FAMILIER AF OPERATORER I POTENTIALTEORIEN

Forelæsninger foråret 1976

ved Gunnar Forst

Indhold.

§0. Funktioner med værdier i et Banachrum.

Lad E være et Banachrum over $\mathbb{C}$ med norm $\| \ \|$. Det duale rum altså vektorrummet af kontinuerte linearformer på E, betegnes E' og for $x \in E$ og $\varphi \in E'$ er $\langle x,\varphi\rangle$ værdien af φ på x.

Lad X være et lokalkompakt rum og μ et positivt Radon mål på X, altså en positiv linearform på $C_c(X)$, rummet af kontinuerte funktioner $X \to \mathbb{C}$ med kompakt støtte.

0.1. Definition. En kontinuert funktion $f: X \to E$ kaldes (svagt) μ-integrabel med μ-integral $a \in E$ hvis

$$\varphi \circ f \in L^1(\mu) \quad \text{og} \quad \langle a,\varphi\rangle = \int \langle f(x),\varphi\rangle d\mu(x) \quad \text{for} \quad \varphi \in E'. \quad (*)$$

Om to elementer $a,b \in E$ der opfylder $(*)$ gælder $\langle a-b,\varphi\rangle = 0$ for $\varphi \in E'$ og dermed $a = b$, og μ-integralet af en kontinuert funktion $f: X \to E$ er således entydigt bestemt hvis det eksisterer. Det skrives kort $a = \int f d\mu$.

0.2. Sætning. Hvis X er kompakt er enhver kontinuert funktion $f: X \to E$ μ-integrabel, og der gælder

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leqq \int \|f(x)\| d\mu(x) .$$

Bevis. Mængden $f(X)$ er kompakt i E og dermed er det afsluttede, stjerneformet symmetriske konvekse hylster K af $f(X)$ kompakt i E og K er derfor også kompakt i den svage topologi på E.

Antag først at $\mu(X) = 1$, altså at μ er et sandsynlighedsmål. For $\varphi \in E'$ er mængden

$$A_\varphi = \{y \in K \mid \langle y,\varphi\rangle = \int \varphi \circ f(x)d\mu(x)\}$$

en svagt afsluttet, altså svagt kompakt delmængde af E .

Vi skal se at vilkårlige endelig mange A_φ har ikke tom fællesmængde. Lad $\varphi_1,\cdots,\varphi_n \in E'$ og betragt den kontinuerte lineære afbildning $\Phi\colon E \to \mathbb{C}^n$ defineret ved

$$\Phi(y) = (\langle y,\varphi_1\rangle,\cdots,\langle y,\varphi_n\rangle) \quad \text{for} \quad y \in E .$$

Det er klart at

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\varphi_i} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\mu(\varphi_1 \circ f),\cdots,\mu(\varphi_n \circ f)) \in \Phi(K) \qquad (**) .$$

Hvis $v = (\mu(\varphi_1 \circ f),\cdots,\mu(\varphi_n \circ f)) \notin \Phi(K)$, så findes en kontinuert linearform $(\xi_1,\cdots,\xi_n) \overset{\psi}{\to} \sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i$ på $\mathbb{C}^n$ så

$$\psi(v) \neq \psi(u) \quad \text{for} \quad u \in \Phi(K) .$$

Nu er $\psi(\Phi(K))$ en kompakt, stjerneformet symmetrisk konveks delmængde af $\mathbb{C}$, altså en afsluttet cirkelskive

$$\psi(\Phi(K)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq R\} ,$$

og derfor gælder

$$\psi(v) > R .$$

På den anden side har vi

$$|\psi(v)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(\varphi_i \circ f)| = |\mu(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \, \varphi_i\right] \circ f)|$$

$$= |\mu((\psi \circ \Phi) \circ f)| \leqq \mu(\sup_{x\in X} |(\psi \circ \Phi) \circ f|) \leqq R ,$$

hvilket er en modstrid. Altså er $A_{\varphi_1} \cap \cdots \cap A_{\varphi_n} \neq \emptyset$ for vilkårlige $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in E'$.

Da K er kompakt findes et punkt $a \in \bigcap_{\varphi \in E'} A_\varphi$ og dette $a \in E$ har den ønskede egenskab.

For vilkårligt $\mu \neq 0$ er $\mu(X) > 0$, og $\mu' = \frac{1}{\mu(x)}\mu$ er da et sandsynlighedsmål på X. Hvis $a \in E$ er μ'-integralet af f så er $\mu(X) \cdot a \in E$, μ-integralet af f.

I et Banach rum gælder for hvert $a \in E$

$$\|a\| = \sup\{|\langle a,\varphi\rangle| \mid \varphi \in E', \|\varphi\| \leqq 1\}$$

hvoraf

$$\|\int f d\mu\| = \sup\{|\langle f d\mu,\varphi\rangle| \mid \varphi \in E', \|\varphi\| \leqq 1\}$$

$$\leqq \sup\{\int |\langle f(x),\varphi\rangle| d\mu(x) \mid \varphi \in E', \|\varphi\| \leqq 1\}$$

$$\leqq \int \|f(x)\| d\mu(x) . \blacksquare$$

0.3. <u>Sætning</u>. En kontinuert funktion $f: X \to E$ for hvilken

$$\int \|f(x)\| d\mu(x) < \infty$$

er μ-integrabel og der gælder

$$\|\int f d\mu\| \leqq \int \|f\| d\mu .$$

<u>Bevis</u>. Da funktionen $x \mapsto \|f(x)\|$ er μ-integrabel findes til $n \in \mathbb{N}$ en kompakt mængde $K_n \subseteqq X$ så

$$\int_{X \setminus K_n} \|f(x)\| d\mu(x) < \frac{1}{n} .$$

For hvert $n \in \mathbb{N}$ vælges $g_n \in C_c(X)$ så $0 \leqq g \leqq 1$ og $g = 1$ på K_n. Målet $\mu_n = g_n\mu$ har kompakt støtte og f er derfor μ_n-integrabel for $n \in \mathbb{N}$ og punktfølgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ på E givet ved

$$a_n = \int f \, d\mu_n = \int f(x)g_n(x)d\mu(x)$$

er en Cauchy følge. For $m,n \geqq N$ gælder nemlig

$$\| a_m - a_n \| \leqq \int \| f(x) \| \, | g_m(x) - g_n(x) | \, d\mu(x) < \frac{2}{N} .$$

Grænsepunktet a for $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er et μ-integral af f, thi for $\varphi \in E'$ har vi

$$\langle a,\varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a_n,\varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int \langle f(x),\varphi \rangle \, g_n(x) \, d\mu(x)$$

$$= \int \langle f(x),\varphi \rangle \, d\mu(x) \quad ,$$

idet

$$\left| \int \langle f(x) - f(x) \, g_n(x),\varphi \rangle \, d\mu(x) \right| \leqq \| \varphi \| \int (1-g_n(x)) \| f(x) \| d\mu(x)$$

$$\leqq \| \varphi \| \int_{X \setminus K_n} \| f(x) \| \, d\mu(x) \leqq \frac{\| \varphi \|}{n}$$

Uligheden vises ligesom i beviset for 0.2 . ▌

0.4. <u>Bemærkning</u>. Lad $f: X \to E$ være kontinuert og opfylde $\int \| f(x) \| \, d\mu(x) < \infty$ og lad $T: E \to F$ være en begrænset operator af E ind i et Banachrum F. Da er funktionen $T \circ f: X \to F$ kontinuert og opfylder $\int \| T \circ f(x) \| \, d\mu(x) \leqq \| T \| \int \| f(x) \| \, d\mu(x) < \infty$ og $T \circ f$ er derfor μ-integrabel og der gælder

$$T(\int f\, d\mu) = \int T \circ f(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Betegner $T'\colon F' \to E'$ den transponerede operator gælder nemlig for $\varphi \in F'$

$$\langle \int T \circ f(x)\, d\mu(x), \psi \rangle = \int \langle Tf(x), \varphi\rangle \quad d\mu(x)$$

$$= \int \langle f(x), T'\psi\rangle\, d\mu(x) = \langle \int f\, d\mu, T'\psi\rangle$$

$$= \langle T(\int f\, d\mu), \psi\rangle \ .$$

0.5. <u>Øvelse</u>. (Majoriseret konvergens af integraler). Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af kontinuerte funktioner $f_n\colon X \to E$ og lad $f\colon X \to E$ være en kontinuert funktion så

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{for} \quad x \in X \ .$$

Hvis der findes en kontinuert funktion $g\colon X \to [0,\infty[$ med egenskaberne

(i) $\forall x \in X\colon \forall n \in \mathbb{N} \qquad \| f_n(x) \| \leqq g(x)$

(ii) $\int g(x)\, d\mu(x) < \infty$.

så er f og f_n for $n \in \mathbb{N}$ μ-integrable, og der gælder

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu \quad .$$

<u>Vink</u>. Man kan starte med at vise at $(\int f_n\, d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ en en Cauchy følge på E .

0.6 Definition. En funktion $f: I \to E$ på et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$ kaldes differentiabel i punktet $x \in I$ med differentialkvotient $f'(x) \in E$ hvis

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Differentiabilitet fra højre $(h > 0)$ og venstre $(h < 0)$ defineres analogt.

For en funktion $f: I \to E$ som er differentiabel i alle punkter af I er funktionen $\varphi \circ f: I \to \mathbb{C}$ for $\varphi \in E'$ differentiabel med differentialkvotient

$$(\varphi \circ f)'(x) = \varphi \circ f'(x) \quad \text{for} \quad x \in I .$$

Heraf ses specielt (de kontinuerte linearformer på E skiller punkterne) at hvis $f: I \to E$ er differentiabel på I med $f'(x) = 0$ for $x \in I$ så er f konstant.

0.7. Øvelse. a) For en kontinuert funktion $f: [a,b] \to E$ er funktionen $F: [a,b] \to E$ givet ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

differentiabel på $[a,b]$ (fra højre i a, fra venstre i b) med

$$F'(x) = f(x) \quad \text{for} \quad x \in [a,b] .$$

b) Hvis $f: [a,b] \to E$ er differentiabel på $[a,b]$ med kontinuert differentialkvotient $f': [a,b] \to E$ gælder

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt .$$

0.8. Øvelse. (Delvis integration). Hvis $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ er differentiabel med kontinuert differentialkvotient f' og $g: [a,b] \to E$ er kontinuert gælder

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \Big[f(t)\, G(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, G(t)\, dt$$

hvor

$$G(t) = \int_a^t g(x)\, dx \quad \text{for} \quad t \in [a,b] .$$

§1. Kontraktionssemigrupper og deres frembringere.

Lad E være et Banach rum over $\mathbb{C}$, og lad $L(E)$ betegne Banach algebraen af begrænsede operatorer på E.

1.1. Definition. En kontraktionssemigruppe på E er en familie $(P_t)_{t \geqq 0}$ af begrænsede operatorer på E (altså $\{P_t \mid t \geqq 0\} \subseteqq L(E)$) der opfylder

(i) $P_0 = I$ (identiteten på E)

(ii) $P_{s+t} = P_s P_t$ for $s,t \geqq 0$

(iii) $\| P_t \| \leqq 1$ for $t \geqq 0$ (P_t er en "kontraktion").

Det er klart at operatorerne i en kontraktionssemigruppe kommuterer indbyrdes.

1.2. Definition. En kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t \geqq 0}$ på E siges at være stærkt kontinuert hvis for alle $x \in E$

$$\lim_{t \to 0} \| P_t x - x \| = 0 .$$

1.3. Sætning. For en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t \geqq 0}$ på E og $x \in E$ er afbildningen $t \mapsto P_t x$ af $[0,\infty[$ ind i E kontinuert.

Bevis. Lad $t_0 > 0$. For $h > 0$ gælder

$$\| P_{t_0+h} x - P_{t_0} x \| = \| P_{t_0} (P_h x - x) \| \leqq \| P_h x - x \|$$

og for $h \in]0,t_0[$ gælder

$$\|P_{t_0}x - P_{t_0-h}x\| = \|P_{t_0-h}(P_hx - x)\| \leqq \|P_hx - x\|$$

hvilket viser at $t \mapsto P_tx$ er kontinuert i t_0 . ∎

Sætningen viser, at for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geqq 0}$ på E er afbildningen $t \mapsto P_t$ af $[0,\infty[$ ind i L(E) "stærkt kontinuert", altså kontinuert når L(E) udstyres med topologien for punktvis konvergens.

1.4. Øvelse. For en kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geqq 0}$ på E er mængden

$$E_0 = \{x \in E \mid \lim_{t\to 0} \|P_tx - x\| = 0\}$$

et afsluttet underrum af E , og familien $(P_t|_{E_0})_{t\geqq 0}$ af restriktioner af P_t til E_0 er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på Banach rummet E_0 .

I det følgende betragter vi en fast stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geqq 0}$ på E .

1.5. Definition. Operatoren (A,D(A)) på E med domæne

$$D(A) = \{x \in E \mid \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_tx - x) \text{ eksisterer i } E\}$$

og givet ved

$$Ax = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_tx - x) \quad \text{for } x \in D(A) ,$$

kaldes den infinitesimale frembringer (kort frembringeren) for $(P_t)_{t\geqq 0}$.

Det er klart at $D(A)$ er et underrum af E og at $(A,D(A))$ kommuterer med alle operatorerne $(P_t)_{t \geqq 0}$, altså

$$P_t(D(A)) \subseteqq D(A) \quad \text{for} \quad t > 0$$

og

$$P_t(Ax) = A(P_t x) \quad \text{for} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad x \in D(A) \quad .$$

1.6. <u>Lemma</u>. For $x \in D(A)$ er afbildningen $t \mapsto P_t x$ af $[0,\infty[$ ind i E kontinuert differentiabel med differentialkvotient

$$\frac{d}{dt}(P_t x) = P_t(Ax) = A(P_t x) \quad .$$

<u>Bevis</u>. Lad $x \in D(A)$. For $t \geqq 0$ og $h > 0$ gælder

$$\|\frac{1}{h}(P_h(P_t x) - P_t x) - P_t Ax\| = \|P_t(\frac{1}{h}(P_h x - x) - Ax)\|$$

$$\leqq \|\frac{1}{h}(P_h x - x) - Ax\|$$

og for $t > 0$ og $h \in]0,t[$ gælder

$$\|\frac{1}{h}(P_t x - P_{t-h} x) - P_t(Ax)\| = \|P_{t-h}(\frac{1}{h}(P_h x - x) - P_h(Ax))\|$$

$$\leqq \|\frac{1}{h}(P_h x - x) - Ax\| + \|Ax - P_h(Ax)\|$$

hvilket viser at $t \mapsto P_t x$ er differentiabel fra højre og fra venstre med differentialkvotient

$$\frac{d}{dt} P_t x = P_t(Ax) = A(P_t x) \quad . \quad \blacksquare \quad .$$

1.7. <u>Sætning</u>. Den infinitesimale frembringer $(A,D(A))$ for $(P_t)_{t \geqq 0}$ er en tæt defineret og afsluttet operator.

Bevis. Lad $x \in E$. For $a > 0$ sætter vi $x^a = \int_0^a P_s x ds \in E$, og ifølge 0.4 gælder så for $t > 0$

$$\frac{1}{t}(P_t x^a - x^a) = \frac{1}{t}(\int_0^a P_s x \; x \, ds - \int_0^a P_s \; x \, ds)$$

$$= \frac{1}{t}(\int_t^{a+t} P_s \; xds - \int_0^a P_s xds) = \frac{1}{t}\int_a^{a+t} P_s xds - \frac{1}{t}\int_0^t P_s xds$$

som for $t \to 0$ konvergerer i E mod $P_a x - x$. Altså $x^a \in D(A)$ for $a > 0$ og endvidere

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} x^a = x$$

hvilket viser at $x \in E$ er grænseværdi for elementer fra $D(A)$, altså at $D(A)$ er tæt i E .

Vi skal nu se at $(A,D(A))$ er afsluttet. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge på $D(A)$ og antag at $x,y \in E$ opfylder

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{og} \quad y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \quad ;$$

vi skal indse at $x \in D(A)$ og $y = Ax$. Ifølge 1.6 og Øvelse 0.7 har vi for $n \in \mathbb{N}$ og $t > 0$

$$P_t x_n - x_n = \int_0^t P_s(Ax_n)ds \; ,$$

hvilket giver

$$P_t x - x = \int_0^t P_s \; y \; ds \; ,$$

som da $(P_t)_{t\geq 0}$ er stærkt kontinuert giver

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t x - x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t P_s yds = y \; ,$$

altså at $x \in D(A)$ og $Ax = y$. ▮ .

1.8. <u>Sætning</u>. Den "svage" frembringer $(A_0, D(A_0))$ med domæne

$$D(A_0) = \{x \in E \mid \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t x - x) \text{ eksisterer i den svage topologi på } E\}$$

og givet ved

$$A_0 x = \text{svag-}\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t x - x) \quad \text{for} \quad x \in D(A_0) \ ,$$

er identisk med frembringeren for $(P_t)_{t \geqq 0}$.

<u>Bevis</u>. Det er klart at $D(A) \subseteq D(A_0)$. Lad $x \in D(A_0)$. For $\varphi \in E'$ er funktionen $t \mapsto \langle P_t x, \varphi\rangle$ differentiabel fra højre med (højre)afledet $\langle P_t(A_0 x), \varphi\rangle$, thi for $t \geqq 0$ og $h > 0$ har vi

$$|\langle \tfrac{1}{h}(P_{t+h}x - P_t x), \varphi\rangle - \langle P_t(A_0 x), \varphi\rangle| = |\langle P_t(\tfrac{1}{h}(P_h x - x) - A_0 x), \varphi\rangle|$$

som konvergerer mod 0 for $h \to 0$. Da funktionen $t \mapsto \langle P_t(A_0 x), \varphi\rangle$ er kontinuert giver Lemma 1.9 nedenfor at $t \mapsto \langle P_t x, \varphi\rangle$ er kontinuert differentiabel med differentialkvotient $\langle P_t(A_0 x), \varphi\rangle$, og derfor er

$$\langle P_t x, \varphi\rangle - \langle x, \varphi\rangle = \int_0^t \langle P_s(A_0 x), \varphi\rangle \, ds \quad \text{for} \quad t > 0$$

hvoraf

$$\tfrac{1}{t}(P_t x - x) = \tfrac{1}{t}\int_0^t P_s(A_0 x) ds \quad \text{for} \quad t > 0 \ ,$$

og højresiden konvergerer for $t \to 0$ mod $A_0 x$, hvilket viser at $x \in D(A)$ og $Ax = A_0 x$. ▮

1.9. Lemma. Lad $f\colon I \to \mathbb{C}$ være en kontinuert funktion på et åbent interval $I \subseteq \mathbb{R}$ og antag at den højreafledede

$$D^+f(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) \quad \text{for} \quad x \in I \;,$$

eksisterer og er kontinuert på I. Så er f kontinuert differentiabel.

Bevis. Vi kan nøjes med at se på tilfældet hvor f er en reel funktion da det almindelige resultat så følger ved at betragte realdelen og imaginærdelen af f.

Hvis det gælder at $D^+f(x) \geqq 0$ på et delinterval $[a,b] \subseteq I$ så har vi $f(b) - f(a) \geqq 0$; thi i modsat fald findes $\delta > 0$ så

$$f(b) - f(a) < -\delta(b-a) \quad ,$$

og for funktionen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$g(t) = f(t) - f(a) + \delta(t-a) \quad \text{for} \quad t \in [a,b] \quad ,$$

gælder

$$D^+g(a) = D^+f(a) + \delta > 0 \;,$$

og dermed findes, da $g(a) = 0$, et $t_0 \in]a,b[$ så $g(t_0) > 0$. Da g er kontinuert og $g(b) < 0$ findes videre et $t_1 \in]t_0,b[$ så

$$g(t_1) = 0 \quad \text{og} \quad g(t) < 0 \quad \text{for} \quad t \in]t_1,b[$$

og dermed er $D^+g(t_1) \leqq 0$ i modstrid med $D^+g(t_1) = D^+f(t_1) + \delta > 0$.

På samme måde vises, ved at betragte $f(t) - \alpha t$, henh. $\beta t - f(t)$, at hvis $D^+f \in [\alpha,\beta]$ på et interval $[a,b]$ så gælder $\alpha \leqq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq \beta$.

For $t_0 \in I$ og $\varepsilon > 0$ findes da D^+f er kontinuert i t_0 et $t_1 < t_0$ så

$$|D^+f(t) - D^+f(t_0)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad t \in \,]t_1,t_0[$$

Dermed gælder ifølge det lige viste at

$$\frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t} \in [D^+f(t_0)-\varepsilon,\ D^+f(t_0)+\varepsilon] \quad \text{for} \quad t \in [t_1,t_0[$$

altså

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t} = D^+f(t_0)$$

hvilket viser at f er differentiabel med differentialkvotient D^+f (som er kontinuert). ▌ .

1.10 <u>Øvelse</u>. En kontinuert funktion $\varphi: [0,\infty[\to \mathbb{C}$ der opfylder

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{og} \quad \varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t) \quad \text{for} \quad s,t \geqq 0 ,$$

har formen

$$\varphi(t) = \exp(at) \quad \text{for} \quad t \geqq 0 ,$$

hvor $a \in \mathbb{C}$ er givet ved

$$a = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} .$$

Vink. Vælg $\delta > 0$ så $\alpha = \int_0^\delta \varphi(s)ds \neq 0$ og skriv

$$\varphi(s) = \frac{1}{\alpha} \int_s^{s+\delta} \varphi(u)du \quad .$$

De stærkt kontinuerte kontraktions-semigrupper $(P_t)_{t \geqq 0}$ på $E = \mathbb{C}$ (udstyret med den sædvanlige norm) er derfor givet ved

$$P_t^a x = e^{ta} x \quad \text{for} \quad t \geqq 0 \quad \text{og} \quad x \in \mathbb{C} \quad ,$$

hvor $a \in \mathbb{C}$ opfylder $\operatorname{Re} a \leqq 0$.

Find den infinitesimale frembringer for $(P_t^a)_{t \geqq 0}$ hvor $\operatorname{Re} a \leqq 0$.

1.11. Øvelse. Lad $A \in L(E)$. For $t \geqq 0$ defineres ved

$$P_t = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

en begrænset operator på E og familien $(P_t)_{t \geqq 0}$ opfylder

$$P_0 = I \quad \text{og} \quad P_{s+t} = P_s P_t \quad \text{for} \quad s,t \geqq 0 \quad .$$

Endvidere er afbildningen $t \mapsto P_t$ af $[0,\infty[$ ind i $L(E)$ kontinuert i normtopologien på $L(E)$ og der gælder

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (P_t - I) \quad \text{i normtopologien på} \quad L(E) \quad .$$

1.12. Øvelse. Lad $C_b(\mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{R})$ og $C_0(\mathbb{R})$ betegne vektorrummene af kontinuerte begrænsede, ligeligt kontinuerte begrænsede og kontinuerte funktioner der går mod 0 i ∞ , på $\mathbb{R}$. Udstyret med supremumsnormen

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \quad \text{for} \quad f \in C_b(\mathbb{R}) \quad ,$$

er disse rum Banachrum $(C_0(\mathbb{R}) \subseteqq UC_b(\mathbb{R}) \subseteqq C_b(\mathbb{R}))$. Ved

$$P_t f(x) = f(x-t) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}\ , \ t \geqq 0 \quad \text{og} \quad f \in C_b(\mathbb{R})\ ,$$

defineres en familie $(P_t)_{t \geqq 0}$ af operatorer på $C_b(\mathbb{R})$, og ved restriktion også på $UC_b(\mathbb{R})$ og $C_0(\mathbb{R})$, og $(P_t)_{t \geqq 0}$ er en kontraktionssemigruppe på $C_b(\mathbb{R})$, på $UC_b(\mathbb{R})$ og på $C_0(\mathbb{R})$.

Denne semigruppe, som kaldes <u>translationssemigruppen</u> (på $C_b(\mathbb{R})$, $UC_b(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$) , er stærkt kontinuert på $UC_b(\mathbb{R})$ og $C_0(\mathbb{R})$ men <u>ikke</u> på $C_b(\mathbb{R})$.

Frembringeren for $(P_t)_{t \geqq 0}$ bliver beregnet i Øvelse 2.12.

1.13. <u>Øvelse</u>. Lad $\lambda, \mu > 0$. For $t \geqq 0$ defineres en begrænset operator P_t på $C_b(\mathbb{R})$ ved

$$P_t f(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(s-k\mu) \quad \text{for} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad f \in C_b(\mathbb{R}) \quad .$$

Familien $(P_t)_{t \geqq 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på $C_b(\mathbb{R})$ og den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t \geqq 0}$ er <u>differensoperatoren</u> A på $C_b(\mathbb{R})$ defineret ved

$$Af(s) = \lambda(f(s-\mu) - f(s)) \quad \text{for} \quad f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \text{og} \quad s \in \mathbb{R}\ .$$

§2 Potentialoperatoren og resolventen.

Lad $(P_t)_{t\geqq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E og lad $(A,D(A))$ betegne den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t\geqq 0}$.

2.1. Definition. Operatoren $(N,D(N))$ med domæne

$$D(N) = \{x \in E \mid \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s x ds \quad \text{eksisterer i } E\}$$

og givet ved

$$Nx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s x ds \qquad \text{for } x \in D(N) ,$$

kaldes potentialoperatoren for $(P_t)_{t\geqq 0}$.

Det er klart af $D(N)$ er et underrum af E .

2.2. Lemma. Et element $x \in E$ der opfylder $\int_0^\infty \|P_s x\| ds < \infty$ tilhører $D(N)$.

Bevis. Ifølge 0.3 er $s \mapsto P_s x$ integrabel med hensyn til Lebesgue-målet på $]0,\infty[$ og for $t > 0$ har vi

$$\left\|\int_0^\infty P_s x ds - \int_0^t P_s x ds\right\| \leqq \left\|\int_t^\infty P_s x ds\right\| \leqq \int_t^\infty \|P_s x\| ds ,$$

og idet $\int_t^\infty \|P_s x\| ds \to 0$ for $t \to \infty$ får vi $x \in D(N)$ og

$$Nx = \int_0^\infty P_s x ds \quad . \blacksquare$$

2.3. Lemma. Potentialoperatoren $(N,D(N))$ har egenskaberne

(i) $P_t(D(N)) \subseteq D(N)$ for $t > 0$.

(ii) $P_t(Nx) = N(P_t x)$ for $t > 0$ og $x \in D(N)$.

(iii) $P_t(Nx) - Nx = -\int_0^t P_s x ds$ for $t > 0$ og $x \in D(N)$.

(iv) $D(N) \subseteq \overline{N(D(N))}$

(v) $\lim_{t\to\infty} P_t x = 0$ for $x \in \overline{N(D(N))}$

(vi) $N(D(N)) \subseteq D(A)$ og $A(Nx) = -x$ for $x \in D(N)$.

Bevis. Lad $t > 0$ og $x \in D(N)$. For $a > 0$ har vi (1.4)

$$\int_0^a P_s(P_t x)ds = P_t(\int_0^a P_s x ds) \quad ,$$

og da højre side konvergerer mod $P_t(Nx)$ for $a \to \infty$, gælder $P_t x \in D(N)$ og $N(P_t x) = P_t(Nx)$ hvilket viser (i) og (ii) .

Lad $t > 0$ og $x \in D(N)$. Ved hjælp af (ii) har vi

$$P_t(Nx) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a P_{t+s} x ds = \lim_{a\to\infty} \int_t^{a+t} P_s x ds$$

$$= \lim_{a\to\infty} (\int_0^{a+t} P_s x ds - \int_0^t P_s x ds) = Nx - \int_0^t P_s x ds \quad ,$$

altså (iii) , hvoraf (under brug af (ii))

$$-\frac{1}{t}(P_t Nx - Nx) = N(\frac{1}{t}(x - P_t x)) = \frac{1}{t}\int_0^t P_s x ds$$

og da højresiden konvergerer mod x for $t \to 0$ fås at x er grænseværdi for elementer fra $N(D(N))$ altså (iv) , og videre at

$N(D(N)) \subseteqq D(A)$ samt

$$A(Nx) = -x \quad \text{for} \quad x \in D(N) \quad ,$$

hvilket er (vi) . Endelig er mængden $\{x \in E \mid \lim_{t\to\infty} P_t x = 0\}$ afsluttet (da $\|P_t\| \leqq 1$) og den indeholder ifølge (iii) $N(D(N))$ hvoraf (v) . ▮ .

2.4. <u>Korollar</u>. Potentialoperatoren er injektiv.

<u>Bevis</u>. Følger af 2.3 (vi) ▮ .

2.5. <u>Øvelse</u>. Potentialoperatoren $(N,D(N))$ er en afsluttet operator, altså $x_n \in D(N)$, $x_n \to x$ og $Nx_n \to y$ medfører $x \in D(N)$ og $Nx = y$.

<u>Vink</u>. Man kan udnytte at $(A,D(A))$ er afsluttet.

2.6. <u>Lemma</u>. For $x \in D(N)$ og $a > 0$ gælder

$$x^a = \int_0^a P_s x ds \in D(N) \quad .$$

<u>Bevis</u>. For $t > 0$ har vi

$$\int_0^t P_u x^a du = \int_0^t \left(\int_0^a P_{u+s} x ds\right) du = \int_0^a \left(\int_0^t P_{u+s} x du\right) ds$$

$$= \int_0^a \left(\int_s^{s+t} P_u x du\right) ds = \int_0^a (x^{s+t} - x^s) ds$$

$$= \int_0^a x^{s+t} ds - \int_0^a x^s ds \quad .$$

Til $\varepsilon > 0$ findes $t_0 > 0$ så $\|Nx - x^t\| \leqq \varepsilon$ for $t \geqq t_0$, og for $t \geqq t_0$ har vi derfor

$$\left\| \int_0^a x^{s+t} ds - aNx \right\| = \left\| \int_t^{a+t} (x^s - Nx) ds \right\| \leqq a\varepsilon ,$$

hvilket viser at $\lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s x^a ds$ eksisterer, altså $x^a \in D(N)$ og

$$Nx^a = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s x^a ds = aNx - \int_0^a x^s ds \quad . \quad \blacksquare$$

2.7. <u>Sætning</u>. Følgende tre betingelser er ensbetydende:

(i) $D(N)$ er tæt i E,

(ii) $N(D(N))$ er tæt i E,

(iii) $\lim_{t\to\infty} P_t x = 0$ for $x \in E$.

Når (i), (ii) og (iii) er opfyldt er $(N, D(N))$ en tæt defineret afsluttet operator på E og frembringeren $(A, D(A))$ er injektiv og opfylder

$$N = -A^{-1} \quad \text{og} \quad A = -N^{-1} .$$

<u>Bevis</u>. Af Lemma 2.3 fås (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Antag at (iii) er opfyldt. Som i beviset for 1.6 har vi for $x \in D(A)$ og $t > 0$

$$\int_0^t P_s(Ax) ds = P_t x - x ,$$

hvoraf

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t P_s(Ax) = -x \quad , \qquad (*)$$

altså $Ax \in D(N)$ og $N(Ax) = -x$. Specielt er A en injektiv afbildning af $D(A)$ ind i $D(N)$, hvilket sammen med Lemma 2.3 (iv) viser at

$$N = -A^{-1} \quad \text{og} \quad A = -N^{-1} \quad .$$

Da $(A,D(A))$ er afsluttet følger heraf at $(N,D(N))$ er afsluttet, og (*) viser at $x \in D(A)$ er grænseværdi for vektorer tilhørende $D(N)$ (Lemma 2.6) , altså

$$D(A) \subseteq \overline{D(N)}$$

hvoraf ses at $D(N)$ er tæt i E . ∎ .

Vi skal nu til $(P_t)_{t \geq 0}$ knytte en familie af stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper $(P_t^\lambda)_{t \geq 0}$ med overalt definerede og kontinuerte potentialoperatorer. For $\lambda > 0$ definerer vi

$$P_t^\lambda = e^{-\lambda t} P_t \quad \text{for} \quad t \geq 0 \quad ,$$

og hermed er $(P_t^\lambda)_{t \geq 0}$ for $\lambda > 0$ en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E . Den infinitesimale frembringer, henholdsvis potentialoperatoren for $(P_t^\lambda)_{t \geq 0}$ betegnes $(A_\lambda, D(A_\lambda))$, henholdsvis $(N_\lambda, D(N_\lambda))$.

2.8. <u>Sætning</u>. For $\lambda > 0$ gælder

(i) $D(A_\lambda) = D(A)$ og $A_\lambda = A - \lambda I$.

(ii) $D(N_\lambda) = E$ og N_λ er en begrænset operator på E , med norm $\|N_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$, givet ved

$$N_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s x ds \quad \text{for} \quad x \in E .$$

(iii) $\lim_{t\to\infty} P_t^\lambda x = 0$ for $x \in E$.

Bevis. For $x \in E$ har vi for $t > 0$

$$\frac{1}{t}(P_t^\lambda x - x) = \frac{1}{t} e^{-\lambda t}(P_t x - x) + \frac{1}{t}(e^{-\lambda t} - 1)\, x$$

hvoraf (i) ses; (ii) følger af Lemma 3.2 og (iii) er klar. ∎

2.9. Korollar. Resolventmængden $\rho(A)$ for operatoren A indeholder $]0,\infty[$ og $N_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ er for $\lambda > 0$ en bijektiv afbildning af E på $D(A)$. Endvidere gælder

$$N_\lambda - N_\mu = (\mu-\lambda)\, N_\lambda N_\mu \quad \text{for } \mu,\lambda > 0 \qquad (**)$$

Bevis. For $\lambda > 0$ er $(A-\lambda I)$ injektiv og $-N_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ er begrænset og overalt defineret på E , altså $\lambda \in \rho(A)$ (i algebraen $L(E)$) . For $\mu,\lambda > 0$ har vi

$$\begin{aligned} N_\lambda - N_\mu &= (\lambda I-A)^{-1} - (\mu I-A)^{-1} \\ &= (\lambda I-A)^{-1}((\mu I-A) - (\lambda I-A))(\mu I-A)^{-1} \\ &= (\mu-\lambda)N_\lambda N_\mu \ . \end{aligned}$$ ∎

2.10. Definition. Familien $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ kaldes resolventen for $(P_t)_{t\geq 0}$ og ligningen (**) kaldes resolventligningen.

Det følger af (**) at operatorerne $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ kommuterer indbyrdes altså $N_\lambda N_\mu = N_\mu N_\lambda$ for $\lambda,\mu > 0$.

2.11. Øvelse. Find potentialoperatoren og resolventen for kontraktionsemigruppen $(P_t^a)_{t \geqq 0}$ på $\mathbb{C}$ med $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a \leqq 0$, fra Øvelse 1.10 .

2.12. Øvelse. For translationssemigruppen $(P_t)_{t \geqq 0}$ på $C_0(\mathbb{R})$ givet ved

$$P_t f(x) = f(x-t) \quad \text{for} \quad f \in C_0(\mathbb{R}) \text{ , } t \geqq 0 \quad \text{og} \quad x \in \mathbb{R},$$

gælder $D(N) = \{0\}$. Resolventen for $(P_t)_{t \geqq 0}$ er $(N_\lambda)_{\lambda > 0}$ hvor

$$N_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x-t)u = H_\lambda * f(x)$$

for $f \in C_0(\mathbb{R})$ og $x \in \mathbb{R}$. Her er H_λ funktionen på $\mathbb{R}$,

$$H_\lambda(x) = 1_{]0,\infty[}(x)e^{-\lambda x} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Frembringeren $(A,D(A))$ for $(P_t)_{t \geqq 0}$ er <u>differentialoperatoren</u>

$$D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ , } \frac{d}{dt} f \in C_0(\mathbb{R})\}$$

og

$$Af = -\frac{d}{dt} f \quad \text{for} \quad f \in D(A) .$$

For at indse dette går vi frem på følgende måde: For hvert $\lambda > 0$ er N_λ en bijektiv afbildning af E på $D(A)$, og $g \in D(A)$ har derfor formen $g = \lambda N_\lambda f$ for $f \in C_0(\mathbb{R})$, og der gælder

$$A(g) = A(\lambda N_\lambda f) = \lambda f + \lambda^2 N_\lambda f = \lambda g - \lambda f .$$

På den anden side har vi

$$g(t) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(t-s)ds = \lambda e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^t e^{\lambda r} f(r)dr ,$$

hvilket viser at g er differentiabel og at

$$\frac{d}{dt}\, g(t) = -\lambda^2 e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^t e^{\lambda r} f(r)dr + \lambda f(t) = \lambda f(t) - \lambda g(t) ,$$

altså $\frac{d}{dt}\, g \in C_0(\mathbb{R})$ og

$$Ag = -\frac{d}{dt}\, g .$$

Omvendt er det nemt at se, at hvis $f \in C_0(\mathbb{R})$ er differentiabel og $\frac{d}{dt}\, f \in C_0(\mathbb{R})$ så er $f \in D(A)$.

2.13. Øvelse. På Banachrummet $E = C_0(]-\infty,0])$ er familien af operatorer $(P_t)_{t\geq 0}$ defineret ved

$$P_t f(x) = f(x-t) \quad \text{for} \quad f \in E ,\ x \leq 0 \quad \text{og} \quad t \geq 0 ,$$

en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe. Der gælder

$$D(N) = \{f \in E \mid \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(s)ds \quad \text{eksisterer}\}$$

og

$$Nf(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds \left(= \lim_{t\to-\infty} \int_t^x f(s)ds\right) \quad \text{for} \quad x \leq 0 \quad \text{og} \quad f \in D(N)$$

Resolventen $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er bestemt ved

$$N_\lambda f(x) = e^{-\lambda x}\int_{-\infty}^x e^{\lambda u} f(u)du \quad \text{for} \quad x \leq 0 ,\ f \in E \quad \text{og} \quad \lambda > 0 .$$

Endvidere er

$$D(A) = \{f \in E \mid \frac{d}{dt}\, f \in E\}$$

og

$$Af = -\frac{d}{dt}\, f \quad \text{for} \quad f \in D(A).$$

§3. Den Brownske semigruppe.

Lad $n \in \mathbb{N}$. Vi skal betragte familien $(g_t)_{t>0}$ af funktioner på $\mathbb{R}^n$ givet ved

$$g_t(x) = \frac{\exp(-\frac{\|x\|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\exp(-\frac{x_i^2}{4t})}{\sqrt{4\pi t}} \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{og} \quad t > 0 \, ,$$

hvor $\|x\|$ er den sædvanlige euklidiske norm af $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Hver af funktionerne g_t tilhører rummet $\mathcal{S}$ og specielt er g_t (og ethvert produkt af g_t og et polynomium) integrabel. Af formlen

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$

fås let at

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_t(x)dx = 1 \quad \text{for} \quad t > 0 \qquad (1) \quad .$$

Den Fourier transformerede af g_t er for $t > 0$

$$F\, g_t(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp(-\frac{\|x\|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-ix\cdot y)dx = \exp(-t\,\|y\|^2) \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n \, , \qquad (2)$$

hvilket fås ved gentagen anvendelse af resultatet for $n = 1$, se Øvelse 3.1. nedenfor,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{4t})}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-ix\cdot y)dx = \exp(-ty^2) \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad t > 0 \quad .$$

Da Fourier transformationen er injektiv og vi for $s,t > 0$ har

$$F(g_t * g_s)(y) = F\, g_t(y)\, F\, g_s(y) = \exp(-(s+t)\,\|y\|^2) =$$

$$F\, g_{s+t}(y) \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

opfylder funktionerne $(g_t)_{t>0}$ foldningsligningen

$$g_t * g_s = g_{t+s} \quad \text{for} \quad t,s > 0. \qquad (3)\ .$$

3.1. Øvelse. Vis for $t > 0$ formlen

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{4t})}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-ix\cdot y)dx = \exp(-ty^2) \ , \ y \in \mathbb{R} \ .$$

Vink. Betegnes venstresiden $\varphi(y)$ ser man ved partiel integration at φ opfylder differentialligningen

$$\varphi'(y) = -2ty\ \varphi(y)$$

og da, ifølge (1), $\varphi(0) = 1$, fås den ønskede formel.

3.2. Øvelse. Vis formlen (3) ved direkte udregning.

Vi skal nu se hvorledes familien $(g_t)_{t>0}$ ved foldning inducerer stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper på forskellige Banachrum af funktioner på $\mathbb{R}^n$.

Rummet $C_o(\mathbb{R}^n)$ af kontinuerte funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, der går mod 0 i det uendelige, er et Banachrum under supremumnormen

$$\| f \|_\infty = \sup\{ |f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \quad .$$

Rummet $L^2(\mathbb{R}^n)$ af (ækvivalensklasser af) kvadratisk integrable funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ er et Banachrum (endda et Hilbertrum) under normen

$$\| f \|_2 = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

3.3. Øvelse. Lad $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ være en integrabel funktion med L^1 norm

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \quad .$$

(i) For $g \in C_o(\mathbb{R}^n)$ er $g * f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ og

$$\|g * f\|_\infty \leqq \|g\|_\infty \|f\|_1 \quad .$$

(ii) For $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ er $g * f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ og

$$\|g * f\|_2 \leqq \|g\|_2 \|f\|_1 \quad .$$

3.4. Definition. Den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$ er familien $(P_t)_{t \geqq 0}$ af operatorer på $C_o(\mathbb{R}^n)$ givet ved

$$P_o = I \quad \text{og} \quad P_t f = g_t * f \quad \text{for} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad f \in C_o(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Formlen (1) i forbindelse med Øvelse 3.3 (i) viser, at P_t for $t \geqq 0$ er en begrænset operator på $C_o(\mathbb{R}^n)$ med norm $\leqq 1$, og for $t,s > 0$ finder vi ved hjælp af (3) at

$$P_s(P_t f) = P_s(g_t * f) = g_s * g_t * f = g_{s+t} * f = P_{s+t} f \quad ,$$

altså at $(P_t)_{t \geqq 0}$ er en kontraktionssemigruppe.

3.5. Sætning. Den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$ er stærkt kontinuert og $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ for $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$.

Bevis. Lad $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$. Vi skal se at $\lim_{t\to 0} \|P_t f - f\|_\infty = 0$. Lad $\varepsilon > 0$. Da f er uniformt kontinuert findes $\delta > 0$ så

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x,y \in \mathbb{R}^n \quad \text{med} \quad \|x-y\| < \delta \quad ,$$

og dermed har vi for $t > 0$ og $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x) - P_t f(x)| = |\int_{\mathbb{R}^n} g_t(y)(f(x) - f(x-y))dy|$$

$$\leqq \int_{\|y\|<\delta} g_t(y)\ |f(x) - f(x-y)|\ dy + \int_{\|y\|\geqq\delta} g_t(y)\ |f(x) - f(x-y)|\ dy$$

$$\leqq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\|y\|\geqq\delta} g_t(y)dy \quad .$$

For $t > 0$ og $y \in \mathbb{R}^n$ gælder endvidere

$$\frac{d}{dt}\, g_t(y) = \frac{\|y\|^2 - 2nt}{4t^2}\, g_t(y)$$

hvilket viser at $t \mapsto g_t(y)$ er voksende på intervallet $]0, \frac{\|y\|^2}{2n}[$, altså specielt at

$$g_t(y) \to 0 \quad \text{for} \quad t \to 0 \quad \text{når} \quad \|y\| \geqq \delta \quad .$$

Sætningen om monoton konvergens af integraler viser derfor, at integralet ovenfor konvergerer mod 0 for $t \to 0$, altså at $\lim_{t\to 0} \|f - P_t f\|_\infty = 0$.

For at se at $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$, vælges til givet $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ så

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{med} \quad \|x\| \geqq R \quad ,$$

og dermed gælder for $x \in \mathbb{R}^n$

$$|P_t f(x)| \leq \int_{\|y\|>R} |f(y)|\, g_t(x-y)dy + \int_{\|y\|\leq R} |f(y)|\, g_t(x-y)dy$$

$$\leq \varepsilon + \|f\|_\infty \int_{\|y\|\leq R} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} dy \quad ,$$

hvor integralet konvergerer mod 0 for $t \to \infty$. ∎

Vi skal nu i 3.6-3.10 beregne den infinitesimale frembringer $(A,D(A))$ for den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$.

3.6. __Lemma.__ For $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ og $t > 0$ er $P_t f \in D(A)$ og

$$A(P_t f) = (\Delta g_t) * f \; ,$$

(her er Δg_t Laplaceoperatoren anvendt på C^∞-funktionen $y \mapsto g_t(y)$) .

__Bevis.__ En simpel udregning viser at for $t > 0$ og $y \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta g_t(y) = \frac{d}{dt} g_t(y) = \frac{\|y\|^2 - 2nt}{4t^2} g_t(y) \quad .$$

For $h > 0$ gælder

$$\|\frac{1}{h}(P_{t+h}f - P_t f) - (\Delta g_t) * f\|_\infty$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left[\frac{1}{h}(g_{t+h}(y) - g_t(y)) - \Delta g_t(y)\right] dy\right| \quad .$$

Ifølge middelværdisætningen findes $\theta = \Theta(h,y) \in [0,1]$ så

$$\frac{1}{h}(g_{t+h}(y) - g_t(y)) = \Delta g_{t+\Theta h}(y),$$

og det sidste integral kan derfor vurderes ved

$$\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta g_{t+\Theta h}(y) - \Delta g_t(y)| dy \quad .$$

For $h \to 0$ konvergerer integranden punktvis mod 0 og idet

$$|\Delta g_{t+\Theta h}(y) - \Delta g_t(y)| \leq \frac{\|y\|^2+2nt}{4t^2}(g_{t+\Theta h}(y) + g_t(y))$$

har vi for $h \in]0,1[$ at

$$|\Delta g_{t+\Theta h}(y) - \Delta g_t(y)| \leq \begin{cases} \dfrac{\|y\|^2+2nt}{4t^2} \, 2g_{t+1}(y) & \text{for} \quad \|y\|^2 \geq 2n(t+1) \\[2ex] \dfrac{2n(t+1)+2nt}{4t^2} \cdot \dfrac{2}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} & \text{for} \quad \|y\|^2 < 2n(t+1) \end{cases} ,$$

hvor vi har benyttet at $t \mapsto g_t(y)$ er voksende for $\|y\|^2 \geq 2n(t+1)$, og da funktionen $\{$ er integrabel følger det af sætningen om majoriseret konvergens af integraler at $P_t f \in D(A)$ og

$$A(P_t f) = (\Delta g_t) * f \quad . \blacksquare$$

3.7. <u>Sætning</u>. Der gælder $C_c^2(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A)$ og

$$Af = \Delta f \quad \text{for} \quad f \in C_c^2(\mathbb{R}^n) \quad .$$

<u>Bevis</u>. Lad $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. Ved partiel integration fås (vi sætter $y' = (y_2,\cdots,y_n)$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} g_t\right) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_1} g_t(x-y)f(y)dy_1\right) dy'$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y_1} g_t(x-y)f(y)\, dy_1\right)dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_t(x-y) \frac{\partial}{\partial y_1} f(y)\, dy_1\right) dy'$$

$$= g_t * \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \quad ,$$

hvor det integrerede led er 0 da f har kompakt støtte. På samme måde får vi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) * f = g_t * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f\right) ,$$

og de analoge ligninger

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g_t\right) * f = g_t * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f\right) \quad \text{for } i = 1,\cdots,n \quad ,$$

hvoraf ved addition

$$(\Delta g_t) * f = g_t * (\Delta f) \quad .$$

Sætter vi $g = \Delta f$, har vi $g \in C_o(\mathbb{R}^n)$, og derfor er ifølge Lemma 3.6 for $m \in \mathbb{N}$

$$P_{\frac{1}{m}}f \in D(A) \quad \text{og} \quad A(P_{\frac{1}{m}}f) = \Delta g_{\frac{1}{m}} * f = g_{\frac{1}{m}} * \Delta f = P_{\frac{1}{m}}\, g \quad .$$

For $m \to \infty$ gælder

$$P_{\frac{1}{m}}f \to f \quad \text{og} \quad A(P_{\frac{1}{m}}f) \to g \quad (\text{i } C_o(\mathbb{R}^n))$$

og da $(A,D(A))$ er afsluttet, cf. 1.7, viser dette at

$$f \in D(A) \quad \text{og} \quad Af = g = \Delta f \quad . \quad \blacksquare$$

En præcis afgrænsning af $D(A)$ forudsætter for $n \geqq 2$ distributionsteori. Tilfældet $n = 1$ kan klares lidt mere elementært, se Øvelse 3.10.

3.8. Sætning. Der gælder

$$D(A) = \{f \in C_o(\mathbb{R}^n) \mid \Delta f \in C_o(\mathbb{R}^n)\}$$

og

$$Af = \Delta f \quad \text{for} \quad f \in D(A) \quad .$$

($f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ definerer en distribution (endda en tempereret distribution) og med $\Delta f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ menes at distributionen Δf er defineret ved et element af $C_o(\mathbb{R}^n)$; i ligningen $Af = \Delta f$ betegner Δf det entydigt bestemte element $g \in C_o(\mathbb{R}^n)$ så $\Delta f = g$ (som distributioner)) .

Bevis. Lad $f \in D(A)$. Så gælder ifølge 1.6 at

$$P_t(Af) = A(P_t f) \quad \text{for} \quad t > 0$$

og derfor, cf. 3.6,

$$g_t * (Af) = A(P_t f) = (\Delta g_t) * f = g_t * (\Delta f) \quad .$$

Den sidste ligning gælder i distributionsforstand (Δf er en tempereret distribution, altså $\Delta f \in \mathcal{S}'$ og $g_t \in \mathcal{S}$) .

Ved Fouriertransformation (af tempererede distributioner) fås heraf

$$F(g_t)\ F(Af) = F(g_t)\ F(\Delta f)$$

altså idet $F(g_t) > 0$ overalt,

$$F(Af) = F(\Delta f)$$

og dermed $Af = \Delta f$. Altså gælder $\Delta f \in C_o(\mathbb{R}^n)$.

Lad nu omvendt $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ opfylde at den Laplaceafledede Δf af f i distributionsforstand "er" $g \in C_o(\mathbb{R}^n)$. Ifølge 3.6 har vi for $t > 0$ at $P_t f \in D(A)$ og

$$A(P_t f) = (\Delta g_t) * f = g_t * \Delta f = g_t * g = P_t g \quad .$$

Specielt gælder så for $m \to \infty$

$$P_{\frac{1}{m}} f \to f \quad \text{og} \quad A(P_{\frac{1}{m}} f) \to g \quad (\text{i} \quad C_o(\mathbb{R}^n))$$

hvilket da $(A, D(A))$ er afsluttet medfører at

$$f \in D(A) \quad \text{og} \quad Af = g = \Delta f \quad . \quad \blacksquare .$$

Hvis en distribution T på $\mathbb{R}$, opfylder at den anden afledede i distributionsforstand er en kontinuert funktion, så er $T \in C^2(\mathbb{R})$, T er altså to gange kontinuert differentiabel i sædvanlig forstand. Sætning 3.8 giver derfor for $n = 1$ at

$$D(A) = \{f \in C_o(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) \mid f'' \in C_o(\mathbb{R})\} \quad .$$

Dette kan også indses uden brug af distributionsteori. Hertil behøves et bestemt integral som vi også får brug for senere.

3.9. Lemma. For $c > 0$ er

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma^2+\frac{c^2}{\sigma^2})}\,d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2c} \quad .$$

Bevis. Ud fra formlen

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

finder vi ved substitutionen $x = \sigma - \frac{c}{\sigma}$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma-\frac{c}{\sigma})^2}\left(1+\frac{c}{\sigma^2}\right)d\sigma$$

$$= e^{2c}\left[\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+\frac{c^2}{\sigma^2})}\,d\sigma + \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+\frac{c^2}{\sigma^2})}\,\frac{c}{\sigma^2}\,d\sigma\right]$$

hvoraf ved i det andet integral at substituere $\sigma = \frac{c}{t}$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{2c}\left[\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2+\frac{c^2}{\sigma^2})}\,d\sigma + \int_0^{\sqrt{c}} e^{-(t^2+\frac{c^2}{t^2})}\,dt\right] ,$$

hvilket er den ønskede formel. ▯

3.10. Øvelse. Frembringeren for den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R})$ er bestemt ved

$$D(A) = \{u \in C_o(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) \mid u'' \in C_o(\mathbb{R})\}$$

og

$$Au = u'' \quad \text{for} \quad u \in D(A) \quad .$$

For $\lambda > 0$ er N_λ (resolventoperatoren af index λ) en bijektiv afbildning af $C_o(\mathbb{R})$ på $D(A)$. Lad $h \in D(A)$. Der findes da $f \in C_o(\mathbb{R})$ så $h = \lambda N_\lambda f$ og endvidere

$$Ah = A(\lambda N_\lambda f) = -\lambda f + \lambda^2 N_\lambda f = \lambda h - \lambda f \quad .$$

På den anden side har vi, under benyttelse af 3.9, ligesom i udregningen i 3.24, for $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \lambda N_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} dy + \int_{x}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(y-x)} dy \ .$$

Ved at differentiere to gange (under integraltegnet, $f \in C_o(\mathbb{R})$) finder vi for $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{x} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} dy + \frac{\lambda}{2} \int_{x}^{\infty} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(y-x)} dy$$

og

$$h''(x) = -\frac{\lambda}{2} f(x) + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2} \int_{-\infty}^{x} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} dy$$

$$- \frac{\lambda}{2} f(x) + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2} \int_{x}^{\infty} f(y) e^{-\sqrt{\lambda}(y-x)} dy$$

$$= -\lambda f(x) + \lambda h(x) \ ,$$

hvilket viser at $h \in C^2(\mathbb{R})(\cap C_o(\mathbb{R}))$ og $h'' \in C_o(\mathbb{R})$, samt $Ah = h''$.

Hvis omvendt $h \in C_o(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ opfylder $h'' \in C_o(\mathbb{R})$, så vil funktionen (for et fast $\lambda > 0$)

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}(\lambda h(x) - h''(x)) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} ,$$

tilhøre $C_o(\mathbb{R})$.

Definerer vi

$$h_\lambda = \lambda N_\lambda f$$

finder vi som ovenfor

$$h''_\lambda = -\lambda f + \lambda h_\lambda ,$$

og den to gange kontinuert differentiable funktion $h - h_\lambda$ tilfredsstiller derfor differentialligningen

$$(h-h_\lambda)'' = \lambda(h-h_\lambda) ,$$

hvilket da $h - h_\lambda$ er begrænset ($\in C_o(\mathbb{R})$) medfører at $h-h_\lambda$ er nulfunktionen. Altså gælder

$$h \in N_\lambda(C_o(\mathbb{R})) = D(A) .$$

Vi skal nu i 3.11 - 3.23 bestemme potentialoperatoren $(N,D(N))$ for den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$. Ifølge 3.5 er $(N,D(N))$ tæt defineret og dermed den inverse operator til $(A,D(A))$, cf. 2.7, og vi har derfor umiddelbart fra 3.7 at

$$\{\Delta f \mid f \in C_o(\mathbb{R}^n) \cap C_c^2(\mathbb{R}^n)\} \subseteq D(N) ,$$

og fra 3.8

$$D(N) = \{g \in C_o(\mathbb{R}^n) \mid \exists f \in C_o(\mathbb{R}^n) : g = \Delta f\} ,$$

(om betydningen af Δf se bemærkningen i 3.8).

En explicit beskrivelse af $(N,D(N))$ kendes kun for $n = 1$, medens det for $n = 2,3,\cdots$ er muligt at angive "store" delmængder af $D(N)$ og det nøjagtige udseende af N på disse delmængder.

3.11. Sætning. En funktion $f \in C_o(\mathbb{R})$ tilhører $D(N)$ netop hvis

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$$

(ii) $$\lim_{a,b\to\infty}\left[\int_{-a}^{b} xf(x)dx - a\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx + b\int_{b}^{\infty} f(x)dx\right] = 0 ,$$

og i bekræftende fald gælder

$$Nf(x) = \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{2}\left[-\int_{-a}^{a} |y-x|\, f(y)dy + a\int_{-a}^{a} f(y)dy\right] \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} .$$

(her og i det følgende bevis betegner integraler over uendelige intervaller, uegentlige integraler. Således er (i) en kort skrivemåde for

$$\lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)dx = 0 \quad).$$

Bevis. Lad $f \in D(N)$. Så vil $u = Nf \in D(A)$ og idet $D(A) = \{v \in C_o(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) \mid v'' \in C_o(\mathbb{R})\}$ og $Av = v''$ for $v \in D(A)$, får vi heraf

$$f = -A(Nf) = -u'' ,$$

altså specielt $u'' \in C_o(\mathbb{R})$, hvilket medfører, se Øvelse 3.13, at $u' \in C_o(\mathbb{R})$. Idet for $a,b > 0$

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = -\int_{-a}^{b} u''(x)dx = u'(-a) - u'(b) \qquad (*)$$

hvilket viser at f opfylder (i) . Endvidere har vi for $a,b > 0$

$$\int_{-a}^{b} xf(x)dx = -\int_{-a}^{b} xu''(x)dx = \Big[-xu'(x)\Big]_{x=-a}^{b} + \int_{-a}^{b} u'(x)dx$$

$$= -bu'(b) - au'(-a) + u(b) - u(-a)$$

$$= b\int_{-\infty}^{b} f(x)dx - a\int_{-a}^{\infty} f(x)dx + u(b) - u(-a)$$

$$= -b\int_{b}^{\infty} f(x)dx + a\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx + u(b) - u(-a)$$

hvor vi har benyttet (*) og (i) . Dette viser (ii) . Lad nu omvendt $f \in C_o(\mathbb{R})$ opfylde (i) og (ii) .

Vi sætter for $x \in \mathbb{R}$

$$g_1(x) = \int_{x}^{\infty} f(y)dy$$

$$g_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$$h_1(x) = \lim_{b\to\infty}\left[\int_{x}^{b} yf(y)dy + b\int_{b}^{\infty} f(y)dy\right]$$

$$h_2(x) = \lim_{a\to\infty}\left[\int_{-a}^{x} yf(y)dy - a\int_{-\infty}^{-a} f(y)dy\right] .$$

Herved defineres kontinuerte funktioner g_1, g_2, h_1, h_2 på $\mathbb{R}$

som ifølge (i) og (ii) tilfredsstiller

$$g_1 + g_2 = h_1 + h_2 = 0 .$$

Funktionen u defineret ved

$$u(x) = \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{2}\left[-\int_{-a}^{a} |y-x|\, f(y)dy + a\int_{-a}^{a} f(y)dy\right] \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}$$

opfylder

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{2}\Big[-\int_{-a}^{x} (x-y)\, f(y)dy - \int_{x}^{a}(y-x)f(y)dy \\ &\qquad + a\int_{-a}^{\infty} f(y)dy + a\int_{-\infty}^{a} f(y)dy\Big] \\ &= \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{2}\Big[-x \int_{-a}^{x} f(y)dy + \int_{-a}^{x} yf(y)dy - \int_{x}^{a} yf(y)dy \\ &\qquad + x\int_{x}^{a} f(y)dy + a \int_{-a}^{\infty} f(y)dy + a\int_{-\infty}^{a} f(y)dy\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[-xg_2(x) + \lim_{a\to\infty}\Big(\int_{-a}^{x} yf(y)dy - a\int_{-\infty}^{-a} f(y)dy\Big) \\ &\qquad + xg_1(x) - \lim_{a\to\infty}\Big(\int_{x}^{a} yf(y)dy + a\int_{a}^{\infty} f(y)dy\Big)\Big] \\ &= xg_1(x) - h_1(x) = -xg_2(x) + h_2(x) \quad . \end{aligned}$$

Idet for et fast x_0 ,

$$\begin{aligned} xg_1(x) - h_1(x) &= \int_{x_0}^{x} yf(y)dy + x\int_{x}^{\infty} f(y)dy \\ &\quad - \lim_{b\to\infty}\left[\int_{x_0}^{b} yf(y)dy + b\int_{b}^{\infty} f(y)dy\right] \end{aligned}$$

ses at $u(x) = xg_1(x) - h_1(x) \to 0$ for $x \to +\infty$.

På samme måde ses at $u(x) \to 0$ for $x \to -\infty$, altså $u \in C_0(\mathbb{R})$.

Nu er $u \in C^2(\mathbb{R})$ og $u'' = -f$, thi for $a > 0$ er

$$u_a(x) = \tfrac{1}{2}\left(-\int_{-a}^{a} |y-x|\, f(y)dy + a\int_{-a}^{a} f(y)dy\right) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

kontinuert differentiabel (som man let ser) og

$$u_a'(x) = \tfrac{1}{2}\left(-\int_{-a}^{x} f(y)dy + \int_{x}^{a} f(y)dy\right) .$$

Funktionerne u_a konvergerer for $a \to \infty$ mod u ligeligt og $\lim_{a\to\infty} u_a'(x) = g_1(x) = -g_2(x)$ ligeligt, hvilket viser at $u \in C^1(\mathbb{R})$ og

$$u'(x) = g_1(x) = \int_{x}^{\infty} f(y)dy \quad .$$

Dette viser så at $u' \in C^1(\mathbb{R})$ og

$$u''(x) = -f(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

altså da $f \in C_0(\mathbb{R})$ at $u \in D(A)$ og $Au = -f$, hvilket netop betyder at $f \in D(N)$ og $Nf = u$ ∎ .

3.12. Korollar. Lad $f \in C_0(\mathbb{R})$ opfylde at

$$\int_{\mathbb{R}} |yf(y)|\, dy < \infty .$$

Da gælder at $f \in D(N)$ netop hvis

$$\int_{\mathbb{R}} yf(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = 0$$

og for $f \in D(N)$ har vi

$$Nf(x) = -\tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |y-x| \, f(y)dy \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

3.13. Øvelse. Lad u være en to gange kontinuert differentiabel funktion på $\mathbb{R}$. Hvis $u, u'' \in C_o(\mathbb{R})$ så $u' \in C_o(\mathbb{R})$.

Med betegnelsen $h_1(x) = -\tfrac{1}{2}|x|$ for $x \in \mathbb{R}$ kan 3.12 specialiseres til følgende: Lad $f \in C_c(\mathbb{R})$. Så gælder

$$f \in D(N) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} yf(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy = 0$$

og i bekræftende fald er

$$Nf(x) = h_1 * f(x) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Tilsvarende kan potentialoperatorerne i de højere dimensioner opfattes som foldningsoperator på passende rum af kontinuerte funktioner med kompakt støtte. Nu bliver funktionen h_1 erstattet af følgende funktioner:

$$h_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{\|x\|} & \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{for} \quad x = 0 \in \mathbb{R}^2 \, , \end{cases}$$

og for $n \geqq 3$

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{for} \quad x = 0 \in \mathbb{R}^n \, . \end{cases}$$

Vi starter med at vise nogle hjælperesultater om funktionerne h_n , $n \geqq 2$.

3.14. Lemma. Lad $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$. Funktionen $h_2 * f$ er kontinuert og der gælder at $h_2 * f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ hvis og kun hvis

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = 0 \quad .$$

Bevis. Idet $\|y\| h_2(y) \to 0$ for $y \to 0$ er $h_2(y)$ majoriseret ved $\|y\|^{-1}$ i en omegn af 0 , hvilket medfører at h_2 er lokalt integrabel på $\mathbb{R}^2$, hvoraf specielt at $h_2 * f$ har mening og definerer en kontinuert funktion.

Antag at $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ opfylder $\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = 0$. Lad $f_1 = \mathrm{Re}\, f$ og lad $f^+ , f^- \in C_c^+(\mathbb{R}^2)$ være valgt så $f_1 = f^+ - f^-$; dermed er $\int f^+(y)dy = \int f^-(y)dy$. Lad $R > 0$ være valgt så

$$f(x) = 0 \quad \text{for} \quad \|x\| > R \quad .$$

For $x \in \mathbb{R}^2$ er

$$h_2 * f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(y) \log \frac{1}{\|x-y\|} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{\|y\| \leqq R} f^+(y) \log \|x-y\| dy + \int_{\|y\| \leqq R} f^-(y) \log \|x-y\| dy \right)$$

hvoraf for $\|x\| > R + 1$

$$h_2 * f_1(x) \leqq \frac{1}{2\pi}(-\log(\|x\| - R) + \log(\|x\| + R)) \int_{\mathbb{R}^2} f^+(y)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^+(y)dy\right) \log \frac{\|x\| + R}{\|x\| - R}$$

og analogt

$$h_2 * f_1(x) \geqq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^+(y)dy\right) \log \frac{\|x\| - R}{\|x\| + R}$$

altså $h_2 * f_1 \in C_o(\mathbb{R}^2)$. På samme måde ses at

$h_2 * \operatorname{Im} f \in C_o(\mathbb{R}^2)$ altså $h_2 * f \in C_o(\mathbb{R}^2)$.

Hvis omvendt $\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy \neq 0$ så viser tilsvarende overvejelser at $h_2 * f \notin C_o(\mathbb{R}^2)$. ▮ .

3.15. Øvelse. Lad $n \geq 3$. For $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gælder $h_n * f \in C_o(\mathbb{R}^n)$.

3.16. Lemma. Den Laplaceafledede (i distributionsforstand) af funktionen h_2 på $\mathbb{R}^2$ (som er lokalt integrabel) er $-\varepsilon_0$ (ε_0 er Diracmålet i 0) , altså

$$\Delta h_2 = -\varepsilon_0 \quad .$$

Bevis. Funktionen h_2 er af klasse C^∞ i den åbne mængde $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ og der gælder (i sædvanlig forstand)

$$\Delta h_2(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(-\log\sqrt{x_1^2+x_2^2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(-\log\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right) = 0 \quad \text{for}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad .$$

Lad nu $f \in \mathcal{D}$ (af klasse C^∞ og med kompakt støtte) . Vi har da

$$\langle \Delta h_2, f\rangle = \langle h_2, \Delta f\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} h_2(x)\ \Delta f(x)dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \iint_{\varepsilon<\|x\|<R} h_2(x)\ \Delta f(x)\, dx,$$

og da $\Delta h_2 = 0$ i $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon < \|x\| < R\}$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \iint_{\varepsilon<\| x \|<R} (h_2(x)\ \Delta f(x) - f(x)\ \Delta h_2(x))dx$$

hvoraf ved hjælp af Greens formel, idet bidraget fra den "yderste" rand falder bort da f (og Δf) har kompakt støtte

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\| x \|=\varepsilon} (h_2(x)\ \frac{df}{dn}(x) - f(x)\ \frac{dh_2}{dn}(x))\ d\sigma(x)$$

hvor $\frac{d}{dn}$ betegner den normalafledede efter den mod 0 rettede normal og $d\sigma$ betegner "buelængden" på

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x \| = \varepsilon\}$. Idet $|\frac{df}{dn}| \leqq M$ har vi for $\varepsilon < 1$

$$\left| \int_{\| x \|=\varepsilon} h_2(x)\ \frac{df}{dn}(x)\ d\sigma(x)\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\ \log\frac{1}{\varepsilon} \cdot M \cdot 2\pi\varepsilon$$

altså

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\| x \|=\varepsilon} h_2(x)\ \frac{df}{dn}(x)\ d\sigma(x) = 0 \quad .$$

Da

$$\frac{dh_2}{dn}(x) = -\frac{1}{2\pi}\ \frac{d}{dr}\ \log\ \frac{1}{r}\Big|_{r=\| x \|} = \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\| x \|}$$

finder vi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\| x \|=\varepsilon} f(x)\ \frac{dh_2}{dn}(x)\ d\sigma(x) = f(0) \quad ,$$

altså

$$\langle \Delta h_2, f\rangle = -f(0) \quad ,$$

hvilket var påstanden . ∎

3.17. Øvelse. På analog måde kan man vise at den Laplace afledede i distributionsforstand af funktionen h_n på $\mathbb{R}^n$ (for $n \geqq 3$) er

$$\Delta h_n = -\varepsilon_0 .$$

3.18. Sætning. Domænet for potentialoperatoren for den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^2)$ indholder mængden

$$D_o = \{f \in C_c(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = 0\}$$

og

$$Nf = h_2 * f \quad \text{for} \quad f \in D_o \quad .$$

Bevis. Lad $f \in D_o$. Ifølge 3.14 er $g = h_2 * f \in C_o(\mathbb{R}^2)$, og der gælder ifølge 3.16 at den Laplaceafledede af g er $-f$, altså

$$\Delta g = \Delta(h_2 * f) = -f ,$$

hvoraf ifølge 3.8, idet $f \in C_o(\mathbb{R}^2)$, $g \in D(A)$ og

$$Ag = \Delta g = -f ,$$

hvilket viser at $f \in D(N)$ og $Nf = g$. ∎

3.19. Øvelse. Lad $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$. Hvis $f \in D(N)$ så gælder

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = 0 \quad .$$

3.20. <u>Øvelse</u>. Domænet for potentialoperatoren for den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$ indeholder for $n \geq 3$ mængden $C_c(\mathbb{R}^n)$ og der gælder

$$Nf = h_n * f \quad \text{for} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Resultatet i Øvelse 3.20 kan dog også opnås uden brug af distributionsteori. Hertil først et lemma.

3.21. <u>Lemma</u>. For $n \geq 3$ gælder

$$\int_o^\infty g_t(y)dt = h_n(y) \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n \quad .$$

<u>Bevis</u>. For $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ substituerer vi $s = \frac{\|y\|^2}{4t}$ og finder

$$\int_o^\infty g_t(y)dt = \int_o^\infty (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\|y\|^2}{4t})\, dt$$

$$= \frac{\|y\|^{-n+2}\ \pi^{-\frac{n}{2}}}{4} \int_o^\infty e^{-s}\, s^{\frac{n}{2}-2}\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{4\pi^{\frac{n}{2}}\ \|y\|^{n-2}} = h_n(y) \quad .$$

Endvidere er

$$\int_o^\infty g_t(0)dt = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_o^\infty t^{-\frac{n}{2}}\, dt = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{t^{1-\frac{n}{2}}}{1-\frac{n}{2}}\right]_o^\infty = +\infty \quad . \ \blacksquare$$

3.22. <u>Sætning.</u> For $n \geq 3$ gælder $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq D(N)$ og

$$Nf = h_n * f \qquad \text{for} \quad f \in C_c(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Bevis. Lad først $f \in C_c^+(\mathbb{R}^n)$. For fast $x \in \mathbb{R}^n$ og $t > 0$ har vi

$$\int_0^t g_s * f(x)ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \left(\int_0^t g_s(y)ds\right)dy$$

hvoraf, da udtrykket i parantesen for $t \to \infty$ konvergerer voksende mod $h_n(y)$,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g_s * f(x)ds = \sup_{t>0} \int_0^t g_s * f(x)ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, h_n(y)dy. \quad (*)$$

Det er nu afgørende at denne konvergens faktisk er ligelig for $x \in \mathbb{R}^n$. For hvert $t > 0$ er

$$f_t = \int_0^t g_s * f\, ds \in C_o(\mathbb{R}^n) \qquad (**)$$

og der gælder (om dette element af $C_o(\mathbb{R}^n)$) for $z \in \mathbb{R}^n$

$$f_t(z) = \int_0^t g_s * f(z)\, ds ,$$

hvilket ses ved at anvende den kontinuerte linear form $g \overset{\varphi_z}{\mapsto} g(z)$ på $C_o(\mathbb{R}^n)$, på integralet (**)

$$f_t(z) = \langle f_t, \varphi_z\rangle = \int_0^t \langle g_s * f , \varphi_z\rangle ds = \int_0^t g_s * f(z)ds .$$

Lad $\varepsilon > 0$. Da ifølge Øvelse 3.15, $h_n * f \in C_o(\mathbb{R}^n)$, findes en kompaktmængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ så

$$0 \leqq h_n * f(y) \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus K .$$

På den kompakte mængde K er konvergensen i (*) punktvis og voksende med kontinuert grænsefunktion og derfor ifølge Dini's sætning uniform. Der findes altså $t_o > 0$ så

$$0 \leqq h_n * f(x) - f_t(x) \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad x \in K \quad \text{og} \quad t \geqq t_o .$$

Alt i alt har vi så at

$$\|h_n * f - f_t\|_\infty \leqq \varepsilon \quad \text{for} \quad t \geqq t_0 ,$$

hvilket viser påstanden. For vilkårligt $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ fås resultatet ved linearitet. ∎

3.23. Øvelse. For $n = 1,2$ gælder

$$\int_0^\infty g_t(y)dt = +\infty \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Heraf følger at den eneste funktion $f \in C_0^+(\mathbb{R}^n)$ der tilhører $D(N)$ er nulfunktionen. Sml. 3.12 og 3.19.

For at beregne resolventen $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ for den Brownske semigruppe på $C_0(\mathbb{R}^n)$ bemærker vi først at resolventoperatoren af index $\lambda > 0$ er overalt defineret på $C_0(\mathbb{R}^n)$ og givet ved

$$N_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t * f \, dt \quad \text{for} \quad f \in C_0(\mathbb{R}^n)$$

hvor integralet er taget i Banachrumsforstand. Ved for $x \in \mathbb{R}^n$ (ligesom beviset for 3.22) at anvende den kontinuerte linearform på $C_0(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto g(x)$, fås

$$N_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t * f(x) \, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t(y) \, dt\right) dy \quad ,$$

for $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ og $x \in \mathbb{R}^n$. Dette viser at N_λ "er" foldning med funktionen

$$h_n^\lambda(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{4t}\right) dt ,$$

altså

$$N_\lambda f(x) = h_n^\lambda * f(x) \quad \text{for} \quad f \in C_o(\mathbb{R}^n) \quad \text{og} \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

I de explicite udtryk for funktionerne h_n^λ indgår i de lige dimensioner Besselfunktioner, og vi nøjes med at angive h_n^λ for $n = 1$ og $n = 3$.

3.24. Sætning. For $\lambda > 0$ er

$$h_1^\lambda(y) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|y|} \qquad \text{for} \quad y \in \mathbb{R} ,$$

$$h_3(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi \|y\|} e^{-\sqrt{\lambda}\|y\|} & \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{for} \quad y = 0. \end{cases}$$

Bevis. For $y \in \mathbb{R}$ finder vi ved substitutionen $t = \frac{\sigma^2}{\lambda}$

$$h_1^\lambda(y) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} e^{-\frac{y^2}{4t}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} \int_0^\infty e^{-(\sigma^2 + \frac{\lambda y^2}{4}\sigma^{-2})} d\sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\lambda y^2}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|y|} ,$$

hvor vi har benyttet 3.9.

For $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ har vi analogt

$$h_3^\lambda(y) = \int_0^\infty (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\lambda t} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} dt$$

$$= \frac{2\sqrt{\lambda}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2} e^{-(\sigma^2 + \frac{\lambda\|y\|^2}{4}\sigma^{-2})} d\sigma$$

hvoraf ved substitutionen $\sigma = \frac{\sqrt{\frac{\lambda\|y\|^2}{4}}}{t}$

$$= \frac{2\sqrt{\lambda}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{t^2}{\frac{\lambda\|y\|^2}{4}} e^{-(\frac{\lambda\|y\|^2}{4}t^{-2} + t^2)} \sqrt{\frac{\lambda\|y\|^2}{4}}\, t^{-2}\, dt$$

$$= \frac{4}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\|y\|} \int_0^\infty e^{-(\frac{\lambda\|y\|^2}{4}t^{-2} + t^2)} dt$$

$$= \frac{4}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\|y\|} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{\frac{\lambda\|y\|^2}{4}}} = \frac{1}{4\pi\|y\|} e^{-\sqrt{\lambda}\|y\|}$$

hvor vi igen benyttede 3.9,

$$h_3^\lambda(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} dt \geqq \frac{e^{-\lambda}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 t^{-\frac{3}{2}} dt = +\infty \quad \blacksquare .$$

3.25. <u>Øvelse</u>. Funktionerne $y \mapsto h_n^\lambda(y)$ af $\mathbb{R}^n$ ind i $[0,\infty]$ afhænger kun af afstanden $\|y\|$ fra y til 0. Med følgende (lidt sjuskede) skrivemåde

$$h_n^\lambda(s) = h_n^\lambda(y) \quad \text{hvor} \quad s = \|y\| \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{R}^n ,$$

gælder for $n \geqq 3$, $\lambda > 0$ og $s \geqq 0$,

$$\frac{4\pi s^2}{2(n-s)} h_{n+2}^{\lambda}(s) = h_n^{\lambda}(s) + \frac{2\lambda}{4\pi(n-2)} h_{n-2}^{\lambda}(s) \quad .$$

Den Brownske semigruppe på $C_o(\mathbb{R}^n)$ er semigruppen af foldningsoperatorer på $C_o(\mathbb{R}^n)$ bestemt ved funktionerne $(g_t)_{t>0}$. Disse funktioner inducerer ligeledes en semigruppe af foldningsoperatorer på $L^2(\mathbb{R}^n)$, og for denne semigruppe skal vi nu, under brug af Fouriertransformationen, beregne den infinitesimale frembringer og potentialoperatoren. Ved denne metode opnås der simple, fuldstændige karakterisering af domænerne, der dog ikke er til så stor nytte i "praksis".

3.26. Definition. Den Brownske semigruppe på $L^2(\mathbb{R}^2)$ er familien $(P_t)_{t\geqq 0}$ af operatorer på $L^2(\mathbb{R}^n)$ givet ved

$$P_o = I \quad \text{og} \quad P_t f = g_t * f \quad \text{for} \quad t > 0 \quad \text{og} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Ligesom i $C_o(\mathbb{R}^n)$-tilfældet ser man let at $(P_t)_{t\geqq 0}$ er en kontraktionssemigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.27. Sætning. Den Brownske semigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$ er stærkt kontinuert og $\lim_{t\to\infty} P_t f = 0$ for $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Bevis. Lad $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Af Plancherels sætning får vi for $t > 0$

$$\| P_t f - f \|_2^2 = \| g_t * f - f \|_2^2 = \| (\exp(-t \| \cdot \|^2) - 1)\hat{f} \|_2^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 (1 - \exp(-2t\|x\|^2))\, dx \ .$$

Da $|1 - \exp(-2t \|x\|^2)| \leqq 1$ for $x \in \mathbb{R}^n$ og

$$\lim_{t\to 0} (1 - \exp(-2t \|x\|^2)) = 0 \quad \text{punktvis for} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

følger det af sætningen om domineret konvergens af integraler at

$$\lim_{t\to 0} \| P_t f - f \|_2^2 = 0 \ .$$

Analogt fås for $t > 0$

$$\| P_t f \|_2^2 = \| g_t * f \|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 \exp(-2t \|x\|^2)dx$$

og da integranden konvergerer punktvis næsten overalt mod 0 for $t \to \infty$, domineret af $|\hat{f}(x)|^2$, fås

$$\lim_{t\to\infty} \| P_t f \|_2^2 = 0 \ . \ \blacksquare$$

3.27. <u>Sætning</u>. Den infinitesimale frembringer $(A, D(A))$ for den Brownske semigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$ er

$$D(A) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \| \cdot \|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$$

og

$$Af = - \| \cdot \|^2 \hat{f} \quad \text{for} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

<u>Bevis</u>. Lad $f \in D(A)$. Så gælder

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g_t * f - f) = Af \quad i \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

altså ifølge Plancherel's sætning

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\exp(-t \,\|\cdot\|^2) - 1)\hat{f} = \widehat{Af} \quad i \quad L^2(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Men så findes en følge $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ så $t_m \to 0$ og

$$\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{t_m}(\exp(-t_m \,\|x\|^2)-1)\hat{f}(x)) = \widehat{Af}(x) \; ,$$

for næsten alle $x \in \mathbb{R}^n$. Nu er imidlertid

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{t_m} (\exp(-t_m \,\|x\|^2)-1) = -\|x\|^2 \qquad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n \; ,$$

og det følger at $-\|\cdot\|^2 \hat{f} = \widehat{Af}$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$, specielt

$$\|\cdot\|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \; .$$

Antag omvendt at $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ opfylder $\|\cdot\|^2 \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Idet

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (\exp(-t \,\|x\|^2)-1)\hat{f} = -\|x\|^2 \hat{f}(x)$$

for næsten alle $x \in \mathbb{R}^n$, og vi har majoriseringen, se Øvelse 3.30

$$\left|\frac{1}{t} (\exp(-t \,\|x\|^2)-1)\right| \leqq \|x\|^2 \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

følger det af sætningen om domineret konvergens af integraler at

$$\lim_{t\to 0} F(\tfrac{1}{t}(P_t f - f)) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(\exp(-t\,\|\cdot\|^2)-1)\,\hat{f}$$

$$= -\|\cdot\|^2\,\hat{f} \quad \text{i} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

og derfor ved Plancherel's sætning at

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(P_t f - f) \quad \text{eksisterer i} \quad L^2(\mathbb{R}^n)\,,$$

altså at $f \in D(A)$. ▌.

3.29. Bemærkning. Resultatet ovenfor kan også udtrykkes på følgende måde. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tilhører $D(A)$ netop hvis Δf (den Laplace afledede i distributionsforstand af den tempererede distribution (bestemt ved) f) tilhører $L^2(\mathbb{R}^n)$ og Af er i bekræftende fald Δf .

3.30. Øvelse. For $a \geqq 0$ gælder

$$|\tfrac{1}{t}(e^{-ta} - 1)| \leqq |a| \quad \text{for alle} \quad t > 0\,.$$

Uligheden gælder faktisk for alle $a \in \mathbb{C}$ med $\mathrm{Re}\,a \geqq 0$.

3.31. Sætning. Potentialoperatoren $(N, D(N))$ for den Brownske semigruppe på $L^2(\mathbb{R}^n)$ er

$$D(N) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \|\cdot\|^{-2}\,\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

og

$$\widehat{Nf} = \frac{1}{\|\cdot\|^2}\,\hat{f} \quad \text{for} \quad f \in D(N)\,.$$

Bevis. Lad $f \in D(N)$. Så gælder ifølge 2.3 at $Nf \in D(A)$ og

$A(Nf) = -f$, altså ifølge 3.28 at

$$-\hat{f} = \widehat{A(Nf)} = -\|\cdot\|^2 \,\widehat{Nf} \in L^2(\mathbb{R}^n) ,$$

altså tilhører funktionen $\|\cdot\|^{-2}\hat{f}$ (som er defineret næsten overalt) $L^2(\mathbb{R}^n)$ og

$$\widehat{Nf} = \frac{1}{\|\cdot\|^2}\hat{f} .$$

Hvis omvendt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ opfylder $\|\cdot\|^{-2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, så vil $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ defineret ved at $\hat{g} = \|\cdot\|^{-2}\hat{f}$ tilhøre $D(A)$ ifølge 3.28 ($\|\cdot\|^2\hat{g} = \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$) og

$$\widehat{Ag} = -\|\cdot\|^2\hat{g} = -\hat{f} ,$$

hvoraf $Ag = -f$, altså $f \in D(N)$ ifølge 2.7 : ∎

§4. Abstrakte resolventer.

Lad igen E være et Banachrum over $\mathbb{C}$.

4.1. Definition. En (abstrakt) resolvent på E er en familie $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af begrænsede operatorer på E , altså $(R_\lambda)_{\lambda>0} \subseteq L(E)$, der opfylder

$$\forall\lambda,\mu > 0: R_\lambda - R_\mu = (\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu. \tag{1}$$

Ligningen (1) kaldes resolventligningen. Det følger umiddelbart af (1) at operatorerne i en resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ kommuterer indbyrdes. Endvidere er billedrummet $R_\lambda(E)$ og nulrummet $\mathrm{Ker}(R_\lambda)$ for en resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E uafhængigt af $\lambda > 0$, thi for $\lambda,\mu > 0$ har vi

$$R_\lambda = R_\mu(I + (\mu-\lambda)R_\lambda)$$

altså $R_\lambda(E) \subseteq R_\mu(E)$, og hvis $x \in \mathrm{Ker}(R_\lambda)$ har vi

$$R_\mu x = R_\lambda x - (\mu-\lambda)R_\mu R_\lambda x = 0$$

altså $x \in \mathrm{Ker}(R_\mu)$.

4.2. Lemma. For en resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E er afbildningen $\lambda \mapsto R_\lambda$ af $]0,\infty[$ ind i $L(E)$ analytisk med "potensrække"

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1} \quad \text{for } \lambda_0 > 0$$

og λ tilhørende en omegn af λ_0 .

Bevis. Hvis der findes et $\lambda_0 > 0$ så $R_{\lambda_0} = 0$ er $R_\lambda = 0$ for alle $\lambda > 0$, og påstanden er rigtig.

Antag at $\|R_\lambda\| > 0$ for alle $\lambda > 0$. Lad $\lambda_0 > 0$. For $\lambda > 0$ og $n \in \mathbb{N}$ fås ved gentagen anvendelse af resolventligningen

$$\begin{aligned}
R_\lambda &= R_{\lambda_0} + (\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0}R_\lambda \\
&= R_{\lambda_0} + (\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0}^2 + (\lambda_0-\lambda)^2 R_{\lambda_0}^2 R_\lambda \\
&\vdots \\
&= R_{\lambda_0} + (\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0}^2 + \cdots + (\lambda_0-\lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1} + (\lambda_0-\lambda)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1} R_\lambda \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_0-\lambda)^i R_{\lambda_0}^{i+1} + (\lambda_0-\lambda)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1} R_\lambda
\end{aligned}$$

For $|\lambda_0 - \lambda| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ konvergerer "restleddet" mod 0 for $n \to \infty$ thi

$$\|(\lambda_0-\lambda)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+1} R_\lambda\| \leqq \left(\frac{|\lambda_0-\lambda|}{\|R_{\lambda_0}\|}\right)^{n+1} \|R_\lambda\| \quad . \quad \blacksquare$$

4.3. Lemma. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent på E. Da er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ "resolvent for en afsluttet operator på E", ɔ: der findes en afsluttet operator $(T, D(T))$ på E så $]0,\infty[\subseteqq \rho(T)$ og

$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 ,$$

hvis og kun hvis R_λ er injektiv for (et og dermed for) alle $\lambda > 0$.

Bevis. Antag at R_λ er injektiv for $\lambda > 0$, og betegn med B det fælles billedrum $R_\lambda(E)$ for operatorerne R_λ, $\lambda > 0$. Ved $T_\lambda = \lambda I - R_\lambda^{-1}$ defineres for $\lambda > 0$ en operator af B ind i E, og T_λ er uafhængig af λ. For $\lambda, \mu > 0$ har vi nemlig for $x \in B$ af formen

$$x = R_\lambda y = R_\mu z \quad \text{for} \quad y,z \in E \quad ,$$

at

$$R_\mu(T_\lambda x) = R_\mu(\lambda R_\lambda y - y) = \lambda R_\mu R_\lambda y - R_\mu y$$

$$= (\lambda-\mu)R_\mu R_\lambda y - R_\mu y + \mu R_\mu R_\lambda y$$

$$= \mu R_\mu R_\lambda y - R_\lambda y = \mu R_\mu x - R_\mu R_\mu^{-1} x$$

$$= R_\mu(\mu x - R_\mu^{-1} x) = R_\mu(T_\mu x)$$

hvoraf $T_\lambda x = T_\mu x$ da R_μ er injektiv. Operatoren (T,B) (med $T = T_\lambda$) er afsluttet og $]0,\infty[\subseteq \rho(T)$ og der gælder

$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \; .$$

Hvis omvendt $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er "restriktionen" til $]0,\infty[$ af resolventen for T (med $]0,\infty[\subseteq \rho(T)$) gælder klart at R_λ er injektiv for $\lambda > 0$. ▮

Hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er "resolvent" for $(T,D(T))$ gælder

$$R_\lambda(E) = D(T) \quad \text{og} \quad \operatorname{Ker}(R_\lambda) = \{0\} \; .$$

Endvidere har vi, idet $I - \lambda R_\lambda = -T(R_\lambda)$,

$$(I-\lambda R_\lambda)(E) = T(D(T))$$

og videre at

$$\mathrm{Ker}(I-\lambda R_\lambda) = \mathrm{Ker}(T) \;;$$

thi hvis $x \in \mathrm{Ker}(I-\lambda R_\lambda)$ har vi $-T(R_\lambda x) = -R_\lambda(Tx) = 0$ hvoraf da R_λ er injektiv $Tx = 0$; hvis omvendt $x \in D(T)$ opfylder $Tx = 0$ så gælder $-T(R_\lambda x) = x - \lambda R_\lambda x = 0$.

4.4. Definition. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent på E . Lad $M > 0$. Vi siger at $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset hvis

$$\forall \lambda > 0: \ \|\lambda R_\lambda\| \leqq M .$$

og $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ siges at være begrænset hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset for et $M > 0$. Hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er 1-begrænset kaldes $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ en kontraktionsresolvent. Endvidere siges $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ at være af type-L_0 såfremt

$$\forall x \in E: \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0$$

og af type-L_∞ hvis

$$\forall x \in E: \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x \quad .$$

I stedet for af type-L_∞ siges også stærkt kontinuert.

4.5. Øvelse. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent på E . For $\lambda > 0$ defineres en begrænset operator S_λ på E ved

$$S_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda} R_{\frac{1}{\lambda}})$$

og familien $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ er en resolvent på E .

Betegnes afbildningen, der til $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ knytter $(S_\lambda)_{\lambda>0}$, ved φ gælder at $\varphi \circ \varphi$ = identiteten.

Endvidere gælder

$$(R_\lambda)_{\lambda>0} \text{ er begrænset} \Leftrightarrow \varphi((R_\lambda)_{\lambda>0}) \text{ er begrænset}$$

$$(R_\lambda)_{\lambda>0} \text{ er af type-}L_0 \Leftrightarrow \varphi((R_\lambda)_{\lambda>0}) \text{ er af type-}L_\infty \; .$$

4.6. Øvelse. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent på E og lad $\lambda_0 > 0$. Familien $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ af operatorer på E givet ved

$$S_\lambda = R_{\lambda+\lambda_0} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \; ,$$

er en resolvent af type-L_0 på E, og der gælder:

$$(R_\lambda)_{\lambda>0} \text{ M-begrænset} \Rightarrow (S_\lambda)_{\lambda>0} \text{ M-begrænset}$$

$$(R_\lambda)_{\lambda>0} \text{ af type-}L_\infty \Rightarrow (S_\lambda)_{\lambda>0} \text{ af type-}L_\infty \; .$$

I det følgende betegner symbolet w-lim, grænseværdi i den svage topologi på E.

4.7. Sætning. For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E gælder for $\lambda_0 > 0$.

(i) $\overline{R_{\lambda_0}(E)} = \{x \in E \mid \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\} = \{x \in E \mid \text{w-}\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\}$.

(ii) $\mathrm{Ker}(R_{\lambda_0}) \cap \overline{R_{\lambda_0}(E)} = \{0\}$.

(iii) Den algebraisk direkte sum $E_\infty = \mathrm{Ker}(R_{\lambda_0}) \oplus \overline{R_{\lambda_0}(E)}$ er et afsluttet underrum af E givet ved

$$E_\infty = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x \text{ eksist.}\} = \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x \text{ eksist.}\} \; .$$

Bevis (i). Vi har klart at

$$\{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\} \subseteq \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\} \quad .$$

Lad $x \in E$ opfylde $x = \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x$. Dermed tilhører x den svage afslutning $\overline{R_{\lambda_0}(E)}^w$ af $R_{\lambda_0}(E)$, som da $R_{\lambda_0}(E)$ er et underrum er den sædvanlige afslutning af $R_{\lambda_0}(E)$, altså

$$\{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\} \subseteq \overline{R_{\lambda_0}(E)} \ .$$

Lad $x \in R_{\lambda_0}(E)$, f.eks. $x = R_{\lambda_0} y$ for $y \in E$. For $\lambda > \lambda_0$ har vi så

$$\lambda R_\lambda x = \lambda R_\lambda R_{\lambda_0} y = \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0} (R_{\lambda_0} y - R_\lambda y)$$

hvoraf, da $\|\lambda R_\lambda y\| \leq M \|y\|$ for et $M > 0$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = R_{\lambda_0} y - \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \lambda R_\lambda y = x \quad .$$

Dette viser at

$$R_{\lambda_0}(E) \subseteq \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = x\} \quad ,$$

og da mængden på højre side er afsluttet fordi $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er begrænset, fås (i) .

(ii) . For $x \in \mathrm{Ker}(R_{\lambda_0}) \cap \overline{R_{\lambda_0}(E)}$ gælder ifølge (i) ,

$$x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x = 0 \quad .$$

(iii). Det er klart at

$$E_\infty = \mathrm{Ker}(R_{\lambda_0}) \oplus \overline{R_{\lambda_0}(E)} \subseteq \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x \ \text{ eksist.}\}$$

$$\subseteq \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x \ \text{ eksist.}\} \quad .$$

Lad $x \in E$ opfylde at $\underset{\lambda\to\infty}{\text{w-lim}}\ \lambda R_\lambda x = y \in E$. Så gælder

$$R_{\lambda_0} y = \underset{\lambda\to\infty}{\text{w-lim}}\ \lambda R_\lambda R_{\lambda_0} x = \underset{\lambda\to\infty}{\text{w-lim}}\ \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0}(R_{\lambda_0} x - R_\lambda x) = R_{\lambda_0} x .$$

Altså gælder $x = x-y+y$ hvor $x-y \in \mathrm{Ker}(R_{\lambda_0})$ og $y \in \overline{R_{\lambda_0}(E)}$, thi y tilhører klart den svage afslutning af $R_{\lambda_0}(E)$ som er lig afslutningen af $R_{\lambda_0}(E)$ fordi $R_{\lambda_0}(E)$ er et underrum.

Dette viser at

$$\{x \in E \mid \underset{\lambda\to\infty}{\text{w-lim}}\ \lambda R_\lambda x \ \text{ eksist}\} \subseteq E_\infty ,$$

og E_∞ er afsluttet, thi mængden

$$\{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda x \text{ eksist.}\}$$

er afsluttet fordi $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er begrænset . ∎

4.8. <u>Korollar</u>. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent på E . Så er følgende tre betingelser ensbetydende:

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_∞

(ii) $\forall\, x \in E$: $\underset{\lambda\to\infty}{\text{w-lim}}\ \lambda R_\lambda x = x$.

(iii) $R_{\lambda_0}(E)$ er tæt i E for $\lambda_0 > 0$.

4.9. <u>Korollar</u>. For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E gælder for $\lambda_0 > 0$:

(i) $$\overline{(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)} = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0\}$$

$$= \{x \in E \mid \underset{\lambda\to 0}{\text{w-lim}}\ \lambda R_\lambda x = 0\}.$$

(ii) $\operatorname{Ker}(I-\lambda_0 R_{\lambda_0}) \cap \overline{(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)} = \{0\}$.

(iii) Den algebraisk direkte sum

$$E_0 = \operatorname{Ker}(I-\lambda_0 R_{\lambda_0}) \oplus \overline{(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)}$$

er et afsluttet underrum af E givet ved

$$E_0 = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x \quad \text{eksist.}\}$$

$$= \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x \quad \text{eksist.}\}$$

<u>Bevis</u>. Dette fås af sætning 4.7 anvendt på resolventen $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ fra Øvelse 4.5, idet man bemærker at

$$\operatorname{Ker}(I-\lambda_0 R_{\lambda_0}) = \operatorname{Ker}(S_{\frac{1}{\lambda_0}})$$

og

$$\overline{(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)} = \overline{S_{\frac{1}{\lambda_0}}(E)} \quad . \blacksquare$$

4.10. <u>Korollar</u>. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent på E . Så er følgende tre betingelser ensbetydende:

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 .

(ii) $\forall x \in E$: $\text{w-}\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0$

(iii) $(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)$ er tæt i E for $\lambda_0 > 0$.

4.11. <u>Øvelse</u>. På Banachrummet $\mathbb{C}$ findes foruden nul-resolventen følgende resolventer

$$(R_\lambda^z)_{\lambda>0} = \left(\frac{1}{\lambda - z}\right)_{\lambda>0} \quad \text{hvor} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \,]0,\infty[$$

Hvilke af disse er af type-L_0 henholdsvis type-L_∞ . ?

På Banachrummet $\mathbb{C}^2$ er familierne

$$(R_\lambda^z)_{\lambda>0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda>0} \qquad \text{for} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \,]0,\infty[$$

og

$$(R_\lambda^{z_1,z_2,\beta})_{\lambda>0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - z_1} & 0 \\ \frac{\beta}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} & \frac{1}{\lambda - z_2} \end{pmatrix}_{\lambda>0} \qquad \text{for } \beta \in \mathbb{C} \text{ og } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \,]0,\infty[$$

resolventer. Hvilke af disse er af type-L_0 henholdsvis type-L_∞ ?.

§5. Hille-Yosida's sætning.

Vi skal starte med at omtale Laplace-transformationen.

5.1. Definition. Et mål μ på $[0,\infty[$ med egenskaben at funktionen $x \mapsto e^{-sx}$ for $s > 0$ af $[0,\infty[$ ind i $[0,1]$ er $|\mu|$-integrabel siges at have en Laplace transformeret og funktionen $L\mu$ af $[0,\infty[$ ind i $\mathbb{C}$ givet ved

$$L\mu(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\, d\mu(x) \quad \text{for} \quad s > 0 \tag{1}$$

kaldes den Laplace transformerede af μ .

5.2. Eksempler.

$\mu = \varepsilon_a$, $a \geq 0$ $\qquad L\mu(s) = e^{-as}$ $\qquad$ for $s > 0$

$\mu = 1_{[0,\infty[}(x)dx$ $\qquad L\mu(s) = \frac{1}{s}$ $\qquad$ for $s > 0$

$\mu = 1_{[0,1]}(x)dx$ $\qquad L\mu(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-s})$ $\qquad$ for $s > 0$.

5.3. Øvelse. For $\alpha > 0$ har målet $\mu = 1_{]0,\infty[}(x)\, x^{\alpha-1}dx$ en Laplace transformeret givet ved

$$L\mu(s) = s^{-\alpha}\, \Gamma(\alpha) \quad \text{for} \quad s > 0 \quad .$$

For $z \in \mathbb{C}$ med $\operatorname{Re} z > 0$ har vi $|e^{-xz}| \leq e^{-x\operatorname{Re} z}$ for $x \geq 0$, og $L\mu$ kan derfor udvides til en holomorf funktion på $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ givet ved

$$L\mu(z) = \int_0^\infty e^{-xz}\, d\mu(x) \quad \text{for} \quad z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\} . \qquad (2)$$

For et begrænset mål μ kan $L\mu$ udvides til en kontinuert funktion på $\{\mathrm{Re}\, z \geq 0\}$ givet ved integralet i (2) . For $z = s + iy$ med $s > 0$ og $y \in \mathbb{R}$ finder vi

$$L\mu(z) = \int_0^\infty e^{-iyx}\, e^{-xs}\, d\mu(x) = F(e^{-xs} d\mu(x))(y). \quad (3)$$

5.4. Lemma. Laplace transformationen er injectiv ⊃: hvis mål μ_1 og μ_2 på $[0,\infty[$ har Laplacetransformerede som opfylder

$$L\mu_1(s) = L\mu_2(s) \quad \text{for} \quad s > 0 .$$

Så gælder $\mu_1 = \mu_2$.

Bevis. Funktionerne $L\mu_1(\cdot)$ og $L\mu_2(\cdot)$ er holomorfe i den åbne mængde $\mathrm{Re}\, z > 0$ og de stemmer overens på $]0,\infty[$ altså er de ens. Specielt er de ens på den lodrette linie $1 + iy$, $y \in \mathbb{R}$ hvilket viser, (3), at

$$F(e^{-x}\, d\mu_1(x)) = F(e^{-x}\, d\mu_2(x)) ,$$

altså er $e^{-x} d\mu_1(x) = e^{-x} d\mu_2(x)$, da Fouriertransformationen er injektiv, hvoraf $\mu_1 = \mu_2$. ▌.

Lad nu E betegne et Banachrum over $\mathbb{C}$.

5.5. Lemma. En stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E er entydigt bestemt ved sin resolvent.

<u>Bevis</u>. Lad $(P_t)_{t \geqq 0}$ og $(Q_t)_{t \geqq 0}$ være stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper på E så det for alle $\lambda > 0$ og alle $x \in E$ gælder

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t x \, dt \quad .$$

Lad $x \in E$. For $\varphi \in E'$ har vi da

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} <P_t x,\varphi>dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} <Q_t x,\varphi>dt \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \ ,$$

hvilket viser at $<P_t x,\varphi>dt$ og $<Q_t x,\varphi>dt$, som mål på $[0,\infty[$, har samme Laplace transformerede, altså ifølge 5.4 og den stærke kontinuitet

$$<P_t x,\varphi> = <Q_t x,\varphi> \quad \text{for} \quad t \geqq 0 \ ,$$

altså $P_t x = Q_t x$. ∎ .

5.6. <u>Lemma.</u> Resolventen $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t \geqq 0}$ på E er en kontraktionsresolvent af type-L_∞ .

<u>Bevis</u>. Dette følger af 2.9 og 4.8 idet billedrummet for N_λ , $\lambda > 0$, er lig domænet for frembringeren for $(P_t)_{t \geqq 0}$, hvilket ifølge 1.7 er tæt i E . ∎ .

5.7. <u>Øvelse</u>. Vis ved en passende domineret grænseovergang at

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda N_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x \, dt = x \quad \text{for} \quad x \in E \ ,$$

for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t \geqq 0}$ på E .

Vi skal nu formulere og bevise Hille-Yosida's sætning.

5.8. Sætning. Der består en éntydig korrespondance mellem stærkt-kontinuerte kontraktionssemigrupper $(P_t)_{t \geqq 0}$ på E og kontraktionsresolventer af type-L_∞ $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ på E. Korrespondancen er givet ved

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, x dt \quad \text{for} \quad x \in E \quad \text{og} \quad \lambda > 0$$

og omvendt

$$P_t x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \exp(t\lambda^2 R_\lambda x) \quad \text{for} \quad x \in E \quad \text{og} \quad t \geqq 0$$

hvor konvergensen er ligelig for t tilhørende begrænsede intervaller.

Bevis. Vi mangler at vise at enhver kontraktionsresolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ at type-L_∞ er resolvent for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E. Dertil går vi frem i en række skridt.

(a) For fast $\lambda > 0$ betragter vi den begrænsede operator

$$A_\lambda = \lambda(\lambda R_\lambda - I) \quad .$$

Ved for $t \geqq 0$ at sætte

$$P_t^\lambda = \exp(t\, A_\lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \frac{(t\lambda)^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n$$

fås en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t^\lambda)_{t \geqq 0}$, cf. Øvelse 1.11; for $t,s \geqq 0$ har vi nemlig

$$P_t^\lambda P_s^\lambda = e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n \right) \left(\sum_{m=0}^\infty \frac{(\lambda s)^m}{m!} (\lambda R_\lambda)^m \right)$$

$$= e^{-(t+s)\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^{p} \frac{(\lambda t)^q (\lambda s)^{p-q}}{q!(p-q)!} \right) (\lambda R_\lambda)^p$$

$$= e^{-(t+s)\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} (\lambda t)^q (\lambda s)^{p-q} \right) (\lambda R_\lambda)^p$$

$$= e^{-(t+s)\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t+s))^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n = P^\lambda_{t+s} \ .$$

Der gælder klart $P^\lambda_0 = I$, og for $t > 0$ har vi

$$\| P^\lambda_t \| \leqq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \| \lambda R_\lambda \|^n \leqq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1 \ .$$

Endvidere gælder

$$\| I - P^\lambda_t \| \leqq \| I - e^{-\lambda t} I \| + e^{-\lambda t} \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n \|$$

og højresiden konvergerer mod 0 for $t \to 0$ idet

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\lambda R_\lambda)^n \| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t} - 1 \ .$$

Frembringeren for $(P^\lambda_t)_{t \geqq 0}$ er operatoren $A_\lambda = \lambda(\lambda R_\lambda - I)$; thi for $t \in]0,1]$ har vi

$$\| \frac{1}{t} (P^\lambda_t - I) - A_\lambda \| = \| \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n_\lambda - A_\lambda \|$$

$$= t \| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{n!} A^n_\lambda \| \leqq t \exp(\| A_\lambda \|) \ .$$

(b) Vi skal nu se at $(P^\lambda_t)_{t \geqq 0}$ for $\lambda \to \infty$ "konvergerer" mod den søgte semigruppe $(P_t)_{t \geqq 0}$. Hertil bemærker vi først, at idet $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$ er af type-L_∞ , så er alle operatorerne

R_λ , $\lambda > 0$ injektive. Betegner (T,B) operatoren med $B = R_\lambda(E)$ som domæne og som tilfredsstiller, cf. lemma 4.3,

$$R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \ ,$$

så har vi

$$Tx = \lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x \quad \text{for} \quad x \in B \ . \tag{4}$$

Der gælder nemlig for $x \in B$ at $R_\lambda(\lambda x - Tx) = x$ eller

$$\lambda(\lambda R_\lambda x - x) = \lambda R_\lambda Tx$$

hvoraf (4) da $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_∞ .

(c) Afbildningen $\lambda \mapsto R_\lambda$ er differentiabel og

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = \lim_{\mu \to \lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} (R_\mu - R_\lambda) = -R_\lambda^2 \ ;$$

dermed er $\lambda \mapsto A_\lambda$ differentiabel og

$$\frac{d}{d\lambda} A_\lambda = \frac{d}{d\lambda} (\lambda^2 R_\lambda - \lambda I) = 2\lambda R_\lambda - \lambda^2 R_\lambda^2 - I = \frac{-1}{\lambda^2} (A_\lambda)^2 \ .$$

Heraf fås for $t \geqq 0$

$$\frac{d}{d\lambda} P_t^\lambda = \frac{d}{d\lambda} \exp(tA_\lambda) = -\frac{t}{\lambda^2} P_t^\lambda A_\lambda^2 = -t \, P_t^\lambda (\lambda R_\lambda - I)^2 \ .$$

(d) Lad $\mu > 0$ være fast. For $x \in E$ har vi for $t \geqq 0$ og $\lambda > 0$

$$\frac{d}{d\lambda} P_t^\lambda R_\mu^2 x = -t \, P_t^\lambda (\lambda R_\lambda - I)^2 R_\mu^2 x = -t \, P_t^\lambda R_\lambda^2 (I - \mu R_\mu)^2 x$$

hvoraf

$$\left\|\frac{d}{d\lambda} P_t^\lambda R_\mu^2 x\right\| \leqq t \frac{1}{\lambda^2} \|I - \mu R_\mu\|^2 \|x\| \quad .$$

Men dette giver for $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$

$$\|P_t^{\lambda_1}(R_\mu^2 x) - P_t^{\lambda_0}(R_\mu^2 x)\| \leqq \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left\|\frac{d}{d\lambda} P_t^\lambda R_\mu^2 x\right\| d\lambda$$

$$\leqq t\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \|I - \mu R_\mu\|^2 \|x\| \quad .$$

Mængden $E_0 = \{R_\mu^2 x \mid x \in E\}$ er tæt i E og der gælder

$$\|P_t^{\lambda_1} y - P_t^{\lambda_0} y\| \leqq Ct \left|\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right| \tag{5}$$

for $y \in E_0$, λ_0 , $\lambda_1 > 0$ og $t \geqq 0$, hvor $C > 0$ er en konstant, der afhænger af $y \in E_0$.

(e) Af uligheden (5) ses at $(P_t^\lambda y)_{\lambda>0}$ for fast $t \geqq 0$ og $y \in E_0$ er et Cauchy-net (når $\lambda \to \infty$) og dermed konvergent. Idet $\|P_t^\lambda\| \leqq 1$ for $\lambda > 0$ og $t \geqq 0$ er mængden $\{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda x$ eksisterer$\}$ afsluttet, og $(P_t^\lambda x)_{\lambda>0}$ konvergerer altså for alle $x \in E$, $t \geqq 0$ når $\lambda \to \infty$. Betegnes grænseværdien

$$P_t x = \lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda x \quad \text{for} \quad t \geqq 0 \ , \ x \in E \ ,$$

defineres herved en familie $(P_t)_{t\geqq 0}$ af operatorer på E , og $(P_t)_{t\geqq 0}$ er den søgte stærkt kontinuerte kontraktionssemigruppe på E . Vi har nemlig klart at

$$\|P_t\| \leqq 1 \quad \text{for} \quad t \geqq 0 \quad \text{og} \quad P_0 = I \ .$$

For $t,s \geqq 0$ og $x \in E$ har vi for alle $\lambda > 0$,

$$\|P_{t+s}x - P_tP_sx\|$$

$$\leqq \|P_{t+s}x - P^{\lambda}_{t+s}x\| + \|P^{\lambda}_{t+s}x - P^{\lambda}_tP^{\lambda}_sx\| + \|P^{\lambda}_tP^{\lambda}_sx - P_tP_sx\|$$

$$\leqq \|P_{t+s}x - P^{\lambda}_{t+s}x\| + \|P^{\lambda}_tP^{\lambda}_sx - P^{\lambda}_tP_sx\| + \|P^{\lambda}_tP_sx - P_tP_sx\|$$

hvilket, da højre side konvergerer mod 0 for $\lambda \to \infty$, viser at $(P_t)_{t \geqq 0}$ er en semigruppe.

Denne semigruppe er stærkt kontinuert, thi ved at lade $\lambda_0 \to \infty$ i (5) finder vi

$$\|P^{\lambda}_t y - P_t y\| \leqq Ct\,\frac{1}{\lambda}$$

for $y \in E_0$, $t \geqq 0$ og $\lambda > 0$. Altså er funktionen $t \mapsto P_t y$ for $y \in E_0$, ligelig grænseværdi på begrænsede intervaller for kontinuerte funktioner, og dermed kontinuert. Specielt gælder

$$\lim_{t \to 0} P_t y = y \quad \text{for} \quad y \in E_0 ,$$

hvilket da $\|P_t\| \leqq 1$ for $t \geqq 0$, viser at $(P_t)_{t \geqq 0}$ er stærkt kontinuert.

(f) Frembringeren $(A,D(A))$ for $(P_t)_{t \geqq 0}$ er operatoren (T,B). Frembringeren for $(P^{\lambda}_t)_{\geqq 0}$ er A_λ, og derfor gælder, cf. 1.6

$$P^{\lambda}_t x - x = \int_0^t P^{\lambda}_s(A_\lambda x)ds \quad \text{for} \quad x \in E,\ t \geqq 0 \quad \text{og} \quad \lambda > 0.$$

Nu har vi for $x \in B$, $\lambda > 0$ og $s \in [0,t]$

$$\|P^{\lambda}_s A_\lambda x - P_s Tx\| \leqq \|P^{\lambda}_s A_\lambda x - P^{\lambda}_s Tx\| + \|P^{\lambda}_s Tx - P_s Tx\|$$

hvilket konvergerer mod 0 ligeligt for $s \in [0,t]$ når $\lambda \to \infty$, cf. (4), og vi har derfor

$$P_t x - x = \int_0^t P_s(Tx)ds \quad \text{for} \quad x \in B ,$$

hvilket viser at $x \in D(A)$ og $Ax = Tx$.

Omvendt er $I - T$ en bijektiv afbildning af B på E og der findes derfor til $x \in D(A)$ netop et $y \in B$ så

$$(I-A)x = (I-T)y ,$$

men ifølge det netop viste gælder $y \in D(A)$ og $Ay = Ty$ altså

$$(I-A)(x-y) = 0$$

hvilket da $I-A$ er injektiv medfører $x=y$, altså $D(A) \subseteqq B$.

g) Resolventen $(W_\lambda)_{\lambda>0}$ for $(P_t)_{t\geqq 0}$ er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, thi ifølge 2.9 og 4.3 har vi

$$W_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1} = R_\lambda \quad \text{for} \quad \lambda > 0 . \blacksquare \quad .$$

§6. Frembringere for resolventer.

Lad E være et Banachrum over $\mathbb{C}$.

6.1. Sætning. For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E er følgende tre betingelser ensbetydende:

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 ,

(ii) $\{x \in E \mid \lim\limits_{\lambda\to 0} R_\lambda x$ eksisterer$\}$ er tæt i E ,

(iii) $\{x \in E \mid \text{w-}\lim\limits_{\lambda\to 0} R_\lambda x$ eksisterer$\}$ er tæt i E .

I bekræftende fald gælder for $\lambda_0 > 0$

$$\begin{aligned}(I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E) &= \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \text{ eksisterer}\} \\ &= \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \text{ eksisterer}\} .\end{aligned} \tag{1}$$

Bevis. Antag først at $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 . Vi starter med at godtgøre identiteterne (1) . For $x \in (I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(E)$, altså $x = y-\lambda_0 R_{\lambda_0} y$ for $y \in E$, har vi for alle $\lambda > 0$

$$R_\lambda x = R_\lambda y - \lambda_0 R_\lambda R_{\lambda_0} y = R_{\lambda_0} y - \lambda R_\lambda R_{\lambda_0} y$$

hvoraf da $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0

$$\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x = R_{\lambda_0} y \quad .$$

Hvis $x \in E$ opfylder $y = \text{w-}\lim\limits_{\lambda\to 0} R_\lambda x$, så gælder

$$\lambda_0 R_{\lambda_0} y = \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} \lambda_0 R_{\lambda_0} R_\lambda x$$

$$= \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} (R_\lambda x - R_{\lambda_0} x) = y - R_{\lambda_0} x ,$$

hvilket viser at

$$x = x - \lambda_0(R_{\lambda_0} y - y + \lambda_0 R_{\lambda_0} y) = (I-\lambda_0 R_{\lambda_0})(x+\lambda_0 y) .$$

Dermed er (1) vist når $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 .

(i) $\Rightarrow$ (ii) følger af (1) og Korollar 4.10.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) er klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Antag at mængden $F = \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \text{ eksisterer}\}$

er tæt i E . For hvert $\varphi \in E'$ har vi

$$\lim_{\lambda\to 0} < \lambda R_\lambda x , \varphi> = 0 \quad \text{for} \quad x \in F ,$$

hvilket kan udtrykkes, at de kontinuerte linearformer ψ_λ på E givet ved

$$x \overset{\psi_\lambda}{\longmapsto} <\lambda R_\lambda x, \varphi>$$

konvergerer mod 0 for $\lambda \to 0$, på den tætte mængde F , og idet

$$|<x,\psi_\lambda>| \leqq \|\lambda R_\lambda\| \; \|\varphi\| \|x\| \leqq C \|\varphi\| \|x\| \quad \text{for} \quad x \in E \quad \text{og} \quad \lambda > 0$$

medfører dette at

$$\lim_{\lambda\to 0} <\lambda R_\lambda x, \varphi> = \lim_{\lambda\to 0} <x, \psi_\lambda> = 0 \quad \text{for} \quad x \in E ,$$

altså at $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er at type-L_0 , ifølge 4.10. ▮

6.2. <u>Sætning</u>. For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E er følgende tre betingelser ensbetydende:

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_∞ .

(ii) $\{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \text{ eksisterer}\}$ er tæt i E ,

(iii) $\{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \text{ eksisterer}\}$ er tæt i E .

I bekræftende fald gælder for $\lambda_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
R_{\lambda_0}(E) &= \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \text{ eksisterer}\} \\
&= \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \text{ eksisterer}\} .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

<u>Bevis</u>. Dette fås umiddelbart af Sætning 6.1 ved overgang til resolventen $\left(\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}R_{\frac{1}{\lambda}})\right)_{\lambda>0}$. ▮

Vi skal nu indføre to tæt definerede operatorer, der generaliserer potentialoperatoren henholdsvis den infinitesimale frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E . Se også 6.13 nedenfor.

6.3. <u>Definition</u>. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 på E . Operatoren $(V, D(V))$ på E defineret ved

$$D(V) = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \text{ eksisterer i } E\}$$

$$Vx = \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \quad \text{for} \quad x \in D(V) ,$$

kaldes <u>co-frembringeren</u> (eller <u>den 0-te resolvent</u>) for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$.

6.4. **Definition.** Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_∞ på E. Operatoren $(A,D(A))$ på E defineret ved

$$D(A) = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \text{ eksisterer i } E\}$$

$$Ax = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x - x) \quad \text{for} \quad x \in D(A)\ ,$$

kaldes frembringeren for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$.

6.5. **Bemærkning.** Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 med co-frembringer $(V,D(V))$. Så er operatoren $(-V,D(V))$ frembringer for $(\frac{1}{\lambda}(I-\frac{1}{\lambda}R_{\frac{1}{\lambda}}))_{\lambda>0}$, som er en begrænset resolvent af type-L_∞ på E. Cf. Øvelse 4.5.

6.6. **Bemærkning.** For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0 på E er den "svage" co-frembringer altså operatoren $(V_w,D(V_w))$ defineret ved

$$D(V_w) = \{x \in E \mid \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x \ \text{ eksisterer}\}$$

$$V_w x = \text{w-}\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda x\ ,$$

lig med co-frembringeren for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Dette følger umiddelbart af Sætning 6.1 ligning (1).

På samme måde er den "svage" frembringer for en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_∞ på E identisk med frembringeren for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Sammenlign med Sætning 1.8.

6.7. **Øvelse.** For en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0

på E med co-frembringer $(V,D(V))$ gælder

$$R_\lambda(D(V)) \subseteq D(V) \quad \text{for} \quad \lambda > 0$$

og

$$R_\lambda(Vx) = V(R_\lambda x) \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \quad \text{og} \quad x \in D(V)$$

samt den <u>udvidede</u> <u>resolventligning</u>.

$$Vx - R_\lambda x = \lambda R_\lambda Vx = \lambda V(R_\lambda x) \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \quad \text{og} \quad x \in D(V) .$$

6.8. <u>Sætning.</u> En operator $(A,D(A))$ på E er frembringer for en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_∞ på E, hvis og kun hvis den opfylder:

(i) $D(A)$ er tæt i E,

(ii) $(A,D(A))$ er afsluttet og $]0,\infty[\subseteq \rho(A)$,

(iii) $\sup_{\lambda>0} \| \lambda(\lambda I-A)^{-1} \| < \infty$.

I bekræftende fald er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ entydigt bestemt ud fra $(A,D(A))$ ved formlen

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

<u>Bevis</u>. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_∞ på E, og lad $(A,D(A))$ betegne frembringeren for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Vi skal indse at $(A,D(A)$ har egenskaberne (i), (ii) og (iii). Da $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_∞ er alle operatorerne R_λ, $\lambda > 0$, injektive, og der findes så ifølge Lemma 4.3 en afsluttet operator $(T,D(T))$ på E med $D(T) = R_\lambda(E)$ og $]0,\infty[\subseteq \rho(T)$

som opfylder

$$R_\lambda = (\lambda I-T)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

Der gælder nu $(A,D(A)) = (T,D(T))$, thi vi har, cf. 6.2, at

$$D(A) = \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x-x) \text{ eksisterer}\} = R_\lambda(E) = D(T)$$

og for $x \in D(T)$ fås, ligesom i beviset for 5.8 punkt (b),

$$Ax = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda x-x) = Tx .$$

Det er hermed klart at $(A,D(A))$ har egenskaberne (i), (ii) og (iii) $(\|\lambda(\lambda I-A)^{-1}\| = \|\lambda(\lambda I-T)^{-1}\| = \|\lambda R_\lambda\| \leqq M < \infty)$.

Hvis omvendt operatoren $(A,D(A))$ på E har egenskaberne (i), (ii) og (iii) så findes ifølge Lemma 4.3 en resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ på E så

$$R_\lambda = (\lambda I-A)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

Denne resolvent er begrænset (betingelse(iii)) og idet $R_\lambda(E) = D(A)$ er tæt i E, er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_∞, cf. Korollar 4.8. ▌

6.9. <u>Sætning</u>. En operator $(V,D(V))$ er co-frembringer for en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0 på E, netop hvis den opfylder:

(i) $D(V)$ er tæt i E,

(ii) $(V,D(V))$ er afsluttet og $]-\infty,0[\subseteqq \rho(V)$

(iii) $\sup_{\lambda>0} \|(I+\lambda V)^{-1}\| < \infty$.

I bekræftende fald er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ entydigt bestemt ved $(V,D(V))$ og givet ved formlen

$$R_\lambda = V(I+\lambda V)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

Bevis. Lad $(V,D(V))$ være co-frembringer for den begrænsede resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type $-L_0$ på E. Vi skal se, at $(V,D(V))$ har egenskaberne (i), (ii) og (iii). Ifølge bemærkning 6.5 er operatoren $(-V,D(V))$ frembringer for resolventen $(\frac{1}{\lambda}(I-\frac{1}{\lambda} R_{\frac{1}{\lambda}}))_{\lambda>0}$ på E, som er begrænset og af type-L_∞. Heraf ses at $(V,D(V))$ opfylder (i) og (ii). Endvidere har vi fra 6.8 at

$$(I+\lambda V)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda}I+V)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\lambda(I-\lambda R_\lambda)) = I-\lambda R_\lambda \quad \text{for} \quad \lambda > 0$$

hvilket viser at

$$\sup_{\lambda>0} \| (I+\lambda V)^{-1} \| < \infty.$$

Hvis omvendt $(V,D(V))$ er en operator på E med egenskaberne (i), (ii) og (iii), så er operatoren $(-V,D(V))$ frembringer for en begrænset resolvent $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_∞ på E, thi det er klart at $(-V,D(V))$ opfylder (i) og (ii) fra Sætning 6.8, og da

$$\sup_{\lambda>0} \| \lambda(\lambda I+V)^{-1} \| = \sup_{\lambda>0} \| (I+\frac{1}{\lambda}V)^{-1} \| < \infty ,$$

er betingelse (iii) fra 6.8 opfyldt.

Dermed er $(V,D(V))$ co-frembringer for resolventen $(\frac{1}{\lambda}(I-\frac{1}{\lambda}S_{\frac{1}{\lambda}}))_{\lambda>0}$; idet $(S_\lambda)_{\lambda>0}$ er givet ved

$$S_\lambda = (\lambda I+V)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \ ,$$

er $(V,D(V))$ altså co-frembringer for resolventen $(R_\lambda)_{\lambda>0}$, hvor

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I-\frac{1}{\lambda}S_{\frac{1}{\lambda}}) = \frac{1}{\lambda}(I-\frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda}I+V)^{-1})$$

$$= \frac{1}{\lambda}((I+\lambda V)(I+\lambda V)^{-1} - (I+\lambda V)^{-1}) = V(I+\lambda V)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \ \blacksquare \ .$$

6.10. Sætning. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 og type-L_∞ på E . Frembringeren $(A,D(A))$ for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ og co-frembringeren $(V,D(V))$ for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er begge injektive og der gælder

$$V = -A^{-1} \ .$$

Bevis. For $x \in D(A)$ har vi

$$R_\lambda(Ax) = (\lambda I-A)^{-1}Ax = (\lambda I-A)^{-1}(Ax-\lambda x) + \lambda(\lambda I-A)^{-1}x$$

$$= -x + \lambda R_\lambda x$$

for $\lambda > 0$, og heraf fås $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda(Ax) = -x$, altså

$$Ax \in D(V) \quad \text{og} \quad V(Ax) = -x \ .$$

For $x \in D(V)$ har vi på samme måde

$$\lambda(\lambda R_\lambda-I)Vx = \lambda(\lambda V(I+\lambda V)^{-1}-I)Vx$$

$$= \lambda(\lambda V(I+\lambda V)^{-1} - (I+\lambda V)(I+\lambda V)^{-1})Vx$$

$$= -\lambda(I+\lambda V)^{-1}Vx = -\lambda V(I+\lambda V)^{-1}x = -\lambda R_\lambda x$$

for $\lambda > 0$, og heraf fås $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda - I)Vx = -x$, altså

$$Vx \in D(A) \quad \text{og} \quad A(Vx) = -x \quad . \blacksquare$$

6.11. Korollar. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_∞ på E med frembringer $(A,D(A))$. Så er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0 netop hvis billedrummet $A(D(A))$ er tæt i E .

Bevis. Hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 er $A(D(A))$ lig domænet for co-frembringeren for $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ og dette er tæt i E . For $x \in D(A)$ har vi

$$\lambda R_\lambda(Ax) = \lambda R_\lambda(Ax-\lambda x) + \lambda^2 R_\lambda x = -\lambda x + \lambda^2 R_\lambda x \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \ ,$$

hvoraf

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda(Ax) = 0 \quad \text{for} \quad x \in D(A) \ ,$$

hvilket, hvis $A(D(A))$ er tæt i E medfører

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0 \quad \text{for} \quad x \in E \ ,$$

da $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er begrænset, altså at $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 . $\blacksquare$

6.12. Øvelse. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 på E , med co-frembringer $(V,D(V))$. Så er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_∞ netop hvis billedrummet $V(D(V))$ er tæt i E .

6.13. Sætning. Lad $(P_t)_{t \geqq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E med resolvent $(N_\lambda)_{\lambda>0}$. Frembringeren for $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er lig den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t \geqq 0}$. Hvis $(P_t)_{t \geqq 0}$ har egenskaben, at $\lim_{t \to \infty} P_t x = 0$ for alle $x \in E$, så er $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0, og co-frembringeren for $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er lig potentialoperatoren for $(P_t)_{t \geqq 0}$.

Bevis. I beviset for 6.8 blev det godtgjort, at frembringeren for $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er identisk med den afsluttede operator $(T,D(T))$ fra Lemma 4.3, der opfylder

$$N_\lambda = (\lambda I - T)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 ,$$

og ifølge beviset for 5.8 er $(T,D(T))$ netop den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t \geqq 0}$.

Antag, at $\lim_{t \to \infty} P_t x = 0$ for alle $x \in E$. For $x \in E$ og $\lambda > 0$ har vi

$$\lambda N_\lambda x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x dt = \int_0^\infty e^{-u} P_{\frac{u}{\lambda}} x \, du ,$$

og for $\lambda \to 0$ konvergerer integranden punktvis mod 0, majoriseret af den integrable funktion $u \mapsto e^{-u} \|x\|$, hvilket medfører at

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda N_\lambda x = 0$$

d.v.s. $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0. Om potentialoperatoren $(N,D(N))$ for $(P_t)_{t \geqq 0}$ vides at $N = -A^{-1}$ og af sætning 6.10 fås nu at $(N,D(N))$ er lig co-frembringeren for $(N_\lambda)_{\lambda>0}$. I

Af Øvelse 6.14 nedenfor fremgår, at der findes stærkt kontinuerte kontraktionssemigrupper for hvilke potentialoperatoren ikke er tæt defineret og hvor samtidig den tilhørende resolvent er af type-L_0, hvilket medfører at der eksisterer en (tæt defineret) invers til $-A$ hvor $(A,D(A))$ er den infinitesimale frembringer.

6.14. Øvelse. Resolventen $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ for translationssemigruppen på $C_0(\mathbb{R})$, cf. Øvelse 2.12, er af type-L_0. For $f \in C_c^+(\mathbb{R})$ gælder nemlig

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda N_\lambda f = 0 \quad \text{ligeligt,} \qquad (*)$$

hvilket da $\|\lambda N_\lambda\| \leqq 1$ for $\lambda > 0$ medfører at $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0. Lad $f \in C_c^+(\mathbb{R})$ have støtte i intervallet $[a,b]$. For $\lambda > 0$ og $x \in \mathbb{R}$ har vi da

$$\lambda N_\lambda f(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x-t)\,dt$$

altså

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\lambda N_\lambda f(x)| \leqq \lambda \|f\|_\infty (b-a)$$

hvilket viser $(*)$.

At $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ er af type-L_0 kan også fås af Korollar 6.11, idet billedrummet for den infinitesimale frembringer $(A,D(A))$ for translationssemigruppen er tæt i $C_0(\mathbb{R})$. Lad nemlig $f \in C_0(\mathbb{R})$ og $\varepsilon > 0$ være givet. Så findes $f_1 \in C_c(\mathbb{R})$ så

$$\|f-f_1\|_\infty < \varepsilon \quad \text{og} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 0$$

og funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ defineret ved

$$g(x) = \int_x^\infty f_1(t)dt$$

er af klasse $C^1(\mathbb{R})$ og $g' = -f_1 \in C_0(\mathbb{R})$ hvilket medfører $g \in D(A)$ og $Ag = -g' = f_1$.

6.15. Øvelse. Lad $(P_t)_{t \geqq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktions-semigruppe på E med resolvent $(N_\lambda)_{\lambda>0}$. Lad $(A_0, D(A_0))$ være den infinitesimale frembringer for $(P_t)_{t\geqq 0}$ og lad $(A_1, D(A_1))$ betegne frembringeren for $(N_\lambda)_{\lambda>0}$. For $x \in D(A_0)$ og $\lambda > 0$ gælder

$$\lambda(\lambda N_\lambda x - x) = \lambda \int_0^\infty e^{-u}(P_{\frac{u}{\lambda}} x - x)du ,$$

og da

$$\| P_{\frac{u}{\lambda}} x - x \| \leqq \frac{u}{\lambda} \| A_0 x \| \quad \text{for} \quad u, \lambda > 0$$

fås ved majoriseret konvergens af integraler, at

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda N_\lambda x - x) = \int_0^\infty u e^{-u} A_0 x du = A_0 x .$$

Dette viser $D(A_0) \subseteqq D(A_1)$ og $A_0 x = A_1 x$ for $x \in D(A_0)$. Hvis $x \in D(A_1) = R_\lambda(E)$, altså $x = R_\lambda y$ for $y \in E$, har vi for $t > 0$

$$P_t R_\lambda y = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_{t+s} y ds = e^{\lambda t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} P_s y ds$$

hvoraf

$$\frac{1}{t}(P_t x - x)$$

$$= \frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s y ds - \frac{e^{\lambda t}}{t} \int_0^t e^{-\lambda s} P_s y \, ds$$

som konvergerer mod $\lambda R_\lambda y-y$ for $t \to 0$, altså $x \in D(A_0)$, og dermed $(A_0,D(A_0)) = (A_1,D(A_1))$.

6.16. **Øvelse.** Lad $(P_t)_{t\geq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E med resolvent $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ og potential operator $(N,D(N))$. Der gælder

$$D(N) \subseteq \{x \in E \mid \lim_{\lambda\to 0} N_\lambda x \text{ eksisterer}\}$$

og

$$Nx = \lim_{\lambda\to 0} N_\lambda x \quad \text{for} \quad x \in D(N) .$$

Lad nemlig $x \in D(N)$. For $a > 0$ sætter vi

$$x^a = \int_0^a P_s x ds ,$$

og dermed har vi $Nx = \lim_{a\to\infty} x^a$. Ved partiel integration fås for $a > 0$ og $\lambda > 0$

$$\int_0^a e^{-\lambda s} P_s x ds = e^{-\lambda a} x^a + \lambda \int_0^a e^{-\lambda s} x^s ds$$

og ved grænseovergangen $a \to \infty$ ($s \mapsto x^s$ er en begrænset funktion)

$$N_\lambda x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} x^s ds = \int_0^\infty e^{-u} x^{\frac{u}{\lambda}} du$$

og heraf ved majoriseret konvergens af integraler

$$\lim_{\lambda\to 0} N_\lambda x = \int_0^\infty e^{-u} Nx \, du = Nx .$$

6.17. **Sætning.** Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 på E, med co-frembringer $(V,D(V))$. Så er følgende betingelser ensbetydende:

(i) $V \in L(E)$,

(ii) $D(V) = E$,

(iii) V er begrænset,

(iv) $\sup_{\lambda>0} \|R_\lambda\| < \infty$,

(v) $\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda = 0$ i $L(E)$,

(vi) der findes $\lambda_0 > 0$ så $\|\lambda_0 R_{\lambda_0}\| < 1$

(vii) $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda$ eksisterer i $L(E)$.

Bevis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) er en følge af afsluttet-graf sætningen, da $(V,D(V))$ er tæt defineret og afsluttet.

(i) $\Rightarrow$ (iv) , thi for $\lambda > 0$ har vi

$$R_\lambda = V(I+\lambda V)^{-1}$$

hvoraf ifølge Sætning 6.9

$$\|R_\lambda\| \leq \|V\| \sup_{\lambda>0} \|(I+\lambda V)^{-1}\| < +\infty \quad .$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) , er klare.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) , af resolventligningen fås for $\mu \in]0,\lambda_0[$, idet $\|(\lambda_0-\mu)R_{\lambda_0}\| < 1$, at

$$R_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\mu)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$

hvor rækken konvergerer ligeligt for $\mu \in]0,\lambda_0[$, og ved at lade $\mu \to 0$ har vi derfor at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\mu)^n \, R_{\lambda_0}^{n+1} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \, R_{\lambda_0}^{n+1} \quad \text{i} \quad L(E) \; .$$

(vii) $\Rightarrow$ (i) er klar. ∎

6.18. **Øvelse.** Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_∞ på E, med frembringer $(A,D(A))$. Så er følgende betingelser ensbetydende:

(i) $A \in L(E)$

(ii) $D(A) = E$

(iii) A begrænset

(iv) $\sup_{\lambda>0} \|\lambda(\lambda R_\lambda - I)\| < \infty$.

(v) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda = I$ i $L(E)$

(vi) $\exists \, \lambda_0 > 0 : \|I-\lambda_0 R_{\lambda_0}\| < 1$

(vii) $\lambda(\lambda R_\lambda - I)$ konvergerer i $L(E)$ for $\lambda \to \infty$.

6.19. **Sætning.** Lad $(P_t)_{t\geqq 0}$ være en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E med infinitesimal frembringer $(A,D(A))$. Følgende betingelser er ensbetydende.

(i) $A \in L(E)$,

(ii) $D(A) = E$,

(iii) $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t - I)$ eksisterer i $L(E)$,

(iv) $\lim_{t\to 0} P_t = I$ i $L(E)$,

(v) $\sup_{t>0} \|\frac{1}{t}(P_t - I)\| < \infty$.

I bekræftende fald gælder $P_t = \exp(tA)$ for $t \geqq 0$ og $(P_t)_{t \geqq 0}$ siges at være <u>normkontinuert</u> ($t \mapsto P_t$ af $[0,\infty[$ ind $L(E)$ er normkontinuert).

<u>Bevis</u>. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) følger af afsluttet-graf sætningen.

(i) $\Rightarrow$ (iii) . Familien $(\exp(tA))_{t \geqq 0}$ er en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E med infinitesimal frembringer A , og derfor, se beviset for Hille-Yosida's sætning, gælder

$$P_t = \exp(tA) \quad \text{for} \quad t \geqq 0 ,$$

hvilket let medfører (iii) , se Øvelse 1.11.

(iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) er klare.

(iv) $\Rightarrow$ (i) . Afbildningen $t \mapsto P_t$ af $[0,\infty]$ i $L(E)$, er under betingelse (iv) kontinuert når $L(E)$ er udstyret med normtopologien, og om resolventen $(N_\lambda)_{\lambda>0}$ for $(P_t)_{t \geqq 0}$ gælder derfor

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda N_\lambda = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} P_t dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty e^{-u} P_{\frac{u}{\lambda}} du = I \quad i \quad L(E) ,$$

hvilket ifølge Øvelse 6.18 viser at $A \in L(E)$. ∎ .

§7. Dissipative og co-dissipative operatorer.

Lad E være et Banachrum over $\mathbb{C}$.

7.1. Definition. En funktion $[\cdot,\cdot]: E \times E \to \mathbb{C}$ med egenskaberne

$$\forall y \in E: \quad x \mapsto [x,y] \quad \text{er en linearform på } E$$

$$\forall x,y \in E: \quad |[x,y]| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$$\forall x \in E: [x,x] = \|x\|^2 ,$$

kaldes et semi-indre produkt på E .

Der findes semi-indre produkter på E . Til hvert $x \in E$ kan vi nemlig vælge $\varphi_x \in E'$ så

$$\langle x,\varphi_x \rangle = \|x\|^2 \quad \text{og} \quad \|\varphi_x\| = \|x\| , \qquad (1)$$

og dermed er $[x,y] = \langle x,\varphi_y \rangle$ for $x,y \in E$, som man let ser, et semi-indre produkt på E . Eksistensen af et sådant $\varphi_x \in E'$ hørende til $x \in E$ fås af Hahn-Banach's sætning på følgende måde. Lad $x \in E \setminus \{0\}$. Ved $\lambda x \mapsto \lambda \|x\|^2$ defineres en linearform ψ på underrummet $\mathbb{C}x$ af E , der opfylder,

$$|\psi(y)| = \frac{\|y\|}{\|x\|} \|x\|^2 = \|x\| \, \|y\| \quad \text{for} \quad y \in \mathbb{C}x .$$

Der findes en udvidelse φ_x af ψ til E der opfylder

$$|\varphi_x(y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{for} \quad y \in E ,$$

og dermed (1) .

7.2. Øvelse. Lad E være et Hilbertrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$. Så er $[\cdot,\cdot] = (\cdot,\cdot)$ et semi-indre produkt på E og det er det eneste semi-indre produkt på E.

7.3. Sætning. Lad $A \in L(E)$. Nødvendigt og tilstrækkeligt for at A er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geqq 0}$ på E er at

$$\mathrm{Re}[Ax,x] \leqq 0 \quad \text{for} \quad x \in E\,, \tag{2}$$

for et (og dermed for ethvert) semi-indre produkt $[\cdot,\cdot]$ på E.

Bevis. Hvis A er infinitesimal frembringer for $(P_t)_{t\geqq 0}$, altså

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t x - x) \quad \text{for} \quad x \in E$$

så gælder for ethvert semi-indre produkt $[\cdot,\cdot]$ på E, at

$$\mathrm{Re}[Ax,x] = \lim_{t\to 0} \mathrm{Re}[\tfrac{1}{t}(P_t x - x),x]$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\mathrm{Re}([P_t x,x] - \|x\|^2) \leqq 0 \quad \text{for} \quad x \in E\,.$$

Hvis omvendt $A \in L(E)$ opfylder (2) for et fast semi-indre produkt $[\,,\,]$ på E skal vi nu konstruere en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geqq 0}$ på E med infinitesimal frembringer A.

Af ulighed (2) fås først at

$$\| \lambda x \| \leqq \| \lambda x - Ax \| \quad \text{for} \quad \lambda > 0 \quad \text{og} \quad x \in E . \tag{3}$$

Vi har nemlig

$$\lambda \| x \|^2 = \mathrm{Re}[\lambda x, x] \leqq \mathrm{Re}[\lambda x - Ax, x] \leqq \| \lambda x - Ax \| \, \| x \| \quad .$$

Uligheden (3) viser at operatoren $\lambda I - A$ er injektiv med en begrænset invers for $\lambda > 0$, thi hvis $y = \lambda x - Ax$ for $x \in E$, har vi

$$\| (\lambda I - A)^{-1} y \| = \| x \| \leqq \frac{1}{\lambda} \| y \| \ .$$

Endvidere er $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E)$ for $\lambda > \| A \|$ (Neumann's række) og da $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leqq \frac{1}{\lambda}$ for $\lambda > \| A \|$ ses at $]0,\infty[$ tilhører resolventmængden for A . Dermed er familien $((\lambda I - A)^{-1})_{\lambda > 0}$ en kontraktionsresolvent på E og den er af type-L_∞ , da A er overalt defineret, og dens frembringer er A . Den ifølge Hille-Yosida's sætning eksisterede stærkt kontinuerte kontraktionssemigruppe på E med $((\lambda I - A)^{-1})_{\lambda > 0}$ som resolvent har A som infinitesimal frembringer, cf. 6.13. I .

Vi skal nu give tilsvarende karakteriseringer af (ikke nødvendigvis overalt definerede og begrænsede) operatorer der er frembringer henholdsvis co-frembringer for en begrænset resolvent, og det viser sig praktisk at benytte uligheden (3) ovenfor som udgangspunkt.

7.4. Definition. Lad $M \geqq 0$. En operator $(A, D(A))$ på E siges at være M-dissipativ hvis

$$\forall x \in D(A) \ \forall \lambda > 0 : \ \| \lambda x \| \leqq M \| \lambda x - Ax \| \quad ,$$

og en operator $(V,D(V))$ på E siges at være M-<u>co</u>-<u>dissipativ</u> hvis

$$\forall x \in D(V)\ \forall \lambda > 0: \ \|\lambda V x\| \leqq M \|x+\lambda V x\| \quad .$$

I stedet for 1-dissipativ, henholdsvis 1-co-dissipativ siges blot <u>dissipativ</u> henholdsvis <u>co</u>-<u>dissipativ</u>.
Det er klart at hvis $(V,D(V))$ er M-dissipativ (henholdsvis M-co-dissipativ) så er ethvert positivt multiplum af $(V,D(V))$ ligeledes M-dissipativ (M-co-dissipativ).

7.5. <u>Øvelse</u>. Lad $M \in [0,1[$. Hvis $(A,D(A))$ er M-dissipativ gælder $D(A) = \{0\}$, og hvis $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ gælder $V(D(V)) = \{0\}$.

I det følgende betragtes kun tilfældet $M \geqq 1$.

7.6. <u>Lemma.</u> Lad $M \geqq 1$, $a \geqq 0$ og $(V,D(V))$ være en operator på E . Så gælder

(a) V M-dissipativ $\Rightarrow$ $-V$ $(M+1)$-co-dissipativ

(b) V M-codissipativ $\Rightarrow$ $-V$ $(M+1)$-dissipativ

(c) V injektiv og M-dissipativ $\Rightarrow$ $-V^{-1}$ M-co-dissipativ

(d) V injektiv og M-co-dissipativ $\Rightarrow$ $-V^{-1}$ M-dissipativ

(e) V M-dissipativ $\Rightarrow$ $V-aI$ M-dissipativ

(f) V M-co-dissipativ $\Rightarrow$ $V+aI$ M-co-dissipativ.

Bevis (a). Hvis V er M-dissipativ gælder for $\lambda > 0$ og $x \in D(V)$ at $\|\frac{1}{\lambda}x\| \leqq M\|\frac{1}{\lambda}x - Vx\|$ eller $\|x\| \leqq M\|x-\lambda Vx\|$ og derfor

$$\|\lambda(-V)x\| \leqq \|x+\lambda(-V)x\| + \|x\| \leqq (M+1)\|x+\lambda(-V)x\| .$$

(b). Hvis V er M-co-dissipativ gælder for $\lambda > 0$ og $x \in D(V)$ at $\|\frac{1}{\lambda}Vx\| \leqq M\|x+\frac{1}{\lambda}Vx\|$ eller $\|Vx\| \leqq M\|\lambda x+Vx\|$ og derfor

$$\|\lambda x\| \leqq \|\lambda x-(-V)x\| + \|Vx\| \leqq (M+1)\|\lambda x-(-V)x\| .$$

(c). Hvis V er injektiv og M-dissipativ har vi for $\lambda > 0$ og $x \in D(-V^{-1}) = V(D(V))$, altså af formen $x = Vy$ med $y \in D(V)$, at

$$\|\lambda(-V^{-1})x\| = \|\lambda y\| \leqq M\|\lambda y - Vy\| = M\|x+\lambda(-V^{-1})x\| .$$

(d). Hvis V er injektiv og M-co-dissipativ har vi for $\lambda > 0$ og $x \in D(-V^{-1}) = V(D(V))$, altså $x = Vy$ med $y \in D(V)$, at

$$\|\lambda x\| = \|\lambda Vy\| \leqq M\|y+\lambda Vy\| = M\|\lambda x-(-V^{-1})x\| .$$

(e). Det er nok at vise at $V-I$ er M-dissipativ hvis V er M-dissipativ, thi heraf følger at $a(\frac{1}{a}V-I) = V-aI$ er M-dissipativ. For $\lambda > 0$ og $x \in D(V)$ har vi

$$\|\lambda x\| \leqq \|(\lambda+1)x\| \leqq M\|(\lambda+1)x-Vx\| = M\|\lambda x-(V-I)x\| .$$

(f). Som under (e) er det nok at vise at $V+I$ er M-co-dissipativ hvis V er M-co-dissipativ. For $\lambda > 0$ og $x \in D(V)$ gælder

$$\|\lambda(V+I)x\| = \|\lambda x+\lambda Vx\| = \frac{\lambda}{\lambda+1}\|(\lambda+1)x + \lambda Vx + Vx\|$$

$$\leqq \frac{\lambda}{\lambda+1}\|(\lambda+1)x + \lambda Vx\| + \frac{\lambda}{\lambda+1}\|Vx\|$$

$$\leqq \frac{\lambda}{\lambda+1}\|(\lambda+1)x + \lambda Vx\| + M\|x + \frac{\lambda}{\lambda+1} Vx\|$$

$$\leqq \frac{\lambda+M}{\lambda+1}\|(\lambda+1)x+\lambda Vx\| \leqq M\|x+\lambda(V+I)x\| ,$$

hvor vi tilsidst benyttede at $\frac{\lambda+M}{\lambda+1} \leqq M$ fordi $M \geqq 1$. ∎ .

7.7. Øvelse. Lad E være et Hilbert rum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$. For en operator $(V,D(V))$ på E og $M \geqq 1$ gælder: V er M-dissipativ netop hvis $-V$ er M-co-dissipativ, og videre er en operator $(V,D(V))$ på E dissipativ hvis og kun hvis $\mathrm{Re}(Vx,x) \leqq 0$ for $x \in D(V)$.

7.8. Lemma. Lad $M \geqq 1$, $\lambda > 0$ og $(V,D(V))$ være en operator på E .

(a) Hvis V er M-co-dissipativ så er $(\lambda I+V)$ injektiv og operatoren $(V(\lambda I+V)^{-1},(\lambda I+V)(D(V)))$ er begrænset med norm $\leqq M$.

(b) Hvis V er M-dissipativ så er $(\lambda I-V)$ injektiv og operatoren $(\lambda(\lambda I-V)^{-1},(\lambda I-V)(D(V)))$ er begrænset med norm $\leqq M$.

Bevis. (a) . For $x \in D(V)$ med $\| \lambda x+Vx \| = 0$ har vi

$$\| \frac{1}{\lambda} Vx \| \leqq M \| x+\frac{1}{\lambda} Vx \| = \frac{M}{\lambda} \| \lambda x+Vx \| = 0$$

altså $Vx = 0$ og dermed $\lambda x = \lambda x+Vx = 0$, altså $x = 0$.
Lad $y = \lambda x + Vx$ med $x \in D(V)$. Så har vi

$$\| V(\lambda I+V)^{-1}y \| = \| Vx \| = \lambda \| \frac{1}{\lambda} Vx \| \leqq \lambda M \| x+\frac{1}{\lambda}Vx \| = M \| y \| .$$

(b). For $x \in D(V)$ med $\| \lambda x-Vx \| = 0$ gælder klart $x = 0$.
Lad $y = \lambda x - Vx$ med $x \in D(V)$. Så har vi

$$\| \lambda(\lambda I-V)^{-1}y \| = \| \lambda x \| \leqq M \| \lambda x-Vx \| = M \| y \| . \blacksquare .$$

7.9. Øvelse. Lad $M \geqq 1$ og $(V,D(V))$ være M-co-dissipativ. Så er $(I+\lambda V)$ injektiv for $\lambda > 0$ og $(I+\lambda V)^{-1}$ er begrænset med norm $\leqq M+1$, d.v.s. for $x \in (I+\lambda V)(D(V))$ gælder

$$\| (I+\lambda V)^{-1}x \| \leqq (M+1) \| x \| .$$

7.10. Definition. Lad $M \geqq 1$. En operator $(V,D(V))$ på E siges at være maksimal M-co-dissipativ (henholdsvis maksimal M-dissipativ) hvis $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ (henholdsvis M-dissipativ) og hvis enhver M-co-dissipativ udvidelse (henholdsvis M-dissipativ udvidelse) af $(V,D(V))$ er lig $(V,D(V))$.

Af Zorn's lemma fås at enhver M-co-dissipativ (henholdsvis M-dissipativ) operator på E kan udvides til en maksimal M-co-dissipativ (henholdsvis maksimal M-dissipativ) operator på E .

7.11. Sætning. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_0 på E med co-frembringer $(V,D(V))$ og lad $M \geqq 1$. Så er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ M-begrænset hvis og kun hvis $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ og i bekræftende fald er $(V,D(V))$ maksimal M-co-dissipativ.

Bevis. Antag at $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset, altså $\|\lambda R_\lambda\| \leqq M$ for $\lambda > 0$. Da $\lambda R_\lambda = \lambda V(I+\lambda V)^{-1} = V(\frac{1}{\lambda}I+V)^{-1}$ har vi for $x \in D(V)$ med $y = (\frac{1}{\lambda}x + Vx)$ at

$$\|Vx\| = \|\lambda R_\lambda y\| \leqq M\|y\| = M\|\tfrac{1}{\lambda}x+Vx\|$$

eller

$$\|\lambda Vx\| \leqq M\|x+\lambda Vx\| .$$

Hvis omvendt $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ fås af Lemma 7.8 at

$$\|\lambda R_\lambda\| = \|V(\tfrac{1}{\lambda}I+V)^{-1}\| \leqq M .$$

Antag nu at $(\hat{V},D(\hat{V}))$ er en M-co-dissipativ udvidelse af $(V,D(V))$, og lad $x \in D(\hat{V})$. Nu er operatoren $I+V$ surjektiv $(V(I+V)^{-1} = R_1)$ og der findes derfor $y \in D(V)$ så

$$x + \hat{V}x = y + Vy$$

hvoraf da $(V,D(V)) \subseteqq (\hat{V},D(\hat{V}))$

$$x + \hat{V}x = y + \hat{V}y .$$

Nu er $(I+\hat{V})$ injektiv da $\hat{V}$ er M-co-dissipativ, cf Lemma 7.8, hvoraf $y = x \in D(V)$, altså $(V,D(V)) = (\hat{V},D(\hat{V}))$. ∎ .

7.12. Øvelse. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en begrænset resolvent af type-L_∞ på E med frembringer $(A,D(A))$ og lad $M \geqq 1$. Så er $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ M-begrænset netop hvis $(A,D(A))$ er M-dissipativ, og i bekræftende fald er $(A,D(A))$ maksimal M-dissipativ.

7.13. Sætning. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en resolvent på E og lad $M \geqq 1$. Følgende tre betingelser er ensbetydende:

(i) $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset,

(ii) R_λ er M-co-dissipativ for alle $\lambda > 0$,

(iii) $\lambda(\lambda R_\lambda - I)$ er M-dissipativ for alle $\lambda > 0$.

Bevis. Af resolventligningen fås følgende tre identiteter gældende for $\lambda,\mu > 0$:

$$\mu R_{\lambda+\mu}(I+\mu R_\lambda) = \mu R_\lambda \quad , \tag{*}$$

$$(I-\mu R_{\lambda+\mu})(I+\mu R_\lambda) = I \; , \tag{**}$$

$$\left(\frac{1}{\mu+1} I + \frac{\lambda}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda\mu}{\mu+1}}\right)((\mu+1)I-\lambda R_\lambda) = I \; . \tag{***}$$

(i) ⇒ (ii). Hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset gælder $\|\mu R_{\lambda+\mu}\| \leqq M$ for $\lambda,\mu > 0$ og af (*) fås for $x \in E$ at

$$\|\mu R_\lambda x\| \leqq M \|x + \mu R_\lambda x\| \quad \text{for } \lambda,\mu > 0 \; ,$$

hvilket viser at R_λ er M-co-dissipativ for $\lambda > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) . Hvis $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er M-begrænset har vi for $\lambda,\mu > 0$

$$\left\|\frac{\mu}{\mu+1}I + \frac{\lambda\mu}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda\mu}{\mu+1}}\right\| \leqq \frac{\mu}{\mu+1} + \frac{M}{\mu+1} = \frac{\mu+M}{\mu+1} \leqq M ,$$

hvor vi tilsidst benyttede at $M \geqq 1$, og for $x \in E$ giver (***) derfor

$$\|\mu x\| \leqq M \|(\mu+1)x - \lambda R_\lambda x\| = M \|\mu x - (\lambda R_\lambda - I)x\| \quad \text{for } \lambda,\mu > 0 ,$$

hvilket viser at $\lambda R_\lambda - I$ og derfor også $\lambda(\lambda R_\lambda - I)$ er M-dissipativ.

(ii) $\Rightarrow$ (i) . Af ligning (**) fås at $I + \mu R_\lambda$ er surjektiv for $\lambda,\mu > 0$. For $x \in E$ af formen $x = y + \mu R_\lambda y$ med $y \in E$ får vi, hvis R_λ er M-co-dissipativ, af ligning (*) at

$$\|\mu R_{\lambda+\mu} x\| = \|\mu R_\lambda y\| \leqq M \|y + \mu R_\lambda y\| = M \|x\| \quad \text{for } \lambda,\mu > 0 ,$$

altså $\|\mu R_{\lambda+\mu}\| \leqq M$ for $\lambda,\mu > 0$, hvilket medfører

$$\|\mu R_\mu\| = \lim_{\lambda\to 0} \|\mu R_{\lambda+\mu}\| \leqq M \quad \text{for } \mu > 0 .$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) . Af ligning (***) fås at $(\mu+1)I - \lambda R_\lambda$ er surjektiv for $\lambda,\mu > 0$. For $x \in E$ af formen $x = (\mu+1)y - \lambda R_\lambda y$ for $y \in E$ får vi, hvis $\lambda R_\lambda - I$ (eller $\lambda(\lambda R_\lambda - I)$) er M-dissipativ, at

$$\left\|\frac{1}{\mu+1}x + \frac{\lambda}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda\mu}{\mu+1}} x\right\| = \|y\| \leqq \frac{M}{\mu} \|\mu y - (\lambda R_\lambda - I)y\| = \frac{M}{\mu} \|x\|$$

eller

$$\left\| \frac{\mu}{\mu+1} I + \frac{\mu\lambda}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda\mu}{\mu+1}} \right\| \leqq M \quad \text{for} \quad \lambda,\mu > 0 \; .$$

For fast $\lambda_0 > 0$ vælger vi $\lambda,\mu > 0$ så $\lambda\mu = \lambda_0$, og ulig-heden ovenfor bliver da til

$$\left\| \frac{\mu}{\mu+1} I + \frac{\lambda_0}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda_0}{\mu+1}} \right\| \leqq M$$

altså

$$\| \lambda_0 R_{\lambda_0} \| = \lim_{\mu\to 0} \left\| \frac{\mu}{\mu+1} I + \frac{\lambda_0}{(\mu+1)^2} R_{\frac{\lambda_0}{\mu+1}} \right\| \leqq M \; . \quad \blacksquare$$

7.14. Øvelse. Lad $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ være en M-begrænset $(M \geqq 1)$ resolvent på E og lad $\lambda_0 > 0$.

Familien $(R_{\lambda_0+\lambda})_{\lambda>0}$ er en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E med co-frembringer R_{λ_0} $(\in L(E))$, og R_{λ_0} er dermed ifølge Sætning 7.11 M-co-dissipativ.

Familien $\left(\frac{1}{\lambda_0+\lambda} I + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda}\right)^2 R_{\frac{\lambda_0\lambda}{\lambda_0+\lambda}}\right)_{\lambda>0}$ er en M-begrænset resolvent af type-L_∞ på E med frembringer $\lambda_0(\lambda_0 R_{\lambda_0} - I)$ som dermed ifølge Sætning 7.11 er M-dissipativ.

7.15. Sætning. Lad $M \geq 1$ og lad $(V,D(V))$ være en tæt defineret M-co-dissipativ operator på E . Så er $(V,D(V))$ præafsluttet og afslutningen af $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ.

Bevis. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge på $D(V)$ så $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ og antag at $\lim_{n\to\infty} Vx_n = y \in E$. Vi skal se at $y = 0$. For hvert $x \in D(V)$ og $\lambda > 0$ har vi da V er M-co-dissipativ

$$\|\lambda Vx_n + \lambda^2 Vx\| = \|\lambda V(x_n + \lambda x)\| \leqq M\|x_n + \lambda x + \lambda Vx_n + \lambda^2 Vx\|$$

hvoraf ved at lade $n \to \infty$,

$$\|\lambda y + \lambda^2 Vx\| \leqq M\|\lambda x + \lambda y + \lambda^2 Vx\| \;;$$

ved at dividere med λ og derefter lade $\lambda \to 0$ fås

$$\|y\| \leqq M\|x+y\| \quad .$$

Da $D(V)$ er tæt kan højresiden gøres vilkårlig lille ($\geqq 0$) og derfor gælder $y = 0$.

At operatoren $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ kan udtrykkes ved at grafen for $(V,D(V))$, altså mængden $\{(x,y) \in D(V) \times E \mid y = Vx\}$, er indeholdt i mængden

$$C = \{(x,y) \in E \times E \mid \forall\lambda > 0: \|\lambda y\| \leqq M\|x+\lambda y\|\} \; .$$

Da C er afsluttet er grafen for afslutningen $(\hat{V},D(\hat{V}))$ af $(V,D(V))$ indeholdt i C, hvilket netop betyder at $(\hat{V},D(\hat{V}))$ er M-co-dissipativ. ▮

7.16. <u>Øvelse</u>. Lad $M \geqq 1$ og $(A,D(A))$ være en tæt defineret M-dissipativ operator på E. Så er $(A,D(A))$ præafsluttet og afslutningen af $(A,D(A))$ er M-dissipativ.

7.17. <u>Sætning</u>. Lad $M \geqq 1$ og lad $(V,D(V))$ være M-co-dissipativ eller M-dissipativ. Så gælder

$$\overline{V(D(V))} \cap \overline{\mathrm{Ker}(V)} = \{0\},$$

og den algebraisk direkte sum $\overline{V(D(V))} \oplus \overline{Ker(V)}$ er afsluttet.

Bevis. Ifølge Lemma 7.5 (a) er det nok at betragte tilfældet hvor $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ. Lad $x \in Ker(V)$ og $z \in D(V)$. For $\lambda > 0$ er $\lambda x + z \in D(V)$ og derfor da $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ

$$\|\lambda Vz\| = \|\lambda V(\lambda x+z)\| \leqq M \|\lambda x+z+\lambda Vz\| ;$$

ved division med λ og derefter at lade $\lambda \to \infty$ fås heraf

$$\|Vz\| \leqq M \|x+Vz\| .$$

Af denne ulighed fås

$$\|y\| \leqq M \|x+y\| \quad \text{for} \quad x \in \overline{Ker(V)} \quad \text{og} \quad y \in \overline{V(D(V))}, \qquad (*)$$

hvilket viser den første påstand, thi hvis $y \in \overline{V(D(V))} \cap \overline{Ker(V)}$. gælder $x = -y \in \overline{Ker(V)}$ og derfor ifølge (*), $\|y\| = 0$.
Lad nu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være følger på $\overline{Ker(V)}$ henholdsvis $\overline{V(D(V))}$ og antag at $(x_n+y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er konvergent.
Af (*) fås for $m,n \in \mathbb{N}$

$$\|y_m-y_n\| \leqq M \|x_m-x_n+y_m-y_n\| = M \|(y_m+x_m)-(y_n+x_n)\| ,$$

og dermed er $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Cauchy-følge, altså konvergent.
Så er også $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent og der gælder

$$\lim_{n\to\infty}(y_n+x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n + \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{V(D(V))} \oplus \overline{Ker(V)} ,$$

hvilket viser at $\overline{V(D(V))} \oplus \overline{Ker(V)}$ er afsluttet. ▮ .

7.18. Korollar. En M-dissipativ eller M-co-dissipativ operator med tæt billedrum er injektiv, og afbildningen $V \mapsto -V^{-1}$

er en bijektion af mængden af tæt definerede, M-co-dissipative operatorer $(V,D(V))$ med tæt billedrum på mængden af tæt definerede M-dissipative operatorer med tæt billedrum.

Bevis. Lemma 7.6 og Sætning 7.17.

7.19. Øvelse Summen $\overline{V(D(V))} \oplus \overline{Ker(V)}$ fra 7.17 er topologisk direkte.

7.20. Lemma. Lad $M \geqq 1$. Hvis $(A,D(A))$ er M-dissipativ og der findes $\lambda_0 > 0$ så $(\lambda_0 I-A)$ er surjektiv, så er $(\lambda I-A)$ surjektiv for alle $\lambda > 0$. Hvis $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ og der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)$ er surjektiv, så er $(I+\lambda V)$ surjektiv for alle $\lambda > 0$.

Bevis. Operatoren $R_{\lambda_0} = (\lambda_0 I-A)^{-1} : E \to E$ er begrænset med norm $\|\lambda_0 R_{\lambda_0}\| \leqq M$, cf. Lemma 7.8 (b), og operatoren

$$S_\mu = R_{\lambda_0}(I+(\mu-\lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1} ,$$

som er defineret (og tilhører $L(E)$) for $\mu \in]\frac{M-1}{M}\lambda_0, \frac{M+1}{M}\lambda_0[$, idet for sådanne μ,

$$\|(\mu-\lambda_0)R_{\lambda_0}\| < |\frac{\mu-\lambda_0}{\lambda_0}|M \leqq 1 ,$$

opfylder

$$S_\mu = (\lambda_0 I-A)^{-1}(I+(\mu-\lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1}$$

hvilket medfører $S_\mu(E) \subseteq D(A)$ og

$$(I+(\mu-\lambda_0)R_{\lambda_0})(\lambda_0 I-A)S_\mu = (\mu I-A)S_\mu = I .$$

Specielt er $(\mu I-A)$ altså surjektiv for $\mu \in]\frac{M-1}{M}\lambda_0, \frac{M+1}{M}\lambda_0[$, hvilket medfører at $(\lambda I-A)$ er surjektiv for $\lambda > 0$.
Hvis $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ og $(I+\lambda_0 V)$ er surjektiv så er $(-V,D(V))$ M'-dissipativ $(M' = M+1)$ og $(\frac{1}{\lambda_0} I - (-V))$ er surjektiv, hvilket ifølge det allerede viste medfører at $(\lambda I-(-V))$ er surjektiv for $\lambda > 0$, eller at $(I+\lambda V)$ er surjektiv for $\lambda > 0$. ∎ .

7.21. <u>Sætning.</u> En operator $(V,D(V))$ er co-frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E hvis og kun hvis

(i) $\overline{D(V)} = E$,

(ii) $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)(D(V)) = E$.

<u>Bevis</u>. Hvis $(V,D(V))$ er co-frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E , så er $D(V)$ tæt ifølge 6.9, og $(V,D(V))$ er M-co-dissipativ ifølge 7.11. Endvidere er $(I+\lambda V)$ surjektiv for alle $\lambda > 0$, idet $(V,D(V))$ er afsluttet og $]-\infty,0[\subseteq \rho(V)$.

Hvis omvendt $(V,D(V))$ opfylder (i), (ii) og (iii) så er ifølge 7.20 $(I+\lambda V)$ surjektiv for $\lambda > 0$, og dermed gælder ifølge Øvelse 7.9 at $(I+\lambda V)^{-1} \in L(E)$ for $\lambda > 0$ og

$$\|(I+\lambda V)^{-1}\| \leqq M+1 \quad \text{for} \quad \lambda > 0 .$$

Specielt er $(V,D(V))$ afsluttet og $]-\infty,0[\subseteqq \rho(V)$, og dermed er $(V,D(V))$ ifølge Sætning 6.9 co-frembringer for en begrænset resolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0 på E givet ved

$$R_\lambda = V(I+\lambda V)^{-1} = \frac{1}{\lambda}V(\frac{1}{\lambda}I+V)^{-1} \quad \text{for} \quad \lambda > 0 ,$$

og Lemma 7.8 giver

$$\|\lambda R_\lambda\| = \|V(\frac{1}{\lambda}I+V)^{-1}\| \leqq M \quad \text{for} \quad \lambda > 0 ,$$

og $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ er således M-begrænset. **I** .

7.22. <u>Sætning</u>. En operator $(A,D(A))$ er frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_∞ på E hvis og kun hvis

(i) $\overline{D(A)} = E$,

(ii) $(A,D(A))$ er M-dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(\lambda_0 I-A)(D(A)) = E$.

<u>Bevis</u>. Helt analogt til beviset for Sætning 7.21. **I** .

7.23. <u>Korollar</u>. En operator $(A,D(A))$ er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E hvis og kun hvis

(i) $\overline{D(A)} = E$,

(ii) $(A,D(A))$ er dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(\lambda_0 I-A)$ er surjektiv.

Bevis. Sætning 7.22, Sætning 6.13 samt beviset for Sætning 5.8. ∎ .

7.24. Korollar. En overalt defineret operator V på E er co-frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E hvis og kun hvis V er M-co-dissipativ. En overalt defineret operator A på E er frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_∞ på E hvis og kun hvis A er M-dissipativ.

Bevis. En overalt defineret M-co-dissipativ operator V på E er afsluttet ifølge Sætning 7.15, og dermed begrænset, og hvert $\lambda \in]0, \|V\|^{-1}[$ tilhører $\rho(V)$ og betingelse (iii) fra Sætning 7.21 er således opfyldt. Resten fås analogt. ∎ .

Det vil ofte være nyttigt at kunne afgøre om en forelagt operator "i det væsentlige" er frembringer eller co-frembringer for en resolvent, uden at kende det maksimale definitionsområde for operatoren.

7.25. Korollar. Lad $M \geqq 1$. For en operator $(V,D(V))$ på E er følgende to betingelser ensbetydende:

(a) $(V,D(V))$ er præ-afsluttet og afslutningen af $(V,D(V))$ er co-frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E .

(b) $(V,D(V))$ har egenskaberne

(i) $D(V)$ er tæt,

(ii) V er M-co-dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)$ har tæt billedrum.

<u>Bevis</u>. (a) $\Rightarrow$ (b). Lad $(\hat{V},D(\hat{V}))$ betegne afslutningen af $\overline{(V,D(V))}$. Idet $E = \overline{D(\hat{V})} \subseteq \overline{D(V)}$ er $D(V)$ tæt og da $\hat{V}$ er M-co-dissipativ er også V M-co-dissipativ. Grafen for $(I+\lambda V)$ er en tæt delmængde af grafen for $(I+\lambda\hat{V})$ og da der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0\hat{V})(D(\hat{V})) = E$ så findes $\lambda_0 > 0$ så projektionen på anden koordinaten i $E \times E$ af grafen for $(I+\lambda_0 V)$ er tæt i E, altså $\overline{(I+\lambda_0 V)(D(V))} = E$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Betingelse (i) og (ii) medfører at $(V,D(V))$ er præ-afsluttet, cf. Sætning 7.15, og afslutningen $(\hat{V},D(\hat{V}))$ af $(V,D(V))$ er tæt defineret og M-co-dissipativ. Specielt er $(I+\lambda_0\hat{V})$ injektiv med tæt defineret begrænset invers som, da $\hat{V}$ er afsluttet, tilhører $L(E)$, hvilket medfører at $(I+\lambda_0\hat{V})$ er surjektiv, og $(\hat{V},D(\hat{V}))$ er således ifølge Sætning 7.21, co-frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_0 på E. ▮

7.26. <u>Korollar</u>. Lad $M \geq 1$. For en operator $(A,D(A))$ på E er følgende to betingelser ensbetydende:

(a) $(A,D(A))$ er præ-afsluttet og afslutningen af $(A,D(A))$ er frembringer for en M-begrænset resolvent af type-L_∞ på E.

(b) $(A,D(A))$ har egenskaberne

(i) $D(A)$ er tæt.

(ii) A er M-dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(\lambda_0 I-A)$ har tæt billedrum.

Bevis. Analogt til beviset for Korollar 7.25. ▮ .

7.27. Korollar. En operator $(A,D(A))$ på E er præ-afsluttet og afslutningen af $(A,D(A))$ er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E hvis og kun hvis den opfylder

(i) $D(A)$ er tæt,

(ii) A er dissipativ,

(iii) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(\lambda_0 I-A)$ har tæt billedrum.

Bevis. Resultatet fås ved kombination af 7.27 og 7.23. ▮ .

7.28. Definition. En operator $(V,D(V))$ på E kaldes en abstrakt potentialoperator hvis V er injektiv og tæt defineret og hvis $(-V^{-1}, V(D(V)))$ er infinitesimal frembringer for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe på E .

7.29. Sætning. For en operator $(V,D(V))$ på E er følgende tre betingelser ensbetydende

(a) $(V,D(V))$ er en abstrakt potentialoperator.

(b) $(V,D(V))$ har egenskaberne

(i) $D(V)$ er tæt,

(ii) $V(D(V))$ er tæt,

(iii) V er co-dissipativ,

(iv) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)$ er surjektiv.

(c) $(V,D(V))$ er co-frembringer for en kontraktionsresolvent af type-L_0 og type-L_∞ på E .

<u>Bevis</u>. (a) ⇒ (b). (i) er klar og (ii) og (iii) følger da $-V^{-1}$ er infinitesimal frembringer, specielt tæt defineret og dissipativ, hvilket medfører, Lemma 7.6, at V er co-dissipativ. Idet der for $x \in D(V)$ gælder

$$(I+\lambda_0 V)x = (\lambda_0 I-(-V^{-1}))Vx$$

er billedrummet for $(I+\lambda_0 V)$ lig billedrummet for $(\lambda_0 I-(-V^{-1}))$, og der findes $\lambda_0 > 0$ så operatoren $(\lambda_0 I-(-V^{-1}))$ er surjektiv.

(b) ⇒ (c). Følger af Sætning 7.21 og Øvelse 6.12.

(c) ⇒ (a). Hvis $(V,D(V))$ er co-frembringer for en kontraktionsresolvent $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ af type-L_0 og type-L_∞ på E, så er $(-V^{-1},V(D(V)))$ infinitesimal frembringer for den stærkt kontinuerte kontraktionssemigruppe på E der har $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ som resolvent; cf. Sætning 6.13. ∎ .

7.30. <u>Bemærkning</u>. Potentialoperatoren $(N,D(N))$ for en stærkt kontinuert kontraktionssemigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ på E er <u>ikke</u> nødvendigvis en abstrakt potentialoperator. Operatoren $(N,D(N))$ er imidlertid en abstrakt potentialoperator hvis og kun hvis det for alle $x \in E$ gælder $\lim_{t\to\infty} P_t x = 0$.

7.31. <u>Øvelse</u>. En operator $(V,D(V))$ på E er præ-afsluttet og afslutningen af $(V,D(V))$ er en abstrakt potential operator hvis og kun hvis den opfylder

(i) $D(V)$ er tæt,

(ii) $V(D(V))$ er tæt,

(iii) V er co-dissipativ,

(iv) der findes $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)$ har tæt billedrum.

§8. Principper om maksimum i modul.

Lad $E = C_0(X)$ være Banachrummet af kontinuerte komplekse funktioner der går mod 0 i det uendelige på det lokalkompakte rum X. Normen på E er den ligelige norm

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \quad \text{for} \quad f \in E .$$

Vi skal se hvorledes dissipativitet og co-dissipativitet af operatorer på E kan udtrykkes ved hjælp af visse "maksimum principper".

Lad U betegne enhedscirklen $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Etpunktskompaktifikationen af X betegnes $\overline{X}$ og enhver funktion $f \in E$ kan opfattes som en kontinuert funktion på $\overline{X}$ (med $f(\infty) = 0$).

8.1. Definition. En operator $(A,D(A))$ på E siges at tilfredsstille det svage princip om maksimum i modul hvis

$$\forall f \in D(A)\ \exists (x,z) \in X \times U:\ zf(x) = \|f\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(zAf(x)) \leq 0 ,$$

og vi skriver så $(A,D(A)) \in$ SPMM .

En operator $(V,D(V))$ på E siges at tilfredsstille det svage co-princip om maksimum i modul hvis

$$\forall f \in D(V)\ \exists (x,z) \in X \times U:\ zVf(x) = \|Vf\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(zf(x)) \geq 0 ,$$

og vi skriver så $(V,D(V)) \in$ SCMM .

8.2. Lemma. Lad $f,g \in E$ være funktioner der opfylder

$$\forall \lambda > 0: \quad \|\lambda f\| \leqq \|\lambda f+g\| .$$

Så findes $(x,z) \in X \times U$ med egenskaben

$$\mathrm{Re}(zg(x)) \geqq 0 \quad \text{og} \quad zf(x) = \|f\| .$$

Bevis. For hvert $\lambda > 0$ findes $(x_\lambda, z_\lambda) \in X \times U$ så

$$z_\lambda(\lambda f(x_\lambda)+g(x_\lambda)) = \|\lambda f+g\| ,$$

hvoraf da venstre side er reel

$$\mathrm{Re}(z_\lambda f(x_\lambda)+\tfrac{1}{\lambda}z_\lambda g(x_\lambda)) = \|f+\tfrac{1}{\lambda}g\| \geqq \|f\| \geqq \mathrm{Re}(z_\lambda f(x_\lambda)) .$$

Specielt gælder

$$\mathrm{Re}(z_\lambda g(x_\lambda)) \geqq 0 .$$

Lad $(x,z) \in \overline{X} \times U$ være et fortætningspunkt for nettet $(x_\lambda, z_\lambda)_{\lambda>0}$ når $\lambda \to \infty$. Ved grænseovergang i ulighederne ovenfor finder vi

$$\mathrm{Re}(zg(x)) \geqq 0 \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(zf(x)) = \|f\| .$$

Hvis $f \equiv 0$ er påstanden klart rigtig og i tilfældet $\|f\| > 0$ må det fundne x tilhøre X (og ikke blot $\overline{X}$), og ligningen $\mathrm{Re}(zf(x)) = \|f\|$ medfører $zf(x) = \|f\|$ idet $z \in U$. ∎.

8.3. Sætning. En operator $(A,D(A))$ på E er dissipativ hvis og kun hvis $(A,D(A))$ opfylder det svage princip om maksimum i modul.

En operator $(V,D(V))$ på E er co-dissipativ hvis og kun hvis $(V,D(V))$ opfylder det svage co-princip om maksimum i modul.

<u>Bevis</u>. Hvis operatoren $(A,D(A))$ er dissipativ fås af Lemma 8.2 for $f \in D(A)$ og $g = -Af \in E$, at der findes $(x,z) \in X \times U$ så

$$zf(x) = \|f\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(zAf(x)) = \mathrm{Re}(-zg(x)) \leqq 0 ,$$

altså $(A,D(A)) \in SPMM$.

Hvis omvendt $(A,D(A)) \in SPMM$ så findes til $f \in D(A)$ og $\lambda > 0$ et punkt $(x,z) \in X \times U$ så

$$zf(x) = \|f\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(zAf(x)) \leqq 0 ,$$

hvoraf

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \lambda zf(x) = \mathrm{Re}(\lambda zf(x)) \\ &\leqq \mathrm{Re}(z(\lambda f(x)-Af(x))) \leqq \|\lambda f-Af\| ,\end{aligned}$$

hvilket viser at $(A,D(A))$ er dissipativ.

Hvis operatoren $(V,D(V))$ er co-dissipativ fås af Lemma 8.2 for $g \in D(V)$ og $f = Vg \in E$, at der findes $(x,z) \in X \times U$ så

$$\mathrm{Re}\, zg(x) \geqq 0 \quad \text{og} \quad zf(x) = zVg(x) = \|Vg\| ,$$

hvilket viser at $(V,D(V)) \in SCMM$.

Hvis omvendt $(V,D(V)) \in SCMM$, så findes til $f \in D(V)$ og $\lambda > 0$ et punkt $(x,z) \in X \times U$ så

$$\operatorname{Re} z\, f(x) \geqq 0 \quad \text{og} \quad zVf(x) = \|Vf\| \ ,$$

og derfor

$$\|\lambda Vf\| = \lambda z\, Vf(x) \leqq \operatorname{Re}(z(\lambda Vf(x)+f(x))) \leqq \|\lambda Vf+f\| \ ,$$

hvilket viser at $(V,D(V))$ er co-dissipativ. ▮ .

8.4. Øvelse. Operatoren $(A,D(A))$ på $C_0(\mathbb{R})$ givet ved

$$D(A) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f \in C^1(\mathbb{R}) \ , \ f' \in C_0(\mathbb{R})\} \ ,$$

$$Af = f' \quad \text{for} \quad f \in D(A) \ ,$$

er dissipativ.

8.5. Øvelse. Operatoren $(V,D(V))$ på $C_0(\mathbb{R})$ givet ved

$$D(V) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f \in C_c(\mathbb{R}) \ , \ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0\} \ ,$$

$$Vf(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad f \in D(V) \ .$$

er co-dissipativ.

Det svage princip (co-princip) om maksimum i modul for en dissipativ (co-dissipativ) operator på E kan skærpes for operatorer som er tæt definerede (har tæt billedrum).

8.6. Definition. En operator $(A,D(A))$ på E siges at tilfredsstille princippet om maksimum i modul hvis

$$\forall f \in D(A)\ \forall x \in X : f(x) = \|f\| \Rightarrow \operatorname{Re} Af(x) \leqq 0 \ ,$$

og vi skriver så $(A,D(A)) \in \text{PMM}$.

En operator $(V,D(V))$ siges at tilfredsstille co-princippet om maksimum i modul hvis

$$\forall f \in D(V)\ \forall x \in X:\ Vf(x) = \|Vf\| \Rightarrow \operatorname{Re} f(x) \geqq 0 ,$$

og vi skriver så $(V,D(V)) \in$ CMM .

Der opnås herved skærpelser af de "svage" principper. Lad $(A,D(A)) \in$ PMM , og lad $f \in D(A)$. Så findes $x_0 \in X$ så

$$|f(x_0)| = \sup_{x\in X} |f(x)| = \|f\|,$$

og der findes så $z \in U$ med egenskaben $zf(x_0) = \|f\| = \|zf\|$, og idet funktionen $zf \in D(A)$ fås ifølge PMM at

$$\operatorname{Re}(zf(x_0)) \leqq 0 ,$$

hvilket viser at $(A,D(A)) \in$ SPMM . På samme måde ses at $(V,D(V)) \in$ CMM medfører $(V,D(V)) \in$ SCMM .

8.7. Sætning. En tæt defineret dissipativ operator $(A,D(A))$ på E tilfredsstiller princippet om maksimum i modul.

Bevis. Lad $f \in D(A)$ og $x \in X$ opfylde: $f(x) = \|f\| > 0$. For hver kompakt omegn K af x findes, da $D(A)$ er tæt i E , $g \in D(A)$ så $g(x) = 1$ og $|g(y)| \leqq \frac{1}{2}$ for $y \in X \setminus K$. For hvert $\varepsilon > 0$ gælder $f + \varepsilon g \in D(A)$ og endvidere må maksimum i modul for $f+\varepsilon g$ antages på K . Der findes derfor ifølge Sætning 8.3 et par $(x_\varepsilon, z_\varepsilon) \in K \times U$ så

$$z_\varepsilon(f(x_\varepsilon) + \varepsilon g(x_\varepsilon)) = \|f+\varepsilon g\|$$

og

$$\mathrm{Re}(z_\varepsilon A(f+\varepsilon g)(x_\varepsilon)) \leqq 0 \ .$$

Lad (x_K, z_K) betegne et fortætningspunkt for $(x_\varepsilon, z_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ når $\varepsilon \to 0$. Så har vi

$$z_K f(x_K) = \|f\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(z_K Af(x_K)) \leqq 0 .$$

Heraf fås $z_K = \dfrac{\|f\|}{f(x_K)}$ og denne kvotient konvergerer mod $\dfrac{\|f\|}{f(x)} = 1$ når $K \to \{x\}$, altså

$$\mathrm{Re}(Af(x)) = \lim_{K\to\{x\}} \mathrm{Re}(z_K Af(x_K)) \leqq 0 \ ,$$

hvilket viser at $(A,D(A)) \in$ PMM . ▮ .

8.8. Øvelse. En co-dissipativ operator $(V,D(V))$ med tæt billedrum tilfredsstiller co-princippet om maksimum i modul.

8.9. Øvelse. Lad $(A,D(A))$ og $(B,D(B))$ være dissipative operatorer på E hvoraf den ene er tæt defineret. Så er summen $A+B$ (mere præcist $(A+B,\ D(A) \cap D(B))$) dissipativ.

8.10. Øvelse. For hvert $f \in E$ vælges et punkt $x_f \in X$ så $|f(x_f)| = \|f\|$, og ved

$$[f,g] = f(x_g)\overline{g(x_g)} \quad \text{for} \quad f,g \in E \ ,$$

defineres et semi-indre produkt på E (cf. 7.1). For en operator $(A,D(A)) \in$ PMM gælder med dette semi-indre produkt at

$$\mathrm{Re}[Af,f] \leqq 0 \quad \text{for} \quad f \in D(A) \ .$$

For en funktion $f \in E$ indføres mængden

$$M_f = \{(x,z) \in X \times U \mid \mathrm{Re}(zf(x)) > 0\} .$$

8.11. Definition. En operator $(V,D(V))$ på E siges at tilfredsstille det fuldstændige princip om maksimum i modul hvis

$$\forall f \in D(V): \mathrm{Re}\, zVf(x) \leqq 1 \quad \text{for} \quad (x,z) \in M_f \Rightarrow \|Vf\| \leqq 1 ,$$

og vi skriver så $(V,D(V)) \in \mathrm{FPMM}$.

8.12. Lemma. En operator $(V,D(V))$ på E , der tilfredsstiller det fuldstændige princip om maksimum i modul er co-dissipativ.

Bevis. Lad $f \in D(V)$ og antag at $\|Vf\| > 0$. Der gælder

$$\|Vf\| = \sup\{\mathrm{Re}(z\, Vf(x)) \mid (x,z) \in M_f\} ,$$

thi hvis der findes $a > 0$ så

$$\mathrm{Re}[z\, Vf(x)] \leqq a < \|Vf\| \quad \text{for alle} \quad (x,z) \in M_f ,$$

så har vi

$$\mathrm{Re}[z\, V(\tfrac{1}{a}f)(x)] \leqq 1 \quad \text{for alle} \quad (x,z) \in M_f ,$$

og derfor $\|V(\frac{1}{a} f)\| = \frac{1}{a}\|Vf\| \leqq 1$, i modstrid med $a < \|Vf\|$. Men så gælder også

$$\|Vf\| = \sup\{\mathrm{Re}(zVf(x)) \mid (x,z) \in \overline{M_f}\} ,$$

og da $\overline{M_f}$ er en kompakt delmængde af $\overline{X} \times U$ findes $x \in \overline{X}$ og $z \in U$ så

$$\operatorname{Re}(zf(x)) \geqq 0 \quad \text{og} \quad \|Vf\| = \operatorname{Re}(zf(x)) = zf(x) \;;$$

det således fundne $x \in \overline{X}$ tilhører imidlertid X, idet $zf(x) = \|Vf\| > 0$, og dette viser at $(V,D(V)) \in SCMM$, altså ifølge Sætning 8.3 at $(V,D(V))$ er co-dissipativ. ▮ .

8.13. Sætning. En tæt defineret co-dissipativ operator $(V,D(V))$ på E tilfredsstiller det fuldstændige princip om maksimum i modul.

Bevis. Lad $f \in D(V)$. Beviset er indirekte, og vi antager at

$$\operatorname{Re}(zVf(x)) \leqq 1 \quad \text{for} \quad (x,z) \in M_f$$

og at $a = \|Vf\| > 1$. Mængden

$$\omega = \{(x,z) \in X \times U \mid \operatorname{Re}[zVf(x)] > \tfrac{1+a}{2}\}$$

er åben og disjunkt med M_f. Da $D(V)$ er tæt i E findes $g \in D(V)$ så

$$\|g-Vf\| \leqq \frac{a}{2} \;.$$

For $\lambda > 0$ sætter vi $g_\lambda = f-\lambda g$, og dermed har vi

$$\operatorname{Re}(z\, Vg_\lambda(x)) = \operatorname{Re}(z\, Vf(x)) - \operatorname{Re}(z\lambda\, Vg(x))$$

$$\leqq \frac{1+a}{2} + \lambda\|Vg\| \quad \text{for} \quad (x,z) \notin \omega \;.$$

Endvidere har vi af $a = \|Vf\| \leqq \|Vg_\lambda\| + \|\lambda Vg\|$ at

$$\|Vg_\lambda\| \geqq a - \lambda \|Vg\| \ .$$

For et fast valgt $\lambda > 0$ med egenskaben

$$a-\lambda \|Vg\| > \frac{1+a}{2} + \lambda \|Vg\| \ ,$$

altså så $\lambda \|Vg\| < a-1$, $(a > 1)$ gælder at

$$(x,z) \mapsto \mathrm{Re}[z \, Vg_\lambda(x)]$$

må antage sit maksimum på ω . Der findes altså $(x_\lambda, z_\lambda) \in \omega$ så $((V,D(V)) \in SCMM)$

$$\mathrm{Re}(z_\lambda \, Vg_\lambda(x_\lambda)) = \|Vg_\lambda\| \quad \text{og} \quad \mathrm{Re}(z_\lambda g_\lambda(x_\lambda)) \geqq 0 \ ;$$

idet $\omega \cap M_f = \emptyset$ har vi $\mathrm{Re}(z_\lambda f(x_\lambda)) \leqq 0$, men på den anden side gælder

$$\mathrm{Re}(z_\lambda f(x_\lambda)) = \mathrm{Re}(z_\lambda \lambda g(x_\lambda) + z_\lambda g_\lambda(x_\lambda)) \geqq \mathrm{Re}(\lambda z_\lambda g(x_\lambda))$$

$$\geqq \lambda(\mathrm{Re}(z_\lambda Vf(x_\lambda)) - \tfrac{a}{2}) \geqq \frac{\lambda(a+1)}{2} - \frac{\lambda a}{2} = \frac{\lambda}{2} > 0 \ ,$$

hvilket giver den søgte modstrid. ▮ .

8.14. Lemma. Lad $(V,D(V))$ være en tæt defineret co-dissipativ operator på E og lad φ være en ikke-negativ kontinuert funktion på X . Operatoren $(V_\varphi, D(V_\varphi))$ på E med

$$D(V_\varphi) = \{g \in E \mid \varphi g \in D(V)\}$$

$$V_\varphi g = V(\varphi g) \quad \text{for} \quad g \in D(V_\varphi) \ ,$$

er co-dissipativ.

<u>Bevis</u>. Vi skal se at $(V_\varphi, D(V_\varphi)) \in$ FPMM . Lad $g \in D(V_\varphi)$ og antag at

$$\operatorname{Re}[z\, V_\varphi g(x)] = \operatorname{Re}[z\, V(\varphi g)(x)] \leqq 1 \quad \text{på} \quad M_g \,. \qquad (*)$$

Nu gælder

$$M_{\varphi g} = \{(x,z) \in X \times U \mid \operatorname{Re}(z(\varphi g)(x)) > 0\} \subseteqq M_g \,,$$

og da $(V,D(V)) \in$ FPMM kan vi derfor slutte af $(*)$ at $\| V_\varphi(g) \| = \| V(\varphi g) \| \leqq 1$. ∎ .

8.15. <u>Øvelse.</u> Lad $(A,D(A))$ være en dissipativ operator på E og lad φ være en ikke-negativ kontinuert funktion på X . Operatoren $({}_\varphi A, D({}_\varphi A))$ på E med

$$D({}_\varphi A) = \{g \in D(A) \mid \varphi(Ag) \in E\}$$

$${}_\varphi Ag = \varphi(Ag)$$

er dissipativ (idet $({}_\varphi A, D({}_\varphi A)) \in$ SPMM) .

Følgende generelle version af et berømt resultat af G.A. Hunt skyldes F. Hirsch.

8.16. <u>Sætning</u>. Lad $(V,D(V))$ være en co-dissipativ operator på E og antag at $C_c(X) \subseteqq D(V)$. Så er $(V,D(V))$ præ-afsluttet og afslutningen af $(V,D(V))$ er co-frembringer for en kontraktionsresolvent af type-L_0 på E .

<u>Bevis</u>. Ifølge Korollar 7.25 skal vi blot vise at der findes et $\lambda_0 > 0$ så $(I+\lambda_0 V)$ har tæt billedrum, hvilket specielt er opfyldt hvis

$$\overline{(I+V)(C_c(X))} = E . \qquad (**)$$

Lad μ være et begrænset Radon Mål på X så

$$\int (I+V)g \, d\mu = 0 \quad \text{for} \quad g \in C_c(X) .$$

Vi skal indse at $\mu = 0$, hvilket viser (**) .
For vilkårligt $\varphi \in C_c^+(X)$ med $\varphi \leqq 1$ er operatoren $(V_\varphi, D(V_\varphi))$ overalt defineret $(C_c(X) \subseteq D(V))$ og co-dissipativ ifølge Lemma 8.14, og derfor co-frembringer for en kontraktionsresolvent af type-L_0 på E , ifølge Korollar 7.24. Specielt gælder altså

$$(I+V_\varphi)(E) = E ,$$

jævnfør Sætning 7.21 og Lemma 7.20.
For hvert $g \in E$ findes altså $f_\varphi \in E$ så

$$g = f_\varphi + V_\varphi(f_\varphi) ,$$

og da V_φ er co-dissipativ har vi

$$\| f_\varphi \| \leqq \| f_\varphi + V_\varphi f_\varphi \| + \| V_\varphi f_\varphi \| \leqq 2 \| g \|$$

Endvidere har vi

$$\int g d\mu = \int (f_\varphi + V_\varphi f_\varphi) d\mu$$

$$= \int (\varphi f_\varphi + (1-\varphi) f_\varphi + V(\varphi f_\varphi)) d\mu = \int (1-\varphi) f_\varphi \, d\mu$$

hvoraf

$$\left| \int g \, d\mu \right| \leqq \| f_\varphi \| \int (1-\varphi) \, d|\mu| \leqq 2 \| g \| \int (1-\varphi) d|\mu| ,$$

og idet højresiden kan gøres vilkårligt lille $(\geqq 0)$ for passende valgt $\varphi \in C_c^+(X)$ med $\varphi \leqq 1$, gælder

$$\int g d\mu = 0 \quad \text{for} \quad g \in E \ ,$$

altså er $\mu = 0$, hvilket viser (**) . ‖ .