M O D E R N E   A N A L Y S E

M E D   A N V E N D E L S E R

MATEMATISK INSTITUT
KØBENHAVNS UNIVERSITET

1984

Mod. An. 1984

MODERNE ANALYSE MED ANVENDELSER

Gerd Grubb

INDHOLDSFORTEGNELSE

Genoptrykt med rettelser januar 1987.

FORORD

Et af formålene med dette kursus er at knytte en forbindelse mellem de abstrakte begreber i funktionalanalyse og de klassiske problemer i matematisk fysik. Differentialligninger, der beskriver fysiske fænomener, har været kendt i mange år, mens metoderne til at løse dem har udviklet sig fra specielle løsninger på specielle problemer til almene teorier, der dækker store klasser af differentialoperatorer. Det er ikke muligt i et étsemester kursus at komme ret langt i fremstillingen af de generelle løsningsteorier; men der er lagt vægt på at udvikle den moderne ramme, hvori differentialligningerne bekvemt kan betragtes. Problemerne formuleres her på to måder, på den ene side ved hjælp af ubegrænsede operatorer i Hilbert rum, og på den anden side ved hjælp af begrænsede operatorer i distributionsrum, idet samspillet mellem de to betragtningsmåder fører til en uddybning af dem begge.

Ved tilrettelæggelsen af et sådant kursus er et af problemerne, hvor meget man skal gøre ud af distributionsteorien. Den fuldstændige teori (efter Laurent Schwartz) er meget tilfredsstillende og smuk, men også meget omfangsrig. Det blev overvejet at nøjes med et minimum af teori (tempererede distributioner og Sobolev rum over $\mathbb{R}^n$), men tanken blev opgivet - dels fordi man herved ikke sætter tilhørerne i stand til at læse den almindelige matematiske litteratur, dels fordi der herved kun behandles operatorer der virker på hele $\mathbb{R}^n$. Indførelsen af distributioner over åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$ er derfor taget med, og prisen for det har været at det vigtige redskab, der ligger i Fouriertransformationen, er placeret temmelig sent i kurset; hvorefter de vigtigste anvendelser heraf falder på plads til allersidst.

Hvis der havde været mere tid, ville ethvert af følgende emner kunne have fortjent en uddybning i kurset: kompakte operatorer (som inverser til differentialoperatorer) og deres egenværdibestemmelse, spektralteori iøvrigt, randværdiproblemer, bølgeligninger, og meget andet. - I foråret 1984 indgik Kapitel 1 - 2 og 4 - 9 i eksamenspensum, med visse overspringelser (bl.a. vedrørende koordinatskift).

Der resterer at takke de studerende i 1983 og 1984 for deres medvirken og gode kommentarer, og specielt at takke Ulla Jacobsen for en ekspertmæssig indsats og stadig hjælpsomhed ved opstillingen og renskrivningen af teksten.

Maj 1984

Gerd Grubb

MODERNE ANALYSE MED ANVENDELSER

Gerd Grubb

1. Introduktion.

1.1. Indledning.

For den, der beskæftiger sig med abstrakt funktionalanalyse, findes der i realiteten kun ét uendeligdimensionalt separabelt Hilbertrum. Sagt med andre ord: Når V og W er uendeligdimensionale separable Hilbertrum, findes der en isometri E af V på W (der f.eks. fås således: når $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ og $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ er ortogonale baser for V henholdsvis W, sætter vi $Ee_j = f_j$ og udvider E til en isometrisk afbildning af V på W ved linearitet og afslutning). Fra et abstrakt synspunkt kan vi hermed lige så godt identificere V med W; der er ikke nogen forskel i strukturmæssig henseende.

Når man vil beskæftige sig med de konkrete anvendelser af funktionalanalysen, møder man derimod hurtigt det fænomen, at der er en mængde separable Hilbert rum med forskellige navne, hvor det mindst interessante er at der findes isometrier mellem dem, mens derimod de forskelle, der træder frem ved rummenes forskellige brug, er af stor betydning.

Lad os straks give et eksempel (uden alle detaljer; de er en del af det vi skal studere nærmere). Vi kender Hilbert rummet $L^2(]a,b[)$ bestående af de Lebesgue målelige funktioner f på et interval $I =]a,b[\subset\mathbb{R}$, med normen

$$\|f\|_{L^2(I)} = \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad .$$

(Mere præcist består $L^2(I)$ af rummet af ækvivalensklasser af sådanne funktioner, hvor ækvivalensrelationen går ud på, at $f\sim g$ når $f-g$ er "0 næsten overalt", dvs. er 0 undtagen på en mængde med Lebesguemål 0.) Når vi skal behandle differentialoperatorer på I i rammen af $L^2(I)$, vil det tillige være interessant at betragte rummene

(1.1) $$H^m(I) = \left\{u \in L^2(I) \;\middle|\; \frac{d^k}{dx^k} u \in L^2(I) \quad \text{for} \quad 0 \le k \le m\right\}$$

(hvor $m \in \mathbb{N}$) ; $\frac{d^k}{dx^k} u$ er her defineret i en passende forstand (forklaret senere), hvorved $H^m(I)$ bliver et separabelt Hilbert rum med norm

(1.2) $$\|u\|_m = \left(\sum_{0 \le k \le m} \|\frac{d^k}{dx^k} u\|^2_{L^2(I)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Rummet $H^m(I)$ er et eksempel på et såkaldt Sobolev rum (Kapitel 7).

Det faktum, at der findes en isometri mellem $L^2(I)$ og $H^m(I)$, er nu langt mindre interessant end det faktum, at $H^m(I)$ består af en delmængde (et underrum) af funktionerne i $L^2(I)$; der er en indlejring

$$H^m(I) \subset L^2(I) ,$$

og topologien på $H^m(I)$ er stærkere (finere) end topologien på $L^2(I)$. $H^m(I)$ er en tæt delmængde af $L^2(I)$, fordi rummet $C_0^\infty(I)$ bestående af C^∞ funktioner på I , som er 0 uden for et kompakt delinterval af I , er indeholdt i alle rum $H^m(I)$, og der gælder

Lemma 1.1. $C_0^\infty(I)$ *er tæt i* $L^2(I)$.

Dette er kendt fra målteorien, og vil iøvrigt blive vist igen i den følgende tekst.

Vi har faktisk en hel skare af inklusioner:

(1.3) $$\dots \subset H^{m+1}(I) \subset H^m(I) \subset \dots \subset H^1(I) \subset L^2(I) ,$$

og det er langt mere interessant at opfatte disse rum som tætte underrum af $L^2(I)$ (og af hinanden) end at benytte, at de alle er isometriske med et abstrakt separabelt Hilbert rum.

Forskelligheden af $L^2(I)$ og $H^m(I)$ ligger naturligvis uden for selve Hilbertrumsbegrebet, men ligger i den øvrige struktur, der er knyttet til disse rum.

Et af de første vigtige problemer ved anvendelser af funktionalanalysen på konkrete fysiske problemer er at give en god mening til differentialoperatorer.

Det er velkendt, at ikke enhver kontinuert funktion er differentiabel; operatoren $\frac{d}{dx}$ har ikke mening som en overalt defineret operator i $C^0(\bar{I})$. Dette rum er jo et Banach rum med hensyn til sup-norm

(1.4) $$\|u\|_{C^0(\bar{I})} = \sup\{|u(x)| \mid x \in \bar{I}\} .$$

Derimod er $\frac{d}{dx}$ veldefineret for funktioner med kontinuert differentialkvotient på $\bar{I}$; disse udgør rummet $C^1(\bar{I})$, der som bekendt er et Banach rum med normen

(1.5) $$\|u\|_{C^1(\bar{I})} = \|u\|_{C^0(\bar{I})} + \|\tfrac{du}{dx}\|_{C^0(\bar{I})} .$$

Operatoren $\frac{d}{dx}$ er da en kontinuert operator fra $C^1(\bar{I})$ til $C^0(\bar{I})$. Den er <u>ikke</u> kontinuert med hensyn til C^0-norm begge steder (for eksempel vil $\frac{1}{n}\cos nx \to 0$ i C^0 , mens $\frac{d}{dx}(\frac{1}{n}\cos nx) = \sin nx$ ikke går mod 0 i C^0). $\frac{d}{dx}$ kan opfattes som en <u>ubegrænset</u> operator i $C^0(\bar{I})$, med definitionsområde strengt mindre end $C^0(\bar{I})$. (Ubegrænsede operatorer behandles mere systematisk i næste kapitel.)

Ønsker vi at realisere $\frac{d}{dx}$ som en kontinuert operator <u>i</u> et topologisk vektorrum, kan vi for eksempel indføre rummet $C^\infty(\bar{I})$ af funktioner på $[a,b]$ med kontinuerte afledede på $[a,b]$ af enhver orden. $C^\infty(\bar{I})$ er et fuldstændigt metrisk rum med hensyn til metrikken $d(u,v)$ defineret ved

(1.6) $$d(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|u^{(k)}-v^{(k)}\|_{C^0(\bar{I})}}{1+\|u^{(k)}-v^{(k)}\|_{C^0(\bar{I})}} ;$$

det er et såkaldt Fréchet rum (Kapitel 4).

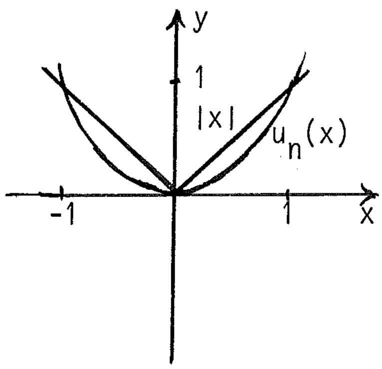
Med henblik på spektralteori er dog hverken Fréchet rum eller Banach rum særligt bekvemme; her har vi behov for at se $\frac{d}{dx}$ i relation til et Hilbert rum. $L^2(I)$ er det naturlige valg, men man ser straks, at $\frac{d}{dx}$ (defineret for u i underrummet $C^1(\bar{I})$) ikke er kontinuert m.h.t. L^2-norm (f.eks. er, også i denne norm, $u_n = \frac{1}{n}\cos nx$ konvergent, mens u_n' ikke er det). Lad os give operatoren et navn: A_1 betegner operatoren i $L^2(I)$ med <u>definitionsområde</u>

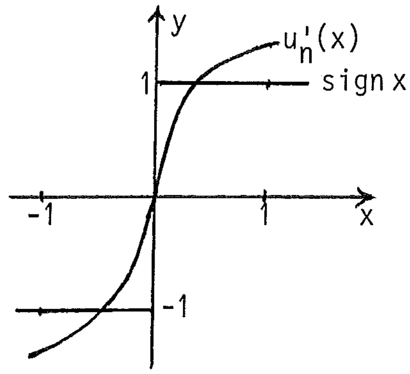
(1.7) $$D(A_1) = C^1(\bar{I})$$

og <u>virkning</u> $\frac{d}{dx}$, dvs.

$$A_1 u = u' \quad \text{for} \quad u \in C^1(\bar{I}) .$$

Operatoren A_1 er <u>tæt defineret</u>, thi $C^1(\bar{I})$ er tæt i $L^2(I)$. A_1 er som nævnt <u>ubegrænset</u>. Det næstbedste, en ubegrænset operator $T: V \to W$ kan være, når den ikke er begrænset, er at være <u>afsluttet</u>, dvs. når u_n er en følge i definitionsmængden for T, vil $u_n \to u$ i V med $Tu_n \to v$ i W medføre $u \in D(T)$ med $Tu = v$. Om A_1 har vi, at den ikke engang er afsluttet i $L^2(I)$. (For eksempel vil $u_n(x) = |x|^{1+1/n} \in C^1([-1,1])$ med $u_n(x) \to |x|$, og $u_n'(x) = \operatorname{sign} x(1+\frac{1}{n})|x|^{1/n} \to \operatorname{sign} x$ i $L^2(]-1,1[)$ for $n \to \infty$; men $|x|$ er ikke i $C^1([-1,1])$.)





Imidlertid kan vi definere <u>afslutningen</u> $A_s = \overline{A}_1$ af A_1 ved at tilføje til $D(A_1)$ de punkter $u \in L^2(I)$, for hvilke der findes $u_n \in D(A_1)$ med $u_n \to u$ i $L^2(I)$ og $A_1 u_n \to v$ i $L^2(I)$, idet vi sætter $A_s u = v$. Denne definition har god mening, <u>når</u> v <u>er entydigt bestemt ved</u> u, altså hvis $u_n \to 0$ med $A_1 u_n \to v$ medfører $v = 0$. Dette gælder, takket være Lemma 1.1:

<u>Lemma 1.2.</u> *Når* $u_n \in C^1(\overline{I})$ *med* $u_n \to 0$ *i* $L^2(I)$, *og* $u_n' \to v$ *i* $L^2(I)$, *så er* $v = 0$.

<u>Bevis.</u> For alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$ har vi, at

$$(v|\varphi)_{L^2(I)} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n' \overline{\varphi}\, dx = \lim_{n\to\infty}\left(-\int_a^b u_n \overline{\varphi}'\, dx\right) = 0 .$$

Altså er v ortogonal på den tætte delmængde $C_0^\infty(I)$ af $L^2(I)$, så $v = 0$. □

Operatoren A_s (afslutningen af A_1) giver en af løsningerne på opgaven at udvide $\frac{d}{dx}$ til en L^2-ramme; det er den såkaldte <u>stærke</u> definition:

(1.8)
$$D(A_s)=\{u\in L^2(I)\mid \exists \text{ følge } u_n\in C^1(\overline{I}) \text{ med } u_n\to u\,,\ u_n' \text{ konvergent, i } L^2(I)\}\,;$$
$$A_s u=\lim_{n\to\infty} u_n'\,.$$

Der findes et par andre fornuftige muligheder. Der er dels den svage definition, som spiller på en analogi med delvis integration:

(1.9)
$$D(A_w)=\{u\in L^2(I)\mid \exists v\in L^2(I)\,,\ \text{så } (v|\varphi)=-(u|\varphi') \text{ for } \varphi\in C_0^\infty(I)\}$$
$$A_w u=v\,;$$

her er det let at se, at A_w er en udvidelse af A_s. Endelig er der en definition, der er specielt knyttet til funktioner af én variabel, nemlig begrebet absolut kontinuitet (Kapitel 2):

Definition 1.3. *En funktion* u *siges at være absolut kontinuert på intervallet* $[a,b]$, *når* $u(x)=\int_a^x v(s)ds+c$, *hvor* $v\in L^1([a,b])$.

Med henblik på operatoren i $L^2(I)$ kan vi da definere (idet $L^2(I)\subset L^1(I)=L^1(\overline{I})$):

(1.10)
$$D(A_{ac})=\{u\in L^2(I)\mid u(x)=\int_a^x v(s)ds+c\,,\ \text{hvor } v\in L^2(I)\}$$
$$A_{ac}u=v\,.$$

(Mere herom i Afsnit 2.4.) Man kan nu vise (Kapitel 7), at

(1.11)
$$A_s=A_w=A_{ac}\,,$$

og at alle tre definitioner stemmer overens med definitionen af $\frac{d}{dx}$ i distributionsforstand. Mere herom i det følgende, hvor distributionsteorien indføres systematisk.

De tre udvidelser er gode for hvert sit formål, så beviset for deres overensstemmelse er en vigtig ting. Vi kalder så den fremkomne operator $\frac{d}{dx}$ igen. Mængden $D(A_s)$ bliver netop Sobolev rummet $H^1(I)$.

Forresten opnår man også en fornuftig version af $\frac{d}{dx}$ ved at tage afslutningen af A_0, der virker som $\frac{d}{dx}$ og har definitionsmængden

(1.12) $$D(A_0) = C_0^\infty(I) .$$

Her viser det sig dog, at $\overline{A}_0$ er en ægte restriktion af $\overline{A}_1 = A_s$; $D(\overline{A}_0)$ bliver rummet af funktioner $u \in D(A_s)$ med $u(a) = u(b) = 0$.

1.2. Om kursets indhold.

Ovenstående giver en lille smagsprøve på de problemer, man løber ind i, når man vil behandle en differentialoperator i en funktionalanalytisk ramme. Der er dels mange forskellige relevante vektorrum, dels mange forskellige realisationer af operatorerne, der har interesse. Når man ser på partielle differentialoperatorer (differentiation i mere end en variabel), bliver billedet endnu mere kompliceret. Der er derfor grund til at komme med et par almene betragtninger.

Om rummene: Der indføres i det følgende en mængde forskellige rum af funktioner (og deres generalisationer). Det er nok ikke muligt at absorbere alt dette på en gang, men man er godt hjulpet, hvis man lever sig ind i, med hvilket formål de forskellige typer indføres. Det må gerne være sådan, at man til sidst føler sig i stand til i en given situation at indføre de nødvendige rum selv.

Om operatorerne: I en kompliceret teori vil det i reglen være nødvendigt med et vist "misbrug af notationen", altså man forenkler nogle betegnelser, fordi en gennemført pedantisk skrivemåde kan gøre teksten ulæselig. Vi gør for eksempel det, at vi ofte kalder de realisationer eller generalisationer af differentialoperatoren d/dx , vi indfører, for d/dx igen. Dette er tilladeligt, når det fremgår af sammenhængen, hvad man mener.

Planen for kurset er iøvrigt følgende:

Vi begynder med at betragte ubegrænsede operatorer i Hilbert rum (i Kapitel 2); specielt afsluttede operatorer, symmetriske operatorer og deres selvadjungerede udvidelser, samt en mere almen klasse af halvbegrænsede operatorer. Dernæst fortæller vi (i Kapitel 3) lidt om den abstrakte behandling af bølgeligningen, Schrödingerligningen og varmeledningsligningen, ved teorien for semigrupper (og eventuelt spektralteori). Nu gælder det så om at få de konkrete operatorer passet ind i den abstrakte ramme, så de gode sætninger kan anvendes, og dette er på ingen måde trivielt.

Vi indfører distributionsteorien som det store sikkerhedsnet under hele kalkylen, en ramme hvor "alt er tilladt". Dette kræver dels noget teori for topologiske vektorrum (Kapitel 4), dels nogle nærmere oplysninger om C^∞-funktioner (Kapitel 5). Herefter indføres selve distributionerne og deres regneregler (Kapitel 6).

Forbindelsen til de abstrakte operatorer i L^2 genoptages med indførelsen af Sobolev rummene (rum af L^2-funktioner med L^2-afledede), der strukturerer det store mellemrum mellem C^∞ funktionerne og distributionerne (Kapitel 7). For det endimensionale tilfælde knyttes forbindelsen til absolut kontinuitet, og det regulære Sturm-Liouville problem behandles i detaljer.

For en virkeligt effektiv behandling af partielle differentialoperatorer må vi nu også indføre det vigtige redskab, der ligger i Fouriertransformationen (Kapitel 8), hvor differentialoperatorer med konstante koefficienter gøres til multiplikationsoperatorer. Der er her nødvendigt at indføre endnu et rum af distributioner, Schwartz rummet. (Der havde også været god mening i at gøre dette straks efter Kapitel 5, men så måtte de konkrete realisationer have ventet endnu længere.)

På basis heraf behandles i Kapitel 9 dels realisationer af partielle differentialoperatorer, og dels når vi frem til en dybere analyse af distributionsrummene og deres relation til kontinuert differentiable funktioner, samt til distributionsafledede af kontinuerte funktioner.

1.3. Nogle notationer.

$\mathbb{Z}$ er mængden af hele tal, $\mathbb{N}$ de positive hele tal og $\mathbb{N}_0$ de ikke-negative hele tal. $\mathbb{R}$ betegner de reelle tal, $\mathbb{R}_+$ og $\mathbb{R}_-$ de positive, hhv. negative reelle tal. $\mathbb{R}^n$ er det n-dimensionale reelle euklidiske rum, med punkter $x = (x_1,\dots,x_n)$. $\mathbb{R}^n_+$ og $\mathbb{R}^n_-$ er delmængderne hhv.

$$\mathbb{R}^n_\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \gtrless 0\} , \tag{1.13}$$

hvis rand $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ identificeres med $\mathbb{R}^{n-1}$; punkterne her betegnes da ofte x' (så at $x = (x',x_n)$).

$\mathbb{C}$ betegner mængden af komplekse tal, og $\mathbb{C}_\pm$ de komplekse tal med positiv hhv. negativ imaginærdel. $\mathbb{C}^n$ er det n-dimensionale komplekse euklidiske rum.

De funktioner, vi betragter, er i reglen funktioner på (delmængder af) $\mathbb{R}^n$ med værdier i $\mathbb{C}$ (vektorielle funktioner, med værdier i $\mathbb{C}^N$, kan også forekomme, eller vi kan betragte reelle funktioner).

Differentiation af funktioner på $\mathbb{R}$ angives ved $\frac{d}{dx}$, ∂_x eller ∂, idet vi skriver $\frac{1}{i}\frac{d}{dx} = D_x$ eller D (her er $i = \sqrt{-1}$). De partielle differentialoperatorer på $\mathbb{R}^n$ betegnes

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_{x_j} \quad \text{eller} \quad \partial_j \;; \quad \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} = D_{x_j} \quad \text{eller} \quad D_j \;.$$

For mere komplicerede udtryk bruges multiindex notation: Når $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, er

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \;, \quad D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|}\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \;,$$

her er $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Operatorerne bruges bl.a. på funktioner med kontinuerte partielle afledede op til orden $|\alpha|$, hvor differentiationernes rækkefølge er ligegyldig. Faktoren $\frac{1}{i}$ er bekvem i forbindelse med Fourier transformationen. Med konventionerne

$$\alpha \le \beta \quad \text{betyder} \quad \alpha_1 \le \beta_1,\dots,\alpha_n \le \beta_n \;,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1,\dots,\alpha_n \pm \beta_n) \;,$$

har vi for u og v med kontinuerte partielle afledede af orden op til N dels Leibniz' formel

(1.14) $$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta u \, D^{\alpha-\beta} v \;, \quad \text{for} \quad |\alpha| \le N \;,$$

dels Taylor's formel

(1.15) $$u(x+y) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{y^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} y^\alpha \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} \partial^\alpha u(x+\theta y)d\theta$$

(dette er en nøjagtig version, hvoraf de andre kendte formler kan udledes).

For $x \in \mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ skriver vi

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \;, \quad \text{og}$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \;, \quad |x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} \;.$$

$\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ forsynes med normen $|x|$, der gør dem til Hilbert rum over $\mathbb{R}$ hhv. $\mathbb{C}$.

Når X og Y er topologiske rum, betegner $X \times Y$ produktrummet, bestående af par $\{x,y\}$ hvor $x \in X$ og $y \in Y$, og forsynet med produkttopologien (jvf. Mat 313). Når X og Y specielt er vektorrum, er $X \times Y$ ligeledes på naturlig måde et vektorrum. Hvis X og Y er Banach rum, tillægges $X \times Y$ gerne normen

$$\|\{x,y\}\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y , \tag{1.16}$$

med hvilken $X \times Y$ er et Banach rum. Hvis X og Y specielt er Hilbert rum, bruger man dog hellere den dermed ækvivalente norm

$$\|\{x,y\}\|_{X\oplus Y} = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} , \tag{1.17}$$

hørende til skalarproduktet

$$(\{x,y\} \mid \{x',y'\})_{X\oplus Y} = (x|x')_X + (y|y')_Y , \tag{1.18}$$

med hvilket $X \times Y$ er et Hilbert rum, der betegnes $X \oplus Y$. Denne betegnelse bruges også for den direkte sum af to ortogonale underrum X og Y af et Hilbert-rum H.

I almindelighed defineres

$$X \pm Y = \{x \pm y \mid x \in X \text{ og } y \in Y\}$$
$$\Omega X = \{\alpha x \mid \alpha \in \Omega \text{ og } x \in X\}$$

når X og Y er delmængder af et vektorrum V over et skalarlegeme $\mathbb{L}$ og $\Omega \subset \mathbb{L}$. Man skriver specielt

$$\{x\} + Y = x + Y$$
$$\{\alpha\}\, Y = \alpha Y$$

når $x \in X$ og $\alpha \in \mathbb{L}$. Når X og Y er underrum af et vektorrum V, betegnes $X + Y$ ved $X \dotplus Y$ såfremt X og Y er lineært uafhængige.

Endelig, hvis X er et afsluttet underrum af et Hilbert rum Y, betegner $Y \ominus X$ det ortogonale komplement til X i Y.

Lad $p \in [1,\infty]$. For en Lebesgue målelig delmængde M af $\mathbb{R}^n$ betegner $L^p(M)$ vektorrummet af ækvivalensklasser (som nævnt side 1.1) af målelige funktioner $f\colon M \to \mathbb{C}$ med endelig norm

$$\|f\|_{L^p(M)} = \left(\int_M |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \quad \text{når} \quad p < \infty ,$$

(1.19)

$$\|f\|_{L^\infty(M)} = \text{ess sup} \, |f(x)| \quad \text{når} \quad p = \infty .$$

Det er et Banach rum med denne norm. Når $p = 2$ fås specielt et Hilbertrum, med det tilhørende skalarprodukt

$$(f|g)_{L^2(M)} = \int_M f(x)\overline{g}(x)dx .$$

Hölder's ulighed

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right| \le \|f\|_{L^p(M)} \|g\|_{L^{p'}(M)} , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1 \tag{1.20}$$

gælder når $f \in L^p(M)$ og $g \in L^{p'}(M)$; det er (Cauchy-)Schwarz' ulighed i tilfældet $p = 2$. Bemærk, at $L^p(\Omega) = L^p(\overline{\Omega})$, når Ω f.eks. er en åben kugle.

Når M har endeligt mål, er der en inklusion

$$L^p(M) \subset L^q(M) \quad \text{når} \quad p > q , \tag{1.21}$$

idet der for $f \in L^p(M)$ gælder, med $r = p/q$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^q(M)} = \left(\int_M |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q} &= \left(\int_M |f(x)|^{p/r} \cdot 1 \, dx\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_M |f(x)|^p\right)^{1/rq} \left(\int_M 1 \, dx\right)^{1/r'q} \\ &= \|f\|_{L^p(M)} \, \mathrm{Vol}(M)^{1/q-1/p} \end{aligned} \tag{1.22}$$

hvor $\mathrm{Vol}(M) = \int_M 1 \, dx$ er målet (volumenet) af M .

Bemærkning 1.3. Enkelte steder i disse noter henvises der til stoffet i forudgående kurser i funktionalanalyse (Mat 313, siden afløst af Mat 3 FU). Det drejer sig om basale ting, der indgår i standardlærebøger om funktionalanalyse, og kan findes dér hvis de med tiden udgår af de aktuelle kurser.

2. Om ubegrænsede operatorer.

2.1. Ubegrænsede operatorer i Banach rum.

Lad X og Y være komplekse (eller evt. reelle) Banach rum.

I den del af funktionalanalysen, hvor man udelukkende beskæftiger sig med begrænsede lineære operatorer, er det i reglen en selvfølge, at der med operatoren $T\colon X \to Y$ menes en operator, hvis definitionsmængde er X og hvis værdimængde ligger i Y. Imidlertid er det, bl.a. for anvendelserne på differentialligninger, nødvendigt at inddrage lineære operatorer, der ikke er overalt definerede i X (og ikke med god mening kan defineres overalt). Vi siger, at T er en operator fra X til Y, når definitionsmængden $D(T)$ (som antages altid at indeholde 0) er et underrum af X og værdimængden $R(T)$ er et underrum af Y, og vi skriver stadig $T\colon X \to Y$, med eventuelle nærmere oplysninger om $D(T)$. (Når $X = Y$, siger vi at T er en operator i X.) Vi betegner kernen af T (nulrummet for T) ved $Z(T)$,

$$Z(T) = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\} . \tag{2.1}$$

Mængden af begrænsede, overalt definerede operatorer fra X til Y betegnes, som i Mat 313, ved $\mathbb{B}(X,Y)$, eller $\mathbb{B}(X)$ når $X = Y$.

De operatorer $T\colon X \to Y$ vi betragter, vil oftest være tæt definerede (dvs. $\overline{D(T)} = X$). Hvis T er begrænset, udvides den da på oplagt måde til en begrænset operator $\overline{T}\colon X \to Y$ med $D(\overline{T}) = X$ (i så fald er der ikke meget nyt i at tillade $D(T) \neq X$). Med det har også betydning at betragte ubegrænsede operatorer. En klasse af ubegrænsede operatorer, der kan behandles i en rimelig sammenhæng med de begrænsede, er de afsluttede ubegrænsede operatorer.

Definition 2.1. *En lineær operator* $T\colon X \to Y$ *siges at være afsluttet (lukket), når grafen* $G(T)$

$$G(T) = \{\{x,Tx\} \mid x \in D(T)\} \tag{2.2}$$

er et afsluttet underrum af $X \times Y$.

Idet X og Y er metriske rum har vi oplagt følgende kriterium for afsluttethed.

Lemma 2.2. $T: X \to Y$ *er afsluttet hvis og kun hvis der gælder: Når* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *er en følge i* $D(T)$ *med* $x_n \to x$ *i* X *og* $Tx_n \to y$ *i* Y *, så er* $x \in D(T)$ *med* $y = Tx$.

Afsluttet graf - sætningen (Mat 313, Theorem 9.10) giver, at hvis $T: X \to Y$ er afsluttet og har $D(T) = X$, så er T begrænset. For afsluttede, tæt definerede operatorer er altså $D(T) \neq X$ ækvivalent med ubegrænsethed.

Bemærk, at et underrum G af $X \times Y$ er graf af en lineær operator $T: X \to Y$ hvis og kun hvis der for hvert x i mængden $pr_1 G$

$$pr_1 G = \{x \in X \mid \exists y \in Y \quad \text{så} \quad \{x,y\} \in G\}$$

er højst ét y , så $\{x,y\} \in G$; da er $Tx = y$ og $D(T) = pr_1 G$. På grund af lineariteten kan vi nu også formulere kriteriet for at G er en graf således:

Lemma 2.3. *Et underrum* G *af* $X \times Y$ *er en graf hvis og kun hvis* $\{0,y\} \in G$ *medfører* $y = 0$.

Når S og T er operatorer fra X til Y , og $D(S) \subset D(T)$ med $Sx = Tx$ for $x \in D(S)$, siger vi, at T er en udvidelse af S , og S er en restriktion af T . Det har ofte interesse at vide, om en forelagt operator T har en afsluttet udvidelse. Når T er begrænset, gælder dette altid, idet vi simpelthen kan tage operatoren $\overline{T}$ med graf $\overline{G(T)}$; her er $\overline{G(T)}$ en graf, fordi $x_n \to 0$ medfører $Tx_n \to 0$. Når T er ubegrænset, er det ikke sikkert at T har en afsluttet udvidelse (jvf. Øvelse 2.1). Men hvis T har en afsluttet udvidelse T_1 , gælder at $G(T_1)$ er et afsluttet underrum af $X \times Y$ som indeholder $G(T)$ og dermed $\overline{G(T)}$. I så fald er $\overline{G(T)}$ selv en graf (jvf. Lemma 2.3). Den er faktisk grafen af den mindste afsluttede udvidelse af T ; denne kaldes afslutningen (aflukningen) af T og betegnes $\overline{T}$. (Bemærk, at når T er ubegrænset, er $D(\overline{T})$ en ægte delmængde af $\overline{D(T)}$.)

Når S og T er operatorer fra X til Y , defineres $S+T$ ved

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} D(S+T) &= D(S) \cap D(T) , \\ (S+T)x &= Sx + Tx \quad \text{for} \quad x \in D(S+T) ; \end{aligned}$$

og når R er en operator fra Y til Z , defineres RT ved

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} D(RT) &= \{x \in D(T) \mid Tx \in D(R)\} , \\ (RT)x &= R(Tx) \quad \text{for} \quad x \in D(RT) . \end{aligned}$$

(Som vist i Øvelse 2.4 kan $R(S+T)$ være forskellig fra $RS + RT$. Vedrørende afslutningen af produkter af operatorer, se Øvelse 2.6.)

Udover X-normen kan man forsyne $D(T)$ med den såkaldte graftopologi. For Banach rum defineres denne i reglen ved grafnormen

$$(2.5)\qquad \|x\|'_{D(T)} = \|x\|_X + \|Tx\|_Y ,$$

og for Hilbert rum ved den hermed ækvivalente norm (også kaldet grafnormen)

$$(2.6)\qquad \|x\|_{D(T)} = (\|x\|_X^2 + \|Tx\|_Y^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

og det tilhørende skalarprodukt

$$(x|y)_{D(T)} = (x|y)_X + (Tx|Ty)_Y ,$$

der stemmer overens med det sædvanlige skalarprodukt på $X \oplus Y$. Grafnormen på $D(T)$ er åbenbart stærkere end X-normen på $D(T)$, og de er ækvivalente hvis og kun hvis T er en begrænset operator.

Når $T: X \to Y$ er tæt defineret, kan vi indføre den adjungerede operator $T^*: Y^* \to X^*$ ved følgende forskrifter: Definitionsmængden $D(T^*)$ består af de $y^* \in Y^*$ for hvilke funktionalen

$$(2.7)\qquad x \rightsquigarrow y^*(Tx) , \qquad x \in D(T) ,$$

er kontinuert (fra X til $\mathbb{C}$). Idet $D(T)$ er tæt i X, betyder dette at der findes et entydigt bestemt $x^* \in X^*$, så at

$$(2.8)\qquad y^*(Tx) = x^*(x) \quad \text{for} \quad x \in D(T) .$$

Da x^* er bestemt ved y^* definerer vi T^* ved

$$(2.9)\qquad T^*y^* = x^* .$$

Lemma 2.4. *Lad* T *være tæt defineret og indfør* $T^*: Y^* \to X^*$ *som ovenfor. Så er* T^* *afsluttet.*

Bevis: Lad $y_n^* \in D(T^*)$ for $n \in \mathbb{N}$, med $y_n^* \to y^*$ og $T^*y_n^* \to z^*$ for $n \to \infty$. Vi skal vise, at $y^* \in D(T^*)$ med $T^*y^* = z^*$. Imidlertid har vi, for alle $x \in D(T)$

$$y^*(Tx) = \lim_{n\to\infty} y_n^*(Tx) = \lim_{n\to\infty}(T^*\, y_n^*)(x) = z^*(x)\ .$$

Dette viser, at $y^* \in D(T^*)$ med $T^*y^* = z^*$. □

Når $X = Y$, har det interesse sammen med T at betragte operatorerne $T-\lambda I$, hvor $\lambda \in \mathbb{C}$ (her er naturligvis $D(T-\lambda I) = D(T)$). Resolventmængden $\rho(T)$ defineres som mængden af de $\lambda \in \mathbb{C}$ for hvilke $T-\lambda I$ er en bijektion af $D(T)$ på X med begrænset invers $(T-\lambda I)^{-1}$, og spektret $\sigma(T)$ defineres som komplementærmængden $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

2.2. Ubegrænsede operatorer i Hilbert rum.

Vi ser nu på tilfældet, hvor X og Y er komplekse Hilbert rum. Riesz' repræsentationssætning giver os her en identifikation mellem X og X^* , således at funktionalen $x^* \in X^*$ svarer til elementet $v \in X$ ved forskriften: $x^*(x) = (x|v)$ for alle $x \in X$. Den adjungerede operator T^* til en tæt defineret operator $T\colon X \to Y$ bliver herved defineret som en operator fra Y til X , for hvilken

(2.10) $$(Tx|y)_Y = (x|T^*y)_X \quad \text{for alle } x \in D(T)\ ,$$

med $D(T^*)$ lig med mængden af alle $y \in Y$ for hvilke der findes $z \in X$ så z kan indgå som T^*y i (2.10). Bemærk specielt, at $y \in Z(T^*)$ (jvf. (2.1)) hvis og kun hvis $y \perp R(T)$, altså der gælder altid

(2.11) $$Y = \overline{R(T)} \oplus Z(T^*)\ .$$

Det er ikke svært at vise, at når $S\colon X \to Y$, $T\colon X \to Y$ og $R\colon Y \to Z$ er tæt definerede, med $D(S+T)$ og $D(RT)$ tæt i X , så er

(2.12) $$S^* + T^* \subset (S+T)^* \quad \text{og} \quad T^*R^* \subset (RT)^*\ ;$$

inklusionerne kan være ægte (jvf. Øvelse 2.7). Bemærk specielt, at for $\alpha \in \mathbb{C}$ er

(2.13) $$(T+\alpha I)^* = T^* + \overline{\alpha} I\ , \quad \text{og} \quad (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*\ .$$

I betegner identitetsoperatoren. $T+\alpha I$ skrives også $T+\alpha$.

Sætning 2.5. *Lad* $T\colon X \to Y$ *være en tæt defineret operator mellem to Hilbert rum* X *og* Y . *Da er*

(2.14) $$X \oplus Y = \overline{G(T)} \oplus UG(T^*) ,$$

hvor U *er operatoren fra* $Y \oplus X$ *til* $X \oplus Y$ *givet ved* $U\{v,w\} = \{-w,v\}$ *. Hvis yderligere* T *er afsluttet, er* T^* *tæt defineret og* $T^{**} = T$.

Bevis: Lad $\{v,w\} \in X \oplus Y$. Så er følgende udsagn ækvivalente:

$$\{v,w\} \in UG(T^*)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{w,-v\} \in G(T^*)$$
$$\Updownarrow$$
$$(Tx|w)_Y = -(x|v)_X \quad \forall x \in D(T)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\{x,Tx\} \mid \{v,w\})_{X\oplus Y} = 0 \quad \forall x \in D(T)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{v,w\} \perp G(T) .$$

Da $\overline{G(T)} = G(T)^{\perp\perp}$ (ved en almindelig regel om underrum), viser dette identiteten (2.14). U er klart en isometri af $Y \oplus X$ på $X \oplus Y$, og bevarer ortogonalitet, så der gælder endvidere

(2.15) $$Y \oplus X = U^{-1}(X\oplus Y) = U^{-1}\overline{G(T)} \oplus G(T^*) .$$

Antag nu, at T er afsluttet, dvs. $G(T) = \overline{G(T)}$. Vi kan da vise, at $D(T^*)$ er tæt i Y: Hvis $y \in Y \ominus \overline{D(T^*)}$, så er $\{y,0\} \perp G(T^*)$, hvormed $\{y,0\} \in U\,\overline{G(T)}$ ved (2.15) og altså $\{0,y\} \in G(T)$. Da må $y = 0$ ifølge Lemma 2.3, hvilket viser at $Y \ominus \overline{D(T^*)} = \{0\}$.

I dette tilfælde har $T^*: Y \to X$ en adjungeret operator T^{**} , og der gælder ifølge det allerede viste, at

$$Y \oplus X = \overline{G(T^*)} \oplus U^{-1}G(T^{**}) = G(T^*) \oplus U^{-1}G(T^{**}) ,$$

da T^* er afsluttet ifølge Lemma 2.4. Heraf fås

$$X \oplus Y = U(Y\oplus X) = UG(T^*) \oplus G(T^{**}) ,$$

hvilket giver, ved sammenligning med (2.14), at $G(T^{**}) = \overline{G(T)} = G(T)$ (da T var afsluttet). Altså er $T^{**} = T$. $\square$

Bemærk, at hvis S er tæt defineret, gælder:

(2.16) $$S \subset T \quad \text{medfører} \quad S^* \supset T^* .$$

Korollar 2.6. *Lad* $T: X \to Y$ *være tæt defineret. Så har* T *en afsluttet udvidelse, hvis og kun hvis* T^* *er tæt defineret, og i så fald er*

$$T^* = (\bar{T})^* \quad og \quad T^{**} = \bar{T} .$$

Bevis: Hvis T har en afslutning, er specielt $\overline{G(T)} = G(\bar{T})$. Så er $T^* = (\bar{T})^*$ ifølge (2.14), og $(\bar{T})^*$ er tæt defineret ifølge Sætning 2.5, med $T^{**} = (\bar{T})^{**} = \bar{T}$. Omvendt er det klart, at hvis T^* er tæt defineret, er T^{**} en afsluttet udvidelse af T . ▯

Sætning 2.7. *Lad* $T: X \to Y$ *være tæt defineret, afsluttet og injektiv, med* $R(T)$ *tæt i* Y . *Da har* T^* *og* T^{-1} *også disse egenskaber, og*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* . \tag{2.17}$$

Bevis: T^{-1} er klart injektiv, tæt defineret og afsluttet (jvf. Lemma 2.2), med tæt værdimængde, og det samme gælder for T^* ifølge Sætning 2.5, Korollar 2.6 og (2.11) (anvendt på T og T^*). Det følger da endvidere, at $(T^*)^{-1}$ og $(T^{-1})^*$ har de samme egenskaber. Ved brug af lineariteten af operatorerne fås, med betegnelserne i Sætning 2.5, at

$$X \oplus Y = G(-T) \oplus UG(-T^*)$$

medfører

$$\begin{aligned} Y \oplus X = U^{-1}(X \oplus Y) = U^{-1}G(-T) \oplus G(-T^*) &= G(T^{-1}) \oplus G(-T^*) \\ &= G(T^{-1}) \oplus U^{-1}(G((T^*)^{-1}) . \end{aligned}$$

En anvendelse af Sætning 2.5 på $T^{-1}: Y \to X$ viser da, at $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. ▯

2.3. Symmetriske og selvadjungerede operatorer i et Hilbert rum.

Når X og Y begge er det samme Hilbert rum H , og T er en lineær operator i H , siger vi at T er symmetrisk, såfremt

$$(Tx|y) = (x|Ty) \quad \text{for } x \text{ og } y \in D(T) , \tag{2.18}$$

og at T er selvadjungeret, såfremt T er tæt defineret (så at den adjungerede T^* eksisterer) og $T^* = T$. (Det er en smagssag om kravet $\overline{D(T)} = H$ også bør indbygges i definitionen af symmetriske operatorer - vi gør det ikke i nærværende tekst, men de operatorer, vi ser på, vil i reglen opfylde dette krav.)

Lemma 2.8. *Lad* T *være en operator i det komplekse Hilbert rum* H .

1^o T *er symmetrisk hvis og kun hvis* $(Tx|x)$ *er reel for alle* x .

2^o *Når* T *er tæt defineret, er* T *symmetrisk hvis og kun hvis* $T \subset T^*$. *Specielt har* T *da en afslutning* $\overline{T}$, *og*

$$T \subset \overline{T} \subset \overline{T}^* = T^* \ . \tag{2.19}$$

3^o *Når* T *er tæt defineret, er* T *selvadjungeret, hvis og kun hvis* T *er afsluttet og* T *og* T^* *begge er symmetriske.*

Bevis: 1^o Når T er symmetrisk, er

$$(Tx|x) = (x|Tx) = \overline{(Tx|x)} \quad \text{for} \quad x \in D(T) ,$$

hvormed $(Tx|x) \in \mathbb{R}$. Omvendt, når $(Tx|x) \in \mathbb{R}$ for alle $x \in D(T)$, ses først, at $(Tx|x) = (x|Tx)$ for $x \in D(T)$, og dernæst fås for x og $y \in D(T)$:

$$\begin{aligned} 0 = (T(x+y)|(x+y)) - (x+y|T(x+y)) &= (Tx|y) + (Ty|x) - (x|Ty) - (y|Tx) \\ &= 2i \ \mathrm{Im}[(Tx|y)-(x|Ty)] \ . \end{aligned}$$

Indsættes ix i stedet for x ses, at også $\mathrm{Re}[(Tx|y)-(x|Ty)]$ er 0, hvormed $(Tx|y) = (y|Tx)$. Det første udsagn i 2^o ses straks af definitionen, og det andet følger af Korollar 2.6. For 3^o bemærker vi, at der ifølge Korollar 2.6 gælder for en tæt defineret operator T med tæt defineret adjungeret T^* , at T er afsluttet hvis og kun hvis $T = T^{**}$. Når $T = T^*$, er naturligvis T afsluttet. Når T er afsluttet og T og T^* er symmetriske, er $T \subset T^*$ og $T^* \subset T^{**} = T$, så $T = T^*$. □

En operator T , for hvilken $\overline{T}$ eksisterer og er selvadjungeret, siges at være essentielt selvadjungeret (i fysik kaldes sådanne operatorer ofte selvadjungerede).

En symmetrisk operator T kaldes maksimalt symmetrisk, hvis $S \supset T$ med S symmetrisk medfører $S = T$. Selvadjungerede operatorer er maksimalt symmetriske, men det omvendte kan ikke sluttes, jvf. Øvelse 2.12.

Det er nyttigt at bemærke, at når S er symmetrisk og $\lambda = \alpha + i\beta$ med α og $\beta \in \mathbb{R}$, så er

$$\begin{aligned} \|(S-\lambda I)x\|^2 &= (Sx-\alpha x-i\beta x \mid Sx - \alpha x - i\beta x) \\ &= \|(S-\alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \quad \text{for} \quad x \in D(S) \ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

For en vilkårlig operator T i H defineres den <u>numeriske værdimængde</u> $\nu(T)$ ved

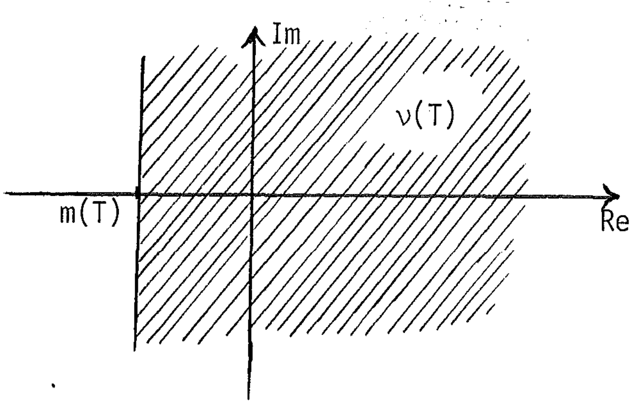
(2.21) $$\nu(T) = \{(Tx|x) \mid x \in D(T)\ ,\ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}\ ,$$

og den <u>nedre grænse</u> $m(T)$ ved

(2.22) $$m(T) = \inf\{\mathrm{Re}(Tx|x) \mid x \in D(T)\ ,\ \|x\| = 1\} \geq -\infty\ .$$

T siges at være <u>nedad (halv)begrænset</u> når $m(T) > -\infty$, og <u>opad (halv)begrænset</u>, når $m(-T) > -\infty$; $-m(-T)$ kaldes øvre grænse for T .

Geometrisk set betyder $m(T) > -\infty$, at den numeriske værdimængde $\nu(T)$ er indeholdt i halvplanen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda \geq m(T)\}$.



Bemærk specielt, at de symmetriske operatorer S netop er dem, hvis numeriske værdimængde er indeholdt i den reelle akse (Lemma 2.8.1^0), og de er da også karakteriseret ved at $m(iS) = m(-iS) = 0$.

Begrænsede operatorer er klart halvbegrænsede. Vedr. det omvendte, se Sætning 2.12 nedenfor samt Øvelse 2.9. For symmetriske operatorer T udtrykkes $m(T) \geq \alpha$ og $m(-T) \geq -\beta$ kort ved $T \geq \alpha$, henholdsvis $T \leq \beta$.

<u>Sætning 2.9.</u> 1^0 *Hvis* $m(T) \geq \alpha > 0$, *så er* T *injektiv, og* T^{-1} *er en begrænset operator i* H *med norm* $\|T^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$ *(og med* $D(T^{-1}) = R(T)$ *).*

2^0 *Hvis endvidere* T *er afsluttet, så er* $R(T)$ *afsluttet.*

3^0 *Hvis* T *er afsluttet og tæt defineret, og såvel* $m(T)$ *som* $m(T^*)$ *er* $\geq \beta$, *så er halvrummet* $\{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda < \beta\}$ *indeholdt i resolventmængden for* T *og for* T^* .

<u>Bevis:</u> Det hele er baseret på uligheden

(2.23) $$\|Tx\|\,\|x\| \geq |(Tx|x)| \geq \mathrm{Re}(Tx|x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \text{for} \quad x \in D(T)\ ,$$

hvoraf sluttes (ved division med $\|x\|$ for $x \neq 0$), at

$$\|Tx\| \geq \alpha\|x\| \quad \text{for} \quad x \in D(T) .$$

Specielt er T injektiv. Indsættes $Tx = y \in R(T) = D(T^{-1})$, ses at

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \alpha^{-1} \|y\| ,$$

hvilket viser 1^0. Når T er afsluttet, er T^{-1} da en afsluttet, begrænset operator, så $R(T) = D(T^{-1})$ er afsluttet, hvilket viser 2^0. For 3^0 bemærker vi, at når $\text{Re}\,\lambda = \beta - \alpha$ for et $\alpha > 0$, er $m(T-\lambda I) \geq \alpha$ og $m(T^*-\bar{\lambda}I) \geq \alpha$, så $T - \lambda I$ og $T^* - \bar{\lambda}I$ er injektive med begrænsede inverser og afsluttede værdimængder ifølge 1^0 og 2^0. Da $Z(T-\lambda I)$ og $Z((T-\lambda I)^*)$ er $\{0\}$, ses af (2.11) at $T - \lambda I$ og $T^* - \bar{\lambda}I$ er surjektive, hvormed 3^0 er vist. □

Anvendes sætningen specielt på $i(S-\lambda I)$ og $-i(S-\lambda I)$ hvor S er en symmetrisk operator, ser vi, at $S - \lambda I$ er injektiv med

$$\|(S-\lambda I)^{-1}\| \leq |\text{Im}\,\lambda|^{-1} , \quad \text{når} \quad \text{Im}\,\lambda \neq 0 \tag{2.24}$$

(hvilket også kunne fås lidt mere direkte fra (2.20)).

Sætning 2.10. *Lad* S *være tæt defineret og symmetrisk. Så er* S *selvadjungeret, hvis og kun hvis*

$$R(S+iI) = R(S-iI) = H ; \tag{2.25}$$

og da er $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(S)$.

Bevis. Lad S være selvadjungeret. Da opfylder iS og $-iS$ betingelsen i Sætning 2.9.3^0 med $\beta = 0$, så halvrummene

$$\mathbb{C}_{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\,\lambda \gtrless 0\} \tag{2.26}$$

ligger i resolventmængden; specielt gælder (2.25).

Omvendt, hvis (2.25) gælder, ses af (2.11) at operatorerne $S^* \pm iI$ er injektive. Her er $S^* + iI$ en injektiv udvidelse af $S + iI$, som er en bijektion af $D(S)$ på H; dette kan kun finde sted hvis $S = S^*$. □

(Se også Øvelse 2.38.)

Hvad en symmetrisk, tæt defineret operator "mangler" i at være selvadjungeret, kan ses på, hvad $S+iI$ og $S-iI$ mangler i at være surjektive. Man definerer defektindices ved

$$\mathrm{def}_+(S) = \dim R(S+iI)^{\perp} \quad \text{og} \quad \mathrm{def}_-(S) = \dim R(S-iI)^{\perp} . \tag{2.27}$$

Det har stor interesse at studere de eventuelle selvadjungerede udvidelser af en symmetrisk, tæt defineret operator S. Man kan bl.a. vise, at S har en selvadjungeret udvidelse hvis og kun hvis de to nævnte dimensioner er ens; og i tilfældet hvor dimensionerne er endelige kan skaren af selvadjungerede udvidelser beskrives overskueligt ved hjælp af Cayley transformationen (se Mat 313, §23, og Øvelse 2.19). Vi betragter senere tilfældet, hvor S tillige er halvbegrænset.

Følgende sætning giver en type eksempler på selvadjungerede ubegrænsede operatorer.

Sætning 2.11. *Lad* H *og* H_1 *være Hilbert rum, og lad* $T: H \to H_1$ *være tæt defineret og afsluttet. Så er* $T^*T: H \to H$ *selvadjungeret og* ≥ 0. *Specielt er* $T^*T + I \geq 1$ *og bijektiv fra* $D(T^*T)$ *til* H, *og inversen har norm* ≤ 1 *og nedre grænse* ≥ 0. *Endvidere er* $D(T^*T)$ *tæt i* $D(T)$ *med hensyn til grafnormen på* $D(T)$.

Bevis: Operatoren T^*T er klart symmetrisk og ≥ 0, idet

$$(T^*Tx|x)_H = (Tx|Tx)_{H_1} \geq 0 \quad \text{for} \quad x \in D(T^*T) , \tag{2.28}$$

jvf. Lemma 2.8.1°. Da T er tæt defineret og afsluttet, er

$$H \oplus H_1 = G(T) \oplus UG(T^*)$$

ifølge Sætning 2.5. Ethvert $\{x,0\} \in H \times H_1$ har da en entydig opløsning

$$\{x,0\} = \{y,Ty\} + \{-T^*z,z\} ,$$

hvor y og z er bestemt ved x. Da opløsningen på denne måde er lineær, bestemmer den to begrænsede lineære operatorer $S: H \to H$ og $R: H \to H_1$ så $y = Sx$ og $z = Rx$. Bemærk, at $R(S) \subset D(T)$, og $R(R) \subset D(T^*)$. Vi vil vise, at S er lig $(T^*T+1)^{-1}$, og er selvadjungeret, begrænset og ≥ 0; heraf vil påstandene om T^*T følge.

Ifølge ortogonaliteten er

$$\|x\|_H^2 = \|\{y,Ty\}\|_{H\oplus H_1}^2 + \|\{-T^*z,z\}\|_{H\oplus H_1}^2 = \|Sx\|_H^2 + \|TSx\|_{H_1}^2 + \|T^*Rx\|_H^2 + \|Rx\|_{H_1}^2 ,$$

hvoraf ses, at S og R har norm ≤ 1. Idet

$$x = Sx - T^*Rx \quad , \qquad 0 = TSx + Rx \quad ,$$

ses at $TSx = -Rx \in D(T^*)$ og

$$x = (1+T^*T)Sx \; ; \tag{2.29}$$

altså sender S rummet H over i $D(T^*T)$, og $(1+T^*T)S = I$ på H. Den begrænsede operator S^* opfylder nu

$$(S^*x|x) = (S^*(1+T^*T)Sx|x) = (Sx|Sx) + (TSx|TSx) \geq 0 \quad \text{for } x \in H ,$$

hvoraf ses, at S^* er symmetrisk ≥ 0, og $S = S^{**} = S^*$ er ligeledes symmetrisk ≥ 0.

Da S er injektiv (jvf. (2.29)), selvadjungeret, afsluttet og tæt defineret, samt har tæt værdimængde, (da $Z(S^*) = \{0\}$, jvf. (2.11)), giver Sætning 2.7, at S^{-1} har de samme egenskaber. Ifølge (2.29) er $1+T^*T$ en symmetrisk udvidelse af S^{-1}; da S er overalt defineret, må $1+T^*T$ være lig med S^{-1}. Altså er $I+T^*T$ og dermed T^*T selvadjungeret.

At $D(T^*T)$ er tæt i $D(T)$ med hensyn til grafnormen (jvf. (2.6)) ses således: Lad $x \in D(T)$ være ortogonal på $D(T^*T)$ med hensyn til grafnormen, dvs.

$$(x|y)_H + (Tx|Ty)_{H_1} = 0 \quad \text{for alle } y \in D(T^*T) .$$

Da $(Tx|Ty)_{H_1} = (x|T^*Ty)_H$, ses at

$$(x|y+T^*Ty)_H = 0 \quad \text{for alle } y \in D(T^*T) ,$$

hvoraf følger at $x = 0$, da $I+T^*T$ er surjektiv. $\square$

Vi slutter dette afsnit med en sætning om sammenhængen mellem halvbegrænsethed og begrænsethed.

<u>Lemma 2.12</u>. *Når* S *er symmetrisk* ≥ 0, *gælder følgende version af Cauchy-Schwarz' ulighed*

$$|(Sx|y)|^2 \leq (Sx|x)(Sy|y) \quad \text{for } x,y \in D(S) . \tag{2.30}$$

Bevis: Når $\alpha \in \mathbb{R}$ har vi, for x og $y \in D(S)$,

$$0 \leq (S(x+\alpha y)|(x+\alpha y) = (Sx|x) + \alpha(Sx|y) + \alpha(Sy|x) + \alpha^2(Sy|y)$$
$$= (Sx|x) + 2\alpha \operatorname{Re}(Sx|y) + \alpha^2(Sy|y) .$$

Da dette polynomium i α er ≥ 0 for alle α, må diskriminanten være ≤ 0, dvs.

$$|2 \operatorname{Re}(Sx|y)|^2 \leq 4(Sx|x)(Sy|y) .$$

Erstattes x med $e^{i\theta}x$, hvor $-\theta$ er argumentet for $(Sx|y)$, fås (2.30). □

Det fås heraf, at tæt definerede symmetriske operatorer, der er såvel opad som nedad halvbegrænsede, er begrænsede. For vi viser nu:

Sætning 2.13. *Hvis* S *er en tæt defineret, symmetrisk operator med* $0 \leq S \leq \alpha$, *så er* S *begrænset med* $\|S\| \leq \alpha$.

Bevis: Lemma 2.12 giver, at

$$|(Sx|y)|^2 \leq (Sx|x)(Sy|y) \leq \alpha^2 \|x\|^2 \|y\|^2 \quad \text{for } x,y \in D(S) ,$$

hvoraf fås, da $D(S)$ er tæt i H,

$$|(Sx|z)| \leq \alpha \|x\| \|z\| \quad \text{for } x \in D(S) \text{ og } z \in H .$$

Vi minder om at Riesz' repræsentationssætning definerer en isometri mellem H^* og H, så at normen af et element $y \in H$ opfylder

$$\|y\| = \sup \left\{ \frac{|(y|z)|}{\|z\|} \;\middle|\; z \in H \setminus \{0\} \right\} . \tag{2.31}$$

Specielt kan da sluttes af ovenstående, at $\|Sx\| \leq \alpha\|x\|$ for $x \in D(S)$, hvilket viser, at S er begrænset med norm $\leq \alpha$. □

Et lignende resultat opnås for lidt mere generelle operatorer i Øvelse 2.9.

2.4. Eksemplet: differentiation i en variabel.

Den sædvanlige differentialoperator d/dt kan generaliseres til en L^2-ramme med forholdsvis lille ulejlighed, hvilket vi nu vil gøre, for at få nogle interessante eksempler.

Lad I være et begrænset interval $]a,b[$ af $\mathbb{R}$. Operatoren J defineret ved

$$(2.32)\qquad (Jf)(t) = i\int_a^t f(s)ds \quad \text{for} \quad t \in I$$

er en begrænset operator fra $L^2(I)$ til $C^0(\overline{I})$ og fra $L^2(I)$ til $L^2(I)$, idet der gælder

$$(2.33)\qquad \|Jf\|_{L^2(I)} = \left(\int_a^b |Jf(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in I} |Jf(t)|$$
$$\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \sup_t \int_a^t |f(s)|\,ds$$
$$\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \int_a^b |f(s)|\cdot 1\,ds \leq (b-a)\|f\|_{L^2(I)}$$

ved Schwarz' ulighed. Funktionerne i billedrummet $R(J)$ er absolut kontinuerte ifølge Definition 1.3 (den oprindelige definition af dette begreb har en anden formulering, som vi ikke vil komme ind på). Bemærk at $Jf(a) = 0$ for alle f, så den eneste konstante funktion, der er med i $R(J)$, er konstanten 0. Ved tilføjelse af konstanterne får vi et rum, vi foreløbigt vil betegne ved $H^1_{ac}(I)$, altså

$$(2.34)\qquad H^1_{ac}(I) = R(J) \dotplus \mathbb{C}1 = \left\{u(t) = \int_a^t f(s)ds + c \;\middle|\; f \in L^2(I),\ c \in \mathbb{C}\right\}.$$

Man verificerer umiddelbart, at

$$(2.34')\qquad C^1(\overline{I}) \subset H^1_{ac}(I) \subset C^0(\overline{I}).$$

Operatoren $J\colon L^2(I) \to L^2(I)$ er <u>injektiv</u>, thi hvis $Jf = 0$, er $\int_c^d f(s)ds = 0$ for alle $a \leq c \leq d \leq b$, så f er ortogonal på alle trappefunktioner og dermed 0 som element af $L^2(I)$. ($H^1_{ac}(I)$ kan da nemt topologiseres ved hjælp af den af J inducerede metrik på $R(J)$, jvf. Øvelse 2.14.)

J er nær ved at være selvadjungeret, for der gælder

$$(2.35)\qquad (Jf|g) = i\int_a^b \left(\int_a^t f(s)ds\right)\overline{g}(t)\,dt$$
$$= i\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g}(t)dsdt - i\int_a^b\int_t^b f(s)\overline{g}(t)dsdt =$$

$$= i\int_a^b f(s)ds\int_a^b \overline{g}(t)dt \;-i\int_a^b\Big(\int_a^s \overline{g}(t)dt\Big)f(s)ds$$

$$= i(f|1)(1|g) + (f|Jg)\ .$$

For $f \in C^0(\overline{I})$ er det velkendt, at $DJf = f$, hvor $D = -id/dt$; endvidere er jo $Dc = 0$, når c er en konstant. Vi udvider nu differentiationsbegrebet til $H^1_{ac}(I)$ ved at indføre operatoren A_{ac} (som i Kapitel 1, med faktoren $-i$)

(2.36)
$$D(A_{ac}) = H^1_{ac}(I) = R(J) \dotplus \mathbb{C}1$$
$$A_{ac}(Jf+c) = f \quad \text{for} \quad f \in L^2(I)\ .$$

Da $JA_{ac}u = u$ for $u \in R(J)$, har vi klart,

(2.37)
$$JA_{ac}u = u - u(a) \quad \text{for} \quad u \in H^1_{ac}(I)\ , \qquad \text{og}$$
$$A_{ac}Jf = f \qquad \text{for} \quad f \in L^2(I)\ .$$

Vi vil nu vise Leibniz' formel

(2.38)
$$A_{ac}(u\,v) = (A_{ac}u)v + u(A_{ac}v)$$

for u og $v \in H^1_{ac}(I)$. Formlen gælder jo, hvis u og $v \in C^1(\overline{I})$, men i øvrigt er det på forhånd ikke engang klart, at uv tilhører H^1_{ac} , når u og v gør det. Lad først $u = Jf$ og $v = Jg$ for f og $g \in L^2(I)$. Da $C_0^\infty(I)$ er tæt i $L^2(I)$, findes der følger $f_n \to f$ og $g_n \to g$ i $L^2(I)$, med f_n og $g_n \in C_0^\infty(I)$. Formlen (2.38) gælder for $u_n = Jf_n$ og $v_n = Jg_n$ hvoraf ses, ved anvendelse af J og (2.37)

(2.39)
$$Jf_n\,Jg_n = J(f_n(Jg_n)) + J((Jf_n)g_n)\ .$$

Når $f_n \to f$ i $L^2(I)$, vil $Jf_n \to Jf$ i $C^0(\overline{I})$ på grund af (2.33), så produktet $(Jf_n)g_n$ går mod $(Jf)g$ i $L^2(I)$ ved en regel for L^2-funktioner. Tilsvarende vil $f_n(Jg_n) \to f(Jg)$ i $L^2(I)$, og $(Jf_n)(Jg_n) \to (Jf)(Jg)$ i $C^0(\overline{I})$ og dermed $L^2(I)$. Da J er en begrænset operator, overføres (2.39) ved grænseovergangen til formlen

$$Jf\ Jg = J(f\ Jg) + J(Jf\ g)\ .$$

Det ses heraf, at $Jf\,Jg \in R(J)$, og en anvendelse af A_{ac} viser da (2.38) for

$u = Jf$, $v = Jg$. Da $A_{ac}c = 0$ for en konstant c udvides formlen umiddelbart til hele $H^1_{ac}(I)$.

Integration af et sådant udtryk giver endvidere, ved (2.37)

$$(2.40) \quad i\int_a^b (A_{ac}u)\overline{v}\,dx - i\int_a^b u\,\overline{A_{ac}v}\,dx = i\int_a^b A_{ac}(u\,\overline{v})dx = (JA_{ac})(u\,\overline{v})(b)$$
$$= (u\,\overline{v})(b) - (u\,\overline{v})(a) \;, \quad \text{for alle} \quad u,v \in H^1_{ac}(I) \;,$$

så den velkendte formel for delvis integration udvides til operatoren A_{ac} .

A_{ac} siges at være en <u>realisation</u> i $L^2(I)$ af differentialoperatoren D . A_{ac} er <u>afsluttet</u> (ved (2.37) samt kontinuiteten af J , prøv selv!) og <u>tæt defineret</u>, idet $C_0^\infty(I) \subset D(A_{ac})$.

Vi kan nu definere to andre realisationer A_1 og A_0 ved

$$(2.41) \quad \begin{aligned} &A_1 \subset A_{ac} \;, \qquad A_0 \subset A_{ac} \;, \\ &D(A_1) = \{u \in H^1_{ac}(I) \mid u(a) = u(b)\} \;, \\ &D(A_0) = \{u \in H^1_{ac}(I) \mid u(a) = u(b) = 0\} \;, \end{aligned}$$

de er ligeledes tæt definerede (og afsluttede, som vi ser om lidt). Ved formlen for delvis integration fås, at

$$A_0 \subset A_{ac}^* \;, \qquad A_{ac} \subset A_0^* \;, \qquad A_1 \subset A_1^*$$

og vi vil nu vise, at disse inklusioner er identiteter.

Lad os først vise $A_{ac}^* \subset A_0$, som medfører $A_{ac}^* = A_0$. Lad $v \in D(A_{ac}^*)$ og lad $w = JA_{ac}^*v$. Bemærk, at $w(a) = 0$, og $A_{ac}w = A_{ac}^*v$ ved (2.37). Så er, for alle $u \in D(A_{ac})$,

$$(A_{ac}u \mid v - w) = (u \mid A_{ac}^*v) - (A_{ac}u \mid w) = (u \mid A_{ac}w) - (A_{ac}u \mid w) = i\,u(b)\overline{w}(b) \quad \text{ved (2.40).}$$

Indsættes konstanterne for u , ses at $w(b) = 0$, hvormed der faktisk gælder

$$(A_{ac}u \mid v - w) = 0 \quad \text{for alle} \quad u \in D(A_{ac}) \;.$$

Da A_{ac} er surjektiv, følger at $v = w$, hvormed $v \in D(A_{ac})$ med $v(a) = v(b) = 0$ og altså $v \in D(A_0)$; endvidere er $A_0v = A_{ac}v = A_{ac}^*v$. Hermed er det vist, at

$$(2.42) \qquad A_{ac}^* = A_0$$

(specielt er A_0 afsluttet, og $A_0^* = A_{ac}$).

I beviset for at $A_1^* \subset A_1$ går vi frem på omtrent samme måde. Når $v \in D(A_1^*)$, sætter vi $w = JA_1^* v$, bemærker at $w(a) = 0$, og slutter som ovenfor, at $w(b) = 0$, og

$$(A_1 u \mid v - w) = 0 \quad \text{for alle} \quad u \in D(A_1) .$$

Altså er $v - w \perp R(A_1)$. Men ved formlen

$$i \int_a^b A_{ac} u(s) ds = u(b) - u(a)$$

(et specialtilfælde af (2.40)) ses, at funktionerne i $R(A_1)$ netop er dem, der er ortogonale på 1. Så må $v - w$ være proportional med 1, dvs.

$$v = w + c$$

for en konstant c. Da $w(a) = w(b) = 0$ ses, at $v \in D(A_1)$. Endelig er $A_1^* v = A_{ac} w = A_{ac}(w+c)$, så $A_1^* v = A_1 v$, og vi har vist

(2.43) $$A_1^* = A_1 .$$

Operatoren A_1 er et vigtigt eksempel på en selvadjungeret, ubegrænset operator i $L^2(I)$. Operatoren A_0 er en symmetrisk restriktion heraf, mens A_{ac} er en (ikke-symmetrisk) udvidelse af A_1. Om definitionsmængderne gælder

(2.44) $$\begin{aligned} D(A_1) &= D(A_0) \dotplus \{\text{konstante funktioner}\} \\ D(A_{ac}) &= D(A_0) \dotplus \{\text{lineære funktioner}\} \end{aligned}$$

hvor vi bemærker at rummet af konstante funktioner har dimension 1, og rummet af lineære funktioner har dimension 2. Da A_{ac} er en naturlig generalisation af D skriver vi ofte senere $A_{ac} u$ som Du eller $-iu'$.

2.5. Operatorer knyttet til sesquilineære former.

Lad H være et komplekst Hilbert rum, og lad $s(x,y)$ være en sesquilineær form defineret for x og y i et underrum $D(s)$ af H; $D(s)$ kaldes definitionsområdet for s, og vi siger, at s er en sesquilineær form på H (selvom eventuelt $D(s) \neq H$). Den adjungerede sesquilineære form s^* (med $D(s^*) = D(s)$) er defineret ved

$$s^*(x,y) = \overline{s(y,x)} \quad \text{for} \quad x,y \in D(s) ,$$

og vi siger, at s er symmetrisk, hvis $s = s^*$. Et kriterium for symmetri er, at $s(x,x)$ er reel for alle x; det vises ganske som i Lemma 2.8.1°. Ud fra s defineres endvidere to sesquilineære former kaldet s_{Re} og s_{Im} med definitionsområder $D(s)$, ved

$$s_{Re}(x,y) = \tfrac{1}{2}(s(x,y) + s^*(x,y)) \tag{2.45}$$
$$s_{Im}(x,y) = \frac{1}{2i}(s(x,y) - s^*(x,y)) ;$$

bemærk, at de begge er symmetriske (og de kan naturligvis antage komplekse værdier). s siges at være begrænset (på H), hvis der findes en konstant c, så at

$$|s(x,y)| \leq c \|x\|_H \|y\|_H , \quad \text{for } x \text{ og } y \in D(s) .$$

Ud fra enhver operator T i H kan der defineres en sesquilineær form t_0, nemlig

$$t_0(x,y) = (Tx|y)_H , \qquad \text{med } D(t_0) = D(T) . \tag{2.46}$$

Når T er begrænset, er t_0 det også. Det omvendte gælder, når $D(T)$ er tæt i H, for så medfører begrænsetheden af t_0, at der for $x \in D(T)$ gælder

$$|(Tx|y)_H| \leq c \|x\|_H \|y\|_H$$

for y i en tæt delmængde af H og dermed for alle y i H, hvormed (jvf. (2.31))

$$\|Tx\|_H = \sup\left\{\frac{|(Tx|y)_H|}{\|y\|_H} \mid y \in H\setminus\{0\}\right\} \leq c \|x\|_H .$$

I dette tilfælde udvides T og t_0 på en triviel måde til en begrænset operator, hhv. begrænset sesquilineær form, defineret på hele H.

Det ubegrænsede tilfælde er mere spændende.

Definition 2.13. *Lad* $t(x,y)$ *være en sesquilineær form på* H *(ikke nødvendigvis begrænset), med* $D(t)$ *tæt i* H. *Den tilhørende operator* T *i* H *defineres således:* $x \in D(T)$ *hvis og kun hvis* $x \in D(t)$ *og der findes* $y \in H$, *for hvilket*

$$t(x,v) = (y|v)_H \quad \textit{for alle } v \in D(t) , \tag{2.47}$$

og i så fald sættes

$$Tx = y .$$

Tætheden af $D(t)$ i H sikrer her, at y er entydigt bestemt ved x. Når t er ubegrænset, vil der oftest gælde, at $D(T)$ er en ægte delmængde af $D(t)$, og at T er en ubegrænset operator i H.

Konstruktionen fører til en nyttig klasse af operatorer i følgende specialtilfælde.

Lad V være et lineært underrum af H, som er tæt i H og som er et Hilbert rum med en norm, der er stærkere end normen i H:

$$\|v\|_V \geq c\,\|v\|_H \quad \text{for } v \in V \tag{2.48}$$

med $c > 0$ (så at indlejringen $V \hookrightarrow H$ er kontinuert); vi siger at $V \subset H$ algebraisk, topologisk og tæt. Lad $a(u,v)$ være en sesquilineær form med $D(a) = V$, og antag at a er begrænset på V. a giver anledning til to operatorer: en begrænset operator $\mathcal{A}$ i V og en (i reglen) ubegrænset operator A i H, som fås ved at anvende Definition 2.13 på a som form på V henholdsvis H. Vi kalder $\mathcal{A}$ og A henholdsvis operatoren hørende til a i V, og operatoren hørende til a i H.

Formen a kaldes V-elliptisk, hvis der findes en konstant $c_0 > 0$, så

$$\operatorname{Re} a(v,v) \geq c_0\,\|v\|_V^2 \quad \text{for } v \in V\,; \tag{2.49}$$

og a kaldes V-coerciv hvis dette kan opnås ved addition af et multiplum af $(u|v)_H$ til a, altså hvis der findes $c_0 > 0$ og $k \in \mathbb{R}$, så

$$\operatorname{Re} a(v,v) + k\,\|v\|_H^2 \geq c_0\,\|v\|_V^2 \quad \text{for } v \in V\,. \tag{2.50}$$

Bemærk, at når a er V-elliptisk eller V-coerciv, gælder det samme om den adjungerede form a^*.

Følgende sætning kendes under navnet Lax-Milgrams lemma.

Sætning 2.14. (Lax-Milgram) *Lad der være givet et tripel* (H,V,a) *hvor* H *og* V *er komplekse Hilbert rum med* $V \subset H$ *algebraisk, topologisk og tæt ((2.48) gælder), og hvor* a *er en begrænset, sesquilineær form på* V *med* $D(a) = V$. *Lad* A *være operatoren hørende til* a *i* H. *Når* a *er V-coerciv (opfylder (2.50)), er* A *en afsluttet operator med* $D(A)$ *tæt i* H *og i* V, *og* $A + \mu I$ *er en bijektion af* $D(A)$ *på* H *for alle* μ *med* $\operatorname{Re}\mu \geq k$, *altså*

$$\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -k\} \subset \rho(A)\,. \tag{2.51}$$

Endvidere er operatoren hørende til a^* *i* H *netop lig med* A^*; *og når* a *er symmetrisk, er* A *selvadjungeret* $\geq -k$.

<u>Bevis</u>: Vi ser først på tilfældet $k = 0$, hvor altså (2.49) gælder. Da a er begrænset på V, er operatoren $\mathcal{A}$ knyttet til a i V begrænset og overalt defineret; det er også oplagt, at den til a^* knyttede operator i V netop er $\mathcal{A}^*$ (den adjungerede operator i V). Idet (2.49) medfører at $m(\mathcal{A}) \geq c_0$ og $m(\mathcal{A}^*) \geq c_0$ i V med $c_0 > 0$, ses af Sætning 2.9, at $\mathcal{A}$ <u>og</u> $\mathcal{A}^*$ <u>er homeomorfier af</u> V <u>på</u> V.

Betragt nu operatoren A i H. Da der for $u \in D(A)$ gælder

$$\operatorname{Re}(Au|u)_H = \operatorname{Re} a(u,u) \geq c_0 \|u\|_V^2 \geq c_0 c^2 \|u\|_H^2$$

hvor $c_0 c^2$ er > 0, har vi fra Sætning 2.9, at A er <u>injektiv</u> og har en <u>begrænset invers</u> A^{-1} med norm $\leq c_0^{-1} c^{-2}$. Det samme gælder om operatoren A' knyttet til a^* i H.

Endvidere er A <u>surjektiv</u>, thi når $f \in H$, er funktionalen $v \sim (f|v)_H$ kontinuert på V, idet

$$|(f|v)_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq \|f\|_H c^{-1} \|v\|_V \quad \text{for } v \in V,$$

så der findes $w \in V$ med

$$(f|v)_H = (w|v)_V = a(\mathcal{A}^{-1}w, v) \qquad \text{for } v \in V,$$

og da er $\mathcal{A}^{-1} w \in D(A)$ med $A\mathcal{A}^{-1}w = f$. Da $A^{-1}: H \to H$ altså er overalt defineret og begrænset, er den afsluttet, og det følger, at A er en <u>afsluttet</u> operator i H. De tilsvarende ting gælder om A'.

Om sammenhængen mellem A og A' har vi umiddelbart, at der gælder for alle $u \in D(A)$ og $v \in D(A')$

$$(2.52) \qquad (Au|v)_H = a(u,v) = \overline{a^*(v,u)} = \overline{(A'v|u)_H} = (u|A'v)_H .$$

At A er <u>tæt defineret</u> i H fås nu endelig således: Lad $f \in H$. For alle $u \in D(A)$ er

$$(u|f)_H = (u|A'(A')^{-1}f)_H = (Au|(A')^{-1}f)_H .$$

Da A er surjektiv, ses at hvis $f \perp D(A)$, så er $(A')^{-1}f = 0$ og dermed $f = 0$. Dette viser $\overline{D(A)} = H$.

Altså har A en adjungeret A^*, og (2.52) viser, at $A' \subset A^*$. Da $R(A) = H$, er A^* injektiv, og da A' allerede er en bijektion (af $D(A')$ på H), må $A' = A^*$. I alt fås, at A og A' <u>er hinandens adjungerede</u>. Når $a = a^*$, fås specielt at $A = A' = A^*$.

$D(A)$ er også tæt i V, for hvis $w \perp D(A)$ i V, har vi for $u \in D(A)$

$$0 = (u|w)_V = (u\,|\,\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^*)^{-1}w)_V = a(u,(\mathcal{A}^*)^{-1}w) = (Au\,|\,(A^*)^{-1}w)_H \,.$$

hvoraf sluttes at $(\mathcal{A}^*)^{-1}w$ og dermed w er 0, da $R(A) = H$.

For påstandene om $A + \mu I$ bemærker vi, at der oplagt gælder, at for $\mu \in \mathbb{C}$ er $A + \mu I$ (med $D(A+\mu I) = D(A)$) operatoren i H knyttet til den sesquilineære form

$$(2.53) \qquad a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu(u|v)_H \,, \qquad \text{med} \quad D(a_\mu) = V \,.$$

Når $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, er a_μ ligeledes V-elliptisk, så $A + \mu I$ er en bijektion af $D(A)$ på H. Hermed er sætningen vist for tilfældet $k = 0$.

Når $k \neq 0$, fører vi analysen over i tilfældet $k = 0$ ved at erstatte A med $A + kI$ og a med a_k (defineret ved (2.53)); da fås resultatet umiddelbart af det foregående. □

Vi kalder operatoren A defineret ud fra triplet (H,V,a) i Sætning 2.14 for Lax-Milgram operatoren knyttet til (H,V,a). (I Kato's bog "Perturbations of Linear Operators" kaldes en sådan operator m-sectorial. Man møder også betegnelsen en variationel operator, idet definitionen har sin baggrund i variationsregning.)

Det bemærkes, at $D(A)$ og $D(A^*)$ kan være forskellige (selvom $D(a) = D(a^*)$).

Vurderingerne af nedre grænse af A kan skærpes lidt, og vi kan endda vise, at A og A^* har deres spektrum og numeriske værdimængde i et vinkelrum.

For det første har vi, på grund af (2.48), at

$$\operatorname{Re} a(u,u) \geq c_0 \|u\|_V^2 - k\|u\|_H^2 \geq (c_0 c^2 - k)\|u\|_H^2 \,,$$

hvoraf følger, at

$$(2.54) \qquad m(A) \quad \text{og} \quad m(A^*) \geq -k + c_0 c^2 \,,$$

og (jvf. Sætning 2.9.3°)

$$(2.55) \qquad \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda < -k + c_0 c^2\} \subset \rho(A) \quad \text{og} \quad \rho(A^*) \,.$$

For det andet kan vi benytte begrænsetheden af a på V

$$(2.56) \qquad |a(u,v)| \leq C\,\|u\|_V\,\|v\|_V$$

til at vise, at når a opfylder (2.50), er

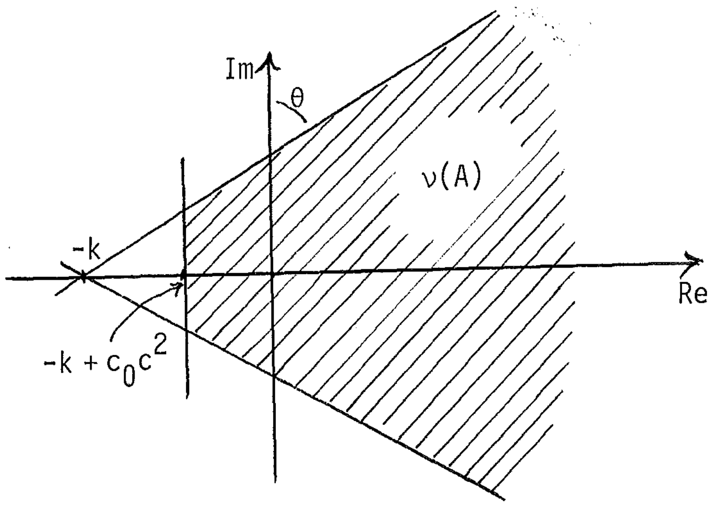
$$|\mathrm{Im}\, a(u,u)| \leq |a(u,u)| \leq C\, \|u\|_V^2 \leq C\, c_0^{-1}\, (\mathrm{Re}\, a(u,u) + k\, \|u\|_H^2)\,,$$

hvormed også

$$|\mathrm{Im}(Au|u)_H| \leq C\, c_0^{-1}\, (\mathrm{Re}(Au|u)_H + k\, \|u\|_H^2)\,.$$

Dette viser, at den numeriske værdimængde for A - og tilsvarende den numeriske værdimængde for A^* - opfylder

$$\nu(A) \text{ og } \nu(A^*) \subset M' = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq C\, c_0^{-1}\, (\mathrm{Re}\,\lambda + k)\right\}. \tag{2.57}$$



Men dette betyder, at visse drejninger af A og A^*, nemlig $e^{\pm i\theta}A$ og $e^{\pm i\theta}A^*$ for et passende θ (jvf. figuren), er nedad halvbegrænsede, hvilket ved Sætning 2.9.3° medfører at spektrene $\sigma(A)$ og $\sigma(A^*)$ ligeledes er indeholdt i M'. Ialt har vi

Korollar 2.15. *Når* A *og* A^* *er defineret ud fra triplet* (H,V,a) *som i Sætning 2.14 gælder, at spektrene* $\sigma(A)$ *og* $\sigma(A^*)$ *og de numeriske værdimængder* $\nu(A)$ *og* $\nu(A^*)$ *ligger i den konvekse mængde*

$$M = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\lambda \geq -k + c_0 c^2\,,\ |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq C\, c_0^{-1}\, (\mathrm{Re}\,\lambda + k)\right\}, \tag{2.58}$$

hvor konstanterne er dem der optræder i (2.48), (2.50), (2.56).

Lad os endelig bemærke, at når A er en Lax-Milgram operator i et Hilbert rum H, så er V og a entydigt bestemt ved A. Thi hvis A er Lax-Milgram operatoren hørende til triplerne (H,V_1,a_1) og (H,V_2,a_2), gælder for u og $v \in D(A)$

$$(Au|v)_H = a_1(u,v) = a_2(u,v) \;;$$

og $[\mathrm{Re}((A+k)v|v)_H]^{\frac{1}{2}}$ er, for k tilstrækkelig stor, en norm på $D(A)$, der er ækvivalent med V_1-normen og med V_2-normen. Da $D(A)$ er tæt i V_1 og i V_2 (med hensyn til deres normer), fås ved afslutning en identifikation mellem V_1 og V_2. Da a_1 og a_2 stemmer overens på den tætte delmængde $D(A)$, må $a_1 = a_2$. Altså har vi

Korollar 2.16. *Når* A *er en Lax-Milgram operator i* H, *stammer* A *fra et og kun et sæt* (H,V,a); *her er* V *bestemt som kompletteringen af* $D(A)$ *med hensyn til normen* $[\mathrm{Re}((A+k)v|v)_H]^{\frac{1}{2}}$ *for et passende stort* k, *og* a *er defineret på* V *ved afslutning af* $(Au|v)_H$.

Det indgår i disse sætninger, at A stammer fra et tripel (H,V,a). Man kan vise, at et sådant tripel eksisterer, når A er tæt defineret, og der findes et vinkelrum M' som i (2.44), så A er maksimal med hensyn til egenskaben $\nu(A) \subset M'$. (Dette skyldes Schechter og Kato, se f.eks. Kato's bog.)

Lax-Milgram operatorer er en nyttig generalisation af selvadjungerede halvbegrænsede operatorer, som man møder f.eks. i studiet af partielle differentialligninger; de har den fordel frem for normale operatorer (afsluttede, tæt definerede operatorer N med $NN^* = N^*N$), at klassen af Lax-Milgram operatorer er mere stabil over for de perturbationer, der forekommer naturligt i teorien.

2.6. Friedrichs udvidelsen.

Lad S være en symmetrisk, tæt defineret operator. Når $S \geq c > 0$, er det let at angive selvadjungerede udvidelser af S. Lad os først se på $\overline{S}$, afslutningen af S, som jo også er symmetrisk, jvf. (2.19). Det ses let, at $m(S) = m(\overline{S})$, som da er $\geq c > 0$. Ifølge Sætning 2.9 har $\overline{S}$ en begrænset, symmetrisk invers (afslutningen af S^{-1}), så hvis $R(S)$ og dermed $R(\overline{S})$ er tæt i H, er $R(\bar{S})$ lig med H, så $\bar{S}^{-1}$ er selvadjungeret, og $\bar{S}$ er en selvadjungeret udvidelse af S ved Sætning 2.7. Hvis derimod $Z(S^*) = R(S)^{\perp}$ er $\neq \{0\}$, kan vi danne operatoren R med

$$(2.59)\qquad \begin{aligned} D(R) &= D(\bar{S}) \dot{+} Z(S^*) \\ R(u+v) &= \bar{S}u \qquad\qquad \text{for } u \in D(\bar{S}),\, v \in Z(S^*)\ ; \end{aligned}$$

det er en selvadjungeret udvidelse (Øvelse 2.23). Sidstnævnte udvidelse har $m(R) = 0$ i modsætning til $m(S) > 0$. En mere raffineret (og nyttig) udvidelse er Friedrichs udvidelsen, der indføres i det følgende.

Sætning 2.17. (Friedrichs) *Lad* S *være tæt defineret, symmetrisk og nedad begrænset i* H. *Der findes en selvadjungeret udvidelse* T *med* $m(T) = m(S)$.

Bevis: Antag først, at $m(S) = c > 0$. Den sesquilineære form

$$s_0(u,v) = (Su|v)$$

er da et skalarprodukt på $D(S)$ (jvf. Lemma 2.12), og vi betegner kompletteringen af $D(S)$ med hensyn til dette skalarprodukt ved V. Herved udvides $s_0(u,v)$ til en sesquilineær form $s(u,v)$ med $D(s) = V$ (idet s er selve skalarproduktet på V). Vi vil gerne anvende Lax-Milgrams lemma, men hertil kræves at vi viser, at der er en indlejring af V i H. Uligheden

$$\|v\|_V^2 = s_0(v,v) \geq c\,\|v\|_H^2 \qquad \text{for } v \in D(S)$$

medfører, at injektionen $J_0\colon D(S) \hookrightarrow H$ udvides til en kontinuert afbildning J fra V til H, men ikke at denne er injektiv. Hertil skal man vise, at hvis v_n er en følge i $D(S)$, så $v_n \to v$ i V, og $v_n \to 0$ i H, så er $v = 0$. Vi benytter her Schwarz' ulighed for V-skalarproduktet:

$$(2.47)\qquad \begin{aligned} \|v_n\|_V^2 &= (Sv_n|v_n)_H = s(v_n, v_n - v_m) + (Sv_n|v_m)_H \\ &\leq \|v_n\|_V\, \|v_n - v_m\|_V + |(Sv_n|v_m)_H|\ . \end{aligned}$$

Da v_n konvergerer i V, kan man for hvert $\varepsilon > 0$ finde N, så $\|v_n - v_m\|_V < \varepsilon$ for n og $m \geq N$. Så er

$$\|v_n\|_V^2 \leq \|v_n\|_V \cdot \varepsilon + |(Sv_n|v_m)_H|\ .$$

Da $v_m \to 0$ i H, får vi ved at lade $m \to \infty$

$$\|v_n\|_V^2 \le \|v_n\|_V \cdot \varepsilon ,$$

hvormed $\|v_n\|_V \le \varepsilon$ for $n \ge N$. Dette viser, at $v_n \to 0$ i V for $n \to \infty$. Altså er J injektiv, og vi kan identificere V med underrummet JV af H. Da vi åbenbart har

$$s(v,v) = \|v\|_V^2 \ge c\,\|v\|_H^2 \quad \text{for } v \in V ,$$

er betingelserne for Lax-Milgrams sætning opfyldt for triplet (H,V,s), og vi får at der til s knyttes en selvadjungeret operator T med $m(T) = c = m(S)$ (jvf. også (2.54)). Det er klart, at $T \supset S$.

Når $m(S)$ er vilkårlig, definerer vi en selvadjungeret udvidelse T' af $S' = S + (1-m(S))I$ ved ovenstående konstruktion; så er $T = T' - (1-m(S))I$ den ønskede udvidelse af S. □

Beviset for Lax-Milgrams sætning kan naturligvis forenkles lidt i det symmetriske tilfælde, men grundingredienserne er de samme.

Med brug af Korollar 2.16 har vi også:

Sætning 2.18. *Lad* S *være en tæt defineret, symmetrisk, nedad begrænset operator i* H. *Kompletteringen* V *af* $D(S)$ *med hensyn til skalarproduktet*

$$(u|v)_V = (Su + (1-m(S))u|v)_H \tag{2.61}$$

kan identificeres med et underrum af H, *og Friedrichsudvidelsen* T *af* S *er karakteriseret ved at være den eneste nedad begrænsede selvadjungerede udvidelse af* S, *der opfylder* $D(T) \subset V$.

Jvf. Øvelse 2.24. Når $T \ge 0$, kan man iøvrigt vise, at V er lig med $D(T^{\frac{1}{2}})$, hvor $T^{\frac{1}{2}}$ er defineret ved spektralteori.

2.7. Eksempler: Realisationer af Laplace operatoren og andre elliptiske operatorer. Multiplikationsoperatorer.

Friedrichs' konstruktion bruges specielt til at indføre en selvadjungeret operator knyttet til Laplace operatoren Δ

$$\Delta u = \partial_{x_1}^2 u + \ldots + \partial_{x_n}^2 u \tag{2.62}$$

i $L^2(\Omega)$, hvor Ω er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Idet $C_0^\infty(\Omega)$ betegner rummet af de C^∞-funktioner på Ω , som er 0 uden for en kompakt delmængde af Ω , altså specielt er 0 i en omegn af randen af Ω , lader vi S betegne operatoren i $H = L^2(\Omega)$ med definitionsmængde $D(S) = C_0^\infty(\Omega)$ og virkning $Su = -\Delta u$. Ved delvis integration ses, at S er symmetrisk ≥ 0 :

$$(2.63) \qquad (Su|v)_H = \int_\Omega (-\partial_1^2 u - \ldots - \partial_n^2 u)\overline{v}\, dx$$
$$= \int_\Omega (\partial_1 u \overline{\partial_1 v} + \ldots + \partial_n u \overline{\partial_n v})dx = (u|Sv)_H ;$$

hvor $(Su|u)$ ifølge det 3. udtryk er ≥ 0 for alle $u \in D(S)$. Rummet $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $L^2(\Omega)$ (Kapitel 5). Vi kan da definere Friedrichsudvidelsen T , som er selvadjungeret og har $m(T) = m(S) \geq 0$, og hvor $D(T)$ er indeholdt i og tæt i rummet

$$(2.64) \qquad \begin{aligned} &H_0^1(\Omega) = \text{afslutningen af } C_0^\infty(\Omega) \text{ med hensyn til normen} \\ &\|u\|_1 = \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n |\partial_j u|^2 + |u|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Normen $\|u\|_1$ er en af de Sobolev normer, der indføres systematisk senere.

Lax-Milgrams sætning kan anvendes til også at knytte fornuftige operatorer til differentiationsudtryk der ikke nødvendigvis definerer symmetriske operatorer på $C_0^\infty(\Omega)$. Lad

$$(2.65) \qquad a_0(u,v) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\partial_k u \overline{\partial_j v}\, dx , \quad D(a_0) = C_0^\infty(\Omega) ,$$

hvor det antages, at a_{jk}'erne er begrænsede C^∞-funktioner på Ω , der opfylder

$$(2.66) \qquad \operatorname{Re} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)\zeta_j\overline{\zeta_k} \geq c_0(|\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2)$$
$$\text{for alle } x \in \Omega , \ \zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$$

med $c_0 > 0$ (denne og lignende betingelser kaldes ellipticitet). Lad $V = H_0^1(\Omega)$. Da a_0 åbenbart opfylder

$$|a_0(u,v)| \leq C\|u\|_1 \|v\|_1 \qquad \text{for } u,v \in C_0^\infty(\Omega)$$
$$\operatorname{Re} a_0(u,u) + c_0\|u\|_{L^2}^2 \geq c_0\|u\|_1^2 \qquad \text{for } u,v \in C_0(\Omega)$$

med $C = \sup_{j,k}\{|a_{jk}(x)| \mid x \in \Omega\}$, udvides a_0 ved afslutning til en begrænset sesquilineær form a på V, som er V-coerciv (med $k = c_0$). Ved Lax-Milgrams sætning definerer sættet (H,V,a) en operator A i H med de der nævnte egenskaber. Det ses ved delvis integration, at denne virker som

$$(2.67) \qquad Au = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j(a_{jk}\partial_k u), \quad \text{når } u \in C_0^\infty(\Omega),$$

så A er altså en generalisation af denne 2'ordens differentialoperator.

På denne måde får vi defineret nogle realisationer af $-\Delta$ og operatoren i (2.67). De kan studeres nærmere ved hjælp af distributionsteorien. Lad os nævne, at når $\overline{\Omega} \neq \mathbb{R}^n$, er disse operatorer, der er specielt knyttet til valget $V = H_0^1(\Omega)$, ikke den eneste mulighed for selvadjungerede (resp. Lax-Milgram) realisationer af $-\Delta$ og (2.67); man kan da også vælge V anderledes. De foreliggende operatorer kan vises at være knyttet til Dirichlet randbetingelsen, hvor funktionerne i $D(A)$ opfylder $u = 0$ ved randen af Ω i en passende generaliseret forstand, mens andre valg af V svarer til andre randbetingelser (hvor f.eks. en afledet af u er 0 ved randen).

Når $\Omega = \mathbb{R}^n$, er randen tom; i dette tilfælde er $R(S+I)$ tæt i H, og Fridrichsudvidelsen T_1 af $S+I$ er lig med $\overline{S}+I$, og er den eneste selvadjungerede udvidelse (og dermed er T den eneste selvadjungerede realisation af $-\Delta$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$). Vi får gode metoder til at vise surjektiviteten af $\overline{S}+I$ senere.

En anden, noget simplere type af eksempler er multiplikationsoperatorerne. Lad Ω være åben $\subset \mathbb{R}^n$, og lad f være en kontinuert funktion på Ω. Vi kan da definere multiplikationersoperatoren M_f ved

$$(2.68) \qquad \begin{aligned} D(M_f) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid f\cdot u \in L^2(\Omega)\} \\ M_f u &= fu . \end{aligned}$$

Når f er begrænset, bliver M_f en begrænset, overalt defineret operator, og

$$(2.69) \qquad \|M_f\| = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| .$$

Her er det oplagt, at $\|M_f\| \leq \sup|f(x)|$; og at der gælder lighedstegn ses f.eks. ved at bemærke, at der for hvert $\varepsilon > 0$ findes en kugle $B(a,r) = \{x \mid |x-a| < r\} \subset \Omega$, så at

$$|f(x)| \geq \sup|f| - \varepsilon \quad \text{for } x \in B(a,r) ;$$

så er $\|M_f u\| \geq (\sup|f|-\varepsilon)\|u\|$ for $u = 1_{B(a,r)}$ (hvor 1_X betegner funktionen som er 1 på X og 0 ellers).

Når f ikke antages at være begrænset, har man dog, at M_f er tæt defineret, thi lad

(2.70) $$\Omega_N = \{x \mid |f(x)| < N\} \cap B(0,N) \quad \text{for } N \in \mathbb{N};$$

så er $\Omega = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \Omega_N$, og når $u \in L^2(\Omega)$ vil $1_{\Omega_N} u \to u$ i $L^2(\Omega)$ for $N \to \infty$; her er $1_{\Omega_N} u \in D(M_f)$ for hvert N. Så er $(M_f)^*$ veldefineret; vi vil nu vise, at

(2.71) $$(M_f)^* = M_{\overline{f}}.$$

Her er det oplagt, at $M_{\overline{f}} \subset (M_f)^*$, idet

$$(M_f u|v) = \int_\Omega f u \overline{v}\, dx = (u|M_{\overline{f}} v)$$

når u og v er funktioner i $D(M_f)$ hhv. $D(M_{\overline{f}})$. For den modsatte inklusion, lad $v \in D((M_f)^*)$, lad $g = (M_f)^* v$, og lad v_0 og g_0 være repræsentanter for ækvivalensklasserne v hhv. g (med hensyn til ækvivalensrelationen: $v \sim v'$ når $v - v'$ er 0 uden for en nulmængde, jvf. side 1.1). Idet $L^2(\Omega_N)$ indlejres på naturlig måde i $L^2(\Omega)$ ved at funktionen $u \in L^2(\Omega_N)$ identificeres med funktionen $e_N u$ defineret ved

$$e_N u = \begin{cases} u & \text{på } \Omega_N \\ 0 & \text{på } \Omega \setminus \Omega_N, \end{cases}$$

har vi for enhver funktion $u \in L^2(\Omega_N)$:

$$\begin{aligned}(g_0|_{\Omega_N}|u)_{L^2(\Omega_N)} &= \int_{\Omega_N} g_0 \overline{u}\, dx = (g_0|e_N u)_{L^2(\Omega)} \\ &= (v_0|M_f(e_N u))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega_N} v_0 \overline{f u}\, dx = ((\overline{f} v_0)|_{\Omega_N}|u)_{L^2(\Omega_N)}\end{aligned}$$

(hvor nogle identifikationer underforstås). Da u var vilkårlig, følger af skalarproduktets egenskaber, at $g_0|_{\Omega_N}$ og $(\overline{f} v_0)|_{\Omega_N}$ repræsenterer det samme element i $L^2(\Omega_N)$. Da dette gælder for alle N, ses at $g_0 \sim \overline{f} v_0$, hvormed $v \in D(M_{\overline{f}})$ og $(M_f)^* v = g = M_{\overline{f}} v$. Specielt er M_f afsluttet. (Bemærk, at vi her har et tilfælde, hvor operatoren og dens adjungerede har samme definitionsmængde (som forøvrigt er lig $D(M_{|f|})$.)

Ovenstående observationer udvides let til tilfældet hvor f blot er en målelig funktion og Ω erstattes af en målelig mængde, idet man operetholder (2.68), erstatter $\sup|f(x)|$ i (2.69) med $\text{ess}\,\sup|f|$ (altså $L^\infty(\Omega)$-normen), og opretholder (2.71). Beviserne foregår stort set på samme måde, idet man dog i et detaljeret bevis må ræsonnere omhyggeligt med repræsentanter for ækvivalensklasser (modulo $\sim$).

3. Semigrupper af operatorer.

3.1. Evolutionsligninger.

En partiel differentialoperator, der har stor betydning i fysikken, er Laplace operatoren Δ, defineret på $\mathbb{R}^n$ ved

$$\Delta u(x) = \partial_{x_1}^2 u + \ldots + \partial_{x_n}^2 u \quad . \tag{3.1}$$

Den indgår dels isoleret, f.eks. i ligningen for et potentialfelt u i en åben delmængde af $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \in \Omega \ , \tag{3.2}$$

dels sammen med en tidsparameter t, f.eks. i varmeledningsligningen

$$\partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \quad \text{for} \quad x \in \Omega \quad \text{og} \quad t \geq 0 \ , \tag{3.3}$$

Schrödingerligningen

$$\frac{1}{i} \partial_t u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \quad \text{for} \quad x \in \Omega \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R} \ , \tag{3.4}$$

og bølgeligningen

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 \quad \text{for} \quad x \in \Omega \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R} \ . \tag{3.5}$$

Fælles for de sidste tre ligninger er, at de formelt kan opfattes som værende på formen

$$\partial_t u(t) = Bu(t) \ , \tag{3.6}$$

hvor $t \rightsquigarrow u(t)$ er en funktion fra tidsaksen ind i et rum af funktioner af x, hvori B opererer. For (3.3) virker B som Δ, for (3.4) som $i\Delta$. For (3.5) kan vi opnå formen (3.6) ved at indføre vektoren

$$v(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \partial_t u(t) \end{pmatrix} ,$$

som skal opfylde

$$\partial_t v(t) = Bv(t) \ , \quad \text{med} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.7}$$

Ligning (3.6) kaldes en evolutionsligning. Den simpleste version får vi i tilfældet hvor u har sine værdier i $\mathbb{C}$, og B blot er multiplikation med konstanten $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u(t) = \lambda u(t) ,$$

der jo som bekendt har løsningerne, for $c \in \mathbb{C}$,

$$u(t) = e^{t\lambda} c .$$

Vi vil i det følgende vise hvorledes den abstrakte funktionalanalyse tillader os at definere tilsvarende løsninger $\exp(tB)u_0$, når B opfylder passende betingelser.

Det enkleste tilfælde er hvor B er en begrænset operator på et Banach rum X . Her kan vi simpelthen sætte

$$\exp(tB) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{n!} (tB)^n \tag{3.8}$$

for hvert $t \in \mathbb{R}$, idet rækken konvergerer (absolut) i operatornormen mod en begrænset operator; dette ses f.eks. af udsnitskriteriet, idet

$$\| \sum_{N\leq n<N'} \frac{1}{n!} (tB)^n \| \leq \sum_{N\leq n<N'} \frac{1}{n!} |t|^n \|B\|^n ,$$

hvor højre side er et udsnit i den konvergente række for $\exp(\lambda)$ med $\lambda = |t| \|B\|$. Det ses, at $\|\exp(tB)\| \leq \exp(|t| \|B\|)$. Operatorfamilien opfylder for $s,t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(sB)\exp(tB) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sB)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tB)^m}{m!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n+m=\ell} \frac{s^n t^m}{n!m!} B^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(s+t)^\ell}{\ell!} B^\ell = \exp((s+t)B) , \end{aligned} \tag{3.9}$$

ved den tilsvarende identitet for eksponentialfunktionen; og for $s \geq t \geq 0$ haves

$$\begin{aligned} \|\exp(sB)-\exp(tB)\| &= \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n - t^n}{n!} B^n \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s^n-t^n)}{n!} \|B\|^n \\ &= \exp(s\|B\|) - \exp(t\|B\|) \quad \to \quad 0 \quad \text{for} \quad s-t \to 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\exp(-sB)-\exp(-tB)\| &= \|\exp(-tB)(\exp(tB)-\exp(sB))\exp(-sB)\| \\ &\leq \exp(|t| \|B\|)\exp(|s| \|B\|)\|\exp(tB)-\exp(sB)\| \\ &\to 0 \quad \text{for} \quad (-s)-(-t) \to 0 , \end{aligned}$$

hvilket viser, at operatorfamilien er kontinuert i t med hensyn til operatornormen.

Der findes også brugbare teorier for passende ubegrænsede operator B i X, herom mere nedenfor. Hvis X specielt er et Hilbertrum, kan man definere eksponentialfunktionen ved spektralteori, når B er en normal operator. Dette bruges især i følgende tilfælde (nævnes foreløbig uden bevis):

1^o Når B er selvadjungeret og opad halvbegrænset, har $\exp(tB)$ god mening for $t \geq 0$.

2^o Når B er skævselvadjungeret, dvs. $B^* = -B$, har $\exp(tB)$ god mening for $t \in \mathbb{R}$.

Tilfælde 1^o kan opnås for varmeledningsligningen, idet $-\Delta$ kan gives en mening som selvadjungeret ubegrænset operator ≥ 0 i $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tilfælde 2^o kan da opnås for Schrödinger-ligningen, idet $i\Delta$ herved bliver skævselvadjungeret i $L^2(\mathbb{R}^n)$. For bølgeligningen på formen (3.7) kan skævselvadjungerethed opnås ved brug af nogle andre særlige Hilbertrum. Hvis man vil arbejde med bølgeligningen i $L^2(\mathbb{R}^n)$, kan man i stedet interpretere løsningerne til den abstrakte ligning

$$\partial_t^2 u = -Au \tag{3.10}$$

som kombinationer af løsningerne $\cos(t\sqrt{A})u_0$ og $\sin(t\sqrt{A})u_0$ (hvor $A = -\Delta$ er ≥ 0); også dette kan gøres ved spektralteori.

Den spektralteori der skal bruges her, er en udvidelse af den fra Mat 313 velkendte, til ubegrænsede operatorer.

Vi vender os nu til en lidt mere almen definition af eksponentialfunktionen, nemlig ved teorien for semigrupper af operatorer, der også dækker tilfældene 1^o og 2^o.

3.2. Kontraktionssemigrupper i Banach rum.

Den følgende fremstilling bygger på Appendix 1 i Lax' og Phillips' bog "Scattering Theory".

En semigruppe af operatorer i et Banach rum X er en familie af operatorer $G(t) \in \mathbb{B}(X)$, parametriseret ved $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, om hvilken der gælder

(a) $G(0) = I$, og $G(s+t) = G(s)G(t)$ for alle s og $t \geq 0$.

En gruppe af operatorer er en familie af operatorer $G(t) \in \mathbb{B}(X)$ parametriseret ved $t \in \mathbb{R}$, så formlerne i (a) gælder for alle s og $t \in \mathbb{R}$. Her er alle operatorerne invertible, med $G(t)^{-1} = G(-t)$. Bemærk, at $G(t)$ og $G(-t)$ er semigrupper for $t \geq 0$. - Bemærk også, at $G(s)G(t) = G(t)G(s)$.

De semigrupper og grupper vi betragter, skal endvidere opfylde

(b) $G(t)x \to x$ for $t \to 0+$, for hvert $x \in X$.

Det vil være tilstrækkeligt for vore formål at betragte semigrupper (og grupper) af kontraktioner, altså dem, der tillige opfylder

(c) $\|G(t)\| \leq 1$ for alle t.

Lemma 3.1. *Når* $G(t)$ *opfylder* (a)-(c), *er* $t \rightsquigarrow G(t)x$ *for alle* $x \in X$ *en kontinuert funktion fra* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *til* X *(resp. fra* $\mathbb{R}$ *til* X *i tilfældet af en gruppe).*

Bevis: Ifølge (a) og (c) er, for $t_1 \leq t_2$,

$$\|G(t_2)x-G(t_1)x\| = \|G(t_1)(G(t_2-t_1)x-x)\| \leq \|G(t_2-t_1)x-x\| .$$

Lader vi t_1 og t_2 konvergere mod $t_0 \in [t_1,t_2]$, vil udtrykket gå mod 0 ifølge (b). □

Idet egenskaben i Lemma 3.1 kaldes stærk kontinuitet, kan vi herefter betegne de (semi)grupper der opfylder (a), (b) og (c) som stærkt kontinuerte kontraktions(semi)grupper. (Stærkt kontinuerte semigrupper opfylder blot (a) og kontinuitet.)

Den infinitesimale frembringer B er operatoren defineret ved

$$Bx = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(G(h)-I)x , \tag{3.11}$$

og $D(B)$ består af de x for hvilke grænseværdien eksisterer. Vi har nu brug for nogle almene bemærkninger om differentiation og integration i Banach rum.

Når I er et interval af $\mathbb{R}$, siges en funktion $v\colon I \to X$ at være differentiabel, såfremt $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(v(t+h)-v(t))$ eksisterer (for t og $t+h \in I$); grænseværdien kaldes $v'(t)$ (subsidiært $\partial_t v$ eller $\frac{dv}{dt}$). Mere præcist siger man her at $v(t)$ er norm differentiabel eller stærkt differentiabel, for at skelne egenskaben fra den egenskab at være svagt differentiabel. Det sidste betyder, at for enhver kontinuert funktional $x^* \in X^*$ er talfunktionen

$$f_{x^*}(t) = x^*(v(t))$$

differentiabel, på en sådan måde, at der findes et $v'(t) \in X$, så $\partial_t f_{x^*}(t) =$

$x^*(v'(t))$. En norm differentiabel funktion er naturligvis svagt differentiabel, med samme afledet $v'(t)$, men der findes eksempler på svagt differentiable funktioner, der ikke er norm differentiable.

Integralet af en kontinuert vektorfunktion $v: I \to X$ defineres ved hjælp af middelsummer ganske som i Matematik 102 (med $\mathbb{C}$ erstattet med X). Der gælder de sædvanlige regler

$$\int_a^b (\alpha v(t)+\beta w(t))dt = \alpha \int_a^b v(t)dt + \beta \int_a^b w(t)dt ,$$

$$\int_a^b v(t)dt + \int_b^c v(t)dt = \int_a^c v(t)dt$$

for punkter i vilkårlig beliggenhed i I , og

(3.12) $$\left\|\int_a^b v(t)dt\right\|_X \leq \int_a^b \|v(t)\|_X \, dt \qquad \text{når } a \leq b .$$

Ligesom for komplekse integraler er der ikke nogen egentlig middelværdisætning, men der gælder dog, at

(3.13) $$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} v(t)dt \to v(c) \quad \text{i } X \quad \text{for } h \to 0 .$$

Når vektorfunktionen $v: I \to X$ er differentiabel med kontinuert afledet $v'(t)$, gælder

(3.14) $$\int_a^b v'(t)dt = v(b) - v(a)$$

(fordi det tilsvarende gælder for funktionerne $f_{x^*}(t) = x^*(v(t))$).

Følgende sætning viser, at vektorfunktionen $u(t) = G(t)x$ opfylder differentialligningen (3.6).

Sætning 3.2. *For* $x \in D(B)$ *er funktionen* $G(t)x: \overline{\mathbb{R}}_+ \to X$ *differentiabel, med*

(3.15) $$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(G(t+h)x-G(t)x) = G(t)Bx = BG(t)x \qquad \textit{for alle } t \geq 0 .$$

Bevis: Når $h > 0$, er

$$\frac{1}{h}(G(t+h)x-G(t)x) = G(t)\,\frac{G(h) - I}{h}\,x = \frac{G(h) - I}{h}\,G(t)x .$$

Når $x \in D(B)$, konvergerer det midterste udtryk mod $G(t)Bx$ for $h \to 0+$. Dette viser, at $G(t)D(B) \subset D(B)$, samt at (3.15) gælder, når $h \to 0$ erstattes med $h \to 0+$. Hvis $t > 0$, skal vi også undersøge grænseovergangen gennem negative h ; her benyttes

$$\frac{1}{h}\,(G(t+h)x-G(t)x)-G(t)Bx = G(t+h)\,\frac{G(-h)-I}{-h}\,x - G(t)Bx$$
$$= G(t+h)\Big(\frac{G(-h)-I}{-h}\,x - Bx\Big) + (G(t+h)-G(t))Bx\ .$$

For et givet ε vælges først h_0 , så $\|\frac{1}{-h}\,(G(-h)-I)x-Bx\| < \varepsilon$ for $h_0 \le h < 0$. Da er det første led $< \varepsilon$ på grund af (c); og herefter kan h vælges $\in [h_0,0[$, så andet led er $< \varepsilon$, på grund af Lemma 3.1. $\square$

<u>Korollar 3.3</u>. *For* $x \in D(B)$ *er*

(3.16) $$G(t)x-x = \int_0^t G(s)Bx\,ds\ .$$

Dette følger af den generelle egenskab (3.14). Vi kan også vise:

<u>Lemma 3.4</u>. *For alle* $x \in X$ *gælder, at* $\int_0^t G(s)x\,ds$ *tilhører* $D(B)$ *og*

(3.17) $$G(t)x-x = B\int_0^t G(s)x\,ds\ .$$

<u>Bevis</u>: Det følger af kontinuiteten og semigruppeegenskaben (a), at der for $h > 0$ gælder

$$\frac{G(h)-I}{h}\int_0^t G(s)x\,dx = \frac{1}{h}\int_0^t (G(s+h)-G(s))x\,ds = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t G(s)x\,ds$$
$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} G(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds$$

hvilket konvergerer mod $G(t)x-x$ for $h \to 0$, ved (3.13). $\square$

<u>Lemma 3.5</u>. B *er afsluttet og tæt defineret.*

<u>Bevis</u>: Ifølge Lemma 3.4 er $\frac{1}{h}\int_0^h G(s)x\,ds \in D(B)$ for alle $x \in X$, $h > 0$, så da dette går mod x for $h \to 0$ er $D(B)$ tæt i X . Hvis nu $x_n \in D(B)$ med $x_n \to x$ og $Bx_n \to y$, så vil $G(s)Bx_n \to G(s)y$ <u>uniformt</u> i s (ved (c)), så at der for hvert $h > 0$ gælder

$$\frac{1}{h}(G(h)x-x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}(G(h)x_n-x_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h G(s)Bx_n ds = \frac{1}{h}\int_0^h G(s)y\,ds\ ,$$

ved Korollar 3.3. Imidlertid vil $\frac{1}{h}\int_0^h G(s)y\,ds \to y$ for $h \to 0$, hvoraf ses, at $x \in D(B)$ med $Bx = y$. □

Lemma 3.6. *En kontraktionssemigruppe er entydigt bestemt ved sin infinitesimale frembringer.*

Bevis: Antag, at $G_1(t)$ og $G_2(t)$ har samme infinitesimale frembringer B. For $x \in D(B)$ er $G_2(t)x \in D(B)$, og vi har, ved Leibniz' formel

$$\frac{d}{ds} G_1(t-s)G_2(s)x = -G_1(t-s)BG_2(s)x + G_1(t-s)G_2(s)Bx = 0 .$$

Ved integration over intervaller $[0,t]$ fås

$$G_1(0)G_2(t)x - G_1(t)G_2(0)x = 0 ,$$

dvs. $G_1(t)x = G_2(t)x$ for $x \in D(B)$. Da $D(B)$ er tæt i X, og disse operatorer er begrænsede, sluttes at $G_1(t) = G_2(t)$. □

Vi kan nu vise en vigtig egenskab ved B, nemlig at halvplanen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ ligger i resolventmængden, og resolventerne kan fremstilles direkte ved hjælp af semigruppen, og opfylder en god normvurdering.

Sætning 3.7. *Lad* $G(t)$ *være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe med frembringer* B. *Når* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, *er* $\lambda \in \rho(B)$, *og*

$$(B-\lambda I)^{-1}x = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)x\,dt \quad \textit{for } x \in X ; \tag{3.18}$$

endvidere er

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1} . \tag{3.19}$$

Bevis: Lad $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Bemærk først, at $e^{-\lambda t}G(t)$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe med infinitesimal frembringer $B-\lambda I$. En anvendelse af Korollar 3.3 og Lemma 3.4 på denne semigruppe giver, at

$$e^{-\lambda s}G(s)x - x = (B-\lambda I)\int_0^s e^{-\lambda t}G(t)x\,dt \quad \text{for } x \in X , \tag{3.20}$$

$$e^{-\lambda s}G(s)x - x = \int_0^s e^{-\lambda t}G(t)(B-\lambda I)x\,dt \quad \text{for } x \in D(B) . \tag{3.21}$$

For ethvert $y \in X$ gælder, at $\|e^{-\lambda t}G(t)y\| \leq e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, t}\|y\|$; derfor eksisterer grænseværdien

$$Ty = \lim_{s\to\infty}\int_0^s e^{-\lambda t}G(t)y\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t)y\,dt ,$$

og T er klart en lineær operator på X med norm $\|T\| \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda\, t}dt = (\mathrm{Re}\,\lambda)^{-1}$. Specielt vil $e^{-\lambda s}G(s)x \to 0$ for $s \to \infty$. Da medfører (3.20) og (3.21) efter grænseovergang

$$-x = (B-\lambda I)Tx \qquad \text{for } x \in X$$

$$-x = T(B-\lambda I)x \qquad \text{for } x \in D(B) ,$$

hvilket viser at λ er i resolventmængden, med resolventen lig med $-T$. $\square$

Vi har fundet nogle egenskaber ved den infinitesimale frembringer B for en kontraktionssemigruppe $G(t)$, og vender os nu til det for anvendelserne interessante spørgsmål om at bestemme den klasse af operatorer, der kan være infinitesimal frembringer for en kontraktionssemigruppe. Spørgsmålet blev besvaret af Hille og Yoshida (ca. 1945) med forskellige beviser for følgende sætning.

Sætning 3.8. (Hille-Yoshida) *Når* B *er en tæt defineret, afsluttet operator i* X *med* $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$ *og*

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| \leq \lambda^{-1} \qquad \textit{for } \lambda \in \mathbb{R}_+ , \tag{3.22}$$

så er B *infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe.*

Bevis: Lad $\lambda > 0$. Operatorerne

$$B_\lambda = -\lambda^2(B-\lambda I)^{-1} - \lambda I$$

er begrænsede med norm $\leq 2\lambda$, og vi kan danne operatorfamilierne

$$G_\lambda(t) = \exp(t\,B_\lambda) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} ,$$

ved (3.9) ff; de er kontinuerte i t med hensyn til operatornormen. Bemærk nu, at for $x \in D(B)$ er

$$\lambda(B-\lambda I)^{-1}x + x = (B-\lambda I)^{-1}(\lambda x+(B-\lambda I)x) = (B-\lambda I)^{-1}Bx ,$$

så at (3.22) medfører, at der for $x \in D(B)$ gælder

(3.23) $$-\lambda(B-\lambda I)^{-1}x \to x \quad \text{for } \lambda \to \infty .$$

Da $\|-\lambda(B-\lambda I)^{-1}\| \leq 1$ for alle $\lambda > 0$ og $D(B)$ er tæt i X, udvides (3.23) til alle $x \in X$. Vi får da endvidere

(3.24) $$B_\lambda x = -\lambda(B-\lambda)^{-1}Bx \to Bx \quad \text{for } x \in D(B) , \ \lambda \to \infty ,$$

og vi vil vise, at $G_\lambda(t)$ konvergerer (punktvis) mod en semigruppe $G(t)$ med B som frembringer, for $\lambda \to \infty$. Hertil bemærkes først, at en anvendelse af produktformlen, som i (3.9), giver, at $G_\lambda(t) = \exp(-\lambda^2(B-\lambda)^{-1}t)\exp(-\lambda t)$, hvor

$$\|\exp(-\lambda^2(B-\lambda)^{-1}t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|-\lambda^2(B-\lambda)^{-1}t\|^n}{n!} \leq \exp(\lambda t) \quad \text{ved (3.22)},$$

så at

(3.25) $$\|G_\lambda(t)\| \leq \exp(-\lambda t)\exp \lambda t = 1$$

for alle $t \geq 0$ og $\lambda > 0$. Da alle de begrænsede operatorer B_λ, B_μ, $G_\lambda(t)$, $G_\mu(s)$ for λ og $\mu > 0$, s og $t \geq 0$, kommuterer, har vi

$$G_\lambda(t) - G_\mu(t) = \int_0^t \frac{d}{ds}[G_\lambda(s)G_\mu(t-s)]ds = \int_0^t G_\lambda(s)G_\mu(t-s)(B_\lambda - B_\mu)ds$$

hvoraf følger, ved brug af (3.25),

(3.26) $$\|G_\lambda(t)x - G_\mu(t)x\| \leq t\,\|B_\lambda x - B_\mu x\| \quad \text{for } x \in X .$$

Når $x \in D(B)$, vil jo $B_\mu x \to Bx$ for $\mu \to \infty$ ifølge (3.24); da ses specielt, at følgen $\{G_n(t)x\}_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i X. Idet vi betegner grænseværdien ved $G(t)x$, får vi

(3.27) $$\|G_\lambda(t)x - G(t)x\| \leq t\,\|B_\lambda x - Bx\| \quad \text{for } x \in D(B) .$$

Det fremgår heraf, at når $x \in D(B)$, vil $G_\lambda(t)x \to G(t)x$ for $\lambda \to \infty$, <u>uniformt for t i begrænsede intervaller</u> $[0,a] \subset \overline{\mathbb{R}_+}$. Da der endvidere gælder at $\|G_\lambda(t)x\| \leq \|x\|$ for alle t og λ (jvf. (3.25)), følger at $\|G(t)x\| \leq \|x\|$, således at operatoren $x \rightsquigarrow G(t)x$ defineret for $x \in D(B)$ udvides ved afslutning til en operator $G(t) \in \mathbb{B}(X)$ med norm $\|G(t)\| \leq 1$. Om den udvidede operator gælder nu også

$$G_\lambda(t)x \to G(t)x \quad \text{for hvert } x \in X ,$$

uniformt for t i begrænsede intervaller $[0,a]$, thi lader vi $x_k \in D(B)$,

$x_k \to x$, har vi når $t \in [0,a]$

$$\|G_\lambda(t)x-G(t)x\| \le \|G_\lambda(t)(x-x_k)\| + \|G_\lambda(t)x_k-G(t)x_k\| + \|G(t)(x-x_k)\|$$
$$\le 2\|x-x_k\| + a\|B_\lambda x_k-Bx_k\|$$

hvor højre side vises at gå mod 0 for $\lambda \to \infty$, uafhængigt af t , ved at man først vælger x_k tæt ved x og dernæst tilpasser λ .

Semigruppeegenskaben (a) overføres til $G(t)$ fra $G_\lambda(t)$'erne, og at $G(t)$ opfylder (b) ses af at

$$\|G(t)x-x\| \le \|G(t)x-G_\lambda(t)x\| + \|G_\lambda(t)x-x\| ,$$

hvor man først vælger λ så stor, at $\|G(t)x-G_\lambda(t)x\| < \varepsilon$ for $t \in [0,1]$ og derefter lader $t \to 0$.

Semigruppen $G(t)$ har nu en infinitesimal frembringer C , og vi mangler blot at vise, at $C = B$. For $x \in D(B)$ har vi,

$$\|G_\lambda(s)B_\lambda x-G(s)Bx\| \le \|G_\lambda(s)\|\ \|B_\lambda x-Bx\| + \|(G_\lambda(s)-G(s))Bx\|$$
$$\le \|B_\lambda x-Bx\| + \|(G_\lambda(s)-G(s))Bx\| \to 0 \quad \text{for } \lambda \to \infty$$

uniformt for s i et begrænset interval, ved (3.24) og den viste konvergens af $G_\lambda(s)y$ i hvert $y \in X$. Dette giver, ved brug af Korollar 3.3 og (3.26), for $x \in D(B)$,

$$\frac{1}{h}(G(h)x-x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{h}(G_\lambda(h)x-x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h G_\lambda(s)B_\lambda x\, ds = \frac{1}{h}\int_0^h G(s)Bx\, dx .$$

Lader man nu $h \to 0$, vil det sidste udtryk konvergere mod $G(0)Bx = Bx$, hvoraf sluttes, at $x \in D(C)$ med $Cx = Bx$. Da $B-1$ og $C-1$ er bijektioner af hhv. $D(B)$ og $D(C)$ på X , må $B = C$. □

Operatorfamilien $G(t)$, defineret ud fra B på denne måde, betegnes også $\exp(t\, B)$.

Teorien kan generaliseres til semigrupper, der ikke nødvendigvis består af kontraktioner. Der er dels den trivielle generalisation, der består i at vi til operatoren $B+\mu I$ knytter semigruppen

(3.28) $$\exp(t(B+\mu I)) = \exp(t\,\mu)\exp(t\, B) ,$$

som kun består af kontraktioner, når $\mathrm{Re}\,\mu \le 0$. Her vil $\|\exp(t(B+\mu I))\| \le |\exp(t\,\mu)| = \exp(t\,\mathrm{Re}\,\mu)$. Mere generelle stærkt kontinuerte semigrupper vil kun tilfredsstille en ulighed af arten $\|G(t)\| \leq c_1 \exp t c_2$ med $c_1 \geq 1$, og kræver en mere almen teori - se f.eks. bøger af E. Hille - R. Phillips og af N. Dunford - J. Schwartz.

3.3. Kontraktionssemigrupper i Hilbert rum.

Vi betragter nu tilfældet hvor X er et Hilbertrum H .

Lemma 3.9. *Når* $G(t)$ *er en semigruppe i* H , *der opfylder* (a), (b) *og* (c), *er* B *opad halvbegrænset, med øvre grænse* ≤ 0 .

Bevis: For $x \in X$ haves

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{h}(G(h)x-x \mid x) = \frac{1}{h}\left(\mathrm{Re}(G(h)x \mid x) - \|x\|^2\right) \leq \frac{1}{h}\left(\|G(h)x\| \; \|x\| - \|x\|^2\right) \leq 0$$

ifølge (c), hvoraf fås for $x \in D(B)$ ved grænseovergang:

$$\mathrm{Re}(Bx|x) \leq 0 \quad \text{for} \quad x \in D(B) . \tag{3.29}$$

Dette viser lemmaet. □

I Hilbertrumstilfældet kan vi også betragte familien af adjungerede operatorer $G^*(t)$.

Sætning 3.10. *Når* $G(t)$ *er en semigruppe i* H , *der opfylder* (a), (b) *og* (c), *vil* $G^*(t)$ *ligeledes være en semigruppe i* H , *der opfylder* (a), (b) *og* (c), *og når frembringeren for* $G(t)$ *er* B , *er frembringeren for* $G^*(t)$ *netop* B^* .

Bevis: Det fås umiddelbart, at $G^*(t)$ opfylder (a) og (c). For (b) bemærker vi, at der for x og $y \in H$ gælder

$$(G^*(t)x|y) = (x|G(t)y) \to (x|y) \quad \text{for} \quad t \to 0 .$$

Heraf følger, at

$$\begin{aligned} 0 \leq \|G^*(t)x-x\|^2 &= (G^*(t)x \mid G^*(t)x) + \|x\|^2 - (G^*(t)x|x) - (x|G^*(t)x) \\ &\leq \|x\|^2 - (G^*(t)x|x) + \|x\|^2 - (x|G^*(t)x) \\ &\to 0 \quad \text{for} \quad t \to 0 , \end{aligned}$$

hvoraf ses at $G^*(t)x - x \to 0$ for $t \to 0$.

Lad nu C være den infinitesimale frembringer for $G^*(t)$, og lad $x \in D(B)$, $y \in D(C)$. Så er

$$(Bx|y) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}(G(h)x-x)\,\Big|\,y\right) = \lim_{h\to 0}\left(x\,\Big|\,\frac{1}{h}(G^*(h)y-y)\right) = (x|Cy) ,$$

så $C \subset B^*$. Ved Sætning 3.7 er $R(C-I) = H$; og $B^* - I$ er injektiv, da $Z(B^*-I) = R(B-I)^{\perp} = \{0\}$; så kan $C \subset B^*$ ikke gælde uden at $C = B^*$. □

Korollar 3.11. *En operator* B *i et Hilbertrum* H *er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe hvis og kun hvis* B *er tæt defineret og afsluttet, opfylder* (3.29), *og* $\mathbb{R}_+$ *ligger i resolventmængden fra* B .

Bevis. Nødvendigheden af betingelserne fremgår af det netop viste samt Lemma 3.5 og Sætning 3.7. At betingelserne er tilstrækkelige ses af, at (3.29) medfører at $-(B-\lambda I) = -B + \lambda I$ for $\lambda > 0$ har en begrænset invers med norm $\leq \lambda^{-1}$, ved Sætning 2.9.1^0; så kan Hille-Yoshida's sætning (Sætning 3.8) anvendes. □

Operatorer, der opfylder (3.29), kaldes i en del af litteraturen dissipative operatorer. Vi har følgende variant af ovenstående sætninger:

Korollar 3.12. *Lad* B *være en afsluttet, tæt defineret operator i et Hilbertrum* H . *Så er følgende egenskaber ækvivalente:*

(i) B *er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe.*

(ii) B *er dissipativ (dvs.* $m(-B) \geq 0$ *) og* $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$.

(iii) B *og* B^* *er dissipative.*

Bevis: Ækvivalensen af (i) og (ii) er vist ovenfor. (i) medfører (iii) ved Sætning 3.10, og (iii) medfører (ii) ved Sætning 2.9.3^0.

I følgende specialtilfælde er B nu åbenbart infinitesimal frembringer:

1^0 $B = -A$, hvor A er selvadjungeret ≥ 0 . Her er A og $A^* \geq 0$, så B og B^* er dissipative.

2^0 $B = -A$, hvor A er en Lax-Milgram operator med $m(A) \geq 0$. Her er $m(A^*)$ ligeledes ≥ 0 , så B og B^* er dissipative.

3^0 $B = iA$ hvor A er selvadjungeret, dvs. $B = -B^*$, B er skævselvadjungeret. Her er $\nu(B)$ og $\nu(B^*)$ indeholdt i den imaginære akse, så B og B^* er dissipative.

I sidstnævnte tilfælde kan vi indføre

$$U(t) = \exp(tB) \qquad \text{for } t \geq 0$$
$$U(t) = \exp(-tB^*) = U(-t)^* \qquad \text{for } t \leq 0 \;,$$

idet vi da også skriver $\exp(tB)$ for $t \leq 0$. Vi vil nu vise, at $U(t)$ er en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer.

At $U(t)x$ er kontinuert fra $t \in \mathbb{R}$ ind i H følger klart af kontinuiteten for $t \geq 0$ og $t \leq 0$. Dernæst vises, at $U(t)$ er en isometri for hvert $t \in \mathbb{R}_+$ eller $t \in \mathbb{R}_-$, idet man for $x \in D(B)$ har:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|U(t)x\|^2 &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[(U(t+h)x \mid U(t+h)x) - (U(t)x \mid U(t)x)\Big]\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{U(t+h)x-U(t)x}{h}\,\Big|\, U(t)x\right) + \lim_{h\to 0}\left(U(t)x \,\Big|\, \frac{U(t+h)x-U(t)x}{h}\right)\\
&\qquad + \lim_{h\to 0}\left(\frac{U(t+h)x-U(t)x}{h}\,\Big|\, U(t+h)x - U(t)x\right)\\
&= (Bx\mid x) + (x \mid Bx) = 0 \;;\end{aligned}$$

hvor vi efter andet lighedstegn brugte, at der for hvert $\varepsilon > 0$ findes h_0 så $\|U(t+h)x-U(t)x\| < \varepsilon$ for $|h| \leq h_0$, hvorefter vi lod $h \to 0$. Altså er $\|U(t)x\|^2$ konstant i t og dermed lig $\|U(0)x\|^2 = \|x\|^2$ for alle t; identeten udvides ved kontinuitet til $x \in H$. På lignende måde ses, at for $x \in D(B)$ er for $t \in \mathbb{R}_+$ eller $t \in \mathbb{R}_-$

$$\frac{d}{dt}U(t)U(-t)x = U(t)BU(-t)x + U(t)(-B)U(-t)x = 0 \;,$$

så $U(t)U(-t)x$ er konstant for $t \geq 0$ og for $t \leq 0$, og dermed lig med $U(0)U(0)x = x$. Identiteten

$$U(t)U(-t)x = x \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

udstrækkes åbenbart til alle $x \in H$ og viser at

$$U(t)^{-1} = U(-t) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}\,,$$

hvormed U er unitær. Ligeledes medfører den gruppeegenskaben, idet man f.eks. for $s \geq 0$, $0 \geq t \geq -s$ har

$$U(s)U(t) = U(s+t)U(-t)U(t) = U(s+t)\;.$$

Lad nu omvendt $U(t)$ være en stærkt kontinuert gruppe af kontraktioner. Hvis $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ og $\{U(-t)\}_{t\geq 0}$ har frembringerne B henholdsvis C, har vi for $x \in D(B)$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{U(-h)-I}{h} x = \lim_{h\to 0+} U(-h) \frac{I-U(h)}{h} x = -Bx ,$$

dvs. $-B \subset C$. Tilsvarende er $-C \subset B$, så $B = -C$. Der gælder da om B, at $m(-B) = m(B) = 0$ og såvel $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ og $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ er indeholdt i resolventmængden, hvilket viser at B er skævselvadjungeret, ved Sætning 2.10 anvendt på iB. Det ses nu af den foregående analyse, at operatorerne $U(t)$ er unitære.

Specielt har vi hermed vist M.H. Stone's sætning:

Sætning 3.13. (Stone) *En operator B i H er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert gruppe af unitære operatorer, hvis og kun hvis B er skævselvadjungeret.*

3.4. Anvendelser.

Når B er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktions-semigruppe (eller gruppe) $G(t)$ i et Banach rum eller Hilbert rum X, er vektorfunktionen

$$u(t) = G(t)u_0 \tag{3.31}$$

ifølge Sætning 3.2 løsning til det abstrakte Cauchy problem (begyndelsesværdi-problem)

$$\begin{cases} u'(t) = Bu(t) , & t \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R}) , \\ u(0) = u_0 , \end{cases} \tag{3.32}$$

for enhver given begyndelsesværdi $u_0 \in D(B)$. (Man kan tillige vise, at $G(t)u_0$ er den eneste kontinuert differentiable løsning til (3.32).) Semigruppe-teorien kan altså anvendes til at skaffe os løsninger på problemet (3.32) for forskellige typer af operatorer B.

Der er først og fremmest differentialoperatorerne indført i Afsnit 2.7 og 3.1, nemlig B lig med forskellige realisationer af Δ, $i\Delta$ eller $-A$, hvor A er som i (2.67). Hermed får vi bl.a. løsninger til begyndelsesværdiproblemerne for varmeledningsligningen og Schrödinger ligningen. Disse løsninger har umiddelbart et abstrakt præg, og vil naturligvis vinde ved en nærmere analyse, bl.a. ved hjælp af distributionsteorien. Man kan også gå videre med undersøgelser i en ramme af funktionalanalyse, som f.eks. i spredningsteorien.

Vi vil nu betragte multiplikationsoperatorerne. Lad f være en kontinuert funktion på Ω (åben $\subset \mathbb{R}^n$) med $\operatorname{Re} f(x) \leq 0$ for alle $x \in \Omega$. Så definerer f en multiplikationsoperator M_f i $L^2(\Omega)$ ved (2.68), og såvel M_f som $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$ er tæt definerede og afsluttede, og har numerisk værdimængde i halvplanen $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}$ (dette er temmelig oplagt, og berøres også i Øvelse 2.41). Ifølge Korollar 3.12 er M_f da infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe i $H = L^2(\Omega)$. På den anden side er det ligetil at vise, at operatorerne

$$G(t) = M_{\exp(tf)}\ , \quad t \geq 0\ , \tag{3.33}$$

udgør en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på H (kontinuiteten fås ved hjælp af Lebesgue sætning). Det er forventeligt, at den infinitesimale frembringer B for $G(t)$ er lig med M_f, og vi vil da også vise dette. Det er nok at vise, at $M_f \subset B$, for da $M_f - I$ og $B - I$ begge er bijektioner af deres definitionsmængde på H, kan inklusionen kun gælde, når $M_f = B$. Vi vil benytte en elementær ulighed: For ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ med $\operatorname{Re} z \leq 0$ gælder

$$\left|\frac{\exp z - 1}{z}\right| = \left|\int_0^1 \exp(t\, z)dt\right| \leq \int_0^1 \exp(t \operatorname{Re} z)dt \leq 1\ . \tag{3.34}$$

Af denne følger at når $\operatorname{Re} f(x) \leq 0$ og $h > 0$, er

$$\left|\frac{\exp(hf(x)) - 1}{h}\right| \leq |f(x)|\ . \tag{3.35}$$

Da man tillige har, at $\frac{1}{h}(\exp(hf(x))-1) \to f(x)$ for $h \to 0$, for hvert x, ses det ved hjælp af Lebesgues sætning, at når $u \in D(M_f)$, er $\frac{1}{h}(G(h)-I)u$ konvergent i $L^2(\Omega)$ mod grænseværdien fu for $h \to 0+$. Dette viser, at $M_f \subset B$ og dermed $M_f = B$. I alt har vi

<u>Sætning 3.14</u>. *Når* f *er en kontinuert funktion på en åben mængde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *med* $\operatorname{Re} f(x) \leq 0$ *for alle* $x \in \Omega$, *er operatoren* M_f *i* $L^2(\Omega)$ *infinitesimal frembringer for den stærkt kontinuerte kontraktionssemigruppe* $G(t) = M_{\exp(tf)}$ *i* $L^2(\Omega)$.

Sætningen kan udvides til at gælde for målelige funktioner f og målelige mængder Ω.

Et noget andet eksempel fås ved som $G(t)$ at tage translationssemigruppen på $L^2(\mathbb{R})$ defineret ved

$$[T(t)u](x) = u(x-t) \quad \text{for} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

Denne er oplagt en gruppe af unitære operatorer på $L^2(\mathbb{R})$, og den stærke kontinuitet fås f.eks. således: For $u \in L^2(\mathbb{R})$ og $\varepsilon > 0$ vælges $v \in C^0(\mathbb{R})$ med kompakt støtte, så $\|u-v\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon/3$. Så er

$$\|T(h)u-u\| \leq \|T(h)u-T(h)v\| + \|T(u)v-v\| + \|v-u\| \leq 2\varepsilon/3 + \|T(h)v-v\| ,$$

hvor $T(h)v \to v$ for $h \to 0$, uniformt på en kompakt mængde der indeholder støtterne for $T(h)v$ for $h \in [0,1]$; da går $T(h)v$ mod v i $L^2(\mathbb{R})$. Den infinitesimale frembringer B er jo defineret for de $u \in L^2(\mathbb{R})$, for hvilke

$$\frac{1}{h}(T(h)-I)u = \frac{1}{h}(u(x-h)-u(x)) \to Bu \quad \text{i} \quad L^2(\mathbb{R}) \tag{3.37}$$

for $h \to 0+$. Det ses, at Bu er en slags differentialkvotient af u, og den generaliserer det sædvanlige differentiationsbegreb på den måde, at når $u \in C^1(\mathbb{R})$ og har kompakt støtte, er Bu faktisk lig med $-\partial_x u$ (for i dette tilfælde konvergerer differenskvotienten af u uniformt mod differentialkvotienten på en passende stor kompakt mængde - se evt. Lemma 5.5 senere). Det vil vise sig, at dette differentiationsbegreb stemmer overens med de andre nye, vi har indført for funktioner af én variabel; men vi gemmer dette til det bliver et simpelt korollar af den øvrige teori. (Ved Fourier transformation kan det føres over i en anvendelse af Sætning 3.14.) Den evolutionsligning, $T(t)$ løser, er

$$\partial_t u(x,t) = -\partial_x u(x,t) \tag{3.38}$$

hvor ∂_t læses som differentiation af vektorfunktionen $t \rightsquigarrow u(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$, og $-\partial_x$ læses som B. Eksemplet er i sig selv lidt specielt, men har interessantere generalisationer.

Topologiske vektorrum. Fréchet rum.

4.1. Almen teori.

Et topologisk vektorrum (t.v.r.) over skalarlegemet $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ (vi betragter næsten altid $\mathbb{C}$), er et vektorrum X forsynet med en topologi τ med følgende egenskaber:

(4.1)
(i) Mængder bestående af ét punkt $\{x\}$ er afsluttede.
(ii) Afbildningerne

$$\{x,y\} \rightsquigarrow x+y \quad \text{af } X \times X \text{ ind i } X$$
$$\{\lambda,x\} \rightsquigarrow \lambda x \quad \text{af } \mathbb{L} \times X \text{ ind i } X$$

er kontinuerte.

Herved bliver X specielt et Hausdorff rum (vi har af bekvemmeligheds-grunde medtaget (i) i selve definitionen af t.v.r.). $\mathbb{L}$ betragtes med den sædvanlige topologi for $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

En mængde $Y \subset X$ siges at være

a) konveks, når y_1 og $y_2 \in Y$ og $t \in]0,1[$ medfører

$$ty_1 + (1-t)y_2 \in Y ,$$

b) balanceret, når $y \in Y$ og $|\lambda| \leq 1$ medfører $\lambda y \in Y$;

c) begrænset (med hensyn til τ), når der for hver omegn U af 0 findes $t > 0$, så $Y \subset tU$.

Bemærk, at begrænsethed defineres uden reference til "kugler" og lignende.

Lemma 4.1. *Lad* X *være et topologisk vektorrum, og lad* $a \in X$ *og* $\lambda \in \mathbb{L}\setminus\{0\}$. *Afbildningerne fra* X *ind i* X

(4.2)
$$T_a : x \rightsquigarrow x+a$$
$$M_\lambda : x \rightsquigarrow \lambda x$$

er kontinuerte, med kontinuerte inverser T_{-a} *henholdsvis* $M_{1/\lambda}$.

Beviset er en øvelse i brug af definitionen af t.v.r.

Lemmaet viser bl.a., at topologien for et t.v.r. X er translationsinvariant, altså at $E \in \tau \Leftrightarrow a+E \in \tau$ for alle $a \in X$. Topologien er derfor kendt, når blot man kender systemet af omegne af 0. Her er det som sædvanlig tilstrækkeligt at kende en basis for omegnssystemet ved 0, dvs. et system $\mathfrak{B}$ af omegne af 0, så at enhver omegn af 0 indeholder en mængde $U \in \mathfrak{B}$.

X siges at være lokalkonvekst, når der findes en omegnsbasis ved 0 bestående af konvekse mængder.

X siges at være metriserbart, når der findes en metrik d på X, så topologien på X er identisk med topologien defineret ved denne metrik; dette finder sted netop når kuglerne $B(x,\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, udgør en basis for omegnssystemet ved x for hvert $x \in X$. Her betegner $B(x,r)$ som sædvanligt den åbne kugle

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} ,$$

og vi vil også bruge notationen $\underline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$. En sådan metrik behøver ikke være translationsinvariant, men vil næsten altid være det i de tilfælde, vi betragter; translationsinvarians (også kaldet invarians) betyder her

$$d(x+a,y+a) = d(x,y) \quad \text{for} \quad x,y,a \in X .$$

Som Cauchy følge i et t.v.r. X betegner vi enhver følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med egenskaben: For enhver omegn U af 0 findes et $N \in \mathbb{N}$ så at for n og $m > N$ er $x_n - x_m \in U$.

Hvis topologien i X er givet ved en invariant metrik d, er Cauchy følge begrebet for X det samme som Cauchy følge begrebet m.h.t. metrikken d (metriske Cauchy følger er følger (x_n) hvor $d(x_n,x_m) \to 0$ i $\mathbb{R}$ for n og $m \to \infty$); men er metrikken ikke invariant, kan det metriske Cauchy følge begreb komme til kort (jvf. Øvelse 4.1).

Et metrisk rum kaldes jo fuldstændigt, når enhver metrisk Cauchy følge er konvergent. Mere generelt kalder vi et t.v.r. følge-fuldstændigt, når enhver Cauchy følge er konvergent.

Banachrum og Hilbertrum er naturligvis fuldstændige, metriserbare topologiske vektorrum. Følgende mere generelle type er også vigtig:

Definition 4.2. *Et topologisk vektorrum kaldes et Fréchet rum, når X er metriserbart med en translationsinvariant metrik, er fuldstændigt, og er lokalkonvekst.*

Lokalkonveksheden nævnes explicit, fordi kuglerne hørende til en given metrik ikke behøver være konvekse, jvf. Øvelse 4.2. (Der gælder dog, at hvis X er metriserbart og lokalkonvekst, kan man finde en metrik for X med konvekse kugler, jvf. Rudin: "Functional Analysis", Th. 1.24.) Bemærk, at kuglerne hørende til en norm er konvekse.

Det er også muligt at definere Fréchet rums topologier (og andre lokalkonvekse topologier) ved hjælp af seminormer; vi vil derfor se nærmere på denne måde at definere topologier på.

Vi minder om, at en seminorm på et vektorrum X er en funktion $p: X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ med egenskaberne

$$(4.3) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & p(x+y) \leq p(x)+p(y) \quad \text{for} \quad x,y \in X \quad \text{(subadditivitet)}, \\ \text{(ii)} & p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \text{for} \quad \lambda \in \mathbb{L} \quad \text{og} \quad x \in X \quad \text{(multiplikativitet)}. \end{array}$$

En familie $\mathcal{P}$ af seminormer kaldes separerende, når der for hvert $x_0 \in X$ findes $p \in \mathcal{P}$ med $p(x_0) > 0$.

Sætning 4.3. *Lad* X *være et vektorrum og lad* $\mathcal{P}$ *være en separerende familie af seminormer på* X . *Definer en topologi på* X *ved at en basis* $\mathcal{B}$ *for omegnssystemet ved 0 består af de konvekse balancerede mængder*

$$(4.4) \qquad V(p,\tfrac{1}{n}) = \{x \mid p(x) < \tfrac{1}{n}\} \quad , \quad p \in \mathcal{P} \text{ og } n \in \mathbb{N} ,$$

samt deres endelige fællesmængder

$$(4.5) \qquad W(p_1,\dots,p_N;\tfrac{1}{n_1},\dots,\tfrac{1}{n_N}) = V(p_1,\tfrac{1}{n_1}) \cap \dots \cap V(p_N,\tfrac{1}{n_N}) \ ;$$

og en basis for omegnssystemet ved hvert $x \in X$ *består af de translaterede mængder* $x + W(p_1,\dots,p_N;\tfrac{1}{n_1},\dots,\tfrac{1}{n_N})$. *Med denne topologi er* X *et topologisk vektorrum. Seminormerne* $p \in \mathcal{P}$ *er selv kontinuerte afbildninger af* X *ind i* $\mathbb{R}$. *En mængde* $E \subset X$ *er begrænset hvis og kun hvis* $p(E)$ *er begrænset i* $\mathbb{R}$ *for alle* $p \in \mathcal{P}$.

Bevis: Det er klart, at forskriften definerer en topologi på X , som er invariant under translation og under multiplikation med en skalar $\neq 0$. Mængderne

$$(4.6) \qquad V(p,x_0,\varepsilon) = \{x \in X \mid p(x-x_0) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

er naturligvis også omegne af x_0 . Kontinuiteten af p'erne følger af subadditiviteten: For hvert $x_0 \in X$ og $\varepsilon > 0$ afbildes $V(p,x_0,\varepsilon)$ ind i omegnen

$B(p(x_0),\varepsilon)$ af $p(x_0)$ i $\mathbb{R}$, idet

$$p(x) - p(x_0) \leq p(x-x_0) + p(x_0) - p(x_0) < \varepsilon$$
$$p(x_0) - p(x) \leq p(x_0-x) + p(x) - p(x) < \varepsilon$$

for $x \in V(p,x_0,\varepsilon)$.

Punktmængden $\{0\}$ (og dermed ethvert andet punkt) er afsluttet, idet hvert $x_0 \neq 0$ har en omegn disjunkt fra $\{0\}$, nemlig $V(p,x_0,\varepsilon)$ (4.6), hvor p vælges så $p(x_0) \neq 0$, og $\varepsilon < p(x_0)$. Vi skal nu vise kontinuiteten af regneoperationerne: For kontinuiteten af addition skal vi vise, at der til en omegn $W+x+y$ findes omegne W_1+x af x og W_2+y af y , så at

$$W_1+x+W_2+y \subset W+x+y \ ,$$

dvs. $W_1+W_2 \subset W$. Her bruges blot, at når $W = W(p_1,\dots,p_N;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$ er en basisomegn ved 0, og vi sætter

$$W' = \tfrac{1}{2}\,W(p_1,\dots,p_N;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N) = W(p_1,\dots,p_N;\tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\dots,\tfrac{1}{2}\varepsilon_N) \ ,$$

så er $W'+W' \subset W$ på grund af subadditiviteten. For kontinuiteten af multiplikation skal vi vise, at der til en omegn $W+\alpha x$ af αx findes omegne $B(0,r)+\alpha$ (af α i $\mathbb{L}$) og $W'+x$ (af x i X), så at

(4.7) $$(B(0,r)+\alpha)(W'+x) \subset W+\alpha x \ .$$

Her er

$$(B(0,r)+\alpha)(W'+x) \subset B(0,r)W' + \alpha W' + B(0,r)x + \alpha x \ .$$

Lad $W = W(p_1,\dots,p_N;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$, og lad $W' = \delta W$, $\delta > 0$. På grund af multiplikativiteten af p_j'erne findes $c \geq 0$ så $x \in cW$, og dermed

$$B(0,r)x \subset rcW \ .$$

Endvidere er

$$B(0,r)W' \subset r\,W' = r\delta W$$

og

$$\alpha W' \subset |\alpha| W' = |\alpha|\,\delta W \ .$$

Vælg nu først δ så lille, at $|\alpha|\delta < \frac{1}{3}$, og dernæst r så lille, at $r\delta < \frac{1}{3}$ og $rc < \frac{1}{3}$. Så er

$$B(0,r)W' + \alpha W' + B(0,r)x \subset \tfrac{1}{3}W + \tfrac{1}{3}W + \tfrac{1}{3}W \subset W \ ,$$

hvormed (4.7) er opfyldt. I alt ses, at topologien på X gør X til et topologisk vektorrum.

Endelig skal vi beskrive de begrænsede mængder. Antag først, at E er begrænset. Lad $p \in \mathfrak{P}$, så findes ifølge antagelsen et $t > 0$, så $E \subset tV(p,1) = V(p,t)$. Da er $p(x) \in [0,t[$ for $x \in E$, så $p(E)$ er begrænset. Lad omvendt E være en mængde, så der for hvert p findes $t_p > 0$ med $p(x) < t_p$ for $x \in E$. Når $W = W(p_1,\ldots,p_N; \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$, har vi da, at $E \subset tW$ for $t \geq \max\{t_{p_1}/\varepsilon_1,\ldots,t_{p_N}/\varepsilon_N\}$. □

Sætningen fremgår også af Mat 313, §11, hvor topologien defineret ved systemet $\mathfrak{P}$ kaldes den svage topologi. Bemærk, at x_k konvergerer mod x i X hvis og kun hvis $p(x_k - x) \to 0$ for hvert $p \in \mathfrak{P}$.

Bemærkning 4.4. Vi observerer, at i definitionen af topologien i Sætning 4.3 udgør mængderne (4.4) en subbasis for omegnssystemet ved 0. Hvis den givne familie af seminormer $\mathfrak{P}$ har følgende egenskab (som vi vil kalde max-egenskaben)

(4.8) $$\forall p_1,p_2 \in \mathfrak{P}\ \exists p \in \mathfrak{P}, c > 0: p \geq c \max\{p_1,p_2\} ,$$

indeholder enhver af basismængderne (4.5) en mængde af formen (4.4), nemlig en med $p \geq c \max\{p_1,\ldots,p_N\}$ og $n = c \max\{n_1,\ldots,n_N\}$; her er (4.4) allerede en basis for topologien. For en given familie af seminormer $\mathfrak{P}$ kan man altid supplere op, så man får en familie med max-egenskaben, der definerer samme topologi, idet vi simpelthen kan erstatte $\mathfrak{P}$ med $\mathfrak{P}'$, bestående af $\mathfrak{P}$ samt alle seminormer af formen

$$p = \max\{p_1,\ldots,p_N\} , \quad p_1,\ldots,p_N \in \mathfrak{P} ; \quad N \in \mathbb{N} .$$

I det følgende vil vi ofte kunne opnå, at $\mathfrak{P}$ endda er ordnet (altså når p og $p' \in \mathfrak{P}$, er enten $p(x) \leq p'(x)\ \forall x \in X$ eller $p'(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$); da har $\mathfrak{P}$ specielt max-egenskaben.

Lemma 4.5. *Når topologien på* X *er givet ved Sætning 4.3, og* $\mathfrak{P}$ *har max-egenskaben, så er en lineær funktional* Λ *på* X *kontinuert hvis og kun hvis der findes et* $p \in \mathfrak{P}$ *og en konstant* $c > 0$, *så at*

(4.9) $$|\Lambda(x)| \leq c\, p(x) \quad \textit{for alle } x \in X .$$

Beviset er en øvelse i definitionerne.

Familien af seminormer $\mathcal{P}$ kan specielt være dannet ud fra et vektorrum Y af lineære funktionaler på X, ved at $|\Lambda(x)|$ tages som seminorm, når $\Lambda \in Y$. Dette vigtige tilfælde (og de hertil knyttede aspekter vedrørende svag topologi og w* (svag *) topologi) i forbindelse med Banachrum, er udførligt behandlet i Mat 313 §11ff.

Sætning 4.6. *Når X er et t.v.r., hvor topologien er defineret ved en tællelig, separerende familie af seminormer $\mathcal{P} = (p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, da er X metriserbart, med topologien på X defineret ved den invariante metrik*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} . \tag{4.10}$$

Bevis: Rækken (4.10) er åbenbart konvergent for alle $x,y \in X$. Følgende uligheder er elementære:

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} \quad \text{når} \quad 0 \le a \le b$$

$$\frac{a+b}{1+a+b} \le \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \quad \text{når} \quad a \text{ og } b \ge 0 . \tag{4.11}$$

Heraf fås

$$d(x+y,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x+y)}{1+p_k(x+y)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)+p_k(y)}{1+p_k(x)+p_k(y)}$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(y)}{1+p_k(y)} = d(x,0) + d(y,0) .$$

Da d er invariant, og $d(x,0) \neq 0$ for $x \neq 0$, ses i alt, at d er en metrik. Vi skal nu vise, at kuglerne $B(0,\frac{1}{n})$ udgør en basis ved 0 for omegnssystemet defineret ved seminormerne i $\mathcal{P}$.

Lad $B(0,\frac{1}{n})$ være givet. Vælg N, så $\Sigma_{k>N} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2n}$; da er

$$\sum_{k>N} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} < \frac{1}{2n} \quad \text{for alle} \quad x \in X .$$

For hvert x i omegnen $W(p_1,\dots,p_N; \frac{1}{2n},\dots,\frac{1}{2n})$ gælder endvidere, at

$$\sum_{1\le k\le N} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \le \sum_{1\le k\le N} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} ,$$

hvormed i alt fås

$$W(p_1,\dots,p_N; \frac{1}{2n},\dots,\frac{1}{2n}) \subset B(0,\frac{1}{n}) .$$

(Dette viser, med brug af metrikkens invarians, at afbildningen $x \rightsquigarrow d(x,0)$ er kontinuert fra X ind i $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

Omvendt, lad U være en omegn af 0 i X. Der findes N' og $N'' \in \mathbb{N}$, så

$$W(p_1,\dots,p_{N'};\frac{1}{N''},\dots,\frac{1}{N''}) \subset U ;$$

specielt er

$$W(p_1,\dots,p_N ; \frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N}) \subset U$$

for $N = \max\{N',N''\}$. Når $x \in B(0,\varepsilon)$ for et $\varepsilon > 0$, er

$$\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} < \varepsilon \quad \text{for alle } k \in \mathbb{N} .$$

Heraf ses, når $\varepsilon < 2^{-N}$, at

$$p_k(x) < \varepsilon(\frac{1}{2^k}-\varepsilon)^{-1} \qquad \text{for } k \leq N .$$

Vælger vi nu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ så lille, at $\varepsilon(\frac{1}{2^k}-\varepsilon)^{-1} < \frac{1}{N}$ for alle $k < N$, har vi at

$$B(0,\frac{1}{n}) \subset W(p_1,\dots,p_N ; \frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N}) \subset U .$$

I alt ses, at systemet af kugler $B(0,\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, er en basis ved 0 for topologien i X. □

Når et rum X topologiseret ved Sætning 4.6 er et fuldstændigt metrisk rum, har vi et Fréchet rum, jvf. Definition 4.2. Vi bemærker den lille finte, at rummet er lokalkonvekst på grund af definitionen af topologien ved seminormer, mens kuglerne defineret ved metrikken (4.10) ikke behøver være konvekse, jvf. Øvelse 4.2. (Der findes dog en anden, hermed kompatibel metrik med konvekse kugler, som vist i Rudin's bog Th. 1.24.) Det vil i praksis være mest bekvemt at regne ud fra seminormerne, snarere end en metrik, omend eksistensen af den har nyttige konsekvenser.

Bemærkning 4.7. Man kan stille det omvendte spørgsmål: om topologien i et vilkårligt lokalkonvekst rum X kan defineres ved en separerende familie af seminormer? Svaret er ja, idet man til en omegnsbasis for 0 bestående af konvekse, balancerede, åbne mængder V, knytter Minkowski funktionalerne μ_V defineret ved

$$\mu_V(x) = \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in V\} ;$$

så kan det vises, at μ_V'erne er en separerende familie af seminormer der definerer topologien på X (se også Mat 313, Lemma 11.5). Hvis X også er metriserbart, kan topologien defineres ved en tællelig familie af seminormer, idet X har en omegnsbasis ved 0 bestående af en følge af åbne, konvekse balancerede mængder. Mere om disse ting i Rudins bog, Kapitel 1.

Ligesom ved Banach rum har man nogle bekvemme regler til karakterisering af kontinuerte lineære operatorer på Fréchet rum. Ved en begrænset operator forstås en operator der sender begrænsede mængder ind i begrænsede mængder.

Sætning 4.8. *Lad* X *være et Fréchet rum og* Y *et topologisk vektorrum. Når* T *er en lineær afbildning af* X *ind i* Y, *er følgende fire udsagn ækvivalente:*

(a) T *er kontinuert.*

(b) T *er begrænset.*

(c) $x_n \to 0$ *i* X *for* $n \to \infty \Rightarrow \{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *er begrænset i* Y;

(d) $x_n \to 0$ *i* $X \Rightarrow Tx_n \to 0$ *i* Y.

Bevis: (a) $\Rightarrow$ (b). Lad E være begrænset i X, og lad $F = T(E)$. Lad V være en omegn af 0 i Y. Da T er kontinuert, findes en omegn U af 0 i X, så $T(U) \subset V$. Da E er begrænset, findes et tal $t > 0$, så $E \subset tU$. Da er $F \subset tV$; altså er F begrænset.

(b) $\Rightarrow$ (c). Når $x_n \to 0$, er mængden $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ begrænset. Da er $\{Tx_n \mid x_n \in \mathbb{N}\}$ begrænset ifølge (b).

(c) $\Rightarrow$ (d). Lad d betegne en translationsinvariant metrik, som definerer topologien. Trekantsuligheden giver da, at

$$(4.12) \qquad d(0,nx) \leq d(0,x) + d(x,2x) + \dots + d((n-1)x,nx) = nd(0,x)$$

for $n \in \mathbb{N}$. Når $x_n \to 0$, vil $d(x_n,0) \to 0$, så der findes en følge af indices n_k, så $d(x_n,0) < k^{-2}$ for $n \geq n_k$. Da vil $d(kx_n,0) \leq kd(x_n,0) \leq k^{-1}$ for $n \geq n_k$, så også følgen $t_n x_n$ går mod 0 for $n \to \infty$, hvor t_n er defineret ved at

$$t_n = k \quad \text{for} \quad n_k \leq n \leq n_{k+1} - 1 .$$

Ifølge (c) er følgen $t_n Tx_n$ begrænset, hvoraf ses, at $Tx_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(d) $\Rightarrow$ (a). Hvis T ikke er kontinuert, findes der en omegn V af 0 i Y samt for hvert n et x_n med $d(x_n,0) < \frac{1}{n}$ og $Tx_n \notin V$. Her går x_n mod 0, mens $Tx_n \not\to 0$, dvs. (d) gælder ikke. $\square$

Bemærkning 4.9. Man ser af beviset, at forudsætningen i Sætning 4.8 om at X er et Fréchet rum, kan erstattes med at X er et metriserbart topologisk vektorrum med en invariant metrik.

En funktional Λ på X ses specielt at være kontinuert hvis og kun hvis $x_n \to 0$ i X medfører $\Lambda x_n \to 0$ i $\mathbb{L}$.

Da "begrænset" og "kontinuert" er synonymt for lineære operatorer i situationen beskrevet i Sætning 4.8, vil vi, som for Banach rum, betegne mængden af kontinuerte lineære operatorer fra X ind i Y ved $\mathbb{B}(X,Y)$.

Man kan også betragte ubegrænsede operatorer, og operatorer, der ikke er overalt definerede, med tilsvarende konventioner som i Kapitel 2.

4.2 Eksempler.

Vi skal nu se på nogle eksempler. I det følgende betegner Ω en åben, ikke-tom delmængde af $\mathbb{R}^n$. De kompakte delmængder af Ω vil spille en stor rolle, så vi bemærker først, at der findes en følge af kompakte mængder $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ med egenskaberne

$$K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \ldots \subset \overset{\circ}{K}_j \subset K_j \subset \ldots \tag{4.13}$$
$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_j = \Omega .$$

Man kan her som K_j for eksempel tage

$$K_j = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; |x| \le j \quad \text{og} \quad \operatorname{dist}(x, C\Omega) \ge \frac{1}{j}\right\} \tag{4.14}$$

(idet det indre af denne mængde fås ved den tilsvarende definition med skarpe ulighedstegn); om nødvendigt stryges de første, endeligt mange tomme K_j'er, og der omnummereres.

For enhver kompakt delmængde K af Ω gælder, at den ligger i K_j fra et vist trin (thi mængderne $(\overset{\circ}{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ udgør en åben overdækning af Ω).

Når $[a,b]$ er et kompakt interval af $\mathbb{R}$, definerer man jo $C^k([a,b])$ (evt. præciseret til $C^k([a,b],\mathbb{C})$ eller $C^k([a,b],\mathbb{R})$) som Banach rummet af komplekse funktioner hhv. reelle funktioner med kontinuerte afledede af orden til og med k, idet normen defineres ved

(4.15) $$\|f\|_{C^k} = \sup\left\{|\partial^j f(x)| \;\middle|\; x \in [a,b] \;,\; 0 \leq j \leq k\right\} .$$

Vi sætter endvidere

$$C^\infty([a,b]) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k([a,b]) .$$

Sidstnævnte ses at være et Fréchet rum med topologien defineret ved familien af seminormer

$$p_k(f) = \sup\left\{|\partial^k f(x)| \;\middle|\; x \in [a,b]\right\}$$

for $k \in \mathbb{N}_0$; man kan her også bruge familien

$$p_k'(f) = \|f\|_{C^k}$$

(jvf. (4.15)), som har max-egenskaben.

Hvis $[a,b]$ erstattes af et åbent interval, eller mere generelt en åben delmængde Ω af $\mathbb{R}^n$, vil det i reglen ikke være tilfredsstillende at definere topologien ud fra sup-normen over hele Ω (der udelukkes mange relevante funktioner herved). Man tager nu en voksende følge af kompakte delmængder af Ω (4.13), og definerer topologien på $C^k(\Omega)$ ved seminormerne

(4.16) $$p_{k,j}(f) = \sup\left\{|D^\alpha f(x)| \;\middle|\; |\alpha| \leq k \;,\quad x \in K_j\right\}$$

for $j \in \mathbb{N}$, hvorved $C^k(\Omega)$ bliver et Fréchet rum. Man definerer endvidere topologien på $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(\Omega)$ ved familien af seminormer $(p_{k,j})_{k\in\mathbb{N}_0, j\in\mathbb{N}}$, hvormed det er et Fréchet rum. Denne familie har max-egenskaben, så mængderne

(4.16') $$V(p_{k,j},\varepsilon) = \left\{f \in C^\infty(\Omega) \;\middle|\; |D^\alpha f(x)| < \varepsilon \;\text{ for }\; |\alpha| \leq k \;,\; x \in K_j\right\}$$

udgør en basis for omegnssystemet ved 0. Man kan her nøjes med familien af seminormer $(p_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$, som er voksende. - For hver kompakt delmængde K af Ω definerer vi endvidere

(4.17) $$C_K^\infty(\Omega) = \left\{u \in C^\infty(\Omega) \;\middle|\; \operatorname{supp} u \subset K\right\} ,$$

rummet af C^∞-funktioner med støtte (support) i K ; det forsynes med delrumstopologien. Støtten af en funktion u på Ω er den afsluttede mængde

(4.18) $$\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \left(\cup\{\omega \text{ åben} \subset \Omega \mid u = 0 \text{ på } \omega\}\right) ,$$

altså komplementærmængden til foreningsmængden af de åbne mængder hvor u er 0. $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ er selv den største åbne mængde, hvor u er 0. (For kontinuerte funktioner kan man ligeså godt definere $\operatorname{supp} u$ som afslutningen af mængden af

$x \in \Omega$ hvor $u(x) \neq 0$. Imidlertid har (4.18) også god mening for målelige eller integrable funktioner u , når vi med " $u = 0$ på ω " mener $u = 0$ næsten overalt på ω .)

Rummet $C_K^\infty(\Omega)$ er et afsluttet underrum af rummet $C^\infty(\Omega)$ (derfor selv et Fréchet rum), og topologien kan for eksempel defineres ved familien af seminormer $(p_{k,m_0})_{k\in\mathbb{N}_0}$ (cf. (4.16)), hvor m_0 er valgt så $K \subset K_{m_0}$ (eller $K = K_{m_0}$). Denne familie har max-egenskaben.

4.3. Nogle hovedsætninger.

Vi nævner kort, at de velkendte hovedsætninger for Banach rum, som bygger på Baire's sætning (om fuldstændige, metriske rum), let generaliseres til Fréchet rum. Det drejer sig om sætningerne i Mat 313, §9, Theorem 9.3, 9.7 og 9.10. Vi formulerer dem her for Fréchet rum (de kan generaliseres yderligere, som i Rudin's bog, Kap. 2).

Sætning 4.10. (Banach-Steinhaus' sætning). *Lad* X *være et Fréchet rum og* Y *et topologisk vektorrum, og betragt en familie* $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *af kontinuerte operatorer* $T_\lambda \in \mathbb{B}(X,Y)$. *Hvis mængden* $\{T_\lambda x \mid \lambda \in \Lambda\}$ *("orbit" af* x*) er begrænset i* Y *for hvert* $x \in X$, *så er familien* T_λ *ækvikontinuert, dvs. når* V *er en omegn af 0 i* Y , *så findes en omegn* W *af 0 i* X , *så* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda(W) \subset V$.

Korollar 4.11. *Lad* X *være et Fréchet rum og* Y *et topologisk vektorrum, og betragt en følge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *af kontinuerte operatorer* $T_n \in \mathbb{B}(X,Y)$. *Hvis* $T_n x$ *har en grænseværdi i* Y *for hvert* $x \in X$, *så er afbildningen* $T: x \rightsquigarrow Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ *en kontinuert afbildning af* X *ind i* Y .

Sætning 4.12. (Åben afbildning sætningen). *Lad* X *og* Y *være Fréchet rum. Hvis* $T \in \mathbb{B}(X,Y)$ *er surjektiv, så er* T *åben (dvs. sender åbne mængder i åbne mængder).*

Sætning 4.13. (Afsluttet graf sætningen). *Lad* X *og* Y *være Fréchet rum. Hvis* T *er en lineær afbildning af* X *ind i* Y , *og grafen af* T *er afsluttet i* $X \times Y$, *så er* T *kontinuert.*

4.4. Induktiv limes af Fréchet rum.

I distributionsteorien har vi brug for at betragte, ikke alene Fréchet rummet $C^\infty(\Omega)$ (for Ω åben $\subset \mathbb{R}^n$), men også rummet

(4.19) $$C_0^\infty(\Omega) = \left\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \text{ er kompakt i } \Omega\right\} .$$

Når dette rum forsynes med delrumstopologien induceret fra $C^\infty(\Omega)$, får vi et rum, der ikke er fuldstændigt. For eksempel, hvis Ω er intervallet $I =]0,3[$, og hvis $\varphi(x)$ er en C^∞-funktion på I med $\operatorname{supp}\varphi = [1,2]$ (at sådanne funktioner findes, viser vi i næste kapitel), så vil $\varphi_k(x)=\varphi(x-1+1/k)$ være en følge af funktioner i $C_0^\infty(I)$, som konvergerer i $C^\infty(I)$ mod funktionen $\varphi(x-1) \in C^\infty(I)\setminus C_0^\infty(I)$.

Man kan tillægge $C_0^\infty(\Omega)$ en anden, lidt mere kompliceret vektorrumstopologi, der gør det til et følge-fuldstændigt (men til gengæld ikke metrisk) rum. Her opfattes $C_0^\infty(\Omega)$ som

(4.20) $$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{K_j}^\infty(\Omega) ,$$

hvor K_j er en voksende følge af kompakte delmængder (4.13), og vi bruger følgende almene sætning, hvis bevis er henlagt til øvelserne.

Sætning 4.13. *Lad*

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_j \subset \ldots$$

være en følge af Fréchet rum, hvor der for hvert $j \in \mathbb{N}$ *gælder, at* X_j *er et underrum af* X_{j+1} *, og topologien i* X_j *er den af* X_{j+1} *inducerede topologi. Lad*

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j ,$$

og betragt de mængder W *, der opfylder:* $W \cap X_j$ *er en åben, konveks, balanceret omegn af 0 i* X_j *, for ethvert* j *. Da har* X *en vektorrums topologi, hvis åbne, konvekse, balancerede omegne af 0 netop er mængderne* W *.*

Den herved bestemte topologi kaldes den induktive limes topologi, og rum af denne art kaldes *LF*-rum. Topologien kan også beskrives ved hjælp af seminormer, som i Øvelse 5.6. De vigtigste egenskaber ved den pågældende topologi på $C_0^\infty(\Omega)$ er opsummeret i Sætning 5.1, og for fuldstændigheds skyld vil de tilsvarende generelle udsagn nu blive formuleret.

Sætning 4.14. *Lad* $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ *være en induktiv limes af Fréchet rum.*

(a) *En mængde* E *i* X *er begrænset, hvis og kun hvis der findes et* j_0 *, så* E *ligger i* X_{j_0} *og er begrænset dér.*

(b) *Hvis en følge* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *er en Cauchy følge i* X *, så findes et* j_0 *, så* $u_k \in X_{j_0}$ *for alle* k *, og* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *er konvergent i* X_{j_0} *og i* X .

(c) *Lad* Y *være et lokalkonvekst topologisk vektorrum. En lineær afbildning* T *af* X *ind i* Y *er kontinuert, hvis og kun hvis* $T: X_j \to Y$ *er kontinuert for hvert* $j \in \mathbb{N}$.

Sætningen vises (stort set) i Rudins bog, Kap. 6; se også Øvelse 5.6.

Den fundamentale egenskab ved den induktive limes topologi, vi vil benytte, er, at vigtige begreber såsom konvergens og kontinuitet i forbindelse med topologien på X kan henføres til de tilsvarende begreber for et af de simplere rum X_j . Dette fremgår af Sætning 4.14, og vi bemærker følgende yderligere konsekvenser.

Korollar 4.15. *Hypoteser som i Sætning 4.14.*

(a) *En lineær afbildning* $T: X \to Y$ *er kontinuert hvis og kun hvis der for hvert* $j \in \mathbb{N}$ *gælder, at når* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *er en følge i* X_j *med* $u_k \to 0$ *i* X_j *for* $k \to \infty$ *, så vil* $Tu_k \to 0$ *i* Y .

(b) *Antag, at topologien i hvert* X_j *er givet ved en familie* $\mathcal{P}_j$ *af seminormer med max-egenskaben. En lineær funktional* $\Lambda: X \to \mathbb{L}$ *er kontinuert hvis og kun hvis der for hvert* j *findes en seminorm* $p_j \in \mathcal{P}_j$ *og en konstant* $c_j > 0$, *så*

$$|\Lambda(x)| \leq c_j p_j(x) \quad \textit{for} \quad x \in X_j \; ;$$

Bevis: (a) og (b) følger af Sætning 4.14 kombineret med henholdsvis Sætning 4.8 og Lemma 4.5. ∎

For tilfældet (4.20), hvor $C_0^\infty(\Omega)$ forsynes med induktiv limes topologien, ser vi, at en følge kun kan være en Cauchy følge, hvis følgens elementer φ_k alle har støtte i en bestemt kompakt delmængde K_j af Ω , og i så fald vil følgen være konvergent på grund af fuldstændigheden af Fréchet rummet $C_{K_j}^\infty(\Omega)$. Det tidligere nævnte eksempel $\varphi_k(x) = \varphi(x-1+\frac{1}{k})$ i $C_0^\infty(]0,3[)$ er åbenbart ikke en Cauchy følge med hensyn til denne topologi på $C_0^\infty(]0,3[)$.

5. Testfunktionerne, og andre funktionsrum.

5.1. Rummet af testfunktioner.

Lad Ω være en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Rummet $C_0^\infty(\Omega)$, bestående af C^∞-funktionerne på Ω med kompakt støtte i Ω, kaldes rummet af testfunktioner (på Ω). Lad os vise, at der findes testfunktioner:

Lemma 5.1. *Lad* $R > r > 0$. *Der findes en funktion* $\chi_{R,r}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *som opfylder:* $\chi(x) = 1$ *for* $|x| \leq r$, $\chi(x) \in [0,1]$ *for* $r \leq |x| \leq R$, *og* $\chi(x) = 0$ *for* $|x| \geq R$.

Bevis: Man efterviser først, at funktionen

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{for } t > 0, \\ 0 & \text{for } t \leq 0, \end{cases}$$

er en C^∞-funktion på $\mathbb{R}$. Herefter dannes funktionen (se fig. nedenfor)

$$f_1(t) = f(t-r)f(R-t),$$

som tilhører $C_0^\infty(\mathbb{R})$ og er ≥ 0. Funktionen

$$f_2(t) = \int_t^\infty f_1(s)ds$$

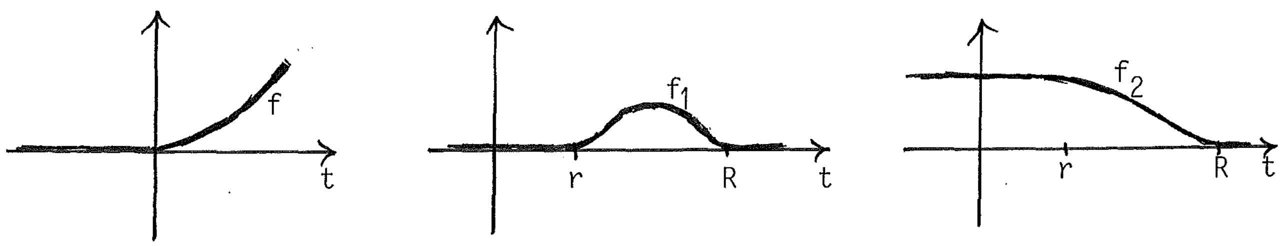
er ≥ 0 overalt, er konstant lig med 0 for $t \geq R$ og er konstant lig med

$$c = \int_r^R f_1(s)ds > 0$$

for $t \leq r$. Funktionen

$$\chi_{R,r}(x) = \frac{1}{c} f_2(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

har da de ønskede egenskaber. $\square$



For senere henvisninger vil vi fra nu af ved χ betegne en funktion i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ med egenskaberne

$$(5.1) \qquad \chi(x) \begin{cases} = 1 & \text{for } |x| \le 1 \\ \in [0,1] & \text{for } 1 \le |x| \le 2 , \\ = 0 & \text{for } |x| \ge 2 , \end{cases}$$

man kan her for eksempel tage $\chi_{1,2}$. Nogle testfunktioner i $C_0^\infty(\Omega)$ fås ved translation af funktionerne $\chi_{r,R}$ (med passende restriktioner på R). Yderligere eksempler kan fås ved foldning, jvf. senere.

Rummet $C_0^\infty(\Omega)$ forsynes med induktiv limes topologien knyttet til en voksende følge af kompakte delmængder (4.13), (4.20), idet Fréchet rums topologien på hvert $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ defineres ved familien af seminormer (4.16). De egenskaber, vi har brug for, opsummeres i følgende sætning, der er en udspecificering af egenskaberne nævnt i Kapitel 4.

Sætning 5.2. *Topologien på* $C_0^\infty(\Omega)$ *har følgende egenskaber:*

(a) *En følge* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *af testfunktioner konvergerer mod* φ_0 *i* $C_0^\infty(\Omega)$ *hvis og kun hvis der findes en kompakt mængde* $K_j \subset \Omega$, *så* $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K_j$ *for alle* $k \in \mathbb{N}_0$, *og* $\varphi_k \to \varphi_0$ *i* $C_{K_j}^\infty(\Omega)$, *dvs. der gælder for alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$(5.2) \qquad \sup_{x\in K_j} |D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi_0(x)| \to 0 \quad \textit{for } k \to \infty .$$

(b) *En mængde* $E \subset C_0^\infty(\Omega)$ *er begrænset, hvis og kun hvis der findes et* K_j , *så* E *er en begrænset delmængde af* $C_{K_j}^\infty(\Omega)$. *Hvis specielt* $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *er en Cauchy følge i* $C_0^\infty(\Omega)$, *så findes et* j , *så* $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K_j$ *for alle* k , *og* φ_k *er konvergent i* $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ *(og dermed i* $C_0^\infty(\Omega)$*)* .

(c) *Lad* Y *være et lokalkonvekst topologisk vektorrum. En afbildning* T *af* $C_0^\infty(\Omega)$ *ind i* Y *er kontinuert, hvis og kun hvis* $T\colon C_{K_j}^\infty(\Omega) \to Y$ *er kontinuert for hvert* $j \in \mathbb{N}$.

(d) *En lineær funktional* $\Lambda\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *er kontinuert hvis og kun hvis der for hvert* j *findes* $N_j \in \mathbb{N}_0$ *og* $c_j > 0$, *så*

$$(5.3) \qquad |\Lambda(\varphi)| \le c_j \sup\left\{ |D^\alpha\varphi(x)| \;\middle|\; x \in K_j , |\alpha| \le N_j \right\}$$

for alle $\varphi \in C_{K_j}^\infty(\Omega)$.

Bemærk, at (a) er et meget stærkt krav til følgen φ_k. Konvergens i $C_0^\infty(\Omega)$ medfører konvergens i de fleste andre rum, vi skal betragte. Til gengæld er (d) et ganske svagt krav til funktionalen Λ; de fleste funktionaler, vi har brug for at betragte, vil have denne egenskab.

Det er ikke svært at vise, at når $\{K_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ er en anden følge af kompakte mængder som i (4.13), bliver den herved definerede topologi på $C_0^\infty(\Omega)$ den samme som før (Øvelse 5.1).

Vi ser nu på nogle vigtige operatorer i disse rum. Den ene er differentiation, den anden multiplikation (med en C^∞-funktion f), og begge vises at være kontinuerte. Operatorerne vil blive kaldt D^α henholdsvis M_f, idet dog $M_f\varphi$ også skrives som $f\varphi$ - og de samme betegnelser vil blive brugt senere for generalisationer af operatorerne (selvom M_f allerede er brugt i en bestemt betydning i Afsnit 2.7).

Sætning 5.3.

1° *Operatoren* $D^\alpha\colon \varphi(x) \rightsquigarrow D^\alpha\varphi(x)$ *er en kontinuert operator i* $C_0^\infty(\Omega)$.

2° *For hvert* $f\in C^\infty(\Omega)$ *er*

$$M_f\colon \varphi(x) \rightsquigarrow f(x)\varphi(x)$$

en kontinuert operator i $C_0^\infty(\Omega)$.

Bevis: Ifølge Sætning 5.2 (c) er det nok at vise, at D^α henholdsvis M_f er kontinuert fra $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ til $C_0^\infty(\Omega)$ for hvert j; og da operatorerne opfylder

$$\text{(5.4)}\qquad \operatorname{supp} D^\alpha\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi\ , \qquad \operatorname{supp} M_f\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi$$

for alle φ, kan billedrummet for hvert j erstattes med $C_{K_j}^\infty(\Omega)$. Her har vi imidlertid for hvert k

$$\text{(5.5)}\qquad \begin{aligned} p_{k,j}(D^\alpha\varphi) &= \sup\left\{|D^\beta D^\alpha\varphi| \;\middle|\; |\beta|\le k\ ,\ x\in K_j\right\}\\ &\le \sup\left\{|D^\gamma\varphi| \;\middle|\; |\gamma|\le k+|\alpha|\ ,\ x\in K_j\right\} = p_{k+|\alpha|,j}(\varphi)\ , \end{aligned}$$

hvilket viser kontinuiteten af D^α. Ved Leibniz' formel (1.14) fås for hvert k

$$\text{(5.6)}\qquad \begin{aligned} p_{k,j}(f\varphi) &= \sup\left\{|D^\alpha(f\varphi)| \;\middle|\; |\alpha|\le k\ ,\ x\in K_j\right\}\\ &\le \sup\left\{\sum_{\beta\le\alpha} |c_{\alpha,\beta}D^\beta f D^{\alpha-\beta}\varphi| \;\middle|\; |\alpha|\le k\ ,\ x\in K_j\right\} \le C_k p_{k,j}(f)p_{k,j}(\varphi) \end{aligned}$$

for en passende stor konstant C_k; hvilket viser kontinuiteten af M_f. $\square$

5.2. Andre rum.

$C_0^\infty(\Omega)$ er indeholdt i praktisk taget alle andre rum defineret i tilknytning til Ω , som vi skal møde. For eksempel er

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} &C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \qquad \text{for} \quad p \in [1,\infty] , \\ &C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) , \end{aligned}$$

og disse indlejringer er kontinuerte: Det er, ifølge Sætning 5.2 (c), tilstrækkeligt at vise, at de tilsvarende indlejringer af $C^\infty_{K_j}(\Omega)$ er kontinuerte, for hvert j (K_j som i (4.13)). For $\varphi \in C^\infty_{K_j}(\Omega)$ har vi

$$(5.8)\qquad \|\varphi\|_{L_p} \le \sup_{x\in K_j} |\varphi(x)| \operatorname{Vol}(K_j)^{1/p}$$

hvilket viser at injektionen $J\colon C^\infty_{K_j}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ sender basisomegnen

$$V(p_{0,j},\varepsilon) = \left\{\varphi \mid \sup_x |\varphi(x)| < \varepsilon\right\}$$

ind i kuglen $B(0,r)$ i $L^p(\Omega)$ med $r = \varepsilon \operatorname{Vol}(K_j)^{1/p}$. Kontinuiteten af den anden indlejring i (5.7) følger af at $C^\infty_{K_j}(\Omega)$ netop har delrumstopologien som underrum af $C^\infty(\Omega)$.

Det er typisk for rummene $C_0^\infty(\Omega)$ og $C^\infty(\Omega)$, at de ikke lægger nogen bånd på elementernes globale opførsel (udseende i forhold til Ω taget som helhed): ved at kende en funktions opførsel på hver kompakt delmængde af Ω kan man afgøre, om den tilhører $C_0^\infty(\Omega)$, eller tilhører $C^\infty(\Omega)$. Det samme gælder ikke $L^p(\Omega)$, hvor et globalt defineret tal (normen) skal være endeligt for at funktionen ligger i $L^p(\Omega)$. Man har sommetider brug for nogle "lokalt" definerede varianter af $L^p(\Omega)$:

$$(5.9)\qquad L^p_{\mathrm{comp}}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \operatorname{supp} u \text{ kompakt} \subset \Omega\right\}$$

$$(5.10)\qquad L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \left\{u \text{ målelig på } \Omega \;\middle|\; u|_K \in L^p(K) \text{ når } K \text{ kompakt} \subset \Omega\right\} ,$$

med den sædvanlige identifikation af funktioner der stemmer overens uden for en nulmængde.

$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ forsynes med Fréchet rums topologien defineret ved familien af seminormer

$$(5.11)\qquad p_j(u) = \|u|_{K_j}\|_{L^p(K_j)} , \quad j = 1,2,\ldots$$

hvor K_j er som i (4.13) (at $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ herved bliver fuldstændigt, fås af fuldstændigheden af rummene $L^p(K_j))$. $L^p_{comp}(\Omega)$, som umiddelbart synes lettere at beskrive, har en lidt mere kompliceret topologi, nemlig den induktive limes topologi, hvor $L^p_{comp}(\Omega)$ skrives som

$$L^p_{comp}(\Omega) = \bigcup_{j=1}^{\infty} L^p(K_j) \tag{5.12}$$

(og funktionerne i $L^p(K_j)$ forlænges med 0 i $\Omega \setminus K_j$). Herved bliver $L^p_{comp}(\Omega)$ et *LF*-rum. Valget af denne topologi sikrer f.eks. at $L^2_{loc}(\Omega)$ og $L^2_{comp}(\Omega)$ kan identificeres med hinandens dualrum, på en sådan måde at dualiteten stemmer overens med integralet $\int_\Omega u\bar{v}\,dx$ (Øvelse 5.3, 5.8).

[Vedrørende brugen af ordet "lokal": Alle fire rum $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$, $L^p_{comp}(\Omega)$ og $L^p_{loc}(\Omega)$ er lokale i den forstand at man kan afgøre, om en funktion tilhører dem, ud fra opførslen på kompakte delmængder af Ω . Her er endvidere $C^\infty(\Omega)$ og $L^p_{loc}(\Omega)$ lokale rum i den egentlige betydning, idet det for disse rum er nok at vide, hvordan en funktion opfører sig i en omegn af hvert punkt - da jo en kompakt mængde kan nås af endeligt mange omegne.]

Man ser let (jvf. (1.21)), at

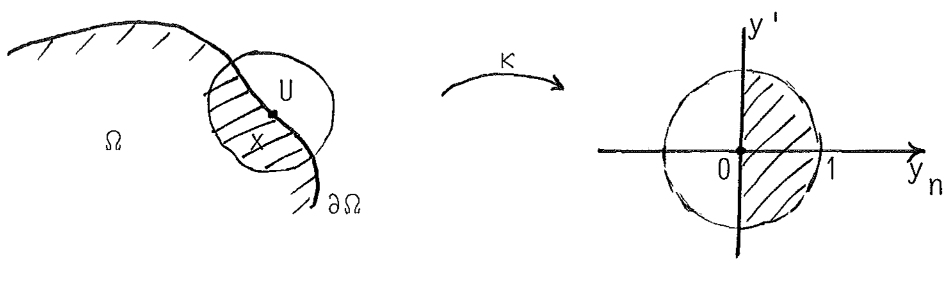
$$\begin{aligned} &C^\infty(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega) , \\ &C_0^\infty(\Omega) \subset L^p_{comp}(\Omega) \subset L^q_{comp}(\Omega) , \quad \text{for } p > q . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Endelig skal vi nævne nogle flere rum, man kan få brug for. Der er dels nogle rum knyttet til glatte mængder Ω . (For sådanne mængder er $\overset{\circ}{\overline{\Omega}} = \Omega$, og randen har mål 0 .)

Definition 5.4. *En åben mængde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *kaldes glat, når ethvert randpunkt* $x \in \partial\Omega$ *har en omegn* U , *der ved en bijektiv* C^∞*-afbildning (dvs. en diffeomorfi)* κ *kan føres over på enhedskuglen* $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, *så at*

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= 0 \\ \kappa(U \cap \Omega) &= B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+ \\ \kappa(U \cap \partial\Omega) &= B(0,1) \cap \mathbb{R}^{n-1} . \end{aligned}$$

Vi siger da også, at $\overline{\Omega}$ *er glat (afsluttet).*



For eksempel er $\mathbb{R}^n_+$ selv glat, og kugler i $\mathbb{R}^n$ er glatte. Glathedsbegrebet tillader os bl.a. at give god mening til de partielle afledede af en funktion på $\overline{\Omega}$, idet vi definerer de partielle afledede på mængder af formen $U \cap \overline{\Omega}$ ved kædereglen og brug af κ, der fører differentiationen over til $B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$. [Mere præcist: Idet κ sender x over i $y = (\kappa_1(x), \dots, \kappa_n(x))$, og vi skriver $u(x) = u(\kappa^{-1}(y)) = \tilde{u}(y)$, er

$$(5.14) \qquad (\partial_{x_j} u)(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \kappa_\ell(x)}{\partial x_j} \partial_{y_\ell} \tilde{u}(y) \Big|_{y=\kappa(x)} ;$$

altså differentialoperatoren ∂_{x_j} på $U \cap \overline{\Omega}$ svarer til differentialoperatoren $\Sigma^n_{\ell=1} a_\ell \partial_{y_\ell}$ på $B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$ med C^∞ koefficienter $a_\ell(y) = (\partial_{x_j} \kappa_\ell)(\kappa^{-1}(y))$.]
En funktion u på $\overline{\Omega}$ har kontinuerte partielle afledte af orden op til k på $\overline{\Omega}$ hvis og kun hvis: $u \in C^k(\Omega)$, og de overførte funktioner $u(\kappa^{-1}(y))$ (med κ som i Definition 5.4) har kontinuerte partielle afledede af orden op til k på $B(0,1) \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$.

Vektorrummet af funktioner på $\overline{\Omega}$ med kontinuerte partielle afledede af orden op til k betegnes ved $C^k(\overline{\Omega})$. Når $\overline{\Omega}$ er kompakt, er det et Banach rum med normen

$$(5.15) \qquad \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sup\left\{ |D^\alpha u(x)| \;\Big|\; x \in \overline{\Omega}, |\alpha| \le k \right\}.$$

Når $\overline{\Omega}$ ikke forudsættes at være kompakt, defineres en Fréchet topologi på $C^k(\overline{\Omega})$ ved familien af seminormer (4.16), hvor k er fast, og K_m er en følge af kompakte mængder med $\bigcup^\infty_{m=1} K_m = \overline{\Omega}$ (i det kompakte tilfælde erstattes følgen af den ene mængde $\overline{\Omega}$, og seminormen er en norm). Vi kan også definere

$$(5.16) \qquad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}) ,$$

der er et Fréchet rum med topologien bestemt ved familien af seminormer (4.16) (k gennemløber alle tal, K_m er fast $= \overline{\Omega}$ hvis denne er kompakt).

Når M er åben eller glat afsluttet, og K er en kompakt delmængde, definerer vi $C^k_K(M)$ og $C^k_0(M)$ ved

$$(5.17) \qquad \begin{aligned} C^k_K(M) &= \left\{ u \in C^k(M) \mid \operatorname{supp} u \subset K \right\} \\ C^k_0(M) &= \left\{ u \in C^k(M) \mid \operatorname{supp} u \text{ kompakt } \subset M \right\}. \end{aligned}$$

Her er $C^k_K(M)$-rummene Banach rum med normen $\sup\{ |D^\alpha u(x)| \mid |\alpha| \le k, x \in K \}$; mens $C^k_0(M)$ er et Banach rum hvis M er kompakt, og ellers et *LF*-rum (opfattet som $\bigcup_{K_m \in M} C^k_{K_m}(M)$).

Lad os også ganske kort nævne, at man kan få brug for følgende rum (hvor M er åben eller glat afsluttet):

(5.18)
$$C^k_{L^p}(M) = \{u \in C^k(M) \mid D^\alpha u \in L^p(M) \quad \text{for} \quad |\alpha| \leq k\}$$
$$C^\infty_{L^p}(M) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_{L^p}(M) \ ,$$

de falder sammen med $C^k(M)$ henholdsvis $C^\infty(M)$, når M er kompakt. Rummene $C^k_{L^p}(M)$ kan evt. forsynes med normen

(5.19)
$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(M)}$$

eller, specielt i tilfældet $p = 2$,

(5.20)
$$\|u\|_k = \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(M)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

hvorved det bliver normerede, men generelt ikke fuldstændige rum (for $p < \infty$). $C^\infty_{L^p}(M)$ kan tilsvarende topologiseres ved seminormer.

5.3. Approksimationssætninger.

Ud fra testfunktionerne konstrueret i Lemma 5.1 kan man konstruere en mængde andre testfunktioner ved foldning. Vi minder om, at når f og g er målelige funktioner på $\mathbb{R}^n$, og produktet $f(y)g(x-y)$ er en integrabel funktion af y for hvert x, så defineres foldningsproduktet $f * g$ ved

(5.21)
$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \ ;$$

bemærk, at $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (g*f)(x)$. (5.21) er for eksempel defineret, når $f \in L^1_{loc}$ og g er kontinuert, og én af dem har kompakt støtte (eller begge har støtte i en kegle såsom $\{x \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$). (5.21) er også veldefineret, når $f \in L^p$ og $g \in L^q$ med $1/p + 1/q = 1$.

Vi ser specielt på følgende tilfælde. Lad $h(x)$ være en funktion, der opfylder

(5.22)
$$h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ , \quad h \geq 0 \ , \quad \int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1 \ , \quad \operatorname{supp} h \subset \underline{B}(0,1) \ .$$

Man kan for eksempel tage $h(x) = \chi(2x)/\int\chi(2x)dx$, med χ som i (5.1). For $j \in \mathbb{N}$ sætter vi

(5.23) $$h_j(x) = j^n h(jx) \;;$$

så gælder for hvert j,

(5.24) $$h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,\quad h_j \geq 0\,,\quad \int h_j(x)dx = 1\,,\quad \operatorname{supp} h_j \subset \underline{B}(0,1/j)\,.$$

Lad nu $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ og betragt $h_j * u$, dvs.

$$(h_j*u)(x) = \int_{B(0,1/j)} h_j(y)u(x-y)dy = \int_{B(x,1/j)} h_j(x-y)u(y)dy\,.$$

Vedrørende støtterne af disse funktioner gælder oplagt, at hvis u er 0 på den åbne mængde ω, så er $u * h_j$ lig 0 på den åbne mængde

$$\omega_{1/j} = \left\{x \in \omega \;\middle|\; \operatorname{dist}(x,\complement\omega) > \frac{1}{j}\right\}.$$

Her er $\complement\omega_{1/j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,\complement\omega) \leq \frac{1}{j}\} = \complement\omega + \underline{B}(0,1/j)$ (for når $x \in \complement\omega_{1/j}$, eksisterer et punkt $y \in \complement\omega$ med $\operatorname{dist}(x,y) = 1/j$). Det følger, at

(5.25) $$\operatorname{supp}(h_j*u) \subset \operatorname{supp} u + \underline{B}(0,1/j)\,.$$

Specielt, hvis u har kompakt støtte, har $h_j * u$ en (lidt større) kompakt støtte.

Man kan nu vise, at $h_j * u$ er en C^∞-funktion, når blot $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Bemærk først, at $h_j(x_0+x) \to h_j(x_0)$ for $x \to 0$ uniformt, da h_j er kontinuert med kompakt støtte; dette medfører at $(h_j*u)(x+x_0) \to (h_j*u)(x_0)$ for $x \to 0$, altså at $h_j * u$ er kontinuert. Dernæst vil vi bruge følgende bemærkning om differentiation af C^1-funktioner:

Lemma 5.5. *Lad* $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *med støtte i en kompakt mængde* K, *og lad* e_k *være den* k*-te enhedsvektor i* $\mathbb{R}^n$. *Så vil*

(5.26) $$\frac{1}{t}\Big[u(x+te_k)-u(x)\Big] \to \partial_{x_k} u(x) \quad \textit{for} \quad t \to 0\,,\ |t| \leq 1\,,$$

uniformt på mængden $K + \underline{B}(0,1)$.

Bevis: På grund af reglerne for differentiation af sammensat funktion (kædereglen) har man

$$\frac{1}{t}\Big[u(x+te_k)-u(x)\Big] = \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta}\, u(x+\theta te_k)d\theta = \int_0^1 \partial_k u(x+\theta te_k)d\theta$$
$$= \partial_k u(x) + \int_0^1 [\partial_k u(x+\theta te_k) - \partial_k u(x)]d\theta$$

(dette viser forøvrigt lidt af Taylor's formel (1.15)). Da $\partial_k u$ er kontinuert og har støtte i K , er den uniformt kontinuert, og der findes for hvert $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0,1]$ så at $|t| \le \delta$ medfører

$$|\partial_k u(x+\theta te_k) - \partial_k u(x)| \le \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in K + \underline{B}(0,1) \quad \text{og} \quad \theta \in [0,1] \ .$$

Integralet af dette for $\theta \in [0,1]$ er da også $\le \varepsilon$, hvilket viser den uniforme konvergens i (5.26) for $t \to 0$. $\square$

Ved anvendelse af lemmaet på h_j kan vi nu slutte, ved Lebesgues sætning, at når $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ vil

$$\frac{1}{t}\Big[(h_j*u)(x+te_k)-(h_j*u)(x)\Big] = \frac{1}{t}\int\Big[h_j(x+te_k-y)-h_j(x-y)\Big]u(y)dy$$

$$\to \int \partial_k h_j(x-y)u(y)dy \quad \text{for} \quad t \to 0 \ ,$$

hvoraf ses, at $h_j * u$ har den partielle afledede

$$\partial_k(h_j*u) = (\partial_k h_j) * u \ ,$$

som er kontinuert, fordi $\partial_k h_j$ er uniformt kontinuert. Ved gentagen anvendelse af disse argumenter fås

Lemma 5.6. *Når* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *er* $h_j * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *og*

$$D^\alpha(h_j*u) = (D^\alpha h_j) * u \quad \textit{for alle} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ . \tag{5.27}$$

Man kan også føre differentiationerne over på u , i det omfang u har kontinuerte partielle afledede, ved en variant af ovenstående argumenter (Øvelse 5.7).

Sætning 5.7.

1^0 *Når* v *er kontinuert og har kompakt støtte i* $\mathbb{R}^n$, *vil* $h_j*v \to v$ *for* $j \to \infty$, *punktvis og i* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *for ethvert* $p \in [1,\infty]$ *(specielt i* $C^0_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$ *).*

2^0 *For ethvert* $p \in [1,\infty]$ *gælder*

$$\|h_j*u\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p} \quad \textit{for} \quad u \in L^p(\mathbb{R}^n) \ . \tag{5.28}$$

3^0 *Når* $p \in [1,\infty[$ *og* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *vil* $h_j*u \to u$ *i* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *for* $j \to \infty$. *Endvidere er* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tæt i* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bevis: 1^0 Når v er kontinuert og har kompakt støtte, er v uniformt kontinuert, og der gælder for $x \in \mathbb{R}^n$:

(5.29) $$|(h_j*v)(x)-v(x)| = \left|\int_{B(0,1/j)} v(x-y)h_j(y)dy - \int_{B(0,1/j)} v(x)h_j(y)dy\right|$$

$$\leq \sup_{y\in B(0,1/j)} |v(x-y)-v(x)| \leq \varepsilon_j ,$$

hvor $\varepsilon_j \to 0$ for $j \to \infty$, uafhængigt af x. Det ses umiddelbart at $h_j * v \to v$ punktvis og i sup-norm (i $L^\infty(\mathbb{R}^n)$) og man får ved integration over den kompakte mængde $\operatorname{supp} v + \underline{B}(0,1)$, at $h_j * v \to v$ i L^p for $p \in [1,\infty]$.

2^0 Uligheden følger af Hölders ulighed (1.20), hvor vi sætter $f(y) = h_j(x-y)^{1/p} u(y)$ og $g(y) = h_j(x-y)^{1/p'}$:

$$\|h_j*u\|_{L^p}^p = \int\left|\int h_j(x-y)u(y)dy\right|^p dx \leq \int\left(\int h_j(x-y)\ |u(y)|^p\ dy\right)\left(\int h_j(x-y)dy\right)^{p/p'} dx$$

$$= \iint h_j(x-y)\,|u(y)|^p\ dy\ dx = \|u\|_{L^p}^p$$

ved brug af (5.24) og Fubinis sætning.

3^0 Vi bruger her den fra målteorien kendte sætning, at når $p < \infty$, kan funktionerne i $L^p(\mathbb{R}^n)$ approximeres i L^p-norm med kontinuerte funktioner med kompakt støtte. Lad $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, lad $\varepsilon > 0$ og lad $v \in C_0^0(\Omega)$ (jvf. (5.17)) med $\|u-v\|_{L^p} \leq \varepsilon/3$. Ved 1^0 kan j_0 vælges så stor, at

$$\|h_j*v - v\|_{L^p} \leq \varepsilon/3 \quad \text{for } j \geq j_0 ;$$

så er

$$\|h_j*u - u\|_{L^p} \leq \|h_j*(u-v)\|_{L^p} + \|h_j*v - v\|_{L^p} + \|v-u\|_{L^p}$$

$$\leq 2\,\|v-u\| + \varepsilon/3 \leq \varepsilon , \qquad \text{for } j \geq j_0 ,$$

hvilket viser at $h_j*u \to u$ i L^p for $j \to \infty$. Det sidste udsagn ses af at $h_j * v$ approximerer u. □

Sætningen viser, hvorledes følger af glatte funktioner $h_j * u$ approximerer u i en række forskellige rum. Lad os udvide anvendelsesområdet.

Lemma 5.8. *For hvert* $p \in [1,\infty[$ *gælder, at* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *er tæt i* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Bevis: Vi bemærker først, at $\chi(x/N)u \to u$ i L^p_{loc} for $N \to \infty$ (jvf. 5.1)). Thi $\chi(x/N) = 1$ for $|x| \leq N$, således at der for hver kugle $B(0,R)$ gælder

$$(5.30)\qquad \int_{B(0,R)} |\chi(x/N)u-u|^p\,dx = 0 \quad \text{for} \quad N \geq R\ ,$$

hvormed $\chi(x/N)u - u \to 0$ i $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Nu er $\chi(x/N)u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, og $h_j*(\chi(x/N)u) \to \chi(x/N)u)$ i $L^p(\mathbb{R}^n)$ ved Sætning 5.7; med $h_j*(\chi(x/N)u)$ støttet i $\underline{B}(0,2N+\frac{1}{j})$. Ialt ses, at funktionerne i $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kan approximeres af testfunktioner, med hensyn til topologien på $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

Betragter vi $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ for en åben delmængde Ω af $\mathbb{R}^n$, er $(h_j*u)(x)$ ikke altid veldefineret for x tæt ved randen. Der gælder dog følgende:

<u>Lemma 5.9.</u> *Lad* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *for et* $p \in [1,\infty[$, *og lad* $\varepsilon > 0$. *Når* $j > \frac{1}{\varepsilon}$, *er*

$$(5.31)\qquad v_j(x) = (h_j*u)(x) = \int_{B(0,1/j)} h_j(y)u(x-y)dy$$

defineret for x *i mængden*

$$(5.32)\qquad \Omega_\varepsilon = \left\{x \in \Omega \;\middle|\; \operatorname{dist}(x,\complement\Omega) > \varepsilon\right\} ,$$

og der gælder for hvert $R > 0$

$$(5.33)\qquad \Big(\int_{\Omega_\varepsilon\cap B(0,R)} |u(x)-v_j(x)|^p dx\Big)^{1/p} \to 0 \quad \textit{for} \quad j \to \infty\ .$$

<u>Bevis.</u> Lad $j > \frac{2}{\varepsilon}$, så er $v_j(x)$ defineret for $x \in \Omega_\varepsilon$. I beregningen af integralet (5.33) indgår kun værdien af u på $K_{\varepsilon,R} = \overline{\Omega}_\varepsilon \cap \underline{B}(0,R) + \underline{B}(0,\varepsilon/2)$, som er en kompakt delmængde af Ω. Vi kan da erstatte u med

$$u_1(x) = \begin{cases} u(x) & \text{for } x \in K_{\varepsilon,R} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $u_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, og resultatet følger af Sætning 5.7. □

Andre former for approximation i $L^p_{loc}(\Omega)$ fås ved brug af nogle mere fint tilpassede beskæringsfunktioner end (5.1).

<u>Sætning 5.10.</u> *Lad* M *være en delmængde af* $\mathbb{R}^n$. *Lad* $\varepsilon > 0$. *Der findes en funktion* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *som er* 1 *på* $\overline{M} + \underline{B}(0,\varepsilon)$ *og har støtte i* $\overline{M} + \underline{B}(0,3\varepsilon)$, *og opfylder* $0 \leq \eta(x) \leq 1$ *for alle* $x \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Funktionen

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{på } \overline{M} + \underline{B}(0,2\varepsilon) \\ 0 & \text{på } \mathbb{R}^n \setminus (\overline{M}+\underline{B}(0,2\varepsilon)) \end{cases}$$

er i $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, og for $j \geq 1/\varepsilon$ er $h_j * \psi$ en ikke-negativ C^∞-funktion med støtte i

$$\overline{M} + \underline{B}(0,2\varepsilon) + \underline{B}(0,1/j) \subset \overline{M} + \underline{B}(0,3\varepsilon) .$$

Når $x \in \overline{M} + \underline{B}(0,\varepsilon)$, er $\psi = 1$ i kuglen $\underline{B}(x,\varepsilon)$, så $(h_j * \psi)(x) = \int_{B(0,1/j)} h_j(y)\psi(x-y)dy = 1$ når $j \geq 1/\varepsilon$. Ellers er funktionen ≤ 1. Som η kan vi altså bruge $h_j * \psi$ for $j \geq 1/\varepsilon$. ▯

Bemærk, at η i Sætning 5.10 har kompakt støtte, når $\overline{M}$ er kompakt. Man har ofte brug for følgende specielle anvendelser:

Korollar 5.11.

1° *Lad* Ω *være åben og* K *kompakt* $\subset \Omega$. *Der findes en funktion* $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, *som er* 1 *på en omegn af* K.

2° *Lad* K_j *være en følge af kompakte mængder som i* (4.13). *For hvert* j *findes* $\eta_j \in C_0^\infty(\Omega)$, *så* $\eta_j = 1$ *på en omegn af* K_j, *mens* $\operatorname{supp} \eta_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$.

Bevis: Benyt, at $\operatorname{dist}(K, C\Omega) > 0$ og $\operatorname{dist}(K_j, CK_{j+1}) > 0$ for alle j. ▯

Ved hjælp af disse funktioner fås endelig

Sætning 5.12. *Lad* Ω *være åben* $\subset \mathbb{R}^n$.

1° $C_0^\infty(\Omega)$ *er tæt i* $C^\infty(\Omega)$.

2° $C_0^\infty(\Omega)$ *er tæt i* $L^p_{loc}(\Omega)$ *for alle* $p \in [1,\infty[$.

3° $C_0^\infty(\Omega)$ *er tæt i* $L^p(\Omega)$ *for alle* $p \in [1,\infty[$.

Bevis: 1° Lad $u \in C^\infty(\Omega)$. Med η_j valgt som i Korollar 5.11 fås, at $\eta_j u \in C_0^\infty(\Omega)$ og $\eta_j u \to u$ i $C^\infty(\Omega)$ for $j \to \infty$ (idet $\eta_\ell u = u$ på K_j for $\ell \geq j$).

2° Lad $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Nu er $\eta_\ell u \in L^p(\Omega)$, med støtte i $K_{\ell+1}$, og $\eta_\ell u \to u$ i $L^p_{loc}(\Omega)$ for $\ell \to \infty$, fordi $\eta_\ell u = u$ på K_j, for $\ell \geq j$. Endelig vil $h_k * \eta_\ell u \to \eta_\ell u$ i $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $k \to \infty$ ifølge Sætning 5.7; da $\operatorname{supp}(h_k * \eta_\ell u) \subset K_{\ell+2}$ for k tilstrækkeligt stor, er dette også en konvergens i $L^p_{loc}(\Omega)$.

3^o Lad $u \in L^p(\Omega)$. Atter er $\eta_\ell u \in L^p(\Omega)$, og her vil $\eta_\ell u \to u$ i $L^p(\Omega)$ ved Lebesgues sætning (idet $0 \leq \eta_j \leq 1$). Beviset færdiggøres som under 2^o. ▯

Specielt har vi nu vist Lemma 1.1 og de andre "på forskud" anvendte tætheds-udsagn.

Mens vi er ved de specielle testfunktioner, må vi også lige vise eksistensen af en "deling af enheden", dvs. et system af glatte funktioner med støtter i givne mængder og sum 1. Vi viser en simpel endelig version; i litteraturen om distributionsteori indgår også versioner med uendelige systemer, som vi dog næppe får tid til at bruge her.

Sætning 5.13. *Lad* K *være en kompakt mængde i* $\mathbb{R}^n$, *overdækket af et system af åbne mængder* $\Omega_1,\dots,\Omega_N$,

(5.34) $$K \subset \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N .$$

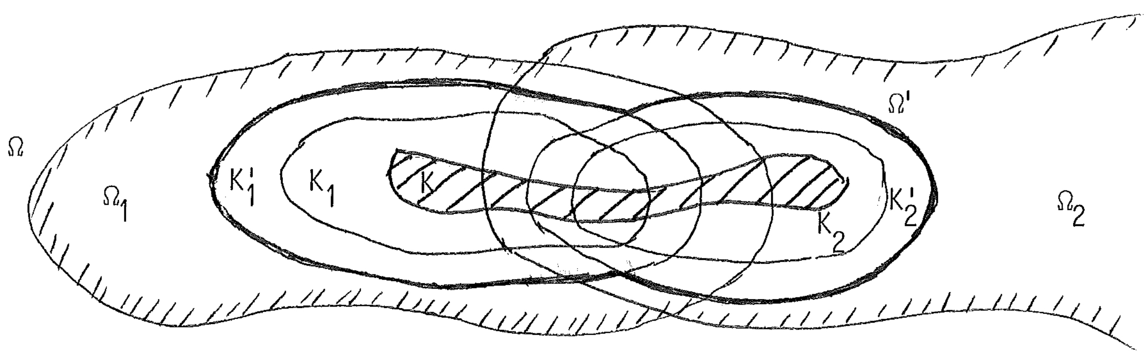
Der findes ikke-negative funktioner $\psi_\ell \in C_0^\infty(\Omega_\ell)$ *for* $\ell \leq N$, *så at* $\psi_1(x) + \dots + \psi_N(x) \in [0,1]$ *for alle* x , *og*

(5.35) $$\psi_1 + \dots + \psi_N = 1 \quad \textit{på en omegn af } K .$$

Bevis: Lad $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$. Vælg kompakte mængder K_ℓ og K'_ℓ for hvert ℓ , så $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}{}'_\ell \subset K'_\ell \subset \Omega_\ell$ og $\bigcup_{\ell=1}^N \overset{\circ}{K}_\ell \supset K$. (Benyt f.eks., at K overdækkes af $\bigcup_{\ell=1}^N\left(\bigcup_{j=1}^\infty K_{\ell,j}\right)$, hvor $(K_{\ell,j})_{j\in\mathbb{N}}$ er konstrueret for Ω_ℓ som i (4.13).) Sæt $\Omega' = \bigcup_{\ell=1}^N \overset{\circ}{K}{}'_\ell$, så er $\overline{\Omega}'$ kompakt $\subset \Omega$, og $K \subset \Omega'$.

Herefter bruges Korollar 5.11 1^o til at vælge $\eta_\ell \in C_0^\infty(\Omega_\ell)$ med $\eta_\ell = 1$ på K'_ℓ , samt $\eta \in C_0^\infty(\Omega')$ med $\eta = 1$ på $\cup_\ell K_\ell$. Nu er $\Sigma_{\ell=1}^N \eta_\ell \geq 1$ på $\overline{\Omega}'$, så vi kan tage

$$\psi_\ell(x) = \begin{cases} \eta(x)\eta_\ell(x)\left(\Sigma_{\ell=1}^N \eta_\ell(x)\right)^{-1} & \text{for } x \in \operatorname{supp}\eta \\ 0 & \text{for } x \notin \operatorname{supp}\eta . \end{cases}$$ ▯



6. Distributioner. Eksempler og regneregler.

6.1. Distributioner.

Rummet $C_0^\infty(\Omega)$ betegnes ofte $\mathcal{D}(\Omega)$ i litteraturen. Distributionerne udgør simpelthen dualrummet:

Definition 6.1. *En distribution på* Ω *er en kontinuert lineær funktional på* $C_0^\infty(\Omega)$. *Vektorrummet af distributioner på* Ω *betegnes* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Når* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *betegnes* Λ*'s værdi på* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *ved* $\Lambda(\varphi)$ *eller* $\langle\Lambda,\varphi\rangle$.

Der er her tradition for at tage lineære (snarere end konjugeret lineære) funktionaler. Det er dog en ganske lille sag at sætte de lineære funktionaler i forbindelse med de konjugeret lineære, idet $\varphi \rightsquigarrow \Lambda(\varphi)$ er en lineær funktional på $C_0^\infty(\Omega)$ hvis og kun hvis $\varphi \rightsquigarrow \Lambda(\overline{\varphi})$ er en konjugeret lineær funktional.

Et kriterium for kontinuitet af en funktional er givet i Sætning 5.2 (d).

Lad os se på nogle eksempler. Når $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, er afbildningen

$$\Lambda_f: \varphi \rightsquigarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{6.1}$$

en distribution. Thi for hvert K_j (cf. (4.13)) har vi, når $\varphi \in C^\infty_{K_j}(\Omega)$,

$$|\Lambda_f(\varphi)| = \left|\int_{K_j} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \sup|\varphi(x)|\int_{K_j}|f(x)|dx \ , \tag{6.2}$$

dvs. (5.3) er opfyldt med $N_j = 0$ og $c_j = \|f\|_{L^1(K_j)}$. Her kan man faktisk identificere Λ_f med f , idet der gælder:

Lemma 6.2. *Når* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *og* $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ *for alle* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *så er* $f = 0$.

Bevis: Lad $\varepsilon > 0$ og betragt $v_j(x) = (h_j * f)(x)$ for $j > 1/\varepsilon$ som i Lemma 5.9. Når $x \in \Omega_\varepsilon$, er $h_j(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$, så $v_j(x) = 0$ i Ω_ε . På grund af (5.33) fås da, at $f = 0$ i $\Omega_\varepsilon \cap B(0,R)$. Da ε og R kan vælges vilkårligt, ses at $f = 0$ i Ω . $\square$

Lemmaet, og varianter af det, kendes under navnene "variationsregningens grundlemma", "du Bois-Reymond's lemma", m.v.

Det følger af lemmaet, at når den fra $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ved (6.1) definerede distribution Λ_f giver 0 på alle testfunktioner, så er funktionen f lig med 0, som element af L^1_{loc}. Dermed er afbildningen $f \sim \Lambda_f$ en injektiv afbildning af $L^1_{loc}(\Omega)$ ind i $\mathcal{D}'(\Omega)$, så vi kan identificere f med Λ_f og skrive

(6.3) $$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Elementet 0 i $\mathcal{D}'(\Omega)$ identificeres fra nu af med 0-funktionen, hvor vi i reglen betragter den kontinuerte repræsentant.

Bemærkning 6.3. Lad os også nævne, hvordan Radon mål passer ind i denne sammenhæng. Rummet $C^0_0(\Omega)$ af kontinuerte funktioner med kompakt støtte i Ω blev indført i (5.17)ff. Det vises i topologisk målteori, hvorledes vektorrummet $M(\Omega)$ af komplekse Radon mål μ på Ω kan identificeres med rummet af kontinuerte lineære funktionaler Λ_μ på $C^0_0(\Omega)$, på en sådan måde at

(6.4) $$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_{\text{supp }\varphi} \varphi \, d\mu \quad \text{for} \quad \varphi \in C^0_0(\Omega) .$$

Idet der gælder, at

(6.5) $$|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq |\mu|(\text{supp }\varphi) \cdot \sup|\varphi(x)| ,$$

er Λ_μ kontinuert på $C^\infty_0(\Omega)$, dvs. definerer en distribution $\Lambda'_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Da $C^\infty_0(\Omega)$ er tæt i $C^0_0(\Omega)$ (jvf. Sætning 5.7 1^0), er afbildningen $\Lambda_\mu \sim \Lambda'_\mu$ injektiv, hvormed rummet af komplekse Radon mål kan indlejres i $\mathcal{D}'(\Omega)$:

(6.6) $$M(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Inklusionerne (6.3) og (6.6) placerer $L^1_{loc}(\Omega)$ og $M(\Omega)$ som underrum af $\mathcal{D}'(\Omega)$. Disse indlejringer er konsistente med den sædvanlige indlejring af $L^1_{loc}(\Omega)$ i $M(\Omega)$, hvor en funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definerer Radon målet μ_f for hvilket

(6.7) $$\mu_f(K) = \int_K f \, dx \quad \text{for } K \text{ kompakt } \subset \Omega ;$$

thi det er kendt fra målteorien, at

(6.8) $$\int f \varphi \, dx = \int \varphi \, d\mu_f \quad \text{for} \quad \varphi \in C^0_0(\Omega)$$

(dermed specielt for $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$).

Når $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, skriver vi nu i reglen f i stedet for Λ_f , altså

(6.9) $$\Lambda_f(\varphi) = \langle \Lambda_f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ .$$

Endvidere skrives gerne μ i stedet for Λ_μ , når $\mu \in M(\Omega)$. Vi vil ofte i det følgende endda bruge betegnelsen f (der minder om en funktion) for en vilkårlig distribution.

I den systematiske teori skal vi især fæstne os ved inklusionerne

(6.10) $$C_0^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

(og andre L^2-inklusioner, af betydning for Hilbertrums teori), hvor vi vil vise, hvorledes de store gab mellem $C_0^\infty(\Omega)$ og $L^2(\Omega)$, henholdsvis mellem $L^2(\Omega)$ og $\mathcal{D}'(\Omega)$, fyldes ud af Sobolev rum.

Lad os se på et andet vigtigt eksempel.
Lad x_0 være et punkt i Ω . Afbildningen

(6.11) $$\delta_{x_0} : \varphi \rightsquigarrow \varphi(x_0) \ ,$$

der sender en testfunktion over i værdien i x_0 , er en distribution, for det er klart en lineær afbildning af $C_0^\infty(\Omega)$ ind i $\mathbb{C}$, og der gælder for ethvert j , når $\operatorname{supp}\varphi \subset K_j$,

(6.12) $$|\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \sup\left\{|\varphi(x)| \ \Big| \ x \in K_j\right\}$$

(bemærk, at $\varphi(x_0) = 0$ når $x_0 \notin K_j$). Her er (5.3) opfyldt med $c_j = 1$, $N_j = 0$, for alle j . På lignende måde ses, at afbildningerne

(6.13) $$\Lambda_\alpha : \varphi \rightsquigarrow (D^\alpha\varphi)(x_0)$$

er distributioner, nu med $c_j = 1$ og $N_j = |\alpha|$ for alle j . Distributionen (6.11) er den berømte "Dirac's δ-funktion" eller "δ-mål". Betegnelsen mål er korrekt, idet vi kan skrive

(6.14) $$\langle \delta_{x_0},\varphi\rangle = \int \varphi \, d\mu_{x_0} \ ,$$

hvor μ_{x_0} er punktmålet med værdi 1 på mængden $\{x_0\}$ og værdi 0 på kompakte mængder disjunkt fra x_0 . Betegnelsen funktion er en vild "abuse of notation", som har overlevet, måske fordi den er så fejlagtig, at motiveringen for distributionsbegrebet træder tydeligt frem.

δ_0 betegnes også blot δ.

Endnu andre distributioner fås på følgende måde: Lad $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, og lad $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Afbildningen

(6.15) $$\Lambda_{f,\alpha}\colon \varphi \rightsquigarrow \int f(x)(D^\alpha\varphi)(x)dx \quad , \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \, ,$$

er en distribution, idet der for $\varphi \in C^\infty_{K_j}(\Omega)$ gælder

(6.16) $$|\langle\Lambda_{f,\alpha},\varphi\rangle| = \left|\int_{K_j} f\, D^\alpha\varphi\, dx\right| \leq \int_{K_j} |f(x)|dx \cdot \sup\left\{|D^\alpha\varphi(x)| \;\middle|\; x \in K_j\right\} ,$$

her er (5.3) opfyldt med $c_j = \|f\|_{L^1(K_j)}$ og $N_j = |\alpha|$.

Man kan vise, at de mest generelle distributioner ikke er så meget værre end dette sidste eksempel. Der gælder, når Λ er en vilkårlig distribution, at for hver fast kompakt mængde $K \subset \Omega$ findes der et N (afhængigt af K) og et system af funktioner $f_\alpha \in C^0(\Omega)$ for $|\alpha| \leq N$, så at

(6.17) $$\langle\Lambda,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq N} \langle f_\alpha, D^\alpha\varphi\rangle \quad \text{for} \quad \varphi \in C_K^\infty(\Omega) \, .$$

Vi viser dette senere, i forbindelse med Sobolev's sætning (Korollar 9.16).

Man kan ikke altid finde et N, der fungerer for <u>alle</u> $K \subset \Omega$; det hænger sammen med, at en distribution ikke behøver at have en (begrænset) <u>orden</u> - dette begreb defineres således:

<u>Definition 6.4.</u> $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *siges at være <u>af orden N</u>, når ulighederne* (5.3) *gælder for* Λ *med* $N_j \leq N$ *for alle* j *(men gerne med forskellige konstanter* c_j *).* Λ *siges at være af <u>uendelig orden</u>, hvis den ikke er af orden* N *for noget* N *; i modsat fald siges den at være af endelig orden. <u>Ordenen</u> af* Λ *er det mindste brugbare* N *, resp.* ∞ .

De foregående eksempler viser alle distributioner af endelig orden, idet $L^1_{loc}(\Omega)$ og $M(\Omega)$ definerer distributioner af orden 0 (jvf. (6.2), (6.5) og (6.12)), mens Λ_α og $\Lambda_{f,\alpha}$ i (6.13) og (6.15) er af orden $|\alpha|$. Et eksempel på en distribution af uendelig orden er distributionen $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ defineret ved

(6.18) $$\langle\Lambda,\varphi\rangle = \sum_{N=1}^{\infty} \langle 1_{[N,2N]}, \varphi^{(N)}(x)\rangle \, ,$$

hvor 1_M er 1 på M, 0 ellers . (Så snart vi har fået defineret begrebet <u>støtte</u> af en distribution, vil det dog fremgå, at når en distribution har kompakt støtte, har den endelig orden, jvf. Sætning 6.12 nedenfor.)

Distributionsteorien blev systematiseret af L. Schwartz, og hans bog "Theorie des distributions" (Paris 1951) er stadig et hovedværk inden for litteraturen om distributioner.

6.2. Regneregler for distributioner.

Når T er en kontinuert lineær operator i $C_0^\infty(\Omega)$, og $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, defineres ved sammensætning et nyt element $\Lambda T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, altså funktionalen

$$(\Lambda T)(\varphi) = \langle \Lambda, T\varphi \rangle .$$

Afbildningen $T^\times : \Lambda \rightsquigarrow \Lambda T$ i $\mathscr{D}'(\Omega)$ er simpelthen den adjungerede afbildning til afbildningen $\varphi \rightsquigarrow T\varphi$. (Vi bruger notationen $T^\times$ for at undgå forveksling med adjungering af operatorer i Hilbertrum, hvor der indgår en sesquilinearitet. Notationen T' bruges også, men mærket kan forveksles med differentiation.)

Som vist i Sætning 5.3, er følgende simple afbildninger kontinuerte i $C_0^\infty(\Omega)$

$$M_f : \varphi \rightsquigarrow f\varphi , \quad \text{når } f \in C^\infty(\Omega) ;$$
$$D^\alpha : \varphi \rightsquigarrow D^\alpha \varphi .$$

De inducerer da nogle afbildninger i $\mathscr{D}'(\Omega)$, som vi temporært vil kalde $M_f^\times$ og $(D^\alpha)^\times$, ved

$$\langle M_f^\times \Lambda, \varphi \rangle = \langle \Lambda, f\varphi \rangle$$
$$\langle (D^\alpha)^\times \Lambda, \varphi \rangle = \langle \Lambda, D^\alpha \varphi \rangle$$

for $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ og $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Hvordan ser de nye afbildninger ud, når Λ selv er en funktion? Hvis $\Lambda = v \in L^1_{loc}(\Omega)$, har vi, at

$$\langle M_f^\times v, \varphi \rangle = \langle v, f\varphi \rangle = \int v(x) f(x) \varphi(x) dx = \langle fv, \varphi \rangle ;$$

altså er

$$M_f^\times v = fv , \quad \text{når } v \in L^1_{loc}(\Omega) . \tag{6.19}$$

Endvidere haves, når $v \in C^\infty(\Omega)$,

$$\langle (D^\alpha)^\times v, \varphi \rangle = \langle v, D^\alpha \varphi \rangle = \int v(x)(D^\alpha \varphi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha v)(x) \varphi(x) dx = \langle (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v, \varphi \rangle ;$$

altså er

(6.20) $$(-1)^{|\alpha|}(D^\alpha)^x v = D^\alpha v \ , \quad \text{når} \quad v \in C^\infty(\Omega) \ .$$

Disse formler motiverer følgende definition.

Definition 6.5. 1^0 *Når* $f \in C^\infty(\Omega)$, *defineres operatoren* M_f *i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ved*

$$\langle M_f\Lambda,\varphi\rangle = \langle\Lambda,f\varphi\rangle \quad \textit{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ .$$

M_f *betegnes ofte kort* f.

2^0 *Endvidere defineres operatoren* D^α *i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ved*

$$\langle D^\alpha\Lambda,\varphi\rangle = \langle\Lambda,(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi\rangle \quad \textit{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ .$$

Tilsvarende defineres ∂^α *i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ved*

$$\langle \partial^\alpha\Lambda,\varphi\rangle = \langle\Lambda,(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle \quad \textit{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ ,$$

således at vi stadig har $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$.

Definitionen siger egentligt blot, at vi betegner den adjungerede afbildning til M_f ved M_f (i reglen forenklet til f), og vi betegner den adjungerede afbildning til $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ ved D^α ; og motiveringen for denne "misbrug af notationen" ligger i den overensstemmelse der er vist i (6.19) og (6.20). Faktisk er misbruget ikke så stort endda, idet man kan vise, at $C^\infty(\Omega)$ er en tæt delmængde af $\mathcal{D}'(\Omega)$ (forsynet med w*-topologien, Sætning 9.17), så at udvidelsen af operatorerne f og D^α fra elementer $v \in C^\infty(\Omega)$ til $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ er entydigt bestemt. Bemærk også, at når $v \in C^k(\Omega)$, stemmer de distributionsafledede $D^\alpha v$ overens med de sædvanlige partielle afledede for $|\alpha| \leq k$, på grund af de sædvanlige formler for delvis integration. Vi skriver kort $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha = (-D)^\alpha$.

Det spændende ved Definition 6.5 er, at vi nu kan differentiere distributioner - og dermed specielt funktioner i L^1_{loc}, som ikke sædvanligvis er differentiable. Bemærk først, at Λ_α og $\Lambda_{f,\alpha}$ defineret i (6.13) hhv. (6.15) opfylder

(6.21) $$\langle\Lambda_\alpha,\varphi\rangle = \langle(-D)^\alpha\delta_{x_0},\varphi\rangle \ , \quad \langle\Lambda_{f,\alpha},\varphi\rangle = \langle(-D)^\alpha f,\varphi\rangle$$

for $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Lad os dernæst se på et vigtigt, klassisk eksempel.

Med $H(x)$ betegnes funktionen på $\mathbb{R}$ defineret ved

(6.22) $$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x \leq 0 \ , \end{cases}$$

den kaldes Heaviside funktionen. Da $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, er $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Den distributionsafledede findes således:

$$\langle \frac{d}{dx} H, \varphi\rangle = \langle H, -\frac{d}{dx}\varphi\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle \quad \text{for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

altså

$$\frac{d}{dx} H = \delta_0, \tag{6.23}$$

delta-målet i 0 ! H og $\frac{d}{dx}H$ er distributioner af orden 0, mens de højere afledede $\frac{d^k}{dx^k}H$ bliver af orden $k-1$.

Der er et tilsvarende eksempel i højere dimensioner, som giver os lejlighed til at repetere Gauss' formel. Vi minder om, at når Ω er en glat åben delmængde af $\mathbb{R}^n$ med rand $\partial\Omega$, gælder for $u \in C^1(\overline{\Omega})$ (med kompakt støtte for at sikre integralernes eksistens)

$$\int_\Omega \partial_j u \, dx = -\int_{\partial\Omega} n_j(x)u(x)dS, \tag{6.24}$$

hvor n_j er den j'te komponent af den indadrettede normalvektor til randen $\partial\Omega$ i punktet x, og dS er overfladeelementet. Når $u = \varphi|_{\overline{\Omega}}$ hvor $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, kan formlen opfattes på følgende måde:

$$\langle \partial_j 1_\Omega, \varphi\rangle \equiv -\int_\Omega \partial_j\varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} n_j(x)\varphi(x)dS, \tag{6.25}$$

hvilket viser, at distributionen $\partial_j 1_\Omega$ virker på testfunktionen φ som angivet i det sidste udtryk. Specielt er $\partial_j 1_\Omega$ en distribution af orden 0.

Forøvrigt er det nok så vigtigt, at distributionsteorien tillader en definition af differentialkvotienter af funktioner, der blot i mild grad ikke er klassisk differentiable. Lad os minde om, at det klassiske differentialkvotientbegreb, for funktioner af flere variable, kun fungerer rigtig godt, når der er tale om <u>kontinuerte</u> partielle afledede; kun da kan man uden videre ombytte rækkefølgen af differentiationer: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$, når u er C^2, mens reglen modsiges ved mere generelle funktioner (f.eks. $u(x_1,x_2) = |x_1|x_1$, hvor kun $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}u$ har klassisk mening på $\mathbb{R}^2$.)

Det nye differentialkvotientbegreb er ufølsomt over for rækkefølgen af differentiationer ($\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$ og $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$ opfattes som den samme operator i $\mathcal{D}'$, fordi de overføres på C_0^∞, hvor de opfattes ens). I det følgende betragtes et nyttigt specialtilfælde.

Lemma 6.6. *Lad* $R > 0$, *og lad* $\Omega = B(0,R)$ *i* $\mathbb{R}^n$. *Lad* $\Omega_\pm = \Omega \cap \mathbb{R}^n_\pm$. *Lad* $k > 0$, *og lad* $u \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$, *med* k*'te afledede defineret i* Ω_+ *og* Ω_-, *således at de kan forlænges til kontinuerte funktioner på* $\overline{\Omega_+}$ *henholdsvis* $\overline{\Omega_-}$ *(altså* u *er stykkevis* C^k *). For* $|\alpha| = k$ *er den* α*'te afledede i distributionsforstand da funktionen* $v \in L^1(\Omega)$ *defineret ved*

$$v = \begin{cases} \partial^\alpha u & i\ \Omega_+ \\ \partial^\alpha u & i\ \Omega_- \end{cases} .$$

Bevis: Lad $|\alpha| = k$, og skriv $\partial^\alpha = \partial_j \partial^\beta$, hvor $|\beta| = k-1$. Når $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, har vi, hvis $j = n$ (med notationen $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$) :

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = -\langle \partial^\beta u, \partial_n \varphi\rangle &= -\int_{\Omega_-} \partial^\beta u\, \partial_n \varphi\, dx - \int_{\Omega_+} \partial^\beta u\, \partial_n\varphi\, dx \\
&= -\int_{\Omega_-} [\partial_n(\partial^\beta u\,\varphi) - \partial_n\partial^\beta u\,\varphi]\, dx - \int_{\Omega_+} [\partial_n(\partial^\beta u\,\varphi) - \partial_n \partial^\beta u\,\varphi] dx \\
&= \int_{\Omega_-} \partial^\alpha u\,\varphi\, dx - \int_{|x'|<R} \lim_{x_n \to 0-} (\partial^\beta u\,\varphi) dx' \\
&\qquad + \int_{\Omega_+} \partial^\alpha u\,\varphi\, dx + \int_{|x'|<R} \lim_{x_n\to 0+} (\partial^\beta u\,\varphi) dx' \\
&= \int_\Omega v\,\varphi\, dx ,
\end{aligned}$$

fordi $\partial^\beta u$ er kontinuert på Ω. Hvis $j < n$, giver den delvise integration randbidragene 0, da $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$. Ialt ses, at distributionen $\partial^\alpha u$ er lig med v. $\square$

Det ses f.eks. af lemmaet, at differentialkvotienten af funktionen $|x|$ på intervallet $]-1,1[$ er det, den bør være, nemlig den diskontinuerte (men integrable) funktion $\operatorname{sign} x$ (jvf. Afsnit 1.1).

Operationerne multiplikation med glat funktion og differentiation kombineres i følgende regneregel:

Lemma 6.7 (Leibniz' formel). *Når* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, *og* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *er*

$$D^\alpha(f\,u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f\, D^{\alpha-\beta} u . \tag{6.26}$$

Bevis: Når f og u er C^∞-funktioner, fås formlen ved induktion ud fra det simpleste tilfælde

(6.27) $$D_j(f\,u) = (D_j f)u + f\,D_j u\ .$$

Den samme induktion fungerer, hvis blot vi kan vise (6.27) i distributionstilfældet. Det går ved hjælp af definitionerne: For $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ er

$$\begin{aligned}\langle D_j(f\,u),\varphi\rangle &= \langle f\,u,-D_j\varphi\rangle = \langle u,-f\,D_j\varphi\rangle = \langle u,-D_j(f\,\varphi)+(D_j f)\varphi\rangle\\ &= \langle D_j u,f\,\varphi\rangle + \langle (D_j f)u,\varphi\rangle = \langle f\,D_j u+(D_j f)u,\varphi\rangle\ .\end{aligned}$$ □

Rummet $\mathcal{D}'(\Omega)$ forsynes med w*-topologien (svag stjerne topologien), dvs. topologien bestemt ved semi-normerne p_φ på $\mathcal{D}'(\Omega)$:

(6.28) $$p_\varphi\colon u \rightsquigarrow |\langle u,\varphi\rangle|\ ,$$

hvor φ gennemløber $C_0^\infty(\Omega)$. Vi bruger her Sætning 4.3, idet vi bemærker, at familien af seminormer er separerende (da $u \neq 0$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$ betyder, at $\langle u,\varphi\rangle \neq 0$ for et vist φ). (Se også Mat 313 §11 vedrørende w*-topologien.)

Sætning 6.8. *Lad* $f \in C^\infty(\Omega)$ *og* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Operatorerne* M_f *og* D^α *er kontinuerte i* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Bevis: Lad W være en omegn af 0 i $\mathcal{D}'(\Omega)$, så indeholder W en omegn W_0 af 0 af formen

(6.29) $$W_0 = W(\varphi_1,\dots,\varphi_N,\varepsilon) \equiv \left\{v \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \middle|\ |\langle v,\varphi_1\rangle| < \varepsilon,\dots,|\langle v,\varphi_N\rangle| < \varepsilon\right\},$$

hvor $\varphi_1,\dots,\varphi_N \in C_0^\infty(\Omega)$. Idet $f\varphi_1,\dots,f\varphi_N$ og $D^\alpha\varphi_1,\dots,D^\alpha\varphi_N$ tilhører $C_0^\infty(\Omega)$, betragtes omegnene

$$V = W(f\varphi_1,\dots,f\varphi_N,\varepsilon) \qquad \text{og} \qquad V_1 = W(D^\alpha\varphi_1,\dots,D^\alpha\varphi_N,\varepsilon)\ .$$

Da $\langle fu,\varphi_j\rangle = \langle u,f\varphi_j\rangle$ og $|\langle D^\alpha u,\varphi_j\rangle| = |\langle u,D^\alpha\varphi_j\rangle|$ for hvert φ_j , ses, at M_f sender V ind i W_0 , og D^α sender V_1 ind i W_0 . Dette viser kontinuiteten af M_f og D^α . □

Topologien i $L^1_{loc}(\Omega)$ er klart stærkere end topologien i $\mathcal{D}'(\Omega)$. Der gælder i almindelighed, at konvergens i $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ eller $L^p_{loc}(\Omega)$

($p \in [1,\infty]$) medfører konvergens i $\mathcal{D}'(\Omega)$. - Ved hjælp af Banach-Steinhaus' sætning får man følgende fundamentale egenskab ved $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sætning 6.9 (Grænseværdisætningen). *En følge af distributioner* $u_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$) *er konvergent i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *for* $k \to \infty$, *hvis og kun hvis talfølgen* $\langle u_k,\varphi\rangle$ *er konvergent i* $\mathbb{C}$ *for ethvert* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Grænseværdien for* u_k *i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *er da den funktional* u , *der defineres ved*

$$\langle u,\varphi\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k,\varphi\rangle \quad , \textit{ for } \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \; . \tag{6.30}$$

Endvidere haves, at $f\, D^\alpha u_k \to f\, D^\alpha u$ *i* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *for alle* $f \in C^\infty(\Omega)$, *alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Bevis: Når topologien er defineret ved seminormerne (6.28) (jvf. Sætning 4.3), vil $u_k \to v$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$ hvis og kun hvis der for alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gælder

$$\langle u_k - v,\varphi\rangle \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty \; .$$

Vi skal nu vise, at når vi blot véd, at talfølgerne $\langle u_k,\varphi\rangle$ er konvergente, så findes der en distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, så $\langle u_k - u,\varphi\rangle \to 0$ for alle φ . Hertil benyttes Korollar 4.11 og Sætning 5.3. Definer funktionalen Λ ved

$$\Lambda(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \langle u_k,\varphi\rangle \quad \text{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \; .$$

Ifølge Sætning 5.2 (c) er Λ kontinuert fra $C_0^\infty(\Omega)$ til $\mathbb{C}$, hvis og kun hvis Λ definerer kontinuerte afbildninger fra $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ til $\mathbb{C}$ for hvert K_j . Da $C_{K_j}^\infty(\Omega)$ er et Fréchet rum, kan Korollar 4.11 anvendes på afbildningen $\Lambda\colon C_{K_j}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$, som grænseværdi for funktionalerne $u_k\colon C_{K_j}^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ (for $k \to \infty$), hvilket viser den ønskede kontinuitet. Den sidste bemærkning følger nu umiddelbart af Sætning 6.8. $\square$

Eksempel: $h_j \to \delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ for $j \to \infty$. (Vis selv!)

6.3. Distributioner med kompakt støtte.

I det følgende, som også tidligere, indgår bestandig den konvention, at et rum af funktioner defineret på en delmængde ω af Ω identificeres med et funktionsrum over Ω ved at funktionerne udvides med 0 på $\Omega \setminus \omega$.

Definition 6.10. *Lad* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1^0 u *siges at være* 0 *på den åbne mængde* $\omega \subset \Omega$, *hvis*

$$\langle u,\varphi\rangle = 0 \qquad \textit{for alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega) . \tag{6.31}$$

2^0 *Støtten af* u *defineres ved*

$$\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \Big(\cup \{\omega \mid \omega \ \text{ åben } \subset \Omega,\ u \ \text{ er 0 på } \ \omega\} \Big) . \tag{6.32}$$

Bemærk for eksempel, at støtten af distributionen $\partial_j 1_\Omega$ defineret i (6.25) er lig med $\partial\Omega$. Specielt er $\partial_j 1_\Omega$ ikke en funktion (jvf. diskussionen efter Lemma 6.2).

Lemma 6.11. *Lad* $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *være en familie af åbne delmængder af* Ω . *Hvis* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *er* 0 *på* ω_λ *for hvert* $\lambda \in \Lambda$, *så er* u *lig* 0 *på* $\cup_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda$.

Bevis: Lad $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, med støtte $K \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda$; vi skal vise, at $\langle u,\varphi\rangle = 0$. Den kompakte mængde K er overdækket af en endelig delfamilie $\omega_1,\dots,\omega_N$. Ifølge Sætning 5.13 findes der $\psi_1,\dots,\psi_N \in C_0^\infty(\Omega)$ med $\psi_1 + \dots + \psi_N = 1$ på K og $\operatorname{supp} \psi_j \subset \omega_j$ for hvert j . Lad nu $\varphi_j = \psi_j \varphi$, så er $\varphi = \Sigma_{j=1}^N \varphi_j$, og $\langle u,\varphi\rangle = \Sigma_{j=1}^N \langle u,\varphi_j\rangle = 0$, ifølge det givne. $\square$

På grund af lemmaet kan støtten også beskrives som komplementærmængden til den største åbne mængde hvor u er 0.

En interessant delmængde af $\mathcal{D}'(\Omega)$ udgøres af distributionerne med kompakt støtte i Ω . Man bruger betegnelsen

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \Big\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \ \text{ er kompakt } \subset \Omega \Big\} . \tag{6.33}$$

Når $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, findes et j , så $\operatorname{supp} u \subset K_{j-1} \subset \overset{\circ}{K}_j$ (jvf. (4.13)). Da $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, findes c_j og N_j , så

$$|\langle u,\psi\rangle| \le c_j \sup\left\{|D^\alpha\psi(x)| \;\middle|\; x \in K_j \ , \ |\alpha| \le N_j\right\} ,$$

for alle ψ med støtte i K_j . Vælg nu en funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, som er 1 på en omegn af K_{j-1} og har støtte i $\overset{\circ}{K}_j$ (jvf. Korollar 5.11). En vilkårlig testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ kan da skrives som

$$\varphi = \eta\varphi + (1-\eta)\varphi ,$$

hvor $\operatorname{supp} \eta\varphi \subset \overset{\circ}{K}_j$, mens $\operatorname{supp}(1-\eta)\varphi \subset CK_{j-1}$. Da u er 0 på CK_{j-1} , er $\langle u,(1-\eta)\varphi\rangle = 0$, så at

$$\begin{aligned} |\langle u,\varphi\rangle| = |\langle u,\eta\varphi\rangle| &\le c_j \sup\left\{|D^\alpha(\eta\varphi)| \;\middle|\; x \in K_j \ , \ |\alpha| \le N_j\right\} \\ &\le c' \sup\left\{|D^\alpha\varphi(x)| \;\middle|\; x \in \operatorname{supp} \varphi \ , \ |\alpha| \le N_j\right\} , \end{aligned} \tag{6.34}$$

hvor c' afhænger af de afledte af η op til orden N_j (ved Leibniz' formel, sml. evt. (5.6)). Da φ var vilkårlig, viser dette, at u har orden N_j (endda mere: at vi kan bruge den samme konstant c' på alle kompakte mængder $K_m \subset \Omega$) . Vi har vist:

Sætning 6.12. *Når* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, *findes et* $N \in \mathbb{N}$, *så* u *har orden* N .

Vi bemærker, uden iøvrigt at gå i detaljer, at når $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ har kompakt støtte, kan $\langle u,\varphi\rangle$ tillægges en god mening også for $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ (idet kun φ's opførsel på en omegn af støtten af u i virkeligheden indgår). Rummet $\mathcal{E}'(\Omega)$ kan endda identificeres med rummet af kontinuerte funktionaler på $C^\infty(\Omega)$ (der også sommetider betegnes $\mathcal{E}(\Omega)$, hvilket begrunder terminologien $\mathcal{E}'(\Omega)$ for dualrummet).

Bemærkning 6.13. Når Ω' er en åben delmængde af Ω med $\overline{\Omega}'$ kompakt $\subset \Omega$, og K er kompakt med $\overline{\Omega}' \subset \overset{\circ}{K} \subset K \subset \Omega$, kan en vilkårlig distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spaltes i en distribution med støtte i K og en distribution der er 0 på Ω' , nemlig

$$u = \zeta u + (1-\zeta)u , \tag{6.35}$$

hvor $\zeta \in C_0^\infty(\overset{\circ}{K})$ og er 1 på $\overline{\Omega}'$ (Korollar 5.11). ζu har støtte i K , fordi $\zeta\varphi = 0$ for $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \setminus K$; og $(1-\zeta)u$ er 0 på Ω' , fordi $(1-\zeta)\varphi = 0$ for $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega'$.

I denne forbindelse vil vi også se på restriktion og sammenstykning af distributioner.

Når $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, og Ω' er en åben delmængde af Ω, defineres restriktionen af u til Ω' som elementet $u|_{\Omega'} \in \mathscr{D}'(\Omega')$ bestemt ved

$$\langle u|_{\Omega'}, \varphi\rangle_{\Omega'} = \langle u,\varphi\rangle_{\Omega} \quad \text{for } \varphi \in C_0^\infty(\Omega') \,. \tag{6.36}$$

(For præcisionens skyld angiver vi her dualiteten mellem $\mathscr{D}'(\omega)$ og $C_0^\infty(\omega)$ ved $\langle\ ,\ \rangle_\omega$.)

Når $u_1 \in \mathscr{D}'(\Omega_1)$ og $u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega_2)$, og ω er en åben delmængde af $\Omega_1 \cap \Omega_2$, siger vi, at $u_1 = u_2$ på ω, når

$$u_1|_\omega - u_2|_\omega = 0 \quad \text{som element af } \mathscr{D}'(\omega) \,. \tag{6.37}$$

Følgende sætning er velkendt for kontinuerte funktioner og for L^1_{loc}-funktioner.

Sætning 6.14 (Sammenstykning af distributioner.). *Lad* $\Omega_1,\dots,\Omega_N$ *være åbne delmængder af* $\mathbb{R}^n$, *og lad* $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$. *Hvis* $u_j \in \mathscr{D}'(\Omega_j)$ *for* $j = 1,\dots,N$, *og opfylder* $u_i = u_j$ *på* $\Omega_i \cap \Omega_j$ *for* $i,j = 1,\dots,N$, *så findes der en entydigt bestemt distribution* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *så at* $u|_{\Omega_j} = u_j$ *for alle* j.

Bevis: Der er højst én løsning u. For hvis u og v er løsninger, er $(u-v)|_{\Omega_j} = 0$ for $j = 1,\dots,N$, hvilket medfører at $u - v = 0$ ifølge Lemma 6.11.

Vi finder u således: Lad $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ være en følge af kompakte mængder som i (4.13), og betragt et fast ℓ. Der findes ifølge Sætning 5.13 en deling af enheden $\psi_1,\dots,\psi_N$ med funktioner $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, så $\psi_1 + \dots + \psi_N = 1$ på K_ℓ. For $\varphi \in C_{K_\ell}^\infty(\Omega)$ sætter vi da

$$\langle u,\varphi\rangle_\Omega = \langle u, \sum_{j=1}^N \psi_j\varphi\rangle_\Omega = \sum_{j=1}^N \langle u_j, \psi_j\varphi\rangle_{\Omega_j} \,. \tag{6.38}$$

Herved tillægges $\langle u,\varphi\rangle$ en værdi, der tilsyneladende afhænger af en række valg (af ℓ og af opspaltningen af enheden). Hvis $\psi_1',\dots,\psi_N'$ er en anden opspaltning, har vi imidlertid

$$\sum_{j=1}^N \langle u_j, \psi_j'\varphi\rangle_{\Omega_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \langle u_j, \psi_k\psi_j'\varphi\rangle_{\Omega_j} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \langle u_j, \psi_k\psi_j'\varphi\rangle_{\Omega_j\cap\Omega_k}$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \langle u_k, \psi_k\psi_j'\varphi\rangle_{\Omega_k} = \sum_{k=1}^N \langle u_k, \psi_k\varphi\rangle_{\Omega_k}$$

fordi $u_j = u_k$ på $\Omega_j \cap \Omega_k$. Altså er u defineret for $\varphi \in C_{K_\ell}^\infty(\Omega)$ uafhængigt af den valgte opspaltning. Benytter vi en sådan definition for hvert K_ℓ får vi, at disse definitioner også er indbyrdes konsistente, da man for K_ℓ og $K_{\ell+1}$ kan benytte en opspaltning $\psi_1,\dots,\psi_N$ konstrueret for $K_{\ell+1}$.

At u er kontinuert (som funktional) ses f.eks. således (jvf. Sætning 5.2 (c) og Sætning 4.8). Betragt K_ℓ , og lad $\varphi_k \to 0$ i $C^\infty_{K_\ell}(\Omega)$ for $k \to \infty$. Vælg $\psi_1,\dots,\psi_N$ som ovenfor. Så vil $\psi_j\varphi_k \to 0$ i $C_0^\infty(\Omega_j)$ (Sætning 5.3), hvormed

$$\langle u\,,\varphi_k\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j\,,\psi_j\varphi_k\rangle_{\Omega_j} \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty .$$

Denne overvejelse, for hvert K_ℓ , viser at $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

Sætningen kan udvides til tilfældet, hvor $\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda$ for en vilkårlig familie af åbne mængder $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, stadig ved brug af Sætning 5.13 (nu for forskellige endelige delfamilier af $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$), idet hvert K_ℓ dækkes af endeligt mange af de åbne mængder. På fransk har sætningen navnet "recollement des morceaux" (sammenklistring af stumperne).

Et trivielt eksempel er tilfældet, hvor $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, og klistres sammen med 0-distributionen på en omegn af $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, dvs. "forlænges med 0" til en distribution i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. En sådan forlængelse underforstås ofte.

6.4. Koordinatskifte.

Ved et C^∞-koordinatskift (en diffeomorfi) føres C^∞-funktioner hhv. L^1_{loc}-funktioner jo over i C^∞-funktioner hhv. L^1_{loc}-funktioner. Man har sommetider brug for at definere det tilsvarende begreb for distributioner. Som ved definitionen af M_f og D^α , er definitionen baseret på analogi med funktioner.

Lad Ω og Ξ være åbne mængder i $\mathbb{R}^n$, og lad κ være en diffeomorfi af Ω på Ξ ; mere præcist er κ en bijektiv afbildning

(6.39) $$\kappa\colon x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto (\kappa_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\kappa_n(x_1,\dots,x_n)) \,,$$

hvor hver κ_j er en C^∞-funktion fra Ω ind i $\mathbb{R}$, og funktionaldeterminanten

(6.40) $$J(x) = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\kappa_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\kappa_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\kappa_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}\right|$$

er > 0 for alle $x \in \Omega$ (så $J(x)$ og $\frac{1}{J(x)}$ er C^∞-funktioner). En funktion $f(x)$ på Ω føres over i en funktion $(Tf)(y)$ på Ξ ved definitionen

(6.41) $$(Tf)(y) = f(\kappa^{-1}(y)) .$$

De almindelige regler for koordinatskift viser, at T er en lineær operator fra $C_0^\infty(\Omega)$ til $C_0^\infty(\Xi)$, fra $C^\infty(\Omega)$ til $C^\infty(\Xi)$ og fra $L^1_{loc}(\Omega)$ til $L^1_{loc}(\Xi)$. Vedrørende integration har vi, når $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ og $\psi \in C_0^\infty(\Xi)$,

(6.42) $$\begin{aligned}\langle Tf,\psi(y)\rangle_\Xi &= \int_\Xi f(\kappa^{-1}(y))\psi(y)dy = \int_\Omega f(x)\psi(\kappa(x))J(x)dx \\ &= \langle f,J(x)\psi(\kappa(x))\rangle_\Omega = \langle f,JT^{-1}\psi\rangle_\Omega .\end{aligned}$$

Dette udvides til distributioner ved analogi.

Definition 6.15. *Når* κ *er en diffeomorfi af* Ω *på* Ξ *med funktionaldeterminant* J, *defineres koordinatskifteafbildningen* $T: \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Xi)$ *ved*

(6.43) $$\langle Tu\,,\psi(y)\rangle_\Xi = \langle u\,,J(x)\psi(\kappa(x))\rangle_\Omega$$

for $\psi \in C_0^\infty(\Xi)$.

Tu er klart en funktional på $C_0^\infty(\Xi)$, og kontinuiteten af denne funktional ses af at der for $\psi \in C_K^\infty(\Xi)$ gælder:

(6.44) $$|D_x^\alpha(J(x)\psi(\kappa(x)))| \le c_K \sup\{|D_y^\beta\psi(y)| \mid y \in K\,,\ \beta \le \alpha\}$$

ved Leibniz' formel og kædereglen for differentiation af sammensat funktion. Afbildningen T er hermed defineret således, at den stemmer overens med (6.41). (Der er en underlig asymmetri i transformationsloven for f og for φ i (6.42), som man i nogle fremstillinger afhjælper ved at se distributionerne som en generalisation af mål med funktionaldeterminanten indbygget på passende måde; såkaldte tætheder.)

Det er ikke svært at vise, at $T:\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Xi)$ er kontinuert (i stil med beviset for Sætning 6.8).

Definition 6.15 er for eksempel nyttig, når vi betragter glatte åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$. Blandt andet kan vi udvide Lemma 6.6 til funktioner med diskontinuiteter langs "krumme" flader.

Sætning 6.16. *Lad* Ω *være en glat åben begrænset delmængde af* $\mathbb{R}^n$. *Lad* $k \in \mathbb{N}$. *Hvis* $u \in C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, *og de* k*'te afledede i* Ω *og i* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ *eksisterer og kan forlænges til kontinuerte funktioner på henholdsvis* $\overline{\Omega}$ *og* $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, *da ligger de distributionsafledede af* u *af orden* k *i* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *og er bestemt ved at falde sammen med de sædvanlige afledede i* Ω *og i* $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Bevis: Til hvert randpunkt x hører en åben mængde U_x og en diffeomorfi $\kappa_x : U_x \to B(0,1)$ ifølge Definition 5.4; lad $U'_x = \kappa_x^{-1}(B(0,\frac{1}{2}))$. Da $\overline{\Omega}$ er kompakt, kan overdækningen af $\partial\Omega$ med mængderne U'_x udtyndes til en endelig overdækning $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,N}$; de tilhørende diffeomorfier af Ω_i på $B(0,\frac{1}{2})$ kaldes $\kappa_{(i)}$. Ved diffeomorfien $\kappa_{(i)}$ føres $u|_{\Omega_i}$ netop over i en funktion v på $B(0,\frac{1}{2})$, der opfylder betingelserne i Lemma 6.6, så at de k'te afledede i distributionsforstand er funktioner, defineret ved de sædvanlige afledede i $\Omega_i \cap \Omega$ hhv. $\Omega_i \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$. Da u klart er C^k i de åbne mængder Ω og $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, fås det ønskede resultat ved at bruge, at u er entydigt sammenstykket af distributionerne $u|_{\Omega_i}$ $(i = 1,\dots,N)$, $u|_\Omega$ og $u|_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}}$ (jvf. Sætning 6.14).

Vi skal også bruge koordinatskifteafbildningen i Kapitel 7 (hvor f.eks. translation indgår i nogle beviser) og i Kapitel 8, hvor Fourier transformationen på nogle specielle funktioner beregnes ved brug af deres invariansegenskaber under særlige koordinatskift. Iøvrigt er det vigtigt at have styr på, hvad der sker ved koordinatskift, når man vil betragte differentialoperatorer på mangfoldigheder; men det er der ikke plads til at behandle i disse noter.

Eksempel 6.17. Blandt de simple koordinatskift i $\mathbb{R}^n$, der ofte bruges, er for eksempel translation

(6.45) $$\tau_a(x) = x - a \qquad (\text{hvor } a \in \mathbb{R}^n)$$

og dilatation

(6.46) $\mu_\lambda(x) = \lambda x$ (hvor $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) .

Disse giver anledning til koordinatskifteafbildningerne $T(\tau_a)$ henholdsvis $T(\mu_\lambda)$, som for funktioner på $\mathbb{R}^n$ ser sådan ud:

(6.47) $(T(\tau_a)u)(y) = u(\tau_a^{-1}y) = u(y+a) = u(x)$, hvor $y = x - a$,

(6.48) $(T(\mu_\lambda)u)(y) = u(\mu_\lambda^{-1}y) = u(y/\lambda) = u(x)$, hvor $y = \lambda x$,

og i overensstemmelse hermed virker således på distributioner:

(6.49) $\langle T(\tau_a)u,\, \psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n_y} = \langle u,\psi(x-a)\rangle_{\mathbb{R}^n_x} = \langle u,T(\tau_{-a})\psi\rangle$,

(6.50) $\langle T(\mu_\lambda)u,\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n_y} = \langle u,\lambda^n\psi(\lambda x)\rangle_{\mathbb{R}^n_x} = \langle u,\lambda^n T(\mu_{1/\lambda})\psi\rangle$,

da funktionaldeterminanterne er 1 hhv. λ^n . Endnu et eksempel er en ortogonaltransformation $\mathcal{O}$ (en unitær operator i det reelle Hilbert rum $\mathbb{R}^n$) , hvor den tilhørende koordinatskifteafbildning beskrives for funktioner på $\mathbb{R}^n$ ved formlen

(6.51) $(T(\mathcal{O})u)(y) = u(\mathcal{O}^{-1}y) = u(x)$, hvor $y = \mathcal{O}x$,

og for distributioner defineres (i overensstemmelse med (6.51)) ved

(6.52) $\langle T(\mathcal{O})u,\psi(y)\rangle_{\mathbb{R}^n_y} = \langle u,\psi(\mathcal{O}x)\rangle_{\mathbb{R}^n_x} = \langle u,T(\mathcal{O}^{-1})\psi\rangle$,

da funktionaldeterminanten er 1 .

Vi vil tillade os at bruge skrivemåderne i (6.47), (6.48), (6.51) også for distributioner; den nøjagtige interpretation er altså (6.49), (6.50), hhv. (6.52).

7. Sammenligning af differentiationsbegreber. Sobolev rum.

7.1. Realisationer af differentialoperatorer.

Vi kan nu begynde at gøre op, hvorledes det nye differentiationsbegreb fungerer i forbindelse med afsluttede operatorer i Hilbert rum.

Lad A være en differentialoperator af orden m med C^∞ koefficienter på en åben mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$(7.1) \qquad Au = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u ,$$

hvor $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$. Den størst mulige operator i $L^2(\Omega)$ knyttet til A ved hjælp af distributionsteorien er operatoren A_{max}, med

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} D(A_{max}) &= \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega) \right\} , \\ A_{max} u &= Au \quad \text{for } u \in D(A_{max}) , \end{aligned}$$

hvor Au for vilkårligt $u \in L^2(\Omega)$ er defineret som element af $\mathcal{D}'(\Omega)$. Denne definition (realisation) af A kaldes ofte den <u>svage</u> definition af A i $L^2(\Omega)$, idet $u \in D(A_{max})$ jo betyder, at der findes en funktion $v \in L^2(\Omega)$, så at

$$(7.3) \qquad \begin{aligned} (v|\varphi)_{L^2(\Omega)} &\equiv \langle v, \overline{\varphi} \rangle_\Omega \\ &= \langle u, \sum_{|\alpha|\leq m} (-D)^\alpha (a_\alpha \overline{\varphi}) \rangle_\Omega \equiv (u \mid \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha (\overline{a}_\alpha \varphi))_{L^2(\Omega)} \\ &\qquad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

(her er $v = A_{max} u$), jvf. definitionen af operatorerne D^α og M_{a_α} i $\mathcal{D}'(\Omega)$. I højre side af (7.3) optræder den <u>formelt adjungerede operator</u> A' til A,

$$(7.4) \qquad A'u = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha (\overline{a}_\alpha u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a'_\alpha(x) D^\alpha u$$

(for et bestemt sæt af C^∞-funktioner a'_α).

Bemærk, at A_{max} er <u>tæt defineret</u>, idet $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_{max})$, og $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $L^2(\Omega)$. Endvidere er A_{max} <u>afsluttet</u>, thi $u_k \to u$ i $L^2(\Omega)$ medfører $Au_k \to Au$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$; hvis så også $Au_k \to v$ i $L^2(\Omega)$, ses, at $v = Au \in L^2(\Omega)$, så $u \in D(A_{max})$. (Vi bruger, at konvergens i $L^2(\Omega)$ medfører konvergens i $\mathcal{D}'(\Omega)$.) Altså er $D(A_{max})$ <u>fuldstændigt med hensyn til graf-normen</u>.

Det fremgår af definitionen (jvf.(7.3)), at A_{max} netop er den $L^2(\Omega)$-adjungerede operator til den operator, der virker som A' og har definitionsområde $C_0^\infty(\Omega)$. Idet vi definerer

(7.5) $$A_{min} = \text{afslutningen af } A|_{C_0^\infty(\Omega)} \text{ som operator i } L^2(\Omega) ,$$

og betegner de analoge operatorer for A' ved A'_{max} hhv. A'_{min} har vi altså:

Lemma 7.1. *Operatorerne* A_{max} *og* A'_{min} *er hinandens adjungerede i* $L^2(\Omega)$.

A_{min} er et eksempel på en såkaldt stærk definition (realisation) af A , hvor ordet "stærk" hentyder til at operatoren er defineret ved afslutning af en klassisk defineret operator. Andre eksempler på "stærke" definitioner er (jvf. (5.18), antag at a_α'erne er begrænsede):

(7.6) $$A_{st} = \text{afslutningen af } A|_{C^m_{L^2}(\Omega)} ,$$
$$A_{m.st} = \text{afslutningen af } A|_{C^m_{L^2}(\overline{\Omega})} \qquad (\Omega \text{ glat})$$

(st. står for stærk, m.st. for meget stærk). Det er klart, at der gælder

(7.7) $$A_{min} \subset A_{m.st} \subset A_{st} \subset A_{max} ,$$

og det har stor interesse at undersøge, hvor langt disse operatorer ligger fra hinanden. Under nogle omstændigheder vil de være sammenfaldende (så er de specielt selvadjungerede, når $A = A'$, jvf. Lemma 7.1), men der er også mange vigtige tilfælde, hvor der er forskel. Når $\Omega = \mathbb{R}^n$, vil man gerne forvente sammenfald, men når Ω er en ægte delmængde af $\mathbb{R}^n$, er der oftest god plads mellem A_{min} og A_{max} ; de to operatorer afviger fra hinanden ved randbetingelser (bibetingelser om opførslen af funktionerne i $D(A_{min})$ og $D(A_{max})$ ved $\partial\Omega$). (Dog har man under gunstige omstændigheder, at $A_{m.st} = A_{st} = A_{max}$.) Operatorerne $\tilde{A}$ med

(7.8) $$A_{min} \subset \tilde{A} \subset A_{max}$$

kaldes realisationer af A .

7.2. Sobolev rum.

Definitionsområderne for realisationerne beskrives ofte ved hjælp af forskellige Sobolev rum, som vi nu vil definere.

Definition 7.2. *Lad* Ω *være en åben delmængde af* $\mathbb{R}^n$. *Lad* $m \in \mathbb{N}_0$.

1^o *Sobolev rummet* $H^m(\Omega)$ *defineres ved*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ for } |\alpha| \le m \right\} \tag{7.9}$$

(D^α *er defineret i distributionsforstand); det forsynes med skalarprodukt og norm*

$$(u|v)_m = \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u|D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|_m = (u|u)_m^{\frac{1}{2}}. \tag{7.10}$$

2^o *Sobolev rummet* $H_0^m(\Omega)$ *defineres som afslutningen af* $C_0^\infty(\Omega)$ *i* $H^m(\Omega)$.

Det er oplagt, at $(u|v)_m$ er et skalarprodukt med tilhørende norm $\|u\|_m$ (idet $\|u\|_m \ge \|u\|_0 \equiv \|u\|_{L^2(\Omega)}$), så at $H^m(\Omega)$ er et præ-Hilbert rum. At rummet er fuldstændigt, fås let af distributionsteorien: Lad $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en Cauchy følge i $H^m(\Omega)$. Specielt er (u_k) en Cauchy følge i $L^2(\Omega)$; den har da en grænseværdi u i $L^2(\Omega)$. Følgerne $(D^\alpha u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvor $|\alpha| \le m$, er ligeledes Cauchy følger i $L^2(\Omega)$ med grænseværdier u_α. Da $u_k \to u$ i $L^2(\Omega)$, vil $u_k \to u$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$, og dermed $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sammenlignes dette med at $D^\alpha u_k \to u_\alpha$ i $L^2(\Omega)$, ses at $u_\alpha = D^\alpha u$ for hvert $|\alpha| \le m$, hvormed $u \in H^m(\Omega)$ og $u_k \to u$ i $H^m(\Omega)$. - $H_0^m(\Omega)$ er da også et Hilbert rum, med samme norm. Vi har vist:

Lemma 7.3. $H^m(\Omega)$ *og* $H_0^m(\Omega)$ *er Hilbertrum.*

Bemærk, at vi har naturlige indlejringer

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \tag{7.11}$$

specielt vil konvergens i $H^m(\Omega)$ medføre konvergens i $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vi bemærker endvidere, at når A er en m'te ordens differentialoperator (7.1) med begrænsede koefficienter, så er

$$H_0^m(\Omega) \subset D(A_{min}) \subset D(A_{max}),$$

idet konvergens i H^m medfører konvergens i graf-normen. Vi nævner her uden bevis, (jvf. dog Sætning 9.28) at den første inklusion for elliptiske operatorer kan vises at være en identitet, mens den anden inklusion sjældent er det, når $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ behandles nedenfor).

Ovenstående definition af $H^m(\Omega)$ er en "svag" definition, derved at differentialkvotienterne er defineret i distributionsforstand. Under gunstige omstændigheder er den imidlertid også "stærk".

Sætning 7.4. *Når* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *eller* $\mathbb{R}^n_+$, *eller* Ω *er glat, åben og begrænset, så er* $C^m_{L^2}(\overline{\Omega})$ *tæt i* $H^m(\Omega)$. *(I det begrænsede tilfælde er* $C^m_{L^2}(\overline{\Omega}) = C^m(\overline{\Omega})$ *.)*

Bevis: 1^0 $\Omega = \mathbb{R}^n$. Når $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, vil $h_j * D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ for hvert $|\alpha| \leq m$, og $h_j * D^\alpha u \to D^\alpha u$ i $L^2(\Omega)$. Der gælder nu, for $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$(7.12) \qquad \begin{aligned} \langle h_j * D^\alpha u, \varphi\rangle &= \iint h_j(x-y) D^\alpha u(y)\varphi(x)\,dy\,dx \\ &= \int D^\alpha u(y) \int h_j(x-y)\varphi(x)\,dx\,dy = \langle D^\alpha u, \int h_j(x-y)\varphi(x)dx\rangle \\ &= \langle u, (-D_y)^\alpha \int h_j(x-y)\varphi(x)dx\rangle = \langle u, \int (D^\alpha h_j)(x-y)\varphi(x)dx\rangle \\ &= \langle (D^\alpha h_j) * u, \varphi\rangle = \langle D^\alpha(h_j * u), \varphi\rangle, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt Fubini's sætning et par gange (integranden er i L^1, ved Schwarz' ulighed) samt (5.27). Da altså

$$(7.13) \qquad h_j * D^\alpha u = D^\alpha(h_j * u),$$

ser vi, at $h_j * u \to u$ i $H^m(\mathbb{R}^n)$ for $j \to \infty$, således at $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ approximeres af følgen $h_j * u \in C^m_{L^2}(\mathbb{R}^n)$.

2^0 $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Vi kombinerer her foldningsteknikken anvendt under 1^0 med en "skubbe-teknik", hvor den funktion, man ønsker at approximere, skubbes lidt ud af $\mathbb{R}^n_+$. Idet man definerer translationsoperatoren τ_h ved

$$(7.14) \qquad \tau_h u(x) = u(x_1, \ldots, x_n - h) \quad \text{for } h \in \mathbb{R},$$

gælder der for $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ved argumentet efter (3.36), at

$$(7.15) \qquad \int_M |u - \tau_h u|^2\,dx \to 0 \quad \text{for } h \to 0,$$

når M er en målelig delmængde af $\mathbb{R}^n$. Specielt, hvis $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+)$, gælder der om L^2-funktionerne $D^\alpha u$ på $\mathbb{R}^n_+$,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |D^\alpha u - \tau_{-h} D^\alpha u|\,dx \to 0 \quad \text{for } h \to 0+$$

(man kan tænke sig $D^\alpha u$ forlænget med 0 i $\mathbb{R}^n_-$; det indgår ikke i integralet). Da der endvidere gælder, for $h \geq 0$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

$$\langle \tau_{-h} D^\alpha u , \varphi \rangle = \langle D^\alpha u , \tau_h \varphi \rangle = \langle u , (-D)^\alpha \tau_h \varphi \rangle = \langle u , \tau_h (-D)^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha \tau_{-h} u , \varphi \rangle ,$$

så at D^α og τ_{-h} kan ombyttes, ses at $(\tau_{-h}u)|_{\mathbb{R}^n_+}$ konvergerer mod u i $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ for $h \to 0+$.

Herefter betragter vi $h_j * (\tau_{-h}u)$ for $j > 2/h$. For $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ kan regningen i (7.12) gennemføres, og man finder, at $[h_j * (\tau_{-h}u)]|_{\mathbb{R}^n_+} \to (\tau_{-h}u)|_{\mathbb{R}^n_+}$ i $H^m(\mathbb{R}^n)$ for $j \to \infty$.

3° <u>Ω glat, åben og begrænset</u>. Vi overdækker $\overline{\Omega}$ med åbne mængder $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$, hvor $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ er af arten beskrevet i Definition 5.4, og $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Lad $\psi_0, \dots, \psi_N$ være en deling af enheden med $\psi_\ell \in C_0^\infty(\Omega_\ell)$ og $\psi_0 + \dots + \psi_N = 1$ på $\overline{\Omega}$ (jvf. Sætning 5.13). Funktionen $\psi_0 u$ har kompakt støtte i Ω og giver ved forlængelse med 0 uden for Ω en funktion $\widetilde{\psi_0 u}$ i $H^m(\mathbb{R}^n)$ (idet $D^\alpha(\psi_0 u) = \Sigma_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi_0 \, D^{\alpha-\beta} u$ har støtte i $\operatorname{supp} \psi_0$, så at $\widetilde{D^\alpha(\psi_0 u)}$ er lig med $D^\alpha(\widetilde{\psi_0 u})$). Nu kan $\widetilde{\psi_0 u}$ approximeres ifølge 1°, og restriktion til Ω giver herefter den ønskede approximation af $\psi_0 u$. Funktionerne $\psi_\ell u$, $\ell = 1, \dots, N$, føres ved diffeomorfierne hørende til hver Ω_ℓ over i funktioner v_ℓ i $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ *) (med støtte i $B(0,1)$), som approximeres i $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ ifølge 2°. (Da $\operatorname{supp} v_\ell$ er kompakt $\subset B(0,1)$, fører translation og foldning ikke ud af kuglen, når h og $1/j$ vælges tilstrækkeligt små.) Ved tilbagetransformation til Ω_ℓ fås approximationer af $\psi_\ell u$, for hvert ℓ. Summen af approximationerne til $\psi_\ell u$, $\ell = 0, \dots, N$, approximerer da u. $\square$

Brugen af foldning med h_j som i denne sætning er oprindeligt indført af K. O. Friedrichs; operatoren $F_j : u \to h_j * u$ er også kendt under navnet Friedrichs' mollifier (blødgører).

Man kan forøvrigt vise for <u>vilkårlige åbne</u> mængder Ω, at $C^m_{L^2}(\Omega)$ er tæt i $H^m(\Omega)$ (resultatet findes i B. Fugledes disputats, og bruger en fin deling af enheden). Ved behandling af randværdiproblemer har dog især Sætning 7.4 betydning.

----

*) Det benyttes her at man, med nogen ulejlighed, kan vise kædereglen for distributioner. Da κ, κ^{-1} og deres afledede er C^∞-funktioner, er egenskaben $u \in H^m$ invariant under passende diffeomorfier.

Sætning 7.5. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *er tæt i* $H^m(\mathbb{R}^n)$ *for alle* $m \in \mathbb{N}_0$.

Bevis: Vi kombinerer her teknikken fra Sætning 7.4. 1^o med en tredje teknik, "beskæring". Lad $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Som tidligere vist, konvergerer $\chi(x/N)u$ mod u i $L^2(\mathbb{R}^n)$ for $N \to \infty$ (jvf. (5.1)). De afledede opfylder

$$D^\alpha(\chi(x/N)u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\chi(x/N))D^{\alpha-\beta}u \tag{7.16}$$

$$= \chi(x/N)D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\ \beta\neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\chi(x/N))D^{\alpha-\beta} u .$$

Når $|\alpha| \leq m$, er $D^\alpha u$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$, så der gælder atter, at $\chi(x/N)D^\alpha u \to D^\alpha u$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$ for $N \to \infty$. For de øvrige led benytter vi, at $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(\chi(x/N))|$ er $O(N^{-1})$ for $N \to \infty$, for hvert $\beta \neq 0$. Så vil bidraget fra summen over $\beta \neq 0$ gå mod 0 i $L^2(\mathbb{R}^n)$ for $N \to \infty$.

Nu har $\chi(x/N)u$ kompakt støtte i $\mathbb{R}^n$, og det ses som i beviset for Sætning 7.4. 1^o, at $h_j * [\chi(x/N)u] \to \chi(x/N)u$ i $H^m(\mathbb{R}^n)$; her er $h_j * [\chi(x/N)u] \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ▯

Bemærkning 7.6. Ovenstående viser, at

$$H^m(\mathbb{R}^n) = H_0^m(\mathbb{R}^n) \quad \text{for alle } m \in \mathbb{N}_0 . \tag{7.17}$$

Vi har naturligvis altid $H^0(\Omega) = L^2(\Omega) = H_0^0(\Omega)$ for vilkårlige Ω (da $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $L^2(\Omega)$). For $m > 0$ kan man derimod vise, at $H^m(\Omega) \neq H_0^m(\Omega)$, så snart $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ har en vis størrelse, f.eks. har indre punkter.

Følgende udvidelsessætning kan herefter bevises.

Sætning 7.7. *Lad* $m \in \mathbb{N}$, *og lad* Ω *være glat, åben og begrænset, eller lig med* $\mathbb{R}^n_+$. *Der findes en kontinuert operator* $p\colon H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^m)$, *så at* $u = (pu)|_\Omega$ *for* $u \in H^m(\Omega)$.

Bevis. 1^o Tilfældet $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Vælg på vilkårlig måde et sæt af m forskellige positive tal $\lambda_0,\dots,\lambda_{m-1}$. Lad $\alpha_0,\dots,\alpha_{m-1}$ være løsningssættet til ligningssystemet

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k = 1 ,$$

(7.18)
$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k = -1 ,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k^{m-1} \alpha_k = (-1)^{m-1} .$$

(Løsningen er entydigt bestemt, idet determinanten for ligningssystemet er Vandermondes determinant,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \cdots & \lambda_{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^{m-1} & & \lambda_{m-1}^{m-1} \end{pmatrix} = \prod_{0\le i<j\le m-1} (\lambda_j - \lambda_i) \quad .)$$

Når nu $u \in C^m_{L^2}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, definerer vi pu ved

(7.19)
$$(pu)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{for } x_n \geq 0 , \\ \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\, u(x', -\lambda_k x_n) & \text{for } x_n < 0 . \end{cases}$$

På grund af (7.18) fås, at $D^\alpha pu$ er kontinuert på $\mathbb{R}^n$ for $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ med $|\alpha| \leq k$ og $\alpha_n \leq k-1$, mens $D^k_{x_n} pu$ definerer kontinuerte funktioner på hver af områderne $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ og $\overline{\mathbb{R}^n_-}$. Ved anvendelse af Lemma 6.6 på kuglerne $B(0,R)$ $(R \to \infty)$ ses, at de k'te distributionsafledede er funktioner, der stemmer overens med de sædvanlige afledede i $\mathbb{R}^n_+$ og $\mathbb{R}^n_-$, så at $pu \in H^m(\mathbb{R}^n)$; og det er let at verificere ud fra (7.19), at

(7.20)
$$\|pu\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq c\, \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)}$$

for en passende konstant c .

Da operatoren $p\colon u \mapsto pu$ er defineret på den tætte delmængde $C^m_{L^2}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ af $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ og ifølge (7.20) er kontinuert med hensyn til m-norm, udvides den ved kontinuitet til en kontinuert afbildning af $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ ind i $H^m(\mathbb{R}^n)$ med de ønskede egenskaber.

2° Når Ω er glat, åben og begrænset, reducerer vi til det forrige tilfælde ved brug af en overdækning $\cup_{\ell=0}^{N}\Omega_\ell$ af $\overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$) , med tilhørende diffeomorfier $\kappa_{(\ell)} : \Omega_\ell \to B(0,1)$ for $\ell > 0$, samt en deling af enheden $\psi_0,\dots,\psi_N$ med $\psi_\ell \in C_0^\infty(\Omega_\ell)$ og $\psi_0+\dots+\psi_N = 1$ på $\overline{\Omega}$. Lad $u \in C^m(\overline{\Omega})$ $(= C^m_{L^2}(\overline{\Omega})$). For $\psi_0 u$ tages $p(\psi_0 u) = \widetilde{\psi_0 u}$ (forlængelsen med 0 udenfor Ω). For hvert $\ell > 0$ overføres $\psi_\ell u$ ved diffeomorfien $\kappa_{(\ell)}$ i en funktion $v_\ell \in C^m_{L^2}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ med støtte i $B(0,1)\cap\mathbb{R}^n_+$. Her anvendes pkt. 1° med λ_k valgt > 1 for hvert k (f.eks. $\lambda_k = k+2$), så at støtten af pv_ℓ er en kompakt delmængde af $B(0,1)$. Med notationen

$$(T_\ell v)(x) = v(\kappa_{(\ell)}(x)) \quad \ell = 1,\dots,N ,$$

sætter vi

$$pu = \widetilde{\psi_0 u} + \sum_{\ell=1}^{n} T_\ell(pv_\ell) ;$$

dette definerer ved afslutning en afbildning med de ønskede egenskaber. $\square$

Analysen af Sobolev rum vil blive fortsat, dels i forbindelse med Fourier transformationen, dels ved studiet af randværdiproblemer.

Sætning 7.4 viser "stærk definition = svag definition" i et særligt tilfælde, hvor vi betragter hele skaren af differentialoperatorer $(D^\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ på én gang. For en generel operator $A = \Sigma_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ er de tilsvarende argumenter en del vanskeligere (og fungerer ikke altid for områder med rand); f.eks. indgår det i anvendelsen af Friedrichs' mollifier at vurdere $h_j*(\Sigma_\alpha a_\alpha D^\alpha u) - \Sigma_\alpha a_\alpha D^\alpha(h_j*u)$, der kræver yderligere teknikker, når a_α afhænger af x .

For operatorer i én variabel løses problemet dog let ved brug af sætninger om absolut kontinuitet. For nogle operatorer på $\mathbb{R}^n$ (f.eks. Laplace operatoren, evt. med et potential) klarer man sig ved kraftig brug af Fourier transformationen. I det følgende beskrives den éndimensionale situation.

7.3. Sobolev rum over intervaller.

For et begrænset interval har vi allerede indført en differentialoperator A_{ac} , der generaliserer D , i Afsnit 2.4. Vi vil nu vise, at dette begreb falder sammen med både den stærkeste og den svageste definition.

Sætning 7.8. *For operatoren* $A = D$ *på intervallet* $I =]a,b[$ *er (jvf.* (7.2), (7.6) *og* Afsnit 2.4)

(7.21) $$A_{max} = A_{m.st} = A_{ac}$$

og definitionsmængden $H^1_{ac}(I)$ *er lig med* $H^1(I)$, *hvori* $C^1(\overline{I})$ *udgør en tæt delmængde. Endvidere er (jvf.* (2.41)*)*

(7.22) $$A_{min} = A_0 \,.$$

Bevis: $H^1_{ac}(I)$ er et Hilbertrum med hensyn til graf-normen $(\|u\|_0^2 + \|A_{ac}u\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$ (jvf. (2.6)), idet A_{ac} er en afsluttet operator. Endvidere er $C^1(\overline{I})$ et tæt underrum heri, for hvis $u \in H^1_{ac}(I)$, så er $u = Jv + c$ for et $v \in L^2(I)$ $(v = A_{ac}u)$; her kan vi finde en følge $v_n \in C^0(\overline{I})$ så $v_n \to v$ i $L^2(I)$ og dermed $u_n = Jv_n + c \to u$ i grafnormen, og $u_n \in C^1(\overline{I})$. På den anden side er $C^1(\overline{I})$ tæt i $H^1(I)$ med hensyn til dettes norm $\|u\|_1 = (\|u\|_0^2 + \|Du\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Da de to normer er ens på den tætte delmængde $C^1(\overline{I})$, er der identitet mellem de to rum $H^1_{ac}(I)$ og $H^1(I)$. Nu har A_{max} jo definitionsmængden $H^1(I)$, så da A_{ac} og A_{max} stemmer overens på $C^1(\overline{I})$ er $A_{ac} = A_{max}$. Da $A_{m.st}$ er afslutningen af D defineret på $C^1(\overline{I})$, ses at også $A_{m.st} = A_{max}$. Da $A_0 = A_{ac}^*$, er $A_0 = A_{max}^* = A_{min}$. □

Hermed har vi også vist de identiteter, der blev lovet i Afsnit 1.1.

Det ses, at begrebet differentiation i $L^2(I)$ i distributionsforstand ikke ligger forfærdelig langt fra klassiske begreber, og at der ikke er ret stort spillerum mellem A_{min} og A_{max} (idet $D(A_{min})$ har codimension 2 i $D(A_{max})$, jvf. (2.44)).

For områder i højere dimensioner bliver billedet et helt andet. Bl.a. vil $D(A_{min})$ i reglen have codimension ∞ i $D(A_{max})$ når $\overline{\Omega}$ er en ægte delmængde af $\mathbb{R}^n$, og forskellen ligger bl.a. i at de forskellige randbetingelser hørende til forskellige realisationer beskrives ved funktionsrum over $\partial\Omega$, som er uendeligdimensionale. Begrebet absolut kontinuitet spiller ingen større rolle her; funktioner i $H^1(\Omega)$ behøver end ikke være kontinuerte. (For eksempel er funktionen $x_1/(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ diskontinuert (men begrænset) på $B(0,1)$, og dens første afledede i distributionsforstand er i $L^2(B(0,1))$, så den tilhører $H^1(B(0,1))$, jvf. Øvelse 6.7.) Sobolevs sætning senere vil vise, hvorledes kontinuitetsegenskaber ved funktioner i H^m-rum afhænger af dimensionen.

Når M er et vilkårligt (åbent, halvåbent eller afsluttet, evt. ubegrænset) interval af $\mathbb{R}$, siges en funktion u på M at være <u>lokalt absolut kontinuert</u>, når $u|_K$ er absolut kontinuert for ethvert kompakt delinterval K af M. Kun når M selv er kompakt, er absolut kontinuitet og lokal absolut kontinuitet på M det samme.

<u>Sætning 7.9</u>. *Lad* I *være et åbent interval af* $\mathbb{R}$, *og lad* $m \in \mathbb{N}$. *Så er* $u \in H^m(I)$ *hvis og kun hvis* $u^{(k)}$ *er lokalt absolut kontinuert på* $\overline{I}$ *for* $k < m$, *med* $u, u', \dots, u^{(m)} \in L^2(I)$.

<u>Bevis</u>: Lad $u \in H^m(I)$. Når I er begrænset, er det et direkte korollar til Sætning 7.8: Man viser successivt, at $u^{(m-1)} \in H^1_{ac}(I)$, $u^{(m-2)} \in H^1_{ac}(I), \dots$, $u \in H^1_{ac}(I)$, hvormed alle differentialkvotienter $u^{(k)}$, $k < m$, ses at være absolut kontinuerte på $\overline{I}$. (Den omvendte slutning er oplagt.)

Når I er ubegrænset, har vi herefter for ethvert begrænset delinterval I' af I, at $u \in H^m(I')$, så at $u^{(k)}$ er absolut kontinuert på $\overline{I}'$ for hvert $k < m$. □

Ovenstående vedrører differentiation på H^m. Vi kan også sammenligne differentiation i $\mathcal{D}'$ med differentiation af absolut kontinuerte funktioner, ved hjælp af følgende kraftige "entydighedssætning":

<u>Sætning 7.10</u>. *Lad* I *være et åbent interval af* $\mathbb{R}$, *lad* $k \in \mathbb{N}$ *og lad* $u \in \mathcal{D}'(I)$. *Hvis* $Du = 0$, *så er* u *lig med en konstant. Hvis* $D^k u = 0$, *så er* u *et polynomium af* grad $\leq k-1$.

<u>Bevis</u>: Sætningen vises ved induktion efter k. For tilfældet $k = 1$ har man, når $Du = 0$, at

$$0 = \langle Du, \varphi \rangle = -\langle u, D\varphi \rangle \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(I) .$$

Vælg en funktion $h \in C_0^\infty(I)$ med $\langle 1, h \rangle = 1$, så kan ethvert $\varphi \in C_0^\infty(I)$ skrives som

$$\varphi = \varphi - \langle 1, \varphi \rangle h + \langle 1, \varphi \rangle h = D\psi + \langle 1, \varphi \rangle h \quad , \tag{7.22}$$

hvor $\psi(t) = i \int_{-\infty}^t [\varphi(s) - \langle 1, \varphi \rangle h(s)] ds \in C_0^\infty(I)$. Vi har da

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, D\psi \rangle + \langle 1, \varphi \rangle \langle u, h \rangle = \langle c, \varphi \rangle \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(I) ,$$

hvor c er konstanten $\langle u, h \rangle$. Dette viser, at $u = c$.

Induktionsskridtet går nu således: Antag, at sætningen er vist op til værdien k. Hvis $D^{k+1}u = 0$, er $D^k D u = 0$, så Du er et polynomium $p(t)$ af grad $\leq k-1$. Lad $P(t)$ være en stamfunktion til $p(t)$; så er $D(u-P(t)) = 0$, hvoraf følger at $u = P(t) + c$. □

Heraf fås:

Sætning 7.11. *Lad* I *være et åbent interval af* $\mathbb{R}$. *Lad* $m \in \mathbb{N}$. *Hvis* $u \in \mathcal{D}'(I)$ *og* $D^m u \in L^2(I)$, *så er* $u \in H^m(I')$ *for ethvert begrænset delinterval af* I.

Bevis: Det er nok at vise sætningen for et begrænset interval $I =]a,b[$. Ved successiv integration dannes en funktion

(7.23) $$v(t) = i^m \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 \int_a^{s_2} \cdots \int_a^{s_{m-1}} D^m u(s_m) ds_m ,$$

som er absolut kontinuert (og L^2-integrabel) med absolut kontinuerte (og L^2-integrable) afledede op til orden $m-1$. Nu er $D^m v = D^m u$, så $u - v$ er et polynomium p (af grad $\leq m-1$) ifølge Sætning 7.10. Specielt er $u = v+p \in H^m(I)$. □

Bemærkning 7.12. For ubegrænsede intervaller er egenskaben $D^m u \in L^2(I)$ ikke tilstrækkelig til at slutte at $u \in H^m(I)$ globalt. Her kan man imidlertid vise, at når både u og $D^m u$ er i $L^2(I)$, så er u i $H^m(I)$. Det fås let ved brug af Fourier transformationen, så vi gemmer beviset til senere.

Bemærkning 7.13. Man kan også definere Sobolev rum relativt til $L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, de betegnes i litteraturen oftest $W^{m,p}(\Omega)$, og alle ovennævnte sætninger kan generaliseres hertil (med visse modifikationer for tilfældet $p = \infty$). L^1-tilfældet er særligt interessant; f.eks. overføres Sætning 7.11 uden videre til $W^{m,1}(I)$.

Indlejringerne (jvf. også (2.34'))

(7.34) $$C^1(\overline{I}) \subset H^1(I) \subset C^0(\overline{I}) , \quad I =]a,b[,$$

er kontinuerte, hvilket f.eks. kan dokumenteres direkte ved uligheder mellem de tilhørende normer. Således har vi for $u \in C^1(\bar{I})$

(7.35)
$$\|u\|_1 = \left(\int_a^b |u(t)|^2\,dt + \int_a^b |u'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left((b-a)(\sup_{t\in I}|u(t)|^2 + \sup_{t\in I}|u'(t)|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (b-a)^{\frac{1}{2}}(\sup_{t\in I}|u(t)| + \sup_{t\in I}|u'(t)|) ,$$

som viser kontinuiteten af den første inklusion. For den anden vælger vi en funktion $\zeta \in C^1(\bar{I})$ som er 1 ved a og 0 ved b. Når $u \in H^1(I)$, er

(7.36)
$$|u(a)| = \left|\int_a^b \frac{d}{dt}(\zeta(t)u(t))dt\right| = \left|\int_a^b (\zeta'u+\zeta u')dt\right|$$
$$\leq \|\zeta'\|_0\,\|u\|_0 + \|\zeta\|_0\,\|u'\|_0 \leq C\,\|u\|_1 ,$$

hvor C kun afhænger af ζ. Endvidere er for alle $t \in \bar{I}$

$$|u(t)| = \left|\int_a^t u'(s)ds + u(a)\right| \leq \left|\int_a^b 1\cdot u'(s)ds\right| + |u(a)|$$
$$\leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\,\|u'\|_0 + |u(a)| \leq C'\,\|u\|_1$$

ifølge (7.36), hvormed

(7.37)
$$\sup_{t\in I}|u(t)| \leq C'\,\|u\|_1 .$$

Det er let at generalisere dette (jvf. Sætning 7.9) til inklusionerne

(7.38)
$$C^m(\bar{I}) \subset H^m(I) \subset C^{m-1}(\bar{I}) ,$$

der ligeledes er kontinuerte.

7.4. Det regulære Sturm-Liouville problem.

Med den fuldstændige afklaring i Sætning 7.11 af, hvordan operatoren $\frac{d}{dx}$ virker i L^2-sammenhæng, er det nu let at behandle Sturm-Liouville operatorer.

Lad I være et begrænset interval $]a,b[$, og lad p og $q \in C^\infty(I)$, med $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C^0(\bar{I})$ og

(7.39)
$$0 < c \leq p(t) \leq C , \quad |p'(t)| \leq C , \quad 0 \leq q(t) \leq C \quad \text{på } I ,$$

hvor c og C er positive konstanter. Lad A være differentialoperatoren defineret ved

(7.40) $$(Au)(t) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{du(t)}{dt}\right) + q(t)u(t)\ .$$

Man ønsker at diskutere løsningerne til ligningen

(7.41) $$Au = f$$

samt løsningerne til egenværdiproblemet

(7.42) $$Au = \lambda u\ .$$

Idet Au også kan skrives

(7.43) $$Au = -pu'' - p'u' + qu\ ,$$

hvor jo $p \geq c > 0$, er det velkendt fra teorien for sædvanlige differentialligninger, at ligningen

(7.44) $$Au = 0$$

har et todimensionalt løsningsrum, udspændt af to lineært uafhængige løsninger φ_1 og φ_2; samt at (7.41) for hvert $f \in C^0(\overline{I})$ har en skare løsninger af formen $u_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, hvor c_1 og c_2 gennemløber $\mathbb{C}$. Entydig løsning af (7.41) fås kun, hvis vi pålægger yderligere betingelser. For eksempel er løsningen til (7.41) entydigt bestemt ved sine begyndelsesværdier $u(a)$ og $u'(a)$, og der findes en eksplicit formel for u udtrykt ved f, φ_1 og φ_2 (kendt fra Matematik 1).

I Sturm-Liouville problemet betragter man mere almene randbetingelser, altså lineære betingelser på u's randværdier $u(a)$, $u'(a)$, $u(b)$, $u'(b)$ (højere afledede kommer på tale ved højere ordens problemer). Vi vil diskutere disse randbetingelser, og de L^2-realisationer af A, der defineres herved.

Den maksimale realisation A_{max} er jo defineret for de $u \in L^2$, for hvilke $-(pu')' + qu$ tilhører L^2. Det er klart, at $H^2(I) \subset D(A_{max})$. På den anden side får vi successivt, ved brug af (7.39) og Sætning 7.11

$$Au \text{ og } u \in L^2(I) \Rightarrow (pu')' \in L^2(I) \Rightarrow pu' \in L^2(I)$$

$$\Rightarrow u' \in L^2(I) \Rightarrow u'' = \frac{1}{p}(-p'u'+qu) \in L^2(I)\ ,$$

hvormed i alt fås

(7.45) $$D(A_{max}) = H^2(I)\ .$$

Det er værd at bemærke, at de tilhørende normer er ækvivalente:

(7.46) $$\|u\|_2 \leq c_1(\|u\|_0^2+\|Au\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_2\ \|u\|_2 \quad \text{for} \quad u \in H^2(I)\ ,$$

med c_1 og $c_2 > 0$, thi den højre af disse uligheder gælder oplagt fordi p , p' og q er begrænsede, hvorefter den venstre følger af åben afbildning sætningen (Sætning 4.12): Indlejringen $H^2(I) \hookrightarrow D(A_{max})$ er en kontinuert bijektion af et Hilbertrum på et andet, og har derfor kontinuert invers.

For beskrivelsen af den minimale operator undersøger vi udtrykket $(Au|v)-(u|Av)$. Man finder ved delvis integration Lagrange's formel:

(7.47) $$\begin{aligned}(Au|v)-(u|Av) &= \int_a^b [-\partial_t(p\partial_t u)\bar{v} + u\partial_t(p\partial_t\bar{v})]dt \\ &= -p\partial_t u\bar{v}\Big]_a^b + \int_a^b p\partial_t u\partial_t\bar{v}\ dt + up\partial_t\bar{v}\Big]_a^b - \int_a^b \partial_t up\partial_t\bar{v}\ dt \\ &= -p(b)[u'(b)\bar{v}(b)-u(b)\bar{v}'(b)] + p(a)[u'(a)\bar{v}(a)-u(a)\bar{v}'(a)]\ .\end{aligned}$$

Specielt er udtrykket 0 for u og $v \in C_0^\infty(I)$, så $A|_{C_0^\infty(I)}$ er symmetrisk, og det samme gælder afslutningen (som operator i $L^2(I)$), A_{min} . Differentiationsudtrykket A er altså formelt selvadjungeret: $A = A'$. Nu er $A_{min} = A_{max}{}^*$ (jvf. Lemma 7.1), så da talsættet $\{u(a),u(b),u'(a),u'(b)\}$ gennemløber hele $\mathbb{C}^4$, når u gennemløber $C^2(\bar{I}) \subset H^2(I)$ (jvf. Bemærkning 7.19), ses at

(7.48) $$D(A_{min}) = \{u \in H^2(I) \mid u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0\}$$

(overvej selv!).

Vi indskyder, at teknikkerne ovenfor giver en let adgang til at vise

Sætning 7.14. *Lad* $m \in \mathbb{N}$ *og lad* $I =]a,b[$. *Så er*

(7.49) $$H_0^m(I) = \{u \in H^m(I) \mid u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0 \quad \textit{for} \quad k=0,\dots,m-1\}\ .$$

Endvidere er $H^m(I)$, *henholdsvis* $H_0^m(I)$, *lig med definitionsområdet for den maksimale, henholdsvis minimale, realisation af* D_t^m *i* $L^2(I)$, *og der findes* c_1 *og* $c_2 > 0$ *så*

(7.50) $$\|u\|_m \leq c_1(\|u\|_0^2 + \|D_t^m u\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_2\ \|u\|_m$$

for alle $u \in H^m(I)$.

Bevis: Betragt differentialoperatoren $T = D_t^m$. På grund af Sætning 7.11 er $D(T_{max}) = H^m(I)$; den højre ulighed i (7.50) er oplagt og den venstre følger af åben afbildning sætningen, ganske som i beviset for (7.46). Endvidere har man Lagrange formlerne for u og $v \in H^m(I)$

(7.51)
$$(D_t u|v) - (u|D_t v) = -i\int_a^b (\partial_t u\bar{v} + u\partial_t\bar{v})dt = -i\int_a^b \partial_t(u\bar{v})dt = -i[u(b)\bar{v}(b) - u(a)\bar{v}(a)] ,$$

(7.52)
$$(D_t^m u|v) - (u|D_t^m v) = (D_t^m u|v) - (D_t^{m-1}u|D_t v) + (D_t^{m-1}u|D_t v) - \dots - (u|D_t^m v) = -i\sum_{k=0}^{m-1}[D_t^{m-1-k}u(b)D_t^k\bar{v}(b) - D_t^{m-1-k}u(a)D_t^k\bar{v}(a)] .$$

Specielt er D_t^m formelt selvadjungeret, og $T_{min} = T_{max}^*$. Da talsættet $\{u(a),u(b),D_tu(a),D_tu(b),\dots,D_t^{m-1}u(a),D_t^{m-1}u(b)\}$ gennemløber hele $\mathbb{C}^{2m}$, når u gennemløber $H^m(I)$ (som indeholder $C^m(\bar{I})$), ses at

$$D(T_{min}) = \{u \in H^m(I) \mid u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \le k \le m-1\} .$$

Nu er $D(T_{min})$ jo lig med afslutningen af $C_0^\infty(I)$ med hensyn til graf-normen. Men da graf-normen og H^m-normen er ækvivalente, ses at $D(T_{min}) = H_0^m(I)$ ifølge definitionen af dette rum. ▯

Det er interessant, at sætningen giver en fuldstændig afklaring af hvad $H_0^m(I)$ er. Der findes generalisationer til højere dimensioner, som kræver en meget dybere analyse.

Korollar 7.15. *Lad* $I =]a,\infty[$. *Så er*

(7.53)
$$H_0^m(I) = \{u \in H^m(I) \mid u^{(k)}(a) = 0 \quad \textit{for} \quad k = 0,1,\dots,m-1\} .$$

Bevis: Lad $u \in H_0^m(I)$ og betragt dekompositionen

$$u = \chi_N u + (1-\chi_N)u ,$$

hvor $\chi_N(t) = \chi(t/N)$ og N vælges $\ge 2|a|$. Det ses som i Sætning 7.5, at $\chi_N u \to u$ i $H^m(I)$.

Hvis $u^{(k)}(a) = 0$ for $k = 0,1,\dots,m-1$, opfylder $\chi_N u$ betingelsen for at ligge i $H_0^m(]a,2N[)$ ifølge foregående sætning, og kan derfor approksimeres i H^m-norm med funktioner i $C_0^\infty(]a,2N[)$. Ved først at vælge N tilstrækkelig stor og derefter vælge $\varphi \in C_0^\infty(]a,2N[)$ tæt ved $\chi_N u$ kan man approksimere u i H^m-norm med elementer i $C_0^\infty(]a,\infty[)$. Dette viser inklusionen $\supset$ i (7.53).

Hvis $u \in H_0^m(I)$, findes der en følge af funktioner $\varphi_k \in C_0^\infty(I)$ så $\varphi_k \to u$ i $H^m(I)$. For hvert N gælder da endvidere, at $\chi_N\varphi_k \to \chi_N u$ i $H^m(I)$ for $k \to \infty$. Da $\chi_N\varphi_k \in C_0^\infty(]a,2N[)$, er grænsefunktionen $\chi_N u$ i $H_0^m(]a,2N[)$ og har randværdier 0 ved Sætning 7.14. Specielt er $u^{(k)}(a) = (\chi_N u)^{(k)}(a) = 0$ for $k = 0,\dots,m-1$. Dette viser inklusionen $\subset$ i (7.53). $\square$

Efter dette sidespring vender vi tilbage til operatoren (7.40), og vi vil analysere dens realisationer, dvs. operatorerne $\widetilde{A}$ i $L^2(I)$ med

(7.54) $$A_{min} \subset \widetilde{A} \subset A_{max} .$$

For $u \in H^2(I)$ defineres vektoren ρu af Cauchy data af u ved

(7.55) $$\rho u = \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \\ u'(a) \\ u'(b) \end{pmatrix}, \text{ som skrives } \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix}, \text{ med}$$

(7.56) $$\gamma_0 u = \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \gamma_1 u = \begin{pmatrix} u'(a) \\ u'(b) \end{pmatrix} .$$

$\gamma_j u = \begin{pmatrix} u^{(j)}(a) \\ u^{(j)}(b) \end{pmatrix}$ kaldes ofte randværdien af j'te orden (eventuelt med andre fortegnskonventioner, "i" indbygget el.l.). Idet ρu for $u \in D(A_{max}) = H^2(I)$ som før nævnt kan antage alle værdier i $\mathbb{C}^4$, ses af (7.48), at $D(A_{min})$ har codimension 4 i $D(A_{max})$. Skaren af operatorer $\widetilde{A}$ der tilfredsstiller (7.54), er nu i enentydig korrespondance med skaren af underrum V af $\mathbb{C}^4$, hvor korrespondancen beskrives ved at

(7.57) $$V = \rho D(\widetilde{A}) ,$$
$$D(\widetilde{A}) = \left\{ u \in H^2(I) \;\middle|\; \rho u \in V \right\} ,$$

idet virkningen af $\widetilde{A}$ jo er fastlagt i (7.54). Se også Bemærkning 7.19.

Vi vil undersøge, hvilke realisationer $\tilde{A}$ der er selvadjungerede. Ifølge Lagrange formlen (7.47) har vi for $u \in H^2(I)$

(7.58) $$(Au|v)_{L^2(I)} - (u|Av)_{L^2(I)} = (\mathcal{B}\rho u|\rho v)_{\mathbb{C}^4} ,$$

hvor

(7.59) $$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(b) \\ -p(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(b) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ som skrives } \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix}$$

med $$X = \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & -p(b) \end{pmatrix} \quad \text{(der er regulær).}$$

Der gælder her, at når $\tilde{A}$ er bestemt ved randbetingelsen $\rho u \in V$, så består $D(\tilde{A}^*)$ af de funktioner $v \in H^2(I)$, for hvilke

(7.60) $$(\mathcal{B}\rho u|\rho v)_{\mathbb{C}^4} = 0 \quad \text{for alle } \rho u \in V ,$$

altså,med andre ord:

(7.61) $$v \in D(\tilde{A}^*) \Leftrightarrow \rho v \in (\mathcal{B}V)^{\perp} .$$

Hvis V har dimension k, har $(\mathcal{B}V)^{\perp}$ dimension $4-k$, idet $\mathcal{B}$ åbenbart er regulær. En nødvendig betingelse for selvadjungerethed af $\tilde{A}$ er da, at $4-k = k$, dvs. $k = 2$. Symmetriskhed af $\tilde{A}$ (dvs. $D(\tilde{A}) \subset D(\tilde{A}^*)$) finder sted hvis og kun hvis

(7.62) $$V \subset (\mathcal{B}V)^{\perp} ;$$

af dimensionsgrunde ser vi da, at $\tilde{A}$ er selvadjungeret hvis og kun hvis $k = 2$ og (7.62) gælder. Endvidere kan A kun være symmetrisk, hvis $k \leq 2$. Vi vil analysere disse betingelser nærmere.

Med notationen (7.56) kan det, at ρu ligger i et vist vektorrum V af dimension k, udtrykkes ved to krav

(7.63) $$\gamma_0 u = M_0\varphi , \quad \gamma_1 u = M_1\varphi ,$$

hvor φ gennemløber $\mathbb{C}^k$, og M_0 og M_1 er $2\times k$-matricer, valgt så at $M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix}$ er en bijektiv afbildning af $\mathbb{C}^k$ på V. Analysen af (7.62) vil blive udført som en analyse af M_0 og M_1 .

Når $D(\tilde{A})$ er defineret ved betingelsen (7.63), bliver betingelsen for at $v \in D(\tilde{A}^*)$ (jvf. (7.60)-(7.61)), at der for alle $\varphi \in \mathbb{C}^k$ gælder:

$$0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix} \varphi \,\middle|\, \begin{pmatrix} \gamma_0 v \\ \gamma_1 v \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^4} , \quad \text{som omskrives:}$$

$$= (X M_1 \varphi \mid \gamma_0 v)_{\mathbb{C}^2} + (-X M_0 \varphi \mid \gamma_1 v)_{\mathbb{C}^2}$$

$$= (\varphi \mid M_1^* X \gamma_0 v - M_0^* X \gamma_1 v)_{\mathbb{C}^2} ,$$

dvs. betingelsen er, at

$$M_1^* X \gamma_0 v = M_0^* X \gamma_1 v . \tag{7.64}$$

Indsættes specielt $v \in D(\tilde{A})$ (altså af formen (7.63)), ser vi, at (7.60) gælder for alle u og $v \in D(\tilde{A})$ hvis og kun hvis

$$M_1^* X M_0 = M_0^* X M_1 ,$$

dvs. (da X er symmetrisk), når

$$M_1^* X M_0 \quad \underline{\text{er symmetrisk}}. \tag{7.65}$$

Når $k = 2$, karakteriserer (7.65) de selvadjungerede realisationer $\tilde{A}$. Vi har vist:

<u>Sætning 7.16</u>: *Lad* $\tilde{A}$ *være realisationen af* A *i* $L^2(I)$ *bestemt ved randbetingelsen* (7.63), *dvs. betingelsen:*

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} \text{ tilhører værdimængden for } \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix} \tag{7.66}$$

hvor $\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix}$ *afbilder* $\mathbb{C}^k$ *ind i* $\mathbb{C}^4$ *injektivt. Så er* $\tilde{A}$ *symmetrisk hvis og kun hvis* $k \leq 2$ *og* (7.65) *gælder; og* $\tilde{A}$ *er selvadjungeret hvis og kun hvis* $k = 2$ *og* (7.65) *gælder.*

Eksempler.

1^o $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ giver Dirichlet betingelsen

(7.67) $$\gamma_0 u = 0 \ , \quad (\gamma_1 u \ \text{ vilkårlig}).$$

2^o $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ giver Neumann betingelsen

(7.68) $$(\gamma_0 u \ \text{ vilkårlig}) \ , \quad \gamma_1 u = 0 \ .$$

3^o $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ med α og $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ giver betingelsen

(7.69) $$u(a) = u(b) \ , \quad \beta u'(a) = \alpha u'(b)$$

(en slags periodicitet). Idet

$$M_1^* X M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & -p(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha p(a) - \beta p(b) & 0 \end{pmatrix} ,$$

ses at den tilsvarende realisation $\tilde{A}$ bliver selvadjungeret når $(\alpha,\beta) = c(p(b),p(a))$, dvs. $p(a)u'(a) = p(b)u'(b)$.

4^o $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ med α og $\beta \in \mathbb{R}$, giver betingelsen

(7.70) $$u'(a) = \alpha u(a) \ , \quad u'(b) = \beta u(b) \ ,$$

en såkaldt lokal betingelse, dvs. en betingelse, hvor punkterne a og b indgår separat (ligesom i 1^o og 2^o). Her er

(7.71) $$M_1^* X M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & -p(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p(a) & 0 \\ 0 & -\beta p(b) \end{pmatrix}$$

symmetrisk, så $\tilde{A}$ er selvadjungeret for alle valg af α og $\beta \in \mathbb{R}$.

5^o Ikke-selvadjungerede realisationer fås f.eks. ved andre valg af α,β i eksempel 3^o, og ved komplekse valg af α og β i eksempel 4^o. Et reelt eksempel er $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hvor

$$M_1^* X M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & -p(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p(b) \\ p(a) & 0 \end{pmatrix} .$$

Også positiviteten af realisationerne $\tilde{A}$ og A kan analyseres ved en undersøgelse af matricerne M_0 og M_1. Lad $k = 2$, og lad u og $v \in D(\tilde{A})$, bestemt ved (7.63). Så er

$$(7.72)\qquad (Au|v) = \int_a^b (-\partial_t(p\partial_t u)\bar{v} + qu\bar{v})dt$$

$$= -\int_a^b \partial_t(p(\partial_t u)\bar{v})dt + \int_a^b [p(\partial_t u)(\partial_t \bar{v}) + qu\bar{v}]dt$$

$$= -p(b)u'(b)\bar{v}(b) + p(a)u'(a)\bar{v}(a) + s(u,v)$$

$$= (M_1\varphi \mid X M_0 \psi) + s(u,v)$$

$$= (\varphi \mid M_1^* X M_0\psi) + s(u,v) ,$$

hvor $s(u,v)$ er den sesquilineære form

$$(7.73)\qquad s(u,v) = \int_a^b [p\,u'\,\bar{v}' + q\,u\,\bar{v}]dt \;;$$

den er åbenbart symmetrisk og ≥ 0. For det første ses heraf, at $(Au|u)$ er reel på $D(\tilde{A})$ hvis og kun hvis $M_1^* X M_0$ er symmetrisk, så vi genfinder betingelsen (7.65). Men vi får nu også et kriterium for positivitet:

Lemma 7.17: *En tilstrækkelig betingelse for at* $\tilde{A}$ *er selvadjungeret* ≥ 0 *er, at* $k = 2$ *og* $M_1^* X M_0$ *er symmetrisk og* ≥ 0.

Dette gælder i eksemplerne 1^0 og 2^0, samt i eksempel 3^0 når $\alpha = p(b)$, $\beta = p(a)$, mens det gælder i eksempel 4^0, når $\alpha \geq 0$ og $\beta \leq 0$.

Den tilstrækkelige betingelse i Lemma 7.17 er ikke nødvendig (man har f.eks. ofte, at $s(u,v) \geq c\,\|u\|_1$ for et vist positivt c, hvilket tillader en smule negativitet af $M_1^* X M_0$), men vi undlader en dybtgående undersøgelse. (En fuldstændig analyse blev givet af M. G. Krein i det russiske tidsskrift Matematicheskii Sbornik i 1947, også for 2m'te ordens operatorer, som en fortsættelse af hans abstrakte analyse nævnt i Øvelse 2.23-24.) Lad os også nævne uden bevis, at enhver selvadjungeret realisation $\tilde{A}$ af Sturm-Liouville operatoren (7.40) vil være nedad begrænset (man kan bruge Dunford-Schwartz II, Lemma XIII 7.22), dog kan vilkårligt store negative nedre grænser opnås. (Ved randværdiproblemer for operatorer i flere variable, hvor co-dimensionen af $D(A_{min})$ i $D(A_{max})$ er ∞, findes der nedad ubegrænsede selvadjungerede realisationer.)

En eksplicit formel for inversen til $\tilde{A}$ i de tilfælde hvor $\tilde{A}$ er defineret ved en lokal randbetingelse og er invertibel, er givet i Matematik 213 (Noter 1974/75, Kapitel 8). For fuldstændighedens skyld vil vi gengive resultatet her.

Sætning 7.18: *Lad* $\tilde{A}$ *være realisationen af* A *bestemt ved randbetingelsen*

$$c_1u(a) + c_2u'(a) = 0 , \quad c_3u(b) + c_4u'(b) = 0 , \tag{7.74}$$

hvor $(c_1,c_2) \neq (0,0)$ *og* $(c_3,c_4) \neq (0,0)$. *Antag, at ligningen* $\tilde{A}u = 0$ *kun har nulløsningen. Lad* $u_1(t)$ *og* $u_2(t)$ *være løsningerne til henholdsvis*

$$\begin{aligned} &Au_1 = 0 \quad \text{på } I \quad , \quad (u_1(a),u_1'(a)) = (-c_2,c_1) \\ &Au_2 = 0 \quad \text{på } I \quad , \quad (u_2(b),u_2'(b)) = (-c_4,c_3) \end{aligned} \tag{7.75}$$

og lad $K = -p(t)(u_1(t)u_2'(t)-u_2(t)u_1'(t))$ *(som er en konstant* $\neq 0$ *). Da har operatoren* $\tilde{A}\colon D(\tilde{A}) \to L^2(I)$ *inversen* R , *hvor* R *er integraloperatoren*

$$(Rf)(s) = \int_a^b G(s,t)f(t)dt \tag{7.76}$$

med kerne $G(s,t)$ *bestemt ved*

$$G(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{K}\, u_1(s)u_2(t) & \textit{for} \quad s \leq t , \\ \frac{1}{K}\, u_2(s)u_1(t) & \textit{for} \quad s \geq t . \end{cases} \tag{7.77}$$

G kaldes Green's funktion for problemet $\tilde{A}u = f$.

Bemærk, at G er kontinuert på $\bar{I} \times \bar{I}$ og C^∞ på hvert af de to trekantformede områder hvor $s \leq t$ hhv. $s \geq t$, idet $\partial_s G$ har et spring ved $s = t$ (flere detaljer i Mat 213-noterne).

I Matematik 213 vises formlen (7.76) faktisk kun for $f \in C^0(\bar{I})$, hvor den giver en løsning $u = Rf \in C^2(\bar{I})$. Med vore midler kan man nu let vise, at (7.76) giver en løsning $u \in H^2(I)$ for hvert $f \in L^2(I)$ (Øvelse 7.6).

Egenværdiproblemet (7.42) for $u \in D(\tilde{A})$ kan herefter behandles ved hjælp af teorien for kompakte operatorer, idet R er en kompakt operator (faktisk Hilbert-Schmidt). Når $\tilde{A}$ er selvadjungeret, er R det også, og eksistensen af et fuldstændigt ortonormalsystem af egenvektorer for $\tilde{A}$ (med egenværdier $\lambda_j \to \infty$) fås ved den almene teori for kompakte operatorer. (Eksistensen måtte antages uden bevis i Matematik 213.)

Bemærkning 7.19. Den kortfattede beskrivelse (7.57) fortjener måske lidt uddybning. Vi har nævnt, og brugt flere gange, at afbildningen $\rho\colon H^2(I) \to \mathbb{C}^4$ er surjektiv. Et konstruktivt bevis herfor kan gives ved at angive en afbildning $\sigma\colon \mathbb{C}^4 \to H^2(I)$, som sender et sæt af randværdier over i en H^2-funktion med netop disse randværdier. σ kan for eksempel defineres ved forskriften:

$$\sigma\colon \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix} \rightsquigarrow [\gamma(t-a)+\alpha]\chi_a(t) + [\delta(t-b)+\beta]\chi_b(t)\ , \tag{7.78}$$

hvor χ_a og χ_b er funktioner i $C^\infty(\overline{I})$ som er 1 på en omegn af a hhv. b, og 0 uden for en lidt større omegn af a hhv. b, med disjunkte støtter. (Man kan tage $\chi_a(t) = \chi((t-a)/\varepsilon)$ og $\chi_b(t) = \chi((t-b)/\varepsilon)$ for et passende lille ε.)

σ er en lineær afbildning af $\mathbb{C}^4$ på et underrum W af $C^\infty(\overline{I})$ (og $H^2(I)$); den opfylder åbenbart

$$\rho\sigma = I \quad \text{på } \mathbb{C}^4\ ,$$

hvormed $\rho\colon C^\infty(\overline{I}) \to \mathbb{C}^4$ er surjektiv, og W har dimension 4.

Ifølge karakteriseringen (7.49) af $H_0^m(I)$ er $H_0^2(I)$ netop nulrummet for afbildningen $\rho\colon H^2(I) \to \mathbb{C}^4$. Da er kvotientrummet $H^2(I)/H_0^2(I)$ isomorft med $\mathbb{C}^4$. Dette kan vi demonstrere ganske eksplicit ved at bemærke, at afbildningerne

$$u \rightsquigarrow \sigma\rho u\ , \qquad u \rightsquigarrow u - \sigma\rho u\ , \tag{7.79}$$

definerer en dekomposition af $H^2(I)$ i den direkte sum

$$H^2(I) = W \dotplus H_0^2(I)\ .$$

(Thi $\sigma\rho u \in W$; og $\rho(u-\sigma\rho u) = \rho u - \rho u = 0$, så $u - \sigma\rho u \in H_0^2(I)$; og der gælder pr. definition af W at $W \cap H_0^2(I) = \{0\}$.)

Da $D(A_{max}) = H^2(I)$ og $D(A_{min}) = H_0^2(I)$, gælder ligeledes, at

$$D(A_{max}) = D(A_{min}) \dotplus W\ ,$$

samt at $D(A_{max})/D(A_{min}) \simeq W \simeq \mathbb{C}^4$.

Endelig har vi, at vektorrummene $D(\widetilde{A})$ med

$$D(A_{min}) \subset D(\widetilde{A}) \subset D(A_{max}) \tag{7.80}$$

netop er dem, der kan skrives på formen

$$D(\widetilde{A}) = D(A_{min}) \dotplus \widetilde{W}\ ,$$

hvor $\tilde{W}$ er et underrum af W (brug (7.79)). Der er da en enentydig korrespondance mellem rummene $D(\tilde{A})$ med (7.80) og underrummene $\tilde{W}$ af W. Ved afbildningen $\rho: W \to \mathbb{C}^4$ (der er en bijektion med invers σ) føres $\tilde{W}$ over i det rum V, der omtales i (7.57). Hermed er rummene $D(\tilde{A})$ i enentydig korrespondance med rummene $V \subset \mathbb{C}^4$.

Noget senere i teksten bruges en ny omskrivning af V, nemlig som billedet $M\mathbb{C}^k$ ved en injektiv afbildning M af $\mathbb{C}^k$ ind i $\mathbb{C}^4$. Matricen M opdeles i to 2×k-blokke

$$M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix} ,$$

og diskussionen af $\tilde{A}$'s egenskaber formuleres som en diskussion af M_0 og M_1.

8. Fourier transformation af distributioner.

8.1. Hurtigt aftagende funktioner og deres Fourier transformationer.

Som vi har set i Afsnit 7.3 - 7.4 kan sædvanlige differentialligninger behandles i en ramme af distributionsteori på tilfredsstillende måde, ved hjælp af begrebet absolut kontinuitet. For partielle differentialligninger må der andre, kraftigere hjælpemidler til, og vi vil nu indføre et af de vigtigste af dem: Fourier transformationen. Den giver i første omgang et godt greb om differentialoperatorer på $\mathbb{R}^n$ med konstante koefficienter; og kan dernæst i den videregående teori anvendes, ved hjælp af forskellige teknikker, til også at behandle operatorer på delmængder Ω og med variable koefficienter.

Rummet $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ er for stort til at tillade en fornuftig definition af Fouriertransformationen. Man indskrænker sig her til et lidt mindre rum af distributioner, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, svarende til et rum af testfunktioner $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, der er lidt større end $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ($\mathcal{S}$ hhv. $\mathcal{S}'$ kaldes ofte Schwartz rummet af testfunktioner hhv. distributioner, efter Laurent Schwartz.)

Definition 8.1. *Vektorrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (eller $\mathcal{S}$) defineres som rummet af C^∞ funktioner $\varphi(x)$ på $\mathbb{R}^n$, for hvilke $x^\alpha D^\beta \varphi$ er begrænset for alle multiindices α og $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. $\mathcal{S}$ forsynes med familien af seminormer*

(8.1) $$p_M(\varphi) = \sup\left\{ |(1+|x|^2)^M D^\alpha \varphi(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \le M \right\}$$

Funktionerne $\varphi \in \mathcal{S}$ kaldes hurtigt aftagende funktioner.

Med dette system af seminormer er $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et Fréchet rum. Seminormerne er valgt, så de har max-egenskaben (jvf. Bemærkning 4.4); det ville være lige så naturligt (men en smule mindre elegant) at tage familien (jvf. (9.13) senere)

(8.2) $$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup\left\{ |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

hvor α og β gennemløber $\mathbb{N}_0^n$; (8.2) definerer den samme topologi som (8.1).

Som omegnsbasis ved 0 kan vi tage mængderne

(8.3) $$V_{M,1/N} = \left\{ \varphi \in \mathcal{S} \;\middle|\; \sup(1+|x|^2)^M |D^\alpha \varphi(x)| < \frac{1}{N} \text{ for } |\alpha| \le M \right\},\quad M,N \in \mathbb{N}_0 .$$

Topologien på $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er finere (stærkere) end den topologi der induceres på dette rum af $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, thi $V_{M,N} \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er en åben, konveks balanceret omegn af 0 i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ for alle M og N, jvf. Sætning 4.13 (anvendt på $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \cup\, C_{K_j}^\infty(\mathbb{R}^n)$). (De to topologier er faktisk forskellige, idet topologien induceret fra $\mathcal{S}$ er metrisk, mens den anden, som tidligere oplyst, ikke er det.)

Bemærk, at $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, idet en funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ opfylder $|\varphi(x)| \leq \frac{c_m}{(1+|x|^2)^m}$, som tilhører $L^1(\mathbb{R}^n)$ for $2m > n$.

Når $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, defineres den Fourier transformerede funktion $(Ff)(\xi)$ ved

$$(Ff)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx\,. \tag{8.4}$$

Vi noterer straks, at der gælder:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{8.5}$$

Ved brug af Lebesgues sætning ses endvidere, at $\sup|\hat{f}(\xi_0+\xi) - \hat{f}(\xi_0)| \to 0$ for $\xi \to 0$, så $\hat{f}$ er kontinuert, når $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nu følger nogle sætninger om Fourier transformationen på $\mathcal{S}$.

Lemma 8.2: *For* $\varphi \in \mathcal{S}$ *gælder*

$$\begin{aligned} F(D^\alpha\varphi) &= \xi^\alpha F\varphi \\ F(x^\alpha\varphi(x)) &= (-D_\xi)^\alpha F\varphi \end{aligned} \tag{8.6}$$

for alle α. *Dermed er* F *en kontinuert afbildning af* $\mathcal{S}$ *ind i* $\mathcal{S}$.

Bevis: Lad $\varphi \in \mathcal{S}$. Den første identitet fås ved delvis integration:

$$\begin{aligned} \int e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha\varphi(x)\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leq R} e^{-ix\cdot\xi} D^\alpha\varphi(x)\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\Big[\int_{|x|\leq R} [(-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi}]\varphi(x)\,dx + \text{et integral over } |x| = R\Big] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(jvf. formel (6.24))} \\ &= \xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,, \end{aligned}$$

idet vi benytter at randbidraget går mod 0 for $|x| \to \infty$, fordi $\varphi(x)$ er hurtigt aftagende, samt at

$$(-D_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} = (i\partial_x)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} = \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\,.$$

Den anden identitet i (8.6) vises successivt ved betragtning af differenskvotienter, idet man benytter (jvf. (3.34)), at der for $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gælder

$$\frac{e^{-ia}-1}{-ia} \to 1 \quad \text{for} \quad a \to 0 \ , \quad \text{med} \quad \left|\frac{e^{-ia}-1}{a}\right| \leq 1 \ ,$$

hvorved, med $e_1 = (1,0,\dots,0)$,

$$\text{(8.7)} \quad \begin{aligned} \frac{\hat{\varphi}(\xi+he_1)-\hat{\varphi}(\xi)}{h} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i(\xi+he_1)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}}{h}\varphi(x)dx \\ &= \int(-ix_1)e^{-ix\cdot\xi}\,\frac{e^{-ihx_1}-1}{-ihx_1}\varphi(x)dx \to F[-ix_1\varphi], \end{aligned}$$

ved Lebesgues sætning. Altså er $\hat{\varphi}$ differentiabel med $D_1\hat{\varphi} = F[-x_1\varphi]$. Da $\varphi \in \mathcal{S}$, ses at $\xi^\alpha D^\beta\hat{\varphi} = F[D^\alpha(-x)^\beta\varphi]$ eksisterer og er kontinuert og begrænset for alle α og β ; altså er $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. At F er kontinuert fra $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$ følger af at

$$\text{(8.8)} \qquad \sup|\xi^\alpha D^\beta\hat{\varphi}(\xi)| \leq \|D^\alpha((-x)^\beta\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \sup|(1+|x|^2)^m D^\alpha(-x)^\beta\varphi| \ ,$$

når $2m$ vælges $> n$. □

Vi kan også forbedre oplysningen om Ff for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $L^1(\mathbb{R}^n)$, er $\mathcal{S}$ det også. Når $\varphi_j \in \mathcal{S}$ og $\varphi_j \to f$ i $L^1(\mathbb{R}^n)$, vil $\hat{\varphi}_j \to \hat{f}$ i sup-norm ifølge (8.5). For hvert ε kan j vælges, så $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\hat{\varphi}_j(\xi)-\hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon/2$, endvidere kan R vælges, så $|\hat{\varphi}_j(\xi)| \leq \varepsilon/2$ for $|\xi| \geq R$; da er $|\hat{f}(\xi)| \leq \varepsilon$ for $|\xi| \geq R$. Idet $C_\cdot^0(\mathbb{R}^n)$ betegner rummet af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}^n$ som går mod 0 for $|x| \to \infty$ (det er fuldstændigt m.h.t. sup-normen), har vi vist, at

$$\text{(8.9)} \qquad F L^1(\mathbb{R}^n) \subset C_\cdot^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

(Vi skal ikke komme ind på det mere vanskelige spørgsmål at karakterisere billedrummet for $L^1(\mathbb{R}^n)$ præcist.) Vi vender nu tilbage til $\mathcal{S}$, om hvilket vi vil vise, at F er en bijektion af $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$, med en invers, der ligner F . Definer

$$\text{(8.10)} \qquad (\overline{F}f)(\xi) = \int e^{+ix\cdot\xi}f(x)dx \ ,$$

så er $\overline{F}$ igen en afbildning af $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$, idet

$$\text{(8.11)} \qquad \overline{F}f = \overline{F\overline{f}}$$

ved kompleks konjugering, der oplagt bevarer $\mathcal{S}$. Vi har nu brug for

Lemma 8.3. *Funktionen*

$$b_n(x) = e^{(-x_1^2-\dots-x_n^2)/2} \tag{8.12}$$

tilhører $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *og opfylder*

$$\hat{b}_n(\xi) = (2\pi)^{n/2} b_n(\xi) . \tag{8.13}$$

Bevis: For $n = 1$ ses, at $b_1(x)$ opfylder

$$\partial_{x_1} b_1(x_1) + x_1 b_1(x_1) = 0 ,$$

så at den Fouriertransformerede opfylder den samme ligning (efter division med i)

$$\xi_1 \hat{b}_1(\xi_1) + \partial_{\xi_1} \hat{b}_1(\xi_1) = 0 .$$

Løsningen til en sådan ligning er entydigt bestemt pånær en konstant, så vi har, at

$$\hat{b}_1(\xi_1) = c_1 b_1(\xi_1) . \tag{8.14}$$

Konstanten c_1 bestemmes ved at

$$\hat{b}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} b_1(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2/2} dx_1 = \sqrt{2\pi} , \tag{8.15}$$

altså $c_1 = \sqrt{2\pi}$. På $\mathbb{R}^n$ er $b_n(x)$ et simpelt produkt $b_n(x) = e^{-x_1^2/2} \dots e^{-x_n^2/2}$, så

$$\hat{b}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1\xi_1+\dots+x_n\xi_n)-(x_1^2+\dots+x_n^2)/2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1-x_1^2/2} dx_1 \dots \int e^{-ix_n\xi_n-x_n^2/2} dx_n = (2\pi)^{n/2} b_n(\xi) . \quad \square$$

Lemma 8.4. *Når* $\varphi \in \mathcal{S}$, *er* $(2\pi)^{-n} \bar{F} F \varphi = \varphi$, *og* F *er en homeomorfi af* $\mathcal{S}$ *på* $\mathcal{S}$ *med invers*

$$F^{-1} = (2\pi)^{-n} \bar{F} . \tag{8.16}$$

Bevis: For hvert $a > 0$ har vi (med brug af Fubinis sætning), når $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\hat{b}_n(x)dx = a^n \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)\hat{b}_n(az)dz = a^n \int\varphi(z) \int e^{-iaz\cdot y}\, b_n(y)dy\, dz$$

$$= a^n \int\hat{\varphi}(ay)b_n(y)dy = \int\hat{\varphi}(y)e^{-|y/a|^2/2}\, dy \,.$$

Lader vi $a \to \infty$ i det første og det sidste udtryk, fås ved Lebesgues sætning identiteten

$$\varphi(0) \int\hat{b}_n(x)dx = \int\hat{\varphi}(y)dy \,,$$

hvoraf, ifølge (8.13) og (8.15)

$$(2\pi)^n\, \varphi(0) = \int\hat{\varphi}(y)dy \,.$$

For $\varphi_z(x) = \varphi(x+z)$ fås nu, idet $\hat{\varphi}_z(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x+z)dx = \int e^{-i(y-z)\cdot\xi}\varphi(y)dy = e^{iz\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)$, at

$$\varphi(z) = \varphi_z(0) = (2\pi)^{-n} \int e^{iz\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \,,$$

hvilket viser, at $\varphi = (2\pi)^{-n}\, \overline{F}F\varphi$.

Heraf sluttes nu for det første, at F er injektiv, og at $\overline{F}$ er surjektiv. På grund af (8.11) fås da også, at F er surjektiv og $\overline{F}$ er injektiv. I alt ses, at såvel F som $\overline{F}$ er bijektive, og at $(2\pi)^{-n}\,\overline{F}$ er invers til F. Da F er kontinuert, er den analoge afbildning $\overline{F}$ det også. □

Man kan iøvrigt bemærke, at

$$((2\pi)^{-n}\, F^2\varphi)(x) = \varphi(-x) \,, \tag{8.17}$$

og dermed

$$(2\pi)^{-2n}\, F^4 = I \,. \tag{8.18}$$

For φ og $\psi \in \mathcal{S}$ har vi følgende identitet (ved Fubinis sætning):

$$\langle\varphi,\hat{\psi}\rangle = \int\varphi(x) \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi\, dx = \langle\hat{\varphi},\psi\rangle \tag{8.19}$$

og da også, idet vi sætter $\overline{F\psi}(= \overline{F}\,\overline{\psi}) = \zeta$,

$$(\varphi|\zeta) = (F\varphi\,|\,\overline{\psi}) = (2\pi)^{-n}(F\varphi\,|\,F\zeta) \,, \tag{8.20}$$

for alle φ og $\zeta \in \mathscr{S}$. Den sidste linie viser specielt, at

(8.21) $$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2}\|\mathcal{F}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ,$$

altså at afbildningen $(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ fra $\mathscr{S}$ ind i $\mathscr{S}$ er isometrisk med hensyn til L^2-norm. Den udvides da ved afslutning til en isometri af $L^2(\mathbb{R}^n)$ ind i $L^2(\mathbb{R}^n)$, som er surjektiv med invers $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$, fordi $(2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}(2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ udvides til identiteten på $L^2(\mathbb{R}^n)$. I alt har vi vist:

Sætning 8.5 (Plancherel-Parseval). $\dot{\mathcal{F}} \equiv (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}$ *udvides ved afslutning til en isometri af* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *på* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *med invers* $\dot{\mathcal{F}}^{-1} = (2\pi)^{-n/2}\overline{\mathcal{F}}$ $(= \dot{\overline{\mathcal{F}}})$.

Det er bl.a. på grund af denne sætning, at L^2-teorien for distributioner er særligt veludviklet.

8.2. Rummet af tempererede distributioner.

Definition 8.6. $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *(eller* $\mathscr{S}'$ *) defineres som vektorrummet af kontinuerte lineære funktionaler på* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Elementerne i* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *kaldes tempererede distributioner.*

Vi minder om, at ifølge Lemma 4.5 består $\mathscr{S}'$ af de funktionaler Λ på $\mathscr{S}$, for hvilke der findes et M og en konstant C_M, så at

(8.22) $$|\Lambda(\varphi)| \leq C_M \sup\left\{(1+|x|^2)^M |D^\alpha\varphi| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq M\right\}$$

for alle $\varphi \in \mathscr{S}$.

Det bemærkes, at Definition 8.6 ikke kræver indførelse af *LF* rum etc., men baseres alene på Fréchet rums begrebet. Imidlertid har det interesse at se $\mathscr{S}'$ i relation til $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, bl.a. for at begrunde brugen af ordet "distribution" i denne sammenhæng. Hertil benyttes

Lemma 8.7. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *er en tæt delmængde af* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Bevis. Det er klart, at $C_0^\infty \subset \mathscr{S}$. Lad nu $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, vi skal finde en følge $u_N \to u$ i $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ med $u_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vi tager

$$u_N(x) = \chi(x/N)u(x) , \tag{8.23}$$

hvor χ opfylder (5.1). Her er $u_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, er lig $u(x)$ for $|x| \leq N$ og lig 0 for $|x| \geq 2N$. Bemærk, at (som også benyttet ved beviset for Sætning 7.5)

$$\left|D^\beta\chi(x/N)\right| = \left|N^{-|\beta|}D^\beta\chi(y)\big|_{y=x/N}\right| \leq C_\beta\, N^{-|\beta|} \tag{8.24}$$

for hvert β, og $D^\beta\chi(x/N)$ er støttet i $\{x \mid N \leq |x| \leq 2N\}$ når $\beta \neq 0$. Så har vi for hvert $M \geq 0$

$$\begin{aligned} |(1+|x|^2)^M(1-\chi(x/N))u(x)| &\leq \sup_{|x|\geq N} (1+|x|^2)^M|u(x)| \\ &\leq (1+N^2)^{-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{M+1}|u(x)| \to 0 \quad \text{for } N\to\infty ; \end{aligned} \tag{8.25}$$

og for $|\alpha| \geq 0$, ved Leibniz' formel

$$\begin{aligned} |D^\alpha(\chi(x/N)u-u)| &= |(\chi(x/N)-1)D^\alpha u + \sum_{\substack{\beta\leq\alpha \\ \beta\neq 0}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\chi(x/N)D^{\alpha-\beta}u| \\ &\leq C_\alpha\, N^{-1} , \qquad \text{ved (8.24) og (8.25),} \end{aligned} \tag{8.26}$$

med lignende vurderinger for $(1+|x|^2)^M D^\alpha(\chi(x/N)u-u)$ (i stil med (8.25)). Heraf ses at $\chi(x/N)u \to u$ i $\mathscr{S}$. □

Da der endvidere gælder, at topologien på $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er stærkere end den inducerede topologi fra $\mathscr{S}$, vil hvert element $\Lambda \in \mathscr{S}'$ definere et element $\Lambda' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ved restriktion til $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Afbildningen $J: \Lambda \sim \Lambda'$ defineret herved er en injektiv afbildning fra $\mathscr{S}'$ til $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ på grund af Lemma 8.7, idet

$$\langle\Lambda',\varphi\rangle = 0 \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

medfører at Λ er 0 på en tæt delmængde af $\mathscr{S}$ og dermed er 0-funktionalen (da Λ er kontinuert på $\mathscr{S}$). Da kan vi identificere $\mathscr{S}'$ med et underrum af $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (nemlig rummet $J\mathscr{S}'$), og skrive

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) . \tag{8.27}$$

Når $\Lambda \in \mathscr{S}'$, skriver vi nu $\Lambda(\varphi)$ som $\langle\Lambda,\varphi\rangle$, også når $\varphi \in \mathscr{S}$.

Hermed følger nogle eksempler på elementer af $\mathscr{S}'$.

1^o Funktioner $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1,\infty]$. u's virkning som funktional på $\varphi_0 \in \mathscr{S}$ fås f.eks. ved at approksimere φ_0 i $\mathscr{S}$ med en følge $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(k \to \infty)$, så er

$$\langle u,\varphi_0\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u,\varphi_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi_0(x)dx ,$$

idet $\langle u,\varphi_0-\varphi_k\rangle \to 0$. Thi lad $\psi_k = \varphi_0 - \varphi_k$, så er

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)\psi_k(x)|dx \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\psi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 ,$$

hvor $\|\psi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^M|\psi_k(x)| \le C_1$ for $k \in \mathbb{N}$, med M valgt så stor, at $(1+|x|^2)^{-M} \in L^q(\mathbb{R}^n)$; hvormed $\|\psi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Specielt har vi indlejringerne

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) . \tag{8.28}$$

2^o Polynomier, og funktioner $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ med $|v(x)| \le C(1+|x|^2)^N$ for et vist N , er i $\mathscr{S}'$.

3^o δ-distributionen og dens afledede $D^\alpha\delta$, er i $\mathscr{S}'$.

(Beviserne for 2^o og 3^o kan overlades til læseren.)

4^o Distributioner med kompakt støtte. Vi viste i Kapitel 6, at en distribution u med kompakt støtte kan vurderes som i (6.34); denne seminorm indgår i de seminormer der definerer topologien på $\mathscr{S}$. Altså er

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) . \tag{8.29}$$

Der findes også distributioner i $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \setminus \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Et eksempel herpå er e^x $(n=1)$, jvf. Øvelse 8.1. "Fejlen" ved den er, at den vokser for ubehersket for $|x| \to \infty$; ordet "tempereret" i navnet på $\mathscr{S}'$ hentyder til, at elementerne her har en behersket vækst.

8.3. Fourier transformationen på $\mathscr{S}'$.

Operationerne D^α og M_f (multiplikation med f) for $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ er defineret på $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (Definition 6.5). Om deres virkning på $\mathscr{S}'$ har vi

Lemma 8.8. 1° D^{α} *afbilder* $\mathcal{S}'$ *i* $\mathcal{S}'$ *(kontinuert), for alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
2° M_f *afbilder* $\mathcal{S}'$ *i* $\mathcal{S}'$ *(kontinuert), når* $f \in \mathcal{S}$ *eller* f *er et polynomium (da sender* M_f *også* $\mathcal{S}$ *i* $\mathcal{S}$ *).*

Bevis: Det ses let af definitionerne at D^{α} og M_f sender $\mathcal{S}'$ ind i $\mathcal{S}'$. Kontinuiteten fås som i Sætning 6.8. ▯

Også ikke-polynomiale ubegrænsede funktioner kan være multiplikatorer på $\mathcal{S}'$ og $\mathcal{S}$, for eksempel funktionen $\langle x\rangle$ defineret ved

(8.30) $$\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

og dens potenser $\langle x\rangle^s$, $s \in \mathbb{R}$. Se iøvrigt Definition 9.1 ff.

D^{α} og M_f blev jo defineret på $\mathcal{D}'$ i sin tid ved dualitet. Denne teknik kan vi nu også anvende på $\mathcal{F}$, da $\mathcal{F}$ er kontinuert fra $\mathcal{S}$ til $\mathcal{S}$:

Definition 8.9. *For* $u \in \mathcal{S}'$ *defineres* $\mathcal{F}u$ *(også betegnet* $\hat{u}$ *) som den distribution* $\in \mathcal{S}'$, *der opfylder*

(8.31) $$\langle \mathcal{F}u,\varphi\rangle = \langle u,\mathcal{F}\varphi\rangle \quad \textit{for alle} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Brugbarheden af definitionen ligger i, at den stemmer overens med formlen (8.19) for tilfældet hvor $u \in \mathcal{S}$. Den stemmer også overens med definitionen af $\mathcal{F}$ på $L^2(\mathbb{R}^n)$, da $\varphi_k \to u$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$ medfører $\mathcal{F}\varphi_k \to \mathcal{F}_{L^2} u$ i $\mathcal{S}'$. Man ser også let, at definitionen stemmer overens med definitionen på $L^1(\mathbb{R}^n)$. At $\mathcal{F}$ er en kontinuert operator i $\mathcal{S}'$ ses som i Sætning 6.8.

Operatoren $\overline{\mathcal{F}}$ udvides på tilsvarende måde til $\mathcal{S}'$, på basis af identiteten

(8.32) $$\langle \overline{\mathcal{F}}u,\varphi\rangle = \langle u,\overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle ,$$

og eftersom

(8.33) $$(2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I$$

på $\mathcal{S}$, overføres denne identitet til $\mathcal{S}'$, så vi får

Sætning 8.10. $\mathcal{F}$ *er en homeomorfi af* $\mathcal{S}'$ *på* $\mathcal{S}'$, *med invers* $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathcal{F}}$.

Indførelsen af F på $\mathcal{S}'$ giver en enorm frihed i brugen af Fouriertransformationen. Det følger straks af Lemma 8.2 og definitionerne, at der gælder:

Sætning 8.11. *For* $u \in \mathcal{S}'$ *har man*

$$F(D^\alpha u) = \xi^\alpha Fu$$

$$F(x^\alpha u) = (-D_\xi)^\alpha Fu \ .$$

Lad os se på nogle specielle eksempler.

For $u = \delta$ har vi

$$\langle Fu,\varphi\rangle = \langle u,F\varphi\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int\varphi(x)dx = \langle 1,\varphi\rangle \ ,$$

altså

(8.34) $$F[\delta] = 1 \ .$$

Da åbenbart også $\overline{F}[\delta] = 1$ (jvf. (8.32)), fås af inversionsformlen (8.33), at

(8.35) $$F[1] = (2\pi)^n \delta \ .$$

Brug af Sætning 8.11 giver nu

(8.36) $$F[D^\alpha\delta] = \xi^\alpha$$
$$F[(-x)^\alpha] = (2\pi)^n D_\xi^\alpha\delta \ .$$

Bemærkning 8.12. Vi har set, at F definerer en homeomorfi af $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$, af L^2 på L^2 og af $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$. Man kan nu spørge om billedet ved F af andre rum. F.eks. må $F(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ være et vist underrum af $\mathcal{S}$; men dette er ikke indeholdt i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der gælder tværtimod, at når $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, har $\hat{\varphi}$ kun kompakt støtte hvis $\varphi \equiv 0$! For $n = 1$ kan vi give et hurtigt argument for dette: Når $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, kan $\hat{\varphi}(\zeta)$ defineres for alle $\zeta \in \mathbb{C}$ ved

$$\hat{\varphi}(\zeta) = \int_{\operatorname{supp}\varphi} e^{-ix\zeta}\varphi(x)dx \ ,$$

og denne funktion $\hat{\varphi}(\zeta)$ er holomorf i $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, da $(\partial_\xi + i\partial_\eta)\hat{\varphi}(\xi+i\eta) = 0$, ved differentiation under integraltegnet. (Man kan også benytte Moreras Sætning, jvf. lærebøger i kompleks analyse.) Hvis $\hat{\varphi}(\zeta)$ nu er identisk 0 på et egentligt interval af den reelle akse, er $\hat{\varphi} = 0$ overalt, ved en kendt sætning om holomorfe funktioner.

Selv for distributioner u med kompakt støtte er $\hat{u}(\zeta)$ en funktion af ζ som kan defineres for alle $\zeta \in \mathbb{C}^n$, nemlig som

$$(8.38) \qquad \hat{u}(\zeta) = \left[\langle u, \exp(-i\zeta\cdot x)\rangle = \right] \langle u, \psi(x)\exp(-i\zeta\cdot x)\rangle ,$$

hvor $\psi(x)$ er en funktion $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ som er 1 på supp u . For hver koordinat ζ_j har man her, at $\hat{u}(\zeta)$ er en holomorf funktion af $\zeta_j \in \mathbb{C}$ (de andre koordinater fastholdt), så at støtten af $\hat{u}$ ikke kan være kompakt.

De rum af holomorfe funktioner, som er billeder af henholdsvis $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ved $\mathcal{F}$, kan karakteriseres ved deres vækstegenskaber som funktion af ζ (Paley-Wiener's sætning, se f.eks. Rudin's bog eller L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators (Springer Verlag 1963) Theorem 1.7.7).

Billederne af $L^p(\mathbb{R}^n)$ ved Fourier transformationen, for $p \neq 2$, har også interesse, men det er uoverkommeligt at komme ind på dem her.

Fourier transformationen giver en stærk forenkling af partielle differentialoperatorer med konstante koefficienter. Når

$$(8.38) \qquad P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$$

er en differentialoperator på $\mathbb{R}^n$ med koefficienter $a_\alpha \in \mathbb{C}$, føres ligningen (med u og $f \in \mathcal{S}'$)

$$(8.39) \qquad P(D)u = f$$

ved Fourier transformation over i multiplikationsligningen

$$(8.40) \qquad p(\xi)\hat{u} = \hat{f}$$

hvor $p(\xi)$ er polynomiet

$$(8.41) \qquad p(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha ,$$

der kaldes symbolet af $P(D)$. m'te ordensdelen af $P(D)$ kaldes principaldelen (ofte betegnet $P_m(D)$) , og det tilhørende symbol kaldes principalsymbolet, altså

$$(8.42) \qquad P_m(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha , \quad p_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha .$$

Det vil ofte være sådan, at det er principaldelens udseende, der bestemmer løsningsegenskaberne ved (8.39). Operatoren $P(D)$ kaldes specielt elliptisk, hvis $p_m(\xi) \neq 0$ for $\xi \neq 0$. Bemærk, at $p_m(\xi)$ er et homogent polynomium i ξ af grad m .

Eksempel 8.13. Betragt operatoren $P = I - \Delta$ på $\mathbb{R}^n$. Ved Fourier transformation føres ligningen

$$(8.43) \qquad (1-\Delta)\, u = f \quad \text{på } \mathbb{R}^n$$

over i ligningen

$$(8.44) \qquad (1+|\xi|^2)\hat{u} = \hat{f} \quad \text{på } \mathbb{R}^n ,$$

og denne overføres ved division med $1+|\xi|^2 = \langle\xi\rangle^2$ til

$$\hat{u} = \langle\xi\rangle^{-2}\hat{f} ,$$

dvs. (8.43) har løsningen

$$u = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-2}\mathcal{F}f .$$

Vi ser, at der for hvert f givet i $\mathcal{S}'$ er en og kun én løsning $u \in \mathcal{S}'$, og hvis $f \in \mathcal{S}$ er løsningen u ligeledes i $\mathcal{S}$. Når f er givet i $L^2(\mathbb{R}^n)$, ser vi af (8.44), at $(1+|\xi|^2)\hat{u} \in L^2$. Dette medfører ikke blot at $u \in L^2$ (fordi $\hat{u} \in L^2$), men endog at $D_j u$ og $D_j D_j u \in L^2$ for $i,j = 1,\dots,n$, fordi $\xi_j\hat{u}$ og $\xi_i\xi_j\hat{u}$ ligger i L^2, idet $|\xi_j| \le 1+|\xi|^2$ og $|\xi_i\xi_j| \le |\xi_i|^2 + |\xi_j|^2 \le |\xi|^2$; her benyttes den elementære ulighed

$$(8.45) \qquad 0 \le (a-b)^2 \Rightarrow 2ab \le a^2+b^2 \quad \text{for } a,b \in \mathbb{R} .$$

Man får altså, at

$$(8.46) \qquad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ med } (1-\Delta)u \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in H^2(\mathbb{R}^n) .$$

Omvendt er det klart, at

$$(8.47) \qquad u \in H^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (1-\Delta)u \in L^2(\mathbb{R}^n) .$$

Dette minder lidt om hvad vi fandt for sædvanlige differentialoperatorer i Afsnit 7.4, og det er en klar demonstration af Fourier transformationens nyttighed. Det må dog straks siges, at $1-\Delta$ er en usædvanligt pæn operator, fordi polynomiet $1+|\xi|^2$ er positivt overalt. Så snart der er nulpunkter, bliver teorien mere kompliceret. For eksempel kræver bølgeoperatoren $\partial_t^2 - \Delta_x$ på $\mathbb{R}^{n+1}$, med symbolet $-\tau^2+|\xi|^2$, yderligere kraftige hjælpemidler; og selv for Laplace operatoren Δ, hvis symbol $-|\xi|^2$ har det ene nulpunkt $\xi = 0$, er det mindre enkelt at diskutere eksakte løsninger.

Laplaceoperatoren er dog elliptisk, og man kan ret let diskutere kvalitative egenskaber ved løsningerne til $\Delta u = f$ ved hjælp af Fourier transformationen. Vi vender tilbage til dette og den videre diskussion af differentialoperatorer i Kapitel 9. Først vil vi analysere nogle yderligere egenskaber ved Fourier transformationen, der bl.a. fører til nogle eksakte resultater for ligningen $\Delta u = f$.

8.4. Homogenitet og foldning.

Ved udregning af den Fouriertransformerede af bestemte funktioner har man ofte glæde af at bruge deres eventuelle symmetriegenskaber. Vi viser nogle vigtige eksempler på dette.

Vi skal her benytte Fourier transformationens sammenhæng med forskellige koordinatskift, dels ortogonaltransformationer $y = \mathcal{O}x$, dels dilatationer $y = \lambda x$ $(=\mu_\lambda(x))$, som beskrevet i Eksempel 6.17. Som nævnt der, beskrives de tilhørende koordinatskifteafbildninger ved

$$[T(\mathcal{O})u](y) = u(\mathcal{O}^{-1}y) = u(x)\,, \qquad \text{når} \quad y = \mathcal{O}x\,,$$

$$[T(\mu_\lambda)u](y) = u(y/\lambda) = u(x)\,, \qquad \text{når} \quad y = \lambda x\,;$$

det er åbenbart, at disse afbildninger sender $\mathcal{S}$ over i $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ over i $\mathcal{S}'$ (hvor skrivemåden ovenfor jo interpreteres ved (6.52) hhv. (6.50)). For testfunktioner $\psi \in \mathcal{S}$ ser vi nu ved udregning (idet $(\mathcal{O}^*)^{-1} = \mathcal{O}$):

$$(8.48) \qquad \begin{aligned} F[T(\mathcal{O})\psi](\xi) &= \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(\mathcal{O}^{-1}y)dy \\ &= \int e^{-i\mathcal{O}x\cdot\xi}\psi(x)dx = \int e^{-ix\cdot\mathcal{O}^*\xi}\psi(x)dx \\ &= F[\psi](\mathcal{O}^*\xi) = [T((\mathcal{O}^*)^{-1})\hat{\psi}](\xi) = [T(\mathcal{O})\hat{\psi}](\xi)\,. \end{aligned}$$

$$(8.48') \qquad \begin{aligned} F[T(\mu_\lambda)\psi](\xi) &= \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y/\lambda)dy \\ &= \int e^{-i\lambda x\cdot\xi}\psi(x)\lambda^n dx \\ &= \lambda^n F[\psi](\lambda\xi) = [\lambda^n T(\mu_{1/\lambda})\hat{\psi}](\xi)\,. \end{aligned}$$

Dette fører til de generelle regler for $u \in \mathcal{S}'$:

$$\langle \mathcal{F}[T(\mathcal{O})u],\psi\rangle = \langle T(\mathcal{O})u,\mathcal{F}\psi\rangle$$
$$= \langle u,T(\mathcal{O}^{-1})\mathcal{F}\psi\rangle = \langle u,\mathcal{F}[T(\mathcal{O}^*)\psi]\rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}u,T(\mathcal{O}^*)\psi\rangle = \langle T((\mathcal{O}^*)^{-1})\mathcal{F}u,\psi\rangle = \langle T(\mathcal{O})\mathcal{F}u,\psi\rangle \ ;$$

$$\langle \mathcal{F}[T(\mu_\lambda)u],\psi\rangle = \langle T(\mu_\lambda)u,\mathcal{F}\psi\rangle$$
$$= \langle u,\lambda^n T(\mu_{1/\lambda})\mathcal{F}\psi\rangle = \langle u,\mathcal{F}[T(\mu_\lambda)\psi]\rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}u,T(\mu_\lambda)\psi\rangle = \langle \lambda^n T(\mu_{1/\lambda})\mathcal{F}u,\psi\rangle \ ;$$

disse regler for generelle u stemmer naturligvis overens med reglerne (8.48), (8.48') for testfunktioner u. Vi har vist:

Sætning 8.14. *Lad $\mathcal{O}$ være en ortogonaltransformation i $\mathbb{R}^n$ og lad μ_λ være multiplikation med skalaren $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. De tilhørende koordinatskifteafbildninger $T(\mathcal{O})$ og $T(\mu_\lambda)$ i $\mathcal{S}'$ hænger sammen med Fourier transformationen på følgende måde:*

(8.49) $$\mathcal{F}[T(\mathcal{O})u] = T((\mathcal{O}^*)^{-1})\mathcal{F}u = T(\mathcal{O})\mathcal{F}u ,$$

(8.49') $$\mathcal{F}[T(\mu_\lambda)u] = \lambda^n T(\mu_{1/\lambda})\mathcal{F}u ,$$

for $u \in \mathcal{S}'$.

Sætningen kan benyttes til behandling af funktioner med specielle invariansegenskaber over for disse koordinatskifteafbildninger.

De funktioner $u(x)$, som kun afhænger af afstanden $|x|$ til 0, kan karakteriseres som de funktioner, der er invariante under alle ortogonaltransformationer, dvs. for hvilke

(8.50) $$T(\mathcal{O})u = u \quad \text{for alle ortogonaltransformationer } \mathcal{O} ,$$

(idet ortogonaltransformationerne netop er de transformationer i $\mathbb{R}^n$, der bevarer $|x|$). Vi siger nu analogt, når $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, at u kun afhænger af afstanden $|x|$ til 0, når (8.50) gælder.

En funktion er homogen af grad r, når der for alle $a > 0$ og alle $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gælder, at $u(ax) = a^r u(x)$, dvs.

(8.50') $$T(\mu_{1/a})u = a^r u , \qquad \text{for alle } a > 0 .$$

Vi siger analogt, at en distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ er homogen af grad r, når (8.50') gælder.

Man får da umiddelbart af Sætning 8.14:

Korollar 8.14'. *Lad* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *og lad* $r \in \mathbb{R}$.

1^o *Hvis* u *kun afhænger af afstanden* $|x|$ *til* 0, *gælder det samme om* $\hat{u}$.

2^o *Hvis* u *er homogen af grad* r, *så er* $\hat{u}$ *homogen af grad* $-r-n$.

Bevis: 1^o Når O gennemløber ortogonaltransformationerne, gennemløber $(O^*)^{-1}$ ligeledes ortogonaltransformationerne. Identiteterne (8.50) overføres da til tilsvarende identiteter for $\hat{u}$ ifølge (8.49).

2^o Når u er homogen af grad r, gælder ifølge (8.49') og (8.50')

$$T(\mu_{1/a})\mathcal{F}u = a^{-n}\mathcal{F}[T(\mu_a)u]$$
$$= a^{-n}\mathcal{F}[a^{-r}u] = a^{-n-r}\mathcal{F}u\,,$$

hvilket viser, at $\mathcal{F}u$ er homogen af grad $-n-r$. □

Lad os anvende sætningen på funktionerne $u(x) = |x|^{-r}$, der er homogene af grad $-r$ og kun afhænger af $|x|$. Der gælder for $n/2 < r < n$, at u kan integreres ind i 0, mens u^2 kan integreres ud i ∞, dvs. $u = \chi u + (1-\chi)u$, hvor $\chi u \in L^1$ og $(1-\chi)u \in L^2$. Så er $u \in \mathcal{S}'$, og $\hat{u}$ er veldefineret som en funktion i $C_*^0 + L^2$. Det ses af Korollar 8.14', at $\hat{u}(\xi)$ kun afhænger af $|\xi|$, og den er homogen af grad $-n+r$.

Funktionen $v(\xi)$ defineret ved

$$v(\xi) = |\xi|^{n-r}\hat{u}(\xi)$$

er da en funktion i $L^2_{loc} \cap \mathcal{S}'$, som er homogen af grad 0 og kun afhænger af $|\xi|$.

Hvis v vides at være kontinuert på $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, kan man heraf umiddelbart slutte at v er en konstant $c_{n,r}$, da invariansen jo så betyder at $v(\xi) = v(\eta)$ for alle punkter ξ og $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Det følger da, at

$$\mathcal{F}(|x|^{-r}) = \hat{u}(\xi) = c_{n,r}\,|\xi|^{-n+r}\,. \tag{8.51}$$

Vi vil gerne vise dette, men da vi kun på forhånd ved, at $v \in L^2_{loc}$, kræves der et lille ekstra argument, som f.eks. kan være følgende:

Vi kan vise, at i omegnen af hvert punkt $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ er alle afledede af v (i distributions-forstand) lig med 0. For det første gælder dette den radiale afledede $\partial_r v$, da denne (ligesom i Opgave 6.13) er grænseværdi i $\mathcal{D}'$ af differenskvotienterne $\frac{1}{h}[v((1+h)\xi) - v(\xi)]$, som er 0, da $T(\mu_\lambda)v = v$ for alle λ på grund af homogeniteten. Ved hjælp af invariansen under ortogonaltransformationer kan vi få andre afledede frem. F.eks. hvis der indføres polære koordinater $((\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}, \theta)$ i (ξ_1, ξ_2)-planen mens de andre koordinater $(\xi_3, \cdots, \xi_n)$ lades uforandrede, realiseres den afledte $\partial_\theta v$ med hensyn til θ som grænseværdi af differenskvotienter defineret ved hjælp af de ortogonaltransformationer, der drejer (ξ_1, ξ_2)-planen om dens origo, mens $(\xi_3, \cdots, \xi_n)$ holdes fast; $\partial_\theta v$ ses da at være 0. Inddrages andre drejninger, fås at de tilsvarende afledede her også er 0. Da $\partial_{\xi_j} v$ i omegnen af hvert punkt $\xi \neq 0$ kan udtrykkes som en linearkombination (med C^∞ koefficienter) af de allerede bestemte afledede, som alle er 0 på v, ses at $\partial_{\xi_j} v = 0$ på $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, for $j = 1, \cdots, n$. Ved fortsat differentiation fås i alt:

$$v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ med } D^\alpha v = 0 \text{ på } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ for alle } \alpha \neq 0 .$$

Vi kan nu enten benytte resultatet af Øvelse 7.9, som viser direkte, at v er konstant (i kvadranten $Q_n = \{\xi \mid \xi_1 > 0, \cdots, \xi_n > 0\}$ og dermed, ved drejninger, i hele $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), eller vi kan låne Sobolevs sætning fra Kapitel 9 (Korollar 9.11), som viser, at eftersom $v \in \bigcap_{m \geq 0} H^m(\Omega)$ for enhver begrænset åben delmængde Ω af $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, så er $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ og dermed konstant ifølge overvejelserne for kontinuerte funktioner. Ialt fås, at $\hat{u}(\xi) = |\xi|^{-n+r} v(\xi)$ opfylder (8.51).

Konstanten $c_{n,r}$ kan beregnes ved specielle udregninger (f.eks. integration mod $\exp(-|x|^2/2)$), hvorved man finder værdien

$$c_{n,r} = (4\pi)^{n/2}\, 2^{-r} \frac{\Gamma((n-r)/2)}{\Gamma(r/2)} \tag{8.51'}$$

(ifølge W. Rudin: "Functional Analysis", Definition 7.1 og Exercise 8.6). Iøvrigt kan vi se direkte, at $c_{n,r}$ er reel, ved at bemærke, at $\overline{\mathcal{F}}(|x|^{-r}) = \mathcal{F}(|-x|^{-r}) = \mathcal{F}(|x|^{-r})$.

Når $r \in]0, n/2[$, ligger $r' = n - r$ i $]n/2, n[$ så vi får af (8.51) ved anvendelse af $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}$,

$$|x|^{-n+r} = |x|^{-r'} = (2\pi)^{-n} \overline{\mathcal{F}}(c_{n,r'} |\xi|^{-n+r'})$$

$$= (2\pi)^{-n} c_{n,r'} \mathcal{F}(|\xi|^{-r}) ;$$

dette viser at (8.51) også gælder for $r \in]0,n/2[$, med

(8.51") $$c_{n,r} = (2\pi)^n \, c_{n,n-r}^{-1} .$$

Da $c_{n,r}$ er konvergent for $r \to n/2$, mod $(2\pi)^{n/2}$, og $|x|^{-r}$ såvel som $|x|^{-n+r}$ konvergerer mod $|x|^{-n/2}$ i $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}'$ for $r \to n/2$, udvides formel (8.51) ved grænseovergang til at gælde også for $r = n/2$. Ialt har vi vist:

Sætning 8.15. *Når* r $]0,n[$, *er (med* $c_{n,r}$ *opfyldende* (8.51'), (8.51"))

(8.51) $$\mathcal{F}(|x|^{-r}) = c_{n,r}|\xi|^{-n+r} .$$

For $u(x) = |x|^{-r}$, $r \geq n$, er det ikke oplagt at interpretere u som en distribution, og der findes specielle teorier hertil ("pseudofunktion", "principal value", se f.eks. Schwartz' bog). Se også Afsnit 8.6.

Et vigtigt specialtilfælde af Sætning 8.15 er formlen

(8.52) $$\mathcal{F}\left(\frac{1}{4\pi|x|}\right) = |\xi|^{-2} \quad \text{for} \quad n = 3 .$$

Til den almene teori for Fourier transformationer hører også samspillet mellem Fourier transformation og foldning (jvf. (5.21) for definitionen). Vi får let:

Lemma 8.16. 1^0 *Når* f *og* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *er* $f*g$ *i* $L^1(\mathbb{R}^n)$, *og*

(8.52') $$\mathcal{F}(f*g) = \hat{f} \cdot \hat{g} .$$

2^0 *Når* f *og* g *er Fouriertransformerede af* L^1*-funktioner, er* $f \cdot g \in C^0_\cdot(\mathbb{R}^n)$, *og*

(8.53) $$\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-n} \hat{f} * \hat{g} .$$

Bevis: Ved brug af Fubinis sætning fås, når $f,g \in L^1$,

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} \int f(x-y)g(y)dy\, dx = \iint e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)e^{-iy\xi}g(y)dy\, dx$$
$$= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad \text{for hvert } \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Analogt haves, at $\overline{\mathcal{F}}(f*g) = (\overline{\mathcal{F}}f)(\xi)(\overline{\mathcal{F}}g)(\xi)$, hvormed

(8.54) $$\mathcal{F}^{-1}(f*g) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}f \cdot \mathcal{F}^{-1}g .$$

Sætter vi nu $f' = \mathcal{F}^{-1}f$ og $g' = \mathcal{F}^{-1}g$, får vi ved at anvende $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(f'\cdot g') = (2\pi)^{-n}\ \hat{f}'*\hat{g}'\ . \qquad \square$$

Formlerne i Lemma 8.16 kan generaliseres meget vidt. Hvis for eksempel g er hurtigt aftagende, kan man til gengæld tillade f at vokse op for $|x| \to \infty$; det er endda i så fald muligt at erstatte f med en vilkårlig tempereret distribution (jvf. Afsnit 9.3). I første omgang nøjes vi med at se på foldning i nogle særlige funktionsklasser. Idet $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$, definerer vi, for hvert $s \in \mathbb{R}$ og hvert $p \in [1,\infty]$, Banachrummet L^p_s ved

(8.55) $$L^p_s = \left\{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\ \middle|\ \langle x\rangle^s u(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}$$

$$\text{med norm}\quad \|u\|_{L^p_s} = \|\langle x\rangle^s u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ .$$

Rummet L^2_s har interesse i forbindelse med Sobolev rum (herom mere senere); lige nu vil vi være mest interesserede i L^1_s . Vi bemærker, at $\cup_{s\in\mathbb{R}} L^1_s$ omfatter alle de øvrige rum, thi når $u \in L^p_s$ for et $p > 1$, så er $u \in L^1_{s-a}$, når a vælges, så at

(8.56) $$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{s-a}|u(x)|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-aq}dx\right)^{1/q} \|\langle x\rangle^s u\|_{L^p} < \infty\ , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\ ,$$

dvs. når $a > n/q$.

Ved foldninger har man brug for uligheden

$$1 + |x-y|^2 \le 1 + (|x|+|y|)^2 \le 2(1+|x|^2)(1+|y|^2)\ ,$$

der fører til

$$\langle x-y\rangle^s \le 2^s\langle x\rangle^s\langle y\rangle^s \qquad \text{når}\quad s \ge 0\ ,$$

$$\langle x-y\rangle^s = \frac{\langle x-y\rangle^{-|s|}\langle x-y+y\rangle^{|s|}}{\langle x\rangle^{|s|}} \le 2^{|s|}\langle x\rangle^s\langle y\rangle^{|s|}, \qquad \text{når}\quad s \le 0\ ,$$

dvs. i alt("Peetre's ulighed"):

(8.57) $$\langle x-y\rangle^s \le 2^{|s|}\langle x\rangle^s\langle y\rangle^{|s|} \qquad \text{for}\quad s \in \mathbb{R}\ .$$

Lemma 8.17. *Lad* $s \in \mathbb{R}$. *Når* $u \in L^p_s$ *og* $v \in L^1_{|s|}$, *er* $u*v \in L^p_s$, *med*

(8.58) $$\|u*v\|_{L^p_s} \le 2^{|s|}\|u\|_{L^p_s}\|v\|_{L^1_{|s|}}\ , \quad \textit{for}\ \ p \in [1,\infty]\ .$$

Bevis. Idet

$$\langle x\rangle^s |u(x-y)v(y)| \le 2^{|s|}\langle x-y\rangle^s |u(x-y)|\langle y\rangle^{|s|}|v(y)| ,$$

følger udsagnet af Fubinis sætning og Hölders ulighed (som i Sætning 5.7). □

Specielt er $u*\psi$ veldefineret for $u \in \cup_{s\in\mathbb{R}} L^1_s$ og $\psi \in \mathcal{S}$.

Lemma 8.18. *Når* $u \in \cup_{s\in\mathbb{R}} L^1_s$ *og* $\psi \in \mathcal{S}$, *er*

$$F(u*\psi) = \hat{\psi}\cdot\hat{u} . \tag{8.59}$$

Bevis: Lad $u \in L^1_s$ for et $s \in \mathbb{R}$. Lad $u_N = \chi(x/N)u$, så vil $u_N \to u$ i L^1_s, og $u_N*\psi \to u*\psi$ i L^1_s for $N \to \infty$, ifølge Lemma 8.17. Konvergensen i L^1_s medfører konvergens i $\mathcal{S}'$, så der gælder for hvert $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle F(u*\psi),\varphi\rangle = \langle u*\psi, F\varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle u_N*\psi, F\varphi\rangle .$$

Heraf fås, ved nogle tilladte integrationsombytninger,

$$\begin{aligned}\langle u_N*\psi,\hat{\varphi}\rangle &= \iint u_N(y)\psi(x-y) \int e^{-ix\cdot z}\varphi(z)dz\, dy\, dx \\ &= \int u_N(y) \iint \psi(x-y)e^{-i(x-y)\cdot z-iy\cdot z}\varphi(z)dz\, dx\, dy \\ &= \int u_N(y) \int e^{-iy\cdot z}\hat{\psi}(z)\varphi(z)dz\, dy = \langle u_N, F(\hat{\psi}\cdot\varphi)\rangle \to \langle u, F(\hat{\psi}\cdot\varphi)\rangle \\ &= \langle Fu, \hat{\psi}\cdot\varphi\rangle = \langle \hat{\psi}\cdot\hat{u},\varphi\rangle ,\end{aligned}$$

hvilket viser (8.59). □

Når vi skriver $\hat{\psi}$ til venstre for $\hat{u}$ er det på grund af at konventionen om multiplikation af en distribution (her $\hat{u}$) med en pæn funktion (her $\hat{\psi}$) er indført på denne måde; i fremtiden vil vi også tillade os at skrive multiplikatoren til højre.

Formlen (8.59) kan vises at gælde i mere generelle situationer, se de almene værker om distributionsteori. Bl.a. gælder formlen for $u \in \mathcal{S}'$ og $\psi \in \mathcal{S}$, jvf. Opgave 9.2.

8.5. Anvendelse på Laplace operatoren.

De forudgående resultater er tilstrækkelige til at behandle ligningen for Laplace operatoren

$$(8.60) \qquad -\Delta u = f$$

for pæne funktioner.

Når u og f er tempererede distributioner, giver ligningen ved Fourier transformation

$$|\xi|^2 \hat{u} = \hat{f} .$$

En eventuel løsning må da opfylde (forsåvidt udtrykket har mening)

$$(8.61) \qquad \hat{u}(\xi) = |\xi|^{-2} \hat{f}(\xi) .$$

Hvis f er givet i $\mathcal{S}$, kan vi anvende Lemma 8.18 og formel (8.50) for $n \geq 3$, hvilket giver

$$(8.62) \qquad u(x) = c_{n,2}|x|^{-n+2} * f(x) = c_{n,2} \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = c_{n,2} \int \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}}\, dy ,$$

som da er løsning til (8.60). Løsningen u bliver en C^∞-funktion, da differentiation kan føres ind under integraltegnet. Der er mange andre løsninger, nemlig alle funktioner $u + w$, hvor w gennemløber løsningerne til $\Delta w = 0$, de harmoniske funktioner (som udgør et uendeligdimensionalt vektorrum).

Funktionen $c_{n,2}|x|^{-n+2}$ kaldes også Newton potentialet. Når man først har formlen (8.62), kan man forsøge at benytte den for mere generelle f, og udvide anvendelsesområdet. Indsættes for eksempel en kontinuert funktion med kompakt støtte som f, fås en funktion u, der ikke altid er to gange differentiabel i klassisk forstand, men dog for begrænsede åbne mængder Ω kan vises at tilhøre $H^2(\Omega)$ og løse (8.60) i distributionsforstand (eller bedre: løse (8.60) som H^2-funktion). Se også Bemærkning 9.15.

Løsningsmetoden kan faktisk udvides til distributioner $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, men dette kræver en generalisation af foldningsbegrebet, som vi ikke kan overkomme at medtage her.

Operatoren $-\Delta\colon u \rightsquigarrow f$ er lokal, dvs. f's udseende i omegnen af et punkt afhænger kun af u's udseende i en omegn af samme punkt (dette gælder jo for enhver differentialoperator). Løsningsoperatoren $T\colon f \rightsquigarrow u$ defineret ved (8.62) kan derimod ikke forventes at være lokal (vi ser dette eksplicit af udtrykket for T som integraloperator).

Lad Ω være en begrænset åben delmængde af $\mathbb{R}^n$. Da kan vi definere en operator T_Ω ved at den skal sende $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (forlænget med 0 i $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$) over i $(T\varphi)|_\Omega$, altså

(8.63) $$T_\Omega : \varphi \leadsto (T\varphi)|_\Omega \quad \text{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Der gælder her, at

$$(-\Delta T_\Omega \varphi)(x) = \varphi(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega ,$$

fordi Δ er lokal; så T_Ω er en højre-invers til $-\Delta$ på Ω. Det er en integraloperator

(8.64) $$T_\Omega \varphi = \int_\Omega G(x,y)\varphi(y)dy ,$$

med kerne

$$G(x,y) = c_{n,2}|x-y|^{-n+2}|_{x,y\in\Omega} .$$

Det har interesse at undersøge, om denne løsningsoperator er en Hilbert-Schmidt operator (jvf. Mat 313, §16). Vi ser da på

$$\int_{\Omega\times\Omega} |G(x,y)|^2 dx\, dy = c_{n,2}^2 \int_{\Omega\times\Omega} |x-y|^{-2n+4} dx\, dy \leq c' \int_{|z|,|w|\leq R} |z|^{-2n+4} dz\, dw ,$$

hvor vi har anvendt koordinatskiftet $z = x-y$, $w = x+y$, og valgt R så stor at $\Omega \times \Omega \subset \{(x,y) \mid |x+y| \leq R , |x-y| \leq R\}$. Integralet efter z i det sidste udtryk (og dermed hele det sidste integral) er konvergent hvis og kun hvis $-2n+4 > -n$, altså netop når $\underline{n < 4}$. T_Ω <u>bliver altså en Hilbert-Schmidt operator i</u> $L^2(\Omega)$, <u>når</u> $n = 3$.

Man kan vise, at T_Ω i almindelighed er en kompakt symmetrisk operator i $L^2(\Omega)$, for hvilken egenværdifølgen $(\lambda_j(\overline{T}_\Omega))_{j\in\mathbb{N}}$ tilhører ℓ^p med $p > n/2$ (Hilbert-Schmidt tilfældet fås for $p = 2$, jvf. Mat 313).

Når Ω er ubegrænset, vil T_Ω derimod i reglen ikke være en kompakt operator i $L^2(\Omega)$ (med mindre Ω er meget "tynd").

8.6. Distributioner knyttet til ikke-integrable funktioner.

Vi vil endelig undersøge nogle flere typer af distributioner på $\mathbb{R}$. I Sætning 8.14 behandledes homogene funktioner u af grad a, men det oprindelige krav om, at både u og $\hat{u} \in L^1_{loc}$, lagde væsentlige begrænsninger på hvilke værdier af a , der kunne dækkes ind. Regningerne før Korollar 8.15 viste, hvordan tilfældene $a \in]-1,0[$ kunne behandles, mens hverken tilfældet $a = 0$ (dvs. funktionerne $u = c_1 H(x) + c_2 H(-x)$) eller tilfældet $a = -1$ (hvor funktionerne $u = c_1 \frac{H(x)}{x} + c_2 \frac{H(-x)}{x}$ ikke er i L^1_{loc} i omegnen af 0) var med. Vi vil nu betragte disse tilfælde, hvor vi dels vil beskrive den Fourier transformerede af Heaviside funktionen (hvormed vi kan behandle tilfældet $a = 0$), dels vil give en mening til en distribution, der uden for 0 opfører sig som $\frac{1}{x}$.

Når f er en funktion på $\mathbb{R}$, som er integrabel på intervallerne $]-\infty,\varepsilon[$ og $[\varepsilon,\infty[$ for ethvert $\varepsilon > 0$, definerer vi principalværdiintegralet af f over $\mathbb{R}$ ved

$$(8.65) \qquad PV\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)dx ,$$

når denne grænseværdi eksisterer. (Det indgår i definitionen, at intervallet $[-\varepsilon,\varepsilon]$ er symmetrisk omkring 0; hvis $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, kan man risikere at få en anden grænseværdi ved at bortskære andre intervaller såsom f.eks. $[-\varepsilon,2\varepsilon]$.)
Vi definerer nu distributionen $PV\frac{1}{x}$ ved

$$(8.66) \qquad \langle PV\frac{1}{x},\varphi\rangle = PV\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}dx \quad \text{for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) .$$

Det skal vises, at denne funktional er veldefineret og kontinuert på $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Hertil benyttes, at ved Taylors formel er

$$(8.67) \qquad \varphi(x) = \varphi(0) + x\cdot\varphi_1(x) ,$$

hvor $\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ er i $C^\infty(\mathbb{R})$ (vis det!). Endvidere gælder for $x \in [-R,R]$, ved middelværdisætningen

$$(8.68) \qquad \sup_{|x|\le R}|\varphi_1(x)| = \sup_{|x|\le R}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| = \sup_{|x|\le R}|\varphi'(\theta(x))| \le \sup_{|x|\le R}|\varphi'(x)| ,$$

hvor $\theta(x)$ er et punkt mellem 0 og x . Dette giver for $PV\frac{1}{x}$, når $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$,

$$(8.69) \qquad \begin{aligned}\langle PV\tfrac{1}{x},\varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[-R,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]}\frac{\varphi(0)}{x}dx + \int_{[-R,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]}\varphi_1(x)dx\right] \\ &= \int_{-R}^{R}\varphi_1(x)dx ,\end{aligned}$$

da det første integral i parentesen er 0 på grund af symmetrien af $\frac{1}{x}$; så funktionalen $PV\frac{1}{x}$ er veldefineret. Af (8.68) ses, at det er en distribution af orden 1:

(8.70) $$|\langle PV\tfrac{1}{x},\varphi\rangle| \le 2R \sup_{|x|\le R} |\varphi_1(x)| \le 2R \sup_{|x|\le R} |\varphi'(x)| \,, \quad \text{når} \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R] \,.$$

Bemærkning 8.19. Også til de øvrige funktioner $\frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$, kan man knytte distributioner; her har man brug for dels principalværdibegrebet, dels en modifikation af $\varphi(x)$ med et Taylor polynomium udviklet ved 0; jvf. Øvelse 8.9. De pågældende distributioner kaldes $PF\frac{1}{x^m}$, hvor PF står for pseudo-funktion; for $m = 1$ fås $PF\frac{1}{x} = PV\frac{1}{x}$.

Idet $PV\frac{1}{x} = \chi PV\frac{1}{x} + (1-\chi)\frac{1}{x}$ har første led i $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ og andet led i $L^2(\mathbb{R})$, er $v = PV\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'$, og vi kan beregne Fouriertransformationen $\hat{v}$, f.eks. på følgende måde: Bemærk, at

(8.71) $$x \cdot PV\frac{1}{x} = 1$$

(ved brug af definitionerne), så at $\hat{v}$ er løsning til differentialligningen i $\mathscr{S}'$ (jvf. (8.33) og (8.35))

(8.72) $$i\, \partial_\xi \hat{v}(\xi) = 2\pi\, \delta \,.$$

En løsning til denne ligning er $\frac{2\pi}{i} H(\xi)$ (jvf. (6.23)), og alle andre løsninger er af formen $-2\pi i H(\xi) + c$, hvor $c \in \mathbb{C}$, jvf. Sætning 7.10. Vi skal da blot bestemme konstanten c . Hertil bemærkes, at $\frac{1}{x}$ er en ulige funktion, og $v = PV\frac{1}{x}$ er en ulige distribution (dvs. $\langle v,\varphi(-x)\rangle = -\langle v,\varphi(x)\rangle$ for alle φ) , så dens Fourier transformerede $\hat{v}$ må ligeledes være ulige.

Omhyggeligt forklaret: Operatoren

(8.73) $$S\colon \varphi(x) \rightsquigarrow \varphi(-x) \qquad \text{(spejling)},$$

for $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, overføres til distributioner på sædvanlig måde:

(8.74) $$\langle Su,\varphi\rangle = \langle u,S\varphi\rangle \quad \text{for alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

(fordi dette passer når u er en funktion). En funktion u siges at være lige, henholdsvis ulige, når $Su = u$ henholdsvis $Su = -u$; denne sprogbrug udvides til distributioner. For sammenhængen med Fourier transformationen bemærkes, at

$$(\mathcal{F}S\varphi)(\xi) = \int e^{-ix\xi}\varphi(-x)dx = \int e^{ix\xi}\varphi(x)dx = (\overline{\mathcal{F}}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(-\xi) = (S\mathcal{F}\varphi)(\xi) ,$$

altså

$$\mathcal{F}S = \overline{\mathcal{F}} = S\mathcal{F} ; \tag{8.75}$$

disse formler overføres til distributioner ved brug af (8.74). (Formlen (8.17) kan skrives: $\mathcal{F}^2 = (2\pi)^n S$.) Specielt ses, at $Sv = -v$ medfører $S\hat{v} = -\hat{v}$.

Den eneste ulige løsning til (8.72) er

$$v(\xi) = \begin{cases} -\pi i & \text{for } \xi > 0 , \\ \pi i & \text{for } \xi < 0 . \end{cases}$$

(Man kan også finde v ved direkte regninger, men så skal man være temmelig påpasselig med interpretationen af de optrædende integraler og konvergenser, hvilket vi netop har overstået ved at bygge Fouriertransformationen på $\mathcal{S}'$ op ved dualitet ud fra definitionen på $\mathcal{S}$.)

Vi har hermed vist

$$\mathcal{F}[PV\tfrac{1}{x}] = -2\pi i H(\xi) + \pi i = \begin{cases} -\pi i & \text{for } \xi > 0 , \\ \pi i & \text{for } \xi \le 0 . \end{cases} \tag{8.76}$$

Anvendes $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S$ (jvf. (8.75)) på (8.76), fås

$$PV\frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}S(-2\pi i H(\xi)+\pi i) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(2\pi i H(\xi)-i\pi)$$

$$= i\mathcal{F}H(\xi) - \frac{i}{2}\mathcal{F}[1] = i\mathcal{F}H - \pi i\delta .$$

Altså er

$$\mathcal{F}H(x) = \frac{1}{i}PV\frac{1}{\xi} + \pi\delta , \tag{8.77}$$

hvormed vi kan Fouriertransformere alle homogene funktioner af grad 0.

Nogle yderligere bemærkninger: Svarende til opspaltningen

$$1 = H(x) + H(-x)$$

har vi nu følgende opspaltning af δ (som bruges i teoretisk fysik)

$$\delta = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{-1}(\mathcal{F}H+\mathcal{F}SH) = \left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2\pi i}PV\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2\pi i}PV\frac{1}{x}\right) \tag{8.78}$$

$$= \delta_+ + \delta_- , \text{ hvor}$$

$$\delta_\pm = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2\pi i}PV\frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[H(\pm x)] . \tag{8.79}$$

Observer også, at idet

$$H(x) = \lim_{a\to 0+} H(x)e^{-ax} \qquad \text{i } \mathcal{S}' .$$

er

(8.80) $$\mathcal{F}H = \lim_{a\to 0+} \frac{1}{a+i\xi} \qquad \text{i } \mathcal{S}'$$

(jvf. Øvelse 8.3), hvormed

(8.81) $$\delta_+ = \frac{1}{2\pi} \lim_{a\to 0+} \frac{1}{a+ix} \qquad \text{i } \mathcal{S}' .$$

Bemærkning 8.20. Til funktionen $\frac{H(x)}{x}$ knyttes distributionen $\mathrm{PF}\,\frac{H(x)}{x}$, defineret ved

(8.82) $$\langle \mathrm{PF}\,\frac{H(x)}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(0)\log \varepsilon\right] ,$$

jvf. L. Schwartz: Méthodes mathématiques..., Exercice II-14, p. 114-115. Hermed inddrages enhver funktion på $\mathbb{R}$ som er homogen af grad -1 i distributionsteorien, nemlig som en distribution

(8.83) $$c_1\,\mathrm{PF}\,\frac{H(x)}{x} + c_2\,S\,\mathrm{PF}\,\frac{H(x)}{x} \quad , \quad c_1 \text{ og } c_2 \in \mathbb{C} .$$

Også for distributioner på $\mathbb{R}^n$ dukker der logaritmiske led op, når man vil inddrage generelle homogene funktioner og deres Fouriertransformerede. (En tilbundsgående diskussion af homogene distributioner findes f.eks. i L. Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer-Verlag 1983.)

9. Anvendelser på differentialoperatorer. Sobolevs sætning.

9.1. Differential- og pseudo-differentialoperatorer på $\mathbb{R}^n$.

Som vi har set i Kapitel 8, fører multiplikation med et polynomium $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$, og $\mathcal{S}'$ ind i $\mathcal{S}'$. Også andre C^∞-funktioner er multiplikationsoperatorer i $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$. L. Schwartz indførte følgende rum (hvor M står for multiplikation, $\mathcal{O}$ for operator), der indeholder polynomierne:

Definition 9.1. *Rummet $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ (eller $\mathcal{O}_M$) af langsomt voksende funktioner på $\mathbb{R}^n$ består af de funktioner $p(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, om hvilke der gælder: For hvert $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ findes $c \geq 0$ og $a \in \mathbb{R}$ (afhængige af p og α), så at*

$$(9.1) \qquad |D^\alpha p(\xi)| \leq c\langle\xi\rangle^a \quad \text{for alle } \xi \in \mathbb{R}^n .$$

$\mathcal{O}_M$ er klart et vektorrum (vi afstår fra at diskutere topologier på det). Dets elementer definerer multiplikationsoperatorer $f \rightsquigarrow pf$, der (ved Leibniz' formel) afbilder $\mathcal{S}$ kontinuert i $\mathcal{S}$, og $\mathcal{S}'$ kontinuert i $\mathcal{S}'$. [Man kan vise, at en C^∞-funktion, der ved multiplikation afbilder $\mathcal{S}$ kontinuert i $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ kontinuert i $\mathcal{S}'$, nødvendigvis må tilhøre $\mathcal{O}_M$, se Treves' bog, Kap. 25-9.]

Når $p(\xi)$ er et polynomium, svarer multiplikationsoperatoren $f \rightsquigarrow pf$ ved Fourier transformation til en differentialoperator $P(D)$, se (8.38)-(8.41). Når vi tillader p at være mere generel, svarer den til en mere generel operator, som vi kalder en pseudo-differentialoperator.

Definition 9.2. *Lad $p(\xi) \in \mathcal{O}_M$. Den tilhørende pseudo-differentialoperator $\mathrm{Op}(p(\xi))$, også kaldet $P(D)$, defineres da ved*

$$(9.2) \qquad \mathrm{Op}(p)u \equiv P(D)u = F^{-1}(p(\xi)\hat{u}(\xi)) ,$$

den afbilder $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}$ og $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{S}'$ (kontinuert). $p(\xi)$ kaldes symbolet af $\mathrm{Op}(p)$.

Differentialoperatorer med konstante koefficienter falder åbenbart ind under denne definition; det samme gælder løsningsoperatoren i Eksempel 8.13, som jo er $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{-2})$.

For disse pseudo-differentialoperatorer gælder den uhyre simple regneregel, at

$$\mathrm{Op}(p)\mathrm{Op}(q) = \mathrm{Op}(pq)\ , \tag{9.3}$$

altså sammensætning af operatorer svarer til multiplikation af symboler. Endvidere, hvis p er en funktion i $\mathcal{O}_M$ for hvilken $1/p$ tilhører $\mathcal{O}_M$, så har operatoren $\mathrm{Op}(p)$ simpelthen inversen $\mathrm{Op}(1/p)$:

$$\mathrm{Op}(p)\mathrm{Op}(1/p) = \mathrm{Op}(1/p)\mathrm{Op}(p) = I \tag{9.4}$$

(i Eksempel 8.13 har $1-\Delta = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^2)$ inversen $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^{-2})$).

Bemærkning 9.3. Vi bruger her ordet pseudo-differentialoperator om alle operatorer, der fås ved Fouriertransformation ud fra multiplikationsoperatorer i $\mathcal{S}$ (og $\mathcal{S}'$). I de praktiske anvendelser tager man ofte mindre klasser af symboler, med specielle egenskaber. Til gengæld tillader man symboler, der afhænger af x også, idet man til symbolet $p(x,\xi)$ knytter operatoren $\mathrm{Op}(p)$ defineret ved

$$[\mathrm{Op}(p)u](x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\ ; \tag{9.5}$$

dette stemmer med at når P er en differentialoperator af formen

$$P(x,D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha u\ , \tag{9.6}$$

så er $P(x,D) = \mathrm{Op}(p(x,\xi))$, hvor symbolet defineres ved

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\ . \tag{9.7}$$

Det faktum at der tillades "variable koefficienter" gør teorien en hel del mere kompliceret. Identiteterne (9.3) og (9.4) gælder ikke eksakt, men med en vis tilnærmelse, afhængigt af hvilken symbolklasse, man betragter. Trods disse komplikationer har den systematiske teori for pseudo-differentialoperatorer stor betydning i den moderne matematiske litteratur, som en generel ramme omkring differentialoperatorer og deres løsningsoperatorer. For fuldstændighedens skyld nævner vi, at en type af symbolklasser, der især anvendes, er klasserne $S^d_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ bestående af C^∞-funktioner $p(x,\xi)$ der opfylder (for hvert p, α, β)

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x p(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{d-|\alpha|} \quad \text{for alle } \xi\in\mathbb{R}^n\ ; \tag{9.8}$$

her er $d\in\mathbb{R}$. Polynomierne (9.7) tilhører $S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, og $\langle\xi\rangle^t$ tilhører $S^t_{1,0}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. (Der er bøger om pseudo-differentialoperatorer og deres anvendelser af bl.a. F. Treves, L. Boutet de Monvel, M. Taylor, L. Hörmander.)

Lad os nu betragte L^2-realisationerne af en pseudo-differentialoperator $P(D)$. Her kan vi umiddelbart benytte de pæne resultater om multiplikationsoperatorer i L^2 , som blev fundet i Afsnit 2.7.

Sætning 9.4. *Lad* $p(\xi) \in \mathcal{O}_M$, *og lad* $P(D)$ *være den tilhørende operator* $\mathrm{Op}(p)$. *Lad* $P(D)_{max}$ *være realisationen af* $P(D)$ *i* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *med definitionsområde*

(9.9) $$D(P(D)_{max}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid P(D)u \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

og lad $P(D)_{min}$ *være afslutningen af* $P(D)|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$. *Så er*

(9.10) $$P(D)_{max} = P(D)_{min} .$$

Endvidere er $(P(D)_{max})^* = P'(D)_{max}$, *hvor* $P'(D) = \mathrm{Op}(\overline{p})$. *Specielt er* $P(D)_{max}$ *selvadjungeret i* $L^2(\mathbb{R}^n)$, *når* p *er reel.*

Bevis: Vi skriver P for $P(D)$ og P' for $P'(D)$. Det følger umiddelbart af Plancherel-Parsevals sætning (Sætning 8.5), at

$$P_{max} = \mathcal{F}^{-1} M_p \mathcal{F} \quad , \quad \text{med}$$

$$D(P_{max}) = \mathcal{F}^{-1}\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid pf \in L^2(\mathbb{R}^n)\} ,$$

hvor M_p er multiplikationsoperatoren i $L^2(\mathbb{R}^n)$ defineret præcist ved (2.68). Specielt er P_{max} en afsluttet, tæt defineret operator. Vi vil nu først vise, at P_{max} og P'_{min} er hinandens adjungerede operatorer. Dette går på næsten samme måde som i Afsnit 7.1: For $u \in \mathcal{S}'$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gælder

(9.11) $$\langle Pu,\overline{\varphi}\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} p\mathcal{F}u,\overline{\varphi}\rangle = \langle p\mathcal{F}u,\mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}\rangle$$
$$= \langle u,\mathcal{F}p\mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}\rangle = \langle u,\overline{\mathcal{F}^{-1}\overline{p}\mathcal{F}\varphi}\rangle = \langle u,\overline{P'\varphi}\rangle .$$

Heraf ses på den ene side, at når $u \in D(P_{max})$, dvs. u og $Pu \in L^2$, så er

$$(Pu|\varphi) = (u|P'\varphi) \quad \text{for alle} \quad \varphi \in C_0^\infty ,$$

så at

$$P'|_{C_0^\infty} \subset (P_{max})^* ,$$

og dermed

$$P'_{min} = \text{afsl. af } P'|_{C_0^\infty} \subset (P_{max})^* .$$

På den anden side ses af (9.11), at når $u \in D((P'|_{C_0^\infty})^*)$, dvs. der findes

$v \in L^2$, så $(u|P'\varphi) = (v|\varphi)$ for alle $\varphi \in C_0^\infty$, så er v lig med Pu, dvs.

$$(P'|_{C_0^\infty})^* \subset P_{max} ,$$

og dermed (jvf. Korollar 2.6)

$$(P_{max})^* \subset (P'|_{C_0^\infty})^{**} = P'_{min} .$$

Lemma 7.1 udvides altså til den foreliggende situation.

Men nu kan vi endvidere benytte det, der blev vist i Afsnit 2.7, nemlig at $(M_p)^* = M_{\bar{p}}$, hvilket ved hjælp af Fourier transformationen overføres til

$$(P_{max})^* = P'_{max} .$$

I detaljer:

$$(P_{max})^* = (F^{-1}M_pF)^* = F^*M_p^*(F^{-1})^* = \bar{F}\, M_{\bar{p}}\bar{F}^{-1} = F^{-1}M_{\bar{p}}F = P'_{max} ,$$

idet $F^* = \bar{F} = (2\pi)^n F^{-1}$.

Da $(P_{max})^* = P'_{min}$, følger at $P'_{max} = P'_{min}$, hvormed den maksimale og den minimale operator er sammenfaldende for alle disse multiplikationsoperatorer.

Hvis p er reel, er $M_p = M_{\bar{p}}$ og dermed $(P_{max})^* = P'_{max} = P_{max}$. □

<u>Bemærkning 9.5.</u> Da M_p har den nedre grænse $m(M_p) = \inf\{\mathrm{Re}\, p(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$ (jvf. Øvelse 2.41), følger det af Plancherel-Parsevals sætning, at $P(D)_{max}$ (og $P(D)_{min}$) har nedre grænse

$$m(P(D)_{max}) = \inf\left\{\mathrm{Re}\, p(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\right\} . \tag{9.12}$$

Heraf ses endvidere, at $P(D)_{max} = 0$ <u>hvis og kun hvis</u> $p = 0$ (idet $\inf\{\mathrm{Re}\, e^{i\theta}p(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\} < 0$ for et vist θ medfører $M_p \neq 0$, allerede på $\mathcal{S}$). Specielt er $P(D)_{max}$ selvadjungeret hvis og <u>kun hvis</u> $p = \bar{p}$, idet $P(D)_{max}u - (P(D)_{max})^*u = P(D)_{max}u - P'(D)_{max}u = F^{-1}M_{p-\bar{p}}Fu$ for $u \in \mathcal{S}$.

Det fremgår specielt af sætningen, at for <u>alle</u> differentialoperatorer med konstante koefficienter på $\mathbb{R}^n$ er den maksimale realisation lig med den minimale; dette har vi før kun kunnet vise for første ordens operatorer (Øvelse 7.2, der kunne klares ved foldning med h_j og beskæring).

Da $|\xi|^2$ er reel og har nedre grænse 0, får vi specielt

<u>Korollar 9.6.</u> *Den maksimale og den minimale realisation af* $-\Delta$ *i* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *er sammenfaldende. Det er en selvadjungeret operator med nedre grænse 0.*

9.2. Sobolev rum af vilkårlig reel orden. Sobolevs sætning.

Fourier transformationen kan bruges til meget mere end at vise selvadjungerethed af operatorer med reelt symbol. Man kan f.eks. også analysere egenskaberne ved løsningerne til differentialligningen $P(D)u = f$, selv når der ikke på forhånd er oplagte eksistens- eller entydighedssætninger. Blandt andet kan man diskutere løsningernes regularitet, dvs. grad af differentiabilitet. I Eksempel 8.13 fandt vi, at enhver løsning u til $(1-\Delta)u = f$ med $f \in L^2$ må ligge i $H^2(\mathbb{R}^n)$. Vi vil nu se systematisk på Sobolev rummene i relation til Fourier transformationen.

I det følgende bruges M_f atter som generel betegnelse for multiplikation med f, med definitionsområde tilpasset skiftende behov. På grund af ulighederne

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \xi^{2\alpha} \leq (1+\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} \xi^{2\alpha} \tag{9.13}$$

(der ses ved at gange det midterste udtryk ud), har vi

$$\begin{aligned} u \in H^m(\mathbb{R}^n) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow \quad (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{u} \in L^2_m(\mathbb{R}^n) , \end{aligned}$$

og de to normer $\|u\|_m$ og

$$\|u\|_{m,\wedge} = (2\pi)^{-n/2} \, \|\langle\xi\rangle^m \hat{u}(\xi)\|_{L^2} \tag{9.14}$$

er ækvivalente normer på $H^m(\mathbb{R}^n)$. Der er det særlige ved normen (9.14), at den let generaliseres til ikke-hele eller endog negative værdier af m, så vi indfører nu (i overensstemmelse med Definition 7.2):

<u>Definition 9.7</u>. *For hvert* $s \in \mathbb{R}$ *defineres Sobolev rummet* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *ved*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \langle\xi\rangle^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} , \tag{9.15}$$

det er et Hilbert rum med skalarprodukt og norm

$$(u|v)_{s,\wedge} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\langle\xi\rangle^{2s} d\xi , \qquad \|u\|_{s,\wedge} = (u|u)^{\frac{1}{2}}_{s,\wedge} . \tag{9.15}$$

At $H^s(\mathbb{R}^n)$ er et Hilbert rum ses af at Fourier transformationen $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$ definerer en <u>isometri</u>

$$H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2_s(\mathbb{R}^n)$$

(jvf. (8.55)), hvor L^2_s jo er et velkendt Hilbert rum. Her er forøvrigt $M_{\langle\xi\rangle^s}$ en isometri af $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ på $L^2(\mathbb{R}^n)$, så vi har et <u>diagram af isometrier</u>:

$$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{(2\pi)^{-n/2}F} & L^2_s(\mathbb{R}^n) \\ \Big\downarrow & \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s) & \Big\downarrow \langle\xi\rangle^s \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow[(2\pi)^{-n/2}F]{} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \tag{9.17}$$

Operatoren $\mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s)$ vil blive betegnet Ξ^s, så der gælder

$$\Xi^s = \mathrm{Op}(\langle\xi\rangle^s)\,, \qquad \Xi^{s+t} = \Xi^s\,\Xi^t \quad \text{for } s,t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.18}$$

Bemærk, at $\Xi^{2M} = (1-\Delta)^M$ når M er hel ≥ 0, mens Ξ^s er en pseudo-differentialoperator for andre værdier af s. Bemærk, at Ξ^s er en isometri af $H^t(\mathbb{R}^n)$ på $H^{t-s}(\mathbb{R}^n)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Man får nu let

<u>Lemma 9.8</u>. *Lad* $s \in \mathbb{R}$.

1^o Ξ^s *er en homeomorfi af* $\mathcal{S}$ *på* $\mathcal{S}$, *og af* $\mathcal{S}'$ *på* $\mathcal{S}'$, *med invers* Ξ^{-s}.

2^o $\mathcal{S}$ *er tæt i* L^2_s *og i* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

<u>Bevis</u>: Som tidligere bemærket er $\mathcal{S}$ tæt i $L^2(\mathbb{R}^n)$, da C_0^∞ er det. Da $\langle\xi\rangle^s \in \mathcal{O}_M$, er $M_{\langle\xi\rangle^s}$ en kontinuert afbildning af $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$, og af $\mathcal{S}'$ ind i $\mathcal{S}'$, for alle s; og da $M_{\langle\xi\rangle^{-s}}$ oplagt er invers hertil, definerer $M_{\langle\xi\rangle^s}$ en homeomorfi af $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$ og af $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$. Ved invers Fourier transformation følger, at Ξ^s er en homeomorfi af $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$ og af $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$, med invers Ξ^{-s}. Tætheden af $\mathcal{S}$ i L^2 medfører nu tæthed af $\mathcal{S}$ i L^2_s ved brug af $M_{\langle\xi\rangle^{-s}}$, og tæthed af $\mathcal{S}$ i H^s ved brug af Ξ^{-s} (jvf. isometridiagrammet (9.17)). $\square$

Punkt 2^o er forøvrigt for s hel ≥ 0 dækket ind af Sætning 7.5. Bemærk, at vi nu har kontinuerte indlejringer

$$\mathcal{S} \subset H^{s'} \subset H^s \subset L^2 \subset H^{-s} \subset H^{-s'} \subset \mathcal{S}'\,, \quad \text{for } s' > s > 0\,, \tag{9.19}$$

så at H^s-rummene i nogen grad "fylder ud" mellem $\mathcal{S}$ og L^2, resp. mellem L^2 og $\mathcal{S}'$. Dog er

(9.20) $$\mathcal{S} \subsetneqq \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s \quad \text{og} \quad \mathcal{S}' \supsetneqq \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s ,$$

hvilket følger af at der tilsvarende gælder

(9.21) $$\mathcal{S} \subsetneqq \bigcap_{s\in\mathbb{R}} L_s^2 \quad , \quad \mathcal{S}' \supsetneqq \bigcup_{s\in\mathbb{R}} L_s^2 ,$$

idet funktionerne i L_s^2 ikke behøver være differentiable, og elementer i $\mathcal{S}'$ ikke behøver være funktioner. (Der er andre rum, hvor man kombinerer polynomiale vækstbetingelser med differentiabilitet, der passer bedre i denne henseende.)

Vi vil nu sætte Sobolev rummene i relation til rum af kontinuert differentiable funktioner; hovedsætningen er her Sobolevs sætning.

Sætning 9.9 (Sobolev.) *Lad* m *være et helt tal* ≥ 0 , *og lad* $s > m + n/2$. *Så er (jvf.* (5.18)*)*

(9.22) $$H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^m_{L^\infty}(\mathbb{R}^n) ,$$

og der gælder for $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$,

(9.23) $$\sup\left\{ |D^\alpha u(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n ,\ |\alpha| \leq m \right\} \leq C_s \, \|u\|_{s,\wedge} .$$

Bevis: For $\varphi \in \mathcal{S}$ gælder for $s = m+t$, $t > n/2$ og $|\alpha| \leq m$,

(9.24) $$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha\varphi(x)| &= \sup_x \left|(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right| \\ &\leq (2\pi)^{-n} c \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)|\langle\xi\rangle^{m+t}\langle\xi\rangle^{-t}d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-n} c \, \|\hat{\varphi}\|_{L_s^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-2t}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = C_s \, \|\varphi\|_{s,\wedge} , \end{aligned}$$

idet integralet af $\langle\xi\rangle^{-2t}$ er konvergent, når $t > n/2$. Dette viser (9.23) for $\varphi \in \mathcal{S}$. Når nu $u \in H^s$, findes ifølge Lemma 9.8 en følge $\varphi_k \in \mathcal{S}$, så $\|u-\varphi_k\|_{s,\wedge} \to 0$ for $k \to \infty$. Ifølge (9.24) er φ_k en Cauchy følge i $C^m_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$, og da dette rum er et Banach rum, eksisterer grænseværdien $v \in C^m_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$. Både konvergens i H^s og i $C^m_{L^\infty}$ medfører konvergens i $\mathcal{S}'$, så $u = v$ som elementer af $\mathcal{S}'$, og dermed som lokalt integrable funktioner. Dette viser indlejringen (9.22), med (9.23). $\square$

Lad os straks illustrere sætningen med en anvendelse:

Sætning 9.10. *Lad* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Så gælder for* $s \in \mathbb{R}$

(9.25) $$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n), \quad \textit{og}$$

(9.26) $$\Delta u \in C^\infty_{L^2}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in C^\infty_{L^2}(\mathbb{R}^n).$$

Bevis: Vi viser først (9.25). Når $u \in H^{s+2}$, er $\Delta u \in H^s$, idet $1-\Delta = \Xi^2$. Omvendt, når $\Delta u \in H^s$ og $u \in H^0$, er

$$(1+\langle\xi\rangle^s|\xi|^2)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Da $|\xi|^2 \geq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)$ for $|\xi| \geq 1$, og $1 \geq c\langle\xi\rangle^{s+2}$ for $|\xi| \leq 1$, følger at

$$\langle\xi\rangle^{s+2}u(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

dvs. $u \in H^{s+2}$. (9.26) fås nu af (9.25) ved at bemærke, at $C^\infty_{L^2}(\mathbb{R}^n) \subset \cap_{s\in\mathbb{N}_0} H^s(\mathbb{R}^n) = \cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n)$ pr. definition, mens $\cap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ ved Sobolevs sætning. □

Specielt er det maksimale definitionsområde for Δ i $L^2(\mathbb{R}^n)$ lig med $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Hypotesen $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ er lidt restriktiv og vil blive slækket senere, når vi også har behandlet Sobolev rummene med negativ eksponent. Lad os først vise, at Sobolevs sætning kan overføres til pæne delmængder af $\mathbb{R}^n$.

Korollar 9.11. *Når* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, *eller* Ω *er begrænset, glat, åben, gælder for* m *og* ℓ *hele* ≥ 0, *med* $\ell > m+n/2$:

(9.27) $$H^\ell(\Omega) \subset C^m_{L^\infty}(\overline{\Omega}), \quad \text{med} \quad \sup\left\{|D^\alpha u(x)| \;\middle|\; x\in\overline{\Omega},\ |\alpha| \leq m\right\} \leq C_\ell \|u\|_\ell .$$

Bevis: Her benyttes Sætning 7.7, som viser eksistensen af en kontinuert afbildning $p: H^\ell(\Omega) \to H^\ell(\mathbb{R}^n)$ for hvilken $u = (pu)|_\Omega$. Når $u \in H^\ell(\Omega)$, er $pu \in H^\ell(\mathbb{R}^n) \subset C^m_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$ ved Sætning 9.9; da er $u = (pu)|_\Omega \in C^m_{L^\infty}(\overline{\Omega})$, og

$$\sup\left\{|D^\alpha u(x)| \;\middle|\; x \in \overline{\Omega},\ |\alpha| \leq m\right\} \leq \sup\left\{|D^\alpha pu(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha| \leq m\right\}$$
$$\leq C_\ell \|pu\|_{\ell,\wedge} \leq C'_\ell \|u\|_{H^\ell(\overline{\Omega})} .$$ □

Normen $\|u\|_{s,\wedge}$ betegnes ofte blot $\|u\|_s$ i det følgende.

9.3. Dualiteter mellem Sobolev rum. Struktursætningen.

Sobolev rummene med negativ eksponent vil nu blive undersøgt. Hovedpointen er, at de vil blive opfattet som dualrum til Sobolev rummene med positiv eksponent! For L^2_s-rummene er dette en oplagt ting, og den tilsvarende sag for H^s fås efter anvendelse af $\mathcal{F}^{-1}$. Vi benytter her den sesquilineære dualitet (altså: dualrummet er rummet af kontinuerte, konjugeret lineære funktionaler).

Sætning 9.12. *Lad* $s \in \mathbb{R}$.

1^0 L^2_{-s} *kan identificeres med dualrummet til* L^2_s, *ved en isometrisk isomorfi, således at funktionen* $u \in L^2_{-s}$ *identificeres med funktionalen* $\Lambda \in (L^2_s)^*$ *hvis og kun hvis*

$$\int u(\xi)\overline{\varphi}(\xi)d\xi = \Lambda(\varphi) \quad \textit{for} \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{9.28}$$

2^0 $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *kan identificeres med dualrummet til* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *ved en isometrisk isomorfi, således at distributionen* $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *identificeres med funktionalen* $\Lambda \in (H^s(\mathbb{R}^n))^*$ *hvis og kun hvis*

$$\langle u, \overline{\varphi}\rangle = \Lambda(\varphi) \quad \textit{for} \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{9.29}$$

Bevis: 1^0 Når $u \in L^2_{-s}$, definerer u en kontinuert funktional Λ_u på L^2_s ved

$$\Lambda_u(v) = \int u(\xi)\overline{v}(\xi)d\xi \quad \text{for} \quad v \in L^2_s,$$

idet

$$|\Lambda_u(v)| = \left|\int \langle\xi\rangle^{-s}u(\xi)\langle\xi\rangle^{s}\overline{v}(\xi)d\xi\right| \leq \|u\|_{L^2_{-s}} \|v\|_{L^2_s} \tag{9.30}$$

ved Schwarz' ulighed. Afbildningen $u \rightsquigarrow \Lambda_u$ er injektiv, thi hvis $\Lambda_u = \Lambda_{u'}$, er $\int (u-u')\varphi d\xi = 0$ for alle $\varphi \in \mathcal{S}$, så $u-u'$ er 0-funktionen, ved du Bois-Reymond's lemma (Lemma 6.1). Når omvendt Λ er en kontinuert funktional på L^2_s, fås ved sammensætning med isometrien $M_{\langle\xi\rangle^{-s}} : L^2 \to L^2_s$ en kontinuert funktional

$$\Lambda' = \Lambda M_{\langle\xi\rangle^{-s}}$$

på L^2. Ved identifikationen af L^2 med dets eget dualrum findes der en entydigt bestemt funktion $f \in L^2$ med samme norm som Λ', så $\Lambda'(v) = (f|v)$ for alle $v \in L^2$. Da er, for $\varphi \in \mathcal{S}$ (der er jo er tæt i L^2_s),

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}\varphi) = \Lambda'(\langle\xi\rangle^{s}\varphi) = (f|\langle\xi\rangle^{s}\varphi) = \int \langle\xi\rangle^{s}f(\xi)\overline{\varphi}(\xi)d\xi ,$$

hvilket viser at $\Lambda = \Lambda_u$ med $u = \langle\xi\rangle^s f \in L^2_{-s}$. Endvidere er $\|u\|_{L^2_{-s}} = \|\langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^s f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\Lambda'\|_{(L^2)^*} = \|\Lambda\|_{(L^2_s)^*}$. - Da $\mathscr{S}$ er tæt i L^2_s , er identifikationen mellem u og Λ bestemt allerede ved (9.28).

2^o Beviset for dette punkt består nu blot i at "oversætte" alle betragtningerne under 1^o, ved brug af $\mathcal{F}^{-1}$ og dennes isometri- og homeomorfiegenskaber. □

Dualiteten mellem H^{-s} og H^s skrives nu også

(9.31) $$\langle u,\bar{v}\rangle_{H^{-s}\,H^s} \text{ eller blot } \langle u,\bar{v}\rangle\ , \quad \text{for } u \in H^{-s}\ ,\ v \in H^s\ ,$$

fordi den stemmer overens med skalarproduktet i $L^2(\mathbb{R}^n)$ og med distributionsdualiteten, når disse har mening. Bemærk, at vi har vist (cf. (9.30))

(9.32) $$|\langle u,\bar{v}\rangle| \leq \|u\|_{-s}\,\|v\|_s \quad \text{når} \quad u \in H^{-s}\ ,\ v \in H^s\ ,$$

der ofte kaldes Schwartz' ulighed (med t) efter Laurent Schwartz. Bemærk også

(9.33) $$\|u\|_{-s} = \|\Lambda_u\|_{(H^s)^*} = \sup\left\{\frac{|\Lambda_u(v)|}{\|v\|_s}\ \Big|\ v \in H^s\setminus\{0\}\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{|\langle u,\bar{v}\rangle|}{\|v\|_s}\ \Big|\ v \in H^s\setminus\{0\}\right\} = \sup\left\{\frac{|\langle u,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_s}\ \Big|\ \varphi \in \mathscr{S}\setminus\{0\}\right\}.$$

Rummene H^{-s} , $s > 0$, indeholder flere egentlige distributioner, jo større s er. For eksempel har vi

(9.34) $$\delta \in H^{-s}(\mathbb{R}^n) \iff s > n/2\ .$$

Mere alment gælder

Sætning 9.13. *Når* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *og er af orden* N , *så er* $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *for* $s > N + n/2$.

Bevis: Lad $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, så er u jo af endelig orden (N) , og der findes ifølge (6.34) en konstant C_N , så der for alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gælder

(9.35) $$|\langle u,\varphi\rangle| = C_N \sup\left\{|D^\alpha\varphi(x)|\ \Big|\ x \in \mathbb{R}^n\ ,\ |\alpha| \leq N\right\}$$

(idet der ikke er nogen restriktioner på støtten af $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). Ved (9.24) fås herefter, at

(9.36) $$|\langle u,\bar{\varphi}\rangle| \le C_s' \,\|\varphi\|_{s,\wedge} \quad \text{for } s > N+n/2\,,$$

hvormed $u \in H^{-s}$ ifølge Sætning 9.12. □

Bemærk, at det såvel for $\mathcal{E}'$ som for H^s-rummene gælder, at de Fourier transformerede rum består af (lokalt kvadratisk integrable) funktioner. For $\mathcal{E}'$ fås dette af Bemærkning 8.12 eller Sætning 9.13, idet det for H^s-rummene ses af definitionen.

Med Sætning 9.13 kan man vise en mere generel sætning om løsningerne til Laplace ligningen

Sætning 9.14. *Lad* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *, eller mere generelt* $u \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\mathbb{R}^n)$. *Så gælder*

(9.37) $$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Bevis: Implikationen "$\Leftarrow$" er klar. For at vise "$\Rightarrow$" bemærker vi, at når $u \in \mathcal{E}'$, er u i et Sobolev rum $H^t(\mathbb{R}^n)$ for et vist t (evt. stort negativt) ved Sætning 9.13. Så er

$$(|\xi|^2\langle\xi\rangle^s + \langle\xi\rangle^t)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\,,$$

hvoraf følger at $\langle\xi\rangle^{s+2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (da $|\xi|^2\langle\xi\rangle^s \ge c\langle\xi\rangle^{s+2}$ for $|\xi| \ge 1$, og $\hat{u}(\xi)|_{\{|\xi|\le 1\}}$ er i $L^2\{|\xi|\le 1\}$). Da er $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$. □

Bemærkning 9.15. Sætning 9.14 viser tydeligt, at Sobolev rummene er meget velegnede til at karakterisere regulariteten af løsninger til $-\Delta u = f$. Denne egenskab deles ikke af rummene af kontinuert differentiable funktioner, idet der gælder $u \in C^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta u \in C^0(\mathbb{R}^n)$, mens det omvendte ikke kan sluttes. Et eksempel i dimension $n = 3$ er funktionen

(9.38) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log|x|}\left(\dfrac{3x_1^2}{|x|^2} - 1\right)\chi(x) & \text{for } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{for } x = 0\,, \end{cases}$$

som er kontinuert og har kompakt støtte, og for hvilken $u = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} * f$ er i $C^1(\mathbb{R}^3) \setminus C^2(\mathbb{R}^3)$ og løser $-\Delta u = f$ i distributionsforstand (dog er $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$).

Der findes en type af (Banach) rum, som er nærmere ved C^k-rummene end Sobolev rummene og fungerer godt i studiet af Δ , nemlig Hölder rummene $C^{k,\sigma}$ med $\sigma \in]0,1[$, hvor

$$C^{k,\sigma}(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega) \mid |D^\alpha(u(x)-u(y))| \le C|x-y|^\sigma \text{ for } |\alpha| \le k\right\}\,,$$

her gælder at $\Delta u \in C^{k,\sigma} \Leftrightarrow u \in C^{k+2,\sigma}$, i hvert fald lokalt. Disse rum fungerer også godt ved ikke-lineære problemer (men er til gengæld ikke særligt nemme at håndtere ved Fourier transformation). Elliptiske differentialligninger i $C^{k,\sigma}$-rum behandles f.eks. i R. Courant - D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics, vol. II (under emnet "Schauder estimates").

Nu kan vi endelig give et nemt bevis for den struktursætning, der blev bebudet i Kapitel 6 (omkring formel (6.17)).

<u>Sætning 9.16.</u> (Struktursætningen.) *Lad* Ω *være åben* $\subset \mathbb{R}^n$ *og lad* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. *Lad* V *være en åben omegn af* supp u *med* $\overline{V}$ *kompakt* $\subset \Omega$, *og lad* M *være et helt tal* $> (N+n)/2$, *hvor* N *er ordenen af* u . *Der findes et system af kontinuerte funktioner* f_α *med støtte i* V *for* $|\alpha| \leq 2M$, *så at*

$$u = \sum_{|\alpha|\leq 2M} D^\alpha f_\alpha . \tag{9.39}$$

Endvidere findes en kontinuert funktion g *på* $\mathbb{R}^n$, *så* $u = (1-\Delta)^M g$ *(og* $g \in H^{n/2+1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ *for hvert* $\varepsilon > 0$*)*.

<u>Bevis:</u> Vi har ifølge Sætning 9.13, at $u \in H^{-s}$ for $s = N + n/2 + \varepsilon$ (med $\varepsilon \in \,]0,1[$). Nu er $H^{-s} = \Xi^t H^{t-s}$ for hvert t . For $t = 2M > N+n$ haves, at $t-s \geq N+n+1-N-n/2-\varepsilon = n/2+1-\varepsilon$, så at $H^{t-s} \subset C^0(\mathbb{R}^n)$, ved Sobolevs sætning. Altså er

$$H^{-s} = \Xi^{2M} H^{2M-s} = (1-\Delta)^M H^{t-s} \subset (1-\Delta)^M C^0(\mathbb{R}^n) ,$$

hvormed der findes et $g \in C^0 \cap H^{n/2+1-\varepsilon}$, så at

$$u = (1-\Delta)^M g .$$

Lad nu $\eta \in C_0^\infty(V)$ med $\eta = 1$ på en omegn af supp u . Så er $u = \eta u = \eta(1-\Delta)^M g$, som ved hjælp af Leibniz' formel omskrives til formen (9.39). □

Som en umiddelbar konsekvens fås følgende sætning for vilkårlige distributioner:

<u>Korollar 9.16.</u> *Lad* Ω *være åben* $\subset \mathbb{R}^n$, *lad* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *og lad* Ω' *være en åben delmængde af* Ω *med* $\overline{\Omega'}$ *kompakt* $\subset \Omega$. *Lad* $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ *med* $\zeta = 1$ *på* Ω' , *og lad* N *være ordenen af* $\zeta u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. *Når* V *er en omegn af* supp ζ *i*

Ω *og* M *hel* $> (N+n)/2$, *så findes et system af kontinuerte funktioner med kompakt støtte i* V , *så* $\zeta u = \Sigma_{|\alpha|\leq 2M} D^\alpha f_\alpha$; *specielt er*

$$u = \sum_{|\alpha|\leq 2M} D^\alpha f_\alpha \quad \text{på } \Omega' . \tag{9.40}$$

Ud fra korollaret og en finere deling af enheden end vi har indført i Kapitel 5 kan man forøvrigt, for hver $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, konstruere et system $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ af kontinuerte funktioner f_α på Ω , som er lokalt endeligt (dvs. kun endeligt mange funktioner er forskellige fra 0 på hver kompakt delmængde af Ω), så at $u = \Sigma_{|\alpha|\in\mathbb{N}_0^n} D^\alpha f_\alpha$ (se f.eks. Theorem 6.28 i Rudin's bog).

Vi kan nu også vise følgende interessante tæthedssætning.

Sætning 9.17. *Lad* Ω *være åben* $\subset \mathbb{R}^n$. *Så er* $C_0^\infty(\Omega)$ *tæt i* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Bevis: Lad $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Vi bemærker først, at når η_ℓ er en følge af funktioner som i Korollar 5.11 2^0, så vil $\eta_\ell u \to u$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$ for $\ell \to \infty$, idet der for hvert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gælder

$$\langle \eta_\ell u,\varphi\rangle = \langle u,\eta_\ell\varphi\rangle = \langle u,\varphi\rangle \quad \text{for} \quad \ell \geq \ell_0 ,$$

når ℓ_0 er så stor at $\operatorname{supp}\varphi \in K_{\ell_0}$, jvf. også Sætning 6.9. Det er da tilstrækkeligt at approksimere $\eta_\ell u$ i $\mathcal{D}'(\Omega)$ med funktioner i $C_0^\infty(\Omega)$. Men $\eta_\ell u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ og tilhører da $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ for et vist s (når $\eta_\ell u$ forlænges med 0 i $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$). Nu er $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tæt i $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, så der findes en følge $\varphi_k \in \mathcal{S}$ med $\varphi_k \to \eta_\ell u$ i $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Denne følge konvergerer også i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (jvf. (9.19) eller verificer direkte). Da vil $\eta_{\ell+1}\varphi_k \to \eta_{\ell+1}\eta_\ell u = \eta_\ell u$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ for $k \to \infty$, og dermed i $\mathcal{D}'(\Omega)$ (jvf. Sætning 6.9). (Sætningen kan også vises ved almene resultater fra funktionalanalyse.) □

Sætningen tillader at vise mange egenskaber for distributioner ved reduktion til testfunktioner. Med små modifikationer giver beviset tillige at $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (med dettes topologi), og at $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $\mathcal{E}'(\Omega)$ (med topologi som dualrummet til $C^\infty(\Omega)$, jvf. Øvelse 6.11).

Som en anvendelse af sætningen kan vi definere foldning af distributioner med testfunktioner: Når $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ og u_k er en følge i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, som konvergerer mod u i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, gælder for ψ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k*\psi,\varphi\rangle = \lim_{k\to\infty} \iint u_k(x-y)\psi(y)\varphi(x)dy\, dx = \lim_{k\to\infty} \iint u_k(z)\psi(x-z)\varphi(x)dx\, dz =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle u_k , S\psi * \varphi\rangle = \langle u , S\psi*\varphi\rangle ,$$

hvor $S\psi(x)$ står for $\psi(-x)$ som i (8.73). Vi kan da indføre:

Definition 9.18. *For* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *og* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *defineres* $u*\psi$ *ved*

(9.41) $$u*\psi = \lim_{k\to\infty} u_k*\psi \quad i \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) ,$$

hvor u_k *er en følge i* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *der konvergerer mod* u *i* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definitionen er åbenbart uafhængig af valget af følgen u_k idet vi tillige har vist:

Lemma 9.19. *Når* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *og* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *opfylder* $u*\psi$ *for alle* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

(9.42) $$\langle u*\psi,\varphi\rangle = \langle u , S\psi*\varphi\rangle .$$

Definitionen og lemmaet tillader en mængde regninger med foldningsprodukter. Blandt andet får man umiddelbart ved brug af (9.42)

Lemma 9.20. *Når* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, *gælder*

(9.43) $$h_j*u \to u \quad i \ \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) .$$

Argumenterne generaliseres uden videre til tilfældet hvor $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ og $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Vi kan da også udvide Lemma 8.18 til vilkårlige tempererede distributioner (jvf. Øvelse 9.2).

Man kan også generalisere argumenterne til tilfældet hvor $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ og $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Det er nu også muligt at definere et foldningsprodukt af to distributioner under visse omstændigheder (f.eks. når den ene har kompakt støtte, eller når begge har støtte i en "kvadrant" $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j \geq 0 \text{ for } j=1,\dots,n\}$), men herom må vi henvise til den videregående litteratur.

9.4. Regularitetsteori for elliptiske differentialligninger.

Når $P(x,D)$ er en m'te ordens differentialoperator (9.6) med symbolet (9.7), kaldes m'te ordens delen for principaldelen

$$P_m(x,D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D^\alpha , \tag{9.44}$$

og det tilhørende symbol kaldes principalsymbolet

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha ; \tag{9.45}$$

man møder også betegnelsen det karakteristiske polynomium for $p_m(x,\xi)$. Operatoren $P(x,D)$ kaldes elliptisk på M $(M \subset \mathbb{R}^n)$, når

$$p_m(x,\xi) \neq 0 \quad \text{for} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} , \text{ alle } x \in M . \tag{9.46}$$

Laplace operatoren, hvis symbol og principalsymbol er lig $-|\xi|^2$, er elliptisk på $\mathbb{R}^n$.

Argumentationen i Sætning 9.14 kan ret let udvides til andre elliptiske operatorer med konstante koefficienter a_α . Når en differentialoperator har variable koefficienter, skal der mere til end blot Fourier transformation. Vi vil i det følgende vise, hvordan Sætning 9.14 kan generaliseres til elliptiske differentialoperatorer af orden m med konstante koefficienter i principaldelen og variable koefficienter iøvrigt.

Hertil har vi brug for lokalt definerede Sobolev rum. For nemheds skyld nøjes vi med at betragte dem for hele eksponenter.

Definition 9.21. *Lad* $s \in \mathbb{Z}$, *og lad* Ω *være en åben delmængde af* $\mathbb{R}^n$. *Rummet* $H^s_{loc}(\Omega)$ *defineres som mængden af distributioner* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *for hvilke* $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *for alle* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *(hvor* φu *som sædvanlig tænkes forlænget med 0 uden for* Ω *).*

Af hensyn til denne karakterisering bemærkes:

Lemma 9.22. *Lad* $s \in \mathbb{Z}$.

1° *For hvert* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *eller* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *er multiplikation med* f *en kontinuert operator fra* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *ind i* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2° *For hvert* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *er* D^α *en kontinuert operator fra* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *ind i* $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

Bevis: 1^o Lad $s \geq 0$. Det følger umiddelbart af Leibniz' formel, at

$$(9.47) \qquad \|fu\|_s \leq c_s \sup\left\{|D^\alpha f(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n ,\ |\alpha| \leq s\right\} \|u\|_s ,$$

hvilket viser kontinuiteten for $s \geq 0$. For $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ benytter vi Sætning 9.12 og (9.47):

$$|\langle fu , \varphi\rangle| = |\langle u , f\varphi\rangle| \leq \|u\|_{-s}\|f\varphi\|_s$$
$$\leq \|u\|_{-s}\ c_s \sup\left\{|D^\alpha f(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n ,\ |\alpha| \leq s\right\} \|\varphi\|_s ,$$

hvormed $fu \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ med

$$(9.48) \qquad \|fu\|_{-s} \leq \|u\|_{-s}\ c_s \sup\left\{|D^\alpha f(x)| \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n ,\ |\alpha| \leq s\right\}$$

(jvf. (9.33)), hvilket viser kontinuiteten.

2^o At D^α afbilder $H^s(\mathbb{R}^n)$ kontinuert ind i $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ses af at

$$\|D^\alpha u\|_{s-|\alpha|,\wedge} = c\ \|\xi^\alpha\langle\xi\rangle^{s-|\alpha|}\hat{u}(\xi)\|_0 \leq c\ \|\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi)\|_0 = \|u\|_{s,\wedge} \quad \text{for} \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n) .$$

$\square$

Lemmaet medfører bl.a., at for at vise at en distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ligger i $H^s_{loc}(\Omega)$ er det nok at vise f.eks. at $\eta_\ell u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ for funktionerne indført i Korollar 5.11 (for et givet $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ vælges ℓ så stor, at $\operatorname{supp}\varphi \subset K_\ell$; så er $\varphi u = \varphi\eta_\ell u$). Det er også tilstrækkeligt for at $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tilhører $H^s_{loc}(\Omega)$, at der for hvert $x \in \Omega$ findes en omegn ω og en testfunktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ med $\psi = 1$ på ω , så at $\psi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$; thi for hvert ℓ kan $K_{\ell+1}$ overdækkes af et endeligt system af sådanne omegne $\omega_1,\dots,\omega_N$, og

$$1 \leq \psi_1(x) + \dots + \psi_N(x) \leq N \quad \text{for} \quad x \in K_{\ell+1} ,$$

så at

$$\eta_\ell u = \sum_{j=1}^N \frac{\eta_\ell}{\psi_1+\dots+\psi_N}\psi_j u \in H^s(\mathbb{R}^n) .$$

Rummet $H^s_{loc}(\Omega)$ er et Fréchet rum med topologien defineret ved seminormerne

$$(9.49) \qquad p_\ell(u) = \|\eta_\ell u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \quad \text{for } \ell = 1,2,\dots .$$

Bemærkning 9.23. For fuldstændighedens skyld vil vi nævne, at $H^s_{loc}(\Omega)$ har dualrummet $H^{-s}_{comp}(\Omega)$ (som det selv er dualrum til), på lignende måde som i Sætning 9.12 (og Øvelse 5.3 og 5.8). Her er

(9.50) $$H^t_{comp}(\Omega) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} H^t_{K_\ell} ,$$

hvor $H^t_{K_\ell}$ er det afsluttede underrum af $H^t(\mathbb{R}^n)$ bestående af elementerne med støtte i K_ℓ ; rummet $H^t_{comp}(\Omega)$ forsynes med induktiv limes topologien.

Af Lemma 9.22 fås endvidere

Lemma 9.24. *Lad* $s \in \mathbb{Z}$. *Når* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *og* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, *er operatoren* $u \sim fD^\alpha u$ *en afbildning af* $H^s_{loc}(\Omega)$ *ind i* $H^{s-|\alpha|}_{loc}(\Omega)$.

Bevis: Når $u \in H^s_{loc}(\Omega)$, haves for hvert $j = 1,\dots,n$, hvert $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\varphi(D_j u) = D_j(\varphi u) - (D_j\varphi)u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n) ,$$

idet $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ medfører $D_j(\varphi u) \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, og $D_j\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Altså sender D_j rummet $H^s_{loc}(\Omega)$ ind i $H^{s-1}_{loc}(\Omega)$, og det fås ved iteration, at D^α sender $H^s_{loc}(\Omega)$ ind i $H^{s-|\alpha|}_{loc}(\Omega)$. Da $f\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, når $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, ses at $fD^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}_{loc}(\Omega)$. □

Det kan let kontrolleres, at afbildningen i Lemma 9.24 er kontinuert. Vi bemærker følgende oplagte konsekvens af Sobolevs sætning:

Lemma 9.25. *For* Ω *åben* $\subset \mathbb{R}^n$ *gælder*

(9.51) $$\bigcap_{s\in\mathbb{Z}} H^s_{loc}(\Omega) = C^\infty(\Omega) .$$

Nu vil vi vise regularitetssætningen:

Sætning 9.26. *Lad* Ω *være en åben delmængde af* $\mathbb{R}^n$, *og lad* $P = P(x,D)$ *være en elliptisk differentialoperator af orden* m *på* Ω , *med konstante koefficienter i principaldelen og* C^∞*-koefficienter i de øvrige led. Der gælder for alle* $s \in \mathbb{Z}$

(9.52) $$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ med } Pu \in H^s_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega) ,$$

og specielt

(9.53) $$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ med } Pu \in C^\infty(\Omega) \Leftrightarrow u \in C^\infty(\Omega) .$$

Bevis: Implikationen fra højre mod venstre er oplagt i (9.53), og den følger i (9.52) af Lemma 9.24. Lad os nu vise $\Rightarrow$ i (9.52). Ifølge det givne er P af formen (idet vi kan antage at $m > 0$)

$$P(x,D) = P_m(D) + Q(x,D) , \tag{9.54}$$

hvor $P_m(D) = \mathrm{Op}(p_m)$ for et homogent polynomium $p_m(\xi)$ med eneste nulpunkt $\xi = 0$, og hvor Q er af orden $m-1$ med C^∞-koefficienter. Den formelt adjungerede operator $P'(x,D)$ har da formen

$$P'(x,D) = P_m'(D) + Q'(x,D) ,$$

hvor $P_m'(D) = \mathrm{Op}(\overline{p}_m)$, og Q' er af orden $m-1$. Ved sammensætning fås en differentialoperator

$$L(x,D) = P'(x,D)P(x,D) = \mathrm{Op}(\overline{p}_m p_m) + R(x,D) ,$$

hvor $\overline{p}_m p_m$ opfylder

$$c\ |\xi|^{2m} \leq \overline{p}_m(\xi)p_m(\xi) \leq C\ |\xi|^{2m} \quad \text{for} \quad \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

med $0 < c \leq C$, og $R(x,D)$ er af orden $2m-1$. Når $P(x,D)u \in H^s_{loc}(\Omega)$, er $L(x,D)u = P'Pu \in H^{s-m}_{loc}(\Omega)$ ifølge Lemma 9.24. Hvis vi blot kan vise implikationen $\Rightarrow$ i (9.52) for L, er vi færdige, thi dette vil give at $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$.

Vi kan derfor antage fra nu af, at m er lige, og

$$c\ |\xi|^{m} \leq p_m(\xi) \leq C\ |\xi|^{m} \quad \text{for} \quad \xi \in \mathbb{R}^n . \tag{9.55}$$

Lad u opfylde venstre side af (9.52), og lad $x \in \Omega$. Ifølge beskrivelserne af $H^t_{loc}(\Omega)$ er det nok at vise, at der findes en omegn ω af x og en funktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ som er 1 på ω, så $\psi u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$.

Vælg først $r > 0$, så $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$. Lad $V_j = B(x,r/j)$ for $j = 1,2,\ldots$. Som i Korollar 5.11 findes for hvert j en funktion $\psi_j \in C_0^\infty(V_j)$ med $\psi_j = 1$ på V_{j+1}. Specielt er $\psi_j\psi_{j+1} = \psi_{j+1}$.

Da $\psi_1 u$ kan opfattes som en distribution på $\mathbb{R}^n$ med kompakt støtte, er $\psi_1 u$ af endelig orden, og der findes ifølge Sætning 9.13 et tal $M \in \mathbb{Z}$, så $\psi_1 u \in H^{-M}(\mathbb{R}^n)$. Vi vil nu vise induktivt, at

$$\psi_{j+1}u \in H^{-M+j}(\mathbb{R}^n) \cup H^{s+m}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{for } j = 1,2,\ldots . \tag{9.56}$$

Når j er så stor, at $-M+j \geq s+m$, er $\psi_{j+1}u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$, og det ønskede er opnået med $\omega = V_{j+2}$ og $\psi = \psi_{j+1}$.

Induktionsskridtet går på følgende måde: Lad det være givet, at

$$\psi_j u \in H^{-M+j-1} \cup H^{s+m} \text{ , samt } Pu \in H^s_{loc}(\Omega) \text{ .} \tag{9.57}$$

Nu skriver vi

$$Pu = (P_m(D)+1)u + (Q(x,D)-1)u \text{ ,}$$

og bemærker, at der ved Leibniz' formel gælder, for hvert ℓ ,

$$\psi_\ell Pu = (P_m(D)+1)\psi_\ell u + S_\ell(x,D)u \text{ ,} \tag{9.58}$$

hvor $S_\ell(x,D) = \psi_\ell P - (P_m+1)\psi_\ell$ er en differentialoperator af orden $m-1$, som har koefficienter støttet i supp $\psi_\ell \subset V_\ell$. Vi får da

$$(P_m(D)+1)\psi_{j+1}u = \psi_{j+1}Pu - S_{j+1}(x,D)u = \psi_{j+1}P\psi_j u - S_{j+1}(x,D)\psi_j u \text{ ,} \tag{9.59}$$

da ψ_j er 1 på V_{j+1} , hvor ψ_{j+1} og koefficienterne til S_{j+1} har deres støtte. Ifølge det givne (9.57) samt Lemma 9.24 er

$$S_{j+1}\psi_j u \in H^{-M+j-1-m+1} \cup H^{s+m-m+1} = H^{-M+j-m} \cup H^{s+1} \text{ ,}$$

og

$$\psi_{j+1}P\psi_j u = \psi_{j+1}Pu \in H^s \text{ ,}$$

dvs. i alt

$$(P_m(D)+1)\psi_{j+1}u \in H^{-M+j-m} \cup H^s \text{ .} \tag{9.60}$$

Nu er

$$P_m(D)+1 = \mathrm{Op}(p_m(\xi)+1) \text{ ,}$$

som oplagt definerer en isomorfi af $H^k(\mathbb{R}^n)$ på $H^{k-m}(\mathbb{R}^n)$ for alle k , så det kan sluttes af (9.60), at

$$\psi_{j+1}u \in H^{-M+j} \cup H^{s+m} \text{ .}$$

Hermed er det vist, at (9.57) medfører (9.56), og induktionen fungerer som angivet.

Den sidste implikation i (9.53) følger nu af Lemma 9.25. □

En argumentation som i ovennævnte bevis kaldes i engelsk matematisk litteratur ofte et "bootstrap"-argument, hvilket hentyder til et af Münchhausens eventyr, hvor han sad fast i et hængedynd, og skridt for skridt halede sig selv op ved støvlestropperne.

Korollar 9.27. *Når* P *er en elliptisk differentialoperator på* Ω *af orden* m, *med konstante koefficienter i principalsymbolet, så er*

$$D(P_{max}) \subset H^m_{loc}(\Omega) . \tag{9.61}$$

Sætningen og korollaret kan også vises for elliptiske operatorer med helt variable koefficienter, ved at man i omegnen af hvert $x_0 \in \Omega$ benytter at $P_m(x,D)$ er tæt ved $P_m(x_0,D)$ i en passende forstand; vi skal ikke komme ind på detaljerne her. Der vil i almindelighed ikke gælde at $D(P_{max})$ ligger i $H^m(\Omega)$, med mindre dimensionen n er lig 1.

Med hensyn til den minimale realisation vil vi blot vise følgende.

Sætning 9.28. *Lad* $P(D)$ *være elliptisk af orden* m *på* $\mathbb{R}^n$, *med konstante koefficienter. Lad* Ω *være åben* $\subset \mathbb{R}^n$. *Den minimale realisation* P_{min} *af* $P(D)$ *i* $L^2(\Omega)$ *opfylder*

$$D(P_{min}) = H^m_0(\Omega) . \tag{9.62}$$

Når $\Omega = \mathbb{R}^n$, *er* $D(P_{min}) = D(P_{max}) = H^m(\mathbb{R}^n)$.

Bevis: For $\Omega = \mathbb{R}^n$ har vi allerede vist, at $D(P_{min}) = D(P_{max})$, og det sidste udsagn får vi ved at vise, at graf-normen her er ækvivalent med $H^m(\mathbb{R}^n)$-normen. Hertil bemærkes at ved Plancherel-Parsevals sætning er

$$\|u\|_0^2 + \|Pu\|_0^2 = (2\pi)^{-n}(\|\hat{u}\|_0^2 + \|\widehat{Pu}\|_0^2) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|p(\xi)|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi .$$

Da $p(\xi)$ opfylder

$$p(\xi) = p_m(\xi) + q(\xi) ,$$

hvor der med positive konstanter c og C gælder

$$c\,|\xi|^m \le |p_m(\xi)| \le C\,|\xi|^m , \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

$$|q(\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{m-1} \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n ,$$

har vi, at

$$|p(\xi)| \ge |p_m(\xi)| - |q(\xi)| \ge |\xi|^m(c - |\xi|^{-m}q(\xi))$$

$$\ge \frac{c}{2}\,|\xi|^m \quad \text{for } |\xi| \text{ tilstrækkeligt stor,}$$

hvormed der findes positive konstanter c' og C', så at

$$c'\langle\xi\rangle^{2m} \leq 1 + |p(\xi)|^2 \leq C'\langle\xi\rangle^{2m} .$$

Det ses heraf, at graf-norm og H^m-norm er ækvivalente, hvormed den sidste påstand i sætningen er vist.

For påstanden vedrørende realisationen i $L^2(\Omega)$ observerer vi nu, at afslutningen af $C_0^\infty(\Omega)$ i graf-norm og i H^m-norm må være identiske, hvilket viser (9.62). $\square$

Vi har ovenfor behandlet regularitet af løsninger til elliptiske differentialligninger. Også eksistens af løsninger kan diskuteres i rammen af Sobolev rum og Fourier integraler. En lettilgængelig behandling af partielle differentialligninger, byggende på distributionsteori, er givet af F. Treves: "Basic Linear Partial Differential Equations". Også L. Hörmander: "The Analysis af Linear Partial Differential Operators" I-IV kan anbefales for den, der ønsker et meget dybere kendskab til den moderne teori for differentialoperatorer.

Bemærkning 9.29. Teorien for elliptiske operatorer kan umiddelbart videreudvikles i flere retninger. Lad os nævne følgende to.

1° Schrödinger operatoren. Hermed menes i reglen en realisation af differentialoperatoren $P_V = -\Delta + V$ på $\mathbb{R}^n$, hvor V er en multiplikationsoperator (med en funktion $V(x)$, der kaldes potentialet). Som vi har set, er $P_0|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}$ essentielt selvadjungeret i $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Korollar 9.6). Det har betydning at afgrænse klasser af potentialer V, for hvilke P_V, defineret på $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, bliver essentielt selvadjungeret, samt at beskrive numeriske værdimængder, spektre og andre karakteristiska ved disse operatorer. Operatorerne studeres i kvantemekanik og specielt spredningsteori, hvor man undersøger sammenhængen mellem $\exp(itP_0)$ og $\exp(itP_V)$.

2° Randværdiproblemer i dimension $n \geq 2$. Man betragter her Laplace operatoren og andre elliptiske operatorer på glatte åbne delmængder Ω af $\mathbb{R}^n$. Teorien er forberedt med sætningerne i Kapitel 7. Man kan nu vise, at randafbildningen

$$\gamma_j : u \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u|_{\partial\Omega} ,$$

defineret på $C^m(\overline{\Omega})$, udvides til en kontinuert afbildning af Sobolev rummet $H^m(\Omega)$ over i $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ når $m > j$; her defineres $H^s(\partial\Omega)$ som i Afsnit 9.1 når $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$, og alment ved hjælp af lokale koordinater. (Sætning 7.14 generaliseres i tilfældet $n \geq 2$ til, at $H_0^m(\Omega)$ består af de H^m-funktioner u, for hvilke $\gamma_j u = 0$ for $j = 0,1,\dots,m-1$.) Derefter kan randbetingelser defineres med god mening i Sobolev rum, og der kan udvikles en teori for selvadjungerede eller Lax-Milgram realisationer af elliptiske operatorer A på Ω , bestemt ved randbetingelser.

Friedrichs' sætning (Sætning 2.17) giver eksistensen, i tilfældet hvor A_{min} er symmetrisk og nedad begrænset, af den selvadjungerede realisation, der i en vis forstand ligger tættest på A_{min} . Når A er af 2. orden med positivt principalsymbol, viser det sig, at denne realisation netop repræsenterer Dirichlet betingelsen $\gamma_0 u = 0$. Lax-Milgrams sætning (Sætning 2.14) giver adgang til at definere mange flere realisationer (inklusive Friedrichs realisationen), f.eks. i 2. ordens tilfældet også den realisation, der repræsenterer Neumann betingelsen $\gamma_1 u = 0$, eller mere generelle betingelser (f.eks. Robin betingelser $\gamma_1 u = a(x)\gamma_0 u$; "skæve Neumann betingelser" $\gamma_1 u = S\gamma_0 u$ hvor S er en første ordens differentialoperator i $\partial\Omega$; eller "blandede betingelser" hvor $\gamma_0 u = 0$ på en del af randen og $\gamma_1 u = 0$ på resten). Ved brugen af Lax-Milgrams sætning kan man spille på, dels valget af forskellige sesquilineære former $a(u,v)$ (til samme differentialoperator), dels valget af forskellige rum V (i 2. ordens tilfældet tages gerne rum V med $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$).

Den generelle teori i Kapitel 2 sikrer altså eksistensen af sådanne realisationer, hvorefter der resterer det arbejde at konkretisere deres udseende mere præcist, hvilket indebærer dybtgående analyser - bl.a. regularitetsteori for randværdiproblemer. (Det er ikke helt nemt at vise, at Friedrichs udvidelsen af A_{min} på et glat åbent område Ω , med $A = -\Delta$, har definitionsområdet $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$; vanskeligheden ligger i at opnå $H^2(\Omega)$ og ikke blot $H^2_{loc}(\Omega)$, der sikres af Korollar 9.27 ovenfor.)

Med disse realisationer kan man nu også løse evolutionsligninger (med randbetingelser), som gennemgået i Kapitel 3, idet jo Lax-Milgram operatorer og skævselvadjungerede operatorer optræder som infinitesimale frembringere for semigrupper og grupper, jvf. side 3.12 - 13.

ØVELSER TIL KURSET

MODERNE ANALYSE MED ANVENDELSER

Denne opgavesamling er en blanding af, dels træningsopgaver i direkte tilknytning til teksten, dels uddybende opgaver. Nogle er fremstillet til formålet, andre er lånt fra opgavesamlinger rundt omkring. Specielt er en stor del af Esben Kehlets opgaver fra det tidligere Matematik 323 medtaget i opgaverne til Kapitel 2 og 3 (herunder nogle opgaver, der kan bruges, når spektralteori for ubegrænsede operatorer indgår i det gennemgående stof).

Øvelser i tilknytning til Kapitel 1:

1.1. Vis Taylors formel (1.15).

1.2. Vis, at $A_s \subset A_w$. Vis, at operatoren A_w i Hilbertrummet $H = L^2(I)$ er den adjungerede til operatoren $-A_0$, samt at iA_0 er symmetrisk (definitioner af disse begreber findes i Kapitel 2).

1.3. Vis, at operatoren $\frac{d}{dx}$ i $C^0(\overline{I})$ med definitionsmængde $C^1(\overline{I})$ er en afsluttet operator.

Øvelser i tilknytning til Kapitel 2.

2.1 Lad H være et separabelt Hilbertrum, med den ortonormale basis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Lad V betegne underrummet af (endelige) linearkombinationer af basisvektorerne. Definer operatoren T i H med $D(T) = V$ ved:

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j e_1 .$$

Vis, at T ikke har en afslutning. Find T^*, og find afslutningen af $G(T)$.

2.2 Med H og T som i forrige øvelse, lad T_1 være restriktionen af T med $D(T_1) = V_1$, hvor V_1 er underrummet af linearkombinationer af basisvektorerne e_j med $j \geq 2$. Vis, at T_1 er en symmetrisk operator, der ikke kan afsluttes.
Find en isometri U af et underrum af H ind i H, så at $U - I$ er injektiv, men $\overline{U} - I$ ikke er injektiv.

2.3 Vis, at en operator $T: X \to Y$ er afsluttet, hvis og kun hvis $D(T)$ er fuldstændigt med hensyn til grafnormen.

2.4 Vis, at når R, S og T er operatorer i et Banachrum X, så er $RS + RT \subset R(S+T)$. Undersøg eksemplet

$$S = \frac{d}{dx}, \quad T = -\frac{d}{dx}, \quad R = \frac{d}{dx},$$

for Banach rummet $C^0([0,1])$.

2.5 Lad H være et Hilbertrum, og lad B og T være operatorer i H, med $B \in \mathbb{B}(H)$. Vis følgende påstande:
(a) Hvis T er afsluttet, er TB afsluttet.
(b) Hvis T er tæt defineret, er T^*B^* afsluttet, men ikke nødvendigvis tæt defineret; og BT er tæt defineret, men ikke nødvendigvis afsluttelig. Endvidere er $T^*B^* = (BT)^*$.
(c) Hvis T og T^* er tæt defineret, og BT er afsluttet, så er T afsluttet og T^*B^* tæt defineret, og $BT = (T^*B^*)^*$.
(d) Hvis T er tæt defineret og afsluttet, og TB er tæt defineret, så er $(TB)^* = \overline{B^*T^*}$.

2.6 Find, f.eks. for $H = L^2(]0,1[)$, selvadjungerede operatorer $B \in \mathbb{B}(H)$ og T i H, så at TB ikke er tæt defineret og BT ikke kan afsluttes. (T kan f.eks. være realisationen A_1 i afsnit 2.4, og B kan vælges så dim $R(B) = 1$.)

2.7 Undersøg (2.12) ved brug af eksemplerne i Øvelse 2.4 og 2.6.

2.8 Vis, at hvis operatoren T i H er tæt defineret, og $(Tx|x) = 0$ for alle $x \in D(T)$, så er $T = 0$. Kan forudsætningen om $\overline{D(T)} = H$ undværes?

2.9 Lad T være en tæt defineret operator i H med $D(T) \subset D(T^*)$. Vis, at hvis $\nu(T)$ er begrænset, så er T begrænset. (Man kan betragte de symmetriske operatorer $\mathrm{Re}\, T = \frac{1}{2}(T+T^*)$ og $\mathrm{Im}\, T = \frac{1}{2i}(T-T^*)$.)

2.10 Er der andre selvadjungerede operatorer $\tilde{A}$ end A_1 , der opfylder $A_0 \subset \tilde{A} \subset A_{ac}$? (Spørgsmål i tilknytning til Afsnit 2.4.)

2.11 Find en selvadjungeret operator i $L^2(]a,b[)$ der er en udvidelse af $-\frac{d^2}{dx^2}$ på $C_0^\infty(]a,b[)$ (en realisation af $-\frac{d^2}{dx^2}$). Samme spørgsmål for $\frac{d^4}{dx^4}$. (Man kan f.eks. benytte Sætning 2.11.)

2.12 Lad $I =]0,\infty[$ og betragt Hilbertrummet $H = L^2(I)$ (idet det regnes for kendt, at $C_0^\infty(I)$ er en tæt delmængde heri). Operatoren T med $D(T) = C_0^\infty(I)$ og virkning $Tu = D_x u$ udvides ved afslutning til en operator $\overline{T}$ i H .

(a) Vis, at ligningen $u'(t) + u(t) = f(t)$ har en løsning i $L^2(I)$ for hvert $f \in C_0^\infty(I)$. (Løsningsmetoden er kendt fra Matematik 1.)

(b) Vis, at funktionen e^{-t} er ortogonal på $R(T+iI)$.

(c) Vis, at $\overline{T}$ er maksimal symmetrisk, men ikke har en selvadjungeret udvidelse.

2.13 Definer J_1 som restriktionen af operatoren J i Afsnit 2.4 med $D(J_1) = \{u \in L^2(I) \mid (u|1) = 0\}$. Har J_1 nogen selvadjungerende udvidelser?

2.14 Forsyn $R(J)$ med den ved J inducerede norm fra $L^2(I)$, dvs. $\|v\|_{R(J)} = \|J^{-1}v\|_{L^2(I)}$, og forsyn $H^1_{ac}(I)$ med normen defineret ved

$$\|v+c\|_{H^1_{ac}(I)} = \|v\|_{R(J)} + |c|$$

for $v \in R(J)$, $c \in \mathbb{C}$. Vis, at $H^1_{ac}(I)$ er et Banach rum, og der gælder for alle $u \in C^1(\overline{I})$

$$\|u\|_{C^1(\bar{I})} \geq c_1 \|u\|_{H^1_{ac}(I)} \geq c_2 \|u\|_{C^0(\bar{I})}$$

med positive konstanter c_1 og c_2 .

2.15 Lad H være et separabelt Hilbertrum, med den ortonormale basis $(e_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. For hvert $j > 0$ sættes $f_j = e_{-j} + je_j$. Lad V og W være afslutningen af rummet af linearkombinationer af henholdsvis vektorerne $(e_j)_{j>0}$ og vektorerne $(f_j)_{j>0}$. Vis at $V+W$ er tæt i H , men ikke afsluttet. (Betragt for eksempel vektoren $x = \Sigma_{j>0} \frac{1}{j} e_{-j}$.)

2.16 Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$, og V et tæt underrum.
(a) For ethvert $x \in H$ er $\{x\}^\perp \cap V$ tæt i $\{x\}^\perp$. (Vælg f.eks. følger x_n og y_n fra V , der konvergerer mod x , henholdsvis $y \in \{x\}^\perp$, og betragt, for $\|x\| = 1$, $(x_n|x)y_n - (y_n|x)x_n$.)

(b) For ethvert endeligdimensionalt underrum K af H er $K^\perp \cap V$ tæt i K .
(c) Til x og y i H med $x \perp y$ findes følger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fra V , så at $x_n \to x$, $y_n \to y$, og

$$(x_n|y_m) = 0 \quad \text{for alle } n \text{ og } m .$$

(Vælg rekursivt x_{n+1} , så $\|x-x_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}$ og $x_{n+1} \perp \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y\}$, og y_{n+1} tilsvarende.)

2.17 Lad X og Y være Banach rum, og lad $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af operatorer i $\mathbb{B}(X,Y)$. Antag, at der findes en konstant $c > 0$, så at $\|T_n\| \leq c$ for alle n , samt at der for x i et tæt underrum V af X gælder at $T_n x$ er konvergent i Y . Vis at der findes en entydigt bestemt operator $T \in \mathbb{B}(X,Y)$, så $T_n x \to Tx$ for alle $x \in X$. (Man kan bruge et $\varepsilon/3$-argument.)

2.18 Lad A være en operator i et Hilbertrum H , således at $D(A^2) = D(A)$ og $A^2 x = -x$ for $x \in D(A)$. Vis, at $D(A)$ er direkte sum af egenrummene for A svarende til egenværdierne $+i$ og $-i$, og at

$$G(A) = V_+ \oplus V_- ,$$

hvor $V_\pm = \{\{x,y\} \in G(A) \mid y = \pm ix\}$.

2.19 Lad T være en tæt defineret, afsluttet symmetrisk operator på et Hilbertrum H .

(a) Vis, at

$$G(T^*) = G(T) \oplus W_+ \oplus W_- \quad ,$$

hvor $W_\pm = \{\{x,y\} \in G(T^*) \mid y = \pm ix\}$; samt at

$$D(T^*) = D(T) \dotplus Z(T^*-iI) \dotplus Z(T^*+iI) \ .$$

(Man kan bruge Øvelse 2.18 .)
(b) Lad S være en afsluttet, symmetrisk operator, der udvider T , $T \subseteq S$. Vis, at hvis u og $v \in D(T^*)$ med $T^*u = iu$, $T^*v = -iv$ og $u+v \in D(S)$, så er $\|u\| = \|v\|$. Vis, at der findes en isometri U af et afsluttet underrum K af $Z(T^*-iI)$ ind i $Z(T^*+iI)$, så at

$$D(S) = \{x+u+Uu \mid x \in D(T) \ , u \in K\} \ , \qquad \text{med}$$
$$S(x+u+Uu) = Tx + iu - iUu \ .$$

Omvendt er enhver operator defineret på denne måde en afsluttet, symmetrisk udvidelse af T .

2.20 En operator N i et Hilbertrum H kaldes normal, hvis N er afsluttet og tæt defineret, og $NN^* = N^*N$. Vis, at hvis N er en tæt defineret operator, og N og N^* er metrisk ens, dvs. $D(N) = D(N^*)$ og $\|Nx\| = \|N^*x\|$ for alle $x \in D(N)$, så er N normal. (Det omvendte gælder også, det vises f.eks. i Rudin's bog afsnit 13.32.)

2.21 Lad H være et separabelt Hilbertrum. Vis, at der findes en tæt defineret, afsluttet, ubegrænset operator A i H , der opfylder $A^2 = I|_{D(A)}$. (Jvf. Øvelse 2.15 og 2.18.) Vis, at A ikke kan være selvadjungeret, eller symmetrisk.

2.22 Lad X og Y være vektorrum, og lad $A: X \to Y$ og $B: Y \to X$ være operatorer med $R(A) \subset D(B)$ og $R(B) \subset D(A)$. Lad $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ og lad $k \in \mathbb{N}$. Vis, at λ er egenværdi for AB med multiplicitet k, hvis og kun hvis λ er egenværdi for BA med multiplicitet k .

2.23 Lad S være en tæt defineret, afsluttet, symmetrisk operator i et Hilbertrum H , med $m(S) > 0$. Vis, at $D(S) \cap Z(S^*) = \{0\}$. Vis, at operatoren R defineret ved

$$D(R) = D(S) \dotplus Z(S^*)$$
$$R(v+z) = Sv \ , \quad \text{når} \quad v \in D(S) \quad \text{og} \quad z \in Z(S^*)$$

er en selvadjungeret udvidelse af S med $m(R) \geq 0$. Vis, at R er forskellig fra Friedrichs udvidelsen T af S , hvis og kun hvis $Z(S^*) \neq \{0\}$.

[Historisk note: R er J.v. Neumanns løsning (Mathematische Annalen 1929) på problemet at finde en selvadjungeret halvbegrænset udvidelse af S ; den blev fundet før Friedrichs udvidelsen T (Mathematische Annalen 1934). M. G. Krein har vist (Matematicheskij Sbornik 1947), at samtlige selvadjungerede udvidelser $\tilde{T} \geq 0$, via de tilhørende sesquilineære former, kan karakteriseres som liggende "mellem" T og R i en nærmere præciseret forstand. Her er T ("the hard extension") tættest ved S , mens R ("the soft extension") er fjernest fra S . I praksis har T størst interesse, mens R virker noget outreret.]

2.24 Lad S være en tæt defineret, symmetrisk operator i H med $m(S) \geq 1$, og lad V være kompletteringen af $D(S)$, som beskrevet i Sætning 2.18.

(a) Vis, at hvis T er en selvadjungeret, nedad begrænset udvidelse af S med $D(T) \subset V$, så er T netop Friedrichsudvidelsen.

(b) Vis, at hvis T_1 er en vilkårlig selvadjungeret, udvidelse af S med $m(T_1) \geq 0$, og V_1 er kompletteringen af $D(T_1)$ med hensyn til skalarproduktet

$$(u|v)_{V_1} = (T_1 u \mid v)_H + (u|v)_H ,$$

så gælder

$$V \subset V_1 \subset V \dotplus Z(S^*) .$$

(Man kan vise, at når $u \in D(T_1)$, er $u - T^{-1}T_1 u \in Z(S^*)$.)

(c) Vis, at hvis $T_1 = R$, hvor R er udvidelsen defineret i Øvelse 2.23, så er $V_1 = V \dotplus Z(S^*)$. Find den tilhørende sesquilineære form. [Læs videre i Krein's artikel, hvis du kan russisk.]

2.25 Lad $H = L^2(I)$ hvor $I =]a,b[$, og lad $V = H^1_{ac}(I)$, forsynet med skalarproduktet

$$(u|v)_V = \int_a^b (u'(t)\overline{v'}(t)+u(t)\overline{v}(t))dt ;$$

(hvor $u' = iA_{ac}u$); vis, at V er et Hilbertrum. Lad $a(u,v)$ være den sesquilineære form på V

$$a(u,v) = \int_a^b (u'(t)\overline{v'(t)}+q(t)u(t)\overline{v}(t))dt$$

hvor q er en funktion i $C^0(\overline{I})$. Vis, at a er kontinuert på V og V-coerciv. Vis, at operatoren A knyttet til (H,V,a) ved Lax-Milgrams sætning virker som:

$$Au = -\frac{d^2}{dt^2}u + qu ,$$

med definitionsområde $D(A)$ bestående af funktionerne $u \in H^1_{ac}(I)$ med $u' \in H^1_{ac}(I)$ og

$$u'(a) = u'(b) = 0 .$$

2.26 Lad H være et præ Hilbertrum. Mængden af ortonormalsystemer i H er induktivt ordnet og har derfor maximale elementer. Lad $(e_i)_{i\in I}$ og $(f_j)_{j\in J}$ være to maximale ortonormale systemer. Vis, at I og J har samme kardinaltal. (Hvis I er endelig, er H et endelig dimensionalt vektorrum med basis $(e_i)_{i\in I}$; da vektorerne f_j , $j \in J$, er lineært uafhængige, er $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} I$. Hvis I er uendelig, sættes $J_i = \{j \in J \mid (f_j|e_i) \neq 0\}$ for hvert $i \in I$; da alle J_i er numerable, og $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, fås $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card}(I\times\mathbb{N}) = \operatorname{card} I$.)

Når H er et Hilbertrum, er underrummet H_0 af linearkombinationer af et maksimalt ortonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ tæt i H , idet $\overline{H_0} = \{e_i \mid i \in I\}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp}$. card I kaldes Hilbertdimensionen af H .

2.27 Lad H være et Hilbertrum, og E og $F \in \mathbb{B}(H)$ to ortogonale projektioner (dvs. $E = E^* = E^2$, og tilsvarende for F). Vis, at hvis EH har større Hilbertdimension (jvf. Øvelse 2.26) end FH , så indeholder EH en enhedsvektor, der er vinkelret på FH . Vis, at hvis $\|E-F\| < 1$, så har EH og FH samme Hilbertdimension.

2.28 Lad T være en operator på et komplekst Hilbertrum H . Sæt $\Omega_e = \Omega_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists c_\lambda > 0 \ \forall x \in D(T): \|(T-\lambda)x\| \geq c_\lambda \|x\|)\}$

(a) Hvis $S \subseteq T$, er $\Omega_e(T) \subseteq \Omega_e(S)$. Hvis T kan afsluttes, er $\Omega_e(\overline{T}) = \Omega_e(T)$.

(b) Hvis T er afsluttet, gælder: $\lambda \in \Omega_e$ hvis og kun hvis $T - \lambda$ er injektiv og $R(T-\lambda)$ er afsluttet.

(c) Hvis $\lambda \notin \Omega_e(S)$ og T er en udvidelse af S , har $T - \lambda$ ikke en begrænset invers.

(d) For $\lambda \in \Omega_e$ og $|\mu-\lambda| < c_\lambda$ gælder: $\mu \in \Omega_e$, og $R(T-\lambda) \cap R(T-\mu)^{\perp} = R(T-\lambda)^{\perp} \cap R(T-\mu) = \{0\}$. (For $(T-\lambda)z \perp (T-\mu I)z$ fås $c_\lambda\|z\|\|(T-\lambda I)z\| \leq \|(T-\lambda)z\|^2 = |\mu-\lambda| \, |(z|(T-\lambda)z)| \leq |\mu-\lambda| \, \|z\| \, \|(T-\lambda)z\|$.)

(e) Antag T er afsluttet. Hilbertdimensionen af $R(T-\lambda)^{\perp}$ er konstant på hver sammenhængskomponent af Ω_e . (Brug f.eks. Øvelse 2.27.)

(f) Hvis T er symmetrisk, er $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subseteq \Omega_e$.

(g) Hvis T er nedad begrænset, med nedre grænse c , er $]-\infty,c[\subseteq \Omega_e$.

(h) Vis, at hvis T er tæt defineret og symmetrisk, og $\mathbb{R}\cap\Omega_e \neq \emptyset$, så kan T udvides til en selvadjungeret operator. (Defekt indices for $\overline{T}$ er lige store ifølge (a) og (e) og (f).)

2.29 Lad H være et Hilbertrum, F et afsluttet underrum. Lad S og T være afsluttede, injektive operatorer på H med $R(S)$ og $R(T)$ afsluttede.

(a) ST er afsluttet.

(b) Vis, at $R(S|_{F\cap D(S)})$ er afsluttet. Definer $Q \in \mathbb{B}(H)$ ved $Qx = S^{-1}x$ for $x \in R(S)$, $Qx = 0$ for $x \perp R(S)$. Vis, at $R(S|_{F\cap D(S)})$ og $R(S)^{\perp}$ og $\overline{Q^*(F^{\perp})}$ er parvis ortogonale underrum af H, med sum H.

(c) Antag, at S er tæt defineret. Vis, at Hilbertdimensionen af $R(S|_{F\cap D(S)})$ er summen af Hilbertdimensionerne af $R(S)^{\perp}$ og $F^{\perp}$.

(d) Antag, at S og T er tæt definerede, og at $R(T)^{\perp}$ har endelig dimension. Vis, at ST er en afsluttet tæt defineret operator (brug f.eks. Øvelse 2.16). Vis, at $R(ST)$ er afsluttet, og at Hilbertdimensionen af $R(ST)^{\perp}$ er summen af Hilbertdimensionerne af $R(S)^{\perp}$ og $R(T)^{\perp}$.

(e) Lad A være en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk operator på H med defekt indices m og n. Hvis m eller n er endelig, er A^2 en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk, nedad begrænset operator med defekt indices $m+n$ og $m+n$. (Brug f.eks. $A^2+I = (A+i)(A-i) = (A-i)(A+i)$, og Øvelse 2.28.)

2.30 Lad der være givet to Hilbertrum H_1 og H_2. Lad ϕ_i betegne den naturlige indlejring af H_i i $H_1 \oplus H_2$, $i = 1,2$. Find ϕ_i^*. En operator $T \in \mathbb{B}(H_1 \oplus H_2)$ beskrives naturligt ved en matrix $(T_{ij})_{i,j=1,2}$, $T_{ij} = \phi_i^* T \phi_j$. Find omvendt T udtrykt ved matrixelementerne, og find matricen for T^*.

2.31 Lad H være et Hilbertrum. Lad $P(S)$ betegne projektionen $\in \mathbb{B}(H\oplus H)$ på grafen $G(S)$ for en tæt defineret afsluttet operator S på H.
Vis, at $P(S^*) = 1 + VP(S)V$, hvor $V \in \mathbb{B}(H\oplus H)$ har matricen (jfr. Øvelse 2.30) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Vis, at $P(S)$ har matricen

$$\begin{pmatrix} (1+S^*S)^{-1} & -S^*(1+SS^*)^{-1} \\ S(1+S^*S)^{-1} & SS^*(1+SS^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.32 Lad H være et Hilbertrum, over $\mathbb{C}$ som sædvanlig. $\{x,y\} \rightsquigarrow \mathrm{Re}(x|y)$ er et indre produkt på det underliggende reelle vektorrum for H, der forsynet med dette indre produkt er et Hilbertrum $H_{\mathbb{R}}$ over $\mathbb{R}$.
Operatorer på H kan også opfattes som operatorer på $H_{\mathbb{R}}$; $\mathbb{B}(H)$ bliver herved identificeret med et underrum af $\mathbb{B}(H_{\mathbb{R}})$; specielt er $x \rightsquigarrow ix$ en lineær isometri L af $H_{\mathbb{R}}$ på $H_{\mathbb{R}}$ (dvs. en ortogonal operator på $H_{\mathbb{R}}$), med $L^2 = -I$; og en operator A på $H_{\mathbb{R}}$ er en operator på H, altså kompleks lineær, hvis og kun hvis A kommuterer med L, $LA \subseteq AL$.
Et Hilbertrum K over $\mathbb{R}$ har form $H_{\mathbb{R}}$, hvis og kun hvis der findes en ortogonal operator L på K med $L^2 = -I$; i givet fald organiseres K som et Hilbertrum H over $\mathbb{C}$ ved skalarmultiplikation $\{a+ib,x\} \rightsquigarrow ax + bLx$ og det indre produkt $(x|y)_{\mathbb{C}} = (x|y) - i(Lx|y)$.
En operator C på $H_{\mathbb{R}}$ kaldes konjugeret lineær, eller antilineær, hvis $LC \subseteq -CL$, altså hvis $D(C)$ er et underrum af H og $C(\lambda x) = \bar{\lambda}Cx$ for $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in D(C)$.
Vis, at en operator A på $H_{\mathbb{R}}$ er sum af en kompleks lineær og en konjugeret lineær operator, hvis og kun hvis $D(A)$ er et underrum af H, og at opspaltningen i givet fald er entydigt bestemt.
En antilineær ortogonal operator på $H_{\mathbb{R}}$ kaldes en antiunitær operator på H. En antiunitær operator U opfylder: $\forall x,y \in H$: $(Ux|Uy) = (y|x)$.

2.33 (a) Lad K være et Hilbertrum over $\mathbb{R}$. $K \times K$ organiseres som et Hilbertrum $K_{\mathbb{C}}$ over $\mathbb{C}$ med skalarmultiplikation $(a+ib)\{x,y\} = \{ax-by, ay+bx\}$ og indre produkt $(\{x,y\} \mid \{u,v\})_C = (x|u) + (y|v) + i[(y|u)-(x|v)]$. $(K_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ er det reelle Hilbertrum $K \times K$.
(b) Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$. En konjugering på H er en antiunitær operator J på H, der opfylder $J^2 = 1$. F.eks. er $\{x,y\} \to \{x,-y\}$ en konjugering på $K_{\mathbb{C}}$.
For enhver ortonormal basis $(x_i)_{i \in I}$ for H findes der én konjugering J på H, for hvilken $Jx_i = x_i$ for alle $i \in I$.
(c) Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$, J en konjugering på H. $\{x \in H \mid Jx = x\}$ er et reelt Hilbertrum K, og $\{x,y\} \rightsquigarrow x + iy$ er en isomorfi og isometri af $K_{\mathbb{C}}$ på H.
(d) Hvis J_1 og J_2 er to konjugeringer på H, findes der en unitær operator U på H, så at $J_2 = UJ_1U^{-1}$.

2.34 Lad H være et Hilbertrum, J en konjugering på H.
(a) Lad A være en symmetrisk operator på H; hvis $JA \subseteq AJ$, er $JR(A-i) = R(A+i)$. Hvis også A er tæt defineret, har A en selvadjungeret udvidelse.
(b) Enhver operator på $L^2(\mathbb{R})$ med $D(A) = C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ og af formen

$$Af = -pf'' - p'f' + qf ,$$

hvor p og q er reelle funktioner med p,p' og $q \in C^0(\mathbb{R})$, har en selvadjungeret udvidelse.

2.35 Lad H og K være to Hilbertrum, A en operator fra H til K og B en operator fra K til H. Antag, at

$$\forall x \in D(A)\ \forall y \in D(B): \ (Ax|y) = (x|By) .$$

(a) Vis, at $Z(A) \subseteq R(B)^\perp$.

(b) Antag, at $Z(A)$ er afsluttet, og

$$Z(A)^\perp \subseteq R(B) \quad , \quad R(A)^\perp \subseteq Z(B) .$$

Vis, at $H = R(B) \oplus Z(A)$, og at $K = \overline{R(A)} \oplus Z(B)$. Vis, at A er tæt defineret, og at $A^* = B$.

(c) Hvis $Z(B)$ er endelig dimensional, og $R(A)$ har form $Z(B)^\perp \cap V$, hvor V er et tæt underrum i K, så er $R(A)^\perp \subseteq Z(B)$ (jvf. Øvelse 2.16).

(d) Hvis $R(B) = H$ og $R(A)^\perp \subseteq Z(B)$, så er $A^* = B$.

(e) Lad T være en symmetrisk operator på H. Hvis der findes $C \in \mathbb{B}(H)$, så at $T + C$ og $T + C^*$ er surjektive, så er T selvadjungeret.

2.36 Lad A være en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk operator på et Hilbertrum H.

(a) Vis, at $R(1+A^2) = Z(1+A^{*2})^\perp = R(A+i) \cap R(A-i)$.

(b) Vis, at $(A^{*2})^* = A^2$.

(c) Vis, at A^{*2} kan afsluttes, hvis og kun hvis A^2 er tæt defineret, og at i givet fald er $A^{2*} = \overline{A^{*2}}$.

(d) Vis, at hvis $Z(1+A^{*2})$ er afsluttet, så er A^2 tæt defineret og $A^{2*} = A^{*2}$.

2.37 Lad H betegne Hilbertrummet $L^2([0,1])$. For $z \in \mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ definerer vi en operator A_z på H ved

$$D(A_z) = \left\{f \in C^1([0,1]) \mid f(1) = zf(0)\right\} ,$$
$$A_z f = if' \quad \text{for} \quad f \in D(A_z) .$$

(a) Find for hvert $z \in \mathbb{T}$ en funktion φ_z på $[0,1]$ og et reelt tal λ_z med følgende egenskaber:

$$\varphi_z f \in D(A_z) \quad \text{hvis og kun hvis} \quad f \in D(A_1) , \qquad \text{og}$$
$$\overline{\varphi_z} A_z(\varphi_z f) = A_1 f + \lambda_z f \qquad \text{for} \quad f \in D(A_1) .$$

(b) Vis, at $\overline{A_1}$ er selvadjungeret, og beskriv denne operator.

(c) Vis, at $\overline{A_z}$ er selvadjungeret og find spektret for $\overline{A_z}$ for hvert $z \in \mathbb{T}$.

2.38 Vis, at når S er en symmetrisk operator i H med $R(S+i) = R(S-i) = H$, så er S tæt defineret. (Altså kan forudsætningen om tæt definitionsområde i Sætning 2.10 undværes.)

2.39 Lad S være en tæt defineret, afsluttet symmetrisk operator i H. Vis, at S er maksimalt symmetrisk hvis og kun hvis enten $S+i$ eller $S-i$ er surjektiv. (Man kan benytte Øvelse 2.19.)

2.40 Lad K betegne mængden af komplekse, selvadjungerede 2×2 matricer $A \geq 0$ med spor $\operatorname{Tr} A = 1$. (Sporet af en matrix $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ er lig $\alpha+\delta$.) Sæt $\partial K = \{A \in K \mid A^2 = A\}$. Sæt $P_u v = (v|u)u$ for u og $v \in \mathbb{C}^2$.

(a) Vis, at $\partial K = \{P_u \mid u \in \mathbb{C}^2, \|u\| = 1\}$.

(b) Vis, at $\varphi(a,b,c) = \begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & b-ic\\ b+ic & -a\end{pmatrix}$ definerer en affin homeomorfi af $\mathbb{R}^3$ på mængden af selvadjungerede 2×2 matricer med spor 1; vis, at $\varphi(\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2 \leq \frac14\}) = K$, og at $\varphi(\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2 = \frac14\}) = \partial K$.

(c) Lad T være en 2×2 matrix; vis, at $A \rightsquigarrow \operatorname{Tr}(TA)$ er en kontinuert affin afbildning ψ af K på en kompakt konveks mængde $N \subseteq C$; og vis, at $\psi(\partial K) = N$.

(d) Vis, at $\operatorname{Tr}(T P_u) = (Tu|u)$ for $u \in \mathbb{C}^2$; og vis, at $N = \nu(T)$.

Lad nu H være et vilkårligt komplekst Hilbertrum og S en operator på H.

(e) Vis, at $\nu(S)$ er konveks (Toeplitz-Hausdorff's sætning). (For $x,y \in H$ betragtes $P_K S|_K$, hvor P_K er projektionen på underrummet K udspændt af x og y.)

(f) Antag, at S er afsluttet og tæt defineret og at $D(S^*) = D(S)$. Vis, at $\nu(S^*) = \overline{\nu(S)}$ $(= \{\bar\lambda \mid \lambda \in \nu(S)\})$; vis, at spektret $\sigma(S)$ er indeholdt i enhver afsluttet halvplan, der indeholder $\nu(S)$; vis, at $\sigma(S)$ er indeholdt i afslutningen af $\nu(S)$.

(g) Vis, at for $H = \ell^2(\mathbb{N})$ og passende valgt $S \in \mathbb{B}(H)$ er $\nu(S)$ ikke afsluttet (brug f.eks. $S(x_1,x_2,\dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, hvor $\lambda_n > 0$ for $n \in \mathbb{N}$, og $\lambda_n \to 0$).

2.41 Lad M_f være multiplikationsoperatoren defineret ud fra den kontinuerte funktion f på Ω ved (2.68).

(a) Vis, at $m(M_f) \geq \alpha$ hvis og kun hvis $\operatorname{Re} f(x) \geq \alpha$ for alle x.

(b) Vis, at $\nu(M_f)$ og $\sigma(M_f)$ er indeholdt i fællesmængden af alle afsluttede halvplaner, der indeholder værdimængden for f (og dermed i det afsluttede konvekse hylster af værdimængden for f).

2.42 Lad M_f være som i Øvelse 2.41, og antag, at værdimængden for f er indeholdt i et vinkelrum

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq c\, \mathrm{Re}\, z\}$$

hvor $c \geq 0$. Vis, at M_f er Lax-Milgram operatoren defineret udfra triplet $(L^2(\Omega), V, s)$, hvor

$$s(u,v) = \int f\, u\, \overline{v}\, dx \quad \text{på} \quad V = D(M_{|f|^{\frac{1}{2}}}) \,,$$

der er et Hilbertrum med normen $(\| |f|^{\frac{1}{2}} u\|^2_{L^2} + \|u^2\|_{L^2})^{\frac{1}{2}}$.

2.43 Generaliser eksemplet M_f til tilfældet hvor f er en målelig funktion på en målelig mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Øvelser i tilknytning til Kapitel 3.

3.1 Vis, at hvis S er en tæt defineret og maksimalt symmetrisk operator i et Hilbertrum H, så er enten iS eller $-iS$ infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe.

3.2 Lad B være en afsluttet, tæt defineret operator i et Hilbertrum H, og antag at der findes en konstant $\alpha \geq 0$, så $m(B)$ og $m(-B)$ er $\geq -\alpha$. Lad $G(t)$ være familien af operatorer defineret ved

$$G(t) = e^{\alpha t} \exp(t(B-\alpha I)) \quad \text{for} \quad t \geq 0$$

$$G(t) = e^{-\alpha t} \exp(-t(-B-\alpha I)) \text{ for } t \leq 0 .$$

Vis, at $G(t)$ er en stærkt kontinuert gruppe, som opfylder $\|G(t)\| \leq \exp(\alpha|t|)$ for alle t.

3.3 Generaliser Sætning 3.14 til tilfældet, hvor f er en målelig funktion på en målelig mængde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

De følgende opgaver er hentet fra tidligere opgavesamlinger i funktionalanalyse; en del af dem kræver spektralteori.

3.4 Lad H være et præ Hilbertrum; lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af vektorer i H. Lad D_n betegne determinanten af matricen $((f_i|f_j))_{i,j=1,2,\dots,n}$. Lad $D_n = \Sigma_{i=1}^n K_{in}^n (f_i|f_n)$ være opløsningen af D_n efter sidste søjle.

(a) Vis, at vektorerne (f_n) er lineært uafhængige, hvis og kun hvis $D_n \neq 0$ for alle n.

(b) Antag, at vektorerne (f_n) er lineært uafhængige; sæt $e_n = (D_n D_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \Sigma_{i=1}^n K_{in}^n f_i$. Vis, at $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er et ortonormalsystem, der udspænder samme underrum af H som $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Gram-Schmidt's ortonormaliseringsmetode).

(c) Vis, at H har en numerable tæt delmængde, hvis og kun hvis H har en numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis.

3.5 (a) For $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, er $(\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et element f_λ i Hilbertrummet ℓ^2. Vis, at vilkårligt endelig mange af disse vektorer f_λ, $|\lambda| > 1$, er lineært uafhængige.

(b) Lad H være et Hilbertrum; lad H_1 være et afsluttet underrum med Hilbertdimension $\aleph_0$; lad $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ være en lineært uafhængig familie

af vektorer i H_1 (jvf. (a)); antag, at $H_2 = H_1^{\perp}$ har Hilbertdimension card $\mathbb{R}$ (jvf. Øvelse 2.26); lad $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ være en ortonormal tilnærmelsesbasis for H_2. Lad F være det mindste underrum af H, der indeholder $\{e_\lambda + f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Vis, at den ortogonale projektion på H_2 af en tæt delmængde af F er tæt i H_2, og har kardinaltal $\geq$ card $\mathbb{R}$. Vis, at $F \cap H_2 = \{0\}$. Vis, at ethvert ortonormalsystem i F er endeligt eller numerabelt (udnyt, at ethvert element i H_1 er ortogonalt på alle på nær højst numerabelt mange elementer i systemet).
(c) Vis, at $\overline{F}$ har Hilbertdimension card $\mathbb{R}$. Vis, at F ikke har nogen ortonormal tilnærmelsesbasis.

3.6 Lad H være et Hilbertrum; lad $A \in \mathbb{B}(H)$ være selvadjungeret. Sæt $\alpha = \inf_{\|x\|=1} (Ax|x)$ og $\beta = \sup_{\|x\|=1} (Ax|x)$. Vis, at $\{\alpha,\beta\} \subseteq \sigma(A) \subseteq [\alpha,\beta]$.
Vis, at $\|A\| = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$.

3.7 Lad H være et Hilbertrum. Lad A være en selvadjungeret operator i $\mathbb{B}(H)$.
(a) Antag $0 \leq A \leq 1$; lad P betegne projektionen på rummet af fixpunkter for A. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $A^n x \to Px$ for $n \to \infty$.
(b) Antag blot $\|A\| \leq 1$; lad Q betegne projektionen på $\overline{AH}$. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $(1-(1-A^2)^n)x \to Qx$ for $n \to \infty$.

3.8 Lad der være givet et Hilbertrum H og to projektioner P og $Q \in \mathbb{B}(H)$. Lad R betegne projektionen på $PH \cap QH$. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $(PQ)^{n+1}x = P(QPQ)^n x \to Rx$ for $n \to \infty$.

3.9 Lad H være et Hilbertrum, som sædvanlig forsynet med normtopologien; lad H_σ betegne H forsynet med den svageste topologi, der gør alle afbildninger $x \to (x|y)$, $y \in H$, af H ind i $\mathbb{C}$ kontinuerte. Lad T være en lineær afbildning: $H \to H$.
Vis, at der om egenskaberne
(a) T er afsluttet
(b) T er kontinuert: $H \to H$ (d.v.s. $T \in \mathbb{B}(H)$)
(c) T er kontinuert: $H_\sigma \to H_\sigma$
(d) T er kontinuert: $H \to H_\sigma$
(e) T er kontinuert: $H_\sigma \to H$
(f) $R(T)$ har endelig dimension
gælder: ((f) og (a)) $\Leftrightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d).
((a) $\Leftrightarrow$ (b) er velkendt; vis f.eks. ((c) og (f)) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (f) og (e) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a)).

3.10 Lad der være givet et åbent interval $]a,b[$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, i $\mathbb{R}$, og en kontinuert positiv funktion w på $]a,b[$. Antag, at for $n = 0,1,2,\ldots$ er $\int_a^b w(t)|t|^n \, dt < \infty$. Lad H betegne Hilbertrummet $L^2(w\,dt)$, med indre produkt $\{f,g\} \to (f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}w(t)\,dt$. $f \to f\,w^{\frac{1}{2}}$ er en isomorfi af H på $L^2(]a,b[)$. Sæt H_0 lig underrummet af H udspændt af polynomierne på $]a,b[$.

Vis, at H_0 har én ortonormal basis $(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots)$ med den egenskab, at φ_n for hvert n er et n'te grads polynomium med positiv koefficient for t^n .

Vis, at polynomiet φ_n har n forskellige reelle rødder, som alle tilhører $]a,b[$ (benyt, at der findes $(n-1)$'te grads polynomier med $(n-1)$ foreskrevne rødder).

For $a = -1$, $b = 1$, $w = 1$, fås polynomierne $(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n$, hvor $P_n(t) = (2^n n!)^{-1} \dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ er det n'te Legendre polynomium.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ fås

$$\varphi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} , \quad \varphi_n(t) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}} T_n(t) , \quad n = 1,2,\ldots ,$$

hvor $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccos} t)$ er det n'te Čebysev polynomium.

For $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$ fås

$$\varphi_n(t) = (-1)^n (n!)^{-1} L_n(t) , \quad \text{hvor} \quad L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t})$$

er det n'te Laguerre polynomium.

For $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t^2}$ fås

$$\varphi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t) , \quad \text{hvor} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2}$$

er det n'te Hermite polynomium.

3.11 Lad H være et Hilbertrum; lad B og T være to selvadjungerede operatorer på H med $B \in \mathbb{B}(H)$.

Hvis B og T kommuterer, $BT \subseteq TB$, så er TB selvadjungeret og $TB = \overline{BT}$.

3.12 Lad H være et Hilbertrum; lad N være en normal operator på H . Sæt $A = \frac{1}{2}(N+N^*)$, $B = \dfrac{1}{2i}(N-N^*)$.

Vis, at A og B er selvadjungerede, og at $N = A + iB$ og $N^* = A - iB$.

3.13 Lad H være et Hilbertrum. Lad A og B være selvadjungerede operatorer på H ; antag, at enhver spektralprojektion for A kommuterer med enhver spektralprojektion for B . Vis, at $A+iB$ er en normal operator N , $N^* = A-iB$, og $A = \frac{1}{2}(N+N^*)$, $B = \frac{1}{2i}(N-N^*)$.

3.14 Lad H være et Hilbertrum, N en normal operator på H med spektralfremstilling $N = \int_{\sigma(N)} z\,dE(z)$. Lad f og g være to målelige funktioner på $\sigma(N)$. Antag, at der findes $\varepsilon > 0$ og $K > 0$, så at $|f(z)| > \varepsilon$, hver gang $|g(z)| > K$; sæt, som sædvanlig, $\int_{\sigma(N)} f(z)\,dE(z) = f(N)$ og tilsvarende.
Vis, at $fg(N) = f(N)g(N)$.
Vis, f.eks. ved induktion efter n , at N^n er normal for ethvert $n \in \mathbb{N}$, idet $N^n = \int_{\sigma(N)} z^n\,dE(z)$.
Vis, at for $P \in \mathbb{C}[x]$, $P(x) = \lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \dots + \lambda_0$, med $\lambda_n \neq 0$, er $\lambda_n N^n + \lambda_{n-1}N^{n-1} + \dots + \lambda_0 1 = \int_{\sigma(N)} P(z)dE(z)$; denne operator $P(N)$ er således normal. Hvis specielt $N = N^*$ og $P \in \mathbb{R}[x]$, er $P(N)$ selvadjungeret.

3.15 Lad H være et Hilbertrum. Lad A være en abelsk del C^*-algebra af $\mathbb{B}(H)$, med $1 \in A$. Antag, at det om en enhedsvektor $x \in H$ gælder, at Ax er tæt i H (x kaldes da en cyklisk vektor for A). Lad Δ betegne spektret for A og φ den omvendte afbildning til Gelfandtransformeringen. φ er altså en isomorfi og isometri af $C(\Delta)$ på A . Lad μ betegne sandsynlighedsmålet $f \to (\varphi(f)x|x)$ på Δ .
Vis, at der findes én isometri Φ af $L^2(\mu)$ på H med egenskaben: $\Phi(f) = \varphi(f)x$ for $f \in C(\Delta)$.
Vis, at for $f \in C(\Delta)$ og $g \in L^2(\mu)$ er $\Phi(fg) = \varphi(f)\Phi(g)$, eller, med betegnelsen M_f for operatoren $g \to fg$, $\varphi(f) = \Phi M_f \Phi^{-1}$. A er altså unitært ækvivalent med en algebra af multiplikationsoperatorer.

3.16 Lad der være givet en mængde X , en σ-algebra B af delmængder af X , et Hilbertrum H , og et projektionsmål $E: B \to \mathbb{B}(H)$. Lad $f, f_1, f_2, \dots$ være målelige funktioner $X \to \mathbb{C}$; antag $f_n(x) \to f(x)$ for næsten alle $x \in X$.
Sæt $D = \{\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n}^{\infty} D(E(f_m)) \mid E(f_m)\xi$ er konvergent$\}$.

(a) Vis, at D er et underrum af $D(E(f))$, og at $E(f)\xi = \lim_m E(f_m)\xi$ for $\xi \in D$. (Anvend f.eks. Fatou's lemma på $\int_X |f_m - f_n|^2\,dE_{\xi,\xi}$) .

(b) Vis, at $E(f)$ er afslutning af $E(f)|D$.

(c) Lad A være en operator på H ; sæt $C^{\infty}(A) = \cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ og $C^{\omega}(A) = \{\xi \in C^{\infty}(A) \mid \exists a,b > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : \|A^n\xi\| \leq ab^n n!\}$. Vektorerne i $C^{\omega}(A)$ kaldes analytiske vektorer for A .
Vis, at hvis A er normal og $\xi \in C^{\omega}(A)$, så er $e^{tA}\xi = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\xi$ for $|t|$ tilstrækkeligt lille, $|t| < b^{-1}$.
Vis, at $C^{\omega}(A)$ er tæt i H , når A er normal.

3.17 Lad H være et Hilbertrum, A en operator på H , ξ en analytisk vektor for A med $\|A^n\xi\| \leq ab^n n!$ (jvf. Øvelse 3.16 (c)).

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists a_k > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : \|A^{n+k}\xi\| \leq a_k(2b)^n n!$.

(b) $(\lambda_k A^k + \lambda_{k-1}A^{k-1} + \ldots + \lambda_0)\xi \in C^{\omega}(A)$ for ethvert polynomium $P = \lambda_k X^k + \lambda_{k-1}X^{k-1} + \ldots + \lambda_0 \in \mathbb{C}[X]$, og $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n P(A)\xi$ er konvergent for $|t| < (2b)^{-1}$.

3.18 Lad H være et Hilbertrum, A en operator på H , x en vektor i $C^{\infty}(A) = \cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Sæt $D(x)$ = underrummet af H udspændt af $x, Ax, A^2x, \ldots$, og $M(x) = \overline{D(x)}$. x kaldes en cyklisk vektor for A , hvis $M(x) = H$.
Definer en operator A_x på $M(x)$ ved $D(A_x) = D(x)$, $A_x y = Ay$ for $y \in D(A_x)$.
Vis, at der findes én konjugering J på $M(x)$, der opfylder $Jx = x$ og $JA_x = A_x J$, når A er symmetrisk.
Vis, at A_x kan udvides til en selvadjungeret operator på $M(x)$. (Jvf. Øvelse 2.34 (a).)

3.19 Lad H være et Hilbertrum, A en symmetrisk operator på H , x en analytisk vektor for A , med $\|A^n x\| \leq ab^n n!$ for alle n (jvf. Øvelse 3.16).
Sæt $D(x)$ = underrummet af H udspændt af $x, Ax, A^2x, \ldots$, og $M(x) = \overline{D(x)}$.
For hvert $y \in D(x)$ findes $a_y > 0$, så at $\|A^n y\| \leq a_y(2b)^n n!$ for alle n (jvf. Øvelse 3.17).
Lad B og C være selvadjungerede operatorer på $M(x)$, der udvider $A_x = A|D(x)$ (jvf. Øvelse 3.18).
For $y \in D(x)$ og $|t| < (2b)^{-1}$ er $e^{itB}y = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} A^n y = e^{itC}y$. Vis, at $B = C$, og at $\overline{A_x}$ er en selvadjungeret operator på $M(x)$.
Vis, at hvis $C^{\omega}(A)$ er tæt i H , så er $\overline{A}$ selvadjungeret (E. Nelson 1959).
(Til $x \in H$ og $\varepsilon > 0$ findes $y \in C^{\omega}(A)$ med $\|x-y\| < \varepsilon$; da $\overline{A|D(y)}$ er selvadjungeret på $\overline{D(y)}$ er $\overline{(A-i)D(y)} = \overline{D(y)}$. For $z \in D(y)$, så $\|(A-i)z-y\| < \varepsilon$, er $\|(A-i)z-x\| < 2\varepsilon$. Tilsvarende er $R(A+i)$ tæt i H .)

3.20 Lad H være et Hilbertrum, A og B to symmetriske operatorer på H. En operator C på H kaldes jo positiv, $0 \leq C$, hvis $(Cx|x) \geq 0$ for alle $x \in D(C)$. Positive operatorer er specielt symmetriske.
Hvis A og B er positive, og $A = A^*$, defineres $A \leq B$, hvis $D(B) \subseteq D(A^{\frac{1}{2}})$ og $\forall x \in D(B)$: $\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \leq (Bx|x)$.
(a) Hvis $A = A^* \geq 0$ og $D(B) \subseteq D(A)$ og $\forall x \in D(B)$: $0 \leq (Ax|x) \leq (Bx|x)$, så er $A \leq B$. Hvis $A \in \mathbb{B}(H)$ og $A \geq 0$ gælder: $0 \leq A \leq B$ hvis og kun hvis $(Ax|x) \leq (Bx|x)$ for alle $x \in D(B)$.
(b) Hvis A og B er selvadjungerede og positive, er følgende betingelser ækvivalente:
(1) $A \leq B$
(2) $D(B^{\frac{1}{2}}) \subseteq D(A^{\frac{1}{2}})$ og $\forall x \in D(B^{\frac{1}{2}})$: $\|A^{\frac{1}{2}}x\| \leq \|B^{\frac{1}{2}}x\|$
(3) $\exists C \in \mathbb{B}(H)$: $\|C\| \leq 1$ og $A^{\frac{1}{2}} \supseteq CB^{\frac{1}{2}}$
(4) $\exists C \in \mathbb{B}(H)$: $\|C\| \leq 1$ og $A^{\frac{1}{2}} \subseteq B^{\frac{1}{2}}C^*$.

(c) Hvis A og B er selvadjungerede og A er injektiv og $0 \leq A \leq B$, så er B injektiv og $0 \leq B^{-1} \leq A^{-1}$.
(d) Lad X være en mængde, $\mathcal{B}$ en σ-algebra af delmængder af X, og E et projektionsmål: $\mathcal{B} \to \mathbb{B}(H)$. Når f og g er målelige funktioner på X, gælder:
$$0 \leq f \leq g \text{ n.o.} \Leftrightarrow 0 \leq \int_X f\,dE \leq \int_X g\,dE .$$

3.21 Lad μ være et Radonmål ≥ 0 på $\mathbb{R}$. Når $k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ er en funktion, der er kvadratisk integrabel m.h.t. $\mu \times \mu$, og f er kvadratisk integrabel m.h.t. μ, så er $x \sim k(x,y)f(x)$ μ integrabel for n.a. y, $y \sim \int_{\mathbb{R}} k(x,y)f(x)dx$ er en μ kvadratisk integrabel funktion Kf, og $\int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} k(x,y)f(x)dx|^2\, dy \leq \|k\|_2^2\, \|f\|_2^2$. $f \sim Kf$ definerer en operator $K \in \mathbb{B}(L^2(\mu))$ med $\|K\| \leq \|k\|_2$. Disse operatorer kaldes Hilbert-Schmidt operatorer.
(a) $k \sim K$ er injektiv: $L^2(\mu\times\mu) \to \mathbb{B}(L^2(\mu))$.
(b) Hvis k er en trappefunktion, er K en operator af endelig rang; for ethvert $k \in L^2(\mu\times\mu)$ er K kompakt.
(c) For $k \in L^2(\mu\times\mu)$ defineres $k^* \in L^2(\mu\times\mu)$ ved $k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$; den tilsvarende operator er K^*.
(d) Hvis K er normal, f.eks. hvis $k = k^*$ $\mu\times\mu$ n.o., så udgøres spektret $\sigma(K)$ af en følge af komplekse tal, der konvergerer mod nul, hvert punkt $\lambda \in \sigma(K)\setminus\{0\}$ er egenværdi af endelig multiplicitet m_λ, og $\Sigma_{\lambda\in\sigma(K)}\, m_\lambda|\lambda|^2 = \|k\|_2^2 < \infty$. (Hvis $(\varphi_{\lambda,\nu})_{\lambda\in\sigma(K),\nu=1,2,\dots,m_\lambda}$ er egenfunk-

tionerne, så er $Kf = \Sigma_{\lambda\in\sigma(K)} \Sigma_{\nu=1}^{m_\lambda} (f|\varphi_{\lambda,\nu})\lambda\, \varphi_{\lambda,\nu}$; $\{(x,y) \rightsquigarrow \varphi_{\lambda,\nu}(x)\overline{\varphi_{\lambda,\nu}(y)}$ $\lambda \in \sigma(K)$, $\nu = 1,2,\dots,m_\lambda\}$ er et ortogonalsystem i $L^2(\mu\times\mu)$, og k's Fourierkoefficienter efter dette system er egenværdierne.)

3.22 Lad H være et Hilbertrum. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være en ortonormal tilnærmelses-basis for H . For $A \in \mathbb{B}(H)$ defineres $\|A\|_2^2 = \Sigma_{i\in I} \|Ae_i\|^2$. $\|\ \|_2$ kaldes Hilbert-Schmidt normen (H.-S. normen).

(a) Hvis $(f_j)_{j\in J}$ er en ortonormal basis for H , er $\Sigma_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \Sigma_{i\in I} \Sigma_{j\in J} |(Ae_i|f_j)|^2 = \Sigma_{j\in J} \|A^*f_j\|^2$. Derfor er Hilbert-Schmidt normen uafhængig af valget af ortonormal basis for H , og A og A^* og $|A|$ har samme H.-S. norm.

(b) Mængden af operatorer med endelig H.-S. norm er et tosidet ideal i $\mathbb{B}(H)$.

(c) Lad A være en operator med endelig H.-S. norm; lad $A = v|A|$ være polardekomponeringen af A . $\sigma(|A|)$ er en følge af positive tal, der konvergerer mod 0, og evt. 0, og hvert $\lambda \in \sigma(|A|)\setminus\{0\}$ er egenværdi af endelig multipliceret m_λ , og $\Sigma_{\lambda\in\sigma(|A|)} m_\lambda \lambda^2 < \infty$. Hvis $(\varphi_{\lambda,\nu})_{\lambda\in\sigma(|A|),\nu=1,2,\dots,m_\lambda}$ er egenvektorerne, er

$$Ax = \sum_{\lambda\in\sigma(|A|)} \sum_{\nu=1}^{m_\lambda} (x|\varphi_{\lambda,\nu})\lambda\, \varphi_{\lambda,\nu} \quad , \quad x \in H .$$

(d) Lad μ være et Radonmål ≥ 0 på $\mathbb{R}$. For $H = L^2(\mu)$ er mængden af Hilbert-Schmidt operatorer (jvf. Øvelse 3.21) lig med mængden af operatorer $\in \mathbb{B}(H)$ med endelig H.-S. norm. Hvis $k \in L^2(\mu\times\mu)$, og K er den tilsvarende integraloperator, er $\|k\|_2 = \|K\|_2$.

3.23 (a) Vis, at for to vilkårlige elementer A og B i en C*-algebra gælder $\|AB\|^2 \leq \|A^*ABB^*\|$ (brug f.eks., at $\rho(B^*A^*AB) = \rho(A^*ABB^*)$).

(b) Vis, at hvis A og B er begrænsede positive operatorer på et Hilbertrum H , A og $B \in \mathbb{B}(H)$, og $A \leq B$, så er $A^{\frac12} \leq B^{\frac12}$. (Antag f.eks. først, at $0 < \varepsilon \leq A$, og brug $\|A^{1/4}B^{-1/4}\|^2 \leq \|A^{\frac12}B^{-\frac12}\|$; jvf. Øvelse 3.20.)

(c) Hvis A og B er selvadjungerede operatorer på et Hilbertrum H , og $0 \leq A \leq B$, så er $A^{\frac12} \leq B^{\frac12}$ $(0 \leq A \leq B \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\colon (B+\varepsilon)^{-1} \leq (A+\varepsilon)^{-1} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\colon A^{\frac12} \leq (A+\varepsilon)^{\frac12} \leq (B+\varepsilon)^{\frac12}$).

(d) Vis, at $0 \leq A \leq B$ ikke medfører $A^2 \leq B^2$ (led f.eks. i $\mathbb{B}(\mathbb{C}^2)$).

3.24 Lad H være et Hilbertrum. En operator $S \in \mathbb{B}(H)$ kaldes en spejling (eller korrektere en ortogonal spejling), hvis der findes et afsluttet underrum K af H , så at $Sx = x$ for $x \in K$, og $Sy = -y$ for $y \perp K$.

Vis, at følgende egenskaber er ækvivalente for $S \in \mathbb{B}(H)$:

(a) S er en spejling

(b) $\frac{1}{2}(S+1)$ er en projektion

(c) S er unitær og selvadjungeret

(d) $(S^*-1)(S+1) = 0$.

Gør rede for, at $f \rightsquigarrow \check{f}$, hvor $\check{f}(t) = f(-t)$, definerer en spejling på $L^2(\mathbb{R})$.

3.25 Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$, V en unitær operator på H og U en antiunitær operator på H .
(a) Hvis $UV = VU$ og λ er en egenværdi for V , så er $\bar{\lambda}$ egenværdi for V med samme multiplicitet som λ .
(b) Hvis U^2 er proportional med 1, så er $U^2 = 1$ eller $U^2 = -1$.

3.26 Lad der være givet et Hilbertrum H og en afsluttet, tæt defineret operator T på H . Definér en operator S på Hilbertrummet $H \times H$ ved

$$D(S) = \{(x,y) \in H \times H \mid x \in D(T)\}$$

$$S(x,y) = (x\,, 2Tx-y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in D(S)\ .$$

(a) Vis, at S er en tæt defineret afsluttet operator på $H \times H$, og at $S^2 = 1 | D(S)$.
(b) Find S^* og S^*S . Vis, at S^*S er afslutningen af sin restriktion til $\{(x,y) \in H \times H \mid x \in D(T^*T)\ , y \in D(T^*)\}$.
(c) Vis, at hvis T er begrænset, er S begrænset, og find i dette tilfælde $\|S\|$ som funktion af $\|T\|$.

3.27 Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{R}$. Vis, at $A \in \mathbb{B}(H)$ er en ortogonal projektion, hvis og kun hvis A er idempotent og

$$\forall x \in H: \ (Ax | x) = \|Ax\|^2\ .$$

Vis, at begge betingelser er nødvendige (f.eks. for $H = \mathbb{R}^2$).

3.28 Lad der være givet et Hilbertrum H over $\mathbb{C}$, et tal $n \in \mathbb{N}$, og en selvadjungeret operator A på H med spektralfremstilling $A = \int_{\sigma(A)} t dE$.
Antag, at $D(A^n) = D(A^{n+1})$.
Sæt $K = E(\sigma(A) \setminus [-1,1])H$. Definer en operator B ved $D(B) = D(A) \cap K$, $Bx = Ax$ for $x \in D(B)$.
Vis, at B er en selvadjungeret operator på K .
Vis, at $K = B^n D(B^n) \subseteq D(A)$.
Vis, at $A \in \mathbb{B}(H)$.

3.29 Lad der være givet et Hilbertrum H over C.

(a) Lad $A \in \mathbb{B}(H)$ være en normal operator. Vis, at følgende betingelser er ækvivalente.

1. Der findes ingen ortonormal følge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af vektorer i H med den egenskab, at $\|Ae_n\| \to 0$ for $n \to \infty$.

2. Der findes en kompakt operator $K \in \mathbb{B}(H)$, så at $A+K$ har en invers i $\mathbb{B}(H)$.

3. Der findes en operator $B \in \mathbb{B}(H)$ og kompakte operatorer L og $M \in \mathbb{B}(H)$, så at $BA = 1+L$ og $AB = 1+M$.

(b) Vis, at for $S \in \mathbb{B}(H)$ er følgende betingelser ækvivalente.

4. Der findes ingen ortonormal følge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af vektorer i H med den egenskab, at $\|Se_n\| \to 0$ for $n \to \infty$.

5. Der findes en operator $C \in \mathbb{B}(H)$ og en kompakt operator $N \in \mathbb{B}(H)$, så at $CS = 1+N$.

3.30 Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$, og T en tæt defineret operator på H. Lad q betegne afbildningen af H ind i $[0,\infty]$ givet ved:

$$q(x) = \|Tx\|^2 \quad \text{for} \quad x \in D(T),$$

$$q(x) = \infty \quad \text{for} \quad x \notin D(T).$$

Vis, at $T \in \mathbb{B}(H)$, hvis og kun hvis q er kontinuert.

Vis, at hvis $T = T^*$, så findes der en følge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af operatorer i $\mathbb{B}(H)$ med den egenskab, at for ethvert $x \in H$ er $q(x) = \sup_n \|T_n x\|^2$.

Vis, at hvis $T = T^*$, er q nedad halvkontinuert (d.v.s. $\{x \in H \mid q(x) \leq t\}$ er afsluttet for hvert $t \in [0,\infty]$).

Vis, at T er afsluttet, hvis og kun hvis q er nedad halvkontinuert.

3.31 Lad der være givet et Hilbertrum H over $\mathbb{C}$, en operator $S \in \mathbb{B}(H)$, og et komplekst tal λ, der tilhører randen af spektret $\sigma(S)$.

Lad $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af komplekse tal, der ikke tilhører $\sigma(S)$, med $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

Sæt $T_n = \|(S-\lambda_n)^{-1}\|^{-1} (S-\lambda_n)^{-1}$. Vis, at $\|(S-\lambda_n)^{-1}\| \to \infty$ for $n \to \infty$, og at $\lim_{n\to\infty} \|(S-\lambda)T_n\| = 0$.

Vis, at der findes en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af enhedsvektorer i H med den egenskab, at $\lim_{n\to\infty} \|(S-\lambda)x_n\| = 0$.

Antag nu yderligere, at S er en kompakt operator og at $\lambda \neq 0$. Vis, at λ er en egenværdi for S af endelig multiplicitet.

3.32 Lad der være givet et Hilbertrum H over $\mathbb{C}$, to vektorer x og y i H, og to selvadjungerede idempotenter (projektioner) P og Q i $\mathbb{B}(H)$ med $PQ = 0$. Sæt $R = 1 - P - Q$ og $S = 2P + 2Q - 1$.
Vis, at spektret for $P - Q$ er indeholdt i $\{-1,0,1\}$, og beskriv det tilsvarende projektionsmål.
Vis, at for ethvert $t \in \mathbb{R}$ er $(e^{t(P-Q)}x \mid y) \geq 0$ og $(e^{t(P-Q)}Sx \mid y) \geq 0$, hvis og kun hvis $(Px|y) \geq 0$ og $(Qx|y) \geq 0$ og $(Rx|y) \in \mathbb{R}$ og $(Rx|y)^2 \leq 4(Px|y)(Qx|y)$.

Øvelser i tilknytning til Kapitel 4.

4.1 Definer d_1 og d_2 for $x,y \in \mathbb{R}$ ved

$$d_1(x,y) = |x-y| \;, \qquad d_2(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| .$$

Vis, at d_1 og d_2 er metrikker på $\mathbb{R}$, som inducerer den samme vektorrumstopologi, og $(\mathbb{R},d_1)$ er et fuldstændigt metrisk rum, mens $(\mathbb{R},d_2)$ ikke er et fuldstændigt metrisk rum.

4.2 Betragt familien af seminormer på $C^0(\mathbb{R})$

$$p_k(f) = \sup\{|f(x)| \;\big|\; x \in [-k,k]\}, \quad \text{for } k \in \mathbb{N},$$

og den metrik der herved defineres ifølge Sætning 4.6.
Definer

$$f(x) = \max\{0,1-|x|\}, \quad g(x) = 100f(x-2) \;, \quad h(x) = \tfrac{1}{2}(f(x)+g(x)) \;,$$

og vis, at

$$d(f,0) = \frac{1}{2} \;, \quad d(g,0) = \frac{50}{101} \;, \quad d(n,0) = \frac{1}{6} + \frac{50}{102} .$$

Altså er kuglen $B(0,\frac{1}{2})$ ikke konveks. Er $B(0,r)$ konveks for noget $r<1$?

4.3 Lad X være et topologisk vektorrum. Vis, at når V er en omegn af 0 i X, så findes en balanceret omegn W af 0, så $W+W \subset V$. Vis, at X er et Hausdorff rum, dvs. for $x \neq y$ findes omegne V_1 af x og V_2 af y, så $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

4.4 Vis Lemma 4.1.

4.5 Betragt $\mathbb{R}^2$, forsynet med den sædvanlige topologi, og lad $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Vis, at $2A \subset A+A$, og find et eksempel, hvor $2A \neq A+A$.
(b) Vis, at hvis A er afsluttet og B er kompakt, så er $A+B$ afsluttet.
(c) Vis, at $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$ i almindelighed, og find et eksempel, hvor $\overline{A}+\overline{B} \neq \overline{A+B}$.

4.6 Vis Lemma 4.5.

4.7 Vis, at når X og Y er topologiske vektorrum, er produktrummet $X \times Y$ et topologisk vektorrum.

4.8 Gør rede for, at $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ og $C_K^\infty(\Omega)$ er Fréchet rum.

4.9 Gør rede for beviserne for sætningerne 4.10 - 4.13.

4.10 Vis, at D^α er en kontinuert operator i $C^\infty(\Omega)$ og i $C_K^\infty(\Omega)$. Lad $f \in C^\infty(\Omega)$, og vis, at operatoren $M_f: u \rightsquigarrow f \cdot u$ er kontinuert i $C^\infty(\Omega)$ og i $C_K^\infty(\Omega)$.

4.11 Lad $f \in L^2(\Omega)$, og vis, at funktionalen

$$\Lambda: u \rightsquigarrow \int_\Omega u\, f\, dx$$

er kontinuert på $C_K^\infty(\Omega)$ for hver kompakt $K \subset \Omega$.

4.12 Vis, at $C_K^\infty(\Omega)$ er et afsluttet underrum af $C^\infty(\Omega)$.

4.13 Lad X være et topologisk vektorrum.

(a) Vis, at $E \subset X$ er begrænset hvis og kun hvis der for enhver omegn V af 0 findes et $t > 0$, så at $E \subset sV$ for $s > t$.

(b) Vis, at det eneste begrænsede underrum af X er $\{0\}$.

4.14 Lad A være en konveks delmængde af et topologisk vektorrum E. Lad x_0 være et indre punkt i A og x et punkt i afslutningen $\overline{A}$ af A. Vis, at samtlige punkter $y \neq x$ på liniestykket $[x_0, x] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)x \mid \lambda \in [0,1]\}$ er indre punkter i A. (Vink: Antag først $x \in A$.)
Slut heraf, at for $A \subset E$, A konveks, gælder:

$$\overset{\circ}{A} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A} \quad \text{og} \quad \overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}.$$

Vis ved et eksempel, at $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ er en nødvendig betingelse.

4.15 Lad E være et lokalkonvekst topologisk vektorrum og lad $M \subset E$ være et underrum. Lad U være en konveks balanceret omegn af 0 i M (med delrumstopologien fra E).

(a) Vis, at der findes en konveks balanceret omegn V af 0 i E således at $V \cap M = U$.

(b) Antag $x_0 \in E \setminus \overline{M}$. Vis, at V i (a) kan vælges, så $x_0 \notin V$.

(c) Lad p_0 være en kontinuert seminorm på M. Vis, at der findes en kontinuert seminorm p på E så $p|_M = p_0$. (En sammenhæng mellem konvekse mængder og funktioner gives i Mat 313, Lemma 11.5.)

Øvelser i tilknytning til Kapitel 5.

5.1 Vis at topologien på $C_0^\infty(\Omega)$ er uafhængig af, hvilket system af kompakte mængder (opfyldende (4.13)), man vælger.

5.2 Gør rede for, at konvergens af en følge i $C_0^\infty(\Omega)$ medfører konvergens af følgen i $C^\infty(\Omega)$, i $L^p(\Omega)$ og i $L^p_{loc}(\Omega)$ (for $p \in [1,\infty]$) .

5.3 Vis, at $L^2_{comp}(\Omega)$ kan identificeres med dualrummet $(L^2_{loc}(\Omega))^*$ til $L^2_{loc}(\Omega)$ (rummet af kontinuerte lineære funktionaler på $L^2_{loc}(\Omega)$) på en sådan måde, at elementet $v \in L^2_{comp}(\Omega)$ svarer til funktionalen

$$u \sim \int u(x)\overline{v}(x)dx \ , \quad u \in L^2_{loc}(\Omega) \ .$$

Man kan benytte Lemma 4.5. (Der skal blot vises elementvis identifikation.)

5.4 Vis, at der for $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ med $\operatorname{supp} \varphi \subset \underline{B}(0,R)$ gælder

$$\sup|\varphi(x)| \leq 2R \sup|D_{x_1}\varphi(x)| \ .$$

(Udtryk φ som et integral af $D_{x_1}\varphi$.)

5.5 (a) Vis, at $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $C^k(\Omega)$ for hvert $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Undersøg, om $C_0^\infty(\Omega)$ er tæt i $C^k(\overline{\Omega})$, for tilfældet $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$, for $k \in \mathbb{N}_0$.

5.6 Induktiv limes topologi. Lad X være et vektorrum, og $E_1 \subsetneqq E_2 \subsetneqq E_3 \subsetneqq \cdots \subsetneqq E_j \subsetneqq \cdots$ en strengt voksende følge af underrum i X , således at $X = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Antag, at for alle $j \in \mathbb{N}$ er (E_j,τ_j) et lokalkonvekst topologisk vektorrum; og antag at for $j < k$ er den af τ_k inducerede topologi på E_j den samme som τ_j (som i Sætning 4.13).

(a) Sæt $\mathcal{P} = \{\text{seminormer } p \text{ på } X \mid p|_{E_j} \text{ er } \tau_j\text{-kontinuert } \forall j \in \mathbb{N}\}$.
Vis, at $\mathcal{P}$ er separerende. (Man kan bruge Øvelse 4.15c.)

(b) $\mathcal{P}$ definerer altså en lokalkonveks vektortopologi τ på X . Vis, at den af τ inducerede topologi på E_j er netop τ_j .

(c) Antag, at Λ er en lineær afbildning af X ind i et lokalkonvekst topologisk vektorrum Y . Vis, at Λ er τ-kontinuert hvis og kun hvis $\Lambda|_{E_j}$ er kontinuert $E_j \to Y$ for ethvert $j \in \mathbb{N}$.

(d) Vis, at en mængde $B \subset X$ er begrænset (m.h.t. τ) hvis og kun hvis $\exists j \in \mathbb{N}: B \subset \overline{E}_j$ og B er begrænset i $\overline{E}_j$.

(e) Eksempel. $X = C_0^0(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f$ har kompakt støtte$\}$. Tag $E_j = C^0_{[-j,j]}(\mathbb{R}) = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} f \subset [-j,j]\}$, med sup-norm topologien. Vis, at topologien τ på $C_0^0(\mathbb{R})$ bestemt ud fra τ_j som i (b) er strengt finere end sup-norm topologien på $C_0^0(\mathbb{R})$.

5.7 Vis, at når $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, er

$$\partial_k(h_j * u) = h_j * \partial_k u .$$

(Selvom u ikke antages at have kompakt støtte, benyttes kun u's udseende på en kompakt mængde ved undersøgelsen af differentialkvotienten i et punkt.)

5.8 Vis, at $L^2_{loc}(\Omega)$ kan identificeres med $(L^2_{comp}(\Omega))^*$ på en sådan måde, at elementet $v \in L^2_{loc}(\Omega)$ svarer til funktionalen

$$u \sim \int u(x)\overline{v}(x)dx \ , \quad u \in L^2_{comp}(\Omega) .$$

5.9 Lad $M = \underline{B}(0,1)$ i $\mathbb{R}^n$. Gør rede for, at $C^1(M)$ er fuldstændigt med hensyn til C^1-normen, men ikke fuldstændigt med hensyn til normen (5.20) (for $k = 1$).

Øvelser i tilknytning til Kapitel 6.

6.1 Vis, at konvergens af en følge i $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ eller $L^p_{loc}(\Omega)$ ($p \in [1,\infty]$) medfører konvergens i $\mathcal{D}'(\Omega)$.

6.2 (a) Idet $f_n(x)$ defineres ved

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{for } x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right], \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right], \end{cases}$$

skal man vise, at $f_n \to \delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, for $n \to \infty$.

(b) Idet $g_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$, skal man vise, at $g_n \to \delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, for $n \to \infty$. (Hertil kan bl.a. benyttes Riemann's lemma fra Fourier teori.)

6.3 Lad $f(x)$ være en funktion på $\mathbb{R}$, således at f er C^∞ på hvert af intervallerne $]-\infty,x_0[$ og $]x_0,+\infty[$, og grænseværdierne $\lim_{x \to x_0+} f^{(k)}(x)$ og $\lim_{x \to x_0-} f^{(k)}(x)$ eksisterer for alle $k \in \mathbb{N}_0$. Idet man betegner den funktion, der stemmer overens med $f^{(k)}(x)$ for $x \neq x_0$, ved $f_k(x)$, skal man vise, at der om distributionen $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gælder, at dens afledede ∂f kan identificeres med summen af funktionen f_1 (betragtet som distribution) og distributionen $c\delta_{x_0}$, hvor $c = \lim_{x \to x_0+} f(x) - \lim_{x \to x_0-} f(x)$; kort udtrykt

$$\partial f = f_1 + c\delta_{x_0} \quad \text{i } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) .$$

Bestem tilsvarende udtryk for $\partial^k f$, for alle $k \in \mathbb{N}$.

6.4 Man betragter rækken $\Sigma_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx}$ for $x \in I =]-\pi,\pi[$ (i sædvanlig forstand er rækken divergent i alle $x \in I$).

(a) Vis, at afsnitsfølgen $\Sigma_{-M \leq k \leq M'} e^{ikx}$ konvergerer i $\mathcal{D}'(I)$, for M og $M' \to \infty$, mod en distribution $\Lambda \in \mathcal{D}'(I)$, og bestem Λ . (Man siger, at rækken konvergerer mod Λ i $\mathcal{D}'(I)$.)

(b) Vis, at for hvert $N \in \mathbb{N}$ konvergerer rækken $\Sigma_{k \in \mathbb{Z}} k^N e^{ikx}$ mod en distribution Λ_N i $\mathcal{D}'(I)$, og vis at $\Lambda_N = D^N \Lambda$.

6.5 For $a \in \mathbb{R}_+$ sættes $f_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2}$ for $x \in \mathbb{R}$. Vis, at $f_a \to \delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ for $a \to 0+$.

6.6 Lad u være en distribution på $\mathbb{R}^n$ med støtte $= \{0\}$. Der findes da et N , så u har orden N . Betegn $\chi(x/r) = \zeta_r(x)$, for $r \in]0,1]$.

(a) Lad $N = 0$. Vis, at der findes en konstant c_1 , så

(1) $$|\langle u,\varphi\rangle| \leq c_1|\varphi(0)| \quad \text{for alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ .$$

(Indsæt $\varphi = \zeta_r\varphi + (1-\zeta_r)\varphi$ og lad $r \to 0$.) Vis, at der findes en konstant a , så

(2) $$\underline{\underline{u = a\delta}} \ .$$

(Man kan vise, at $\langle u,\varphi\rangle = \langle u,\zeta_1\varphi\rangle + 0 = \langle u,\zeta_1\rangle\,\varphi(0)$.)

(b) Lad $N > 0$. Vis, at funktionen ζ_r opfylder (for $r \in]0,1]$)

(3) $$|\partial^\alpha\zeta_r(x)| \leq c_\alpha r^{-|\alpha|} \quad \text{for hvert } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ .$$

Lad $\mathcal{M} = \{\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha\psi(0) = 0 \text{ for alle } |\alpha| \leq N\}$, og vis at der gælder uligheder for hvert $\psi \in \mathcal{M}$:

(4) $$|\psi(x)| \leq c|x|^{N+1} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n \ ;$$

(5) $$|\partial^\alpha(\zeta_r(x)\psi(x))| \leq c'\, r^{N+1-|\alpha|} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n, r \in]0,1] \text{ og } |\alpha| \leq N \ ;$$

(6) $$|\langle u\,,\zeta_r\psi\rangle| \leq c'r \quad \text{for alle } r \in]0,1] \ ;$$

og dermed

(7) $$\langle u,\psi\rangle = 0 \quad \text{når } \psi \in \mathcal{M}.$$

Vis, at der findes konstanter a_α , så

(8) $$\underline{\underline{u = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha\, \partial^\alpha\delta}} \ .$$

Man kan benytte, at $\langle u,\varphi\rangle = \langle u\,,\zeta_1\varphi\rangle = \langle u\,,\zeta_1[\sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}x^\alpha + \psi(x)]\rangle =$
$\sum_{|\alpha|\leq N} \langle u\,,\zeta_1 \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!}\rangle(-\partial)^\alpha\varphi(0)$. [Mat 313, Lemma 11.2 kan også benyttes til (7)$\Rightarrow$(8).]

6.7 Vi betragter $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ for $n \geq 2$.

(a) Vis, at funktionen $f(x) = \frac{x_1}{|x|}$ er begrænset og er i $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Vis, at de første ordens klassiske afledede af f, defineret for $x \neq 0$, er funktioner i $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Vis, at de første ordens afledede defineret i distributionsforstand på $\mathbb{R}^n$, er lig med de funktioner, der defineres under (b). (Vink: Det er nok at se på f og $\partial_{x_j} f$ på $B(0,1)$. Man kan her beregne $\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_{x_j} \varphi \rangle$ for $\varphi \in C_0^\infty(B(0,1))$ som et integral over $B(0,1) = [B(0,1) \setminus B(0,\varepsilon)] \cup B(0,\varepsilon)$, hvor man lader $\varepsilon \to 0$, jvf. formel (6.24).)

6.8. (a) Lad $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vis, at $\langle \delta, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi\delta = 0$.

(b) Betragt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Undersøg, om der i <u>almindelighed</u> gælder en af implikationerne (i) $\langle u, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi u = 0$; eller (ii) $\varphi u = 0 \Rightarrow \langle u, \varphi \rangle = 0$.

6.9. (a) Lad $\Omega = \mathbb{R}^n$. Vis, at ordenen af distributionen $D^\alpha \delta$ er lig med $|\alpha|$. Vis, at når M er et interval $[a,b]$ af $\mathbb{R}$ $(a<b)$, så er ordenen af $D^j 1_M$ lig med $j-1$.

(b) Lad $\Omega = \mathbb{R}$. Vis, at funktionalen Λ_1 defineret ved

$$\langle \Lambda_1, \varphi \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} \varphi^{(N)}(N) \quad \text{for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

er en distribution på $\mathbb{R}$, hvis orden er ∞. Vis, at funktionalen Λ defineret nedest side 6.4 (rettet) er en distribution, hvis orden er ∞.

6.10. Lad Ω være en glat åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, eller $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

(a) Udled af (6.24) <u>Green's formler</u>, for $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, v i hhv. $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ og $C_0^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(Ø6.10a) \qquad \int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^n \partial_j u \, \partial_j v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS$$

$$(Ø6.10b) \qquad \int_\Omega [(-\Delta u) v - u(-\Delta v)] dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n}\right] dS ,$$

hvor $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sum_{j=1}^n n_j(x) \partial_j u(x)$ for $x \in \partial\Omega$.

(b) Vis, at distributionen $(-\Delta) 1_\Omega$ på $\mathbb{R}^n$ opfylder

$$\langle (-\Delta) 1_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad \text{for } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) ,$$

og bestem distributionens orden og støtte i tilfældet $\Omega = \mathbb{R}^n_+$.

6.11. Vis, at rummet $C^\infty(\Omega)^*$ af kontinuerte lineære funktionaler på $C^\infty(\Omega)$ kan identificeres med underrummet $\mathcal{E}'(\Omega)$ af $\mathcal{D}'(\Omega)$, på en sådan måde, at når $\Lambda \in C^\infty(\Omega)^*$ identificeres med $\Lambda_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, er

$$\Lambda(\varphi) = \langle \Lambda_1, \varphi \rangle \quad \text{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

6.12. Lad $\Omega = \cup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$, hvor $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ er et vilkårligt system af åbne mængder i $\mathbb{R}^n$. Lad der være givet distributioner $u_\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega_\lambda)$, med den egenskab, at u_λ er lig u_μ på $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$, for hvert par af indices $\lambda, \mu \in \Lambda$. Vis, at der findes en og kun en distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, så $u|_{\Omega_\lambda} = u_\lambda$ for alle $\lambda \in \Lambda$.

6.13. Idet e_j betegner den j-te koordinatvektor i $\mathbb{R}^n$, defineres differenskvotienten $\Delta_{j,h}u$ af en vilkårlig distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ved

$$\Delta_{j,h}u = \frac{1}{h}(T(\tau_{he_j})u - u) , \quad \text{for} \quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ,$$

jvf. Eksempel 6.17. Vis, at $\Delta_{j,h}u \to \partial_j u$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ for $h \to 0$.

Øvelser i tilknytning til Kapitel 7.

7.1. Lad Ω være åben $\subset \mathbb{R}^n$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Vis, at $H^m(\Omega)$ har en tællelig ortonormal basis, altså er separabelt. (Man kan benytte, at $H^m(\Omega)$ kan identificeres med et underrum af $\prod_{|\alpha|\leq m} L^2(\Omega)$.)

7.2. Lad $A = \Sigma_{i=1}^n a_i D_i$ være en første ordens differentialoperator på $\mathbb{R}^n$ med konstante koefficienter. Vis, at $A_{max} = A_{min}$.

7.3. Lad $I =]a,b[$. Vis, at der for hvert $\varepsilon > 0$ findes en konstant $C(\varepsilon)$, så at for $u \in H^1(I)$ gælder

$$|u(a)| \leq \varepsilon\|u\|_1 + C(\varepsilon)\|u\|_0 .$$

(Vink: Man kan vælge ζ passende i (7.36).)

7.4. Lad $I =]a,b[$. Vis, at der for hvert $\varepsilon > 0$ findes en konstant $C(\varepsilon)$, så at der for alle $u \in H^1(I)$ gælder

$$\sup_{t\in I}|u(t)| \leq \varepsilon\|u\|_1 + C(\varepsilon)\|u\|_0 .$$

[Vink: $|u(t)|^2 = \int_a^t \frac{d}{ds}[u(s)\overline{u}(s)]ds + |u(a)|^2 \leq 2\|u'\|_0\ \|u\|_0 + |u(a)|^2$. Her kan uligheden $2xy \leq c^2x^2 + \frac{1}{c^2}y^2$ (hvor $x,y \in \mathbb{R}$) benyttes for vilkårligt c .]

7.5. Lad $I =]a,b[$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Lad A være differentialoperatoren

$$A = D_t^m + p_1(t)D_t^{m-1} + \ldots + p_m(t)$$

med koefficienter $p_j(t) \in C^\infty(\overline{I})$. Vis, at $D(A_{max}) = H^m(I)$ og $D(A_{min}) = H_0^m(I)$. [Det kan eventuelt udnyttes, at Au også kan skrives $Au = \Sigma_{j=0}^m D_t^j(q_j u)$ med $q_j \in C^\infty(\overline{I})$.]

7.6. Vis, at den i Sætning 7.18 definerede integraloperator (7.76) giver en løsning $u = Rf$ i $D(\widetilde{A})$ til problemet $\widetilde{A}u = f$, for ethvert $f \in L^2(I)$.

7.7. Idet A er differentialoperatoren givet ved (7.40), betragtes realisationerne $\tilde{A}$ bestemt ved randbetingelserne $\gamma_1 u = F\gamma_0 u$, hvor F er en 2×2 matrix.

(a) Karakteriser de F, for hvilke $\tilde{A}$ er selvadjungeret.

(b) Karakteriser de F, for hvilke den tilstrækkelige betingelse i Lemma 7.17 for at $\tilde{A} \geq 0$, er opfyldt.

(c) Find den tilhørende sesquilineære form $\tilde{a}(u,v)$ og dennes definitionsområde V i tilfældene (b) (jvf. Sætning 2.14 og Korollar 2.16).

7.8. Find den sesquilineære form $\tilde{a}(u,v)$ og dennes definitionsområde V for realisationen $\tilde{A}$ af A (jvf. (7.40)) bestemt ved randbetingelsen

$$u(a) = 0 , \quad u'(b) = 0 .$$

7.9. Lad I være et åbent interval af $\mathbb{R}$ (begrænset eller ubegrænset), og lad Q_n betegne produktmængden

$$Q_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in I \text{ for } j=1,\dots,n\} .$$

Lad $h \in C_0^\infty(I)$ med $\int_I h(t)dt = 1$, og lad $\tilde{h}(x) = h(x_1)\cdots h(x_n)$; det er en funktion i $C_0^\infty(Q_n)$ med $\langle 1,\tilde{h}\rangle = 1$.

(a) Vis, at enhver funktion $\varphi \in C_0^\infty(Q_n)$ kan skrives på formen

$$(*) \qquad \varphi = \partial_{x_1}\psi_1 + \cdots + \partial_{x_n}\psi_n + \langle 1,\varphi\rangle \tilde{h} ,$$

hvor $\psi_1,\dots,\psi_n$ tilhører $C_0^\infty(Q_n)$. [Vink: Man kan for eksempel opnå formlen successivt således: Lad $\varphi_1(x_2,\dots,x_n) = \int_I \varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_1$, og sæt

$$\zeta_1(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} [\varphi(s,x_2,\dots,x_n) - h(s)\varphi_1(x_2,\dots,x_n)]ds ;$$

vis, at $\zeta_1 \in C_0^\infty(Q_n)$ og

$$\varphi = \partial_{x_1}\zeta_1 + h(x_1)\varphi_1(x_2,\dots,x_n) .$$

Udfør den tilsvarende konstruktion for $\varphi_1 \in C_0^\infty(Q_{n-1})$ og indsæt i formlen for φ; fortsæt indtil (*) er opnået.]

(b) Vis, at hvis $v \in \mathscr{D}'(Q_n)$ opfylder

$$\partial_{x_1}v = \partial_{x_2}v = \cdots = \partial_{x_n}v = 0 ,$$

så er v lig en konstant (nemlig konstanten $c = \langle v,\tilde{h}\rangle$).

Øvelser i tilknytning til Kapitel 8.

8.1. Lad $n = 1$. Vis, at $e^x \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, mens $e^x\cos(e^x) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

8.2. Vis, at der for hvert $M \in \mathbb{N}$ findes en hel, positiv konstant C_M, så at

$$\sum_{|\alpha|\leq M} x^{2\alpha} \leq (1+x_1^2+\dots+x_n^2)^M \leq C_M \sum_{|\alpha|\leq M} x^{2\alpha} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n .$$

Vis, at systemerne af seminormer (8.1) og (8.2) definerer den samme topologi.

8.3. Lad $a > 0$. Idet $H(t)$ betegner Heaviside funktionen, skal man vise, at

$$\mathcal{F}[H(t)e^{-at}] = \frac{1}{a+it} .$$

Hvad er $\mathcal{F}[H(-t)e^{at}]$?

8.4. a) Vis, at for $n = 1$ er $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+\xi^2}\right] = c\, e^{-|x|}$, bestem c. (Man kan f.eks. benytte Opgave 8.3.)

b) Vis, at for $n = 3$ er $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+|\xi|^2}\right] = \frac{c}{|x|}e^{-|x|}$, bestem c. (Man kan f.eks. bemærke, at funktionen er den entydige løsning v i $\mathscr{S}'$ til $(1-\Delta)v = \delta$; eller man kan bruge rotationsinvariansen direkte.)

8.5. Lad M og n være hele tal med $0 < 2M < n$. Find en integraloperator T_M på $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ med følgende egenskaber:

(i) $\Delta^M T_M f = f$ når $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Når Ω er en begrænset, åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, og $2M > n/2$, er operatoren $(T_M)_\Omega$ (defineret som i (8.63)) en Hilbert-Schmidt operator i $L^2(\Omega)$.

8.6. Vis, at differentialligningen på $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 3u = f$$

har en og kun én løsning $u \in \mathscr{S}'$ for hvert $f \in \mathscr{S}'$. Undersøg, hvilke Sobolev rum $H^s(\mathbb{R}^3)$, u tilhører, når $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

8.7. Lad $a \in \mathbb{C}$, og vis at distributionen $u = e^{-ax}H(x)$ er løsning til differentialligningen

$$(\partial_x + a)u = \delta \quad \text{i } \mathscr{D}'(\mathbb{R}) .$$

Kan vi vise dette ved Fouriertransformation?

8.8. Vis, at Cauchy-Riemann ligningen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y) = f(x,y)$$

på $\mathbb{R}^2$ har en løsning for hvert $f \in \mathscr{S}$; beskriv denne.

8.9. Når f er en funktion på $\mathbb{R}$, som er integrabel på $\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$ for alle $\varepsilon > 0$, defineres principalværdiintegralet som bekendt ved

$$PV\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)dx ,$$

når denne grænseværdi eksisterer.

For $m \in \mathbb{N}$ og $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ defineres funktionalen Λ_m ved

$$\Lambda_m(\varphi) = PV\int_{-\infty}^{\infty}\{x^{-m}\varphi(x) - \sum_{p=0}^{m-2}\frac{x^{p-m}}{p!}\varphi^{(p)}(0)\}dx .$$

(a) Vis, at PV ... eksisterer, så $\Lambda_m(\varphi)$ er veldefineret.

(b) Vis, at $\Lambda_m(\varphi') = m\,\Lambda_{m+1}(\varphi)$.

(c) Vis, at Λ_m er en distribution, og at $\Lambda_m = (-1)^{m-1}(m-1)!\,\frac{d^m}{dx^m}\log|x|$.

Λ_m kaldes også $PF\frac{1}{x^m}$, hvor PF står for pseudo-funktion.

8.10. Lad $I = \mathbb{R}$ eller $I =]a,\infty[$. Vis, at når u og $D^m u \in L^2(I)$, så er $u \in H^m(I)$. (Man kan vise dette for $I = \mathbb{R}$ ved hjælp af Fourier transformationen, og dernæst for $I =]a,\infty[$ ved hjælp af en beskæringsfunktion.)

Øvelser i tilknytning til Kapitel 9.

9.1. Vis, at foldningsproduktet $u*\psi$ (for $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ og $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, eller $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ og $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$) opfylder

(1) $$D^\alpha(u*\psi) = D^\alpha u * \psi = u * D^\alpha \psi ,$$

(2) $$u*(\psi*\varphi) = (u*\psi)*\varphi$$

for alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ resp. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

9.2. Vis, at der for $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ og $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gælder

$$\mathcal{F}(u*\psi) = \hat{u} \cdot \hat{\psi} .$$

9.3. (a) Vis, at når $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ (eller $\cup_t H^t(\mathbb{R}^n)$) og $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, så er $u*\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Man kan bruge Øvelse 9.2.)

(b) Vis, at når $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ og $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, så er $u*\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Man kan skrive

$$u = \eta_1 u + \sum_{j=1}^{\infty} (\eta_{j+1} - \eta_j) u ,$$

hvor η_j er som i Sætning 5.11; summen er lokalt endelig, dvs. endelig på kompakte mængder. Da er $u*\psi = \eta_1 u*\psi + \Sigma(\eta_{j+1}-\eta_j)u*\psi$ ligeledes lokalt endelig.)

9.4. Vis, at varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta_x u(x,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

(hvor $x \in \mathbb{R}^n$ og $t \in \overline{\mathbb{R}_+}$) for $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ har en løsning af formen

$$u(x,t) = c_1 t^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c_2 |x-y|^2/t)\varphi(y)dy ,$$

og bestem eventuelt konstanterne c_1 og c_2.

9.5. (a) Vis, at $\delta * f = f$ for $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Vis, at funktionen $H(s)H(t)$ på $\mathbb{R}^2$ (med punkter (s,t)) opfylder

(1) $$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} H(s)H(t) = \delta \quad \text{i } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2) .$$

(c) Vis, at funktionen $U(x,y) = H(x+y)H(x-y)$ på $\mathbb{R}^2$ (med punkter (x,y)) er løsning til differentialligningen

(2) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = c\delta \quad \text{i} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2),$$

og find c . Man kan eventuelt benytte et koordinatskift $s = x+y$, $t = x-y$.

(d) Vis, at når $f(x,y) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$, er $u = \frac{1}{c} U*f$ en C^∞-løsning til

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{på} \quad \mathbb{R}^2 .$$

9.6. Lad $P(D)$ være en differentialoperator med konstante koefficienter. En distribution $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kaldes en fundamentalløsning (eller elementær løsning) til $P(D)$, hvis E opfylder

$$P(D)E = \delta .$$

(a) Vis, at når E er en fundamentalløsning til $P(D)$ i $\mathscr{S}'$, så er

$$P(D)(E*f) = f \quad \text{for } f \in \mathscr{S}$$

(jvf. Øvelse 9.5 (a)), dvs. ligningen $P(D)u = f$ har løsningen $u = E*f$ for $f \in \mathscr{S}$.

(b) Find fundamentalløsninger til $-\Delta$ og $-\Delta + 1$ i $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ (jvf. Afsnit 8.4 og Øvelse 8.4).

9.7. (Eksamensopgave i Mat 313, 1980/81.)
Lad $\mathscr{t}$ betegne vektorrummet af reelle talfølger $\underline{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. For hvert $N \in \mathbb{Z}$ defineres ℓ_N^2 som underrummet af $\mathscr{t}$ bestående af talfølger $\underline{a}$, for hvilke der gælder

(1) $$\|\underline{a}\|_N \equiv \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{2N} |a_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Med $\mathscr{s}$ betegnes mængden $\bigcap_{N\geq 0} \ell_N^2$. Endvidere skrives

(2) $$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k ,$$

når denne række er konvergent.

(a) Idet ℓ_N^2 forsynes med topologien bestemt ved normen $\|\cdot\|_N$, skal man undersøge, om det topologiske vektorrum ℓ_N^2 har hver af egenskaberne: lokalkonvekst, lokalt begrænset, fuldstændigt, Banach rum, Fréchet rum.

(b) Idet $\mathscr{s}$ forsynes med topologien bestemt ved følgen af normer $\|\cdot\|_N$, $N = 0,1,2,\ldots$, skal man undersøge, om det topologiske vektorrum $\mathscr{s}$ har hver af egenskaberne: lokalkonvekst, lokalt begrænset, fuldstændigt, Banach rum, Fréchet rum.

(c) Lad N være hel ≥ 0 . Vis, at $(\ell^2_N)^*$ kan identificeres med rummet ℓ^2_{-N} , således at når $\Lambda \in (\ell^2_N)^*$ identificeres med talfølgen $\underline{a} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, er

$$(3) \qquad \Lambda(\underline{b}) = \langle \underline{a},\underline{b} \rangle$$

for alle $\underline{b} = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i ℓ^2_N .

(d) Vis, at dualrummet $\mathcal{s}^*$ til $\mathcal{s}$ kan identificeres med rummet $\cup_{N\geq 0} \ell^2_{-N}$.

(e) Vis, at operatoren T fra $\mathcal{s}$ ind i $\mathcal{s}$, bestemt ved

$$T[(a_k)_{k\in\mathbb{N}}] = \left(\frac{1}{k} a_k + k^3 a_{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} ,$$

definerer en kontinuert operator fra $\mathcal{s}$ ind i $\mathcal{s}$.

9.8. (Eksamensopgave i Mat 313, 1980/81.)

(a) Vis at når f og g er lokalt integrable funktioner på $\mathbb{R}$, hvis støtter opfylder

$$\mathrm{supp}(f) \subset [a,\infty[\ , \quad \mathrm{supp}(g) \subset [b,\infty[\ ,$$

hvor a og $b \in \mathbb{R}$, så er $f*g$ en lokalt integrabel funktion på $\mathbb{R}$, med $\mathrm{supp}(f*g) \subset [a+b,\infty[$. (Opskriv foldningsintegralet.)

(b) Lad λ_1 og $\lambda_2 \in \mathbb{C}$. Beregn

$$E(x) = (H(x)e^{\lambda_1 x})*(H(x)e^{\lambda_2 x}) ,$$

hvor $H(x)$ er Heaviside funktionen ($H(x) = 1$ for $x > 0$, $H(x) = 0$ for $x \leq 0$).

(c) Lad $P(t)$ være et andengradspolynomium med faktoropløsningen $P(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$. Vis, at

$$[(\delta'-\lambda_1\delta)*(\delta'-\lambda_2\delta)]*E(x) = \delta ,$$

og dermed, at E er fundamentalløsning til operatoren $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} - (\lambda_1+\lambda_2)\frac{d}{dx} + \lambda_1\lambda_2$.

(d) Undersøg, om der findes en fundamentalløsning til $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ med støtte i $]-\infty,0]$.

(e) Opskriv løsningen til problemet

$$(*)\quad \begin{cases} (P(\frac{d}{dx})u)(x) = f(x) & \text{for } x > 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

hvor f er en given kontinuert funktion på $[0,\infty[$.