Lie grupper.

Forelæsninger af T. Gutmann Madsen, 1966-67.

Indledning, 1.

I. Analytiske funktioner af flere reelle variable.

§1. Konvergensforhold for potensrækker i flere reelle variable, 3.
§2. Sumfunktionen for en potensrække, 8.
§3. Analytiske funktioner af flere reelle variable, 11.

II. Analytisk mangfoldighed.

§1. Kort og atlas, 17.
§2. Analytisk atlas, 18.
§3. Analytisk mangfoldighed, 25.
§4. Analytisk funktion på en analytisk mangfoldighed, 28.
§5. Analytisk afbildning, 30
§6. Produkt af analytiske mangfoldigheder, 35

III. Lie gruppe.

§1. Lie gruppe, 37.
§2. Topologisk gruppe, 41.
§3. Bestemmelse af analytisk struktur i en gruppe, 43.
§4. Isomorfi og lokal isomorfi, 49.

IV. Tangentvektorer og differentialer.

§1. Indledning, 52.
§2. Tangentvektorer, 53.
§3. Differential af analytisk afbildning, 57.
§4. Differential af analytisk funktion, 62.
§5. Tangentvektorfelt, 65.
§6. Lie produktet, 69

V. Lie algebra hørende til Lie gruppe.

§1. Venstre invariant vektorfelt, 73.
§2. Lie gruppe og Lie algebra, 76.

VI. Eksponentialafbildningen.

§1 Stationær strømning, 79.
§2. Eksponentialafbildningen, 85.
§3. Entydigheden af en gruppes analytiske struktur, 90.

Lie grupper, 1869-70.

Indledning

De første grupper, der optrådte i matematikken, var transformationsgrupper for endelige mængder, "permutationsgrupper" (Cauchy, Galois, Jordan). De er naturligvis selv endelige.

I geometrien førtes man imidlertid til at betragte ikke blot endelige transform.grupper (f.eks. gruppen af isometrier af planen, der fører et givet kvadrat over i sig selv), men også uendelige. Studiet af de sidstnævnte går tilbage til Jordan. Et par eksempler:



Efter valg af begyndelsespkt O for stedvektorer korresponderer planens pkter med dens vektorer.

Eks. 1. De lineære afbildninger af planen, der bevarer areal og omløbsretning, udgør en uendelig transform. gruppe.

Eks. 2.



Undergruppen fastlagt ved det yderligere krav, at hvert pkt. i et gitter som antydet, pænt skal gå over i et gitterpkt, er stadig uendelig (se lidt senere).

Gruppen i eks. 1 kaldtes "kontinuert", den i eks. 2 "diskontinuert". Til belysning af den mening, der blev lagt i disse ord, vælges et par basisvektorer $\underline{e}_1, \underline{e}_2$, i eks. 2 på den viste måde.



Gruppen i eks. 1 ses da at være isomorf med gruppen af matricer $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ med determinant 1, med matrixmultiplikation som komposition; gruppen i eks. 2 er isomorf med undergruppen af (2×2)-matricen med heltallige elementer og determinant 1. (Her er uendelig mange, bl.a. alle $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$, alle $\begin{pmatrix} 3 & 2+3n \\ 4 & 3+4n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$, og mange andre.)

Mængden $M_{2,2}(\mathbb{R})$ af alle (2×2)-matricer kan umiddelbart bringes i korrespondance med det 4-dim. reelle talrum $\mathbb{R}^4$, f.eks.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}).$$

Der er ikke anden forskel end indiceringen.

Mængden $SL(2,\mathbb{R})$ af matricer i eks. 1 modsvarer da en "hyperflade" i $\mathbb{R}^4$, bestemt ved ligningen

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1.$$

En del af fladen, en omegn af det neutrale element $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kan fremstilles ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & \dfrac{1+x_2x_3}{x_1} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}_+, \; x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

eller, om man foretrækker, at det neutrale element modsvarer parametersættet (0,0,0),

$$\begin{pmatrix} 1+x_1 & x_3 \\ x_2 & \dfrac{1+x_2x_3}{1+x_1} \end{pmatrix}, \quad x_1 > -1, \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

For (en del af) gruppen i eks. 2 fås samme fremstilling ved 3 parametre, som imidlertid kun skal tillægges heltallige værdier, hvor $1+x_1 \mid 1+x_2x_3$.

I eks. 1 kan således parametrene x_1, x_2, x_3 varieres "kontinuert", i modsætn. til eks. 2.

Sophus Lie og Felix Klein mødtes som unge ved Jordans forelæsninger kort før krigen 1870, blev begejstrede over de nye forskningsmuligheder, der åbnede sig for dem og delte området mellem sig. Klein tog de diskontinuerte, Lie de kontinuerte grupper, nu opkaldt efter ham: Lie grupper.

Den nøjagtige definition på en Lie gruppe vil først blive givet senere, men omtrentlig er det:

en gruppe, der tillige kan opfattes som en "flade", dvs. lokalt kan den beskrives ved et endeligt antal parametre.

Lies egne resultater var alle af lokal karakter, omhandlende en omegn af det neutrale element.
En passende udvikling af den generelle topologi måtte afventes, før globale undersøgelser, vedr. hele Lie grupper, satte ind omkring 1925 (Elie Cartan, Hermann Weyl).

Sophus Lie (1842-1899), norsk matematiker
1872-86 ekstraordinær prof. i Oslo
1886-98 kaldet til prof. i Leipzig

I. Analytiske funktioner af flere reelle variable.

§1. Konvergensforhold for potensrækker i flere reelle variable.

Lad os betragte en potensrække

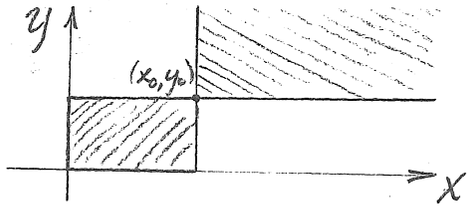
$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$$

i to reelle variable x og y. Koefficienterne a_{mn} er reelle tal.

Idet u^0 regnes $= 1$ for alle $u \in \mathbb{R}$, har rækken et konstant led a_{00}, samt led af formerne $a_{m0}x^m$ og $a_{0n}y^n$.

Vi antager først, at alle $a_{mn} \geqq 0$, og betragter kun ikke-negative værdier af x og y. Leddenes rækkefølge spiller da ingen rolle.

Det bemærkes straks, at



konvergens i et pkt. (x_0,y_0) i 1. kvadrant medfører konvergens i hvert pkt. af det afsluttede rektangel $\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq x_0 \wedge 0 \leqq y \leqq y_0\}$.
(for $x_0 = 0 \vee y_0 = 0$ er rektanglet udartet)

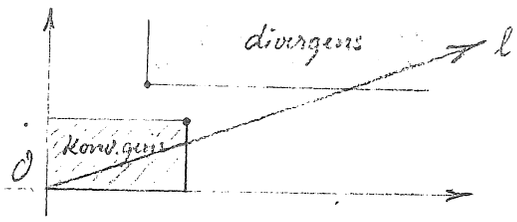
divergens i et pkt. (x_0,y_0) i 1. kvadrant medfører divergens i hvert pkt. af den afsluttede kvartplan $\{(x,y) \mid x_0 \leqq x \wedge y_0 \leqq y\}$.

Vi vil studere konvergensforholdene i det indre af 1. kvadrant, idet vi ser bort fra de udartede tilfælde

(1) Ethv. pkt. i det indre af 1. kvadrant er et konvergenspkt.

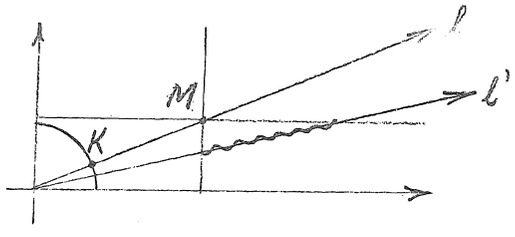
(2) Ethv. pkt. i det indre af 1. kvadrant er et divergenspkt.

Af eksistensen af såvel et konvergenspkt. som et divergenspkt. i det indre af 1. kvadrant sluttes straks, at der på enhver

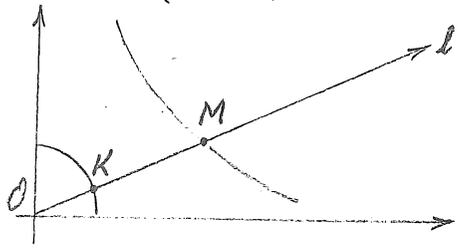


halvlinie l fra $O(0,0)$ ud i det indre af 1. kvadrant er både konvergenspkt.r og divergenspkt.r. Da endvidere på l ethv. konvergenspkt. går forud for ethv. divergpkt, har vi:

På enhver halvlinie l fra $O(0,0)$ ud i det indre af 1. kvadrant er der et delepkt. M, så pkt.rne mellem O og M er konverg.pkt.r, pkt.rne på halvlinien udenfor M er divergenspkt.r. (M kan selv være et konv.- eller diverg.pkt.)



Der er åbenbart konvergens i rektanglet $\{(x,y) \mid 0 \leqq x < x_M \wedge 0 \leqq y < y_M\}$ og divergens i den åbne kvartplan $\{(x,y) \mid x_M < x \wedge y_M < y\}$.
Specielt må delepkt.et M' på en halvlinie l' ligge på liniestykket ~~~, følgelig:

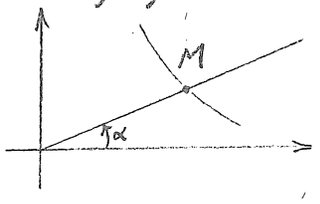


Afbildningen $K \to M$ betragtet på enhedscirklen i det indre af 1. kvadrant, hvor M er delepkt.et på halvlinien l fra O gennem K, er kontinuert (og naturligvis injektiv)
M beskriver altså en kontinuert kurve k, og man verificerer, at resten af punkterne i det indre af 1. kvadrant falder i 2 områder (åbne, (kurve-)sammenhængende

mængder), et bestående af lutter Konvergenspkt.r, beskrevet af det åbne liniestykke OM, og et bestående af lutter divergenspkt.r, beskrevet af den åbne halvlinie ud fra M. De to områder kaldes konvergens-, henh. divergensområdet i 1. kvadrant. *)

3.9.66

Lidt om overgangen til akserne:



Af figuren med ~~~ ses, at x_M er en i det væsentlige aftagende, y_M en i det væsentlige voksende fkt. af α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Lad os f.eks. se på $\alpha \to 0_+$; der er følgende muligheder

(a) $x_M \to \infty$. Kurven beskrevet af M har da asymptote parallel med X-aksen, evt. X-aksen selv; der er konvergens på hele den positive del af X-aksen.

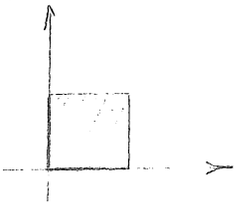
(b) $x_M \to a$. Da må $y_M = x_M \operatorname{tg}\alpha \to 0$, og dermed $M \to (a,0)$. På X-aksen er der konvergens mindst til $(a,0)$, evt. længere.

I det udartede tilfælde (1), hvor konvergensområdet er hele det indre af 1. kvadr., vil der også være konvergens på akserne. Er divergensområdet hele 1. kvadr., (2), kan der dog være konvergens på (dele af) akserne.

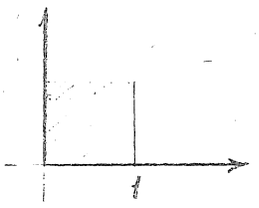
Eksempler.

3° $\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n = \sum_m \left(x^m \sum_n y^n\right) = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-y}$.

Regningen gælder for $0 \le x < 1$, $0 \le y < 1$, i øvrigt divergens



4° $\sum_{m,n=1}^{\infty} x^m y^n$ er konvergent i punkterne:

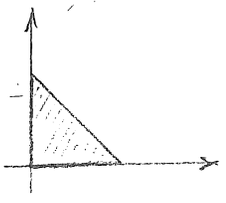


(På akserne er jo alle led = 0.)

2° $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!\,n!} x^m y^n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m+n=p}$

$= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{p} \frac{p!}{m!\,(p-m)!} x^m y^{p-m} = \sum_{p=0}^{\infty} (x+y)^p$.

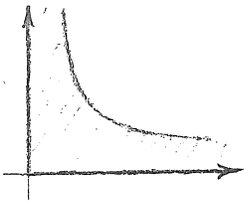
Der er konvergens netop for $x+y<1$, sum $\frac{1}{1-(x+y)}$



1° $\sum a_{mn} x^m y^n$ med $a_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ for } m=n \\ 0 \text{ for } m \neq n \end{cases}$

er konvergent netop for $xy<1$ med sum

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m y^m = \frac{1}{1-xy}$$



5° $\sum n! x^n y^n$ er divergent i hele det indre af 1. kvadrant, men konverg. på akserne.

---

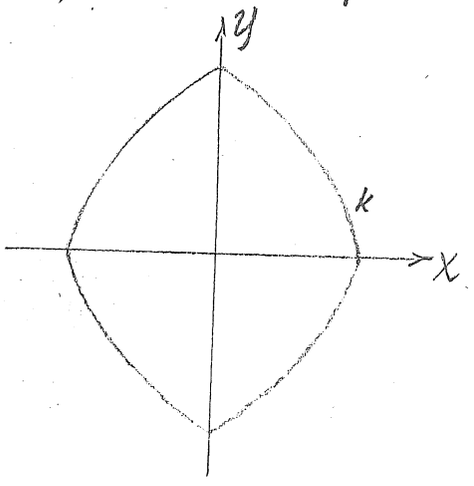
*) Konvergensomr. i 1. kvadrat kan også beskrives som den åbne kerne for mængden af konvergenspkt.r.

Lad os nu betragte en potensrække

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$$

med vilkårlige reelle koefficienter.

For rækken $\sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| x^m y^n$ antager vi, at konvergensomr. i 1. kvadrant ikke er tomt, og betegner med ω det område i planen, der fås ved at forene området i 1. kvadrant med dets spejlede i akserne, samt med (dele af) akserne,



så ω enten er hele planen eller som rand har kurven k hørende til $\sum |a_{mn}| x^m y^n$ og dennes spejlede i akserne, eventuelle endepunkter for de 4 kurver medregnet.

7.9.

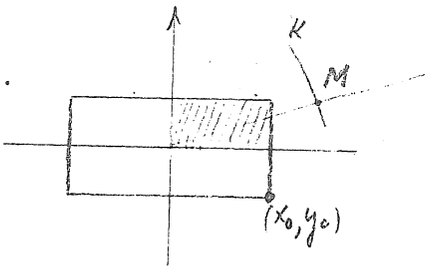
For hvert $(x,y) \in \omega$ er nu $\sum a_{mn} x^m y^n$ absolut konvergent,

thi $|a_{mn} x^m y^n| = |a_{mn}| |x|^m |y|^n$

og $\sum |a_{mn}| |x|^m |y|^n$ er konvergent

For et ydre pkt. (x,y) for ω, ikke liggende på akserne, er der derimod divergens, hvorledes end rækkens led ordnes, idet rækkens led ikke engang er begrænsede.

Et punkt (x_0, y_0) uden for akserne, hvor rækkens led er begrænsede, vil nemlig være berøringspkt. for ω, endda vil hele det åbne rektangel med $(0,0)$ som midtpkt. og (x_0, y_0) som vinkelspids være indeholdt i ω.



Hertil er det nok at vise, at det åbne rektangel

$$\{(x,y) \mid 0 < x < |x_0| \wedge 0 < y < |y_0|\}$$

er indeholdt i konverg. omr. i 1. kvadrant for $\sum |a_{mn}| x^m y^n$ – eller blot i mængden af konvergenspkt'r, jfr. s. 4, *).

Er nu for alle m,n

$|a_{mn} x_0^m y_0^n| \leqq c$, dvs. $|a_{mn}| \leqq \frac{c}{|x_0|^m |y_0|^n}$,

og dermed for $x \geqq 0, y \geqq 0$

$$|a_{mn}| x^m y^n \leqq c \left(\frac{x}{|x_0|}\right)^m \left(\frac{y}{|y_0|}\right)^n$$

medfører konvergensen af

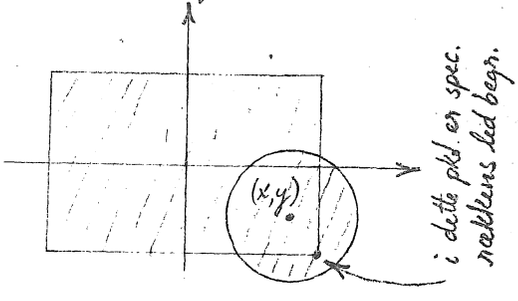
$$\sum c \left(\frac{x}{|x_0|}\right)^m \left(\frac{y}{|y_0|}\right)^n$$

for $0 \leqq x < |x_0|$, $0 \leqq y \leqq |y_0|$, – jfr. s. 4, eks. 3° –, imidlertid konvergens af $\sum |a_{mn}| x^m y^n$.

Området ω kaldes konvergensområdet for potensrækken $\sum a_{mn} x^m y^n$.

Direkte kan det karakteriseres som den åbne kerne for mængden af punkter, hvori der er (absolut) konvergens.

Det er værd at bemærke, at hvert pkt. $(x,y) \in \omega$ tilhører et åbent, om akserne symmetrisk rektangel $R \subseteq \omega$,

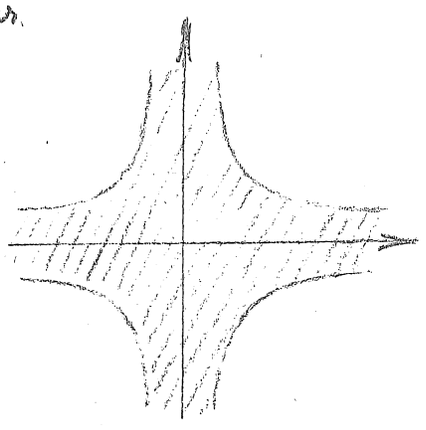


altså at ω er forening af sådanne rektangler.

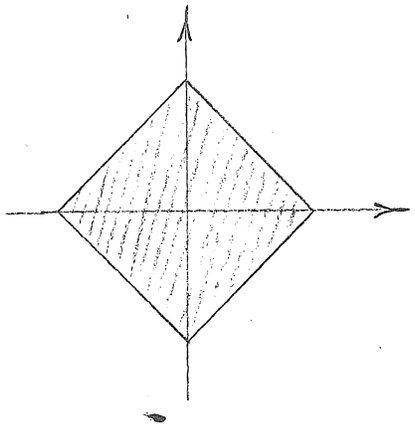
Vi har set bort fra tilfældet, hvor konvergensområde i 1. kvadrant for $\sum |a_{mn}| x^m y^n$ er tomt. Da er rækkens led ikke begrænsede i noget pkt. uden for akserne (begrænsethed i ét pkt. medfører jo absolut konvergens i et rektangel), og vi sætter $\omega = \emptyset$.

Eksempler.

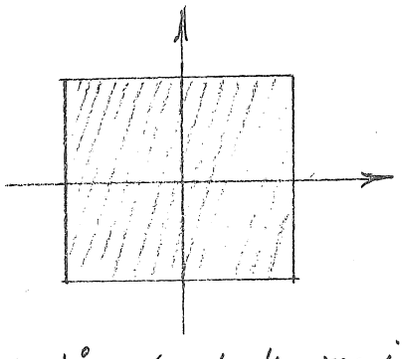
1°



2°



3° og 4°



NB. I eks. 4° er der abs. konverg. i hvert pkt. på akserne.

5° Konvergensområdet er tomt, skønt der er absolut konvergens i hvert pkt. på akserne.

p.s. Det er let at modificere eksemplerne 1° - 4°, så konvergensområderne "fladtrykkes".

For potensrækker

$$\sum_{p_1,\dots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$$

kan man gå frem ganske som ovenfor og derved finde ganske tilsvarende resultater.

Lad os ikke udføre dette, men i stedet vise, hvorledes man hurtigt kan nå de resultater, vi i det følgende har brug for.

Potensrækkens koeff. antages vilk. reelle.

Sætn. *Hvis rækkens led er begrænsede i et pkt. $(b_1,\dots,b_n)$, hvor alle $b_i \neq 0$, så er rækken absolut konvergent i hvert pkt. i det åbne interval*

$$\{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_1|<|b_1| \wedge \dots \wedge |x_n|<|b_n|\}$$

Bevis. Rækken $\sum \left|\frac{x_1}{b_1}\right|^{p_1} \cdots \left|\frac{x_n}{b_n}\right|^{p_n}$ med ikke negative led er konvergent (med summen $\frac{1}{1-\left|\frac{x_1}{b_1}\right|} \cdots \frac{1}{1-\left|\frac{x_n}{b_n}\right|}$) i hvert pkt. $(x_1,\dots,x_n)$ af intervallet, og af $|a_{p_1\dots p_n} b_1^{p_1} \cdots b_n^{p_n}| \leqq c$ følger

$$|a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}| \leqq c \left|\frac{x_1}{b_1}\right|^{p_1} \cdots \left|\frac{x_n}{b_n}\right|^{p_n}.$$

Defin. *Ved konvergensområdet ω for*

$$\sum a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$$

forstås den åbne kerne for mængden af konvergenspkt.r. (At ω er sammenhængende, vil fremgå om et øjeblik.)

Sætn. *Hvert pkt. i ω tilhører et interval*

$$\mathfrak{J} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_1|<c_1 \wedge \dots |x_n|<c_n\},$$
$$c_1,\dots,c_n > 0,$$

hvor $\mathfrak{J} \subseteqq \omega$. Med andre ord: ω *er forening af sådanne intervaller.*

Thi da ω er åben, findes for hvert $(x_1',\dots,x_n') \in \omega$ et pkt. $(b_1,\dots,b_n) \in \omega$ med alle $b_i \neq 0$, så $|x_1'|<|b_1|, \dots, |x_n'|<|b_n|$, dvs. $(x_1',\dots,x_n') \in \mathfrak{J} = \{(y_1,\dots,y_n) \mid |y_1|<|b_1| \wedge \dots \wedge |y_n|<|b_n|\}$

Og ifølge den foregående sætning er det *åbne* interval $\mathfrak{J}$ indeholdt i mængden af konvergenspkter og dermed i ω.

Som forening af sammenhængende mgdr. med et fælles pkt. – nemlig $(0,\dots,0)$ –, er da ω *sammenhængende* (Bourbaki: Top. generale, chap I, 2. éd., §11, n°1, prop. 2), altså virkelig et *område*.[1]

Det er endvidere klart, at ω er *symmetrisk* om hver af koordinathyperplanerne.

I hvert pkt. af ω er rækken *absolut konvergent*.

Ved at benytte lidt mindre $c_1,\dots,c_n$ kan man opnå en tilsyneladende skærpelse af den sidste sætning:

Hvert pkt. i ω tilhører et interval

$$\mathfrak{J} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_1|<c_1 \wedge \dots \wedge |x_n|<c_n\}$$
$$c_1,\dots,c_n > 0,$$

hvor $\bar{\mathfrak{J}} = \{(x_1,\dots,x_n) \mid |x_1| \leqq c_1 \wedge \dots \wedge |x_n| \leqq c_n\} \subseteqq \omega$.

Her er det værd at bemærke, at $\sum |a_{p_1\dots p_n}| c_1^{p_1} \cdots c_n^{p_n}$ er en konvergent majorantrække for $\sum a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$ i intervallet $\bar{\mathfrak{J}}$, hvorfor *potensrækken er ligelig konvergent i* $\bar{\mathfrak{J}}$.

[1] Kurvesammenhæng vises let direkte, med stråler fra $(0,\dots,0)$.

§2. Sumfunktionen for en potensrække.

Vi antager, at konvergensområdet ω for potensrækken

$$\sum_{p_1,\dots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1\cdots p_n} x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$$

ikke er tomt, og betragter sumfunktionen f i området ω.

Da hvert pkt. i ω ligger i det indre af et interval, hvori konvergensen er ligelig, har vi straks:

Sumfunktionen f er kontin. i hvert pkt. af ω.

Vi vil nu undersøge differentiation efter en vilk. af de variable. For overskueligheds skyld tænker vi os, at der kun er to variable, som vi så betegner med x og y, men betragtningen er ganske den samme i det generelle tilfælde. Lad os f. eks. betragte differentiation efter x.

Af den givne række $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$

fås ved ledvis differentiation efter x potensrækken

$$\sum_{m=1,n=0}^{\infty} m a_{mn} x^{m-1} y^n$$

Vi bemærker først, at er den givne rækkes led begrænsede i et pkt. (b_1, b_2), hvor $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, så er den ledvist diff. række absolut konvergent i hvert pkt. i det åbne interval $\{(x,y) \mid |x|<|b_1| \wedge |y|<|b_2|\}$.

Har vi nemlig for alle m,n med $m \geq 1$

$$|a_{mn} b_1^m b_2^n| \leq c$$

og dermed $|m a_{mn} x^{m-1} y^n| \leq \frac{c}{|b_1|} m \left|\frac{x}{b_1}\right|^{m-1} \left|\frac{y}{b_2}\right|^n$,

fremgår påstanden af, at rækken

$$\sum_{1,0}^{\infty} m \left|\frac{x}{b_1}\right|^{m-1} \left|\frac{y}{b_2}\right|^n$$

er konvergent i hvert pkt (x,y) af intervallet. Erindres, at $1+z+z^2+\dots+z^m+\dots$ og $1+2z+\dots+mz^{m-1}+\dots$ er konvergente for $0 \leq z < 1$ med summer $\frac{1}{1-z}$ og $\frac{1}{(1-z)^2}$, fås jo for $|x|<b_1$, $|y|<b_2$:

$$\sum_{1,0}^{\infty} m \left|\frac{x}{b_1}\right|^{m-1} \left|\frac{y}{b_2}\right|^n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{(1-|\frac{x}{b_1}|)^2} \frac{1}{1-|\frac{y}{b_2}|}$$

Da nu hvert pkt. i ω ligger i et åbent interval $\mathfrak{F} = \{(x,y) \mid |x|<c_1 \wedge |y|<c_2\}$, hvor $\mathfrak{F} \subseteq \omega$ og specielt $(c_1,c_2) \in \omega$, altså i et åbent interval $\subseteq$ konvergensmængden for den ledvis diff. række, har vi:

Ved ledvis differentiation af en potensrække efter en af de variable fås en potensrække, hvis konvergensområde omfatter den givne rækkes.

10.9.

Eksempel.

$\sum a_{mn} x^m y^n$ med $a_{on} = n!$, $a_{mn} = 0$ for $m \geq 1$,

altså $\sum n! y^n$, er kun konverg. på X-aksen, har altså tomt konvergensområde, men ved diff. efter x fås konvergens i hele planen.

I kraft af ovenstående resultat kan vi klare problemerne vedr. diff. ud fra kendskabet til potensrækker af én variabel.

Lad (x_0,y_0) tilhøre konvergensomr. ω for potensrækken $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n$

med sumfkt. f.

Funktionen $x \to f(x,y_0)$, defineret for $(x,y_0) \in \omega$, fremstilles ved

$$\sum a_{mn} x^m y_0^n = \sum_m \sum_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} y_0^n\right),$$

hvor det sidste udtryk er en potensrække i x. Funktionen er altså differentiabel med den afledede $\sum_{m=1}^{\infty} \left(m x^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} y_0^n\right)$

Hermed har vi, at f har en partiel afledet $D_x f(x_0,y_0) = \sum_m \left[\sum_n m a_{mn} x_0^{m-1} y_0^n\right)$

Det sidste skridt, at skrive

$$D_x f(x_0,y_0) = \sum_{m=1,n=0}^{\infty} m a_{mn} x_0^{m-1} y_0^n$$

kan vi tillade os, da vi på forhånd har vist, at den optrædende række er absolut konvergent.

Vi noterer:

Sumfunktionen f for en potensrække

$$\sum_{p_1,\dots,p_n} a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}$$

har partielle afledede m.h.t. hver af de variable $x_1,\dots,x_n$ i hvert pkt. af rækkens konvergensområde ω. Den partielle afledede $D_i f$ m.h.t. x_i er sumfunktion for den potensrække, der fås ved ledvis diff. m.h.t. x_i,

$$D_i f(x_1,\dots,x_n) = \sum p_i a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1}\cdots x_i^{p_i-1}\cdots x_n^{p_n}.$$

Ved at anvende dette resultat på de differentierede rækker, derpå de 2 gange diff. rækker, osv., fås, når man dertil erindrer, at sumfunktionen for en potensrække er kontinuert i konvergensområdet:

Sumfunktionen for en potensrække har kontinuerte partielle afledede af enhver orden i rækkens konvergensområde. De afledede fremstilles ved de ledvist differentierede rækker.

Vi vender tilbage til tilfældet 2 variable, men bemærker, at betragtningen er ganske den samme i det generelle tilfælde.

Ved ledvis diff. q gange efter x og r gange efter y af rækken

$$\sum a_{mn} x^m y^n$$

med konvergensområde ω og sumfunktion f, fås en potensrække, der i ω fremstiller $D_{x^q y^r}^{q+r} f$. Specielt er

$$D_{x^q y^r}^{q+r} f(0,0) = q!\,r!\,a_{qr},$$

idet højre side er den differentierede rækkes konst. led.

Vi noterer:

En nødvendig betingelse for, at en funktion g kan udvikles i potensrække i en (åben) omegn af $(0,0)$, er, at g i en åben omegn af $(0,0)$ har kont. partielle afledede af enhver orden; den eneste mulige række er $\sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} x^m y^n$, hvor $b_{mn} = \frac{1}{m!n!} D_{x^m y^n}^{m+n} g(0,0)$.

Eks. Funktionen g defineret ved

$$g(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{y^2}} & \text{uden for akserne} \\ 0 & \text{på akserne} \end{cases}$$

har kontinuerte partielle afledede af enhver orden i hele planen, af formen

$$e^{-\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{y^2}} P\left(\tfrac{1}{x}\right) Q\left(\tfrac{1}{y}\right) \text{ uden for akserne}, \qquad 0 \text{ på akserne},$$

hvor P og Q er polynomier. g kan ikke udvikles i potensrække omkring $(0,0)$.

Bemærkning. Summen af leddene af p^{te} grad i ovenstående række, multipliceret med $p!$, altså

$$\sum_{m=0}^{p} \frac{p!}{m!(p-m)!} D_{x^m y^{p-m}}^{p} g(0,0)\, x^m y^{p-m},$$

skrives undertiden symbolsk på formen

$$\left(D_x g(0,0)\, x + D_y g(0,0)\, y\right)^{(p)}.$$

Slår man altså led af samme grad sammen, fås

$$g(0,0) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(D_x g(0,0)\, x + D_y g(0,0)\, y\right)^{(p)},$$

som kan kaldes MacLaurin rækken for g.

Vedrørende potensrækker

$$\sum_{p_1,\dots,p_n} a_{p_1\dots p_n} (x_1-c_1)^{p_1}\cdots(x_n-c_n)^{p_n}$$

og udvikling af funktioner i en sådan række omkring $(c_1,\dots,c_n)$ gælder naturligvis resultater, der ganske svarer til de ovenfor fundne. (De kan jo umiddelbart overføres ved en parallelforskydning.)

Sætn. Når punktet $(d_1,\dots,d_n)=(c_1+u_1,\dots,c_n+u_n)$ tilhører konvergensområ ω for en potensrække

$$\sum_{p_1,\dots,p_n} a_{p_1\dots p_n}(x_1-c_1)^{p_1}\dots(x_n-c_n)^{p_n},$$

gælder, at sumfunktionen f i en omegn af $(d_1,\dots,d_n)$ kan udvikles i en række

$$\sum_{p_1,\dots,p_n} b_{p_1\dots p_n}(x_1-d_1)^{p_1}\dots(x_n-d_n)^{p_n},$$

nemlig i det mindste i området

$$\{(d_1+h_1,\dots,d_n+h_n)\mid(c_1+|u_1|+|h_1|,\dots,c_n+|u_n|+|h_n|)\in\omega\}$$

Bevis. Vi kan uden indskrænkning antage $(c_1,\dots,c_n)=(0,\dots,0)$. For simpelheds skyld ræsonnerer vi som sædv. på tilfældet 2 variable. Den givne række er da

$$\sum_{m,n} a_{mn}x^m y^n$$

med konvergensområ ω, sumfkt. f, og vi påstår, at med passende valgte b_{mn} gælder

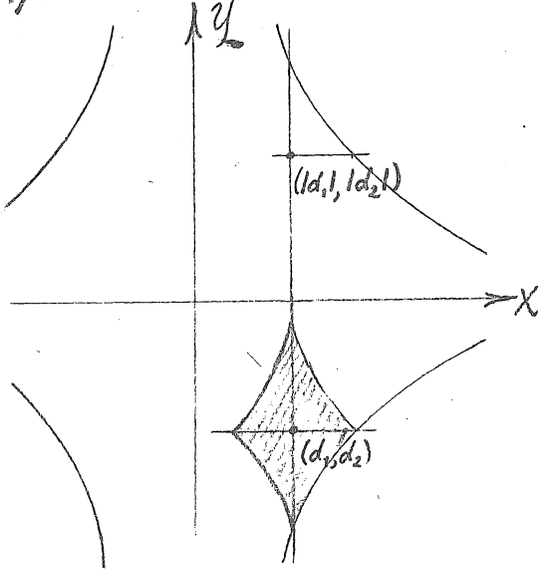
$$f(x,y)=\sum_{m,n} b_{mn}(x-d_1)^m(y-d_2)^n,$$

dvs. $f(d_1+h,d_2+k)=\sum_{m,n} b_{mn}h^m k^n$,

for alle pkt.r i området

$$\{(d_1+h,d_2+k)\mid(|d_1|+|h|,|d_2|+|k|)\in\omega\},$$

se figuren:



For hvert $(x,y)=(d_1+h,d_2+k)\in\omega$ har vi

$$f(x,y)=\sum_{m,n} a_{mn}(d_1+h)^m(d_2+k)^n$$

$$=\sum_{m,n} a_{mn}\Big(\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}d_1^{m-p}h^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q}d_2^{n-q}k^q\Big)$$

$$=\sum_{m,n}\Big(\sum_{\substack{p,q\\ p\le m,\,q\le n}} a_{mn}\binom{m}{p}\binom{n}{q}d_1^{m-p}d_2^{n-q}\,h^p k^q\Big)$$

Det springende punkt er nu tilladeligheden af at „hæve parentiserne", dvs. fortsætte

$$=\sum_{\substack{m,n,p,q\\ p\le m,\,q\le n}} a_{mn}\binom{m}{p}\binom{n}{q}d_1^{m-p}d_2^{n-q}\,h^p k^q$$

Når den sidst opskrevne række er absolut konvergent, er også ligheds tegnet korrekt.

Betragter vi imidlertid

$$\sum_{\substack{m,n,p,q\\ p\le m,\,q\le n}} |a_{mn}|\binom{m}{p}\binom{n}{q}|d_1|^{m-p}|d_2|^{n-q}|h|^p|k|^q$$

kan vi ubekymret „regne tilbage" til

$$\sum_{m,n}|a_{mn}|(|d_1|+|h|)^m(|d_2|+|k|)^n,$$

da vi har ikke-negative led. Den ønskede absolutte konvergens foreligger altså for

$$(|d_1|+|h|,\,|d_2|+|k|)\in\omega,$$

dvs. for (x,y) tilhørende det i sætningen nævnte område.

For sådanne (x,y) kan vi nu (stadig i kraft af samme rækkes absol. konvergens) regne videre til

$$f(x,y)=\sum_{p,q}\Big(\sum_{\substack{m,n\\ m\ge p,\,n\ge q}} a_{mn}\binom{m}{p}\binom{n}{q}d_1^{m-p}d_2^{n-q}\Big)h^p k^q,$$

hvormed beviset er afsluttet.

§3. Analytiske funktioner af flere reelle variable.

En reel funktion f defineret på en delmgd. af $\mathbb{R}^n$ siges at være *analytisk i et pkt.* $(c_1,\dots,c_n)$, hvis dette er indre pkt. i defmængden, og hvis f i en omegn kan fremstilles ved en potensrække

$$\sum_{p_1,\dots,p_n} a_{p_1\dots p_n}(x_1-c_1)^{p_1}\dots(x_n-c_n)^{p_n}.$$

Vi minder om, at fremstillingen er entydig (side 9), idet

$$a_{p_1\dots p_n}=\frac{1}{p_1!\dots p_n!}D_{x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}}^{p_1+\dots+p_n} f\ (c_1,\dots,c_n)$$

Funktionen f kaldes *analytisk*, hvis den er analytisk i hvert pkt. af sin defmgd. (Denne må nødvendigvis være en åben mængde.)

Ifølge sætningen side 10 er *sumfunktionen for en potensrække analytisk i rækkens konvergensområde.*

Se side 11a.

Vi vil vise, at man ved *sammensætn.* af analytiske funktioner påny får en analytisk funktion.

Sætn. *Er funktionerne* $g_1,\dots,g_m$ *analytiske i punktet* $(c_1,\dots,c_n)$ *og* f *analytisk i* $(g_1(c_1,\dots,c_n),\dots,g_m(c_1,\dots,c_n))$, *da er den sammensatte funktion* $f\circ(g_1,\dots,g_m)$ *analytisk i* $(c_1,\dots,c_n)$.

$(g_1\dots g_m)$
$c_1,\dots,c_n)$

Bevis. Vi kan antage $(c_1,\dots,c_n)=(0,\dots,0)$ og $g_1(0,\dots,0)=\dots=g_m(0,\dots,0)=0$. Lad os endvidere for overskuelighedens skyld tænke os $m=2$, $n=1$. Det er klart, at 0 er indre pkt. i defmgden for $f\circ(g_1,g_2)$; problemet er i en omegn at fremstille funktionen ved en potensrække.

Lad $R=\{(y,z)\mid |y|<r\wedge|z|<s\}$ være et rektangel, hvor

$$f(y,z)=\sum_{m,n} a_{mn}y^m z^n,$$

og lad $J=\{x\mid |x|<t\}$ være et interval, hvor

$$g_1(x)=\sum_{p=1}^{\infty} b'_p x^p \quad\text{og}\quad g_2(x)=\sum_{q=1}^{\infty} b''_q x^q$$

samt $\qquad (g_1(x),g_2(x))\in R.$

For $|x|<t$ er nu

$$(f\circ(g_1,g_2))(x)=f(g_1(x),g_2(x))$$

$$=\sum_{m,n} a_{mn}\Big(\sum_p b'_p x^p\Big)^m\Big(\sum_q b''_q x^q\Big)^n$$

Her kan man ubekymret, i kraft af multiplikationsregel for absolut konverg. rækker, udmultiplicere

$$\Big(\sum_{p_1} b'_{p_1}x^{p_1}\Big)\dots\Big(\sum_{p_m} b'_{p_m}x^{p_m}\Big)\Big(\sum_{q_1} b''_{q_1}x^{q_1}\Big)\dots\Big(\sum_{q_n} b''_{q_n}x^{q_n}\Big)$$

og derpå samle leddene efter potenser af x (der er kun endelig mange af hver potens). Bemærk, at hver koefficient i den fremkomne række $\sum_k d_{mnk}x^k$ er sum af produkter af b''er og b'''er.

Vi har hermed for $|x|<t$

$$f(g_1(x),g_2(x))=\sum_{m,n}\Big(\sum_k a_{mn}d_{mnk}x^k\Big)$$

Kan vi nu vise, at rækken

$$\sum_{m,n,k} a_{mn}d_{mnk}x^k$$

er absolut konvergent i et evt. mindre interval $|x|<t^*$, har vi her

$$f(g_1(x),g_2(x))=\sum_k\Big(\sum_{m,n} a_{mn}d_{mnk}\Big)x^k,$$

og beviset er ført.

Hertil bemærkes, at vi kan antage $|a_{mn}|r^m s^n\le M$, dvs. $|a_{mn}|\le\frac{M}{r^m s^n}$ for alle m,n, (idet vi ellers kan tage et mindre rektanget R), og ligeledes

En analytisk fkt. er naturligvis kontinuert (jfr. side 8). Videre gælder (jfr. side 9):

En analytisk fkt. har i hele sin (åbne) definitionsmgd. partielle afledede af enhver orden, som påny er analytiske.

De analytiske fktner udgør således kun en snæver fktsklasse, en ægte (jfr. s. 9) del af mængden C^∞ af fktner med åben defmgd. og kontinuerte partielle afledede af enhver orden. Men det er en velafrundet klasse, omfattende alle sædvanligt betragtede funktioner.

$|b'_p|\,t^p \leqq N$, dvs. $|b'_p| \leqq \frac{N}{t^p}$,

og $|b''_p|\,t^p \leqq N$, dvs. $|b''_p| \leqq \frac{N}{t^p}$,

for alle p. Ved

$$\varphi(y,z) = \sum_{m,n} \frac{M}{r^m s^n}\, y^m z^n$$

defineres nu en fkt. φ på rektanglet $\mathcal{R}$ og ved

$$\gamma(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{N}{t^p}\, x^p$$

en fkt. γ på $\mathcal{T}$. Lad $\mathcal{T}^* = \{x \mid |x| < t^*\} \leqq \mathcal{T}$ være et interval, hvor $(\gamma(x), \gamma(x)) \in \mathcal{R}$.

For $|x| < t^*$ finder vi ved samme regning som ovenfor

$$\varphi(\gamma(x), \gamma(x)) = \sum_{m,n} \Big(\sum_k \frac{M}{r^m s^n}\, \delta_{mnk}\, x^k \Big),$$

Afgørende er det nu, at $|d_{mnk}| \leqq \delta_{mnk}$ for alle m,n,k. Den absolutte konvergens af $\sum_{m,n,k} a_{mn}\, d_{mnk}\, x^k$ for $|x| < t^*$ sluttes nemlig nu af

$$|a_{mn}\, d_{mnk}\, x^k| \leqq \frac{M}{r^m s^n}\, \delta_{mnk}\, |x|^k,$$

idet $\sum_{m,n,k} \frac{M}{r^m s^n}\, \delta_{mnk}\, |x|^k$ har en endelig sum, nemlig $\varphi(\gamma(|x|), \gamma(|x|))$; – når alle led er $\geqq 0$, er jo overgangen fra $\sum_{m,n,k}$ til $\sum_{m,n} \sum_k$ lovlig.

Ethvert polynomium $P(x_1, \ldots, x_n)$ er naturligvis en analytisk funktion, specielt $x+y$, $x-y$, xy, hvilket i forbindelse med sætningen ovenfor giver:

Sum, differens og produkt af analytiske funktioner er påny analytisk.

Da endvidere $\frac{1}{x}$ er analytisk – for hvert $c \neq 0$ gælder nemlig for $|x-c| < |c|$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c}\, \frac{1}{1-\left(-\frac{x-c}{c}\right)} = \frac{1}{c} \sum_n \left(-\frac{1}{c}\right)^n (x-c)^n$$

$$= \sum_n \frac{(-1)^n}{c^{n+1}}\, (x-c)^n, \quad -$$

og dermed $\frac{y}{x}$ analytisk, slutter vi

En kvotient af analytiske funktioner er påny analytisk.

Enhver rational funktion (dvs. kvotient mellem to polynomier) er altså analytisk.

Endvidere er funktionerne e^x, $\log x$ og dermed $x^y = e^{y \log x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arc}\sin x$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ osv. analytiske. Sædvanlige funktionsudtryk som f.eks.

$$x_1^{\operatorname{Arctg} \frac{x_1}{x_2}} \cdot \log \sin \sqrt{x_1}$$

bestemmer derfor analytiske funktioner (bemærk, at $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log x}$ her kun regnes definerut for $x > 0$, ligesom f.eks. $\operatorname{Arc}\sin x$ kun betragtes for $-1 < x < 1$).

For analytiske fkt.ner gælder en sætn. om implicit givne fkt.ner gansk. analog fkt.ner med kont. partielle afledede.

Først bemærkes: En afbildning f af en mængde E ind i $\mathbb{R}^n$

$$P \to (y_1, \dots, y_n), \quad P \in E,$$

kan udtrykkes ved n reelle fkt.ner på E

$$P \xrightarrow{f_1} y_1, \quad \dots\dots, \quad P \xrightarrow{f_n} y_n.$$

Vi skriver $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Er $E \subseteq \mathbb{R}^m$, kaldes f analytisk i et pkt. $(a_1, \dots, a_m)$, hvis $f_1, \dots, f_n$ alle er det

Sætning.

Lad $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ være en løsn. til de q ligninger med $p+q$ ubekendte

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0 \\ &\vdots \\ g_q(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &= 0, \end{aligned}$$

Er $g_1, \dots, g_q$ alle analytiske i punktet $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$, og er i samme pkt.

$$\begin{vmatrix} \partial_{y_1} g_1 & \cdots & \partial_{y_q} g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} g_q & \cdots & \partial_{y_q} g_q \end{vmatrix} \neq 0,$$

da findes et interval $\mathcal{I} \times \mathcal{J} =$

$$\{(x_1, \dots, x_p) \mid |x_i - a_i| < c\} \times \{(y_1, \dots, y_q) \mid |y_j - b_j| < d\},$$

så der for hvert $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{I}$ findes netop et $(y_1, \dots, y_q) \in \mathcal{J}$, hvor $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ er løsning. Afbildningen

$$(x_1, \dots, x_p) \to (y_1, \dots, y_q)$$

er analytisk i $(a_1, \dots, a_p)$.

Kun den sidste påstand er ikke indeholdt i hovedsætningen om implicit givne fkt.ner i mat. 2. Vi vil dog give et helt uafhængigt bevis, men holde os til tilfældet $p = 1$, $q = 1$, hvor de væsentligste træk allerede kommer frem. Vi kan antage $(a_1, b_1) = (0,0)$.

Punktet $(0,0)$ er altså løsning til ligningen

$$g(x,y) = 0,$$

hvor g er analytisk i $(0,0)$ og $\partial_y g(0,0) \neq 0$.

Vi søger først en i 0 analytisk funktion f med $f(0) = 0$, så punkterne $(x, f(x))$ er løsninger for x tilhørende en omgn af 0.

Idet vi omskriver ligningen til

$$-\frac{1}{\partial_y g(0,0)} g(x,y) + y = y,$$

hvorved den er bragt på formen

$$y = h(x,y),$$

hvor h er analytisk i $(0,0)$ og

$$h(0,0) = 0, \quad \partial_y h(0,0) = 0,$$

ønsker vi altså, at

$$f(x) = h(x, f(x))$$

i en omgn af 0.

(En tilsvarende omregning kan udføres for vilkårlige p og q, men med søjler og matricer.)

21.9

Idet h har udviklingen

$$h(x,y) = b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + \dots\dots,$$

vil for en vilk. fkt. f, analytisk i 0 med udvikling

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots$$

den sammensatte fkt. $x \to h(x, f(x))$ være analytisk i 0 med en udvikling, der fremgår ved formel udregning af

$$b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}x\sum_k a_k x^k + b_{02}\left(\sum_k a_k x^k\right)^2 + \dots\dots,$$

jfr. s. 11, altså

$$b_{10}x + (b_{20} + b_{11}a_1 + b_{02}a_1^2)x^2 + \dots\dots$$

Nødv. og tilstr. for, at $f(x) = h(x, f(x))$ i en omegn af 0, er da, at

$$a_1 = b_{10}$$
$$a_2 = b_{20} + b_{11}a_1 + b_{02}a_1^2$$
$$a_3 = b_{11}a_2 + 2b_{02}a_1a_2 + b_{30} + b_{21}a_1 + b_{12}a_1^2 + b_{03}a_1^3$$
$$\vdots$$

Man bemærker, at den k^{te} højre side er dannet ved (endelig mange) multiplikationer og additioner ud fra b_{mn}'er med $m+n \leq k$ og $a_1, \dots, a_{k-1}$.

Ovenstående ligninger bestemmer således $a_1, a_2, \dots$ ved rekursion, og sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

er netop, hvad vi søger, forudsat konvergensomr. for $\sum a_k x^k$ ikke er tomt.

Et bevis herfor kan opnås ved at indrage rækken

$$\frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{rs}xy + \frac{M}{r^3}x^3 + \frac{M}{r^2 s}x^2 y + \cdots,$$

hvor (r,s) er et pkt. i det indre af 1. kvadrant, så

$$|b_{mn} r^m s^n| \leq M, \text{ dvs. } |b_{mn}| \leq \frac{M}{r^m s^n}$$

for alle m, n. I det følgende forudsættes $x < r$, $y < s$; rækken er da konvergent med sum

$$\chi(x,y) = M\left(\frac{1}{1-\frac{x}{r}}\,\frac{1}{1-\frac{y}{s}} - 1 - \frac{y}{s}\right).$$

Ligningen

$$y = \chi(x,y)$$

dvs. $$\frac{r}{r-x}\,\frac{s}{s-y} = y\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{s}\right) + 1,$$

dvs. $$\frac{rs}{r-x} = -\frac{s+M}{Ms}y^2 + \frac{s}{M}y + s,$$

dvs. $$\frac{s+M}{s^2}y^2 - y + \frac{Mx}{r-x} = 0,$$

tilfredsstilles nu af pkterne

$$\left(x, \frac{s^2}{2(s+M)}\left(1 - \sqrt{1 - 4\frac{(s+M)M}{s^2}\frac{x}{r-x}}\right)\right),$$

lad os skrive $(x, \varphi(x))$, for x tilhørende en omegn af 0.

Idet nu φ er analytisk med $\varphi(0) = 0$ og

$$\varphi(x) = \chi(x, \varphi(x))$$

vil koefficienterne i udviklingen

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^k$$

tilfredsstille rekursionsformler som ovenstående, med a_k erstattet med α_k og b_{mn} erstattet med $\frac{M}{r^m s^n}$. Ved induktion fås da

$$|a_k| \leq \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

og vi slutter, at $\sum a_k x^k$ har et ikke tomt konvergensområde.

Påberåber vi os hovedsætningen om implicit given fkt. i mat. 2, er der nu ikke mere at vise, idet den fundne fkt. f i en omegn af 0 må stemme overens med den ved $g(x,y) = 0$ implicit givne fkt., som altså er analytisk i 0.

Direkte kan beviset afsluttes således:

Lad f være analytisk i 0 med $f(0) = 0$, så

$$g(x, f(x)) = 0$$

i en omegn af 0.

Den sammensatte fkt. $(x,z) \to g(x, f(x)+z)$ er da analytisk i $(0,0)$ og kan i en omegn U fremstilles ved potensrække. I $(0,0)$ er for hvert p

$$\frac{\partial^p g(x, f(x)+z)}{\partial x^p} = \frac{d^p g(x, f(x))}{dx^p} = \frac{d^p 0}{dx^p} = 0,$$

således at z er faktor i alle egt. led i rækken og dermed

$$g(x, f(x)+z) = z\, h_1(x,z) \quad \text{for } (x,z) \in U,$$

hvor $h_1(x,z)$ er sum af en potensrække med konstant led $h_1(0,0) =$

$$\frac{\partial g(x, f(x)+z)}{\partial z}_{(x,z)=(0,0)} = \mathfrak{D}_2 g(0,0) \neq 0.$$

I en omegn U af $(0,0)$, der ved

$$(x,y) \to (x, y - f(x))$$

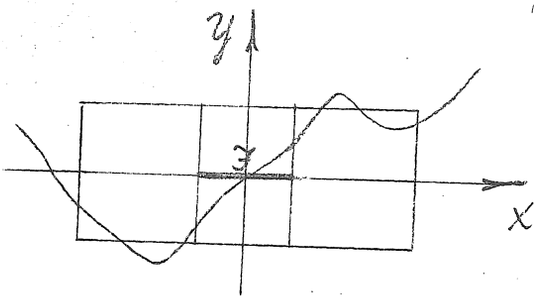
afbildes ind i V, har vi nu identiteten

$$g(x,y) = (y - f(x))\, h_1(x, y - f(x))$$

eller $$g(x,y) = (y - f(x))\, h_2(x,y) \quad ,$$

hvor $h_2(0,0) = h_1(0,0) = \mathfrak{D}_2 g(0,0) \neq 0$.

Et interval $J \times J$ som nævnt i sætningen kan nu fås ved først at vælge et $J_1 \times J \subseteq U$, hvor h_2 ikke antager værdien 0, og derpå erstatte J_1 med et J, så $x \in J \Rightarrow f(x) \in J$.



24.9.

Tanken at benytte „majorantfunktioner", dvs. analytiske funktioner, hvor koefficienterne i udviklingen er positive og numerisk større end koefficienterne i en foreliggende potensrække, går tilbage til Cauchy. Opspaltningen

$$g(x,y) = (y - f(x))\, h_2(x,y)$$

skyldes Weierstrass.

Bevisførelsen ovenfor kan som antydet overføres til det almene tilfælde af ligninger med p og q ubekendte. (I Goursat. Cours d'analyse, I, betragtes som eksempel 2 ligninger med 5 ubekendte.)

Omvendt afbildning kan behandles ud fra implicit given afbildning ganske som i mål 2. Vi vil nøjes med at formulere resultatet:

Er $f = (f_1, \dots, f_n)$ analytisk i punktet $(a_1, \dots, a_n)$, og er i samme pkt.

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{D}_1 f_1 & \cdots & \mathfrak{D}_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{D}_1 f_n & \cdots & \mathfrak{D}_n f_n \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

da findes en åben omegn V af $(a_1, \dots a_n)$, så restriktionen af f til V er injektiv og dens omvendte analytisk.

Corollar: Er $f = (f_1, \dots, f_n)$ analytisk og injektiv samt funktionalmatricen $\underline{\underline{\mathfrak{D}}} f$ regulær i hvert pkt., da er den v. afbildning analytisk.

Bemærkning. Betingelsen vedrørende funktionalmatricen er nødv.:

Er $f = (f_1, \dots, f_n)$ og $g = (g_1, \dots, g_n)$ analytiske (eller blot differentiable) og hinandens omvendte, da er funktionalmatricerne $\underline{\underline{\mathfrak{D}}} f$ og $\underline{\underline{\mathfrak{D}}} g$, taget i tilsvarende punkter, inverse, idet jo

$$\underline{\underline{\mathfrak{D}}}(g \circ f) = \underline{\underline{\mathfrak{D}}} g \; \underline{\underline{\mathfrak{D}}} f = \underline{\underline{E}} \quad \text{(og analogt)}.$$

Specielt er da $\det(\underline{\underline{\mathfrak{D}}} f) \neq 0$ i hvert pkt. af def.mgd. for f.

Eks. $x \to x^3$, $x \in \mathbb{R}$, er analytisk og injektiv, men da $\frac{dx^3}{dx}$ er 0 for $x = 0$, er den omv. fkt. $y \to \sqrt[3]{y}$ end ikke diff. i $y = 0^3 = 0$.

Sædv. differentialligningssystemer af 1. orden.

Under visse forudsætninger om afbildningen $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : U \to \mathbb{R}^n$, hvor U er en åben delmængde af $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, er i Mat. 2 vist:

For hvert $(r, d_1, \dots, d_n) \in U$ findes en største løsning $h = (h_1, \dots, h_n) : J \to \mathbb{R}^n$ (J betegner et end. eller. uend. interval $\subseteq \mathbb{R}$) til

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n$$

med $\qquad h_i(r) = d_i, \qquad i = 1, \dots, n.$

Enhver løsning er restriktion af én max. løsning.

Tilføjelse: Er $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ analytiske (hvorved omtalte forudsætninger rigtigt er opfyldt), da er enhver løsning $(g_1, \dots, g_n) : J \to \mathbb{R}^n$ analytisk (J betegner et åbent interval $\subseteq \mathbb{R}$).

Bevis. Vi skal vise, at $(g_1, \dots, g_n)$ er anal. i ét vilk. $s \in J$. Hertil er det, idet vi sætter $c_i = g_i(s)$, $i = 1, \dots, n$, i kraft af entydigheden nok at vise:

Der findes et i s analytisk $f = (f_1, \dots, f_n)$, som i en omegn er løsning og har $f_i(s) = c_i$, $i = 1, \dots, n$.

Vi vil kun betragte tilfældet $n = 1$, hvor de væsentligste træk allerede kommer frem. Vi kan antage $s = 0$ og $c = 0$.

Vi søger da en i 0 anal. fkt. f med $f(0) = 0$, så

$$Df(t) = \varphi(t, f(t))$$

i en omegn af 0.

Idet φ har udviklingen

$$\varphi(t,u) = b_{00} + b_{10}t + b_{01}u + b_{20}t^2 + b_{11}tu + b_{02}u^2 + \dots,$$

vil for en vilk. fkt. f, anal. i 0 med udvikl.

$$f(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

den sammensatte fkt. $t \to \varphi(t, f(t))$ være analytisk i 0 med en udvikling, der fremgår ved formel udregning af

$$b_{00} + b_{10}t + b_{01}\sum_i a_i t^i + b_{20}t^2 + b_{11}t\sum_i a_i t^i + \dots,$$

jfr. s. 11, altså

$$b_{00} + (b_{10} + b_{01}a_1)t + (b_{01}a_2 + b_{20} + b_{11}a_1 + b_{02}a_1^2)t^2 + \dots$$

Nødv. og tilstr. for, at $Df(t) = \varphi(t, f(t))$ i en omegn af 0, er da, at

$$\begin{aligned} a_1 &= b_{00} \\ 2a_2 &= b_{10} + b_{01}a_1 \\ 3a_3 &= b_{01}a_2 + b_{20} + b_{11}a_1 + b_{02}a_1^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man bemærker, at den i^{te} højre side er dannet ved (endelig mange) multiplikationer og additioner ud fra b_{jk}'er med $j + k \leqq i - 1$ og $a_1, \dots, a_{i-1}$.

Ovenstående ligninger bestemmer således $a_1, a_2, \dots$ ved rekursion, og sumfunktionen

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$$

er netop, hvad vi søger, forudsat konvergensområdet for $\sum a_i t^i$ ikke er tomt.

Et bevis herfor kan fås ved at sammenligne rækken

$$M + \frac{M}{r}t + \frac{M}{s}u + \frac{M}{r^2}t^2 + \frac{M}{rs}tu + \frac{M}{s^2}u^2 + \dots,$$

hvor (r, s) er et pkt. i det indre af 1. kvadrant så $|b_{ij} r^i s^j| \leqq M$, dvs. $|b_{ij}| \leqq \frac{M}{r^i s^j}$ for alle i, j. Ved at erstatte højre side i differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t, y)$$

med "majorantfkt.en" $M \dfrac{1}{1 - \frac{t}{r}} \dfrac{1}{1 - \frac{y}{s}}$, fås numerisk en differentialligning, hvor man eksplicit kan finde en i 0 anal. løsning med værdi 0 i 0. Betegnes dennes Taylor koefficienter med α_i, $i = 1, 2, \dots$, slutter ved induktion dels $\alpha_i \geqq 0$, dels $|a_i| \leqq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots$, ganske som s. 14.

(Den eksplicite løsning af differentialligningen med majorantfunktionen er angivet i Goursat: Cours d'analyse, II, 2. ed. 1911, s. 349. Det almene tilfælde, altså n vilk., omtales samme sted s. 351.)

Lad os notere, at ræsonnementet med potensrækkeudviklinger s. 15a, uden henvisning til tidl. resultater vedr. differentialligninger, direkte viser følgende om et vilk. system af sædv. differentialligninger af 1 orden

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

hvor $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ er analytiske fkt.nær (og U altså en åben del af $\mathbb{R}^{n+1}$):

Entydighed. To løsninger, der stemmer overens i et pkt. $s \in \mathbb{R}$, hvori de begge er analytiske, stemmer også overens i et interval omkring s.

Thi koefficienterne i udviklingerne ud fra s bestemmes ved visse rekursionsformler (kun første del af ræsonnementet benyttes).

Eksistens. For hvert $(s, c_1, \dots, c_n) \in U$ findes en analytisk løsning $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ med $f_i(s) = c_i$, $i = 1, \dots, n$, hvor $\mathcal{I}$ er et interval omkring s.

I begrundelsen herfor kommer også sidste del af ræsonnementet i spil, anvendelsen af Cauchys metode med majorantfunktion til bevis for konvergens af en potensrække.

Vi afslutter med at formulere en eksistenssætning (som vi vil få anvendelse for) vedrørende differentialligningssystem, hvori indgår parametre:

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(t, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

hvor φ_i, $i = 1, \dots, n$ er reelle fkt.nær af $1+m+n$ reelle variable, analytiske i $(0, \dots, 0)$.

Der findes reelle anal. fktnær f_i, $i = 1, \dots, n$, defin. på et interval $]-b, b[\times (]-c, c[)^m$, med $f_i(0, u_1, \dots, u_m) = 0$, så

$$D_t f_i(t, u) = \varphi_i(t, u, f(t, u)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Her er $u = (u_1, \dots, u_m)$ og $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Man bemærker, at for hvert fastholdt $(u_1, \dots u_m)$ er $(f_1, \dots, f_n)$ løsn til et sædv. difflign.system.

Sætningen kan generaliseres på forsk. vis, således kan „begyndelsesbetingelsen" erstattes af

$$f_i(0, u_1, \dots, u_m) = \psi_i(u_1, \dots, u_m),$$

hvor ψ_i er anal i $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ med værdi 0, $i = 1, \dots, n$. Videre kan $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{1+m+n}$ erstattes med et vilk. pkt.

Beviset kan føres som for den simplere eksistenssætning: bestemmelse af koefficienterne i Maclaurin udviklingerne for f_i'erne ved rekursionsformler, inddragelse af majorantfkt.nær for φ_i'er (og ψ_i'er) for at klare konvergensproblemet. Vi vil ikke udføre det. (Goursat II, s. 357-60.)

Vi vil ikke her gå nærmere ind på teorien for analytiske funktioner i flere variable, men dog til afslutning notere os en gavnlig særlig egenskab ved denne funktionsklasse:

Hvis en analytisk funktion med defmgd. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ overhovedet kan udvides til en analytisk funktion defineret på området B, hvor $A \subseteq B$, da kun på én måde.

Den evt. udvidelse kaldes den analytiske fortsættelse til B. (Område: åben, sammenhængende mgd.)

Bevis. Vi skal vise, at to vilk. analytiske udvidelser er identiske, dvs. deres differens er 0. Med andre ord:

Idet g antages analytisk i området B og $g(x_1,\dots,x_n) = 0$ for $x = (x_1,\dots,x_n)$ tilhørende en åben mgd. $A \subseteq B$, skal vi vise, at $g(x) = 0$ for hvert $x \in B$.

Lad C være mgd af pkt.r $x \in B$, hvor g er 0 i en omegn af x. Det er da klart, at C er åben og indeholder A, spec. $C \neq \emptyset$. Men da g er analytisk, er det ikke blot nødv., men også tilstr. for $x \in C$, at alle partielle afledede af enhver orden af g er 0 i x, idet dermed koefficienterne i rækkeudviklingen er 0. Af

$$C = \bigcap_{p_1+\dots+p_n} \{x \in B \mid D^{p_1+\dots+p_n}_{x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}} g(x) = 0\}$$

fremgår imidlertid, at C er afsluttet relativt til B, altså $B \setminus C$ åben.

Da nu C og $B \setminus C$ begge er åbne og $C \neq \emptyset$, slutter vi, idet B er sammenhængende, at $C = B$, hvormed beviset er ført.

Bemærkning. Vi benyttede i beviset, at en analytisk funktion i en omegn af et pkt. er bestemt ved sine partielle afledede i pkt.et. Nu har vi, at den også er bestemt globalt, forudsat defmgden er sammenhængende:

Er f og g analytiske i samme område B, og stemmer de partielle afledede af enhver orden overens blot i ét pkt, da er $f = g$.

De to funktioner vil nemlig stemme overens i en åben omegn A af punktet, hvor den fælles rækkeudvikling fremstiller dem begge.

Litteratur:

Goursat: Cours d'analyse I (1910).

Ved videregående undersøgelser viser det sig hensigtsmæssigt at arbejde i det komplekse talområde:

Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie II_1 (1924)

Bochner/Martin: Several complex variables (1948)

Hervé: Several complex variables (1963)

Gunning/Rossi: Analytic functions of several complex variables (1965)

II. Analytisk mangfoldighed

§1. Kort og atlas.

Forbemærkning. Den i det følgende benyttede terminologi vil forekomme mere naturlig, om man lader betydningen af dagligsprogets ord "(geografisk) kort" glide, så man i stedet for at tænke på selve papiret hefter sig ved afbildningen, hvor der til toppen af Himmelbjerget svarer et bestemt punkt på papiret og tilsvarende for hvert punkt i terrænet.

Lad der være givet et topologisk rum, dvs. en mængde T med en topologi, f.eks. givet ved systemet $\mathcal{O}$ af åbne mgd.r. eller ved omegne. Vi vil tillade os at betegne også det topologiske rum med T, altså at skrive T i stedet for $(T, \mathcal{O})$.

d være! III, s.37

En homeomorf afbildning σ af en åben mængde $V \subseteq T$ på en åben mængde $X \subseteq \dot{R}^n$ kaldes et <u>kort</u> i T, nøjere: et kort over V. Kortet siges at have <u>dimensionen</u> n.

(At σ er homeomorf betyder, at σ er bijektiv og σ og σ^{-1} begge kontinuerte.)

En mængde $\mathfrak{S}$ af kort i T kaldes et <u>atlas</u> i T. Har alle kort tilhørende $\mathfrak{S}$ samme dimension n, siges også atlasset $\mathfrak{S}$ at have dimensionen n. Afbildes hvert pkt. i T ved mindst et kort $\sigma \in \mathfrak{S}$, siges $\mathfrak{S}$ at <u>dække</u> T eller at være et atlas <u>over</u> T.

Et Hausdorff rum T siges at være en <u>n-dimensional mangfoldighed</u>, hvis der findes et n-dimensionalt atlas over T. Betingelsen kommer ud på, at hvert pkt. af T har en (åben) omegn homeomorf med. en åben mgd. i $\dot{R}^n$; det vil da også have en åben omegn homeomorf med en åben terning eller kugle i $\dot{R}^n$. En n-dimensional mangfoldighed er altså et sammenhængende Hausdorff rum, hvori topologien lokalt er som i $\dot{R}^n$.

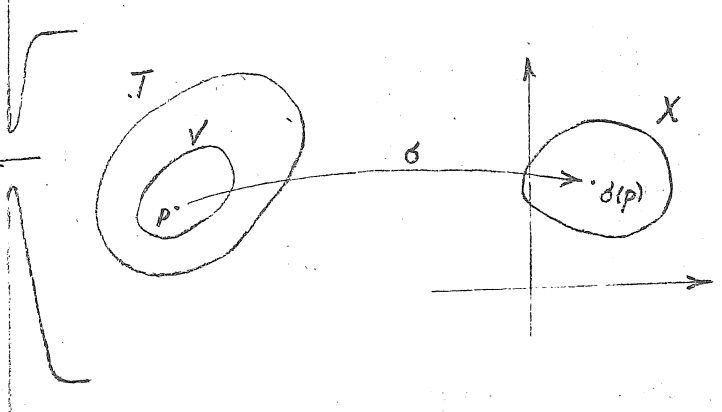
(Et topologisk rum siges at være homeomorft med et andet, hvis der findes en homeomorf afbildning af det ene på det andet. Homeomorfi er en ækvivalensrelation.) 28.9.

En afbildning $\sigma: V \to \dot{R}^n$ kan jo udtrykkes ved et sæt af funktioner

$$\sigma_i: V \to \dot{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

x_i i stedet

Er σ et kort, kaldes disse funktioner <u>koordinater</u>, og $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ kaldes derfor også et <u>koordinatsystem</u>. Funktionsværdierne $\sigma_i(p)$, $i = 1, \dots, n$, svarende til et punkt $p \in V$ kaldes <u>koordinaterne til p i kortet/koordinatsystemet</u> $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

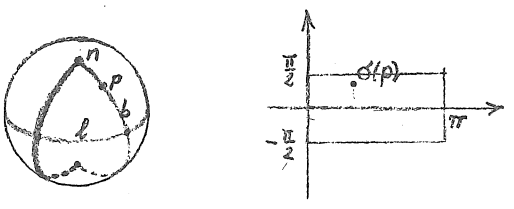


Eksempler.

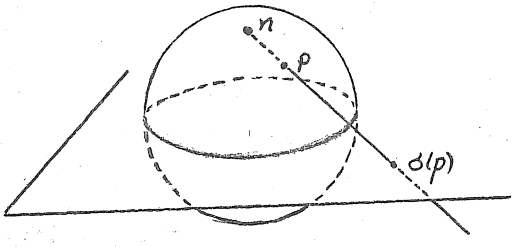
1° $\dot{R}^n$ er, med sædvanlig topologi, en n-dimensional mangfoldighed. Den kan dækkes allerede af ét kort, f.eks. den identiske afbildning.

2° En kugleflade med sædv. topologi (inducered fra rummet) er en 2-dimensional

mangfoldighed. Et kort σ over kuglefladen påvær en halv storcirkel kan fås ved at benytte længde l og bredde b som koordinater, $p \xrightarrow{\sigma} (l(p), b(p))$.

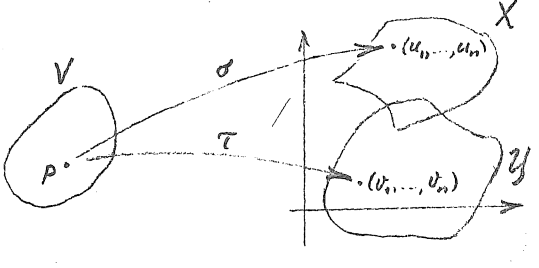


Et kort over kuglefladen påvær ét punkt kan fås ved stereografisk projektion:

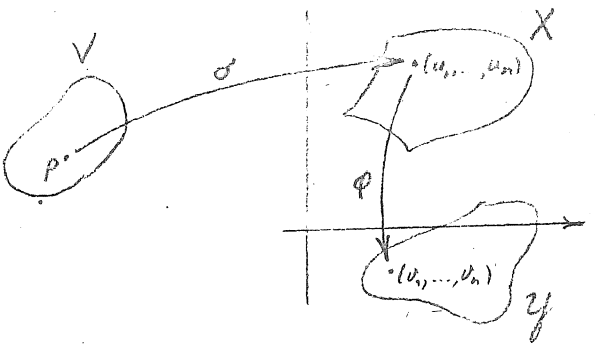


Billedet $\sigma(p)$ fortolkes som et talpar ved hjælp af et sædv. retvinklet koordinatsystem i planen.
Det ses at kuglefladen kan dækkes med to 2-dimensionale kort. Derimod ikke med ét, da billedmængden så skulle være en både åben og kompakt del af $\mathbb{R}^2$, hvilket er umuligt.

Koordinattransformation



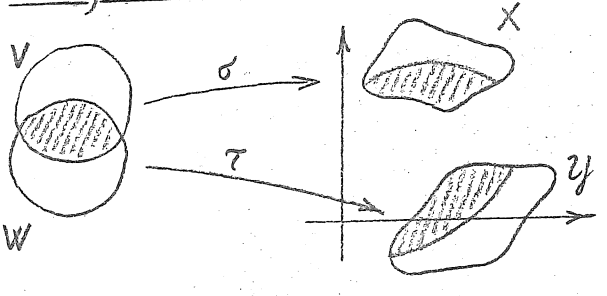
Er σ og τ to n-dim. kort over samme åbne del V af et topol. rum T, kaldes $\tau \circ \sigma^{-1}$, som jo består i
„gamle" koordin. → „nye" koordin. til samme pkt.,
for den tilsvarende Koordinattransformation.
Det er en homeomorf afbildning af $X = \sigma(V)$ på $Y = \tau(V)$.



Er der omvendt foruden et kort $\sigma: V \to \mathbb{R}^n$ givet en homeomorf afbildning φ af $X = \sigma(V)$ på en åben mgd. $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, da vil $\varphi \circ \sigma$ atter være et kort over V, og φ den tilsvarende koordinattransformation.

Idet $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ og $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, modsvares $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1}$ og $\tau = \varphi \circ \sigma$ af
$\varphi_i = \tau_i \circ \sigma^{-1}$ og $\tau_i = \varphi_i \circ \sigma$, $i = 1, \dots, n$.

§2. Analytisk atlas.



Lad nu σ og τ være to vilk. n-dimensionale kort i et topologisk rum T,
$\sigma: V \to \mathbb{R}^n$, $\tau: W \to \mathbb{R}^n$.
Afbildningen $\tau \circ \sigma^{-1}$, som har def.mængden $\sigma(V \cap W)$, er da koordinattransformationen svarende til kortenes sammentrækninger til $V \cap W$ (som påny er kort).

Hvis $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1}$ og $\varphi^{-1} = \sigma \circ \tau^{-1}$ begge er analytiske, siges kortene σ og τ at være analytisk forbundne.

Ifølge side 15 er betingelsen ensbetydende med, at $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1}$ er analytisk og funktionalmatricen $\frac{\partial \varphi}{\partial}$ regulær i hvert pkt. af $\sigma(V \cap W)$.

I det udartede tilfælde $V \cap W = \emptyset$ regnes de to kort analytisk forbundne.

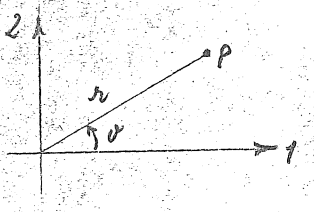
Vi bemærker, at den blandt de n-dimensionale kort i T indførte relation ikke er transitiv (men naturligvis symmetrisk og refleksiv).

Et n-dimensionalt atlas $\mathfrak{F}$ i et topologisk rum T kaldes analytisk, hvis hvilkesomhelst to kort $\sigma \in \mathfrak{F}$ og $\tau \in \mathfrak{F}$ er analytisk forbundne.

At et atlas er analytisk indebærer således ikke, at det giver mere pålidelig oplysning om T end andre atlas, men blot, at de enkelte kort i det stemmer bedre overens!

Eksempler.

1° Polære koordinater v, r i planen danner et kort $\sigma = (v, r)$, når man udelader en afsluttet halvlinie ud fra polen.



Det er analytisk forbundet med kortet $\tau = (x_1, x_2)$, hvor x_1 og x_2 er sædv. retvinkl. koordinater m.h.t. det på skitsen viste sædv. retv. koordinatsystem. For hvert pkt. p i def.mængden for $\sigma = (r, v)$ er nemlig

$$x_1(p) = r(p)\cos v(p)$$
$$x_2(p) = r(p)\sin v(p),$$

hvorfor vi for koordinattransformationen $\tau \circ \sigma^{-1} = (x_1 \circ \sigma^{-1}, x_2 \circ \sigma^{-1}) = (\varphi_1, \varphi_2)$ har

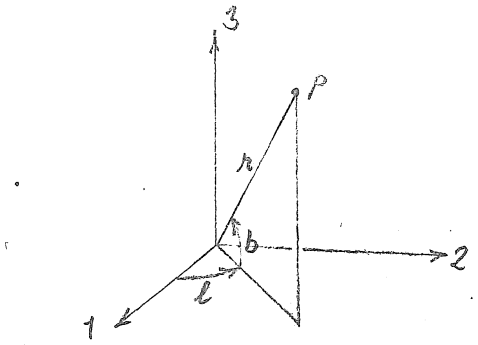
$$\varphi_1(u_1, u_2) = u_2 \cos u_1$$
$$\varphi_2(u_1, u_2) = u_2 \sin u_1 \quad , \quad 0 < u_1 < 2\pi, \ 0 < u_2.$$

Her er φ_1 og φ_2 analytiske og

$$\det \underline{\underline{D}}\varphi(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \cos u_1 & -u_2 \sin u_1 \\ \sin u_1 & u_2 \cos u_1 \end{vmatrix} = u_2 \neq 0.$$

1.10.

2° Polære koordinater l, b, r i rummet danner et kort $\sigma = (l, b, r)$, når man udlader en afsluttet halvplan. Det er analytisk forbundet med kortet $\tau = (x_1, x_2, x_3)$, hvor x_1, x_2 og x_3 er sædv. retv. koordinater m.h.t. det på skitsen viste sædv. retv. koordinatsystem. For koordinattransformationen $\tau \circ \sigma^{-1} = (x_1 \circ \sigma^{-1}, x_2 \circ \sigma^{-1}, x_3 \circ \sigma^{-1}) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ har vi nemlig



$$\varphi_1(u_1, u_2, u_3) = u_3 \cos u_2 \cos u_1 \qquad 0 < u_1 < 2\pi$$
$$\varphi_2(u_1, u_2, u_3) = u_3 \cos u_2 \sin u_1 \qquad -\tfrac{\pi}{2} < u_2 < \tfrac{\pi}{2}$$
$$\varphi_3(u_1, u_2, u_3) = u_3 \sin u_2 \quad , \qquad 0 < u_3 .$$

Her er φ_1, φ_2 og φ_3 analytiske og

$$\det \underline{\underline{D}}\varphi(u_1, u_2, u_3) = u_3^{\,2} \cos u_2 \neq 0.$$

3° Vi vil vise, at det 2-dimensionale atlas bestående af alle „geografiske kort" på en kugleflade er analytisk, altså at man ved at benytte længde og bredde som koordinater svarende til to forskellige valg af „nordpol" og „Greenwich meridian" får analytisk forbundne kort $\sigma = (l_\sigma, b_\sigma)$ og $\tau = (l_\tau, b_\tau)$.

Lad $A = (a_{ij})$ være koordinattransformationsmatricen svarende til overgangen mellem de sædv. retv. koordinatsystemer liggende i sædv. stilling i forhold til første, henh. andet valg af „nordpol" og „Greenwich meridian". Da vil u_1, u_2 og v_1, v_2 være koordinater til samme punkt p på Kuglefladen ved σ, henh. τ, hvis og kun hvis

$$a_{11}\cos u_2 \cos u_1 + a_{12}\cos u_2 \sin u_1 + a_{13}\sin u_2 - \cos v_2 \cos v_1 = 0$$
$$a_{21}\cos u_2 \cos u_1 + a_{22}\cos u_2 \sin u_1 + a_{23}\sin u_2 - \cos v_2 \sin v_1 = 0$$
$$a_{31}\cos u_2 \cos u_1 + a_{32}\cos u_2 \sin u_1 + a_{33}\sin u_2 - \sin v_2 = 0$$

Afbildningen $(u_1, u_2) \xrightarrow{\tau \circ \sigma^{-1}} (v_1, v_2)$ er med andre ord givet implicit ved disse ligninger.

For at vise, at $\tau \circ \sigma^{-1}$ er analytisk i et pkt. (c_1, c_2), hvortil svarer (d_1, d_2), bemærkes, at matricen af afledede efter v_1 og v_2,

$$\begin{pmatrix} \cos d_2 \sin d_1 & \sin d_2 \cos d_1 \\ -\cos d_2 \cos d_1 & \sin d_2 \sin d_1 \\ 0 & -\cos d_2 \end{pmatrix}$$

har rangen 2, da jo $-\frac{\pi}{2} < d_2 < \frac{\pi}{2}$. Der findes altså en regulær 2×2 delmatrix, og vi får ved brug af sætningen om implicit givet afbildning, at $\tau \circ \sigma^{-1}$ lokalt er givet alleredе ved 2 af de 3 ligninger samt er analytisk i (c_1, c_2).

Da σ og τ kan byttes rolle, er også $\sigma \circ \tau^{-1}$ analytisk, og σ og τ altså analytisk forbundne.

4° Lad T være en delmængde af $\mathbb{R}^n$ betragtet med den inducerede topologi.

For et k-dimensionalt kort σ i T vil σ^{-1} være en afbildning af en åben mgd. $X \subseteq \mathbb{R}^k$ ind i $\mathbb{R}^n$ og således modsvare et sæt af n reelle fkt.ner på X,

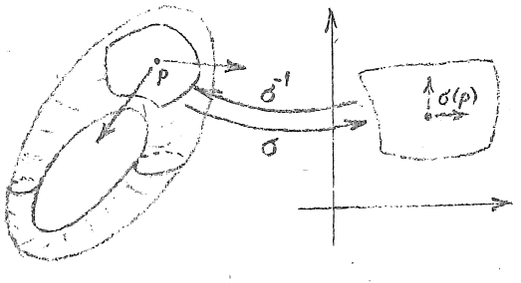
$$\sigma^{-1} = (f_1, \dots, f_n).$$

Vi betegner med $\mathfrak{N}_k$ atlasset i T bestående af de k-dim. kort σ i T, for hvilke $\sigma^{-1} = (f_1, \dots, f_n)$ er analytisk og matricen

$$\mathfrak{D}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_k f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \dots & D_k f_n \end{pmatrix}$$

har rangen k, dvs. lineært uafh. søjler, i hvert pkt.

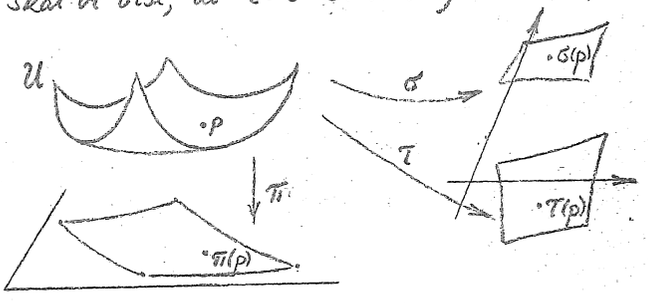
Vi forudsætter (naturligvis) $k \leq n$.



I tilfældet $n=3$, $k=2$ er $\sigma^{-1} = (f_1, f_2, f_3)$ en parameterfremstilling for et fladestykke; de 2 søjler i matricen koordinatsat for vektorer på parameterkurvernes tangenter.

Sætn. Atlasset $\mathfrak{N}_k$ er analytisk (evt. tomt). – Vi vil kalde $\mathfrak{N}_k$ det naturlige analytiske k-dim. atlas i T.

Bevis. Idet $\sigma: V \to \mathbb{R}^k$ og $\tau: W \to \mathbb{R}^k$ er to vilk. kort tilh. $\mathfrak{N}_k$ og $p \in V \cap W$, skal vi vise, at $\tau \circ \sigma^{-1}$ er analytisk i $\sigma(p)$.



Idet $\tau^{-1} = (g_1, \dots, g_k, \dots, g_n)$, har matricen

$$\mathfrak{D}\tau^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 g_1 & \dots & D_k g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_k & \dots & D_k g_k \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_n & \dots & D_k g_k \end{pmatrix},$$

dannet i punktet $\tau(p)$, en regulær $(k\times k)$-delmatrix, eksempelvis dannet af de k første rækker. Med betegnelsen x_i for

$$(u_1, \dots, u_n) \to u_i, \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

vil afbildningen $(x_1, \dots, x_k) \circ \tau^{-1} = (g_1, \dots, g_k)$ da være analytisk i $\tau(p)$ med regulær funktionalmatrix; følgelig er dens restriktion til en passende åben omegn $\tau(U)$ af $\tau(p)$ injektiv, og dens omvendte analytisk. Restriktionen π af projektionen $(x_1, \dots, x_k)$ til U er da også injektiv. Antages nu $U \subseteq V$, og betegner vi i det følgende med σ og τ restriktionerne af de oprindelige kort til U, har vi

$$\tau \circ \sigma^{-1} = \tau \circ \pi^{-1} \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\pi \circ \tau^{-1})^{-1} \circ (\pi \circ \sigma^{-1}).$$

Og da nu ikke blot den omv. afbildning til $\pi\circ\tau^{-1} = (x_1,\dots,x_k)\circ\tau^{-1} = (g_1,\dots,g_k)$ nun naturligvis også afbildningen $\pi\circ\sigma^{-1} = (f_1,\dots,f_k)$ er analytisk, følger, at $\tau\circ\sigma^{-1}$ er analytisk,
5.10. q.e.d. (Her har vi sat $\sigma^{-1} = (f_1,\dots,f_k,\dots,f_n)$.)

Kommentar. Projektionen π er et kort over U, thi $\pi(U)$ er åben i $\mathbb{R}^k$, idet det er def.mgd. for den analytiske afbildn. $\tau\circ\pi^{-1} = (\pi\circ\tau^{-1})^{-1}$, og med $\pi\circ\tau^{-1}$ er også $\pi = (\pi\circ\tau^{-1})\circ\tau$ homeomorf. Endda tilhører π atlasset $\mathfrak{N}_k$, thi $\pi^{-1} = \tau^{-1}\circ(\tau\circ\pi^{-1})$ er analytisk, og $\underline{\underline{D}}\pi^{-1}$ har rangen k, idet de k første rækker danner $(k\times k)$-enhedsmatricen. Vi noterer:

<u>For hvert pkt. $p\in T$, der afbildes ved et kort tilhørende atlasset $\mathfrak{N}_k$, findes en åben omegn $U\subseteq T$, så at restriktionerne til U af passende k af de n „rumkoordinater" $x_1,\dots,x_n$ er koordinater i et kort π over U, tilhørende $\mathfrak{N}_k$.</u>

Eksempelvis kan i omegnen af hvert pkt. på en kugleflade 2 passende af de 3 rumkoordinater x_1,x_2,x_3 bruges som fladekoordinater.

Ideen i ovenstående bevis kan da siges at være at skifte koordinater fra σ til τ <u>via</u> et sådant kort π:

$$\tau\circ\sigma^{-1} = (\tau\circ\pi^{-1})\circ(\pi\circ\sigma^{-1}),$$

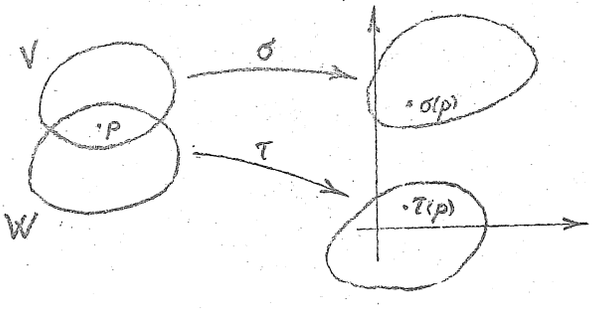
Af særlig interesse er naturligvis det tilfælde, hvor atlasset $\mathfrak{N}_k$ <u>dækker</u> T.

Eksempelvis vil atlasset $\mathfrak{N}_2$ for en kugleflade dække (bl.a. er alle geografiske kort med i atlasset).

Sætn. <u>Hvis atlasset $\mathfrak{N}_k$ for en mængde $T\subseteq\mathbb{R}^n$ dækker T, så er $\mathfrak{N}_k$ et maksimalt analytisk atlas i T.</u>

<u>Et maksimalt analytisk atlas i T</u> er et analytisk atlas i T, som ikke er ægte del af noget analytisk atlas i T. Anderledes sagt: et analytisk atlas $\mathfrak{S}$ i T med den egenskab, at et kort i T, som er analytisk forbundet med ethvert kort i $\mathfrak{S}$, selv tilhører $\mathfrak{S}$. (For et analytisk atlas er det jo klart, at negationerne af det ekstra krav i de to formuleringer er ensbetydende.)

Bevis for sætningen. Vi ved, at $\mathfrak{N}_k$ er analytisk. Idet vi forudsætter, at $\mathfrak{N}_k$ dækker T, og betragter et kort $\sigma: V\to\mathbb{R}^k$ i T, som er analytisk forbundet med hvert $\tau\in\mathfrak{N}_k$, skal vi vise, at $\sigma\in\mathfrak{N}_k$, dvs. at $\sigma^{-1} = (f_1,\dots,f_n)$ er analytisk og $\underline{\underline{D}}\sigma^{-1}$ har rangen k i $\sigma(p)$, hvor p er ...ville pkt. i V.



1) Lad $\tau: W\to\mathbb{R}^k$ være et kort tilh. $\mathfrak{N}_k$, så $p\in W$. Da er både $\tau^{-1} = (g_1,\dots,g_n)$ og $\tau\circ\sigma^{-1} = \varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ analytisk og dermed også

$$\tau^{-1}\circ(\tau\circ\sigma^{-1}) = (g_1\circ\varphi,\dots,g_n\circ\varphi),$$

hvilket er restriktionen af σ^{-1} til $\sigma(V\cap W)$, en åben omegn af $\sigma(p)$. Idet nu

$$\underline{\underline{D}}\sigma^{-1} = \underline{\underline{D}}\tau^{-1}\,\underline{\underline{D}}\varphi,$$

hvor matricerne er dannet i henh. $\sigma(p)$, $\tau(p)$ og $\sigma(p)$, slutter vi, da $\underline{\underline{D}}\varphi$ er regulær, at $\underline{\underline{D}}\sigma^{-1}$ ligesom $\underline{\underline{D}}\tau^{-1}$ har rangen k (hertil kan man skrive matricerne i matrixligningen ud,

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_k f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_k f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 g_1 & \cdots & D_k g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_n & \cdots & D_k g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 q_1 & \cdots & D_k q_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 q_k & \cdots & D_k q_k \end{pmatrix},$$

og betragte $(k\times k)$-delmatricer i $\underline{\underline{D}}\sigma^{-1}$ og $\underline{\underline{D}}\pi^{-1}$).

Eksempler (udover kuglefladen), hvor $\mathcal{H}_k$ dækker T og dermed er et maksimalt analytisk atlas i T, følger i 5° og 6°

Sørensen 19)

5° Idet $g_1, \dots, g_q$, hvor $q < n$, er analytiske funktioner i n reelle variable, betragtes som T mængden af løsninger til ligningerne

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_q(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

for hvilke matricen

$$\begin{pmatrix} D_1 g_1 & \cdots & D_n g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 g_q & \cdots & D_n g_q \end{pmatrix}$$

har rangen q, dvs. lineært uafh. rækker.

Vi sætter $k = n - q$ og vil vise, at atlasset $\mathcal{H}_k$ dækker T.

Vi bemærker i øvrigt, at fællesmgd. A af definitionsmængderne for funktionerne $g_1, \dots, g_q$ er åben i $\mathbb{R}^n$, således at også $B =$

$$\bigcup_{1 \le m_1 < \dots < m_q \le n} \{(a_1, \dots, a_n) \in A \mid \begin{vmatrix} D_{m_1} g_1 & \cdots & D_{m_q} g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m_1} g_q & \cdots & D_{m_q} g_q \end{vmatrix} \neq 0 \}$$

er åben i $\mathbb{R}^n$. Og T er fællesmængden af denne mængde B og mængden af alle løsninger til de givne ligninger.

8.10

Bevis. Vi betragter et vilk. punkt $p \in T$ og søger et kort tilh. $\mathcal{H}_k$, der afbilder p.

Er eksempelvis

$$\begin{pmatrix} D_{k+1} g_1 & \cdots & D_n g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{k+1} g_q & \cdots & D_n g_q \end{pmatrix}$$

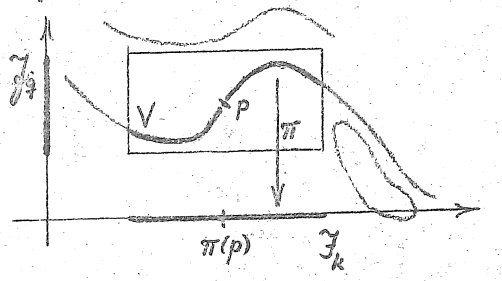
regulær i $p = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, findes iflg. sætn. om implicit givne afbildninger s. 13 et åbent interval $\mathcal{I}_k \times \mathcal{I}_q$ om p, inden for hvilket mængden V af løsninger er

$$\{(u_1, \dots, u_k, f_{k+1}(u_1, \dots, u_k), \dots, f_n(u_1, \dots, u_k)) \mid (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{I}_k\},$$

hvor $f_{k+1}, \dots, f_n$ er analytiske funktioner defineret på $\mathcal{I}_k$. Vi kan antage $\mathcal{I}_k \times \mathcal{I}_q \subseteq B$ og har da

$$V = T \cap (\mathcal{I}_k \times \mathcal{I}_q),$$

således at V er en åben omgn. af p, regnet i det topologiske rum T.



Vi afslutter nu beviset ved at godtgøre, at restriktionen π til V af projektionen

$$(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) \to (u_1, \dots, u_k)$$

er et kort tilhørende $\mathcal{H}_k$.

Det er klart, at $\pi: V \to \mathcal{I}_k$ er bijektiv og kontinuert. Idet π^{-1} er afbildningen

$$(u_1, \dots, u_k) \to (u_1, \dots, u_k, f_{k+1}(u_1, \dots, u_k), \dots, f_n(u_1, \dots, u_k)), \quad (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{I}_k,$$

ses, at $\pi^{-1}: \mathcal{I}_k \to \mathbb{R}^n$ er analytisk, spec. altså $\pi^{-1}: \mathcal{I}_k \to V$ kontinuert, samt at $\underline{\underline{D}}\pi^{-1}$ har rangen k, idet $(k\times k)$-enhedsmatricen optræder som delmatrix.

Eksempler.

a. Løsningerne til

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

udgør den $(n-1)$-dimensionale enhedskugleflade. I hvert af dens punkter er en af de partielle afledede $2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n$ forskellig fra 0. Kuglefladen dækkes da af sit naturlige atlas $\mathcal{H}_{n-1}$.

b. Mængden $SL(n,\mathbb{R})$ af reelle $(n\times n)$-matricer

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

med $\det \underline{\underline{U}} = 1$ (den speciélle lineære gruppe) er en delmængde af $\mathbb{R}^{n^2}$, bestående af løsningerne til ligningen

$$\det \underline{\underline{U}} = 1,$$

hvis venstre side er et polynomium. Af udviklingen

$$\det \underline{\underline{U}} = u_{ij}U_{ij} + \ldots + u_{ij}U_{ij} + \ldots + u_{nj}U_{nj}$$

fås, at $\dfrac{\partial \det \underline{\underline{U}}}{\partial u_{ij}}$ er komplementtet U_{ij}. Idet jo en regulær matrix har nogle fra 0 forskellige komplementer, slutter vi, at den speciélle lineære gruppe $SL(n,\mathbb{R})$ dækkes af sit naturlige atlas $\mathcal{H}_{n^2-1}$.

For en omegn af $\underline{\underline{E}}$ i $SL(n,\mathbb{R})$ vil fx.

$$\underline{\underline{U}} \to u_{ij}, \quad i,j \neq n,n,$$

være koordinater i et kort tilhørende $\mathcal{H}_{n^2-1}$, idet komplementtet U_{nn} i $\underline{\underline{E}}$ ikke er 0 (sml. s. 1).

c. Mængden $O(n)$ af reelle ortogonale $(n\times n)$-matricer $\underline{\underline{U}} = (u_{ij})$ er en delmgd. af $\mathbb{R}^{n^2}$, bestående af løsningerne til de $n + \binom{n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$ ligninger

$$u_{1i}^2 + \ldots\ldots + u_{ni}^2 = 1, \quad i = 1,\ldots,n,$$
$$u_{1i}u_{1j} + \ldots + u_{ni}u_{nj} = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

Det er bekvemt på ny at stille de partielle afledede af 1. orden af den enkelte ligning's venstre side op i en matrix, således eksempelvis for $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2u_{11} & 0 & 0 \\ 2u_{21} & 0 & 0 \\ 2u_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2u_{12} & 0 \\ 0 & 2u_{22} & 0 \\ 0 & 2u_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2u_{13} \\ 0 & 0 & 2u_{23} \\ 0 & 0 & 2u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{12} & u_{11} & 0 \\ u_{22} & u_{21} & 0 \\ u_{32} & u_{31} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{13} & 0 & u_{11} \\ u_{23} & 0 & u_{21} \\ u_{33} & 0 & u_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & u_{13} & u_{12} \\ 0 & u_{23} & u_{22} \\ 0 & u_{33} & u_{32} \end{pmatrix}$$

Generelt vil vi i den i^{te} søjle finde 0'er, pånær at hver søjle i $\underline{\underline{U}}$ optræder som i^{te} søjle i én af matricerne, den i^{te} søjle selv dog med faktoren 2. Heraf sluttes lit, at matricerne er lin. uafh., når $\underline{\underline{U}}$ er ortogonal (eller blot regulær); thi i en lineær relation mellem dem kan koefficienterne i til de matricer, der har en egentlig i^{te} søjle, bruges som koefficienter i en lin. relation mellem disse søjler og er følgelig 0.

Idet $n^2 - \dfrac{n^2+n}{2} = \dfrac{n^2-n}{2}$, har vi da:

Mængden $O(n)$ af reelle ortogon. $(n\times n)$-matricer dækkes af sit naturl. atlas $\mathcal{H}_{\frac{n^2-n}{2}}$

Ser vi i „punktet" $\underline{\underline{E}}$ bort fra partielle afledede efter variable u_{ij} med $i<j$, er der stadig lin. uafhængighed:

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

For en omegn af $\underline{\underline{E}}$ i $O(n)$ vil derfor

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & u_{n-1,n} \\ u_{n1} & & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

være et kort, tilh. $\mathcal{H}_{\frac{n^2-n}{2}}$

Determinanten af en reel ortogonal matrix er 1 eller -1. Følgelig er

$$\{\underline{\underline{U}} \in O(n) \mid \det \underline{\underline{U}} = 1\} \cup \{\underline{\underline{U}} \in O(n) \mid \det \underline{\underline{U}} = -1\}$$

en spaltning af $O(n)$ i to afsluttede dele, dvs. i to åbne dele. Den første kaldes den <u>specielle ortogonale gruppe</u>, $SO(n)$. Da det er en åben del af $O(n)$, gælder

<u>Mængden $SO(n)$ af reelle, egt. ortogonale $(n \times n)$-matricer dækkes af sit naturlige atlas $\mathcal{H}_{\frac{n^2-n}{2}}$</u>.

I en omegn af $\underline{\underline{E}}$ kan vi benytte samme kort som før.

Bemærk: Tilføjelsen af én ligning, $\det \underline{\underline{U}} = 1$, bragte ikke dimensionen $\frac{n^2-n}{2}$ til at falde.

6° Er T en åben del af $\grave{R}^n$, evt. $\grave{R}^n$ selv, vil allerede ét kort i det analytiske atlas $\mathcal{H}_n$ for T dække T, nemlig f.eks. den identiske afbildning e_T. Koordinaterne i et kort $\delta \in \mathcal{H}_n$ kaldes <u>krumlinede analytiske koordinater</u> i T. Eksempler: polære koordinater i plan og rum.

.....

a. Mængden $GL(n, \grave{R})$ af regulære reelle $(n \times n)$-matricer, den <u>generelle lineære gruppe</u>, er en åben del af $\grave{R}^{n^2}$, idet jo

$$GL(n, \grave{R}) = \{\underline{\underline{U}}_{n,n} \mid \det \underline{\underline{U}} \neq 0\}.$$

§3. Analytisk mangfoldighed.

Et Hausdorff rum T med et n-dimensionalt atlas $\mathcal{O}$ i T kaldes en n-dim. analytisk mangfoldighed, hvis atlasset dækker T og er et maksimalt analytisk atlas i T.

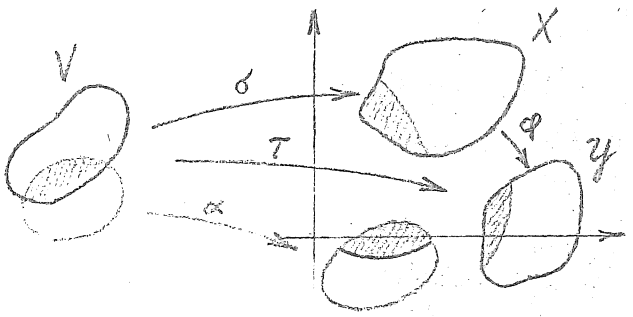
Sproglig kommentar. Det kan forekomme uheldigt, at en n-dim. mangfoldighed blot er et specielt topologisk rum, medens en n-dim. analytisk mangfoldighed $(T,\mathcal{O})$ er et topolog. rum med et atlas. Der er imidlertid intet i vejen for også at opfatte en n-dim. mangfoldighed som et topologisk rum T med atlas, nemlig atlasset af alle kort i T.

Et maksimalt n-dim. analytisk atlas i T er et n-dim. analytisk atlas i T, som ikke er ægte del af noget n-dim. analytisk atlas i T. Anderledes sagt: et n-dim. analytisk atlas $\mathcal{O}$ i T med den egenskab, at et n-dim. kort i T, som er analytisk forbundet med ethvert kort i $\mathcal{O}$, selv tilhører $\mathcal{O}$.

Eksempel.
Er T en delmgd. af $\dot{R}^m$, betragtet med den inducerede topologi, og dækkes T af sit naturlige analytiske atlas $\mathcal{H}_k$, da er $(T,\mathcal{H}_k)$ en k-dim. analytisk mangfoldighed, jfr. s. 20-21. Dette indtræffer bl.a. for T = mængden af ikke-singulære løsninger til analytisk ligningssystem, jfr. s. 22, f.eks. $T = SL(n,\dot{R})$, $T = O(n)$, samt naturligvis, når T er en åben del af $\dot{R}^k$, f.eks. $T = GL(n,\dot{R})$.

Kravet om maksimalitet er nødtaget for at opnå gyldigheden af følgende 3 sætninger.

Lad $(T,\mathcal{O})$ være en n-dim. analytisk mangfoldighed. Da gælder:



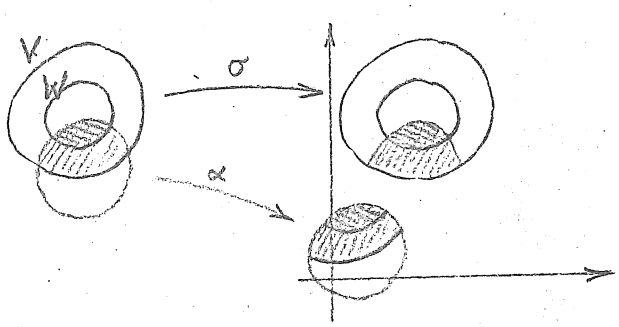
Sætn. 1. Er $\sigma: V \to \dot{R}^n$ et kort tilh. $\mathcal{O}$, og er $\varphi: X = \sigma(V) \to \dot{R}^n$ injektiv og analytisk med $\underline{D}\varphi$ regulær i hvert pkt. af X, altså med en analytisk invers afbildn. φ^{-1}, da vil $\tau = \varphi \circ \sigma$ atter tilhøre $\mathcal{O}$.

Kort sagt: et rimeligt koordinatskifte er tilladt.

Bevis. Vi skal blot indse, at τ er analytisk forbundet med ethvert $\alpha \in \mathcal{O}$, altså at $\tau \circ \alpha^{-1}$ er analytisk med regulær funktionalmatrix, og dette fås straks af

$$\tau \circ \alpha^{-1} = \tau \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \sigma \circ \alpha^{-1} = \varphi \circ (\sigma \circ \alpha^{-1}),$$

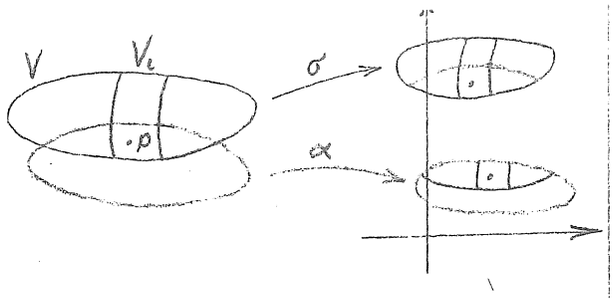
idet jo σ er analytisk forbundet med α.



Sætn. 2. Er $\sigma: V \to \dot{R}^n$ et kort tilh. $\mathcal{O}$, vil også restriktionen til en vilk. åben mængde $W \subseteq V$ tilhøre $\mathcal{O}$.

Overgang til „detailkort" er tilladt

Bevis. Restriktionen τ er analytisk forbundet med hvert $\alpha \in \mathcal{O}$, thi $\alpha \circ \tau^{-1}$ er restriktionen af $\alpha \circ \bar{\sigma}^{-1}$ til en åben mængde.



Sætn. 3. *Er $\sigma: V \to \dot{R}^n$ et kort i T, og er V forening af åbne mængder V_i, $i \in J$, hvor restriktionen af σ til hvert V_i tilhører $\mathcal{O}f$, da tilhører σ selv $\mathcal{O}f$.*

„Sammunklæbning" af kort er tilladt.

Bevis. Idet $\alpha: A \to \dot{R}^n$ er et kort tilh. $\mathcal{O}f$, skal vi vise, at $\alpha \circ \sigma^{-1}$ er analytisk med regulær funktionalmatrix i $\sigma(p)$, hvor p er et vilk. pkt. i $V \cap A$. Nu tilhører p en mængde V_i, og idet vi med σ_i betegner restriktionen af σ til V_i, vides $\alpha \circ \sigma_i^{-1}$, som er restriktionen af $\alpha \circ \sigma^{-1}$ til $\sigma(V_i \cap A)$, at have den ønskede egenskab.

Øvelse. Gør rede for, at et n-dim. analytisk atlas $\mathcal{O}f$, der dækker et topologisk rum T, er maksimalt, hvis (og kun hvis) sætn. 1, 2 og 3 gælder („kun hvis" er vist ovenfor).

(Et kort, der er analytisk forbundet med alle kort tilh. $\mathcal{O}f$, kan opfattes som sammenklæbet af kort, der ved koordinatskifte frembår af detailkort af kort tilh. $\mathcal{O}f$.)

Øvelse. Idet $(T, \mathcal{O}f)$ er en n-dim. analytisk mangfoldighed og V en åben del af T, skal man vise, at delrummet V med atlasset $\mathcal{O}_V$ bestående af de kort tilhørende $\mathcal{O}f$, hvis definitionsmgd. er indeholdt i V, igen er en n-dim. analytisk mangfoldighed.

(Dækning: Hvert pkt i V afbildes ved et kort $\sigma: W \to \dot{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}f$, og detailkortet def. på $V \cap W$ tilh. $\mathcal{O}_V$. Analyticitet: klar. Maksimalitet: Et kort i V, som er analytisk forbundet med hvert kort $\beta \in \mathcal{O}_V$, er også anal. forbundet med hvert kort $\alpha \in \mathcal{O}f$.)

Kravet om maksimalitet er ikke så uhåndterligt, som man kunne frygte. Der gælder nemlig:

Sætn. *Et n-dim. analytisk atlas $\mathfrak{F}$, der dækker et topologisk rum T, kan på en og kun en måde udvides til et maksimalt analytisk atlas i T.*

Der findes endda et største blandt de analytiske atlas i T, der indeholder $\mathfrak{F}$, altså et atlas $\mathcal{O}f$, hvor

(1) $\mathcal{O}f$ er analytisk, $\mathcal{O}f \supseteq \mathfrak{F}$

(2) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{O}f$ for ethvert anal. atlas $\mathcal{G} \supseteq \mathfrak{F}$.

Dette største er så tillige det eneste maksimale analytiske atlas, der indeholder $\mathfrak{F}$.

Vi præciserer yderligere påstanden:

atlasset $\mathcal{O}f$ bestående af de kort τ i T, som er analytisk forbundet med ethvert $\sigma \in \mathfrak{F}$,

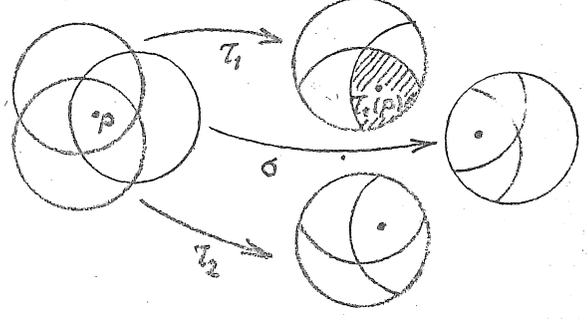
$\tau \in \mathcal{O}f \iff \forall_{\mathfrak{F}} \sigma$: τ og σ er analyt. forb.,

er det største analytiske atlas indh. $\mathfrak{F}$.

Bevis. Det er klart, at (2) er opfyldt, idet jo et kort τ tilh. et analytisk atlas $\mathcal{G} \supseteq \mathfrak{F}$ endda er analytisk forbundet med ethv. $\sigma \in \mathcal{G}$. Spec. er $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}f$.

Det afgørende er således, at $\mathcal{O}f$ er analytisk. Idet τ_1 og τ_2 tilh. $\mathcal{O}f$, kan vi imidlertid indse, at $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ er analytisk i $\tau_1(p)$, hvor p er et vilk. pkt., der afbildes ved begge kort, ved at benytte, at p afbildes ved et kort $\sigma \in \mathfrak{F}$. Afbildningen

$$(\tau_2 \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \tau_1^{-1})$$



er nemlig en restriktion af $\tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ til en åben omegn af $\tau_1(p)$, og den er sammensat af to analytiske afbildninger, følgelig analytisk.

Vi kan herefter sige, at et Hausdorff rum T med et n-dim. analytisk atlas $\mathfrak{S}$, der dækker T, bestemmer en n-dim. analytisk mangfoldighed, nemlig $(T, \mathfrak{O})$, hvor $\mathfrak{O}$ er udvidelsen af $\mathfrak{S}$ til et maksimalt analytisk atlas i T.

Vi bemærker, at en analytisk mangfoldighed $(T, \mathfrak{O})$ på denne måde er bestemt ved T og et vilk. delatlas af $\mathfrak{O}$, der dækker T.

Eksempler.

For en kugleflade er det naturlige 2-dim. analytiske atlas $\mathfrak{N}_2$ udvidelsen til maksimalt analytisk atlas af atlasset af geografiske kort, og ligeledes af atlasset af stereografiske projektioner.

For $\mathbb{R}^n$ er det naturlige n-dim. analytiske atlas $\mathfrak{N}_n$ (krumlinede analytiske koordinater) udvidelsen f. eks. af et atlas bestående af ét sædv. retv. koordinatsystem. 1)

Sætn. To n-dim. analytiske atlas $\mathfrak{S}_1$ og $\mathfrak{S}_2$, der hver dækker det topologiske rum T, har samme udvidelse til maksimalt analytisk atlas, hvis og kun hvis hvert kort $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_1$ er analytisk forbundet med hvert kort $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_2$.

Bevis. Det er klart, at betingelsen er nødv. Antages omvendt betingelsen opfyldt, vil $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ være et analytisk atlas, der dækker T, og udvidelsen af $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ til et maksimalt analytisk atlas vil da også være en udvidelse, dvs. udvidelsen af såvel $\mathfrak{S}_1$ som $\mathfrak{S}_2$.

Eksempel. De to kort over $\dot{\mathbb{R}}$,

$$t \to t \quad \text{og} \quad t \to t^3, \qquad t \in \dot{\mathbb{R}},$$

er ikke analytisk forbundne. Ved udvidelse af atlasset bestående af det ene, henholdsvis det andet kort fås derfor forskellige maksimalt analytiske atlas og dermed forskellige analytiske mangfoldigheder med samme topologiske rum $\dot{\mathbb{R}}$.

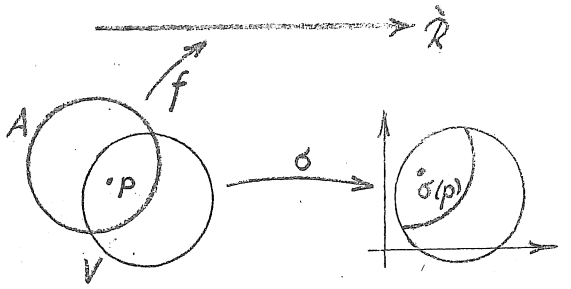
Differentiabel mangfoldighed.

I stedet for at gå ud fra analytiske funktioner af reelle variable kan man tage sit udgangspunkt i funktioner af klasse C^h, $h \geq 1$, eller C^∞ og derved indføre og behandle begrebet differentiabel mangfoldighed, af klasse C^h eller C^∞. Man skal blot overalt i II, §2 og §3, i definitioner, sætninger og beviser, erstatte ordet analytisk med „(differentiabel) af klasse C^h, henholdsvis C^∞".

1) i en omegn af pkt. smdl. s. 30, NB

§4. Analytisk funktion på en analytisk mangfoldighed.

Lad $(T, \mathcal{O}_f)$ være en n-dimensional analytisk mangfoldighed, og f en reel funktion med def.mgd. $A \subseteq T$.



For et vilk. kort $\sigma: V \to \dot{R}^n$ i T er $f^\sigma = f \circ \sigma^{-1}$ en reel funktion med $\sigma(A \cap V) \subseteq \dot{R}^n$ som def.mgd. (medmindre $A \cap V = \emptyset$). Vi siger, at f^σ er restriktionen af f til $A \cap V$ udtrykt som funktion af koordinaterne i kortet σ. Med $\sigma = (x_1, \ldots, x_n)$ er jo

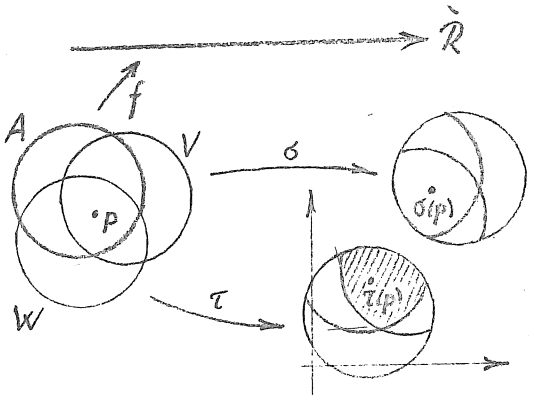
$$f|_{A\cap V} = f^\sigma \circ \sigma = f^\sigma \circ (x_1, \ldots, x_n),$$

altså

$$f(q) = f^\sigma(x_1(q), \ldots, x_n(q)) \quad \text{for } q \in A \cap V.$$

Definition. Funktionen f siges at være analytisk i punktet $p \in A$, hvis det for et kort $\sigma \in \mathcal{O}_f$, der afbilder p, gælder, at f^σ er analytisk i $\sigma(p)$.

Definitionen er uafh. af det benyttede kort, thi afbildes p også ved $\tau: W \to \dot{R}^n$, tilhørende $\mathcal{O}_f$, da er



$$f \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \tau^{-1} = f^\sigma \circ \varphi = f^\sigma \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

en restriktion af $f^\tau = f \circ \tau^{-1}$, og idet $\varphi = \sigma \circ \tau^{-1}$ jo er analytisk, spec. i $\tau(p)$, haves

$$f^\sigma \text{ anal. i } \sigma(p) \Rightarrow f^\tau \text{ anal. i } \tau(p).$$

(Pilen kan naturligvis vendes.)

Bemærk, at f^σ analytisk er ensbetydende med, at f er analytisk i hvert pkt. af $A \cap V$, forudsat $\sigma: V \to \dot{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}_f$. 19.10

Definition. Funktionen $f: A \to \dot{R}^n$ siges at være analytisk, hvis den er analytisk i hvert pkt. $p \in A$.

Det er nødvendigt, at A er åben.

Ifølg. bemærkningen har vi: Er f analytisk, da er f^σ analytisk for hvert $\sigma \in \mathcal{O}_f$. Er f^σ analytisk for hvert σ tilhørende et delatlas af $\mathcal{O}_f$, som dækker def.mgd. A for f, da er f analytisk.

Som inspiration til definitionen af analyticitet i et pkt. kan nævnes den sætning, man får ved at erstatte ordet analytisk med kontinuert.

Ved brug af sætningen fås:

Er f analytisk i p, så også kontinuert i p.

Videre noteres:

Er $f_1, \ldots, f_m$ reelle funktioner i T, som er analytiske i punktet p, og er g en reel funktion i $\dot{R}^m$, som er analytisk i $(f_1(p), \ldots, f_m(p))$, da er $g \circ (f_1, \ldots, f_m)$ analytisk i p.

Thi $g \circ (f_1, \ldots, f_m) \circ \sigma^{-1} = g \circ (f_1^\sigma, \ldots, f_m^\sigma)$ er analytisk i $\sigma(p)$ ifølg. sætn. s. 11.

Hver koordinat x_i i et kort $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ tilh. $\mathcal{O}$ er analytisk.

Da $\sigma : V \to \hat{R}^n$ jo dækker def.mgd. V for x_i, er det nok at vise, at x_i^σ er analytisk. Men idet $x_i = pr_i \circ \sigma$, hvor

$$pr_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = u_i, \quad (u_1, \dots, u_n) \in \hat{R}^n,$$

er $x_i^\sigma = pr_i \circ \sigma \circ \sigma^{-1}$ simpelthen restriktionen af pr_i til den åbne mængde $\sigma(V)$.

Endelig bemærkes:
Er f analytisk i p, så også i hvert pkt. i en åben omegn af p.

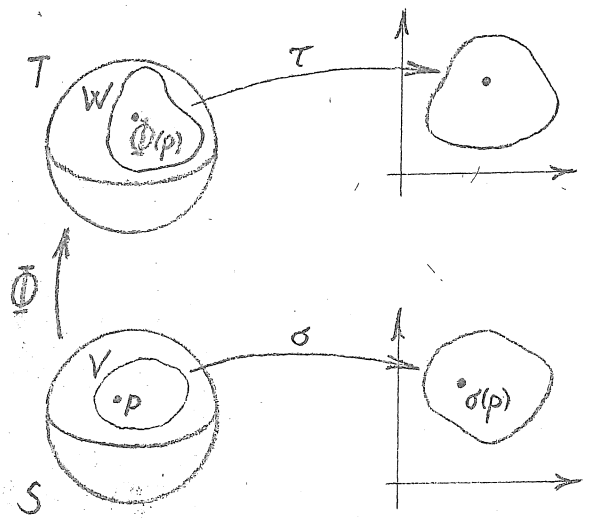
Thi dette gælder med f og p erstattet med f^σ og $\sigma(p)$, hvor $\sigma \in \mathcal{O}$ er et kort, der afbilder p.

Øvelse. Vis, at hvis en analytisk funktion $f : A \to \hat{R}^n$ overhovedet kan udvides til en analytisk funktion defineret på området B, hvor $A \subseteq B$, da kun på én måde. (Analytisk fortsættelse.)

(Lad C være mgd. af pkt.r $x \in B$, hvor to bestemte udvidelser f_1 og f_2 stemmer overens i en omegn af x. Klart, at C åben og indeholder A, spec. $C \neq \emptyset$. Det er da nok at vise, at $B - C$ er åben, hvilket er ensbetydende med $(B-C) \cap V = (B \cap V) \setminus (C \cap V)$ åben for kort $\sigma : V \to \hat{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}$, hvor $B \cap V \neq \emptyset$. Nu er $\sigma(B \cap V)$ fælles def.mgd. for f_1^σ og f_2^σ, og $\sigma(C \cap V)$ er mgd. af pkt.r, hvor $f_1^\sigma - f_2^\sigma$ er 0 i en omegn, dvs. har alle partielle afledede af enhver orden $= 0$; følgelig er $\sigma(C \cap V)$ afsluttet i $\sigma(B \cap V)$.)

Bortset fra øvelsen kan ovenstående kopieres til differentiabel fkt. af klasse C^h, også når $(T, \mathcal{O})$ blot er en diff mangfoldighed af klasse C^k, hvor $h \leq k$.

§5. Analytisk afbildning.



Lad $(S,\mathfrak{S})$ og $(T,\mathfrak{T})$ være analytiske mangfoldigheder af dim. n og m, og Φ en afbildning af en mgd. $A \subseteq S$ ind i T.

For vilk. kort $\sigma: V \to \mathbb{R}^n$ i S og $\tau: W \to \mathbb{R}^m$ i T er $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ en afbildning af $\sigma(V \cap \Phi^{-1}(W)) \subseteq \mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{R}^m$ og kan altså udtrykkes ved et sæt på m reelle funktioner af n reelle variable,

$$\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m).$$

Vi siger, at $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ er restriktionen af Φ til $V \cap \Phi^{-1}(W)$ <u>udtrykt i koordinater ved kortene</u> σ <u>og</u> τ.

Eksempel. Den stereografiske projektion af en enhedskugleflade på ækvators plan udtrykt i koordinater ved brug af længde og bredde på kuglefladen og passende polære koordinater i planen er

$$(u_1, u_2) \to (u_1, \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(u_2 + \tfrac{\pi}{2})).$$

Definition. Afbildningen Φ siges at være <u>analytisk i punktet</u> $p \in A$, hvis det for kort $\sigma \in \mathfrak{S}$ og $\tau \in \mathfrak{T}$, der afbilder p, henholdsvis $\Phi(p)$, gælder, at $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ er analytisk i $\sigma(p)$.

Definitionen er uafh. af de benyttede kort, thi afbildes p og $\Phi(p)$ også ved $\sigma_1 \in \mathfrak{S}$, henh. $\tau_1 \in \mathfrak{T}$, da er

$$\tau_1 \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \sigma_1^{-1}$$

en restriktion af $\tau_1 \circ \Phi \circ \sigma_1^{-1}$, og idet $\sigma \circ \sigma_1^{-1}$ er analytisk i $\sigma_1(p)$ og $\tau_1 \circ \tau^{-1}$ anal. i $\tau(\Phi(p))$, haves

$$\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} \text{ anal. i } \sigma(p) \Rightarrow \tau_1 \circ \Phi \circ \sigma_1^{-1} \text{ anal. i } \sigma_1(p).$$

22.10. (Pilen kan naturligvis vendes.)

Det er nødv., at p er indre pkt. i def.-mængden A for Φ.

<u>Er Φ analytisk i p, så også i hvert punkt i en åben omegn af p.</u>

Thi begge dele gælder med Φ og p erstattet med $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ og $\sigma(p)$.

<u>Er Φ analytisk i p, så også kontinuert i p.</u>

Thi da $\sigma(p)$ er indre pkt. i $\sigma(V \cap \Phi^{-1}(W))$, dvs. $V \cap \Phi^{-1}(W)$ en omegn af p (relativt til V og dermed til S), er det nok at vise, at restriktionen af Φ til $V \cap \Phi^{-1}(W)$, dvs.

$$\tau^{-1} \circ (\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma,$$

er kont. i p, men det er klart.

NB. Definitionen ovenfor går <u>ikke</u> over i en gyldig sætning, når ordet "analytisk" erstattes med "kontinuert". (Eksempel: Φ kan være diskont. og $V \cap \Phi^{-1}(W)$ alene omfatte p.) Derimod kan "analytisk" erstattes med "kontinuert i en omegn".

Bemærk. For vilk. $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\tau \in \mathfrak{T}$ gælder: $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ anal.kt. $\Leftrightarrow$ Φ er analytisk i hvert punkt af $V \cap \Phi^{-1}(W)$.

Definition. Afbildningen $\Phi: A \to T$ siges at være analytisk, hvis den er analytisk i hvert pkt. $p \in A$.

Det er nødvendigt, at A er åben.

Ifølg. bemærkningen har vi: Er Φ analytisk, da er $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analytisk for hvert $\sigma \in S$ og $\tau \in \mathcal{T}$. Er $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analytisk for hvert σ og τ tilhørende delatlas, som dækker henholdsvis A og $\Phi(A)$, da er Φ anal.

For $(T, \mathcal{T}) = (\grave{R}^n, \mathcal{H}_n)$ kan man som τ benytte den identiske afbildn. $e_{\grave{R}^n}$, hvorved overstående definitioner ses at være ensbetydende med de i §4 givne.

For $(S, \mathcal{S}) = (\grave{R}^n, \mathcal{H}_n)$ og $(T, \mathcal{T}) = (\grave{R}^m, \mathcal{H}_m)$ kan man som σ og τ benytte $e_{\grave{R}^n}$ og $e_{\grave{R}^m}$, hvorved overensstemmelse ses med den tidligere brug af ordet analytisk om afbildninger $f: A \to \grave{R}^m$, hvor $A \subseteq \grave{R}^n$.

Lad atter $(S, \mathcal{S})$ og $(T, \mathcal{T})$ være vilk. analytiske mangfoldigheder af dim.-mgd. n, og Φ en afbildning af en mgd. $A \subseteq S$ ind i T. Da gælder:

Sætn. Afbildningen Φ er analytisk i punktet $p \in A$, hvis og kun hvis for enhver reel fkt. g, der er anal. i $\Phi(p)$, $g \circ \Phi$ analytisk i p.

Tilstr. er det endda, at $y_1 \circ \Phi, \dots, y_m \circ \Phi$ er analytiske i p, hvor $y_1, \dots, y_m$ er koordinaterne i ét kort $\tau \in \mathcal{T}$, der afbilder $\Phi(p)$.

Bevis. Lad $\sigma \in \mathcal{S}$ og $\tau \in \mathcal{T}$ afbilde henh. p og $\Phi(p)$. Er nu Φ analytisk i p og g analytisk i $\Phi(p)$, altså $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analyt. i $\sigma(p)$ og $g^\tau = g \circ \tau^{-1}$ analyt. i $\tau(\Phi(p))$, så er ifølg. sætn. s 11

$$(g \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1})$$

og dermed også $(g \circ \Phi)^\sigma = g \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ anal. i $\sigma(p)$, altså $g \circ \Phi$ analytisk i p.

Omv. Er $\tau = (y_1, \dots, y_m)$ og dermed $(\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}) = (y_1 \circ \Phi \circ \sigma^{-1}, \dots, y_m \circ \Phi \circ \sigma^{-1})$ har vi simpelthen:

Φ analytisk i p
$\Leftrightarrow$ $\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analytisk i $\sigma(p)$
$\Leftrightarrow$ $y_i \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analytisk i $\sigma(p)$, $i = 1, \dots, m$
$\Leftrightarrow$ $y_i \circ \Phi$ analytisk i p, $i = 1, \dots, m$.

Lad os endvidere notere: Afbildningen Φ er analytisk, hvis og kun hvis det for enhver analytisk funktion g i $(T, \mathcal{T})$ gælder, at $g \circ \Phi$ er en analytisk funktion i $(S, \mathcal{S})$. Det er tilstrækkeligt, at dette gælder for hver koordinat af hvert kort tilhørende et delatlas af $\mathcal{T}$, der dækker billedmængden $\Phi(A)$.

Øvelse. Vis, at den understregede del af sætningen ovenfor gælder, når ordet "analyt." erstattes med "kontinuert".
(For vilk. omegn $\mathcal{U}$ af $\Phi(p)$ findes kontinuert g med $g(\Phi(p)) = 1$ og $g^{-1}(\grave{R}_+) \subseteq \mathcal{U}$. Da er $\Phi^{-1}(g^{-1}(\grave{R}_+))$ og dermed $\Phi^{-1}(\mathcal{U})$ en omegn af p.)

26.10

Ved sammensætning af analytiske afbildninger fås påny en analytisk afbildning:

Lad $(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ og $(U, \mathcal{U})$ være analytiske mangfoldigheder. Er $\Phi: A \to T$, hvor $A \subseteq S$, analytisk i p og $\Psi: B \to U$, hvor $B \subseteq T$, analytisk i $\Phi(p)$, da er $\Psi \circ \Phi$ analytisk i p.

Thi for hver reel funktion h, analytisk i $\Psi(\Phi(p))$, er $h \circ (\Psi \circ \Phi) = (h \circ \Psi) \circ \Phi$ analytisk i p. (Det er også ligetil at føre et bevis ved brug af definitionen.)

Øvelse. Lad $(S,\mathcal{S})$ og $(T,\mathcal{O})$ være analytiske mangfoldigheder. Vis, at hvis en analytisk afbildning $\Phi: A \to T$ overhovedet kan udvides til en analytisk afbildn. på et område B, hvor $A \subseteq B \subseteq S$, da kun på én måde. (Analytisk fortsættelse.)

(Lad C være mgd. af punkter $x \in B$, hvor to bestemte udvidelser Φ_1 og Φ_2 stemmer overens i en omegn af x. Klart, at C åben og indeholder A, spec. $C \neq \emptyset$. Det er derimod at vise, at C er afsluttet relativt til B. Er nu $p \in B$ et kontaktpkt. for C, må $\Phi_1(p) = \Phi_2(p)$, idet Φ_1 og Φ_2 er kontinuerte og T et Hausdorffrum. Vælges kort $\sigma: V \to \mathbb{R}^m$ og $\tau: W \to \mathbb{R}^m$ tilhørende hensh. $\mathcal{S}$ og $\mathcal{O}$ med $p \in V$ og $\Phi_1(p) = \Phi_2(p) \in W$, vil p være kontaktpkt. også for $C \cap (V \cap \Phi_1^{-1}(W) \cap \Phi_2^{-1}(W))$, og det vil derfor være tilstr. at vise, at denne mgd. er afsluttet rel. til $V \cap \Phi_1^{-1}(W) \cap \Phi_2^{-1}(W)$. Men $\sigma(C \cap V \cap \Phi_1^{-1}(W) \cap \Phi_2^{-1}(W))$ består af de punkter af den åbne mgd. $\sigma(V \cap \Phi_1^{-1}(W) \cap \Phi_2^{-1}(W))$, hvor $\tau \circ \Phi_1 \circ \sigma^{-1} = (\varphi_1', \ldots, \varphi_m')$ og $\tau \circ \Phi_2 \circ \sigma^{-1} = (\varphi_1'', \ldots, \varphi_m'')$ stemmer overens i en omegn, dvs. hvor $\varphi_i' - \varphi_i''$, $i = 1, \ldots, m$, har alle partielle afledede af enhver orden $= 0$.)

Bianalytisk afbildning.

Lad $(S,\mathcal{S})$ og $(T,\mathcal{O})$ være analytiske mangfoldigheder.

En bijektiv afbildn. $\Phi: S \to T$ vil vi kalde en bianalytisk afbildn. af $(S,\mathcal{S})$ på $(T,\mathcal{O})$, hvis

(1) Φ og Φ^{-1} begge er analytiske.

Man bemærker, at en bianalytisk afb. af $(S,\mathcal{S})$ på $(T,\mathcal{O})$ spec. er en homeomorf afb. af S på T. Nødv. for eksistensen er da, at de to mangfoldigheder har samme dimension.

Vi vil vise, at betingelsen (1) er ensbetydende med

(2) for ethvert $\tau \in \mathcal{O}$ er $\tau \circ \Phi \in \mathcal{S}$
og for ethvert $\sigma \in \mathcal{S}$ er $\sigma \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{O}$,

som videre kommer ud på f.eks.

(3) $$\{\tau \circ \Phi \mid \tau \in \mathcal{O}\} = \mathcal{S},$$

idet man har

$$\forall_{\mathcal{O}} \tau: \tau \circ \Phi \in \mathcal{S} \iff \{\tau \circ \Phi \mid \tau \in \mathcal{O}\} \subseteq \mathcal{S}$$

og $$\forall_{\mathcal{S}} \sigma: \sigma \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{O} \iff \mathcal{S} \subseteq \{\tau \circ \Phi \mid \tau \in \mathcal{O}\}.$$

Herefter er det klart, at en bianalytisk afbildning af $(S,\mathcal{S})$ på $(T,\mathcal{O})$ nøjagtig er, hvad man naturligt må regne for en isomorf afbildning af $(S,\mathcal{S})$ på $(T,\mathcal{O})$. Og isomorfirelationen i klassen af analytiske mangfoldigheder er

"der findes en bianalytisk afb. af $(S,\mathcal{S})$ på $(T,\mathcal{O})$".

Bevis for (1) $\Rightarrow$ (2).

Den bijektive afbildn. $\Phi: S \to T$ antages bianal. Af symmetrigrunde kan vi nøjes med at vise f.eks. første del af (2). For $\tau \in \mathcal{O}$ vil nu $\tau \circ \Phi$ være et kort i S, da Φ er homeomorf. Da $\mathcal{S}$ er maksimalt analytisk, kan vi vise $\tau \circ \Phi \in \mathcal{S}$ ved at godtgøre, at $\tau \circ \Phi$ er anal.

forbundet med hvert $\sigma \in \mathcal{S}$, dvs. at

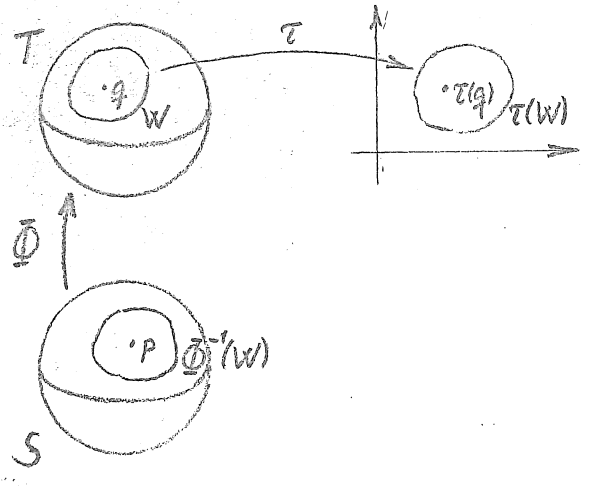
$$(\tau\circ\Phi)\circ\sigma^{-1} \quad \text{og} \quad \sigma\circ(\tau\circ\Phi)^{-1} = \sigma\circ\Phi^{-1}\circ\tau^{-1}$$

er analytiske, men det følger af, at disse koordinattransformationer også kan opfattes som (restriktioner af) Φ, henh. Φ^{-1} udtrykt i koordinater (jfr. s. 31).

(2) $\Rightarrow$ (1) er indeholdt i

Sætn. <u>En bijektiv afbildn.</u> $\Phi: S \to T$, hvor $(S,\mathcal{S})$ og $(T,\mathcal{O}_T)$ er analytiske mangfoldigh.r, <u>vil være bianalytisk, hvis</u> $\tau\circ\Phi \in \mathcal{S}$ <u>for hvert</u> $\tau \in \mathcal{O}_T$ <u>eller blot for hvert</u> τ <u>tilhørende et delatlas af</u> $\mathcal{O}_T$ <u>som dækker</u> T.

Bevis. Lad $q = \Phi(p)$ og lad $\tau: W \to \dot{\mathbb{R}}^n$ være et kort tilh. $\mathcal{O}_T$ med $\tau\circ\Phi \in \mathcal{S}$, så $q \in W$.



At Φ er analytisk i p, følger nu af, at

$$\tau\circ\Phi\circ(\tau\circ\Phi)^{-1} = \iota_{\tau(W)}$$

er den identiske afbildning af den åbne mgd. $\tau(W) \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$ og dermed analyt. i $(\tau\circ\Phi)(p) = \tau(q)$.

At Φ^{-1} er analytisk i q, følger af, at

$$(\tau\circ\Phi)\circ\Phi^{-1}\circ\tau^{-1} = \iota_{\tau(W)}$$

er analytisk i $\tau(q)$.

Bemærkning. Er Φ bianalytisk, opnår man ved at benytte kort σ og τ, hvor $\sigma = \tau\circ\Phi$, eller ensbetyd. hermed $\tau = \sigma\circ\Phi^{-1}$, at tilsvarende pkt.r p og q, dvs. hvor $\Phi(p) = q$, har samme koord.sæt, $\sigma(p) = \tau(q)$.

Bortset fra ovalsen vedrørende analytisk fortsættelse kan paragraffen kopieres til differentiabel afb. af klasse C^h, også når $(S,\mathcal{S})$ og $(T,\mathcal{O}_T)$ blot er diff. mangfoldigheder af klasse mindst h.

Glosen bianalytisk erstattes da af diffeomorf.

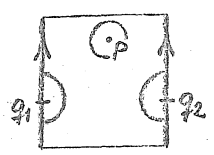
Eksempel. Side 27 er nævnt to forskellige analytiske mangfoldigheder med samme topologiske rum $\dot{\mathbb{R}}$, $(\dot{\mathbb{R}},\mathcal{H}_1)$ og $(\dot{\mathbb{R}},\mathcal{O}_T)$, hvor kortet $t \xrightarrow{\tau} t^3$ udgør et delatlas af $\mathcal{O}_T$. Der findes dog en bianalytisk afbildning af $(\dot{\mathbb{R}},\mathcal{H}_1)$ på $(\dot{\mathbb{R}},\mathcal{O}_T)$, nemlig f.eks. $t \xrightarrow{\Phi} \sqrt[3]{t}$. Vi har jo $\tau\circ\Phi = \iota_{\dot{\mathbb{R}}} \in \mathcal{H}_1$.

J. Milnor har vist (1956), at [illegible] 7-dimensionale kugleflade S^7 med sædv. topologi kan suppleres til en diff. mangfoldighed af klasse C^∞, som ikke blot er forskellig fra, men end ikke er C^∞-diffeomorf med $(S^7,\mathcal{H}_7)$.

29.10

Eksempel. Cylinder, torus, Kleins flaske.

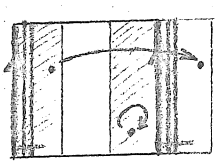
1° Skæres en omdrejningscylinderflade op langs en frembringer og udfoldes den derpå i planen, får man, idet topologi og naturligt 2-dim. analytisk atlas tages med, følgende 2-dim. analytiske mangfold. $(T, \mathcal{O})$:



T består af de indre pkt.r p i et rektangel samt par (g_1, g_2) af pkt.r fra to modstående sider.

Topologien: En basis for omgivne af p er cirkelskiver med centrum i p, liggende i rektanglets indre. En basis for omgivne af (g_1, g_2) er: foreninger af lige store halvcirkelskiver med centrum i g_1 og g_2 som antydet på figuren.

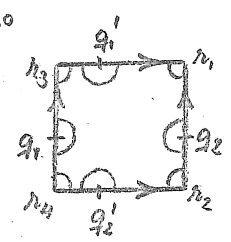
Et delatlas af $\mathcal{O}$, der dækker T, omfattende 2 kort: den identiske afbildning af rektanglets indre, samt et kort af typen:



(Defin. mgd er vist skravéret. På tilsvarende tegninger i det følgende udelades pilene.)

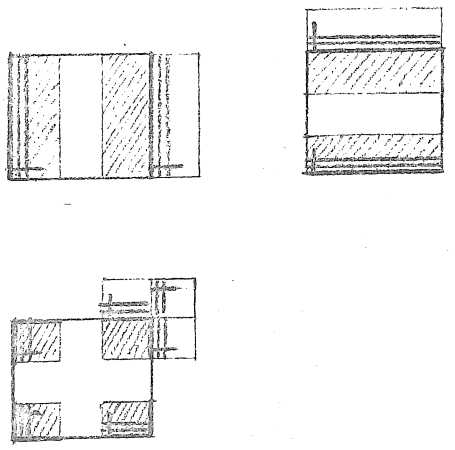
Man kan sige, at vi ved "sammenklabning" af to modstående sider af et rektangel har konstrueret en 2-dim. analytisk mangfoldighed, som kan afbildes bianalytisk på en cylinderflade.

2°



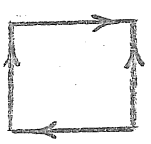
Her består T af indre pkt.r i rektanglet, par af pkt.r på modstående sider samt sættet af vinkelspidser (r_1, r_2, r_3, r_4)

Som basis for omgivne af elementet (r_1, r_2, r_3, r_4) benyttes foreninger af kvartcirkelskiver. Atlasset bestående af den identiske afbildn. af rektanglets indre samt følgende 3 antydede kort er analytisk og dækker T.

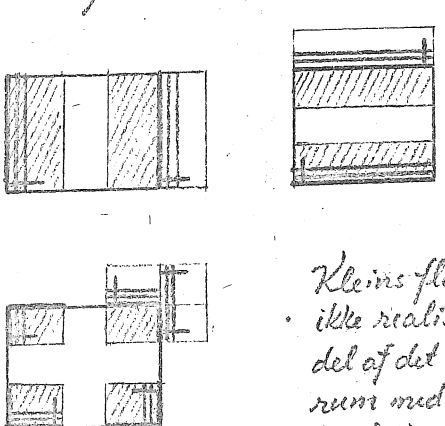


Vi har således bestemt en 2-dimensional analytisk mangfoldighed $(T, \mathcal{O})$. Denne kan afbildes bianalytisk på en Kuglering, med naturl. atlas, er altså blot „et andet eksemplar" af denne analytiske mangfoldighed.

3° Ved sammenklabningen



fås ganske tilsvarende en 2-dimensional analytisk mangfoldighed, Kleins flaske, idet den identiske afbildning af rektanglets indre samt følgende 3 antydede kort udgør et analytisk atlas, der dækker.



Kleins flaske kan ikke realiseres som del af det 3-dim. rum med induc. topologi og nat. atlas.

I det viste forsøg er der opstået dobbeltpunkter: forsk. pktr. af Kleins flaske falder i samme rumpkt.



§6. Produkt af analytiske mangfoldigheder.

Lad $(S,\mathcal{S})$ og $(T,\mathcal{T})$ være analytiske mangfoldigheder af dim. m og n.

Med $S\times T$ betegner vi dels det cartesiske produkt af S og T,

$$\{(s,t) \mid s\in S,\ t\in T\},$$

dels denne mængde forsynet med produkttopologien. Projektionerne π_S og π_T,

$$(s,t)\xrightarrow{\pi_S} s, \quad (s,t)\xrightarrow{\pi_T} t, \quad (s,t)\in S\times T,$$

er da kontinuerte; $A\times B$ er åben, når $A\subseteq S$ og $B\subseteq T$ er åbne; er U en omegn af (p,q), findes åbne mgdr. $A\subseteq S$ og $B\subseteq T$, så $(p,q)\in A\times B\subseteq U$.

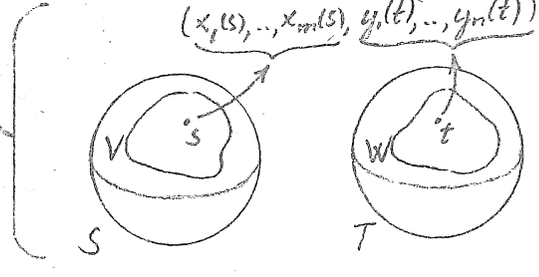
Er $\sigma=(x_1,\dots,x_m): V\to\mathbb{R}^m$ et kort i S og $\tau=(y_1,\dots,y_n): W\to\mathbb{R}^n$ et kort i T, vil

$$(s,t)\to(x_1(s),\dots,x_m(s),y_1(t),\dots,y_n(t)), \quad (s,t)\in V\times W,$$

være et kort i $S\times T$; vi vil betegne dette (σ,τ), og også skrive

$$(s,t)\to(\sigma(s),\tau(t)), \quad (s,t)\in V\times W.$$

2.11 → Bevis. Man verificerer umiddelbart, at (σ,τ) er en bijektiv afbildn. på den åbne mgd. $X\times Y=\sigma(V)\times\tau(W)\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$. Er $\mathcal{F}\times\mathcal{J}$, $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{R}^m$, $\mathcal{J}\subseteq\mathbb{R}^n$, et åbent interval indeholdende $(\sigma(p),\tau(q))$, vil $(\sigma,\tau)^{-1}(\mathcal{F}\times\mathcal{J})=\sigma^{-1}(\mathcal{F})\times\tau^{-1}(\mathcal{J})$ være en åben mgd. indeholdende (p,q); altså er (σ,τ) kontinuert. At $(\sigma,\tau)^{-1}$ er kontin. i $(\sigma(p),\tau(q))$, følger af, at er $A\subseteq V$ og $B\subseteq W$ åbne omegne af p og q, vil $(\sigma,\tau)(A\times B)=\sigma(A)\times\tau(B)$ være en åben mængde i $\mathbb{R}^{m+n}$, indeholdende $(\sigma(p),\tau(q))$.



Det $(m+n)$-dim. atlas $\{(\sigma,\tau)\mid\sigma\in\mathcal{S},\tau\in\mathcal{T}\}$ er analytisk og dækker $S\times T$.

Bevis. Det er klart, at atlasset dækker $S\times T$. Vi skal da vise, at 2 vilk. kort (σ,τ) og (σ',τ'), hvor $\sigma: V\to\mathbb{R}^m$ og $\sigma': V'\to\mathbb{R}^m$ tilhører $\mathcal{S}$, og $\tau: W\to\mathbb{R}^n$ og $\tau': W'\to\mathbb{R}^n$ tilhører $\mathcal{T}$, er analytisk forbundne. Af symmetrigrunde er det nok at vise, at $(\sigma',\tau')\circ(\sigma,\tau)^{-1}$ er analytisk. Def mgden er

$$\begin{aligned}&(\sigma,\tau)((V\times W)\cap(V'\times W'))\\ &=(\sigma,\tau)((V\cap V')\times(W\cap W'))\\ &=\sigma(V\cap V')\times\tau(W\cap W').\end{aligned}$$

Idet vi sætter $\sigma'=(x_1',\dots,x_m')$ og $\tau'=(y_1',\dots,y_n')$, ved vi, at

$$\sigma'\circ\sigma^{-1}=(x_1'\circ\sigma^{-1},\dots,x_m'\circ\sigma^{-1})$$

er analytisk i $\sigma(V\cap V')$, altså for $i=1,\dots,m$:

$$(v_1,\dots,v_m)\to x_i'(\sigma^{-1}(v_1,\dots,v_m)), \quad (v_1,\dots,v_m)\in\sigma(V\cap V')$$

er analytisk, og ligeledes for $j=1,\dots,n$:

$$(w_1,\dots,w_n)\to y_j'(\tau^{-1}(w_1,\dots,w_n)), \quad (w_1,\dots,w_n)\in\tau(W\cap W')$$

er analytisk.

Da nu afbildningen $(\sigma',\tau')\circ(\sigma,\tau)^{-1}$ er

$$(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n)\to$$
$$(x_1'(\sigma^{-1}(v_1,\dots,v_m)),\dots,x_m'(\sigma^{-1}(v_1,\dots v_m)),\dots,y_n'(\tau^{-1}(w_1,\dots w_n))),$$
$$(v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n)\in\sigma(V\cap V')\times\tau(W\cap W'),$$

ses den at være analytisk.

Vi kan nu (jfr. sætningen s. 26) definere:

Ved produktet $(S,\mathcal{S})\times(T,\mathcal{T})$ af de analytiske mangfoldigheder $(S,\mathcal{S})$ af dim. m og $(T,\mathcal{T})$ af dim. n forstås produktrummet $S\times T$ med udvidelsen af

$$\{(\sigma,\tau)\mid\sigma\in\mathcal{S},\tau\in\mathcal{T}\}$$

til maksimalt $(m+n)$-dim. analytisk atlas.

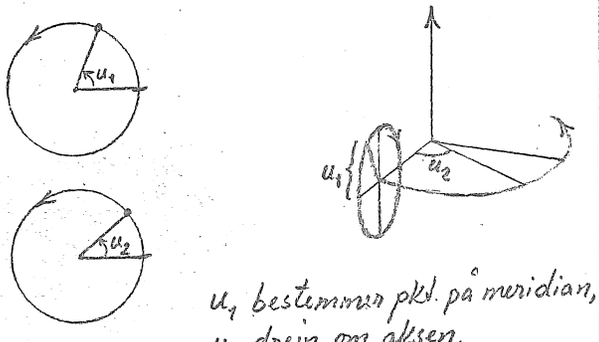
NB. Det maksimale atlas kan også bestemmes som udvidelsen af $\{(\sigma,\tau)\mid\sigma\in\mathcal{S}_1,\tau\in\mathcal{T}_1\}$, hvor $\mathcal{S}_1$ og $\mathcal{T}_1$ er delatlas af $\mathcal{S}$ og $\mathcal{T}$, der dækker hhv. S og T.

Eksempler.

1° $(\grave{\mathbb{R}}^m, \mathcal{H}_m) \times (\grave{\mathbb{R}}^n, \mathcal{H}_n) = (\grave{\mathbb{R}}^{m+n}, \mathcal{H}_{m+n})$.

Thi $\{e_{\grave{\mathbb{R}}^m}\}$ og $\{e_{\grave{\mathbb{R}}^n}\}$ er delatlas af $\mathcal{H}_m$ og $\mathcal{H}_n$, som dækker henh. $\grave{\mathbb{R}}^m$ og $\grave{\mathbb{R}}^n$, og $(e_{\grave{\mathbb{R}}^m}, e_{\grave{\mathbb{R}}^n}) = e_{\grave{\mathbb{R}}^{m+n}}$ udgør et atlas i $\grave{\mathbb{R}}^{m+n}$, der har $\mathcal{H}_{m+n}$ som udvidelse til maksimalt.

2° Lad $\grave{T} = \grave{T}^1$ betegne cirkelperiferien med den sædv. (fra planen inducerede) topologi, og lad $\mathcal{H}_1$ være dens naturlige analytiske atlas. Da kan $(\grave{T}, \mathcal{H}_1) \times (\grave{T}, \mathcal{H}_1)$ afbildes bianalytisk på en Kuglering:



u_1 bestemmer pkt. på meridian,
u_2 drejn. om aksen.

I eks. 2°, side 34, har vi allerede mødt endnu et „eksemplar af denne anal. mangfold.".

$(\grave{T}, \mathcal{H}_1)^n = (\grave{T}, \mathcal{H}_1) \times \ldots \times (\grave{T}, \mathcal{H}_1)$ kaldes den n-dim. <u>torus</u>.

III. Lie grupper.

§1. Lie grupper.

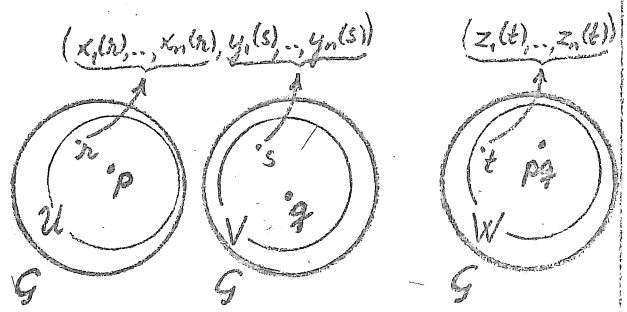
Lad der være givet en (ikke tom) mængde G, en gruppekomposition $\cdot$ inden for G, en topologi i G, f.eks. bestemt ved systemet $\mathcal{O}$ af åbne mgd.r, samt et atlas $\mathcal{A}$ i det topologiske rum $(G,\mathcal{O})$, så dette med atlasset $\mathcal{A}$ er en analytisk mangfoldighed af dimension n.

G er altså en mængde, $(G,\cdot)$ en gruppe, $(G,\mathcal{O})$ et topologisk rum og $(G,\mathcal{O},\mathcal{A})$ en analytisk mangfoldighed. (NB. I modsætning til kap. II vil vi foreløbig ikke sammenblande betegnelserne for mængden G og det topologiske rum $(G,\mathcal{O})$.)

Definition. Vi kalder $(G,\mathcal{O},\mathcal{A},\cdot)$ en n-dimensional Lie gruppe, hvis kompositionen $\cdot$, som jo er en afbildning af $G\times G$ ind i G, er en analytisk afbildning af $(G,\mathcal{O},\mathcal{A})\times(G,\mathcal{O},\mathcal{A})$ ind i $(G,\mathcal{O},\mathcal{A})$.

5.11.

At $(r,s)\to rs$, $(r,s)\in G\times G$, er analytisk, betyder jo, at den er analytisk i hvert pkt. af $G\times G$. Lad os gøre os klart, hvad det vil sige, at kompositionen er analytisk i pkt.et $(p,q)\in G\times G$:



Lad $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$, $\sigma: V\to\mathbb{R}^n$ og $\tau: W\to\mathbb{R}^n$ være kort tilhørende $\mathcal{A}$, der afbilder henholdsvis p, q og pq.

Da er $(\varphi,\sigma): U\times V\to\mathbb{R}^{2n}$ et kort tilh. atlasset i produktmangfold. $(G,\mathcal{O},\mathcal{A})\times(G,\mathcal{O},\mathcal{A})$, og det afbilder (p,q).

Restriktionen af kompositionen $\cdot$ til

$$(U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\}$$

kan nu udtrykkes i koordinater ved kortene (φ,σ) og τ; herved fås en afbildn. ind i $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n),$$

hvor hvert φ_i er en reel fkt. i $2n$ variable med def.mgd.

$$(\varphi,\sigma)\big((U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\}\big).$$

Sætter vi $\tau=(z_1,\dots,z_n)$, er fkt.erne φ_i bestemt ved, at der for $(r,s)\in(U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\}$ gælder

$$\varphi(r)=(u_1,\dots,u_n)\ \wedge\ \sigma(s)=(v_1,\dots,v_n)$$
$$\Rightarrow z_i(rs)=\varphi_i(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n),\quad i=1,\dots,n$$

At kompositionen $\cdot$ er analytisk i (p,q), kommer nu ud på, at

φ_i er anal. i $(\varphi(p),\sigma(q))$, $i=1,\dots,n$.

Bemærk. φ_i er anal., $i=1,\dots,n$, $\Leftrightarrow$ komp. $\cdot$ er analytisk i hv. pkt af $(U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\}$

Eksempler.

1° $\mathbb{R}^n$ med sædv. topologi, naturligt anal. atlas $\mathcal{A}_n$ og gruppekomp. $+$,

$$(u_1,\dots,u_n)+(v_1,\dots,v_n)=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n),$$

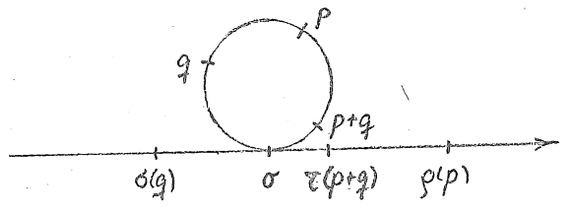
er en Lie gruppe.

Tri vælges $\varphi=\sigma=\tau=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, har vi

$$\varphi_i(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)=u_i+v_i.$$

2° Efter valg af et begyndelsespkt. o har man en addition for pkt.r på cirkelperiferien $\dot{T}$. $(\dot{T},+)$ er isomorf med $(\mathbb{R}(\mathrm{mod}\,2\pi),+)$, spec. altså en gruppe. Betragtes $\dot{T}$ yderligere

med sædv topologi og naturligt analyt. atlas, har vi en Lie gruppe.



Benytter vi i små omegne af p, q og $p+q$ vinkeltal for buerne fra σ som koordinat, har vi nemlig

$$\varphi(u,v) = u+v+\text{const.}$$

Vælges begyndelsespkt. for hver komponent af den 2-dim. torus T^2 og sættes

$$(p_1,p_2)+(q_1,q_2) = (p_1+q_1,\ p_2+q_2),$$

fås en gruppekomposition, med hvilken torus er en Lie gruppe. Vi kan nemlig opnå

$$\varphi_1(u_1,u_2,v_1,v_2) = u_1+v_1+\text{const.}$$
$$\varphi_2(u_1,u_2,v_1,v_2) = u_2+v_2+\text{const.}$$

Tilsvarende gælder den n-dim. torus.

3° Mængden $GL(n,\mathbb{R})$ af reelle regulære $(n\times n)$-matricer er, med matrixmultiplikation, induceret topologi (som delrum af $\mathbb{R}^{n^2}$) og naturligt analytisk atlas $\mathcal{H}_{n^2}$, en Lie gruppe.

Med $\varrho=\sigma=\tau=\mathrm{id}_{GL(n,\mathbb{R})}$ har vi nemlig

$$\varphi_{ik}(u_{11},\dots,u_{nn},v_{11},\dots,v_{nn}) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}v_{jk}.$$

4° Mængden $O(n)$ af reelle ortogonale $(n\times n)$-matricer er, med matrixmultiplikation, induceret topologi (som delrum af $\mathbb{R}^{n^2}$) og naturligt analytisk atlas $\mathcal{H}_{\frac{n^2-n}{2}}$, en Lie gruppe.

Thi da matrixmultiplikation er en gruppekomposition inden for $O(n)$, og $O(n)$ med topologi og atlas er en analytisk mangfoldighed, jfr. s. 23 og 25, mangler vi kun at eftervise, at kompositionen er analytisk.

Lad da $p=(a_{ij})$ og $q=(b_{ij})$ være vilk. ortogonale matricer. Vi vælger vilk. kort $\varrho: U\to\mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$ og $\sigma: V\to\mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$ tilh. atlasset, som afbilder p og q, men benytter som kort, der afbilder $pq=(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})$, en projektion $\pi: W\to\mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$, altså som koordinater restriktionerne til W af passende $\frac{1}{2}(n^2-n)$ af afbildningerne

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow u_{ij},$$

jfr. s. 21.

Med $\varrho^{-1}=(f_{ij})$ og $\sigma^{-1}=(g_{ij})$, $i,j=1,\dots,n$, hvor alle f_{ij} og alle g_{ij} er reelle analytiske funktioner af $\frac{1}{2}(n^2-n)$ variable, med def.mgd. henh. $\varrho(U)$ og $\sigma(V)$, – jfr. definitionen af naturligt anal. atlas s. 20 –, vil da $\pi\circ\text{komposition}\circ(\varrho,\sigma)^{-1}$ være lig et sæt på $\frac{1}{2}(n^2-n)$ af funktionerne

$$(u_1,\dots,u_{\frac{1}{2}(n^2-n)},v_1,\dots,v_{\frac{1}{2}(n^2-n)}) \xrightarrow{\varphi_{ik}} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(u_1,\dots,u_{\frac{1}{2}(n^2-n)})\, g_{jk}(v_1,\dots,v_{\frac{1}{2}(n^2-n)}),$$

betragtet med $(\varrho,\sigma)((U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\})$ som def.mængde. Af udtrykkene fremgår straks, at funktionerne er analytiske i $\varrho(U)\times\sigma(V) = (\varrho,\sigma)(U\times V)$, og da $\{(r,s)\in O(n)\times O(n)\mid rs\in W\}$ er åben, idet matrixmultiplikationen $\cdot$ kontinuert, vil også $(\varrho,\sigma)((U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\})$ være åben, og dermed funktionerne φ_{ij} med denne def.mgd være analytiske, spec. i punktet $(\varrho(p),\sigma(q))$.

Hermed er vist, at kompositionen

$$(r,s)\to rs,\qquad (r,s)\in O(n)\times O(n),$$

er analytisk i (p,q).

5° Både påstand og begrundelse i 4° gælder også for mængden $SO(n)$ af egentlig ortogonale reelle $(n\times n)$-matricer, og ligeledes for mængden $SL(n,\mathbb{R})$ af reelle $(n\times n)$-matricer med determinant 1, naturligvis med ændring af dimensionen til n^2-1.

Man skal blot overalt i 4° erstatte $O(n)$ med $SO(n)$, henholdsvis $O(n)$ og $\frac{n^2-n}{2}$ med $SL(n,\mathbb{R})$ og n^2-1.

Sætn. *Til en Lie gruppe $(G,\mathcal{O},\mathcal{G},\cdot)$ er for hvert $a\in G$ venstre translationen*

$$s\to as,\quad s\in G,$$

en bianalytisk afbildning af $(G,\mathcal{O},\mathcal{G})$ på sig selv. Det samme gælder højre translationen $s\to sa$, $s\in G$.

Bevis. Da en venstre translation er bijektiv, og den omvendte påny er en venstre translation (nemlig med det inverse element), skal vi blot vise, at en vilk. venstre transl. $s\to as$, $s\in G$, er analytisk. Det beror imidlertid på, at afbildningen fremkommer af en analytisk afbildning $(r,s)\to rs$, $(r,s)\in G\times G$, fra et produktrum ved at fastholde den ene komponent. Udførelse i detaljer:

For at se, at $s\to as$ er analytisk i det vilkårlige pkt. $q\in G$, betragtes kort $\sigma: V\to\mathbb{R}^n$ og $\tau: W\to\mathbb{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}$, der afbilder henholdsvis q og billedpunktet aq. Vi inddrager også et kort $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}$, der afbilder a, og betegner med $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ restriktionen af kompositionen

$$(r,s)\to rs,\quad (r,s)\in G\times G,$$

til $(U\times V)\cap\{(r,s)\mid rs\in W\}$ udtrykt i koordinater ved (φ,σ) og $\tau=(z_1,\dots,z_n)$. For (r,s) tilh. den anførte mgd. gælder således

$$\varphi(r)=(u_1,\dots,u_n)\wedge\sigma(s)=(v_1,\dots,v_n)$$
$$\Rightarrow z_i(rs)=\varphi_i(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$$

Spec. har vi, idet vi med $a_1,\dots,a_n$ betegner koordinaterne til a i kortet φ,

$$\sigma(s)=(v_1,\dots,v_n)\Rightarrow z_i(as)=\varphi_i(a_1,\dots,a_n,v_1,\dots,v_n)$$

gældende for $s\in V\cap\{s\mid as\in W\}$. Altså udtrykker funktionerne

$$(v_1,\dots,v_n)\to\varphi_i(a_1,\dots,a_n,v_1,\dots,v_n),\ i=1,\dots,n,$$

restriktionen af venstre transl. $s\to as$ til $V\cap\{s\mid as\in W\}$ i koordinater ved σ og τ. At disse fktr kan udvikles i potensrække ud fra $\sigma(q)=(q_1,\dots,q_n)$, er imidlertid klart, idet hvert φ_i kan udvikles i potensrække ud fra $(\varphi(a),\sigma(q))=(a_1,\dots,a_n,q_1,\dots,q_n)$.

Vi vil betegne venstre translationen $s\to as$, $s\in G$, med T_a. Ifølge den netop viste sætning er $\sigma\circ T_a\in\mathcal{O}$ for hvert kort $\sigma\in\mathcal{O}$ (jfr. s. 32).

Da der for vilk. $p,q\in G$ findes en (i øvrigt også kun en) venstre translation, der fører p over i q, - vi har jo

$$T_x(p)=q\iff xp=q,$$

har sætningen således følgende konsekvens:

Kender man af en Lie gruppe $(G,\mathcal{O},\mathcal{G},\cdot)$ foruden mængden G og kompas $\cdot$ blot ét kort $\sigma\in\mathcal{O}$, da kender man også topologien og hele atlasset.

Vælges nemlig et $p\in V$, kender vi, idet $\sigma: V\to X=\sigma(V)\subseteq\mathbb{R}^n$ er homeomorf, alle omegne af p i V, og dermed, da V er åben, også alle omegne af p i $(G,\mathcal{O})$. Men da den venstre translation, der fører p over

i et vilk. pkt. $g \in G$, spec. er homeomorf, kender vi også omegnene af g. Vi kender altså topologien. Videre er

$$\{\sigma \circ T_a \mid a \in G\}$$

et delatlas af $\mathcal{O}_f$, der dækker G og dermed bestemmer $\mathcal{O}_f$ (jfr. s. 26-27).

Et andet udtryk for samme forhold er:

Sætn. *Lad $(G_1, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_{f_1}, \cdot_1)$ og $(G_2, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{f_2}, \cdot_2)$ være Lie grupper og Φ en isomorf afbildning af $(G_1, \cdot_1)$ på $(G_2, \cdot_2)$. Hvis der findes blot ét kort $\sigma_2 \in \mathcal{O}_{f_2}$, så $\sigma_2 \circ \Phi \in \mathcal{O}_{f_1}$, må Φ være en bianalytisk afbildning af $(G_1, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_{f_1})$ på $(G_2, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{f_2})$.*

Bevis. For hvert $a \in G_1$ er $T_{\Phi(a)} \circ \Phi = \Phi \circ T_a$, idet billedet af $p \in G$ er $\Phi(a)\Phi(p) = \Phi(ap)$. Påstanden indses da ved brug af sætn. s. 33, idet

$$\{\sigma_2 \circ T_{\Phi(a)} \mid a \in G_1\}$$

er et delatlas af $\mathcal{O}_{f_2}$, der dækker G_2, og for hvert $\sigma_2 \circ T_{\Phi(a)}$ er

$$\sigma_2 \circ T_{\Phi(a)} \circ \Phi = \sigma_2 \circ \Phi \circ T_a \in \mathcal{O}_{f_1}.$$

.....

Sætn. *En Lie gruppe $(G, \mathcal{O}, \mathcal{O}_f, \cdot)$ er*

$$s \to s^{-1}, \quad s \in G,$$

en analytisk afbildn. af $(G, \mathcal{O}, \mathcal{O}_f)$ på sig selv.

Bevis. Da $s \to s^{-1}$ er bijektiv og sin egen inverse, skal vi blot vise, at afbildningen er analytisk. Vi viser først, at den er analytisk i e, gruppens neutrale element.

Lad $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \mathbb{R}^n$ være et kort tilh. $\mathcal{O}_f$, så $e \in V$. Vi kan antage $\sigma(e) = (0, \dots, 0)$, jfr. s. 25, sætn. 1. Restriktionen af kompositionen $(s,t) \to st$ til

$$A = (V \times V) \cap \{(s,t) \mid st \in V\}$$

udtrykt i koordinater ved kortene (σ, σ) og σ betegner vi $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Funktionerne $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ er da analytiske, spec. i $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$.

Forudsætter vi $\sigma(s) = (v_1, \dots, v_n)$ og $\sigma(t) = (w_1, \dots, w_n)$, har vi for $(s,t) \in A$:

$$x_i(st) = \varphi_i(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

og dermed

$$st = e \iff \begin{cases} \varphi_1(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) = 0. \end{cases}$$

De n ligninger med $2n$ ubekendte har, da jo $ee = e$, løsningen $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$, i hvilket pkt. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ alle er analytiske. Da

$$\varphi_i(0, \dots, 0, w_1, \dots, w_n) = w_i,$$

hvilket afspejler $et = t$, har vi i $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$

$$\begin{pmatrix} D_{w_1}\varphi_1 & \cdots & D_{w_n}\varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{w_1}\varphi_n & \cdots & D_{w_n}\varphi_n \end{pmatrix} = \underline{\underline{E}}_{n,n}.$$

Ifølge sætningen om implicit givet afbildning (s. 13) findes da åbne intervaller $\mathcal{I}$ og $\mathcal{J}$ om $(0, \dots, 0)$, så for hvert $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{I}$ findes netop et $(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{J}$, hvor $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$ er løsning. Afbildningen $(v_1, \dots, v_n) \to (w_1, \dots, w_n)$ er analytisk i $(0, \dots, 0)$.

Tilsvarende findes så for hvert $s \in \sigma^{-1}(\mathcal{I})$ netop et $t \in \sigma^{-1}(\mathcal{J})$, - som må være s^{-1}, - så $st = e$. Og $(v_1, \dots, v_n) \to (w_1, \dots, w_n)$ er koordinatfremstillingen af $s \to s^{-1}$, $s \in \sigma^{-1}(\mathcal{I})$, som altså er analytisk i e.

Da $s \to s^{-1}$, $s \in G$, kan sammensættes

$$s \to a^{-1}s \to (a^{-1}s)^{-1} = s^{-1}a \to s^{-1},$$

slutter vi nu straks, ved brug af sætningen s. 39, at afbildningen er analytisk i det vilk. pkt. a.

§2. Topologisk gruppe.

En (ikke tom:) mængde G med en gruppekomposition $\cdot$ indført for G og en Hausdorff topologi $\mathcal{O}$ i G kaldes en topologisk gruppe, hvis

(1) kompositionen $\cdot$ er en kontinuert afbildning af $(G,\mathcal{O})\times(G,\mathcal{O})$ ind i $(G,\mathcal{O})$,

(2) afbildningen $s\to s^{-1}$, $s\in G$, er en kontinuert afbildn. af $(G,\mathcal{O})$ ind i sig selv.

Det bemærkes, at definitionen afviger fra f.eks. Bourbakis ved, at vi forlanger, $(G,\mathcal{O})$ skal være et Hausdorff rum og ikke blot et topologisk rum.

Idet vi for $A,B\subseteq G$ sætter

$$AB=\{st\mid s\in A,\ t\in B\}$$

og bemærker, at AB kan opfattes som billedet af $A\times B$ ved afbildningen $\cdot : G\times G\to G$, finder vi, til belysning af betingelse (1), at kontinuitet af $\cdot$ i punktet $(p,q)\in G\times G$ kommer ud på: til hver omegn W af pq findes omegne U af p og V af q, så

$$UV\subseteq W.$$

Øvelse: Vis ved et modeleksempel, at betingelsen (2) ikke er overflødig.
(Betragt $\mathbb{R}$ med sædv. addition og med halvåbne intervaller $[a,b[$ som basis for $\mathcal{O}$.)

I kraft af sætningen s. 40 har vi:

En $(G,\mathcal{O},\cdot)$ en Lie gruppe, da er $(G,\mathcal{O},\cdot)$ en topologisk gruppe.

I en topologisk gruppe $(G,\mathcal{O},\cdot)$ er for hvert $a\in G$, såvel venstre som højre translationen

$$s\to as,\ s\in G,\quad\text{og}\quad s\to sa,\ s\in G,$$

en homeomorf afbildning af $(G,\mathcal{O})$ på sig selv.

Kender man af en topologisk gruppe $(G,\mathcal{O},\cdot)$ foruden mængden G og komp. $\cdot$ (en basis for) omegnene af ét pkt. $p\in G$, da kender man hele topologien.

Thi venstre translationen, der fører p over i q, fører også omegnene af p over i omegnene af q.

En $\mathcal{V}$ en basis for omegnene af det neutrale element e i en topologisk gruppe $(G,\mathcal{O},\cdot)$, gælder:

I. $\forall_{\mathcal{V}}V,W\ \exists_{\mathcal{V}}U:\ U\subseteq V\cap W$,

II. $\bigcap_{V\in\mathcal{V}} V=\{e\}$,

III. $\forall_{\mathcal{V}}W\ \exists_{\mathcal{V}}V:\ VV\subseteq W$,

IV. $\forall_{\mathcal{V}}W\ \exists_{\mathcal{V}}V:\ V^{-1}\subseteq W$

V. $\forall_G a\ \forall_{\mathcal{V}}W\ \exists_{\mathcal{V}}V:\ aVa^{-1}\subseteq W$

Thi I er klar. II er en følge af, at topologien er en Hausdorff topologi.

III. Da $(s,t)\to st$ er kontin. i (e,e) med e som billede, findes omegne V_1,V_2 af e, så $V_1V_2\subseteq W$. Videre findes $V\in\mathcal{V}$, så $V\subseteq V_1\cap V_2$ og dermed $VV\subseteq W$.

Idet $V^{-1}=\{v^{-1}\mid v\in V\}$ er billedet af V ved afbildningen $s\to s^{-1}$, $s\in G$, udtrykker IV, at denne afbildn. er kontinuert i e.

Idet aVa^{-1} er billedet af V ved afbildningen $s\to asa^{-1}$, $s\in G$, udtrykker V: for hvert $a\in G$ er $s\to asa^{-1}$, $s\in G$, kontin. i e.
Og afbildn.gen er endda homeomorf, som sammensat af venstre og højre transl. med a.

Lad nu $(G,\cdot)$ være en gruppe og $\mathcal{V}$ en mængde af delmgd.r af G.

Vi spørger efter topologier $\mathcal{O}$ i G, så $(G,\mathcal{O},\cdot)$ er en topologisk gruppe, og $\mathcal{V}$ en basis for omgnene af e.

Efter en bemærkning s. 41 er det klart, at der højst kan være en, idet

$$\{aV \mid V \in \mathcal{V}\}$$

må være en basis for omgnene af det vilk. pkt. $a \in G$.

Betingelserne for eksistensen er, at I, II, III, IV og V gælder. Det interessante er nu, at disse betingelser også er tilstrækkelige.

Hertil må eftervises, at der, når disse betingelser er opfyldt, virkelig på den ovenfor beskrevne måde defineres en Hausdorff topologi i G, og at afbildningerne

$(s,t) \to st$, $(s,t) \in G \times G$, og $s \to s^{-1}$, $s \in G$

er kontinuerte.

Vi vil forbigå betragtningerne, som ikke byder på egentlige vanskeligheder. (Jfr. Bourbaki III, chap. 3, 3. éd., s. 12-14 eller Chevalley, Theory of Lie groups, s. 28-29.)

§3. Bestemmelse af analytisk struktur i en gruppe.

Lad $(G,\cdot)$ være en gruppe og α en injektiv afbildning af en mgd. $A \subseteq G$ indeholdende det neutrale element e ind i $\mathbb{R}^n$.

Der findes da højst én n-dim. Lie gruppe $(G,\cdot,O,\mathfrak{O})$, således at en restriktion $\alpha|A'$, hvor $e \in A' \subseteq A$, er et kort tilhørende $\mathfrak{O}$.

Thi er $(G,\cdot,O_1,\mathfrak{O}_1)$ og $(G,\cdot,O_2,\mathfrak{O}_2)$ to sådanne Lie grupper, med $\alpha|A_1' \in \mathfrak{O}_1$ og $\alpha|A_2' \in \mathfrak{O}_2$, vil $\alpha(A_1' \cap A_2') = \alpha(A_1') \cap \alpha(A_2')$ være åben i $\mathbb{R}^n$, hvoraf kan sluttes, at $A_1' \cap A_2'$ er åben ved topologien O_1 og ligeledes ved O_2. Men så må $\alpha|A_1' \cap A_2'$ tilhøre både $\mathfrak{O}_1$ og $\mathfrak{O}_2$, iflg. s. 25, satn. 2, hvoraf vi ved brug af bemærkningen s. 39 nederst eller første satn. s. 40 slutter $O_1 = O_2$ og $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_2$.

Vi vil søge at opstille nødv. og tilstr. betingelser for eksistensen, idet vi dog kun vil tage sammenhængende Lie grupper i betragtning. (At en Lie gruppe $(G,\cdot,O,\mathfrak{O})$ er sammenhængende betyder naturligvis, at det top. rum (G,O) er det.)

Først viser vi:

En undergruppe H af en topologisk gruppe $(G,O,\cdot)$, – og ligeledes en mængde $H \subseteq G$, hvor blot $HH \subseteq H$, – vil, hvis den indeholder en omegn V af det neutrale element e, være åben.

Thi hvert $s \in H$ er indre pkt., da sV er en omegn af s og $sV \subseteq HH \subseteq H$.

En åben undergruppe H af en topologisk gruppe $(G,O,\cdot)$ er også afsluttet.

Thi hver venstre sideklasse til H er åben, da jo venstre translationer er homeomorfe, og komplementærmængden $G \setminus H$ er forening af de fra H forskellige venstre sideklasser, altså også åben.

En sammenhængende topologisk gruppe $(G,O,\cdot)$ frembringes af en vilk. omegn V af det neutrale elem. e.

Thi den af V frembragte undergruppe, dvs. den mindste undergruppe, der indeholder V, er både åben og afsluttet, følgelig G selv.

Også $W = V \cap V^{-1}$ er en omegn af e, og idet $W^{-1} = W$, ser man, at mængden af gruppeelementer, der kan udtrykkes som produkt af elementer af W, altså

$$W \cup WW \cup WWW \cup \ldots$$

er en undergruppe af $(G,\cdot)$ indeholdende W, altså G selv. Da $V \supseteq W$, kan ovenstående resultat skærpes.

Hvert element af en sammenhængende topologisk gruppe $(G,O,\cdot)$ kan skrives som produkt af elementer af en vilk. omegn V af det neutrale element e.

Vi vil nu formulere

Satn. Lad $(G,\cdot)$ være en gruppe og α en injektiv afbildning ind i $\mathbb{R}^n$ af en mængde $A \subseteq G$ indeholdende det neutrale elem. e.

Nødv. og tilstr. for, at der findes en sammenhæng. n-dim. Lie gruppe $(G,\cdot,O,\mathfrak{O})$ således at en restriktion $\alpha' = \alpha|A'$, hvor $e \in A' \subseteq A$, er et kort tilh. $\mathfrak{O}$, er, at

(1) $\varphi = \alpha \circ \text{Komposition} \circ (\alpha,\alpha)^{-1}$, – Kompositionens restriktion til $\{(r,s) \in A \times A \mid rs \in A\}$ udtrykt ved α, – er analytisk i $(\alpha(e),\alpha(e))$,

(2) der findes en mgd. $B = B^{-1}$, hvor $e \in B \subseteq A$, så $\alpha(B)$ er åben og φ kontinuert i hv. punkt af $\alpha(B) \times \alpha(B)$, og en mgd. C, $e \in C \subseteq B$, der frembringer G, og hvor $\alpha(C)$ er sammenhæng.

Bevis. Findes der en sammenh. Lie gruppe som ønsket (og da i øvrigt kun den samme ifølg. første afsnit af paragraffen), og er $\alpha' = \alpha | A'$ en restriktion som omtalt, da er $\varphi' = \alpha' \circ \text{komp.} \circ (\alpha', \alpha')^{-1}$ analytisk, spec. i $(a(e), a(e))$, hvoraf (1) straks følger, idet φ' er en restriktion af φ. Med A' er også $(A' \times A') \cap \{(r,s) \mid rs \in A'\}$ åben og indeholder derfor en mængde $V \times W$, hvor V og W er åbne omegne af e. Mængden $B = V \cap V^{-1} \cap W \cap W^{-1}$ opfylder nu (2): det er klart, at $e \in B \subseteq A' \subseteq A$, at $B^{-1} = B$, at B og dermed $\alpha(B) = \alpha'(B)$ er åben; videre er $\alpha(B) \times \alpha(B) = (\alpha', \alpha')(B \times B)$ indeholdt i def.mængden for φ', hvorfor φ endda er analytisk i hv. pkt. af $\alpha(B) \times \alpha(B)$; endelig findes en åben mgd. C, $e \in C \subseteq B$, så $\alpha(C)$ er sammenh., som omegn af e frembr. den G.

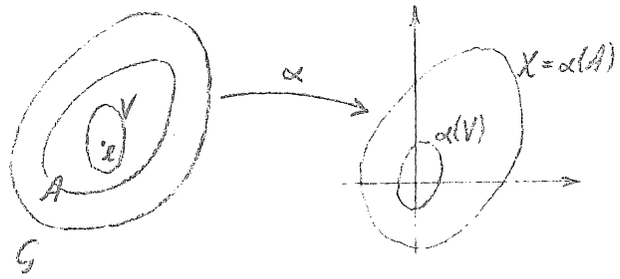
Betingelserne (1) og (2) er altså nødv. Mere interessant er det, at de er tilstr.

Bevis. Vi antager (1) og (2) opfyldt og betegner med B en mængde som omtalt i (2). Lad os endvidere forudsætte $\alpha(e) = (0, \dots, 0)$, -(ellers kan vi erstatte α med α efterfulgt af en parallelforskydning).

1. Vi vil først indføre en topologi $\mathcal{O}$ i G, så $(G, \cdot, \mathcal{O})$ er en topologisk gruppe. Hertil sætter vi

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq A \mid \alpha(V) \text{ er en omegn af } (0, \dots, 0)\}$$

og verificerer, at betingelserne I - V s. 41 er opfyldt.



I og II. Er V^* og W^* omegne af $(0, \dots, 0)$, indeholdt i $\alpha(A) = X$, vil også $V^* \cap W^*$ være det. Da $(0, \dots, 0)$ ifølg. (1) eller lettere ifølg. (2) er indre pkt. af $\alpha(A) = X$, findes der omegne af $(0, \dots, 0)$ indeholdt i X, bl.a. X selv, og fællesmængden af dem alle er $\{(0, \dots, 0)\}$. Da $\alpha: A \to X$ er bijektiv, slutter vi straks I og II.

III. Da $(0, .., 0, 0, .., 0)$ er indre pkt. i definitionsmgden M for φ, og φ er kontin. i pkt.et med billedet $(0, .., 0)$, findes for et vilk. $W \in \mathcal{V}$ et åbent interval $\mathcal{J} \times \mathcal{J} \subseteq M$ omkring $(0, .., 0, 0, .., 0)$ med $\varphi(\mathcal{J} \times \mathcal{J}) \subseteq \alpha(W)$. Med $V = \alpha^{-1}(\mathcal{J}) \in \mathcal{V}$ har vi nu

$$V \times V \subseteq \{(st) \in A \times A \mid st \in A\}$$

og dermed for $s, t \in V$:

$$\alpha(st) = \varphi(\alpha(s), \alpha(t)) \in \alpha(W),$$

altså $st \in W$. Dette viser $VV \subseteq W$.

IV. Ganske som s. 40, anden spalte, ses, at

$$\begin{aligned} \varphi_1(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \varphi_n(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) &= 0 \end{aligned}$$

inden for et åbent interval $\mathcal{J}_0 \times \mathcal{J}_0 \subseteq M$ omkring $(0, .., 0, 0, .., 0)$ implicit bestemmer en i $(0, \dots, 0)$ analyt. afbildning ψ

$$(v_1, \dots, v_n) \xrightarrow{\psi} (w_1, \dots, w_n), \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{J}_0.$$

Nu er $\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha$ åbenbart afbildningen

$$s \to s^{-1}, \quad s \in \alpha^{-1}(\mathcal{J}_0),$$

thi med $t = (\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha)(s)$ er $t \in \alpha^{-1}(\mathcal{J}_0)$ og

$$\alpha(st) = \varphi(\alpha(s), \alpha(t)) = \varphi(\alpha(s), \psi(\alpha(s))) = (0, .., 0),$$

hvorfor $st = e$, altså $t = s^{-1}$.

For vilk. $W \in \mathcal{V}$ findes et interval $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_0$ omkring $(0, \dots, 0)$, så $\psi(\mathcal{J}) \subseteq \alpha(W)$. Med $V = \alpha^{-1}(\mathcal{J}) \in \mathcal{V}$ har vi nu

$$V^{-1} = (\alpha^{-1} \circ \psi \circ \alpha)(V) \subseteq W.$$

Først ved beviset for V får vi virkelig brug for (2):

Vi bemærker, at $BB \subseteq A$. Det følger af, at $\alpha(B)\times\alpha(B) = (\alpha,\alpha)(B\times B)$ er indeholdt i def.mængden for φ, altså

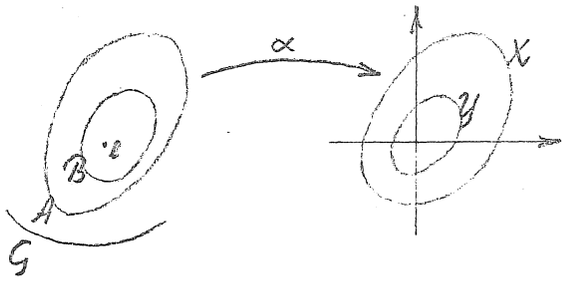
$$B\times B \subseteq \{(s,t)\in A\times A \mid st\in A\}$$

For vilk. $b\in B$ betragter vi restriktionen T_b^v/B til B af venstre transl. med b,

$$s \to bs, \quad s\in B.$$

Som følge af, at $BB\subseteq A$, er T_b^v/B en afbildn. af $B\subseteq A$ ind i A og kan da ved den bijektive afbildn. $\alpha: A\to X=\alpha(A)$ overføres i en afbildning τ_b^v af $Y=\alpha(B)$ ind i X,

$$\tau_b^v\circ\alpha = \alpha\circ(T_b^v/B)$$



For $s\in B$ er $\tau_b^v(\alpha(s)) = \alpha(bs) = \varphi(\alpha(b),\alpha(s))$, således at τ_b^v er afbildningen

$$(v_1,\dots,v_n) \to \varphi(\alpha(b),v_1,\dots,v_n),\ (v_1,\dots,v_n)\in Y,$$

og altså kontin. i def.mgd. Y, da φ er kont. i $Y\times Y$.

Vi sterer os, at da Y er åben, vil nu $\alpha(B\cap b^{-1}B) = (\tau_b^v)^{-1}(Y)$ være åben i Y og dermed i $\mathbb{R}^n$, og da $(0,..,0)$ er element, har vi

$$B\cap b^{-1}B \in \mathcal{V}.$$

Ovenstående kan gentages ord til ord for højre translationer, hvor vi benytter betegnelserne T_b^h/B og τ_b^h.

V. Vi viser først: $\forall_B b\ \forall_{\mathcal{V}} W\ \exists_{\mathcal{V}} V: bVb^{-1}\subseteq W$.

Idet $b\in B$, hvormed også $b^{-1}\in B$, betragter vi afbildningen

$$(T_{b^{-1}}^h/B)\circ(T_b^v/B)$$

som er $\quad s\to bsb^{-1}, \quad s\in B\cap b^{-1}B.$

Ved den bijektive afbildn. $\alpha: A\to X$ overføres den i $\tau_{b^{-1}}^h\circ\tau_b^v$,

$$\alpha\circ(T_{b^{-1}}^h/B)\circ(T_b^v/B) = \tau_{b^{-1}}^h\circ\tau_b^v\circ\alpha.$$

Nu er $\tau_{b^{-1}}^h\circ\tau_b^v$ kontin. i sin def.mgd. $(\tau_b^v)^{-1}(Y)$, som er åben, og den afbilder $(0,..,0)$ i $(0,..,0)$. For vilk. $W\in\mathcal{V}$ findes da et (åbent) interval $\mathcal{I}$ omkring $(0,..,0)$, så $(\tau_{b^{-1}}^h\circ\tau_b^v)(\mathcal{I})\subseteq\alpha(W)$. Med $V=\alpha^{-1}(\mathcal{I})\in\mathcal{V}$ har vi nu

$$\alpha((T_{b^{-1}}^h\circ T_b^v)(V)) = (\tau_{b^{-1}}^h\circ\tau_b^v)(\mathcal{I}) \subseteq \alpha W,$$

23.11 altså $\quad bVb^{-1}\subseteq W.$

Da C og dermed $B\supseteq C$ frembringer G, og da $B=B^{-1}$, vil $B\cup BB\cup BBB\cup\dots$ være lig G, idet det er en undergruppe af $(G,\cdot)$ indeholdende B.

Et vilk. $a\in G$ kan altså skrives $a=b_1b_2\dots b_k$ med $b_1,b_2,\dots,b_k\in B$. For vilk. $W\in\mathcal{V}$ findes nu ifølg. ovenstående et $V_1\in\mathcal{V}$, så

$$b_1V_1b_1^{-1}\subseteq W.$$

Videre findes $V_2\in\mathcal{V}$, så $b_2V_2b_2^{-1}\subseteq V_1$,

osv. $\quad\vdots\qquad\vdots$

sluttelig $V=V_k\in\mathcal{V}$, så $b_kV_kb_k^{-1}\subseteq V_{k-1}$.

Men så er

$$aVa^{-1} = b_1b_2\dots b_{k-1}b_kV_kb_k^{-1}b_{k-1}^{-1}\dots b_2^{-1}b_1^{-1}\subseteq W.$$

Vi kan altså, jfr. s. 42, indføre en og kun en topologi $\mathcal{O}$ i G, så $(G;\mathcal{O})$ er en topologisk gruppe og $\mathcal{V}$ en basis for omgangene af e.

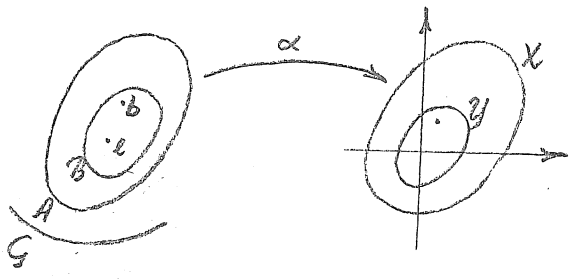
2. Bemærkninger vedrørende den topologiske gruppe $(G;\mathcal{O})$:

Det er efter definitionen af $\mathcal{V}$ klart, at α^{-1} er kontin. i $(0,..,0) = \alpha(e)$, ligesom man ser, at α er kontin. i e, da for hver omegn U af $(0,..,0)$ i $\mathbb{R}^n$ haves

$$\alpha^{-1}(U) = \alpha^{-1}(U \cap X) \in \mathcal{V},$$

med benyttelse af, at $X = \alpha(A)$ selv er en omegn af $(0,..,0)$, som bemærket under II.

Vi påstår imidlertid, at restriktionen $\beta = \alpha|B$ er et kort i det topol. rum $(G,\mathcal{O})$.



Vi ved iflg. forudsætn., at $\beta: B \to Y = \alpha(B)$ er bijektiv, og at Y er åben i $\mathbb{R}^n$.
For vilk. $b \in B$ har vi s. 45 noteret, at $B \cap b^{-1}B \in \mathcal{V}$. Men så er $bB \cap B$ og dermed B en omegn af b. Dette viser, at B er åben.

For vilk. $b \in B$ har vi videre, jfr. s. 45,

$$\tau_b^{\mathcal{V}} \circ \alpha = \alpha \circ (T_b^{\mathcal{V}}|B)$$

og dermed

$$\tau_b^{\mathcal{V}} \circ \alpha \circ T_{b^{-1}}^{\mathcal{V}} = \alpha|bB.$$

Da nu α er kontin. i e, slutter vi, at restriktionen til den åbne mgd. bB og dermed α selv er kontin. i b.

Af

$$\alpha^{-1} \circ \tau_{b^{-1}}^{\mathcal{V}} = (T_{b^{-1}}^{\mathcal{V}}|B) \circ \alpha^{-1}$$

fås

$$T_b^{\mathcal{V}} \circ \alpha^{-1} \circ \tau_{b^{-1}}^{\mathcal{V}} = \alpha^{-1}|Y = \beta^{-1},$$

og da α^{-1} er kontin. i $(0,..,0)$, slutter vi, at α^{-1} også er kontin. i $\alpha(b)$, der jo kan opfattes som vilk. pkt. i Y.

Sidste bemærkn. er, at β's komp. $\circ(\beta,\beta)^{-1}$ er analytisk i $(\beta(e),\beta(e)) = (0,..,0,0,..,0)$, thi det er restriktionen af φ til den åbne mængde $(\beta,\beta)((B\times B) \cap \{(s,t) \mid st \in B\})$ omkring $(0,..,0,0,..,0)$.

Endelig viser vi, at det top. rum $(G,\mathcal{O})$ er sammenhængende.

Som billede af $\alpha(C)$ ved en kontin. afbildn., nemlig β^{-1}, er C og dermed også C^{-1} sammenhængende. Dette gælder også $\mathcal{D} = C \cup C^{-1}$, da C og C^{-1} har et fælles pkt., e. Idet C og dermed også $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{-1}$ frembringer G, har vi

$$G = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}\mathcal{D} \cup \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{D} \cup \dots .$$

Er delmængder E og F af G sammenhængende i $(G,\mathcal{O})$, så er $E\times F$ sammenhængende i $(G,\mathcal{O})\times(G,\mathcal{O})$, og billedet heraf ved kompositionen $(s,t) \to st$, som jo er kontin., er EF, som følgelig er sammenhængende.
Vi kan da ved induktion slutte, at $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{D}$, ... alle er sammenhængende, og da de har et fælles pkt, e, er deres forening G det også.

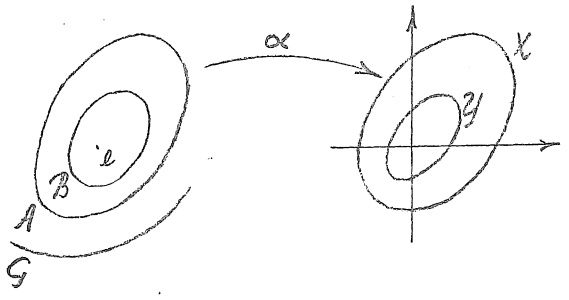
3. Beviset afsluttes ved at anvende følgende sætning på den topologiske gruppe $(G;\mathcal{O})$ og kortet β:

Sætn. *Lad $(G;\mathcal{O})$ være en sammenhængende topologisk gruppe og $\alpha: A \to \mathbb{R}^n$ et kort der afbilder e, hvor $\varphi = \alpha \circ \text{kompos.} \circ (\alpha,\alpha)^{-1}$ er analytisk i $(\alpha(e),\alpha(e))$.*

Da findes en (og kun en) Lie gruppe $(G;\mathcal{O},\mathcal{O}_f)$, således at en restriktion $\gamma = \alpha|C$, hvor $e \in C \subseteq A$, er et kort tilhørende $\mathcal{O}_f$.

Bevis. Det er kun eksistensen, der skal vises. Vi kan antage $\alpha(e) = (0,..,0)$, - nogen egentlig lettelse giver det dog ikke.

Da φ er analytisk i $(0,..,0,0,..,0)$, så også i hvert pkt. af en omgn. Der findes derfor en åben mgd. B, hvor $e \in B \subseteq A$, så φ er analytisk i hvert pkt af $\alpha(B) \times \alpha(B)$.



Som side 45 har vi $BB \subseteq A$. For vilk. $b \in B$ er derfor $T_b^v | B$ en afbildn. af $B \subseteq A$ ind i A og kan da ved kortet α overføres i en afbildn. τ_b^v af $Y = \alpha(B)$ ind i $X = \alpha(A)$,

$$\tau_b^v = \alpha \circ (T_b^v | B) \circ \alpha^{-1}.$$

Afbildningen τ_b^v er

$$(v_1,..,v_n) \to \varphi(\alpha(b), v_1,..,v_n), \quad (v_1,..,v_n) \in Y,$$

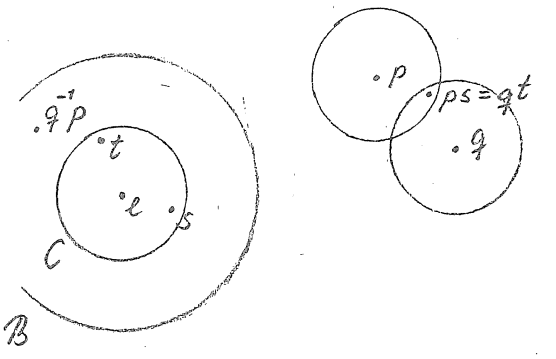
og altså analytisk i def.mgden Y, da jo φ er analytisk i $Y \times Y$.
Tilsvarende gælder $\tau_b^h = \alpha \circ (T_b^h | B) \circ \alpha^{-1}$.

Lad nu C være en åben omgn af e, så $CC^{-1} \subseteq B$ og dermed $C \subseteq B$, $C^{-1} \subseteq B$. Eksistensen følger af, at $(s,t) \to st^{-1}$, $(s,t) \in G \times G$, er kontin. spec. i (e,e). Da er $\gamma = \alpha | C$ et kort, der afbilder e, og for vilk. $p \in G$ er $\gamma \circ T_{p^{-1}}^v$ et kort, der afbilder p. Atlasset

$$\{\gamma \circ T_{p^{-1}}^v \mid p \in G\}$$

<u>dækker</u> altså G. Vi påstår, det er <u>analytisk</u>:

Kortene $\rho = \gamma \circ T_{p^{-1}}^v$ og $\sigma = \gamma \circ T_{q^{-1}}^v$ er i hvert fald analytisk forbundne, hvis $pC \cap qC = \emptyset$. Vi skal derfor vise, at koordinattransformationen $\sigma \circ \rho^{-1}$ (af symmetrigrunde er det overflødigt også at betragte $\rho \circ \sigma^{-1}$) er analytisk under forudsætning af, at pC og qC har et fælles pkt., dvs. et pkt., der kan skrives dels på formen ps med $s \in C$, dels qt med $t \in C$. Men så er $q^{-1}p = ts^{-1} \in B$, hvorfor $\alpha \circ (T_{q^{-1}p}^v | B) \circ \alpha^{-1} = \tau_{q^{-1}p}^v$ er analytisk



Nu er $\sigma \circ \rho^{-1} = (\gamma \circ T_{q^{-1}}^v) \circ (\gamma \circ T_{p^{-1}}^v)^{-1}$
$= \gamma \circ T_{q^{-1}}^v \circ T_p^v \circ \gamma^{-1} = \gamma \circ T_{q^{-1}p}^v \circ \gamma^{-1} = \gamma \circ (T_{q^{-1}p}^v | B) \circ \gamma^{-1}$
imidlertid en restriktion af $\tau_{q^{-1}p}^v$ til en åben mængde og følgelig analytisk.

Vi sætter $\mathcal{G}$ lig med udvidelsen af

$$\{\gamma \circ T_{p^{-1}}^v \mid p \in G\}$$

til maksimalt analytisk atlas i $(G,0)$. Beviset vil da være afsluttet, hvis vi kan vise, at kompositionen $(s,t) \to st$, $(s,t) \in G \times G$, er en anal. afbildn. af $(G,0,\mathcal{G}) \times (G,0,\mathcal{G})$ ind i $(G,0,\mathcal{G})$.

Først bemærker vi, at kompos. er analyt. i (e,e), thi $\gamma \circ$ komp. $\circ (\gamma,\gamma)^{-1}$ er en restriktion af φ til en åben omegn af $(0,..,0,0,..,0)$ og dermed analytisk i dette pkt.

Idet koordinatudtrykket for $(u,v) \to uv$ ved kortene $(\gamma \circ T_{p^{-1}}^v, \gamma \circ T_{q^{-1}}^v)$ og $\gamma \circ T_{(pq)^{-1}}$ er det samme som for

$$(s,t) \to (pq)^{-1} ps\, qt = q^{-1} s\, qt$$

ved kortene (γ,γ) og γ, ser man, at kompositionen er analytisk i (p,q), netop hvis sidstnævnte afbildn. er analytisk i (e,e).

Idet vi opfatter afbildningen som sammensat, mener

$$(s,t) \to (q^{-1}sq, t)$$

efterfulgt af kompos., som jo vides at være analytisk i $(g^{-1}\cdot g, e) = (e,e)$, ser man, at det er nok at vise, at

$$s \to g^{-1} s\, g$$

er analytisk i e.

Vi betragter først tilfældet $s \to b^{-1} s\, b$, hvor $b \in B \cap B^{-1}$. Idet afbildningen er $T^v_{b^{-1}} \circ T^h_b$, gælder det om at vise, at

$$\gamma \circ T^v_{b^{-1}} \circ T^h_b \circ \gamma^{-1}$$

er analytisk i $(0,..,0)$, hvilket imidlertid følger af, at denne afbildn. i en omgn af $(0,..,0)$ falder sammen med

$$\alpha \circ (T^v_{b^{-1}}/B) \circ \alpha^{-1} \circ \alpha \circ (T^h_b/B) \circ \alpha^{-1} = \tau^v_{b^{-1}} \circ \tau^h_b,$$

som vides at være analytisk.

Da gruppen er sammenhængende og $B \cap B^{-1}$ en omgn af e, findes nu iflg. s. 43 for vilk. $g \in G$ elementer $b_1, b_2, .., b_k \in B \cap B^{-1}$, så $g = b_1 b_2 .. b_k$. Og da hver af afbildningerne

$$s \to b_i^{-1} s\, b_i$$

er analytisk i e med billede e, er den sammensatte

$$s \to b_k^{-1} .. b_2^{-1} b_1^{-1} s\, b_1 b_2 .. b_k = g^{-1} s\, g$$

det også.

Nu dens vi oprindelig (s. 43 ff) betragtede den opgave i en gruppe at indføre både topologi og atlas, omhandler den sidste sætning (s. 46) problemet at supplere med et atlas, når også topologien på forhånd er givet. Et par ord mere herom:

Lad $(G, \cdot, O)$ være en topologisk gruppe. Vi spørger efter atlas $\mathcal{O}_f$, så $(G, \cdot, O, \mathcal{O}_f)$ er en Lie gruppe.

1. Der findes højst et!

Dette resultat vil vi vise senere. Da en Lie gruppe $(G, \cdot, O, \mathcal{O}_f)$ således er bestemt ved den indgående topologiske gruppe $(G, \cdot, O)$, bruges navnet Lie gruppe ofte om denne. Sml. i øvrigt et eksempel s. 27.

2. En selvklar nødv. betingelse for eksistens er, at der overhovedet findes et kort i (G, O), altså at det neutrale element e (og dermed hvert pkt. af G) har en åben omgn homeomorf med et talrum $\mathbb{R}^n$. En topologisk gruppe med denne egenskab kaldes <u>lokalt euklidisk</u>.

Skulle betingelsen mon være tilstr.? Spørgsmålet blev stillet af D. Hilbert i året 1900 (Hilberts 5. problem) og besvaret 1952 af Gleason, Montgomery og Zippin, bekræftende!

§4. Isomorfi og lokal isomorfi.

Lad $(G,\circ,\mathcal{O})$ og $(G',\circ',\mathcal{O}')$ være Lie grupper.

Er Φ en homomorf afbildning af $(G,\cdot)$ ind i $(G',\cdot')$, altså

$$\forall_{G}\, p,q:\ \Phi(pq)=\Phi(p)\Phi(q),$$

vil Φ være analytisk $(G,\circ,\mathcal{O})$ til $(G',\circ',\mathcal{O}')$ blot Φ er analytisk i ét pkt., f.eks. i det neutrale element $e\in G$.

At Φ er analytisk i $p\in G$, ses nemlig da af

$$T^{v}_{\Phi(p)}\circ\Phi\circ T^{v}_{p^{-1}}=\Phi,$$

hvor $T^{v}_{p^{-1}}$ betegner venstre translation med p^{-1}, og analogt.

En afbildning $\Phi: G\to G'$ regnes naturligt for en isomorf afbildning af $(G,\circ,\mathcal{O})$ på $(G',\circ',\mathcal{O}')$, hvis Φ er isomorf $(G,\cdot)$ på $(G',\cdot)$, samt bianalytisk $(G,\circ,\mathcal{O})$ på $(G',\circ',\mathcal{O}')$ - og dermed homeomorf $(G,\mathcal{O})$ på $(G',\mathcal{O}')$.

I bekræftende fald kalder vi Φ en bianalytisk isomorfi af $(G,\circ,\mathcal{O},\cdot)$ på $(G',\circ',\mathcal{O}',\cdot')$.

Vi bemærker, at en afbildning Φ, der er isomorf $(G,\cdot)$ på $(G',\cdot')$ vil være bianalytisk, blot der findes ét kort $\sigma'\in\mathcal{O}'$, så $\sigma'\circ\Phi\in\mathcal{O}$, se side 40, eller blot Φ er analytisk i e og Φ^{-1} er analytisk i e'; der gælder nemlig:

Eksempel. Exponentialfunktionen $t\to e^{t}$, $t\in\mathbb{R}$, er en bianalytisk isomorfi af $\mathbb{R}$ med addition, sædv. topologi og atlas på $\mathbb{R}_{+}$ med multiplikation, sædv. topologi og naturligt atlas.

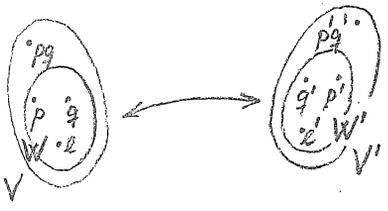
Lad nu V og V' være åbne omegne af de neutrale elementer e og e' i Lie grupperne $(G,\circ,\mathcal{O},\cdot)$ og $(G',\circ',\mathcal{O}',\cdot')$.

En bijektiv afbildning $\Phi: V\to V'$ vil vi kalde en lokal bianalytisk isomorfi af V på V', hvis Φ er bianalytisk og der for korresponderende elementer $p,q\in V$ og $p',q'\in V'$, dvs. elementer hvor $\Phi(p)=p'$ og $\Phi(q)=q'$, gælder:

$$pq\in V \iff p'q'\in V'$$

og i bekræftende fald de to elementer pq og $p'q'$ er korresponderende, $\Phi(pq)=p'q'$.

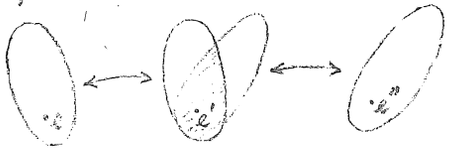
Bemærkning. Er Φ en lokal bianalytisk isomorfi af V på V' og $W\subseteq V$ en åben omegn af e, da er $\Phi|W$ en lokal bianalytisk isomorfi af W på $W'=\Phi(W)$.



Lie grupperne $(G,\circ,\mathcal{O},\cdot)$ og $(G',\circ',\mathcal{O}',\cdot')$ kaldes lokalt (bianalytisk) isomorfe, hvis der findes en lokal bianalytisk isomorfi mellem åbne omegne V og V' af de neutrale elementer e og e'.

Herved defineres en ækvivalensrelation i klassen af Lie grupper.

Øvelse: Vis det - Man kan benytte bemærkningen ovenfor.
(Refleksivitet:

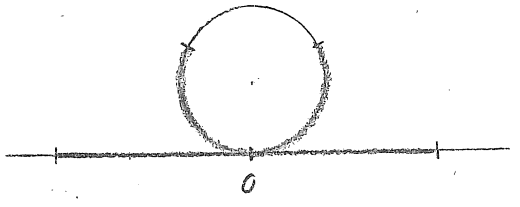


.)

Øvelse: Vis, at to Lie grupper er lokalt (bianalytisk) isomorfe, hvis og kun hvis der i atlassene findes kort σ og σ', der afbilder e og e', så $\sigma\circ\text{komp.}\circ(\sigma,\sigma)^{-1}=\sigma'\circ\text{komp}'\circ(\sigma',\sigma')^{-1}$

Er to Lie grupper bianalytisk isomorfe, så er de naturligvis også lokalt bianalytisk isomorfe, men det omvendte gælder ikke.

Eksempel. Lie grupperne $\dot{R}$ og $\dot{T}$ (cirkelperiferien) med sædv. addition og topologi samt naturligt atlas er lokalt bianalytisk isomorfe, – en åben bue på op til 240°,



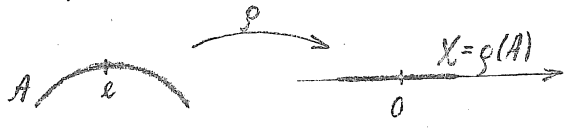
symmetrisk om 0, kan afbildes lokalt bianalytisk isomorft på et interval symmetrisk om 0 –, men grupperne $(\dot{R},+)$ og $(\dot{T},+)$ er end ikke (algebraisk) isomorfe.

Tilsvarende gælder $\dot{R}^n$ og $\dot{T}^n$.

For topologiske grupper kan i analogi med ovenstående indføres begreberne homeomorf isomorfi og lokal homeomorf isomorfi.

Vi vil afslutte kapitel III med til illustration at betragte 1-dim. Lie grupper. Det vil vise sig, at de alle er lokalt bianalytisk isomorfe.

Lad da $(G,\cdot,0,\mathcal{O})$ være en 1-dim. Lie-gruppe, og lad $\varphi: A \to \dot{R}$ være et kort tilh. $\mathcal{O}$, der afbilder e, og hvor $\varphi(e)=0$.



Da er $\varphi = \varphi \circ \text{Komp.} \circ (\varphi,\varphi)^{-1}$ en reel fkt. af to reelle variable, analytisk i sin def.mgd.

$$M = (\varphi,\varphi)\{(p,q) \in A\times A \mid pq \in A\}.$$

Er u,v og w koordinater til pktr. p,q og r, som tilligemed pq, qr og pqr tilh. A, har vi i kraft af den ass. lov $(pq)r = p(qr)$:

$$\varphi(\varphi(u,v),w) = \varphi(u,\varphi(v,w)).$$

Denne ligning gælder altså for (u,v,w) tilhørende en åben mgd. i $\dot{R}^3$, nemlig billedet ved $(\varphi,\varphi,\varphi)$ af

$$\{(p,q,r) \in A\times A\times A \mid pq\in A \wedge qr\in A \wedge pqr\in A\}.$$

Man bemærker, at $(u,v,0)$ tilhører denne mgd., netop hvis $(u,v)\in M$. Ved differentiation m.h.t. w ud fra punktet $(u,v,0)$ fås da

$$\mathcal{D}_2\varphi(\varphi(u,v),0) = \mathcal{D}_2\varphi(u,\varphi(v,0))\,\mathcal{D}_2\varphi(v,0),$$

altså, idet $\varphi(v,0)=v$,

$$(1)\quad \mathcal{D}_2\varphi(\varphi(u,v),0) = \mathcal{D}_2\varphi(u,v)\,\mathcal{D}_2\varphi(v,0),$$

gældende for $(u,v)\in M$.

Vi vil vise, at man ved at erstatte φ med et passende kort $\sigma\in\mathcal{O}$, med $\sigma(e)=0$, hvorved φ erstattes med en fkt. χ, kan opnå, at $\mathcal{D}_2\chi$ er konstant $=1$. Ifølge (1) er det tilstrækkeligt, at dette opnås på 1. akse.

Først bemærkes, at idet $\mathcal{D}_2\varphi(0,0)=1$, kan vi antage $\mathcal{D}_2\varphi(u,0)>0$ for hvert $u\in X=\varphi(A)$, idet vi ellers erstatter φ med en restriktion. Vi kan videre antage, at X er et interval.

For en vilk. funktion $f: X\to\dot{R}$ med $f(0)=0$, som er analytisk med $\mathcal{D}f(u)\neq 0$ for hvert $u\in X$ og dermed injektiv (nemlig monoton), har vi:

$\sigma = f\circ\varphi$ tilhører $\mathcal{O}$ ifølge s. 25, sætn. 1, og $\sigma(e)=0$. Med $\chi = \sigma\circ\text{Komp.}\circ(\sigma,\sigma)^{-1}$ har vi for $(u,v)\in M$

$$f(\varphi(u,v)) = \chi(f(u),f(v)),$$

thi med $p=\varphi^{-1}(u)$ og $q=\varphi^{-1}(v)$ er $\varphi(u,v)$ den gamle og venstre side altså den nye koordinat til pq, men det er højre side også, da jo $f(u)$ og $f(v)$ er de nye koordinater til p og q.

Ved differentiation m.h.t. v ud fra $(u,0)$ får vi for $u\in X$

$$(2)\quad \mathcal{D}f(u)\,\mathcal{D}_2\varphi(u,0) = \mathcal{D}_2\chi(f(u),0)\,\mathcal{D}f(0).$$

Idet vi nu som koordinattransformation f vælger funktionen

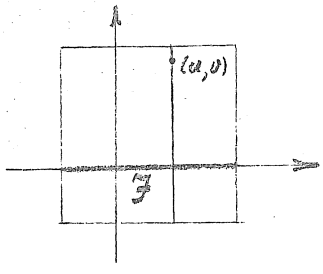
$$u \to \int_0^u \frac{1}{D_2\varphi(t,0)}\,dt, \quad u \in X,$$

der jo har de anførte egenskaber, opnås ifølg. (2), at $D_2\chi$ er konstant $= 1$ på 1. akse (nøjagtigt: i pkt.rne $(u,0)$, hvor u tilhører intervallet $Y = f(X) = \sigma(A)$) og dermed ifølg. (1) med χ i stedet for φ:

$D_2\chi$ er konstant $= 1$ i defmængden $N = (\sigma,\sigma)\{(p,q) \in A\times A \mid pq \in A\}$ for χ.

Da N er åben, findes et åbent interval $\mathcal{I} \subseteq Y$ omkring 0, så $\mathcal{I}\times\mathcal{I} \subseteq N$. Og af $D_2\chi = 1$ i forbindelse med $\chi(u,0) = u$ for $u \in \mathcal{I}$ sluttes

$$\chi(u,v) = u+v \quad \text{for } u,v \in \mathcal{I}.$$



Det verificeres nu, at kortet $\tau = \sigma|V$, hvor $V = \sigma^{-1}(\mathcal{I})$, er en lokal bianalytisk isomorfi af V på $\mathcal{I} \subseteq \dot{R}$, idet $\dot{R}$ betragtes med sædv. addition, topologi og naturligt atlas. Ethvert kort tilhørende atlasset i en analyt. mangfoldighed er nemlig en bianalytisk afbildning af defmængden på billedmængden, når talrummet på sædv. måde betragtes som analytisk mangfoldighed. *)

Og med $u = \tau(p)$, $v = \tau(q)$, $p,q \in V$ gælder

$$\sigma(pq) = \chi(u,v) = u+v,$$

hvorfor

$$pq \in V \iff u+v \in \mathcal{I};$$

i bekræftende fald kan vi skrive $\tau(pq) = u+v$.

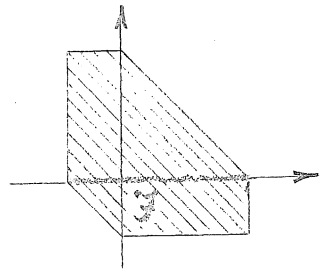
*) Ved at føre den identiske afbildn. af billedmgd tilbage ved kortet fås jo et kort i atlasset, jfr. sætn. s. 33.

Alle 1-dim. Lie grupper er altså lokalt bianalytisk isomorfe med $\dot{R}$ betragtet med sædv. addition og topologi samt nat. atlas og dermed indbyrdes lokalt bianalytisk isomorfe.

Bemærk, at koordinatudtrykket for (en restriktion af) gruppekompositionen ved τ kendes helt explicit, det er afbildningen

$$(u,v) \to u+v$$

med def.mgd. $\{(u,v) \in \mathcal{I}\times\mathcal{I} \mid u+v \in \mathcal{I}\}$.
Figuren viser def.mgd. og niveaukurver:



Vi nævner, at ved (global) bianalytisk isomorfi er der netop 2 klasser af sammenhængende 1-dim. Lie grupper, repræsenteret ved $(\dot{R},+)$ og $(\dot{T},+)$ med sædv. topologi og naturligt atlas.

Som eksempel på en 1-dim. Lie gruppe, der ikke er sammenhængende, kan nævnes $\dot{R}\times\dot{Z}$ med kompositionen

$$(u_1,z_1) + (u_2,z_2) = (u_1+u_2, z_1+z_2),$$

medens sædv. topologi og naturl. atlas for $\dot{R}$ overføres til hver mængde $\dot{R}\times\{z\}$, $z \in \dot{Z}$.

Her kan $(\dot{Z},+)$ erstattes med en hvilkensomhelst gruppe!

Øvelse: Find en velkendt Lie gruppe, som er bianalytisk isomorf med $\dot{R}\times\dot{Z}_2$ med ovennævnte kompos., topologi og atlas.
(jfr. s.12 $(\dot{R}\setminus\{0\}$ med multipl., sædv topol og nat. atlas.)

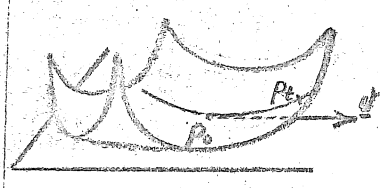
IV. Tangentvektorer og differentialer.

§1. Indledning.

Lad p_0 være et pkt. på en analytisk flade S (delmængde af $\mathbb{R}^3$, som dækkes af sit naturlige 2-dim. analytiske atlas $\mathcal{H}_2$).

Fladen har en tangentplan i p_0. De geometriske vektorer i denne vil vi her (i §1) kalde tangentvektorer i p_0; vi har til hensigt at søge dem repræsenteret, så en generalisering til en vilk. analytisk mangfoldighed muliggøres.

Lad nu $\underline{v}$ være en tangentvektor i p_0 og f en reel funktion defineret på en del af fladen og analytisk i p_0 (se s. 28).



Vi lægger en bane $t \to p_t$ på fladen, så til $t=0$ svarer p_0 og $\left(\frac{d\overrightarrow{op_t}}{dt}\right)_{t=0} = \underline{v}$, dvs. vi betragter en "bevægelse" gennem p_0 med "hastighed" $\underline{v}$, og vil så se på, hvor hurtigt f (man kan f.eks. tænke sig, at f angiver temperaturen) ændres, idet p_0 passeres, nøjagtigt: vi vil betragte

(1) $$\left(\frac{df(p_t)}{dt}\right)_{t=0}.$$

Vi vil først gøre rede for, at denne størrelse eksisterer (under naturlige forudsætninger om banen). Er nemlig $\sigma = (x_1, x_2) \in \mathcal{H}_2$ et kort, der afbilder p_0, vil hver koordinat $x_i(p_t) = h_i(t)$, $i = 1,2$, til p_t og dermed

$$f(p_t) = f^\sigma(h_1(t), h_2(t))$$

være en analytisk fkt. af t i $t=0$.

Dernæst viser vi, at $\left(\frac{df(p_t)}{dt}\right)_{t=0}$ er uafh. af vilkårligheden i valg af bane, altså bestemt ved $\underline{v}$ og f. Er nemlig σ et kort som før, hvor vi for simpelheds skyld antager $\sigma(p_0) = (0,0)$, og opfatter vi $\sigma^{-1} = (g_1, g_2, g_3)$ som en funktion $\underline{r}$ med vektorer som værdier, er $D_1\underline{r}(0,0)$ og $D_2\underline{r}(0,0)$ en basis for vektorerne i tangentplanen i p_0. Vi betegner koordinaterne til $\underline{v}$ m.h.t. denne basis med (v_1, v_2). Idet $\overrightarrow{op_t} = \underline{r}(h_1(t), h_2(t))$, har vi

$$\underline{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{op_t}}{dt}\right)_{t=0} = D_1\underline{r}(0,0)\,Dh_1(0) + D_2\underline{r}(0,0)\,Dh_2(0),$$

altså $$(Dh_1(0), Dh_2(0)) = (v_1, v_2).$$

Sammenholdt med

$$\left(\frac{df(p_t)}{dt}\right)_{t=0} = D_1f^\sigma(0,0)\,Dh_1(0) + D_2f^\sigma(0,0)\,Dh_2(0)$$

giver dette

(2) $$\left(\frac{df(p_t)}{dt}\right)_{t=0} = D_1f^\sigma(0,0)\,v_1 + D_2f^\sigma(0,0)\,v_2,$$

hvoraf fremgår, at størrelsen har samme værdi for enhver bane af den betragtede art.

Vi indfører to betegnelser for størrelsen (1), $L_{\underline{v}}(f)$ og $df(\underline{v})$ eller, om det findes fornødent at nævne punktet p_0, $df_{p_0}(\underline{v})$. Udtrykket (2) for størrelsen ved et kort σ er nyttigt. Vi bemærker, at størrelsen, når $\underline{v}$ er en enhedsvektor, naturligt kan opfattes som den retningsafledede af f i $\underline{v}$'s retning.

For fastholdt f er $\underline{v} \to df(\underline{v})$ en reel funktion, defineret på vektorrummet T_{p_0} af tangentvektorer i p_0. Den kaldes <u>differentialet af f i p_0</u> og betegnes df eller df_{p_0}. Af (2) fremgår, at df er lineær.

For øjeblikket vil vi imidlertid interessere os mere for afbildningen $f \to L_{\underline{v}}(f)$, hvor $\underline{v}$ er en fastholdt tangentvektor i p_0, medens f gennemløber mængden $\mathcal{O}_{p_0}$ af reelle funktioner, som er analytiske i p_0. Vi betegner den med $L_{\underline{v}}$. Der gælder

1) $L_{\underline{v}}(af+bg) = aL_{\underline{v}}(f) + bL_{\underline{v}}(g)$

for $f,g \in \mathcal{A}_{p_0}$ og $a,b \in \mathbb{R}$.

2) $L_{\underline{v}}(fg) = L_{\underline{v}}(f)g(p_0) + f(p_0)L_{\underline{v}}(g)$

for $f,g \in \mathcal{A}_{p_0}$,

som man kan se ved at vælge et kort σ og benytte (2).

Nu er mængden S_{p_0} af funktioner $L: \mathcal{A}_{p_0} \to \mathbb{R}$, som tilfredsstiller 1) og 2) skrevet uden indeks $\underline{v}$, med naturlig addition og multiplikation/et vektorrum (nemlig et underrum af $(\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_{p_0} \to \mathbb{R}), +, \mathbb{R})$). I et senere, mere alment resultat (s. 55) vil være indeholdt, at $\dim S_{p_0} = 2$.

Idet $L_{a\underline{u}+b\underline{v}} = aL_{\underline{u}} + bL_{\underline{v}}$, stadig i kraft af (2), er

(3) $\qquad \underline{v} \to L_{\underline{v}}, \quad \underline{v} \in T_{p_0}$,

en lineær afbildn. af vektorrummet $(T_{p_0}, +, \mathbb{R})$ af tangentvektorer i p_0 ind i $(S_{p_0}, +, \mathbb{R})$. Afbildningen er injektiv, thi for $(v_1, v_2) \neq (0,0)$ findes a_1, a_2, så $a_1v_1 + a_2v_2 \neq 0$, og med $f^0(u_1,u_2) = a_1u_1 + a_2u_2$ for (u_1,u_2) tilhørende en omegn af $(0,0)$ er $L_{\underline{v}}(f) = a_1v_1 + a_2v_2 \neq 0$ og dermed $L_{\underline{v}} \neq 0$. Da $\dim T_{p_0} = 2 = \dim S_{p_0}$ har vi da:

Afbildningen $\underline{v} \to L_{\underline{v}}$, $\underline{v} \in T_{p_0}$, er en isomorf afbildning af $(T_{p_0}, +, \mathbb{R})$ på $(S_{p_0}, +, \mathbb{R})$.

De geometriske vektorer i tangentplanen i punktet p_0 på en analytisk flade kan således repræsenteres af funktionerne $L: \mathcal{A}(p_0) \to \mathbb{R}$, som opfylder 1) og 2).

§2. Tangentvektorer.

Lad $(S, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ være en analytisk mangfoldighed og p et punkt i S. Vi betegner med $\mathcal{A}_p$ mængden af reelle funktioner i S (dvs. hvis definitionsområde er delmængde af S), som er analytiske i p, kort: mængden af i p analytiske funktioner. (Se s. 28, 29).

Definition: Ved en <u>tangentvektor</u> til den analytiske mangfoldighed i punktet p forstås en funktion $L: \mathcal{A}_p \to \mathbb{R}$, som opfylder

1) $L(af+bg) = aL(f) + bL(g)$

2) $L(fg) = L(f)g(p) + f(p)L(g)$

for $f,g \in \mathcal{A}_p$ og $a,b \in \mathbb{R}$.

Værdien $L(f)$ af en tangentvektor L for en funktion $f \in \mathcal{A}_p$ kaldes ofte, regnet uheldigt, den <u>retningsafledede</u> af f bestemt ved vektoren L. Navnet ville være rimeligt i tilfælde af, at L var en enhedsvektor, hvilket begreb imidlertid er uden mening.

Vi bemærker, at for en konstant funktion c, hvor p er indre pkt. i def.mængden, så $c \in \mathcal{A}_p$, er $L(c) = 0$ for enhver tangentvektor L.

Tillader vi os at betegne også funktionsværdien med c, har vi nemlig, idet vi først betragter tilfældet $c = 1$:

$$L(1) = L(1\cdot 1) = L(1)1 + 1L(1) = 2L(1)$$

altså $L(1) = 0$ og dermed

$$L(c) = L(c\cdot 1) = cL(1) = 0.$$

Videre bemærker vi, at stemmer f og g tilhørende $\mathcal{A}_p$ overens i en omegn af p, da er for hver tangentvektor L i p

$$L(f) = L(g).$$

Idet f og g har en fælles restriktion $h \in \mathcal{A}_p$, er det nok at vise $L(f) = L(h)$. Betg.

/ med reelle tal

ner vi med 1 dels tallet, dels den konstante fkt. med samme def.mgd. som h, har vi imidlertid

$$L(h) = L(1\cdot f) = L(1)f(p) + 1\cdot L(f) = L(f).$$

I mængden S_p af tangentvektorer i p har vi, idet der jo er tale om reelle funktioner, en naturlig addition og en multiplikation med reelle tal. Hermed organiseres S_p til et vektorrum. For $L, M \in S_p$ og $a \in \dot{R}$ er nemlig

$$L+M \in S_p \quad \text{og} \quad aL \in S_p,$$

hvorfor S_p er et underrum af $(\hat{F}(\mathcal{O}_p \to \dot{R}), +, \dot{R})$.

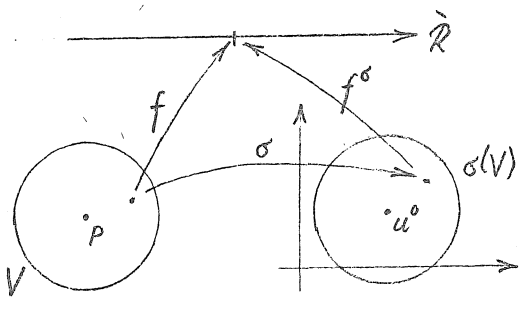
Vektorrummet $(S_p, +, \dot{R})$ kaldes <u>tangentvektorrummet</u> til den analytiske mangfoldighed i punktet p.

Lad nu $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \dot{R}^n$ være et vilk. kort tilhørende $\mathcal{O}_p$, som afbilder p. Vi sætter $\sigma(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) = (u_1^\circ, \dots, u_n^\circ) = u^\circ$.

For hver fkt. $f \in \mathcal{O}_p$ er $f^\sigma = f \circ \sigma^{-1}$, restriktionen af f til $A \cap V$, hvor A er def.mængden for f, udtrykt som funktion af koordinaterne i kortet σ, analytisk i $(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$, jfr. s. 28. Bemærk, at

$$f(q) = f^\sigma(x_1(q), \dots, x_n(q)) \quad \text{for } q \in A \cap V.$$

Omvendt svarer enhver reel fkt. af n reelle variable, som er analytisk i $(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$, og hvis def.mgd. er en del af $\sigma(V)$ til en fkt. i $\mathcal{O}_p$.



Man tillader sig ofte at undlade at skelne i betegnelse mellem fkt.n f og f^σ.

Det verificeres umiddelbart, at afbildningen

$$f \to D_i f^\sigma(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ), \quad f \in \mathcal{O}_p$$

opfylder 1) og 2), altså er en tangentvektor. Spec. fremgår 2) af

$$D_i(f^\sigma g^\sigma)(u^\circ) = g^\sigma(u^\circ) D_i f^\sigma(u^\circ) + f^\sigma(u^\circ) D_i g^\sigma(u^\circ).$$

Tangentvektoren betegnes $\underline{e}_i$, D_i eller $\frac{\partial}{\partial x_i}$, evt. tillige med en angivelse af pkt.et p. Således betyder altså $\underline{e}_i(f)$, $D_i f$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eller mere udførligt $D_i f(p)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p$ alle sammen $D_i f^\sigma(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$. Indeks i er et vilkårligt af tallene $1, \dots, n$.

Tangentvektorerne $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ er ikke blot vore første eksempler på egt. vektorer i tangentvektorrummet $(S_p, +, \dot{R})$; vi skal se, at de udgør en basis for dette.

Vi viser først, at $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ frembringer S_p, altså at en vilk. tangentvektor L kan skrives som linearkombination af dem.

For vilk. $f \in \mathcal{O}_p$ kan f^σ udvikles i potensrække ud fra $(u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$: i et åbent interval $\mathcal{I} \subseteq \sigma(V)$ med nidtpkt. i u° har vi

$$f^\sigma(u_1, \dots, u_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (u_i - u_i^\circ) + \sum_{i_1 + \dots + i_n \geq 2} a_{i_1 \dots i_n} (u_1 - u_1^\circ)^{i_1} \dots (u_n - u_n^\circ)^{i_n}$$

Her er $a_0 = f^\sigma(u^\circ) = f(p)$ og $a_i = D_i f^\sigma(u^\circ) = \underline{e}_i(f)$, $i = 1, \dots, n$. Leddene i den sidste sum samles i $\frac{1}{2}(n^2+n)$ portioner, en svarende til hvert (j,k) med $1 \leq j \leq k \leq n$, således at hvert af portionens led rummer $(u_j - u_j^\circ)(u_k - u_k^\circ)$. Opspaltningen er ikke entydig (men om man vil, kan man f. eks. bestemme, at det enkelte led skal tages med i portionen svarende til mindst muligt j og derpå mindst muligt k). Sætter man nu i rækken svarende til et (j,k) faktoren $(u_j - u_j^\circ)(u_k - u_k^\circ)$ uden for sumtegnet, står tilbage en potensrække, som er konvergent i $\mathcal{I}$, nemlig i hvert fald i pkt.erne $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{I}$ med $u_1 \neq u_1^\circ, \dots, u_n \neq u_n^\circ$,

men dermed i hele $\mathcal{F}$, jfr. s. 7, vi betegner sumfunktionen med g^σ_{jk}. Vi har da for $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}$

$$f^\sigma(u) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(u_i - u_i^\circ) + \sum_{1 \le j \le k \le n} g^\sigma_{jk}(u)(u_j - u_j^\circ)(u_k - u_k^\circ),$$

hvor hvert g^σ_{jk} er analytisk, spec. i $u^\circ = (u_1^\circ, \dots, u_n^\circ)$, og altså kan opfattes som $g_{jk} \circ \sigma^{-1}$, hvor g_{jk} tilhører $\mathcal{O}_p$ og har definitionsmængden $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$. Med andre ord har vi for $q \in \sigma^{-1}(\mathcal{F})$

$$f(q) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(x_i(q) - u_i^\circ) + \sum_{j \le k} g_{jk}(q)(x_j(q) - u_j^\circ)(x_k(q) - u_k^\circ),$$

altså

$$f|\sigma^{-1}(\mathcal{F}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - u_i^\circ) + \sum_{j \le k} g_{jk}(x_j - u_j^\circ)(x_k - u_k^\circ).$$

Da nu $\mathcal{L}(g_{jk}(x_j - u_j^\circ)(x_k - u_k^\circ))$

$$= \mathcal{L}(g_{jk}) \cdot 0 \cdot 0 + g_{jk}(p)\mathcal{L}(x_j) \cdot 0 + g_{jk}(p) \cdot 0 \cdot \mathcal{L}(x_k) = 0,$$

slutter vi $\quad \mathcal{L}(f) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}(x_i),$

dvs.

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(x_i) D_i f^\sigma(u^\circ) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(x_i) \underline{e}_i(f).$$

Resultatet kan også skrives

12.66 (1) $$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(x_i) \underline{e}_i .$$

Man bemærker, at en tangentvektor i p er bestemt ved de værdier, den tilordner koordinaterne i et kort tilh. $\mathcal{O}_f$, der afbilder p.

Vi viser dernæst, at sættet $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ er lineært uafhængigt. Idet x_i^σ er funktionen $(u_1, \dots, u_n) \to u_i$, $(u_1, \dots, u_n) \in \sigma(V)$, har vi

$$\underline{e}_j(x_i) = D_j x_i^\sigma(u^\circ) = \frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \begin{cases} 0 & \text{for } i = j \\ 1 & \text{for } i \neq j \end{cases},$$

og dermed $(\sum_{j=1}^n \lambda_j \underline{e}_j)(x_i) = \lambda_i$. Følgelig er $\sum_{j=1}^n \lambda_j \underline{e}_j$ kun 0-funktionen for $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Hermed er vist, at $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ er en basis for $(S_p, +, \dot{R})$, og af (1) aflæses så udtrykket for koordinater m.h.t. denne. Vi noterer:

Tangentvektorrummet $(S_p, +, \dot{R})$ til en n-dim analytisk mangfoldighed $(S, \mathcal{O}, \mathcal{G})$ i et pkt. $p \in S$ har dimensionen n.

Til et vilk. kort $\sigma = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_f$, der afbilder p, svarer en basis for $(S_p, +, \dot{R})$ bestående af tangentvektorerne $\underline{e}_i = D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, hvor

$$\underline{e}_i(f) = D_i f^\sigma(x_1(p), \dots, x_n(p)), \qquad f \in \mathcal{O}_p.$$

Koordinaterne m.h.t. denne basis for en vilk tangentvektor $\mathcal{L}$ i p er $\mathcal{L}(x_1), \dots, \mathcal{L}(x_n)$.

Iflg. §1 består i tilfælde af, at $(S, \mathcal{O}, \mathcal{G})$ er en analytisk flade, en naturlig isomorfi mellem vektorrummet $(T_p, +, \dot{R})$ af geometriske vektorer i tangentplanen i p og tangentvektorrummet $(S_p, +, \dot{R})$.

Betragtes den inverse afbildn. $\sigma^{-1} = (g_1, g_2, g_3)$ til et kort $\sigma \in \mathcal{O}_f$, der afbilder p, som en funktion $\underline{r}$ med vektorer som værdier, udgør $D_1 \underline{r}(\sigma(p))$ og $D_2 \underline{r}(\sigma(p))$ en basis for $(T_p, +, \dot{R})$, og hertil svarer netop, som det fremgår af (2), s. 52, ved den naturlige isomorfi basen $\underline{e}_i = D_i$, $i = 1, 2$, for $(S_p, +, \dot{R})$ hørende til kortet σ.

Ganske tilsvarende gælder for en delmgd. S af $\dot{R}^n$, betragtet med den inducerede topologi, som dækkes af sit naturlige k-dim. analytiske atlas.

Spec. for $k = n$ er $(T_p, +, \dot{R}) = (\dot{R}^n, +, \dot{R})$, og ved den naturlige isomorfi på $(S_p, +, \dot{R})$ svarer til en vilk. „geometrisk" vektor v afbildningen

$$f \to v \cdot \operatorname{grad} f(p), \qquad f \in \mathcal{O}_p.$$

som det f.eks. ses af (2), s. 52, idet den identiske afbildn. af S benyttes som σ.

For $k = n = 1$ svarer således til vilk. $v \in \dot{R}$ tangentvektoren i p

$$f \to v Df(p), \qquad f \in \mathcal{O}_p.$$

12.67

Idet vi igen betragter en vilk. n-dim. anal. mangfoldighed, $(S, \mathcal{O}, \mathcal{C})$, vil vi slutteligt undersøge det koordinatskifte i tangentvektorrummet $(S_p, +, \tilde{\cdot})$ i et pkt. p, der foranlediges af overgang fra et kort $\sigma \in \mathcal{C}$, der afbilder p, til et andet, τ.

Vi sætter $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau = (y_1, \dots, y_n)$ og $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1} = (y_1 \circ \sigma^{-1}, \dots, y_n \circ \sigma^{-1}) = (y_1^\sigma, \dots, y_n^\sigma)$, medens baserne i $(S_p, +, \tilde{\cdot})$ svarende til σ og τ betegnes henholdsvis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ og $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$.

For hver tangentvektor L i p er nu

$$L = \sum_{j=1}^{n} L(x_j)\, \underline{e}_j$$

og dermed

$$L(y_i) = \sum_{j=1}^{n} D_j y_i^\sigma(x_1(p), \dots, x_n(p))\, L(x_j),$$

dvs. $$v_i = \sum_{j=1}^{n} D_j y_i^\sigma(\sigma(p))\, u_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

hvor $(u_1, \dots, u_n)$ og $(v_1, \dots, v_n)$ er vektorens koordinater m.h.t. $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, henh. $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)$. Resultatet kan også skrives

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p u_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

idet jo $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p$ betyder $D_j y_i^\sigma(\sigma(p))$.

Skrivt i matrixligning er resultatet

$$\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{D}}\varphi \cdot \underline{\underline{u}},$$

hvor $\underline{\underline{D}}\varphi$ er funktionalmatricen

$$\begin{pmatrix} D_1 y_1^\sigma & \cdots & D_n y_1^\sigma \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 y_n^\sigma & \cdots & D_n y_n^\sigma \end{pmatrix}$$

taget i $\sigma(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$.

For de to baser sluttes heraf

$$(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n)\, \underline{\underline{D}}\varphi,$$

dvs. $$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p, \quad j = 1, \dots, n.$$

Øvelse. Vis den sidste ligning direkte. (For hvert $f \in \mathcal{O}_p$ er $f^\tau \circ \varphi$ en restriktion af f^σ, dermed $D_j f^\sigma(\sigma(p)) = \sum_i D_i f^\tau(\tau(p)) D_j y_i^\sigma(\sigma(p))$.)

NB. Vektoren $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ er givet ved kortet $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$, ikke, som betegnelsen kunne lade formode, ved funktionen x_i alene.

For en differentiabel mangfoldighed af klasse C^∞ defineres tangentvektor i et punkt ganske tilsvarende som i det analytiske tilfælde (s. 53), ligesom resultaterne ovenfor kan overføres. At $\underline{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $i = 1, \dots, n$, hvor $\sigma = (x_1, \dots, x_n)$ er et kort, der afbilder p, frembringer tangentvektorrummet i punktet p, må dog naturligvis bevises på en anden måde (Willmore: Differential geometry, s. 221). (Helgason s. 10.)

For differentiable mangfoldigheder af klasse C^r må man for at opretholde det netop omtalte resultat, erstatte kravet 2) i selve definitionen af tangentvektor med et skærpet og mere kompliceret (Willmore: Differential geometry, s. 198).

§3. Differential af analytisk afbildning.

Lad $(S, \mathcal{O}_S, \mathfrak{S})$ og $(T, \mathcal{O}_T, \mathfrak{T})$ være analytiske mangfoldigheder og Φ en afbildning af en mængde $A \subseteq S$ ind i T, som er analytisk i punktet $p \in A$.

Vi minder om, at den sidste forudsætn. er ensbetydende med, at for enhver reel funktion g, der er anal. i $\Phi(p)$, dvs. for $g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)}$, gælder $g \circ \Phi \in \mathcal{O}_p$ (s. 31).

For en vilk. tangentvektor L til S i punktet p, dvs. $L \in S_p$, vil nu funktionen

$$g \xrightarrow{M} L(g \circ \Phi), \quad g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)},$$

være en tangentvektor M til T i punktet $\Phi(p)$, dvs. $M \in T_{\Phi(p)}$.

At $M: \mathcal{O}_{\Phi(p)} \to \mathbb{R}$ opfylder betingelserne 1) og 2), s. 53, verificeres umiddelbart. Eksempelvis haves for $f, g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)}$:

$$\begin{aligned} M(fg) &= L((fg)\circ\Phi) = L((f\circ\Phi)(g\circ\Phi)) \\ &= L(f\circ\Phi)\, g(\Phi(p)) + f(\Phi(p))\, L(g\circ\Phi) \\ &= M(f)\, g(\Phi(p)) + f(\Phi(p))\, M(g). \end{aligned}$$

Afbildningen af tangentvektorrummet S_p til S i punktet p ind i tangentvektorrummet $T_{\Phi(p)}$ til T i billedpunktet $\Phi(p)$, hvor til hvert $L \in S_p$ svarer tangentvektoren i $\Phi(p)$

$$g \to L(g \circ \Phi), \quad g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)},$$

kaldes <u>differentialet</u> af Φ i punktet p og betegnes $d\Phi$ eller $d\Phi_p$. Differentialet $d\Phi_p: S_p \to T_{\Phi(p)}$ er altså bestemt ved

$$(d\Phi(L))(g) = L(g \circ \Phi),$$

gældende for $L \in S_p$, $g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)}$.

<u>Differentialet</u> $d\Phi_p: S_p \to T_{\Phi(p)}$ <u>er</u>, som man umiddelbart verificerer, <u>en lineær afbildning</u>: for $L_1, L_2 \in S_p$ og $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gælder

$$d\Phi(a_1 L_1 + a_2 L_2) = a_1\, d\Phi(L_1) + a_2\, d\Phi(L_2),$$

thi for hvert $g \in \mathcal{O}_{\Phi(p)}$ er jo

$$(a_1 L_1 + a_2 L_2)(g \circ \Phi) = a_1 L_1(g\circ\Phi) + a_2 L_2(g\circ\Phi).$$

Ved <u>sammensætning</u> af analytiske afbildninger sammensættes også differentialer:

<u>Er</u> $(S, \mathcal{O}_S, \mathfrak{S})$, $(T, \mathcal{O}_T, \mathfrak{T})$ og $(U, \mathcal{O}_U, \mathfrak{U})$ <u>analytiske mangfoldigheder</u>, $\Phi: A \to T$, <u>hvor</u> $A \subseteq S$, <u>analytisk i</u> p <u>og</u> $\Psi: B \to U$, <u>hvor</u> $B \subseteq T$, <u>analytisk i</u> $\Phi(p)$, <u>da er</u> $\Psi \circ \Phi$ <u>analytisk i</u> p (som vist s. 31) <u>og</u>

$$d(\Psi\circ\Phi)_p = d\Psi_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p.$$

Også beviset for den sidste påstand beror på, at

$$h \circ (\Psi \circ \Phi) = (h \circ \Psi) \circ \Phi,$$

for $h \in \mathcal{O}_{\Psi(\Phi(p))}$. Thi for vilk. $L \in S_p$ betyder

$$d(\Psi\circ\Phi)_p(L) = d\Psi_{\Phi(p)}(d\Phi_p(L)),$$

at for hvert $h \in \mathcal{O}_{\Psi(\Phi(p))}$ gælder $L(h\circ(\Psi\circ\Phi))$ lig med $d\Phi_p(L)(h\circ\Psi) = L((h\circ\Psi)\circ\Phi)$.

8.2.

<u>Koordinatfremstilling af differential.</u>

Lad fortsat $(S, \mathcal{O}_S, \mathfrak{S})$ og $(T, \mathcal{O}_T, \mathfrak{T})$ være analytiske mangfoldigheder og Φ en afbildning af en mængde $A \subseteq S$ ind i T, som er analytisk i punktet $p \in A$. Lad videre $\sigma = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}$ og $\tau = (y_1, \dots, y_m) \in \mathfrak{T}$ være kort, der afbilder henholdsvis p og $\Phi(p)$.

Til σ svarer da basen $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ i tangentvektorrummet $(S_p, +, \mathbb{R})$ og til τ svarer basen $(\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m) = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m})$ i $(T_{\Phi(p)}, +, \mathbb{R})$.

Vi vil vise, at <u>matricen hørende til den lineære afbildning</u> $d\Phi_p: S_p \to T_{\Phi(p)}$ <u>med hen-</u>

sym til de nævnte baser er funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\varphi$ for $\varphi = \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ taget i $\sigma(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$.

Her er φ jo (en restriktion af) Φ udtrykt i koordinater ved kortene σ og τ

Bevis. Sættes $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, har vi for $i = 1, \ldots, m$

$$\varphi_i = pr_i \circ \varphi = pr_i \circ \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} = y_i \circ \Phi \circ \sigma^{-1} = (y_i \circ \Phi)^\sigma.$$

For vilk. i, j, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$, er elementet på pladsen (i,j) i matricen hørende til $d\Phi_p$ jo den i^{te} koordinat m.h.t. $(f_1, \ldots, f_m)$ af $d\Phi_p(\underline{e}_j)$, altså ifølge sætningen s. 55

$$(d\Phi_p(\underline{e}_j))(y_i),$$

som ifølg. differentialets definition netop er

$$\underline{e}_j(y_i \circ \Phi) = D_j (y_i \circ \Phi)^\sigma (x_1(p), \ldots, x_n(p)) = D_j \varphi_i (x_1(p), \ldots, x_n(p)).$$

Eksempel. Se side 58 a.

Vi vil nu, stadig under samme forudsætning som ridset op i paragraffens første linier, vise nogle resultater vedrørende sammenhæng mellem egenskaber ved differentialet $d\Phi_p$ og selve afbildningen Φ i omegnen af p.

1) Lad os først antage, at $d\Phi_p : S_p \to T_{\Phi(p)}$ er bijektiv.

Da har tangentrummene S_p og $T_{\Phi(p)}$ og dermed de analytiske mangfoldigheder samme dimension n. Og vælges kort σ og τ som ovenfor, er $\varphi = \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$ analytisk i $\sigma(p)$ med regulær funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\varphi$. En restriktion af φ til en åben omegn $\sigma(V)$ af $\sigma(p)$ er da et tilladeligt koordinatskifte (jfr. s. 15 og s. 25 sætn. 1), hvorfor $\varphi \circ (\sigma|V) = (\tau \circ \Phi)|V$ tilhører $\mathfrak{S}$. Nu er

$$\varphi \circ (\sigma|V) = (\varphi \circ \sigma)|V = (\tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma)|V = (\tau \circ \Phi)|V.$$

Restriktionen af $\tau \circ \Phi$ til den åbne omegn V af p er altså et kort $\in \mathfrak{S}$.

Vi slutter da, at $\Phi(V) = \tau^{-1}((\tau \circ \Phi)(V))$ er åben, og at restriktionen $\Phi_1 = \Phi|V$ er en bijektiv afbildning af V på $\Phi(V)$. Idet Φ_1 udtrykt ved kortene $\tau \circ \Phi_1 \in \mathfrak{S}$ og $\tau \in \mathfrak{T}$ er $\tau \circ \Phi_1 \circ (\tau \circ \Phi_1)^{-1} = \tau \circ \Phi_1 \circ \Phi_1^{-1} \circ \tau^{-1} = \iota_\tau(\Phi(V))$, ligesom Φ_1^{-1} udtrykt ved τ og $\tau \circ \Phi_1$ er $(\tau \circ \Phi_1) \circ \Phi_1^{-1} \circ \tau^{-1} = \iota_\tau(\Phi(V))$. - pkt. og billedpkt. har samme koordinater -, har vi endelig, at Φ_1 er bianalytisk.

Vi noterer:

Er $d\Theta_p : S_p \to T_{\Phi(p)}$ bijektiv, da er restriktionen Φ_1 af Φ til en passende åben omegn V af p en bianalytisk afbildning af V på en åben omegn af $\Phi(p)$.

Tilføjelse: For hvert kort $\tau = (y_1, \ldots, y_n)$ tilh. $\mathfrak{T}$, der afbilder $\Phi(p)$, er $\tau \circ \Phi_1 \in \mathfrak{S}$, altså $y_1 \circ \Phi_1, \ldots, y_n \circ \Phi_1$ koordinater i et kort tilh. $\mathfrak{S}$, der afbilder p.

Vi bemærker, at betingelsen $d\Theta_p : S_p \to T_{\Phi(p)}$ bijektiv også er nødvendig for, at Φ i en omegn af p har en analytisk omvendt, nøjagtigt: nødvendig for eksistensen af en omegn V af p som beskrevet i det understregede ovenfor.

Dette følger af reglen om differential af sammensat afbildning (s. 57) anvendt på $\Phi_1 = \Phi|V$ og Φ_1^{-1}.

2) Lad os dernæst antage, at differentialet $d\Phi_p$ er injektivt, hvormed

$$n = \dim S_p = \dim d\Theta_p(S_p) \leqq \dim T_{\Phi(p)} = m,$$

og lad påny $\sigma \in \mathfrak{S}$ og $\tau = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathfrak{T}$ afbilde p og $\Phi(p)$.

Eksempel Er Φ spec. en afbildn. af en mgd. $A \subseteq \dot{\mathbb{R}}^n$ ind i $\dot{\mathbb{R}}^m$, som er analytisk i $p = (p_1, \dots, p_n) \in A$, da kan differentialet $d\Phi_p$ opfattes som en afbildn. af $\dot{\mathbb{R}}^n$ ind i $\dot{\mathbb{R}}^m$, i kraft af de naturlige isomorfier mellem tangentvektorrummene $(\dot{\mathbb{R}}^n_p, +, \dot{\mathbb{R}})$, $(\dot{\mathbb{R}}^m_{\Phi(p)}, +, \dot{\mathbb{R}})$ og $(\dot{\mathbb{R}}^n, +, \dot{\mathbb{R}})$, hvnh. $(\dot{\mathbb{R}}^m, +, \dot{\mathbb{R}})$, se s. 55.

I det basen $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ for $(\dot{\mathbb{R}}^n_p, +, \dot{\mathbb{R}})$ svarende til $\sigma = (x_1, \dots, x_n) = e_{\dot{\mathbb{R}}^n}$ ved isomorfien svarer til den naturlige basis

$$(1, 0, \dots, 0), \dots\dots, (0, 0, \dots, 1)$$

for $(\dot{\mathbb{R}}^n, +, \dot{\mathbb{R}})$ og analogt for $\dot{\mathbb{R}}^m$, er matricen hørende til $d\Phi_p : \dot{\mathbb{R}}^n \to \dot{\mathbb{R}}^m$ m.h.t. de naturlige baser for talrummene altså funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\varphi = \underline{\underline{D}}(e_{\dot{\mathbb{R}}^m} \circ \Phi \circ e_{\dot{\mathbb{R}}^n}^{-1}) = \underline{\underline{D}}\Phi$ taget i $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Differentialet $d\Phi_p : \dot{\mathbb{R}}^n \to \dot{\mathbb{R}}^m$ er altså

$$\underline{\underline{h}}_1 \to (\underline{\underline{D}}\Phi)_p \underline{\underline{h}}_1, \quad h \in \dot{\mathbb{R}}^n,$$

dvs. det velkendte.

Er Φ specielt en restriktion af en lineær afbildn. $\Phi' : \dot{\mathbb{R}}^n \to \dot{\mathbb{R}}^m$ og p indre pkt. i def. mgd., har vi $d\Phi_p = \Phi'$. (Dette kan også vises direkte ved at efterregne

$$h \cdot \operatorname{grad}(f \circ \Phi)_p = \Phi'(h) \cdot \operatorname{grad} f_{\Phi(p)}$$

for $h \in \dot{\mathbb{R}}^n$, $f \in \mathcal{O}_{\Phi(p)}$.)

rise: Vis det
idste resultat –

Da funktionalmatricen $\underline{\mathfrak{D}}\varphi =$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1\varphi_1 & \cdots & \mathfrak{D}_n\varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{D}_1\varphi_n & \cdots & \mathfrak{D}_n\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{D}_1\varphi_m & \cdots & \mathfrak{D}_n\varphi_m \end{pmatrix}$$

for $\varphi = \tau\circ\Phi\circ\sigma^{-1} = (y_1\circ\Phi\circ\sigma^{-1}, \ldots, y_m\circ\Phi\circ\sigma^{-1})$ taget i $\sigma(p)$ hører til den lineære afbildn. $d\Theta_p : S_p \to T_{\Phi(p)}$ m.h.t. visse baser, er dens n søjler lin. uafh., dvs. den har rangen n. En $(n\times n)$-delmatrice er altså regulær, f.eks.

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1\varphi_1 & \cdots & \mathfrak{D}_n\varphi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{D}_1\varphi_n & \cdots & \mathfrak{D}_n\varphi_n \end{pmatrix}$$

Da nu $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ er analytisk i $\sigma(p)$ med regulær funktionalmatrix, er en restriktion til en åben omegn $\sigma(V)$ af $\sigma(p)$ et tilladeligt koordinatskifte (jfr. s. 15 og s. 25 sætn. 1), hvorfor $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\circ(\sigma|V)$ tilhører $\mathfrak{S}$. For den i^{te} koordinat i dette kort, $i = 1, \ldots, n$, har vi

$$(\varphi_i\circ\sigma)|V = (y_i\circ\Phi\circ\sigma^{-1}\circ\sigma)|V = (y_i\circ\Phi)|V.$$

Vi noterer:

. Er $d\Phi_p$ injektiv og $\tau = (y_1, \ldots, y_m)$ et vilk. kort $\in \mathcal{O}_f$, der afbilder $\Phi(p)$, da findes blandt funktionerne $y_1\circ\Phi, \ldots, y_m\circ\Phi$ et delsæt, som efter restriktion til en åben omegn V af p udgør koordinaterne i et kort tilh. $\mathfrak{S}$, der afbilder p

Omvendt følger af eksistensen af et kort $\tau = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{O}_f$, hvor f.eks. en restriktion $(y_1\circ\Phi, \ldots, y_n\circ\Phi)|V$ er et kort tilh. $\mathfrak{S}$, der afbilder p, at $d\Phi$ er injektiv.

At $\sigma = (y_1\circ\Phi, \ldots, y_n\circ\Phi)|V$ er injektiv, medfører nemlig, at $\Phi_1 = \Phi|V$ og $(y_1, \ldots, y_n)|\Phi(V)$ er injektive, således at

$$\varphi = \tau\circ\Phi\circ\sigma^{-1} = \tau\circ\Phi\circ\Phi_1^{-1}\circ(y_1, \ldots, y_n)|\Phi(V)^{-1}.$$

Dette viser, at φ, som jo er Φ_1 udtrykt i koordinater ved σ og τ, har formen

$$(u_1, \ldots, u_n) \to (u_1, \ldots, u_n, ?, \ldots, ?), \quad (u_1, \ldots, u_n) \in \sigma(V).$$

Funktionalmatricen $\underline{\mathfrak{D}}\varphi$ taget i $\sigma(p)$ har følgelig $(n\times n)$-enhedsmatricen som delmatrix og dermed rangen n, altså lin. uafh. søjler. Idet $\underline{\mathfrak{D}}\varphi$ er matricen hørende til den lineære afbildn. $d\Phi_p$ m.h.t. visse baser, slutter vi, at $d\Phi_p$ er injektiv.

Videre bemærkes, at den omvendte afbildning til $\Phi_1 = \Phi|V$ kan udvides til en analytisk afbildning, stadig med V som billedmængde, nemlig svarende til udvidelsen af φ^{-1} til projektionen

$$(u_1, \ldots, u_n, \ldots, u_m) \to (u_1, \ldots, u_n)$$

betragtet på fællesmængden af $\sigma(V)\times\mathbb{R}^{m-n}$ og billedmængden for kortet τ.

Idet V fra begyndelsen kan tænkes valgt (så lille), så $\Phi|V$ er analytisk, har vi:

Er $d\Phi_p$ injektiv, findes en åben omegn V af p, så restriktionen $\Phi|V$ er analytisk og injektiv og dens omvendte afbildning kan udvides til en analytisk afbildning, stadig med V som billedmængde.

Omvendt: Er en restriktion $\Phi_1 = \Phi|V$ til en åben omegn V af p injektiv med en omvendt afbildning, der kan udvides til en i $\Phi(p)$ analytisk afbildning Ψ, da er $d\Phi_p$ injektiv.

Thi af $\Psi\circ\Phi_1 = e_V$ følger $d\Psi_{\Phi(p)}\circ a\Phi_p = e_{S_p}$.

Definition. En i punktet $p \in A \subseteq S$ analytisk afbildning $\Phi : A \to T$ siges at være regulær i p, hvis $d\Phi_p$ er injektiv.

Betydningen heraf fremgår af ovenstående resultater.

Om Φ er regulær i p afgøres ofte ved

2.67

følgende (allerede flere gange anvendte) betingelse:

Foreligger (en restriktion af) Φ udtrykt i koordinater ved kort $\sigma \in \mathfrak{S}$ og $\tau \in \mathcal{T}$, der afbilder p og $\Phi(p)$, kundes altså $\varphi = \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1}$, vil Φ være regulær i p, netop hvis funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\varphi$ taget i $\sigma(p)$ har lin. uafh. søjler (thi $\underline{\underline{D}}\varphi$ er jo matricen hørende til $d\Phi_p$ m.h.t visse baser).

Definition. En analytisk afbildn. $\Phi: A \to T$ siges at være regulær, hvis den er regulær i hvert pkt. af A.

NB. Selv om $\Phi: A \to T$ er analytisk og regulær (i hele A), bevarer ovenstående resultater deres lokale karakter.

Eksempler.

1° En regulær analytisk afbildning af et åbent interval $\mathcal{I} \subseteq \dot{\mathbb{R}}$ ind i $\dot{\mathbb{R}}^m$ er netop, hvad der ofte kaldes: analytisk kurve(stykke) givet ved en parameterfremstilling.

At $\varphi: \mathcal{I} \to \dot{\mathbb{R}}^m$ er analytisk og regulær, kommer jo ud på, at $\ell_{\dot{\mathbb{R}}^m} \circ \varphi \circ \ell_{\dot{\mathbb{R}}}^{-1} = \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ er analytisk, dvs. $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ analytiske, og

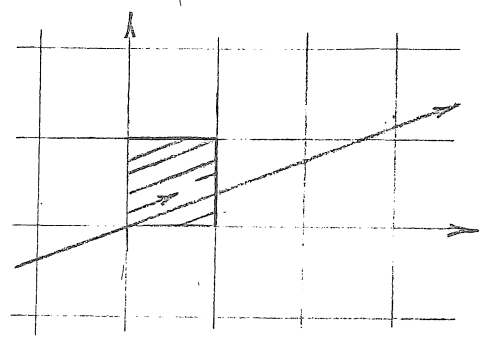
$$\underline{\underline{D}}\varphi = \begin{pmatrix} D\varphi_1 \\ \vdots \\ D\varphi_m \end{pmatrix}$$

ensartlig i hvert pkt af $\mathcal{I}$.

Det er velkendt, at φ ikke behøver at være injektiv (Kurven kan have "dobbeltpunkter"). Eksempel

$$t \to (\cos t, \sin t), \quad t \in \dot{\mathbb{R}}.$$

Og selv om φ er injektiv, behøver φ^{-1} end ikke at være kontinuert i noget pkt.! Som eksempel angives en rumkurve liggende som bevikling af en torus: Planen $\dot{\mathbb{R}}^2$ kan afbildes regulært analytisk ind i $\dot{\mathbb{R}}^3$ med periode 1 i hver variabel, så at enhedskvadrat, med passende del af randen, går bijektivt over i torus (jfr. s. 34). Ved at sammensætte $t \to (t, at)$, $t \in \dot{\mathbb{R}}$, med nævnte afbildning, fås, hvis a er irrationalt, en tæt bevikling af torus, uden dobbeltpkt.r, den sammensatte afbildning $\varphi: \dot{\mathbb{R}} \to \dot{\mathbb{R}}^3$ er regulær analytisk og injektiv, men φ^{-1} er ikke kontinuert: man vil komme kurvepunktet $\varphi(s)$ nær for parameterværdier t, der ligger langt fra s.



14.2.67

2° En regulær analytisk afbildning af en åben mængde $A \subseteq \dot{\mathbb{R}}^2$ ind i $\dot{\mathbb{R}}^3$ er netop, hvad der ofte kaldes: analytisk flade(stykke) givet ved en parameterfremstilling. At $\varphi: A \to \dot{\mathbb{R}}^3$ er analytisk og regulær, kommer jo ud på, at $\ell_{\dot{\mathbb{R}}^3} \circ \varphi \circ \ell_{\dot{\mathbb{R}}^2}^{-1} = \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ er analytisk, dvs. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ analytiske, og

$$\underline{\underline{D}}\varphi = \begin{pmatrix} D_1\varphi_1 & D_2\varphi_2 \\ D_1\varphi_2 & D_2\varphi_2 \\ D_1\varphi_3 & D_2\varphi_3 \end{pmatrix}$$

har lin. uafh. søjler i hvert pkt. af A.

3° For en mængde $T \subseteq \dot{\mathbb{R}}^m$ betragtet med den inducerede topologi består det naturlige analytiske k-dim atlas $\mathfrak{A}_k$ (se s. 20) netop af de k-dim. kort σ i T, for hvilke σ^{-1} er en regulær analytisk afbildning ind i $\dot{\mathbb{R}}^m$.

Vi afslutter paragrafen med et globalt resultat:

Lad $(S, \mathcal{O}_S, \mathcal{S})$ og $(T, \mathcal{O}_T, \mathcal{T})$ være analytiske mangfoldigheder og Φ en analytisk afbildning af $A \subseteq S$ ind i T.

Nødv. for, at Φ er konstant, er det, at differentialet $d\Phi_p : S_p \to T_{\Phi(p)}$ er nulafbildningen for hvert $p \in A$. Hvis A er sammenhængende, er betingelsen også tilstrækkelig.

Bevis. Er der ved Φ kun ét billedpkt. r, da er for hvert $g \in \mathcal{O}_r$ funktionen $g \circ \Phi$ konstant, med værdien $g(r)$. Følgelig er for hvert $L \in S_p$, hvor p er et vilk. pkt. af A,

$$(d\Theta_p(L))(g) = L(g \circ \Phi) = 0.$$

Antages omvendt betingelsen opfyldt, slutter vi først, at for hvert $r \in T$ er originalmængden $\Phi^{-1}(r)$ åben, evt. tom.

Lad nemlig p afbildes i r, $\Phi(p) = r$. Idet $\sigma \in \mathcal{S}$ og $\tau \in \mathcal{T}$ afbilder p og r, indeholder def.mængden for $\varphi = \tau \circ \Phi \circ \sigma^{-1} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ et åbent interval $\mathcal{I}$ omkring $\sigma(p)$. Funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\varphi$ taget i et vilk. pkt. $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{I}$ hører nu til differentialet $d\Phi_q : S_q \to T_{\Phi(q)}$, hvor $q = \sigma^{-1}(u_1, \ldots, u_n)$, og er følgelig $\underline{\underline{O}}_{m,n}$. Da således

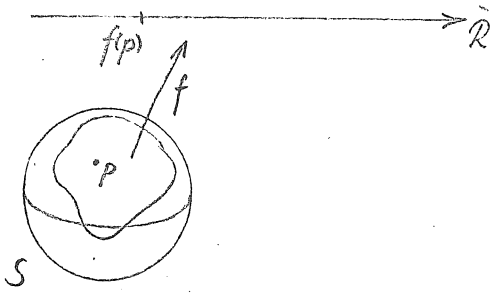
$$D_1\varphi_i = D_2\varphi_i = \ldots = D_n\varphi_i = 0$$

i hele $\mathcal{I}$, sluttes, at φ_i er konstant i $\mathcal{I}$, $i = 1, \ldots, n$, altså at φ er konstant i $\mathcal{I}$. Men så er Φ konstant i den åbne mængde $\sigma^{-1}(\mathcal{I})$ omkring p, og følgelig p indre pkt. i $\Phi^{-1}(r)$.

Da nu A er forening af de parvis disjunkte åbne mængder $\Phi^{-1}(r)$, $r \in T$, slutter vi, når A er sammenhængende, at de alle på nær én er tomme, dvs. at Φ er konstant.

§4. Differential af analytisk funktion.

Lad $(S, \mathcal{O}, 5)$ være en analytisk mangfoldighed og f en reel funktion i S, som er analytisk i punktet $p \in S$, altså $f \in \mathcal{O}_p$.



Betragtes $\grave{R}$ som 1-dim. analytisk mangfoldighed, med sædv. topologi og naturligt atlas, kan vi ifølge §3 tale om differentialet df_p som en afbildning af tangentvektorrummet S_p ind i tangentvektorrummet $\grave{R}_r$, hvor $r = f(p)$.

Mellem tangentvektorrummet $(\grave{R}_r, +, \cdot)$ og $(\grave{R}, +, \cdot)$ består imidlertid en naturlig isomorfi (jvf. s. 55), og vi kan da vælge at opfatte differentialet df_p som en afbildning $df_p : S_p \to \grave{R}$, altså som en reel funktion defineret på tangentvektorrummet S_p. Vi vil karakterisere denne funktion direkte.

Ved den naturlige isomorfi mellem $\grave{R}$ og tangentvektorrummet $\grave{R}_r$ svarer til vilk. $u \in \grave{R}$ tangentvektoren til $\grave{R}$ i r:

$$g \longrightarrow u\, Dg(r), \quad g \in \mathcal{O}_r.$$

Anvendes denne på den identiske afbild. $e_{\grave{R}}$, fås tallet u igen.

Til vilk. $\mathcal{L} \in S_p$ svarer nu tangentvektoren til $\grave{R}$ i $r = f(p)$:

$$g \longrightarrow \mathcal{L}(g \circ f), \quad g \in \mathcal{O}_r,$$

og altså videre tallet $\mathcal{L}(e_{\grave{R}} \circ f) = \mathcal{L}(f)$.

Vi noterer:

Differentialet $df_p : S_p \to \grave{R}$ af f i punktet p er funktionen

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}(f), \quad \mathcal{L} \in S_p,$$

altså bestemt ved

$$df_p(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(f), \quad \mathcal{L} \in S_p.$$

Ifølg. §3 er differentialet df_p en lineær funktion på tangentvektorrummet $(S_p, +, \cdot)$. Det er også en umiddelbar følge af den lige givne karakterisering. *) Øvelse: se s. 63

Mængden V^* af reelle lineære funktioner på et n-dim. vektorrum $(V, +, \cdot)$ danner, med sædv. addition og multiplikation med reelle tal, påny et vektorrum, det duale til $(V, +, \cdot)$. Ved valg af en basis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ for $(V, +, \cdot)$ kan man tilvejebringe en isomorfi mellem $(V^*, +, \cdot)$ og vektorrummet af reelle $(1 \times n)$-matricer: at $\underline{v}^* \in V^*$ svarer til $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ betyder, at for hver vektor $\underline{u} \in V$

$$\underline{v}^*(\underline{u}) = \underline{a}\,\underline{u} = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$

hvor $u_1, \ldots, u_n$ er koordinaterne til $\underline{u}$ m.h.t. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Heraf fremgår, at $\dim V^* = n = \dim V$. Og videre, at de lineære funktioner $\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \ldots, \underline{e}_n^*$ svarende til $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ danner en basis for $(V^*, +, \cdot)$; den kaldes den til $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ duale basis. Bemærk, at de lineære funktioner $\underline{e}_1^*, \ldots, \underline{e}_n^*$ er bestemt ved

$$\underline{e}_i^*(\underline{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Direkte angivet er $\underline{e}_i^*$ den funktion, hvor til hver vektor $\underline{u} \in V$ svarer dens i'te koordinat m.h.t. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Det til en lineær funktion $v^* \in V^*$ svarende talsæt kan tolkes som koordinaterne til v^* m.h.t. $\underline{e}_1^*, \ldots, \underline{e}_n^*$.

Lad ligeledes $\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n$ være en basis for $(V, +, \hat{R})$, og lad $\underline{\underline{C}}$ være koordinattransformationsmatricen for overgangen hertil fra $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$, dvs. sammenhængen mellem nye og gamle koordinater er for hver vektor $u \in V$

$$\hat{\underline{\underline{u}}}_1 = \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{u}}_1 .$$

Vi bemærker, at

$$(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n) = (\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n)\underline{\underline{C}}, \text{ dvs. } (\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n) = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)\underline{\underline{C}}^{-1}.$$

Har en linear funktion $\underline{v}^* \in V^*$ koordinaterne $(a_1, \ldots, a_n)$ m.h.t. $\underline{e}_1^*, \ldots, \underline{e}_n^*$, da er for hver vektor $\underline{u} \in V$

$$\underline{v}^*(\underline{u}) = \underline{\underline{a}}\, \underline{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{a}}\, \underline{\underline{C}}^{-1} \hat{\underline{\underline{u}}}_1 ,$$

altså har vi for koordinaterne $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)$ til $\underline{v}^*$ m.h.t. $\hat{\underline{e}}_1^*, \ldots, \hat{\underline{e}}_n^*$

$$\hat{\underline{\underline{a}}} = \underline{\underline{a}}\, \underline{\underline{C}}^{-1}, \text{ dvs. } \hat{\underline{\underline{a}}}_1 = (\underline{\underline{C}}^{-1})^t \underline{\underline{a}}_1 .$$

Koordinattransformationsmatricen for overgangen fra den duale basis til $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ til den duale basis til $\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n$ er altså $(\underline{\underline{C}}^{-1})^t$.

De lineære funktioner på $(V, +, \hat{R})$ kaldes også covariante vektorer eller kort covektorer. Navnet beror på, at man har sammenholdt to af formlerne ovenfor,

$(\hat{\underline{e}}_1, \ldots, \hat{\underline{e}}_n) = (\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)\underline{\underline{C}}^{-1}$ og $\hat{\underline{\underline{a}}} = \underline{\underline{a}}\, \underline{\underline{C}}^{-1}$.

Vektorerne i vektorrummet $(V, +, \hat{R})$ selv kaldes, når der er risiko for forveksling, contravariante vektorer.

*) se s. 62.

Øvelse. Vis reglerne

$$d(af + bg)_p = a\, df_p + b\, dg_p$$
$$d(fg)_p = g(p)\, df_p + f(p)\, dg_p$$

ud fra den netop givne karakterisering af differentialer.

Lad atter $S, \mathcal{O}, \mathcal{S}$ være en n-dim. analytisk mangfoldighed og p et punkt i S.

De reelle lineære funktioner på tangentvektorrummet $(S_p, +, \hat{R})$ danner da dettes duale rum $(S_p^*, +, \hat{R})$, rummet af covariante vektorer i p. Differentialet df_p af en vilkårlig funktion $f \in \mathcal{O}_p$ er element af S_p^*, jvf. s. 62.

Differentialerne $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p$ af koordinaterne i et kort $\sigma = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$, der afbilder p, danner en basis for $(S_p^*, +, \hat{R})$, nemlig den duale til basen $\underline{e}_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$, $j = 1, \ldots, n$, for $(S_p, +, \hat{R})$ svarende til kortet σ.

Bevis. Vi skal blot vise

$$(dx_i)_p(\underline{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} ,$$

og det følger af

$$(dx_i)_p(\underline{e}_j) = \underline{e}_j(x_i) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \mathcal{D}_j x_i^\sigma(\sigma(p)),$$

idet x_i^σ er afbildningen $(u_1, \ldots, u_n) \to u_i$.

Som en konsekvens bemærker vi, at enhver lineær funktion $\underline{v}^*$ på $(S_p, +, \hat{R})$ er et differential. Er nemlig $(a_1, \ldots, a_n)$ koordinaterne til $\underline{v}^*$ m.h.t. $((dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p)$, har vi

$$\underline{v}^* = a_1(dx_1)_p + \ldots + a_n(dx_n)_p = d(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)_p$$

Øvelse. Vis, at hvis differentialerne $(df_1)_p, \ldots, (df_n)_p$ af n funktioner $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_p$ er lineært uafhængige, da er restriktionerne af $f_1, \ldots, f_n$ til en passende åben omegn V af p koordinater i et kort tilhørende $\mathcal{S}$.

(Er nemlig $\sigma \in \mathcal{S}$ et kort, der afbilder p, vil $\varphi = (f_1, \ldots, f_n) \circ \sigma^{-1} = (f_1^\sigma, \ldots, f_n^\sigma)$ efter restriktion være et tilladeligt koordinatskifte, da rækkerne i $\mathcal{D}\varphi$, taget i $\sigma(p)$, er lin. uafh. Den i^{te} række er nemlig koordinatsættet til $(df_i)_p$ m.h.t. $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p$, idet j^{te} koordinat er

$$(df_i)_p(\underline{e}_j) = \underline{e}_j(f_i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p = \mathcal{D}_j f_i^\sigma(\sigma(p)). \ )$$

Koordinatskifte.

Idet $(S,0,5)$ er en n-dim. mangfoldighed og p et punkt i S, svarer som ligenævnt til et kort $\sigma=(x_1,\dots,x_n)\in 5$, der afbilder p, foruden basen $((\frac{\partial}{\partial x_1})_p,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_n})_p)$ for tangentvektorrummet $(S_p,+,\mathbb{R})$ tillige den duale basis $((dx_1)_p,\dots,(dx_n)_p)$ for det duale rum $(S_p^*,+,\mathbb{R})$. Er ligeledes $\tau=(y_1,\dots y_n)\in 5$ et kort, der afbilder p, fandt vi (s. 56) for koordinaterne $(u_1,\dots,u_n)$ og $(v_1,\dots,v_n)$ til en vilk. tangentvektor $\mathcal{L}$ i p m.h.t. $((\frac{\partial}{\partial x_1})_p,\dots,(\frac{\partial}{\partial x_n})_p)$, henh. $((\frac{\partial}{\partial y_1})_p,\dots,(\frac{\partial}{\partial y_n})_p)$

$$\underline{\underline{v}}_1 = \underline{\underline{D}}\varphi\ \underline{\underline{u}}_1 ,$$

hvor funktionalmatricen $\underline{\underline{D}}\varphi$ af koordinattransformationen $\varphi=\tau\circ\sigma^{-1}=(y_1\circ\sigma^{-1},\dots,y_n\circ\sigma^{-1})=(y_1^\sigma,\dots,y_n^\sigma)$ er taget i $\sigma(p)$.

For koordinaterne $(a_1,\dots,a_n)$ og $(b_1,\dots,b_n)$ for en vilk. linear funktion tilhørende S_p^* m.h.t. $((dx_1)_p,\dots,(dx_n)_p)$ og $((dy_1)_p,\dots,(dy_n)_p)$ har vi da, jfr. s. 63,

$$\underline{\underline{b}}_- = \underline{\underline{a}}_- (\underline{\underline{D}}\varphi)^{-1} .$$

Nu er $(\underline{\underline{D}}\varphi)^{-1}$ lig funktionalmatricen for $\varphi^{-1}=\sigma\circ\tau^{-1}=(x_1\circ\tau^{-1},\dots,x_n\circ\tau^{-1})=(x_1^\tau,\dots,x_n^\tau)$ taget i $\tau(p)$. Resultatet kan da også skrives

$$b_j=\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_p ,\quad j=1,\dots,n,$$

som modstykke til

$$v_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p u_j ,\quad i=1,\dots,n$$

§5. Tangentvektorfelt

Lad $(S, \mathcal{O}, 5)$ være en analytisk mangfoldighed.

Ved et (tangent)vektorfelt X med definitionsmgd. $U \subseteq S$ forstås en tilordning: til hvert punkt $p \in U$ en tangentvektor $X_p \in S_p$.

For en vilk. reel analytisk fkt. f med definitionsmgd. $A \subseteq S$ er for hvert $p \in A \cap U$

$f \in \mathcal{O}_p$, $X_p \in S_p$ og dermed $X_p(f) \in \mathbb{R}$.

Funktionen

$$p \to X_p(f), \quad p \in A \cap U,$$

betegnes Xf.

Vektorfeltet X siges at være analytisk, hvis anvendelsen på enhver analytisk funktion f, hvis defmgd. har punkter fælles med U, påny giver en analytisk funktion Xf.

Nødvendigt herfor er, at U er åben. (Hvert punkt af U tilhører nemlig defmgden A for en analytisk fkt. f og dermed defmgden $A \cap U$ for Xf.)

Eksempel.

Lad $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \mathbb{R}^n$ være et kort tilh. S. Hertil svares for hvert $p \in V$ basen $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right)$ for tangentvektorrummet $(S_p, +, \mathbb{R})$. Specielt er for hvert i, $i = 1, \dots, n$,

$$p \to \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad p \in V,$$

et tangentvektorfelt med defmgd. V. Det betegnes $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Anvendes vektorfeltet $\frac{\partial}{\partial x_i}$ på en anal. fkt. $f : A \to \mathbb{R}$, fås funktionen

$$p \to \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = D_i f^\sigma(\sigma(p)), \quad p \in A \cap V,$$

betegnet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Vi har altså $\frac{\partial f}{\partial x_i} = (D_i f^\sigma) \circ \sigma$, hvormed $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ kan karakteriseres som fkt.nen med defmgd. $A \cap V$, hvor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^\sigma = D_i f^\sigma.$$

Heraf fremgår specielt, at $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ er en analytisk fkt., jf. s. 11a, og dermed, da f var en vilk. anal. fkt., at

vektorfeltet $\frac{\partial}{\partial x_i}$ er analytisk.

Vi betragter atter et vilk. tangentvektorfelt X med defmgd. $U \subseteq S$.

For et kort $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \mathbb{R}^n$ tilhørende S findes for hvert $p \in U \cap V$ netop ét talsæt $(A_1(p), \dots, A_n(p))$, så

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} A_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

nemlig $A_i(p) = X_p(x_i)$, iflg. satningen s. 55.

Dvs.: der findes netop ét sæt $(A_1, \dots, A_n)$ af reelle fkt.ner med defmgd. $U \cap V$, så

$$X \mid U \cap V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

nemlig $A_i = X x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Er vektorfeltet X analytisk, da er for hvert $\sigma = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}$ koefficienterne A_i, $i = 1, \dots, n$, analytiske funktioner.

Omvendt: Er dette tilfældet, blot for hvert kort σ tilhørende et delatlas af S, der dækker U, da er X analytisk.

Den første påstand følger umiddelbart af, at $A_i = X x_i$, når det erindres, at koordinaterne i kort tilh. S er analytiske funktioner.

Bevis for sidste påstand. Idet $f : A \to \mathbb{R}$ er analytisk, skal vi vise, at Xf er analytisk i det vilk. pkt $p \in A \cap U$. Lad $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \mathbb{R}^n$ være et kort, der afbilder p og tilh. delatlasset. Det er da nok at vise, at $(X \mid U \cap V) f$ er analytisk. Dette fremgår imidlertid af

$$(X \mid U \cap V) f = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

idet A_i, $i = 1, \dots, n$, er anal. fkt.ner iflg. forudsætning og $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, anal. fkt.ner iflg. eksemplet.

Er X et tangentvektorfelt med defmngd $U \subseteq S$ og f, g reelle analytiske fktner med defmngder $A, B \subseteq S$, medens $a, b \in \mathbb{R}$, gælder

$$X(af+bg) = aXf + bXg$$
$$X(fg) = (Xf)g + fXg$$

thi fktnen på hver side af hvert lighedstegn har defmngd. $A \cap B \cap U$, og for hvert $p \in A \cap B \cap U$ har vi for de 4 funktionsværdier

$$X_p(af+bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$$
$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g),$$

idet jo X_p er en tangentvektor (jfr. defin s. 53)

I det følgende forudsættes, at U er en åben del af den analytiske mangfoldighed $(S, \mathcal{O}, 5)$.

For et tangentvektorfelt X med U som defmngd. er da for hver analyt. fkt. $f: A \to \mathbb{R}$ også $f|A \cap U$ analytisk og

$$Xf = X(f|A \cap U).$$

Vi vil derfor i det følgende væsentlig kun interessere os for at anvende X på analytiske fktner $f: A \to \mathbb{R}$, hvor $A \subseteq U$. Mængden af sådanne betegner vi $\mathcal{O}_U$.

Vektorfeltet X giver da anledning til operatoren

$$f \to Xf, \quad f \in \mathcal{O}_U.$$

Denne betegner vi foreløbig $\bar{X}$. Det er altså afbildningen med defmngd $\mathcal{O}_U$, hvor

$$\bar{X}f = Xf, \quad f \in \mathcal{O}_U.$$

Operatoren $\bar{X}$ har åbenbart egenskaberne:

0) $\bar{X}f$ er en reel fkt. med samme defmængde som f,

1) $\bar{X}(af+bg) = a\bar{X}f + b\bar{X}g$,

2) $\bar{X}(fg) = (\bar{X}f)g + f\bar{X}g$,

gældende for $f, g \in \mathcal{O}_U$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi skal se, at der omvendt gælder:

For hver afbildning Y med defmngd. $\mathcal{O}_U$, der har egenskaberne

0) Yf er en reel fkt med samme defmngd. som f,

1) $Y(af+bg) = aYf + bYg$,

2) $Y(fg) = (Yf)g + fYg$,

gældende for $f, g \in \mathcal{O}_U$, $a, b \in \mathbb{R}$, findes netop ét vektorfelt X med defmngd. U, så

$$\bar{X} = Y.$$

Der består altså en naturlig entydig korrespondance mellem vektorfelterne med den åbne mgd. U som defmngd. og operatorerne på $\mathcal{O}_U$ af ovennævnte type.

Bemærk, at vektorfeltet X på U er analytisk, hvis og kun hvis $Xf \in \mathcal{O}_U$ for hvert $f \in \mathcal{O}_U$, dvs. hvis operatoren $\bar{X}$ er en afbildning ind i $\mathcal{O}_U$, $\bar{X}: \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$.

I de følgende paragraffer vil vi ikke i betegnelse skelne mellem vektorfelt og korresponderende operator.

Tilbage står begrundelsen for, at der til en given afbildn. Y som beskrevet ovenfor findes netop ét vektorfelt X på U, så $\bar{X} = Y$.

Entydighed.

Vi tænker os et vektorfelt X, så $\bar{X} = Y$. I det p er et vilk. pkt. i U, har vi for hver anal. fkt. $f: A \to \mathbb{R}$, hvor $p \in A \subseteq U$

$$X_p(f) = (Xf)(p) = (\bar{X}f)(p) = (Yf)(p).$$

Og hver fkt. $g \in \mathcal{O}_p$ har en restriktion f af nævnte art, hvormed (iflg s. 53)

$$X_p(g) = X_p(f) = (Yf)(p).$$

Operatoren $X_p: \mathcal{O}_p \to \mathbb{R}$ er altså entydigt fastlagt for hvert $p \in U$, dvs. X er entydigt bestemt.

Eksistens.

Lad p være et vilk. pkt. i $\mathcal{U}$

Hvert $g \in \mathcal{O}_p$ har mange analytiske restriktioner $f: A \to \hat{R}$, hvor $p \in A \subseteq \mathcal{U}$, men værdien $(Yf)(p)$ vil være fælles for dem alle.

Bevis herfor: Da to sådanne fkt.ner har en fælles restriktion af samme type, er det nok at vise

$$(Y(f|B))(p) = (Yf)(p),$$

hvor $f: A \to \hat{R}$ er anal. med $p \in A \subseteq \mathcal{U}$ og B er en åben mgd, hvor $p \in B \subseteq A$

Lad her 1^B betegne den konstante fkt. med B som def.mgd og værdien 1. Da er

$$Y(1^B) = Y(1^B \cdot 1^B) = Y(1^B)\cdot 1^B + 1^B \cdot Y(1^B) = 2\,Y(1^B),$$

følgelig $Y(1^B) = 0^B$.

Og idet $f|B = f \cdot 1^B$, har vi videre

$$Y(f|B) = Y(f\cdot 1^B) = (Yf)\cdot 1^B + f\cdot 0^B = (Yf)|B,$$

hvoraf det ønskede.

Vi kan da definere en afbildn. $X_p: \mathcal{O}_p \to \hat{R}$ ved

$$g \to (Y\hat{g})(p), \quad g \in \mathcal{O}_p,$$

hvor $\hat{g}: A \to \hat{R}$ er en vilk. anal restriktion af g. med $p \in A \subseteq \mathcal{U}$.

Det verificeres umiddelbart, at X_p opfylder betingelserne 1) og 2) s. 53, altså er en tangentvektor. Er nemlig $\hat{f}, \hat{g}$ restriktioner af $f, g \in \mathcal{O}_p$, så er eksempelvis $\hat{f}\hat{g}$ en restriktion af fg; benyttes nu

$$Y(\hat{f}\hat{g}) = (Y\hat{f})\hat{g} + \hat{f}\,Y\hat{g}$$

i punktet p, fås netop

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g).$$

At den til vektorfeltet X,

$$p \to X_p, \quad p \in \mathcal{U},$$

svarende operator $\bar{X}$ netop er Y, altså at $Yf = Xf$ for vilk $f: A \to \hat{R}$ tilh. $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, er endelig klart, idet Yf og Xf har samme def.mgd. A og for hvert $p \in A$

$$(Xf)(p) = X_p(f) = (Yf)(p),$$

idet jo som restriktion $\hat{f}$ af f kan benyttes f selv.

Eksempel.

Vi tænker os en stationær strømning. Den del T af rummet, der udfyldes af de strømmende partikler, er med sædv. topologi og naturligt atlas en 3-dimensional mangfoldighed.

I hvert pkt. p af T har vi en hastighedsvektor $\underline{v}_p$, nemlig hastigheden af en forbistrømmende partikel. Hertil svarer en tangentvektor $X_p: \mathcal{O}_p \to \hat{R}$. For vilk. $f \in \mathcal{O}_p$ fås $X_p(f)$ ved at betragte en bevægelse ud fra p med hastighed $\underline{v}_p$, feks. <u>bevægelsen af en forbistrømmende partikel</u>, og danne differentialkvotienten af f m.h.t tiden (jfr. s. 52 og 55). Hastighedsvektoren $\underline{v}_p$ repræsenteres således ved ændringshastigheden for funktioner i T som feks. tryk, temperatur, stedkoordinater, idet man følger en strømmende partikel ud fra p. Tangentvektorfeltet X anvendt på en fkt. $f \in \mathcal{O}t = \mathcal{O}_T$, altså Xf, giver ændringshastigheden af størrelsen f, "oplevet" af de strømmende partikler.

Et hastighedsvektorfelt, eller snarere feltet multipliceret med en tilvækst i tid Δt, kaldes også en infinitesimal transformation.

Et tangentvektorfelt til en analytisk mangfoldighed træffes i litteraturen oftest under navnet <u>infinitesimal transformation</u>, (jfr. eksemplet ovenfor).

Små bemærkninger.

Lad X være et vektorfelt defin. på en åben del $\mathcal{U}$ af en analytisk mangfoldighed, korresponderende med operatoren $\bar{X}$ defin. på $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$.

1. Er W en åben del af $\mathcal{U}$, da vil restriktionen af X til W korrespondere med restriktionen af $\bar{X}$ til $\mathcal{O}_W$.

2. Er $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \hat{R}^n$ et kort tilh. $\mathfrak{F}$, da er fremstillingen (se s. 65)

$$X|\mathcal{U}\cap V = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|\mathcal{U}\cap V\right)$$

ensbetydende med

$$\bar{X}|\mathcal{O}_{\mathcal{U}\cap V} = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}}|\mathcal{O}_{\mathcal{U}\cap V}\right),$$

hvor operatorum $\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ er (jfr. s. 65)

$$f \to \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\mathfrak{D}_i f^{\sigma})\cdot\sigma, \quad f \in \mathcal{O}_V.$$

§6. Lie produktet.

Lad $(S, \mathcal{O}, \mathcal{S})$ være en analytisk mangfoldighed og $\mathcal{U}$ en åben delmængde. Med $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ betegnes mængden af analytiske funktioner $f: A \to \dot{\mathbb{R}}$, hvor $A \subseteq \mathcal{U}$.

Et analytisk tangentvektorfelt X def. på $\mathcal{U}$ kan ifølge §5 opfattes som (korrekt: står i naturlig korrespondance med) en operator $X: \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, hvor

0) Xf har samme definitionsmængde som f;

1) $\quad X(af+bg) = aXf + bXg$,

2) $\quad X(fg) = (Xf)g + fXg$,

gældende for $f, g \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, $a, b \in \dot{\mathbb{R}}$.

Er også Y et tangentvektorfelt på $\mathcal{U}$, kan den sammensatte operator $Y \circ X$ dannes. I almindelighed er den ikke (korrekt: svarer den ikke til) et tangentvektorfelt, idet 2) ikke er opfyldt.

Eksempel. For $\mathcal{U} = S = \dot{\mathbb{R}}$ betragtes $X = Y = \frac{d}{dx} = D$ (svarende til kortet $e_{\dot{\mathbb{R}}}$ med den ene koordinat x). Betingelsen 2) er da ikke opfyldt, idet der jo gælder

$$D^2(fg) = (D^2 f)\cdot g + 2(Df)\cdot(Dg) + f\cdot D^2 g$$

og dermed kun undtagelsesvis

$$D^2(fg) = (D^2 f)\cdot g + f\cdot D^2 g$$

Når Y er analytisk, er imidlertid både $Y \circ X$ og $X \circ Y$ operatorer $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, der opfylder 0) og 1). Det samme gælder da $Y \circ X - X \circ Y$, og denne opfylder tillige 2), som man verificerer ved at danne differensen mellem $(Y \circ X)(fg) = Y(X(fg)) =$

$$Y(Xf)\cdot g + Xf\cdot Yg + Yf\cdot Xg + f\cdot Y(Xg)$$

og det analoge udtryk

$$X(Yf)\cdot g + Yf\cdot Xg + Xf\cdot Yg + f\cdot X(Yg).$$

For vilk. 2 analytiske vektorfelter X og Y på $\mathcal{U}$ er altså $Y \circ X - X \circ Y$ påny et analytisk vektorfelt på $\mathcal{U}$ (korrekt: svarer til ét sådant). Det kaldes Lie produktet eller kommutatoren af X og Y og betegnes $[X, Y]$.

Vi vil med $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ betegne mængden af analytiske vektorfelter defin. på $\mathcal{U}$.

Det er umiddelbart at verificere, at $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ med naturlig addition og multipl. m. reelle tal er et vektorrum (oftest af dim. uendelig, evt. af dim 0). Betragtet yderligere med kompos.

$$(X, Y) \to [X, Y] = Y \circ X - X \circ Y$$

er $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ en algebra, dvs. Lie produktet er lineært i hver faktor,

$$[X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y], \quad [aX, Y] = a[X, Y]$$

og analogt, for $X_1, X_2, X, Y \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$, $a \in \dot{\mathbb{R}}$. (Verificeres umiddelbart ved at anvende operatorerne på vilk. $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$.)

Lie produktet er i almindelighed ikke associativt. Som erstatning gælder Jacobi identiteten

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \tag{1.3}$$

I sammen af $[Y \circ X - X \circ Y, Z]$

$$= Z \circ (Y \circ X - X \circ Y) - (Y \circ X - X \circ Y) \circ Z$$
$$= Z \circ Y \circ X - Z \circ X \circ Y - Y \circ X \circ Z + X \circ Y \circ Z$$

og de analoge udtryk hæver nemlig leddene hinanden to og to.

Videre bemærkes, at

$$[X, X] = 0 \quad \text{og} \quad [Y, X] = -[X, Y]$$

Alt dette kan sammenfattes i:

Mængden $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ af analytiske vektorfelter defineret på en åben del $\mathcal{U}$ af en analytisk mangfoldighed er med naturlig addition og multiplik. m. reelle tal samt Lie produktet

$$(X, Y) \to [X, Y] = Y \circ X - X \circ Y$$

en Lie algebra.

En algebra (over de reelle tal), dvs. en mængde V med en addition og en multiplik. m. reelle tal samt en komposition $(x,y) \to [x,y]$ inden for V, hvor $(V,+,\cdot)$ er et vektorrum og kompositionen $(x,y) \to [x,y]$ er bilinear, kaldes navnlig (Hermann Weyl 1933) en Lie algebra, hvis

$$[x,x] = 0$$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$$

gælder for $x,y,z \in V$.

I en Lie algebra kaldes kompositionen $(x,y) \to [x,y]$ Lie produktet; den sidste identitet kaldes Jacobi identiteten. Der gælder

$$[y,x] = -[x,y],$$

idet

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]$$
$$= [x,y]+[y,x]$$

De nødv. betingelser

$$\forall_U x,y \; \forall_{\mathbb{R}} a: \; x+y,\; ax,\; [x,y] \in W$$

for at en delmgd. W af en algebra med restriktionerne af kompositionerne igen er en algebra, er også tilstrækkelige (ses let). Man taler da om en delalgebra.

En delalgebra af en Lie algebra er igen en Lie algebra (umiddelbart).

Eksempler.

1° Mængden V_3 af geometriske vektorer i rummet med sædv. addition, mult. m. reelle tal samt vektorprodukt er en Lie algebra. (Det er noget særligt for dimensionen 3.)

2° En algebra, hvor produktet er associativt, kaldes en associativ algebra. Her benyttes gerne almindelig multiplikativ skrivemåde.

Enhver algebra med multiplikationen $(x,y) \to xy$ med

$$x,y \to [x,y] = yx - xy$$

fås en Lie algebra. (Jacobi identiteten verificeres ved en tilsvarende regning som s. 69.)

Dette er naturligvis kun interessant, når multiplik. ikke er kommutativ.

Eksempelvis er mængden $M_{n,n}(\mathbb{R})$ af $(n \times n)$-matricer med sædv. addition og multiplikation med reelle tal samt matrixprodukt en associativ algebra og altså, med kompositionen

$$(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}) \to [\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}] = \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{y}}$$

i stedet for matrixproduktet, en Lie algebra.

En delalgebra heraf kaldes en Lie algebra af matricer.

Vi nævner (uden bevis) en dybtliggende sætning: Enhver endelig-dimensional Lie algebra er isomorf med en Lie algebra af matricer. (F. D. Ado, 1935.)

Øvelse. Gør rede for, at Lie algebraen af analytiske vektorfelter def. på en åben mgd. U (se s. 68) kan fås ved overgang fra en assoc. algebra først til den tilsvarende Lie algebra, derpå til en delalgebra.
(Operatorerne $X: \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$, der opfylder 0) og 1), se. s. 68, danner med sammensætning som produkt en ass. algebra.)

Litteratur om Lie algebraer.
Dixmier: Algèbres de Lie, Paris 1958
Jacobson: Lie algebras, New York 1962
Martinussen: Litt om Lie-algebraer, NMT 14 (1966), s. 103-110.

Bemærkning. Er X og Y analytiske vektorfelter defin. på en delmgd. U af en anal. mangfoldighed, og er W en åben del af U, da er

$$[X,Y]|W = [X|W,\ Y|W].$$

Bevis. Lad os her, som i §5, betegne X og Y opfattet som operatorer på $\mathcal{A}_U$ med $\bar{X}$ og $\bar{Y}$. Til $[X,Y]$ svarer da $\bar{Y}\circ\bar{X} - \bar{X}\circ\bar{Y}$, dermed til $[X,Y]|W$ restriktionen

$$(\bar{Y}\circ\bar{X} - \bar{X}\circ\bar{Y})|\mathcal{A}_W,$$

ifl.g 1., s. 68, og til $[X|W,\ Y|W]$ svarer

$$(\bar{Y}|\mathcal{A}_W)\circ(\bar{X}|\mathcal{A}_W) - (\bar{X}|\mathcal{A}_W)\circ(\bar{Y}|\mathcal{A}_W),$$

altså samme operator.

4.3

Idet atter X og Y er analytiske vektorfelter defin. på en delmgd. U af en anal. mangfoldighed $(S,\mathcal{O},\mathfrak{S})$, og $\sigma = (x_1,\dots,x_n)$: $V \to \mathbb{R}^n$ er et kort tilh. $\mathfrak{S}$, har vi entydige fremstillinger (se s. 65 og 68)

$$X|U\cap V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i},\qquad Y|U\cap V = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

hvor A_i, B_i, $i = 1,\dots,n$, er reelle fkt.ner med def.mgd. $U\cap V$.

Vi søger udtryk for koefficienterne C_i i fremstillingen

$$[X,Y]|U\cap V = \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Hertil minder om (s. 65), at $A_i = Xx_i$ og $B_i = Yx_i$, ligesom C_i kan fås ved at anvende vektorfeltet $[X,Y]$ på funktionen x_i. For tydelighedens skyld vil vi skrive $\bar{X}$, når vi tænker på den til vektorfeltet X svarende operator, og anal. Vi har da

$$C_i = [X,Y]x_i = [X,Y](x_i|U\cap V)$$
$$= (\bar{Y}\circ\bar{X} - \bar{X}\circ\bar{Y})(x_i|U\cap V)$$
$$= \bar{Y}(\bar{X}(x_i|U\cap V)) - \bar{X}(\bar{Y}(x_i|U\cap V))$$

Nu er

$$\bar{X}(x_i|U\cap V) = X(x_i|U\cap V) = Xx_i = A_i,$$

og idet jo $A_i \in \mathcal{A}_{U\cap V}$ og (jfr. s. 68)

$$\bar{Y}|\mathcal{A}_{U\cap V} = \sum_{j=1}^{n} B_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|\mathcal{A}_{U\cap V}\right),$$

finder vi for 1. led i differensen ovenfor

$$\bar{Y}(A_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|\mathcal{A}_{U\cap V}\right)\right)(A_i)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial}{\partial x_j}(A_i) = \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}.$$

For 2. led har vi naturligvis et anal. udtryk, og dermed

$$C_i = \sum_{j=1}^{n}\left(B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right).$$

<u>Lie produkt og analytisk afbildning.</u>

Lad $(S,\mathcal{O}_S,\mathfrak{S})$ og $(T,\mathcal{O}_T,\mathfrak{T})$ være analytiske mangfoldigheder og $\Phi: S \to T$ en anal. afbildning.

Et tangentvektorfelt X med S som def. mgd. vil vi kalde Φ-<u>beslægtet</u> med et tangentvektorfelt Y med T som def.mgd., hvis

$$\forall_S p:\ d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}.$$

<u>Nødv. og tilstr. herfor er det, at for hver reel anal. fkt g i T, dvs. $g \in \mathcal{A}_T$, gælder</u>

$$X(g\circ\Phi) = Yg\circ\Phi.$$

Thi for en vilk. fkt. $g: B \to \mathbb{R}$ tilh. $\mathcal{A}_T$ har $X(g\circ\Phi)$ og $Yg\circ\Phi$ samme (evt tomme) def.mgd. $\Phi^{-1}(B)$, og for $p \in \Phi^{-1}(B)$ er fkt.sværdierne

$$X_p(g\circ\Phi) = (d\Phi_p(X_p))(g),\ \text{hvnh. } Y_{\Phi(p)}(g),$$

altså overensstemmende, når X forudsættes Φ-beslægtet med Y.

Forudsættes omvendt betingelsen opfyldt, fås for vilk. $p \in S$, at $d\Phi_p(X_p) = Y_{\Phi(p)}$, idet

, hvert $h \in \mathcal{A}_{\bar{\Phi}(p)}$ har en anal. restrikt. $g : \mathcal{B} \to \hat{R}$ med $\bar{\Phi}(p) \in \mathcal{B}$, og

$$(d\bar{\Phi}_p(X_p))(h) = (d\bar{\Phi}_p(X_p))(g) = X_p(g \circ \bar{\Phi})$$
$$= Y_{\bar{\Phi}(p)}(g) = Y_{\bar{\Phi}(p)}(h).$$

Hvis analytiske vektorfelter X_1, X_2 på S er $\bar{\Phi}$-beslægtede med analytiske vektorfelter hvorh. Y_1, Y_2 på T, så vil $[X_1, X_2]$ være $\bar{\Phi}$-beslægtet med $[Y_1, Y_2]$.

Thi for hvert $g \in \mathcal{A}_T$ er da

$$X_2(X_1(g \circ \bar{\Phi})) = X_2(Y_1 g \circ \bar{\Phi}) = Y_2(Y_1 g) \circ \bar{\Phi},$$

dvs. $$(X_2 \circ X_1)(g \circ \bar{\Phi}) = (Y_2 \circ Y_1) g \circ \bar{\Phi},$$

og tilsvarende med indices ombyttet. Dermed

$$(X_2 \circ X_1 - X_1 \circ X_2)(g \circ \bar{\Phi}) = (Y_2 \circ Y_1 - Y_1 \circ Y_2) g \circ \bar{\Phi},$$

dvs. $$[X_1, X_2](g \circ \bar{\Phi}) = [Y_1, Y_2] g \circ \bar{\Phi}.$$

V. Lie algebra hørende til Lie gruppe.

§1. Venstre invariant vektorfelt.

Lad $(G, 0, \mathcal{O}_f, \cdot)$ være en Lie gruppe.

For vilk. $p, q \in G$ findes netop én venstre translation T_a,

$$s \to as, \quad s \in G,$$

der fører p over i q, nemlig venstre translationen med $a = qp^{-1}$. Vi har jo

$$T_a(p) = q \iff ap = q \iff a = qp^{-1}.$$

Venstre translationen $T_a = T_{qp^{-1}}$ er en bianalytisk afbildning af $(G, 0, \mathcal{O}_f)$ på sig selv (s. 39). Differentialet $(dT_a)_p$ af T_a i p er følgelig (s. 58) en bijektiv (altså isomorf) afbildning af tangentvektorrummet G_p i p på tangentvektorrummet G_q i q,

$$(dT_a)_p : G_p \to G_q \quad \text{(bijektiv)}.$$

Den omvendte afbildning er $(dT_{a^{-1}})_q$, altså differentialet i q af den venstre translation, der fører q over i p.

Definition. Et tangentvektorfelt X med dif. mgd. G kaldes <u>venstre invariant</u>, hvis

$$\forall_{G\, p,q}: \quad (dT_{qp^{-1}})_p (X_p) = X_q.$$

Sætning. <u>Nødv. og tilstr. for, at tangentvektorfeltet X på G er venstre invariant</u>, er

$$\forall_{G\, q}: \quad (dT_q)_e (X_e) = X_q,$$

Her er e gruppens neutrale element.

Bevis. For vilk. $p, q \in G$ er

$$T_{qp^{-1}} = T_q \circ T_{p^{-1}}$$

og dermed

$$(dT_{qp^{-1}})_p = (dT_q)_e \circ (dT_{p^{-1}})_p = (dT_q)_e \circ (dT_p)_e^{-1}.$$

Antages den tilsyneladende svagere betingelse i sætningen opfyldt, har vi nu straks

$$(dT_{qp^{-1}})_p (X_p) = X_q.$$

Af sætningen fremgår, at der for en vilk. tangentvektor $M \in G_e$ findes netop ét venstre invariant vektorfelt X på G med $X_e = M$. Afbildningen $X \to X_e$ af mængden Λ_G af venstre invariante vektorfelter ind i tangentvektorrummet G_e er altså bijektiv.

Er vektorfelterne X og Y venstre invariante og $a, b \in \hat{R}$, da er $aX + bY$ igen venstre invariante, idet

$$(dT_{qp^{-1}})_p (aX_p + bY_p) = a(dT_{qp^{-1}})_p (X_p) + b(dT_{qp^{-1}})_p (Y_p)$$
$$= aX_q + bY_q.$$

Mængden Λ_G af venstre inv. vektorfelter på G er altså med naturlig addition og multipl. m. reelle tal et vektorrum.

Afbildningen $X \to X_e$, $X \in \Lambda_G$, er en bijektiv og naturligvis linear, altså isomorf afbildning af $(\Lambda_G, +, \hat{R})$ på $(G_e, +, \hat{R})$, tangentvektorrummet i e. Er Lie gruppen n-dimensional, har vi dermed $\dim \Lambda_G = n$.

Vi opstiller endnu et kriterium for, at et vektorfelt X på G er venstre invariant. Det udtrykker, at X opfattet som operator på mængden $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$ af analytiske fktner $f: A \to \hat{R}$ med $A \subseteq G$ er ombyttelig med venstre translationer:

Sætning. <u>Nødv. og tilstr. for, at tangentvektorfeltet X på G er venstre invariant</u>, er

$$\forall_{G\, a}\, \forall_{\mathcal{A}_G f}: \quad X(f \circ T_a) = Xf \circ T_a.$$

Bevis. Ved at sætte $q = ap$ kan vi omskrive betingelsen i definitionen af venstre invarians til

$$\forall_{G\, a}\, \forall_{G\, p}: \quad (dT_a)_p (X_p) = X_{ap}.$$

Nu er

$$\forall_{G\, p}: \quad (dT_a)_p (X_p) = X_{ap}$$

netop definitionen på, at X er T_a-beslægtet med sig selv (s. 71), og altså (s. 71) ensbetydende med

$$\forall_{\mathcal{O}_G} f: \quad X(f\circ T_a) = Xf \circ T_a$$

Ved at foreskrive X_e lig en vilk. tangentvektor $M \in G_e$ bestemmes som nævnt et venstre invariant tangentvektorfelt X. Vi kan for en vilk. anal. fkt. $f: A \to \dot{R}$ med $A \subseteq G$, dvs. for $f \in \mathcal{O} = \mathcal{O}_G$, angive Xf ved M, nemlig

$$s \to X_s(f) = \big((dT_s)_e(M)\big)(f) = M(f\circ T_s), \quad s \in A.$$

Vi vil nu vise

Sætning. <u>Et venstre invariant tangentvektorfelt X på G er analytisk.</u>

Bevis. Til hvert kort $\sigma = (x_1,\dots,x_n): V \to \dot{R}^n$ tilhørende $\mathcal{O}_G$ svarer en fremstilling

$$X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

hvor $A_1, \dots, A_n$ er reelle fkt.ner på V. Vor opgave kan opfattes som gående ud på at vise, at fkt.nerne $A_i = Xx_i$, $i = 1,\dots,n$, er analytiske (se s. 65).

Først bemærkes, at erstattes $\sigma = (x_1,\dots,x_n)$ med $\sigma\circ T_p = (x_1\circ T_p, \dots, x_n \circ T_p): p^{-1}V \to \dot{R}^n$, som jo atter er et kort tilh. $\mathcal{O}_G$, idet T_p er bianalytisk, da erstattes koefficienterne A_i med $A_i \circ T_p$, $i = 1,\dots,n$. Thi da X er venstre invariant, gælder

$$X(x_i \circ T_p) = Xx_i \circ T_p = A_i \circ T_p.$$

Hermed: koefficienterne A_i, $i = 1,\dots,n$, er analytiske i et vilk. pkt. $p \in V$, netop hvis koefficienterne hørende til kortet $\sigma\circ T_p$ er analytiske i gruppens neutrale element e.

Det er følgelig tilstrækkeligt at betragte tilfældet, hvor σ afbilder e, altså hvor $e \in V$, og vise, at $A_i = Xx_i$, $i = 1,\dots,n$ er analyt. i e.

Vi antager da $e \in V$ og søger udtryk for Xx_i.

Vi kan antage $\sigma(e) = (0,\dots,0)$; nogen egt. lettelse betyder det dog ikke. Vi sætter

$$\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n) = \sigma\circ \text{komp.} \circ (\sigma,\sigma)^{-1};$$

det er restriktionen af kompositionen $\circ$ til

$$\{(s,t) \in V\times V \mid st \in V\}$$

udtrykt ved kortet σ; hvert φ_i er en analytisk funktion af 2n reelle variable. Endelig betegner vi med $m_1,\dots,m_n$ koordinaterne til tangentvektoren $M = X_e \in G_e$ m.h.t. basen $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_e, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_e$ i G_e.

For hvert $s \in V$ har vi nu, idet vi sætter $\sigma(s) = (u_1,\dots,u_n)$:

$$Xx_i(s) = M(x_i\circ T_s) = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{\partial(x_i\circ T_s)}{\partial x_j}\right)_e,$$

hvor $$\left(\frac{\partial(x_i\circ T_s)}{\partial x_j}\right)_e = \partial_j(x_i\circ T_s\circ\sigma^{-1})\,(0,\dots,0).$$

Med $\sigma(t) = (v_1,\dots,v_n)$ er $x_i\circ T_s\circ\sigma^{-1}$ funktionen

$$(v_1,\dots,v_n) \to x_i(st) = \varphi_i(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n),$$

defineret for $(v_1,\dots,v_n) \in \sigma(s^{-1}V \cap V)$, altså i en åben omegn af 0. Den j'te afledede i $(0,\dots,0)$ er da

$$\partial_{n+j}\varphi_i\,(u_1,\dots,u_n,0,\dots,0).$$

Funktionen $A_i^{\sigma} = (Xx_i)^{\sigma}$ er således

$$(u_1,\dots,u_n) \to \sum_{j=1}^{n} m_j\,\partial_{n+j}\varphi_i\,(u_1,\dots,u_n,0,\dots,0), \quad (u_1,\dots,u_n) \in \sigma(V).$$

Heraf fremgår, at A_i^{σ} er analyt., altså $A_i = Xx_i$ analytisk – i hele def.mgden V; det havde været nok at vise A_i analyt. i e.

Vi noterer det fundne udtryk for koefficienterne A_i, $i = 1,\dots,n$:

Er X et venstre invariant vektorfelt på en Lie gruppe $(G, \circ, \mathcal{J}, \cdot)$ og $\sigma = (x_1, \ldots, x_n): V \to \mathbb{R}^n$ et kort tilh. $\mathcal{J}$ med $e \in V$, da har vi for koefficienterne A_i i fremstillingen

$$X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{at} \quad A_i^{\sigma} = \sum_{j=1}^{n} m_j \psi_j^i,$$

hvor $m_1, \ldots, m_n$ er koordinaterne til $M = X_e \in \mathcal{G}_e$ m.h.t. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_e, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_e$, medens ψ_j^i er fkt.nen

$$(u_1, \ldots, u_n) \to \mathcal{D}_{n+j} \varphi_i (u_1, \ldots, u_n, \sigma(e)), \quad u_1, \ldots u_n) \in \sigma(V),$$

hvor $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ er (en restriktion af) gruppekompositionen udtrykt ved kortet σ.

Funktionerne ψ_j^i vil vi kalde Lie gruppens transformationsfunktioner i kortet σ. Bemærk, at

$$\psi_j^i(\sigma(e)) = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

(smh s. 40), i overensstemmelse med $m_i = A_i(e)$.

Lie produktet $[X, Y]$ af to venstre inv. vektorfelter X og Y på G har mening, da X og Y som vist er analytiske. Det er påny venstre invariant. For hvert $a \in G$ er det nemlig T_a-beslægtet med sig selv, da X og Y er det (se s. 73 nederst og s. 72).

Mængden Λ_G af venstre invariante tangentvektorfelter på en Lie gruppe $(G, \circ, \mathcal{J}, \cdot)$ er da med naturlig addition og multipl. med reelle tal samt Lie produktet

$$(X, Y) \to [X, Y] = Y \circ X - X \circ Y$$

en Lie algebra, nemlig en delalgebra af mængden $\mathcal{X}_G$ af analytiske vektorfelter på G med tilsvarende kompositioner. Den kaldes den til Lie gruppen hørende Lie algebra.

Højre invariant vektorfelt defineres analogt venstre invariant, og der gælder ganske tilsvarende resultater. Når vi i det følgende holder os til venstre invariante vektorfelter, beror det på, at

Lie algebraen af højre inv vektorfelter er isomorf med Lie algebraen af venstre inv.

Bevis. Idet vi med $\mathcal{J}$ betegner den bianalytiske afbildn. $s \to s^{-1}$, $s \in G$, af G på sig selv, bestemmes ud fra et vektorfelt X på G et nyt, Y, ved

$$Y_p = d\mathcal{J}_{p^{-1}}(X_{p^{-1}}), \quad p \in G.$$

Vektorfeltet Y kan også siges at være bestemt ved, at X er $\mathcal{J}$-beslægtet med Y (se s. 71).

Er nu X venstre inv., da vil Y være højre inv. Det er nok for et vilk. $p \in G$ at vise, at

$$(dT_p^h)_e(Y_e) = Y_p,$$

hvor T_p^h betegner højre transl.nen med p. For venstre side har vi

$$(dT_p^h)_e(Y_e) = (dT_p^h)_e(d\mathcal{J}_e(X_e)) = d(T_p^h \circ \mathcal{J})_e(X_e).$$

Nu er $T_p^h \circ \mathcal{J}$ afbildningen $s \to s^{-1}p = (p^{-1}s)^{-1}$, $s \in G$, altså lig med $\mathcal{J} \circ T_{p^{-1}}$, hvorfor

$$d(T_p^h \circ \mathcal{J})_e = d\mathcal{J}_{p^{-1}} \circ (dT_{p^{-1}})_e$$

og dermed, da X er venstre inv.,

$$d(T_p^h \circ \mathcal{J})_e(X_e) = d\mathcal{J}_{p^{-1}}(X_{p^{-1}}) = Y_p.$$

For X venstre invar., kan det tilsv. Y da også bestemmes som det højre inv. vektorfelt, hvor

$$Y_e = d\mathcal{J}_e(X_e).$$

Da nu $\mathcal{J}$ er bianalytisk, er $d\mathcal{J}_e: \mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_e$ bijektiv og altså $X \to Y$, $X \in \Lambda_G$ en bijektiv afbildn. på mængden af højre inv. vektorfelter.

At $X \to Y$, $X \in \Lambda_G$ er lineær, er oplagt, og af $X_1 \to Y_1$ og $X_2 \to Y_2$, dvs. X_1, X_2 $\mathcal{J}$-beslægtede med henh. Y_1, Y_2, følger (s. 72), at $[X_1, X_2]$ er $\mathcal{J}$-beslægtet med $[Y_1, Y_2]$, dvs. $[X_1, X_2] \to [Y_1, Y_2]$.

Hermed er vist, at $X \to Y$, $X \in \Lambda_G$ er en isomorf afbildn. af Lie algebraen af venstre invar. vektorfelter på Lie algebraen af højre invar.

§2. Lie gruppe og Lie algebra.

Lad $(G, \circ, \mathcal{O})$ være en Lie gruppe.

Den tilhørende Lie algebra er (se §1) mængden Λ_G af venstre inv. tangentvektorfelter med definitionsmængde G, med naturlig addition og multiplikation m. reelle tal samt Lie produktet

$$(X, Y) \to [X, Y] = Y \cdot X - X \cdot Y.$$

Vi minder endvidere om, at et venstre inv. vektorfelt X kan bestemmes ved, at vektoren X_e i gruppens neutrale element e foreskrives. Afbildningen $X \to X_e$, $X \in \Lambda_G$, er en isomorf afbildn. af $(\Lambda_G, +, \dot{\mathbb{R}})$ på tangentvektorrummet $(G_e, +, \dot{\mathbb{R}})$ i e.

Lad nu $\sigma = (x_1, \dots, x_n) : V \to \dot{\mathbb{R}}^n$ være et kort tilh. $\mathcal{O}$, der afbilder e. Vi sætter

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \sigma \circ \mathrm{komp} \circ (\sigma, \sigma)^{-1};$$

det er restriktionen af kompositionen $\cdot$ til

$$\{(s, t) \in V \times V \mid st \in V\}$$

udtrykt ved σ.

Til σ svarer basen $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_e, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_e$ for tangentvektorrummet $(G_e, +, \dot{\mathbb{R}})$ og dermed videre en basis $X_1, \dots, X_n$ for $(\Lambda_G, +, \dot{\mathbb{R}})$.

Her er X_k det venstre inv. vektorfelt med $(X_k)_e = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_e$. For en vilk. anal. fkt. $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$ med $A \subseteq G$, dvs. $f \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_G$, er altså $X_k f$ funktionen (jfr. s. 74)

$$s \to \left(\frac{\partial (f \circ T_s)}{\partial x_k}\right)_e, \quad s \in A.$$

For et vilk. venstre inv. vektorfelt X på G følger koordinaterne $\xi_1, \dots, \xi_n$ m.h.t. $X_1, \dots, X_n$ naturligvis sammen med koordinaterne til X_e m.h.t. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_e, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_e$. Vi har altså (s. 75)

$$X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{med} \quad A_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi_k^i,$$

hvor transformationsfkt.nen ψ_k^i er

$$(u_1, \dots, u_n) \to \mathcal{D}_{n+k} \varphi_i (u_1, \dots, u_n, \sigma(e)), \quad (u_1, \dots, u_n) \in \sigma(V).$$

Bemærk, at $A_i(e) = \xi_i$, idet $X_e = \sum_{i=1}^{n} A_i(e) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_e$.

Specielt gælder $X_k|V = \sum_{i=1}^{n} (\psi_k^i \circ \sigma) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Idet X og Y er venstre inv. tangentvektorfelter på G, altså $X, Y \in \Lambda_G$, med koord.sæt henh. $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ og $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ m.h.t. $X_1, \dots, X_n$, søger vi koordinaterne til Lie produktet $[X, Y]$.

Med $X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ og $Y|V = \sum B_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

har vi iflg. s. 71 $\quad [X, Y]|V = \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,

hvor $\quad C_i = \sum_{j=1}^{n} \left(B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)$.

Vi skal blot beregne $C_i(e)$, $i = 1, \dots, n$. Vi har

$$C_i(e) = \sum_{j=1}^{n} \left(\eta_j \mathcal{D}_j A_i^\sigma(\sigma(e)) - \xi_j \mathcal{D}_j B_i^\sigma(\sigma(e))\right)$$

Da nu $\quad A_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi_k^i$,

har vi $\quad \mathcal{D}_j A_i^\sigma(\sigma(e)) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathcal{D}_j \psi_k^i(\sigma(e))$,

hvor i kraft af defin. på ψ_k^i

$$\mathcal{D}_j \psi_k^i(\sigma(e)) = \mathcal{D}^2_{j, n+k} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e)).$$

For $\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)_e = \mathcal{D}_j B_i^\sigma(\sigma(e))$ kan vi regne tilsvarende, og finder da sammenfattende for $C_i(e)$:

Den i^{te} koordinat til Lie produktet $[X, Y]$ m.h.t. $X_1, \dots, X_n$ er

$$\sum_{j,k=1}^{n} \eta_j \xi_k \mathcal{D}^2_{j,n+k} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e)) - \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \eta_k \mathcal{D}^2_{j,n+k} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e)).$$

De to summer kan naturligvis slås sammen; evt. kan indices j og k først ombyttes i den ene sum:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left(\mathcal{D}^2_{k,n+j} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e)) - \mathcal{D}^2_{j,n+k} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e))\right) \xi_j \eta_k.$$

Specielt har vi

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathcal{D}^2_{k,n+j} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e)) - \mathcal{D}^2_{j,n+k} \varphi_i(\sigma(e), \sigma(e))\right) X_i$$

Den almene formel kan på den anden side let afledes heraf, idet

$$[X, Y] = \left[\sum_j \xi_j X_j, \sum_k \eta_k X_k\right] = \sum_{j,k} \xi_j \eta_k [X_j, X_k].$$

En vigtig konsekvens er:

Lokalt (bianalytisk) isomorfe Lie grupper har isomorfe Lie algebraer.

Er nemlig Lie gruppen $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_f,\cdot)$ lokalt bianalytisk isomorf med $(G',\mathcal{O}',\mathcal{O}_f',\cdot)$, kan σ og et kort $\sigma' \in \mathcal{O}'$, der afbilder e' tænkes valgt (jfr. øvelse s. 49), så

$$\varphi = \sigma \circ \text{komp} \circ (\sigma,\sigma)^{-1} = \sigma' \circ \text{komp}' \circ (\sigma',\sigma')^{-1}.$$

Specielt er da $\sigma(e) = \sigma'(e')$, nemlig begge lig det talsæt $(u_1,\dots,u_n)$, hvor $\varphi(u_1,\dots,u_n,u_1,\dots,u_n) = (u_1,\dots,u_n)$.

Til σ' svarer en basis $X_1',\dots,X_n'$ for $\Lambda_{G'}$, ligesom $X_1,\dots,X_n$ svarer til σ. Korrespondancen

$$\sum_{i=1}^n \xi_i X_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i X_i', \quad (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

mellem Λ_G og $\Lambda_{G'}$ er naturligvis en isomorfi hvad angår addition og multipl. m. reelle tal, og af koordinatudtrykket s. 76 for Lie produktet følger straks, at det samme er tilfældet for dette, altså

$$\left.\begin{array}{l} X \leftrightarrow X',\ Y \leftrightarrow Y' \Rightarrow \\ \end{array}\right. \begin{array}{l} X+Y \leftrightarrow X'+Y' \\ aX \leftrightarrow aX' \\ [X,Y] \leftrightarrow [X',Y'], \end{array}$$

gælder for $X,Y \in \Lambda_G$, $X',Y' \in \Lambda_{G'}$ og $a \in \mathbb{R}$.

Af afgørende betydning er, at også det omvendte gælder:

<u>Lie grupper, der har isomorfe Lie algebraer, er lokalt (bianalytisk) isomorfe.</u>

Det kan vi dog ikke vise her. Endnu vanskeligere er bevist for følgende hovedsætning

<u>Enhver endelig-dimensional Lie algebra er isomorf med en Lie algebra hørende til en Lie gruppe.</u>

De 3 sætninger motiverer studiet af Lie algebraer.

Eksempel. For vilk. elementer x,y af en 1-dim. Lie algebra gælder $[x,y]=0$, thi er fx. $y=ax$, har vi $[x,y] = a[x,x] = 0$.

På nær isomorfi findes altså kun én 1-dim. Lie algebra. Ifølg. den første ubeviste sætn. ovenfor er da alle 1-dim. Lie grupper lokalt bianalytisk isomorfe (dette har vi vist direkte s. 50-51).

Eksempel.

Vi vil bestemme Lie algebraen for den generelle lineære gruppe $GL(n,\mathbb{R})$ af regulære $(n\times n)$-matricer.

Hertil benyttes som kort $\sigma = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ den identiske afbildning af $GL(n,\mathbb{R})$, - idet vi som sædv. identificerer mgd. $M_{n,n}(\mathbb{R})$ af reelle $(n\times n)$-matricer med $\mathbb{R}^{n^2}$. Hervved bestemmes en basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)_E$, $i,j=1,\dots,n$, for tangentvektorrummet i enhedsmatricen $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_{nn}$ og videre en basis X_{ij}, $i,j=1,\dots,n$ for Lie algebraen Λ af venstre inv. vektorfelter.

Med $\varphi = (\varphi_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ = matrixmult., altså $\varphi_{ij}(u_{11},\dots,u_{nn},v_{11},\dots,v_{nn}) = u_{i1}v_{1j} + \dots + u_{in}v_{nj}$, har vi

$$\frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial u_{ik}\,\partial v_{kj}} = 1, \quad k=1,\dots,n$$

medens alle øvrige 2. afledede er 0. For den ij^{te} koordinat m.h.t. nævnte basis til Lie produktet $[X,Y]$ af $X,Y \in \Lambda$ med koordinater ξ_{gh}, hhv. η_{gh}, $g,h=1,\dots,n$, har vi da ifølg. s. 76

$$\sum_{gh,lm} \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial u_{gh}\,\partial v_{lm}} \left(\eta_{gh}\xi_{lm} - \xi_{gh}\eta_{lm}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\eta_{ik}\xi_{kj} - \xi_{ik}\eta_{kj}\right).$$

Opfattes koordinatsættene m.h.t. X_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, for venstre invar. vektorfelter $X,Y,\dots$ som matricer $\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{Y}}, \dots$, gælder altså:

$[X,Y]$ har koordinatmatrix $\underline{\underline{Y}}\,\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{Y}}$.

Da jo til $X+Y$ og aX, $a \in \mathbb{R}$ svarer koordinatmatricerne $\underline{\underline{X}}+\underline{\underline{Y}}$ og $a\underline{\underline{X}}$, har vi:

<u>Lie algebraen hørende til den generelle lineære gruppe</u> $GL(n,\mathbb{R})$ <u>er isomorf med Lie algebraen af alle</u> $(n\times n)$-<u>matricer</u>, $M_{n,n}(\mathbb{R})$ <u>med sædv. addition og multipl. m. reelle tal samt</u> $[\underline{\underline{X}},\underline{\underline{Y}}] = \underline{\underline{Y}}\,\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{Y}}$.

Overgangen til koordinatmatrix m.h.t. nævnte basis X_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, er nemlig en isomorfi.

Lad os, selv om vi ikke havde behov for det ved bestemmelsen af Lie algebraen hørende til den generelle lineære gruppe $GL(n,\mathbb{R})$, eksplicit finde de venstre invariante vektorfelter på $GL(n,\mathbb{R})$.

·57
58a

Da $GL(n,\mathbb{R})$ er en åben del af $M_{n,n}(\mathbb{R})$, som vi identificerer med $\mathbb{R}^{n^2}$, har vi for hvert $\underline{\underline{P}} \in GL(n,\mathbb{R})$ en naturlig isomorfi mellem $(M_{n,n}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R})$ og tangentvektorrummet i $\underline{\underline{P}}$ (se side 55). Vi kan derfor tænke på et tangentvektorfelt X som en afbildning af $GL(n,\mathbb{R})$ ind i $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Lad nu X være det venstre inv. vektorfelt, hvor $X_{\underline{\underline{E}}}$ er (egl.: svarer til) en given $(n\times n)$-matrix $\underline{\underline{A}}$. For hvert $\underline{\underline{P}} \in GL(n,\mathbb{R})$ er da

$$X_{\underline{\underline{P}}} = (dT_{\underline{\underline{P}}})_{\underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{A}}).$$

Da $T_{\underline{\underline{P}}}$ er restriktionen af den lineære afbildning $T'_{\underline{\underline{P}}}$ af $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ind i sig selv,

$$\underline{\underline{S}} \to \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{S}}, \quad \underline{\underline{S}} \in M_{n,n}(\mathbb{R}),$$

til den åbne delmgd. $GL(n,\mathbb{R})$, er imidlertid $(dT_{\underline{\underline{P}}})_{\underline{\underline{E}}}$, opfattet som afbildn. af $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ind i sig selv, lig $T'_{\underline{\underline{P}}}$ (jfr. s. 58a). Altså er

$$X_{\underline{\underline{P}}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}.$$

Formen af et venstre inv. vektorfelt på $GL(n,\mathbb{R})$ er således

$$\underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}, \quad \underline{\underline{P}} \in GL(n,\mathbb{R}),$$

hvor $\underline{\underline{A}}$ er en vilk. $(n\times n)$-matrix.

Vektorfeltet X_{ij} i den s. 77 benyttede basis for Lie algebraen hørende til $GL(n,\mathbb{R})$ er

$$\underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{P}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(1 i position (i,j); j over søjlen)

Koordinatmatricen for det venstre invar. vektorfelt $\underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}$ mht. X_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, er netop $\underline{\underline{A}}$, og Lie produktet med vektorfeltet $\underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{B}}$ er derfor ifølge s. 77

$$\underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}), \quad \underline{\underline{P}} \in GL(n,\mathbb{R}).$$

ps. En mulig vej til resultatet $X_{\underline{\underline{P}}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}$ er også anvendelse af udtrykket for X s. 75 med $\sigma = e_{GL(n,\mathbb{R})}$.

NB. Et venstre invar. vektorfelt på $GL(n,\mathbb{R})$ er, for $n \geq 2$, i alm. ikke højre invariant.

VI. Eksponentialafbildningen.

§1. Stationær strømning.

Lad $(S,\mathcal{O},\mathcal{S})$ være en analytisk mangfoldighed og γ en analytisk afbildn. af $\dot{\mathbb{R}}$ eller et interval $\mathcal{I}\subseteq\dot{\mathbb{R}}$ ind i S. Vi vil bruge kinematiske ord og kalde γ en <u>analytisk bevægelse</u>; et pkt. $\gamma(t)$ vil vi også omtale som „det sted, partiklen befinder sig til tiden t".

Ved <u>hastigheden</u> $v_\gamma(t_0)$ i bevægelsen γ til tiden $t_0\in\mathcal{I}$ forstår vi tangentvektoren i $\gamma(t_0)$

$$f\to \mathcal{D}f(\gamma)(t_0)=\left.\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=t_0},\quad f\in\mathcal{O}_{\gamma(t_0)}$$

I tilfælde af, at S er en analytisk flade i rummet, har hastigheden på forhånd en mening som geometrisk vektor i tangentplanen i $\gamma(t_0)$, men ved den naturlige isomorfi på tangentvektorrummet $S_{\gamma(t_0)}$ går denne over i den netop indførte, jvf. s. 52. Tilsvarende gælder ved andre dimensionstal (jvf. s. 55).

Tilbage til det almene tilfælde. Af definitionen på differential (s. 57) ses straks, at hastigheden til tiden t_0 er billedet ved differentialet $d\gamma_{t_0}:\dot{\mathbb{R}}_{t_0}\to S_{\gamma(t_0)}$ af

$$f\to \mathcal{D}f(t_0),\quad f\in\mathcal{O}_{t_0},$$

eller, hvis man ved at udnytte den natørl. isomorfi mellem $\dot{\mathbb{R}}_{t_0}$ og $\dot{\mathbb{R}}$, se s. 55, opfatter $d\gamma_{t_0}$ som defineret på $\dot{\mathbb{R}}$, billedet af tallet 1 ved differentialet $d\gamma_{t_0}:\dot{\mathbb{R}}\to S_{\gamma(t_0)}$.

Heraf fremgår i øvrigt, at hastigheden virkelig er en tangentvektor i $\gamma(t_0)$, altså at betingelserne 1) og 2) s. 53 er opfyldt, – hvad dog også let verificeres direkte.

Koordinaterne til hastigheden til tiden t_0 m.h.t. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\gamma(t_0)},\dots,\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{\gamma(t_0)}$, hvor $\sigma=(x_1,\dots,x_n)$ er et kort tilh. S, der afbilder $\gamma(t_0)$, er

$$\left.\frac{d(x_1\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=t_0},\dots,\left.\frac{d(x_n\circ\gamma)}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Thi de fås jo ved at anvende tangentvektoren på $x_1,\dots,x_n$, ifl.g sætn. s. 55.

Ved en <u>stationær strømning</u> Γ i en mgd. S vil vi forstå en afbildn. $\Gamma:S\times\dot{\mathbb{R}}\to S$, hvor

1) $\forall_S p:\ \Gamma(p,0)=p$,

2) $\forall_S p\,\forall_{\dot{\mathbb{R}}} s,t:\ \Gamma(\Gamma(p,s),t)=\Gamma(p,s+t)$.

Fortolkes $\Gamma(p,t)=q$ som: en partikel, der passerer punktet p, befinder sig efter forløbet af tidsrummet t i punktet q, er kravene 1) og 2) selvfølgelige. Man kunne naturligt opstille flere krav, f.eks. forlange, at $p\to\Gamma(p,t)$, $p\in S$, er en bijektiv afbildn. af S på sig selv for hvert $t\in\dot{\mathbb{R}}$; sådanne krav viser sig imidlertid at være konsekvenser af 1) og 2). 14.

Lad os for en afbildn. $\Gamma:S\times\dot{\mathbb{R}}\to S$ give betingelserne 1) og 2) i lidt forskellige formuleringer.

Idet vi for $t\in\dot{\mathbb{R}}$ med Γ_t betegner afbildningen af S ind i sig selv

$$p\to\Gamma(p,t),\quad p\in S,$$

er 1) og 2) ensbetydende med henh.

1') $\Gamma_0=e_S$, hvor e_S er ident. afb. af S,

2') $\forall_{\dot{\mathbb{R}}} s,t:\ \Gamma_t\circ\Gamma_s=\Gamma_{t+s}$.

Som konsekvens anføres, at hver afbildn. $\Gamma_t:S\to S$ er bijektiv med omv. afbildn. Γ_{-t}, idet

$$\Gamma_t\circ\Gamma_{-t}=\Gamma_{-t}\circ\Gamma_t=\Gamma_0=e_S.$$

For $p\in S$ betegner vi med γ_p afbildningen af $\dot{\mathbb{R}}$ ind i S

$$t\to\Gamma(p,t),\quad t\in\dot{\mathbb{R}}.$$

Betingelserne 1) og 2) kan nu skrives henh.

1'') $\forall_S p:\ \gamma_p(0)=p$,

2'') $\forall_S p,q,\forall_{\dot{\mathbb{R}}} s\,[q=\gamma_p(s)\Rightarrow\gamma_q=\gamma_p\circ T_s]$,

hvor T_s er translationen $t\to s+t$ af $\dot{\mathbb{R}}$. Til 2'') kan man nå gennem omskrivningerne

$$\forall p,s,t:\ \gamma_{\gamma_p(s)}(t) = \gamma_p(s+t)$$
$$\Leftrightarrow \forall p,s,t,q\ [q = \gamma_p(s) \Rightarrow \gamma_q(t) = \gamma_p(s+t)]$$
$$\Leftrightarrow \forall p,q,s\ \forall t\ [q = \gamma_p(s) \Rightarrow \gamma_q(t) = \gamma_p(s+t)]$$
$$\Leftrightarrow \forall p,q,s\ [q = \gamma_p(s) \Rightarrow \forall t: \gamma_q(t) = \gamma_p(s+t)].$$

Hver afbildning γ_p tolkes som bevægelsen af en partikel, nemlig den, der til tiden 0 befinder sig i p, jvf. 1"). Som tilføjelse til 1") kan 2") erstattes med

$$\forall_S p,r\ \forall_{\dot{\mathbb{R}}} s,u\ [\gamma_p(s) = \gamma_r(u) \Rightarrow \gamma_p \circ T_s = \gamma_r \circ T_u],$$

der betyder, at bevægelserne af to partikler, der passerer samme punkt, kun adskiller sig ved en forskydning i tiden.

Lad nu $(S,O,\mathcal{S})$ være en analytisk mangfoldighed. En stationær strømning Γ i S siges da at være <u>analytisk</u>, hvis Γ er en analytisk afbildning af produktmangfoldigheden af $(S,O,\mathcal{S})$ og $\dot{\mathbb{R}}$ med sædv. topologi og atlas ind i $(S,O,\mathcal{S})$.

I så fald er spec. hvert Γ_t en bianalytisk afbildn. af $(S,O,\mathcal{S})$ på sig selv, – både Γ_t og dens omv. Γ_{-t} er jo analytisk. Videre er hvert γ_p en analytisk bevægelse.

Ved <u>hastighedsfeltet</u> for en analytisk stationær strømning Γ i $(S,O,\mathcal{S})$ forstås tangentvektorfeltet X, hvor X_q er hastigheden i bevægelsen γ_q til tiden 0,

$$X_q = \underline{v}_{\gamma_q}(0), \qquad q \in S.$$

Er $\gamma_p(s) = q$, gælder i øvrigt

$$X_q = \underline{v}_{\gamma_p}(s),$$

således at X_q kan tolkes blot som hastigheden af en partikel, der passerer q. Af $\gamma_q = \gamma_p \circ T_s$ følger nemlig

$$(d\gamma_q)_0 = (d\gamma_p)_s \circ (dT_s)_0 = (d\gamma_p)_s \circ e_{\dot{\mathbb{R}}} = (d\gamma_p)_s$$

og dermed

$$\underline{v}_{\gamma_q}(0) = (d\gamma_q)_0(1) = (d\gamma_p)_s(1) = \underline{v}_{\gamma_p}(s).$$

<u>Hastighedsfeltet X for en analytisk stationær strømning Γ i en anal. mangfoldighed $(S,O,\mathcal{S})$ er et analytisk vektorfelt.</u>

Bevis. Lad $f: A \to \dot{\mathbb{R}}$ med $A \in \mathcal{S}$ være analytisk. Vi skal vise, at Xf er analytisk, altså, idet $\sigma: V \to \dot{\mathbb{R}}^n$ er et vilk. kort tilh. $\mathcal{S}$, at $(Xf)^\sigma$ er analytisk.

For $q \in A$ er

$$Xf(q) = X_q(f) = D(f \circ \gamma_q)(0) = \left.\frac{d(f(\Gamma(q,t)))}{dt}\right|_{t=0}.$$

Nu er $f \circ \Gamma$ en analytisk fkt. i $S \times \dot{\mathbb{R}}$ og hermed $h = f \circ \Gamma \circ (\sigma, e_{\dot{\mathbb{R}}})^{-1}$ en anal. fkt. i $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$. Da

$$(Xf)^\sigma(u_1,..,u_n) = \left.\frac{\partial h(u_1,..,u_n,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = D_{n+1}h(u_1,..,u_n,0)$$

for $(u_1,..,u_n) \in \sigma(A \cap V)$, sluttes derfor, at $(Xf)^\sigma$ er analytisk.

<u>En analytisk stationær strømn. i en anal. mangfoldighed $(S,O,\mathcal{S})$ er bestemt ved sit hastighedsfelt.</u>

Bevis. Lad Γ og Δ være anal. station. strømninger med samme hastighedsfelt X. Vi skal vise $\Gamma = \Delta$, dvs.

$$\forall_S p\ \forall_{\dot{\mathbb{R}}} t:\ \Gamma(p,t) = \Delta(p,t),$$

eller $$\forall_S p\ \forall_{\dot{\mathbb{R}}} t:\ \gamma_p(t) = \delta_p(t),$$

altså for vilk. $p \in S$

$$\{t \in \dot{\mathbb{R}} \mid \gamma_p(t) = \delta_p(t)\} = \dot{\mathbb{R}}.$$

Da $\dot{\mathbb{R}}$ er sammenhængende, og delmængden $\{t \mid \gamma_p(t) = \delta_p(t)\}$ er afsluttet og ikke tom, idet jo $\gamma_p(0) = \delta_p(0) = p$, er det tilstrækkeligt at vise, at delmængden tillige er åben. *)

Vi skal altså ud fra $\gamma_p(s) = \delta_p(s)$ slutte, at $\gamma_p(t) = \delta_p(t)$ for t tilhørende en omegn af s.

Hertil benyttes, at

$$\underline{v}_{\gamma_p}(t) = X_{\gamma_p(t)} \quad \text{og} \quad \underline{v}_{\delta_p}(t) = X_{\delta_p(t)}, \qquad t \in \dot{\mathbb{R}}.$$

Lad os nemlig betragte et kort $\sigma = (x_1,..,x_n)$: $V \to \dot{\mathbb{R}}^n$ tilh. $\mathcal{S}$, der afbilder punktet $\gamma_p(s) = \delta_p(s)$,

og lad J være et åbent interval om s, så $\gamma_p(t) \in V$ og $\delta_p(t) \in V$ for $t \in J$. I det følgende betragtes kun restriktionerne $\gamma_p | J$ og $\delta_p | J$, som vi for kortheds skyld betegner γ_p og δ_p. Vi skal vise, at γ_p og δ_p, eller ensbetydende hermed $\sigma \circ \gamma_p = (x_1 \circ \gamma_p, \dots, x_n \circ \gamma_p)$ og $\sigma \circ \delta_p = (x_1 \circ \delta_p, \dots, x_n \circ \delta_p)$, stemmer overens i en omegn af s.

I det: $X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ og dermed

$$X_{\gamma_p(t)} = \sum_{i=1}^{n} A_i(\gamma_p(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma_p(t)},$$

medens $\underline{v}_{\gamma_p}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i(\gamma(t))}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma_p(t)}$, $t \in J$,

har vi $\frac{d(x_i(\gamma_p(t))}{dt} = A_i(\gamma_p(t))$, $t \in J$, $i = 1, \dots, n$,

altså $D(x_i \circ \gamma_p) = A_i \circ \gamma_p$, $i = 1, \dots, n$.

Da nu $A_i \circ \gamma_p = A_i \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ \gamma_p = A_i^{\sigma} \circ (x_1 \circ \gamma_p, \dots, x_n \circ \gamma_p)$, kan resultatet skrives

$$\frac{d(x_i(\gamma_p(t))}{dt} = A_i^{\sigma}(x_1(\gamma_p(t)), \dots, x_n(\gamma_p(t))),$$

dvs. $(x_1 \circ \gamma_p, \dots, x_n \circ \gamma_p)$ er en løsning til systemet af differentialligninger

$$\frac{dy_i}{dt} = A_i^{\sigma}(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

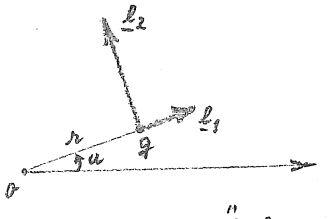
Det samme gælder imidlertid $(x_1 \circ \delta_p, \dots, x_n \circ \delta_p)$, og da de to løsninger stemmer overens i s, så også i en omegn, ifølge entydighedssætning for systemer af differentialligninger af 1. orden, (s. 156).

Ved en stationær strømning Γ er den enkelte bevægelse γ_p defineret på hele $\mathbb{R}$, partikler hverken forsvinder eller dukker op. Herpå beror det, at et analyt. vektorfelt på en anal. mangfoldighed i alm. ikke er hastighfelt for en stationær strømning. (Se følgende eks. 2°)

Eksempel.

1° I planen betragtes vektorfeltet X, hvor X_p (som geom. vektor) er lig stedvektoren $\vec{op}$ fra et fast pkt. o. Vi søger en stationær strømn. Γ med hastighedsfelt X.

Vi benytter polære koordinater $(r,u) = \sigma$, hvorved nå se bort fra en halvlinie fra o. Basis $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_q$ for tangentvektorrummet i q modsvares af de geom. vektorer $(\underline{e}_1)_q, (\underline{e}_2)_q$ af q af længde 1 og $\log \vec{oq}$, og retn. som vist:



I fremstillingen $X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \underline{e}_i$ er da

$$A_1^{\sigma}(r,u) = r, \quad A_2^{\sigma}(r,u) = 0.$$

Betingelsen $\underline{v}_{\gamma_p}(t) = X_{\gamma_p(t)}$ kommer altså ud på, at $(r \circ \gamma_p, u \circ \gamma_p)$ er løsn. til

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0$$

Ved brug af „begyndelsesbetingelsen" $\gamma_p(0) = p$ finder vi da

$$(r(\gamma_p(t)), u(\gamma_p(t))) = (r(p)e^t, u(p))$$

altså $\sigma(\Gamma(p,t)) = (r(p)e^t, u(p))$.

Det fundne Γ er virkelig en analytisk stationær strømning med hastighedsfelt X.

2° Vi ændrer feltet i 1°, så

$$A_1^{\sigma}(r,u) = r^2, \quad A_2^{\sigma}(r,u) = 0.$$

Betingelsen $\underline{v}_{\gamma_p}(t) = X_{\gamma_p}(t)$ giver diff. lign. syst.

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1^2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0,$$

altså sammen med $\gamma_p(0) = p$:

$$(r(\gamma_p(t)), u(\gamma_p(t))) = \left(\frac{1}{\frac{1}{r(p)} - t}, u(p)\right), \quad t < \frac{1}{r(p)}.$$

Vi finder således et Γ kun defineret i

$$\{(p,t) \mid t < \frac{1}{r(p)}\}.$$

Vort analytiske vektorfelt er således ikke hastighedsfelt for en stationær strømning (partiklerne forsvinder).

Vi skal se, at et venstre inv. vektorfelt på en Lie gruppe altid kan opfattes som hastighedsfelt for en (og ifflg. s. 80 kun en) analytisk stationær strømning.

Lad først X være blot et analytisk vektorfelt på en analytisk mangfoldigh. $(S,\mathcal{O},\mathcal{S})$. Da gælder:

For hvert $(p,s) \in S \times \mathbb{R}$ findes analytiske afbildninger (bevægelser) $\gamma: \mathcal{I} \to S$ defineret på et end. ell. uend. (åbent) interval $\mathcal{I}$, $s \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, så $\gamma(s) = p$ og

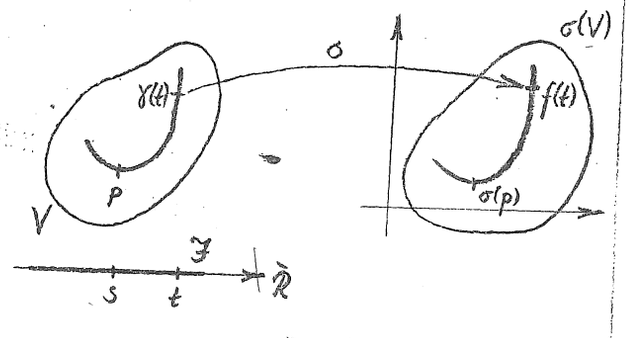
$$(*) \qquad \forall_t t: \ \underline{v}_\gamma(t) = X_{\gamma(t)},$$

og blandt disse én største, dvs. en hvoraf de alle er restriktioner.

Bevis.

1. Idet vi vælger et kort $\sigma = (x_1, \dots, x_n): V \to \mathbb{R}^n$ tilhørende S med $p \in V$, kan vi, uden at det gør nogen forskel for den første påstand, forlange $\gamma: \mathcal{I} \to V$. Men da kan betingelserne vedr. γ udtrykkes som betingelser vedr.

$$\sigma \circ \gamma = (x_1 \circ \gamma, \dots, x_n \circ \gamma) = (f_1, \dots, f_n) = f: \mathcal{I} \to \sigma(V) \subseteq \mathbb{R}^n.$$



Vi har jo $X|V = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, hvor A_i'erne er anal. fktner på V, og dermed for et anal. $\gamma: \mathcal{I} \to V$

$$X_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} A_i(\gamma(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$$

foruden $\quad \underline{v}_\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i(\gamma(t)))}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$.

Betingelsen $(*)$ er derfor ensbetydende med

$$\frac{df_i(t)}{dt} = A_i^\sigma(f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad i = 1, \dots, n,$$

og betingelsen $\gamma(s) = p$ „oversættes" umiddelbart:

$$f_i(s) = c_i \ , \quad i = 1, \dots, n,$$

hvor $(c_1, \dots, c_n) = \sigma(p)$.

Men da $A_1^\sigma, \dots, A_n^\sigma$ er analytiske fktner, findes, ifflg. eksistenssætn. for sædv. diff.lign.-systemer af 1. orden (s. 156), analytiske fktner $f_1, \dots, f_n$ på et interval $\mathcal{I}$ omkring s, der opfylder disse betingelser, og altså et analytisk $\gamma: \mathcal{I} \to V$ med $\gamma(s) = p$, der opfylder $(*)$.

2. Hvis to anal. afbildninger $\gamma: \mathcal{I} \to S$ og $\delta: \mathcal{J} \to S$, der opfylder $(*)$, stemmer overens i et pkt., så også i et interval omkring pkt.et.

Ræsonnementet er allerede udført s. 80-81, men lad os blot gentage det:

Tænker vi os $\gamma(s) = \delta(s) = p$, og erstattes γ og δ med restriktioner $\gamma': \mathcal{I}' \to V$ og $\delta': \mathcal{J}' \to V$, vil $\sigma \circ \gamma'$ og $\sigma \circ \delta'$ være løsninger til

$$\frac{dy_i}{dt} = A_i^\sigma(y_1, \dots, y_n),$$

der stemmer overens i s, og dermed i et interval omkring s ifflg. entydighedssætn. for sædv. diff.lign.system af 1. orden (s. 156).

3. Hvis to anal. afbildninger $\gamma: \mathcal{I} \to S$ og $\delta: \mathcal{J} \to S$, der opfylder $(*)$, stemmer overens i et pkt., så i hele $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

Ses ud fra 2. ved tilsvarende ræsonnement som s. 80: Mængden $\{t \in \mathcal{I} \cap \mathcal{J} \mid \gamma(t) = \delta(t)\}$ er afsluttet relativt til $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ og ifflg. 2. tillige åben. Indeholder mængden et pkt., vil den derfor være hele $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$, da jo $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ er sammenhængende.

(Man kan også benytte entydigheden af analytisk fortsættelse, se øvelse s. 32.)

4. Samtlige anal. $\gamma: \mathcal{I} \to S$ med $\gamma(s) = p$, der opfylder $(*)$, - sådanne findes ifflg. 1., - er ifflg. 3. restriktioner af en afbildn. $\gamma_0: \mathcal{I}_0 \to S$ def. på foreningen $\mathcal{I}_0$ af alle optrædende $\mathcal{I}$. Og γ_0 er åbenbart selv blandt nævnte γ'er.

Et par kommentarer til den viste sætning:

a) Den fundne største blandt anal. $\gamma: \mathcal{J} \to S$ med $\gamma(s) = p$, der opfylder (*), er naturligvis maximal mht (*), dvs. kan ikke udvides med bevarelse af (*).

b) Er $\gamma: \mathcal{J} \to S$ analyt. og opfylder (*), da vil for hvert $s \in \dot{\mathbb{R}}$ også $\gamma \circ T_s : -s + \mathcal{J} \to S$, altså $t \to \gamma(s+t)$, $t \in -s + \mathcal{J}$, opfylde (*).

Thi idet $d(\gamma \circ T_s)_t = d\gamma_{s+t} \circ (dT_s)_t = d\gamma_{s+t}$, har vi

$$\underline{v}_{\gamma \circ T_s}(t) = d(\gamma \circ T_s)_t(1) = d\gamma_{s+t}(1) = \underline{v}_\gamma(s+t) = X_{\gamma(s+t)} = X_{(\gamma \circ T_s)(t)}.$$

15 b
21

Lad nu $(G, 0, \mathcal{O}, \cdot)$ være en Lie gruppe og X et venstre invar. vektorfelt på G.

1° Er $\delta: \mathcal{J} \to G$ analyt. og $\forall_{\mathcal{J}} t: \underline{v}_\delta(t) = X_{\delta(t)}$, da gælder for vilk. $p \in G$ det samme for $T_p \circ \delta$, dvs. for afbildn.gen $t \to p\delta(t)$, $t \in \mathcal{J}$.

Thi $\underline{v}_{T_p \circ \delta}(t)$ er billedet af tallet 1 ved

$$d(T_p \circ \delta)_t = (dT_p)_{\delta(t)} \circ d\delta_t,$$

altså billedet ved $(dT_p)_{\delta(t)}$ af

$$d\delta_t(1) = \underline{v}_\delta(t) = X_{\delta(t)}.$$

Da nu X er venstre invar., har vi

$$\underline{v}_{T_p \circ \delta}(t) = (dT_p)_{\delta(t)}(X_{\delta(t)}) = X_{(T_p \circ \delta)(t)}.$$

I det følgende betegnes med γ den „største" anal. afbildn. $\gamma: \mathcal{J} \to G$, der opfylder betingelserne

$$\gamma(0) = e \quad \text{og} \quad (*) \quad \forall_{\mathcal{J}} t: \underline{v}_\gamma(t) = X_{\gamma(t)},$$

hvor e er gruppens neutrale element.

2° $\mathcal{J} = \dot{\mathbb{R}}$.

Thi for vilk. $s \in \mathcal{J}$ vil iflg. b) ovenfor og 1°

$$t \to \gamma(s)\gamma(t-s), \quad t \in s + \mathcal{J}$$

opfylde (*), og da afbildningen stemmer med γ i pkt.et s, så også i hele $\mathcal{J} \cap (s + \mathcal{J})$, jfr. 3., s. 82. Følgelig er $s + \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$, thi i modsat fald kunne γ udvides til $\mathcal{J} \cup (s + \mathcal{J})$ med bevarelse af (*), i strid med maksimaliteten. Det ensteds interval $\mathcal{J}$, der har egenskaben $s + \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$ både for visse positive og negative værdier af s, er imidlertid $\dot{\mathbb{R}}$.

3° $\forall_{\dot{\mathbb{R}}} s, t: \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$.

Thi for vilk. $s \in \dot{\mathbb{R}}$ opfylder afbildn.gerne

$$t \to \gamma(s+t) \text{ og } t \to \gamma(s)\gamma(t), \quad t \in \dot{\mathbb{R}},$$

begge betingelsen (*), iflg. henh. b) og 1°, og de stemmer overens i 0, dermed i hele $\dot{\mathbb{R}}$, jfr. 3., s. 82. – Resultatet er i øvrigt indeholdt i 2°, hvor vi fandt $\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t-s)$; man skal blot erstatte t med $s+t$.

4° Afbildn.gen $\Gamma: G \times \dot{\mathbb{R}} \to G$ defin. ved

$$\Gamma(p,t) = p\gamma(t), \quad (p,t) \in G \times \dot{\mathbb{R}},$$

er en analytiske stationær strømn.

Thi da $\gamma: \dot{\mathbb{R}} \to G$ og gruppekomp. $G \times G \to G$ er analytiske, er Γ det også. Og der gælder

1) $\Gamma(p,0) = p\gamma(0) = pe = p$,

2) $\Gamma(\Gamma(p,s),t) = p\gamma(s)\gamma(t) = p\gamma(s+t) = \Gamma(p,s+t)$.

5° Hastighedsfeltet for Γ er X.

Thi da $\gamma_p = T_p \circ \gamma$ har vi iflg. 1° for hvert $t \in \dot{\mathbb{R}}$

$$\underline{v}_{\gamma_p}(t) = X_{\gamma_p(t)},$$

spec.

$$\underline{v}_{\gamma_p}(0) = X_{\gamma_p(0)} = X_p.$$

Sætning. Et venstre invariant vektorfelt X på en Lie gruppe $(G, 0, \mathcal{O}, \cdot)$ er hastighedsfelt for en (og kun en) anal. stationær strømning Γ i G. Der gælder

$$(0) \qquad \Gamma(p,t) = p\gamma(t), \qquad p \in G,\ t \in \dot{\mathbb{R}},$$

hvor $\gamma: \dot{\mathbb{R}} \to G$ er den „største" analytiske bevægelse i G, der opfylder

$$\gamma(0) = e \quad \text{og} \quad \underline{v}_\gamma(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Det er en homomorf afbildn. af $(\dot{\mathbb{R}}, +)$ ind i $(G, \cdot)$,

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t),$$

<u>specielt er</u> $C = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ <u>en undergruppe af</u> $(G,\cdot)$.

(o) <u>kan også skrives</u> $\gamma_p = \Gamma_p \circ \gamma$; <u>de forskellige bevægelser er altså „venstre translaterede" af</u> γ, <u>spec. beskriver hver partikel en sideklasse til</u> C.

For hvert t er Γ_t en højre translation,

$$p \to p\gamma(t), \quad p \in G.$$

(Et venstre invar. vektorfelt kan således siges at være en infinitesimal højre translation.)

Videre bemærkes, at for $X \neq 0$ vil $\gamma: \mathbb{R} \to G$, og dermed hver bevægelse γ_p, være injektiv, eller periodisk og injektiv i periodeintervaller.

Thi kernen $\mathcal{K} = \{t \mid \gamma(t) = e\}$ for γ er jo en <u>undergruppe af</u> $(\mathbb{R},+)$, og den er <u>afsluttet</u> som originalmngd. til $\{e\}$, - 0 er jo en Hausdorff topologi. Følgelig er $\mathcal{K} = \{0\}$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathcal{K}$ af formen $\{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$, hvor $a > 0$. Da nu

$$\gamma(s) = \gamma(t) \Leftrightarrow \gamma(s-t) = e \Leftrightarrow s-t \in \mathcal{K},$$

vil i første tilfælde γ være injektiv, i andet γ være konstant, dermed Γ være hvile og $X = 0$, i tredje vil γ være periodisk med periode a og injektiv i halvåbne intervaller af længde a.

Øvelse. Vis, at en afsluttet undergruppe $\mathcal{K}$ af $(\mathbb{R},+)$ må have en af de nævnte former. (Er $\mathcal{K} \neq \{0\}$, vil $\inf\{t \in \mathcal{K} \mid t > 0\}$ lig 0, hvilk. lig $a > 0$ føre til sidstnævnte former.)

Eksempel. Vi kan her vise:

<u>Enhver sammenhængende 1-dim Lie gruppe er bianalytisk isomorf med</u> $\mathbb{R}$ <u>ell. torus</u> $T = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$, <u>med sædv. addition og topologi og naturligt atlas.</u>

Thi lad $X \neq 0$ være et venstre inv vektorfelt på den 1-dim. Lie gruppe $(G, 0, \mathcal{G}, \cdot)$, og lad $\gamma: \mathbb{R} \to G$ være bestemt som i sætningen ovenfor. Da

$$d\gamma_t(1) = v_\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \neq 0,$$

er $d\gamma_t: \mathbb{R} \to G_{\gamma(t)}$ bijektiv og følgelig (s. 58) restriktionen af γ til et passende interval om t en bianal. afbildn. på en åben omegn af $\gamma(t)$. Specielt er da billedmngd. $\{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ åben, og da den, som følger af, at γ er homomorf, er en undergruppe, så også afsluttet (s. 43), altså hele G, forudsat G er sammenhæng.

Omfatter nu kernen for γ kun 0, er $\gamma: \mathbb{R} \to G$ bijektiv og homomorf, altså isomorf, samt bianalytisk, da dette jo allerede vides lokalt.

Har kernen formen $\{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gælder det samme, når vi identificerer reelle tal, der afviger med hellallige multipla af a, dvs. går over til $\mathbb{R} \pmod{a}$.

154.

§2. Eksponentialafbildningen.

Lad $(G,0,\mathcal{O}_f,\cdot)$ være en Lie gruppe, og lad Λ_G som sædv. betegne mængden af venstre inv. vektorfelter på G, altså mængden af elementer i den tilhørende Lie algebra.

For vilk. $X\in\Lambda_G$ betegner vi nu med γ_X den "største" analyt. bevægelse γ i G, der opfylder

$$\gamma(0)=e \text{ og } (*)\ \underline{v}_\gamma(t)=X_{\gamma(t)}\ ;$$

den analytiske station. strømm. med hastighedsfelt X betegnes Γ_X,

$$\Gamma_X(p,t)=p\gamma_X(t).$$

Vi bringer altså X ind i betegnelserne i naturlig konsekvens af, at vi nu vil tage forskellige $X\in\Lambda_G$ i betragtning. I stedet for Γ_t, γ_p skriver vi nu $\Gamma_{X,t}$, $\gamma_{X,p}$.

For hvert $X\in\Lambda_G$ er γ_X en analytisk og homomorf afbildn. af de reelle tals add. gruppe ind i $(G,0,\mathcal{O}_f,\cdot)$, jfvg. s. 83.

Det er klart, at X er bestemt ved γ_X, idet jo $X_e=\underline{v}_{\gamma_X}(0)$. Og det er, som vi skal se, ikke svært at vise, at der til hver homomorf afbildn. γ af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(G,\cdot)$, som er analyt. (tilstr.: analytisk i 0), findes et $X\in\Lambda_G$, så $\gamma=\gamma_X$:

For vilk. $s\in\mathbb{R}$ er nemlig $\gamma=T_{\gamma(s)}\circ\gamma\circ T_{-s}$, idet jo $\gamma(t)=\gamma(s)\gamma(t-s)$. Er γ analyt. i 0, så derfor også i s, og

$$d\gamma_s=(dT_{\gamma(s)})_e\circ d\gamma_0\circ\ell_{\mathbb{R}},$$

dermed

$$\underline{v}_\gamma(s)=d\gamma_s(1)=(dT_{\gamma(s)})_e(d\gamma_0(1))=(dT_{\gamma(s)})_e(\underline{v}_\gamma(0)).$$

Vi har altså

$$\gamma(0)=e \quad\text{og}\quad \underline{v}_\gamma(s)=X_{\gamma(s)},$$

hvor X er det venstre inv. vektorfelt med $X_e=\underline{v}_\gamma(0)$.

Vi noterer:

Afbildn.gen $X\to\gamma_X$, $X\in\Lambda_G$ er bijektiv til mængden af analytiske homomorfier af de reelle tals add. gruppe ind i $(G,0,\mathcal{O}_f,\cdot)$.

Afbildningen $\gamma\to\underline{v}_\gamma(0)$ er bijektiv fra mængden af anal. homomorfier af de reelle tals additive gruppe ind i $(G,0,\mathcal{O}_f,\cdot)$ til tangentvektorrummet G_e i det neutr. elem. $e\in G$.

Vi vil nu vise

$$\gamma_X(st)=\gamma_{sX}(t)$$

for $X\in\Lambda_G$, $s,t\in\mathbb{R}$.

Bevis. Idet vi tænker os X og s fastholdt, er påstanden

$$\gamma_X\circ M_s=\gamma_{sX},$$

hvor M_s er homotetien $t\to st$, $t\in\mathbb{R}$. Da $(\gamma_X\circ M_s)(0)=\gamma_X(s0)=\gamma_X(0)=e$, kan påstanden godtgøres ved at vise

$$\forall_{\mathbb{R}}t:\ \underline{v}_{\gamma_X\circ M_s}(t)=sX_{(\gamma_X\circ M_s)(t)}.$$

Nu er imidlertid

$$X_{(\gamma_X\circ M_s)(t)}=X_{\gamma_X(st)}=\underline{v}_{\gamma_X}(st),$$

og for en anal. bevægelse γ gælder generelt

$$\underline{v}_{\gamma\circ M_s}(t)=s\underline{v}_\gamma(st),$$

idet $d(\gamma\circ M_s)_t=d\gamma_{st}\circ(dM_s)_t=d\gamma_{st}\circ M_s$ og dermed $d(\gamma\circ M_s)_t(1)=d\gamma_{st}(s)=sd\gamma_{st}(1)$.

Ved i den viste ligning at sætte $t=1$ fås spec.

$$\gamma_X(s)=\gamma_{sX}(1).$$

Definition. *Eksponentialafbildningen* $\exp:\Lambda_G\to G$ defineres ved

$$\exp X=\gamma_X(1)=\Gamma_X(e,1),\quad X\in\Lambda_G.$$

Punktet $\exp X$ er altså stedet for en partikel tiden 1 efter passage af e ved strømningen med hastighedsfeltet X.

Den sidst aflidte identitet kan nu skrives

(□) $$\gamma_X(t) = \exp tX,$$

gældende for $X \in \Lambda_G$, $t \in \dot{\mathbb{R}}$.

For hvert $X \in \Lambda_G$ kan altså γ_X og dermed den anal. stationære strømn. Γ_X med hastighedsfelt X udtrykkes ved hjælp af exponentialafbildningen,

$$\Gamma_X(p,t) = p \cdot \exp tX.$$

Homomorfiligningen $\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t)$ antager udseendet

$$\exp(s+t)X = (\exp sX)\cdot(\exp tX).$$

Når $X, Y \in \Lambda_G$ er <u>lin. afhængige</u>, gælder altså $$\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y).$$

NB. Denne ligning gælder <u>ikke</u> generelt.

Spec. bemærkes

$$\exp 0 = e, \quad \exp(-X) = (\exp X)^{-1}$$

og mere almindt

$$\exp(nX) = (\exp X)^n \text{ for } n \in \mathbb{Z}.$$

Eksempel.

Vi betragter $\dot{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ med sædv. multipl., sædv. topologi og naturl. atlas, eller, hvad der kommer ud på det samme, $GL(1,\dot{\mathbb{R}})$.

. Et vektorfelt kan her opfattes som en afb. ind i $\dot{\mathbb{R}}$, og det invar. vektorfelt X med $X_1 = a$ er (se s. 78)

$$p \to ap, \quad p \in \dot{\mathbb{R}} \setminus \{0\}.$$

Betingelsen $\underline{v}_\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ er da ensbet. med

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = a\gamma(t),$$

som i forbindelse med $\gamma(0) = 1$ giver

$$\gamma_X(t) = e^{at}, \quad \text{spec. } \exp X = e^a.$$

Indskud 1.

Et ægte dimensionalt vektorrum over $\dot{\mathbb{R}}$ kan på naturlig måde opfattes som en analytisk mangfoldighed.

Hver basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ for $(V, +, \dot{\mathbb{R}})$ giver jo anledning til en bijektiv afb. $\sigma: V \to \dot{\mathbb{R}}^n$, nemlig den omv. til

$$(u_1, \dots, u_n) \to \sum_{i=1}^{n} u_i \underline{e}_i, \quad (u_1, \dots, u_n) \in \dot{\mathbb{R}}^n.$$

For to vilk. baser $(\underline{e}_i)$ og $(\underline{\hat{e}}_i)$ er $\hat{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ (og dens omv.) en bijektiv lin. afbildn. af $\dot{\mathbb{R}}^n$ på sig selv.

Topologien i $\dot{\mathbb{R}}^n$ kan overføres til V ved afbildningen σ hørende til en basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ – og bliver den samme uanset basisvalget, idet $\sigma_V = (\hat{\sigma})^{-1} \circ (\hat{\sigma} \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma$, hvor $\hat{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ er homeomorf.

Herpå udgør afbildningerne σ hørende til de forsk. baser et atlas, der er analytisk, da de forsk. $\hat{\sigma} \circ \sigma^{-1}$ er analyt. for to vilk., og jo dækker V.

19.4. Det kan da udvides til et maksim. anal. atlas.

1)

Idet vi herefter tænker os Lie algebraen Λ_G hørende til en Lie gruppe $(G, \circ, \mathcal{O}_G, \cdot)$ forsynet med topologi og atlas som beskrevet, vil vi vise, at $\exp: \Lambda_G \to G$ er analytisk. Først dog

Indskud 2.

Lad her X være et anal. vektorfelt på en analytisk mangfoldighed $(S, \mathcal{O}, 5)$. Lad videre $f: A \to \dot{\mathbb{R}}$, hvor $A \in S$, være en analytisk funktion, altså $f \in \mathcal{O}_S$, og endelig $\gamma: \mathcal{I} \to A$ en analytisk bevægelse, så

(*) $$\forall_\gamma t: \ \underline{v}_\gamma(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Da er $$\mathcal{D}(f \circ \gamma) = (Xf) \circ \gamma$$

Thi for hvert $t \in \mathcal{I}$ er jo $\underline{v}_\gamma(t)$ og $X_{\gamma(t)}$ afbildninger $\mathcal{O}_{\gamma(t)} \to \dot{\mathbb{R}}$, fkt.nun f tilh. $\mathcal{O}_{\gamma(t)}$ og

$$\mathcal{D}(f\circ\gamma)(t) = \underline{v}_\gamma(t)(f), \quad Xf(\gamma(t)) = X_{\gamma(t)}(f).$$

1) Bemærk, at kompositionerne $(\underline{u},\underline{v}) \to \underline{u}+\underline{v}$ og $(t,\underline{v}) \to t\underline{v}$ bliver analytiske afbildninger af $V\times V$, henh. $\hat{R}\times V$ ind i V.

Benyttes nemlig i V koordinater m.h.t. en basis, i $\hat{R}$ den identiske afbild., udtrykkes jo kompositionerne

$$(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n) \to (u_1+v_1,\dots,u_n+v_n),$$
$$(t,v_1,\dots,v_n) \to (tv_1,\dots,tv_n).$$

Øvelse. Vis, at for en end. dim. algebra (se s. 70) bliver også produktet $(\underline{u},\underline{v}) \to \underline{u}\,\underline{v}$ analytisk.

(Benytte koordinater m.h.t. en basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$, sætte $\underline{e}_j\,\underline{e}_k = \sum_i c_{i,jk}\,\underline{e}_i$. Idet

$$\Big(\sum_j u_j\underline{e}_j\Big)\Big(\sum_k v_k\underline{e}_k\Big) = \sum_{jk}\Big(u_jv_k\sum_i c_{i,jk}\underline{e}_i\Big)$$
$$= \sum_i\Big(\sum_{jk} c_{i,jk}u_jv_k\Big)\underline{e}_i,$$

bliver kompos. udtrykt i koordinater

$$(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n) \to \Big(\sum_{jk} c_{i,jk}u_jv_k\Big)_{i=1,\dots,n}.\ )$$

Idet X kan opfattes som en operator $X: \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$, og vi med X^k betegner den k^{te} itererede, kan det fundne resultat ved induktion generaliseres til

$$\mathcal{D}^k(f\circ\gamma) = (X^k f)\circ\gamma, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Thi ligningen er rigtig for $k=1$, og antages den for et k, har vi

$$\mathcal{D}^{k+1}(f\circ\gamma) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^k(f\circ\gamma)) = \mathcal{D}((X^k f)\circ\gamma)$$
$$= (X(X^k f))\circ\gamma = (X^{k+1}f)\circ\gamma$$

hvor den oprindelige ligning er anvendt med $X^k f$ i stedet for f.

Sætning.

<u>For en vilk. Lie gruppe $(G,0,\mathcal{O}_f,\cdot)$ er eksponentialafbildningen</u> $\exp: \Lambda_G \to G$ <u>en analytisk afbildn. af den tilhørende Lie algebra Λ_G ind i $(G,0,\mathcal{O}_f)$.</u>

Bevis. Det er nok at vise, at exp er anal. i $0\in\Lambda_G$ og dermed i en omegn $\mathcal{U}$ af 0. Thi for vilk. $Y\in\Lambda_G$ findes, da $t\to tY$, $t\in\mathbb{R}$ er kontin. og afbilder $0\in\mathbb{R}$ i $0\in\Lambda_G$, et $k\in\mathbb{N}$, så $\frac{1}{k}Y\in\mathcal{U}$ og altså exp analyt i $\frac{1}{k}Y$. Da der gælder (s. 86)

$$\exp X = (\exp\tfrac{1}{k}X)^k, \quad X\in\Lambda_G,$$

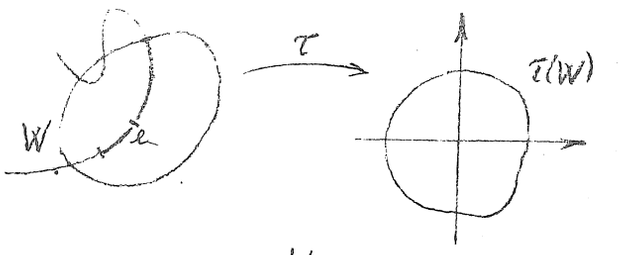
sluttes, at exp. er anal. i Y.

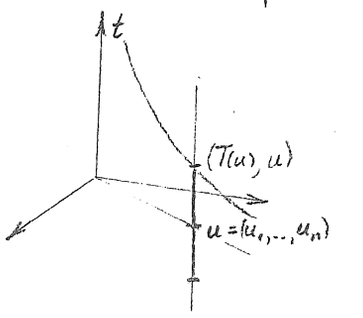
For nu at vise, at exp er anal. i 0, benyttes for Λ_G koordinater m.h.t. en basis $X_1,\dots,X_n$, mens der for G benyttes et kort $\tau=(y_1,\dots,y_n): W\to\mathbb{R}^n$ tilh. $\mathcal{O}_f$ som afbilder $e=\exp 0$. Opgaven er da at vise, at funktionerne

$$(u_1,\dots,u_n)\to y_j(\exp\textstyle\sum_i u_iX_i), \quad j=1,\dots,n,$$

er analytiske i $(0,\dots,0)$. På forhånd ved vi end ikke, at $(0,\dots,0)$ er indre pkt. i deres (fælles) def.mgd. $\{u=(u_1,\dots,u_n)\mid \exp\sum_{i=1}^n u_iX_i\in W\}$.

Vi tænker os τ valgt, så $\tau(e)=(0,\dots,0)$.





Vi indfører funktionerne F_j:

$$F_j(t,u) = y_j(\exp t\textstyle\sum_{i=1}^n u_iX_i), \quad j=1,\dots,n,$$

med en (fælles) def.mgd. $A\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ af form

$$A=\{(t,u)\mid |t|<T(u)\}.$$

For hvert $u\in\mathbb{R}^n$ gælder jo med $X=\sum u_iX_i$, at $t\to\exp tX$, $t\in\mathbb{R}$, er afbildningen γ_X, se (□) s. 86, som jo er anal. med $\gamma_X(0)=e$. Spec. er

$$\{s\in\mathbb{R}_+\mid \forall t\in\mathbb{R}\,[|t|<s \Rightarrow \exp t\textstyle\sum_{i=1}^n u_iX_i\in W]\}$$

ikke tom; dens supremum, som er positiv, evt. $+\infty$, benyttes som $T(u)$. Bemærk, at

$$|t|<T(u) \Rightarrow \exp t\textstyle\sum_{i=1}^n u_iX_i\in W,$$

for $T(u)<\infty$ men at ikke begge pkt'r $\exp(\pm T(u))\sum_{i=1}^n u_iX_i$ tilh. W.

Det er klart, at $T(\lambda u)=\frac{1}{|\lambda|}T(u)$ og

$$F_j(t,u) = F_j(\tfrac{1}{\lambda}t,\lambda u).$$

Men på forhånd ved vi end ikke, at $(1,0,\dots,0)$ er indre pkt. i A.

For fastholdt $u\in\mathbb{R}^n$ kan $t\to F_j(t,u)$, $|t|<T(u)$ opfattes som $y_j\circ\gamma$, hvor γ står for restriktionen $\gamma_X\mid\,]-T(u),T(u)[$, med $X=\sum_{i=1}^n u_iX_i$. Ifølg. s. 86, indskud 2, er nu

$$\mathcal{D}(y_j\circ\gamma) = (Xy_j)\circ\gamma.$$

Idet

$$Xy_j = (\textstyle\sum_i u_iX_i)y_j = \sum_i u_i(X_iy_j)$$

er $(Xy_j)\circ\gamma = \sum_i u_i((X_iy_j)\circ\gamma) = \sum_i u_i((X_iy_j)^\tau\circ(y_1\circ\gamma,\dots,y_n\circ\gamma))$.

Sætter vi derfor $(X_iy_j)^\tau = \mathcal{U}_{ij}$, gælder for $|t|<T(u)$

$$\mathcal{D}_t F_j(t,u) = \sum_{i=1}^n u_i\,\mathcal{U}_{ij}(F_1(t,u),\dots,F_n(t,u)).$$

Videre bemærkes $F_j(0,u)=0$.

Vi betragter nu følgende system af diff.ligninger med parametre

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} u_i U_{ij}(z_1,..,z_n), \quad j=1,..,n.$$

Da højre siderne som funktioner af $u_1,..,u_n,z_1,..,z_n$, er analytiske spec i $(0,..,0,0,..,0)$, findes ifølg. den sidste eksistenssætn. s. 156 anal. fkt.ner f_j, $j=1,..,n$, def. på et interval $]-b,b[\times (]-c,c[)^n$ med $f_j(0,u)=0$, så

$$D_t f_j(t,u) = \sum_{i=1}^{n} u_i U_{ij}(f_1(t,u),..,f_n(t,u)).$$

For fastholdt $u \in (]-c,c[)^n$ er da $F_j(t,u)$ og $f_j(t,u)$, $j=1,..,n$, løsning til samme sædv. diff.lign.system (uden parametre!) og overensstemmende for $t=0$. Følgelig (entydighedssætning) gælder $F_j(t,u)=f_j(t,u)$ for $t \in]-T(u),T(u)[\cap]-b,b[$.

Var nu $T(u)<b$, havde vi for $|t|<T(u)$

$$\exp(t\textstyle\sum_i u_i X_i) = \tau^{-1}(F_1(t,u),..,F_n(t,u)) = \tau^{-1}(f_1(t,u),..,f_n(t,u))$$

og dermed (i kraft af kontinuitet)

$$\exp(T(u)\textstyle\sum_i u_i X_i) = \tau^{-1}(f_1(T(u),u),..,f_n(T(u),u)) \in W$$

og tilsvarende med $-T(u)$ i stedet for $T(u)$, i strid med, at $\exp(\pm T(u)\sum_i u_i X_i)$ ikke begge $\in W$.

For vort vilk. $u \in (]-c,c[)^n$ er altså $T(u) \geq b$ og $F_j(t,u)=f_j(t,u)$ for $|t|<b$.

Dette viser, at def.mgd. A for F_j indeholder intervallet $]-b,b[\times (]-c,c[)^n$, og at f_j er restriktionen af F_j hertil, $j=1,..,n$.

Følgelig er F_j, $j=1,..,n$ analyt. i nævnte interval.

Da der gælder $F_j(t,u) = F_j(\frac{1}{\lambda}t, \lambda u)$, er F_j dermed også analyt. i $]-\lambda b, \lambda b[\times (]-\frac{c}{\lambda},\frac{c}{\lambda}[)^n$ for hvert $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}_+$. Vælges λ, så $\lambda b > 1$, har vi spec.:

$$u \to F_j(1,u) = y_j(\exp \textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i X_i), \quad j=1,..,n,$$

er analyt. i $(]-\frac{c}{\lambda},\frac{c}{\lambda}[)^n$. Beviset er ført.

Vi gør nu en vigtig tilføjelse til den viste sætning:

For en vilk. Lie gruppe $(G,\circ,0,\cdot)$ er eksponentialafbildningen $\exp: \Lambda_G \to G$ regulær i $0 \in \Lambda_G$.

Påstanden er (se s. 59), at differentialet $d\exp_0$ af eksponentialafb. i $0 \in \Lambda_G$, som jo er en lin. afbildn. af tangentvektorrummet til Λ_G i 0 ind i tangentvektorrummet G_e til G i e, er injektivt, altså på grund af overensstemmelsen mellem dimensionerne bijektivt.

Bevis. Lad $\sigma = (x_1,..,x_n)$ være et kort for Λ_G bestående af koordinater m.h.t. en basis $X_1,..,X_n$. Til σ svarer basen $(\frac{\partial}{\partial x_1})_0,..,(\frac{\partial}{\partial x_n})_0$ for tangentvektorrummet til Λ_G i 0, medens $(X_1)_e,..,(X_n)_e$ er en basis for $(G_e,+,\vec{R})$.



Vi beviser nu påstanden ved at godtgøre

$$(d\exp_0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0 = (X_i)_e, \quad i=1,..,n.$$

For hvert $f \in \mathcal{O}_e$ har vi

$$(d\exp_0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0(f) = \left(\frac{\partial(f\circ\exp)}{\partial x_i}\right)_0 = \partial_i(f\circ\exp\circ\sigma^{-1})(0,..,0).$$

Nu er den i^{te} partielle afledede i $(0,..,0)$ af

$$(u_1,..,u_n) \to f(\exp \textstyle\sum_{j=1}^{n} u_j X_j)$$

lig den afledede i 0 af

$$t \to f(\exp tX_i) = f(\gamma_{X_i}(t)),$$

altså lig den til f svarende værdi ved

$$\underline{v}_{\gamma_{X_i}}(0) = (X_i)_{\gamma_{X_i}(0)} = (X_i)_e.$$

At differentialet $d\exp_0$ er bijektivt, betyder iflg. s. 58:

Restriktionen af eksponentialafbildningen til en passende åben omegn V af $0 \in \Lambda_G$ er en bianalytisk afbildn. af V på en åben omegn W af $e \in G$.

Ved $\exp: V \to W$ svarer nu kort σ i V og τ i W til hinanden,

$$\sigma = \tau \circ (\exp|V), \quad \tau = \sigma \circ (\exp|V)^{-1}.$$

For $\sigma = (x_1, .., x_n): V \to \dot{\mathbb{R}}^n$ kan specielt benyttes (restriktionen af) et kort bestående af koordinater m.h.t. en basis $X_1, ..., X_n$ for Λ_G; koordinaterne i det tilsvarende kort $\tau = (y_1, .., y_n): W \to \dot{\mathbb{R}}^n$ kaldes da kanoniske koordinater. Idet X og $\exp X$ for $X \in V$ har samme koordinater i σ, henh. τ, gælder for $(u_1, .., u_n) \in \tau(W) = \sigma(V)$

$$y_i\left(\exp \sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right) = u_i, \quad i = 1, .., n.$$

Et kort $\tau = (y_1, .., y_n): W \to \dot{\mathbb{R}}^n$ tilh. G med $e \in W$ og $\tau(e) = (0, .., 0)$, hvor e er det neutrale element i en Lie gruppe $(G, O_G, \cdot)$, er kanonisk, netop hvis der findes en basis $X_1, .., X_n$ for $(\Lambda_G, +, \dot{\mathbb{R}})$, så

$$y_i\left(\exp \sum_{j=1}^{n} u_j X_j\right) = u_i, \quad i = 1, .., n,$$

gælder for $(u_1, .., u_n) \in \tau(W)$.

Bevis. Vi mangler kun at vise, at betingelsen er tilstr. Lad da $X_1, .., X_n$ være en basis som nævnt.

Vi sætter $V = \{\sum_{j=1}^{n} u_j X_j \mid (u_1, .., u_n) \in \tau(W)\}$; det er en åben omegn af $0 \in \Lambda_G$. Da de givne ligningers venstre sider er definerede for $(u_1, .., u_n) \in \tau(W)$, har vi $\exp V \subseteq W$. Med σ betegner vi restriktionen til V af kortet bestående af koordin. m.h.t. $X_1, ..., X_n$; bemærk, at $\sigma(V) = \tau(W)$. De givne ligninger kan nu samles i

$$\tau \circ \exp \circ \sigma^{-1} = \ell_{\tau(W)}.$$

Heraf fås

$$\exp|V = \ell_W \circ \exp \circ \ell_V = \tau^{-1} \circ \sigma,$$

som viser, at $\exp: V \to W$ er bijektiv og videre bianalytisk, idet jo

$$\sigma \circ (\exp|V)^{-1} \circ \tau^{-1} = \ell_{\tau(W)}$$

er analytisk. Endelig har vi, at τ svarer til σ ved $\exp: V \to W$, idet

$$\tau \circ (\exp|V) = \sigma.$$

Medens vi i vore undersøgelser af vilk. Lie grupper ikke tidligere har kunnet foretrække nogle kort frem for andre, har vi nu håb om med fordel at benytte kanoniske koordinater. Et vigtigt eksempel følger i næste §.

Til slut bemærkes, at eksponentialafbildningen $\exp: \Lambda_G \to G$, der som vist er lokalt bianalytisk omkring $0 \in \Lambda_G$, i alm. ikke globalt er injektiv, ikke regulær (i hele Λ_G) og, selv om G er sammenhængende, ikke surjektiv.

Eksempel. Gruppen $(\dot{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ kan opfattes som en 2-dim. reel Lie gruppe, idet $\dot{C}$ identificeres med $\dot{\mathbb{R}}^2$. Lie algebraen står i naturlig entydig korrespondance med tangentvektorrummet i $1 = (1, 0)$, videre med $\dot{\mathbb{R}}^2 = \dot{C}$, hvorfor eksponentialafbildn.gen kan opfattes som (svarer til) en afbildn. $\dot{C} \to \dot{C} \setminus \{0\}$. Denne viser sig at være den sædv. komplekse eksponentialfkt. (ræsonnement som i eksemplet s. 86, idet de reelle størrelser påvær t erstattes med komplekse), der som bekendt ikke er injektiv.

§3. Entydigheden af en gruppes analytiske struktur.

Vi skal her bevise den allerede s. 48 fremsatte påstand, at der for en topologisk gruppe $(G,\cdot;O)$ højst findes et atlas $\mathcal{O}_f$ så $(G,\cdot;O,\mathcal{O}_f)$ er en Lie gruppe.

Det afgørende hjælpemiddel er kanoniske koordinater.

Sætning 1. *Enhver kontin homomorfi Θ af de reelle tals add. gruppe ind i en Lie gruppe $(G,O,\mathcal{O}_f,\cdot)$ har formen*

$$t \rightarrow \exp tX, \quad t \in \mathbb{R},$$

hvor $X \in \Lambda_G$.

Bevis. Lad $X_1,\dots,X_n$ være en basis for $(\Lambda_G,+,\mathbb{R})$; kortet bestående af koordinaterne m.h.t. $X_1,\dots,X_n$ betegnes σ. Lad videre $\tilde{V}$ være en åben omegn af $O \in \Lambda_G$, så $\exp|\tilde{V}$ er en bianalyt. afbildn på en åben omegn $\tilde{W}$ af e. Vi kan antage, at $\sigma(\tilde{V})$ er en terning $(-2a,2a[^n$, altså

$$\tilde{V} = \{\sum_{j=1}^{n} u_j X_j \mid |u_i|<2a,\ i=1,\dots,n\},$$

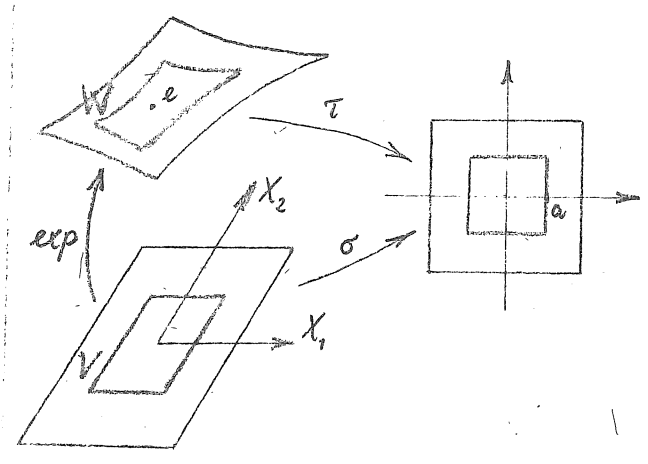
idet dette kan opnås ved sammentrækning. På $\tilde{W}$ har vi det kanoniske kort

$$\tau = (y_1,\dots,y_n) = \sigma\circ(\exp|\tilde{V})^{-1}.$$

Vi sætter endelig

$$V = \{\sum_{j=1}^{n} u_j X_j \mid |u_i|<a,\ i=1,\dots,n\},$$

$$W = \exp V = \{p \in \tilde{W} \mid |y_i(p)|<a,\ i=1,\dots,n\}.$$



Vi viser først: *Hvis* $g, g^2, \dots, g^k \in W$, *så er*

$$\tau(g^h) = h\tau(g), \quad h=1,\dots,k,$$

Idet vi sætter $y_i(g) = v_i$, $i=1,\dots,n$, har vi $g = \exp X$ med $X = \sum_i v_i X_i$. Vi ved (s. 86), at

$$g^h = \exp hX, \quad h=1,2,\dots,$$

så kan vi vise $hX \in \tilde{V}$, $h=1,\dots,k$, er ligningen opfyldt, da jo $\tau(g^h)$ så er koordinaterne til hX m.h.t. $X_1,\dots,X_n$.

Vi kan antage $g \neq e$ og bestemme $n \in \mathbb{N}$, så

$$nX \in \tilde{V}, \text{ men } (n+1)X \notin \tilde{V}$$

dvs. $\quad n \max_i |v_i| < 2a \leqq (n+1)\max_i |v_i|$.

For en indeks j er nu $(n+1)|v_j| \geqq 2a$, dermed

$$n|v_j| \geqq 2a - |v_j| > a,$$

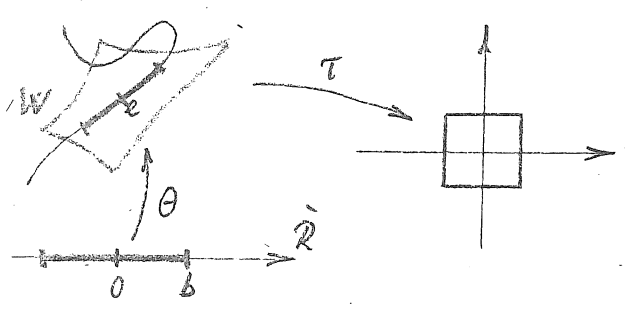
hvorfor $nX \notin V$.

Af $nX \in \tilde{V}\setminus V$ følger $g^n \in \tilde{W}\setminus W$, hvorfor $n>k$ og dermed $hX \in \tilde{V}$, $h=1,\dots,k$.

I virkeligheden er $hX \in V$ for $h=1,\dots,k$ og dermed også for $h=-k,\dots,0,\dots,k$. Vi har derfor:

Hvis $g, g^2, \dots, g^k \in W$ *og dermed* $g^{-1}, g^{-2}, \dots g^{-k} \in W$, *så er*

$$\tau(g^h) = h\tau(g), \quad h=-k,\dots,0,\dots,k$$



Lad nu Θ være en kontin. homomorfi af de reelle tals additive gruppe ind i $(G,O,\mathcal{O}_f,\cdot)$.

Da $\Theta(0)=e$, findes $b \in \mathbb{R}_+$, så $\Theta(t) \in W$ for $|t| \leqq b$.

For vilk. $k \in \mathbb{N}$ vil nu $g, g^2, \dots, g^k =$

$$\Theta(\tfrac{1}{k}b), \Theta(\tfrac{2}{k}b), \dots, \Theta(b)$$

tilh. W, hvorfor

$$\tau(\Theta(\tfrac{h}{k}b)) = h\,\tau(\Theta(\tfrac{1}{k}b)), \quad h=-k,\dots,0,\dots,k,$$

Eksempel (til belysning af første del af beviset for sætn. 1).

Den omv. afbildning til

$$(u_1, u_2) \to e^{u_1+iu_2} = e^{u_1} e^{iu_2}, \quad |u_i| < \pi,$$

er et kanonisk kort $\tau: \tilde{W} \to \mathbb{R}^2$ i $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$.

Men fx. for $q = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ er $q, q^2, \ldots \in \tilde{W}$, uden at 2. koordinaterne danner differensfølge.

altså $\tau(\Theta(\frac{h}{k}b)) = \frac{h}{k}\tau(\Theta(b))$, $h=-k,..,0,..k$.

Vi har hermed vist

$$\tau(\Theta(tb)) = t\,\tau(\Theta(b))$$

for t rational, $|t|\leqq 1$. Da Θ er kontin., gælder ligningen også for t reel, $|t|\leqq 1$, eller, anderledes udtrykt,

$$\tau(\Theta(t)) = t\,\tfrac{1}{b}\tau(\Theta(b)),$$

dvs. $y_i(\Theta(t)) = t\,\frac{1}{b}y_i(\Theta(b))$, $i=1,..,n$, *)

gælder for $|t|\leqq b$.

For $|t|\leqq b$ har vi dermed

$$\Theta(t) = \exp(t\,\tfrac{1}{b}\textstyle\sum_i y_i(\Theta(b))X_i),$$

altså $\Theta(t) = \exp tX = \gamma_X(t)$

med $X = \frac{1}{b}\sum_i y_i(\Theta(b))X_i$.

Da Θ og γ_X begge er homomorfier af $(\mathbb{R},+)$ ind i $(G,\cdot)$, og da jo ethv. $s\in\mathbb{R}$ er hellalligt multiplum af et $t\in\,]-b,b[$, slutter vi endelig

$$\Theta(s) = \gamma_X(s) = \exp sX, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Lemma. *Idet $X_1,..,X_n$ er en basis for Lie algebraen hørende til Lie gruppen $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_f,\cdot)$, er afbildningen* $\Psi: \mathbb{R}^n \to G$,

$$\Psi(u_1,..,u_n) = (\exp u_1X_1)(\exp u_2X_2)..(\exp u_nX_n),$$

som tydeligvis er analytisk, *regulær i* $(0,..,0)$.

Bevis. Lad $\tau=(y_1,..,y_n)$ være et kanonisk kort m.h.t. $X_1,..,X_n$; det afbilder $\Psi(0,..,0) = e$. Sættes $\psi = \tau\circ\Psi\circ\ell_{\mathbb{R}^n}^{-1} = \tau\circ\Psi$, kan beviset føres ved at godtgøre, at funktionalmatricen $\mathfrak{D}\psi$ taget i $(0,..,0)$ er regulær (se s. 60). Som vi skal se, er det endda enhedsmatricen: idet nemlig $\psi_i = y_i\circ\Psi$, altså

$$\psi_i(u_1,..,u_n) = y_i((\exp u_1X_1)(\exp u_2X_2)..(\exp u_nX_n)),$$

er $\mathfrak{D}_j\psi_i(0,..,0)$ lig differentialkvot. i 0 af

$$t \to y_i(\exp tX_j) = \begin{cases} t & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i\neq j. \end{cases}$$

*) Bemærk, at $\tau\circ\Theta = \tau\circ\Theta\circ\ell_{\mathbb{R}}^{-1}$ er lineær for $|t|<b$, spec. anal. i 0, hvorfor Θ er anal. i 0. Beviset kan da også afsluttes ved en henvisn til s. 85

Sætning 2. *Hvis en homomorf afbildning Θ af en Lie gruppe $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_f,\cdot)$ ind i en Lie gruppe $(G',\mathcal{O}',\mathcal{O}_f',\cdot')$ er kontinuert, så er den også analytisk.*

Bevis. Lad $X_1,..,X_n$ være en basis for Lie algebraen hørende til $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_f,\cdot)$.

Da afbildningen $t\to\Theta(\exp tX_i)$, $t\in\mathbb{R}$, er en kontin. homomorfi af de reelle tals additive gruppe ind i $(G',\mathcal{O}',\mathcal{O}_f',\cdot')$, findes iflg. sætn. 1 et $Y_i\in\mathfrak{L}_{G'}$, så

$$\forall_{\mathbb{R}} t:\ \Theta(\exp tX_i) = \exp tY_i.$$

Idet $\Psi:\mathbb{R}^n\to G$ er den i lemmaet betragtede afbildning, er $\Theta\circ\Psi:\mathbb{R}^n\to G'$ åbenbart analytisk, da

$$\begin{aligned}&\Theta(\Psi(u_1,..u_n))\\ &= \Theta(\exp u_1X_1)\cdot\Theta(\exp u_2X_2)\cdot..\cdot\Theta(\exp u_nX_n)\\ &= (\exp u_1Y_1)\cdot(\exp u_2Y_2)\cdot..\cdot(\exp u_nY_n).\end{aligned}$$

Iflg. lemmaet er imidlertid Ψ regulær i $(0,..,0)$, altså $d\Psi_{(0,..,0)}$ bijektivt, således at restriktionen $\Psi|U$ til en passende åben omegn U af $(0,..,0)$ er en bianal. afbildn. af U på en åben omegn V af $\Psi(0,..,0)=e$. Følgelig er også

$$(\Theta\circ\Psi)\circ(\Psi|U)^{-1} = \Theta\circ\ell_V = \Theta|V$$

analytisk, og Θ altså analytisk i $e\in G$.

Men så er Θ analytisk i hvert $p\in G$, da | smld. s. 49

$$\Theta = T_{\Theta(p)}\circ\Theta\circ T_p^{-1}.$$

Sætning 3. *For en topologisk gruppe $(G,;\mathcal{O})$ findes højst et atlas $\mathcal{O}_f$, så $(G,;\mathcal{O},\mathcal{O}_f)$ er en Lie gruppe.* (Smld. s. 48.)

Bevis. Lad $(G,;\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_1})$ og $(G,;\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_2})$ være Lie grupper. Da den identiske afbildn. ℓ_G jo er en kontin. homomorfi af $(G,;\mathcal{O})$ på sig selv, er den iflg. sætn. 2 en analytisk afbildn. af $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_1})$ på $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_2})$. Ligeledes er $\ell_G^{-1}=\ell_G$ en anal. afbildn. af $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_2})$ på $(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_1})$. Men at $\ell_G:(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_1})\to(G,\mathcal{O},\mathcal{O}_{f_2})$ er bianalytisk, er ensbetydende med $\mathcal{O}_{f_1}=\mathcal{O}_{f_2}$.

Fin.