|f\|_1$ (m.h.t. J) $\leq k \cdot \|f\|_1$ (m.h.t. I), dermed $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{L}_J$. — af (a)

(d) For enhv. fkt. f er $\|f\|_2$ (m.h.t J) $\leq k^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_2$ (m.h.t. I), dermed $\mathcal{L}^2_I \subseteq \mathcal{L}^2_J$. — af (a)

benyt- ikke

Øvelse: vis $\|f\|_\infty$ (m.h.t J) $\underset{\uparrow\,(b)}{\leq}$ $\|f\|_\infty$ (m.h.t. I) samt $\mathcal{L}^\infty_I \underset{\uparrow\,\text{tillige (c)}}{\subseteq} \mathcal{L}^\infty_J$.

Idet nu I, og dermed J, forudsættes begrænset, hvormed $\mathcal{L}^\infty_I \subseteq \mathcal{L}^2_I \subseteq \mathcal{L}_I$ (s. 142), vil vi vise: $J = hI$ med $h \in \mathcal{L}^\infty_I$, $\|h\|_\infty \leq k$.

I kraft af (b) giver Radon/Nikodyms sætn. $J = hI$ med $h \in \mathcal{L}_I$; vi udnytter ikke dette, men starter på en frisk (smd. s. 146)

1° $f \to \int f\,dJ$, $f \in \mathcal{L}^2_I(X, \mathbb{C})$ giver en begr. lin. fkt.nal på $\mathcal{L}^2_I(X,\mathbb{C})$.

Thi $\int f\,dJ$ exist., da $\mathcal{L}^2_I \underset{\uparrow\,I\text{ begr., s.134}}{\subseteq} \mathcal{L}_I \underset{\nwarrow\,(c)}{\subseteq} \mathcal{L}_J$,

og $|\int f\,dJ| \leq \|f\|_1$ (m.h.t. J) $\underset{\uparrow\,(c)}{\leq} k \cdot \|f\|_1$ (m.h.t. I) $\underset{\uparrow\,\text{s.134, } I\text{ begr.}}{\leq} k\, \|1\|_2 \cdot \|f\|_2$ (m.h.t. I)

2° Der findes (pånær ækv. m.h.t. I netop) en fkt. $h \in \mathcal{L}^2_I(X,\mathbb{C})$, så
$$\int f\,dJ = \int fh\,dI \quad \text{for } f \in \mathcal{L}^2_I(X,\mathbb{C})$$
Fås af Frechet/Riesz' sætn. (s. 145) for Hilbert rummet $L^2_I(X,\mathbb{C})$.

NB. Vi har allerede genfundet $J = hI$, endda med supplement $h \in \mathcal{L}^2_I$ samt $\int f\,dJ = \int fh\,dI$ ikke blot for $f \in \mathcal{K}$, men for $f \in \mathcal{L}^2_I$.

3° $\int_A |h|\,dI \leq k\mu(A)$ for vilk. integr. mgd. A (m.h.t. I), med $\mu(A) = \int 1_A\,dI$

Hertil skriver vi $|h| \cdot 1_A$ på formen $h \cdot (\operatorname{sgn}\bar{h} \cdot 1_A)$
Idet $\bar{h} \in \mathcal{L}^2_I \subseteq \mathcal{L}_I$, har vi iflg. eks. s. 140: $\operatorname{sgn}\bar{h} \in \mathcal{L}^\infty_I$,
og dermed, da jo $1_A \in \mathcal{L}^\infty_I$, også $\operatorname{sgn}\bar{h} \cdot 1_A \in \mathcal{L}^\infty_I \subseteq \mathcal{L}^2_I$ (s. 142)

Iflg. 2° er da
$$\int_A |h|\,dI = \left|\int \operatorname{sgn}\bar{h} \cdot 1_A\,dJ\right| \leq \|\operatorname{sgn}\bar{h} \cdot 1_A\|_1 \text{ (m.h.t. } J) \underset{(c)}{\leq} k \cdot \|\operatorname{sgn}\bar{h}\, 1_A\|_1 \text{ (m.h.t. } I) \leq k\mu(A).$$

4° $\|h\|_\infty \leq k$, dermed $h \in \mathcal{L}_I^\infty$.

Hertil for vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vise $\|h\|_\infty \leq k+\varepsilon$

dvs. $k+\varepsilon$ ess. majorant for $|h|$ (s.142)

dvs. $N = \{x \mid |h(x)| > k+\varepsilon\}$ er (lokal) nulmgd.

Nu: N er integrabel (s.145) og iflg. 3°:

$$(k+\varepsilon)\mu(N) \leq \int_N |h|\,dI \leq k\mu(N), \quad \text{dermed } \mu(N)=0.$$

Øvelse. Suppler den netop viste sætning med

o.70 $\int f\,dJ = \int fh\,dI$ for hvert $f \in \mathcal{L}_I$.

[V.s. er begr. lin. fkt.nal $\mathcal{L}_I \to \mathbb{C}$, idet $|\int f\,dJ| \leq \|f\|_1$ (mht J) $\leq k\cdot\|f\|_1$ (mht I)
H.s er begr. lin. fkt.nal $\mathcal{L}_I \to \mathbb{C}$, idet $|\int fh\,dI| \leq \|fh\|_1 \leq \|h\|_\infty \cdot \|f\|_1$
Da overensst. på $\mathcal{K}$ (endda på $\mathcal{L}_I^2$), så også på hele $\mathcal{L}_I$

Rummet $\mathcal{L}^\infty$ som dualt til L^1.

Lad I være et pos. Radon integral i lokalt komp. rum X.

For vilk. $h \in \mathcal{L}_I^\infty$ gælder da $\quad \|h\|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{L}_I, \|f\|_1 \leq 1} |\int fh\, dI|$.

Bevis. Iflg. s. 141 er $fh \in \mathcal{L}$ med $|\int fh\, dI| \leq \|fh\|_1 \leq \|f\|_1 \|h\|_\infty \leq \|h\|_\infty$.
Tilbage står at vise, at $\|h\|_\infty \leq M = \sup |\int fh\, dI|$. Omtrent som 3°, 4°, s. 148-149:

1° $\int_A |h|\, dI \leq M \cdot \mu(A)$ for vilk. integr. mgd. A, med $\mu(A) = \int 1_A\, dI$.
eksistens: da $h \in \mathcal{L}^\infty$, $1_A \in \mathcal{L}$, er $h \cdot 1_A \in \mathcal{L}$.

Påstanden klar for $\mu(A) = 0$. Ellers:
Skrive $|h| \cdot 1_A$ på formen $h(\operatorname{sgn} \bar{h} \cdot 1_A)$.
Da $\operatorname{sgn} \bar{h} \in \mathcal{L}^\infty$ iflg. eks s. 140 og $1_A \in \mathcal{L}$, dermed $\operatorname{sgn} \bar{h} \cdot 1_A \in \mathcal{L}$,
samt $\|\operatorname{sgn} \bar{h} \cdot 1_A\|_1 \leq \|1_A\|_1 = \mu(A)$, har vi

$$\int_A |h|\, dI = \left| \int h (\operatorname{sgn} \bar{h} \cdot 1_A)\, dI \right| \leq M \cdot \mu(A)$$

2° Afslutter beviset ved for vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ at godtgøre
$\|h\|_\infty \leq M + \varepsilon$, dvs. $M + \varepsilon$ ess. major. for $|h|$,
dvs. $\{x \mid |h(x)| > M + \varepsilon\}$ er lokal nulmgd.

Vi skal altså for vilk. komp. C vise, at
$A = C \cap \{x \mid |h(x)| > M + \varepsilon\} = \{x \mid |h(x) \cdot 1_C(x)| > M + \varepsilon\}$ er nulmgd.
Da $|h \cdot 1_C| \in \mathcal{L}$, er A integrabel (s. 145). Nu

$$\underbrace{(M+\varepsilon)\mu(A) \leq}_{M+\varepsilon < |h(x)| \text{ for } x \in A} \int_A |h|\, dI \underbrace{\leq}_{1°} M \cdot \mu(A), \quad \text{hvoraf } \mu(A) = 0.$$

cf. 3°, 4° 148, 149

For givet $h \in \mathcal{L}_I^\infty$ bestemmes ved $H(f) = \int fh\, dI$, $f \in \mathcal{L}_I$, en lin. fkt. $H: \mathcal{L}_I \to \mathbb{C}$.
I kraft af $|\int fh\, dI| \leq \|fh\|_1 \leq \|f\|_1 \|h\|_\infty$ kan H opfattes som fkt. $H: L_I \to \mathbb{C}$,
begr. lineær med norm $M_H \leq \|h\|_\infty$, sml. s. 141. Ovenstående resultat er:
$M_H = \|h\|_\infty$. Dermed

$h \to H$ giver en lineær og isometrisk afbildn. af $\mathcal{L}_I^\infty$ (ell. L_I^∞) ind i det duale rum til L_I

Bemærkelsesværdigt er det nu, at afbildningen tillige er surjektiv, således at $h \to H$ giver en isometrisk isomorfi af Banach rummet $\mathcal{L}_I^\infty$ på det duale rum til $\mathcal{L}_I$, en „identifikation" af $\mathcal{L}_I^\infty$ med det duale til $\mathcal{L}_I$.

Dette vil vi vise for tilfældet I begrænset (og stadig pos.). Altså

Lad I være pos. begr. Radon integral på lokalt komp rum X.
Da findes for vilk begr. lineær fktnal $H: \mathcal{L}_I \to \mathbb{C}$ en fkt. $h \in \mathcal{L}_I^\infty$, så

$$H(f) = \int fh\, dI \quad \text{for hvert } f \in \mathcal{L}_I.$$

Beviset bygger på Radon/Nikodym resultatet s. 148. *)
Som J benyttes restriktionen af H til $\mathcal{K}$.

J er et Radon integral, thi for $f \in \mathcal{K}_C$, C komp., er

$$|J(f)| = |H(f)| \leq M_H \|f\|_1 = M_H \int |f|\, dI \leq M_H \cdot \mu(C) \cdot \max_x |f(x)|.$$

Og vi har $|J(f)| \leq M_H\, I(|f|)$ for $f \in \mathcal{K}$, dvs. $|J| \leq M_H \cdot I$

Iflg. s. 148 er da $J = hI$ med $h \in \mathcal{L}_I^\infty$, altså

$$H(f) = \int fh\, dI \quad \text{for hvert } f \in \mathcal{K}$$

Sidste lighed udvider sig ved kontinuitet til $f \in \mathcal{L}_I$.

Som nævnt gælder denne sætning også uden forudsætn. I begr. Beviset kan føres ved mere kompliceret Radon/Nikodym sætning. (Bourbaki chap. V, §5, n° 8)

For I = Haar integralet i lokalt komp. gruppe (det tilfælde vi får brug for), kan sætningen dog føres tilbage til tilfældet ovenfor. Vi vil ikke bruge tiden hertil, pusleri (Neumark s. 377, s. 155 Bemerkung 1).

*) Beviset kan også føres direkte, som en kopi af beviset s. 148, 149 med $H(f)$ i stedet for $\int f dJ$ (og M_H i stedet for k). Sml. også Mat. 6, F 4.20-21.

Fordi elementerne i det duale rum V' til et normeret vektorrum V jo er fkt.ner $H: V \to \mathbb{C}$, kan man i V', foruden den „stærke" topologi svarende til normen M_H, betragte topologien for pkt.vis konvergens: den „svage" topologi.

Den stærke topologi er finere end den svage.

Følger af $|H(x) - K(x)| \leq M_{H-K} \|x\|$.

<u>Enhedskuglen</u> $\{H \in V' \mid M_H \leq 1\}$ <u>i det duale rum</u> V' <u>er kompakt i den svage topologi.</u>

Bevises ved Tychonoffs sætn. (Loomis 9B, s. 22, ell. Mat. 6, F4, s. 10)

Fordi L_I^∞ for positivt Radon integral I kan „identificeres" med det duale rum til L_I (s. 150, 151), kan den svage topologi i L_I' overføres til L_I^∞ (og videre til $\mathcal{L}_I^\infty$). Vi taler da om den svage topologi i L_I^∞ ($\mathcal{L}_I^\infty$).

En omegn af $h \in \mathcal{L}_I^\infty$ i den svage topologi er da karakteriseret ved at ... de-holde fællesmgd. af end. mange $\{k \in \mathcal{L}_I^\infty \mid |\int fk\,dI - \int fh\,dI| < \varepsilon\}$.
med $f \in \mathcal{L}_I$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

Konvergens af h_α mod h i den svage topol. i $\mathcal{L}_I^\infty$ betyder

$$\forall f \in \mathcal{L}_I: \quad \int f h_\alpha\, dI \to \int f h\, dI.$$

Vi noterer os: Den svage topologi i $\mathcal{L}_I^\infty$ er grovere end top. svar. til $\|\ \|_\infty$.

<u>Enhedskuglen</u> $\{h \in \mathcal{L}_I^\infty \mid \|h\|_\infty \leq 1\}$ <u>er kompakt ved svage topol. i</u> L_I^∞.

Karaktergruppen som delrum af $\mathcal{L}^\infty$ med svag topologi.

Lad G være en komm., lokalt komp. gruppe, I Haar integralet.

For kontin. fkt.r på G gælder som nævnt s. 140

$$\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|, \quad f \text{ lok. ækv. } g \Rightarrow f = g,$$

hvormed overgang til klasser af lok. ækv. fkt.r giver isom. indlejring af rummet $\mathcal{C}^b(G,\mathbb{C})$ af begr. kontin. fkt.r i L^∞, $\|\ \|_\infty$. Foruden $\mathcal{C}^b \subseteq \mathcal{L}^\infty$ vil vi da også tillade os at skrive $\mathcal{C}^b \subseteq L^\infty$.

Sætning. I mgd. $\hat{G}$ af gruppekarakterer falder den svage topologi i $L^\infty(G)$ sammen med topologien for uniform konvergens på komp. mgd.r (altså den topologi, vi hidtil har benyttet i $\hat{G}$).

Bevis. A. T_c (topol. for unif. konv. på komp. mgd.r) er finere end T_s (svage topol.) på mgd. af kontin. fkt. med uniform norm ≤ 1, spec. på $\hat{G}$.

Tilstr. for vilk. g at vise, at T_s-omegn af typen

$$\{h \mid |\int fh\,dI - \int fg\,dI| < \varepsilon\} \quad \text{med } f \in \mathcal{L},\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+,$$

tillige er T_c-omegn, dvs. indeholder mgd. $W_{C,\delta}(g)$ med C komp, $\delta \in \mathbb{R}_+$ (s. 110).

Hertil erindre $\{x \mid f(x) \neq 0\} \subseteq N \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$,

hvor N nulmgd. og $C_1, C_2, \dots$ komp. (s. 141).

Vi kan antage $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$.

Da har vi for $x \notin N$, spec. p.p.: $|f \cdot 1_{C_n}(x)| \nearrow |f(x)|$;

dermed $\int_{C_n} |f(x)|dx \nearrow \int |f(x)|dx$

Til vilk. $\delta \in \mathbb{R}_+$ findes altså komp. C, så $\int_{G \setminus C} |f(x)|dx < \delta$.

For $h \in W_{C,\delta}(g)$, dvs. $\forall x \in C : |h(x) - g(x)| < \delta$, er da

$$|\int fh\,dI - \int fg\,dI| \leq \int |f||h-g|\,dI = \int_C + \int_{G \setminus C}$$

$$\leq \int_C |f|\delta\,dI + \int_{G\setminus C} |f|\,\underline{2}\,dI \leq \delta\|f\|_1 + 2\delta \underset{\substack{|\\ \text{blot } \delta \text{ tilpas lille.}}}{<} \varepsilon$$

1 - eller en anden konstant

Vi mgl. det væsentlige: T_s finere end T_c på $\hat{G}$.

B. Idet T_1 og T_2 er topologier i samme mgd. X, gælder: T_2 finere end T_1 netop hvis

Konvergens (af general. følge) i T_2 medf. konv. i T_1 mod samme pkt.

Klart, at betingelsen nødv., thi konv. mod $a \in X$ betyder: hver omegn af a indeh. alle elem. fra et vist trin; – bevares med færre omegne

Omv.: At T_2 ikke er finere end T_1 betyder, at $a \in X$, $\mathcal{U} \subseteq X$ findes, så $\mathcal{U}$ er T_1-omegn af a men $\mathcal{U}$ er ikke T_2-omegn af a

For enhver T_2-omegn V af a gælder nu: V ej del af $\mathcal{U}$, dvs. x_V findes, så $x_V \in V$, men $x_V \notin \mathcal{U}$. Vælge sådant x_V.

Åbenbart gælder nu: x_V konv. mod a i T_2 men ikke i T_1.

C. Antage $g_\alpha \in \hat{G}$ konverg. mod $g \in \hat{G}$ i T_s. Vise g_α konverg. mod g i T_c.

Hermed færdig i kraft af A og B.

Vælge $f \in \mathcal{L}(G)$, så $\int \check{f} g \, dI \neq 0$.

Muligt, thi da g ej lok. ækv. med 0, er $f \to \int f g \, dI$, $f \in \mathcal{L}_I$, ikke 0-fkt.nalet

Studere $f * g_\alpha$ givet ved $x \to \int_G f(x-y) g_\alpha(y) \, dy$ – eksistens klar for hvert x, jfr. s. 143

1° $f * g_\alpha$ konverg. mod $f * g$ pkt.vis.

Thi $f * g_\alpha(x) = \int L_x \check{f} \cdot g_\alpha \, dI$ konverg. mod $\int L_x \check{f} \cdot g \, dI = f * g(x)$, da jo g_α konv. mod g i T_s.

2° Fkt.nerne $f * g_\alpha$ er „ensartet ligeligt kontinuerte",

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists$ omegn V af 0 $\forall s, t \in G: s - t \in V \Rightarrow \forall \alpha: |f * g_\alpha(s) - f * g_\alpha(t)| < \varepsilon$.

Idet $|f * g_\alpha(s) - f * g_\alpha(t)| = |\int (L_s \check{f} - L_t \check{f}) g_\alpha \, dI|$
$\leq \| L_s \check{f} - L_t \check{f} \|_1 \underline{\| g_\alpha \|_\infty} = \| L_s \check{f} - L_t \check{f} \|_1$,

følger påstanden af resultat s. 94 midten

Det væsentl. her, at g_α'erne er ensartet ess. begr.

3° $f * g_\alpha$ konverg. mod $f*g$ i T_c.

Dette følger af 1° og 2° ved sætn:

Lad h_α være general. følge af fkt.ner på topol. rum, som konverg. pkt.vis mod fkt. h. Er fkt.nerne h_α ensartet kontin. i hv. pkt. x,

dvs. $\forall \varepsilon \in R_+ \; \exists$ omegn V af x $\forall y$: $y \in V \Rightarrow \forall \alpha : |h_\alpha(y) - h_\alpha(x)| \leqq \varepsilon$,

da konverg. h_α mod h også i T_c.

Bevis. Først bemærke h kontin., endda kan h medtages ved den ensartede kontin., idet $\forall \alpha : |h_\alpha(y) - h_\alpha(x)| \leqq \varepsilon$

medf. $|h(y) - h(x)| \leqq \varepsilon$.

Nu for vilk. komp. C og $\varepsilon \in R_+$

Til hvert $x \in C$ tænkes valgt omegn V_x, så

for hvert $y \in V_x$ og alle α: $|h_\alpha(y) - h_\alpha(x)| \leqq \varepsilon$.

gre

Da findes end. mange $x_1, \dots, x_n$, så $C \subseteq \bigcup_i V_{x_i}$.

Fra et vist trin gælder $|h_\alpha(x_i) - h(x_i)| \leqq \varepsilon$ for $i = 1, \dots, n$;

dermed $\forall y \in C$: $|h_\alpha(y) - h(y)| \leqq 3\varepsilon$, dvs. $h_\alpha \in W_{C,3\varepsilon}(h)$,

thi y tilh. vist V_{x_i}, dermed $|h_\alpha(y) - h_\alpha(x_i)| \leqq \varepsilon$ for alle α,

altså også $|h(y) - h(x_i)| \leqq \varepsilon$.

10.70

4° Nu afgørende benytte, at g_α er gruppekarakter:

$$f * g_\alpha(x) = \int_G f(x-y) g_\alpha(y)\,dy \underset{\text{erstatte } y \text{ med } y+x}{=} \int_G f(-y) g_\alpha(x+y)\,dy = g_\alpha(x) \int \check{f} g_\alpha \,dI$$

Altså $f * g_\alpha = g_\alpha \int \check{f} g_\alpha \, dI$.

Da nu talfaktoren $\int \check{f} g_\alpha \, dI = f*g_\alpha(0)$ konverg. mod $\int \check{f} g \, dI \underline{\neq 0}$, jfr. 1°, har vi iflg. 3°:

g_α konverg. mod $f*g \,/ \int \check{f} g \, dI = g$ i T_c , færdig

g er gruppekarakter

I C. benyttede vi først til allersidst, at $g \in \hat{G}$. Nøjes vi i stedet med foruds. sætn. $g \in \mathcal{L}^\infty$, g ej lok. ækv. m. 0, finder vi stadig

4° g_α konverg. mod $f * g \,/\, \int \check{f} g \, dI = h$ i T_c.

Klart, at $h \in \hat{G}$, idet relationer $|g_\alpha(x)| = 1$, $g_\alpha(x+y) = g_\alpha(x) g_\alpha(y)$ bevares ved grænseovergangen,
($\hat{G}$ er afsluttet ved T_c, jfr. også s. 113).

Videre:

5° g er lok. ækv. m. h

Thi da $g_\alpha \in \hat{G}$ konv. mod $h \in \hat{G}$ i T_c, så også i T_s iflg. A og B.
Og g_α konv. mod både g og h i T_s medf. g lok. ækv. h.

Vi har hermed vist:

Hvis $g_\alpha \in \hat{G}$ konv. mod $g \in \mathcal{L}^\infty$, g ej lok. ækv. 0 i T_s, da er g lok. ækv. m en gruppekarakter.

Med andre ord:

<u>Sætning.</u> $G' = \hat{G} \cup \{0\}$ <u>indlejres i $\mathcal{L}^\infty$ som en afsluttet del ved den svage topol.</u>

Da $G' \subseteq$ enhedskugle $\{h \in \mathcal{L}^\infty \,|\, \|h\|_\infty \leqq 1\}$, som er kompakt i T_s (s. 152), har vi

<u>Corollar.</u> $G' = \hat{G} \cup \{0\}$ <u>er kompakt ved den svage topologi T_s.</u>

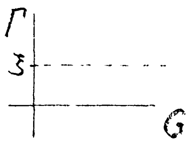
Følgelig er $\hat{G}$ <u>lok. kompakt</u> ved T_s og altså <u>ved topol. T_c for uniform konverg. på komp. mgd.r</u> iflg. sætn. s. 153. Dette sidste har vi tidligere vist direkte, s. 116, - kunne være sparet.

Er $\hat{G}$ ikke selv kompakt, kan da G' opfattes som ét pkt.s-kompaktificering med nulfkt.nen 0 som „det uend. fjerne pkt.", smh. s. 11.

NB. Ved T_c er G' ikke kompakt, medmindre $\hat{G}$ er det. Thi $\hat{G}$ er afsl. (i G') ved T_c.

Bevis for Riemann/Lebesgues sætn. og entyd.sætning.

Om $d: G\times\Gamma \to \mathbb{C}$ med G, Γ komm. top. grupper, G lok. kompakt, forudsætte



$d_{.2}: \Gamma \to \hat{G}$ homeom. isomorfi. (jfr. s. 119, s. 130).

d_2 er afbildningen $\xi \to d(\cdot,\xi) = \langle\cdot,\xi\rangle$.

Eks. G vilk. komm., lok. komp. gruppe, $\Gamma = \hat{G}$, $\langle x,\chi\rangle = \chi(x)$ (s. 122)

For $f\in\mathcal{L}(G)$ er $\mathcal{F}f$ fktnen $\xi \to \int_G f(x)\overline{\langle x,\xi\rangle}\,dx$, $\xi\in\Gamma$. (s. 128)

Riemann/Lebesgues sætn. (s. 130): For hvert $f\in\mathcal{L}(G)$ er $\mathcal{F}f\in\mathcal{C}_0(\Gamma)$.

I forvejen vides $\mathcal{F}f$ kont. (og begr.), s. 124. Det nye: $\mathcal{F}f$ forsvinder i ∞.

Bevis.
$$\begin{array}{l} d: G\times\Gamma \to \mathbb{C}\\ \qquad\ \uparrow d_2^{-1}\\ \qquad\ \hat{G}\end{array}$$

Vi udskifter Γ med $\hat{G}$ ved homeom. isomorfi $d_2^{-1}: \hat{G}\to\Gamma$. Herved går $d(x,\xi)$ over i $\langle x,\chi\rangle = \chi(x)$ (jfr. s. 120), og $\mathcal{F}f$ bliver $\chi \to \int_G f\bar{\chi}\,dI$, $\chi\in\hat{G}$.

Da kan $\mathcal{F}f$ udvides til $\mathcal{F}f: \mathcal{L}^\infty(G)\to\mathbb{C}$, idet udtrykket har mening for vilk. $\chi\in\mathcal{L}^\infty(G)$.

Oplagt, at $\mathcal{F}f$ kontin. ved brug af svage topologi i $\mathcal{L}^\infty(G)$:

orig. mgd. til $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-\mathcal{F}f(\chi_0)|<\varepsilon\}$ er

$\{\chi\in\mathcal{L}^\infty(G) \mid |\int_G f\bar{\chi}\,dI - \int_G f\bar{\chi}_0| < \varepsilon\}$, omegn af χ_0 (s. 152)

Spec. er $\mathcal{F}f: G' = \hat{G}\cup\{0\}\to\mathbb{C}$ kontin.; bemærke $\mathcal{F}f(0)=0$.

Vi kan antage Γ, dvs. $\hat{G}$, ej kompakt. Da nu G' ét pktls-kompaktificering af $\hat{G}$ med 0 som „uend. fjerne pkt" (s. 156), viser foregående linie, at $\mathcal{F}f: \hat{G}\to\mathbb{C}$ tilh. $\mathcal{C}_0(\hat{G})$, se s. 13. — Det er naturligvis afgørende,
10.70 at topol. T_s i $\hat{G}$ er den rigtige, dvs. falder sammen med T_c (s. 153).

Mgd. $A(\Gamma) = \mathcal{F}(\mathcal{L}(G))$ af Fourier transformerede for fkt. $f\in\mathcal{L}(G)$ er da en algebra af fktn indeh. i $\mathcal{C}^0(\Gamma)$. Ved anvendelse af Stone/Weierstrass' sætning følger, som udført s. 130:

$A(\Gamma) = \mathcal{F}(\mathcal{L}(G))$ er tæt i $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ ved uniforme norm. Det samme gælder $\mathcal{F}(\mathcal{K}(G))$.

Entydighedssætn. (s. 127). For $J\in\mathcal{M}^1(\Gamma)$ gælder: $\mathcal{F}J = 0 \Rightarrow J = 0$.

Entydighedssætn. (s. 127). For $J \in \mathcal{M}'(\Gamma)$ gælder: $\mathcal{F}J = 0 \Rightarrow J = 0$.

Bevis. Da $\mathcal{K}(\Gamma)$ er tæt i $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ ved uniforme norm, har $J \in \mathcal{M}'(\Gamma)$ entydig udvidelse til begr. lin. fkt.nal $J: \mathcal{C}^0(\Gamma) \to \mathbb{C}$, s. 20.
I øvrigt er $\mathcal{C}^0(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}_J$ og for $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$: $J(\varphi) = \int_\Gamma \varphi \, dJ$, s. 37, øvelse.

For vilk. $f \in \mathcal{L}(G)$ har vi da, idet $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$, Riemann/Lebesgue:

$$J(\mathcal{F}f) = \int_\Gamma \mathcal{F}f(\xi)\, dJ(\xi) = \int_\Gamma \int_G f(x) \overline{\langle x, \xi \rangle}\, dx\, dJ(\xi)$$

Her kan Fubinis sætn. anvendes, thi idet $f \in \mathcal{L}_I(G)$, $1_\Gamma \in \mathcal{L}_J(\Gamma)$, vil $f \otimes 1_\Gamma$, dvs. fkt.nen $(x, \xi) \to f(x)$, tilh. $\mathcal{L}_{I \otimes J}$, s. 85 (2), medens jo $(x, \xi) \to \langle x, \xi \rangle$ er kont. og begr., s. 121, og altså tilhører $\mathcal{L}^\infty_{I \otimes J}$; produktet tilh. $\mathcal{L}_{I \otimes J}$.

$$J(\mathcal{F}f) = \int_{G \times \Gamma} \cdots \, d(I \otimes J) = \int_G f(x) \int_\Gamma \overline{\langle x, \xi \rangle}\, dJ(\xi)\, dx = \int_G f \cdot \mathcal{F}J \, dI.$$

Er $\mathcal{F}J = 0$, så også $J(\mathcal{F}f) = 0$ for hvert $f \in \mathcal{L}(G)$; heraf følger $J = 0$, når man erindrer, at $\mathcal{F}(L(G))$ er tæt i $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ ved uniforme norm, s. 157.

§2. Bevis for Bochners sætn.

Konstruktion af en unitær repræsentation.

Lad G være en komm., lok kompakt gruppe, I Haar integralet

Vi har (s. 103) defin. en pos. definit fkt. $\varphi: G \to \mathbb{C}$ som en kontin. fkt, hvor

(i) $\quad \sum_{i,j} \varphi(x_i - x_j)\, c_i \bar{c}_j \geq 0 \quad$ for alle end. sæt $x_1, \dots, x_n \in G$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

Da dette medfører φ begr. (s. 103) kan vi også karakterisere en pos. def. fkt. $\varphi: G \to \mathbb{C}$ som en kontin, begr. fkt. $\varphi: G \to \mathbb{C}$, dvs. $\varphi \in \mathscr{C}^b(G)$, der opfylder (i).

Her kan (i), som vist s. 103-106 erstattes med hver af betingelser (ii) - (iv). Vi hefter os ved (iv)

(iv) $\quad \int_{G\times G} \varphi(y-z)\, g(y)\, \overline{g(z)}\, d(y,z) \underset{\text{s. 106}}{=} \int_G \varphi \cdot (g * g^*)\, dI \quad \geq 0 \quad$ for hvert $g \in \mathcal{K}(G)$.

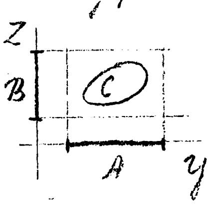
Først bemærke: betingelse (iv) har mening for vilk. lokalt integr. fkt. φ.

Thi generelt gælder med Radon integraler I og J i lok. komp. rum Y og Z:

Er $g \in \mathcal{L}_I(Y)$, $h \in \mathcal{L}_J(Y)$, så vil $g \otimes h \in \mathcal{L}_{I\otimes J}(Y \times Z)$, s. 85.

Heraf: Er g lok. integr. m.h.t. I og h lok. integr. m.h.t. J, så er $g \otimes h$ lok. integr. m.h.t. $I \otimes J$

Nemlig for vilk. komp. $C \subseteq Y \times Z$: Idet $C \subseteq A \times B$, A, B komp., har vi



$$(g \otimes h) \cdot (1_A \otimes 1_B) = (g \cdot 1_A) \otimes (h \cdot 1_B) \in \mathcal{L}_{I\otimes J}, \text{ dermed}$$
$$(g \otimes h) \cdot 1_C = (g \otimes h) \cdot (1_A \otimes 1_B) \cdot 1_C \in \mathcal{L}_{I\otimes J}$$

Følgelig er $\varphi \otimes 1_G$, dvs. $(y,z) \to \varphi(y)$, lok. integr. i $G \times G$
og dermed $(y,z) \to \varphi(y-z)$ lok. integr. i $G \times G$ (s. 86, lemma)

Eksistensen af $\int_{G\times G} \varphi(y-z)\, g(y)\, \overline{g(z)}\, d(y,z)$ nu klar, idet $g \otimes \bar{g} \in \mathcal{K}(G \times G)$, ligesom omregn. (se s. 106) til $\int_G \varphi \cdot (g * g^*)\, dI$ er gyldig

Afgørende er nu følgende sætning af Gelfand og Raikov (1943):

Sætning. En fkt $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$, der opfylder (iv), er lokalt ækv. med en kontin. fkt (som naturligvis er begr. (s. 140) og ligeledes opfylder (iv), altså er pos. definit)

Faktisk vil vi direkte vise, at fkt. $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$, der opfylder (iv), er lokalt ækv. m. kontin. fkt., der opfylder (i). Dette indeholder spec. et nyt bevis for (iv) $\Rightarrow$ (i) for $\varphi \in \mathscr{C}^b$, sml. s. 105; (benytte 3°, s. 140).

Først omtale en vej til fremskaffelse af pos. defin. fkt.

Lad $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum (over $\mathbb{C}$) med indre produkt $(u|v)$, norm $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$.
Ved en <u>unitær operator</u> i $\mathcal{H}$ forstås en bijektiv lin. afbildn. $\mathcal{U}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, som er <u>isometrisk</u>, dvs. $\|\mathcal{U}(v)\| = \|v\|$ for hvert $v \in \mathcal{H}$. (Mat. 6, Op. H. s. 17)
Da gælder også $(\mathcal{U}(u)|\mathcal{U}(v)) = (u|v)$ for $u, v \in \mathcal{H}$; (" " ")
thi $(u|v) = \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} i^\nu \|u + i^\nu v\|^2$ (Mat. 6, H.R. s. 3 og 8)

Ved en <u>unitær repræsentation</u> af G (med repræsentationsrum $\mathcal{H}$) forstås en afbildn. $s \to \mathcal{U}_s$, $s \in G$, hvor $\forall s \in G$: $\mathcal{U}_s$ er en unitær operator i $\mathcal{H}$
og $\forall s, t \in G: \quad \mathcal{U}_{s+t} = \mathcal{U}_s \circ \mathcal{U}_t$.

En unitær repræs. kaldes <u>kontinuert</u>, hvis
$$\forall u, v \in \mathcal{H}: \quad s \to (\mathcal{U}_s(u)|v) \text{ er en kontin. fkt. på } G.$$
Tilstr.: $\forall v \in \mathcal{H}: \quad s \to (\mathcal{U}_s(v)|v)$ er en kontin. fkt. på G,
thi $(\mathcal{U}_s(u)|v) = \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{4} i^\nu (\mathcal{U}_s(u + i^\nu v)|u + i^\nu v)$, (Mat. 6, H.R. s. 3),
idet $(u, v) \to (\mathcal{U}(u)|v)$ er sesquilineær for enhv. lin. afbildn. $\mathcal{U}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

<u>Er</u> $s \to \mathcal{U}_s$, $s \in G$, <u>en kontin. unitær repræs. af</u> G (<u>med repr. rum</u> $\mathcal{H}$), <u>da gælder</u> <u>for vilk.</u> $v \in \mathcal{H}$:
$$s \to (\mathcal{U}_s(v)|v) \text{ \underline{er pos. defin. fkt. på} } G$$

Thi fkt.nen er jo kontin., og for vilk. $x_1, \dots, x_n \in G$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ har vi:

11.70
$$\sum_{i,j} (\mathcal{U}_{x_i - x_j}(v)|v)\, c_i \bar{c}_j = \sum_{i,j} (\mathcal{U}_{x_i}(v)|\mathcal{U}_{x_j}(v))\, c_i \bar{c}_j = \Big(\sum_i c_i \mathcal{U}_{x_i}(v) \Big| \sum_j c_j \mathcal{U}_{x_j}(v)\Big) \geqq 0.$$

Lad nu $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ opfylde (iv).
Beviset for sætn. s. 159 føres ved at fremskaffe Hilbert rum $\mathcal{H}_\varphi$ og repræsentation $s \to \mathcal{U}_s$, så for passende $v \in \mathcal{H}_\varphi$:
$$\varphi(s) = (\mathcal{U}_s(v)|v) \quad \text{lokalt for næsten alle } s.$$

1° Ved $(g|h) = (g|h)_\varphi = \int_{G\times G} \varphi(y-z)g(y)\overline{h(z)}\,d(y,z) = \int_G \varphi\cdot(g*h^*)\,dI, \quad g,h\in \mathcal{K}(G)$
defineres en positiv Hermitisk form i $\mathcal{K}(G,\mathbb{C})$.

Thi at første udtryk har mening, ses som s. 159. Der omregnes som s. 106.
Klart, at $(g|h)$ er sesquilineær.
At den er Hermitisk, dvs. $(g|h)=\overline{(h|g)}$, kommer da ud på $\forall g: (g|g)\in\mathbb{R}$

Idet $(g+h|g+h) = (g|g)+(h|h)+(g|h)+(h|g)$
$(ig+h|ig+h) = (g|g)+(h|h)+i(g|h)-i(h|g)$,
medf. sidstnævnte betingelse nemlig $(g|h)+(h|g)$ reel
$(g|h)-(h|g)$ imaginær

(se også Mat. 6, H.R. s. 4)

Og vi har forudsat (iv), dvs. $(g|g)\geq 0$.

2° $\mathcal{N}_\varphi = \{g\in\mathcal{K} \mid (g|g)_\varphi = 0\}$ er et underrum af $\mathcal{K}$

Spec. fremgår $g+h\in\mathcal{N}_\varphi$ for $g,h\in\mathcal{N}_\varphi$ af $(g+h|g+h)=(g|g)+(h|h)+2\mathrm{Re}(g|h)$
ved Cauchy/Schwarz' ulighed
$$|(g|h)| \leq \|g\|_\varphi \|h\|_\varphi$$
(Mat. 6, H.R. s. 5) med $\|g\|_\varphi = (g|g)^{\frac{1}{2}}$

For $g\in\mathcal{N}_\varphi$ er $(g|h)=0$ for ethv. $h\in\mathcal{K}$ (brug Cauchy/Schwarz).
Dermed er $(g_1|h_1) = (g_2|h_2)$, når $g_2-g_1, h_2-h_1\in\mathcal{N}_\varphi$
idet $(g_2|h_2)-(g_1|h_1) = (g_2|h_2-h_1)+(g_2-g_1|h_1)$

$(\ |\ )_\varphi$ kan følgelig ykkes op på $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$, der fremgår af $\mathcal{K}$ ved klasseinddeling svarende til ækv. relation $g_1 \underset{\varphi}{\sim} g_2 \iff g_2-g_1\in\mathcal{N}_\varphi$.
Betegner vi med g^φ klassen repr. ved g, har vi
$$f^\varphi+g^\varphi = (f+g)^\varphi, \quad af^\varphi = (af)^\varphi, \quad (f^\varphi|g^\varphi)_\varphi = (f|g)_\varphi, \quad \|f^\varphi\|_\varphi = \|f\|_\varphi$$

$\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$ er da et præ Hilbert rum, dvs. $(\ |\ )_\varphi$ er her et „rigtigt indre produkt",
altså $\|f^\varphi\|=0$ kun for $f^\varphi = 0^\varphi = \mathcal{N}_\varphi$

3° $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$ kan nu fuldstændiggøres, dvs. indlejres som tæt del af et Hilbert rum $\mathcal{H}_\varphi$, dvs. afbildes lineært og isometrisk på en tæt del af $\mathcal{H}_\varphi$ (afbildningen er da også injektiv og bevarer indre produkt).
Til konstruktionen kan benyttes fundamentalfølger i $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$ (sml. overgang fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$). Ej udføre (se Mat. 6, TVR s. 54, HR s. 9)

Vi vil tillade os at skrive $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi \subseteq \mathcal{H}_\varphi$

Sml: Analysis II s. 149 ff (seminar)

4° Betragt vilk. $s \in G$.
Translation med s giver lineær bijektiv afbildn. $L_s: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $\quad L_s g(y) = g(y-s)$.
Der gælder $(g|h)_\varphi = (L_s g | L_s h)_\varphi$.

Fremgår ved i udtrykket $\int_{G \times G} \varphi(y-z) g(y) \overline{h(z)}\, d(y,z)$ at erstatte y med $y-s$, derpå z med $z-s$.

Spec. fører L_s da $\mathcal{N}_\varphi$ i sig selv, dermed $L_s(g^\varphi) = (L_s g)^\varphi$.
Afbildn. $L_s: \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi \to \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$ er bijektiv, lineær og bevarer $(\ |\ )_\varphi$

Umiddelbart at verificere.

$L_s: \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi \to \mathcal{H}_\varphi$ har entydig udvidelse til begr. lin. operator $U_s: \mathcal{H}_\varphi \to \mathcal{H}_\varphi$, bestemt ved

$$U_s(\lim_n g_n^\varphi) = \lim_n (L_s g_n)^\varphi \qquad (s. 18)$$

U_s er åbenbart bijektiv og isometrisk (gå til grænsen med $\|g_n\|_\varphi = \|L_s g_n\|_\varphi$), altså en <u>unitær operator</u> i $\mathcal{H}_\varphi$.

5° $s \to U_s$, $s \in G$, er en unitær repræs. af G, $\quad$ altså $U_{s+t} = U_s \circ U_t$.

Thi $L_{s+t} = L_s \circ L_t$
og for vilk. $v \in \mathcal{H}_\varphi$ har vi da, med $v = \lim_n g_n^\varphi$, :

$$U_t(v) = \lim_n L_t(g_n)^\varphi \qquad \text{og videre}$$

$$U_s(U_t(v)) = \lim_n L_s(L_t(g_n))^\varphi = \lim_n L_{s+t}(g_n)^\varphi = U_{s+t}(v).$$

6° Den unitære repr. $s \to U_s$, $s \in G$, er kontin.,
dvs. for ethv. $v \in \mathcal{H}_\varphi$ er fktnen $s \to (U_s(v)|v)_\varphi$, $s \in G$, kontin. (s. 160)

a) Først for $g, h \in \mathcal{K}$ vise: $s \to (L_s g | h)_\varphi = \int_G \varphi \cdot (L_s g * h^*)\, dI$ er (ligeligt) kontin.

$$|(L_s g|h)_\varphi - (L_t g|h)_\varphi| = \left|\int_G \varphi \cdot ((L_s g - L_t g) * h^*)\, dI\right| \leqq \|\ldots\ldots\|_1$$

$$\underset{s.141}{\leqq} \|\varphi\|_\infty \|(L_s g - L_t g) * h^*\|_1 \underset{s.90}{\leqq} \|\varphi\|_\infty \|h\|_1 \|L_s g - L_t g\|_1$$

Påstanden følger således af, at $s \to L_s g$ er (ligelig) kontin. afb. $G \to \mathcal{L}(G)$, s. 94.

b) Da $s \to (U_s(v)|v)_\varphi$, $s \in G$, er (ligeligt) kontin. for hvert v tilh. tæt del af $\mathcal{H}_\varphi$ (nemlig for $v \in \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$, iflg. a)), så også for hvert $v \in \mathcal{H}_\varphi$.

Thi for $u, v \in \mathcal{H}_\varphi$ og vilk. unitær operator U i $\mathcal{H}_\varphi$ er

$$|(U(v)|v) - (U(u)|u)| \leqq |(U(v) - U(u)|v-u)| + |(U(u)|v-u)| + |(U(v) - U(u)|u)|$$

(Cauchy/Schwarz) $\quad \leqq \|U(v) - U(u)\|\,\|v-u\| + \|U(u)\|\,\|v-u\| + \|U(v) - U(u)\|\,\|u\|$

(Unitær) $\quad = \|v-u\|^2 + 2\|u\|\,\|v-u\|$.

Carta. Godement s. 83, 84, Edwards s. 719

Nu betragtes vilk. $u \in \mathcal{H}_\varphi$.

Til $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges $v \in \mathcal{K}_\varphi/\mathcal{N}_\varphi$, så $\|v-u\|^2 + 2\|u\|\|v-u\| < \varepsilon$.

Da er $|(U_s(u)|u) - (U_t(u)|u)|$

$$\leq |(U_s(u)|u) - (U_s(v)|v)| + |(U_s(v)|v) - (U_t(v)|v)| + |(U_t(v)|v) - (U_t(u)|u)|$$

$$< 2\varepsilon + |(U_s(v)|v) - (U_t(v)|v)|$$

$$< 3\varepsilon \quad \text{for } s^{-1}t \text{ tilh. passende omegn af } o \in G.$$

12.11. Den kontin., unitære repræs. $s \to U_s$, $s \in G$, vil vi omtale som den til φ <u>kanonisk associerede</u>. Husk, at også repræsentationsrummet $\mathcal{H}_\varphi$ afhænger af φ.

Eks. For en karakter $\chi \in \hat{G}$ er $\dim \mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi = 1$, dermed $\mathcal{H}_\chi = \mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi$.

thi idet $\|g\|_\chi^2 = \int_{G\times G} \chi(y)\overline{\chi(z)}g(y)\overline{g(z)}\,d(y,z) = \left|\int_G \chi g\, dI\right|^2$,

er $\mathcal{N}_\chi = \{g \in \mathcal{K} \mid \|g\|_\chi = 0\}$ nulrummet for den lin. fkt. $g \to \int_G \chi g\, dI$, $g \in \mathcal{K}$.

Følgelig: $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi$ er $\mathcal{K}$ opdelt i klasser efter værdien af $\int_G \chi g\, dI$.

Bevis for sætning af Gelfand/Raikov.

Lad G være en komm. lokalt kompakt gruppe, I Haar integralet.

Sætningen: En fkt. $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ med egenskaben

(iv) $\int_{G\times G} \varphi(y-z) g(y) \overline{g(z)}\, d(y,z) = \int_G \varphi \cdot (g * g^*)\, dI \geq 0$ for hvert $g \in \mathcal{K}(G)$,

er lokalt ækvivalent med en kontin. pos. definit fkt. (se s. 159)

Bevis. Vi udnytter den til φ kanonisk assoc. kontin. unitære repræs. af G, se s. 161-163; vi vil godtgøre eksistens af et $\varepsilon \in \mathcal{H}_\varphi$, så

$$\varphi(s) = (U_s(\varepsilon)|\varepsilon)_\varphi \quad \text{lokalt for næsten alle } s.$$

Dermed færdig, da jo $s \to (U_s(\varepsilon)|\varepsilon)_\varphi$ kontin., pos. definit (s. 160)

1° For $g, h \in \mathcal{K}$ skal vi særlig benytte det sidste af udtrykkene

$$(g|h)_\varphi = \int_{G\times G} \varphi(y-z) g(y) \overline{h(z)}\, d(y,z) = \int_G \left(\overline{h(z)} \int_G \varphi(y-z) g(y)\, dy \right) dz = \int_G \overline{h} \cdot (\check{\varphi} * g)\, dI.$$

Bemærk, at $\check{\varphi} * g$ er kontin. (s. 143)

2° For hvert V tilh. en basis $\mathcal{U}$ for omegnene af $0 \in G$ tænkes valgt fkt. $\varepsilon_V \in \mathcal{K}^+(G)$ med

$$\varepsilon_V(x) = 0 \text{ for } x \notin V \quad \text{og} \quad \int_G \varepsilon_V\, dI = 1 \qquad \text{(Urysohn og s. 73)}$$

Idet $\mathcal{U}$ ordnes ved $\supseteq$, er $(\varepsilon_V)_{V \in \mathcal{U}}$ iflg. s. 95 en approx. enhed i $L(G)$.

Hvad vi her får brug for, er en simplere egenskab:

$$\int_G \varepsilon_V \cdot f\, dI \to f(0) \quad \text{når } f: G \to \mathbb{C} \text{ er kontin.}$$

Klart, idet $\left|\int_G \varepsilon_V \cdot f\, dI - f(0)\right| = \left|\int \varepsilon_V(x)(f(x) - f(0))\, dx\right|$

$$\leq \int \varepsilon_V(x) |f(x) - f(0)|\, dx \underset{\text{blot } V \text{ tilpas lille.}}{\leq} \int \varepsilon_V(x)\, \delta\, dx = \delta$$

For hvert $g \in \mathcal{K}(G)$ konvergerer $(g|\varepsilon_V)_\varphi$ – nemlig mod $\int_G \varphi g\, dI$.

Thi $(g|\varepsilon_V)_\varphi = \int_G \varepsilon_V \cdot (\check{\varphi} * g)\, dI \to \check{\varphi} * g(0) = \int_G \varphi g\, dI$ –

3° Den lin. fkt. $g \to \int_G \varphi g\, dI$, $g \in \mathcal{K}$, er begr., når vi i $\mathcal{K}$ benytter seminormen $\|\ \|_\varphi$.

Hertil benytte 2°: $\int_G \varphi g\, dI = \lim_V (g|\varepsilon_V)_\varphi$.

Først bemærke, $\{\|\varepsilon_V\|_\varphi \mid V \in \mathcal{U}\}$ er begr., – nemlig af $\|\varphi\|_\infty^{\frac{1}{2}}$,

thi $(\varepsilon_V|\varepsilon_V)_\varphi = \int \varphi \cdot (\varepsilon_V * \varepsilon_V^*)\, dI \leq \|\varphi\|_\infty \|\varepsilon_V * \varepsilon_V^*\|_1 \leq \|\varphi\|_\infty \|\varepsilon_V\|_1 \|\varepsilon_V^*\|_1 = \|\varphi\|_\infty$

Dermed $|(g|\varepsilon_V)_\varphi| \leq \|\varepsilon_V\|_\varphi \|g\|_\varphi \leq \|\varphi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|g\|_\varphi$, følgelig $|\int_G \varphi g \, dI| \leq \|\varphi\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|g\|_\varphi$.
2° benyttes ikke mere i beviset.

4° Da den lin. fkt. $g \to \int_G \varphi g \, dI$ begr. ved brug af $\| \ \|_\varphi$, kan den opfattes som defin. på $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$, hvorpå den har (entydig) udvidelse til begr. lin. fkt. på $\mathcal{H}_\varphi$ (s. 18). Ved anvendelse af Frechet/Riesz' sætning (s. 145) får vi da:

Der findes et $\varepsilon \in \mathcal{H}_\varphi$, så $(g^\varphi|\varepsilon)_\varphi = \int \varphi g \, dI$ for ethv. $g \in \mathcal{K}(G)$.

Iøvrigt er der kun et ε med denne egenskab:

$$(g^\varphi|\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_\varphi = 0 \text{ for hvert } g \in \mathcal{K} \Rightarrow (\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_\varphi = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Vi skal se, at det er brugbart til vort bevis (se indledn.)

5° For $g \in \mathcal{K}(G)$, $s \in G$ er $(g^\varphi|U_s(\varepsilon))_\varphi = \check{\varphi} * g(s)$.

Nemlig $(g^\varphi|U_s(\varepsilon))_\varphi = (U_{-s}(g^\varphi)|U_0(\varepsilon))_\varphi = ((L_{-s}g)^\varphi|\varepsilon)_\varphi$

$$= \int_G \varphi \cdot L_{-s}g \, dI = \int_G L_s\varphi \cdot g \, dI = \int_G \varphi(x-s)g(x)\,dx = \check{\varphi} * g(s). -$$

For $f, g \in \mathcal{K}(G)$ er da $(f|g)_\varphi = \int_G f(s)\,(U_s(\varepsilon)|g^\varphi)_\varphi \, ds$.

Nemlig $(g|f)_\varphi = \int_G \bar{f} \cdot (\check{\varphi} * g) \, dI = \int_G \overline{f(s)}\,(g^\varphi|U_s(\varepsilon))_\varphi \, ds$. -

For $f \in \mathcal{K}(G)$, $v \in \mathcal{H}_\varphi$ gælder

$$(*) \qquad (f^\varphi|v)_\varphi = \int_G f(s)\,(U_s(\varepsilon)|v)_\varphi \, ds.$$

Thi for fast $f \in \mathcal{K}$ kendes (*) for $v \in \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$, som er tæt i $\mathcal{H}_\varphi$.
Venstre side er kontin. fkt. af v,
og det samme gælder højre side (eksistens klar, integrand tilh. $\mathcal{K}$), idet

$$\left|\int f(s)(U_s(\varepsilon)|v)\,ds - \int f(s)(U_s(\varepsilon)|u)\,ds\right| \leq \int |f(s)|\,|(U_s(\varepsilon)|v-u)|\,ds$$

$$\leq \int |f(s)|\,\|\varepsilon\|_\varphi \|v-u\|_\varphi \, ds = \|\varepsilon\|_\varphi \|v-u\|_\varphi \|f\|_1.$$

11.70
(s. 148
[illegible]

6° Med $v = \varepsilon$ giver (*), idet vi erindrer 4°:

$$\int \varphi f \, dI = (f^\varphi|\varepsilon)_\varphi = \int (U_s(\varepsilon)|\varepsilon) f(s)\,ds \quad \text{for hvert } f \in \mathcal{K}(G).$$

De til φ, henh. $s \to (U_s(\varepsilon)|\varepsilon)$ svarende begr. lin. fkt.naler på $L(G)$ stemmer altså overens på den tætte del $\mathcal{K}$ og er dermed identiske.
Men så er (s. 150 nederst)

$$\varphi(s) = (U_s(\varepsilon)|\varepsilon)_\varphi \quad \text{lokalt for næsten alle } s. \quad \text{Bevis fuldført.}$$

Til senere brug (s. 170) endnu noteres:

Der er ikke andre $v \in \mathcal{H}_\varphi$ med $(U_s(\varepsilon)|v)_\varphi = 0$ for hvert $s \in G$ end $v = 0$.

(Anderledes sagt: $\{U_s(\varepsilon) | s \in G\}$ er total, Mat. 6, HR s. 16)

Følger af (*), som giver $(u|v) = 0$ for $u = f^\varphi$, dvs. for hvert $u \in \mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$, hvor jo $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\varphi$ er tæt i $\mathcal{H}_\varphi$.

Er φ kontin., gælder $\varphi(s) = (U_s(\varepsilon)|\varepsilon)_\varphi$ for alle $s \in G$.

Sætningen sammenholdt med (i) ⇔ (iv), s. 103, giver, at fkt. $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(G)$ er lokalt ækvivalent med kontin., pos. definit fkt., netop hvis

(iv) $\forall g \in \mathcal{K}(G)$: $\int_G \varphi \cdot (g * g^*)\, dI \geq 0$.

<u>Corollar:</u> <u>Mgd. $\mathcal{P}^+$ af kontin. pos. definite fkt.r på G indlejres i $\mathcal{L}^\infty(G)$ som en afsluttet del ved den svage topologi.</u> Kort: $\mathcal{P}^+$ <u>er svagt afsluttet i $\mathcal{L}^\infty$.</u>

Thi klart at $\{\varphi \in \mathcal{L}^\infty \mid \forall g \in \mathcal{K}: \int \varphi \cdot (g * g^*)\, dI \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ er svagt afsluttet i $\mathcal{L}^\infty$.

For hvert $f \in \mathcal{L}$ er nemlig $\varphi \to \int \varphi f\, dI$, $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$, kontin., idet vi i $\mathcal{L}^\infty$ benytter svage topologi (sml. s. 157):

origin. mgd. til $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \int \varphi_0 f\, dI| < \varepsilon\}$ er jo $\{\varphi \in \mathcal{L}^\infty \mid |\int \varphi f\, dI - \int \varphi_0 f\, dI| < \varepsilon\}$, altså omegn af φ_0 i svage topol.

Da nu $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ er afsluttet, så også originalmgd. $\{\varphi \in \mathcal{L}^\infty \mid \int \varphi f\, dI \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ afsl. i $\mathcal{L}^\infty$ ved svage topologi.

<u>Anvendelse af Krein/Milmans sætn.</u>

Lad G være en komm. lokalt komp. gruppe.

$\mathcal{L}^\infty(G,\mathbb{C})$ er med den svage topologi (s. 152) et topologisk vektorrum, dvs. kompositionerne $(f,g) \to f+g$, $(a,f) \to af$ er kontin. Det er lokalt konvekst, dvs. de konvekse omegne af 0 udgør en basis for omegnene af 0. Topologien er Hausdorff.

Thi $\mathcal{L}^\infty(G)$ kan identificeres med det duale rum til $\mathcal{L}^1(G)$, og ovennævnte egenskaber findes hos alle vektorrum af fktner med topologien for pktvis konvergens. Let at verificere; spec. findes blandt de konvekse omegne af 0 fællesmgdr af end. mange $\{H \mid |H(k)| < \varepsilon\}$.

Betragtet som vektorrum over $\mathbb{R}$ er $\mathcal{L}^\infty(G,\mathbb{C})$ med uændret topologi naturligvis stadig et lokalt konvekst Hausdorff topologisk vektorrum.

<u>Mgd.</u> $\mathcal{P}_0 = \{f \in \mathcal{P}^+ \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ <u>af kontin. positiv definite fktr</u> $f: G \to \mathbb{C}$ <u>med</u> $\|f\|_\infty \leq 1$ <u>er konveks og kompakt ved den svage topologi i</u> $\mathcal{L}^\infty(G,\mathbb{C})$.

Thi indlejret i $\mathcal{L}^\infty(G)$ er $\mathcal{P}_0$ fællesmgd. af $\mathcal{P}^+$ og enhedskuglen, hvor $\mathcal{P}^+$ er svagt afsluttet (s. 166) konveks kegle, og enhedskuglen er svagt kompakt (s. 152) og konveks.

Vi kan da anvende

<u>Krein/Milmans sætning (1940). Lad A være en kompakt og konveks mgd. i et lokalt konvekst Hausdorff topologisk vektorrum V over $\mathbb{R}$. En afsluttet konveks del af V, der indeholder de ekstreme pkt.r af A, vil da indeholde hele A</u> (A er det afsluttede konvekse hylster for sine ekstreme pkt.r)

At A er <u>konveks</u>, betyder som bekendt

$$a, b \in A,\ 0 < t < 1 \quad \text{medf.} \quad (1-t)a + tb \in A$$

At et pkt. $x \in A$ er <u>ekstremt pkt.</u> af A betyder, at x <u>ikke</u> kan skrives

$$x = (1-t)a + tb \quad \text{med } a, b \in A,\ 0 < t < 1 \text{ og } a \neq b.$$

Vedr. bevis for Krein/Milmans sætn. kan anbefales Kelleys (Journ. Osaka Inst. of Sci. Tech. 3 (1951), p. 1-2; også i Edwards p. 707). Zorns lemma og Hahn-Banachs sætn benyttes.

bevis også: Lang, Analysis II s. 80 ff. efter Arens ...

Herved fås:

<u>En svagt afsluttet, konveks del af $\mathcal{P}_0$, der indeholder alle ekstreme elementer af $\mathcal{P}_0$, er hele $\mathcal{P}_0$.</u>

De ekstreme elementer af $\mathcal{P}_0$.

Lad G være en komm., lokalt komp. gruppe.

Som vi ved (s. 156), er mgd. $\hat{G}$ af karakterer indeholdt i mgd. $\mathcal{P}_0$ af kontin., pos. defin. fkt.r $\varphi: G \to \mathbb{C}$ med $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Vi skal se, at $\hat{G} \cup \{0\}$ netop omfatter

11.70 de ekstreme elem. i $\mathcal{P}_0$.

Starte beskedent:

Intet $\varphi \in \mathcal{P}^+$ med $0 < \|\varphi\|_\infty < 1$ er ekstremt i $\mathcal{P}_0$.

Thi φ tilh. det åbne liniestykke mellem 0 og $\varphi/\|\varphi\|_\infty$.

Nulfkt.nen 0 er ekstremt element i $\mathcal{P}_0$, endda i $\mathcal{P}^+$.

Minde om, at $\|\varphi\|_\infty = \varphi(0)$ for $\varphi \in \mathcal{P}^+$.

En umiddelbar konsekvens er: $\|\varphi+\psi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty$ for $\varphi, \psi \in \mathcal{P}^+$.

Nu: er $0 = (1-t)\varphi + t\psi$ med $\varphi, \psi \in \mathcal{P}^+, 0<t<1$,

så også $0 = (1-t)\|\varphi\|_\infty + t\|\psi\|_\infty$, altså $\|\varphi\|_\infty = \|\psi\|_\infty = 0$, dvs. $\varphi = \psi = 0$.

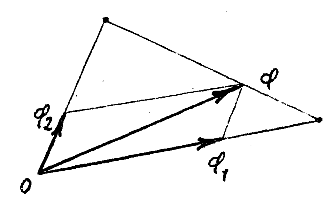
Tilbage står at undersøge, hvilke $\varphi \in \mathcal{P}^+$ med $\|\varphi\|_\infty = 1$, der er ekstreme i $\mathcal{P}_0$.

Indføre hjælpebegreb: En pos. def. fkt. $\varphi \neq 0$ kaldes <u>elementær</u>, hvis den ikke har andre spaltninger $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}^+$, end de trivielle $\varphi = (1-a)\varphi + a\varphi$, $0 \leq a \leq 1$

<u>En fkt. $\varphi \in \mathcal{P}^+$ med $\|\varphi\|_\infty = 1$ er ekstremt elem. i $\mathcal{P}_0$, netop hvis den er elementær.</u>

Bevis. For vilk. spaltning $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}^+ \setminus \{0\}$,

har vi
$$\varphi = \|\varphi_1\| \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} + \|\varphi_2\| \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}, \quad \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}, \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|} \in \mathcal{P}_0$$

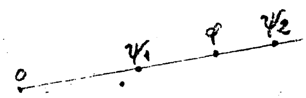


med $\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| = \|\varphi\| = 1$.

Er φ ekstrem, må $\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|} = \varphi$; spaltningen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ er altså triviel

Antag omvendt φ elementær. For vilk. fremstilling
$$\varphi = \underbrace{(1-t)\psi_1}_{} + \underbrace{t\psi_2}_{} \quad \text{med } \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{P}^+, 0<t<1, \psi_1 \neq \psi_2$$
er da spaltningen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ triviel;

følgelig ligger ψ_1 og ψ_2 på strålen $\{s\varphi \mid s \in \mathbb{R}_+\}$.



Derfor vil $\max(\|\psi_1\|, \|\psi_2\|) > \|\varphi\| = 1$, således at ψ_1, ψ_2 ikke begge kan tilh. $\mathcal{P}_0$.

Vor egt. påstand er nu ført tilbage til at vise, at de elementære pos. defin. fkt.r φ med $\|\varphi\|_\infty = 1$ netop er gruppekaraktererne.

Nu:

Enhver karakter $\chi \in \hat{G}$ er elementær.

Bevis. Betragte vilk. spaltning $\chi = \varphi + \psi$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}^+$. Vise $\psi = c\chi$ med $0 \leq c \leq 1$.

For hvert $g \in \mathcal{K}$ er $\|g\|_\chi^2 = \|g\|_\varphi^2 + \|g\|_\psi^2$, spec. $\|g\|_\psi \leq \|g\|_\chi$.
Dermed $\mathcal{N}_\chi \subseteq \mathcal{N}_\psi$, altså $g_1 \underset{\chi}{\sim} g_2 \Rightarrow g_1 \underset{\psi}{\sim} g_2$. Heraf følger, at $(\ |\ )_\psi$ kan rykkes op fra $\mathcal{K}$ til pos. Hermitesk form $(\ |\ )_\psi$ på $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi$, ligesom $(\ |\ )_\chi$.
Da vektorrummet $\mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi$ er 1-dim. iflg. eks. s. 163, sluttes $(u|v)_\psi = c(u|v)_\chi$ for $u, v \in \mathcal{K}/\mathcal{N}_\chi$, altså

$$(g|h)_\psi = c\,(g|h)_\chi \quad \text{for } g, h \in \mathcal{K},$$

hvor c er et fast tal, åbenbart $c \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
Med fkt.n $\varepsilon_V \in \mathcal{K}^+(G)$ som i 2°, s. 164, har vi for hvert $g \in \mathcal{K}$

$$\int_G \psi g \, dI = \lim_V (g|\varepsilon_V)_\psi, \quad \int_G \chi g \, dI = \lim_V (g|\varepsilon_V)_\chi.$$

Følgelig $\int_G \psi g \, dI = \int_G c\chi g \, dI$ for hvert $g \in \mathcal{K}$, hvoraf $\psi = c\chi$.
At $c \leq 1$, følger af $c = \psi(0)$, $\varphi(0) + \psi(0) = 1$ og $\varphi(0) \geq 0$.

Herefter stiler vi mod omvendt at vise: enhv. elem. fkt. $\varphi \in \mathcal{P}^+$ med $\|\varphi\|_\infty = 1$ tilh. $\hat{G}$.
Først:

Er $\varphi \in \mathcal{P}^+$ elementær, da er den til φ kanon. assoc. kontin., unitære repr. $s \to U_s$, $s \in G$, irreducibel, dvs. $\{0\}$ og $\mathcal{H}_\varphi$ er de eneste afsluttede underrum af $\mathcal{H}_\varphi$, som er stabile ved hver af operatorerne $U_s : \mathcal{H}_\varphi \to \mathcal{H}_\varphi$.

Cartan/Godement s. 85

Bevis. Lad V være et afsl. underrum, stabilt ved hvert U_s,
dvs. $U_s(v) \in V$ for hvert $v \in V$, $s \in G$.
Da er også $V^\perp = \{u \in \mathcal{H}_\varphi \mid \forall v \in V : (u|v)_\varphi = 0\}$ stabilt, idet $(U_s u|v) = (u|U_{s^{-1}} v)$.
afsl. underrum, $V \oplus V^\perp = \mathcal{H}_\varphi$ (Mat. 6, H.R. s. 13-15).

12.'70

Med P betegne ortog. proj. på V (altså langs $V^\perp$), med Q proj. på $V^\perp$. Vi har
$(u|Pv) = (Pu|Pv) = (Pu|v)$, idet $(u - Pu|Pv) = (Qu|Pv) = 0$
$\forall s \in G : U_s \circ P = P \circ U_s$, idet $U_s P v = P U_s P v = P U_s (v - Qv) = P U_s v$ (Mat. 6, Oper. s. 16);

så HR s. 38

ligeså for Q.

Idet nu $\varepsilon \in \mathcal{H}_\varphi$ tænkes bestemt som s. 165, gælder for hvert $s \in G$ (s. 166)

$$\varphi(s) = (U_s\varepsilon|\varepsilon)_\varphi = (U_s\varepsilon|P\varepsilon) + (U_s\varepsilon|Q\varepsilon)$$

Her er $s \to (U_s\varepsilon|P\varepsilon) = (PU_s\varepsilon|P\varepsilon) = (U_s(P\varepsilon)|P\varepsilon)$, $s \in G$, pos. definit (s. 160),
$s \to (U_s\varepsilon|Q\varepsilon)$, $s \in G$, ligeledes.

Er φ elementær, må spaltningen være triviel (s. 168), dvs.

$$\forall s \in G: (U_s\varepsilon|P\varepsilon)_\varphi = c(U_s\varepsilon|\varepsilon)_\varphi \qquad \text{med } 0 \leqq c \leqq 1$$

altså $\forall s \in G: (U_s\varepsilon|P\varepsilon - c\varepsilon)_\varphi = 0$

Nu ved vi (s. 166): $\forall s \in G: (U_s\varepsilon|v)_\varphi = 0$ indtræffer kun for $v = 0$ (*).

Altså sluttes $P\varepsilon = c\varepsilon$. Da $P^2 = P$ (og $\varepsilon \neq 0$), må c være 0 ell. 1.

Er $P\varepsilon = 0$, har vi $\varepsilon \in V^\perp$, dermed alle $U_s\varepsilon \in V^\perp$. Iflg. (*) er da $V = \{0\}$.
Er $P\varepsilon = \varepsilon$, har vi $\varepsilon \in V$, dermed alle $U_s\varepsilon \in V$. Iflg. (*) er da $V^\perp = \{0\}$,
altså $V = \mathcal{H}_\varphi$.

Vi indskyder et afsnit om irreducibilitet:

Lad her $\mathcal{H}$ være et Hilbert rum (over $\mathbb{C}$) og $\mathcal{T}$ en mgd. af begr. lin. afbildnger $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Man kalder $\mathcal{T}$ <u>irreducibel</u>, hvis $\{0\}$ og $\mathcal{H}$ er de eneste afsluttede underrum af $\mathcal{H}$, som er stabile ved hver af operatorerne $T \in \mathcal{T}$.

Det fundamentale hjælpemiddel for det følgende er

<u>Schurs lemma.</u> <u>Hvis $\mathcal{T}$ er irreducibel, så er operatorerne $A = cI$, hvor $c \in \mathbb{R}$ og I den identiske afb. af $\mathcal{H}$, de eneste Hermitiske begr. lin. afb. $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, hvor</u>

$$A \circ T = T \circ A \quad \text{for ethv. } T \in \mathcal{T}.$$

A hermitisk betyder $\forall u, v \in \mathcal{H}: (Au|v) = (v|Au)$

Beviset bygger på spektralteori (Mat. 6 tilstr. Se iøvrigt Lang: Analysis II).
Vi viser sætningen på kontraponeret form: antager altså, at der eksisterer en hermitesk operator A som nævnt, der ikke har formen cI

1° Spektret $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ indeholder c_1, c_2 med $c_1 \neq c_2$.
Thi hvis to polynomier $p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n$ og $q_0 + \ldots + q_m z^m$ stemmer for $z \in \sigma(A)$, så er $p_0 I + p_1 A + \ldots + p_n A^n = q_0 I + \ldots + q_m A^m$ (Op. H. 48)
Var der kun ét elem. $c \in \sigma(A)$, ville polynom. z og c give $A = cI$.

2° For enhv. kontin. fkt. $f: \sigma(A) \to \mathbb{C}$ defineres operator $f(A): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, nemlig først for f = restriktion af polyn. til $\sigma(A)$, jfr. 1°, derpå udvidelse ved kontinuitet
(Se nærmere Mat. 6, Op. H. s. 48-51 ell. Lang s. 169)

Som s. 173

Der gælder:

$f(A)\circ T = T\circ f(A)$ for hvert $T\in\mathfrak{T}$,

thi for fast T gælder dette, når f er (restriktion af) polynomium; udvidelse til vilk. f ved grænseovergang

$f(A)(\mathcal{H})$ er stabilt underrum ved hvert $T\in\mathfrak{T}$,

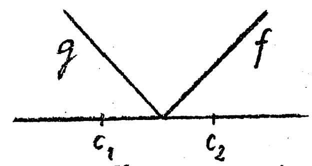
thi $T(f(A)(\mathcal{H})) = f(A)(T(\mathcal{H})) \subseteq f(A)(\mathcal{H})$.

Afslutningen af $f(A)(\mathcal{H})$ er da også stabilt ved hvert $T\in\mathfrak{T}$.

3° Vælge to kontin. fkt.r $f, g : \sigma(A)\to\mathbb{C}$, så

$f\neq 0$, $g\neq 0$, men $fg=0$,

f.eks. restriktioner af skitserede:



At $\mathfrak{T}$ ikke er irreducibel, ses nu ved, at afslutningen $\mathfrak{F}$ af $f(A)(\mathcal{H})$

som jo er afsl. underrum, stabilt ved hvert $T\in\mathfrak{T}$, hverken er $\{0\}$ ell. $\mathcal{H}$.

$\mathfrak{F}\supset\{0\}$; thi da $f\neq 0$, så er $f(A)\neq$ nuloperator (Op.H. s.49).

$\mathfrak{F}\subset\mathcal{H}$; thi da $gf=0$, er $g(A)\circ f(A) = (gf)A =$ nuloper. (Op.H. s.49),

altså $g(A)(f(A)(\mathcal{H}))=\{0\}$, og dermed $g(A)(\mathfrak{F})=\{0\}$.

Da $g\neq 0$ og dermed $g(A)\neq$ nuloperator, sluttes $\mathfrak{F}\subset\mathcal{H}$.

Corollar. Hvis $\mathfrak{T}$ er irreducibel, så er operatorerne $U = cI$, hvor $c\in\mathbb{C}$, $|c|=1$, de eneste unitære $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, hvor $U\circ T = T\circ U$ for ethv. $T\in\mathfrak{T}$.

Konsekvensen i denne implikation følger nemlig af konsekvensen i Schurs lemma:

Er $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ unitær, så er $U = \underbrace{\tfrac{1}{2}(U+U^{-1})}_{\text{hermitesk}} + i\,\underbrace{\tfrac{1}{2i}(U-U^{-1})}_{\text{hermitesk}}$,

og er U ombyttelig med T, så også U^{-1} og dermed $\frac{1}{2}(U+U^{-1})$, $\frac{1}{2i}(U-U^{-1})$.

Klart at $U=cI$ unitær kræver $|c|=1$.

Anvendelse. Lad $s\to U_s$, $s\in H$ være en irreducibel unitær repræsentation af en komm. gruppe H med Hilbert rum $\mathcal{H}$ som repræs.rum,

altså $U_s:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ unitær, $U_{s+t} = U_s\circ U_t$ og $\mathfrak{T}=\{U_s \mid s\in H\}$ irreduc.

For vilk. $s\in H$ er U_s ombyttelig med hvert U_t, $U_s\circ U_t = U_{s+t} = U_t\circ U_s$

Iflg. corollaret er da $U_s = c(s)I$ med $|c(s)|=1$.

Det 1-dim. underrum af $\mathcal{H}$ frembragt af vilk. valgt vektor $u\neq 0$ er afsluttet i $\mathcal{H}$ (nemlig fuldstændigt) og stabilt ved hvert U_s, følgelig er det identisk med $\mathcal{H}$.

Hermed har vi vist:

Enhver irreducibel unitær repræsentation af en komm. gruppe er 1-dimensional, dvs. repræsentationsrummet er 1-dimensionalt.

12.70

Idet vi nu atter betragter den vilk. komm., lokalt komp. gruppe G, kan vi slutte:

Enhver elementær pos. defin. fkt. $\varphi \in \mathcal{P}^+(G)$ med $\|\varphi\|_\infty = 1$ er en karakter.

Bevis. For vilk. elementær $\varphi \in \mathcal{P}^+$ er den til φ kanon. assoc. kontin. unitære repræs. $s \to \mathcal{U}_s$, $s \in G$, irreducibel (s. 169).
Iflg. ovenstående er da repræsentationsrummet $\mathcal{H}_\varphi$ 1-dimensionalt, spec. er $\mathcal{U}_s = \chi(s) I$ med $|\chi(s)| = 1$.

Klart, at $\chi \in \hat{G}$,
idet $\mathcal{U}_{s+t} = \mathcal{U}_s \circ \mathcal{U}_t$ giver $\chi(s+t) I = \chi(s)\chi(t) I$, altså $\chi(s+t) = \chi(s)\chi(t)$,
medens χ kontin. følger af $(\mathcal{U}_s e | e)_\varphi = \chi(s)$ med fast enhedsvektor $e \in \mathcal{H}_\varphi$.

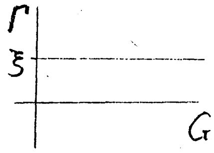
Med et passende $\varepsilon \in \mathcal{H}_\varphi$ er imidlertid $\varphi(s) = (\mathcal{U}_s \varepsilon | \varepsilon)_\varphi$ for alle $s \in G$ (s. 166),
speciel $\|\varphi\|_\infty = \varphi(0) = (\varepsilon|\varepsilon)_\varphi$, altså $\varphi(s) = \chi(s) \|\varphi\|_\infty$.
Er $\|\varphi\|_\infty = 1$, har vi $\varphi = \chi \in \hat{G}$.

Vi sammenfatter. Sætning:

De ekstreme elementer i mgd. $\mathcal{P}_1(G)$ af pos. defin. fkt.r $\varphi : G \to \mathbb{C}$ med $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ er netop nulfkt.nen og karaktererne $\chi \in \hat{G}$.

Afslutning af bevis for Bochners sætning.

Om $d: G\times\Gamma \to \mathbb{C}$ med G, Γ komm. topolog. grupper, G lok. kompakt, forudsætte



d_2, altså $\xi \to \langle\cdot,\xi\rangle$, er en homeomorf isomorfi af Γ på $\hat{G}$.

Her er skrevet $\langle x,\xi\rangle$ for $d(x,\xi)$.

For $J \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ er $\mathcal{F}J$ fkt.nen $x \to \int_\Gamma \overline{\langle x,\xi\rangle}\, dJ(\xi)$, $x \in G$ (s. 124)

Hertil minde om: Jflg. s. 116 ell. 156 er $\hat{G}$ og dermed Γ lokalt komp.

Samt (s. 121): d kontin., $|\langle x,\xi\rangle| = 1$

$\langle x+y,\xi\rangle = \langle x,\xi\rangle\cdot\langle y,\xi\rangle$, $\langle x,\xi+\eta\rangle = \langle x,\xi\rangle\cdot\langle x,\eta\rangle$.

Vi ved, $\mathcal{F}J$ er pos. definit for vilk. pos. J, altså $\mathcal{F}J \in \mathcal{P}^+(G)$ for $J \in \mathcal{M}^1_+(\Gamma)$, s. 125.

<u>Bochners sætning:</u> <u>Enhver pos. definit fkt. på G er Fourier transformeret af et pos. begr. Radon integral på Γ.</u> (Jfr. s. 126, 127)

Sammenholdt med entydighedssætn. s. 158 har vi således:

$\mathcal{F}: \mathcal{M}^1_+(\Gamma) \to \mathcal{P}^+(G)$ bijektiv, $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(\Gamma) \to \mathcal{P}(G)$ bijektiv.

Bevis for Bochners sætn.

1° Da $\mathcal{K}(\Gamma)$ er tæt i $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ ved uniforme norm, har $J \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ entydig udvidelse til begr. lin. fkt.nal $J: \mathcal{C}_0(\Gamma) \to \mathbb{C}$.

Vi kan altså opfatte $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ som det duale rum til $\mathcal{C}_0(\Gamma)$, jfr. s. 20,
spec. vil vi i $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ som <u>svag topologi</u> benytte topologien for konvergens „pkt.vis" på $\mathcal{C}_0(\Gamma)$.

Vi skal benytte, at enhedskuglen $\{J \in \mathcal{M}^1(\Gamma) \mid M_J \leq 1\}$ er kompakt i denne svage topologi (s. 152).

2° Fourier transformationen $\mathcal{F}: \mathcal{M}^1(\Gamma) \to \mathcal{C}^b(G)$ er kontinuert, når vi i $\mathcal{M}^1(\Gamma)$ benytter den svage topol., i $\mathcal{C}^b(G)$ den svage topol. fra $\mathcal{L}^\infty$.

Hertil benytte, at $J(\mathcal{F}f) = \int_G f\cdot\mathcal{F}J\, dI$ for $J \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$, $f \in \mathcal{L}(G)$, som udregnet s. 158.

Nemlig: Nok for vilk. $J_0 \in \mathcal{M}^1(\Gamma)$ samt vilk. $f \in \mathcal{L}(G)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, at vise, at $\mathcal{F}^{-1}(\{g \in \mathcal{C}^b \mid |\int fg\, dI - \int f\cdot\mathcal{F}J_0\, dI| < \varepsilon\})$ er omegn af J_0 i svage topol. i $\mathcal{M}^1$.

Imidlertid: $\mathcal{F}^{-1}(\{\quad\}) = \{J \in \mathcal{M}^1(\Gamma) \mid |\int f\cdot\mathcal{F}J\, dI - \int f\cdot\mathcal{F}J_0\, dI| < \varepsilon\}$

$= \{J \in \mathcal{M}^1(\Gamma) \mid |J(\mathcal{F}f) - J_0(\mathcal{F}f)| < \varepsilon\}$.

NB. Bemærk, hvorfor vi i 1° inddrog $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ i stedet for $\mathcal{K}(\Gamma)$.

3° Vort mål er at vise $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_+^1(\Gamma)) = \mathcal{P}^+(G)$

Idet der for $J \in \mathcal{M}_+^1(\Gamma)$ gælder $\|\mathfrak{F}J\|_\infty = \mathfrak{F}J(0) = \int_G 1\,dJ = M_J$, er dette ensbet. med

$\mathfrak{F}(\mathcal{M}_0(\Gamma)) = \mathcal{P}_0(G)$, hvor $\mathcal{M}_0(\Gamma) = \{J \in \mathcal{M}_+^1(\Gamma) \mid M_J \leq 1\}$.

Hertil benyttes Krein/Milmans sætn., s. 167.

Vi ved $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_0(\Gamma)) \subseteq \mathcal{P}_0(G)$. Videre:

4° $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_0(\Gamma))$ er afsluttet i $\mathcal{P}_0(G)$ ved svage topol. fra L^∞, nemlig kompakt.

Begrundelse:

$\mathcal{M}_+^1$ er svagt afsluttet i $\mathcal{M}^1$.

Thi for hvert $f \in \mathcal{C}_0$ er $J \to J(f)$, $J \in \mathcal{M}^1$, kontin. ved svage topol. i $\mathcal{M}^1$,

og $\mathcal{M}_+^1 = \{J \in \mathcal{M}^1 \mid \forall f \in \mathcal{K}^+ : J(f) \geq 0\} = \bigcap_{f \in \mathcal{K}^+} \{J \in \mathcal{M}^1 \mid J(f) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$.

$\mathcal{M}_0$ er svagt kompakt.

Thi $\mathcal{M}_0$ er fællesmgd. af $\underset{\text{afsluttet}}{\mathcal{M}_+^1}$ og enhedskuglen i $\underset{\text{kompakt}}{\mathcal{M}^1}$.

Påstanden følger nu af 2°.

5° $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_0(\Gamma))$ er konveks

Thi $\mathcal{M}_0$ er konveks, idet $\mathcal{M}_+^1$ er konveks kegle og enhedskugle er konveks.

Og $\mathfrak{F}$ er lineær.

6° $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_0(\Gamma))$ indeholder alle ekstreme elem. af $\mathcal{P}_0$.

Thi iflg. sætn. s. 172 udgør de ekstreme elem. $\hat{G} \cup \{0\}$.

Her er $0 = \mathfrak{F}0$,

og da $d_2 : \Gamma \to \hat{G}$ er surjektiv, kan enhv. karakter χ skrives

$$\chi = \langle \cdot, \xi \rangle = \mathfrak{F}\delta_{-\xi},$$

idet $\mathfrak{F}\delta_{-\xi}(x) = \int_\Gamma \overline{\langle x, \eta \rangle}\, d\delta_{-\xi}(\eta) = \overline{\langle x, -\xi \rangle} = \langle x, \xi \rangle$

12.7a

Litteratur.

Grundlæggende:

André Weil: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris 1940.

D. A. Raikow: Die harmonische Analyse auf kommutative Gruppen. Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis, Berlin 1954 (Moskva 1945).

H. Cartan / R. Godement: Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens. Ann. Sci. École Norm. Sup. 64, 79-99 (1947)

Andre fremstillinger:

Gelfand / Raikow / Schilow: Kommutative normierte Algebren. Berlin 1964 (Moskva 1946).

Lynn H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis. Princeton N.J. 1953.

M. A. Neumark: Normierte Algebren. Berlin 1959 (Moskva 1956).

Videregående:

Guichardet: Analyse harmonique commutative, Paris 1968

Reiter: Classical harmonic analysis and locally compact groups. Oxford 1968.

Rudin: Fourier analysis on groups. New York 1962.

Oversigt:

Braconnier: L'analyse harmonique dans les groupes abeliens Enseignement mathématique, Genève 1956.

Beviset i V er taget fra Cartan / Godement, hvor også de øvrige i IV formulerede sætninger er bevist (p. 90-95).
Se også Edwards: Functional analysis p. 715-732. New York 1965.