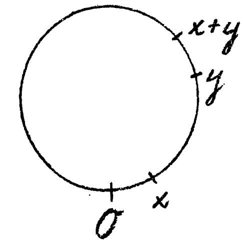
Fourier rækker

Forelæsninger af Tage Gutmann Madsen 1968-69

§1. Hvorfor $\cos nx$, $\sin nx$, e^{inx} ?



Cirkelgruppen

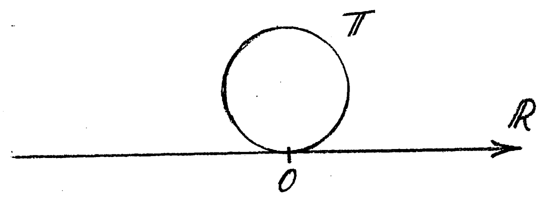
Anskueligt: Cirkelgruppen er en cirkelperiferi $\mathbb{T}$ (1-dim. torus) med komposition $+$ svarende til et valgt begyndelsespkt. $0 \in \mathbb{T}$ som antydet på figuren.
Som topologi i $\mathbb{T}$ benyttes cirkelperiferiens sædvanlige, induceret fra planen eller bestemt ved metrikken

dist(x,y) = længde af mindste cirkelbue mellem x og y.

Undertiden kan det spille en rolle at tænke sig valgt et omløb.

Aritmetiske eksemplarer:

1. $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot,$ topologi induceret fra $\mathbb{C}$).
2. $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ er undergruppe i $(\mathbb{R},+)$, naturligvis normal. Kvotientgruppen $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ består af sideklasserne, svarende til ækvivalensrelationen $x \sim y \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}: x + p2\pi = y$, med addition ved repræsentanter; den kanoniske afbildning $\varkappa: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, hvor $\varkappa(x)$ = klassen indeholdende x, er da homomorf.
   Topologi: $A \subseteq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ regnes åben, hvis $\underbrace{\varkappa^{-1}(A)}_{\text{mgd. af } x \in \mathbb{R} \text{ tilh. klasser } \in A}$ er åben i $\mathbb{R}$;
   herved opnås, at $\varkappa: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ er kontinuert



Forbindelse: ved at „oprulle" $\mathbb{R}$ på enhedscirkel $\mathbb{T}$ fås korrespondance mellem $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ og $\mathbb{T}$, isomorf og bikontinuert
Med komplekse enhedscirkel som $\mathbb{T}$ er oprulningen $\quad x \to e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cirkelgruppen fremkommer altså af ($\mathbb{R}$,+, sædv. topologi), når man undlader at skelne mellem pkt.r, der afviger med helt multiplum af 2π.

NB. Enhver restriktion af „oprulningen" $\varkappa: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ til interval af længde $< 2\pi$ (endda til åbent interval af længde 2π) er bikontinuert.

PS. Enhver kvotientgruppe $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ med $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ er selvfølgelig et eksemplar af cirkelgruppen.
Øvelse. Vis, at $a\mathbb{Z}$ for $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ er de eneste afsluttede undergrupper af $(\mathbb{R},+)$ ud over $\mathbb{R}$ og $\{0\}$.

Periodiske funktioner.

En afbildning f defin. på $\mathbb{R}$ kaldes periodisk m. periode 2π, hvis
$$\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x+2\pi) = f(x).$$
Der findes da én afbildning $\tilde{f}$ defineret på $\mathbb{T}$, så $f = \tilde{f} \circ \varkappa$.
Herved fås en entydig korrespondance $f \leftrightarrow \tilde{f}$ mellem period. fktr på $\mathbb{R}$ og fkt.r på $\mathbb{T}$.

Når $f \leftrightarrow \tilde{f}$, gælder:
$$f \text{ kontinuert i } x \iff \tilde{f} \text{ kontinuert i } \varkappa(x),$$
thi sammentræk f og $\varkappa$ til intervaller om x.

Differentiabilitetsegenskaber for $\tilde{f}$ i omegn af $\varkappa(x)$ kan uden betænkning „lånes" hos f i omegn af x.
Vil man tale om f.eks. differential<u>kvotient</u>, må $\mathbb{T}$ tænkes forsynet med omløb.

$\int_{\varkappa(x)}^{\varkappa(y)} \tilde{f}(t)dt$ lånes som $\int_x^y f(t)dt$, når $0 \leqq y - x < 2\pi$ (omløb spiller rolle).

$\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)dt$ lånes som $\int_x^{x+2\pi} f(t)dt$ med vilk. x (omløb spiller ingen rolle).

Det er ofte bekvemt at benytte middelværdi $\mathfrak{M}(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)dt$, hvor jo $\mathfrak{M}(1) = 1$.

Det anvendes ofte, at <u>middelværdi</u> (ell. <u>integral</u>) er <u>translationsinvariant</u>:
$$\int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t-x)dt = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(t)dt \quad \text{for vilk. } x \in \mathbb{T},$$
en umiddelbar følge af, at $\int_0^{2\pi} f(t-x)dt = \int_x^{x+2\pi} f(t-x)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt$ for $x \in \mathbb{R}$.

Som oftest vil vi undlade at skelne mellem f og $\tilde{f}$ i betegnelsen.

<u>Gruppekarakter.</u>

Definition. En <u>karakter</u> χ for en <u>Abelsk</u> gruppe $(G,+)$ er en homomorf afbildning af $(G,+)$ ind i $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$.

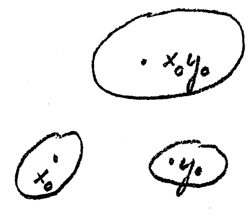
En <u>begrænset</u> karakter har alle sine værdier på enhedscirklen i komplekse plan (fås af $\chi(na) = (\chi(a))^n$, $n \in \mathbb{Z}$).

Bemærkning. Egentlig skulle vi have sagt <u>simpel</u> ell. <u>irreducibel</u> karakter i ovennævnte definition, men vi skal ikke betragte andre. Generaliseringen til vilk. grupper er ikke den nærliggende (der er i alm. for få homomorfe afbildninger til $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, derfor inddrages andet).

Definition. En mængde G med gruppekomposition og topologi kaldes en <u>topologisk gruppe</u>, hvis

$(x,y) \to xy$ er kontinuert $G \times G \to G$

og $x \to x^{-1}$ er kontinuert $G \to G$



(At $(x,y) \to xy$ er kontin. i (x_0,y_0) betyder: Til enhver omegn W af x_0y_0 findes omegne U af x_0 og V af y_0, således at $xy \in W$ når $x \in U$ og $y \in V$.)

Eks. $(\mathbb{R},+)$ og $(\mathbb{T},+)$ med omtalte topologier er topologiske grupper. At $\mathbb{T}$ er kompakt, er grunden til, at meget går lettere for denne gruppe end for $\mathbb{R}$.

Enhver gruppe er med diskret topologi en topologisk gruppe.

For en topologisk Abelsk gruppe kan spørges efter kontinuerte karakterer.

$1°$ $(\mathbb{R},+,$ sædv. topologi$)$

For hvert $c \in \mathbb{C}$ er $x \to e^{cx}$, $x \in \mathbb{R}$, en kontin. karakter, idet $e^{c(x+y)} = e^{cx}e^{cy}$.

<u>Der er ikke andre.</u>

Thi lad $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være en kontin. karakter. Da:

a) χ er differentiabel

Bevis. Af $\chi(x+t) = \chi(x)\chi(t)$ fås $\int_0^h \chi(x+t)\,dt = \chi(x)\int_0^h \chi(t)\,dt$, hvor h vælges (fast), så $\int_0^h \chi(t)\,dt \neq 0$ (muligt, idet $\chi(0)=1$ og χ kontin.). Vi skal da blot se, at $\int_0^h \chi(x+t)\,dt = \int_x^{x+h} \chi(t)\,dt$ er en diff. funktion af x. Det følger af infinitesimalregningens hovedsætning, idet $\int_x^{x+h} \chi(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$, hvor F er et ubest. integral af χ.

b) Med $c = \mathcal{D}\chi(0)$ er $\mathcal{D}\chi = c\chi$.

Thi $\frac{\chi(x+t)-\chi(x)}{t} = \frac{\chi(x)\chi(t)-\chi(x)}{t} = \frac{\chi(t)-1}{t}\chi(x) \xrightarrow[t\to 0]{} c\chi(x)$.

c) Af $\mathcal{D}\chi = c\chi$ og $\chi(0)=1$ følger (diff.lign.): $\forall x: \chi(x) = e^{cx}$.

I det følgende bruges betegnelsen e_c for fkt.nen $x \to e^{icx}$, $x\in\mathbb{R}$.

NB. e_c er begrænset $\iff c\in\mathbb{R}$.

Mængden $\{e_c \mid c\in\mathbb{R}\}$ af begrænsede, kontinuerte karakterer for $(\mathbb{R},+)$ med multiplikation er isomorf med $(\mathbb{R},+)$:

$e_{c_1+c_2} = e_{c_1}\cdot e_{c_2}$, idet $\forall x\in\mathbb{R}: e^{i(c_1+c_2)x} = e^{ic_1x}\cdot e^{ic_2x}$.

Geometrisk beskrivelse af e_c for $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: Når x gennemløber intervallængde $\frac{2\pi}{|c|}$, løber e^{icx} en omgang på cirkel.

2° $(\mathbb{T}, +,$ sædv. topologi$)$

Er $\tilde\chi: \mathbb{T}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kontin. og homomorf, så er $\chi = \tilde\chi\circ\varkappa: \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kontin., homomorf og periodisk. Og hver kontin., homomorf $\chi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ med periode 2π fås på denne måde af en kontin. karakter $\tilde\chi: \mathbb{T}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Derfor søges de kontin. karakterer $\chi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ med periode 2π.

Altså iflg. 1° de fkt.r $x\to e^{cx}$, som har periode 2π.

Det er præcis fkt.nerne $x\to e^{inx}$ for $n\in\mathbb{Z}$

(thi nødv. at $e^{c2\pi} = e^{c0} = 1$, dvs. $c2\pi \in 2\pi i\mathbb{Z}$).

Mængden af kontinuerte karakterer for $(\mathbb{T},+)$ er altså $\{\tilde e_n \mid n\in\mathbb{Z}\}$, hvor $e_n(x) = e^{inx}$. Med multiplikation er mgden isomorf med $(\mathbb{Z},+)$.

Geometrisk beskrivelse af $\tilde e_n$ for $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$: Når $\tilde x$ gennemløber cirkel, vil $\tilde e_n(\tilde x)$ gennemløbe cirkel $|n|$ gange.

3° $(\mathbb{Z}, +,$ diskret topologi$)$

En homorf afbildning $(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ har form $n\to c^n$ med $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Den er begrænset, netop hvis $|c|=1$.

Mængden af begr. karakterer med multiplik. er isomorf med $(\mathbb{T},+)$, idet $c_1^n\cdot c_2^n = (c_1c_2)^n$.

Bemærkning. $(\mathbb{T}, +,$ sædv. topologi$)$ og $(\mathbb{Z}, +,$ diskret topologi$)$ er i en vis forstand duale: mgd. af begr., kontin. karakterer i den ene er isomorf med den anden. $(\mathbb{R}, +,$ sædv. topologi$)$ er dual til sig selv.

Translation

I en gruppe $(G,\cdot)$ giver hvert gruppeelement a anledning til venstre translationen $t_a: x \to ax$, $x \in G$, og dermed til translation af afbildninger f med $\operatorname{def}(f) \subseteq G$:

$$T_a f = f \circ (t_a)^{-1} = f \circ t_{a^{-1}}, \quad \text{altså } T_a f(x) = f(a^{-1}x).$$

Er χ en homomorf afbildning af $(G,\cdot)$ ind i $(H,\cdot)$, gælder $T_a\chi(x) = \chi(a^{-1}x) = \chi(a^{-1})\chi(x)$, altså

$$\forall a \in G: \ T_a\chi = \text{const}\cdot\chi, \quad \text{const} \in H.$$

Problem: Under passende forudsætninger karakterisere afbildningerne $f: G \to H$ med egenskaben

$$\forall a \in G: \ T_a f = \text{const}\cdot f, \quad \text{const} \in H,$$

dvs. (*) $$\forall a \in G \ \exists h \in H \ \forall x \in G: \ f(a^{-1}x) = h\cdot f(x).$$

Hvis kompositionen $\cdot$ i H er associativ, er det klart, at med f har også $f\cdot c$ egenskaben (*) for vilk. $c \in H$ (med samme h for hvert a). Afbildningerne $\chi\cdot c$, hvor $\chi: (G,\cdot) \to (H,\cdot)$ er homomorf og $c \in H$, har altså egenskaben. Vi skal se, at er $(H,\cdot)$ en kommutativ gruppe, er der ikke andre.

Vi forudsætter da, at $(H,\cdot)$ er en kommutativ gruppe. Og lad $f: G \to H$ have egenskaben (*).

Til hvert $a \in G$ findes kun ét $h \in H$ brugbart i (*); dette sættes lig $\varphi(a)$. Hermed

(°) $$\forall a,x \in G: \ f(a^{-1}x) = \varphi(a) f(x),$$

dvs. $$\forall a \in G: \ T_a f = \varphi(a)\cdot f.$$

Idet

$$T_{ab} f = f \circ t_{(ab)^{-1}} = f \circ t_{b^{-1}a^{-1}} = f \circ t_{b^{-1}} \circ t_{a^{-1}} = (T_b f) \circ t_{a^{-1}} = T_a(T_b f),$$

har vi så for vilk. $a,b \in G$:

$$\varphi(ab)\cdot f = T_{ab} f = T_a(T_b f) = T_a(\varphi(b)\cdot f) = T_a(f\cdot\varphi(b)) = \varphi(a) f \varphi(b) = \varphi(a)\varphi(b) f,$$

hvoraf $$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

dvs. $\varphi: G \to H$ er homomorf.

Af (°) med $x = e \in G$ og a erstattet med a^{-1} fås

$$\forall a \in G: \ f(a) = \varphi(a^{-1})\cdot f(e), \quad \text{dvs. } f = \check{\varphi}\cdot f(e)$$

med $x \to \varphi(x^{-1})$, $x \in G$, betegnet $\check{\varphi}$. Her er $\check{\varphi}$ homomorf (da H er kommut.), altså f af form $\chi\cdot c$.

Resultat: Lad $(G,\cdot)$ og $(H,\cdot)$ være grupper, $(H,\cdot)$ kommutativ.
Da er afbildningerne $f: G \to H$ med egenskaben
$$\forall a \in G: \quad T_a f = \text{const} \cdot f, \ \text{const} \in H,$$
dvs. (*) $$\forall a \in G \ \exists h \in H \ \forall x \in G: f(a^{-1}x) = h \cdot f(x),$$
netop afbildningerne af form $c\chi$, hvor $\chi: G \to H$ er homomorf og $c \in H$.

Nu betragtes fkt.ner $f: G \to \mathbb{C}$, hvor $(G,\cdot)$ stadig er en gruppe.

Nulfkt.nen har naturligvis egenskaben (*), men er den eneste sådanne, der antager værdien 0: med $f(x) = 0$ er $\forall y \in G: f(y) = 0$, da y kan skrives $a^{-1}x$.
For de øvrige kan vi da benytte det almene resultat med $(H,\cdot) = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Vi formulerer resultatet for en Abelsk gruppe $(G,+)$:

Karaktererne $\chi: G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ og multipla deraf $c\chi$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, er de eneste funktioner $f: G \to \mathbb{C}$ ud over nulfkt.nen, der opfylder
$$\forall a \in G: \quad T_a f = \text{const} \cdot f, \ \text{const} \in \mathbb{C},$$
dvs. $$\forall a \in G \ \exists h \in \mathbb{C} \ \forall x \in G: \ f(x-a) = h f(x).$$

Bemærkning: Her kan T_a opfattes som lineær afbildning af vektorrummet af komplekse fkt.ner på G, og fkt.rne $c\chi$ er karakteriseret som de fælles egenfkt.r for alle T_a.

Specielt

1° De fra nulfkt.nen forskellige kontinuerte fkt.r $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, hvor
$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists c \in \mathbb{C} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ f(x-a) = c f(x),$$
er netop fkt.nerne $x \to \text{const} \cdot e^{ikx}$ med $k \in \mathbb{C}$.
De begrænsede fås for $k \in \mathbb{R}$.

2° Tilsvarende for fkt.r $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ findes $\tilde{x} \to \text{const} \cdot e^{inx}$ med $n \in \mathbb{Z}$.

3° Tilsvarende for fkt.r $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$: De fra nul„følgen" forskellige „følger" $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, hvor
$$\forall m \in \mathbb{Z} \ \exists c \in \mathbb{C} \ \forall p \in \mathbb{Z}: \ a_{p-m} = c a_p,$$
er netop „følgerne" $(\text{konst} \cdot b^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ med $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
De begrænsede følger fås for $|b| = 1$.

<u>Ortogonalitetsrelationer.</u>

Det foregående skulle illustrere, hvordan fkt.nerne $\tilde{e}_n: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, eller $e_n: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dukker op ud fra nærliggende simple spørgsmål vedr. cirkelgruppen.

Det er fundamentalt for Fourier række teorien, at fkt.nerne e_n, $n \in \mathbb{Z}$, udgør et ortonormalsystem ved det indre produkt $(f,g) = \mathfrak{M}(f\bar{g}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, dvs.

$$(e_m, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}dt = \begin{cases} 1 & \text{for } m=n \\ 0 & \text{for } m \neq n. \end{cases}$$

Vi bemærker, at vi også uden explicit bestemmelse af de kontinuerte karakterer for $(\mathbb{T},+)$ kunne have vist, at de danner et ortonormalsystem:

1° For vilk. kontinuert karakter $\chi: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, χ ej identisk 1, er $\mathfrak{M}(\chi) = 0$.

Bevis. For vilk. $a \in \mathbb{T}$ er

$$\mathfrak{M}(T_a\chi) = \mathfrak{M}(\chi),$$

idet <u>middelværdien er translationsinvariant</u>. Altså, idet $T_a\chi = \chi(-a)\cdot\chi$,

$$\chi(-a)\cdot\mathfrak{M}(\chi) = \mathfrak{M}(\chi).$$

Da a kan vælges med $\chi(-a) \neq 1$, sluttes $\mathfrak{M}(\chi) = 0$.

2° For to <u>forskellige</u> kontinuerte karakterer χ og φ er $(\chi,\varphi) = \mathfrak{M}(\chi\bar{\varphi}) = 1$.

Thi idet $|\varphi| = 1$ og dermed $\bar{\varphi} = \frac{1}{\varphi}$, er $\chi\bar{\varphi} = \frac{\chi}{\varphi}$ en kontin. karakter, ej identisk 1. Følgelig er $\mathfrak{M}(\chi\bar{\varphi}) = 0$.

3° For en vilk. kontin. karakter χ er $(\chi,\chi) = \mathfrak{M}(\chi\bar{\chi}) = 1$

Thi χ er begrænset, altså $|\chi| = 1$ (se side 3), dvs. $\chi\bar{\chi} = |\chi|^2 = 1$.

Funktionerne $x \to \cos nx$ for $n = 0,1,2,\ldots$ og $x \to \sin nx$ for $n = 1,2,\ldots$ dukker op, når man vil skille i reelt og imaginært,

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx, \qquad e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx.$$

Bemærk, for $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} = a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

med $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, dvs. $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$.

Heraf: $c_{-n} = \bar{c}_n \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} \in \mathbb{R}$.

Fkt.nerne $\tilde{x} \to 1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \sqrt{2}\cos 2x, \ldots$ danner ortonormalsystem.

<u>Fourier rækker</u>. <u>Resumé af mat. 2 - stof.</u>

En formel regning (MI s. 113, noter 1957-58, s.95) kan nu give en første motivering for at tilskrive vilk. fkt. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ Fourier rækken

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{med} \quad c_n = \mathfrak{M}(f\bar{e}_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

<u>Det faktiske</u>: <u>til</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ <u>tilordne følgen</u> $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, som vi også vil betegne $\hat{f}$, hvorved $\hat{f}(n) = c_n$. Vi kalder $\hat{f}: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ den Fourier transformerede af f.

<u>Håb</u>: rækken $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

„fremstiller" f

Her er $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$

n^{te} afsnit $s_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_n e^{inx}$

n^{te} afsnitsmiddel $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(x) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right)c_\nu e^{i\nu x}$

<u>Vist</u>: Fejers sætninger (MI 117-118).

$\|f - \sigma_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Heraf <u>entydighedssætningen</u>: $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f \sim g$.

Når $f \in \mathcal{L}_p$ med $1 \leq p < \infty$, gælder $\|f - \sigma_n\|_p \underset{p\to\infty}{\to} 0$

Når $f \in \mathcal{L}_2$: $\|f - s_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$, Parseval: $\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

Riesz-Fischers sætn.

Tilføje Riemann-Lebesgues lemma:

<u>Riemann-Lebesgues lemma</u>. <u>For hvert</u> $f \in \mathcal{L}(T)$ <u>gælder</u> $c_n = \hat{f}(n) \to 0$ <u>for</u> $|n| \to \infty$.

Bevis: Vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ givet.

Vi kan skrive $f = g + h$, hvor $g, h \in \mathcal{L}$, g er begrænset og $\mathfrak{M}(|h|) < \frac{\varepsilon}{2}$

thi f. eks. sætte $g_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{når } |f(x)| \leq k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ og $h_k = f - g_k$, $k = 1, 2, \dots$

hvorved $g_k, h_k \in \mathcal{L}$, g_k begr. og, idet $|h_k| \searrow 0$ p.p., $\mathfrak{M}(|h_k|) \searrow 0$

Vi har så: $\hat{g}(n) \to 0$, thi da $g \in \mathcal{L}^2$ er endda $\sum |\hat{g}(n)|^2 < \infty$

$|\hat{h}(n)| = |\mathfrak{M}(h e_{-n})| \leq \mathfrak{M}(|h e_{-n}|) = \mathfrak{M}(|h|) < \frac{\varepsilon}{2}$,

dermed $|\hat{f}(n)| \leq |\hat{g}(n)| + |\hat{h}(n)| < \varepsilon$ for $|n| > N$.

Denne nødv. betingelse for, at trigon. række $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er Fourier række for et $f \in \mathcal{L}$ er ej tilstr.

1.68 og ingen mulig skærpelse vedr. konvergensens hastighed (Edwards s. 37)

§2. Foldning.

Forberedelse.

Vi får brug for følgende resultat:

Er $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, da vil fkt.nen $(x,y) \to f(x)g(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tilh. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$,

eller rettere det tilsvarende med $\mathbb{T}$ i stedet for $\mathbb{R}$, som straks afledes heraf.

Bevis.

1° Er f og g (reelle) trappefkt.ner i $\mathbb{R}$, da er $(x,y) \to f(x)g(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en trappefkt. i $\mathbb{R}^2$, og $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \int_{\mathbb{R}} g(y)dy$. Kort $I_{x,y}(f(x)g(y)) = I(f)\,I(g)$

thi $f = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu 1_{\mathcal{I}_\mu}$, hvor $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m$ parvis disj. intervaller

$g = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu 1_{\mathcal{J}_\nu}$, hvor $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n$ parvis disj. intervaller

dermed $f(x)g(y) = \sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu 1_{\mathcal{I}_\mu}(x) 1_{\mathcal{J}_\nu}(y) = \sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu 1_{\mathcal{I}_\mu \times \mathcal{J}_\nu}(x,y)$

og videre $I_{x,y}(f(x)g(y)) = \sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu m(\mathcal{I}_\mu \times \mathcal{J}_\nu)$

$= \sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu m(\mathcal{I}_\mu) m(\mathcal{J}_\nu) = \left(\sum_\mu a_\mu m(\mathcal{I}_\mu)\right)\left(\sum_\nu b_\nu m(\mathcal{J}_\nu)\right) = I(f)\,I(g)$

2° f og g kan forudsættes reelle

thi $(f'(x) + i f''(x))(g'(y) + i g''(y)) = f'(x)g'(y) - f''(x)g''(y) + i(f''(x)g'(y) + f'(x)g''(y))$

og endda $f \geq 0$, $g \geq 0$

thi $(f^+(x) - f^-(x))(g^+(y) - g^-(y)) = f^+(x)g^+(y) - f^+(x)g^-(y) - f^-(x)g^+(y) + f^-(x)g^-(y)$

NB. Evt. værdier $\pm\infty$ uskadelige, da for hvert (x,y) højst et af de fire led $\neq 0$.

3° For $f \geq 0$, $g \geq 0$, $f, g \in \mathcal{L}$, er $\overline{\int} f(x)g(y)\,dx\,dy \leq I(f)\,I(g)$.

Thi til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes følger $f_n \nearrow \geq f$, $g_n \nearrow \geq g$ af trappefkt.ner, så $(\lim I(f_n))(\lim I(g_n)) < I(f)\,I(g) + \varepsilon$.

Vi kan antage $f_n \geq 0$, $g_n \geq 0$, thi ellers benytte $f_n^+ \nearrow \geq f$ og tilsv. for g_n.

Der gælder nemlig $\lim I(f_n^+) = \lim I(f_n)$, da $I(f_n) = I(f_n^+) - I(f_n^-)$,

hvor $f_n^- \searrow 0$ og følgelig $I(f_n^-) \searrow 0$

Da: $f_n(x)g_n(y) \nearrow \geq f(x)g(y)$, og ved benyttelse af 1°

$\overline{\int} f(x)g(y)\,dx\,dy \leq \lim_n I_{x,y}(f_n(x)g_n(y)) = \lim_n (I(f_n)\,I(g_n)) < I(f)\,I(g) + \varepsilon$

4° Vi kan afslutte beviset ved at godtgøre, for $f \geqq 0, g \geqq 0$, $f, g \in \mathcal{L}$, at

$$I(f)I(g) \leqq \underline{\int} f(x)g(y)\,dx\,dy$$

Klart, hvis $I(f)I(g) = 0$

Ellers, dvs. $I(f) > 0$, $I(g) > 0$,:

Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes følger $f_n \searrow \leqq f$, $g_n \searrow \leqq g$ af trappefktner, så

$\lim I(f_n) > 0$, $\lim I(g_n) > 0$ og $(\lim I(f_n))(\lim I(g_n)) > I(f)I(g) - \varepsilon$

Vi kan antage $f_n \geqq 0$, $g_n \geqq 0$, ellers erstatte med f_n^+, g_n^+ (uskyldigt).

Da: $f_n(x)g_n(y) \searrow \leqq f(x)g(y)$, og ved benyttelse af 1°

$$\underline{\int} f(x)g(y)\,dx\,dy \geqq \lim_n I_{x,y}(f_n(x)g_n(y)) = \lim_n (I(f_n)I(g_n)) > I(f)I(g) - \varepsilon$$

Anvendelse: Idet $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, vil $(x,y) \to \tilde{f}(x-y)\tilde{g}(y)$, $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ tilh. $\mathcal{L}(\mathbb{T}^2)$

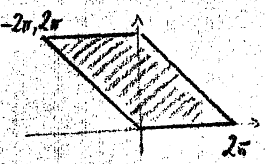
Sættes som sædv. $f = \tilde{f} \circ \varkappa$, $g = \tilde{g} \circ \varkappa$, er forudsætn. $f \cdot 1_{\mathcal{J}}, g \cdot 1_{\mathcal{J}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ med $\mathcal{J} = [0, 2\pi[$

og påstanden, at $(x,y) \to \tilde{f}(\varkappa(x) - \varkappa(y))\tilde{g}(\varkappa(y)) = f(x-y)g(y)$ er integrabel i $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$

Forudsætn. medf. i kraft af forudgående resultat, at

$$(x,y) \to f(x) \cdot 1_{\mathcal{J}}(x) \cdot g(y) \cdot 1_{\mathcal{J}}(y) = f(x)g(y)1_{\mathcal{J}\times\mathcal{J}}(x,y)$$

tilh. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, dvs. $(x,y) \to f(x)g(y)$ er integrabel i $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$, og i kraft af periodiciteten også i forskudte intervaller, dermed i $[-2\pi, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ og følgelig i ▱, som er billedet af $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Den sammensatte fkt. $(x,y) \to f(x-y)g(y)$ er da integrabel i $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$.

For $f, g \in \mathcal{L}(T)$ gælder da iflg. Fubini:

For næsten alle x er $y \to f(x-y)g(y)$ integrabel i $\mathbb{T}$

og $x \to \mathfrak{M}_y(f(x-y)g(y))$, som defin. p.p., er integrabel i $\mathbb{T}$.

Def. Sidstnævnte fkt. betegnes $f * g$ og kaldes <u>foldningen</u> af f og g

Foldning i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$.

Altså: for $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ defin. $f*g$ ved

$$(f*g)(x) = \underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)g(y)) = \mathfrak{M}(g \cdot T_x\check{f}), \quad \text{når h.s. har mening}$$

Foldningen $f*g$ er defin. p.p og er integrabel i $\mathbb{T}$.

NB. Det gør for det enkelte x ingen forskel, om f og g erstattes med ækv. fktner; det kan da også tillades, at f og g kun er defin. p.p.
Oftest har også kun $f*g$ interesse pånær ækvivalens. Foldning er da en komposit. i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$.

$$\mathfrak{M}(f*g) = \mathfrak{M}(f)\cdot\mathfrak{M}(g).$$

thi ved fortsat anvendelse af Fubinis sætn.:

$$\mathfrak{M}(f*g) = \underset{x}{\mathfrak{M}}\,\underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)g(y)) = \underset{(x,y)}{\mathfrak{M}} = \underset{y}{\mathfrak{M}}\,\underset{x}{\mathfrak{M}} = \underset{y}{\mathfrak{M}}(g(y)\,\underset{x}{\mathfrak{M}}(f(x-y))$$

$$= \mathfrak{M}_y(g(y)\,\underset{x}{\mathfrak{M}}(T_y f)) \underset{\text{middelv. translinv}}{=} \underset{y}{\mathfrak{M}}(g(y)\mathfrak{M}(f)) = \mathfrak{M}(f)\cdot\mathfrak{M}(g)$$

$$f*g = g*f$$

thi middelværdi er invariant ved $y \to -y$, $y \in G$, og ved translation; derfor er

$$\underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)g(y)) \underset{y \text{ erstattes med } -y}{=} \underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x+y)g(-y)) \underset{y \text{ erstattes med } y-x}{=} \underset{y}{\mathfrak{M}}(f(y)\,g(x-y)) \quad \text{samtidig eksistens}$$

6.9.68

$$(f*g)*h \sim f*(g*h)$$

thi i hvert pkt. x, hvor v.s. og h.s. samt $\underset{(y,z)}{\mathfrak{M}}(f(x-y)g(y-z)h(z))$ eksisterer, – og det er p.p., idet $f(x-y)g(y-z)h(z)$ er integrabel i $\mathcal{T}\times\mathcal{T}\times\mathcal{T}$, sml. s. 11, – gælder

dels $(f*(g*h))(x) = \underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)\cdot(g*h)(y)) = \underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)\,\underset{z}{\mathfrak{M}}(g(y-z)h(z))) = \underset{(y,z)}{\mathfrak{M}}$

dels $((f*g)*h)(x) = \underset{z}{\mathfrak{M}}(h(z)\cdot(f*g)(x-z)) = \underset{z}{\mathfrak{M}}(h(z)\cdot\underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-z-y)\,g(y)))$

erstatte y med $y-z$: $\quad = \underset{z}{\mathfrak{M}}(h(z)\cdot\underset{y}{\mathfrak{M}}(f(x-y)\,g(y-z))) = \underset{(y,z)}{\mathfrak{M}}$

Beviset beror således på Fubinis sætn. og på middelværdiens translationsinvarians.

$\mathcal{L}(\mathbb{T})$ med add., multipl. m. kompl. tal og foldning er en kommutativ algebra (som ofte kaldes cirkelgruppens gruppealgebra), dvs. $(\mathcal{L}(\mathbb{T}), +, \mathbb{C})$ er – som bekendt – et vektorrum og $*$ er ass., komm. og bilinear:

$$(f_1+f_2)*g \sim f_1*g + f_2*g, \quad f*(g_1+g_2) \sim f*g_1 + f*g_2$$

m $c\neq 0$ $\quad$ og for $c \in \mathbb{C}$ $\quad (cf)*g \sim c(f*g) \sim f*(cg)$

($\mathcal{L}(\mathbb{T})$ ...) ...

En grund til, at foldning er af betydn. i Fourier række teorien, er, at $f*g$ har Fourier rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{inx}$, altså $(f*g)\hat{} = \hat{f}\cdot\hat{g}$.

Bevis. For vilk. $n\in\mathbb{Z}$ er

$$(f*g)\hat{}(n) = \mathfrak{M}((f*g)\cdot e_{-n}) = \mathfrak{M}_x(e^{-inx}\mathfrak{M}_y(f(x-y)g(y))) = \mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_y(f(x-y)g(y)e^{-inx})$$

$$= \mathfrak{M}_x\mathfrak{M}_y(f(x-y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny}) = \mathfrak{M}(f\cdot e_{-n} * g\cdot e_{-n}) = \mathfrak{M}(f\cdot e_{-n})\cdot\mathfrak{M}(g\cdot e_{-n}) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$$

(For $n=0$ udsiges netop $\mathfrak{M}(f*g) = \mathfrak{M}(f)\cdot\mathfrak{M}(g)$.)

NB. Vort resultat giver, kombineret med entydighedssætn., et andet bevis for, at foldningen i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ er komm. og assoc.

De kompl. fktner på $\mathbb{Z}$, dvs. „følger", danner en algebra, hvor sædv. multipl. er produktet. At $(f+g)\hat{} = \hat{f}+\hat{g}$, $(cf)\hat{} = c\hat{f}$ (linearitet) samt $(f*g)\hat{} = \hat{f}\cdot\hat{g}$ udtrykkes: $f\to\hat{f}$, $f\in\mathcal{L}(\mathbb{T})$ er en homomorf afbildn. af cirkelgruppens algebra. I kraft af entydigssætngen er afb. isomorf (til en delalgebra af $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$).

$\|\ \|_1$ er som bekendt en norm i $(\mathcal{L}(\mathbb{T}), +, \mathbb{C})$. Den er også en norm i algebraen $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, idet hertil yderligere kræves

$$\|f*g\|_1 \leqq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Bevis herfor: Med $(f*g)(x) = \mathfrak{M}_y(f(x-y)g(y))$ existerer også $(|f|*|g|)(x) = \mathfrak{M}_y(|f(x-y)g(y)|)$

og $|f*g|(x) \leqq (|f|*|g|)(x)$

Hermed $\|f*g\|_1 = \mathfrak{M}(|f*g|) \leqq \mathfrak{M}(|f|*|g|) = \mathfrak{M}(|f|)\cdot\mathfrak{M}(|g|) = \|f_1\|\,\|g_1\|$

Da den til $\|\ \|_1$ hørende metrik er fuldstændig (MI, s.), kaldes det herved normerede vektorrum $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ som bekendt et Banach rum, og den normerede algebra $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ kaldes en Banach algebra.

Vi bemærker, at $*: \mathcal{L}(\mathbb{T})\times\mathcal{L}(\mathbb{T}) \to \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er kontin., idet vi i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ benytter metrikken svarende til $\|\ \|_1$. Det følger af

$$\|f*g - f_0*g_0\|_1 = \|f*(g-g_0)+(f-f_0)*g_0\|_1 \leqq \|f\|_1\|g-g_0\|_1 + \|f-f_0\|_1\|g_0\|_1$$

$f * g$ under spec. forudsætninger om f ell. g

Idet $1 \leq p < \infty$, sætter vi for $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$: $f \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, hvis f målelig og $|f|^p \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$
(dvs. $f \circ \varkappa$ målelig og $|f \circ \varkappa|^p$ integr. i interval af længde 2π).
I bekr. fald sættes $\|f\|_p = (\mathfrak{M}(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$.

Med $f \in \mathcal{L}_p$ er $T_a f \in \mathcal{L}_p$, $\check{f} \in \mathcal{L}_p$ og $\|f\|_p = \|T_a f\|_p = \|\check{f}\|_p$.

$\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ med $\| \ \|_p$ er et Banach rum (jfr. MI s. 102)
$C = C(\mathbb{T})$ = mgd. af kontin. fkt.r $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ er overalt tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ (jfr. MI s. 105).

Er f målelig og $|f(x)| \leq K$ for n.a. $x \in \mathbb{T}$, så er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $\|f\|_p \leq K$.
(Tilsv. ej med $\mathbb{R}$ i stedet for $\mathbb{T}$. Også pointe med $(\mathfrak{M}(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$ i stedet for $(\int_0^{2\pi} |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.)

Edw. I 28 For $1 \leq p < q \leq \infty$ er $\mathcal{L}_p(\mathbb{T}) \supset \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$ og for $f \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$ er $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.
(Samme bemærkn. som lige ovenfor. NB: inclusion og ulighed modsat talfølgerum l_p. Jfr. MI s. 102, s. 91.)

også udf. s. 69 Bevis. Lad $f \in \mathcal{L}_q$ (Kan antage $q < \infty$). Af $|f|^p \leq |f|^q + 1$ følger straks $f \in \mathcal{L}_p$. Dette ses også ved at skrive $|f|^p = |f|^p \cdot 1$,
idet $|f|^p \in \mathcal{L}_{\frac{q}{p}}$ og $1 \in \mathcal{L}_r$ med $\frac{p}{q} + \frac{1}{r} = 1$, hvoraf også (Hölders ulighed, MI s. 100)

$$\mathfrak{M}(|f|^p) \leq \| |f|^p \|_{\frac{q}{p}} \cdot \|1\|_r = (\mathfrak{M}(|f|^q))^{\frac{p}{q}} \cdot 1, \quad \text{dvs. } \|f\|_p \leq \|f\|_q.$$

Endelig: $x \to x^{-\frac{1}{q}}$, $x \in]0, 2\pi]$ tilh. $\mathcal{L}_p$, men ikke $\mathcal{L}_q$.

Vi får brug for følgende resultat:
For vilk. $f \in \mathcal{L}_p$, $1 \leq p < \infty$, er afbilden. $s \to T_s f$ af $\mathbb{T}$ ind i $\mathcal{L}_p$ (med norm $\| \ \|_p$) (ligeligt) kontin.

Bevis. Idet $\|T_t f - T_s f\|_p = \|T_{t-s} f - f\|_p$ nok at vise $\|T_a f - f\|_p \to 0$ for $a \to 0$.
Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes $g \in C(\mathbb{T})$, så $\|f - g\|_p < \varepsilon$.
Dermed for vilk. $a \in \mathbb{T}$ $\|T_a f - T_a g\|_p < \varepsilon$.
Da $\mathbb{T}$ er kompakt, er g ligeligt kontin. Følgelig findes $\delta \in \mathbb{R}_+$, så for vilk. x og $|a| < \delta$: $|g(x-a) - g(x)| < \varepsilon$, dvs. for $|a| < \delta$: $|T_a g - g| < \varepsilon$
($|a|$ betyder dist$(0, a)$)
dermed $\|T_a g - g\|_p < \varepsilon$
videre $\|T_a f - f\|_p < 3\varepsilon$

il
"
"
∞ ej,
Edw. I
3.5
68
$p<q$

w. I. 54 — **Sætn. 1.** Er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$, hvor $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, da er $f * g$ defin. overalt, er kontin., og $\|f*g\|_\infty = \sup_x |(f*g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

in også $p=1$, $q=\infty$. — **Bevis.** For hvert x er $T_x \check{f} \in \mathcal{L}_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, dermed $g \cdot T_x \check{f} \in \mathcal{L}$ og

$$|(f*g)(x)| = |\mathfrak{M}(g \cdot T_x \check{f})| \leq \|T_x \check{f}\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{(Hölder, MI s. 100).}$$

Vi mangler kontinuiteten:

$$|(f*g)(t) - (f*g)(s)| = |\mathfrak{M}(g \cdot T_t \check{f}) - \mathfrak{M}(g \cdot T_s \check{f})|$$
$$= |\mathfrak{M}(g \cdot (T_t \check{f} - T_s \check{f}))| \leq \|g\|_q \|T_t \check{f} - T_s \check{f}\|_p,$$

ligelig kontin. følger ved anvend. af foregående resultat på $\check{f} \in \mathcal{L}_p$.

Veil 50 — **Eks.** For $A, B \subseteq \mathbb{T}$ sætte $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$, $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
Forudsætte A, B målelige. Bekvemt at regne $m(A) = \mathfrak{M}(1_A)$, hvorved $m(\mathbb{T}) = 1$.
Da:

$$(1_A * 1_B)(x) = \mathfrak{M}(1_B \cdot T_x \check{1}_A) = m((x-A) \cap B)$$

idet $1_B \cdot T_x \check{1}_A = 1_B \cdot T_x 1_{-A} = 1_B \cdot 1_{x-A} = 1_{(x-A)\cap B}$.

ant + … tolke … x=0 — Hermed: fkt.nen $x \rightarrow m((x-A) \cap B)$, $x \in \mathbb{T}$, er kontin. med middelværdi $m(A) \cdot m(B)$.
Bemærk: $(x-A) \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A+B$, idet $x - a = b \Leftrightarrow x = a+b$
spec.: $m((x-A) \cap B) \neq 0 \Rightarrow x \in A+B$

Med $A = -B$ og $m(B) > 0$ findes $m((x+B) \cap B) > 0$ for $x = 0$ og dermed for x tilh. vist interval $\mathcal{J}$ om 0 (kontin), følgelig $\mathcal{J} \subseteq (-B)+B$. Altså:

Er $B \subseteq \mathbb{T}$ målelig med $m(B) > 0$, da er $B - B = \{s - t \mid s, t \in B\}$ en omegn af 0 i $\mathbb{T}$.

gns. 37 — **Sætn. 2.** Er $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, da gælder for hvert $x \in \mathbb{T}$ $\quad (f*g)(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n) e^{inx}$;
rækken er abs. og ligeligt konvergent.

Bevis. Med $c_n = \hat{f}(n)$, $d_n = \hat{g}(n)$ er $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \sum_{-\infty}^{\infty} |d_n|^2 < \infty$ iflg. Bessels ulighed (ej nødv. at påberåbe sig Parseval). Dermed $\sum_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}|c_n|^2 + \frac{1}{2}|d_n|^2)$ konverg. major. række for $\sum c_n d_n e^{inx}$, som altså abs. og ligeligt konverg.

ns … — Men at $\sum c_n d_n e^{inx}$ ligeligt konverg. medf., at rækken er Fourier række for sin sum (formelle regning s. 8 er her legal).
lig. — Nu er $\sum c_n d_n e^{inx}$ også Fourier række for $f*g$, se s. 13, som altså er ækv. m. summen (entydssætn.). Da $f*g$ kontin. (sætn. 1), summen ligeså, er de identiske.

ıd 26 <u>Corollar.</u> <u>Er</u> $f\in\mathcal{L}_2(T)$, <u>gælder for hvert</u> $x\in T$: $\underset{y}{\mathfrak{M}}\big(f(x-y)\overline{f(-y)}\big) = \sum_{-\infty}^{\infty}|\hat f(n)|^2 e^{inx}$, <u>rækken abs. og ligel. konv.</u>

Lad os nemlig med f^* betegne $t\to\overline{f(-t)}$, $t\in T$, altså den konj. til $\check f$.
Klart at $f^*\in\mathcal L_2$, og $n$te Fourier koeff. er

$$\underset{t}{\mathfrak M}\big(\overline{f(-t)}\,e^{-int}\big) = \underset{t}{\mathfrak M}\big(\overline{f(t)}\,e^{int}\big) = \underset{t}{\mathfrak M}\big(\overline{f(t)e^{-int}}\big) = \bar c_n, \qquad \text{med } c_n=\hat f(n).$$

Anvende sætn. 2 med $g=f^*$.

NB. Corollaret indeholder for $x=0$ <u>Parseval</u>: $\mathfrak M(|f|^2)=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat f(n)|^2$
for hvilken således haves nyt bevis.

<u>Sætn. 3.</u> <u>For</u> $f\in\mathcal L(T)$, $g\in\mathcal L_p(T)$, <u>hvor</u> $1\le p<\infty$, <u>vil</u> $f*g\in\mathcal L_p(T)$ <u>og</u> $\|f*g\|_p\le\|f\|_1\|g\|_p$ (dermed exist. potenser).

Bevis. Idet $|f*g|(x)\le(|f|*|g|)(x)$ p.p., kan vi antage $f\ge0$, $g\ge0$.
m. I (1.15) Da $f\in\mathcal L$, $g^p\in\mathcal L$, vil $g^p\cdot T_x\check f\in\mathcal L$, $(f*g^p)(x)=\mathfrak M(g^p\cdot T_x\check f)$ for $x\notin$ nulmgd. N,
dermed $g\cdot(T_x\check f)^{\frac1p}\in\mathcal L^p$, $\|g\cdot(T_x\check f)^{\frac1p}\|_p = \big((f*g^p)(x)\big)^{\frac1p}$ for $x\notin N$.

Nu skrive $g\cdot T_x\check f = g(T_x\check f)^{\frac1p}\cdot(T_x\check f)^{\frac1q}$ med $\frac1p+\frac1q=1$.
Iflg <u>Hölder</u>: $g\cdot T_x\check f\in\mathcal L$ og $\mathfrak M(g\cdot T_x\check f)\le\|g(T_x\check f)^{\frac1p}\|_p\,\|(T_x\check f)^{\frac1q}\|_q$ for $x\notin N$
dvs. $(f*g)(x)\le\big((f*g^p)(x)\big)^{\frac1p}\|f\|_1^{\frac1q}$ for $x\notin N$.
Af $(f*g)^p\le(f*g^p)\cdot\|f\|_1^{\frac pq}$ p.p. straks $f*g\in\mathcal L_p$, idet jo $f*g^p\in\mathcal L$,
samt $\mathfrak M((f*g)^p)\le\mathfrak M(f)\cdot\mathfrak M(g^p)\cdot\|f\|_1^{\frac pq}$
0.68 dvs. $\|f*g\|_p\le\|f\|_1^{\frac1p}\|g\|_p\|f\|_1^{\frac1q}=\|f\|_1\|g\|_p$

p.s. For $p=\infty$ er sætn. OK., men der siges mere i sætn. 1.

<u>Sætn. 4.</u> <u>For</u> $f\in\mathcal L(T)$, $g\in C_k(T)$, $k\in\mathbb N_0$, <u>dvs.</u> g <u>har kontin.</u> k<u>te afl. overalt</u>, <u>er</u> $f*g\in C_k(T)$
<u>og</u> $D^m(f*g)=f*D^m(g)$, $m=1,2,\dots,k$.

Bevis. For $k=0$ indeh. i sætn. 1. For $k=1$: Både $f*g$ og $f*Dg$ def. overalt,
betragte
$$\frac{(f*g)(x+h)-(f*g)(x)}{h}-(f*Dg)(x)$$
$$= \underset{y}{\mathfrak M}\Big(f(y)\Big[\frac{g(x+h-y)-g(x-y)}{h}-Dg(x-y)\Big]\Big)$$

Her er kvotienten iflg. middelv.sætn. $= \mathcal{D}g(\xi)$ for et ξ mellem $x-y$ og $x-y+h$.
Hører nu $\delta \in \mathbb{R}_+$ til $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ved den ligel. kontin. af $\mathcal{D}g$, har vi derfor, blot $0<|h|<\delta$, at den betragtede størrelse num. $\leqq \underset{y}{\mathfrak{M}}(|f(y)|\varepsilon) = \varepsilon\|f\|_1$.
Hermed: $f*g$ diff. med afl. $f*\mathcal{D}g$, som er kont.d
For $k>1$ giver foregående tilfælde start på induktion og tillige induktionstrin:

$$\mathcal{D}^m(f*g) = f*\mathcal{D}^m(g) \quad \text{diff. med afl.} \quad f*\mathcal{D}\mathcal{D}^m g$$

Der gælder flere sætn. af karakter som sætn. 3 og 4, men lade os nøje hermed. samt ~~Måske lige~~ notere, at foldn. af $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ med trigon. polyn. giver trigon. polyn.,

$$f * \sum c_n e_n = \sum \hat{f}(n) c_n e_n \qquad \text{(end. sum)},$$

thi $\underset{y}{\mathfrak{M}}(e^{in(x-y)}f(y)) = e^{inx}\hat{f}(n)$, dvs. $f*e_n = \hat{f}(n)e_n$.

samt

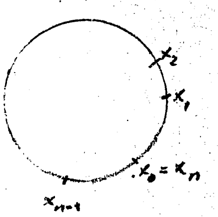
For $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, g af begr. variation er $f*g$ (def. overalt og kontin. iflg. sætn. 1 (s. 15)) af begr. variation og $V_{f*g} \leqq \|f\|_1 V_g$.

Bevis: Lad V_g være den totale var. for g. Med $f*g=h$ har vi da for vilk. end. mange parvis disj. intervaller $[a_i, b_i[\subseteq \mathbb{T}$:

$$\sum_i |h(b_i)-h(a_i)| = \sum_i \left|\underset{y}{\mathfrak{M}}\big(f(y)g(b_i-y) - f(y)g(a_i-y)\big)\right|$$

$$\leqq \underset{y}{\mathfrak{M}}\Big(|f(y)| \sum_i |g(b_i-y)-g(a_i-y)|\Big) \leqq \underset{y}{\mathfrak{M}}(|f(y)| \cdot V_g) = V_g \|f\|_1.$$

llere $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0$



Approximativ enhed.

Et neutralt elem. ved multipl. i en algebra kaldes, ligesom i en ring, et element eller enhed.

<u>En sådan findes ikke ved foldningen i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$.</u>

Der findes nemlig end ikke en fkt. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, så $f * e_n = e_n$ for uend. mange n;

…t $f * e_n$
$\hat{f}(n) e_n$, s. 17

thi $f * e_n = e_n$ er ensbetyd. med $\hat{f}(n) = 1$, hvilket kun kan indtræffe for end. mange n iflg. Riemann-Lebesgues lemma (s. 9).

Også $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, og $C_k(\mathbb{T})$, $k = 0, 1, \dots$, samt $C_\infty(\mathbb{T})$ er algebraer (iflg. sætn. 3, 4, s. 16), uden enhed.

Med henblik på at finde en erstatning påpeges, at Diracs „δ-funktion" (som har værdien 0 pånær i 0, men middelværdi 1 !) ville være en enhed, hvis det var en fkt. i $\mathcal{L}_1$. Approximationer hertil kunne tænkes nyttige.

Eks. 1. <u>**Dirichlets kerne**</u> $\mathcal{D}_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu t}$, n^{te} afsnit af rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos \nu t$

$$\mathcal{D}_n(t) = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= \frac{2\sin(n+\frac{1}{2})t \sin\frac{1}{2}t}{2\sin^2\frac{1}{2}t} = \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} \quad \text{for } t \neq 0$$

$\mathcal{D}_n$ er trig. polyn. af n^{te} grad, lige, og $\mathfrak{M}(\mathcal{D}_n) = 1$, hvilket dog fremkommer ved hårfin balance mellem pos. og neg. bidrag, da man kan vise, at $\mathfrak{M}(|\mathcal{D}_n|) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ (Edw. I, s. 60, opdeling).

For vilk. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er n^{te} afsnit af Fourier rækken

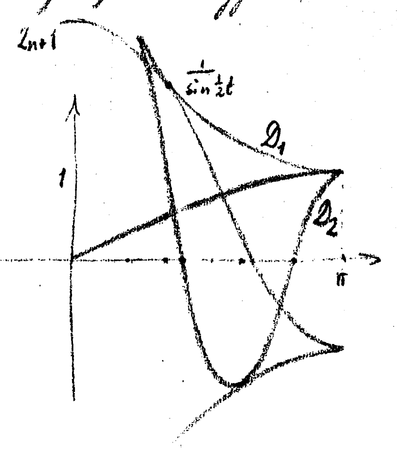
…n $\hat{f}(\nu) e_\nu$
$f * e_\nu$

$$s_n(x) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(\nu) e^{i\nu x} = \sum_{-n}^{n} \mathfrak{M}_y(f(y) e^{-i\nu y})\, e^{i\nu x} = \sum_{-n}^{n} \mathfrak{M}_y(f(y) e^{i\nu(x-y)}),$$

dvs.
$$s_n = \sum_{-n}^{n} (e_\nu * f) = \Big(\sum_{-n}^{n} e_\nu\Big) * f = \mathcal{D}_n * f.$$

Spørgsmål om <u>Konvergens af Fourier rækken</u> kommer altså ud på grænseovergang med $\mathcal{D}_n * f$

Ubehageligheden ligger i, at $\mathcal{D}_n$ selv for høje n minder for lidt om Diracs δ-fkt.



Eks. 2. <u>Fejérs kerne</u> $F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\mathcal{D}_\nu(t) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1-\frac{|\nu|}{n+1}\right)e^{i\nu t}$, n^{te} afsnitsmiddel af rækken $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t}$.

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\cos\nu t - \cos(\nu+1)t}{1-\cos t} = \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 \quad \text{for } t \neq 0.$$

4.10.68 F_n er trig. polyn. af n^{te} grad, lige, <u>pos.</u>, med $\mathfrak{M}(F_n) = 1$.

Endvidere haves $F_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|\mathcal{D}_\nu(t)| \leq \frac{1+3+\dots+(2n+1)}{n+1} = n+1 = F_n(0)$

tegning: 57-58, s. 96

og $F_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}t} \overset{|t|\leq\pi}{\leq} \frac{\pi^2}{n+1}\frac{1}{t^2}$, dermed for vilk. fast δ, $0<\delta<\pi$,:

$F_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{\delta^2}$ for $\delta \leq |t| \leq \pi$, altså $F_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ligeligt uden for $[-\delta,\delta]$

spec. $\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_n(t)dt \to 0$ for $n\to\infty$.

For vilk. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er n^{te} afsnitsmiddel af Fourier rækken

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}(\mathcal{D}_\nu * f) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\mathcal{D}_\nu\right) * f = F_n * f$$

Spørgsmål om <u>summabilitet</u> (C,1) <u>af Fourier rækken</u> kommer da ud på grænseovergang med $F_n * f$.

Behageligheden ligger i, at F_n for høje n minder om Diracs δ-fkt.
Mange resultater vedr. summabilitet (C,1) af Fourier række beror på nogle få egenskaber ved F_n:

Def. Ved en <u>approximativ enhed</u> for foldning i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ forstås en følge $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{K}_n \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, med

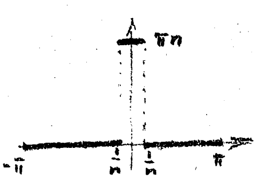
(A) $\mathfrak{M}(\mathcal{K}_n) \underset{n\to\infty}{\to} 1$

(B) $\mathfrak{M}(|\mathcal{K}_n|) = \|\mathcal{K}_n\|_1$ begrænset

(C) $\mathfrak{M}(|\mathcal{K}_n|\cdot 1_{\mathbb{T}-\mathcal{J}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}-\mathcal{J}}|\mathcal{K}_n(x)|dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$ for hvert åbent interval $\mathcal{J}$ med $0 \in \mathcal{J} \subsetneq \mathbb{T}$ (gerne symm.)

Vi bemærker, at for $\mathcal{K}_n \geq 0$ er (B) naturligvis en følge af (A)
og at (C') $\mathcal{K}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ligeligt i $\mathbb{T}-\mathcal{J}$ vil medføre (C).

Eksempler: Fejérs kerne $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathcal{K}_n$:



NB. I stedet for en følge $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ også acceptere en skare, f.eks. $(\mathcal{K}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

Navnet berettiges af følgende sætning:

For en vilk. appr. enhed $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for foldning i $L(\mathbb{T})$ gælder:

$$\begin{array}{lll}
\text{for } f\in C(\mathbb{T}): & \|\mathcal{K}_n * f - f\|_\infty \to 0, & \\
\text{for } f\in C^k(\mathbb{T}),\ k\in\mathbb{N}: & \|D^m(\mathcal{K}_n * f) - D^m f\|_\infty \to 0, & m=1,2,\dots,k. \\
\text{for } f\in L^p(\mathbb{T}),\ 1\le p<\infty: & \|\mathcal{K}_n * f - f\|_p \to 0, &
\end{array}$$

Bevis. Omtrent som MI, detaljer Edw. I, s.60-61. - se s.20 a.

Bemærkn. Denne sætn. i forbindelse med eksistensen af appr. enhed bestående af trig. polyn., f.eks. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, har som corollar, at de trig. polyn. ligger tæt f.eks. i L_p - med $\mathcal{K}_n$ er jo også $\mathcal{K}_n * f$ et trig. polyn. (s.17).

spkl. anlægges: Fourier rækken for $\mathcal{K}_m * f$ er $\sum_n \hat{\mathcal{K}}_m(n)\hat{f}(n)e^{inx}$. Forudsættes $\mathcal{K}_m$ af begr. var., hvormed også $\mathcal{K}_m * f$ er af begr. var. (s.17) samt till. kontin., vil rækken være konverg. (MI s.124), endda ligeligt (noter 1957-58, s.), med sum $\mathcal{K}_m * f$. Er $\mathcal{K}_m$ lige, har vi da følgende skema med $k_{mn} = \hat{\mathcal{K}}_m(n) = \hat{\mathcal{K}}_m(-n)$, $c_n = \hat{f}(n)$.

$$\begin{array}{llllll}
k_{00}c_0 & + k_{01}(c_1e^{ix}+c_{-1}e^{-ix}) + & \dots + k_{0n}(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}) + & \dots & = & (\mathcal{K}_0 * f)(x) \\
k_{10}c_0 & + k_{11}(c_1e^{ix}+c_{-1}e^{-ix}) + & \dots + k_{1n}(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}) + & \dots & = & (\mathcal{K}_1 * f)(x) \\
\vdots & \quad\vdots & \qquad\vdots & & & \quad\vdots \\
k_{m0}c_0 & + k_{m1}(c_1e^{ix}+c_{-1}e^{-ix}) + & \dots + k_{mn}(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}) + & \dots & = & (\mathcal{K}_m * f)(x) \\
\vdots & \quad\vdots & \qquad\vdots & & & \quad\vdots \\
 & & & & & \quad\downarrow \\
 & & & & & \quad f(x)
\end{array}$$

Konvergens i varierende betydning afh. af forudsætn. om f

Man siger, at f fås ved summation af sin Fourier række med (den dobbelt uend. matrix af) summationsfaktorer $k_{mn} = \hat{\mathcal{K}}_m(n) = \hat{\mathcal{K}}_m(-n)$.

Eks. For $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har vi $k_{mn} = \hat{F}_m(n) = \begin{cases} 1-\frac{n}{m+1} & \text{for } n\le m \\ 0 & \text{for } n>m \end{cases}$, idet $F_m(x) = \sum_{\nu=-m}^{m}\left(1-\frac{|\nu|}{m+1}\right)e^{i\nu x}$.

Matricen af summationsfaktorer er altså

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\
1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\
1 & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Bevis.

1° $f \in C(\mathbb{T})$.

Med $a_n = \mathfrak{M}(\mathcal{K}_n)$ har vi for hvert $x \in T$

$$(\mathcal{K}_n * f)(x) - a_n f(x) = \mathfrak{M}_y(\mathcal{K}_n(y)(f(x-y) - f(x))),$$

dermed $|(\mathcal{K}_n * f)(x) - a_n f(x)| \leq \mathfrak{M}_y(|\mathcal{K}_n(y)||f(x-y) - f(x)|)$.

Betragt vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Hertil $\delta \in \mathbb{R}_+$ ved <u>ligelige kontin. af</u> f. Vælge $\delta < \pi$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |\mathcal{K}_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |\mathcal{K}_n(y)|\,\varepsilon\,dy \leq \varepsilon \|\mathcal{K}_n\|_1 \leq \text{const.}\cdot\varepsilon, \quad \text{iflg. } \underline{(B)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,dy \leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(y)|\,dy$$

Vælge N iflg. <u>(C)</u>, så for $n > N$ gælder $2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |\mathcal{K}_n(y)|\,dy < \varepsilon$.

For $n > N$ er da $\quad \|\mathcal{K}_n * f - a_n f\|_\infty \leq \varepsilon + \text{const.}\cdot\varepsilon$

Nu: $\|\mathcal{K}_n * f - f\|_\infty \leq \underbrace{\|\mathcal{K}_n * f - a_n f\|_\infty}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|a_n f - f\|_\infty}_{|a_n - 1|\,\|f\|_\infty \,\downarrow\, 0 \text{ iflg. } \underline{(A)}}$, dermed $\|\mathcal{K}_n * f - f\|_\infty \to 0$

2° $f \in C^k(\mathbb{T})$, $1 \leq m \leq k$

Idet $D^m(\mathcal{K}_n * f) = \mathcal{K}_n * D^m f$ (s.16), umiddelbart anvende 1°

3° $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$

Benytte $C(\mathbb{T})$ tæt i $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$: Betragt vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, vælge $g \in C$, så $\|g - f\|_p < \varepsilon$,
derpå N, så $\forall n > N$: $\|\mathcal{K}_n * g - g\|_\infty < \varepsilon$

Idet $\|\mathcal{K}_n * f - \mathcal{K}_n * g\|_p = \|\mathcal{K}_n * (f-g)\|_p \underset{\text{s.16}}{\leq} \|\mathcal{K}_n\|_1 \|f - g\|_p \underset{(B)}{\leq} \text{const.}\cdot\varepsilon$,

har vi for $n > N$: $\|\mathcal{K}_n * f - f\|_p \leq \|\mathcal{K}_n * f - \mathcal{K}_n * g\|_p + \|\mathcal{K}_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p$

$\underset{\text{s.14}}{\leq} \|\mathcal{K}_n * f - \mathcal{K}_n * g\|_p + \|\mathcal{K}_n * g - g\|_\infty + \|g - f\|_p < \varepsilon(\text{const} + 1 + 1)$.

Bemærk: for vilk. appr enhed $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gælder

$$\forall n\in\mathbb{Z}: \qquad \hat{K}_m(n) \to 1 \quad \text{for} \quad m\to\infty$$
$$\forall m\in\mathbb{N}_0: \qquad \hat{K}_m(n) \to 0 \quad \text{for} \quad |n|\to\infty,$$

er K_m af begr. var. tillige: $\qquad \sum_n \hat{K}_m(n)$ konvergent

thi benytte $\hat{K}_m(n)\,e_n = K_m * e_n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} e_n$ i pktet 0
benytte Riemann-Lebesgues lemma
31.10.68 benytte $\sum_n \hat{K}_m(n)e^{inx} = \frac{1}{2}(K_m(x+0)+K_m(x-0))$, MI s.124, i pktet 0.

De komplekse homomorfier af cirkelgruppens algebra.

For hvert $n \in \mathbb{Z}$ betragtes afbildn. $\gamma_n : \mathcal{L}_1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ givet ved $f \to \hat{f}(n)$, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$.
Klart, at γ_n lineær, samt kontin., idet $|\hat{f}(n)| = |\mathfrak{M}(fe_{-n})| \leq \mathfrak{M}(|f|) = \|f\|_1 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.
Iflg. s. 13 gælder $\quad (f*g)\hat{}\,(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad$ dvs. $\gamma_n(f*g) = \gamma_n(f)\gamma_n(g)$

Altså:

<u>For hvert</u> $n \in \mathbb{Z}$ <u>er afbildningen</u> $f \to \hat{f}(n) = \mathfrak{M}(fe_{-n})$, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, <u>en kontin. homomorfi</u> <u>af</u> $(\mathcal{L}_1(\mathbb{T}), +, \mathbb{C}, *, \|\ \|_1)$ <u>ind i</u> $(\mathbb{C}, +, \mathbb{C}, \cdot, |\ |)$.

<u>Sætning</u>. <u>Der er ikke andre kontin. homomorfier af den normerede algebra</u> $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ <u>ind i</u> $\mathbb{C}$ <u>end de nævnte, samt 0-homomorfien</u>.

Bevis. Stemmer to overens på alle karaktererne e_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$, så også på alle trigon. polynomier (lineariteten), men dermed på alle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ (kontinuiteten), idet jo <u>de trigon. polyn. ligger tæt i</u> $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, s. 20.

Lad nu $\gamma : \mathcal{L}_1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ være vilk. kontin. homomorfi.

Er $\gamma(e_\nu) = 0$ for hvert $\nu \in \mathbb{Z}$, må $\gamma = 0$. Ellers:

Lad $\gamma(e_n) \neq 0$.

Idet $(e_n * e_m)(x) = \mathfrak{M}_y(e^{in(x-y)}e^{imy}) = e^{inx}\mathfrak{M}_y(e^{i(m-n)y})$,

haves $\quad e_n * e_n = e_n \quad$ og $\quad e_n * e_m = 0$ for $m \neq n$,

dermed $\quad \gamma(e_n)\cdot\gamma(e_n) = \gamma(e_n), \quad \gamma(e_n)\cdot\gamma(e_m) = 0$ for $m \neq n$,

hvoraf $\quad \gamma(e_n) = 1, \quad \gamma(e_m) = 0$ for $m \neq n$.

Dette viser $\gamma = \gamma_n$.

Resultatet gælder, med samme bevis (dog tilføje $\leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$), med $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, $\|\ \|_1$ erstattet med $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $\|\ \|_p$, $1 \leq p < \infty$, eller $C(\mathbb{T})$, $\|f\|_\infty$.

NB. At $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ netop er de kontin. homom. af algebraen for cirkelgruppen, giver endnu en naturlig grund til i tilknytning til f at betragte følgen $(\gamma_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} = \hat{f}$.

§3. Positiv definite funktioner.

Denne § kan opfattes som undersøgelse af fkt. $f \in L(T)$ med $\hat{f}(n) \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{Z}$

Positiv definit matrix.

En kvadr. matrix $\underline{\underline{A}}_{n,n} = (a_{ij})$ med $a_{ij} \in \mathbb{C}$ vil vi kalde positiv definit (normalt siges positiv semidefinit), hvis

$$\overline{\underline{z}}_{-} \underline{\underline{A}}_{n,n} \underline{z}_{|} = \sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j \geq 0 \quad \text{for hvert } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Bemærk: diagonalelem. ≥ 0

kan tolkes som indre produkt af $\underline{\underline{A}}\underline{z}$ og $\underline{z}$ i $\mathbb{C}^n$.

§ III, 2,54 $\underline{\underline{A}}$ kaldes Hermitesk, hvis $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$. Dette er nødv. og tilstr. for, at $\sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j \in \mathbb{R}$ for hvert $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Tilstr.: Ved konjugering går $a_{ij} \bar{z}_i z_j$ over i $a_{ji} \bar{z}_j z_i$, summen er altså uændret.

Nødv.: $z = (0, .. 1, \dots 0)$ giver $a_{ii} \in \mathbb{R}$,
$z = (0, .. 1 .. z_j .. 0)$ giver $a_{ii} + a_{jj} |z_j|^2 + a_{ij} z_j + a_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$ for $i \neq j$

Da nu $a_{ij} z_j + a_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$
og selvfølg. $\bar{a}_{ji} z_j + \bar{a}_{ji} \bar{z}_j \in \mathbb{R}$, har vi $(a_{ij} - \bar{a}_{ji}) z_j \in \mathbb{R}$ for hvert $z_j \in \mathbb{C}$.
følgelig $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$

En pos. defin. matrix er altså spec. Hermitesk.

$\overline{\underline{\underline{S}}}^t = \underline{\underline{S}}^{-1}$

For enhv. Hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en (i alm. mange) unitær matrix $\underline{\underline{S}}$, så man ved i $\sum_{ij} a_{ij} \bar{z}_i z_j$ at indsætte $\underline{z}_{|} = \underline{\underline{S}}\, \underline{u}_{|}$ får

$$\overline{\underline{u}}_{-} \overline{\underline{\underline{S}}}^t \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{S}}\, \underline{u}_{|} = \alpha_1 |u_1|^2 + \dots + \alpha_n |u_n|^2.$$

Her er $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ rødderne (med multiplicitet) i karakteristiske polyn. $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})$, dvs. egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$. (AS III, §5, s.31)

Mærk: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ er alle reelle, dermed også alle koeff. i karakterist. polyn. for $\underline{\underline{A}}$

En Hermitesk matrix $\underline{\underline{A}}$ er pos. def., netop hvis alle egenværdier $\alpha_i \geq 0$.

Mærk: for $\underline{\underline{A}}$ pos. defin. er $\det \underline{\underline{A}} \geq 0$ (idet $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{S}} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$).

<u>Positiv definit fkt.</u> (Bochner 1932, Mathias 1922 (Mat. Zeitschr 16))

Def. En kontin. fkt. $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ kaldes <u>positiv definit</u>, hvis matricen $(\mathcal{H}(x_i - x_j))_{i,j=1,\dots,n}$ er posit. defin. for ethv. end. sæt $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}$, dvs. hvis

$$\sum_{ij} \mathcal{H}(x_i - x_j)\bar{z}_i z_j \geqq 0 \quad \text{for alle end. sæt} \quad \begin{matrix} x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T} \\ z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}. \end{matrix}$$

Er $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ pos. definit, har vi

$\mathcal{H}(0) \geqq 0$, thi „matricen" $(\mathcal{H}(0))$ er pos. defin.

$\mathcal{H}(-x) = \overline{\mathcal{H}(x)}$, man siger $\mathcal{H}$ besidder Hermitesk symmetri. Også udtrykkt $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ med $\mathcal{H}^*(x) = \overline{\mathcal{H}(-x)}$

følger af, at $\begin{pmatrix} \mathcal{H}(0) & \mathcal{H}(x) \\ \mathcal{H}(-x) & \mathcal{H}(0) \end{pmatrix}$ er Hermitesk matrix

$|\mathcal{H}(x)| \leqq \mathcal{H}(0)$, thi matricens determ. $\mathcal{H}(0)^2 - |\mathcal{H}(x)|^2 \geqq 0$.

Vi bemærker, at med $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$ er også $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ pos. definit
med $\mathcal{H}$ er også $a\mathcal{H}$ pos. definit for vilk. $a \in \mathbb{R}_+$

Hver karakter e_n er positiv definit (dermed trig. polyn. m. positive koeffic.)

$$\text{thi} \sum_{\mu,\nu} e^{in(x_\mu - x_\nu)} \bar{z}_\mu z_\nu = \Big(\sum_\mu \bar{z}_\mu e^{inx_\mu}\Big)\Big(\sum_\nu z_\nu e^{-inx_\nu}\Big) = \Big|\sum_\nu z_\nu e^{-inx_\nu}\Big|^2 \geqq 0$$

<u>Sætning.</u> <u>For kont. fkt.</u> $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ <u>er</u> (1), (2), (3) <u>ensbetydende:</u>

(1) $\mathcal{H}$ <u>er positiv definit.</u>

(2) $\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}(\mathcal{H}(x-y)\bar{g}(x)g(y)) \geqq 0$ <u>for hvert</u> $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$

<u>Her kan $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ erstattes med vilk. tæt delmgd, f.eks. $C(\mathbb{T})$ ell.</u> (jfr. s.20)

1.68 <u>mgd. af trigon. polynomier.</u>

(3) <u>Alle Fourier koeff.</u> $\hat{\mathcal{H}}(n) \geqq 0$.

Ad (2): $\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}$ exist., idet $\mathcal{H}(x-y)$ kont., spec målel. og begr. i $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$
og $\bar{g}(x)g(y)$ integrabel i $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ (s. 10)

Tilsv. for hvert $z \in \mathbb{T}$: $\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}(g^*(z-x)\mathcal{H}(x-y)g(y))$ existerer $\quad (g^*(z) = \overline{g(-z)})$

med værdi $= \underset{x}{\mathfrak{M}}\big(g^*(z-x)\underset{y}{\mathfrak{M}}(\mathcal{H}(x-y)g(y))\big) = \underset{x}{\mathfrak{M}}(g^*(z-x)\cdot(\mathcal{H}*g)(x)) = (g^* * (\mathcal{H}*g))(z)$.

Iflg. sætn. 1, s.14, er $g^* * (\mathcal{H}*g)$ ikke blot defin. i hv. pkt., men tillige kontin.
Det samme gælder $(g^* * \mathcal{H}) * g$ og $\mathcal{H} * (g^* * g)$, så parenteser og rækkefølge spiller ingen rolle $(\sim \Rightarrow =)$

Hermed
$$\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}(\mathcal{H}(x-y)\bar{g}(x)g(y)) = (g^* * \mathcal{H} * g)(0)$$

Nu er $g \to g^* * \mathcal{H} * g$ en kont. afbildn. af $\mathcal{L}_1, \|\ \|_1$ til $C, \|\ \|_\infty$ nedenst.

Dette følger af $\|k * l\|_\infty \leq \|k\|_1 \|l\|_\infty$ for $k \in \mathcal{L}_1$, $l \in \mathcal{L}_\infty$, s. 14, sætn. 1 (smlg. s. 13)

Spec. $g \to (g^* * \mathcal{H} * g)(0)$ kontin. fra $\mathcal{L}_1$ til $\mathbb{C}$

Dermed: Er $(g^* * \mathcal{H} * g)(0) \geq 0$ for g tilh. tæt del af $\mathcal{L}_1$, så også for hvert $g \in \mathcal{L}_1$.

Ad (3): $\hat{\mathcal{H}}(n) = \mathfrak{M}_{(x,y)}(\mathcal{H}(x-y)\, \bar{e}_n(x)\, e_n(y))$

thi $\mathfrak{M}_{(x,y)} = \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y \mathfrak{M}_x (\mathcal{H}(x)\, e^{-in(x+y)} e^{iny})$

erstat x med $x+y$

(3) altså ensbetyd. m. (2) med g alene gennemløbende karaktererne.

(2) ⇒ (3) nu klart

(3) ⇒ (1).

$\sum_{-n}^{n}(1-\frac{|\nu|}{n+1})\hat{\mathcal{H}}(\nu)e^{i\nu x}$

Når $\mathcal{H}$ har alle Fourier koeff. ≥ 0, så er $n$te afsnitsmiddel $\sigma_n = F_n * \mathcal{H}$ trigon. polyn. m. koeff. ≥ 0, følgelig pos. definit (s. 24). Af

(s. 20) $\qquad \sum_{i,j} \sigma_n(x_i - x_j)\bar{z}_i z_j \geq 0$

med $n \to \infty$, faste x_i, z_i (s. 20, Fejers sætn.) $\qquad \downarrow$

$$\sum_{i,j} \mathcal{H}(x_i - x_j)\bar{z}_i z_j \geq 0$$

$\mathcal{H}_n$ pos. defin, så: $\mathcal{H}$ pos. defin.

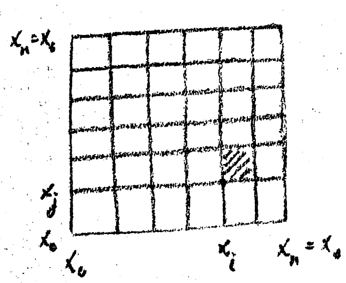
(1) ⇒ (2)

Antage $\mathcal{H}$ pos. definit. Vise $\mathfrak{M}_{x,y}(\mathcal{H}(x-y)\bar{g}(x)g(y)) \geq 0$ med kontin. g. Hertil approx. $\mathfrak{M}$ med passende middelsummer: $\mathcal{H}(x-y)\bar{g}(x)g(y)$ er kontin. i $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$, som kompakt, dermed ligeligt kontin.; for vilk. ε kan vi da opdele $\mathbb{T}$, f.eks. ækvidistant ved delepkt.n $x_0, x_1, \ldots x_n = x_0$, så fkt.nen $K: \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ med

$$K(x,y) = \mathcal{H}(x_i - x_j)\bar{g}(x_i)g(x_j) \quad \text{for } \begin{matrix} x_i \leq x < x_{i+1} \\ x_j \leq y < x_{j+1} \end{matrix}$$

approx. ligeligt med nøjagtighed ε. Hermed

$$\left| \mathfrak{M}_{x,y}(\mathcal{H}(x-y)\bar{g}(x)g(y)) - \sum_{i,j} \mathcal{H}(x_i - x_j)\bar{g}(x_i)g(x_j)\frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon$$



Men $\sum_{i,j} \geq 0$ iflg. forudsætn. (benyt $z_k = \frac{g(x_k)}{n}$)

følgelig $\mathfrak{M}_{x,y}$ kontaktpkt. for $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dvs. element.

Corollarer til (1) $\Leftrightarrow$ (3):

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ <u>er Fourier række for en positiv defin. kontin. fkt.</u>, <u>hvis og kun hvis alle</u> $c_n \geq 0$, $\sum c_n < \infty$.

Thi er $c_n = \hat{\mathcal{H}}(n)$, $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ pos. def., kontin., så er $c_n \geq 0$, idet (1) $\Rightarrow$ (3).
Var nu $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n = \infty$, dvs. $s_n = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \to \infty$, så måtte også $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \to \infty$,
men $\sigma_n = (F_n * \mathcal{H})(0) \to \mathcal{H}(0)$ (s. 20, Fejérs sætn.)

Omv. Er $c_n \geq 0$, $\sum c_n < \infty$, ja så er $\sum c_n e^{inx}$ (abs. og) ligeligt konvergent iflg. Weierstrass kriterium, følgelig Fourier række for sin sum; denne er kontin. og pos. definit

<u>De posit. defin. kontin. fkt.r</u> $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ <u>er netop fkt.nerne</u> $\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ <u>med alle</u> $c_n \geq 0$, $\sum c_n < \infty$.

11.6 Thi en pos. defin. kontin. fkt. er identisk med summen af sin Fourier række iflg. entydsætn.

Ved anvendelse af Riesz-Fischers sætn. en anden karakterisering:

<u>De posit. defin. kontin. fkt.r</u> $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ <u>er netop de fkt.r, som kan skrives</u> $\mathcal{H} = g^* * g$, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.

Thi for vilk. $g \in \mathcal{L}^2$, vil også $g^* \in \mathcal{L}^2$ – $g^*(x) = \overline{g(-x)}$ –, hvorfor $\mathcal{H} = g^* * g$ er kontin (s. 15, sætn. 1). Endvidere $\hat{\mathcal{H}}(n) = \hat{(g^*)}(n)\, \hat{g}(n) = |\hat{g}(n)|^2 \geq 0$, altså $\mathcal{H}$ pos. defin. (sml. s. 16)

Omv.: Er $\mathcal{H}$ kontin, pos. definit, så er $\hat{\mathcal{H}}(n) \geq 0$, $\sum \hat{\mathcal{H}}(n) < \infty$. Med $c_n = \sqrt{\hat{\mathcal{H}}(n)}$ er $\sum c_n^2 < \infty$, iflg. Riesz-Fischers sætn. altså $\sum c_n e^{inx}$ Fourier række for et $g \in \mathcal{L}^2$.
Entyd.sætn. giver $\mathcal{H} = g^* * g$.

Hidtil har vi holdt os til kontin. fkt.r $\mathcal{H}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Nu generalisere

Def. En fkt. $\mathcal{H} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{T})$ kaldes <u>pos. definit</u>, hvis

$$\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}\left(\mathcal{H}(x-y)\,\bar{g}(x)\,g(y)\right) \geq 0 \quad \text{for hvert } g \in C(\mathbb{T}).$$

For $\mathcal{H} \in C(\mathbb{T})$ er defin. ensbetyd. m. oprindel. iflg. sætn. 1
Bemærk, at $\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}$ exist., ligeledes for hvert $z \in \mathbb{T}$: $\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}(g^*(z-x)\mathcal{H}(x-y)g(y))$ med værdi $(g^* * (\mathcal{H} * g))(z)$. I $g^* * \mathcal{H} * g$ spiller parentes og rækkef. ingen rolle:

Kun $\mathcal{H}$'s akti- bi, noget

$$\underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}\left(\mathcal{H}(x-y)\,\bar{g}(x)\,g(y)\right) = (g^* * \mathcal{H} * g)(0).$$

Afbildgen $g \to g^* * \mathcal{H} * g$ er kont. $C, \| \|_\infty$ til $C, \| \|_\infty$,
spec. $g \to g^* * \mathcal{H} * g(0)$ er kont. $C, \| \|_\infty$ til $\mathbb{C}$. Følgelig:

I defin. kan $C(\mathbb{T})$ erstattes med $\| \|_1$-tæt delmgd., f.eks. mgd. af trig. pol. (s. 20)

NB. Defin. ville have mening med L_∞ i stedet for C, men nok en anden mening

<u>Sætning.</u> $\mathcal{H} \in L_1(T)$ <u>er pos. definit,</u> <u>hvis og kun hvis alle Fourier koeff.</u> $\hat{\mathcal{H}}(n) \geqq 0$

„$\Rightarrow$". Som s. 25 har vi $\hat{\mathcal{H}}(n) = \underset{(x,y)}{\mathfrak{M}}\left(\mathcal{H}(x-y)\bar{e}_n(x)e_n(y)\right)$

„$\Leftarrow$" Vi kan ikke kopiere s. 25, skal direkte fra (3) til (2).

For $g = \sum c_n e_n$, trig. polyn. (<u>end.</u> sum), idet $e_n^* = e_n$, $\left(\sum c_n e_n\right)^* = \sum \bar{c}_n e_n$, :

$$g^* * \mathcal{H} * g = \mathcal{H} * \left(\sum \bar{c}_m e_m\right) * \left(\sum c_n e_n\right) = \mathcal{H} * \sum_{m,n}\left(\bar{c}_m c_n e_m * e_n\right) \underset{\text{s.22}}{=} \mathcal{H} * \sum_n |c_n|^2 e_n$$

$$= \sum_n |c_n|^2 (\mathcal{H} * e_n) = \sum_n \hat{\mathcal{H}}(n) |c_n|^2 e_n$$

ller direkte
pskrive Fou-
ier række for
oldning

spec. $$(g^* * \mathcal{H} * g)(0) = \sum_n \hat{\mathcal{H}}(n) |c_n|^2$$

Er alle $\hat{\mathcal{H}}(n) \geqq 0$, straks $(g^* * \mathcal{H} * g)(0) \geqq 0$ for vilk. trig. polyn. g, tilstrækkeligt.

Corollar: $\mathcal{H}(-x) = \overline{\mathcal{H}(x)}$ <u>for næsten alle</u> x.

Thi $\mathcal{H}^* \sim \mathcal{H} \iff$ alle $\hat{\mathcal{H}}(n) \in \mathbb{R}$, i kraft af entydsætn.

§4. Differentiation og integration.

(Royden: Real analysis)

Forberedelser.

For hvert $A \subseteq \mathbb{R}^k$ er det indre Lebesgue mål $m_i(A) = \underline{I}(1_A) = \sup_{C \subseteq A,\, C \text{ Kompakt}} m(C)$

Bevis. Kan antage $m_i(A) > 0$. Klart, at $m_i(A)$ majorant.
Opgave: for vilk. a, $0 < a < m_i(A)$, søge kompakt $C \subseteq A$ med $m(C) > a$.

Vælge b, så $a < b < m_i(A)$. Sætte $b - a = \varepsilon$.
Iflg. MI s. 50 findes trappemgdr. $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ med $\bigcap_n F_n \subseteq A$, så $\lim_n m(F_n) > b$

Vælge kompakt mgd. $D_n \subseteq F_n$, så $m(F_n \setminus D_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Sætte $C_n = D_1 \cap \dots \cap D_n$. Da er C_n kompakt, dermed $C = \bigcap_n C_n$ $(= \bigcap D_n)$ kompakt, og $C_n \subseteq F_n$, dermed $C \subseteq A$,

samt $F_n \setminus C_n \subseteq (F_1 \setminus D_1) \cup \dots \cup (F_n \setminus D_n)$
$m(F_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$, altså $m(C_n) > m(F_n) - \varepsilon$.

Idet $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, er $m(C) = \lim m(C_n) > b - \varepsilon = a$.

For hvert $A \subseteq \mathbb{R}^k$ [med $m_y(A) = \overline{I}(1_A) < \infty$] er det ydre Lebesgue mål $m_y(A) = \inf_{O \supseteq A,\, O \text{ åben, "målelig"}} m(O)$

Bevis. $m_y(A) < \infty$ $m_y(A)$ minorant
Opgave: , $m_y(A) < a < \infty$, åben, målel. $O \supseteq A$ $<$

$a > b > m_y(A)$. $a - b = \varepsilon$

$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$ $\bigcup_n F_n \supseteq A$ $<$

åbne, mål. $D_n \supseteq F_n$, så $m(D_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$O_n = D_1 \cup \dots \cup D_n$. O_n åben, mål. $O = \bigcup_n O_n$ åben $\supseteq$ $\supseteq$

$O_n \setminus F_n \subseteq (D_1 \setminus F_1) \cup \dots \cup (D_n \setminus F_n)$

$m(O_n) < m(F_n) + \varepsilon$

Idet $O_1 \subseteq O_2 \subseteq \dots$ og $\lim m(O_n) < b + \varepsilon = a < \infty$
er O målelig, $m(O) = \lim_n m(O_n) < a$

målelig mgd brugt i betydning integr. mgd.

<u>Vitalis overdækningssætn.</u> for $\mathbb{R}$ (Vitali 1908)

En mgd. $\mathcal{I}$ af intervaller siges at <u>dække</u> mgd. $A \subseteq \mathbb{R}$ i <u>Vitalis forstand</u>, hvis

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists J \in \mathcal{I}: \ x \in J \wedge m(J) < \varepsilon.$$

3.11.68 Er alle intervaller <u>afsluttede</u>*) og <u>$m_y(A) < \infty$</u>, gælder da:

*) ellers lille ændring, feks.: $A \setminus \bigcup J_j$ nulmgd

Hvis der ikke findes <u>end. mange</u> <u>parvis disj.</u> $J_1, \dots, J_n \in \mathcal{I}$ med $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} J_j$,

så <u>findes følge af parvis disj.</u> $J_1, J_2, \dots \in \mathcal{I}$ <u>med</u> $m_y(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} J_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(medfører $A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$ nulmgd.)

efter S. Banach (1924).

Bevis. Antage første mulighed ej foreligger. Søge følge.

kan antage afsluttede

Vælge åben mgd. $O \supseteq A$ med $m(O) < \infty$. Kan antage alle $J \subseteq O$ (ellers bortkaste övrige)

Dermed $\sup_{\mathcal{I}} m(J) \leq m(O) < \infty$.

For vilk. parvis disj. $J_1, \dots, J_n \in \mathcal{I}$ findes $J \in \mathcal{I}$, så $J_1, \dots, J_n, J$ parvis disj.

dvs. så $J \cap \bigcup_{j=1}^{n} J_j = \emptyset$

thi $x \in A$, $x \notin \bigcup_{j=1}^{n} J_j$ findes; idet $\bigcup_{j=1}^{n} J_j$ <u>afsluttet</u>, blot tage tilpas lille $J \in \mathcal{I}$ indeh. x.

Følge $J_1, J_2, \dots$ af parvis disj. intervaller tilh. $\mathcal{I}$ kan da vælges <u>successivt</u>.

Vi kan herved for hvert n tænke os J_{n+1} valgt med $m(J_{n+1}) > \frac{1}{2} \sup_{J \cap \bigcup_{j=1}^{n} J_j = \emptyset} m(J)$, hvorved

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall J \in \mathcal{I} \ \left[J \cap \bigcup_{j=1}^{n} J_j = \emptyset \Rightarrow m(J) < 2m(J_{n+1}) \right].$$

Påstand: Da er følgen som ønsket.

Først bemærke: $\sum_{j=1}^{\infty} m(J_j) \leq m(O) < \infty$, spec. $m(J_n) \to 0$

Nu: for $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} J_j$ findes, som allerede bemærket, et $J \in \mathcal{I}$, hvor $x \in J$ og $J \cap \bigcup_{j=1}^{N} J_j = \emptyset$

egne videre findes n, så $m(J) \geq 2m(J_{n+1})$, dermed $J \cap \bigcup_{j=1}^{n} J_j \neq \emptyset$

altså findes et mindste p, så $J \cap J_p \neq \emptyset$; åbenbart er $p > N$

<u>af</u> $J \cap \bigcup_{j=1}^{p-1} J_j = \emptyset$ følger $m(J) < 2m(J_p)$, dermed $x \in J_p'$

idet indføre J_n' koncentrisk med J_n, 5-dobbelt længde

Vist: $A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} J_j \subseteq \bigcup_{j=N+1}^{\infty} J_j'$

Nu: til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et N, så $\sum_{j=N+1}^{\infty} m(J_j) < \frac{\varepsilon}{5}$,

dermed $m_y(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} J_j) \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} m(J_j') < \varepsilon$.

Differentiation af monoton fkt.

(Lebesgue 1904)

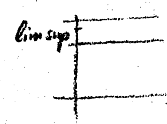
Sætning: Enhver voksende fkt. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er differentiabel p.p. i $[a,b]$.
Diff.kvotienten $\mathcal{D}f \in \mathcal{L}([a,b])$ og
$$\int_a^b \mathcal{D}f(x)\,dx \leq f(b)-f(a).$$

Inden det egt. bevis göre rede for relevant betragtningsmåde vedr. differentiabilitet. Herved f vilk. reel fkt. af reel var., x indre pkt. i def.mgd.

Vi sætter
$$\underline{\mathcal{D}}_- f(x) = \liminf_{h\to 0_-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \underline{\mathcal{D}}_+ f(x) = \liminf_{h\to 0_+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\overline{\mathcal{D}}_- f(x) = \limsup_{h\to 0_-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \overline{\mathcal{D}}_+ f(x) = \limsup_{h\to 0_+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

hvor f.eks. $\limsup_{h\to 0_+} g(h) = \inf_{h\in\mathbb{R}_+} \sup_{0<k<h} g(k) = \lim_{h\to 0_+} \sup_{0<k<h} g(k)$ (kan være $\pm\infty$)

karakteriserende er:
$$a > \limsup \Rightarrow \exists h\, \forall k<h: g(k)<a$$
$$a < \limsup \Rightarrow \forall h\, \exists k<h: g(k)>a$$
thi höjre sider uforenelige.

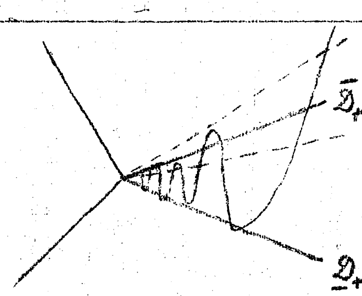


$\liminf_{h\to 0_+} g(h) = \limsup_{h\to 0_+} g(h) = b$ ensbetyd. m. $g(h) \xrightarrow[h\to 0_+]{} b$ (evt. $b=\pm\infty$)

generelt gælder $\leq$

Åbenbart:
$$f \text{ diff. i } x \iff \underline{\mathcal{D}}_- f(x),\ \overline{\mathcal{D}}_- f(x),\ \underline{\mathcal{D}}_+ f(x),\ \overline{\mathcal{D}}_+ f(x) \text{ har samme endelige værdi.}$$

Geom. betydn. af de fire „diff.kvotienter":



Eks. $f(t) = \begin{cases} t(\sqrt{2} + \sin(\log t)) \\ 0 & \text{for } t \leq 0 \end{cases}$

Find $\overline{\mathcal{D}}_+ f(0)$ og $\underline{\mathcal{D}}_+ f(0)$.

– Vis, at f voksende $\quad [\mathcal{D}f(t) = \sqrt{2} + \sin(\log t) + t\cos(\log t)\cdot\frac{1}{t} = \sqrt{2}(1+\sin(\frac{\pi}{4}+\log t))$ for $t>0]$

[Om generelle muligheder: Riesz/Sz-Nagy s. 17, théorème de Denjoy-Young-Saks]

Bevis for sætning. Lad $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ være voksende.

Vi sætter $f(x) = f(a)$ for $x < a$, $f(x) = f(b)$ for $x > b$.

Bevisets hovedpkt. – 1° For vilk. $q, r \in \mathbb{R}$, $0 < q < r$, vise, at $A_{q,r} = \{x \mid \underline{D}_- f(x) < q \wedge r < \overline{D}_+ f(x)\}$ er nulmgd., dvs. $s = m_y(A_{q,r}) = 0$.

Pointe: Mgd. af intervaller $[c,d]$ med sekanthældn. $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} > r$ overdækker $A_{q,r}$ i Vitalis forstd.

thi for $x \in A_{q,r}$ er jo spec. $r < \overline{D}_+ f(x)$,
følgelig findes vilk. små intervaller $[x, x+k]$ med sekanthældn. $> r$.

Tilsv. gælder mgd. af intervaller $[\gamma, \delta]$ med sekanthældn. $\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma} < q$.

For vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$:

Vælge åben mgd. $O \supseteq A_{q,r}$ med $m(O) < s + \varepsilon$ (s. 28)

Intervallerne $[\gamma, \delta] \subseteq O$ overdækker stadig $A_{q,r}$ i Vitalis forstand.

For vilk. parvis disj. $[\gamma_i, \delta_i]$, $i = 1, \dots, m$ af disse er $\sum_i (\delta_i - \gamma_i) < m(O) < s + \varepsilon$

dermed
$$\sum_i (f(\delta_i) - f(\gamma_i)) < q \sum_i (\delta_i - \gamma_i) < q(s+\varepsilon)$$

Iflg. Vitalis overdækn.sætn. kan på den anden side intervallerne $[\gamma_i, \delta_i]$ vælges, så
$m_y(A_{q,r} \setminus \bigcup_i [\gamma_i, \delta_i]) < \varepsilon$, dermed $m_y(A_{q,r} \cap \bigcup_i]\gamma_i, \delta_i[) > s - \varepsilon$

idet $A_{q,r} \subseteq (A_{q,r} \cap \bigcup_i]\gamma_i, \delta_i[) \cup (A_{q,r} \setminus \bigcup_i [\gamma_i, \delta_i]) \cup \{\gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_m, \delta_m\}$

medf. $m_y(\quad) \leq m_y(\quad) + m_y(\quad) + 0$

12.68

Med $\mathcal{U} = \bigcup_i]\gamma_i, \delta_i[$ vil nu intervallerne $[c,d] \subseteq \mathcal{U}$ overdække $A_{q,r} \cap \mathcal{U}$ i Vitalis forst.

Vi udvælger parvis disj. $[c_j, d_j]$, $j = 1, \dots, n$, så $m_y((A_{q,r} \cap \mathcal{U}) \setminus \bigcup_j [c_j, d_j]) < \varepsilon$.

Da må $\sum_j (d_j - c_j) > s - 2\varepsilon$,

thi $A_{q,r} \cap \mathcal{U} \subseteq \bigcup_j [c_j, d_j] \cup ((A_{q,r} \cap \mathcal{U}) \setminus \bigcup_j [c_j, d_j])$

dermed $s - \varepsilon < m_y(A_{q,r} \cap \mathcal{U}) \leq \sum_j (d_j - c_j) + \varepsilon$.

Følgelig
$$\sum_j (f(d_j) - f(c_j)) > r \sum_j (d_j - c_j) > r(s - 2\varepsilon).$$

Men da nu f er voksende og intervallerne $[c_j, d_j] \subseteq \bigcup_i [\gamma_i, \delta_i]$, har vi
$$\sum_j (f(d_j) - f(c_j)) \leq \sum_i (f(\delta_i) - f(\gamma_i))$$

Sammenholdt: $r(s - 2\varepsilon) < q(s + \varepsilon)$.

Hermed $rs \leq qs$. Og da jo iflg. forudsætn. $r > q$, sluttes $s = m_y(A_{q,r}) = 0$.

2° $\{x \mid \underline{D}_-f(x) < \overline{D}_+f(x)\} = \bigcup_{\substack{0<q<r \\ q,r\in\mathbb{Q}}} A_{q,r}$. Altså iflg. 1°: $\qquad \overline{D}_+f(x) \leqq \underline{D}_-f(x)$ p.p.

Anvendes dette på $x \rightsquigarrow -f(-x)$, fås $\qquad \overline{D}_-f(x) \leqq \underline{D}_+f(x)$ p.p.

Dermed $\underline{D}_-f(x) \leqq \overline{D}_-f(x) \leqq \underline{D}_+f(x) \leqq \overline{D}^+f(x) \leqq \underline{D}_-f(x)$, dvs. lutter $=$, p.p.

Vist: $Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ exist. p.p., når $\pm\infty$ godkendes som grænseværdi.

3° Sætte $g_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ hvor $h_n \to 0_+$, f.eks. $h_n = \frac{1}{n}$, og på $g_1, g_2, \dots$ anvende Fatous lemma (MI s. 45):

$g_1, g_2, \dots$ alle integrable (nemlig målelige, begr. med begr. støtte)
alle $\geqq 0$, altså integr. minorant

Dermed $Df \sim \liminf_n g_n \in \mathcal{L}$ og $I(Df) \leqq \liminf_n I(g_n)$,
blot — " — $< \infty$.

Og $I(g_n) = \frac{1}{h_n}\int_{a-h_n}^{b} (f(x+h_n) - f(x))\,dx$

$$= \frac{1}{h_n}\int_a^{b+h_n} f(x)\,dx - \frac{1}{h_n}\int_{a-h_n}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{h_n}\int_b^{b+h_n} f(x)\,dx - \frac{1}{h_n}\int_{a-h_n}^{a} f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Da $Df \in \mathcal{L}$, så spec. $Df(x)$ endel. p.p.
altså $Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ exist. p.p., også når kun end. grænsev. godkendes.

og da $Df(x) = 0$ for $x \notin [a,b]$, har vi $\int_a^b Df(x)\,dx = I(Df) \leqq f(b) - f(a)$.

Bevis fuldført

Eks. $<$ meget vel muligt. Endda kan f være kontin. og strengt voksende med $Df(x) = 0$ p.p.
Simpelt eks: Riesz/Sz-Nagy s. 48.

Differentiation af ubestemt integral.

Lad $\mathcal{I}$ være interval eller halvlinie $\subseteq \mathbb{R}$, eller hele $\mathbb{R}$
og lad $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^*$ være integrabel i hvert interval $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$.
Enhver af funktionerne $\mathcal{F}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, hvor $\quad \mathcal{F}(x) = \int_c^x f(t)dt + \text{const.},\ x \in \mathcal{I} \quad$ (c fast, $c \in \mathcal{I}$)
kaldes da et ubest. integral af f.

Bemærk: $\quad \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \int_a^b f(t)dt, \quad a, b \in \mathcal{I}$.

Eks. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathcal{I} =]0, \infty[$.

Et ubestemt integral $\mathcal{F}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er kontin.
thi for $x_1 > x_2 > \ldots \to a$ haves $\mathcal{F}(x_n) - \mathcal{F}(a) = \int_a^{x_n} f(t)dt = \int f \cdot 1_{]a,x_n]} \to 0$,
idet $f \cdot 1_{]a,x_n]} \to 0$ og $|f \cdot 1_{]a,x_n]}| \leq |f \cdot 1_{]a,x_1]}| \in \mathcal{L}$

Et ubest. integral $\mathcal{F}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er differentiab. næsten overalt, og $\mathcal{D}\mathcal{F}$ er integrabel i hvert $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$.
thi dette gælder jo for enhv. voksende fkt. (sætn. s. 30),
og skrives $f = f^+ - f^-$ med $f^+ = f \vee 0$, $f^- = f \wedge 0$,
så er $\quad \mathcal{F} = \mathcal{F}^+ - \mathcal{F}^-$, hvor $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ er ubest. integraler af $f^+, f^- \geq 0$, dermed voksende.

12.68 **Hovedsætning.**
Når $\mathcal{F}: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er ubest. integral af $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^*$, så er $\mathcal{D}\mathcal{F}(x) = f(x)$ for næsten alle

Bemærk: Klart, at $\mathcal{D}\mathcal{F}(x) = f(x)$ i ethv. kontin.pkt. x for f: $\quad \frac{\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \to f(x)$.

Bevis.
1° Hvis $f: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^*$ og $g: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^*$ har samme ubest. integral, så er $f \sim g$.
Nok: for $g: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^*$ integrabel i hvert $[a,b] \subseteq \mathcal{I}$ gælder:
ubest. integral af g er konstant $\Rightarrow g \sim 0$
Vise kontraponerede: antage $g \not\sim 0$; søge $a, b \in \mathcal{I}$, så $\int_a^b g(t)dt \neq 0$.
Mindst en af mgdrne $\{x \in \mathcal{I} \mid g(x) > 0\}$, $\{x \in \mathcal{I} \mid g(x) < 0\}$, f.eks. første, er ej nulmgd.
Mindst en af mgdrne $\{x \in]c_i, d_i[\mid g(x) > 0\}$, hvor $[c_i, d_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ overdækning af $\mathcal{I}$
med $[c_i, d_i] \in \mathcal{I}$, er ej nulmgd. (men den er integrabel).
Den har da kompakt delmgd. C med $m(C) > 0$. Hermed har vi
kompakt mgd. $C \subseteq]c_i, d_i[$, $c_i, d_i \in \mathcal{I}$, med $m(C) > 0$, hvor $\forall x \in C: g(x) > 0$, dermed $\int_C g(t)dt > 0$
Hvis nu $\int_{c_i}^{d_i} g(t)dt \neq 0$ færdig, ellers, med $O =]c_i, d_i[\setminus C$: $\int_O g(t)dt \neq 0$
Her er O åben, altså $O = \bigcup_n]a_n, b_n[$, disj., dermed $\int_O g(t)dt = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} g(t)dt \neq 0$
et led $\neq 0$.

I kraft af 1° er $\mathcal{D}F \sim f$ ensbetydende med, at F er ubest. integral af $\mathcal{D}F$, dvs.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b \mathcal{D}F(t)\,dt \quad \text{for } [a,b] \subseteq \mathcal{I}.$$

2° Tilfældet f begrænset.

Vi kan her antage $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, idet vi ellers sætter $f(x) = 0$ for $x \notin \mathcal{I}$. Lad $|f| \leq K$.

Sætte $f_n(x) = \dfrac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \dfrac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f(t)\,dt$, hvor $h_n \to 0_+$

Da er $f_1, f_2, \ldots$ kontin., dermed integrable i vilk. interval $[a,b]$, og $f_n \to \mathcal{D}F$ p.p.

Fordi $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} |f(t)|\,dt \leq K$, sluttes

$$\int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b \mathcal{D}F(t)\,dt.$$

Men vi har også

$$\int_a^b f_n(t)\,dt = \frac{1}{h_n}\int_{a+h_n}^{b+h_n} F(t)\,dt - \frac{1}{h_n}\int_a^b F(t)\,dt = \frac{1}{h_n}\int_b^{b+h_n} - \frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} \to F(b) - F(a),$$

da jo F er kontin. Dermed $\int_a^b \mathcal{D}F(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

3° Tilfældet $f \geq 0$.

Da F her er voksende, ved vi (s. 30), at $\int_a^b \mathcal{D}F(t)\,dt \leq F(b) - F(a)$.

Altså nok at vise $\mathcal{D}F(x) \geq f(x)$ p.p., thi dermed $\int_a^b \mathcal{D}F(t)\,dt \geq \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Vi sætter $f_n = f \wedge n$ og lader F_n være et ubest. integral. Vi ved da iflg. 1°, 2°: $\mathcal{D}F_n \sim f_n$.

Skrives $F = F_n + R_n$, da er R_n voksende, nemlig ubest. integral af $f - f_n \geq 0$.

Følgelig er $\mathcal{D}F(x) \geq \mathcal{D}F_n(x) = f_n(x)$ p.p. for alle $n \in \mathbb{N}$,

dermed $\mathcal{D}F(x) \geq \lim f_n(x) = f(x)$ p.p.

4° Vilk. f skrives nu blot $f = f^+ - f^-$, hvorved $F = F^+ - F^-$.

For næsten alle x er nu $\mathcal{D}F^+(x) = f^+(x)$, $\mathcal{D}F^-(x) = f^-(x)$ og dermed $\mathcal{D}F(x) = f(x)$.

<u>Corollar.</u> <u>Hvis en fkt. $F: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ er et ubestemt integral, så af $\mathcal{D}F$ og på nær ækvivalens ikke af andre fktner.</u>

Lebesgue punkter.

Lad $\mathcal{J}$ være interval eller halvlinie $\subseteq \mathbb{R}$, eller hele $\mathbb{R}$
og lad $f: \mathcal{J} \to \mathbb{R}^*$ være integrabel i hvert interval $[a,b] \subseteq \mathcal{J}$.

Def. Et pkt. $x \in \mathcal{J}$ kaldes et Lebesgue pkt. for f, hvis $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt \underset{h\to 0}{\to} 0$.

Klart, at ethv. kontin.pkt. for f er et Lebesgue pkt.

Hovedsætningen i foregående stykke udsagde: $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt \to f(x)$,
dvs. $\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t)-f(x))dt \underset{h\to 0}{\to} 0$ for næst alle x

Dette skal vi nu skærpe:

Sætn. Næsten ethv. $x \in \mathcal{J}$ er Lebesgue pkt. for f.

Vi vil endda vise, at for næsten ethv. x gælder $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-a|dt \to |f(x)-a|$ for alle $a \in \mathbb{R}$,
altså
$$\exists \text{ nulmgd } N \subseteq \mathcal{J} \ \forall x \in \mathcal{J}\setminus N \ \forall a \in \mathbb{R}: \ \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-a|dt \to |f(x)-a|.$$
Derpå blot sætte $a = f(x)$, når $f(x)$ endel.

Bevis. For fast $r \in \mathbb{Q}$ anvende hovedsætn. på $|f-r|$; herved $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt \to |f(x)-r|$
for $x \notin$ nulmgd N_r.

Da er også $N = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r$ nulmgd., og for vilk. $x \in \mathcal{J}\setminus N$, $a \in \mathbb{R}$:

Betragte vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Hertil $r \in \mathbb{Q}$, så $|r-a| < \varepsilon$, dermed
$$|f(x+t)-r| - \varepsilon < |f(x+t)-a| < |f(x+t)-r| + \varepsilon$$
følgelig
$$\underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt - \varepsilon}_{|f(x)-a|-3\varepsilon < |f(x)-r|-2\varepsilon <} \leq \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-a|dt \leq \underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt + \varepsilon}_{< |f(x)-r|+2\varepsilon < |f(x)-a|+3\varepsilon}$$
gælder, blot $|h|$ lille nok.

Def. af Lebesgue pkt. samt sætningen overføres umiddelbart til fkt.r $f: \mathcal{J} \to \mathbb{C}$, spec. til
2.68 period. fkt.r $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dvs. fkt.r $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (hvor forudsætningen er $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$).

I øvrigt kan allerede def. og sætninger vedr. ubest. integral overføres til fkt.r med kompl. værdier, og vi kunne ovenfor straks have arbejdet med $f: \mathcal{J} \to \mathbb{C}$.

Fejer Lebesgues sætning.

Sætningen (Lebesgue 1905) siger:

Lad $f \in \mathcal{L}(T)$. Hvis der til et givet $x \in T$ findes et $s \in \mathbb{C}$, så
$$\frac{1}{h}\int_0^h \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s \right| dt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
nok: $h \to 0_+$

da er Fourier rækken for f summabel i x med sum s.

I et Lebesgue pkt. x (s. 35) er betingelsen opfyldt med $s = f(x)$. I kraft af resultatet s. 35 har vi altså:

Fourier rækken for vilk. $f \in \mathcal{L}(T)$ er for næsten alle $x \in T$ summabel med sum $f(x)$.

Dette resultat giver en ny begrundelse af entydighedssætningen (s. 8)

Bemærk endvidere, at betingelsen i Fejer-Lebesgues sætn. er opfyldt med
$$s = \lim_{t\to 0_+} \tfrac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t))$$
i hvert pkt. $x \in T$, hvor $\lim\limits_{t\to 0_+}$ exist., altså spec. når både $f(x+0)$ og $f(x-0)$ exist.
Fejérs 3. sætn. (MI s. 118, Fejer 1904) er således indeholdt i (Fejer-)Lebesgues.

Bevis for Fejér-Lebesgues sætn.

Idet vi for givet $x \in T$, $s \in \mathbb{C}$ sætter $\qquad \varphi(t) = \varphi_{f,x,s}(t) = \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s$,

antages
$$\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t)|\, dt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Vi skal så vise, at n^{te} afsnitsmiddel $\sigma_n(x) = (F_n * f)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$ (se s. 19)

Nu: $\sigma_n(x) = \underset{t}{\mathfrak{M}}(f(x-t)F_n(t)) \underset{\text{idet } F_n \text{ lige}}{=} \underset{t}{\mathfrak{M}}(f(x+t)F_n(t)) = \underset{t}{\mathfrak{M}}\left(\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} F_n(t)\right)$,

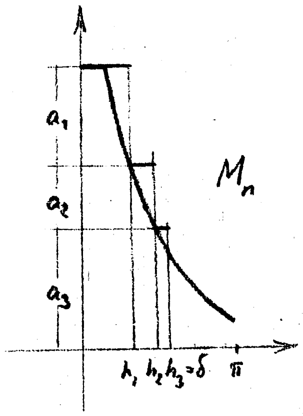
dermed, idet $\mathfrak{M}(F_n) = 1$, $\qquad \sigma_n(x) - s = \underset{t}{\mathfrak{M}}(\varphi(t)F_n(t)) = \mathfrak{M}(\varphi F_n)$.

Skal vise: $\mathfrak{M}(\varphi F_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Viser endda $\underset{F_n \geq 0}{\mathfrak{M}(|\varphi| F_n)} \underset{\varphi \text{ og } F_n \text{ lige}}{=} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi |\varphi(t)|\, F_n(t)\, dt \to 0$

Benytte vurdering: $F_n(t) \leq n+1$, samt for $0 < t \leq \pi$: $F_n(t) \leq \dfrac{\pi^2}{n+1}\dfrac{1}{t^2}$ (s. 19)

Sættes $M_n(t) = \begin{cases} n+1 & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n+1} \\ \frac{\pi^2}{n+1}\frac{1}{t^2} & \text{for } \frac{\pi}{n+1} \leq t \leq \pi \end{cases}$, har vi altså $\quad F_n(t) \leq M_n(t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

OK, om vi kan vise
$$\int_0^\pi |\varphi(t)|\, M_n(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$



I hvert fald haves for fast δ, $0<\delta<\pi$, $\int_\delta^\pi |\varphi(t)|M_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

thi $\int_\delta^\pi \leq \frac{\pi^2}{n+1}\,\frac{1}{\delta^2}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\,dt = \frac{c_\delta}{n+1}$.

Endvidere væsentligt, at hvert M_n aftagende og $\int_0^\pi M_n(t)\,dt$, $n\in N$ begr.:

$$\int_0^\pi = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^\pi = \pi + \frac{\pi^2}{n+1}\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{\pi}{n+1}}^\pi < 2\pi$$

Nu benytte antagelsen: Til opgivet ε vælges δ, så $\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t)|\,dt < \varepsilon$ for $0<h\leq\delta$.

Først vise: for vilk. aftagende trappefkt. $g: [0,\delta[\ \to R_+$

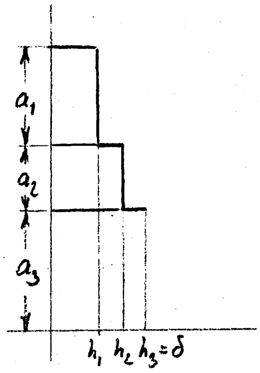
$$\int_0^\delta |\varphi(t)|\,g(t)\,dt < \varepsilon\int_0^\delta g(t)\,dt$$

Hertil skrive

$$g(t)=\begin{cases} a_1+a_2+\dots+a_p & \text{for } 0\leq t<h_1\\ \quad a_2+\dots+a_p & \text{for } h_1\leq t<h_2\\ \quad\quad \vdots & \quad\vdots \\ \quad\quad\quad a_p & \text{for } h_{p-1}\leq t<h_p=\delta \end{cases} \qquad \text{med } a_1,\dots,a_p>0$$

Dermed $\int_0^\delta |\varphi(t)|\,g(t)\,dt = \int_0^{h_1} + \int_{h_1}^{h_2} + \dots + \int_{h_{p-1}}^{h_p}$

$$= (a_1+a_2+\dots+a_p)\int_0^{h_1}|\varphi(t)|\,dt + (a_2+\dots+a_p)\int_{h_1}^{h_2}|\varphi(t)|\,dt + \dots + a_p\int_{h_{p-1}}^{h_p}|\varphi(t)|\,dt$$



$$= a_1\int_0^{h_1}|\varphi(t)|\,dt + a_2\int_0^{h_2}|\varphi(t)|\,dt + \dots + a_p\int_0^{h_p}|\varphi(t)|\,dt$$

$$< a_1h_1\varepsilon + a_2h_2\varepsilon + \dots + a_ph_p\varepsilon = \varepsilon\int_0^\delta g(t)\,dt$$

idet $a_1h_1+a_2h_2+\dots+a_ph_p$ er trappefigurens areal.

Idet for hvert n $M_n\geq 0$ er Riemann integrabel med $\int_0^\delta M_n(t)\,dt<2\pi$ samt aftagende, findes aftagende trappefkt. $g_n: [0,\delta[\ \to R_+$, $g_n\geq M_n$ med $\int_0^\delta g_n(t)\,dt<2\pi$, hvormed

$$\int_0^\delta |\varphi(t)|M_n(t)\,dt \leq \int_0^\delta |\varphi(t)|\,g_n(t)\,dt < 2\pi\varepsilon$$

Fra et vist trin er da $\int_0^\pi |\varphi|M_n = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi < 7\varepsilon$. Færdig

aftagende $\Rightarrow$ Riemann integrabel.

§5. Abel summabilitet.

Limiterbare følger

Idet M er en dobbelt uend. matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = (a_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}_0}$$

med kompl. elem., dvs. en afbildn. $M: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, siges en kompl. talfølge $s_0, s_1, \ldots$ at være limiterbar ved M med grænseværdien s, hvis

for hvert $m \in \mathbb{N}_0$ er rækken $\sum_n a_{mn} s_n$ konvergent

$(\underline{\underline{\sigma}}_1 = \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{s}}_1)$

2.69 og „m^{te} lin. middel" $\sigma_m = \sum_n a_{mn} s_n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} s$

Tillige siges rækken med $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ som afsnitsfølge da at være summabel ved M med sum s.

Eksempler.

1° At en række er summabel med sum s ved matricen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$
betyder sædv. summabilitet $(C,1)$

(eks. på trekantsmatrix: $a_{mn} = 0$ for $m < n$)

2° „Enhedsmatricen" (δ_{mn}) med $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n \\ 0 & \text{for } m \neq n \end{cases}$

giver sædv. konvergens.

Definition.

M kaldes en Toeplitz matrix, hvis

(1) for hvert $m \in \mathbb{N}_0$ er $\sum_n a_{mn}$ abs. konverg.

vi sætter så $\sum_n a_{mn} = A_m$, $\sum_n |a_{mn}| = N_m$.

sikrer $\sum_n a_{mn} s_n$ (abs.) konverg. for enhver begr. følge s_n

(2) $A_m \to 1$ for $m \to \infty$

(3) $N = \sup_m N_m < \infty$

(4) for hvert $n \in \mathbb{N}_0$ gælder $a_{mn} \to 0$ for $m \to \infty$.

Vi skal især betragte tilfældet, hvor alle $a_{mn} \geq 0$. Her er $N_m = A_m$, dermed (3) en følge af (2)

Sætning (Toeplitz 1911).

Lad M være en Toeplitz matrix.

Hvis en følge (s_n) er konvergent med grænsev. s, så også limiterbar ved M med samme grænsev. s.

Bevis. Antag $s_n \to s$. Skriver $s_n = s + r_n$, hvorved $r_n \to 0$.

Da er $\sigma_m = \sigma_m' + \sigma_m''$, hvor $\sigma_m' = \sum_n a_{mn} s = A_m s$ og $\sigma_m'' = \sum_n a_{mn} r_n$.

Idet $\sigma_m' \to s$ iflg. (2), skal vi vise $\sigma_m'' \to 0$.

Til vilk. opgivet ε findes $n_0 \in \mathbb{N}$, så $|r_n| < \varepsilon$ for $n > n_0$.

Nu $|\sigma_m''| \leq \sum_n |a_{mn} r_n| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} |a_{mn} r_n|}_{\downarrow \text{ iflg. (4)}\ 0} + \underbrace{\varepsilon \sum_{n_0}^{\infty} |a_{mn}|}_{\leq \varepsilon N, \text{ jfr. (3)}}$,

altså $|\sigma_m''| < 2\varepsilon N$ fra vist trin.

Eks. Konvergens af række medf. $(C,1)$ summabilitet.

Ovenstående kan umiddelbart kopieres til det generelle tilfælde, hvor „rækkeindeks" m i stedet for de naturlige tal gennemløber en vilk. opad filtrerende, præordnet mgd. A (directed set, mgd. m. refl. og trans. relation $\leq$, så $\forall a,b\ \exists c\ [a \leq c \wedge b \leq c]$), hvorved $M: A \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$. Vi skal især benytte $A = [0,1[$ med sædv. ordning, hvor vi i stedet

1. for A?

for a_{mn} skriver $a_n(m)$ eller snarere $a_n(x)$ og dermed

$$\sigma(x) = \sum_n s_n a_n(x), \quad A(x) = \sum_n a_n(x), \quad N(x) = \sum_n |a_n(x)|, \quad N = \sup_x N(x),$$

samt betragter grænseovergangen $x \to 1_-$.

Abel summabilitet af num. række.

Nævne (uden bevis - spare 5 min.) Abels sætn. om potensrækker:

Hvis $\sum_0^\infty a_n z^n$ er konvergent i z_0, da er rækken ligeligt konvergent på det afsl. liniestykke fra 0 til z_0.

Hæfte os ved corollar (som bevises selvstændigt senere)

Hvis $\sum_0^\infty a_n$ er konvergent med sum s, så er også $\sum a_n x^n$, $x \in [0,1[$, konv. og
$$f(x) = \sum a_n x^n \to s \quad \text{for } x \to 1_-$$

Hertil blot sætte $z_0 = 1$ og bemærke, at f def. og kontin. på $[0,1]$.

Dette legaliserer fremgangsmåde til bestemmelse af rækkesummer, belyse ved

Eks. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$ konverg. (altern.) Sum $s = ?$

$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ er potensrække for $\operatorname{Arctg} x$,

idet $1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$. $\qquad s = \lim_{x \to 1_-} \operatorname{Arctg} x = \frac{\pi}{4}$.

Nærliggende at forsøge fremgangsmåden uden først at sikre sig konvergens af $\sum_0^\infty a_n$:

Def. En række $\sum_0^\infty a_n$ (med kompl. led) siges at være Abel (ell. Poisson) summabel med sum s, hvis

$\sum_0^\infty a_n x^n$ er konverg. for $0 \leq x < 1$ og $\sigma(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \to s$ for $x \to 1_-$

Eks 1°. $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ er ikke konverg., men Abel summabel med sum $\frac{1}{2}$

idet $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots = \frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$ for $x \to 1_-$

2° Fkt. $e^{\frac{1}{1+z}}$ er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, fremstilles følgelig ved sin potensrække
$$e^{\frac{1}{1+z}} = \sum_0^\infty a_n z^n \quad \text{i enhedscirklen } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Spec. er $\sum_0^\infty a_n$ da Abel summabel med sum $\sqrt{e}$.

Derimod er $\sum_0^\infty a_n$ ikke $(C,1)$ summabel (og end mindre konvergent)

Thi $(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1} = s_n$

$n\sigma_{n-1} - (n-1)\sigma_{n-2} = s_{n-1}$, dermed $a_n = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2}$, $n \geq 2$

'endda Var $\sum_0^\infty a_n$ summ. $(C,1)$, ville derfor $\frac{a_n}{n+1}$ konverg.$^{*)}$, spec. $|a_n| \leq C(n+1)$

mod ? Dermed $\left|\sum_0^\infty a_n z^n\right| \leq C \sum_0^\infty (n+1)|z|^n = C \frac{1}{(1-|z|)^2}$ for $|z| < 1$

269 Spec. med $z = -1 + \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}_+$: $e^t \leq Ct^2$, modstrid

For at bringe Abel summabilitet af række $\sum_0^\infty a_n$ ind under det foregående, må vi inddrage afsnitsfølgen $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$. Her gælder:

<u>Er en af rækkerne $\sum_0^\infty a_n x^n$ og $\sum_0^\infty s_n x^n$ konvergent for $|x|<1$, så også den anden og</u>

$$\sum_0^\infty a_n x^n = (1-x)\sum_0^\infty s_n x^n.$$

Bevis. Hvis $\sum_0^\infty s_n x^n$ er konverg. i vilk. pkt. x, har vi umiddelbart

$$(1-x)\sum_0^\infty s_n x = \sum_0^\infty s_n x^n - x\sum_0^\infty s_n x^n = a_0 + \sum_1^\infty s_n x^n - \sum_1^\infty s_{n-1} x^n = a_0 + \sum_1^\infty (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_0^\infty a_n x^n.$$

Omv.: Har $\sum_0^\infty a_n x^n$ konv.radius $\geqq 1$, da er for $|x|<1$ såvel $\sum_0^\infty a_n x^n$ som $\sum_0^\infty x^n$ abs. konv., dermed

$$\frac{1}{1-x}\sum_0^\infty a_n x^n = \Big(\sum_p x^p\Big)\Big(\sum_q a_q x^q\Big) = \sum_{p,q} a_q x^{p+q} = \sum_n \sum_{p+q=n} a_q x^{p+q} = \sum_n \Big(x^n \sum_{q=0}^n a_q\Big) = \sum_0^\infty s_n x^n$$

(Herved kunne x gerne være kompleks.)

Følgelig: <u>Abel summabilitet er summabilitet ved „matricen"</u> $M: [0,1[\times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, <u>hvor</u>

$$M_n(x) = x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$$

Denne „matrix" er en pos. Toeplitz „matrix":

(1) $x^n(1-x) \geqq 0$, $\quad \sum_0^\infty x^n(1-x) = 1 < \infty$

(2) $A(x) = \sum_0^\infty x^n(1-x) = 1$

(4) $x^n(1-x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} 0$.

Fremtidig omtale $\sum_0^\infty a_n x^n$ som Abel middel for $\sum_0^\infty a_n$ – egt. for $s_n = \sum_0^n a_\nu$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Af Toeplitz sætn. (s. 38) følger da:

<u>Hvis en række er konverg. m. sum s, så også Abel summabel med samme sum</u> (altså corollaret til Abels sætn. s 40).

Der gælder endda:

<u>Hvis en række $\sum a_n$ er $(C,1)$ summabel med sum s, så også Abel summ. m. samme sum</u>

Bevis. Idet n^{te} afsnit i $\sum_0^\infty s_n$ er $(n+1)\sigma_n$, har vi for $|x|<1$

$$\sum_0^\infty a_n x^n = (1-x)\sum_0^\infty s_n x^n = (1-x)^2 \sum_0^\infty (\sigma_n (n+1) x^n),$$

blot en af rækkerne konverg. i $[0,1[$. Nu er $M: [0,1[\times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, hvor

$$M_n(x) = (n+1)x^n(1-x)^2$$

en pos. Toeplitz „matrix":

(1) $(n+1)x^n(1-x)^2 \geqq 0$, $\quad \sum_0^\infty (n+1)x^n(1-x)^2 = (1-x)^2 D_x \frac{1}{1-x} = 1$

(2) $A(x) = 1$

(4) $(n+1)x^n(1-x)^2 \xrightarrow[x\to 1_-]{} 0$

Følgelig: $\sigma_n \to s \Rightarrow (1-x)^2 \sum_0^\infty \sigma_n (n+1) x^n \to s$.

Abel summabilitet af Fourier række.

Skriv r i stedet for hidtil x i Abel middel for række $\sum_0^\infty a_n$, altså $\sigma(r) = \sum_0^\infty a_n r^n$.

Ved undersögelsen af Abel summabilitet af Fourier række får vi brug for Abel middel af $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{int}$, kaldet Poissons kerne (sml. Dirichlets og Fejérs kerner s. 16, 19)

dd. at
lde mid-
of $\sum e^{int}$
me aed
ald. ma-
x

$$P_r(t) = P(r,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} = 1 + \sum_1^\infty r^n (e^{int} + e^{-int}) = 1 + 2\sum_1^\infty r^n \cos nt.$$

Abs. konvergens klar for $0 \leq r < 1$.

Til bestemmelse af explicit udtryk bemærke $\cos nt = \mathrm{Re}(e^{int})$. Med $z = re^{it}$ har vi da

$$P(r,t) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_1^\infty z^n\right),$$

hvor $-1 + 2\sum_0^\infty z^n = -1 + \frac{2}{1-z} = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2 + z - \bar z}{(1-z)(1-\bar z)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + \frac{z-\bar z}{|1-z|^2}$, altså

jree

$$\underline{P(r,t)} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{|1-r\cos t - ir\sin t|^2} = \underline{\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}} \qquad , 0 \leq r < 1$$

Poissons kerne særdeles skikkelig. Den er positiv, da både tæller og nævner er det, og for hvert r, $0 \leq r < 1$, haves

P_r er lige

P_r er aftagende i $[0,\pi]$, dermed $\qquad \frac{1+r}{1-r} = P_r(0) \geq P_r(t) \geq P_r(\pi) = \frac{1-r}{1+r}$

uP_r

Videre bemærkes: $P_r(0) \underset{r\to 1_-}{\longrightarrow} \infty$, men for $0 < \delta \leq \pi$ haves $P_r(\delta) \underset{r\to 1_-}{\longrightarrow} 0$ (nævner $\to 2 - 2\cos\delta > 0$)

og dermed (da P_r aftag.): $\quad P_r \underset{r\to 1_-}{\longrightarrow} 0$ ligeligt i $[\delta, \pi]$.

Endelig: $\mathfrak{M}(P_r) = 1$ for hvert r, $0 \leq r < 1$

thi $P_r(t) = 1 + \sum_1^\infty r^n (e^{int} + e^{-int}) = 1 + 2\sum_1^\infty r^n \cos nt$ kan integreres leddvis, da konvergensen er ligelig i t (majorantrække $1 + 2\sum_1^\infty r^n$).

Spec. bemærkes, at P_r, $r \to 1_-$ er en approx. enhed for foldn. i $L(T)$. (s. 19)

NB. P_r udmærker sig frem for F_n ved at være aftagende i $[0,\pi]$.
F_n - - - - - - - - - - P_r - - - - - - et trigon. polynom.

69

<u>For vilk.</u> $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ <u>har Fourier rækken</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ <u>som Abel middel</u> $\sigma_r(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$
<u>med</u>

$$\sigma_r = f * P_r, \quad 0 \leq r < 1.$$

Rækken for $\sigma_r(x)$ er (også uden man tager leddene parvis) abs. konverg., ligeligt i x, idet konverg. majorantrække $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \mathfrak{M}(|f|)$.

Til <u>bevis</u> for $\sigma_r = f * P_r$ først bemærke:

$*: \mathcal{L}_1(\mathbb{T}) \times \mathcal{L}_\infty(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ er kontin., når benyttes normer $\| \|_1, \| \|_\infty, \| \|_\infty$. – Konsekvens af $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$, s. 15

spec.: Er $\sum g_n$ ligeligt konv., $g_n \in \mathcal{L}_\infty$, så er også $\sum f * g_n$ ligel. konv. og

$$f * \sum g_n = \sum (f * g_n).$$

inst skrive
i øvre summ. grænse

Da nu $c_n r^{|n|} e^{inx} = \mathfrak{M}_t(f(t) e^{-int}) r^{|n|} e^{inx} = \mathfrak{M}_t(f(t) r^{|n|} e^{in(x-t)}) = (f * r^{|n|} e_n)(x)$,

sluttes $\quad \sigma_r = \sum_{-\infty}^{\infty} (f * r^{|n|} e_n) = f * \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e_n = f * P_r$,

idet $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e_n$ er ligel. konv. (konv. majorantrække $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}$).

Idet $\sigma_r = f * P_r$, har vi:

For hvert r, $0 \leq r < 1$, er $\sigma_r \in C^\infty(\mathbb{T})$ $\qquad$ iflg. sætn. 4, s. 16

og da P_r, $r \to 1_-$ er approx. enhed:

For $f \in C(\mathbb{T})$: $\qquad \|\sigma_r - f\|_\infty \to 0 \quad$ for $r \to 1_-$

for $f \in C^k(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$: $\qquad \|D^m \sigma_r - D^m f\|_\infty \to 0 \quad$ for $r \to 1_-$, $\quad m = 1, 2, \ldots, k$

for $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$: $\qquad \|\sigma_r - f\|_p \to 0 \quad$ for $r \to 1_-$ $\qquad$ iflg. s. 20.

Hvad angår pktvis Abel summabilitet af Fourier rækken for vilk. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, kan Fejér Lebesgues sætn. (s. 36) overføres,

thi (C,1) summabilitet medf. Abel summ. m. samme sum.

I øvrigt kan beviset føres direkte ved at kopiere s. 36–37. Herved væsentlig forenkling: vi erstattede Fejérs kerne F_n med <u>aftag.</u> fkt. $M_n \geq F_n$; overflødigt her, da P_r selv aftagende i $[0, \pi]$.

Sætningens forudsætn. kan imidlertid svækkes til $\quad \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right) dt \xrightarrow[h \to 0]{} 0$,

men så helt nyt bevis.

NB. Forudsætn. er da $\qquad \frac{1}{h}\int_0^h \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \, dt \to s$.

Er $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ubest. integral af f, har vi

$\int_0^h f(x+t)\,dt = F(x+h) - F(x)$

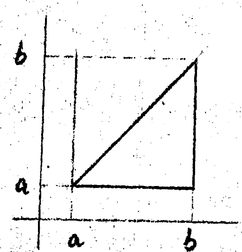
$\int_0^h f(x-t)\,dt = F(x) - F(x-h)$, så forudsætn. er $\quad \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt \xrightarrow[h \to 0]{} s$

dvs. F har symm. diff. kvotient s i x.

Vi får brug for sætn. om partiel integration:

Er $f, g \in \mathcal{L}(a,b)$ med ubest. integraler F, G, da gælder

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$



Bevis. $(x,y) \to f(x)g(y)$ er integrabel i $[a,b]^2$ iflg. s.10

Multipl. m. karakteristiske fkt. for viste trekant og anvende Fubini's sætn:

$$\int_a^b\left(\int_a^x \dots dy\right)dx = \int_a^b f(x)(G(x)-G(a))\,dx = \int_a^b f(x)G(x)\,dx - G(a)(F(b)-F(a))$$

$$= \int_a^b\left(\int_y^b \dots dx\right)dy = \int_a^b g(y)(F(b)-F(y))\,dy = F(b)(G(b)-G(a)) - \int_a^b F(y)g(y)\,dy$$

Nu sætningen (Fatou 1906).

Lad $f \in \mathcal{L}(T)$. Har det ubest. integral $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en symm. diff.kvotient s i pktet x, da er Fourier rækken for f Abel summabel i x med sum s.

NB. Idet $\dfrac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} + \dfrac{F(x)-F(x-h)}{h}\right)$, ses, at har F i x diff.kvotienter a og b fra v. og h., så også symm. diff.kvotient $s = \frac{1}{2}(a+b)$.

For næsten alle x haves endda (hovedsætn. s. 33): F diff. i x med $DF(x) = f(x)$; dermed Fourier række for f Abel summ. i x med sum $f(x)$

Bevis. Vi sætter som s. 36 $\qquad \varphi(t) = \varphi_{f,x,s}(t) = \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - s$,

men antagelsen er nu $\qquad \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \varphi(t)\,dt \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Vi skal så vise $\sigma_r(x) = (f * P_r)(x) \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} s$ $\qquad$ (se s. 43)

$$\text{Nu } \sigma_r(x) = \underset{t}{\mathfrak{M}}(f(x-t)P_r(t)) \underset{\text{idet } P_r \text{ lige}}{=} \underset{t}{\mathfrak{M}}(f(x+t)P_r(t)) = \underset{t}{\mathfrak{M}}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}P_r(t)\right),$$

dermed, idet $\underset{t}{\mathfrak{M}}(P_r(t)) = 1$, $\qquad \sigma_r(x) - s = \underset{t}{\mathfrak{M}}(\varphi(t)P_r(t)) = \mathfrak{M}(\varphi P_r)$.

Vi skal altså vise (sml. s. 36):

$$\mathfrak{M}(\varphi P_r) \underset{\varphi \text{ og } P_r \text{ lige}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} 0$$

(partiel integrationens fås foran analogi til s. 49)

I hvert fald haves for fast δ, $0<\delta<\pi$, $\qquad \displaystyle\int_\delta^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} 0$

thi $\left|\int_\delta^\pi \quad\right| \leq P_r(\delta)\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\,dt$, idet P_r pos. og aftag.,

og $P_r(\delta) \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} 0$. (Det væsentl. her blot, at $P_r(t) \underset{r\to 1-}{\longrightarrow} 0$ ligeligt i $[\delta, \pi]$.)

Med $\Phi(t)=\int_0^t \varphi(u)\,du$ fås ved partiel integration

$$\int_0^\delta \varphi(t)P_r(t)\,dt = \Big[\Phi(t)P_r(t)\Big]_0^\delta - \int_0^\delta \Phi(t)\,DP_r(t)\,dt = \underset{\substack{\downarrow\, r\to 1_- \\ 0}}{\Phi(\delta)P_r(\delta)} - \int_0^\delta \Phi(t)\,DP_r(t)\,dt$$

Nu til opgivet ε vise $\left|\int_0^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt\right| < \varepsilon\cdot$konst. for r nær 1_-.

7.2.69 Først iflg. antagelsen $\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t)\,dt = \frac{1}{h}\Phi(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ vælge δ, så

$$|\Phi(t)| < \varepsilon t \quad \text{for } 0<t<\delta.$$

Hermed, idet <u>P_r aftagende</u>, altså DP_r neg.:

$$\left|\int_0^\delta \Phi(t)\,DP_r(t)\,dt\right| \leq \int_0^\delta \varepsilon t\,(-DP_r(t))\,dt = \varepsilon\Big(-\delta P_r(\delta) + \int_0^\delta P_r(t)\,dt\Big)$$

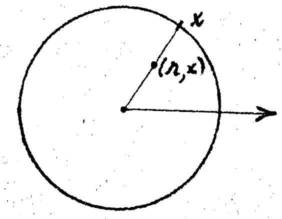
$$\underset{P_r \text{ pos.}}{<} \varepsilon\int_0^\pi P_r(t)\,dt \underset{\mathfrak{M}(P_r)=1}{=} \varepsilon\pi \qquad \text{for alle } r$$

Følgelig

$$\left|\int_0^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt\right| \leq |\Phi(\delta)P_r(\delta)| + \left|\int_0^\delta \Phi(t)\,DP_r(t)\,dt\right| + \left|\int_\delta^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt\right|$$

$$< |\Phi(\delta)P_r(\delta)| + \varepsilon\pi + \left|\int_\delta^\pi \varphi(t)P_r(t)\,dt\right| \underset{\text{for } r \text{ nær } 1_-}{<} 2\varepsilon\pi$$

Ved diskussion af Abel summabilitet for Fourier rækken for fkt. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ er det ofte hensigtsmæssigt at tænke sig $\mathbb{T}$ realiseret som periferi for en cirkelskive i planen. Samtidig opfattes så Fourier rækkens Abel middel σ,



$$\sigma(r,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} = (f * P_r)(x) = \mathfrak{M}_t\big(f(x-t)P_r(t)\big),$$

som defineret på den åbne cirkelskive i stedet for på $[0,1[\times \mathbb{T}$, idet (r,x) opfattes som polære koordinater.

Strengt taget indføres en fkt. $\tilde{\sigma}$, så

$$\sigma(r,x) = \tilde{\sigma}(p) \quad \text{når } p \text{ er pkt.et med pol. koord. } (r,x)$$

Hermed bemærkes, at $\sigma(0,x) = c_0 = \mathfrak{M}(f)$ uafh. af x. I alm. udelades $\sim$.

<u>At Fourier rækken for</u> f <u>er Abel summabel</u> i $x \in \mathbb{T}$ <u>med sum</u> s <u>kommer da ud på, at</u>

$$\tilde{\sigma}(p) \to s \quad \text{for } p \to x \text{ langs radius}$$

<u>Sætningen s. 44</u> siger, at <u>dette finder sted</u>, <u>når det ubest. integral af</u> f <u>har</u> s <u>som symm. diff.kvot. i</u> x, <u>dvs. når</u>

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt \to s \quad \text{for } h \to 0,$$

<u>hvilket med</u> $s = f(x)$ <u>finder sted for næsten alle</u> $x \in \mathbb{T}$, iflg. hovedsætn. s. 33.

Nærliggende problem: undersøge $\tilde{\sigma}(p)$ for $p \to x$ ikke nødv. langs radius.

Først bemærke, hvad der gør Fourier rækkens Abel middel, også kaldet <u>Poisson integralet af</u> f, jfr. $\sigma(r,x) = \mathfrak{M}_t(f(x-t)P_r(t))$, særlig interessant:

$\tilde{\sigma}$ <u>er en harmonisk fkt. i den åbne cirkelskive</u>, spec. C^∞.

Bevis. Vi kan antage f reel
(ellers skrive $f = f' + if''$, hvorved $\sigma = \sigma' + i\sigma''$, idet $P_r(x)$ reel)

Vi tager $\mathbb{T}$ som enhedscirkel i kompl. plan. Nu benytte x for reelt tal, med tilsv. pkt. $\zeta = e^{ix}$ på $\mathbb{T}$. Pkt.et med pol. koord. (r,x) ell. (r,ζ) er $z = re^{ix} = r\zeta$. Fourier rækken for f er

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \zeta^n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

med Abel middel

$$\tilde{\sigma}(re^{ix}) = \sigma(r,x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n r^n \cos nx + b_n r^n \sin nx)$$
$$= \mathrm{Re}\Big(\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n - ib_n) r^n e^{inx}\Big)$$

altså

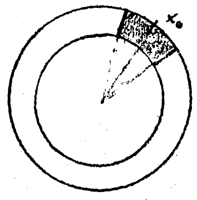
$$\tilde{\sigma}(z) = \mathrm{Re}\Big(\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{1}^{\infty}(a_n - ib_n) z^n\Big), \qquad |z| < 1.$$

Realdel af holomorf fkt. er imidlertid harmonisk (mat. 2). – NB. Klart, at potensrækken konverg. for $|z| < 1$.

Det er nu for det første klart, at $\tilde{\sigma}$ for kontin. f løser Dirichlets problem for cirklen (tilsv. problem kan formuleres for ethv. plant område m. simpel rand):

Givet kontin. fkt. f på randen

Søg harmonisk fkt. i det indre, så alt i alt kontin. fkt. på afslutningen.



Thi er $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ kontin., ved vi at $\|\sigma_r - f\|_\infty \to 0$ for $r \to 1_-$, dvs.

$$\sigma_r(x) \underset{\text{ligel.}}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{for } r \to 1_-,$$

idet $\sigma_r = f * P_r$, og P_r er approx. enhed.

Til vilk. $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes altså r_0, så

$$|\tilde{\sigma}(p) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{når } p \text{ har pol. koord } (r,x) \text{ med } r_0 < r < 1,$$

samt δ, så $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad$ når $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$,

dermed $\quad |\tilde{\sigma}(p) - f(x_0)| < 2\varepsilon \quad$ når p har pol. koord. (r,x) med $\begin{matrix} r_0 < r < 1 \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta. \end{matrix}$

Den af f og $\tilde{\sigma}$ sammenstykkede fkt. er altså kontin. i vilk. x_0 på rand. Voila.

10.2.69

*) Klassisk, [illegible]pkt. Cauchys integral[illegible] rand, se [illegible]ler til anal. [illegible] s 79

Man kan vise*), at $\tilde{\sigma}$ er den eneste løsn. på Dirichlets problem. Entydigheden går dog tabt, blot man accepterer ét pkt. på randen, hvori den sammenstykk. fkt. ej kontin.:

$$\left.\begin{matrix} 0 \text{ på cirkelperiferi} \\ \tilde{P} \text{ med } P(r,x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} \text{ harmon.} \end{matrix}\right\} \text{ sammenstykk. fkt. kontin. pånær i ét pkt.}$$

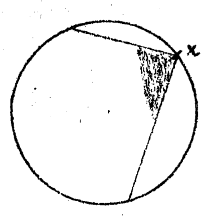
$$\mathcal{R}e\left(1 + 2\sum_1^\infty z^n\right)$$

Det interessante er imidlertid, at også <u>for en vilk. Lebesgue integrabel fkt. f på en cirkelperiferi $\mathbb{T}$ er $\tilde{\sigma}$ en harmonisk fkt. i det indre, så for næsten alle $x \in \mathbb{T}$</u>

$$\tilde{\sigma}(p) \to f(x) \quad \underline{\text{for}}\ p \to x \ \underline{\text{langs radius}}.$$

$\tilde{\sigma}$ kan altså siges at løse et generaliseret Dirichlet problem. (Dette har så mange løsninger, jfr. foregående eksempel. Men $\tilde{\sigma}$ er dog uafh. af valg af begynd.pkt. og omløb på cirkelperiferien.)

Vi skal endda se, at man i stedet for at lade $p \to x$ langs radius kan lade $p \to x$ ikke-tangentielt, dvs. i et område mellem to vilk. sekanter fra x

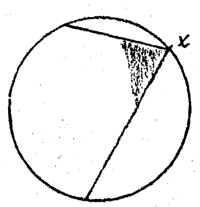


Hovedsætn. (Fatou 1906)

Lad $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, hvor $\mathbb{T}$ er realiseret som periferi for en cirkelskive i planen.

Med $\tilde{\sigma}$ betegnes Fourierrækkens Abel middel = Poisson integralet for f, betragtet som fkt. på den åbne cirkelskive,

$$\tilde{\sigma}(p) = \sigma(r,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} = (f * P_r)(x), \qquad \text{når } p \text{ har pol. koord. } (r,x).$$



Da er $\tilde{\sigma}$ harmonisk (s. 46)

og $\quad \tilde{\sigma}(p) \to s \quad$ for $p \to x$ ikke-tangentielt,

når det ubest. integral af f har diff.kvot. s i pktet $x \in \mathbb{T}$,

dvs. når $\quad \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \to s \quad$ for $h \to 0$,]

hvilket med $s = f(x)$ finder sted for næsten alle $x \in \mathbb{T}$ (iflg. hovedsætn. s. 33).

Det er], som skal vises her. (Bemærk, at forudsætn. skærpet i sammenlign. m. s. 44-46)

Først:

Sætn. Er $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ diff. i x_0, da vil $\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}(p) \to \mathcal{D}f(x_0)$ for $p \to x_0$ ikke-tangentielt.

Bevis. $\mathcal{D}_2\sigma(r,x) = \mathcal{D}\sigma_r(x)$. Da nu $\sigma_r = f * P_r$, fås iflg. sætn. 4, s. 16:

$$\mathcal{D}_2\sigma(r,x) = (f * \mathcal{D}P_r)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\mathcal{D}P_r(t)\,dt.$$

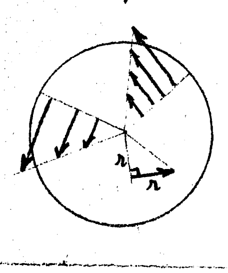
$\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ indføres ved $\quad \widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}(p) = \mathcal{D}_2\sigma(r,x)$ når p er pktet med pol. koord. (r,x)

Bemærk, at $\mathcal{D}_2\sigma(0,x) = 0$ uafh. af x, idet $\sigma_0(x)$ konst. $= c_0 = \mathfrak{M}(f)$

$\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ er i øvrigt harmonisk, bevis som for $\tilde{\sigma}$: antage f reel, benytte

σ er Abel midlet af leddvis diff. Fourier række.

$$\sum_1^{\infty}(-na_n r^n \sin nx + nb_n r^n \cos nx) = \mathcal{R}e\Big(\sum_1^{\infty}(nb_n + ina_n)z^n\Big), \qquad z = re^{ix}$$



$\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ fremgår af $\tilde{\sigma}$ ved derivation m.h.t. viste vektorfelt, som i øvrigt er hastighedsfelt for drejn. m. vinkelhastigh. 1

Dette viser også $\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ er C^∞ fkt.

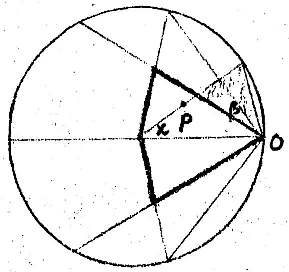
Da nu $\quad |\mathcal{D}P_r(t)| = \dfrac{|-(1-r^2)\,2r\sin t|}{(1-2r\cos t + r^2)^2} \le \dfrac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta + r^2)^2} \quad$ for $\delta \le |t| \le \pi$,

er $\quad \left|\int_{\delta \le |t| \le \pi} f(x-t)\,\mathcal{D}P_r(t)\,dt\right| \le \dfrac{2r(1-r^2)}{(1-2r\cos\delta + r^2)^2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt, \quad$ som $\to 0$ for $r \to 1$.

I beviset kan antages $x_0 = 0$, thi forskydes f stykket $-x_0$, vil $\tilde{\sigma}$ og $\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ drejes tilsv.

Videre kan antages $f(0) = 0$, thi addition af konst. til f og dermed til σ lader

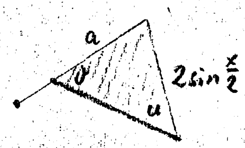
1° Vi betragter tilfældet, hvor yderligere $\mathcal{D}f(0)=0$. Altså $\frac{f(h)}{h} \to 0$ for $h \to 0$.



For to vilk. sekanter fra 0 skal vi her vise

$$\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}(p) \to 0 \quad \text{for } p \to 0 \text{ i området mellem sekanterne}$$

Vi kan antage sekanterne symm. om diameter.
Lægge yderlige sekanter, vinkel β
Nok at se på p i rødt afgr. figur. For de pol. koord. (r,x) fås da ved sinusrelation på blåt skrav. trekant (se på $x \geq 0$)



$$2\tfrac{2}{\pi}x < 2\sin\tfrac{x}{2} < \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\sin\vartheta} = \frac{a}{\sin u} < \frac{1-r}{\sin\beta},$$

altså $\frac{|x|}{1-r} < \frac{\pi}{4\sin\beta}$. Pointe: $\frac{|x|}{1-r}$ begr. under grænseoverg.

Nu: til $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vælges δ, $0<\delta<\pi$, så $\quad |f(u)| \leq \varepsilon|u| \quad$ for $|u|<2\delta$

$$\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}(p) = \mathcal{D}_2\sigma(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,\mathcal{D}P_r(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} f(x-t)\,\mathcal{D}P_r(t)\,dt$$

Tænker vi på hvert af leddene som fkt. på åbne cirkelskive (dog ej defin. i centrum), ved vi, at det sidste har kontin. udvidelse med 0 på randen – uanset valget af δ – altså num. $<\varepsilon$ blot $r_0<r<1$ $\quad$ (r_0 beror naturl. både på ε og δ)

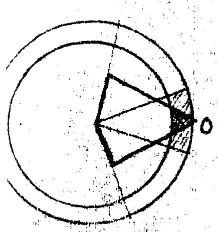
2.69 Vi vurderer første led under forudsætn. $|x|<\delta$, hvormed

$$|f(x-t)| \leq \varepsilon|x-t| \leq \varepsilon(|x|+|t|)$$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,\mathcal{D}P_r(t)\,dt\right| \leq \varepsilon\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}(|x|+|t|)\,|\mathcal{D}P_r(t)|\,dt}_{\text{lige}} = -2\varepsilon\int_0^{\delta}(|x|+t)\underbrace{\mathcal{D}P_r(t)}_{\text{neg.}}\,dt =$$

$$= 2\varepsilon\left(-|x|\,[P_r(t)]_0^{\delta} - [tP_r(t)]_0^{\delta} + \int_0^{\delta}P_r(t)\,dt\right)$$

$$\leq 2\varepsilon\left(|x|\frac{1+r}{1-r} + 0 + \pi\right) \qquad \leq 4\varepsilon\left(\frac{|x|}{1-r} + \frac{\pi}{2}\right)$$



Ligger p i den røde firkant, har vi altså for $r_0<r<1$, $|x|<\delta$:

$$|\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}(p)| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\pi}{4\sin\beta} + \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon = \varepsilon\left(\frac{1}{2\sin\beta} + 2\right), \quad \text{voila.}$$

2° For vilk. $\mathcal{D}f(0)$, $\mathcal{D}f(0)=c$, skriver vi $\qquad f = (f - c\sin) + c\sin.$

Første led falder under 1°
og for sin er Poisson integralet $\sigma(r,x) = r\sin x$
dermed $\quad \mathcal{D}_2\sigma(r,x) = r\cos x$
således at $\widetilde{\mathcal{D}_2\sigma}$ går kontin. over i cos på randen, og $\cos(0)=1$.

Færdig

Vi noterer os følgende: Lad $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være ubest. integral af $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ med $\mathfrak{M}(f) = 0$.
Da er F periodisk, kan altså opfattes som fkt. $F: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (kontin., spec. $\in \mathcal{L}(\mathbb{T})$).
Og Fourier rækken $\sum c_n e^{inx}$ for f fås ved ledvis diff. af Fourier rækken $\sum C_n e^{inx}$ for F,
dvs. $c_n = inC_n$.

thi $F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = 2\pi\,\mathfrak{M}(f) = 0$

og for $n \neq 0$ fås ved partiel integration

$$2\pi C_n = \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int}\,dt = \left[F(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,dt = 0 + 2\pi\frac{c_n}{in},$$

medens $c_0 = \mathfrak{M}(f) = 0$

hs. N° 9. For $\sigma_r^{(F)}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n r^{|n|} e^{inx}$ er den ledvis diff. række $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$ konverg. ligeligt i x
s. 210 med sum $\sigma_r^{(f)}(x)$, følgelig

$$D\sigma_r^{(F)} = \sigma_r^{(f)}, \qquad \text{dvs.} \qquad \mathcal{D}_2\sigma^{(F)} = \sigma^{(f)},$$

"Abel midlet for f fås af Abel midlet for F ved diff. efter x".

Påstanden] i hovedsætningen s. 48 ses nu let.

Givet: Ubest. integral F for $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ har diff. kvotient s i x

Vis: $\sigma^{(f)}(p) \to s$ for $p \to x$ ikke tangentielt

Vi kan antage $\mathfrak{M}(f) = c_0 = 0$ (ellers erstatte f med $f - c_0$, s med $s - c_0$)
Betragtningen ovenfor kan da anvendes: $\mathcal{D}_2\sigma^{(F)} = \sigma^{(f)}$,

hvorpå sætningen s. 48 midt giver det ønskede.

Hovedsætningen er vist.

Vi vil give en mere geom. bestemmelse af værdien $\tilde{\sigma}(p)$ i pkt. p af åben cirkelskive, hvor $\tilde{\sigma}$ er Poisson integralet af integr. fkt. f def. på randen.

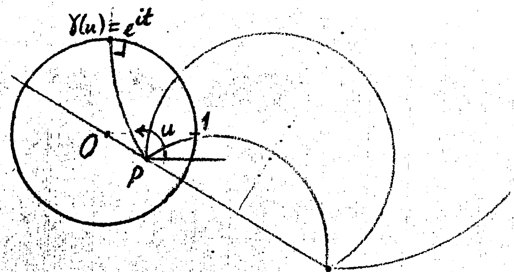
Lad os, af hensyn til beviset, straks tænke os cirklen som enhedscirkel i kompleks plan. Sætte $p = re^{ix}$.

Idet vi vil fastholde f som defin. på cirkelperiferien, men tænke os $t \in \mathbb{R}$, har vi

$$\tilde{\sigma}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(x-t)\, dt$$

Da $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-t)\,dt = 1$, fremtræder $\tilde{\sigma}(p)$ som en vægtet middelværdi af $t \to f(e^{it})$, dvs. af f med argum. t som param. på enhedscirklen. For p = centrum dog simpel middelværdi.

169



For vilk. p betragtes bundtet af general cirkelbuer fra p vinkelret på enhedscirklen, og vi vil benytte u (se figur) som param. på denne.

NB. For cirkel C gennem p gælder

vende rækkefølgen

C går gennem $\frac{1}{\bar{p}}$

$\Leftrightarrow$ o har potensen 1 m.h.t. C

$\Leftrightarrow$ tangentstykket fra o er 1

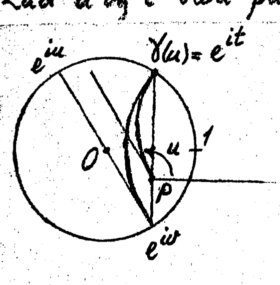
$\Leftrightarrow$ C er vinkelret på enhedscirkel

Påstand: $\tilde{\sigma}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(u))\,du$, dvs. $\tilde{\sigma}(p)$ er middelv. af f efter param. u.

Hertil vise, $\frac{du}{dt} = P_r(x-t)$, hvormed (integraltransform., mat. 2)

$$\tilde{\sigma}(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{du}{dt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(u))\,du.$$

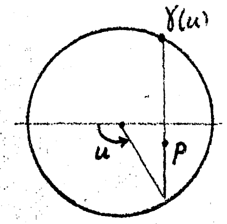
Bevis. Lad u og t være param. til samme pkt. på enhedscirklen, $\gamma(u) = e^{it}$.



Det andet endepunkt af korden fra $\gamma(u)$ gennem P betegnes e^{iv}. Ved den multiplikation m.h.t. punktet $\gamma(u)$, hvorved P går over i e^{iv}, afbildes ortogonalcirkelbuen fra P til $\gamma(u)$ i en cirkelbue fra e^{iv} til $\gamma(u)$, som i $\gamma(u)$ og dermed i e^{iv} er vinkelret på enhedcirklen. Diameteren gennem e^{iv} er altså tangent, følgelig parallel med tangenten i P (se figur). Diameterens andet endepkt. er altså e^{iu}. Men så er $u = v - \pi$.

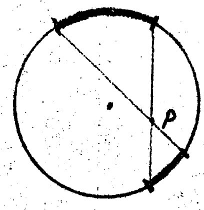
Da nu $\frac{dv}{dt} = \frac{|e^{iv}-p|}{|e^{it}-p|}$ og $|e^{iv}-p||e^{it}-p| = 1-r^2 = 1-p\bar{p}$ (pkt.s potens),

finder vi $$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{1-r^2}{|e^{it}-p|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{ix}|^2} = \frac{1-r^2}{|re^{i(x-t)}-1|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}.$$



Iflg. beviset kan param. u også tolkes som vist

Eksempel: Er f karakt. fkt. for røde bue, da er $\tilde{\sigma}(p) = \frac{1}{2\pi}$(natur. vinkelmål for sorte bue).



§6. Interpolation blandt lineære operatorer.

Tre linie sætningen.

Det drejer sig om et resultat fra den kompl. analyse, vi får brug for.

Først følgende maximumprincip [Phragmén / Lindelöf]

Lad $f: A \to \mathbb{C}$ være kontin. og begrænset i en afsluttet lodret strimmel A i kompl. plan.

$$A = \{x+iy \mid a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\},$$

samt holomorf i det indre af A.

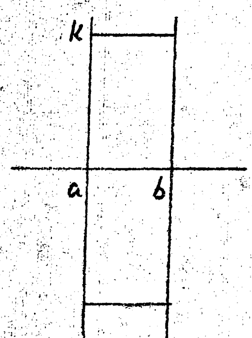
Hvis $|f(z)| \leq M$ gælder for ethv. z på linierne $x=a$ og $y=b$, så også for ethv. $z \in A$, endda $|f(z)| < M$ for $z \in \mathring{A}$, medmindre f er konstant.

Bevis: Vi anvender sædv. maximumprincip:

Er $g: \bar{B} \to \mathbb{C}$ kontin. i $\bar{B}$, holomorf i B, hvor $B \subseteq \mathbb{C}$ er begr., åben, sammenh., da antages $\sup\limits_{z \in \bar{B}} |g(z)|$ på randen (men ikke i det indre medmindre g konstant)

Thi da $\bar{B}$ er kompakt, antages supremum. Er g ikke konstant, så er for vilk. $z \in B$ tallene $g'(z), g''(z), \dots$ ikke alle 0, følgelig $g(z)$ indre pkt. i billedmgden, $|g(z)|$ altså end ikke relat. maximum.

Dette anvendes i 1°:



1° Antag $k \in \mathbb{R}_+$ findes, så $|f(x+iy)| \leq M$ for $|y| \geq k$.
Også for $|y| < k$ er da $|f(x+iy)| \leq M$, idet $z = x+iy$ tilh. rektangel med $|f| \leq M$ på randen.

2° Uden antagelsen i 1°: Sætte $f_n(z) = f(z)e^{\frac{1}{n}z^2}$.
Her er $|e^{\frac{1}{n}z^2}| = |e^{\frac{1}{n}(x^2-y^2)}e^{\frac{1}{n}2ixy}| = e^{\frac{1}{n}x^2}e^{-\frac{1}{n}y^2} \leq e^{\frac{1}{n}c^2}e^{-\frac{1}{n}y^2}$
med $c = \max\{|a|, |b|\}$

Dermed: $|f_n(z)| \leq Me^{\frac{1}{n}c^2}$ for z på linierne $x=a$ og $x=b$
$f_n(x+iy) \to 0$ for $y \to \pm\infty$, ligel. i x, $a \leq x \leq b$ (her benytte f begr.)

Iflg. 1° har vi da for $z \in A$ $\qquad |f_n(z)| \leq Me^{\frac{1}{n}c^2}$

Nu $n \to \infty$, z fastholdt: $\qquad |f(z)| \leq M$

3° Er f ikke konst., så er for vilk. $z_0 \in \mathring{A}$ tallene $f'(z_0), f''(z_0), \dots$ ikke alle 0, følgelig $f(z_0)$ indre pkt. i billedmngd., dermed $|f(z_0)| < \sup\{|f(z)| \mid z \in A\} \leq M$.

Nu tre linie sætningen:

Lad $f: A \to \mathbb{C}$ være kontin. og begr. i afsluttet lodret strimmel A i kompl. plan

$$A = \{x+iy \mid a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\}$$

samt holomorf i det indre af A. Med $M_x = \sup_y |f(x+iy)|$ gælder da for $a \leq x \leq b$:

ml. Hadamard's 3 cirkelsætn., noter 341

$$M_x \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}$$

Idet a og b åbenbart kan erstattes med vilk. a', b' med $a \leq a' < b' \leq b$ vil dette

3.69 sige: $x \to \log M_x$ er konveks fkt.

($M_x = 0$ kan kun indtræffe for $f = 0$, foreløbig $a<x<b$, jfr. dog NB nedenfor)

Bevis. 1°. $M_a > 0$, $M_b > 0$

Vi sætter $F(z) = f(z) / \left(M_a^{\frac{b-z}{b-a}} M_b^{\frac{z-a}{b-a}}\right)$

Idet $\left|M_a^{\frac{b-(x+iy)}{b-a}}\right| = M_a^{\frac{b-x}{b-a}}$, hvilket for $a \leq x \leq b$ ligger mellem M_a og 1,

og $\left|M_b^{\frac{(x+iy)-a}{b-a}}\right| = M_b^{\frac{x-a}{b-a}}$, " " " " " 1 og M_b,

ses, at F er begr. i A, samt at

$$|F(a+iy)| = |f(a+iy)| / M_a, \quad |F(b+iy)| = |f(b+iy)| / M_b.$$

På F kan da anvendes max.princippet s.53 med $M = 1$:

$$|f(x+iy)| \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \text{ voila}$$

[Tilføjelse: hvis = for et $x+iy \in \mathring{A}$, så $f(z) = \text{const.} \cdot M_a^{\frac{b-z}{b-a}} M_b^{\frac{z-a}{b-a}}$ med $|\text{const}| = 1$.

2°. Regningerne i 1° kan generelt udføres med vilk. $N_a > M_a$, $N_b > M_b$ i stedet for M_a og M_b, hvilket giver $M_x \leq N_a^{\frac{b-x}{b-a}} N_b^{\frac{x-a}{b-a}}$

Nu holde x fast, udnytte $t \to t^c$, $t \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ kont. for vilk. $c \geq 0$ $(0^0 = 1)$:

$$M_x \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}$$

NB. Medmindre $f: A \to \mathbb{C}$ identisk 0 er M_a, M_b begge pos., dvs. 1° foreligger.

Thi af uligheden: $M_a = 0 \vee M_b = 0 \Rightarrow M_x = 0$ for $a < x < b$.

Rækkesum som integral.

Vi betragter fkt.r f def. på num. mgd., f.eks. $\mathbb{Z}$.

Vi vil kalde $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ en trappefkt., hvis $\{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq 0\}$ er endelig. I så fald sætte $I(f) = \sum_{f(n)\neq 0} f(n)$ (NB. uskadeligt at summere over flere n'er)

Nu kan indførelsen af Lebesgue integralet kopieres. Resultat:

$$f \text{ integrabel} \iff \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) \text{ absolut konverg.}$$

I bekr. fald: $I(f) =$ rækkesummen.

Beviset føres, idet man først viser de analoge til de grundlæggende sætninger om Lebesgue integralet. Tænker man sig nu elem.erne i $\mathbb{Z}$ nummer. på vilk. måde $n_1, n_2, \dots$ har man for $f \geqq 0$ med f_p def. ved

$$f_p(n_1) = f(n_1), \dots \; f_p(n_p) = f(n_p), \; f_p(n_{p+1}) = f_p(n_{p+2}) = \dots\dots = 0,$$

at $f_p \nearrow f$, dermed (monotonisætn.)

$$f \in \mathcal{L} \iff \lim I(f_p) = \lim \sum_{i=1}^{p} f(n_i) < \infty, \quad \text{i bekr. fald} \quad I(f) = \lim_p \sum_{i=1}^{p} f(n_i)$$

Videre for vilk. f

$$f \in \mathcal{L} \iff |f| \in \mathcal{L} \iff \lim \sum_{i=1}^{p} |f(n_i)| < \infty, \quad \text{i bekr. fald} \quad I(f) = \lim_p \sum_{i=1}^{p} f(n_i)$$

$\Leftarrow$ samt formel for $I(f)$: major. grænseoverg. m. f_p

NB. Ved anførte overgang fra end. summer til abs. konv. rækker spiller rækkefølgen overhov. ikke ind.

Alle $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$ er målelige.
Defin. af $\mathcal{L}^p$ kopieres, giver ℓ^p. $\quad \|f\|_p = I(|f|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ def. sædv.

ult: lov/Gurev. 28-130 $\quad (\mathcal{L}^p, \| \, \|_p) = (\ell^p, \| \, \|_p)$ er fuldst., trappefkt.nerne er tæt delmgd for $1 \leqq p < \infty$ (f tilnærmes af f_p)

Inddragelsen af kompl. fkt.ner $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ volder ingen vanskeligheder.
Spec. komplekse trappefkt.ner tæt i kompl. $\mathcal{L}^p$, $1 \leqq p < \infty$.

Formålet med ovenstående er, at vi i det følgende ofte kan behandle Lebesgue integrable fkt.ner og abs. konverg. rækker under et, uden at specificere.

En omvending af Hölders ulighed

Lad E betegne $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{T}$ ell. $\mathbb{Z}$, og I tilsv. Lebesgue integral, middelværdi ell. sum v. abs. konvergens, μ tilsv. mål. (Umiddelbar kopi for vilk. mgd. E med mål μ, hvor E foren. af num. mange mgdr m. end. mål.)

Minde om Hölders ulighed: $|I(fg)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ for $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^{p'}$ med $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Bekvemt for $1 < p < \infty$ at notere forsk. udtryk for $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$:

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{p}{p'} = p-1, \quad p = (p-1)p'$$

Vi får brug for omvending:

<u>For hvert</u> $f \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, <u>er</u> $\qquad \|f\|_p = \sup_g |I(fg)|$

<u>hvor sup tages over alle</u> $g \in \mathcal{L}^{p'}$ <u>med</u> $\|g\|_{p'} = 1$.

3.69 Bevis. $\geq$ er Hölders ulighed

llere starte | $1 < p < \infty$: Vi kan antage f ej ækv. 0, hvorved $\|f\|_p > 0$. Kan antage $\|f\|_p = 1$.

d $p=1$. | $|f(x)|^p = |f(x)|^{p-1}|f(x)| = |f(x)|^{p-1} f(x) \operatorname{sgn} \overline{f(x)} = f(x) |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} \overline{f(x)}$

$g = |f|^{p-1} \operatorname{sgn} \overline{f}$ er målelig, idet sgn er Borel fkt. (endda kontin. påncn i 0)

$|g|^{p'} = |f|^{(p-1)p'} = |f|^p \in \mathcal{L}$ og $I(|g|^{p'}) = 1$, altså: $\quad g \in \mathcal{L}^{p'}$, $\|g\|_{p'} = 1$

Og $f \cdot g = |f|^p$, altså $I(fg) = 1 = \|f\|_p$

NB. sup antages.

$p=1$: Kan antage $f \neq 0$. Her $|f| = fg$ med $g = \operatorname{sgn} \overline{f} \in \mathcal{L}^\infty$, $\|g\|_\infty = 1$. do.

$p = \infty$: Kan antage f ej ækv. 0. For vilk. a, $0 < a < \|f\|_\infty$:

$\{x \mid |f(x)| \geq a\}$ ej nulmgd., har delmgd. A med $0 < \mu(A) < \infty$ (μ σ-endelig)

Med $g = 1_A \operatorname{sgn} \overline{f} / \mu(A)$ er da g målelig, $|g| = 1_A/\mu(A)$ integr. m. $I(|g|) = 1$,

altså $g \in \mathcal{L}$, $\|g\|_1 = 1$, og $I(fg) = \frac{1}{\mu(A)} I(|f| \cdot 1_A) \geq \frac{1}{\mu(A)} I(a 1_A) = a$.

<u>Tilføjelse</u>: Lige så gerne sup over alle $g \in \mathcal{L}^{p'}$ med $\|g\|_{p'} \leq 1$
eller - - - - - - - - - - - - - - - - $\|g\|_{p'} < 1$

Endvidere nok at betragte (komplekse) trappefkt.ner g, forudsat $1 < p \leq \infty$.

Thi $|I(fg)| = \|fg\|_1$ er kontin. fkt. af $g \in \mathcal{L}^{p'}$ iflg. Hölder og trappefkt.ner g med $\|g\|_{p'} < 1$ ligger tæt i $\{g \in \mathcal{L}^{p'} \mid \|g\|_{p'} < 1\}$.

I det følgende fæste opmærksomheden ved klassen S af <u>simple fktner</u>:

Def. $g : E \to \mathbb{C}$ kaldes <u>simpel</u>, hvis der findes end. mange parvis disj. integrable mgdr A_i samt $c_i \in \mathbb{C}$, så

$$g = \sum_i c_i 1_{A_i}$$

S omfatter alle trappefktner (for $E = \mathbb{Z}$ netop trappefktner)

For hvert p, $1 \leq p \leq \infty$, er $S \subseteq \mathcal{L}^p$, og for $1 \leq p < \infty$ er S tæt i $\mathcal{L}_p, \| \ \|_p$.

(Er E integr., så også S tæt i $\mathcal{L}_\infty$, se s. 58, NB

Her gælder: <u>For hvert</u> $f \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, <u>er</u> $\|f\|_p = \sup_{g \in S, \|g\|_{p'} = 1} |I(fg)|$

Bevis. For $1 < p \leq \infty$ argumentere som for trappefktner g eller benytte resultatet.

For $p = 1$:

Kan antage $\|f\|_1 > 0$. $\|f\|_1 = I(fg)$ med $g = \operatorname{sgn} \bar{f}$, idet $fg = |f|$

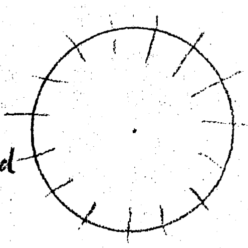
Vælge <u>integr.</u> mgdr $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ med $\bigcup_n E_n = E$, (μ σ-endelig)

sætte $g_n = g \cdot 1_{E_n}$, hvormed $fg_n = |f| \cdot 1_{E_n} \to |f|$, majoris af $|f| \in \mathcal{L}$

altså $I(fg_n) \longrightarrow I(|f|) = \|f\|_1$

For passende n: $| \|f\|_1 - I(fg_n) | < \varepsilon$

Men g_n, som kun antager værdier på enhedscirkel samt 0 og er 0 udenfor E_n



kan approx. ligeligt med nøjagtigh. ε med $h_n \in S$, $\|h_n\|_\infty \overset{(<)}{\leq} 1$, dermed

$$|I(fh_n) - I(fg_n)| = |I(f(h_n - g_n))| \leq \|f\|_1 \|h_n - g_n\|_\infty \leq \|f\|_1 \varepsilon$$

Vi får brug for skærpelse.

Først bemærke: Er $f \in \mathcal{L}^p$, så $f \cdot 1_A \in \mathcal{L}$ for vilk. integr. mgd. A

Thi $f \cdot 1_A$ målelig og for $p = \infty$: majorisering ved const.$\cdot 1_A \in \mathcal{L}$ | hurtigere: $1_A \in \mathcal{L}^{p'}$

for $1 \leq p < \infty$: $|f \cdot 1_A| \leq |f|^p + 1_A \in \mathcal{L}$

<u>Sætning.</u>

<u>Lad</u> $f : E \to \mathbb{C}$ <u>være integrabel i enhv. integr. mgd.</u> A, <u>dvs.</u> $f \cdot 1_A \in \mathcal{L}$, (dermed f målelig, $= \lim f \cdot 1_{E_n}$)

dermed $fg \in \mathcal{L}$ for ethv. $g \in S$. <u>Da:</u>

$p \leq \infty$

$$\|f\|_p = \sup_{g \in S, \|g\|_{p'} = 1} |I(fg)|$$

<u>hvor</u> $\|f\|_p$ <u>regnes</u> $= \infty$ <u>når</u> $f \notin \mathcal{L}^p$.

Det nye er: $\sup < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p$. Bemærk iøvrigt, at forudsætningen om f

~~for $E = \mathbb{R}^n$ kommer ud på fdls. f integrabel i hvert interval~~

" $E = \mathbb{T}$ kommer ud på $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$

" $E = \mathbb{Z}$ er tom ($f \cdot 1_A$ er altid trappefkt for A integrabel, dvs endelig)

Bevis for det nye: antage $m = \sup_{g\in S,\ \|g\|_{p'}=1} |I(fg)| < \infty$, vise $f \in \mathcal{L}^p$.

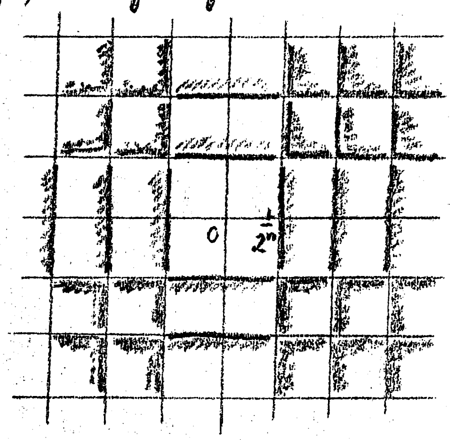
1° Søge at udvide mgd. af g'er uden forøgelse af sup. Uskyldigt: tillade $\|g\|_{p'} \leq 1$.

For vilk. begr., målelig fkt. g, hvor $\{x \mid g(x)\neq 0\}$ integr., ensbet. m. indeh. i integr. mgd. A er $fg = f\cdot 1_A \cdot g \in \mathcal{L}$, altså $I(fg)$ eksist. Og $g\in\mathcal{L}^{p'}$, idet $|g|^{p'} = |g|^{p'}\cdot 1_A \in \mathcal{L}$

ræsonnem. for $p'\neq\infty$.

Videre findes simple fkt.ner $g_1, g_2, \ldots$ med $|g_n| \leq |g|$, så $g_n \to g$

F. eks. svarende til n dele C i masker:
For hver maske pånær den centrale er orig. mgd. en integrabel mgd, dog $\emptyset$ pånær højst endl. mange tilfælde



g_n fås ud fra g ved i hver orig. mgd. at erstatte g's værdier med pktet nærmest 0 i pågældende maske

B: Er E integr. ses $g_n\to g$ ligel., slut i $\mathcal{L}^\infty$, $\|\ \|_\infty$.

(endda gælder $g_n \to g$ ligeligt, $|g_n| \uparrow |g|$)

Hermed $fg_n \to fg$ majoriseret af $|fg|\in\mathcal{L}$, følgelig $I(fg) = \lim_n I(fg_n)$

Og $\|g_n\|_{p'} \leq \|g\|_{p'}$. Så hvis $\|g\|_{p'}\leq 1$, sluttes $|I(fg)| \leq m$. Altså

$$m = \sup_g |I(fg)|, \quad \text{hvor } g \text{ begr., målelig med } \{x \mid g(x)\neq 0\} \text{ integr.}, \ \|g\|_{p'}\leq 1$$

2° $m = \sup_g I(|f|g)$, hvor g - - - - - - - - - - - - - - - - , $g \geq 0$

Thi $|I(fg)| \leq I(|f||g|)$, $\||g|\|_{p'} = \|g\|$

og $I(|f|g) = I(f g\, \mathrm{sgn}\bar f)$, hvor $|g\, \mathrm{sgn}\bar f| \leq |g|$, spec. $\|g\, \mathrm{sgn}\bar f\|_{p'} \leq \|g\|_{p'}$

dele: $1\leq p<\infty$.

3° Med $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, E_n integr. og $\bigcup_n E_n = E$ sætte $f_n = |f| \wedge n\cdot 1_{E_n}$.

Da: f_n begr., målelig, 0 uden for E_n, spec. $f_n\in\mathcal{L}^p$, hvormed (s. 56,57)

$$\|f_n\|_p = \sup_g |I(f_n g)|, \quad \text{hvor } g\in\mathcal{L}^{p'},\ \|g\|_{p'}\leq 1 \quad (s. 56)$$

$$\text{eller } g\in S,\ \|g\|_{p'}\leq 1 \quad (s. 57)$$

eller direkte [illegible] foreg.

Vi kan da også gå mellemvej: g begr., målelig, $\{x \mid g(x)\neq 0\}$ integr., $\|g\|_{p'}\leq 1$

Og da $|I(f_n g)| \leq I(f_n|g|)$, $\||g|\|_{p'} = \|g\|$, finder vi [sml. 2°]

$\|f_n\|_p = \sup I(f_n g)$, hvor g begr., målel., $\{x \mid g(x)\neq 0\}$ integr., $\|g\|_{p'}\leq 1$, $g\geq 0$.

Idet $f_n \leq |f|$ ser vi ved at sammenholde med 2°: $\|f_n\|_p \leq m$

Endelig: $f_n \nearrow |f|$, dermed $f_n^p \nearrow |f|^p$, hvor $f_n^p \in \mathcal{L}$ og $\lim_n I(f_n^p) \leqq \underline{m^p < \infty}$.
Iflg. monotonisætn.: $\quad |f|^p \in \mathcal{L}$, altså $f \in \mathcal{L}^p$.

Først her benyttes antagelsen $m < \infty$

$p = \infty$:

$1°$ og $2°$ som før, derpå

$3°$ $f \in \mathcal{L}^\infty$ ses ved at efterevise $\{x \mid |f(x)| > m\}$ er nulmgd.

Indirekte: i modsat fald delmgd. A med $0 < \mu(A) < \infty$. $\quad$ (μ σ-endelig)

Med $g = \frac{1}{\mu(A)} \cdot 1_A$ var da $\|g\|_1 = 1$, men

$I(|f|g) = \frac{1}{\mu(A)} I(|f| \cdot 1_A) > \frac{1}{\mu(A)} I(m 1_A) = m$, $\quad$ i strid med $2°$

skarpe uligh. beror på for $h \in \mathcal{L}, h \geqq 0$: $\quad I(h) = 0 \Rightarrow h \sim 0$.
Kan omgås ved at betragte $m+1$.

<u>Lineære operatorer.</u>

Lad V og W være vektorrum med norm, $T: V \to W$ lineær.

Def. T kaldes <u>begrænset</u>, hvis
$$M_T = \sup\{\|T(x)\| \mid x \in V,\ \|x\| \leq 1\} < \infty$$

dvs. hvis
$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\ \forall x \in V: \quad \|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

M_T er da mindste brugbare M, kaldes <u>normen</u> af T.

Hertil bemærke, at brugbare M netop er majoranter til $\{\|T(x)\| \mid x \in V,\ \|x\| \leq 1\}$.
Er nemlig M majorant, så for $x \neq 0$: $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$, altså $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.
Omv. klart.

<u>T er (ligeligt) kontin., blot T er kontin. i ét pkt.</u>
Thi idet $\|T(x+h) - T(x)\| = \|T(h)\|$ og $\|x+h-x\| = \|h\|$, ses, at T er samtidig kontin. i 0 og x.

<u>T er kontin., netop hvis T er begrænset.</u>
Thi er T begrænset, så åbenbart kontin. i 0
Omv. Antag T kontin. (i 0). Til $\varepsilon = 1$ findes δ, så $\|T(x)\| \leq 1$ for $\|x\| < \delta$
dermed $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$ for $\|x\| < 1$

Lad U og W være vektorrum, V et underrum af U, $T: V \to W$ lineær (T siges da at være en <u>operator</u> <u>fra</u> U til W.) U og dermed V, samt W forudsættes med norm.

<u>Sætn.</u> <u>Hvis</u> V <u>er tæt</u> i U, <u>hvis</u> W <u>er et Banach rum</u> (dvs. metrikken fuldst.) <u>og hvis</u> T <u>er begrænset</u>, <u>da kan</u> T <u>udvides til en begr.</u>, <u>lin. afbildning af hele</u> U <u>ind i</u> W <u>og kun på én måde</u>. <u>Herved ændres normen af</u> T <u>ikke</u>.

Bevis. Klart, at højst én kontin. udvid., da V er tæt i U: til hvert $x \in U$ findes følger
3.69 $x_n \to x$, $x_n \in V$

<u>Eksistens</u>
Betragt vilk. $x \in U$.
Lad $x_n \to x$, $x_n \in V$. Idet $\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_m - x_n)\| \leq M_T\|x_m - x_n\|$, ses at $T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ er fundamfølge, altså konverg.
Grænsepktet er uafh. af valgte følge x_n, thi er også $y_n \to x$, $y_n \in V$, kan vi blande, $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$, og $T(x_1), T(y_1), \ldots$ konvergerer.
Vi kan da sætte $T'(x) = \lim_n T(x_n)$ for $x_n \to x$, $x_n \in V$.

$T': U \to W$ er udvid. af T. Klart: for $x \in V$ benytte $x_n = x$.

T' lineær. Klart: Er $x = \lim x_n$, $x_n \in V$ og $y = \lim y_n, y_n \in V$

så er $x+y = \lim (x_n + y_n)$, $x_n + y_n \in V$

dermed $T'(x+y) = \lim T(x_n+y_n) = \lim (T(x_n)+T(y_n)) = \lim T(x_n) + \lim T(y_n) = T'(x)+T'(y)$

og $T'(ax) = \qquad = aT'(x)$

Endelig begrænsetheden: Lad $x_n \to x$, $x_n \in V$. For hvert n er $\|T(x_n)\| \leqq M_T \|x_n\|$,

og da $\|T'(x)\| = \|\lim\limits_n T(x_n)\| = \lim\limits_n \|T(x_n)\|$

$\|x\| = \qquad \lim\limits_n \|x_n\|$, sluttes $\|T'(x)\| \leqq M_T \|x\|$

Eks. Situation som s. 56.

Fdet $1 \leqq p \leqq \infty$, bestemmer hvert $f \in \mathcal{L}^p$ lin. afbildn. $T_f : \mathcal{L}^{p'} \to \mathbb{C}$, $T_f(g) = I(fg)$.

Med $\| \ \|_{p'}$, $| \ |$ er T_f begrænset iflg. Hölder: $|T_f(g)| = |I(fg)| \leqq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Videre: $M_{T_f} = \sup\limits_{g \in \mathcal{L}^{p'}, \|g\|_{p'} \leqq 1} |I(fg)| = \|f\|_p$ iflg. s. 56

For $1 < p \leqq \infty$ får vi illustreret sætningen ovenfor ved at starte med $T: S \to \mathbb{C}$.

Riesz-Thorins sætning.

Lad E, F være $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{T}$ ell. $\mathbb{Z}$ (ikke nødv. det samme) og I, J tilsv. Lebesgue integral, middelværdi ell. sum (ved abs. Konverg.), μ, ν tilsv. mål. (Relevante forudsætning blot: E, F mgdr. med σ-endelige mål μ, ν.)

Vi betragter lin. operatorer T defin. på mgden S_E af simple fkt.ner i E og med kompl. fkt.ner på F som værdier, $T: S_E \to \mathbb{C}^F$

Def. T siges at være af type (r, s), hvor $1 \leq {r \atop s} \leq \infty$, hvis $\forall f \in S_E: \; T(f) \in \mathcal{L}^s(F)$ og hvis $T: S_E \to \mathcal{L}^s(F)$ er begrænset, dvs.

$$\exists M \;\forall f \in S_E: \; \|T(f)\|_s \leq M \|f\|_r .$$

E integr. eru med- regn.)

I bekr. fald har T, hvis $1 \leq r < \infty$, en og kun en udvidelse til begr. lin. afbildn. af hele $\mathcal{L}^r(E)$ ind i $\mathcal{L}^s(F)$, iflg. sætn. s. 60. Herved er normen $M_T^{(r,s)}$ af T uændret.

Eks. $E = \mathbb{T}$, $F = \mathbb{Z}$, $T(f) = \hat{f}$ med $\hat{f}(n) = \mathfrak{M}_t(f(t) e^{-int})$, n^{te} Fourier Koeff.

Her er T af type $(1, \infty)$, med norm $M_T^{(1,\infty)} = 1$

idet $\|Tf\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty = \sup_n |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ viser $M_T^{(1,\infty)} \leq 1$

hvor f. eks. $f = 1$ udelukker $<$.

Men T er også af type $(2,2)$, med norm $M_T^{(2,2)} = 1$

iflg. Parseval: $\|Tf\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$

Udvidelsen til $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, henh. $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ naturligv. ligeledes givet ved $T(f) = \hat{f}$.

Bemærkn.

For fkt. $h: A \times B \to \mathbb{R}^*$ gælder generelt: $\sup_{x \in A, y \in B} h(x,y) = \sup_{x \in A} (\sup_{y \in B} h(x,y))$

thi $h(a,b) \leq \sup_y h(a,y) \leq \sup_x \sup_y h(x,y)$, som altså er major. for alle $h(x,y)$

Omv. $\sup_y h(a,y) \leq \sup_{x,y} h(x,y)$, som altså er major. for alle $\sup_y h(x,y)$

Nu: Forudsættes T af type (r,s), hvor $1 \leq {r \atop s} \leq \infty$, gælder

$$M_T^{(r,s)} = \sup_{f \in S_E, \|f\|_r \leq 1} \|T(f)\|_s = \sup_{f \in S_E, \|f\|_r \leq 1,\; g \in S_F, \|g\|_{s'} \leq 1} |J(T(f) \cdot g)| ,$$

idet $\|T(f)\|_s = \sup_g |J(T(f) \cdot g)|$ (s. 57).

Formlen gælder stadig under den svagere forudsætn. $\forall f \in S_E \;\forall$ integr. $A \subseteq F: \; T(f) \cdot 1_A$ integr., idet $M_T^{(r,s)}$ sættes til ∞, hvis T ikke er af type (r,s).

Thi sætningen s. 57 kan stadig anvendes, blot er nu $\|T(f)\|_s = \infty$ en mulighed.

At bevise er: T ej af type $(r,s) \Rightarrow \sup_f \|T(f)\|_s = \infty$

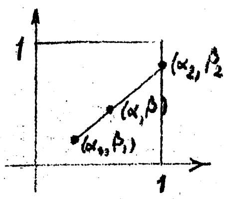
Findes $f \in S_E$, så $T(f) \notin \mathcal{L}^s(F)$, er imidlertid allerede $\|T(f)\|_s = \infty$

Og er $T: S_E \to \mathcal{L}^s(F)$, men ikke begr., er jo $\sup_f \|T(f)\|_s = \infty$.

M. Riesz-Thorins sætning.

Situation som beskrevet s. 62 øverst.

Hvor (α,β) — **Hvis T er både af type $(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})$ og $(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2})$**, hvor (α_1,β_1) og (α_2,β_2) tilh. kvadratet $[0,1]\times[0,1]$, og ligger (α,β) på det forbindende liniestykke,



$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} + t\binom{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\beta_1} = (1-t)\binom{\alpha_1}{\beta_1} + t\binom{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{med } 0<t<1,$$

da er T også af type $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ og $(*)\quad M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})} \leq \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}\right)^{1-t} \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})}\right)^{t}$.

Vi minder om, at T i så fald, forudsat $\alpha \neq 0$ ell. E integr., har entydig udvidelse til

s. 69 begr. lin. afbildn. af hele $\mathcal{L}^{\frac{1}{\alpha}}(E)$ ind i $\mathcal{L}^{\frac{1}{\beta}}(F)$, hvorved norm uændret.

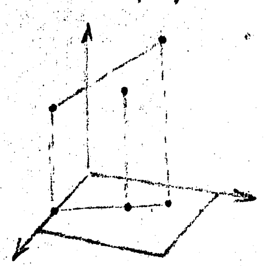
Forskellige kommentarer til sætningen.

$C = \{(\alpha,\beta) \in [0,1]\times[0,1] \mid T \text{ er af type } (\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})\}$ er konveks

For hvert $(\alpha,\beta) \in C$ er $M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})} > 0$, medmindre da $T(f)=0$ for hvert f, dvs. $T=0$.

I det følgende forudsættes $T \neq 0$. Da er $(*)$

$$\log M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})} \leq (1-t)\log M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})} + t \log M_T^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})},$$



hvilket udsiger, at $(\alpha,\beta,\log M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})})$ ligger under „korden" mellem $(\alpha_1,\beta_1,\log M^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})})$ og $(\alpha_2,\beta_2,\log M^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})})$

For $T \neq 0$ kan Riesz-Thorins sætn. da også udtrykkes:

Fkt.nen $(\alpha,\beta) \to \log M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})}$, $(\alpha,\beta)\in C$ er konveks.

Endelig bemærkes, at blot $\forall f \in S_E\ \forall$ integr. $A \subseteq F: T(f)\cdot 1_A \in \mathcal{L}$, hvilket i hv. fald er opfyldt når $C \neq \emptyset$, har $M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})}$ en mening (evt. ∞) for hvert $(\alpha,\beta)\in[0,1]\times[0,1]$,

og sætningen kan samles i

$$\binom{\alpha}{\beta} = (1-t)\binom{\alpha_1}{\beta_1} + t\binom{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \leq 1 \\ 0<t<1 \end{matrix}, \quad \text{medf.} \quad (*)\ M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})} \leq \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}\right)^{1-t}\left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})}\right)^{t}$$

~~For $T \neq 0$ kan vi i $(*)$ gå over~~ til logaritmer:

Fkt.nen $(\alpha,\beta) \to \log M_T^{(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})} \in \mathbb{R}^*$, $(\alpha,\beta)\in[0,1]\times[0,1]$, er „konveks".

M. Riesz 1926, kun firkanten $0 \le \beta \le \alpha \le 1$
Thorin 1939, kompl. metoder, kvadratet.

Bevis. Antages: T af type $(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})$ og $(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2})$, hvor (α_1, β_1) og (α_2, β_2) tilh. $[0,1] \times [0,1]$

$$\binom{\alpha}{\beta} = (1-t)\binom{\alpha_1}{\beta_1} + t\binom{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \text{hvor } 0 < t < 1$$

Vise: $(*)$ – thi dermed $M_T^{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})} < \infty$, dvs. T af type $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$.

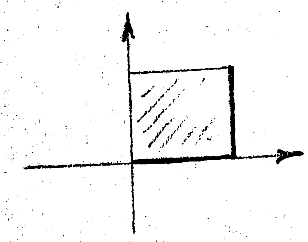
Benytte: $M_T^{(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})} = \sup_f \|T(f)\|_{\frac{1}{\beta}} = \sup_{f,g} |J(T(f)\cdot g)|$ (s. 62), altså:

Betragte vilk. $f \in S_E$ med $\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} = 1$ og $g \in S_F$ med $\|g\|_{\frac{1}{1-\beta}} = 1$

Vise: $|J(T(f)\cdot g)| \leq \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1})}\right)^{1-t} \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2})}\right)^{t}$.

Lad $f = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$, hvor A_i 'erne integr. og parvis disj., alle $a_i \neq 0$. Tilsv. $g = \sum_{j=1}^{n} b_j 1_{B_j}$.

For hvert $z \in \mathbb{C}$ sætter vi $\quad \alpha(z) = (1-z)\alpha_1 + z\alpha_2$, $\quad \beta(z) = (1-z)\beta_1 + z\beta_2$. $\quad$ Hervед er $\alpha(t) = \alpha$, $\beta(t) = \beta$.



<u>Hovedtilfælde</u>: $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, dvs. (α, β) tilh. viste figur:

i med sjag. streger

Erindre $f = |f| \operatorname{sgn} f = \sum_{i=1}^{m} |a_i| \operatorname{sgn} a_i \cdot 1_{A_i}$

Til hvert $z \in \mathbb{C}$ fkt. $f_z : E \to \mathbb{C}$

$$f_z(u) = \begin{cases} |f(u)|^{\alpha(z)/\alpha} \operatorname{sgn} f(u) & \text{for } |f(u)| > 0 \\ 0 & \text{for } f(u) = 0 \end{cases}, \quad \text{dvs. } f_z = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^{\alpha(z)/\alpha} \operatorname{sgn} a_i \cdot 1_{A_i}$$

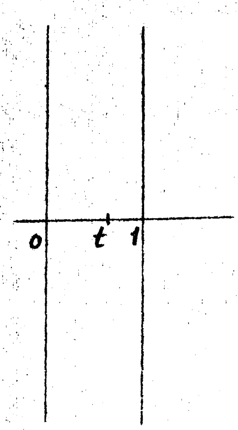
Tilsv. $g_z : F \to \mathbb{C}$, ekspon. $(1-\beta(z))/(1-\beta)$ $\qquad g_z = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} \operatorname{sgn} b_j \cdot 1_{B_j}$

Vi har $f_z \in S_E$, $g_z \in S_F$. Mærk: $f_t = f$, $g_t = g$. $\qquad T(f_z) = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^{\alpha(z)/\alpha} \operatorname{sgn} a_i \cdot T(1_{A_i})$

$$(0) \qquad J(T(f_z)\cdot g_z) = \sum_{i,j} |a_i|^{\alpha(z)/\alpha} |b_j|^{(1-\beta(z))/1-\beta} \operatorname{sgn} a_i \operatorname{sgn} b_j \, J(\underbrace{T(1_{A_i})\cdot 1_{B_j}}_{\text{integr.}})$$

Betragte $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ def. ved $H(z) = J(T(f_z)\cdot g_z)$. $\quad$ Mærk: $H(t) = J(T(f)\cdot g)$.

H <u>holomorf</u> i hele $\mathbb{C}$ iflg. (0), holde os til strimlen $A = \{x+iy \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$



Her: $\operatorname{Re} \alpha(x+iy)/\alpha = ((1-x)\alpha_1 + x\alpha_2)/\alpha$ begr.

dermed $\left| |a_i|^{\alpha(z)/\alpha} \right| = |a_i|^{\operatorname{Re} \alpha(z)/\alpha}$ begr.

$\operatorname{Re} (1-\beta(z))/(1-\beta) = (1 - (1-x)\beta_1 - x\beta_2)/1-\beta$ begr.

dermed $\left| |b_j|^{(1-\beta(z))/1-\beta} \right| = |b_j|^{\operatorname{Re}(1-\beta(z))/1-\beta}$ begr.

altså H <u>begræns.</u> i strimmel:

Vi kan anvende <u>tre linie sætn.</u> (s. 54)

Med henblik på en vurdering af $H(x+iy)$ for $x=0$ og $x=1$ bemærkes først

$$|H(z)| = |J(T(f_z)\cdot g_z)| \underset{\text{Hölder}}{\le} \|T(f_z)\|_{1/\beta_1}\,\|g_z\|_{1/(1-\beta_1)} \underset{T \text{ af type } (\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}{\le} M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}\,\|f_z\|_{1/\alpha_1}\,\|g_z\|_{1/(1-\beta_1)}$$

20.3.69 og anal. med (α_2,β_2) i stedet for (α_1,β_1)

Nu: $\|f_{iy}\|_{1/\alpha_1} = 1$

Thi for $f(u)\neq 0$ er $|f_{iy}(u)| = |f(u)|^{\mathrm{Re}\,\alpha(iy)/\alpha} = |f(u)|^{\alpha_1/\alpha}$

Heraf straks påstanden, hvis $\alpha_1 = 0$,

og er $\alpha_1 > 0$, fås $|f_{iy}(u)|^{\frac{1}{\alpha_1}} = |f(u)|^{\frac{1}{\alpha}}$ for <u>alle</u> $u\in E$

dermed $I(|f_{iy}|^{\frac{1}{\alpha_1}}) = I(|f|^{\frac{1}{\alpha}}) = 1$, idet $\|f\|_{1/\alpha} = 1$

$\|g_{iy}\|_{1/(1-\beta_1)} = 1$

Thi for $g(u)\neq 0$ er $|g_{iy}(u)| = |g(u)|^{\mathrm{Re}(1-\beta(iy))/(1-\beta)} = |g(u)|^{(1-\beta_1)/(1-\beta)}$

Heraf straks påstanden, hvis $\beta_1 = 1$,

og er $\beta_1 < 1$, fås $|g_{iy}(u)|^{1/(1-\beta_1)} = |g(u)|^{1/(1-\beta)}$ for <u>alle</u> $u\in E$

dermed $I(|g_{iy}|^{1/(1-\beta_1)}) = I(|g(u)|^{1/(1-\beta)}) = 1$, idet $\|g\|_{1/1-\beta} = 1$

Altså: $|H(iy)| \le M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}\cdot 1\cdot 1$, $\quad M_0 = \sup_y |H(0+iy)| \le M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}$.

Ganske analogt: $\quad M_1 = \sup_y |H(1+iy)| \le M_T^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})}$

blot med $1+iy$ i stedet for iy
(α_2,β_2) i stedet for (α_1,β_1)

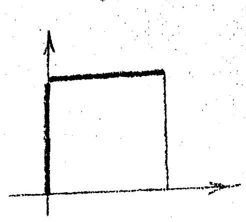
Tre linie sætn. giver

$$|J(T(f)\cdot g)| = |H(t)| \le \sup_y |H(t+iy)| = M_t \le M_0^{1-t}M_1^{t} \le \left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\beta_1})}\right)^{1-t}\left(M_T^{(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\beta_2})}\right)^{t}$$

— $0<\alpha\le 1$, $\beta = 1$. (Hermed $\beta_1=\beta_2=1$.)
f_z som før, men benytte g selv i stedet for g_z, altså $H(z) = J(T(f_z)\cdot g)$.
Herved forenkling i forhold til hovedtilfældet

— $\alpha = 0$, $0\le\beta<1$. (Hermed $\alpha_1=\alpha_2=0$.)
g_z som i hovedtilfælde, men benytte f selv i stedet for f_z, altså $H(z) = J(T(f)\cdot g_z)$

$\alpha=0$, $\beta=1$ forekommer ikke –
(eller kun med
$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha,\beta)$,
hvor (*) oplagt).



Hausdorff / Youngs sætninger

For $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ vil $\hat{f} \in l_2$ og $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \mathfrak{M}(|f|^2)$ (Parseval)

I øjeblikket dog kun faste opmærks. v. $\leqq$ (Bessels ulighed)

og generalisere:

For $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, hvor $1 \leq p \leq 2$, er $\hat{f} \in l_{p'}$ og $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$ $\qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Bevis. Vi udnytter tilfældene $p = 1$ (triviel) og $p = 2$ (Bessels ulighed), og interpolerer ved Riesz/Thorins sætn.:

Benytte $E = \mathbb{T}$, $F = \mathbb{Z}$ og T defin. ved $T(f) = \hat{f}$, $f \in S_{\mathbb{T}}$.

T er af type $(1,\infty)$, $M_T^{(1,\infty)} \leq 1$ (faktisk $= 1$)

thi idet $\hat{f}(n) = \mathfrak{M}_t(f(t)e^{-int})$, er jo $\|Tf\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty = \sup |\hat{f}(n)| \leq \mathfrak{M}(|f|) = \|f\|_1$

T er af type $(2,2)$, $M_T^{(2,2)} \underset{\text{Bessel}}{\leq} 1$ (faktisk $\underset{\text{Parseval}}{=} 1$)

Lad nu $1 < p < 2$.
$(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$ ligger da på liniestykket mellem $(1,0)$ og $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (ligning $x + y = 1$).

Iflg. Riesz/Thorin: T er af type (p,p') og med passende t, $0 < t < 1$

$$M_T^{(p,p')} \leq \left(M_T^{(1,\infty)}\right)^{1-t} \left(M_T^{(2,2)}\right)^t \leq 1$$

Iflg. udvid.sætn.,s.60 har T entydig udvid. til begr., lin. $T' : \mathcal{L}_p(\mathbb{T}) \to l_{p'}$, norm uændret,

altså for hvert $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ er $T'(f) \in l_{p'}$ og $\|T'(f)\|_{p'} \leq \|f\|_p$

Mgl.: $T'(f) = \hat{f}$ for $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ $\qquad$ Sæt $T'(f) = (c'_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$.

Hertil følge $f_1, f_2, \dots, f_n \in S_E$, så $\|f - f_n\|_p \to 0$

Dels $\|T'(f) - T'(f_n)\|_{p'} = \|T'(f) - \hat{f}_n\|_{p'} \to 0$, spec. $c'_\nu = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\nu)$ for hvert ν

Dels $|\hat{f}(\nu) - \hat{f}_n(\nu)| = |\mathfrak{M}((f - f_n)e_{-\nu})| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f - f_n\|_p \|e_{-\nu}\|_{p'} = \|f - f_n\|_p \to 0$

altså $\hat{f}(\nu) = \lim_n \hat{f}_n(\nu)$ —

Er $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$, altså $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$, da er $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ Fourier række for fkt. $f \in L_2(\mathbb{T})$, (Riesz/Fischer).

Generalisere:

<u>Er</u> $\varphi = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_p$, <u>hvor</u> $1 \le p \le 2$, <u>da er</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ <u>Fourier række for fkt.</u> $f \in L_{p'}(\mathbb{T})$,

3.69 <u>hvor</u> $\|f\|_{p'} \le \|\varphi\|_p$ <u>og</u> $\|f - \sum_{-n}^{n} c_\nu e_\nu\|_{p'} \to 0$. (f er Riesz/Fischer fkt.nen, se bem. s. 69)

Bevis. Vi benytter Riesz/Thorins sætn. med $E=\mathbb{Z}$, $F=\mathbb{T}$ og T defin. ved

$$T\varphi = \sum \varphi(n) e_n, \qquad \varphi \in S_E.$$

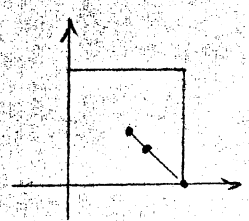
(Idet $\varphi \in S_E$ betyder $\{n \mid \varphi(n) \neq 0\}$ end., er $T\varphi$ trigon. polynom.)

T er af type $(1,\infty)$, $M_T^{(1,\infty)} = 1$

thi $\|T\varphi\|_\infty = \sup_t |\sum \varphi(n) e^{int}| \le \sum|\varphi(n)| = \|\varphi\|_1$, = kan forekomme, f.eks. når kun ét led

T er af type $(2,2)$, $M_T^{(2,2)} = 1$

thi $\|T\varphi\|_2^2 = \mathfrak{M}(T\varphi \cdot \overline{T\varphi}) = \sum|\varphi(n)|^2 = \|\varphi\|_2^2$ – også helt elementært



Lad nu $1<p<2$

$(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$ er da mellem $(1,0)$ og $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Iflg. Riesz-Thorin:

T er af type (p,p') og $M_T^{(p,p')} \le 1^{1-t}\cdot 1^{t} = 1$. Gerne tillade $1\le p\le 2$.

Iflg. <u>udvid.sætn.</u> (s.60) har T entyd. udvid. til begr., lin. $T'\colon \ell_p \to L_{p'}(\mathbb{T})$, norm uændret

Betragte vilk. $\varphi = (c_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}} \in \ell_p$; sætte $f = T'\varphi$.

Da er $f \in L_{p'}(\mathbb{T})$ og $\|f\|_{p'} \le \|\varphi\|_p$

Sætte $\varphi_n(\nu) = \begin{cases} \overset{=c_\nu}{\varphi(\nu)} & \text{for } |\nu| \le n \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$, hvorved $\varphi_n \in S_E$ og $T\varphi_n = s_n = \sum_{-n}^{n} c_\nu e_\nu$.

$$\|\varphi - \varphi_n\|_p = \Big(\sum_{|\nu|>n} |\varphi(\nu)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

følgelig $\|T'\varphi - T\varphi_n\|_{p'} = \|f - \sum_{-n}^{n} c_\nu e_\nu\|_{p'} \to 0$.

Og $\|f - s_n\|_{p'} \to 0$ medf.

$\hat{f}(\nu) = \lim_n \hat{s}_n(\nu)$ for hvert ν (sml. s. 66 nederst)

$\hat{s}_n(\nu) = c_\nu$ for $n > |\nu|$, altså $\hat{f}(\nu) = c_\nu = \varphi(\nu)$, $\hat{f} = \varphi$.

1 det væsentlige som at trække Riesz/Fischer ud af fuldstændigheden af L_2, Mat. 2.

De to sætninger skyldes Hausdorff 1923, for $p' = 4, 6, 8, \dots$ dog W.H. Young 1912.
Interpolationsmetoden: M. Riesz 1926.

Belyse sætningers indhold i forhold til $p=2$ ved bemærkn. s. 69.

Sætningerne brydes sammen for $p>2$:

Vi har: $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ for et $p>2 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{f} \in l_2$

men der findes Kont. fkt. f, hvor $\hat{f}$ ikke tilh. noget l_q med $q<2$; $\hat{f} \notin \bigcup_{q<2} l_q$

eks. i næste §, s. 81, hvor $f \in \bigcap_{p<\infty} \mathcal{L}_p$.

Vi har: $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tilh. $l_2 \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ er Fourier række for et $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$,

men der findes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, der tilh samtlige $l_p, p>2$, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \bigcap_{p>2} l_p$,

hvor $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ ej Fourier række. vise i næste §, s. 88

<u>Notere:</u> $\{\hat{f} \mid f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})\} \begin{smallmatrix}\subset \\ = \\ \supset\end{smallmatrix} l_{p'}$ for henh. $p \begin{smallmatrix}< \\ = \\ >\end{smallmatrix} 2$

Bortset fra <u>skarpe</u> inclusionstegn indeh. i Hausdorff/Youngs sætninger.

$\begin{smallmatrix}\supset \\ \subset\end{smallmatrix}$ af foregående to (ubeviste) påstande.

Bemærk: Hausdorff/Youngs sætninger gælder uændret, når $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erstattes med et vilk. ortonormalsystem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af fkt.ner på $\mathbb{T}$, $[0,2\pi[$ ell. f.eks. $[0,1[$, hvor $\varphi_n \in \mathcal{L}_\infty$, $\underline{\|\varphi_n\|_\infty \leq 1}$ for alle n.

$$\mathfrak{M}(\varphi_m \bar{\varphi}_n) = \begin{cases} 0 & \text{for } m \neq n \\ 1 & \text{for } m = n \end{cases}, \qquad \hat{f}(n) = \mathfrak{M}\{f \bar{\varphi}_n\}.$$

Huske, at der nu kan være flere fkt.ner med given „Fourier række"

Beviset uforandret. Som udgangspkt. ved ene interpolation kun Bessels ulighed i stedet for Parsevals lign., tilstr.

$f*g$ for $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$.

Vi vil give endnu en anvendelse af Riesz/Thorins sætn. (Edw. II, 149)

Minde om:

5) Er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}_{p'}(\mathbb{T})$, hvor $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq p' \leq \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, da er $f*g$ kontin. og $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

6) Er $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $g \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, da er $f*g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ og $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Her forsøge en interpolation.

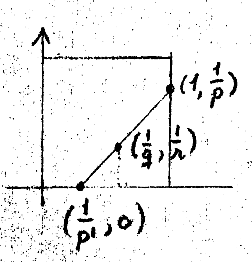
Hes s. 68 lyse

Bemærkning. Medens der for $1 \leq p < q \leq \infty$ gælder (MI s. 91) $\ell_p \subset \ell_q$ og for $\varphi \in \ell_p$: $\|\varphi\|_p \geq \|\varphi\|_q$
så gælder $\mathcal{L}_p(\mathbb{T}) \supset \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$, for $f \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$: $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.
(men for $\mathbb{R}$ intet tilsv.)

Bevis. Se side 14.

Konsekvens: $f_1, f_2, \cdots \to f$ i $\mathcal{L}_q(\mathbb{T})$ medf. $f_1, f_2, \cdots \to f$ i $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, når $p < q$.

s. 69 Nu: $E = F = \mathbb{T}$, for fast $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ sætte $T(g) = f*g$, $g \in S_E$, lineær.



T er af type (p', ∞) med norm $M_T^{(p',\infty)} \leq \|f\|_p$
og af type $(1, p)$ med norm $M_T^{(1,p)} \leq \|f\|_p$

Anvende Riesz/Thorins sætn. (bemærk linie har hældn. 1):

Lad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ og $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}$, hvorved $(\frac{1}{q}, \frac{1}{r})$ på liniest.

Da: T er af type (q, r) med $M_T^{(q,r)} \leq \|f\|_p$.

Har entyd. udvid. til begr. lin. $T': \mathcal{L}_q(\mathbb{T}) \to \mathcal{L}_r(\mathbb{T})$, uændret norm.
altså: for hvert $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{T})$ er $T'g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{T})$ og $\|T'g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Påstand: $T'g = f*g$.

Hertil vælge $g_1, g_2, \ldots, g_n \in S_E$ med $g_n \to g$ i $\mathcal{L}_q(\mathbb{T})$ og dermed i $\mathcal{L}_1(\mathbb{T})$, bem.

Da gælder dels $T'g_n = f*g_n \to T'g$ i $\mathcal{L}_r(\mathbb{T})$
og dermed i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$, dels (s. 13) $f*g_n \to f*g$ i $\mathcal{L}(\mathbb{T})$

hvormed påstanden.

Betragtningen viser:

<u>Er</u> $f \in L_p(T)$, $g \in L_q(T)$, <u>hvor</u> $1 \leq \frac{p}{q} \leq \infty$ <u>og</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$,
<u>da er</u> $f * g \in L_r(T)$, <u>hvor</u> $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, <u>og</u>

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

(Young 1912; Zygm. I, s. 37)

§7. Plat og krone om fortegn på Fourier koefficienter.

Plat og krone.

Elementerne i $\{0,1\}^{N_0}$, følger af 0'er (plat) og 1'er (krone), kan tolkes som de mulige udfald af kast med en mønt.

Betragt afbildn. $T: \{0,1\}^{N_0} \to [0,1]$ def. ved $T\varphi = \sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{2^{n+1}}$; eks. $\varphi = (1,0,0,1,0,1,\dots)$
$T\varphi = 0{,}100101\dots$ dualbrøk

Billedmgd. $= [0,1]$

$0 \quad \frac14 \quad \frac12 \quad \frac34 \quad 1$

Hvert „2-delingspkt." $t \in]0,1[$ har netop to fremstillinger som dualbrøk
en endende på lutter 0'er (endelig dualbrøk)
en endende på lutter 1'er
er altså billede af to φ'er.

Ethv. andet $t \in]0,1[$ har kun én fremstilling, er billede af netop ét φ
det har både uend. mange 0'er og 1'er.

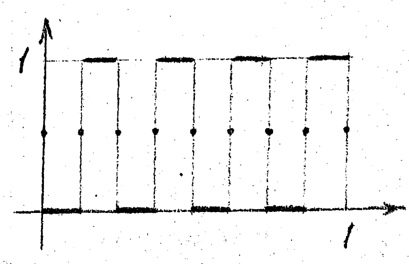
Negligere „2-delingspkt.r" og φ'er endende på lutter 0'er ell. 1'er
kun numerabel mgd., N_t altså ligeså, N_φ

Rest $[0,1]^*$ M ; $T: M \to [0,1]^*$ bij. ækvipotente

Vi vil give bekvem bestemmelse af $\varphi \in M$ ud fra billedet $t = T\varphi \in [0,1]^*$

For hvert $n \in N_0$ fkt. $\rho_n : [0,1] \to \{0, \frac12, 1\}$

$$\rho_n(u) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ for } \frac{k-1}{2^{n+1}} < u < \frac{k}{2^{n+1}},\ k \begin{array}{l}\text{ulige}\\ \text{lige}\end{array}$$
$$\qquad\quad \tfrac12 \text{ for } u = \frac{k}{2^{n+1}}$$


ρ_2

Da (med $t = T\varphi \in [0,1]^*$): $\rho_n(t) = n^{te}$ ciffer i dualbrøkfremst. for t $= \varphi(n)$

altså $\varphi = (\rho_n(t))_{n\in N_0}$

ses ved at fastholde n

$\{\varphi \mid \varphi(0)=0\}$ er hændelsen plat i 0^{te} kast, regne sandsynl. $p(\{\varphi \mid \varphi(0)=0\}) = \frac{1}{2}$

Videre f.eks. $p(\{\varphi \mid \varphi(3)=1,\ \varphi(7)=0,\ \varphi(9)=1\}) = \frac{1}{2^3}$.

For det enkelte udfald må regnes sandsynl. 0, dermed $p(N_\varphi)=0$.

dermed $p(A) = p(A \setminus N_\varphi)$ for $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$

samtidig defin.

Hævde: med rimelig defin. gælder

$A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ <u>hændelse</u> $\iff$ $T(A \setminus N_\varphi) \subseteq [0,1]$ integrabel

i bekr. fald $\quad p(A) = m(T(A \setminus N_\varphi))$

Lebesgue målet

Gerne erstatte $A \setminus N_\varphi$ med A.

Eks. $A = \{\varphi \mid \varphi(0)=0\}$. $\quad T(A) = [0,\frac{1}{2}]$, $\quad p(A) = \frac{1}{2}$

$B = \{\varphi \mid \varphi(2)=0\}$. $\quad T(B) = [0,\frac{1}{8}] \cup [\frac{2}{8},\frac{3}{8}] \cup [\frac{4}{8},\frac{5}{8}] \cup [\frac{6}{8},\frac{7}{8}]$, $\quad p(B) = \frac{1}{2}$

$C = \{\varphi \mid \varphi(0)=0,\ \varphi(2)=0\}$. $\quad T(C) = [0,\frac{1}{8}] \cup [\frac{2}{8},\frac{3}{8}]$, $\quad p(C) = \frac{1}{4}$

Herved for $A \subseteq [0,1]^*$:

A integr. $\iff$ $T^{-1}(A) = \{(\varrho_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0} \mid t \in A\}$ en hændelse

i bekr. fald: $\quad m(A) = p(\{ \qquad \})$

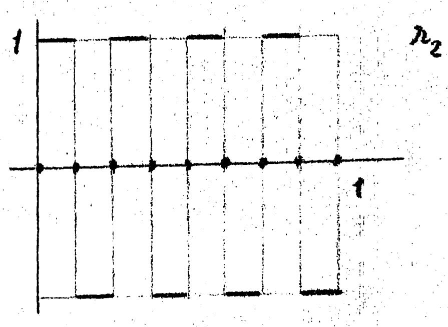
I det følgende bekvemt at erstatte $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ med $\{1,-1\}^{\mathbb{N}_0}$

altså $\quad$ før: $T(1,0,0,1,0,1,\dots) = 0{,}100101\dots$

nu: $T(-1,1,1,-1,1,-1,\dots) = 0{,}100101\dots$

Tilsv. erstattes $\varrho_n(t)$ med $r_n(t) = 1 - 2\varrho_n(t)$

$$r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^{n+1}\pi t$$



69 r_n kaldes n^{te} <u>Rademacher fkt.</u>

Eks. $\quad$ Givet række $\sum_0^\infty a_n$.

$\sum_0^\infty \pm a_n$ konvergent for næsten alle fortegnsvalg,

med sandsynlighed 1 konvergent ved plat og krone om $-$ og $+$

betyder: $\{\varphi \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}_0} \mid \sum_0^\infty \varphi(n)a_n$ konverg.$\}$ har sandsynligh.mål 1

og dette ensbetyd. med $\quad \sum_0^\infty r_n(t)a_n$ konverg. for næsten alle $t \in [0,1]$.

Konvergens af $\sum_0^\infty \pm c_n$ når $\sum_0^\infty |c_n|^2 < \infty$.

Eks. $\sum \pm \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}$

Vi skal se: Når $\sum_0^\infty |c_n|^2 < \infty$, $c_n \in \mathbb{C}$, da er

$\sum_0^\infty \pm c_n$ konvergent for næsten alle fortegnsvalg, anderledes udtrykt:

$\sum_0^\infty \pm c_n$ med sandsynlighed 1 konvergent ved plat og krone om $-$ og $+$,

betyder: $\{\varphi \in [-1,1]^{\mathbb{N}_0} \mid \sum_0^\infty \varphi(n) c_n \text{ konverg.}\}$ har sandsynlighedsmål 1.

Iflg. foregående afsnit er dette ensbetyd. med

$$\sum_0^\infty r_n(t) c_n \text{ konverg. for næsten alle } t \in [0,1].$$

og i denne form viser vi påstanden. (Rademacher 1922)

En række $\sum_0^\infty c_n r_n(t)$, hvor $c_n \in \mathbb{C}$ og r_n er n^{te} Rademacher fkt. (s. 72),

$$r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^{n+1}\pi t, \quad 0 \le t \le 1,$$

kaldes en Rademacher række.

Rademacher fkt.erne $r_0, r_1, r_2, \dots$ danner i $[0,1[$ et ortonormalsystem:

$$\int_0^1 r_m(t) r_n(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{for } m=n \\ 0 & \text{for } m \ne n \end{cases}$$

Thi er $m<n$, er $\int_{(k-1)/2^n}^{k/2^n} = 0$, idet r_m konst. i intervallet og r_n er $+1$ og -1 i hver sin halvdel

Ortonormalsystem ufuldstændigt, f. eks. kan 1 tilføjes, ligeså $r_3(t) r_8(t)$ (sml. Zygm. I, s. 34, 6.)

Her gælder da Riesz-Fischers sætn. i følgende form: Når $\sum_0^\infty |c_n|^2 < \infty$, da vil $s_n = \sum_0^n c_\nu r_\nu$ konverg. i $\mathcal{L}_2([0,1])$ mod fkt. $f \in \mathcal{L}_2([0,1])$, $\|f - s_n\|_2 \to 0$,

hvor $\int_0^1 f(t) r_n(t)\,dt = c_n$ og $\|f\|_2^2 = \sum_0^\infty |c_n|^2$

Bevis ganske som for trig. ortonormalsystem (MI). Idet $r_n \in \mathcal{L}_\infty$, $\|r_n\|_\infty = 1$ gælder i øvrigt mere generelt Hausdorff/Youngs sætninger (bemærkn. s. 68). At $\|f\|_2^2 = \sum_0^\infty |c_n|^2$, følger af $\|f - s_n\|_2 \to 0$ i forbindelse med Pythag. $\sum_0^n |c_\nu|^2 + \|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2$

(Tilføjelse, jfr. NB. s. 74: Tillige gælder for næsten alle t $\sum_0^\infty c_n r_n(t) = f(t)$, konverg.)

I,s ? Nu beviset for $\sum_0^\infty c_n r_n(t)$ konverg. for næsten alle t under antagelsen $\sum_0^\infty |c_n|^2 < \infty$.

1° Hente f fra Riesz/Fischers sætn.

Bemærk, at $\|f-s_n\|_2 \to 0$ medf. $\|f-s_n\|_1 = \int_0^1 |f(t)-s_n(t)|\,dt \to 0$ (s. 69)

og dermed for $0 \le a < b \le 1$:

$$\int_a^b s_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$ [ligeligt i a og b inrelv.]

2° For $(k-1)/2^{n+1} < t < k/2^{n+1}$ er $s_n(t) = 2^{n+1}\int_{(k-1)/2^{n+1}}^{k/2^{n+1}} f(u)\,d(u)$

Thi $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu r_\nu$ er konst. i intervallet, dermed $s_n(t) = 2^{n+1}\int_I s_n(u)\,du$

Nu: $\int_I f = \lim_p \int_I s_p$ iflg. 1°, dermed $\int_I f - \int_I s_n = \lim_p \int_I (s_p - s_n)$

og for $p > n$ er $s_p - s_n = \sum_{\nu=n+1}^{p} c_\nu r_\nu$, for hvert led er $\int_I = 0$

altså $= 0$

3° Med F betegne et ubest. integral af f, og lad A være mgd. af pkt.r, hvor F er diff. Iflg. s. 33 er $[0,1] \setminus A$ nulmgd.

Betragte vilk. $t \in A$, t ej af form $p/2^q$

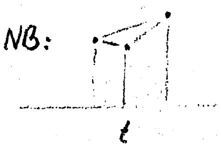
For hvert n ét interval $\mathcal{I}_n =]\,(k-1)/2^{n+1}, k/2^{n+1}\,[$ indeh. t

t. diff. nat

Iflg. 2°: $s_n(t) = 2^{n+1}\int_{\mathcal{I}_n} f(u)\,du$ = differenskvot. over $\mathcal{I}_n$ af F

altså $s_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} DF(t)$ færdig

NB:



NB Udnyttes også hovedsætn. s. 33, fås $\sum_0^\infty c_n r_n \sim f$

Anvendelse på trigon. rækker.

<u>Lad</u> $\underline{\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty}$, $c_n \in \mathbb{C}$, hvorved $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ Fourier række for fkt. tilh. $L_2(\mathbb{T})$.

Vi ved, at $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ er summabel $(C,1)$ ell. Abel for næsten alle x

Formodn.: " " konvergent for næsten alle x (Lusin 1915), bekræftet

Carleson 1966. For kompliceret, men her vise

<u>For næsten alle fortegnsvalg er</u> $\pm c_0 + \sum_1^\infty \pm (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ <u>konverg. for næsten alle</u> $x \in \mathbb{T}$.

Eller: Med sandsynlighed 1 ved plat og krone om $-$ og $+$ er rækken konv. for næstenalle x

næsten x Betyder: $\{\varphi \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}_0} \mid \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(|n|)\, c_n e^{inx}$ konverg. p.p. $\}$ har sandsynlsmål 1

Iflg. foreg. afsnit ensbetyd. med:

I,214. <u>For næsten alle</u> $t \in [0,1]$ <u>er</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t)\, c_n e^{inx}$ <u>konverg. for næsten alle</u> $x \in [0, 2\pi]$.

Bevise dette:

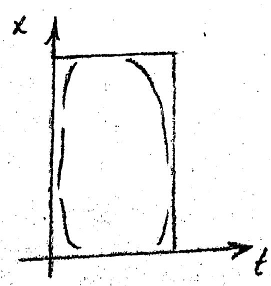
1° Først bemærk: $\{(t,x)\in[0,1]\times[0,2\pi] \mid \sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t)\, c_n e^{inx} \text{ konv.}\} = A$ er integrabel.

Thi hvert led i rækken og dermed hvert afsnit $s_n(t,x)$ integr. i $[0,1]\times[0,2\pi]$ (s.10) spec. målelig, og

$A = \{(t,x)\in[0,1]\times[0,2\pi] \mid \liminf_n s_n(t,x) = \limsup_n s_n(t,x) \wedge \liminf_n \text{ endelig}\}$

4.69 hvis $s_n(t,x)$ reel, ellers fællesmgd. for tilsv. m. realdele, henh. imaginærdele.

2° Anvende Fubinis sætn. på A:



Dels: $m(A) = \int_0^{2\pi} m(\{t \mid (t,x)\in A\})\,dx$

For hvert fast x har rækken imidlertid formen

$\sum_0^{\infty} r_n(t)\, a_n$, hvor $\sum_0^{\infty} |a_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_0^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|^2 < \infty$,

og er altså (s. 73) konverg. for næsten alle t

Følgelig: $m(A) = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$

Dels: $m(A) = \int_0^1 m(\{x \mid (t,x)\in A\})\,dt$, integrand defin. for næsten alle t

Sammenholdt: $\int_0^1 (2\pi - m(\{x \mid (t,x)\in A\}))\,dt = 0$

hvor integrand ≥ 0, følgelig $m(\{x \mid (t,x)\in A\}) = 2\pi$ for næsten alle t

For givet t består $\{x \mid (t,x)\in A\}$ imidlertid netop af konverg.pkt.rne for trigon. række $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t)\, c_n e^{inx}$, færdig

Når $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, gælder for hvert $t\in[0,1]$, at $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t)\, c_n e^{inx}$ Fourierrække for $f_t \in \mathcal{L}_2(T)$.

I næste afsnit skal vi se, at for <u>næsten</u> hvert $t\in[0,1]$ er $\forall p: f_t \in \mathcal{L}_p(T)$.

Summen af $\sum_0^\infty \pm a_n$ når $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$.

Som vist s. 73-74 er $\sum_0^\infty \varphi(n) a_n$ konv. for næsten alle $\varphi \in \{1,-1\}^{N_0}$, nu studere summen som fkt. af φ. Mere bekvemt:

Studere summen $f(t)$ af $\sum_0^\infty a_n r_n(t)$ som fkt. af t (pånær ækvivalens).

Vi ved fra det foreg. afsnit (s. 73-74)

$$f \in \mathcal{L}_2([0,1]), \quad \|f - \sum_0^n a_\nu r_\nu\|_2 \to 0, \quad \int_0^1 f(t) r_n(t)\,dt = a_n, \quad \|f\|_2^2 = \sum_0^\infty |a_n|^2$$

Vise:

(... $p \geq 1$

Sætn. Når $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$, vil $f = \sum_0^\infty a_n r_n$ tilh. ethv. $\mathcal{L}_p([0,1])$, $0 < p < \infty$,

Zygm. I, 213; Edw. II, 198

endda: til hvert p, $0<p<\infty$, findes $A_p, B_p \in \mathbb{R}_+$ alene afh. af p, så

$$A_p \|f\|_2 = A_p \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_2 \leq \|f\|_p \leq B_p \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_2 = B_p \|f\|_2$$

Som B_{2k}, $k=1,2,\dots$ brugbart $2k^{\frac{1}{2}}$.

Bevis. $f \in \mathcal{L}_p([0,1])$, $0<p<\infty$, vil følge af $f \in \mathcal{L}_{2k}([0,1])$, $k=1,2,\dots$

idet $\mathcal{L}_p([0,1]) \supseteq \mathcal{L}_{2k}([0,1])$ for $p \leq 2k$.

Videre: et brugbart B_{2k} anvendeligt som B_p for $p \leq 2k$,

idet $\|f\|_p \leq \|f\|_{2k}$ for $p \leq 2k$

Derfor betragte vilk. $k \in \mathbb{N}$, vise $f \in \mathcal{L}_{2k}([0,1])$, $\|f\|_{2k} \leq \underset{B_{2k}}{\underbrace{\text{const.}}} \left(\sum_0^\infty |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Først antage alle $a_n \in \mathbb{R}$.

$$|s_n|^{2k} = \left|\sum_0^n a_\nu r_\nu\right|^{2k} = \left(\sum_0^n a_\nu r_\nu\right)^{2k} = (\; + a_i r_i + \;)(\; \dots \;)\dots(\; \dots \;) =$$

$$= \sum C_{\beta_0,\dots,\beta_n}\, a_0^{\beta_0} \cdots a_n^{\beta_n}\, r_0^{\beta_0} \cdots r_n^{\beta_n}$$

hvor summeres over $\beta_0,\dots,\beta_n \in \mathbb{N}_0$ med $\beta_0 + \dots + \beta_n = 2k$

$$\text{og } C_{\beta_0,\dots,\beta_n} = \frac{(\beta_0+\dots+\beta_n)!}{\beta_0!\,(\beta_1+\dots+\beta_n)!} \cdot \frac{(\beta_1+\dots+\beta_n)!}{\beta_1!\,(\beta_2+\dots+\beta_n)!} \cdot \dots \frac{\beta_n!}{\beta_n!} = \frac{(\beta_0+\dots+\beta_n)!}{\beta_0!\,\beta_1!\cdots\beta_n!}, \text{ (polyn. koeff.).}$$

Pointe: $$\int_0^1 r_0^{\beta_0} \cdots r_n^{\beta_n} = \begin{cases} 1 & \text{når alle } \beta_\nu \text{ lige} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

thi i tilfældet „ellers": lad m være størst blandt $0,\dots,n$ med β_m ulige

hvert $\int_{h-1/2^m}^{h/2^m} = 0$, idet $r_m^{\beta_m} = r_m = \begin{cases} +1 & \text{i første halvdel} \\ -1 & \text{i sidste halvdel} \end{cases}$

og $r_q^{\beta_q}$ konstant for $q<m$.

Derfor: $$\int_0^1 s_n^{2k} = \sum C_{2\gamma_0,\dots,2\gamma_n}\, a_0^{2\gamma_0} \cdots a_n^{2\gamma_n},$$ summation over $\gamma_0,\dots,\gamma_n \in \mathbb{N}_0$ med $\gamma_0 + \dots + \gamma_n = k$

Sammenholde med

$$\left(\sum_0^n a_\nu^2\right)^k = \sum C_{\gamma_0,\dots,\gamma_n}\, a_0^{2\gamma_0} \cdots a_n^{2\gamma_n},$$ idem

bemærke $\dfrac{C_{2\gamma_0,\dots,2\gamma_n}}{C_{\gamma_0,\dots,\gamma_n}} = \dfrac{(2k)!\ \ \gamma_0!\ \dots\ \gamma_n!}{k!\ \ (2\gamma_0)!\dots(2\gamma_n)!} \leqq \dfrac{(k+1)\dots(2k)}{2^k} \leqq k^k$

$(\gamma_0+1)\dots(2\gamma_0)\dots(\gamma_n+1)\dots(2\gamma_n)$ i alt k faktorer, hvor $\geqq 2$,

dermed
$$\int_0^1 s_n^{2k}(t)\,dt \leqq k^k\Big(\sum_0^n a_\nu^2\Big)^k \leqq k^k\Big(\sum_0^\infty a_\nu^2\Big)^k.$$

7.4.68 Da nu $s_n(t)\to f(t)$ og dermed $s_n^{2k}(t)\to f^{2k}(t)$ p.p. sluttes (Fatous lemma):

$|f|^{2k} = f^{2k} \in \mathcal{L}([0,1])$, dvs. $\underline{f\in\mathcal{L}_{2k}([0,1])}$

og $\int_0^1 |f|^{2k}dt \leqq k^k\big(\sum_0^\infty a_n^2\big)^k$, dvs. $\underline{\|f\|_{2k} \leqq k^{\frac12}\big(\sum_0^\infty |a_n|^2\big)^{\frac12}}$

[Fatou: g_n integr., $g_n\geqq 0$ og $\liminf_n I(g_n) < \infty \Rightarrow$
$\liminf_n g_n$ integr. og $I(\liminf_n g_n) \leqq \liminf I(g_n)$

jfr. MI s.45

For $a_n\in\mathbb{C}$ blot benytte $a_n = a_n' + i a_n''$, hvorved $f' + i f'' = \sum a_n' r_n + i\sum a_n'' r_n \sim f$.

Hermed $\underline{f\in\mathcal{L}_{2k}([0,1])}$ og

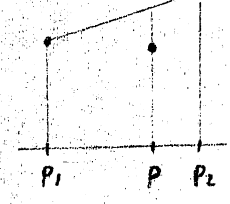
$\underline{\|f\|_{2k}} \leqq \|f'\|_{2k} + \|f''\|_{2k} \leqq k^{\frac12}\big(\sum_0^\infty |a_n'|^2\big)^{\frac12} + k^{\frac12}\big(\sum_0^\infty |a_n''|^2\big)^{\frac12} \leqq \underline{2k^{\frac12}\big(\sum_0^\infty |a_n|^2\big)^{\frac12}}.$

I vurderingen $A_p\|f\|_2 \leqq \|f\|_p$ kan for $p\geqq 2$ benyttes $A_p = 1$. For $p<2$ udnytte

__Sætn.__ Lad g være kompl. fkt. på $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, interval, $\mathbb{T}$ ell. $\mathbb{Z}$, med I betegne integral, middelværdi ell. sum (abs. konverg.). Da:

__Er__ $g\in\mathcal{L}_{p_1}\cap\mathcal{L}_{p_2}$, __hvor__ $0<p_1<p_2<\infty$, __og__ $p_1<p<p_2$, __nemlig__ $p=(1-t)p_1+tp_2$ __med__ $0<t<1$,

__da også__ $g\in\mathcal{L}_p$ __og__
$$\|g\|_p^p \leqq \|g\|_{p_1}^{p_1(1-t)}\,\|g\|_{p_2}^{p_2 t} \qquad (*)$$

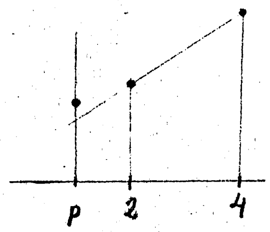


Kort (for $f\neq 0$): $\log\|g\|_p^p = \log I(|g|^p)$ __er konveks fkt. af p__

Bevis. $|g|^p = |g|^{p_1(1-t)}\,|g|^{p_2 t}$
$\qquad\qquad\in\mathcal{L}_{\frac{1}{1-t}}\quad \in\mathcal{L}_{\frac1t}$, Hölder kan anvendes:

$|g|^p\in\mathcal{L}$ og $I(|g|^p) \leqq \||g|^{p_1(1-t)}\|_{\frac{1}{1-t}}\,\||g|^{p_2 t}\|_{\frac1t} = I(|g|^{p_1})^{1-t}\, I(|g|^{p_2})^t$

Tilbage til vurderingen $A_p \|f\|_2 \leqq \|f\|_p$ for $0<p<2$.



Idet $2 = (1-t)p + t4$ med $0<t<1$, har vi iflg. (*)

$$\|f\|_2^2 \leqq \|f\|_p^{p(1-t)} \|f\|_4^{4t}$$

Kombinere med $\|f\|_4 \leqq 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$ (s. 77, $k=1$)

For korthedsskyld $\|f\|_2 = \gamma$

Idet $t = \frac{2-p}{4-p}$, $1-t = \frac{2}{4-p}$, har vi $\gamma^{2(4-p)} \leqq \|f\|_p^{2p}\, 2^{6(2-p)}\, \gamma^{4(2-p)}$

altså

$$2^{-3(2-p)/p} \cdot \|f\|_2 \leqq \|f\|_p .$$

Vi så, at når $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$, vil $f = \sum_0^\infty a_n r_n$ tilh. ethv. $\mathcal{L}_p([0,1])$, $0<p<\infty$, altså $|f|^p \in \mathcal{L}([0,1])$ for ethv. p, $0<p<\infty$. Vi får brug for skærpelse:

m. I, 214
r. II, 200

__Sætn.__ __Når__ $\gamma^2 = \sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$, $f = \sum_0^\infty a_n r_n$, $\mu \in \mathbb{R}_+$ __og__ $\mu\gamma^2 < \frac{1}{4e}$, __da er__

$$e^{\mu|f|^2} \in \mathcal{L}([0,1]) \quad \underline{\text{med}} \quad \int_0^1 e^{\mu|f(t)|^2} dt \leqq \frac{1}{1-4e\mu\gamma^2}$$

Bevis. Vi udnytter vurderingen s. 76: $\|f\|_{2k} \leqq 2k^{\frac{1}{2}}\gamma$, $k = 1, 2, \dots$

Nemlig $e^{\mu|f|^2} = \sum_0^\infty \frac{\mu^k |f|^{2k}}{k!}$, række med led $\geqq 0$ integrable i $[0,1]$

(For de integr. afsnit altså monoton konvergens)

Altså $e^{\mu|f|^2} \in \mathcal{L}([0,1]) \Leftrightarrow \sum_0^\infty \int_0^1 \quad dt < \infty$ (i bekr. fald $=$)

$$\text{Nu} \quad \int_0^1 \frac{\mu^k |f(t)|^{2k}}{k!} dt = \frac{\mu^k}{k!} \|f\|_{2k}^{2k} \leqq \frac{\mu^k}{k!}(4k\gamma^2)^k = \frac{k^k}{k!}(4\mu\gamma^2)^k \leqq e^k (4\mu\gamma^2)^k$$

Idet $e4\mu\gamma^2 < 1$ sammenlign. m. led i konverg. kvot. række. $\quad \frac{k^k}{k!} \leqq 1 + \frac{k}{1!} + \dots + \frac{k^n}{n!} + \dots$

This were val. ...

__Sætn.__ Når $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$, $f = \sum_0^\infty a_n r_n$, __da er__ $e^{\mu|f|^2} \in \mathcal{L}([0,1])$ __for hvert__ $\mu \in \mathbb{R}_+$.

For vilk. $\mu \in \mathbb{R}_+$: vælge n, så $2\mu\gamma_*^2 < \frac{1}{4e}$ med $\gamma_* = (\sum_{n+1}^\infty |a_\nu|^2)^{\frac{1}{2}}$

sætte $f_* = \sum_{n+1}^\infty a_\nu r_\nu = f - s_n$

Iflg. foregående er da $e^{2\mu|f_*|^2} \in \mathcal{L}([0,1])$

Imidlertid $f = s_n + f_*$, dermed $\mu|f|^2 \leqq 2\mu|s_n|^2 + 2\mu|f_*|^2$

$$e^{\mu|f|^2} \leqq \underbrace{e^{2\mu|s_n|^2}}_{\in \mathcal{L}_\infty} \cdot \underbrace{e^{2\mu|f_*|^2}}_{\in \mathcal{L}} \qquad \text{følgelig } e^{\mu|f|^2} \in \mathcal{L}.$$

Inden anvendelsen på trig. rækker indskyde <u>tilføjelse til Fubinis sætn.</u>

For reel ell. kompl. fkt. f def. på $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ved vi:

(1) f Lebesgue integrabel $\Rightarrow$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}^m$ er $y \to f(x,y)$ integr. i $\mathbb{R}^n$
og $x \to I_y(f(x,y))$ er integr. i $\mathbb{R}^m$

Bag implik.pil kan tilføjes $I(f) = I_x(I_y(f(x,y)))$

ath.

Pilen kan ikke vendes: at $I_x(I_y(f(x,y)))$ kan dannes, sikrer ikke f integrabel. Man kan komme ud for, at også $I_y(I_x(f(x,y)))$ exist., men har afvigende værdi. Imidlertid:

<u>Er f målelig og $f \geqq 0$</u>, <u>gælder også omvendte implikation til</u> (1).

Bevis. Antag implikationens højre side, foruden f målelig, $f \geqq 0$.

Vælge $h_1, h_2, \ldots, h_n$ integr., $h_n \geqq 0$, så $h_n \nearrow \infty$ f.eks. $h(x,y) = \begin{cases} n \text{ for } \left|\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right| \leq n \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$

Da er $f \wedge h_n$ integr. (nemlig målelig og under h_n), og $f \wedge h_n \nearrow f$
hvorfor iflg. monotonisætn. f integ. $\Leftrightarrow$ $\lim I(f \wedge h_n) < \infty$

Imidlertid (Fubini): $I(f \wedge h_n) = I_x(I_y(f(x,y) \wedge h_n(x,y)))$

For næsten alle x er samtlige $f(x,y) \wedge h_n(x,y)$ integr. og ligeledes $f(x,y)$;

idet $f(x,y) \wedge h_n(x,y) \nearrow f(x,y)$,

har vi $I_y(f(x,y) \wedge h_n(x,y)) \nearrow I_y(f(x,y))$ (monotonisætn.)

Nu: for hvert n integr. fkt. af x — integr. fkt. af x (forudsætn.)

Monotonisætn. igen:

4.69 nt sætn. 3 nederst. $I(f \wedge h_n) = I_x I_y(f(x,y) \wedge h_n(x,y)) \nearrow I_x I_y(f(x,y)) < \infty$, færdig: f integr.

<u>For</u> f <u>målelig</u>, $f \geqq 0$ <u>altså</u> (i lidt løs formulering)

$$I_x I_y(f(x,y)) = I(f) = I_y I_x(f(x,y)), \quad \underline{\text{samtidig eksistens}}$$

Bemærkn. hertil: Blot $I_y(f(x,y))$ exist. (dvs. $y \to f(x,y)$ integr.) for næsten alle x
så i hv. fald <u>målelig fkt.</u> af x

thi (se beviset ovenfor) for næsten alle x: $I_y(f(x,y)) = \lim_n I_y(f(x,y) \wedge h_n(x,y))$

<u>Summen af</u> $\pm c_0 + \sum_1^\infty \pm (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ <u>når</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

For hvert fortegnsvalg Fourier række for fkt. $\in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ (Riesz-Fischer)

Vi ved: med sandsynl. 1 Konvergens mod denne for næsten alle x (s. 74)

Skal bl. a. se: med sandsynl. 1 vil fkt.nen tilh. ethv. $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $0 < p < \infty$.

Lige så gerne betragte $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$

$f(t,x) =$ Sætte $f_t(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$, når Konvergens i (t,x)

Vides (s. 75): def.mgd. $A \subseteq [0,1] \times [0,2\pi]$ er målelig med $m(A) = 2\pi$, dernæst (s. 74):

dvs. $f(t,x)$ def. for næsten alle (t,x)

For $t \notin$ vis nulmgd. $N_0 \subseteq [0,1]$: f_t defin. p.p. i $[0,2\pi]$

For fastholdt t er $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$ Fourier række for fkt. tilh. $\mathcal{L}_2(\mathbb{T})$ (Riesz/Fischer)

For $t \notin N_0$ må denne være f_t (benyt Fejer/Lebesgue)

altså $f_t \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$, $\hat{f}_t(n) = r_{|n|}(t) c_n$.

Skal bl. a. se: For $t \notin$ vis nulmgd. $N_1 \supseteq N_0$ vil f_t tilh. ethv. $\mathcal{L}_p(\mathbb{T})$, $0 < p < \infty$.

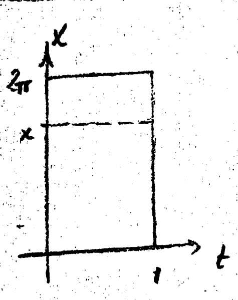
endda $e^{\mu |f_t|^2}$ tilh. $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ for ethv. $\mu \in \mathbb{R}_+$

$\forall p \, \exists K \, \forall x \in \mathbb{R}_+ : \; x^p \le e^x + K$

Først betragte $\mu \in \mathbb{R}_+$ med $\mu \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \frac{1}{8e}$.

Gerne vise $e^{\mu |f|^2} \in \mathcal{L}([0,1] \times [0,2\pi])$

Idet målelig, ≥ 0 udnytte tilføjelse til Fubini s. 79



For fast x er $f(t,x)$ sum af Rademacher række $\sum_0^\infty a_n r_n(t)$

med $a_0 = c_0$, $a_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$.

Idet $\gamma^2 = \gamma_x^2 = \sum_0^\infty |a_n|^2 \le 2 \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$, har vi $\mu \gamma_x^2 < \frac{1}{4e}$,

følgelig (s. 78): $t \to e^{\mu |f(t,x)|^2} \in \mathcal{L}([0,1])$

med $\int_0^1 e^{\mu |f(t,x)|^2} dt \le \frac{1}{1 - 4e\mu\gamma_x} < \frac{1}{1 - 8e\mu \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2} = K$

Iflg. bemærkn. s. 79 er da $\int_0^1 e^{\mu |f(t,x)|^2} dt$ målelig fkt. af x, netop set at begr., følgelig $\in \mathcal{L}([0,2\pi])$

Iflg. s. 79, tilføjelse til Fubini: $e^{\mu |f|^2} \in \mathcal{L}([0,1] \times [0,2\pi])$.

Men dernæst iflg. Fubini: for næsten alle t er $x \to e^{\mu |f(t,x)|^2} \in \mathcal{L}([0,2\pi])$,

dvs. $e^{\mu |f_t|^2} \in \mathcal{L}([0,2\pi])$

Dernæst vilk. $\mu \in \mathbb{R}_+$. Ræsonnere som s. 78 nederst:

vælge n, så $2\mu \sum_{|\nu|>n} |c_\nu|^2 < \frac{1}{8e}$, sætte $f_t^*(x) = \sum_{|\nu|>n} r_{|\nu|}(t)\, c_\nu e^{i\nu x} = f_t(x) - s_n(t,x)$

Flg. foregående for næsten alle t: $e^{2\mu|f_t^*|^2} \in \mathcal{L}([0,2\pi])$

hvert μ, en nulmgd. N_μ
gælder $\mu = 1,2,\dots$,
[illegible]

Imidlertid $f_t = f_t^* + \underbrace{s_{n,t}}_{\text{trig. polyn.}}$, dermed $\mu|f_t|^2 \leq 2\mu|f_t^*|^2 + 2\mu|s_{n,t}|^2$

$$e^{\mu|f_t|^2} \leq \underbrace{e^{2\mu|f_t^*|^2}}_{\in \mathcal{L}} \cdot \underbrace{e^{2\mu|s_{n,t}|^2}}_{\in \mathcal{L}_\infty}, \quad \text{følgel. } e^{\mu|f_t|^2} \in \mathcal{L}$$

Notere:

Når $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, da:

<u>for hvert</u> t <u>er</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t)\, c_n e_n$ <u>Fourier række for fkt.</u> $f_t \in \mathcal{L}_2(\mathbb{T})$

<u>for næsten alle</u> t <u>er rækken konvergent p.p. med sum</u> f_t <u>og</u> $f_t \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ <u>for hv.</u> $p \in \mathbb{R}_+$,
<u>endda</u> $e^{\mu|f_t|^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ <u>for hv.</u> $\mu \in \mathbb{R}_+$

<u>Også</u>: <u>for hvert fortegnsvalg er</u> $\pm c_0 + \sum_1^{\infty} \pm (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})$ ....:

4.69 (Paley/Zygmund 1930)

Eks. $c_0 = 0$, ellers $c_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}\,\log|n|}$. Følgen $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tilh. l_2, men ikke noget l_q, $q<2$
(integralkriteriet, Bohr/Moll. III, s. 192)

For passende fortegnsvalg (endda for næsten alle): $f(x) = \sum_1^{\infty} \pm \frac{\cos nx}{\sqrt{n}\,\log n} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{T})$ for alle p, $0<p<\infty$,

men $\hat{f} \notin l_p$, når $p>2$. Sml. Hausdorff/Young s. 66 og 68

$|\log|n||)^{1+\varepsilon}$:

(f endda kontin. for næsten alle fortegnsvalg - ej vise).
Zygm. s. 219

<u>Divergens af</u> $\sum_0^\infty \pm a_n$ <u>når</u> $\sum_0^\infty |a_n|^2 = \infty$.

<u>Lemma.</u> <u>For vilk. målelig</u> $A \subseteq [0,1]$ <u>og</u> $\lambda > 1$ <u>findes</u> $N \in \mathbb{N}$, <u>så for enhver end. sum</u>

ym. I, 213 $P = \sum_N^p a_n r_n$ <u>gælder</u> $\quad \frac{1}{\lambda} m(A) \sum_N^p |a_n|^2 \leqq \int_A |P(t)|^2 dt \leqq \lambda\, m(A) \sum_N^p |a_n|^2.$

Til belysning, når $m(A) > 0$: $\quad \frac{1}{m(A)} \int_A |P(t)|^2 dt \sim \sum_N^p |a_n|^2 = \mathfrak{M}(P)$ for store N

Bevis. Vælge ε, så $\frac{1}{\lambda} \leqq 1-\varepsilon < 1 < 1+\varepsilon < \lambda$, vise

$$\left| \int_A |P(t)|^2 dt - m(A) \sum_N^p |a_n|^2 \right| < \varepsilon\, m(A) \sum_N^p |a_n|^2 \quad \text{blot } h \text{ stor.}$$

$$|P|^2 = \Big(\sum_N^p a_m r_m\Big)\Big(\sum_N^p \bar a_n r_n\Big) = \sum |a_n|^2 r_n^2 + \sum_{m \neq n} a_m \bar a_n r_m r_n$$

$$\int_A |P(t)|^2 dt = m(A) \sum |a_n|^2 + \sum_{m \neq n} a_m \bar a_n \int_A r_m(t) r_n(t)\, dt$$

↑ Opgaven er at vurdere sidste led num. ↑

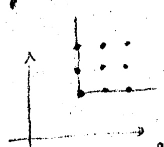
Først bemærke, at $(r_m r_n)_{m,n \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\, m \neq n}$ er ortonormalsyst. i $[0,1]$ (sml. pointe s. 76)

$$\gamma_{mn} = \int_A r_m(t) r_n(t)\, dt = \int_0^1 1_A(t) r_m(t) r_n(t) \text{ er orton. koeff. til } 1_A$$

dermed (Bessels ulighed): $\underbrace{\sum |\gamma_{mn}|^2}_{\text{altså konverg.}} \leqq \|1_A\|_2^2 = \int_0^1 1_A^2 = m(A)$

Tage N, så $\sum_{\substack{m,n \geqq N \\ m \neq n}} |\gamma_{mn}|^2 \leqq (\varepsilon\, m(A))^2$

hertil blot ordne $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, så



sådanne $\subseteq$ haler

f. eks. $|\gamma_{00}|^2 + |\gamma_{10}|^2 + |\gamma_{01}|^2 + \ldots + |\gamma_{m0}|^2 + \ldots + |\gamma_{0m}|^2 + \ldots$

Nu $\left| \sum_{\substack{m \neq n \\ N \leqq m,n \leqq p}} a_m \bar a_n \gamma_{mn} \right| \underset{\text{Cauchy/Schwarz}}{\leqq} \left(\sum |a_m a_n|^2\right)^{\frac12} \left(\sum |\gamma_{mn}|^2\right)^{\frac12} \leqq \sum_N^p |a_n|^2\, \varepsilon\, m(A)$

Lad $M: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ være dobbelt uend. matrix,

$$M = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0n} & \cdots \\ b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = (b_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}_0} ,$$

der opfylder Toeplitz betingelserne (1) - (4) ell. blot

(1') $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_n b_{mn}$ konv. - vi sætter så $B_m = \sum_n b_{mn}$ (*) [her.

(2) $B_m \to 1$ for $m \to \infty$

(4) $\forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $b_{mn} \to 0$ for $m \to \infty$.

Minde om: række $\sum_0^\infty a_n$ med afsnit s_n summabel ved M med sum s, hvis

$\forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_n b_{mn} s_n$ konv. og $\sigma_m = \sum_n b_{mn} s_n \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} s$

Zygm. s. II 214, 204 <u>Sætning</u>. <u>Hvis</u> $\sum_0^\infty |a_n|^2 = \infty$, <u>så</u>

<u>for næsten alle fortegnsvalg</u> <u>er</u> $\sum_0^\infty \pm a_n$ <u>ikke-summabel ved</u> M (Zygmund 1930)

Eks. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ konverg., men $\sum_1^\infty \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

Konklusionen i sætn. mere bekvem på form

<u>for næsten alle</u> t <u>er</u> $\sum_0^\infty a_n r_n(t)$ <u>ikke-summabel ved</u> M.

Først (uden forudsætn. om $\sum_0^\infty |a_n|^2$) bemærke:

$S = \{ t \in [0,1] \mid \sum_0^\infty a_n r_n(t)$ summabel ved $M \}$ <u>er målelig</u>:

Thi med $s_n(t) = \sum_0^n a_\nu r_\nu(t)$ har vi

for hvert m: $\{ t \mid \sum_n b_{mn} s_n(t)$ konv.$\}$ er målelig

dermed $\bigcap_m = \{ t \mid \forall m : \sum_n b_{mn} s_n(t)$ konv.$\} = S_1$ målelig

8.4.69 nu: σ_m^* def. ved $\sigma_m^*(t) = \begin{cases} \sigma_m(t) & \text{for } t \in S_1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ er målelig (erstat s_n med $s_n^* = s_n 1_{S_1}$)

dermed $S = \{ t \in S_1 \mid \sigma_m^*(t)$ konverg. for $m \to \infty \}$ målelig.

Sætningen kan da formuleres: <u>Hvis</u> $m(S) > 0$, <u>så</u> $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$.

Bevise på denne form, altså antage $m(S) > 0$.

(*) [Sætte $B_{mn} = b_{mn} + b_{m,n+1} + \cdots$, hvorved $B_{m0} = B_m$.

Af (2) og (4) følger $\forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $B_{mn} \to 1$ for $m \to \infty$

(Klart iflg. (1), at $\forall m \in \mathbb{N}_0 :$ $B_{mn} \to 0$ for $n \to \infty$)

a) Tilfældet: M har end. rækker, dvs. $\forall m\ \exists N\ \forall p: b_{m,N+p}=0$

Her er selvfølgelig $S_1=[0,1]$, $\sigma_m^* = \sigma_m$.

For hvert t: $\underline{\sigma_m(t)} = \sum_n b_{mn} s_n(t) =$

$$b_{m0}a_0r_0(t) + b_{m1}(a_0r_0(t)+a_1r_1(t)) + \dots + b_{mN}(a_0r_0(t)+a_1r_1(t)+\dots+a_Nr_N(t)) = \underline{\sum_n B_{mn}a_nr_n(t)}$$

(end. summer)

Eks. $(b_{mn}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac12 & \frac12 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$ giver $B_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & \frac12 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & 1-\frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$ (Cesaro, 1)

1° Der findes mål. mgd. A med $m(A)>0$ og $M\in\mathbb{R}_+$, så $\forall t\in A\ \forall m: |\sigma_m(t)|\le M$.

thi med $A_p = \{t\in[0,1] \mid \forall m: |\sigma_m(t)|\le p\} = \bigcap_m \{t \mid |\sigma_m(t)|\le p\}$ målelig,

er $S \subseteq \bigcup_{p\in N} A_p$, hvorfor passende A_p brugbart

NB. Her og dermed i hele beviset kunne S være $\{t\in S_1 \mid \sigma_m(t)$ begr. talfølge$\}$ med forudsætn. $m(S)>0$.

2° Benytte lemma s. 82, f.eks. med $\lambda=2$: N findes, så for enhv. end. sum $P=\sum_N^q d_nr_n$ gælder $\frac12 m(A)\sum_N^q |d_n|^2 \le \int_A |P(t)|^2\,dt$

Betragte $\sum_0^{N-1} 0r_n(t) + \sum_N^\infty a_nr_n(t)$, $\quad \tilde\sigma_m(t) = \sum_{n=N}^\infty B_{mn}a_nr_n(t)$ (end. sum)

~~Mgd. S af sumpkt. uændret (egt. irrelevant)~~

~~thi~~ $\sigma_m(t)-\tilde\sigma_m(t) = \sum_0^N B_{mn}a_nr_n(t) \quad \cancel{\xrightarrow[m\to\infty]{} \sum_0^N a_nr_n(t)}$

$|\sigma_m(t)-\tilde\sigma_m(t)| \le \sum_0^N (\sup_m|B_{mn}|)\cdot|a_n|\cdot 1$, uafh. af m og t, derfor

$\forall t\in A\ \forall m: |\tilde\sigma_m(t)| \le \tilde M$.

Dermed $\frac12 m(A)\sum_{n=N}^\infty |B_{mn}a_n|^2 \le \int_A |\tilde\sigma_m(t)|^2\,dt \le \tilde M^2 m(A)$

(end. sum) $\sum_{n=N}^\infty |B_{mn}a_n|^2 \le 2\tilde M^2$

For fast $p\ge N$ er spec. $\sum_{n=N}^p |B_{mn}a_n|^2 \le 2\tilde M^2$, dermed, idet $B_{mn} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$,

$$\sum_{n=N}^p |a_n|^2 \le 2\tilde M^2.$$

Følgelig $\sum_{n=N}^\infty |a_n|^2$ konverg., dermed $\sum_0^\infty |a_n|^2$ konverg.

b) Det generelle tilfælde føres tilbage til a):
nemlig for den givne række $\sum_0^\infty a_n r_n(t)$ finde en matrix $\check{M}$ med end. rækker,
så mgd. $\check{S}$ af summ. pkt. ved $\check{M}$ har $m(\check{S})>0$.

Simpelthen for hvert m ændre elem. i m^{te} række af M til 0 fra passende trin:

m fast | Dels bestemme $N_1 = N_1(m)$, så $|B_m - (b_{m0} + \dots + b_{mn})| = |B_{m,n+1}| < \frac{1}{m+1}$ for $n \geq N_1$

Dels: for hvert t haves $\quad \sigma_m^*(t) - \sum_{n=0}^{p} b_{mn} s_n^*(t) \to 0$ for $p \to \infty$

dermed $h_{mq}(t) = \sup_{p \geq q} |\sigma_m^*(t) - \sum_{n=0}^{p} b_{mn} s_n^*(t)| \to 0$ for $q \to \infty$

h_{mq} målelig

Idet $h_{m0} \geq h_{m1} \geq \dots \to 0$, har vi med $A_{mq} = \{t \in [0,1] \mid h_{mq}(t) \geq \frac{1}{m+1}\}$, mälel.:

$A_{m0} \supseteq A_{m1} \supseteq \dots$, $\quad \bigcap_q A_{mq} = \emptyset$, $\quad$ følgelig $m(A_{mq}) \searrow 0$ for $q \to \infty$.

vælge $N_2 = N_2(m)$, så $m(A_{mN_2}) < \frac{1}{2^{m+1}} m(S)$

Med $N = N(m) = N_1(m) \vee N_2(m)$:

(i) $|B_m - (b_{m0} + \dots + b_{mN})| < \frac{1}{m+1}$

(ii) $|\sigma_m(t) - (b_{m0} s_0(t) + \dots + b_{mN} s_N(t))| < \frac{1}{m+1}$ for $t \in S_1 \setminus A_m$,

hvor A_m målel. med $m(A_m) < \frac{1}{2^{m+1}} m(S)$, f.eks. $A_m = A_{mN}$.

5.69.

Nu: $\check{M}$ af M ved for hvert m at ændre b_{mn} til 0 for $n > N(m)$.

$$\check{M} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \cdots & b_{0N(0)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \\ b_{m0} & b_{m1} & \cdots & b_{mN(m)} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

$\check{M}$ opfylder naturligvis Toeplitz betingelserne (1) og (4), medens (2) sikres af (i).

Af (ii) følger $\quad S \setminus \bigcup_m A_m \subseteq \check{S}$, mgd. af summ. pkt. ved $\check{M}$ for $\sum_0^\infty a_n r_n(t)$

hvor $\bigcup_m A_m$ målelig med $m(\bigcup_m A_m) < \sum_0^\infty \frac{1}{2^{m+1}} m(S) = m(S)$,

altså $m(\check{S}) \geq m(S \setminus \bigcup_m A_m) > 0$. $\qquad$ Iflg. a): $\quad \sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$.

Sætningen gælder også for en „matrix" $M: [0,1[\times N_0 \to C$ ved grænseoverg. $x \to 1_-$,
når (1'), (2) og (4) er opfyldt (jfr. s. 39)
thi vælge $x_0, x_1, \dots \to 1_-$ og bemærke: summ. ved $M \Rightarrow$ summ. v. „sædv." matrix $(b_n(x_m))$
altså $\{$summ. pkt. v. $M\} \subseteq \{$summ. pkt. v. $(b_n(x_m))_{m,n \in N_0}\}$

Spec. gælder sætningen for Abel summabilitet.

Ved anvendelsen på trigon. rækker får vi brug for:

(*) $\quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty \quad \Rightarrow \quad$ for næsten alle x: $\sum_1^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|^2 = \infty$.

Først lemma:

ygm. 11, s.46 For vilk. målelig mgd. $E \subseteq [0, 2\pi[$ og vilk. følge $\xi_1, \xi_2, \dots \in \mathbb{R}$ gælder

$$\int_E \cos^2(nx - \xi_n)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2} m(E).$$

Thi $\quad 2\cos^2(nx+\xi_n) = 1 + \cos(2nx - 2\xi_n) = 1 + \cos 2nx \cos 2\xi_n + \sin 2nx \sin 2\xi_n$

dermed $\quad \int_E 2\cos^2(nx - \xi_n)\,dx = \quad m(E) + \cos 2\xi_n \underbrace{\int_E \cos 2nx\,dx}_{\downarrow\, 0} + \sin 2\xi_n \underbrace{\int_E \sin 2nx\,dx}_{\downarrow\, 0}$

idet $\int_E \cos 2nx\,dx = \int_0^{2\pi} 1_E(x) \cos 2nx\,dx$ er $\pi\cdot$ Koeff. til $\cos 2nx$ i reelle Four. række for 1_E,
følgelig $\to 0$ for $n \to \infty$ (Riemann/Lebesgues sætn.)
og anal.

Derpå for $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, med $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$,

$$\sum_1^{\infty} \rho_n^2 = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{for næsten alle } x:\ \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2 = \infty$$

Bevis. Fktnen $h(x) = \sum_1^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2$, $x \in [0, 2\pi[$, er målelig,
dermed $H = \{x \in [0, 2\pi[\mid h(x) < \infty\}$ målelig

Påstanden kan da formul.: $\quad m(H) > 0 \Rightarrow \sum_1^{\infty} \rho_n^2 < \infty$

Vise på denne form, altså antage $m(H) > 0$.
Med $H_n = \{x \in [0, 2\pi[\mid h(x) \leq n\}$, målelig, er $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$, $\bigcup_n H_n = H$,
dermed $m(H_n) \to m(H) > 0$, altså findes
målelig $E \subseteq [0, 2\pi]$ med $m(E) > 0$, så $h(x)$ begr. for $x \in E$, dermed $h \cdot 1_E$ integr.

Nu: $\quad a_n \cos nx + b_n \sin nx$ kan skrives $\rho_n \cos \xi_n \cos nx + \rho_n \sin \xi_n \sin nx = \rho_n \cos(nx - \xi_n)$

og da $h(x) \cdot 1_E(x) = \sum_1^{\infty} \rho_n^2 \cos^2(nx - \xi_n)\, 1_E(x)$ er integr.,

har vi $\quad \sum_1^{\infty} \rho_n^2 \underbrace{\int_E \cos^2(nx - \xi_n)\,dx}_{\downarrow\ \frac{1}{2} m(E) > 0}$ konvergent (monotonisætn.)

iflg. lemma

Sammenlign.kriteriet giver $\sum_1^{\infty} \rho_n^2 \frac{1}{4} m(E)$ konverg., altså $\sum_1^{\infty} \rho_n^2 < \infty$

Endelig (*).

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos nx + b_n \sin nx = (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx) + i(a_n'' \cos nx + b_n'' \sin nx)$$

med $\begin{matrix} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{matrix}$, $\begin{matrix} a_n = a_n' + i a_n'' \\ b_n = b_n' + i b_n'' \end{matrix}$, $a_n', a_n'', b_n', b_n'' \in \mathbb{R}$

$$(\varrho_n')^2 + (\varrho_n'')^2 = (a_n')^2 + (b_n')^2 + (a_n'')^2 + (b_n'')^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 = 2|c_n|^2 + 2|c_{-n}|^2 .$$

Er nu $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, så er f. eks. $\sum_1^{\infty} (\varrho_n')^2 = \infty$, følgelig:

for næsten alle x: $\sum_1^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)^2 = \infty$, dermed $\sum_1^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|^2 = \infty$.

Nu anvendelsen på trig. rækker (Paley/Zygmund 1930).

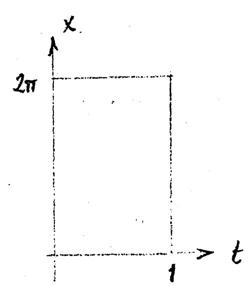
.5.69 **Sætning.** Lad $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, $c_n \in \mathbb{C}$, og lad $M: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ være dobbelt uend. matrix,

s. c_n ... der opfylder Toeplitz betingelserne (1)–(4) ell. blot (1'), (2) og (4). Da:

...$f \in L - L_2$ For næsten alle fortegnsvalg er $\pm c_0 + \sum_1^{\infty} \pm (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ ikke-summ. ved M for næsten alle x

Ensbet. med: for næsten alle t er $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$ ikke-summ. ved M for næsten alle x.

Bevis (sml. s. 75)



1° $A = \{(t,x) \in [0,1] \times [0,2\pi] \mid \sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$ summ. ved $M\}$
er målelig (sml. s. 83)

2° Anvende Fubinis sætn. på A

Dels: $m(A) = \int_0^{2\pi} m(\{t \mid (t,x) \in A\})\, dx$

For hvert fast x har rækken formen $\sum_0^{\infty} a_n r_n(t)$ med $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \quad \text{for } n > 0 \end{cases}$

øvrige x er ... legrænden 1 ... (1)–(4) opf. og iflg. s. 86 er for næsten alle x $\sum_0^{\infty} |a_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_1^{\infty} |c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}|^2 = \infty$

og dermed iflg. sætn. s. 83 $\sum_0^{\infty} a_n r_n(t)$ kun summ. v. M i nulmgd.,
altså $m(\{t \mid (t,x) \in A\}) = 0$

Følgelig $m(A) = 0$

Dels: $m(A) = \int_0^1 m(\{x \mid (t,x) \in A\})\, dt$, integrand defin. for næsten alle t

Sammenholdt: for næsten alle t er $\{x \mid (t,x) \in A\}$ nulmgd.

For givet t består $\{x \mid (t,x) \in A\}$ imidlertid netop af summ.pkterne ved M for trig. række $\sum_{-\infty}^{\infty} r_{|n|}(t) c_n e^{inx}$, færdig.

gm. s. 215 **Corollar** af sætn. og Fejér/Lebesgues sætn.

2 Er $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, da er $\pm c_0 + \sum_1^{\infty} \pm (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ for næsten alle fortegnsvalg ej Fourier række.

Sætningen s. 87 gælder også for en „matrix" $M: [0,1[\times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ ved grænseoverg. $x \to 1_-$,
1 når (1), (2) og (4) er opfyldt (som s. 85)

Spec. gælder sætningen for Abel summabilitet.

Eks. $c_0 = 0$, ellers $c_n = \frac{1}{\sqrt{|n|}}$. Følgen $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tilh. ikke ℓ_2, derimod ethv. ℓ_p, $p>2$.

For passende fortegnsvalg (endda for næsten alle) er $\sum_1^\infty \pm \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ej Fourier række,

sml. Hausdorff/Young s. 67 og 68,

endog ikke-summabel (C,1) ell. Abel for næsten alle x.

ygm. s. 213 Bemærk: <u>Ingen betingelse på de num. værdier af koefficienterne i trig. række</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ <u>kan være tilstr. for, at rækken er Fourier række af fkt.</u> f, <u>medmindre betingelsen medfører</u> $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ <u>og dermed</u> $f \in L_2(T)$. (Metatheorem.)

Thi findes en trig. række $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, der opfylder betingelsen, men hvor $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, da vil iflg. corollaret næsten ingen af rækkerne $\pm c_0 + \sum_1^\infty \pm (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ være Fourier rækker, skønt de alle opfylder betingelsen.

$\sum_0^\infty a_n r_n(t)$ for $\sum_0^\infty |a_n|^2 < \infty$: Rademacher 1922

for $\sum_0^\infty |a_n|^2 = \infty$: Zygmund 1930

Anvendelse på trig. rækker: Paley/Zygmund 1930

Literatur:

Edwards, R. E.: Fourier series I-II (New York 1967)
Zygmund, A.: Trigonometric series I-II (Cambridge 1959)