Matematik 2 MA
Matematisk Analyse

1994–95

Kapitel V. Sædvanlige og partielle differentialligninger

Gerd Grubb

Matematik 2. Matematisk Analyse

1994-95

Kapitel V. Sædvanlige og partielle differentialligninger

§1. Begyndelses- og randværdiproblemer i én dimension

1.1. Begyndelsesværdiproblemer.

I dette afsnit betragtes følgende inhomogene anden ordens differentialligning på et interval $]\alpha,\beta[$:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right)+q(x)u(x)=f(x)\,,\quad x\in\,]\alpha,\beta[\,, \tag{1}$$

hvor $p\in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ med $p>0$ på $[\alpha,\beta]$, og $q\in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$. Funktionen f er givet i $C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$, og løsningen u søges i $C^2([\alpha,\beta],\mathbb{C})$. (Ligningen (1) er da også opfyldt i endepunkterne α og β, men formuleringen hvor kravet (1) kun stilles eksplicit for $x\in\,]\alpha,\beta[$ benyttes af hensyn til generalisationer som i §3 senere.) En vilkårlig anden ordens differentialligning $a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+c(x)u(x)=F(x)$ med $a,b,c,F\in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ og $a(x)\neq 0$ for $x\in[\alpha,\beta]$, kan omskrives til formen (1); når det er opnået, siger man at ligningen er på *selvadjungeret form.* (Se Opg. 1.1.) (Det er tilmed muligt at skifte variable, så p erstattes med 1 og kun q afhænger af x, men det vil vi ikke forfølge.)

Som vi ved fra Mat 1 MA Kapitel XV (jvf. også I §8.3 i disse noter), har ligningen (1) mange løsninger, idet løsningsmængden for hvert f består af de funktioner der er sum af en partikulær løsning og en løsning til problemet med f erstattet med 0. Løsningsmængden for problemet med $f=0$ er et to-dimensionalt vektorrum. Løsningen fastlægges entydigt, når vi foreskriver værdien af u og u' i et punkt af $[\alpha,\beta]$. Således har f.eks. problemet

$$\begin{aligned}-(pu')'+qu&=f\quad \text{på }]\alpha,\beta[,\\ u(\alpha)&=c_1,\\ u'(\alpha)&=c_2,\end{aligned} \tag{2}$$

en og kun en løsning $u\in C^2([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ for hvert sæt af data $\{f,c_1,c_2\}\in C([\alpha,\beta],\mathbb{C})\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Vi vil vise en eksplicit løsningsformel. Når v_1 og v_2 er løsninger til *den homogene ligning* $-(pu')'+qu=0$, defineres funktionen $W\in C^1([\alpha,\beta])$ ved,

$$W(x)=\det\begin{pmatrix}v_1(x) & v_2(x)\\ v_1'(x) & v_2'(x)\end{pmatrix}=v_1(x)v_2'(x)-v_2(x)v_1'(x); \tag{3}$$

den kaldes *Wronski determinanten* hørende til v_1 og v_2. Den opfylder:

$$\begin{aligned}pW'&=p(v_1v_2'-v_2v_1')'=pv_1v_2''-pv_2v_1''\\ &=v_1(pv_2')'-v_1p'v_2'-v_2(pv_1')'+v_2p'v_1'=v_1qv_2-v_2qv_1-p'W\\ &=-p'W\,;\end{aligned}$$

hvor vi brugte at $(pv_i')' = qv_i$, $i = 1, 2$. Altså er

$$\begin{aligned} (pW)' &= p'W + pW' = 0, \text{ og dermed} \\ -p(x)W(x) &= K, \text{ for } x \in [\alpha, \beta], \end{aligned} \tag{4}$$

hvor K er en konstant. Konstantens værdi fås f.eks. ved at indsætte $x = \alpha$.

Lad specielt v_1 og v_2 være løsningerne til problemerne

$$\begin{cases} -(pv_1')' + qv_1 = 0, \\ v_1(\alpha) = 1, \\ v_1'(\alpha) = 0, \end{cases} \quad \text{hhv.} \quad \begin{cases} -(pv_2')' + qv_2 = 0, \\ v_2(\alpha) = 0, \\ v_2'(\alpha) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Så er $W(\alpha) = 1$, og dermed

$$\begin{aligned} K &= -p(\alpha)W(\alpha) = -p(\alpha) \neq 0; \\ W(x) &= -\frac{K}{p(x)} = \frac{p(\alpha)}{p(x)} \neq 0, \text{ for } x \in [\alpha, \beta]. \end{aligned} \tag{6}$$

(Også mere generelt, når de to sæt $\{v_1(\alpha), v_1'(\alpha)\}$ og $\{v_2(\alpha), v_2'(\alpha)\}$ er lineært uafhængige, er $W(x) \neq 0$ for alle $x \in [\alpha, \beta]$.)

Sætning 1.1. *Lad $p \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ og $q \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, med $p(x) > 0$ for alle $x \in [\alpha, \beta]$. Idet v_1, v_2, W og K defineres som beskrevet ovenfor i (3)–(6), har problemet (2) for hvert sæt $\{f, c_1, c_2\} \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C}) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ den entydige løsning $u \in C^2([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ givet ved*

$$\begin{aligned} u(x) = {} & c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \\ & - \frac{v_1(x)}{K} \int_\alpha^x v_2(y) f(y) dy + \frac{v_2(x)}{K} \int_\alpha^x v_1(y) f(y) dy. \end{aligned} \tag{7}$$

Her er v_1, v_2, W og K reelle, og løsningen er reel når f, c_1 og c_2 er reelle.

Bevis. Vi ved allerede, at der højst er én løsning, og vil nu verificere, at udtrykket (7) for u giver en sådan. Ved indsættelse af $x = \alpha$ og brug af begyndelsesbetingelserne i (5) ses, at $u(\alpha) = c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = c_1$. Vi udregner u':

$$\begin{aligned} u'(x) = {} & c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) \\ & - \frac{v_1'(x)}{K} \int_\alpha^x v_2(y) f(y)\, dy + \frac{v_2'(x)}{K} \int_\alpha^x v_1(y) f(y)\, dy \\ & - \frac{v_1(x)}{K} v_2(x) f(x) + \frac{v_2(x)}{K} v_1(x) f(x), \end{aligned} \tag{8}$$

hvor sidste linie er 0. Ved indsættelse af α og brug af (5) ses, at $u'(\alpha) = c_2$. Nu ganger vi (8) med $-p(x)$ og differentierer, og adderer dette til $q(x)$ gange (7); så fås, ved brug af differentialligningerne i (5):

$$\begin{aligned}
-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= c_1(-(pv_1')' + qv_1) + c_2(-(pv_2')' + qv_2) \\
&\quad - \frac{(-(pv_1')' + qv_1)}{K}\int_\alpha^x \dots \quad - \frac{-pv_1'}{K}v_2(x)f(x) \\
&\quad + \frac{(-(pv_2')' + qv_2)}{K}\int_\alpha^x \dots \quad + \frac{-pv_2'}{K}v_1(x)f(x) \\
&= -\frac{-p(x)(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x))}{K}f(x) = f(x),
\end{aligned}$$

hvor vi til sidst brugte definitionen af W og K. Dette viser, at u løser (2).

At v_1 og v_2 er reelle, ses ved at betragte realdel og imaginærdel af ligningerne i (5), hvoraf fremgår at $\operatorname{Im} v_1$ og $\operatorname{Im} v_2$ løser problemet med alle data lig med 0, og dermed er 0. Så er W og K ligeledes reelle. Det fremgår nu af (7), eller ses som ved betragtningen af v_1 og v_2, at enhver løsning med reelle data f, c_1, c_2 er reel. $\square$

Formlen (7) kan også skrives

$$\begin{aligned}
u(x) &= c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + \int_\alpha^x U(x,y)f(y)dy, \text{ med} \\
U(x,y) &= \frac{1}{K}\big(-v_1(x)v_2(y) + v_2(x)v_1(y)\big).
\end{aligned} \tag{9}$$

Eksempel 1.2. Betragt følgende problem på et interval $]0,\beta[$ $(\beta > 0)$:

$$\begin{aligned}
-u'' - u &= f(x)\,, \quad \text{for } x \in]0,\beta[\,, \\
u(0) &= c_1, \\
u'(0) &= c_2.
\end{aligned}$$

Her er $p(x) \equiv 1$, $q \equiv -1$, $v_1(x) = \cos x$ og $v_2(x) = \sin x$, og dermed $W(x) \equiv 1$ og $K = -1$, så at løsningsformlen bliver:

$$\begin{aligned}
u(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \textstyle\int_0^x \sin y\, f(y)\, dy - \sin x \int_0^x \cos y\, f(y)\, dy \\
&= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \textstyle\int_0^x \sin(x-y) f(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

For eksempel fås for $f(x) = \lambda \sin \omega x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, at løsningen for $\omega \neq \pm 1$ kan skrives

$$\begin{aligned}
u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x &- \frac{\lambda}{\omega+1}\sin \tfrac{1}{2}(\omega+1)x \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\omega-1)x \\
&+ \frac{\lambda}{\omega-1}\sin \tfrac{1}{2}(\omega-1)x \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\omega+1)x.
\end{aligned}$$

Disse funktioner er begrænsede for $x \in \mathbb{R}_+$.

Når $\omega = \pm 1$, gælder formlen også hvis man benytter konventionen

$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha} = x\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = x \text{ for } \alpha = 0;$$

her er løsningen ikke begrænset på $\mathbb{R}_+$. F.eks. for $\omega = 1$ er sidste led lig med $\lambda\frac{1}{2}x\cos x$ (mens de øvrige led er begrænsede), så vi ser at $u(x)$ svinger med større og større amplitude, når x vokser ($\lambda \neq 0$). En sådan særlig opførsel, der forekommer, når f er proportional med en af løsningerne til det homogene problem, kaldes *resonans*.

1.2. Randværdiproblemer, Green's funktion.

Vi vil nu betragte et *randværdiproblem* i stedet for begyndelsesværdiproblemet (2), nemlig

$$\begin{aligned} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x)\,, \quad x \in\,]\alpha,\beta[\,, \\ au(\alpha) + bu'(\alpha) &= 0\,, \\ cu(\beta) + du'(\beta) &= 0\,; \end{aligned} \tag{10}$$

hvor p og q opfylder de samme betingelser som ovenfor, og vi antager, at a, b, c og d er reelle konstanter med $(a,b) \neq (0,0)$, $(c,d) \neq (0,0)$. Funktionen f er givet i $C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$, og løsningen u søges i $C^2([\alpha,\beta],\mathbb{C})$. Differentialligningen er altså den samme som i §1.1, men løsningsfunktionen pålægges betingelser både i α og β, dvs. på hele randen af $]\alpha,\beta[$; det kaldes en *randbetingelse*.

Lad os indføre operatorerne $\mathcal{L}_0$, B_1 og B_2, defineret for $u \in C^2([\alpha,\beta])$ ved

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &= -(pu')' + qu, \\ B_1 u &= au(\alpha) + bu'(\alpha), \\ B_2 u &= cu(\beta) + du'(\beta); \end{aligned} \tag{11}$$

altså $\mathcal{L}_0$ sender $C^2([\alpha,\beta])$ over i $C([\alpha,\beta])$, og B_1 og B_2 sender $C^2([\alpha,\beta])$ over i $\mathbb{C}$ (disse kan også defineres på $C^1([\alpha,\beta])$). Så kan randværdiproblemet kort skrives:

For et givet $f \in C([\alpha,\beta])$, find $u \in C^2([\alpha,\beta])$ med

$$\mathcal{L}_0 u = f, \quad \text{med } B_1 u = B_2 u = 0. \tag{12}$$

I det følgende antages, at *det homogene problem*

$$\mathcal{L}_0 u = 0, \quad B_1 u = B_2 u = 0, \tag{13}$$

kun har nulløsningen. Vi vil benytte §1.1 til at konstruere to hjælpefunktioner u_1 og u_2; det skal være ikke-trivielle reelle løsninger u_1 og u_2 til $\mathcal{L}_0 u = 0$ med

$$\text{(i)} \quad B_1 u_1 = 0, \quad \text{henholdsvis} \quad \text{(ii)} \quad B_2 u_2 = 0. \tag{14}$$

Her kan vi f.eks. tage u_1 som løsningen med $(u_1(\alpha), u_1'(\alpha)) = (-b, a)$ og u_2 som løsningen med $(u_2(\beta), u_2'(\beta)) = (-d, c)$ (og de andre mulige valg af f.eks. u_1 er da dem hvor $(u_1(\alpha), u_1'(\alpha)) = k(-b, a)$ for et $k \neq 0$). Wronski determinanten for u_1 og u_2,

$$W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$$

opfylder (4). Her er konstanten $K \neq 0$, thi ellers ville $W(x) \equiv 0$, og dermed

$$u_1(\alpha)u_2'(\alpha) - u_2(\alpha)u_1'(\alpha) = 0,$$

hvormed $B_1 u_2 = 0$, så at u_2 var en ikke-triviel løsning til (13), i strid med antagelsen om at denne kun har nulløsningen.

Vi indfører nu funktionen

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{K} u_1(x) u_2(y) & \text{for } x \leq y\,, \\ \dfrac{1}{K} u_2(x) u_1(y) & \text{for } x \geq y\,, \end{cases} \tag{15}$$

som kaldes *Green's funktion* for problemet (12); den kan kort skrives $\mathcal{G}(x, y) = \frac{1}{K} u_1(\min\{x, y\}) u_2(\max\{x, y\})$. Bemærk, at $\mathcal{G}$ er reel og kontinuert på mængden $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ og stemmer overens med en C^2 funktion på hver af trekanterne hvor $x \geq y$ hhv. $x \leq y$; og $\mathcal{G}$ er symmetrisk i x og y, dvs. $\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(y, x)$. (Man kan bemærke, at de forskellige mulige valg af u_1 og u_2 diskuteret ovenfor giver samme funktion $\mathcal{G}(x, y)$.) Vi vil vise:

Sætning 1.3. *Når det homogene randværdiproblem* (13) *kun har nulløsningen, og Green's funktion defineres som ovenfor, gælder, at det generelle problem* (12) *for hvert* $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ *har den entydigt bestemte løsning*

$$u(x) = \int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x, y) f(y)\, dy; \tag{16}$$

her er $u \in C^2([\alpha, \beta], \mathbb{C})$. *Når* f *er reel, er* u *reel.*

Bevis. Der er højst én løsning u, for hvis $\tilde{u}$ også er løsning, er $u - \tilde{u}$ løsning til (13) og dermed 0 ifølge vor antagelse. Vi undersøger nu (16). Ved indsættelse af udtrykket for $\mathcal{G}$ fås:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{K}u_2(x)\int_\alpha^x u_1(y)f(y)\,dy + \frac{1}{K}u_1(x)\int_x^\beta u_2(y)f(y)\,dy, \\ u'(x) &= \frac{1}{K}u_2'(x)\int_\alpha^x u_1(y)f(y)\,dy + \frac{1}{K}u_2(x)u_1(x)f(x) \\ &\quad + \frac{1}{K}u_1'(x)\int_x^\beta u_2(y)f(y)\,dy - \frac{1}{K}u_1(x)u_2(x)f(x) \\ &= \frac{1}{K}u_2'(x)\int_\alpha^x u_1(y)f(y)\,dy + \frac{1}{K}u_1'(x)\int_x^\beta u_2(y)f(y)\,dy, \end{aligned} \tag{17}$$

hvor to led ophævede hinanden. Endvidere ses, at

$$\begin{aligned} B_1u &= \frac{1}{K}(B_1u_1)\int_\alpha^\beta u_2(y)f(y)\,dy = 0, \\ B_2u &= \frac{1}{K}(B_2u_2)\int_\alpha^\beta u_1(y)f(y)\,dy = 0. \end{aligned}$$

At $u(x)$ er en løsning til $\mathcal{L}_0u = f$, kan henføres til at u opfylder en formel analog til (7), med den nye Wronski determinant. Vi vil dog i stedet give et direkte bevis (som generaliseres i §3) ved at regne videre fra (17):

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}_0u)(x) \\ &\quad = -\big(p(x)u_2'(x)\tfrac{1}{K}\textstyle\int_\alpha^x u_1(y)f(y)dy\big)' + q(x)\tfrac{1}{K}u_2(x)\textstyle\int_\alpha^x u_1(y)f(y)dy \\ &\qquad - \big(p(x)u_1'(x)\tfrac{1}{K}\textstyle\int_x^\beta u_2(y)f(y)dy\big)' + q(x)\tfrac{1}{K}u_1(x)\textstyle\int_x^\beta u_2(y)f(y)dy \\ &\quad = (\mathcal{L}_0u_2)(x)\tfrac{1}{K}\textstyle\int_\alpha^x u_1(y)f(y)dy - p(x)u_2'(x)\tfrac{1}{K}u_1(x)f(x) \\ &\qquad + (\mathcal{L}_0u_1)(x)\tfrac{1}{K}\textstyle\int_x^\beta u_2(y)f(y)dy + p(x)u_1'(x)\tfrac{1}{K}u_2(x)f(x) \\ &\quad = -\tfrac{1}{K}p(x)\big(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)\big)f(x) = f(x)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

(17) viser tillige, at $u \in C^2([\alpha,\beta])$; og det ses af (16) at u er reel, når f er det. $\square$

Man kan på den anden side vise, at hvis (13) *har* en ikke-triviel løsning u_0, kan (10) ikke løses for $f = u_0$, jvf. Opg. 1.10. Ialt ses, at problemet (12) har den samme egenskab som man kender fra lineære ligningssystemer: *Enten* har det homogene problem (problemet med $f = 0$) en ikke-triviel løsning, *eller også* har det inhomogene problem en entydig løsning for ethvert f.

Eksempel 1.4. Betragt problemet

$$\begin{gathered} -u'' - u = f \text{ på }]0, \tfrac{\pi}{2}[\,, \\ u(0) = u(\tfrac{\pi}{2}) = 0. \end{gathered}$$

Her er $(a, b) = (c, d) = (1, 0)$. Da den generelle løsning til $-u'' - u = 0$ er $c_1 \cos x + c_2 \sin x$, finder man at det homogene randværdiproblem kun har nulløsningen. Vi kan vælge $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \cos x$; så er $K = 1$, og den generelle løsningsformel bliver:

$$u(x) = \cos x \int_0^x \sin y\, f(y) dy + \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, f(y)\, dy.$$

Den differentialoperator, der indgår i problemet (12), kan betragtes som en operator i Hilbert rummet $L_2([\alpha, \beta])$. Sæt

$$\begin{aligned} D(L_0) &= \{\, u \in C^2([\alpha, \beta]) \mid B_1 u = B_2 u = 0 \,\}, \\ L_0 u &= \mathcal{L}_0 u \text{ for } u \in D(L_0), \end{aligned} \tag{19}$$

hvor $\mathcal{L}_0$ er beskrevet i (11) ff. Operatoren L_0 er tæt defineret i $L_2([\alpha, \beta])$, da $D(L_0)$ indeholder mængden $C_c^\infty(\,]\alpha, \beta[\,)$, som er tæt i $L_2([\alpha, \beta])$ (jvf. Lemma IV 2.9); og værdimængden for L_0 er indeholdt i $C([\alpha, \beta])$. Endvidere er L_0 en symmetrisk operator (jvf. IV §3.3), da der gælder, for $u, v \in D(L_0)$,

$$\begin{aligned} (L_0 u, v) &= \int_\alpha^\beta (-(pu')' + qu)\bar{v}\, dx = \big[-(pu')\bar{v}\big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (pu'\bar{v}' + qu\bar{v}) dx \\ &= \big[-(pu')\bar{v} + up\bar{v}'\big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta u(\overline{(-pv')' + qv}) dx \\ &= \big[-(pu')\bar{v} + up\bar{v}'\big]_\alpha^\beta + (u, L_0 v) = (u, L_0 v)\,, \end{aligned} \tag{20}$$

hvor vi har udført delvis integration samt brugt at ifølge randbetingelsen er

$$\begin{gathered} (u(\alpha), u'(\alpha)) = k_1(-b, a), \\ (v(\alpha), v'(\alpha)) = k_2(-b, a), \text{ så at} \\ u'(\alpha)\bar{v}(\alpha) - u(\alpha)\bar{v}'(\alpha) = 0; \end{gathered} \tag{21}$$

med en tilsvarende overvejelse ved β. Man kan vise, at L_0 ikke er selvadjungeret (jvf. IV §3.3 for definitionen), men at der er en lidt mere generel version L_1, der er det, nemlig en operator, hvor $u \mapsto u'$ defineres som ∂ i IV

§3 (16), passende modificeret til den nu ikke mere periodiske situation. Det vil blive forklaret i næste afsnit.

Vi bemærker, at L_0 er en *ubegrænset* operator i $L_2([\alpha,\beta])$, idet $u_n \to 0$ i $L_2([\alpha,\beta])$ ikke medfører konvergens af u_n' endsige u_n'' for $n \to \infty$. For eksempel, hvis $\varphi(x) \in C_c^\infty(\,]-1,1[\,)$, og vi sætter $\psi_n(x) = \varphi(nx)$ (defineret som 0, når $|nx| \geq 1$), så vil

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_2 &= \big(\textstyle\int_{-1}^1 |\varphi(nx)|^2\,dx\big)^{\frac12} = n^{-\frac12}\|\varphi\|_2, \\ \|\psi_n'\|_2 &= \big(\textstyle\int_{-1}^1 |n\varphi'(nx)|^2\,dx\big)^{\frac12} = n^{\frac12}\|\varphi'\|_2, \\ \|\psi_n''\|_2 &= \big(\textstyle\int_{-1}^1 |n^2\varphi''(nx)|^2\,dx\big)^{\frac12} = n^{\frac32}\|\varphi''\|_2; \end{aligned} \tag{22}$$

så $\psi_n \to 0$ mens ψ_n' og ψ_n'' er divergente i $L_2([\alpha,\beta])$ (når φ ikke er nulfunktionen). Da $p \geq c > 0$, er $L_0\psi_n$ også divergent.

Betragt nu afbildningen $G_0\colon f \mapsto u$ defineret ved (16) for $f \in C([\alpha,\beta])$. En afbildning $f \mapsto u$ af denne form, med en eller anden funktion $\mathcal{G}(x,y)$ indsat, kaldes en *integraloperator med kerne* $\mathcal{G}(x,y)$ (her bruges ordet "kerne" altså i en anden betydning end "nulrum"). Det, vi har vist i Sætning 1.3 er simpelthen, at med $\mathcal{G}$ valgt som i (15) (forudsat at (13) kun har nulløsningen), er G_0 *den inverse operator til* $L_0\colon D(L_0) \to C([\alpha,\beta])$, som altså er en bijektion fra $D(L_0)$ til $C([\alpha,\beta])$.

Selve formlen (16) tillader også indsættelse af lidt mere generelle funktioner for f, når kernen $\mathcal{G}(x,y)$ er en kontinuert funktion af $(x,y) \in [\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$. F.eks. definerer (16) en kontinuert funktion af x, når $f \in L_1([\alpha,\beta])$, og da specielt når $f \in L_2([\alpha,\beta])$, jvf. Sætning II 4.26.

Med G_1 vil vi betegne operatoren der sender $f \in L_2([\alpha,\beta])$ over i $u \in C([\alpha,\beta])$ defineret ved (16) (med $\mathcal{G}(x,y)$ bestemt ved (15)). Det er en *begrænset operator i* $L_2([\alpha,\beta])$, altså $G_1 \in \mathbf{B}(L_2([\alpha,\beta]))$, thi ved hjælp af Cauchy-Schwarz' ulighed (anvendt på integralet efter y) ses, at

$$\begin{aligned} \|G_1 f\|_2^2 &= \textstyle\int_\alpha^\beta |\int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy|^2\,dx \\ &\leq \textstyle\int_\alpha^\beta \big(\int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2 dy \int_\alpha^\beta |f(y_1)|^2\,dy_1\big)\,dx \\ &= \textstyle\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2\,dxdy \cdot \|f\|_2^2; \end{aligned} \tag{23}$$

hvor $\int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2\,dxdy < \infty$ da $\mathcal{G}(x,y)$ er en begrænset funktion. Ved brug af Fubinis sætning ses, at operatoren G_1 er *symmetrisk:*

$$\begin{aligned} (G_1 f, g) &= \textstyle\int_\alpha^\beta \big(\int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy\big)\overline{g(x)}\,dx \\ &= \textstyle\int_\alpha^\beta f(y)\int_\alpha^\beta \overline{\mathcal{G}(x,y)g(x)}\,dxdy = (f, G_1 g); \end{aligned} \tag{24}$$

vi har her benyttet at $\mathcal{G}(x,y)$ er reel og symmetrisk i x,y. Så er G_1 en *selvadjungeret* operator i $L_2([\alpha,\beta])$, jvf. IV §3.1.

G_1 er en udvidelse af G_0, der jo har $D(G_0) = C([\alpha,\beta])$.

Vi skal i §1.3 indføre en udvidelse L_1 af L_0, om hvilken der gælder at $L_1\colon D(L_1) \to L_2([\alpha,\beta])$ *er invers til* G_1. Da G_1 er selvadjungeret, kan vi da ved Lemma IV 3.15 slutte, at L_1 er *selvadjungeret*, opfattet som ubegrænset operator i $L_2([\alpha,\beta])$.

1.3. Generalisation af sædvanlige differentialoperatorer.

I IV §3 (16) blev d/dx, betragtet på $C^1(\mathbb{T})$, generaliseret til en operator ∂ på det lidt større rum $H^1(\mathbb{T})$, defineret i IV §2 (2). Vi har nu brug for en lignende generalisation, der er frigjort fra sammenhængen med periodiske funktioner. Man kan indføre den helt fra grunden, eller man kan gå ud fra det periodiske tilfælde og blot gøre nogle små tilføjelser; det er det sidste vi gør i beviserne nedenfor.

Hovedresultatet er som følger: For et vilkårligt kompakt interval $J = [\alpha,\beta]$ med $\alpha < \beta$ defineres rummet

$$H^1(J) = \{\, f \mid f(x) = \textstyle\int_\alpha^x g(s)ds + k,\ g \in L_2(J),\ k \in \mathbb{C}\}; \tag{25}$$

det er et underrum af $C(J)$ (ved Infinitesimalregningens Hovedsætning, Sætning II 5.6). Her er g og k *entydigt bestemt ved* f. Dermed defineres en lineær operator ∂_1 ved

$$\begin{gathered}\partial_1\colon f \mapsto g,\\ \text{for } f \in H^1(J) \text{ med } f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds + k;\end{gathered} \tag{26}$$

∂_1 sender $H^1(J)$ over i $L_2(J)$, og er en generalisation af d/dx.

Vi indfører også operatoren

$$\mathcal{D}_1 = \tfrac{1}{i}\partial_1, \text{ med samme definitionsmængde } H^1(J). \tag{27}$$

Det vises nedenfor, at $\mathcal{D}_1$, betragtet som ubegrænset operator i $L_2(J)$, er lidt for stor til at være selvadjungeret, men at visse restriktioner af den er det.

De vigtigste sætninger om ∂_1, $\mathcal{D}_1$ og $H^1(J)$ er Sætning 1.7 og Lemma 1.9. Se også Definition 1.10 og Sætning 1.11, samt de afsluttende anvendelser til definition af operatoren L_1.

Nu følger den detaljerede udledning. For at udnytte den viden der er opnået i det periodiske tilfælde vil vi sammen med $H^1(J)$ betragte rummet

$$H^1_0(J) = \{\, f \mid f(x) = \textstyle\int_\alpha^x g(s)ds,\ g \in L_2(J),\ \int_\alpha^\beta g(s)ds = 0\,\}; \tag{28}$$

det er et underrum af $H^1(J)$.

Når $J = [-\pi, \pi]$, kan vi identificere $H^1_0([-\pi,\pi])$ med rummet $H^1_0(\mathbb{T})$ indført i IV §3.3 (15), ved at funktionerne forlænges periodisk. Fra IV §3.3 har vi da, at for f i dette rum, $f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds$, er g entydigt bestemt ved f, jvf. Sætning IV 3.9. Den pågældende operator $\partial\colon f \mapsto g$ er en generalisation af $d/d\theta$, idet den stemmer med denne på C^1 funktioner, og alment giver den afledede næsten overalt.

Der er intet særligt magisk ved intervallet $[-\pi, \pi]$; vi kunne i stedet i Kap. IV have brugt $J = [\alpha, \beta]$ som periodeinterval (hvorved periodelængden ville være $\beta - \alpha$) og gennemført analysen for rummet $L_2(\mathbb{T}_J)$ af funktioner på torusen $\mathbb{T}_J = \mathbb{R}/(\beta - \alpha)\mathbb{Z}$. En sådan analyse forløber analogt med det i Kap. IV viste, blot med skalarproduktet $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}\,dx$ og ortonormalsystemet $\{\exp(in\frac{2\pi}{\beta-\alpha}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i $L_2(\mathbb{T}_J)$. (Man kan også lade $L_2(\mathbb{T}_J) = L_2(J)$ med det sædvanlige skalarprodukt, så alle normeringsfaktorer lægges over på ortonormalsystemet, der da er $\{(\beta-\alpha)^{-\frac12}\exp(in\frac{2\pi}{\beta-\alpha}x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$; det kan være lidt mere bekvemt for diskussionen af $H^1(J)$.) Analysen giver, at for rummet

$$H^1(\mathbb{T}_J) = \{\, f \mid f(x) = \textstyle\int_\alpha^x g(s)ds + k,\ g \in L_2(J),\ \int_\alpha^\beta g(s)ds = 0,\ k \in \mathbb{C}\} \tag{29}$$

(hvis elementer kan opfattes enten som funktioner på $[\alpha, \beta]$ eller som funktioner på $\mathbb{R}$ med periode $\beta-\alpha$), gælder i lighed med Sætning IV 3.9, at g og k er bestemt ved f, så at der er en veldefineret operator

$$\partial\colon f \mapsto g,\ D(\partial) = H^1(\mathbb{T}_J),$$

der generaliserer d/dx; den er ubegrænset og tæt defineret, og $\mathcal{D} = \frac{1}{i}\partial$ er selvadjungeret i $L_2(\mathbb{T}_J)$. (Generalisationen til vilkårlig intervallængde er så ubetydelig, at vi tillader os at bruge ∂ og $\mathcal{D}$ igen som betegnelser for operatorerne.)

Når definitionen af $H^1(\mathbb{T}_J)$ læses som definition af et rum af funktioner på J, ser vi, at funktionerne i $H^1(\mathbb{T}_J)$ netop er *de funktioner i $H^1(J)$ som har $f(\beta) = f(\alpha)$*, altså

$$H^1(\mathbb{T}_J) = \{\, f \in H^1(J) \mid f(\alpha) = f(\beta)\,\}. \tag{30}$$

Rummet $H^1_0(J)$ kan identificeres med underrummet $H^1_0(\mathbb{T}_J)$ af $H^1(\mathbb{T}_J)$ bestående af funktioner f med $k = 0$; dette svarer til at $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, jvf. Korollar IV 3.10; altså

$$H^1_0(J) = \{\, f \in H^1(J) \mid f(\alpha) = f(\beta) = 0\,\}. \tag{31}$$

Ialt har vi

$$H^1_0(J) \subset H^1(\mathbb{T}_J) \subset H^1(J); \tag{32}$$

og operatoren ∂ defineret på $H^1(\mathbb{T}_J)$ har også mening på $H^1_0(J)$. Vi vil nu bruge dette til at etablere en afbildning $f \mapsto g$ for $f \in H^1(J)$.

Lemma 1.5. *Når $f \in H^1(J)$, er fremstillingen $f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds + k$ entydig, og k og g findes ud fra f ved:*

$$\begin{aligned} k = f(\alpha), \quad \text{og } g(x) = g_1(x) + k_1 \text{ hvor} \\ k_1 = (f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha), \quad g_1 = \partial\big[f(x) - k - k_1(x - \alpha)\big]. \end{aligned} \tag{33}$$

Endvidere gælder:

$$\begin{aligned} |k| &\le (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(J)} + (\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_2(J)}, \\ \|f\|_u &\le (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(J)} + 2(\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_2(J)}. \end{aligned} \tag{34}$$

Bevis. Hvis f har to fremstillinger:

$$f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds + k = \int_\alpha^x g_0(s)\,ds + k_0, \text{ for } x \in [\alpha, \beta],$$

ses først ved at sætte $x = \alpha$, at $k = k_0 = f(\alpha)$. Definer f_2 ved $f_2(x) = \int_\alpha^x (g(s) - g_0(s))\,ds$; den må da opfylde $f_2(x) = 0$ for ethvert $x \in J$. Specielt er $f_2 \in H_0^1(J)$, og så medfører $f_2 = 0$, at $g - g_0 = \partial f_2 = 0$. Altså er $g = g_0$. (Et andet bevis for at $g = g_0$ fremstilles i Opg. 1.8.)

Konstruktivt finder vi k og g til et givet f således: Lad f_1 være funktionen der fås ved fra f at trække den lineære funktion, der stemmer overens med f i α og β:

$$f_1(x) = f(x) - k - k_1(x - \alpha), \text{ hvor } k = f(\alpha),\ k_1 = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha};$$

så er $f_1 \in H_0^1(J)$. Lad $g_1 = \partial f_1$. Så er $f_1(x) = \int_\alpha^x g_1(s)\,ds$, og dermed gælder:

$$f(x) = \int_\alpha^x g_1(s)\,ds + k + k_1(x - \alpha) = \int_\alpha^x (g_1(s) + k_1)\,ds + k.$$

Altså er $g(s) = g_1(s) + k_1$. Dette viser (33).

For at vise (34) lader vi $h(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds$, så er $k = f(x) - h(x)$ for alle $x \in J$. Idet Lemma IV 3.8 kan anvendes på h, fås ved brug af Cauchy-Schwarz' ulighed:

$$\begin{aligned} |k| &= \big((\beta - \alpha)^{-1} \textstyle\int_\alpha^\beta |k|^2\,dx\big)^{\frac{1}{2}} = (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f - h\|_{L_2(J)} \\ &\le (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(J)} + (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_{L_2(J)} \\ &\le (\beta - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(J)} + (\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_2(J)}; \end{aligned}$$

og dermed endvidere

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |\textstyle\int_\alpha^x g(s)\,ds + k| \le \int_\alpha^\beta |g(s)|\,ds + |k| \\ &\le (\beta-\alpha)^{\frac12}\|g\|_{L_2(J)} + |k| \\ &\le (\beta-\alpha)^{-\frac12}\|f\|_{L_2(J)} + 2(\beta-\alpha)^{\frac12}\|g\|_{L_2(J)}, \text{ for alle } x\in J. \qquad \square\end{aligned}$$

Med Lemma 1.5 er generalisationerne af d/dx og $\frac{1}{i}d/dx$ til rummet $H^1(J)$, indført i (26) og (27), fuldtud velbegrundede. (Specielt er ∂_1 og $\mathcal{D}_1$ udvidelser af operatorerne ∂ hhv. $\mathcal{D}$, der var defineret på $H^1(\mathbb{T}_J)$.)

Vi vil endda i det følgende tillade os at skrive

$$\partial_1 u = u', \tag{35}$$

også når $u \in H^1(J)$, idet definitionen ved (26) her underforstås. (Endvidere skrives $(\partial_1)^2 u = u''$, $(\partial_1)^k u = u^{(k)}$, når de har mening.)

Operatoren $\mathcal{D}_1$ er en ægte udvidelse af den selvadjungerede operator $\mathcal{D}$ i $L_2(J)$, og er derfor "for stor" til at være selvadjungeret, se Lemma 1.9 for en konkret udregning. $\mathcal{D}_1$ og ∂_1 er de mest generelle versioner af differentiation i én variabel, vi skal benytte.

Bemærkning 1.6. Der er ovenfor valgt en vej til definition af d/dx på $H^1(J)$, som knytter direkte an til definitionen via Fourierrækker. Der findes forskellige andre måder at gøre det på, dels via begrebet "absolut kontinuitet" (som ville indgå i en mere udførlig behandling af integrationsteori), dels via "distributionsteori," der drejer sig om generaliseringer af funktionsbegrebet ved hjælp af dualitet mellem vektorrum og anden funktionalanalyse; sidstnævnte emne behandles systematisk senere i matematikstudiet. Den her givne definition fungerer udmærket for sædvanlige differentialligninger; det er først for funktioner af flere variable, at distributionsteorien spiller en afgørende rolle.

Lad os endnu engang betragte (32). Vi ser af (27) og (29), at $H^1(\mathbb{T}_J)$ består af funktionerne i $H^1_0(J)$ plus de konstante funktioner (og er på denne måde en sum af to lineært uafhængige rum, dvs. en direkte sum). Endvidere ser vi af (34), at $H^1(J)$ består af funktionerne i $H^1(\mathbb{T}_J)$ plus funktionerne af formen $k_1(x-\alpha)$ (igen en direkte sum). Ialt er $H^1(J)$ direkte sum af $H^1_0(J)$ og det todimensionale rum bestående af lineære funktioner $k_1 x + k_2$.

Sætning 1.7. *Lad* $J = [\alpha, \beta]$.

1° $H^1(J)$ *er et Hilbert rum med skalarprodukt og norm*

$$\begin{gathered}(f, f_1)_{H^1(J)} = (f, f_1)_{L_2(J)} + (\partial_1 f, \partial_1 f_1)_{L_2(J)}; \\ \|f\|_{H^1(J)} = (f, f)^{\frac12}_{H^1(J)} = (\|f\|^2_{L_2(J)} + \|\partial_1 f\|^2_{L_2(J)})^{\frac12}.\end{gathered}$$

2° *Der gælder*

$$
\begin{aligned}
C(J) \supset H^1(J) \supset C^1(J);\ \textit{hvor}\\
\|f\|_u \le c_1\|f\|_{H^1(J)} \le c_2(\|f\|_u + \|\partial_1 f\|_u),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

med konstanter c_1 *og* $c_2 > 0$; *og* $C^1(J)$ *er tæt i* $H^1(J)$.

3° *Når* f *og* f_1 *tilhører* $H^1(J)$, *vil produktet* ff_1 *tilhøre* $H^1(J)$, *med*

$$
\begin{aligned}
\partial_1(ff_1) = (\partial_1 f)f_1 + f(\partial_1 f_1); \quad \textit{og}\\
\|ff_1\|_{H^1(J)} \le c_3\|f\|_{H^1(J)}\|f_1\|_{H^1(J)},
\end{aligned}
\tag{37}
$$

med en konstant $c_3 > 0$.

Bevis. 1°. Det eftervises nemt, at 1° definerer et skalarprodukt; specielt vil jo $(f,f)_{H^1(J)} = 0$ medføre $\|f\|_{L_2(J)} = 0$, og dermed $f = 0$. Fuldstændigheden ses som i beviset for Sætning IV 3.9.

2°. Den første inklusion i (36) har vi ofte benyttet, og den tilhørende ulighed er vist i Lemma 1.5. Den anden inklusion ses af at enhver C^1-funktion har en fremstilling som stamfunktion af sin afledede, og uligheden følger af at $\|v\|_{L_2(J)} \le (\beta-\alpha)^{\frac12}\|v\|_u$.

For den sidste påstand skal man vise, at der for hvert $f \in H^1(J)$ findes en følge af elementer $f_n \in C^1(J)$, så $\|f - f_n\|_{H^1(J)} \to 0$ for $n \to \infty$. Lad $f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds + k$. Da $g \in L_2(J)$, og $C(J)$ er tæt i $L_2(J)$, findes en følge g_n fra $C(J)$ som konvergerer mod g i $L_2(J)$ for $n \to \infty$. Lad nu $f_n(x) = \int_\alpha^x g_n(s)\,ds + k$, så er $f_n \in C^1(J)$, og f_n konvergerer mod f i $H^1(J)$, idet $\partial_1 f_n = g_n$ går mod $\partial_1 f = g$ i $L_2(J)$ og

$$
\|f - f_n\|_{L_2(J)} \le (\beta-\alpha)\|g - g_n\|_{L_2(J)},
$$

ved Lemma IV 3.8.

3°. Lad $g = \partial_1 f$, $k = f(\alpha)$, $g_1 = \partial_1 f_1$ og $k_1 = f_1(\alpha)$; så er

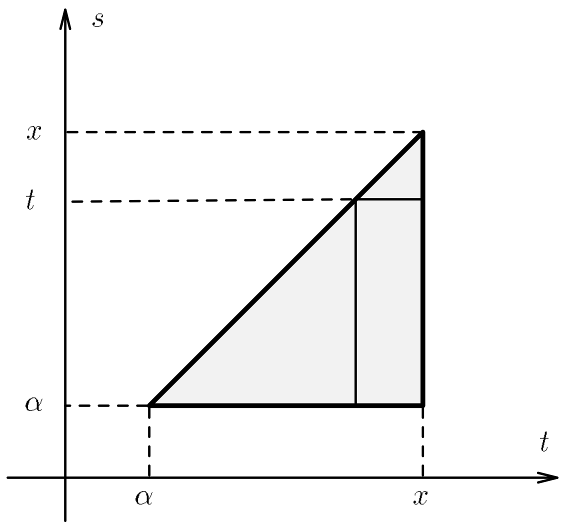
$$
f = \int_\alpha^x g(s)\,ds + k, \quad f_1 = \int_\alpha^x g_1(s)\,ds + k_1.
$$

Da f og f_1 er kontinuerte, er gf_1 og $fg_1 \in L_2(J)$.

Nu finder vi

$$
\begin{aligned}
&\int_\alpha^x (g(s)f_1(s) + f(s)g_1(s))\,ds\\
&\quad = \int_\alpha^x g(s)\big(\int_\alpha^s g_1(t)\,dt + k_1\big)\,ds + \int_\alpha^x g_1(t)\big(\int_\alpha^t g(s)\,ds + k\big)\,dt\\
&\quad = \int_\alpha^x g(s)\int_\alpha^s g_1(t)\,dtds + \int_\alpha^x g(s)\int_s^x g_1(t)\,dtds\\
&\qquad\quad + \int_\alpha^x (k_1 g(s) + k g_1(s))\,ds\\
&\quad = \int_\alpha^x g(s)\,ds\int_\alpha^x g_1(t)\,dt + \int_\alpha^x (k_1 g(s) + k g_1(s))\,ds\\
&\quad = f(x)f_1(x) - kk_1;
\end{aligned}
$$

hvor vi benyttede Fubinis sætning på lignende måde som i beviset for (3) i IV §2.5.



Dette viser, at ff_1 har en fremstilling som integral af en L_2-funktion plus en konstant, altså tilhører $H^1(J)$; og $\partial_1(ff_1) = gf_1 + fg_1$ ifølge udregningerne, hvilket viser første linie i (37). Endelig er, ved (36) og uligheden $\|x+y\|^2 \le 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$,

$$\begin{aligned}
\|ff_1\|^2_{H^1(J)} &= \|ff_1\|^2_{L_2(J)} + \|f\partial_1 f_1 + (\partial_1 f)f_1\|^2_{L_2(J)} \\
&\le \|f\|^2_u \|f_1\|^2_{L_2(J)} + 2\|f\|^2_u \|\partial_1 f_1\|^2_{L_2(J)} + 2\|\partial_1 f\|^2_{L_2(J)} \|f_1\|^2_u \\
&\le 2\|f\|^2_u \|f_1\|^2_{H^1(J)} + 2\|f\|^2_{H^1(J)} c_1^2 \|f_1\|^2_{H^1(J)} \\
&\le 4c_1^2 \|f\|^2_{H^1(J)} \|f_1\|^2_{H^1(J)};
\end{aligned}$$

hvilket viser anden linie i (37). □

Man kan desuden vise, at elementerne i $H^1(J)$ er *Hölder kontinuerte med eksponent* $\frac{1}{2}$, ganske som i Lemma IV 2.7.

De kontinuerte funktioner, som er stykkevis C^1 på J, er med i $H^1(J)$ (og ∂_1 af dem er stykkevis kontinuert).

Korollar 1.8. *$H^1_0(J)$ er et Hilbert rum med $H^1(J)$-normen. Mængden $\{f \in C^\infty(J) \mid f(\alpha) = f(\beta) = 0\}$ er tæt i $H^1_0(J)$.*

Bevis. Ifølge (34) er $|f(\alpha)|$ og $|f(\beta)| \le C\|f\|_{H^1(J)}$ for en vis konstant C, hvormed den lineære afbildning $f \mapsto \{f(\alpha), f(\beta)\}$ er kontinuert fra $H^1(J)$ til $\mathbb{C}^2$. Pr. definition er $H^1_0(J)$ netop nulrummet for denne afbildning, derfor et afsluttet underrum af $H^1(J)$. Da $H^1(J)$ er et Hilbert rum, er $H^1_0(J)$ da et Hilbert rum med den inducerede norm.

For at opnå tæthedsudsagnet skal vi vise, at der for hvert $f \in H_0^1(J)$ findes en følge af C^∞-funktioner f_n med $f_n(\alpha) = f_n(\beta) = 0$, så $\|f - f_n\|_{H^1(J)} \to 0$.

Lad $g = \partial_1 f$, så er $f(x) = \int_\alpha^x g(s)\,ds$ og $(g,1)_{L_2(J)} = 0$. Der findes en følge af funktioner v_n i $C_c^\infty(\,]\alpha,\beta[\,)$, så at $v_n \to g$ i $L_2(J)$ for $n \to \infty$. Specielt vil $(v_n, 1) \to (g,1) = 0$. Vi sætter da

$$
\begin{aligned}
g_n = v_n - \frac{(v_n,1)}{\beta-\alpha}, &\text{ hvormed } g_n \to g \text{ i } L_2(J),\\
\text{og } (g_n,1) = (v_n,1) - \frac{(v_n,1)}{\beta-\alpha}(1,1) = 0, &\text{ for hvert } n.
\end{aligned}
$$

Så er $f_n(x) = \int_\alpha^x g_n(s)\,ds$ i $C^\infty(J)$ med $f_n(\alpha) = f_n(\beta) = 0$ for hvert n, og $f_n \to f$ i $H^1(J)$ ifølge Lemma IV 3.8. $\square$

Det ses nu let, at for H^1-funktioner har man den sædvanlige formel for delvis integration.

Lemma 1.9. *For $u, v \in H^1(J)$ gælder:*

$$
\begin{aligned}
(\partial_1 u, v)_{L_2(J)} + (u, \partial_1 v)_{L_2(J)} &= \big[u\bar v\big]_\alpha^\beta \ \big(= u(\beta)\bar v(\beta) - u(\alpha)\bar v(\alpha)\big);\\
(\mathcal{D}_1 u, v)_{L_2(J)} - (u, \mathcal{D}_1 v)_{L_2(J)} &= \tfrac{1}{i}\big[u\bar v\big]_\alpha^\beta.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Bevis. Da $u\bar v \in H^1(J)$ ifølge Sætning 1.7, har vi

$$
\begin{aligned}
u(\beta)\bar v(\beta) &= u(\alpha)\bar v(\alpha) + \int_\alpha^\beta \partial_1(u\bar v)\,ds\\
&= u(\alpha)\bar v(\alpha) + \int_\alpha^\beta (\partial_1 u)\bar v\,ds + \int_\alpha^\beta u\overline{\partial_1 v}\,ds.
\end{aligned}
$$

Dette viser den første formel i (38), og den anden følger ved multiplikation med $\frac{1}{i}$. $\square$

Da u og v kan antage alle værdier i randpunkterne α og β, ser vi specielt af (38), at $\mathcal{D}_1$ ikke er symmetrisk (som operator i $L_2(J)$), og derfor heller ikke selvadjungeret. Vi minder om, at den har den selvadjungerede restriktion $\mathcal{D}$.

Rummene $H^1(J)$ og $H_0^1(J)$ er, ligesom $H^1(\mathbb{T}_J)$, eksempler på *Sobolev rum.* Lad os nu også indføre følgende generelle Sobolev rum:

Definition 1.10. For $m \in \mathbb{N}$ sættes

$$
H^m(J) = \{\, u \in L_2(J) \mid u \in H^1(J), \partial_1 u \in H^1(J), \dots, (\partial_1)^{m-1} u \in H^1(J) \,\}.
$$

Idet $D(\partial_1) = H^1(J)$, kan vi også skrive

$$
H^m(J) = \{\, u \in L_2(J) \mid (\partial_1)^k u \in D(\partial_1) \text{ for } k \le m-1 \,\} = D((\partial_1)^m).
$$

Rummet forsynes med skalarprodukt og norm (hvor $(\partial_1)^0 f = f$)

$$
\begin{aligned}
(f, f_1)_{H^m(J)} &= \sum_{k=0}^{m} ((\partial_1)^k f, (\partial_1)^k f_1)_{L_2(J)}; \\
\|f\|_{H^m(J)} &= (f, f)^{\frac{1}{2}}_{H^m(J)}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Når vi bruger beskrivelsen (25) af $D(\partial_1) = H^1(J)$, ser vi, at rummet $H^m(J)$ består af funktioner af formen

$$
\begin{aligned}
f(x) = \textstyle\int_\alpha^x \int_\alpha^{s_1} \dots \int_\alpha^{s_{m-1}} g(s_m)\, ds_m \dots ds_2 ds_1 \\
+ k_0 + k_1 x + \dots + k_{m-1} x^{m-1},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

hvor $g \in L_2(J)$ og $k_0, \dots, k_{m-1} \in \mathbb{C}$.

Det er da ikke svært at vise:

Sætning 1.11. *For hvert $m \in \mathbb{N}$ er $H^m(J)$ et Hilbert rum, med $C^m(J)$ som tæt delmængde.*

Bevis. Formlen (39) definerer åbenbart et skalarprodukt, og fuldstændigheden følger af fuldstændigheden af $H^1(J)$: Lad f_n være en Cauchy følge i $H^m(J)$. Så er $\partial_1^j f_n$ en Cauchy følge i $L_2(J)$ for hvert $j = 0, \dots, m$, og har da en grænseværdi g_j for $n \to \infty$. For hvert $j = 1, \dots, m$ ses, da $\partial_1^j f_n \to g_j$ og $\partial_1^{j-1} f_n \to g_{j-1}$, at $g_{j-1} \in H^1(J)$ med $\partial_1 g_{j-1} = g_j$. Ved successiv anvendelse ses, at

$$
g_j = \partial_1^j g_0, \text{ for } j = 1, \dots, m,
$$

og at $f_n \to g_0$ i $H^m(I)$. (Bemærk analogien med beviset for Sætning I 5.10.)

Det er klart udfra (40), at $C^m(J) \subset H^m(J)$. For at vise tætheden betragter vi et vilkårligt element $f \in H^m(J)$, fremstillet som i (40). Lad g_n være en følge i $C(J)$, som konvergerer mod g i $L_2(J)$ for $n \to \infty$; så vil f_n, defineret ved at g i (40) udskiftes med g_n, konvergere mod f i $H^m(J)$ (ved successiv brug af et argument som i Sætning 1.7 2°), og hvert f_n tilhører $C^m(J)$. $\square$

Man ser, at der ialt gælder

$$
\begin{gathered}
C^{m-1}(J) \supset H^m(J) \supset C^m(J); \text{ med} \\
\|f\|_u + \dots + \|\partial_1^{m-1} f\|_u \le c \|f\|_{H^m(J)} \le c' (\|f\|_u + \dots + \|\partial_1^m f\|_u).
\end{gathered}
\tag{41}
$$

Betragt specielt tilfældet $m = 2$. Det fremgår af ovenstående, at $H^2(J)$ er et mere generelt rum end $C^2(J)$; men det er dog ikke værre end at de *første* *ordens afledede* af funktionerne er defineret i helt klassisk forstand. Specielt er randoperatorerne B_1 og B_2 (se (11)) veldefinerede på $H^2(J)$. Dette kan vi bruge til at indføre den generalisation af L_0, der blev bebudet i slutningen af §1.2. Lad os først definere $\mathcal{L}_1$ ved

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}_1) &= H^2(J), \\ \mathcal{L}_1 u &= -\partial_1(p\partial_1 u) + qu; \text{ også skrevet} \\ &= -(pu')' + qu; \end{aligned} \tag{42}$$

jvf. (26), (35). Definitionen har mening, da $p \in C^1(J) \subset H^1(J)$ og $\partial_1 u \in H^1(J)$, så produktet er i $H^1(J)$, jvf. Sætning 1.7.

Derefter definerer vi L_1 ved

$$\begin{aligned} D(L_1) &= \{\, u \in H^2(J) \mid B_1 u = B_2 u = 0 \,\}, \\ L_1 u &= \mathcal{L}_1 u, \text{ for } u \in D(L_1). \end{aligned} \tag{43}$$

Det er klart, at L_1 er en udvidelse af L_0.

Vi bemærker nu at hvis $u \in H^2(J)$ opfylder den homogene differentialligning

$$-\partial_1(p\partial_1 u) + qu = 0,$$

så er $\partial_1(p\partial_1 u) = qu \in C(J)$, hvormed $p\partial_1 u \in C^1(J)$. Da p har positiv nedre grænse, så at også $1/p \in C^1(J)$, følger at $\partial_1 u \in C^1(J)$, og endelig $u \in C^2(J)$. Specielt, hvis $u \in D(L_1)$ med $L_1 u = 0$, er $u \in C^2(J)$. Derfor, når (13) kun har nulløsningen i $C^2(J)$ (dvs. L_0 er injektiv), så er L_1 ligeledes injektiv.

Vi kan nu gennemgå alle skridtene i beviset for Sætning 1.3 med en generel funktion $f \in L_2(J)$ indsat, og konstatere, at de har mening i den nye ramme (specielt udnyttes Sætning 1.7 og Lemma 1.9, og $\mathcal{L}_0$ er naturligvis erstattet med $\mathcal{L}_1$). Heraf ses (når (13) kun har nulløsningen), at G_1 afbilder $L_2(J)$ ind i $D(L_1)$, og

$$L_1 G_1 f = f$$

for alle $f \in L_2(J)$. Da L_1 er injektiv, følger heraf at G_1 *er inversen til* L_1.

Ialt ses, at L_1 er en tæt defineret, injektiv operator med invers G_1, hvor $G_1 \in \mathbf{B}(L_2(J))$. Da G_1 er selvadjungeret (jvf. (24)), følger af Lemma IV 3.15, at L_1 ligeledes er selvadjungeret. Vi har dermed opnået følgende sætning:

Sætning 1.12. *Antag at (13) kun har nulløsningen i $C^2(J)$.*

1° *Lad G_1 være operatoren $G_1 \colon f \mapsto u$ defineret ved (16) for $f \in L_2(J)$; det er en begrænset, selvadjungeret operator i $L_2(J)$.*

2° *Lad L_1 være operatoren defineret ved (43). Det er en bijektion af $D(L_1)$ på $L_2(J)$, inversen er netop G_1, og L_1 er en selvadjungeret, ubegrænset operator i $L_2(J)$.*

(At L_1 er symmetrisk, kan også ses direkte som i (20) ved anvendelse af Lemma 1.9. For den version af L_1, der behandles i §2, kommer selvadjungeretheden også frem som en konsekvens af analysen, jvf. Bemærkning 2.16.)

Vi kan også indføre m-te ordens generalisationer af $H_0^1(J)$ og $H^1(\mathbb{T}_J)$:

$$\begin{aligned} H_0^m(J) &= \{\, u \in L_2(J) \mid \partial_1^k u \in H_0^1(J) \text{ for } k \le m-1 \,\} \\ &= \{\, u \in H^m(J) \mid u^{(k)}(\alpha) = u^{(k)}(\beta) = 0 \text{ for } k \le m-1 \,\}, \\ H^m(\mathbb{T}_J) &= \{\, u \in L_2(J) \mid \partial_1^k u \in H^1(\mathbb{T}_J) \text{ for } k \le m-1 \,\} \\ &= \{\, u \in H^m(J) \mid u^{(k)}(\alpha) = u^{(k)}(\beta) \text{ for } k \le m-1 \,\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Elementerne i $H^m(\mathbb{T}_J)$ kan også anskues som forlænget til funktioner på $\mathbb{R}$ med periode $\beta - \alpha$. Specielt, når $J = [-\pi, \pi]$ (eller J blot har længde 2π) fås rummet $H^m(\mathbb{T})$. Denne definition stemmer overens med definitionen af $H^m(\mathbb{T})$ i Kap. IV §4.3; altså definitionen af $H^m(\mathbb{T}^k)$ for $k = 1$. For ifølge IV §2 (3) og Sætning IV 3.9 gælder for $f \in L_2(\mathbb{T})$, at $f \in H^1(\mathbb{T}) \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n(f)|^2 < \infty$, med $c_n(\partial f) = inc_n(f)$; og så kan rummet indført i (44) med $\mathbb{T}_J = \mathbb{T}$ beskrives ved:

$$\begin{gathered} f \in H^m(\mathbb{T}) \iff f \in L_2(\mathbb{T}) \text{ og } \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^{2m}) |c_n(f)|^2 < \infty; \\ \text{med } c_n(\partial^k f) = (in)^k c_n(f), \text{ for } k \le m. \end{gathered} \tag{45}$$

Uligheden $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^{2m}) |c_n(f)|^2 < \infty$ er den endimensionale version af IV §4 (4).

1.4 Sinusrækker.

Ligesom $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ er et særligt bekvemt ortonormalsystem for $L_2(\mathbb{T})$, er $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\theta\}_{n=1}^\infty$ (jvf. Opg. IV 2.9) et særligt bekvemt ortonormalsystem for $L_2([0,\pi])$; udviklinger efter dette kaldes *sinusrækker*. Før vi går i gang med generelle ortonormalsystemer, vil vi vise, hvordan konvergens-regler for sinusrækker kan fås næsten uden ulejlighed, ved brug af de sædvanlige trigonometriske Fourierrækker anvendt på lige og ulige funktioner.

Når $f \in L_2([0,a])$, definerer vi den *ulige periodiske forlængelse* $\widetilde{f}$ og den *lige periodiske forlængelse* $\approx\!\!\! f$ ved

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= \begin{cases} f(x - 2pa) & \text{for } x \in [2pa, (2p+1)a], \\ -f(2pa - x) & \text{for } x \in \,](2p-1)a, 2pa[\,; \end{cases} \\ \overset{\approx}{f}(x) &= \begin{cases} f(x - 2pa) & \text{for } x \in [2pa, (2p+1)a], \\ f(2pa - x) & \text{for } x \in \,](2p-1)a, 2pa[\,; \end{cases} \end{aligned} \tag{46}$$

for $p \in \mathbb{Z}$.

Bemærk, at $\approx{f}$ er kontinuert på $\mathbb{R}$ hvis f er kontinuert på $[0,a]$, mens $\tilde{f}$ er kontinuert på $\mathbb{R}$ hvis og kun hvis f er kontinuert på $[0,a]$ med $f(0) = 0 = f(a)$. Bemærk endvidere, at når $\widetilde{f}$ er differentiabel, er $\left(\widetilde{f}\right)'$ den *lige* forlængelse af f', altså $\left(\widetilde{f}\right)' = (f')^{\approx}$; tilsvarende gælder $\left(\overset{\approx}{f}\right)' = (f')^{\sim}$.

Man kan let verificere, at ortonormalsystemet $(2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin nx$ ved et lineært variabelskift og multiplikation med en konstant føres over i et ortonormalsystem $(2/a)^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x/a$ for intervallet $[0,a]$. I det følgende kan vi derfor nøjes med at se på tilfældet $a = \pi$ i detaljer.

Når $f \in L_2([0,\pi])$, er $\widetilde{f}$ og $\overset{\approx}{f}$ i $L_2(\mathbb{T})$, og deres Fourierkoefficienter efter det trigonometriske system med den reelle skrivemåde (jvf. IV §2.2) er

$$
\begin{aligned}
a_n(\widetilde{f}\,) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\cos nx\,dx = 0,\\
b_n(\widetilde{f}\,) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\\
a_n(\overset{\approx}{f}\,) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{\approx}{f}(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\\
b_n(\overset{\approx}{f}\,) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{\approx}{f}(x)\sin nx\,dx = 0;
\end{aligned}
\tag{47}
$$

hvor det er benyttet, om integranden er lige eller ulige. (Bemærk, at der er en faktor $\frac{2}{\pi}$ i de formler, hvor selve f indgår, men formlerne fra IV §2.2 har $\frac{1}{\pi}$.)

Vi ser heraf, at når $f \in L_2([0,\pi])$, kan funktionen fremstilles såvel ved en sinusrække som ved en cosinusrække, der konvergerer i $L_2([0,\pi])$ (idet de konvergerer mod $\widetilde{f}$ hhv. $\overset{\approx}{f}$ i $L_2(\mathbb{T})$):

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n(\widetilde{f}\,)\sin nx,\\
f &= \tfrac{1}{2}a_0(\overset{\approx}{f}\,) + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\overset{\approx}{f}\,)\cos nx.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Koefficienterne stemmer overens med koefficienterne ved udvikling i ortonormalsystemerne (fra Opg. IV 2.9 og 2.10)

$$
\left\{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}},\ \text{henholdsvis}\ \left\{\pi^{-\frac{1}{2}}\right\}_{n=0} \cup \left\{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}\cos nx\right\}_{n\in\mathbb{N}},
$$

på følgende måde:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b'_n (2/\pi)^{\frac12} \sin nx, \text{ med}\\
b'_n &= (\pi/2)^{\frac12} b_n(\widetilde{f}\,) = (2/\pi)^{\frac12} \int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx, \; n\in\mathbb{N},
\end{aligned} \tag{49}
$$

henholdsvis

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a'_0 \pi^{-\frac12} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a'_n (2/\pi)^{\frac12} \cos nx, \text{ med}\\
a'_0 &= \tfrac12 \pi^{\frac12} a_0(\approx\!\!f\,) = (1/\pi)^{\frac12} \int_0^\pi f(x)\, dx,\\
a'_n &= (\pi/2)^{\frac12} a_n(\approx\!\!f\,) = (2/\pi)^{\frac12} \int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx, \; n\in\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{50}
$$

Man verificerer ved brug af definitionerne, at der for $f \in H^1([0,\pi])$, gælder, at $\overset{\approx}{f} \in H^1(\mathbb{T})$, mens $\widetilde{f}$ præcis er i $H^1(\mathbb{T})$, når værdierne i endepunkterne er 0, altså,

$$
f \in H^1_0([0,\pi]) \iff \widetilde{f} \in H^1(\mathbb{T}). \tag{51}
$$

Da kan vi udnytte Sætning IV 2.8 vedr. uniform konvergens til at vise:

Sætning 1.13. *Når $f \in H^1([0,\pi])$, konvergerer cosinusrækken* (50) *absolut og uniformt mod f, og $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n| < \infty$.*

Når $f \in H^1_0([0,\pi])$, konvergerer sinusrækken (49) *absolut og uniformt mod f, og $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$.*

Bevis. Lad først $f \in H^1([0,\pi])$. For cosinusrækken (50) gælder, da $\overset{\approx}{f} \in H^1(\mathbb{T})$, at $\sum_{n\ge1} |a'_n| = \sum_{n\ge1} (\pi/2)^{\frac12} |a_n| < \infty$; der er altså en konvergent majorantrække og dermed absolut og uniform konvergens. Når $f \in H^1_0([0,\pi])$, er også $\widetilde{f}$ i $H^1(\mathbb{T})$, så sinusrækken (49) har den konvergente majorantrække $\sum_{n\ge1} |b'_n| = \sum_{n\ge1} (\pi/2)^{\frac12} |b_n| < \infty$, og dermed absolut og uniform konvergens.

Man kan også give kriterier for konvergens af de ledvis differentierede rækker. Igen får man en simpel argumentation ved i størst muligt omfang at føre problemet tilbage til de oprindelige trigonometriske rækker for periodiske funktioner.

Sætning 1.14.

1° *Når $f \in H^m(\mathbb{T})$, så konvergerer Fourierrækken $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ og dens ledvis differentierede rækker af orden op til $m-1$ absolut og uniformt mod de tilsvarende afledede af f.*

2° *Når* $f \in H^m([0,\pi])$ *med*

$$f(0) = f(\pi) = \cdots = f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(\pi) = 0 \quad \text{for } 2j < m, \tag{52}$$

så er $\widetilde{f} \in H^m(\mathbb{T})$, *og sinusrækken for* f *samt dens ledvis differentierede rækker af orden op til* $m-1$ *konvergerer absolut og uniformt mod de tilsvarende afledede af* f.

3° *Når* $f \in H^m([0,\pi])$ *med*

$$f'(0) = f'(\pi) = \cdots = f^{(2j+1)}(0) = f^{(2j+1)}(\pi) = 0 \quad \text{for } 2j+1 < m, \tag{53}$$

så er $\approx{f} \in H^m(\mathbb{T})$, *og cosinusrækken for* f *samt dens ledvis differentierede rækker af orden op til* $m-1$ *konvergerer absolut og uniformt mod de tilsvarende afledede af* f.

Bevis. 1°. At $f \in H^m(\mathbb{T})$ betyder at $f, f', \dots, f^{(m-1)} \in H^1(\mathbb{T})$, jvf. (44). Ifølge IV §2 (3) er $c_n(f^{(k)}) = inc_n(f^{(k-1)})$ for $k \le m$, så rækken der fremkommer ved ledvis anvendelse af ∂^k er netop rækken for $f^{(k)}$. Vi kan da anvende Sætning IV 2.8 successivt på $f, f', \dots, f^{(m-1)}$; det giver den ønskede konvergens.

2°. Da $f(0) = f(\pi) = 0$ er $\widetilde{f} \in H^1(\mathbb{T})$. Idet $\left(\widetilde{f}\right)' = (f')^{\approx}$, har vi uden videre, når $m > 1$, at $\left(\widetilde{f}\right)' \in H^1(\mathbb{T})$. Er $m > 2$, benytter vi nu den næste oplysning $f''(0) = f''(\pi) = 0$ i (52) til at slutte at $\left(\widetilde{f}\right)'' \in H^1(\mathbb{T})$. Således fortsættes, indtil vi har checket, at $\left(\widetilde{f}\right)^{(k)} \in H^1(\mathbb{T})$ for alle $k < m$, og dermed $\widetilde{f} \in H^m(\mathbb{T})$. Nu anvender vi 1° på $\widetilde{f}$, hvis trigonometriske Fourierrække netop er sinusrækken for f på $[0,\pi]$.

3°. Vises analogt. □

Bemærk, at begge forudsætninger (52) og (53) er opfyldt, når $f \in C^m([0,\pi])$ med alle randværdier af orden op til m lig med 0. For hver af dem er det dog tilstrækkeligt at "hveranden" randværdi er 0. Forudsætningerne er også opfyldt, når $f \in H_0^m([0,\pi])$, jvf. (44).

Lignende resultater kan vises for *multiple sinus- og cosinusrækker*, ved brug af Sætning IV 4.7. For eksempel gælder der, at når man til $f \in L_2([0,\pi]^k)$ knytter *den ulige periodiske forlængelse* $\widetilde{f}$ *med hensyn til alle variable* (man forlænger først m.h.t. x_1, dernæst x_2, osv.), så stemmer den multiple trigonometriske Fourierrække for $\widetilde{f}$ i sinus-cosinus formulering overens med den multiple sinusrække

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} b_n (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k, \tag{54}$$

på $[0,\pi]^k$; idet alle led med cosinusfaktorer forsvinder. (Og hvis vi omskriver (54) ved indsættelse af $\sin n_j x_j = (2i)^{-1}(e^{in_jx_j} - e^{-in_jx_j})$, giver hvert led 2^k led, hvis koefficienter har numerisk værdi 2^{-k} gange de foreliggende.) Da systemet $\{(2/\pi)^{k/2} \sin n_1x_1 \cdots \sin n_kx_k\}_{n\in\mathbb{N}^k}$ er et ortonormalsystem i $L_2([0,\pi]^k)$, og enhver funktion $f \in L_2([0,\pi]^k)$ er sum af en række udviklet efter dette system, ifølge ovenstående, er det et *fuldstændigt* ortonormalsystem (jvf. Sætning IV 1.14). Hvis nu

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^k} (1+\|n\|^2)^{l/2}|b_n| < \infty, \tag{55}$$

for et $l \in \mathbb{N}_0$, så konvergerer rækken (54) og dens ledvis differentierede rækker af orden op til l absolut og uniformt på $[0,\pi]^k$, mod f og dens afledede, idet (55) er majorantrække for dem alle. Endvidere ses som i beviset for Sætning IV 4.7, at (55) gælder, hvis

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^k} (1+\|n\|^2)^m|b_n|^2 < \infty, \text{ for et } m > l + k/2; \tag{56}$$

og at dette er sikret hvis $\widetilde{f} \in C^m(\mathbb{T}^k)$ med $m > l + k/2$. Betingelsen (56) svarer netop til betingelse (4) i IV §4.2, der også kan udtrykkes alment som at $\widetilde{f}$ tilhører rummet $H^m(\mathbb{T}^k)$ defineret i slutningen af IV §4.3. En tilstrækkelig betingelse for at $\widetilde{f} \in C^m(\mathbb{T}^k)$ (og dermed $H^m(\mathbb{T}^k)$) er, at $f \in C^m([0,\pi]^k)$ og de afledede op til orden m (inklusive f selv) er lig med 0 på randen.

Vi har dermed:

Sætning 1.15. *Lad $f \in L_2([0,\pi])^k)$, og betragt dens multiple sinusrække* (54).

1° *Hvis koefficientfølgen opfylder* (55), *konvergerer rækken* (54) *og dens ledvis differentierede rækker af orden op til l absolut og uniformt på* $[0,\pi]^k$ *mod f og dens tilsvarende afledede. Det er tilstrækkeligt for* (55), *at* (56) *gælder.*

2° *Hvis $f \in C^m([0,\pi]^k)$ med $m > l + k/2$, og f samt dens afledede op til orden m er lig med 0 på randen af $[0,\pi]^k$, så gælder* (56) *og dermed* (55).

Som i det éndimensionale tilfælde kan forudsætningerne om f i 2° svækkes noget. Dels behøves ingen særlig randbetingelse på dem af de afledede, der forlænges som lige funktioner. Dels kan man vise, at det er tilstrækkeligt, at de afledede op til orden $m-1$ er 0 på randen for at $\widetilde{f}$ opfylder (56) (dvs. tilhører $H^m(\mathbb{T}^k)$).

Opgaver til §1.

1.1. Vis, at $a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = F(x)$, hvor $a, b, c, F \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $a > 0$, kan bringes på selvadjungeret form $-(pu')' + qu = f$. (*Vink.* En analyse af den ønskede form viser, at det primært drejer sig om at finde en positiv funktion $p(x)$, så $p'(x)/p(x) = b(x)/a(x)$. Sæt $P(x) = \log p(x)$.)

1.2. Find løsningen til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned} u'' + u' - 2u &= e^x\,, \quad \text{for } x > 0\,,\\ u(0) &= 1\,,\\ u'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

1.3. Vis, at Green's funktion $\mathcal{G}(x, y)$ for fast $y \in]\alpha, \beta[$ er kontinuert og stykkevis C^2 som funktion af x, og

$$\lim_{x \searrow y} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}(x, y) - \lim_{x \nearrow y} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{p(y)}\,.$$

1.4. Eftervis påstandene i Eksempel 1.2 og 1.4.

1.5. Find Green's funktion hørende til problemet

$$\begin{aligned} -u'' + u &= f(x)\,, \quad \text{for } x \in]0, \pi[\,,\\ u(0) &= u(\pi) = 0\,. \end{aligned}$$

Beskriv løsningen til problemet.

1.6. Find Green's funktion hørende til problemet

$$\begin{aligned} -((1+x)^2u')' + u &= f(x)\,, \quad \text{for } x \in]0, 1[\,,\\ u(0) &= u(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Beskriv løsningen til problemet.

1.7. Vis at $\partial_1 f = \partial\big(f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\big) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Find konstanter c_1, c_2 og c_3 for hvilke (36) og (37) gælder.

1.8. Vis uden brug af ∂, at når $g \in \mathcal{L}_2(J)$, $J = [\alpha, \beta]$, så vil $\int_\alpha^x g(s)\,ds = 0$ for alle $x \in J$ medføre $g = 0$ n.o. i J.

(*Vink.* Man kan antage, at g er reel. Vis, at $\int_x^y g^+\,ds = \int_x^y g^-\,ds$ for alle $\alpha \le x \le y \le \beta$, og dernæst, at de to mål g^+m_1 og g^-m_1 på J stemmer overens på $\mathbb{B}(J)$, samt endelig, at $\{x \mid g^+(x) > g^-(x)\}$ er en nulmængde.)

1.9. Vis, at Cantor-Lebesgue's funktion (jvf. Opg. II 5.28 og II 5.32) tilhører $C([0,1]) \setminus H^1([0,1])$.

1.10. Vis, at hvis u_0 er løsning til (13), så er $L_0 u \perp u_0$ for alle $u \in D(L_0)$. (Man kan benytte (20).)

Vis, at hvis u_0 kan vælges $\neq 0$, har (10) ingen løsning for $f = u_0$.

1.11. Idet $N \in \mathbb{N}$, skal man finde samtlige funktioner $u \in C^2(\mathbb{R})$, der løser

$$u'' = N^2 u.$$

Vis, at de løsninger, der er 0 i et givet punkt $a \in \mathbb{R}$, kan skrives på formen $c \sinh N(x-a)$. Find de løsninger, der opfylder $u(x) \to 0$ for $x \to +\infty$.

1.12. Undersøg sammenhængen mellem udviklinger efter systemet $(2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k$, $n \in \mathbb{N}^k$, og efter systemet $e^{in\cdot x}$, $n \in \mathbb{Z}^k$, i detaljer.

1.13. Udfør detaljerne i beviset for Sætning 1.15.

1.14. Lad $m > 2 + k/2$. Lad $f \in C^m([0,\pi]^k)$, med alle afledede af orden $\le m$ lig med 0 på randen af $[0,\pi]^k$. Vis, at når f har den multiple sinus-række (54), så er (idet $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_k^2$)

$$-\Delta f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} \|n\|^2 b_n (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k.$$

1.15. Lad $f \in C^l([0,\pi]^k)$ for et $l \in \mathbb{N}_0$, med alle afledede af orden $\le l$ lig med 0 på randen af $[0,\pi]^k$, og lad f have den multiple sinusrække (54). Man søger en løsning til problemet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{på } [0,\pi]^k \\ u &= 0 \quad \text{på } \partial([0,\pi]^k), \end{aligned}$$

med sinusrækken $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} c_n (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k$. Vis, at hvis $l > k/2$, og u vælges med

$$c_n = \frac{b_n}{\|n\|^2} \qquad \text{for } n \in \mathbb{N}^k$$

(sml. med Opg. 1.14), så er u løsning til problemet.

§2. Sturm–Liouville teori

2.1. Det regulære Sturm-Liouville problem.

Vi så i IV §§2.2–3 hvorledes ortogonalsystemet $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i $L_2(\mathbb{T})$ kunne bruges til at diagonalisere differentialoperatorer, idet f.eks. $\frac{1}{i}d/dx$ blev til multiplikation af den n'te Fourierkoefficient med n (Sætning IV 3.16), og d^2/dx^2 blev til multiplikation med $-n^2$ (Opg. IV 3.10–11). Hver af funktionerne $u(x)=e^{inx}$ har altså f.eks. den specielle egenskab, at $-d^2/dx^2$ virker på dem som en simpel multiplikation, dvs. sender hver af dem over i et multiplum af sig selv:

$$-u''=n^2u, \quad \text{når } u=e^{\pm inx},\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Funktionerne $e^{\pm inx}$ siges at være *egenfunktioner* for operatoren $-d^2/dx^2$ med definitionsmængde $C^2(\mathbb{T})$, idet $-d^2/dx^2$ får dem til at reproducere sig selv med en faktor n^2; og faktoren n^2 kaldes den tilhørende *egenværdi*.

Ligningen

$$-u''=\lambda u, \tag{2}$$

betragtet alene, har for ethvert $\lambda\in\mathbb{C}$ et todimensionalt rum af løsninger. Det kan for eksempel beskrives som følger, idet vi skriver λ som μ^2 for passende μ:

$$\begin{aligned} &u=c_1\sin\mu x+c_2\cos\mu x, && \text{når } \lambda\neq 0,\ \mu^2=\lambda;\\ &u=c_1x+c_2, && \text{når } \lambda=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Men når yderligere betingelser pålægges, indskrænkes mulighederne for λ. Funktionerne e^{inx}, der optrådte ovenfor, var pålagt et krav om *periodicitet*, eller, set fra et synspunkt for funktioner på intervallet $[-\pi,\pi]$, en *randbetingelse*

$$u(-\pi)=u(\pi), \quad u'(-\pi)=u'(\pi). \tag{4}$$

Man kan vise, at når løsningerne til (2) beskrevet i (3) pålægges kravet (4), indskrænkes mulighederne til funktionerne $u=c_1\sin nx+c_2\cos nx$, $n\in\mathbb{N}$, og $u=c$. Med den komplekse skrivemåde udgør disse funktioner systemet $c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}$, $n\in\mathbb{N}_0$. (Jvf. Opg. 2.16.)

I stedet for betingelserne (4), der er knyttet til periodicitet, kan vi se på randbetingelser af typen indført i §1.2. Betragt for eksempel problemet: Find $\lambda\in\mathbb{C}$ og $u\not\equiv 0$, så at

$$\begin{aligned} -u''(x)&=\lambda u(x) \quad \text{på} \quad [0,\pi],\\ u(0)&=u(\pi)=0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

De funktioner u der løser (5), *bortset fra funktionen* $u\equiv 0$, kaldes *egenfunktioner* for (5), og de tilhørende værdier af λ kaldes *egenværdier*. For $\lambda=0$

har (5) kun nulløsningen, så $\lambda = 0$ er ikke egenværdi. For $\lambda \neq 0$ bruger vi fremstillingen i (3). Betingelsen $u(0) = 0$ giver at $c_2 = 0$. Betingelsen $u(\pi) = 0$ giver herefter, at μ må være et helt tal. Idet $\sin(-nx) = -\sin nx$, behøver kun positive hele tal medtages, og den generelle løsning til (5) er altså $c_1 \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$. Vi har vist:

Lemma 2.1. *Problemet* (5) *har netop følgende ikke-trivielle løsninger:*

$$u(x) = c \sin nx, \quad \textit{med } n \in \mathbb{N} \textit{ og } c \neq 0; \quad \textit{her er } \lambda = n^2.$$

(5) er et specielt tilfælde af det generelle problem, vi nu skal behandle, og hvor differentialoperatoren er på formen (1) i §1.1. (5) kunne åbenbart løses "ved håndkraft", mens vi for de generelle problemer snarere kan finde kvalitative egenskaber ved løsningerne.

Bemærk, at skaren af funktioner $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ er os velkendt som et fuldstændigt ortogonalsystem i $L_2([0, \pi])$, jvf. Opg. IV 2.9 og §1.4. (Vi siger, at et orto*gonal*-system er fuldstændigt, når elementerne er $\neq 0$ og ved normering giver et fuldstændigt orto*normal*-system.) Derfor kan ethvert element i $L_2([0, \pi])$ udvikles i en Fourierrække efter systemet. Dette vil give en diagonalisering af $-d^2/dx^2$ (betragtet på funktioner der opfylder $u(0) = u(\pi) = 0$) — i stil med diagonaliseringerne i Opg. IV 3.10–11.

Også for de mere generelle problemer vil vi finde, at egenfunktionerne udgør et fulstændigt ortogonalsystem, som diagonaliserer den forelagte operator med randbetingelser.

Definition 2.2. Lad $I =]\alpha, \beta[\neq \varnothing$; og lad $J = \overline{I} = [\alpha, \beta]$.

Lad $p \in C^1(I, \mathbb{R})$ med $p > 0$, og lad q og $\varrho \in C(I, \mathbb{R})$ med $q \geq 0$ og $\varrho > 0$. *Sturm-Liouville problemet* (S.-L. problemet) hørende til p, q og ϱ består i at finde ikke-trivielle funktioner u, kaldet *egenfunktioner* (eller *egenvektorer*), og tilhørende tal λ, kaldet *egenværdier*, således at

$$\begin{gathered} -(pu')' + qu = \lambda \varrho u \quad \text{på } I, \\ u \text{ opfylder en randbetingelse ved } \alpha \text{ og } \beta. \end{gathered} \tag{6}$$

Problemet kaldes *regulært*, hvis tillige $p \in C^1(J)$ og $q, \varrho \in C(J)$ med $p > 0$ og $\varrho > 0$ på J (dette vedrører opførselen i α og β); så benyttes randbetingelsen

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0, \tag{7}$$

eller mere generelt $B_1 u = B_2 u = 0$ som i §1.2 (11)–(12). Hvis p, q og ϱ ikke opfylder betingelserne i α og β, kaldes problemet *singulært*, og randbetingelsen er en særligt tilpasset generalisation af (7) ff.

Vi behandler i detaljer den simpleste randbetingelse (7), hvor altså

$$B_1 u = u(\alpha), \quad B_2 u = u(\beta). \tag{8}$$

I det regulære tilfælde medfører hypoteserne, at

$$\begin{aligned} c_p \le p(x) \le C_p, \quad 0 \le q(x) \le C_q, \quad c_\varrho \le \varrho(x) \le C_\varrho, \quad \text{på } J, \text{ med} \\ C_p = \max_J p(x) \ge c_p = \min_J p(x) > 0, \\ C_q = \max_J q(x) \ge 0, \\ C_\varrho = \max_J \varrho(x) \ge c_\varrho = \min_J \varrho(x) > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Om u forudsættes at de forskellige operationer har mening, dvs. u skal have to afledede i en passende forstand. Når vi skriver første linie i (6) som

$$(pu')' = (q - \lambda\varrho)u \quad \text{ på } I, \tag{10}$$

ser vi, idet q, ϱ og u er kontinuerte, at for regulære såvel som for singulære problemer skal $pu' \in C^1(I)$ og dermed $u \in C^2(I)$ — selvom u fra starten blot søges i f.eks. $H^2(J)$. Den mere generelle definition af afledede i §1.3 er altså overflødig for selve egenværdiproblemet; men den vil være nyttig i den omkringliggende teori og i anvendelserne.

For de regulære problemer medfører (10) at $u \in C^2(J)$, da $(q - \lambda\varrho)u \in C(J)$ og $1/p \in C^1(J)$.

Ved singulære S.-L. problemer giver (10) i stedet nogle betingelser på opførselen af u' og u'' ved α og β, som afhænger af grænseforholdene for p, q og ϱ. Nogle vigtige specialtilfælde behandles i §3, men vi afstår fra en systematisk diskussion.

I resten af dette afsnit samt i §2.2 og §2.3 betragtes et regulært S.-L. problem.

For $L_2(J)$ vil vi betegne norm og skalarprodukt ved $\|\cdot\|$ og $(\cdot\,,\cdot)$. Herudover vil vi benytte Hilbert rummet (jvf. Eksempel IV 1.9)

$$\begin{gathered} H_\varrho = L_2(J, \varrho(x)dx), \text{ med skalarprodukt og norm} \\ (f,g)_\varrho = \int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}\varrho(x)\,dx = (\varrho f, g), \quad \|f\|_\varrho = (f,f)_\varrho^{\frac{1}{2}} = \|\sqrt{\varrho}\, f\|. \end{gathered} \tag{11}$$

(Fra nu af benyttes den almindelige skrivemåde, hvor Lebesgue målet angives som dx, når x er den variable.) På grund af (9) er

$$c_\varrho \|f\|^2 \le \|f\|_\varrho^2 \le C_\varrho \|f\|^2, \tag{12}$$

hvilket viser, at rummet H_ϱ (af funktioner fastlagt n.o.) har de samme elementer som $L_2(J) = L_2(J, dx)$ og blot er forsynet med en anden norm ækvivalent med normen i $L_2(J)$. Værdien af skalarproduktet har imidlertid betydning for udseendet af den adjungerede til en operator. (For singulære problemer kan $H_\varrho \neq L_2(J)$.) Igen er $C_c^\infty(I)$ tæt i H_ϱ.

Lad L være operatoren i H_ϱ defineret ved

$$\begin{aligned} D(L) &= \{\, u \in H^2(J) \mid u(\alpha) = u(\beta) = 0 \,\}, \\ Lu &= \frac{1}{\varrho}(-(pu')' + qu), \text{ for } u \in D(L). \end{aligned} \tag{13}$$

Bemærk, at $L = \frac{1}{\varrho} L_1$ (specielt $D(L) = D(L_1)$), hvor L_1 er operatoren indført i §1.3 (43), med (8).

Sturm-Liouville problemet er nu problemet at bestemme de mulige værdier af $\lambda \in \mathbb{C}$ og $u \in D(L) \setminus \{0\}$, for hvilke

$$Lu = \lambda u. \tag{14}$$

Vi kalder L *Sturm-Liouville operatoren*. Som allerede vist, vil funktioner $u \in D(L)$, der løser (14), tilhøre $C^2(J)$.

Sammen med L vil vi betragte den sesquilineære form

$$l(u, v) = \int_\alpha^\beta (pu'\bar{v}' + qu\bar{v})\, dx = (pu', v') + (qu, v); \tag{15}$$

udtrykket er veldefineret for u og $v \in H^1(J)$.

Sætning 2.3.

1° *For $u \in D(L)$ og $v \in H_0^1(J)$ er*

$$(Lu, v)_\varrho = l(u, v).$$

2° *Der findes konstanter $C_0 \geq c_0 > 0$ og $c_0' > 0$, så at*

$$\begin{aligned} &l(u, u) \leq C_0 \|u\|^2_{H^1(J)} \ \text{ for } u \in H^1(J), \\ &l(u, u) \geq c_0 \|u\|^2_\varrho \text{ og } l(u, u) \geq c_0' \|u\|^2_{H^1(J)} \ \text{ for } u \in H_0^1(J). \end{aligned}$$

Specielt er $l(u, v)$ et skalarprodukt på $H_0^1(J)$ ækvivalent med det sædvanlige H^1-skalarprodukt på $H_0^1(J)$.

3° *L er en symmetrisk operator i H_ϱ, altså*

$$(Lu, v)_\varrho = (u, Lv)_\varrho, \text{ for } u, v \in D(L);$$

og L opfylder positivitetsuligheden

$$(Lu, u)_\varrho \geq c_0 \|u\|_\varrho^2, \text{ for } u \in D(L).$$

Bevis. 1° fås ved anvendelse af Lemma 1.9: For $u \in D(L)$ og $v \in H_0^1(J)$ er

$$\begin{aligned}(Lu, v)_\varrho - l(u, v) &= (-\partial_1(p\partial_1 u) + qu, v) - (p\partial_1 u, \partial_1 v) - (qu, v) \\ &= -\big[pu'\bar{v}\big]_\alpha^\beta = 0,\end{aligned}$$

da $v(\alpha) = v(\beta) = 0$.

2° følger af ulighederne i (9) samt Lemma IV 3.8: For $u \in H^1(J)$ er

$$l(u, u) \leq C_p \|u'\|^2 + C_q \|u\|^2 \leq \max\{C_p, C_q\} \|u\|_{H^1(J)}^2,$$

hvilket viser den første ulighed. For $u \in H_0^1(J)$ er $u(x) = \int_\alpha^x u'(s)ds$, hvor Lemma IV 3.8 kan anvendes, hvormed (jvf. (12))

$$\begin{aligned}l(u, u) &\geq c_p \|u'\|^2 \geq \frac{c_p}{(\beta - \alpha)^2} \|u\|^2 \geq \frac{c_p}{(\beta - \alpha)^2 C_\varrho} \|u\|_\varrho^2, \text{ og} \\ l(u, u) &\geq \tfrac{1}{2} c_p \|u'\|^2 + \tfrac{1}{2} \frac{c_p}{(\beta - \alpha)^2} \|u\|^2 \geq \tfrac{1}{2} c_p \min\big\{1, \frac{1}{(\beta - \alpha)^2}\big\} \|u\|_{H^1(J)}^2,\end{aligned}$$

hvilket viser de andre uligheder. For $u, v \in H_0^1(J)$ opfylder $l(u, v)$ klart reglerne for et skalarprodukt, og det er ækvivalent med det givne på grund af de viste uligheder.

3°. Da $D(L) \subset H_0^1(J)$, fås af 1° og 2°:

$$\begin{aligned}(Lu, v)_\varrho = l(u, v) = \overline{l(v, u)} = \overline{(Lv, u)}_\varrho = (u, Lv)_\varrho, \\ (Lu, u)_\varrho = l(u, u) \geq c_0 \|u\|_\varrho^2,\end{aligned}$$

for $u, v \in D(L)$; dette viser 3°. $\square$

Værdierne af c_0 og c_0' kan forhøjes lidt ved brug af Opg. IV 3.13 eller Opg. 2.2. Når $q > 0$, kan værdierne også forhøjes.

Det fremgår af Korollar 1.8, at $D(L) \cap C^\infty(J)$ og dermed $D(L)$ *er tæt i* $H_0^1(J)$. — I de singulære tilfælde behøver $l(u, v)$ ikke være ækvivalent med skalarproduktet på $H_0^1(J)$; man søger da i stedet at definere et Hilbert rum V med $l(u, v) + (u, v)_\varrho$ som skalarprodukt, ved fuldstændiggørelse af $D(L)$.

Sætning 2.4.

1° *Alle egenværdier for L er reelle og > 0 (de er $\geq c_0$). Enhver egenværdi λ er simpel, dvs. der findes en egenfunktion u_λ, så de øvrige egenfunktioner med egenværdi λ er multipla af u_λ; her kan u_λ vælges reel.*

2° *Når u og v er egenfunktioner hørende til forskellige egenværdier, er de ortogonale i H_ϱ, dvs. $(u,v)_\varrho = 0$.*

Bevis. 1°. Når λ er egenværdi, findes $u \in D(L) \setminus \{0\}$, så $Lu = \lambda u$. Da

$$(Lu, u)_\varrho = \lambda(u,u)_\varrho = \lambda \|u\|_\varrho^2,$$

er, ved Sætning 2.3,

$$\lambda = \frac{1}{\|u\|_\varrho^2}(Lu,u)_\varrho = \frac{l(u,u)}{\|u\|_\varrho^2} \geq c_0.$$

Bemærk nu, at alle egenfunktioner v hørende til egenværdien λ skal opfylde

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\varrho}[-(pv')' + qv] - \lambda v = 0 \quad &\text{på } I, \\ v(\alpha) = 0&, \\ v'(\alpha) = c&; \end{aligned} \tag{16}$$

med $c \neq 0$. De to første linier følger af at v skal tilhøre $D(L)$ og opfylde $Lv = \lambda v$, og den tredje ses af at v skal være forskellig fra nulfunktionen; her ville $c = 0$ medføre $v = 0$ på grund af entydighed for løsningen af begyndelsesværdiproblemet behandlet i §1.1. Lad u_λ være løsningen til (16) med $c = 1$; så er u_λ reel ifølge Sætning 1.1 (bemærk at $\frac{q}{\varrho} - \lambda$ er reel), og løsningen for andre værdier af c er netop cu_λ (igen på grund af entydigheden). Hermed er 1° opfyldt.

2°. Lad nu u og v være egenfunktioner hørende til forskellige egenværdier λ og μ. Så er

$$(\lambda - \mu)(u,v)_\varrho = (Lu, v)_\varrho - (u, Lv)_\varrho = 0$$

ifølge Sætning 2.3 3°, hvoraf sluttes at $(u,v)_\varrho = 0$, da $\lambda - \mu \neq 0$. □

Eksempel 2.5. For $[\alpha, \beta] = [0, a]$, $p = \varrho = 1$ og $q = 0$, fås det simple eksempel, hvor

$$Lu = -u'', \quad D(L) = \{\, u \in H^2([0,a]) \mid u(0) = u(a) = 0 \,\},$$
$$l(u,v) = \int_0^a u'\bar{v}'\,dx.$$

Her er $\|u\|_\varrho = \|u\|_{L_2(J)}$ og $l(u,u) = \|u\|_{H^1(J)}^2 - \|u\|_{L_2(J)}^2$, og ulighederne i Sætning 2.3 gælder med $C_0 = 1$, $c_0 = 1/a^2$ (ved Lemma IV 3.8) og

$c_0' = \frac{1}{2}\min\{1, 1/a^2\}$. Egenværdierne og de normerede egenfunktioner ses ved direkte udregning (som i Lemma 2.1) at udgøre en numerabel følge:

$$\lambda_n = \big(\frac{n\pi}{a}\big)^2, \text{ hørende til } e_n(x) = (2/a)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Som en særlig konsekvens af Sætning 2.4 1° får vi, at $Lu = 0$ kun har nulløsningen. Det medfører, at det homogene problem §1.2 (13), med B_1 og B_2 valgt som i (8), kun har nulløsningen. Så kan hele analysen fra §1.2–3 overføres til L:

Lad L_0 og L_1 være operatorerne defineret i §§1.2–3 med (8). Der findes en Green's funktion §1.2 (15), og L_0 og L_1 er injektive, med inverserne G_0 og G_1. Da $Lu = \frac{1}{\varrho} L_1 u$, har L inversen G defineret ved $Gf = G_1(\varrho f)$. G er en begrænset operator i H_ϱ (altså $G \in \mathbf{B}(H_\varrho)$), da G_1 er begrænset i $L_2(J)$ (jvf. §1.2 (23)) og

$$\|Gf\|_\varrho = \|\sqrt{\varrho} G_1(\varrho f)\| \le \sqrt{C_\varrho}\|G_1\|\sqrt{C_\varrho}\|\sqrt{\varrho} f\| = C_\varrho \|G_1\| \|f\|_\varrho.$$

G er symmetrisk i H_ϱ, da L er det: For $f, g \in H_\varrho$, $u = Gf$, $v = Gg$ er

$$(Gf, g)_\varrho = (u, Lv)_\varrho = (Lu, v)_\varrho = (f, Gg)_\varrho,$$

ved Sætning 2.3 3°. (Man kan også vise symmetrien direkte ved en variant af §1 (24)). Da $G \in \mathbf{B}(H_\varrho)$, er G da også selvadjungeret i H_ϱ; og så er L ligeledes selvadjungeret i H_ϱ, ved Lemma IV 3.15.

Hermed har vi opnået:

Korollar 2.6. *Ligningen $Lu = 0$ har kun nulløsningen i $D(L)$. Endvidere er L en bijektion af $D(L)$ på H_ϱ, med invers $G = G_1 \varrho \in \mathbf{B}(H_\varrho)$, således at*

$$L^{-1} f = Gf = \int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x, y) f(y) \varrho(y)\, dy, \text{ for } f \in H_\varrho,$$

hvor $\mathcal{G}$ er funktionen indført i §1.2 (15), for L_1.

G og L er selvadjungerede i H_ϱ.

Da alle egenværdier for L er $\ne 0$, er de reciprokke tal netop egenværdierne for G, med de samme egenfunktioner, idet

$$Lu = \lambda u \iff u = \lambda G u \iff Gu = \frac{1}{\lambda} u. \tag{17}$$

Når u er reel, kan den midterste ligning i (17) også skrives

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_\alpha^\beta \mathcal{G}(x, y) u(y) \varrho(y)\, dy, \text{ eller} \\ u(x) &= \lambda (\mathcal{G}(x, \cdot), u)_\varrho, \text{ for hvert } x \in J. \end{aligned} \tag{18}$$

Vi benytter denne omskrivning i den videre analyse af egenværdier og egenfunktioner.

Lemma 2.7. *For ethvert endeligt sæt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ af forskellige egenværdier gælder*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{{\lambda_k}^2} \leq \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2 \varrho(x)\varrho(y)\, dxdy.$$

Bevis. Lad $u_1, \dots, u_n$ være et til $\lambda_1, \dots \lambda_n$ hørende system af egenfunktioner, valgt så $\|u_k\|_\varrho = 1$ for alle k. Ifølge Sætning 2.4 2° er det et ortonormalsystem. For hver af funktionerne og for hvert x har vi ifølge (18)

$$\frac{1}{\lambda_k} u_k(x) = (\mathcal{G}(x,\cdot), u_k)_\varrho.$$

Dette viser, at for hvert x har $\mathcal{G}(x,\cdot)$ Fourierkoefficienterne $\frac{1}{\lambda_k} u_k(x)$ efter ortonormalsystemet $u_1, \dots, u_n$. Ifølge Bessels ulighed er da

$$\sum_{k=1}^{n} \Big| \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \Big|^2 \leq \|\mathcal{G}(x,\cdot)\|_\varrho^2,$$

for hvert x. Ved multiplikation med $\varrho(x)$ og integration fås

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2 \varrho(x)\varrho(y)\, dxdy &= \int_\alpha^\beta \|\mathcal{G}(x,\cdot)\|_\varrho^2 \varrho(x)\, dx \\ \geq \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{n} \Big| \frac{1}{\lambda_k} u_k(x) \Big|^2 \varrho(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \|u_k\|_\varrho^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2}, \end{aligned}$$

hvilket viser uligheden. $\square$

Sætning 2.8. 1° *Hvert begrænset interval af den positive halvakse indeholder højst endeligt mange egenværdier for L; dvs. mængden af egenværdier er enten endelig eller udgør en følge, som konvergerer mod $+\infty$.*

2° *Lad ω = antallet af egenværdier for L ($\omega \leq +\infty$), og arranger mængden af egenværdier som en voksende følge $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\omega}$. Da gælder*

$$\sum_{n=1}^{\omega} \frac{1}{{\lambda_n}^2} \leq \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\mathcal{G}(x,y)|^2 \varrho(x)\varrho(y)\, dxdy.$$

Bevis. Lad $a > 0$. Hvis der var uendeligt mange egenværdier i $]0, a]$, fandtes der specielt en følge $\{\lambda'_j\}_{j=1}^{\infty}$ af egenværdier i $]0, a]$. For denne ville gælde

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{{\lambda'_j}^2} \geq n \frac{1}{a^2} \to \infty \quad \text{for } n \to \infty\,,$$

i modstrid med Lemma 2.7. Da der for hvert a kun er endeligt mange egenværdier i $]0,a]$, er mængden af egenværdier enten endelig eller numerabel, i sidste fald med $+\infty$ som grænseværdi. Uligheden i lemmaet medfører nu også uligheden i 2°. $\square$

Vi skal nedenfor vise, at $\omega = \infty$, og vil derfor allerede nu erstatte ω med ∞. Vi vil altid ordne egenværdierne $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ i en voksende følge

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots . \tag{19}$$

Med $e_n(x)$ betegner vi en til λ_n hørende normeret reel egenfunktion; så er $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ et ortonormalsystem i H_ϱ.

Hovedresultatet af de næste to afsnit er:

Sætning 2.9. *L har uendeligt mange forskellige egenværdier* (19), *og de tilhørende normerede egenfunktioner $e_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, udgør en ortonormal basis for H_ϱ.*

Der gælder altså for $u \in H_\varrho$, at $u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,e_n)_\varrho e_n$ i H_ϱ (og dermed også i $L_2(J)$). Når $u \in H_0^1(J)$, konvergerer rækken mod u i $H_0^1(J)$, og dermed uniformt.

Egenværdierne er bestemt ved følgende maximum-minimum formler:

$$\lambda_n = \max_{\substack{X \subset H_\varrho \\ \dim X = n-1}} \ \min_{\substack{v \in H_0^1(J)\setminus\{0\} \\ v \perp X}} \frac{l(v,v)}{\|v\|_\varrho^2},$$

hvor $l(u,v)$ er den til L hørende sesquilineære form (9).

Udtrykket for λ_n kaldes ofte den n'te Rayleigh koefficient.

2.2 Bestemmelse af egenværdier og egenfunktioner, diagonalisering.

Som bemærket ovenfor i (17), er det at søge egenværdier λ for L ækvivalent med at søge egenværdier $\mu = 1/\lambda$ for G; de tilhørende egenfunktioner er de samme. Svarende til (19) ordner vi egenværdierne for G i en aftagende følge

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n > \cdots > 0. \tag{20}$$

I det følgende gennemgås en bestemt procedure til at finde egenværdierne; det er her en væsentlig fordel, at vi har fået problemet omformuleret til et problem for den begrænsede, overalt definerede operator G. Proceduren er almengyldig, men i konkrete tilfælde vil man ofte finde egenværdier og egenfunktioner på anden måde, ved særlige udregninger knyttet til det specifikke problem.

Det vil blive udnyttet, at H_ϱ ligesom $L_2(J)$ er et rum af uendelig dimension. Som en konkret begrundelse kan man f.eks. for $[\alpha,\beta]=[0,a]$ pege på ethvert af de lineært uafhængige systemer $\{e^{in\pi x/a}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eller $\{1_{[a/2^{n+1},a/2^n]}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Vi går nu i gang med undersøgelsen af G. I beviset har vi brug for følgende to lemmaer.

Lemma 2.10. *For ethvert underrum X af H_ϱ gælder*

$$\begin{aligned}\sup\{\, |(Gf,g)_\varrho| \mid f,g\in X, \|f\|_\varrho, \|g\|_\varrho \le 1\,\}\\ = \sup\{\,(Gf,f)_\varrho \mid f\in X, \|f\|_\varrho\le 1\,\}.\end{aligned}$$

Specielt er

$$\|G\| = \sup\{\,(Gf,f)_\varrho \mid f\in H_\varrho, \|f\|_\varrho \le 1\,\}.$$

Bevis. Det sidste udsagn fås af det første for $X=H_\varrho$, jvf. IV §3.1 (3). I det første udsagn er uligheden '$\ge$' oplagt. For at vise '$\le$' bemærker vi, at da $l(u,v)$ er et skalarprodukt på $H_0^1(J)$, og dermed opfylder Cauchy-Schwarz' ulighed, får vi ved at sætte $u=Gf$, $v=Gg$ (de er i $D(L)\subset H_0^1(J)$) og benytte Sætning 2.3 1°,

$$\begin{aligned}|(Gf,g)_\varrho|^2 &= |(u,Lv)_\varrho|^2 = |l(u,v)|^2 \le l(u,u)\,l(v,v)\\ &= (u,Lu)_\varrho\,(v,Lv)_\varrho = (Gf,f)_\varrho\,(Gg,g)_\varrho\\ &\le \max\{(Gf,f)_\varrho^2, (Gg,g)_\varrho^2\},\end{aligned}$$

hvoraf uligheden følger. □

(Uden nærmere uddybning vil vi lige nævne, at argumentet i lemmaet viser, at $(Gf,g)_\varrho$ er et skalarprodukt på H_ϱ; men det er ikke ækvivalent med $(f,g)_\varrho$.)

Lemma 2.11 (Rellich). *Hvis en følge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er begrænset i $H_0^1(J)$, så har den en delfølge der er konvergent i $L_2(J)$ og dermed i H_ϱ.*

Beviset er henlagt til Opg. 2.8–9. Lemmaet er et specialtilfælde af en almen sætning for Sobolev rum over begrænsede mængder i $\mathbb{R}^k$, som oprindeligt skyldes F. Rellich (1930).

Det afgørende skridt i beviset for eksistensen af egenværdierne er nu følgende:

Sætning 2.12. *Operatornormen af G, der også (jvf. Lemma 2.10) er lig med*

$$\mu = \sup\{\,(Gf,f)_\varrho \mid f\in H_\varrho, \|f\|_\varrho\le 1\,\},$$

er egenværdi for G; det er den største egenværdi, og supremum antages ved en til μ hørende normeret egenvektor.

Bevis. Hvis μ er egenværdi, må det være den største, altså μ_1, idet der for en til μ_n hørende normeret egenvektor e_n gælder $(Ge_n, e_n)_\varrho = \mu_n \leq \mu_1$.

Vi skal vise at der findes en ikke-triviel vektor $f \in H_\varrho$, så $Gf = \mu f$. Pr. definition af μ findes der en følge af elementer $\tilde{f}_k \in H_\varrho$ med $\|\tilde{f}_k\|_\varrho \leq 1$, så at $(G\tilde{f}_k, \tilde{f}_k)_\varrho \to \mu$ for $k \to \infty$. Da $\mu > 0$ (fordi G ikke er nuloperatoren), må $(G\tilde{f}_k, \tilde{f}_k)_\varrho > 0$ og $\|\tilde{f}_k\|_\varrho > 0$ fra et vist k_0; ved omnummerering kan vi opnå at det gælder for alle k. For $f_k = \tilde{f}_k / \|\tilde{f}_k\|$ (med norm 1) har vi, da $\|\tilde{f}_k\|_\varrho \leq 1$, at $(G\tilde{f}_k, \tilde{f}_k)_\varrho \leq (Gf_k, f_k)_\varrho \leq \mu$, hvormed

$$(Gf_k, f_k)_\varrho \to \mu, \text{ for } k \to \infty; \quad \|f_k\|_\varrho = 1 \text{ for alle } k.$$

Lad $u_k = Gf_k$ (og dermed $f_k = Lu_k$), så gælder

$$l(u_k, u_k) = (u_k, Lu_k)_\varrho = (Gf_k, f_k)_\varrho \to \mu.$$

Ved Sætning 2.3 2° er u_k en begrænset følge i $H_0^1(J)$, idet

$$c_0' \|u_k\|^2_{H_0^1(J)} \leq l(u_k, u_k) = (Gf_k, f_k)_\varrho \leq \mu,$$

og Lemma 2.11 medfører da, at u_k har en konvergent delfølge u_{k_j} i H_ϱ, altså der findes et $v \in H_\varrho$, så

$$Gf_{k_j} = u_{k_j} \to v \text{ i } H_\varrho \text{ for } j \to \infty.$$

Nu gælder

$$\begin{aligned} \|Gf_{k_j} - \mu f_{k_j}\|_\varrho^2 &= \|Gf_{k_j}\|_\varrho^2 - 2\mu (Gf_{k_j}, f_{k_j})_\varrho + \mu^2 \\ &\to \|v\|_\varrho^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \|v\|_\varrho^2 - \mu^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Da $\|Gf_{k_j}\|_\varrho \leq \|G\| \|f_{k_j}\|_\varrho = \mu$ (jvf. Lemma 2.10), er

$$\|v\|_\varrho = \lim_{j \to \infty} \|Gf_{k_j}\|_\varrho \leq \mu.$$

Så er det sidste udtryk i (21) ≤ 0, og dermed $\|v\|_\varrho = \mu$, og det følger, at

$$\|Gf_{k_j} - \mu f_{k_j}\|_\varrho \to 0 \text{ for } j \to \infty.$$

Da $\mu > 0$, slutter vi heraf, at f_{k_j} konvergerer mod $\frac{1}{\mu} v$ i H_ϱ, og endelig, at $\|\frac{1}{\mu} v\|_\varrho = 1$ og, da G er kontinuert,

$$G(\tfrac{1}{\mu} v) = v,$$

dvs. μ er egenværdi for G med normeret egenvektor $\frac{1}{\mu}v$. Specielt er $(G(\frac{1}{\mu}v), \frac{1}{\mu}v)_\varrho = \mu$. $\square$

Den næste egenværdi kan nu bestemmes således:

Vi ved, at alle egenvektorer hørende til μ_1 er proportionale med e_1 (jvf. Sætning 2.4 1°). Lad os betegne

$$X_1 = \operatorname{span}\{e_1\}; \quad H_{(1)} = X_1^\perp,$$

det ortogonale komplement i H_ϱ. Når $f \in H_{(1)}$, er $Gf \in H_{(1)}$, thi

$$(Gf, e_1)_\varrho = (f, Ge_1)_\varrho = \mu_1(f, e_1)_\varrho = 0.$$

Lad $G_{(1)}$ være restriktionen af G til $H_{(1)}$, det er så faktisk en operator i $H_{(1)}$; og den er begrænset, altså tilhører $\mathbf{B}(H_{(1)})$. *På denne anvender vi nu igen argumentet fra Sætning 2.12.* Lad

$$\kappa = \sup\{\, (Gf, f)_\varrho \mid f \in H_{(1)}, \|f\|_\varrho \le 1 \,\}.$$

Hvis κ er egenværdi for $G_{(1)}$ (og dermed for G), må den være lig med μ_2, da $e_2 \perp e_1$, og $(Gf, f)_\varrho$ skal være størst mulig. Ved Lemma 2.10 er κ lig med operatornormen af $G_{(1)} \in \mathbf{B}(H_{(1)})$, og ved Lemma 2.11 kan en følge af elementer $f_k \in H_{(1)}$ med $\|f_k\|_\varrho = 1$ og

$$(G_{(1)}f_k, f_k)_\varrho = (Gf_k, f_k)_\varrho \to \kappa,$$

udtyndes til en delfølge f_{k_j}, for hvilken først $Gf_{k_j} \to w$, og dernæst $f_{k_j} \to \frac{1}{\kappa}w$, så $\frac{1}{\kappa}w$ er normeret egenvektor hørende til κ.

På denne måde fortsættes. I det $n+1$'te skridt sættes

$$X_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}, \quad H_{(n)} = X_n^\perp,$$

og restriktionen $G_{(n)}$ af G til $H_{(n)}$ sender dette rum ind i sig selv: Når $f \in H_{(n)}$, er $Gf \in H_{(n)}$, idet der for alle linearkombinationer $\sum_{k=1}^n c_k e_k$ gælder

$$(Gf, \sum c_k e_k)_\varrho = (f, G \sum c_k e_k)_\varrho = (f, \sum \mu_k c_k e_k)_\varrho = 0.$$

(Man siger, at $H_{(n)}$ er *invariant* under G.) Så er $G_{(n)} \in \mathbf{B}(H_{(n)})$, og vi finder μ_{n+1} som

$$\mu_{n+1} = \max\{\, (Gf, f)_\varrho \mid f \in H_{(n)}, \|f\|_\varrho \le 1 \,\},$$

med tilhørende egenvektor e_{n+1}, for hvilken maximum antages.

Processen hører ikke op, for hver gang vi har fraspaltet et endeligdimesionalt rum X_n er der et uendeligdimensionalt rum $H_{(n)}$ tilbage, hvor $G_{(n)}$ har positiv norm (da G er injektiv). Altså får vi en uendelig følge af egenværdier; den går mod 0 ifølge Sætning 2.8.

Med en lille omskrivning har vi vist:

Sætning 2.13. *G har uendeligt mange egenværdier. Den n'te egenværdi bestemmes ved*

$$\mu_n = \max\Big\{ \frac{(Gf,f)_\varrho}{\|f\|_\varrho^2} \;\Big|\; f \in H_\varrho \setminus \{0\},\ (f,e_j)_\varrho = 0 \text{ for } 1 \le j \le n-1 \Big\}, \quad (22)$$

hvor maximum antages ved en tilhørende egenvektor.

Bemærkning 2.14. Når formlen (22) anvendes, kan man først finde den n'te egenværdi, når man har fundet alle de foregående egenfunktioner. Men vi kan erstatte (22) med formlen

$$\mu_n = \min_{\substack{X \subset H_\varrho \\ \dim X = n-1}} \max_{\substack{f \in H_\varrho \setminus \{0\} \\ f \perp X}} \frac{(Gf,f)_\varrho}{\|f\|_\varrho^2}, \quad (23)$$

der definerer egenværdierne uafhængigt af hinanden. Vedr. højre side bemærkes, at man ved at anvende Sætning 2.11 på $P_{X^\perp}G$ kan vise, at det nævnte maksimum antages (for hvert underrum X). Endvidere, når $X = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, hvor $x_1, \dots, x_{n-1}$ er et vilkårligt lineært uafhængigt sæt, så kan man i $X^\perp$ finde en enhedsvektor af formen $v = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ (da $c_1, \dots, c_n$ skal løse $n-1$ homogene ligninger med n ubekendte), og denne har

$$(Gv,v)_\varrho = (\sum_{j \le n} G c_j e_j, \sum_{k \le n} c_k e_k)_\varrho = \sum_{j \le n} \mu_j |c_j|^2 \ge \mu_n \sum_{j \le n} |c_j|^2 = \mu_n.$$

Altså er maksimum over $X^\perp$ af $(Gv,v)_\varrho = (P_{X^\perp}Gv,v)_\varrho$ (med $\|v\| \le 1$) et tal $\ge \mu_n$. Dette viser, at højre side i (23) er $\ge$ højre side i (22).

På den anden side er det klart, at højre side i (23) må være $\le$ højre side i (22), da minimum tages over en større mængde af tal.

(23) kaldes ofte *min-max princippet.*

Endelig vil vi vise:

Sætning 2.15. *Systemet $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er fuldstændigt i H_ϱ.*

Bevis. Betragt først et $u \in D(L)$, og sæt $f = Lu$. Lad $u - \sum_{k=1}^n (u,e_k)_\varrho e_k = u_n$, så er

$$f_n = Lu_n = f - \sum_{k=1}^n (u,e_k)_\varrho L e_k = f - \sum_{k=1}^n (f,e_k)_\varrho e_k,$$

da $(u,e_k)_\varrho L e_k = (u,e_k)_\varrho \lambda_k e_k = (u, Le_k)_\varrho e_k = (Lu,e_k)_\varrho e_k = (f,e_k)_\varrho e_k$. Altså ligger såvel u_n som f_n i rummet $H_{(n)}$ defineret overfor, så

$$\begin{aligned} \|u_n\|_\varrho^2 &\le {c_0}^{-1} l(u_n,u_n) = c_0^{-1}(u_n, Lu_n)_\varrho = c_0^{-1}(Gf_n,f_n)_\varrho \\ &\le c_0^{-1}\mu_{n+1}\|f_n\|_\varrho^2 \le c_0^{-1}\mu_{n+1}\|f\|_\varrho^2 \to 0, \text{ for } n \to \infty; \end{aligned}$$

vi har her brugt Sætning 2.3 2° og Bessels ulighed. Dette viser, at Fourierrækken for u konvergerer mod u i H_ϱ, når $u \in D(L)$.

Da $D(L)$ er tæt i H_ϱ, kan Fourierrækkens konvergens for vilkårligt f nu fås således: Lad $\varepsilon > 0$ og vælg $u_\varepsilon \in D(L)$ med $\|f - u_\varepsilon\|_\varrho \le \varepsilon$. Så er, ved det sidste udsagn i Bessels approximationssætning,

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{k=1}^{n}(f, e_k)_\varrho e_k\|_\varrho &\le \|f - \sum_{k=1}^{n}(u_\varepsilon, e_k)_\varrho e_k\|_\varrho \\
&\le \|f - u_\varepsilon\|_\varrho + \|u_\varepsilon - \sum_{k=1}^{n}(u_\varepsilon, e_k)_\varrho e_k\|_\varrho \\
&\le \varepsilon + \|u_\varepsilon - \sum_{k=1}^{n}(u_\varepsilon, e_k)_\varrho e_k\|_\varrho \le 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

for n tilstrækkeligt stor. (Denne del af beviset er helt analog til beviset for sætning IV 2.10.) $\square$

Med det fundne ortonormalsystem opnår vi en *diagonalisering* af L:

Sætning 2.16. *Afbildningen $F\colon f \mapsto \{(f, e_n)_\varrho\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en unitær operator fra H_ϱ til $\ell_2(\mathbb{N})$. Den fører G over i multiplikation med μ_n,*

$$Ff = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \implies FGf = \{\mu_n c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}). \tag{24}$$

F fører ligeledes L over i en multiplikationsoperator (nu med λ_n), idet

$$\begin{gathered}
F(D(L)) = \{\, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \mid \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n c_n|^2 < \infty \,\}; \\
u \in D(L) \text{ med } Fu = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \implies FLu = \{\lambda_n c_n\}_{n\in\mathbb{N}}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Bevis. At F er unitær fremgår af Sætning IV 3.7. Nu har vi jo, at $Ge_n = \mu_n e_n$, og heraf fås (24) straks, da G er en begrænset operator; for så er

$$\begin{aligned}
Gf = G(\lim_{N\to\infty} \sum_{n\le N} c_n e_n) = \lim_{N\to\infty} G \sum_{n\le N} c_n e_n \\
= \lim_{N\to\infty} \sum_{n\le N} c_n \mu_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu_n c_n) e_n.
\end{aligned}$$

Af (24) aflæser vi imidlertid, at billedmængden for FG består af de følger $\{a_n\} \in \ell_2(\mathbb{N})$ om hvilke der gælder, at også $\{\mu_n^{-1} a_n\} \in \ell_2(\mathbb{N})$, dvs. $\{\lambda_n a_n\} \in \ell_2(\mathbb{N})$. Da billedmængden for G er lig med definitionsmængden for L, fås første linie i (25), og anden linie ses ligeledes af at $L = G^{-1}$, eller direkte af udregningen $Lu = \sum(Lu, e_n)_\varrho e_n = \sum(u, Le_n)_\varrho e_n = \sum \lambda_n (u, e_n)_\varrho e_n$. $\square$

Diagonaliseringen (25) kan illustreres ved diagrammet af afbildninger

$$\begin{array}{ccc}
H_\varrho \supset D(L) & \xrightarrow{\;L\;} & H_\varrho \\
{\scriptstyle F}\big\downarrow & & {\scriptstyle F}\big\downarrow \\
\ell_2(\mathbb{N},\nu) \supset \ell_2(\mathbb{N},\lambda_n^2\nu) & \xrightarrow{\lambda_n\cdot} & \ell_2(\mathbb{N},\nu)
\end{array}$$

hvor ν er tællemålet.

Med en lidt anden formulering viser (24) og (25):

$$\begin{aligned}
Gf &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n (f,e_n)_\varrho e_n, \text{ når } f\in H_\varrho,\\
Lu &= \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (u,e_n)_\varrho e_n, \text{ når } u\in D(L).
\end{aligned}$$

Bemærkning 2.17. Vi har ved anvendelse af Sætning IV 3.12 for $L_2(X,\mu) = \ell_2(\mathbb{N})$ (dvs. $X = \mathbb{N}$ med tællemålet), at multiplikationsoperatoren (hvor $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
\Lambda\colon \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto \{\lambda_n c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ med}\\
D(\Lambda) &= \{\, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N}) \mid \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n c_n|^2 < \infty \,\},
\end{aligned} \tag{26}$$

er selvadjungeret, som ubegrænset operator i $\ell_2(\mathbb{N})$. Dette stemmer med, at $L = F^*\Lambda F$ er selvadjungeret i H_ϱ, jvf. Lemma IV 3.14.

Systemet af egenværdier $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ kaldes *spektret* for L. Fremstillingen af L som en operator, der virker som multiplikation med λ_n på den n'te Fourierkoefficient, kaldes ofte *spektralfremstillingen* af L.

I den systematiske teori for selvadjungerede operatorer i Hilbert rum vises, at de altid kan bringes på en lignende form. For nogle operatorer er der simpelthen en Fourierrækkefremstilling som ovenfor, ved opløsning efter et fuldstændigt ortonormalsystem af egenvektorer, hvor operatoren virker multiplikativt på hver egenvektor. For andre operatorer er der en mere indviklet fremstilling som integraloperator, hvor målteori i Hilbert rum må tages til hjælp; her må vi henvise til den videregående funktionalanalyse for detaljer.

Operatorer som G, der har en følge af egenværdier som går mod 0, således at det tilhørende system af egenfunktioner er en basis for H_ϱ, hører til de operatorer der kaldes *kompakte* i den almene teori.

Det er ikke altid bekvemt at skulle normere egenfunktionerne. I det følgende siger vi også, at et system af egenfunktioner er *fuldstændigt*, når blot elementerne er $\neq 0$ og det ved normering dannede system udgør en ortonormal basis.

2.3 Konvergensforhold, Rayleigh kvotienter.

Man kan vise, at Fourierudvikling efter egenfunktionssystemet for et regulært Sturm-Liouville problem i mange henseender har lige så gode konvergensegenskaber som udvikling efter det trigonometriske system.

Vi viser i detaljer et enkelt, men fundamentalt skridt i denne analyse, nemlig at for $u \in H_0^1(J)$ konvergerer Fourierrækken uniformt. Ved samme lejlighed undersøges den rolle, rummet $H_0^1(J)$ spiller i sammenhængen.

Først mindes om, at $H_0^1(J) \subset C(J)$, og at konvergens i $H_0^1(J)$ medfører uniform konvergens, jvf. §1.3 (36) (se evt. også I §5.2).

Sætning 2.18. 1° *Systemet af funktioner* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, hvor* $v_n = \sqrt{\mu_n}\, e_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$*, er et fuldstændigt ortonormalsystem for* $H_0^1(J)$*, når dette rum forsynes med skalarproduktet* $l(u, v)$*.*

2° *Der gælder*

$$l(u,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |(u, e_n)_\varrho|^2, \text{ for } u \in H_0^1(J), \tag{27}$$

og $H_0^1(J)$ *består netop af alle funktioner* $u \in H_\varrho$*, for hvilke højre side i* (27) *er endelig. Når* $u \in H_0^1(J)$*, konvergerer Fourierrækken* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u, e_n)_\varrho e_n$ *mod* u *i* $H_0^1(J)$*, og dermed uniformt.*

Bevis. I Sætning 2.3 2° er det vist, at $l(u, v)$ er et skalarprodukt på $H_0^1(J)$ ækvivalent med det oprindelige. Da $e_k \in D(L)$, gælder for alle k og $m \in \mathbb{N}$,

$$l(v_k, v_m) = (L\sqrt{\mu_k}\, e_k, \sqrt{\mu_m}\, e_m)_\varrho = (\tfrac{1}{\sqrt{\mu_k}} e_k, \sqrt{\mu_m} e_m)_\varrho = \begin{cases} 0 \text{ for } k \neq m, \\ 1 \text{ for } k = m; \end{cases}$$

dette viser ortonormaliteten af systemet $\{v_k\}$ med hensyn til dette skalarprodukt. Bemærk nu, at der for $u \in H_0^1(J)$ gælder

$$l(u, v_k) = (u, Lv_k)_\varrho = \sqrt{\mu_k}(u, Le_k)_\varrho = \sqrt{\lambda_k}\,(u, e_k)_\varrho.$$

Fuldstændigheden af systemet $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ opnås ved at vi viser (7) i Sætning IV 1.14: Når $u \in H_0^1(J)$ opfylder $l(u, v_k) = 0$ for alle k, så er, da $\lambda_k \neq 0$, også $(u, e_k)_\varrho = 0$ for alle k, og dermed $u = 0$ på grund af fuldstændigheden af $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i H_ϱ. Dette viser 1°.

Parsevals ligning giver nu, for $u \in H_0^1(J)$,

$$l(u,u) = \sum_{k=1}^{\infty} |l(u, v_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(u, e_k)_\varrho|^2,$$

hvilket viser (27). Altså, når $u \in H_0^1(J)$, er højre side i (27) endelig. På den anden side, lad $u \in H_\varrho$ med højre side i (27) endelig, og lad $s_n = \sum_{k=1}^n (u, e_k)_\varrho e_k$; da $e_k \in D(L) \subset H_0^1(J)$, er $s_n \in H_0^1(J)$. For $n > m$ er

$$l(s_n - s_m, s_n - s_m) = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k |(u, e_k)_\varrho|^2, \tag{28}$$

så s_n er en Cauchy følge i $H_0^1(J)$, og har en grænseværdi v dér, da $H_0^1(J)$ er fuldstændigt. Da konvergens i $H_0^1(J)$ medfører konvergens i H_ϱ (jvf. (12)), haves også, at $s_n \to v$ i $L_2(J)$, men her er grænseværdien i forvejen lig med u, så vi slutter, at $u = v \in H_0^1(J)$, og at $s_n \to u$ i $H_0^1(J)$. Dette viser 2°. $\square$

Hvis vi i ovenstående bevis lader $n \to \infty$ i (28), får vi:

$$l(u - s_m, u - s_m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k |(u, e_k)_\varrho|^2.$$

Sammen med ulighederne i §1.3 (36) og Sætning 2.3 2°, giver dette:

$$\begin{aligned} \|u - s_n\|_u^2 &\le c_1^2 \|u - s_n\|_{H^1(J)}^2 \le c_1^2 (c_0')^{-1} l(u - s_n, u - s_n) \\ &= c_1^2 (c_0')^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |(u, e_k)_\varrho|^2, \text{ for } u \in H_0^1(J); \end{aligned} \tag{29}$$

en ulighed der vil være nyttig senere.

Det kan bemærkes, at når $u \in H_0^1(J)$, fås Fourierudviklingen efter det nye system ved en omskrivning af Fourierudviklingen efter det gamle:

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u, e_n)_\varrho e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u, L\sqrt{\mu_n}\, e_n)_\varrho \sqrt{\mu_n}\, e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} l(u, v_n) v_n.$$

Vi minder iøvrigt om (jvf. §1.3 og Lemma IV 2.7), at funktionerene i $H_0^1(J)$ er Hölder kontinuerte med eksponent $\frac{1}{2}$.

Man kan nu endvidere vise, at når $u \in D(L)$, så konvergerer s_n mod u i H^2-norm og følgen af første afledede konvergerer uniformt, mm., se Bemærkning 2.20 nedenfor. Der gælder også resultater som i Kap. IV om punktvis konvergens.

Også andre randbetingelser end betingelsen $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ (jvf. Definition 2.2) kan analyseres som ovenfor. F.eks. behandles betingelsen $u(\alpha) = u'(\beta) = 0$ ved en meget lignende analyse, blot med $H_0^1(J)$ erstattet med $\{u \in H^1(J) \mid u(\alpha) = 0\}$ (Opg. 2.6).

Der findes en formel for egenværdierne, som er beslægtet med (22) og (23), men sætter dem i relation til $l(u,v)$:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \min_{\substack{v\in H_0^1(J)\setminus\{0\}\\ v\perp e_1,\dots,e_{n-1}}} \frac{l(v,v)}{\|v\|_\varrho^2} \\ &= \max_{\substack{X\subset H_\varrho\\ \dim X=n-1}} \min_{\substack{v\in H_0^1(J)\setminus\{0\}\\ v\perp X}} \frac{l(v,v)}{\|v\|_\varrho^2}.\end{aligned} \tag{30}$$

Hvert af disse udtryk kaldes også den n'te Rayleigh kvotient. Egenværdien antages netop når en egenfunktion indsættes som v.

Formlen kan udledes ved hjælp af den diagonalisering, vi har etableret: Den begrænsede multiplikationsoperator M i $\ell_2(\mathbb{N})$ defineret ved

$$M\colon \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\mu_n c_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

er invers til Λ defineret ovenfor i (26), og den er en diagonalisering af G, dvs. $G = F^{-1}MF$. Lad os definere $M^{\frac12} \in \mathbf{B}(\ell_2(\mathbb{N}))$ som multiplikationsoperatoren

$$M^{\frac12}\colon \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \{\sqrt{\mu_n}c_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

og betegne $F^{-1}M^{\frac12}F = G^{\frac12}$; så er $M^{\frac12}M^{\frac12} = M$ og $G^{\frac12}G^{\frac12} = G$. Endvidere er $G^{\frac12}$ en isometrisk isomorfi af H_ϱ på $H_0^1(J)$, når sidstnævnte forsynes med normen $l(v,v)^{\frac12}$, jvf. Sætning 2.18 2°. Altså, når $v = G^{\frac12}f$, er

$$l(v,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |(v,e_n)_\varrho|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(f,e_n)_\varrho|^2 = \|f\|_\varrho^2.$$

På den anden side er

$$(Gf,f)_\varrho = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n|(f,e_n)_\varrho|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\sqrt{\mu_n}(f,e_n)_\varrho|^2 = \|G^{\frac12}f\|_\varrho^2 = \|v\|_\varrho^2.$$

Ialt ses, at

$$\frac{(Gf,f)_\varrho}{\|f\|_\varrho^2} = \frac{\|v\|_\varrho^2}{l(v,v)},\ \text{når } f\in H_\varrho \text{ og } v = G^{\frac12}f. \tag{31}$$

Da $f \perp e_1,\dots,e_{n-1}$ hvis og kun hvis $v \perp e_1,\dots,e_{n-1}$, følger første linie af (30) nu af (22). Anden linie fås ved en generalisation som i Bemærkning 2.14.

Formlen (30) er blandt andet nyttig ved sammenligning af egenværdierne for forskellige Sturm-Liouville problemer (f.eks. hvor $p(x)$ ændres til en større funktion), og ved sammenligning af egenfunktionerne hørende til forskellige egenværdier til det samme problem (Sturm's sammenligningssætninger). Vi viser blot et enkelt resultat af denne art.

Sætning 2.19. *For egenværdierne til det regulære S.-L. problem* (6)*, med konstanter som i* (9) *og Sætning 2.3 2°, gælder*

$$\frac{c_0'}{C_\varrho}\Big(1+\frac{n^2\pi^2}{(\alpha-\beta)^2}\Big) \le \lambda_n \le \frac{C_0}{c_\varrho}\Big(1+\frac{n^2\pi^2}{(\alpha-\beta)^2}\Big), \quad \textit{for } n\in\mathbb{N}.$$

Bevis. Hvis $p(x)=q(x)=\varrho(x)=1$, er S.-L. problemet simpelthen

$$-u''+u=\lambda u \text{ på }]\alpha,\beta[\,, \quad u(\alpha)=u(\beta)=0,$$

og den tilhørende sesquilineære form l_0 opfylder $l_0(u,u)=\|u\|^2_{H^1(J)}$. Her er egenfunktionerne proportionale med $\sin\frac{n\pi}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$, og egenværdierne er $1+n^2\pi^2/(\beta-\alpha)^2$, jvf. Eksempel 2.5. På grund af (30) opfylder egenværdierne

$$1+\frac{n^2\pi^2}{(\beta-\alpha)^2} = \max_{\substack{X\subset H_\varrho\\ \dim X=n-1}} \min_{\substack{v\in H_0^1(J)\setminus\{0\}\\ v\perp X}} \frac{l_0(u,u)}{\|u\|^2}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{32}$$

For det almene tilfælde er ifølge (9) og Sætning 2.3 2°

$$c_0' l_0(u,u) \le l(u,u) \le C_0 l_0(u,u),$$
$$c_\varrho\|u\|^2 \le \|u\|_\varrho^2 \le C_\varrho\|u\|^2;$$

og dermed

$$\frac{c_0'}{C_\varrho}\frac{l_0(u,u)}{\|u\|^2} \le \frac{l(u,u)}{\|u\|_\varrho^2} \le \frac{C_0}{c_\varrho}\frac{l_0(u,u)}{\|u\|^2}, \text{ for } u\in H_0^1(J). \tag{33}$$

Uligheden i sætningen følger da af (30), (32) og (33). $\square$

Det interessante ved Sætningen er bl.a., at den viser at λ_n i almindelighed er af *størrelsesorden* som n^2.

Vedrørende uniform konvergens af højere afledede har vi, for det simple S.-L. problem nævnt i Lemma 2.1 og Eksempel 2.5, nogle omfattende oplysninger om konvergens af sinusrækker i Sætning 1.13-14.

Bemærkning 2.20. I det følgende skitseres en diskussion af uniform konvergens af ledvis differentierede Fourierrækker for generelle regulære Sturm-Liouville problemer. Hovedideen er at give kriterier for at rækken konvergerer i et rum $H^k(J)$, hvoved den også konvergerer i $C^{k-1}(J)$, jvf. (41).

Det er nærliggende at definere operatoren $L^{\frac12}$ som inversen til operatoren $G^{\frac12}$ indført efter (30), altså

$$D(L^{\frac12}) = \{\, u \mid \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |(u,e_n)_\varrho|^2 < \infty \,\} = H_0^1(J),$$
$$L^{\frac12} : u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n}(u,e_n)_\varrho e_n;$$

bemærk at

$$\|L^{\frac{1}{2}}u\|_\varrho^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\sqrt{\lambda_n}\,(u,e_n)_\varrho|^2 = l(u,u).$$

Mere alment kan vi for hvert $k \in \mathbb{N}$ definere $L^{k/2}$ ved

$$D(L^{k/2}) = \{\, u \mid \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^k |(u,e_n)_\varrho|^2 < \infty \,\},$$
$$L^{k/2} \colon u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{k/2}(u,e_n)_\varrho e_n.$$

For $k = 2$ ser vi af (25) at $L^{2/2} = L$. Mere generelt, når $k/2 = m$ er hel, stemmer $L^{k/2}$ overens med L^m, der virker som L anvendt m gange, med definitionsmængden

$$\begin{aligned} D(L^m) &= \{\, u \in D(L) \mid L^j u \in D(L) \text{ for } j \le m-1 \,\} \\ &= \{\, u \in H^{2m}(J) \mid u(\alpha) = u(\beta) = \cdots = L^{m-1}u(\alpha) = L^{m-1}u(\beta) = 0 \,\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Når $k = 2m+1$, er

$$\begin{aligned} D(L^{k/2}) &= \{\, u \in D(L^m) \mid L^m u \in D(L^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(J) \,\} \\ &= \{\, u \in H^{2m+1}(J) \mid u(\alpha) = u(\beta) = \cdots = L^m u(\alpha) = L^m u(\beta) = 0 \,\}; \end{aligned} \tag{35}$$

her er

$$\|L^{k/2}u\|_\varrho^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} {\lambda_n}^k |\,(u,e_n)_\varrho|^2 = l(L^m u, L^m u).$$

Ved brug af identiteten

$$u'' = -\frac{\varrho}{p}Lu - \frac{p'}{p}u' + \frac{q}{p}u$$

(hvor koefficienterne er begrænsede kontinuerte funktioner), kan man vise, da $\|Lu\|_\varrho^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |(u,e_n)_\varrho|^2$, at

$$c\|u\|_{H^2(J)}^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 |(u,e_n)_\varrho|^2 \le C\|u\|_{H^2(J)}^2, \text{ for } u \in D(L),$$

med positive konstanter c og C. Dette medfører, at *for* $u \in D(L)$ *konvergerer Fourierrækken i* $H^2(J)$ *og da også i* $C^1(J)$, jvf. (41).

Hvis koefficienterne $p(x)$, $q(x)$ og $\varrho(x)$ er C^∞ funktioner på I, kan analysen videreføres til vilkårligt høje potenser, til at give at

$$c_k\|u\|_{H^k(J)}^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^k |(u,e_n)_\varrho|^2 \le C_k\|u\|_{H^k(J)}^2, \text{ for } u \in D(L^{k/2}). \tag{36}$$

Det følger, at *når* $u \in D(L^{k/2})$, som beskrevet eksplicit i (34)–(35), *konvergerer Fourierrækken mod* u *i* $H^k(J)$ *og dermed i* $C^{k-1}(J)$.

Ovenstående bemærkning, samt beviset for (30), viser nytten af spektralfremstillingen (25); den kan bruges til at danne *funktioner af* L, i dette tilfælde ikke-hele potenser af L.

Opgaver til §2.

2.1. Find egenværdier og egenfunktioner for S.-L. problemet

$$-u'' = \lambda u\,, \text{ for } x \in \,]\alpha, \beta[\,,$$
$$u(\alpha) = u(\beta) = 0,$$

hvor $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

2.2. Vis, at konstanten $\widetilde{c} = \dfrac{\beta - \alpha}{\pi}$ er den bedst mulige, der kan indgå i vurderingen

$$\|f\|_{L_2([\alpha,\beta])} \leq \widetilde{c}\|f'\|_{L_2([\alpha,\beta])}, \text{ for } f \in H_0^1([\alpha,\beta]).$$

(*Vink.* Bestemmelsen af $\widetilde{c}$ kan føres over i et spørgsmål om at finde laveste egenværdi for problemet i Opg. 2.1.)

2.3. 1° Vis, at der for $u, v \in H_0^1(J)$ gælder

$$l(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (u, e_n)_\varrho \overline{(v, e_n)_\varrho}.$$

2° Vis formlen

$$\mathcal{G}(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} e_n(x)\overline{e_n(y)}.$$

(*Vink.* Lad $u(x) = \mathcal{G}(x,\cdot)$ og $v(y) = \mathcal{G}(y,\cdot)$, og beregn de to sider i formlen under 1°. Her kan Opg. 1.3 benyttes.)

2.4. Løs følgende regulære S.-L. problem:

$$-u'' = \frac{\lambda}{(1+x)^2}u\,, \quad x \in \,]0,1[\,,$$
$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

(*Vink.* Vælg $t = \log(1+x)$ som ny variabel.)

2.5. Beskriv L og $l(u,v)$, og bestem konstanterne i Sætning 2.3 2°, for tilfældene hvor $[\alpha,\beta] = [0,1]$, $q = 0$ og $\varrho = 1$, og p er henholdsvis $1 + x^2$ og $\cosh x$.

Vis, hvordan konstanterne c_0 og c_0' kan forhøjes, når $q = 0$ erstattes med $q = 1$.

2.6. I definitionen af L ændres betingelsen $u(\beta) = 0$ til $u'(\beta) = 0$. Vis, at Sætning 2.3 og Sætning 2.4 kan generaliseres til dette tilfælde, når $l(u, v)$ stadig defineres ved (15), mens $H_0^1(J)$ overalt erstattes med rummet

$$\widetilde{H}^1(J) = \{\, u \in H^1(J) \mid u(\alpha) = 0 \,\},$$

der er en afsluttet delmængde af $H^1(J)$. (Frivilligt ekstraspørgsmål: Hvad med resten af teorien?)

2.7. Find egenværdier og egenfunktioner til problemet

$$\begin{gathered} -u'' = \lambda u\,, \text{ på }]0,1[\,, \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{gathered}$$

2.8. Vis, at en følge i $\ell_2(\mathbb{Z})$, $\{\underline{c}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (med elementer $\underline{c}^n = \{c_k^n\}_{k\in\mathbb{Z}}$), der opfylder

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)|c_k^n|^2 \le C, \text{ for alle } n \in \mathbb{N},$$

kan udtyndes til en konvergent delfølge $\{\underline{c}^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$.
(*Vink.* Bemærk, at der for alle n og k gælder

$$|c_k^n|^2 \le C(1+k^2)^{-1}. \tag{$\star$}$$

Først udtyndes $\{c_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ til en konvergent delfølge $\{c_0^{n_j^{(0)}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ med grænseværdi c_0. Dernæst udtyndes $c_1^{n_j^{(0)}}$ til en konvergent delfølge $c_1^{n_j^{(1)}}$ (med grænseværdi c_1), og herefter udtyndes $c_{-1}^{n_j^{(1)}}$ til en konvergent delfølge $c_{-1}^{n_j^{(-1)}}$ (med grænseværdi c_{-1}). Sådan fortsættes; i det m'te skridt udtyndes først $\{c_m^{n_j^{(-(m-1))}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ til en konvergent delfølge $\{c_m^{n_j^{(m)}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ (med grænseværdi c_m), og dernæst udtyndes $c_{-m}^{n_j^{(m)}}$ til en konvergent delfølge $c_{-m}^{n_j^{(-m)}}$ (med grænseværdi c_{-m}). Efter det m'te skridt har vi opnået en delfølge $\{\underline{c}^{n_j^{(-m)}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ af $\underline{c}^n$, hvor følgen af elementer med nedre index $k \in [-m, m]$ konvergerer (mod c_k) for $j \to \infty$. Udtyndingen udføres successivt for alle $m \in \mathbb{N}$. Nu betragtes delfølgen

$$\underline{c}^{n_m^{(m)}}, \quad m \in \mathbb{N}$$

(kaldet diagonalfølgen). Om denne gælder, at enhver af elementfølgerne er konvergent, thi den k'te elementfølge

$$\{c_k^{n_m^{(m)}}\}_{m\in\mathbb{N}}$$

er delfølge af den ovenfor i det $|k|$'te skridt fundne konvergente delfølge (bortset fra endeligt mange numre i begyndelsen af elementfølgen). Endvidere er, ved $(\star)$,

$$|c_k^{n_m^{(m)}}|^2 \le C(1+k^2)^{-1}, \text{ for alle } m, k,$$

og her er $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)^{-1}$ konvergent. Så kan Lebesgues majorantsætning for konvergens i $\ell_2(\mathbb{Z})$ benyttes til at vise, at $\underline{c}^{n_m^{(m)}}$ konvergerer mod $\underline{c} = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ for $m \to \infty$.)

2.9. Vis, at når v^n er en begrænset følge af elementer i $H_0^1([-\pi,\pi])$, så findes en delfølge, der er konvergent i $L_2([-\pi,\pi])$.
(*Vink.* Man kan identificere $H_0^1([-\pi,\pi])$ med $H_0^1(\mathbb{T})$ og betragte Fourierudviklingerne $v^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^n e_k$; så opfylder Fourierkoefficientfølgerne $\underline{c}^n = \{c_k^n\}_{k\in\mathbb{Z}}$ hypotesen i Opg. 2.8.)

2.10. Vis, at når v^n er en begrænset følge af elementer i $H^1([0,\pi])$, så findes en delfølge, der er konvergent i $L_2([0,\pi])$.
(*Vink.* Ved lige forlængelse, jvf. §1.4, fås en følge, der er begrænset i $H^1(\mathbb{T})$.)

2.11. Udfør detaljerne i beviset for (30).

2.12. Bestem positive konstanter c og C, for hvilke egenværdierne for problemet behandlet i Opg. 2.4 opfylder

$$cn^2 \le \lambda_n \le Cn^2.$$

2.13. Find løsningen til problemet

$$u''''(x) = c_1 \sin \pi x/a + c_2 \sin 2\pi x/a + c_3 \sin 3\pi x/a, \text{ på }]0,a[\,,$$
$$u(0) = u(a) = u''(0) = u''(a) = 0.$$

(*Vink.* Bemærk, at $u \in D(L^2)$ for L som i Eksempel 2.5.)

2.14. Beskriv $D(L^2)$ og $D(L^{5/2})$ (jvf. (34) og (35)) for et generelt S.-L. problem (6).

2.15. Vis påstanden i Bemærkning 2.20 vedr. konvergens i $H^2(J)$.

2.16. Vis, at en funktion $u \in C^2([-\pi,\pi]) \setminus \{0\}$, der løser (2) og opfylder randbetingelsen (4), må have formen $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ for et vist $n \in \mathbb{N}_0$; og så er $\lambda = n^2$.

(*Vink.* Metode 1: Betragt løsningen $u(x) = c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}$ til (2) med $\lambda = \mu^2$. Betingelserne i (4) kan skrives: $u(x+2\pi) - u(x) = 0$ og $u'(x+2\pi) - u'(x) = 0$ for alle x; og man kan vise, at de medfører $e^{2i\mu\pi} - 1 = 0$.

Metode 2: Vis, at på grund af (4) kan u forlænges til en funktion på $\mathbb{R}$ med periode 2π, som tilhører $H^2(\mathbb{T})$, og indsæt Fourierrækkerne for denne funktion og dens anden afledede i (2).)

2.17. Lad L være operatoren i $L_2([0,1])$ defineret ved:

$$Lu = -pu'' + qu, \quad D(L) = H^2([0,1]) \cap H_0^1([0,1]),$$

hvor p og q er positive konstanter. Find egenværdier og egenfunktioner, og vis hvordan Sætning 2.16 udmøntes i dette simple tilfælde (beskriv specielt elementerne i diagrammet side 2.14).

§3. Nogle singulære Sturm-Liouville problemer

3.1 Indledning, Bessel ligningen.

Ved separationsmetoder anvendt på partielle differentialligninger får man brug for Fourieropløsning knyttet til visse *singulære* Sturm-Liouville problemer udover de *regulære*, vi allerede har behandlet. I det følgende ser vi på Bessel problemet og Legendre problemet og deres egenfunktioner, og udleder endvidere Hermite og Laguerre funktionerne.

Bessel's ligning, dvs. det m'te Bessel egenværdiproblem, $m \in \mathbb{N}_0$, er følgende:

$$\begin{aligned} -(xu')' + \frac{m^2}{x}u = \lambda x u\,, \quad x \in]0,1[\,,\\ u(1) = 0,\\ u \text{ begrænset for } x \to 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Legendre's ligning, dvs. det m'te Legendre egenværdiproblem, $m \in \mathbb{N}_0$, er:

$$\begin{aligned} -((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda u\,, \quad x \in]-1,1[\,,\\ u \text{ begrænset for } x \to \pm 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Bemærk, at for (1) er $p(x) = x$ og $\varrho(x) = x$ begge singulære i punktet 0, da de er 0 der (og altså ikke opfylder §2.1 (3)), mens $q(x) = m^2/x$ er singulær ved at være ubegrænset for $x \to 0$, når $m > 0$. Derimod er funktionerne regulære i punktet $x = 1$. For (2) er $p(x) = 1-x^2$ singulær i begge endepunkter -1 og 1, $\varrho(x) = 1$ er regulær, og $q(x) = m^2/(1-x^2)$ er singulær i begge endepunkter, når $m > 0$.

I alle tilfælde vil vi søge løsningen i $C^2(I)$ (med $I =]0,1[$ hhv. $]-1,1[$), pålagt passende grænsebetingelser i randpunkterne, så at vi kan definere en symmetrisk realisation af differentialoperatoren. For simpelheds skyld vil vi forudsætte, at u er C^1 op til randen (samt at differentiationsudtrykket giver en L_2-funktion); dette viser sig at være fuldtud tilstrækkeligt til at finde alle egenfunktioner, så vi vil ikke gå ind i en diskussion af mere generelle hypoteser (f.eks. formuleret i Sobolev rum med integrationsfaktorer), da det ville tage for megen plads op her at føre diskussionen til bunds.

For Bessel ligningen definerer vi:

$$\begin{aligned} H_\varrho &= L_2([0,1], xdx), \text{ med } (u,v)_\varrho = \textstyle\int_0^1 u(x)\bar{v}(x)xdx,\\ \mathcal{L}_{B,m}u &= \frac{1}{x}\big[-(xu')' + \frac{m^2}{x}u\big],\\ D(L_{B,m}) &= \{\, u \in C^2(\,]0,1]) \cap C^1([0,1]) \mid \mathcal{L}_{B,m}u \in H_\varrho,\ u(1) = 0\,\},\\ L_{B,m}u &= \mathcal{L}_{B,m}u, \text{ for } u \in D(L_{B,m}); \end{aligned} \tag{3}$$

her er $D(L_{B,m}) \subset H_\varrho$. Bemærk, at $C_c^\infty(\,]0,1[\,)$ er tæt i H_ϱ, da afbildningen $u(x) \mapsto \sqrt{x}\,u(x)$ er en isometrisk isomorfi af H_ϱ på $L_2([0,1])$, der fører $C_c^\infty(\,]0,1[\,)$ over i sig selv.

For Legendre ligningen definerer vi, idet rummet H_ϱ her er $L_2([-1,1])$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{L,m}u &= -((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u, \\ D(L_{L,m}) &= \{\, u \in C^2(\,]-1,1[\,) \cap C^1([-1,1]) \mid \mathcal{L}_{L,m}u \in L_2([-1,1]) \,\}, \\ L_{L,m}u &= \mathcal{L}_{L,m}u, \text{ for } u \in D(L_{L,m}); \end{aligned} \tag{4}$$

operatoren $L_{L,m}$ sender $D(L_{L,m}) \subset L_2([-1,1])$ ind i $L_2([-1,1])$.

I resten af §3.1 undersøges *Bessel problemet.* Her er $I =]0,1[$, $J = [0,1]$. For u og $v \in D(L_{B,m})$ har vi, da $xu'(x)|_{x=0} = 0$ og $v(1) = 0$:

$$\begin{aligned} (L_{B,m}u, v)_\varrho &= \int_0^1 \big(-(xu')' + \frac{m^2}{x}u\big)\bar{v}\,dx \\ &= \int_0^1 \big(xu'\bar{v}' + \frac{m^2}{x}u\bar{v}\big)\,dx - \big[xu'\bar{v}\big]_0^1 \\ &= l_{B,m}(u,v) = (u, L_{B,m}v)_\varrho, \end{aligned}$$

hvor den sesquilineære form $l_{B,m}(u,v)$ er defineret ved

$$l_{B,m}(u,v) = \int_0^1 \big(xu'\bar{v}' + \frac{m^2}{x}u\bar{v}\big)\,dx. \tag{5}$$

Formen $l_{B,m}$ er veldefineret på $D(L_{B,m})$, men kan også betragtes på det større rum

$$V_{B,m} = \{\, u \in C^1(\,]0,1]) \cap C([0,1]) \mid \sqrt{x}\,u' \text{ og } \tfrac{m}{\sqrt{x}}u \in L_2(I),\ u(1) = 0 \,\}, \tag{6}$$

og det ses som i ovenstående udregning, at

$$(L_{B,m}u, v)_\varrho = l_{B,m}(u,v), \text{ for } u \in D(L_{B,m}),\ v \in V_{B,m}. \tag{7}$$

Ved brug af delvis integration ser vi, at der for $u \in V_{B,m}$ gælder

$$\begin{aligned} \|\sqrt{x}\,u\|^2_{L_2(I)} &= \int_0^1 xu\bar{u}\,dx \le \int_0^1 u\bar{u}\,dx \\ &= \big[u(x)\bar{u}(x)x\big]_0^1 - \int_0^1 x\,d(u\bar{u}) = -\int_0^1 (xu'\bar{u} + xu\bar{u}')\,dx \\ &\le 2\|\sqrt{x}\,u\|_{L_2(I)}\|\sqrt{x}\,u'\|_{L_2(I)}, \end{aligned}$$

hvormed

$$\|u\|_\varrho = \|\sqrt{x}\,u\|_{L_2(I)} \le 2\|\sqrt{x}\,u'\|_{L_2(I)} = 2\|u'\|_\varrho.$$

Da endvidere $1/x \ge x$ for $x \in]0,1]$, fås

$$l_{B,m}(u,u) \ge (\tfrac{1}{4} + m^2)\|u\|^2_\varrho, \text{ for } u \in V_{B,m}. \tag{8}$$

Af (7) og (8) sluttes, ganske som i Sætning 2.3 og 2.4:

Sætning 3.1. *$L_{B,m}$ er symmetrisk og opfylder*

$$(L_{B,m}u, u)_\varrho \geq (\tfrac{1}{4} + m^2)\|u\|_\varrho^2, \text{ for alle } u \in D(L_{B,m}).$$

Alle egenværdier for $L_{B,m}$ er positive og simple (de er $\geq \frac{1}{4} + m^2$), og egenfunktioner hørende til forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale i H_ϱ.

At egenværdierne er simple, følger af at løsningerne til første linie i (1) med $u(1) = 0$ er indbyrdes proportionale.

Vi bemærker, at $l_{B,m}$ er et skalarprodukt på $V_{B,m}$, men at rummet ikke er fuldstændigt; bl.a. må, ifølge vore erfaringer med det regulære S.-L. problem, en fuldstændiggørelse indeholde funktioner, hvor differentiation kun er defineret næsten overalt; hertil kommer analysen af hvilke betingelser der helt præcist skal være opfyldt ved $x = 0$. Man kan indføre fuldstændiggørelsen $\widehat{V}_{B,m}$ af $V_{B,m}$ og vise, at det er et underrum af H_ϱ, samt generalisere den regulære S.-L. teori til denne situation, men vi afstår fra en komplet analyse.

Imidlertid kan vi alligevel vise nogle af de samme fænomener som ved regulære S.-L. problemer, da vi for det foreliggende problem kan finde løsningsformlen for det tilhørende inhomogene problem (som i Sætning 1.3) helt eksakt.

Betragt den homogene ligning

$$-(xu')' + \frac{m^2}{x}u = 0, \text{ på }]0,1[\,.$$

Det ses ved verifikation, at den har to lineært uafhængige løsninger:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & v_2(x) &= \log x, && \text{for } m = 0, \\ u_1(x) &= x^m, & v_2(x) &= x^{-m}, && \text{for } m > 0. \end{aligned}$$

Løsningen u_1 er begrænset med begrænsede afledede for $x \to 0$, og vil derfor blive brugt svarende til u_1 i det regulære tilfælde, jvf. §1.2 (14). For $m = 0$ opfylder v_2 randbetingelsen ved $x = 1$, mens vi for $m > 0$ opnår en løsning, der gør det, ved at se på $u_1(x) - v_2(x)$. Af fortegnsmæssige grunde vælger vi

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \log\frac{1}{x} = -\log x\,, && \text{for } m = 0, \\ u_2(x) &= x^{-m} - x^m, && \text{for } m > 0. \end{aligned}$$

Så er u_1 og u_2 positive, og

$$W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{for } m = 0, \\ -\dfrac{2m}{x} & \text{for } m > 0; \end{cases}$$

$$K = -p(x)W(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = 0, \\ 2m & \text{for } m > 0. \end{cases}$$

Vi definerer nu Green's funktion ganske som i §1.2 (15), altså

$$\begin{aligned}
&\text{for } m=0\,, \quad \mathcal{G}_{B,0}(x,y)=\begin{cases}\log\frac{1}{y}\,, & x\le y,\\ \log\frac{1}{x}\,, & x\ge y,\end{cases}\\
&\text{for } m\ge 1\,, \quad \mathcal{G}_{B,m}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2m}x^m(y^{-m}-y^m) & x\le y,\\ \frac{1}{2m}y^m(x^{-m}-x^m)\,, & x\ge y\,;\end{cases}
\end{aligned} \tag{9}$$

bemærk, at $G_{B,0}(x,y)=-\log\max\{x,y\}$ og $G_{B,m}(x,y)=\frac{1}{2m}[(\frac{\min\{x,y\}}{\max\{x,y\}})^m-(xy)^m]$. Herefter kan man verificere, at integraloperatoren

$$G_{B,m}\colon f\mapsto u(x)=\int_0^1 \mathcal{G}_{B,m}(x,y)f(y)ydy \tag{10}$$

(bemærk vægtfunktionen $\varrho(y)=y$) løser det inhomogene problem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\Big[-(xu')'+\frac{m^2}{x}u\Big]&=f,\\
u(1)&=0,\\
u \text{ begrænset for } x&\to 0,
\end{aligned}$$

ved en explicit analyse af formlen (som i §1.2 (17))

$$\begin{aligned}
u(x)&=\log\frac{1}{x}\int_0^x f(y)y\,dy+\int_x^1\log\frac{1}{y}f(y)y\,dy, \text{ for } m=0,\\
u(x)&=\frac{x^{-m}-x^m}{2m}\int_0^x f(y)y^{m+1}\,dy\\
&\qquad+\frac{x^m}{2m}\int_x^1(y^{-m+1}-y^{m+1})f(y)\,dy, \text{ for } m>0,
\end{aligned}$$

idet udregninger som i beviset for Sætning 1.3 kan gennemføres. Her spiller f's opførsel ved 0 en rolle; vi nøjes med at undersøge følgende tilfælde.

Hvis $f\in C_c^\infty(\,]0,1[\,)$ (der jo ligger tæt i H_ϱ), betyder singulariteten af $\log\frac{1}{x}$ hhv. $x^{-m}-x^m$ ved 0 ingenting, for når $f(x)=0$ for $x\le\delta$, er det første integral 0 for $x\le\delta$ og det andet integral konstant for $x\le\delta$. Så er den resulterende funktion u i $C^\infty([0,1])$ og løser differentialligningen samt har $u(1)=0$.

Hvis $f\in C([0,1])$, er det let at se af ovenstående formel, at $u\in C([0,1])$ med $u(1)=0$. At $u'\in C([0,1])$, ses ligesom i den anden udregning i §1.2 (17) (jvf. Opg. 3.1), og at u løser differentialligningen ses som i §1.2 (18) (bemærk at formlerne skal modificeres med faktoren $\varrho(x)=x$ på passende steder). Ialt finder man, at $G_{B,m}$ sender $C([0,1])$ ind i $D(L_{B,m})$.

Vi kan nu vise:

Sætning 3.2. 1° *$\mathcal{G}_{B,m}$ opfylder*

$$\int_0^1 \mathcal{G}_{B,m}(x,y)^2 y dy < \infty, \text{ for hvert } x \in]0,1[\,;$$
$$\int_0^1 \int_0^1 \mathcal{G}_{B,m}(x,y)^2 xy dx dy < \infty.$$

2° *Lemma 2.7 og Sætning 2.8 gælder for Bessels egenværdiproblem, for hvert $m \in \mathbb{N}_0$.*

Bevis. 1°. For $m = 0$ fås ulighederne af at $x(\log x)^2$ er begrænset for $x \to 0$. For $m > 0$ benyttes, at $\mathcal{G}_{B,m}(x,y)$ kun antager værdier mellem 0 og 1, altså er begrænset. Dette viser 1°.

2°. Nu kan egenfunktionerne undersøges ganske som i §2 (12) ff.; og Lemma 2.7 og Sætning 2.8 generaliseres da til den foreliggende situation.

Vi skal vise nedenfor, at der er uendeligt mange egenværdier, hvorfor vi allerede nu ordner dem i en voksende følge som i §2 (13).

Man kan finde egenfunktioner og egenværdier ved en forholdsvis simpel analyse, der benytter kompleks funktionsteori. Det første skridt er at erstatte den variable x med $t = \sqrt{\lambda}\, x$, så bliver (1) til

$$\begin{aligned} -(tv')' + \frac{m^2}{t} v = tv\,, \quad t \in]0, \sqrt{\lambda}[\,, \\ v(\sqrt{\lambda}) = 0, \\ v \text{ begrænset for } t \to 0; \end{aligned} \tag{11}$$

hvor $v(t) = u(t/\sqrt{\lambda})$. Til at finde løsninger til første linie i (11) benyttes Frobenius' metode, der går ud på at antage, at $v(t)$ er af formen $t^r w(t)$ for en passende holomorf funktion w og et helt tal r, samt bruge differentialligningen til at bestemme koefficienterne i Taylorrækken for w ved 0. Altså, vi sætter

$$v(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,, \quad a_0 \neq 0\,,$$

og finder, ved indsættelse i differentialligningen og ledvis differentiation, at hvis v er løsning, er

$$\begin{aligned} 0 &= t\frac{d}{dt}\left(t\frac{dv}{dt}\right) - m^2 v + t^2 v \\ &= t^r \Big\{ (r^2 - m^2)a_0 + ((r+1)^2 - m^2))a_1 t \\ &\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \big[((r+n)^2 - m^2)a_n + a_{n-2}\big] t^n \Big\}. \end{aligned}$$

Heraf sluttes, at

$$\begin{aligned} r^2 - m^2 &= 0, \\ a_1 &= 0, \\ ((r+n)^2 - m^2)a_n + a_{n-2} &= 0\,, \text{ for } n \geq 2\,; \end{aligned}$$

idet vi for første linie benytter at $a_0 \neq 0$, og dernæst indser at $(r+1)^2 = m^2 = r^2$ ikke kan opfyldes for $r \in \mathbb{Z}$, så a_1 må være 0. Idet altså $r = \pm m$, vælger vi $r = m$ for at få en løsning, der er begrænset for $t \to 0$. Så bliver tredie linie til

$$n(n+2m)a_n + a_{n-2} = 0\,, \text{ for } n \geq 2\,.$$

En klassisk normalisering er at vælge $a_0 = 2^{-m}/m!$. Idet $a_{2k-1} = 0$ for $k \in \mathbb{N}$, og

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k(\frac{1}{2})^{m+2k}}{k!(m+k)!}\,,$$

finder vi ialt følgende løsning

$$J_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}t)^{m+2k}}{k!(m+k)!}\,, \tag{12}$$

som kaldes *den m'te Bessel funktion* (af første art). Rækken har konvergensradius ∞ (ved kvotientkriteriet), dvs. J_m er en hel funktion, og $J_m(t)$ løser dermed differentialligningen i (11) på hele $\mathbb{R}$.

Formel (12) kan benyttes også for ikke-hele eller endda for passende komplekse m (hvor $m!$ defineres ud fra Gamma funktionen).

Man ser af potensrækkefremstillingen, at Bessel funktionerne er indbyrdes relateret ved

$$\frac{d}{dt}[t^{-m}J_m(t)] = -t^{-m}J_{m+1}(t), \quad \frac{d}{dt}[t^m J_m(t)] = t^m J_{m-1}(t). \tag{13}$$

Randbetingelsen i højre endepunkt, cf. (11), er opfyldt, såfremt $J_m(\sqrt{\lambda}) = 0$. Dermed ser vi, at egenværdierne for problemet (1) er nært forbundet med nulpunkterne for $J_m(t)$. Fra kompleks funktionsteori ved vi, at nulpunkterne for en ikke-konstant hel funktion udgør en endelig mængde eller en følge uden fortætningspunkter. En nærmere analyse af $J_m(t)$ viser, at den har en uendelig følge af nulpunkter på $\mathbb{R}_+$,

$$0 < j_1^{(m)} < j_2^{(m)} < \cdots < j_n^{(m)} < \cdots \to \infty.$$

Da $\sqrt{\lambda} = j_n^{(m)}$ medfører, at λ er egenværdi, får vi hermed en uendelig følge af egenværdier, og tilhørende (ikke normerede) egenfunktioner

$$\lambda_n^{(m)} = (j_n^{(m)})^2, \quad u_n(x) = J_m(j_n^{(m)}x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Man kan vise, at alle egenværdier hermed er fundet, og at systemet af egenfunktioner er fuldstændigt i H_ϱ, således at vilkårlige funktioner H_ϱ kan udvikles i H_ϱ-konvergente ortogonalrækker efter dette system. Ialt gælder

Sætning 3.3. *For hvert $m \in \mathbb{N}_0$ har Bessel problemet* (1), *og operatoren $L_{B,m}$ defineret i* (3), *en følge af simple positive egenværdier $\{\lambda_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ med tilhørende egenfunktioner, der udgør et fuldstændigt ortogonalsystem i H_ϱ. Egenværdierne og egenfunktionerne er bestemt ved* (14), *hvor $J_m(t)$ er den m'te Bessel funktion* (12), *og $j_n^{(m)}$ er dens positive nulpunkter, ordnet i en voksende følge for $n \in \mathbb{N}$.*

Specielt gælder altså for hvert $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^1 J_m(j_n^{(m)}x)J_m(j_{n'}^{(m)}x)x\,dx = 0, \text{ for } n \neq n', \, n \text{ og } n' \in \mathbb{N}.$$

Vedr. konvergensforhold kan man gennemføre en analyse i stil med analysen af regulære S.-L. problemer; bl.a. finder man, at for $u \in \widehat{V}_{B,m}$ konvergerer Fourierrækken i normen defineret ud fra $l_{B,m}(u,u)^{\frac{1}{2}}$, og dermed i $C([\delta,1])$ for hvert $\delta > 0$.

3.2 Legendre ligningen.

Vi ser nu på Legendre problemet defineret i (2), (4), som gentages her:

$$\begin{gathered} -((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda u\,, \quad x \in]-1,1[\,, \\ u \text{ begrænset for } x \to \pm 1. \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{L,m}u &= -((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u, \\ D(L_{L,m}) &= \{\, u \in C^2(\,]-1,1[\,) \cap C^1([-1,1]) \mid \mathcal{L}_{L,m}u \in L_2([-1,1]) \,\}, \\ L_{L,m}u &= \mathcal{L}_{L,m}u, \text{ for } u \in D(L_{L,m}). \end{aligned} \tag{4}$$

Her er $I =]-1,1[\,$, $J = [-1,1]$ og $\varrho(x) = 1$, så vi benytter den sædvanlige notation $L_2(J)$ for H_ϱ. For u og $v \in D(L_{L,m})$ har vi, da $(1-x^2)u'(x)$ er 0 for $x = \pm 1$,

$$\begin{aligned}(L_{L,m}u, v) &= \int_{-1}^{1} \big(-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u\big)\bar{v}\,dx \\ &= l_{L,m}(u,v) + \big[(1-x^2)u'\bar{v}\big]_{-1}^{1} = l_{L,m}(u,v) \\ &= (u, L_{L,m}v),\end{aligned}$$

hvor den sesquilineære form $l_{L,m}(u, v)$ er defineret ved

$$l_{L,m}(u,v) = \int_{-1}^{1} \big((1-x^2)u'\bar{v}' + \frac{m^2}{1-x^2}u\bar{v}\big)\,dx. \tag{15}$$

Denne kan også betragtes på det større rum

$$V_{L,m} = \{\, u \in C^1(I) \cap C(J) \mid \sqrt{1-x^2}\,u' \text{ og } \tfrac{m}{\sqrt{1-x^2}}u \in L_2(J)\}, \tag{16}$$

og der gælder

$$(L_{L,m}u, v) = l_{L,m}(u,v), \text{ for } u \in D(L_{L,m}),\ v \in V_{L,m}. \tag{17}$$

(For mere fuldstændige resultater kan man komplettere $V_{L,m}$ med skalarproduktet $l_{L,m}(u,v)+(u,v)_{L_2(J)}$ til et Hilbert rum $\widehat{V}_{L,m}$, der opfylder $D(L_{L,m}) \subset \widehat{V}_{L,m} \subset L_2(J)$.)

Da $(1-x^2)^{-1} > 1$ for $x \in I$, er

$$l_{L,m}(u,u) \geq m^2\|u\|^2, \text{ for } u \in V_{L,m}. \tag{18}$$

Af (17) og (18) sluttes nu, som i Sætning 2.3 og 2.4:

Sætning 3.4. *$L_{L,m}$ er symmetrisk og opfylder*

$$(L_{L,m}u, u) \geq m^2\|u\|^2, \text{ for alle } u \in D(L_{L,m}).$$

Alle egenværdier for $L_{L,m}$ er $\geq m^2$, og egenfunktioner hørende til forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale i $L_2(J)$.

Man kan også vise, at egenværdierne er simple, ved at vise, at den ene af løsningerne til første linie i (2) er ubegrænset.

For $m > 0$ er egenværdierne altså positive, og vi kan gå videre med analysen som ved Bessel problemet. For $m = 0$ er 0 faktisk egenværdi, med egenfunktionen $u_0 = 1$. Her kan vi i stedet betragte operatoren

$$L_{L,0} + 1 \colon u \mapsto -((1-x^2)u')' + u$$

(med definitionsmængde $D(L_{L,0})$), som har egenværdier ≥ 1. En egenværdi λ' for $L_{L,0}+1$ svarer til en egenværdi $\lambda = \lambda' - 1$ for $L_{L,0}$.

For $m > 0$ er det let at finde Green's funktion på eksplicit form:

$$\mathcal{G}_{L,m}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2m}\Big[\dfrac{(1+x)(1-y)}{(1-x)(1+y)}\Big]^{m/2}, & \text{for } x \leq y, \\ \dfrac{1}{2m}\Big[\dfrac{(1+y)(1-x)}{(1-y)(1+x)}\Big]^{m/2}, & \text{for } x \geq y, \end{cases} \tag{19}$$

da den homogene ligning

$$-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = 0, \quad x \in I,$$

har løsningerne $(1+x)^{m/2}(1-x)^{-m/2}$ og $(1-x)^{m/2}(1+x)^{-m/2}$. Dette kan f.eks. ses af at de løser $(1-x^2)u' = \pm mu$. Da $0 < \mathcal{G}_{L,m}(x,y) \leq 1/2m$ for $x, y \in I$, er

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{G}_{L,m}(x,y)^2\,dy < \infty, \quad \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathcal{G}_{L,m}(x,y)^2\,dxdy < \infty, \tag{20}$$

så det er let at generalisere Sætning 1.3 og 2.8.

Når $m = 0$, har vi ikke et eksplicit udtryk for Green's funktion $\mathcal{G}_{L,0}(x,y)$ for problemet $(L_{L,0}+1)u = 0$, men man kan analysere $\mathcal{G}_{L,0}$ kvalitativt og vise, at (20) også gælder for den, så at Sætning 1.3 og 2.8 generaliseres.

Egenfunktioner og egenværdier findes ved en særlig udregning:

Vi betragter først tilfældet $m = 0$, hvor vi ønsker at finde begrænsede løsninger til

$$-((1-x^2)u')' - \lambda u = 0\,, \text{ på }]-1,1[\,. \tag{21}$$

Lad os antage, at løsningen kan skrives på formen

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k\,.$$

Differentiation giver $u' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k(x-1)^{k-1}$, og da $1-x^2 = -(x-1)(x-1+2)$, fås

$$(1-x^2)u' = -\sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k(x-1)^{k+1} - 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k(x-1)^k\,,$$

og dermed

$$((1-x^2)u')' = -\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_k(x-1)^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k(x-1)^{k-1}\,.$$

Altså løser u differentialligningen, hvis

$$((1-x^2)u')' + \lambda u = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\lambda c_k - 2(k+1)^2 c_{k+1} - k(k+1)c_k\big)(x-1)^k = 0\,.$$

Dette giver betingelserne på koefficienterne

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{\lambda - k(k+1)}{2(k+1)^2} c_k, \quad \text{for } k \in \mathbb{N},\ \text{og dermed} \\ c_k &= \frac{1}{2^k (k!)^2} \big\{ \big(\lambda - k(k-1)\big)\big(\lambda - (k-1)(k-2)\big) \dots (\lambda - 2)\lambda \big\} c_0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Det ses ved kvotientkriteriet, at rækken har konvergensradius 2, og altså definerer en analytisk funktion $u(x)$ for $|x-1| < 2$. Man kan vise (Opg. 3.3), at for at $u(x)$ skal være begrænset i $x = -1$, må λ vælges, så at c_k er lig med nul fra et vist trin. Dette betyder, at λ skal tage en af værdierne

$$\lambda = n(n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

For disse valg er u løsning til (21), og den er endda et *polynomium* og dermed overalt defineret. Her er

$$c_{k+1} = \frac{(n+k+1)(n-k)}{2(k+1)^2} c_k, \text{ og dermed } c_k = \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2 2^k}.$$

Vi har hermed fundet et system af egenværdier $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{n(n+1)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ med tilhørende (ikke normerede) egenfunktioner $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2 2^k} (x-1)^k\,. \tag{23}$$

Polynomiet $P_n(x)$ kaldes *Legendre polynomiet af grad* n; bemærk at $P_n(1) = 1$. Man kan vise, at alle egenværdier hermed er fundet, og at systemet af egenfunktioner er fuldstændigt i $L_2(J)$, dvs. at vektorrummet udspændt af alle polynomier er tæt i $L_2(J)$, jvf. Opg. 3.5.

For $m > 0$ finder vi egenfunktionerne således: Indsæt en funktion

$$u_m(x) = (1-x^2)^{m/2} v_m(x) \tag{24}$$

i (2), så fås følgende ligning for v_m:

$$-(1-x^2)v_m'' + 2(m+1)x v_m' + [m(m+1) - \lambda] v_m = 0. \tag{25}$$

Differentiation af denne ligning giver

$$-(1-x^2)(v_m')''+2(m+2)x(v_m')'+[(m+1)(m+2)-\lambda]v_m'=0.$$

Altså, når v_m løser (25), løser v_m' den ligning, der fås af (25) ved at ændre m til $m+1$ overalt. Når dette anvendes successivt for $m=0,1,2\dots$, ses at hvis $v_0(x)$ løser (25) for $m=0$, vil $v_m(x)$ defineret ved

$$v_m(x)=\frac{d^m}{dx^m}v_0(x)$$

løse (25), for hvert m; og så vil u_m defineret ved (24) løse (2). På denne måde fås følgende skare af egenfunktioner:

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),\quad m\in\mathbb{N},\quad n\geq m, \tag{26}$$

for problemerne $L_{L,m}u=\lambda u$, med egenværdier $\lambda=n(n+1)$. Hermed har vi fundet et uendeligt system for hvert m; og man kan atter vise, at samtlige egenværdier hermed er fundet, og at systemet af egenfunktioner er fuldstændigt i $L_2(J)$. Funktionerne $P_n^{(m)}(x)$ kaldes *de associerede Legendre funktioner*, det er polynomier hvis og kun hvis m er lige. Ialt har vi:

Sætning 3.5. *For hvert $m\in\mathbb{N}_0$ har Legendre problemet* (2), *og operatoren $L_{L,m}$ defineret i* (4), *en følge af simple egenværdier $\lambda_n^{(m)}$, med et tilhørende fuldstændigt system af egenfunktioner i $L_2([-1,1])$. Her er*

$$\lambda_n^{(m)}=n(n+1),\quad n\in\mathbb{N}_0+m; \tag{27}$$

og de tilhørende egenfunktioner er Legendre polynomierne (23) *for $m=0$, hhv. de associerede Legendre funktioner* (26) *for $m>0$ (de er ikke normerede men har $P_n^{(m)}(1)=1$).*

Specielt gælder altså for hvert $m\in\mathbb{N}_0$:

$$\int_{-1}^{1}P_n^{(m)}(x)P_{n'}^{(m)}(x)\,dx=0,\ \text{for } n\neq n',\ n \text{ og } n'\in\mathbb{N}_0+m.$$

3.3 Hermite funktioner.

Hermite funktionerne er bestemt som løsningerne til egenværdiproblemet (hvor differentialoperatoren kaldes den *harmoniske oscillator*)

$$\begin{aligned} &-u'' + x^2 u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u \text{ begrænset for } x \to \pm\infty. \end{aligned} \tag{28}$$

Dette problem er af singulær Sturm-Liouville type i en mere generel forstand end vi tidligere har omtalt, idet nu også intervalendepunkterne udarter, til at være $-\infty$ hhv. $+\infty$. Imidlertid kan man stadig formulere en operator og en sesquilineær form, samt gennemføre en analyse i stil med §2.1–3.

Det er muligt at formulere problemstillingen meget forsigtigt med alle rum indeholdt i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, jvf. II §8, hvilket går godt, fordi det faktisk viser sig, at egenfunktionerne ligger i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En mere fuldstændig analyse i $L_2(\mathbb{R})$ får man ved at bruge at differentiation kan defineres alment ved hjælp af Fourier transformationen som i Kap. IV §4.4.

Ved den forsigtige analyse sætter vi

$$\mathcal{L}_H u = -u'' + x^2 u \quad \text{på} \quad D(\mathcal{L}_H) = \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

og bemærker, at $\mathcal{L}_H$ sender $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ind i sig selv. Her har vi, at

$$\begin{gathered} (\mathcal{L}_H u, v) = \int_{\mathbb{R}} (u'\bar{v}' + x^2 u\bar{v})\, dx \equiv l_H(u,v), \text{ for } u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ \text{med } l_H(u,u) > 0, \text{ for } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}; \end{gathered} \tag{29}$$

hvormed $\mathcal{L}_H$ er symmetrisk (med hensyn til skalarproduktet i $L_2(\mathbb{R})$), alle egenværdier hørende til egenfunktioner i $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ er positive, og egenværdier hørende til forskellige egenfunktioner i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ er indbyrdes ortogonale. Man kan vise, at alle egenværdier for $\mathcal{L}_H$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ må være simple, altså at højst den ene af de to lineært uafhængige løsninger til $(\mathcal{L}_H - \lambda)u = 0$ kan være begrænset.

Egenfunktionerne kan *findes* ved følgende overvejelser:

Lad $\mathcal{A}_+$ og $\mathcal{A}_-$ betegne operatorerne (der sender $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ind i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &: u \mapsto xu + u', \\ \mathcal{A}_- &: u \mapsto xu - u'; \end{aligned}$$

så er

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_\pm \mathcal{A}_\mp u = (x^2 \pm 1)u - u'', \\ \mathcal{L}_H u = \mathcal{A}_- \mathcal{A}_+ u + u = \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_- u - u, \\ \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_- u - \mathcal{A}_- \mathcal{A}_+ u = 2u, \text{ og} \\ (\mathcal{A}_+ u, v) = (u, \mathcal{A}_- v), \text{ for alle } u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{30}$$

Betragt først funktionen

$$u_0 = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Den tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, har $L_2(\mathbb{R})$ norm 1, og opfylder

$$\mathcal{A}_+ u_0 = 0, \text{ og dermed } \mathcal{L}_H u_0 = u_0, \tag{31}$$

så det er en egenfunktion for $\mathcal{L}_H$ hørende til egenværdien 1. Vi vil nu vise, at

$$\mathcal{A}_+(\mathcal{A}_-)^n - (\mathcal{A}_-)^n \mathcal{A}_+ = 2n(\mathcal{A}_-)^{n-1}, \tag{32}$$

for alle $m \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ er det allerede vist i (30). For $n > 1$ fås det ved induktion: Antag, at det gælder op til $n - 1$, så har vi ved brug af (30),

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+(\mathcal{A}_-)^n - (\mathcal{A}_-)^n \mathcal{A}_+ &= \mathcal{A}_+(\mathcal{A}_-)^{n-1}\mathcal{A}_- - (\mathcal{A}_-)^{n-1}\mathcal{A}_+\mathcal{A}_- \\ &\quad + (\mathcal{A}_-)^{n-1}\mathcal{A}_+\mathcal{A}_- - (\mathcal{A}_-)^{n-1}\mathcal{A}_-\mathcal{A}_+ \\ &= 2(n-1)(\mathcal{A}_-)^{n-2}\mathcal{A}_- + 2(\mathcal{A}_-)^{n-1} = 2n(\mathcal{A}_-)^{n-1}; \end{aligned}$$

hvilket viser induktionsskridtet. Heraf fås nu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H \mathcal{A}_-^n u_0 &= \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_-^{n+1} u_0 - \mathcal{A}_-^n u_0 \\ &= (2(n+1)\mathcal{A}_-^n + \mathcal{A}_-^{n+1}\mathcal{A}_+) u_0 - \mathcal{A}_-^n u_0 \\ &= (2n+1)\mathcal{A}_-^n u_0, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $\mathcal{A}_-^n u_0$ er egenfunktion hørende til egenværdien $2n+1$. Med henblik på normeringen bemærker vi, at ved (30), (31) og (32) er

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_-^n u_0\|^2 &= (\mathcal{A}_-^n u_0, \mathcal{A}_-^n u_0) = (\mathcal{A}_+\mathcal{A}_-^n u_0, \mathcal{A}_-^{n-1} u_0) \\ &= 2n\|\mathcal{A}_-^{n-1} u_0\|^2 = \dots = 2^n n! \|u_0\|^2 = 2^n n!, \end{aligned}$$

så

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \mathcal{A}_-^n u_0 \tag{33}$$

er en normeret egenfunktion hørende til egenværdien $2n + 1$. Den kaldes den n'te *Hermite funktion.*

Det fremgår af formlen for u_0, at hver af disse funktioner har formen

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \pi}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \tag{34}$$

hvor $H_n(x)$ er et polynomium af grad n med heltalskoefficienter; det kaldes det n'te *Hermite polynomium.* Her er $H_0(x) = 1$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$.

Man kan vise, at det hermed fundne ortonormalsystem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ er *fuldstændigt* i $L_2(\mathbb{R})$, således at $\mathcal{L}_H$ herved diagonaliseres, jvf. Opg. 3.9. Dette gælder ikke blot for operatoren i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ men også for en mere generel version i $L_2(\mathbb{R})$.

Den generelle version kan beskrives således:

$$\begin{aligned} D(L_H) &= \{\, u \in L_2(\mathbb{R}) \mid u',\, u''\,, xu' \text{ og } x^2u \in L_2(\mathbb{R}) \,\}, \\ L_H u &= -u'' + x^2 u, \text{ for } u \in D(L_H), \end{aligned}$$

her definerer vi u' og u'' ved hjælp af Fourier transformationen:

$$\begin{aligned} u' &= \mathcal{F}^{-1}[i\xi\hat{u}(\xi)], \text{ når } \xi\hat{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}), \\ u'' &= \mathcal{F}^{-1}[-\xi^2\hat{u}(\xi)], \text{ når } \xi^2\hat{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Definitionsmængden er altså, mere præcist,

$$D(L_H) = \{\, u \in L_2(\mathbb{R}) \mid \xi\hat{u},\, \xi^2\hat{u},\, x\mathcal{F}^{-1}[\xi\hat{u}] \text{ og } x^2u \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

og man kan vise, at $u \in D(L_H)$, når blot u, $\xi^2\hat{u}$ og $x^2u \in L_2(\mathbb{R})$. (Men det er en fordel for det nærmere studium af operatorerne at vide, at også u' og xu' er veldefinerede for $u \in D(L_H)$. Bl.a. er $u \in H^2(J)$ for ethvert $J \subset \mathbb{R}$.) Med denne definitionsmængde bliver L_H selvadjungeret i $L_2(\mathbb{R})$. Den tilhørende sesquilineære form $l_H(u,v)$ defineres på

$$V_H = \{\, u \in L_2(\mathbb{R}) \mid \xi\hat{u}(\xi) \text{ og } xu \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

der spiller en rolle lignende den $H_0^1(J)$ har i det regulære S.-L. problem.

Selve Hermite polynomierne udgør et ortogonalsystem i det vægtede L_2 rum $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_{n'}(x)e^{-x^2}\,dx = 0, \text{ for } n \neq n',\, n \text{ og } n' \in \mathbb{N}_0.$$

(Se også Opg. 3.4.)

Lad os hertil knytte nogle bemærkninger om sammenhængen mellem Hermite ortonormalsystemet og Fourier transformationen.

I IV §4.4 så vi, hvordan differentialoperatorerne $(d/dx)^j$ diagonaliseres af Fourier transformationen ved at overføres til multiplikationsoperatorer $(i\xi)^j$;

det er en anden type diagonalisering end Fourierrækkeopløsning, da F her er en integraloperator. Vi ser nu, at den harmoniske oscillator L_H *kan* diagonaliseres ved *rækkeudvikling*; men det er altså ikke en operator med konstante koefficienter.

Det er værd at bemærke, at Hermite funktionerne er egenfunktioner for selve Fourier transformationen. Lad $F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_2$, som indført i Bemærkning II 8.23 (d). Idet

$$\begin{aligned} F\mathcal{A}_- u &= -i\xi F u + i\frac{d}{d\xi}Fu = -i\mathcal{A}_- Fu, \text{ og} \\ Fu_0 &= u_0, \end{aligned}$$

jvf. Sætning II 8.7, ser vi, at

$$Fe_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} F\mathcal{A}_-^n u_0 = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2^n n!}}\mathcal{A}_-^n F u_0 = (-i)^n e_n.$$

Altså er e_n egenfunktion for F med egenværdi i, 1, $-i$ eller -1. (Disse egenværdier for F har uendelig multiplicitet.)

3.4 Laguerre funktioner.

Laguerre funktionerne spiller en lignende rolle som Hermite funktionerene, blot for L_2 over halvaksen $\mathbb{R}_+$ i stedet for hele aksen $\mathbb{R}$.

Vi betragter først en variant af Laguerre ligningen, for hvilken der er en nem udledning af egenfunktionerne, som har interesse i sig selv:

$$\begin{aligned} &-(xu')' + (x+1)u = \lambda u \quad \text{ på }]0,\infty[, \\ &u \text{ begrænset for } x \to 0 \text{ og for } x \to \infty. \end{aligned} \tag{35}$$

Det ses, at $p(x) = x$ er singulær ved $x = 0$, og intervalendepunktet ∞ er singulært. Lad os indføre

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}_{\mathrm{La}}) &= \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) \equiv \{\, u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) \mid x^j \frac{\partial^k}{\partial x^k} u \in C_b(\mathbb{R}) \text{ for alle } j,k \in \mathbb{N}_0 \,\}, \\ \mathcal{L}_{\mathrm{La}} u &= -(xu')' + (x+1)u \quad \text{for } u \in D(\mathcal{L}_L); \end{aligned} \tag{36}$$

det ses at $\mathcal{L}_{\mathrm{La}}$ sender $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ ind i sig selv.

Differentialoperatoren kan også skrives som

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx} + x + 1 = (1 + \frac{d}{dx})x(1 - \frac{d}{dx}), \tag{37}$$

som vi nu betragter for funktioner på $\mathbb{R}$, og den føres ved Fourier transformation i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ over i differentialoperatoren (jvf. Sætning II 8.7)

$$\widehat{\mathcal{L}} = i\xi\frac{d}{d\xi}\xi + i\frac{d}{d\xi} + 1 = i(1+i\xi)\frac{d}{d\xi}(1-i\xi); \tag{38}$$

her læses x (hhv. ξ) som "multiplikation med x" (hhv. ξ). Vi ser ved udregning, at funktionerne

$$\hat{\varphi}_k(\xi) = \frac{(1-i\xi)^k}{(1+i\xi)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

som tilhører $L_2(\mathbb{R})$, er egenfunktioner for $\widehat{\mathcal{L}}$ med egenværdi $2(k+1)$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}\hat{\varphi}_k(\xi) &= i(1+i\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{(1-i\xi)^{k+1}}{(1+i\xi)^{k+1}}\\ &= i(1+i\xi)(k+1)\Big(\frac{1-i\xi}{1+i\xi}\Big)^k\frac{-i(1+i\xi)-i(1-i\xi)}{(1+i\xi)^2}\\ &= 2(k+1)\hat{\varphi}_k(\xi).\end{aligned}$$

De er indbyrdes ortogonale i $L_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\hat{\varphi}_k\overline{\hat{\varphi}_l}\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}}\frac{(1-i\xi)^k(1+i\xi)^l}{(1+i\xi)^{k+1}(1-i\xi)^{l+1}}\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}(1-i\xi)^{k-l-1}(1+i\xi)^{l-k-1}\,d\xi = \begin{cases}0 \text{ for } k \neq l,\\ \pi \text{ for } k = l;\end{cases}\end{aligned}$$

for $k = l$ er det en velkendt formel, og for $k \neq l$ kan resultatet f.eks. vises ved brug af Sætning III 6.18. (For $k < l$ er den eneste pol $-i$, så summen af residuerne i øvre halvplan er 0, og dermed er udtrykket 0. Tilfældet $k > l$ føres over i tilfældet $k < l$ ved kompleks konjugering, eller man kan bruge en variant af Sætning III 6.18, hvor integrationsvejen lægges i den nedre halvplan.)

Man kan vise, at det normerede system $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\hat{\varphi}_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L_2(\mathbb{R})$. (For eksempel kan dette føres tilbage til fuldstændigheden af $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i $L_2(\mathbb{T})$ ved variabelskiftet $z = (1-i\xi)/(1+i\xi)$, hvor z identificeres med $e^{i\theta}$; idet $|z| = 1$ når $\xi \in \mathbb{R}$.)

Da $\hat{\varphi}_k \in L_2(\mathbb{R})$, er de invers Fourier transformerede funktioner $\varphi_k(x)$ defineret som elementer af $L_2(\mathbb{R})$; formelt opfylder de

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{(1-i\xi)^k}{(1+i\xi)^{k+1}}\,d\xi. \tag{39}$$

Vi kan finde dem ved hjælp af Sætning III 6.20 og Bemærkning III 6.22:

Lad $k \geq 0$. For $x > 0$ er (jvf. pkt. 3° side III 6.10)

$$
\begin{aligned}
2\pi\varphi_k(x) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{ix\xi} \frac{(1-i\xi)^k}{(1+i\xi)^{k+1}}\, d\xi = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{ix\xi} \frac{(1-i\xi)^k}{(1+i\xi)^{k+1}}, i) \\
&= 2\pi i \Big[\frac{1}{k! i^{k+1}} \frac{d^k}{d\xi^k} \big(e^{ix\xi} (1-i\xi)^k \big) \Big]_{\xi = i} = 2\pi\, p_k(x) e^{-x},
\end{aligned}
$$

for et vist reelt polynomium $p_k(x)$ af grad k (som får heltalskoefficienter når det ganges med $k!$). For $x < 0$ skriver vi $e^{ix\xi} = e^{i(-x)(-\xi)}$, og bruger reglen på den tilsvarende funktion af $-\xi$; den har *ingen* poler i den øvre halvplan, og giver derfor 0. Ialt fås for $k \geq 0$:

$$
\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{ix\xi} \hat{\varphi}_k(\xi)\, d\xi = \begin{cases} p_k(x)e^{-x}, & \text{for } x > 0, \\ 0, & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{40}
$$

Konvergensen for $R \to \infty$ er punktvis i x for $x \neq 0$, og stemmer da med L_2 grænseværdien n.o., jvf. Korollar II 7.21.

For $k < 0$ bemærker vi, at der må gælde

$$
\varphi_k(x) = \varphi_{-k-1}(-x), \tag{41}
$$

hvilket ses ved et variabelskift i (39).

Da F er en isometrisk isomorfi af $L_2(\mathbb{R})$ på $L_2(\mathbb{R})$, er systemet $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et ortogonalsystem i $L_2(\mathbb{R})$ som er fuldstændigt, dvs. det tilsvarende normerede system $\{\sqrt{2}\,\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal basis for $L_2(\mathbb{R})$.

Så må $\{\sqrt{2}\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ være en ortonormal basis for $L_2(\mathbb{R}_+)$! For det er et ortonormalsystem (når funktionerne i $L_2(\mathbb{R}_+)$ identificeres med deres udvidelse med 0 på $\mathbb{R}_-$), og hvis en funktion i $L_2(\mathbb{R}_+)$, udvidet med 0 på R_-, er ortogonal på alle φ_k med $k \geq 0$, er den ortogonal på φ_k for alle $k \in \mathbb{Z}$ (da de med $k < 0$ er 0 på $\mathbb{R}_+$), og dermed 0.

Det er nu nærliggende at forvente, at det ortonormalsystem, vi har fundet, består af egenfunktioner til $\mathcal{L}_{\mathrm{La}}$, med egenværdi $2(k+1)$, da funktionerne tilhører $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, og deres Fourier transformerede opfylder $\widehat{\mathcal{L}}\hat{\varphi}_k = 2(k+1)\hat{\varphi}_k$, jvf. (38). Dog er overgangen mellem (37) og (38) kun godtgjort for funktioner i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, så det skal lige bevises at de foreliggende funktioner $\varphi_k(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, opfylder $\mathcal{L}\varphi_k = 2(k+1)\varphi_k$. Dette kan f.eks. vises uden brug af de detaljerede formler, på følgende måde: Lad $x > 0$. For en lukket vej γ_R sat sammen af intervallet $[-R, R]$ på $\mathbb{R}$ og cirkelbuen $\{\, z = Re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi \,\}$ med $R > 1$, er

$$
\varphi_k(x) = i \operatorname{Res}\big(e^{ixz} \frac{(1-iz)^k}{(1+iz)^{k+1}}, i\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} e^{ixz} \frac{(1-iz)^k}{(1+iz)^{k+1}}\, dz.
$$

Da integranden er en C^∞ funktion af $x \in \mathbb{R}$ (endda holomorf i $x \in \mathbb{C}$) og holomorf i $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, kan vi differentiere efter x ved at føre differentiationen ind under integraltegnet. (Integralkurven er fast.) Så fås for $x > 0$, ved brug af nogle formler vist i Opg. 3.12,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\varphi_k(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} \mathcal{L}_x e^{ixz}\,\frac{(1-iz)^k}{(1+iz)^{k+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} e^{ixz}\widehat{\mathcal{L}}_z\frac{(1-iz)^k}{(1+iz)^{k+1}}\,dz \\
&= 2(k+1)\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} e^{ixz}\,\frac{(1-iz)^k}{(1+iz)^{k+1}}\,dz = 2(k+1)\varphi_k(x);
\end{aligned}$$

her angiver index x eller z den variabel for hvilken operatoren anvendes.

Funktionerne φ_k er en variant af det der sædvanligvis kaldes Laguerre funktionerne, og polynomierne der optræder som koefficient til e^{-x} er en variant af Laguerre polynomierne. De klassiske *Laguerre funktioner* og *Laguerre polynomier* får man af ovennævnte ved at sætte $x = t/2$ og normalisere på passende måde; de er af formen

$$L_k(t)e^{-t/2}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

med polynomier $L_k(t)$ af grad k. Tilsvarende omskrives (35) til det sædvanlige *Laguerre problem*

$$\begin{aligned}
&-(tu'(t))' + (\frac{t}{4} - \frac{1}{2})u(t) = \mu u(t), \\
&u \text{ begrænset for } t \to 0 \text{ og } t \to \infty;
\end{aligned} \tag{42}$$

som har egenværdierne $\mu = 0, 1, 2, \dots$ (idet μ svarer $\lambda/2 - 1$ i (35)).

Laguerre polynomierne selv udgør et ortogonalsystem i det vægtede L_2 rum $L_2(\mathbb{R}_+, e^{-t}dt)$, altså

$$\int_0^\infty L_k(x)L_{k'}(x)e^{-x}\,dx = 0, \text{ for } k \neq k',\ k \text{ og } k' \in \mathbb{N}_0.$$

For rummene $L_2(\mathbb{R}_+, t^\alpha e^{-t}dt)$, $\alpha > -1$, findes nogle beslægtede ortogonalsystemer af polynomier $L_k^{(\alpha)}(t)$, kaldet *generaliserede Laguerre polynomier*. Man kan vise, at Hermite polynomierne med lige hhv. ulige nummer fås af de generaliserede Laguerre polynomier med $\alpha = -\frac{1}{2}$ hhv. $\alpha = \frac{1}{2}$, ved at sætte $t = x^2$ (og normalisere passende).

Både Hermite og Laguerre funktionerne optræder i Kvantemekanik; bl.a. fremkommer Laguerre funktionerne ved separation i polære koordinater af Schrödinger ligningen med et Coulomb potential (ligningen for brintatomet).

Opgaver til §3.

3.1. Vis, at når $f \in C([0,1])$, er $h(x) = x^{-m} \int_0^1 y^m f(y)\,dy$ og $k(x) = x^m \int_x^1 y^{-m} f(y)\,dy$ konvergente for $x \to 0$.
(*Vink.* Bemærk, at $\dfrac{y}{x} \le 1$ for $y \in]0,x]$.)

3.2. Vis, hvorledes Sætning 1.3 og 2.8 generaliseres til Legendre problemet for $m > 0$.

3.3. Vis, at rækken $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k$, hvor c_k er givet ved (22), divergerer for $x = -1$ hvis λ ikke er på formen $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

3.4. Lad I være et (begrænset eller ubegrænset) åbent interval af $\mathbb{R}$, og lad $\varrho(x)$ være en kontinuert positiv funktion på I. Vis, at når systemet af elementære polynomier (dvs. monomier)

$$\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots, x^n, \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

er indeholdt i $H_\varrho = L_2(I, \varrho(x)dx)$, så findes der et ortonormalsystem i H_ϱ bestående af polynomier

$$\{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \ldots, p_n(x), \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

således at $p_n(x)$ er af grad n.
(*Vink.* Gram-Schmidt ortonormalisering.)

3.5. Vis, at hvis $g(x) \in L_2([-a,a])$, og der gælder

$$\int_{-a}^{a} g(x) x^n\,dx = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

så er $g = 0$. Altså er systemet af Legendre polynomier fuldstændigt i $L_2([-1,1])$.
(*Vink.* Antag først $a = \pi$, og bemærk, at for hvert $m \in \mathbb{Z}$ er Taylorrækken for e^{imx} uniformt konvergent på intervallet $[-\pi,\pi]$; slut heraf at $(g, e^{imx}) = 0$ for alle $m \in \mathbb{Z}$.)

3.6. Vis, at Legendre polynomierne har følgende repræsentation

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n\,;$$

den kaldes *Rodrigues' formel.* Vis, at $P_n(x)$ indeholder kun lige potenser af x, når n er lige, og kun ulige potenser af x, når n er ulige.
(*Vink.* Vis ortogonaliteten og normaliseringen $P_n(1) = 1$.)

3.7. Beregn de første Legendre polynomier P_0, P_1, P_2 og P_3; sammenlign med Opg. IV 1.3.

3.8. Beregn de første Hermite polynomier H_0, H_1, H_2 og H_3, enten ved brug af formlerne i teksten, eller ved Gram-Schmidt ortonormalisering i rummet $L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ (jvf. Opg. 3.4).

3.9. 1° Vis, at der for alle $x \in \mathbb{R}$ og $z \in \mathbb{C}$ og alle $\varepsilon > 0$ gælder

$$|e^{ixz}| \le e^{\varepsilon^2|x|^2} e^{(2\varepsilon)^{-2}|\operatorname{Im} z|^2}.$$

(*Vink.* Benyt uligheden $2|ab| \le |a|^2 + |b|^2$.)

2° Vis, at når $f(x) \in L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, så er

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)x^n e^{-x^2} e^{ixz}|\, dx$$
$$\le \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2}\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |x^n e^{-x^2/2+\varepsilon^2x^2}|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} e^{(2\varepsilon)^{-2}|\operatorname{Im} z|^2}$$

for $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, og slut heraf at

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} f(x) e^{-x^2}\, dx$$

er en holomorf funktion af $z \in \mathbb{C}$, dvs. en hel funktion.

3° Vis, at når $f \in L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, og

$$(f, x^n)_{L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)} \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-x^2}\, dx = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

så er $f = 0$. Slut heraf fuldstændigheden af systemet af Hermite polynomier. (*Vink.* Bemærk, at $g(z)$ defineret i 2° er lig med $\mathcal{F}[f(x)e^{-x^2}]$ for $z \in \mathbb{R}$, og at ligningerne medfører $g^{(n)}(0) = 0$ for alle n.)

3.10. Vis, at ligningen $\mathcal{L}_H u = \lambda u$ føres over i sig selv ved Fourier transformation.

3.11. Beregn $\varphi_k(x)$ (til problemet (35)) for $k = 0, 1, 2$.

3.12. Lad G være et område i $\mathbb{C}$. Vis, at der gælder for $f \in \mathcal{H}(G)$ og enhver lukket vej γ i G:

$$x \int_\gamma e^{ixz} f(z) dz = \int_\gamma e^{ixz} i \frac{d}{dz} f(z)\, dz,$$
$$-\frac{d}{dx}\big[x \frac{d}{dx} \int_\gamma e^{ixz} f(z) dz\big] = \int_\gamma e^{ixz} iz \frac{d}{dz}\big[z f(z)\big]\, dz.$$

(*Vink.* Man kan benytte Opg. III 2.7 samt reglerne $\frac{\partial}{\partial x}e^{ixz} = ize^{ixz}$, $xe^{ixz} = -i\frac{\partial}{\partial z}e^{ixz}$.)

3.13. Lad m være et lige, positivt tal. Vis, at når f er et polynomium af grad $\leq n$, har ligningen

$$L_{L,m}u = f$$

en entydigt bestemt løsning $u \in D(L_{L,m})$, og denne er et polynomium af grad $\leq n$.

3.14. Find en løsning $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ til ligningen

$$-u''(x) + x^2u(x) = (1 + x^2)e^{-x^2/2} \quad \text{på } \mathbb{R},$$

ved udvikling efter systemet af Hermite funktioner.

§4. Differentialligninger i højere dimension, Dirichlet problemet

4.1. Indledning, de forskellige typer.

Der er tre hovedeksempler på partielle differentialligninger, som har særlig betydning i fysik:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x), && \text{Laplace ligningen,} \\ \partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) &= f(x,t), && \text{Varmeledningsligningen,} \\ \partial_t^2 u(x,t) - \Delta_x u(x,t) &= f(x,t), && \text{Bølgeligningen.} \end{aligned} \tag{1}$$

Her er $x \in \mathbb{R}^k$ (i reglen opfattet som en positionsvariabel) og $t \in \mathbb{R}$ (i reglen en tidsvariabel). I nogle tekster kaldes den første ligning Poisson's ligning, og betegnelsen Laplace's ligning bruges kun når $f = 0$. Som vi så i IV §4.4 kan Laplace operatoren ret let diskuteres ved Fourier transformation; det gælder i særlig grad $-\Delta + c$ ($c > 0$), der føres over i multiplikation med $\|\xi\|^2 + c$, så at ligningen $(-\Delta + c)u = f$ har løsningen

$$u = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{\hat{f}(\xi)}{\|\xi\|^2 + c}\Big]$$

i $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. (Fortegnet minus på Δ foretrækkes, fordi $-\Delta$ går over i $+\|\xi\|^2$.)

For Laplace ligningen på en begrænset åben delmængde Ω af $\mathbb{R}^k$ søger man gerne at løse et *randværdiproblem*, som f.eks.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{i } \Omega, \\ u &= \varphi && \text{på } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

der kaldes Dirichlet problemet. Under rimelige omstændigheder — vi skal i det følgende se på nogle tilfælde — er der eksistens og entydighed af løsning for sådanne problemer.

Der kan også stilles andre randbetingelser, f.eks. er Neumann problemet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{i } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi && \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}$$

af betydning; her er $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ den afledede af u efter normalretningen til $\partial\Omega$. Meget af diskussionen af Neumann problemet ligner diskussionen af Dirichlet problemet, men af pladshensyn (og fordi der trods alt er lidt mere at forklare) vil vi her kun behandle Dirichlet problemer i detaljer.

Differentialoperatorer, der ligner Laplace operatoren derved at de er af formen

$$A = (\pm 1) \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{j=1}^{k} a_j(x)\partial_j + a_0(x), \tag{3}$$

hvor

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0\|\xi\|^2 \text{ for alle } x \text{ og } \xi \in \mathbb{R}, \text{ med } c_0 > 0, \tag{4}$$

kaldes *elliptiske*; deres løsningsegenskaber ligner Laplace operatorens. (Vi nøjes med at se på operatorer med reelle koefficienter her.)

Bølgeligningen (se (1)) føres ved Fourier transformation over i ligningen

$$(-\tau^2 + \|\xi\|^2)\hat{u}(\xi,\tau) = \hat{f}(\xi,\tau),$$

der ikke kan løses simpelt ved division (ejheller efter tillæg af en konstant), da koefficientfunktionen $\|\xi\|^2 - \tau^2$ er 0 på hele keglen $\{\, (\xi,\tau) \mid \tau = \pm\|\xi\| \,\}$. Der skal mere raffinerede overvejelser til for at definere en løsning. Med hensyn til ligningen på delmængder af rummet $\mathbb{R}^{k+1}$ har det ikke megen interesse at stille randværdiproblemer i stil med (2) (og de er sjældent løselige); derimod betragter man gerne *begyndelsesværdiproblemer* som f.eks.

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) && \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ med } t > 0, \\ u(x,0) &= g_0(x) && \text{for } x \in \mathbb{R}^k, \\ \partial_t u(x,0) &= g_1(x) && \text{for } x \in \mathbb{R}^k; \end{aligned} \tag{5}$$

der har gode løselighedsegenskaber. Problemet (5) kan bl.a. løses ved at man Fourier transformerer i de x-variable alene. Idet vi benytter betegnelsen $\mathcal{F}_{(x,t)\to(\xi,\tau)}$ for den sædvanlige Fourier transformation af funktioner $f(x,t)$ over i funktioner $\hat{f}(\xi,\tau)$, vil vi benytte betegnelserne

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} u(x,t) = \acute{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} f(x,t)\, dx$$

for den partielle Fourier transformation, hvor der kun Fourier transformeres med hensyn til x. Anvendes denne på (5), opnås et problem

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \acute{u}(\xi,t) + \|\xi\|^2 \acute{u}(\xi,t) &= \acute{f}(\xi,t), \\ \acute{u}(\xi,0) &= \hat{g}_0(\xi), \\ \partial_t \acute{u}(\xi,0) &= \hat{g}_1(\xi); \end{aligned}$$

der løses som et sædvanligt 2. ordens begyndelsesværdiproblem i den t-variable for hvert ξ, hvorefter man anvender $\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}$ (den omvendte til $\mathcal{F}_{x \to \xi}$). (Se Opg. 4.1. En tilbundsgående fremstilling vil naturligvis kræve en analyse af de funktionsrum hvor processen har god mening.) Operatorer, der ligner bølgeoperatoren strukturelt, dvs. som er af formen $\partial_t^2 + A$, hvor A er en elliptisk operator i de x-variable (med -1 i (3)), kaldes *hyperbolske*, og også for dem har det god mening at betragte begyndelsesværdiproblemer i stil med (5).

Den midterste type i (1), varmeledningsligningen, har det særlige, at tidsvariablen kun er repræsenteret ved en første ordens differentiation. Fourier transformation i alle variable giver en ligning

$$(i\tau + \|\xi\|^2)\hat{u}(\xi, \tau) = \hat{f}(\xi, \tau),$$

hvor koefficienten kan inverteres for alle $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0,0)\}$; deri ligner den de elliptiske tilfælde. På den anden side er det af afgørende betydning, at en af differentiationerne kun er af første orden. Den interessante type af problemer, man stiller for denne operator er

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) \quad \text{for } (x,t) \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ med } t > 0, \\ u(x,0) &= g_0(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^k, \end{aligned} \tag{6}$$

med kun én begyndelsesværdi. (6) kan behandles ved Fourier transformation i x og løsning af de derved fremkomne 1. ordens problemer m.h.t. t for hvert ξ, jvf. Opg. 4.2.

Operatorer af form som $\partial_t + A$, hvor A er elliptisk som ovenfor beskrevet, kaldes *parabolske*, og behandles på lignende måde som varmeledningsoperatoren.

Både for bølgeoperatoren og for varmeledningsoperatoren har det også interesse at lade x gennemløbe en begrænset delmængde af $\mathbb{R}^k$ kun; så må man stille randbetingelser i stil med dem for Laplace operatoren ved den derved indførte rand.

Betegnelserne for de tre typer er knyttet til den algebraiske flade defineret af det tilhørende polynomium (hvor koefficienterne opfylder (4)):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \le k} a_{ij}\xi_i\xi_j &= 1 \quad \text{(ellipsoide)}, \\ \sum_{i,j \le k} a_{ij}\xi_i\xi_j - \tau^2 &= 1 \quad \text{(hyperboloide)}, \\ \sum_{i,j \le k} a_{ij}\xi_i\xi_j - \sigma &= 1 \quad \text{(paraboloide)}. \end{aligned}$$

Der er endnu andre mulige typer — f.eks. hvor flere af de variable kun differentieres af 1. orden, eller hvor der samtidigt er flere end ét kvadratisk led med positiv koefficient og flere end ét med negativ koefficient (f.eks. $\partial_1^2 + \partial_2^2 - \partial_3^2 - \partial_4^2$ på $\mathbb{R}^4$; den kaldes *ultrahyperbolsk*); men de er ikke så vigtige i fysik, så vi vil ikke forsøge at inkludere dem her. Endelig bør vi lige nævne, at når komplekse koefficienter tillades, er der den komplekse Schrödinger ligning

$$i\partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t),$$

der har visse træk fælles med bølgeligningen, og andre træk fælles med varmeledningsligningen.

Lad os sige lidt om løsningsmetoderne.

Til behandling af partielle differentialligninger findes et væld af metoder, der i reglen (naturligt nok) går ud på at reducere til simplere problemer. Det vanskelige er, at for differentiation i flere variable har vi ikke, som ved differentiation i én variabel, et simpelt stamfunktionsbegreb; situationen er meget mere kompleks.

Blandt teknikkerne kan i første omgang nævnes:

1) *Fourier transformation,* der reducerer differentialligninger på $\mathbb{R}^k$ med konstante koefficienter til *multiplikationsligninger.*
2) Forskellige former for reduktion til *differentialligninger i én variabel.*

Ofte anvendes en kombination af 1) og 2). Hertil kommer, for delmængder af $\mathbb{R}^k$:

3) *Rækkeudvikling,* der under gunstige omstændigheder reducerer problemet til tilpasning af koefficientsæt, igen ved multiplikationsligninger,

ofte anvendt i kombination med 2). Endvidere må nævnes:

4) *Numeriske approximationsmetoder,*

hvor den matematiske teori er indbygget som baggrund for konkrete iterative processer, der anvendes på hvert problem for sig, gerne ved hjælp af datamater med stor regnekraft.

Vi skal her se på nogle problemer hvor 3) kan anvendes, med rækkeudvikling efter de ortonormalsystemer, vi har opstillet. Dette kræver, at det er muligt "separere de variable," altså at problemstillingen er egnet til at man foretager en Fourieropløsning el.l. efter hver variabel for sig.

Den videregående analyse af generelle løsningsmetoder bygger i høj grad på 1) også, med en udvidelse til variable koefficienter, der kræver et større maskineri, vi ikke kan begynde på at komme ind på her (pseudo-differential operatorer, Fourier integral operatorer). Der findes også mange specielle metoder til afgrænsede klasser af problemer.

Vi har her kun nævnt nogle typer af *lineære* differentialligninger. Der findes også en omfattende teori for *ikke-lineære problemer*; her er det ofte sådan, at løsningmetoder for de lineære problemer indgår som et redskab.

4.2. Maksimumsprincippet for Dirichlet problemet.

I dette og de følgende afsnit betragtes Dirichlet problemet (2) for forskellige delmængder Ω af $\mathbb{R}^k$ af mere eller mindre speciel karakter. Vi vil først vise en entydighedssætning, der gælder for vilkårlige begrænsede åbne mængder Ω. Den fås som korollar til følgende sætning.

Sætning 4.1 (Maksimumsprincippet). *Lad Ω være en begrænset åben delmængde af $\mathbb{R}^k$. Hvis u er en reel funktion i $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, som opfylder*

$$\begin{aligned} -\Delta u \leq 0 \quad & i\ \Omega, \\ u \leq C \quad & på\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

så er $u(x) \leq C$ for alle $x \in \Omega$.

Bevis. Lad $-\Delta u = f$, så er det givet, at $f(x) \leq 0$ på Ω. Da $\overline{\Omega}$ er kompakt og $u \in C(\overline{\Omega})$, antager u maksimum i et punkt $x_0 \in \overline{\Omega}$.

Antag først, at $f(x) < 0$ på Ω. Så kan x_0 ikke være et indre punkt af $\overline{\Omega}$, for hvis det var, ville

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad \text{for } x = x_0\,,\ i = 1, \dots, k\,;$$

og heraf følger at $-\Delta u(x_0) \geq 0$, i modstrid med antagelsen. Altså er $x_0 \in \partial\Omega$, hvormed $u(x) \leq C$ for alle $x \in \overline{\Omega}$.

Betragt dernæst det almene tilfælde hvor $f(x) \leq 0$ på Ω. Idet funktionen $h(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_k^2$ opfylder

$$-\Delta h(x) = -2k,$$

vil $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon h(x)$ for $\varepsilon > 0$ opfylde

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon \leq -2k\varepsilon < 0 \quad & \text{i } \Omega, \\ u_\varepsilon \leq C + \varepsilon R^2 \quad & \text{på } \partial\Omega; \end{aligned}$$

her er R en konstant for hvilken $\overline{\Omega} \subset \overline{K(0,R)}$. Behandlingen af tilfældet $f < 0$ giver os nu, at $u_\varepsilon(x) \leq C + \varepsilon R^2$ på Ω, hvormed

$$u(x) = u_\varepsilon(x) - \varepsilon\|x\|^2 \leq C + \varepsilon R^2 \text{ for } x \in \Omega.$$

Da ε var vilkårlig, sluttes at $u(x) \leq C$ på Ω. $\square$

Vi får nu let:

Korollar 4.2 (Entydighedssætningen). *Lad Ω være en begrænset åben delmængde af $\mathbb{R}^k$.*

$1°$ *Hvis u er en reel funktion i $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, der opfylder*

$$\begin{aligned} -\Delta u = 0 &\quad i\ \Omega, \\ C_1 \leq u \leq C_2 &\quad på\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

så er

$$C_1 \leq u \leq C_2 \quad på\ \overline{\Omega}.$$

$2°$ *Hvis u_1 og u_2 er to komplekse funktioner i $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, der løser* (2) *med de samme givne komplekse funktioner f og φ, så er $u_1 = u_2$.*

Bevis. $1°$. Da $\Delta u = 0$ og $u \leq C_2$ på $\partial\Omega$, følger af Sætning 4.1, at $u \leq C_2$ på $\overline{\Omega}$. Da $\Delta(-u) = 0$ og $-u \leq -C_1$ på $\partial\Omega$, følger ligeledes, at $-u \leq -C_1$ på $\overline{\Omega}$. Dette viser $1°$.

$2°$. Funktionen $v = u_1 - u_2$ er løsning til (2) med $f = 0$ og $\varphi = 0$. Det er dens realdel og imaginærdel dermed også. Anvendes $1°$ på hver af disse, fås, at $v = 0$. $\square$

Når nu entydigheden af løsninger i $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ til (2) er etableret, vil vi ikke gentage den ved hver af de eksistenssætninger, vi viser i det følgende.

4.3 Homogent Dirichlet problem for et rektangel og for en kasse.

I det følgende betragtes Dirichlet problemet med homogen differentialligning, kort betegnet *det homogene Dirichlet problem*:

$$\begin{aligned} -\Delta u = 0 &\quad \text{i } \Omega, \\ u = \varphi &\quad \text{på } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

for visse særlige mængder Ω, hvor problemet kan separeres i problemer for hver variabel for sig. Et meget simpelt tilfælde er det hvor Ω er et rektangel i planen.

Lad $\Omega =]0, \pi[\times]0, a[$ i $\mathbb{R}^2$, med $a > 0$. Til at begynde med lader vi $\varphi = 0$ på tre sider af rektanglet; altså

$$\begin{aligned} &\varphi(x, 0) = g(x), \text{ for } x \in [0, \pi], \\ &\varphi(0, y) = \varphi(\pi, y) = 0, \text{ for } y \in]0, a], \\ &\varphi(x, a) = 0, \text{ for } x \in [0, \pi]. \end{aligned} \tag{8}$$

Lad os først prøve at finde løsninger på produktform $u(x, y) = X(x)Y(y)$ (for disse må g være en konstant gange $X(x)$). Indsættelse af XY i differentialligningen giver $-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$. Når $XY \neq 0$, kan ligningen skrives

$$\frac{-X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Her er venstre side konstant i y og højre side konstant i x, så begge sider må være lig med en konstant λ. Når randbetingelserne på de tre sider af rektanglet tages i betragtning, får vi ligningerne for X og Y:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{for } x \in \,]0,\pi[\,, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases} \\
&\text{(ii)} \quad \begin{cases} Y''(y) = \lambda Y(y) \quad \text{for } y \in \,]0,a[\,, \\ Y(a) = 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{9}$$

En prøve viser, at uanset om X og Y har nulpunkter eller ej, vil et sæt $\{X(x), Y(y)\}$, der løser (9), give en produktløsning $X(x)Y(y)$ til (7) med φ som i (8) og $g = X(x)Y(0)$.

Vi genkender straks (9 i) som et ganske simpelt Sturm-Liouville problem, behandlet i Lemma 2.1 og Sætning 1.13. De normerede egenfunktioner i $L_2([0,\pi])$ og tilhørende egenværdier er

$$X_n(x) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin nx, \quad \lambda_n = n^2, \quad \text{hvor } n \in \mathbb{N}.$$

For hvert $\lambda = \lambda_n$ bestemmes herefter en løsning Y_n til (9 ii). Ligningen $Y''(y) = n^2 Y(y)$ har den generelle løsning $c_1 e^{ny} + c_2 e^{-ny}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$; den kan også skrives som $c_1' e^{n(y-a)} + c_2' e^{-n(y-a)}$ $(c_1', c_2' \in \mathbb{C})$. De løsninger der opfylder $Y(a) = 0$, er dem hvor $c_1' = -c_2'$; de kan skrives som $c \sinh n(y-a)$, og $Y(0) = 1$ opnås for $c = -1/\sinh na$. Vi vælger da

$$Y_n(y) = \frac{\sinh n(a-y)}{\sinh na}.$$

Hermed har vi fundet produktløsningerne

$$u_n(x,y) = X_n(x) Y_n(y) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin nx \, \frac{\sinh n(a-y)}{\sinh na}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Den generelle løsning til (7) med (8) søges nu på formen

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \, u_n(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \, (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin nx \, \frac{\sinh n(a-y)}{\sinh na}. \tag{10}$$

Såfremt rækken konvergerer for $(x,y) \in \Omega$, på en sådan måde at differentialoperatoren $-\Delta$ kan anvendes ledvis, så løser $u(x,y)$ differentialligningen $-\Delta u = 0$; og hvis rækken også konvergerer for $(x,y) \in \partial\Omega$, er randbetingelsen opfyldt med

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \, (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin nx. \tag{11}$$

Vi kan derfor løse problemet, når g kan udvikles i en række (11) således at man ved indsættelse af koefficienterne b_n i (10) får en række med de ønskede konvergensegenskaber.

(11) er simpelthen en sinusrække for g, hvor vi ved en hel del om konvergensegenskaberne. Vi vil vise:

Sætning 4.3. *Betragt Dirichlet problemet* (7) *for* $\Omega =]0,\pi[\times]0,a[$, *med* φ *givet ved* (8).

1° *Når* $g \in L_2([0,\pi])$ *med sinusrækken* (11), *er rækken* (10) *uniformt og absolut konvergent, med alle ledvis differentierede rækker uniformt og absolut konvergente, på* $\overline{\Omega}_\varepsilon = [0,\pi]\times[\varepsilon,a]$ *for alle* $\varepsilon \in]0,a[$. *Sumfunktionen* $u(x,y)$ *er i* $C^\infty([0,\pi]\times]0,a])$ *og løser differentialligningen der, og den opfylder randbetingelsen på de tre sider af rektanglet hvor* $y>0$.

2° *Hvis endvidere* $g \in H_0^1([0,\pi])$, *er rækken for* u *uniformt og absolut konvergent på* $\overline{\Omega}$, *så* $u \in C(\overline{\Omega})$ *og opfylder hele randbetingelsen. Dermed løser* u *problemet* (7).

Bevis. Vi har brug for følgende vurderinger, som gælder for $y \in [0,a]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{\sinh n(a-y)}{\sinh na} &= \frac{e^{n(a-y)} - e^{-n(a-y)}}{e^{na} - e^{-na}} \\ &= e^{-ny}\frac{1-e^{-2n(a-y)}}{1-e^{-2na}} \le e^{-ny}\frac{1}{1-e^{-2a}}\,, \\ 0 \le \frac{\cosh n(a-y)}{\sinh na} &= \frac{e^{n(a-y)} + e^{-n(a-y)}}{e^{na} - e^{-na}} \\ &= e^{-ny}\frac{1+e^{-2n(a-y)}}{1-e^{-2na}} \le e^{-ny}\frac{2}{1-e^{-2a}}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Når $g \in L_2([0,\pi])$, er $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^2 = \|g\|^2$, og specielt $|b_n| \le \|g\|$ for alle n. Da $|\sin nx| \le 1$, og $e^{-ny} \le e^{-\varepsilon n}$ for $y \ge \varepsilon$, ses ved brug af (12), at

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|g\|(2/\pi)^{\frac12}\frac{1}{1-e^{-2a}}\,e^{-\varepsilon n}$$

er en konvergent majorantrække for rækken for u, for $(x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$. Differentiation af leddet $b_n u_n(x,y)$ giver

$$\partial_x^j \partial_y^k b_n u_n(x,y) = (\pm 1) n^{j+k} b_n\,(2/\pi)^{\frac12}\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,nx\,\begin{matrix}\sinh\\ \cosh\end{matrix}\,n(a-y)\,\frac{1}{\sinh na},$$

hvor cos hhv. cosh benyttes når j hhv. k er ulige, og (± 1) indgår på passende måde. Så er, ved (12),

$$|\partial_x^j \partial_y^k b_n u_n(x,y)| \le \|g\|(2/\pi)^{\frac12}\frac{2}{1-e^{-2a}} n^{j+k} e^{-\varepsilon n},$$

og disse tal er led i en konvergent majorantrække for den ledvis differentierede række, for $(x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ (da $n^R e^{-\varepsilon n} \to 0$ for $n \to \infty$, for ethvert $R > 0$). Da dette gælder for alle j og $k \in \mathbb{N}_0$, og hvert led $b_n u_n$ i (10) opfylder $\Delta b_n u_n = 0$, følger at $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ for ethvert $\varepsilon > 0$, med $\Delta u = 0$ i Ω. Dette viser 1°.

Når yderligere $g \in H_0^1([0,\pi])$, er $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$, jvf. Sætning 1.13. Da er

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-e^{-2a}} |b_n|$$

en konvergent majorantrække for rækken for u, for $(x,y) \in \overline{\Omega}$, så konvergensen er uniform på hele $\overline{\Omega}$. Dette viser 2°. $\square$

Som et korollar kan vi nu også løse Dirichlet problemet (7) for rektanglet, når φ er stykket sammen af H^1-funktioner på hvert randstykke, således at de stemmer overens i hjørnerne (dette gælder specielt når φ er kontinuert og stykkevis C^1).

Korollar 4.4. *Lad $\Omega = \,]0,\pi[\, \times \,]0,a[\,$, og lad φ være en H^1-funktion på hver af de fire randstykker, så at φ er kontinuert på $\partial\Omega$. Så findes der en løsning $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ til* (7).

Bevis. Antagelsen betyder, at φ er stykket sammen af fire funktioner φ_1, φ_2, φ_3 og φ_4 givet som H^1-funktioner på intervaller,

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x) \quad \text{for } x \in [0,\pi],\ y = 0,\\ &\varphi_2(y) \quad \text{for } y \in [0,a],\ x = \pi,\\ &\varphi_3(x) \quad \text{for } x \in [0,\pi],\ y = a,\\ &\varphi_4(y) \quad \text{for } y \in [0,a],\ x = 0,\end{aligned}$$

således at værdierne i hjørnepunkterne stemmer overens: $\varphi_1(\pi) = \varphi_2(0)$, $\varphi_2(a) = \varphi_3(\pi)$, $\varphi_3(0) = \varphi_4(a)$, og $\varphi_4(0) = \varphi_1(0)$.

Betragt først tilfældet hvor værdierne i disse hjørnepunkter er 0. Så er $\varphi_i \in H_0^1([0,a_i])$, med $a_i = \pi$ for $i = 1$ og 3, og $a_i = a$ for $i = 2$ og 4. Her kan vi løse, hver for sig, problemerne (7) med φ givet som φ_i på den i'te kant og 0 ellers, ved brug af Sætning 4.3 (med passende koordinatskifte når det er φ_i for $i = 2$, 3 eller 4, der er $\neq 0$). Herved fås fire løsninger u_i, $i = 1$, 2, 3, 4, hvis sum

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

løser det stillede problem; og $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

I det almene tilfælde indfører vi en hjælpefunktion

$$v(x,y) = \varphi_1(0) + \frac{\varphi_1(\pi) - \varphi_1(0)}{\pi} x + \frac{\varphi_4(a) - \varphi_4(0)}{a} y + cxy,$$

hvor c er bestemt så at $v(\pi, a) = \varphi_2(a)$. Man efterviser umiddelbart at $\Delta v = 0$. Dermed er $u(x, y)$ løsning til (7) hvis og kun hvis $w(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$ er løsning til

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 \quad \text{i } \Omega, \\ w &= \psi \quad \text{på } \partial\Omega, \end{aligned}$$

hvor ψ, defineret som $\varphi - v$ på $\partial\Omega$, er i H^1 på hvert randstykke og er 0 i hjørnerne. Hermed er vi tilbage i det første tilfælde. $\square$

Der er en analog sætning i højere dimensioner. For at forklare principperne ser vi på tilfældet $\Omega =]0, \pi[^{k-1} \times]0, a[$, idet mere generelle intervaller kan behandles tilsvarende, efter behov. Her betegner vi

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_{k-1}) &= x' \in \mathbb{R}^{k-1}, \\ (n_1, \ldots, n_{k-1}) &= n' \in \mathbb{N}^{k-1}. \end{aligned}$$

Sætning 4.5. *Lad $\Omega =]0, \pi[^{k-1} \times]0, a[$, og betragt Dirichlet problemet* (7) *med φ givet ved*

$$\begin{aligned} \varphi(x', 0) = g(x'), \ \text{for } x' \in]0, \pi[^{k-1}, \\ \varphi = 0 \text{ på de øvrige randflader.} \end{aligned} \tag{13}$$

Når $g \in L_2(]0, \pi[^{k-1})$ udvikles i den multiple sinusrække

$$g(x') = \sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} b_{n'} C_{k-1} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_{k-1} x_{k-1} \tag{14}$$

($C_{k-1} = (2/\pi)^{(k-1)/2}$), så er $u(x)$, defineret ved

$$u(x) = \sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} b_{n'} C_{k-1} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_{k-1} x_{k-1} \frac{\sinh \|n'\|(a - x_k)}{\sinh \|n'\| a}, \tag{15}$$

en funktion i $C^\infty([0, \pi]^{k-1} \times]0, a])$, der opfylder $\Delta u = 0$ i Ω og $u = 0$ på randfladerne undtagen fladen $\{x_k = 0\}$. Rækken (15) *og alle dens ledvis differentierede rækker konvergerer uniformt og absolut på $\overline{\Omega}_\varepsilon = [0, \pi]^{k-1} \times [\varepsilon, a]$, for ethvert $\varepsilon \in]0, a[$.*

Hvis g endvidere opfylder

$$\sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} |b_{n'}| < \infty, \tag{16}$$

så konvergerer rækken (15) *uniformt og absolut mod u på $\overline{\Omega}$, så $u \in C(\overline{\Omega})$ og $u = g$ på randfladen hvor $x_k = 0$. Da er u løsning til problemet* (7) *med den givne randværdi* (13).

Her er (16) opfyldt f.eks. når $g \in C^m([0,\pi]^{k-1})$ for et $m > (k-1)/2$ således at de afledede af g af orden til og med m er 0 på randen af $[0,\pi]^{k-1}$; eller når blot den ulige periodiske forlængelse af g er i $H^m(\mathbb{T}^{k-1})$ for et $m > (k-1)/2$, jvf. Sætning 1.15.

Bevis. Vi søger her produktløsninger af formen $X_1(x_1)\dots X_k(x_k)$. Ved indsættelse i differentialligningen og division med $X_1 \dots X_k$ fås

$$\frac{X_1''}{X_1} + \dots + \frac{X_k''}{X_k} = 0,$$

hvor det j-te led kun afhænger af x_j. I betragtning af randbetingelsen spaltes dette op i problemerne (hvor $j = 1, \dots, k-1$),

$$(\mathrm{i}_j) \quad \begin{cases} -X_j''(x_j) = \lambda_j X_j(x_j) & \text{for } x_j \in \,]0,\pi[\,, \\ X_j(0) = X_j(\pi) = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{ii}) \quad \begin{cases} X_k''(x_k) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}) X_k(x_k) & \text{for } x_k \in \,]0,a[\,, \\ X_k(a) = 0. \end{cases}$$

Problemerne (i_j), $j \le k-1$, har løsningerne $X_j(x_j) = \sin n_j x_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, med $\lambda_j = n_j^2$. For hvert valg af $n' = (n_1, \dots, n_{k-1})$ er $\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} = n_1^2 + \dots + n_{k-1}^2 = \|n'\|^2$, så (ii) løses af $X_k(x_k) = c \sinh \|n'\|(x_k - a)$; her vælger vi som sædvanlig konstanten c så at værdien i 0 er 1. Dette giver produktløsningerne

$$u_{n'}(x) = \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_{k-1} x_{k-1} \frac{\sinh \|n'\|(a - x_k)}{\sinh \|n'\| a}, \quad n' \in \mathbb{N}^{k-1}.$$

Vi søger da den generelle løsning som en overlejring (15), og vil nu undersøge konvergensforholdene. Her benyttes Sætning 1.15.

Når $g \in L_2([0,\pi]^{k-1})$, er

$$\sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} |b_{n'}|^2 = \|g\|^2_{L_2([0,\pi]^{k-1})},$$

specielt er $|b_{n'}| \le \|g\|$ for alle n'. Da fås som i Sætning 4.3 ved brug af (12), at for hvert $\varepsilon > 0$ har rækken for u den konvergente majorantrække på $\overline{\Omega}_\varepsilon$

$$\sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} |b_{n'}| C_{k-1} \frac{1}{1 - e^{-2a}} e^{-\varepsilon \|n'\|}. \tag{17}$$

(Det benyttes, at $e^{-\varepsilon\|n'\|} \le C_M \|n'\|^{-M}$ for ethvert M. Her vælger vi M så stor at $\sum_{n' \in \mathbb{N}^{k-1}} \|n'\|^{-M} < \infty$, hvilket ifølge Lemma IV 4.4 er sikret når $M > k-1$. Lignende vurderinger benyttes for de ledvis differentierede rækker nedenfor.) Ved ledvis differentiation $\partial_{x'}^{\alpha'}\partial_{x_k}^{\alpha_k}$ får man rækker med led

$$(\pm 1)\frac{b_{n'}C_{k-1}(n')^{\alpha'}\|n\|^{\alpha_k}}{\sinh\|n'\|a}\,{\sin\atop\cos}\,n_1x_1\cdots{\sin\atop\cos}\,n_{k-1}x_{k-1}\,{\sinh\atop\cosh}\,\|n'\|(a-x_k);$$

de har konvergente majorantrækker

$$\sum_{n'\in\mathbb{N}^{k-1}}\|g\|C_{k-1}\frac{2}{1-e^{-2a}}(n')^{\alpha'}\|n'\|^{\alpha_k}e^{-\varepsilon\|n'\|},$$

på $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Da hvert led i (16) opfylder differentialligningen og er 0 på alle randflader undtagen den hvor $x_k = 0$, følger det første udsagn i sætningen.

For det andet udsagn benytter vi, at (16) multipliceret med konstanten $2C_{k-1}(1-e^{-2a})^{-1}$ er majorantrække for rækken (15) på hele $\overline{\Omega}$. Så er $u \in C(\overline{\Omega})$, og $u = g$ på den sidste randflade. $\square$

Fra Sætning 1.15 fås endvidere, at når $g \in C^m([0,\pi]^{k-1})$ for et $m > (k-1)/2 + l$, med alle afledede op til orden m lig med 0 på randen, så konvergerer u's række i $C^l(\overline{\Omega})$ (uniformt og absolut). Også lidt mildere forudsætninger sikrer dette, jvf. Sætning 1.15 ff.

4.4 Homogent Dirichlet problem for en cirkelskive og for en kugle.

Det grundlæggende aspekt af metoden anvendt i sidste afsnit er, at såvel differentialoperatoren Δ som mængden Ω (et produkt af intervaller) er egnet til bestemmelse af produktløsninger, som kan overlejres til at give generelle løsninger på rækkeform. Vi kan benytte dette synspunkt for Δ også når mængden er produktformet i andre koordinatsystemer end det euklidiske. Vigtige eksempler er polære koordinater i planen $\mathbb{R}^2$ og i rummet $\mathbb{R}^3$, hvor produktmængderne er henholdsvis cirkler og kugler, og hvor Δ har en form der tillader separation af de variable.

Først betragtes (7) for en cirkelskive

$$\Omega = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\,\} = K(0,1)\,.$$

Vi indfører polære koordinater (r,θ),

$$x+iy = r\,e^{i\theta}\,,$$

herved repræsenteres cirklen Ω ved parameterområdet

$$\Xi = \{\,(r,\theta) \mid r\in[0,1[\,,\ \theta\in\mathbb{R}\,\}.$$

Afbildningen af (r,θ) over i (x,y) er jo ikke bijektiv, men netop dette giver anledning til et rimeligt valg af "randbetingelser" for løsninger fremstillet i polære koordinater: de skal være *periodiske i θ med periode 2π og skal konvergere for $r \to 0$ mod en værdi, der er den samme for alle θ.* Differentialligningen ses ved kædereglen at overføres i

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{18}$$

og randbetingelsen i (7) går over i

$$u(1,\theta) = \varphi(\theta), \tag{19}$$

hvor $\varphi(\theta)$ også antages at have periode 2π. (Strengt taget burde funktionerne af de nye variable have et andet navn end de gamle funktioner, men for at få en simpel formulering tillader vi os et lille misbrug af notationen på dette punkt.)

Lad os finde produktløsninger til (18) med de nævnte egenskaber. Indsættelse af $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ og division med $R\Theta$ giver, efter multiplikation med r^2,

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0\,.$$

Heraf ses at såvel funktionen af r som funktionen af θ må være konstante, altså

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda\,.$$

I betragtning af de øvrige betingelser fås følgende to problemer:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \begin{cases} -\Theta'' = \lambda\Theta \quad \text{for } \theta \in\,]-\pi,\pi[\,, \\ \Theta \ \text{ periodisk med periode } 2\pi\,, \end{cases} \\ &\text{(ii)} && \begin{cases} r^2R'' + rR' = \lambda R \quad \text{for } r \in\,]0,1[\,, \\ R \text{ kontinuert i } 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{20}$$

(Også når Θ og R har nulpunkter, løser ΘR ligning (18).) Når vi præciserer periodicitetskravene for Θ til betingelserne $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$, $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$, er problemet (20 i) et egenværdiproblem af en generel S.-L. type, som diskuteret i starten af §2, se også Opg. 2.16. Egenværdierne er n^2, $n \in \mathbb{N}_0$; til 0 hører egenfunktionerne $c_0 \cdot 1$ (med $c_0 \neq 0$) og til $n^2 \neq 0$ hører det to-dimensionale rum af egenfunktioner $c_n e^{in\theta} + c_{-n}e^{-in\theta}$ (med $(c_n, c_{-n}) \neq (0,0)$). Disse løsninger frembringes af skaren af løsninger

$$\Theta_n(\theta) = e^{in\theta}\,, \quad \lambda_n = n^2, \quad \text{hvor } n \in \mathbb{Z}$$

(ved linearkombination for samme $|n|$). Når $\lambda = \lambda_n$ indsættes i (20 ii), fås

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0\,,\ \text{eller } r(rR')' - n^2 R = 0.$$

Denne ligning løses let ved variabelskiftet $r = e^t$ for $t \le 0$ (dvs. $\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d}{dr} = r\frac{d}{dr}$), hvorved ligningen går over i

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - n^2 R = 0\,,$$

som har løsningerne

$$\begin{aligned} R_0 &= a + bt = a + b\log r\,,\ \text{når } n = 0,\\ R_n &= ae^{nt} + be^{-nt} = ar^n + br^{-n}\,,\ \text{når } n \ne 0. \end{aligned}$$

På grund af betingelsen for $r \to 0$ kan logaritmen og de negative potenser forkastes, så vi finder ialt

$$R_n(r) = ar^{|n|}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Dermed har vi produktløsningerne $u_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta)$,

$$u_n(r,\theta) = r^{|n|}e^{in\theta} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Den generelle løsning til (7) søges nu som en overlejring af produktløsninger, altså på formen

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\ r^{|n|}e^{in\theta}\,. \tag{21}$$

Når rækken konvergerer for $(r,\theta) \in \overline{\Xi}$, er randbetingelsen (19) opfyldt med

$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{in\theta}\,. \tag{22}$$

Vi genkender her den trigonometriske Fourierrække.

Ganske som ved separationsmetoderne i sidste afsnit, får vi bedre konvergens, jo mere differentiabel φ er. Før vi går i detaljer med dette, vil vi bemærke, at (21) kan skrives i de oprindelige koordinater på formen

$$u(x,y) = \sum_{n\ge 0} c_n(x+iy)^n + \sum_{k>0} c_{-k}(x-iy)^k\,; \tag{23}$$

og her er alle tilpasningsproblemer ved $r = 0$ forsvundet, fordi leddene nu er polynomier i x og y. Her er det muligt ikke alene at checke kontinuitet i 0, men også differentiabilitet efter x og y, uden komplicerede overgangsformler. Vi vil vise:

Sætning 4.6. *Betragt Dirichlet problemet (7) for $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$, fremstillet i polære koordinater ved (18), (19).*

1° *Når $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$ med Fourierrækken (22), er rækken (23) uniformt og absolut konvergent, med alle ledvis differentierede rækker uniformt og absolut konvergente på $\overline{\Omega}_\varepsilon = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le (1-\varepsilon)^2 \,\}$, for ethvert $\varepsilon \in]0,1[$. Sumfunktionen $u(x,y)$ er i $C^\infty(\Omega)$ og løser differentialligningen i Ω.*

2° *Hvis endvidere $\varphi \in H^1(\mathbb{T})$, er rækken for u uniformt og absolut konvergent på $\overline{\Omega}$, så $u \in C(\overline{\Omega})$ og opfylder randbetingelsen. Dermed løser u problemet (7) for Ω med dette φ.*

Bevis. Når $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$, opfylder Fourierkoefficienterne uligheden

$$|c_n| \le \|\varphi\| \quad \text{for alle } n$$

(her benyttes normen i $L_2(\mathbb{T})$). For $(x,y) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ har rækken for u den konvergente majorantrække

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|(1-\varepsilon)^{|n|}, \tag{24}$$

og de ledvis differentierede rækker som opnås ved anvendelse af $\partial_x^j \partial_y^k$ på (23) har konvergente majorantrækker

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\varphi\|(1-\varepsilon)^{-j-k}|n|^{j+k}(1-\varepsilon)^{|n|}.$$

Da leddene opfylder differentialligningen, fås 1°.

Antag nu tillige, at $\varphi \in H^1(\mathbb{T})$. Så er (jvf. IV §2.5) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, så (24) er konvergent majorantrække også for $\varepsilon = 0$. Altså konvergerer (23) uniformt (og absolut) på hele $\overline{\Omega}$, og resten af sætningen følger. $\square$

Der kan knyttes nogle yderligere bemærkninger til disse resultater. Betegnes $x + iy = z$, ser vi, at når u er som i sætningen, er

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n>0} c_n z^n + \sum_{n>0} c_{-n} \bar{z}^n.$$

Ved konjugering fås

$$\overline{u}(x,y) = \bar{c}_0 + \sum_{n>0} \bar{c}_n \bar{z}^n + \sum_{n>0} \bar{c}_{-n} z^n.$$

Specielt ses, at

$$u - \bar{u} = c_0 - \bar{c}_0 + \sum_{n>0} (c_n - \bar{c}_{-n}) z^n + \sum_{n>0} (c_{-n} - \bar{c}_n) \bar{z}^n,$$

og følgelig gælder (på grund af entydigheden af koefficienterne i Fourieropløsningen efter θ for fast r), at *u er reel hvis og kun hvis*

$$c_0 \in \mathbb{R}, \quad c_n = \bar{c}_{-n} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{Z}.$$

I så fald er

$$u = c_0 + \sum_{n>0}(c_n z^n + \bar{c}_n \bar{z}^n) = c_0 + 2\sum_{n>0} \mathrm{Re}(c_n z^n). \tag{25}$$

Funktioner u, der opfylder $\Delta u = 0$ i en åben mængde $A \subset \mathbb{R}^k$ kaldes *harmoniske i A*. Vi ser, at når den harmoniske funktion u konstrueret ovenfor er reel, er den af formen

$$u = \mathrm{Re}\, f(z), \text{ hvor } f(z) = c_0 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \text{ er holomorf i } \Omega. \tag{26}$$

Dette viser en variant af Sætning III 4.3, dog blot for den cirkelformede mængde $\Omega = K(0,1)$ (på den anden side giver (26) en præcis oplysning om Taylor koefficienterne til f). Se også Opg. 5.12.

(21) kan også omskrives til en integralformel for $u(r,\theta)$ udtrykt ved den givne randværdi $\varphi(\theta)$: Idet koefficienterne c_n opfylder

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma)e^{-in\sigma}\, d\sigma,$$

har vi for afsnittene i rækken for u:

$$\begin{aligned} s_N(r,\theta) &= \sum_{|n|\le N} c_n\, r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{|n|\le N} \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma)e^{-in\sigma} d\sigma\Big)\, r^{|n|}e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma) \sum_{|n|\le N} r^{|n|}e^{in(\theta-\sigma)} d\sigma\,, \end{aligned}$$

hvor afsnitsfølgen under integraltegnet konvergerer uniformt i σ for hvert $r < 1$. Når $N \to \infty$ fås da for $r < 1$,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\sigma) \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-\sigma)} d\sigma\,. \tag{27}$$

Lad $\omega = \theta - \sigma$. Idet

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\omega} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(re^{i\omega})^n + (re^{-i\omega})^n\big] \\ &= 1 + \frac{re^{i\omega}}{1-re^{i\omega}} + \frac{re^{-i\omega}}{1-re^{-i\omega}} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\omega}\,, \end{aligned}$$

fås ved indsættelse i (27) *Poissons integralformel*:

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\sigma)d\sigma}{1+r^2-2r\cos(\theta-\sigma)}\,, \text{ for } r<1\,. \tag{28}$$

Formlen gælder, selv når blot $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$. Bemærk, at $|re^{i\theta} - e^{i\sigma}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(\theta-\sigma)$; altså nævneren i integralet er netop kvadratet på afstanden mellem punktet $re^{i\theta}$ og det løbende punkt $e^{i\sigma}$ på cirkelperiferien.

Lad os endvidere bemærke, at vi har fundet et påfaldende regularitetsfænomen ved løsningerne til hvert af de Dirichlet problemer, vi har betragtet: Selv om den givne randværdi φ ikke er særligt regulær (altså ikke særligt højt differentiabel), bliver løsningen C^∞, så snart man kommer i positiv afstand fra randen. Dette er et generelt fænomen for løsninger til (7), og mere alment for homogene *elliptiske randværdiproblemer*, jvf. §4.1, når koefficientfunktionerne a_{ij} og a_j er C^∞. Noget tilsvarende gælder *ikke* for hyperbolske ligninger; tværtimod vil vi f.eks. for den endimensionale bølgeligning i §5.1 finde, at løsningen for $t > 0$ har *samme* grad af regularitet som de givne begyndelsesværdier til $t = 0$.

Lad os dernæst betragte (7) for en kugle

$$\Omega = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1 \,\} = K(0,1).$$

Her benyttes sfæriske polære koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\sigma, \\ y &= r\sin\theta\sin\sigma, \\ z &= r\cos\theta; \end{aligned} \tag{29}$$

med parameterområdet

$$\Xi = \{\, (r,\theta,\sigma) \mid r \in [0,1[\,,\, \theta \in [0,\pi],\, \sigma \in \mathbb{R} \,\}.$$

I disse koordinater tager ligningen formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} = 0, \tag{30}$$

randbetingelsen går over i

$$u(1,\theta,\sigma) = \varphi(\theta,\sigma),$$

og det må antages om u som funktion af de nye variable, at den er konvergent for $r \to 0$, konvergent for $\theta \to 0$ og $\theta \to \pi$, og periodisk i σ med periode 2π. Vi prøver nu at finde produktløsninger $u(r,\theta,\sigma) = R(r)\Theta(\theta)\Sigma(\sigma)$ til denne ligning. Indsætning og division med $R\Theta\Sigma$ giver

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2 \sin\theta\,\Theta}(\sin\theta\,\Theta')' + \frac{1}{r^2\sin^2\theta\,\Sigma}\Sigma'' = 0. \tag{31}$$

Multiplikation af denne ligning med $r^2\sin^2\theta$ giver

$$r^2\sin^2\theta\frac{R''}{R} + 2r\sin^2\theta\frac{R'}{R} + \sin\theta\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta} + \frac{\Sigma''}{\Sigma} = 0,$$

hvor de første tre led kun afhænger af (r,θ) og det sidste led kun afhænger af σ. Heraf sluttes, at $\dfrac{\Sigma''}{\Sigma} = c$, hvor c er en konstant, altså vi får følgende problem for Σ:

$$\Sigma'' - c\Sigma = 0\,,$$
$$\Sigma \text{ periodisk med periode } 2\pi\,.$$

Dette problem har løsningerne $\Sigma(\sigma) = e^{im\sigma}$, $c = -m^2$, med $m \in \mathbb{Z}$; og vi indsætter $\Sigma''/\Sigma = -m^2$ i (31). Den giver da ved multiplikation med r^2:

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{1}{\sin\theta\,\Theta}(\sin\theta\,\Theta')' - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0.$$

Separation af denne ligning giver problemerne

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\,\Theta')' + \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta = \lambda\Theta \quad \text{for } \theta \in]0,\pi[\,, \\ \Theta \text{ kontinuert i } 0 \text{ og } \pi; \end{cases} \\ &\text{(ii)} \quad \begin{cases} r^2R'' + 2rR' = \lambda R \quad \text{for } r \in]0,1[\,, \\ R \text{ kontinuert i } 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{32}$$

Problemet (32 i) er et singulært Sturm-Liouville problem, som vi ved variabelskiftet $t = \cos\theta$ for $t \in [-1,1]$, $\Theta(\theta) = P(t)$ (hvorved $\frac{d}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt} = -\sin\theta\frac{d}{dt}$), fører over i

$$-((1-t^2)P')' + \frac{m^2}{1-t^2}P = \lambda P \quad \text{for } t \in]-1,1[\,,$$
$$P \text{ kontinuert i } \pm 1;$$

og dette genkendes som *Legendre problemet*, se §3.2. Egenfunktionerne og egenværdierne er, for $m \geq 0$,

$$P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t), \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0 + m,$$

hvor $P_n^{(m)}(t)$ er de associerede Legendre funktioner, dannet ud fra Legendre polynomierne $P_n(t)$.

Idet man kan vise, at $P_n(t)$ indeholder kun lige potenser af t når n er lige, og kun ulige potenser af t når n er ulige (jvf. Opg. 3.6), finder man at når $\cos\theta$ indsættes for t, kan funktionerne ved brug af simple trigonometriske formler skrives på formen

$$P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sin^m\theta \cdot \{\text{polynomium i } \cos\theta \text{ af grad } n-m\},$$

med kun lige, hhv. kun ulige led, eftersom $n-m$ er lige hhv. ulige. Systemet $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ er egenfunktionssystemet for det singulære Sturm-Liouville problem (32 i); det er et ortogonalsystem i $L_2([0,\pi])$ (da $\varrho = 1$), og fuldstændigheden følger af fuldstændigheden af det tilsvarende Legendre system.

Indsættes egenværdierne λ_n i (32 ii), fås ligningerne

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0\,, \text{ eller } (rR)'' = \frac{n(n+1)}{r^2}(rR),$$

der løses omtrent som (20 ii) tidligere; der er de to løsninger r^{-n-1} og r^n ($\log r$ og 1 når $n = 0$), hvoraf kun den anden er kontinuert i 0, så denne bruges.

Idet vi går over til den reelle skrivemåde for de trigonometriske funktioner af σ, får vi ialt systemet af produktløsninger

$$r^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\sigma, \quad r^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\sigma, \quad m \in \mathbb{N}_0,\, n \in \mathbb{N}_0 + m. \tag{33}$$

Man kan vise, at disse funktioner faktisk er polynomier i de oprindelige koordinater (x,y,z). De kaldes *kuglefunktionerne* eller de *sfærisk harmoniske polynomier* (på engelsk "spherical harmonics"), og udtrykkes i reglen i polære koordinater.

Ved overvejelser som i IV §4 om multiple trigonometriske systemer kan man vise, at hele systemet (33) ved normering giver et fuldstændigt ortonormalsystem i $L_2([0,\pi]\times[-\pi,\pi])$, så generelle L_2-funktioner på kuglefladen ($r = 1$) kan udvikles i konvergente Fourierrækker efter dette system.

Vi kan bruge dette til at løse (7) med en given funktion φ på kugleoverfladen: Funktionen udvikles efter systemet (33) for $r = 1$,

$$\begin{aligned}\varphi(\theta,\sigma) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\ge m} a_{mn}P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\sigma \\ + \textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\ge m} b_{mn}P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\sigma,\end{aligned} \tag{34}$$

og man benytter koefficienterne til at danne løsningen formelt som

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\sigma) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\ge m} a_{mn}r^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\sigma \\ + \textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\ge m} b_{mn}r^nP_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\sigma,\end{aligned} \tag{35}$$

hvorefter konvergensforholdene diskuteres. Som sædvanlig kan det vises, at rækken (35) definerer en C^∞ funktion på det indre af kuglen, når blot φ er i L_2, og at rækken konvergerer uniformt på $\overline{\Omega}$ under lidt mere restriktive betingelser på φ.

Vi skal ikke forsøge at udføre den præcise analyse her, da den kræver et mere detaljeret kendskab til de indgående ortogonalsystemer. Vi vil blot yderligere nævne, at som i tilfældet af en cirkel kan løsningsformlen omskrives til et integral, *Poissons integralformel for kuglen*:

$$\begin{gathered}u(r,\theta,\sigma) = \frac{1-r^2}{4\pi}\int_{\theta'=0}^{\pi}\int_{\sigma'=0}^{2\pi}\frac{\varphi(\theta',\sigma')\sin\theta'}{(1+r^2-2r\Phi)^{3/2}}\,d\theta' d\sigma', \\ \Phi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\sigma-\sigma'),\end{gathered} \tag{36}$$

der ofte med fordel kan bruges til at finde en løsning. Nævneren i integranden er tredje potens af afstanden mellem punktet (r,θ,σ) og det løbende punkt $(1,\theta',\sigma')$. (At (36) løser (7) for kuglen kan under passende betingelser på φ også verificeres direkte.)

Kuglefunktionerne har interesse ikke blot for den principielle løsningsmetode givet ovenfor, men også i andre problemstillinger; bl.a. vil vi møde dem igen ved diskussionen af tidsafhængige problemer og inhomogene problemer.

Opgaver til §4.

4.1. Vis, at problemet (5) med $f = 0$ og g_0, $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ løses af en funktion defineret for hvert $t \geq 0$ ved

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big(\cos(\|\xi\|t)\hat{g}_0(\xi) + \frac{\sin(\|\xi\|t)}{\|\xi\|}\hat{g}_1(\xi)\big).$$

4.2.

1° Vis, at problemet (6) med $f = 0$ og $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ løses af

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big(e^{-\|\xi\|^2 t}\hat{g}_0(\xi)\big) \\ &= \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big(e^{-\|\xi\|^2 t}\big) * g_0(x). \end{aligned}$$

2° Vis, at for hvert $t > 0$ er den invers Fourier transformerede til funktionen $e^{-\|\xi\|^2 t}$ lig med

$$k(x,t) = (4t\pi)^{-k/2} e^{-\|x\|^2 t},$$

hvormed

$$u(x,t) = (4t\pi)^{-k/2} \int_{\mathbf{R}^k} e^{-\|x-y\|^2 t} g_0(y)\,dy.$$

3° Vis, at $k(x,t)$ er C^∞ i x og t for $(x,t) \in (\mathbb{R}^k \times [0,\infty[\,) \setminus \{0\}$.

(*Vink.* Se Opg. II 8.8 vedr. 1°, Opg. II 8.4 vedr. 2°, og eksempel II 8.20 vedr. 3°.)

4.3. Formuler og bevis en generalisation af maksimumsprincippet (Sætning 4.1) for varmeledningsligningen i en åben delmængde af $\mathbb{R}^{k+1}$.

4.4. Løs problemet

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \in \,]0,b[\,\times\,]0,a[\,, \\ u(0,y) = u(b,y) = u(x,a) = 0\,, \quad u(x,0) = g(x)\,, \end{gathered}$$

hvor $g \in C^1([0,b])$ og $g(0) = g(b) = 0$.

4.5. Løs problemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for} \quad (x,y) \in]0,\pi[\times]0,\pi[\,,$$
$$u(x,0) = x^2\,, \quad u(x,\pi) = x^2\,, \quad u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = \pi^2\,.$$

4.6. Vis, at ligningen $\Delta u = 0$ overføres i (18) ved overgang til polære koordinater i $\mathbb{R}^2$.

4.7. Med Ω lig med enhedscirkelskiven skal man løse problemet, som i polære koordinater formuleres ved

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{i } \Omega,$$
$$u(1,\theta) = \sin^3\theta\,.$$

4.8. Løs problemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{for} \quad x^2 + y^2 < 4\,,$$
$$u = x^4 \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 = 4\,.$$

4.9. Løs følgende problem i en halvcirkel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{for} \quad r < 1, \quad 0 < \theta < \pi\,,$$
$$u(r,0) = u(r,\pi) = 0\,,$$
$$u(1,\theta) = \theta(\pi - \theta)\,.$$

4.10. Løs problemet

$$\Delta u = 0 \quad \text{for} \quad 1 < r < R\,,$$
$$u(1,\theta) = 0\,,$$
$$u(R,\theta) = f(\theta)\,;$$

hvor f er givet i $H^1(\mathbb{T})$.

4.11. Undersøg, hvad der må forudsættes om $g(x')$ for at løsningen (15) til det homogene Dirichlet problem i en terning $\Omega =]0,\pi[^3$ tilhører $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

§5. Tidsafhængige problemer

5.1 Den svingende streng.

Ligningerne for en svingende streng af længde a, fastholdt i endepunkterne, er, i en generel form,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - c(x)\partial_x^2 u(x,t) = 0 \qquad & \text{for } x \in \,]0,a[\,,\ t>0,\\ u(0,t)=u(a,t)=0 \qquad & \text{for } t>0,\\ u(x,0)=g_0(x) \quad & \text{for } x\in\,]0,a[\,,\\ \partial_t u(x,0)=g_1(x) \quad & \text{for } x\in\,]0,a[\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Funktionen $u(x,t)$ angiver udsvinget for punktet x på strengen til tiden t, $c(x)$ er en positiv C^∞-funktion, der angiver massetætheden langs strengen, og $g_0(x)$ og $g_1(x)$ er begyndelsesværdier for u og $\partial_t u$ til tiden $t=0$ (g_0 er begyndelsesudsvinget og g_1 er begyndelseshastigheden). Første linie i (1) er bølgeligningen (med en variabel koefficient) for én rumdimension, også kaldet *den éndimensionale bølgeligning.*

Hvis c er konstant, er der faktisk en helt eksplicit metode til at løse problemet ved nogle integrationer m.m. Lad $c=1$. Vi deler problemet op i to delproblemer, det ene med begyndelseshastighed 0:

$$\begin{gathered}\partial_t^2 v(x,t) - \partial_x^2 v(x,t) = 0,\\ v(0,t)=v(a,t)=0,\\ v(x,0)=g_0(x), \quad \partial_t v(x,0)=0;\end{gathered} \tag{2}$$

og det andet med begyndelsesudsving 0:

$$\begin{gathered}\partial_t^2 w(x,t) - \partial_x^2 w(x,t) = 0,\\ w(0,t)=w(a,t)=0,\\ w(x,0)=0, \quad \partial_t w(x,0)=g_1(x).\end{gathered} \tag{3}$$

Når v og w løser (2) henholdsvis (3), er $u=v+w$ løsning til det oprindelige problem. Vi bemærker nu, at hvis $g(x)\in C^2(\mathbb{R})$, så gælder

$$(\partial_t^2-\partial_x^2)g(x+t) = (\partial_t^2-\partial_x^2)g(x-t)=0;$$

det vil vi spille på ved konstruktion af løsninger til (2) og (3). Sættes

$$v(x,t)=\tfrac12 g_0(x+t)+\tfrac12 g_0(x-t),$$

ser vi simpelthen ved verifikation, at $v(x,t)$ løser (2) *i området*

$$\{\,(x,t)\mid x\in\,]0,a[\,,0\le t<\min\{x,a-x\}\,\},$$

når $g_0 \in C^2(\,]0,a[\,)$. Dette område er en trekant i (x,t)-planen over intervallet $]0,a[$ på x-aksen; det kaldes indflydelsesområdet for $]0,a[$. Det er det største område hvor $\frac{1}{2}g_0(x+t)+\frac{1}{2}g_0(x-t)$ er defineret (for $t \geq 0$).

Vi vil nu også inddrage randbetingelsen, altså anden linie i (2). For at få en løsning på et større område forlænger vi $g_0(x)$ til en ulige funktion på $]-a,a[$, og videre til en periodisk funktion $\widetilde{g}_0$ på $\mathbb{R}$ med periode $2a$, som i §1.4 (46). Hvis nu $\widetilde{g}_0 \in C^2(\mathbb{R})$, er

$$v(x,t) = \tfrac{1}{2}\widetilde{g}_0(x+t) + \tfrac{1}{2}\widetilde{g}_0(x-t) \tag{4}$$

løsning til differentialligningen i hele $\mathbb{R}^2$, og den opfylder såvel begyndelsesbetingelser som randbetingelse; det sidste fordi

$$\widetilde{g}_0(t) + \widetilde{g}_0(-t) = 0 = \widetilde{g}_0(a+t) + \widetilde{g}_0(a-t),$$

for alle t. For at $\widetilde{g}_0$ er C^2 kræves, at $g_0 \in C^2([0,a])$ med $g_0(0) = g_0(a) = g_0''(0) = g_0''(a) = 0$.

Problemet (3) løses som følger: Lad $\widetilde{g}_1$ være den ulige periodiske forlængelse af g_1, og lad $G_1(x) = \int_0^x \widetilde{g}_1(s)ds$ for $x \in \mathbb{R}$; bemærk at G_1 er den *lige* periodiske forlængelse af $G_1|_{[0,a]}$ (jvf. evt. §1.4 (46)). Hvis $G_1(x)$ er C^2 på $\mathbb{R}$, er

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}G_1(x+t) - \tfrac{1}{2}G_1(x-t) = \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{g}_1(s)\,ds \tag{5}$$

løsning til (3); det ses ved efterprøvning.

Vi får altså en C^2 løsning til (1) med $c=1$ under visse betingelser på g_0 og g_1, der kan opsummeres til:

$$\begin{gathered} g_0 \in C^2([0,a]), \quad g_0(0) = g_0(a) = g_0''(0) = g_0''(a) = 0, \\ g_1 \in C^1([0,a]), \quad g_1(0) = g_1(a) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

og løsningen er

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \tfrac{1}{2}\widetilde{g}_0(x+t) + \tfrac{1}{2}\widetilde{g}_0(x-t) + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{g}_1(s)\,ds. \tag{7}$$

Man kan vise, at løsningen er entydigt bestemt (Opg. 5.3). Endvidere er betingelserne (6) *nødvendige* for at få en C^2-løsning.

Ideen til at definere v ved (4) kan forklares ved, at $\partial_t^2 - \partial_x^2$ ved variabelskiftet

$$r = x+t, \quad s = x-t,$$

føres over i differentialoperatoren $-4\partial_r\partial_s$, hvor man kan integrere først m.h.t. s og derefter m.h.t. r, idet man søger at tilpasse løsningen til begyndelsesbetingelserne. Denne omskrivning kan også bruges til at argumentere for entydigheden (Opg. 5.2).

Løselighedsbegrebet kan generaliseres til begyndelsesværdier der ikke helt opfylder (6), og hvor man alligevel sætter $u = v + w$ defineret ved (4) og (5). F.eks. hvis $g_0 \in C^2([0,a])$ med $g_0(0) = g_0(a) = 0$ men ikke $g_0''(0) = g_0''(a) = 0$, så er $v(x,t)$ ikke fuldtud C^2, men dog acceptabel som løsning til (2) i en generaliseret forstand. Her kan man bemærke, at diskontinuiteterne af de anden afledede af v ligger på de brudte linier med hældningskoefficient ± 1, der starter i hjørnerne $(0,0)$ og $(a,0)$ og forløber i området $\{\, (x,t) \mid 0 \le x \le a,\ t \ge 0\}$ (idet de tilbagekastes når de rammer de lodrette linier $\{x = 0\}$ og $\{x = a\}$). Denne type af observationer har generalisationer til bølgeligninger i højere dimensioner (jvf. §4.1 (3)), hvor man finder at en diskontinuitet af de afledede af begyndelsesværdierne i et punkt x_0 for $t = 0$ mærkes på løsningens opførsel på keglen $\{\|x - x_0\| = t\}$ med toppunkt x_0 (og på visse reflekterede kegler, når Δ betragtes på et begrænset område med randbetingelse).

Det kan bemærkes, at den fundne løsningsformel fungerer fint også for negative t; det samme vil gælde det almene tilfælde behandlet nedenfor. Dette afspejler, at den fysiske proces, der her behandles matematisk, er *reversibel.* For varmeledning behandlet i næste afsnit gælder dette bestemt ikke, og dér fungerer løsningsformlen kun for $t > 0$.

Når c afhænger af x, kan man i visse heldige tilfælde finde et koordinatskift, der muliggør en løsning ved integration som ovenfor, men i almindelighed må man gribe til approksimationsmetoder. Separation af de variable og Fourierudvikling er ganske velegnet, idet vi får et regulært Sturm-Liouville problem, når $c(x) \in C([0,a])$ og $c(x) > 0$ på $J = [0,a]$. (Vi antager $c(x) \in C^\infty$ for simpelheds skyld.)

Lad os undersøge de mulige produktløsninger til (1). Indsættes $u(x,t) = X(x)T(t)$ i (1), fås en ligning

$$X(x)T''(t) - c(x)X''(x)T(t) = 0,$$

der ved division med XT giver

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{c(x)X''(x)}{X(x)},$$

hvor begge sider må være konstante (der hvor de er defineret). Når rand- og begyndelsesbetingelser tages i betragtning, fører dette til ligningerne for X

og T:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \begin{cases} -X''(x) = \lambda \frac{1}{c(x)} X(x) & \text{for } x \in \,]0,a[\,, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \\
&\text{(ii)} \quad \begin{cases} -T''(t) = \lambda T(t) & \text{for } t > 0, \\ T(0) = g_0,\ T'(0) = g_1; \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

hvor g_0 og g_1 er konstanter. Her er (8 i) et regulært Sturm-Liouville problem, således at de mulige værdier af λ udgøres af egenværdierne λ_n, $n \in \mathbb{N}$, med tilhørende egenfunktioner $e_n(x)$, der danner en ortonormal basis for H_ϱ ($\varrho = \frac{1}{c}$), ifølge §2.2. Egenværdierne er positive og simple, og for hvert λ_n har (8 ii) den entydigt bestemte løsning

$$T_n(t) = g_{0,n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t.$$

(Bemærk, at $\cos \sqrt{\lambda_n} t$ hhv. $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t$ løser problemet med $\{T(0), T'(0)\}$ $= \{1, 0\}$ hhv. $\{0, 1\}$.) Ialt fås et system af produktløsninger

$$u_n(x,t) = e_n(x)\big(g_{0,n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t\big). \tag{9}$$

Ved overlejring af disse kan man finde løsningen for vilkårlige begyndelsesværdier (i passende funktionsklasser): Når $g_0(x)$ og $g_1(x)$ har rækkerne

$$g_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} e_n(x), \quad g_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{1,n} e_n(x),$$

sættes

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t), \text{ hvor} \\
v(x,t) &\sim \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} e_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t, \\
w(x,t) &\sim \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} e_n(x) \sin \sqrt{\lambda_n}\, t.
\end{aligned} \tag{10}$$

Vedr. konvergensforhold benytter vi analysen fra §2.3. Lad os betegne

$$h_n(t) = g_{0,n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, t,$$

så er

$$v(x,t) \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(t) e_n(x). \tag{10$'$}$$

Da $|h_n(t)| = |g_{0,n} \cos \sqrt{\lambda_n} t| \leq |g_{0,n}|$, ser vi, at når $g_0 \in H_\varrho$ og dermed $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g_{0,n}|^2 < \infty$, er højre side af (10$'$) for hvert fast $t \geq 0$ en Fourierudvikling af en funktion $v(x,t)$ af x, som er i H_ϱ og dermed i $L_2(J)$.

Antag nu, at $g_0 \in H_0^1(J)$. Så er $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |g_{0,n}|^2 < \infty$, jvf. Sætning 2.18, således at $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |g_{0,n}|^2$ er majorantrække for $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |h_n(t)|^2$. For fast t bemærker vi, at ifølge Sætning 2.18 2° må $v(x,t) \in H_0^1(J)$, og rækken $(10')$ konvergerer mod $v(x,t)$ i $H_0^1(J)$ og dermed uniformt i x. Men nu kan vi tillige vise, at konvergensen er *uniform i t*: Ved §2.3 (29) haves, for hvert t, at

$$\begin{aligned}\sup_{x\in I} |v(x,t) - \textstyle\sum_{k\le n} h_k(t) e_k(x)|^2 &\le c_1^2 (c_0')^{-1} \textstyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |h_k(t)|^2 \\ &\le c_1^2 (c_0')^{-1} \textstyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |g_{0,k}|^2;\end{aligned} \tag{11}$$

og sidstnævnte udtryk går mod 0 for $n \to \infty$ *uafhængigt af* $t \in [0,\infty[$. Altså er $v(x,t) \in C([0,a] \times [0,\infty[\,)$.

På lignende måde analyseres $w(x,t)$. Her finder man, på grund af faktorerne $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$, at $g_1 \in L_2(I)$ er tilstrækkeligt til at sikre uniform konvergens af rækken for w i x og t (Opg. 5.4).

For de højere afledede bruges Bemærkning 2.20, i en elaboreret form vi ikke skal forsøge at få plads til her. Man bør naturligvis have styr på konvergensforholdene for de afledede op til anden orden for at bevise at sumfunktionen faktisk løser differentialligningen; her kan man vise, at disse uniforme konvergenser er sikret, når $g_0 \in H^3(J)$ og $g_1 \in H^2(J)$ med (6) opfyldt. Det benyttes også ved disse overvejelser, at $cn^2 \le \lambda_n \le Cn^2$, jvf. Sætning 2.19.

I det simple tilfælde hvor $c(x)$ er konstant (lad os tage $c = 1$), fås konvergensoplysningerne lettere fra det explicitte kendskab til egenfunktionerne og egenværdierne

$$e_n(x) = c_1 \sin \tfrac{n\pi x}{a}, \quad \lambda_n = \tfrac{n^2\pi^2}{a^2}$$

($c_1 = (2/a)^{\frac{1}{2}}$, jvf. Eksempel 2.5), hvor vi kan bruge resultaterne for trigonometriske Fourierrækker; men i det tilfælde har vi jo den enklere direkte integrationsmetode, afsnittet blev indledt med. Dog har egenfunktionerne en interesse i sig selv: Produktløsningerne (9), dvs. specielt

$$u_n(x,t) = \sin \tfrac{n\pi x}{a} \big(c_n \cos \tfrac{n\pi t}{a} + d_n \sin \tfrac{n\pi t}{a} \big), \tag{12}$$

er t-periodiske løsninger til bølgeligningen med periode $\sqrt{\lambda_n}$, specielt $\frac{n\pi}{a}$; de kaldes strengens *egensvingninger.* (Helt konkret, når fx. en violinstreng eller klaverstreng sættes i sådanne svingninger, hører man de rene toner; den dybeste tone fås for $n = 1$, den næste for $n = 2$ har netop det halve periodeinterval og giver tonen en oktav over, ... I reglen frembringes ved anslag en overlejring af disse toner med stærkt aftagende styrke for $n \to \infty$.)

Endvidere har rækkemetoden interesse for bølgeligninger i højere dimensioner, også dem med konstante koefficienter, se §5.3.

5.2 Varmeledning i en stang.

Ligningerne for varmeledning i en stang af længde a kan skrives (i forenklet form)

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - c(x)\partial_x^2 u(x,t) &= 0 \qquad \text{for } x \in \,]0,a[\,,\ t>0, \\ u(0,t) = u(a,t) &= 0 \qquad \text{for } t>0 \\ u(x,0) &= g_0(x) \quad \text{for } x \in \,]0,a[\,; \end{aligned} \tag{13}$$

her er $u(x,t)$ temperaturen i punktet x til tiden t, og den x-afhængige positive koefficient $c(x)$ tillader, at varmeledningsevnen kan variere fra punkt til punkt (den antages at være C^∞ for simpelheds skyld). Funktionen $g_0(x)$ angiver begyndelsestilstanden, og randbetingelserne i anden linie betyder, at stangens endepunkter fastholdes på temperaturen 0. Første linie er varmeledningsligningen (med en variabel koefficient) for én rumdimension, også kaldet *den éndimensionale varmeledningsligning.*

Vi vil løse problemet ved rækkeudvikling. Indsættes en produktfunktion $X(x)T(t)$ i første linie, fås en ligning, der ved division med XT giver

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{c(x)X''(x)}{X(x)},$$

hvor begge sider må være konstante. Dette fører, i betragtning af rand- og begyndelsesbetingelser, til de to problemer:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \begin{cases} -X''(x) = \lambda \frac{1}{c(x)} X(x) & \text{for } x \in \,]0,a[\,, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \\ &\text{(ii)} \quad \begin{cases} -T'(t) = \lambda T(t) & \text{for } t > 0, \\ T(0) = g_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

hvor g_0 er en konstant. Problemet (14 i) er det samme S.-L. problem som (8 i), med egenfunktioner e_n og egenværdier λ_n; og når λ_n indsættes i (14 ii), fås løsningen

$$T_n(t) = g_{0,n} e^{-\lambda_n t}$$

med $g_0 = g_{0,n}$. Ialt fås et system af produktløsninger

$$u_n(x,t) = e_n(x)T_n(t) = g_{0,n} e_n(x) e^{-\lambda_n t},$$

som ved overlejring giver løsninger mere generelt: Når $g_0(x)$ har Fourierrækken

$$g_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} e_n(x) \tag{15}$$

efter ortonormalsystemet $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sættes

$$u(x,t) \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} e_n(x) e^{-\lambda_n t}\,. \tag{16}$$

Vedr. konvergens benytter vi oplysningerne fra §2.3 på samme måde som i §5.1. Når $g_0 \in H_0^1(I)$, er $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |g_{0,n}|^2 < \infty$, jvf. Sætning 2.18. Nu er

$$u(x,t) \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n(t) e_n(x), \text{ med } k_n(t) = g_{0,n} e^{-\lambda_n t};$$

og når dette ses som en Fourierudvikling af $u(\cdot,t)$ for hvert fast t, kan vi benytte uligheden

$$|k_n(t)| \le |g_{0,n}|, \tag{17}$$

til at slutte at der er uniform konvergens i x for hvert t. Specielt er $u(x,0) = g_0(x)$. Også den mere præcise udnyttelse af §2.3 (29) som i (11) generaliseres til det foreliggende tilfælde, og giver uniform konvergens på hele området $\{(x,t) \mid x \in [0,a],\, t \ge 0\}$.

For de højere afledede bruges Bemærkning 2.20. Lad os nu også observere, at vi har en langt stærkere vurdering end (17) for $t \ge \varepsilon > 0$, nemlig

$$|k_n(t)| \le |g_{0,n}| e^{-cn^2\varepsilon}, \text{ når } t \ge \varepsilon; \tag{18}$$

vi bruger her, at $\lambda_n \ge cn^2$, jvf. Sætning 2.19. Denne vurdering kan bruges til at vise, at selv med lav regularitet af begyndelsesværdien, er løsningen C^∞ for $t > 0$. Da Bemærkning 2.20 ikke giver mange detaljer, vil vi blot vise dette for tilfældet $c(x) = 1$:

I dette tilfælde er rækken lig med

$$u(x,t) \sim (2/a)^{\frac12} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} \sin\frac{n\pi x}{a}\, e^{-(\pi/a)^2 n^2 t}; \tag{19}$$

og de ledvis differentierede rækker er

$$\partial_x^j \partial_t^k u(x,t) \sim \pm(2/a)^{\frac12} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} \big(\frac{n\pi}{a}\big)^{j+2k} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \frac{n\pi x}{a}\, e^{-(\pi/a)^2 n^2 t}. \tag{20}$$

For et fast $\varepsilon > 0$ har (20) for $t \ge \varepsilon$ den konvergente majorantrække

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} C_1 n^{j+2k} e^{-C_2 n^2 \varepsilon},$$

med passende konstanter C_1 og C_2 for hvert valg af j og $k \in \mathbb{N}_0$, så rækken for u samt alle de ledvis differentierede rækker konvergerer uniformt og absolut for $t \geq \varepsilon$. Dermed er u i C^∞ for $t > 0$, og opfylder $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ dér. (Dette gælder endda når blot $g_0 \in L_2([0,a])$, så at $|g_{0,n}| \leq \|g_0\|$.)

Bemærk, at varmeledningsproblemet ligner Dirichlet problemet på dette punkt: Løsningen er C^∞ i positiv afstand fra randen af (x,t)-området. Også en anden egenskab har de fælles, nemlig at man for varmeledningsligningen kan vise et maksimumsprincip i stil med Sætning 4.1 (Opg. 4.3).

På den anden side er der den forskel, at når varmeledningsligningen betragtes i et rektangel $[0,a] \times [0,T]$, er værdien af u i rektanglet *bestemt af* begyndelsesværdien g_0 og værdien 0 på siderne $x = 0$ og $x = a$, dvs. værdien på den fjerde side hvor $t = T$ fås af de øvrige data; den kan *ikke* foreskrives frit som ved Dirichlet problemet (jvf. §4.3).

Både for bølgeligningen (1) og for varmeledningsligningen (13) kan man erstatte $-c(x)\partial_x^2$ med en mere generel Sturm-Liouville operator, jvf. Opg. 5.5.

5.3 Højere rumdimensioner, egenværdiproblemer for Laplace operatoren.

Ved tidsafhængige problemer for flerdimensionale områder (dvs. hvor den samlede rum+tids-dimension er ≥ 3) vil det ved separationsmetoder være nødvendigt at "separere flere gange", som i behandlingen af Dirichlet problemet for kuglen i §4.4, hvis dette ikke allerede er forberedt med multiple Fourierrækker som i behandlingen af Dirichlet problemet for en kasse i §4.3.

Lad os gøre den principielle overvejelse en gang for alle. Vi betragter et problem, enten af varmeledningstype:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + Au(x,t) &= 0 \qquad \text{for } x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega; \end{aligned} \tag{21}$$

eller af bølgeligningstype:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v(x,t) + Av(x,t) &= 0 \qquad \text{for } x \in \Omega,\ t > 0, \\ v(x,0) &= g_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega, \\ \partial_t v(x,0) &= g_1(x) \quad \text{for } x \in \Omega; \end{aligned} \tag{22}$$

hvor A repræsenterer Laplace operatoren (m.h.t. x) på Ω med en randbetingelse. Indsættes en produktfunktion $X(x)T(t)$, giver (21) ved division med XT

$$\frac{AX(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{T(t)} = \text{ konstant,} \tag{23}$$

mens (22) giver

$$\frac{AX(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = \text{ konstant.} \tag{24}$$

I begge tilfælde har vi brug for at behandle egenværdiproblemet

$$AX(x) = \lambda X(x). \tag{25}$$

Såfremt dette har et fuldstændigt ortonormalsystem af egenfunktioner med tilhørende egenværdier

$$X_n(x), \quad \lambda_n > 0, \text{ for } n \in \mathbb{N},$$

får vi herefter ved indsættelse i (23) hhv. (24) den tilsvarende funktion $T_n(t)$ på formen

$$\begin{aligned} T_n(t) &= g_{0,n} e^{-\lambda_n t} && \text{for (23)}, \\ T_n(t) &= g_{0,n} \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t && \text{for (24)}, \end{aligned}$$

hvilket ialt giver produktløsningerne

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= g_{0,n} X_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad \text{hhv.} \\ v_n(x,t) &= X_n(x)\big(g_{0,n} \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t\big), \end{aligned}$$

for (21) hhv. (22) med begyndelsesværdier $g_{0,n}X_n(x)$ og $g_{1,n}X_n(x)$. Disse kan overlejres til at give løsninger til generelle begyndelsesværdier, som vi udvikler efter ortonormalsystemet $\{X_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$g_0(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} X_n(x), \quad g_1(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{1,n} X_n(x), \tag{26}$$

hvorefter vi sætter

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_{0,n} X_n(x) e^{-\lambda_n t}, \\ v(x,t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(x)\big(g_{0,n} \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{g_{1,n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t\big). \end{aligned} \tag{27}$$

Det afgørende skridt i denne strategi er at finde løsningerne til egenværdiproblemet (25). Her kan man i visse tilfælde udnytte separationsmetoder i de x-variable.

Strategien er helt almengyldig: Operatoren A behøver ikke repræsentere Laplace operatoren, men kan være en hvilkensomhelst operator i $L_2(\Omega)$, for hvilken vi har et fuldstændigt ortogonalsystem af egenvektorer e_n, så at $Ae_n = \lambda_n e_n$ (e_n svarer til X_n ovenfor), dvs. så at A *diagonaliseres* ved ortonormalbasen $\{e_n\}$. (Man kan endda generalisere problemerne (21) og (22) til problemer for funktioner u af $t \in \mathbb{R}$ med værdier i et Hilbert rum H, hvor A er en vilkårlig operator i H, der kan diagonaliseres.) Tilfældene behandlet i §§5.1–2 og Opg. 5.5 er faktisk bare specialtilfælde, hvor Ω er et interval og A er en S.-L. operator L.

Vi vil nu gennemgå de tre tilfælde hvor Ω er henholdsvis en cirkel i $\mathbb{R}^2$, en kugle i $\mathbb{R}^3$ eller en kasse i $\mathbb{R}^k$; og i hvert tilfælde søger vi løsningerne til

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad && \text{i } \Omega, \\ u &= 0 && \text{på } \partial\Omega; \end{aligned} \tag{28}$$

dette er *egenværdiproblemet for* $-\Delta$ *med homogen Dirichlet betingelse.* (Den almene teori minder i flere henseender om behandlingen af Sturm-Liouville problemet; nogle af elementerne i Opg. 5.6 for et parallelepipedum kan udføres for generelle områder.)

Egenværdiproblemet for en cirkelskive.

Her benyttes polære koordinater som forklaret i §4.4, hvorved differentialligningen tager formen

$$-\big[\partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u\big] = \lambda u.$$

Indsættelse af en produktfunktion $R(r)\Theta(\theta)$ og division med $R\Theta$ giver, efter multiplikation med r^2,

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \lambda r^2 = 0\,,$$

hvor de variable er separeret, så problemet føres over i de to problemer for hver sin variabel:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \begin{cases} -\Theta'' = \mu\Theta \quad \text{for } \theta \in\,]-\pi, \pi[\,, \\ \Theta \ \text{periodisk med periode } 2\pi\,, \end{cases} \\ &\text{(ii)} \quad \begin{cases} -r^2R'' - rR' + \mu R = \lambda r^2 R \quad \text{for } r \in\,]0,1[\,, \\ R \text{ kontinuert i } 0,\ R(1) = 0; \end{cases} \end{aligned} \tag{29}$$

hvor vi også har taget hensyn til randbetingelsen i (28). Problemet (29 i) er det samme som (20 i) i §4.4, og har altså løsningerne

$$\Theta_m(\theta) = e^{im\theta}, \quad \mu_m = m^2, \quad \text{hvor } m \in \mathbb{Z}.$$

Indsættes disse værdier for μ i (29 ii), fås efter en omskrivning

$$\begin{cases} -(rR')' + \dfrac{m^2}{r}R = \lambda r R \quad \text{for } r \in \,]0,1[\,, \\ R \text{ kontinuert i } 0,\ R(1) = 0; \end{cases} \tag{30}$$

som vi genkender som *Bessel problemet*, jvf. §3.1. For hvert $m \in \mathbb{Z}$ har (30) følgende system af (ikke normerede) egenfunktioner og egenværdier

$$R_{mn}(r) = J_{|m|}(j_n^{(|m|)} r), \quad \lambda_{mn} = (j_n^{(|m|)})^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

hvor J_k er den k'te Bessel funktion og $j_n^{(k)}$ dens n'te nulpunkt på $\mathbb{R}_+$. Hermed har vi fundet produktløsningerne

$$u_{mn}(r,\theta) = R_{mn}(r)\, e^{im\theta}, \quad m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}; \tag{32}$$

disse løsninger opfylder altså

$$\begin{aligned} -\Delta u_{mn} &= \lambda_{mn} u_{mn} && \text{i } \Omega, \\ u_{mn} &= 0 && \text{på } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ved overvejelser som for multiple trigonometriske rækker kan man vise, at fuldstændigheden af systemerne $\{e^{im\theta}\}_{m\in\mathbb{N}}$ i $L_2(\mathbb{T})$ og $\{R_{mn}/\|R_{mn}\|_\varrho\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $L_2([0,1], rdr)$ medfører, at

$$\Big\{ \frac{R_{mn}(r)}{\|R_{mn}\|_\varrho} e^{im\theta} \Big\}_{m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}}$$

er et fuldstændigt ortonormalsystem i $L_2([0,1]\times[-\pi,\pi], \frac{1}{2\pi} r dr d\theta)$. I de oprindelige koordinater bliver u_{mn} da (ved passende normering) et fuldstændigt ortonormalsystem i $L_2(\Omega, dxdy)$, idet $rdrd\theta$ svarer til $dxdy$ ved koordinatskiftet. Man kan vise, at u_{mn} er C^∞ i $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

For problemerne (21) og (22) finder vi hermed rækkeløsningerne

$$u(r,\theta,t) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} g_{0,mn} R_{mn}(r) e^{im\theta} e^{-\lambda_{mn} t}, \tag{33}$$

$$v(r,\theta,t) \sim \sum_{m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} R_{mn}(r) e^{im\theta} \big(g_{0,mn} \cos j_n^{(|m|)} t + \frac{g_{1,mn}}{j_n^{(|m|)}} \sin j_n^{(|m|)} t \big),$$

hvor koefficienterne fås fra rækkeudviklingerne af g_0 og g_1,

$$\begin{aligned} g_0(r,\theta) &\sim \sum_{m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} g_{0,mn} R_{mn}(r) e^{im\theta}, \\ g_1(r,\theta) &\sim \sum_{m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}} g_{1,mn} R_{mn}(r) e^{im\theta}. \end{aligned} \tag{34}$$

Det er ikke uoverkommeligt at diskutere konvergensforholdene, men vi vil ikke forsøge at inkludere diskussionen her. Af fuldstændigheden følger, at rækken for g_0 konvergerer i $L_2(\Omega)$, når $g_0 \in L_2(\Omega)$, og man kan vise, at den konvergerer uniformt mod g_0, når g_0 er i f.eks. $C^2(\overline{\Omega})$ med randværdi 0; i det sidste fald konvergerer de tilsvarende t-afhængige rækker også uniformt. For g_1 kræves lidt mindre for uniform konvergens af den t-afhængige række, da koefficienterne divideres med $\sqrt{\lambda_{mn}}$. Endvidere er der for $u(r, \theta, t)$ konvergens af alle ledvis differentierede rækker når $t \geq \varepsilon > 0$, så u løser varmeledningsligningen. For v kan en diskussion, der ligner den i §5.1, gennemføres. — Disse resultater bliver vel mest naturligt begrundede, når man viser dem som led i en mere almen diskussion af egenværdiproblemer for $-\Delta$ på generelle pæne områder, men dette kræver brug af mere dybtgående teorier. I den foreliggende ramme er det interessant at se hvorledes Bessel funktionerne dukker op her.

Funktionen $u(x, t)$ i (33) beskriver temperaturudviklingen i en cirkelformet plade med temperatur g_0 til tiden 0, når randens temperatur holdes på 0; og $v(x, t)$ løser problemet at finde svingningerne i en cirkulær membran (fastspændt ved randen), med given udgangsposition g_0 og udgangshastighed g_1. Leddene i rækken for v repræsenterer systemets egensvingninger.

Egenværdiproblemet for en kugle.

Her benyttes de sfæriske polære koordinater indført i §4.4. Ifølge oplysningerne dér tager egenværdiligningen formen

$$-\left[\partial_r^2 u + \frac{2}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta u\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\sigma^2 u\right] = \lambda u.$$

Vi søger produktløsninger $R(r)\Theta(\theta)\Sigma(\sigma)$. Indsætning, division med $R\Theta\Sigma$ og multiplikation med $r^2\sin^2\theta$ giver

$$-\left[r^2\sin^2\theta\frac{R''}{R} + 2r\sin^2\theta\frac{R'}{R} + \sin\theta\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta} + \frac{\Sigma''}{\Sigma}\right] = \lambda r^2\sin^2\theta,$$

hvoraf følger, at Σ''/Σ må være en konstant $c \in \mathbb{C}$. Som i §4.4 (20) ff. og (31) ff. ses, da Σ har periode 2π, at vi kan tage $\Sigma(\sigma) = e^{im\sigma}$, $c = -m^2$, hvilket indsættes i ligningen, som endelig ved division med $\sin^2\theta$ giver

$$-r^2\frac{R''}{R} - 2r\frac{R'}{R} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \lambda r^2.$$

Her kan R og Θ separeres, og vi finder, når randbetingelsen også tages i betragtning, at de skal løse

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta = \mu\Theta \quad \text{for } \theta \in\,]0,\pi[\,, \\ \Theta \text{ kontinuert i } 0 \text{ og } \pi; \end{cases} \\
&\text{(ii)} \quad \begin{cases} -r^2R'' - 2rR' + \mu R = \lambda r^2 R \quad \text{for } r \in\,]0,1[\,, \\ R \text{ kontinuert i } 0,\ R(1) = 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

For (35 i) gælder nøjagtigt den samme analyse som i §4.4, og vi finder løsningerne

$$P_l^{(|m|)}(\cos\theta), \quad \mu_l = l(l+1), \quad l \in \mathbb{N}_0 + |m|,$$

for hvert $m \in \mathbb{Z}$. Når en egenværdi $\mu = l(l+1)$ indsættes i (35 ii) fås ligningen

$$-r^2R'' - 2rR' + l(l+1)R = \lambda r^2 R.$$

Her indfører vi en ny funktion $S(r) = r^{\frac{1}{2}}R(r)$ og finder, at den skal løse

$$
\begin{cases} -(rS')' + \dfrac{(l+\frac{1}{2})^2}{r}S = \lambda rS \quad \text{for } r \in\,]0,1[\,, \\ S \text{ kontinuert i } 0,\ S(1) = 0. \end{cases}
\tag{36}
$$

Dette er endnu et singulært S.-L. problem, nemlig et *Bessel problem med halvtallig parameter*, og det kan løses ved at man definerer Bessel funktionen $J_{l+\frac{1}{2}}$ ved formlen §3.1 (12) og sætter

$$S_{lk}(r) = J_{l+\frac{1}{2}}(j_k^{(l+\frac{1}{2})}r), \quad \lambda_{lk} = (j_k^{(l+\frac{1}{2})})^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{37}$$

hvor $j_k^{(l+\frac{1}{2})}$ er det k'te nulpunkt for $J_{l+\frac{1}{2}}$ på $\mathbb{R}_+$ ($k \in \mathbb{N}$). Også dette system er fuldstændigt i H_ϱ ($\varrho(r) = r$). De "halvtallige" Bessel funktioner har en særlig karakter, idet de kan fremstilles ved *endelige* summer

$$J_{l+\frac{1}{2}}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{\frac{1}{2}}\big(\sin(z - \tfrac{1}{2}n\pi)f_n(z) + \cos(z - \tfrac{1}{2}n\pi)g_n(z)\big),$$

hvor f_n og g_n er rationale funktioner af z med heltalskoefficienter; specielt er

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{\frac{1}{2}}\sin z, \quad J_{\frac{3}{2}}(z) = \Big(\frac{2}{\pi z}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\sin z}{z} - \cos z\Big).$$

Hermed har vi ialt fundet produktløsningerne

$$u_{klm}(r,\theta,\sigma) = r^{-\frac{1}{2}}S_{lk}(r)\,P_l^{(|m|)}(\cos\theta)\,e^{im\sigma}, \tag{38}$$

og de er altså egenfunktioner for det oprindelige problem, med egenværdier

$$\lambda_{klm} = (j_k^{(l+\frac{1}{2})})^2, \text{ hvor } k \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}_0 + |m|,\ m \in \mathbb{Z}. \tag{39}$$

Man kan vise, at de udgør et ortonormalsystem i $L_2(\Omega)$, at dette ved normering giver en ortonormal basis, og at elementerne i det er C^∞ funktioner på $\overline{\Omega}$ (i (x, y, z)-koordinaterne).

Produktløsningerne bruges til at løse (21) og (22) for A virkende som Laplace operatoren på kuglen Ω, med homogen Dirichlet betingelse, idet begyndelsesværdierne Fourierudvikles efter ortonormalsystemet, og koefficienterne benyttes til at definere u og v, som i (26)–(27) men med en lidt mere kompliceret nummerering, jvf. (39). Om konvergensforhold gælder noget lignende som for cirkeltilfældet.

Fysiske problemer, der herved løses, er at bestemme temperaturudvikling i en kugle med fast temperatur 0 på randen, hhv. svingninger i en kugle med fastholdt rand.

Egenværdiproblemet for en kasse.

Endelig betragter vi en kasse i $\mathbb{R}^k$, og for simpelheds skyld tager vi $\Omega =]0, \pi[^k$, idet mere generelle intervaller blot giver ekstra konstanter at holde rede på.

For en produktfunktion $X_1(x_1) \cdots X_k(x_k)$ tager egenværdiligningen formen, efter division med $X_1 \cdots X_k$,

$$-\Big[\frac{X_1''}{X_1} + \cdots + \frac{X_k''}{X_k}\Big] = \lambda,$$

som separeres ud i problemerne

$$\begin{gathered} -X_j'' = \mu_j X_j \ \text{ for } x_j \in]0, \pi[, \quad j = 1, \ldots, k, \\ X_j(0) = X_j(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{40}$$

hvor μ_j'erne er indbyrdes forbundne ved ligningen

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k = \lambda.$$

De normerede løsninger til (40) er som bekendt

$$X_{jl}(x_j) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \sin l x_j, \quad \mu_{jl} = l^2, \quad l \in \mathbb{N};$$

og dermed får vi produktløsningerne (hvor $n = \{n_1, \ldots, n_k\}$, $\|n\|^2 = n_1^2 + \cdots + n_k^2$):

$$u_n(x) = (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k, \quad \lambda_n = \|n\|^2, \quad n \in \mathbb{N}^k. \tag{41}$$

Systemet (41) er et fuldstændigt ortonormalsystem for $L_2(\Omega)$, jvf. §1.4, og man kan vise, at disse funktioner (op til linearkombination af funktioner hørende til samme egenværdi) netop er samtlige egenfunktioner for $-\Delta$ på Ω. (Se også Opg. 5.6.)

Nu løses varmeledningsproblemet (21) og bølgeligningen (22) for dette område ved at man Fourierudvikler $g_0(x)$ og $g_1(x)$:

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^k} g_{0,n}(2/\pi)^{k/2}\sin n_1x_1\cdots\sin n_kx_k,\\
g_1(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^k} g_{1,n}(2/\pi)^{k/2}\sin n_1x_1\cdots\sin n_kx_k,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

og definerer

$$
u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^k} g_{0,n}(2/\pi)^{k/2}\sin n_1x_1\cdots\sin n_kx_k e^{-\|n\|t}, \tag{43}
$$

$$
v(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^k} (2/\pi)^{k/2}\sin n_1x_1\cdots\sin n_kx_k\big(g_{0,n}\cos\|n\|t + \frac{g_{1,n}}{\|n\|}\sin\|n\|t\big).
$$

Konvergensforholdene kan diskuteres på ganske tilfredsstillende måde på basis af IV §4.4 og Sætning 1.15, ligesom i beviset for Sætning 4.5. Det giver, at når $g_0\in C^m(\overline{\Omega})$ og $g_1\in C^{m-1}(\overline{\Omega})$, med alle afledede op til orden m hhv. $m-1$ lig med 0 på randen, og $m>k/2$, så konvergerer rækkerne for u og v uniformt i $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,\infty[$, så u og v er i $C(\overline{\Omega}\times[0,\infty[\,)$. Hvis $m>k/2+l$ for et helt positivt l, gælder den uniforme konvergens også for de ledvis differentierede rækker op til orden l, så u og v er i $C^l(\overline{\Omega}\times[0,\infty[\,)$, og tilfredsstiller på denne måde differentialligningen, når $l\geq 2$. (Randbetingelserne kan svækkes lidt.) For rækken for u gælder, når blot $g_0\in L_2(\Omega)$, at de ledvis differentierede rækker af enhver orden konvergerer uniformt på $\overline{\Omega}\times[\varepsilon,\infty[$ for ethvert $\varepsilon>0$, så her er differentialligningen tilfredsstillet når blot $g_0\in L_2(\Omega)$.

De fysiske problemer der herved løses, beskrives tilsvarende til de foregående tilfælde.

5.4 Inhomogene Dirichlet problemer, diagonalisering.

De egenfunktionsbestemmelser vi foretog i sidste afsnit kan også bruges til at løse Dirichlet problemer for Laplace operatoren med inhomogen differentialligning (kort benævnt inhomogene Dirichlet problemer), altså problemer af formen

$$
\begin{aligned}
-\Delta v &= f \quad \text{i } \Omega,\\
v &= \varphi \quad \text{på } \partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

for forskellige åbne mængder Ω i $\mathbb{R}^k$. I de tilfælde hvor vi allerede har løst problemet med $f = 0$, resterer der at løse problemet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{i } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{på } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{45}$$

thi når u er løsning til dette, og w løser problemet med $f = 0$ og et givet φ, så løser $v = u + w$ det fulde problem (44).

Vi vil benytte følgende strategi: Antag, at vi har fundet et system af egenfunktioner $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, altså løsninger til

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{i } \Omega, \\ u &= 0 \quad\ \ \text{på } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{46}$$

som er ortogonalt og *fuldstændigt*, dvs. det tilhørende ortonormalsystem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{u_n/\|u_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en ortonormal basis for $L_2(\Omega)$. Antag, at de tilhørende egenværdier λ_n er $\neq 0$. Når $f \in L_2(\Omega)$, betragtes Fourieropløsningen efter dette system,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f, e_n) e_n. \tag{47}$$

Sætter vi nu

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n) e_n, \tag{48}$$

vil hvert led i denne række opfylde randbetingelsen, og hvis ellers konvergens og ledvis anvendelse af $-\Delta$ kan begrundes, er

$$-\Delta u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n) \lambda_n e_n = f,$$

så vi har løst (45). Metoden kaldes: at løse (45) *ved diagonalisering.*

For at strategien skal fungere, skal en hel del ting være i orden: dels eksistensen af det fuldstændige system af egenfunktioner med egenværdier $\neq 0$, dels argumenterne for konvergens. For de tre specialtilfælde behandlet i sidste afsnit kender vi faktisk eksplicit et fuldstændigt system af egenfunktioner med tilhørende egenværdier ($\neq 0$), så her er det kun konvergensdiskussionen, der mangler. Tilmed har vi behandlet de tilsvarende homogene Dirichlet problemer i §4, så en fuldstændig fremstilling af løsningen til (44) vil kunne opnås.

Mere alment kan det oplyses, at når Ω er et begrænset område med bare nogenlunde "pæn" rand, så har (46) faktisk et fuldstændigt ortogonalsystem af løsninger, med tilhørende egenværdier > 0, og den skitserede strategi kan udføres i detaljer. Spørgsmålet om at løse (46) ligner i høj grad det endimensionale problem, vi behandlede i §2.2, Sturm-Liouville problemet. Man kan også her vise, at

$$(-\Delta u, u) = \sum_{j=1}^{k} \|\partial_{x_j} u\|^2 \geq c_0 \|u\|^2, \text{ for } u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ med } u = 0 \text{ på } \partial\Omega,$$

og heraf slutte positivitet af egenværdierne; også ortogonaliteten af egenfunktioner hørende til forskellige egenværdier er let at se. (Opg. 5.6 behandler et specialtilfælde.)

Men bl.a. på følgende punkt afviger det flerdimensionale tilfælde fra det endimensionale: Vi kan ikke være sikre på at egenværdierne er simple; f.eks. skal vi se, at der forekommer multiple egenværdier netop i de eksempler vi har behandlet eksplicit. Dog kan man vise i almindelighed, at hver egenværdi har *endelig multiplicitet*, og at følgen af forskellige egenværdier går mod ∞.

I eksemplerne vil vi blot opstille løsningerne som formelle rækker, mens vi afstår fra at komme ind på spørgsmål om konvergens af differentierede rækker; bemærk dog, at konvergens i $L_2(\Omega)$ er sikret af den almene teori, Sætning IV 1.14.

Det inhomogene Dirichlet problem for en cirkelskive. Her har vi det fuldstændige system af egenfunktioner $\{u_{mn}\}$ fra (32) (se også (31)), hvor $\{m, n\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Hver af egenværdierne λ_{mn} med $m \neq 0$ er dobbelt, idet $\lambda_{mn} = \lambda_{(-m)n} = (j_n^{(|m|)})^2$. Man kan vise (ved hjælp af en dyb sætning i algebraisk talteori), at samtlige forskellige Bessel funktioner J_k med $k \in \mathbb{N}_0$ ikke parvist har nulpunkter fælles på $\mathbb{R}_+$. Altså er multipliciteten dog ikke højere end 2.

Når $f \in L_2(\Omega)$ udvikles efter systemet u_{mn},

$$f(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}} c_{mn}(f) J_{(|m|)}(j_n^{(|m|)} r) e^{im\theta}, \tag{49}$$

bliver formlen for løsningen $u(r, \theta)$ til (45):

$$u(r, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}} \frac{c_{mn}(f)}{(j_n^{(|m|)})^2} J_{(|m|)}(j_n^{(|m|)} r) e^{im\theta}. \tag{50}$$

Det inhomogene Dirichlet problem for en kugle. Egenfunktionssystemet er bestemt i (38), med egenværdier (39), se også (37). Egenværdierne

λ_{klm}, nummereret ved $\{k, l, m\} \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N}_0 + |m|) \times \mathbb{Z}$, er multiple af flere årsager: Dels er $\lambda_{klm} = \lambda_{kl(-m)}$ når $m \neq 0$, men desuden optræder, for fast k og $l > 0$, den samme egenværdi $(j_k^{(l+\frac{1}{2})})^2$ for alle m med $|m| \leq l$. Atter kan det vises, at samtlige forskellige halvtallige Bessel funktioner $J_{l+\frac{1}{2}}$ med $l \in \mathbb{N}_0$ ikke parvist har nulpunkter fælles på $\mathbb{R}_+$; så multipliciteterne er fuldtud bestemt ved det allerede nævnte.

Når $f \in L_2(\Omega)$ udvikles efter systemet u_{klm},

$$f(r, \theta, \sigma) = \sum_{k \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{Z},\, l \geq |m|} c_{klm}(f) r^{-\frac{1}{2}} J_{(l+\frac{1}{2})}(j_k^{(l+\frac{1}{2})} r) P^{(|m|)}(\cos\theta) e^{im\sigma}, \quad (51)$$

bliver formlen for løsningen $u(r, \theta, \sigma)$ til (45):

$$u(r, \theta, \sigma) = \sum_{k \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{Z},\, l \geq |m|} \frac{c_{klm}(f)}{(j_k^{(l+\frac{1}{2})})^2} r^{-\frac{1}{2}} J_{(l+\frac{1}{2})}(j_k^{(l+\frac{1}{2})} r) P^{(|m|)}(\cos\theta) e^{im\sigma}. \quad (52)$$

Det inhomogene Dirichlet problem for en kasse. Systemet af egenfunktioner og egenværdier er givet ved (41). Når f udvikles efter dette system,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} c_n(f) (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k, \quad (53)$$

fås formlen for løsningen til (45):

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} \frac{c_n(f)}{\|n\|^2} (2/\pi)^{k/2} \sin n_1 x_1 \cdots \sin n_k x_k, \quad (54)$$

Med hensyn til multiplicitet, kommer dette an på, hvor mange forskellige måder der er til at skrive et tal N som sum af k heltalskvadrater

$$N = \|n\|^2 = n_1^2 + \cdots + n_k^2;$$

det er et talteoretisk problem. For de fleste værdier af N er der i det mindste de fra vores synspunkt forskellige løsninger, hvor to forskellige tal n_i og n_j bytter rolle. Når intervallængden π byttes ud med andre længder $a_1, \ldots, a_k$, skifter problemet karakter; nu spiller disse tals natur (f.eks. om de er rationale eller algebraiske) også ind.

For fuldstændigheds skyld vil vi også lige nævne, at der findes følgende integralformler for løsningerne til (45), når Ω er enhedskuglen i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, dvs. intervallet $]-1,1[$, enhedscirklen eller enhedskuglen:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int_{K(0,1)} \big(-|x-y| + |y||x-y^*|\big) f(y)\,dy \quad \text{ i } \mathbb{R}, \\ u(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{K(0,1)} \big(-\log\|x-y\| + \log(\|y\|\|x-y^*\|)\big) f(y)\,dy \quad \text{ i } \mathbb{R}^2, \\ u(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{K(0,1)} \Big(\frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|y\|\|x-y^*\|}\Big) f(y)\,dy \quad \text{ i } \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{55}$$

hvor y^* betegner det punkt på strålen fra centrum gennem y, der opfylder $\|y^*\| = \|y\|^{-1}$ (ikke defineret for $y = 0$).

Ovenstående fremstilling af nogle metoder til løsning af partielle differentialligninger har sit udspring i klassiske afhandlinger og bøger om emnet, og der er naturligvis utroligt meget mere, der kunne eller burde siges i denne sammenhæng. Vi slutter med at nævne lidt af litteraturen, som vi henviser til for yderligere oplysninger.

Lærebøger og samlede fremstillinger:

H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations*, Xerox Publishing Company, Lexington, Massachusetts, 1965.

S. G. Mihlin, *Linear Equations of Mathematical Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1972.

R. Courant og D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I, II*, Interscience Publishers, New York, 1953 og 1961.

P. M. Morse og H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics I, II*, McGraw-Hill, New York, 1953.

F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, London, 1975.

P. Garabedian, *Partial Differential Equations*, Wiley and Sons, New York, 1964.

L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Equations I–IV*, Springer Verlag, Heidelberg, New York, 1983 og 1985.

Håndbøger og værker om specielle funktioner:

G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Math. Soc., New York, 1959.

E. C. Titschmarsh, *Eigenfunction expansions I, II*, Clarendon Press, Oxford, 1946, 1958.

G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger og F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions I–III*, McGraw-Hill, New York, 1953.

M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, 1965.

Opgaver til §5.

5.1. Vis, at ved koordinatskiftet $(r,s) = (x+t, x-t)$ overføres ligningen $(\partial_t^2 - \partial_x^2)v = 0$ i ligningen $\partial_r \partial_s v = 0$.

5.2. Vis, at hvis $v \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty[\,)$ er løsning til

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2)v &= 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ v(x,0) &= 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t v(x,0) &= 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

så er $v = 0$.
(*Vink.* Man kan fortage et koordinatskift som i Opg. 5.1, og bemærke, at begyndelsesbetingelserne medfører at v, $\partial_s v$ og $\partial_r v$ er 0 på linien $r = s$, samt at differentialligningen viser, at $\partial_s v$ er konstant på halvlinier parallelle med r-aksen, altså 0; dernæst sluttes at v er konstant lig 0.
Bemærkning. Denne teknik kan også anvendes på problemet (2) med $g_0 = 0$, idet man f.eks. først opnår $v = 0$ i trekanten hvor $x \le t$ og derefter successivt inddrager større områder.)

5.3. Vis, at når u er reel og $\in C^2([0,a] \times [0,\infty[\,)$, så gælder for ethvert $T > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^a (\partial_t^2 u - \partial_x^2 u) u \, dx dt &= \int_0^T \int_0^a ((\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2) \, dx dt \\ &+ \int_0^a \partial_t u(x,T)\, u(x,T)\, dx - \int_0^a \partial_t u(x,0)\, u(x,0)\, dx \qquad (\star) \\ &+ \int_0^T \partial_x u(0,t)\, u(0,t)\, dt - \int_0^T \partial_x u(a,t)\, u(a,t)\, dt \end{aligned}$$

samt at

$$\int_0^a \partial_t u(x,t)\, u(x,t)\, dx = \tfrac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^a u(x,t)^2 \, dx, \quad t > 0. \qquad (\star\star)$$

Slut heraf, at når u løser (1) med $g_0 = g_1 = 0$, så er $u = 0$. Konklusionen udstrækkes til komplekse funktioner u.
(*Vink.* Lad $F(T) = \int_0^a u(x,T)^2 \, dx$. Man slutter af $(\star)$, at udtrykket i $(\star\star)$ er ≤ 0, dvs. $dF(T)/dT \le 0$. Hvis u nu ikke var identisk 0, måtte $F(T)$ vokse op fra 0 til en positiv værdi på et vist tidspunkt, så $dF(T)/dT > 0$ på et tidspunkt. — Argumentet kaldes energi-integral metoden.)

5.4. Vis, at når $g_1 \in L_2(J)$, er rækken for $w(x,t)$ i (10) uniformt konvergent i x og t.
(*Vink.* Bemærk, at $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ er lig med v_n defineret i Sætning 2.18.)

5.5. Betragt følgende generelle version af den endimensionale varmeledningsligning:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_x(p(x)\partial_x u(x,t)) + q(x)u(x,t) &= 0 && \text{for } x \in\,]\alpha,\beta[\,,\ t>0,\\ u(\alpha,t) = u(\beta,t) &= 0 && \text{for } t>0\\ u(x,0) &= g_0(x) && \text{for } x \in\,]\alpha,\beta[\,; \end{aligned}$$

hvor p og $q \in C^\infty([\alpha,\beta])$ med $p>0$, $q \geq 0$. Vis, ved brug af resultater fra §2, at når $g_0 \in H_0^1([\alpha,\beta])$, så har problemet en løsning

$$u \in C^\infty([\alpha,\beta] \times\,]0,\infty[\,) \cap C([\alpha,\beta] \times [0,\infty[\,).$$

5.6. Betragt $-\Delta$ på området $\Omega =]0,\pi[^k$ i $\mathbb{R}^k$. Lad A være operatoren i $L_2(\Omega)$, der virker som $-\Delta$ og har definitionsmængde

$$D(A) = \{\, u \in C^2(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ på } \partial\Omega \,\}.$$

Definer den sesquilineære form $a(u,v)$ ved

$$a(u,v) = \int_\Omega (\partial_{x_1} u\, \partial_{x_1} \bar{v} + \cdots + \partial_{x_k} u\, \partial_{x_k} \bar{v})\, dx,$$

for u og $v \in C^1(\overline{\Omega})$.

1° Vis, at der for u og $v \in D(A)$ gælder

$$(Au, v)_{L_2(\Omega)} = a(u,v).$$

2° Vis, at for $u \in C^1(\overline{\Omega})$ med $u = 0$ på $\partial\Omega$ gælder

$$a(u,u) \geq \frac{k}{\pi} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

(*Vink.* Benyt Lemma IV 3.8 for hver af de partielle afledede.)

3° Betragt egenværdiproblemet

$$Au = \lambda u, \quad u \in D(A).$$

Vis, at alle egenværdier er positive, og at egenfunktioner hørende til indbyrdes forskellige egenværdier er indbyrdes ortogonale. Slut heraf, at værdierne $\lambda_n = \|n\|^2$, $n \in \mathbb{N}^k$, er samtlige egenværdier for A, jvf. (41).

5.7. Vis påstandene efter ligning (43).

5.8. Hvilken multiplicitet har $(j_k^{(l+\frac{1}{2})})^2$, som egenværdi for (45) med Ω lig med enhedskuglen i $\mathbb{R}^3$?

5.9. Vis, at laveste egenværdi for (45) har multiplicitet 1, for de tre specialtilfælde beskrevet i §5.3–4.

5.10. Find de ni første egenfunktioner for problemet (45) hvor Ω er et rektangel $]0,\pi[\times]0,\pi/2[$.

5.11. Løs bølgeligningen

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(x,t) - (1+x)^2\partial_x^2 u(x,t) &= 0 && \text{for } x\in\,]0,1[\,,\ t>0,\\ u(0,t)=u(1,t) &= 0 && \text{for } t>0,\\ u(x,0) &= g_0(x) && \text{for } x\in\,]0,1[\,,\\ \partial_t u(x,0) &= g_1(x) && \text{for } x\in\,]0,1[\,;\end{aligned}$$

med brug af resultater fra Opg. 2.4. (Man kan dels benytte rækkeudvikling, dels føre problemet over i et af typen behandlet i starten af §5.1.)

5.12. (Maksimum modulus princippet) Vis, at når $f\in\mathcal{H}(G)$, hvor G er en åben mængde i $\mathbb{C}$, så gælder for en vilkårlig kompakt delmængde $K\neq\varnothing$ af G:

$$\max\{\,|f(z)|\mid z\in K\,\} = \max\{\,|f(z)|\mid z\in\partial K\,\}.$$

(*Vink.* Det er let at se, at begge maxima antages, og at der gælder '$\geq$'. For den omvendte ulighed overvejes først følgende udvidelse af maksimumsprincippet for harmoniske funktioner: Når $u(x,y)$ er harmonisk i den åbne mængde $G\subset\mathbb{R}^2$ og K er kompakt $\subset G$, så er

$$\max\{\,|u(x,y)|\mid (x,y)\in K\,\} = \max\{\,|u(x,y)|\mid (x,y)\in\partial K\,\};$$

dette gælder selv når $K\neq\overline{K^\circ}$. Herefter vises: 1° Når f er nulpunktsfri i G fås '$\leq$' ved at benytte at $\log|f|$ er harmonisk i G, jvf. Opg. III 5.6. 2° Når $f\equiv 0$, eller $K^\circ=\varnothing$, er resultatet oplagt. 3° For det resterende tilfælde kan man vise, at ∂K har uendeligt mange punkter, mens $K\cap Z(f)$ har endeligt mange punkter (jvf. Sætning III 6.5). Lad $M=\max\{\,|f(z)|\mid z\in\partial K\,\}$, og erstat G og K med

$$G'=\{\,z\in G\mid |f(z)|>\tfrac{1}{3}M\,\},\quad K'=\{\,z\in K\mid |f(z)|\geq\tfrac{2}{3}M\,\};$$

så kan 1° anvendes på G' og K'.)